



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le _____

Par : M. Bastien MARBACH

Titre: Détermination et impact du coût du capital dans le cadre d'une étude
d'allocation stratégique d'actifs : Exemple du Fonds Général de Cardif
Assurance Vie.

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

Entreprise :

BNP Paribas Cardif

Membres du jury I.S.F.A.

Directeur de mémoire en entreprise :

Mme Flavia BARSOTTI

Mme Corinne LEFUMAT

M. Alexis BIENVENÛE

M. Areski COUSIN

Invité :

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Institut de Science Financière et d'Assurances
50 avenue Tony Garnier
69366 LYON CEDEX 07

Tuteur : LEFUMAT Corinne

Détermination et impact du coût du capital dans le cadre d'une étude d'allocation stratégique d'actifs : Exemple du Fonds Général de Cardif Assurance Vie

MARBACH Bastien



BNP PARIBAS
CARDIF



Paris, le 10 mars 2013

Résumé

Mots-clés :

Solvabilité 2, ALM (Asset and Liability Management), allocation stratégique d'actifs, coût du capital, SCR (Solvency Capital Requirement), formule standard, projection du SCR, PVFP (Present Value of Future Profits).

Avec la mise en place de la directive Solvabilité 2, les compagnies d'assurance vie et non-vie se voient imposer de nouvelles règles concernant la gestion de leur activité. Elles sont désormais obligées de calculer et de détenir un capital économique réglementaire appelé SCR (Solvency Capital Requirement). Selon les secteurs d'activité ce montant peut s'avérer important. C'est par exemple le cas du SCR de marché, en lien avec les études d'allocation stratégique d'actifs, qui peut représenter jusqu'à 80 % du SCR total. L'immobilisation d'un tel capital a donc un coût qu'il est important de déterminer. La prise en compte de cette nouvelle directive risque également d'avoir une influence sur la répartition finale de l'allocation stratégique d'actifs et principalement sur la part actions. Toutefois, cette classe d'actifs permet souvent à l'organisme assureur de rester compétitif. Ce mémoire a donc deux objectifs : déterminer le coût d'immobilisation du SCR, puis mesurer l'impact de la prise en compte du coût du capital dans une étude d'allocation stratégique d'actifs.

Tout d'abord, nous déterminons le coût du capital en adaptant la méthode de calcul de la marge pour risque. La difficulté de cette méthode repose dans la projection du SCR. Afin de répondre à cette problématique, nous proposons dans ce mémoire une formule fermée permettant la projection du SCR de marché. Celle-ci se base sur la connaissance de 5 indicateurs de risque que sont :

- Les Plus ou Moins-Values Latentes (PMVL) Obligataires
- Le rapport entre la Provision pour Participation aux Excédents (PPE) et les Provisions Mathématiques (PM)
- Les PMVL actions
- La Part Actions initiale du portefeuille
- La Part Immobilier initiale du portefeuille

Cette étude se base sur la construction préalable d'un hypercube de données obtenu grâce au modèle de projection Prophet utilisé chez BNP Paribas Cardif.

Ensuite, une fois la fonction déterminée et validée par différents tests statistiques, nous l'avons appliquée afin de mesurer l'impact du coût du capital. La démarche suivie a été de reprendre l'étude d'allocation stratégique d'actifs réalisée chez BNP Paribas Cardif en 2012, tout en prenant en compte les contraintes de Solvabilité 2. Les conclusions de cette nouvelle étude conduisent à une diminution importante de la part actions à investir. Cependant, réduire la part investie en actions risque de ne pas permettre aux compagnies de rester compétitives. Face à cette nouvelle réglementation, comment vont réagir les assureurs dans leur gestion de risques ?

Abstract

Key words :

Solvency II, ALM (Asset and Liability Management), assets strategic allocation, Cost of Capital (CoC), SCR (Solvency Capital Requirement), standard formula, SCR projection, PVFP (Present Value of Future Profits).

Regarding their business management, life and non-life insurance companies will soon have to deal with new rules set up by the Solvency II directive. Insurance companies already have to compute and be aware of their Solvency Capital Requirement (SCR). The SCR amount depends on the line of business and can be very high. This is the case of the market SCR which can reach up to 80 % of the global SCR amount. This amount is linked to assets strategic allocation studies. The immobilisation of such a capital causes a cost that has to be determined. This new directive also has an impact on the final distribution of strategic allocation of assets, and especially on equity exposure. However, having this type of assets in its portfolio, allows the company to be and/or stay competitive. This thesis aims to : establish the SCR immobilisation cost, and measure the impact of the SCR cost within an assets strategic allocation study.

First of all, we compute the SCR cost by using and adapting the risk margin formula. The complexity point with this method is the SCR projection. In order to answer this problem, we set up a closed formula that allows market SCR projection thanks to 5 risk drivers :

- Bond realized and unrealized capital gains and losses
- The ratio between profit sharing reserve and mathematical provisions
- Assets realized and unrealized capital gains and losses
- Portfolio's initial equity exposure
- Portfolio's initial real estate exposure

This study is based on a data hypercube construction obtained with the Prophet projection model in use at BNP Paribas Cardif.

Finally, once the formula is established and validated thanks to various statistic tests, we will implement this formula to measure the SCR cost impact. We will re-launch the assets strategic allocation study using BNP Paribas Cardif portfolio data and taking into account Solvency II constraints. Conclusions of this new study will lead to a significant decrease of the equity exposure investment. However, reducing this investment is risky for companies if they want to stay competitive. With this new regulation, how will insurance companies react ?

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Mme Corinne LEFUMAT, mon maître de stage, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe ALM de BNP Paribas Cardif. Je lui suis également reconnaissant pour son écoute, sa disponibilité et ses nombreux conseils tout au long de ce mémoire. Je remercie également l'ensemble de l'équipe ALM avec qui j'ai pu échanger durant la rédaction de celui-ci.

Je remercie également Messieurs Pierre VALADE et Jean-Paul FELIX pour leurs conseils et l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Je souhaite aussi remercier l'équipe du GRM BNP Paribas avec qui j'ai travaillé sur certains points de ce mémoire.

Je remercie mes professeurs de l'Institut de Sciences Financière et d'Assurances (ISFA) et tout particulièrement mon tuteur universitaire M. Christian ROBERT pour ses retours concernant mon travail, sa disponibilité et son amabilité.

Enfin, je remercie mes proches pour leur soutien et leurs relectures.

Table des matières

1	Le contexte Solvabilité 2	9
1.1	Présentation du dispositif Solvabilité 2	9
1.2	Une organisation en 3 piliers	10
1.2.1	Pilier I : Exigences quantitatives	10
1.2.2	Pilier II : Exigences qualitatives et surveillance prudentielle	10
1.2.3	Pilier III : Reporting et discipline de marché	10
1.3	Un bilan en normes prudentielles	11
1.3.1	Les actifs en valeur de marché	11
1.3.2	Les éléments du passif	11
1.4	Le calcul du capital réglementaire	13
1.4.1	La formule Standard	13
1.4.2	L'exemple du SCR de marché	14
1.4.3	Le calcul de la Net Asset Value	14
1.4.4	Un processus d'agrégation des risques	15
2	Contexte de l'étude	18
2.1	L'activité BNP Paribas Cardif	18
2.1.1	La répartition de l'activité	18
2.1.2	Une activité répartie en canaux	19
2.2	Objectifs et principes du modèle ALM	19
2.2.1	Les objectifs d'une étude ALM et de son modèle	19
2.2.2	Les principes d'une étude ALM	19
2.3	Les bases d'une étude ALM	20
2.3.1	Les principaux éléments et caractéristiques du passif	20
2.3.2	Description de l'actif	22
2.4	Description du modèle ALM et de son fonctionnement	24
2.4.1	Valorisation des actifs	24
2.4.2	Calcul des produits financiers	27
2.4.3	Revalorisation du passif	29
2.4.4	Prestations complémentaires en cas d'insuffisance des taux crédités	37
2.4.5	Autres provisions mais non calculées par le modèle ALM	37
2.4.6	Une représentation schématique du modèle ALM utilisé	38
2.5	Présentation des étapes de l'étude d'allocation stratégique d'actifs	38
2.5.1	Rappel des hypothèses générales et des règles de pilotage	39
2.5.2	L'ALM flux et les calculs de la durée	39
2.5.3	L'ALM Stochastique	42
2.5.4	Indicateurs de valeur et de risque pour l'étude	42
2.5.5	Représentation graphique du nuage de points de la frontière efficiente	43
3	Modélisation du Coût du Capital	45
3.1	Définition économique et mathématique du coût du capital	45
3.2	Estimation des SCRs futurs	46
3.2.1	Méthodes alternatives au calcul de capital économique dans le futur	46
3.2.2	Autres simplifications existantes	48
3.2.3	Méthode proposée	49

3.3	Présentation et construction de l'hypercube	57
3.3.1	Méthodologie	57
3.3.2	Le retraitement risque neutre	58
3.3.3	La construction de l'hypercube	58
3.3.4	Présentation de l'hypercube obtenu	60
3.3.5	Exploitation de l'hypercube	61
3.4	Recherche d'une fonction pour calculer un SCR à un pas annuel	62
3.4.1	Analyse descriptive de l'hypercube	62
3.4.2	Recherche d'une fonction polynomiale	72
4	Application et calcul du coût du capital dans le cadre de l'étude d'allocation stratégique d'actifs 2012	83
4.1	Hypothèses et présentation du portefeuille	83
4.1.1	Hypothèses générales et périmètre de l'étude	83
4.1.2	Description du portefeuille	83
4.2	Présentation des scénarios stochastiques en Risque Réel	86
4.2.1	Evolution des taux	86
4.2.2	Évolution de l'indice action et du taux de rendement	88
4.3	Application du calcul du coût du capital à une étude ALM	89
4.3.1	Les hypothèses de calculs	89
4.3.2	Méthodologie de calcul du SCR à l'aide de la fonction	90
4.3.3	Comparaison des résultats en $t=0$	90
4.3.4	Projection du SCR	91
4.3.5	Prise en compte du coût du capital dans la construction de la frontière efficiente	95
4.3.6	Bilan sur la modélisation proposée	98
	Conclusion	99
	Références	100
	Annexe A	102
	Annexe B	104
	Annexe C	108
	Annexe D	110

Introduction

La gestion actif-passif fait partie de l'activité stratégique pour les compagnies d'assurance avec un gros bilan. Une bonne gestion d'actifs permet à un assureur d'être en mesure de faire face à ses engagements vis à vis de ses assurés et de ses actionnaires. Selon les actifs choisis par un assureur pour composer son portefeuille, les risques encourus sont plus ou moins importants. Une des missions de l'ALM¹ est de déterminer l'allocation stratégique d'actifs optimale qui permet à l'assureur de respecter ses engagements tout en maîtrisant ses risques. Les compagnies d'assurance doivent également rester compétitives tout en respectant les nombreuses contraintes réglementaires de plus en plus complexes. L'allocation stratégique d'actifs est ensuite communiquée aux gérants et constitue la base de la convention de gestion du Fonds Général Cardif Vie que nous étudions dans ce mémoire.

Avec la mise en place de la directive Solvabilité 2, les organismes assureurs doivent respecter de plus en plus de règles dans leur gestion d'actifs. Dans cette directive, une formule standard est proposée pour le calcul d'un capital réglementaire nécessaire pour couvrir les risques supportés par les assureurs et les réassureurs à la suite d'un choc provoqué par un événement exceptionnel. Ce niveau de capital est appelé capital de solvabilité requis ou SCR². Ce calcul est effectué dans le but de pouvoir maîtriser la probabilité de ruine à un an et de la limiter à moins de 0,5 %. Or, l'immobilisation de fonds propres représentant une contrainte, il est nécessaire pour une compagnie d'assurance de comprendre l'évolution de ce capital dans le temps. La projection du SCR est nécessaire pour effectuer un calcul de coût du capital (CoC³).

L'objectif de ce mémoire est de proposer une approche qui permettrait de calculer un SCR prospectif en fonction de paramètres identifiés comme impactant celui-ci (structure de l'actif et du passif, environnement de marché). Une fois la méthode de projection déterminée, nous étudierons l'impact de la prise en compte du coût du capital sous Solvabilité 2 sur la décision de l'allocation stratégique d'actifs. Cette étude sera menée sur le nuage de points correspondant à la frontière efficiente déterminée dans le cadre des études ALM, menant à la préconisation d'une allocation stratégique d'actifs. Les éléments pris en compte pour la construction de ce nuage de points sont, la richesse de l'assureur mesurée par la PVFP⁴, et le niveau de risque correspondant. La frontière efficiente présentée ici correspond aux données calculées au 31/12/2011. La construction de ce nuage sera expliquée dans la troisième partie de ce mémoire.

1. Asset and Liability Management : Gestion Actif-Passif

2. En anglais pour Solvency Capital Requirement : définition page 10

3. Cost of Capital en anglais

4. En anglais : Present Value of Future Profits

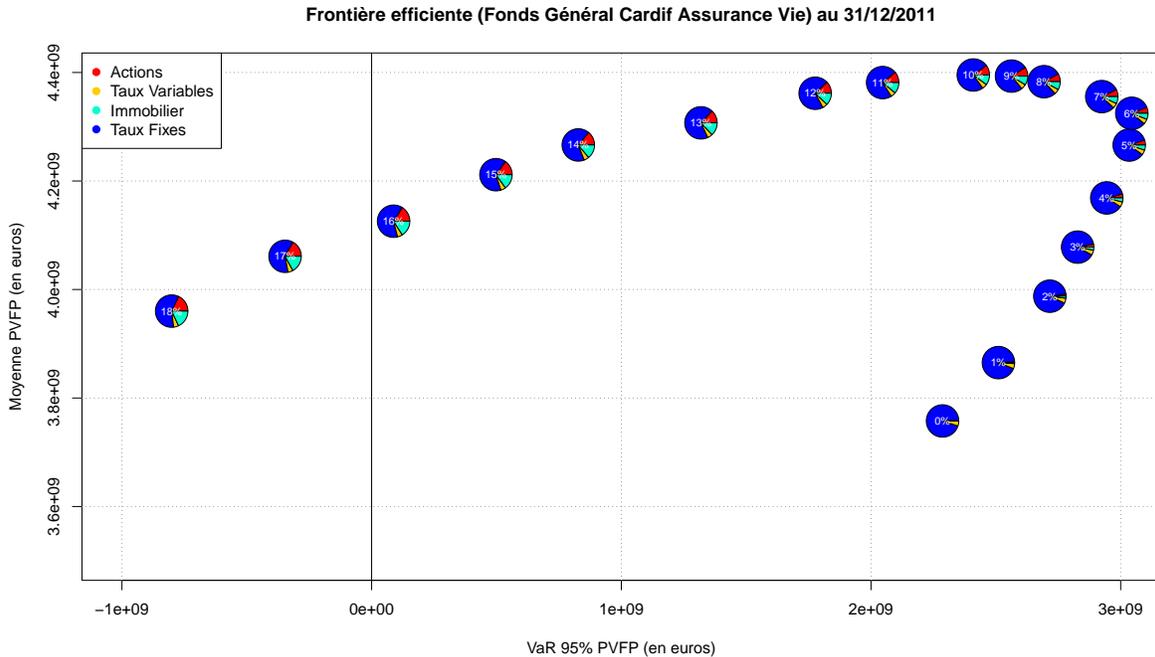


FIGURE 1 – Frontière efficiente du portefeuille BNP Paribas Cardif à fin 2012

La première partie de ce mémoire est consacrée à la directive Solvabilité 2. Nous allons rappeler les éléments principaux de celle-ci dont nous aurons besoin dans ce mémoire. La mise en application prochaine de Solvabilité 2 impacte l'activité d'assurance ainsi que les capitaux éligibles que doivent détenir les compagnies d'assurance.

Dans la deuxième partie de ce mémoire nous présenterons le modèle ALM de BNP Paribas Cardif ainsi que son paramétrage. Nous aborderons également les différentes étapes qui constituent une étude d'allocation stratégique d'actifs, de la récupération des données au calcul de la frontière efficiente avec la détermination des allocations optimales.

La troisième partie est consacrée à la recherche d'une fonction permettant le calcul du SCR dans le futur, à un pas annuel en fonction d'une situation économique initiale. Pour cela nous allons identifier les éléments qui influencent le montant du SCR (*Risk Drivers*). Ensuite, nous exposerons la méthodologie utilisée pour la construction de notre base de données de SCR. Puis, nous procéderons à la recherche d'une fonction reliant ces *Risk Drivers* au SCR. Nous testerons enfin la robustesse de la fonction proposée en utilisant des tests statistiques.

Dans la dernière partie, la fonction obtenue précédemment sera appliquée aux données de l'étude ALM 2012 BNP Paribas Cardif afin de mesurer l'impact de la prise en compte de Solvabilité 2 sur la détermination de l'allocation stratégique d'actifs. Pour cela, une nouvelle frontière efficiente sera construite avec la prise en compte du coût du capital.

Chapitre 1

Le contexte Solvabilité 2

L'objectif de cette première partie est de rappeler le contexte du dispositif Solvabilité II. Nous rappellerons ensuite la méthode de calcul du capital économique réglementaire à l'aide de la formule standard. La notion du coût du capital par l'intermédiaire du calcul de la marge pour risque (Risk Margin en anglais) sera également abordée.

1.1 Présentation du dispositif Solvabilité 2

" *La solvabilité traduit l'aptitude de l'entreprise à faire face à ses engagements en cas de liquidation, c'est-à-dire d'arrêt de l'exploitation et de mise en vente des actifs*". D'après cette définition, une compagnie d'assurance peut être considérée comme insolvable dès lors que la somme totale de ses engagements est supérieure à la somme de ses actifs.

Après l'adoption de la directive Omnibus 2¹ en Mars 2012, l'entrée en vigueur de la directive Solvabilité 2 est prévue entre le 1^{er} Janvier 2015 ou 2016. Le projet Solvabilité 2 a pour objectifs de :

- Renforcer la protection des assurés
- Adapter le besoin de marge de solvabilité aux profils de risque de chaque compagnie d'assurance
- Etablir une approche prudentielle commune au niveau européen
- Encourager la compétitivité de l'assurance européenne

Le processus dit de « Lamfalussy », utilisé dans un premier temps par l'Union européenne pour concevoir les réglementations dans le secteur de la finance dans le cadre de la directive Bâle 2, a été retenu pour Solvabilité 2. Ce processus s'organise autour de quatre niveaux successifs :

- Niveau 1 : élaboration de la législation
- Niveau 2 : élaboration des mesures d'exécution
- Niveau 3 : coopération des régulateurs
- Niveau 4 : contrôle du respect du droit

L'objectif du processus Lamfalussy est d'assurer un dialogue permanent et transparent entre le législateur et les acteurs du marché, notamment par le biais de consultations publiques à chaque niveau de la procédure.

1. La directive Omnibus 2 a pour rôle d'amender la directive Solvabilité 2. Cette directive propose pour un certain nombre de secteurs d'adopter des mesures de transition avant la mise en application effective de Solvabilité 2.

1.2 Une organisation en 3 piliers

La réforme solvabilité 2 est axée autour de 3 piliers :

1.2.1 Pilier I : Exigences quantitatives

Ce premier pilier est relatif aux exigences quantitatives à travers l'évaluation économique du bilan. En effet, les actifs et les passifs de la compagnie doivent maintenant être évalués de manière « Market consistent ». Il définit également deux niveaux de seuil pour les fonds propres :

- Le MCR (Minimum Capital Requirement) qui représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'Autorité de Contrôle est automatique.
- Le SCR (Solvency Capital Requirement) qui correspond au niveau de capital requis pour que l'assureur respecte ses engagements dans 99.5 % des cas, à un horizon d'un an. Il peut être calculé de deux manières différentes : en utilisant la formule standard ², ou avec un modèle interne.

Ce premier pilier comprend également des dispositions sur les provisions, les investissements effectués par l'assureur et ses fonds propres.

1.2.2 Pilier II : Exigences qualitatives et surveillance prudentielle

Les éléments présents dans le second pilier donnent des informations afin de préciser et d'harmoniser les activités de surveillance et de contrôle, pour les entreprises d'assurance et les autorités de contrôle.

Il est nécessaire que les compagnies d'assurance puissent être en mesure de se contrôler elles-mêmes avec le développement du département Risk Management et la mise en place d'un ORSA ³. Cela peut également passer par des systèmes de contrôle interne et d'audit.

L'ORSA peut être vu comme un outil de gestion des risques aidant à la prise de décisions stratégiques. Il permet une gestion saine, prudente et efficace de l'activité de la compagnie d'assurance.

Concernant les autorités de contrôle, l'Union Européenne souhaite leur donner la possibilité d'identifier les entreprises qui représenteraient un risque financier ou organisationnel grâce à un processus de supervision.

1.2.3 Pilier III : Reporting et discipline de marché

Ce dernier pilier est relatif à la discipline de marché à travers trois domaines de réflexion :

- Principe de transparence
- Exigence d'information
- Communication financière

Il fournit une liste d'éléments d'information qui doivent être rendus publics par les compagnies d'assurance. Elles doivent fournir :

- Un rapport sur leur situation financière et leur solvabilité
- Un rapport d'information à l'intention des superviseurs (dossier annuel)
- Des règles d'information pour les assurés

2. préconisée par le QIS5, devenue les IML2 courant 2012

3. Own Risk and Solvency Assessment

PILIER I EXIGENCES QUANTITATIVES	PILIER II EXIGENCES QUALITATIVES SURVEILLANCE PRUDENTIELLE	PILIER III REPORTING ET DISCIPLINE DE MARCHÉ
<ul style="list-style-type: none"> • ACTIFS ET PASSIFS <ul style="list-style-type: none"> ✓ EVALUATION MARKET CONSISTENT • SCR <ul style="list-style-type: none"> ✓ FORMULE STANDARD ✓ MODÈLE INTERNE • MCR • FONDS PROPRES ADMISSIBLES 	<ul style="list-style-type: none"> • GOUVERNANCE • RISK MANAGEMENT (ORSA) • CONTRÔLE INTERNE • GESTION DES RISQUES • PROCESSUS DE SUPERVISION 	<ul style="list-style-type: none"> • PUBLIC DISCLOSURE <ul style="list-style-type: none"> ✓ RAPPORT SUR LA SITUATION FINANCIÈRE ET LA SOLVABILITÉ • REPORTING ET AUTRES INFORMATIONS À FOURNIR AUX RÉGULATEURS • TRANSPARENCE FINANCIÈRE

FIGURE 1.1 – Représentation en 3 piliers du dispositif Solvabilité 2

1.3 Un bilan en normes prudentielles

Les règles de valorisation de l'actif et du passif dans le cadre de la directive solvabilité 2 sont détaillées dans l'article 64 de la directive. A la différence de Solvabilité 1 qui demandait aux compagnies d'assurance d'évaluer les postes du bilan prudemment, l'approche retenue est une évaluation des actifs et des passifs en valeur de marché ou « juste valeur ».

Concernant le bilan en normes prudentielles proposé par la directive Solvabilité 2, la partie la plus détaillée est le passif. Plusieurs éléments le composent : les provisions techniques calculées selon une vision « Best Estimate », auxquelles s'ajoutent une marge pour risque et les capitaux réglementaires présentés précédemment (SCR et MCR).

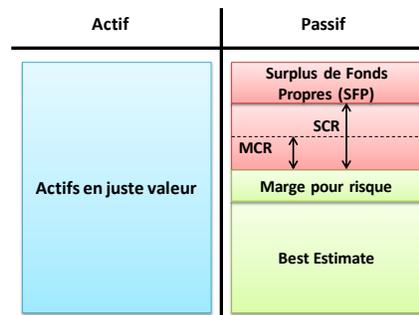


FIGURE 1.2 – Bilan en normes prudentielles sous solvabilité 2

1.3.1 Les actifs en valeur de marché

Dans le bilan proposé par la directive Solvabilité 2, les actifs doivent être comptabilisés en valeur de marché. Celle-ci correspond au montant auquel ils pourraient être échangés dans des conditions de concurrence normales entre des parties également informées.

1.3.2 Les éléments du passif

a. La vision Best Estimate dans le calcul des provisions techniques

La définition du Best Estimate retenue par l'EIOPA⁴ est celle du Consultation Paper numéro 26, des spécifications techniques du QIS4 : le Best Estimate est " la moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est

4. European Insurance and Occupational Authority

estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente ⁵.

La provision Best Estimate brute de réassurance s'écrit de la manière suivante :

$$BEL = \sum_{j>0} \frac{F_j}{(1+r_j)^j}$$

Avec :

- F_j sont les cash flows de l'année comptable i
- r_i le taux sans risque de maturité i

Dans le contexte de la directive Solvabilité 2, le calcul des provisions techniques se base sur une distinction entre deux types de risques ⁵ :

- Les risques couvrables, pour lesquels la provision technique est calculée à partir d'un portefeuille de réplication. Ce portefeuille permet de reproduire les cash flows du passif. Il est à noter que les calculs sont effectués dans le cadre de l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).
- Les risques non couvrables, dont la provision technique est évaluée comme la somme du Best Estimate auquel est ajoutée une marge pour risque qui est calculée dans une logique de coût du capital.

Les deux risques font partie des risques non mutualisables. Ils sont souvent de nature financière mais il en existe d'autres qui sont associés à des engagements d'assurance (par exemple la mortalité stochastique, ou les phénomènes qui pourraient conduire à remettre en cause l'indépendance entre les assurés, tels que des attentats ou des risques environnementaux).

Les autres risques auxquels un assureur peut faire face, sont les risques dit mutualisables. Ils correspondent aux risques principalement gérés par les assureurs. Pour ces risques on suppose l'indépendance entre les polices assurées, que la classe de risque soit homogène ou non.

b. La marge pour risque et coût du capital

La définition de la marge pour risque est donnée dans l'article 77-3 de la directive Solvabilité 2 :
 " La marge pour risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance ".

Cette marge pour risque doit être calculée séparément du Best Estimate des flux de trésorerie et est nulle pour les portefeuilles de réplication de risques couvrables.

La méthode de calcul de la marge pour risque est décrite dans l'article 77-4 de la directive Solvabilité 2 et se décompose en deux étapes :

Étape 1 :

Détermination du montant de SCR en $t=0$, soit par la formule standard (ci-dessous), soit par modèle interne. Ensuite un calcul du SCR pour les différentes années de projection.

Étape 2 :

Une fois ces données connues il est possible de déterminer la marge pour risque comme suit :

$$CoCM^6 = CoC \sum_{t=0}^n \frac{E[SCR(t)]}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$$

5. Support de cours "Introduction" - Frédéric Planchet (Ressources Actuarielles)

6. CoCM : Cost of Capital Margin

Avec :

- $CoCM$ correspond à la marge pour risque
- r_t désigne le taux d'intérêt de maturité t
- $SCR(t)$ désigne le SCR pour l'année t
- CoC est le taux de coût du capital, fixé à 6 %⁷

Dans le calcul de la marge pour risque, les SCR pris en compte sont ceux qui correspondent aux risques de souscription, de contrepartie concernant les contrats de réassurance, les risques opérationnels et les risques de marché non évitables.

1.4 Le calcul du capital réglementaire

Dans le cadre de la directive Solvabilité 2, le capital économique peut être calculé par deux approches différentes : une approche formule standard et une approche modèle interne. Dans le cadre de ce mémoire, nous allons considérer l'approche formule standard décrite dans le QIS 5, avec une mise à jour des chocs suite à la publication des Implementing Measures Level 2 (IML2).

1.4.1 La formule Standard

L'approche « formule standard » repose dans un premier temps sur une valorisation économique des actifs et des passifs. Dans un deuxième temps, les compagnies d'assurance doivent appliquer des chocs marginaux, sous-module par sous-module en calculant un capital requis par risque. Ces montants sont ensuite agrégés via des matrices de corrélation. L'architecture retenue par la norme pour le calcul du SCR est comme suit :

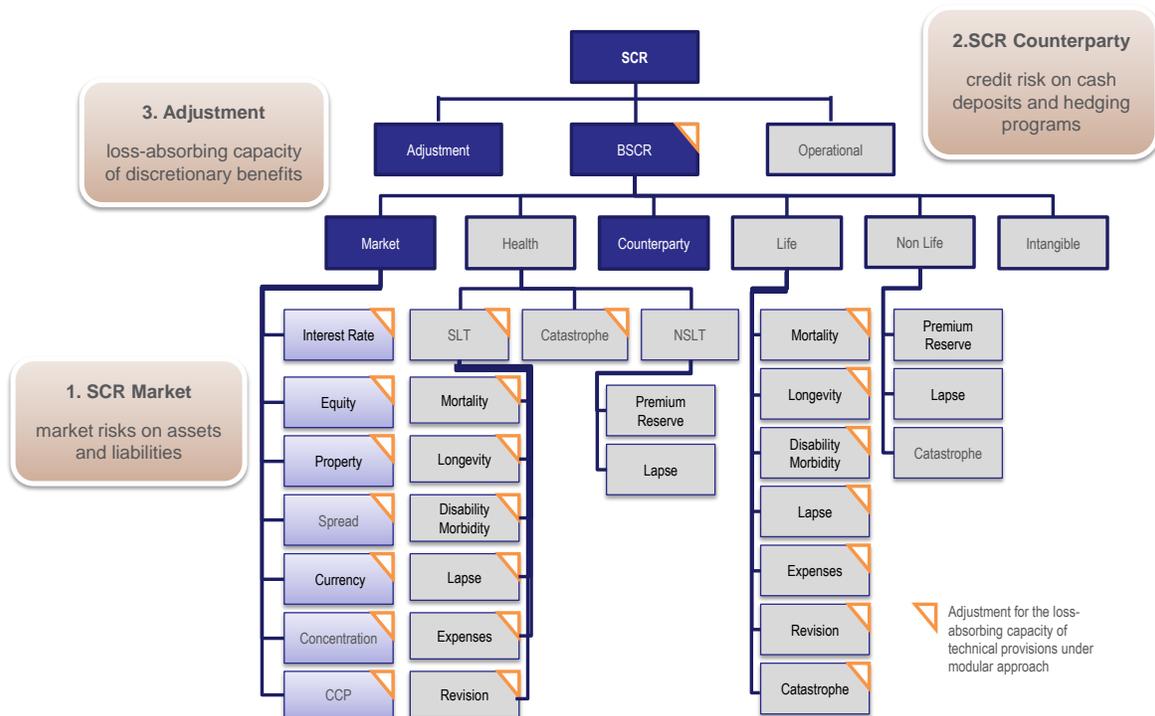


FIGURE 1.3 – Représentation de la formule standard par modules

7. Taux mentionné dans le QIS 5

Avant de formaliser les calculs sous la formule Standard, nous allons introduire quelques notations :

- SCR est le capital économique global
- $BSCR$ correspond au capital économique avant intégration du risque opérationnel
- SCR_{op} est le capital économique pour le risque opérationnel
- Adj correspond à un ajustement
- C_i est le capital pour le sous-risque i
- $\rho_{i,j}^{R_m}$ est le coefficient de corrélation permettant l'agrégation des capitaux pour les risques i et j du module m
- SCR_m est le capital économique pour le module m
- $\rho_{i,j}^{R_M}$ est le coefficient de corrélation permettant l'agrégation des capitaux pour les modules i et j

1.4.2 L'exemple du SCR de marché

Le module qui va nous intéresser dans ce mémoire est celui du risque de marché. Ci-dessous sa composition et la signification de chacun des sous-modules qui le compose :

- Le risque actions correspond à une baisse du niveau des actions
- Le risque taux correspond à une variation (à la hausse ou à la baisse) de la courbe des taux
- Le risque immobilier est causé par une chute des marchés immobiliers
- Le risque de devises est engendré par un changement du niveau des taux de change
- Le risque de spreads provient d'un choc à la baisse de l'actif net à la suite de variation de spread
- Le risque de concentration correspond au risque de défaut qui serait potentiellement aggravé du fait de la concentration des titres sur certains émetteurs
- La prime contrat cyclique (CCP⁸)

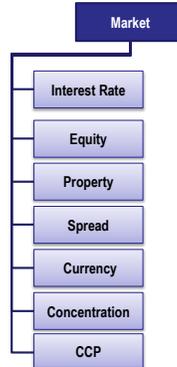


FIGURE 1.4 – Module SCR de Marché

Pour chaque sous module, le calcul du SCR par la formule standard passe par la détermination de deux montants de Net Asset Value (NAV).

1.4.3 Le calcul de la Net Asset Value

Le QIS 5 et maintenant les IML2 spécifient que le capital réglementaire pour chaque sous-module de risque est calculé comme une différence de Net Asset Value (NAV). La NAV correspond à un instant t à la différence entre le montant d'actifs de l'assureur en valeur de marché et la valeur économique des passifs (soit le Best Estimate). Pour le calcul du capital économique, il faut déterminer un montant de NAV dans le cadre d'un scénario central et le montant de NAV après application du choc pour le

8. Counter Cyclical Premium en anglais

module correspondant.

Schématiquement cette idée se traduit comme suit :

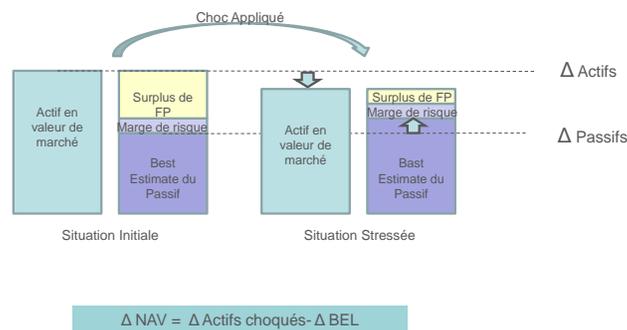


FIGURE 1.5 – Méthode de calcul de la NAV

Mathématiquement nous avons les formules suivantes :

$$NAV = MV(Actif) - PASSIF(Richesse_{assureur})$$

$$\Delta NAV = NAV_{Centrale} - NAV_{Choc}$$

Puis le montant du SCR pour le sous-module considéré est déterminé par la formule suivante. Voici le montant nécessaire pour couvrir le choc action :

$$C_{eq} = Mkt_{eq} = \max(\Delta NAV|equityshock; 0)$$

Cette opération est ensuite répétée sur l'ensemble des sous-modules. Cette étape terminée, le capital réglementaire est connu pour chaque sous-module de risque.

1.4.4 Un processus d'agrégation des risques

Ensuite, pour connaître le capital réglementaire par module de risque il faut agréger les capitaux obtenus par sous-module. Pour ce faire, des matrices de corrélation entre les risques sont renseignées dans la documentation des IML2. Il est à noter que dans notre exemple, le module risque de marché possède deux matrices de corrélation des risques, une en cas de hausse des taux, l'autre en cas de baisse des taux.

Vous trouverez ci-dessous la matrice de corrélation dans une situation de baisse des taux :

CorrMktDown	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concentration	Illiquidity premium
Interest	1						
Equity	0.5	1					
Property	0.5	0.75	1				
Spread	0.5	0.75	0.5	1			
Currency	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidity premium	0	0	0	-0.5	0	0	1

FIGURE 1.6 – Matrice de corrélation en cas de baisse des taux

Et ci-dessous, la matrice en cas de hausse des taux :

CorrMktUp	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concentration	Illiquidity premium
Interest	1						
Equity	0	1					
Property	0	0.75	1				
Spread	0	0.75	0.5	1			
Currency	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidity premium	0	0	0	-0.5	0	0	1

FIGURE 1.7 – Matrice de corrélation en cas de hausse des taux

On observe des différences de corrélation entre les taux et les actions, mais aussi entre l'immobilier et les spreads qui peuvent être expliquées économiquement de la façon suivante : dans le cas d'une baisse des taux, le portefeuille obligataire d'une compagnie d'assurance, aura tendance à s'apprécier et les éventuelles plus-values réalisées peuvent être réinvesties dans un portefeuille action ou immobilier. D'où l'existence d'une corrélation positive. A l'inverse, dans le cas d'une hausse des taux, le portefeuille obligataire risque de perdre de sa valeur, ce qui n'engendre pas d'investissement dans les actions ou l'immobilier.

Ainsi, pour chaque module de risque m , le calcul de SCR_m par agrégation intra-modulaire est effectué comme suit :

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j}^{R_m} * C_i * C_j}$$

- Les sous-capitaux agrégés à l'étape précédente sont à leur tour agrégés afin d'obtenir le résultat. Cette étape permet de prendre en compte la diversification entre les différents modules de risque. La formule de calcul est la suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j}^M * SCR_i * SCR_j}$$

- Finalement, le SCR est obtenu en ajoutant au BSCR le risque opérationnel et des ajustements :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{op}$$

Avec :

- Le SCR opérationnel correspond au chargement en capital au titre du risque opérationnel auquel les assureurs doivent faire face. Il est calculé comme suit :

$$ScR_{op} = \max(0, 3 \times BSCR; Op) + 0,25 \times Exp_{ul}$$

Exp_{ul} correspond aux dépenses annuelles liées aux contrats en UC.

La partie Op est déterminée par la formule suivante :

$$Op = \max(Op_{premiums}; Op_{provisions})$$

Avec :

$$Op_{premiums} = 0,04 \times (Earn_{life} - Earn_{life-ul}) + \max(0; 0,04 \times (Earn_{life} - 1,1 \times pEarn_{life}) - (Earn_{life-ul} - 1,1 \times pEarn_{life-ul}))$$

$Earn_{life}/Earn_{life-ul}$ les primes de l'année n acquises pour les produits d'Assurance Vie/ pour les supports en UC d'Assurance Vie.

$pEarn_{life}/pEarn_{life-ul}$ les primes de l'année $n - 1$ acquises pour les produits d'Assurance Vie/ pour les supports en UC d'Assurance Vie.

Puis :

$$Op_{provisions} = 0,0045 \times \max(0; TP_{life} - TP_{life-ul})$$

TP_{life} les provisions techniques des produits d'Assurance Vie sans prendre en compte la Risk Margin.

$TP_{life-ul}$ les provisions techniques UC des produits d'Assurance Vie sans prendre en compte la Risk Margin

- Les ajustements Adj qui permettent de tenir compte des pertes futures qui seront compensées par la réduction des impôts différés à payer, mais aussi par la réduction de la participation aux bénéfices futurs à distribuer aux assurés.

Chapitre 2

Contexte de l'étude

L'objectif de cette partie est de décrire l'environnement des études ALM. Pour cela, nous allons commencer par rappeler la décomposition de l'activité BNP Paribas Cardif (BNPPC). Ensuite, nous présenterons le modèle ALM qui est utilisé pour la production des résultats de ce mémoire. Puis nous introduirons les indicateurs de risque et de valeur qui permettent de prendre des décisions satisfaisantes dans le cadre d'une étude d'allocation stratégique d'actifs. Pour finir, nous détaillerons les étapes qui la compose.

2.1 L'activité BNP Paribas Cardif

2.1.1 La répartition de l'activité

BNP Paribas Cardif est une compagnie composée de 12 branches dont l'activité est répartie entre de l'épargne à travers un Fonds Général et des UC (Unités de Compte), une activité de protection dans laquelle on retrouve de l'ADE (Assurance des emprunteurs) et de la prévoyance. Comme le montre les résultats de l'année 2011, l'activité principale de BNP Paribas Cardif est l'épargne :

Répartition de l'activité BNP Paribas Cardif à fin 2011

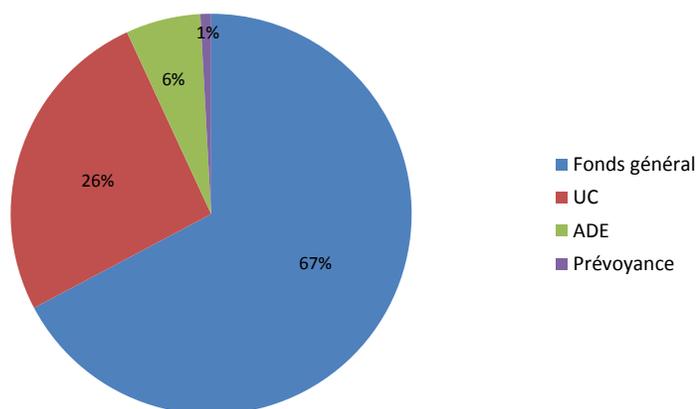


FIGURE 2.1 – Répartition de l'activité de BNP Paribas Cardif à fin 2011

Dans la suite de ce mémoire, nous allons uniquement nous intéresser à l'activité d'épargne à travers l'étude du Fonds Général de BNP Paribas Cardif. Les contrats en unités de compte ne sont pas inclus

dans ce calcul.

2.1.2 Une activité répartie en canaux

L'activité de BNP Paribas Cardif est organisée en différents canaux de distribution. Chacun d'entre eux correspond à une catégorie d'assurés. Ci-dessous les quatre principaux canaux que nous allons considérer dans la suite de ce mémoire :

- Cardif CGPI
- Banque De Détail en France (BDDF)
- Banque Privée
- Partenaires (Cetelem, Cortal...)

2.2 Objectifs et principes du modèle ALM

Dans cette partie nous allons présenter les objectifs que doit remplir une étude ALM, ainsi que les principes de celle-ci.

2.2.1 Les objectifs d'une étude ALM et de son modèle

L'ALM a pour objectif de fournir des éléments de décision à une compagnie d'assurance afin qu'elle puisse obtenir le meilleur rendement à un niveau de risques limités. La mise en place d'une stratégie ALM permet de déterminer la meilleure allocation d'actifs à moyen ou long terme. Ces décisions sont prises en connaissance de l'évolution future de l'actif et du passif de la compagnie, mais également sur la base de simulations et d'hypothèses à dire d'experts.

Cette allocation stratégique d'actifs fait partie intégrante de la gestion des risques de marché de l'entreprise. Les recommandations faites par l'ALM ont pour but d'aider à la prise de certaines décisions tout en respectant les normes comptables en vigueur.

2.2.2 Les principes d'une étude ALM

Une étude ALM permet de fournir différentes informations. Celles-ci sont par exemple :

- La durée du passif
- Une optimisation du taux de rendement en testant pour cela différentes allocations avec une modification de la part actions obligataires et immobilier

Pour réaliser une étude ALM et déterminer une allocation d'actifs, il est nécessaire de réaliser différentes étapes. La première étape concerne la préparation des éléments qui vont venir alimenter le modèle ALM. Il est par exemple nécessaire de déterminer les scénarios économiques pour l'étude, mais aussi de récupérer les données de l'actif et du passif.

La deuxième phase consiste en une étude déterministe afin d'effectuer un adossement en durée entre l'actif et le passif.

Enfin la dernière partie de l'étude consiste à construire la frontière efficiente qui permet de déterminer l'allocation stratégique cible. Pour cela différents scénarios stochastiques sont paramétrés en entrée du modèle afin de pouvoir construire un nuage de points. Une fois l'allocation stratégique déterminée selon des critères que nous présenterons dans la suite de ce mémoire, celle-ci est proposée à la direction de la compagnie. Une marge de manœuvre est autorisée autour de celle-ci.

L'ensemble des étapes mentionnées ci-dessus feront l'objet d'une présentation plus approfondie dans la suite de ce mémoire. Nous allons maintenant nous intéresser aux données du passif et de l'actif qui viennent alimenter un modèle ALM.

2.3 Les bases d'une étude ALM

2.3.1 Les principaux éléments et caractéristiques du passif

a. Les éléments clefs du passif

Lors de la projection du bilan, les principaux postes du passif qui génèrent des cash-flows futurs doivent être couverts et donnent lieu à la création de provisions, par exemple :

- Les provisions mathématiques (PM)
- Les provisions pour primes non acquises (PPNA)
- Les provisions pour participation aux bénéfices (PPB)
- Les provisions pour risques d'exigibilité (PRE)
- La réserve de capitalisation (RC)

D'autres provisions sont également créées mais leur impact est beaucoup moins important que celles qui viennent d'être citées.

b. Les cash-flows de passif

L'objectif de cette partie de l'étude ALM, est de comprendre et d'analyser les flux du passif. Pour ce faire, deux situations sont considérées :

- Une situation dans laquelle le portefeuille est considéré en run-off. C'est à dire que pour la projection du bilan, aucun nouveau contrat n'est ajouté au portefeuille. Seules les primes à recevoir des contrats déjà existants sont considérées.
- Une situation avec une nouvelle production (nouveaux contrats par exemple). C'est une hypothèse pour laquelle lors de la projection, on ajoute de nouveaux contrats et on suppose une activité standard pour une compagnie d'assurance.

La projection du bilan doit également prendre en compte les primes, les commissions de l'assureur, la participation aux bénéfices pour les assurés mais aussi les dividendes et autres éléments qui doivent être redistribués aux actionnaires.

c. Les contraintes du passif

Les cash-flows futurs du passif doivent également inclure les éléments suivants :

- Le taux minimum garanti (TMG)
- Les commissions, une marge assurentielle
- Les bénéfices à redistribuer aux clients et aux actionnaires
- Des frais pour des provisions pour sinistres à payer (PSAP)

L'ensemble des éléments cités doit être pris en compte dans le modèle ALM afin de pouvoir déterminer l'allocation stratégique d'une compagnie d'assurance telle que BNP Paribas Cardif.

d. Les sources pour l'alimentation du passif

La création de tables qui regroupent les données du passif qui viennent alimenter le modèle ALM de BNP Paribas Cardif est effectuée par les équipes de l'actuariat. Le modèle de passif et les flux du passif sont obtenus à l'aide du progiciel Prophet et de la librairie FRENCH. Les contrats servent de base et l'objectif est de regrouper les assurés en poches homogènes selon certaines caractéristiques des contrats. Une fois que ces poches sont constituées, elles permettent la création des Model Points suivants :

- DET_CF : Table qui regroupe les flux du passif
- C_FLOW_DEPEND : Table qui définit la loi de rachat dynamique et fixe les seuils
- C_FLOW_DEPEND_CY : Table qui définit la structure Taux de PB/Niveau de frais qui évolue en fonction des années

A titre d'exemple voici un extrait de la table DET_CF que l'on obtient en sortie de FRENCH :

Product Name	IDX_POCHE	Variable Name	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	...
A_EURO	1	NO_POLS_IF	1.4	1.28309446	1.16219469	1.03017671	0.93018366	0.85314248	0.77998001	...
A_EURO	1	MATH_RES	111741.728	99717.44621	87946.09791	75905.73373	66735.47158	59598.42262	53054.45304	...
A_EURO	1	PREM_INC	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	NET_PREMS	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	SUM_ASSURED	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	PV_SUM_ASSD	111741.728	99717.44621	87946.09791	75905.73373	66735.47158	59598.42262	53054.45304	...
A_EURO	1	PV_NET_PREM	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	PV_ANNUITY	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	GTEED_AMOUNT	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	DTH_OUT	0	4678.070312	4656.885149	4546.047477	4388.146242	4327.509036	4284.729081	...
A_EURO	1	MAT_OUT	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	SURR_OUT	0	4522.239033	4602.583772	5299.013948	2881.611647	1123.343546	753.0275141	...
A_EURO	1	ANN_OUT	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	RIDERC_OUTGO	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	PARTSV_OUTGO	0	2823.972449	2511.879376	2195.302752	1900.504258	1686.196385	1506.212979	...
A_EURO	1	INVEXP	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	INVCOM	0	197.2095297	175.2465115	152.8857663	132.5513605	117.7606526	105.1645744	...
A_EURO	1	REXP	0	183.8499699	171.8817892	158.1005426	143.4224436	133.3986029	125.21804	...
A_EURO	1	ICOMM	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	RCOMM	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	IEXP	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	DET_MATH_RES_INT	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	CASHB_OUT	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	INT_BON_OUT	0	0	0	0	0	0	0	...
A_EURO	1	VAL_INT_PC	0	0	0	0	0	0	0	...

FIGURE 2.2 – Extrait d'une table de données de passif en sortie de FRENCH

Les éléments de cette table étant :

- NO_POLS_IF : Nombre de polices
- MATH_RES : Provisions mathématiques
- PREM_INC Primes émises
- NET_PREMS : Primes pures (égales aux primes émises multipliées par (1 - taux de chargement sur CA))
- SUM_ASSURED : Sommes assurées
- PV_SUM_ASSD : Valeur actualisée des sommes assurées
- PV_NET_PREM : Valeur actuelle des primes pures
- PV_ANNUITY : Valeur actuelle des annuités
- GTEED_AMOUNT : Intérêts crédités sur le Stock résiduel en fin d'année
- DTH_OUT : Montant de Décès
- MAT_OUT : Montant de Maturités
- SURR_OUT : Montant de Rachats
- ANN_OUT : Montant de Rentes
- PARTSV_OUTGO : Montant de Rachats Partiels
- INVEXP : Frais généraux sur encours
- INVCOM : Commissions sur encours
- REXP : Frais généraux en coûts unitaires
- ICOMM : Commissions d'acquisition sur CA
- RCOMM Pour les coûts unitaires
- IEXP : Taxe Organique¹

1. = frais sur nouveau chiffre d'affaire

- DET_MATH_RES_INT : Intérêts crédités sur le Stock résiduel en fin d'année
- INT_BON_OUT : Intérêts crédités sur les sorties de l'année
- VAL_INT_PC : Taux crédité

2.3.2 Description de l'actif

Avant de commencer la projection avec le modèle ALM, il est nécessaire d'effectuer un alignement entre les actifs du portefeuille et le passif. Pour cela, un calcul est fait en début de projection à $t=0$.

a. Les cash-flows de l'actif

Lors de la projection du bilan et de l'activité, les cash flows à l'actif sont :

- les coupons pour les obligations à courte ou longue maturité
- les dividendes versés par les actions
- les bénéfices effectués par l'immobilier

Toutes ces informations sont regroupées dans les différents Model Points. Chacun correspond à un sous-portefeuille homogène obtenu après agrégation. Le recours à l'utilisation de Model Points est justifié par un gain de temps dans les calculs.

Celui-ci est alimenté par les données relatives aux différentes catégories qui composent le portefeuille : type d'actifs, date d'échéance, coupon ou dividende, valeur comptable, valeur de marché... Toutes ces informations sont regroupées dans trois Model Points (voir l'exemple dans la suite de l'exposé) :

- Un Model Point avec les obligations
- Un Model Point avec les actions
- Un Model Point avec les caps.

La forme générale d'un Model Point est comme suit :

MODEL_POINT	SP_CODE	ASSET_TYPE	POOL	CATEGORY	ECONOMY	REDEMP_YEAR	REDEMP_MONTH	COUPON	COUPON_DAY	COUPON_FREQ	REDEMP_AMT	MARKET_VAL	BOND_FAV	BAL_SH_VAL	...
1	1	4	1	10	EUR	2016	5	0	16	1	1000000	9924052,621	1000000	1000000	...
2	1	4	1	10	EUR	2016	4	0	4	1	6000000	5737390,26	6000000	6000000	...
3	1	4	1	10	EUR	2016	9	0	28	4	1804662,3	1643035,842	1804662,3	1804662,3	...
4	1	4	1	10	EUR	2016	4	0	29	4	1290950	1177325,487	1290950	1290950	...
5	1	4	1	10	EUR	2015	3	0	30	4	3770646,58	2888194,62	3770646,92	3770646,92	...
6	1	4	1	10	EUR	2015	10	0	20	4	1416420	804054,1839	1416420	1416420	...
7	1	4	1	10	EUR	2016	1	0	15	4	2487254,13	1418721,299	2487367,84	2487367,84	...
8	1	4	1	10	EUR	2016	9	0	8	1	50000000	52445000	50000000	50000000	...
9	1	4	1	10	EUR	2016	9	0	29	1	50000000	51755000	50000000	50000000	...
10	1	4	1	11	EUR	2017	11	0	9	4	15000000	12855000	14988118,27	14988118,27	...
11	1	4	1	11	EUR	2017	6	0	2	1	15000000	12238500	14984237,07	14984237,07	...
12	1	4	1	11	EUR	2017	4	0	30	1	50000000	40315405	49945825,35	49945825,35	...
13	1	4	1	11	EUR	2017	12	0	28	1	18000000	17566142,4	17982497,67	17982497,67	...
14	1	4	1	11	EUR	2018	5	0	14	4	20000000	15536000	20000000	20000000	...
15	1	4	1	11	EUR	2017	3	0	22	4	584064,8	387670,9668	584064,8	584064,8	...
16	1	4	1	11	EUR	2018	3	0	30	4	5000000	4673125	5000000	5000000	...
17	1	4	1	12	EUR	2020	10	0	25	4	75000000	68287500	70797613,95	70797613,95	...
18	1	4	1	12	EUR	2021	3	0	15	4	100000000	82495690	99981416,32	99981416,32	...
19	1	4	1	12	EUR	2020	2	0	25	4	50000000	44815015	50000000	50000000	...
20	1	4	1	12	EUR	2019	10	0	29	1	11184000	11547256,32	11727252,66	11727252,66	...
21	1	4	1	12	EUR	2020	4	0	25	4	102420000	101334348	97712621,63	97712621,63	...
22	1	4	1	12	EUR	2020	10	0	25	4	109600000	107101120	107155922	107155922	...
23	1	4	1	12	EUR	2020	9	0	29	1	35000000	25893228,9	34897025	34897025	...
24	1	4	1	12	EUR	2020	12	0	1	4	50000000	43957955	50000000	50000000	...
25	1	4	1	12	EUR	2021	3	0	18	4	65000000	58175050,7	64970218,08	64970218,08	...
26	1	4	1	12	EUR	2021	11	0	10	4	30000000	24120900	29586330,42	29586330,42	...
27	1	4	1	12	EUR	2021	12	0	27	4	30000000	21816000	29721888,41	29721888,41	...

FIGURE 2.3 – Exemple de Model Point d'actifs

Les éléments listés ci-dessous sont présents dans cette table :

- MODEL_POINT : Correspond au numéro de la ligne de l'actif
- SP_CODE : Numéro du sous-produit auquel la ligne d'actif appartient
- POOL : Numéro du Pool d'actif (Il est utilisé pour isoler les cantons qui doivent l'être par exemple)
- ASSET_TYPE : Numéro du type d'actif (permet de distinguer les obligations à taux fixe, à taux variable et les OATi)
- CATEGORY : Numéro de la catégorie
- ECONOMY : Devise du produit d'actif (Par exemple en Euros)
- REDEMP_YEAR : Année d'échéance de l'actif
- REDEMP_MONTH : Mois d'échéance de l'actif
- COUPON : Correspond au coupon détaché par l'obligation en montant
- REDEMP_AMT : Montant de remboursement
- MARKET_VAL : Valeur de marché à l'origine de la projection
- BOND_FAV : Valeur de bilan à l'origine de la projection
- ...

b. Les contraintes

Les actifs pris en compte dans le cadre d'une étude ALM doivent appartenir à au moins une des classes suivantes :

- Les obligations d'état
- Les OPCVM
- Les actions
- L'immobilier
- Le cash

c. Les tables des scénarios économiques

Un autre élément à renseigner en entrée du modèle ALM concerne l'évolution des taux du marché. Ces données sont regroupées dans une table de scénarios économiques. Cette table regroupe la projection d'éléments tels que la courbe des taux, l'évolution des actions, de l'immobilier ou des OPCVM.

Les colonnes s'organisent de la manière suivante :

- ECONOMY : Comme pour les Model Points cela correspond à la devise du produit
- CLASS : Correspond au type d'actif dans la table (ZCB pour les taux nominaux, EQUITY pour les actions, PROP pour l'immobilier...)
- MEASURE : Type de la variable
- OS TERM : Durée de l'actif (0 pour les IDX comme les actions ou l'immobilier, et correspond à la maturité pour les taux)
- Les colonnes suivantes correspondent aux différentes années de projection.

La table donnée ici en exemple est un extrait de la table de scénarios économiques et correspond à la première simulation sur les 1000 :

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	OS_TERM	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
1	EUR	DIVERSI	RET_IDX	0	100	106.712256	112.723313	112.684698	109.144574	117.396832	110.2240213
1	EUR	DIVERSI	RNY_PC	0	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15
1	EUR	EQU_F	RET_IDX	0	100	105.661966	118.753798	112.241233	102.471144	115.981102	101.7532454
1	EUR	EQU_F	RNY_PC	0	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3
1	EUR	EQUITY	RET_IDX	0	100	105.661966	118.753798	112.241233	102.471144	115.981102	101.7532454
1	EUR	EQUITY	RNY_PC	0	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3
1	EUR	ILZCB	PRICE	1	0.99914573	1.00668377	1.0069802	1.00460429	1.00237413	0.99647223	0.989952042
1	EUR	ILZCB	PRICE	2	0.99805358	1.01246779	1.01184182	1.00236105	1.00175486	0.99008986	0.977414549
1	EUR	ILZCB	PRICE	3	0.99666121	1.01622676	1.00981195	0.99750693	0.99804157	0.98088996	0.965314141
1	EUR	ILZCB	PRICE	4	0.9938438	1.01316932	1.00515064	0.98995014	0.99125872	0.97181032	0.950642753
1	EUR	ILZCB	PRICE	5	0.98493765	1.00757573	0.99776008	0.97971918	0.98437332	0.95983559	0.936789633
1	EUR	ILZCB	PRICE	6	0.97414731	0.99934452	0.98766458	0.96973697	0.97433835	0.94839428	0.923987301
1	EUR	ILZCB	PRICE	7	0.96136235	0.98849639	0.97780774	0.95698134	0.9646367	0.93774853	0.909086964
1	EUR	ILZCB	PRICE	8	0.94658808	0.9779716	0.96514059	0.94486094	0.95555298	0.92472202	0.89134863
1	EUR	ILZCB	PRICE	9	0.9326112	0.96471313	0.95309915	0.93362309	0.94386312	0.90856543	0.875191885
1	EUR	ILZCB	PRICE	10	0.91647679	0.95215035	0.9419331	0.92009497	0.92880303	0.89379463	0.861291704
1	EUR	ILZCB	PRICE	15	0.83737618	0.8810373	0.87197522	0.86426907	0.8977177	0.87703215	0.852681633
1	EUR	ILZCB	PRICE	20	0.81219507	0.87590655	0.87659928	0.86173263	0.88951537	0.85433145	0.820663615
1	EUR	ILZCB	PRICE	30	0.76691997	0.83154606	0.83426368	0.82414704	0.86252412	0.83421833	0.80774221
1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1	1.01542243	1.02225033	1.04548023	1.06040988	1.08347759	1.082463816
1	EUR	OPCVMAC	RET_IDX	0	100	105.661966	118.753798	112.241233	102.471144	115.981102	101.7532454
1	EUR	OPCVMAC	RNY_PC	0	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3
1	EUR	OPCVMCO	RET_IDX	0	100	106.712256	112.723313	112.684698	109.144574	117.396832	110.2240213
1	EUR	OPCVMCO	RNY_PC	0	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15
1	EUR	OPCVMMO	RET_IDX	0	100	101.7305	103.490946	104.162589	105.751743	106.918991	108.3366593
1	EUR	OPCVMMO	RNY_PC	0	1.71569738	1.71569738	0.64688979	1.51412696	1.09771538	1.31721395	1.631714673
1	EUR	OPCVMOB	RET_IDX	0	100	107.762545	106.550885	112.32123	115.040871	117.269838	117.3256855
1	EUR	OPCVMOB	RNY_PC	0	1	1	1	1	1	1	1
1	EUR	PROP	RET_IDX	0	100	83.186054	90.0120445	70.3141067	72.587556	71.1627906	73.37077295
1	EUR	PROP	RNY_PC	0	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6
1	EUR	VALN	DEF	0	1	0.98298937	0.97665103	0.96197469	0.95147269	0.93902194	0.923824111
1	EUR	ZCB	RET_PC	1	1.7305	0.64898664	1.52564794	1.10376238	1.32592743	1.64509984	2.191812353
1	EUR	ZCB	RET_PC	10	2.8785	2.23187967	2.76358981	2.41579903	2.43512282	2.5237698	2.767587382
1	EUR	ZCB	RET_PC	30	2.726	2.30200328	2.48603454	2.22792512	2.17179634	2.16549328	2.315747019
1	EUR	ZCB	PRICE	1	0.98298937	0.99355198	0.98497278	0.98908288	0.98691423	0.98381526	0.978551977
1	EUR	ZCB	PRICE	2	0.9652431	0.98212091	0.96677517	0.97355828	0.96972902	0.96578648	0.954341725
1	EUR	ZCB	PRICE	3	0.9438761	0.96717328	0.94490699	0.95428023	0.95087276	0.94467658	0.929672723
1	EUR	ZCB	PRICE	4	0.9203215	0.94819713	0.92020916	0.93363688	0.92912182	0.92277262	0.904102528
1	EUR	ZCB	PRICE	5	0.8940782	0.92602935	0.8949629	0.91041505	0.9067197	0.89965547	0.878661521
1	EUR	ZCB	PRICE	6	0.86591472	0.90297372	0.86796019	0.8868014	0.8832446	0.87637084	0.85208054
1	EUR	ZCB	PRICE	7	0.83792909	0.87783034	0.84124322	0.86236413	0.85971352	0.85167495	0.825769122
1	EUR	ZCB	PRICE	8	0.80892844	0.85268275	0.814343	0.83807785	0.83489652	0.82699552	0.800305541
1	EUR	ZCB	PRICE	9	0.78076126	0.82708161	0.78812481	0.81272516	0.81018486	0.80293639	0.775662421
1	EUR	ZCB	PRICE	10	0.75292855	0.80193015	0.76139028	0.78764482	0.78616024	0.779495	0.761094162
1	EUR	ZCB	PRICE	15	0.62578772	0.68865037	0.65897109	0.70263152	0.71697753	0.72595487	0.70580433
1	EUR	ZCB	PRICE	20	0.56800461	0.63536465	0.60260374	0.64102464	0.64621222	0.64451886	0.619460502
1	EUR	ZCB	PRICE	30	0.44626073	0.50521456	0.47869547	0.51631366	0.524891	0.52586336	0.503182603

FIGURE 2.4 – Exemple d'une table de scénarios économiques

2.4 Description du modèle ALM et de son fonctionnement

Dans la suite de cette partie, la modélisation et les calculs nécessaires aux études ALM sont effectués avec Prophet en utilisant la bibliothèque ALS (Asset and Liability Strategy). Nous allons détailler les calculs du modèle ALM ainsi que les mécanismes mis en place pour modéliser au mieux l'activité d'assurance.

2.4.1 Valorisation des actifs

a. Remarques générales à propos du portefeuille BNP Paribas Cardif

Dans Prophet, le portefeuille d'actifs est détaillé dans plusieurs tables, chacune regroupant les actifs d'une même classe (y compris dérivés). L'actif est renseigné ligne à ligne ainsi que les paramètres nécessaires à sa valorisation.

Prophet calcule la valeur de marché et la valeur nette comptable des actifs annuellement, y compris à la date de projection. Celle-ci peut s'avérer différente de la valeur de marché saisie en entrée, ce qui engendre alors une erreur de modèle pouvant poser problème au cours de la projection.

b. Valeurs de marché des actifs

Obligations d'Etat à taux fixe :

Nous avons regardé le calcul de la valeur de marché d'une obligation qui paie un coupon fixe. Dans Prophet, celle-ci est obtenue en sommant les valeurs actualisées du nominal et des coupons payés.

L'actualisation se fait par des taux d'actualisation à la date de calcul de la maturité correspondante. On remarquera que ces derniers sont interpolés mensuellement en tenant compte d'une pondération exponentielle. Cette interpolation est toutefois très proche d'une interpolation linéaire classique sur les prix des zéro-coupon (ZC). Par ailleurs, comme Prophet raisonne sur les prix des zéro-coupon et non sur les taux d'intérêt, il est cohérent que son interpolation soit exponentielle et non linéaire. La méthode d'interpolation standard consiste en effet de manière équivalente, soit à interpoler linéairement les taux d'intérêt soit à interpoler exponentiellement les prix des zéro-coupon.

Exemple : On se place au 31/12/2012. Prenons l'exemple d'une obligation à taux fixe de maturité 10 ans et 1 mois. Elle rembourse 30 € le 31/01/2023 et paie un coupon de 6 % le 31 janvier de chaque année. On renseigne dans Prophet au 31/12/2012, les prix ZC correspondant à un taux actuariel de 5 % pour les maturités allant de 1 à 30 ans.

Sous Excel, la valeur de marché théorique au 31/12/2012 est 33,98 € soit 113,27 % du nominal. Sous Prophet, on obtient 33,98 € soit 113,26 % du nominal, soit un écart de 1 centime (0,01 %), ce qui est acceptable.

Obligations « corporate » à taux fixe :

La valeur de marché d'une obligation de ce type est calculée de manière semblable à une obligation sans risque à taux fixe à ceci près que le taux d'actualisation tient compte d'un spread de crédit renseigné par l'utilisateur.

Prenons la même obligation que précédemment et ajoutons un spread de crédit de 1 %. Le prix dans Prophet est 31,65 € soit 105,48 % du principal. Le prix dans Excel obtenu via une interpolation linéaire est 31,65 € soit 105,49 % du nominal soit un écart de 1 centime (0,01 %).

Obligations indexées sur inflation :

La valeur de marché est obtenue de manière identique à celle des obligations à taux fixe par actualisation des cash flows futurs.

Prophet calcule les taux d'inflation forward pour les années à venir à partir des taux ZC spot, forward nominaux et réels selon la formule rappelée ci-dessous. Ces taux ZC étant eux-mêmes obtenus à partir des prix ZC spot et forward saisis en entrée. Les taux d'inflation forward valent :

$$\text{Inflation forward}(1) = \frac{(1 + \text{Taux ZC Nominal}(1, 2))}{(1 + \text{Taux ZC Reel}(1, 2))} - 1$$

Ces taux d'inflation permettent de reconstituer annuellement l'indice d'inflation cherché. Prophet interpole cette valeur pour obtenir une valeur de l'indice mensuelle. Ces taux d'inflation permettent de déterminer l'évolution du nominal et donc la valeur des coupons futurs. La valeur de marché est obtenue par actualisation de ces coupons futurs à la date de valorisation.

On remarquera que la valeur de remboursement est protégée par un minimum correspondant à la valeur faciale de l'obligation, ce qui est pris en compte dans Prophet.

Dans la réalité, le marché valorise ces titres avec un indice des prix extrapolé lié au retard de publication de l'indice INSEE. De plus, BNP Paribas Cardif détient des obligations françaises et européennes. Or on ne simule que l'indice des prix français. L'impact de cette approximation est modéré car environ 85 % des OATi sont indexées sur l'indice français, les 15 % restant étant indexés sur l'indice

d'inflation européen.

Prenons une obligation d'échéance 31/02/2016 indexée sur l'inflation. On rentre des prix ZC nominaux et réels égaux et un indice d'inflation initial de 1,12. On obtient 31,37 € soit 104,57 % du nominal pour Prophet au lieu de 31,38 € soit 104,58 % de la valeur de remboursement sous Excel (1 centime d'écart).

Obligations à taux variable d'Etat et corporate :

Pour ces titres, la valeur des coupons est proportionnelle à la valeur de remboursement et à la valeur forward de l'indice de référence augmentée d'une marge éventuelle.

Prenons une obligation d'état à taux variable d'échéance le 01/02/2016 de valeur de remboursement 30 €. Sous Excel on obtient un prix de 31,25 € et sous Prophet de 31,25 €. Les deux prix sont donc identiques.

Obligations convertibles ou indexées action :

Le portefeuille contient peu d'obligations convertibles, environ 33 millions d'euros, les autres obligations étant des obligations indexées.

Pour les obligations indexées sur action, BNP Paribas Cardif décompose ce type de titre en un actif obligataire taux fixe et une option sur action. Soit la valeur de cette option peut être évaluée par le front office et alors le prix du titre obligataire est obtenu par différence, soit elle ne peut pas l'évaluer et dans ce cas BNP Paribas Cardif suppose qu'il représente 30 % du titre indexé. Dans tous les cas, au cours des projections, l'évolution du prix de l'option est corrélée à 100 % avec l'indice action simulé et le titre obligataire est intégré au portefeuille d'obligations taux fixe.

Actions / Immobilier / Investissements alternatifs / OPCVM obligataires :

Le traitement de ces quatre supports est identique. Il est saisi en entrée deux indices de performance pour chacun de ces supports. Un indice représente la performance globale du support (rendement lié au dividende augmenté du rendement lié à la performance de l'indice). L'autre indice représente le rendement lié au dividende, qui est un sous indice du premier.

Prophet évalue une valeur de marché pour chacun de ces supports en augmentant annuellement cette valeur de la performance totale définie ci-dessus.

Produits dérivés de type cap :

L'outil Prophet permet de valoriser deux types de caps en valeur de marché en utilisant la formule de Black Scholes. BNP Paribas Cardif dispose de caps indexés sur le taux 10 ans avec barrière et sans barrière.

Nous avons pris l'exemple d'un cap à un seul flux, soit un caplet sur le taux 10 ans qui devient « effectif » à et qui expire à. Son nominal est 10 000. Ce caplet paie au 31/03/2012 un flux si le taux 10 ans à la date du 31/12/2011 est supérieur au strike du cap (8 %). Dans cet exemple, on a supposé la volatilité du taux forward 10 ans égale à 20 %. Dans le cadre des prix ZC vus plus haut, on obtient un prix de 0.0747 sous Prophet.

Par ailleurs, il est à noter que la formule de « Black Scholes » de pricing est normalement valable si la maturité du sous-jacent est égale au pas de temps qui sépare deux cotations. Elle n'est donc pas valable pour les « constant maturity swap » (CMS) car il faudrait ajuster le prix en tenant compte d'effets de convexité. Or, ici cette hypothèse n'est pas vérifiée car le portefeuille contient majoritairement des caps dont la maturité du flottant est le taux 10 ans et la période qui sépare deux fixings est de 3 mois.

De plus, la volatilité implicite du taux flottant est saisie en entrée mais elle ne varie pas dans la durée selon un processus de diffusion de volatilité.

c. Valeur nette comptable des actifs

Actifs non amortissables (R 332-20 du code des assurances : actions, immobilier) :

La valeur nette comptable correspond au coût d'acquisition de cet actif.

Actifs amortissables (R 332-19 du code des assurances : obligations à taux fixe, à taux variable et indexées inflation) :

Pour les obligations à taux fixe, le code des assurances laisse le choix de la méthode d'amortissement. BNP Paribas Cardif choisit la méthode d'amortissement actuarielle car les dotations reprises de la réserve de capitalisation se fondent sur la différence entre la valeur de cession et la valeur nette comptable amortie actuariellement.

Prenons l'exemple d'une obligation de nominal 100 €, d'échéance le 31/12/2015 qui paie un coupon de 5 % le 31/12 de chaque année. L'obligation est achetée le 31/12/2012, après détachement du coupon, pour 102,78 €. Ce prix correspond à un taux actuariel à l'achat de 4 % que l'utilisateur renseigne dans Prophet. Prophet calcule ensuite au 31/12/2013 un amortissement égal à 0,89 € et une valeur nette comptable au 31/12/2013 de 101,89 €.

La méthode d'amortissement des obligations indexées sur l'inflation et à taux variable est fixée dans le code des assurances. C'est la méthode linéaire, où la compagnie amortit chaque année d'un montant constant la plus ou moins-value latente initiale.

2.4.2 Calcul des produits financiers

Les revenus financiers de l'année proviennent de quatre sources et sont décrits dans le schéma qui suit.

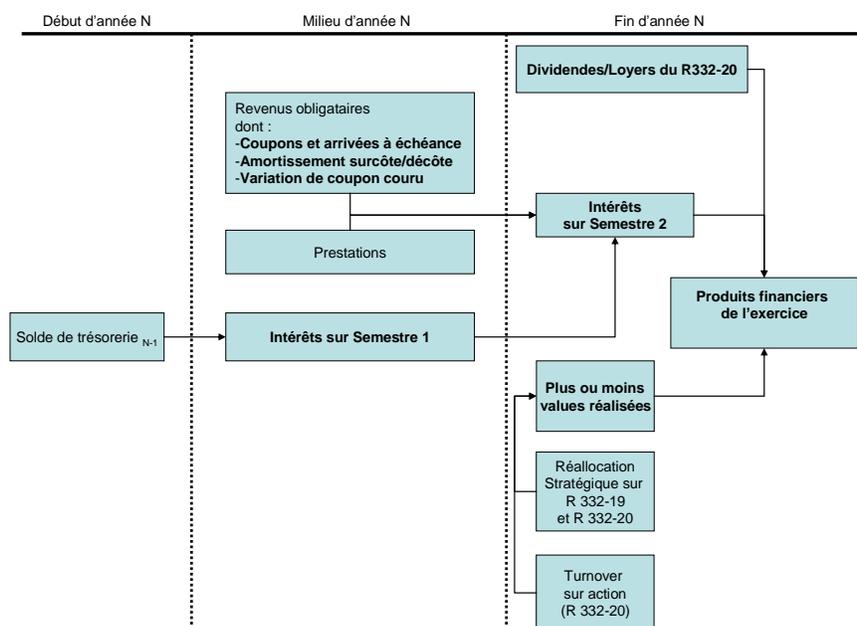


FIGURE 2.5 – Mécanisme de calcul des produits financiers

a. Revenus du R 332-20 (actions / immobilier / OPCVM ...)

Les revenus financiers des actions sont égaux à la valeur de marché des actions en milieu d'année multipliée par le taux de dividende de l'année.

Par exemple, si nous supposons dans un portefeuille action de 1 €, un taux de dividende de 5 % et une performance globale annuelle de (-10 %), on obtient une performance de l'indice de $\frac{0,9}{1,05}^{0,5}$ soit une valeur de marché en milieu d'année de 0,93 €. Les revenus s'en déduisent comme valant 5 % de cette dernière valeur soit 0,465 €.

b. Intérêts créditeurs/débiteurs sur trésorerie

On distingue les intérêts créditeurs du 1er semestre calculés à partir de la position de trésorerie de fin d'année précédente, et les intérêts créditeurs du second semestre calculés à partir de la position de trésorerie en milieu d'année.

Intérêts créditeurs/débiteurs du 1er semestre :

Ces intérêts proviennent de l'actualisation à mi-année du solde de trésorerie constaté en fin d'année précédente. Ce solde de trésorerie est obtenu comme suit : après calcul de toutes les autres variables en fin d'année, Prophet ajuste l'actif résiduel, c'est-à-dire le cash de manière à équilibrer le bilan. L'actif résiduel est ajusté en fin de période en déduisant de la valeur nette comptable du fonds, la somme des valeurs nettes comptables des actifs. Cette position de trésorerie en fin d'année sert notamment à calculer les revenus financiers de l'année qui suit. Le taux d'actualisation retenu pour évaluer ces intérêts est le taux cash 6 mois.

Prenons un exemple. Si la trésorerie de fin de période précédente vaut -2,37 €, le taux cash 1 an 2,51 %, le taux cash 6 mois est le taux à appliquer sur une période de 6 mois il faut $(1 + 2,51\%)^{0,5} - 1$ soit 1,25 %. On obtient des intérêts débiteurs de 59,446 €.

Intérêts créditeurs/débiteurs du 2nd semestre :

Prophet calcule la position de trésorerie de milieu d'année qui est égale à la position de trésorerie en fin d'année précédente augmentée des revenus financiers de l'année qui sont déflatés en milieu d'année. Ces revenus proviennent des caps, des swaptions, des options, des swaps et des obligations mais pas des dividendes action, car, d'après le diagramme de synthèse ci-dessus, ils sont calculés et intégrés aux revenus indépendamment, soit directement en fin d'année.

Dans l'exemple, ces revenus déflatés en milieu d'année valent 1,51 €, comme le taux cash 6 mois vaut 1,25 %, on obtient des intérêts créditeurs au second semestre de 18,857 €, ce qui est exact.

c. Revenus des obligations

On distingue les revenus provenant des remboursements et des coupons perçus, qui sont déflatés en milieu d'année, de l'amortissement surcote/décote et enfin de la variation de coupon couru.

Revenus provenant des remboursements et des coupons :

Concernant les revenus liés aux coupons, si nous prenons l'exemple d'une obligation dont le coupon vaut 1,5 € et tombe fin février, comme le taux cash 6 mois vaut 1,25 %, la valeur du revenu déflaté à mi année vaut $1,51 \text{ €} = 1,5 \text{ €} \times (1 + 2,51\%)^{\frac{4}{12}}$. Si nous avons pris une obligation de coupon 1,5 € qui tombe fin octobre, la valeur du revenu déflaté à mi année aurait été égale à $1,49 \text{ €} = 1,5 \text{ €} \times (1 + 2,51\%)^{\frac{4}{12}}$, ce qui correspond à la bonne valeur actualisée en milieu d'année.

Concernant les revenus liés aux remboursements, le même raisonnement s'applique. Le taux cash 6 mois valant 1,25 %, si la valeur de remboursement vaut 30 € et tombe fin février, le revenu sera égal

à 30,25 €. Si la valeur de remboursement vaut 30 € et tombe fin octobre, le revenu sera 29,75 €.

Revenus provenant de l'amortissement surcote/décote :

La surcote/décote est égale à l'amortissement comptable, c'est-à-dire la différence entre la valeur nette comptable pied de coupon actuelle et celle de l'année précédente.

Dans l'exemple, nous choisissons une obligation de valeur nette comptable initiale pied de coupon 30 € et dont l'amortissement actuariel la première année est 0,74 €. Sa valeur nette comptable pied de coupon vaut donc 29,26 €. L'amortissement surcote/décote est égal à 0,746 €, ce qui est exact.

Revenus liés à la variation de coupon couru :

Nous supposons que l'obligation est maintenue en portefeuille lors de la réallocation stratégique en fin de première année. Le coupon couru étant calculé à la même date à 1 an d'écart, sa valeur ne change pas, la différence de coupon couru est donc nulle.

d. Intérêts débiteurs sur prestations versées

Nous supposons dans Prophet que les prestations sont versées en milieu d'année. Dans la réalité, elles s'étalent tout au long de l'année. Cette hypothèse permet donc de ne pas créer artificiellement de richesse pour l'actionnaire.

Enfin, nous remarquons que cette hypothèse ne présuppose pas que les prestations versées dans l'année intègrent un intéressement au taux cible qui sera crédité en fin d'année. Cette option est paramétrable dans Prophet. BNP Paribas Cardif choisit de verser une participation aux bénéfices forfaitaire correspondant à 75 % du taux crédité l'année précédente.

Dans l'exemple qui suit, nous considérons que cette participation aux bénéfices forfaitaire est nulle. Les prestations versées à mi-année valent 1 €, le taux cash 6 mois valant 1,25 %, les intérêts débiteurs en fin année dus au versement des prestations en milieu d'année valent donc 12,468 €.

Si on additionne l'ensemble des revenus du R 332-20 (46,291 €, partie 2.4.2.a), des intérêts débiteurs/créditeurs sur trésorerie (-59,446 €+ 18,857 €), des revenus provenant des obligations (1,51 €- 0,74 €) et des intérêts débiteurs sur prestations versées (-12,468 €), on obtient un total de produits financiers avant réallocation et turnover de 0,77 €.

e. Revenus provenant de la réalisation de plus ou moins-values latentes

Les revenus financiers calculés précédemment sont ajustés des plus ou moins-values réalisées suite à la réallocation stratégique du portefeuille et à la politique de turnover. Nous notons justement, dans le cas de réalisation de moins-values sur les obligations à taux fixe, que si la réserve de capitalisation n'est pas suffisante, Prophet ampute le résultat de ces moins-values.

Dans l'exemple, les produits financiers valent 0,77 €. Les plus ou moins-values liées à la réallocation stratégique sont nulles. En effet, les obligations vendues sont en plus-values latentes donc nous dotons la réserve de capitalisation. Par contre le turnover du portefeuille actions est de 10 %, il permet de réaliser 14,629 € de pertes ce qui représente bien 10 % de la moins-value latente totale sur actions de 0.15 €. Nous obtenons au final un total de produits financiers après réallocation et turnover de 0,755 €.

2.4.3 Revalorisation du passif

a. Obtention du passif déterministe

L'outil de simulation Prophet version ALS utilise un passif déterministe (stocké dans la table `det_cf.fac`) simulé dans une première étape par la version déterministe de Prophet. Ce passif est

ajusté en cours de projection en fonction du scénario stochastique. Nous notons que la version déterministe de Prophet diffère sensiblement de la version ALS. Les passifs déterministes s'obtiennent par deux étapes successives.

Tout d'abord, les caractéristiques des contrats par grands groupes (environ 5.000) sont renseignées dans Excel. Les principales caractéristiques sont le niveau de TMG, sa durée et l'âge de l'assuré. Elles sont fournies par le département actuariat. Sous Excel, ces groupes de contrat sont agrégés en deux groupes de 24 poches en fonction du TMG, de sa durée et de la catégorie d'âge des assurés. La catégorie d'âge permet de déterminer les paramètres de la loi de rachat massif, les plus jeunes étant les plus réactifs. Plus précisément, une loi de rachat dynamique est utilisée pour les assurés âgés de moins de 70 ans, et une pour les assurés âgés de plus de 70 ans. Un exemple de loi de rachat est présenté à la fin de cette partie.

Dans une deuxième étape, on utilise la version déterministe de Prophet avec ces 48 poches qui représentent macro économiquement le portefeuille. On calcule les écoulements déterministes pour chacune de ces poches (rachats statiques, frais, décès, provision mathématique, etc. . .).

La version ALS de Prophet utilise ce passif déterministe et l'ajuste en fonction de chaque scénario en ajoutant notamment la participation aux bénéficiaires et les rachats dynamiques.

b. Calcul des provisions techniques (réserve de capitalisation, provision pour risque d'exigibilité)

Impact sur la réserve de capitalisation (RC) :

Elle concerne les obligations à taux fixe. On note que, dans Prophet, les OATi et les obligations à taux variable ne sont pas soumises à la réserve de capitalisation.

Ce choix de modélisation relève d'une interprétation très souple des textes en vigueur. En effet, cela revient à retenir comme méthode comptable une sélection entre deux taux pour le calcul du coupon. D'une part, un taux réel (qui ne varie pas et est égal au taux à l'émission des titres) et qui sera soumis aux dispositions relatives à la réserve de capitalisation. Ou d'autre part, le "sur-rendement" correspondant à l'indexation du coupon, qui lui, étant variable, ne sera pas soumis à la réserve de capitalisation et sera comptabilisé comme complément financier en produit de l'exercice. BNP Paribas Cardif considère que le "sur-rendement" correspondant à l'indexation du coupon est prépondérant par rapport au taux réel et pour cette raison ne soumet pas les OATi à la réserve de capitalisation. Toutefois, à l'égard des textes en vigueur, cette méthode, qui n'est prévue nulle part, pourrait faire l'objet de certaines critiques de la part des autorités de contrôle telle que la Commission de Contrôle des Assurances (qui n'a cependant émis jusqu'à présent aucun avis sur le traitement des OATi).

La réserve de capitalisation est calculée, comme la PRE, après réallocation stratégique. Par exemple, pour les obligations, on suppose que la valeur initiale de marché coupon couru est 35,64 €, la valeur nette comptable pied de coupon est 30 €, et le coupon couru vaut 1,37 €. Dans 1 an, la valeur de marché vaut 34,92 € avant réallocation stratégique et 32,2 € après réallocation, c'est à dire qu'on vend pour 2,71 € d'obligations soit 7,78 % du portefeuille. Comme la valeur nette comptable coupon couru inclut en $t=1$ avant réallocation vaut 30,63 € (la valeur d'achat étant 30 € et l'amortissement actuariel 1ère année valant 0,73 €, la valeur nette comptable pied de coupon vaut 29,26 € et le coupon couru vaut 1,37 €), la plus-value latente est de 4,29 €. On réalise donc 7,78 % de cette plus-value soit 0,33 €, qu'on dote à la réserve de capitalisation. Ces résultats sont en accord avec les résultats sous Prophet.

Concernant l'alimentation de la réserve de capitalisation, lorsqu'une entreprise détient deux titres identiques achetés à des moments différents, la réglementation impose de vendre l'obligation la plus ancienne du portefeuille. Cet aspect est traité par Prophet même si les cas où deux lignes d'actif représentent la même obligation sont peu fréquents.

Par ailleurs, on note que, bien que les obligations à taux variable ne soient pas soumises à la réserve de capitalisation, elles ne sont pas éligibles à la PRE.

Enfin, on note que la plus-value de réalisation peut provenir d'une baisse des taux d'intérêt ou d'une baisse du spread de crédit pour une obligation risquée.

Calcul de la provision pour risque d'exigibilité (PRE) pour le R 332-20 :

La provision pour risque d'exigibilité est calculée selon les dispositions du code des assurances. Elle concerne les actifs non amortissables (R 332-20). Sont soumis à la PRE dans Prophet les actions détenues en direct, les OPCVM actions, les OPCVM obligataires, les investissements alternatifs, l'immobilier et la part optionnelle des obligations indexées sur actions (soit un call asiatique sur indices actions français et européens).

La dotation est égale au tiers du montant de la moins-value latente globale constatée sur les placements mentionnés à l'article R. 332-20, sans que cette dotation ne puisse conduire à ce que le montant total de la provision inscrite au bilan au titre de l'exercice excède le montant de la moins-value latente.

On note que lors de la vente d'une action en moins-value latente, la moins-value réalisée passe en résultat et comme la PRE ne prend que 1/3 des moins-values globales. Il y a donc initialement un effet net sur le résultat pour un montant représentant les 2/3 de la moins-value latente non provisionnée du titre vendu, les 2/3 restants devant être dotés les années suivantes.

La PRE est calculée au niveau de la totalité des actifs puis ventilée canton par canton au prorata du taux de moins-value latente de chaque canton. Dans Prophet, cette provision est calculée après :

- réallocation du portefeuille
- prise en compte du turnover du portefeuille action
- réalisation éventuelle de plus-values latentes dans le cas où les produits financiers ne sont pas suffisants pour verser le taux cible et où l'entreprise doit réaliser des plus-values complémentaires. On peut noter que ces réalisations éventuelles n'ont lieu que si le portefeuille est globalement en plus-value latente donc si la PRE est nulle. Il n'est pas possible sous Prophet de réaliser des plus-values latentes si le portefeuille est déjà en moins-value latente, hypothèse qui semble raisonnable.

Par ailleurs, comme indiqué ci-dessus, la partie optionnelle des obligations indexées action est traitée comme une action sous Prophet y compris dans le sens où on lui applique les mécanismes de la provision pour risque d'exigibilité.

On note que les obligations à taux variable ne participent ni à la RC ni à la PRE, comme le stipule la réglementation. Par contre, la partie optionnelle des obligations indexées action, est soumise dans Prophet à la PRE, bien que la réglementation ne le prévoit pas.

c. Revalorisation de la provision mathématique au taux cible

Produits financiers alloués aux provisions mathématiques :

Une partie seulement des produits financiers calculés précédemment est distribuable aux assurés. Les produits financiers alloués aux provisions mathématiques sont déterminés en calculant le rapport entre la valeur moyenne de la RC et la valeur nette comptable moyenne du fonds après réallocation entre le début et la fin de l'exercice.

Dans l'exemple, la valeur moyenne du fonds entre la date initiale et aujourd'hui est 30,05 €. C'est la demi-somme entre la valeur initiale du fonds (30 €) et la valeur du fonds aujourd'hui soit 30,1 €. La valeur du fonds aujourd'hui est égale à la valeur nette comptable des obligations coupon couru avant réallocation (29,26 € + 1,37 €), augmentée de la valeur comptable des actions avant réallocation (1,05 €), diminuée des prestations de l'année, y compris intérêts débiteurs sur ces prestations (-1,01 €) et augmentée de la position de trésorerie en fin d'année précédente (-0,57 €).

La valeur moyenne de la réserve de capitalisation est égale à la demi-somme des valeurs de la réserve initialement et aujourd'hui. Dans l'exemple, la réserve de capitalisation initiale est nulle et la valeur aujourd'hui est de 0,33 €. La valeur moyenne est donc 0,17 €.

Le partage des produits financiers entre assurés et assureur est égal, d'après ce qui précède, à 99,4 % et 0,6 %.

Marge financière de l'assureur :

Marge contractuelle maximum

La marge contractuelle maximum est égale aux produits financiers précédents diminués du montant de la participation aux bénéfices contractuelle.

Le montant du bénéfice contractuel est proportionnel à la provision mathématique et à une fraction du taux de rendement du fonds auquel on retranche le taux de prélèvement sur encours. Par ailleurs, on peut plafonner le taux de marge contractuelle à un certain pourcentage de l'encours, 1 % dans notre cas.

Dans l'exemple, le taux de rendement de l'actif est égal aux produits financiers rapportés à la valeur moyenne de la provision mathématique (29,5 €), ce qui donne 2,55 %. On suppose que la totalité des produits financiers constitue la marge de l'assureur et on n'impose pas de plafonner la marge contractuelle à 1 % de l'encours. On obtient une marge financière maximum de l'assureur, 0,75 € dans l'exemple.

Il est à noter que la plupart des contrats de BNP Paribas Cardif prévoient une participation au taux de rendement en moyenne de 95 %, et un taux de prélèvement sur encours moyen d'environ 0,65 %. Par ailleurs, on peut imposer un plafond du taux de marge contractuelle à 1 %, hypothèse que ne retient pas BNP Paribas Cardif.

Marge financière minimum

La marge financière minimum est égale à une fraction de l'encours moyen.

BNP Paribas Cardif choisit un taux de marge financière minimum de 0,72 %, ce qui correspond dans l'exemple à 0,2 €.

Calcul du taux cible :

Dans une période de hausse des taux, BNP Paribas Cardif considère que l'assuré compare le taux servi de son contrat au rendement d'une obligation d'Etat 10 ans. Par conséquent, on utilise la moyenne sur l'année de l'OAT 10 ans comme référence de la concurrence en période de hausse des taux.

En période de baisse des taux, l'approche consistant à utiliser un taux cible égal à la moyenne sur l'année de l'OAT 10 ans n'est plus satisfaisante. Par conséquent, BNP Paribas Cardif utilise depuis 2006 le taux servi estimé de l'AFER comme référence pour la modélisation du taux servi par la concurrence en période de baisse ou de stabilité des taux longs.

Dans l'exemple, on fixe forfaitairement, bien que ce taux ne soit pas réaliste, un taux servi cible à 2 %, ce qui correspond à une revalorisation cible de la provision mathématique de 0,58 €.

Règles de pilotage du taux servi de l'exercice :

A partir du taux servi cible et des provisions mathématiques des clients présents en fin de période, on peut définir une revalorisation cible.

A partir des produits financiers alloués aux provisions mathématiques, de la marge contractuelle

maximum et de la revalorisation cible, nous sommes en mesure de piloter le taux servi de l'exercice.

Prophet commence par déduire des produits financiers éventuellement distribués sur les sorties de l'année. On a vu plus haut que ces derniers étaient forfaitairement considérés égaux à 75 % du taux crédité l'année précédente. Dans l'exemple étudié ci-dessous, on suppose que ces produits sont nuls.

Les règles de pilotage du taux crédité sont décrites dans le diagramme suivant :

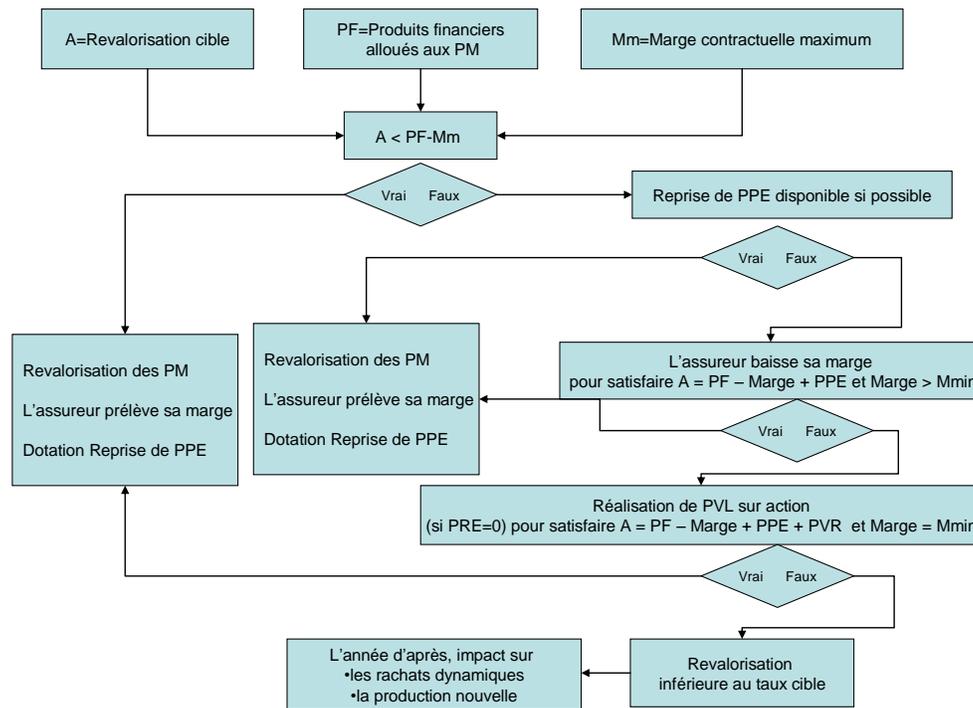


FIGURE 2.6 – Mécanisme d'attribution du taux servi

Cas où les produits financiers distribuables sont suffisants pour la revalorisation cible

Dans ce cas, l'assureur est en mesure de servir le taux cible tout en prélevant sa marge maximum. Prophet sert ce taux cible et place le supplément dans le fonds de participations aux bénéfices.

Ainsi, si par exemple, les produits financiers distribuables sont égaux à 0,75 €, Prophet va créditer la provision mathématique du taux cible (0,58 €) et incrémenter la participation aux bénéfices de 0,17 €.

Cas où les produits financiers distribuables ne sont pas suffisants pour la revalorisation cible

Prophet recherche des richesses mobilisables dans le portefeuille de l'assureur. Il effectue cette recherche de la manière suivante :

Il commence par évaluer la participation aux bénéfices (PPE) disponible. Si elle est positive, il la prélève pour servir le taux cible. Cette PPE disponible est égale à la PPE en fin d'année précédente diminuée de la moins value latente du R332-20 de l'exercice qui n'est pas couverte par la PRE en fin d'année précédente.

Nous remarquons que cette hypothèse présuppose que l'assureur prend des précautions pour ne pas se trouver dans la situation où il reste avec des actifs en moins-value latente. Cette mesure n'est pas

prévue dans la réglementation.

Si la PPE disponible ne suffit pas, Prophet diminue la marge de l'assureur jusqu'à son minimum défini plus haut afin de servir le taux cible.

Enfin, si cela ne suffit toujours pas, et si la PRE de l'année en cours est nulle, autrement dit si le portefeuille action est globalement en plus-value latente, Prophet réalise une partie de ces plus-values afin de servir le taux cible. On remarque que cette étape n'impacte pas le montant de PRE de l'exercice calculé précédemment, puisqu'elle a lieu uniquement si le portefeuille action est en plus value latente globale. On note aussi, que la réallocation stratégique du portefeuille ayant lieu avant cette étape, l'allocation finale après attribution du taux servi peut être légèrement différente de l'allocation cible.

Si malgré cela, l'assureur ne parvient pas à générer suffisamment de produits financiers pour la revalorisation cible, le taux crédité pour l'exercice est inférieur au taux cible commercial.

Dans l'exemple suivant où on ne parvient à générer que 0,55 € de produits financiers, Prophet trouve que le taux servi est de 1,89 %, inférieur au taux cible de 2 %. Dans ce cas, l'insuffisance de taux crédité déclenchera des rachats massifs dynamiques et impactera la production nouvelle.

d. Règles de calcul de la participation aux bénéfices (PPE)

La réglementation impose le versement annuel d'un montant minimum de participation réglementaire. Ce montant peut être versé soit sous forme de revalorisation de la provision mathématique (effet cliquet) soit être provisionné dans la PPE.

Le mécanisme décrit ci-après concerne ce versement minimum de participation contractuelle. Ce versement dépend, comme expliqué ci-dessus, du montant crédité aux provisions mathématiques. Le diagramme suivant résume le processus de calcul de la PPE en fin de période. Ce processus comprend trois étapes :

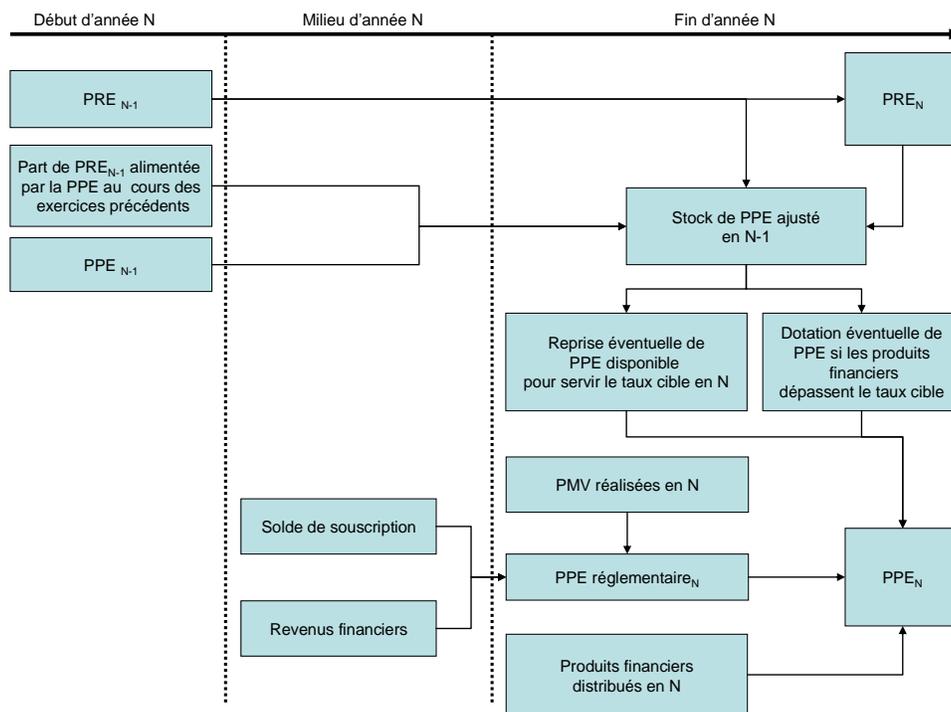


FIGURE 2.7 – Mécanisme de calcul de la PPE en fin de période

Ajustement de la PPE par dotation/reprise à la PRE :

Tout d'abord, Prophet ajuste la PPE en fonction des dotations ou reprises à la PRE. Il y a deux cas possibles :

- Soit les produits financiers distribuables après prélèvement de la marge sont supérieurs au montant de revalorisation cible, dans ce cas, Prophet crédite la PPE de la différence.
- Soit, les produits financiers distribuables après prélèvement de la marge sont inférieurs au montant de revalorisation cible, Prophet reprend alors de la PPE jusqu'à ce qu'il puisse servir ce taux ou bien qu'il épuise le stock de PPE disponible. On rappelle, comme évoqué plus haut, que Prophet reprend de la PPE jusqu'à épuisement du stock de PPE disponible, cette dernière étant la part de la PPE ne servant pas à couvrir les moins-values latentes du R332-20 non encore couvertes par la PRE (possible dans la mesure où la PPE est dotée par tiers).

Ajustement de la PPE par dotation de la PPE réglementaire :

La dernière disposition consiste à ajuster le stock de PPE précédemment calculé du solde créditeur entre la PPE réglementaire de l'exercice minoré des produits financiers crédités pour l'exercice.

La PPE réglementaire est définie dans le code des assurances comme étant égale :

- au solde de la gestion technique. Le solde de la gestion technique est défini comme le « Solde de souscription » (Primes - Charges des prestations - Charges des provisions d'assurance vie et des autres provisions techniques) diminué des « Frais d'acquisition » et des « Autres charges de gestion nettes »
- diminué de 10 % du solde, créditeur, de la gestion technique
- diminué du solde, débiteur, du compte de participation aux résultats de l'exercice précédent
- augmenté de 85 % du solde du compte financier

Si on prend l'exemple d'un taux servi cible de 1 %, les produits financiers crédités seront de 0,29 €. La PPE réglementaire vaut, elle, 85 % des produits financiers précédemment évoqués soit 0,59 €. Si on suppose d'une part que la dotation à la PRE n'est pas prélevée sur la PPE de l'exercice précédent, puisque cette dernière est supposée nulle, et d'autre part l'assureur est en mesure de servir le taux cible sans prélever sur la PPE de l'exercice précédent, alors la PPE en fin d'exercice sera égale à la PPE réglementaire diminuée des produits financiers crédités à la provision mathématique soit 0,30 €.

e. Exemple de comportements assurés en fonction du réseau de distribution

Les rachats massifs peuvent se déclencher, si l'écart entre le taux servi et le taux servi cible est trop important.

Dans le modèle utilisé, on suppose que les paramètres sont légèrement différents selon l'âge et le réseau de distribution de notre assuré :

Assurés de moins de 70 ans - Réseau BDDF :

Le seuil de déclenchement de 200 bp sur cette clientèle correspond aux frais d'adhésion du réseau BDDF² qui s'élèvent à 2 %. Le coefficient de la pente de la courbe de rachats fixé à 7 est comparable aux taux de remboursements anticipés observés par le passé par le groupe BNP Paribas concernant les prêts immobiliers suite à la chute des taux longs (OAT 10 ans).

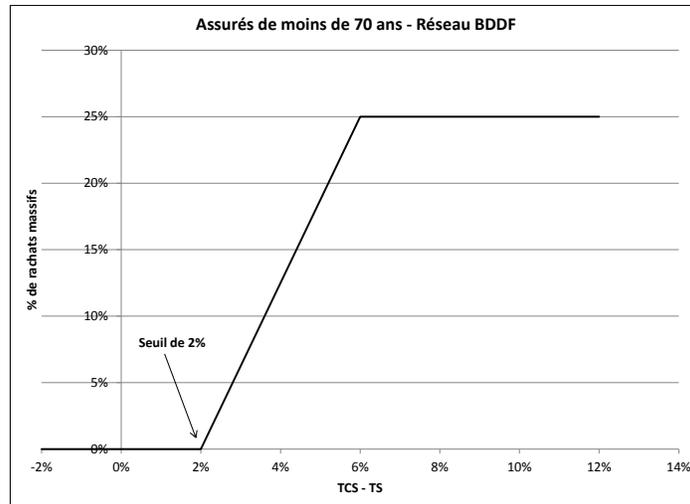


FIGURE 2.8 – Comportement assurés - Réseau BDDF

Assurés de moins de 70 ans - Autres réseaux :

La clientèle des autres réseaux de Cardif Assurance vie (hors réseau BDDF) est plus réactive, du fait notamment de frais d'adhésion moins élevés que ceux du réseau BDDF. Par conséquent le seuil de déclenchement est légèrement plus faible que celui du réseau BDDF (170 bp au lieu de 200 bp).

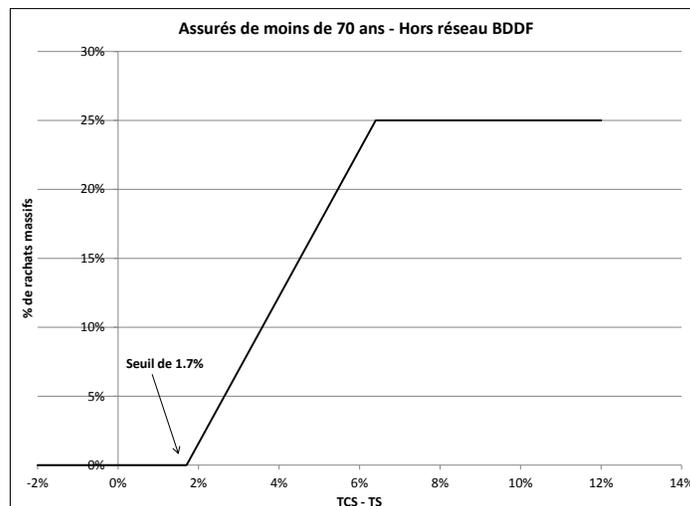


FIGURE 2.9 – Comportement assurés - Autres réseaux

Assurés de moins de 70 ans - Tous réseaux confondus :

La motivation principale de cette clientèle est la transmission d'un patrimoine dans des conditions fiscales avantageuses, plutôt que la constitution d'une épargne de précaution ou d'un complément retraite. De plus, les différences de taxation sont un frein aux rachats des assurés qui bénéficient d'un avantage lié à l'antériorité de leur contrat actuel. Il est donc possible que dans un scénario de hausse des taux, les assurés de plus de 70 ans réagissent avec un retard par rapport à des assurés plus jeunes qui pourraient privilégier la compétitivité du taux servi à un avantage fiscal.

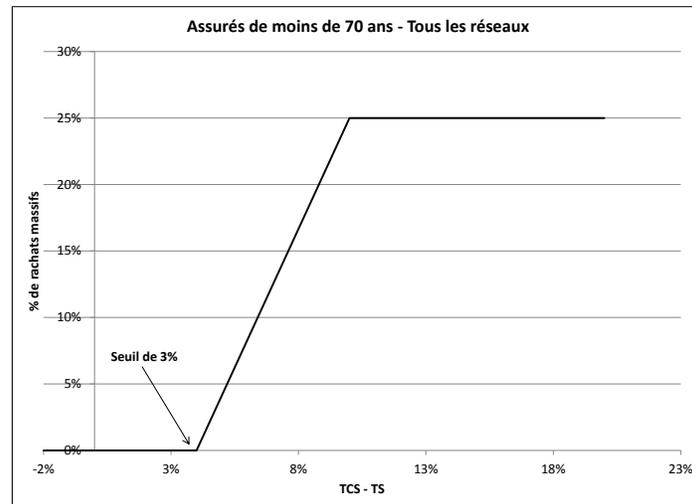


FIGURE 2.10 – Comportement assurés - Tous réseaux confondus

2.4.4 Prestations complémentaires en cas d'insuffisance des taux crédités

a. Rachats dynamiques

Lorsque le taux crédité est inférieur au taux cible, il est prévu des rachats massifs dynamiques en milieu d'année suivante. Ces rachats dépendent linéairement du différentiel entre le taux crédité et le taux cible, à partir d'un seuil de déclenchement (compris entre 1.7 % et 3 %). Pour mieux approcher la réalité, BNP Paribas Cardif sépare chacune de ses 24 poches de passifs en deux. Une des poches correspond à une population jeune et l'autre à une population âgée, moins réactive car si elle rachète son contrat pour investir ailleurs, elle perd ses avantages fiscaux.

b. Production nouvelle

Comme pour les rachats dynamiques, la production nouvelle est calculée en milieu d'année en modulant le montant des primes déterministes évoqué ci-dessus par un coefficient qui dépend de la valeur absolue de l'écart entre le taux servi et le taux cible de la période précédente.

2.4.5 Autres provisions mais non calculées par le modèle ALM

a. Provisions pour dépréciation durable (PDD)

Concernant la PDD, étant donné qu'il existe plusieurs lignes d'actifs soumis à la PRE, la modélisation d'une PDD serait plus appropriée. La dotation serait plus élevée car, d'une part on doterait ligne à ligne c'est-à-dire sans tenir compte de la mutualisation sur l'ensemble du R 332-20, d'autre part on doterait 100 % la moins-value latente et non pas le tiers de cette dernière. Toutefois, le nombre de lignes étant limité, on peut supposer que l'effet de mutualisation reste limité. De plus, l'assureur a la possibilité de réaliser des moins-values latentes pour éviter de doter la PDD.

Par ailleurs, la réglementation impose de doter une PDD lorsque une obligation corporate risquée se déprécie du fait d'une détérioration du crédit. Prophet ne dotant pas de PDD, l'absence de prise en compte de ce mécanisme pourrait s'avérer gênante. Mais comme il s'agit d'un calcul d'EEV, les scénarios financiers sont générés en probabilité risque neutre et le spread de crédit n'existe pas. En effet, en probabilité risque neutre, afin de ne pas modifier la valeur de marché actuelle des titres, BNP Paribas Cardif retraite les obligations « corporate » risquées en diminuant le spread de crédit afin qu'elles rapportent chacune un rendement de marché.

b. Provision pour aléas financiers (PAF)

Concernant la PAF, les scénarios où le rendement net comptable de l'actif est inférieur au TMG sont traités de manière trop optimiste en l'absence de dotation à la PAF. Etant donné que le TMG moyen pondéré sur l'encours du portefeuille de BNP Paribas Cardif est d'environ 2,8 %, d'après la réglementation, la dotation à la PAF serait effective dès que le taux de rendement de l'actif est inférieur à $5/4$ de 2,8 % soit 3,5 %. Il serait intéressant de vérifier que la PAF est bien nulle pour les quelques pires scénarios, qui, on le rappelle, sont déterminants pour l'évaluation du montant de capital économique. Par ailleurs, si on devait prendre en compte la PAF sous Prophet, il serait judicieux de réfléchir à un système identique à celui de la PRE avec dotation ou reprise de richesse entre PAF et PPE par exemple.

2.4.6 Une représentation schématique du modèle ALM utilisé

Il est possible de représenter sous forme de schéma ce qui vient d'être détaillé dans les deux parties précédentes³ :

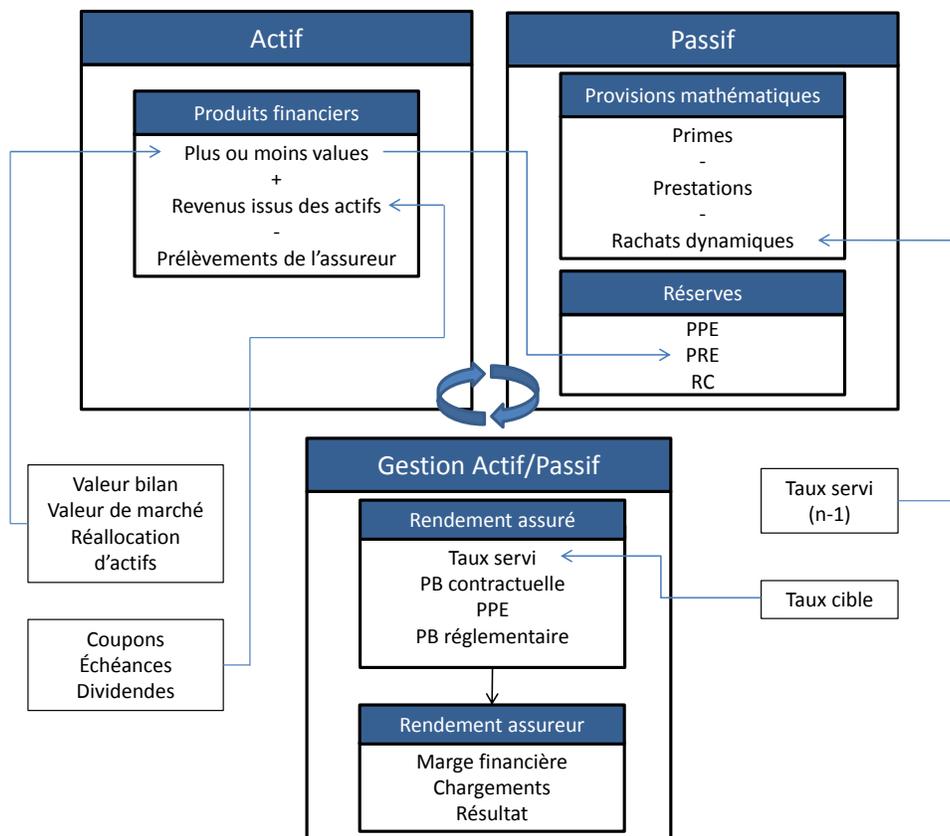


FIGURE 2.11 – Représentation schématique du modèle ALM

2.5 Présentation des étapes de l'étude d'allocation stratégique d'actifs

L'objectif de l'étude ALM d'allocation stratégique d'actifs est d'établir des recommandations de répartition pour les fonds dont les gérants d'actifs de BNP Paribas Cardif ont la charge. La gestion

3. Représentation extraite du mémoire de Jonathan Venturi, "Etude d'allocation d'actifs stratégique avec prise en compte du risque de crédit"

d'actifs doit être adaptée au mieux à la structure du passif.

Dans le cadre de notre étude, le coût du capital a également été estimé. En effet, l'allocation qui résulte de l'étude a donné lieu à la détermination d'un SCR. Au-delà du choix de l'allocation, il est important de déterminer également le coût engendré. Cette donnée est ensuite prise en compte dans la décision finale.

2.5.1 Rappel des hypothèses générales et des règles de pilotage

Dans les études d'allocation stratégique d'actifs de BNP Paribas Cardif, l'horizon de projection est de 20 ans⁴, avec une modélisation des rachats statiques et dynamiques. On rappelle que par hypothèse on a :

- Pour le taux servi :

$$\text{Taux contractuel} = x \% \times TRA^5 - \text{prélèvements sur encours}$$

- Pour le taux cible :

$$\text{Taux cible} = 90 \% \text{ de l'OAT } 6 \text{ 10 ans des années N et N-1}$$

De plus, les règles de pilotage dans le cadre de l'étude sont le taux cible, le taux contractuel, la réalisation de plus ou moins-values et la mise en place d'un corridor. Cette stratégie d'investissement permet aux actifs de pouvoir évoluer dans un "range" constitué des bornes minimum et maximum ainsi que d'un benchmark. Elle fonctionne en deux étapes :

- La première étape permet de remettre l'ensemble des actifs dans les bornes du corridor.
- Dans la seconde étape, le modèle détermine le solde de trésorerie acheteur ou vendeur au global. La répartition des achats/ventes est alors proportionnelle à l'écart entre la nouvelle valeur de l'actif et son benchmark. Cette stratégie présente comme avantage, de limiter la convergence des actifs sans terme (actions, immobilier et alternatifs) vers leur borne maximum, et constitue une force de rappel vers la valeur cible paramétrée dans le modèle.

2.5.2 L'ALM flux et les calculs de la duration

L'ALM flux (ou cash-flow matching) est la première étape qui est réalisée dans une étude d'allocation. Elle permet de mettre en regard les flux du passif et de l'actif afin d'identifier les gaps de liquidité selon les différentes échéances. Ce calcul est effectué en déterministe.

L'échéancier de passif intègre, en plus des prestations versées aux assurés, l'écoulement des fonds propres, de la réserve de capitalisation, de la provision pour participation aux bénéficiaires, de la PRE, de la provision pour sinistres à payer et de la marge de l'assureur nécessaire d'une part à l'exercice de son activité et d'autre part à honorer ses engagements. Par contre il n'intègre pas le chiffre d'affaires.

Cette étude extériorise les flux prévisionnels du passif (décaissements⁷ moins les primes) et de l'actif (coupons, remboursements obligataires, dividendes actions et revenus de trésorerie) sur 20 ans. Les actions et l'immobilier sont conservés dans le portefeuille. Les décalages de trésorerie prévisionnels ainsi obtenus permettent de déterminer les échéances sur/sous couvertes (représentant un risque de liquidité) et ainsi d'orienter le choix de la maturité des investissements nouveaux et des arbitrages.

Il est à noter que ces calculs sont faits en run off (c'est à dire qu'il n'y a pas de nouveaux contrats pour les différentes années de projections futures). Dans la suite de cette partie nous considérerons trois situations de projection du portefeuille de BNP Paribas Cardif. Pour chacune d'entre elle nous avons représenté les flux de l'actif et de passif :

4. Cette donnée est arbitraire mais correspond à des contraintes techniques du modèle. Au-delà les temps de calcul seraient beaucoup trop longs

5. Taux de Rendement des Actifs

7. Décaissements = Décès + Échéances + Rachats + Frais + Commissions

Portefeuille en run off

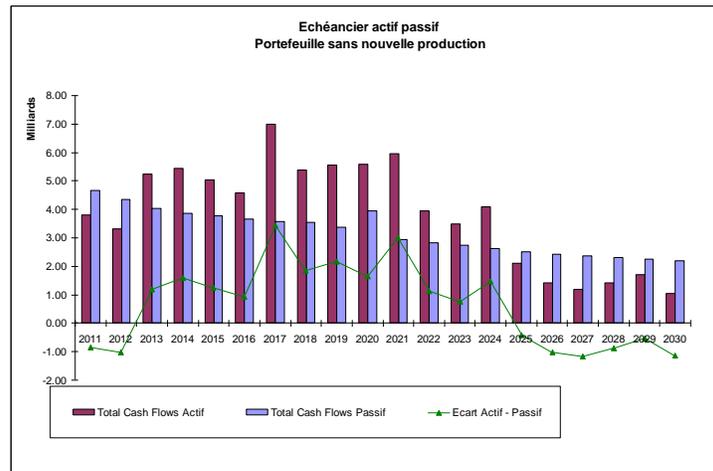


FIGURE 2.12 – Evolution des flux actifs et passifs sans nouvelle production

Les flux du passif ne sont pas couverts par les flux « naturels » de l'actif pendant les 2 premières années de projection, le gap de trésorerie s'élève à 1 Milliards d'euros en 2011 et en 2012. A partir de 2013, nous observons une sur-couverture jusqu'en 2024. C'est seulement au-delà de cette date que les flux de l'actif redeviennent insuffisants pour couvrir les prestations du passif.

Portefeuille en run off avec hausse des taux de rachat

Le graphique suivant présente l'échéancier actif/passif du portefeuille dans un scénario de hausse des taux de rachat. Ce stress correspond à celui réalisé dans le cadre des études quantitatives de Solvabilité II, à savoir des taux de rachats augmentés de 50 % sur toute la durée de projection.

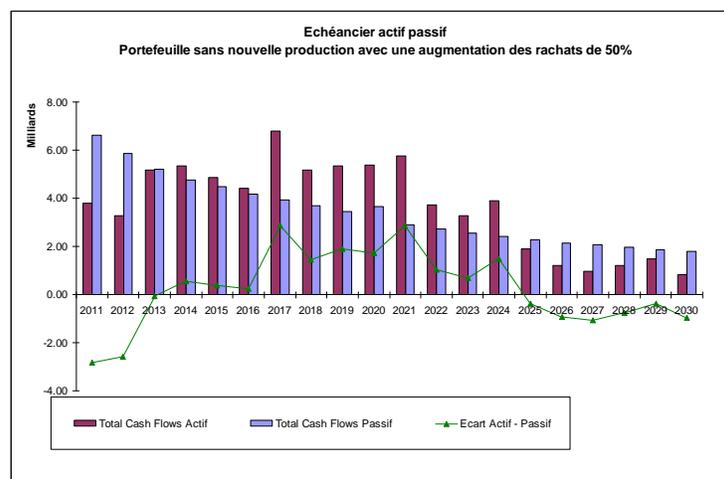


FIGURE 2.13 – Evolution des flux actifs et passifs en cas de hausse des taux de rachat

La hausse des taux de rachats vient augmenter les cash flows de passif qui ne sont pas couverts

par les cash flows de l'actif durant les 2 premières années de projection et au-delà de 2024. Le gap de trésorerie s'élève à près de 3 Milliards d'euros en 2010 et en 2011.

Couverture des gaps de trésorerie par la nouvelle production

Nous intégrons un nouveau chiffre d'affaires prévisionnel correspondant à 5 % des provisions mathématiques pendant 5 années de projection. Il s'agit d'une hypothèse relativement prudente compte tenu du pourcentage de primes perçues sur les 4 dernières années. Le graphique suivant présente l'échéancier actif passif du portefeuille intégrant ce nouveau chiffre d'affaires.

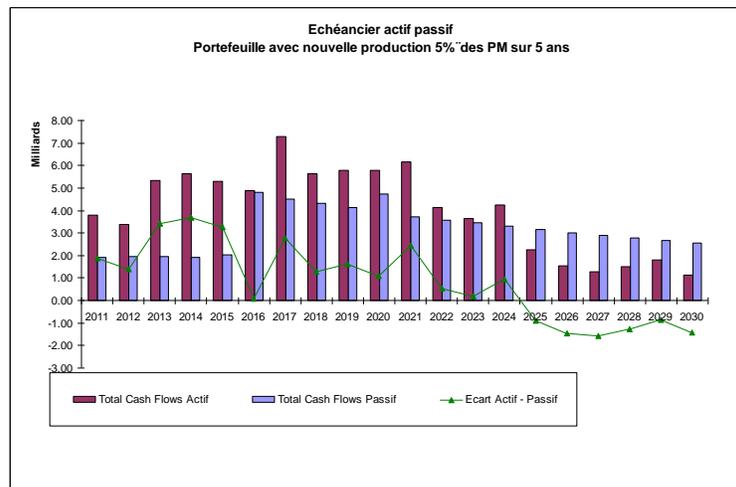


FIGURE 2.14 – Evolution des flux actifs et passifs avec des affaires nouvelles

Avec l'intégration du nouveau chiffre d'affaires, il n'existe plus de besoin de trésorerie pour les premières années de projection ; les flux de passif sont couverts jusqu'en 2025.

Cette première étude sur les comportements du passif et de l'actif permet de trouver une solution pour limiter les gaps de trésorerie. Cela permet de limiter le risque d'avoir un passif plus important que son actif. Vient ensuite la détermination de la durée cible de l'actif et du passif.

Adossement des durations de l'actif et du passif

Cette méthode consiste à appairer les sensibilités de l'actif et du passif vis-à-vis de la variation des taux d'intérêt. La méthode d'immunisation par durée consiste à trouver un portefeuille dont la valeur, au premier ordre, évolue comme la valeur actuelle des engagements. La règle de décision dans cette technique est basée sur la formule de la durée telle que définie par Macauley [1938] par la formule suivante :

$$duration = \frac{1}{PV} \sum_t \frac{t \times c_t}{(1+y)^t},$$

Avec c_t les cash flows et $PV = \sum_t c_t(1+y)^{-t}$ la valeur actualisée de l'obligation. Avec cette formule, la durée peut être interprétée comme la durée de vie moyenne de l'obligation.

Le calcul qui a été fait cette année dans le cadre de l'étude ALM 2012, a conduit à une durée cible de 9 ans pour les actifs. La durée du passif est quand à elle comprise entre 9 et 14 selon les hypothèses économiques considérées.

2.5.3 L'ALM Stochastique

a. Catégories dynamiques

Les catégories dynamiques permettent de rendre le modèle ALM dynamique au cours du temps. Dans le modèle les obligations appartiennent chacune à une catégorie dynamique permettant de prendre en compte l'évolution de la durée restante à courir pour celles-ci.

Actuellement, 4 types d'actifs (Cash, actions, immobilier et cap) sont utilisés dans le modèle du Fonds Général (pour un total de 24 catégories). Pour le type d'actifs "obligations" les catégories sont définies en fonction de la maturité de différentes obligations. Les classes de maturités sont : 0-1 an, 1-3 ans, 5-7 ans, 10-15 ans et >15 ans.

b. Les allocations d'actifs testées

L'étape suivante consiste à faire varier l'allocation d'actifs afin de déterminer le portefeuille optimal. Les actifs qui la composent sont :

- Une poche constituée d'obligations à taux fixes
- Une poche constituée d'obligations à taux variable
- Une poche composée d'actions
- Une poche composée d'immobilier

L'ALM stochastique consiste à calculer le résultat de l'assureur en fonction des 1000 scénarios fournis par les tables de scénarios économiques. Ce calcul permet d'obtenir les coordonnées (la moyenne et un quantile de la distribution) du montant de PVFP⁸ qui va constituer le nuage de points permettant de déterminer la frontière efficiente. La construction de ce nuage est effectuée en modifiant la composition de l'allocation d'actifs. L'objectif est de tester un maximum d'allocations⁹ en faisant varier la répartition des actifs comme suit :

- La poche des obligations à taux fixes par pas de 3 % entre 60 % et 90 %
- La poche des obligations à taux variable par pas de 3 % entre 0 % et 15 %
- La poche actions par pas de 2 % entre 0 % et 35 %
- La poche immobilière par pas de 2 % entre 0 % et 35 %

Les intervalles proposés ci-dessus correspondent à une réalité de gestion et à une expérience acquise à la suite des différentes études ALM chez BNP Paribas Cardif.

Afin de garder une certaine cohérence dans la répartition des actifs de l'allocation, certaines hypothèses sont prises. Tout d'abord pour une allocation donnée, la proportion d'obligations à taux variable est fixée. Ensuite, la part actions et la part immobilier sont choisies. Il existe un lien entre les actions et l'immobilier, trois cas sont testés : part immobilier = part actions, part immobilier = 80 % part action ou part immobilier = 60 % part actions. Finalement la part d'obligations à taux fixes vient compléter cette répartition pour obtenir 100 %.

Ces variations vont permettre de déterminer un nuage de points, chaque point correspondant à une allocation. A partir de ces points, l'objectif est de déterminer l'allocation stratégique en fonction de critères de décisions présentés dans la partie suivante.

2.5.4 Indicateurs de valeur et de risque pour l'étude

Avant de pouvoir déterminer la stratégie d'allocation¹⁰ d'actifs optimale, il est nécessaire de fixer des indicateurs pour la prise de décision. L'approche retenue dans les études ALM est l'approche risque maximal acceptable.

8. La définition de cette variable économique sera rappelée dans la suite de cette partie

9. Dans le cadre de l'étude présentée, plus de 250 allocations ont été testées

10. Elle se divise en 2 composantes : la répartition (actions, TF, TV, immobilier) et la répartition entre ratings

Les éléments de prise de décision sont appelés métriques. Ils sont définis et en accord avec le "Risk Appetite" et le "Risk Tolerance" de la compagnie.

a. Indicateur de valeur

Dans les études d'allocation stratégique, l'indicateur de valeur est la *Present Value of Future Profits* (PVFP).

Par définition la PVFP correspond à la valeur des profits futurs revenant à l'actionnaire, actualisée au taux 1 an (qui est une prévision macro-économique) du scénario considéré :

$$PVFP = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+r)^k}$$

R_k correspond au résultat technique net avant impôt de l'année k , et r est le taux d'actualisation.

Cette donnée fournit une information sur le rendement moyen d'une allocation.

b. Indicateur de risque

L'indicateur de risque est quant à lui le quantile à 90 % de la distribution de la PVFP (également noté VaR¹¹ 90 % PVFP). Le choix de cet indicateur est en accord avec le "Risk Appetite" du comité exécutif de BNP Paribas Cardif.

Cet indicateur mesure le risque inhérent d'un portefeuille, en mesurant la perte potentielle liée aux variations défavorables sur une période de temps déterminée. Cela permet de garder sur le nuage de points uniquement les allocations dont la VaR à 90 % de la PVFP est positive.

c. Comparaison de deux allocations d'actifs

Pour chaque allocation, 1000 simulations sur un horizon de 20 ans sont effectuées dans le but de mesurer l'impact final. Pour ce faire, les deux indicateurs présentés ci-dessus sont utilisés.

La relation de comparaison est la suivante :

$$\text{si } \begin{cases} PVFP_A \geq PVFP_B \\ VaR_{90\%}(PVFP_A) \geq VaR_{90\%}(PVFP_B) \end{cases}$$

Alors $A \geq B$

d. Processus de sélection de l'allocation stratégique

Nous allons présenter ici les différentes étapes qui permettent de sélectionner l'allocation stratégique d'actifs à retenir :

- Retrait des points pour lesquels la $VaR_{90\%}(PVFP)$ est négative
- Retrait des points pour lesquels on observe un "décrochage" avec l'augmentation trop importante de la part actions
- Sélection des points efficients
- Choix de l'allocation stratégique efficiente

2.5.5 Représentation graphique du nuage de points de la frontière efficiente

Le graphique suivant fait apparaître différents nuages de points qui sont obtenus en sortie du modèle en fonction de l'allocation initiale définie dans le modèle. On constate que la forme générale de la frontière efficiente ne change pas, on observe seulement un déplacement vertical (qui résulte de la

11. La Value-at-Risk (VaR) est une mesure de risque et représente le quantile de niveau $\alpha \in [0, 1]$ du risque X , et s'écrit $VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in R | F(x) \geq \alpha\}$

modification de la proportion de GOV 1¹², GOV 2¹³ et Corp dans le portefeuille, toutes choses étant égales par ailleurs).

On constate que la méthode de sélection de l'allocation stratégique présentée précédemment conduit à sélectionner un point du nuage qui se situe en haut à droite du graphique suivant :

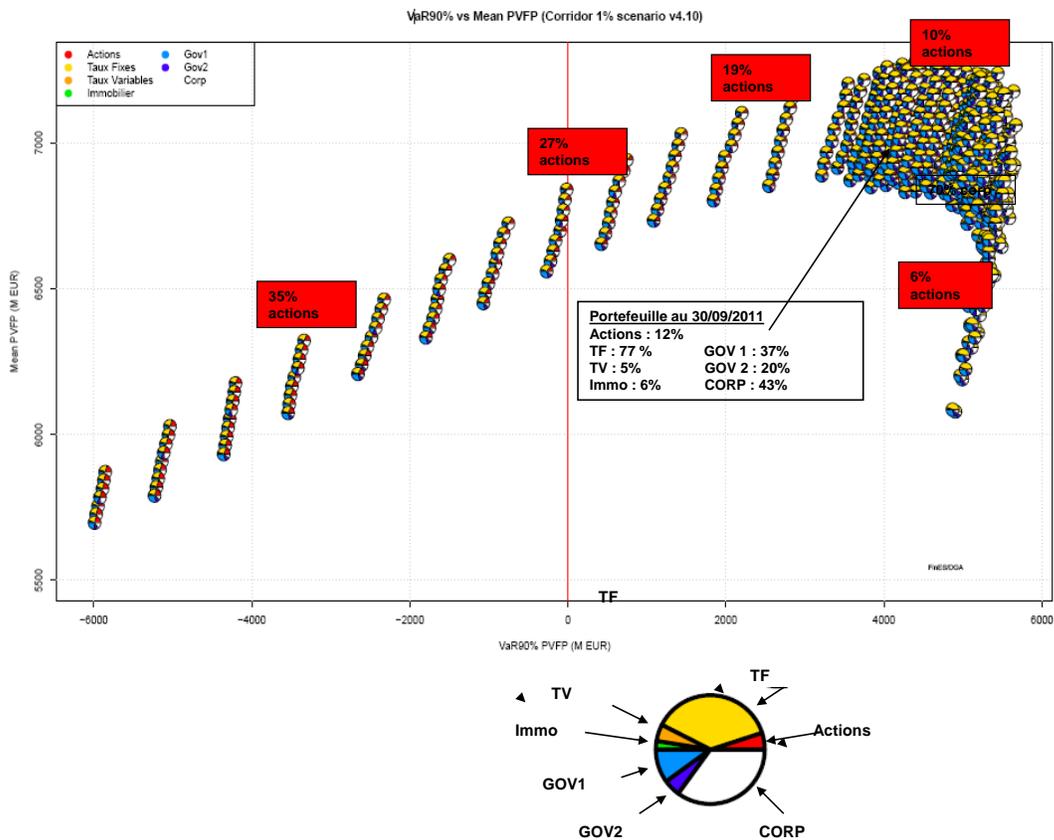


FIGURE 2.15 – Recherche de la frontière efficiente

Une fois que l'étude ALM d'allocations stratégiques d'actifs a été réalisée, l'allocation proposée doit permettre de définir :

- Un benchmark
- Les limites et les contraintes à appliquer aux risques suivants : liquidité, taux, actions, spread et devises

La répartition des actifs retenue pour l'étude 2012 sera rappelée dans la troisième partie de ce mémoire.

12. GOV 1 = France, Italie, Belgique, Autriche, Allemagne, Pays-Bas, BEI, Pologne, Finlande, Autres

13. GOV 2 = Espagne, Irlande, Portugal, Grèce

Chapitre 3

Modélisation du Coût du Capital

Cadre de l'étude :

Chaque année, l'équipe ALM BNP Paribas Cardif a en charge de réaliser une étude d'allocation stratégique d'actifs sur le Fonds Général Cardif Vie France. L'objectif est de déterminer les allocations optimisant le couple rendement/risque.

La recherche de l'optimum est basée sur la Present Value of Future Profits (PVFP) moyenne sur les 1000 scénarios comme indicateur de valeur. L'indicateur de risque est la VaR de la PVFP. Une contrainte complémentaire a été ajoutée à la recherche de l'optimum : le coût du capital. En effet, la mise en place prochaine de la directive Solvabilité va engendrer une augmentation du besoin en capital réglementaire en face de la détention d'actions. Il est donc important de prendre cet élément en compte dans les études.

3.1 Définition économique et mathématique du coût du capital

A la différence de la réglementation Solvabilité 1, qui se base sur le volume des provisions mathématiques et des capitaux sous risque en assurance vie, la marge de solvabilité calculée sous la réglementation Solvabilité 2 dépend des risques et notamment des risques de marché.

Les fonds propres d'une compagnie d'assurance sont limités et mobiles et leur détention se matérialise par un coût. Déterminer le coût du capital dans l'étude en cours revient à anticiper la future réglementation.

Le coût du capital se définit alors comme le coût des fonds propres nécessaires à la couverture du capital réglementaire (SCR de marché) lié entre autre à l'allocation d'actifs. Les SCR projetés ne prennent en compte que les besoins en capitaux des risques non répliquables¹. Les risques répliquables sont les risques assimilés aux risques financiers.

Le taux retenu dans les spécifications techniques QIS 5 et maintenant IML2 pour l'évaluation de la marge pour risque est de 6 %. Ce taux correspond au rendement espéré par les actionnaires.

Cette marge pour risque intègre :

- le risque de marché "inévitabile"
- le risque de souscription : risque pris par un assureur en distribuant des contrats d'assurance auprès de personnes physiques ou de personnes morales
- le risque de contrepartie : risque lié à la probabilité de défaut de l'émetteur
- le risque opérationnel : risque de défaillance des systèmes informatiques (par exemple le risque de fraude ou le risque d'une condamnation judiciaire)

1. Correspondent aux risques d'assurance classique

Mathématiquement, le coût du capital se définit comme la valeur actualisée des SCR_s futurs à laquelle on multiplie le taux de 6 % rappelé plus haut dans cette partie. Cette formule est en tous termes semblable à celle présentée dans la partie 1.3.2 de ce mémoire pour la détermination de la marge pour risque (risk margin). La principale différence réside dans le SCR calculé : on considère dans ce calcul uniquement le SCR de marché alors que pour la risk margin, l'ensemble des risques de la formule standard sont pris en compte sauf le SCR de marché. Ci-dessous la formule utilisée :

$$CoC = 6\% * \sum_{t>0} \frac{SCR_{marche}(t)}{(1 + TauxSwap(t + 1))^{t+1}}$$

3.2 Estimation des SCR_s futurs

La principale difficulté dans la détermination du coût du capital reste la projection du SCR et la détermination des SCR_s futurs. Au-delà des méthodes déjà existantes, que nous allons rappeler dans la suite du document, l'objectif de ce mémoire est de déterminer une fonction permettant la projection du SCR.

3.2.1 Méthodes alternatives au calcul de capital économique dans le futur

Dans cette partie nous allons présenter quatre méthodes alternatives au calcul du SCR en $t=1$.

a. Simulations dans les simulations

Cette méthode² de calcul de SCR_s consiste, en utilisant le modèle interne d'une compagnie d'assurance par exemple, à réaliser des simulations en univers risque-réel pour la première période de projection. Ensuite, pour chacune de ces simulations, des simulations secondaires sont effectuées dans un univers risque neutre ou "market consistent" pour l'ensemble des périodes de projection. Ces dernières simulations sont effectuées conditionnellement à la connaissance des données de la première période. Cette méthode nécessite donc la connaissance de plusieurs jeux de tables de scénarios économiques : en univers monde-réel dans un premier temps et en univers risque-neutre dans un deuxième temps.

b. Curve fitting

Cette deuxième méthode consiste à déterminer une fonction de pertes pour calculer le capital économique. Ces fonctions sont calibrées pour estimer le bilan économique par des formules fermées en fonction de facteurs de risque. A titre d'exemple considérons le schéma ci-dessous :

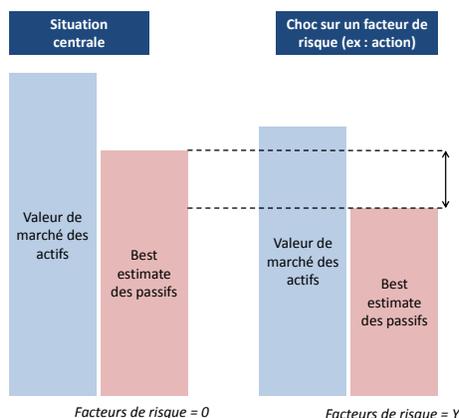


FIGURE 3.1 – Evolution du bilan entre deux situations économiques

2. Pour plus d'informations se référer à l'article de DEVINEAU et LOISEL - Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité 2

La fonction de perte permet de quantifier l'écart entre le Best Estimate en situation centrale et après un choc à un horizon de temps donné.

Le choix de la fonction s'effectue généralement parmi les familles de polynômes ou les familles exponentielles. On pourra par exemple considérer une fonction de la forme :

$$f(Y, 0) = a \times \text{risque}_{action} + b \times \text{risque}_{action}^2 + c \times \text{risque}_{rachat} + \dots$$

Une fois la fonction déterminée, celle-ci est calibrée sur un nombre réduit de points en $t=1$. Une fois l'ensemble des fonctions de pertes déterminées et calibrées, on simule un nombre important de réalisations des facteurs de risque et la situation nette est calculée via celles-ci. Puis on identifie le quantile à 0.5 % de la distribution.

c. Least Squares Monte Carlo

Cette méthode propose une substitution aux simulations secondaires en $t=1$ qui sont prises en compte dans la méthode de Curve fitting. Dans cette méthode on conserve l'ensemble des simulations primaires (entre $t=0$ et $t=1$). Comme pour la méthode précédente, des fonctions de pertes sont calibrées pour estimer le bilan économique par des formules fermées. Toutefois ces fonctions sont calibrées sur 1 ou 2 simulations.

Ci-dessous une représentation schématique des deux méthodes que l'on vient de présenter :

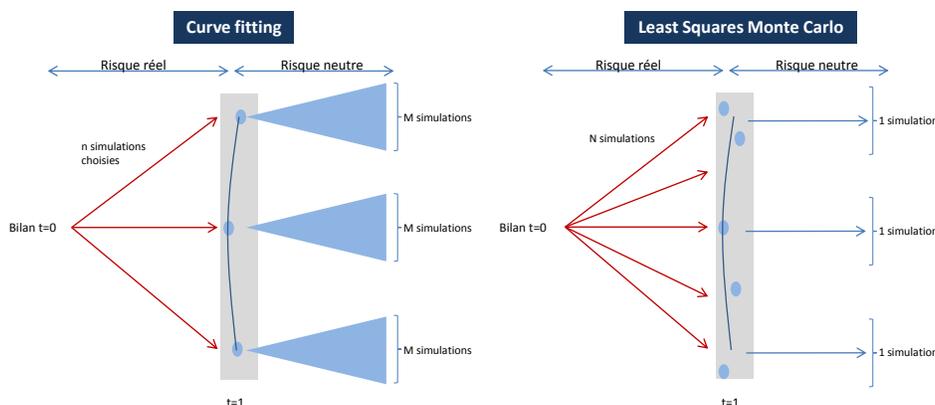


FIGURE 3.2 – Méthode Least Squares Monte Carlo

d. Replicating portfolio

Cette dernière méthode³ ne s'applique qu'aux risques financiers. Elle consiste à construire un portefeuille d'actifs financiers dont la valeur fournit une estimation quasi-immédiate de celle des variables d'intérêt que sont les fonds propres économiques ou la valeur économique des passifs. La connaissance d'un portefeuille de réplcation permet d'obtenir rapidement une distribution des fonds propres économiques en fin de première période par simulation de la valeur de celui-ci.

Considérons les notations suivantes :

- A_1^p correspond à la valeur de marché de l'actif en fin de première période pour la simulation primaire p
- VEP_1^p est la valeur économique des passifs en fin de première période pour la simulation primaire p

3. Pour plus d'informations se référer à l'article de DEVINEAU et CHAUVIGNY- Replicating Portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité 2

- FP_1^p les fonds propres économiques en fin de période pour la simulation primaire p
- RP_1^p la valeur du Replicating Portfolio en fin de première période pour la simulation primaire p

En $t=1$, les postes de l'actif et du passif sont calculés comme suit :

$$VEP_1^p \approx RP_1^p$$

Et,

$$FP_1^p = A_1^p - VEP_1^p \approx A_1^p - RP_1^p$$

Schématiquement cette notion peut s'illustrer de la façon suivante :

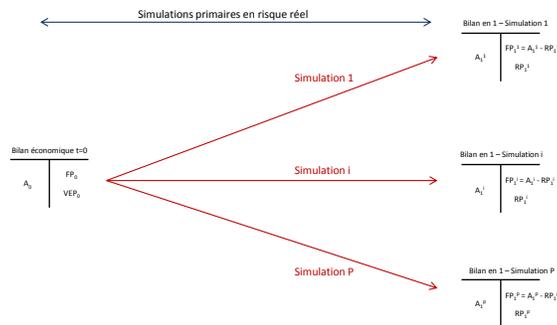


FIGURE 3.3 – Méthode de répliquing portfolio

3.2.2 Autres simplifications existantes

Différentes simplifications sont proposées pour le calcul du SCR relatif à une année t^4 :

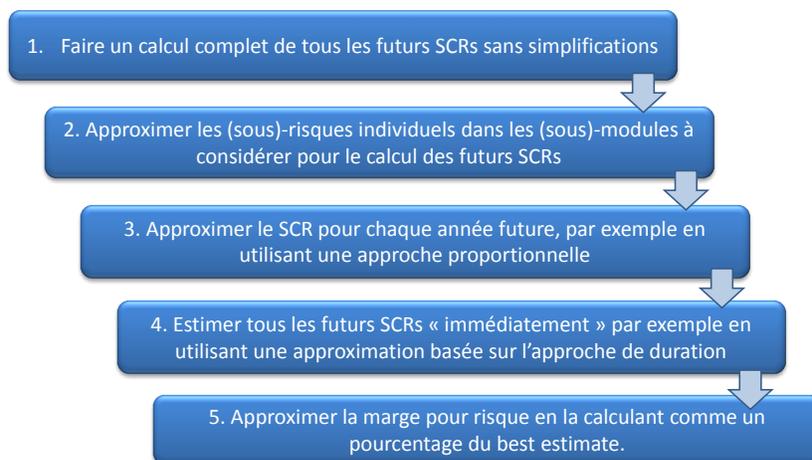


FIGURE 3.4 – Simplifications pour la projection du capital économique

4. Formules rappelées dans le cours "Gestion et Mesure des risques " - Marc JUILLARD

Méthode 3 :

La méthode 3 consiste à supposer que les SCRs dans le futur sont proportionnels aux Best Estimate futurs. Les SCRs futurs sont calculés avec la formule suivante :

$$SCR(t) = \frac{SCR(0)}{BE_{net}(0)} * BE_{net}(t)$$

Avec :

- $SCR(t)$ désigne le SCR relatif à l'année t
- $BE_{net}(t)$ désigne le Best Estimate net de réassurance

Cette méthode est celle actuellement utilisée dans les études ALM. Les données obtenues par cette formule seront comparées aux résultats de la formule fermée proposée dans ce mémoire.

3.2.3 Méthode proposée

Afin de déterminer le coût du capital, un SCR doit être calculé (ou à défaut estimé) à chaque pas de temps et pour chaque simulation de l'étude d'allocation d'actifs. Chaque simulation est caractérisée par une somme de profits actualisés mais également par une somme de SCRs actualisés.

Dans le cadre des études ALM, de nombreuses allocations sont testées (environ 250). Chaque allocation est constituée de 1000 simulations sur 20 ans. Si nous considérons que pour chaque point des simulations, 10 chocs sont nécessaires, calculer un SCR exact reviendrait à réaliser 50 000 000 000 simulations. Il est donc nécessaire de trouver une méthode moins coûteuse en temps de calcul afin d'estimer les SCRs.

Cette partie a pour objectif de présenter la méthode qui va être mise en œuvre afin de pouvoir déterminer un SCR à un pas annuel. La méthode proposée s'inspire de la méthode de curve fitting présentée dans la partie précédente. Nous allons tenter de déterminer une formule fermée parmi la famille des fonctions polynômiales reliant des indicateurs de risque⁵ ou *Risk Driver* au montant de SCR de marché. Nous allons également justifier le choix du calcul du SCR de marché et non la recherche d'une fonction pour calculer des SCRs intégrant l'ensemble des sous-modules de la formule Standard.

Pour calibrer une telle fonction, un abaque⁶ a été construit. Celui-ci correspond à une grille de NAV (Net Asset value) en fonction de différents *Risk Drivers*. Ces *Risk Drivers* sont au nombre de 5 et vont être présentés dans la suite de cette partie.

Une fois cette fonction déterminée, il sera possible de calculer un SCR de marché pour les différentes années de projections. Cette formule permettra également un gain de temps lors de la réalisation des études ALM pour la détermination de l'allocation stratégique d'actifs.

a. Présentation des *Risk Drivers*

Un *Risk Driver* est défini ici comme un élément déclencheur d'impact dans le bilan. Il permet de donner une information sur la sensibilité de notre portefeuille à des éléments résultant du modèle ou de décision stratégique.

Les résultats d'une précédente étude effectuée dans le cadre d'un mémoire d'actuariat⁷ sur le portefeuille BNP Paribas Cardif ont permis d'identifier un premier jeu de *Risk Drivers*. Ils peuvent être classés en deux catégories, les trois premiers reposent sur des observations faites à partir des sorties du modèle. En effet, à la suite de l'étude du modèle ALM et des éléments qui y sont calculés, nous avons choisi les éléments présentés ci-après. Les deux derniers sont en relation directe avec les allocations

5. Par abus de langage dans la suite du document on remplacera le terme indicateur de risque par *Risk Driver*

6. Correspond dans la suite du document à l'hypercube de SCR

7. MOREAU Olivier - Intégration du coût du capital dans l'étude d'allocation d'actifs du Fonds Général France de Cardif Assurance Vie

déterminées par l'étude ALM de l'année en cours.

Les *Risk Drivers* sont :

- **Le rapport entre la valeur de marché des obligations et la valeur comptable des obligations présentes dans le portefeuille de BNP Paribas Cardif** : cet élément a été retenu afin de capter la composante taux qui intervient dans le montant du SCR. Les obligations représentent aussi une part importante du portefeuille et les plus ou moins-values réalisées sur celles-ci influencent le montant de SCR de marché. **RD(PMVL Obligataires)**
- **Le rapport entre le montant de PPE (Provision pour Participation aux Excédents)⁸ et les PM (Provisions Mathématiques) totales du portefeuille** : cette donnée est au même titre que la participation aux bénéficiaires (PB) qui est reversée aux assurés, un élément clef de la gestion de l'activité d'assurance. Le montant de PPE pour une année donnée influence le montant de SCR que l'assureur doit détenir pour l'exercice. **RD(Taux PPE)**
- **Le rapport entre les Plus ou Moins-Values Latentes (PMVL) des actions et le montant total de PM** : afin d'espérer un rendement financier un peu plus important les assureurs détiennent dans leur portefeuille une part d'actifs risqués que sont les actions. Cependant elles possèdent une forte volatilité et en fonction du marché, l'assureur peut ou non réaliser des plus ou moins-values latentes. En fonction des cas, le montant de SCR de marché pourra être différent. C'est pourquoi nous avons retenu ce *Risk Driver*. **RD(PMVL Actions)**
- **Le rapport entre la valeur de marché des actions et la valeur totale des actifs** : ce *Risk Driver* correspond à la part actions dans le portefeuille. En situation centrale elle est égale à la proportion déterminée par l'étude ALM d'allocation stratégique. Il semble cohérent de considérer que le SCR de marché est sensible à cet élément. **RD(Part Actions)**
- **Le rapport entre la valeur de marché de l'immobilier et la valeur totale des actifs** : cet élément correspond à la part immobilier dans le portefeuille. Comme pour le précédent *Risk Driver* ce n'est pas une conséquence du modèle mais cette information peut être paramétrée en entrée du modèle ALM et influencer le montant de SCR final. **RD(Part Immobilier)**

La sélection de ces *Risk Drivers* ainsi que des chocs qui vont leur être appliqués pour pouvoir construire notre abaque a pour objectif de couvrir l'ensemble des valeurs prises par le portefeuille. Pour cette étude, nous avons retenu 5 *Risk Drivers* que nous considérons comme les plus impactants sur le montant de SCR, toutefois il sera possible d'affiner par la suite cette recherche en ajoutant d'autres paramètres à cette fonction.

b. Détermination des chocs à appliquer à ces *Risk Drivers* pour la construction de l'abaque

Nous allons maintenant étudier le comportement et la sensibilité de ces *Risk Drivers* en fonction de la composition du portefeuille BNP Paribas Cardif. Pour cela, nous avons sélectionné trois situations dans lesquelles la part actions est différentes entre trois situations. Le choix de ces portefeuilles fait suite à l'analyse du nuage de points qui a permis de déterminer la frontière efficiente pour l'étude d'allocation stratégique d'actifs de 2012.

La suite de cette partie a pour objectif de déterminer les chocs à appliquer aux *Risk Drivers* afin de pouvoir construire l'hypercube de SCR_s qui sera ensuite utilisé pour la recherche et la calibration de la fonction proposée. Ces chocs sont à appliquer à la valeur du *Risk Driver* (grandeur exprimée en pourcentage) calculée dans le cadre de la situation du portefeuille en $t=0$ et pour une allocation stratégique telle qu'elle a été déterminée par l'étude d'allocation stratégique. Il est à noter, que les valeurs de ces *Risk Drivers* ainsi que les niveaux de chocs sont relatifs et dépendent donc de la situation en $t=0$ et de la compagnie d'assurance.

8. Son calcul dans le modèle ALM a été présenté dans la partie 2 de ce mémoire

Voici le nuage de points retenu dans l'étude d'allocation stratégique 2012 pour la décision finale de la répartition stratégique d'actifs à appliquer :

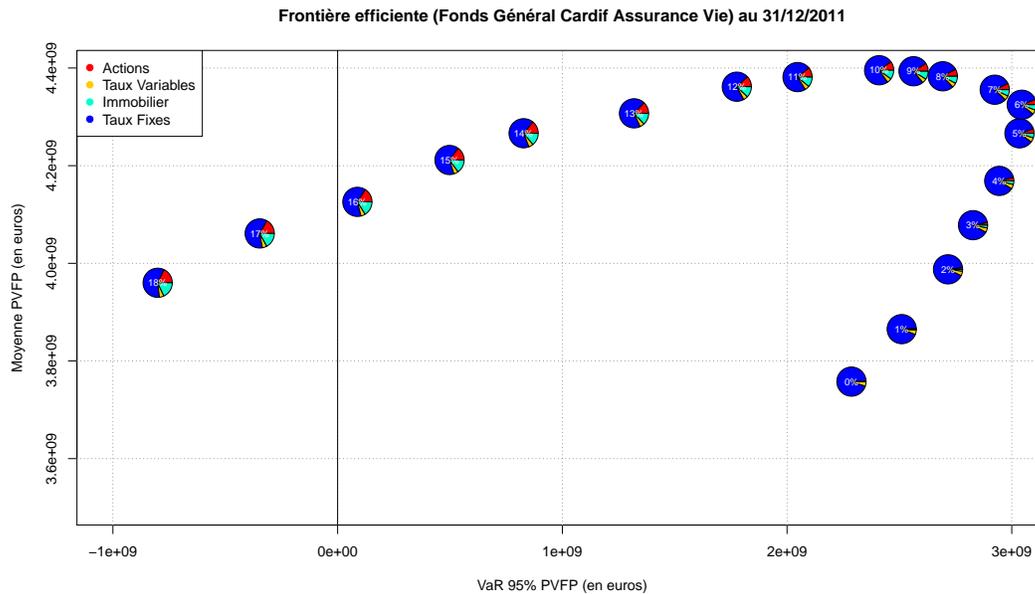


FIGURE 3.5 – Frontière efficiente de l'étude ALM 2012

L'étude de cette frontière efficiente permet de déterminer le point qui maximise le couple $(PVFP, VaR_{90\%}(PVFP))$. Ce point se trouve dans la zone située en haut et à droite de ce graphique. Plus précisément, cette étude a conclu à une répartition des actifs suivante :

Benchmark	Obligations		Bêta Actions	Immobilier	Total
	Total Obligations	Dont Corporate + Govies 2			
Allocation en valeur de marché	80%	65%	10%	10%	100%
	(min 74%, max 89%)	(max 75%)	(min 6%, max 13%)	(min 5%, max 13%)	

FIGURE 3.6 – Allocation stratégique d'actifs 2012

Comme nous l'avons présenté plus haut dans cette partie, le premier objectif de ce mémoire est la détermination d'une formule fermée pour la projection du capital économique réglementaire à un pas annuel. Le deuxième objectif est d'étudier l'impact de Solvabilité 2, sur une allocation stratégique d'actifs. Pour cela, dans la dernière partie de ce mémoire, nous reprendrons l'étude ALM 2012 en appliquant un coût du capital au montant de PVFP et nous déterminerons une nouvelle allocation stratégique à comparer avec celle rappelée ci-dessus.

Dans un premier temps, à l'aide du nuage de points et de l'allocation stratégique cible nous allons effectuer des sensibilités sur les *Risk Drivers* en considérant 3 allocations : une allocation avec une part actions nulle, puis une part actions à 10 % (recommandée par l'étude ALM) et une part actions à 20 %.

Dans un deuxième temps nous étudierons le comportement des *Risk Drivers* afin de déterminer le niveau des chocs qu'il faut leur appliquer pour déterminer la fonction recherchée. Les éléments qui ont été pris en compte pour cette analyse sont des critères statistiques de la distribution des différents *Risk Drivers* :

- La moyenne année par année
- La médiane
- Les différents quantiles (5 %, 25 %, 75 %, 95 %)
- Les valeurs maximales et minimales

α . *Risk Driver* PMVL Obligataires

Ce *Risk Driver* est lié à des actifs relatifs à l'article R332-19⁹ du Code des Assurances. Cette poche correspond à la partie obligataire de notre portefeuille. Ce *Risk Driver* a été retenu afin de mesurer la sensibilité du portefeuille à une variation de taux. Il est défini comme le rapport entre la valeur de marché des obligations et la somme entre la valeur comptable des obligations à laquelle on ajoute les coupons courus. Ce qui donne la formule suivante :

$$RD(PMVL_{Obligataires})(t) = \frac{MV_{bond}(t)}{FAV_{bond}(t) + CC(t)}$$

Avec :

- $MV_{bond}(t)$, la valeur de marché des obligations de notre portefeuille pour l'année t
- $FAV_{bond}(t)$, la valeur comptable des obligations pour l'année t
- $CC(t)$, la valeur des coupons-courus des obligations pour l'année t

Dans la suite de cette partie nous allons nous intéresser aux plus ou moins-values latentes des obligations rapportées à la valeur comptable. Pour cela, nous avons considéré le rapport $\frac{MV_{bond} - (FAV_{bond} + CC)}{FAV_{bond} + CC}$.

Afin de comprendre la méthode utilisée pour déterminer les chocs nous allons présenter un exemple à part actions fixée et pour une année de projection arbitrairement choisie. Ci-dessous, la distribution des plus ou moins-values latentes du *Risk Driver* relatif aux obligations sur les 1000 valeurs du scénario observé :

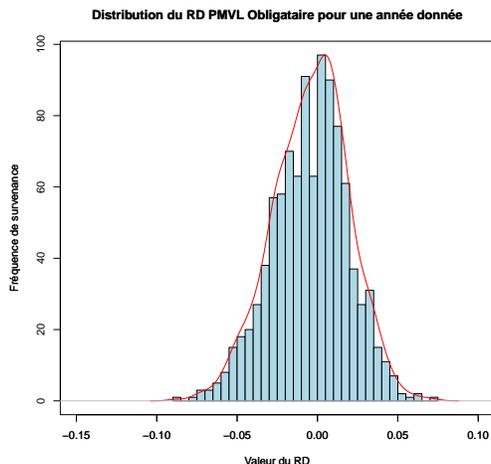


FIGURE 3.7 – Distribution des plus ou moins-values latentes obligataires

9. Extrait du Codes des Assurances en Annexe de ce mémoire

Les informations fournies par cette distribution sont présentées dans le tableau suivant :

Année	n
Moyenne	3,3 %
Médiane	3,8 %
Quantile à 95 %	9,3 %
Quantile à 75 %	6,2 %
Quantile à 25 %	1 %
Quantile à 5 %	-4 %
Min	-15,9 %
Max	15,7 %

Cette étude est ensuite réalisée pour les différentes années de projection et en faisant varier la part actions.

Le faisceau des quantiles à la hausse et à la baisse semble assez volatile en début de projection et se stabilise par la suite, comme l'illustre le graphique suivant :

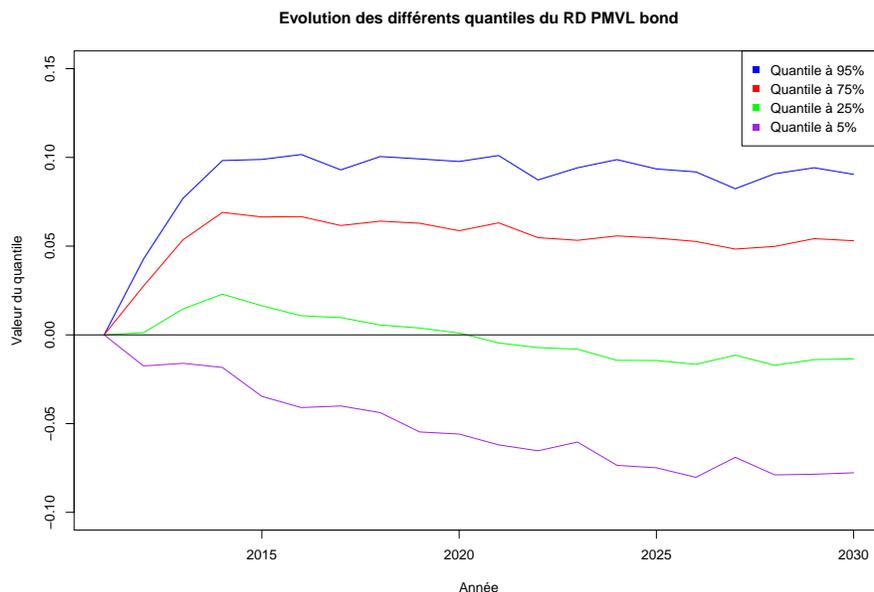


FIGURE 3.8 – Evolution des quantiles des PMVL obligataires

Cette volatilité semble être identique pour des répartitions différentes comme le montre le tableau regroupant les moyennes des quantiles, ci-après :

Part action	0 %	10 %	20 %
Quantile à 95 %	8,7 %	8,5 %	8,3 %
Quantile à 75 %	5,3 %	5,3 %	5,1 %
Quantile à 50 %	2,7 %	2,7 %	2,5 %
Quantile à 25 %	-0,2 %	-0,2 %	-0,3 %
Quantile à 5 %	-5,2 %	-5,3 %	-5,2 %

Ainsi, les chocs que nous retiendrons pour ce *Risk Driver* dans le cadre de cette étude sont :

$$RD(PMVL_{Obligataire}) \in \{-5 \%, 0 \%, 2,5 \%, 5 \%, 10 \%\}$$

β . Risk Driver Taux de PPE par rapport aux PM

Ce deuxième *Risk Driver* correspond au niveau de Provision pour Participation aux Excédents (PPE) de notre portefeuille par rapport au montant total de provisions mathématiques (PM). La PPE correspond à une immobilisation de la part de l'assureur en cas de non redistribution immédiate à ses assurés d'une plus-value éventuelle et impose un coût. Cet élément est donc pris en compte dans la détermination du capital économique. Ce *Risk Driver* est calculé de la façon suivante :

$$RD(Taux_{PPE}(t)) = \frac{PPE(t)}{PM(t)}$$

Avec :

- $PPE(t)$, le montant de PPE dans le portefeuille pour l'année t
- $PM(t)$, le montant total de PM dans le portefeuille pour l'année t

En moyenne les résultats obtenus pour les différentes distributions sont :

Part action	0 %	10 %	20 %
Quantile à 95 %	9,6 %	9,9 %	11,4 %
Quantile à 75 %	8,2 %	8,2 %	8,9 %
Quantile à 50 %	6,8 %	6,7 %	7,1 %
Quantile à 25 %	4,1 %	3,7 %	3,6 %
Quantile à 5 %	0,2 %	0,1 %	0,1 %

Si l'on s'intéresse à la moyenne de ce *Risk Driver*, on observe une croissance constante sur l'ensemble des années de projection. Ce qui signifie que le montant de PPE augmente avec les années de projection. Le graphique ci-dessous illustre cette tendance :

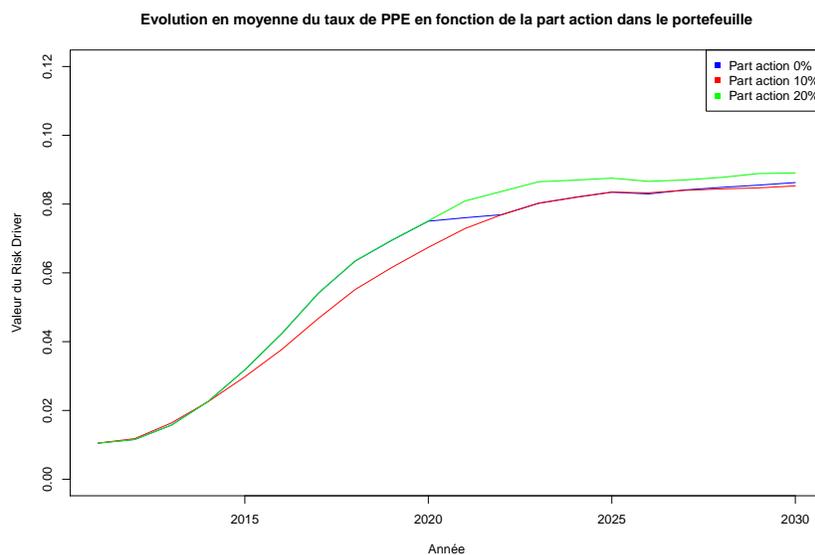


FIGURE 3.9 – Evolution du taux de PPE en fonction de la part action du portefeuille

Cette première analyse descriptive nous conduit à proposer les chocs suivants :

- Un montant de PPE nul
- Un montant de PPE égal à celui de départ dans notre portefeuille
- Un montant de PPE multiplié par : 3, 6

$$RD(Taux_{PPE}) \in \left\{ 0\%, \frac{PPE}{PM}, \frac{PPE \times 2}{PM}, \frac{PPE \times 3}{PM}, \frac{PPE \times 6}{PM} \right\}$$

γ . Risk Driver PMVL actions

Le troisième *Risk Driver* concerne les actifs relatifs à l'article R332-20¹⁰ du Code des Assurances. On s'intéresse aux PMVL des actions par rapport à la PM. Le fait de travailler avec trois allocations avec des parts actions différentes va permettre de tester la sensibilité de notre portefeuille à ce *Risk Driver*. Il est calculé de la manière suivante :

$$RD(PMVL_{Action}(t)) = \frac{MV_{equity}(t) - FAV_{equity}(t)}{PM(t)}$$

Avec :

- $MV_{equity}(t)$, le montant de la valeur de marché des actions dans le portefeuille à la date t
- $FAV_{equity}(t)$, le montant de la valeur comptable des actions à la date t

Une première étude sur la valeur moyenne de ce *Risk Driver* en fonction de la part action dans l'allocation et les années de projections, montre qu'il est peu sensible à la part actions comme l'illustre le graphique ci dessous :

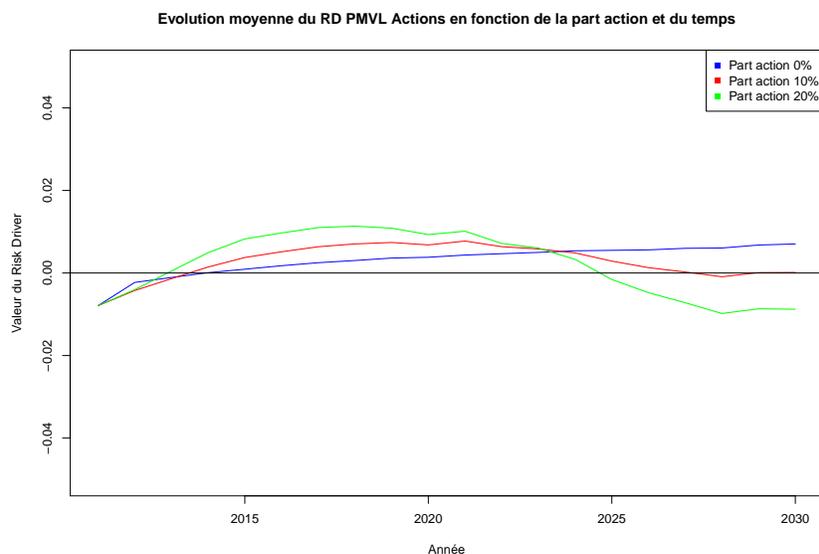


FIGURE 3.10 – Evolution des PMVL actions en fonction de la part action

Toutefois si l'on s'intéresse aux différents quantiles du *Risk Driver* PMVL actions, on observe que les valeurs extrêmes de la distribution sont très sensibles à la part actions. Cette sensibilité est résumée dans le tableau suivant :

Part action	0 %	10 %	20 %
Quantile à 95 %	2,3 %	9,9 %	17,8 %
Quantile à 75 %	1,1 %	4,7 %	8,1 %
Quantile à 50 %	0,3 %	1,0 %	1,4 %
Quantile à 25 %	-0,4 %	-3,5 %	-6,6 %
Quantile à 5 %	-2,0 %	-11,6 %	-21,2 %

10. Extrait du code relatif à cet article également en Annexe de ce mémoire

La fonction recherchée doit prendre en compte l'ensemble des allocations possibles. Il est nécessaire de considérer ici les valeurs maximales que peuvent prendre ce *Risk Driver*. Dans la suite de l'étude nous allons considérer les chocs suivants :

$$RD(PMVL_{Action}) \in \{-20 \%, -10 \%, -5 \%, 0 \%, 10 \%, 20 \%\}$$

Ces trois premiers *Risk Drivers* ayant été analysés, nous allons maintenant étudier ceux dont les chocs dépendent de l'allocation d'actifs paramétrée en entrée du modèle.

δ. Risk Driver relatif à la part actions dans l'allocation totale du portefeuille

Nous avons présenté dans la partie 3.2.3 les conclusions de l'étude ALM 2012 (données à fin 2011). La recommandation faite par l'étude ALM concernant la part actions est de 10 % avec un intervalle de confiance de $[-4\%, +3\%]$. Pour ce *Risk Driver* qui doit être en mesure de capter les situations extrêmes de notre portefeuille nous allons utiliser les bornes maximales autorisées.

Toutefois, afin d'affiner cette étude de sensibilité, nous allons appliquer un choc plus important du côté gauche que du côté droit en augmentant l'intervalle de confiance cité précédemment.

La formule de ce *Risk Driver* est :

$$RD(\text{Part Action}(t)) = \frac{MV_{action}(t)}{MV_{totale}(t)}$$

Avec :

- $MV_{action}(t)$, le montant de la valeur de marché des actions dans le portefeuille à la date t
- $MV_{totale}(t)$, le montant de la valeur de marché totale des actifs à la date t

Nous allons retenir les chocs suivants :

$$RD(\text{Part Action}) \in \{-10 \%, -5 \%, -2 \%, 0 \%, 2 \%, 5 \%\}$$

ε. Risk Driver relatif à la part de l'immobilier dans l'allocation totale du portefeuille

Pour ce *Risk Driver*, le choix des chocs à appliquer est identique au précédent. Les conclusions de l'étude ALM autorisent aux gestionnaires l'intervalle de confiance suivant $[-5\%, +3\%]$. Les chocs que nous allons prendre en compte dans cette étude sont :

$$RD(\text{Part Immobilier}) \in \{-3 \%, 0 \%, 3 \%\}$$

Avec comme formule de calcul :

$$RD(\text{Part Immobilier}(t)) = \frac{MV_{immobilier}(t)}{MV_{totale}(t)}$$

Avec :

- $MV_{immobilier}(t)$, le montant de la valeur de marché de l'immobilier dans le portefeuille à la date t .

Pour conclure sur cette partie, voici l'ensemble des *Risk Drivers* avec les chocs que nous allons appliquer :

<i>Risk Driver</i>	Niveau du <i>Risk Driver</i>	Nombre de points
PMVL Obligataires	{-5 %, 0 %, 2,5 %, 5 %, 10 %}	5
Taux de PPE	$\{0 \%, \frac{PPE}{PM}, \frac{PPE \times 2}{PM}, \frac{PPE \times 3}{PM}, \frac{PPE \times 6}{PM}\}$	4
PMVL Actions	{-20 %, -10 %, -5 %, 0 %, 10 %, 20 %}	6
Part Actions	{-10 %, -5 %, -2 %, 0 %, 2 %, 5 %}	6
Part Immobilier	{-3 %, 0 %, 3 %}	3

Le cube ou plus précisément l'hypercube que nous allons construire sera donc constitué de : $5 * 4 * 6 * 6 * 3 = 2160$ lignes.

3.3 Présentation et construction de l'hypercube

La recherche de la fonction reliant ces cinq *Risk Drivers* au SCR s'articule autour d'un hypercube. Cette partie a pour objectif de présenter la manière dont il est déterminé.

3.3.1 Méthodologie

Un abaque est construit : il correspond à une grille de NAV (donc de SCR par différence de NAV) en fonction des différents *Risk Drivers*. Ensuite, pour chacune des simulations risque réel, la valeur des *Drivers* est récupérée à chaque pas de projection. La valeur du SCR à chaque pas de calcul pourra être récupérée via l'abaque et la fonction calibrée par rapport à celui-ci. Ci-dessous une représentation schématique :

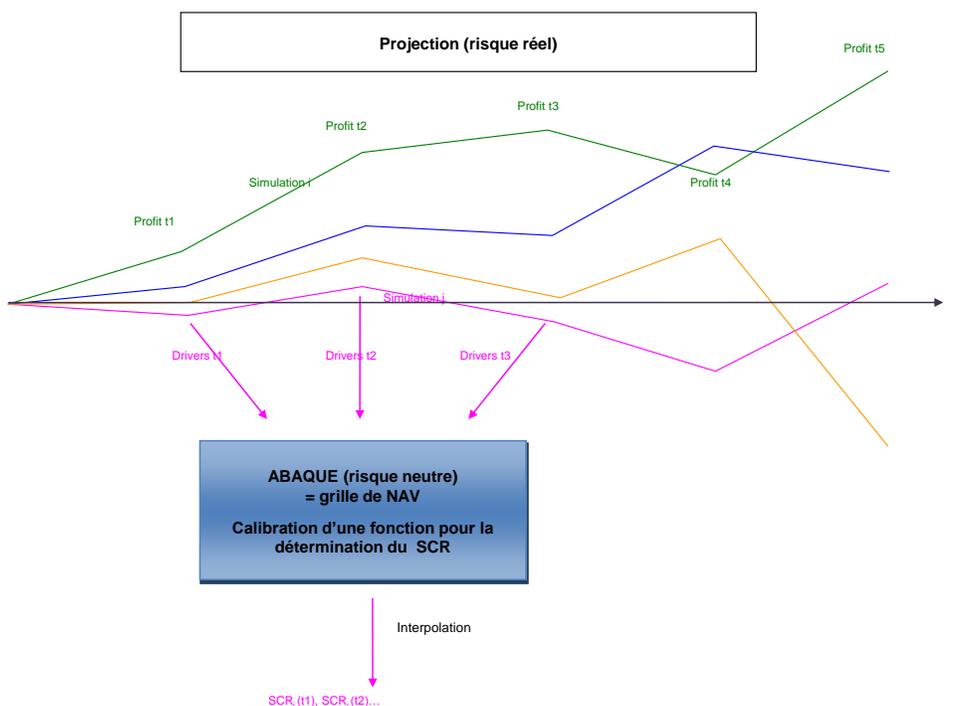


FIGURE 3.11 – Représentation schématique de la méthode de projection proposée

Deux univers de calculs sont mentionnés dans ce schéma. L'abaque de calcul est construit dans un univers risque neutre afin de satisfaire à la contrainte réglementaire du calcul de SCR. Toutefois, la projection du bilan est effectuée dans un univers risque réel ou risque historique. Dans la suite de ce mémoire, la calibration de la fonction pour le calcul de SCR est faite dans un univers risque neutre. Les *Risk Drivers* qui alimentent la fonction sont quand à eux extraits d'un univers risque réel.

3.3.2 Le retraitement risque neutre

Le calcul du SCR est un calcul réglementaire qui doit être effectué dans un univers risque neutre. Cet univers de calcul est utilisé afin de pouvoir avoir une base de comparaison entre les différentes compagnies d'assurance.

Un retraitement des données d'actifs est nécessaire avant de construire l'hypercube. Ce retraitement consiste à modifier les données présentes dans les Model Points d'actifs (présentés dans la partie 2 de ce mémoire) afin que tous les actifs rapportent le taux sans risque. Pour cela, un coefficient est appliqué aux coupons et à la valeur de remboursement des obligations afin que la valeur actuelle soit égale à la valeur de marché.

Illustrons cette notion avec un petit exemple. Considérons une obligation avec les caractéristiques suivantes :

- Date d'émission : 01/01/2012
- Nominal = 100€
- Taux de coupon : 4 %
- Coupon annuel (4 €)
- Maturité : 10 ans
- Valeur de Marché : 110 €

La courbe des taux utilisée pour ce calcul est :

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux	1,50 %	1,41 %	1,49 %	1,68 %	1,88 %	2,05 %	2,19 %	2,29 %	2,38 %	2,46 %

Le calcul de la valeur actuelle de cette obligation donne :

$$VA = \sum_{t=1}^{10} \frac{C_t}{(1+r_t)^t} + \frac{Nominal}{(1+r_{10})^{10}} = 114.14 \text{ €}$$

Le coefficient à appliquer aux coupons et au nominal pour retrouver la valeur de marché est :

$$\alpha = \frac{\text{Valeur de marché}}{\text{Valeur actuelle}} = 96.38 \%$$

Le retraitement risque neutre donne une obligation avec les caractéristiques suivantes :

- $C'_t = \alpha * C_t = 3.86 \text{ €}$
- $Nominal' = \alpha * Nominal = 96.38 \text{ €}$

Ce calcul est effectué pour l'ensemble des lignes d'actifs du Model Point qui va servir à la construction de l'hypercube de SCR.

3.3.3 La construction de l'hypercube

Les données qui alimentent l'hypercube sont issues du modèle Prophet utilisé pour les différentes études ALM. Il utilise les mêmes techniques de calcul que celles présentées dans la deuxième partie du mémoire. Les données de l'actif et du passif entrées dans le modèle sont identiques à celles utilisées

pour l'étude ALM 2012. Pour construire l'hypercube, le modèle est alimenté avec l'ensemble des tables modifiées en fonction des valeurs des *Risk Drivers* pour une combinaison donnée. La composition du portefeuille est modifiée en $t=0$, le bilan est ensuite projeté par le modèle.

Un outil a été mis en place afin de modifier automatiquement les tables d'actifs en fonction des valeurs des *Risk Drivers*. Les tables impactées sont :

- Les Model Points d'actifs
- La table contenant la PPE (pour chaque valeur du *Risk Driver* Taux PPE)
- La table dans laquelle est renseignée l'allocation d'actifs cible (Pour chaque valeur du *Risk Driver* Part Actions et Part Immobilier)
- La table de scalaire
- La table contenant les scénarios économiques (Pour le *Risk Driver* PMVL Obligataires)

Par exemple, pour cette étude nous avons 24 chocs pour les 5 *Risk Drivers* ce qui va donner lieu à plus de 2000 combinaisons, chacune représentant une situation économique. A l'aide d'un reporting Excel et des fonctions permettant le lien entre celui-ci et Prophet, il est possible de reconstruire l'hypercube. Pour chaque ligne, nous avons la valeur des 5 *Risk Drivers*, ensuite le montant des différents SCRs pour les sous-modules du risque de marché, et pour finir le montant du SCR de marché.

La méthode d'évaluation s'appuie sur certains chocs de la formule standard. Le graphique ci-dessous représente les modules qui sont recalculés dans la construction de l'hypercube (en vert), ceux qui font l'objet d'un calcul simplifié (en orange) et enfin ceux qui ne sont pas renseignés (en gris) :

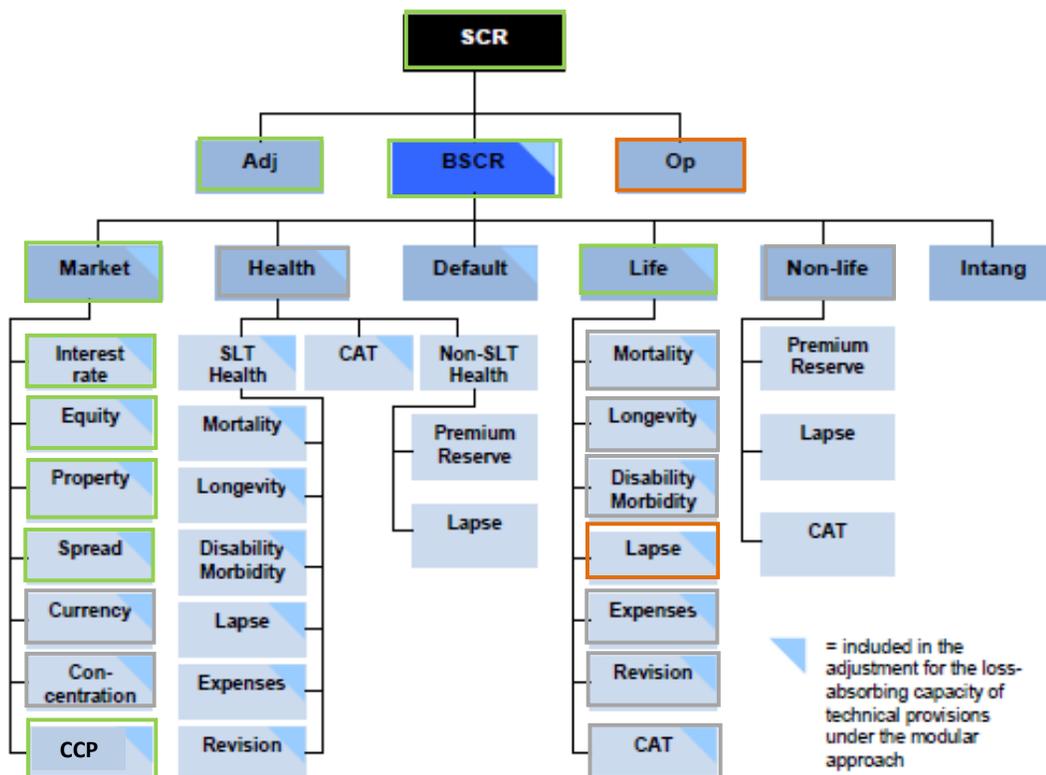


FIGURE 3.12 – Sous-modules recalculés par le modèle

Il est à noter que le module correspondant au SCR de marché à été entièrement recalculé dans

l'hypercube. En effet, dans ce mémoire, la fonction recherchée permettra de déterminer ce montant SCR. Cette simplification de calcul est justifiée par la part importante que représente le SCR de marché (environ 75 %) dans le montant sur SCR total¹¹.

Les hypothèses de calibration qui sont retenues sont celles des IML2¹². Afin de prendre en compte l'effet du dampener¹³, deux chocs actions sont appliqués. Pour chaque projection de l'étude ALM, le dampener est valorisé à chaque pas de temps. Le choc actions est ensuite estimé par interpolation à partir de ces deux chocs qui sont égaux aux bornes du dampener.

Ces informations sont résumées dans le tableau suivant :

Chocs de la formule standard modélisés		
Index	Runs Prophet	Choc
1	Central	Aucun
2	Equity 1	-29% sur equity global, -39% sur equity other
3	Equity 2	-49% sur equity global, -59% sur equity other
4	Immobilier	-25% sur la VM Immobilier (IML 2)
5	Baisse des taux	ILM 2
6	Hausse des taux	ILM 2
7	Spread	ILM 2
8	Sans Prime Contra-Cyclique	-100% sur la prime contra-cyclique (IML 2)
9	Rachats massifs	40% de rachats additionnels la 1er année (IML 2)

FIGURE 3.13 – Niveaux des chocs appliqués pour le calcul du SCR

Les chocs sont ensuite consolidés en BSCR selon les recommandations des IML2 :

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} + \text{Adj TP} + \text{Adj DT}$$

Avec :

$$\text{Adj TP} = \text{Min} [(BSCR + SCR_{Op} + \text{Adj TP}) * 34.43\%, \text{ImpôtsDiff Passif}]$$

3.3.4 Présentation de l'hypercube obtenu

Les cinq premières colonnes correspondent aux *Risk Drivers* retenus pour la construction de l'abaque. Chaque ligne correspond à une combinaison des *Risk Drivers*. La situation centrale de notre portefeuille correspond à la ligne où le *Risk Driver PMVL_Obligataires* est à 100 %, le *Risk Driver Taux_PPE* est à 1 %, le *Risk Driver PMVL_Actions* est à 0 %, la *Part_Actions* est à 10 % et la *Part_Immobilier* est à 6 %.

Les colonnes suivantes correspondent aux différentes valeurs de SCR obtenues pour les sous modules du risque de marché. Il est à noter que ces données correspondent à une différence de NAV (montant qui est calculé par le modèle ALM et dont nous avons présenté le calcul dans la partie 1

11. Résultat d'une étude présentée dans un document publié par l'ACP en 2011 - Solvabilité 2 : principaux enseignements de la cinquième étude d'impact (QIS5)

12. Les principales évolutions entre des IML2 pour le calcul du SCR, sont présentées en Annexe de ce mémoire

13. Mécanisme d'ajustement du choc action à +/- 10 %

du mémoire). Les colonnes « Currency » et « Concentration » sont nulles car ces risques ne sont pas modélisés dans le modèle proposé.

Prenons par exemple la première ligne du tableau présenté ci-dessous (extrait de l'hypercube). Dans la situation où nous avons des moins-values obligataires de 4.5 %, une PPE à 0, des moins-values actions de 4 % et que l'allocation d'actifs est à 0 % en actions et un peu plus de 3 % en immobilier, le modèle permet de déterminer un SCR de marché égal à 3 067,2 millions d'euros. Cette dernière donnée n'est pas calculée par le modèle, le fichier utilise la matrice de corrélation fournie par les IML2 et qui permet d'agréger les SCR des sous-modules.

Ci-dessous est présenté un extrait de l'hypercube que l'on a obtenu en sortie du modèle :

Valeurs des Risk Drivers					Sous Modules SCR de Marché								SCR Marché
Risk Driver PMVL Obligataire	Risk Driver Taux PPE	Risk Driver PMVL Actions	Part Action	Part Immo	Hausse des taux	Baisse des taux	Action	Immobilier	Spread	Currency	Concentration	Prime de liquidité	
95,50%	0,00%	-4,10%	0,08%	3,31%	1 966,8 €	-792,2 €	579,0 €	377,3 €	1 352,1 €	0,0 €	0,0 €	1 104,9 €	3 067,2 €
95,50%	0,00%	-4,10%	0,08%	6,31%	1 761,2 €	-728,4 €	579,5 €	795,3 €	1 311,2 €	0,0 €	0,0 €	1 242,9 €	3 195,0 €
95,50%	0,00%	-4,10%	0,08%	9,31%	1 537,8 €	-623,1 €	580,9 €	1 228,5 €	1 262,6 €	0,0 €	0,0 €	1 391,0 €	3 385,6 €
95,50%	0,00%	-4,10%	5,08%	3,31%	1 457,3 €	-638,6 €	1 740,7 €	390,8 €	1 277,4 €	0,0 €	0,0 €	1 478,0 €	3 738,6 €
95,50%	0,00%	-4,10%	5,08%	6,31%	1 292,2 €	-522,0 €	1 738,8 €	787,7 €	1 228,5 €	0,0 €	0,0 €	1 561,6 €	3 935,4 €
95,50%	0,00%	-4,10%	5,08%	9,31%	1 117,5 €	-390,7 €	1 734,1 €	1 204,8 €	1 176,4 €	0,0 €	0,0 €	1 659,4 €	4 178,0 €
95,50%	0,00%	-4,10%	8,08%	3,31%	1 182,3 €	-457,6 €	2 458,5 €	399,1 €	1 222,5 €	0,0 €	0,0 €	1 685,9 €	4 290,3 €
95,50%	0,00%	-4,10%	8,08%	6,31%	1 034,0 €	-336,9 €	2 452,0 €	791,6 €	1 173,7 €	0,0 €	0,0 €	1 749,0 €	4 505,8 €
95,50%	0,00%	-4,10%	8,08%	9,31%	876,3 €	-202,8 €	2 444,1 €	1 199,8 €	1 122,2 €	0,0 €	0,0 €	1 828,0 €	4 758,2 €
95,50%	0,00%	-4,10%	10,08%	3,31%	1 011,7 €	-329,9 €	2 935,3 €	402,7 €	1 184,2 €	0,0 €	0,0 €	1 809,9 €	4 684,4 €
95,50%	0,00%	-4,10%	10,08%	6,31%	868,4 €	-208,7 €	2 926,8 €	789,8 €	1 137,4 €	0,0 €	0,0 €	1 867,3 €	4 907,5 €
95,50%	0,00%	-4,10%	10,08%	9,31%	714,4 €	-78,2 €	2 916,3 €	1 195,6 €	1 086,1 €	0,0 €	0,0 €	1 934,6 €	5 162,1 €
95,50%	0,00%	-4,10%	12,08%	3,31%	848,4 €	-192,6 €	3 417,2 €	409,9 €	1 147,0 €	0,0 €	0,0 €	1 934,8 €	5 106,3 €
95,50%	0,00%	-4,10%	12,08%	6,31%	709,8 €	-73,0 €	3 407,5 €	796,6 €	1 101,9 €	0,0 €	0,0 €	1 987,8 €	5 338,2 €
95,50%	0,00%	-4,10%	12,08%	9,31%	560,4 €	58,4 €	3 394,0 €	1 195,2 €	1 051,5 €	0,0 €	0,0 €	2 046,9 €	5 590,4 €
95,50%	0,00%	-4,10%	15,08%	3,31%	607,6 €	18,1 €	4 139,6 €	414,8 €	1 089,0 €	0,0 €	0,0 €	2 116,8 €	5 756,2 €
95,50%	0,00%	-4,10%	15,08%	6,31%	468,9 €	133,3 €	4 126,3 €	799,8 €	1 040,2 €	0,0 €	0,0 €	2 161,9 €	5 988,5 €
95,50%	0,00%	-4,10%	15,08%	9,31%	330,9 €	269,1 €	4 114,9 €	1 199,5 €	995,8 €	0,0 €	0,0 €	2 221,5 €	6 257,1 €
95,50%	1,05%	-4,10%	0,08%	3,31%	1 891,1 €	-873,9 €	405,4 €	269,3 €	1 320,9 €	0,0 €	0,0 €	1 008,4 €	2 810,2 €
95,50%	1,05%	-4,10%	0,08%	6,31%	1 692,7 €	-823,3 €	423,9 €	604,6 €	1 278,0 €	0,0 €	0,0 €	1 137,7 €	2 882,4 €
95,50%	1,05%	-4,10%	0,08%	9,31%	1 483,6 €	-725,3 €	447,9 €	994,8 €	1 233,5 €	0,0 €	0,0 €	1 237,6 €	3 046,2 €
95,50%	1,05%	-4,10%	5,08%	3,31%	1 429,0 €	-703,9 €	1 519,2 €	317,5 €	1 252,9 €	0,0 €	0,0 €	1 400,6 €	3 458,1 €
95,50%	1,05%	-4,10%	5,08%	6,31%	1 272,0 €	-595,9 €	1 530,5 €	659,4 €	1 207,6 €	0,0 €	0,0 €	1 481,7 €	3 623,7 €
95,50%	1,05%	-4,10%	5,08%	9,31%	1 104,8 €	-471,8 €	1 541,0 €	1 039,6 €	1 159,4 €	0,0 €	0,0 €	1 576,7 €	3 846,4 €
95,50%	1,05%	-4,10%	8,08%	3,31%	1 172,1 €	-515,9 €	2 259,1 €	341,0 €	1 205,7 €	0,0 €	0,0 €	1 619,2 €	4 040,0 €
95,50%	1,05%	-4,10%	8,08%	6,31%	1 028,2 €	-403,0 €	2 258,9 €	688,1 €	1 159,8 €	0,0 €	0,0 €	1 679,9 €	4 225,8 €
95,50%	1,05%	-4,10%	8,08%	9,31%	877,2 €	-274,3 €	2 263,1 €	1 070,4 €	1 113,1 €	0,0 €	0,0 €	1 755,3 €	4 467,7 €
95,50%	1,05%	-4,10%	10,08%	3,31%	1 012,2 €	-383,3 €	2 751,3 €	354,4 €	1 170,1 €	0,0 €	0,0 €	1 748,7 €	4 455,7 €
95,50%	1,05%	-4,10%	10,08%	6,31%	872,2 €	-270,6 €	2 746,5 €	702,0 €	1 127,5 €	0,0 €	0,0 €	1 801,5 €	4 652,1 €
95,50%	1,05%	-4,10%	10,08%	9,31%	723,0 €	-145,2 €	2 744,7 €	1 083,9 €	1 080,1 €	0,0 €	0,0 €	1 866,6 €	4 895,1 €

FIGURE 3.14 – Extrait de l'hypercube en sortie du modèle ALM

3.3.5 Exploitation de l'hypercube

L'hypercube ainsi construit permet d'avoir 2160 données de SCR qui correspondent à l'ensemble des combinaisons possibles des 5 *Risk Drivers* retenus pour cette étude.

A partir de la connaissance de l'hypercube, une formule fermée calibrée par rapport à celui-ci permettra d'interpoler et de déterminer un SCR dès lors que la situation économique évolue. En effet, en $t = 0$, le portefeuille BNP Paribas Cardif possède une certaine structure. Ensuite, les achats et ventes réalisés au cours des années de projection viennent impacter la composition du portefeuille. Un nouveau bilan est obtenu année après année, ce qui permet de connaître la nouvelle valeur des *Risk Drivers* de façon annuelle. Une fonction ainsi déterminée permettra de connaître un SCR à un pas annuel sur l'ensemble des années de projection. Une actualisation de ces valeurs en $t=0$ permet de calculer un coût du capital.

Ci-dessous un schéma récapitulatif du processus de calcul qui va être mis en place une fois la fonction connue :

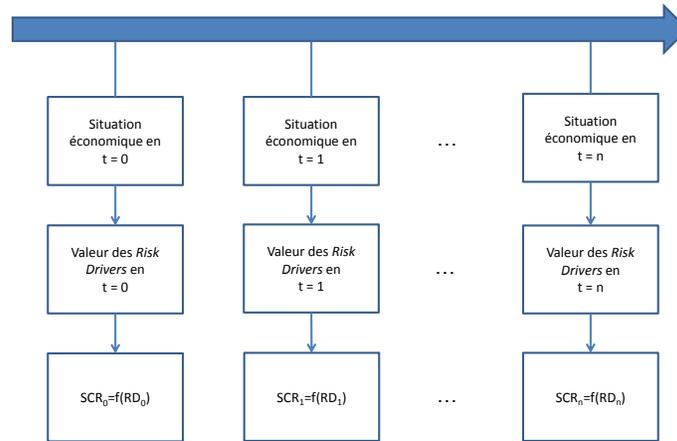


FIGURE 3.15 – Méthodologie utilisée pour la projection du capital économique

3.4 Recherche d'une fonction pour calculer un SCR à un pas annuel

La démarche suivie dans ce mémoire est de proposer une fonction polynomiale pour le calcul du SCR. Cette méthode de calcul est inspirée d'une part de la méthode de Curve fitting présentée au début de cette partie et d'autre part de travaux menés dans le cadre d'un mémoire d'actuariat de Thomas Mghinia¹⁴, qui a calibré une fonction polynomiale pour la détermination de la PVFP (Present Value of Future Profits).

Nous allons tenter d'expliquer les différents montants de SCR de marché ou par sous modules, par les variables explicatives que sont les *Risk Drivers*. L'hypercube présenté dans la précédente partie constitue notre échantillon de données. Nous allons procéder en plusieurs étapes : tout d'abord tester un polynôme de degré 1 puis nous incrémenterons jusqu'à un degré 3.

Finalement, la fonction retenue à la fin de cette partie, sera appliquée à des données réelles que sont celles de l'étude ALM menée cette année. Nous rappelons que l'objectif final est de mesurer l'impact de la prise en compte du coût du capital dans la décision de l'allocation stratégique d'actifs chez BNP Paribas Cardif.

3.4.1 Analyse descriptive de l'hypercube

Dans cette partie nous allons analyser les données de l'hypercube généré, afin d'étudier l'influence des *Risk Drivers* sur les différents SCR. Nous commençons par les 5 SCR de sous modules de marché recalculés par le modèle. Nous approfondirons ensuite l'étude sur le SCR de marché. Cette partie permet également de justifier le choix des 5 *Risk Drivers*.

a. Sensibilité des SCR de marché aux différents *Risk Drivers*

Dans cette première partie nous étudions l'évolution de la valeur moyenne des différents SCR ainsi que leur volatilité pour chacun des *Risk Drivers* proposés. Les informations de cette étude sont

14. Titre : Accélération de la détermination de l'allocation stratégique efficiente en assurance vie

présentées dans les tableaux suivants (un tableau par sous module) :

Influence des Risks Driver sur le SCR Hausse des taux		
Risk Driver	Impact sur la montant moyen de SCR	Impact sur la volatilité moyenne du SCR
PMVL_Bonds	Sensible aux fortes plus ou moins values de ce Risk Driver	Même constatation concernant la volatilité
PPE	SCR peu sensible	SCR peu volatil
PMVL_Equities	SCR peu sensible	SCR peu volatil
Part_Equities	Diminution du montant moyen de SCR avec l'augmentation de la part action présente dans le portefeuille	SCR également sensible en volatilité
Part_properties	La part action influence le montant de SCR, mais de manière moins important de que la Part action et les PMVL Obligataires	SCR peu volatil

FIGURE 3.16 – Influence des différents *Risk Drivers* sur le SCR hausse des taux

Influence des RD sur le SCR Baisse des taux		
Risk Driver	Impact sur la montant moyen de SCR	Impact sur la volatilité moyenne du SCR
PMVL_Bonds	Légère diminution du SCR en présence de fortes plus values	SCR peu volatil
PPE	SCR peu sensible	SCR peu volatil
PMVL_Equities	Légère diminution du SCR en présence de fortes plus values	SCR peu volatil
Part_Equities	Forte augmentation de ce SCR avec la hausse de la Part Action dans le portefeuille	SCR peu volatil
Part_properties	Faible augmentation avec la hausse de la Part Immobilier dans le portefeuille	SCR peu volatil

FIGURE 3.17 – Influence des différents *Risk Drivers* sur le SCR baisse des taux

Influence des RD sur le SCR Action		
Risk Driver	Impact sur la montant moyen de SCR	Impact sur la volatilité moyenne du SCR
PMVL_Bonds	SCR peu sensible	SCR peu volatil
PPE	Légère diminution du SCR avec l'augmentation la part PPE par rapport aux PMs	Diminution de la volatilité avec l'augmentation de ce Risk Driver
PMVL_Equities	Logiquement on observe une dépendance entre ce SCR et le Risk Driver plus ou moins values Actions	La volatilité de ce SCR diminue en présence de fortes plus values
Part_Equities	Forte augmentation de ce SCR avec la hausse de la Part Action dans le portefeuille : on constate un delta de 2.5 M€ entre les Parts Actions extrémales testées	SCR très sensible en volatilité à ce Risk Driver
Part_properties	SCR peu sensible	SCR peu volatil

FIGURE 3.18 – Influence des différents *Risk Drivers* sur le SCR action

Influence des RD sur le SCR Immobilier		
Risk Driver	Impact sur la montant moyen de SCR	Impact sur la volatilité moyenne du SCR
PMVL_Bonds	SCR peu sensible	SCR peu volatil
PPE	SCR peu sensible	SCR peu volatil
PMVL_Equities	SCR peu sensible	SCR peu volatil
Part_Equities	Ce SCR augmentation en parallèle de l'augmentation de la Part Action dans le portefeuille	SCR peu volatil
Part_properties	Logiquement, le montant moyen du SCR Immobilier est corrélé à la Part Immobilier avec une augmentation de celui-ci	SCR de plus en plus volatil avec l'augmentation de la Part Immobilier

FIGURE 3.19 – Influence des différents *Risk Drivers* sur le SCR immobilier

Influence des RD sur le SCR Spread		
Risk Driver	Impact sur la montant moyen de SCR	Impact sur la volatilité moyenne du SCR
PMVL_Bonds	SCR qui diminue avec les moins values et augmente avec les plus values	SCR peu volatil
PPE	SCR peu sensible	SCR peu volatil
PMVL_Equities	SCR en légère baisse avec l'augmentation des plus values actions	SCR peu volatil
Part_Equities	SCR peu sensible	SCR peu volatil
Part_properties	SCR peu sensible	SCR peu volatil

FIGURE 3.20 – Influence des différents *Risk Drivers* sur le SCR spread

Cette première étude de l'hypercube montre que les 5 *Risk Drivers* retenus ont une influence sur la moyenne ou sur la volatilité d'un ou plusieurs SCRs du module de marché. La suite consiste à étudier le comportement du SCR de marché par rapport à ces *Risk Drivers*.

b. Sensibilité du SCR de marché aux différents *Risk Drivers*

La représentation de l'ensemble des points relatifs aux 2160 combinaisons donne le nuage de points suivant :

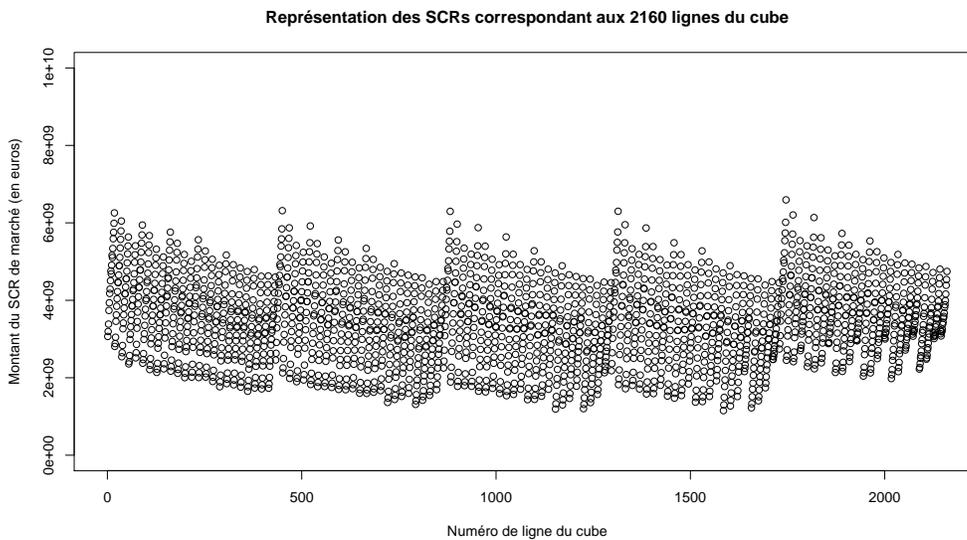


FIGURE 3.21 – Nuage des points de SCRs obtenus pour les 2160 lignes de l'hypercube

Afin de comprendre l'influence des différents *Risk Drivers* sur le montant du SCR de marché nous allons successivement étudier les éléments suivants :

- Le nuage de points de SCRs à valeur du *Risk Driver* fixée
- La valeur moyenne du SCR de marché en fonction de la valeur du *Risk Driver*
- La volatilité du SCR de marché en fonction de la valeur du *Risk Driver*

α . Impact du *Risk Driver* PMVL obligataires sur le SCR de marché

Le graphique se lit de la manière suivante : chaque couleur correspond à un choc sur le *Risk Driver* PMVL obligataires, toutes choses étant égales par ailleurs. Afin de faciliter la lecture du graphique, seules les 100 premières observations sont représentées. Toutefois, la tendance observée sur ces points se répète pour l'ensemble des données.

Voici le nuage des SCR qui est obtenu :

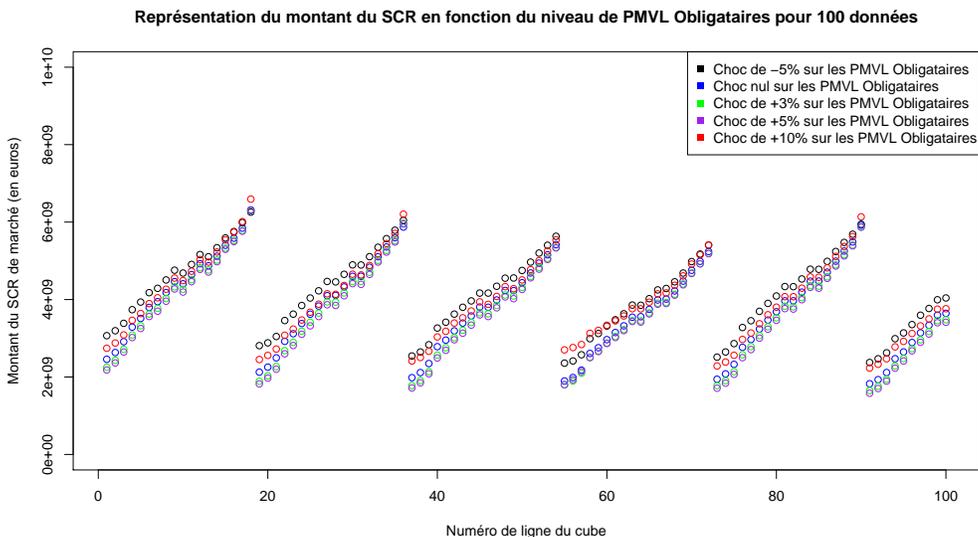


FIGURE 3.22 – Evolution du SCR en fonction du niveau de choc du *Risk Driver* PMVL obligataires

Une analyse descriptive de ce premier graphique fait apparaître une récurrence dans le nuage de points. Une étude complémentaire de l'hypercube montre que cette périodicité est liée aux *Risk Drivers* Part Actions et Part Immobilier (respectivement 6 et 3 chocs). Le premier nuage de points à gauche se compose de 18 points qui se répètent. Un autre phénomène est aussi observé : à un niveau de PMVL obligataires fixé, une augmentation de la part actions entraîne l'augmentation du capital économique réglementaire. Le graphique semble également montrer que la volatilité et la moyenne des nuages de points fluctuent très peu. Ces informations sont représentées dans les graphiques ci-dessous :

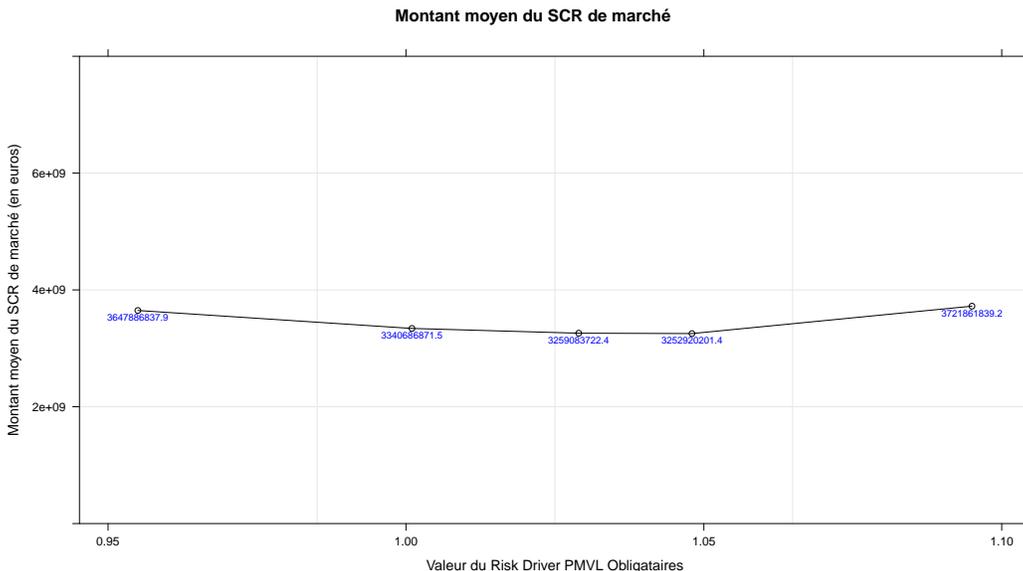


FIGURE 3.23 – Montant moyen de SCR en fonction du niveau de choc du RD PMVL obligataires

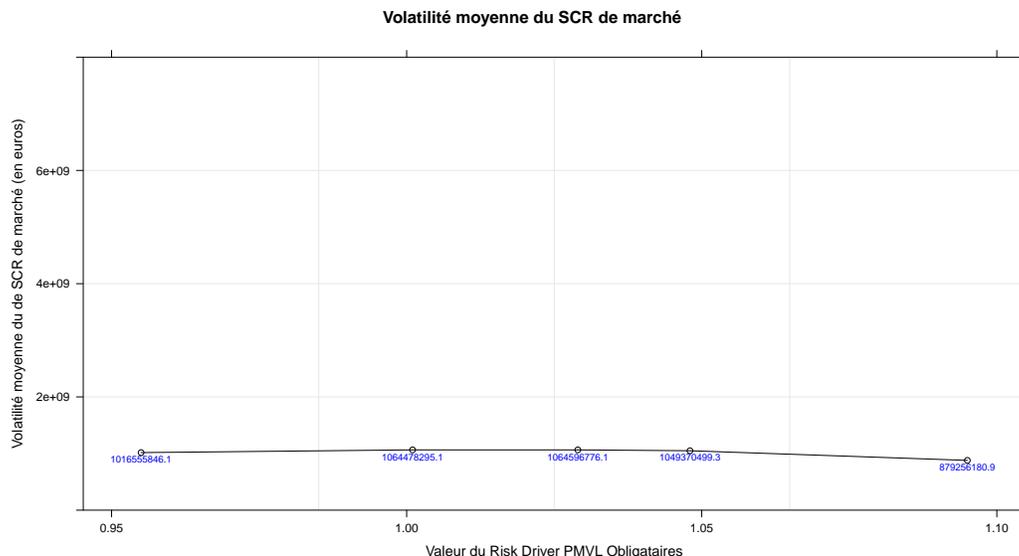


FIGURE 3.24 – Volatilité moyenne de SCR en fonction du niveau de choc du RD PMVL obligataires

Le deux graphiques confirment notre intuition. En moyenne le SCR est peu sensible au montant de PMVL obligataires, même si pour de fortes plus-values le montant moyen de SCR diminue quelque peu. Il est toutefois peu volatile.

Dans la suite de cette partie nous allons procéder de la même manière pour les quatre autres *Risk Drivers*. L'objectif est de détecter une sensibilité plus ou moins important du SCR de marché à un ou plusieurs des *Risk Drivers* proposés.

β . Impact *Risk Driver* taux de PPE sur le SCR de marché

Comme il a été préconisé dans la partie précédente, la PPE est testée à 0, à son niveau initial, multipliée par 2 et par 6. Nous avons obtenu les nuages de points suivants :

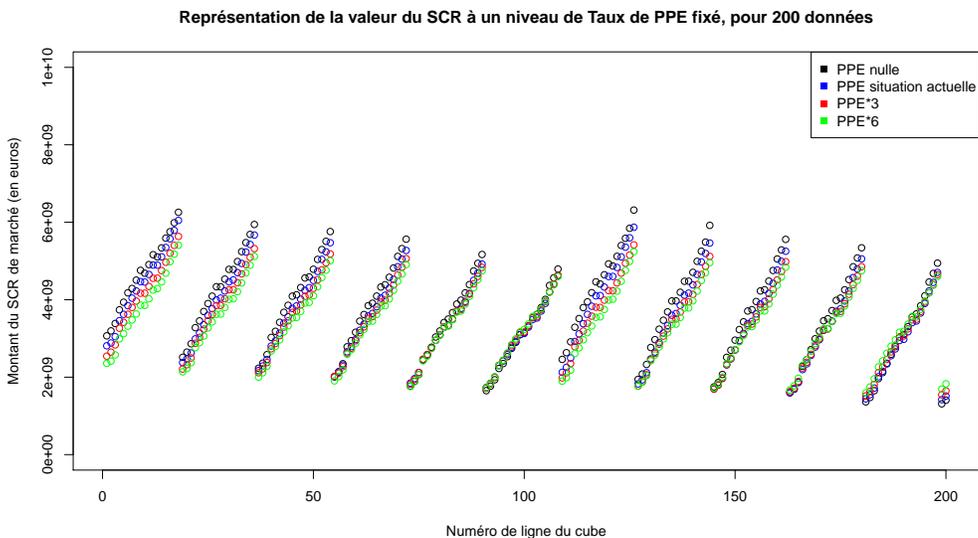


FIGURE 3.25 – Evolution du SCR en fonction du niveau de choc du *Risk Driver* taux PPE

On observe la même périodicité que celle du *Driver* PMVL Obligataires. Ce qui conforte l'intuition que les deux *Risk Drivers* mentionnés dans la partie précédente impactent le plus fortement le montant

du SCR de marché.

Intéressons-nous maintenant à la valeur moyenne et la volatilité du SCR :

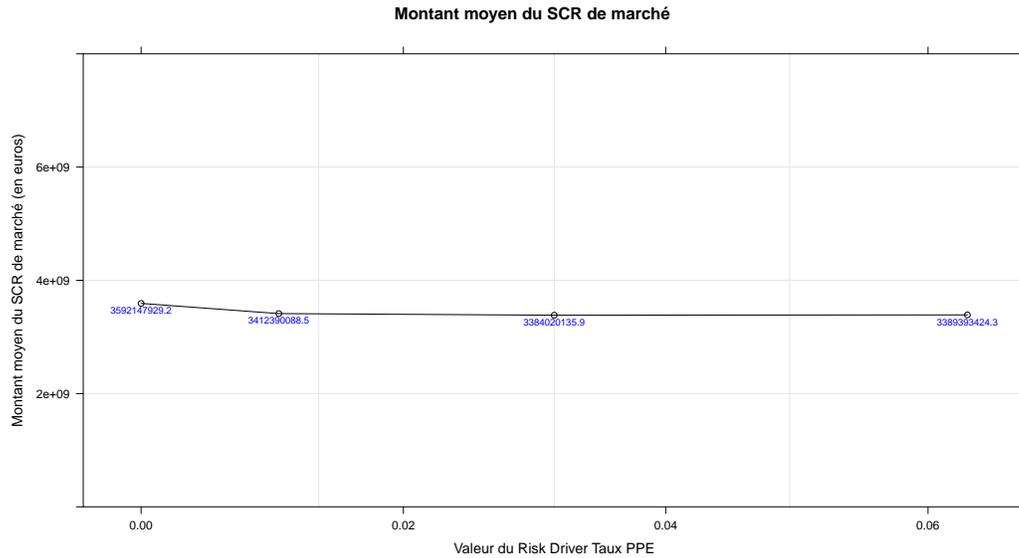


FIGURE 3.26 – Montant moyen de SCR en fonction du niveau de choc du RD taux PPE

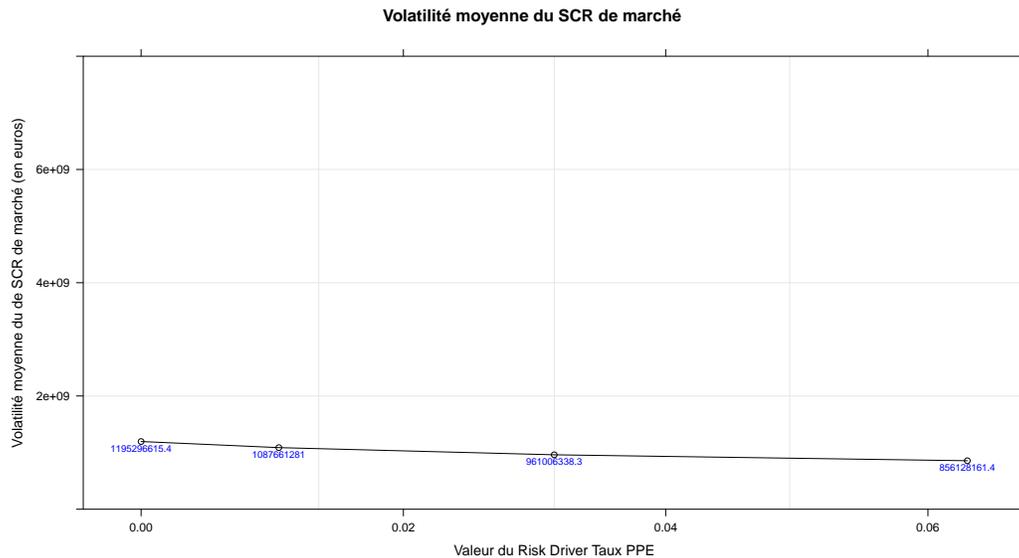


FIGURE 3.27 – Volatilité moyenne de SCR en fonction du niveau de choc du RD taux PPE

Comme pour le *Risk Driver* PMVL Obligataires, la valeur moyenne ainsi que la volatilité du SCR sont peu sensibles au montant de PPE présent dans le portefeuille. La PPE n'a presque pas d'impact sur le SCR de marché, il se peut qu'il soit moins explicatif que les autres *Risk Drivers*.

γ. Impact des PMVL Actions sur le SCR de marché

Nous allons maintenant étudier l'impact que peuvent avoir des PMVL Actions sur la valeur du SCR de marché.

Les résultats obtenus sont les suivants :

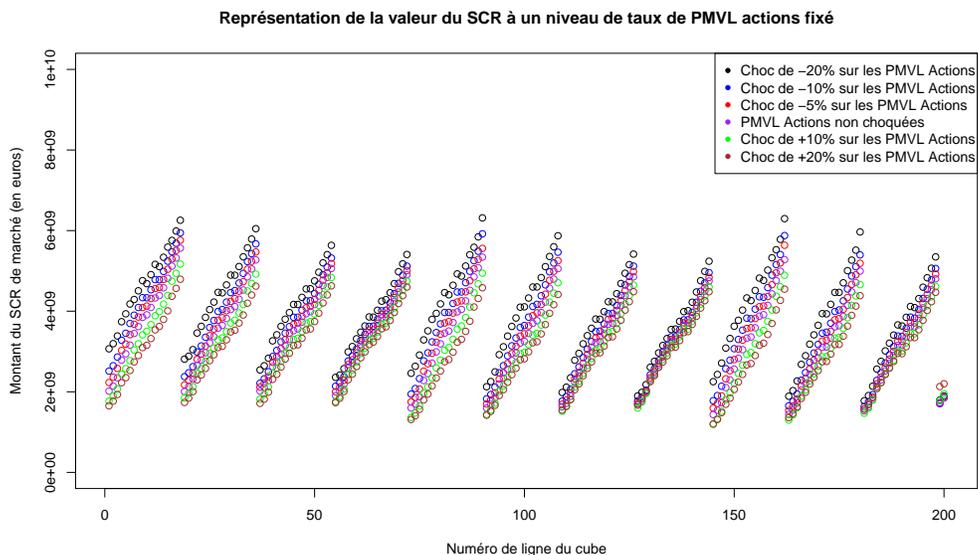


FIGURE 3.28 – Evolution du SCR en fonction du niveau de choc du *Risk Driver* PMVL actions

Le nuage de points présente encore une fois une périodicité. Une analyse des chocs des *Risk Drivers*, montre une nouvelle fois que pour un taux de PMVL Actions fixé, les proportions d’actions et d’immobilier jouent un rôle important sur la valeur du SCR. C’est ce qui donne la forme au nuage de SCR. En moyenne le SCR diminue ainsi que sa volatilité, comme le montre les graphiques suivants :

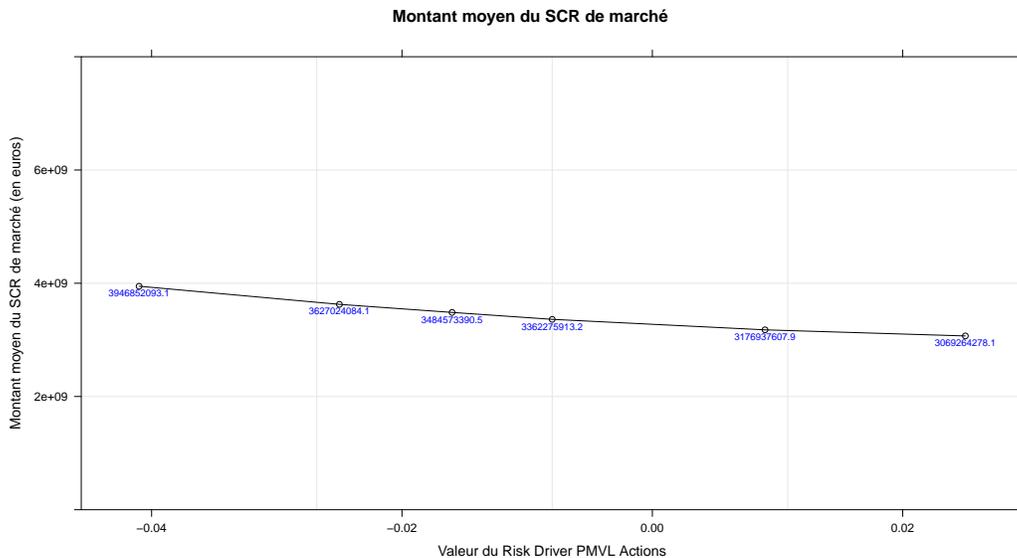


FIGURE 3.29 – Montant moyen de SCR en fonction du niveau de choc du RD PMVL actions

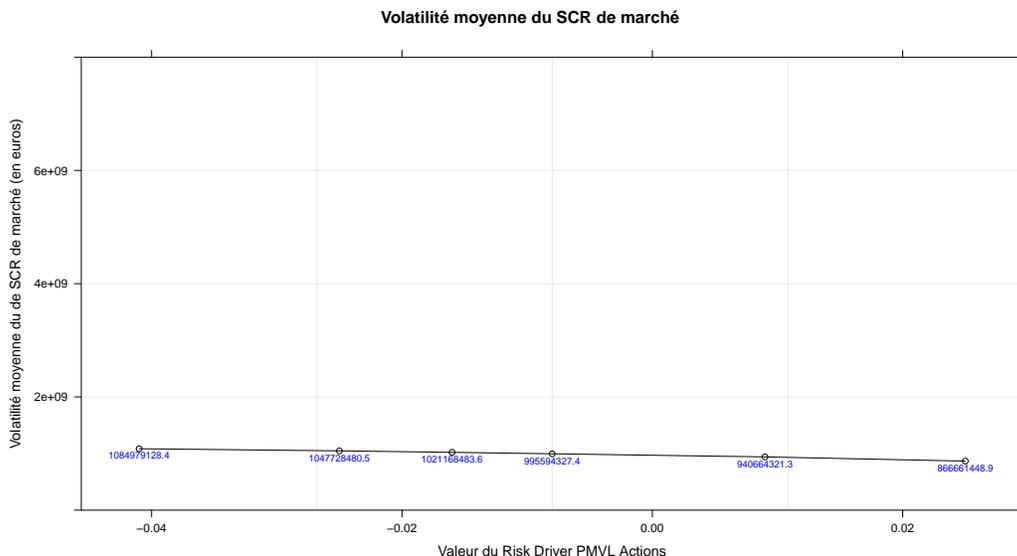


FIGURE 3.30 – Volatilité moyenne de SCR en fonction du niveau de choc du RD PMVL Actions

La sensibilité du montant moyen de SCR ainsi que sa volatilité à ce *Risk Driver* laisse supposer qu'il a une influence sur le montant de celui-ci. De fortes plus-values sur les actions entraînent une diminution du montant moyen du SCR. Dans la partie précédente, nous avons déjà capté l'influence de ce *Risk Driver* sur les SCR par sous module.

δ. Influence de la part actions dans le portefeuille sur le SCR de marché

Nous avons déjà observé un impact important de la part actions sur les différents sous modules qui composent le SCR de marché. De manière intuitive on s'attend à observer une augmentation du montant de SCR avec l'augmentation de la part actions présente dans le portefeuille.

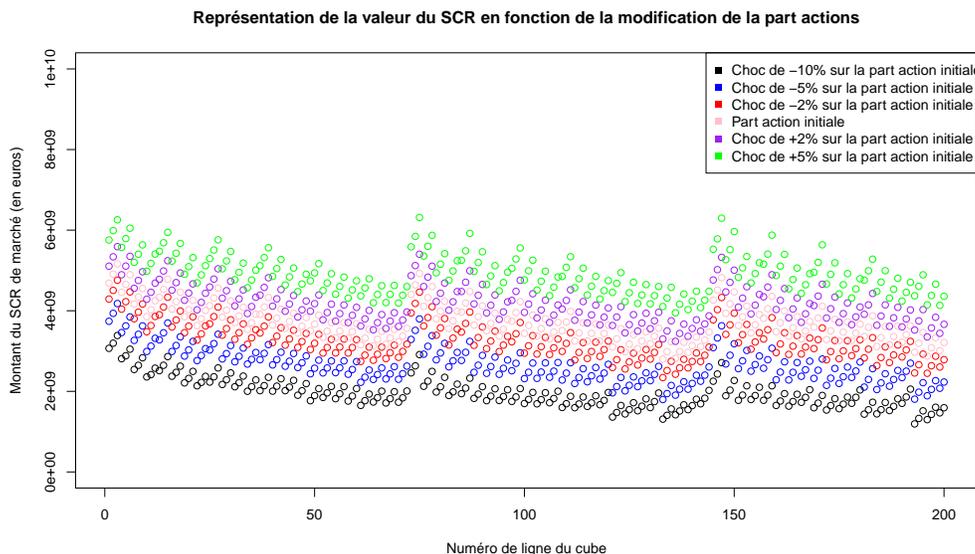


FIGURE 3.31 – Evolution du SCR en fonction du niveau de choc du *Risk Driver* Part Actions

On observe bien un déplacement du nuage de points de SCR vers le haut avec l'augmentation de la part actions dans le portefeuille. La dispersion des nuages (volatilité du nuage) semble être quasi identique selon les cas.

C'est ce que nous constatons ci-dessous :

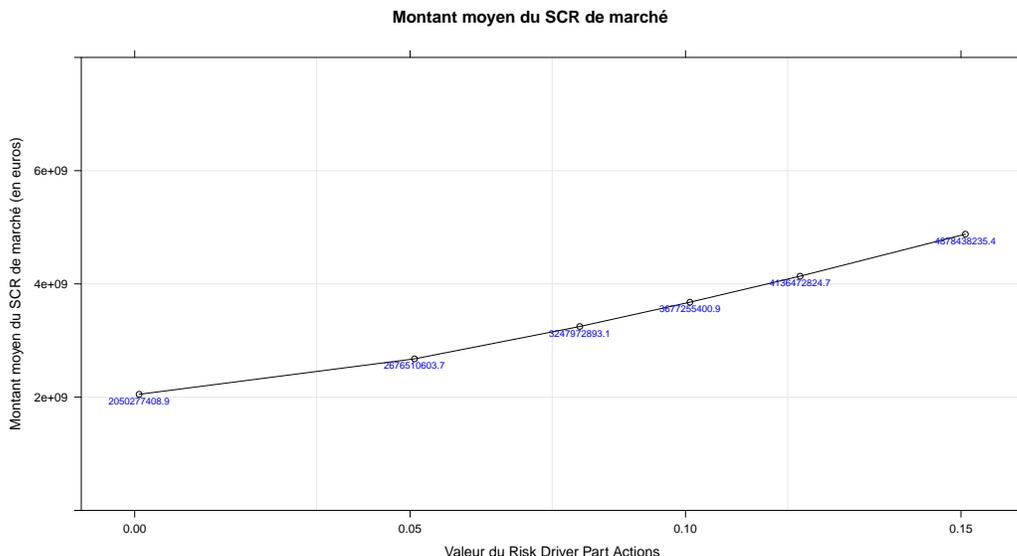


FIGURE 3.32 – Montant moyen de SCR en fonction du niveau de choc du RD Part Actions

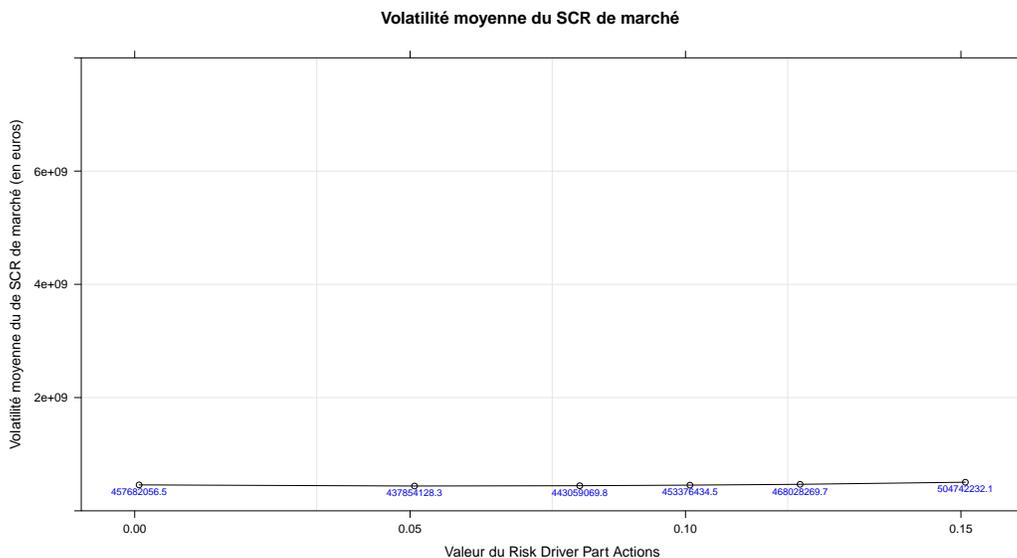


FIGURE 3.33 – Volatilité moyenne de SCR en fonction du niveau de choc du RD Part Actions

Nous retrouvons bien l'intuition initiale sur l'influence de la part actions sur le montant du SCR de marché. La volatilité est quand à elle peu impactée par la part actions.

ε. Influence de la part immobilier dans le portefeuille sur le SCR de marché

Etudions maintenant l'influence du pourcentage de l'allocation placée en immobilier. Comme pour la part actions, nous nous attendons à observer une corrélation entre le montant moyen du SCR de marché et le pourcentage en immobilier, mais avec cependant une volatilité peu importante.

Ci-dessous les nuages de points obtenus :

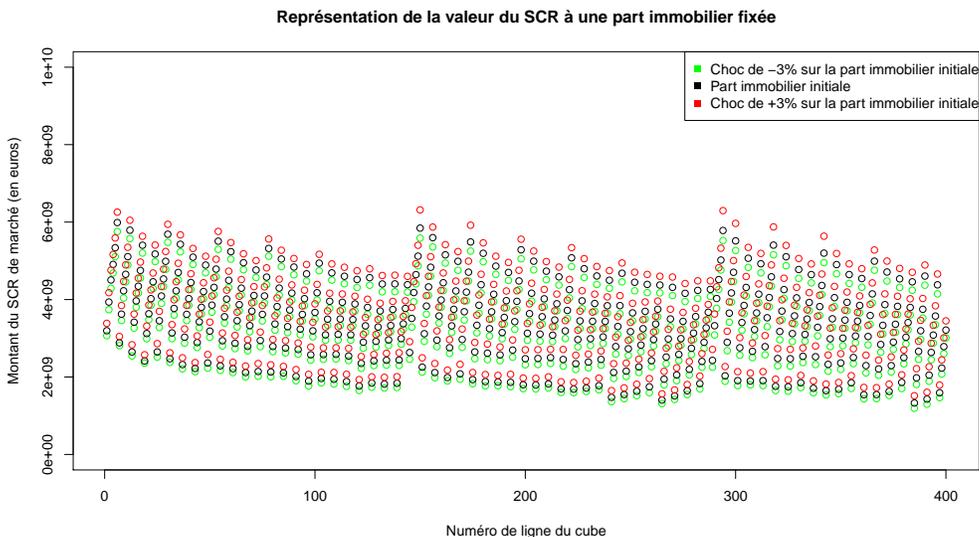


FIGURE 3.34 – Evolution du SCR en fonction du niveau de choc du *Risk Driver* Part Immobilier

Comme pour le *Risk Driver* Part Actions, on observe un déplacement du nuage de points vers le haut avec l'augmentation du pourcentage d'immobilier dans l'allocation. Nous retrouvons encore une fois l'intuition initiale sur l'influence de ce *Risk Driver* sur le montant du SCR de marché.

Analysons maintenant le montant moyen ainsi que la volatilité moyenne du SCR de marché pour les différentes valeurs de ce *Risk Driver* :

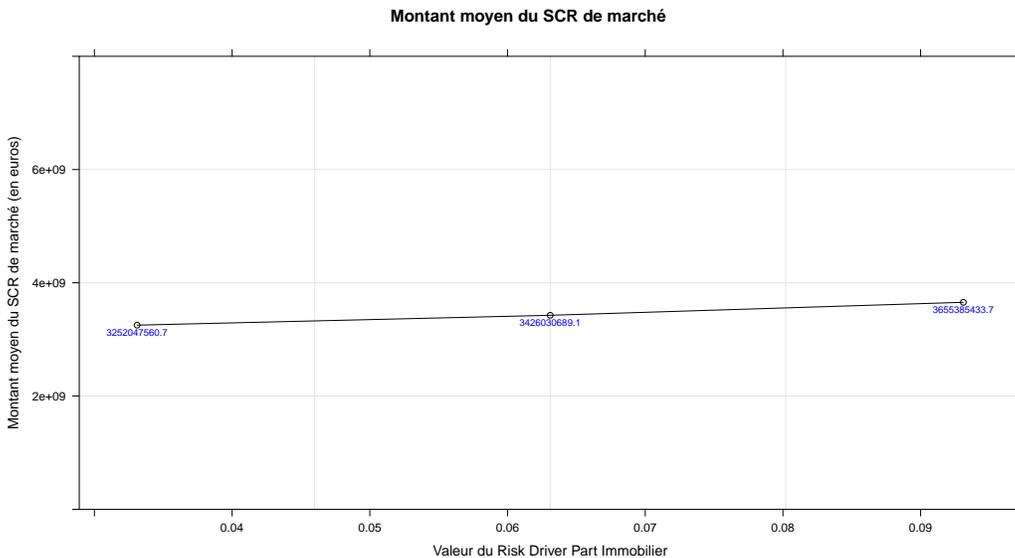


FIGURE 3.35 – Montant moyen de SCR en fonction du niveau de choc du RD Part Immobilier

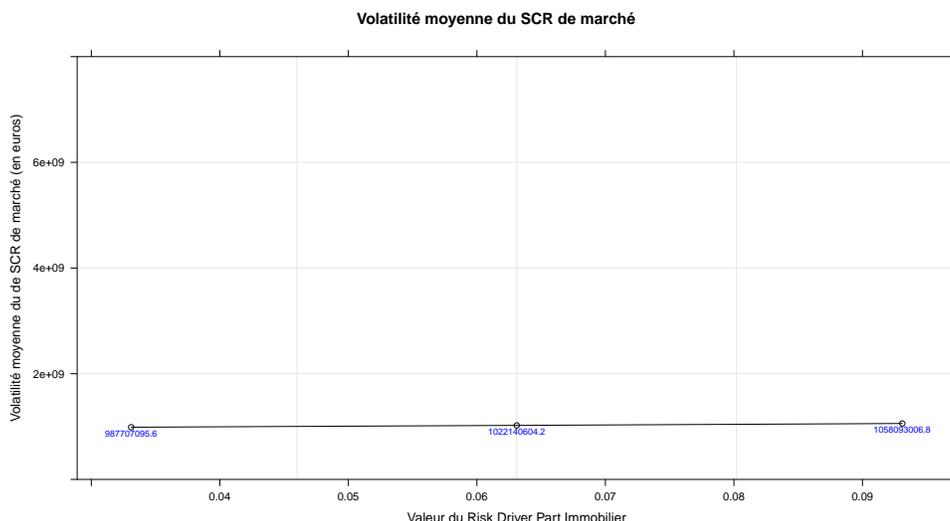


FIGURE 3.36 – Volatilité moyenne de SCR en fonction du niveau de choc du RD part immobilier

Le montant moyen de SCR augmente avec la part immobilier, toutefois cette variation est deux fois moins importante que pour le *Risk Driver* Part Actions. La volatilité est quant à elle quasiment constante.

L'hypercube ainsi obtenu va servir de base pour la recherche d'une fonction liant les *Risk Drivers* au montant du SCR de marché.

3.4.2 Recherche d'une fonction polynomiale

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le point de départ de la recherche de la fonction est l'hypercube qui a été présenté dans la partie précédente. Afin d'affiner la calibration de cette fonction, différentes études préliminaires ont été effectuées pour déterminer la méthode à appliquer pour la recherche de celle-ci. Le choix portait entre deux méthodes :

- La recherche d'une fonction reliant les 5 *Risk Drivers* aux SCR calculés pour les différents sous-modules du risque de marché. Puis agréger ces montants en utilisant la matrice de corrélation des IML2.
- La recherche d'une fonction reliant les *Risk Drivers* directement au montant du SCR de marché calculé par le modèle.

Les résultats ont conclu à la recherche d'une fonction reliant les 5 *Risk Drivers* directement au montant du SCR de marché. C'est cette méthode qui est appliquée et présentée dans la suite de ce mémoire.

La recherche de la fonction s'est décomposée en plusieurs étapes. Nous présenterons dans la suite de cette partie les différentes fonctions qui ont été testées pour finalement présenter celle que nous avons retenue et qui est appliquée dans la dernière partie de ce mémoire.

a. Fonction polynomiale de degré 1

La première étape dans la recherche de la fonction a été de s'orienter vers une régression polynomiale de degré 1 dont nous avons estimé les paramètres. Une telle régression met en jeu une variable endogène Y , ici le montant du SCR de marché extrait de l'hypercube et $p = 5$ variables exogènes X_j correspondant aux valeurs des 5 *Risk Drivers* retenus. Pour cela nous disposons de 2160 observations, qui correspondent à l'ensemble des combinaisons possibles des *Risk Drivers*.

L'équation de régression s'écrit :

$$y_i = a_0 + a_1x_{i,1} + \dots + a_px_{i,p} + \epsilon_i$$

Avec :

- $i \in \{1, \dots, 2160\}$
- y_i la i -ème observation de Y
- $x_{i,j}$ la i -ème observation de la j -ème variable
- ϵ_i est l'erreur du modèle. Il résume les informations manquantes qui permettraient d'expliquer linéairement les valeurs de Y à l'aide des p variables X_j .

Nous devons estimer $(p + 1)$ paramètres. Pour faciliter l'écriture nous allons utiliser une écriture matricielle :

$$Y = Xa + \epsilon$$

Les dimensions des différentes matrices étant :

- $Y \rightarrow (n,1)$
- $X \rightarrow (n,p+1)$
- $a \rightarrow (p+1,1)$
- $\epsilon \rightarrow (n,1)$

La matrice X de taille $(n, p + 1)$ contient l'ensemble des observations sur les exogènes, avec une première colonne formée par la valeur 1 qui indique que l'on intègre la constante a_0 dans l'équation :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ 1 & x_{2,1} & \dots & x_{2,p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix}$$

Données

Pour la suite de notre étude nous allons utiliser le fichier de données qui suit :

i	x1	x2	x3	x4	x5	y
	Taux PMVL Obligataires	Taux de PPE	Taux PMVL Actions	Part Action	Part Immobilier	SCR Marché
1	95,50%	0,00%	-4,10%	0,08%	3,31%	3 067,2 €
2	95,50%	0,00%	-4,10%	0,08%	6,31%	3 195,0 €
3	95,50%	0,00%	-4,10%	0,08%	9,31%	3 385,6 €
4	95,50%	0,00%	-4,10%	5,08%	3,31%	3 738,6 €
5	95,50%	0,00%	-4,10%	5,08%	6,31%	3 935,4 €
6	95,50%	0,00%	-4,10%	5,08%	9,31%	4 178,0 €
7	95,50%	0,00%	-4,10%	8,08%	3,31%	4 290,3 €
8	95,50%	0,00%	-4,10%	8,08%	6,31%	4 505,8 €
9	95,50%	0,00%	-4,10%	8,08%	9,31%	4 758,2 €
10	95,50%	0,00%	-4,10%	10,08%	3,31%	4 684,4 €
11	95,50%	0,00%	-4,10%	10,08%	6,31%	4 907,5 €
12	95,50%	0,00%	-4,10%	10,08%	9,31%	5 162,1 €
13	95,50%	0,00%	-4,10%	12,08%	3,31%	5 106,3 €
14	95,50%	0,00%	-4,10%	12,08%	6,31%	5 338,2 €
15	95,50%	0,00%	-4,10%	12,08%	9,31%	5 590,4 €
16	95,50%	0,00%	-4,10%	15,08%	3,31%	5 756,2 €
17	95,50%	0,00%	-4,10%	15,08%	6,31%	5 988,5 €
18	95,50%	0,00%	-4,10%	15,08%	9,31%	6 257,1 €
19	95,50%	1,05%	-4,10%	0,08%	3,31%	2 810,2 €
20	95,50%	1,05%	-4,10%	0,08%	6,31%	2 882,4 €

2159	109,5%	6,30%	2,50%	15,08%	6,31%	4 537,1 €
2160	109,5%	6,30%	2,50%	15,08%	9,31%	4 746,5 €

FIGURE 3.37 – Extrait de l'hypercube utilisé pour la recherche de la fonction

Comme nous l'avons rappelé plus haut, cet hypercube contient 2160 observations et l'objectif est d'expliquer le montant SCR de marché à partir des PMVL Obligataires, du taux de PPE, des PMVL Actions, de la Part Actions et la Part Immobilier.

Détermination des coefficients de la fonction

Pour déterminer les coefficients a_i de la fonction polynomiale de degré 1 nous avons effectué une régression linéaire multiple sous R, en utilisant la fonction `lm()` comme suit :

```
> model.scr.marché = lm(y.SCR.marché ~ x.PMVL.ob+x.taux.PPE+x.PMVL.action+x.part.action+x.part.immo)
```

En utilisant la fonction "summary" de R, nous obtenons les premières informations de la régression d'ordre 1. Les coefficients de la fonction de degré 1 sont :

Coefficients de la régression :

Coefficient	Valeur
<i>(Intercept)</i> = a_0	$1134,4 \times 10^9$
$x_{\text{PMVL Obligataires}} = a_1$	$2,310 \times 10^8$
$x_{\text{taux PPE}} = a_2$	$-2,467 \times 10^9$
$x_{\text{PMVL Actions}} = a_3$	$-1,315 \times 10^{10}$
$x_{\text{Part Actions}} = a_4$	$1,891 \times 10^{10}$
$x_{\text{Part Immobilier}} = a_5$	$6,722 \times 10^9$

Premières observations graphiques :

Graphiquement, si l'on compare le nuage de points extrait de l'hypercube et celui obtenu par la fonction que l'on vient de déterminer, on obtient le résultat suivant :

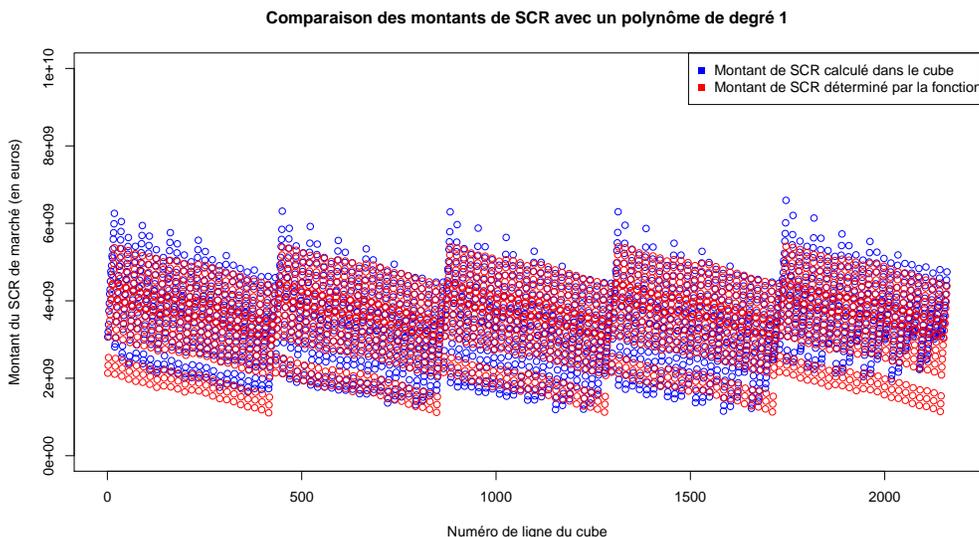


FIGURE 3.38 – Comparaison graphique entre les données de l'hypercube et un polynôme de degré 1

Ce premier graphique laisse apparaître une différence entre les données de l'hypercube et celles obtenues par cette première régression. Le bas du nuage de points rouges laisse supposer que la fonction proposée ne permet pas de capter toutes les modalités du SCR de marché. Il est nécessaire d'augmenter le degré du polynôme recherché. Intéressons nous maintenant aux résultats des tests statistiques réalisés en complément de cette première étude graphique.

Résultats des tests effectués :

Le premier indicateur utilisé pour juger de la qualité de l'ajustement du modèle de régression est le coefficient de détermination R^2 . Cet indicateur tient compte du nombre de variables explicatives. L'interprétation de cet indicateur est la suivante : plus sa valeur s'approche de 1, plus le modèle a des chances d'être retenu. Si on considère une variable à expliquer Y et p variables explicatives Y_1, Y_2, \dots, Y_p et pour n observations indépendantes, le coefficient de détermination est donné par :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Afin d'affiner l'étude du modèle, un deuxième test est effectué sur la régression : le test de Fisher. Ce test mesure le rapport entre la variance de la variable dépendante expliquée et non expliquée par le modèle de régression. Ce test permet de valider l'hypothèse selon laquelle le rapport entre la variance expliquée par le modèle est égale à la variance qui reste inexpliquée. Plus le F est grand et meilleure est la régression.

La statistique suivante est la p-value. Cette donnée est reliée au test de Student. Elle permet de tester l'hypothèse selon laquelle la valeur des coefficients de la régression ne sont pas significativement différents de 0 (c'est à dire qu'il existe bien une relation entre la variable dépendante et la variable indépendante en question). En pratique si la p-value est faible, le coefficient de la régression associé est significatif.

La dernière colonne donne une information sur la proportion de variables significatives de la régression. Une variable est significative dès lors que la p-value est inférieure à 5 %.

Pour la régression de degré 1 sans prise en compte des interactions nous avons obtenus les résultats suivants :

Critère	R^2	Test de Fisher	p-value	Valeurs significatives
Valeurs	0,8894	3475	< 2,2e-16	80 %

En considérant uniquement ces résultats, on peut penser que la régression est satisfaisante. Toutefois afin d'affiner l'étude de ce premier modèle nous allons analyser les résidus de celui-ci. Nous allons étudier le caractère normal ou non des résidus du modèle proposé. Cette partie se base sur des tests statistiques que nous allons présenter, mais également sur des observations graphiques.

Étude des résidus

Tout d'abord rappelons brièvement les hypothèses liées au terme d'erreur :

- Sa distribution doit être symétrique. Plus elle se rapproche d'une loi normale, meilleure est la régression
- Sa variance est constante
- Les erreurs ϵ_i ($i=1, \dots, n$) sont indépendantes

De plus, pour justifier ces hypothèses, nous disposons des erreurs observées, les résidus $\hat{\epsilon}_i$, produites par la différence entre les valeurs observées de l'endogène y_i et les prédictions ponctuelles de la régression \hat{y}_i :

$$\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

avec $\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{i,1} + \dots + \hat{a}_p x_{i,p}$

Si nous étudions le graphique des résidus du modèle :

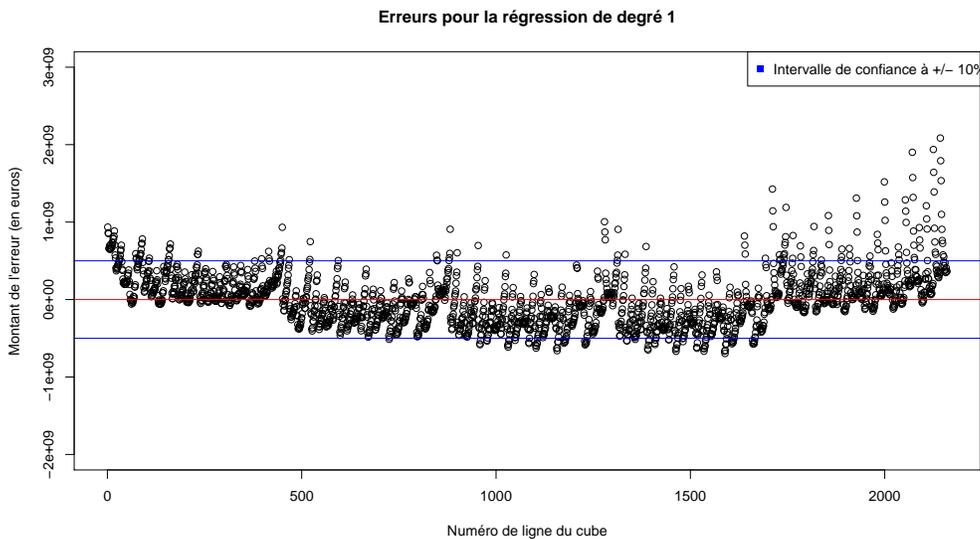


FIGURE 3.39 – Erreurs observées pour une régression polynomiale d'ordre 1

Le graphique proposé ici permet d'observer graphiquement la qualité de la régression. Pour que les résidus d'une régression soient satisfaisants, il faut que les points se répartissent aléatoirement autour de la valeur 0 (en rouge sur le graphique). Or on constate que ce n'est pas le cas, et de nombreuses erreurs dépassent l'intervalle de confiance de plus ou moins 10 % du montant total de SCR (lignes en bleues).

Afin d'affiner l'étude sur ce premier modèle, analysons respectivement les graphiques des résidus standardisés, la distribution des résidus et le QQ-Plot¹⁵ entre les quantiles théoriques et observés. Ci-dessous le graphique des résidus standardisés en fonction des 2160 valeurs de SCR de l'hypercube :

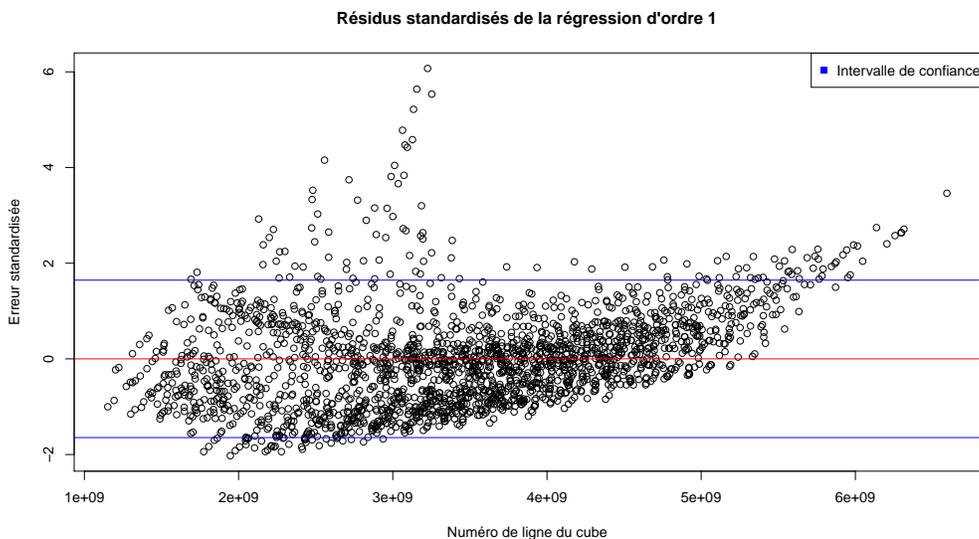


FIGURE 3.40 – Résidus standardisés pour une régression polynomiale d'ordre 1

15. Cette notion sera présentée en annexe de ce mémoire

Ce deuxième graphique confirme les observations faites précédemment, traduisant le fait que les résidus de cette première régression ne semblent pas suivre une loi normale.

Nous avons également comparé la distribution des résidus de la régression à celle d'une loi normale centrée, réduite :

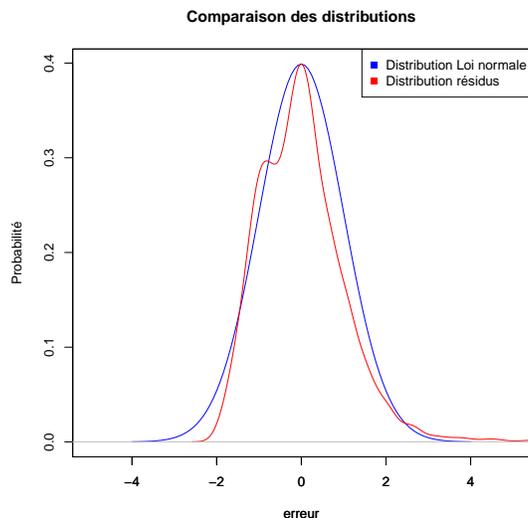


FIGURE 3.41 – Comparaison de la distribution des résidus avec celle d'une loi normale

Graphiquement, on retrouve une nouvelle fois un écart entre la distribution d'une loi normale centrée réduite, et celle des résidus. Nous avons également déterminé le coefficient de kurtosis et de skewness¹⁶. Le premier est égal 5,7 ce qui traduit que la distribution est plutôt pointue et non proche d'une distribution normale. Le second vaut 1,07 ce qui signifie que la distribution tracée est asymétrique vers la droite. Ces informations confirment ce qui est observé graphiquement.

Pour confirmer ces résultats nous avons représenté les résidus de la régression en fonction des résidus empiriques d'une loi normale centrée réduite grâce à un QQ-plot :

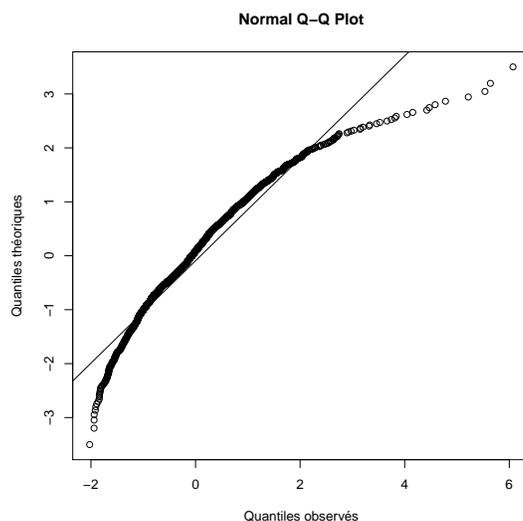


FIGURE 3.42 – QQ-plot des quantiles d'une loi normale fonction de ceux de la distribution des résidus

16. Notions expliquées en annexe de ce mémoire

Dans notre cas, le QQ-plot est un outil qui permet de vérifier la normalité de la distribution des résidus de la régression. Pour l'analyse de ce graphique, plus les points représentés forment une droite et se rapprochent de la droite dite de Henry, plus l'hypothèse que les résidus de la distribution suivent une loi centrée réduite est vérifiée. Nous constatons dans notre cas que cette hypothèse n'est pas vérifiée. Il faut donc rejeter le caractère normal des résidus de ce premier modèle.

Des tests statistiques complémentaires ont été appliqués à cette première partie de l'étude¹⁷. Voici les résultats obtenus :

Test de Jarque-Bera

Ce test permet de déterminer si les données considérées suivent une loi normale. Dans notre exemple, nous allons considérer les résidus de la régression et leur appliquer ce test. Celui-ci est valable dans le cas où le nombre d'observations est important comme dans notre cas.

Test de Shapiro-Wilk

Ce deuxième test permet également de savoir si l'échantillon considéré suit une loi normale ou non. Si la p-value du test est inférieure à 0.01, alors l'hypothèse de normalité doit être rejetée.

Les valeurs des p-values de ces deux tests sont résumées dans le tableau suivant :

Test	p-value
Jarque-Bera	$< 2,2e - 16$
Shapiro-Wilk	$< 2,2e - 16$

Pour conclure sur ce premier modèle, malgré un R^2 et un test de Fisher satisfaisant au début de cette partie, le caractère normal des résidus n'étant pas rempli, il est nécessaire de considérer une fonction polynomiale avec un degré supérieur. Dans le but d'affiner notre fonction, les interactions de degré 2 et 3 seront par la suite intégrées au modèle.

b. Vers une fonction polynomiale de degré 2 ou 3

Nous orientons désormais la recherche de la fonction vers un polynôme de degré 2 ou 3. Une telle fonction offre des possibilités de modélisation plus complexes, avec une régression, on l'espère d'une plus grande précision. Dans le but d'affiner la recherche, les interactions de degré n seront intégrées à la fonction comme suit :

– Modèle de degré 2 :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^p x_i a_i + \sum_{i=1}^p x_i^2 a_{ii} + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p x_i x_j a_{ij}$$

Le dernier terme de l'équation représente ici les interactions de degré 2 des 5 *Risk Drivers*.

– Modèle de degré 3 :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^p x_i a_i + \sum_{i=1}^p x_i^2 a_{ii} + \sum_{i=1}^p x_i^3 a_{iii} + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p x_i x_j a_{ij} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=i+1, j \neq i}^p x_i^2 x_j a_{ij} + \sum_{i=1}^{p-2} \sum_{j=i+1, j \neq i}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p x_i x_j x_k a_{ijk}$$

Ci-dessous les résultats obtenus pour les deux régressions :

Critère	R^2	Test de Fisher	p-value	Valeurs significatives
Degré 2 avec interactions	0,9859	7530	$< 2,2e-16$	90 %
Degré 3 avec interactions	0,9964	1,403e+04	$< 2,2e-16$	88 %

17. Pour plus d'information sur ces tests, se référer aux annexes de ce document

En considérant les critères des différents modèles testés, la régression de degré 3 avec les interactions semble être de meilleure qualité que celle de degré 2. Dans la suite de cette partie nous allons axer notre réflexion sur cette dernière en analysant les résidus. Les résultats du modèle degré 2 étant renseignés en annexe de ce mémoire.

Résultats graphiques de la régression de degré 3 :

Comme pour le degré 1, voici la comparaison du nuage de points des montants de SCRs calculés par le modèle et ceux obtenus par un calcul effectué avec le polynôme de degré trois :

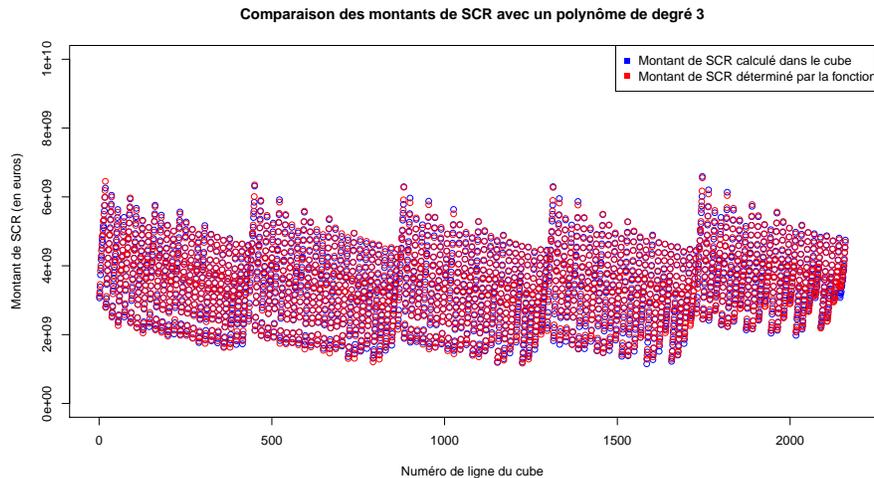


FIGURE 3.43 – Comparaison graphique entre les données de l’hypercube et un polynôme de degré 3

Nous constatons graphiquement que les deux nuages de points sont quasiment superposés. Toutefois, l’ordre de grandeur du graphique étant le million d’euros, il est nécessaire d’étudier les erreurs de la régression. Comme pour le modèle de degré 1, nous allons analyser le caractère normal des résidus de cette régression.

Etude des résidus du modèle de degré 3 :

Dans un premier temps nous observons les résidus du modèle :

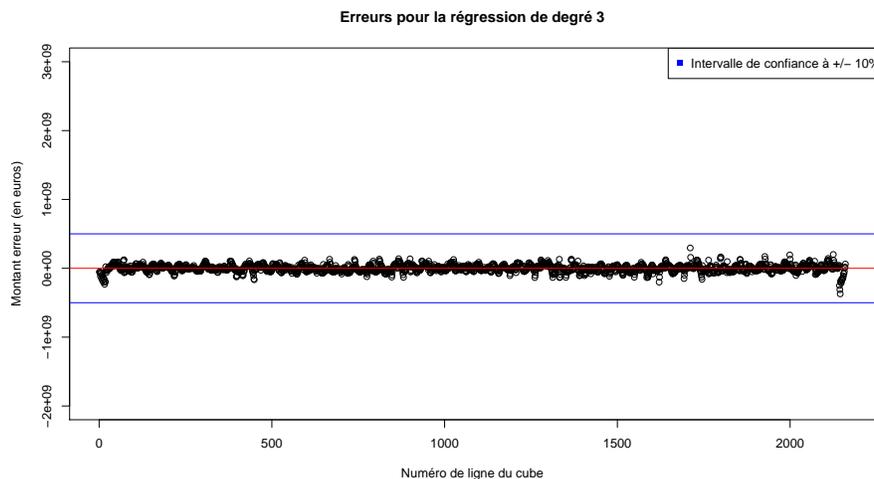


FIGURE 3.44 – Erreurs observées pour une régression polynomiale d’ordre 3

Si nous comparons ce graphique à celui obtenu avec un polynôme de degré 1, nous constatons que les résidus sont répartis de manière aléatoire autour de l'origine et aucune forme particulière ne semble se dessiner comme c'était le cas pour le degré 1. L'ensemble des erreurs sont comprises dans l'intervalle de confiance de $\pm 10\%$ et l'erreur a été réduite d'environ 400 millions d'euros pour les valeurs les plus extrêmes.

Regardons maintenant le comportement des résidus standardisés :

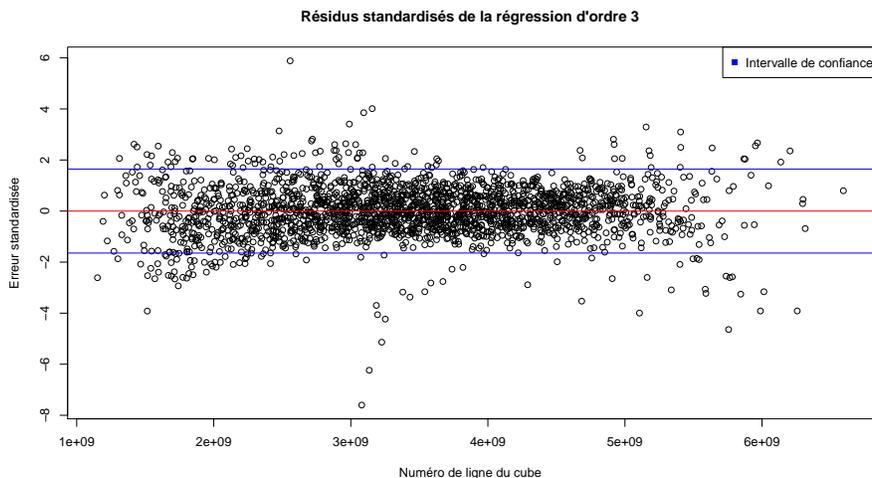


FIGURE 3.45 – Résidus standardisés pour une régression polynomiale d'ordre 3

Une nouvelle fois, aucune tendance n'est observée et la majorité des points sont regroupés autour de l'origine et très peu sortent de l'intervalle de confiance.

Il est également intéressant de regarder la distribution des résidus de la régression. Ci-dessous le tracé obtenu pour la régressions de degré 3 :

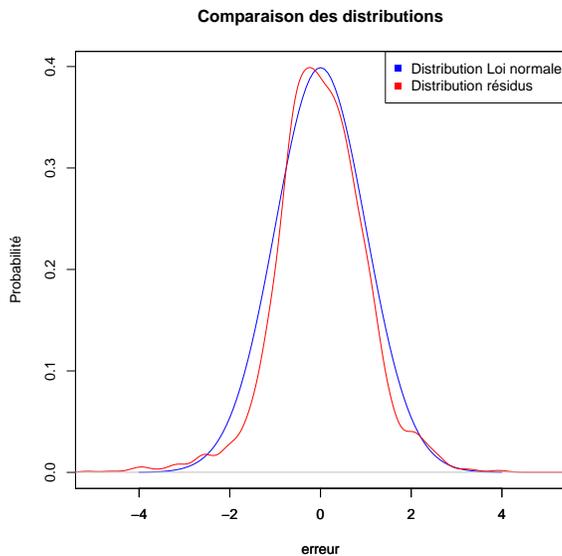


FIGURE 3.46 – Comparaison de la distribution des résidus avec celle d'une loi normale

La comparaison des deux distributions laisse supposer le caractère normal des résidus de cette régression. Le coefficient de kurtosis de la distribution est de 3,9 (proche de 3 qui correspond au coeffi-

cient de kurtosis d'une distribution normale). Le coefficient de skewness est égal à $-0,23$ ce qui prouve que la distribution des résidus est légèrement asymétrique vers la gauche mais tend à se rapprocher d'une distribution normale. Comme pour le degré 1, nous allons appuyer cette hypothèse par des tests statistiques complémentaires.

Regardons maintenant le comportement de la distribution des résidus en traçant le QQ-Plot suivant :

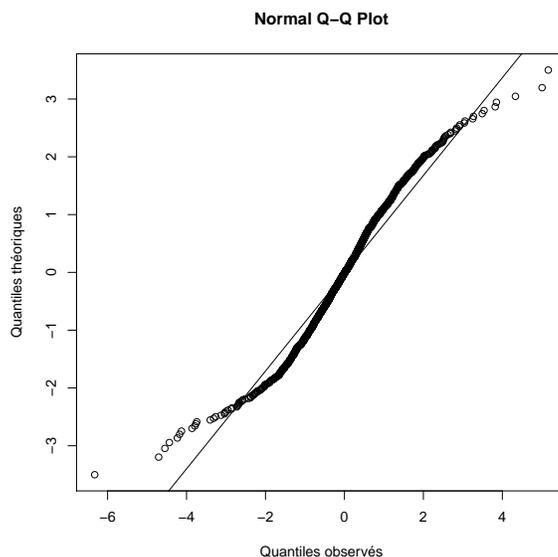


FIGURE 3.47 – QQ-plot des quantiles d'une loi normale fonction des quantiles de la distribution des résidus

L'analyse du QQ-Plot permet de voir que les résidus de la régression sont relativement bien alignés sur la droite de Henry. On peut penser que l'hypothèse de normalité est vérifiée avec une certaine prudence. Il convient de rester vigilant en ce qui concerne les queues de distribution. Les tests de Jarque-Bera et Shapiro-Wilk ont également été effectués. Voici les résultats obtenus :

Test	p-value
Jarque-Bera	0,4348
Shapiro-Wilk	0,347

Ces résultats permettent de confirmer le caractère normal des résidus du modèle proposé.

c. Minimisation du nombre de coefficients pour la fonction retenue

Dans le modèle linéaire qui a été testé dans cette partie nous avons considéré l'ensemble des interactions de degré 2 et 3. Cependant certaines variables de la fonction ne sont pas suffisamment significatives pour que nous les gardions dans le modèle. Dans cette partie nous sélectionnons les coefficients significatifs de la fonction afin de réduire le nombre de paramètres. Pour cela, à chaque étape de cette recherche, nous avons enlevé du modèle les variables les moins significatives, pour finalement ne garder que le polynôme ayant les meilleures qualités afin de projeter le plus fidèlement possible le capital économique réglementaire.

Le premier modèle proposé prenait en compte 56 paramètres, il en compte désormais 41. Il a été nécessaire de réduire ce nombre dans la mesure où certaines de ces variables n'étaient pas significatives. La diminution du nombre de coefficients de la fonction permet de gagner en temps de calcul, sans pour

autant dégrader la qualité de la détermination du SCR.

L'extrait de R suivant, présente les coefficients retenus ainsi que les valeurs :

```

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -3.925e+11  3.087e+10 -12.715 < 2e-16 ***
x1           1.314e+12  9.034e+10  14.550 < 2e-16 ***
x2          -2.888e+11  3.479e+10  -8.302 < 2e-16 ***
x4          -5.108e+11  1.742e+10 -29.330 < 2e-16 ***
x5          -2.810e+11  3.407e+10  -8.248 2.78e-16 ***
I(x1^2)     -1.440e+12  8.809e+10 -16.345 < 2e-16 ***
I(x2^2)       7.107e+11  3.686e+10  19.284 < 2e-16 ***
I(x4^2)     -9.235e+10  1.729e+10  -5.342 1.02e-07 ***
I(x1^3)       5.191e+11  2.862e+10  18.138 < 2e-16 ***
I(x2^3)     -7.486e+12  3.888e+11 -19.254 < 2e-16 ***
I(x4^3)     -2.147e+11  2.118e+10 -10.138 < 2e-16 ***
I(x1 * x2)   4.838e+11  6.760e+10   7.157 1.13e-12 ***
I(x1 * x4)   1.072e+12  3.360e+10  31.895 < 2e-16 ***
I(x1 * x5)   5.564e+11  6.635e+10   8.386 < 2e-16 ***
I(x2 * x3)   5.081e+11  1.333e+10  38.126 < 2e-16 ***
I(x2 * x4)  -1.070e+11  7.493e+09 -14.281 < 2e-16 ***
I(x2 * x5)   2.713e+11  6.572e+10   4.129 3.79e-05 ***
I(x3 * x5)  -1.265e+12  2.709e+10 -46.689 < 2e-16 ***
I(x4 * x5)  -1.506e+11  3.258e+10  -4.623 4.01e-06 ***
I(x1^2 * x2) -2.035e+11  3.292e+10  -6.182 7.59e-10 ***
I(x1^2 * x3) -8.192e+09  3.197e+08 -25.626 < 2e-16 ***
I(x1^2 * x4) -5.511e+11  1.632e+10 -33.772 < 2e-16 ***
I(x1^2 * x5) -2.701e+11  3.233e+10  -8.355 < 2e-16 ***
I(x2^2 * x3) -4.316e+12  1.964e+11 -21.977 < 2e-16 ***
I(x2^2 * x4)  7.607e+11  8.760e+10   8.683 < 2e-16 ***
I(x3^2 * x1)  2.433e+11  8.661e+09  28.095 < 2e-16 ***
I(x3^2 * x2) -1.438e+12  1.627e+11  -8.840 < 2e-16 ***
I(x3^2 * x4) -9.458e+11  8.046e+10 -11.754 < 2e-16 ***
I(x4^2 * x1)  2.002e+11  1.613e+10  12.413 < 2e-16 ***
I(x4^2 * x2) -1.541e+11  3.133e+10  -4.919 9.36e-07 ***
I(x4^2 * x3)  3.172e+11  3.446e+10   9.205 < 2e-16 ***
I(x1 * x2 * x5) -2.919e+11  6.401e+10  -4.559 5.42e-06 ***
I(x1 * x3 * x4) -1.279e+11  5.395e+09 -23.706 < 2e-16 ***
I(x1 * x3 * x5)  1.197e+12  2.689e+10  44.530 < 2e-16 ***
I(x1 * x4 * x5)  1.719e+11  3.173e+10   5.416 6.77e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 81930000 on 2125 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9938,    Adjusted R-squared:  0.9937

```

Avec comme paramètres de la fonction :

- x1 : Le *Risk Driver* Obligataires
- x2 : Le *Risk Driver* PPE
- x3 : Le *Risk Driver* PMVL Actions
- x4 : Le *Risk Driver* Part Actions
- x5 : Le *Risk Driver* Part Immobilier

Chapitre 4

Application et calcul du coût du capital dans le cadre de l'étude d'allocation stratégique d'actifs 2012

L'objet de cette dernière partie est de présenter les résultats de la modélisation proposée pour la projection du capital économique et appliquée au portefeuille de BNP Paribas Cardif. Le deuxième objectif est de mesurer l'impact de la directive Solvabilité 2 (via la détermination du coût du capital) sur la détermination de l'allocation stratégique d'actifs. Pour ce faire, nous allons tout d'abord présenter les données du passif et de l'actif qui composent le portefeuille. Puis nous présenterons les calculs de capital économique qui ont été menés en $t=0$ et pour les différentes années de projection. Les nouvelles données seront comparées à celles obtenues en sortie du modèle Prophet. Pour finir, nous verrons l'impact de la prise en compte du coût du capital sur la frontière efficiente.

4.1 Hypothèses et présentation du portefeuille

4.1.1 Hypothèses générales et périmètre de l'étude

L'horizon de projection pour la détermination de l'allocation stratégique est de 20 ans. Pour ce calcul, les rachats statistiques et dynamiques sont modélisés. Les calculs des taux servis, taux contractuels et taux cibles sont ceux qui ont été rappelés dans la partie 2.4.1 de ce mémoire. Les simulations sont réalisées sur le bilan de Cardif Assurance Vie France. Les données de l'actif et du passif sont celles au 31 Décembre 2011.

4.1.2 Description du portefeuille

a. Évolution sur cinq ans des taux servis, taux de rachats et taux de rendements d'actifs

Toutes ces informations sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

<i>En Millions d'euros</i>	2007	2008	2009	2010	2011
Primes sur les contrats en euros	5475	6604	8241	9482	6814
Taux de rachats moyen	5,30%	5,50%	5,57%	6,28%	7,90%
Taux de rendement de l'actif	5,08%	4,64%	4,20%	4,09%	3,96%
Taux servi moyen	4,10%	3,92%	3,57%	3,31%	3,14%
Encours Epargne Individuelle et collective	42411	48570	56096	62523	68985
Primes/Encours	13%	14%	15%	15%	10%

FIGURE 4.1 – Evolution des taux entre les différentes études ALM de 2007 à 2011

Nous constatons que le montant de primes collectées en épargne individuelle et en épargne collective était en augmentation constante de 15 % par an depuis 2007, cependant pour l'année 2011, ce montant est en recul d'environ 30 %.

Les taux de rachats (partiels et totaux) étaient constants entre les années 2007 et 2009, ensuite ils ont augmenté de 13 % et 25 % pour atteindre aujourd'hui un taux de 7.9 %.

b. Structure du passif

Le tableau suivant représente l'évolution des principaux postes du passif au cours des 5 dernières années (hors réassurance) :

En Millions d'euros	2007	2008	2009	2010	2011
Epargne individuelle	40643	46598	53619	59014	66034
Epargne collective	1738	1972	2477	2454	2891
Prévoyance individuelle	196	166	148	127	414
Prévoyance collective	147	168	191	205	208
ADE	365	277	423	378	396
Encours Pegase	0	281	262	265	416
Capital social	514	595	626	626	689
Primes	698	1323	2566	1566	2064
autres réserves	13	14	261	18	22
Résultat N	342	468	34	262	639
Passifs subordonnés	835	796	771	793	1216
Réserve de Capitalisation	696	716	734	759	594
PPE	707	287	821	850	685
PGG	9	9	8	8	8
PSAP	493	525	850	579	507
PRE	0	151	0	0	114
Total	47425	54344	62522	67905	76897

FIGURE 4.2 – Evolution des données de passif entre les différentes études ALM de 2007 à 2011

L'évolution constante du passif s'explique par une forte collecte observée sur les contrats en euros depuis 5 ans. Au 31/10/2011, le passif du Fonds Général s'élevait à 76,9 Milliards d'euros.

Dans le cadre des calculs qui sont effectués pour la détermination de l'allocation :

- Seules les Provisions Mathématiques de l'Epargne Individuelle et de l'Epargne collective sont prises en compte
- Le capital, les réserves et la prévoyance collective ne sont pas projetés
- La PPE et la réserve de capitalisation sont projetées

Ce qui donne un total de 66.8 Milliards d'euros de passif projeté (soit 86 % du passif total).

c. Structure de l'actif et évolution du portefeuille

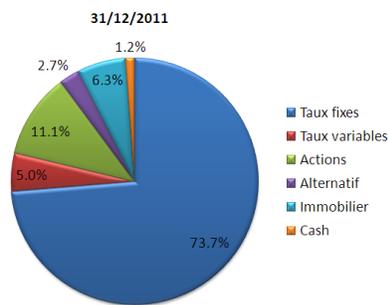
Dans le tableau ci-dessous, nous présentons la composition de l'actif du portefeuille BNP Paribas Cardif au 31/12/2011. La valeur comptable est d'abord renseignée, ainsi que la proportion qu'elle représente dans l'actif total. Pour information, nous avons renseigné si l'actif se trouve en plus ou moins-value latente. Ensuite, la valeur de marché est indiquée avec la durée de l'actif considéré. Ces informations permettent ensuite de déterminer la composition de l'allocation stratégique. Ces paramètres peuvent être modifiés en entrée du modèle avant la projection du bilan. Nous remarquons que deux des *Risk Drivers* retenus font partie de ces données.

L'actif du Fonds Général se décompose de la façon suivante :

Structure de l'actif au 30/09/2011	Valeur Bilan (yc CC)		Plus value latente	Valeur de marché		Duration	Sensibilité
	M€	%		M€	M€		
Taux fixes	57536	72,10%	1053	58588	73,80%	6,76	6,52
Taux variables et indexées Inflation	5818	7,30%	-445	5372	6,80%	7,02	1,05
Obligations Indexées Actions et Convertibles	2055	2,60%	-212	1844	2,30%	4,41	0,76
Actions et OPCVM Actions	7976	10%	-1491	6594	8,30%	20	0
Investissements Alternatifs	817	1%	26	843	1,10%	17,87	0
Immobilier	4387	5,50%	513	4900	6,20%	20	0
Court Terme	973	1,20%	22	995	1,30%	0,1	0,07
Options	271	0,30%	-94	178	0,20%	0	0
Total	79833	100%	-628	79314	100%	8,63	4,9

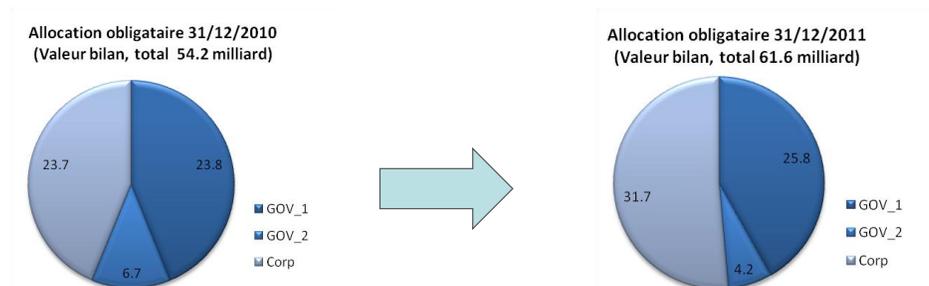
FIGURE 4.3 – Répartition de l'actif du Fonds Général selon les différents postes

Voici la situation du portefeuille d'actif au 31/12/2011 représentée de manière plus visuelle :



d. Évolution de la poche obligataire entre 2011 et 2012

Dans le cadre des études ALM et la détermination de l'allocation stratégique, le risque de crédit est pris en compte et le portefeuille obligataire est divisé en 3 classes. Ces classes ont été présentées dans la partie 2.5.5 de ce mémoire. Entre les études 2011 et 2012 les évolutions sont les suivantes :



- La poche GOV_2 a diminué au profit de la poche Corp
- La plus-value globale du portefeuille obligataire est quasi nulle
- Les plus-values sur les titres GOV_1 compensent les moins-values sur les titres GOV_2 et Corp
- La réserve de capitalisation s'élève à 685 millions d'euros, soit environ 40 % des moins-values obligataires

e. Adossement des durations de l'actif et du passif

Les durations du passif et de l'actif qui sont présentées ici ont été calculées à partir des flux prévisionnels pour chacun des scénarios décrits dans les tables de scénarios économiques et de la courbe des taux nominaux OAT zone euro au 31/12/2011.

La durée de l'actif est la suivante :

	Duration (années)
Obligations	7,1
Obligations et dividendes actions	9,1

Du côté du passif, en fonction des hypothèses choisies nous avons les résultats ci-dessous :

Duration (années)	In Force	In Force +5% NB	In Force +10% NB
Passif avec des rachats de 10%	9,4	10,3	12,6
Passif avec des rachats de 6%	10,7	11,7	14,2

- Le passif « In Force » correspond au portefeuille en stock à $t = 0$
- Le « New Business » correspond à ce qui est considéré comme nouveau contrat

Nous observons que selon les hypothèses, la durée du passif est comprise entre 9 et 14 ans. L'écart en durée qui est observé est justifié par le risque de rachats massifs dans le cas d'une hausse des taux. La durée qui est retenue dans notre exemple est celle qui correspond à une situation sans nouveaux contrats, elle est considérée égale à 10 ans.

4.2 Présentation des scénarios stochastiques en Risque Réel

Le modèle utilisé pour les études ALM et la détermination de la frontière efficiente utilise des tables de scénarios économiques. Celles-ci ont été présentées dans la partie 2.3.2 de ce mémoire. Nous allons présenter ici des éclaircissements sur ces tables, à travers des chiffres clés de ces scénarios.

Les éléments principaux présents dans ces tables sont : les taux zéro-coupons, les facteurs d'actualisation et les différents indices actions, immobiliers et autres. Certaines de ces données sont issues d'informations de marchés, d'autres sont basées sur des prévisions macro-économiques.

4.2.1 Evolution des taux

Nous avons extrait dans un premier temps la courbe des taux nominaux. On rappelle également que pour cette étude d'allocation stratégique, le début de projection est le 31/12/2011 et l'horizon est de 20 ans.

Les données et la courbe sont renseignées ci-dessous :

Horizon	1	2	3	4	5	6	7
Taux 0-coupons	0,24 %	0,87 %	1,3 %	1,65 %	2,01 %	2,35 %	2,64 %
Horizon	8	9	10	15	20	30	
Taux 0-coupons	2,85 %	3,06 %	3,15 %	3,52 %	3,62 %	3,66 %	

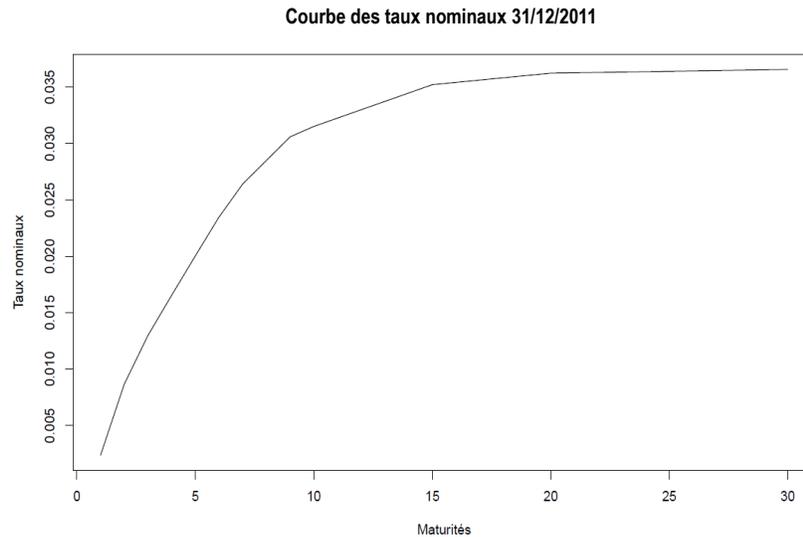


FIGURE 4.4 – Courbe des taux nominaux au 31/12/2011

Les taux 1 an et 10 ans sont également des éléments importants dans le modèle ALM. Le premier est un indicateur de rendement pour les indices tels que l'immobilier ou les actions, le second est le taux de référence pour l'engagement de l'assureur (taux cible). Nous avons représenté l'évolution de ces taux sur les 20 années de projection, ainsi que différents quantiles (par rapport aux 1000 scénarios à notre disposition) :

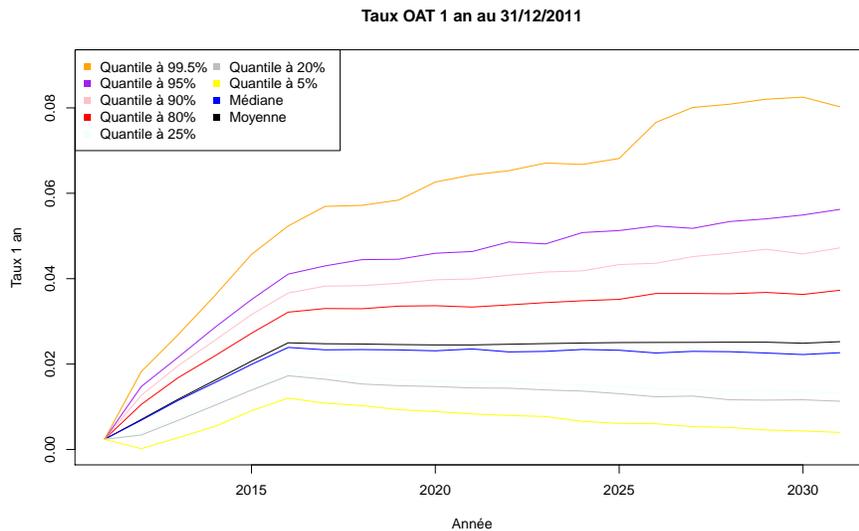


FIGURE 4.5 – Evolution des différents quantiles du taux 1 an sur les 20 années de projection

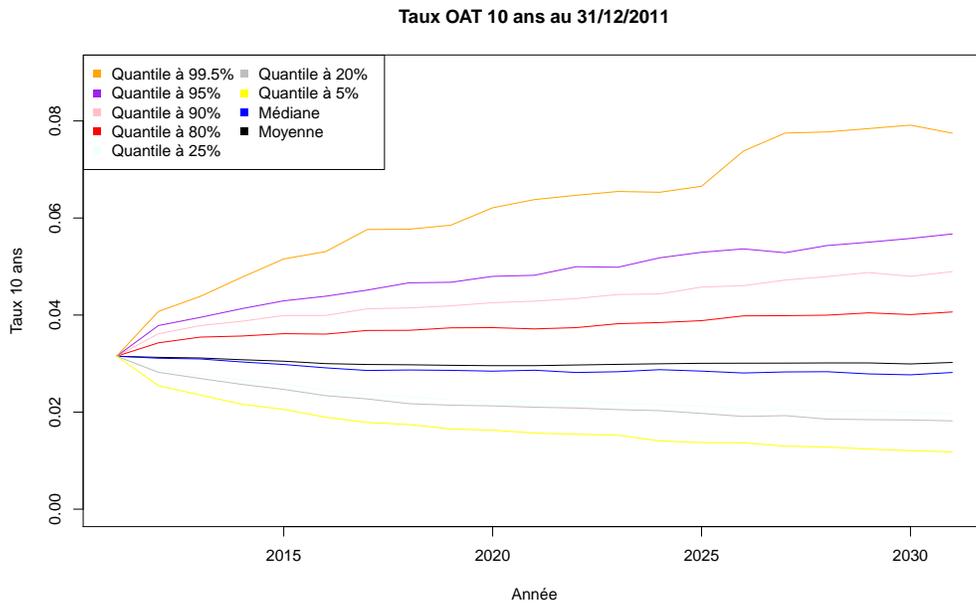


FIGURE 4.6 – Evolution des différents quantiles du taux 10 ans sur les 20 années de projection

4.2.2 Évolution de l'indice action et du taux de rendement

Nous avons extrait ici, les valeurs des indices actions pour les années 2011 et 2012 afin de déterminer les rendements actions de notre portefeuille au 31/12/2011. A cette date, le rendement moyen était de 6.3 %. Nous avons choisi deux représentations, la première représente le nuage de points des rendements sur les 1000 scénarios économiques. La seconde représente différents quantiles de l'indice action dans la table de scénarios utilisée :

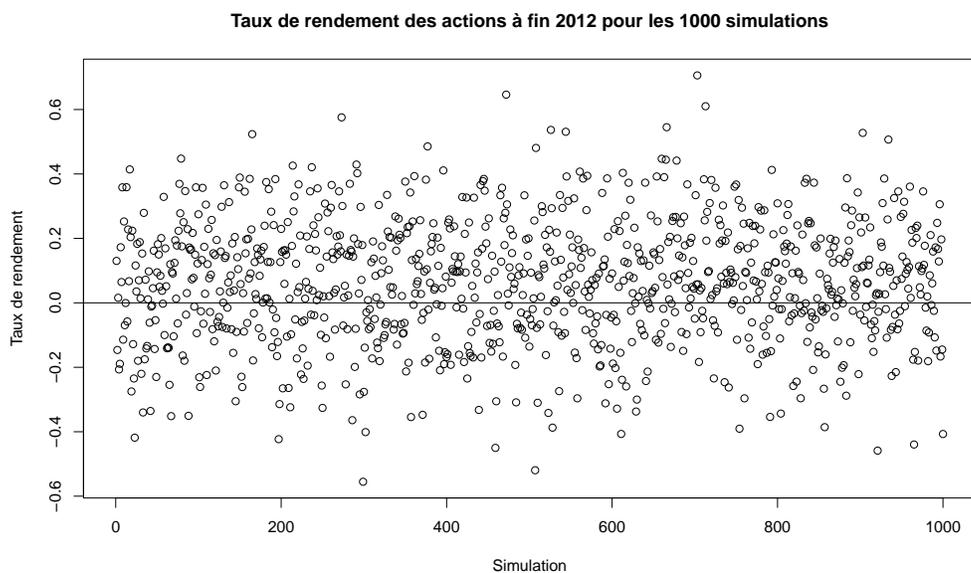


FIGURE 4.7 – Représentation des taux de rendement des actions pour les 1000 simulations

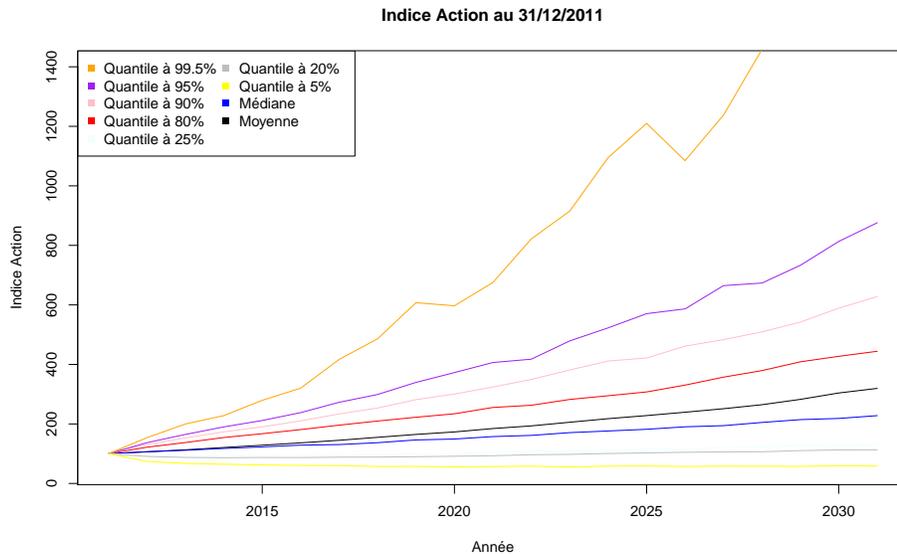


FIGURE 4.8 – Evolution des différents quantiles de l'indice action utilisé dans les scénarios économiques

Les hypothèses macro-économiques pour les indices actions et immobiliers sont les suivantes :

- Taux de rendement action = Tx 10Y + Prime de risque (=3 %)
- Taux de dividendes action = 2,8 %
- Taux de rendement immobilier = Tx 10Y + Prime de risque (=1 %)
- Taux de dividendes immobilier = 4,5 %

4.3 Application du calcul du coût du capital à une étude ALM

Dans cette partie nous allons effectuer des calculs de SCRs à l'aide de la fonction déterminée dans la partie 3 de ce mémoire. L'objectif de cette partie est de comparer, pour une situation économique et une allocation donnée, les montants de SCRs calculés par le modèle avec les données de 2011, et ceux déterminés par la fonction proposée. Cette partie permettra également de tester la robustesse de la fonction et la cohérence des résultats trouvés avant de passer à la reconstruction de la nouvelle frontière efficiente.

4.3.1 Les hypothèses de calculs

Les calculs de SCRs sont effectués par le modèle interne de la compagnie. Comme pour l'ensemble de cette étude nous allons nous intéresser uniquement au SCR de marché qui représente une part importante du SCR global : entre 75 % et 80 % selon les périmètres considérés. Pour calculer ce montant, les chocs de la formule standard (la méthode a été présentée dans la partie 1 de ce mémoire et les chocs sont rappelés en annexe de ce mémoire) sont appliqués aux données d'actifs.

Les chocs étant fixés, les éléments d'actif modifiés en entrée du modèle sont :

- L'allocation stratégique, avec une modification de la part action. Un deuxième postulat est également pris avec une part immobilier égale à 80 % de la part action.
- Une modification au sein de la poche obligataire du pourcentage de GOV_1, GOV_2 et Corp

Les calculs de SCRs ont été faits avec un pourcentage de GOV_1 de 45 % puis 55 %. Nous avons également testé plusieurs allocations en modifiant à chaque fois la part action. Dans le modèle, le calcul est effectué par sous modules de risques et ensuite agrégé par la méthode qui a été rappelée dans la partie 1 de ce mémoire.

4.3.2 Méthodologie de calcul du SCR à l'aide de la fonction

La fonction proposée ici pour le calcul du SCR de marché est alimentée par les valeurs des *Risk Drivers* issues du même WorkSpace de calcul que celui qui a permis d'obtenir les montants SCR à cours des études menées en 2012. La différence entre les deux études vient de l'univers de calcul. Pour la détermination du capital économique réglementaire, les tables d'actifs sont retraitées pour que les données permettent un calcul en probabilité risque neutre. Pour la détermination de la valeur des *Risk Drivers*, les données sont projetées en univers risque réel.

Dans la suite de cette partie nous allons présenter le processus de calcul du SCR à partir de la fonction. Le schéma suivant résume le processus de calcul que nous allons ensuite expliquer plus en détail :

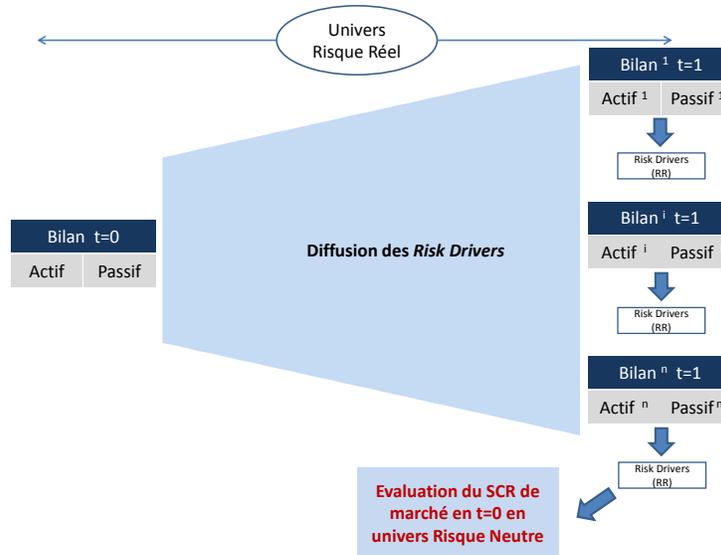


FIGURE 4.9 – Méthode de calcul appliquée pour le calcul d'un SCR à un pas annuel

La première étape consiste à lancer le modèle ALM afin de pouvoir récupérer la valeur des *Risk Drivers* en $t=1$. L'univers de calcul est le risque réel. La fonction a été calibrée sur des données en univers risque neutre pour pouvoir répondre à la contrainte réglementaire, cependant les éléments qui l'alimentent sont en risque réel. Ce raisonnement est en accord avec les hypothèses des méthodes alternatives de calcul du capital économique présentées dans la partie 3 de ce mémoire.

En $t=1$, la fonction est alimentée par les valeurs des 5 *Risk Drivers* d'après la connaissance du bilan à cette date. C'est grâce à ces données que l'on peut calculer le SCR de marché en $t=0$, on comparera ensuite cette donnée à la valeur en sortie du modèle.

Pour le calcul du coût du capital qui sera fait dans la suite de cette partie, la connaissance des bilans simulation par simulation et année après année donne accès à la valeur des *Risk Drivers*. Le coût du capital sera ensuite retranché au montant de PVFP pour pouvoir reconstruire un nouveau nuage de points et en déduire la nouvelle allocation stratégique.

4.3.3 Comparaison des résultats en $t=0$

Le processus de calcul étant désormais connu, nous allons maintenant comparer les résultats obtenus par la fonction proposée et ceux obtenus grâce au modèle ALM de BNP Paribas Cardif. Cette étape permettra de valider ou au contraire de poser certaines limites pour la suite de l'étude. La donnée qui est comparée ici est le montant du SCR de marché en $t=0$.

La comparaison des montants de SCR est effectuée pour quelques allocations. Dans un premier temps nous avons calculé les montants de SCR nécessaires à l'étude. Dans un deuxième temps, nous

avons considéré les situations économiques équivalentes pour connaître la valeur des *Risk Drivers*.

Les premiers calculs de SCR sont effectués avec l'hypothèse que la part immobilier correspond à 80 % de la part actions¹ :

Allocation	Montant de SCR issu du Modèle	SCR Calculé par la fonction	Écart
6_84_5_5	3 125 210 793.90 €	3 142 301 641.33 €	0,55 %
8_81_5_6	3 396 109 515.26 €	3 238 212 517.15 €	4,65 %
10_77_5_8	3 685 297 994.86 €	3 511 063 467.14 €	4,73 %

Les premiers résultats semblent assez concluants avec une erreur comprise entre 0 et 5 %. D'autres calculs ont ensuite été effectués mais cette fois avec une part immobilier égale à 60 % de la part actions. Voici les résultats obtenus :

Allocation	Montant de SCR issu du Modèle	SCR Calculé par la fonction	Écart
6_85_5_4	2 876 551 611.58 €	2 715 443 654.37 €	5,60 %
7_84_5_4	3 109 233 409.29 €	2 981 752 644.73 €	4,10 %
8_82_5_5	3 383 516 892.34 €	3 196 306 608.22 €	5,53 %
10_79_5_6	3 907 109 703.96 €	3 553 619 505.17 €	9,05 %

Les calculs effectués permettent de justifier que la méthode proposée n'est pas incohérente avec les résultats obtenus en sortie du modèle ALM. Nous allons maintenant mesurer l'impact de la fonction sur la projection du capital économique. La partie suivante propose une comparaison entre la méthode actuellement utilisée pour la détermination du SCR à un pas annuel dans le cadre des études ALM et la fonction polynomiale proposée.

4.3.4 Projection du SCR

La première méthode consiste à faire l'hypothèse que le SCR est proportionnel aux provisions mathématiques (elle est comparable à la méthode 3 présentée dans la partie 3.2.2 de ce mémoire). La deuxième méthode revient à projeter le SCR en utilisant la fonction proposée dans ce mémoire. Pour ces calculs nous allons utiliser la courbe des taux swaps suivante :

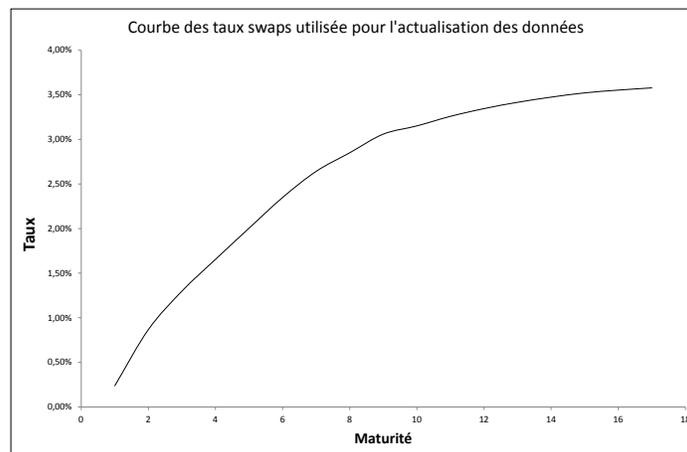


FIGURE 4.10 – Courbe des taux swaps pour l'actualisation des données

1. L'allocation se lit de la manière suivante : Action_TF_TV_Immobilier. Avec TF = Taux Fixes, TV = Taux Variable

Concernant la projection du SCR par la première méthode, nous supposons que le Best Estimate est égal au montant de PM à l'année t . Ci-dessous la chronique des PM pour trois parts actions données et utilisées dans cette partie :

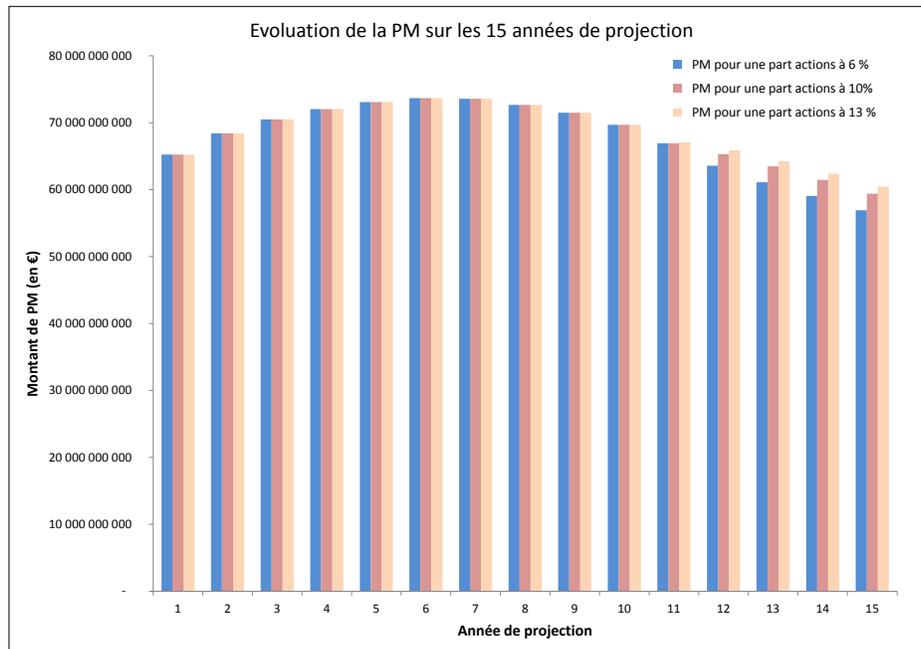


FIGURE 4.11 – Chronique des PM pour les 15 années de projection

L'augmentation puis la diminution du montant des provisions mathématiques sur les 15 années de projection est expliquée par la modélisation choisie dans le modèle ALM de BNP Paribas Cardif. En effet, pour modéliser du "New Business", la modélisation conduit à l'augmentation de 10 % des PM la première année qui décroît ensuite linéairement sur 10 ans. Cette hypothèse va avoir un impact sur la projection du capital économique réglementaire. C'est ce que nous allons voir dans la suite de cette partie.

Projection du SCR par une méthode proportionnelle

Dans cette partie nous allons considérer différentes allocations et étudier la projection du SCR en utilisant le montant de PM en $t = 0$ et le montant de PM pour les 15 années de projection. Ces données vont nous permettre de connaître le montant de SCR à un pas annuel :

$$SCR(t) = SCR(0) \times \frac{PM(t)}{PM(0)}$$

Les trois allocations testées sont :

- Une part actions à 6 %
- Une part actions à 10 %
- Une part actions à 13 %.

La part immobilier étant égale à la part actions et la proportion d'obligations à taux variable fixée à 5 %, la part d'obligations à taux fixe est connue.

Voici les résultats obtenus :

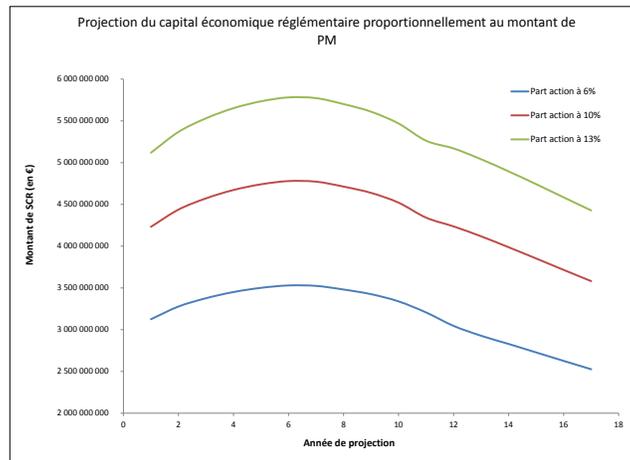


FIGURE 4.12 – Projection du SCR en utilisant le montant de PM

Le SCR ainsi projeté suit la même tendance que le montant de PM année après année. Le facteur qui influence le montant est la part actions initialement paramétrée dans le modèle. Une translation verticale est observée sur le montant du SCR avec l'augmentation de la part actions. La projection du capital économique est également lissée par cette méthode.

Projection du SCR par la fonction proposée

Dans le deuxième cas, le SCR à chaque pas de temps est calculé à l'aide de la fonction polynomiale que nous avons déterminé dans la troisième partie. Voici les résultats que nous avons obtenus pour les mêmes hypothèses de projection que la première méthode :

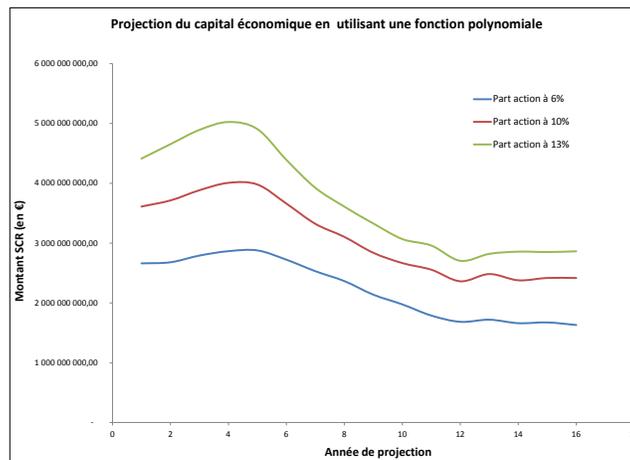


FIGURE 4.13 – Projection du SCR en utilisant une fonction polynomiale

Graphiquement nous observons que cette deuxième méthode donne des résultats un peu différents. En effet, la projection du capital économique est beaucoup moins lissée dans ce cas. Le SCR est également plus faible pour les années de projection les plus grandes. Finalement, il semble y avoir une convergence en terme de SCR pour les différentes parts actions. Cette dernière observation fait apparaître une limite de la fonction proposée qui semble ne plus être discriminante pour des années de projection très grandes (pour t supérieur à 10 ans).

Impact de la méthode de projection en terme de coût du capital

Nous allons maintenant nous intéresser à l'impact de la méthode de projection sur le montant du coût du capital :

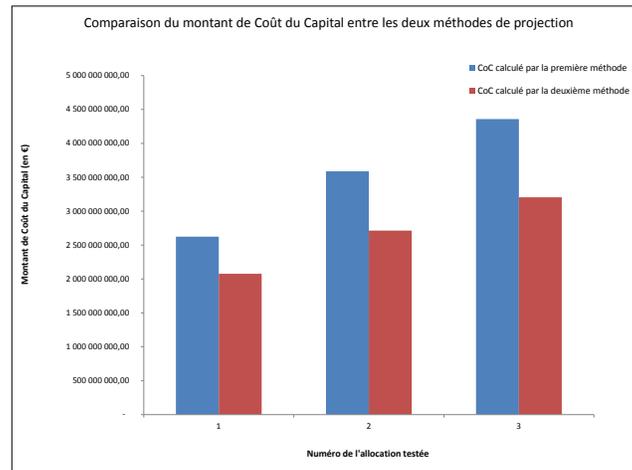


FIGURE 4.14 – Comparaison du montant de coût du capital en fonction de la méthode de projection

On observe que l'approximation basée sur un SCR futur proportionnel au montant de PM conduit à un coût du capital plus important qu'une approche par *Risk Drivers*. Cette observation a du sens, dans la mesure où la première méthode se base uniquement sur le montant de PM alors que la fonction permet d'expliquer le SCR par rapport à 5 éléments du portefeuille. Cela donne une légitimité supplémentaire à la modélisation proposée.

Afin de mesurer l'impact sur l'allocation stratégique à retenir lors d'une étude ALM, nous avons reconstruit les différentes frontières efficaces. La première ne prenant pas en compte le coût du capital, les deux autres nuages de points correspondent au coût du capital déterminé par les deux méthodes présentées ci-dessus :

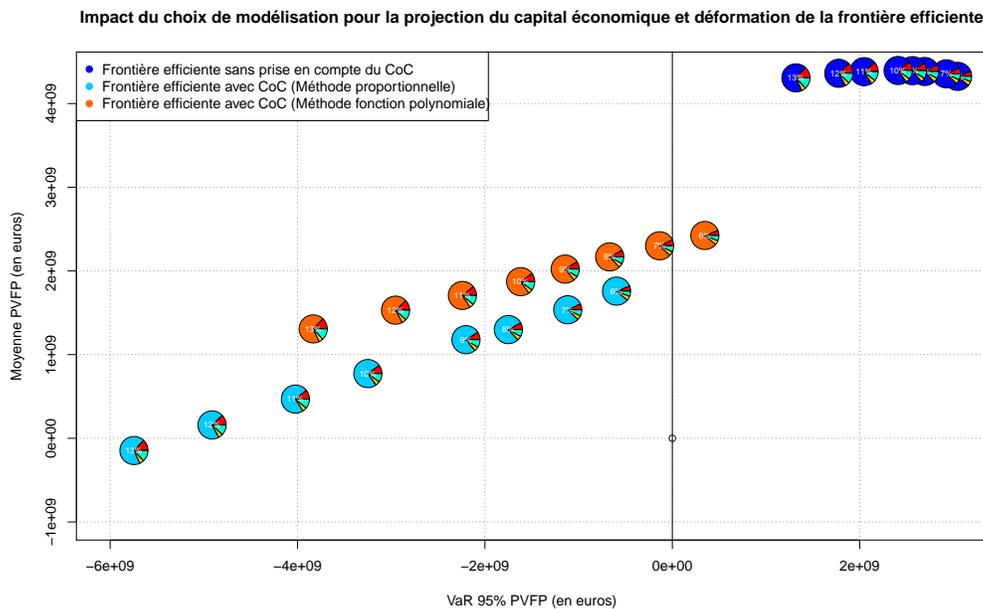


FIGURE 4.15 – Frontières efficiente, avec et sans prise en compte du coût du capital

Comme nous l'avons mentionné dans la troisième partie de ce mémoire, en 2012 l'allocation retenue se composait d'une part actions à 10 %. La prise en compte du coût du capital sous Solvabilité conduit à une déformation de la frontière efficiente. Le déplacement est d'autant plus important que l'on utilise la première méthode. Dans la dernière partie nous allons projeter le capital économique réglementaire en utilisant la fonction polynomiale.

4.3.5 Prise en compte du coût du capital dans la construction de la frontière efficiente

Tel que rappelé dans la deuxième partie de ce mémoire, dans le cadre des études ALM une frontière efficiente est construite dans le but de déterminer les allocations stratégiques optimales qui optimisent le couple rendement/risque. La prise en compte du coût du capital va passer par la projection du SCR, à un pas annuel et pour chacune des 1000 simulations.

La donnée nécessaire à la construction de la frontière efficiente est la PVFP. Pour une allocation donnée, on détermine sa moyenne sur les 1000 simulations ainsi que sa $VaR_{90\%}$ ou $VaR_{95\%}$ selon les études. Dans la suite de l'étude nous allons venir impacter cette valeur du coût du capital et redéterminer par rapport à la nouvelle distribution obtenue une moyenne et une VaR . Ces données vont permettre de reconstruire la nouvelle frontière efficiente.

Le processus de reconstruction de ce nuage est décrit ci-dessous :

a. Récupération de la valeur des *Risk Drivers*

La première étape consiste à projeter les données du portefeuille considéré pour pouvoir récupérer les valeurs des 5 *Risk Drivers*, simulation par simulation et année après année. Pour simplifier cette tâche, un outil VBA a été mis en place et permet de récupérer l'ensemble de ces données dans un fichier de reporting Excel.

b. Calcul du SCR et du coût du capital

La deuxième étape consiste à appliquer la formule fermée pour calculer le SCR à un pas annuel et pour l'ensemble des simulations. Une fois effectuée, nous rappelons que le coût du capital est donné par la formule suivante :

$$CoC = CoC \% \sum_{t=0}^n \frac{SCR_{marche}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Avec dans notre cas :

- CoC % testé à 6 %, 3 % et 1.5 %
- $SCR_{marche}(t)$ est le montant du SCR de marché déterminé par la fonction
- r_t est le taux swap

Ces données calculées nous passons à la dernière étape.

c. Tracé de la nouvelle frontière efficiente

Cette dernière étape consiste à calculer la *Value of In Force* (VIF). Cette donnée correspond à la somme actualisée des profits futurs de la compagnie à laquelle on retire le coût d'immobilisation des fonds qui concernent l'exigence en capital de solvabilité :

$$VIF_i = PVFP_i - CoC_i$$

Pour i de 1 à 1000.

Finalement il reste à tracer les nouveaux nuages de points. Les données sont regroupées dans le tableau suivant :

Part action	Sans prise en compte du CoC		Avec Prise en compte du CoC (6%)		Avec Prise en compte du CoC (3%)		Avec Prise en compte du CoC (1.5%)	
	Moyenne	VaR 90	Moyenne	VaR 90	Moyenne	VaR 90	Moyenne	VaR 90
0	3 757 720 531.88 €	2 286 499 713.450 €	2 446 063 383.57 €	808 583 453.280 €	3 101 891 957.73 €	1 547 793 706.200 €	3 429 806 244.80 €	1 922 885 463.990 €
1	3 865 244 320.74 €	2 510 298 096.470 €	2 502 681 917.65 €	928 074 202.640 €	3 183 963 119.20 €	1 701 560 344.250 €	3 524 603 719.97 €	2 100 067 806.390 €
2	3 987 674 136.88 €	2 716 234 008.440 €	2 558 268 803.71 €	978 931 106.730 €	3 272 971 470.29 €	1 843 608 306.940 €	3 630 322 803.59 €	2 276 494 808.230 €
3	4 078 131 449.23 €	2 827 616 240.700 €	2 559 278 302.74 €	936 898 172.050 €	3 318 704 875.98 €	1 877 904 191.520 €	3 698 418 162.61 €	2 361 303 766.130 €
4	4 168 791 222.95 €	2 944 255 519.210 €	2 539 815 760.54 €	847 000 158.890 €	3 354 303 491.75 €	1 895 838 483.310 €	3 761 547 357.35 €	2 420 401 813.990 €
5	4 266 266 557.67 €	3 034 179 368.100 €	2 509 726 203.43 €	623 738 559.770 €	3 387 996 380.55 €	1 836 545 340.260 €	3 827 131 469.11 €	2 441 579 210.710 €
6	4 324 781 022.69 €	3 044 477 322.280 €	2 423 339 524.63 €	346 972 544.890 €	3 374 060 273.66 €	1 738 653 224.580 €	3 849 420 648.17 €	2 372 357 869.760 €
7	4 355 562 557.64 €	2 924 194 569.720 €	2 300 933 231.89 €	135 873 904.750 €	3 328 247 894.77 €	1 408 305 340.180 €	3 841 905 226.20 €	2 170 511 881.740 €
8	4 383 066 435.19 €	2 692 999 531.710 €	2 168 013 225.30 €	668 277 927.530 €	3 275 539 830.24 €	1 065 367 259.500 €	3 829 303 132.72 €	1 935 277 304.760 €
9	4 393 355 825.17 €	2 562 837 647.690 €	2 021 808 908.46 €	1 143 552 270.450 €	3 207 582 366.81 €	740 138 000.080 €	3 800 469 095.99 €	1 654 557 133.920 €
10	4 395 394 036.01 €	2 409 632 775.790 €	1 871 720 984.12 €	1 618 781 313.550 €	3 133 557 510.07 €	411 655 450.640 €	3 764 475 773.04 €	1 415 586 448.080 €
11	4 381 403 250.67 €	2 046 633 821.240 €	1 707 156 969.24 €	2 240 623 297.280 €	3 044 280 109.96 €	155 030 883.510 €	3 712 841 680.31 €	934 016 539.450 €
12	4 361 731 426.93 €	1 776 304 867.060 €	1 531 307 559.09 €	2 953 766 065.760 €	2 946 519 493.01 €	559 064 694.850 €	3 654 125 459.97 €	608 002 127.410 €
13	4 307 176 678.45 €	1 318 921 831.160 €	1 307 364 375.96 €	3 832 692 991.070 €	2 807 270 527.21 €	1 276 245 003.780 €	3 557 223 602.83 €	41 164 958.260 €
14	4 266 414 390.76 €	827 682 675.740 €	1 104 724 721.20 €	4 729 225 103.370 €	2 685 569 555.98 €	2 042 165 205.180 €	3 475 991 973.37 €	439 076 153.550 €
15	4 211 602 169.63 €	497 875 380.750 €	905 441 738.75 €	5 532 777 190.810 €	2 558 521 954.19 €	2 464 501 118.180 €	3 385 062 061.91 €	926 980 777.610 €
16	4 125 878 768.15 €	87 964 330.970 €	674 268 716.17 €	6 280 307 269.870 €	2 400 073 742.16 €	3 053 805 216.040 €	3 262 976 255.16 €	1 468 408 301.960 €
17	4 061 198 085.97 €	346 683 935.490 €	486 388 992.31 €	7 243 358 758.510 €	2 273 793 539.14 €	3 808 086 093.910 €	3 167 495 812.56 €	2 121 131 229.020 €
18	3 960 181 341.40 €	800 856 507.730 €	271 684 721.91 €	8 099 197 776.040 €	2 115 933 031.65 €	4 555 033 856.190 €	3 038 057 186.52 €	2 715 322 012.010 €
19	3 874 621 297.45 €	1 513 557 814.920 €	96 830 385.40 €	8 961 345 014.980 €	1 985 725 841.42 €	4 997 446 755.680 €	2 930 173 569.44 €	3 243 148 480.380 €
20	3 773 031 783.11 €	1 696 610 711.290 €	-80 126 515.17 €	9 785 040 833.160 €	1 846 452 633.97 €	5 650 638 859.020 €	2 809 742 208.54 €	3 620 660 522.940 €

Graphiquement, nous obtenons le résultat suivant :

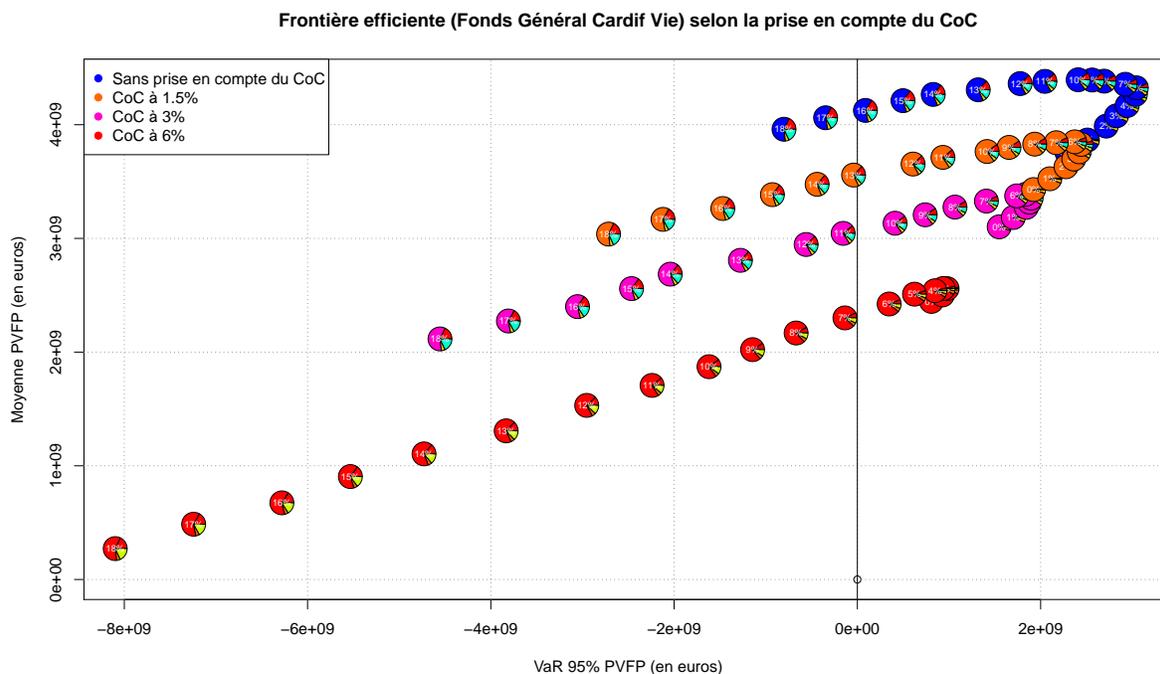


FIGURE 4.16 – Déformation de la frontière efficiente - Etude ALM 2012

Le nuage bleu, correspond à la frontière efficiente sans prise en compte du coût du capital, en orange à un coût du capital à 1.5 %. Le nuage violet à un pourcentage de 3 % et finalement le nuage en rouge à un taux de 6 %.

d. Interprétation des résultats obtenus

Comme nous l’avions supposé, nous observons un décalage et une déformation de la frontière efficiente avec la prise en compte du coût du capital. Les sensibilités proposées sur le taux de rendement

espéré (1,5 %, 3 % et 6 %) permettent d'observer les déformations successives du nuage de points.

La première observation qui est faite est un étirement de la frontière efficiente. Une part actions importante dans le portefeuille est très sévèrement pénalisée par la directive Solvabilité 2. Si l'on prend l'exemple d'une part action à 18 % (située en bas à gauche du graphique), sans prise en compte du coût du capital, cette allocation fait porter un risque important à l'assureur mais reste rentable. Dans le cas du nuage de point rouge, le risque est presque multiplié par 4 et la rentabilité est quasiment nulle.

La deuxième observation qui est faite est une forte modification de l'allocation stratégique cible entre les deux situations extrémales. Les conclusions de l'étude l'allocation stratégique menée en 2012 sont très différentes. Dans un cas la part actions retenue est de 10 % action, et avec la prise en compte de la norme Solvabilité 2 celle-ci devrait être égale à 4 %.

e. Impact de la prise en compte du coût du capital sur l'activité d'assurance

BNP Paribas Cardif est un des principaux acteurs de la banque assurance en France. Avec une part actions à 10 % dans son allocation stratégique, elle fait partie de ceux qui investissent le plus en actions. En effet, cette observation est confirmée par les chiffres communiqués par la FFSA² en 2011, concernant la répartition des actifs des principaux acteurs de l'assurance en France :

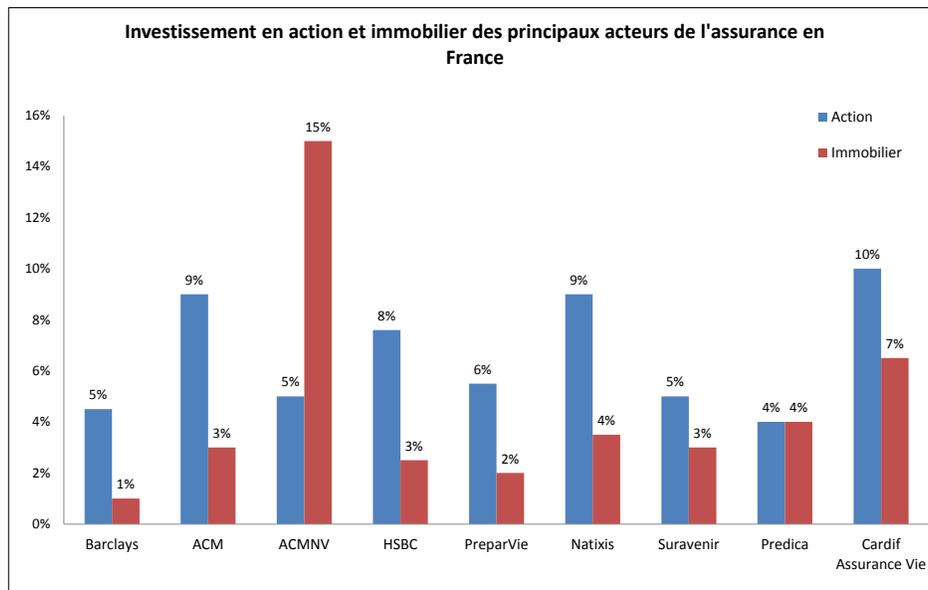


FIGURE 4.17 – Part actions et immobilier investie chez les différents acteurs de l'assurance en France

Comme nous venons de le voir dans notre exemple, la prise en compte du coût du capital dans les études d'allocation stratégique d'actifs peut avoir un impact assez significatif sur la décision stratégique d'allocation. Pour certains des assureurs, cette baisse pourrait même les conduire vers un investissement quasi nul en actions.

La directive Solvabilité 2 commence à orienter le marché de l'assurance vers une baisse de l'investissement en actions. Cette tendance s'observe déjà sur le marché de l'assurance, les assureurs investissent de moins en moins en actions. Si nous prenons l'exemple de BNP Paribas Cardif, la part actions est déjà passée de 14 % en 2010 à 10 % en 2012.

2. Données disponible pour l'ensemble des assureurs sur le site de la FFSA

A la suite de cette étude, il est bon de se poser la question quant à l'attitude des assureurs vis-à-vis de cette nouvelle directive. Vont-ils quand même conserver une part de risque dans le portefeuille (et pour cela continuer à investir suffisamment en actions) pour rester concurrentiels et être en mesure de servir un taux correct à leurs assurés? Ou à l'inverse, les assureurs décideront-ils de respecter complètement la norme actuellement mise en place? La tendance qui se dégage à travers les différentes communications est une "adaptabilité" face à la réglementation. Les assureurs tentent de jouer avec certains paramétrages, et essayent de modifier certaines calibrations car elles sont justement trop négatives pour les actions.

Afin de rester suffisamment compétitifs, les assureurs risquent de réduire la part actions à investir mais pas autant que pourrait le préconiser Solvabilité 2. Il leur faudra trouver un juste milieu entre un rendement espéré et la réglementation. Pour cela, ils devront prendre une partie du risque à leur charge. Prenons par exemple le cas de BNP Paribas Cardif. Actuellement à 10 %, nous venons de voir que l'application de Solvabilité 2 conduirait à une part actions à 4 %, si cela n'est pas acceptable pour la direction et qu'elle désire se placer à 6 ou 8 %, la différence devra être supportée et justifiée par la compagnie. Cela ne sera plus une question de calcul, mais de sensibilité au risque des managers et/ou des dirigeants. Le sujet à aborder à ce moment là est le *Risk Appetite* et l'aversion au risque de la compagnie au-delà de l'application de la directive. Du point de vue des gérants qui investissent les sommes, ils devront également s'adapter aux nouvelles conventions de gestion.

4.3.6 Bilan sur la modélisation proposée

Le modèle proposé dans ce mémoire est un proxy permettant la projection du capital économique réglementaire dans le but de pouvoir déterminer le coût du capital. Nous rappelons que celui-ci correspond au coût pour l'organisme assureur lié à l'immobilisation du SCR de marché imposé par la directive Solabilité 2. Dans la troisième partie de ce mémoire nous avons décrit la méthode que nous avons mis en place pour la détermination de la fonction. Celle-ci dépend d'un hypercube de SCR qui dépend d'une situation initiale pour l'année d'étude t . Il est nécessaire à chaque nouvelle étude de re-générer un hypercube, ce qui peut s'avérer assez fastidieux. Toutefois, l'objectif de cette étude était également de montrer qu'il était possible de calibrer une telle fonction et que celle-ci pouvait fournir des résultats concluant. La prochaine étape est, pour l'équipe dans laquelle ce mémoire à été réalisée, d'implémenter une telle fonction directement dans le modèle ALM.

Il est également utile de rappeler que les *Risk Drivers* qui ont été retenus pour cette étude sont des éléments relatifs à l'actif et qui permettent d'expliquer avec suffisamment de précision le SCR de marché. Dans le cas où la projection concerne le SCR global, il serait nécessaire d'ajouter des *Risk Drivers* pour capter l'influence du passif. Ce point pourrait faire partie d'un axe d'amélioration de la fonction.

Toutefois, une fois la fonction déterminée, le calcul d'un SCR de marché est très rapide, ce qui permet de gagner en temps de calcul. De plus, la projection du capital économique fait le sujet de nombreuses études, et des simplifications de calcul sont également présentées dans les textes communiqués aux organismes assureurs. Cette méthode se place donc entre un calcul précis et très fatidieux et une simple règle de trois. Elle permet également la prise en compte de la directive Solvabilité 2 dans les différentes études réalisées par les équipes ALM.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était de répondre à des attentes de la direction de gestion des risques dans le cadre des études d'allocation d'actifs. En effet, avec la mise en place prochaine de la directive Solvabilité 2, la prise en compte du coût du capital dans le choix de l'allocation stratégique d'actifs est nécessaire. Comme nous l'avons présenté dans la deuxième partie de ce mémoire, le choix de l'allocation stratégique est basé sur deux critères : la richesse assurée et le niveau de risque. Une fois la méthode de projection trouvée, nous avons voulu comprendre l'impact que pourrait avoir la prise en compte du coût du capital dans la décision stratégique de BNP Paribas Cardif.

Le premier objectif que nous nous étions fixé a été atteint. En effet, le processus qui a été mis en place et décrit dans ce mémoire permet de trouver une fonction polynomiale reliant des *Risk Drivers* au montant du SCR de marché. Nous avons vu que pour mener à bien cette étude, il faut s'appuyer sur un modèle de projection avec des simulations stochastiques. Les différents outils qui ont été développés permettent également l'automatisation de la recherche de la fonction. A partir de la connaissance d'un bilan à un instant t , il est possible d'en déduire un montant de SCR correspondant.

Dans un deuxième temps, l'objet de cette étude était de mesurer l'impact de la prise en compte du coût du capital sur une allocation stratégique telle que celle de BNP Paribas Cardif. L'immobilisation de capitaux imposée par la nouvelle réglementation et les contraintes de calculs qui en découlent créent souvent des difficultés pour mener à bien les calculs dans leur totalité. Le proxy proposé ici, ne permet pas d'effectuer un calcul exact, mais donne un ordre d'idée sur la stratégie financière à adopter par la direction. Nous avons vu que la prise en compte de ce coût du capital réduit considérablement la richesse assureur mais aussi la part en actions à allouer dans l'allocation stratégique. Cette information peut donc conduire à une diminution de la poche actions, alors que par ailleurs c'est elle qui a le meilleur rendement. Toutefois, elle ne satisfait pas entièrement le critère rendement/risque retenu par la direction des risques chez BNP Paribas Cardif.

Cependant certaines limites peuvent être mentionnées. La première réside dans le nombre de *Risk Drivers* qui ont été retenus pour construire la fonction. Une étude en parallèle³ de ce mémoire est effectuée pour tenter d'identifier d'autres éléments qui pourraient influencer le montant de SCR. Intuitivement un *Risk Driver* taux devrait être ajouté. Dans ce cas il sera nécessaire de re-calibrer une fonction.

Une autre limite de cette étude est que la fonction proposée ne prend en compte que le module relatif aux risques de marché, conduisant à une fonction permettant le calcul de ce capital réglementaire uniquement. Pour compléter cette étude, un axe de réflexion pourrait être de s'intéresser au calcul de l'ensemble des modules en déterminant une fonction pour le calcul de chaque module. Cependant, dans le cadre des études d'allocations stratégique, le capital immobilisé par le SCR de marché représente un des coûts les plus importants en terme de SCR pour les compagnies d'assurance vie en France.

Finalement ce mémoire propose un proxy. Afin d'être le plus précis possible pour la détermination du SCR, il faudrait calculer ce montant simulation par simulation. Pour compléter cette étude, il serait envisageable d'intégrer le processus de recherche de la fonction directement dans le modèle interne en cours d'élaboration par les équipes de BNP Paribas Cardif.

3. Mémoire d'Olivier Moreau qui a pour sujet la justification des *Risk Drivers* ainsi que la détermination d'éventuels nouveaux Risk Driver

Références

Base documentaire Solvabilité 2 :

[1] ACP (2011) - *Solvabilité 2 : Principaux enseignements de la cinquième étude d'impact quantitative d'impact (QIS 5)*

[2] CHIEF RISK OFFICER (CFO) Forum (2006) - *A market cost of capital approach to market value margins - Discussion paper*

[3] EUROPEAN COMMISSION (2011) - *Draft Implementing measures Solvency II*

[4] EUROPEAN COMMISSION (2010) - *QIS 5 Technical Specifications*

Publications et dossiers techniques :

[5] DEVINEAU Laurent, LOISEL Stéphane (2009) - *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des «simulations dans les simulations» pour le calcul du capital économique Solvabilité II*

[6] DEVINEAU Laurent, CHAUVIGNY Matthieu (2010) - *Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II*

[7] KPMG (2006) - *Solvabilité 2 : Vers une approche globale et cohérente de la solvabilité*

[8] OPTIMIND (2011) - *La crise financière replace l'ALM au centre de toutes les préoccupations des assureurs*

[9] OPTIMIND (2012) - *La mise en oeuvre opérationnelle du dispositif Solvabilité 2*

[10] PLANCHET Frédéric et CHARVET Samuel (2010) - *Préparer le QIS 5 : Mettre en place le QIS : données, modèles et outils*

[11] PLANCHET Frédéric, FALEH Alaeddine, RULLIERE Didier (2012) - *Scénarios économiques et techniques d'allocations d'actifs : Applications aux assurances et aux fonds de pension*

Mémoires Actuariat :

[12] AUBRY Lucie (2011) - *Optimisation de stratégies de gestion actif-passif dynamiques*

[13] DAYA-VIOSSAT Mouna (2011) - *Market Value Margins fo a Non-Life insurance company under Solvency II : Practical calculations under the Cost of Capital approach*

[14] DECUPERE Sophie (2011) - *Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II*

[15] LECREUX Delphine (2010) - *Le capital réglementaire issu de la formule standard : étude des dernières nouveautés issues du QIS 5*

[16] LEFUMAT Corinne (2004) - *Impact du changement de réglementation dans le calcul de la marge de solvabilité : Applications à des modèles internes*

[17] REVELEN Julien (2011) - *"Replicating Portfolio" et capital économique en assurance vie*

[18] VENTURI Jonathan (2012) - *Etude d'allocation d'actifs avec prise en compte du risque de crédit*

Supports de cours

[19] DELYON Bernard - *Régression - Cours de deuxième année de master Université Rennes I*

[20] JUILLARD Marc - *Gestion et Mesure des risques*

[21] MASIELLO Esterina - *Modèles linéaires généralisés*

[22] PLANCHET Frédéric - *Modèles financiers et analyses de risques dynamiques en assurance*

[23] VITO Ricci - *Fitting distributions with R*

Annexe A - Extraits du Code des Assurances

Evaluation des placements :

Article R332-19 :

I. Les valeurs amortissables énumérées aux 1^{er}, 2^{me}, 2^{me} bis et 2^{me} ter de l'article R. 332-2, autres que les obligations indexées, les parts de fonds communs de créance et les titres participatifs, sont inscrites à leur prix d'achat à la date d'acquisition.

Lorsqu'un instrument financier à terme est utilisé dans les conditions définies à l'article R. 332-46 et qu'il est lié à l'achat d'un titre ou d'un groupe de titres de même nature, la valeur de réalisation de l'instrument est prise en compte dans le prix d'achat de ce titre ou de ce groupe de titres.

Lorsque le prix d'achat de ces titres est supérieur à leur prix de remboursement, la différence est amortie sur la durée de vie résiduelle des titres.

Lorsque le prix d'achat de ces titres est inférieur à leur prix de remboursement, la différence est portée en produits sur la durée de vie résiduelle des titres. L'entreprise peut décider de ne pas appliquer les dispositions du présent alinéa aux titres acquis avant le 1^{er} janvier 1992. Le choix ainsi effectué par l'entreprise s'applique à l'ensemble des titres acquis avant cette date.

Le prix d'achat et le prix de remboursement s'entendent hors intérêt couru.

Lors de l'arrêté comptable, les moins-values latentes ressortant de la différence entre la valeur comptable, diminuée des amortissements et majorée des produits mentionnés aux deuxième et troisième alinéas du I, et la valeur de réalisation des titres correspondants évaluée conformément à l'article R. 332-20-1, ne font pas l'objet d'une provision.

(...)

Article R332-20 :

A l'exception des valeurs inscrites comme il est dit à l'article R. 332-19, les actifs mentionnés à l'article R. 332-2 et les autres placements financiers et immobiliers sont inscrits au bilan sur la base du prix d'achat ou de revient, dans les conditions ci-après :

a) Les valeurs mobilières et les parts de fonds communs de placement sont retenues pour leur prix d'achat. Lorsqu'un instrument financier à terme est utilisé dans les conditions définies à l'article R. 332-46 et qu'il est lié à l'achat d'un titre ou d'un groupe de titres de même nature, la valeur de réalisation de l'instrument est prise en compte dans le prix d'achat de ce titre ou de ce groupe de titres. Le prix d'achat s'entend hors intérêt couru ;

b) Les immeubles et les parts ou actions des sociétés immobilières ou foncières non inscrites à la cote d'une bourse de valeurs d'un Etat membre de l'organisation de coopération et de développement économiques sont retenus pour leur prix d'achat ou de revient ou, dans les conditions fixées dans

chaque cas par l'Autorité de contrôle des assurances et des mutuelles, pour une valeur déterminée après expertise effectuée conformément à l'article R. 332-23. (...)
(...)

Annexe B - Spécificités des IML 2 sur le SCR de marché

Sous-module Action

La formule standard présentée dans le ILM2 définit un choc action comme la somme non linéaire d'un choc :

- D'actions de Type 1 : Titres cotés de l'EEE ou de l'OCDE, pour un choc de 39 % + Ajustement Symétrique (SA)
- D'actions de Type 2 : Autres titres, pour un choc de 49 % + SA

L'Ajustement Symétrique se calcul à l'aide de la formule suivante :

$$SA = \frac{1}{2} \times \left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\% \right)$$

Avec :

- AI : Valeur moyenne des 36 derniers mois
- CI : Niveau actuel de l'indice action de référence

Pour les participations stratégiques et les engagements de retraite, le choc est de 22 %, aussi bien pour les actions de Type 1 que les actions de Type 2.

Ce SCR bénéficie du principe de diversification, à travers une corrélation de 75 % entre les deux types d'action. Il est calculé de la façon suivante :

$$SCR_{action} = \sqrt{SCR_{action,Type1}^2 + 2 \times 0.75 \times SCR_{action,Type1} \times SCR_{action,Type2} + SCR_{action,Type2}^2}$$

Sous-module Immobilier

La formule standard définit un choc à la baisse instantané sur la valeur de marché du bien immobilier.

Deux types de chocs :

- Immobilier physique ou Titre non financé avec un effet de levier : choc immobilier de 25 %
- Fond immobilier ou Titre financé avec effet de levier : choc action Type 1 ou 2

Sous-module Change

Chaque devise étrangère se voit appliquer un choc de 25 % contre l'euro aussi bien à la hausse qu'à la baisse, mais seul le choc maximum est conservé.

Un traitement spécial est appliqué pour chaque devise liée à l'euro (choc entre 0 % et 2,64 % à la hausse et à la baisse).

Le SCR Change est obtenu en sommant les maximums des chocs instantanés sur chaque monnaie.

Sous-module Spread

La formule standard définit un choc de spread comme la somme de 3 chocs :

- Spread sur obligations et prêts
- Spread sur produits structurés de crédit (ABS)
- sur dérivés de crédit (CDS, CLN, TRS)

Pour les spreads sur obligations et prêts et les spreads sur produits structurés de crédit, la formule suivante est utilisée :

$$SCR_{bonds/rpl} = \sum Valeur\ marché_i \times Sensibilité \times F^{up}(Rating_i)$$

Spread sur obligations et prêts :

Des chocs pleins sont effectués selon les facteurs (notation et sensibilité) du tableau suivant :

Credit quality step <i>duration_i</i>	0	1	2	3	4	5	6
up to 5	0.9 % <i>duration_i</i>	1.1 % <i>duration_i</i>	1.4 % <i>duration_i</i>	2.5 % <i>duration_i</i>	4.5 % <i>duration_i</i>	7.5 % <i>duration_i</i>	7.5 % <i>duration_i</i>
More than 5 and up to 10	4.50% + 0.53 % (<i>duration_i</i> -5)	5.50% + 0.58% (<i>duration_i</i> -5)	7% + 0.70% (<i>duration_i</i> -5)	12.50% + 1.50% (<i>duration_i</i> -5)	22.50% + 2.51% (<i>duration_i</i> -5)	37.50% + 4.20% (<i>duration_i</i> -5)	37.50% + 4.20% (<i>duration_i</i> -5)
More than 10 and up to 15	7.15% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -10)	8.40% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -10)	10.50% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -10)	20% + 1 % (<i>duration_i</i> -10)	35.05% + 1.80 % (<i>duration_i</i> -10)	58.50% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -10)	58.50% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -10)
More than 15 and up to 20	9.65% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -15)	10.90% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -15)	13% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -15)	25% + 1 % (<i>duration_i</i> -15)	44.05% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -15)	61% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -15)	61% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -15)
More than 20	12.15% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -20)	13.40% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -20)	15.50% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -20)	30% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -20)	46.55% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -20)	63.50% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -20)	63.50% + 0.50 % (<i>duration_i</i> -20)
Maximum modified duration (in years)	176	173	169	140	107	73	73

Des chocs réduits s'appliquent pour les covered bonds, pour certaines banques centrales et certains gouvernements.

Des chocs nuls s'appliquent pour la Banque centrale européenne, les banques et gouvernements européens, les banques de développement multilatéral et les organisations internationales.

Spread sur produits structurés de crédit : Titrisation :

Credit quality step	0	1	2	3	4	5	6
Risk factor <i>FUP'_i</i>	7%	16%	19%	20%	82%	100%	100%
Maximum modified duration (in years)	6	5	4	2	1	1	1

Titrisations repackagées :

Credit quality step	0	1	2	3	4	5	6
Risk factor FUP'_i	33%	40%	51%	91%	100%	100%	100%
Maximum modified duration (in years)	3	3	2	1	1	1	1

Spread sur dérivés de crédit :

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC ou moins
Choc à la hausse	1,30%	1,50%	2,60%	4,50%	8,40%	16,20%	5,00%
Choc à la baisse	-75% sur le sous-jacent						

Le maximum des deux chocs est conservé.

Sous-module Taux

La courbe de taux sans risque subit :

- Un choc à la hausse
- Un choc à la baisse

Les courbes choquées sont obtenues en multipliant la courbe de taux actuel respectivement par $(1 + s^{up})$ et $(1 + s^{down})$.

Maturity (in years)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	90
increase	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%	44%	42%	39%	37%	35%	34%	33%	31%	30%	29%	27%	26%	20%
Decrease	75%	65%	56%	50%	46%	42%	39%	36%	33%	31%	30%	29%	28%	28%	27%	28%	28%	28%	29%	29%	20%

Le choc de taux est égal au maximum des deux chocs.

Sous-module Concentration

Le choc de concentration est déterminé par émetteur. La formule standard définit un choc concentration. Le calcul est fonction d'un choc et d'une franchise, tous deux fonctions :

- De la notation ou de la solvabilité de la contrepartie
- De la nature de la contrepartie : Etat (ou garantie par l'Etat), covered bond, immeuble, autres.

On calcule le risque de concentration pour chaque émetteur comme :

$$Conc_i = \text{Max}(0; \frac{E_i}{Actfis} - CT_i) \times g_i \times Actfis \text{ en risque}_i$$

Avec :

- E_i : Exposition nette en cas de défaut de la contrepartie
- CT_i : Seuil de concentration (franchise)
- g_i Facteur de risque (choc)

La franchise et le facteur de risque sont en fonction de la notation :

Notation	AAA & AA	A	BBB	BB ou moins
CTi	3%	3%	1,50%	1,50%
gi	12%	21%	27%	73%

Il y a une absence de corrélation entre les différents émetteurs :

$$SCR_{conc} = \sqrt{\sum Conc_i^2}$$

Sous-module Prime contra-cyclique

Le capital réglementaire pour la prime contra-cyclique, le choc est soumis à la décision de l'EIOPA et dépend de l'état du marché.

Annexe C - Rappels statistiques et mathématiques

Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk permet de tester la validité de la forme paramétrique normale pour un échantillon donné. La statistique du test s'écrit :

$$W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right]^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Où :

- $x_{(i)}$ correspond à la série des données triées.
- $\left[\frac{n}{2}\right]$ est la partie entière du rapport $\frac{n}{2}$
- a_i sont des constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance co-variance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant la loi normale. Ces constantes sont fournies dans des tables spécifiques.

La statistique W peut donc être interprétée comme le coefficient de détermination entre la série des quantiles générées à partir de la loi normale et les quantiles empiriques obtenues à partir des données. Plus W est élevé, plus la compatibilité avec la loi normale est crédible.

Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Jarque-Bera est un test d'hypothèse qui cherche à déterminer si des données suivent une loi normale. On a :

- H_0 : les données suivent une loi normale.
- H_1 : les données ne suivent pas une loi normale.

La statistique du test est :

$$JB = \frac{n - k}{6} \times \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

Avec :

- n = Nombre d'observations
- k = Nombre de variables explicatives si les données proviennent des résidus d'une régression linéaire, sinon $k=0$
- S = Coefficient d'asymétrie : moment d'ordre 3 d'une variable centrée-réduite
- K = Kurtosis : moment d'ordre 4 d'une variable centrée-réduite

Cette statistique JB suit asymptotiquement une loi du Khi-deux à 2 degrés de liberté. Ce test est fréquemment utilisé pour déterminer si les résidus d'une régression linéaire suivent une distribution normale.

QQ-plot

En statistique, un "QQ-plot" est un graphique de probabilité. C'est une méthode graphique utilisée pour comparer deux distributions de probabilité en représentant et en comparant les centiles des deux distributions. Si les distributions comparées sont similaires, les points dans le QQ-plot doivent être approximativement situés le long de la première bissectrice. Si les deux distributions sont reliées de façon linéaire, les points du QQ-plot représentent approximativement une droite mais pas nécessairement le long de la première bissectrice.

De manière plus abstraite, soient deux distributions de probabilité F et G , de quantiles respectifs F^{-1} et G^{-1} , le QQ-plot représente le q^{eme} centile de F par rapport au q^{eme} centile de G pour plusieurs valeurs de q . Ainsi, le QQ-plot est une courbe paramétrique dont les valeurs sont comprises entre $[0, 1]$.

Coefficients de Kurtosis et de Skewness

Skewness

Le coefficient de Skewness mesure le degré d'asymétrie de la distribution. Il est défini comme $S = \frac{[E(X-\mu)^3]}{[\sqrt{E(X-\mu)^2}]^3}$, soit le moment d'ordre trois centré sur le cube de l'écart-type. Il est calculé en pratique de la manière suivante $\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^3$.

Si S est égal à 0, la distribution est symétrique. Si S est plus petit que 0, la distribution est asymétrique vers la gauche. Si S est plus grand que 0, la distribution est asymétrique à droite.

Kurtosis

Le coefficient de Kurtosis mesure le degré d'écrasement de la distribution. Il se définit classiquement comme $K = \frac{E(X-\bar{X})^4}{[E(X-\bar{X})^2]^2}$, soit le rapport entre le moment d'ordre quatre centré et le carré de la variance.

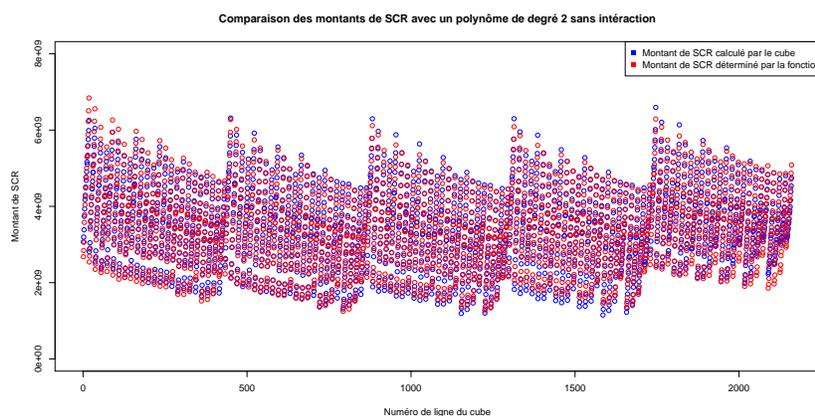
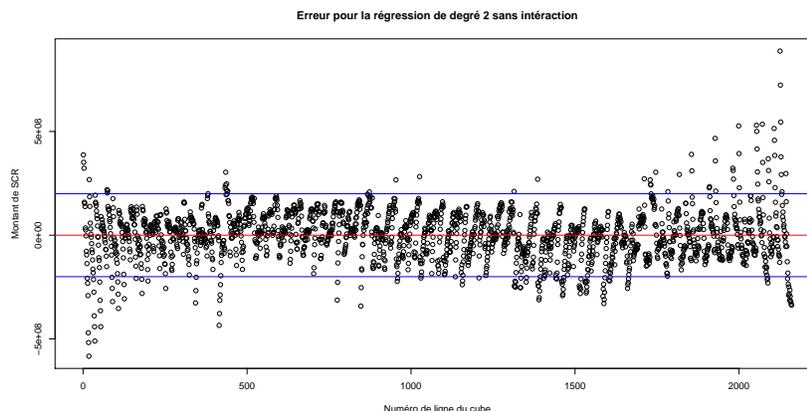
Il est calculé en pratique comme $\left[\frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^4 \right] - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$. Lorsqu'il est positif, cela indique que la distribution est "pointue". Lorsqu'il est négatif, cela indique que la distribution est relativement "écrasée".

Annexe D - Résultats complémentaires sur la recherche de la fonction

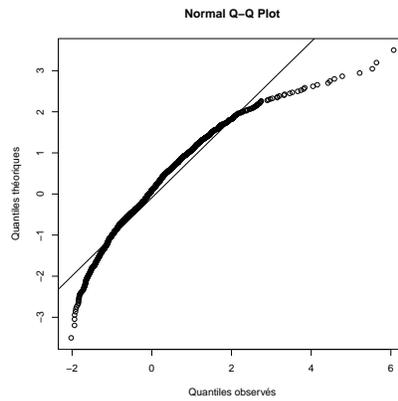
Dans cette annexe nous allons présenter les résultats intermédiaires obtenus dans la phase de recherche de notre fonction. Les résultats concernent les régressions de degré 2 avec et sans interaction et la fonction de degré 3 sans interactions. Nous allons présenter les résultats de ces régressions. L'objectif de ce mémoire était de trouver une fonction polynomiale permettant de projeter avec la plus grande précision le montant du SCR de marché année après année en fonction de la situation économique. Nous avons choisi la fonction avec les résultats statistiques les plus concluant.

Regression de degré 2 sans interaction

Pour cette régression le R^2 obtenu est de 0,9479 et une significativité des coefficients de 75 %. Ci-dessous les erreurs obtenues pour cette régression ainsi que le nuage de points comparant les points de l'hypercube et ceux obtenus par la fonction :



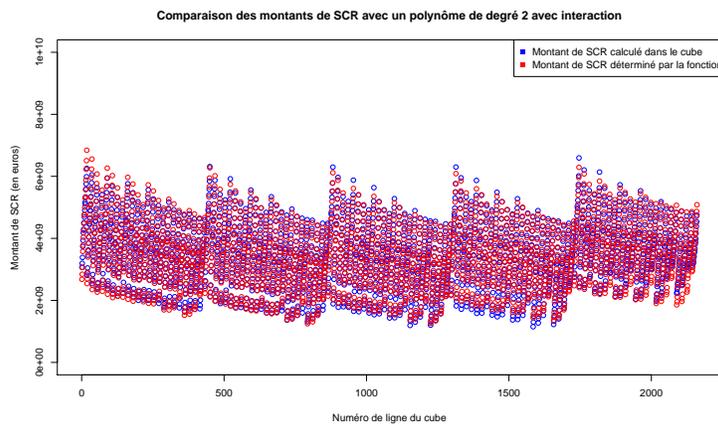
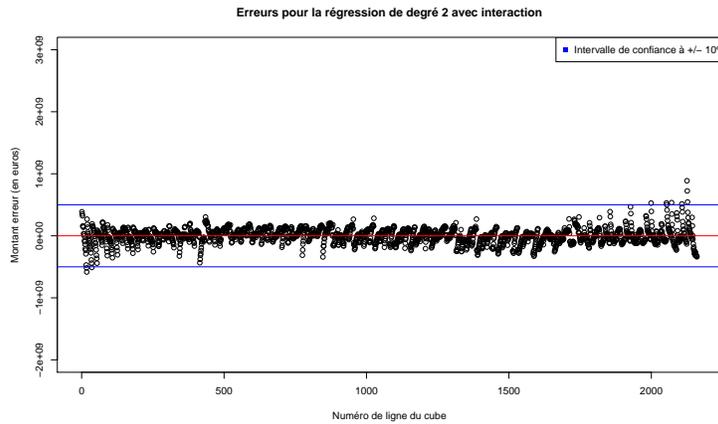
Etude de la normalité des résidus :



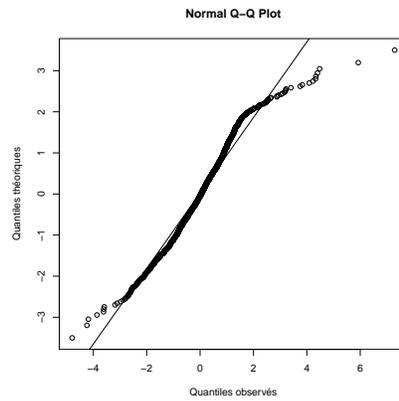
Le QQ-plot ainsi que les statistiques des test de Jarque-Bera et Shapiro-Wilk ($< 0,005$) confirment le caractère non normal des résidus de ce modèle.

Regression de degré 2 avec interaction

Pour cette régression le R^2 obtenu est de 0,9859 et une significativité des coefficients de 78 %. Ci-dessous les erreurs obtenues pour cette régression ainsi que le nuage de points comparant les points de l'hypercube et ceux obtenus par la fonction :



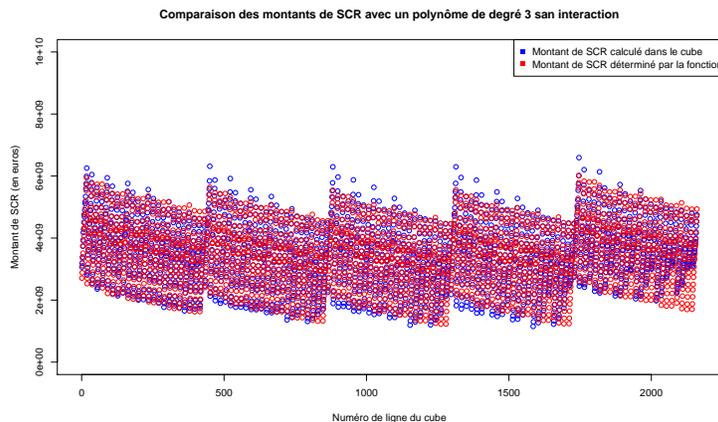
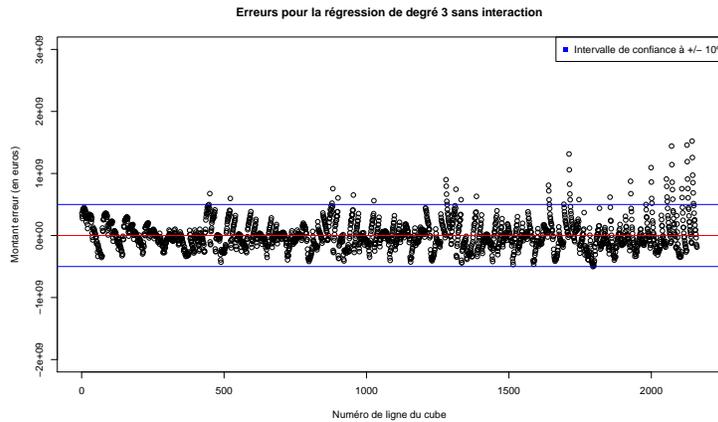
Etude de la normalité des résidus :



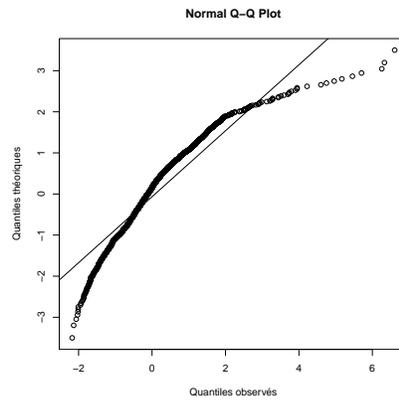
Le QQ-plot laisse apparaître un caractère normal des résidus de la régression, ce qui n'est pas validé par les tests de normalité de Jarque-Bera et de Shapiro-Wilk. Ce modèle n'a pas non plus été retenu. Passons au degré 3.

Regression de degré 3 sans interaction

Pour cette régression le R^2 obtenu est de 0,9501 et une significativité des coefficients de 78 %. Ci-dessous les erreurs obtenues pour cette régression ainsi que le nuage de points comparant les points de l'hypercube et ceux obtenus par la fonction :



Etude des résidus :



Le QQ-plot laisse supposer qu'une régression polynomiale de degré 3 sans interaction n'est pas suffisante. Le choix s'est donc porté dans ce mémoire sur une fonction polynomiale de degré 3 avec des interactions de degré 1 et 2.