



# **Etude de la couverture de réassurance du pool catastrophe du Bureau Commun des Assurances Collectives (BCAC)**

Mémoire d'actuariat présenté pour l'obtention du

**Master professionnel Sciences de gestion, mention finances de marché  
Spécialité Actuariat du CNAM**

**Et l'admission à l'Institut des Actuaire**

**Mémoire soutenu le 15 Mars 2017**

**par M. Julien Messias**

Caractère confidentiel : oui

**Jury :**

Président : Michel FROMENTEAU

Membres : Roberto WOLFRUM  
Laurence ESLOUS  
Gwenaël BILLIOTTE  
Vincent RUOL  
François WEISS

## RESUME

Le risque Catastrophe (CAT) est traditionnellement rapporté à l'assurance dommage, l'assurance de personnes n'en représentant, en termes de primes, qu'une part marginale.

Ainsi, les budgets de Recherche et Développement (R&D) des principaux assureurs et réassureurs ont été et sont majoritairement dirigés vers cette catégorie prépondérante, laissant aux opérateurs spécialistes de l'assurance de personnes le soin d'utiliser, réutiliser, voire tenter d'adapter le modèle de Paul Strickler remontant à 1960.

Le BCAC est un acteur majeur du risque CAT en assurance de personnes sur le marché français. Nous proposons à travers ce travail une nouvelle approche de valorisation, stochastique (et non plus déterministe) par l'utilisation de simulations de Monte-Carlo. Les spécificités du contrat BCAC sont prises en compte et les tests de sensibilité sont rassurants quant à la robustesse du modèle.

Il en ressort que globalement, les tarifs du marché valident la cohérence de notre modélisation (et vice-versa), même si les principales divergences interviennent dans la valorisation relative entre les tranches basses et les tranches hautes. Le prix de celles-ci est tiré à la hausse par l'effet plancher (« *floor* ») du coût de la capacité mise à disposition (et donc du capital immobilisé) qui ne peut être nul, la probabilité d'impact n'étant pas strictement égal à 0, même si statistiquement, les simulations plaident pour certaines tranches, pour ce niveau de tarif.

Nous proposons finalement des pistes d'optimisation, en fonction du tarif, mais aussi en fonction du degré de couverture recherché par les membres du Pool.

Mots-Clés : Risque Catastrophe, Réassurance, Pool, Théorie des Valeurs Extrêmes, Assurance de Personnes

## ABSTRACT

The CAT risk is traditionally known as a P&C (Property & Casualty) business, Life insurance counting for a very small part of the whole premium amount.

Thus, R&D budgets of the main insurers and reinsurers were and are still oriented towards this latter category, letting the Life actuaries struggling with using, re-using and trying to adapt 1960's Paul Strickler's model.

The BCAC is a major player of the CAT risk in French Life insurance. We suggest through this paper a new valuation approach, stochastic (and no longer deterministic) through the use of Monte-Carlo simulations. The BCAC contract specificities are taken into account and the sensitivity tests are reassuring about the model robustness.

Roughly, the market prices are in line with ours, validating our model's consistency (and vice-versa), even though the main divergences occur in the relative pricing between the lowest and the highest tranches. The price of these latter is pulled up due to the floor effect of the cost of the capacity provided by the reinsurer (and thus the capital reward). This cost cannot be null, the impact probability being different from 0, even if statistically, simulations show that it should be the price.

At the end, we provide some advises in order to improve the global cost of the reinsurance structure, and the amount of capital set aside by the members of the Pool.

Keywords : CAT risk, Reinsurance, Pool, Extreme Value Theory, Life Insurance

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Remerciements                                                                                                   | 6  |
| Introduction                                                                                                    | 7  |
| I. Identification et cartographie des risques événements CAT – Généralités                                      | 9  |
| I.1. Qu'est qu'un risque événement Catastrophe : définition(s) ?                                                | 10 |
| I.2. Classement des événements par origine                                                                      | 11 |
| I.2.1. Catastrophes naturelles – CAT NAT                                                                        | 12 |
| I.2.2. Catastrophes « <i>man-made</i> » : industrielles, terrorisme                                             | 15 |
| I.2.3. Catastrophes santé : pandémie                                                                            | 16 |
| II. Les modèles d'évaluation du risque Catastrophe couramment utilisés en (ré)assurance-vie                     | 19 |
| II.1. Le modèle de Strickler                                                                                    | 20 |
| II.1.1. Présentation du modèle                                                                                  | 20 |
| II.1.2. Tarification d'un contrat XL CAT                                                                        | 22 |
| II.1.3. Sensibilité du modèle                                                                                   | 25 |
| II.2. Le modèle d'Ekhedén                                                                                       | 31 |
| II.2.1. Estimation du nombre $K$ de catastrophes pouvant intervenir durant la période                           | 31 |
| II.2.2. Estimation du nombre de personnes $X_k$ touchées par une catastrophe                                    | 32 |
| II.2.3. Estimation du nombre $Y_k$ de demandes d'indemnisation découlant du nombre $X_k$ de personnes touchées  | 35 |
| II.2.4. Evaluation du montant $Z_k$ de la demande d'indemnisation $Y_k$                                         | 39 |
| II.2.5. Evaluation du coût annuel total de l'ensemble des $K$ catastrophes                                      | 40 |
| II.3. Points d'exploration                                                                                      | 40 |
| II.3.1. Distribution pour le nombre de personnes $X_k$ touchées par une catastrophe: Zêta vs GPD                | 40 |
| II.3.2. Autres axes                                                                                             | 44 |
| III. Application au portefeuille du BCAC                                                                        | 45 |
| III.1. Analyse du portefeuille du BCAC                                                                          | 46 |
| III.1.1. Mesure de l'exposition du pool aux Revenus Médians Bruts annuels des Ménages par Unité de Consommation | 47 |
| III.1.2. Distributions testées                                                                                  | 49 |
| III.2. Fonctionnement de la réassurance au BCAC                                                                 | 56 |
| III.3. Définition du Pool : risques couverts, spécificités et structure actuelle du traité de réassurance       | 58 |
| IV. Tarification de la couverture de réassurance CAT                                                            | 65 |
| IV.1. Les possibilités traditionnelles de couverture                                                            | 66 |
| IV.2. Pratiques de tarification                                                                                 | 66 |
| IV.2.1. Le tarif, lié à la capacité des réassureurs?                                                            | 67 |
| IV.2.2. Des tarifs très cycliques                                                                               | 68 |
| IV.3. Application pratique sur le pool BCAC                                                                     | 69 |
| IV.3.1. La base de données                                                                                      | 70 |
| IV.3.2. Calibration des paramètres                                                                              | 72 |

|                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| IV.3.3. Nouvelle base de modélisation par Monte-Carlo : les étapes                  | 73  |
| IV.3.4. Comparaison et analyse des résultats. Analyse de sensibilité                | 97  |
| IV.3.5. Structure « <i>TopTop</i> »                                                 | 140 |
| IV.3.6. Le Pool Facultatif                                                          | 142 |
| IV.3.7. Le Coût en capital pour le réassureur : un <i>floor</i> implicite ?         | 143 |
| IV.3.8. Intérêt de la mutualisation de la couverture de réassurance au sein du Pool | 144 |
| IV.3.9. Risque de défaut d'un assureur membre du Pool                               | 151 |
| IV.3.10. Une approche financière de vérification de cohérence                       | 152 |
| IV.3.11. Quelques pistes d'optimisation                                             | 155 |
| Conclusion                                                                          | 159 |
| Bibliographie                                                                       | 161 |
| Liste des figures                                                                   | 163 |
| Liste des tables                                                                    | 167 |
| Annexes                                                                             | 173 |

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Isabelle Dartiguelongue, directrice du BCAC pour m'avoir permis de préparer ce mémoire ainsi que Medhi Himeur, *Client Partner* chez PartnerRe pour son aide. Je remercie tout particulièrement mon tuteur professionnel, Roberto Wolfrum pour ses conseils avisés et pour m'avoir laissé une grande liberté dans mes recherches. Mes pensées vont également à Mickael Sall, Anne Liu et à l'ensemble des équipes du BCAC pour leur accueil et leur aide.

Je remercie également Bertrand Munier, Professeur émérite, pour son éclairage précieux aux prémices de ce travail, Elena Di Bernardino, Maître de Conférences en Mathématiques Appliquées au CNAM, pour m'avoir fait découvrir avec finesse les joies de la Théorie des Valeurs Extrêmes, ainsi que Pierre Allegret, Contrôleur des Assurances à l'ACPR, pour ses éclairages sur Solvabilité 2.

Les cours du soir du CNAM m'auront également permis de faire la rencontre de Laurent Jaffrès, avec qui je me suis lié d'amitié et dont l'aide m'aura été précieuse.

Mes rencontres avec Nadia Lamari Mfitih de RGA, Philippe Virolle de AON Benfield, Emmanuel Dubreuil et Marc Berger de Guy Carpenter ont contribué à l'élaboration de ce travail.

J'éprouve une gratitude sincère envers Ola Hössjer, professeur de Mathématiques Statistiques de l'Université de Stockholm, pour ses conseils avisés et sa disponibilité, et à M. Christian Robert, de l'Institut de Sciences Financières et d'Assurance pour son aide.

Je suis reconnaissant à ma famille, et en premier lieu à mes parents et à mon frère Nicolas, si patients dans mon absence, à mes amis, à mes collègues et associés et à ceux qui m'ont soutenu dans ce travail aussi passionnant que prenant, pour avoir supporté mon emploi du temps durant ces longs mois et années.

Je remercie ma moitié Roomi pour son soutien et son aide au quotidien.

Enfin, je n'aurais pu réaliser ce travail sans la confiance que m'a accordée Michel Fromenteau, professeur titulaire de la chaire d'Actuariat du CNAM.

## INTRODUCTION

Le BCAC (Bureau Commun des Assurances Collectives) est un Groupement d'Intérêt Economique (GIE) dont les membres sont des assureurs membres de la Fédération Française des Compagnies d'Assurance (FFSA). Ils sont au nombre de 35 au 30 Juin 2013. La vocation du GIE BCAC depuis sa création en 1938 par les assureurs a toujours été double : gérer les contrats de la branche et répondre aux problèmes juridico-techniques posés par les opérations d'assurance de groupe de personnes au sens de la définition de l'article L141-1 du Code des Assurances\*. En effet, jusqu'à une période récente (Loi Evin de 1990), la littérature réglementaire en matière d'assurance de groupe n'était pas touffue... Les grands opérateurs de la place, à l'époque, avaient donc décidé de créer un lieu, sorte de terrain neutre, où ils pouvaient évoquer en toute liberté les difficultés qu'ils rencontraient, soit avec les ministères, soit avec les clients et tribunaux, soit encore avec un autre assureur concurrent.

*\* « Est un contrat d'assurance de groupe le contrat souscrit par une personne morale ou un chef d'entreprise en vue de l'adhésion d'un ensemble de personnes répondant à des conditions définies au contrat, pour la couverture des risques dépendant de la durée de la vie humaine, des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne ou liés à la maternité, des risques d'incapacité de travail ou d'invalidité ou du risque de chômage. Les adhérents doivent avoir un lien de même nature avec le souscripteur »*

Les missions du département technique du BCAC sont multiples :

➤ Actuariat classique :

✓ Etablit les comptes de résultats de ces régimes professionnels de la branche Assurances. Ceci comprend l'ensemble des calculs classiques d'actuariat des différentes provisions mais aussi l'établissement des comptes de résultats et des comptes de trésorerie.

✓ Etablit les comptes prévisionnels de ces régimes.

➤ La profession a confié la gestion de certains "Pools" au BCAC. Celle-ci se fait par le secteur études.

✓ Pool catastrophe décès : mutualisation et couverture de tous les contrats collectifs en assurance de personnes en France, vendus par nos adhérents.

✓ Pool dépendance : contrat type dépendance diffusé par les caisses de retraite et co-réassurés par les assureurs.

✓ Pool AERAS (s'Assurer et Emprunter avec un Risque Aggravé de Santé) : pool des risques très aggravés mis en place après la Convention BELORGEY (2002) et AERAS (2007).

➤ Etudes actuarielles pour la profession ponctuelles et récurrentes.

➤ Participation auprès de la FFSA dans la préparation des commissions paritaires retraite & prévoyance.

Notre champ d'action se concentre sur l'un des Pools de mutualisation : le Pool catastrophe.

Ce pool mutualise les contrats collectifs (risques de personnes) pour les risques décès et invalidité des plus grands opérateurs de l'assurance en France. L'étude de l'exposition des acteurs aux risques extrêmes s'avère alors d'une nécessité essentielle.

**Aujourd'hui, le risque catastrophe (dénommé CAT dans la suite de l'exposé) est très difficile à valoriser en assurance de personnes. En effet, la tarification est plus liée à une problématique de capacité des réassureurs qu'elle n'est issue d'un modèle. Ainsi, les prix varient selon l'offre des réassureurs et leur santé financière. Il s'agit d'un véritable problème pour les appels d'offre d'acteurs importants de ce marché comme le BCAC. L'objet de ce mémoire est donc, à travers l'exemple du BCAC, d'obtenir un prix de la structure via un modèle, reflet d'une logique actuarielle et non au travers d'un prix d'équilibre de marché.**

Dans un premier temps, nous exposerons une cartographie des risques catastrophes au niveau global, sous un angle indépendant de la segmentation entre l'assurance de biens et l'assurance de personnes.

Dans un deuxième volet, nous présenterons les modèles actuellement utilisés en (ré)assurance vie et testerons les sensibilités de ceux-ci aux différents paramètres.

Puis, dans un troisième opus, nous analyserons l'exposition actuelle du BCAC. Nous nous intéresserons à des distinctions d'ordre professionnel (différentes CSP (Catégories Socio Professionnelles), salariés, actifs), ou à des caractérisations en termes de répartition géographique. Il est intéressant de souligner également les spécificités – en termes de risques - du portefeuille du BCAC par rapport à la population générale. Ensuite, nous définirons et présenterons les caractéristiques du fonctionnement du Pool du BCAC, et les risques couverts par le traité de réassurance.

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, nous nous concentrerons sur le développement d'une application pratique au cours de laquelle nous tariferons la prime de réassurance en fonction de la cartographie des risques couverts par le traité du BCAC, et tenterons de réconcilier l'approche « modélisation » et l'approche prix de marché : il s'agit de présenter un modèle alternatif au modèle traditionnel de Strickler. S'ensuivra une analyse des tarifs obtenus, de leur sensibilité, ainsi que la création d'un outil de tarification, pour conclure sur des pistes d'optimisation de la couverture.

## **I : IDENTIFICATION ET CARTOGRAPHIE DES RISQUES EVENEMENTS CAT - GENERALITES**

Le risque catastrophe (CAT) représente 6 à 7% du marché mondial de la Réassurance, ayant engendré en 2011 un coût de 50Mds€ pour les Réassureurs.<sup>1</sup>

Ce risque occupe une part croissante dans les résultats des réassureurs, et y ajoute une volatilité très importante. En effet, confrontés à une aggravation des risques, au désengagement des Etats, et à la mondialisation, ceux-ci doivent repenser leur approche des risques CAT.

Si les risques CAT concernent avant tout les assurances de biens et de responsabilités, ils impactent également par leur ampleur les assurances de personnes, d'où la nécessité d'établir une définition précise d'un événement CAT.

### 1.1. Qu'est-ce qu'un risque événement Catastrophe : définition(s) ?

Il s'agit d'un accident grave d'origine **naturelle ou technologique** dont les effets prévisibles dépassent les capacités d'anticipation et de réaction des instances directement concernées.

Un événement CAT est caractérisable par deux éléments :

- FAIBLE FREQUENCE : l'Homme a tendance à ignorer ou sous-estimer les catastrophes d'autant plus facilement qu'elles sont peu fréquentes, et que sa mémoire est courte
- GRAVITE IMPORTANTE : les conséquences humaines et matérielles sont lourdes mais difficiles à estimer a priori

La définition d'un événement CAT est très précise et restrictive :

- Causes : accident, catastrophe naturelle, santé
- Conséquences : décès, maladie, invalidité d'un nombre **minimal** d'assurés (en général au moins 2)
- Restrictions : localisation dans le temps et dans l'espace

Il existe ainsi une grande diversité de la magnitude des risques couverts par un contrat CAT.

N'oublions pas l'apparition de nouveaux risques non traditionnels tels que le terrorisme ou les pandémies. Ces risques rentrent-ils dans le cadre de définition d'un risque « événement » ?

La définition d'événement catastrophe par le BCAC est la suivante :

*« L'événement couvert est causé directement par un seul et même accident entraînant une pluralité de sinistres corporels résultant des risques couverts, pour les contrats d'assurances réassurés, conformément aux dispositions mentionnées aux conditions particulières. L'accident désigne toute atteinte corporelle provenant de l'action soudaine et imprévisible d'une cause extérieure, étrangère à la volonté des assurés. »*

*Dans le cas de catastrophes naturelles (par ex. tremblement de terre, tempête de vent, grêle, tornade, inondation) la durée de l'événement est limitée à 72 heures consécutives. La cédante peut choisir la date et l'heure à laquelle toute période de 72 heures consécutives visée commence, à condition qu'aucune période visée ne commence avant la date et l'heure de survenance de la première demande d'indemnisation individuelle causée par la catastrophe couverte au titre du présent traité et à condition*

---

<sup>1</sup> VILNET F. (2012) : Interview à L'Actuariel

*qu'il n'y ait pas de recoupement de ces périodes de 72 heures consécutives. Les sinistres résultant de l'événement ainsi défini s'étendent à ceux qui surviennent dans les 12 mois après l'accident qui les a causés. »*

Les sommes sous risques du Pool BCAC correspondent aux montants estimés liés aux garanties des risques Décès, Perte Total et Irréversible d'Autonomie (PTIA) et Invalidité Permanente et Totale (IPT), dans le cadre de contrats collectifs. L'indemnisation se fait sur la base de montants forfaitaires stipulés préalablement. Ainsi, dans le cas d'un accident aérien, les sommes sous risques liées à l'assurance du transporteur ne doivent pas être intégrées : aucun aléa juridique lié à une éventuelle responsabilité exogène ne doit être pris en compte dans notre travail.

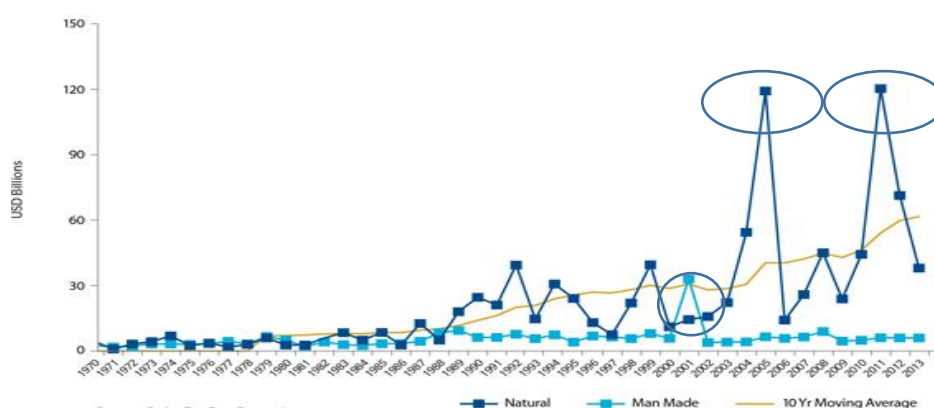
Enfin, il peut arriver qu'un assuré possède deux contrats chez deux assureurs différents. En pratique, le sinistre compte pour chaque assureur indépendamment. Mais cette situation est exceptionnelle. Nous n'en tiendrons pas compte dans notre développement.

## 1.2. Classement des événements par origine

L'objectif est de parvenir à faire correspondre à un type d'événement une évaluation précise des conséquences, en termes de sinistralité pour chacun des risques couverts : Décès, Perte Totale et Irréversible d'Autonomie (PTIA) et Invalidité Permanente et Totale (IPT).

Nous reprenons la classification du QIS5 de Solvabilité 2. Trois types de catastrophes<sup>2</sup>, aux origines distinctes peuvent y être distingués : les catastrophes naturelles, les catastrophes « *Man Made* » et les catastrophes Santé.

Figure 1.1 : Répartition du coût des Sinistres Catastrophes dans le monde (1970 – 2013)

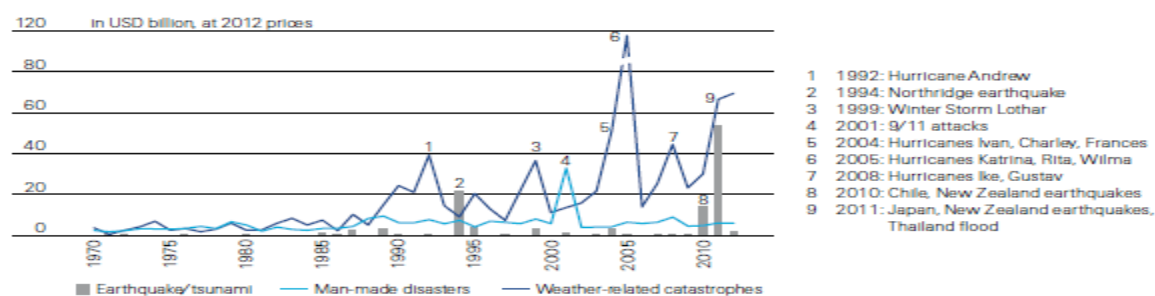


Source : Swiss Re, Guy Carpenter

Le pic sur les événements « *Man Made* » correspond aux attentats du 11 septembre 2001. Les pics sur les événements « *Natural* » correspondent respectivement à l'ouragan Katrina en 2005 et aux séismes au Japon et en Nouvelle-Zélande en 2011. Il faut noter que ce graphique prend en compte les montants payés par les réassureurs au titre des Sinistres Catastrophes : ainsi il existe un fort biais dû à la pénétration de l'assurance dans les zones touchées, comme le montre le graphique suivant.

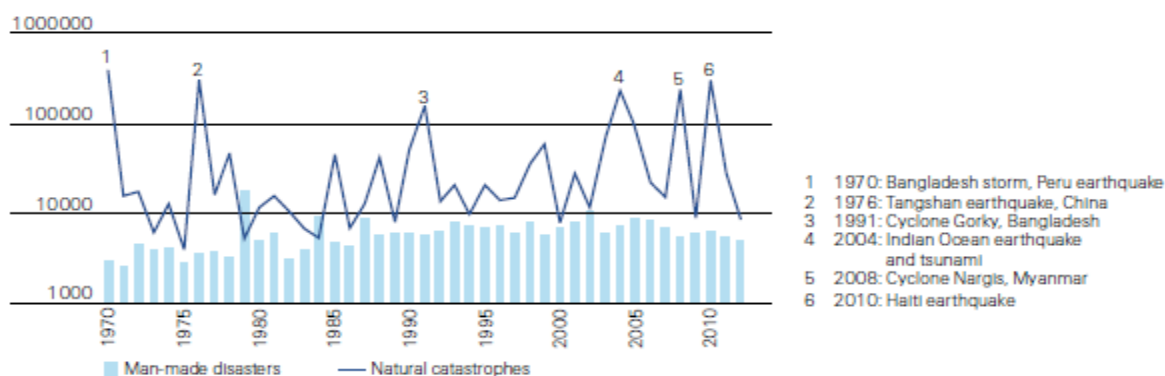
<sup>2</sup> ATLAS MAGAZINE (2012) : La réassurance des Catastrophes Naturelles

Figure 1.2 : Pertes assurées (1970-2012)



Source : Swiss Re, Sigma No 2/2013

Figure 1.3 : Nombres de victimes (1970-2012)



Source : Swiss Re, Sigma No 2/2013

### I.2.1. Catastrophes Naturelles CAT NAT

« Les catastrophes climatiques ont entraîné la mort de 600.000 personnes en vingt ans »<sup>3</sup>

Les catastrophes naturelles se sont multipliées ces dernières décennies et peuvent avoir des conséquences économiques et sociales majeures. La tempête Xynthia en 2010 en France a entraîné une prise de conscience des pouvoirs publics sur ce risque et engendré la refondation du régime d'indemnisation des CAT NAT. Au Royaume-Uni, les autorités ont créé un pool dédié au risque d'inondation baptisé Flood Re. Ce type d'initiative a tendance à se multiplier : un pool ou une autorité de co-assurance/co-réassurance est mis en place afin de gérer un risque naturel unique.

Néanmoins, il apparaît difficile d'évaluer le risque de CAT NAT en omettant les éléments suivants :

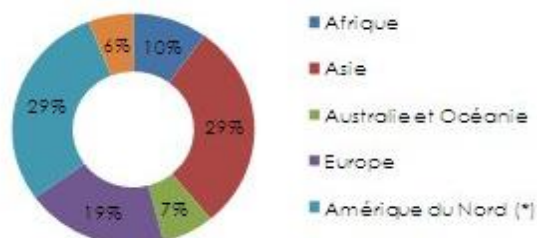
- Les événements naturels sont potentiellement plus liés entre eux et il existe une interaction croissante entre les CAT NAT et les catastrophes industrielles. L'exemple de Fukushima le montre : à l'origine, il s'agit d'une catastrophe naturelle (tsunami) qui engendre une catastrophe nucléaire.
- Les industries à forte valeur ajoutée n'hésitent pas à s'installer dans des zones à risques (Japon, ou Faille de San Andreas en Californie)

<sup>3</sup> ONU – Bureau des Nations-Unies pour la réduction des risques de catastrophes (UNISDR) – 23 novembre 2015

- Forte augmentation de la densité démographique

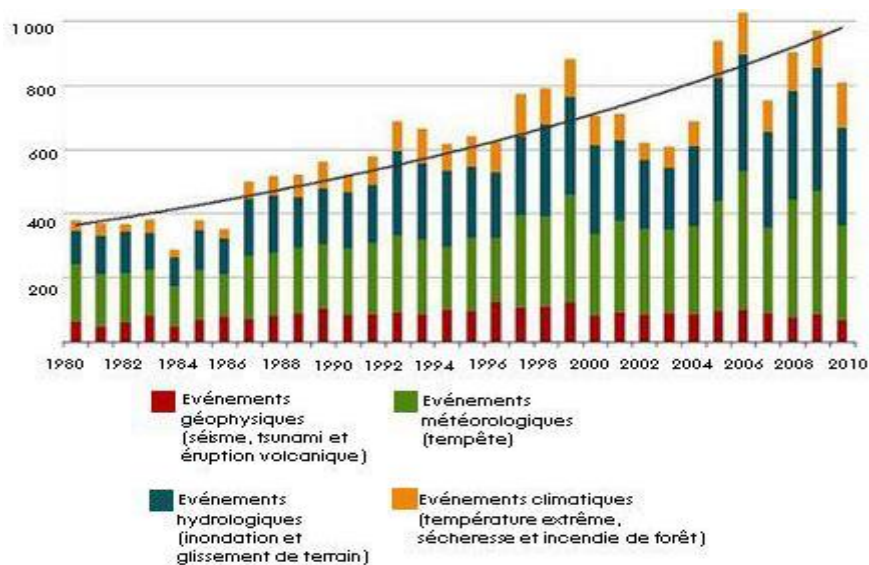
Ces éléments, ajoutés au fait que le taux de pénétration de l'assurance dans les zones à risque augmente (effet de la mondialisation et de la standardisation du monde de vie occidental) explique une augmentation significative de l'ampleur des sinistres depuis 30 ans.

Figure 1.4 : Répartition des 820 événements naturels définis comme catastrophiques survenus en 2011



Source : NatCatSERVICE, Munich Re

Figure 1.5 : Répartition par type d'événement



Source : NatCatSERVICE, Munich Re

Il existe une exception française. Le Code des Assurances français présente un régime légal pour les catastrophes naturelles : Articles L125-1 à 125-6 et Articles A125-1 à 125-3. Par la loi du 2 février 1995, la France a mis en place un Plan de Prévention des Risques naturels (PPR), qui constitue un outil essentiel de prévention des risques naturels, via la classification du territoire selon trois zones de risques. Deux structures dédiées ont été mises en place : la Mission Risques Naturels (MRN) et l'Observatoire National des Risques Naturels (ONRN) dont l'objectif est de favoriser une meilleure compréhension des risques naturels. Nous remarquons cependant que si la législation s'intéresse particulièrement au cas de l'assurance dommage, elle reste muette sur la prise en compte des catastrophes naturelles en assurance de personnes. Un éclairage s'impose.

**Table 1.1 : Dégâts humains (en nombre de victimes) des 41 catastrophes naturelles les plus meurtrières de la période 1970 – 2012**

| Victims <sup>29</sup> | Insured loss <sup>30</sup><br>(in USD m,<br>indexed to 2012) | Date<br>(start) | Event                                                    | Country                           |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 300 000               | –                                                            | 14.11.1970      | Storm and flood catastrophe                              | Bangladesh, Bay of Bengal         |
| 255 000               | –                                                            | 28.07.1976      | Earthquake (M 7.5)                                       | China                             |
| 222 570               | 105                                                          | 12.01.2010      | Earthquake (M <sub>w</sub> 7.0)                          | Haiti                             |
| 220 000               | 2 431                                                        | 26.12.2004      | Earthquake (M <sub>w</sub> 9), tsunami in Indian Ocean   | Indonesia, Thailand et al         |
| 138 300               | –                                                            | 02.05.2008      | Tropical cyclone Nargis; Irrawaddy Delta floods          | Myanmar (Burma), Bay of Bengal    |
| 138 000               | 3                                                            | 29.04.1991      | Tropical cyclone Gorky                                   | Bangladesh                        |
| 87 449                | 391                                                          | 12.05.2008      | Earthquake (7.9) in Sichuan, aftershocks                 | China                             |
| 73 300                | –                                                            | 08.10.2005      | Earthquake (M <sub>w</sub> 7.6); aftershocks, landslides | Pakistan, India, Afghanistan      |
| 66 000                | –                                                            | 31.05.1970      | Earthquake (M 7.7); rock slides                          | Peru                              |
| 55 630                | –                                                            | 15.06.2010      | Heat wave in Russia                                      | Russia                            |
| 40 000                | 202                                                          | 21.06.1990      | Earthquake (M 7.7); landslides                           | Iran                              |
| 35 000                | 1 574                                                        | 01.06.2003      | Heat wave and drought in Europe                          | France, Italy, Germany et al      |
| 26 271                | –                                                            | 26.12.2003      | Earthquake (M 6.5) destroys 85% of Bam                   | Iran                              |
| 25 000                | –                                                            | 07.12.1988      | Earthquake (M 6.9)                                       | Armenia, ex-USSR                  |
| 25 000                | –                                                            | 16.09.1978      | Earthquake (M 7.7) in Tabas                              | Iran                              |
| 23 000                | –                                                            | 13.11.1985      | Volcanic eruption on Nevado del Ruiz                     | Colombia                          |
| 22 084                | 303                                                          | 04.02.1976      | Earthquake (M 7.5)                                       | Guatemala                         |
| 19 737                | 130                                                          | 26.01.2001      | Earthquake (M <sub>w</sub> 7.6) in Gujarat               | India, Pakistan, Nepal et al      |
| 19 184                | 35 735                                                       | 11.03.2011      | Earthquake (M <sub>w</sub> 9.0) triggers tsunami         | Japan                             |
| 19 118                | 1 378                                                        | 17.08.1999      | Earthquake (M <sub>s</sub> 7) in Izmit                   | Turkey                            |
| 15 000                | –                                                            | 11.08.1979      | Macchu dam bursts in Morvi                               | India                             |
| 15 000                | –                                                            | 01.09.1978      | Floods following monsoon rains in the North              | India, Bangladesh                 |
| 15 000                | 138                                                          | 29.10.1999      | Cyclone OGB devastates Orissa state                      | India, Bangladesh                 |
| 11 069                | –                                                            | 25.05.1985      | Tropical cyclone in Bay of Bengal                        | Bangladesh                        |
| 10 800                | –                                                            | 31.10.1971      | Floods in Bay of Bengal and Orissa state                 | India                             |
| 10 000                | 303                                                          | 12.12.1999      | Floods, mudflows, and landslides                         | Venezuela, Colombia               |
| 10 000                | –                                                            | 20.11.1977      | Tropical cyclone in Andhra Pradesh                       | India, Bay of Bengal              |
| 9 500                 | 687                                                          | 19.09.1985      | Earthquake (M 8.1)                                       | Mexico                            |
| 9 475                 | –                                                            | 30.09.1993      | Earthquake (M 6.4) in Maharashtra                        | India                             |
| 9 000                 | 704                                                          | 22.10.1998      | Hurricane Mitch in Central America                       | Honduras, Nicaragua et al         |
| 6 425                 | 3 724                                                        | 17.01.1995      | Great Hanshin earthquake (M 7.2) in Kobe                 | Japan                             |
| 6 304                 | –                                                            | 05.11.1991      | Typhoons Thelma and Uring                                | Philippines                       |
| 6 000                 | –                                                            | 02.12.1984      | Accident in chemical plant in Bhopal                     | India                             |
| 6 000                 | –                                                            | 01.06.1976      | Heat wave, drought                                       | France                            |
| 5 749                 | 46                                                           | 27.05.2006      | Earthquake (ML 6.3); Bantul almost destroyed             | Indonesia                         |
| 5 422                 | –                                                            | 26.06.1976      | Earthquake (M 7.1)                                       | Papua New Guinea, Indonesia et al |
| 5 374                 | –                                                            | 10.04.1972      | Earthquake (M 6.9) in Fars                               | Iran                              |
| 5 300                 | –                                                            | 28.12.1974      | Earthquake (M 6.3)                                       | Pakistan                          |
| 5 000                 | –                                                            | 30.06.1976      | Earthquake in West Irian                                 | Indonesia                         |
| 5 000                 | 1 354                                                        | 05.03.1987      | Earthquake: oil pipeline damaged                         | Ecuador                           |
| 5 000                 | 714                                                          | 23.12.1972      | Earthquake (M 6.3) in Managua                            | Nicaragua                         |

Source : SwissRe, Sigma No 2/2013

Nous pouvons effectuer une deuxième classification par type d'événement... :

**Table 1.2 : Classification des sinistres par type d'événement**

|                                  | Tremblements de terre | Cyclone, tempête, inondations | Vagues de chaleur |
|----------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-------------------|
| <b>Occurrence</b>                | 24                    | 11                            | 3                 |
| <b>Nombre de victimes (.000)</b> | 1 182.96              | 663.47                        | 96.63             |

3 événements ne sont pas intégrables dans une quelconque catégorie.

...puis par zone géographique, étant donné que la pénétration de l'assurance est beaucoup plus forte dans les pays développés :

Table 1.3 : Classification des sinistres par zone géographique

|                           | Pays développés (Europe, Am.N, Japon) | Pays en développement |
|---------------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| Occurrence                | 4                                     | 37                    |
| Nombre de victimes (.000) | 66.61                                 | 1 920.45              |

Les vagues de chaleur, à l'origine de la plupart des décès « catastrophes » recensés par SwissRe dans les pays développés, ne sont pas considérées par l'Etat français comme des catastrophes naturelles pour l'assurance de personnes. De plus, l'implication pour le portefeuille du BCAC est nulle, étant donné que ce dernier couvre une population d'actifs, alors que les principales victimes sont des individus d'âge supérieurs à 75 ans.

I.2.2. Catastrophes Humaines (Risque « *Man-Made* ») : les risques retenus vont de l'Incendie au Terrorisme

Ces types de catastrophe peuvent être volontaires (terrorisme en particulier) ou involontaires. Pour illustrer cette dernière catégorie, nous pouvons citer les catastrophes ferroviaires récentes de Lac Megantic au Canada (juillet 2013) et de Saint Jacques de Compostelle en Espagne (août 2013) qui ont respectivement entraîné le décès de 47 et 79 personnes ainsi que de nombreux blessés.

Elles englobent les accidents de transports comme précités mais aussi industriels, tels que l'explosion de l'usine AZF de Toulouse le 21 septembre 2001. Sont donc concernés également les zones SEVESO.

Les catastrophes d'origine humaine sont perçues différemment par la population : rien qu'une simple tentative d'action terroriste suscitera plus d'émotion que les 3000 personnes qui décèdent annuellement sur les routes de France. En effet, ce type de catastrophe intègre implicitement une notion de terreur.

L'évaluation du risque terroriste dépend<sup>4</sup>:

- Du type d'attaque :
  - Conventiennelle (explosif) : dommages matériels potentiels très importants dans un rayon assez restreint, dégâts mineurs dans un rayon très large. Dépend de la position de la source explosive, quantité, nature du produit et conditions météorologiques
  - Chimique (gaz) : dommages corporels très importants, matériels limités
  - Bactériologique (toxines biologiques, agents infectieux) : dommages corporels importants mais les agents bactériologiques survivent généralement peu de temps, avec des dommages matériels modérés. La décontamination peut entraîner un surcoût important
  - Nucléaire : peu probable, car elle nécessite une expertise très spécialisée, peu disponible, et de très importants moyens financiers et humains. La difficulté est qu'une attaque de ce type a pour conséquence des dommages matériels (contamination) largement supérieur à ce que le marché de l'assurance et réassurance peut absorber (>>centaines Mds€)
  - Radiologique (« bombe sale ») : il s'agit de l'attaque massive la plus vraisemblable. Le matériau de base est aisément disponible en pharmacie ou secteur agroalimentaire, aisément transportable, et nécessite une faible expertise. Les dommages matériels sont très importants. Ce risque est évalué comme le plus important par les experts.

<sup>4</sup> CCR – Caisse Centrale de Réassurance (2013) : Journées CAT

Nous devons également tenir compte de l'effet de souffle. Ainsi, une veille est indispensable autour de la cartographie des bâtiments, des vents et autres caractéristiques météorologiques afin de calibrer au plus fin les modèles utilisés.

Deux méthodes d'estimation des coûts existent:

- Nombre de sinistres + Coût de décontamination + Perte d'exploitation
- Cumul des valeurs assurées

### I.2.3. Catastrophes Santé (Pandémie) : 3 scenarii dont Grand Stade, Concentration, Pandémie<sup>5</sup>

Selon l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), une pandémie est une épidémie qui doit respecter les critères suivants : elle doit être une maladie infectieuse causée par un agent pathogène\* nouveau ou qui ne s'est pas manifesté depuis longtemps. L'agent en question touche les humains et entraîne des maladies. De plus, cet agent se propage facilement et de façon soutenue d'un être humain à un autre de telle sorte que la maladie infectieuse atteint un très grand nombre de personnes dans une zone géographique très étendue. Une maladie ne constitue pas une pandémie du seul fait qu'elle est répandue ou qu'elle entraîne la mort de plusieurs personnes. Elle doit également avoir un caractère infectieux.

*\*Un agent pathogène est un organisme ou micro-organisme pouvant provoquer des maladies d'origine parasitaires ou microbiennes. Plus précisément, le terme agent dans cette utilisation signifie : tout principe ou substance capable de produire un effet biologique et le terme pathogène dans sa généralité signifie : tout micro-organisme pouvant provoquer des maladies.*

*Un agent pathogène peut prendre la forme d'un virus, d'une bactérie, d'un champignon ou de mycoplasme. On retrouve souvent le terme d'un virus hautement pathogène ou d'une bactérie faiblement pathogène, cela est une indication sur leur puissance et leur gravité.*

Trois voies de transmission d'homme à homme existent : la voie aérienne, le contact rapproché avec une personne infectée et le contact avec des objets contaminés.

Les nouvelles maladies se développent (SRAS, H1N1, CORONAVIRUS, H7N9) et se diffusent aujourd'hui plus rapidement que par le passé. L'amélioration et la multiplication des moyens de transports et de communication en est une explication.

Tout d'abord, nous pouvons nous poser la question : le risque pandémique peut-il être considéré comme un risque CAT ?

Contrairement aux risques présentés précédemment, la société et les instances gouvernementales peuvent avoir une influence significative sur la survenance et la sévérité d'un événement pandémique.

- la *prévention* joue un rôle essentiel dans la diffusion d'information sur l'alimentation et l'hygiène de vie ou le dépistage précoce de maladies létales (cancer, accidents vasculaire-cérébraux, diabète...)
- la *préparation* à ce type d'événements paraît largement sous contrôle ; des mesures d'isolement ou d'accompagnement de toute pandémie sont d'ores et déjà prévues. Des expériences in vivo ont été réalisées à Hong-Kong et en Chine lors de la dernière épizootie du 1er trimestre 2006.
- la *coordination* des différents acteurs de la santé publique tant à l'échelle nationale qu'internationale a conduit à mettre en place au niveau de l'OMS un système de mesure du risque de pandémie.

---

<sup>5</sup> MANDHOUI K. (2010) : Analyse du Risque Catastrophe d'une Pandémie en Assurance Prévoyance par une Approche Epidémiologique. Mémoire ENSAE

Table 1.4 : Système d'alerte de l'OMS

| Phase | Severité                                                    | Description                                                                            |
|-------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | Peu de risques de cas humains                               | Phase Interpandémique<br>Nouveau virus dans la nature mais pas de cas humains recensés |
| 2     | Risque aggravé de cas humains                               |                                                                                        |
| 3     | Pas ou très peu de transmission d'homme à homme             | Alerte Pandémie activée<br>Le nouveau virus atteint l'homme                            |
| 4     | Preuve de l'augmentation de la transmission d'homme à homme |                                                                                        |
| 5     | Preuve d'une transmission d'homme à homme significative     |                                                                                        |
| 6     | Transmission rapide et soutenue d'homme à homme             | Pandémie                                                                               |

Source : World Health Organization (WHO)

· la « *contention* » de la diffusion de la pandémie, une fois déclarée ainsi que l'organisation des soins et de la décontamination sont fondamentaux.

Néanmoins, le portefeuille du BCAC présente quelques spécificités non-négligeables dans la prise en compte du risque de pandémie :

- il s'agit d'une agrégation des risques de plusieurs compagnies d'assurance
- chaque compagnie membre du BCAC peut se targuer d'avoir une vision et un besoin propres quant à la nécessité ou non de considérer la pandémie comme un risque CAT.
- les besoins de couverture sont potentiellement importants. Le marché de la mortalité est-il suffisamment développé pour absorber une telle transaction ?
- la population à couvrir est uniquement active, de part la définition du pool et uniforme.

Deux exemples de pandémies « modernes » sont significatifs à ce stade. Le plus marquant est l'épidémie de grippe de Hongkong de 1968. En deux mois, celle-ci fait 31 226 morts en France, sans distinction de classe d'âge, et près d'un million de victimes dans le monde. Il s'agit de la première pandémie à avoir bénéficié de l'évolution des transports rapides (avion, multiplications des voyages, des échanges internationaux) pour sa dissémination, et la première à avoir été surveillée par un réseau international. Ainsi, elle reste la base des travaux de modélisation sur les risques de pandémie.

Plus récemment, en 2005, le cas du virus H5N1 a suscité des craintes de pandémie. Ce virus a d'abord touché les animaux avant de toucher l'homme, sans que sa capacité d'infecter facilement l'être humain soit prouvée. De nombreux experts et organismes internationaux (ONU, OMS, FAO) ont été rapidement mobilisés, alertés par la virulence du virus. Selon la Banque Mondiale, un budget de 1.5Mds\$ serait nécessaire pour lutter contre la pandémie : achat de matériel (masques), médicaments antiviraux et effets de panique sur la population. Plusieurs experts de l'OMS estiment qu'« une pandémie grippale est inéluctable sans pouvoir en prévoir la date »<sup>6</sup>, et que le virus humanisé « devrait être circonscrit sous deux à quatre semaines sans quoi il serait impossible à maîtriser ». Les évaluations à l'échelle mondiale tablent sur une fourchette élargie de 10 à 100 millions de morts, alors que les autorités françaises anticipent entre 15% et 35% de la population nationale atteinte, 600 000 hospitalisations et autour de 120 000 décès en l'absence de traitement ou vaccin.

Signe d'une certaine préoccupation sur le sujet, il est intéressant de noter que le BCAC a consacré un dossier envers ses affiliés sur la grippe A en octobre 2009.

<sup>6</sup> D. Houssin, délégué interministériel à la santé, 17/10/2005

Le Virus d'Immunodéficience Humaine (VIH) est aujourd'hui considéré comme une pandémie à l'échelle du monde mais pas par l'assurance, ayant infecté plus de 40 millions de personnes en 25 ans, mais n'entre pas dans le cadre d'un événement catastrophe.

*Dans le présent développement, nous ne traiterons pas de l'aspect pandémie, étant donné que ce dernier nécessite un travail de fond à part entière, avec des modèles spécifiques, spécificités liées en particulier au caractère non statique de l'événement (diffusion). Nous nous en tiendrons donc uniquement à l'aspect Cat Nat et Man Made (industriel, transport, terroriste).*

## **II. LES MODELES D'EVALUATION DU RISQUE CATASTROPHE COURAMMENT UTILISES EN (RE)- ASSURANCE VIE**

Rappel : L'étymologie du mot modèle provient de l'italien *modello* qui signifie « une représentation simplifiée, et souvent idéale, de la réalité d'un phénomène permettant d'élaborer une théorie plus ou moins précise adhérent aux observations et de prévoir ce qu'il se passerait dans certaines conditions »<sup>7</sup>.

Il est à noter qu'une grille de lecture différente de celle présentée plus haut eût été de classer les risques par occurrence en isolant des risques n'ayant pas d'historique (risque météoritique par exemple) d'événements connus pour lesquels nous disposons d'historiques suffisants.

Pour cette dernière catégorie, nous disposons donc de bases de données, en termes d'occurrence, ou de sinistralité. Ces données sont à la base des calibrations de paramètres pour les modèles les plus couramment utilisés<sup>8</sup>.

## II.1. Le Modèle de Strickler

### II.1.1. Présentation du modèle

Développé dans les années 1960, il reste le modèle de référence de la tarification du risque CAT en réassurance vie. Il repose sur deux facteurs : la fréquence de l'événement catastrophique et la distribution des sommes à risques.

L'événement de référence est une catastrophe qui touche un nombre minimal d'assurés et dont le coût dépasse un certain montant déterminé contractuellement. Le modèle repose sur l'estimation du nombre de personnes touchées par une catastrophe et de l'engagement moyen par assuré.

#### II.1.1.1. Estimation du nombre de personnes touchées par une catastrophe

$$A(n) = a \cdot 100^{\frac{1}{\alpha}} \cdot n^{-\frac{1}{\xi}}$$

$A(n)$  : nombre de personnes décédées accidentellement par an dans une population d'un million, au cours d'un accident tuant  $n$  ou plus personnes. Pour  $n=1$ , nous retrouvons le taux normal de mortalité par accident, étant donné qu'il faut au moins un décès pour déclencher un sinistre

$a$  : taux de décès accidentel de la population étudiée (pour 10.000 personnes)

$\xi$  : En pratique,  $\xi$  est l'indice de forme de la distribution empirique des sinistres accidentels de la population étudiée. Cet indice de forme peut être estimé par plusieurs méthodes dont les plus courants sont l'estimateur de Pickands et l'estimateur de Hill. La Section II.2.2 présente les principales méthodes d'estimation. Strickler estime  $\xi=3$ .

Considérons la fonction  $H(n)$  représentant le nombre annuel d'accidents, pour un million de personnes impliquant exactement  $n$  victimes.

$$\begin{cases} H(n) = \frac{\text{nombre de victimes total dans des accidents impliquant } n \text{ tués}}{\text{nombre de victimes impliquées par accident}} = \frac{A(n) - A(n+1)}{n} \\ H(n) = 0 \quad \text{si } n \geq 1500 \end{cases}$$

<sup>7</sup> <https://fr.wiktionary.org/wiki/mod%C3%A8le>

<sup>8</sup> EKHEDEN E., HOSSJER O. (2012) : Pricing Catastrophe Risk in Life (Re)Insurance. *European Congress of Actuaries*

Il est à noter que la borne de 1500 décès maximum par événement est un choix discrétionnaire de Strickler.

Le nombre total d'accident dans une population d'un million d'habitants est ainsi le suivant :

$$\sum_{n=1}^{1499} H(n)$$

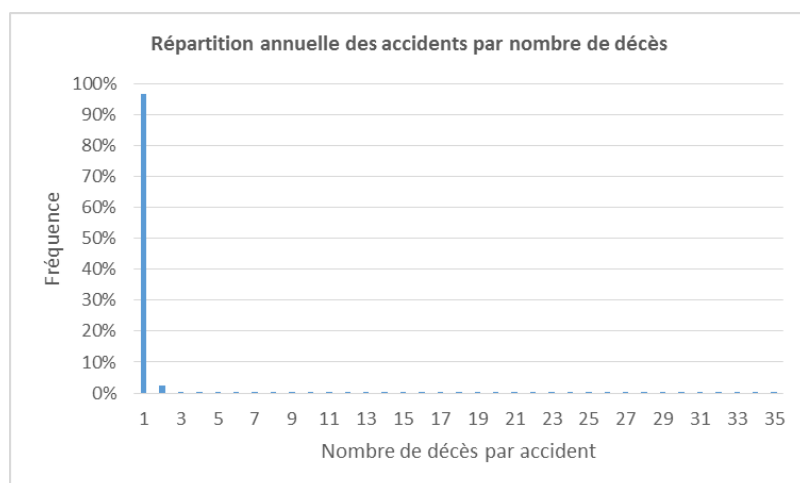
Ainsi :

$$h(n) = \frac{H(n)}{\sum_{n=1}^{1499} H(n)}$$

$h(n)$  est la probabilité conditionnelle d'avoir exactement  $n$  victimes sachant qu'un accident mortel ait eu lieu.

Ainsi d'après Strickler la répartition des accidents par nombre de décès sur un an est la suivante :

Figure 2.1 : Répartition annuelle des accidents par nombre de décès.  
Modèle de Strickler



Si nous reprenons la classification de E. Alm<sup>9</sup>, il faut définir 4 catégories de sinistres :

- « Jumbo » : strictement plus de 1.000 décès, Ces accidents représentent  $1.1 * 10^{-7}$  de la part des accidents soit 0.1% du total des décès accidents.
- « Large » : entre 101 et 1.000 décès, Ces accidents représentent  $5.9 * 10^{-6}$  de la part des accidents, soit 0.12% du total des décès accidents.
- « Medium » : entre 11 et 100 décès. Ces accidents représentent 0.02% de la part des accidents, soit 0.46% du total des décès accidents.
- « Mineur » : entre 3 et 10 décès. Ces accidents représentent 0.70% de la part des accidents, soit 2.53% du total des décès accidents d'après l'estimation de Strickler

Part des accidents entraînant exactement  $n$  décès par rapport au total des accidents :

$$part(A(n)) = \frac{A(n) - A(n+1)}{A(1)}$$

Part des accidents entraînant entre  $n$  et  $p$  décès (bornes incluses) par rapport au total des accidents :

$$part(A(n,p)) = \frac{A(n) - A(p+1)}{A(1)}$$

Ainsi, nous remarquons la concentration des fréquences sur les accidents concernant un ou deux décès. D'après ce modèle, près de 97% des victimes décèdent au cours d'un événement impliquant un ou deux morts.

<sup>9</sup> ALM E. (1990) : Catastrophes can also hit Life Reinsurance. *First – A Journal for Skandia International, A practical Guide to Reinsurance*

### II.1.1.2. Estimation de l'engagement moyen par tête

Le modèle suppose que la densité de la variable aléatoire (« somme sous risque »)  $z$  d'un assuré suit une loi exponentielle de moyenne  $\theta = 1$  :

$$p^{(1)}(z) = \theta \cdot e^{-\theta z}$$

Ainsi, pour  $n$  décès que l'on suppose indépendants, la densité de la somme sous risque totale suit une loi Gamma de paramètres  $n$  et  $\theta = 1$  dont la densité est décrite ci-dessous :

$$p^{(n)}(z) = p(z, n, \theta) = \frac{z^{n-1} e^{-\frac{z}{\theta}}}{\theta^n \Gamma(n)} \quad \text{avec } \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \quad (\text{fonction Gamma d'Euler})$$

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \end{cases}$$

Pour  $n=1$ , cela correspond à la loi exponentielle de paramètre 1.

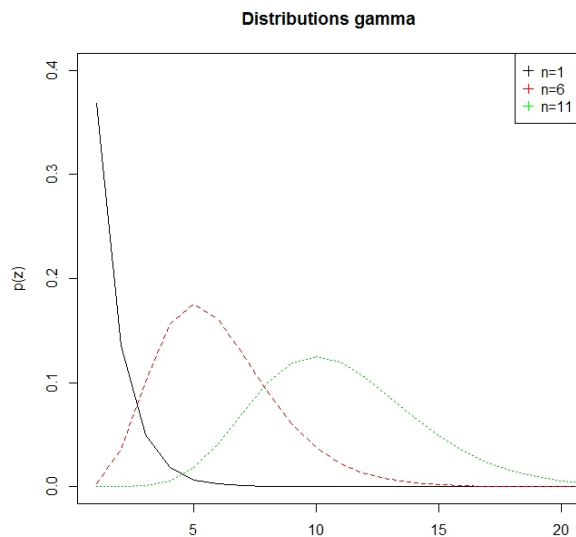


Figure 2.2: Exemples de densités gamma de probabilité de la somme sous risque  $z$  en fonction du nombre de décès  $n$ .

### II.1.2. Tarification d'un contrat XL CAT

#### II.1.2.1. Bases théoriques

Le contrat de couverture traditionnellement utilisé est le XL CAT, aussi appelé excédent de sinistre par événement, qui est activé :

- si  $M$  personnes ou plus sont victimes au cours ou à la suite d'un unique événement
- si la part résiduelle après cession des traités de réassurance préalables excède au total  $S$ , appelé niveau d'excès de la couverture, ou priorité, ou rétention

Dans ce cas, le réassureur prend à sa charge un montant  $L$ , appelé portée au-delà de  $S$ . Ce type de contrat est écrit de la façon suivante : «  $L$  xs  $S$  XL »

La prime pure  $\pi_{M,S}$  d'un XL CAT est calculée par Strickler comme suit. A des fins simplificatrices, la portée est supposée infinie pour le moment :

$$\pi_{M,S} = \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \int_S^{\infty} p^{(n)}(z) \cdot (z - S) dz$$

avec

$h(n)$  = probabilité d'occurrence d'un événement unique entraînant exactement  $n$  victimes sachant qu'un accident mortel s'est produit

$M$  = nombre minimum de décès par accident unique

$S$  = niveau de l'excès de la couverture (exprimé en rapport de la somme sous-risque (SaR – *Sum At Risk* en anglais) = niveau d'excès/SaR)

$p^{(n)}(z)$  = distribution de la somme sous-risque pour un  $n$  (nombre de décès minimum simultané donné)

En développant  $\pi_{M,S}$ , pour  $M=1$ :

$$\pi_{M,S} = h(1) \int_S^{\infty} p^{(1)}(z) \cdot (z - S) dz + h(2) \int_S^{\infty} p^{(2)}(z) \cdot (z - S) dz + \dots + h(x) \int_S^{\infty} p^{(x)}(z) \cdot (z - S) dz$$

avec  $x \rightarrow \infty$

Nous obtenons la formule générale<sup>10</sup>. Les calculs sont consultables en Annexe 1:

$$h(x) \int_S^{\infty} p^{(x)}(z) \cdot (z - S) dz = h(x) \int_S^{\infty} \frac{e^{-z}}{\Gamma(x)} \cdot z^{x-1} (z - S) dz = e^{-S} \cdot \left[ \frac{S^{x+1}}{x!} + (x - S) \cdot \sum_{j=0}^x \frac{S^j}{j!} \right]$$

Ainsi :

$$\pi_{M,S} = h(x) \int_S^{\infty} p^{(x)}(z) \cdot (z - S) dz = h(x) \int_S^{\infty} \frac{e^{-z}}{\Gamma(x)} \cdot z^{x-1} (z - S) dz = e^{-S} \cdot \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \left[ \frac{S^{n+1}}{n!} + (n - S) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{S^j}{j!} \right]$$

$$\pi_{M,S} = e^{-S} \cdot \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \left[ \frac{S^{n+1}}{n!} + (n - S) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{S^j}{j!} \right] = e^{-S} \cdot \sum_{n=M}^{\infty} \frac{H(n)}{\sum_{n=1}^{1499} H(n)} \left[ \frac{S^{n+1}}{n!} + (n - S) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{S^j}{j!} \right]$$

Nous pouvons ajuster la formule en y intégrant une portée  $L$ . Cette portée s'exprime en fonction de la somme sous-risque :  $L$  = niveau de portée/somme sous-risque

Ainsi, le montant  $X$  payé par le réassureur en cas d'événement est défini comme suit :

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in [0, S] \\ z - S & \text{si } z \in [S, S + L] \\ L & \text{si } z \in [S + L, \infty[ \end{cases}$$

Par la relation de Chasles, nous pouvons écrire la prime pure, avec le rajout d'une portée  $L$  :

<sup>10</sup> HARBITZ M. (1992) : Catastrophe covers in life insurance . *Transactions of the International Congress of Actuaries*

$$\pi_{M,S,L} = \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \left\{ \int_S^{S+L} p^{(n)}(z) \cdot (z - S) dz + \int_{S+L}^{\infty} p^{(n)}(z) \cdot L dz \right\}$$

$$\pi_{M,S,L} = \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \int_S^{S+L} p^{(n)}(z) \cdot (z - S) dz + L \cdot \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \int_{S+L}^{\infty} p^{(n)}(z) dz$$

$$\pi_{M,S,L} = \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \int_S^{\infty} p^{(n)}(z) \cdot (z - S) dz - \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \int_{S+L}^{\infty} p^{(n)}(z) \cdot (z - S - L) dz$$

En reprenant la formule ci-dessus :

$$\pi_{M,S,L} = \pi_{M,S} - \pi_{M,S+L}$$

$$\pi_{M,S,L} = e^{-S} \cdot \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \left[ \frac{S^{n+1}}{n!} + (n - S) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{S^j}{j!} \right] - e^{-(S+L)} \cdot \sum_{n=M}^{\infty} h(n) \left[ \frac{(S+L)^{n+1}}{n!} + (n - S - L) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{(S+L)^j}{j!} \right]$$

### II.1.2.2. Application numérique

Pour rappel, M est la franchise en nombre de têtes par sinistre, S est la priorité, et L correspond au niveau de la portée, L et S étant exprimée en proportion de la Somme Sous Risque (SaR).

Table 2.2 : Prime pure (exprimée en % de la SaR) pour paramètres initiaux de Strickler ( $a=8$ ,  $\xi=3$ ), portée infinie

| M= franchise (nbr têtes) / S= priorité (en proportion de la SaR) | S=1    | S=5    | S=10   |
|------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|
| M=1                                                              | 0.4078 | 0.0150 | 0.0028 |
| M=5                                                              | 0.0115 | 0.0060 | 0.0028 |
| M=25                                                             | 0.0019 | 0.0017 | 0.0015 |

Table 2.3 : Prime pure (exprimée en % de la SaR) pour paramètres initiaux de Strickler ( $a=8$ ,  $\xi=3$ ), portée L=S

| M= franchise (nbr têtes) / S= priorité (en proportion de la SaR) | S=1    | S=5    | S=10   |
|------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|
| M=1                                                              | 0.1243 | 0.0110 | 0.0027 |
| M=5                                                              | 0.0078 | 0.0050 | 0.0026 |
| M=25                                                             | 0.0012 | 0.0017 | 0.0015 |

Table 2.4 : Prime pure (exprimée en % de la SaR) pour paramètres initiaux de Strickler ( $a=8$ ,  $\xi=3$ ), portée L=4S

| M= franchise (nbr têtes) / S= priorité (en proportion de la SaR) | S=1    | S=5    | S=10   |
|------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|
| M=1                                                              | 0.2827 | 0.0149 | 0.0028 |
| M=5                                                              | 0.0105 | 0.0058 | 0.0027 |

|             |        |        |        |
|-------------|--------|--------|--------|
| <b>M=25</b> | 0.0019 | 0.0017 | 0.0015 |
|-------------|--------|--------|--------|

Les principaux paramètres de la prime pure sont le nombre minimum de décès  $M$ , la rétention  $S$  et la portée  $L$ . Ce dernier point est à relativiser car le poids de la portée  $L$  dans la valorisation décroît très fortement au fur et à mesure que la rétention augmente, ce qui apparaît comme logique.

Néanmoins, la prime nette décroît substantiellement lorsque la rétention augmente.

Nous constatons également une magnitude de tarif pur très différente en fonction de  $M$ . Cela s'explique par la distribution des accidents : plus de 99% des accidents mortels touchent 2 personnes ou moins. Ainsi, faire passer  $M$  de 1 SaR à 5 SaR a une conséquence majeure sur le prix de la couverture.

Le résultat obtenu dépend en premier lieu de la qualité de l'estimation de nos paramètres. Dans quelle mesure chacun de ces paramètres pèse-t-il sur le résultat final? Nous engageons une étude de sensibilité.

### II.1.3. Sensibilité du modèle

Partons d'un point de départ standard, en reprenant certains des paramètres de Strickler de 1960<sup>11</sup>.

$a = 8$ , 0.08% étant le taux de mortalité accidentelle choisi par Strickler en 1960.

$n=3$ , de nos jours, la plupart des contrats CAT nécessitent le décès d'au moins 3 personnes. Strickler avait établi ses paramètres pour  $n=5$ .

$\xi=3$ , Strickler obtient ce paramètre, appelé *indice de forme de la GPD*, en calibrant une Distribution de Pareto Généralisée (GPD – *Generalized Pareto Distribution*) sur les données du Statistical Bulletin of the Metropolitan Life Insurance Company de New-York. Ces statistiques correspondaient aux accidents ayant engendré cinq décès ou plus durant la période 1946 – 1950.

#### II.1.3.1. Sensibilité de $A(n)$ au « threshold » $n$ , le nombre minimum de personnes décédées au cours d'un accident

Cette étude permet de voir la dégressivité du nombre total de personnes touchées sur la période donnée (ici l'année) par des accidents engendrant chacun plus de  $n$  tués. Nous choisissons de comparer le  $a$  de Strickler (qui vaut 8 pour 10.000) à un  $a$  qui vaut 3.86 pour 10.000, étant donné que cette valeur est le taux de décès accidentel de la population française en 2011<sup>12</sup>.

<sup>11</sup> STRICKLER P. (1960) : Rückversicherung des kumulrisikos in der lebensversicherung. XVI *International Congress of Actuaries*

<sup>12</sup> source Inserm-CepiDC

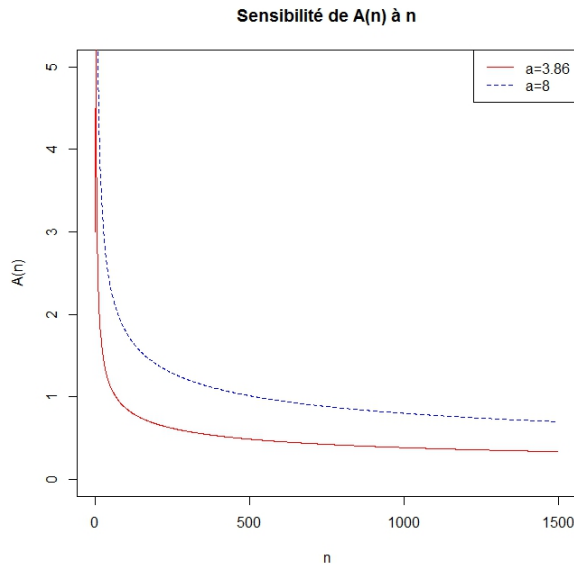


Figure 2.3: Sensibilité de  $A(n)$  à  $n$

Le nombre de personnes dans un effectif d'1 million concernées par un accident impliquant  $n$  personnes ou plus diminue en fonction de  $n$ . En poussant à l'extrême, il y a plus de personnes concernées par des sinistres accidentels impliquant 1 personne ou plus que de personnes concernées par des sinistres accidentels impliquant 10 ou 100 personnes.

### II.1.3.2. Sensibilité de $A(n)$ à l'indice de forme $\xi$ de la GPD

Ce paramètre  $\xi$  peut varier de  $-\infty$  à  $+\infty$ . A noter que pour  $n=1$ , l'indice de forme n'a aucun impact.

$\xi < 0$  correspond à une distribution dont les queues sont finies (lois Beta ou Uniforme)  
 $\xi = 0$  correspond à une distribution dont les queues décroissent à vitesse exponentielle (loi Normale)  
 $\xi > 0$  correspond à une distribution dont les queues décroissent à vitesse polynomiale (loi de Student)

L'indice de queue (« *tail index* ») d'une GPD est  $\alpha = 1/\xi$ . Plus  $\alpha$  est faible, plus la distribution sous-jacente présente des queues importantes (leptokurtique) et une occurrence importante de valeurs extrêmes. Cette partie nous permet d'introduire certaines notions de la Théorie des Valeurs Extrêmes que nous aborderons lors de la Section II.2.2.

Il est néanmoins à noter que la littérature – selon les auteurs – utilise le terme d'exposant de queue ou « *tail index* » soit pour  $\xi$  soit pour  $\alpha = 1/\xi$ . Dans le développement à venir, l'exposant de queue sera systématiquement représenté par  $\alpha$  et l'indice de forme de la GPD par  $\xi$ .

Strickler propose une distribution dont l'indice de forme  $\xi=3$ , avec un exposant de queue  $\alpha = 1/3$ . Cela correspond à une distribution dont aucun des moments d'ordre entiers n'existent, étant donné que les  $k$ -ièmes ( $k \in \mathbb{N}$ ) moments d'une GPD ne sont définis que pour  $k < \alpha$ , or  $\alpha < 1$ . Rappelons qu'une loi de Cauchy d'exposant de queue égal à 1 présente une moyenne et une variance infinies.

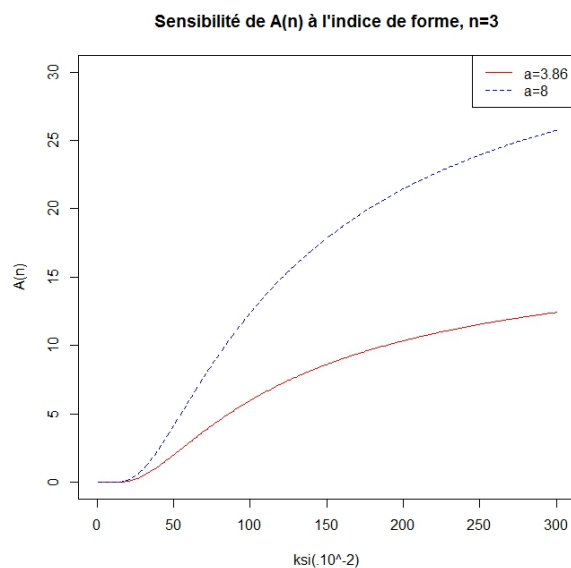


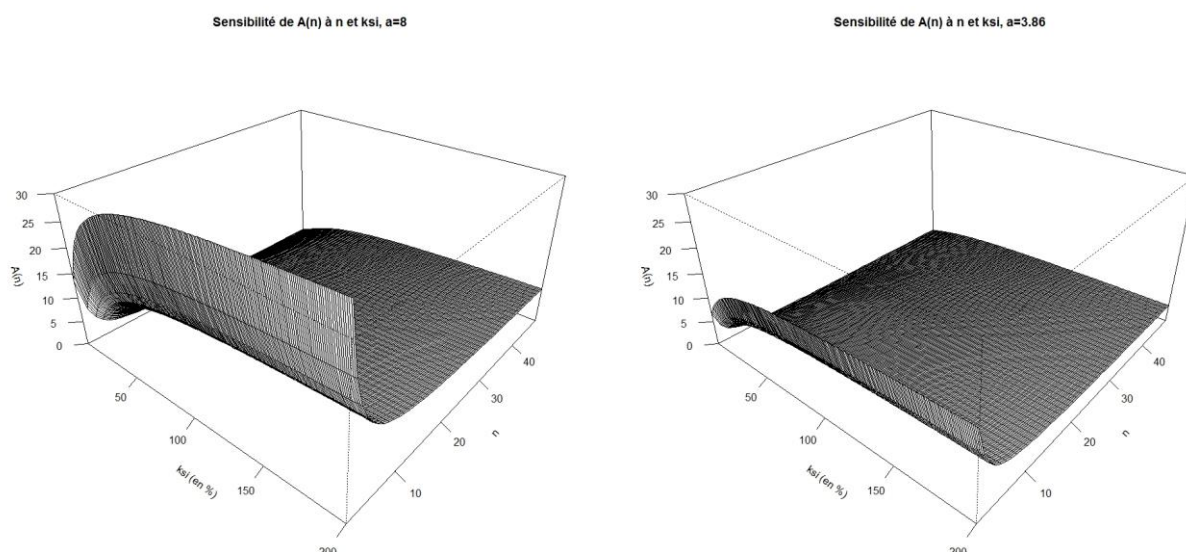
Figure 2.4: Sensibilité de  $A(n)$  à  $\xi$

Empiriquement, nous constatons dans beaucoup d'éléments de littérature que  $\xi$  est majoritairement compris entre 0 et 1, ce qui correspond à un intervalle pour l'exposant de queue  $\alpha$  de  $[1 ; +\infty[$ .  $\alpha=1$  correspond à une distribution de Cauchy,  $\alpha=+\infty$  correspond à une distribution gaussienne. Par exemple, une distribution sous-jacente T-student à 3 degrés de liberté, présentera une GPD dont l'indice de forme  $\xi$  sera  $1/3$  et le *tail index*  $\alpha=3$ = nombre de degrés de liberté.

Nous remarquons qu'à l'extrême gauche de la courbe, l'impact de  $a$  est minime, alors qu'une bonne estimation de  $\xi$  est indispensable.

### II.1.3.3. Double Sensibilité de $A(n)$ à $n$ et à $\xi$

Figure 2.5: Double sensibilité de  $A(n)$  à  $n$  et  $\xi$



Cette vision en trois dimensions de  $A(n)$  en fonction de  $n$  et  $\xi$  simultanément, ce pour deux taux de mortalité accidentelle montre que l'importance de ces paramètres se situe principalement pour des petites valeurs, les points d'inflexion se trouvant dans ces zones. Concrètement, choisir  $n=2$  ou 3 a un impact très significatif, alors que choisir  $n=10$  ou 11 n'a qu'un impact marginal. Il en est de même pour  $\xi$ , qui par sa forme concave, laisse à penser que la sélection du  $\xi$  optimal est d'autant plus important que  $\xi$  est petit ( $<1$ ).

Les limites de ce modèle résident principalement dans :

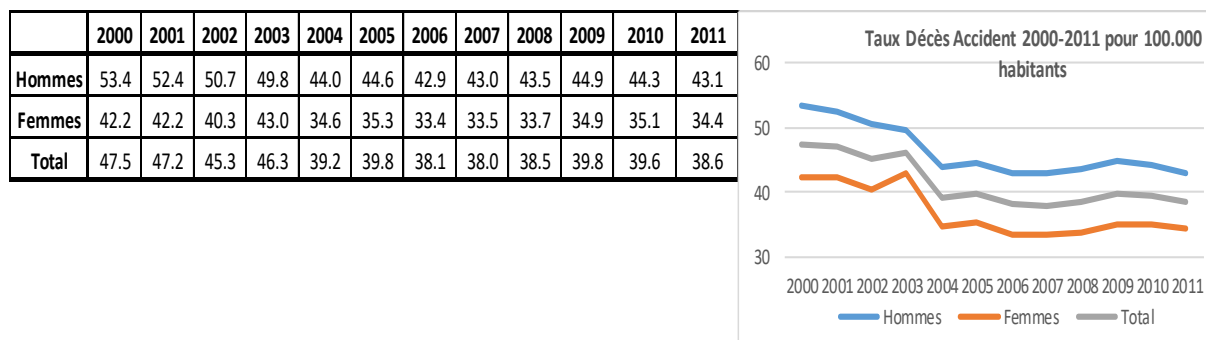
- les paramètres de la fonction  $A(n)$  sont choisis ad-hoc, et ne sont pas estimables via une méthode du maximum de vraisemblance par exemple

- la faiblesse sur le nombre maximum de décès d'assurés limité à 1500

- le taux annuel de sinistre accidentel qui est supposé constant. Or, nous constatons, avec la représentation graphique de l'évolution du taux de décès accidentel en France que ce postulat est trop fort et doit être modulé. Ainsi, ce taux n'est pas constant dans le temps, ni dans l'espace.

Aujourd'hui, nous sommes en mesure de récupérer le taux de mortalité par accident moyen, hommes et femmes confondus, en France en 2011. Nous ne disposons pas de données plus récentes. Les causes de décès accidentel sont segmentées en quatre facteurs par le CépiDC : transports, chutes, intoxications et autres. Le facteur « autres » représente près de la moitié du total des accidents, le reste étant réparti entre « transports » et « chutes », ces dernières affectant les personnes âgées. La part des intoxications est négligeable.

Figure 2.6 : Evolution du taux brut (nombre de décès en année  $n$ /population totale moyenne de l'année  $n$ ) de décès accident en France entre 2000 et 2011



Source : [www.cepidc.inserm.fr](http://www.cepidc.inserm.fr)

Ainsi, au vu de ce graphique, le taux  $a$  que nous devrions utiliser pour population globale serait de 3.86 soit 0.0386% en 2011.

- le  $\xi = 3$  choisi par Strickler est extrêmement conservateur par rapport aux estimations empiriques d'Ekheden et Hossjer (Figure 2.7). Ces derniers ont travaillé sur des données de la publication annuelle de SwissRe – *sigma*<sup>13</sup>, qui recense les catastrophes naturelles et *man-made* catastrophe entre 1983-1991, 1994-1999, 2002-2004, ayant eu lieu dans le monde entier, et ayant entraîné au moins 20 décès ou disparus ( $n=20$ ). Ainsi, de multiples catastrophes ne sont pas prises en compte (ex : 11 septembre 2011) :

<sup>13</sup> <http://www.swissre.com/sigma/>

| Region                | $\hat{\xi}_{20}$ (std err $\hat{\xi}_{20}$ ) |
|-----------------------|----------------------------------------------|
| South America (SAM)   | 0.83 (0.10)                                  |
| North America (NAM)   | 0.68 (0.17)                                  |
| Caribbean (CAR)       | 0.98 (0.26)                                  |
| Central America (CAM) | 0.98 (0.20)                                  |
| Western Europe (WEU)  | 0.84 (0.17)                                  |
| Eastern Europe (EEU)  | 0.63 (0.21)                                  |
| Former Soviet (SUN)   | 0.79 (0.15)                                  |
| South Asia (SAS)      | 1.00 (0.07)                                  |
| South East Asia (SEA) | 1.15 (0.12)                                  |
| Middle East (MIE)     | 1.38 (0.18)                                  |
| Far East (FAE)        | 1.12 (0.22)                                  |
| Central Asia (CAS)    | 0.76 (0.09)                                  |
| Oceania (OCE)         | 1.13 (0.49)                                  |
| Northern Africa (NAF) | 1.02 (0.22)                                  |
| Middle Africa (MAF)   | 0.66 (0.10)                                  |
| South Africa (SAF)    | 0.61 (0.20)                                  |

Figure 2.7: Estimations de  $\xi$  par zones géographiques par Ekheden et Hossjer

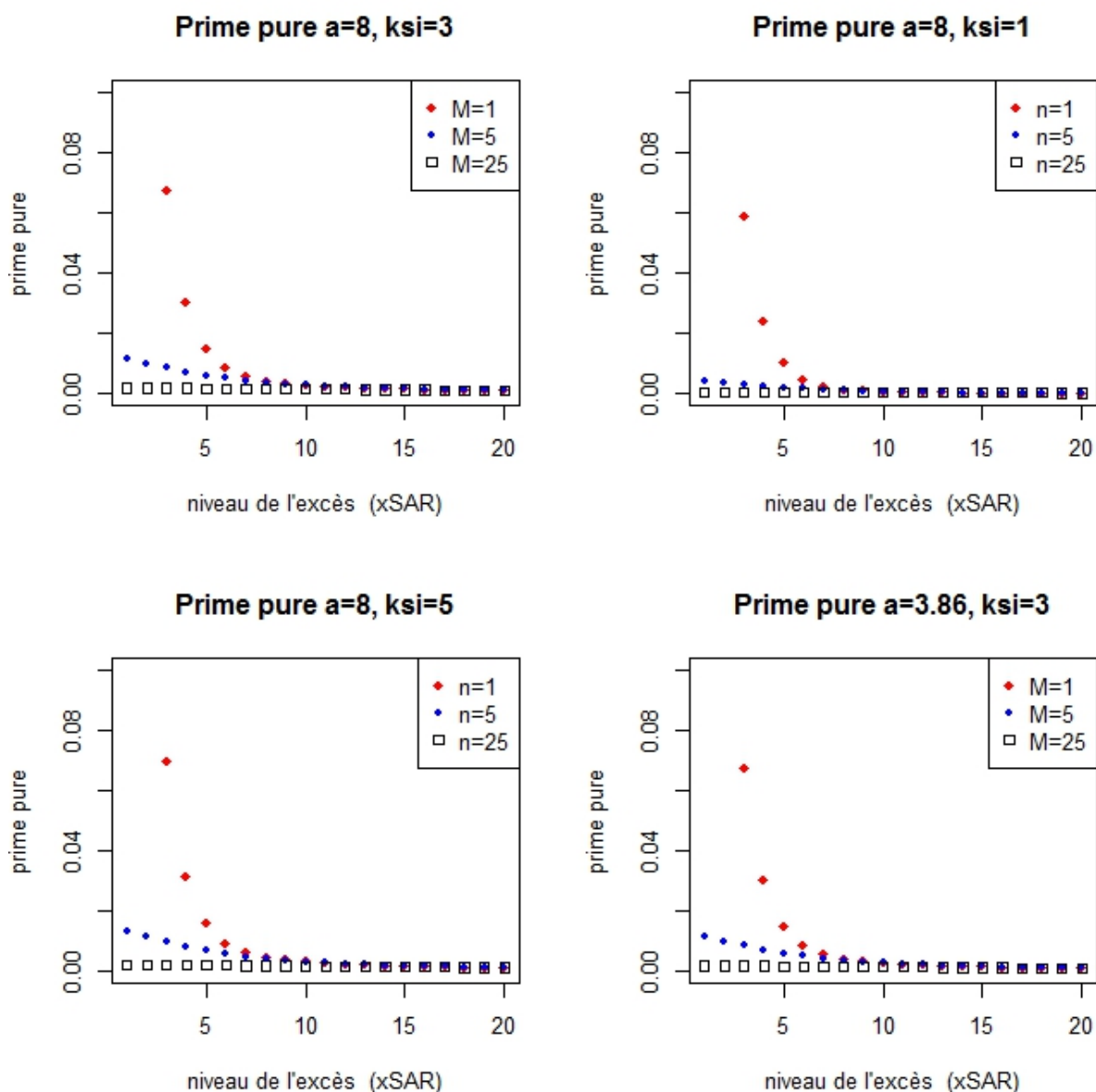
#### II.1.3.4. Sensibilité de la prime pure à $n$ et à $\xi$

Nous représentons l'évolution de la prime pure d'après le modèle de Strickler pour différents jeux de paramètres.

Pour chacune représentations, nous utilisons  $M$  (nombre minimum de décès au cours d'un unique événement)=1, 5 et 25. Nous faisons varier le niveau de l'excès  $S$  entre 1 et 20 fois la somme sous-risque. Nous constatons l'importance de  $\xi$  sur la prime pure de la couverture.

Nous effectuons une simulation avec  $L$  infini.

Figure 2.8: Evolution de la prime pure en fonction de  $a$  et  $\xi$



L'impact de  $\xi$  ou  $a$  est assez faible sur la prime pure. De nombreux ajouts ont été effectués au modèle initial de Strickler. N. Lamari<sup>14</sup> les présentent dans son mémoire. En voici un bref résumé :

- M. Harbitz a publié en 1992, d'autres valeurs pour les paramètres  $a$  et  $\xi$ <sup>15</sup>
- E. Alm propose la possibilité de modéliser les sommes sous risques individuelles comme une loi exponentielle de paramètre différent de 1<sup>16</sup>

Le modèle de Strickler ne distinguant pas la population générale de la population réassurée, et supposant la totale indépendance entre les décès d'une catastrophe, il a été suggéré d'ajouter :

- Un paramètre beta qui modélise le risque de contagion

<sup>14</sup> LAMARI MFITI N. (2010) : Le Risque Evenement en Réassurance Vie. Mémoire CNAM

<sup>15</sup> HARBITZ M. (1992) : Catastrophe covers in life insurance . *Transactions of the International Congress of Actuaries*

<sup>16</sup> ALM E. (1990) : Catastrophes can also hit Life Reinsurance. *First – A Journal for Skandia International, A practical Guide to Reinsurance*

- Un paramètre  $\mu$  qui modélise le risque de dilution

Cela permet peut être de donner une représentation plus proche de la réalité de l'échantillon, mais complexifie le modèle en y ajoutant de nouveaux paramètres.

En résumé, si le modèle de Strickler est cohérent d'un point de vue actuariel, et par les résultats aux tests de sensibilité menés, il repose néanmoins sur des bases anciennes, remontant à 1960.

La limitation du nombre de décès à 1500 par événement pose problème, étant donné les sinistres d'importance significative ayant eu lieu récemment (World Trade Center 2001 – 1.982 décès, Catastrophe de Fukushima 2011 – 19.846 décès)

De plus, le fait que ce soit un modèle paramétrique assez peu flexible est un frein quant à son utilisation actuelle. Aujourd'hui, les contrats sont de plus en plus sur mesure et les spécificités du BCAC (structure de Pool, clause de reconstitution, *No Claim Bonus*) ne peuvent être prises en compte. Le besoin d'un outil de tarification modernisé se fait ressentir.

## II.2. Le Modèle d'Ekhedden<sup>17</sup> (2008)

Les Suédois Ekhedden et Hossjer dans un article de 2008, présenté au Congrès Européen des Actuaires en 2012, proposent des améliorations en réponse aux faiblesses du modèle de Strickler énoncées ci-dessus.

Ils proposent l'utilisation du modèle *Peaks Over Threshold* (POT), tiré de la théorie des valeurs extrêmes. Il s'agit d'extraire, d'une base de données alimentée en continu, les valeurs extrêmes atteintes pendant les périodes durant lesquelles une certaine limite a été dépassée (à la hausse ou à la baisse). Cette méthode revient à adopter une approche fréquence-coût et à calibrer deux types de distributions :

- ➔ Une distribution du nombre d'événements dans une période de temps standard (Loi de Poisson) : section II.2.1, associée à la problématique de fréquence d'occurrence.
- ➔ Des distributions pour la taille des dépassements : section II.2.2 à section II.2.5, associées à la problématique des coûts par sinistre.

### II.2.1. Estimation du nombre $K$ de catastrophes pouvant intervenir durant la période

Les taux de catastrophes dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants. Le modèle ne suppose pas la possibilité de catastrophes simultanées.

D'après le modèle *Peaks Over Threshold*, la variable aléatoire « nombre de catastrophes entraînant chacune plus de  $m$  décès », dénotée  $K_m$  suit une loi de Poisson d'intensité annuelle  $\lambda_m$ . Il s'agit bien d'une variable aléatoire discrète comme l'est le nombre de catastrophes annuelles qui appartient à  $\mathbb{N}$ .

Ainsi :  $K_m \rightarrow \wp(\lambda_m T)$

<sup>17</sup> EKHEDEEN E., HOSSJER O. (2012) : Pricing Catastrophe Risk in Life (Re)Insurance. *European Congress of Actuaries*

$$P(K_m = k) = \frac{e^{-\lambda_m T} \cdot (\lambda_m T)^k}{(\lambda_m T)!}$$

## II.2.2 Estimation du nombre de personnes $X_k$ touchées par une catastrophe $k \in [1, K]$

Nous supposons tout d'abord  $X_1, X_2, \dots, X_K$  indépendants, et identiquement distribués.

Par définition cette variable aléatoire doit être discrète. Idéalement, pour faire face à cette contrainte, Ekheden et Hossjer proposent l'utilisation d'une loi Zêta ou loi de Pareto discrète. Nous constaterons qu'il est tout à fait possible d'utiliser la loi Zêta, dans le développement de notre propre méthode (chapitre IV)

Néanmoins, Ekheden et Hossjer préconisent la GPD par rapport à la Zêta car la GPD présente plusieurs paramètres (échelle, location, forme) – donc plus de degrés de liberté que la zêta qui n'en possède qu'un - et celle-ci est plus couramment utilisée pour les événements extrêmes en particulier pour les modèles POT.

La GPD repose sur le théorème de Pickands-Balkema-de Haan<sup>18 19</sup>. Il s'agit de modéliser la distribution des valeurs extrêmes au-delà d'un certain niveau  $m$  à définir. Dans ce cas pratique,  $m$  est le nombre minimum de décès par événement.

### *Distribution de Pareto Généralisée (GPD):*

Soit une séquence d'observations  $X_1 \dots X_n$  iid d'une distribution inconnue  $F$ . Nous nous intéressons aux valeurs supérieures à un certain seuil  $m$ . Soit  $x_0$  le point fini ou infini de la distribution  $F$ .

$$x_0 = \sup\{x \in R: F(x) < 1\} \leq \infty$$

L'approche suivante s'appelle la méthode POT (Peakss Over the Threshold, de Haan & Rootzen<sup>20</sup>). Nous définissons la distribution conditionnelle des excès au-delà de la limite  $m$  :

$$F_m(x) = P\{X - m \leq x | X > m\} = \frac{F(x + m) - F(m)}{1 - F(m)}$$

$$0 \leq x \leq x_0 - m$$

$F_m(x)$  est la probabilité qu'une perte dépasse le niveau  $m$  de moins de  $x$ , sachant que (conditionnellement au fait que) le niveau  $m$  est dépassé.

La fonction cumulative des excès est représentée par :

$$G_{(m,\sigma,\xi)}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi \cdot (x - m)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{(x - m)}{\sigma}\right) & \xi = 0 \end{cases}$$

Le paramètre de forme  $\xi$  permet de distinguer trois sous-classes de distributions au sein des GPD, s'appuyant sur le théorème de Pickands-Balkema-de Haan :

<sup>18</sup> BALKEMA A., de HAAN L. (1974) : Residual Life Time at Great Age. *Annals of Probability*, 2.792-804

<sup>19</sup> PICKANDS J. (1975) : Statistical Inference using Extreme Order Statistics. *Annals of Probability*, 3. 119-131

<sup>20</sup> de HAAN L., ROOTZEN J. (1993) : On the Estimation of High Quantiles. *J. Statist. Plann. Inference*, 35(1).1-13

Pour une certaine classe de distributions, la GPD est la distribution asymptotique pour la distribution des excès, à mesure que le seuil (ici  $m$ ) se rapproche de  $x_0$ . Formellement :

$$\lim_{m \rightarrow x_0} \sup_{0 \leq x \leq x_0 - m} |F_m(x) - G_{(m, \sigma(m), \xi)}(x)| = 0$$

Ainsi, il existe une fonction positive mesurable  $\sigma(m)$  ci-dessus si et seulement si  $F$  appartient au domaine maximum d'attraction de la distribution des valeurs extrêmes  $H_\xi : F \in MDA(H_\xi)$ .

#### *Théorème des Valeurs Extrêmes – Distribution des Valeurs Extrêmes Généralisée (GEV):*

C'est l'équivalent du Théorème Central-Limite pour les queues de distribution. Soit une séquence d'observations  $X_1 \dots X_n$  iid d'une distribution inconnue  $F$ . Contrairement à la GPD qui s'intéressent à la distribution des excès au-delà d'un certain seuil, la GEV s'intéresse uniquement aux maxima. Soient  $M_n = \max(X_1 \dots X_n)$ . Si il existe des constantes  $(\lambda_n, \sigma_n) \in (R, R^{+*})$  et une distribution  $H$  telles que :

$P\left(\frac{M_n - \lambda_n}{\sigma_n} \leq x\right) = F^n(\sigma_n x + \lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x)$  avec la fonction cumulative des maxima représentée par :

$$H_{(m, \sigma, \xi)}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \frac{\xi \cdot (x - m)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x - m)}{\sigma}\right)\right) & \xi = 0 \end{cases}$$

$F$  appartient au domaine maximum d'attraction de la distribution des valeurs extrêmes  $H_\xi : F \in MDA(H_\xi)$ .

Le paramètre de forme  $\xi$  permet de caractériser la distribution des maxima :

$$\begin{cases} \xi < 0 & \text{Queues de distribution bornées, tronquées: Distribution de Weibull} \\ \xi = 0 & \text{Vitesse de décroissance des queues rapide, de type exponentielle: Distribution de Gumbel} \\ \xi > 0 & \text{Vitesse de décroissance des queues plus lente, de type puissance: Distribution de Fréchet} \end{cases}$$

Fisher & Tippett<sup>21</sup> ont démontré que les distributions des valeurs extrêmes (GEV), sont les uniques distributions limites du maximum (ajusté du paramètre d'échelle et de location) d'une série de variables aléatoires iid.

Gnedenko<sup>22</sup> a prouvé que pour  $\xi > 0$ ,  $F \in MDA(H_\xi)$  si et seulement si :

$$1 - F(x) = x^{-\frac{1}{\xi}} L(x)$$

$L(x)$  étant une fonction peu sensible aux variations de  $x$ .

L'estimation des paramètres peut être effectuée par la méthode des moments probabilisés pour les distributions à queues raisonnablement fines ( $0 \leq \xi \leq 0.4$ , Hosking et Wallis<sup>23</sup>) ou par maximum de

<sup>21</sup> FISHER R.A., TIPPETT L.H.C. (1928)

<sup>22</sup> GNEDENKO B.V. (1943)

<sup>23</sup> HOSKING J.R.M., WALLIS J.R. (1987) : Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. Technometrics

vraisemblance à partir d'échantillons indépendants, comme le conseillent Rootzén et Tajvidi<sup>24</sup> pour les distributions à queues épaisses ( $\xi \geq 0.5$ ).

La difficulté est que la GPD est une distribution continue, alors qu'un nombre de décès est discret. Pour pallier cet écueil, Ekheden et Hossjer suggèrent de modéliser non pas  $X$  mais  $\check{X}$  tel que :  $X = \text{arrondi}(\check{X})$

En supposant  $\check{X}$  uniformément réparti autour de  $X$ , nous devons ajuster le paramètre de localisation de la GPD de  $-\frac{1}{2}$ . En effet, l'arrondissement de  $\check{X}$  à l'entier le plus proche  $m$ , nous oblige à réintégrer les valeurs continues comprises entre  $m - \frac{1}{2}$  et  $m$ . Les paramètres  $\sigma$  et  $\xi$ , respectivement d'échelle et de forme ne changent pas. Pour une étude des accidents impliquant au moins  $m$  décès, nous nous intéressons à la distribution suivante :  $\check{X} \rightarrow GPD(m - \frac{1}{2}, \sigma_m, \xi_m)$

$$\text{Avec : } g_{(m-\frac{1}{2}, \sigma, \xi)}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{x - (m-\frac{1}{2})}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi+1}} \quad \begin{cases} m - \frac{1}{2} \in R \\ \sigma \in R^{+*} \\ \xi \in R \\ x \geq m - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E(\check{X}) = m - \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{1 - \xi}$$

$$Var(\check{X}) = \frac{\sigma^2}{(1 - \xi)^2(1 - 2\xi)}$$

Nous pouvons constater que les moments d'ordre  $k$  existent pour  $\xi < \frac{1}{k}$  ou un exposant de queue  $\alpha = 1/\xi > k$ . Ainsi, l'espérance est définie pour  $\xi < 1$  et la variance existe pour  $\xi < \frac{1}{2}$ .

De plus, il est important de noter que la densité d'une GPD étant une fonction convexe strictement décroissante, nous avons l'inégalité suivante :

$$E(X) \geq E(\check{X})$$

La convexité de la fonction densité s'amenuisant lorsque  $m \rightarrow +\infty$ , nous avons

$$E(X) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} E(\check{X})$$

$m$  est connu puisqu'il s'agit du nombre de vies minimum.

Nous estimons ci-dessous par la log-vraisemblance le paramètre d'échelle  $\sigma$ .

Et la vraisemblance de l'échantillon  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  :

$$L_n\{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\sigma}\} = \prod_{k=1}^n g_{(m-\frac{1}{2}, \sigma, \xi)}(x_k) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma} \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{x_k - (m-\frac{1}{2})}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi+1}}$$

<sup>24</sup> ROOTZEN H., TAJVIDI N. (1997) : Extreme Value Statistics and Wind Storm Losses : A Case Study. *Scand Actuarial J.* 1997 ; 1 :70-94

$$\ln L_n\{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\sigma}\} = \sum_{k=1}^n \ln \left\{ \frac{1}{\sigma} \cdot \left( 1 + \xi \cdot \frac{x_k - \left(m - \frac{1}{2}\right)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi+1}} \right\}$$

$$\ln L_n\{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\sigma}\} = -n \ln(\sigma) - \frac{1}{\xi+1} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \xi \cdot \frac{x_k - \left(m - \frac{1}{2}\right)}{\sigma} \right)$$

Le paramètre  $\xi$  peut-être estimé par des estimateurs non paramétriques traditionnels:

- L'estimateur de Pickands. Celui-ci est valable quelle que soit la distribution des extrêmes, mais est très sensible à la taille de l'échantillon sélectionné, donc peu robuste.
- L'estimateur de Hill n'est utilisable que pour les distributions de Fréchet ( $\xi > 0$ ), et plus efficace que l'estimateur de Pickands.
- L'estimateur des moments n'est également utilisable que pour les distributions de Fréchet<sup>25</sup>.

$$\frac{d \ln L_n\{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\sigma}\}}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma(\xi+1)} \sum_{k=1}^n \xi \cdot \frac{x_k - \left(m - \frac{1}{2}\right)}{\sigma + \xi \cdot (x_k - \left(m - \frac{1}{2}\right))}$$

Planchet propose d'estimer les paramètres de la façon suivante :

En posant  $\tau = \frac{\xi}{\sigma}$ , l'annulation des dérivées partielles de la log-vraisemblance conduit au système :

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \tau \cdot (x_k - \left(m - \frac{1}{2}\right)) \right) \\ \frac{1}{\tau} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{k=1}^n \frac{x_k - \left(m - \frac{1}{2}\right)}{1 + \tau \cdot (x_k - \left(m - \frac{1}{2}\right))} \end{cases}$$

Ce système d'équation se résout de façon itérative.

En pratique, nous utilisons le package 'POT' de R pour estimer les différents paramètres.

II.2.3 Estimation du nombre  $Y_k$  de demandes d'indemnisation découlant du nombre  $X_k$  de personnes touchées

Ce paramètre dépend de la proportion de la population assurée par rapport à la population totale

Nous définissons la pénétration du marché par  $q$  pour une compagnie d'assurance donnée par le ratio suivant :

$$q = \frac{\text{nombre de polices vendues}}{\text{population totale de la zone}} \quad \text{avec } 0 \leq q \leq 1$$

<sup>25</sup> DEKKERS M.J., MATTEI J.L., FILLION G., ROCHETTE P. (1989) : Grain-size dependence of the magnetic behavior of pyrrhotite during its low-temperature transition at 34K. *Geophysical Research Letters* 16 :doi:10.1029/89GL01286. Issn: 0094-8276

Ainsi, nous pouvons écrire, pour une catastrophe donnée  $k$  :  $E(Y|X) = qX$

Selon Ekheden et Hossjer, pour les catastrophes engendrant peu de victimes telles que les accidents de voiture par exemple, il y a peu de dépendance entre les assurés, alors que pour les grands événements nous avons :  $\lim_{X \gg 1} \frac{Y}{X} \approx q$

La modélisation choisie implique de considérer la variable aléatoire conditionnelle  $Y/X$ , qui est le nombre  $Y$  de demandes d'indemnisations sachant le nombre  $X$  de personnes touchées, telle que :

$$Y|X, p \sim \text{Bin}(X, p)$$

Comme expliqué précédemment, le paramètre  $p$  n'est pas stable et dépend de  $X$ .

Ainsi, nous déterminons la variable aléatoire conditionnelle  $p/X$  telle que :

$$p|X \sim \text{Beta}(d(X)q, d(X)(1-q)) \quad \text{avec } 0 < d(X) < +\infty$$

$$\text{Avec } f(p|X, d(X)q, d(X)(1-q)) = \frac{(p|X)^{d(X)q-1} \cdot (1-(p|X))^{d(X)(1-q)-1}}{\text{Beta}(d(X)q, d(X)(1-q))} = \frac{(p|X)^{d(X)q-1} \cdot (1-(p|X))^{d(X)(1-q)-1}}{\int_0^1 t^{d(X)q} (1-t)^{d(X)(1-q)-1} dt}$$

$$E(p|X) = \frac{d(X)q}{d(X)q + d(X)(1-q)} = q$$

$Y|X$  suit ainsi une loi-mélange, la loi beta-binomiale qui est une loi discrète, souvent utilisée dans les problématiques d'inférence bayésienne, ou par Gordon Woo<sup>26</sup>, spécialiste de la modélisation des risques catastrophiques. Il s'agit d'une loi prédictive d'une variable aléatoire binomiale ( $Y|X$ ) avec une probabilité de succès ( $p$ ) donné par une loi beta. Elle revêt la forme suivante :

$$P(Y|X = k, d(X)q, d(X)(1-q)) = \int_{\text{Dbeta}=[0,1]} P(Y|X, p = k) \cdot f(p|X) dp$$

$$\int_0^1 C_k^X p^k (1-p)^{X-k} \cdot \frac{\Gamma(d(X))}{\Gamma(d(X)q) \cdot \Gamma(d(X)(1-q))} \cdot p^{(d(X)q-1)} \cdot (1-p)^{(d(X)(1-q)-1)} dp$$

Avec  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$  et  $\Gamma(a+1) = a!$

$$C_k^X \frac{\Gamma(d(X))}{\Gamma(d(X)q) \cdot \Gamma(d(X)(1-q))} \int_0^1 p^{k+d(X)q-1} (1-p)^{X-k+d(X)(1-q)-1} dp$$

$$P(Y|X = k, d(X)q, d(X)(1-q)) = C_k^X \frac{\Gamma(d(X))}{\Gamma(d(X)q) \cdot \Gamma(d(X)(1-q))} \cdot \frac{\Gamma(k+d(X)q) \cdot \Gamma(X-k+d(X)(1-q))}{\Gamma(X+d(X))}$$

Ainsi :

$$Y|X \sim \text{BetaBin}(X, d(X)q, d(X)(1-q))$$

Nous pouvons vérifier l'espérance suivante :

$$E(Y|X) = \frac{X \cdot d(X)q}{d(X)q + d(X)(1-q)} = qX$$

**Ce qui correspond à l'équation précédente.**

<sup>26</sup> WOO G. (2011) : Calculating Catastrophe. Imperial College Press

La variance :

$$\begin{aligned} V(Y|X) &= \frac{X \cdot d(X)q \cdot d(X)(1-q) \cdot (d(X) + X)}{d^2(X) \cdot (d(X) + 1)} = \frac{Xq(1-q)(d(X) + X)}{d(X) + 1} \\ &= \frac{Xq(1-q)[(d(X) + 1) + (X - 1)]}{d(X) + 1} = Xq(1-q)\left(1 + \frac{X-1}{d(X)+1}\right) \end{aligned}$$

La variance de  $Y|X$  est une fonction décroissante de  $d(X)$ .

Ainsi  $\lim_{d(X) \rightarrow +\infty} V(Y|X) = Xq(1-q)$ . Cela correspond à la variance d'une loi binomiale de paramètre  $q$ , avec  $X$  tirages. A l'extrémité inférieure de l'ensemble de définition de  $d(X)$  :  $\lim_{d(X) \rightarrow 0} V(Y|X) = X^2q(1-q)$ .

Il est à noter que les paramètres d'une distribution BetaBinomiale sont très difficiles à estimer en log vraisemblance. Une méthode d'optimisation numérique est préconisée. La méthode des moments semble plus adaptée, en considérant les moments théoriques égaux aux moments empiriques.

La fonction  $d(X)$  permet de prendre en compte le comportement différent de  $p$  selon le nombre  $X$  de victimes d'un accident. Or, comment appréhender cette fonction ? Intéressons-nous tout d'abord à ses limites :

$d(X) \rightarrow +\infty$  : nous choisissons  $d(X) = 10^3, q = 0.3$ .

$d(X) \rightarrow 0$  : nous choisissons  $d(X) = 10^{-1}, q = 0.3$ .

Nous remarquons que pour  $d(X) = 10^3$  (courbe en noir), la masse de probabilité est centrée autour de  $q$ . On peut penser que pour  $d(X) \rightarrow +\infty$ , la densité de probabilité converge vers un Dirac sur  $x=0.3$ .

Ainsi, cela signifie que  $p|X$  ne correspond presque plus à une variable aléatoire vu que  $p|X \xrightarrow[p.s.]{} q$  d'où :

$$Y|X \sim \text{Bin}(X, q)$$

Cette situation correspond à une totale indépendance entre les probabilités que chaque victime fasse une demande d'indemnisation.

Pour  $d(X) = 10^{-1}$  (courbe en rouge), nous constatons que les masses ont tendance à se concentrer sur les extrêmes des bornes de l'ensemble de définition de la loi beta (respectivement 0 et 1).

Cela correspond à la situation où :  $\begin{cases} P(Y = 0|X) = 1 - q \\ P(Y = X|X) = q \end{cases}$

Cela signifie que soit aucune victime ne fait de demande d'indemnisation (avec une probabilité  $1-q$ ), soit l'ensemble des victimes fait une demande (avec une probabilité  $q$ ). Cette configuration correspond au cas de dépendance extrême et totale entre les probabilités que chaque victime fasse une demande d'indemnisation.

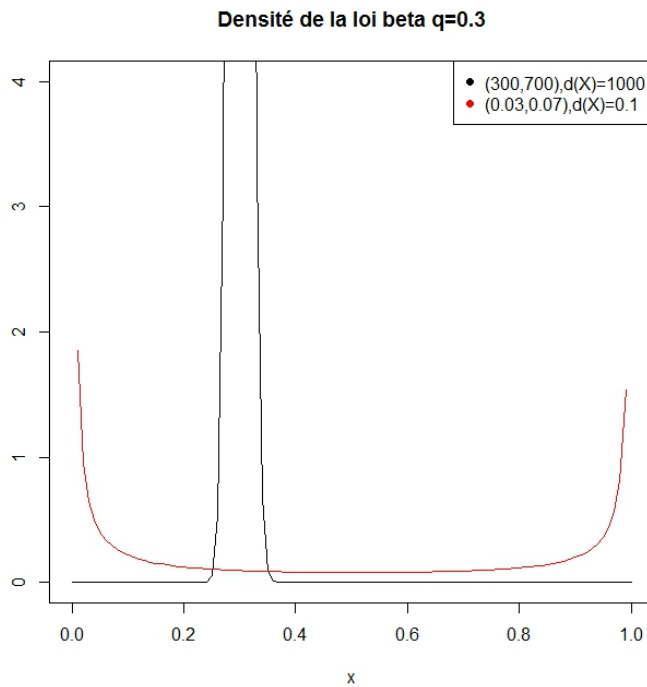


Figure 2.9: Densité de la loi Beta.  $q=0.3$

Ainsi, étant donné que pour les catastrophes englobant de nombreuses victimes ( $X$  grand), nous avons  $\lim_{X \gg 1} \frac{Y}{X} \approx q$ , nous devons choisir la fonction  $d(X)$  telle que  $\lim_{X \rightarrow +\infty} d(X) = +\infty$ .

A l'inverse, pour  $X$  petit (catastrophes avec peu de victimes),  $d(X)$  doit respecter :

$$\lim_{X \rightarrow 0} d(X) = 0$$

Ekheden et Hossjer proposent  $d(X) = \theta \cdot \ln(X)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}^+$

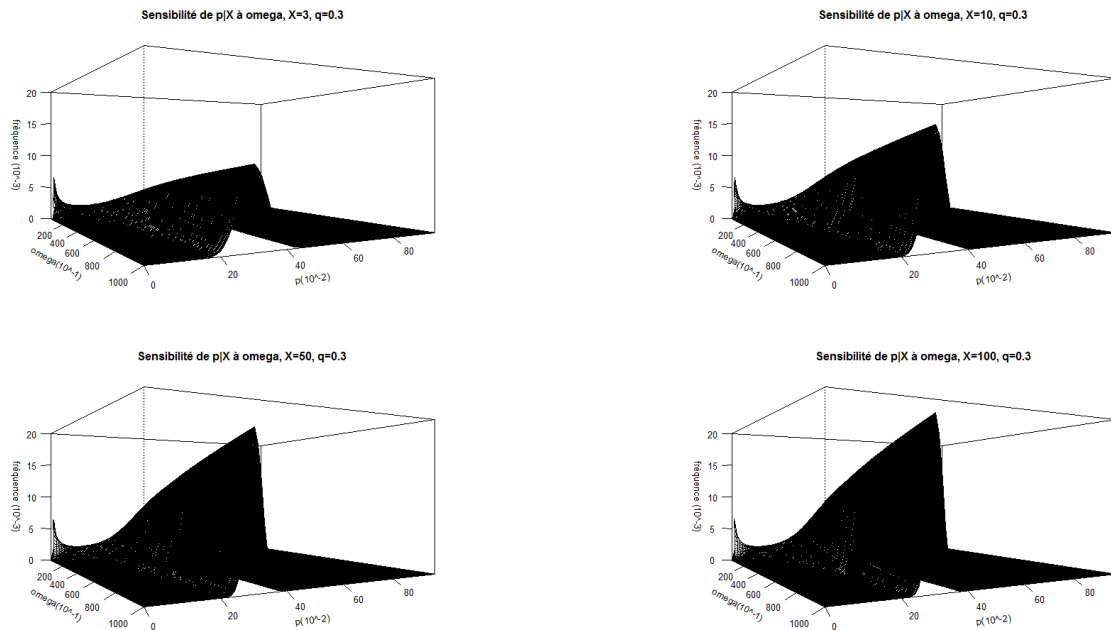
Le choix de la fonction  $\ln$  s'explique par sa monotonie et ses propriétés d'être strictement croissante et concave : l'indépendance n'est obtenue que pour un nombre  $X$  très grand, alors qu'une fonction convexe (de type exponentielle) aurait accéléré cette convergence.

Les graphiques de sensibilité ci-dessous montrent que les propriétés énoncées sont respectées.

$\theta$  évolue entre 0.1 et 100. Pour  $X$  petit, même un grand  $\theta$  ne permet pas d'avoir une indépendance. De l'autre côté, pour  $X$  grand, le choix de  $\theta$  est fondamental, car il permet de déterminer une indépendance ( $X$  grand,  $\theta$  grand) totale entre les probabilités de demande d'indemnisation ou une grande dépendance ( $X$  grand,  $\theta$  très petit) entre les probabilités de demande d'indemnisation.

Ainsi nous décidons de tester la sensibilité du paramètre  $p/X$  de la Binomiale par rapport à  $\theta$ .

Figure 2.10: Sensibilité de  $p/X$  à  $\theta$



Nous testons l'impact du paramètre oméga  $\theta$  de concentration, conditionnellement à un nombre de victimes ( $X$ ) et une proportion d'assurés ( $q$ ) donnés. L'axe dénommé «  $p(10^{-2})$  » représente la distribution de  $p|X$  en fonction de  $\theta$ . La distribution est centrée en 0.3 (niveau de  $q$ ), mais son aplatissement (leptokurticité) augmente au fur et à mesure que  $\theta$  tend vers 0 : plus  $\theta$  est faible plus la probabilité d'avoir une concentration très forte ou très faible augmente.

Plus  $X$  augmente (plus il y a de victimes potentielles), plus cet aplatissement diminue, et plus la masse est centrée autour du niveau de  $q$ , correspondant à la répartition de la population globale.

Enfin, il est à rappeler qu'un contrat CAT XL ne fait intervenir le réassureur que pour un nombre de victimes  $Y_k$  pour la  $k$ -ième catastrophe, supérieur ou égal à  $M$ , le nombre minimum de décès de personnes assurées.

Ainsi le nombre de décès de personnes assurées permettant le déclenchement du contrat CAT XL, pour la  $k$ -ième catastrophe est : 
$$\begin{cases} Y_k = 0 & \text{si } Y_k < M \\ Y_k & \text{si } Y_k \geq M \end{cases}$$

#### II.2.4 Evaluation du montant $Z_k$ de la demande d'indemnisation $Y_k$

Dans un contrat CAT, il existe un seuil  $S$  de priorité en-deçà duquel le réassureur n'intervient pas, et un montant  $L$ , au-delà duquel le réassureur n'est plus engagé.

Ainsi, pour chaque demande d'indemnisation  $Y_{k,i}$  correspond un montant  $Z_{k,i}$  à la charge de l'assureur.

$$Z_k = \sum_{i=1}^{Y_k} Z_{k,i} = \text{montant total à la charge de l'assureur (avant réassurance) pour la } k - \text{ème catastrophe}$$

Le montant à la charge du réassureur est le suivant :

$$Z_k = \begin{cases} 0 & \text{si } Z_k < S \\ Z_k - S & \text{si } S < Z_k < S + L \\ L & \text{si } Z_k > S + L \end{cases}$$

Une approximation pour une distribution inconnue, telle que décrite par Ekheden et Hossjer conseille de considérer que chaque demande  $Y_{k,i}$  est une variable aléatoire telle que :

$$Z_{k,i} | Y_{k,i} \sim \exp\left(\frac{1}{\text{moyenne}_{\text{échantillon}}}\right)$$

En supposant que les demandes sont indépendantes entre elles, nous pouvons affirmer que l'estimation du coût  $Z_k$  des  $Y_k$  demandes d'indemnisation de chaque  $k$ -ième catastrophe correspond à la variable aléatoire  $Z_k / Y_k$  telle que:

$$Z_k / Y_k \rightarrow \Gamma(Y_k, 1)$$

## II.2.5 Evaluation du coût annuel total de l'ensemble des $K$ catastrophes

Le coût total  $C$  correspond à :

$$C = \sum_{k=1}^K Z_k$$

Sous réserve d'indépendance entre  $K$  et  $Z$ , et des  $Z_k$  entre eux, nous pouvons écrire :

$$E(C) = E(K) \cdot E(Z)$$

$$V(C) = E(K) \cdot V(Z) + E(Z^2) \cdot V(K)$$

Beaucoup de paramètres ont besoin d'être estimés, et la qualité d'estimation s'avère primordiale, vu la sensibilité du modèle à chacun d'entre eux.

$\lambda_m$  : fréquence annuelle poissonnienne d'occurrence d'événements catastrophiques

*nombre de victimes décédées au delà d'un certain seuil  $m$  pour la  $k$  - ème catastrophe:*

$$\begin{cases} s: \text{si choix d'une distribution zeta} \\ \sigma_m, \xi_m: \text{si choix d'une distribution GPD} \end{cases}$$

$q$  : pénétration assurantielle dans la population donnée, pour l'assureur donné

ainsi que le paramètre  $\theta$ , permettant de moduler la dépendance des probabilités que chacune des victimes demande réparation du préjudice.

## II.3. Points d'exploration

### II.3.1. Distribution pour la taille des dépassements : Zêta vs GPD

Ainsi :  $X_k \rightarrow Z(s)$

$$P(X_k = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

Avec :  $\zeta(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$ , et  $s \in ]1, +\infty$  [(Zêta de Riemann)

Avec :

$$\begin{cases} E(X_k) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{s-1}} \\ Var(X_k) = \frac{1}{\zeta(s)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{s-2}} - \frac{1}{\zeta(s)} \left( \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{s-1}} \right)^2 \right\} \end{cases}$$

Nous utilisons le package 'Rmpfr' sur **R** pour être en mesure de générer le Zêta de Riemann.

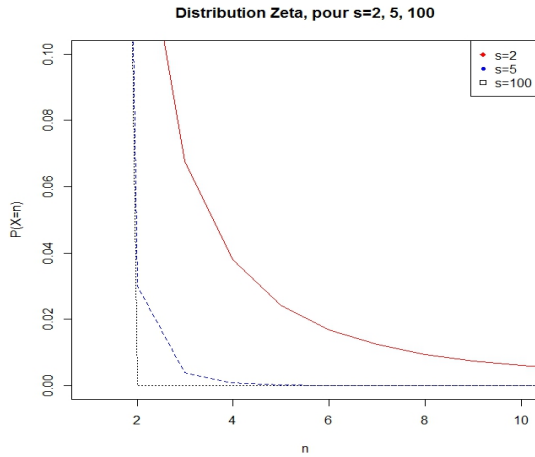


Figure 2.11: Exemple de Distribution Zêta

$$s = 2 \rightarrow P(X = 1) = 60.79\%$$

$$s = 5 \rightarrow P(X = 1) = 96.44\%$$

$$s = 100 \rightarrow P(X = 1) = 99.999.. \%$$

La distribution Zêta (cas particulier de la Loi de Zipf – qui fait partie de la famille des lois puissances discrètes - utilisant la somme infinie de la fonction Zêta de Riemann) est pratique dans le sens où il n'y a qu'un élément à évaluer  $s$ . Nous estimons ci-dessous par le maximum de vraisemblance le paramètre  $s$ .

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_N$  qui suivent une loi Zêta de paramètre  $s$ . Nous avons ici :

$$P(X_k = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

Et la vraisemblance de l'échantillon  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  :

$$L_n\{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{s}\} = \prod_{k=1}^n P_{\hat{s}}(X_k = x_k) = \prod_{k=1}^n \frac{x_k^{-\hat{s}}}{\zeta(\hat{s})}$$

En passant à la log-vraisemblance, par application du logarithme, le produit des densités étant toujours strictement positif :

$$\ln L_n\{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{s}\} = \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{x_k^{-\hat{s}}}{\zeta(\hat{s})} \right) = -s \cdot \sum_{k=1}^n \ln(x_k) - n \ln(\zeta(s))$$

En dérivant par rapport à  $s$  :

$$\frac{d \ln L_n\{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{s}\}}{ds} = - \sum_{k=1}^n \ln(x_k) - n \left[ \frac{- \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln(p)}{p^s}}{\zeta(s)} \right]$$

Avec  $-\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln(p)}{p^s}$  une série de Dirichlet convergente.

Nous vérifions le signe de la dérivée seconde de l'expression :

$$\frac{d^2 \ln L_n \{x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{s}\}}{ds^2} = n \left[ \frac{-\left\{ \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln^2(p)}{p^s} \right\} \cdot \zeta(s) - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln(p)}{p^s}}{\zeta^2(s)} \right] < 0$$

Ainsi,  $\hat{s}$  est l'unique estimateur du Maximum de Vraisemblance.

Le  $\hat{s}$  optimal est celui qui va minimiser l'expression suivante :

$$\hat{s} \doteq \operatorname{argmin} \left( -\sum_{k=1}^n \ln(x_k) + n \left[ \frac{\sum_{p=2}^{\infty} \frac{\ln(p)}{p^s}}{\zeta(s)} \right] \right)$$

Une première application pratique est d'estimer  $\hat{s}$  en fonction du  $A(n)$  de Strickler :

$$\text{Avec } P(X_k = n) = \frac{A(n) - A(n+1)}{A(1)}$$

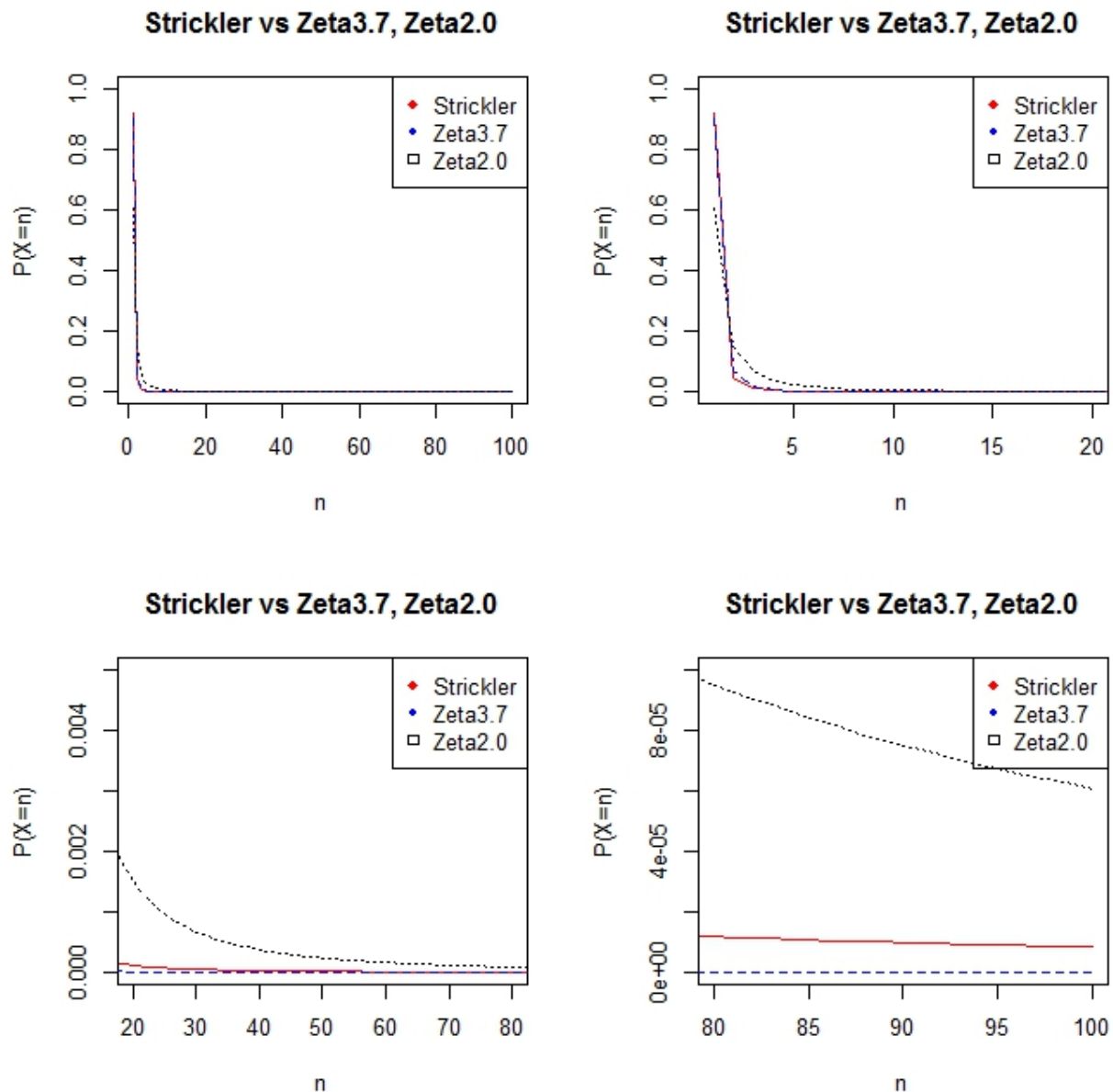
$$\text{Nous posons : } \sum_{k=1}^n \ln(x_k) = n * \sum_{k=1}^n \ln(k) * P(X_k = k)$$

Nous nous arrêtons à une estimation de  $\hat{s}$  à  $10^{-1}$ , et nous obtenons  $\hat{s} = 3.7$ . La comparaison avec la GPD est possible pour  $m = 1$ .

Mais nous constatons que même avec  $\hat{s} = 2$ , la vitesse de décroissance de la queue de distribution de la loi Zêta est plus rapide que pour la fonction de Strickler ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\text{Strickler}}(X_k = n) > \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{\text{Zeta}}(X_k = n)$$

Figure 2.12: Comparaison des Distributions Zêta et Strickler



Nous décidons de comparer le comportement asymptotique (pour  $n$  grand) de la distribution proposée par Strickler à des distributions Zêta avec différents paramètres  $s$  (2.0 et 3.7), en zoomant sur certaines zones, sur les graphiques 2, 3 et 4. Ainsi, pour  $n$  petit (petits nombres de victimes par événement catastrophique), les distributions Zêta (2.0 et 3.7) présentent une probabilité d'occurrence plus forte que la distribution Strickler, alors que les graphiques 3 et 4 montrent une décroissance dans les extrêmes beaucoup plus rapide pour la Zêta, ce même si au voisinage de  $n=100$ , la probabilité d'occurrence induite par la Zêta de paramètre  $s=2$  reste plus important que pour la distribution Strickler.

Ainsi, nous avons pris en compte toute la distribution. Si nous effectuons la même étude, uniquement pour  $m \geq 3$ . Nous obtenons :  $\hat{s} = 3.4$ . La comparaison avec la GPD est possible pour  $m = 3$ .

pour  $m \geq 10$ . Nous obtenons :  $\hat{s} = 2.9$ . La comparaison avec la GPD est possible pour  $m = 10$ .

### II.3.2. Autres axes

#### II.3.2.1. Distribution du nombre d'événements dans une période de temps standard : intensité de Poisson non-homogène

Nous reprenons cette suggestion du travail de N. Lamari. En effet, constatant que l'intensité de la loi de Poisson varie considérablement dans le temps, supposer que celle-ci est une constante simplifie le modèle mais entraîne une perte d'information considérable.

De plus, le fait de travailler sur des processus poissonniers non homogènes ne permet pas – en théorie – d'utiliser la méthode *Peaks-Over-Threshold* traditionnelle.

Néanmoins, il est possible de passer par une méthode *Peaks-Over-Threshold* adaptée. En effet, il existe une littérature sur le sujet et un package R ('NHpoisson').

Le comportement d'un processus de Poisson temporel non-homogène est généralement modélisé en représentant l'intensité  $\lambda(t)$  comme fonction de covariables (tendances, saisonnalité, facteurs externes). Afin de garantir la positivité du paramètre  $\lambda$ , la formule suivante est utilisée :

$$\ln(\lambda(t; \beta)) = X^T(t) \cdot \beta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(t; \beta) = e^{X^T(t) \cdot \beta}$$

La sélection des covariables les plus significatives s'effectue en fonction du critère d'information d'Akaike<sup>27</sup>.

Une autre possibilité serait d'utiliser une distribution Binomiale Négative.

#### II.3.2.2. Distribution de la demande d'indemnisation / engagement par tête : distribution gamma vs distribution lognormale

Comme nous le verrons dans la partie qui décrit le portefeuille du BCAC, et reprend la population française dans sa globalité, la distribution des Unités de Consommation (UC) telles que définies par l'INSEE correspond davantage à une distribution lognormale qu'à une distribution gamma (ou exponentielle). L'avantage de la distribution gamma est sa simplicité d'utilisation, alors que son défaut est la sous-estimation des quantiles extrêmes.

En conclusion, le modèle d'Ekhedén est le premier modèle stochastique développé et véritablement théorisé. La difficulté d'utilisation réside dans l'estimation du paramètre de concentration Oméga, dont l'ensemble de définition correspond à  $\mathbb{R}^+$ , alors que son impact sur le tarif est très important.

Le débat peut également s'ouvrir quant au choix de la distribution GPD, soit une distribution continue pour une variable aléatoire qui est par définition discrète (nombre de décès par sinistre).

<sup>27</sup> CEBRIAN A.C., ABAURREA J., ASIN J. (2015): NHpoisson : An R Package for Fitting and Validating Nonhomogeneous Poisson Processes. *Journal of Statistical Software*

### **III. APPLICATION AU PORTEFEUILLE DU BCAC**

### III.1. Analyse du portefeuille du BCAC<sup>28</sup>

Le pool catastrophe du BCAC couvre les contrats en assurance de personnes, à savoir les risques de décès et invalidité des assurés des contrats collectifs des assureurs membres. Sur le même modèle, GAREAT (Gestion de l'Assurance et de la REassurance des risques Attentats et actes de Terrorisme) est un GIE créé en 2002 (après les événements du 11/09/2001) qui se concentre sur la couverture des contrats dommage (assurances de biens), et uniquement sur le risque terroriste. Dans le même esprit, ASSURATOME est un GIE, groupement d'assureurs et réassureurs créé en 1957 pour former un fonds commun de co-réassurance pour le domaine des risques nucléaires – qui font presque systématiquement l'objet d'exclusions lors des couvertures en assurance de personnes.

*« Les dommages ou l'aggravation des dommages causés :  
- par des armes ou engins destinés à exploser par modification de structure du noyau de l'atome »*

Etant en présence de contrats collectifs, l'information est difficile à obtenir. Ainsi, nous ne pouvons disposer de la composition exacte des portefeuilles des assureurs membres. Nous devons procéder par estimation.

En 2010, AON Benfield estime la part de marché du Pool BCAC par rapport à la population française :

La population assurable est de 75.50% (Insee, population >18ans)

La population de plus de 18ans, ayant une assurance Décès : 24.50% (Insee, Enquête patrimoine 2009-2010)

Part du Pool BCAC (risque Décès seulement) : 78.49% (FFSA, Les contrats collectifs d'assurance de personne en 2009).

Ainsi, le Pool BCAC assure en cas de décès :  $75.50\% \times 24.50\% \times 78.49\% = 15.01\%$  de la population française

En 2013, le portefeuille du BCAC couvre plus de 9 millions d'assurés actifs, sur une population estimée à 28.6 millions d'actifs en France Métropolitaine<sup>29</sup>. La population couverte par le BCAC correspond à un échantillon supérieur à 31% de la population active métropolitaine. Nous pouvons donc le considérer comme suffisamment représentatif, et utiliser les données nationales de l'INSEE sur la population active française pour reconstituer un estimateur des caractéristiques du portefeuille du BCAC.

La différence majeure est liée au fait que le BCAC regroupe des contrats collectifs et non individuels. Ainsi, l'approximation de la population assurée par les membres du BCAC par la population totale est cohérente au vu la taille de l'échantillon, néanmoins, un portefeuille d'assurances collectives nécessite la prise en compte :

- d'une concentration géographique des risques (lieu de travail, transport, lieu de vie)
- d'une concentration géographique des engagements

<sup>28</sup> RENAULT P., DELON J.F., POURSAARDAR F., DUBREUIL E., BAGUR A.L., THEURAY N. (2010) : Mesure de l'exposition du Pool BCAC. AON Benfield

<sup>29</sup> INSEE (2012)

- de la spécificité des types de prestations des assureurs membres du BCAC

Nous cherchons à définir la nature actuelle des prestations des assureurs membres du BCAC envers leurs assurés, ainsi que leur montant afin d'estimer les charges en cas de sinistres. Quels sont les risques couverts ?

Afin de calculer le capital moyen national en cas de Décès ou d'Invalidité, il a été utilisé le taux de représentation des cadres (42%) dans la population assurée par le Pool BCAC.

Table 3.1 : Capital Moyen National Estimé

|                          | Cadre   | Non-Cadre | 42% Cadre |
|--------------------------|---------|-----------|-----------|
| <b>Risque DC/PTIA</b>    | 201 766 | 93 773    | 139 130   |
| <b>Risque Invalidité</b> | 262 295 | 140 659   | 191 746   |

Source : AON Benfield

- Composition du portefeuille

L'exposition du pool est calculée en fonction de différentes clés de mesure : salaire moyen, médian, ou décile choisi (9<sup>ème</sup> décile par exemple). On cherche à exprimer la capacité du BCAC en fonction de cette clé ou en combinaison avec un type de CSP et une zone géographique particulière. Le pire scénario pour le BCAC étant une population au salaire élevé, relevant d'une CSP++, dans une zone aisée densément peuplée, où le taux d'assurabilité est important.

### III.1.1. Mesure de l'exposition du pool aux Revenus Médians Bruts annuels des Ménages par Unité de Consommation

L'Unité de Consommation est une classification de l'INSEE définie comme un système de pondération attribuant un coefficient à chaque membre du ménage, et permettant de comparer les niveaux de vie des ménages de tailles ou de compositions différentes. Avec cette pondération, le nombre de personnes est ramené à un nombre d'unités de consommation. Pour comparer le niveau de vie des ménages, on ne peut s'en tenir qu'à la consommation par personne. En effet, les besoins d'un ménage ne s'accroissent pas en stricte proportion de sa taille. Lorsque plusieurs personnes vivent ensemble, il n'est pas nécessaire de multiplier tous les biens de consommation (en particulier, les biens de consommation durables) par le nombre de personnes pour garder le même niveau de vie. Ainsi, pour comparer les niveaux de vie de ménages de taille ou de composition différente, on utilise une mesure du revenu corrigé par unité de consommation à l'aide d'une échelle d'équivalence. L'échelle actuellement la plus utilisée (dite de l'OCDE) retient la pondération suivante :

-1 UC pour le premier adulte du ménage

-0.5 UC pour les autres personnes de 14 ans et plus

-0.3 UC pour les enfants de moins de 14 ans

Le revenu fiscal est l'approche recommandée en termes de disponibilité des données. De plus, il prend en compte la notion de ménage, permettant de mieux représenter l'exposition du BCAC : un sinistre peut engendrer une indemnisation sous forme de capital décès et doit ainsi prendre en compte les ayants droits des victimes.

Nous récupérons sur le site de l'INSEE<sup>30</sup> les données sur le revenu global des ménages par Unité de Consommation. Nous devons ici préciser le fait que ce revenu global comprend non seulement le revenu issu d'un travail salarié ou équivalent, mais aussi d'autres rémunérations d'activité, du type avantages en nature ou allocations. Ainsi, cet indicateur a tendance à maximiser le risque, ce qui nous conforte dans notre approche prudente et défensive. Nous choisissons de retenir la segmentation au niveau communal, tout en gardant en réserve la répartition par arrondissement dans les villes de tailles significatives, information qui s'avérera importante dans la suite du développement, lorsque nous analyserons différents scénarii de catastrophe urbains.

Figure 3.1 : Disposition des Données INSEE

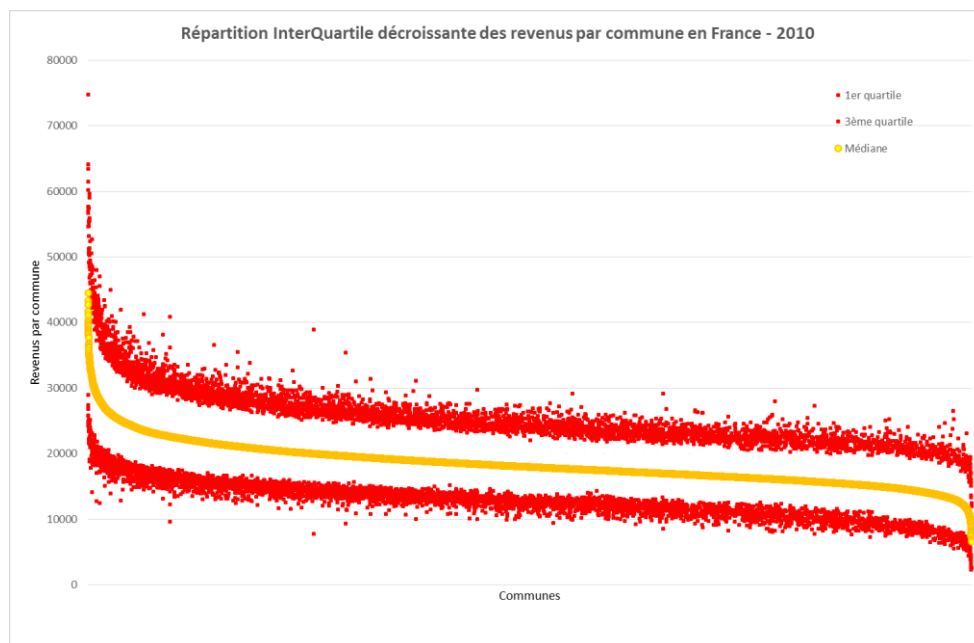
| Nbre de ménages fiscaux | Nbre de personnes des ménages fiscaux | Part des ménages fiscaux imposés | 1 <sup>er</sup> Quart. par Unité de Conso. (UC) | 2 <sup>ème</sup> Quart. (Médiane) par UC | 3 <sup>ème</sup> Quart. par UC | 1 <sup>er</sup> Décile par UC | 2 <sup>ème</sup> Décile par UC | 3 <sup>ème</sup> Décile par UC | 4 <sup>ème</sup> Décile par UC |
|-------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
|-------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|

Source : INSEE

Le nombre d'unités de consommation d'un « ménage fiscal » est évalué de la façon suivante :

- Le premier adulte du ménage compte pour une unité de consommation
- Les autres personnes de 14 ans ou plus comptent chacune pour 0.5
- Les enfants de moins de 14 ans comptent chacun pour 0.3

Figure 3.2 : Répartition InterQuartile décroissante des revenus par commune en France - 2010



Source : Insee

<sup>30</sup> [http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?reg\\_id=99&ref\\_id=base-cc-rev-fisc-loc-menage](http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?reg_id=99&ref_id=base-cc-rev-fisc-loc-menage)

Ce graphique représente pour chaque commune de France :

- En jaune, le revenu médian par Unité de Consommation (UC).
- En rouge, les 1<sup>er</sup> et 3<sup>ème</sup> quartiles.

Les communes sont classées par ordre décroissant selon leur revenu médian par Unité de Consommation : à gauche, les communes les plus favorisées, à droite, les plus modestes.

Ne disposant que des déciles et quartiles de revenus pour chacune des communes de France, nous ne sommes pas en mesure d'utiliser les méthodes traditionnelles d'estimation des paramètres d'une distribution donnée tels que le maximum de vraisemblance ou la méthode des moments généralisée.

Le rapport de l'INSEE de 2010 sur les ménages fiscaux répertorie 31 612 communes en France (y compris DROM-COM) (sur les 36 789 existantes).

Ainsi, nous testons les distributions les plus couramment utilisées pour estimer la distribution des sommes sous risques pour chacune des communes françaises supérieure à 100.000 habitants. Nous limitons notre étude à 100.000 habitants car :

- Il est peu probable qu'une catastrophe qui ait lieu dans une commune inférieure à ce niveau ne déclenche la priorité du contrat XL CAT du BCAC
- Il est nécessaire d'avoir un minimum d'habitants pour avoir une distribution simple à estimer avec les lois standards.
- En nous limitant aux communes de plus de 100.000 habitants, nous couvrons 14.3% de la population française en 2010.

### III.1.2. Distributions testées

#### III.1.2.1. Distribution log-normale

En supposant que la répartition des revenus pour une commune donnée suit une distribution log-normale, nous sommes en mesure, connaissant les quartiles et les déciles par commune d'estimer les paramètres de la distribution des revenus pour celle-ci.

Densité de la loi log-normale :

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Pour une commune  $i$  :

L'estimation du paramètre  $\mu$  est directe : *Médiane* =  $e^\mu$  d'où  $\mu = \ln(\text{Médiane})$

L'estimation du paramètre de dispersion  $\sigma$  s'effectue en passant par la fonction de répartition :

$$\text{Fonction de répartition loi lognormale: } P(X < x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erf} \left[ \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right]$$

$$\text{avec la fonction d'erreur } \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

On utilise l'approximation d'Abramowitz et Stegun<sup>31</sup> pour inverser la fonction d'erreur:

$$\operatorname{erf}^{-1}(z) \cong \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left( z + \frac{\pi}{12} z^3 + \frac{7\pi^2}{480} z^5 + \frac{127\pi^3}{40320} z^7 + \frac{4369\pi^4}{5806080} z^9 + \frac{34807\pi^5}{182476800} z^{11} \right)$$

D'où pour un quantile  $P(X < x)$  donné:

$$\sigma = \frac{\ln(x) - \mu}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{erf}^{-1}(2 \cdot P(X < x) - 1)}$$

Ainsi, nous obtenons une valeur de  $\sigma$  par quantile.

*Distribution des revenus par foyer fiscal à Paris*

Par exemple, pour la commune de Paris dans son ensemble, cela nous donne :

$$\hat{\mu} = \ln(25\,044) \cong 10.1284$$

Et nous obtenons la matrice suivante des  $\hat{\sigma}$  :

| Quantile | $\hat{\sigma}$ |
|----------|----------------|
| 25%      | 0.9950         |
| 50%      | NA             |
| 75%      | 0.7656         |
| Quantile | $\hat{\sigma}$ |
| 10%      | 1.1387         |
| 20%      | 1.0415         |
| 30%      | 0.9501         |
| 40%      | 0.8749         |
| 50%      | NA             |
| 60%      | 0.7992         |
| 70%      | 0.7741         |
| 80%      | 0.7613         |
| 90%      | 0.7757         |

Table 3.2 : Estimation des  $\hat{\sigma}$

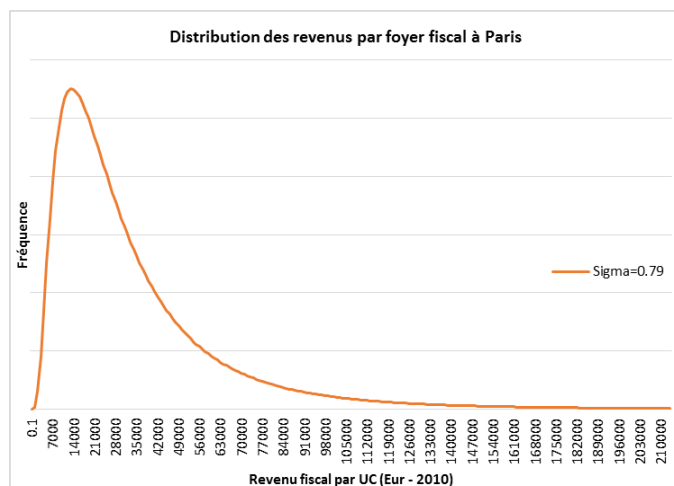
Nous constatons la volatilité des estimateurs. Ainsi, nous décidons de procéder à une deuxième estimation de ce paramètre par la méthode des moindres carrés sur les premier et troisième quantiles :

$$\hat{\sigma}^* = \operatorname{argmin}_{i=\{0.25;0.75\}} (e^{\{\sigma\sqrt{2}\cdot\operatorname{erf}^{-1}[2P(X<x_i)-1]+\mu\}} - x_i)^2$$

Nous cherchons à minimiser la fonction ci-dessus en fonction de  $\sigma$ . Nous procédons par simulation dans l'intervalle  $[0.01 \cdot E(100 \cdot \min(\widehat{\sigma}_{0.25}; \widehat{\sigma}_{0.75})); 0.01 \cdot E(100 \cdot \max(\widehat{\sigma}_{0.25}; \widehat{\sigma}_{0.75})+1)]$ , avec une discrétisation de  $10^{-2}$ .

Figure 3.3 : Distribution des revenus par foyer fiscal à Paris

<sup>31</sup> ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A. (1964) : Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series



Dans notre tableau ci-dessus, il est à noter les « NA » correspondent à l'estimation de  $\hat{\sigma}$  pour la médiane. En effet, dans ce cas  $P(X < x) = 0.5$ , et cela annule le dénominateur dans la formule de calcul de  $\sigma$  plus haut.

L'intervalle retenu afin de procéder à la simulation est le suivant :

$$[0.01 \cdot E(100 \cdot \min(\widehat{\sigma}_{0.25}; \widehat{\sigma}_{0.75})); 0.01 \cdot E(100 \cdot \max(\widehat{\sigma}_{0.25}; \widehat{\sigma}_{0.75})+1)]$$

$$\text{Avec : } 0.01 \cdot E(100 \cdot \min(\widehat{\sigma}_{0.25}; \widehat{\sigma}_{0.75})) = 0.01 \cdot E(100 \cdot 0.7656) = 0.76$$

$$0.01 \cdot E(100 \cdot \max(\widehat{\sigma}_{0.25}; \widehat{\sigma}_{0.75})+1) = 0.01 \cdot E(100 \cdot 0.9950+1) = 1.00$$

Ainsi l'intervalle retenu pour l'estimation de  $\sigma$  est [0.76 ;1.00]

| $\hat{\sigma}$ | Quartiles |        | Erreur <sup>2</sup> |
|----------------|-----------|--------|---------------------|
|                | 0.25      | 0.75   |                     |
| 0.76           | 15 000    | 41 814 | 4 859 390           |
| 0.77           | 14 899    | 42 097 | 4 416 455           |
| 0.78           | 14 799    | 42 382 | 4 158 283           |
| 0.79           | 14 699    | 42 669 | 4 087 741           |
| 0.80           | 14 600    | 42 958 | 4 207 755           |
| ....           |           |        |                     |
| 0.95           | 13 196    | 47 531 | 31 051 493          |
| 0.96           | 13 107    | 47 853 | 34 668 827          |
| 0.97           | 13 019    | 48 177 | 38 536 110          |
| 0.98           | 12 931    | 48 503 | 42 657 449          |
| 0.99           | 12 844    | 48 831 | 47 037 024          |
| 1.00           | 12 758    | 49 162 | 51 679 089          |

Table 3.3 : Tableau de calibration du paramètre  $\sigma$

Nous pouvons comparer les quartiles empiriques aux quartiles théoriques :

Données empiriques :

$$P(X < 12\,801) = 25\% \quad P(X < 41\,973) = 75\%$$

$$P(X < 5\,870) = 10\% \quad P(X < 67\,284) = 90\%$$

Nous retenons  $\hat{\sigma}^* = 0.79$  soit en données théoriques :

$$P(X < 14\,699) = 25\% \quad P(X < 42\,669) = 75\%$$

$$P(X < 9\,101) = 10\% \quad P(X < 68\,902) = 90\%$$

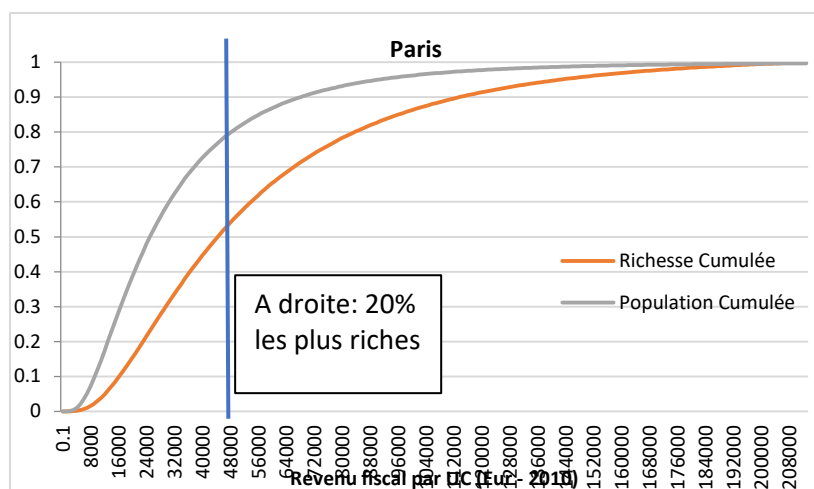


Figure 3.4 : Distribution cumulée

des revenus par foyer fiscal à Paris

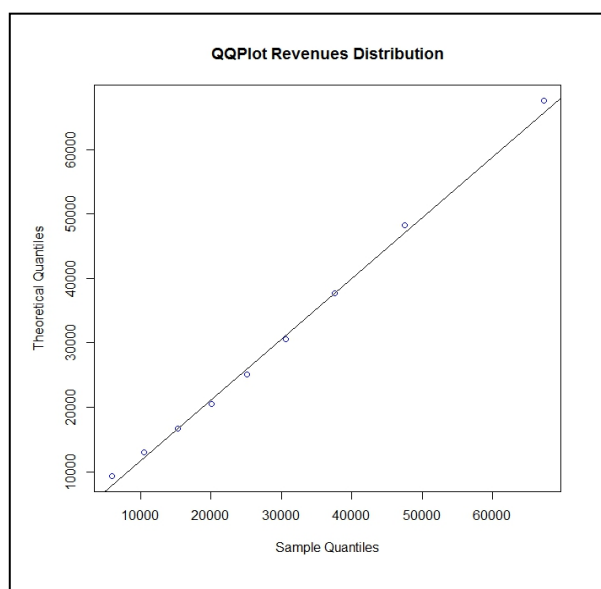
Nous constatons que notre estimation ne permet pas d'affirmer pas que la distribution des revenus suit une loi de Pareto. En effet, les 20% les plus riches ne représentent que 45% des richesses.

Nous effectuons une comparaison quantile-quantile (ici décile-décile) pour vérifier l'erreur d'estimation de la loi log-normale par rapport aux données réelles. Evidemment, le 5<sup>ème</sup> décile (médiane) correspond exactement puisqu'il s'agit d'un paramètre d'estimation :

Table 3.4 : Comparaison quartiles empiriques vs quartiles théoriques Paris

| Paris        | Données réelles | Estimation |
|--------------|-----------------|------------|
| 1er quartile | 12801           | 14 699     |
| Médiane      | 25044           | 25 044     |
| 3e quartile  | 41973           | 42 669     |
| 1er décile   | 5870            | 9 154      |
| 2e décile    | 10425           | 12 882     |
| 3e décile    | 15217           | 16 550     |
| 4e décile    | 20065           | 20 501     |
| 6e décile    | 30665           | 30 593     |
| 7e décile    | 37583           | 37 898     |
| 8e décile    | 47526           | 48 688     |
| 9e décile    | 67284           | 68 520     |

Figure 3.5 : QQ Plot distribution empirique vs distribution théorique Paris

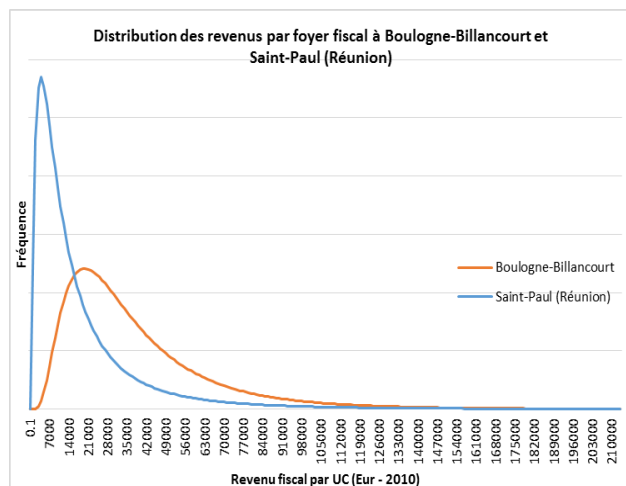


Nous constatons que la loi log-normale permet de restituer fidèlement la distribution empirique. Néanmoins, sur les déciles extrêmes nous constatons une surestimation de la modélisation lognormale.

En effet, la distribution lognormale estime que 10% de la population a un revenu inférieur à 9 154 euros annuels, alors qu'en réalité il s'agit d'un revenu inférieur à 5 870 euros. A l'extrême opposé, la distribution lognormale considère que les Unités de Consommation les 10% les plus aisées ont un revenu supérieur à 68 520 euros, contre 67 284 euros en réalité.

Cela permet de considérer notre estimation comme conservatrice en termes de coût de la population assurée. Nous choisissons de comparer la commune ayant le revenu médian le plus élevé (Boulogne-Billancourt) à celle qui a le revenu médian le plus faible (Saint-Paul (Réunion)).

Figure 3.6 : Comparaison distributions des revenus Boulogne-Billancourt vs Saint-Paul (Réunion)



Ainsi, dans les trois cas présentés, la borne du quantile théorique est supérieure à celle du quantile empirique, renforçant l'aspect conservateur de la distribution log-normale.

#### Distribution des revenus par foyer fiscal en France entière

En utilisant la méthode présentée précédemment pour la distribution lognormale, nous obtenons les paramètres suivants :

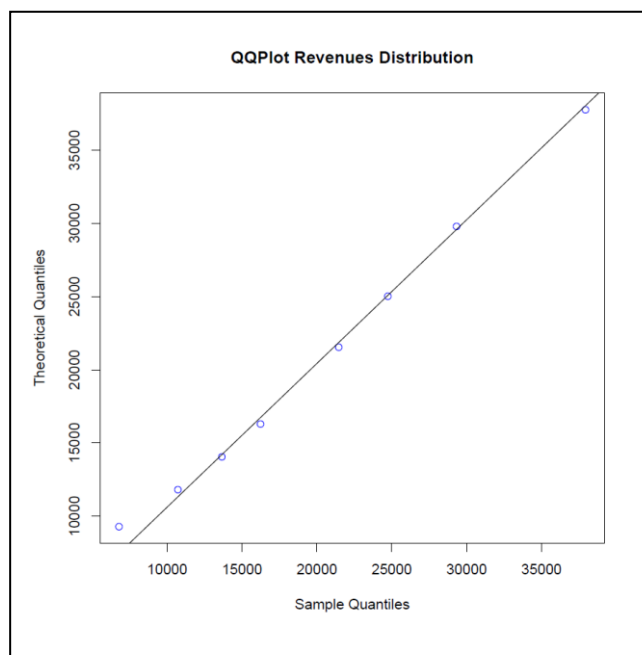
$$\text{Loi log-normale : } \begin{cases} \mu = 9.838896 \\ \sigma = 0.55 \end{cases}$$

Cette distribution sera utilisée par la suite lors de l'application numérique sur l'évaluation de la couverture actuelle de réassurance du Pool BCAC (Chapitre IV)

Table 3.5 : Comparaison quartiles empiriques vs quartiles théoriques France

| France       | Données réelles | Estimation |
|--------------|-----------------|------------|
| 1er quartile | 12266           | 12 938     |
| Médiane      | 18749           | 18 749     |
| 3e quartile  | 26789           | 27 170     |
| 1er décile   | 6785            | 9 304      |
| 2e décile    | 10717           | 11 803     |
| 3e décile    | 13662           | 14 051     |
| 4e décile    | 16239           | 16 310     |
| 6e décile    | 21466           | 21 552     |
| 7e décile    | 24739           | 25 017     |
| 8e décile    | 29336           | 29 784     |
| 9e décile    | 37940           | 37 783     |

Figure 3.7 : QQ Plot distribution empirique vs distribution théorique France



Dans le développement sur les scénarii de risques « Man Made », nous effectuerons une segmentation entre les villes de plus de 100 000 foyers fiscaux et les autres, où les risques de CAT semblent moins présents.

Nous pouvons comparer les quantiles empiriques aux quantiles théoriques :

*Boulogne-Billancourt :*

Données empiriques :

$P(X < 18\,278) = 25\%$                        $P(X < 48\,080) = 75\%$

$P(X < 9\,643) = 10\%$                        $P(X < 72\,777) = 90\%$

Données théoriques :

$P(X < 19\,503) = 25\%$                        $P(X < 48\,527) = 75\%$

$P(X < 13\,140) = 10\%$                        $P(X < 72\,902) = 90\%$

*Saint-Paul (Réunion) :*

Données empiriques :

$P(X < 5\,262) = 25\%$                        $P(X < 23\,123) = 75\%$

$P(X < 688) = 10\%$                        $P(X < 38\,768) = 90\%$

Données théoriques :

$P(X < 5\,923) = 25\%$                        $P(X < 23\,307) = 75\%$

$P(X < 3\,090) = 10\%$                        $P(X < 43\,854) = 90\%$

#### IV.1.2.2. Distribution exponentielle

Nous décidons de tester la calibration de la distribution de la variable aléatoire « revenu fiscal par UC » avec une loi exponentielle.

Densité de la loi exponentielle  $\lambda \in [0, +\infty[$

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pour une commune  $i$  :

$$\text{L'estimation du paramètre } \mu \text{ est directe : } \text{Médiane} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \text{ d'où } \lambda = \frac{\ln(2)}{\text{Médiane}}$$

La difficulté de la loi exponentielle est qu'elle ne possède qu'un seul paramètre donc difficile à ajuster sur toutes les formes de distribution empiriques. Nous nous intéressons donc à la famille dont fait partie la distribution exponentielle, à savoir les lois gamma.

#### IV.1.2.3. Distribution gamma

$$f(x; k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k}$$

La médiane pour une distribution gamma n'admet pas de formule fermée.

La fonction de répartition est la suivante :

$$P(X \leq x) = \frac{\gamma(k, \frac{x}{\theta})}{\Gamma(k)}$$

Le couple  $(k, \theta) \in \mathbb{R}^2$ . Il est ainsi extrêmement difficile de trouver le couple de paramètres – s'il est unique (!) – permettant de faire correspondre la distribution empirique avec la distribution théorique.

Le fait d'estimer en amont la distribution empirique par une distribution lognormale, nous donne un estimateur de l'espérance et de la variance de la distribution.

Ainsi, il pourrait être intéressant de trouver les paramètres de la distribution Gamma  $(k, \theta)$  qui permettent d'obtenir l'espérance et la variance fournies par la distribution lognormale. Nous avons ainsi le système suivant, à l'aide de l'égalité des deux premiers moments :

$$\begin{cases} E(x_{\text{Gamma}}) = E(x_{\text{Lognormale}}) \\ V(x_{\text{Gamma}}) = V(x_{\text{Lognormale}}) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} k\theta = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ k\theta^2 = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{2\mu + \sigma^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{(e^{\sigma^2} - 1)} \\ \theta = (e^{\sigma^2} - 1) \cdot e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \end{cases}$$

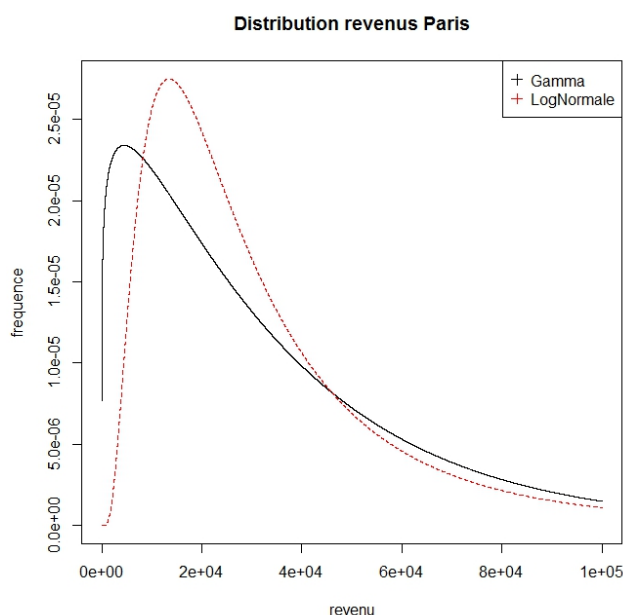


Figure 3.8 : Comparaison distribution lognormale vs distribution gamma (Paris)

Non seulement le résultat n'est pas probant, mais la double erreur d'estimation, l'une en passant de la distribution empirique à la distribution lognormale, puis l'autre en passant de la distribution lognormale à la distribution gamma, est un sérieux handicap à la précision.

Nous préconisons de conserver la distribution lognormale, plus fidèle, et moins compliquée à estimer.

De plus, même si les deux distributions appartiennent aux Domaine d'Attraction Maximal de Gumbel, la loi exponentielle a tendance à s'aplatir plus vite que la loi log-normale dans les extrêmes. La prudence actuarielle nous incite à choisir la distribution lognormale.

### III.2. Fonctionnement de la Réassurance du BCAC

Le Pool catastrophe a été constitué à effet du 1er juillet 1950 entre les Sociétés d'assurances adhérant au Bureau Commun d'Assurances Collectives (BCAC). Depuis cette date, le Comité Directeur du BCAC a été amené à plusieurs reprises à préciser ou modifier certaines des dispositions initiales.

Les Sociétés adhérentes au Bureau Commun d'Assurances Collectives ont constitué un Pool Catastrophe. Il est convenu que l'adhésion au Pool d'une Société d'un Groupe s'étend ipso facto à l'ensemble des Sociétés du Groupe. La notion de membre du Pool est alors reportée sur le Groupe.

L'objet du Pool est de mutualiser les sinistres Décès, Perte Totale et Irréversible d'Autonomie (PTIA) et Invalidité Permanente et Totale (IPT) de portefeuilles de contrats d'assurance de groupe (au sens du Code des Assurances) émis par les membres du Pool, survenus et causés par un même « Evènement ».

Le Pool reprend l'ensemble des garanties en capital ou en rentes.

Il correspond à un principe simple de protection pour compte commun en vue d'assurer une meilleure mutualisation au sein d'une communauté de risques homogènes. Il peut être segmenté en :

- Une rétention à la charge du Pool de co-réassurance de 1<sup>er</sup> niveau
- Un Pool de co-réassurance de 2<sup>ème</sup> niveau

Le Pool est une personne morale, porteur du risque, permettant d'établir les traités de réassurance. Il s'agit d'une technique de protection utilisée pour des risques lourds ou dont la gestion est délicate par manque d'expérience, et ou l'absence de solutions individuelles.

Le mécanisme de co-réassurance de premier niveau peut être décrit comme suit : les sommes sous-risques relatives à la franchise en nombre de têtes par assureur restent à la charge de l'assureur concerné. Les sommes sous-risques au-delà de cette franchise sont prises en charge par le Pool selon une clé de répartition que nous garderons confidentielle.

Le Pool de co-réassurance de premier niveau prend en charge la partie d'un sinistre catastrophe au-delà d'une franchise et dans les limites d'un plafond (par événement et par exercice). Ainsi chaque participant au Pool prend à sa charge une fraction des sinistres, et chaque cédante devient le réassureur des autres.

Les avantages sont :

- Mutualisation des risques du fait d'une plus large base d'expérience
- Cohérence des garanties directes avec la solution de protection
- Bonne connaissance des risques couverts
- Répartition de la capacité sur l'ensemble des participants

Ce à quoi répondent les inconvénients suivants :

- Caractère systématique de la prise en charge d'un événement majeur
- Pénalisation de l'ensemble d'un marché en cas de sinistres très importants
- Pénalisation des cédantes les moins exposées au risque catastrophe
- Appréciation des possibles retombées du Pool
- Mise en commun d'information et appréciation des cumuls

Au-delà de ce Pool de co-réassurance de premier niveau existe un Pool de co-réassurance de deuxième niveau, vendue par des réassureurs de la place, pour lequel chaque membre du Pool, en adéquation avec son exposition au risque catastrophe mesurée relativement aux autres participants doit payer une prime. La prise en charge d'un sinistre touchant un ou plusieurs participants au Pool est mutualisée. L'intervention à chaque catastrophe se fait dans les limites fixées au traité, selon la franchise, la portée et la reconstitution éventuelle de la garantie.

Les avantages sont :

- Le coût de la protection fixe et connu à priori
- La répartition du coût global sur chaque participant au prorata de son exposition
- La connaissance dans l'appréciation du risque catastrophe apportée par les réassureurs
- Pilotage et gestion par un organisme neutre vis-à-vis des assureurs

Les inconvénients sont :

- Le prix de la capacité dépend des évolutions de marché, donc non prévisible
- Total de capacité est limité et fluctue en fonction de la situation du marché

- Les exclusions propres au marché de la réassurance
- Il n'existe pas de « profit sharing » en cas de bonne expérience de la sinistralité (hors « No Claim Bonus »)

En cas de sinistre, la clé de répartition doit être claire et établie à l'avance entre les membres du Pool.

Il existe une franchise : chaque membre du Pool conserve ses deux plus grosses têtes par événement et par risque. Le maximum par tête est de EUR10 millions.

Les assureurs participant au Pool se répartissent la charge de sinistres au prorata des primes décès et invalidité sur l'exercice concerné.

Exemple :

Aujourd'hui, il existe une franchise sur les 2 plus gros montants individuels par assureur membre. La couverture de réassurance est un XS CAT 1.000.000 XS 500.000.

Table 3.6 : Exemple de franchise par têtes

| Réf. Sinistre | Assurance | Montant du sinistre | Franchise du Pool                                  | A charge du Pool de co-assurance avant Réassurance | A charge du Pool de Co-Réassurance |
|---------------|-----------|---------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------|
| 1             | A         | 122 064             |                                                    |                                                    | 122 064                            |
| 2             | A         | 35 006              |                                                    |                                                    | 35 006                             |
| 3             | A         | 523 000             | 523 000                                            |                                                    |                                    |
| 4             | A         | 123 000             | 123 000                                            |                                                    |                                    |
| 5             | B         | 80 000              |                                                    |                                                    | 80 000                             |
| 6             | B         | 230 000             | 230 000                                            |                                                    |                                    |
| 7             | B         | 400 000             | 400 000                                            |                                                    |                                    |
| 8             | C         | 298 000             | 298 000                                            |                                                    |                                    |
| 9             | D         | 38 000              | 38 000                                             |                                                    |                                    |
| 10            | D         | 98 000              | 98 000                                             |                                                    |                                    |
| 11            | E         | 230 000             | 230 000                                            |                                                    |                                    |
| 12            | E         | 69 000              |                                                    |                                                    | 69 000                             |
| 13            | E         | 42 000              |                                                    |                                                    | 42 000                             |
| 14            | E         | 123 000             |                                                    |                                                    | 123 000                            |
| 15            | E         | 320 000             | 320 000                                            |                                                    |                                    |
| 16            | E         | 90 000              |                                                    |                                                    | 90 000                             |
| 17            | E         | 45 000              |                                                    |                                                    | 45 000                             |
|               |           |                     | 2 260 000                                          | 606 070                                            | 106 070                            |
|               |           |                     | A charge du Pool de co-assurance après Réassurance | 500 000                                            |                                    |

Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1970, ce pool fait l'objet d'un traité de réassurance en excédent de sinistres par événement.

### III.3. Définition du Pool : risques couverts, spécificités et structure actuelle du traité de réassurance

Le programme de couverture est une structure de réassurance non-proportionnelle en excédent de sinistre par événement.

Un « Evènement » est par définition tout fait imprévu qui entraînerait « la survenance d'un sinistre ou d'une série de sinistres affectant par un seul et même « accident » trois personnes ou plus assurées par un des membres du Pool ». Source : BCAC

- Risques couverts

Le pool des risques à couvrir est défini en amont de la mise en place du traité de réassurance. Les risques couverts sont les suivants :

- Le Décès toutes causes
- Le Décès accidentel
- La Perte Totale et Irréversible d'Autonomie (PTIA) toutes causes
- La Perte Totale et Irréversible d'Autonomie (PTIA) accidentelle
- L'Invalidité Permanente et Totale

Il est à noter que le risque Incapacité Totale de Travail (ITT) n'est pas couverte dans le Pool, ce alors que la ventilation de la cotisation entre IPT et ITT n'est pas possible dans les contrats.

Le risque PTIA est défini comme suit :

*«Un assuré est reconnu comme atteint d'une Perte Totale et Irréversible d'Autonomie lorsqu'il est dans l'impossibilité absolue et définitive de se livrer à une occupation ou à un travail quelconque pouvant lui procurer gain ou profit et se trouve, en outre, dans l'obligation d'avoir recours à l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie. Il doit en outre, s'il est salarié, être classé en 3ème catégorie d'invalidité par la Sécurité Sociale ou s'être vu attribué un taux d'incapacité permanente de 100% au titre de la législation sur les accidents du travail et les maladies professionnelles, et bénéficier de la majoration pour l'assistance d'une tierce personne».*

Le risque IPT est défini comme suit :

*«Un assuré est considéré comme étant en état d'Invalidité Permanente et Totale lorsqu'il est dans l'impossibilité totale, permanente et définitive d'exercer, même à temps partiel, toute activité ou occupation susceptible de lui procurer gain ou profit ».*

- Territorialité

La territorialité inclut les contrats souscrits en France Métropolitaine, dans les Départements, Régions, Collectivités d'Outre Mer et les Collectivités *sui generis*, ou dans la Principauté de Monaco, et en « Liberté de Prestations de Service » dans l'Union Européenne.

- Exclusions

Le Pool reprend les exclusions prévues par les Conditions Générales et Particulières des Polices originales des membres.

- Franchise

En cas d'événement catastrophique, l'assureur conserve une franchise de ses deux plus grosses têtes et met le reste dans le Pool. Ce Pool est protégé par un traité de réassurance, négocié avec les principaux réassureurs internationaux, à qui il faut expliquer les spécificités françaises de l'assurance collective.

L'Assurance collective (ou assurance-groupe) est un système d'assurance qui s'adresse aux membres d'une collectivité (salariés d'entreprise ou d'institution, profession, emprunteurs), d'une façon obligatoire ou facultative. Ce type de contrat est régi par l'article L141-1 du Code des Assurances.

En 2014, l'assiette estimée pour les Risques Décès/PTIA : EUR 6 549 142 000

En 2014, l'assiette estimée pour les Risque ITT & IPT : EUR 4 337 253 000

Les spécificités du BCAC nécessitent la prise en compte des risques de contagion (groupe) et de dilution (spécificité du portefeuille assuré vs population générale), ainsi que la combinaison de ces deux risques.

Il est à noter que le BCAC n'est pas concerné par les risques hétérogènes en termes de pays multiples ou d'addition d'affaires individuelles et collectives. Par contre, il reste sujet aux risques hétérogènes au sein de la France par la composition de son portefeuille.

- Structure du traité de Réassurance

Ce Pool fait l'objet d'un programme de Réassurance par événement. Au 1<sup>er</sup> janvier 2014, il est structuré comme suit :

- a) un plein de rétention, de EUR30.000.000, conservé par les membres du Pool ;
- b) une première tranche de EUR20.000.000 ;
- c) une seconde tranche de EUR50.000.000 ;
- d) une troisième tranche de EUR100.000.000 ;
- e) une quatrième tranche de EUR100.000.000 ;
- f) une cinquième tranche de EUR100.000.000 ;
- g) une sixième tranche de EUR100.000.000 ;
- h) une septième tranche de EUR100.000.000 ;
- i) une huitième tranche de EUR100.000.000. Cette tranche, rajoutée en 2014, fait l'objet d'un traitement spécifique. Elle correspond à ce qui est dénommé par la suite « Pool Facultatif » ;
- j) au-delà, c'est-à-dire à partir de EUR600.000.000, un excédent de sinistres que les sociétés d'assurance adhérentes conservent à leur charge.

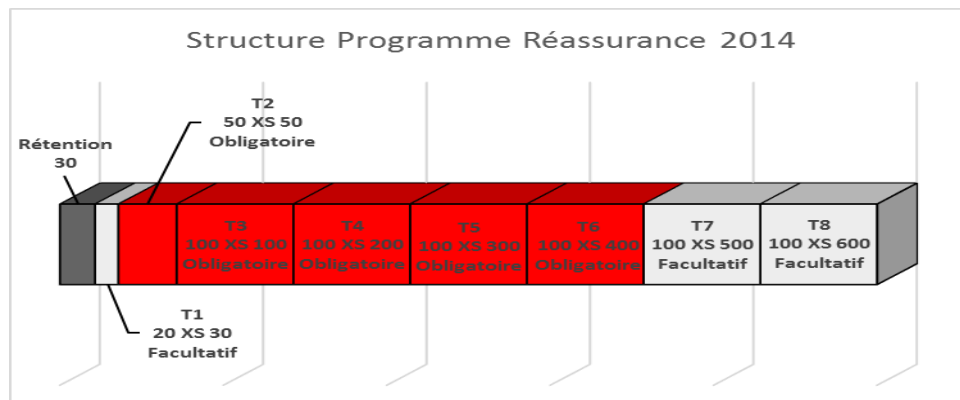
D'après la Table 3.1., les capitaux moyens sous risque de la population assurée étant de 139.130€ pour le risque Décès/PTIA et 191.746€ pour le risque Invalidité, nous pouvons exprimer la priorité et le plafond en fonction du nombre de têtes moyennes (hors la franchise des 2 plus grosses têtes par risque et par membre) :

Table 3.7 : Traduction des priorités et plafonds actuelles en nombre de têtes (estimation)

|                          | Décès | Invalidité |
|--------------------------|-------|------------|
| <b>Priorité 30M Eur</b>  | 216   | 156        |
| <b>Priorité 50M Eur</b>  | 359   | 261        |
| <b>Priorité 600M Eur</b> | 4313  | 3129       |
| <b>Priorité 700M Eur</b> | 5031  | 3651       |

Ainsi, la structure actuelle du Pool de Réassurance commence à intervenir pour un événement impactant  $30.000.000/139.130 = 216$  têtes moyennes pour le risque Décès/PTIA (typiquement un accident d'avion), et ce jusqu'à  $700.000.000/139.130 = 5031$  personnes, ce qui pourrait correspondre à un événement de type World Trade Center. Pour le risque Invalidité, les niveaux correspondent respectivement à  $30.000.000/191.746 = 156$  têtes moyennes et  $600.000.000/191.746 = 3.651$  têtes moyennes.

Figure 3.9 : Structure du Programme de Réassurance 2014 (millionsEUR)



Source : BCAC – La tranche T8 fait l'objet d'un traitement spécifique

Une reconstitution unique par tranche est possible. Cela signifie que la réassurance ne prend en charge qu'au maximum deux événements par tranche.

- Provenance du risque

Les risques proviennent des assureurs membres du Pool. A ce titre, les risques couverts peuvent être très différents en termes de catégories de population, zone géographique, ou garantie fournies.

- Objectif du Pool

Il s'agit d'un Pool de co-réassurance, dans lequel les assureurs membres peuvent mutualiser leurs risques.

- Fonctionnement de la mutualisation

En pratique, la mise en place de la couverture s'effectue en plusieurs phases :

En février de l'année N, les assureurs membres du BCAC se réunissent afin de débiter la réflexion sur la couverture. Cela consiste tout d'abord à faire un bilan de la couverture de l'année passée : a-t-elle bien fonctionné ? En est-on satisfait ? Quid du service du courtier ? Est-il souhaitable de prendre en compte des risques supplémentaires (pandémie ?) ?

Jusqu'à septembre, les portefeuilles des assureurs sont étudiés de façon à bien cerner les risques, et à décider définitivement de la surface du pool : quels sont les risques qu'on décide de mutualiser ? A cette date, les expositions doivent être définies et le BCAC précise les hypothèses et la structure de la couverture au courtier.

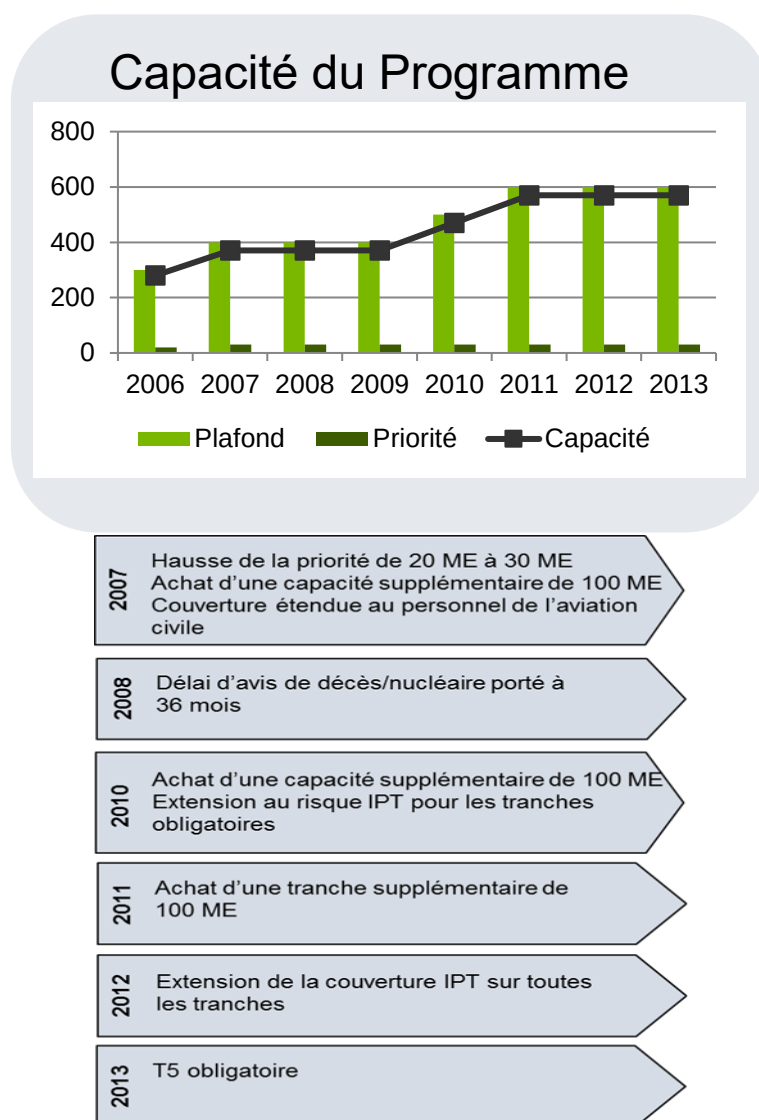
En octobre, ce dernier obtient le feu vert pour commencer à interroger les réassureurs et trouver de la capacité.

Entre novembre et décembre s'effectue une navette entre le BCAC et les réassureurs via le courtier pour finaliser la couverture.

Le BCAC a ses propres critères dans le choix de ses réassureurs : notation et solidité financière (minimum A+, notation S&P), ancienneté, relation commerciale.

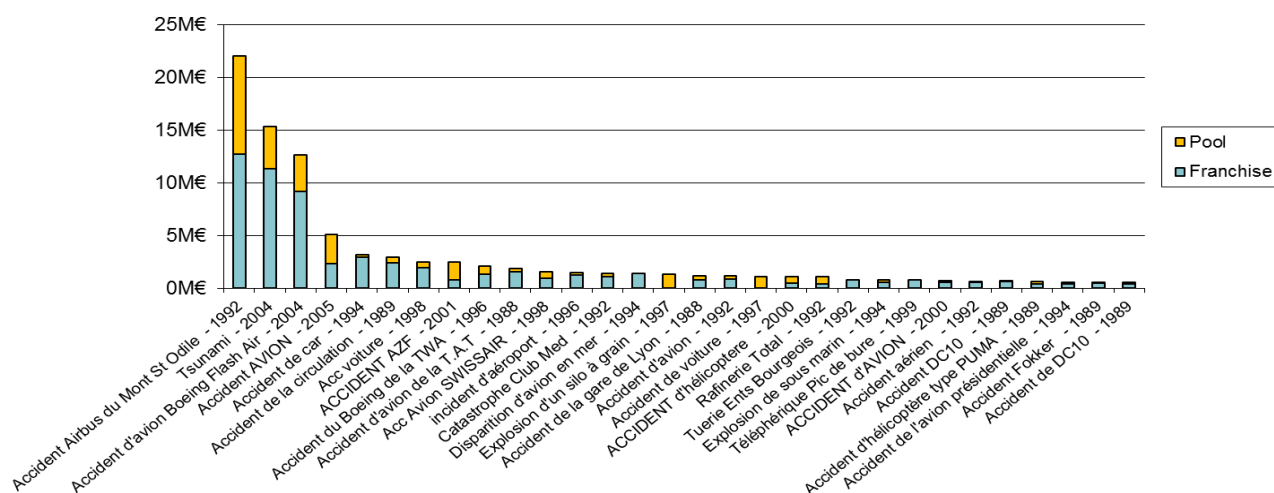
La couverture de réassurance change au fur et à mesure des années, selon le besoin des assureurs membres du pool. La rétention et la portée ont été augmentées par les assureurs au cours des dernières années.

Figure 3.10 : Evolution chronologique de la Capacité du Programme de Couverture en Réassurance du BCAC



Source : BCAC

Figure 3.11 : Pool Catastrophe Décès: les 30 plus importants événements (valeur 2011)



Source: BCAC

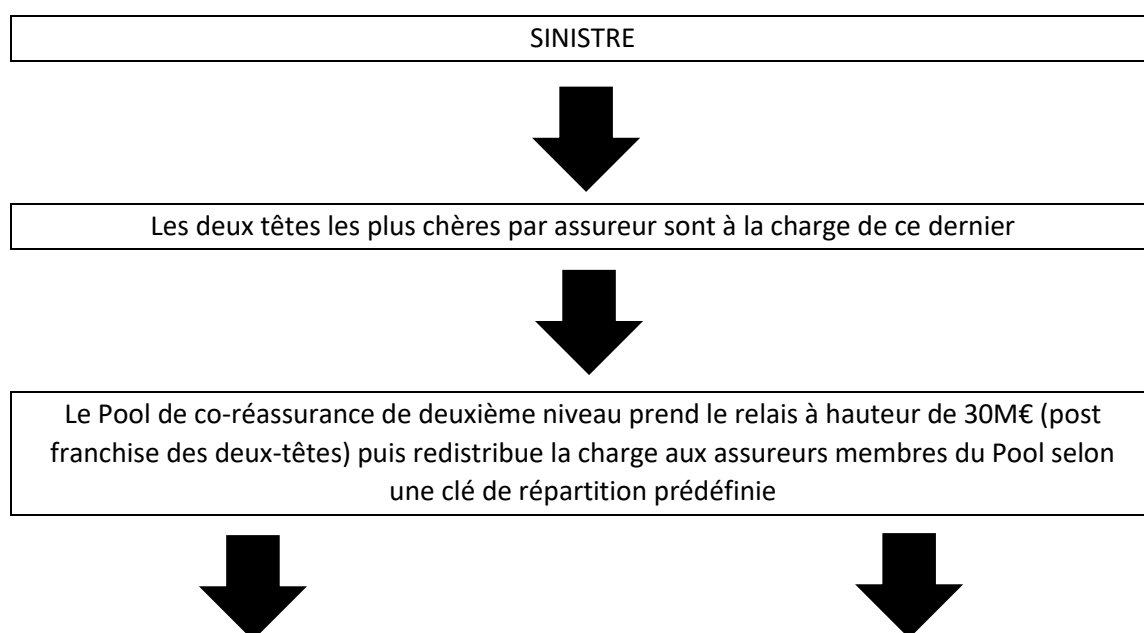
Nous remarquons que la priorité à 30 millions EUR n'a jamais été atteinte. Même pour le plus important des événements – l'accident d'Airbus du Mont St Odile en 1992 – le pool, après franchise des deux plus grosses têtes par assureur, n'a été activé que pour à peine 10 millions EUR.

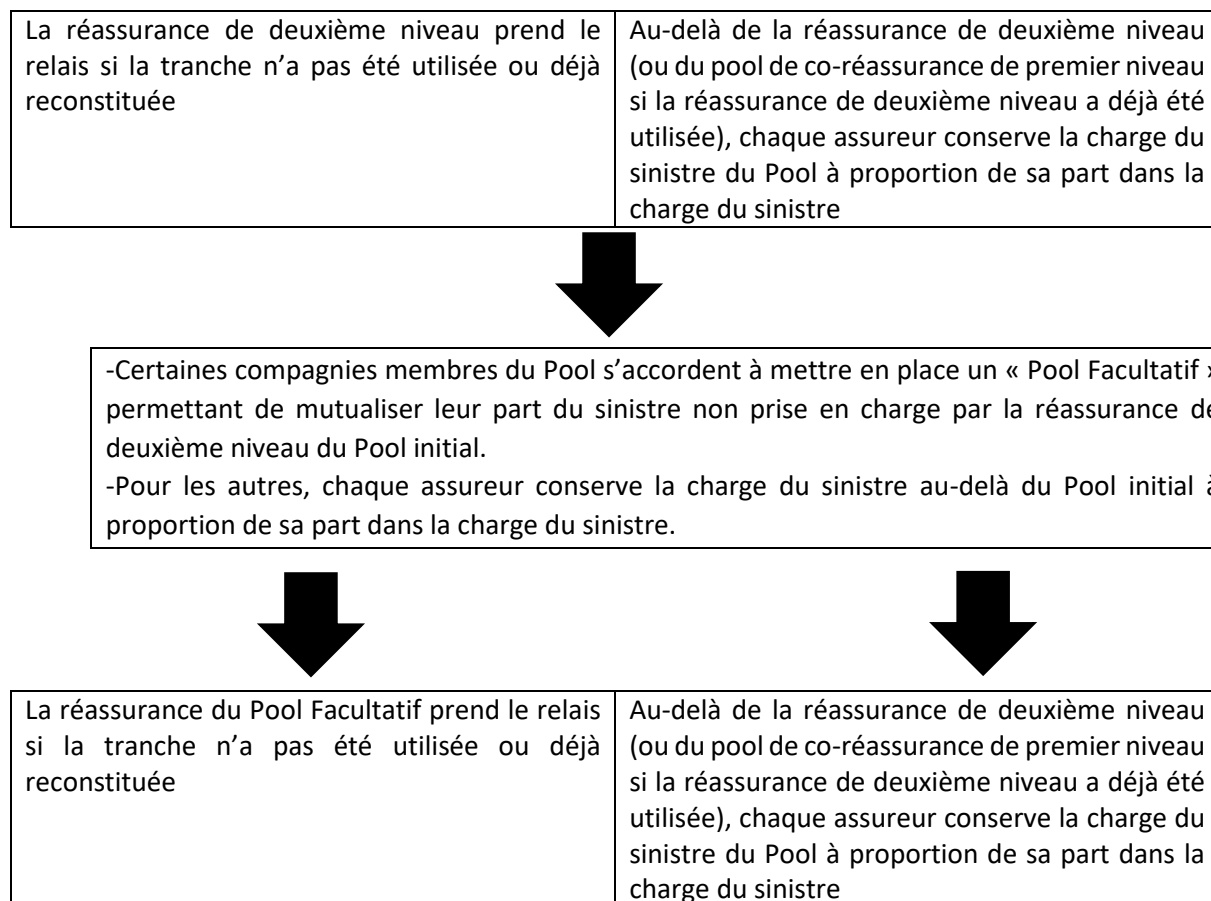
#### - Répartition des primes

Les primes associées à chaque tranche de la couverture de réassurance sont rapportées à la quote-part de chaque société, cette quote-part étant elle-même calculée de manière provisionnelle selon le chiffre d'affaires de la branche décès et arrêt de travail de l'année N-2 (la plus récente disponible).

#### - Résumé du fonctionnement de la couverture de réassurance

Figure 3.12 Résumé du fonctionnement de la couverture de réassurance du Pool CAT BCAC





#### **IV. TARIFICATION DE LA COUVERTURE DE REASSURANCE CAT**

#### IV.1. Les possibilités traditionnelles de couverture

- Individuelles via

**CAT BOND:** Les CAT Bonds sont une forme de titrisation du risque catastrophe. Ils sont principalement utilisés en couverture pour les CAT NAT. Seulement il s'agit d'un marché qui s'adresse exclusivement aux assurances dommages, et nullement aux assurances de personnes.

- Structures de réassurance en proportionnel:

Les réassureurs et la cédante se partagent proportionnellement primes sinistres, le pourcentage pouvant être fixe ou variable.

**QUOTE-PART:** Les cessions se font en pourcentage et sont identiques pour tous les sinistres. La cession désigne le pourcentage qui est conservé par le réassureur. La rétention représente le pourcentage qui est conservé par l'assureur. La capacité du traité constitue le montant maximum que l'assureur peut souscrire pour une police d'assurance donnée.

**EXCEDENT DE PLEIN:** Les cessions sont déterminées par un pourcentage variable selon le type de risque. L'assureur peut décider de conserver un risque en entier. Lorsque le pourcentage de cession pour un risque spécifique est déterminé, la réassurance dite excédent de plein fonctionne comme la réassurance quote-part. Le plein constitue la rétention de l'assureur en montant. Le nombre de pleins pour un traité donné est égal au montant cédé divisé par la rétention de l'assureur. La capacité d'un traité excédent de plein est déterminée par le nombre de pleins soit le montant cédé au réassureur. L'assureur peut céder une fraction d'un plein, il n'est pas tenu de céder des pleins entiers.

- Structures de réassurance en non-proportionnel:

L'assureur retient un certain montant pour chaque perte ou pour chaque ensemble de pertes défini dans la police et le réassureur rembourse à l'assureur l'excédent au-delà de ce montant, jusqu'à une limite pré-établie. Il n'y a pas de lien entre le pourcentage de la prime perçue par le réassureur et le pourcentage des sinistres cédés.

**EXCEDENT DE SINISTRE PAR RISQUE:** Le réassureur paie la partie du sinistre qui excède un montant pré-établi. La couverture s'applique donc séparément pour chaque sinistre de chacun des risques d'assurance. Une définition précise de chaque risque s'impose dans le traité de réassurance. De plus, il peut y avoir plusieurs tranches de garantie.

**STOP LOSS OU EXCEDENT DE PERTE ANNUELLE:** Cette couverture permet à l'assureur de limiter ses pertes annuelles à un montant pré-établi, l'excédent étant réassuré. Un plafond pour le réassureur peut être prévu.

**EXCEDENT DE SINISTRE PAR EVENEMENT:** Le réassureur paie la partie du sinistre qui excède un montant pré-établi. Les pertes découlant d'un même événement sont regroupées et le réassureur rembourse le montant de la perte globale qui excède le montant pré-établi. Une définition précise de la notion d'événement s'impose dans le traité de réassurance. Il peut y avoir plusieurs tranches de garanties. C'est le type de couverture actuellement choisi par le BCAC.

#### IV.2. Pratiques de tarification

#### IV.2.1. Le tarif, lié à la capacité des réassureurs ?

Comme exposé dans la problématique de ce travail, il s'avère qu'aujourd'hui, le tarif correspond à un appétit au risque des réassureurs. Pour reprendre un élément communiqué par un interlocuteur expérimenté :

*« Il y a 20 ans, le RoL tournait autour de 1%, contre 1% aujourd'hui, l'explication du décuplement du prix est lié à la crise de l'industrie de la réassurance en 2000, avec la découverte du caractère fondamentalement risqué de la réassurance [...], plus risqué et cyclique que ce que les marchés et les experts pensaient jusqu'à présent. De ce point de vue, le triple choc auquel la réassurance a été confrontée au début des années 2000 - avec le cumul de l'attentat du World Trade Center, de la crise des marchés financiers et du retournement de la conjoncture -, et qu'elle a pu absorber sans défaillance significative, a joué le rôle de révélateur du nouvel environnement de la réassurance et de catalyseur de son adaptation »<sup>32</sup>.*

En France, la capacité achetée au titre de la réassurance catastrophe progresse de façon continue depuis 2009. Le BCAC aujourd'hui compte pour près de 25% :

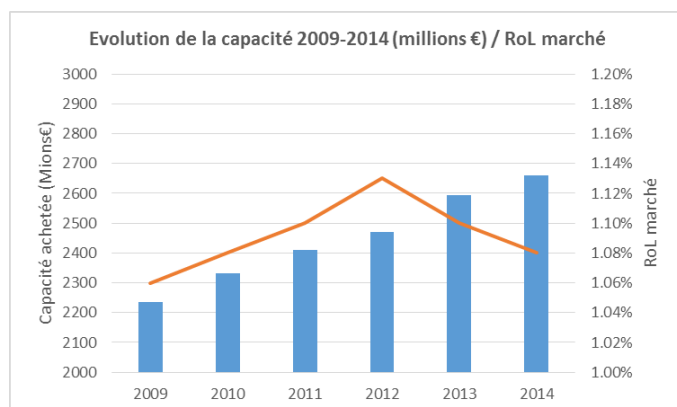


Figure 4.1 : Evolution de la capacité achetée (bleu) entre 2009 et 2014 vs RoL marché (orange)

Nous ne pouvons constater que la volatilité anémique du RoL de marché, qui évolue entre 1.06% et 1.13%. Ainsi, tout se passe comme si en l'absence d'événement majeur, le prix se comportait comme une martingale, au sens mathématique :

$$E(P_t | \mathcal{F}_{t-1}) = P_{t-1}$$

Voire une surmartingale, au vu de l'augmentation structurelle du capital des principaux réassureurs :

$$E(P_t | \mathcal{F}_{t-1}) < P_{t-1}$$

Dans le premier cas, le meilleur estimateur du prix de la couverture pour l'année  $t$  est le prix de la couverture de l'année passée. Dans le deuxième cas, nous intégrons une érosion du prix liée à l'appétit croissant des réassureurs pour le risque dans le but de rémunérer leur capital, dans un contexte actuel de rendements anémiés pour les classes d'actifs traditionnelles. Les réassureurs font face à un fort biais d'ancrage (du prix de l'année précédente) lors du calcul du tarif de l'année actuelle.

Nous pouvons mettre ces données en perspective avec l'évolution du capital des 40 principaux réassureurs mondiaux :

<sup>32</sup> TRAINAR P. (2004), Directeur des affaires économiques, financières et internationales. FFSA

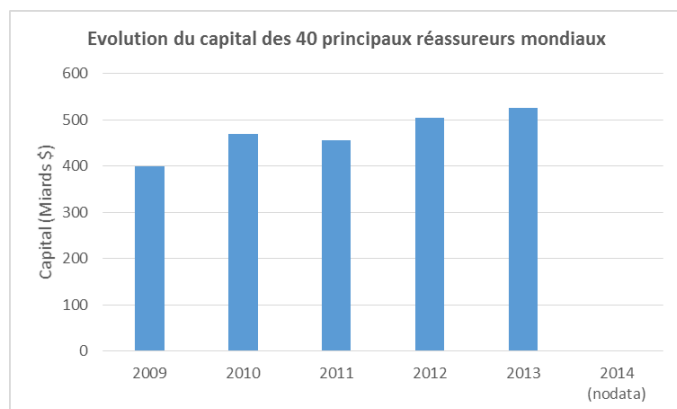


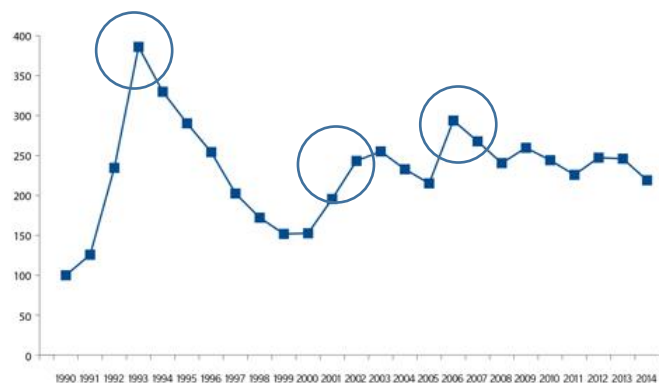
Figure 4.2 : Evolution de la capacité des réassureurs entre 2009 et 2014

La taille très réduite du marché CAT en vie par rapport au marché CAT en non-vie n'incite pas les réassureurs à investir massivement dans ce domaine, ces derniers préférant privilégier leurs efforts, et de recherche et de compétitivité-prix sur le marché majeur.

#### IV.2.2. Des tarifs très cycliques

Face à l'insuffisance de la couverture sur les marchés matures, il y a un intérêt à faire évoluer la chaîne de couverture des risques. La nature cyclique des tarifs est un exemple de cette insuffisance : on remarque une augmentation juste après un événement, comme si la réalisation de ce dernier a rappelé aux acteurs la non-nullité de sa probabilité d'occurrence. On peut modéliser ce biais de mémoire humaine courte via le graphique de l'évolution – dans les grandes lignes – du tarif d'une couverture de la façon suivante<sup>33</sup>:

Figure 4.3: Global Property Catastrophe RoL Index : 1990-2014



Source : Guy Carpenter

Les cercles bleus indiquent la survenance d'événements CAT à l'origine d'un renchérissement brutal des tarifs (équivalent à un ajustement des paramètres d'occurrence dans les modèles). Au fur et à mesure que le souvenir de l'événement se dissipe, les tarifs diminuent.

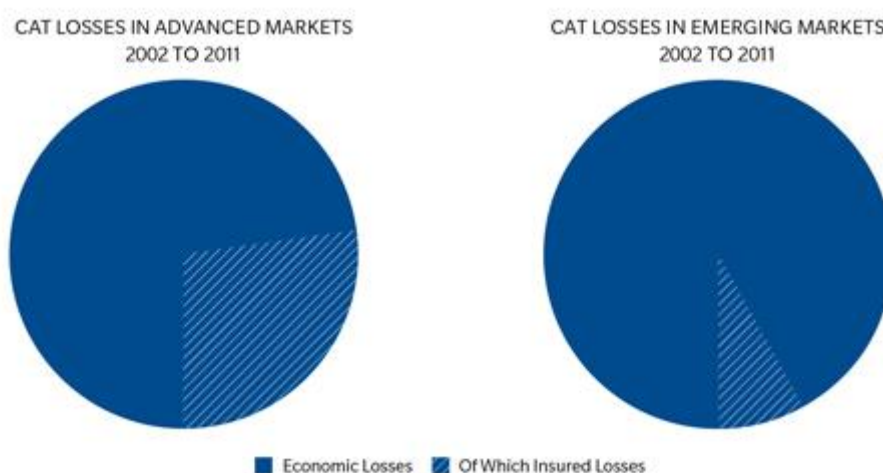
<sup>33</sup> THEVENIN L. (2014) : Pourquoi les prix de la réassurance ont beaucoup baissé au 1<sup>er</sup> janvier.  
<http://www.LesEchos.fr>

L'indice ROL (World Catastrophe Rate-On-Line) corrobore (pour les risques non-vie) cette évolution cyclique des tarifs des couvertures CAT.

Lors du renouvellement de janvier 2014, les prix des couvertures CAT ont très sensiblement diminué dans leur globalité, sous pression devant le nombre limité de catastrophes en 2013, et la multiplication des offres de réassurance.

Munich Re estime le coût des catastrophes naturelles à 125Mds\$ en 2013, dont 44Mds\$ (Swiss Re). Les événements significatifs dans les marchés matures pénétrés par l'assurance sont les inondations en Allemagne et au Canada, alors que les Philippines, marché globalement très peu couvert a souffert du typhon Haiyan. Cette évolution est symbolique d'un marché en surcapacité d'offre (avec des réassureurs surcapitalisés, en concurrence à l'affut d'opportunités pour prendre du risque) face à une demande qui ne se développe pas suffisamment rapidement dans les pays émergents. A cela, il faut ajouter le déclin des demandes de réassurance des assureurs dans les pays développés, qui face à la moindre réalisation des risques extrêmes, estiment avoir les moyens de conserver leurs risques.

Figure 4.4 : Montant des sinistres dans les pays développés et les pays en développement (Total et Assurés)



Source : Guy Carpenter, Swiss Re

#### IV.3. Application pratique sur le Pool BCAC

L'approche par scénario permet, dans le cadre de Solvabilité 2, d'apprécier la capacité nécessaire à la couverture du Pool. Rappelons que les modèles connus (Strickler, Ekheden) prennent en compte uniquement le risque Décès, et que RMS préconise d'appliquer un extra de 10% pour prendre en compte l'aspect Invalidité<sup>34</sup>.

<sup>34</sup> RMS (2004): Catastrophe, Injury and Insurance. The Impact of Catastrophes on Workers Compensation, Life and Health Insurance

#### IV.3.1. La base de données

##### *IV.3.1.1. Base de données EM-DAT*

Pour déterminer l’historique des catastrophes naturelles, de transport et technologiques, nous utilisons la base de données EM-DAT (*EMergency Events DATabase*<sup>35</sup>). Depuis 1988, avec le soutien de l’OMS et du Gouvernement Belge, le CRED (*Center for Research on the Epidemiology of Disasters*) tient une liste exhaustive des événements catastrophiques majeurs recensés dans le monde entier. L’objectif principal est d’aider les associations humanitaires au niveau national et international en tenant à leur disposition une base de données, afin de permettre d’élaborer les actions de façon cohérente et coordonnées, à l’aune des événements historiques. Plus de 18.000 catastrophes de masses sont recensées, les sources étant des agences de l’ONU, des organisations non-gouvernementales, des compagnies d’assurance, des instituts de recherche ou des agences de presse.

Il existe dans cette base de données des biais. Le biais principal réside dans la surreprésentation des événements ayant impacté la Belgique. Un autre biais se trouve dans les critères nécessaires à l’intégration d’un événement dans la base EM-DAT. Au moins un des critères suivants doit être respecté :

- Au moins 10 décès
- Au moins 100 personnes affectées
- Déclaration de l’état d’urgence
- Appel à la solidarité internationale

La base de données s’étale de 1900 à 2015 avec une surreprésentation des événements en 1990, date du début de la construction, et donc sujette à un effet de seuil.

Nous ne retenons que les catégories d’événements correspondant au cadre d’intervention du Pool : par exemple, les cas de canicule (comme en Europe en 2003) n’entrent pas en compte.

Néanmoins, nous constatons que les événements de type terroriste ne sont pas pris en compte dans la base EM-DAT, ce alors que le contexte international fait porter l’attention des assureurs sur ce sujet. En effet, la fréquence des événements catastrophiques naturels et technologiques étant assez régulière dans le temps, il est difficile de dire la même chose du terrorisme. Il est donc important de le prendre en compte dans la construction de notre base de données.

##### *IV.3.1.2. Base de données GTD*

A cet effet, nous utilisons la base de données GTD (*Global Terrorism Database*). Il s’agit d’une base de données ouverte recensant l’ensemble des actes considérés comme terroriste dans le monde depuis 1970 jusqu’à 2014, et mise en ligne par l’Université du Maryland, aux Etats-Unis. Elle contient aujourd’hui plus de 140.000 événements. L’année 1993 n’est pas (ou mal) recensée.

Forts de ces deux sources d’informations, nous sommes en mesure de construire notre base de données. Nous choisissons de conserver les données de 1994 à 2014, incluses, soit 21 années d’information plutôt récente, et plus proche de notre façon de vivre que les informations remontant aux années 1970 ou 1980.

En termes de proximité géographique, socio-culturelle et de niveau de développement, nous conservons uniquement les événements relatifs aux pays de l’OCDE (Organisation de Coopération et

---

<sup>35</sup> <http://www.emdat.be/>

de Développement Economiques<sup>36</sup>), soit à 2016, 34 pays membres à travers le monde, de l'Amérique du Nord et du Sud et à l'Europe et l'Asie-Pacifique, parmi les pays les plus avancés, mais aussi des pays émergents comme le Mexique, le Chili et la Turquie. Si la période 1994-2014, n'est pas concernée, nous posons néanmoins pour principe de conserver dans l'historique les pays ayant pu disparaître par dislocation de l'Etat ou fusion. (exemples de la Tchécoslovaquie, RFA, RDA..)

Il est à noter néanmoins que la base EM-DAT fournit les événements par catégorie, et non par événement. Ainsi, nous devons faire un choix lorsque plus d'un événement est recensé par catégorie avec la somme des victimes afférentes.

Par exemple, nous avons la sortie suivante :

Table 4.1 : Sortie EM-DAT

|      |                        |                      |    |     |
|------|------------------------|----------------------|----|-----|
| 2014 | Industrial accident    | Explosion            | 1  | 301 |
| 2014 | Industrial accident    | Other                | 2  | 28  |
| 2014 | Landslide              | Landslide            | 2  | 125 |
| 2014 | Miscellaneous accident | --                   | 1  | 21  |
| 2014 | Miscellaneous accident | Collapse             | 2  | 24  |
| 2014 | Miscellaneous accident | Explosion            | 1  | 2   |
| 2014 | Miscellaneous accident | Fire                 | 1  | 32  |
| 2014 | Storm                  | Convective storm     | 30 | 270 |
| 2014 | Storm                  | Extra-tropical storm | 4  | 7   |
| 2014 | Storm                  | Tropical cyclone     | 14 | 68  |
| 2014 | Transport accident     | Air                  | 1  | 11  |
| 2014 | Transport accident     | Rail                 | 2  | 10  |

Source : EM-DAT

La première colonne se rapporte à l'année de survenance, la deuxième au type d'événement, la troisième précise cet événement, la quatrième précise le nombre d'occurrences durant l'année, puis la cinquième et dernière mentionne le nombre total de morts au cours de **l'ensemble des événements recensés en colonne 4, sans mentionner le nombre de morts par événement**.

En premier lieu, nous choisissons dans ce cas d'effectuer le calcul suivant pour l'affectation du nombre de décès par événement :  $Nombre_{décès\ par\ événement} = partie\_entière\_par\_excès \left\lfloor \frac{nbre\_décès}{nbre\_événements} \right\rfloor$ .

Mais nous nous rendons rapidement compte de l'erreur que nous effectuons en particulier, en anticipant les difficultés de calibration que cela va créer par la suite : en effet, cela crée des pics de sinistres par nombre de victimes. Ainsi, nous reconstituons la base de données par l'aléatoire, à travers la méthode suivante :

Partant du principe que nous n'avons aucune idée de la répartition des décès entre les événements, nous utilisons l'aléa :

$$n < -\text{nombre de décès total pour l'ensemble des événements regroupés}$$

$$e < -\text{nombre d'événements regroupés}$$

$$\text{Nombre de victimes du } i\text{ème événement } i \in [1, e]: N_i$$

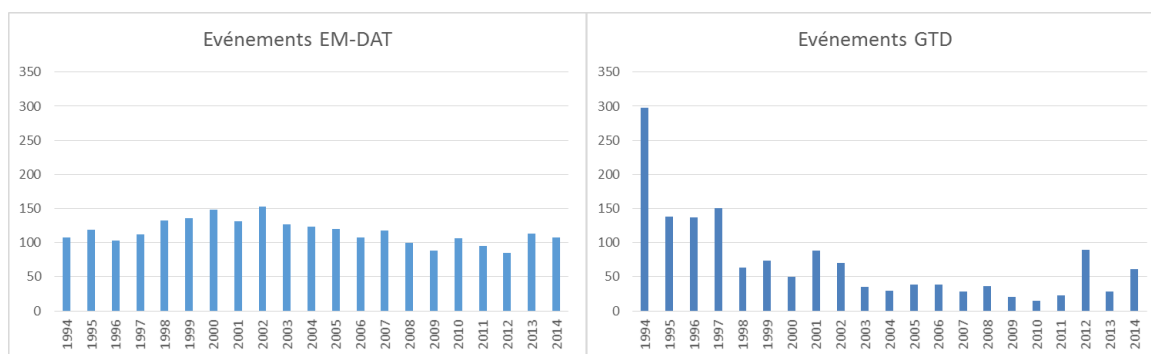
$$\rightarrow U\left(1, \left\{ n - \min(e, n) + 1 - \sum_{j < i} N_j + (i - 1) \right\}\right)$$

<sup>36</sup> <http://www.oecd.org/fr/>

$$\text{Nombre de victimes du Nème événement} \rightarrow U(1, \left\{ n - \sum_{j < N} N_j \right\})$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle base de données stochastique pour les événements de la base EM-DAT. Il est à noter que nous ne conservons dans notre base de données uniquement les événements ayant engendré au moins un décès.

Figure 4.5 : Histogrammes annuels des événements EM-DAT et GTD



Nous pouvons constater une certaine stationnarité de la série temporelle issue de la base EM-DAT, alors qu'il existe une tendance décroissante très significative pour la base GTD. Ainsi, il est impossible – étant donné que nous intégrons à notre base de données globale, la base GTD – d'utiliser une loi de Poisson traditionnelle pour calibrer l'occurrence des événements par an. Nous devons utiliser une loi mélange Poisson-Gamma aussi appelée Loi Binomiale Négative.

#### IV.3.2. Calibration des paramètres

##### V.3.2.1. Calibration des sommes sous risque

Le Pool du BCAC présente une assiette estimée de prime Décès PTIA de plus de 6.5Milliards d'Euros, en 2014.

Le BCAC couvrant près de 9.000.000 d'actifs peut voir la distribution de la somme sous risque par assuré, approximée par la distribution de la variable aléatoire « revenu fiscal par UC », au niveau national.

##### IV.3.2.2. Segmentation du marché en assurance collective

Comme présenté plus haut, le Pool CAT du BCAC regroupe 36 assureurs majeurs. Une idée précise des parts de marché est indispensable étant donné que la franchise du contrat de réassurance agit par cédante.

##### IV.3.2.3. Spécificités du BCAC

La spécificité majeure de la couverture du BCAC réside dans la franchise des deux principales têtes par membre, qui restent à la charge de l'assureur. Ainsi, une bonne estimation de la distribution des sommes sous risques, ainsi que la part de marché de chaque assureur membre du Pool sont deux

éléments indispensables. Il est à noter également que le sinistre individuel par risque est limité à 10 millions d'euros.

De plus, nous rappelons que le BCAC regroupe un portefeuille d'assurances collectives avec les risques de concentration géographique des risques et des engagements que cela implique (CF partie III).

Il existe également une clause de « *No Claim Bonus* » ou Bonification pour absence de sinistre par tranche qui entraîne le remboursement par le Réassureur à la Cédante 10% de la prime de réassurance hors courtage de la tranche concernée, si aucun sinistre n'est mis à la charge de ladite tranche.

Enfin, il faut tenir compte de la reconstitution à 200% spécifique au BCAC.

#### IV.3.3. Nouvelle base de modélisation par Monte-Carlo : les étapes

##### IV.3.3.1. Vision d'ensemble

Dans ce modèle que nous proposons, il s'agit d'exprimer chaque paramètre à l'aune d'une estimation robuste et étayée. Une critique qui pourrait être faite à l'encontre des modèles précédents, au-delà des limites de Strickler, est la complexité des paramètres, leur nombre et surtout leur difficulté à être estimés.

De plus, le contrat du BCAC présente la spécificité d'un pool, à savoir que le retraitement des plus grosses têtes se fait par assureur membre, et non sur l'ensemble des victimes du sinistre. Dans ce cas, la procédure repose sur des simulations Monte-Carlo, cette approche permettant d'ajuster selon les caractéristiques du contrat de l'assureur le produit à évaluer :

*Etape 0 :*

Inputs :

Choix des paramètres : choix de la période  $t$ , répartition des tranches de la couverture de réassurance, nombre et prix des clauses de reconstitution par tranche, nombre de têtes par franchise, choix ou non de la prise en compte globale de l'IPT, choix ou non du No Claim Bonus par tranche, fichiers EM-DAT, GTD, et INSEE.

Choix des chargements pour passer de la prime pure à la prime commerciale<sup>37</sup>.

$$prime_{com} = prime_{pure} \cdot \frac{(1 + \text{chargements du réassureur})}{(1 - \text{frais courtage})} = prime_{pure} \cdot \alpha$$

Nous posons :

*chargements du réassureur*: 20%

*frais courtage*: 10%

Calibration des distributions :

<sup>37</sup> BLONDEAU J., PARTRAT C. (2003) : La Réassurance. *Economica*

- Lognormales pour les sommes sous-risques de la population française. (risques catastrophes autres que terroristes)
- Lognormales pour les sommes sous-risques de la population parisienne. (risque terroriste)
- Binomiale-Négative pour la probabilité d'occurrence d'événements Catastrophes Naturels et non Terroristes (base EM-DAT)
- Binomiale-Négative pour la probabilité d'occurrence d'événements Terroristes (base GTD)
- Zêta ou GPD pour le nombre de victimes par sinistre naturel et non terroriste (base EM-DAT). Cette base de données étant stochastique, nous calibrons la distribution Zêta sur  $N$  simulations et conservons le paramètre  $s$  le plus fréquent.
- Zêta ou GPD pour le nombre de victimes par sinistre terroriste (base GTD)

➔ Première simulation

*Etape 1 :*

Simulation du nombre  $K$  d'événements Catastrophes Naturelles et Man Made (excepté terrorisme) dans la période, sur la base d'une loi Binomiale Négative calibrée sur la base EM-DAT.

Simulation du nombre  $L$  d'événements Terroristes sur la période, sur la base d'une loi Binomiale Négative calibrée sur la base GTD.

Définir si chacun des événements  $K$  et  $L$  a lieu en France, sur la base d'une loi de Bernoulli, de probabilité  $\frac{\text{population française}}{\text{population de l'OCDE}}$ <sup>38</sup>.

*Etape 2 :*

Simulation du nombre de décès par événement sur la base des distributions Zêta (ou GPD), respectivement pour les données issues de la base EM-DAT et celles issues de la base GTD.

*Etape 3 :*

Simulation de la part de personnes assurées dans le total des personnes victimes de l'événement.

Répartition du nombre de décès par événement et par assureur.

*Etape 4 :*

Coût Moyen d'une victime assurée sur la base des distributions lognormales calibrées lors de l'étape 0. Calcul du coût de chaque sinistre de l'année. Calcul de la part de chaque sinistre éligible à la mutualisation dans le Pool. Prise en compte du retraitement des deux têtes les plus importantes par assureur.

*Etape 5 :*

Fusion des deux bases de données d'événements et réorganisation aléatoire de l'ordre d'apparition des événements, pour chaque simulation, l'ordre d'occurrence étant important pour la clause de reconstitution. Nous supposons l'absence de saisonnalité et de *clustering*.

<sup>38</sup> <http://stats.oecd.org/index.aspx?lang=fr>

**Etape 6 :**

Impact par tranche. Prise en compte et valorisation de l'option de reconstitution et *No Claim Bonus*.

➔ Nouvelle simulation

Il est à noter que le nombre de simulation se doit d'être important, en particulier étant donné le nombre d'événements recensés dans les bases de données (>5.000). Nous considérons cohérent que chaque valorisation s'effectue sur la base de 100.000 de simulations, choix que nous validerons par une démarche scientifique à venir.

Notre méthode de valorisation est *backward*, c'est-à-dire ex-post. Nous valorisons la charge – par tranche -du réassureur à la fin de chaque période que nous convertissons en prime initial pour le Pool. La procédure est expliquée dans le développement qui suit.

En raison d'une problématique d'optimisation du temps de calcul, nous supposons la stationnarité forte de nos distributions simulées : un sous-échantillon choisi aléatoirement au sein de l'échantillon global suit la même loi que ce dernier : par exemple, la distribution du nombre de décès par événement en France est la même que la distribution du nombre de décès par événement dans l'OCDE.

Nous supposons une homogénéité des caractéristiques des assurés quel que soit l'assureur duquel ils dépendent : distribution des sommes sous-risques, risque de concentration.

La souscription des tranches est soit obligatoire, soit optionnelle (pour les tranches 1 et 7), c'est-à-dire au choix de l'assureur membre du Pool de souscrire. Dans l'approche de tarification, nous supposons que l'ensemble des assureurs a choisi de souscrire aux tranches optionnelles : ceci n'a pas d'impact sur le tarif, étant donné que la somme sous risque du Pool n'est pas modifiée. Par contre, seule la part à la charge de l'assureur qui n'a pas choisi de se réassurer ne lui sera pas remboursée par le réassureur.

*IV.3.3.2. Etape 1 : calibration des lois fréquence*

Il s'agit de calibrer séparément d'un côté la probabilité sur une période  $t$  donnée d'occurrence d'un événement catastrophique, naturel et technologique et d'un autre côté la probabilité pour la même période d'occurrence d'un événement terroriste. Pour rappel, l'estimation par Maximum de Vraisemblance d'une loi de Poisson traditionnelle :

$$L(\lambda t) = \prod_{i=1}^{N/t} \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^{k_i}}{k_i!}$$

$$l(\lambda t) = \left( \sum_{i=1}^{N/t} k_i \right) \cdot \ln(\lambda t) - \frac{N}{t} \cdot \lambda t - \ln(k_i!)$$

$$\frac{dl(\lambda t)}{d(\lambda t)} = \left( \sum_{i=1}^{N/t} k_i \right) \cdot \frac{1}{\lambda} - N = 0$$

$$\text{d'où } \lambda t = \frac{(\sum_{i=1}^{N/t} k_i) \cdot t}{N}$$

Tout d'abord, nous analysons les moments d'ordre 1 et 2 centrés réduits afin de détecter la loi qui conviendrait le mieux à nos jeux de données :

Table 4.2 : Choix de la loi Fréquence

| Loi                | E(X) vs $\sigma^2(X)$ |
|--------------------|-----------------------|
| Binomiale          | $E(X) > \sigma^2(X)$  |
| Poisson            | $E(X) = \sigma^2(X)$  |
| Binomiale Négative | $E(X) < \sigma^2(X)$  |

Nous constatons que pour les deux bases de données –EM-DAT comme GTD – la variance non-biaisée de l'échantillon excède significativement l'espérance.

Ainsi, pour calibrer la probabilité d'occurrence d'un événement terroriste et pour calibrer la probabilité d'occurrence d'un événement naturel ou technologique, nous choisissons de nous diriger vers une Loi mélange Poisson-Gamma, ou Binomiale Négative.

Afin d'estimer les paramètres de la distribution, nous procédons par la méthode du maximum de logvraisemblance. Nous utilisons la densité de la loi telle qu'implémentée dans le logiciel **R**.

$$L(r, p) = \prod_{i=1}^{N/t} f(k_i; r, p)$$

$$L(r, p) = \prod_{i=1}^{N/t} \frac{\Gamma(k_i + r)}{\Gamma(r) k_i!} \cdot (1 - p)^{k_i} \cdot p^r$$

$$l(r, p) = \sum_{i=1}^{N/t} \ln(\Gamma(k_i + r)) - \frac{N}{t} \cdot \ln(\Gamma(r)) - \sum_{i=1}^{N/t} \ln(k_i!) + \sum_{i=1}^{N/t} k_i \cdot \ln(1 - p) + \frac{N}{t} \cdot r \cdot \ln(p)$$

$$\frac{dl(r, p)}{dp} = - \sum_{i=1}^{N/t} k_i \cdot \frac{1}{1 - p} + \frac{N}{t} \cdot \frac{r}{p} = 0 \rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^{N/t} k_i}{\frac{N}{t} + \sum_{i=1}^{N/t} k_i}$$

$$\frac{dl(r, p)}{dr} = \sum_{i=1}^{N/t} \frac{\Gamma'(k_i + r)}{\Gamma(k_i + r)} - \frac{N}{t} \cdot \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} + \frac{N}{t} \cdot \ln(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{N/t} \frac{\Gamma'(k_i + r)}{\Gamma(k_i + r)} - \frac{N}{t} \cdot \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} + \frac{N}{t} \cdot \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{N/t} k_i}{\frac{N}{t} + \sum_{i=1}^{N/t} k_i}\right) = 0$$

Ainsi, nous obtenons l'estimateur du maximum de logvraisemblance, mais une méthode numérique est nécessaire, de type Newton-Raphson. Cela nécessite la mise en place d'algorithmes dont la vitesse de convergence est à calculer, et qui dépendent beaucoup de leur point d'initiation.

Une autre méthode – moins calculatoire et plus directe – existe, et repose sur les premiers moments de la distribution empirique. Nous privilégions celle-ci :

En partant des moments empiriques centrés d'ordre 1 et 2, nous obtenons :

$$\begin{cases} E(X) = r \cdot \frac{1 - p}{p} \\ \sigma^2(X) = r \cdot \frac{1 - p}{p^2} \end{cases}$$

Ainsi nous pouvons estimer les paramètres  $\hat{r}$  et  $\hat{p}$  :

$$\hat{p} = \frac{\widehat{E(X)}}{\widehat{\sigma^2(X)}}$$

$$\hat{r} = \frac{\widehat{E(X)^2}}{\widehat{\sigma^2(X) - E(X)}}$$

Il est à noter dès ce stade, que nous pouvons envisager une protection de réassurance sur une maturité supérieure à 1 an. Ainsi, la calibration de nos paramètres doit s'effectuer sur une base de données présentant des données de fréquence correspondant au nombre entier d'années choisi pour la couverture de réassurance. Par exemple, si cette dernière est prévue pour couvrir les trois prochaines années, les données des bases EM-DAT et GTD doivent être aménagées pour correspondre à cette fréquence historique triannuelle, en *non-overlapping*. Le nombre de périodes disponibles correspond donc à : *partie\_entière\_par\_défaut*  $\left\lfloor \frac{\text{nbre\_années\_totales\_disponibles}}{\text{nbre\_années\_par\_période}} \right\rfloor$ . Nous choisissons de façon discrétionnaire l'année la plus récente (ici 2014) comme année de départ. Ainsi  $\forall 1 \leq i \leq \text{nbre\_années\_totales\_disponibles}$ :

Si  $t=1$  an  $\rightarrow$  21 périodes d'un an [1994 ]..[1995 ].....[2014]

Si  $t=2$  ans  $\rightarrow$  10 périodes de deux années [1995 – 1996]..[1997 – 1998].....[2013 – 2014]

....

Si  $t=i$  ans  $\rightarrow$  *partie\_entière\_par\_défaut*  $\left\lfloor \frac{\text{nbre\_années\_totales\_disponibles}}{i} \right\rfloor$  périodes de  $i$  années.

$$\text{Soit } z \in \left\{1, \dots, k = \text{Ent}\left[\frac{\text{dernière année} - \text{première année} + 1}{i}\right]\right\} \rightarrow \left\{1, \dots, k = \text{Ent}\left[\frac{2014 - 1994 + 1}{i}\right]\right\}$$

$$[(2014 - k \cdot i + 1) - (2014 - (k-1) \cdot i)] \dots [(2014 - (k - (z-1)) \cdot i + 1) - (2014 - (k - z) \cdot i)] \dots [(2014 - (k - (k-1)) \cdot i + 1) - 2014]$$

Nous vérifions la pertinence du choix de la loi Binomiale Négative avec différents tests statistiques, décrits en Annexe 3.

Ci-dessous nos résultats, pour les calibrations des données par la loi Binomiale Négative :

Les *p-values* sont très largement supérieures à un seuil  $\alpha=5\%$  ou  $10\%$ . Nous ne pouvons donc rejeter  $H_0$ , à savoir que l'échantillon testé suit bien une loi binomiale négative de paramètres présentés ci-dessous.

$$\begin{cases} CAT \rightarrow BN(62.21643, & 0.348617) \\ TER \rightarrow BN(2.244329, & 0.03562747) \end{cases}$$

Figure 4.6 : Sortie du code R test Kolmogorov-Smirnov

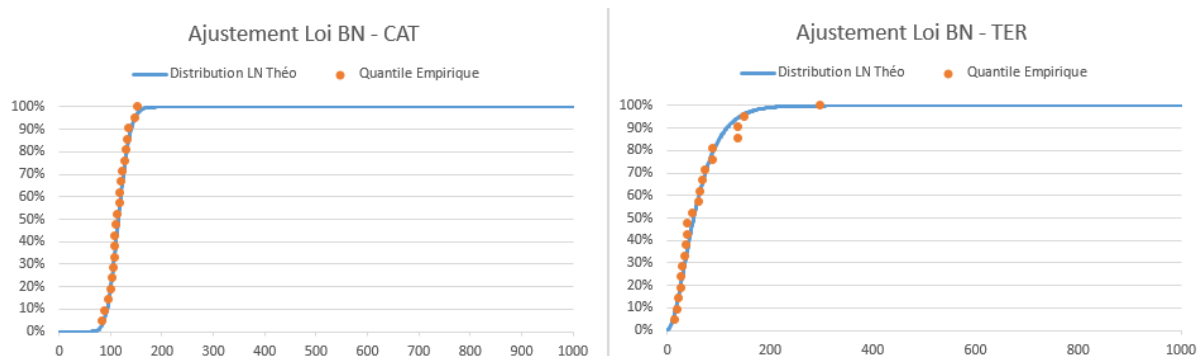
|                                                                                                                                |                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>One-sample Kolmogorov-Smirnov test  data:  calendarCat1 D = 0.065829, p-value = 1 alternative hypothesis: two-sided</pre> | <pre>One-sample Kolmogorov-Smirnov test  data:  calendarTer1 D = 0.13986, p-value = 0.8289 alternative hypothesis: two-sided</pre> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Pour des raisons de cohérence, nous considérons que, dans nos simulations :

$$\begin{cases} \max(\text{nbsinistresCAT}_t\text{simulés}) \leq \text{nbsinistresCAT}_{\text{max}_{\text{databasehisto}}} \\ \max(\text{nbsinistresTER}_t\text{simulés}) \leq \text{nbsinistresTER}_{\text{max}_{\text{databasehisto}}} \end{cases}$$

Voici les représentations graphiques des fonctions de répartition issues de la calibration des deux types de risques :

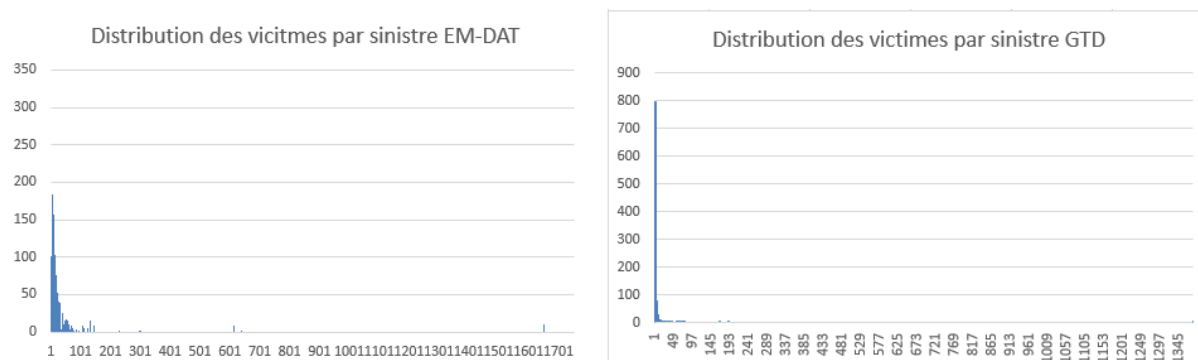
Figure 4.7 : Calibration des fréquences théoriques BinNeg vs empiriques (EM-DAT et GTD)



Il est à noter que la calibration de la partie terroriste est moins satisfaisante que celle de la partie catastrophes naturelles. Néanmoins, au vu des distributions respectives des victimes, nous constatons que l'impact d'une catastrophe naturelle est largement plus significatif que l'impact d'une action terroriste.

#### IV.3.3.3. Etape 2 : calibration de la sévérité des événements catastrophes

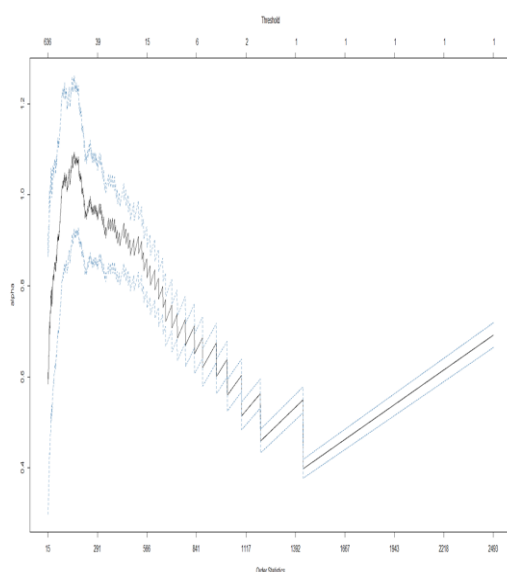
Figure 4.8 : Distributions empiriques des victimes par sinistres (EM-DAT et GTD)



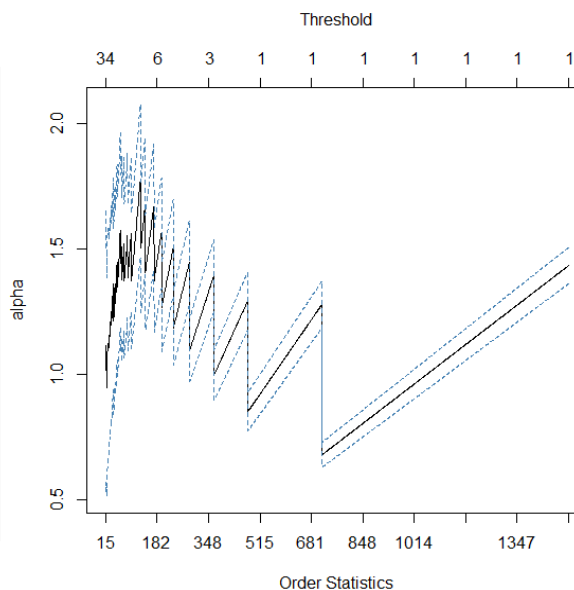
#### ➔ Estimateur de Hill

Tout d'abord, nous soumettons les données à l'Estimateur de Hill, défini plus haut, dans le but de déterminer le *tail index* de chacune des distributions, et calibrer le niveau du seuil à choisir pour calibrer la distribution sous l'approche GPD. Nous utilisons la fonction 'hillPlot' du package 'fExtremes' de **R**.

Figure 4.9 : Représentations graphiques de l'Estimateur de Hill (EM-DAT et GTD)



Base EM-DAT



Base GTD

Visuellement, en comparant les graphiques obtenus ci-dessus à celui-ci-dessous, nous comprenons qu'il est difficile de définir un quelconque niveau de *tail index*. Ci-dessous l'estimateur converge vers un niveau de *tail index* de 1.40 (ligne rouge), alors que sur les représentations ci-dessus, aucune converge vers un quelconque niveau ne peut être relevée.

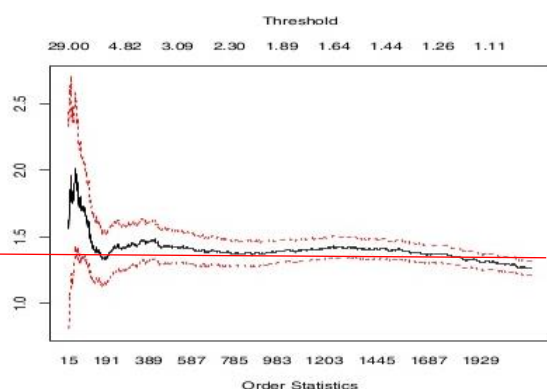


Figure 4.10 : Représentation d'un Estimateur de Hill convergent vers le *tail index* matérialisé par le trait rouge (=1.40). Exemple tiré de A.Charpentier ACT2040 – Actuariat IARD – Hiver 2013 (avec son aimable autorisation).

### ➔ Calibration par la distribution Zêta

#### Maximum de vraisemblance

Comme nous pouvons le constater graphiquement, dans les deux cas, la distribution empirique est très étrange. Il est donc très difficile d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance – présentée plus haut - pour la distribution zêta. Nous obtenons respectivement des paramètres  $s$  de 1.01 (base EM-DAT) et 1.076 (base GTD), avec des fonctions de répartition théoriques qui ne correspondent pas du tout à l'empirique, et que nous ne prenons même pas la peine de représenter ici.

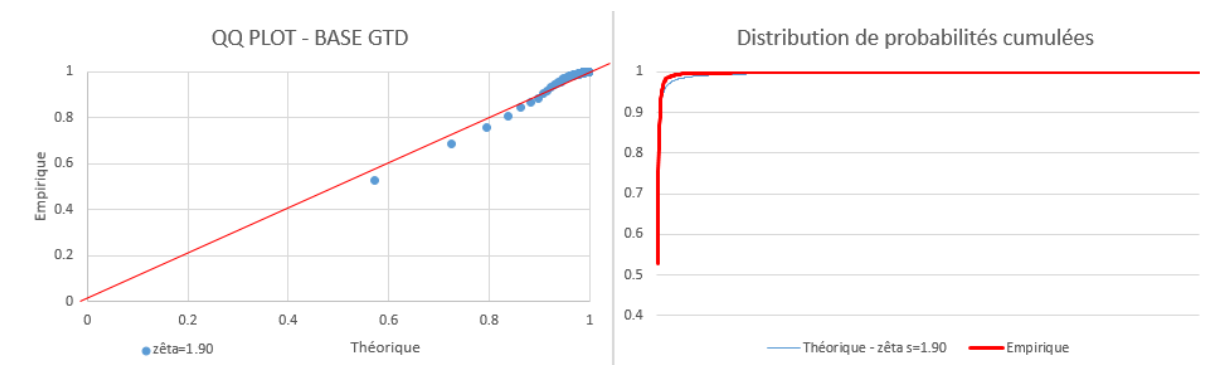
Nous passons donc aux méthodes traditionnelles d'estimation du paramètre  $s$  par le Critère des Moindres Carrés, décrite en Annexe 3.

#### Critère des Moindres Carrés Ordinaires (CMC)

##### Pour la base GTD – Terrorisme

Nous choisissons un pas de discrétisation de  $10^{-1}$  pour le paramètre  $s$ , celui-ci évoluant entre 1.1 et 3.0. Ainsi, nous calculons les Moindres Carrés Ordinaires pour chaque  $s \in [1.1, 1.2, 1.3, \dots, 2.9, 3.0]$ . Rappelons que pour  $s=1.0$ , la fonction zêta de Riemann diverge.

Figure 4.11 : Calibration des distributions Zêta GTD



La calibration de la distribution Zêta avec un niveau du paramètre  $s$  de 1.90 s'avère être plutôt conservatrice au vu des probabilités attribuées aux quantiles supérieurs.

Le critère CMC se présente à 2.6%.

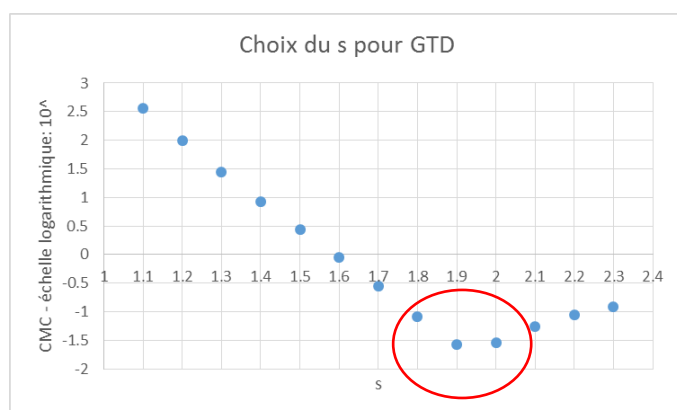


Figure 4.12 : Choix du paramètre  $s$ . Base GTD.

Chaque point représente le résultat des MCO (la somme des carrés des différences entre la distribution empirique et la distribution théorique) pour chaque niveau de  $s$  (représenté en abscisse). Les ordonnées sont exprimées en base logarithmique ( $10^x$ ). Ainsi, 1.9 représente le niveau optimal de  $s$ .

Pour la base EM-DAT

Nous choisissons un pas de discrétisation de  $10^{-1}$  pour le paramètre  $s$  (celui-ci évoluant entre 1.1 et 3.0) et 10 simulations de notre base de données stochastique.

Exemples de  $s$  obtenus :

Table 4.3 : Calibration du paramètre  $s$  sur la base de base de données EM-DAT stochastiques

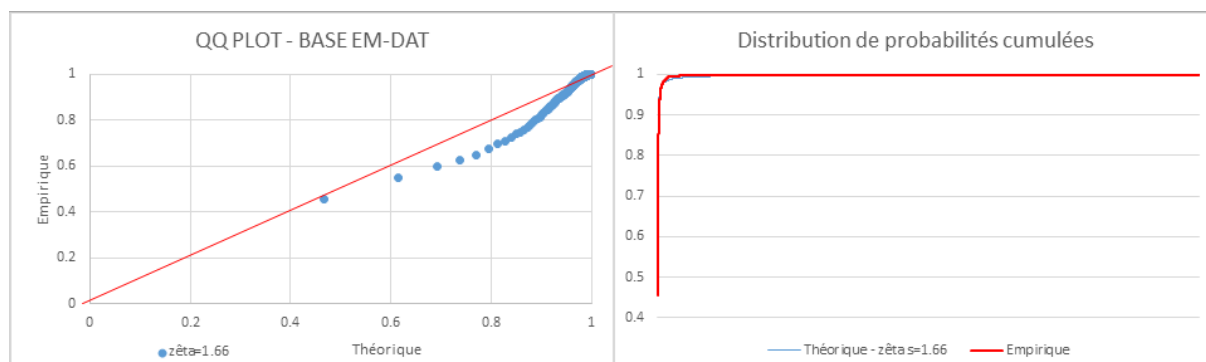
| N°simulation | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6            | 7            | 8             | 9             | 10            |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|
| $\hat{s}$    | 1.7           | 1.7           | 1.6           | 1.6           | 1.6           | 1.7          | 1.7          | 1.6           | 1.7           | 1.7           |
| CMC          | 0.441797<br>1 | 0.422194<br>5 | 0.481902<br>2 | 0.419962<br>2 | 0.462996<br>4 | 0.40147<br>8 | 0.46300<br>7 | 0.429649<br>8 | 0.428987<br>4 | 0.418824<br>3 |

Nous obtenons une sorte de moyenne harmonique en effectuant le calcul suivant, en pondérant par l'inverse des CMC :

$$S_{final} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\hat{s}_i}{CMC_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{CMC_i}} = 1.6610.. \cong 1.66 \text{ (nous arrondissons à } 10^{-2} \text{)}$$

Voici, en guise d'exemple, les résultats obtenus pour la première simulation :

Figure 4.13 : Calibration des distributions Zêta EM-DAT



Contrairement à la base GTD, le calibration de la distribution Zêta avec le paramètre  $s$  à 1.66 s'avère plutôt tout d'abord sous-estimer les occurrences puis sur les extrêmes faire preuve de prudence actuarielle. Le zoom des quantiles les plus élevés permettra d'avoir plus d'informations.

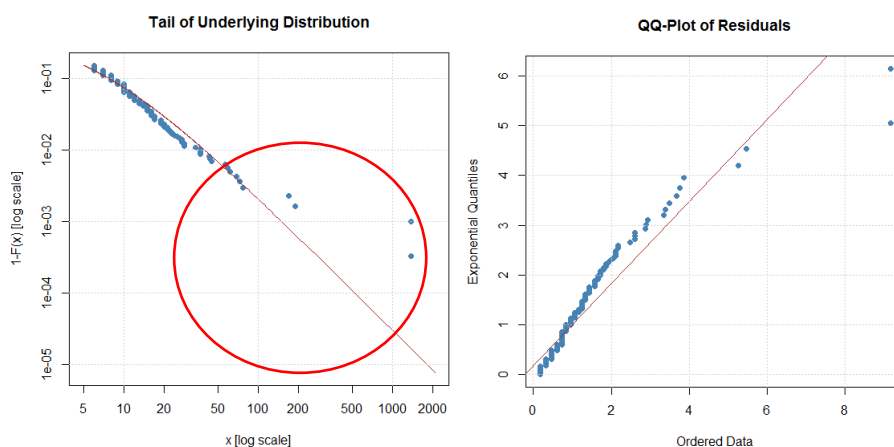
#### ➔ Calibration par la distribution GPD

Nous utilisons le package 'gpdFit' de **R** comprise dans le package 'fExtremes'. Nous utilisons la méthode du Maximum de Vraisemblance, méthode par défaut notée 'mle'.

Pour la base GTD – Terrorisme

Au seuil de 5 décès - seuil arbitraire de décès par sinistre, étant donné qu'en deçà de cette limite, il y a très peu de chance que le Pool soit touché:

Figure 4.14 : Calibration GPD (seuil 5) – base GTD



Voici le tableau de sortie **R**, via la fonction 'gpdFit' :

|                           |                |                   |
|---------------------------|----------------|-------------------|
| Estimation des paramètres | $\xi=0.531962$ | $\sigma=5.646440$ |
|---------------------------|----------------|-------------------|

Nous trouvons un *tail index* de  $1/\xi = 1.87983352$ . Nous constatons également que la GPD sous-estime l'occurrence des événements extrêmes par rapport à la distribution empirique.

Sans effet de seuil (1 décès, seuil implicite lié à la construction de la base de données) :

Voici le tableau de sortie **R**, via la fonction 'gpdFit' :

|                           |                 |                    |
|---------------------------|-----------------|--------------------|
| Estimation des paramètres | $\xi=0.4197213$ | $\sigma=3.4933157$ |
|---------------------------|-----------------|--------------------|

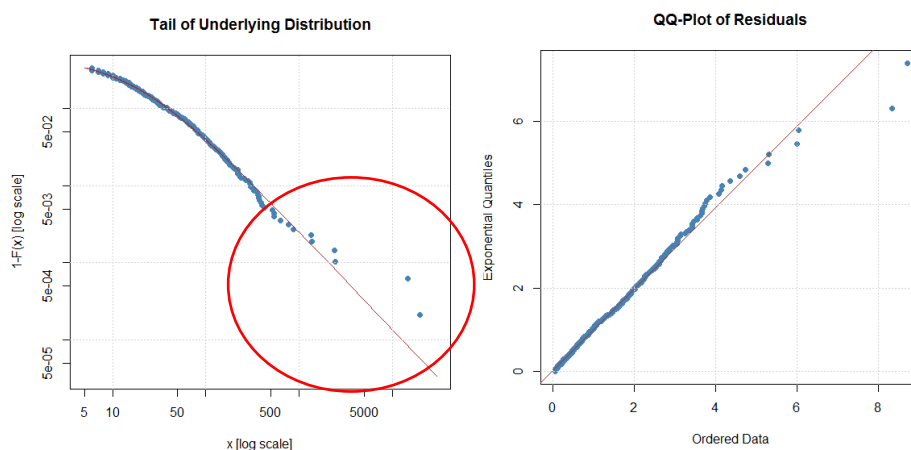
Nous trouvons un *tail index* de  $1/\xi = 2.382533$ . Nous constatons également que la GPD sous-estime l'occurrence des événements extrêmes par rapport à la distribution empirique.

Pour être tout à fait honnête, nous ne sommes pas très confiant avec le package 'fExtremes' car l'utilisation des fonctions 'gpdFit' ne semble pas donner de résultats stables, en particulier lors de la génération de valeurs aléatoires suivant la distribution GPD.

Pour la base EM-DAT

Au seuil de 5 décès - seuil arbitraire de décès par sinistre, étant donné qu'en deçà de cette limite, il y a très peu de chance que le Pool soit touché:

Figure 4.15 : Calibration GPD (seuil 5) – base EM-DAT



Voici le tableau de sortie **R**, via la fonction 'gpdFit' :

|                           |                 |                     |
|---------------------------|-----------------|---------------------|
| Estimation des paramètres | $\xi=0.7839339$ | $\sigma=16.8412621$ |
|---------------------------|-----------------|---------------------|

Nous trouvons un *tail index* de  $1/\xi = 1.27561775$ . Nous constatons également que la GPD sous-estime l'occurrence des événements extrêmes par rapport à la distribution empirique.

Sans effet de seuil (1 décès, seuil implicite lié à la construction de la base de données) :

Voici le tableau de sortie **R**, via la fonction 'gpdFit' :

|                           |                 |                    |
|---------------------------|-----------------|--------------------|
| Estimation des paramètres | $\xi=0.9411399$ | $\sigma=8.8589199$ |
|---------------------------|-----------------|--------------------|

Comparaison des lois :

Pour la base GTD – Terrorisme

Figure 4.16 : Calibration Zêta – base GTD

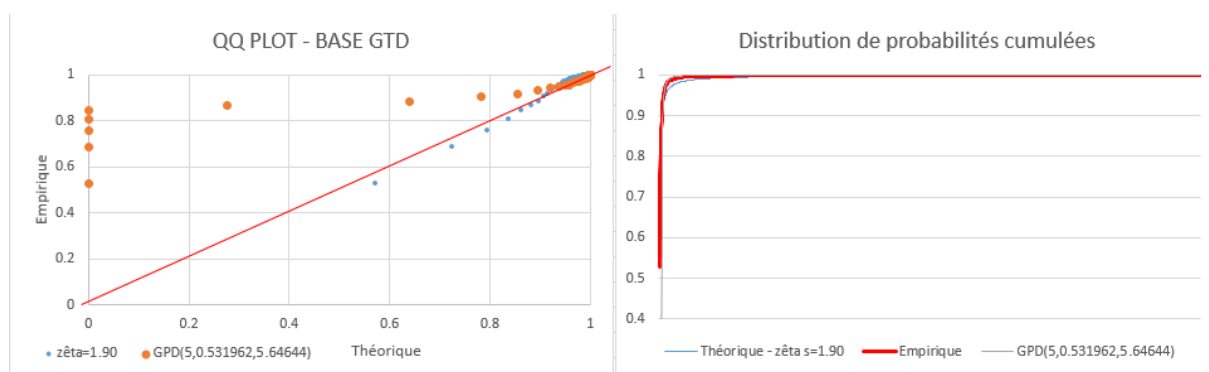
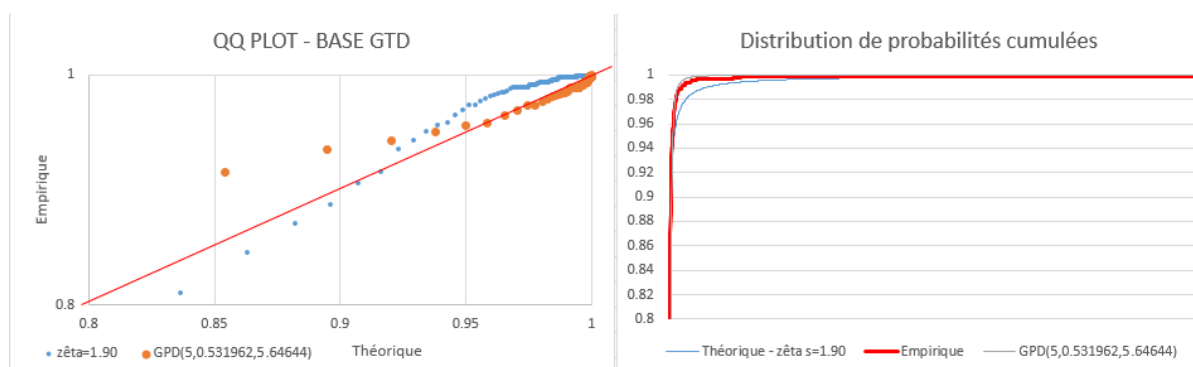


Figure 4.17 : Zoom sur l'intervalle interquantile 80%-100%



Pour la base EM-DAT

Figure 4.18 : Calibration Zêta – base EM-DAT

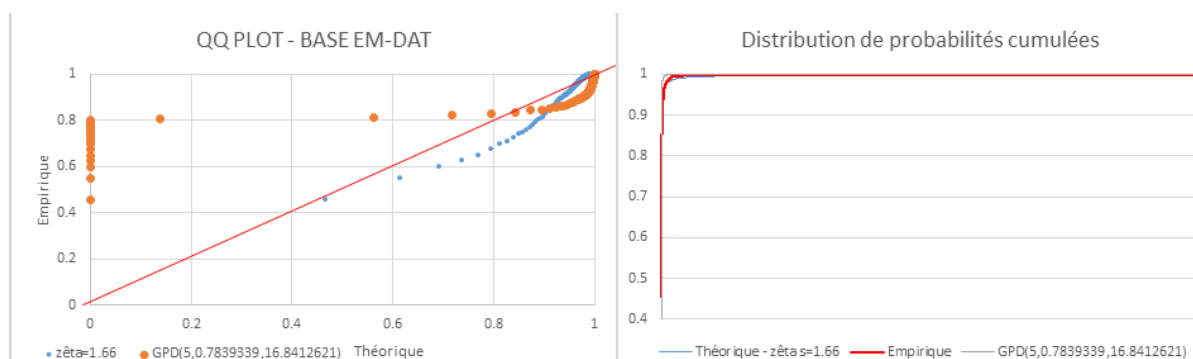
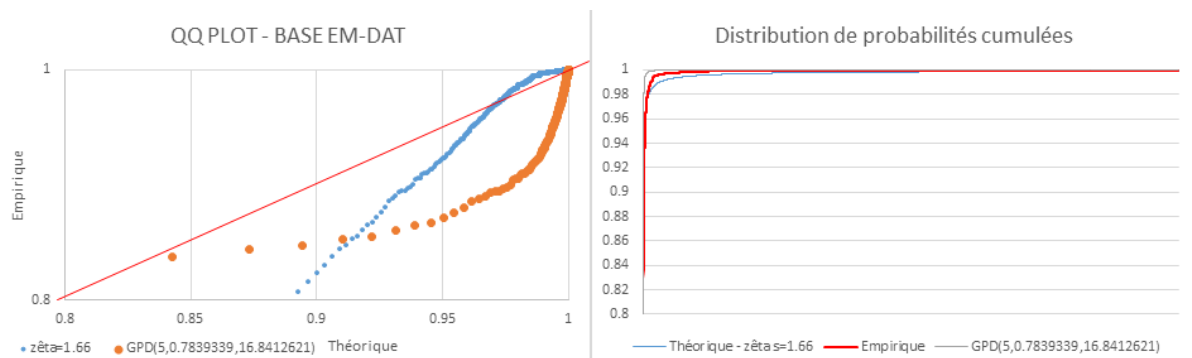


Figure 4.19 : Zoom sur l'intervalle interquantile 80%-100%



Nous constatons que pour les deux distributions, la GPD a tendance à sous-estimer l'occurrence d'événements extrêmes. Nous n'utilisons pas le package *R* 'zetaff', étant donné qu'après lecture du document explicatif, nous ne sommes pas convaincu par l'algorithme d'optimisation.

Ainsi dans cette logique de prudence actuarielle, nous choisissons de conserver notre choix de distribution Zêta. Ci-dessous les densités de probabilité des deux lois Zêta dans un repère lognormal.

Figure 4.20 : Représentation des densités des Zêta GTD et EM-DAT

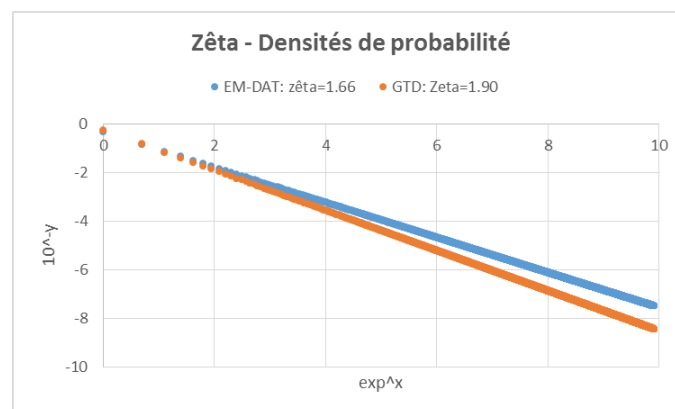
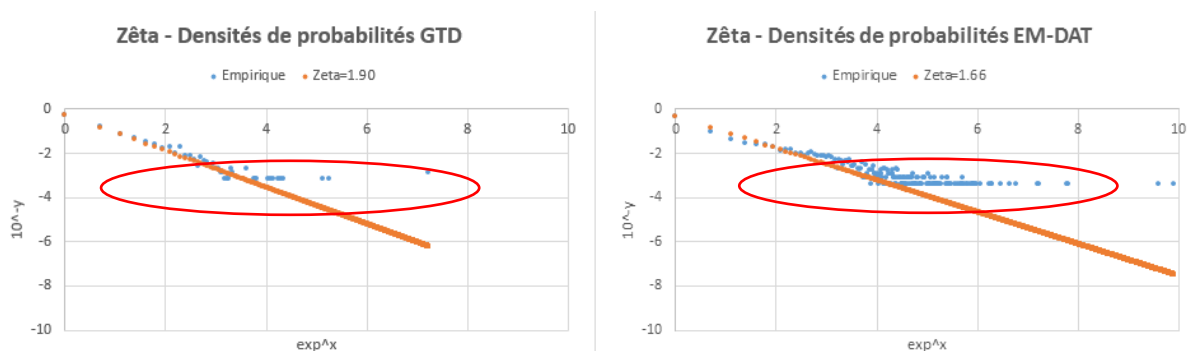


Figure 4.21 : Comparaison des densités théoriques et empiriques



A l'aune de ces différentes comparaisons entre distributions théoriques et empiriques, nous constatons :

- Que les distributions théoriques zêta correspondent à une approche actuarielle prudente, puisqu'elles ont tendance à amplifier les probabilités d'occurrence d'événements extrêmes en cumulé (c'est-à-dire la probabilité d'événements impliquant **plus que** N personnes). Ceci s'explique par le fait que la distribution empirique n'est pas continue :
- Par contre, l'occurrence d'un événement extrême impliquant **exactement** N personnes est sous-estimée, en particulier à cause de l'effet de seuil (1/nombre d'événements recensés) présent sur la distribution empirique (cercles rouges).

En résumé, nous sommes satisfaits de la calibration par les distributions Zêta, celles-ci répondant plus à une logique de prudence actuarielle que des GPD. Néanmoins, afin d'éviter les nombres de décès « trop élevés », nous décidons de limiter les nombres de décès maximum par événement catastrophique, respectivement :

$$nbdécèsmaxparévénementEM - DAT = \max(décèspargrouped'événements - nombred'événementsdanslegroupe + 1)$$

$$nbdécèsmaxparévénementGTD = \max(décèsparévénement)$$

Le nombre de décès maximum par événement pour la base GTD est de 1982, et correspond aux nombres de victimes pour l'attentat sur une des tours jumelles du World Trade Center le 11 Septembre 2001.

Le nombre de décès maximum par événement pour la base EM-DAT est de 19846, et correspond aux nombres de victimes pour l'accident de Fukushima, au Japon le 11 mars 2011.

Le fait de tronquer la distribution au nombre maximum de victimes constaté sur la période équivaut à tronquer la fonction de répartition à 99.905% pour GTD (pour 1382 décès) et à 99.897% pour EM-DAT (pour 19846 décès).

Il est à noter qu'il n'existe pas de générateur Zêta dans **R**, nous utilisons donc un générateur Zêta propriétaire. La procédure repose sur la génération ex-ante de la fonction de répartition de la loi Zêta de paramètre  $s$  correspondant. Puis, la fonction de répartition étant monotone, strictement croissante et donc bijective, l'aléa est généré selon une loi uniforme  $[0,1]$ .

#### *IV.3.3.4. Etape 3 : modélisation de la répartition au sein du Pool et du risque de concentration*

Le BCAC présente une spécificité qui correspond au fait que les deux têtes les plus importantes doivent être déduites **par assureur**, et non dans l'ensemble de la population sinistrée.

Pour rappel, nous considérons qu'un assuré n'est assuré que chez un seul assureur.

Cela revient à la problématique soulevée par Ekheden, avec le paramètre OMEGA (qui évolue sur  $\mathbb{R}^+$ ) de convergence de la répartition de la population sinistrée vers la répartition de la population totale (assurée et non-assurée).

Pour ce faire, l'idée est de développer une méthode de simulation, permettant d'attribuer à chaque victime  $V$  une probabilité de dépendre d'une compagnie d'assurance donnée.

La difficulté réside dans la calibration de cette matrice. Notre démarche repose sur trois événements récents, suffisamment proches pour bénéficier des données, et pour éviter de faire face à un marché de l'assurance totalement transformé par les fusions-acquisitions.

Dans l'historique du BCAC, la catastrophe aérienne du Mont Saint Odile est l'événement le plus important en termes de capitaux, mais l'ancienneté de ce dernier (20 janvier 1992) pose problème quant à la disponibilité des données et la structure de l'assurance en France de l'époque, très différente de celle d'aujourd'hui.

Ainsi, nous choisissons de nous concentrer sur les événements majeurs (au sens des sinistres BCAC) suivants :

- L'accident d'avion de la Flash Airlines, à Charm el Cheikh (Egypte) qui a eu lieu le 03/01/2004 : 148 décès. Le principal assureur a été impacté à hauteur de 32 têtes.
- L'accident d'avion de la West Caribbean, au large du Venezuela, qui a eu lieu le 15/08/2005 : 160 décès, dont 152 passagers originaires de la Martinique. Le principal assureur a été impacté à hauteur de 61 têtes.
- L'accident d'avion Air France reliant Rio de Janeiro et Paris, qui a eu lieu le 01/06/2009 : 228 décès. Le principal assureur a été impacté à hauteur de 42 têtes.

A dessein, nous choisissons ces événements, les accidents d'avions étant les plus coûteux pour le Pool, mais aussi ceux engendrant le plus de victimes, et ceux matérialisant le « mieux » le risque de concentration.

A 2012 (les dernières estimations disponibles du BCAC), la répartition – au sein du Pool BCAC - du marché de l'assurance décès toutes causes, en primes est la suivante :

*Table 4.4 : Répartition des assureurs au sein du Pool BCAC*

| <b>Assureur/N°</b> | <b>Part de marché en prime</b> |
|--------------------|--------------------------------|
| <b>A/1</b>         | 12.6%                          |
| <b>B/2</b>         | 0.1%                           |
| <b>C/3</b>         | 7.1%                           |
| <b>D/4</b>         | 0.0%                           |
| <b>E/5</b>         | 18.6%                          |
| <b>F/6</b>         | 25.6%                          |
| <b>G/7</b>         | 4.3%                           |
| <b>H/8</b>         | 5.2%                           |
| <b>I/9</b>         | 0.7%                           |
| <b>J/10</b>        | 0.5%                           |
| <b>K/11</b>        | 18.5%                          |
| <b>L/12</b>        | 3.9%                           |
| <b>M/13</b>        | 0.0%                           |
| <b>N/14</b>        | 0.3%                           |
| <b>O/15</b>        | 2.4%                           |
| <b>P/16</b>        | 0.2%                           |

La structure du marché de l'assurance en France a un impact significatif sur le coût des couvertures de réassurance, ceci étant lié en particulier au fait que la franchise en nombre de têtes s'applique non pas à l'ensemble des victimes mais aux victimes conditionnellement à leur appartenance à tel ou tel assureur. Ainsi, une situation tendant à converger vers un modèle monopolistique ou oligopolistique reviendrait à augmenter les risques de dépasser la franchise et renchérir de façon significative les couvertures par rapport à une situation beaucoup plus morcelée.

Nous constatons que les trois événements cités sont des accidents d'avions. Aujourd'hui, le nombre maximum de passager par appareil est de 853 (capacité d'un Airbus A380), auquel il faut rajouter 22 personnels d'équipage, soit 875.

Néanmoins, la capacité standard maximum est de 525 passagers pour l'Airbus A380-800, et 467 pour le Boeing 747-8 Intercontinental.

Suite à des échanges avec des responsables Ressources Humaines de grandes sociétés ayant participé à l'organisation de séminaires d'entreprises, nous choisissons une limite de concentration de 50% des passagers d'un avion appartenant à la même société, donc à fortiori au même assureur.

Ainsi en accord avec les stipulations de la Directive Solvabilité 2, nous considérons ainsi le pire scénario de concentration suivant : « séminaire d'entreprise à l'étranger avec avion de ligne à capacité maximum (soit 525), rempli à 50% par des entreprises de la même entreprise ». 525 correspondra dans notre simulation finale au paramètre  $t$  explicité ci-dessous, 50% correspondra au paramètre  $r$  présenté dans le même paragraphe à suivre.

Le choix de ce paramètre  $r$  soulève d'ailleurs un sujet pour l'assureur de groupe, en l'occurrence le sujet du risque de concentration. Si les services de Risques Opérationnels des entreprises ont en tête la nécessité de séparer les équipes afin de mutualiser les risques (en plusieurs avions par exemple), le sujet pour l'assureur est aussi la somme sous risque par appareil. Peut-il demander une limitation de la somme sous risque maximale, en limitant la concentration des risques **par appareil** ? Par exemple, pas plus de  $x\%$  des passagers doivent appartenir à l'entreprise qui organise un séminaire quitte à réquisitionner plus d'avions.

Supposons  $N$  salariés de l'entreprise  $W$ , chacun ayant la même somme sous risque. Chaque avion a une capacité identique  $C$ . Chaque avion est rempli à  $r$  (en %,  $r \in [0; 1]$ ) par des employés de l'entreprise  $W$ . Ainsi, le nombre d'avions nécessaire est  $N/(Cr)$ . Chacun des  $N/(Cr)$  a une probabilité  $p$  de crash, sans aucun survivant, les processus étant indépendants entre eux. Ainsi, la variable aléatoire  $K$  (nombre de crashes) suit  $B(\frac{N}{Cr}; p)$  :

$$\text{Ainsi } P(K = k) = \frac{C_N^k}{Cr} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\frac{N}{Cr}-k} \text{ dont } E(K) = \frac{Np}{Cr} \text{ et } \sigma^2(K) = \frac{Np(1-p)}{Cr}$$

Nous avons également  $D=K.Cr$

$$\text{D'où } E(D) = \frac{Np}{Cr} \cdot Cr = Np \quad \text{et } \sigma^2(D) = \frac{Np(1-p)}{Cr} \cdot (Cr)^2 = Np(1-p)Cr$$

Dans un cadre Solvabilité 2 à 99.5%, la nuance peut s'avérer très significative.

Soit, en test unilatéral,  $t_{99.5\%} = 2.576$

Notre seuil  $s$  tel que  $P(D < s) = 0.995$ ;  $s = Np + t_{99.5\%} \cdot \sqrt{Np(1-p)Cr}$

Si  $r=1$ ,  $s = Np + t_{99.5\%} \cdot \sqrt{Np(1-p)C}$

Si  $r=0.1$ ,  $s = Np + t_{99.5\%} \cdot \sqrt{\frac{1}{10} \cdot Np(1-p)C}$

Concrètement, soit  $p = 10^{-6}$ , soit  $N=5000$

Pour  $r=1$ , la provision doit être l'équivalent de la somme sous risque de 1.82 têtes, alors que dans le deuxième cas ( $r=0.1$ ), la provision doit être l'équivalent de la somme sous risque de 0.58 têtes, soit un

rapport de plus de 3 soit  $\approx \sqrt{1/r}$ . Ainsi l'économie en termes de provision peut être réfléchi en terme de  $\sqrt{1/r}$ .

Dans le cadre de ce travail, la méthode choisie pour la prise en compte de l'aspect concentration est la suivante :

Le nombre de victimes ayant été établi lors de l'étape précédente, le premier travail est de distinguer celles ayant souscrit un contrat chez un assureur membre du Pool de celles ayant souscrit un contrat ailleurs. Nous prenons la part de marché du Pool comme référence à savoir 15.01% de la population française, nous considérons les 84.99% comme étant non-assurés.

Nous définissons de façon arbitraire à ce stade plusieurs paramètres :

- 1 seuil  $t$  nombres de victimes, en deçà duquel le phénomène de concentration intervient, en particulier par le contexte familial mais surtout par le canal de l'entreprise (Comité d'Entreprise...)
- 1 ratio  $r \in [0:1]$ , correspondant à la part de l'assureur à l'origine du phénomène de concentration par rapport à la population assurée sinistrée.  
Précision importante : Ce ratio  $r$  doit être, par construction, supérieur ou égal à la part de l'assureur membre du Pool le plus important (ici 0.256), sans quoi le phénomène de concentration est réduit à néant.
- 1 limite  $n > t$ , correspondant au nombre maximal de victimes par sinistre

Illustrons par un exemple :

$$\begin{cases} P(x_i \in \emptyset) = 0.849 \\ P(x_i \in A | x_i \notin \emptyset) = 0.148 \\ P(x_i \in B | x_i \notin \emptyset) = 0.075 \\ P(x_i \in C | x_i \notin \emptyset) = 0.203 \\ P(x_i \in D | x_i \notin \emptyset) = 0.299 \\ P(x_i \in E | x_i \notin \emptyset) = 0.058 \\ P(x_i \in F | x_i \notin \emptyset) = 0.217 \end{cases}$$

| Assureur | Part de marché<br>(base 100) |
|----------|------------------------------|
| A        | 14.80%                       |
| B        | 7.50%                        |
| C        | 20.30%                       |
| D        | 29.90%                       |
| E        | 5.80%                        |
| F        | 21.70%                       |

Table 4.5 : Exemple de parts de marché

$x_i = \emptyset$  signifie que la victime  $i$  n'est pas assurée chez un assureur du Pool.

Figure 4.22 : Evolution du prix de la couverture de réassurance en fonction de  $r$  et  $t$

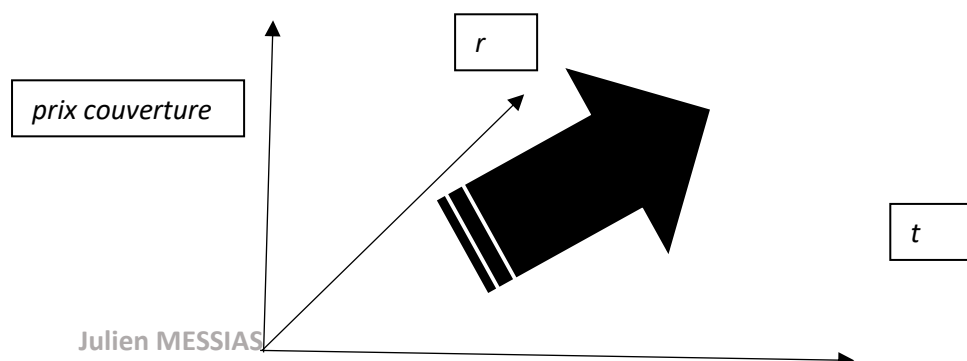
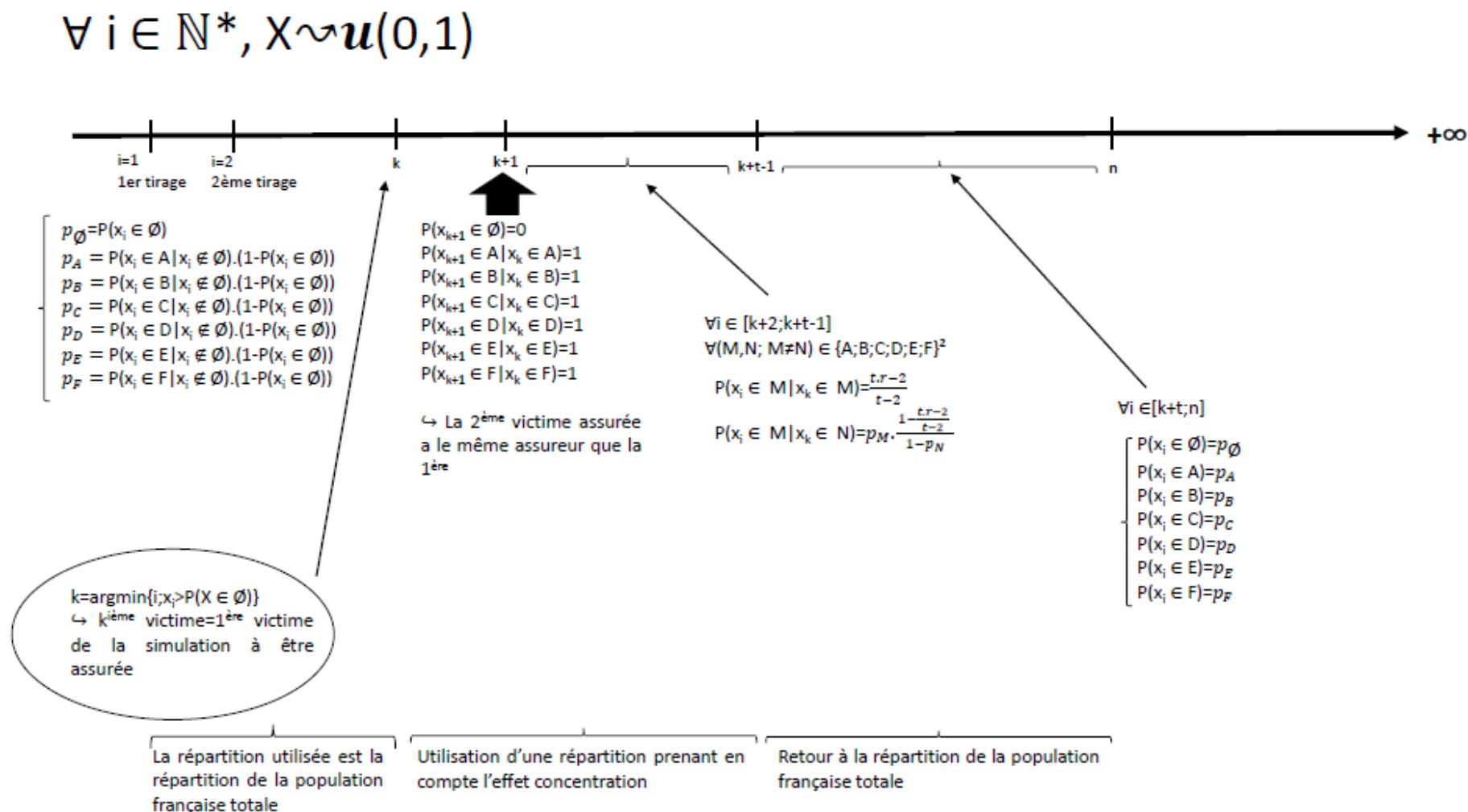




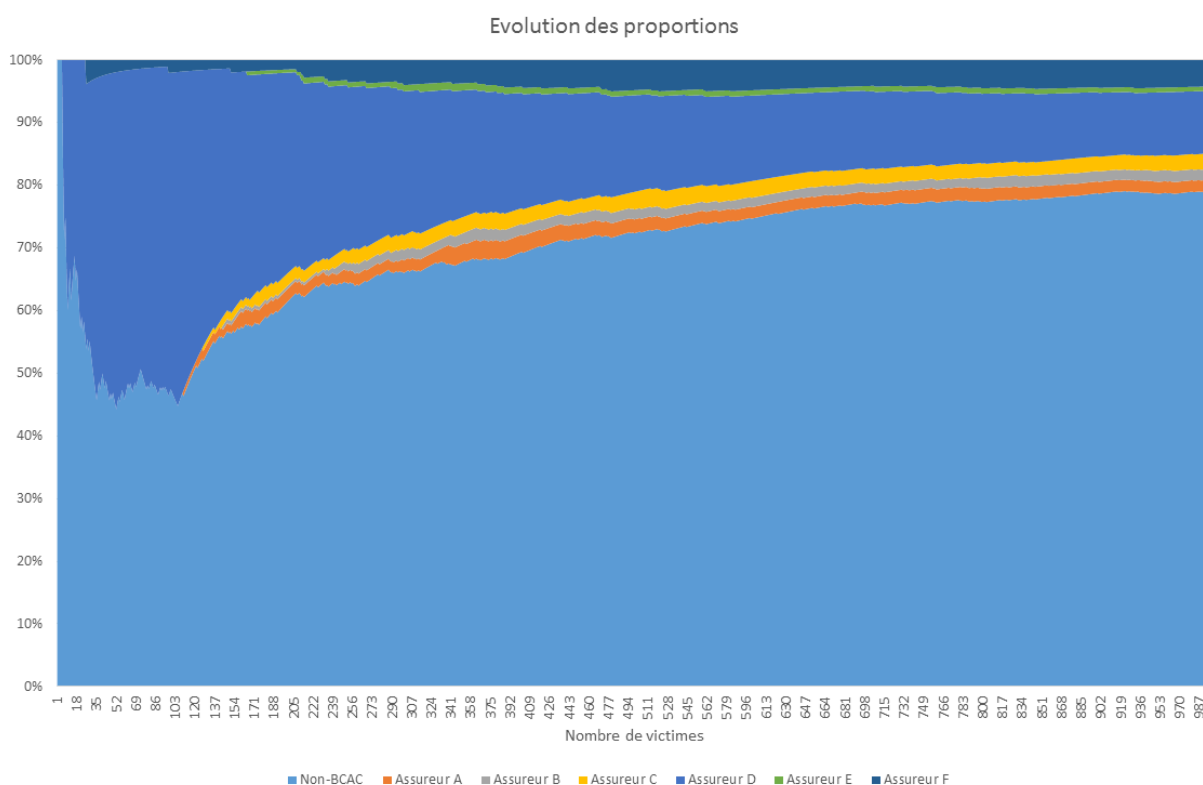
Figure 4.23 : Processus de la concentration aléatoire



Notre méthode de modélisation de la concentration peut être décomposée en trois étapes :

- *Etape 1* : Il s'agit de déterminer quel assureur membre du Pool est impacté en premier par le sinistre. Nous supposons qu'il y a  $n$  victimes. Suite à un tirage aléatoire basé sur la répartition initiale de chacun des assureurs dans la population assurée totale, nous déterminons la  $k$ -ième victime qui est la première à appartenir à un assureur membre du Pool. Nous considérons – par principe de prudence actuarielle - que les victimes  $k, k+1, \dots, k+franchise-1$  relèvent de ce même assureur  $W$ .
- *Etape 2* : Entre la  $(k+franchise)$ -ième victime et la  $(k+t-1)$ -ième, nous considérons que les probabilités initiales de répartition entre les différents assureurs changent : un poids supérieur est donné à la probabilité à chacune de ces victimes d'appartenir à l'assureur initial  $W$ , au détriment des autres membres du Pool.
- *Etape 3* : Entre la  $(k+t)$ -ième victime et la  $n$ -ième, nous reprenons les probabilités initiales pour chacun des assureurs.

Figure 4.24 : Exemple de résultat,  $t=100, r=1/2, n=10000$



Dans l'exemple ci-dessus, nous considérons une franchise de 2 têtes (« la deuxième victime assurée a le même assureur que la première »). Si la franchise est de  $n$  têtes  $\rightarrow$  « les  $(n-1)$  victimes qui suivent la première ont le même assureur que celle-ci » (avec  $t > (n - 1)$ ), l'idée étant, dans un but de prudence actuarielle de la valorisation de la couverture de réassurance, de considérer que la franchise de  $n$  têtes correspond aux  $n$  premières têtes de l'assureur touché en premier dans la simulation.

La part inférieure en bleu clair correspond à la part des victimes non assurées par le BCAC au fur et à mesure du décompte de la simulation. L'assureur  $W$  dans ce cas est l'assureur D, qui est celui qui présente la première victime au cours de la simulation. Ainsi, son poids entre la  $k$ -ième victime et la  $(k+100-1)$ -ième augmente de façon très significative. Une fois ce seuil franchi, nous constatons que la

répartition converge vers la répartition de la population assurée totale, soit une population non assurée par les membres du Pool du BCAC proche de 85% (partie inférieure bleu clair), et les 15% restants se répartissant avec des poids importants pour D, C B et A, entre les assureurs membres du Pool.

La robustesse de l'approche scientifique sera testée lorsque les tests de sensibilité seront appliqués au modèle.

#### IV.3.3.5. Etape 4 : calibration de la distribution des sommes sous risques

En ce qui concerne les sommes sous-risques pour la partie Catastrophe Naturelles et Industrielles (base EM-DAT), nous considérons la population du BCAC comme un sous-élément de la population française globale, donc nous modélisons les capitaux sous risques de la population assurée avec une distribution lognormale que nous devons translater, en conservant la propriété d'invariance de la distribution.

$$\text{revenus population française globale} \rightarrow LN(\mu = 9.838896, \sigma^2 = 0.55)$$

$$\text{Avec} \begin{cases} E(\text{revenus par UC, pop fr}) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \text{médiane}(\text{revenus par UC, pop fr}) = e^{\mu} \end{cases}$$

Nous avons estimé les capitaux moyens sous risques, et nous considérons qu'ils suivent la même distribution que la distribution des revenus moyens par UC.

$$\text{capitaux moyens sous risque pop ass} \rightarrow LN(\bar{\mu}, \bar{\sigma})$$

$$\text{Avec} \begin{cases} E(\text{capitaux moyens sous risque pop ass}) = e^{\bar{\mu} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2}} = \alpha e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \text{médiane}(\text{capitaux moyens sous risque pop ass}) = e^{\bar{\mu}} = \alpha e^{\mu} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \bar{\mu} = \mu + \ln(\alpha) \\ \bar{\sigma} = \sigma \end{cases}$$

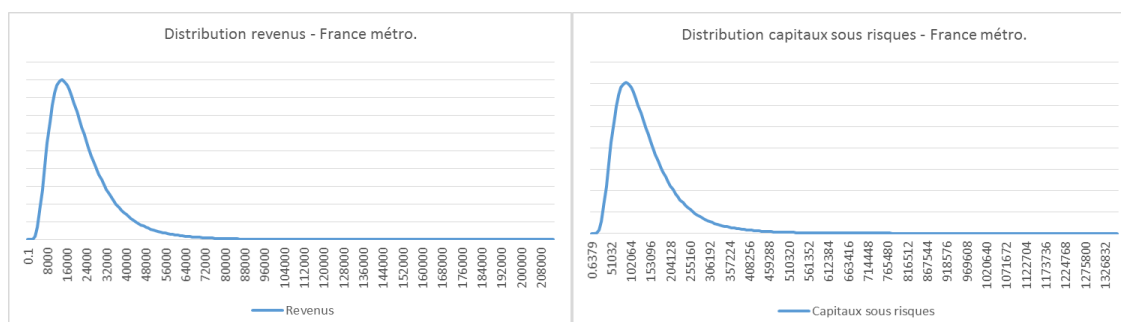
Avec

$\alpha$  = nombre d'années de revenu correspondant au capital décès

$$\alpha = E(\text{capitaux moyens sous risque pop ass}) / E(\text{revenus par UC, pop fr})$$

$$\alpha = 139\,130 / e^{9.838896 + \frac{(0.55)^2}{2}} \approx 6.379$$

Figure 4.25 : Calibration de la distribution des revenus (France métropolitaine)



D'où :

$$\text{capitaux sous risque population française globale} \rightarrow LN(\mu = 11.691907, \sigma^2 = 0.55)$$

En ce qui concerne les sommes sous-risques pour la partie Attentats (base GTD), nous considérons la population du BCAC comme un sous élément de la population française parisienne, celle-ci étant la principale à risque :

$$\text{revenus population parisienne} \rightarrow LN(\mu = 10.128390, \sigma^2 = 0.79)$$

Nous conservons le même coefficient  $\alpha$  = nombre d'années de revenu correspondant au capital décès.

D'où :

$$\text{capitaux sous risque population parisienne} \rightarrow LN(\mu = 11.981401, \sigma^2 = 0.79)$$

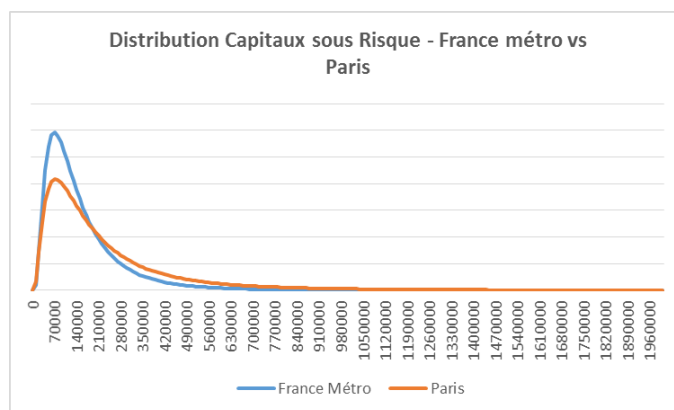


Figure 4.26 : Comparaison des distributions des sommes sous-risques (Paris vs France métropolitaine)

Nous conserverons un  $\alpha$  (nombre d'années de revenu correspondant au capital de décès) de 7 années pour notre modèle.

La charge financière des blessés pour chaque sinistre correspond à 10% de la charge des décédés, nous choisissons d'accepter le postulat de l'étude de RMS.

Il est à noter que le Pool prend en compte les charges par tête jusque 10.000.000€ uniquement, le reste étant à la charge de l'assureur concerné.

Néanmoins, tout comme pour la loi Zêta, afin d'éviter les tirages aberrants, nous limitons les sommes sous-risques par tête à 10.000.000€ :

$$SAR_i = \min(10.000.000, x_i) \quad \text{avec } x_i \rightarrow LN(.)$$

L'impact est le suivant :

$$\text{Population française globale : } P(X > 10.000.000) = 4.4409.10^{-16}$$

$$\text{Population parisienne : } P(X > 10.000.000) = 8.1904.10^{-8}$$

De plus, les données récupérées de l'INSEE<sup>39</sup> remontant à 2011, nous devons ajuster de l'inflation les sommes sous risques (SaR) :

| Libellé | Indice des prix à la consommation (série annuelle, ensemble des ménages, métropole + DOM, base 1998) - Ensemble : variation par rapport à l'année précédente - Série arrêtée |          |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| IdBank  | 000639201                                                                                                                                                                    |          |
| Année   |                                                                                                                                                                              |          |
| 2015    | 0                                                                                                                                                                            | 148.3114 |
| 2014    | 0.5                                                                                                                                                                          | 148.3114 |
| 2013    | 0.9                                                                                                                                                                          | 147.5735 |
| 2012    | 2                                                                                                                                                                            | 146.2572 |
| 2011    | 2.1                                                                                                                                                                          | 143.3894 |
| 2010    | 1.5                                                                                                                                                                          | 140.4402 |
| 2009    | 0.1                                                                                                                                                                          | 138.3647 |
| 2008    | 2.8                                                                                                                                                                          | 138.2265 |
| 2007    | 1.5                                                                                                                                                                          | 134.4616 |
| 2006    | 1.6                                                                                                                                                                          | 132.4745 |
| 2005    | 1.8                                                                                                                                                                          | 130.3882 |
| 2004    | 2.1                                                                                                                                                                          | 128.0828 |
| 2003    | 2.1                                                                                                                                                                          | 125.4483 |
| 2002    | 1.9                                                                                                                                                                          | 122.8681 |

Table 4.6: Données d'inflation INSEE

Nous incluons un paramètre d'inflation annuelle à notre modèle. Pour une période  $t$  donnée :

$$\text{Coût}_{i\text{ème sinistre}}^{\text{avec inflation}}_{\text{simul } k} = \text{Coût}_{i\text{ème sinistre}}_{\text{simul } k} * (1 + \text{inflation\_annuelle})^{\frac{t}{2}}$$

➔ Nous considérons pour simplifier que les sinistres ont lieu en milieu d'année

Nous prenons également un taux d'actualisation sans risque  $r$  annuel.

#### IV.3.3.6. Etape 5 : valorisation des options – option de reconstitution, No Claim Bonus, structure « Top and Top »

##### ➔ L'option de reconstitution

L'option de reconstitution signifie qu'une fois qu'une partie ou la totalité de la tranche a été consommée, le BCAC a l'obligation de reconstituer cette partie, à un tarif prédéterminé à l'avance, en % de la prime initiale.

Dans le cas du BCAC, une reconstitution unique est automatique (dénuee de toute discrétion pour l'acheteur de la protection) ; dès que la tranche correspondante est touchée et que cette reconstitution se fait à hauteur du montant qui vient d'être utilisé. Aucune notion de *prorata temporis* n'est prise en compte dans les reconstitutions du Pool BCAC.

En supposant que notre réflexion se concentre sur une tranche donnée, pour laquelle il existe  $N$  reconstitutions possibles de tarifs  $\{R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_N\}$ , activées après les  $N$  sinistres respectifs de coût  $\{S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_N\}$  sur une période donnée, le tarif initial doit être le suivant. Ici le terme *portée* doit être compris comme la capacité de la tranche :

Nous reprenons ici la logique exposée par Ludovic Magnin dans l'ouvrage La Réassurance, cité plus haut :

$$E(\text{prime}) = E(\text{coût})$$

Soit  $S_i$  le  $i$ ème sinistre de la période, avec  $S_i \geq \text{priorité}$ :

<sup>39</sup> <http://www.insee.fr/fr/themes/info-rapide.asp?id=29>

$$\begin{cases} S_i - \text{priorité} = 0 & P = P_0 \\ 0 < S_i - \text{priorité} \leq \text{portée} & P = P_0 + R_i \cdot P_0 \cdot \frac{S_i - \text{priorité}}{\text{portée}} \\ S_i > \text{portée} & P = P_0 + R_i \cdot P_0 \cdot \frac{\text{portée}}{\text{portée}} = P_0 + R_i \cdot P_0 \end{cases}$$

En généralisant et en y ajoutant les termes d'inflation et d'actualisation :

|              |   |                                                                                                                                                                                                         |
|--------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Nb sinistres | 0 | 1                                                                                                                                                                                                       |
| Tarif        | 0 | $\left(\frac{1 + \text{inflation}}{1 + r}\right)^{T/2} \cdot \frac{S_1 - \text{priorité}}{\left(1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot R_1 \cdot (S_1 - \text{priorité})}{\text{portée}}\right)}$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\left(\frac{1 + \text{inflation}}{1 + r}\right)^{T/2} \cdot \frac{[(S_1 - \text{priorité}) + (S_2 - \text{priorité})]}{\left(1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot R_1 \cdot (S_1 - \text{priorité}) + R_2 \cdot (S_2 - \text{priorité})}{\text{portée}}\right)}$ |

...

|                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K                                                                                                                                                                                                                                 |
| $\left(\frac{1 + \text{inflation}}{1 + r}\right)^{T/2} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{S_i - \text{priorité}}{\left(1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^k (S_j - \text{priorité}) \cdot R_j}{\text{portée}}\right)}$ |

...

|                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| N                                                                                                                                                                                                                                 |
| $\left(\frac{1 + \text{inflation}}{1 + r}\right)^{T/2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{S_i - \text{priorité}}{\left(1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^N (S_j - \text{priorité}) \cdot R_j}{\text{portée}}\right)}$ |

|                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| N+1 ou plus                                                                                                                                                                                                                           |
| $\left(\frac{1 + \text{inflation}}{1 + r}\right)^{T/2} \cdot \sum_{i=1}^{N+1} \frac{S_i - \text{priorité}}{\left(1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^N (S_j - \text{priorité}) \cdot R_j}{\text{portée}}\right)}$ |

Notre procédé de *pricing* reposant sur une simulation de Monte-Carlo, nous collectons l'ensemble des sinistres relatifs à chaque tranche que nous sommions. Puis nous ajustons par le ratio présenté plus haut. Cela suppose que le nombre de sinistres pour chaque tranche est connu *ex-ante*, ce qui est le cas puisque notre méthode est *backward*.

#### ➔ Le No-Claim Bonus

Le No-Claim Bonus peut être modélisé de la façon suivante. Pour reprendre une analogie financière, il s'agit d'une option digitale dont le *pay-off* correspond au discount  $\alpha$  engendré sur la prime de l'année  $N$  multiplié par la probabilité qu'il n'y ait aucun sinistre sur la tranche concernée l'année  $N$ . La prime de l'année  $N+1$  correspond ainsi à la prime de l'année  $N$  à quoi l'on déduit le *pay-off*.

$P_N^O$ : prime de l'année  $N$  avec l'option NCB

$$P_{N+1} = \begin{cases} P_N^O - P_N^O \cdot \alpha \cdot \text{prob}(no_{sinistre_{annéeN}}) = P_N^O \cdot (1 - \alpha \cdot \text{prob}(no_{sinistre_{annéeN}})) \\ P_{N+1} = P_N \end{cases}$$

$$\text{D'où : } P_N^O = P_N \cdot \frac{1}{(1 - \alpha \cdot \text{prob}(no_{sinistre_{annéeN}}))} = P_N + P_N \cdot \underbrace{\frac{\alpha \cdot \text{prob}(no_{sinistre_{annéeN}})}{(1 - \alpha \cdot \text{prob}(no_{sinistre_{annéeN}}))}}_{\text{valeur du NCB}}$$

➔ *La structure « Top and Top »*

La structure “Top and Top” permet de mettre à disposition la capacité non-utilisée lors d’un premier événement pour les événements suivants, jusqu’à ce que la capacité totale soit utilisée. Cela remplace une reconstitution. Cela ne correspond pas a priori, à la recherche du BCAC, et ne suscite pas l’appétit des réassureurs. Néanmoins nous allons quand même tester cette hypothèse.

➔ *Pool obligatoire ou facultatif*

Les tranches de réassurance concernent dans un premier temps le Pool obligatoire, puis dans un deuxième temps le Pool facultatif. De plus, chaque tranche possède la caractéristique d’être obligatoire ou optionnelle à la souscription des membres du Pool. Ce caractère obligatoire ou optionnel de chaque tranche du Pool (qu’il soit lui-même obligatoire ou facultatif) n’impacte pas la tarification du RoL de la tranche étant donné que la somme sous-risque est proportionnelle au Pool, dont la composition reste identique, quel que soit le choix d’un assureur *i* de se réassurer.

En revanche, le choix par les assureurs de souscrire au Pool facultatif doit être décidé avant la tarification des tranches de réassurance de ce Pool facultatif, étant donné que le profil de la somme sous-risque dépend des assureurs qui composent ce Pool.

En résumé, le choix de souscrire à une tranche de réassurance par les assureurs n’impacte pas la tarification de la couverture de réassurance, alors que le choix de souscrire au Pool facultatif modifie la tarification des couvertures de réassurance afférentes à ce dernier, la somme sous-risque étant modifiée.

Nous disposons d’assez peu d’informations pour tarifier précisément la couverture de réassurance sur le Pool facultatif, mais la méthode est identique à celle appliquée pour le Pool obligatoire. Dans notre simulation que nous effectuerons, nous supposerons que le Pool Facultatif est constitué des assureurs A et E représentant 31.2%.

En résumé, à la charge potentielle de l’assureur membre du Pool principal :

- Ses deux têtes les plus chères par sinistre
- La charge qui lui revient dans le Pool dans le cadre de la franchise de 30m€
- Le coût de la réassurance dans le cadre du Pool
- Ses sinistres non pris en charge par la réassurance et non mutualisés

A la charge potentielle de l’assureur membre du Pool facultatif :

- Le coût de la réassurance dans le cadre du Pool facultatif
- Ses sinistres non pris en charge par la réassurance et non mutualisés

➔ *Prise en compte du risque de crédit du réassureur*

Tous les réassureurs ne bénéficient pas de la même notation, ne présentant pas ainsi le même risque de crédit pour les assureurs membres du BCAC. En effet, ce sont ces derniers qui supportent le risque de ne pas voir une partie de leur charge de sinistre remboursée si un ou des réassureur(s) fait/ont défaut durant la période.

Ainsi, nous intégrons dans notre évaluation le risque de crédit du réassureur, ceci entraînant une tarification différente selon la notation du réassureur.

Table 4.7: Exemple de grille de spreads S&P

| spread | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| AAA    | 0.000% | 0.000% | 0.014% | 0.023% | 0.029% | 0.066% | 0.121% | 0.105% |
| AA     | 0.000% | 0.006% | 0.024% | 0.038% | 0.052% | 0.089% | 0.111% | 0.111% |
| A      | 0.036% | 0.048% | 0.054% | 0.066% | 0.081% | 0.112% | 0.187% | 0.227% |
| BBB    | 0.108% | 0.132% | 0.144% | 0.191% | 0.215% | 0.302% | 0.377% | 0.358% |
| BB     | 0.638% | 1.055% | 1.247% | 1.337% | 1.362% | 1.513% | 1.607% | 1.590% |
| B      | 3.170% | 3.414% | 3.353% | 3.094% | 2.815% | 2.725% | 2.733% | 2.540% |
| CCC    | 7.472% | 8.808% | 7.015% | 6.078% | 5.512% | 4.925% | 4.508% | 3.944% |

Nous supposons que si défaut il y a, il a lieu en milieu de période.

En supposant un *recovery rate*  $\alpha$  constant, nous obtenons la probabilité de défaut sur la période :

$$P_{\text{Default}} = \frac{1 - e^{-\text{spread} \cdot T}}{1 - \alpha}$$

#### IV.3.3.7. Point technique : VaR et TVaR

Définissons ici d'un concept que nous utiliserons dans la suite de notre travail :

*Value at Risk (VaR)*

$$VaR_{\gamma}(X) = q_{\gamma}(X) = \min\{x: P[X \leq x] \geq \gamma\}$$

Or cette mesure viole la propriété de sous-additivité condition de toute mesure de risque « cohérente ». En effet :

$$\rho VaR_{\gamma}(X^* + X^{**}) \not\leq \rho VaR_{\gamma}(X^*) + \rho VaR_{\gamma}(X^{**})$$

D'où l'introduction de la *Tail Var (TVaR)*, parfois nommée *Expected Shortfall (ES)* ou *Conditional VaR (CVar)* :

$$TVaR_{\gamma}(X) = \frac{1}{1 - \gamma} \cdot \int_{\gamma}^1 q_u(X) du$$

Dans la suite du développement, nous choisissons de nous concentrer sur la TVaR plutôt que sur la VaR, une moyenne étant par définition plus stable qu'un seuil.

#### IV.3.4. Comparaison et analyse des résultats. Analyse de sensibilité

Dans un premier temps, nous tarifons le traité de réassurance (l'ensemble des tranches) dans sa structure actuelle, en prenant en compte les spécificités du BCAC ainsi que le NCB et les clauses de reconstitution. Dans l'ensemble des tests de sensibilité, la structure de référence est celle en place

actuellement, et chaque test de sensibilité s'effectue toutes choses étant égales par ailleurs (*caeteris paribus*)

#### IV.3.4.1. Nombre de simulations

La première étape consiste à définir le nombre de simulations nécessaire à la convergence du prix empirique vers le prix théorique.

Au vu du temps de calcul que nécessite le programme, une bonne estimation de ce chiffre est fondamentale.

Soit  $X$  la prime théorique de la tranche du programme de réassurance.

Soit  $X_1, \dots, X_i, \dots, X_N$  les primes d'une tranche donnée pour chacune des  $N$  simulations, en vertu de la loi des grands nombres, nous pouvons considérer que :

$$E(X) \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i$$

D'après le Théorème Central Limite, la moyenne  $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} N(E(X), \frac{\sigma^2(X)}{N})$

D'où :

$$\sqrt{N} \cdot \frac{\bar{X}_N - E(X)}{\sigma} \xrightarrow{loi} N(0,1)$$

Avec l'intervalle de confiance à 95% :

$$\bar{x}_N \mp t_{0.05} \cdot \sqrt{\frac{\bar{s}_N^2}{N}}$$

$\bar{x}_N$ : réalisation de  $\bar{X}_N$ , estimateur sans biais de  $E(X)$

$$\bar{s}_N^2: \text{réalisation de } \bar{S}_N^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_N)^2, \text{ estimateur sans biais de } \sigma^2(X)$$

Nous définissons – à l'intervalle de confiance de 95% - une exigence d'erreur  $\varepsilon$  relative à la prime de réassurance exprimée en  $\varepsilon \cdot \bar{x}_N$  :

$$\begin{aligned} |\varepsilon \cdot \bar{x}_N| &= t_{0.05} \cdot \sqrt{\frac{\bar{s}_N^2}{N}} \\ \rightarrow N &= \frac{t_{0.05}^2 \cdot \bar{s}_N^2}{\varepsilon^2 \cdot \bar{x}_N^2} \end{aligned}$$

Nous commençons par réaliser 1.000 simulations :

Table 4.8: Résultats pour 1.000 simulations

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 611 298   | 827 031   | 617 971   | 359 976   | 287 616   | 238 865   | 166 620   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 919 743 | 3 469 574 | 4 177 391 | 3 341 949 | 3 042 085 | 2 785 512 | 1 998 798 |
| Prime Commerciale            | 1 106 635 | 1 598 132 | 1 375 693 | 903 422   | 763 344   | 597 038   | 422 039   |
| RoL Commercial               | 5.53%     | 3.20%     | 1.38%     | 0.90%     | 0.76%     | 0.60%     | 0.42%     |

Table 4.9: Nombre de simulations N nécessaires

| ε    | Tranche1 | Tranche2 | Tranche3  | Tranche4  | Tranche5  | Tranche6  | Tranche7  |
|------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.01 | 378 858  | 676 091  | 1 755 377 | 3 310 914 | 4 297 479 | 5 223 982 | 5 528 163 |
| 0.02 | 94 715   | 169 023  | 438 844   | 827 728   | 1 074 370 | 1 305 995 | 1 382 041 |
| 0.03 | 42 095   | 75 121   | 195 042   | 367 879   | 477 498   | 580 442   | 614 240   |
| 0.04 | 23 679   | 42 256   | 109 711   | 206 932   | 268 592   | 326 499   | 345 510   |
| 0.05 | 15 154   | 27 044   | 70 215    | 132 437   | 171 899   | 208 959   | 221 127   |
| 0.06 | 10 524   | 18 780   | 48 760    | 91 970    | 119 374   | 145 111   | 153 560   |
| 0.07 | 7 732    | 13 798   | 35 824    | 67 570    | 87 704    | 106 612   | 112 820   |
| 0.08 | 5 920    | 10 564   | 27 428    | 51 733    | 67 148    | 81 625    | 86 378    |
| 0.09 | 4 677    | 8 347    | 21 671    | 40 875    | 53 055    | 64 494    | 68 249    |
| 0.1  | 3 789    | 6 761    | 17 554    | 33 109    | 42 975    | 52 240    | 55 282    |

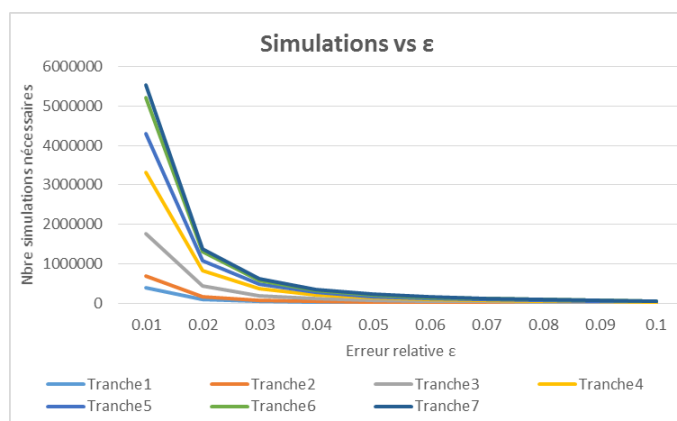


Figure 4.27 : Calibration du nombre de simulations nécessaires

La vitesse de convergence est faible en particulier pour les tranches élevées. Ainsi, à une erreur relative correspondant à 2% de la prime, la tranche 7 nécessite plus de 1.000.000 simulations pour converger correctement. Le fait que le nombre de simulations soit pair ou impair n'impacte pas les résultats.

1.000.000 de simulations nécessitent environ 10 heures de temps de calcul sur un ordinateur professionnel traditionnel. Le temps de calcul est linéaire en fonction du nombre de simulations réalisées.

Table 4.10: Résultats pour 10.000 simulations

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 626 047   | 808 185   | 662 912   | 403 546   | 302 519   | 250 856   | 169 077   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 981 027 | 3 473 504 | 4 602 642 | 3 549 879 | 3 110 937 | 2 841 756 | 2 095 147 |
| Prime Commerciale            | 1 134 943 | 1 571 365 | 1 489 293 | 990 769   | 792 981   | 618 650   | 434 950   |
| RoL Commercial               | 5.67%     | 3.14%     | 1.49%     | 0.99%     | 0.79%     | 0.62%     | 0.43%     |

Table 4.11: Résultats pour 100.000 simulations

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 701 653   | 493 660   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.70%     | 0.49%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Le tableau ci-dessus nous permet de visualiser l'ensemble des primes – pure et commerciale – pour chacune des tranches, et l'impact du chargement du réassureur, du chargement de sécurité, ainsi que du *No Claim Bonus* sur le tarif.

Sur l'occurrence d'impact de chaque tranche, nous constatons qu'il y a une probabilité de 10% par exemple que la première soit impactée par un sinistre, puis 7%, 3% pour les deuxième et troisième et 1% pour les tranches supérieures. Les RoL diminuent en fonction de la hauteur de la tranche, tout comme le rapport Prime Pure / Ecart Type de celle-ci passant d'un ratio d'environ 1/3 pour la tranche 1 à moins de 1/11 pour la tranche 7.

Nous calculons VaR et surtout TVaR pour chaque tranche afin de vérifier le scénario extrême vu par le réassureur. Ainsi, la TVaR de la tranche 1 à 66.69% signifie qu'en moyenne dans les 0.5% des cas les plus défavorables, la charge du réassureur est de 66.69% à comparer à un RoL commercial de 5.72%. Si le risque encouru par le réassureur apparaît comme très significatif, rappelons que dans l'autre extrême, il y a 90% de probabilités que cette prime n'engendre aucun frais de la part du réassureur. Le raisonnement tient également pour les tranches supérieures.

Ainsi, il est à noter que l'impact du chargement de sécurité n'est pas le même selon les tranches : plus les tranches sont élevées, et donc leur probabilité d'être impactées faible, plus le chargement de sécurité pèse dans le tarif.

| Tranche | RoL Pur ac ch.secu | RoL Pur ss ch.secu | Part du ch.secu |
|---------|--------------------|--------------------|-----------------|
| 1       | 4.29%              | 3.15%              | <b>27%</b>      |
| 2       | 2.40%              | 1.65%              | <b>31%</b>      |
| 3       | 1.08%              | 0.64%              | <b>40%</b>      |
| 4       | 0.72%              | 0.39%              | <b>46%</b>      |
| 5       | 0.60%              | 0.30%              | <b>49%</b>      |
| 6       | 0.47%              | 0.26%              | <b>46%</b>      |
| 7       | 0.33%              | 0.18%              | <b>47%</b>      |

Table 4.12 : Impact du chargement de sécurité selon les tranches

Nous prenons la décision pour la suite de nos travaux de nous limiter à 100.000 simulations afin de pouvoir tester le maximum de sensibilités du modèle dans un temps raisonnable.

#### IV.3.4.2. Sensibilité à la durée du traité

Le choix de la durée du traité étant une décision du BCAC et des membres du Pool, nous décidons d'en vérifier l'impact. Prime Pure, Ecart Type Prime Pure et Prime Commerciale sont exprimés en € dans la suite du développement.

Table 4.13: Résultats pour 100.000 simulations – 1 an

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.14: Résultats pour 100.000 simulations – 2 ans

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.82      | 0.87      | 0.95      | 0.98      | 0.98      | 0.98      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 1 218 503 | 1 604 495 | 1 250 647 | 765 775   | 592 119   | 486 570   | 320 562   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 812 308 | 4 933 741 | 6 188 591 | 4 972 401 | 4 370 717 | 3 986 476 | 2 864 284 |
| Prime Commerciale            | 2 075 251 | 2 884 282 | 2 526 748 | 1 682 300 | 1 359 977 | 1 047 408 | 713 844   |
| RoL Commercial               | 10.38%    | 5.77%     | 2.53%     | 1.68%     | 1.36%     | 1.05%     | 0.71%     |
| Variation vs Actu            | 81%       | 80%       | 75%       | 75%       | 70%       | 66%       | 61%       |
| VaR Ppure 99.5%              | 66.67%    | 46.98%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 26.33%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 76.89%    | 70.77%    | 39.51%    | 35.65%    | 34.44%    | 34.27%    | 28.35%    |

Table 4.15: Résultats pour 100.000 simulations – 3 ans

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.74      | 0.82      | 0.93      | 0.96      | 0.97      | 0.98      | 0.98      |
| Prime Pure                   | 1 810 506 | 2 400 443 | 1 911 836 | 1 145 428 | 857 629   | 709 946   | 474 441   |
| Ecart Type Prime Pure        | 3 417 234 | 6 131 134 | 7 708 061 | 6 036 105 | 5 277 745 | 4 822 169 | 3 482 390 |
| Prime Commerciale            | 2 975 861 | 4 153 023 | 3 659 234 | 2 357 695 | 1 851 374 | 1 428 811 | 980 827   |
| RoL Commercial               | 14.88%    | 8.31%     | 3.66%     | 2.36%     | 1.85%     | 1.43%     | 0.98%     |
| Variation vs Actu            | 160%      | 159%      | 154%      | 145%      | 131%      | 126%      | 121%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 75.15%    | 67.68%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 27.10%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 85.76%    | 82.59%    | 48.32%    | 37.55%    | 35.86%    | 35.18%    | 29.32%    |

Table 4.16: RoL vs durée du traité de réassurance

| Tranche              | 1      | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
|----------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| RoL Commercial 1 an  | 5.72%  | 3.20% | 1.44% | 0.96% | 0.80% | 0.63% | 0.44% |
| RoL Commercial 2 ans | 10.38% | 5.77% | 2.53% | 1.68% | 1.36% | 1.05% | 0.71% |
| RoL Commercial 3 ans | 14.88% | 8.31% | 3.66% | 2.36% | 1.85% | 1.43% | 0.98% |

Le RoL en fonction du temps progresse plus pour les tranches basses que pour les tranches élevées (+160% de 1 à 3 ans pour la tranche 1 vs +121% de 1 à 3 ans pour la tranche 7).

Table 4.17: VaR et TVaR vs durée du traité de réassurance

| Tranche                | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| VaR Ppure 99.5% 1 an   | 39.22% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 24.00% |
| TVaR Ppure 99.5% 1 an  | 66.69% | 45.23% | 35.18% | 33.93% | 33.83% | 33.52% | 26.78% |
| VaR Ppure 99.5% 2 ans  | 66.67% | 46.98% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 26.33% |
| TVaR Ppure 99.5% 2 ans | 76.89% | 70.77% | 39.51% | 35.65% | 34.44% | 34.27% | 28.35% |
| VaR Ppure 99.5% 3 ans  | 75.15% | 67.68% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 27.10% |
| TVaR Ppure 99.5% 3 ans | 85.76% | 82.59% | 48.32% | 37.55% | 35.86% | 35.18% | 29.32% |

Au vu de la stabilité des primes et des variances de celles-ci (voir Annexe 4), nous considérons au vu de l'approche prudente adoptée depuis le début de l'étude qu'ajouter encore un chargement de sécurité est discutable, mais nous l'effectuons néanmoins.

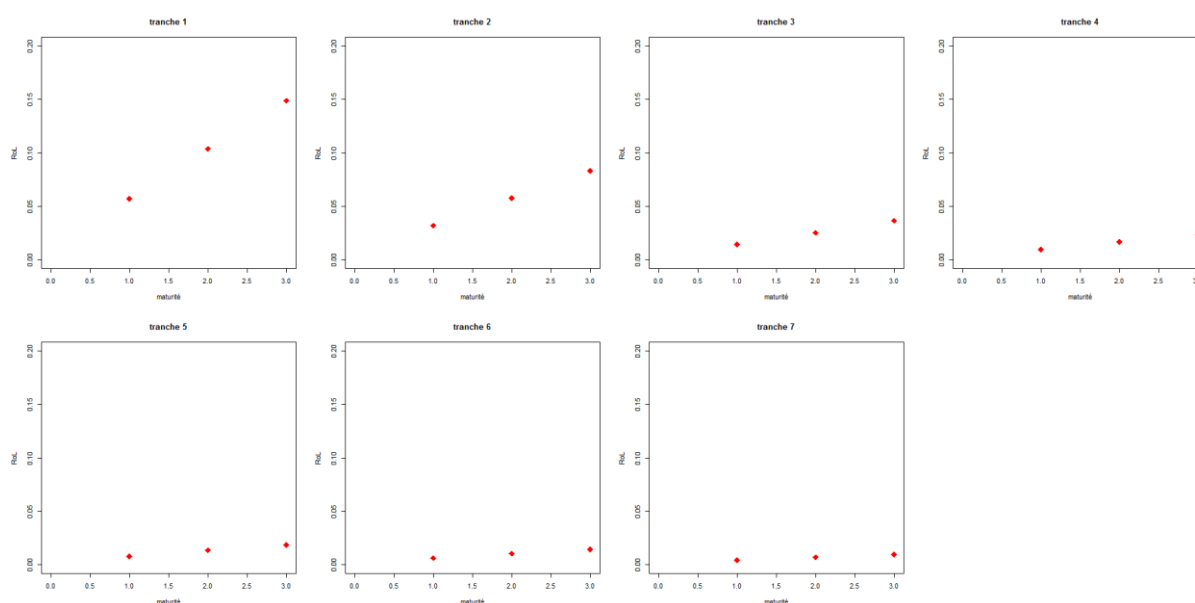
Dans la littérature, nous trouvons ce chargement exprimé comme :

$$\text{La réassurance : chargement de sécurité} = \text{taux}_{\text{sécu}} \cdot \sqrt{\sigma^2(X)}$$

Avec  $\text{taux}_{\text{sécu}} = 7.5\%$  (taux utilisé fréquemment en Réassurance sans plus de justification)

NB : Si rien n'est mentionné dans les tests suivants, cela signifie que ces derniers sont effectués en supposant que les tranches optionnelles sont souscrites par l'ensemble du Pool Obligatoire.

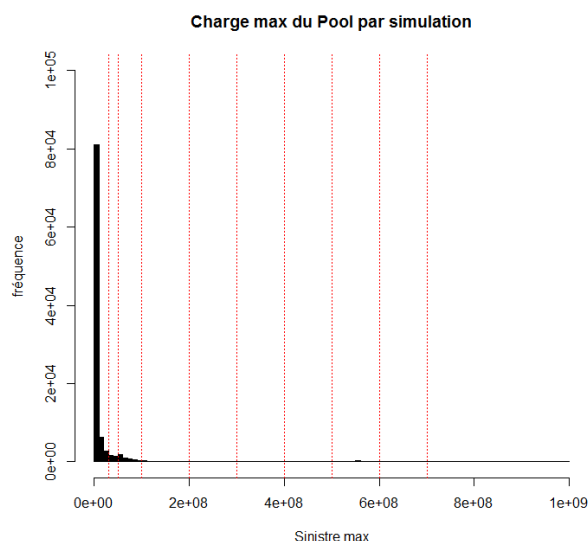
Figure 4.28 : Evolution des RoL vs durée du traité de réassurance



Nous constatons que l'évolution des primes en fonction de la durée du contrat est relativement linéaire, en particulier pour les tranches les plus élevées, ainsi augmenter la durée du contrat afin d'économiser sur le tarif ne présente pas un intérêt significatif.

Nous présentons la distribution du sinistre maximal à la charge du Pool Obligatoire par simulation, ainsi que leur distribution (en rouge le niveau des tranches actuelles) :

Figure 4.29 : Charge maximum du Pool par simulation – durée 1 an



Nous représentons pour chacune des 100.000 simulations le montant maximum à la charge du Pool. La distribution ci-contre présente la fréquence de chaque montant de sinistre maximum, entre 0 et 1Miards€, avec un pas de discrétisation de 10Mions€. Les traits rouges représentent le niveau des tranches de la structure actuelle de réassurance.

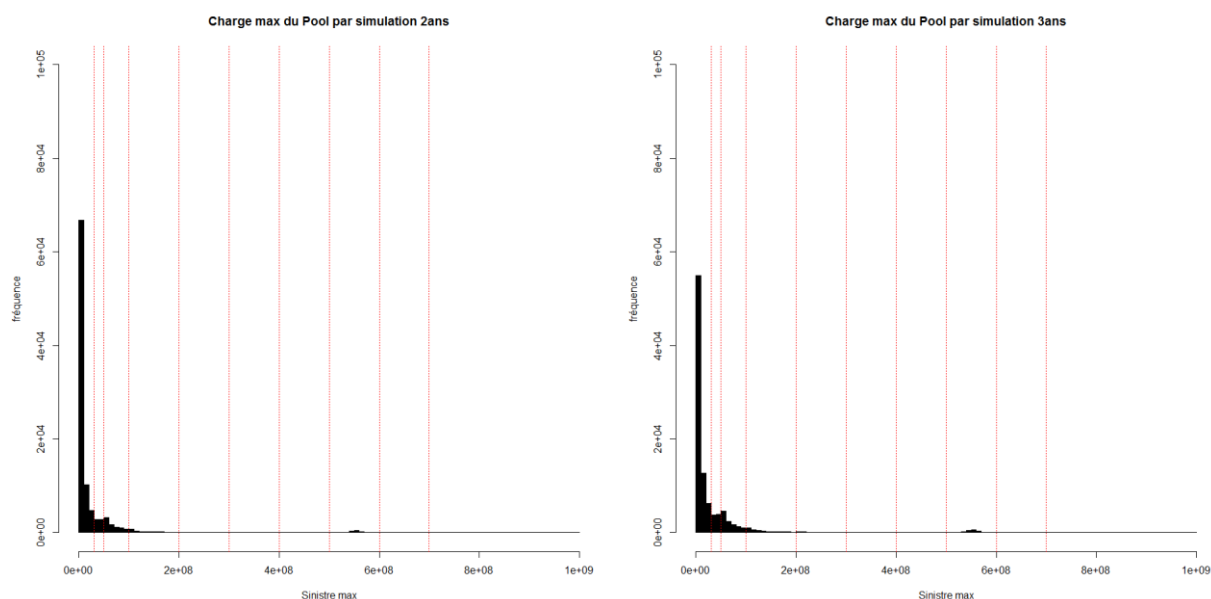
Nous constatons une surreprésentation des « petits maximums », avec plus de 90.000 simulations ne nécessitant pas d'intervention du Pool (les masses à gauche de u premier trait rouge en partant de la gauche). Les masses relatives aux tranches 2 et 3 restent visibles, tout comme c'est légèrement le cas pour la tranche 7.

Si le maximum est exactement égal à la limite haute du Pool Obligatoire, cela signifie que le reste aurait dû être pris en compte par le Pool Facultatif pour les assureurs qui en sont membres, à leur charge propre pour les autres. En effet, ce graphique représente pour chaque simulation :

$$\sup\{\min(\text{limite haute Pool Oblig}, \text{charge simulée maximum})\}$$

Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0      Maximum : 593.5M€

Figure 4.30 : Charge maximum du Pool par simulation – durée 2 ans et 3 ans



2 ans : Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0 durée 1an)  
Maximum : 593.1M€ (vs 593.5M€ durée 1 an)

3 ans : Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0 durée 1an)  
Maximum : 586.6M€ (vs 593.5M€ durée 1 an)

Nous constatons un décalage léger des masses de la distribution vers la droite, au fur et à mesure que la durée du contrat augmente.

Les graphiques de convergence des variances sont disponibles en Annexe 5.

Jusqu'à maintenant, nous avons abordé cette étude sous l'angle du tarif, et donc du réassureur, vendeur de risque. Néanmoins, à l'origine du choix de la structure de la couverture se trouve l'opinion du client c'est-à-dire dans le cas présent, chacun des membres du Pool. Ainsi, nous présentons pour chacun des tests de sensibilité, l'impact sur le capital nécessaire que ce dernier doit provisionner en fonction et de son risque initial et de la structure de réassurance choisie. Cette logique intervient dans le cadre des obligations ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) pour chacun, et permet aux assureurs de prendre leur décision à l'aune de ces éléments. Ces chiffres ne prennent pas en compte le coût de la structure de réassurance.

Table 4.18 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – durée 1 an

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| $\sigma$ (charge) | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max        | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%)       | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Si le régulateur préconise de raisonner en VaR (Value-At-Risk) pour des raisons de simplicité – et de calcul et d'interprétation – nous choisissons de raisonner plutôt en TVaR, ce pour les propriétés mathématiques de ce dernier estimateur, au seuil du régulateur à savoir 1/200-ile (99.5%).

En considérant que le montant de capital à provisionner pour l'assureur membre du Pool correspondant au niveau de la TVaR à 99.5%, cela signifie que si le choix se porte sur la structure de réassurance telle qu'elle est actuellement, l'assureur 1 doit provisionner 10.98M€ pour l'année à venir (hors primes liées à la structure de réassurance), l'assureur 2 0.67M€ etc...

Table 4.19 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – durée 2 ans

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15    | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|------|-------|------|
| E(charge)         | 2.41  | 0.02 | 1.41  | 0.00 | 3.47  | 4.69  | 0.89  | 1.06  | 0.17 | 0.13 | 3.46  | 0.82  | 0.01 | 0.09 | 0.53  | 0.05 |
| $\sigma$ (charge) | 2.65  | 0.08 | 1.63  | 0.03 | 3.74  | 4.99  | 1.08  | 1.26  | 0.30 | 0.25 | 3.72  | 1.01  | 0.05 | 0.19 | 0.69  | 0.14 |
| Charge Max        | 38.35 | 3.27 | 16.97 | 1.52 | 46.77 | 68.75 | 14.63 | 31.86 | 6.57 | 6.71 | 62.66 | 12.83 | 5.11 | 5.03 | 11.07 | 4.04 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 12.54 | 0.56 | 7.77  | 0.16 | 17.81 | 23.52 | 5.20  | 6.02  | 1.62 | 1.41 | 17.47 | 4.91  | 0.36 | 1.12 | 3.45  | 0.88 |
| TVaR(99.5%)       | 14.69 | 0.83 | 9.10  | 0.30 | 20.63 | 27.49 | 6.12  | 7.08  | 2.14 | 1.89 | 20.66 | 5.76  | 0.57 | 1.53 | 4.20  | 1.22 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4%  | 0.2% |

Table 4.20 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – durée 3 ans

| Assureur          | 1      | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14    | 15   | 16   |
|-------------------|--------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|-------|------|------|
| E(charge)         | 3.54   | 0.03 | 2.07  | 0.00 | 5.10  | 6.88  | 1.30  | 1.55  | 0.25 | 0.20 | 5.06  | 1.20  | 0.01 | 0.13  | 0.77 | 0.08 |
| $\sigma$ (charge) | 3.25   | 0.10 | 1.97  | 0.04 | 4.56  | 6.08  | 1.31  | 1.53  | 0.36 | 0.30 | 4.53  | 1.22  | 0.06 | 0.24  | 0.84 | 0.17 |
| Charge Max        | 105.50 | 3.08 | 35.42 | 3.55 | 66.04 | 78.55 | 40.90 | 37.23 | 6.73 | 5.27 | 55.63 | 13.30 | 3.72 | 14.85 | 9.42 | 5.45 |
| Charge Min        | 0.00   | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 15.52  | 0.66 | 9.40  | 0.21 | 21.91 | 29.17 | 6.32  | 7.31  | 1.90 | 1.66 | 21.75 | 5.88  | 0.43 | 1.33  | 4.12 | 1.03 |
| TVaR(99.5%)       | 17.97  | 0.94 | 10.97 | 0.38 | 25.16 | 33.48 | 7.41  | 8.51  | 2.43 | 2.12 | 24.75 | 6.74  | 0.65 | 1.78  | 4.90 | 1.43 |
| Poids Pool        | 12.6%  | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3%  | 2.4% | 0.2% |

Mis à part les très petits assureurs (4 et 13) pour lesquels l'aspect stochastique du modèle peut aller à l'encontre de cela, nous constatons que l'espérance de la charge par assureur augmente environ

linéairement avec la durée du traité. Néanmoins les indices de VaR et TVaR adoptent plutôt un comportement en fonction de  $\sqrt{\text{temps}}$ .

IV.3.4.3. Sensibilité aux paramètres du Modèle

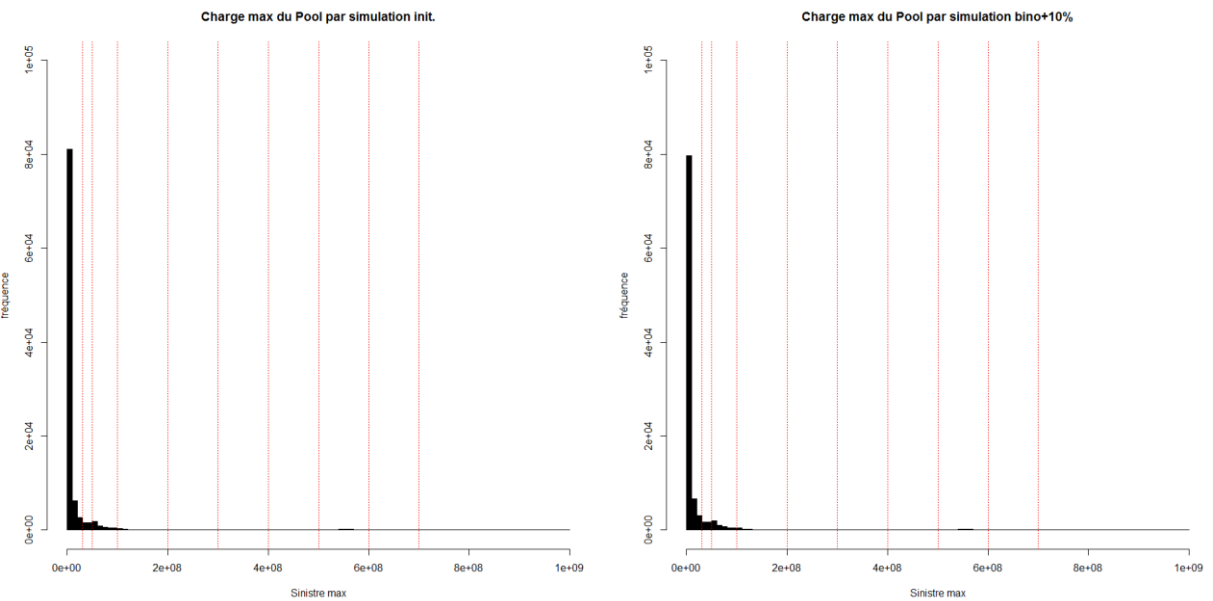
➔ Sensibilité à la fréquence de la sinistralité (Loi Binomiale Négative)

En augmentant la fréquence de la sinistralité de 10% - le nombre de sinistre de la base est augmenté de 10%, s’ensuit une nouvelle calibration de la Loi Binomiale Négative sur cet échantillon modifié :

Table 4.21: Résultats pour les primes de tranches – Augmentation de la sinistralité de 10%

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.89      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 672 150   | 871 164   | 675 164   | 410 269   | 316 313   | 259 546   | 175 735   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 076 212 | 3 567 742 | 4 515 407 | 3 617 307 | 3 219 481 | 2 912 304 | 2 118 210 |
| Prime Commerciale            | 1 212 083 | 1 673 493 | 1 497 485 | 1 008 209 | 825 411   | 637 291   | 446 135   |
| RoL Commercial               | 6.06%     | 3.35%     | 1.50%     | 1.01%     | 0.83%     | 0.64%     | 0.45%     |
| Variation vs Actu            | 6%        | 4%        | 4%        | 5%        | 3%        | 1%        | 0%        |
| VaR 99.5%                    | 48.52%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 26.33%    |
| TVaR 99.5%                   | 67.83%    | 44.48%    | 35.02%    | 33.85%    | 33.91%    | 33.53%    | 26.80%    |

Figure 4.31 : Charge maximum du Pool par simulation – Augmentation de la fréquence de sinistralité de 10%



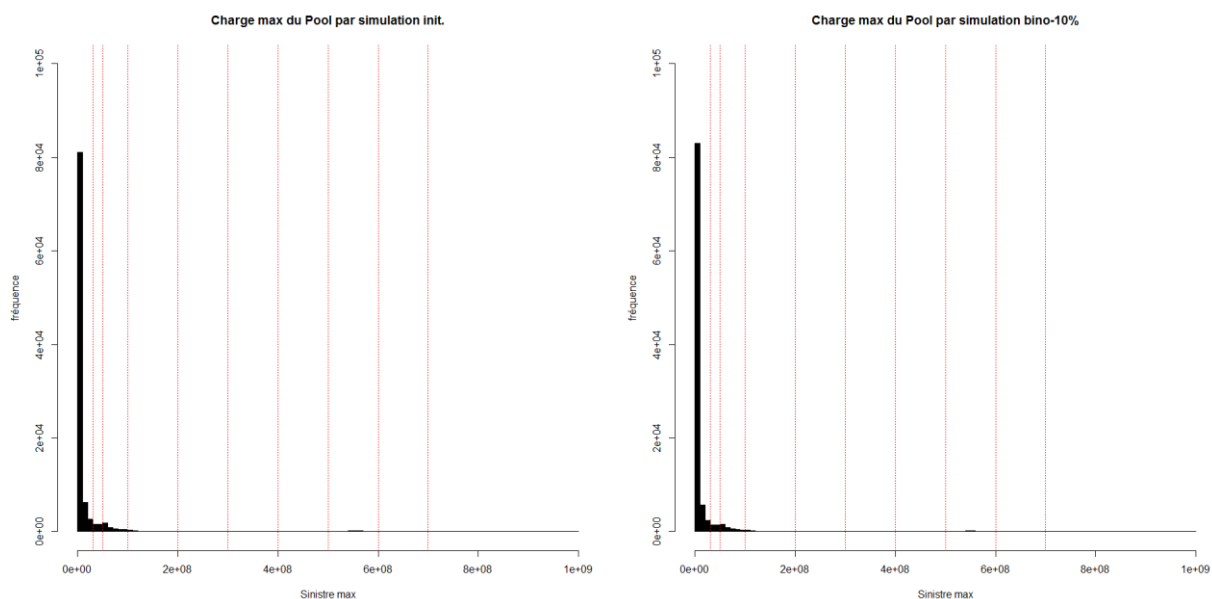
Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 583.4M€ (vs 593.5M€)

En diminuant la fréquence de la sinistralité de 10% - le nombre de sinistre de la base est diminué de 10%, s’ensuit une nouvelle calibration de la Loi Binomiale Négative sur cet échantillon modifié :

Table 4.22 : Résultats pour les primes de tranches – Diminution de la sinistralité de 10%

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.91      | 0.94      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 556 673   | 720 472   | 564 929   | 343 651   | 260 531   | 216 723   | 144 675   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 890 759 | 3 272 531 | 4 149 504 | 3 299 442 | 2 902 205 | 2 649 168 | 1 910 358 |
| Prime Commerciale            | 1 024 615 | 1 421 525 | 1 294 749 | 874 602   | 707 783   | 553 881   | 383 935   |
| RoL Commercial               | 5.12%     | 2.84%     | 1.29%     | 0.87%     | 0.71%     | 0.55%     | 0.38%     |
| Variation vs Actu            | -10%      | -11%      | -10%      | -9%       | -12%      | -12%      | -14%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 21.94%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 59.08%    | 43.10%    | 34.97%    | 33.63%    | 33.52%    | 33.33%    | 25.93%    |

Figure 4.32 : Charge maximum du Pool par simulation – Diminution de la fréquence de sinistralité de 10%



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 585.1M€ (vs 593.5M€)

L'impact de l'augmentation de la sinistralité (en termes de fréquence) est plus important sur les tranches basses (+6% pour le RoL de la tranche 1) que sur les tranches hautes (0% sur la tranche 7). A l'inverse l'impact d'une diminution de la fréquence de la sinistralité impacte plus les tranches élevées que les tranches basses.

Les indicateurs de VaR et TVaR varient, significativement dans le sens de la variation de la fréquence de la sinistralité, en particulier dans le cas d'une diminution et pour les tranches basses : la VaR de la tranche 1 passe de 66.69% à 59.08%.

Table 4.23 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| o(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.24 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Augmentation de la fréquence de sinistralité de 10%

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.35  | 0.01 | 0.79  | 0.00 | 1.94  | 2.63  | 0.50 | 0.59  | 0.09 | 0.07 | 1.93  | 0.46 | 0.01 | 0.05 | 0.29 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.97  | 0.06 | 1.20  | 0.02 | 2.78  | 3.70  | 0.80 | 0.93  | 0.22 | 0.18 | 2.76  | 0.74 | 0.04 | 0.14 | 0.51 | 0.11 |
| Charge Max  | 19.07 | 2.39 | 11.07 | 2.91 | 27.07 | 35.17 | 8.57 | 10.07 | 4.85 | 5.09 | 28.57 | 9.48 | 3.03 | 4.90 | 7.14 | 6.78 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.71  | 0.43 | 5.98  | 0.05 | 13.75 | 18.22 | 4.04 | 4.74  | 1.31 | 1.11 | 13.59 | 3.75 | 0.24 | 0.92 | 2.66 | 0.71 |
| TVaR(99.5%) | 11.25 | 0.66 | 7.01  | 0.23 | 15.84 | 21.02 | 4.78 | 5.60  | 1.74 | 1.53 | 15.67 | 4.52 | 0.45 | 1.23 | 3.28 | 1.02 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.25 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Diminution de la fréquence de sinistralité de 10%

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.11  | 0.01 | 0.65  | 0.00 | 1.60  | 2.16  | 0.41  | 0.49 | 0.08 | 0.06 | 1.59  | 0.38 | 0.00 | 0.04 | 0.24 | 0.02 |
| σ(charge)   | 1.78  | 0.06 | 1.09  | 0.02 | 2.51  | 3.34  | 0.73  | 0.84 | 0.20 | 0.17 | 2.50  | 0.68 | 0.03 | 0.13 | 0.47 | 0.09 |
| Charge Max  | 18.22 | 5.18 | 12.00 | 4.34 | 28.31 | 33.94 | 11.62 | 8.60 | 5.06 | 4.08 | 28.00 | 9.03 | 2.79 | 5.26 | 7.37 | 2.63 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.02  | 0.41 | 5.63  | 0.01 | 12.89 | 17.31 | 3.77  | 4.30 | 1.21 | 1.05 | 12.86 | 3.50 | 0.21 | 0.85 | 2.46 | 0.65 |
| TVaR(99.5%) | 10.36 | 0.66 | 6.54  | 0.17 | 14.63 | 19.41 | 4.55  | 5.08 | 1.62 | 1.40 | 14.61 | 4.24 | 0.40 | 1.20 | 3.07 | 0.91 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

En Annexes 6 et 7 la distribution des primes et de l'impact sur le capital des assureurs par jeu de paramètres.

L'impact sur le capital nécessaire des assureurs est symétrique à la hausse comme à la baisse lors d'une modification de la fréquence de la sinistralité. La modification de l'espérance de la charge de l'assureur sur la période est linéaire par rapport à celle-ci alors que l'impact sur la VaR et la TVaR est moindre.

➔ *Sensibilité au nombre de victimes par sinistre (Loi Zêta)*

Après avoir modifié la fréquence de la sinistralité, nous choisissons de tester le modèle à la modification de la sévérité de la sinistralité. La distribution Zêta a été choisie afin de modéliser le nombre de victimes par sinistre. Cette loi de probabilité présente un paramètre unique, que nous avons calibré à 1.66 pour la base de données EM-DAT et 1.90 pour la GTD : plus le paramètre est faible, plus la sévérité est grave (plus il y a en moyenne de victimes par sinistre). Nous choisissons de faire évoluer ce paramètre de +/- 0.1, étant donné qu'il s'agit du pas de discrétisation choisi lors la calibration effectuée au préalable.

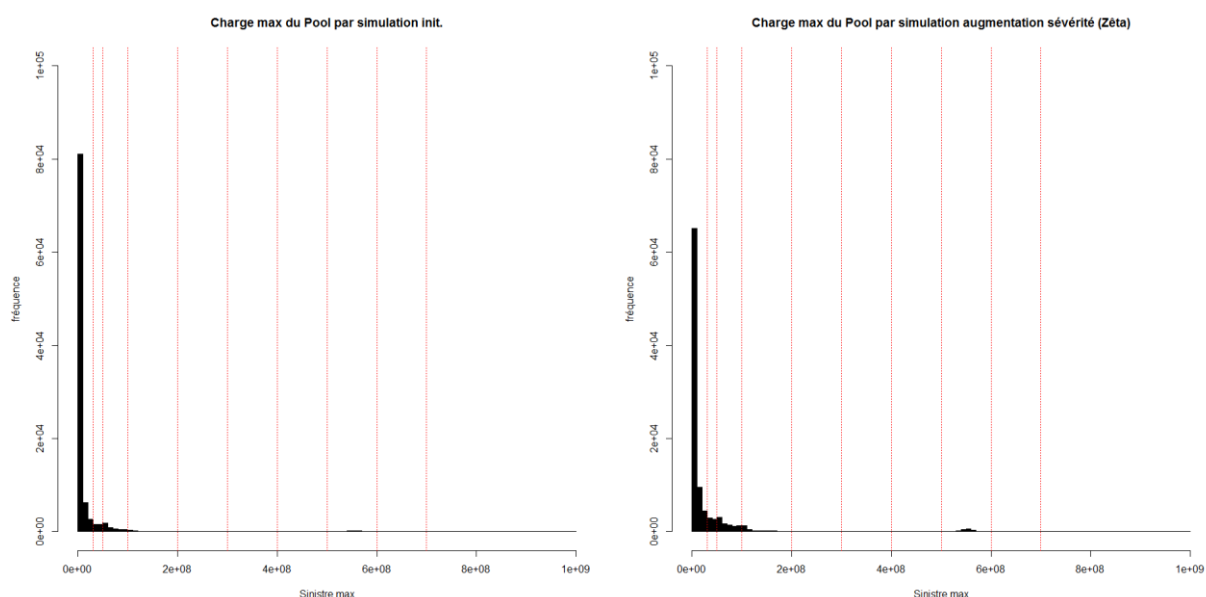
Table 4.26 : Résultats pour les primes de tranches – paramètres initiaux (Zêta(CAT)=1.66 / Zêta(TER)=1.90)

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.27 : Résultats pour les primes de tranches – Augmentation du nombre de victimes par sinistres (Zêta(CAT)=1.56 / Zêta(TER)=1.80)

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.79      | 0.85      | 0.94      | 0.97      | 0.97      | 0.98      | 0.98      |
| Prime Pure                   | 1 401 551 | 2 049 498 | 1 565 666 | 1 003 902 | 794 100   | 666 825   | 452 630   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 991 781 | 5 627 742 | 6 953 400 | 5 668 665 | 5 057 786 | 4 659 681 | 3 388 339 |
| Prime Commerciale            | 2 354 267 | 3 600 938 | 3 070 306 | 2 109 513 | 1 733 569 | 1 355 069 | 942 340   |
| RoL Commercial               | 11.77%    | 7.20%     | 3.07%     | 2.11%     | 1.73%     | 1.36%     | 0.94%     |
| Variation vs Actu            | 106%      | 125%      | 113%      | 119%      | 116%      | 114%      | 112%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 66.69%    | 66.67%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 27.20%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 77.99%    | 76.47%    | 43.01%    | 36.10%    | 34.77%    | 34.37%    | 28.75%    |

Figure 4.33 : Charge maximum du Pool par simulation - Augmentation du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.56$  /  $Z\grave{e}ta(TER)=1.80$ )

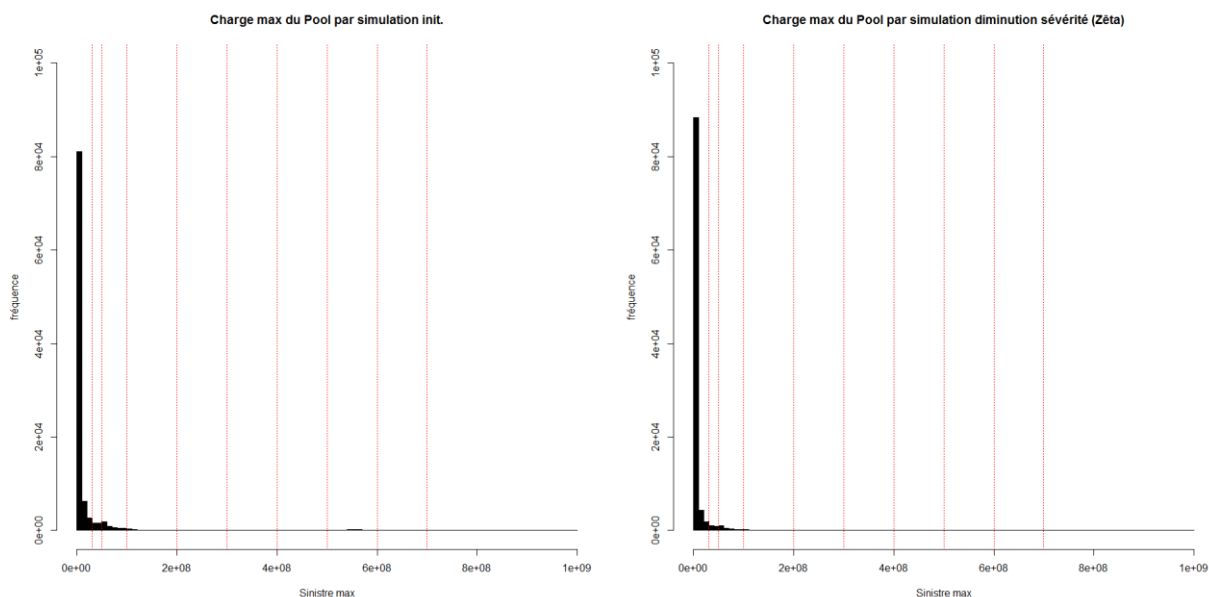


Occurrence des maximum > 600Mions   (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 587.7M   (vs 593.5M  )

Table 4.28 : Résultats pour les primes de tranches – Diminution du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.76$  /  $Z\grave{e}ta(TER)=2.00$ )

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.95      | 0.97      | 0.99      | 1.00      | 1.00      | 1.00      | 1.00      |
| Prime Pure                   | 327 151   | 384 785   | 251 786   | 138 743   | 102 522   | 81 275    | 52 309    |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 446 122 | 2 336 835 | 2 716 867 | 2 100 348 | 1 807 610 | 1 617 023 | 1 157 266 |
| Prime Commerciale            | 641 474   | 826 520   | 674 085   | 438 689   | 352 599   | 270 068   | 185 472   |
| RoL Commercial               | 3.21%     | 1.65%     | 0.67%     | 0.44%     | 0.35%     | 0.27%     | 0.19%     |
| Variation vs Actu            | -44%      | -48%      | -53%      | -54%      | -56%      | -57%      | -58%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 31.44%    | 0.00%     | 0.00%     | 0.00%     | 0.00%     |
| TVaR Ppure 99.5%             | 43.61%    | 36.26%    | 33.65%    | 27.75%    | 20.50%    | 16.25%    | 10.46%    |

Figure 4.34 : Charge maximum du Pool par simulation – Diminution du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.76$  /  $Z\grave{e}ta(TER)=2.00$ )



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 582.8M€ (vs 593.5M€)

Nous constatons un décalage de la masse vers la droite (les tranches hautes ont plus de risques d’être touchées - figure 4.35) lorsque la sévérité par sinistre augmente (diminution du paramètre  $s$  de la distribution Zêta) et un décalage de la masse vers la gauche lorsque la sévérité diminue (augmentation du paramètre  $s$  de la distribution Zêta – figure 4.36)

Le modèle est très sensible à ce paramètre. En effet, une variation de 0.1 point du paramètre  $s$  de la distribution Zêta entraîne une variation d’un rapport de 1 à 2 ou de 1 à 0.5 du tarif de la couverture de réassurance. Ce constat montre l’importance de la base de données initiale, de la propreté de ses données, du retraitement effectué, et de la calibration.

Ci-dessous, nous constatons le même impact sur le capital nécessaire à provisionner que sur le tarif : plus la sévérité par événement est élevée, plus le tarif augmente, et plus le capital est important. Ceci – encore une fois – nous permet d’insister sur le fait qu’une calibration de qualité est indispensable à la tarification de risques extrêmes comme les risques CAT.

Table 4.29 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – paramètres initiaux (zêta(CAT)=1.66 / zêta(TER)=1.90)

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| $\alpha$ (charge) | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max        | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Var(99.5%)        | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVar(99.5%)       | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.30 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – augmentation du nombre de victimes par sinistres (zêta(CAT)=1.56 / zêta(TER)=1.80)

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 2.48  | 0.02 | 1.46  | 0.00 | 3.56  | 4.80  | 0.92  | 1.10  | 0.18 | 0.14 | 3.54  | 0.85  | 0.01 | 0.10 | 0.55 | 0.06 |
| $\sigma$ (charge) | 2.81  | 0.10 | 1.73  | 0.03 | 3.95  | 5.25  | 1.16  | 1.35  | 0.33 | 0.28 | 3.93  | 1.09  | 0.06 | 0.22 | 0.75 | 0.16 |
| Charge Max        | 26.13 | 7.96 | 15.07 | 2.77 | 45.21 | 79.63 | 14.26 | 14.20 | 5.92 | 6.37 | 62.32 | 12.40 | 3.60 | 6.45 | 8.87 | 5.18 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 13.27 | 0.60 | 8.20  | 0.18 | 18.46 | 24.44 | 5.56  | 6.46  | 1.76 | 1.56 | 18.45 | 5.31  | 0.38 | 1.22 | 3.78 | 0.94 |
| TVaR(99.5%)       | 15.24 | 0.91 | 9.56  | 0.35 | 21.38 | 28.50 | 6.60  | 7.57  | 2.41 | 2.12 | 21.35 | 6.26  | 0.61 | 1.74 | 4.60 | 1.33 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.31 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – diminution du nombre de victimes par sinistres ( $\hat{z}\eta$ (CAT)=1.76 /  $\hat{z}\eta$ (TER)=2.00)

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 0.81  | 0.01 | 0.47  | 0.00 | 1.18  | 1.59  | 0.29 | 0.35 | 0.05 | 0.04 | 1.17  | 0.27 | 0.00 | 0.03 | 0.17 | 0.02 |
| $\sigma$ (charge) | 1.44  | 0.04 | 0.88  | 0.01 | 2.03  | 2.70  | 0.58 | 0.68 | 0.16 | 0.13 | 2.01  | 0.55 | 0.03 | 0.10 | 0.38 | 0.07 |
| Charge Max        | 14.42 | 2.65 | 10.40 | 1.66 | 22.70 | 27.04 | 9.09 | 9.38 | 4.84 | 3.18 | 21.96 | 7.84 | 3.46 | 4.78 | 7.03 | 4.34 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 7.31  | 0.27 | 4.58  | 0.01 | 10.20 | 13.58 | 3.10 | 3.54 | 1.02 | 0.88 | 10.24 | 2.91 | 0.11 | 0.70 | 2.12 | 0.50 |
| TVaR(99.5%)       | 8.95  | 0.51 | 5.56  | 0.10 | 12.55 | 16.68 | 3.83 | 4.39 | 1.37 | 1.18 | 12.36 | 3.60 | 0.31 | 0.99 | 2.68 | 0.76 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

En Annexes 6 et 7 la distribution des primes et de l'impact sur le capital des assureurs par jeu de paramètres.

➔ *Sensibilité aux facteurs de concentration (CF IV.3.3.4. Etape 3 : modélisation de la répartition au sein du Pool et du risque de concentration)*

Nous avons développé précédemment (au cours de la section IV.3.3.4. Etape 3 : modélisation de la répartition au sein du Pool et du risque de concentration) notre modélisation du risque de concentration. Celui-ci repose sur deux facteurs :

- le facteur  $t$  de « profondeur » de la concentration, choisie initialement à 525, ce chiffre correspondant à la capacité d'un Airbus A380-800 (nous supposons que si sinistre il y a, tous les passagers sont assurés à proportion  $r$  chez un seul et unique assureur)
- le facteur  $r$  de « proportion » de la concentration, choisie initialement à 0.5, sur les conseils de Directeurs de Ressources Humaines contactés : dans les 525 personnes sélectionnées par le facteur  $t$  précédent, 50% d'entre elles appartiennent à un assureur dit initial, membre du Pool.

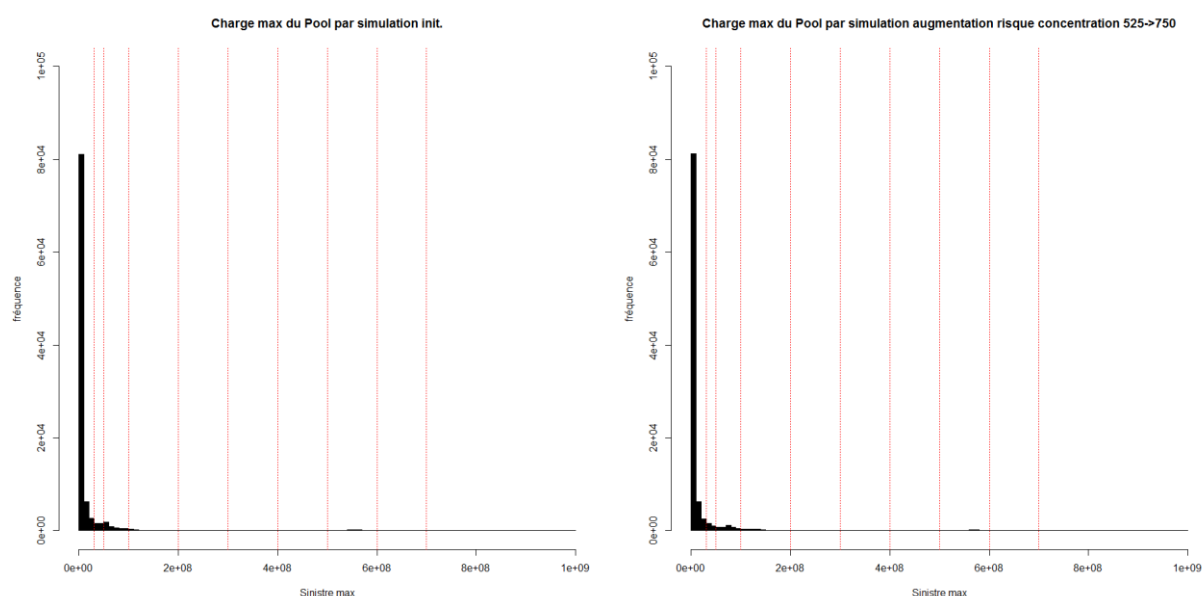
Afin de nous assurer de la cohérence du modèle, nous faisons varier ces deux paramètres  $t$  (en le passant à 750 et 300) et  $r$  (en le passant à 0.7 et 0.3), et vérifions l'impact de ces variations sur le tarif et sur le capital à provisionner par les assureurs membres du Pool.

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| Rol Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.33 : Résultats pour les primes de tranches –  $t=750$

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.85      | 0.89      | 0.95      | 0.98      | 0.98      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 949 591   | 1 602 985 | 1 358 198 | 710 466   | 555 123   | 466 467   | 350 239   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 483 930 | 4 968 177 | 6 267 666 | 4 775 878 | 4 264 183 | 3 889 629 | 3 167 604 |
| Prime Commerciale            | 1 384 423 | 2 346 231 | 1 999 928 | 1 049 816 | 820 811   | 621 955   | 466 986   |
| RoL Commercial               | 6.92%     | 4.69%     | 2.00%     | 1.05%     | 0.82%     | 0.62%     | 0.47%     |
| Variation vs Actu            | -1%       | 19%       | 24%       | 4%        | 3%        | 2%        | 13%       |
| VarR 99.5%                   | 66.67%    | 44.90%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 29.44%    |
| TVaR 99.5%                   | 72.86%    | 65.97%    | 39.65%    | 35.33%    | 34.57%    | 33.87%    | 31.02%    |

Figure 4.35 : Charge maximum du Pool par simulation – t=750



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) :  $3.10^{-5}$  (vs 0)  
 Maximum : 606.6M€ (vs 593.5M€). Le Pool Facultatif pourrait être impacté si ses membres sont touchés.

Pour  $t=750$ , l'impact doit être mineur, étant donné que :

Pour  $x \rightarrow zeta(1.66), p(525 < x < 750) = 2.4.10^{-3}$

Pour  $x \rightarrow zeta(1.90), p(525 < x < 750) = 6.2.10^{-4}$

Pour  $t=300$

Pour  $x \rightarrow zeta(1.66), p(300 < x < 525) = 5.0.10^{-3}$

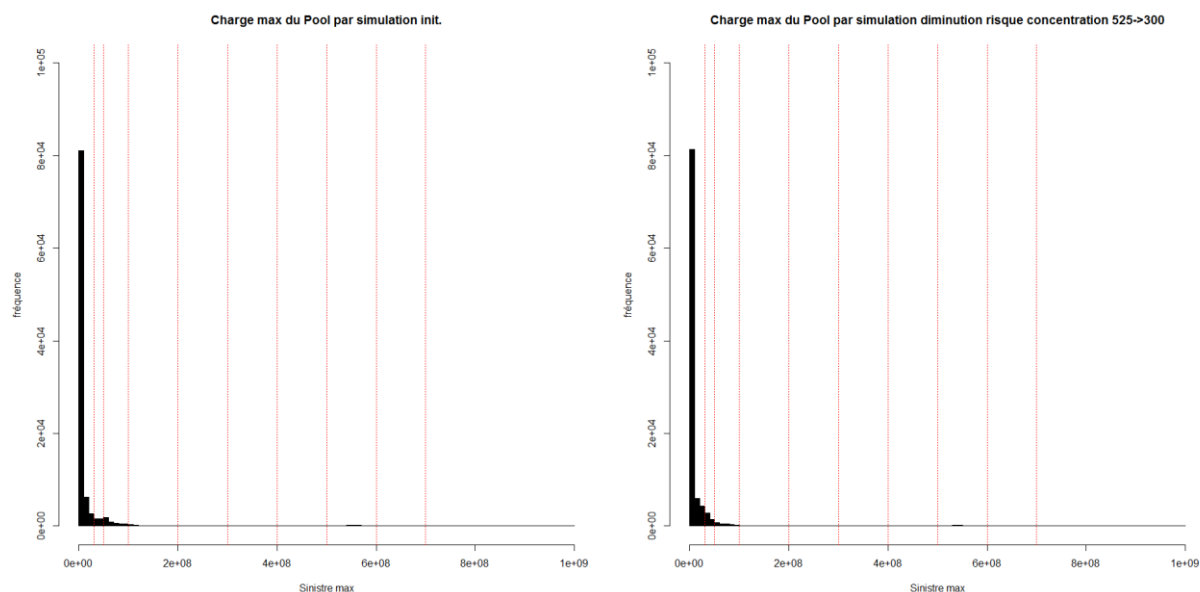
Pour  $x \rightarrow zeta(1.90), p(300 < x < 525) = 1.5.10^{-3}$

Par le calcul, nous constatons que le fait de faire passer  $t$  de 525 à 300 est 2 fois plus significatif que de le faire passer de 525 à 750.

Table 4.34 : Résultats pour les primes de tranches – t=300

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.92      | 0.96      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 454 237   | 544 309   | 553 437   | 358 903   | 273 288   | 225 818   | 121 698   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 672 363 | 2 853 587 | 4 119 802 | 3 378 937 | 2 979 591 | 2 711 387 | 1 616 320 |
| Prime Commerciale            | 850 849   | 1 118 240 | 1 274 869 | 905 946   | 735 224   | 572 230   | 323 896   |
| RoL Commercial               | 4.25%     | 2.24%     | 1.27%     | 0.91%     | 0.74%     | 0.57%     | 0.32%     |
| Variation vs Actu            | -26%      | -30%      | -11%      | -6%       | -8%       | -9%       | -27%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 16.29%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 52.25%    | 37.68%    | 33.91%    | 33.74%    | 33.68%    | 33.54%    | 21.91%    |

Figure 4.36 : Charge maximum du Pool par simulation – t=300

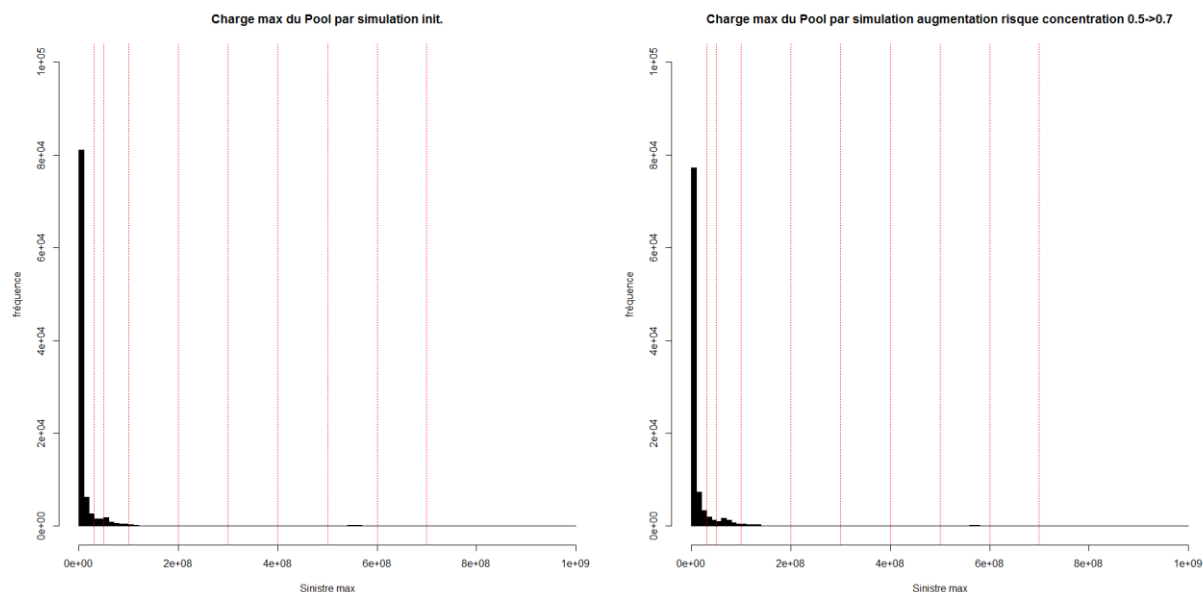


Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 568.3M€ (vs 593.5M€)

Table 4.35 : Résultats pour les primes de tranches – r=0.7

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.88      | 0.91      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 762 744   | 1 178 822 | 804 954   | 413 088   | 312 594   | 257 236   | 193 412   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 215 379 | 4 155 154 | 4 818 514 | 3 639 147 | 3 191 444 | 2 908 943 | 2 375 046 |
| Prime Commerciale            | 1 357 981 | 2 186 924 | 1 721 376 | 1 014 784 | 816 805   | 633 876   | 495 387   |
| RoL Commercial               | 6.79%     | 4.37%     | 1.72%     | 1.01%     | 0.82%     | 0.63%     | 0.50%     |
| Variation vs Actu            | 19%       | 37%       | 19%       | 6%        | 2%        | 0%        | 11%       |
| VaR Ppure 99.5%              | 66.67%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 27.57%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 71.06%    | 51.14%    | 36.20%    | 34.21%    | 33.89%    | 33.80%    | 30.11%    |

Figure 4.37 : Charge maximum du Pool par simulation – r=0.7

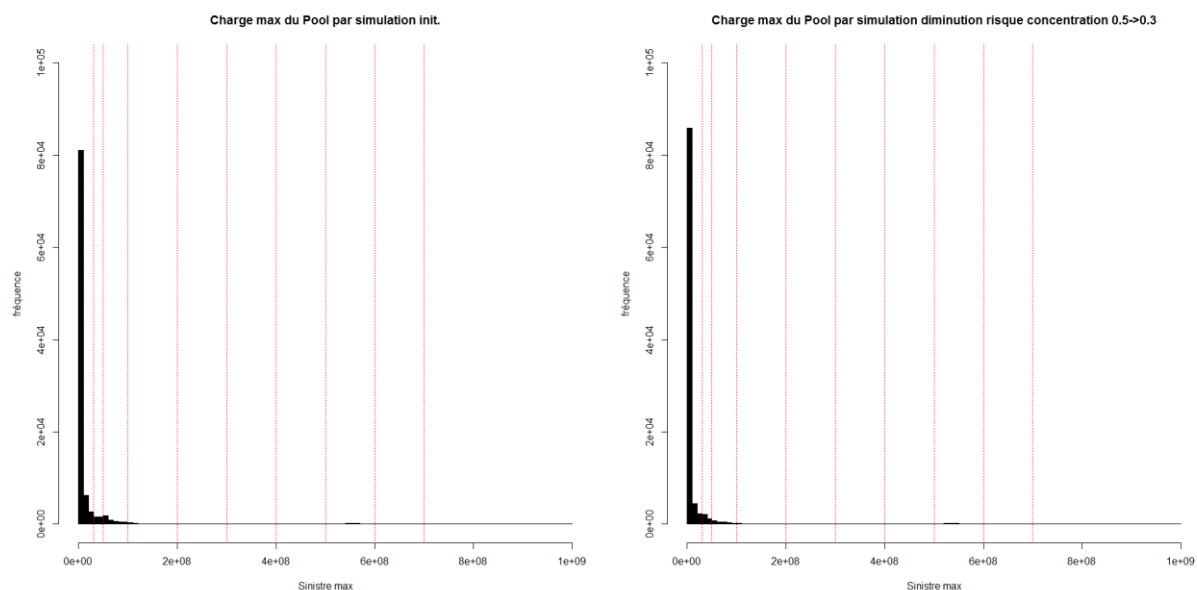


Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) :  $2.10^{-5}$  (vs 0)  
 Maximum : 613.8M€ (vs 593.5M€). Le Pool Facultatif pourrait être impacté si ses membres sont touchés.

Table 4.36 : Résultats pour les primes de tranches –  $r=0.3$

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.93      | 0.96      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 421 295   | 545 005   | 548 157   | 361 361   | 276 976   | 233 200   | 129 760   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 617 616 | 2 876 492 | 4 146 521 | 3 395 457 | 2 993 469 | 2 749 992 | 1 654 118 |
| Prime Commerciale            | 797 326   | 1 121 837 | 1 270 080 | 911 421   | 742 209   | 585 933   | 338 425   |
| RoL Commercial               | 3.99%     | 2.24%     | 1.27%     | 0.91%     | 0.74%     | 0.59%     | 0.34%     |
| Variation vs Actu            | -30%      | -30%      | -12%      | -5%       | -7%       | -7%       | -24%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 17.67%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 49.26%    | 38.91%    | 34.80%    | 33.70%    | 33.55%    | 33.33%    | 22.04%    |

Figure 4.38 : Charge maximum du Pool par simulation –  $r=0.3$



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 573.0M€ (vs 593.5M€)

Table 4.37 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – paramètres initiaux (t=525 / r=0.5)

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.38 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – t=750

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.23  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.77  | 2.39  | 0.45 | 0.54 | 0.08 | 0.07 | 1.76  | 0.42 | 0.00 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.87  | 0.06 | 1.15  | 0.02 | 2.64  | 3.53  | 0.76 | 0.89 | 0.21 | 0.18 | 2.63  | 0.71 | 0.04 | 0.14 | 0.49 | 0.10 |
| Charge Max  | 19.40 | 4.45 | 11.05 | 1.94 | 22.37 | 33.61 | 9.10 | 8.77 | 6.03 | 4.63 | 24.06 | 9.69 | 2.67 | 3.78 | 5.99 | 4.88 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.34  | 0.43 | 5.76  | 0.01 | 13.24 | 17.72 | 3.83 | 4.44 | 1.22 | 1.08 | 13.17 | 3.59 | 0.22 | 0.89 | 2.54 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.65 | 0.66 | 6.69  | 0.17 | 14.94 | 19.97 | 4.56 | 5.29 | 1.62 | 1.48 | 14.92 | 4.38 | 0.41 | 1.23 | 3.11 | 0.96 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.39 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – t=300

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.23  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.76  | 2.38  | 0.46 | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.76  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.88  | 0.06 | 1.15  | 0.02 | 2.63  | 3.51  | 0.77 | 0.89  | 0.21 | 0.18 | 2.62  | 0.71 | 0.04 | 0.13 | 0.49 | 0.10 |
| Charge Max  | 18.12 | 4.03 | 11.84 | 1.29 | 28.04 | 35.72 | 9.98 | 10.25 | 4.49 | 7.10 | 26.94 | 9.46 | 2.52 | 4.48 | 7.48 | 3.31 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.33  | 0.42 | 5.79  | 0.01 | 13.14 | 17.61 | 3.87 | 4.46  | 1.25 | 1.10 | 13.19 | 3.62 | 0.24 | 0.87 | 2.56 | 0.67 |
| TVaR(99.5%) | 10.74 | 0.69 | 6.79  | 0.18 | 15.01 | 19.95 | 4.63 | 5.25  | 1.62 | 1.47 | 15.01 | 4.31 | 0.43 | 1.17 | 3.12 | 0.93 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.40 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – r=0.7

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.40  | 0.01 | 0.81  | 0.00 | 2.03  | 2.76  | 0.51 | 0.60  | 0.09 | 0.07 | 2.02  | 0.47  | 0.01 | 0.05 | 0.30 | 0.03 |
| σ(charge)   | 2.02  | 0.06 | 1.23  | 0.02 | 2.87  | 3.85  | 0.80 | 0.94  | 0.21 | 0.18 | 2.86  | 0.75  | 0.04 | 0.14 | 0.51 | 0.10 |
| Charge Max  | 39.21 | 5.47 | 43.68 | 1.70 | 31.13 | 40.74 | 9.41 | 14.59 | 5.79 | 6.78 | 43.32 | 10.17 | 1.93 | 5.15 | 7.55 | 3.83 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.79  | 0.41 | 6.03  | 0.01 | 13.94 | 18.59 | 4.07 | 4.69  | 1.26 | 1.12 | 13.81 | 3.78  | 0.22 | 0.91 | 2.66 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 11.43 | 0.66 | 7.10  | 0.20 | 16.07 | 21.41 | 4.92 | 5.60  | 1.70 | 1.54 | 15.84 | 4.60  | 0.42 | 1.30 | 3.37 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.41 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) –  $r=0.3$ 

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 1.03  | 0.01 | 0.61  | 0.00 | 1.46  | 1.96  | 0.39 | 0.46 | 0.08 | 0.06 | 1.46  | 0.36 | 0.00 | 0.04 | 0.23 | 0.02 |
| $\sigma$ (charge) | 1.69  | 0.06 | 1.05  | 0.02 | 2.35  | 3.10  | 0.71 | 0.82 | 0.20 | 0.17 | 2.33  | 0.67 | 0.04 | 0.14 | 0.47 | 0.10 |
| Charge Max        | 18.07 | 2.23 | 12.39 | 3.29 | 24.58 | 34.23 | 7.58 | 9.50 | 4.48 | 4.61 | 25.95 | 7.76 | 2.68 | 4.70 | 9.32 | 5.20 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 8.53  | 0.42 | 5.40  | 0.01 | 11.98 | 15.78 | 3.61 | 4.17 | 1.24 | 1.08 | 11.79 | 3.50 | 0.23 | 0.88 | 2.42 | 0.68 |
| TVaR(99.5%)       | 10.08 | 0.64 | 6.35  | 0.20 | 14.05 | 18.74 | 4.37 | 5.04 | 1.59 | 1.41 | 13.98 | 4.24 | 0.42 | 1.21 | 3.03 | 0.93 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

En Annexes 6 et 7 la distribution des primes et de l'impact sur le capital des assureurs par jeu de paramètres.

L'augmentation du paramètre  $t$  de profondeur (passage de 525 à 750 personnes) entraîne quelques impacts sur la tranche facultative (100XS600), tout comme le paramètre  $r$  de proportion (passage de 50% à 70% de concentration sur le groupe concentré). Ainsi, le tarif augmente dans des proportions significatives pour l'ensemble des tranches (entre 0 et 25% pour  $t$  et entre 0 et 40% pour  $r$ ), alors qu'il diminue dans les mêmes proportions lorsque  $t$  et  $r$  sont abaissés respectivement à 300 et 30%.

En ce qui concerne le capital nécessaire à provisionner pour les assureurs, remarquons que le paramètre  $r$  de proportion a nettement plus d'impact que le paramètre  $t$ , les variations de ce dernier n'entraînant pas de modifications significatives. En effet le paramètre  $r$  de proportion augmente de façon significative la concentration du risque sur un seul et unique assureur, l'impact est visible sur l'assureur 6 (qui pèse plus de 25% du Pool), son espérance de charge augmentant de près de 15% (2.42M€ à 2.76M€) tout comme sa TVaR 99.5% qui progresse de près de 6% (20.28M€ à 21.41M€).

Les tests de sensibilité menés dans cette partie nous permettent de circonscrire et d'estimer le risque dit « de modèle ». Voici un tableau récapitulatif de ces sensibilités :

Table 4.42 : Tableau récapitulatif des sensibilités du modèle aux paramètres :

| Augmentation du paramètre       | Impact sur le prix de la couverture de réassurance | Impact sur le SCR (TVaR) global des membres du Pool |
|---------------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Durée de la couverture          | +                                                  | +                                                   |
| Fréquence de la sinistralité    | +                                                  | +                                                   |
| Nombre de victimes par sinistre | +                                                  | +                                                   |
| Effet concentration             | +                                                  | +                                                   |

A la vue de ces éléments, nous constatons que les caractéristiques du modèle confortent notre interprétation initiale quant à l'impact de chacun des paramètres, rendant notre approche robuste en termes de justification actuarielle. Il est à noter l'importance du paramètre lié au nombre de victimes par sinistre (la sévérité), et donc la calibration de la distribution Zêta. Cette conclusion intermédiaire nous permet de poursuivre l'utilisation de ce modèle afin de tester les caractéristiques propres – non plus à ce dernier – mais à la structure de réassurance.

#### IV.3.4.4. Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Dans la structure actuelle de réassurance du Pool, il existe une franchise de 2 têtes par assureur et par sinistre, ces deux têtes étant les plus chères pour chacun des assureurs. Nous cherchons à valoriser cette option, et à vérifier l'impact des variations de cette franchise et sur le tarif de la structure de réassurance et sur le capital à allouer en provisions pour les assureurs membres du Pool.

Nous testons respectivement une suppression de la franchise, puis le passage d'une franchise de de 2 à 1 tête, puis à 3, 5 et 10 têtes.

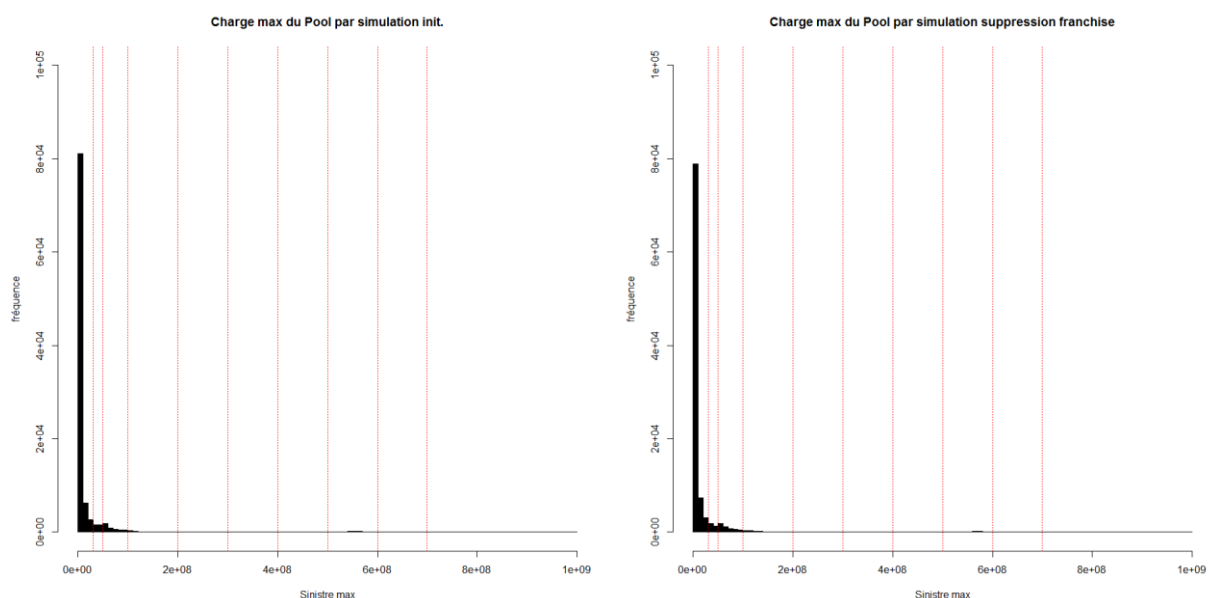
Table 4.43 : Résultats initiaux pour les primes de tranches – franchise 2 têtes

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.44 : Résultats pour les primes de tranches – Suppression de la franchise

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.89      | 0.92      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 664 654   | 931 826   | 696 202   | 381 485   | 290 471   | 236 396   | 176 901   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 070 726 | 3 705 921 | 4 530 334 | 3 488 459 | 3 061 108 | 2 781 318 | 2 240 641 |
| Prime Commerciale            | 1 200 587 | 1 777 379 | 1 529 953 | 951 435   | 769 655   | 593 327   | 459 933   |
| RoL Commercial               | 6.00%     | 3.55%     | 1.53%     | 0.95%     | 0.77%     | 0.59%     | 0.46%     |
| Variation vs Actu            | 5%        | 11%       | 6%        | -1%       | -4%       | -6%       | 3%        |
| VaR Ppure 99.5%              | 46.73%    | 3.70%     | 33.33%    | 22.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 26.66%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 68.63%    | 5.27%     | 35.67%    | 22.57%    | 33.61%    | 33.55%    | 29.41%    |

Figure 4.39 : Charge maximum du Pool par simulation – Suppression de la franchise

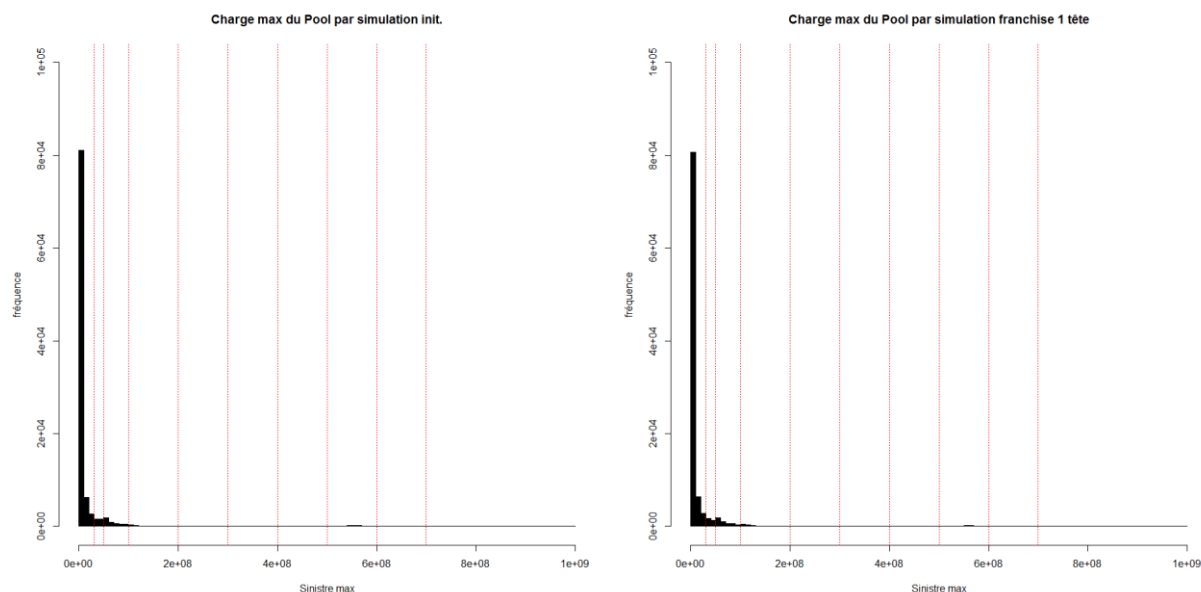


Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) :  $1.10^{-5}$  (vs 0)  
Maximum : 600.3M€ (vs 593.5M€)

Table 4.45 : Résultats pour les primes de tranches – franchise 1 tête

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 638 850   | 859 137   | 643 786   | 363 778   | 281 744   | 234 058   | 168 904   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 028 323 | 3 550 910 | 4 371 198 | 3 427 392 | 3 043 946 | 2 770 901 | 2 137 336 |
| Prime Commerciale            | 1 158 698 | 1 654 241 | 1 435 190 | 918 519   | 754 872   | 589 168   | 438 939   |
| RoL Commercial               | 5.79%     | 3.31%     | 1.44%     | 0.92%     | 0.75%     | 0.59%     | 0.44%     |
| Variation vs Actu            | 1%        | 3%        | 0%        | -4%       | -6%       | -7%       | -1%       |
| VaR Ppure 99.5%              | 37.53%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.91%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.36%    | 45.05%    | 35.25%    | 34.20%    | 33.90%    | 33.60%    | 28.03%    |

Figure 4.40 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 1 tête

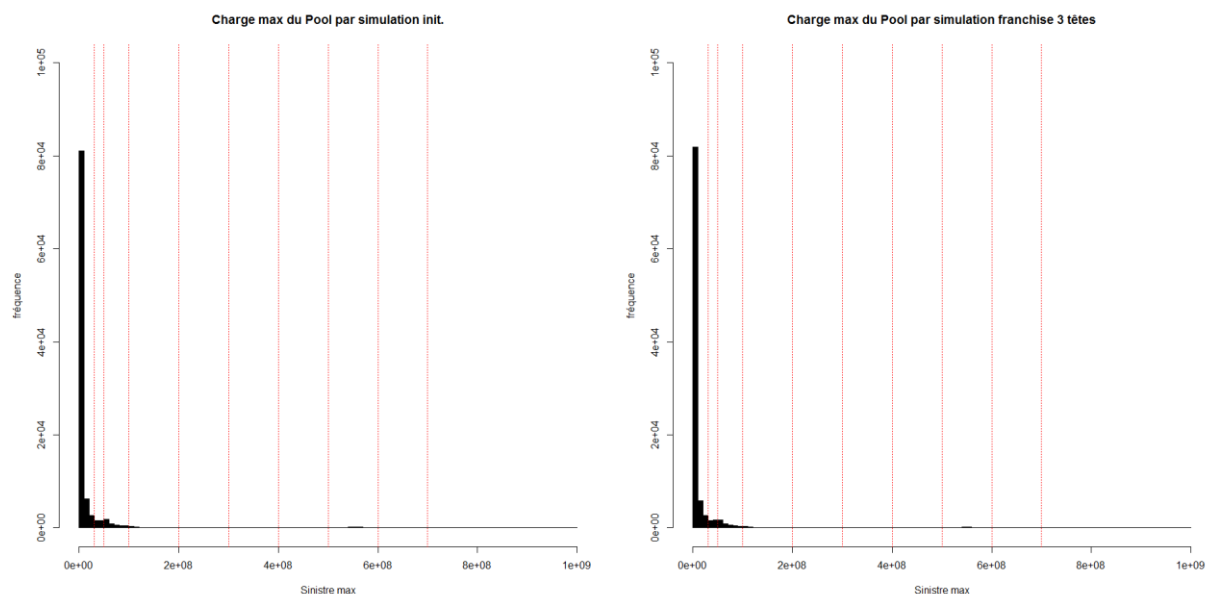


Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 593.2M€ (vs 593.5M€)

Table 4.46 : Résultats initiaux pour les primes de tranches – franchise 3 têtes

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.94      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 597 825   | 753 809   | 601 173   | 373 926   | 286 907   | 239 620   | 148 207   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 953 535 | 3 353 332 | 4 269 090 | 3 468 187 | 3 046 394 | 2 798 782 | 1 888 325 |
| Prime Commerciale            | 1 091 078 | 1 479 001 | 1 361 455 | 938 043   | 762 754   | 599 372   | 386 441   |
| RoL Commercial               | 5.46%     | 2.96%     | 1.36%     | 0.94%     | 0.76%     | 0.60%     | 0.39%     |
| Variation vs Actu            | -5%       | -8%       | -5%       | -2%       | -5%       | -5%       | -13%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 21.18%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 61.02%    | 43.92%    | 34.63%    | 33.96%    | 33.60%    | 33.62%    | 25.00%    |

Figure 4.41 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 3 têtes

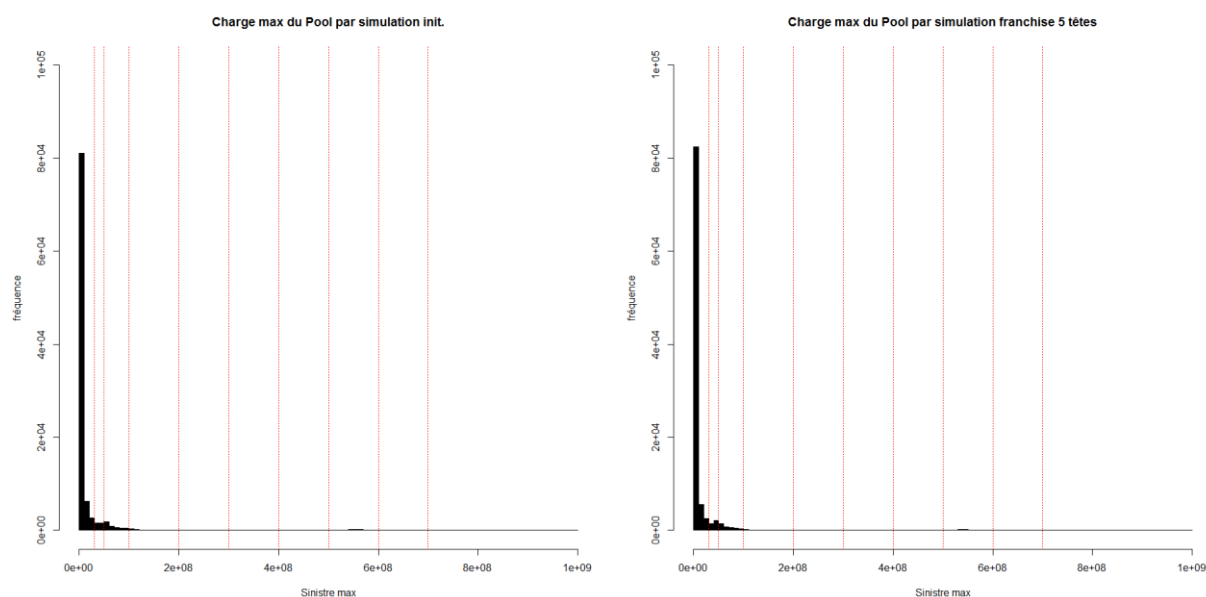


Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 583.6M€ (vs 593.5M€)

Table 4.47 : Résultats pour les primes de tranches – franchise 5 têtes

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.91      | 0.94      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 584 301   | 695 373   | 567 786   | 356 084   | 268 342   | 226 614   | 125 621   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 935 714 | 3 196 195 | 4 156 062 | 3 370 011 | 2 961 617 | 2 727 687 | 1 638 977 |
| Prime Commerciale            | 1 069 573 | 1 376 489 | 1 299 882 | 900 791   | 725 930   | 574 920   | 331 393   |
| Rol Commercial               | 5.35%     | 2.75%     | 1.30%     | 0.90%     | 0.73%     | 0.57%     | 0.33%     |
| Variation vs Actu            | -6%       | -14%      | -10%      | -6%       | -9%       | -9%       | -25%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 17.28%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 61.68%    | 40.87%    | 34.31%    | 33.93%    | 33.71%    | 33.63%    | 22.05%    |

Figure 4.42 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 5 têtes

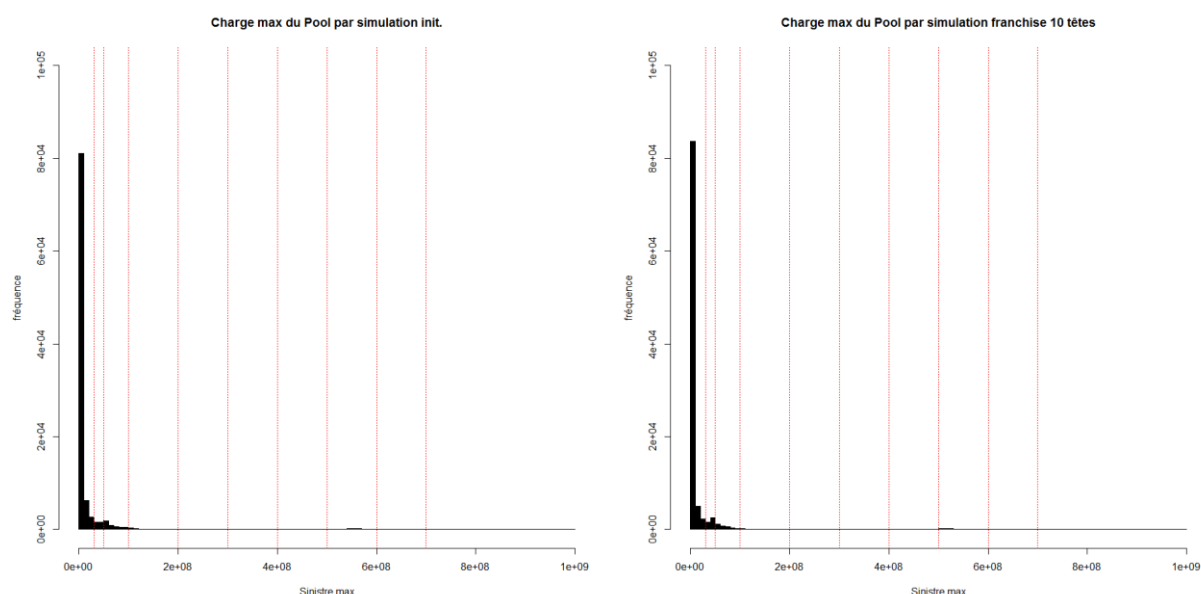


Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 565.5M€ (vs 593.5M€)

Table 4.48 : Résultats pour les primes de tranches – franchise 10 têtes

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7       |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.91      | 0.95      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99    |
| Prime Pure                   | 545 461   | 587 906   | 518 520   | 340 217   | 264 630   | 218 505   | 63 637  |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 855 822 | 2 943 035 | 4 008 759 | 3 300 184 | 2 922 858 | 2 677 167 | 941 001 |
| Prime Commerciale            | 1 004 303 | 1 191 590 | 1 211 084 | 869 642   | 716 132   | 559 057   | 178 949 |
| RoL Commercial               | 5.02%     | 2.38%     | 1.21%     | 0.87%     | 0.72%     | 0.56%     | 0.18%   |
| Variation vs Actu            | -12%      | -26%      | -16%      | -10%      | -11%      | -12%      | -60%    |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 3.87%   |
| TVaR Ppure 99.5%             | 58.82%    | 39.88%    | 34.52%    | 33.69%    | 33.58%    | 33.59%    | 12.55%  |

Figure 4.43 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 10 têtes



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 540.4M€ (vs 593.5M€)

Nous constatons que l'élévation de la franchise de 2 à 3 têtes n'entraîne qu'une économie marginale sur le coût de la structure. Cela est lié à la forme même de la distribution zêta qui sous-tend le nombre de victimes par sinistre : il y a beaucoup de sinistres avec très peu de victimes (1 ou 2)

|                                        |       |
|----------------------------------------|-------|
| $x \rightarrow zeta(1.66), p(x > 2) =$ | 38.4% |
| $x \rightarrow zeta(1.90), p(x > 2) =$ | 27.5% |

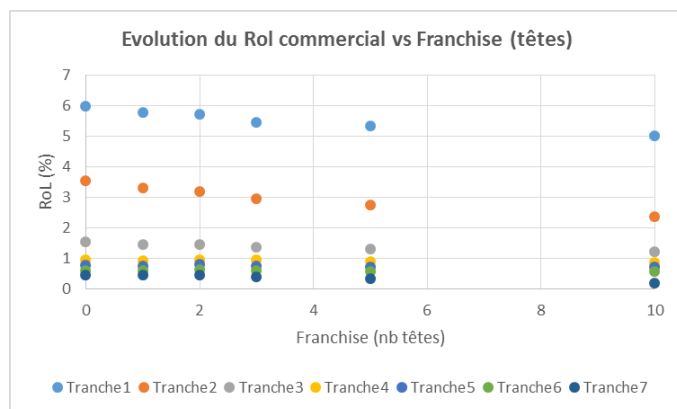


Figure 4.44 : Evolution du RoL commercial en fonction de la franchise (en nombre de têtes)

L'impact des modifications de franchise est assez limité sur le tarif de la couverture de réassurance, en particulier l'abaissement de 2 à 1 ou à 0 tête(s). A l'inverse, l'augmentation de cette franchise de 2 à 3,5, voire 10 têtes entraîne une diminution assez significative du tarif, même si cette économie est non-homogène selon les tranches (entre 10 et 26%, excepté 60% pour la tranche 7). De plus, nous constatons dans les distributions présentées des charges maximum que entre la simulation initiale (max : 593.5M€) et celle pour une franchise élargie à 10 têtes, une diminution de l'ordre de 10% (à 540.4M€). Dans la même optique, le réassureur peut être plus intéressé par tarifier une structure présentant une franchise plus élevée, au vu de la diminution des VaR et des TVaR par tranches, en particulier sur les tranches les plus hautes : la TVaR 99.5% de la tranche 7 est divisée par 2, passant de 26.78% (franchise 2 têtes) à 12.55% (franchise 10 têtes). En effet, plus la tranche est haute, plus celle-ci est impactée par la modification de la franchise en têtes.

En nous intéressant ci-dessous à l'impact de l'évolution de la franchise (en nombre de têtes) sur le capital à provisionner par l'assureur, nous retrouvons la logique que plus la franchise est basse, moins le niveau de SCR est élevé, et inversement. La logique doit être renversée pour le réassureur : pour ce dernier le SMP (*Sinistre Maximum Possible* / PML - *Possible Maximum Loss* en anglais - matérialisé ici par la VaR 99.5% ou la TVaR 99.5%) est d'autant plus important que la franchise est basse.

L'impact de l'évolution de la franchise est homogène entre les assureurs, quelques soit leur poids dans le Pool. Prenons l'exemple du plus gros (n°6 – 25.6%) et d'un plus petit membre (n°15 – 2.4%). Leurs espérances de charge respective dans la situation initiale sont 2.42M€ et 0.27M€, leurs TVaR 99.5% de 20.28M€ et 3.31M€. Supprimer intégralement la franchise fait passer leurs espérances de charge à 2.23M€ (-7%) et 0.21M€ (-22%) et leurs TVaR 99.5% à 17.80M€ (-12%) et 1.68M€ (-49%) alors que passer à une franchise de 10 têtes les fait bondir à 2.88M€ (+19%) et 0.35M€ (+30%) et 27.00M€ (+33%) et 7.04M€ (+113%). L'impact d'une modification de la franchise se ressent beaucoup plus sur les petits membres que sur les membres plus significatifs du Pool, et en termes d'espérance de charge et en TVaR 99.5%.

Table 4.49 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – paramètres initiaux (franchise 2 têtes)

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.50 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Suppression de la franchise

| Assureur    | 1     | 2    | 3    | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.10  | 0.01 | 0.62 | 0.00 | 1.62  | 2.23  | 0.37 | 0.45 | 0.06 | 0.05 | 1.61  | 0.34 | 0.00 | 0.03 | 0.21 | 0.02 |
| σ(charge)   | 1.57  | 0.01 | 0.88 | 0.00 | 2.31  | 3.18  | 0.54 | 0.65 | 0.08 | 0.06 | 2.30  | 0.49 | 0.00 | 0.04 | 0.30 | 0.02 |
| Charge Max  | 16.57 | 0.09 | 9.32 | 0.05 | 24.41 | 33.61 | 5.65 | 6.82 | 0.89 | 0.68 | 24.27 | 5.18 | 0.04 | 0.43 | 3.18 | 0.24 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 7.75  | 0.04 | 4.36 | 0.01 | 11.42 | 15.73 | 2.64 | 3.19 | 0.42 | 0.32 | 11.36 | 2.42 | 0.02 | 0.20 | 1.49 | 0.11 |
| TVaR(99.5%) | 8.77  | 0.05 | 4.93 | 0.01 | 12.93 | 17.80 | 2.99 | 3.61 | 0.47 | 0.36 | 12.85 | 2.74 | 0.02 | 0.23 | 1.68 | 0.13 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1% | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.51 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 1 tête

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.17  | 0.01 | 0.68  | 0.00 | 1.69  | 2.29  | 0.42 | 0.50 | 0.08 | 0.06 | 1.68  | 0.39 | 0.00 | 0.04 | 0.25 | 0.02 |
| σ(charge)   | 1.74  | 0.04 | 1.03  | 0.02 | 2.49  | 3.36  | 0.67 | 0.79 | 0.16 | 0.14 | 2.48  | 0.62 | 0.03 | 0.10 | 0.41 | 0.07 |
| Charge Max  | 15.26 | 3.73 | 10.94 | 2.22 | 23.74 | 29.71 | 6.71 | 8.61 | 3.34 | 4.99 | 22.08 | 6.51 | 1.75 | 3.50 | 7.11 | 1.91 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 8.72  | 0.31 | 5.12  | 0.01 | 12.48 | 16.87 | 3.35 | 3.92 | 0.90 | 0.78 | 12.43 | 3.13 | 0.20 | 0.63 | 2.10 | 0.49 |
| TVaR(99.5%) | 9.82  | 0.46 | 5.90  | 0.17 | 14.02 | 18.86 | 3.90 | 4.55 | 1.18 | 1.05 | 13.94 | 3.65 | 0.33 | 0.89 | 2.55 | 0.69 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.52 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 3 têtes

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.28  | 0.01 | 0.75  | 0.00 | 1.84  | 2.47  | 0.48  | 0.57  | 0.09 | 0.07 | 1.83  | 0.44  | 0.00 | 0.05 | 0.28 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.99  | 0.07 | 1.25  | 0.02 | 2.78  | 3.68  | 0.85  | 0.98  | 0.25 | 0.21 | 2.77  | 0.79  | 0.04 | 0.17 | 0.56 | 0.12 |
| Charge Max  | 20.23 | 3.84 | 13.76 | 2.49 | 29.78 | 36.90 | 10.43 | 11.56 | 5.83 | 8.59 | 28.33 | 11.29 | 3.48 | 6.05 | 9.60 | 6.03 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 10.05 | 0.45 | 6.35  | 0.01 | 13.94 | 18.56 | 4.43  | 5.00  | 1.51 | 1.38 | 13.91 | 4.03  | 0.22 | 1.11 | 2.97 | 0.83 |
| TVaR(99.5%) | 11.58 | 0.77 | 7.51  | 0.19 | 15.95 | 21.11 | 5.43  | 6.05  | 2.05 | 1.85 | 15.86 | 4.95  | 0.44 | 1.57 | 3.80 | 1.18 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.53 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 5 têtes

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15    | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|------|-------|------|
| E(charge)   | 1.37  | 0.01 | 0.81  | 0.00 | 1.95  | 2.62  | 0.51  | 0.61  | 0.10 | 0.08 | 1.94  | 0.48  | 0.01 | 0.05 | 0.31  | 0.03 |
| σ(charge)   | 2.23  | 0.09 | 1.42  | 0.03 | 3.03  | 3.98  | 1.00  | 1.14  | 0.31 | 0.27 | 3.03  | 0.93  | 0.05 | 0.21 | 0.68  | 0.15 |
| Charge Max  | 30.83 | 7.97 | 18.78 | 3.86 | 38.24 | 39.30 | 16.40 | 13.66 | 9.15 | 9.10 | 33.97 | 15.38 | 3.18 | 8.72 | 12.38 | 8.78 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 11.25 | 0.46 | 7.35  | 0.01 | 15.19 | 19.87 | 5.25  | 5.98  | 2.00 | 1.82 | 15.25 | 4.90  | 0.22 | 1.47 | 3.74  | 1.06 |
| TVaR(99.5%) | 13.29 | 0.96 | 8.93  | 0.23 | 17.70 | 23.07 | 6.66  | 7.37  | 2.73 | 2.50 | 17.84 | 6.22  | 0.49 | 2.08 | 4.84  | 1.61 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4%  | 0.2% |

Table 4.54 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 10 têtes

| Assureur    | 1     | 2     | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13   | 14    | 15    | 16    |
|-------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|
| E(charge)   | 1.53  | 0.01  | 0.91  | 0.00 | 2.15  | 2.88  | 0.58  | 0.69  | 0.11  | 0.09  | 2.14  | 0.53  | 0.01 | 0.06  | 0.35  | 0.03  |
| σ(charge)   | 2.70  | 0.13  | 1.79  | 0.04 | 3.57  | 4.55  | 1.30  | 1.47  | 0.45  | 0.38  | 3.55  | 1.21  | 0.09 | 0.30  | 0.92  | 0.20  |
| Charge Max  | 32.52 | 13.66 | 22.43 | 5.48 | 41.66 | 42.81 | 21.22 | 21.71 | 12.42 | 15.21 | 35.84 | 18.30 | 9.31 | 15.79 | 17.27 | 12.41 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| VaR(99.5%)  | 14.27 | 0.46  | 9.40  | 0.01 | 18.51 | 23.13 | 7.13  | 7.92  | 3.02  | 2.66  | 18.24 | 6.73  | 0.23 | 2.00  | 5.57  | 1.17  |
| TVaR(99.5%) | 17.02 | 1.15  | 11.88 | 0.25 | 21.62 | 27.00 | 9.16  | 10.26 | 4.36  | 3.81  | 21.55 | 8.61  | 0.66 | 3.14  | 7.04  | 2.23  |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1%  | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7%  | 0.5%  | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3%  | 2.4%  | 0.2%  |

En Annexes 6 et 7 la distribution des primes et de l'impact sur le capital des assureurs par jeu de paramètres.

#### IV.3.4.5. Sensibilité à la structure des tranches

La structure et la segmentation des tranches, ainsi que la définition des portées et priorités impacte le tarif et le capital nécessaire des assureurs, sans que nous pouvions a priori avoir une idée des variations. La multiplication des tranches augmente-t-elle le tarif ? Ou inversement ? Quid de la TVaR 99.5% des réassureurs et assureurs ?

Table 4.55 : Résultats initiaux pour les primes de tranches – structure actuelle 20XS30

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

➔ Passage à une première tranche 30XS20 (vs 20XS30 actuellement)

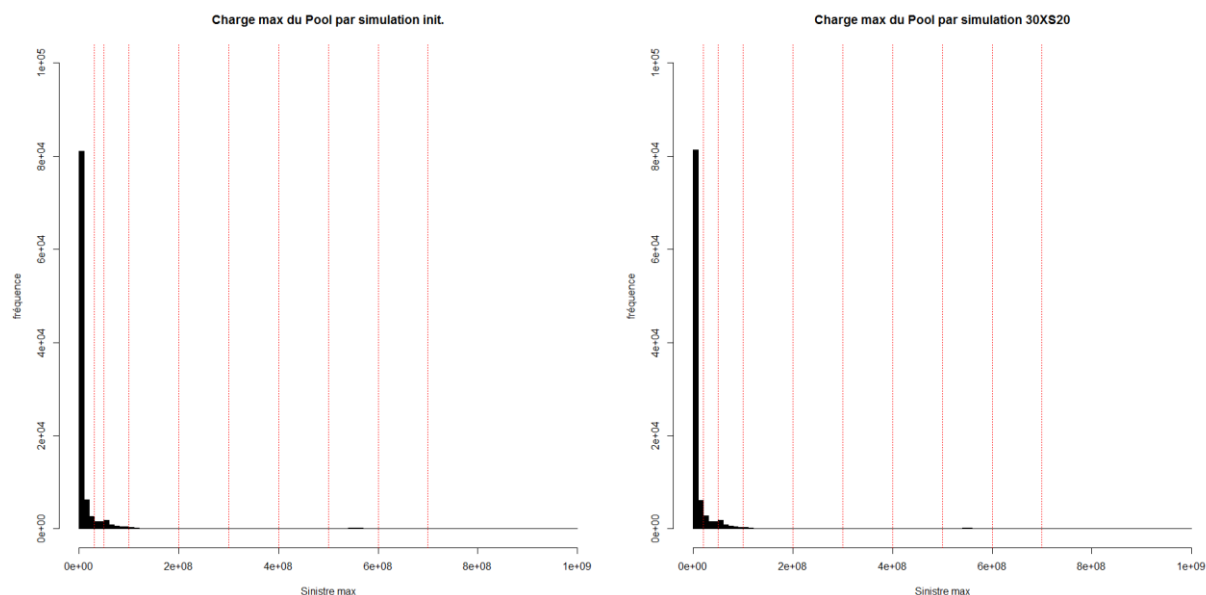
Nous testons tout d'abord l'impact de l'abaissement de la priorité de la tranche 1 de 30Mions à 20Mions comme c'était le cas avant 2007.

Table 4.56 : Résultats pour les primes de tranches – structure 30XS20

Dans ce cas, la rétention du Pool s'effectue jusqu'à 20 000 000€ (contre 30 000 000€ dans la structure initiale).

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.87      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 1 096 461 | 797 971   | 638 393   | 397 060   | 305 358   | 246 318   | 159 248   |
| Ecart Type Prime Pure        | 3 221 670 | 3 441 889 | 4 402 244 | 3 566 280 | 3 132 297 | 2 814 757 | 2 009 393 |
| Prime Commerciale            | 1 954 866 | 1 553 167 | 1 430 926 | 983 055   | 799 546   | 609 899   | 413 270   |
| RoL Commercial               | 6.52%     | 3.11%     | 1.43%     | 0.98%     | 0.80%     | 0.61%     | 0.41%     |
| Variation vs Actu            | 14%       | -3%       | -1%       | 2%        | 0%        | -4%       | -7%       |
| VaR Ppure 99.5%              | 63.85%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 23.02%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 72.74%    | 44.50%    | 34.92%    | 33.82%    | 33.41%    | 33.40%    | 26.37%    |

Figure 4.45 : Charge maximum du Pool par simulation – structure 30XS20



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0) Maximum : 593.8M€ (vs 593.5M€)

Le RoL augmente d'un point sur la première tranche, ceci signifiant que la tranche 10XS20 est assez chère. Ce surcoût se manifeste en RoL mais également en terme de financement, l'augmentation de tarif correspondant à :  $6.52\% \times 30 - 5.72\% \times 20 = 0.812M$ , soit près de 1M€.

Dans la partie consacrée aux assureurs membres, nous étudierons l'impact en termes de SCR pour ces derniers, de cette et d'autres modifications de structure des tranches.

➔ *Impact de la recomposition des tranches*

La structure du Pool (hors Pool Facultatif) passe de 7 à 6 tranches, et seules les 4 premières tranches bénéficient d'un NCB (au lieu des 5 précédemment, les réassureurs ne souhaitant pas offrir cette option au-delà d'une priorité de 400M€).

Figure 4.46 : Recomposition des tranches

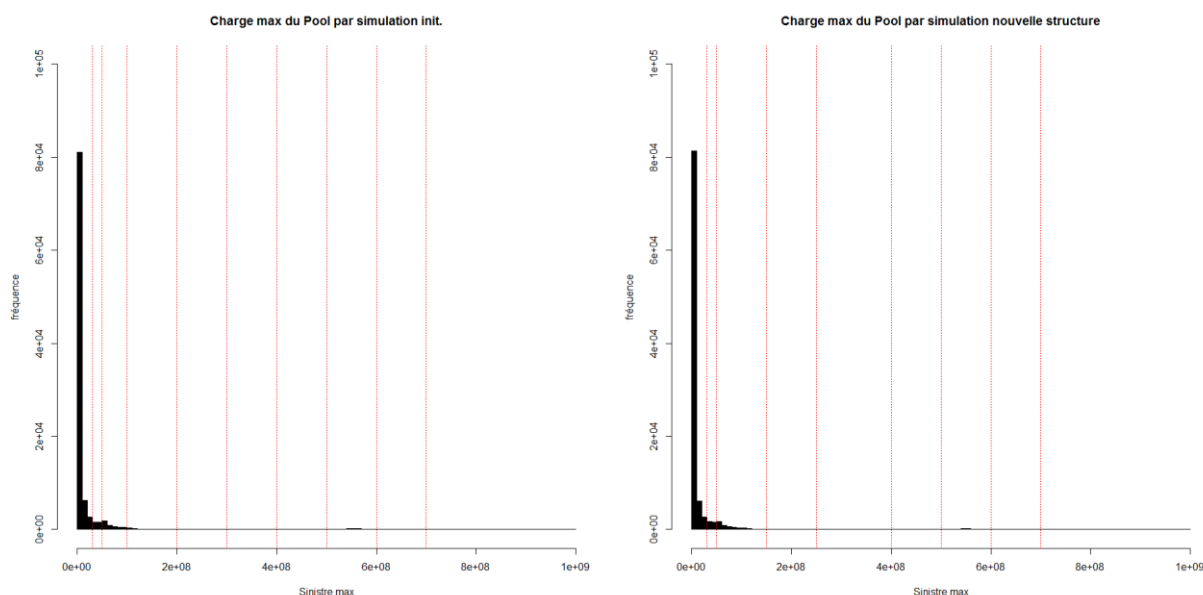
|              | Priorité  | Prio.+Cap. |  |              | Priorité  | Prio.+Cap. |
|--------------|-----------|------------|--|--------------|-----------|------------|
| Tranche1 NCB | 30000000  | 50000000   |  | Tranche1 NCB | 30000000  | 50000000   |
| Tranche2 NCB | 50000000  | 100000000  |  | Tranche2 NCB | 50000000  | 150000000  |
| Tranche3 NCB | 100000000 | 200000000  |  | Tranche3 NCB | 150000000 | 250000000  |
| Tranche4 NCB | 200000000 | 300000000  |  | Tranche4 NCB | 250000000 | 400000000  |
| Tranche5 NCB | 300000000 | 400000000  |  | Tranche5     | 400000000 | 500000000  |
| Tranche6     | 400000000 | 500000000  |  | Tranche6     | 500000000 | 600000000  |
| Tranche7     | 500000000 | 600000000  |  |              |           |            |

Hors NCB, l'impact doit être négligeable, aucune distribution sous-jacente n'ayant été effectuée. La seule modification est liée au fait que les capacités des tranches 2 et 4 ont été augmentées, ceci ayant un impact lié à l'effet de reconstitution éventuel. Ainsi, hors NCB, le coût total de la structure ne doit pas être sensiblement modifié. Cela peut nous permettre de vérifier la robustesse du modèle.

Table 4.57 : Résultats pour les primes de tranches – structure recomposée

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 618 699   | 1 302 750 | 461 889   | 470 862   | 238 887   | 161 624   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 986 548 | 6 009 626 | 3 812 406 | 4 711 221 | 2 780 995 | 2 020 492 |
| Prime Commerciale            | 1 124 914 | 2 578 662 | 1 105 940 | 1 219 593 | 596 616   | 417 548   |
| RoL Commercial               | 5.62%     | 2.58%     | 1.11%     | 0.81%     | 0.60%     | 0.42%     |
| Variation vs Actu            | NA        | NA        | NA        | NA        | NA        | NA        |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 23.28%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 62.89%    | 42.59%    | 34.08%    | 33.55%    | 33.33%    | 26.35%    |

Figure 4.47 : Charge maximum du Pool par simulation – structure recomposée



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 589.2M€ (vs 593.5M€)

Nous constatons qu’au cours de cette simulation, la sinistralité a été légèrement moins importante impactant d’environ 2% chaque tranche – ce qui est en ligne avec la définition préalable du nombre de simulations nécessaires à la convergence du tarif.

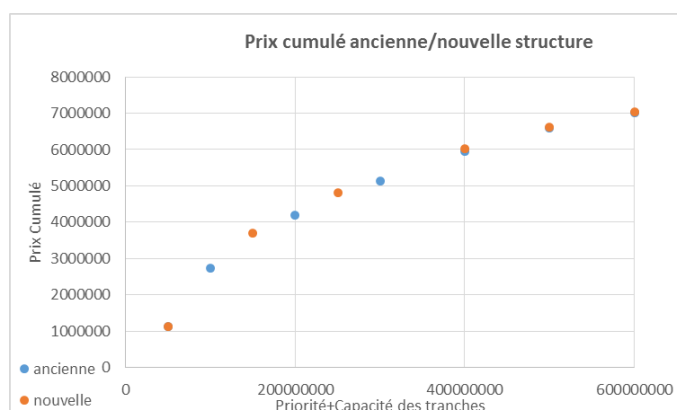


Figure 4.48 : Tarif cumulé de la structure

Le coût de l’ancienne structure est de 7.02M€. Le coût de la nouvelle est de 7.04M€, soit statistiquement très proche. Il est difficile d’en tirer une quelconque conclusion sur la valeur ajoutée d’un travail sur une éventuelle réorganisation des tranches.

Nous ne testons pas de tranches supérieures à 600Mions. Au fil des tests précédents, nous constatons que le Pool Facultatif n’a pas été atteint, et que la charge maximum du Pool par simulation n’a jamais excédé le seuil de 600Mions, malgré nos hypothèses actuariellement prudentes.

#### ➔ Fusion des tranches obligatoires

Nous testons l’impact de la fusion des tranches obligatoires en une seule tranche obligatoire unique. Nous effectuons déjà un test a priori :

Soit une reconstitution unique coûtant 200%, et deux structures de couverture de réassurance subissant le même aléa :

- Structure en excédent de sinistre par événement A : une tranche de réassurance unique de priorité nulle et de capacité 1000.

- Structure en excédent de sinistre par événement B : 10 tranches de réassurance de priorité 0, 100, ..., 900 et de capacités identiques 100.

Le coût de la structure A est :

$$1 + R \cdot \frac{\max(0, \min(\text{Sin}_1, K_2) - K_1) + \max(0, \min(\text{Sin}_2, K_2) - K_1)}{K_2 - K_1}$$

$K_1$ : priorité de la tranche unique

$K_2$ : priorité + capacité de la tranche unique

Le coût de la structure B est :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\max(0, \min(\text{Sin}_1, K_i) - K_{i-1}) + \max(0, \min(\text{Sin}_2, K_i) - K_{i-1})}{1 + R \cdot \frac{\max(0, \min(\text{Sin}_1, K_i) - K_{i-1}) \cdot 1_{\min(\text{Sin}_1, K_i) - K_{i-1} > 0} + \max(0, \min(\text{Sin}_1, K_i) - K_{i-1}) \cdot 1_{\min(\text{Sin}_1, K_i) - K_{i-1} = 0} \cdot 1_{\min(\text{Sin}_2, K_i) - K_{i-1} > 0}}{K_i - K_{i-1}}}$$

$K_i$ : priorité + capacité de la tranche  $i$

$K_{i-1}$ : priorité de la tranche  $i$

$\text{Sin}_1, \text{Sin}_2$ : montants respectifs des sinistres 1 et 2

$R$ : coût de la reconstitution

Nous présentons ci-dessous le ratio  $\frac{\text{coût structure A}}{\text{coût structure B}}$  :

Table 4.58 : Impact du nombre de tranches (rapport coût structure A/coût structure B)

|                      |      | Coût du 2ème sinistre |     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |
|----------------------|------|-----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| Coût du 1er sinistre | 0    | 0                     | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 |
|                      | 0    | #DIV/0!               | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0  |
|                      | 100  | 2.5                   | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5  |
|                      | 200  | 2.1                   | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.1 | 2.1  |
|                      | 300  | 1.9                   | 1.9 | 1.9 | 1.9 | 1.9 | 1.9 | 1.9 | 1.9 | 1.9 | 1.9 | 1.9  |
|                      | 400  | 1.7                   | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.7 | 1.7  |
|                      | 500  | 1.5                   | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5  |
|                      | 600  | 1.4                   | 1.4 | 1.4 | 1.4 | 1.4 | 1.4 | 1.4 | 1.4 | 1.4 | 1.4 | 1.4  |
|                      | 700  | 1.3                   | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3 | 1.3  |
|                      | 800  | 1.2                   | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2  |
|                      | 900  | 1.1                   | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1 | 1.1  |
|                      | 1000 | 1.0                   | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0  |

La première ligne pour un premier sinistre à 0 est théorique, et correspond à un premier sinistre dont le coût est proche de zéro.

Si nous prenons l'exemple d'un premier sinistre de 100, suivi d'un second sinistre de 1000 (entouré en rouge):

La structure A, coûte en prime :

$$\frac{100 + 1000}{1 + 2 \cdot \frac{100}{1000}} = 916.67$$

Elle revient, post reconstitution à l'acheteur de la protection :  $916.67 + 2 \cdot \frac{100}{1000} \cdot 916.67 = 1100$

La structure B, coûte en prime :

$\frac{100+100}{1+2\frac{100}{100}} + 9 \cdot \frac{100}{1+2\frac{100}{100}} = \underbrace{66.67}_{1^{\text{ère}} \text{ tranche}} + 9 * 33.33 = 366.67$  soit seulement 40% de la prime de la structure A.

Elle revient, post reconstitution à l'acheteur de la protection :  $66.67 + 2 * 66.67 + 9 * (33.33 + 2 * 33.33) = 1100$

Nous constatons que moins la capacité est utilisée pour le premier sinistre, plus la différence est significative entre les deux structures, A étant très vite beaucoup plus cher que B, ce qui explique qu'en moyenne, la structure A à une tranche unique coûte beaucoup plus cher que la structure B à tranches segmentées. Le coût du deuxième sinistre n'impacte pas.

Par contre, le coût de la reconstitution a un impact :

Plus le coût de la reconstitution est élevé (en % de la prime initiale), plus la multiplication des tranches s'avère intéressante. Reprenons l'exemple ci-dessus, avec un premier sinistre dont le coût est évalué à 100, le deuxième à 1000, et les deux structures A et B.

| Reconstitution | Structure A | Structure B | Ratio |
|----------------|-------------|-------------|-------|
| 10%            | 1089        | 1000        | 92%   |
| 50%            | 1048        | 733         | 70%   |
| 100%           | 1000        | 550         | 55%   |
| 200%           | 917         | 367         | 40%   |
| 300%           | 846         | 275         | 33%   |
| 400%           | 786         | 220         | 28%   |
| 1000%          | 550         | 100         | 18%   |

*Lecture :* Si le prix de la reconstitution est de 1000% de la prime initiale, la structure B est 82% moins chère que la structure A.

Notre méthodologie est sensible au coût du premier sinistre. Moins celui-ci est élevé, plus la différence de prix entre les structures A et B est importante.

| 1er sinistre/coût reconstitution | 10%  | 50%  | 100% | 200% | 300% | 400% | 500% | 600% | 700% | 800% | 900% | 1000% |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 100                              | 1.09 | 1.43 | 1.82 | 2.50 | 3.08 | 3.57 | 4.00 | 4.38 | 4.71 | 5.00 | 5.26 | 5.50  |
| 200                              | 1.08 | 1.36 | 1.67 | 2.14 | 2.50 | 2.78 | 3.00 | 3.18 | 3.33 | 3.46 | 3.57 | 3.67  |
| 300                              | 1.07 | 1.30 | 1.54 | 1.88 | 2.11 | 2.27 | 2.40 | 2.50 | 2.58 | 2.65 | 2.70 | 2.75  |
| 400                              | 1.06 | 1.25 | 1.43 | 1.67 | 1.82 | 1.92 | 2.00 | 2.06 | 2.11 | 2.14 | 2.17 | 2.20  |
| 500                              | 1.05 | 1.20 | 1.33 | 1.50 | 1.60 | 1.67 | 1.71 | 1.75 | 1.78 | 1.80 | 1.82 | 1.83  |
| 600                              | 1.04 | 1.15 | 1.25 | 1.36 | 1.43 | 1.47 | 1.50 | 1.52 | 1.54 | 1.55 | 1.56 | 1.57  |
| 700                              | 1.03 | 1.11 | 1.18 | 1.25 | 1.29 | 1.32 | 1.33 | 1.35 | 1.36 | 1.36 | 1.37 | 1.38  |
| 800                              | 1.02 | 1.07 | 1.11 | 1.15 | 1.18 | 1.19 | 1.20 | 1.21 | 1.21 | 1.22 | 1.22 | 1.22  |
| 900                              | 1.01 | 1.03 | 1.05 | 1.07 | 1.08 | 1.09 | 1.09 | 1.09 | 1.10 | 1.10 | 1.10 | 1.10  |
| 1000                             | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00  |

*Lecture :* Si le premier sinistre simulé sur la période coûte 500, et que le coût de la reconstitution est de 300%, la structure A coûte 60% de plus que la structure B.

Cette différence s'explique par l'indépendance des tranches entre elles dans la structure B non présente dans la structure A.

Figure 4.49 : Fusion des tranches obligatoires

|              | Priorité  | Prio.+Cap. |                                                                                   |              | Priorité | Prio.+Cap. |
|--------------|-----------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------|------------|
| Tranche1 NCB | 30000000  | 50000000   |  | Tranche1 NCB | 30000000 | 50000000   |
| Tranche2 NCB | 50000000  | 100000000  |                                                                                   | Tranche2 NCB | 50000000 | 500000000  |
| Tranche3 NCB | 100000000 | 200000000  |                                                                                   | Tranche3     | 50000000 | 600000000  |
| Tranche4 NCB | 200000000 | 300000000  |                                                                                   |              |          |            |
| Tranche5 NCB | 300000000 | 400000000  |                                                                                   |              |          |            |
| Tranche6     | 400000000 | 500000000  |                                                                                   |              |          |            |
| Tranche7     | 500000000 | 600000000  |                                                                                   |              |          |            |

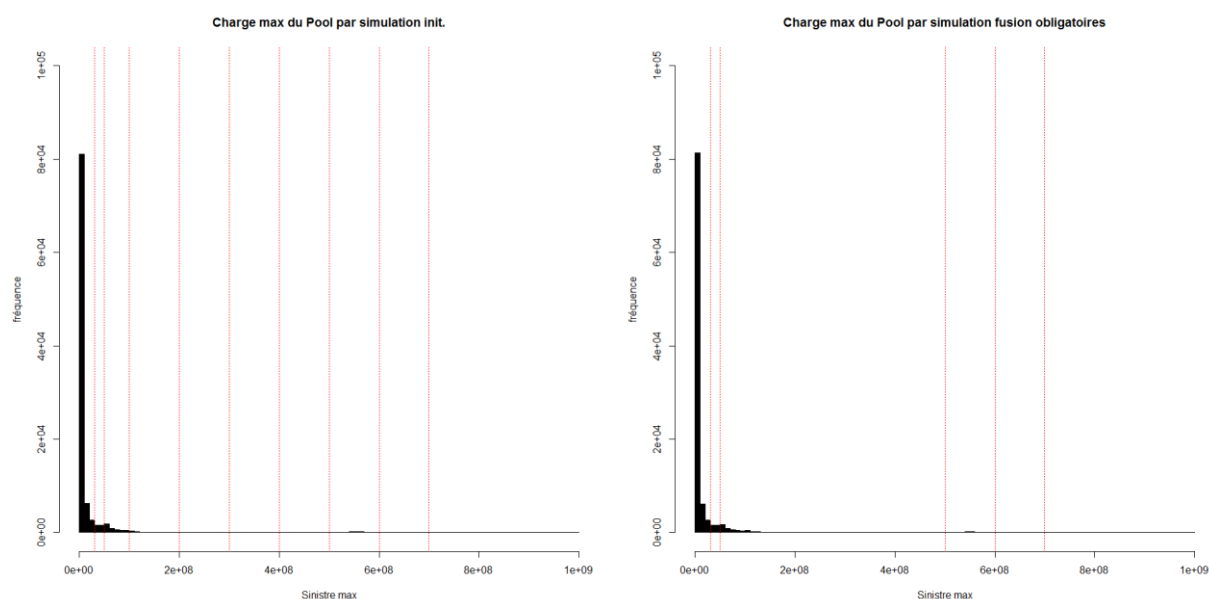
Par contre, le fait que les tranches optionnelles soient souscrites ou pas par les assureurs membres n'impacte pas le tarif des dites tranches, étant donné que les sommes sous-risques restent celles du Pool. L'impact intervient sur la charge de chacun des assureurs.

Table 4.59 : Résultats pour les primes de tranches – fusion des tranches obligatoires

| Tranche                      | 1         | 2          | 3         |
|------------------------------|-----------|------------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93       | 0.99      |
| Prime Pure                   | 619 996   | 3 281 844  | 163 583   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 993 170 | 18 683 792 | 2 049 108 |
| Prime Commerciale            | 1 127 572 | 6 886 290  | 423 021   |
| RoL Commercial               | 5.64%     | 1.53%      | 0.42%     |
| Variation vs Actu            | NA        | NA         | NA        |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%     | 23.40%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 63.34%    | 37.49%     | 26.67%    |

Le coût de l'ancienne structure est de 7.02M€. Le coût de la nouvelle structure est de 8.44M€, corroborant l'effet prix présenté par l'exemple précédent. L'écart-type de la tranche n°2 peut apparaître élevé, mais il est à rapprocher de la capacité de la tranche qui s'élève à 450M€ (soit 4.2%).

Figure 4.50 : Charge maximum du Pool par simulation – fusion des tranches obligatoires



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)  
587.2M€ (vs 593.5M€)

Maximum :

➔ Multiplication du nombre de tranches

Table 4.60 : Multiplication du nombre de tranches : limitation à 50M€ de capacité par tranche

|              | Priorité  | Prio.+Cap. |
|--------------|-----------|------------|
| Tranche1 NCB | 30000000  | 50000000   |
| Tranche2 NCB | 50000000  | 100000000  |
| Tranche3 NCB | 100000000 | 200000000  |
| Tranche4 NCB | 200000000 | 300000000  |
| Tranche5 NCB | 300000000 | 400000000  |
| Tranche6     | 400000000 | 500000000  |
| Tranche7     | 500000000 | 600000000  |

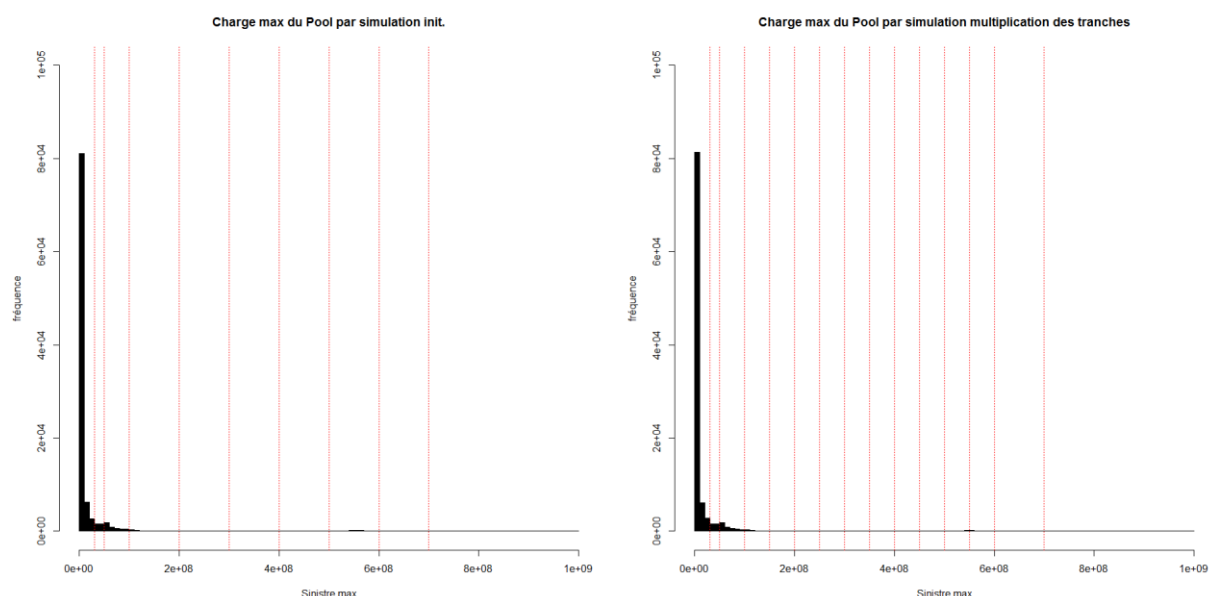
➔

|              | Priorité  | Prio.+Cap. |
|--------------|-----------|------------|
| Tranche1 NCB | 30000000  | 50000000   |
| Tranche2 NCB | 50000000  | 100000000  |
| Tranche3 NCB | 100000000 | 150000000  |
| Tranche4 NCB | 150000000 | 200000000  |
| Tranche5 NCB | 200000000 | 250000000  |
| Tranche6 NCB | 250000000 | 300000000  |
| Tranche7 NCB | 300000000 | 350000000  |
| Tranche8 NCB | 350000000 | 400000000  |
| Tranche9     | 400000000 | 450000000  |
| Tranche10    | 450000000 | 500000000  |
| Tranche11    | 500000000 | 550000000  |
| Tranche12    | 550000000 | 600000000  |

Table 4.61 : Résultats pour les primes de tranches – multiplication du nombre de tranches : limitation à 50M€ de capacité par tranche

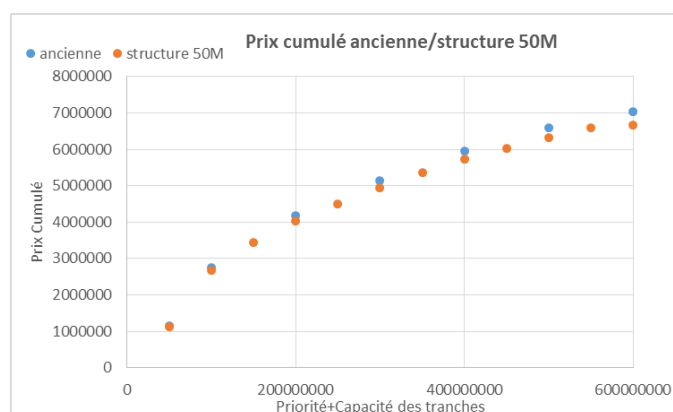
| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10        | 11        | 12      |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.98      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 1.00    |
| Prime Pure                   | 616 729   | 798 527   | 345 280   | 244 609   | 198 304   | 171 771   | 152 262   | 136 067   | 125 903   | 116 318   | 106 968   | 23 508  |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 990 652 | 3 399 645 | 2 307 244 | 1 976 488 | 1 792 735 | 1 674 556 | 1 576 880 | 1 492 798 | 1 437 164 | 1 384 949 | 1 314 866 | 441 834 |
| Prime Commerciale            | 1 122 632 | 1 549 149 | 765 767   | 580 977   | 492 290   | 440 015   | 400 362   | 367 103   | 311 587   | 293 586   | 274 110   | 75 527  |
| Rol Commercial               | 5.61%     | 3.10%     | 1.53%     | 1.16%     | 0.98%     | 0.88%     | 0.80%     | 0.73%     | 0.62%     | 0.59%     | 0.55%     | 0.15%   |
| VarR Ppure 99.5%             | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 31.93%    | 0.00%   |
| TVaR Ppure 99.5%             | 63.56%    | 41.70%    | 34.54%    | 33.67%    | 33.67%    | 33.63%    | 33.54%    | 33.47%    | 33.47%    | 33.47%    | 33.31%    | 9.40%   |

Figure 4.54 : Charge maximum du Pool par simulation – multiplication du nombre de tranches à 50M€



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 584.5M€ (vs 593.5M€)

Figure 4.51 : Tarif cumulé de la structure



Le coût de la nouvelle structure est de 6.67M€, par rapport à 7.02M€ pour l'ancienne structure, soit une économie de près de 5%. La difficulté réside dans la valorisation des tranches les plus hautes par les réassureurs, traditionnellement réticents à vendre de la capacité pour des RoL si faibles (0.15% sur la tranche 12).

Table 4.62 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.63 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure 30XS20

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.09  | 0.01 | 0.64  | 0.00 | 1.55  | 2.10  | 0.40 | 0.48 | 0.08 | 0.06 | 1.55  | 0.37 | 0.00 | 0.04 | 0.24 | 0.02 |
| σ(charge)   | 1.53  | 0.06 | 0.95  | 0.02 | 2.14  | 2.83  | 0.65 | 0.75 | 0.19 | 0.17 | 2.12  | 0.61 | 0.04 | 0.13 | 0.43 | 0.10 |
| Charge Max  | 15.02 | 4.13 | 10.63 | 2.50 | 18.67 | 26.70 | 8.20 | 7.81 | 6.01 | 4.94 | 18.21 | 7.90 | 2.99 | 5.79 | 6.43 | 4.14 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 7.46  | 0.41 | 4.75  | 0.01 | 10.26 | 13.57 | 3.31 | 3.78 | 1.18 | 1.05 | 10.23 | 3.13 | 0.22 | 0.87 | 2.27 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 8.67  | 0.64 | 5.59  | 0.22 | 11.95 | 15.67 | 4.03 | 4.53 | 1.57 | 1.41 | 11.83 | 3.83 | 0.41 | 1.23 | 2.88 | 0.95 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.64 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure recomposée

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.23  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.77  | 2.40  | 0.45 | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.77  | 0.42 | 0.00 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.88  | 0.06 | 1.15  | 0.02 | 2.64  | 3.52  | 0.76 | 0.89  | 0.21 | 0.18 | 2.63  | 0.71 | 0.04 | 0.14 | 0.49 | 0.10 |
| Charge Max  | 18.65 | 2.35 | 13.61 | 3.29 | 27.36 | 36.77 | 8.34 | 10.13 | 5.21 | 4.62 | 28.63 | 8.63 | 3.20 | 4.70 | 9.36 | 5.23 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.32  | 0.43 | 5.79  | 0.01 | 13.25 | 17.73 | 3.87 | 4.48  | 1.25 | 1.10 | 13.14 | 3.69 | 0.22 | 0.89 | 2.57 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.84 | 0.66 | 6.75  | 0.19 | 15.14 | 20.19 | 4.65 | 5.35  | 1.66 | 1.50 | 15.03 | 4.47 | 0.42 | 1.26 | 3.18 | 0.96 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.65 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – fusion des tranches obligatoires

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.23  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.77  | 2.39  | 0.45  | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.76  | 0.42  | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.88  | 0.06 | 1.15  | 0.02 | 2.65  | 3.53  | 0.77  | 0.89  | 0.21 | 0.18 | 2.63  | 0.71  | 0.04 | 0.14 | 0.49 | 0.10 |
| Charge Max  | 22.37 | 3.49 | 14.01 | 1.72 | 27.71 | 38.73 | 25.21 | 11.50 | 4.90 | 5.12 | 27.54 | 14.85 | 2.57 | 4.07 | 7.38 | 3.87 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.37  | 0.42 | 5.72  | 0.01 | 13.26 | 17.73 | 3.93  | 4.50  | 1.26 | 1.10 | 13.14 | 3.65  | 0.23 | 0.89 | 2.58 | 0.70 |
| TVaR(99.5%) | 10.81 | 0.64 | 6.72  | 0.23 | 15.16 | 20.07 | 4.71  | 5.32  | 1.68 | 1.45 | 14.97 | 4.38  | 0.43 | 1.22 | 3.21 | 0.97 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.66 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – multiplication des tranches à 50M€

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.23  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.77  | 2.39  | 0.45 | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.76  | 0.42 | 0.00 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.89  | 0.06 | 1.15  | 0.02 | 2.65  | 3.54  | 0.76 | 0.88  | 0.21 | 0.18 | 2.64  | 0.71 | 0.03 | 0.14 | 0.49 | 0.10 |
| Charge Max  | 18.22 | 2.45 | 15.86 | 2.65 | 25.99 | 32.10 | 8.56 | 11.35 | 7.99 | 6.40 | 28.51 | 9.35 | 2.00 | 4.90 | 6.72 | 4.54 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| Var(99.5%)  | 9.47  | 0.41 | 5.75  | 0.01 | 13.28 | 17.91 | 3.84 | 4.41  | 1.24 | 1.09 | 13.28 | 3.63 | 0.22 | 0.90 | 2.52 | 0.67 |
| TVar(99.5%) | 10.86 | 0.62 | 6.77  | 0.19 | 15.20 | 20.33 | 4.63 | 5.22  | 1.65 | 1.47 | 15.15 | 4.36 | 0.40 | 1.24 | 3.12 | 0.99 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

En Annexes 6 et 7 la distribution des primes et de l'impact sur le capital des assureurs par jeu de paramètres.

Sur le prix, nous pouvons conclure que la multiplication des tranches fait baisser les prix de façon significative. Néanmoins, la multiplication des tranches à haute priorité se heurte à un prix plancher en dessous duquel les réassureurs ne sont pas prêts à vendre du risque.

En termes de capital à provisionner pour les assureurs, l'impact d'une multiplication des tranches est très limité, ce qui est intéressant puisque d'un côté, le tarif diminue, sans augmentation significative du SCR pour les assureurs membres, indépendamment du poids des assureurs dans le Pool.

#### IV.3.4.6. Sensibilité à la diversification (nombre de membres, équipondération des parts) du Pool

Si un membre transfère ou cède un portefeuille à un autre membre du Pool, cela ne semble pas avoir d'impact sur la sinistralité du Pool étant donné la mutualisation qui est faite. En réalité, cela augmente l'exposition d'un membre, là où sa rétention des 2 têtes par risque reste identique. En concentrant l'exposition, cela augmente finalement le risque.

Nous utilisons le coefficient de Herfindahl pour déterminer le degré de concentration :

$$Herfindahl = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2 - 1/n}{1 - 1/n}$$

$w_i$ : poids du composant  $i$  parmi les  $n$

Ce coefficient varie entre 0 (très diversifié) et 1 (très concentré).

Figure 4.52 : Structure actuelle : (16 membres). Herfindahl = 0.106

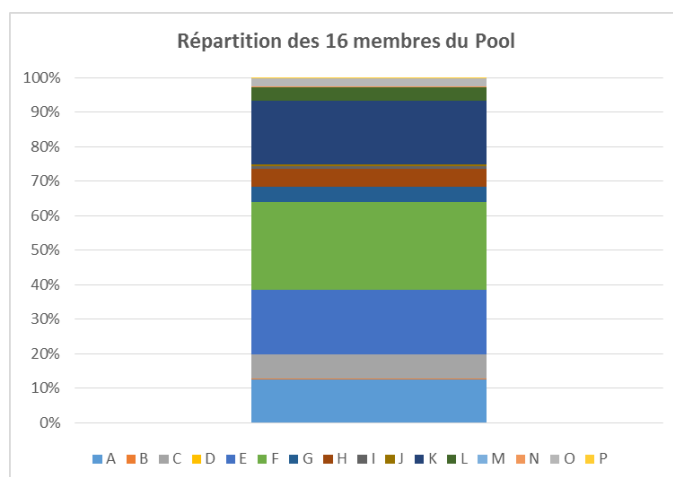


Table 4.67 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 701 653   | 493 660   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.70%     | 0.49%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Figure 4.53 : Structure à 20 assureurs équipondérés. Herfindahl = 0

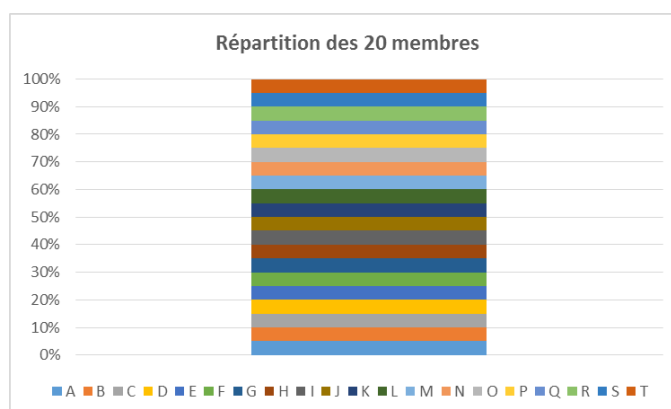
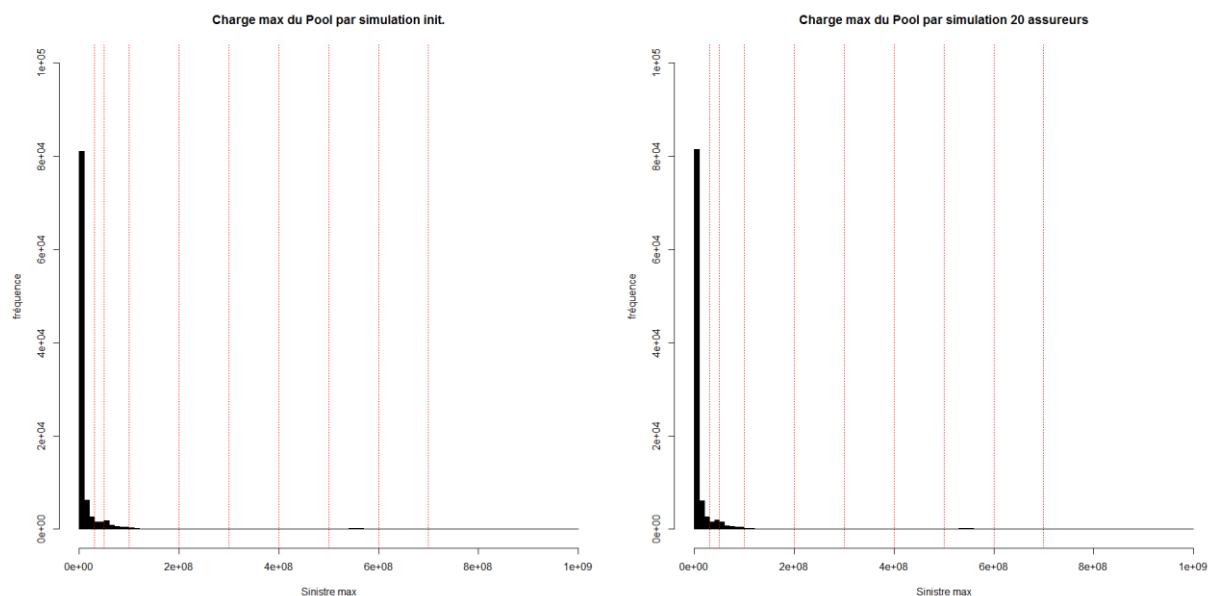


Table 4.68 : Résultats pour les primes de tranches – 20 assureurs équipondérés

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.94      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 604 026   | 736 089   | 592 115   | 378 789   | 292 212   | 242 042   | 145 819   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 968 272 | 3 310 606 | 4 235 737 | 3 467 678 | 3 074 981 | 2 792 392 | 1 835 818 |
| Prime Commerciale            | 1 101 726 | 1 448 515 | 1 344 553 | 945 149   | 773 767   | 601 962   | 378 007   |
| RoL Commercial               | 5.51%     | 2.90%     | 1.34%     | 0.95%     | 0.77%     | 0.60%     | 0.38%     |
| Variation vs Actu            | -4%       | -10%      | -7%       | -2%       | -3%       | -5%       | -15%      |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 20.66%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 63.04%    | 43.07%    | 34.04%    | 33.63%    | 33.46%    | 33.33%    | 24.20%    |

Figure 4.54 : Charge maximum du Pool par simulation – structure à 20 assureurs



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 572.5M€ (vs 593.5M€)

Figure 4.55 : Structure à 3 assureurs de poids respectifs 33%, 33% et 34%. Herfindahl = 0.0001

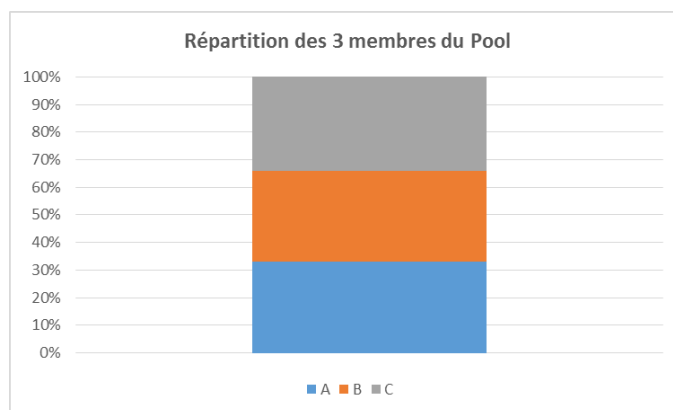
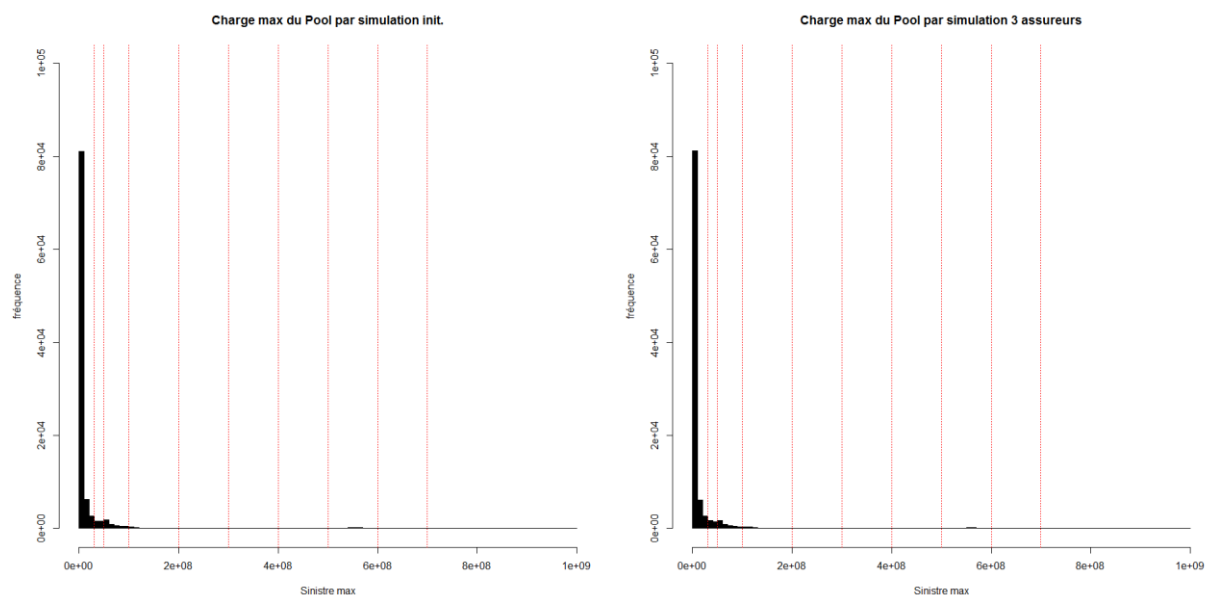


Table 4.69 : Résultats pour les primes de tranches – 3 assureurs équipondérés

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 624 067   | 837 290   | 650 345   | 384 961   | 290 939   | 235 801   | 170 194   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 004 595 | 3 510 292 | 4 417 292 | 3 492 075 | 3 064 834 | 2 767 895 | 2 158 107 |
| Prime Commerciale            | 1 134 705 | 1 618 103 | 1 450 010 | 956 965   | 770 752   | 591 191   | 442 736   |
| RoL Commercial               | 5.67%     | 3.24%     | 1.45%     | 0.96%     | 0.77%     | 0.59%     | 0.44%     |
| Variation vs Actu            | -1%       | 1%        | 1%        | 0%        | -4%       | -6%       | 0%        |
| VaR Ppure 99.5%              | 36.29%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 25.48%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 65.44%    | 44.22%    | 35.26%    | 33.71%    | 33.63%    | 33.47%    | 28.28%    |

Figure 4.56 : Charge maximum du Pool par simulation – structure à 3 assureurs



Le fait que les membres soient en structure très concentrée impacte peu le tarif, dans notre modèle. En effet, celui-ci renforce la concentration avec le facteur  $r$  (ici  $r=0.5$ ), faisant en sorte que l'assureur « choisi » devient majoritaire dans la suite de la sinistralité. Cette notification renforce l'aspect défensif en termes de tarification du modèle.

Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 596.4M€ (vs 593.5M€)

Table 4.70 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| $\sigma$ (charge) | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max        | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%)       | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.71 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – 20 assureurs équipondérés

| Assureur          | 1    | 2    | 3     | 4    | 5     | 6    | 7     | 8    | 9    | 10   |
|-------------------|------|------|-------|------|-------|------|-------|------|------|------|
| E(charge)         | 0.52 | 0.52 | 0.52  | 0.52 | 0.52  | 0.52 | 0.52  | 0.52 | 0.52 | 0.52 |
| $\sigma$ (charge) | 0.86 | 0.86 | 0.86  | 0.86 | 0.86  | 0.86 | 0.86  | 0.86 | 0.86 | 0.86 |
| Charge Max        | 8.86 | 9.94 | 15.47 | 9.25 | 12.60 | 9.73 | 10.34 | 9.77 | 8.96 | 9.76 |
| Charge Min        | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 4.39 | 4.38 | 4.40  | 4.38 | 4.34  | 4.39 | 4.34  | 4.33 | 4.31 | 4.30 |
| TVaR(99.5%)       | 5.23 | 5.23 | 5.22  | 5.24 | 5.19  | 5.25 | 5.17  | 5.18 | 5.16 | 5.17 |
| Poids Pool        | 5.0% | 5.0% | 5.0%  | 5.0% | 5.0%  | 5.0% | 5.0%  | 5.0% | 5.0% | 5.0% |

|                   | 11    | 12    | 13    | 14   | 15    | 16   | 17    | 18    | 19   | 20   |
|-------------------|-------|-------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|
| E(charge)         | 0.52  | 0.52  | 0.52  | 0.52 | 0.52  | 0.52 | 0.52  | 0.52  | 0.52 | 0.52 |
| $\sigma$ (charge) | 0.86  | 0.86  | 0.86  | 0.86 | 0.87  | 0.86 | 0.86  | 0.86  | 0.86 | 0.86 |
| Charge Max        | 11.79 | 12.01 | 10.73 | 8.83 | 10.83 | 9.54 | 11.29 | 12.83 | 9.53 | 9.99 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 4.37  | 4.40  | 4.36  | 4.34 | 4.39  | 4.41 | 4.42  | 4.38  | 4.40 | 4.33 |
| TVaR(99.5%)       | 5.27  | 5.26  | 5.24  | 5.22 | 5.29  | 5.19 | 5.24  | 5.22  | 5.30 | 5.18 |
| Poids Pool        | 5.0%  | 5.0%  | 5.0%  | 5.0% | 5.0%  | 5.0% | 5.0%  | 5.0%  | 5.0% | 5.0% |

Table 4.72 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – 3 assureurs équipondérés

| Assureur          | 1     | 2     | 3     |
|-------------------|-------|-------|-------|
| E(charge)         | 3.06  | 3.05  | 3.15  |
| $\sigma$ (charge) | 4.48  | 4.48  | 4.60  |
| Charge Max        | 45.11 | 45.63 | 66.04 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| VaR(99.5%)        | 22.73 | 22.70 | 23.34 |
| TVaR(99.5%)       | 25.71 | 25.67 | 26.39 |
| Poids Pool        | 33.0% | 33.0% | 34.0% |

En Annexes 6 et 7 la distribution des primes et de l'impact sur le capital des assureurs par jeu de paramètres.

La multiplication des assureurs, et une diversification accrue du Pool (via la baisse de l'indice d'Herfindahl) permet une diminution significative de la charge maximum du Pool (572.5M€ vs 593.5M€), et de la prime par tranche (entre 2 et 15%). Ainsi, un suivi de la composition et du poids des membres du Pool est fondamental afin d'avoir une juste appréciation du risque global.

De plus, cette recherche de diversification s'accompagne d'une diminution significative de l'espérance de la charge par assureur et de la TVaR 99.5% (et donc du SCR) de chacun. Ainsi, il est dans l'intérêt de l'ensemble des membres – via une baisse du tarif et une baisse de leur SCR – d'une diversification accrue dans le Pool.

#### IV.3.4.7. Sensibilité à la structure de(s) reconstitution(s)

Etant donné qu'une reconstitution à 200% est rare dans le marché, avec une norme de 100%, nous testons l'impact du passage de la reconstitution de 200% à 100%.

Table 4.73 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale reconstitution 200%

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.74 : Résultats pour les primes de tranches – structure reconstitution 100%

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 900 969   | 1 131 896 | 901 637   | 554 420   | 432 464   | 361 416   | 217 980   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 932 406 | 4 920 799 | 6 388 316 | 5 129 862 | 4 580 350 | 4 182 254 | 2 739 629 |
| Prime Commerciale            | 1 642 694 | 2 207 206 | 2 039 955 | 1 389 395 | 1 148 443 | 900 114   | 564 602   |
| RoL Commercial               | 8.21%     | 4.41%     | 2.04%     | 1.39%     | 1.15%     | 0.90%     | 0.56%     |
| Variation vs Actu            | 44%       | 38%       | 42%       | 45%       | 43%       | 42%       | 27%       |
| VaR Ppure 99.5%              | 50.26%    | 50.00%    | 50.00%    | 50.00%    | 50.00%    | 50.00%    | 30.51%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 93.50%    | 62.26%    | 52.36%    | 50.74%    | 50.22%    | 50.10%    | 35.96%    |

Le tarif augmente de façon très significative, entre 27 et 45% selon les tranches.

Table 4.75 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.76 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – reconstitution 100%

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.23  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.77  | 2.39  | 0.45  | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.76  | 0.42  | 0.00 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.88  | 0.06 | 1.15  | 0.02 | 2.65  | 3.53  | 0.77  | 0.89  | 0.21 | 0.18 | 2.64  | 0.71  | 0.03 | 0.14 | 0.49 | 0.10 |
| Charge Max  | 19.33 | 4.94 | 17.58 | 1.58 | 31.22 | 44.83 | 10.68 | 12.83 | 7.00 | 4.27 | 68.14 | 10.79 | 1.35 | 5.42 | 7.46 | 3.86 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.45  | 0.41 | 5.79  | 0.01 | 13.32 | 17.84 | 3.94  | 4.56  | 1.26 | 1.09 | 13.22 | 3.62  | 0.22 | 0.90 | 2.55 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.90 | 0.69 | 6.85  | 0.20 | 15.38 | 20.47 | 4.79  | 5.38  | 1.71 | 1.49 | 15.32 | 4.40  | 0.38 | 1.26 | 3.17 | 0.95 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

En Annexes 6 et 7 la distribution des primes et de l'impact sur le capital des assureurs par jeu de paramètres.

Nous ne constatons pas d'impact significatif sur le capital des assureurs. Néanmoins, le tarif augmente de façon significative et plutôt homogène entre les tranches (excepté la tranche 7). Ainsi, le choix du niveau de la reconstitution a un impact extrêmement significatif sur la prime initiale de réassurance, tout comme elle augmente très fortement la VaR et la TVaR 99.5% du réassureur pour l'ensemble des tranches. Mais, il est préférable d'un point de vue du capital pour le réassureur de recevoir une prime initiale plus élevée : il devient moins sensible au défaut éventuel d'un des membres du Pool qui pourrait entraîner l'ensemble du Pool dans une difficulté pour s'acquitter du paiement de la reconstitution à 200%, et il est en mesure de placer cette prime dans le cadre de sa gestion ALM.

#### IV.3.4.8. Sensibilité au risque de défaut des réassureurs

Dans notre simulation, nous cherchons à vérifier l'impact d'un incident de crédit d'un réassureur sur la protection du Pool. Pour simplifier dans un premier temps, nous supposons que le Pool est réassuré par un seul et unique réassureur, et que la couverture est contractée sur une période d'une année. Nous vérifions l'impact du risque de crédit :

Sur la valorisation de la couverture de réassurance, celui-ci est marginal, la couverture de réassurance devant être ajustée du risque de crédit du réassureur, via le facteur  $(1-p)$ ,  $p$  étant la probabilité de défaut du réassureur sur la période de la couverture :

Table 4.77 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale sans risque de défaut ( $p=0$ )

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

$p=0.5\%$ . Une probabilité de défaut de l'ordre de 0.5% à l'horizon d'un an correspond empiriquement, environ à ce que supporte le détenteur d'un titre de crédit sur un émetteur BBB (Notation S&P), et correspondant à un temps de retour de 200 ans. Le tarif baisse de façon homogène de 0.5%.

Nous effectuons la même simulation en considérant 10 réassureurs répartis de façon équipondérée, et de façon uniforme entre les tranches. Chacun présente un risque de 0.5% de défaut sur la période considérée (ici 1 an), et les probabilités sont indépendantes.

Etant donné que chaque réassureur valorise indépendamment son tarif, cela explique que toutes choses étant égales par ailleurs, la tarification de la structure soit différente entre les assureurs, le risque de crédit de ces derniers impactant le prix.

Par contre, l'impact de la multiplication des réassureurs se matérialise sur le besoin de capital des assureurs : plus les réassureurs sont diversifiés et bien noté, moins le risque de crédit de ces derniers pèse sur les assureurs membres du Pool (CF table 4.74 vs table 4.75).

L'impact sur le tarif est marginal, néanmoins, prendre en compte le risque de crédit des réassureurs membres du Pool agit significativement sur le SCR des assureurs membres (CF Tables 4.74 et 4.75), en particulier sur les TVaR et les charges maximales, et donc les risques extrêmes pour le capital des assureurs membres du Pool. Cela milite pour une diversification maximale des réassureurs fournissant la couverture, et un suivi des risques de crédit de ces derniers. Par exemple, l'assureur 5 présente une TVaR 99.5% de 15.26M€ en l'absence de risque de crédit des réassureurs, 16.74M€ avec un réassureur unique de risque de défaut de 0.5% annuel, et 15.88M€ avec 10 réassureurs.

Table 4.78 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale, sans risque de défaut

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| $\sigma$ (charge) | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max        | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%)       | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.79 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale,  $p=0.5\%$  - 1 réassureur unique

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5      | 6      | 7     | 8     | 9    | 10   | 11     | 12    | 13   | 14   | 15    | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|--------|--------|-------|-------|------|------|--------|-------|------|------|-------|------|
| E(charge)         | 1.24  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.79   | 2.41   | 0.46  | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.78   | 0.42  | 0.00 | 0.05 | 0.27  | 0.03 |
| $\sigma$ (charge) | 1.94  | 0.06 | 1.20  | 0.02 | 2.80   | 3.62   | 0.79  | 0.91  | 0.21 | 0.18 | 2.76   | 0.73  | 0.03 | 0.14 | 0.50  | 0.11 |
| Charge Max        | 72.59 | 2.77 | 41.72 | 1.68 | 114.38 | 143.95 | 24.89 | 29.02 | 6.06 | 4.98 | 104.93 | 22.50 | 1.33 | 4.87 | 16.50 | 7.86 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00   | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 9.52  | 0.42 | 5.97  | 0.01 | 13.41  | 17.91  | 3.92  | 4.56  | 1.27 | 1.10 | 13.39  | 3.71  | 0.22 | 0.89 | 2.58  | 0.69 |
| TVaR(99.5%)       | 11.57 | 0.65 | 7.40  | 0.20 | 16.74  | 21.15  | 4.95  | 5.66  | 1.70 | 1.49 | 16.42  | 4.61  | 0.40 | 1.26 | 3.26  | 1.00 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6%  | 25.6%  | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5%  | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4%  | 0.2% |

Table 4.80 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale,  $p=0.5\%$  - 10 réassureurs équipondérés et homogènes

| Assureur          | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)         | 1.24  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.79  | 2.41  | 0.46 | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| $\sigma$ (charge) | 1.91  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.69  | 3.58  | 0.78 | 0.90  | 0.21 | 0.18 | 2.68  | 0.73 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max        | 19.31 | 3.07 | 11.34 | 2.49 | 29.62 | 36.34 | 9.26 | 12.60 | 5.45 | 5.04 | 34.90 | 8.83 | 4.67 | 4.56 | 8.90 | 3.67 |
| Charge Min        | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)        | 9.67  | 0.42 | 5.91  | 0.01 | 13.69 | 18.14 | 4.01 | 4.63  | 1.27 | 1.14 | 13.58 | 3.78 | 0.23 | 0.91 | 2.67 | 0.68 |
| TVaR(99.5%)       | 11.35 | 0.66 | 6.99  | 0.21 | 15.88 | 21.08 | 4.94 | 5.58  | 1.71 | 1.55 | 15.99 | 4.58 | 0.44 | 1.26 | 3.27 | 0.95 |
| Poids Pool        | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

#### IV.3.4.8. Séparation des risques EM-DAT et risques terroristes GTD

A titre purement indicatif, nous séparons les deux risques (EM-DAT) et GTD – et pour la mutualisation et pour la réassurance - afin de voir la contribution de chacun au prix de la structure :

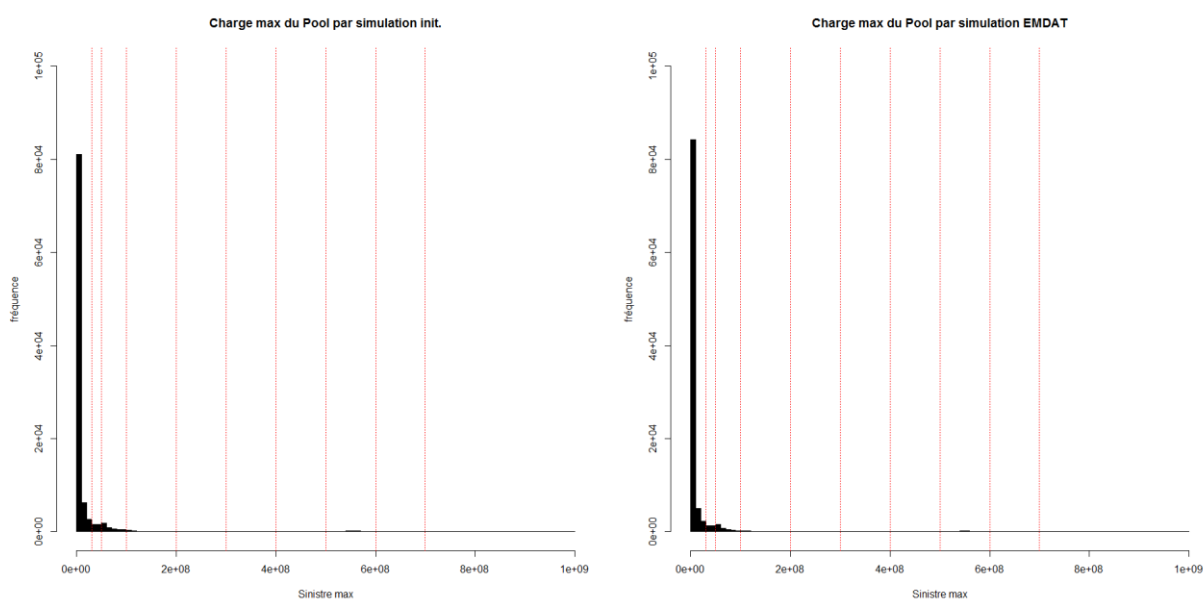
Table 4.81 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale EM-DAT + GTD

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| Rol Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.82 : Résultats pour les primes de tranches – Risques EM-DAT uniquement

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.92      | 0.94      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 534 013   | 694 949   | 620 905   | 389 035   | 303 636   | 254 863   | 168 865   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 858 444 | 3 204 653 | 4 355 995 | 3 520 976 | 3 134 218 | 2 888 381 | 2 071 734 |
| Prime Commerciale            | 988 290   | 1 376 642 | 1 400 268 | 966 180   | 797 220   | 628 656   | 432 327   |
| Rol Commercial               | 4.94%     | 2.75%     | 1.40%     | 0.97%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.43%     |
| Variation vs Actu            | -14%      | -14%      | -3%       | 1%        | -1%       | -1%       | -3%       |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 23.57%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 57.89%    | 41.73%    | 34.82%    | 33.81%    | 33.60%    | 33.62%    | 26.63%    |

Figure 4.57 : Charge maximum du Pool par simulation – Risques EM-DAT uniquement



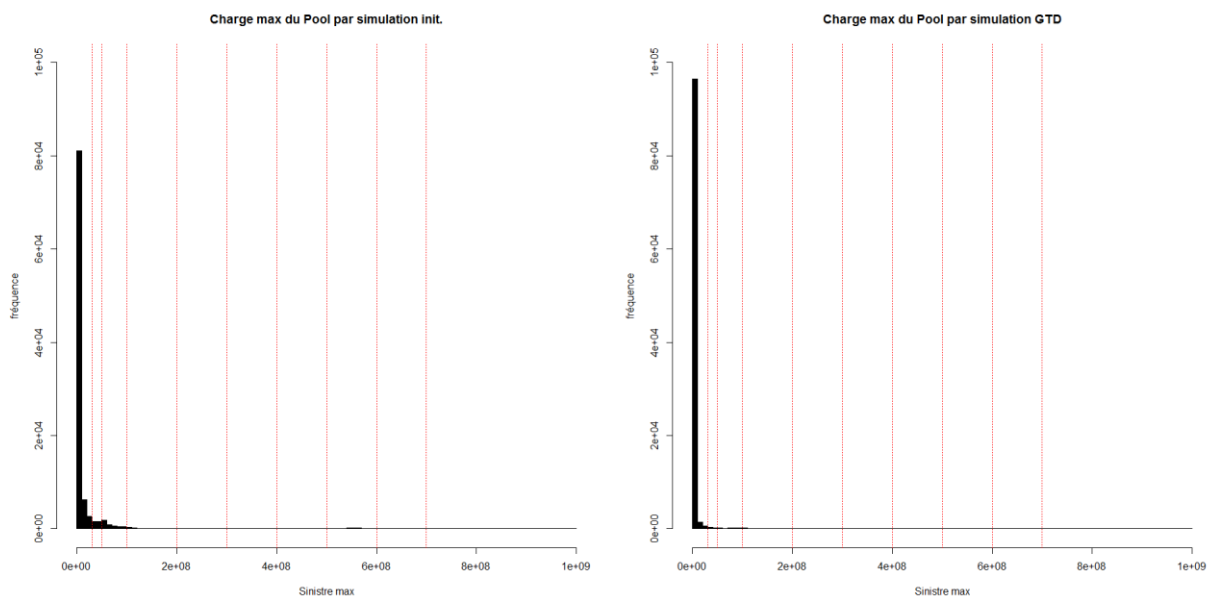
Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)  
594.0M€ (vs 593.5M€)

Maximum :

Table 4.83 : Résultats pour les primes de tranches – Risques GTD uniquement

| Tranche                      | 1       | 2         | 3       | 4     | 5     | 6     | 7     |
|------------------------------|---------|-----------|---------|-------|-------|-------|-------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.98    | 0.99      | 1.00    | 1.00  | 1.00  | 1.00  | 1.00  |
| Prime Pure                   | 92 121  | 136 969   | 13 581  | -     | -     | -     | -     |
| Ecart Type Prime Pure        | 762 672 | 1 407 817 | 312 564 | -     | -     | -     | -     |
| Prime Commerciale            | 220 832 | 358 915   | 54 833  | -     | -     | -     | -     |
| RoL Commercial               | 1.10%   | 0.72%     | 0.05%   | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| Variation vs Actu            | -81%    | -78%      | -96%    | -100% | -100% | -100% | -100% |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%  | 29.43%    | 0.00%   | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| TVaR Ppure 99.5%             | 34.20%  | 32.90%    | 2.72%   | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |

Figure 4.58 : Charge maximum du Pool par simulation – Risques GTD uniquement



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 119.6M€ (vs 593.5M€)

Table 4.84 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| o(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.85 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Risques EMDAT uniquement

| Assureur    | 1     | 2    | 3    | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 0.96  | 0.01 | 0.56 | 0.00 | 1.38  | 1.86  | 0.36 | 0.42 | 0.07 | 0.06 | 1.37  | 0.33 | 0.00 | 0.04 | 0.21 | 0.02 |
| o(charge)   | 1.67  | 0.05 | 1.02 | 0.02 | 2.36  | 3.15  | 0.67 | 0.78 | 0.18 | 0.16 | 2.35  | 0.63 | 0.03 | 0.12 | 0.43 | 0.09 |
| Charge Max  | 16.75 | 1.77 | 9.64 | 1.31 | 24.12 | 32.02 | 7.90 | 8.35 | 2.96 | 2.49 | 25.83 | 7.06 | 1.55 | 2.92 | 4.80 | 2.15 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 8.58  | 0.39 | 5.17 | 0.01 | 12.32 | 16.55 | 3.39 | 3.96 | 1.12 | 1.01 | 12.15 | 3.16 | 0.22 | 0.82 | 2.26 | 0.65 |
| TVaR(99.5%) | 9.91  | 0.58 | 6.05 | 0.19 | 13.96 | 18.65 | 4.05 | 4.71 | 1.39 | 1.26 | 13.88 | 3.81 | 0.39 | 1.06 | 2.73 | 0.86 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1% | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.86 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Risques GTD uniquement

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 0.28  | 0.00 | 0.16  | 0.00 | 0.40  | 0.55  | 0.10 | 0.12 | 0.02 | 0.01 | 0.40  | 0.09 | 0.00 | 0.01 | 0.06 | 0.00 |
| o(charge)   | 0.89  | 0.02 | 0.56  | 0.01 | 1.23  | 1.64  | 0.37 | 0.43 | 0.10 | 0.09 | 1.23  | 0.35 | 0.02 | 0.06 | 0.24 | 0.06 |
| Charge Max  | 13.22 | 2.29 | 11.12 | 1.82 | 17.19 | 21.87 | 7.95 | 9.83 | 5.53 | 5.21 | 18.79 | 7.95 | 2.69 | 4.44 | 7.42 | 6.74 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 5.84  | 0.02 | 3.64  | 0.00 | 8.10  | 10.81 | 2.43 | 2.82 | 0.59 | 0.47 | 8.05  | 2.32 | 0.01 | 0.26 | 1.65 | 0.07 |
| TVaR(99.5%) | 7.20  | 0.16 | 4.76  | 0.03 | 9.58  | 12.55 | 3.25 | 3.78 | 1.15 | 1.01 | 9.57  | 3.20 | 0.08 | 0.67 | 2.38 | 0.46 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

En terme de prix de la réassurance, la suppression du risque terroriste présente un impact significatif sur les tranches 1 et 2 alors que l'impact est marginal sur la tranche 3 et nul sur les tranches au-dessus. Ceci s'explique par le fait que les événements terroristes ne font pas beaucoup de victimes – leur sévérité est plus faible que les événements relatifs à la base EM-DAT. Ainsi, nous pouvons considérer que l'ensemble des risques supportés par les tranches 3 et plus reposent sur des événements liés à la base EM-DAT (catastrophe naturelle, accident industriel (type Fukushima), accident de transport).

La charge maximum relative à un événement terroriste est de 119.6M€. Certes les chiffres pour les attentats du *World Trade Center* sont beaucoup plus importants, mais la part majeure de ces coûts correspond aux sinistres dommages.

Par contre, en termes de provisionnement du capital pour les assureurs membres, séparer les risques EM-DAT et GTD (pour la mutualisation et la réassurance) ne serait pas une bonne opération. En effet, en supposant qu'il y ait deux couvertures indépendantes (une pour chaque type de risque), la TVaR 99.5% de l'assureur 6 passe de 20.29M€ (couverture commune) à 18.55M€ + 12.55M€ = 31.10M€.

#### IV.3.4.9. Prise en compte du risque décès uniquement

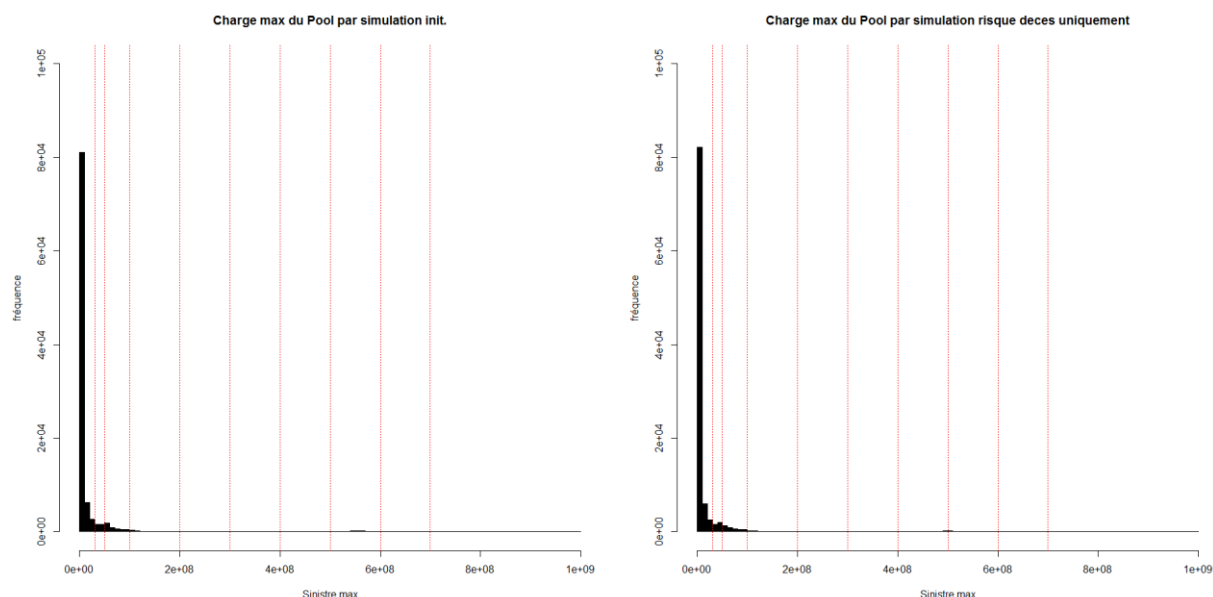
Table 4.87 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.88 : Résultats pour les primes de tranches – Risques décès uniquement

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7       |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.91      | 0.94      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 1.00    |
| Prime Pure                   | 576 013   | 708 565   | 559 885   | 352 827   | 270 160   | 220 051   | 26 397  |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 918 809 | 3 239 964 | 4 169 396 | 3 354 272 | 2 946 979 | 2 656 699 | 506 908 |
| Prime Commerciale            | 1 055 658 | 1 400 819 | 1 289 735 | 894 245   | 726 979   | 559 071   | 85 887  |
| RoL Commercial               | 5.28%     | 2.80%     | 1.29%     | 0.89%     | 0.73%     | 0.56%     | 0.09%   |
| Variation vs Actu            | -8%       | -13%      | -10%      | -7%       | -9%       | -12%      | -81%    |
| VaR Ppure 99.5%              | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 32.72%    | 0.00%   |
| TVaR Ppure 99.5%             | 61.41%    | 41.63%    | 35.09%    | 33.70%    | 33.40%    | 33.33%    | 5.28%   |

Figure 4.59 : Charge maximum du Pool par simulation – Risques décès uniquement



Occurrence des maximum > 600Mions€ (limite haute du Pool Obligatoire) : 0 (vs 0)      Maximum : 529.7M€ (vs 593.5M€)

Table 4.89 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.90 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – risque décès uniquement

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9    | 10   | 11    | 12    | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.16  | 0.01 | 0.67  | 0.00 | 1.67  | 2.26  | 0.43 | 0.51  | 0.08 | 0.06 | 1.66  | 0.39  | 0.00 | 0.04 | 0.25 | 0.02 |
| σ(charge)   | 1.81  | 0.06 | 1.10  | 0.02 | 2.56  | 3.42  | 0.73 | 0.85  | 0.20 | 0.16 | 2.54  | 0.68  | 0.03 | 0.13 | 0.47 | 0.09 |
| Charge Max  | 20.94 | 4.09 | 13.10 | 2.78 | 38.06 | 48.95 | 9.06 | 11.18 | 5.48 | 4.20 | 30.57 | 12.92 | 1.35 | 5.62 | 7.42 | 3.01 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.21  | 0.39 | 5.60  | 0.01 | 13.11 | 17.47 | 3.71 | 4.33  | 1.16 | 1.01 | 12.95 | 3.48  | 0.20 | 0.80 | 2.43 | 0.62 |
| TVaR(99.5%) | 10.53 | 0.63 | 6.51  | 0.17 | 14.94 | 19.87 | 4.46 | 5.14  | 1.52 | 1.32 | 14.73 | 4.24  | 0.35 | 1.10 | 3.02 | 0.89 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9%  | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

La prise en charge du risque décès uniquement, en laissant de côté les risques IPT/ITT permet une baisse significative de la couverture de l'ordre de 10%, avec une baisse encore plus marquée sur les tranches les plus hautes. Nous retrouvons cette diminution d'environ 10% sur le capital nécessaire aux assureurs membres du Pool.

#### IV.3.5. Structure « TopTop »

Nous reprenons la même répartition des tranches, mais nous excluons tout *No Claim Bonus*.

Table 4.91 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale traditionnelle

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 629 109   | 826 604   | 644 058   | 386 013   | 304 747   | 256 834   | 175 139   |
| Ecart Type Prime Pure        | 2 017 585 | 3 501 968 | 4 414 161 | 3 517 060 | 3 157 652 | 2 896 059 | 2 111 232 |
| Prime Commerciale            | 1 143 468 | 1 601 529 | 1 440 527 | 961 303   | 801 467   | 632 051   | 444 642   |
| RoL Commercial               | 5.72%     | 3.20%     | 1.44%     | 0.96%     | 0.80%     | 0.63%     | 0.44%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 39.22%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 24.00%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 66.69%    | 45.23%    | 35.18%    | 33.93%    | 33.83%    | 33.52%    | 26.78%    |

Table 4.92 : Résultats pour les primes de tranches – structure « TopTop »

| Tranche                      | 1         | 2         | 3          | 4         | 5         | 6         | 7         |
|------------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97       | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 1 676 068 | 2 002 858 | 1 661 960  | 1 039 890 | 802 398   | 665 439   | 310 982   |
| Ecart Type Prime Pure        | 5 366 447 | 8 957 193 | 12 072 153 | 9 861 831 | 8 768 019 | 8 011 789 | 4 105 696 |
| Prime Commerciale            | 2 771 402 | 3 566 196 | 3 423 162  | 2 372 703 | 1 946 666 | 1 688 430 | 825 212   |
| RoL Commercial               | 13.86%    | 7.13%     | 3.42%      | 2.37%     | 1.95%     | 1.69%     | 0.83%     |
| Variation vs Actu            | 142%      | 123%      | 138%       | 147%      | 143%      | 167%      | 86%       |
| VaR Ppure 99.5%              | 100.00%   | 100.00%   | 100.00%    | 100.00%   | 100.00%   | 100.00%   | 41.09%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 100.00%   | 100.00%   | 100.00%    | 100.00%   | 100.00%   | 100.00%   | 55.47%    |

Figure 4.60 : Comparaison de la distribution des primes (structure initiale en rouge, structure initiale en noir)

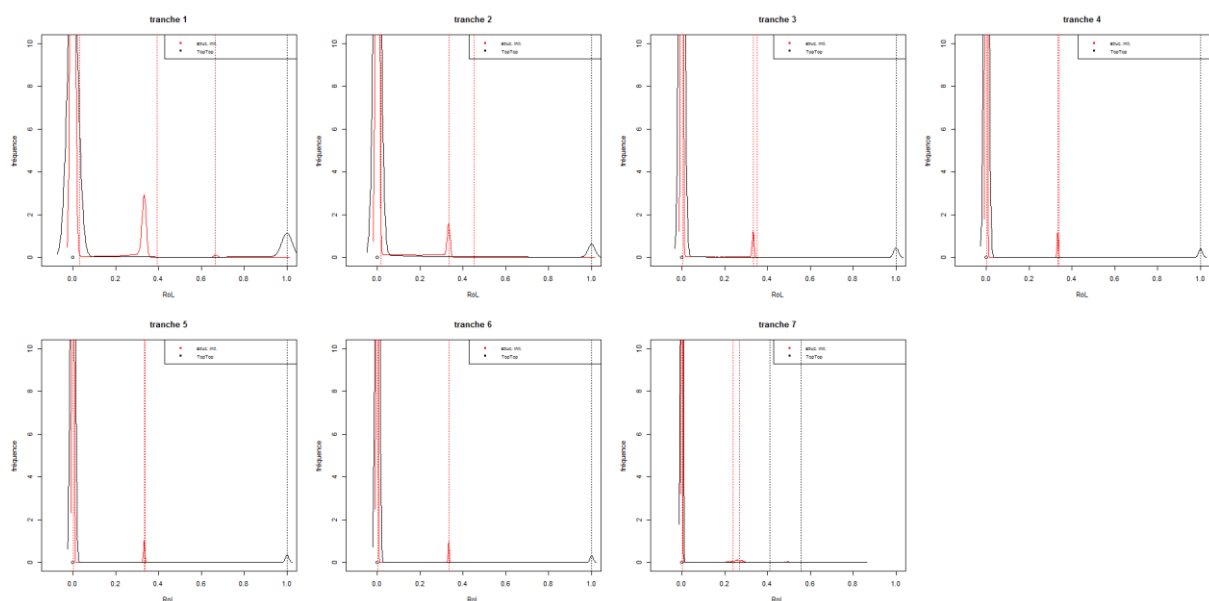


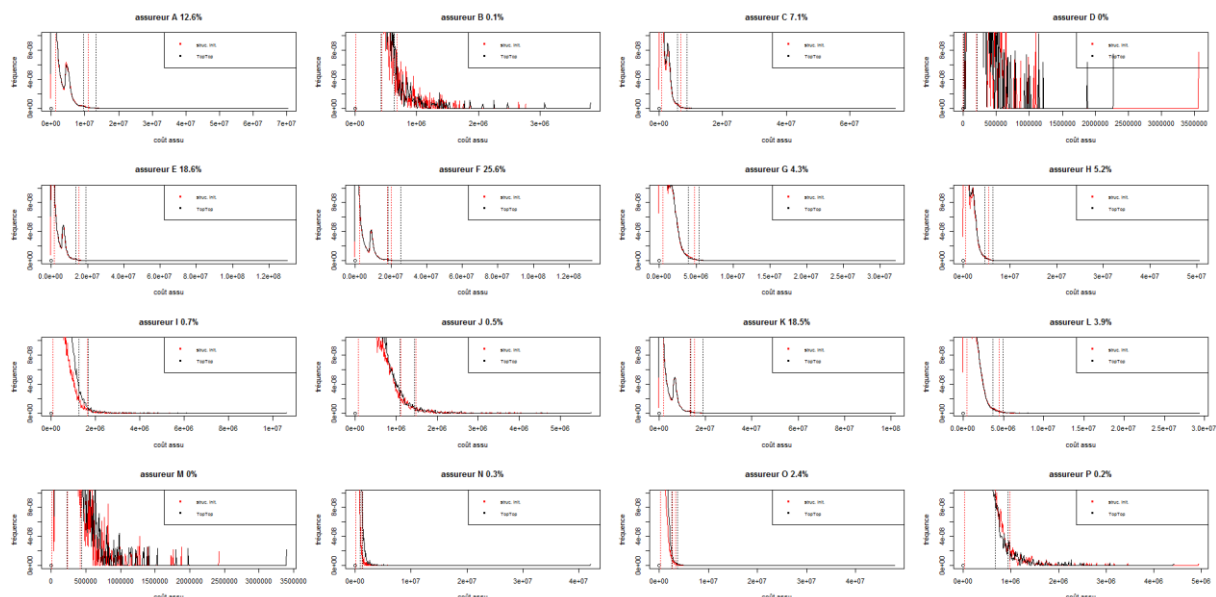
Table 4.93 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| o(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.94 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure « TopTop »

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10   | 11     | 12    | 13   | 14    | 15    | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|--------|--------|-------|-------|-------|------|--------|-------|------|-------|-------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.80   | 2.44   | 0.46  | 0.55  | 0.09  | 0.07 | 1.79   | 0.42  | 0.01 | 0.05  | 0.27  | 0.03 |
| o(charge)   | 2.02  | 0.06 | 1.30  | 0.02 | 2.84   | 3.80   | 0.81  | 0.96  | 0.21  | 0.18 | 2.85   | 0.76  | 0.04 | 0.19  | 0.56  | 0.10 |
| Charge Max  | 69.97 | 3.83 | 74.25 | 2.27 | 129.82 | 132.11 | 31.94 | 50.47 | 10.63 | 5.74 | 101.73 | 29.27 | 3.40 | 42.17 | 48.01 | 4.42 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00   | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.53  | 0.41 | 5.82  | 0.01 | 13.56  | 18.26  | 3.90  | 4.56  | 1.24  | 1.09 | 13.53  | 3.66  | 0.23 | 0.88  | 2.57  | 0.67 |
| TVaR(99.5%) | 13.33 | 0.63 | 8.64  | 0.21 | 18.97  | 25.55  | 5.35  | 6.38  | 1.68  | 1.45 | 18.88  | 4.96  | 0.43 | 1.31  | 3.65  | 0.95 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6%  | 25.6%  | 4.3%  | 5.2%  | 0.7%  | 0.5% | 18.5%  | 3.9%  | 0.0% | 0.3%  | 2.4%  | 0.2% |

Figure 4.61 : Comparaison de la distribution de la charge par assureurs (structure initiale en rouge, structure TopTop en noir)



Cette structure est très sensible à la fréquence des sinistres : un aléa de risques constitué de beaucoup de « petits » sinistres dont le coût est légèrement plus élevé que la priorité correspond tout à fait à ce type de structure.

De plus, nous constatons une augmentation significative du coût **initial** de la réassurance, la capacité ne pouvant être reconstituée. Ainsi, le coût initial est le coût final, alors que dans le cas de la structure initiale il faut également tenir compte de la probabilité de reconstitution, et le prix que cela signifie.

Deux écueils – et non des moindres – sont à noter:

- pour les réassureurs, le capital nécessaire à provisionner est beaucoup plus important que pour la structure par événement, d'où l'explication possible de la réticence du marché pour ce type de structure.

- pour les membres du Pool, la charge maximum possible des sinistres est largement augmentée, tout comme la TVaR, alors que l'espérance moyenne de la charge et la VaR ne sont pas spécialement impactées. La partie extrême droite de la distribution des charges se décale très significativement vers les extrêmes positifs, mettant en péril le principe de prudence actuarielle recherchée dans la volonté de couverture des assureurs membres du Pool.

Cette structure n'est pas conseillée.

Les tests de sensibilité mettent en avant la cohérence du modèle, les sensibilités respectant l'intuition du professionnel. Le modèle présente également une certaine robustesse en terme de

**valorisation, en particulier lorsqu'une prudence actuarielle est respectée comme c'est le cas dans ce développement.**

Table 4.95 : Tableau récapitulatif des paramètres

| <b>Augmentation du paramètre</b>         | <b>Impact sur le prix de la couverture de réassurance</b> | <b>Impact sur le SCR (TVaR) global des membres du Pool</b> |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| <i>Durée de la couverture</i>            | +                                                         | +                                                          |
| <i>Fréquence de la sinistralité</i>      | +                                                         | +                                                          |
| <i>Nombre de victimes par sinistre</i>   | +                                                         | +                                                          |
| <i>Effet concentration</i>               | +                                                         | +                                                          |
| <i>Nombre de têtes par franchise</i>     | -                                                         | +                                                          |
| <i>Nombre de tranches</i>                | -                                                         | 0                                                          |
| <i>Hausse de la première priorité</i>    | -                                                         | +                                                          |
| <i>Diversification du Pool</i>           | -                                                         | 0                                                          |
| <i>Prix de la reconstitution</i>         | -                                                         | 0                                                          |
| <i>Risque de défaut du réassureur</i>    | -                                                         | +                                                          |
| <i>Séparation des risques CAT et TER</i> | 0                                                         | 0                                                          |
| <i>Structure « TopTop »</i>              | +                                                         | NA                                                         |

#### IV.3.6. Le Pool Facultatif

D'après notre méthode stochastique, et avec les paramètres entrés (uniquement les assureurs A et E ont choisi de souscrire au Pool Facultatif), la tranche 100XS600 correspondant au Pool Facultatif n'est impactée que dans trois cas :

- Si la franchise est annulée totalement (au lieu de 2 têtes actuellement)
- Si l'effet concentration doit être augmenté, et en proportion ( $r=0.7$ ) et en nombre ( $t=750$ )

Néanmoins, même malgré ces modifications, la prime est proche de 0.

Table 4.96 : Primes Pool Facultatif

|                                     | <b>Initial</b> | <b>0 tête</b> | <b>r=0.7</b> | <b>t=750</b> |
|-------------------------------------|----------------|---------------|--------------|--------------|
| <b>Proportion simul ss sinistre</b> | 1.00           | 1.00          | 1.00         | 1.00         |
| <b>Prime Pure</b>                   | -              | 2             | 133          | 77           |
| <b>Ecart Type Prime Pure</b>        | -              | 584           | 33 178       | 14 669       |
| <b>Prime Commerciale</b>            | -              | 61            | 3 496        | 103          |
| <b>RoL Commercial</b>               | 0.00%          | 6.09E-07      | 3.50E-05     | 1.03E-06     |

#### IV.3.7. Le coût en capital pour le réassureur : un *floor* implicite ?

La réassurance peut être définie comme une industrie dont les résultats peuvent être très volatils. Après des décennies sans sinistre, une catastrophe peut intervenir et avoir un impact très important sur la solvabilité des acteurs. C'est le cas des années exceptionnellement sinistrées où la survie même des compagnies de réassurance sous-capitalisées est en péril (crise du secteur de la réassurance du début des années 2000). Pour un financier, nous pouvons faire l'analogie avec une

position gamma short (convexité négative): la plupart du temps, le thêta encaissé au vu du premium contenu dans la volatilité implicite par rapport à la volatilité réalisée engendre un *PnL (Profit & Loss)* positif, alors qu'une grosse variation soudaine et rare de marché coûte très cher au portefeuille.

Voici l'évolution du *Return on Equity (RoE)* d'un panel des 40 réassureurs mondiaux majeurs (en rouge, le niveau communément admis de rémunération de l'actionnaire à 15% annuels):

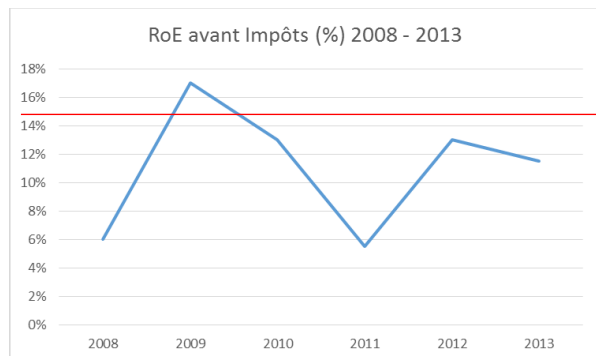


Figure 4.62 : Evolution du RoE des réassureurs

Source AON Benfield

Ce schéma corrobore la difficulté de l'industrie en 2011, année de forte sinistralité, avec une baisse significative du RoE, qui s'est néanmoins maintenu à un peu plus de 5% et la baisse des capacités évoquée plus haut.

Dans la littérature, nous trouvons l'expression suivante pour le coût du capital:

$$\text{Coût du capital} = \text{Max}(\text{chargement de sécurité}, \frac{\text{Portée}}{1000})$$

L'approche consiste dans ce cas à considérer que le réassureur qui a émis la protection doit provisionner l'équivalent en capital correspondant au Sinistre Maximal Possible (SMP, PML pour *Possible Maximal Loss* en anglais). Dans ce cas, il nous faut déterminer le montant correspondant au quantile 99.5% (approche Solvabilité 2), que le réassureur doit provisionner. Au vu des simulations précédemment effectuées, nous avons ce chiffre par tranche.

En considérant que Solvabilité 2 impose au réassureur de provisionner le capital équivalent au 99.5 percentile, et considérant que la rémunération du capital demandé par l'actionnaire est de 15%, le RoL minimum demandé par le réassureur est :

$$RoL_{\text{méthode capital}} = VaR_{99.5\%} \cdot \left[ \left( \frac{1 + \text{rémunération}_{\text{actionnaire}}}{1 + \text{taux sans risque}} \right)^t - 1 \right]$$

$RoL_{Com_{MC}}$ : RoL Commercial obtenu avec la méthode Monte – Carlo

$RoL_{Pur_{MC}}$ : RoL Pur obtenu avec la méthode Monte – Carlo

Nous ajustons par le ratio  $\frac{RoL_{Com_{MC}}}{RoL_{Pur_{MC}}}$  afin de prendre en compte l'impact des chargements, des frais de courtage, et l'effet *No Claim Bonus*.

Nous calculons la VaR et la TVaR à 99.5% par tranche (100.000 simulations, structure actuelle):

Table 4.97 : VaR, TVaR et méthode du capital

| à 99.5%   Tranche    | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| VaR du RoL pur 1 an  | 39.22% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 24.00% |
| VaR du RoL pur 2 ans | 66.67% | 46.98% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 26.33% |
| VaR du RoL pur 3 ans | 75.15% | 67.68% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 33.33% | 27.10% |

| à 99.5%   Tranche     | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| TVaR du RoL pur 1 an  | 66.69% | 45.23% | 35.18% | 33.93% | 33.83% | 33.52% | 26.78% |
| TVaR du RoL pur 2 ans | 76.89% | 70.77% | 39.51% | 35.65% | 34.44% | 34.27% | 28.35% |
| TVaR du RoL pur 3 ans | 85.76% | 82.59% | 48.32% | 37.55% | 35.86% | 35.18% | 29.32% |

Table 4.98 : RoL obtenus

|       |                        | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
|-------|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1 an  | RoL Commercial MC      | 5.72%  | 3.20%  | 1.44%  | 0.96%  | 0.80%  | 0.63%  | 0.44%  |
|       | RoL Commercial Capital | 5.88%  | 5.00%  | 5.00%  | 5.00%  | 5.00%  | 5.00%  | 3.60%  |
| 2 ans | RoL Commercial MC      | 10.38% | 5.77%  | 2.53%  | 1.68%  | 1.36%  | 1.05%  | 0.71%  |
|       | RoL Commercial Capital | 21.50% | 15.15% | 10.75% | 10.75% | 10.75% | 10.75% | 8.49%  |
| 3 ans | RoL Commercial MC      | 14.88% | 8.31%  | 3.66%  | 2.36%  | 1.85%  | 1.43%  | 0.98%  |
|       | RoL Commercial Capital | 39.14% | 35.25% | 17.36% | 17.36% | 17.36% | 17.36% | 14.12% |

Les prix obtenus sont très élevés comparés à ce que nous obtenons par l'intermédiaire de la simulation de Monte-Carlo. Cette différence est particulièrement notable sur les tranches hautes de la structure, et nous permet d'invalider le fait que les prix de marchés actuels reposent uniquement sur cette approche de valorisation par la rémunération du capital provisionné par le réassureur.

#### IV.3.8. Intérêt de la mutualisation de la couverture de réassurance au sein du Pool

Nous considérons la structure de réassurance actuelle.

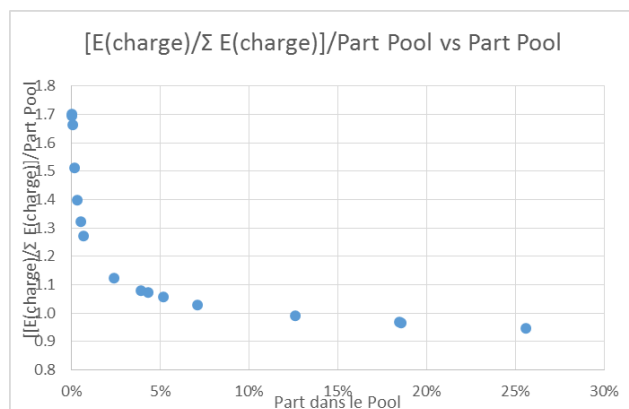
➔ *L'intérêt du Pool de Réassurance est-il équivalent pour un assureur dont la part est significative dans le Pool que pour un assureur dont le poids est moins important ?*

Table 4.99 : Comparaison entre assureurs – structure actuelle. Approche E(charge)

| Assureur                                        | 1      | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|-------------------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| E(charge)                                       | 1.25   | 0.01  | 0.73  | 0.00  | 1.79   | 2.42   | 0.46  | 0.55  | 0.09  | 0.07  | 1.78   | 0.42  | 0.01  | 0.05  | 0.27  | 0.03  |
| $\sigma$ (charge)                               | 1.90   | 0.06  | 1.16  | 0.02  | 2.67   | 3.56   | 0.78  | 0.90  | 0.21  | 0.18  | 2.66   | 0.72  | 0.04  | 0.14  | 0.50  | 0.10  |
| Charge Max                                      | 17.39  | 2.78  | 12.66 | 3.57  | 24.81  | 35.76  | 14.17 | 9.16  | 5.34  | 4.67  | 24.84  | 8.88  | 2.42  | 5.77  | 8.42  | 4.95  |
| Charge Min                                      | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| VaR(99.5%)                                      | 9.63   | 0.43  | 5.83  | 0.01  | 13.40  | 17.99  | 3.96  | 4.57  | 1.24  | 1.10  | 13.32  | 3.71  | 0.23  | 0.91  | 2.61  | 0.68  |
| TVaR(99.5%)                                     | 10.98  | 0.67  | 6.75  | 0.20  | 15.26  | 20.28  | 4.75  | 5.35  | 1.63  | 1.48  | 15.12  | 4.42  | 0.42  | 1.23  | 3.31  | 0.98  |
| Poids Pool                                      | 12.61% | 0.07% | 7.09% | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30% | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| E(charge)/ $\Sigma$ E(charge)                   | 12.58% | 0.12% | 7.33% | 0.02% | 18.05% | 24.41% | 4.64% | 5.51% | 0.87% | 0.69% | 17.99% | 4.27% | 0.05% | 0.46% | 2.74% | 0.27% |
| Ratio [E(charge)/ $\Sigma$ E(charge)]/Part Pool | 1.0    | 1.7   | 1.0   | 1.7   | 1.0    | 1.0    | 1.1   | 1.1   | 1.3   | 1.3   | 1.0    | 1.1   | 1.7   | 1.4   | 1.1   | 1.5   |

Nous constatons que pour les « petits » membres du Pool leur ratio charge moyenne rapporté à la somme des charges moyennes des membres du Pool est très largement supérieur à leur part dans le Pool. Néanmoins, la petite compagnie trouve un intérêt d'adhérer au Pool : elle peut bénéficier de sa couverture de réassurance. Cet aspect est traité p.150.

Figure 4.63 : Part de la charge par assureur vs charge totale



Nous comparons le ratio  $\frac{E(charge_i)}{\sum_{i=1}^n E(charge_i)}$  à la part de l'assureur  $i$  dans le Pool (graphique 2). Les « petits » membres du Pool ont ce ratio qui s'approche de 1.7 alors que les plus « gros » ont ce ratio qui passe sous les 1.0.

Ainsi, en terme de charge moyenne, les « petits » assureurs sont proportionnellement plus mis à contribution que les « gros ».

Nous effectuons la même comparaison en nous intéressant à la TVaR :

Table 4.100 : Comparaison entre assureurs – structure actuelle. Approche TVaR

| Assureur                                    | 1      | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|---------------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| E(charge)                                   | 1.25   | 0.01  | 0.73  | 0.00  | 1.79   | 2.42   | 0.46  | 0.55  | 0.09  | 0.07  | 1.78   | 0.42  | 0.01  | 0.05  | 0.27  | 0.03  |
| σ(charge)                                   | 1.90   | 0.06  | 1.16  | 0.02  | 2.67   | 3.56   | 0.78  | 0.90  | 0.21  | 0.18  | 2.66   | 0.72  | 0.04  | 0.14  | 0.50  | 0.10  |
| Charge Max                                  | 17.39  | 2.78  | 12.66 | 3.57  | 24.81  | 35.76  | 14.17 | 9.16  | 5.34  | 4.67  | 24.84  | 8.88  | 2.42  | 5.77  | 8.42  | 4.95  |
| Charge Min                                  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| VaR(99.5%)                                  | 9.63   | 0.43  | 5.83  | 0.01  | 13.40  | 17.99  | 3.96  | 4.57  | 1.24  | 1.10  | 13.32  | 3.71  | 0.23  | 0.91  | 2.61  | 0.68  |
| TVaR(99.5%)                                 | 10.98  | 0.67  | 6.75  | 0.20  | 15.26  | 20.28  | 4.75  | 5.35  | 1.63  | 1.48  | 15.12  | 4.42  | 0.42  | 1.23  | 3.31  | 0.98  |
| Poids Pool                                  | 12.61% | 0.07% | 7.09% | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30% | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| TVaR(99.5%)/Σ TVaR(99.5%)                   | 11.83% | 0.73% | 7.27% | 0.22% | 16.43% | 21.85% | 5.11% | 5.76% | 1.75% | 1.60% | 16.29% | 4.77% | 0.45% | 1.33% | 3.56% | 1.05% |
| Ratio [TVaR(99.5%)/Σ TVaR(99.5%)]/Part Pool | 0.9    | 10.4  | 1.0   | 21.8  | 0.9    | 0.9    | 1.2   | 1.1   | 2.6   | 3.1   | 0.9    | 1.2   | 15.1  | 4.0   | 1.5   | 5.9   |

Figure 4.64 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale

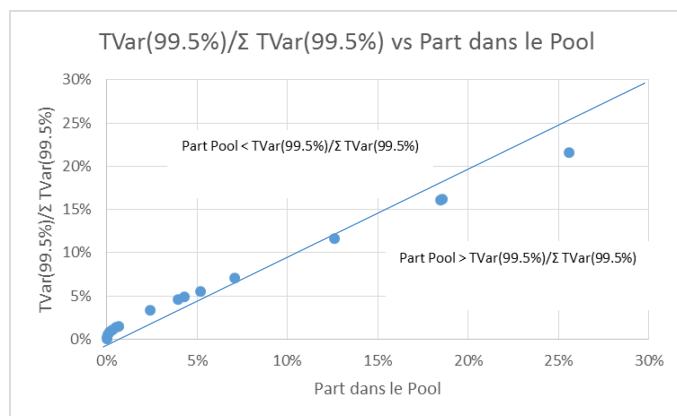
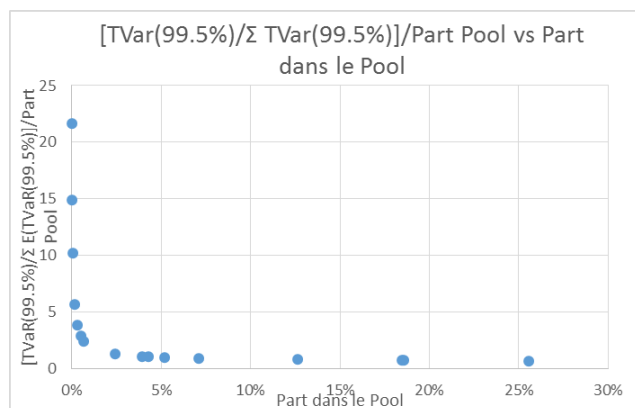


Figure 4.65 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis



Nous représentons le rapport  $\frac{TVaR_i}{\sum_{i=1}^n TVaR_i}$  que nous comparons à la part de l'assureur  $i$  dans le Pool (graphique 1). Puis nous comparons le ratio  $\frac{\frac{TVaR_i}{\sum_{i=1}^n TVaR_i}}{\text{PartPool}}$  à la part de l'assureur  $i$  dans le Pool (Figure 5.70).

Nous choisissons la TVaR plutôt que la VaR en raison de sa propriété de sous-additivité qui en fait un estimateur plus cohérent du risque extrême, dans le cadre d'un portefeuille (ou d'un pool).

La première représentation graphique laisse penser que la contribution de chaque assureur en termes de sa TVaR individuelle normalisée par la somme des TVaR individuelles du Pool respecte globalement la répartition. Néanmoins, nous constatons que les assureurs les plus significatifs en termes de poids dans le Pool contribuent légèrement moins en termes de TVaR que les plus petits.

Pour ces derniers, le second graphique nous apprend que le ratio  $\frac{\frac{TVaR_i}{\sum_{i=1}^n TVaR_i}}{\text{PartPool}}$  est très élevé (>25), alors que pour les plus lourds ce ratio est inférieur à 1. Ainsi, les plus petits membres contribuent en terme de TVaR près de 25 fois leur part du Pool, ce au profit des membres les plus importants.

➔ Si le Pool choisissait uniquement les couvertures obligatoires :

Table 4.101 : Comparaison entre assureurs – structure obligatoire. Approche E(charge)

| Assureur n°                             | 1      | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|-----------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| E(charge)                               | 1.32   | 0.01  | 0.77  | 0.00  | 1.91   | 2.58   | 0.48  | 0.58  | 0.09  | 0.07  | 1.90   | 0.45  | 0.01  | 0.05  | 0.29  | 0.03  |
| σ(charge)                               | 2.14   | 0.06  | 1.30  | 0.02  | 3.04   | 4.07   | 0.85  | 1.00  | 0.22  | 0.19  | 3.02   | 0.80  | 0.04  | 0.15  | 0.55  | 0.10  |
| Charge Max                              | 26.58  | 3.33  | 15.24 | 2.89  | 34.00  | 46.24  | 9.81  | 11.22 | 4.66  | 4.77  | 34.61  | 11.49 | 2.36  | 4.30  | 10.08 | 4.06  |
| Charge Min                              | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| VaR(99.5%)                              | 11.02  | 0.43  | 6.66  | 0.01  | 15.63  | 21.06  | 4.45  | 5.22  | 1.36  | 1.17  | 15.65  | 4.18  | 0.23  | 0.96  | 2.95  | 0.71  |
| TVaR(99.5%)                             | 12.92  | 0.66  | 7.95  | 0.23  | 18.27  | 24.45  | 5.32  | 6.21  | 1.75  | 1.53  | 18.16  | 5.04  | 0.44  | 1.32  | 3.64  | 1.02  |
| Part Pool                               | 12.61% | 0.07% | 7.09% | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30% | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| E(charge)/Σ E(charge)                   | 12.56% | 0.11% | 7.32% | 0.02% | 18.13% | 24.53% | 4.59% | 5.47% | 0.85% | 0.68% | 18.01% | 4.24% | 0.05% | 0.46% | 2.72% | 0.26% |
| Ratio [E(charge)/Σ E(charge)]/Part Pool | 1.0    | 1.6   | 1.0   | 1.8   | 1.0    | 1.0    | 1.1   | 1.1   | 1.3   | 1.3   | 1.0    | 1.1   | 1.7   | 1.4   | 1.1   | 1.5   |

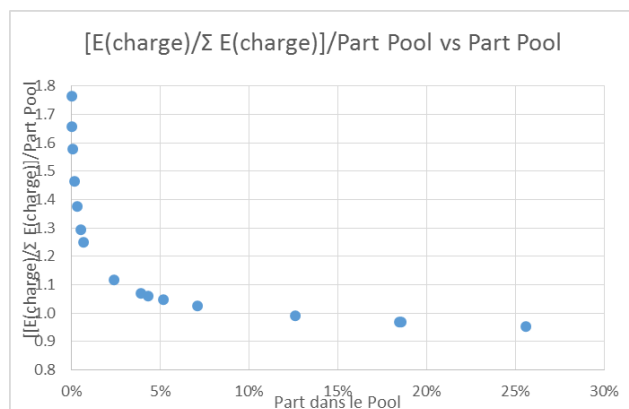


Figure 4.66 : Part de la charge par assureur vs charge totale – structure obligatoire

Nous retrouvons le fait que les contributions des « petits » membres se font au profit des plus importants.

Table 4.102 : Comparaison entre assureurs – structure obligatoire. Approche TVaR

| Assureur n°                                 | 1      | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|---------------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| E(charge)                                   | 1.32   | 0.01  | 0.77  | 0.00  | 1.91   | 2.58   | 0.48  | 0.58  | 0.09  | 0.07  | 1.90   | 0.45  | 0.01  | 0.05  | 0.29  | 0.03  |
| σ(charge)                                   | 2.14   | 0.06  | 1.30  | 0.02  | 3.04   | 4.07   | 0.85  | 1.00  | 0.22  | 0.19  | 3.02   | 0.80  | 0.04  | 0.15  | 0.55  | 0.10  |
| Charge Max                                  | 26.58  | 3.33  | 15.24 | 2.89  | 34.00  | 46.24  | 9.81  | 11.22 | 4.66  | 4.77  | 34.61  | 11.49 | 2.36  | 4.30  | 10.08 | 4.06  |
| Charge Min                                  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| Var(99.5%)                                  | 11.02  | 0.43  | 6.66  | 0.01  | 15.63  | 21.06  | 4.45  | 5.22  | 1.36  | 1.17  | 15.65  | 4.18  | 0.23  | 0.96  | 2.95  | 0.71  |
| TVaR(99.5%)                                 | 12.92  | 0.66  | 7.95  | 0.23  | 18.27  | 24.45  | 5.32  | 6.21  | 1.75  | 1.53  | 18.16  | 5.04  | 0.44  | 1.32  | 3.64  | 1.02  |
| Part Pool                                   | 12.61% | 0.07% | 7.09% | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30% | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| TVaR(99.5%)/Σ TVaR(99.5%)                   | 11.87% | 0.60% | 7.30% | 0.21% | 16.77% | 22.46% | 4.88% | 5.71% | 1.61% | 1.41% | 16.67% | 4.63% | 0.40% | 1.22% | 3.34% | 0.93% |
| Ratio [TVaR(99.5%)/Σ TVaR(99.5%)]/Part Pool | 0.9    | 8.6   | 1.0   | 20.8  | 0.9    | 0.9    | 1.1   | 1.1   | 2.4   | 2.7   | 0.9    | 1.2   | 13.3  | 3.7   | 1.4   | 5.2   |

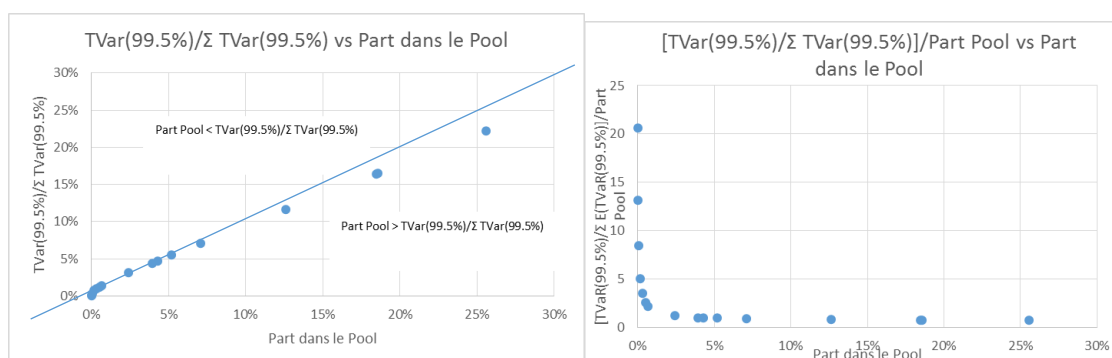


Figure 4.67 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – structure obligatoire

Figure 4.68 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis – structure obligatoire

➔ Nous comparons les résultats obtenus à ce que nous aurions obtenu si le Pool n'était pas réassuré du tout (ni tranches obligatoires ni tranches optionnelles). Le mécanisme de mutualisation actif sous la limite des 30M€ est ainsi augmenté jusqu'à 600M€ :

Table 4.103 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance. Approche E(charge)

| Assureur n°                             | 1      | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|-----------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| E(charge)                               | 2.32   | 0.02  | 1.33  | 0.00  | 3.37   | 4.59   | 0.82  | 0.99  | 0.14  | 0.11  | 3.35   | 0.76  | 0.01  | 0.07  | 0.48  | 0.04  |
| σ(charge)                               | 7.47   | 0.09  | 4.28  | 0.03  | 10.91  | 14.92  | 2.66  | 3.18  | 0.50  | 0.40  | 10.84  | 2.45  | 0.05  | 0.28  | 1.56  | 0.17  |
| Charge Max                              | 143.21 | 3.63  | 81.69 | 3.09  | 210.14 | 286.03 | 49.94 | 59.92 | 9.37  | 8.07  | 207.51 | 46.27 | 4.95  | 4.82  | 29.31 | 6.68  |
| Charge Min                              | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| Var(99.5%)                              | 70.92  | 0.68  | 40.40 | 0.06  | 103.93 | 142.62 | 24.83 | 29.82 | 4.45  | 3.52  | 103.35 | 22.82 | 0.31  | 2.37  | 14.31 | 1.44  |
| TVaR(99.5%)                             | 74.81  | 0.92  | 42.59 | 0.24  | 109.58 | 150.14 | 26.26 | 31.50 | 4.83  | 3.85  | 108.89 | 24.16 | 0.53  | 2.65  | 15.22 | 1.70  |
| Part Pool                               | 12.61% | 0.07% | 7.09% | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30% | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| E(charge)/Σ E(charge)                   | 12.59% | 0.10% | 7.23% | 0.01% | 18.32% | 24.94% | 4.47% | 5.36% | 0.78% | 0.61% | 18.20% | 4.12% | 0.04% | 0.40% | 2.59% | 0.23% |
| Ratio [E(charge)/Σ E(charge)]/Part Pool | 1.0    | 1.4   | 1.0   | 1.4   | 1.0    | 1.0    | 1.0   | 1.0   | 1.2   | 1.2   | 1.0    | 1.0   | 1.4   | 1.2   | 1.1   | 1.3   |

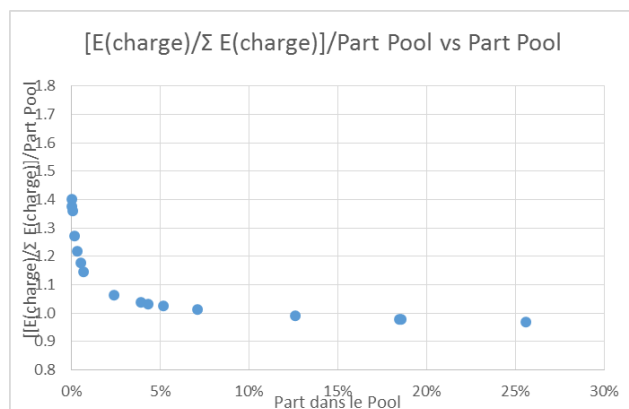


Figure 4.69 : Part de la charge par assureur vs charge totale – aucune réassurance

Nous constatons une augmentation de l'espérance des charges, en particulier pour les membres du Pool les plus importants. Mais cet effet est encore plus visible sur les paramètres tels que la VaR et la TVaR. La TVaR de l'assureur 6 (poids 25.6%) passe de 27.7 à 159.4, soit plus de cinq fois plus importante, alors que pour l'assureur 4 (poids 0.01%), cette TVaR passe « seulement » de 0.29 à 0.31.

Table 4.104 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance. Approche TVaR

| Assureur n°                                 | 1      | 2     | 3     | 4     | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|---------------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| E(charge)                                   | 2.32   | 0.02  | 1.33  | 0.00  | 3.37   | 4.59   | 0.82  | 0.99  | 0.14  | 0.11  | 3.35   | 0.76  | 0.01  | 0.07  | 0.48  | 0.04  |
| σ(charge)                                   | 7.47   | 0.09  | 4.28  | 0.03  | 10.91  | 14.92  | 2.66  | 3.18  | 0.50  | 0.40  | 10.84  | 2.45  | 0.05  | 0.28  | 1.56  | 0.17  |
| Charge Max                                  | 143.21 | 3.63  | 81.69 | 3.09  | 210.14 | 286.03 | 49.94 | 59.92 | 9.37  | 8.07  | 207.51 | 46.27 | 4.95  | 4.82  | 29.31 | 6.68  |
| Charge Min                                  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| VaR(99.5%)                                  | 70.92  | 0.68  | 40.40 | 0.06  | 103.93 | 142.62 | 24.83 | 29.82 | 4.45  | 3.52  | 103.35 | 22.82 | 0.31  | 2.37  | 14.31 | 1.44  |
| TVaR(99.5%)                                 | 74.81  | 0.92  | 42.59 | 0.24  | 109.58 | 150.14 | 26.26 | 31.50 | 4.83  | 3.85  | 108.89 | 24.16 | 0.53  | 2.65  | 15.22 | 1.70  |
| Part Pool                                   | 12.61% | 0.07% | 7.09% | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30% | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| TVaR(99.5%)/Σ TVaR(99.5%)                   | 12.51% | 0.15% | 7.12% | 0.04% | 18.33% | 25.11% | 4.39% | 5.27% | 0.81% | 0.64% | 18.21% | 4.04% | 0.09% | 0.44% | 2.55% | 0.28% |
| Ratio [TVaR(99.5%)/Σ TVaR(99.5%)]/Part Pool | 1.0    | 2.2   | 1.0   | 4.1   | 1.0    | 1.0    | 1.0   | 1.0   | 1.2   | 1.2   | 1.0    | 1.0   | 2.9   | 1.3   | 1.1   | 1.6   |

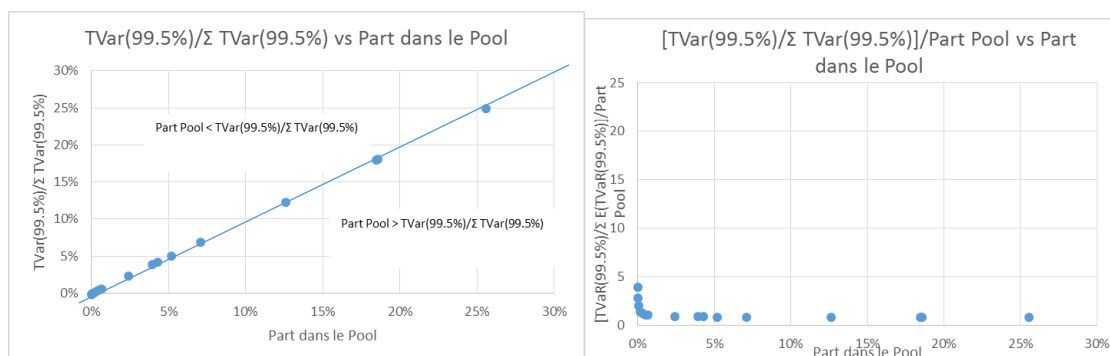


Figure 4.70 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – aucune réassurance

Figure 4.71 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis – aucune réassurance

- Néanmoins, ces économies se font principalement au profit des principaux membres du Pool, alors que la participation (part relative) des « petits » membres augmente significativement (CF membre 4)
- L'ensemble des membres voit son risque extrême diminuer significativement.
- Tout comme pour l'espérance de charge, cette économie de *tail risk* intervient en particulier pour les principaux membres du Pool, qui voient leur VaR ou TVaR divisée par près de 7 ou 8, alors que la diminution pour les petits membres reste autour de 1.4 ou 1.5.

➔ Enfin, nous comparons la répartition des effets de mutualisation du Pool (réassuré et non réassuré) à la structure de risque que subirait chacun des assureurs membres s'il conservait son autonomie totale (pas de Pool, pas de réassurance).

Table 4.105 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance, aucune mutualisation. Approche  $E(\text{charge})$

| Assureur                                                            | 1      | 2     | 3      | 4     | 5      | 6      | 7      | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|---------------------------------------------------------------------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $E(\text{charge})$                                                  | 2.31   | 0.01  | 1.32   | 0.00  | 3.42   | 4.67   | 0.80   | 0.97  | 0.13  | 0.09  | 3.41   | 0.74  | 0.01  | 0.06  | 0.45  | 0.03  |
| $\sigma(\text{charge})$                                             | 9.29   | 0.46  | 6.03   | 0.29  | 12.73  | 16.72  | 4.30   | 4.88  | 1.44  | 1.17  | 12.80  | 4.10  | 0.23  | 0.96  | 2.99  | 0.77  |
| Charge Max                                                          | 158.15 | 72.44 | 110.33 | 47.79 | 202.50 | 305.81 | 124.64 | 97.52 | 78.75 | 81.27 | 251.17 | 84.39 | 45.06 | 79.50 | 86.93 | 77.82 |
| Charge Min                                                          | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| $\text{VaR}(99.5\%)$                                                | 67.99  | 0.42  | 46.63  | 0.00  | 97.53  | 133.83 | 27.68  | 36.00 | 3.98  | 3.11  | 96.83  | 26.18 | 0.23  | 1.97  | 15.04 | 1.06  |
| $\text{TVar}(99.5\%)$                                               | 83.69  | 1.80  | 58.78  | 0.63  | 115.59 | 157.40 | 48.77  | 53.12 | 13.37 | 9.87  | 117.40 | 47.12 | 0.83  | 6.86  | 34.80 | 4.33  |
| Poids Pool                                                          | 12.61% | 0.07% | 7.09%  | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30%  | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| $E(\text{charge})/\Sigma E(\text{charge})$                          | 12.53% | 0.07% | 7.15%  | 0.02% | 18.56% | 25.36% | 4.34%  | 5.25% | 0.69% | 0.50% | 18.53% | 4.01% | 0.03% | 0.32% | 2.47% | 0.18% |
| Ratio $[E(\text{charge})/\Sigma E(\text{charge})]/\text{Part Pool}$ | 1.0    | 1.0   | 1.0    | 1.7   | 1.0    | 1.0    | 1.0    | 1.0   | 1.0   | 1.0   | 1.0    | 1.0   | 0.9   | 1.0   | 1.0   | 1.0   |

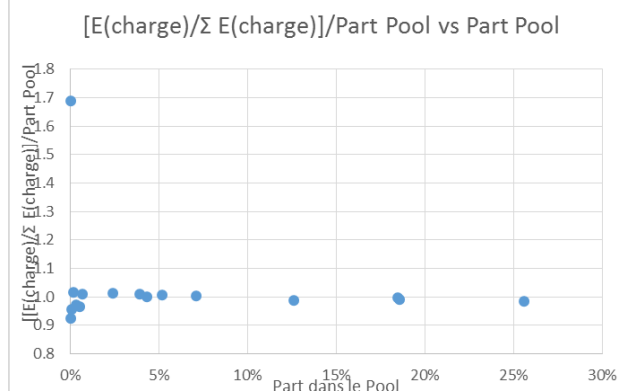


Figure 4.72 : Part de la charge par assureur vs charge totale – aucune réassurance, aucune mutualisation

Dans ce cas, chacun subit son propre aléa, et ne subit ou ne bénéficie pas l'effet mutualisation du Pool, ni l'effet couverture de la réassurance.

Comme cela pouvait être anticipé, la part de l'aléa moyen de chacun correspond à peu près à sa part dans le Pool, excepté pour les très petits poids (à l'extrême gauche du graphique), ou un aléa peut impacter significativement la moyenne.

Table 4.106 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance, aucune mutualisation. Approche  $\text{TVar}$

| Assureur                                                                  | 1      | 2     | 3      | 4     | 5      | 6      | 7      | 8     | 9     | 10    | 11     | 12    | 13    | 14    | 15    | 16    |
|---------------------------------------------------------------------------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $E(\text{charge})$                                                        | 2.31   | 0.01  | 1.32   | 0.00  | 3.42   | 4.67   | 0.80   | 0.97  | 0.13  | 0.09  | 3.41   | 0.74  | 0.01  | 0.06  | 0.45  | 0.03  |
| $\sigma(\text{charge})$                                                   | 9.29   | 0.46  | 6.03   | 0.29  | 12.73  | 16.72  | 4.30   | 4.88  | 1.44  | 1.17  | 12.80  | 4.10  | 0.23  | 0.96  | 2.99  | 0.77  |
| Charge Max                                                                | 158.15 | 72.44 | 110.33 | 47.79 | 202.50 | 305.81 | 124.64 | 97.52 | 78.75 | 81.27 | 251.17 | 84.39 | 45.06 | 79.50 | 86.93 | 77.82 |
| Charge Min                                                                | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00   | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| $\text{VaR}(99.5\%)$                                                      | 67.99  | 0.42  | 46.63  | 0.00  | 97.53  | 133.83 | 27.68  | 36.00 | 3.98  | 3.11  | 96.83  | 26.18 | 0.23  | 1.97  | 15.04 | 1.06  |
| $\text{TVar}(99.5\%)$                                                     | 83.69  | 1.80  | 58.78  | 0.63  | 115.59 | 157.40 | 48.77  | 53.12 | 13.37 | 9.87  | 117.40 | 47.12 | 0.83  | 6.86  | 34.80 | 4.33  |
| Poids Pool                                                                | 12.61% | 0.07% | 7.09%  | 0.01% | 18.58% | 25.58% | 4.30%  | 5.19% | 0.68% | 0.52% | 18.47% | 3.94% | 0.03% | 0.33% | 2.42% | 0.18% |
| $\text{TVar}(99.5\%)/\Sigma \text{TVar}(99.5\%)$                          | 11.09% | 0.24% | 7.79%  | 0.08% | 15.32% | 20.87% | 6.47%  | 7.04% | 1.77% | 1.31% | 15.56% | 6.25% | 0.11% | 0.91% | 4.61% | 0.57% |
| Ratio $[\text{TVar}(99.5\%)/\Sigma \text{TVar}(99.5\%)]/\text{Part Pool}$ | 0.9    | 3.4   | 1.1    | 8.3   | 0.8    | 0.8    | 1.5    | 1.4   | 2.6   | 2.5   | 0.8    | 1.6   | 3.7   | 2.8   | 1.9   | 3.2   |

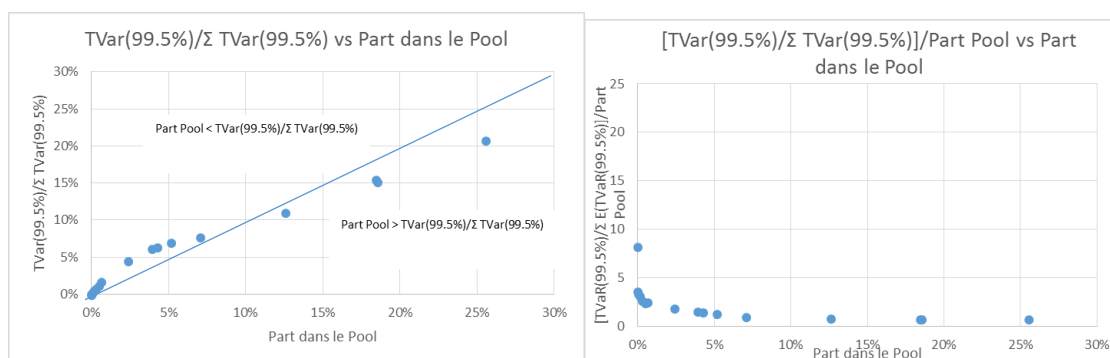
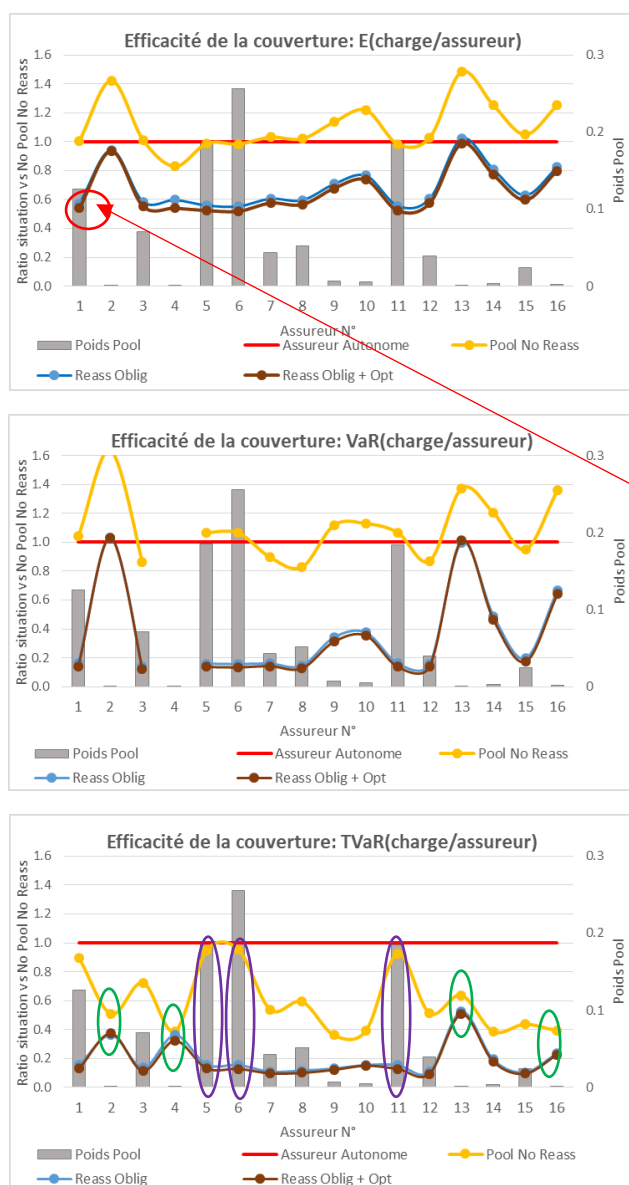


Figure 4.73 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – aucune réassurance, aucune mutualisation

Figure 4.74 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis – aucune réassurance, aucune mutualisation

En résumé, la mutualisation et la couverture de réassurance bénéficie à l'ensemble des membres du Pool, mais à des degrés moindres eu égard à l'hétérogénéité des participations au Pool. Les « petits » membres voient leur contribution, et leur prise de risque pour le Pool récompensée par une baisse significative de leur risque extrême lié au *CAT Life*, risque extrême qui pèse beaucoup plus lourd dans leur bilan global que pour les principaux assureurs du Pool et de la place, pour lequel le poids du *CAT Life* dans le SCR global est très limité.

Figure 4.75: Résumé des bénéficiaires de la structure Pool du BCAC



Il est à noter que sur le deuxième graphique (VaR), l'assureur 4 n'est pas représenté : en effet, s'il gardait

Nous cherchons à déterminer l'efficacité de la couverture de réassurance en isolant l'impact de celle-ci (partie Obligatoire en bleu, Obligatoire + Optionnelle en brun), et en comparant les espérances de charges, les VaR et les TVaR aux valeurs de celles-ci sans couverture de réassurance. Ainsi, la droite rouge ( $y=1$ ) a pour rôle d'étalonner la charge, la VaR ou la TVaR de chaque assureur membre, les courbes bleues et rouges représentant le ratio des charges, VaR ou TVaR avec réassurance et mutualisation sur les charges VaR ou TVaR hors réassurance et mutualisation.

La courbe jaune représente le ratio des charges, VaR ou TVaR avec mutualisation sur les charges VaR ou TVaR hors mutualisation.

Ex : L'assureur 1 présente une espérance de charge après réassurance obligatoire de 57% (point bleu). Cela signifie que la réassurance obligatoire lui fait économiser 43% de son espérance de charge qu'il aurait eu à assumer s'il n'était pas assuré.

Il est à noter que le coût de la réassurance n'est pas pris en compte dans ces graphiques. Les prendre en compte reviendrait à effectuer une translation à la hausse de même magnitude pour chacun des assureurs étant donné que la prime de réassurance est répartie proportionnellement entre les assureurs en fonction de leur somme sous risque respective, sur laquelle repose l'aléa à l'origine de la charge de leurs sinistres individuels, qui est la référence en rouge.

son autonomie, sa VaR 99.5% serait de 0, or il est impossible de diviser par un chiffre nul. Rappelons que cet assureur pèse pour 0.01% du Pool.

Les conclusions suivantes sur ces représentations graphiques s'offrent à nous :

- Il a volontairement été choisi de faire figurer la moyenne des charges par assureur étalonnée par le coût de ces charges s'il n'y avait ni Pool, ni structure de réassurance, c'est-à-dire chaque assureur conservant son indépendance.
- Tout d'abord, en comparant les assureurs autonomes par rapport à la mise en place du Pool non réassuré (courbe jaune) : sur le premier graphique, qui présente l'espérance de la charge par assureur, les assureurs 2, 9, 10, 13, 14 et 16 (poids respectifs <1%) présentent une surcharge de plus de 20%, au profit des principaux assureurs 5, 6 et 11, qui bénéficient d'un allègement de 1 à 2%. En valeur, l'économie de ces derniers correspond au surcoût des premiers. Pour la VaR 99.5%, nous constatons le même phénomène, alors que pour la TVaR 99.5%, les « petits » bénéficient d'une économie substantielle (environ 50%) alors que les « gros » conservent un niveau de TVaR 99.5% proche d'avant la mutualisation. Ainsi, nous pouvons dire que la mutualisation « coûte » de façon récurrente aux membres modestes du Pool, alors qu'elle permet une diminution significative de leur risque extrême, comme le montre la TVaR 99.5%.
- L'objectif est de parvenir à déterminer l'efficacité de la couverture de réassurance en isolant l'impact de celle-ci (partie Obligatoire en bleu, Obligatoire + Optionnelle en brun), et en comparant les espérances de charges, les VaR et les TVaR aux valeurs de celles-ci sans couverture de réassurance. Sur la base d'une couverture totale de réassurance (Obligatoire et Optionnelle, trait brun) les assureurs 2 (0.07% du Pool), 4 (0.01% du Pool), 13 (0.03% du Pool) et 16 (0.18%) n'économisent respectivement « que » 27%, 17%, 21% et 42% de TVaR, alors que pour les assureurs 5 (18.6% du Pool), 6 (25.6% du Pool) et 11 (18.5% du Pool), les économies de TVaR sont de l'ordre de 85% ou plus. Ces chiffres correspondent au ratio  $\frac{TVaR_{après\ réass}}{TVaR_{avant\ réass}}$ , et les premiers cités étant cerclés de vert, les seconds de violet sur le graphique. En termes d'espérance de charge, les économies sont plus équilibrées avec en moyenne des économies homogènes de l'ordre de 40%.
  - ➔ La mutualisation représente un coût récurrent non négligeable pour les « petits » membres, mais leur permet de limiter leur risque extrême de façon significative.
  - ➔ La couverture de réassurance bénéficie plus aux membres « importants » du Pool dans la gestion de leur risque extrême. Pour les autres membres, l'économie est réalisée au niveau de l'étape de mutualisation.

#### IV.3.9. Risque de défaut d'un assureur membre du Pool

Dans le cadre de Solvabilité 2, l'appartenance à un Pool et la mutualisation qui en découle présente un intérêt stochastique étant donné que chaque membre du Pool a une probabilité non-nulle de défaut sur la période considérée.

Cela impacte le tarif selon la façon dont le risque d'un assureur qui fait défaut est partagé (ou pas) selon les membres du Pool :

- Si la somme sous risque par assureur membre change (le risque est transféré au reste du Pool), le prix de la couverture de réassurance est impacté, légèrement étant donné que c'est le risque de concentration qui augmente quelque peu, la conséquence étant minime comme cela a été

déjà étudié dans la section V.3.4.6 sur l'impact de la diversification du Pool. Par contre, un impact plus important intervient sur le SCR de chacun des membres du Pool.

- Si la somme sous risque par assureur membre ne change pas
  - \*soit le risque est retiré du Pool, le prix de la couverture de réassurance est impacté à la baisse, puisque en présence d'un risque de défaut non nul d'un ou plusieurs assureurs membres, l'espérance de la Somme sous risque sur la période diminue.
  - \*soit *ex-post*, la charge due par l'assureur ayant fait défaut est répartie à proportion entre les autres membres restants du Pool. C'est cette hypothèse que nous étudions.

Cela devrait être également pris en compte dans le SCR, car en cas de défaut d'un des membres la charge des autres membres serait potentiellement augmentée dans une proportion à définir contractuellement *ex ante*. Il est à noter qu'il est considéré que le défaut d'un assureur membre intervient après le règlement par ce dernier de sa quote-part de la couverture de réassurance, qui a lieu en début de période.

Une simulation est effectuée, en considérant que chaque assureur membre du Pool présente une probabilité périodique (ici annuelle) de 0.5% de défaut, ces probabilités étant indépendantes entre les assureurs membres. En pratique, une approche par les copules (gaussiennes voire asymétriques) est à utiliser pour capter les dépendances en particulier asymptotiques. Dans notre simulation, nous considérons que la charge d'un assureur faisant défaut sur la période n'est pas redistribuée dans sa totalité sur les autres assureurs membres du Pool, mais que chacun s'acquitte *ex-post* et proportionnellement à son poids dans le Pool, de la charge due par l'assureur ayant fait défaut.

Table 4.107 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.108 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – avec risque de défaut des assureurs membres du Pool

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.24  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.77  | 2.40  | 0.46 | 0.54 | 0.09 | 0.07 | 1.77  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| σ(charge)   | 1.89  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.66  | 3.55  | 0.77 | 0.89 | 0.21 | 0.18 | 2.65  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.09 |
| Charge Max  | 36.93 | 2.70 | 12.49 | 2.67 | 28.82 | 37.43 | 8.36 | 9.59 | 7.32 | 5.03 | 27.26 | 9.99 | 5.20 | 4.25 | 7.58 | 3.71 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.48  | 0.43 | 5.86  | 0.01 | 13.36 | 17.86 | 3.88 | 4.55 | 1.25 | 1.10 | 13.28 | 3.65 | 0.23 | 0.89 | 2.60 | 0.67 |
| TVaR(99.5%) | 10.99 | 0.64 | 6.86  | 0.20 | 15.31 | 20.39 | 4.62 | 5.37 | 1.64 | 1.44 | 15.21 | 4.43 | 0.44 | 1.20 | 3.23 | 0.91 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3% | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

D'un point de vue de l'espérance de charge des assureurs l'impact est minime, alors que d'un point de vue de la TVaR 99.5%, celui-ci est plus important avec en moyenne un impact de l'ordre de 0.5 à 1%. Ainsi, lorsque la probabilité de défaut est « faible », prendre en compte ce risque a un impact linéaire sur le capital à provisionner des assureurs membres.

S'il était donné à considérer et le risque de défaut d'un réassureur et le risque de défaut d'un assureur, la prudence actuarielle inciterait à modéliser le défaut d'un assureur postérieur au défaut d'un réassureur.

#### IV.3.10. Une approche financière de vérification de cohérence

Il peut être tentant de reformuler la problématique de valorisation de chaque tranche du programme de réassurance sous la forme de contrats financiers optionnels.

Soit l'exemple d'une tranche de réassurance dont les bornes basse et haute sont respectivement dénotées  $K_1$  et  $K_2$ , avec  $K_1 \leq K_2$ .

Le *pay-off* de la tranche correspond à un *call-spread*, de *strikes*  $K_1$  et  $K_2$ , le sous-jacent étant le montant à la charge du Pool (donc après la franchise spécifique des deux têtes les plus chères par assureur membre) pour un sinistre  $t$  noté  $X_t$ , sur la période  $T$ .

Pour l'instant, nous nous contentons de tarifier la tranche, sans tenir compte ni de l'option de reconstitution, ni du No Claim Bonus.

Il est possible de répliquer la tranche de réassurance comme un ou  $n+1$  (selon le nombre de reconstitutions  $n$ ) *call-spread* américain(s) (exerçable(s) à tout moment – le *call spread* dans son ensemble, et non chacun des deux *calls* de façon indépendante), de maturité  $T$ , conditionnels à un nombre de sinistre sur la période.

Mathématiquement, cela donne,  $\forall t \in 1, \dots, T$  :

$$Tranche_{K_1, K_2} = \{\max(\min(X_t - K_1, K_2 - K_1), 0)\} \cdot P(X_t \geq K_1)$$

Nous supposons que :

$$P(X_t \geq K_1) = \text{probabilité d'1 sinistre} \geq K_1 \text{ pendant la période } [1, \dots, T]$$

$$P(X_t \geq K_1)^2 = \text{probabilité de 2 sinistres} \geq K_1 \text{ pendant la période } [1, \dots, T]$$

.....

$$P(X_t \geq K_1)^n = \text{probabilité de } n \text{ sinistres} \geq K_1 \text{ pendant la période } [1, \dots, T]$$

Sachant que  $P(X_t \geq K_1) \leq 0.1 \ll 1$ , nous pouvons utiliser cette règle pour la suite, en effet :

$$\sum_{i=1}^n P(X_t \geq K_1)^i < \sum_{i=1}^n 0.1^i$$

$$\sum_{i=1}^n P(X_t \geq K_1)^i < 0.1 \cdot \frac{1 - 0.1^n}{1 - 0.1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{9}$$

D'où  $1 - \sum_{i=1}^n P(X_t \geq K_1)^i = \frac{8}{9} = \text{probabilité d'aucun sinistre} \geq K_1 \text{ sur la période } T$

S'il existe aucune ( $n=0$ ), une ( $n=1$ ) ou  $n$  reconstitutions, cela nous donne :

$$Tranche_{K_1, K_2} = \sum_{i=1}^{n+1} \{\max(\min(X_i - K_1, K_2 - K_1), 0)\} \cdot \left(\frac{1 + \text{inflation}}{1 + r}\right)^{T/2} \cdot \frac{i \cdot P(X_t \geq K_1)^i}{1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^n R_j \cdot \{\max(\min(X_j - K_1, K_2 - K_1), 0)\}}{(K_2 - K_1)}}$$

Nous pouvons donc écrire, en passant à l'espérance, et en utilisant son principe de linéarité :

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \text{Tranche}_{K_1, K_2} &= \sum_{i=1}^{n+1} \{ \max(\min(X_i - K_1, K_2 - K_1), 0) \} \cdot \left( \frac{1 + \text{inflation}}{1 + r} \right)^{T/2} \cdot \frac{i \cdot P(X_t \geq K_1)^i}{1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^n R_j \cdot \{ \max(\min(X_j - K_1, K_2 - K_1), 0) \}}{(K_2 - K_1)}} \\
 \Leftrightarrow E(\text{Tranche}_{K_1, K_2}) &= E \left( \sum_{i=1}^{n+1} \{ \max(\min(X_i - K_1, K_2 - K_1), 0) \} \cdot \left( \frac{1 + \text{inflation}}{1 + r} \right)^{T/2} \cdot \frac{i \cdot P(X_t \geq K_1)^i}{1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^n R_j \cdot \{ \max(\min(X_j - K_1, K_2 - K_1), 0) \}}{(K_2 - K_1)}} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} E \left[ \{ \max(\min(X_i - K_1, K_2 - K_1), 0) \} \cdot \left( \frac{1 + \text{inflation}}{1 + r} \right)^{T/2} \cdot \frac{i \cdot P(X_t \geq K_1)^i}{1 + \frac{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^n R_j \cdot E[\{ \max(\min(X_j - K_1, K_2 - K_1), 0) \}]}{(K_2 - K_1)}} \right]
 \end{aligned}$$

Soit  $u$  la variable aléatoire continue, correspondant à la distribution du montant à la charge du Pool, à la date  $t$ .

En supposant que les  $X_i$  soient IID (indépendants et identiquement distribués):

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow E(\text{Tranche}_{K_1, K_2}) &= \left\{ \int_{K_1}^{K_2} u \cdot f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_1}^{K_2} f(u) du + K_2 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du \right\} \cdot \left( \frac{1 + \text{inflation}}{1 + r} \right)^{T/2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i \cdot \left( \int_{K_1}^{+\infty} f(u) du \right)^i}{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^n R_j \cdot \left\{ \int_{K_1}^{K_2} u \cdot f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_1}^{K_2} f(u) du + K_2 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du \right\}} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{(K_2 - K_1)}
 \end{aligned}$$

Pour le *No Claim Bonus*, nous avons démontré que :

$$\begin{aligned}
 P_N^0 &= P_N \cdot \frac{1}{(1 - \alpha \cdot \text{prob}(\text{no}_{\text{sinistre}_{\text{année}_N}}))} \\
 E(P_N^0) &= P_N \cdot \frac{1}{1 - \alpha \cdot (1 - \int_{K_1}^{+\infty} f(u) du)} = P_N \cdot \left( 1 + \frac{\alpha \cdot (1 - \int_{K_1}^{+\infty} f(u) du)}{1 - \alpha \cdot (1 - \int_{K_1}^{+\infty} f(u) du)} \right)
 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la formule générique suivante, en ajoutant la probabilité de défaut  $p$  (calculée en milieu de période, si défaut il y a) sur la période du réassureur :

$$\begin{aligned}
 E(\text{Tranche}_{K_1, K_2}) &= (1 - p) \cdot \frac{1}{1 - \alpha \cdot (1 - \int_{K_1}^{+\infty} f(u) du)} \cdot \left\{ \int_{K_1}^{K_2} u \cdot f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_1}^{K_2} f(u) du + K_2 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du \right\} \cdot \left( \frac{1 + \text{inflation}}{1 + r} \right)^{T/2} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i \cdot \left( \int_{K_1}^{+\infty} f(u) du \right)^i}{(1 + \text{inflation})^{T/2} \cdot \sum_{j=1}^n R_j \cdot \left\{ \int_{K_1}^{K_2} u \cdot f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_1}^{K_2} f(u) du + K_2 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du - K_1 \cdot \int_{K_2}^{+\infty} f(u) du \right\}} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{(K_2 - K_1)}
 \end{aligned}$$

Ainsi, à l'aune des primes (brutes de NCB) communiquées par le marché, il est possible de vérifier la cohérence du *pricing*, à travers la distribution implicite du montant à la charge du Pool, ce via les primes pures comme via les primes commerciales, ces dernières étant proportionnelles aux précédentes :

En supposant  $f(u)$  convexe, nous pouvons rajouter la contrainte suivante :

$$\int_{K_1}^{K_2} u \cdot f(u) du < \frac{K_1 + K_2}{2}$$

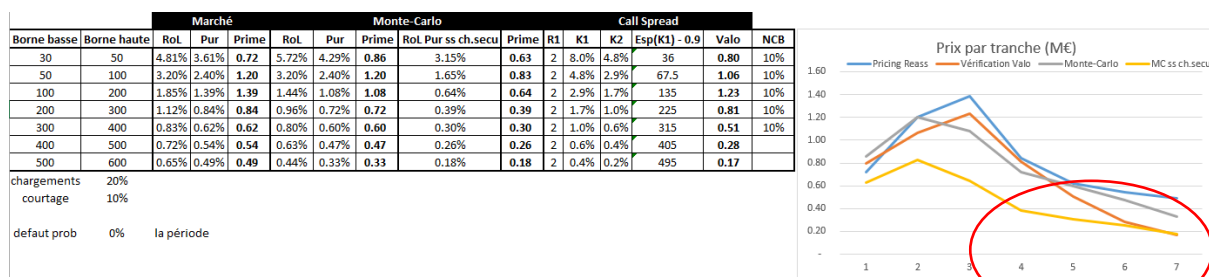
La tranche n°8 faisant l'objet d'un traitement particulier, nous ne l'intégrons pas à notre réflexion.

Afin de dessiner les courbes ci-dessous nous avons supposé :

$$\int_{K_2}^{+\infty} f(u) du = 0.6 \cdot \int_{K_1}^{+\infty} f(u) du \qquad \int_{K_1}^{K_2} u \cdot f(u) du = 0.9 \cdot \frac{K_1 + K_2}{2}$$

En prime pure, nous obtenons (en retraitant des niveaux de chargement et de courtage pré cités) :

Figure 4.76: Comparaison prix de marché vs approche financière – prime pure avec chargement de sécurité



Il a été choisi d'intégrer le chargement de sécurité à notre prime pure, car les tarifs marchés peuvent seulement être retraités des frais de courtage et des chargements. Les formes sont proches. Nous constatons l'effet de « surtarification » significatif sur les tranches hautes (en particulier la tranche 7) (et donc moins probables), celles-ci étant plus sujettes à subir l'effet de *floor* implicite correspondant au minimum de rémunération du capital provisionné sous Solvabilité 2. La tranche 3 apparaît comme étant aussi très chèrement tarifée par le marché.

Ces tarifs sont obtenus avec les probabilités en colonne K1 et K2 : 8% de chances d'avoir un sinistre >K1 (donc 0.64% d'en avoir 2) sur la période.

#### IV.3.11. Quelques pistes d'optimisation

- Pas d'intérêt visible de passer d'une franchise de 2 à 3 têtes, l'impact étant très limité et sur le coût de la structure de réassurance et sur le SCR de chacun des assureurs membres du Pool.
- Pas d'intérêt visible du Pool Facultatif
- D'un point de vue de la cédante, si on considère que le risque est survalorisé par le réassureur, intérêt de diminuer les portées des tranches et multiplier ces dernières
- Regrouper les tranches les plus hautes pour éviter l'effet plancher du coût du capital provisionné.

Nous proposons la structure suivante, en supprimant le Pool Facultatif :

Figure 4.77: Structure proposée (hors Pool Facultatif)

|              | Priorité  | Prio.+Cap. |
|--------------|-----------|------------|
| Tranche1 NCB | 30000000  | 50000000   |
| Tranche2 NCB | 50000000  | 100000000  |
| Tranche3 NCB | 100000000 | 200000000  |
| Tranche4 NCB | 200000000 | 300000000  |
| Tranche5 NCB | 300000000 | 400000000  |
| Tranche6     | 400000000 | 500000000  |
| Tranche7     | 500000000 | 600000000  |

|              | Priorité  | Prio.+Cap. |
|--------------|-----------|------------|
| Tranche1 NCB | 30000000  | 50000000   |
| Tranche2 NCB | 50000000  | 100000000  |
| Tranche3 NCB | 100000000 | 150000000  |
| Tranche4 NCB | 150000000 | 200000000  |
| Tranche5 NCB | 200000000 | 250000000  |
| Tranche6 NCB | 250000000 | 300000000  |
| Tranche7 NCB | 300000000 | 350000000  |
| Tranche8 NCB | 350000000 | 400000000  |
| Tranche9     | 400000000 | 600000000  |

Table 4.109 : Résultats pour les primes de tranche – structure proposée

| Tranche                      | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Proportion simul ss sinistre | 0.90      | 0.93      | 0.97      | 0.98      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      | 0.99      |
| Prime Pure                   | 614 608   | 810 601   | 349 251   | 241 337   | 192 941   | 166 975   | 147 080   | 132 824   | 411 426   |
| Ecart Type Prime Pure        | 1 991 315 | 3 472 069 | 2 337 074 | 1 969 279 | 1 773 083 | 1 648 487 | 1 551 008 | 1 472 572 | 4 891 269 |
| Prime Commerciale            | 1 119 639 | 1 574 955 | 774 914   | 575 348   | 482 200   | 430 035   | 389 837   | 360 065   | 1 037 695 |
| Rol Commercial               | 5.60%     | 3.15%     | 1.55%     | 1.15%     | 0.96%     | 0.86%     | 0.78%     | 0.72%     | 0.52%     |
| VaR Ppure 99.5%              | 34.49%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 33.33%    | 29.41%    |
| TVaR Ppure 99.5%             | 64.61%    | 44.67%    | 35.40%    | 34.02%    | 33.70%    | 33.56%    | 33.47%    | 33.40%    | 30.53%    |

Le coût de cette structure est de 6.74M€ contre une cotation marché de la structure actuelle de 8.36M€ (avec tranches optionnelles et Pool Facultatif souscrits à 100%), soit une économie de plus de 19%. La cotation Monte-Carlo de la structure actuelle ressort à 7.02M€, soit une économie, pour le même mode d'évaluation de 4%. Le sinistre maximum à la charge du Pool que nous obtenons, au cours de nos simulations reste cohérent et stable avec ce que nous avons déjà obtenu à savoir 584.1M€.

De plus, en termes de SCR pour chacun des membres, l'impact est très limité voire nul:

Table 4.110 : Impact de la structure initiale pour chacun des membres du Pool

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8    | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.25  | 0.01 | 0.73  | 0.00 | 1.79  | 2.42  | 0.46  | 0.55 | 0.09 | 0.07 | 1.78  | 0.42 | 0.01 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| o(charge)   | 1.90  | 0.06 | 1.16  | 0.02 | 2.67  | 3.56  | 0.78  | 0.90 | 0.21 | 0.18 | 2.66  | 0.72 | 0.04 | 0.14 | 0.50 | 0.10 |
| Charge Max  | 17.39 | 2.78 | 12.66 | 3.57 | 24.81 | 35.76 | 14.17 | 9.16 | 5.34 | 4.67 | 24.84 | 8.88 | 2.42 | 5.77 | 8.42 | 4.95 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.63  | 0.43 | 5.83  | 0.01 | 13.40 | 17.99 | 3.96  | 4.57 | 1.24 | 1.10 | 13.32 | 3.71 | 0.23 | 0.91 | 2.61 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.98 | 0.67 | 6.75  | 0.20 | 15.26 | 20.28 | 4.75  | 5.35 | 1.63 | 1.48 | 15.12 | 4.42 | 0.42 | 1.23 | 3.31 | 0.98 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2% | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Table 4.111 : Impact de la structure proposée pour chacun des membres du Pool

| Assureur    | 1     | 2    | 3     | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9    | 10   | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|-------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| E(charge)   | 1.23  | 0.01 | 0.72  | 0.00 | 1.77  | 2.39  | 0.45  | 0.54  | 0.09 | 0.07 | 1.76  | 0.42 | 0.00 | 0.05 | 0.27 | 0.03 |
| o(charge)   | 1.88  | 0.06 | 1.15  | 0.02 | 2.65  | 3.54  | 0.77  | 0.89  | 0.21 | 0.18 | 2.64  | 0.71 | 0.04 | 0.14 | 0.49 | 0.10 |
| Charge Max  | 19.62 | 3.66 | 13.59 | 2.97 | 23.66 | 32.33 | 16.14 | 11.20 | 5.16 | 4.33 | 25.48 | 8.12 | 3.70 | 6.49 | 7.66 | 5.39 |
| Charge Min  | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00  | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| VaR(99.5%)  | 9.44  | 0.41 | 5.85  | 0.01 | 13.34 | 17.85 | 3.89  | 4.52  | 1.29 | 1.10 | 13.35 | 3.67 | 0.22 | 0.89 | 2.57 | 0.68 |
| TVaR(99.5%) | 10.88 | 0.63 | 6.84  | 0.19 | 15.27 | 20.30 | 4.67  | 5.32  | 1.75 | 1.48 | 15.19 | 4.43 | 0.43 | 1.20 | 3.15 | 0.99 |
| Poids Pool  | 12.6% | 0.1% | 7.1%  | 0.0% | 18.6% | 25.6% | 4.3%  | 5.2%  | 0.7% | 0.5% | 18.5% | 3.9% | 0.0% | 0.3% | 2.4% | 0.2% |

Figure 4.78: Copie écran du fichier Excel d'entrée des paramètres

|    | A         | B         | C         | D   | E               | F               | G               | H               |
|----|-----------|-----------|-----------|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1  |           | Borne Min | Borne Max | NCB | Reconstitution1 | Reconstitution2 | Reconstitution3 | Reconstitution4 |
| 2  | Tranche1  | 30000000  | 50000000  | 0.1 | 2.0             | 1.0             |                 |                 |
| 3  | Tranche2  | 50000000  | 100000000 | 0.1 | 2.0             |                 |                 |                 |
| 4  | Tranche3  | 100000000 | 200000000 | 0.1 | 2.0             |                 |                 |                 |
| 5  | Tranche4  | 200000000 | 300000000 | 0.1 | 2.0             |                 |                 |                 |
| 6  | Tranche5  | 300000000 | 400000000 |     | 2.0             |                 |                 |                 |
| 7  | Tranche6  | 400000000 | 500000000 |     | 2.0             |                 |                 |                 |
| 8  | Tranche7  | 500000000 | 600000000 |     | 2.0             |                 |                 |                 |
| 9  | Tranche8  |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 10 | Tranche9  |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 11 | Tranche10 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 12 | Tranche11 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 13 | Tranche12 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 14 | Tranche13 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 15 | Tranche14 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 16 | Tranche15 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 17 | Tranche16 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 18 | Tranche17 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 19 | Tranche18 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 20 | Tranche19 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 21 | Tranche20 |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 22 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 23 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 24 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 25 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 26 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 27 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 28 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 29 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 30 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 31 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 32 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 33 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 34 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 35 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 36 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |
| 37 |           |           |           |     |                 |                 |                 |                 |

Ce quatrième opus présente le modèle élaboré, les sensibilités des paramètres de celui-ci, ainsi que les résultats obtenus.

Il s'agit d'un modèle stochastique, qui s'inscrit dans la suite des travaux d'Ekhedén et Hossjer, reposant sur une logique fréquence/coût. La démarche scientifique a conduit à choisir différentes distributions (Binomiale Négative, Zêta, Lognormale..) calibrées sur deux bases de données indépendantes, chacune correspondant un type de risque particulier : GTD pour le risque Terroriste, EM-DAT pour les autres risques CAT (Naturel, Transport, Industriel..). Les spécificités du BCAC sont prises en compte, et la latitude du modèle permet d'ajouter d'autres clauses éventuelles, voire de s'adapter à un autre pays.

Les paramètres du modèle les plus influents sur le tarif sont ceux liés à la sévérité des événements, c'est-à-dire la distribution du nombre de victimes par sinistre, matérialisé par la loi Zêta. Celle-ci est extrêmement sensible à son unique paramètre  $s$ , en particulier lorsque ce dernier se situe en deçà du niveau de 2.0. Ainsi, une calibration soignée et nécessaire. Les autres paramètres interagissent plutôt linéairement avec le prix : fréquence de la sinistralité, durée de la couverture, paramètres de concentration.

L'impact de la structure de réassurance sur le tarif a également été testé:

- La franchise en nombre de têtes : la conséquence d'une modification de la franchise est assez limitée, en particulier sur les tranches basses, alors que les tranches les plus hautes subissent une décote significative lorsque le nombre de têtes dans la franchise augmente.
- Le nombre de tranches : plus la couverture est découpée en un nombre de tranches importantes, plus le coût total de celle-ci diminue. Par contre, sur les tranches les plus élevées, il existe un phénomène de prix plancher de la couverture, en dessous duquel les réassureurs ne vendent pas le risque, d'où l'intérêt par contre de regrouper les tranches les plus élevées.

- La diversification du Pool : la composition, le nombre d'assureurs et leur poids impactent le prix de la couverture de réassurance. Cela est lié au fait que la franchise en nombre de tête se décline par assureur : plus le Pool est diversifié (au sens du coefficient de Herfindahl), moins le tarif est élevé, même si cet effet est plus marginal que ceux cités précédemment.
- D'autres caractéristiques ont également été testées : niveau de reconstitution, risque de défaut des réassureurs, séparation des types de risque, risque de défaut des assureurs membres du Pool.

Nous nous sommes intéressés en outre au besoin en capital des assureurs membres du Pool et à l'impact de chacun des paramètres sur celui-ci. L'idée est de comparer les avantages de telle ou telle structure de couverture sur la charge de chacun des assureurs (à travers la TVaR 99.5%), par rapport au surcoût de celle-ci. Sans surprise, la suppression de la franchise en nombres de têtes entraîne une baisse du niveau de capital des assureurs, surtout pour les « petits » membres, tout comme la baisse de la priorité de la tranche la plus basse (par exemple, passage de 30M€ à 20M€).

Deux effets doivent être distingués :

- L'effet mutualisation, lié à la co-réassurance de premier niveau. Celle-ci a un impact marginal sur les assureurs les plus importants et bénéficie principalement aux « petits » assureurs : ceux-ci paient de façon récurrente cette réassurance, mais voient leur risque extrême très largement circonscrit (économie de près de 50% de leur TVaR 99.5%).
- L'effet réassurance de deuxième niveau. Celle-ci impacte principalement les assureurs « importants » du Pool qui font une économie de TVaR 99.5% extrêmement significative (de l'ordre de 70% et plus).

Ainsi, le suivi du portefeuille par le BCAC est très important, et pour le calcul du tarif, et pour la communication : en effet, les « petits » membres sont moins à même de vouloir payer pour une structure de réassurance de deuxième niveau qui ne leur bénéficie pas directement. Ceci peut poser problème lors des appels d'offres : pédagogie et travaux de sensibilité s'imposent.

Un risque qui pour l'instant n'est pas matérialisé par le contrat de réassurance a été mis en avant : le cas où un assureur membre du Pool fait défaut. Aussi faible que soit cette probabilité, nous conseillons de faire figurer cette éventualité, et les conséquences qui en découleraient dans le contrat qui lie les membres du Pool.

A l'aune de ces éléments, nous sommes en mesure de proposer une structure optimum qui reprend :

- Le passage de 7 à 9 tranches
- Pas de modification de la franchise
- Suppression du Pool Facultatif

Ceci impliquerait, à portée constante et même mode de tarification une économie de 4% sur la structure actuelle, et une stabilité du besoin de capital pour les assureurs membres du Pool.

## CONCLUSION

Si l'approche par scénario ne permet pas de déterminer le tarif, elle est en revanche utile pour déterminer la capacité nécessaire à acheter pour la cédante.

La méthode stochastique proposée, dans la lignée du travail d'Ekheden et Hossjer, vise à éveiller l'intérêt de la réassurance et à souligner la nécessité de la réallocation des budgets de R&D vers l'aspect *Life* du risque Catastrophe. L'actualité récente nous l'a cruellement rappelé<sup>40</sup>. Le modèle déterministe de Strickler remontant à 1960 n'est plus adapté à notre monde moderne.

Le modèle développé dans ce mémoire permet de contrôler l'ensemble des paramètres et les tests de sensibilité effectués confirment, et la robustesse du modèle et sa cohérence, et permet de déterminer le SCR et des réassureurs et des assureurs du Pool.

De plus, il est intéressant de noter la stabilité des résultats obtenus, à l'aune des multiples tests de sensibilité effectués.

La structure de mutualisation et de réassurance est utile pour l'ensemble des membres, bien qu'elle le soit à des degrés divers, en particulier en termes de risque extrême. En effet, sous cet angle, si les principaux bénéficiaires de la mutualisation sont les « petits » membres, les principaux bénéficiaires de la structure de réassurance sont les principaux contributeurs du Pool, d'où l'importance de pédagogie, de suivi et de service auprès des membres moins représentés dans le Pool.

Il est ainsi possible de tarifier une structure CatXL sur un portefeuille n'ayant jamais connu de sinistre suffisamment important par rapport à sa priorité, à l'aide d'une technique scientifique et actuarielle. Néanmoins, la valorisation des tranches les plus élevées reste compliquée, en particulier eu égard à la problématique du coût du capital. Celles-ci constituent, actuellement, au vu de nos résultats, les principaux leviers de négociation tarifaires pour le BCAC.

Une structure simple et transparente est proposée, sur laquelle il est simple de modifier un ou plusieurs paramètres afin d'en tester la sensibilité, ou afin d'améliorer la cohérence en fonction de ses besoins.

En fin de travail, il est suggéré une structure optimisée permettant de garantir une certaine protection aux membres, tout en – suite au développement et à l'approfondissement de notre méthode de valorisation propriétaire - améliorant la tarification, ce en fonction des contraintes des réassureurs.

La structure « *TopTop* » n'est pas conseillée, ni pour les réassureurs vendeurs de risque, ni pour les assureurs membres du Pool.

En ouverture, il serait intéressant de se pencher sur l'étude de la prise en compte du risque du défaut d'un (ou plusieurs) assureur(s) au sein d'un Pool de mutualisation et de déterminer l'impact sur le SCR de chacun des membres.

---

<sup>40</sup><http://www.globalreinsurance.com/cat-regimes-in-france-dealing-with-changing-threats/1417616.article#commentssubmitted>

## BIBLIOGRAPHIE

- <sup>1</sup> VILNET F. (2012) : Interview à L'Actuariel
- <sup>2</sup> ATLAS MAGAZINE (2012) : La réassurance des Catastrophes Naturelles
- <sup>3</sup> ONU – Bureau des Nations-Unies pour la réduction des risques de catastrophes (UNISDR) – 23 novembre 2015
- <sup>4</sup> CCR – Caisse Centrale de Réassurance (2013) : Journées CAT
- <sup>5</sup> MANDHOUI K. (2010) : Analyse du Risque Catastrophe d'une Pandémie en Assurance Prévoyance par une Approche Epidémiologique. Mémoire ENSAE
- <sup>6</sup> D. Houssin, délégué interministériel à la santé, 17/10/2005
- <sup>7</sup> <https://fr.wiktionary.org/wiki/mod%C3%A8le>
- <sup>8</sup> EKHEDEEN E., HOSSJER O. (2012) : Pricing Catastrophe Risk in Life (Re)Insurance. *European Congress of Actuaries*
- <sup>9</sup> ALM E. (1990) : Catastrophes can also hit Life Reinsurance. *First – A Journal for Skandia International, A practical Guide to Reinsurance*
- <sup>10</sup> HARBITZ M. (1992) : Catastrophe covers in life insurance . *Transactions of the International Congress of Actuaries*
- <sup>11</sup> STRICKLER P. (1960) : Rückversicherung des kumulrisikos in der lebensversicherung. *XVI International Congress of Actuaries*
- <sup>12</sup> source Inserm-CepiDC
- <sup>13</sup> <http://www.swissre.com/sigma/>
- <sup>14</sup> LAMARI MFITI N. (2010) : Le Risque Evenement en Réassurance Vie. Mémoire CNAM
- <sup>18</sup> BALKEMA A., de HAAN L. (1974) : Residual Life Time at Great Age. *Annals of Probability*, 2.792-804
- <sup>19</sup> PICKANDS J. (1975) : Statistical Inference using Extreme Order Statistics. *Annals of Probability*, 3. 119-131
- <sup>20</sup> de HAAN L., ROOTZEN J. (1993) : On the Estimation of High Quantiles. *J. Statist. Plann. Inference*, 35(1).1-13
- <sup>21</sup> FISHER R.A., TIPPETT L.H.C. (1928)
- <sup>22</sup> GNEDENKO B.V. (1943)
- <sup>23</sup> HOSKING J.R.M., WALLIS J.R. (1987) : Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution. *Technometrics*
- <sup>24</sup> ROOTZEN H., TAJVIDI N. (1997) : Extreme Value Statistics and Wind Storm Losses : A Case Study. *Scand Actuarial J.* 1997 ; 1 :70-94
- <sup>25</sup> DEKKERS M.J., MATTEI J.L., FILLION G., ROCHETTE P. (1989) : Grain-size dependence of the magnetic behavior of pyrrhotite during its low-temperature transition at 34K. *Geophysical Research Letters* 16 :doi:10.1029/89GL01286. Issn: 0094-8276
- <sup>26</sup> WOO G. (2011) : Calculating Catastrophe. *Imperial College Press*
- <sup>27</sup> CEBRIAN A.C., ABAURREA J., ASIN J. (2015): NH-Poisson : An R Package for Fitting and Validating Nonhomogeneous Poisson Processes. *Journal of Statistical Software*
- <sup>32</sup> RENAULT P., DELON J.F., POURSAARDAR F., DUBREUIL E., BAGUR A.L., THEURAY N. (2007) : Mesure de l'exposition du Pool BCAC. *AON Benfield*
- <sup>33</sup> INSEE (2012)
- <sup>34</sup> [http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?reg\\_id=99&ref\\_id=base-cc-rev-fisc-loc-menage](http://www.insee.fr/fr/themes/detail.asp?reg_id=99&ref_id=base-cc-rev-fisc-loc-menage)
- <sup>35</sup> ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A. (1964) : Handbook of Mathematical Functions. *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*
- <sup>36</sup> TRAINAR P. (2004), Directeur des affaires économiques, financières et internationales. *FFSA*
- <sup>37</sup> THEVENIN L. (2014) : Pourquoi les prix de la réassurance ont beaucoup baissé au 1<sup>er</sup> janvier. <http://www.LesEchos.fr>
- <sup>38</sup> RMS (2004): Catastrophe, Injury and Insurance. The Impact of Catastrophes on Workers Compensation, Life and Health Insurance

<sup>39</sup><http://www.emdat.be/>

<sup>40</sup><http://www.oecd.org/fr/>

<sup>41</sup>BLONDEAU J., PARTRAT C. (2003) : La Réassurance. *Economica*

<sup>42</sup><http://stats.oecd.org/index.aspx?lang=fr>

<sup>43</sup><http://www.insee.fr/fr/themes/info-rapide.asp?id=29>

<sup>44</sup>[http://www.nytimes.com/2009/02/06/business/worldbusiness/06swiss.html?\\_r=0](http://www.nytimes.com/2009/02/06/business/worldbusiness/06swiss.html?_r=0)

<sup>45</sup><http://www.globalreinsurance.com/cat-regimes-in-france-dealing-with-changing-threats/1417616.article#commentssubmitted>

## LISTE DES FIGURES

*Figure 1.1 : Répartition du coût des Sinistres Catastrophes dans le monde (1970 – 2013)*

*Figure 1.2 : Pertes assurées (1970-2012)*

*Figure 1.3 : Nombres de victimes (1970-2012)*

*Figure 1.4 : Répartition des 820 événements naturels définis comme catastrophiques survenus en 2011*

*Figure 1.5 : Répartition par type d'événement*

*Figure 2.1 : Répartition annuelle des accidents par nombre de décès. Modèle de Strickler*

*Figure 2.2: Exemples de densités gamma de probabilité de la somme sous risque  $z$  en fonction du nombre de décès  $n$ .*

*Figure 2.3: Sensibilité de  $A(n)$  à  $n$*

*Figure 2.4: Sensibilité de  $A(n)$  à  $\xi$*

*Figure 2.5: Double sensibilité de  $A(n)$  à  $n$  et  $\xi$*

*Figure 2.6 : Evolution du taux brut (nombre de décès en année  $n$ /population totale moyenne de l'année  $n$ ) de décès accident en France entre 2000 et 2011*

*Figure 2.7: Estimations de  $\xi$  par zones géographiques par Ekheden et Hossjer*

*Figure 2.8: Evolution de la prime pure en fonction de  $a$  et  $\xi$*

*Figure 2.9: Densité de la loi Beta.  $q=0.3$*

*Figure 2.10: Sensibilité de  $p|X$  à  $\theta$*

*Figure 2.11: Exemple de Distribution Zêta*

*Figure 2.12: Comparaison des Distributions Zêta et Strickler*

*Figure 3.1 : Disposition des Données INSEE*

*Figure 3.2 : Répartition InterQuartile décroissante des revenus par commune en France - 2010*

*Figure 3.3 : Distribution des revenus par foyer fiscal à Paris*

*Figure 3.4 : Distribution cumulée des revenus par foyer fiscal à Paris*

*Figure 3.5 : QQ Plot distribution empirique vs distribution théorique Paris*

*Figure 3.6 : Comparaison distributions des revenus Boulogne-Billancourt vs Saint-Paul (Réunion)*

*Figure 3.7 : QQ Plot distribution empirique vs distribution théorique France*

*Figure 3.8 : Comparaison distribution lognormale vs distribution gamma (Paris)*

*Figure 3.9 : Structure du Programme de Réassurance 2014 (millionsEUR)*

*Figure 3.10 : Evolution chronologique de la Capacité du Programme de Couverture en Réassurance du BCAC*

*Figure 3.11 : Pool Catastrophe Décès: les 30 plus importants événements (valeur 2011)*

*Figure 3.12 Résumé du fonctionnement de la couverture de réassurance du Pool CAT BCAC*

*Figure 4.1 : Evolution de la capacité achetée (bleu) entre 2009 et 2014 vs RoL marché (orange)*

*Figure 4.2 : Evolution de la capacité des réassureurs entre 2009 et 2014*

*Figure 4.3: Global Property Catastrophe RoL Index : 1990-2014*

*Figure 4.4 : Montant des sinistres dans les pays développés et les pays en développement (Total et Assurés)*

*Figure 4.5 : Histogrammes annuels des événements EM-DAT et GTD*

*Figure 4.6 : Sortie du code R test Kolmogorov-Smirnov*

*Figure 4.7 : Calibration des fréquences théoriques BinNeg vs empiriques (EM-DAT et GTD)*

*Figure 4.8 : Distributions empiriques des victimes par sinistres (EM-DAT et GTD)*

*Figure 4.9 : Représentations graphiques de l'Estimateur de Hill (EM-DAT et GTD)*

*Figure 4.10 : Représentation d'un Estimateur de Hill convergent vers le tail index matérialisé par le trait rouge (=1.40). Exemple tiré de A.Charpentier ACT2040 – Actuariat IARD – Hiver 2013 (avec son aimable autorisation).*

*Figure 4.11 : Calibration des distributions Zêta GTD*

*Figure 4.12 : Choix du paramètre  $s$ . Base GTD.*

*Figure 4.13 : Calibration des distributions Zêta EM-DAT*

*Figure 4.14 : Calibration GPD (seuil 5) – base GTD*

*Figure 4.15 : Calibration GPD (seuil 5) – base EM-DAT*

*Figure 4.16 : Calibration Zêta – base GTD*

*Figure 4.17 : Zoom sur l'intervalle interquantile 80%-100%*

*Figure 4.18 : Calibration Zêta – base EM-DAT*

*Figure 4.19 : Zoom sur l'intervalle interquantile 80%-100%*

*Figure 4.20 : Représentation des densités des Zêta GTD et EM-DAT*

*Figure 4.21 : Comparaison des densités théoriques et empiriques*

*Figure 4.22 : Evolution du prix de la couverture de réassurance en fonction de  $r$  et  $t$*

*Figure 4.23 : Processus de la concentration aléatoire*

*Figure 4.24 : Exemple de résultat,  $t=100$ ,  $r=1/2$ ,  $n=10000$*

Figure 4.25 : Calibration de la distribution des revenus (France métropolitaine)

Figure 4.26 : Comparaison des distributions des sommes sous-risques (Paris vs France métropolitaine)

Figure 4.27 : Calibration du nombre de simulations nécessaire

Figure 4.28 : Evolution des RoL vs durée du traité de réassurance

Figure 4.29 : Charge maximum du Pool par simulation – durée 1 an

Figure 4.30 : Charge maximum du Pool par simulation – durée 2 ans et 3 ans

Figure 4.31 : Charge maximum du Pool par simulation – Augmentation de la fréquence de sinistralité de 10%

Figure 4.32 : Charge maximum du Pool par simulation – Diminution de la fréquence de sinistralité de 10%

Figure 4.33 : Charge maximum du Pool par simulation - Augmentation du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.56$  /  $Z\grave{e}ta(TER)=1.80$ )

Figure 4.34 : Charge maximum du Pool par simulation – Diminution du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.76$  /  $Z\grave{e}ta(TER)=2.00$ )

Figure 4.35 : Charge maximum du Pool par simulation –  $t=750$

Figure 4.36 : Charge maximum du Pool par simulation –  $t=300$

Figure 4.37 : Charge maximum du Pool par simulation –  $r=0.7$

Figure 4.38 : Charge maximum du Pool par simulation –  $r=0.3$

Figure 4.39 : Charge maximum du Pool par simulation – Suppression de la franchise

Figure 4.40 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 1 tête

Figure 4.41 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 3 têtes

Figure 4.42 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 5 têtes

Figure 4.43 : Charge maximum du Pool par simulation – franchise 10 têtes

Figure 4.44 : Evolution du RoL commercial en fonction de la franchise (en nombre de têtes)

Figure 4.45 : Charge maximum du Pool par simulation – structure 30XS20

Figure 4.46 : Recomposition des tranches

Figure 4.47 : Charge maximum du Pool par simulation – structure recomposée

Figure 4.48 : Tarif cumulé de la structure

Figure 4.49 : Fusion des tranches obligatoires

Figure 4.50 : Charge maximum du Pool par simulation – fusion des tranches obligatoires

Figure 4.51 : Tarif cumulé de la structure

Figure 4.52 : Structure actuelle : (16 membres).  $Herfindahl = 0.106$

Figure 4.53 : Structure à 20 assureurs équipondérés. Herfindahl = 0

Figure 4.54 : Charge maximum du Pool par simulation – structure à 20 assureurs

Figure 4.55 : Structure à 3 assureurs de poids respectifs 33%, 33% et 34%. Herfindahl = 0.0001

Figure 4.56 : Charge maximum du Pool par simulation – structure à 3 assureurs

Figure 4.57 : Charge maximum du Pool par simulation – Risques EM-DAT uniquement

Figure 4.58 : Charge maximum du Pool par simulation – Risques GTD uniquement

Figure 4.59 : Charge maximum du Pool par simulation – Risques décès uniquement

Figure 4.60 : Comparaison de la distribution des primes (structure initiale en rouge, structure initiale en noir)

Figure 4.61 : Comparaison de la distribution de la charge par assureurs (structure initiale en rouge, structure TopTop en noir)

Figure 4.62 : Evolution du RoE des réassureurs

Figure 4.63 : Part de la charge par assureur vs charge totale

Figure 4.64 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale

Figure 4.65 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis

Figure 4.66 : Part de la charge par assureur vs charge totale – structure obligatoire

Figure 4.67 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – structure obligatoire

Figure 4.68 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis – structure obligatoire

Figure 4.69 : Part de la charge par assureur vs charge totale – aucune réassurance

Figure 4.70 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – aucune réassurance

Figure 4.71 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis – aucune réassurance

Figure 4.72 : Part de la charge par assureur vs charge totale – aucune réassurance, aucune mutualisation

Figure 4.73 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – aucune réassurance, aucune mutualisation

Figure 4.74 : Part de la TVaR par assureur vs TVaR totale – bis – aucune réassurance, aucune mutualisation

Figure 4.75 : Résumé des bénéficiaires de la structure Pool du BCAC

Figure 4.76 : Comparaison prix de marché vs approche financière – prime pure avec chargement de sécurité

Figure 4.77 : Structure proposée (hors Pool Facultatif)

Figure 4.78 : Copie écran du fichier Excel d'entrée des paramètres

## LISTE DES TABLES

*Table 1.1 : Dégâts humains (en nombre de victimes) des 41 catastrophes naturelles les plus meurtrières de la période 1970 – 2012*

*Table 1.2 : Classification des sinistres par type d'événement*

*Table 1.3 : Classification des sinistres par zone géographique*

*Table 1.4 : Système d'alerte de l'OMS*

*Table 2.2 : Prime pure (exprimée en % de la SaR) pour paramètres initiaux de Strickler ( $\alpha=8$ ,  $\xi=3$ ), portée infinie*

*Table 2.3 : Prime pure (exprimée en % de la SaR) pour paramètres initiaux de Strickler ( $\alpha=8$ ,  $\xi=3$ ), portée  $L=S$*

*Table 2.4 : Prime pure (exprimée en % de la SaR) pour paramètres initiaux de Strickler ( $\alpha=8$ ,  $\xi=3$ ), portée  $L=4S$*

*Table 3.1 : Capital Moyen National Estimé*

*Table 3.2 : Estimation des  $\hat{\sigma}$*

*Table 3.3 : Tableau de calibration du paramètre  $\sigma$*

*Table 3.4 : Comparaison quartiles empiriques vs quartiles théoriques Paris*

*Table 3.5 : Comparaison quartiles empiriques vs quartiles théoriques France*

*Table 3.6 : Exemple de franchise par têtes*

*Table 3.7 : Traduction des priorités et plafonds actuelles en nombre de têtes (estimation)*

*Table 4.1 : Sortie EM-DAT*

*Table 4.2 : Choix de la loi Fréquence*

*Table 4.3 : Calibration du paramètre  $s$  sur la base de base de données EM-DAT stochastiques*

*Table 4.4 : Répartition des assureurs au sein du Pool BCAC*

*Table 4.5 : Exemple de parts de marché*

*Table 4.6: Données d'inflation INSEE*

*Table 4.7: Exemple de grille de spreads S&P*

*Table 4.8: Résultats pour 1.000 simulations*

*Table 4.9: Nombre de simulations N nécessaires*

*Table 4.10: Résultats pour 10.000 simulations*

*Table 4.11: Résultats pour 100.000 simulations*

*Table 4.12 : Impact du chargement de sécurité selon les tranches*

*Table 4.13: Résultats pour 100.000 simulations – 1 an*

*Table 4.14: Résultats pour 100.000 simulations – 2 ans*

*Table 4.15: Résultats pour 100.000 simulations – 3 ans*

*Table 4.16: RoL vs durée du traité de réassurance*

*Table 4.17: VaR et TVar vs durée du traité de réassurance*

*Table 4.18 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – durée 1 an*

*Table 4.19 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – durée 2 ans*

*Table 4.20 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – durée 3 ans*

*Table 4.21: Résultats pour les primes de tranches – Augmentation de la sinistralité de 10%*

*Table 4.22 : Résultats pour les primes de tranches – Diminution de la sinistralité de 10%*

*Table 4.23 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.24 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Augmentation de la fréquence de sinistralité de 10%*

*Table 4.25 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Diminution de la fréquence de sinistralité de 10%*

*Table 4.26 : Résultats pour les primes de tranches – paramètres initiaux ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.66 / Z\grave{e}ta(TER)=1.90$ )*

*Table 4.27 : Résultats pour les primes de tranches – Augmentation du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.56 / Z\grave{e}ta(TER)=1.80$ )*

*Table 4.28 : Résultats pour les primes de tranches – Diminution du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.76 / Z\grave{e}ta(TER)=2.00$ )*

*Table 4.29 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – paramètres initiaux ( $z\grave{e}ta(CAT)=1.66 / z\grave{e}ta(TER)=1.90$ )*

*Table 4.30 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – augmentation du nombre de victimes par sinistres ( $z\grave{e}ta(CAT)=1.56 / z\grave{e}ta(TER)=1.80$ )*

Table 4.31 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – diminution du nombre de victimes par sinistres ( $\text{z}\hat{\text{e}}\text{t}\alpha(\text{CAT})=1.76 / \text{z}\hat{\text{e}}\text{t}\alpha(\text{TER})=2.00$ )

Table 4.32 : Résultats pour les primes de tranches – paramètres initiaux ( $t=525 / r=0.5$ )

Table 4.33 : Résultats pour les primes de tranches –  $t=750$

Table 4.34 : Résultats pour les primes de tranches –  $t=300$

Table 4.35 : Résultats pour les primes de tranches –  $r=0.7$

Table 4.36 : Résultats pour les primes de tranches –  $r=0.3$

Table 4.37 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – paramètres initiaux ( $t=525 / r=0.5$ )

Table 4.38 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) –  $t=750$

Table 4.39 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) –  $t=300$

Table 4.40 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) –  $r=0.7$

Table 4.41 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) –  $r=0.3$

Table 4.42 : Tableau récapitulatif des sensibilités du modèle aux paramètres

Table 4.43 : Résultats initiaux pour les primes de tranches – franchise 2 têtes

Table 4.44 : Résultats pour les primes de tranches – Suppression de la franchise

Table 4.45 : Résultats pour les primes de tranches – franchise 1 tête

Table 4.46 : Résultats initiaux pour les primes de tranches – franchise 3 têtes

Table 4.47 : Résultats pour les primes de tranches – franchise 5 têtes

Table 4.48 : Résultats pour les primes de tranches – franchise 10 têtes

Table 4.49 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – paramètres initiaux (franchise 2 têtes)

Table 4.50 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Suppression de la franchise

Table 4.51 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 1 tête

Table 4.52 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 3 têtes

Table 4.53 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 5 têtes

Table 4.54 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – franchise 10 têtes

Table 4.55 : Résultats initiaux pour les primes de tranches – structure actuelle 20XS30

Table 4.56 : Résultats pour les primes de tranches – structure 30XS20

*Table 4.57 : Résultats pour les primes de tranches – structure recomposée*

*Table 4.58 : Impact du nombre de tranches (rapport coût structure A/coût structure B)*

*Table 4.59 : Résultats pour les primes de tranches – fusion des tranches obligatoires*

*Table 4.60 : Multiplication du nombre de tranches : limitation à 50M€ de capacité par tranche*

*Table 4.61 : Résultats pour les primes de tranches – multiplication du nombre de tranches : limitation à 50M€ de capacité par tranche*

*Table 4.62 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.63 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure 30XS20*

*Table 4.64 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure recomposée*

*Table 4.65 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – fusion des tranches obligatoires*

*Table 4.66 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – multiplication des tranches à 50M€*

*Table 4.67 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale*

*Table 4.68 : Résultats pour les primes de tranches – 20 assureurs équipondérés*

*Table 4.69 : Résultats pour les primes de tranches – 3 assureurs équipondérés*

*Table 4.70 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.71 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – 20 assureurs équipondérés*

*Table 4.72 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – 3 assureurs équipondérés*

*Table 4.73 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale reconstitution 200%*

*Table 4.74 : Résultats pour les primes de tranches – structure reconstitution 100%*

*Table 4.75 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.76 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – reconstitution 100%*

*Table 4.77 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale sans risque de défaut ( $p=0$ )*

*Table 4.78 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale, sans risque de défaut*

*Table 4.79 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale,  $p=0.5\%$  - 1 réassureur unique*

*Table 4.80 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale,  $p=0.5\%$  - 10 réassureurs équipondérés et homogènes*

*Table 4.81 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale EM-DAT + GTD*

*Table 4.82 : Résultats pour les primes de tranches – Risques EM-DAT uniquement*

*Table 4.83 : Résultats pour les primes de tranches – Risques GTD uniquement*

*Table 4.84 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.85 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Risques EMDAT uniquement*

*Table 4.86 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – Risques GTD uniquement*

*Table 4.87 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale*

*Table 4.88 : Résultats pour les primes de tranches – Risques décès uniquement*

*Table 4.89 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.90 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – risque décès uniquement*

*Table 4.91 : Résultats pour les primes de tranches – structure initiale traditionnelle*

*Table 4.92 : Résultats pour les primes de tranches – structure « TopTop »*

*Table 4.93 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.94 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure « TopTop »*

*Table 4.95 : Tableau récapitulatif des paramètres*

*Table 4.96 : Primes Pool Facultatif*

*Table 4.97 : VaR, TVaR et méthode du capital*

*Table 4.98 : RoL obtenus*

*Table 4.99 : Comparaison entre assureurs – structure actuelle. Approche E(charge)*

*Table 4.100 : Comparaison entre assureurs – structure actuelle. Approche TVaR*

*Table 4.101 : Comparaison entre assureurs – structure obligatoire. Approche E(charge)*

*Table 4.102 : Comparaison entre assureurs – structure obligatoire. Approche TVaR*

*Table 4.103 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance. Approche E(charge)*

*Table 4.104 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance. Approche TVaR*

*Table 4.105 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance, aucune mutualisation. Approche E(charge)*

*Table 4.106 : Comparaison entre assureurs – aucune réassurance, aucune mutualisation. Approche TVaR*

*Table 4.107 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – structure initiale*

*Table 4.108 : Impact sur le capital des assureurs membres (en Mions€) – avec risque de défaut des assureurs membres du Pool*

*Table 4.109 : Résultats pour les primes de tranche – structure proposée*

*Table 4.110 : Impact de la structure initiale pour chacun des membres du Pool*

*Table 4.111 : Impact de la structure proposée pour chacun des membres du Pool*

## ANNEXE 1 : TARIFICATION D'UN CONTRAT CAT PAR LA METHODE DE STRICKLER

En développant  $\pi_{M,S}$ , pour  $M=1$ :

$$\pi_{M,S} = h(1) \int_S^\infty p^{(1)}(z) \cdot (z - S) dz + h(2) \int_S^\infty p^{(2)}(z) \cdot (z - S) dz + \dots + h(x) \int_S^\infty p^{(x)}(z) \cdot (z - S) dz$$

avec  $x \rightarrow \infty$

En décomposant terme par terme :

Terme n=1 :

$$h(1) \int_S^\infty p^{(1)}(z) \cdot (z - S) dz = h(1) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(1)} \cdot (z - S) dz$$

En intégrant par partie, nous obtenons :

$$h(1) \int_S^\infty p^{(1)}(z) \cdot (z - S) dz = h(1) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(1)} \cdot (z - S) dz = e^{-S}$$

Terme n=2 :

$$h(2) \int_S^\infty p^{(2)}(z) \cdot (z - S) dz = h(2) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(2)} \cdot z(z - S) dz$$

En intégrant par partie, nous obtenons :

$$h(2) \int_S^\infty p^{(2)}(z) \cdot (z - S) dz = h(2) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(2)} \cdot z(z - S) dz = (S + 2)e^{-S}$$

Terme n=3 :

$$h(3) \int_S^\infty p^{(3)}(z) \cdot (z - S) dz = h(3) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(3)} \cdot z^2(z - S) dz$$

En intégrant par partie, nous obtenons :

$$h(3) \int_S^\infty p^{(3)}(z) \cdot (z - S) dz = h(3) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(3)} \cdot z^2(z - S) dz = \frac{(S^2 + 4S + 6)}{\Gamma(3)} e^{-S}$$

Terme n=4 :

$$h(4) \int_S^\infty p^{(4)}(z) \cdot (z - S) dz = h(4) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(4)} \cdot z^3(z - S) dz$$

En intégrant par partie, nous obtenons :

$$h(4) \int_S^\infty p^{(4)}(z) \cdot (z - S) dz = h(4) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(4)} \cdot z^3(z - S) dz = \frac{(S^3 + 6S^2 + 18S + 24)}{\Gamma(4)} e^{-S}$$

.....

Terme n=x :

$$h(x) \int_S^\infty p^{(x)}(z) \cdot (z - S) dz = h(x) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(x)} \cdot z^{x-1} (z - S) dz$$

Nous obtenons la formule générale<sup>41</sup>:

$$h(x) \int_S^\infty p^{(x)}(z) \cdot (z - S) dz = h(x) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(x)} \cdot z^{x-1} (z - S) dz = e^{-S} \cdot \left[ \frac{S^{x+1}}{x!} + (x - S) \cdot \sum_{j=0}^x \frac{S^j}{j!} \right]$$

Ainsi :

$$\pi_{M,S} = h(x) \int_S^\infty p^{(x)}(z) \cdot (z - S) dz = h(x) \int_S^\infty \frac{e^{-z}}{\Gamma(x)} \cdot z^{x-1} (z - S) dz = e^{-S} \cdot \sum_{n=M}^\infty h(n) \left[ \frac{S^{n+1}}{n!} + (n - S) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{S^j}{j!} \right]$$

$$\pi_{M,S} = e^{-S} \cdot \sum_{n=M}^\infty h(n) \left[ \frac{S^{n+1}}{n!} + (n - S) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{S^j}{j!} \right] = e^{-S} \cdot \sum_{n=M}^\infty \frac{H(n)}{\sum_{n=1}^{1499} H(n)} \left[ \frac{S^{n+1}}{n!} + (n - S) \cdot \sum_{j=0}^n \frac{S^j}{j!} \right]$$

<sup>41</sup> HARBITZ M. (1992) : Catastrophe covers in life insurance . *Transactions of the International Congress of Actuaries*

## ANNEXE 2 : TESTS STATISTIQUES

### Test de Kolmogorov Smirnov

Disposant d'un échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$ , les hypothèses de tests sont:

$(H_0)$ : l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  suit la loi de distribution  $F$  théorique,

$(H_1)$ : l'échantillon ne suit pas la loi  $F$

Si l'hypothèse  $(H_0)$  est correcte, la fonction de repartition empirique  $\hat{F}$  de  $(x_1, \dots, x_n)$  doit être proche de  $F$ . On calcule la statistique  $D$  qui mesure la distance de Kolmogorov-Smirnov:

$D(F, \hat{F}) = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \left| F(X_{(i)}) - \frac{i}{n} \right|, \left| F(X_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right| \right\}$  avec  $X_{(i)}$  les données ordonnées de l'échantillon.

La distribution de Kolmogorov-Smirnov se définit par  $P[K \leq x] = 1 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot e^{-2i^2 x^2}$

Si  $F$  est continue sous l'hypothèse nulle,  $\sqrt{n}D$  converge vers la distribution de Kolmogorov.

➔ Si  $\sqrt{n}D$  est inférieure à la valeur critique  $K_\alpha$  (avec  $P[K \leq K_\alpha] = 1 - \alpha$ ) alors on accepte l'hypothèse  $(H_0)$  d'adéquation de  $\hat{F}$  à  $F$ .

### Test d'Anderson Darling

Ce test est adapté aux lois Normale, Log-Normale, Exponentielle, Weibull et de la famille de Gumbel.

Disposant d'un échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$ , les hypothèses de tests sont:

$(H_0)$ : l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  suit la loi de distribution  $F$  théorique,

$(H_1)$ : l'échantillon ne suit pas la loi  $F$

La statistique du test s'écrit :  $A^2 = -n - s$

Avec  $S = \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)}{n} \cdot [\ln(F(x_i)) + \ln(1 - F(x_{n+1-i}))]$  où  $F$  est la fonction de distribution de la loi pour laquelle on teste l'ajustement des données.

Si  $A^2 > \text{Valeur\_critique}_{\alpha\%}$ , cette valeur critique dépendant de la distribution d'Anderson-Darling associée à la loi théorique testée, nous rejetons  $(H_0)$  au seuil  $\alpha$ , donc nous ne pouvons conclure que les données suivent la loi  $F$ .

### Test Von Cramer Mises

Ce test est une alternative au test de Kolmogorov-Smirnov. Il s'agit de tester l'ajustement des données empiriques de distribution  $\hat{F}_n$  à une loi de probabilité connue  $F$  en calculant un indicateur d'écart entre les deux distributions:

$$w^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{F}_n(x) - F(x)]^2 dF(x)$$

En pratique :

Disposant d'un échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  des valeurs empiriques classées par ordre croissant et  $T$  la statistique:

$$T = nw^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right]^2$$

Les hypothèses de tests sont:

$(H_0)$ : l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  suit la loi de distribution  $F$  théorique,

$(H_1)$ : l'échantillon ne suit pas la loi  $F$

Si  $T$  est supérieur à la valeur tabulée du test, l'hypothèse  $(H_0)$  est rejetée.

**ANNEXE 3 :**

*Critère des Moindres Carrés (CMC)*

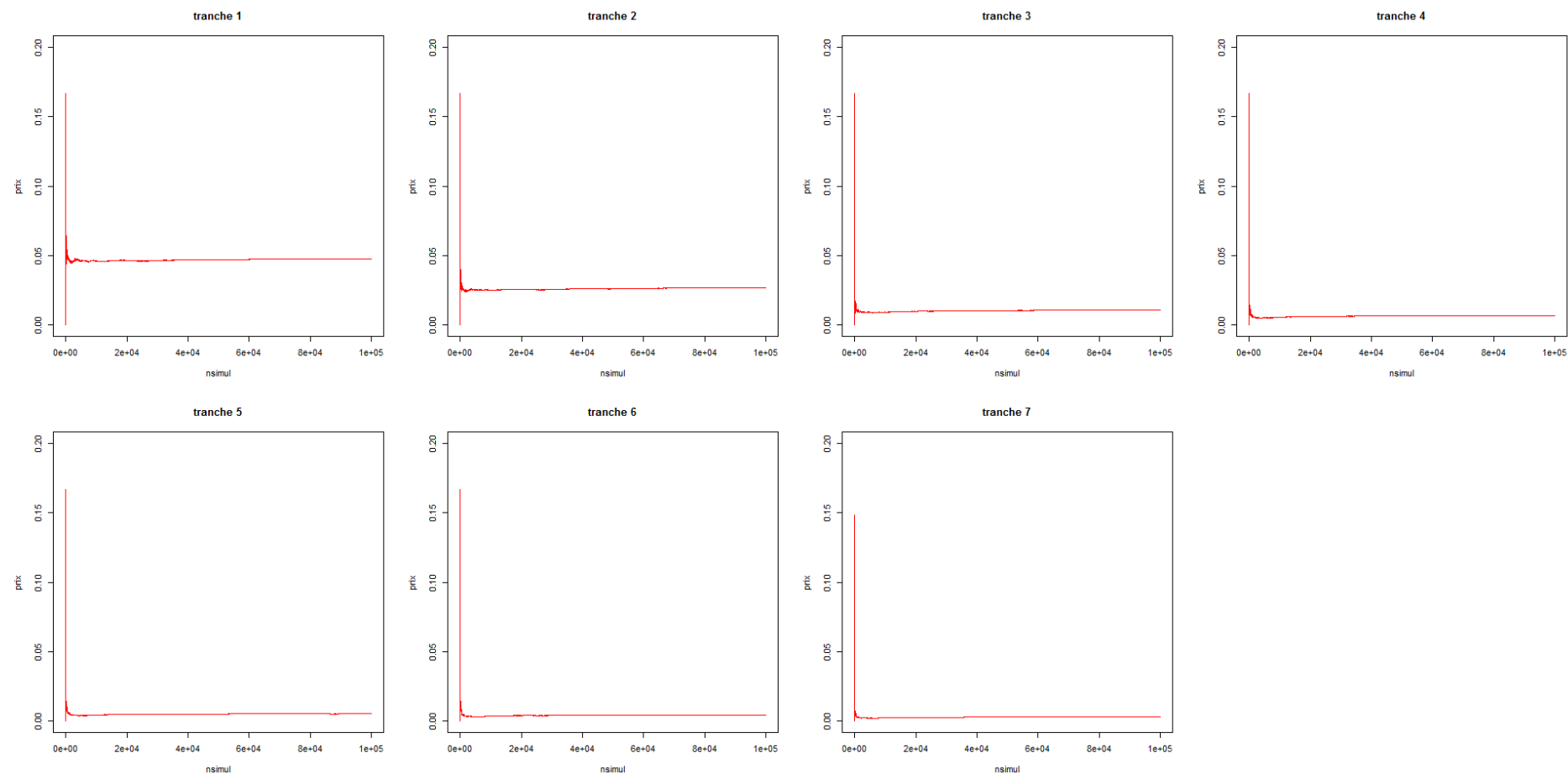
$$CMC = \sum_{i=1}^n (\hat{F}(x_i) - F(x_i))^2$$

$\hat{F}$ : fonction de répartition empirique

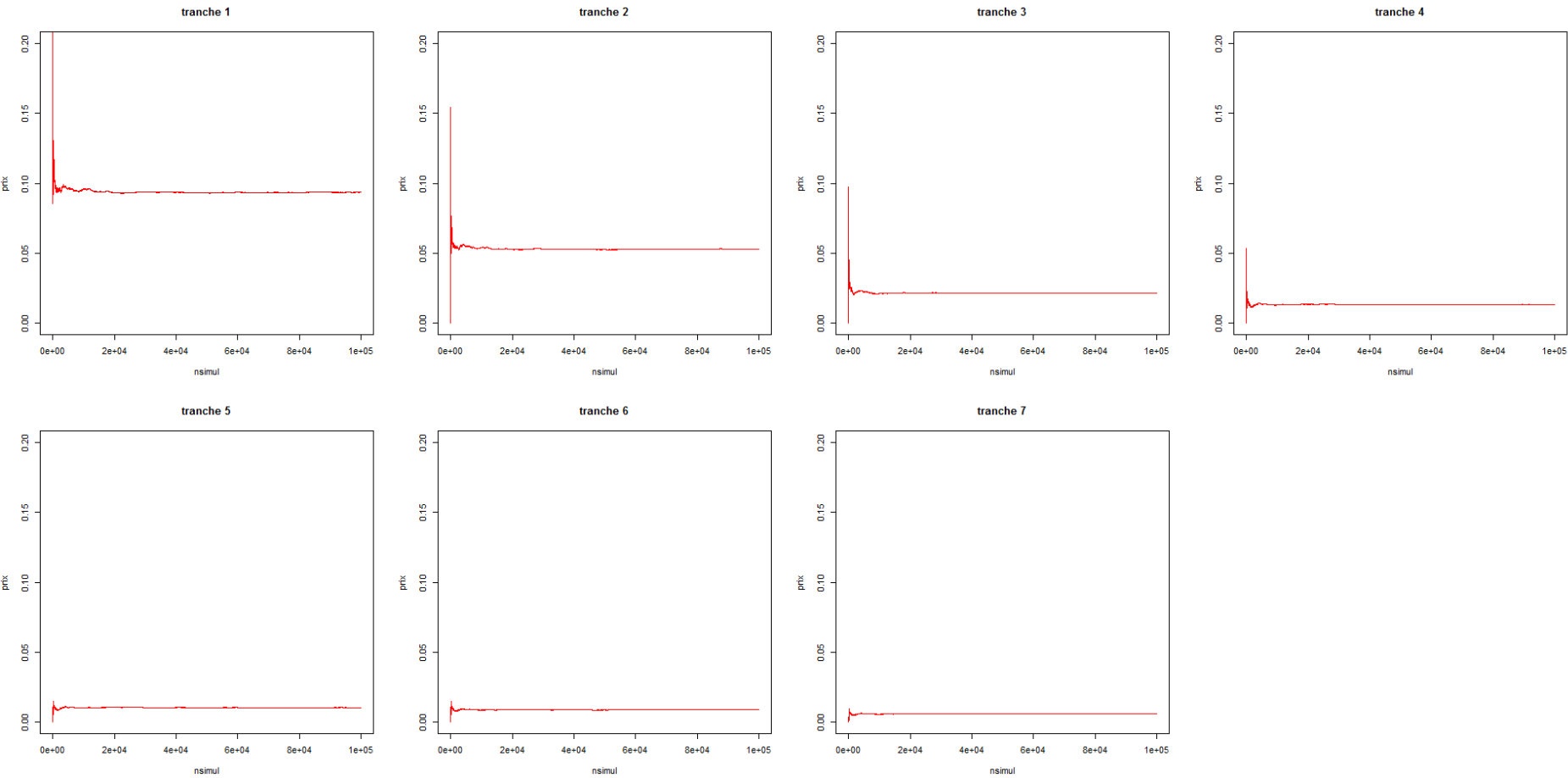
$F$ : fonction de répartition théorique de la loi testée

## ANNEXE 4 :

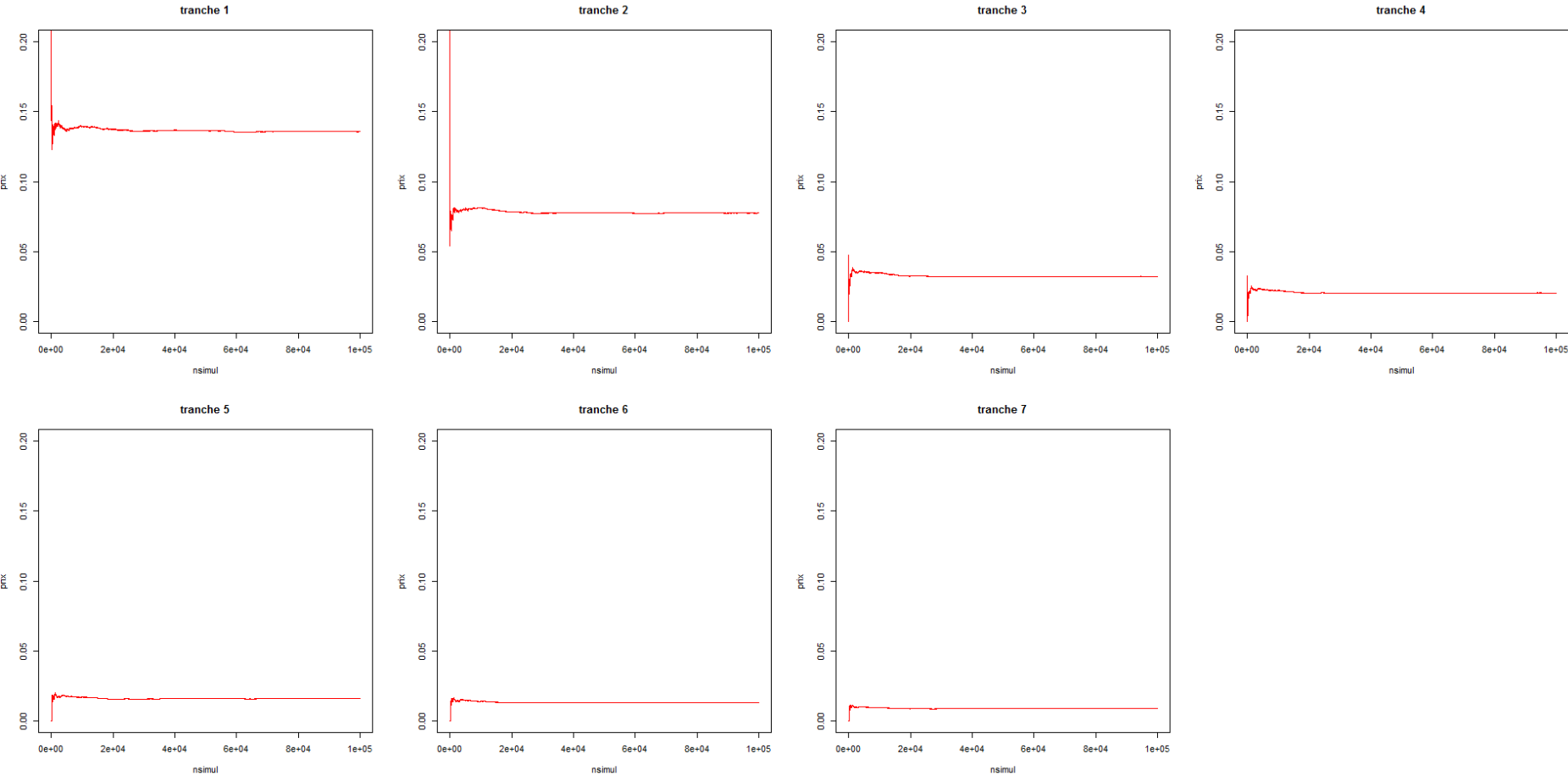
Convergence des primes (RoL) par tranche (durée du contrat 1 an)



Convergence des primes (RoL) par tranche (durée du contrat 2 ans)

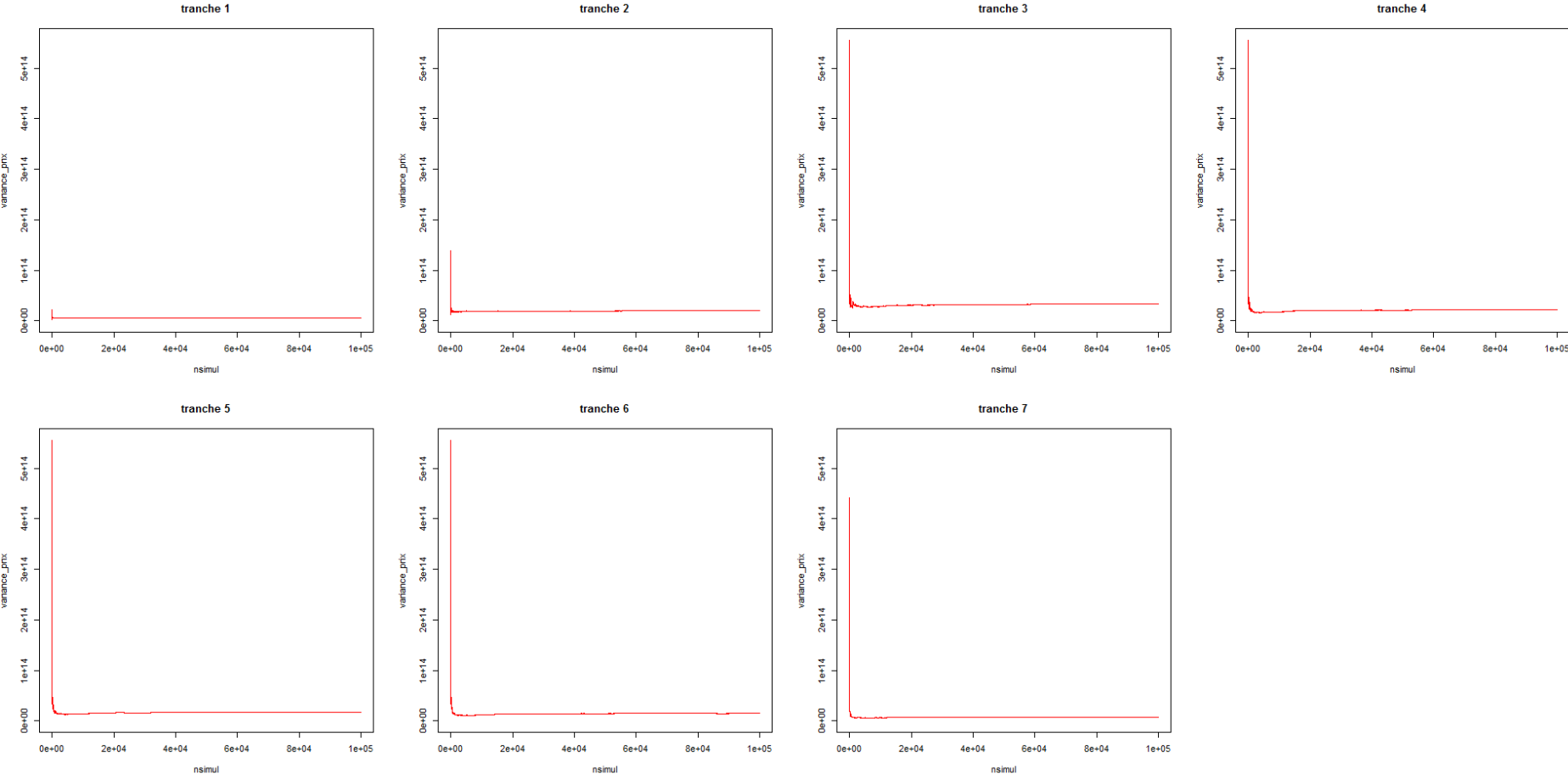


Convergence des primes (RoL) par tranche (durée du contrat 3 ans)



**ANNEXE 5 :**

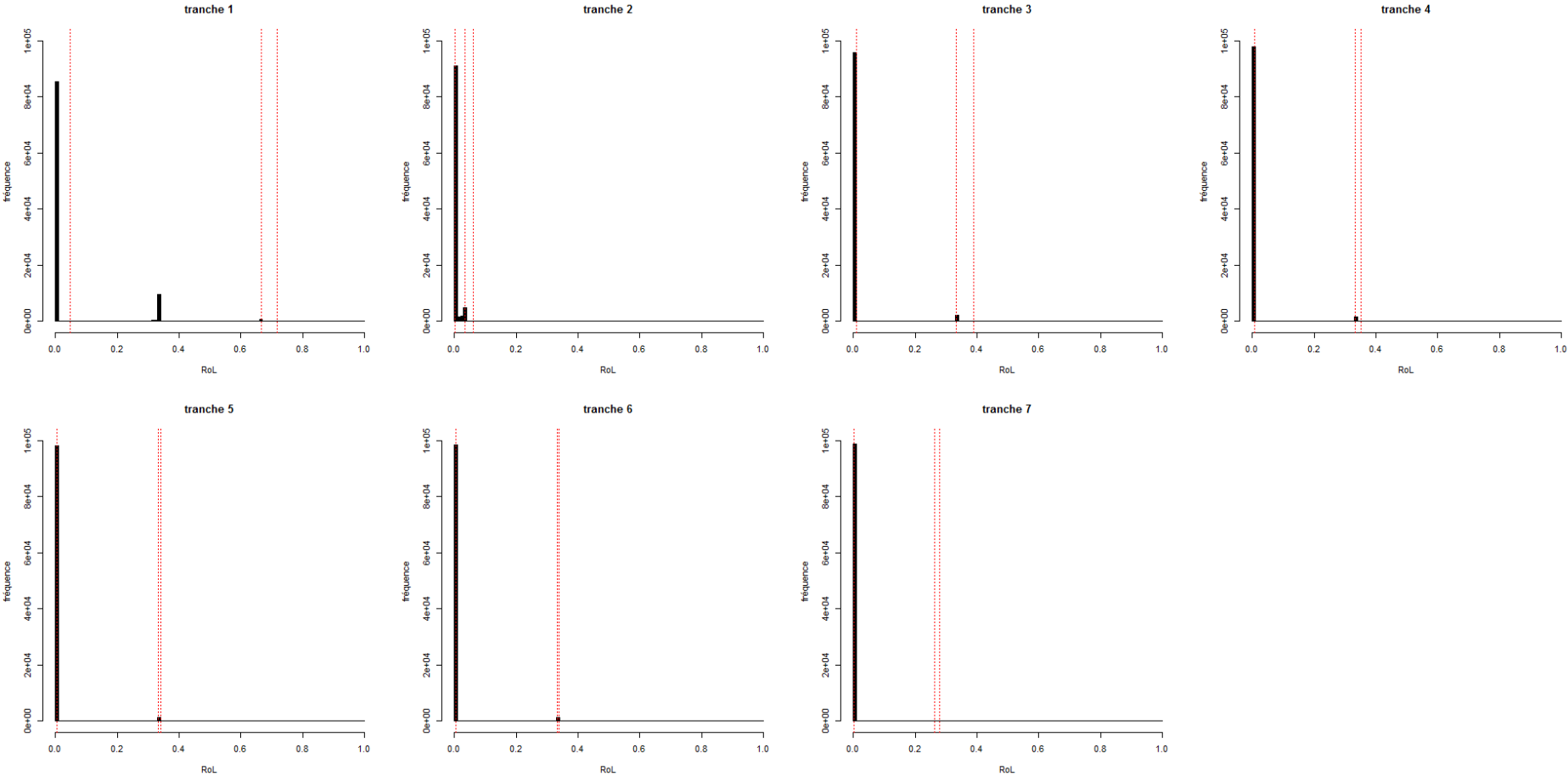
*Graphes de convergence des variances.*



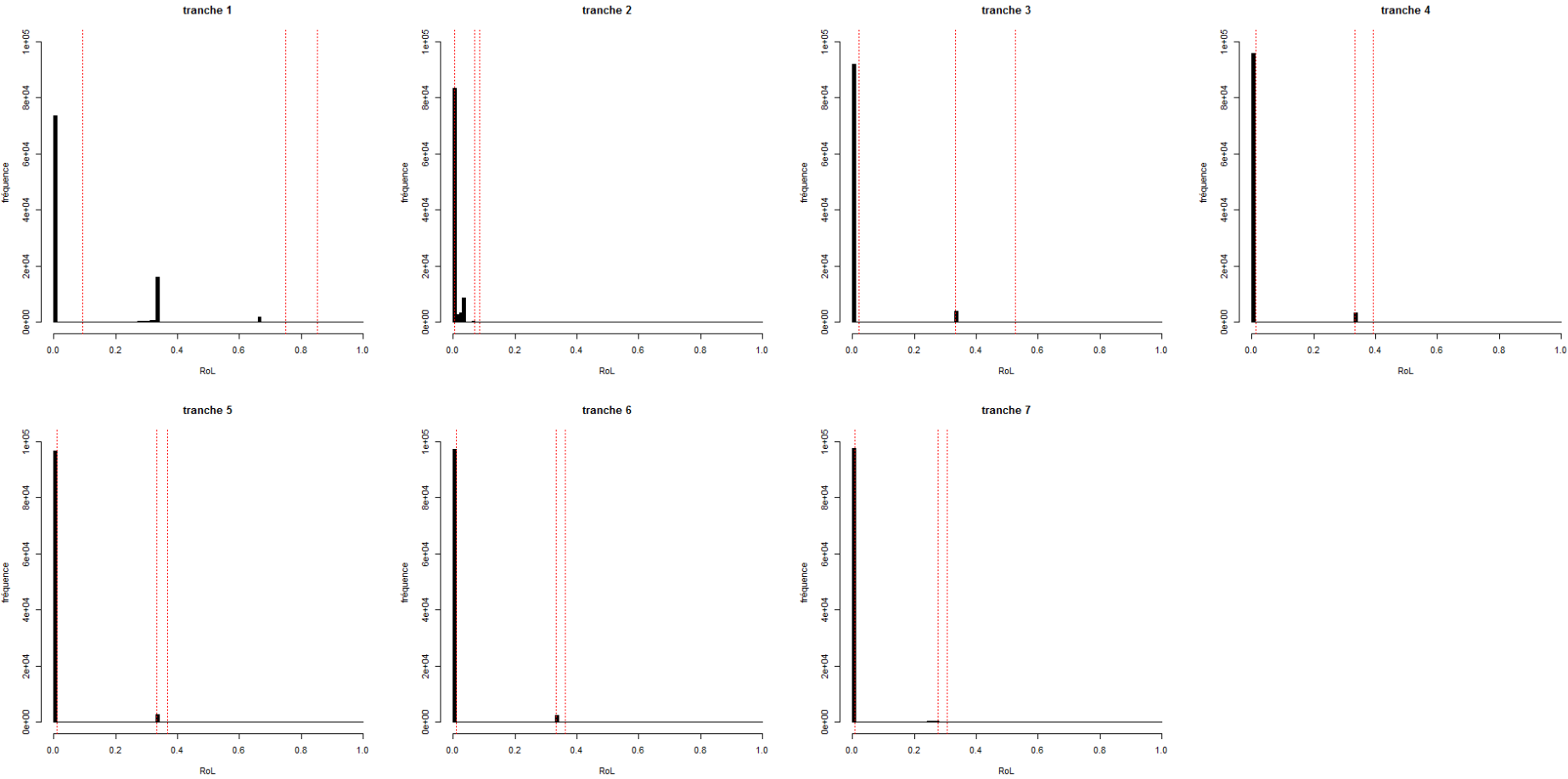
ANNEXE 6 : IMPACT SUR LE TARIF DE LA COUVERTURE DE REASSURANCE

Sensibilité à la durée de la couverture

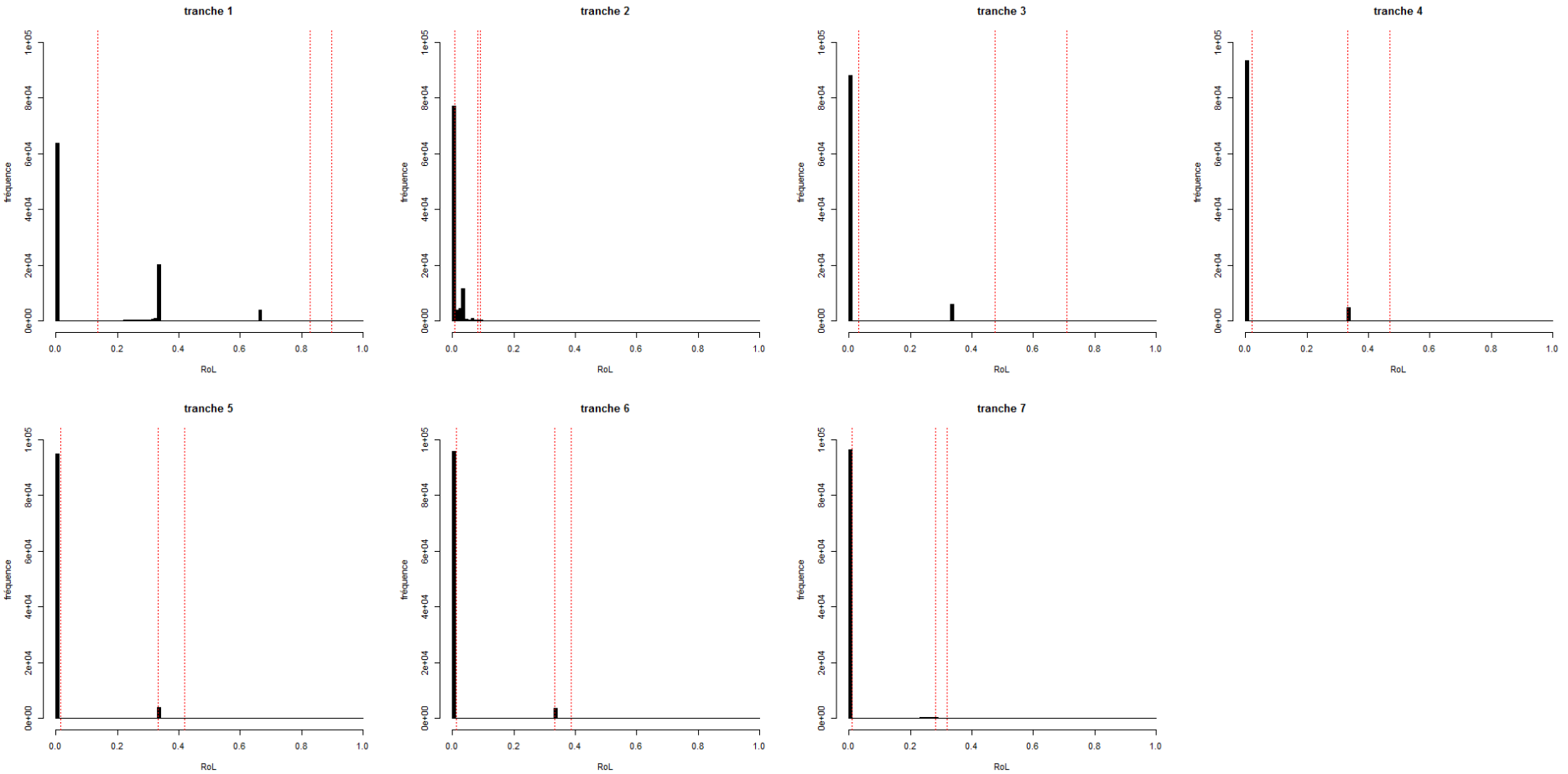
Distribution des primes simulées par tranche (durée du contrat 1 an). En rouge la prime moyenne, la VaR 99.5% et la TVaR 99.5%



Distribution des primes simulées par tranche (durée du contrat 2 ans)

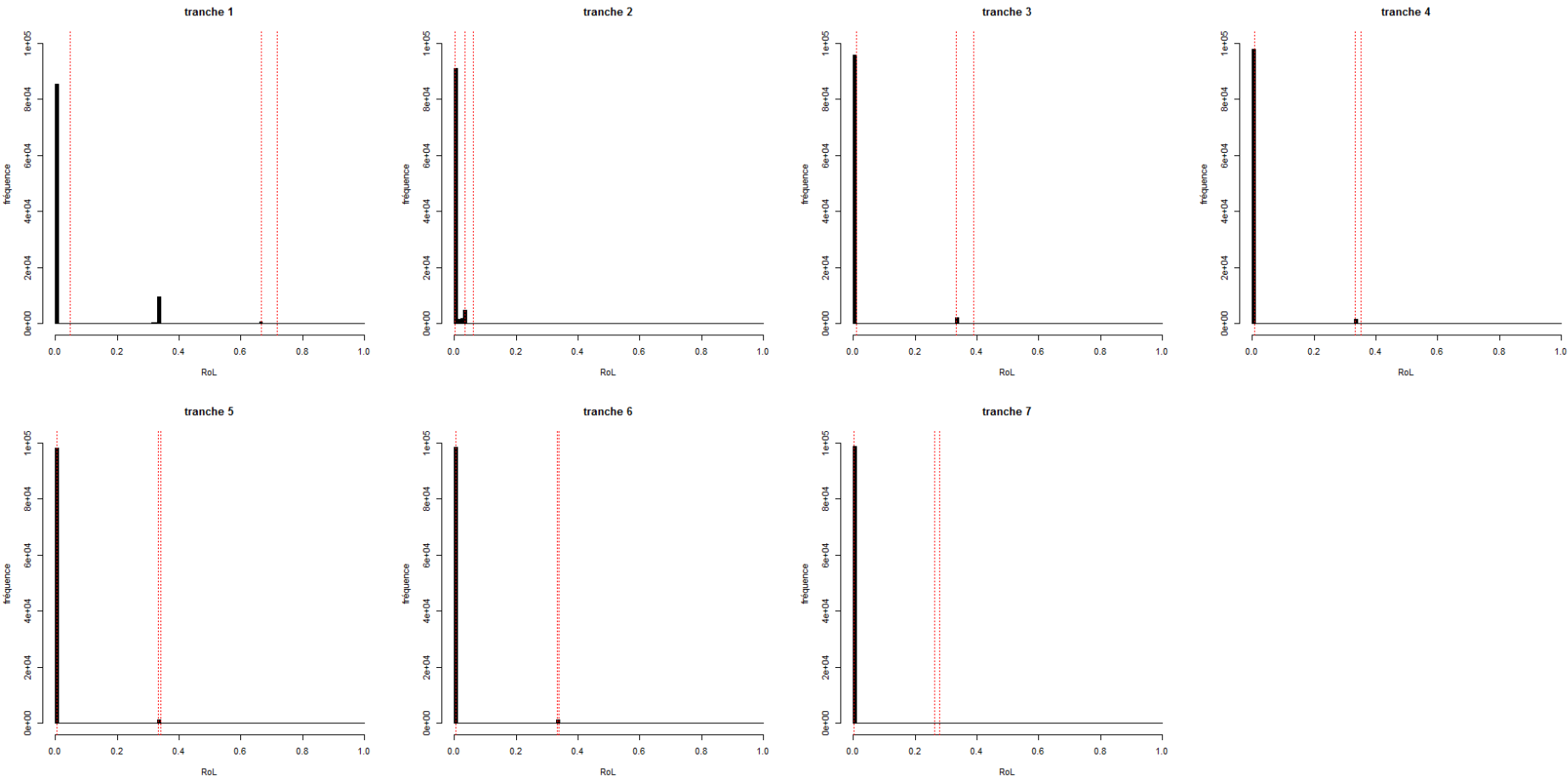


Distribution des primes simulées par tranche (durée du contrat 3 ans)



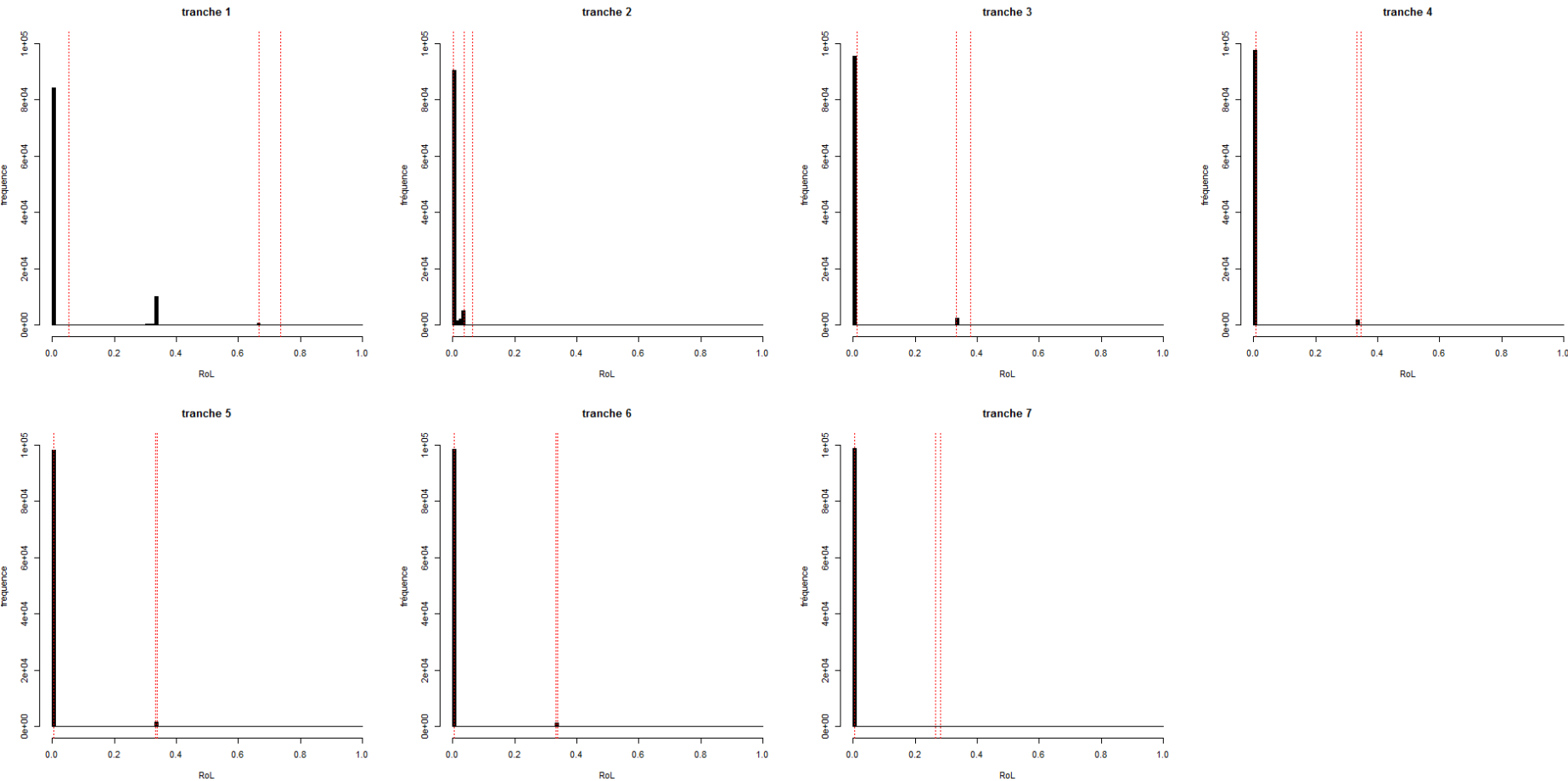
*Sensibilité à la fréquence de la sinistralité (Loi Binomiale Négative)*

Distribution structure initiale



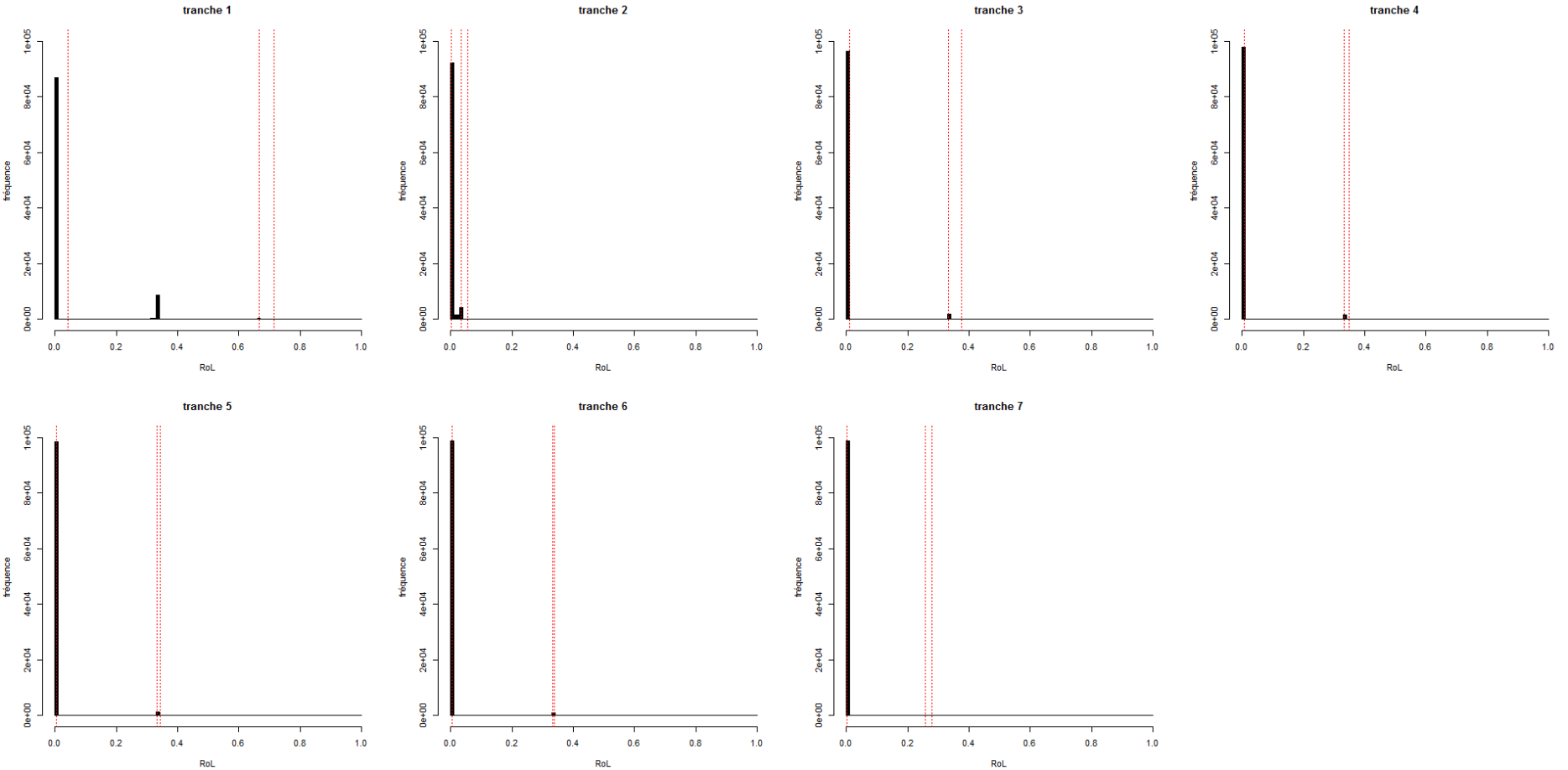
*Sensibilité à la fréquence de la sinistralité (Loi Binomiale Négative)*

Augmentation de la fréquence de sinistralité de 10%



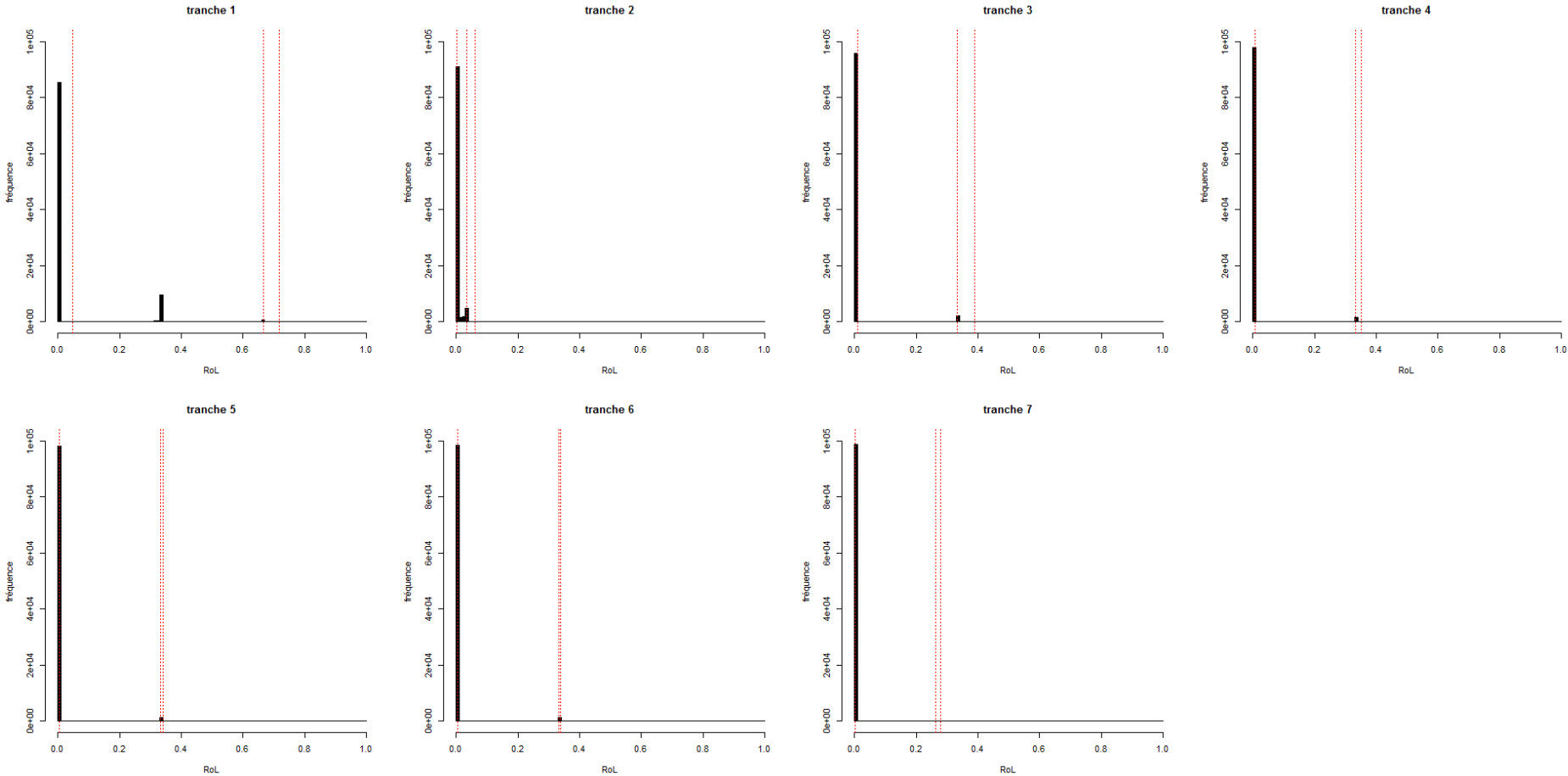
*Sensibilité à la fréquence de la sinistralité (Loi Binomiale Négative)*

Diminution de la fréquence de sinistralité de 10%



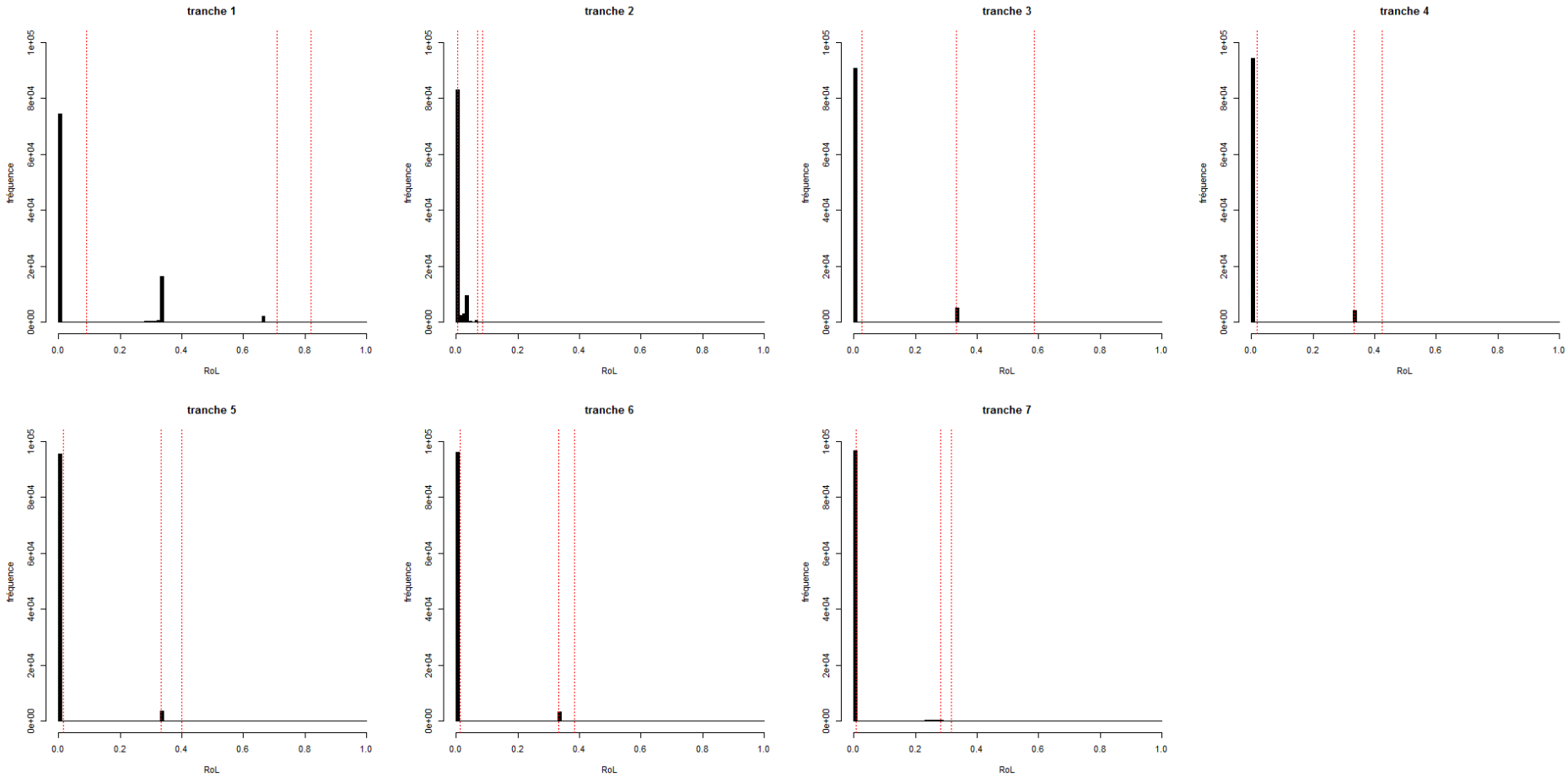
*Sensibilité au nombre de victimes par sinistre (Loi Zêta)*

Distribution structure initiale (Zêta(CAT)=1.60 / zêta(TER)=1.80)



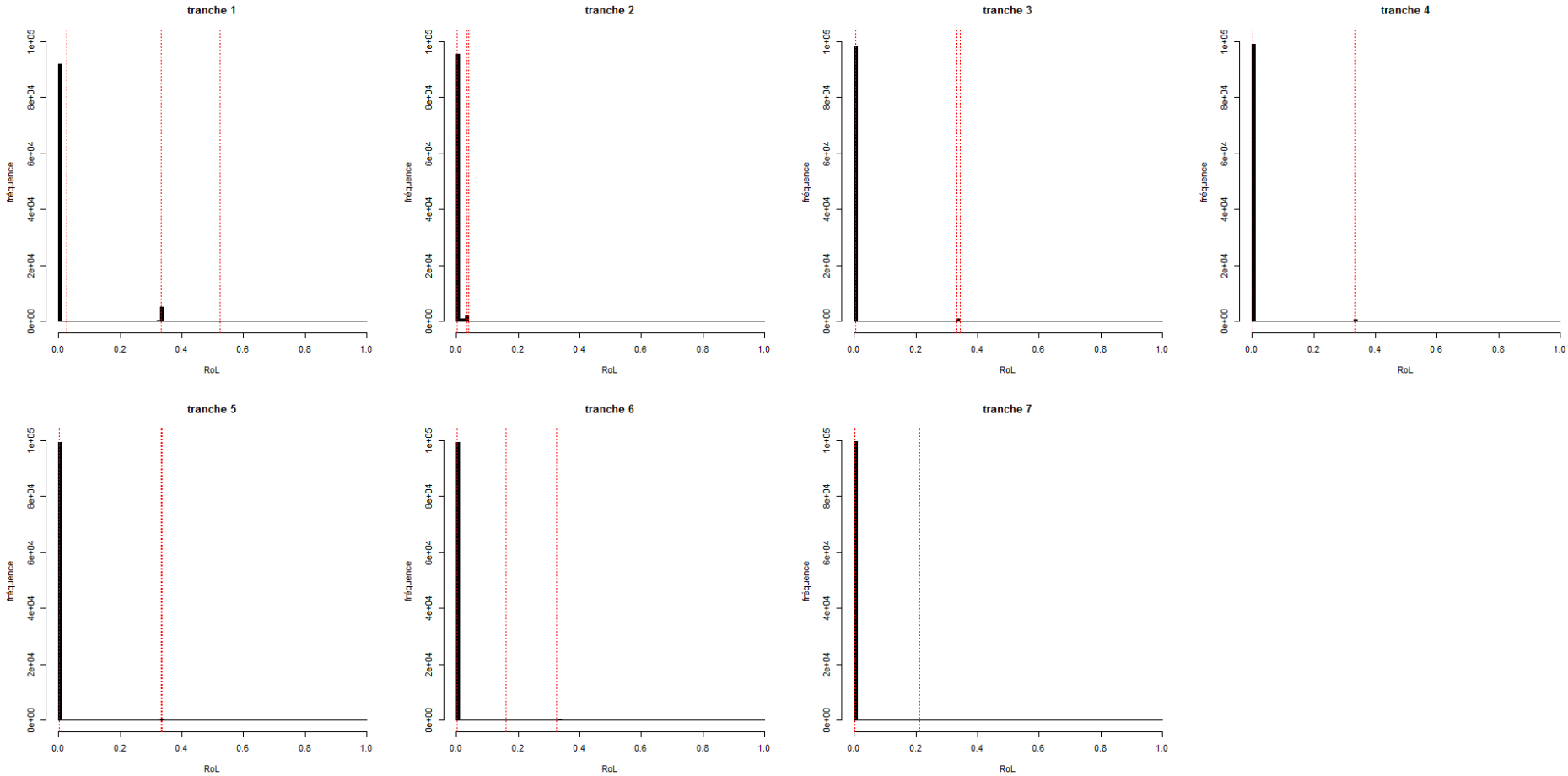
*Sensibilité au nombre de victimes par sinistre (Loi Zêta)*

Augmentation du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.50$  /  $z\grave{e}ta(TER)=1.70$ )



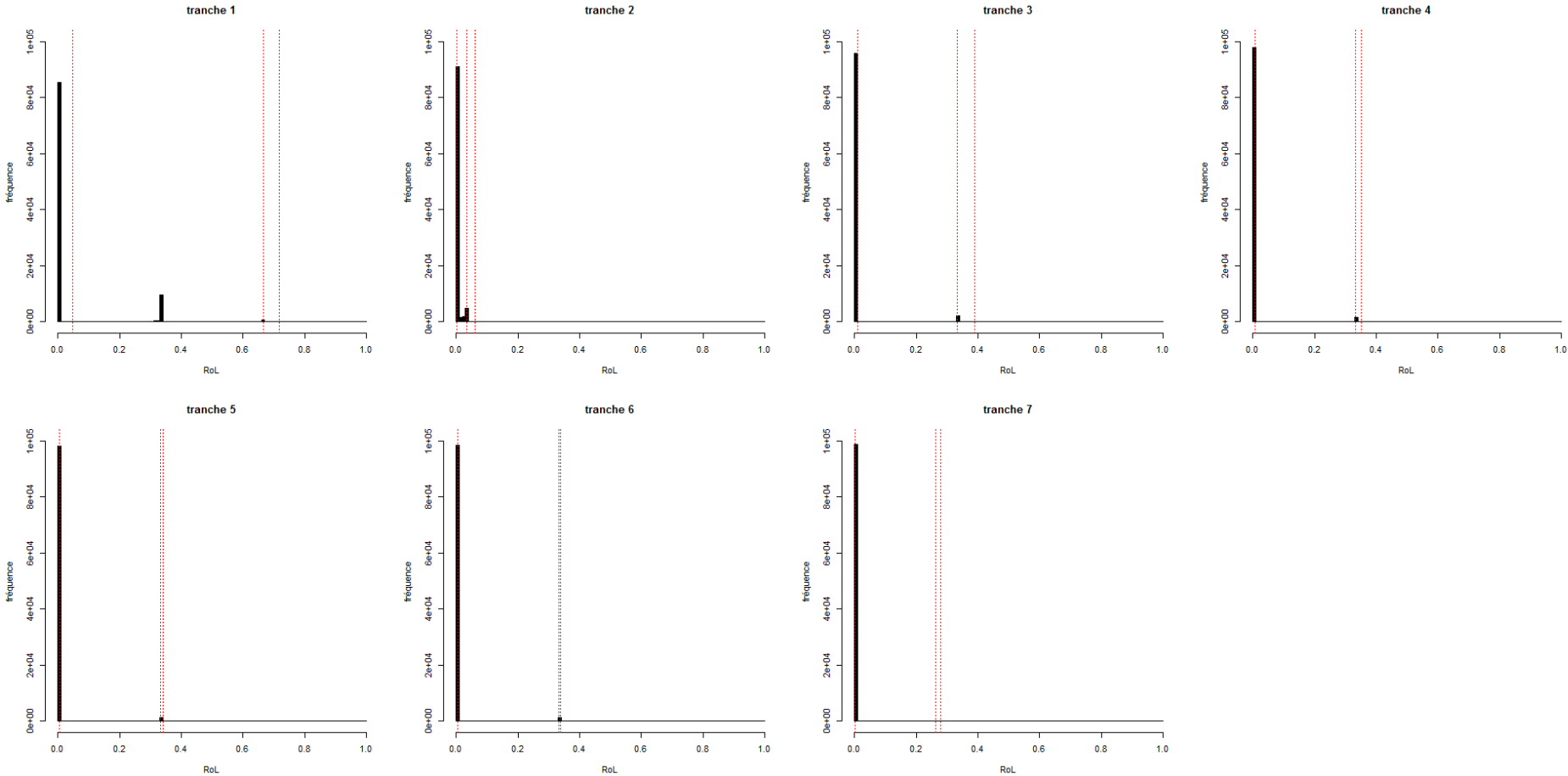
*Sensibilité au nombre de victimes par sinistre (Loi Zêta)*

Diminution du nombre de victimes par sinistres ( $Z\hat{\epsilon}ta(CAT)=1.70 / z\hat{\epsilon}ta(TER)=1.90$ )



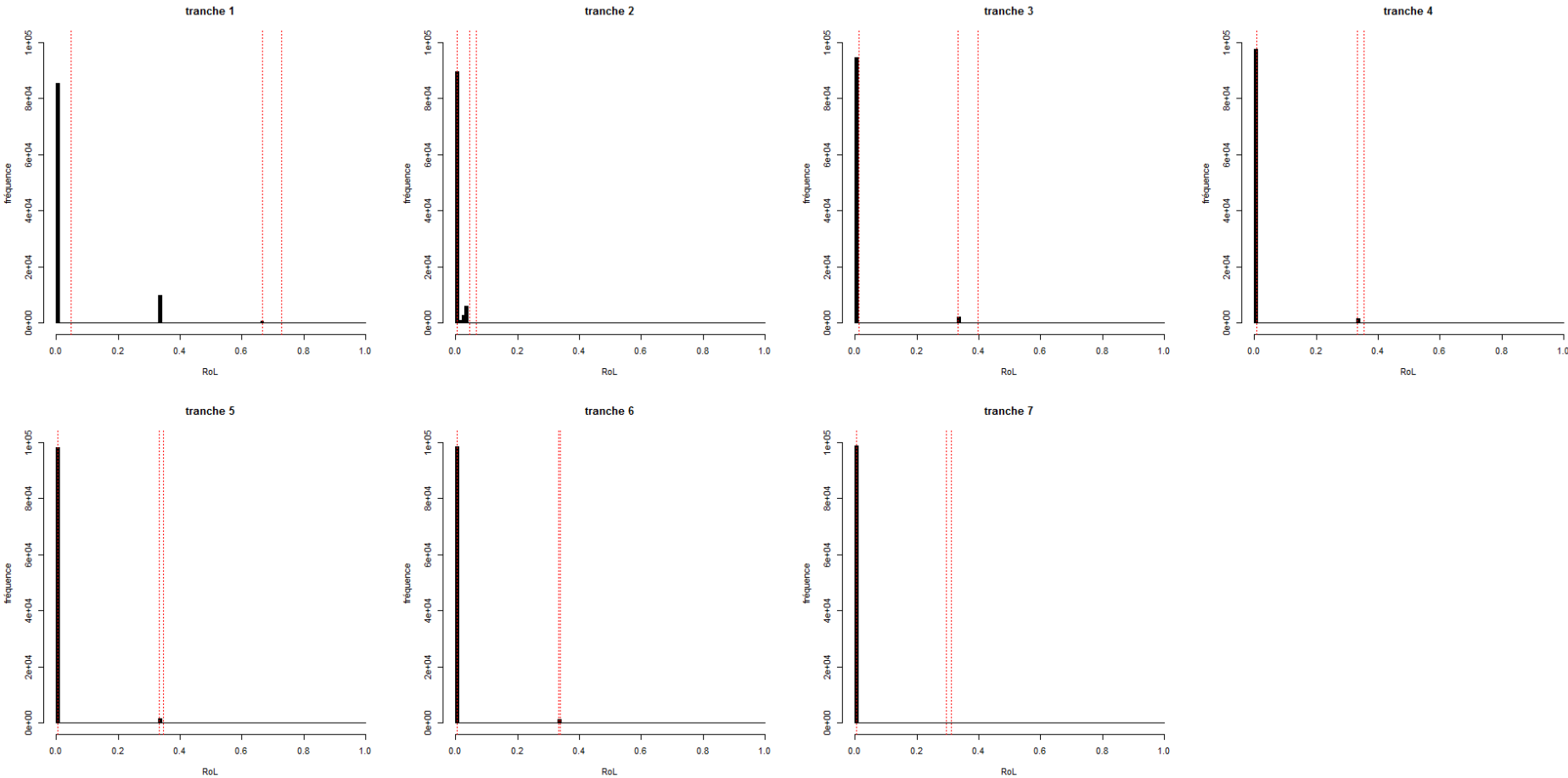
*Sensibilité aux facteurs de concentration*

Distribution structure initiale  $t=525, r=0.5$



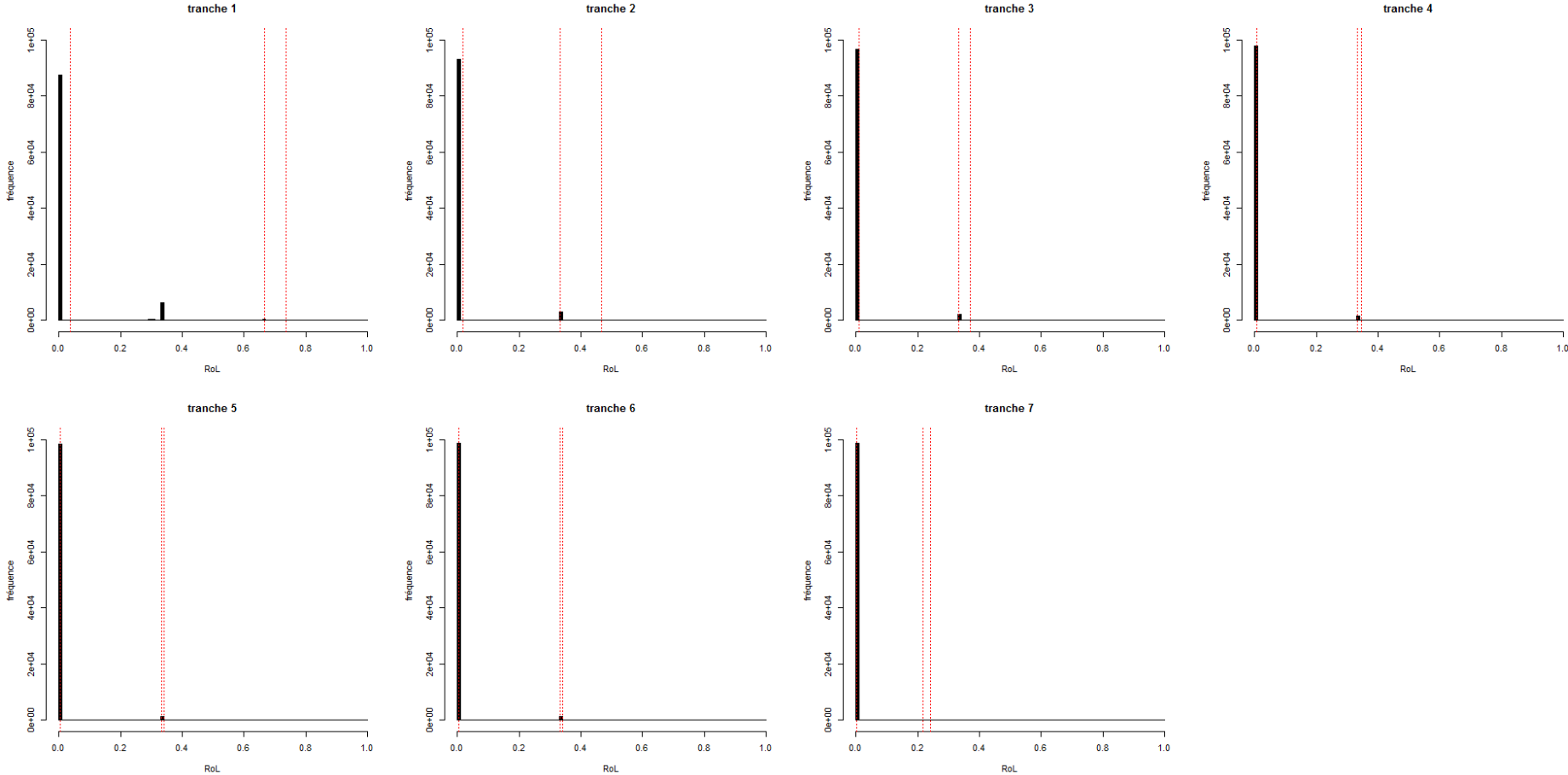
Sensibilité aux facteurs de concentration

Pour  $t=750$



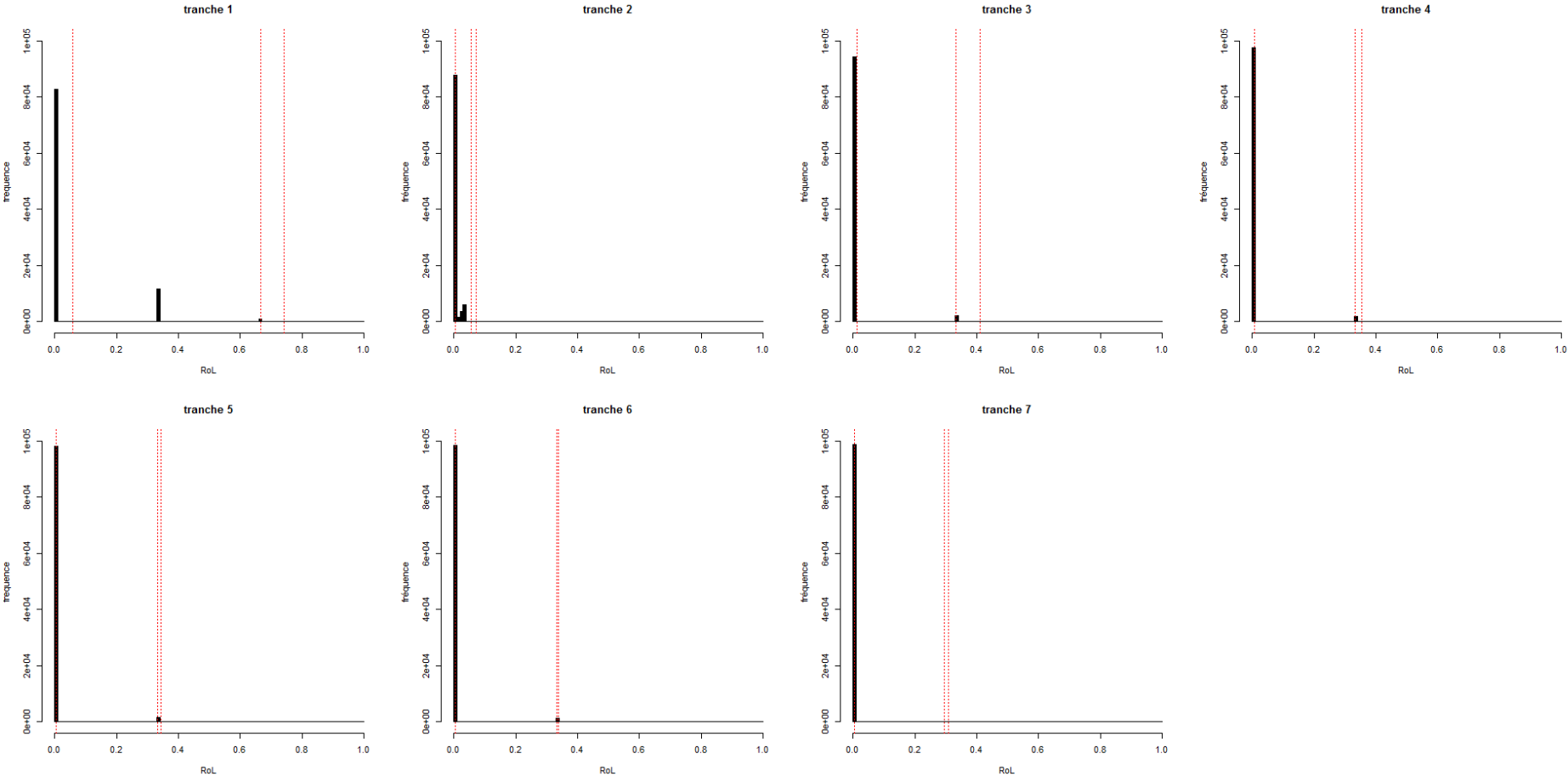
*Sensibilité aux facteurs de concentration*

Pour  $t=300$



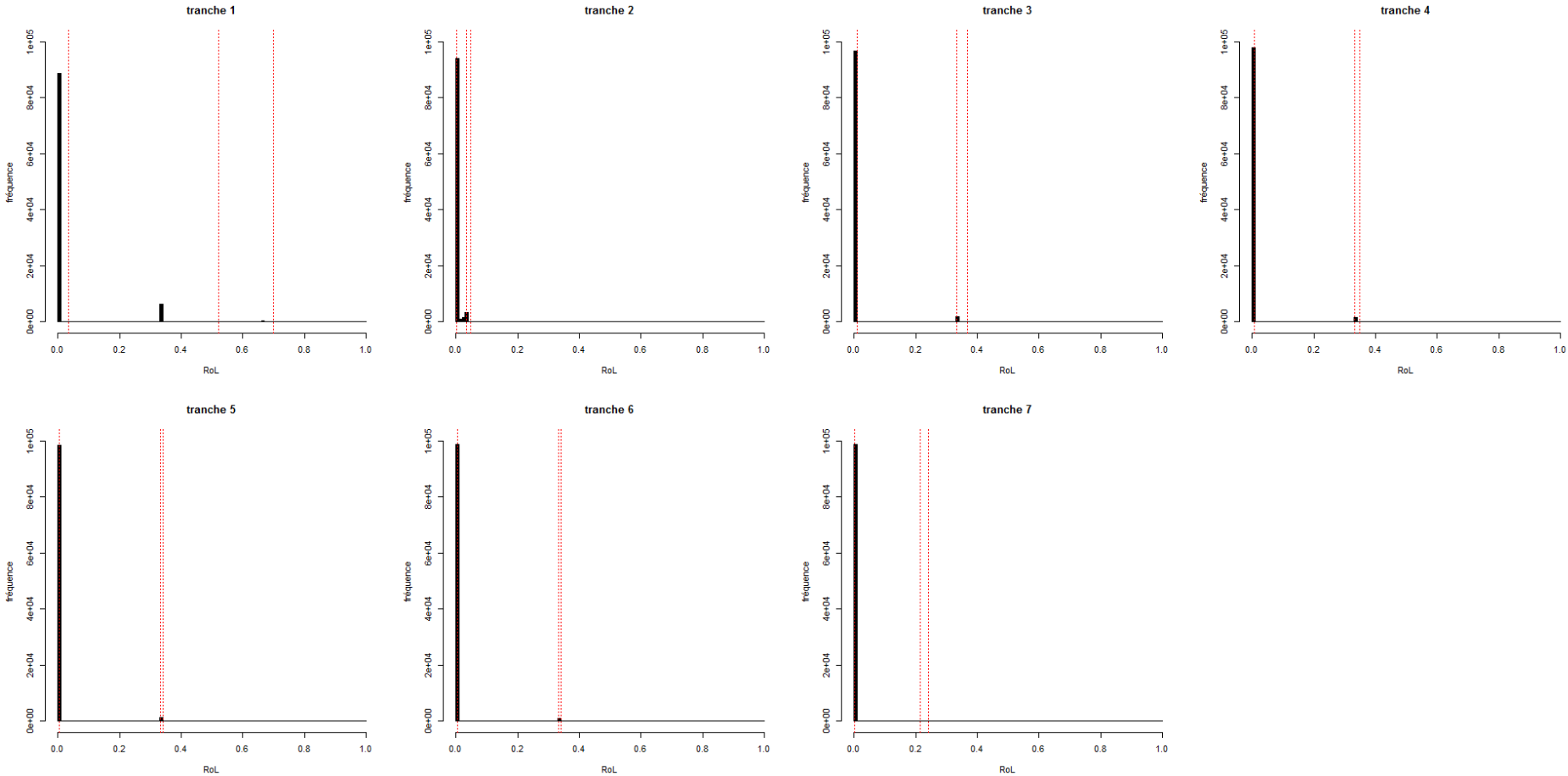
*Sensibilité aux facteurs de concentration*

Pour  $r=0.7$



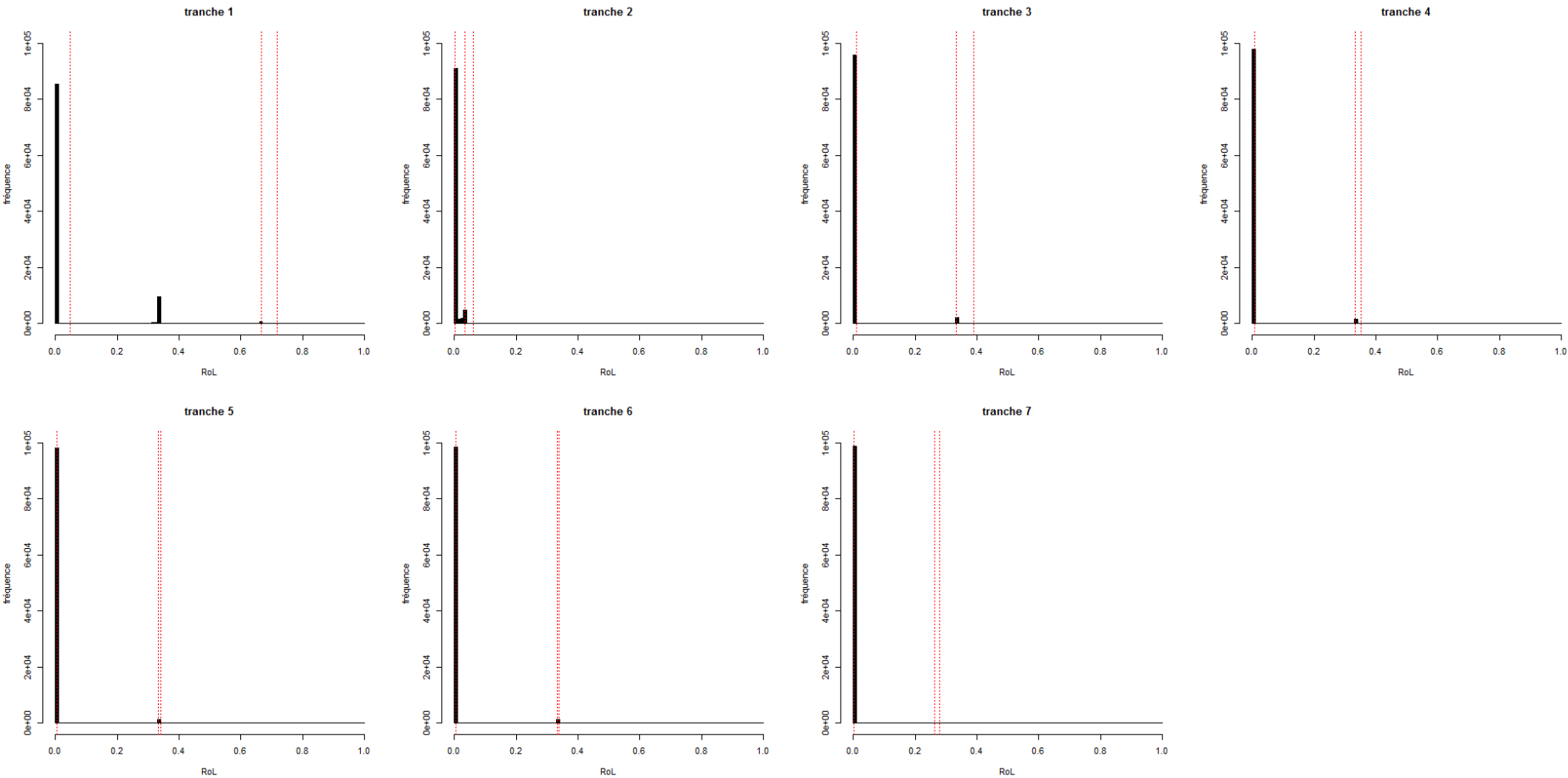
*Sensibilité aux facteurs de concentration*

Pour  $r=0.3$



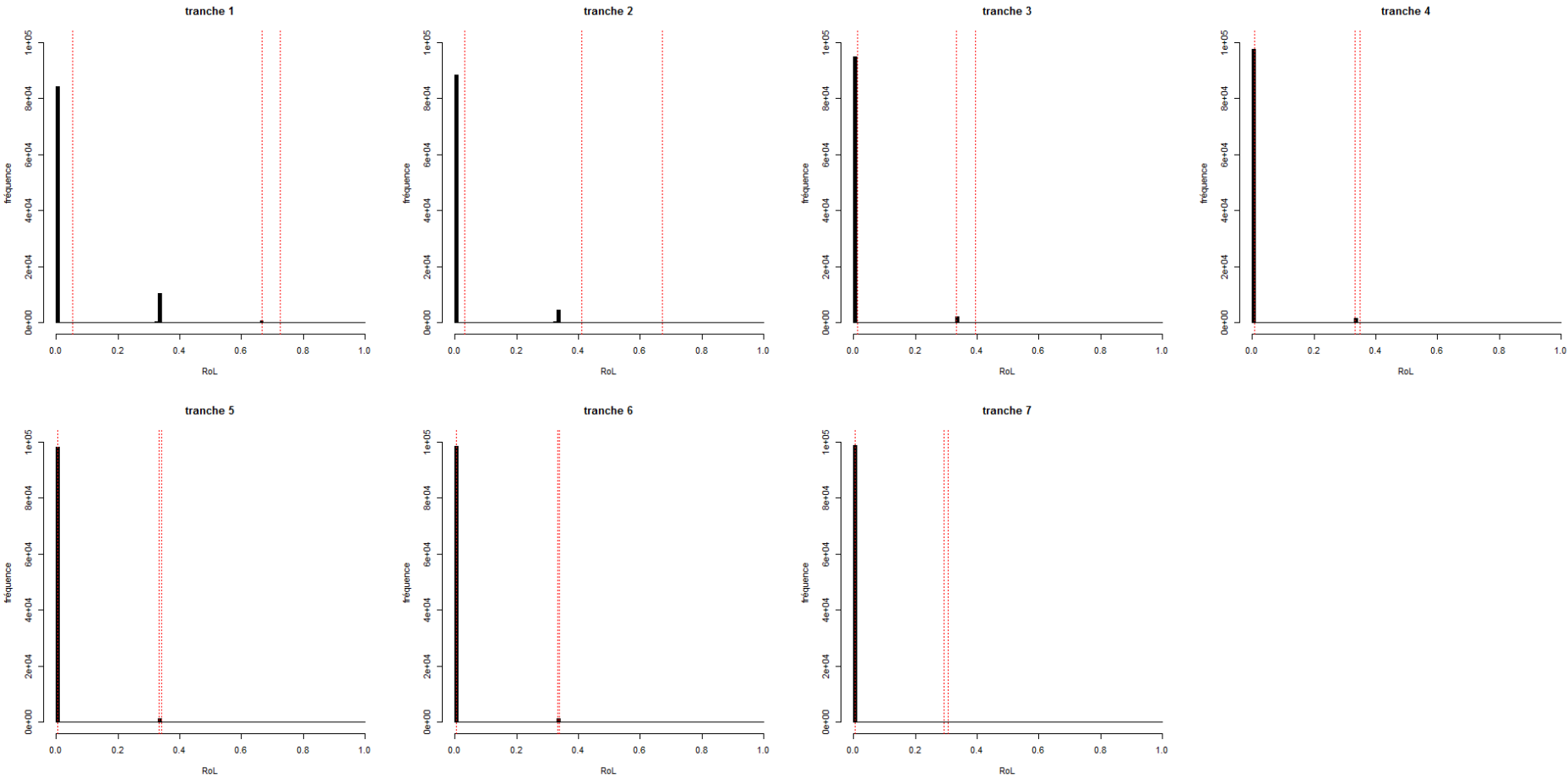
*Sensibilité à la franchise en nombre de têtes*

Distribution structure initiale (2 têtes)



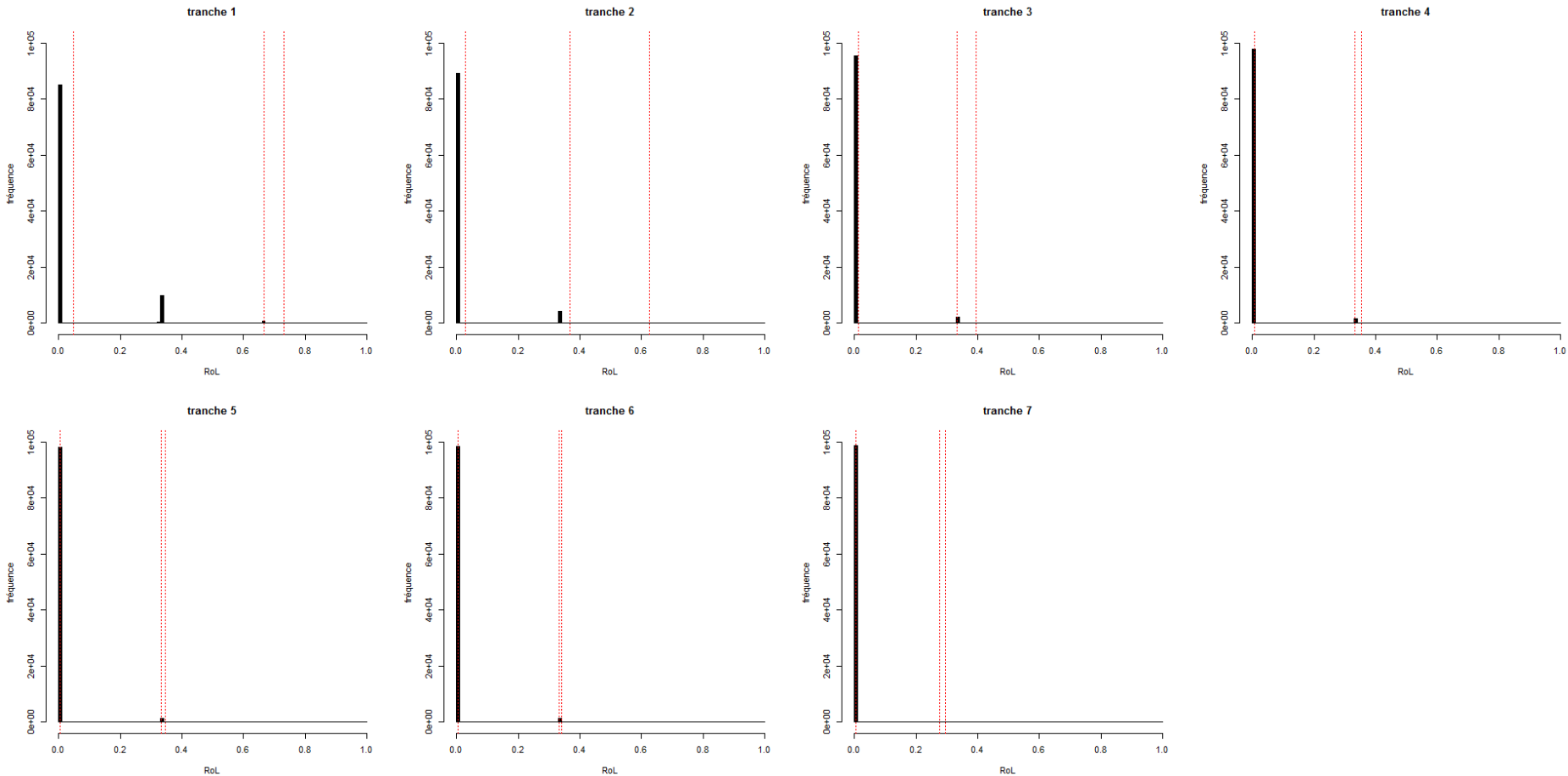
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 0 tête



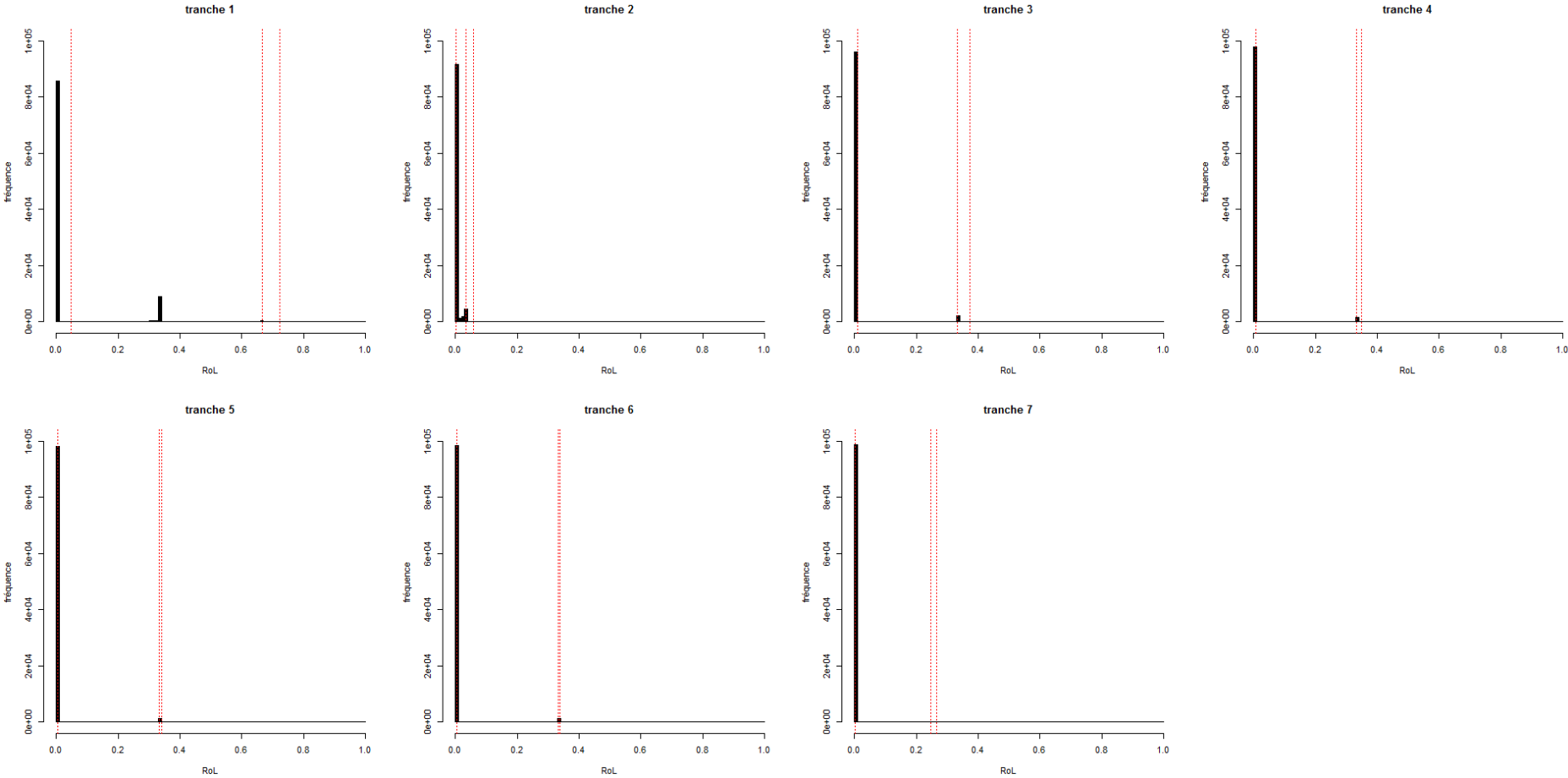
*Sensibilité à la franchise en nombre de têtes*

Franchise 1 tête



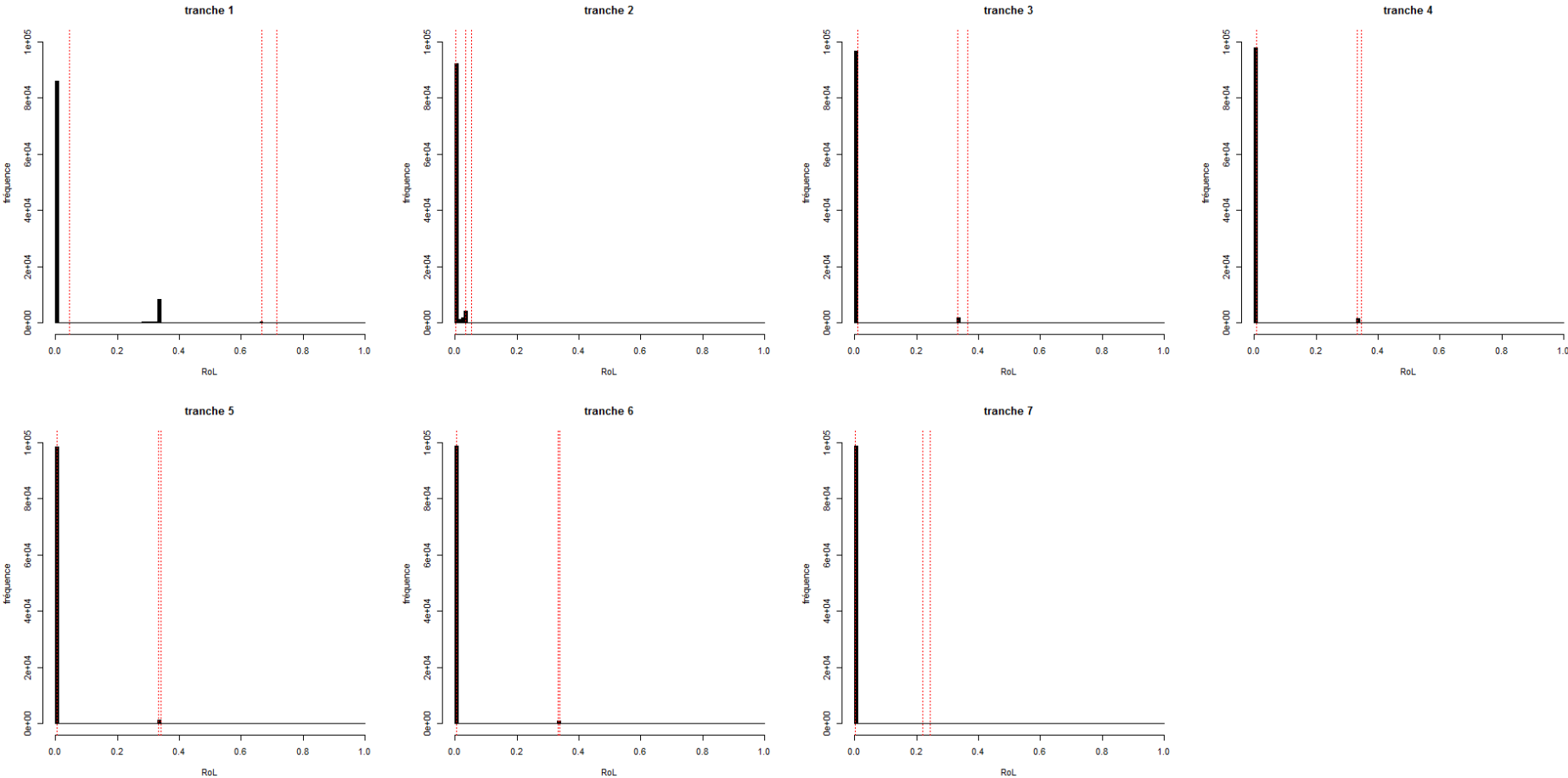
*Sensibilité à la franchise en nombre de têtes*

Franchise 3 têtes



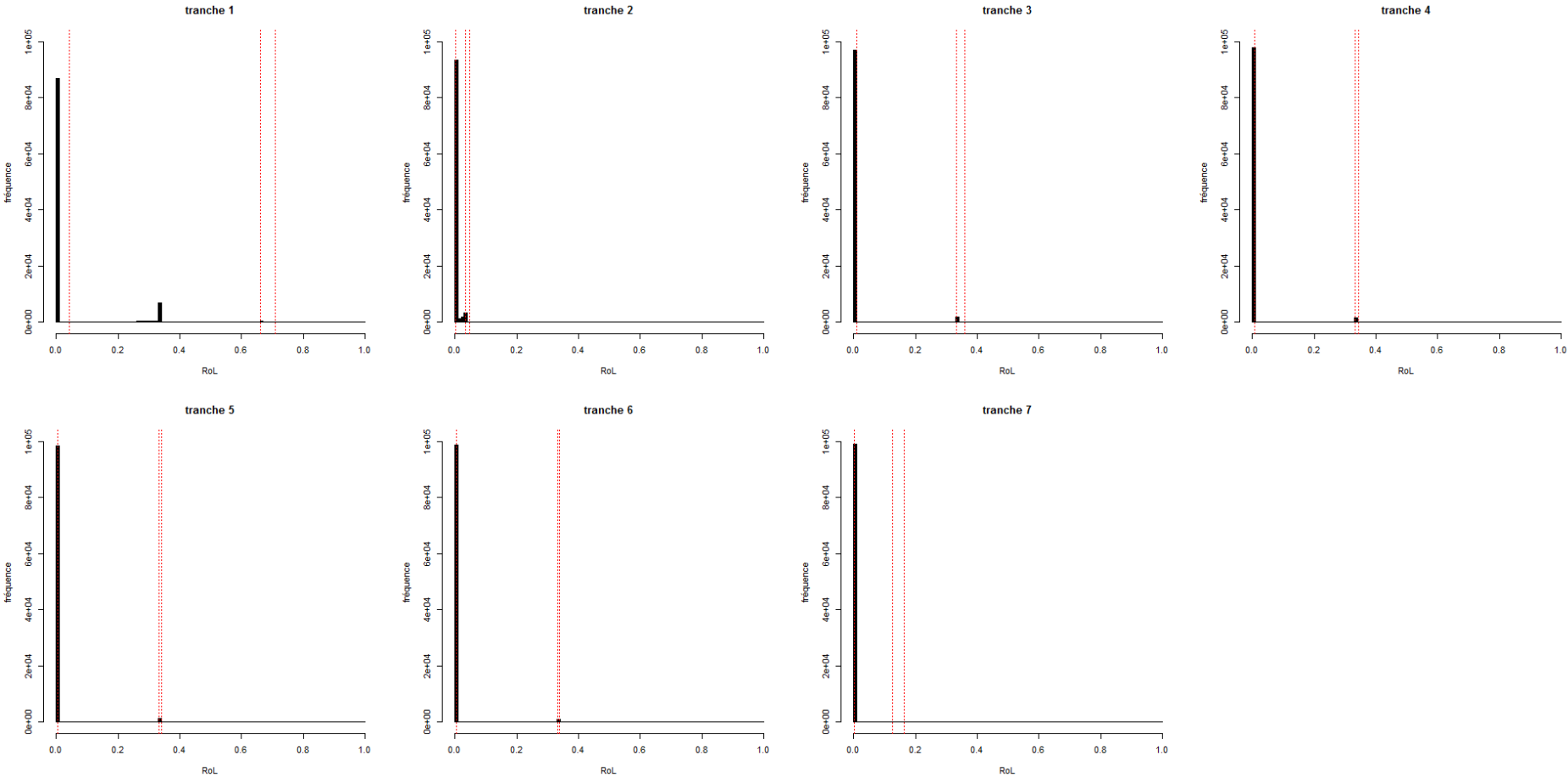
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 5 têtes



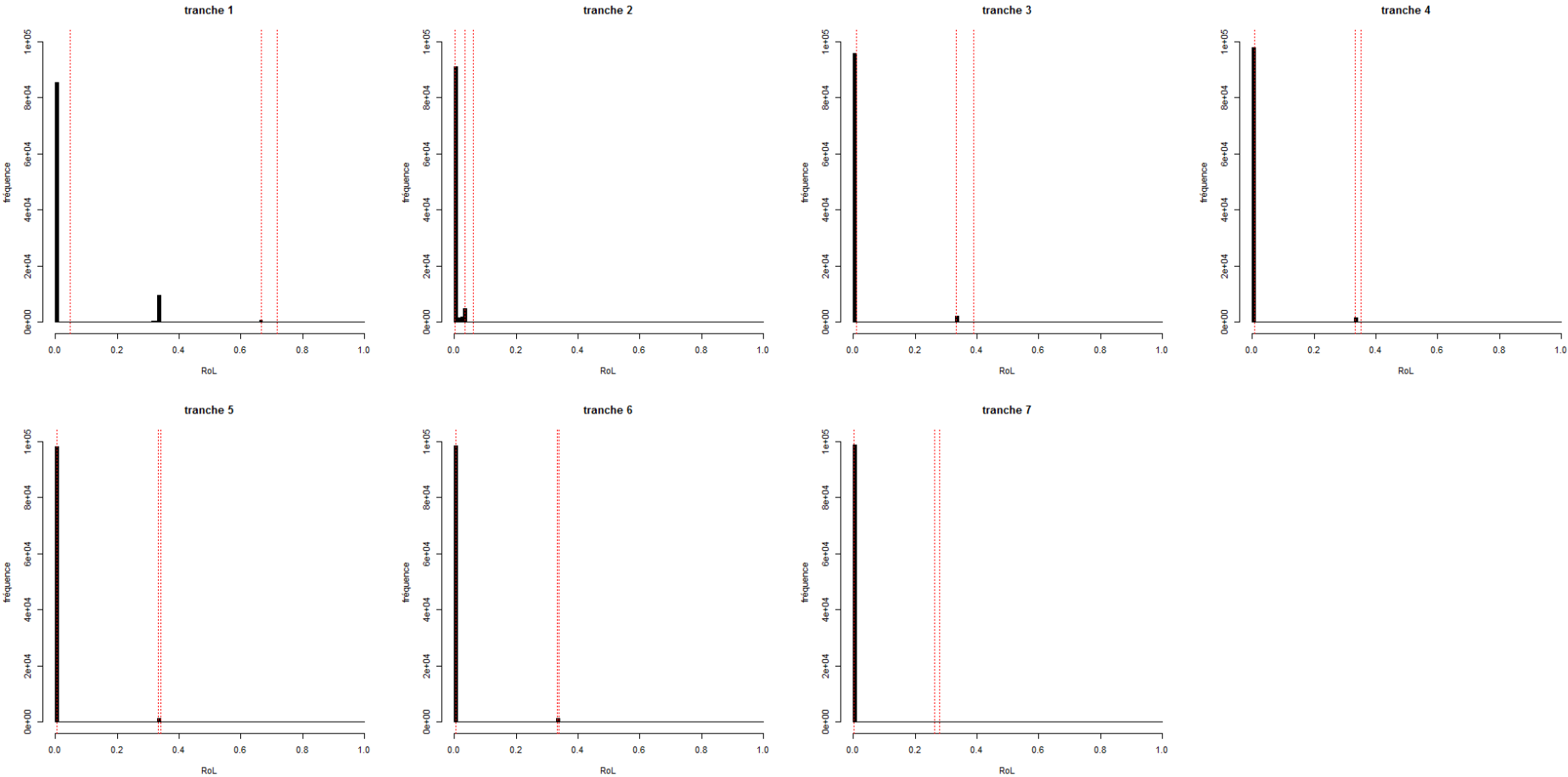
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 10 têtes



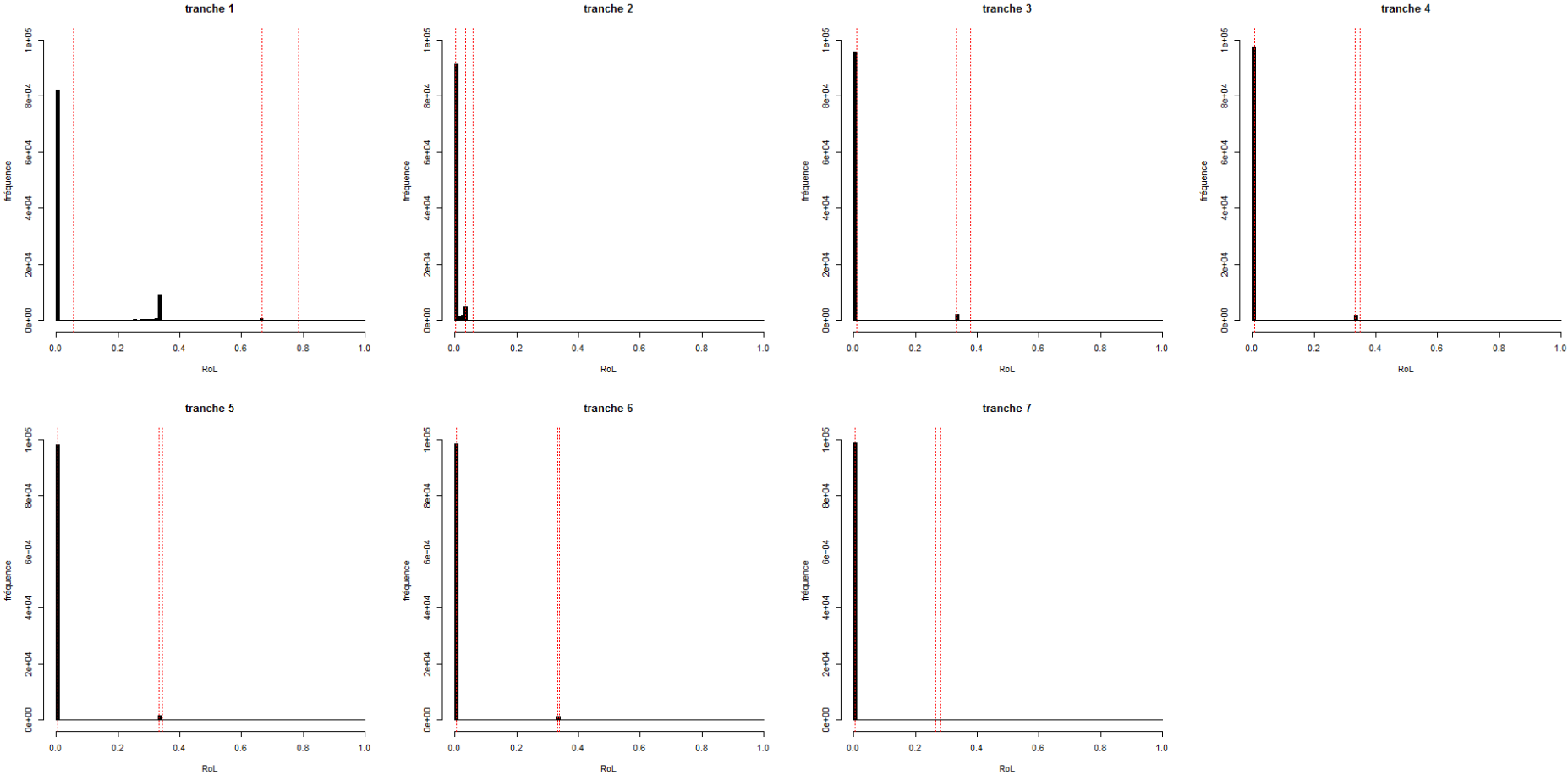
*Sensibilité à la structure des tranches*

Distribution structure initiale



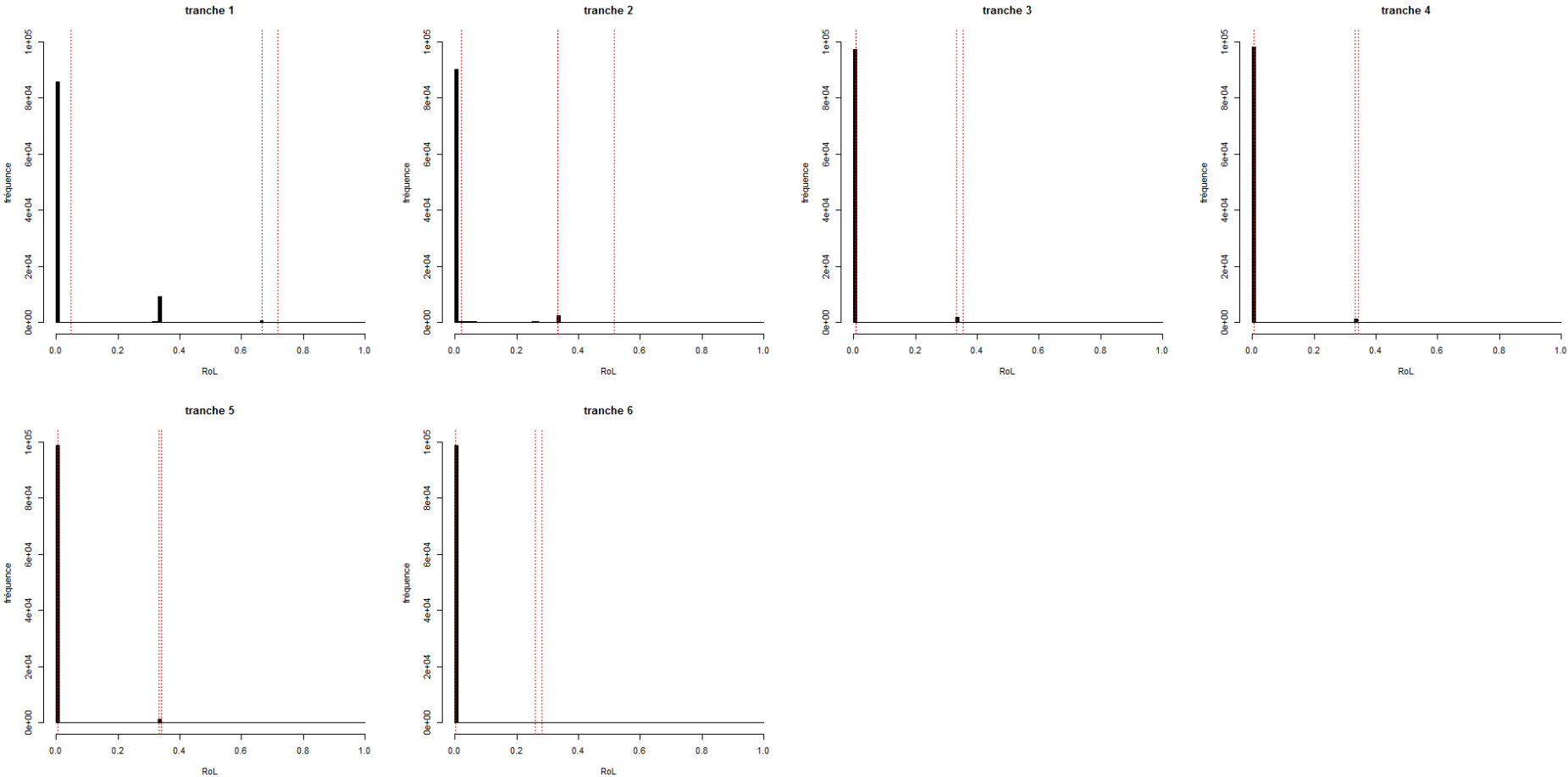
*Sensibilité à la structure des tranches*

Tranche 1 30XS20



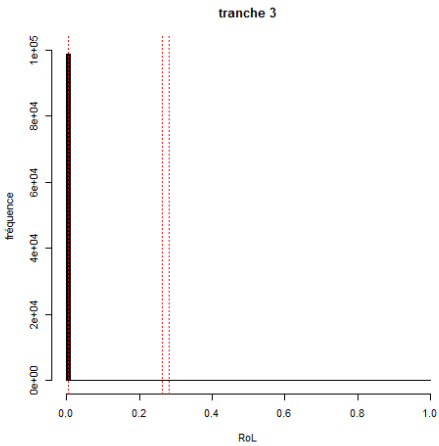
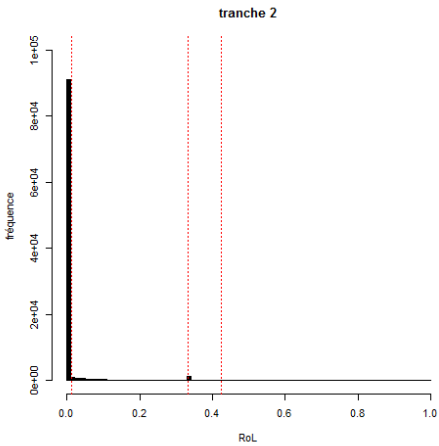
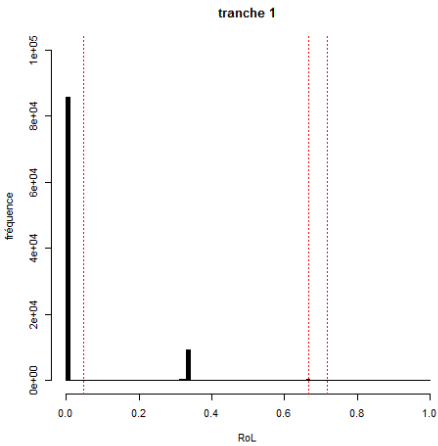
*Sensibilité à la structure des tranches*

Recomposition des tranches



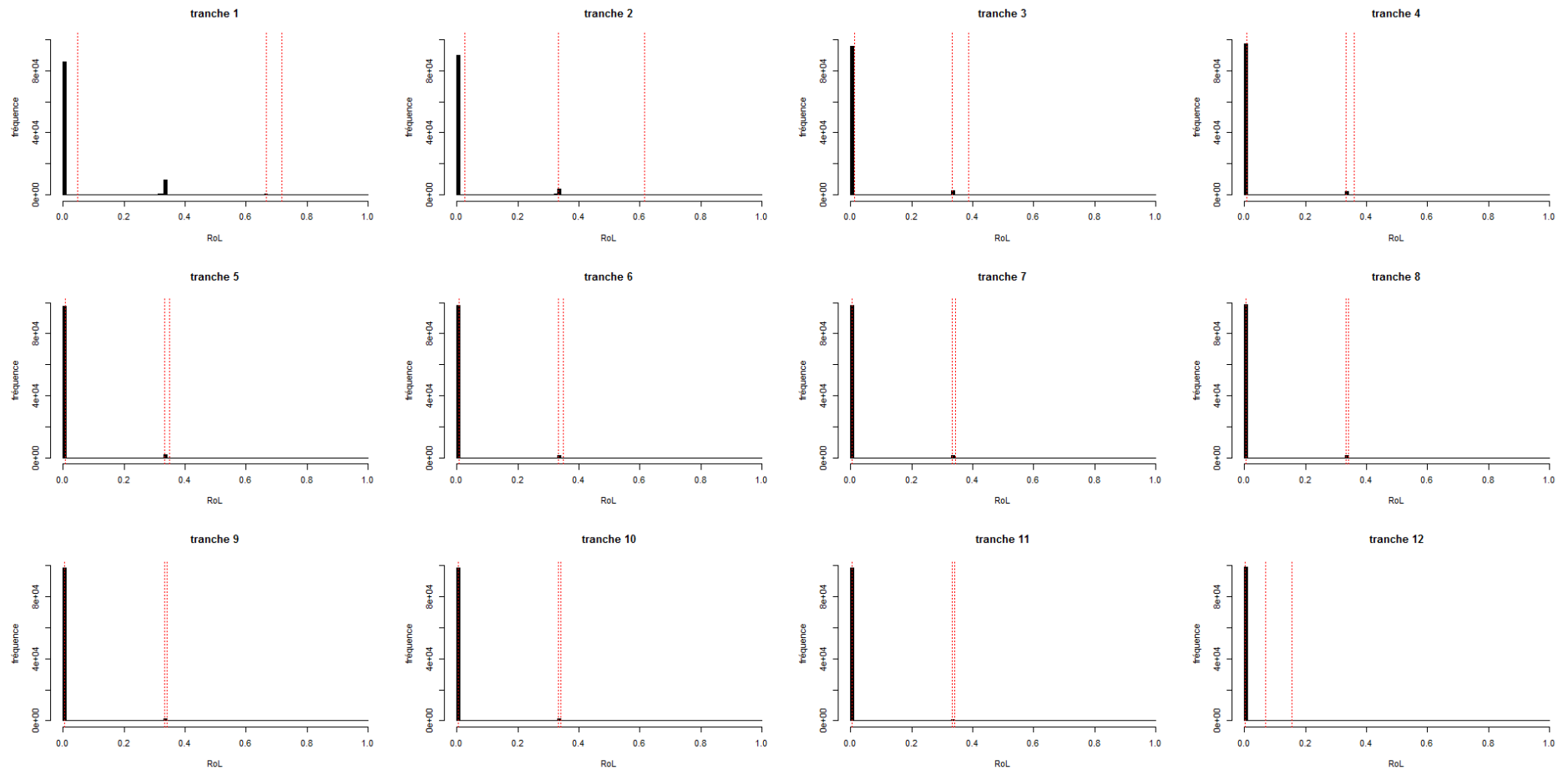
*Sensibilité à la structure des tranches*

Fusion des tranches obligatoires



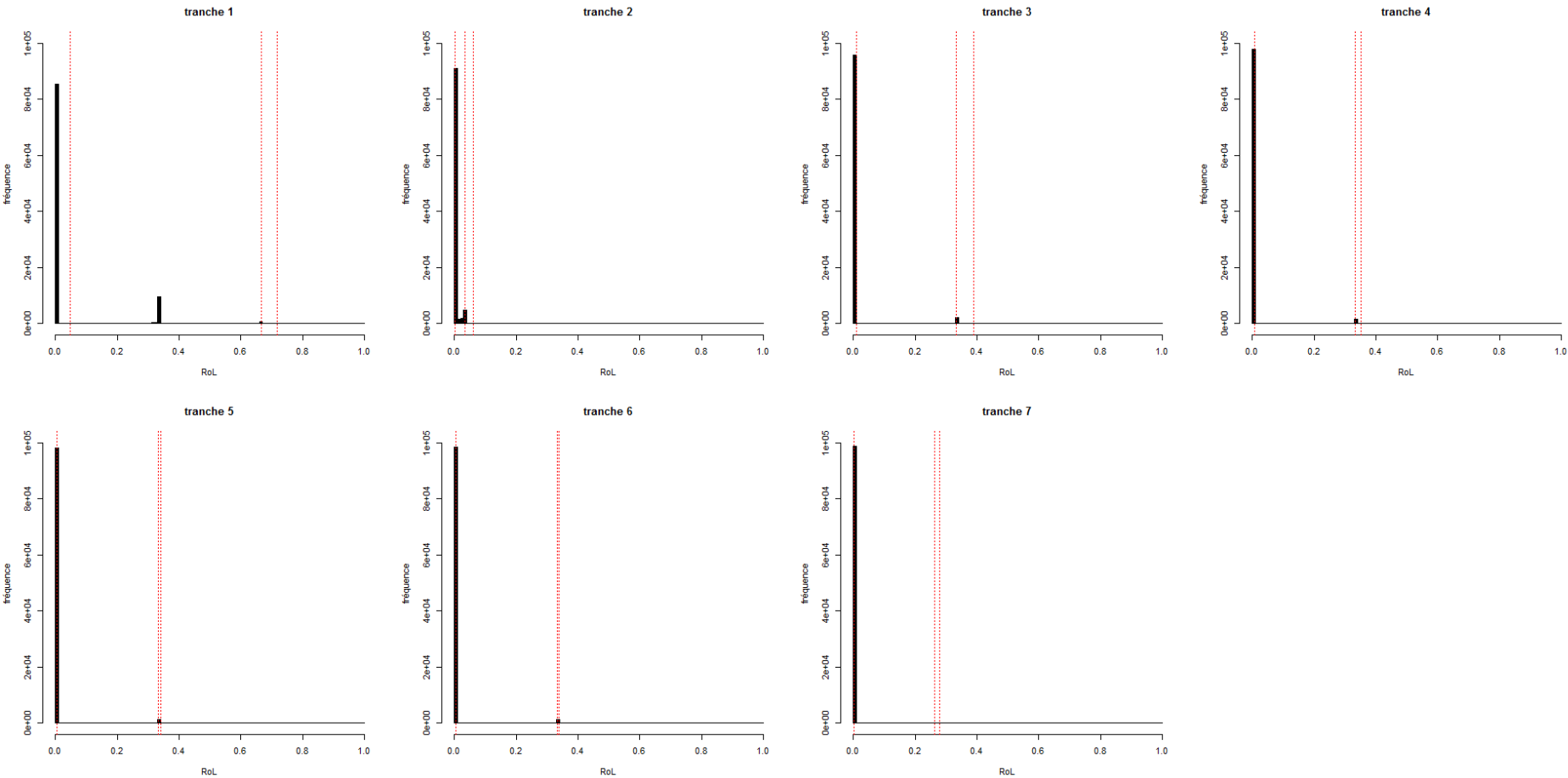
## Sensibilité à la structure des tranches

### Tranches à 50M



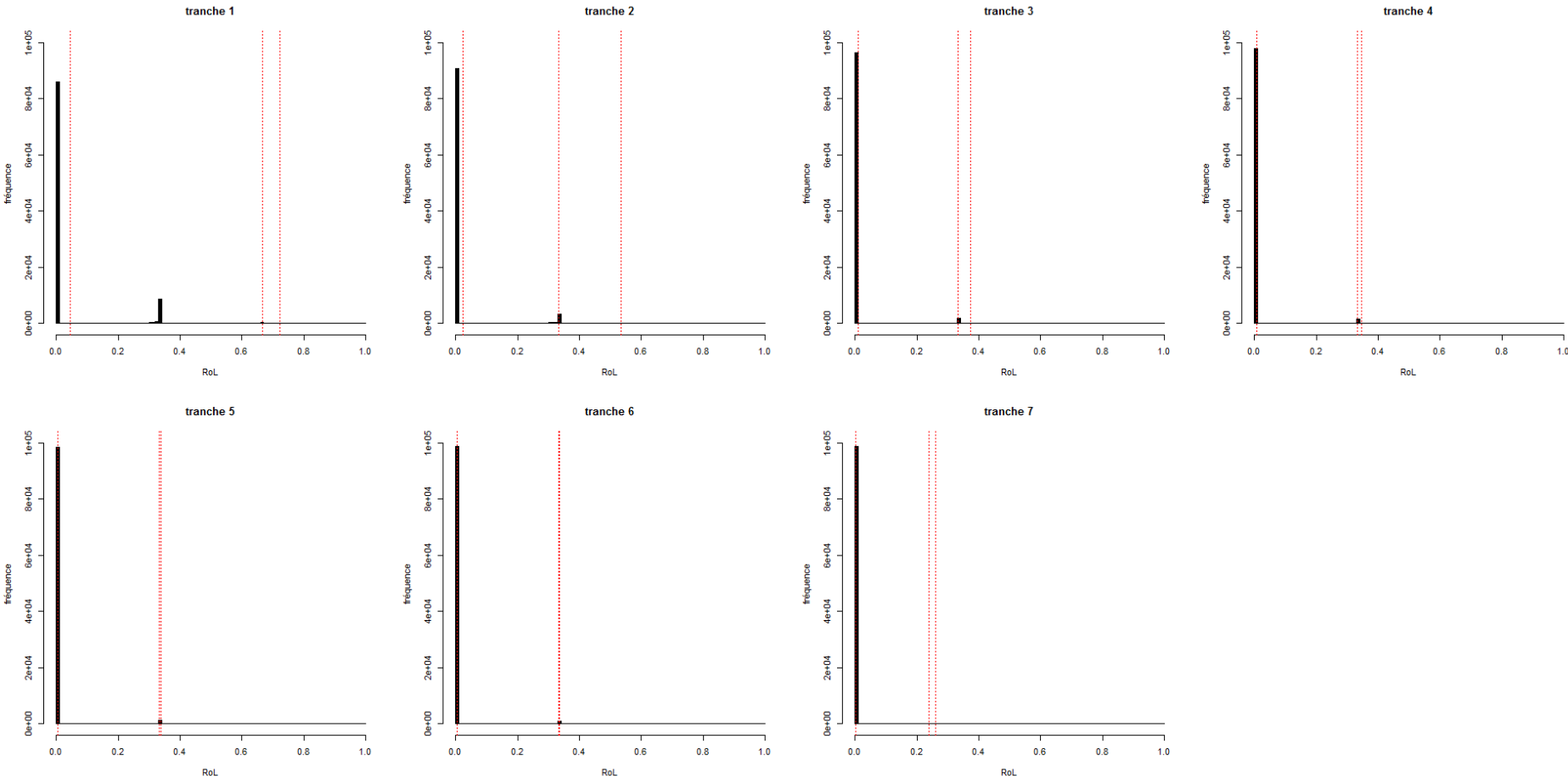
*Sensibilité à la diversification (nombre de membres, équipondération des parts) du Pool*

Distribution structure initiale (16 assureurs membres du Pool)



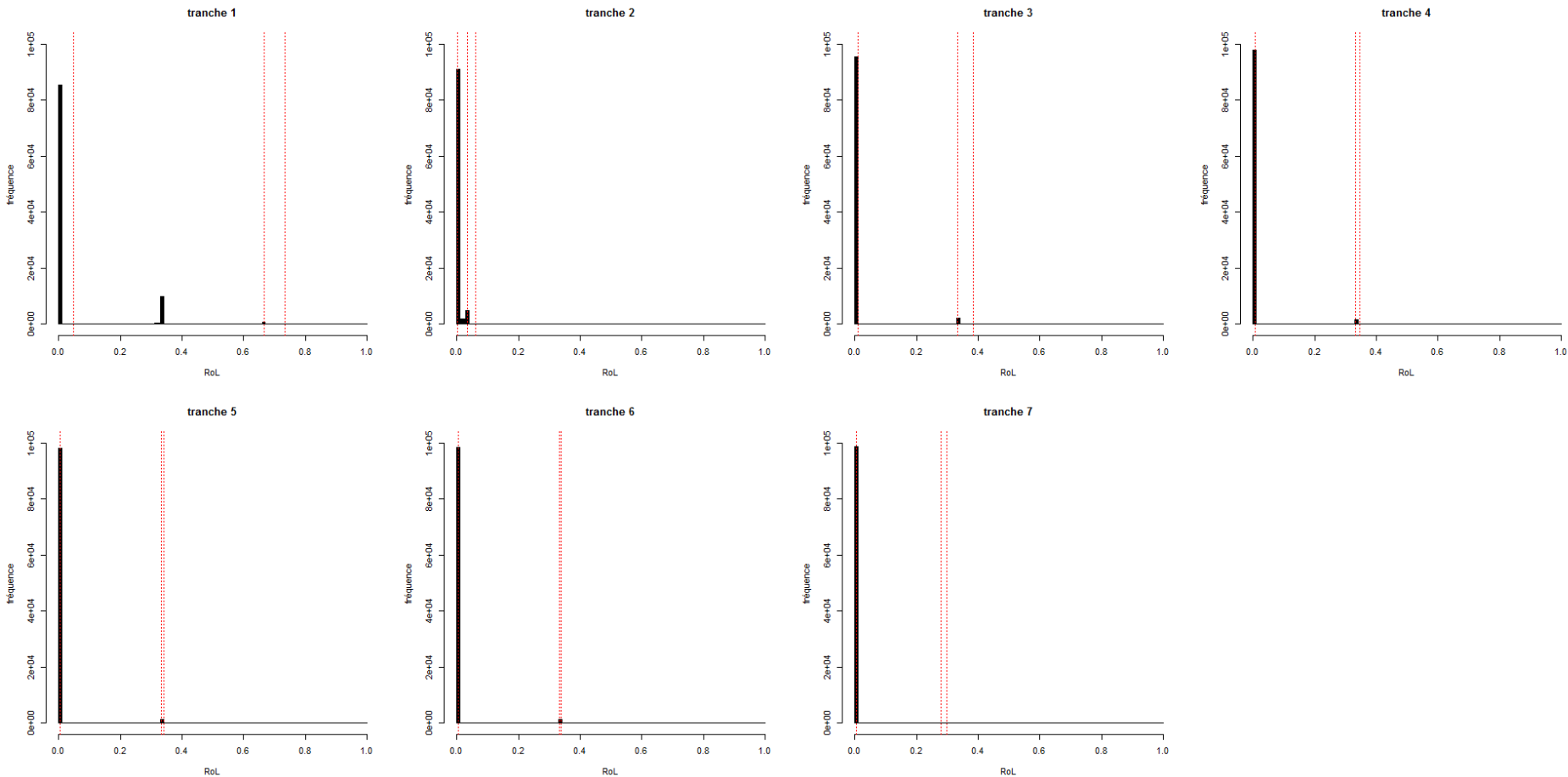
*Sensibilité à la diversification (nombre de membres, équipondération des parts) du Pool*

20 assureurs équipondérés



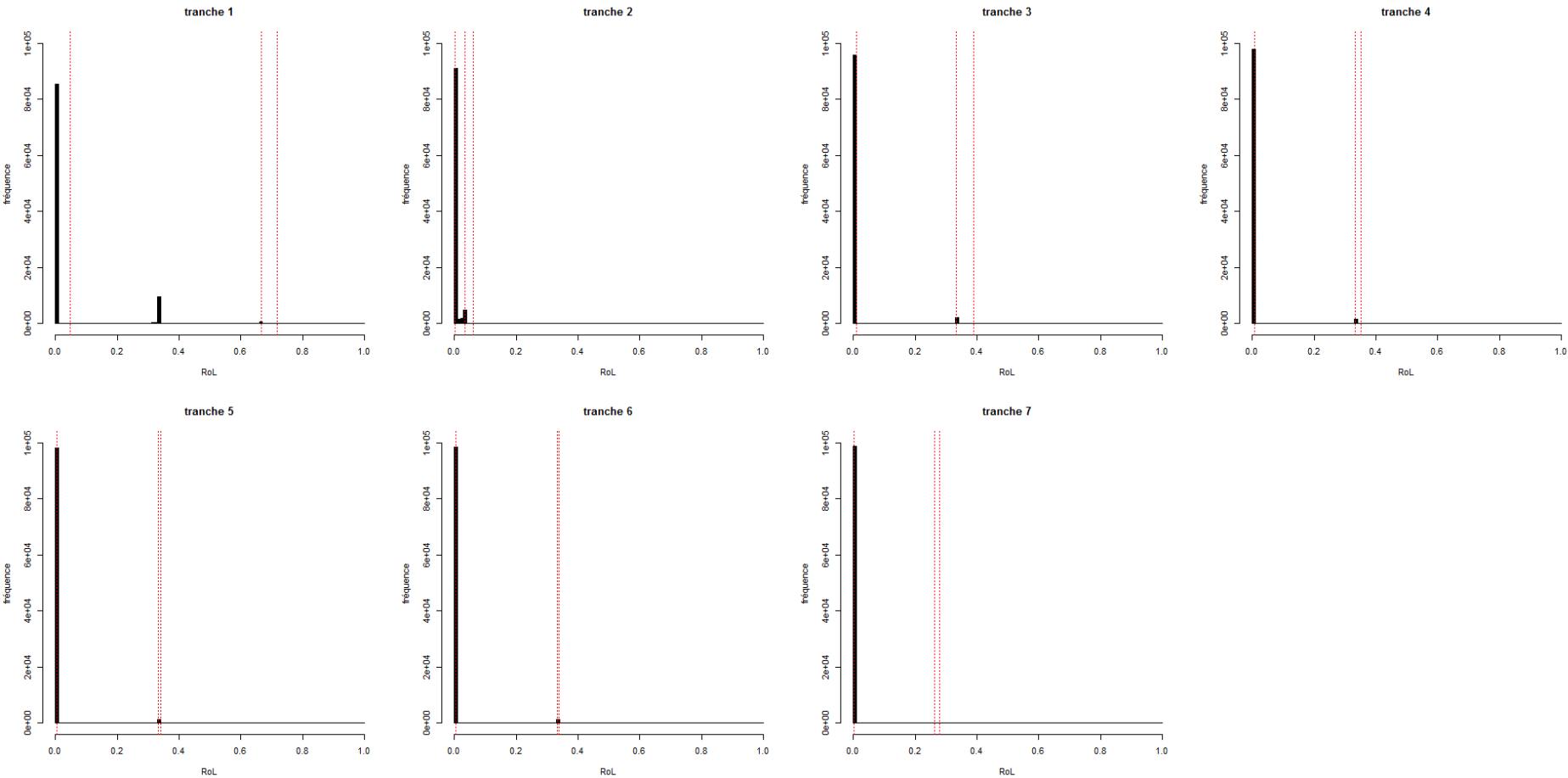
*Sensibilité à la diversification (nombre de membres, équipondération des parts) du Pool*

3 assureurs équipondérés



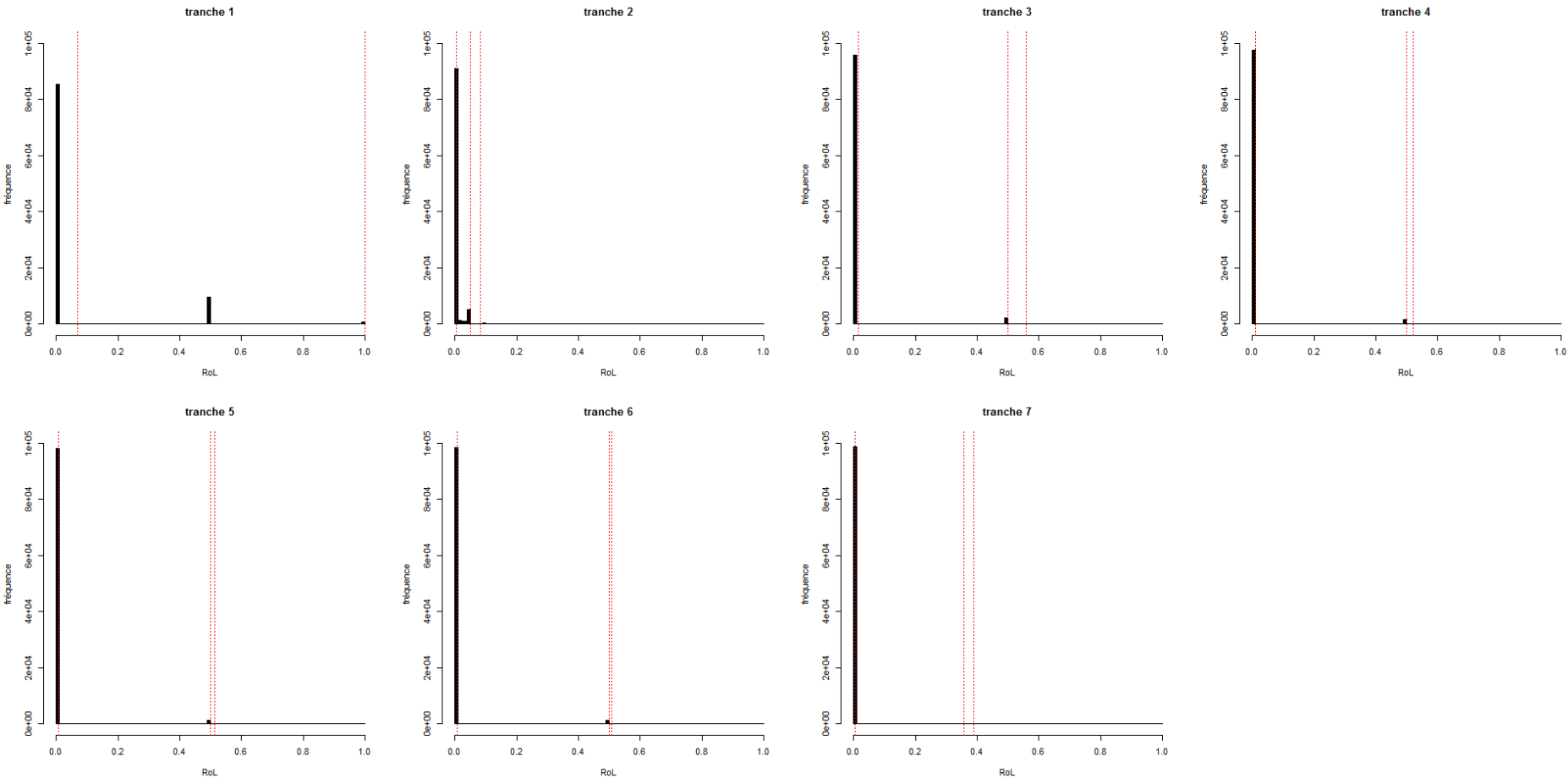
Sensibilité à la structure de(s) reconstitution(s)

Distribution structure initiale

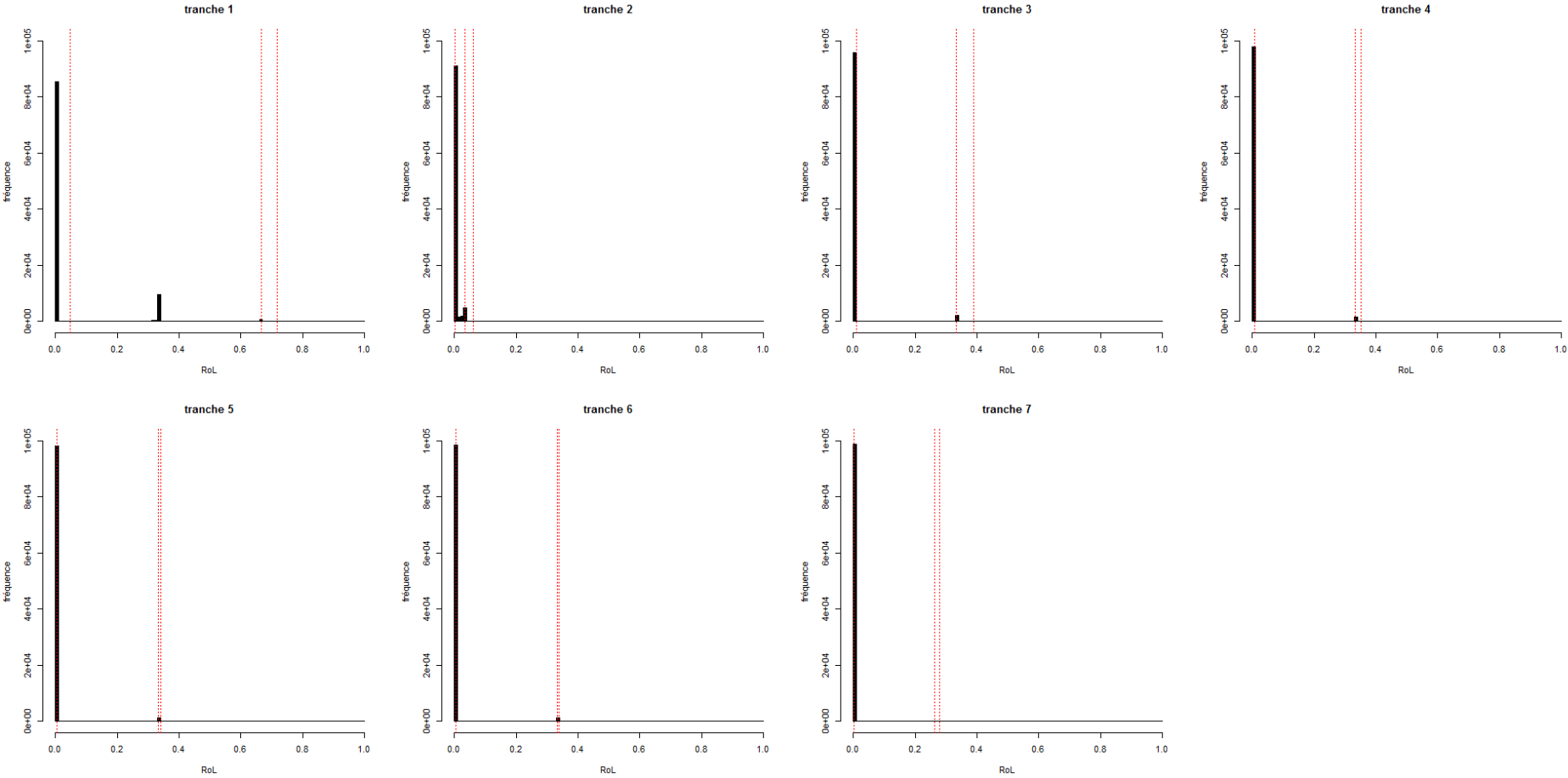


*Sensibilité à la structure de(s) reconstitution(s)*

Reconstitution 100%

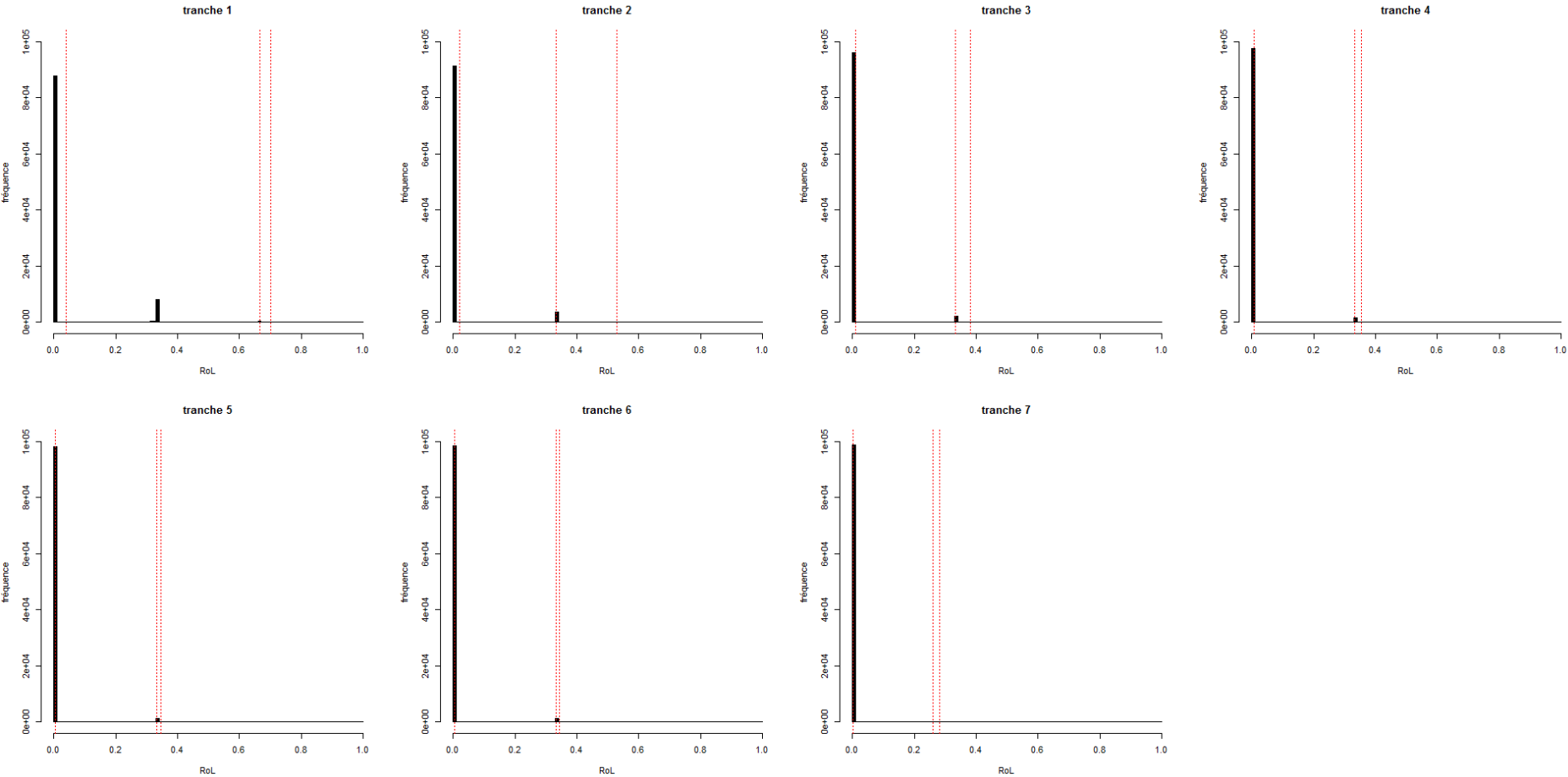


Distribution structure initiale



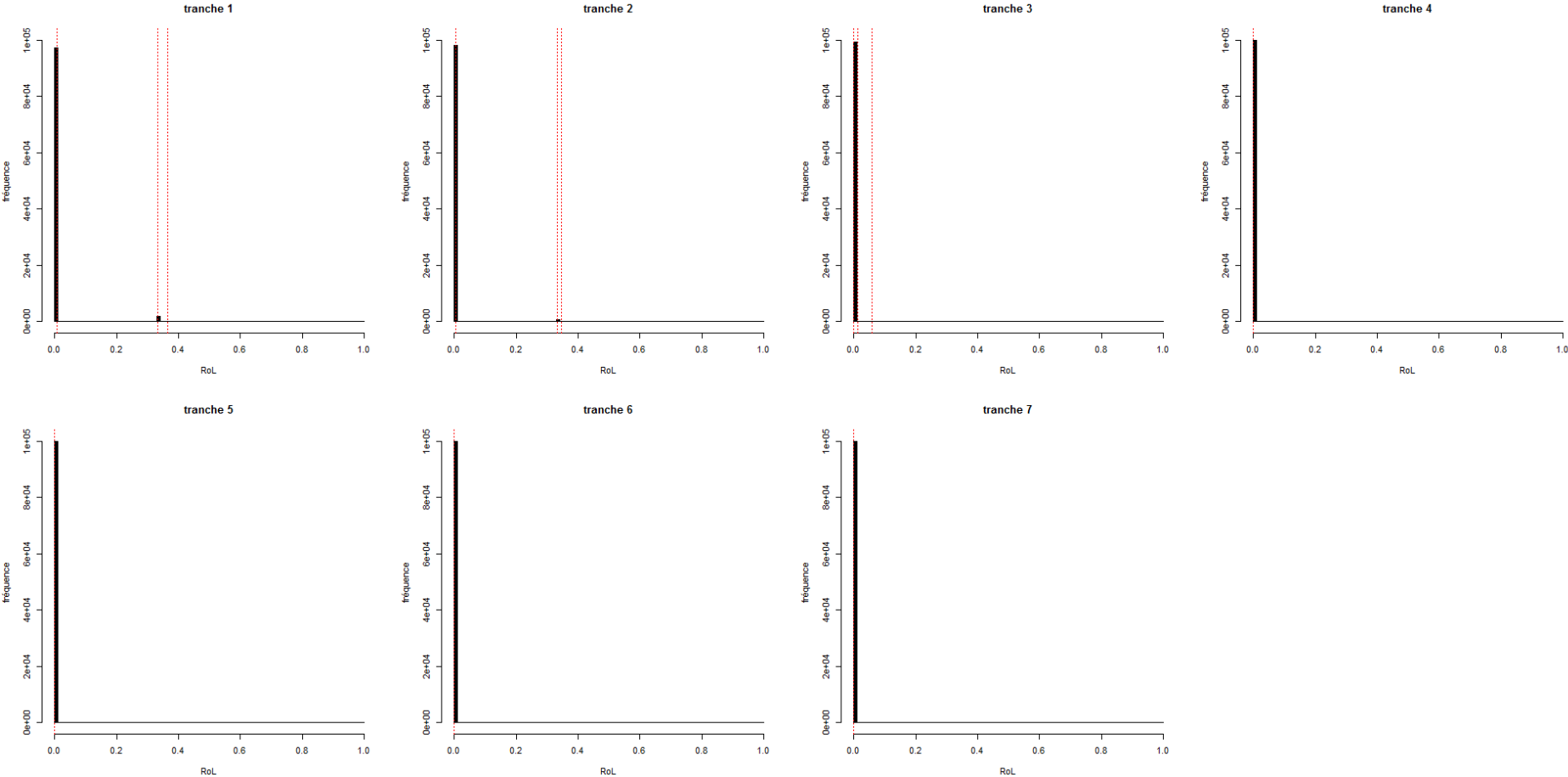
Dissociation des risques

EM-DAT

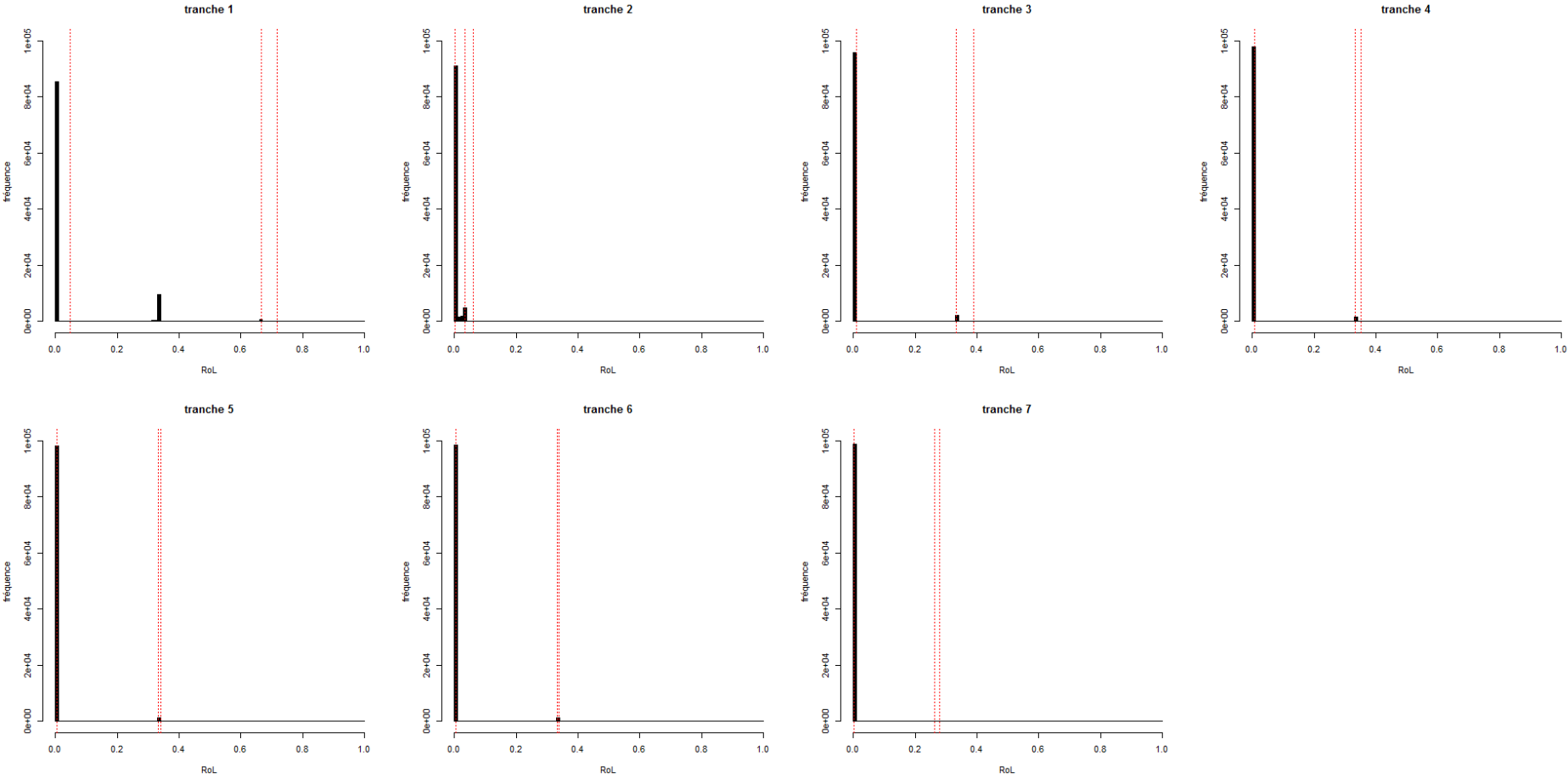


Dissociation des risques

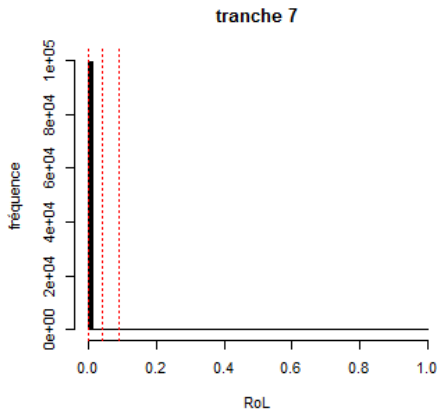
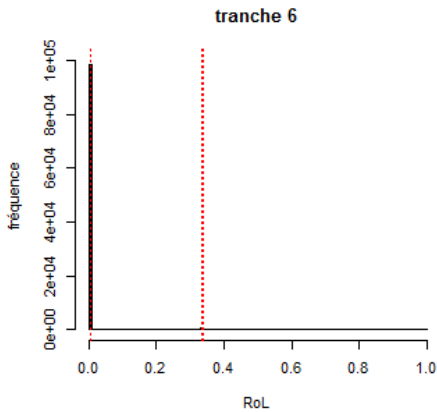
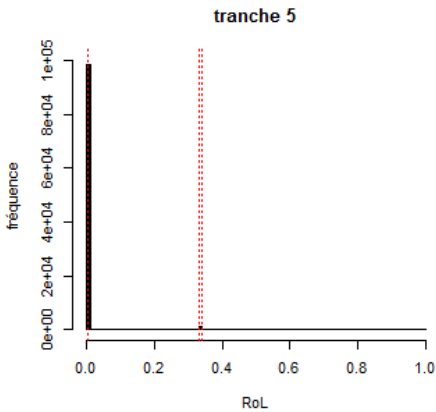
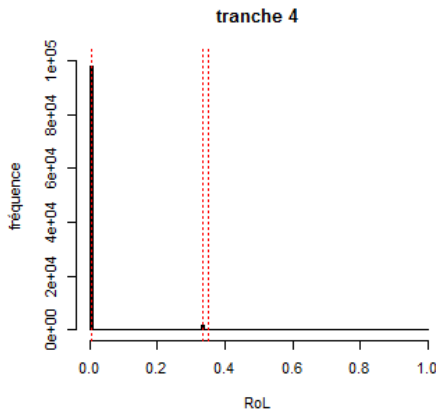
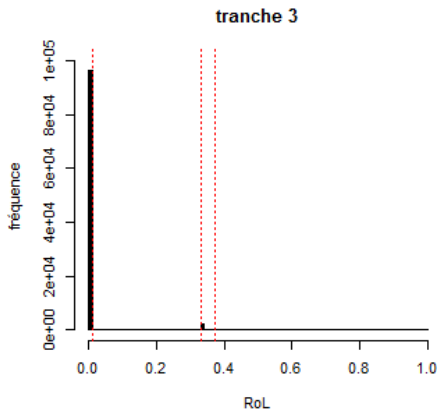
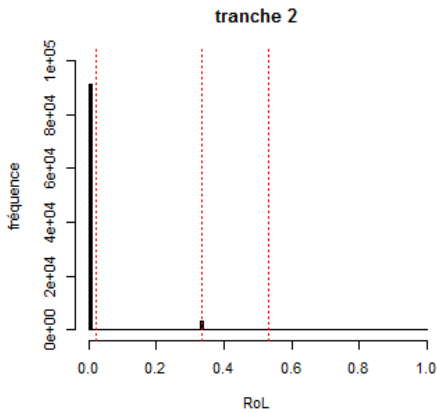
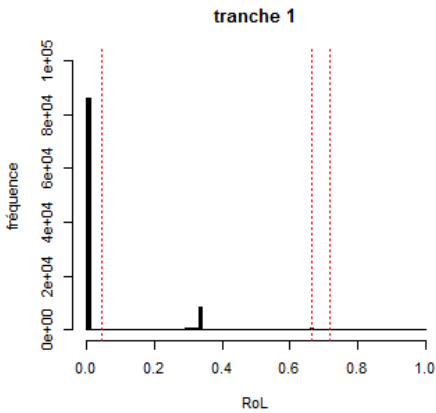
GTD



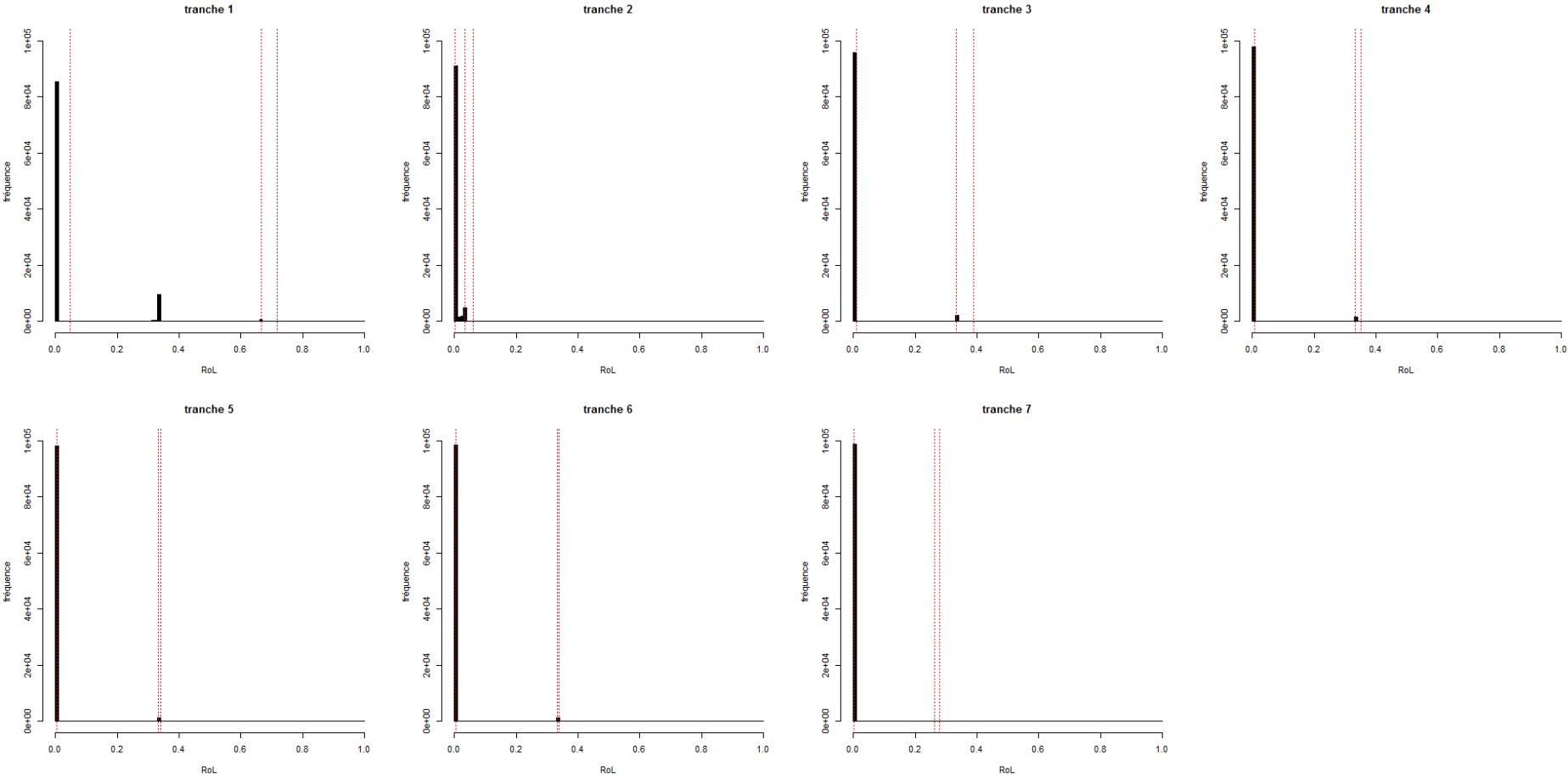
Distribution structure initiale



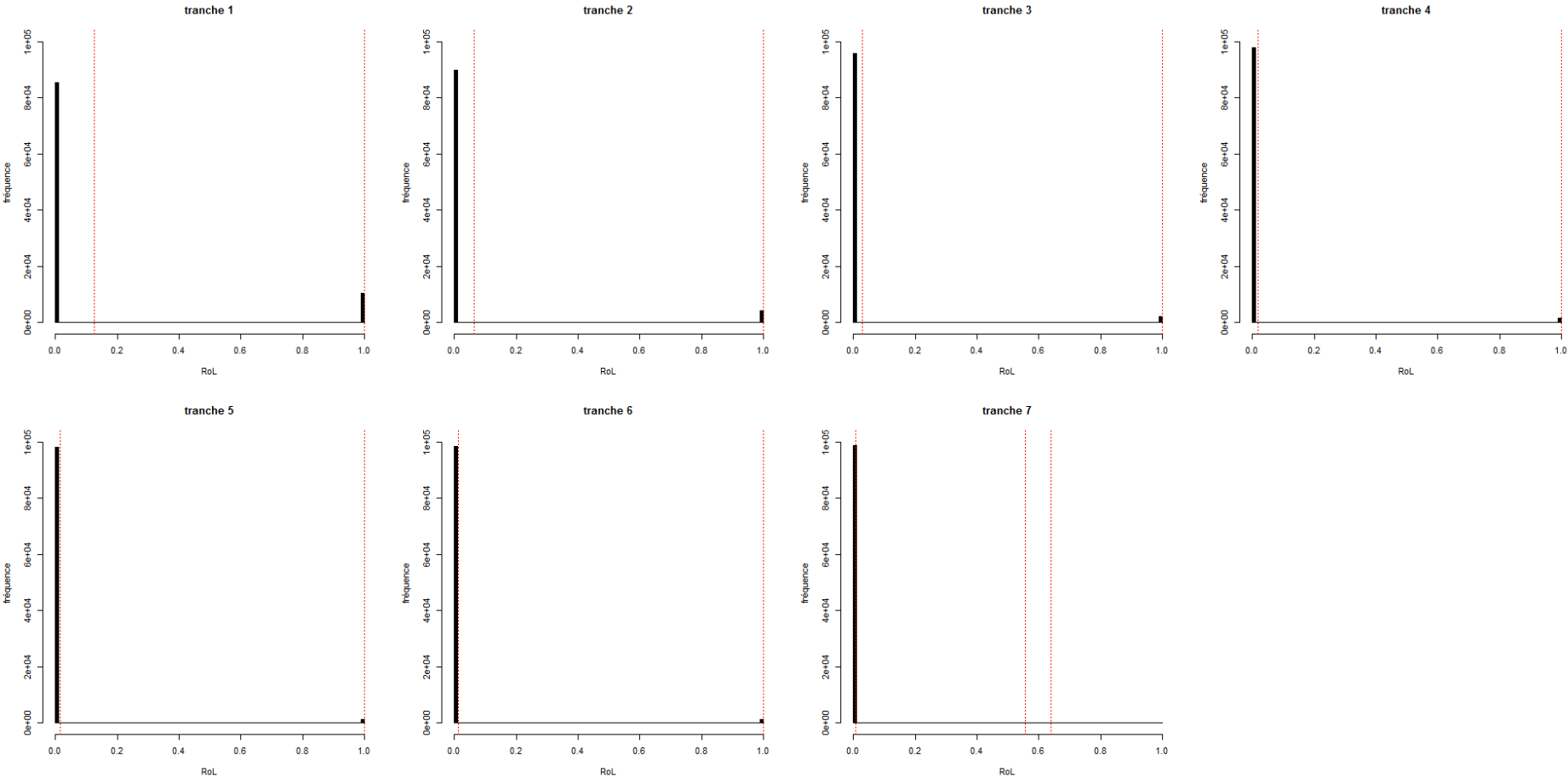
Risque Décès uniquement



Distribution structure initiale



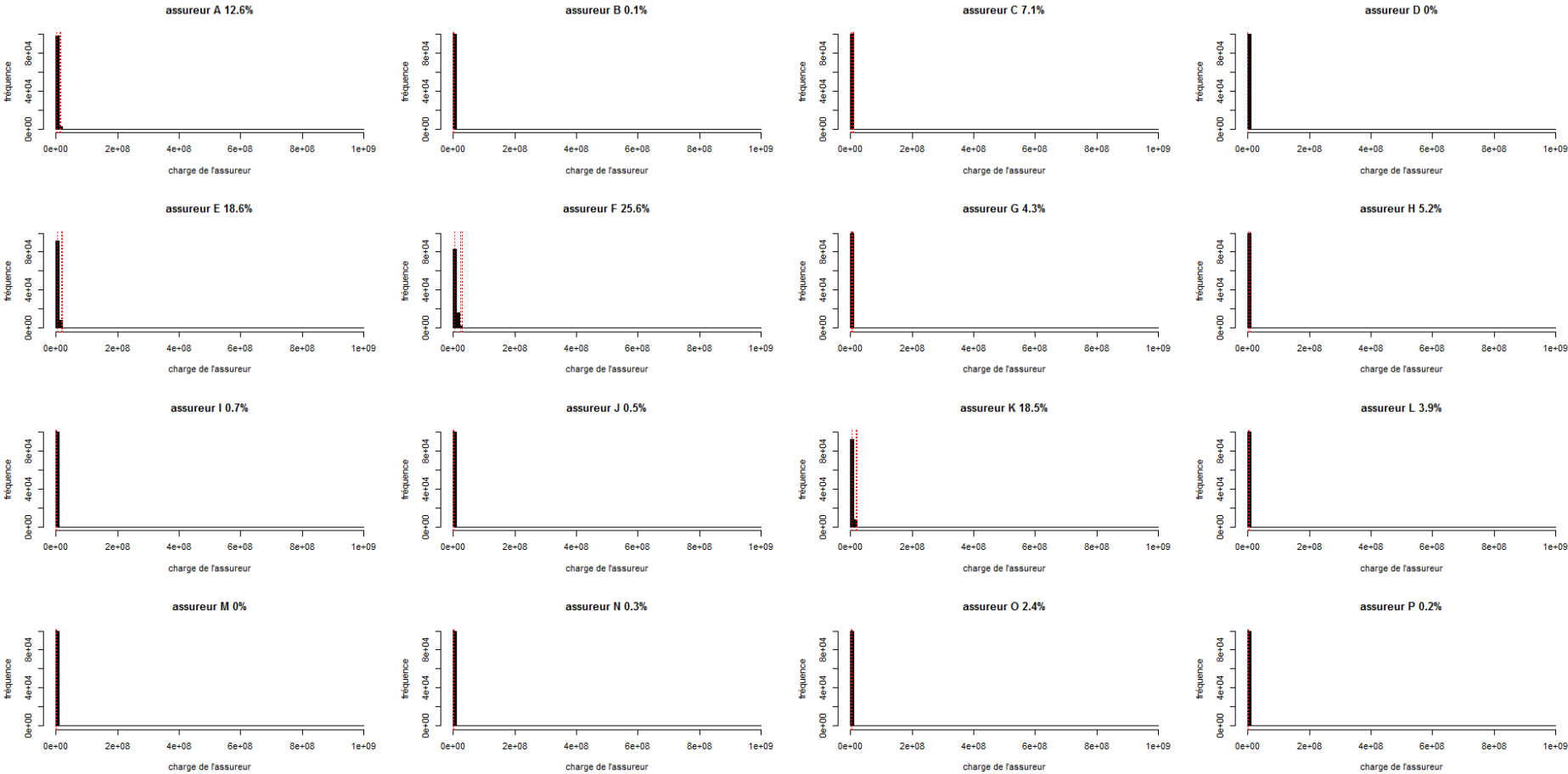
Structure « TopTop »



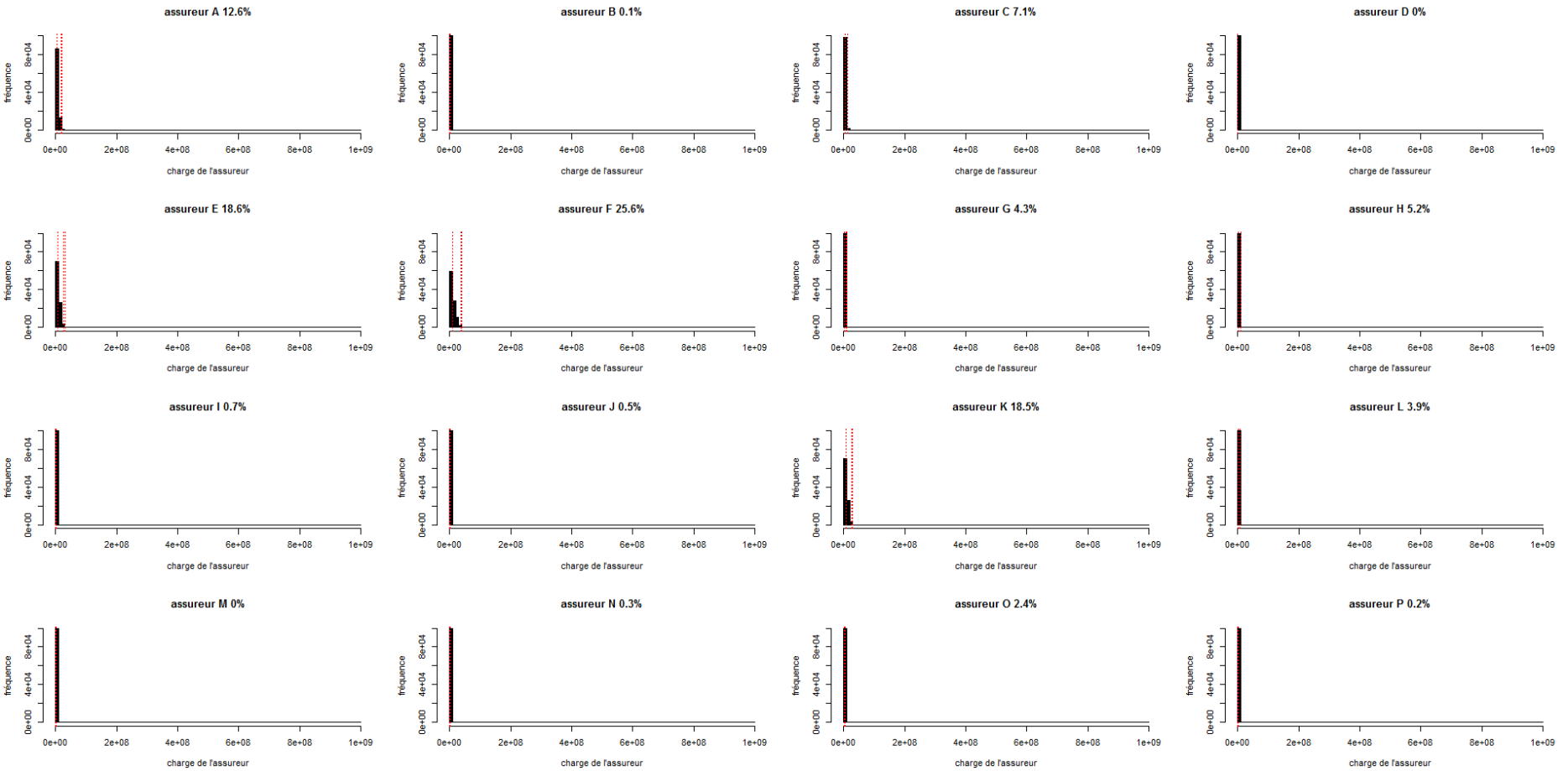
ANNEXE 7 : IMPACT SUR LES CAPITAL DES ASSUREURS MEMBRES DU POOL

Sensibilité à la durée du traité

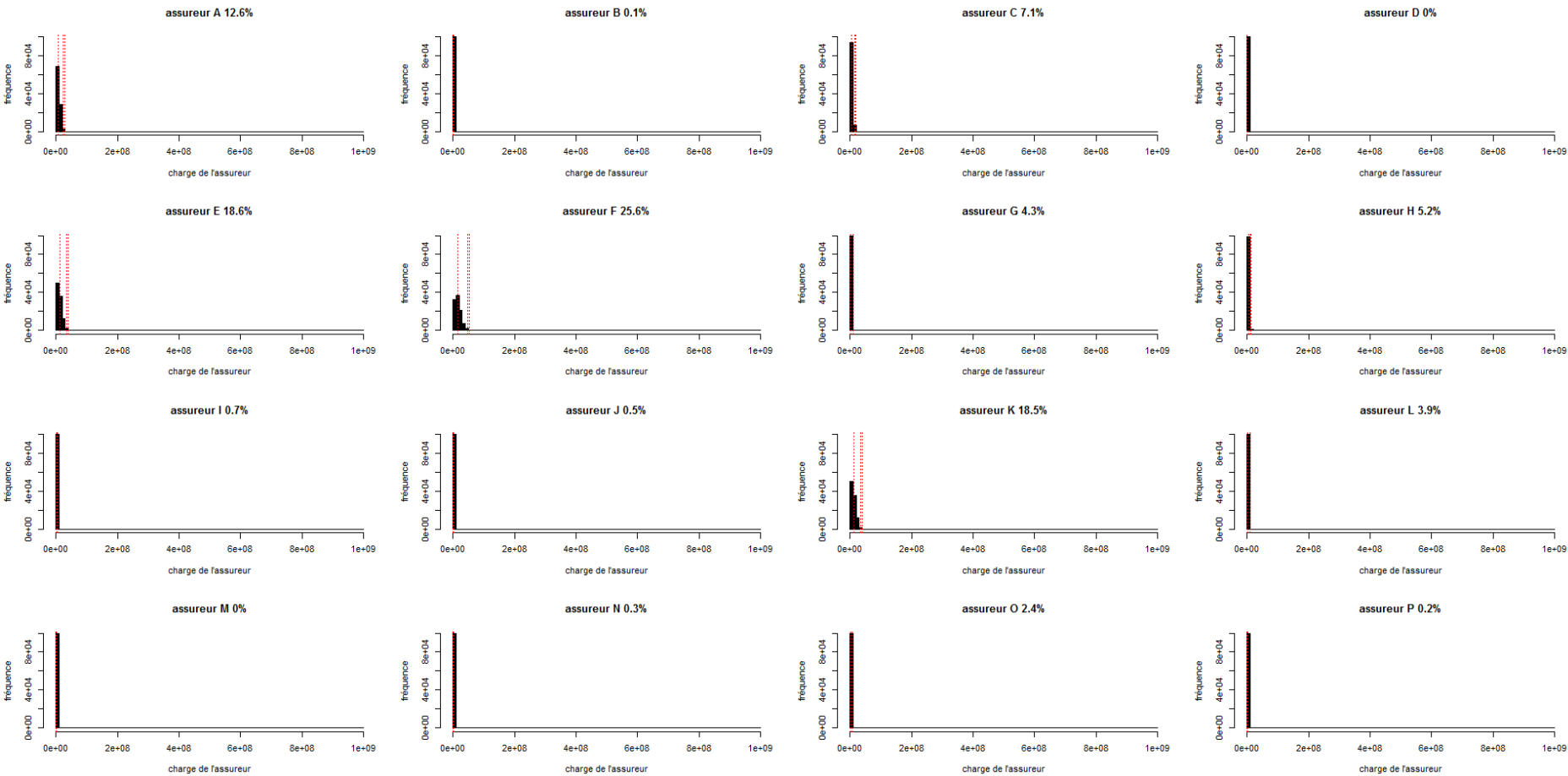
Distribution des charges par assureur (durée du contrat 1 an)



Distribution des charges par assureur (durée du contrat 2 ans)

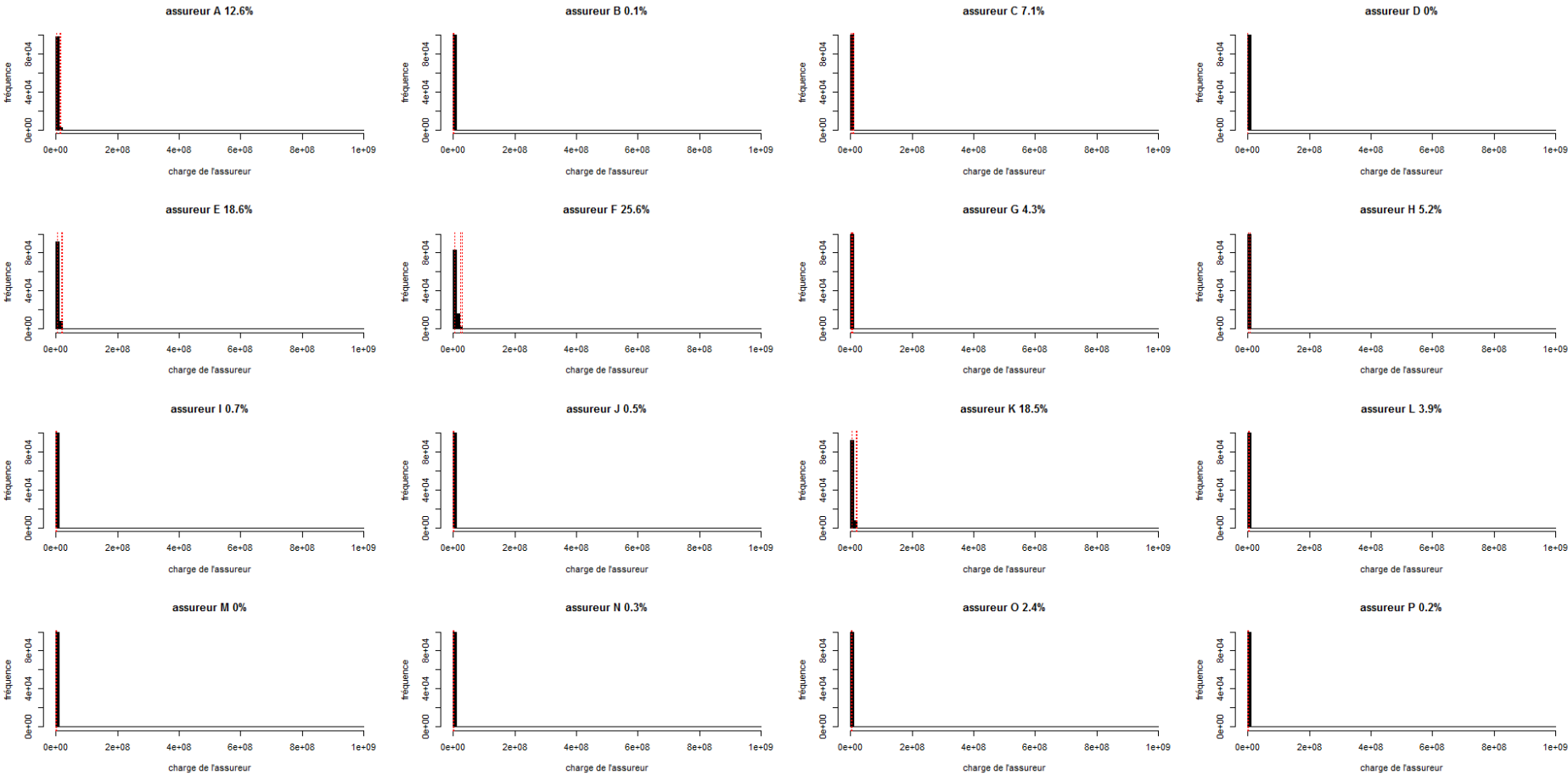


Distribution des charges par assureur (durée du contrat 3 ans)



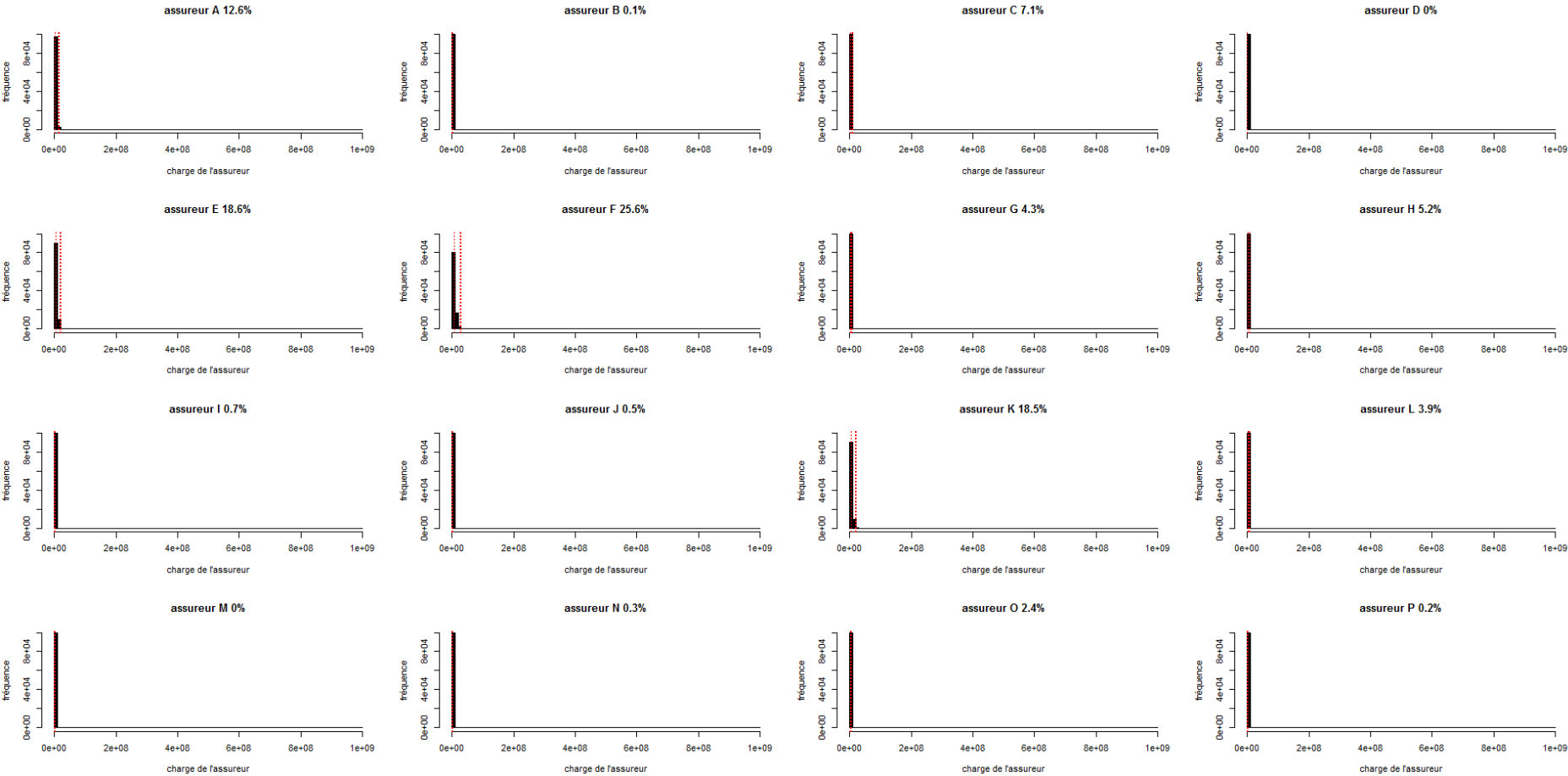
Sensibilité à la fréquence de la sinistralité (Loi Binomiale Négative)

Charge des assureurs structure initiale



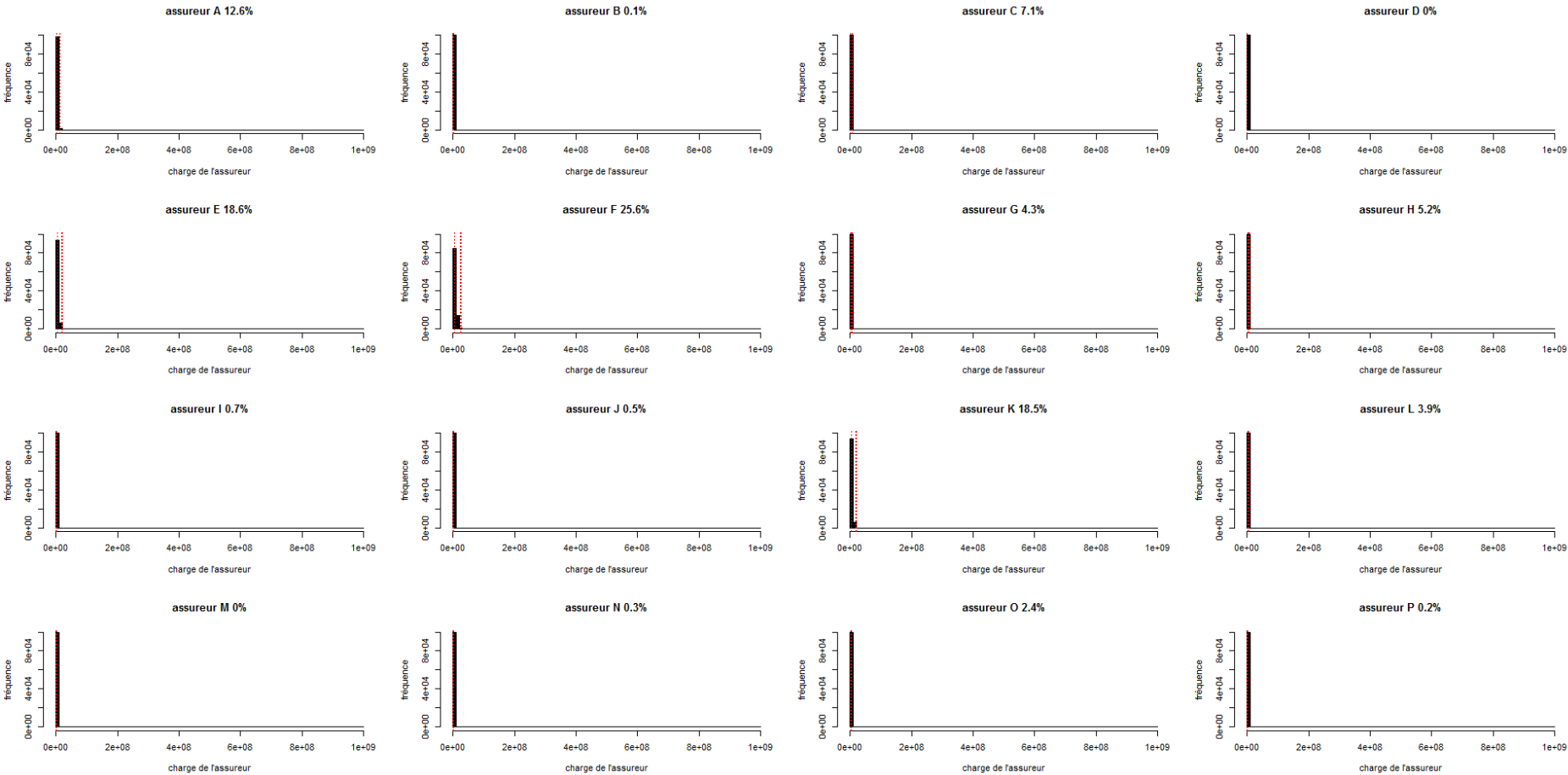
Sensibilité à la fréquence de la sinistralité (Loi Binomiale Négative)

Augmentation de la fréquence de sinistralité de 10%



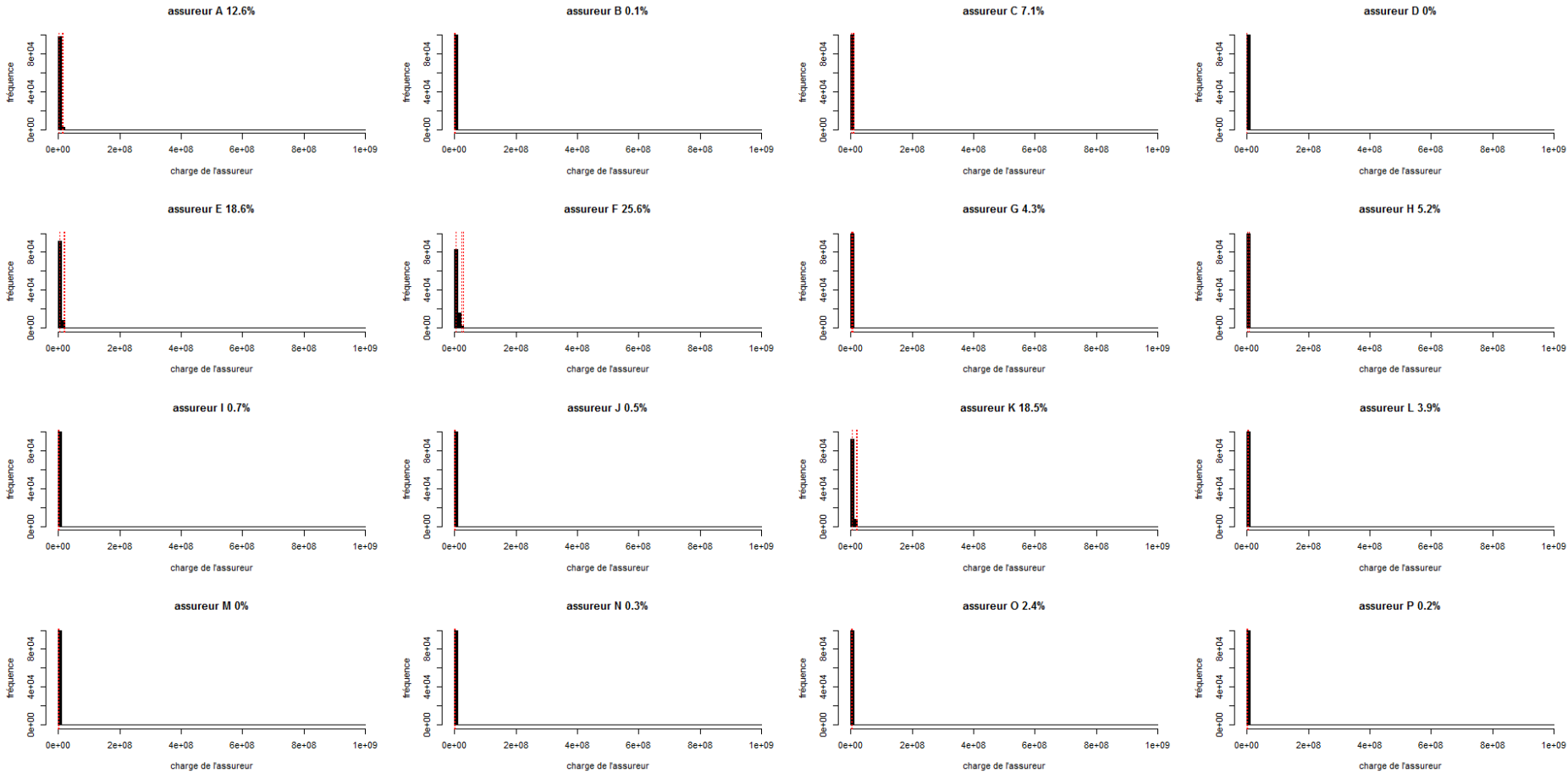
*Sensibilité à la fréquence de la sinistralité (Loi Binomiale Négative)*

Diminution de la fréquence de sinistralité de 10%



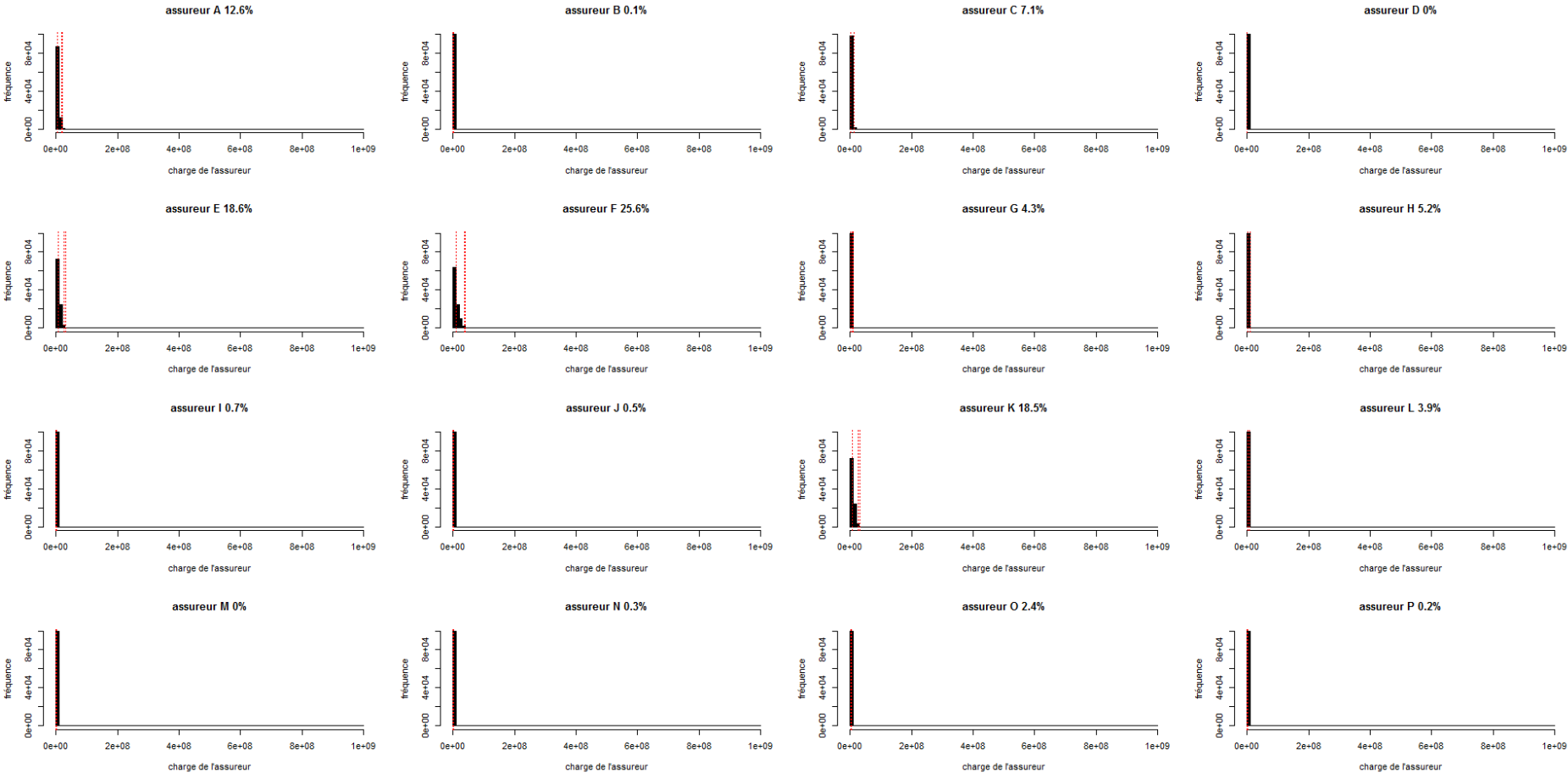
*Sensibilité au nombre de victimes par sinistre (Loi Zêta)*

Distribution structure initiale (Zêta(CAT)=1.60 / zêta(TER)=1.80)



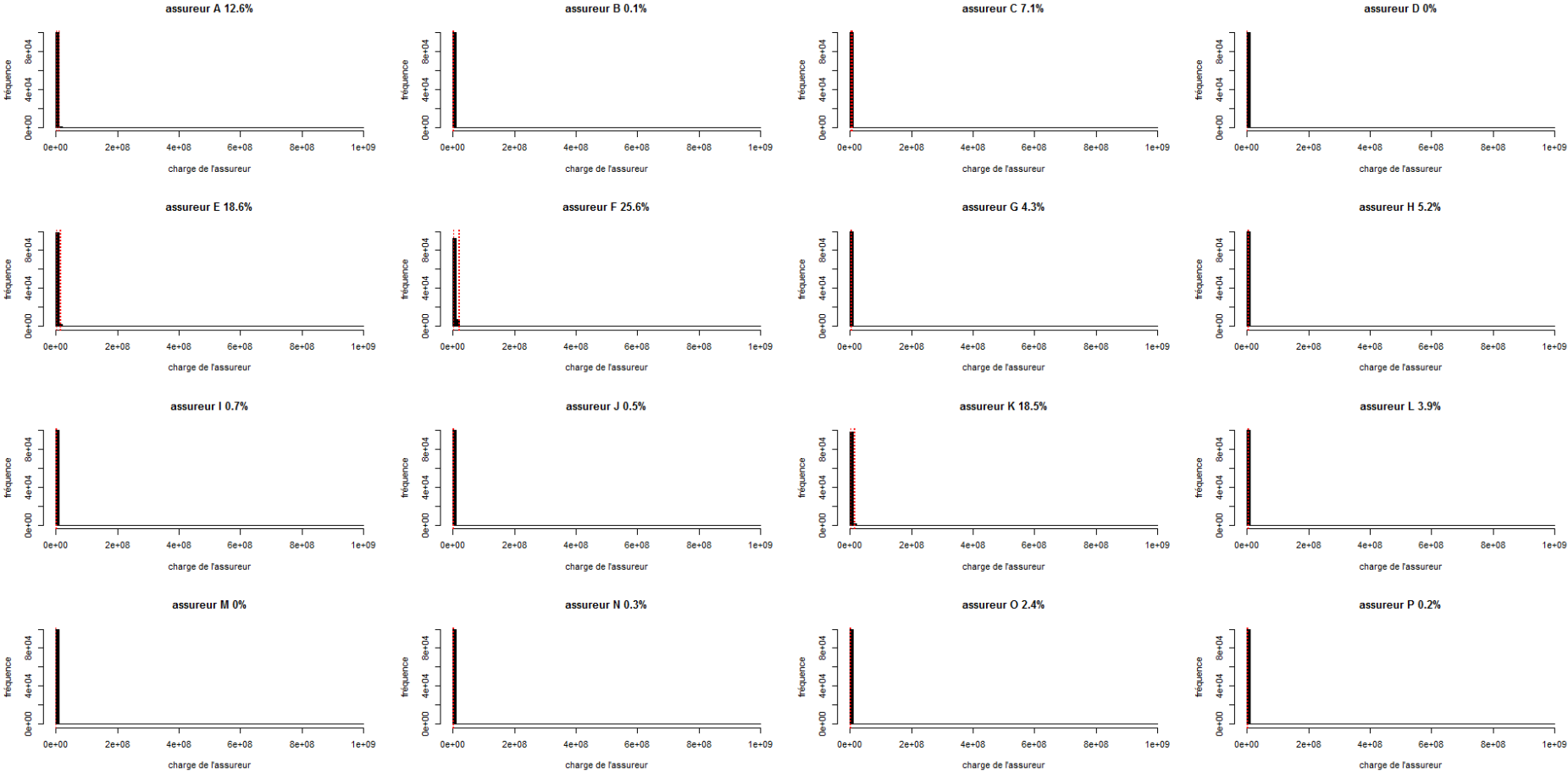
Sensibilité au nombre de victimes par sinistre (Loi Zêta)

Augmentation du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.50$  /  $z\grave{e}ta(TER)=1.70$ )



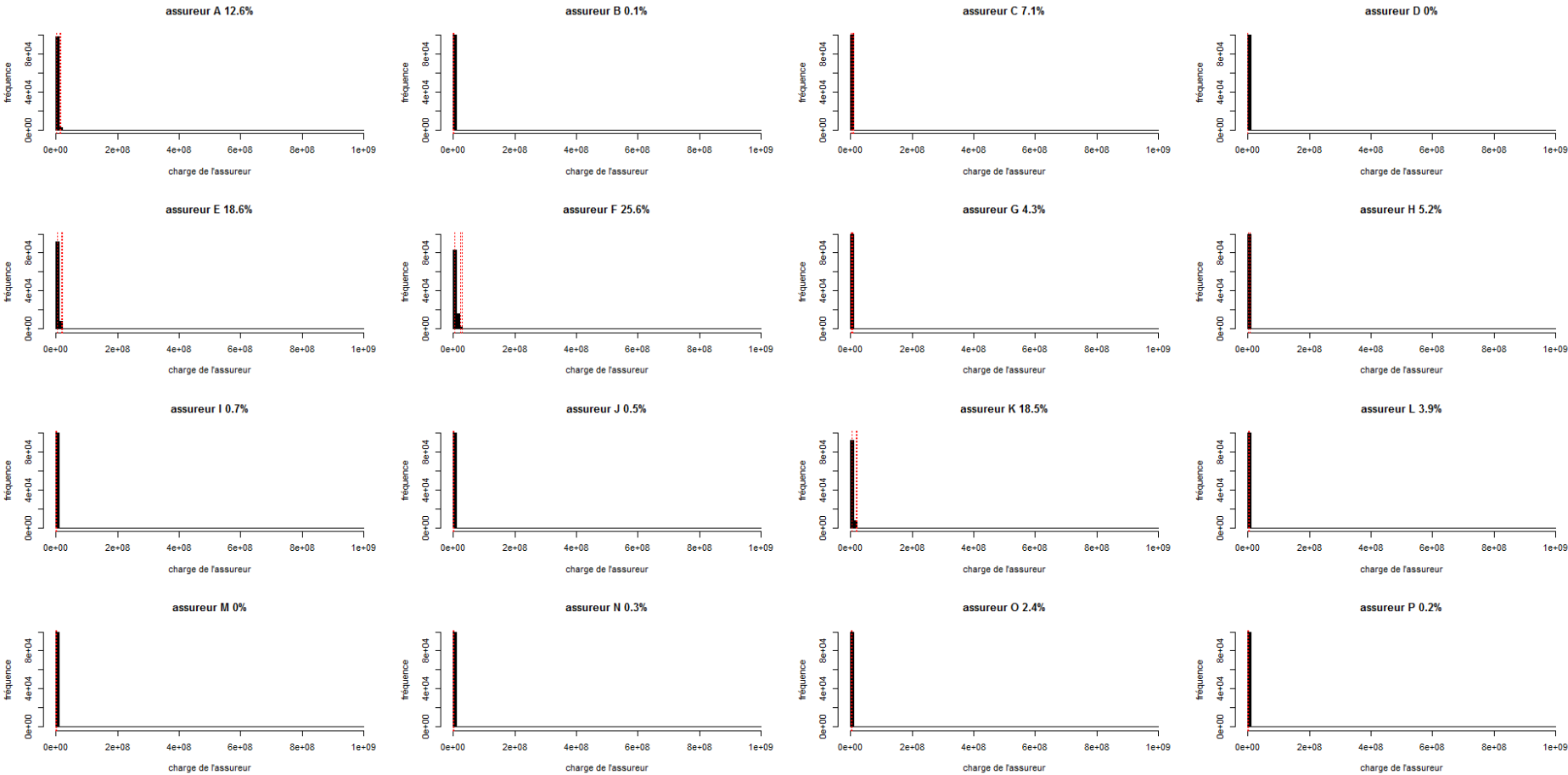
*Sensibilité au nombre de victimes par sinistre (Loi Zêta)*

Diminution du nombre de victimes par sinistres ( $Z\grave{e}ta(CAT)=1.70 / z\grave{e}ta(TER)=1.90$ )



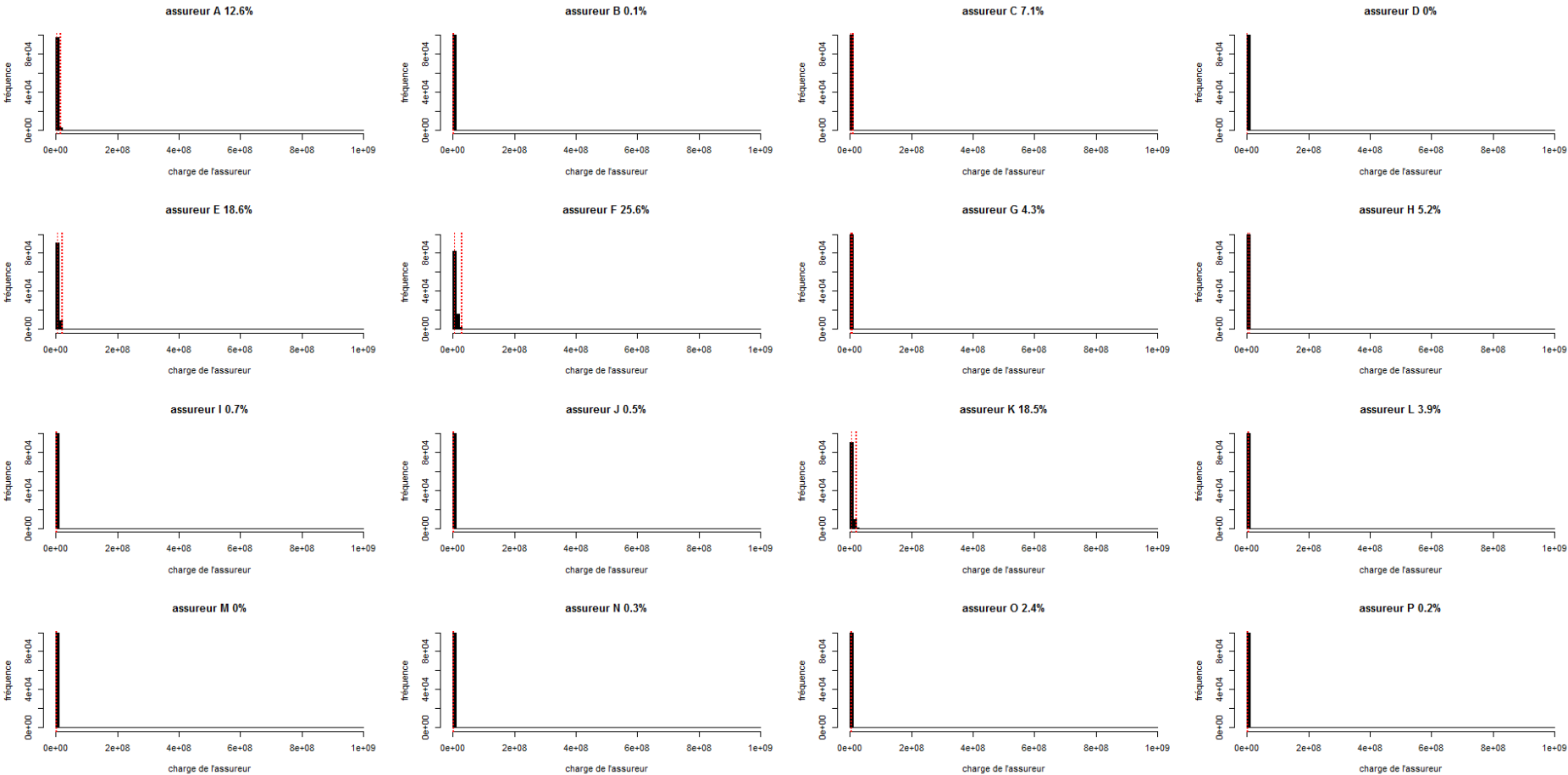
*Sensibilité aux facteurs de concentration*

Distribution structure initiale  $t=525, r=0.5$



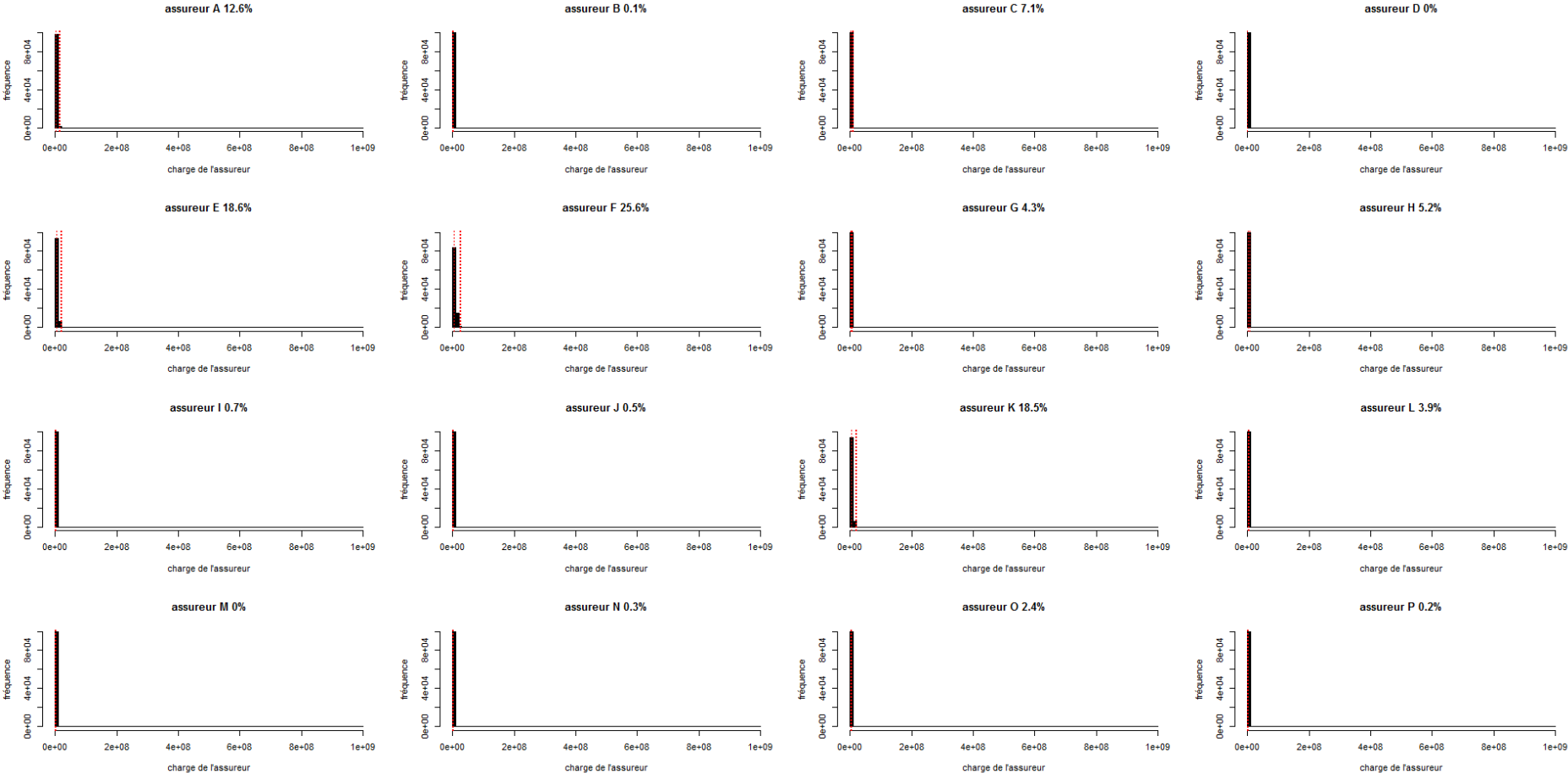
Sensibilité aux facteurs de concentration

Pour  $t=750$



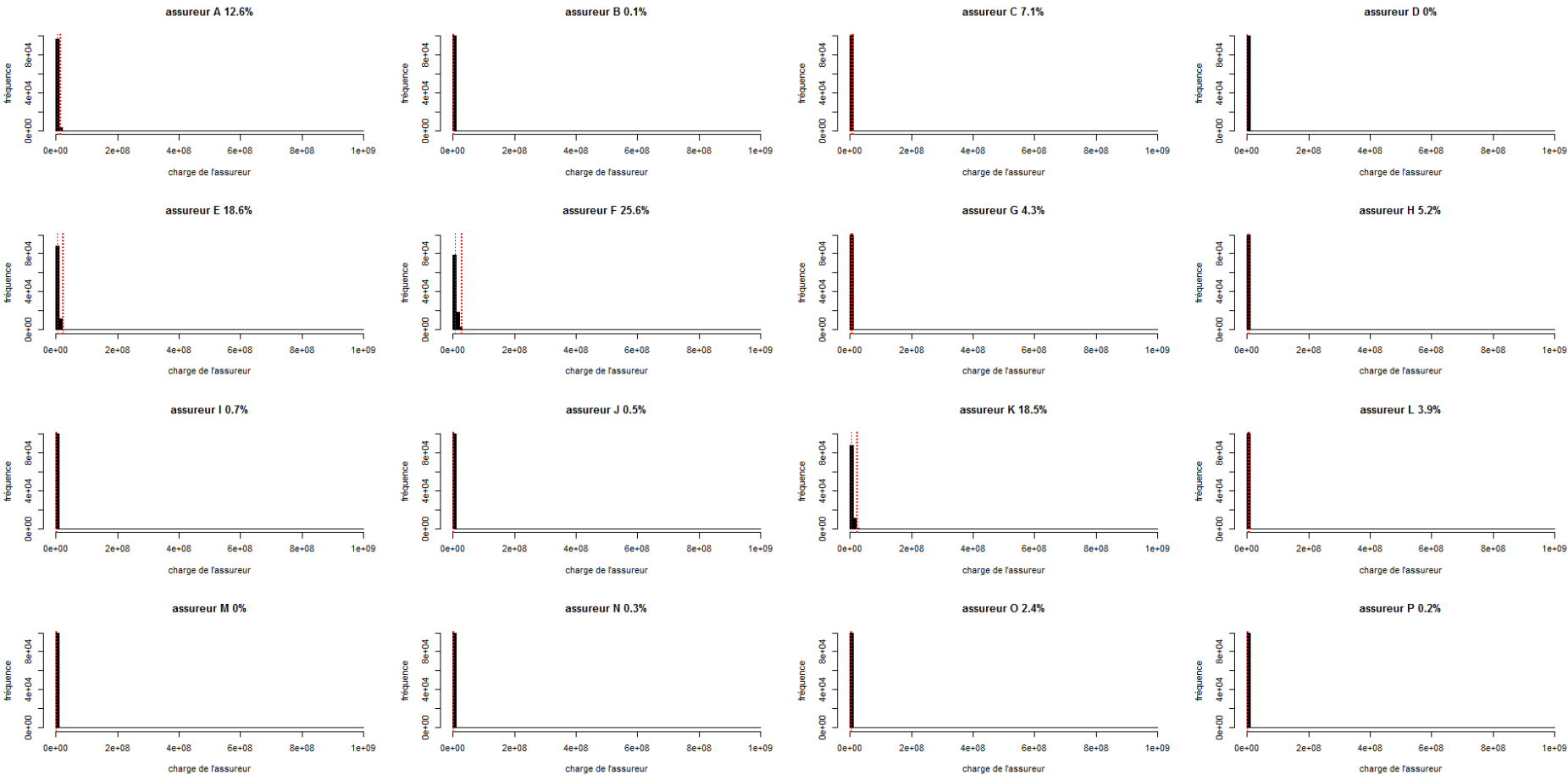
Sensibilité aux facteurs de concentration

Pour  $t=300$



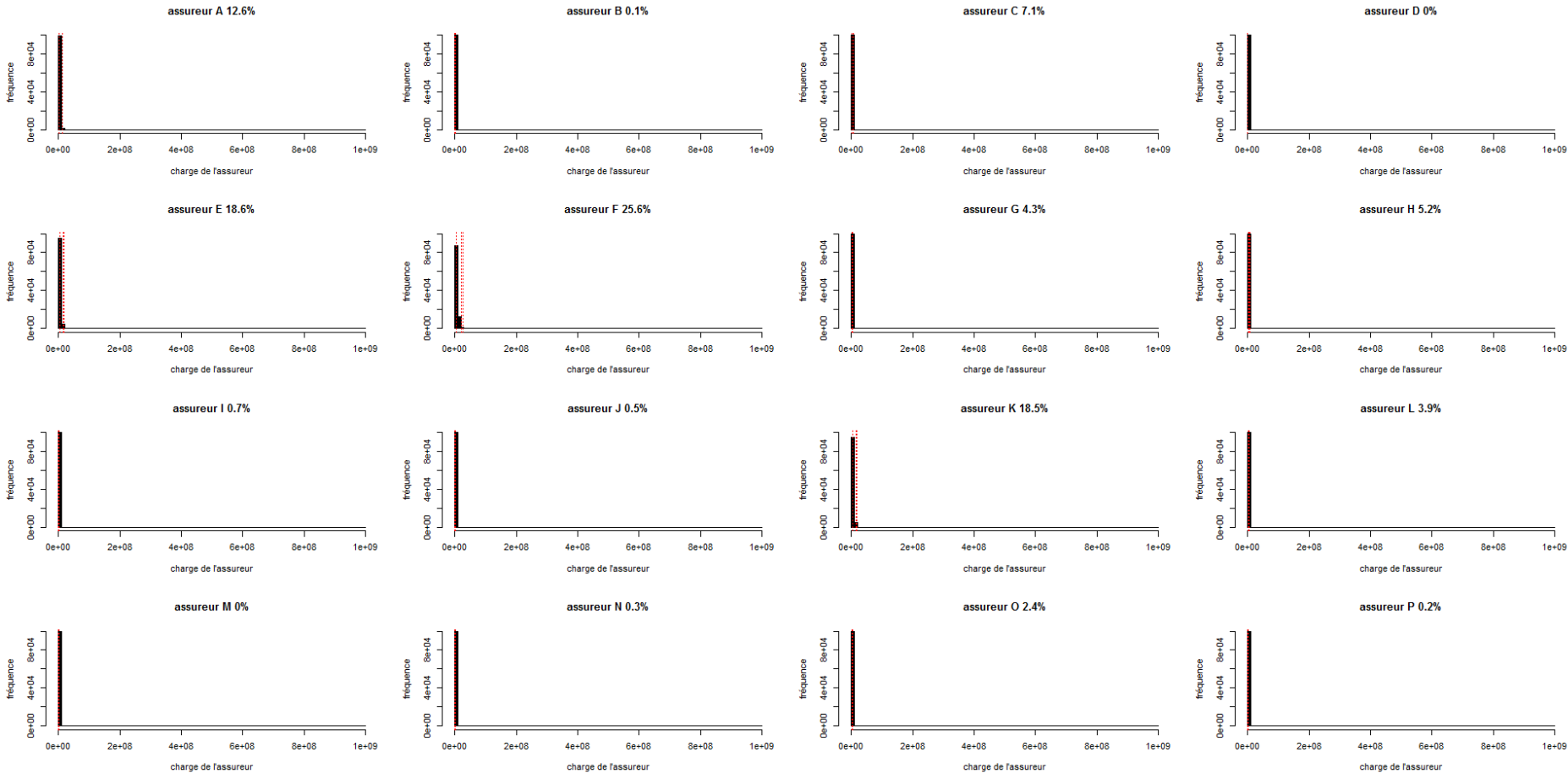
Sensibilité aux facteurs de concentration

Pour  $r=0.7$



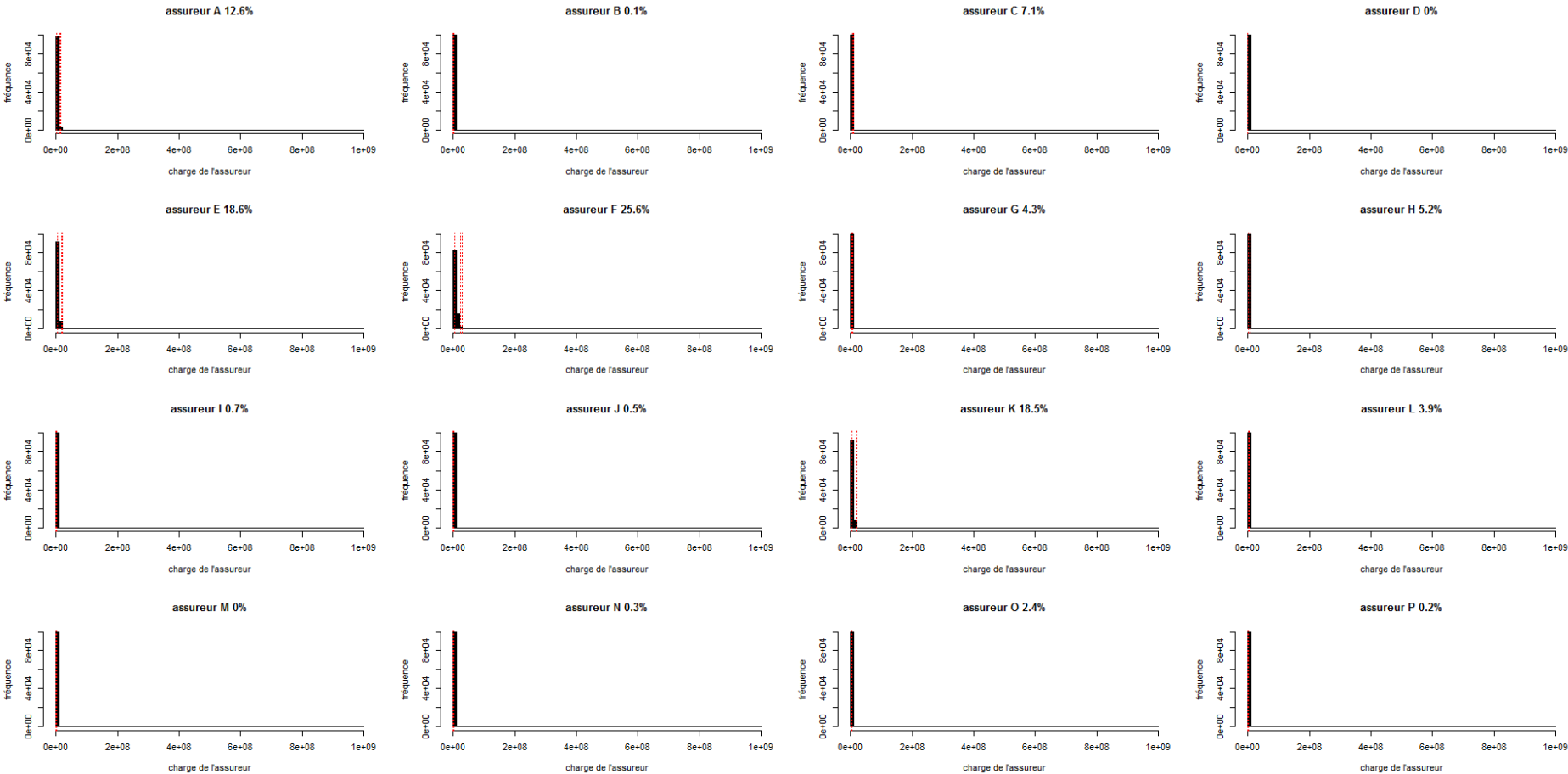
*Sensibilité aux facteurs de concentration*

Pour  $r=0.3$



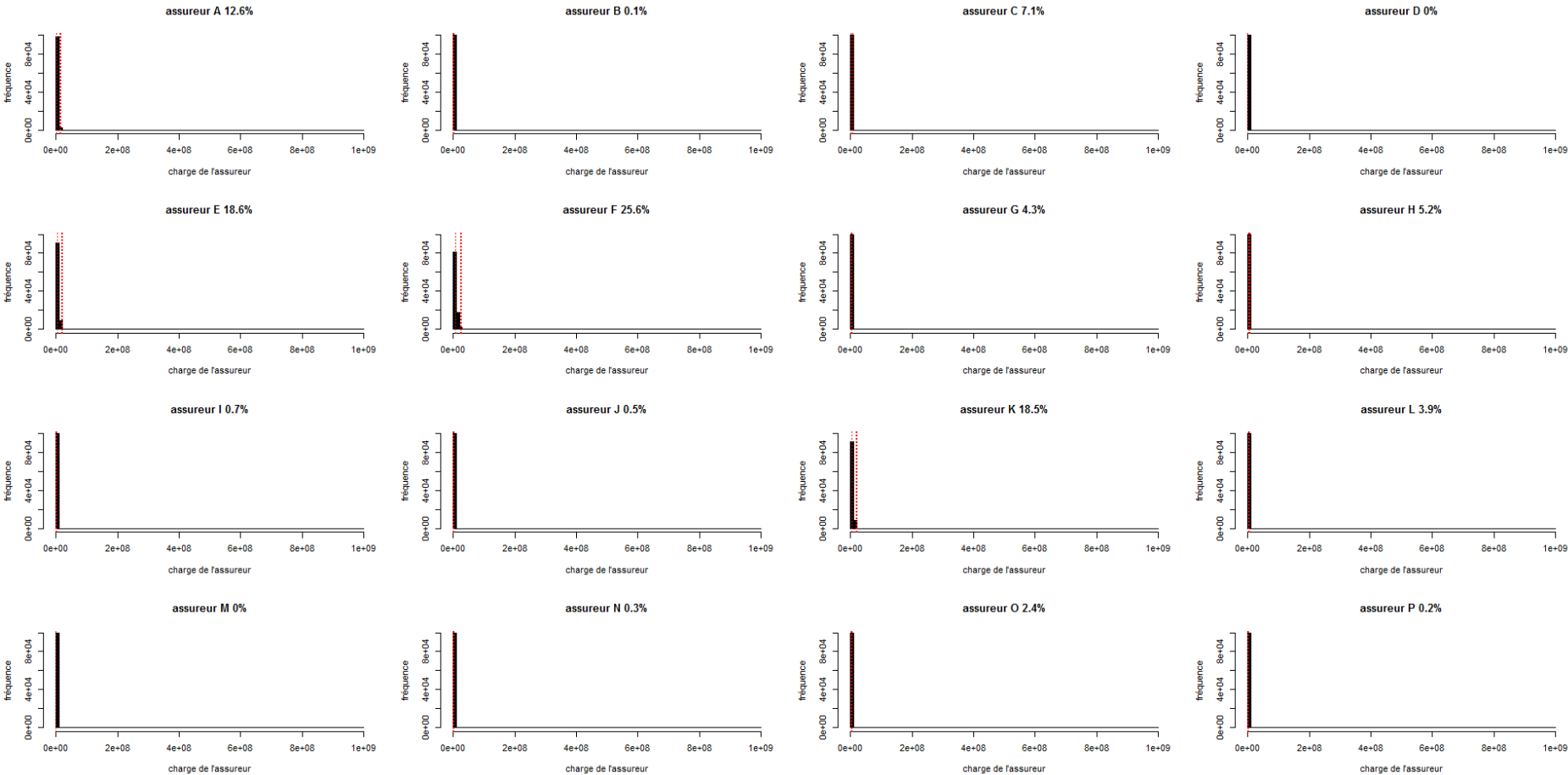
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Distribution structure initiale (2 têtes)



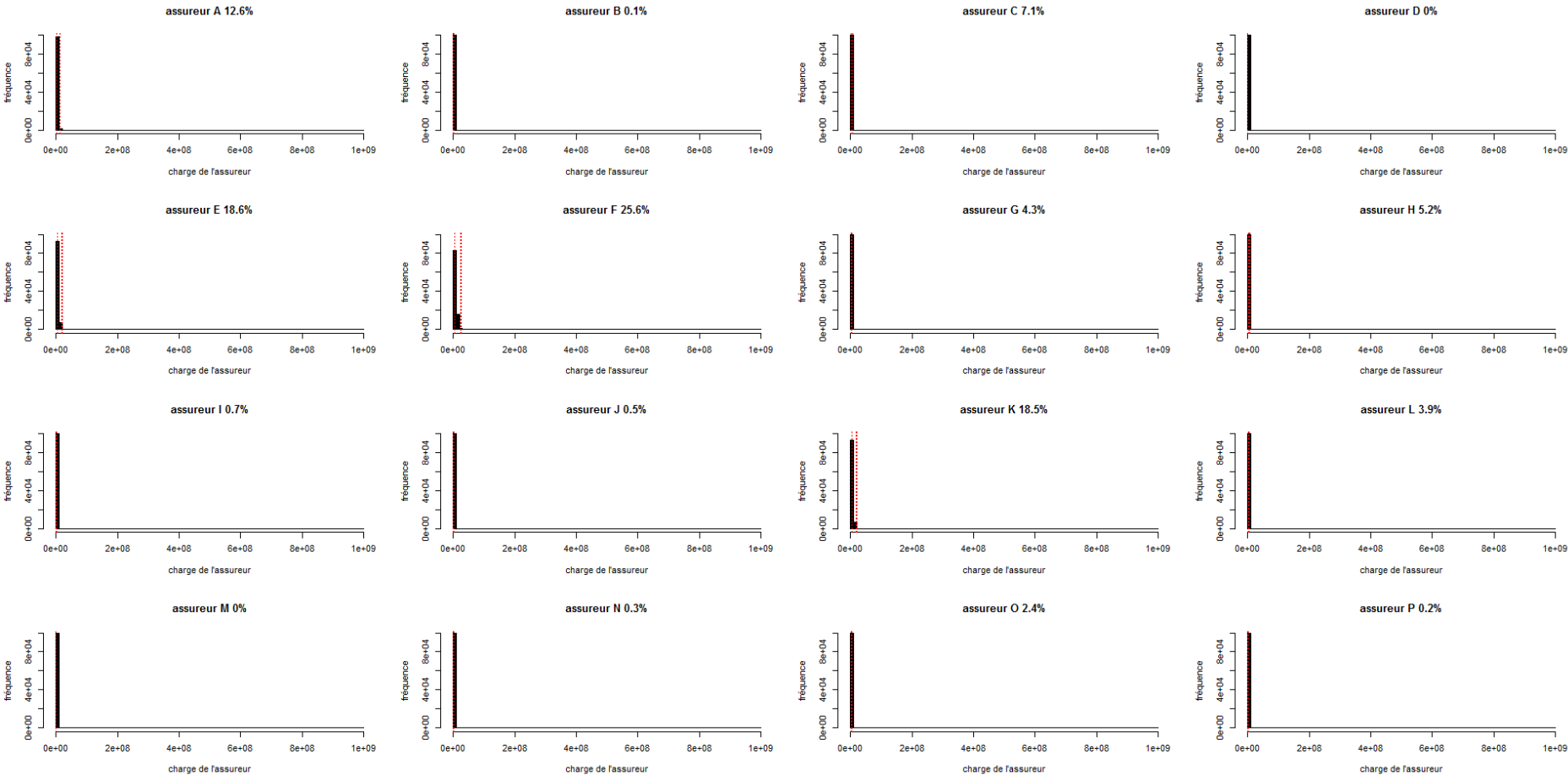
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 0 tête



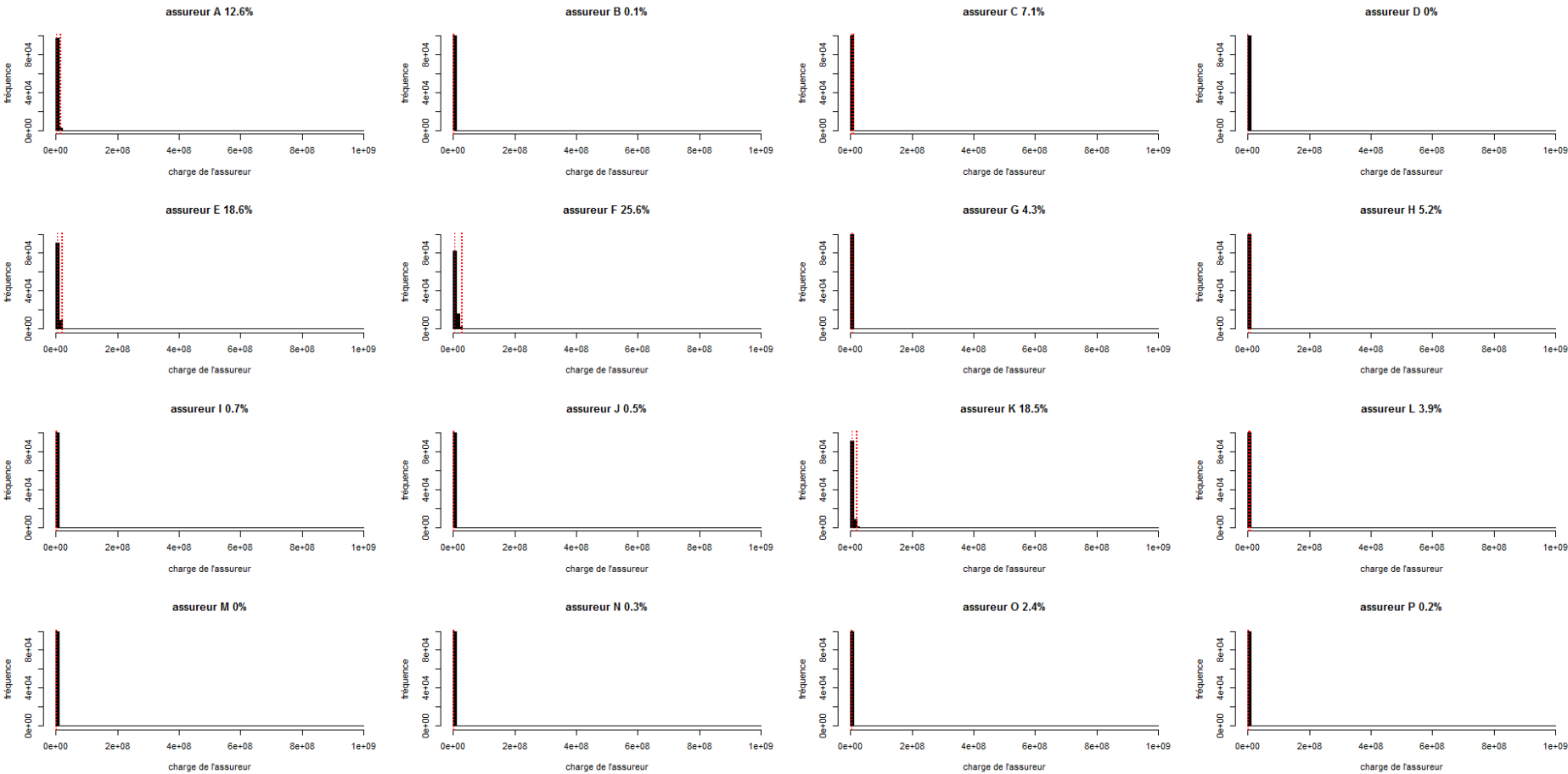
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 1 tête



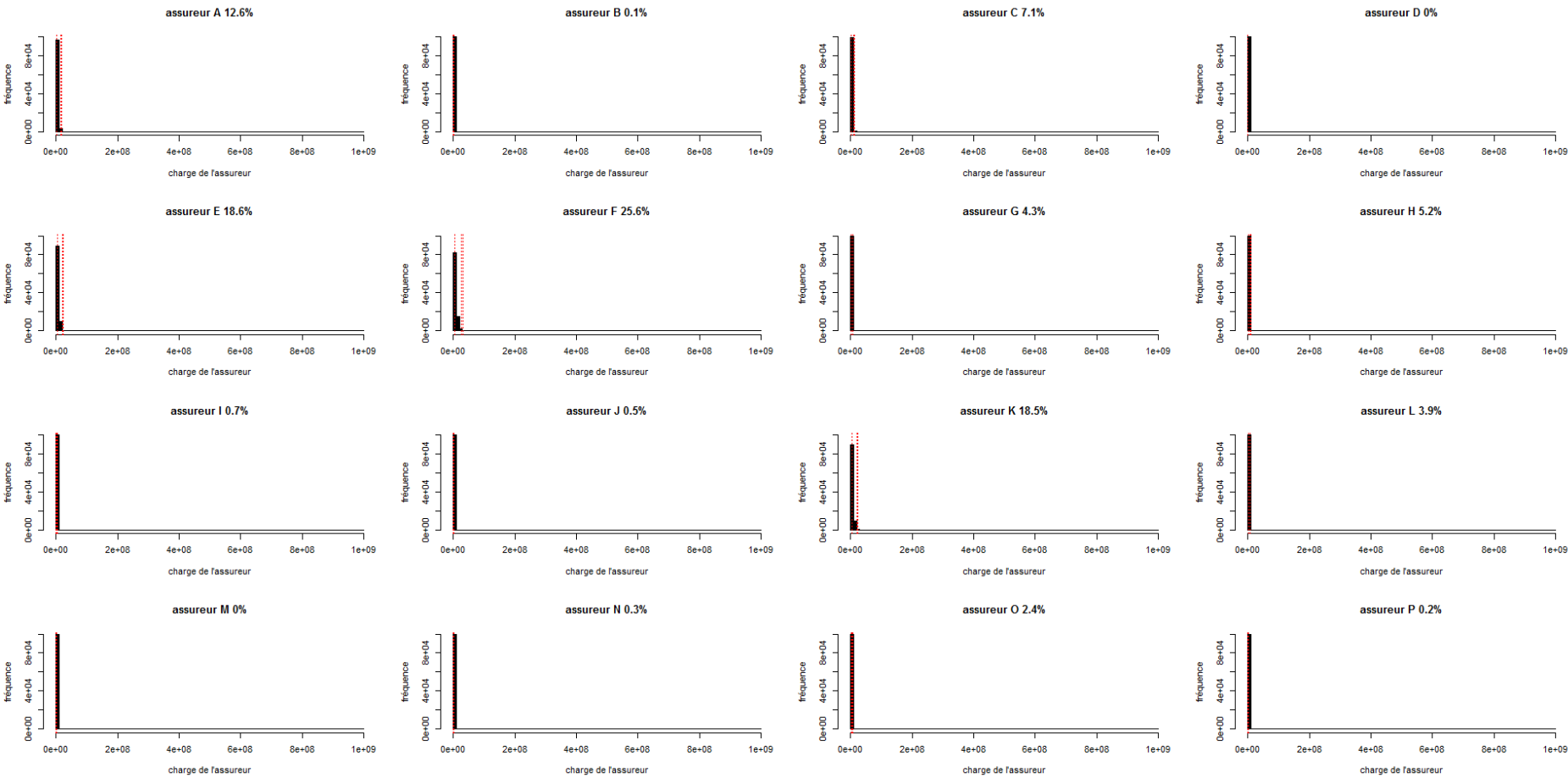
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 3 têtes



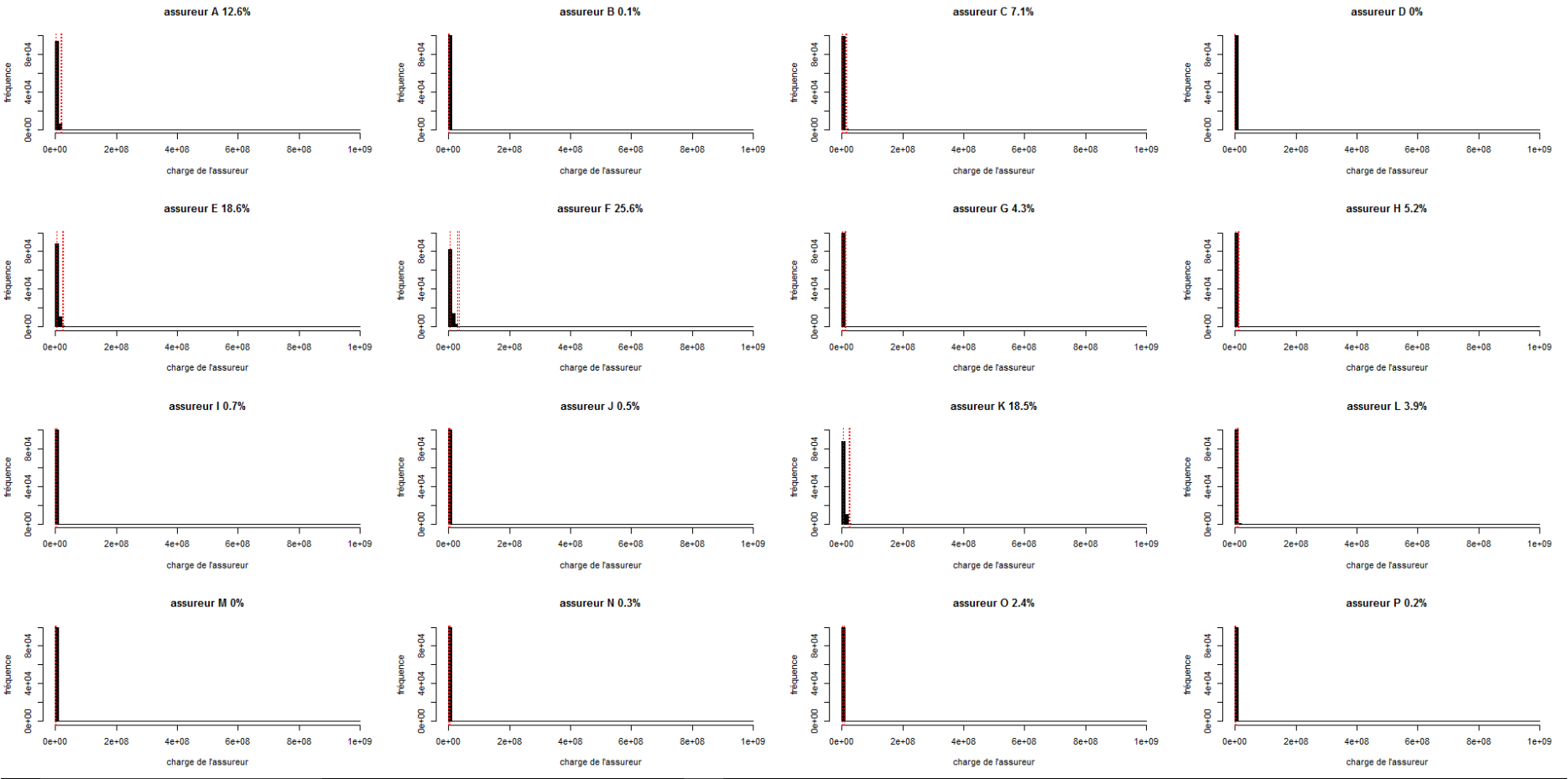
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 5 têtes



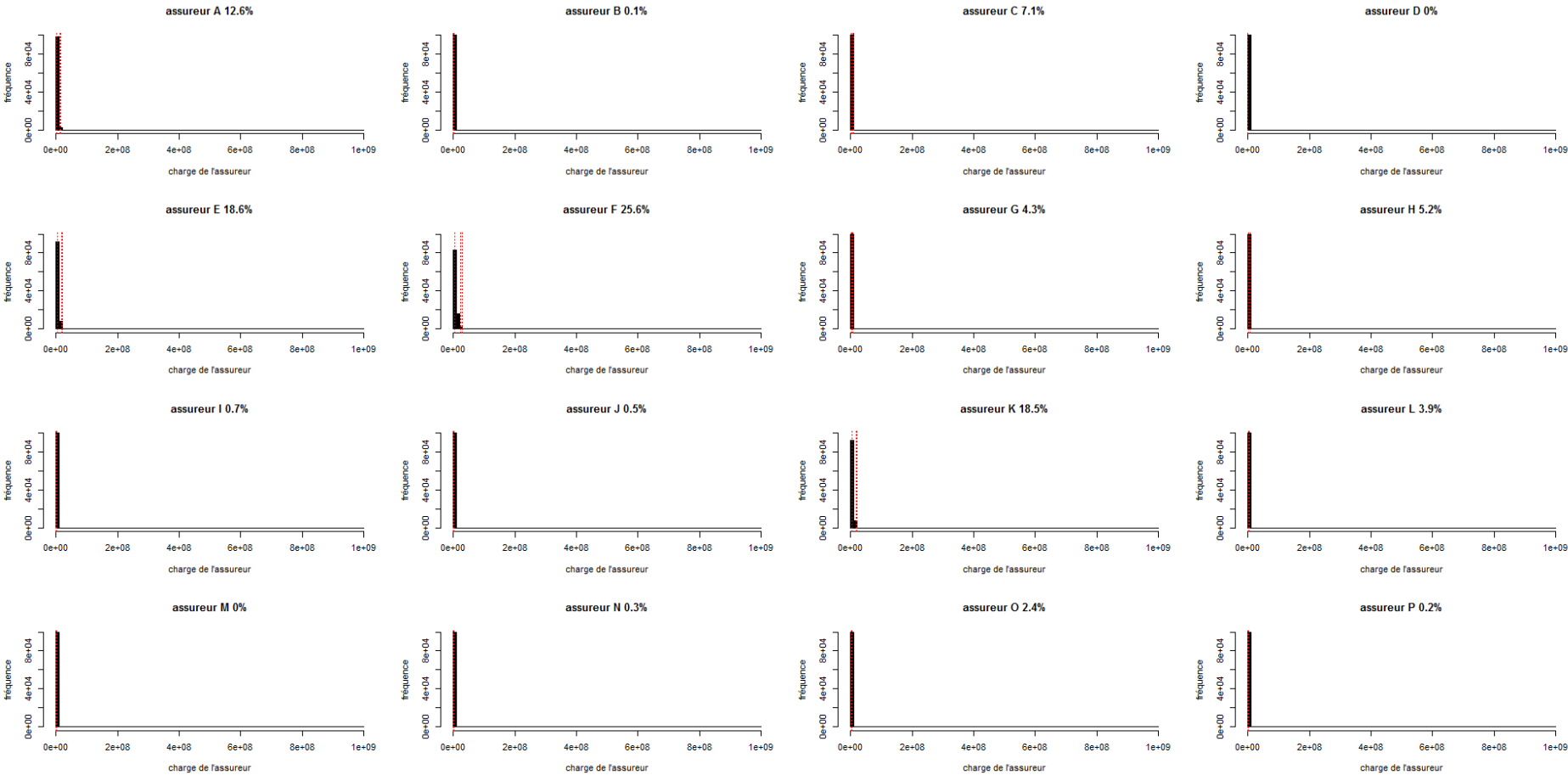
Sensibilité à la franchise en nombre de têtes

Franchise 10 têtes



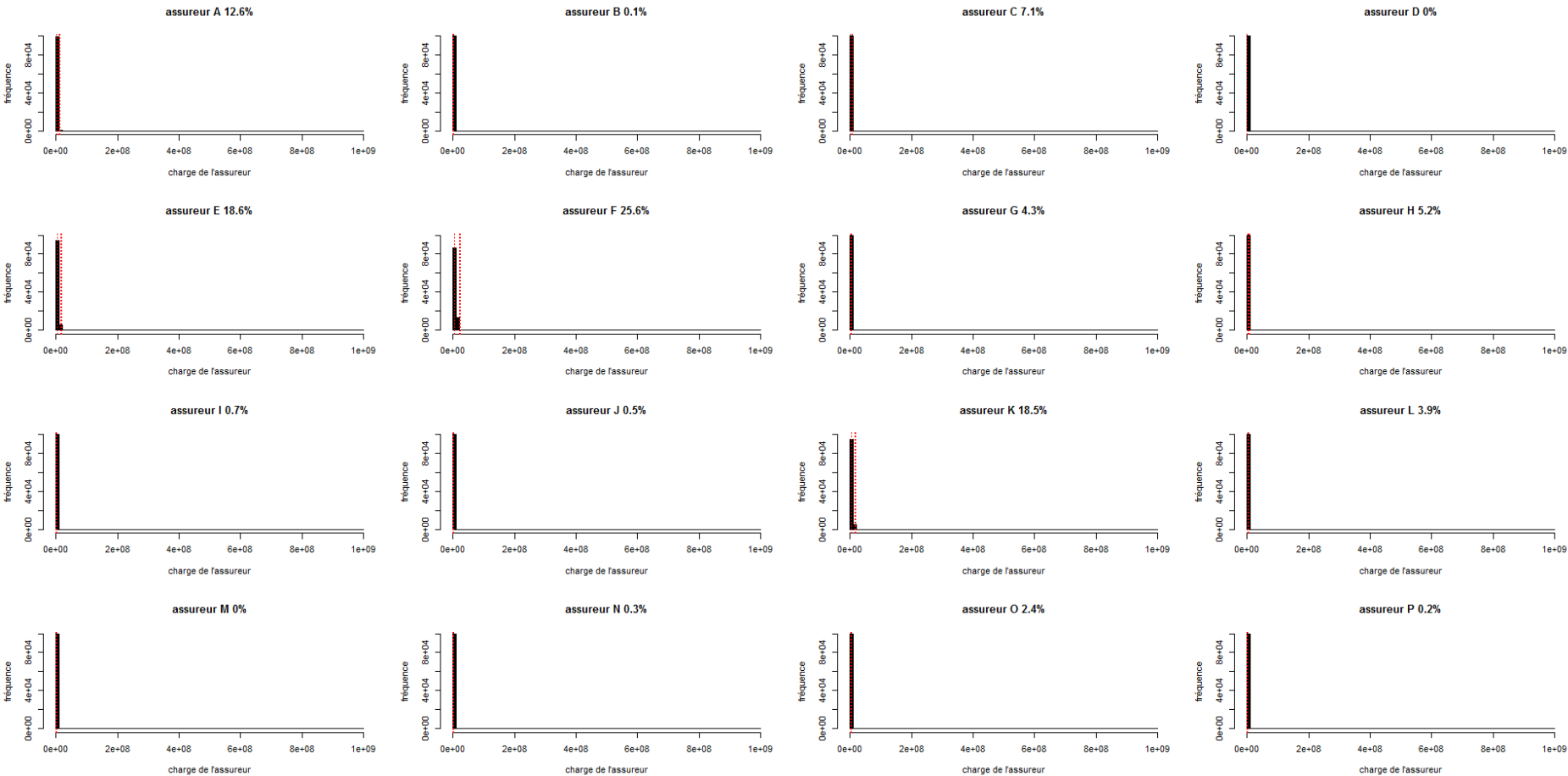
Sensibilité à la structure des tranches

Distribution structure initiale



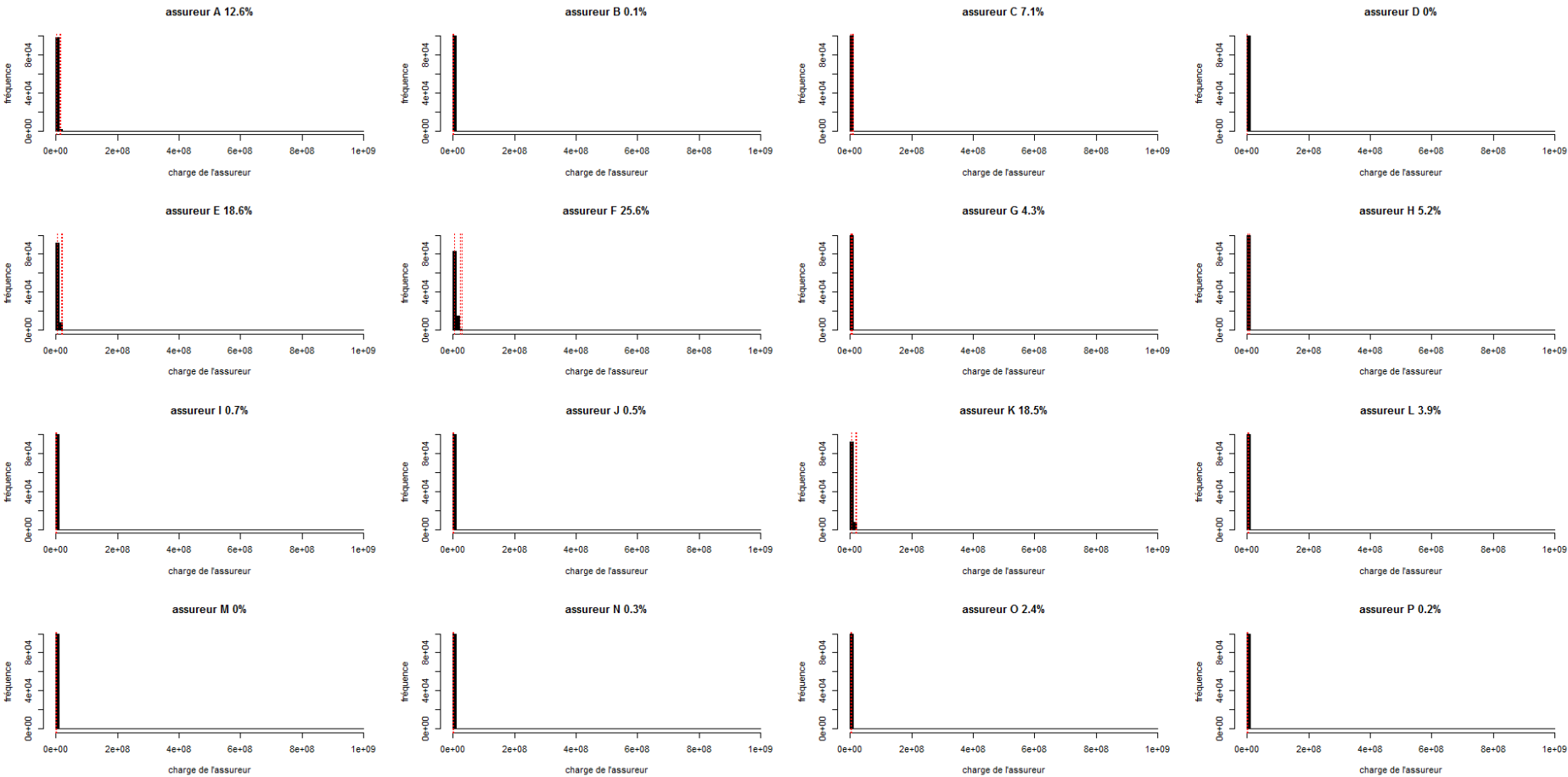
Sensibilité à la structure des tranches

Tranche 1 30XS20



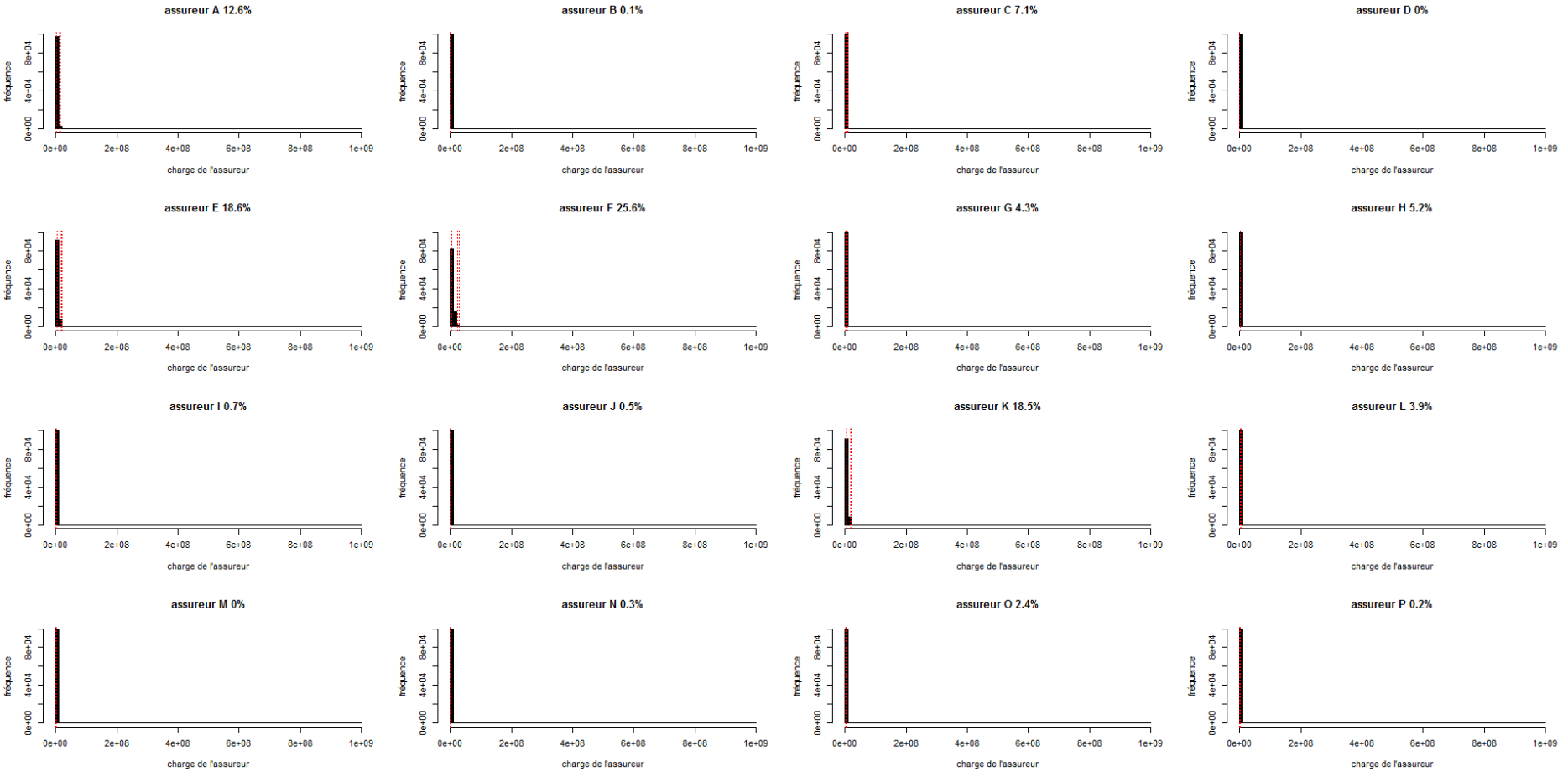
Sensibilité à la structure des tranches

Recomposition des tranches



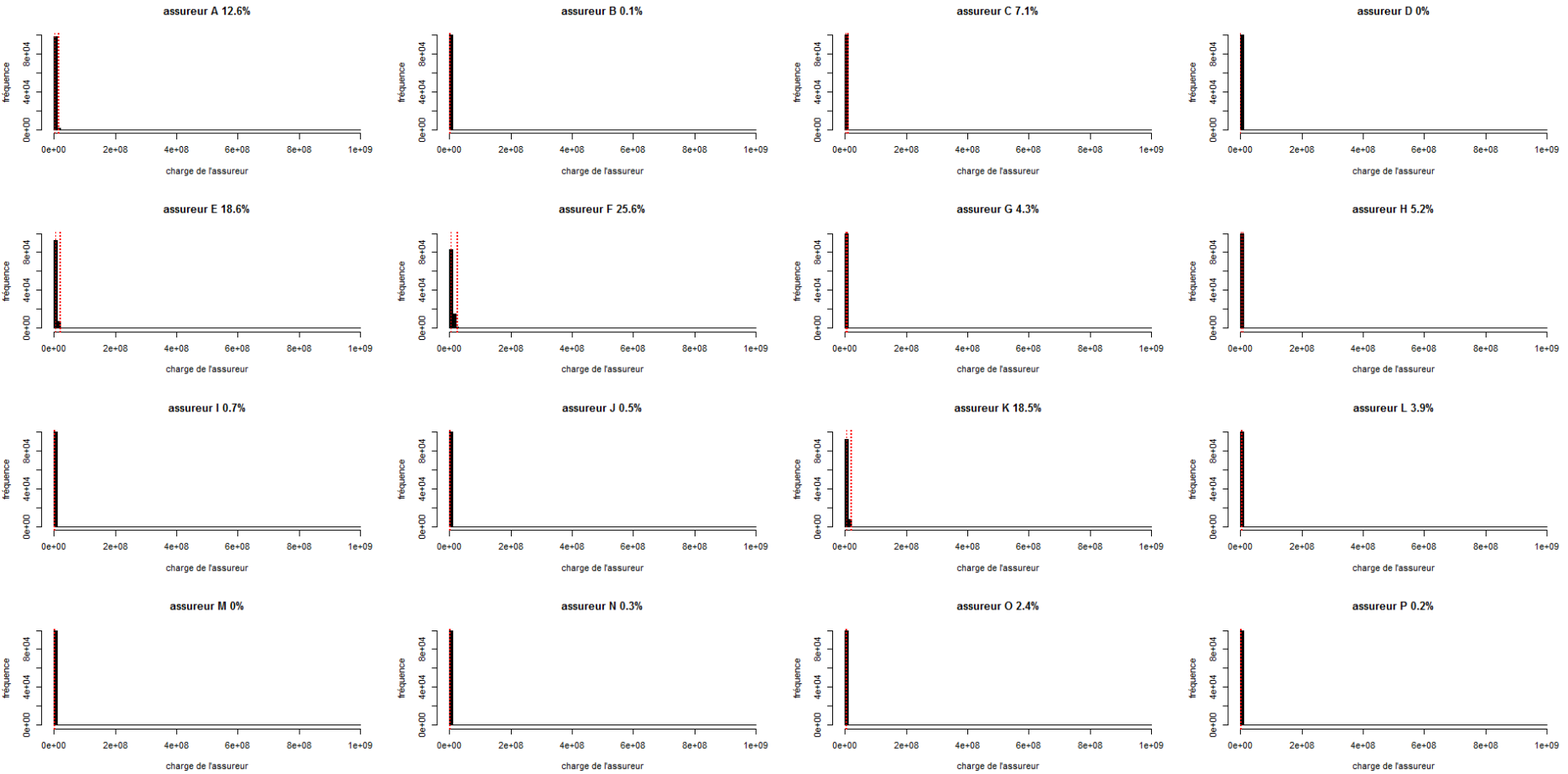
Sensibilité à la structure des tranches

Fusion des tranches obligatoires



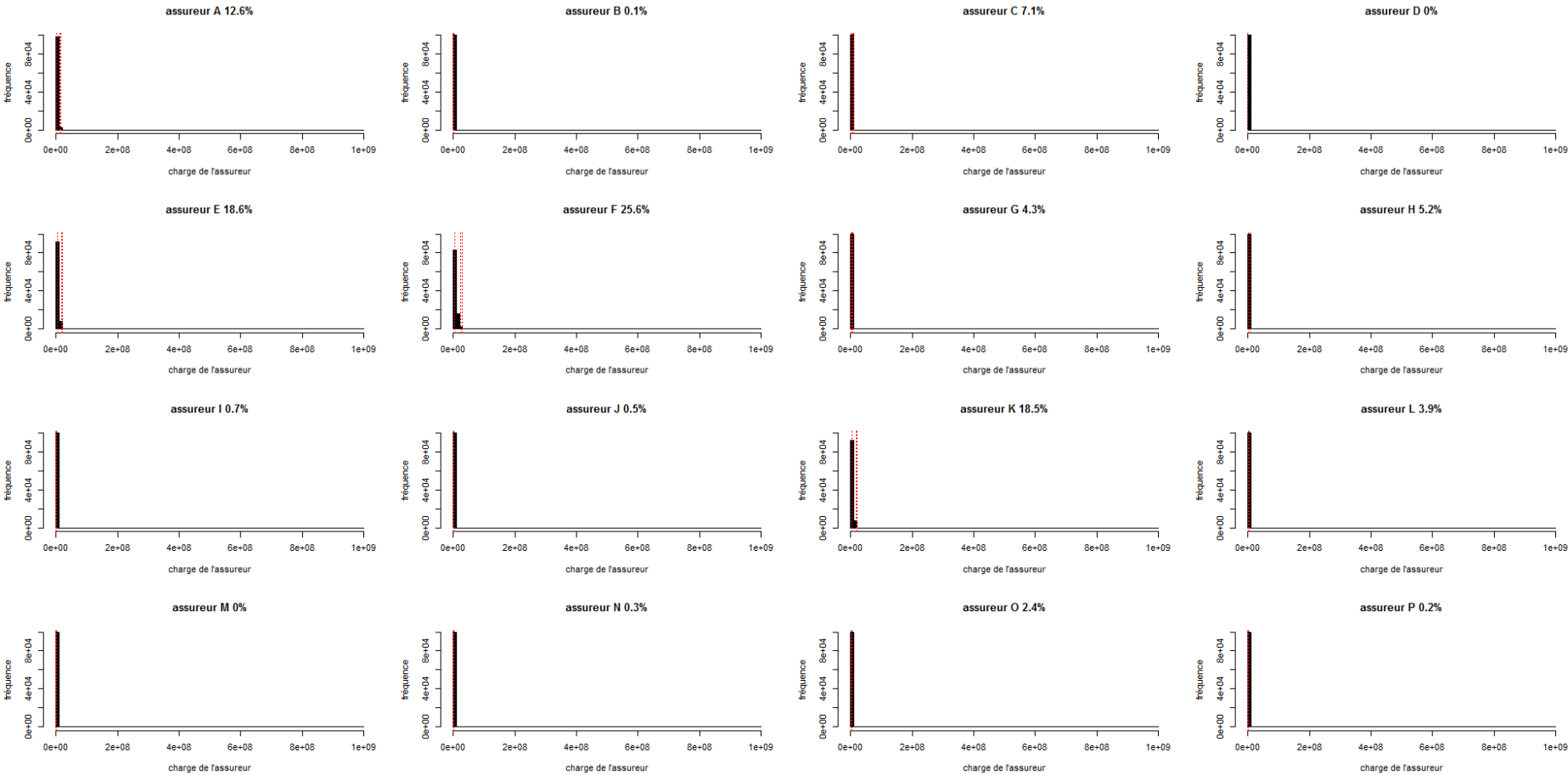
Sensibilité à la structure des tranches

Tranches de 50M



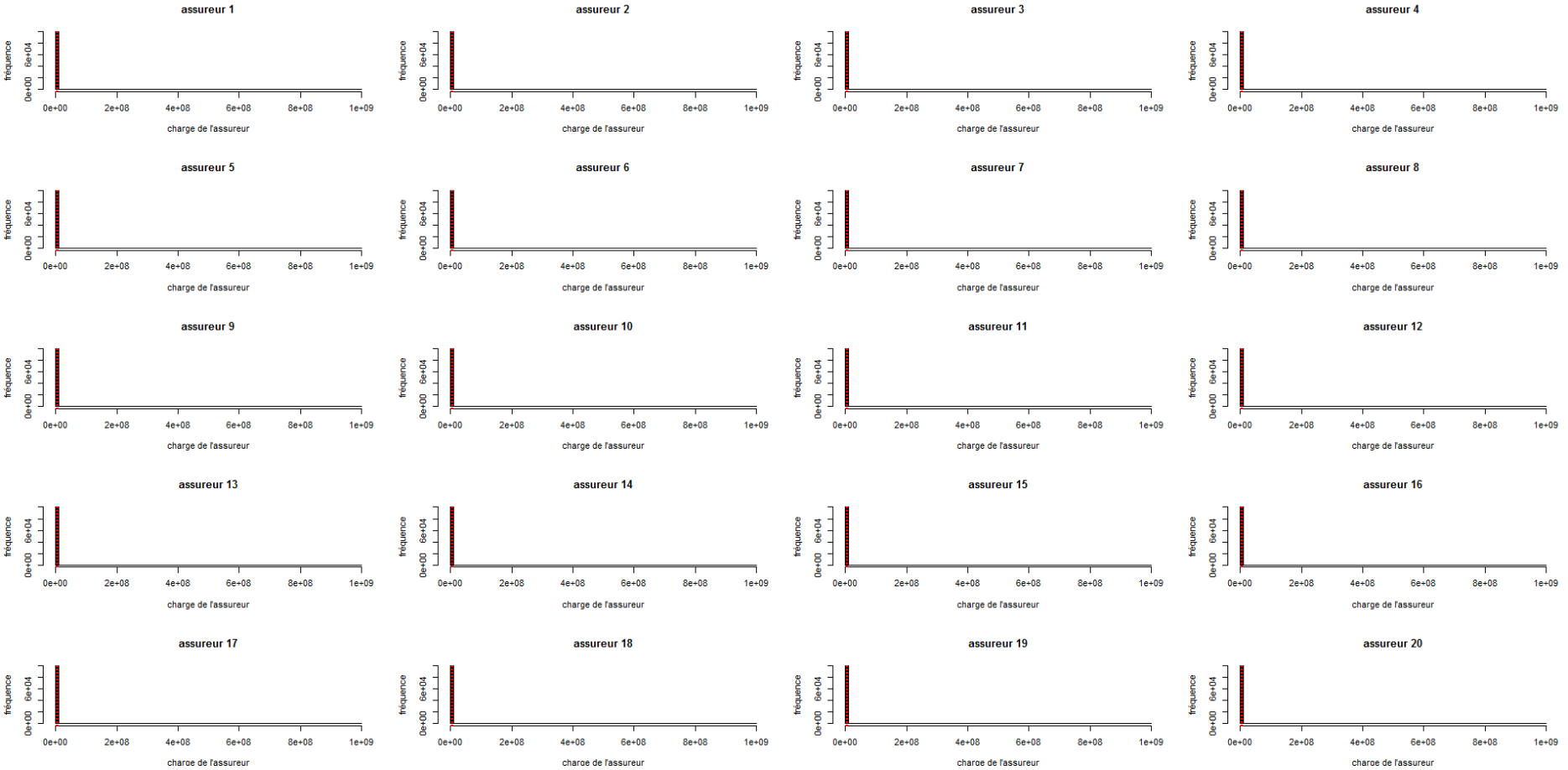
*Sensibilité à la diversification (nombre de membres, équipondération des parts) du Pool*

Distribution structure initiale (16 assureurs membres du Pool)



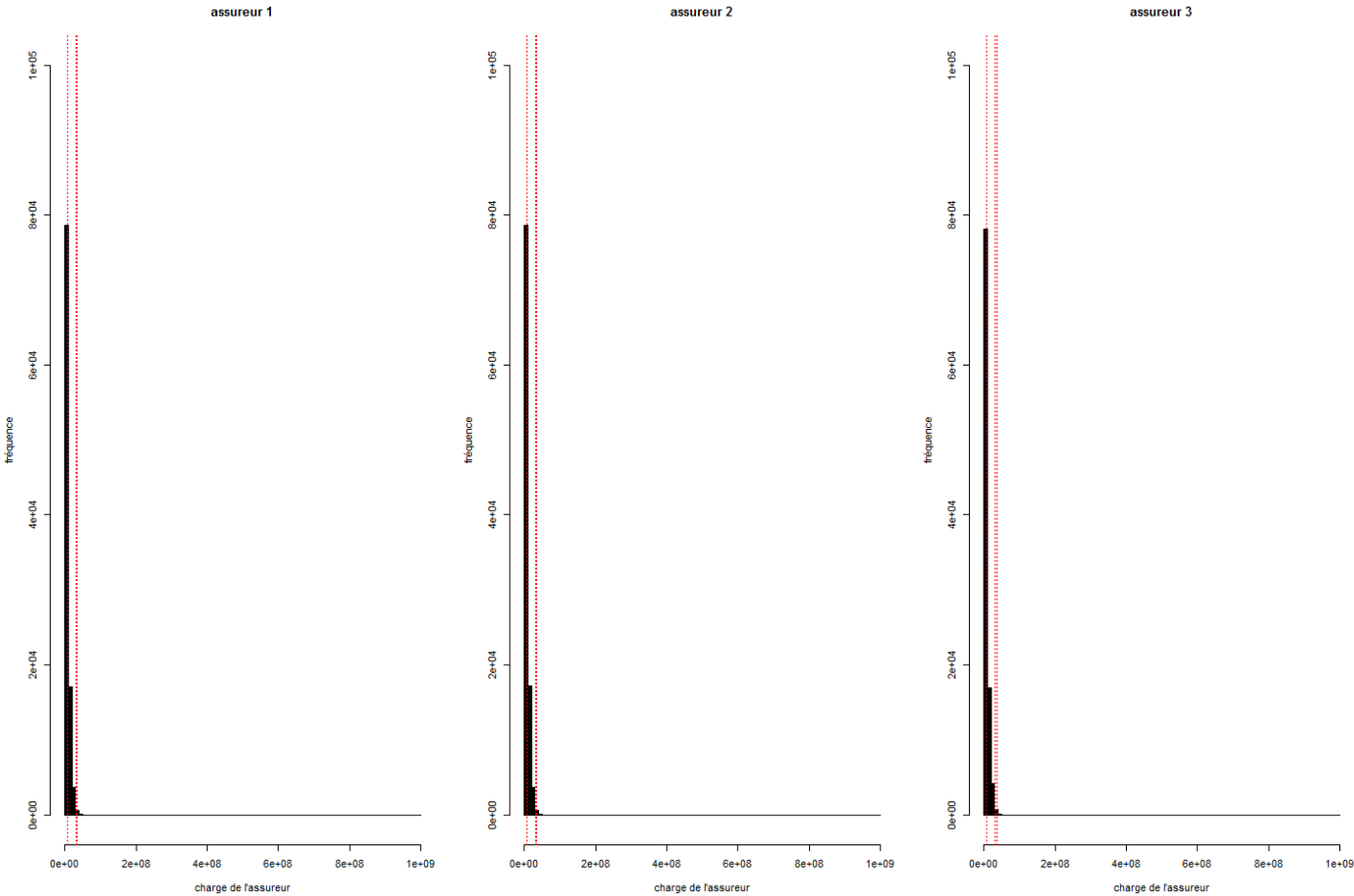
*Sensibilité à la diversification (nombre de membres, équipondération des parts) du Pool*

20 assureurs équipondérés



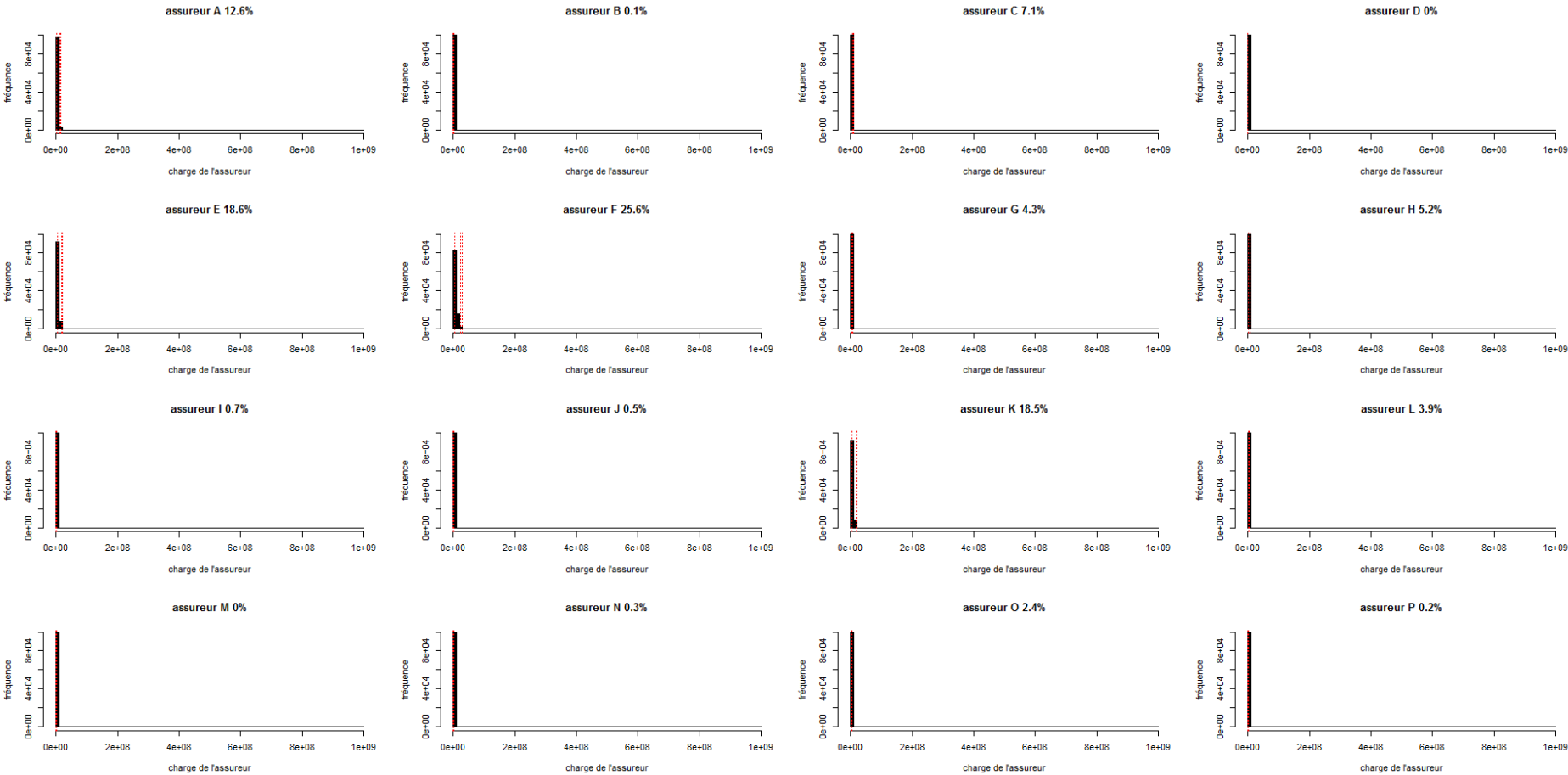
*Sensibilité à la diversification (nombre de membres, équipondération des parts) du Pool*

3 assureurs équipondérés



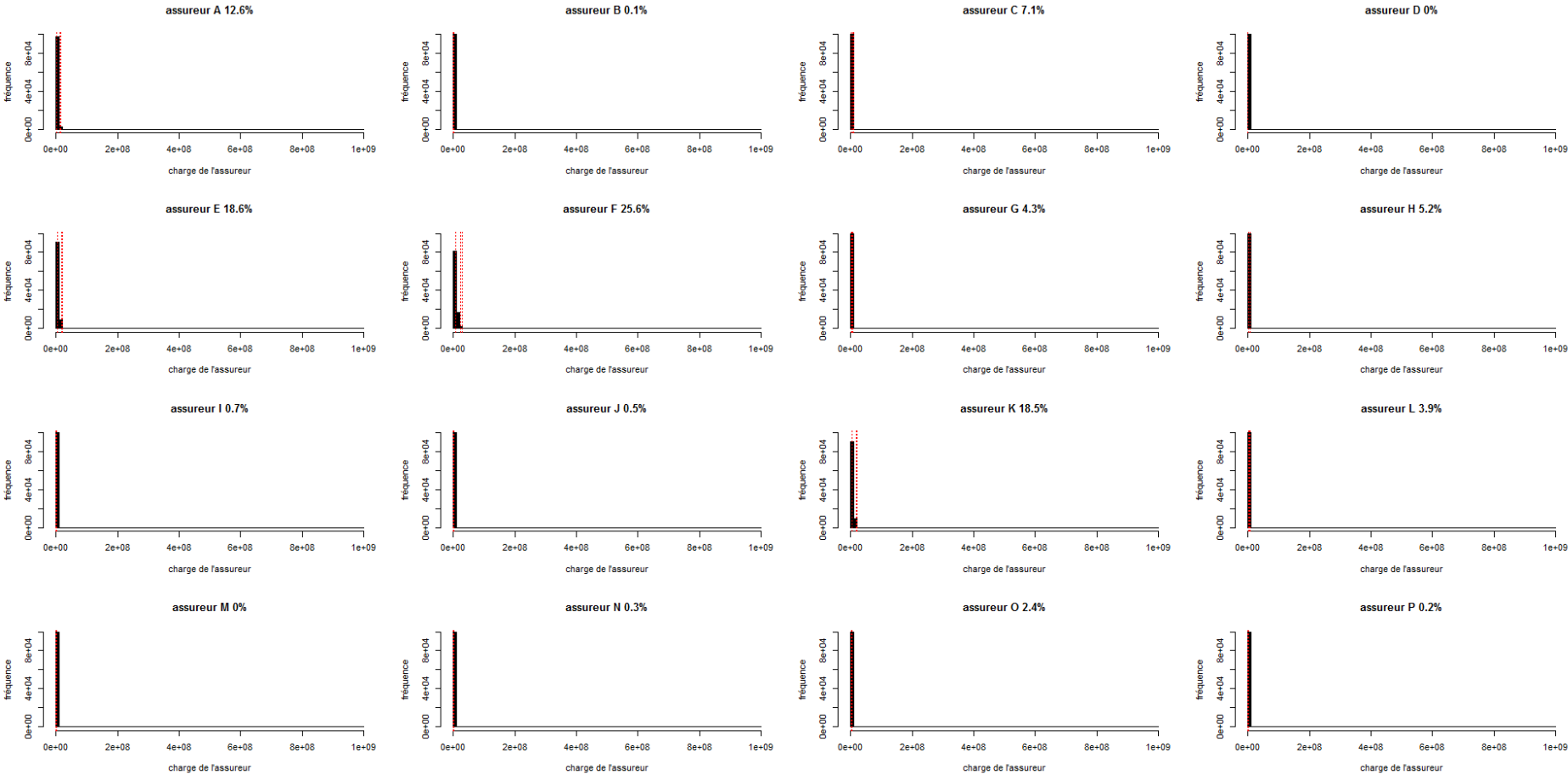
*Sensibilité à la structure de(s) reconstitution(s)*

Distribution structure initiale

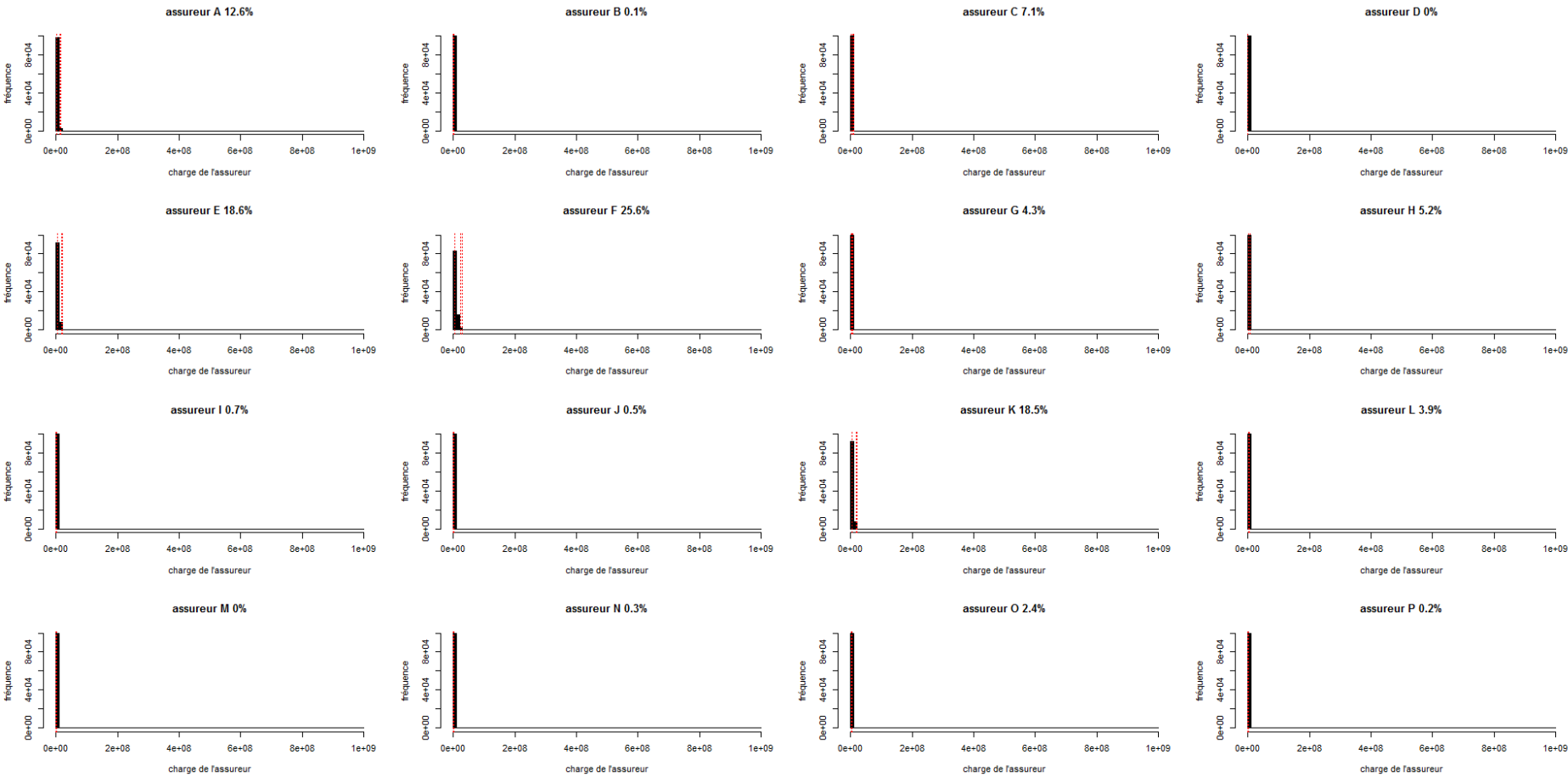


Sensibilité à la structure de(s) reconstitution(s)

Reconstitution 100%

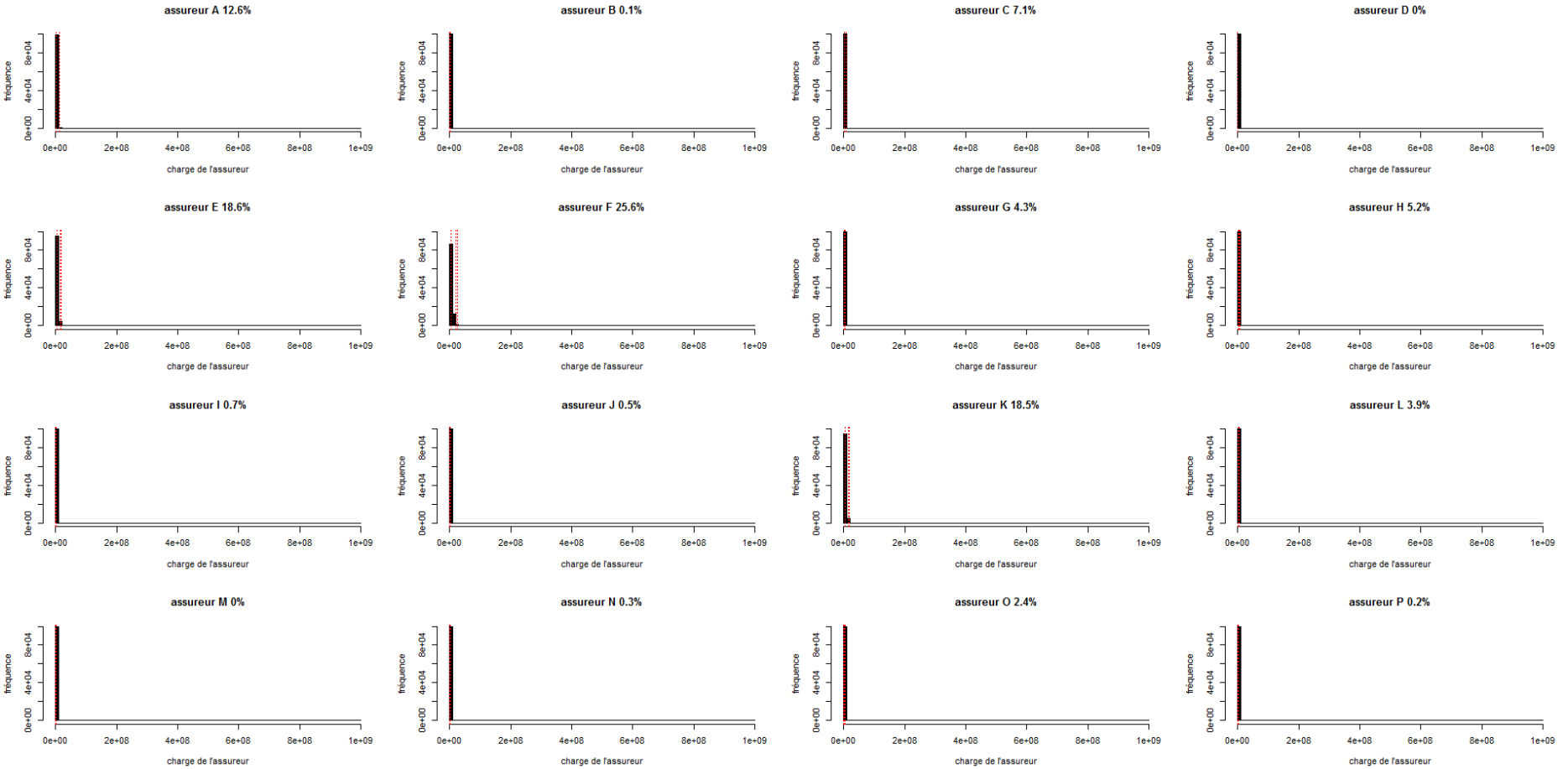


Distribution structure initiale



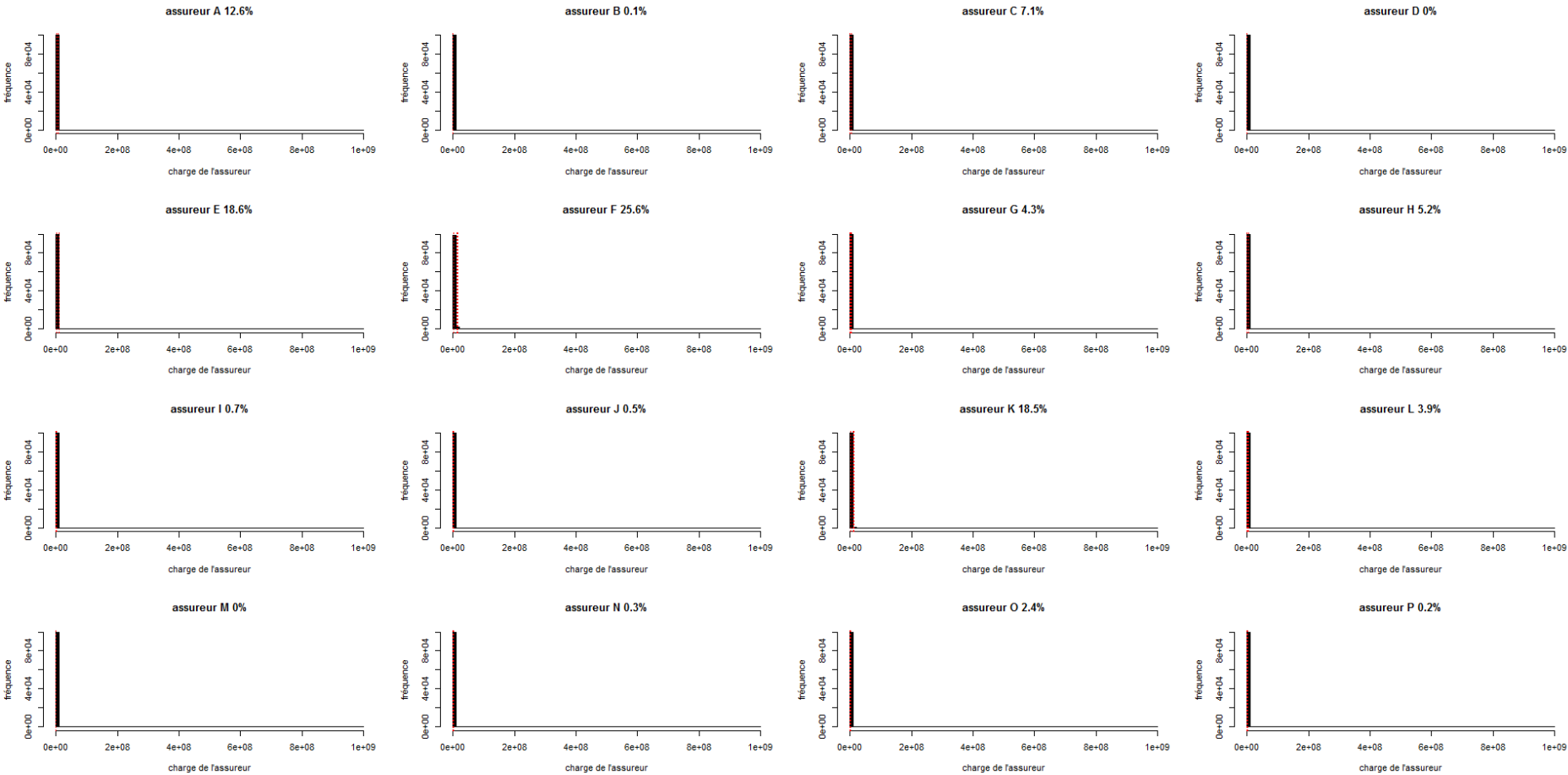
Dissociation des risques

EM-DAT

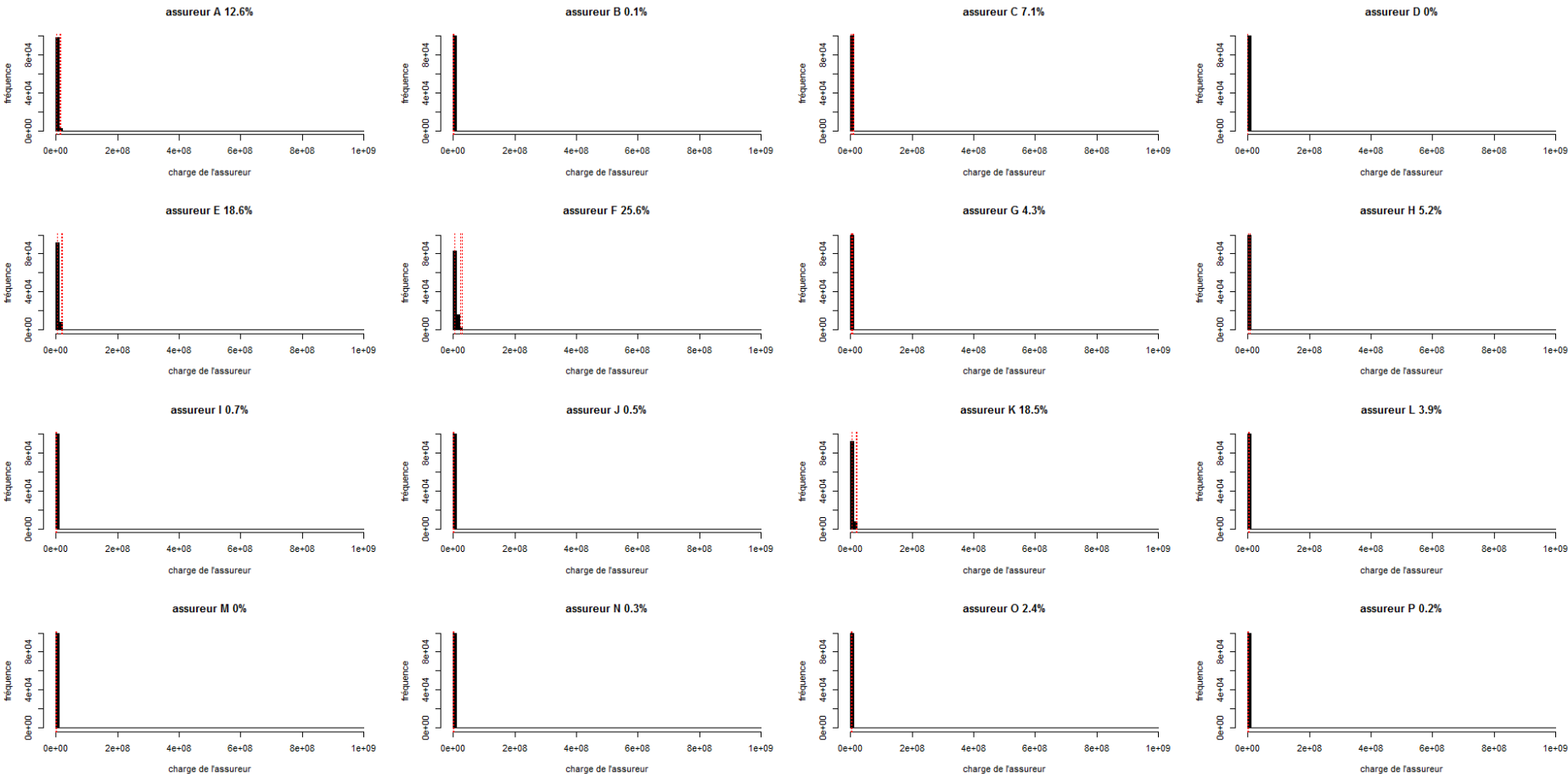


Dissociation des risques

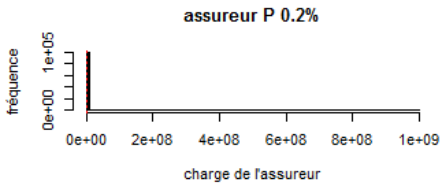
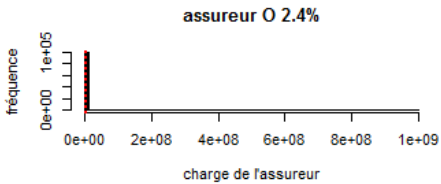
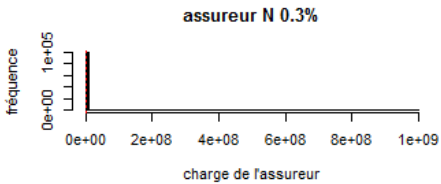
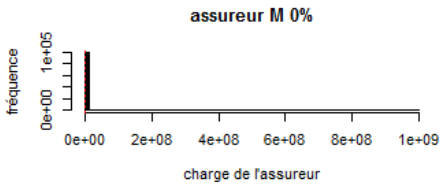
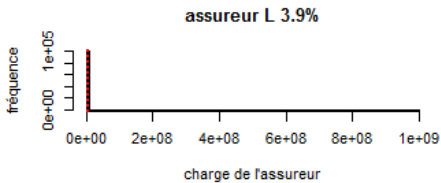
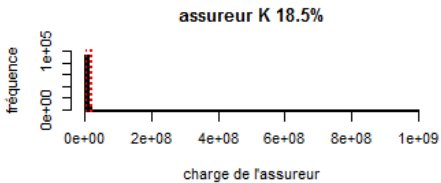
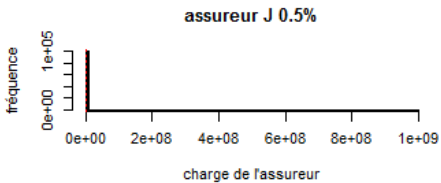
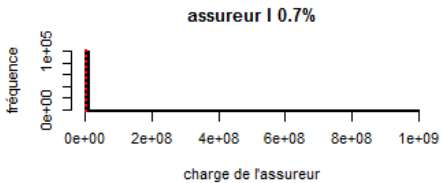
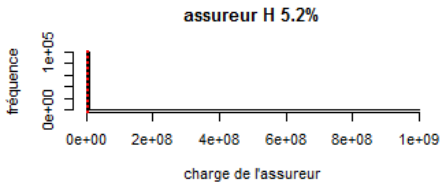
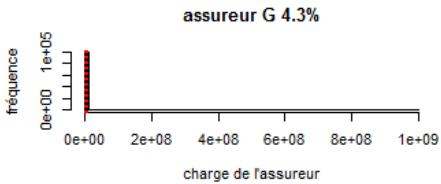
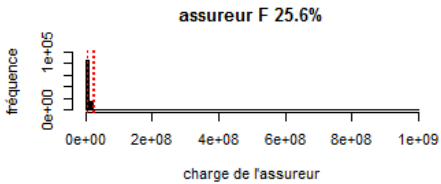
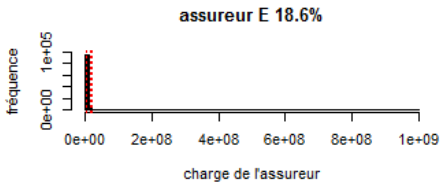
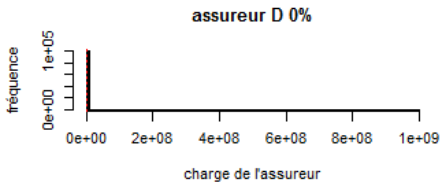
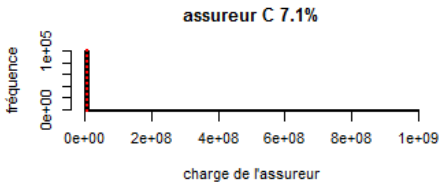
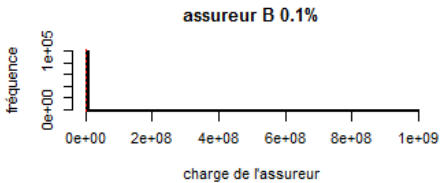
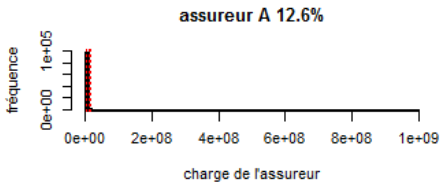
GTD



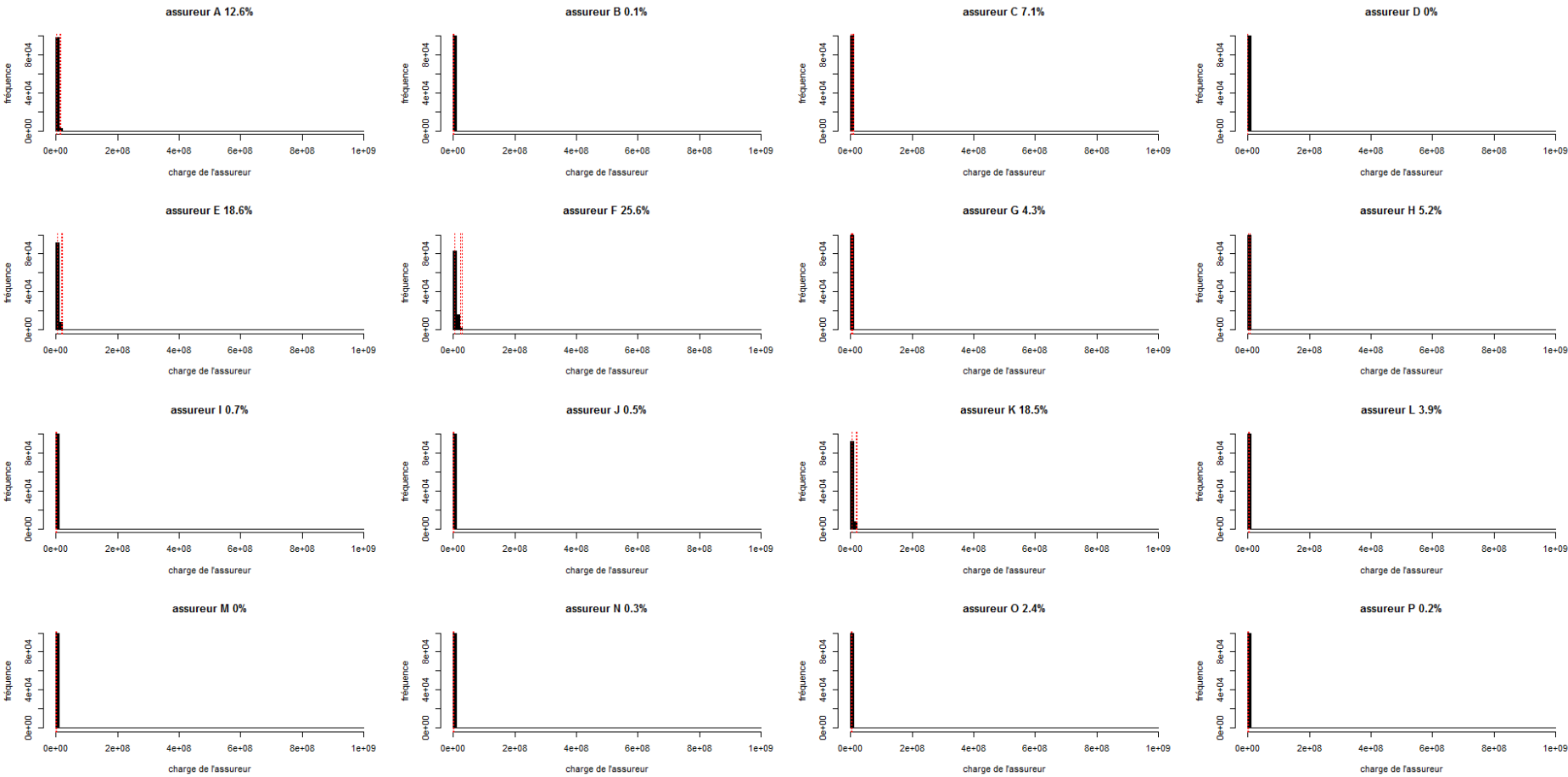
Distribution structure initiale



Risque Décès uniquement



Distribution structure initiale



Structure “TopTop”

