

Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Thibaut BIDEAULT

Titre : Calcul de la marge pour risque en assurance non-vie

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA

Lionel LAURENT
Edith BOCQUAIRE

Membres présents du jury de l'ISFA

Xavier MILHAUD

Signature

Entreprise

PRIM'ACT SAS

42 av. de la Grande Armée

Nom : Prim'Act

75017 PARIS

Signature :

Tél. : 01 42 22 11 00

R.C.S. PARIS 791 352 784

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : Frédéric PLANCHET

Signature :

Invité

Nom :

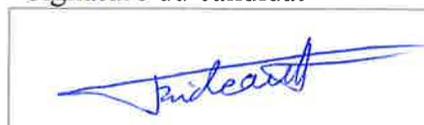
Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

 G. DELION

Signature du candidat



Secrétariat :

Mme Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Geoffroy DELION, sans qui je n'aurais pas eu l'opportunité d'effectuer mon stage de fin d'études au sein du cabinet de conseil Prim'Act.

Je souhaite remercier tout particulièrement Frédéric PLANCHET, associé chez Prim'Act, et Elie IFERGAN, consultant chez Prim'Act, pour m'avoir encadré tout au long de ce mémoire, pour leurs disponibilités, leurs remarques et le suivi régulier au cours de ces 4 mois de stage.

Je remercie également Sugiban RATNASOTHY pour sa disponibilité et son aide ainsi que l'ensemble des collaborateurs de Prim'Act pour leur accueil et leur conseils.

Je remercie l'ensemble du corps professoral de l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour la qualité de leurs enseignements, ainsi que tous les professeurs rencontrés durant mes années d'études.

Je tiens également à remercier ma famille et Adeline ROBAT pour m'avoir soutenu et aidé tout au long de mes études.

Résumé

Mots clés : Marge pour risque, Provisions techniques, Assurance non-vie, Risque de souscription, GLM, Régression log-normale, Modèle bayésien

Le calcul des provisions techniques sous la norme solvabilité II consiste, dans le cas des risques non répliquables, en la somme de la meilleure estimation des provisions et d'une marge pour risque. Beaucoup d'ouvrages et de mémoires portent sur le calcul de cette meilleure estimation mais très peu sur le calcul de la marge pour risque. Ce calcul est assez complexe car il nécessite une projection du capital de solvabilité requis jusqu'à extinction des engagements de l'assureur. C'est pourquoi, dans le cas de contrats à passifs longs, il est pratiquement impossible de calculer rigoureusement la marge pour risque.

Pour remédier à ce genre de problèmes, l'*EIOPA* a proposé cinq méthodes de calcul de la marge pour risque afin d'atténuer la complexité du calcul et d'aider les assureurs et réassureurs.

Majoritairement, la méthode de proportionnalité par rapport à la meilleure estimation et la méthode de durée par rapport à la meilleure estimation (troisième et quatrième simplification) sont les plus utilisées par les entreprises de réassurances et d'assurance vie et non-vie. Mais ces deux méthodes sont-elles les plus pertinentes ?

Le but de ce mémoire est de comparer plusieurs méthodes de calcul de la marge pour risque, à savoir, les simplifications définies par le règlement délégué (UE) 2015/35 [7] avec des méthodes analytiques.

Pour cela et pour éviter toute complication de calcul, nous utiliserons le cadre de travail choisi par M. DAYA-VIOSSAT [10] pour son mémoire. Cette étude sera donc effectuée dans le cadre d'une assurance non-vie et nous considérerons uniquement le risque de réserve du risque de souscription non-vie.

A partir de ces hypothèses, nous utiliserons trois modèles analytiques, à savoir une régression log-normale, un GLM avec une loi de Poisson surdispersée et un modèle bayésien. Nous calculerons ensuite la marge pour risque à partir des *proxy* 3, 4 et 5 du règlement délégué (UE) 2015/35 afin de les comparer avec les résultats obtenus par nos modèles analytiques.

Abstract

Mots clés : Risk margin, Technical provisions, Non-life insurance, Underwriting risk, GLM, Log-normal regression, Bayesian model

Solvability II technical provisions are calculated as the sum between the best estimate of provisions and the risk margin. Many works and reports explain the best estimated calculation but few explain the risk margin calculation. This calculation is complicated because it needs a projection of Solvency Capital Requirement until the end of insurer obligations. That is why, in case of contracts with long liabilities it is nearly impossible to calculate the risk margin.

To solve this kind of problem, EIOPA detailed five methods for the risk margin calculation that lower the complexity of this calculation and help both insurers and reinsurers.

The proportional and duration method (second and third simplifications) are the most common in reinsurance and insurance company. But the question is which one of these methods is the most relevant ?

The purpose of this essay is to compare several methods of the risk margin calculation, to know, simplifications define in the commission delegated regulation (UE) 2015/35 [7] with analytical models. For this and in order to avoid unnecessary complication in the calculation, we will use the working environment choose by M. DAYA-VIOSSAT[10]. This study will focus on a non-life insurer and will only consider the reserve risk of the non-life underwriting risk.

With these hypothesis, we will use three analytical models : a log-normal regression, GLM with an overdispersed Poisson distribution and a bayesien model. After this, we will calculate the risk margin using proxies 3, 4 and 5 of the commission delegated regulation (UE) 2015/35 in order to compare with results obtain by our analytical models.

Synthèse

Objectif du mémoire

Dans ce mémoire nous nous intéressons au calcul de la marge pour risque en assurance non-vie.

Dans le cadre de la directive Solvabilité II, les sociétés d'assurance et les mutuelles doivent prendre en compte un nouvel élément dans le calcul de leurs provisions techniques, à savoir la marge pour risque.

Le calcul de la marge pour risque est fondé sur une projection du capital de solvabilité requis qui tient compte de l'atténuation du risque découlant des contrats de réassurance et des véhicules de titrisation. Au vu de cette définition plutôt complexe, l'*EIOPA* a présenté cinq méthodes de calcul différentes dont quatre simplifications :

- 1) Définition originale
- 2) Simplification de certains modules ou sous-modules de risque
- 3) Simplification par proportionnalité
- 4) Simplification par duration
- 5) Simplification par pourcentage de la meilleure estimation

Ce mémoire propose donc d'étudier la pertinence des quatre simplifications et de mettre en place des modèles analytiques pour calculer la marge pour risque à partir de sa définition.

Marge pour risque

D'après le règlement délégué (UE) 2015/35, l'évaluation de la marge pour risque se fait à partir d'une approche coût du capital, c'est-à-dire qu'elle est définie par la valeur actuelle de l'immobilisation du capital sur chaque période au coût du capital.

Ce taux en capital a été fixé par l'*EIOPA* à 6 %.

La formule de calcul de la marge pour risque est la suivante :

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f \otimes \mathbb{P}^a} \left[\frac{SCR_{RU}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} \right]$$

avec :

CoC : Taux du coût du capital fixé 6 %

$SCR_{RU}(t)$: Capital de solvabilité requis de l'entreprise de référence pour l'année t

r_{t+1} : Taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance t + 1 années

\mathbb{Q}^f : Probabilité risque neutre de l'espace probabilisé $(\Omega^f, (F_t^f)_{t \geq 0}, \mathbb{Q}^f)$ qui caractérise le risque financier

\mathbb{P}^a : Probabilité historique de l'espace probabilisé $(\Omega^a, (F_t^a)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^a)$ qui caractérise le risque d'assurance

Les capitaux de solvabilité requis pour le calcul de la marge pour risque sont évalués en prenant en compte les éléments suivants :

1) Le risque de souscription vie, non-vie et santé sur l'ensemble des engagements d'assurance

2) Le risque de crédit relatif aux contrats de réassurance, aux arrangements avec les véhicules de titrisation, aux intermédiaires, aux preneurs et à toute autre exposition importante étroitement liée aux engagements d'assurance et de réassurance

3) Le risque de marché non évitable, évalué en considérant à l'actif un portefeuille d'actifs dont le montant est égal à la somme du capital de solvabilité requis et des provisions techniques, nettes de réassurance et de véhicules de titrisation. Les actifs sont sélectionnés de manière à minimiser le capital de solvabilité requis de marché

4) Le risque opérationnel total

5) L'ajustement pour capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques. L'ajustement pour capacité d'absorption des pertes par les impôts différés est exclu du calcul

Dans cette étude nous nous limitons uniquement au risque de réserve qui est un composant du risque de souscription.

Modèles analytiques

Dans ce mémoire nous nous proposons d'étudier trois modèles analytiques pour calculer la marge pour risque via sa définition générale.

Régression log-normale

Ce modèle est un modèle classique et facilement mis en place pour compléter des triangles de paiement.

Dans ce modèle nous supposons que les incréments $X_{i,j}$ suivent une loi $\mathcal{LN}(\mu_{i,j}, \sigma^2)$. Nous définissons également les variables aléatoires $(Y_{i,j})$ telle que $Y_{i,j} = \ln X_{i,j}$. Ces variables suivent donc une loi normale de moyenne $m_{i,j}$ et de variance σ^2 avec :

$$m_{i,j} = \alpha_i + \beta_j + m$$

La moyenne et la variance des variables aléatoires $X_{i,j}$ sont donc définies comme suit :

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \mu_{i,j} = \exp\left(m_{i,j} + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ et } V[X_{i,j}] = \mathbb{E}[X_{i,j}]^2 \cdot \exp(\sigma^2 - 1)$$

GLM avec loi de Poisson surdispersée

Ce modèle est un modèle classique pour compléter des triangles de paiement qui permet d'obtenir les mêmes résultats que la méthode de Chain Ladder.

Dans ce modèle, nous supposons que les variables aléatoires que nous cherchons sont indépendantes. Cela revient à dire que les incréments $X_{i,j}$ admettent une distribution issue d'une structure exponentielle. La densité de $X_{i,j}$ s'écrit de la façon suivante :

$$f(x_{i,j}, \theta_{i,j}, \phi) = \exp\left(\frac{x_{i,j}\theta_{i,j} - b\theta_{i,j}}{\phi} + d(x_{i,j}\phi)\right)$$

Nous avons également l'espérance et la variance de $X_{i,j}$ définies comme suit :

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \lambda_{i,j} \text{ et } V[X_{i,j}] = \phi\lambda_{i,j}$$

avec

$$\lambda_{i,j} = \exp(m + \alpha_i + \beta_j)$$

Modèle Chain Ladder log-normal bayésien

Nous considérons un modèle Chain Ladder log-normal bayésien pour compléter le triangle de paiements. Ce type de modèle fait l'objet de plus en plus d'études et ces études montrent qu'ils apportent des résultats intéressants. Les hypothèses de ce modèle

sont les suivantes :

1) Pour $\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1})$ et $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})$ donnés, les incréments $X_{i,j}$ sont indépendants et pour $j = 0, \dots, n-1$, les $\xi_{i,j+1}$ sont indépendants et satisfont $\xi_{i,j+1} \sim \mathcal{N}(\Phi_j, \sigma_j^2)$. Avec $\xi_{i,j+1} = \log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right)$ et $C_{i,j}$ les paiements cumulés.

2) $\sigma > 0$ est déterministe et les Φ_j , pour $j = 0, \dots, n-1$, sont indépendants et normalement distribués, $\Phi_j \sim \mathcal{N}(\phi_j, s_j^2)$.

3) $(C_{1,0}, \dots, C_{n,0})$ et Φ sont indépendants.

Synthesis

Purpose of the essay

In this essay we study the risk margin calculation in non-life insurance. In the framework of the Solvency II directive, insurance companies must take into account a new element in their technical provisions calculation : the risk margin. The calculation of the risk margin is based on a projected solvency capital requirement that takes into account the mitigation of risk arising from reinsurance contracts and securitization vehicles. Given this definition, the EIOPA detailed five methods of the risk margin calculation whose four simplifications :

- 1) Original definition
- 2) Simplification of some risk modules or sub-modules
- 3) Simplification by proportionality
- 4) Simplification by duration
- 5) Simplification by percentage of the best estimate

This essay will study the relevance of these simplifications and to implement analytical models in order to calculate the risk margin from its definition.

Risk margin

According to the commission delegated regulation (UE) 2015/35, the risk margin evaluation is made by the cost of capital approach, that is, it is defined by the present value of the capital asset over each period at the cost of capital. This rate was fixed by the EIOPA at 6 %.

The formula for calculating the risk margin is as follows :

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f \otimes \mathbb{P}^a} \left[\frac{SCR_{RU}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} \right]$$

with :

CoC : cost of capital rate fixed at 6 %

$SCR_{RU}(t)$: Solvency capital required of the reference company for year t

r_{t+1} : Basic risk-free interest rate for maturity t + 1 years

\mathbb{Q}^f : Probability of neutral risk of probabilized space $(\Omega^f, (F_t^f)_{t \geq 0}, \mathbb{Q}^f)$ which characterizes the financial risk

\mathbb{P}^a : Historical probability of robabilized Space $(\Omega^a, (F_t^a)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^a)$ which characterizes the insurance risk

The solvency capital required to calculate the risk margin is assessed by taking into account the following factors :

- 1) Life, non-life and health underwriting risk on all insurance liabilities
- 2) Credit risk related to reinsurance contracts, arrangements with securitization vehicles, intermediaries, policyholders and other material exposures to the insurance and reinsurance contracts
- 3) The non-avoidable market risk, assessed by taking into account a portfolio of assets equal to the sum of the solvency capital required and the technical reserves, net of reinsurance and securitization vehicles. Assets are selected to minimize the required Solvency Capital Requirement
- 4) Total operational risk
- 5) Adjustment for capacity to absorb losses through technical provisions. The adjustment for the ability to absorb losses from deferred taxes is excluded from the calculation

In this study we limit ourselves only to the reserve risk which is a component of the underwriting risk.

Analytical models

In this paper we propose to study three analytical models to calculate the margin for risk via its general definition.

Log-normal regression

This model is a classic and easily set up model to complete payment triangles. In this model we assume that the increments $X_{i,j}$ follow a law $\mathcal{LN}(\mu_{i,j}, \sigma^2)$. We also define the random variables $(Y_{i,j})$ such as $Y_{i,j} = \ln X_{i,j}$. These variables follow a normal law with a mean of $m_{i,j}$ and a variance of σ^2 with :

$$m_{i,j} = \alpha_i + \beta_j + m$$

The mean and variance of the random variables $X_{i,j}$ are defined as follows :

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \mu_{i,j} = \exp\left(m_{i,j} + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ et } V[X_{i,j}] = \mathbb{E}[X_{i,j}]^2 \cdot \exp(\sigma^2 - 1)$$

GLM with overdispersed Poisson's law

This model is a classic model to complete the payment triangles which allows to obtain the same results as the method of Chain Ladder. In this model, we assume that the random variables we seek are independent. This is equivalent to saying that the increments $X_{i,j}$ admit a distribution from an exponential structure. The density of $X_{i,j}$ is written as follow :

$$f(x_{i,j}, \theta_{i,j}, \phi) = \exp\left(\frac{x_{i,j}\theta_{i,j} - b\theta_{i,j}}{\phi} + d(x_{i,j}\phi)\right)$$

We also have the expectation and variance of $X_{i,j}$ defined as follows :

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \lambda_{i,j} \text{ et } V[X_{i,j}] = \phi\lambda_{i,j}$$

with

$$\lambda_{i,j} = \exp(m + \alpha_i + \beta_j)$$

Model Chain Ladder log-normal bayesian

We consider a Chain Ladder log-normal Bayesian model to complement the payment triangle. This type of model is the subject of more and more studies and these studies show that they bring interesting results.

The assumptions of this model are as follows :

1) For $\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1})$ and $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})$ given, the increments $X_{i,j}$ are independent and for $j = 0, \dots, n-1$, $\xi_{i,j+1}$ are independent and satisfy $\xi_{i,j+1} \sim \mathcal{N}(\Phi_j, \sigma_j^2)$.
With $\xi_{i,j+1} = \log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right)$ and $C_{i,j}$ cumulative payments.

2) $\sigma > 0$ is deterministic and Φ_j , pour $j = 0, \dots, n-1$, are independent and normally distributed, $\Phi_j \sim \mathcal{N}(\phi_j, s_j^2)$.

3) $(C_{1,0}, \dots, C_{n,0})$ and Φ are independent.

Sommaire

1	Provisions techniques et marge pour risque	16
1.1	Provisions techniques	16
1.1.1	Flux de trésorerie couvrables	17
1.1.2	Flux de trésorerie non couvrables	18
1.2	Historique de la marge pour risque	19
1.3	Calcul de la marge pour risque	20
1.3.1	Hypothèses	20
1.3.2	Règlementation et formule	21
1.3.3	Simplification du calcul de la marge pour risque	23
1.3.4	Simplification des modules et des sous-modules de risque	27
1.4	Répartition des méthodes	32
2	Hypothèses et méthodes de calcul	34
2.1	Présentation des modèles	35
2.1.1	Définitions et notations	35
2.1.2	Régression log-normale	38
2.1.3	Modèle GLM avec loi de Poisson surdispersée	41
2.1.4	Le modèle bayésien	43
2.2	La méthode du Bootstrap	45
2.2.1	La théorie de Mack	45
2.2.2	Méthode du Bootstrap associée à Mack	46
3	Application et Résultats	48
3.1	Modèle global	49
3.1.1	Les données	50
3.1.2	Comparaison des résultats	50
3.2	Résultats	53
3.2.1	Régression log-normale	54
3.2.2	GLM avec loi de Poisson surdispersé	60
3.2.3	Modèle bayésien	65
3.2.4	Comparaison des modèles analytiques	70
3.3	Interprétation des résultats	74
3.3.1	Résultats des proxy	74

3.3.2	Approche standard	76
3.3.3	Modèles analytiques	76
4	Conclusion générale	79
4.1	Proxy	80
4.2	Modèles analytiques	80
4.3	Limites et extensions	81
A	Annexes	85
A.1	Triangles de données	85
A.2	Résultats détaillés	86
A.2.1	GLM avec loi de Poisson surdispersée	88
A.2.2	Modèle bayésien	90
A.3	Matrices de corrélation	92
A.3.1	Branche santé	92
A.3.2	Branche responsabilité employeur	93
A.4	Taux EIOPA	95
A.5	Description des lignes d'activités	96
A.5.1	Santé	96
A.5.2	Responsabilité employeur	96

Introduction

La directive solvabilité II est entrée en vigueur le 1er janvier 2016. Cependant des ajustements restent à faire par les compagnies d'assurance et les mutuelles et des justifications doivent être améliorées concernant les méthodes employées pour les nouveaux calculs demandés par solvabilité II, notamment le calcul de la marge pour risque.

Dans le cas de risques non répliquables, le passif d'une compagnie d'assurance est composé en majorité par les provisions techniques. Ces provisions sont elles-mêmes composées de la somme de la meilleure estimation et de la marge pour risque. Le calcul de ces provisions doit être fait minutieusement car une variation aussi minime soit-elle, peut avoir d'énormes conséquences. Un exemple est donné dans l'ouvrage de Wüthrich & Merz [13], selon lequel une baisse de 1 % du montant des provisions peut amener à un résultat comptable du double de sa valeur sans cette baisse. Il est donc crucial d'estimer au mieux ces provisions. Mais leur calcul est complexe. En effet, le calcul de la marge pour risque, une composante des provisions techniques, nécessite une projection des capitaux de solvabilité requis futurs ainsi qu'une appréciation globale de celle-ci et non contrat par contrat. C'est pour cela que, à la suite des spécifications techniques du QIS 4 [5] l'*EIOPA* a présenté cinq méthodes pour le calcul de cette marge. Mais laquelle d'entre elles est la plus pertinente ?

L'objectif de ce mémoire est, dans un premier temps, de proposer des modèles permettant de calculer la marge pour risque via sa définition générale sans utiliser les méthodes de l'*EIOPA*. Dans un second temps, il permettra de déterminer l'impact des différentes méthodes de calcul de la marge pour risque proposées par l'*EIOPA* sur l'appréciation de la solvabilité.

Ce mémoire sera composé de trois principales parties :

- 1) Provisions techniques et marge pour risque
- 2) Hypothèses et méthodes de calcul
- 3) Application et résultats

La première partie se compose d'une introduction des provisions techniques dans Solvabilité II, suivie d'une présentation de la marge pour risque et de sa réglementation, pour finir par les simplifications de calculs établies par l'*EIOPA*.

La seconde partie présente les hypothèses, les équations à résoudre et les différents modèles utilisés pour le calcul de la marge pour risque lors de l'application.

La troisième partie propose d'abord une rapide vue d'ensemble du processus de calcul. Ensuite, les résultats sont présentés et commentés.

Provisions techniques et marge pour risque

Dans cette première partie, nous nous proposons de présenter tout d'abord les provisions techniques sous solvabilité II qui sont la somme de la meilleure estimation et de la marge pour risque. Nous nous focaliserons ensuite sur la marge pour risque, qui est le sujet de ce mémoire, en détaillant la formule à utiliser par les compagnies d'assurance et de réassurance pour la calculer.

Etant donné la difficulté de ce calcul, l'*EIOPA* a proposé cinq simplifications. Nous étudierons donc ces simplifications et présenterons les hypothèses nécessaires pour chacune d'entre elles.

1.1 Provisions techniques

Contrairement à la directive Solvabilité I, sous solvabilité II les provisions techniques sont évaluées de façon cohérente avec le marché et elles correspondent au montant actuel que l'entreprise devrait payer si elle transférait immédiatement ses engagements à une autre entité, en quelque sorte, ces provisions représentent une valeur de transfert vers un organisme externe.

Dans le dispositif solvabilité II, le principe de calcul des provisions techniques repose sur la distinction entre deux catégories de flux de trésorerie définis dans le règlement délégué (UE) 2015/35 [7] :

- les flux de trésorerie couvrables
- les flux de trésorerie non couvrables

Dans le premier cas, les provisions techniques correspondent au prix de la couverture financière, répliquée à partir d'instruments financiers issus d'un marché profond, liquide et transparent, répliquant les flux futurs d'assurance. Dans le second cas, les provisions techniques correspondent à la somme de la meilleure estimation et de la marge pour risque.

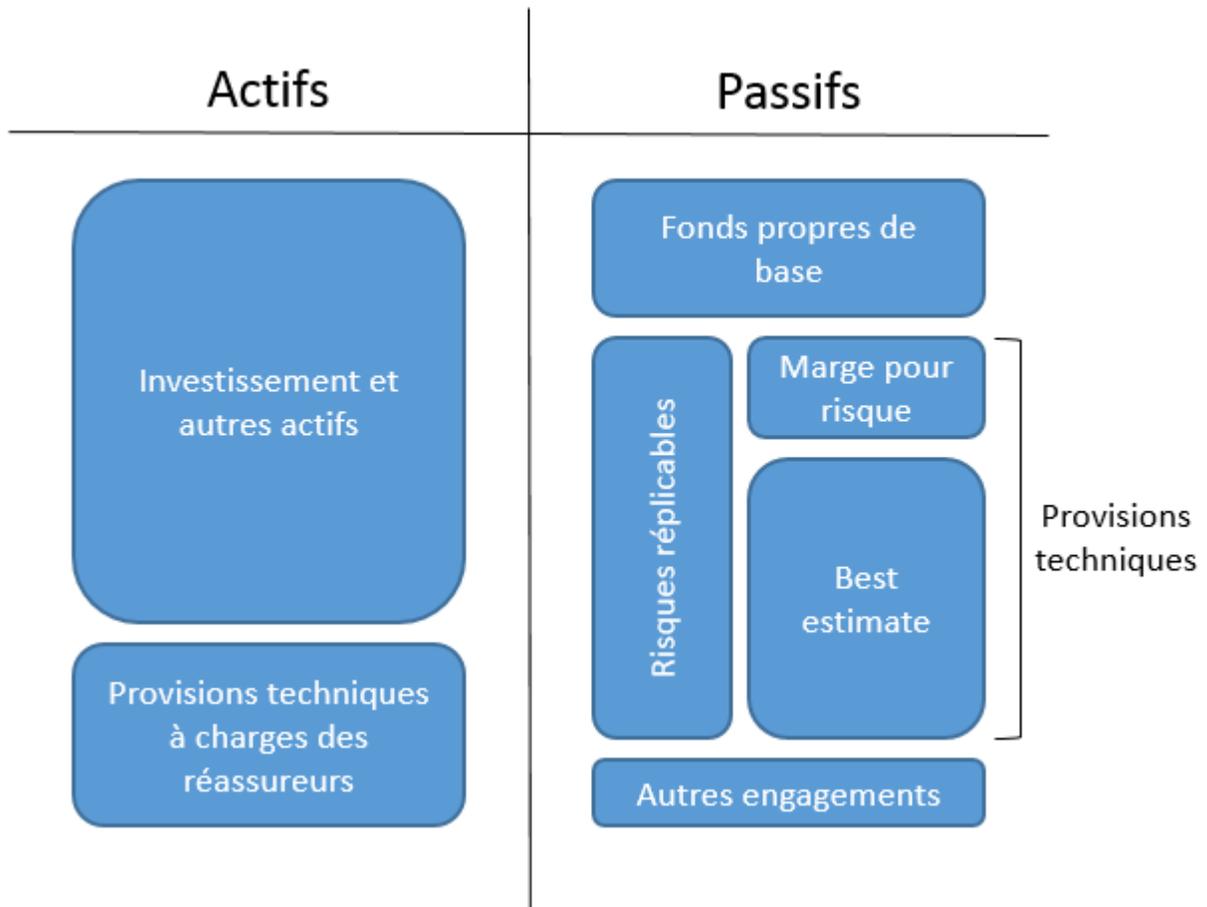


FIGURE 1 – Bilan solvabilité II

1.1.1 Flux de trésorerie couvrables

Les futurs flux de trésorerie sont considérés couvrables lorsqu'ils peuvent être répliqués en utilisant des instruments financiers qui sont observés sur un marché profond, liquide et transparent. Les instruments financiers doivent répliquer complètement tous les paiements possibles correspondant aux flux de trésorerie du passif, prenant en compte l'incertitude du montant et de la date de ces paiements.

Une réplification ou couverture parfaite élimine complètement tous les risques associés au passif. En pratique, il est difficile d'effectuer une couverture/réplification parfaite et dans ce cas, si le risque non éliminé est négligeable, l'entreprise peut considérer les flux de trésorerie comme couvrables.

Les conditions où les flux de trésorerie peuvent être considérés comme couvrables peuvent inclure, par exemple, quelques options et garanties intégrées dans des contrats d'assurance vie, quelques unités de compte (actions indexées par exemple) de contrats d'assurance vie, flux de trésorerie où aucune incertitude existe sur le montant ou la date de paiement, etc...

Pour un portefeuille couvert ou répliqué le principe de non arbitrage implique que la valeur de marché du flux de trésorerie couvert doit être égale à la valeur de marché du portefeuille couvert ou répliqué concerné.

Un marché est défini profond, liquide et transparent si :

- 1) Les participants au marché peuvent exécuter rapidement des volumes larges de transactions avec peu d'impact sur les prix
- 2) Les cours actuels et les informations de devis sont facilement disponibles pour le public
- 3) Les propriétés 1) et 2) sont considérées permanentes

1.1.2 Flux de trésorerie non couvrables

Lorsque des flux de trésorerie contenant des risques non couvrables (due à des marchés financiers incomplets) ou non financiers (due aux options et garanties) ne peuvent pas être couverts sur un marché profond, liquide et transparent, les flux doivent être évalués en utilisant directement les prix de marché observables (pour les risques financiers non couvrables). Pour les risques non financiers, les flux doivent être évalués avec les hypothèses de la meilleure estimation.

La meilleure estimation correspond au montant probable actualisé au taux sans risque des flux futurs de trésorerie liés aux différents contrats (entrants et sortants).

Selon la législation, la marge pour risque constitue une règle de prudence dans le calcul des provisions techniques. Concrètement, elle représente le coût du capital que devrait utiliser l'assurance cessionnaire pour couvrir son exigence de capital jusqu'à l'extinction de son passif.

Pour le calcul de la marge pour risque et de la meilleure estimation des provisions techniques, les entreprises d'assurance et de réassurance comptabilisent les engagements d'assurance ou de réassurance à la date à laquelle l'entreprise devient partie au contrat

qui génère l'engagement ou à laquelle la couverture d'assurance ou de réassurance commence, la première de ces deux dates étant retenue. Les entreprises d'assurance et de réassurance ne comptabilisent que les engagements entrants dans les limites du contrat.

Les risques financiers non couvrables incluent, par exemple, différents types d'options et garanties financières intégrés dans des contrats d'assurance vie qui ne sont pas échangés sur les marchés financiers, les risques où la durée diffère énormément des durées observées sur les marchés financiers, les instruments financiers échangés qui ne sont pas disponibles en quantité suffisante, etc...

1.2 Historique de la marge pour risque

Pendant plusieurs années, les actuaires ont utilisé différentes méthodes pour considérer le risque dans l'évaluation de leur passif. Dans ces méthodes, la marge pour risque a été, implicitement ou explicitement, intégrée dans les hypothèses ou les modèles utilisés. Les approches pour déterminer la marge pour risque ont été regroupées en quatre familles (voir l'article de l'Association Actuarielle Internationale) :

1) La méthode du quantile qui utilise des mesures de risque telles que la *Value At Risk*, ou encore la *Tail Value At Risk*. La marge pour risque est alors définie comme la différence entre la mesure du risque des paiements futurs actualisés et la meilleure estimation.

2) L'approche du coût du capital qui définit la marge pour risque comme la valeur des capitaux de solvabilité actuels et futurs dans le cas des risques non répliquables. La marge pour risque sert alors de protection contre des éventuelles pertes durant le *run-off* du passif de l'assurance. C'est cette méthode qui a été retenue par l'*EIOPA* et qui sera donc utilisée dans notre mémoire. Elle sera également plus détaillée par la suite.

3) La méthode d'actualisation qui définit la marge pour risque comme la différence des *cash-flow* espérés actualisés utilisant le taux d'intérêt sans risque minoré d'un ajustement au risque sélectionné et la meilleure estimation.

4) Des méthodes qui utilisent des hypothèses explicites : la marge pour risque est calculée à partir de paramètres prudents et de méthodes simples.

1.3 Calcul de la marge pour risque

D'après le règlement délégué (UE) 2015/35, l'évaluation de la marge pour risque se fait à partir d'une approche coût du capital, c'est-à-dire qu'elle est définie par la valeur actuelle de l'immobilisation du capital sur chaque période au coût du capital. Nous reviendrons sur cette méthode par la suite.

1.3.1 Hypothèses

Le calcul de la marge pour risque repose sur l'ensemble des hypothèses qui sont définies dans l'article 38 du règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission Européenne du 10 octobre 2014 [7] :

1) La totalité du portefeuille d'engagements d'assurance et de réassurance de l'entreprise d'assurance ou de réassurance qui calcule la marge pour risque (entreprise d'origine) est reprise par une autre entreprise d'assurance ou de réassurance (entreprise de référence)

2) Lorsque l'entreprise d'origine exerce simultanément des activités d'assurance vie et non-vie, le portefeuille d'engagements d'assurance se rapportant à des activités d'assurance vie et des engagements de réassurance vie, et le portefeuille d'engagements d'assurance se rapportant à des activités d'assurance non-vie et des engagements de réassurance non-vie sont repris séparément par deux entreprises de référence différentes

3) Le transfert des engagements d'assurance et de réassurance comprend tous les contrats de réassurance et arrangements avec des véhicules de titrisation se rapportant à ces engagements

4) L'entreprise de référence n'a pas d'engagement d'assurance ou de réassurance ni de fonds propres avant le transfert

5) Après le transfert, l'entreprise de référence n'assume aucun nouvel engagement d'assurance ou de réassurance

6) Après le transfert, l'entreprise de référence lève des fonds propres éligibles d'un montant égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance sur leur durée de vie

7) Après le transfert, l'entreprise de référence dispose d'actifs dont le montant est égal à la somme de son capital de solvabilité requis et des provisions techniques, nette des montants recouvrables au titre des contrats de réassurance et des véhicules de titrisation

8) Les actifs sont sélectionnés de manière à minimiser le capital de solvabilité requis pour le risque de marché auquel l'entreprise de référence est exposée

9) Dans le respect des points 6) et 7), l'entreprise de référence adoptera de futures décisions de gestion cohérentes avec les futures décisions de gestion de l'entreprise d'origine

1.3.2 Règlements et formule

Le calcul de la marge pour risque est fondé sur une projection du capital de solvabilité requis qui tient compte de l'atténuation du risque découlant des contrats de réassurance et des véhicules de titrisation.

Coût du capital (*Cost of Capital*)

Le taux du coût du capital est le taux annuel qui doit être appliqué au capital requis sur chaque période. Il correspond au taux supplémentaire, au-delà du taux sans risque, qu'une compagnie supporte du fait de l'immobilisation du capital de solvabilité requis.

Le taux du coût du capital a été calibré de manière à être cohérent avec les hypothèses faites par l'entreprise de référence. Il ne dépend pas de la solvabilité réelle de l'entreprise d'origine et se doit d'être un taux long terme reflétant à la fois des périodes de stabilité et des périodes de stress.

Ce taux a été fixé par l'*EIOPA* à 6 %.

Marge pour risque global

La marge pour risque global se calcule à partir de la formule suivante :

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f \otimes \mathbb{P}^a} \left[\frac{SCR_{RU}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}} \right]$$

avec :

CoC : Taux du coût du capital fixé 6 %

$SCR_{RU}(t)$: Capital de solvabilité requis de l'entreprise de référence pour l'année t

r_{t+1} : Taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance t + 1 années

\mathbb{Q}^f : Probabilité risque neutre de l'espace probabilisé $(\Omega^f, (F_t^f)_{t \geq 0}, \mathbb{Q}^f)$ qui caractérise le risque financier

\mathbb{P}^a : Probabilité historique de l'espace probabilisé $(\Omega^a, (F_t^a)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^a)$ qui caractérise le risque d'assurance

Les capitaux de solvabilité requis pour le calcul de la marge pour risque sont évalués en prenant en compte les éléments suivants :

1) Le risque de souscription vie, non-vie et santé sur l'ensemble des engagements d'assurance

2) Le risque de crédit relatif aux contrats de réassurance, aux arrangements avec les véhicules de titrisation, aux intermédiaires, aux preneurs et à toute autre exposition importante étroitement liée aux engagements d'assurance et de réassurance

3) Le risque de marché non évitable, évalué en considérant à l'actif un portefeuille d'actifs dont le montant est égal à la somme du capital de solvabilité requis et des provisions techniques, nettes de réassurance et de véhicules de titrisation. Les actifs sont sélectionnés de manière à minimiser le capital de solvabilité requis de marché

4) Le risque opérationnel total

5) L'ajustement pour capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques. L'ajustement pour capacité d'absorption des pertes par les impôts différés est exclu du calcul

Le risque de marché non évitable, correspond au risque de duration pour les passifs longs et couvre en particulier le risque de non adéquation actif-passif dès lors que la maturité des passifs d'assurance dépasse la maturité des titres obligataires disponibles sur le marché.

Il peut être considéré comme nul pour les engagements d'assurance non-vie et les engagements d'assurance vie à court et moyen terme.

Marge pour risque par ligne d'activité

La marge pour risque est un élément qui se calcule au global mais qui doit être calculée par ligne d'activité de manière à obtenir le montant des provisions techniques pour chacune des lignes d'activités.

L'allocation de la marge pour risque doit s'effectuer en fonction de la contribution de chaque ligne d'activité du capital de solvabilité requis sur la durée de vie du portefeuille de contrats.

Si une méthode d'allocation proportionnelle est retenue et qu'il est considéré que la contribution de chaque ligne d'activité au capital de solvabilité requis varie peu dans le temps alors la marge pour risque associée à la ligne d'activité est déterminée de la manière suivante :

$$RM_{lob} = RM \cdot \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f \otimes \mathbb{P}^a} [SCR_{RU,lob}(0)]}{\sum_{lob} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f \otimes \mathbb{P}^a} [SCR_{RU,lob}(0)]}$$

avec :

RM_{lob} : Marge pour risque pour une ligne d'activité

$SCR_{RU,lob}(0)$: Capital de solvabilité requis de la ligne d'activité de l'entreprise de référence pour l'année 0

1.3.3 Simplification du calcul de la marge pour risque

La difficulté de la définition de la marge pour risque nécessite souvent d'utiliser des simplifications lors de la projection des capitaux de solvabilité requis. Ces simplifications sont stipulées dans l'article 58 du règlement délégué (UE) 2015/35. Il existe quatre simplifications possibles pour évaluer la marge pour risque répertoriées en deux types :

- 1) Utilisation d'une méthode simplifiée pour approximer la série des capitaux de solvabilité requis prévisionnels futurs
- 2) Utilisation d'une méthode simplifiée pour approximer directement la somme actualisée des capitaux de solvabilité requis prévisionnels futurs sans calculer séparément chacun de ces montants

Les simplifications ci-dessous ont été définies dans le contexte de la formule standard. Dans le cas où les capitaux de solvabilité requis seraient calculés à partir d'un modèle interne, les simplifications proposées devront être utilisées au cas par cas. Les simplifications qui ont été définies lors des spécifications techniques du QIS 5 [6] et reprise par le règlement délégué (UE) 2015/35 sont les suivantes (classées de la plus complexe à la moins complexe) :

Première méthode : Utilisation de la formule de base

Cette méthode consiste en la projection intégrale de tous les capitaux de solvabilité requis futurs sans simplification, c'est-à-dire en utilisant la formule définie dans la

section précédente. Cette méthode est complexe car il faut modéliser l'ensemble des capitaux de solvabilité requis futurs que nous avons définis précédemment puis les projeter jusqu'à la fin des engagements de l'assureur.

Deuxième méthode : Simplification de certains modules ou sous-modules de risque

Cette méthode consiste à approximer certains ou l'ensemble des modules ou sous-modules de risque utilisés pour le calcul des capitaux de solvabilité requis futurs. Afin d'utiliser cette technique, il est nécessaire d'analyser la possibilité de mettre en place des simplifications ou approximations sur les modules.

Troisième méthode : Simplification du capital de solvabilité requis global pour chaque année

Cette méthode consiste à approximer le capital de solvabilité requis global pour chaque année en utilisant une approche proportionnelle. Elle est basée sur l'hypothèse que le capital de solvabilité requis à chaque date est proportionnel à la meilleure estimation, c'est-à-dire que $SCR(t) = k \times BE(t)$. Par définition de k , en $t = 0$ nous avons :

$$k = \frac{SCR}{BE(0)}$$

Et en remplaçant k dans la formule précédente, nous obtenons la troisième simplification du calcul de la marge pour risque :

$$SCR_{RU}(t) = \frac{SCR_{RU}(0)}{BE_{net}(0)} \cdot BE_{net}(t)$$

avec :

$BE_{net}(0)$: Meilleure estimation nette de réassurance en $t = 0$

Afin d'utiliser cette simplification, le profil de risque lié aux engagements doit être stable dans le temps, notamment :

- la composition des sous-risques dans le risque de souscription est identique (risque de souscription)
- les programmes de réassurances et véhicules de titrisations sont stables (risque de défaut)

- le risque de marché non évitable en relation avec la meilleure estimation nette de réassurance est identique (risque de marché)
- la proportion de part d'obligation de réassureurs et de véhicules de titrisation est identique (risque opérationnel)
- la capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques en relation avec la meilleure estimation nette de réassurance est identique (ajustement)

Une entreprise souhaitant utiliser cette simplification doit examiner dans quelle mesure les hypothèses visées ci-dessus sont remplies. Si la totalité ou certaines des hypothèses ne sont pas respectées, l'entreprise doit procéder à une évaluation qualitative de l'impact de l'écart sur la marge pour risque globale. Si l'impact de l'écart est faible, alors la simplification peut être utilisée. Sinon, l'entreprise doit utiliser une méthode plus complexe.

Quand la méthode de calcul par proportionnalité est utilisée quelques études doivent être effectuées sur la façon dont est calculée la meilleure estimation nette de réassurance. En effet, il faut noter que même si la technique du brut au net permet d'obtenir un résultat satisfaisant pour la meilleure estimation ($BE_{net}(t)$ comparée au $BE_{brut}(t)$) à $t = 0$, cela ne veut pas forcément dire que les estimations futures de la meilleure estimation seront satisfaisantes. Dans ce cas, la méthode par proportionnalité pourrait être biaisée.

Concernant le risque opérationnel, il faut noter que la charge de capital pour ce risque en $t = 0$ est essentiellement une fonction de la meilleure estimation brute de réassurance et des primes brutes de réassurance. Par conséquent, lors du calcul de la marge pour risque via la méthode par proportionnalité, qui assume que le capital de solvabilité requis pour le risque opérationnel est développé en même temps que la meilleure estimation nette de réassurance, un biais pourrait apparaître.

Concernant l'ajustement pour capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques, il est difficile, en pratique, de trouver une autre méthode que de le développer en même temps que la meilleure estimation nette de réassurance. Du coup, comme lors des projections du capital de solvabilité requis pour le risque opérationnel, l'entreprise devra évaluer le potentiel biais obtenu par cette simplification.

Quatrième méthode : Estimation de tous les capitaux de solvabilité requis futurs en même temps

Cette méthode consiste à estimer tous les capitaux de solvabilité requis futurs en utilisant une approximation basée sur l'approche par durée. Elle permet de calculer tous les capitaux de solvabilité requis futurs en une seule étape. En partant de l'hypothèse de la simplification précédente, (à savoir $SCR(t) = k \times BE(t)$) Juillard et al. [15] justifient la quatrième simplification du calcul de la marge pour risque :

$$RM = \frac{CoC}{1 + r_1} \cdot Dur_{mod}(0) \cdot SCR(0)$$

avec :

$Dur_{mod}(0)$: Durée modifiée des engagements nets de réassurance de l'entreprise de référence en $t = 0$

r_1 : Taux sans risque

La durée des engagements se calcule comme suit :

$$Dur_{mod}(0) = \frac{\sum_{i=0}^N \frac{t(i) \cdot F_i}{(1+r)^{t(i)}}}{\sum_{i=0}^N \frac{F_i}{(1+r)^{t(i)}}$$

où :

F_i : Montant probable des prestations pour l'année i

N : Durée maximale de l'engagement

$t(i)$: Nombre d'année d'engagement de l'assureur

Cette simplification par durée prend en compte la maturité et la liquidité des obligations nettes de réassurance. Cependant, elle est basée sur les hypothèses simplifiées suivantes :

- la composition de la proportion des risques et sous-risques ne change pas en cours d'année (capital de solvabilité requis global)

- la solvabilité moyenne des réassureurs et véhicules de titrisation reste identique tout au long de l'année (risque de contrepartie)

- la durée modifiée est identique pour les obligations nettes et brutes de réassurance (risque opérationnel et risque de contrepartie)

- le risque de marché non évitable en relation avec la meilleure estimation des provisions techniques reste identique tout au long de l'année (risque de marché)

- la capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques en relation avec la meilleure estimation des provisions techniques reste identique au fil du temps (ajustement)

Une entreprise souhaitant utiliser cette simplification doit examiner dans quelle mesure les hypothèses visées ci-dessus sont remplies. Si la totalité ou certaines des hypothèses ne sont pas respectées, l'entreprise doit procéder à une évaluation qualitative de l'impact de l'écart sur la marge pour risque globale. Si l'impact de l'écart est faible, alors la simplification peut être utilisée. Autrement, l'entreprise doit ajuster la formule ou utiliser une méthode plus complexe.

Cinquième méthode : Une méthode simple basée sur un pourcentage de la meilleure estimation

Cette méthode consiste à approximer la marge pour risque en la calculant comme un pourcentage de la meilleure estimation des provisions techniques nettes de réassurance.

$$RM = \alpha_{lob} \cdot BE_{net}(0)$$

avec :

α_{lob} : pourcentage fixe pour la ligne d'activité donnée

Cette simplification est applicable si l'activité de l'organisme est limitée à une seule ligne d'activité ou si l'activité qui dépend de plus d'une ligne n'est pas matérielle ou si l'entreprise a démontré qu'elle ne peut utiliser aucune autre approche simplifiée.

1.3.4 Simplification des modules et des sous-modules de risque

Une approche alternative, sans passer par des simplifications de formule, serait de simplifier les modules ou les sous-modules dans le but d'approximer les risques ou les sous-risques couverts par le module en question.

En pratique, cela voudrait dire que l'entreprise doit identifier les risques et sous-risques qui sont pertinents pour les modules suivants :

- les risques de souscription (vie, santé et non-vie),
- le risque de contrepartie en respectant ce qui est cédé aux réassureurs et véhicules de titrisation,

- le risque opérationnel, et
- le risque de marché non évitable

Dans les paragraphes suivants nous présenterons quelques propositions de simplifications qui sont extraites de la notice "solvabilité II" faite par l'ACPR [2].

Risque de souscription vie

Les simplifications permises pour les calculs du capital de solvabilité requis des risques de mortalité, longévité, invalidité, le risque de dépenses, le risque de révision et le risque de catastrophe sont applicables pour le calcul de la marge pour risque (articles 137 à 142 du règlement délégué (UE) 2015/35).

Risque de souscription santé

Les simplifications utilisées pour le risque de souscription vie peuvent en général être appliquées à un sous-module du risque de souscription santé SLT. Cependant, quelques ajustements doivent être apportés concernant le risque de révision (le risque d'inflation doit être inclus).

En ce qui concerne le sous-module pour le risque de souscription santé non-SLT, les simplifications faites pour le risque de souscription non-vie peuvent être utilisées.

Risque de souscription non-vie

Il n'existe pas vraiment de simplifications applicables à la formule utilisée pour le calcul de la charge de capital pour les primes et le risque de réserve.

Cependant, le calcul des capitaux de solvabilité requis futurs liés aux primes et au risque de réserve peut être simplifié par le fait que le renouvellement et les futurs contrats ne sont pas pris en compte si :

- le volume de prime à l'année t est petit comparé au volume de réserve, alors le volume de prime pour l'année t peut être mis à zéro.
- le volume de prime est nul, alors la charge de capital pour les souscriptions non-vie peut être approximée par cette formule :

$$3 \cdot \sigma_{(res,mod)} \cdot PCO_{Net}(t)$$

avec :

$\sigma_{(res,mod)}$: Ecart type agrégé pour le risque de réserve

$PCO_{Net}(t)$: Meilleure estimation des provisions pour sinistres à payer nette de réassurance pour l'année t

Cette approximation vient de la fonction $\rho(\sigma)$ qui est égale à :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(\mathcal{N}_{0.995} \cdot \sqrt{\ln(\sigma^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1$$

En effet, l'on suppose que la distribution du risque sous-jacent est une loi log-normale alors il est possible d'approximer la fonction $\rho(\sigma)$ par $3 \cdot \sigma$

Comme autre simplification, il peut être supposé que l'estimation de l'écart type pour les risques de prime et de réserve reste inchangé au fil du temps. De plus, l'exigence de risque de souscription pour risque de catastrophe n'est prise en compte que pour les contrats d'assurance existants pour l'année $t = 0$.

Risque de contrepartie

L'exigence de fonds propres relative aux provisions techniques cédées au titre du risque de contrepartie peut être calculée directement pour chaque segment et pour chaque année. Si l'exposition au défaut des réassureurs ne varie pas considérablement au cours de l'année de développement, l'exigence pour le risque de contrepartie peut être approximée en rapportant la part des meilleures estimations des provisions techniques cédées aux réassureurs au niveau de l'exigence en capital observée pour l'année 0.

Alternativement, le risque de contrepartie pour les provisions techniques cédées est estimé pour tout le portefeuille au lieu de segment par segment. Si le risque de défaut pour un segment est jugé similaire au risque de défaut total ou si le risque de défaut pour un segment est négligeable, alors il est possible d'arriver à une estimation de l'exigence pour risque en rapportant la part des meilleures estimations des provisions techniques cédées aux réassureurs au niveau de l'exigence en capital observée pour l'année 0.

Risque opérationnel

Le capital de solvabilité requis du risque opérationnel peut être calculé par la formule suivante :

$$SCR_{Op} = \min(0, 3 \cdot BSCR; Op) + 0,25 \cdot Exp_{ul}$$

où :

$BSCR$: capital de solvabilité requis global

Exp_{uc} : le montant des dépenses encourues sur les 12 derniers mois dont le risque d'investissement est supporté par les assurés (Unité de compte en assurance vie)

Op : le capital requis de base pour risque opérationnel qui est déterminé par :

$$Op = \max(Op_{primes}; Op_{provisions})$$

avec :

$$\begin{aligned} Op_{primes} = & 0,04 \cdot (P_{vie} - P_{vie-uc}) + 0,03 \cdot P_{non-vie} + \\ & + \max(0; 0,04 \cdot (P_{vie} - 1,2 \cdot pP_{vie} - (P_{vie-uc} - 1,2 \cdot pP_{vie-uc}))) + \\ & + \max(0; 0,03 \cdot P_{non-vie} - 1,2 \cdot pP_{non-vie}) \end{aligned}$$

et :

$$Op_{provisions} = 0,0045 \cdot \max(0; PT_{vie} - PT_{non-vie} + 0,03 \cdot \max(0; PT_{non-vie}))$$

avec :

PT : Provisions techniques sans marge pour risque

pP : Différence entre les primes brutes de réassurance obtenues de cette année et celles de l'année dernière

P : Primes brutes de réassurance

Risque de marché non évitable

Les entreprises doivent suivre une approche réalisable quand elles évaluent le risque de marché non évitable. Il faut le prendre en compte uniquement quand cela est important. Pour les engagements d'assurances non-vie et les engagements courts et moyens termes d'assurance, le risque de marché inévitable peut être considéré nul.

Le principal cas pour le risque de marché non évitable est un décalage entre les flux de trésorerie du passif et les instruments financiers disponibles pour couvrir le passif. En particulier, un tel décalage ne peut pas être évité si la maturité des instruments financiers disponibles est plus petite que la maturité du passif. Si ce décalage existe, cela implique de revoir à la baisse le capital requis dans les scénarios pour le risque de taux.

La contribution du risque de marché inévitable dans le calcul de la marge pour risque peut être approximée comme suit :

$$RM_{Mrc} \approx CoC \cdot UM_{RU, \geq 0}$$

où :

RM_{Mrc} : Marge de risque pour le risque de marché inévitable

$UM_{RU, \geq 0}$: Somme approximée du présent et des futurs capitaux de solvabilité requis qui couvrent le risque de marché non évitable calculée à partir de la formule suivante :

$$UM_{RU, \geq 0} = \max(0, 5 \cdot BE_{net}(0) \cdot (Dur_{mod} - n) \cdot (Dur_{mod} - n + 1) \cdot \Delta r_n; 0)$$

avec :

n : Duration des actifs (obligations d'état à 10 ans)

Δr_n : baisse absolue des taux sans risque 10 ans issue du scénario de baisse des taux pour le calcul du $SCR_{risque\ de\ taux}$

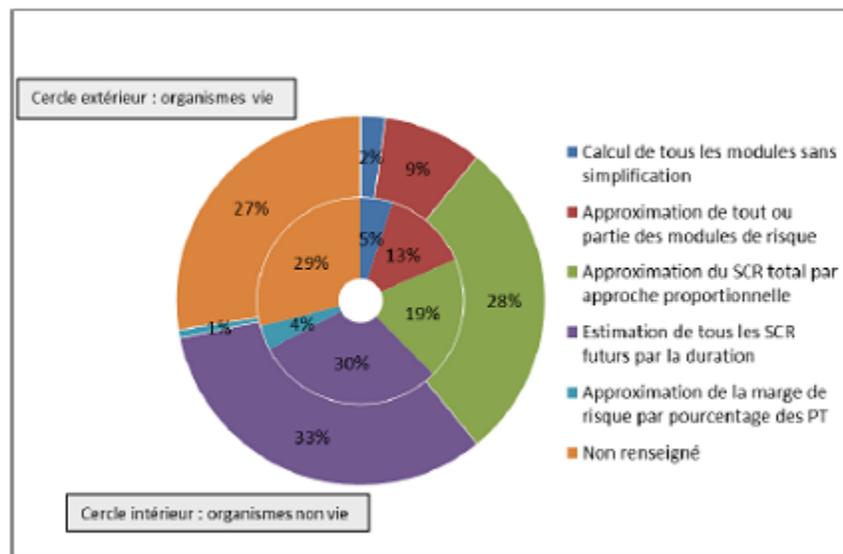
Cette méthode de calcul peut également être appliquée dans le contexte de la simplification par proportionnalité et par duration en effectuant les ajustements nécessaires sur les formules.

Il faut noter que dans le cas où la plus longue duration d'instruments financiers sans risque est courte comparée à la duration modifiée des engagements de l'entreprise de référence, le risque de marché non évitable peut avoir un énorme impact sur la marge de risque globale. Dans un tel cas, l'entreprise peut trouver utile de remplacer l'approximation décrite dans les précédents paragraphes par une simplification plus précise, par exemple en prenant en compte que la meilleure estimation des provisions techniques appliquée dans le calcul du risque de marché inévitable va généralement décroître au fil du temps.

1.4 Répartition des méthodes

Les figures ci-dessous sont tirés de l'analyse effectuées par l'ACPR pour l'exercice 2014 [1].

En pratique, voici la répartition des méthodes utilisées par les assurances vie et non-vie.



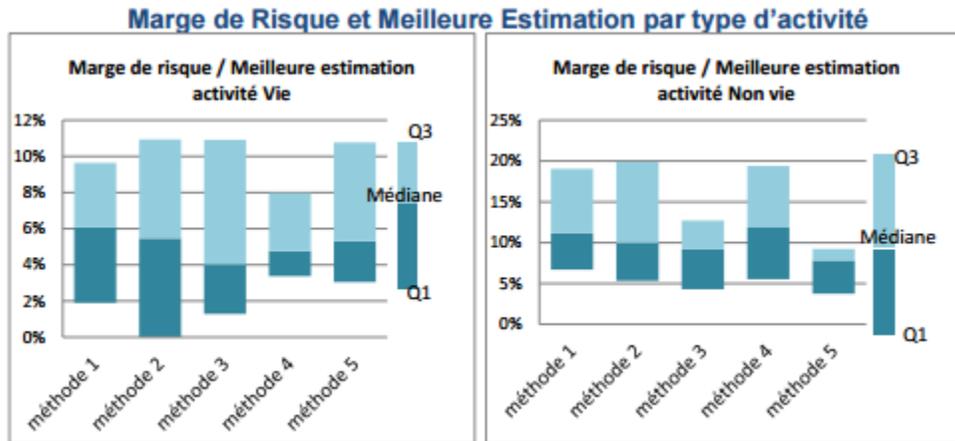
Source : ACPR

FIGURE 2 – Répartition des méthodes utilisées

Nous constatons que les méthodes de simplification par approche proportionnelle ($n^{\circ}3$) et par durée ($n^{\circ}4$) sont majoritairement les plus utilisées par les établissements vie et non-vie.

La figure suivante permet d'analyser l'impact du choix de la méthode de simplification utilisée pour le calcul de la marge pour risque à partir du ratio entre la marge de risque et la meilleure estimation (les différents niveaux représentés sur la figure correspondent au premier quartile, à la médiane et au dernier quartile).

En ce qui concerne les établissements vie les écarts entre les médianes des ratios varient légèrement. Les établissements non-vie ont, quant à eux, des écarts plus importants entre les médianes. Cependant, les entreprises d'assurance vie doivent faire attention à cet écart car lorsqu'il est rapporté au fonds propre ou à l'exigence de capital l'impact peut être problématique.



Source : ACPR

FIGURE 3 – Marge de risque et meilleure estimation par type d'activité

Maintenant que nous avons présenté les différentes définitions et les principaux concepts derrière le calcul de la marge pour risque via l'approche du coût du capital, comme adoptée par la réforme solvabilité II et que nous avons présenté les différents problèmes et la complexité du calcul de la marge pour risque via sa définition, le prochain chapitre proposera différents modèles qui permettent de remédier au problème de récurrence entre le capital de solvabilité requis et la marge pour risque. Il permettra également d'introduire les hypothèses, les notations et les équations qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

Hypothèses et méthodes de calcul

Comme expliqué précédemment, dans l'approche par coût du capital, la marge pour risque est le coût espéré des capitaux de solvabilité requis présents et futurs. L'une des principales difficultés de cette approche est de déterminer les capitaux de solvabilité requis futurs. En effet, étant donné que les bilans économiques futurs ne sont pas connus, les capitaux de solvabilité requis futurs sont aléatoires et donc les montants de marge pour risque le sont également.

Dans les prochaines sections de ce mémoire nous efforcerons de calculer la marge pour risque en utilisant la première méthode, à savoir sa définition. Pour cela et afin de nous éviter toutes complications non nécessaires, nous prendrons uniquement le risque de réserve qui est un composant du risque de souscription. Nous nous placerons également dans le contexte d'une assurance non-vie et nous négligerons le risque opérationnel et le risque de contrepartie. Du fait que nous soyons une assurance non-vie, nous supposons que le risque de marché inévitable est nul.

Ces hypothèses ont également été utilisées dans le mémoire de M. DAYA-VIOSSAT [10]. Avec ces hypothèses, le capital de solvabilité requis et la marge pour risque sont définis de la façon suivante :

$$SCR_t = q_{99,5} \% \left[\frac{U_{t+1} + RM_{t+1}}{1+r} | \mathcal{F}_t \right] - (U_t + RM_t)$$

$$RM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i | \mathcal{F}_t]}{(1+r)^{i-t+1}}$$

où :

\mathcal{F}_t : L'information disponible sur les sinistres à la date t

SCR_t et RM_t : Le montant du capital de solvabilité requis et de la marge pour risque à la date t

U_t : Le montant actualisé de la charge ultime à la date t

$r_{i,T}$: Le taux sans risque

CoC : Le taux du coût en capital

SCR_t et RM_t peuvent également être définis comme suit :

$$SCR_t = q_{99,5} \% \left[\frac{\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{t+1}] + RM_{t+1}}{1+r} \Big| \mathcal{F}_t \right] - (\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_t] + RM_t)$$

$$RM_t = \frac{1}{1+r} (\mathbb{E}[RM_{t+1}|\mathcal{F}_t] + CoC \cdot SCR_t)$$

en utilisant $U_t = \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_t]$ avec $C_{i,n}$ qui correspond aux paiements cumulés des sinistres à la date $t = n$.

2.1 Présentation des modèles

Quelques approches ont été étudiées afin de résoudre le problème de récurrence sans utiliser les simplifications proposées par l'*EIOPA*. L'approche la plus souvent retenue pour calculer les flux futurs est une approche par récurrence inverse. Pour cela il suffit de partir du dernier flux et de remonter afin d'obtenir les flux précédents. En effet, à une certaine date n , il n'y a plus d'incertitude concernant la charge ultime, il n'est donc plus nécessaire de retenir un capital de solvabilité. De ce fait, $RM_n = 0$.

Les équations précédemment définis deviennent, à $t = n - 1$:

$$SCR_{n-1} = q_{99,5} \% \left[\frac{\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_n]}{1+r} \Big| \mathcal{F}_{n-1} \right] - (\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{n-1}] + RM_{n-1})$$

$$RM_{n-1} = \frac{CoC}{1+r} \cdot SCR_{n-1}$$

En combinant les deux nous obtenons :

$$SCR_{n-1} = \frac{1+r}{1+r+CoC} (q_{99,5} \% \left[\frac{U_n}{1+r} \Big| \mathcal{F}_{n-1} \right] - U_{n-1})$$

Cette méthode peut se révéler assez fastidieuse s'il s'agit de flux longs mais étant donné que nous sommes dans le cas d'une assurance non-vie à passif court, nous pouvons nous permettre de l'utiliser.

2.1.1 Définitions et notations

Avant de présenter les modèles qui seront utilisés dans la suite du mémoire, commençons par définir quelques termes.

Les paiements cumulés $C_{i,t}$ sont les données avec lesquels nous travaillerons. Ils sont issus du triangle de paiements cumulés. A partir de $C_{i,t}$, nous pouvons définir les incréments $X_{i,t}$:

$$X_{i,t} = C_{i,t} - C_{i,t-1}$$

Les réserves R_t à la date t sont définies comme une valeur des futurs incréments :

$$R_t = \sum_{k=t}^{n-1} X_{i,k} | \mathcal{F}_t$$

Les futures pertes L_t peuvent être décrites en terme de déviation potentielle de la réserve estimée et de la réserve réelle :

$$L_t = R_t - \mathbb{E}[R_t]$$

Nous pouvons noter que l'espérance et la variance sont comme suit :

$$\mathbb{E}[L_t | \mathcal{F}_t] = 0$$

$$Var[L_t | \mathcal{F}_t] = Var[R_t | \mathcal{F}_t]$$

La détérioration de la perte à un an L_t^1 décrit la détérioration de la réserve estimée durant l'année :

$$L_t^1 = \mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{F}_{t+1}] - \mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{F}_t]$$

Le capital de solvabilité requis à la date t en utilisant le quantile à 99,5 % est défini par :

Pour un horizon à l'ultime nous pouvons écrire :

$$SCR_t = q_{99,5} \% [L_t | \mathcal{F}_t]$$

$$SCR_t = q_{99,5} \% [R_t | \mathcal{F}_t - \mathbb{E}[R_t | \mathcal{F}_t]] = q_{99,5} \% \left[\sum_{k=t}^{n-1} X_{i,k} | \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E} \left[\sum_{k=t}^{n-1} X_{i,k} | \mathcal{F}_t \right]$$

Cela suppose que la compagnie doit détenir assez de capital pour couvrir 99,5 % des pertes futures jusqu'au *run-off* de son portefeuille.

Pour un horizon à un an nous pouvons écrire :

$$SCR_t = q_{99,5} \% [L_t^1 | \mathcal{F}_t]$$

$$SCR_t = q_{99,5} \% [\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{t+1}] - \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_t]]$$

Cela suppose que la compagnie doit détenir assez de capital pour couvrir la détérioration sur un an de la réserve estimée.

Rappelons brièvement les notations et les hypothèses qui ont été décrites précédemment dans ce mémoire :

- Le coût du capital, CoC, est fixé à 6 % ;
- La mesure de risque est la *Value at Risk* de niveau 99,5 % et la notation suivante $q_{99,5} \%$ sera utilisée pour représenter cette mesure de risque.

Ayant introduit toutes ces notations, les deux équations à résoudre sont les suivantes :

$$SCR_t = q_{99,5} \% [L_t^1 + RM_{t+1} - RM_t|\mathcal{F}_t]$$

$$RM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i|\mathcal{F}_t]}{(1+r)^{i-t+1}}$$

L'expression du capital de solvabilité requis peut être développée comme suit :

$$SCR_t = q_{99,5} \% [RM_{t+1} + \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{t+1}] - RM_t - \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_t]]$$

$$SCR_t = q_{99,5} \% \left[CoC \cdot \sum_{i=t+1}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i|\mathcal{F}_{t+1}]}{(1+r)^{i-t+1}} + \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{t+1}] - CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i|\mathcal{F}_t]}{(1+r)^{i-t+1}} - \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_t] \right]$$

$$SCR_t = q_{99,5} \% \left[CoC \cdot \sum_{i=t+1}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i|\mathcal{F}_{t+1}]}{(1+r)^{i-t+1}} + \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{t+1}|\mathcal{F}_t] - CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i|\mathcal{F}_t]}{(1+r)^{i-t+1}} - \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_t] \right]$$

Comme nous l'avons précisé précédemment, nous devons résoudre ces équations en commençant à la date $t = n - 1$ (en se rappelant que à la date $t = n$, $SCR_n = 0$ et donc $RM_n = 0$) :

$$SCR_{n-1} = \frac{1}{1 + CoC} (q_{99,5} \% [\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{n-1}])$$

$$SCR_{n-1} = \frac{1}{1 + CoC} (q_{99,5} \% [C_{i,n}|\mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{F}_{n-1}])$$

Finalement, il nous faut résoudre les équations suivantes :

$$SCR_t = q_{99,5} \% \left[CoC \cdot \sum_{i=t+1}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i | \mathcal{F}_{t+1}]}{(1+r)^{i-t+1}} + \mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{F}_{t+1}] | \mathcal{F}_t \right] - CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i | \mathcal{F}_t]}{(1+r)^{i-t+1}} - \mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{F}_t]$$

$$\text{avec } SCR_{n-1} = \frac{1}{1 + CoC} (q_{99,5} \% [C_{i,n} | \mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[C_{i,n} | \mathcal{F}_{n-1}])$$

$$RM_t = CoC \cdot \sum_{i=t}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[SCR_i | \mathcal{F}_t]}{(1+r)^{i-t+1}}$$

Dans la suite de cette section, nous allons présenter trois méthodes qui vont nous servir à compléter le triangle de paiements cumulés. Dans le cadre des deux premiers modèles, nous utilisons les triangles de paiements décumulés. Une hypothèse importante pour utiliser ces modèles est l'indépendance des incréments $X_{i,j} = C_{i,j+1} - C_{i,j}$. Concernant la dernière méthode, le modèle bayésien, nous utilisons le triangle de paiements cumulés $C_{i,j}$.

Cependant, avant d'utiliser ces méthodes, nous utiliserons la méthode du Bootstrap associée à la méthode de Mack pour obtenir 10 000 triangles. Cette méthode nous permettra ainsi de calculer les espérances et les quantiles nécessaires au calcul de la marge pour risque et du capital de solvabilité requis. Nous utiliserons ensuite nos méthodes de simulation sur ces triangles bootstrappés.

Pour les deux prochains modèles que nous allons définir, nous cherchons à expliquer les paiements $X_{i,j}$ de notre triangle par trois types de variables :

- Les variations des règlements par rapport aux années d'origine : (α_i) avec $i = 1, \dots, n$ et $\alpha_0 = 0$;
- Les variations des règlements par rapport aux années de développement : (β_i) avec $i = 1, \dots, n$ et $\beta_0 = 0$;
- Les variations des règlements par rapport aux années calendaires : (m_{i+j}) . Pour les triangles déflatés $m_{i+j} = m$.

2.1.2 Régression log-normale

La régression que nous allons utiliser a été appliquée dans le mémoire de Compain H. [8]. Dans ce modèle nous supposons que les incréments $X_{i,j}$ suivent une loi $\mathcal{LN}(\mu_{i,j}, \sigma^2)$. Nous définissons également les variables aléatoires $(Y_{i,j})$ telle que $Y_{i,j} = \ln X_{i,j}$. Ces variables suivent donc une loi normale de moyenne $m_{i,j}$ et de variance σ^2 avec :

$$m_{i,j} = \alpha_i + \beta_j + m$$

La moyenne et la variance des variables aléatoires $X_{i,j}$ sont donc définies comme suit :

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \mu_{i,j} = \exp\left(m_{i,j} + \frac{\sigma^2}{2}\right) \text{ et } V[X_{i,j}] = \mathbb{E}[X_{i,j}]^2 \cdot \exp(\sigma^2 - 1)$$

Présentation du modèle

La régression correspond à un modèle linéaire normal appliqué aux variables aléatoires $(Y_{i,j})$ tel que : $Y = M\zeta + \epsilon$ avec :

Y : Le vecteur des log-incréments du triangle pris ligne à ligne

M : La matrice de régression. Elle correspond à la matrice Jacobienne de la transformation $m : \zeta \rightarrow m(\zeta) = m_{i,j}$ définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \mu} &= 1 \\ \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \alpha_k} &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \frac{\partial m_{i,j}}{\partial \beta_l} &= \begin{cases} 1 & \text{si } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

ζ : Le vecteur des paramètres de la régression

ϵ : Le vecteur des erreurs, de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Notons e_i le résidu, estimation de l'erreur. Il est défini par $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ où \hat{Y}_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur prévue par le modèle.

Estimation des paramètres

Plusieurs méthodes existent pour estimer des paramètres. Les méthodes listées ci-dessous sont les plus souvent utilisées :

- 1) La méthode des moments ;
- 2) Le maximum de vraisemblance ;

- 3) La méthode des moindres carrés ;
- 4) La méthode des L-moments ;
- 5) La méthode des moments de probabilité pondérés.

Nous ne discuterons pas des avantages et inconvénients de ces méthodes et nous utiliserons uniquement la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer la variance de la loi log-normale. En effet, cette méthode est standard et, dans la plupart des cas, simple à implémenter.

L'estimateur de σ^2 est donc obtenu par maximum de vraisemblance. Le principe de cette méthode est de maximiser la fonction log-vraisemblance pour l'échantillon $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ de loi normale :

$$\mathcal{L}(m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^N f_{X_i}(m, \sigma^2)$$

Nous prenons le log de cette fonction :

$$\ln \mathcal{L}(m, \sigma^2) = \sum_{i=1}^N \ln (f_{X_i}(m, \sigma^2))$$

Nous remplaçons $f_X(m, \sigma^2)$ dans l'équation obtenue :

$$\ln \mathcal{L}(m, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln (2\pi) - N \ln (\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2$$

Nous dérivons par rapport à m et σ :

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(m, \sigma^2)}{\partial m} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N 2(x_i - m)$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(m, \sigma^2)}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2$$

Nous devons maintenant résoudre le système suivant dans le but de maximiser $\ln \mathcal{L}(m, \sigma^2)$:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(m, \sigma^2)}{\partial m} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N 2(x_i - m) = 0$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(m, \sigma^2)}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 = 0$$

Nous obtenons donc les estimateurs suivants pour un échantillon $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ de loi normale :

$$\widehat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \widehat{m})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

Cependant, cet estimateur de σ^2 n'est pas sans biais. De ce fait, nous préférons l'estimateur sans biais suivant :

$$S^2 = \frac{N}{N-1} \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \widehat{m})^2$$

Nous obtenons donc l'estimateur de $\mu_{i,j}$ suivant :

$$\widehat{\mu}_{i,j} = \exp \left(\widehat{\alpha}_i + \widehat{\beta}_j + \widehat{m} + \frac{S^2}{2} \right)$$

Il en découle l'estimateur des réserves R suivant :

$$\widehat{R} = \sum_{i+j > n} \widehat{\mu}_{i,j}$$

2.1.3 Modèle GLM avec loi de Poisson surdispersée

Les modèles linéaires généralisés ont été introduits en 1972 par J. Nelder et R. Wedderburn. Ils sont une généralisation du modèle linéaire normal.

Nous avons décidé d'utiliser la famille de distribution Poisson surdispersée car il est prouvé qu'en utilisant un GLM et cette loi, nous reproduisons exactement les mêmes prédictions que la méthode de Chain Ladder déterministe.

Avant de rentrer plus en détail dans la définition du modèle, nous allons présenter quelques rappels sur la loi de Poisson surdispersée.

Rappels sur la loi Poisson surdispersée

Soient λ, ϕ deux réels strictement positifs. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson surdispersée de paramètre (λ, ϕ) si et seulement si X/ϕ suit une loi de Poisson de paramètre λ/ϕ . Dans ce cas, nous notons $X = ODP(\lambda, \phi)$.

Concrètement, une loi de Poisson surdispersée permet de définir l'égalité entre la variance et la moyenne suivante :

$$V[X] = \phi \mathbb{E}[X]$$

Tout comme la loi de Poisson, la loi de Poisson surdispersée est invariante par additivité, c'est-à-dire, si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires telles que $X_1 = ODP(\lambda_1, \phi)$ et $X_2 = ODP(\lambda_2, \phi)$. Alors nous avons $X_1 + X_2 = ODP(\lambda_1 + \lambda_2, \phi)$.

Présentation du modèle

Pour définir un modèle GLM il faut définir trois composantes : une composante aléatoire, une composante systémique et une fonction de lien.

La composante aléatoire

Nous supposons que les variables aléatoires que nous cherchons sont indépendantes. Cela revient à dire que les incréments $X_{i,j}$ admettent une distribution issue d'une structure exponentielle. La densité de $X_{i,j}$ s'écrit de la façon suivante :

$$f(x_{i,j}, \theta_{i,j}, \phi) = \exp\left(\frac{x_{i,j}\theta_{i,j} - b\theta_{i,j}}{\phi} + d(x_{i,j}\phi)\right)$$

avec :

$\theta_{i,j}$: Paramètre naturel de la famille exponentielle

ϕ : Paramètre de dispersion strictement positif

b et d : Fonctions caractéristiques du modèle.

Nous avons également l'espérance et la variance de $X_{i,j}$ définies comme suit :

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \lambda_{i,j} \text{ et } V[X_{i,j}] = \phi \lambda_{i,j}$$

La composante systémique

La composante systémique est une composante déterministe du modèle. Comme dans notre modèle précédent, cette composante sera de la forme suivante :

$$\eta_{i,j} = m + \alpha_i + \beta_j \text{ avec } i, j = 0, \dots, n \text{ et } \alpha_0 = \beta_0 = 0$$

La fonction lien

La fonction de lien est la fonction reliant la composante systémique à la composante aléatoire :

$$\eta_{i,j} = g(\lambda_{i,j})$$

Dans notre cas, et afin de reproduire parfaitement les résultats de la méthode Chain Ladder, la fonction de lien choisie est la fonction logarithmique, c'est-à-dire :

$$\eta_{i,j} = \log(\lambda_{i,j}) \Leftrightarrow \lambda_{i,j} = \exp(\eta_{i,j}) = \exp(m + \alpha_i + \beta_j)$$

Estimation des paramètres

Comme pour la régression log-normale, l'estimateur des incréments est de la forme :

$$\hat{\lambda}_{i,j} = \exp(\hat{m} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$$

Nous obtenons ainsi l'estimateur des réserves suivant :

$$\hat{R} = \sum_{i+j>n} \hat{\lambda}_{i,j}$$

2.1.4 Le modèle bayésien

Nous considérons un modèle Chain Ladder log-normal bayésien pour compléter le triangle de paiements. Ce type de modèle fait l'objet de plus en plus d'études et ces études montrent qu'ils apportent des résultats intéressants. Les modèles Chain Ladder log-normaux ont été introduits par Hertig et leurs versions bayésiennes ont été récemment utilisées par Merz et Wüthrich ainsi que par Robert C-Y. [17] pour un calcul de marge pour risque. Nous utiliserons donc le modèle qui a été développé par Robert C-Y.

Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

- 1) Pour $\Phi = (\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1})$ et $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1})$ donnés, les incréments $X_{i,j}$ sont indépendants et pour $j = 0, \dots, n - 1$, les $\xi_{i,j+1}$ sont indépendants et satisfont $\xi_{i,j+1} \sim \mathcal{N}(\Phi_j, \sigma_j^2)$. Avec $\xi_{i,j+1} = \log\left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\right)$ et $C_{i,j}$ les paiements cumulés.
- 2) $\sigma > 0$ est déterministe et les Φ_j , pour $j = 0, \dots, n - 1$, sont indépendants et normalement distribués, $\Phi_j \sim \mathcal{N}(\phi_j, s_j^2)$.
- 3) $(C_{1,0}, \dots, C_{n,0})$ et Φ sont indépendants.

Estimation des paramètres

Connaissant l'information \mathcal{F}_t , pour $j = 0, \dots, n-1$, les Φ_j sont des variables aléatoires indépendantes et normalement distribuées telles que :

$$\Phi_j | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(\phi_j^{(t)}, (s_j^{(t)})^2)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \phi_j^{(t)} &= (s_j^{(t)})^2 \left[\frac{\phi_j}{s_j^2} + \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^{(t-j-1) \wedge n} \wedge n \right] \\ (s_j^{(t)})^2 &= \left(\frac{1}{s_j^2} + \frac{(t+j-1) \wedge n}{\sigma_j^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Connaissant l'information à la date t , $\xi_{i,j+1}$ est un vecteur aléatoire normalement distribué avec :

$$\mathbb{E}[\xi_{i,j+1} | \mathcal{F}_t] = \phi_j^{(t)}$$

$$\text{Cov}(\xi_{i,j+1}, \xi_{k,l+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{I}_{j=l} \left((s_j^{(t)})^2 + \mathbb{I}_{i=k} \sigma_j^2 \right)$$

En pratique, il faut calculer les paramètres à chaque date à partir de l'information générée par les nouvelles observations. Définissons quelques paramètres :

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(t+1)} &= \frac{(s_j^{(t+1)})^2}{\sigma_j^2} \\ \beta_j^{(t+1)} &= 1 - \alpha_j^{(t+1)} = \frac{(s_j^{(t+1)})^2}{(s_j^{(t)})^2} \\ \gamma_j^{(t+q:t+l)} &= \prod_{i=t+q}^{t+l} = \beta_j^{(i)} \end{aligned}$$

Avec $\gamma_j^{(t+q:t+l)} = 1$ si $q > l$

A la date $t+1$ nous avons :

$$\phi_j^{(t+1)} = \beta_j^{(t+1)} \phi_j^{(t)} + \alpha_j^{(t+1)} \xi_{t-j,j+1}$$

et pour $l = 1, \dots, 1+n+j-t$:

$$\phi_j^{(t+l)} = \phi_j^{(t)} \gamma_j^{(t+1:t+l)} + \sum_{q=1}^l \gamma_j^{(t+q+1:t+l)} \alpha_j^{(t+q)} \xi_{t-j+q-1,j+1}$$

2.2 La méthode du Bootstrap

Le bootstrap est une méthode qui a été inventée par Efron en 1979. Elle correspond à un ré-échantillonnage avec remise utilisant des simulations de type Monte-Carlo. Elle est de plus en plus utilisée en assurance non-vie, notamment dû à sa simplicité. Le bootstrap, couplé avec une méthode type GLM ou modèle Chain Ladder log-normal bayésien, permet d'obtenir une estimation de la distribution des provisions.

Il existe deux types de Bootstrap :

1) Paried Bootstrap : Le ré-échantillonnage se fait directement grâce aux observations qui sont supposées être indépendantes et identiquement distribuées. Cependant, cette hypothèse n'est généralement pas vérifiée avec les incréments $X_{i,j}$ ou les paiements $C_{i,j}$. C'est pourquoi le type suivant est le plus souvent utilisé.

2) Résidus Bootstrap : Le ré-échantillonnage se fait à partir des résidus du modèle. Dans ce cas, les observations sont supposées indépendantes mais pas identiquement distribuées. Par contre, ce sont les résidus qui doivent être indépendants et identiquement distribués.

Le problème principal de la méthode du Bootstrap décrite ci-dessus, est qu'elle ne permet pas de traiter les incréments négatifs. Pour y remédier, nous utiliserons une méthode alternative en utilisant la méthode de Mack associée à celle du Bootstrap. Avec cette méthode, nous n'aurons pas besoin de supposer les incréments positifs et pourrons travailler sur des triangles de charges.

2.2.1 La théorie de Mack

Le modèle de Mack est défini comme la version stochastique de la méthode de Chain Ladder car le montant des provisions estimé est identique à celui estimé par Chain Ladder.

Le modèle de Mack repose sur trois hypothèses :

- 1) Les années de survenances sont indépendantes
- 2) Il existe f_i tel que $\mathbb{E}[C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n}] = f_i C_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$
- 3) Il existe σ_j tel que $V[C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n}] = \sigma_j^2 C_{i,j}$ pour $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$

Dans ce modèle, les facteurs (f_i) sont estimés par les facteurs de développement de Chain Ladder $(\hat{f}_i) = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$.

Les (σ_j^2) sont estimés par :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_i \right)^2 \text{ pour } i \leq j \leq n-2$$

Pour estimer σ_{n-1}^2 il faut poser la condition suivante :

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}}{\hat{\sigma}_{n-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}}{\hat{\sigma}_{n-1}}$$

Cette condition est réalisée tant que $\hat{\sigma}_{n-3} > \hat{\sigma}_{n-2}$. Cela revient à prendre :

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2 \right)$$

Sous les hypothèses du modèle de Mack, ces estimateurs sont sans biais.

Concernant les estimateurs des $C_{i,j}$ inconnus, nous prendrons les mêmes que dans la méthode de Chain Ladder, à savoir :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \hat{f}_{j-1} \hat{f}_{j-2} \dots \hat{f}_{n+1-i} = C_{i,n+1-i} \prod_{h=n-i+1}^{j-1} \hat{f}_h$$

Où $C_{i,n+1-i}$ est le dernier montant cumulé connu pour l'année de survenance i . Sous les hypothèses du modèle de Mack, cet estimateur est également sans biais.

2.2.2 Méthode du Bootstrap associée à Mack

Comme nous l'avons dit précédemment, cette méthode nous permet de travailler avec des incréments négatifs.

Première étape : Calcul des résidus des coefficients de passage

Pour le calcul des résidus des coefficients de passage, nous considérons l'année de survenance $i \in [1, n]$ et l'année de développement $j \in [1, n]$. Une hypothèse importante à cette méthode est l'indépendance des $f_{i,j}$.

Les coefficients de développement sont estimés via la méthode de Chain Ladder sur le triangle des charges cumulées. Nous calculons également le σ_j de Mack correspondant. Nous en déduisons le triangle des résidus des coefficients de développement suivant :

$$r_{i,j} = \frac{f_{i,j} - \hat{f}_j}{\sqrt{\frac{\sigma_j^2}{C_{i,j-1}}}} = \frac{\sqrt{C_{i,j-1}} \cdot (f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\sigma_j}$$

Les résidus ajustés sont calculés ci-après :

$$r_{i,j}^a = \sqrt{\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2} - n}} \cdot r_{i,j}$$

Deuxième étape : Obtention des nouveaux triangles cumulés

L'obtention des nouveaux triangles cumulés se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, nous effectuons un Bootstrap sur le triangle des résidus ajustés des coefficients de passage obtenu précédemment. Grâce à cela, nous obtenons 10 000 triangles de résidus. Soit $r_{i,j}^{a(k)}$: le résidu de l'année de survenance i et de l'année d'observation j et issu du $k^{\text{ième}}$ tirage aléatoire avec $k = 1, \dots, 10\,000$.

Nous reconstituons ensuite 10 000 triangles des coefficients de développement à partir des 10 000 triangles précédents :

$$f_{i,j}'^{(k)} = \hat{f}_j + \frac{r_{i,j}^{a(k)} \sigma_j}{\sqrt{C_{i,j-1}}} \text{ avec } i + j \leq n + 1$$

A partir de la dernière diagonale du triangle de charges cumulées, des résidus ajustés et des nouveaux coefficients de développement, nous construisons de nouveaux triangles de charges cumulées :

$$C_{i,j}'^{(k)} = \frac{C_{i,j+1}}{f_{i,j}'^{(k)}}$$

Ce sont ces nouveaux triangles de charges cumulées qui vont nous servir afin d'appliquer les trois méthodes que nous avons décrit précédemment, à savoir : une régression log-normale, un GLM avec une loi de Poisson dispersée et un modèle Chain Ladder log-normal bayésien.

Une fois la marge pour risque calculée via nos trois modèles, nous comparerons les résultats obtenus avec les approches par proportionnalité, par duration et par pourcentage de la meilleure estimation qui ont été présentées lors du premier chapitre.

Les méthodes analytiques ayant été définies, nous pouvons passer au chapitre suivant. Celui-ci présente, dans un premier temps, les données utilisées ainsi que les paramètres des différents modèles calculés. Dans un second temps, nous rappelons les modèles que nous souhaitons comparer et en présentons les résultats.

Application et Résultats

Les dernières sections du chapitre précédent ont présenté des modèles afin de calculer la marge pour risque sans utiliser les méthodes proposées par l'*EIOPA*. Avant de présenter les données, le graphique ci-dessous explique le process utilisé dans ce chapitre pour un triangle de paiement donné :

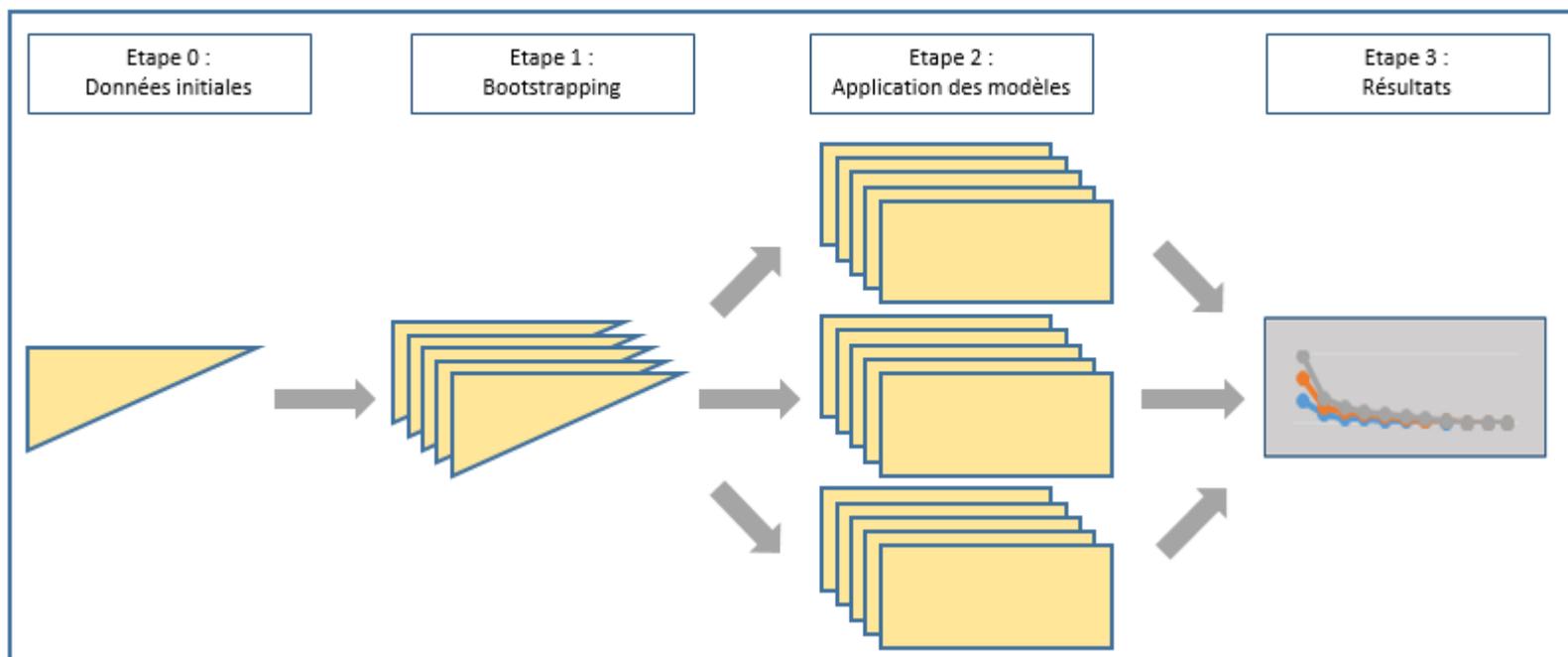


FIGURE 4 – Schéma du process

L'étape 1 correspond à l'application sur le triangle initial de la méthode du Bootstrap, présentée dans la partie précédente, afin d'obtenir 10 000 triangles. Cela permet de calculer les espérances et quantiles nécessaires au calcul de la marge pour risque et du capital de solvabilité requis.

L'étape 2 correspond à l'application des trois modèles sur les triangles bootstrappés obtenus après l'étape 1 afin d'en compléter la partie basse.

L'étape 3 est le calcul des espérances de la marge pour risque pour chaque année jusqu'à la fin des engagements de l'assureur. Une comparaison entre les trois modèles analytiques y est également effectuée.

3.1 Modèle global

Cette section présente le périmètre d'application de l'étude présentée dans ce chapitre.

Comme mentionné dans la deuxième partie, seul le risque de réserve en souscription non-vie est pris en compte. Il faut toutefois savoir que ce risque représente la plus grosse part du capital de solvabilité requis en assurance non-vie (analyse de l'exercice 2014 faite par l'ACPR [1]).

Dans la formule standard, le risque de souscription en assurance non-vie est divisé entre le risque de réserve et le risque de prime. Le risque de réserve représente le passif couvrant les contrats souscrits pendant l'année et il peut également être défini comme le risque de la détérioration de la réserve de sinistres.

Le risque de prime est le risque que le coût des futurs sinistres soit supérieur aux primes perçues ; une partie de ce risque est déjà connu et pris en compte par la réserve de prime (la provision pour primes non-acquises par exemple). Les contrats attendus durant la période de risque et couverts par les primes attendues font également partie du risque de prime.

L'exposition au risque de catastrophe est liée au risque de prime. Cependant, dû à sa nature spécifique, le risque de catastrophe est souvent traité comme un troisième composant du risque de souscription non-vie.

Pour rappel, les hypothèses de cette étude sont listées ci-après :

- 1) Le risque de marché inévitable est considéré nul ;
- 2) Le risque de crédit est laissé de côté ;
- 3) Le risque opérationnel n'est pas pris en compte ;
- 4) Le risque de catastrophe n'est pas intégré dans le risque de souscription ;
- 5) Deux lignes d'activité sont prises en compte : santé et responsabilité employeur ;
- 6) Le coût du capital est supposé constant et égal à 6 % ;
- 7) La courbe de taux utilisée est celle donnée par l'*EIOPA* au 31/12/2015 sans *volatility adjustment*.

3.1.1 Les données

Les triangles de paiements cumulés utilisés proviennent de deux études différentes effectuées par Prim'Act pour deux compagnies d'assurance. Ils ont donc été légèrement modifiés afin d'être anonymisés. Le premier est un triangle de la ligne d'activité santé, à développement court (9 années). Le second est un triangle de la ligne d'activité responsabilité employeur, à développement long (18 années). Cela permet de capter les différences entre des triangles à développement long ou court et de comparer les résultats obtenus.

3.1.2 Comparaison des résultats

Avant de présenter les graphiques, il faut rappeler et expliquer les différentes méthodes à comparer.

Modèles analytiques

Les modèles analytiques utilisés, à savoir une régression log-normale, un GLM avec une loi de Poisson surdispersée et un modèle bayésien, ont été entièrement présentés dans la partie précédente.

Proxy du règlement délégué (UE) 2015/35

Comme présentés dans la première partie de ce mémoire, ces *proxy* sont les méthodes 3, 4 et 5 du calcul de la marge pour risque du règlement délégué (UE) 2015/35 :

- L'approximation par approche proportionnelle (proxy 3) :

$$SCR_{RU}(t) = \frac{SCR_{RU}(0)}{BE_{net}(0)} \cdot BE_{net}(t)$$

- L'approximation par durée (proxy 4) :

$$RM = \frac{CoC}{1 + r_1} \cdot Dur_{mod}(0) \cdot SCR(0)$$

- L'approximation par pourcentage du *Best Estimate* (proxy 5) :

$$RM = \alpha_{lob} \cdot BE_{net}(0)$$

Le capital de solvabilité utilisé dans ces méthodes est celui calculé à partir des modèles analytiques. De ce fait, la volatilité prise en compte est celle estimée dans ces mêmes modèles.

Approche standard - USP

La formule standard donne une méthode simplifiée pour calculer le capital de solvabilité. Etant donné que seul le risque de réserve en assurance non-vie pour une unique ligne d'activité est pris en compte, la formule standard devient :

$$NL_{res(t)} = SCR_t = \left(\frac{\exp(q_{99,5} \% \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)})}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1 \right) \cdot \mathbb{E}[R_t | \mathcal{F}_t]$$

Où σ est l'écart type du risque de réserve défini dans la première partie de ce mémoire. Dans notre cas, à savoir la ligne d'activité santé et celle de responsabilité employeur, cet écart type est respectivement égal à 5 % et 11 % et supposé constant durant la période de *run-off*.

Au lieu d'utiliser les σ donnés par l'*EIOPA*, l'écart type est estimé afin de mieux le calibrer par rapport nos données. De plus, du point de vue de la souscription, cela contribue à rendre le capital de solvabilité requis plus sensible aux risques encourus. Un élément de crédibilité est attaché à cette volatilité finale :

$$\sigma_{(res,lob)} = c \cdot \sigma_{(U,res,lob)} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,res,lob)}$$

avec :

c : le facteur de crédibilité

$\sigma_{(U,res,lob)}$: l'écart type estimé du risque de réserve pour une ligne d'activité donnée

$\sigma_{(M,res,lob)}$: l'écart type donné par le règlement délégué (UE) 2015/35 et présenté dans la première partie de ce mémoire

$\sigma_{(res,lob)}$: l'écart type utilisé dans la formule standard

Le facteur de crédibilité dépend de la longueur de l'historique disponible des données. Dès lors que les années de développements sont supérieures ou égales à 15 ans pour la branche de responsabilité employeur, le règlement délégué (UE) 2015/35 définit le facteur de crédibilité à 100 %.

En ce qui concerne la branche santé, étant donné que nous avons 9 années de développements, le facteur de crédibilité est égal à 92 %. Cependant, étant donné qu'au bout de 5 années de paiement nous obtenons 99,9 % du paiement total, nous avons décidé

d'utiliser le facteur de crédibilité pour un triangle de 5 années d'observation, à savoir 34 %.

Le règlement délégué (UE) 2015/35 propose trois méthodes pour calculer $\sigma_{(U,res,lob)}$:

1) La méthode 1 suppose une relation proportionnelle constante entre "la variance de la meilleure estimation pour les sinistres qui étaient à payer en début d'exercice et des paiements effectués durant l'exercice pour les sinistres qui étaient à payer en début de cet exercice par ligne d'activité" et "la meilleure estimation de la provision pour sinistres à payer au cours de cet exercice". L'information requise en addition des triangles de paiements cumulés est une vue "as at" pour chaque année passée de la meilleure estimation qui nous permet d'estimer la constante de proportionnalité. En l'absence d'historique de réserves réel pour nos deux exemples, cette méthode ne sera pas utilisée pour estimer l'écart type $\sigma_{(U,res,lob)}$.

2) Les méthodes 2 et 3 sont basées sur la méthode de Merz et Wüthrich [12] avec le calcul du carré de la moyenne de l'erreur de prédiction (MSEP) du triangle des paiements en début d'exercice. Ainsi, l'écart type $\sigma_{(U,res,lob)}$ souhaité se calcule de la façon suivante :

$$\sigma_{(U,res,lob)} = \frac{\sqrt{MSEP}}{BEL}$$

où *BEL* est le BEL réel défini dans la méthode 2 du règlement délégué (UE) 2015/35 pour le risque de souscription non-vie; tandis que pour la méthode 3 il s'agit de la meilleure estimation des réserves par la méthode de Chain-Ladder.

Les résultats obtenus sont les suivants :

	Santé			Responsabilité employeur		
Risque de réserve	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3	Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
écart type calculé		18,31%	20,04%		10,00%	7,88%
N		5			18	
écart type règlement délégué		5%			11%	
facteur de crédibilité c		34%	34%		100%	100%
écart type final		9,53%	10,11%		10,00%	7,88%

TABLE 1 – Ecarts types obtenus

Sera donc comparé en plus des modèles analytiques et des différents *proxy*, l'approche par formule standard en utilisant les écarts types calculés précédemment (appelées par la suite "Approche standard 2" et "Approche standard 3").

3.2 Résultats

Dans la suite de ce paragraphe, les résultats sont présentés de la façon suivante. Pour chaque modèle et pour chaque ligne d'activité, le premier tableau présente les résultats numériques des modèles analytiques ainsi que les résultats des étapes intermédiaires. Ces résultats sont composés :

- 1) Des paramètres de calcul de chaque modèle ;
- 2) Des montants du capital de solvabilité requis, de la marge pour risque (calculés via les équations définies dans la deuxième partie de ce mémoire) tout au long de la période de projection (9 ans pour la branche santé et 18 ans pour la branche responsabilité employeur) ;
- 3) Des rapports entre la marge pour risque et la meilleure estimation tout au long de la projection.

Les deux graphiques suivants montrent une comparaison des *proxy* décrits précédemment. Le premier représente l'évolution des montants de la marge pour risque au fil du temps et le deuxième l'évolution du capital de solvabilité requis.

Etant donné que les *proxy* 3, 4 et 5 utilisent le même capital de solvabilité que celui des modèles, le graphique représentant l'évolution du capital de solvabilité requis compare uniquement les montants des modèles analytiques et ceux des approches par formule standard.

Une fois ces comparaisons intra-modèle effectuées, le même système de graphique est utilisé pour comparer les modèles analytiques entre eux.

Il est nécessaire de noter que les paramètres et paiements cumulés $C(t)$ présentés dans les tableaux ci-après sont les paramètres pour un triangle donné et sont donc donnés à titre indicatif.

3.2.1 Régression log-normale

Régression log-normale									
Santé									
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C(t)	401 324	450 333	452 126	452 533	452 815	453 044	453 241	453 423	453 485
m	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76
alpha(t)	0	-2,11	-5,87	-8,01	-9,16	-10,37	-11,16	-11,16	-15,27
beta(t)	0	0,11	0,14	0,15	0,15	0,14	0,12	0,16	0,22
S(t)	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
SCR(t)	10 985,3	251,1	46,3	16,1	6,1	2,6	0,9	0,0	0,0
RM(t)	1 099,3	80,4	4,3	1,5	0,6	0,2	0,1	0,0	0,0
RM(t)/BE(t)	4,42%	4,25%	4,29%	4,23%	4,39%	4,21%	4,33%	4,22%	0,00%

TABLE 2 – Tableau des résultats branche santé

Les résultats obtenus pour cette ligne d'activité paraissent cohérents. En effet, la marge pour risque diminue au fil des années pour devenir nulle à la fin des engagements de l'assuré.

Nous observons également que la marge pour risque chute brutalement lors de la première année. Cela était prévisible car dans le cas d'une branche à développement court la majorité du sinistre est réglée lors de la première année.

De plus, le ratio RM/BE reste constant au fil des années et devient nul à la dernière année.

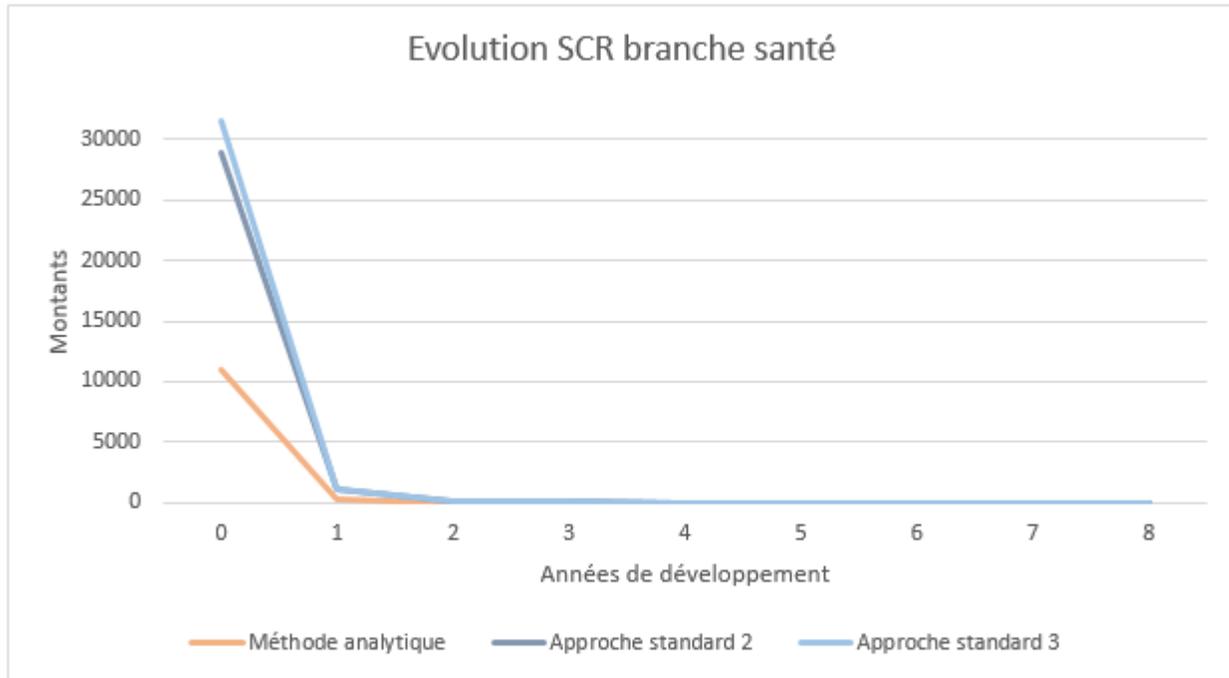


FIGURE 5 – Evolution du SCR branche santé

Les résultats du capital de solvabilité requis montrent un écart initial conséquent entre la régression et les méthodes par approche standard (163 % et 187 % pour respectivement l'approche standard 2 et l'approche standard 3). Par la suite, l'écart diminue fortement et les trois courbes se superposent à partir de la deuxième année.

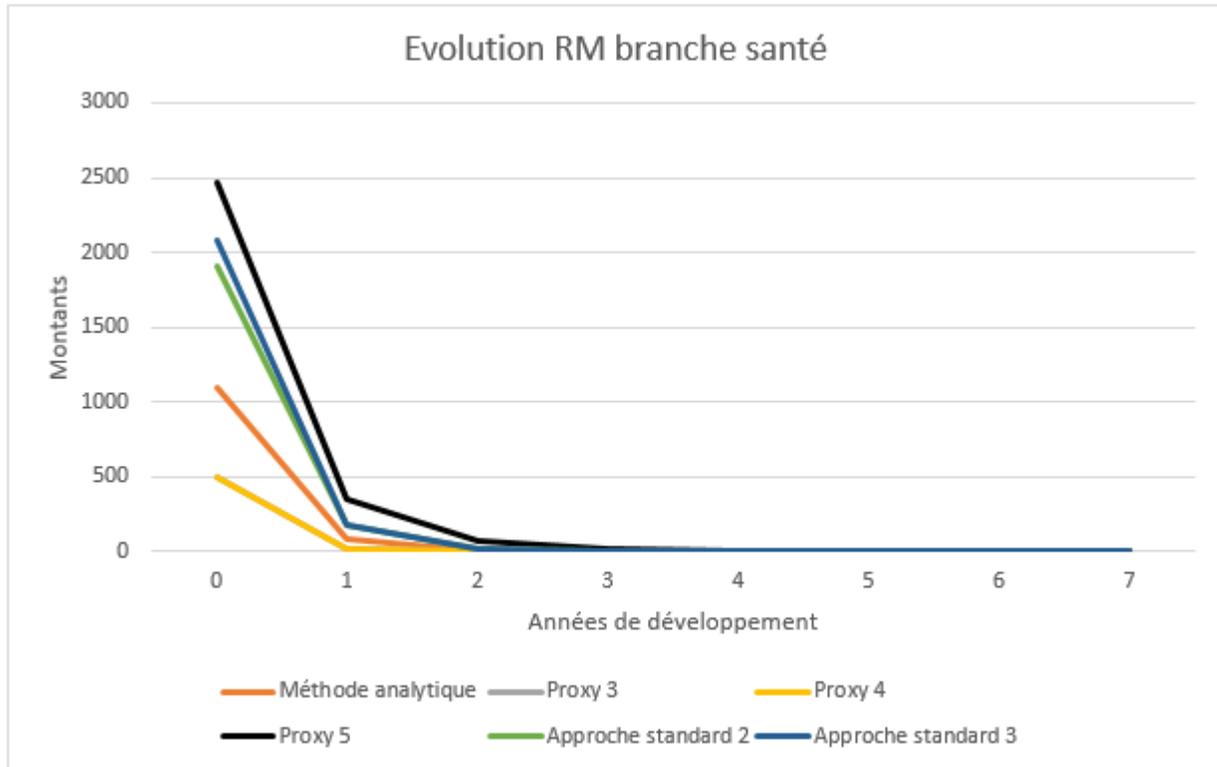


FIGURE 6 – Evolution de la RM branche santé

L'écart initial observé précédemment pour le capital de solvabilité requis est toujours présent, quoique moins conséquent, entre la régression et les méthodes par approche standard (74 % et 89 % pour respectivement l'approche standard 2 et l'approche standard 3). La marge pour risque initiale obtenue par le *proxy 5* est légèrement supérieure à celles obtenus par les approches standards 2 et 3. Ce qui vient confirmer le fait que ce *proxy* est à utiliser en dernier recours pour calculer la marge pour risque.

Par la suite, les résultats obtenus par le *proxy 5* et par la formule standard converge plutôt rapidement (troisième année) vers les résultats du modèle analytique.

Les *proxy 3* et *4* offrent des résultats intéressants car plus proches de la régression. Des écarts initiaux de 50 % et 54 % sont obtenus.

Par la suite, leurs résultats convergent plus rapidement vers ceux de la régression en comparaison avec les autres méthodes.

Régression log-normale										
Responsabilité employeur										
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C(t)	139	1 662	3 914	6 630	9 215	11 540	12 882	13 524	14 143	15 804
m	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65
alpha(t)	0,00	2,06	2,25	2,39	2,29	2,62	2,03	0,91	1,00	2,19
beta(t)	0,00	0,43	0,12	0,73	0,38	0,29	0,74	0,14	0,43	0,67
S(t)	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
SCR(t)	25 688,4	22 307,0	18 449,7	15 097,0	11 762,7	9 392,0	7 470,3	6 392,0	5 076,2	3 710,2
RM(t)	7 278,7	5 882,4	4 681,6	3 679,0	2 874,2	2 242,2	1 747,2	1 340,0	998,5	725,5
RM(t)/BE(t)	8,26%	7,79%	7,58%	7,85%	7,78%	7,82%	8,09%	7,87%	7,98%	7,90%
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
C(t)	17 081	17 474	18 129	18 214	18 272	18 364	18 593	19 529	19 723	
m	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	
alpha(t)	1,88	0,56	1,13	-2,06	-2,46	-1,37	-0,07	1,47	-0,14	
beta(t)	0,95	1,30	1,66	1,41	0,70	0,97	1,35	1,63	1,93	
S(t)	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	
SCR(t)	2 708,4	2 011,2	1 528,8	1 294,1	1 143,3	833,8	474,9	71,5	0,0	
RM(t)	529,7	388,2	281,4	202,5	132,7	73,3	28,8	3,7	0,0	
RM(t)/BE(t)	7,88%	7,83%	7,74%	7,72%	7,69%	7,82%	7,81%	7,86%	0,00%	

TABLE 3 – Tableau des résultats branche responsabilité employeur

Les résultats obtenus pour cette ligne d'activité semblent également cohérents. En effet, la marge pour risque diminue progressivement au fil des années pour devenir nulle à la fin des engagements de l'assuré.

La diminution est notamment moins rapide que celle de la ligne d'activité santé étant donné qu'il s'agit d'une branche à développement long.

Le ratio RM/BE reste également constant au fil des ans.

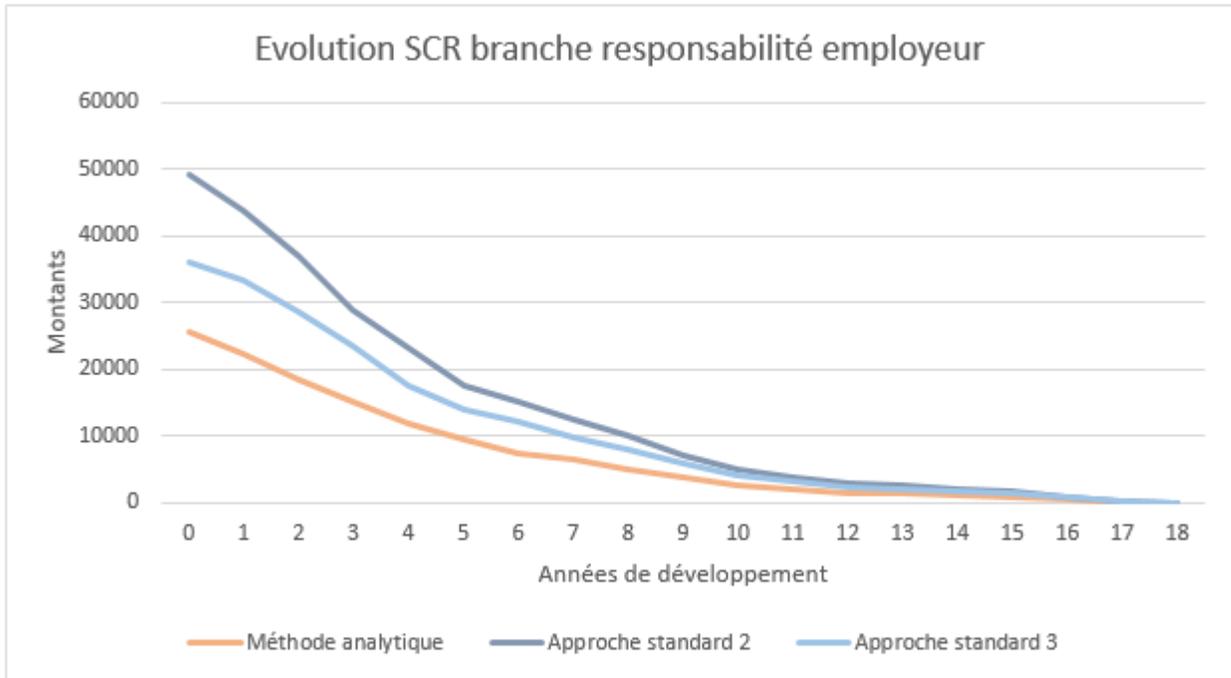


FIGURE 7 – Evolution du SCR branche responsabilité employeur

Pour cette branche à développement long, les résultats du capital de solvabilité requis montrent un écart initial moins conséquent que précédemment et un écart plus prononcé entre les méthodes par approche standard. Un écart de 40 % est obtenu pour l'approche standard 3 et un écart de 92 % pour l'approche standard 2. Les courbes des trois méthodes se superposent uniquement à la fin des engagements de l'assureur alors que cela se produisait dans les premières années pour la ligne d'activité santé.

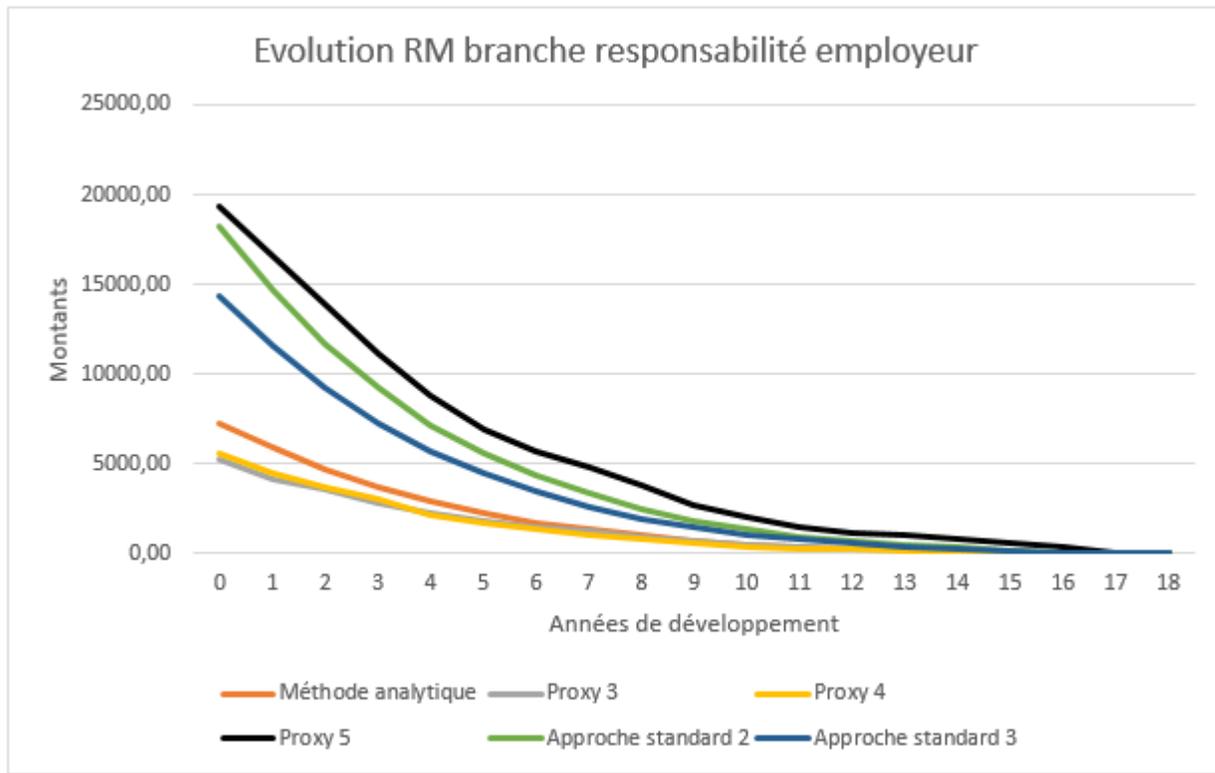


FIGURE 8 – Evolution de la RM branche responsabilité employeur

L'écart initial observé pour la marge pour risque est, contrairement à la branche santé, plus important que pour le capital de solvabilité requis. Un écart de 150 % est obtenu pour l'approche standard 2 et un écart de 97 % pour l'approche standard 3. Cependant les résultats obtenus par le *proxy 5* sont toujours supérieurs aux autres. Comme pour les résultats du capital de solvabilité requis, les résultats de la marge pour risque obtenus par le *proxy 5* et par la formule standard mettent du temps à converger vers les résultats du modèle analytique.

Les *proxy 3* et *4* offrent encore des résultats intéressants avec des écarts initiaux de respectivement 23 % et 27 %. Par la suite, leurs résultats convergent plus rapidement vers ceux de la régression par rapport aux autres méthodes.

3.2.2 GLM avec loi de Poisson surdispersé

GLM									
Santé									
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C(t)	401 302	449 198	450 934	451 327	451 603	451 830	452 035	452 223	452 286
m	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76
alpha(t)	0	-2,11	-5,87	-8,01	-9,16	-10,37	-11,16	-11,16	-15,27
beta(t)	0	0,11	0,14	0,15	0,15	0,14	0,12	0,16	0,22
SCR(t)	10 745,5	276,9	57,1	20,6	6,4	3,0	0,7	0,0	0,0
RM(t)	1 019,8	76,3	3,6	1,3	0,5	0,2	0,0	0,0	0,0
RM(t)/BE(t)	4,49%	4,31%	4,28%	4,25%	4,46%	4,36%	4,38%	4,26%	0,00%

TABLE 4 – Tableau des résultats branche santé

Les mêmes conclusions peuvent être tirées sur les résultats obtenus par la régression pour la ligne d'activité santé. Ils semblent donc également cohérents.

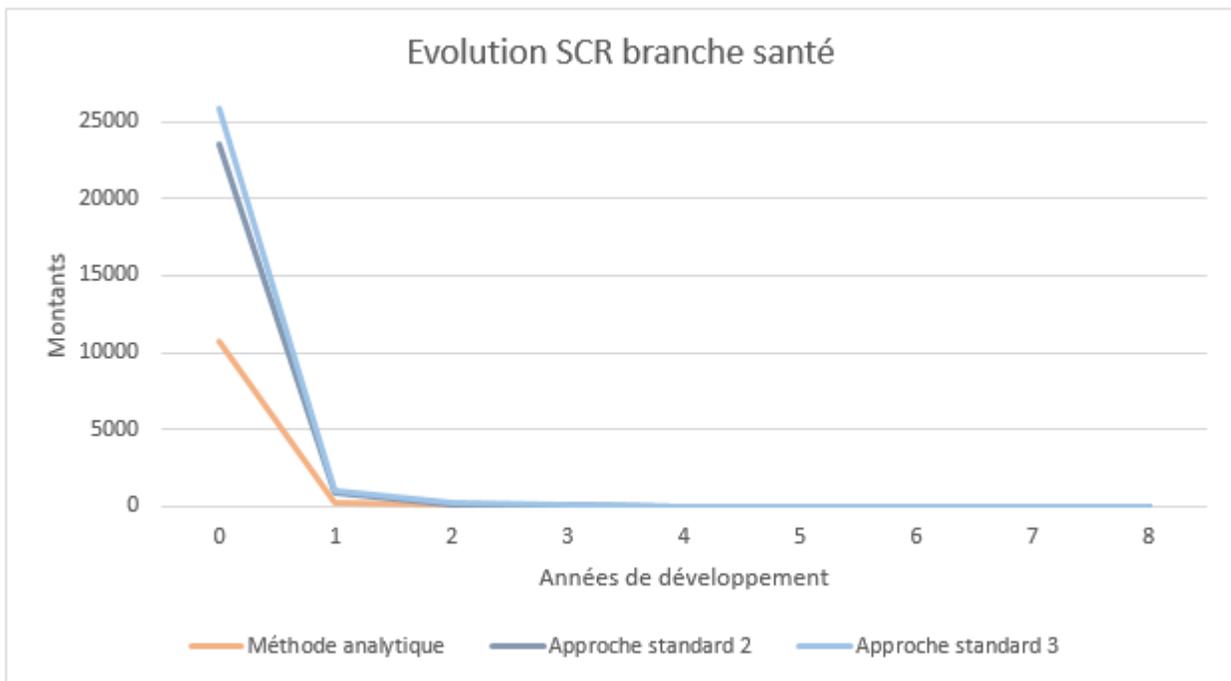


FIGURE 9 – Evolution du SCR branche santé

Des écarts initiaux de 119 % et 140 % sont obtenus pour les approches standards 2 et 3. Et une convergence apparaît à partir de la deuxième année de développement.

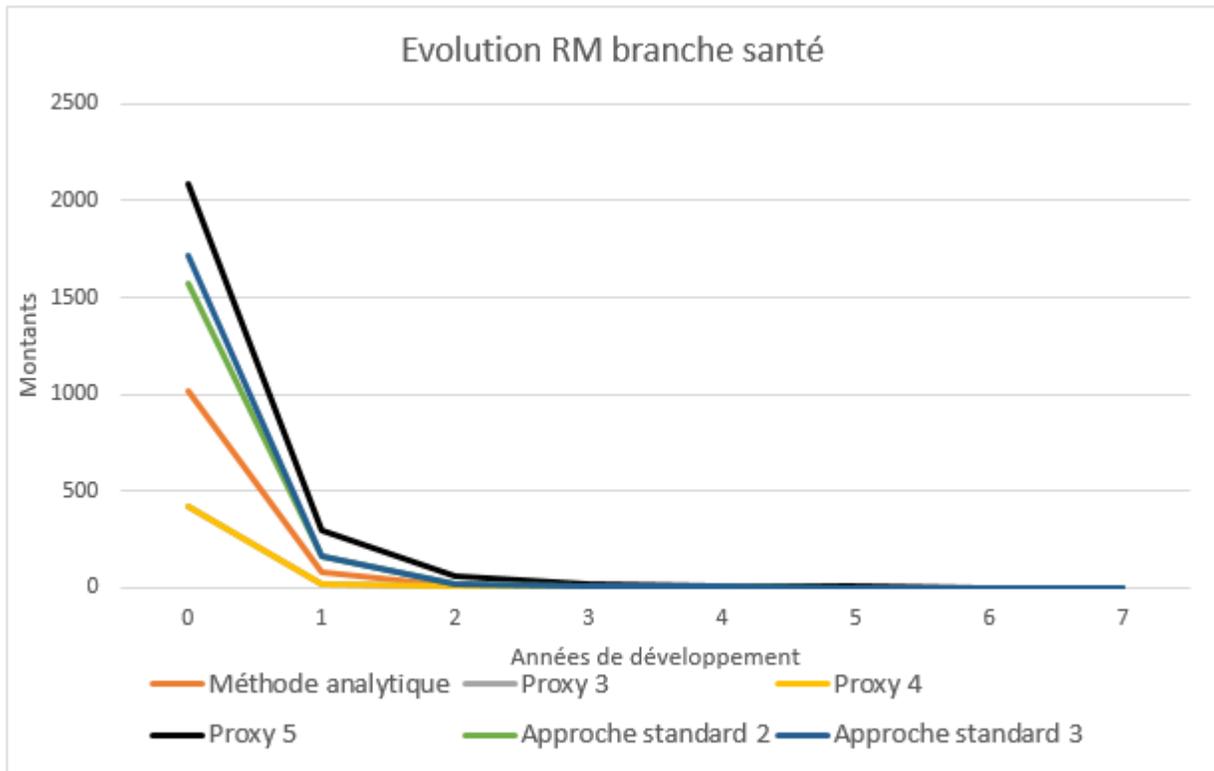


FIGURE 10 – Evolution de la RM branche santé

Les écarts initiaux sont de 55 % pour l'approche standard 2, de 68 % pour l'approche standard 3 et de 104 % pour le *proxy* 5. La convergence des résultats s'opère à partir de la troisième année de développement.

Les écarts initiaux obtenus pour les *proxy* 3 et 4 sont de 59 % avec une convergence des résultats lors de la deuxième année.

GLM										
Responsabilité employeur										
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C(t)	127	1 359	3 239	5 767	7 892	12 897	13 456	13 655	13 885	15 208
m	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65
alpha(t)	0,00	2,06	2,25	2,39	2,29	2,62	2,03	0,91	1,00	2,19
beta(t)	0,00	0,43	0,12	0,73	0,38	0,29	0,74	0,14	0,43	0,67
SCR(t)	24 555,6	21 749,4	17 647,6	14 285,7	10 822,7	8 472,9	7 189,1	5 997,1	4 855,4	3 481,0
RM(t)	6 436,9	5 202,1	4 140,2	3 253,5	2 541,8	1 982,9	1 545,2	1 185,0	883,0	641,6
RM(t)/BE(t)	8,22%	7,75%	7,53%	7,99%	7,80%	7,86%	8,03%	7,90%	8,04%	7,86%
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
C(t)	16 929	17 513	18 386	18 602	18 609	18 688	18 883	19 689	20 025	
m	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	2,65	
alpha(t)	1,88	0,56	1,13	-2,06	-2,46	-1,37	-0,07	1,47	-0,14	
beta(t)	0,95	1,30	1,66	1,41	0,70	0,97	1,35	1,63	1,93	
SCR(t)	2 590,7	2 036,3	1 490,6	1 167,4	1 136,1	844,2	454,2	65,8	0,0	
RM(t)	468,4	343,3	248,9	179,1	117,4	64,8	25,5	3,3	0,0	
RM(t)/BE(t)	7,72%	7,67%	7,69%	7,62%	7,67%	7,79%	7,75%	7,83%	0,00%	

TABLE 5 – Tableau des résultats branche responsabilité employeur

Les mêmes conclusions peuvent être faites sur les résultats obtenus par la régression pour la ligne d'activité responsabilité employeur. Ils semblent donc cohérents.

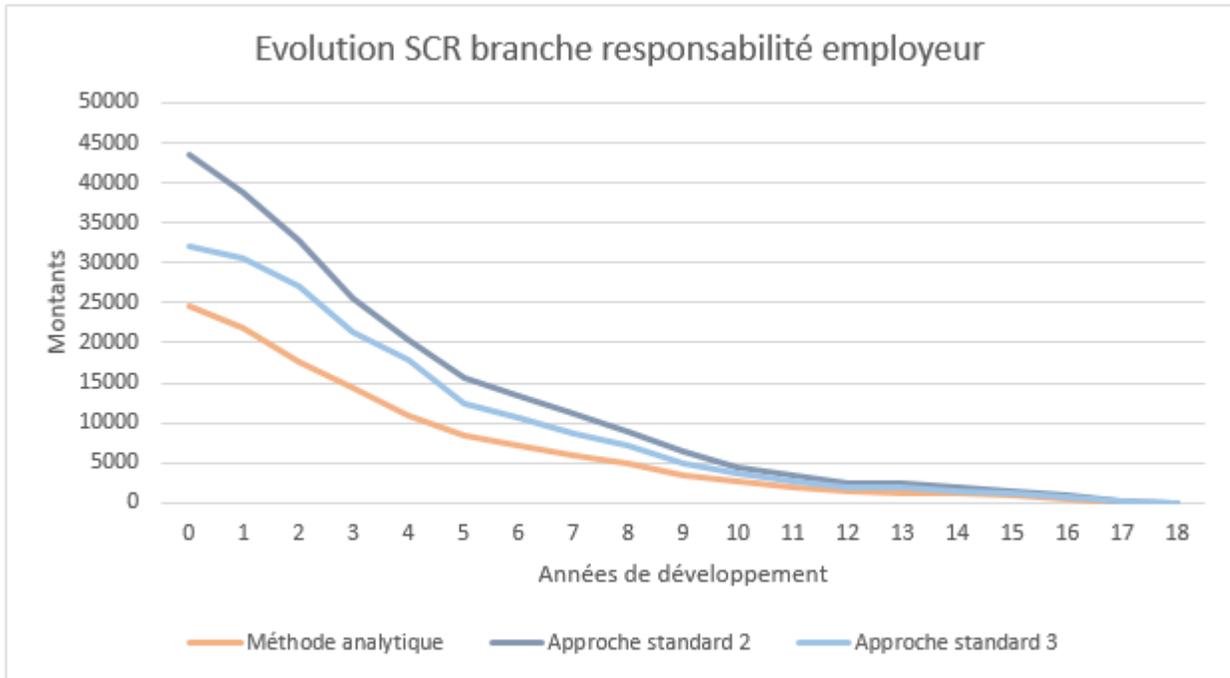


FIGURE 11 – Evolution du SCR branche responsabilité employeur

Les écarts initiaux sont de 78 % pour l’approche standard 2 et de 31 % pour l’approche standard 3. Une convergence ne s’observe que dans les dernières années de développement.

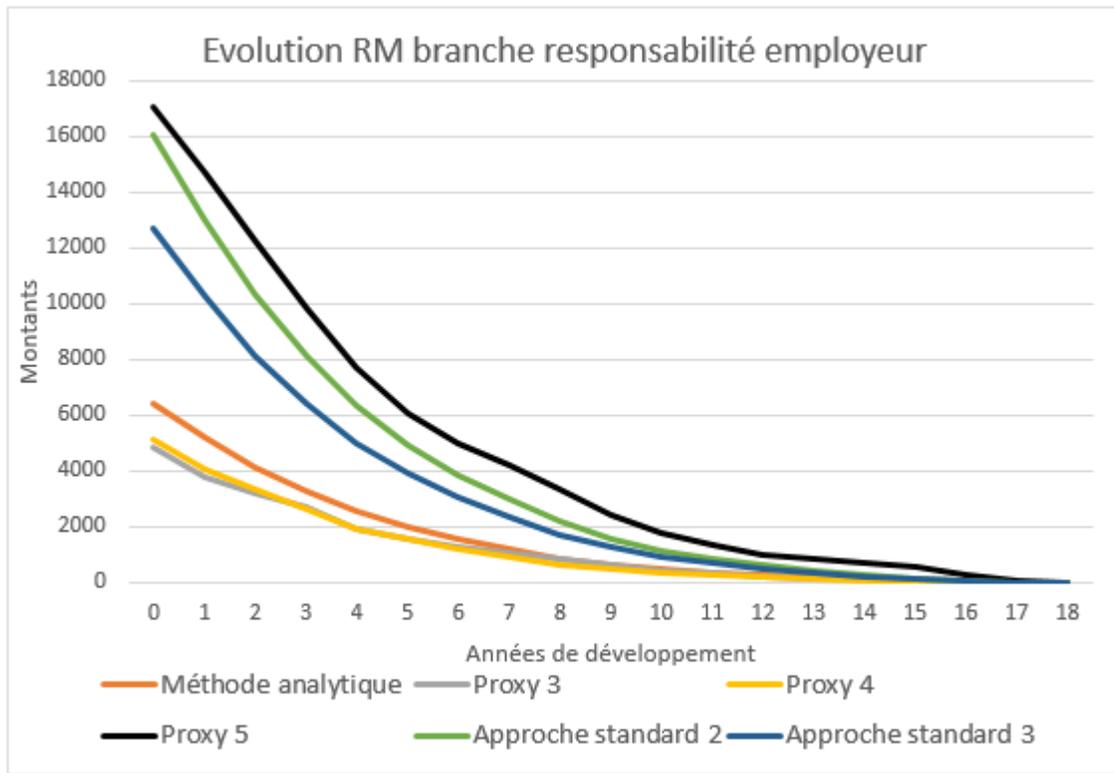


FIGURE 12 – Evolution de la RM branche responsabilité employeur

Les écarts initiaux sont de 133 % pour l’approche standard 2, de 74 % pour l’approche standard 3 et de 155 % pour le *proxy* 5. La convergence des résultats se fait dans les dernières années de développement mais est plus rapide pour les approches standards.

Les écarts initiaux obtenus pour les *proxy* 3 et 4 sont de respectivement 33 % et 21 % avec une convergence des résultats lors de la onzième année.

3.2.3 Modèle bayésien

Modèle Bayésien									
Santé									
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C(t)	401 301	451 004	452 632	452 788	452 836	452 847	452 858	452 866	452 866
phi(t)		1,47E-01	2,97E-03	3,32E-04	1,13E-04	2,87E-05	3,07E-05	1,62E-05	8,90E-07
sigma(t)		3,10E-03	2,52E-04	3,01E-05	1,14E-06	1,33E-06	4,85E-06	5,89E-07	3,92E-07
s(t)		2,10E-03	7,36E-04	5,41E-05	6,98E-05	2,93E-06	3,15E-06	5,66E-07	1,17E-07
SCR(t)	13 747,0	259,5	49,7	19,1	8,1	3,8	1,1	0,1	0,0
RM(t)	1 146,2	90,5	4,9	1,9	0,8	0,3	0,1	0,0	0,0
RM(t)/BE(t)	4,24%	4,32%	4,19%	4,18%	4,22%	4,13%	4,22%	4,15%	0,00%

TABLE 6 – Tableau des résultats branche santé

Les mêmes conclusions peuvent être faites sur les résultats obtenus par la régression pour la ligne d'activité santé. Ils semblent donc cohérents.

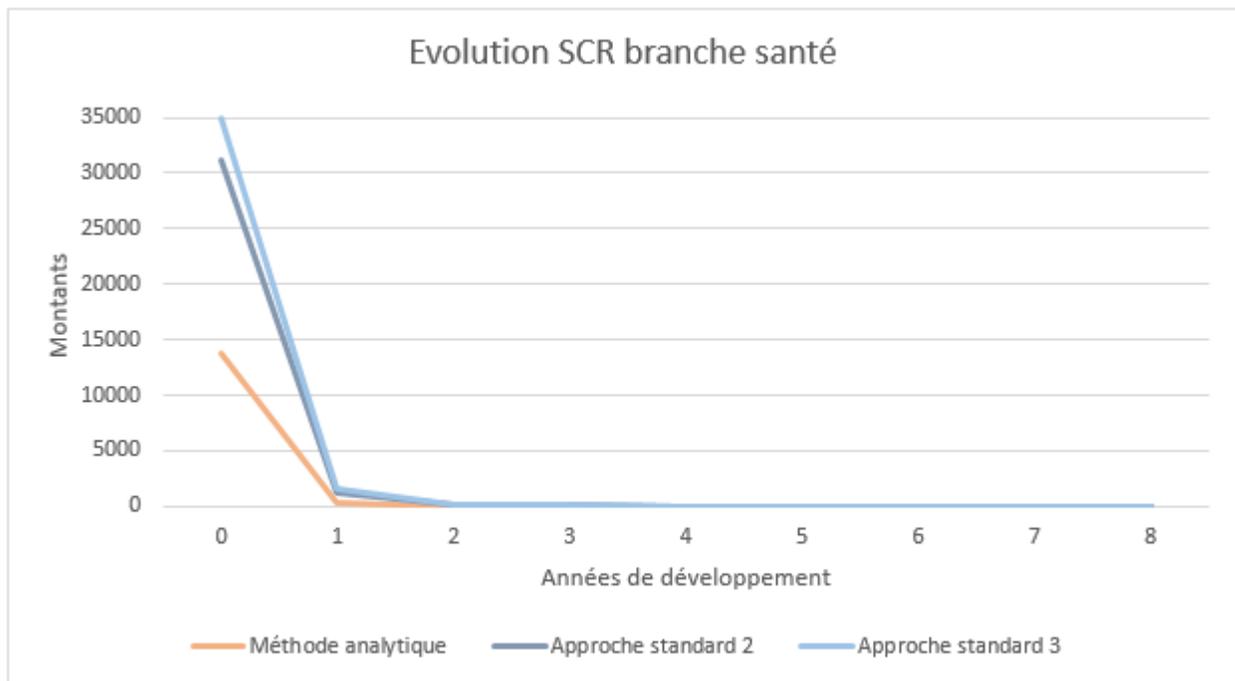


FIGURE 13 – Evolution du SCR branche santé

Les écarts initiaux de 127 % pour l’approche standard 2 et 155 % pour l’approche standard 3 sont observés. Une convergence s’effectue à partir de la deuxième année de développement.

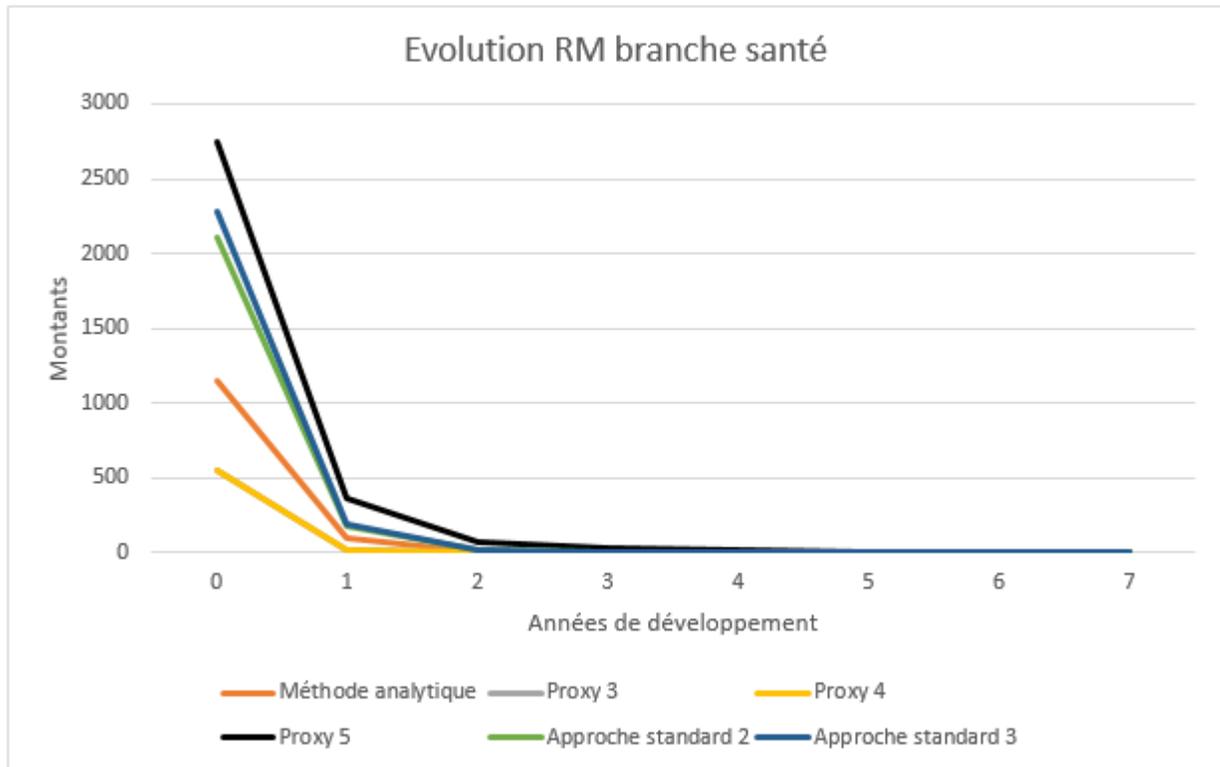


FIGURE 14 – Evolution de la RM branche santé

Les écarts initiaux sont de 84 % pour l’approche standard 2, de 99 % pour l’approche standard 3 et de 140 % pour le *proxy* 5. La convergence des résultats est à partir de la deuxième année de développement pour les approches standard et à partir de la troisième année de développement pour le *proxy* 5.

Les écarts initiaux obtenus pour les *proxy* 3 et 4 sont de 52 % avec une convergence des résultats lors de la deuxième année.

Modèle Bayésien										
Responsabilité employeur										
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C(t)	139	1 694	4 012	6 828	9 517	12 006	13 470	14 158	14 834	16 694
phi(t)		1,50E+00	6,49E-01	5,67E-01	1,87E-01	7,95E-01	2,40E-02	2,00E-04	1,12E-02	1,11E-01
sigma(t)		1,00E-02	2,10E-02	9,04E-03	7,12E-03	8,17E-03	6,32E-03	5,27E-03	4,85E-03	4,57E-03
s(t)		1,42E-02	1,04E-02	8,42E-03	6,37E-03	7,17E-03	5,87E-03	4,87E-03	4,61E-03	4,37E-03
SCR(t)	29 832,7	24 765,1	20 483,5	16 747,8	12 842,4	10 836,0	9 019,5	7 603,0	5 747,7	4 271,1
RM(t)	8 195,6	6 634,8	5 301,6	4 188,3	3 295,4	2 605,1	2 034,1	1 542,5	1 136,4	827,2
RM(t)/BE(t)	8,29%	7,85%	7,65%	7,84%	7,95%	7,94%	7,98%	7,88%	7,93%	7,88%
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
C(t)	18 125	18 561	19 294	19 381	19 441	19 540	19 794	20 848	21 067	
phi(t)	1,25E-01	3,84E-02	5,40E-02	1,26E-02	2,00E-04	4,41E-03	1,07E-02	4,23E-02	1,70E-02	
sigma(t)	4,05E-03	3,86E-03	3,69E-03	3,66E-03	3,49E-03	3,26E-03	3,05E-03	2,99E-03	2,91E-03	
s(t)	4,11E-03	3,98E-03	3,75E-03	3,70E-03	3,47E-03	3,28E-03	3,08E-03	2,98E-03	2,94E-03	
SCR(t)	3 245,1	2 437,9	2 007,3	1 544,3	1 183,9	703,8	277,1	46,2	0,0	
RM(t)	601,8	432,4	303,0	199,3	116,1	54,6	17,1	2,4	0,0	
RM(t)/BE(t)	7,94%	7,93%	7,98%	7,95%	7,94%	7,78%	7,83%	7,96%	0,00%	

TABLE 7 – Tableau des résultats branche responsabilité employeur

Les mêmes conclusions peuvent être faites sur les résultats obtenus par la régression pour la ligne d'activité responsabilité employeur. Ils semblent donc cohérents.

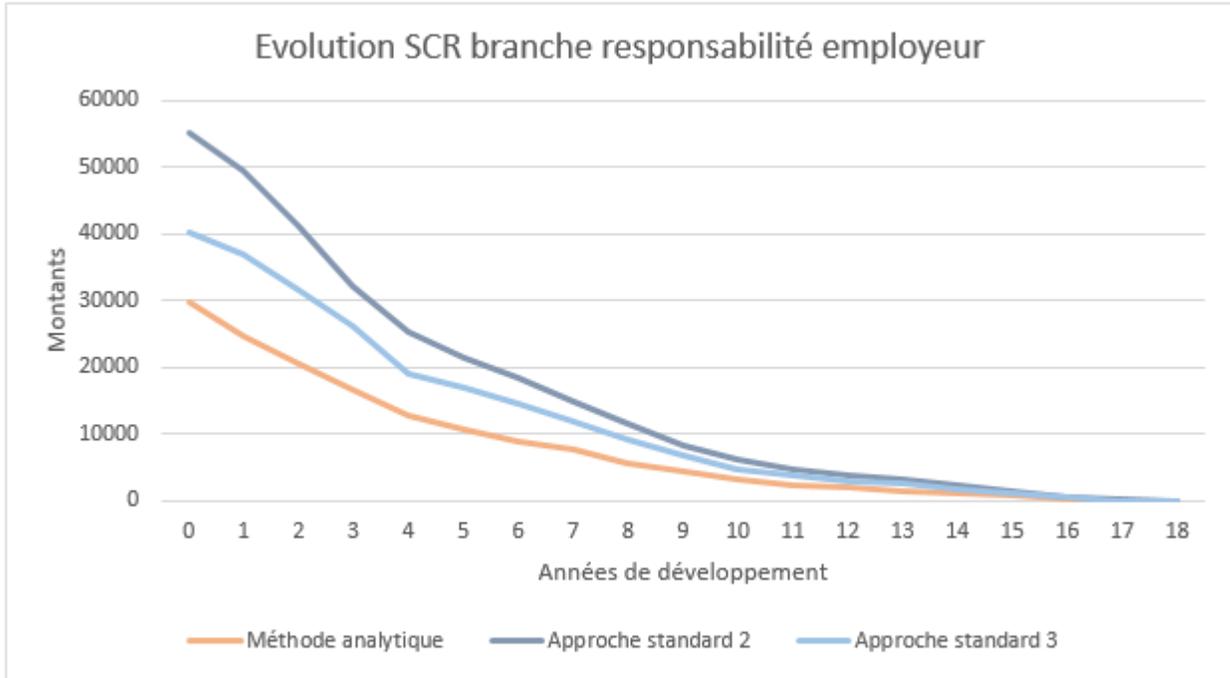


FIGURE 15 – Evolution du SCR branche responsabilité employeur

Les écarts initiaux sont de 85 % pour l’approche standard 2 et de 35 % pour l’approche standard 3. Une convergence s’opère dans les dernières années de développement.

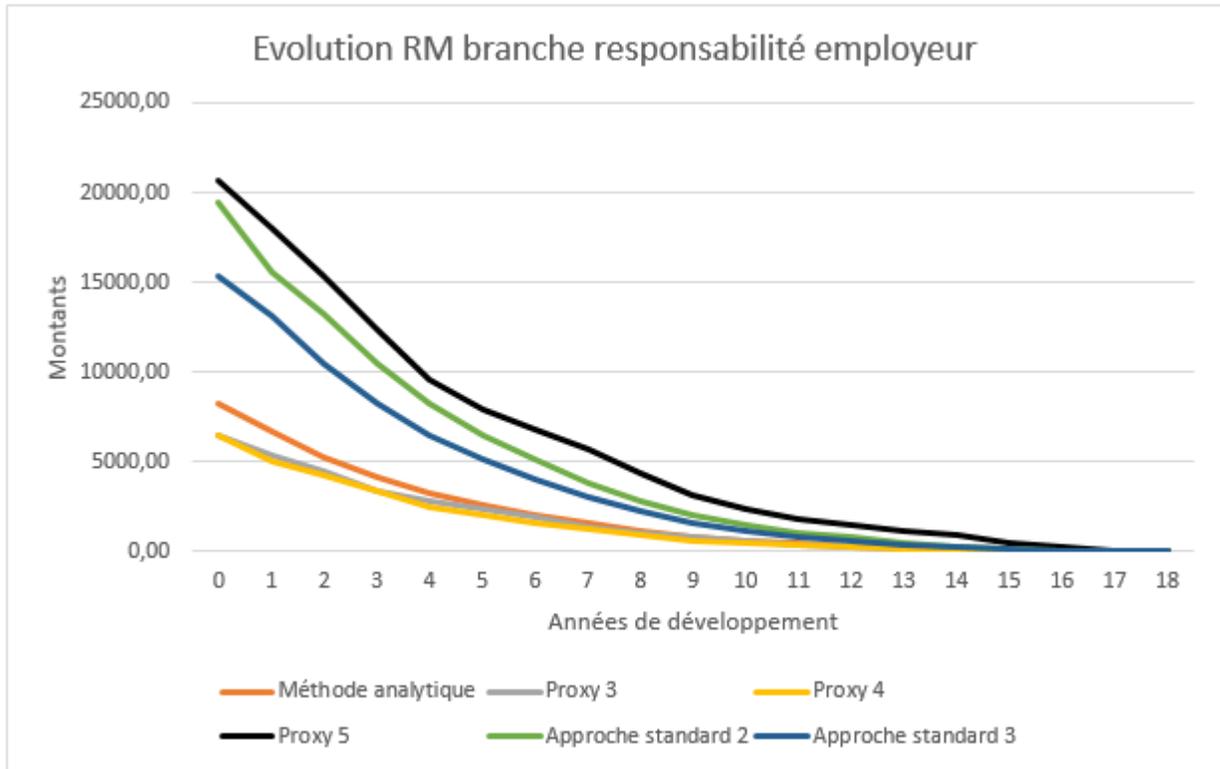


FIGURE 16 – Evolution de la RM branche responsabilité employeur

Les écarts initiaux sont de 138 % pour l’approche standard 2, de 87 % pour l’approche standard 3 et de 152 % pour le *proxy* 5. La convergence des résultats se fait dans les dernières années de développement mais est plus rapide pour les approches standards.

Les écarts initiaux obtenus pour les *proxy* 3 et 4 sont de respectivement 20 % et 21 % avec une convergence des résultats lors de la dixième année.

3.2.4 Comparaison des modèles analytiques

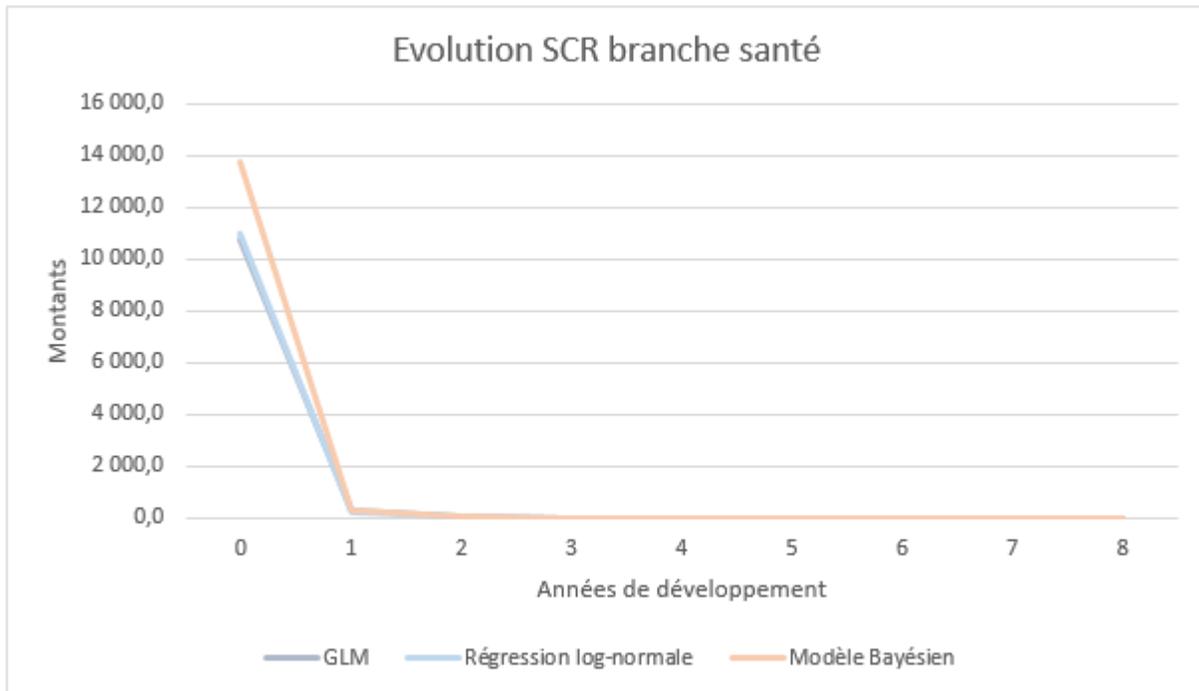


FIGURE 17 – Evolution du SCR branche santé

L'écart entre le GLM avec la loi de Poisson surdispersée et la régression log-normale est très faible. Cet écart logique vient de la forme des modèles. En effet la formule du GLM est pratiquement la même que celle de la régression excepté qu'elle prend en compte l'écart type des données.

Le capital de solvabilité requis obtenu par le modèle bayésien est supérieur à ceux obtenus avec les deux autres modèles avec des écarts de 20 % pour la régression et 22 % pour le GLM.

Mais comme précédemment observé pour la branche santé, l'écart est rapidement comblé.

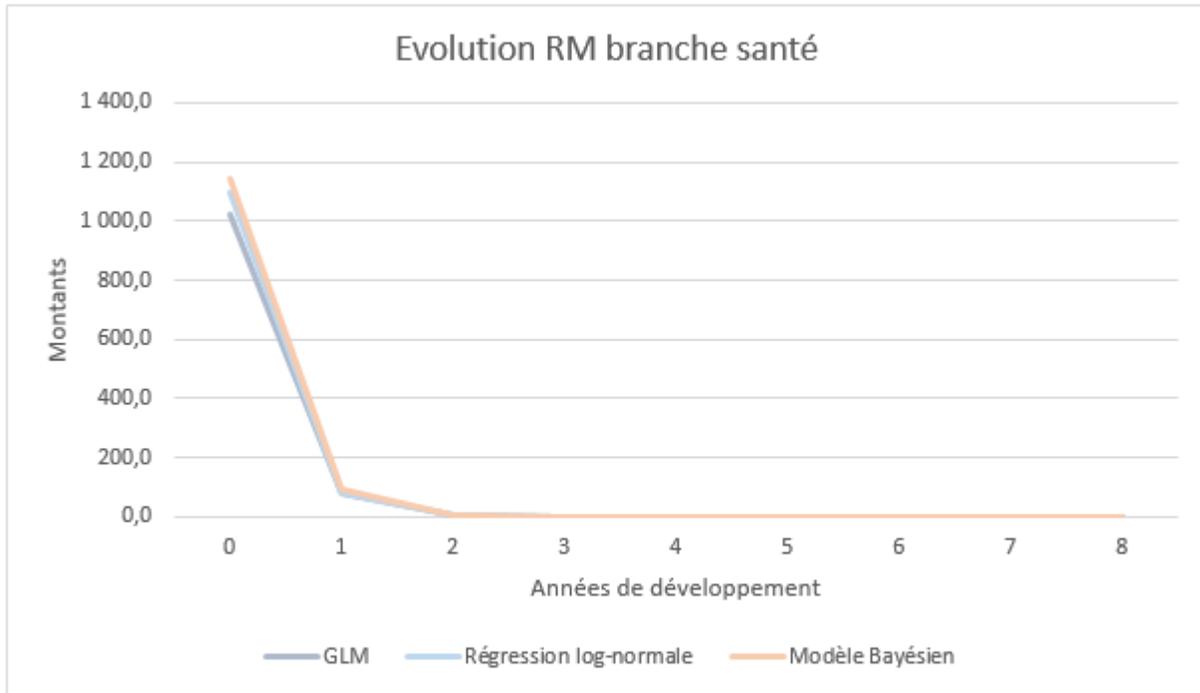


FIGURE 18 – Evolution de la RM branche santé

Pour les résultats de la marge pour risque, des écarts très proches entre les modèles. L'écart est plus petit pour la régression et le modèle bayésien qu'entre la régression et le GLM (4 % et 7 %).

Comme précédemment, les résultats convergent ensuite à partir de la deuxième année.

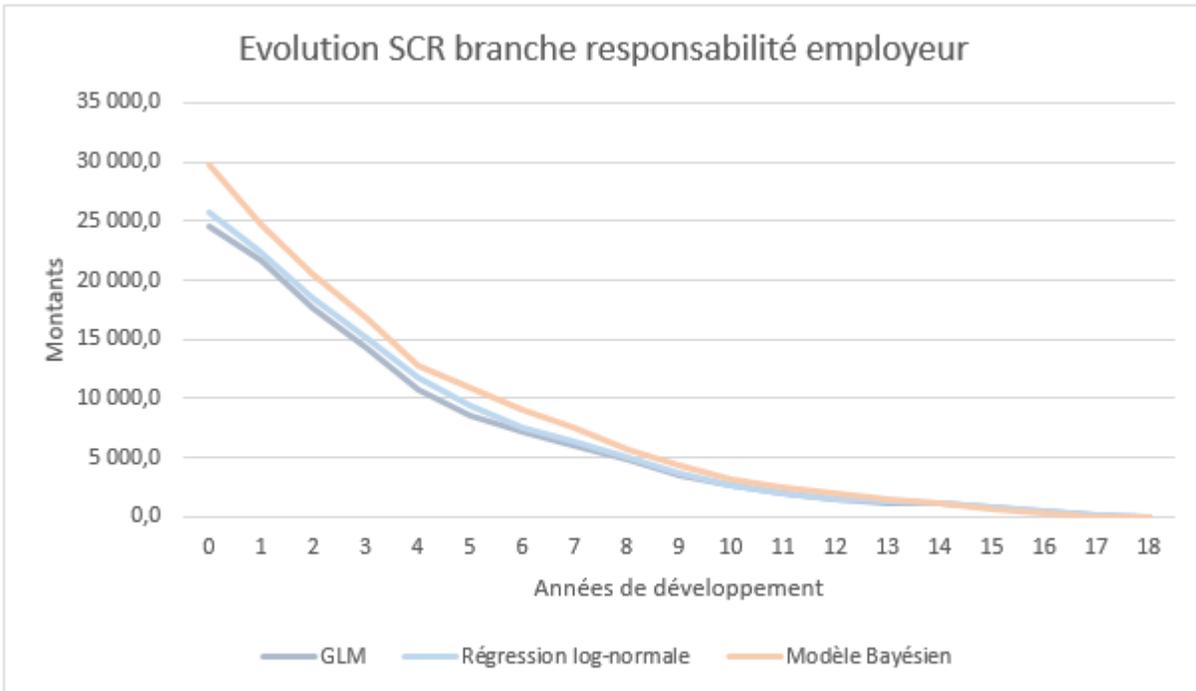


FIGURE 19 – Evolution du SCR branche responsabilité employeur

Comme pour le capital de solvabilité requis de la branche santé, il y a un faible écart entre le GLM et la régression tout au long des premières années. Les courbes se superposent ensuite lors de la dixième année.

Comme pour la branche santé, le capital de solvabilité requis du modèle bayésien est supérieur à ceux obtenus par les deux autres modèles. L'écart initial avec la régression log-normale est de 14 % et de 18 % avec le GLM.

Comme expliqué précédemment en présence de branche à développement long, les résultats mettent du temps avant de converger : la convergence a lieu à partir de la quatorzième année.

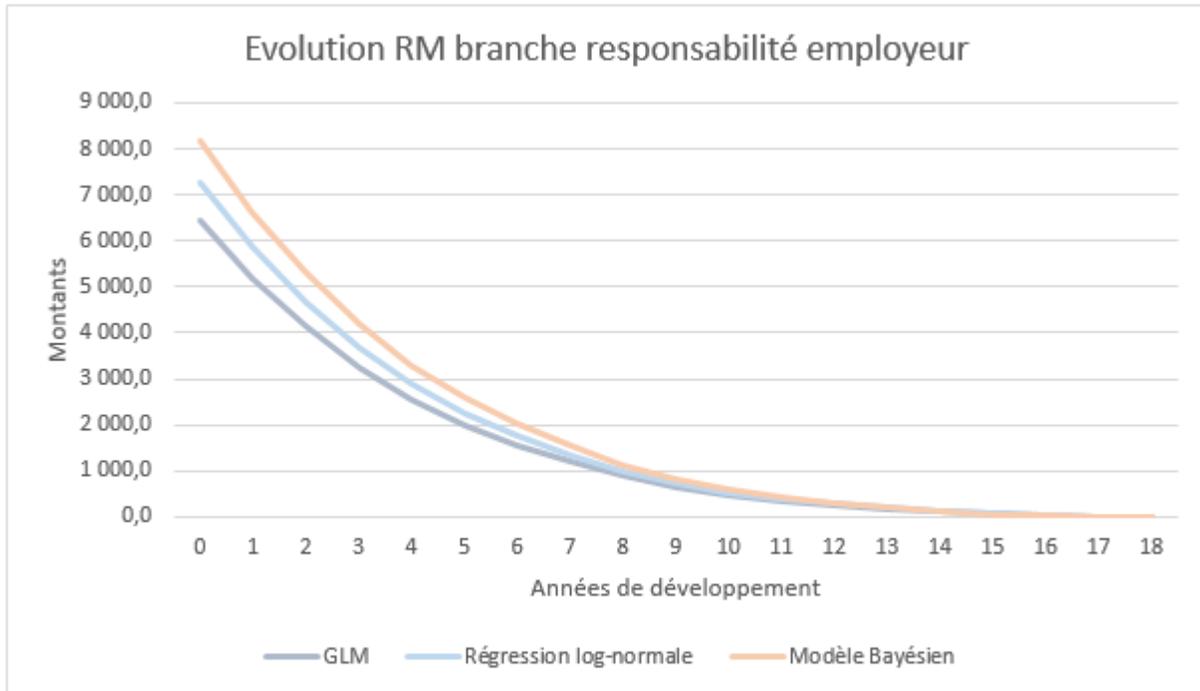


FIGURE 20 – Evolution de la RM branche responsabilité employeur

Contrairement aux observations faites pour la ligne d'activité santé, les écarts entre les modèles pour la responsabilité employeur sont plus conséquents. L'écart entre la régression log-normale et le GLM avec loi de Poisson surdispersée est de 12 % alors que leur structure est proche.

Pour le modèle bayésien, les écarts initiaux sont de 21 % avec le GLM avec loi de Poisson surdispersée et de 11 % avec la régression log-normale.

Les marges pour risque convergent à partir de la treizième année.

3.3 Interprétation des résultats

Cette partie est consacrée au résumé et à l'explication des résultats présentés précédemment.

3.3.1 Résultats des proxy

Plusieurs points communs s'observent à $t = 0$ pour les deux lignes d'activité :

- Les *proxy* 3 et 4 sont quasiment égaux et semblent sous-estimer les montants de marge pour risque. En effet les résultats obtenus par ces *proxy* sont toujours inférieurs à ceux obtenus par les modèles analytiques.

- Le *proxy* 5 semble surestimer les résultats de marge pour risque. En effet, les écarts obtenus sont toujours largement supérieurs.

La similarité des résultats obtenus par les *proxy* 3 et 4 n'est pas surprenante. En effet, la duration est en elle-même un indicateur de la façon dont les *cash-flow* et les réserves évoluent dans le temps.

Ceci peut être prouvé théoriquement. Il suffit de réécrire les formules de marge pour risque pour ces deux *proxy* :

$$RM^{Proxy3}(0) = CoC \cdot \mathbb{E}[SCR(0)|\mathcal{F}_0] \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[R_t|\mathcal{F}_0]}{(1+r)^{i-t+1} \cdot \mathbb{E}[R_0|\mathcal{F}_0]}$$

$$RM^{Proxy4}(0) = CoC \cdot \mathbb{E}[SCR(0)|\mathcal{F}_0] \cdot Dur_{mod}(0)$$

Si nous définissons la duration de la façon suivante :

$$Dur(0) = \frac{\sum_{t=1}^n t \cdot \mathbb{E}[C_t - C_{t-1}|\mathcal{F}_0]}{\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[C_t - C_{t-1}|\mathcal{F}_0]}$$

Or

$$\sum_{t=1}^n \mathbb{E}[C_t - C_{t-1}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[C_n|\mathcal{F}_0] - C_0 = \mathbb{E}[R_0|\mathcal{F}_0]$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_{t=1}^n t \cdot \mathbb{E}[C_t - C_{t-1}|\mathcal{F}_0] = n \cdot \mathbb{E}[C_n|\mathcal{F}_0] - \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[C_t|\mathcal{F}_0]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^n t \cdot \mathbb{E}[C_t - C_{t-1}|\mathcal{F}_0] = \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[C_n - C_t|\mathcal{F}_0]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^n t \cdot \mathbb{E}[C_t - C_{t-1} | \mathcal{F}_0] = \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[R_t | \mathcal{F}_0]$$

Finalement nous obtenons :

$$Dur(0) = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} t \cdot \mathbb{E}[R_t | \mathcal{F}_0]}{\mathbb{E}[R_0 | \mathcal{F}_0]} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}[R_t | \mathcal{F}_0]}{\mathbb{E}[R_0 | \mathcal{F}_0]}$$

Cela revient à dire que les deux *proxy* utilisent une méthode proportionnelle dans le cas de *run-off* de réserves.

Le léger écart entre ces *proxy* peut être expliqué par le fait que la duration, dans le cas du *proxy* 4, est calculée directement à partir des *cash-flow* "bruts" tandis que pour le *proxy* 3 elle est calculée à partir des *cash-flow* estimés.

En ce qui concerne le *proxy* 5, le paramètre de volatilité donné par le règlement délégué (UE) 2015/35 semble être très punitif (5 % pour la branche santé et 11 % pour la branche responsabilité employeur). A noter toutefois que si l'étude avait été réalisée avec des données différentes, le paramètre de volatilité aurait pu être moins élevé et donc les écarts moins importants. Il faudrait donc effectuer d'autres études avec plusieurs jeux de données de la branche santé et de la branche responsabilité employeur afin de voir si ces écarts s'observent systématiquement.

Pour $t > 0$ et pour la ligne d'activité santé, peu importe la méthode utilisée, celle-ci converge rapidement vers les résultats obtenus par les modèles analytiques. Ceci s'explique par le fait que nous sommes en présence d'une branche à développement court. De ce fait, la majorité du sinistre est payée sur les premières années. Pour notre exemple de données, la première année correspond à 90 % du coût du sinistre final. Cependant, pour les deux lignes d'activité, les *proxy* 3 et 4 ont toujours des résultats inférieurs à ceux des modèles analytiques même s'ils se rapprochent au fil des années. Inversement pour le *proxy* 5, les résultats obtenus sont toujours supérieurs à ceux des modèles analytiques et se rapprochent au fur et à mesure des années.

Pour $t > 0$ et pour la ligne d'activité responsabilité employeur, les méthodes ont tendance à converger moins rapidement vers les résultats des modèles analytiques. Pour les *proxy* 3 et 4, la convergence se fait en milieu de développement (onzième année) mais pour le *proxy* 5, la convergence a lieu uniquement durant les dernières années de développement.

Pour conclure sur les méthodes proposées par l'*EIOPA*, les *proxy* 3 et 4 apportent des résultats satisfaisants malgré le fait qu'elles sous-estiment légèrement la marge pour risque (sous-estimation plus importante pour la ligne d'activité à développement court que pour la ligne d'activité à développement long).

Quant au *proxy* 5, il a tendance à surestimer la marge pour risque, surtout lors de la première année. L'écart diminue rapidement sur les années suivantes mais reste important dans le cas de la ligne d'activité responsabilité employeur.

Au vu de ces résultats, la compagnie d'assurance qui calcule sa marge pour risque doit choisir entre les *proxy* en fonction de son appétence au risque.

En effet, si la compagnie d'assurance cherche à être prudente, il serait préférable pour elle d'utiliser le *proxy* 5.

Au contraire, si elle cherche à être moins prudente, il est préférable d'utiliser le *proxy* 3 ou 4 de l'*EIOPA*.

Une autre approche pour choisir le *proxy* à utiliser serait de le choisir en fonction du ratio RM/BE obtenu.

En effet, si ce ratio est faible, la compagnie d'assurance peut se permettre de choisir le *proxy* 3 ou 4 étant donné que la marge pour risque n'aura pas beaucoup d'impact sur le montant total des provisions techniques et inversement.

3.3.2 Approche standard

Sans surprise, pour les deux lignes d'activités, l'approche standard avec les paramètres de volatilité calculés présentent des montants de marge pour risque et de capital de solvabilité plus importants que ceux des modèles analytiques. En effet, les paramètres calculés semblent, comme pour le *proxy* 5 très punitifs. Toutefois les montants obtenus par l'approche standard sont inférieurs à ceux obtenus par le *proxy* 5.

Toutefois une tendance décroissante est observée pour les deux courbes qui convergent vers les autres au fil des années.

3.3.3 Modèles analytiques

Avant toute comparaison, il est important de noter que les résultats obtenus par nos modèles analytiques semblent cohérents. En effet les observations ci-dessous semblent respecter le comportement de la marge pour risque :

1) Une décroissance progressive au fur et à mesure des années en atteignant une valeur nulle à la fin des engagements de l'assureur ;

2) Une décroissance moins rapide lorsqu'il s'agit d'une branche à développement long étant donné qu'il faut plus de temps pour atteindre le *run-off* du portefeuille ;

3) Il y a une moins grande proportion de capital de solvabilité requis pour les lignes d'activités à développement long étant donné que la marge pour risque finance une partie du capital de solvabilité requis ;

4) Le ratio RM/BE reste constant dans le temps et devient nul à la dernière année lorsque la marge pour risque devient également nulle.

De manière prévisible, la régression log-normale donne des montants de capital de solvabilité et de marge pour risque supérieurs à ceux du GLM pour tous les cas étudiés. En effet, il s'agit de la même forme de modèle ($\exp(\alpha + \beta + m)$) à part que la régression prend en compte l'écart type dans sa formule ($\exp(\alpha + \beta + m + \sigma/2)$). Dans la suite, les comparaisons ne concerneront donc que le modèle bayésien avec la régression log-normale.

Pour le modèle bayésien, les montants de capital de solvabilité requis et de marge pour risque sont plus importants que ceux des autres modèles. Pour la branche santé, le modèle bayésien donne des montants de marge pour risque constamment supérieurs. Les deux modèles convergent ensuite rapidement pour obtenir quasiment les mêmes résultats à partir de la troisième année.

En ce qui concerne les montants de capital de solvabilité requis, l'écart lors de la première année est beaucoup plus important que celui observé pour la marge pour risque pour ensuite converger vers les mêmes résultats à partir de la cinquième année.

Pour la branche responsabilité employeur, il faut 13 ans avant que les courbes commencent à s'aligner. Les deux courbes de la marge pour risque commencent avec un écart initial de 12,60 % qui atteint son maximum à la sixième année avec 16,42 % pour ensuite diminuer et converger lors de la treizième année jusqu'à la fin des engagements de l'assureur.

De la même façon, les courbes de capital de solvabilité requis commencent avec un écart initial de 16,13 % avec un maximum lors de la sixième année de 20,74 % et se superposent lors de la quatorzième année jusqu'à la fin.

Concernant les ratios RM/BE, ils ont une allure appropriées. En effet, les ratios obtenus pour la branche santé sont inférieurs à ceux obtenus pour la branche responsabilité employeur du fait de la durée plus courte de développement de la branche santé. De plus, les ratios sont constants au fur et à mesure des années.

Ceci étant, malgré les écarts, les modèles donnent tout de même des tendances similaires. Une explication possible des similarités des montants et de comportements entre les trois modèles est qu'il s'agit de modélisations sur les mêmes triangles de

données. Il paraît donc logique que les trois modèles reflètent le même risque sous-jacent.

Cependant, il est compliqué de généraliser ces résultats du fait qu'ils sont étroitement liés au choix des données effectué pour ce mémoire. Les résultats obtenus pour d'autres triangles et/ou d'autres compagnies d'assurance pourraient ne pas donner les mêmes comportements entre les modèles.

Des tests devront être menés pour confirmer ou contredire les conclusions. Il faudrait utiliser plus de données en prenant par exemple différents triangles de la branche responsabilité employeur ou santé afin de comparer les résultats obtenus et pouvoir conclure de manière générale sur la pertinence des modèles utilisés pour ces lignes d'activité.

Si des tests venaient à prouver ces résultats, il pourrait être intéressant d'utiliser ces modèles pour les lignes d'activités étudiées étant donné que la régression log-normale ou le GLM avec une loi de Poisson surdispersée sont assez faciles à implémenter contrairement aux modèles bayésiens.

Conclusion générale

Le but de ce mémoire a été de construire un modèle qui permet de passer outre le problème de récurrence issu de la définition générale de la marge pour risque de la réforme solvabilité II. Ces modèles ont été construits dans le cas d'un assureur non-vie et en considérant uniquement le risque de réserve. Ces modèles ont ensuite été appliqués à deux lignes d'activités : la branche santé à développement court et la branche responsabilité employeur à développement long. Le choix a été fait de comparer les résultats des modèles analytiques choisis avec ceux des méthodes proposées par l'*EIOPA* dans le règlement délégué (UE) 2015/35, à savoir les *proxy* 3, 4 et 5 ainsi que l'approche standard.

Les étapes du calcul sont listées ci-après :

- Premièrement, ont été établis les équations à résoudre pour calculer la marge pour risque tout en calculant le capital de solvabilité requis. Pour cela, il a fallu résoudre ces équations en commençant par la fin. En effet, cela permet de calculer le capital de solvabilité requis en $t = n$ étant donné que la marge pour risque est nulle lorsque le portefeuille a atteint la fin des engagements de l'assureur.

- Deuxièmement, la méthode du Bootstrap associée à celle de Mack a été appliquée à nos deux triangles de données afin d'obtenir 10 000 triangles. Cette méthode a été essentielle car elle nous a permis, par la suite, de calculer les espérances et les quantiles nécessaires aux formules de capital de solvabilité requis et de marge pour risque. Ensuite, les trois modèles analytiques choisis ont été appliqués à ces triangles afin de les compléter et de pouvoir calculer la marge pour risque à partir des équations définies dans la première étape.

- Enfin, afin de comparer les résultats obtenus avec les modèles analytiques, la marge pour risque a été calculée via différentes méthodes : tout d'abord les *proxy* définies dans le règlement délégué (UE) 2015/35, puis l'approche standard avec deux méthodes de calcul du paramètre de volatilité.

4.1 Proxy

Encore une fois, il faut garder à l'esprit que les conclusions faites dans ce mémoire ne peuvent pas être généralisées à toutes les lignes d'activité et tous les portefeuilles étant donné que les résultats obtenus sont spécifiques aux données choisies pour cette étude.

Premièrement, ce qui sort des résultats obtenus est que l'approche standard confirme son statut de prudent étant donné que les résultats montrent qu'elle surestime la marge pour risque et le capital de solvabilité requis.

De même, le *proxy* 5 du règlement délégué (UE) 2015/35 surestime la marge pour risque et le capital de solvabilité requis du fait du paramètre de volatilité qui semble être la cause de cette surestimation.

Deuxièmement, les *proxy* 3 et 4 du règlement délégué (UE) 2015/35 sous-estiment légèrement la marge pour risque et le capital de solvabilité requis mais convergent rapidement vers les résultats des modèles analytiques.

Cela étant, des cohérences sont observées dans les résultats obtenus par toutes ces méthodes alternatives avec une diminution progressive au fur et à mesure des années de développement pour obtenir des résultats de marge pour risque nuls à la fin des engagements de l'assureur.

4.2 Modèles analytiques

Cette étude a présenté trois méthodes analytiques théoriques permettant de calculer la marge pour risque par l'approche coût du capital sans utiliser les méthodes proposées par l'*EIOPA*. Elle montre également que ces modèles peuvent être utilisés et implémentés en pratique pour les deux études de cas présentées.

Cependant il est difficile de dire si l'un des modèles est meilleur que les autres. Il est possible de dire que le GLM avec la loi de Poisson surdispersée et la régression log-normale donnent des résultats proches du fait de leurs structures.

Ce sont également des modèles qui ont été largement développés et utilisés pour compléter des triangles de sinistre, notamment le GLM avec une loi de Poisson surdispersée qui permet d'obtenir les mêmes résultats que la méthode de Chain-Ladder.

Concernant les modèles bayésiens, leurs développements et utilisations sont encore tout nouveau comparé aux deux autres méthodes. Ces modèles permettent d'espérer de

nouvelles perspectives. Il sera intéressant de voir l'utilisation qui en sera faite dans les prochaines années.

De manière générale pour les trois modèles utilisés dans ce mémoire les résultats obtenus sont cohérents. En effet, il y a une diminution de la marge pour risque dans le temps, variant en fonction du type de ligne d'activité étudiée, pour atteindre une valeur nulle à la fin des engagements de l'assuré.

4.3 Limites et extensions

Cette partie résume les limites posées pour cette étude. En effet les hypothèses choisies sont fortes et il est donc difficile de généraliser les résultats obtenus. Il faut donc faire attention en lisant les conclusions tirées. Seront également abordées les potentielles extensions qui pourraient être envisagées pour compléter cette étude.

Premièrement, l'étude a été conduite dans le but de comparer les différentes méthodes données par le règlement délégué (UE) 2015/35. Afin de les comparer, quelques limitations ont été ajoutées sur les risques à prendre en compte sans toutefois changer la structure ou les hypothèses que définissent la marge pour risque.

La liste ci-dessous rappelle les principales contraintes de l'étude :

- 1) Un coût du capital supposé constant à 6 % ;
- 2) La courbe de taux d'actualisation utilisée est celle donnée par l'*EIOPA* au 31/12/2015 sans *volatility adjustment* ;
- 3) Nous considérons uniquement une ligne d'activité, la dépendance entre les lignes d'activité n'est donc pas prise en compte ;
- 4) L'étude est limitée au risque de réserve uniquement ;
- 5) Le risque opérationnel n'est pas pris en compte ;
- 6) Le risque de marché inévitable est considéré nul ;
- 7) Le risque de catastrophe n'est pas pris en compte ;
- 8) L'étude est conduite en brute de réassurance. Ce choix implique que le risque de contrepartie n'est pas pris en compte.

L'intégration d'un de ces éléments à l'étude aurait probablement changé les résultats obtenus. Cependant, le but de cette étude a été de comparer plusieurs méthodes de calcul de la marge pour risque en prenant des hypothèses fortes afin d'éviter toutes

interactions potentiellement complexes qui auraient rendu les résultats compliqués à interpréter.

Deuxièmement, comme mentionné en début de partie, les conclusions faites ne sont valables que pour les données utilisées. Il serait donc intéressant de prendre un plus grand jeu de données avec différentes lignes d'activité pour plusieurs compagnies d'assurance. Suite à cela, les conclusions tirées de cette extension pourraient être généralisées.

Enfin, une extension possible serait d'utiliser plusieurs façons de générer les *cash-flow* projetés afin d'en étudier l'impact sur les calculs de la marge pour risque. Dans cette étude, l'option choisie a été la méthode du Bootstrap associée à la théorie de Mack mais un Bootstrap plus "classique" aurait pu être utilisé.

Table des figures

1	Bilan solvabilité II	17
2	Répartition des méthodes utilisées	32
3	Marge de risque et meilleure estimation par type d'activité	33
4	Schéma du process	48
5	Evolution du SCR branche santé	55
6	Evolution de la RM branche santé	56
7	Evolution du SCR branche responsabilité employeur	58
8	Evolution de la RM branche responsabilité employeur	59
9	Evolution du SCR branche santé	60
10	Evolution de la RM branche santé	61
11	Evolution du SCR branche responsabilité employeur	63
12	Evolution de la RM branche responsabilité employeur	64
13	Evolution du SCR branche santé	65
14	Evolution de la RM branche santé	66
15	Evolution du SCR branche responsabilité employeur	68
16	Evolution de la RM branche responsabilité employeur	69
17	Evolution du SCR branche santé	70
18	Evolution de la RM branche santé	71
19	Evolution du SCR branche responsabilité employeur	72
20	Evolution de la RM branche responsabilité employeur	73

Liste des tableaux

1	Ecart types obtenus	52
2	Tableau des résultats branche santé	54
3	Tableau des résultats branche responsabilité employeur	57
4	Tableau des résultats branche santé	60
5	Tableau des résultats branche responsabilité employeur	62
6	Tableau des résultats branche santé	65
7	Tableau des résultats branche responsabilité employeur	67
8	Triangle de paiements branche responsabilité employeur	85
9	Triangle de paiements branche santé	86
10	Résultats RM branche santé	86
11	Résultats SCR branche santé	86
12	Résultats RM branche responsabilité employeur	87
13	Résultats SCR branche responsabilité employeur	87
14	Résultats RM branche santé	88
15	Résultats SCR branche santé	88
16	Résultats RM branche responsabilité employeur	89
17	Résultats SCR branche responsabilité employeur	89
18	Résultats RM branche santé	90
19	Résultats SCR branche santé	90
20	Résultats RM branche responsabilité employeur	91
21	Résultats SCR branche responsabilité employeur	91
22	Matrice de corrélation de la régression branche santé	92
23	Matrice de corrélation du GLM branche santé	92
24	Matrice de corrélation du modèle bayésien branche santé	93
25	Matrice de corrélation de la régression branche responsabilité employeur	93
26	Matrice de corrélation du GLM branche responsabilité employeur	94
27	Matrice de corrélation du modèle bayésien branche responsabilité employeur	94
28	Taux EIOPA au 31/12/2015 sans <i>Volatility Adjustment</i>	95

Annexes

A.1 Triangles de données

	Année de développement j																		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	47	415	862	1 377	1 843	2 486	2 844	2 961	3 089	3 509	3 818	3 900	4 045	4 051	4 055	4 067	4 111	4 315	4 356
2	72	526	1 671	2 778	3 624	3 970	4 245	4 974	5 364	5 400	5 406	5 409	5 412	5 426	5 434	5 437	5 444	5 447	
3	53	624	1 272	2 365	2 994	3 462	4 136	4 837	5 177	5 341	5 421	5 426	5 429	5 430	5 466	5 469	5 472		
4	98	686	1 330	2 276	3 247	3 872	4 573	5 018	5 086	5 110	5 169	5 187	5 202	5 216	5 225	5 227			
5	69	453	1 096	1 629	3 033	3 924	4 542	4 954	5 063	5 109	5 117	5 121	5 130	5 138	5 140				
6	63	442	1 043	1 635	2 284	3 015	3 619	3 808	3 935	3 968	4 192	4 205	4 232	4 237					
7	99	978	2 284	4 288	5 534	7 248	7 911	8 237	8 535	8 549	8 629	8 770	8 798						
8	54	812	1 963	3 072	4 176	6 398	7 033	7 054	7 150	7 224	7 278	7 289							
9	72	870	1 839	3 316	4 702	5 317	5 492	5 538	5 570	5 602	5 617								
10	92	1 017	3 051	5 238	7 425	8 192	8 486	8 809	8 890	9 014									
11	121	1 608	3 145	4 551	7 483	8 282	8 554	8 557	9 052										
12	173	1 895	4 350	6 965	9 938	11 996	12 671	13 092											
13	246	2 447	5 950	11 393	16 762	20 545	21 430												
14	192	2 046	5 299	10 248	14 585	18 301													
15	95	1 302	3 659	7 135	12 526														
16	124	1 654	5 319	10 622															
17	181	2 736	7 235																
18	240	3 857																	
19	325																		

TABLE 8 – Triangle de paiements branche responsabilité employeur

	Année de développement j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
Année de survenance i	1	350 841	393 304	394 294	394 411	394 448	394 459	394 464	394 469	394 469
	2	390 877	439 296	441 015	441 132	441 163	441 178	441 182	441 190	
	3	404 036	454 337	456 275	456 391	456 449	456 454	456 459		
	4	409 351	457 795	459 273	459 454	459 483	459 491			
	5	409 544	456 967	458 771	458 988	459 050				
	6	404 900	446 696	448 609	448 799					
	7	395 228	446 797	448 728						
	8	411 126	459 029							
	9	435 802								

TABLE 9 – Triangle de paiements branche santé

A.2 Résultats détaillés

t	Marge pour risque								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Régression	1099,29	80,41	4,32	1,54	0,57	0,21	0,05	0,00	0,00
Proxy 3	498,53	15,68	2,89	1,00	0,38	0,16	0,05	0,00	0,00
Proxy 4	499,29	19,41	4,32	1,54	0,57	0,21	0,05	0,00	0,00
Proxy 5	2470,02	355,72	65,65	22,75	8,66	3,64	1,24	0,00	0,00
Approche standard 2	1910,01	172,53	17,96	6,33	2,39	0,85	0,22	0,00	0,00
Approche standard 3	2074,48	179,70	19,70	7,04	2,62	0,94	0,24	0,00	0,00

TABLE 10 – Résultats RM branche santé

t	Capital								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Régression	10985,33	251,10	46,34	16,06	6,11	2,57	0,87	0,00	0,00
Proxy 3	10985,33	251,10	46,34	16,06	6,11	2,57	0,87	0,00	0,00
Proxy 4	10985,33	251,10	46,34	16,06	6,11	2,57	0,87	0,00	0,00
Proxy 5	10985,33	251,10	46,34	16,06	6,11	2,57	0,87	0,00	0,00
Approche standard 2	28898,03	1050,14	192,73	66,24	25,50	10,65	3,63	0,00	0,00
Approche standard 3	31554,53	1146,15	211,45	73,62	27,99	11,72	3,98	0,00	0,00

TABLE 11 – Résultats SCR branche santé

Marge pour risque

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Régression	7278,66	5882,38	4681,56	3678,96	2874,22	2242,19	1747,23	1340,01	998,52	725,45
Proxy 3	5280,25	4180,02	3624,58	2827,58	2204,17	1788,68	1425,28	1281,31	961,31	689,09
Proxy 4	5597,80	4464,21	3716,22	2985,62	2181,28	1740,52	1325,99	1063,70	810,34	550,55
Proxy 5	19339,40	16597,49	13851,16	11133,47	8752,03	6865,53	5659,30	4755,97	3810,93	2736,16
Approche standard 2	18196,65	14705,96	11703,89	9197,40	7185,54	5605,48	4368,07	3350,03	2496,30	1813,63
Approche standard 3	14338,96	11588,30	9222,66	7247,55	5662,20	4417,12	3442,04	2639,82	1967,09	1429,14
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Régression	529,69	388,23	281,44	202,47	132,70	73,29	28,83	3,74	0,00	
Proxy 3	515,81	364,17	279,01	200,16	124,14	70,33	25,05	2,84	0,00	
Proxy 4	411,18	287,97	213,59	136,69	85,32	59,48	22,38	2,78	0,00	
Proxy 5	1979,85	1496,43	1107,86	980,38	835,75	625,97	353,33	52,76	0,00	
Approche standard 2	1324,23	970,58	703,59	506,18	331,75	183,23	72,07	9,36	0,00	
Approche standard 3	1043,50	764,81	554,43	398,87	261,42	144,38	56,79	7,38	0,00	

TABLE 12 – Résultats RM branche responsabilité employeur

Capital

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Régression	25688,37	22307,03	18449,74	15096,98	11762,73	9392,05	7470,28	6392,03	5076,16	3710,23
Proxy 3	25688,37	22307,03	18449,74	15096,98	11762,73	9392,05	7470,28	6392,03	5076,16	3710,23
Proxy 4	25688,37	22307,03	18449,74	15096,98	11762,73	9392,05	7470,28	6392,03	5076,16	3710,23
Proxy 5	25688,37	22307,03	18449,74	15096,98	11762,73	9392,05	7470,28	6392,03	5076,16	3710,23
Approche standard 2	49315,46	43817,38	36982,60	29058,35	23105,37	17713,08	15280,12	12555,77	10175,18	7141,37
Approche standard 3	35946,22	33351,00	28487,40	23687,57	17586,34	13957,90	12040,73	9893,94	8018,04	5886,13
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Régression	2708,44	2011,21	1528,84	1294,10	1143,31	833,79	474,88	71,55	0,00	
Proxy 3	2708,44	2011,21	1528,84	1294,10	1143,31	833,79	474,88	71,55	0,00	
Proxy 4	2708,44	2011,21	1528,84	1294,10	1143,31	833,79	474,88	71,55	0,00	
Proxy 5	2708,44	2011,21	1528,84	1294,10	1143,31	833,79	474,88	71,55	0,00	
Approche standard 2	5108,02	3950,59	2825,04	2647,02	2156,25	1671,34	932,80	137,71	0,00	
Approche standard 3	4025,12	3113,06	2226,13	2085,85	1699,12	1317,02	735,04	108,52	0,00	

TABLE 13 – Résultats SCR branche responsabilité employeur

A.2.1 GLM avec loi de Poisson surdispersée

Marge pour risque									
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
GLM	1019,83	76,32	3,63	1,29	0,48	0,17	0,04	0,00	0,00
Proxy 3	419,20	13,18	2,43	0,84	0,32	0,13	0,05	0,00	0,00
Proxy 4	419,83	16,32	3,63	1,29	0,48	0,17	0,04	0,00	0,00
Proxy 5	2085,11	299,11	55,21	19,13	7,28	3,06	1,04	0,00	0,00
Approche standard 2	1576,91	159,62	15,10	5,32	2,01	0,72	0,18	0,00	0,00
Approche standard 3	1715,67	165,60	16,57	5,92	2,20	0,79	0,20	0,00	0,00

TABLE 14 – Résultats RM branche santé

Capital									
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
GLM	10745,51	276,92	57,08	20,61	6,41	2,98	0,74	0,00	0,00
Proxy 3	10745,51	276,92	57,08	20,61	6,41	2,98	0,74	0,00	0,00
Proxy 4	10745,51	276,92	57,08	20,61	6,41	2,98	0,74	0,00	0,00
Proxy 5	10745,51	276,92	57,08	20,61	6,41	2,98	0,74	0,00	0,00
Approche standard 2	23570,54	883,02	162,06	55,70	21,44	8,95	3,06	0,00	0,00
Approche standard 3	25815,80	963,75	177,80	61,91	23,54	9,85	3,34	0,00	0,00

TABLE 15 – Résultats SCR branche santé

Marge pour risque

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
GLM	6436,93	5202,13	4140,17	3253,51	2541,83	1982,90	1545,17	1185,05	883,05	641,56
Proxy 3	4845,72	3792,81	3206,73	2742,02	1949,27	1581,83	1318,40	1058,85	818,89	621,66
Proxy 4	5109,64	4082,55	3338,08	2640,35	1929,03	1539,24	1199,30	909,33	669,38	503,48
Proxy 5	17102,93	14678,11	12249,37	9845,96	7739,92	6071,58	5004,84	4205,98	3370,22	2419,74
Approche standard 2	16092,33	13005,32	10350,41	8133,79	6354,58	4957,25	3862,93	2962,62	2207,62	1603,89
Approche standard 3	12680,76	10248,19	8156,13	6409,42	5007,41	3906,31	3043,99	2334,54	1739,61	1263,89
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
GLM	468,44	343,33	248,89	179,06	117,35	64,82	25,50	3,31	0,00	
Proxy 3	449,51	330,18	230,39	160,73	109,21	59,42	21,47	3,05	0,00	
Proxy 4	347,29	254,67	188,89	120,88	93,16	57,80	22,24	2,82	0,00	
Proxy 5	1750,90	1323,38	979,74	867,00	739,10	553,58	312,47	46,66	0,00	
Approche standard 2	1171,10	858,34	622,22	447,64	293,38	162,04	63,74	8,28	0,00	
Approche standard 3	922,82	676,37	490,31	352,74	231,19	127,69	50,23	6,52	0,00	

TABLE 16 – Résultats RM branche responsabilité employeur

Capital

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
GLM	24555,56	21749,43	17647,55	14285,70	10822,71	8472,87	7189,06	5997,09	4855,45	3480,99
Proxy 3	24555,56	21749,43	17647,55	14285,70	10822,71	8472,87	7189,06	5997,09	4855,45	3480,99
Proxy 4	24555,56	21749,43	17647,55	14285,70	10822,71	8472,87	7189,06	5997,09	4855,45	3480,99
Proxy 5	24555,56	21749,43	17647,55	14285,70	10822,71	8472,87	7189,06	5997,09	4855,45	3480,99
Approche standard 2	43612,46	38750,20	32705,81	25697,95	20433,39	15664,68	13513,08	11103,78	8998,49	6315,52
Approche standard 3	32066,62	30535,16	26972,18	21249,99	17801,51	12343,77	10648,30	8749,78	7090,81	4976,63
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
GLM	2590,68	2036,35	1490,63	1167,45	1136,07	844,21	454,23	65,83	0,00	
Proxy 3	2590,68	2036,35	1490,63	1167,45	1136,07	844,21	454,23	65,83	0,00	
Proxy 4	2590,68	2036,35	1490,63	1167,45	1136,07	844,21	454,23	65,83	0,00	
Proxy 5	2590,68	2036,35	1490,63	1167,45	1136,07	844,21	454,23	65,83	0,00	
Approche standard 2	4517,31	3493,73	2498,34	2340,91	1906,89	1478,06	824,92	121,79	0,00	
Approche standard 3	3559,64	2753,06	1968,69	1844,63	1502,63	1164,71	650,04	95,97	0,00	

TABLE 17 – Résultats SCR branche responsabilité employeur

A.2.2 Modèle bayésien

Marge pour risque									
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Modèle bayésien	1146,15	90,50	4,91	1,93	0,78	0,30	0,07	0,00	0,00
Proxy 3	545,32	16,18	3,10	1,19	0,51	0,24	0,07	0,00	0,00
Proxy 4	546,15	20,50	4,91	1,93	0,78	0,30	0,07	0,00	0,00
Proxy 5	2751,02	367,59	70,35	27,01	11,53	5,44	1,52	0,08	0,00
Approche standard 2	2106,50	177,12	20,43	7,96	3,27	1,23	0,28	0,01	0,00
Approche standard 3	2286,14	184,71	22,41	8,84	3,59	1,35	0,31	0,01	0,00

TABLE 18 – Résultats RM branche santé

Capital									
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Modèle bayésien	13746,98	259,47	49,66	19,06	8,14	3,84	1,07	0,05	0,00
Proxy 3	13746,98	259,47	49,66	19,06	8,14	3,84	1,07	0,05	0,00
Proxy 4	13746,98	259,47	49,66	19,06	8,14	3,84	1,07	0,05	0,00
Proxy 5	13746,98	259,47	49,66	19,06	8,14	3,84	1,07	0,05	0,00
Approche standard 2	31175,29	1176,55	206,53	78,64	33,97	15,92	4,46	0,22	0,00
Approche standard 3	34994,13	1639,94	226,58	87,42	37,30	17,53	4,88	0,24	0,00

TABLE 19 – Résultats SCR branche santé

Marge pour risque

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Modèle bayésien	8195,60	6634,80	5301,55	4188,30	3295,41	2605,15	2034,06	1542,50	1136,38	827,18
Proxy 3	6518,26	5311,78	4436,80	3407,28	2754,52	2335,58	1969,73	1405,70	1030,17	807,98
Proxy 4	6505,67	5035,23	4208,37	3398,97	2500,93	2022,27	1543,67	1224,43	922,22	627,76
Proxy 5	20617,91	18026,45	15378,01	12350,92	9555,36	7921,02	6832,93	5656,97	4315,11	3149,75
Approche standard 2	19489,00	15587,01	13253,89	10470,76	8238,53	6512,86	5085,15	3856,24	2840,96	2067,95
Approche standard 3	15345,33	13070,56	10444,06	8250,96	6491,96	5132,14	4007,10	3038,72	2238,67	1629,54
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Modèle bayésien	601,84	432,38	302,96	199,33	116,09	54,58	17,06	2,42	0,00	
Proxy 3	599,44	411,08	299,31	189,02	111,37	52,87	15,80	2,11	0,00	
Proxy 4	467,18	320,72	229,92	134,57	74,65	44,30	13,24	1,79	0,00	
Proxy 5	2372,12	1813,91	1454,58	1169,94	865,45	528,34	206,21	34,09	0,00	
Approche standard 2	1504,60	1080,95	757,40	498,33	290,24	136,46	42,65	6,05	0,00	
Approche standard 3	1185,62	851,79	596,83	392,68	228,71	107,53	33,61	4,77	0,00	

TABLE 20 – Résultats RM branche responsabilité employeur

Capital

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Modèle bayésien	29832,71	24765,15	20483,51	16747,85	12842,40	10835,96	9019,47	7602,96	5747,73	4271,06
Proxy 3	29832,71	24765,15	20483,51	16747,85	12842,40	10835,96	9019,47	7602,96	5747,73	4271,06
Proxy 4	29832,71	24765,15	20483,51	16747,85	12842,40	10835,96	9019,47	7602,96	5747,73	4271,06
Proxy 5	29832,71	24765,15	20483,51	16747,85	12842,40	10835,96	9019,47	7602,96	5747,73	4271,06
Approche standard 2	55125,66	49645,82	41059,29	32235,90	25226,14	21436,23	18448,92	14934,39	11521,35	8220,84
Approche standard 3	35946,22	33351,00	28487,40	23687,57	17586,34	13957,90	12040,73	9893,94	8018,04	5886,13
t	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
Modèle bayésien	3245,06	2437,90	2007,32	1544,32	1183,94	703,75	277,14	46,23	0,00	
Proxy 3	3245,06	2437,90	2007,32	1544,32	1183,94	703,75	277,14	46,23	0,00	
Proxy 4	3245,06	2437,90	2007,32	1544,32	1183,94	703,75	277,14	46,23	0,00	
Proxy 5	3245,06	2437,90	2007,32	1544,32	1183,94	703,75	277,14	46,23	0,00	
Approche standard 2	6120,08	4788,73	3709,17	3158,83	2232,87	1410,68	544,39	88,98	0,00	
Approche standard 3	4025,12	3113,06	2226,13	2085,85	1699,12	1317,02	735,04	108,52	0,00	

TABLE 21 – Résultats SCR branche responsabilité employeur

A.3 Matrices de corrélation

A.3.1 Branche santé

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100%	33%	17%	13%	12%	9%	3%	2%	2%
2	33%	100%	24%	16%	14%	12%	10%	9%	9%
3	17%	24%	100%	35%	38%	33%	27%	29%	28%
4	13%	16%	35%	100%	47%	62%	48%	33%	34%
5	12%	14%	38%	47%	100%	59%	64%	44%	43%
6	9%	12%	33%	62%	59%	100%	64%	57%	52%
7	3%	10%	27%	48%	64%	64%	100%	82%	67%
8	2%	9%	29%	33%	44%	57%	82%	100%	77%
9	2%	9%	28%	34%	43%	52%	67%	77%	100%

TABLE 22 – Matrice de corrélation de la régression branche santé

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100%	36%	19%	14%	13%	10%	4%	3%	2%
2	36%	100%	26%	17%	15%	12%	10%	9%	9%
3	19%	26%	100%	37%	40%	33%	27%	29%	28%
4	14%	17%	37%	100%	49%	63%	48%	33%	34%
5	13%	15%	40%	49%	100%	60%	64%	44%	43%
6	10%	12%	33%	63%	60%	100%	64%	57%	52%
7	4%	10%	27%	48%	64%	64%	100%	82%	67%
8	3%	9%	29%	33%	44%	57%	82%	100%	77%
9	2%	9%	28%	34%	43%	52%	67%	77%	100%

TABLE 23 – Matrice de corrélation du GLM branche santé

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100%	30%	15%	12%	11%	8%	2%	2%	1%
2	30%	100%	24%	15%	13%	10%	8%	7%	7%
3	15%	24%	100%	34%	37%	29%	25%	27%	26%
4	12%	15%	34%	100%	47%	60%	45%	29%	30%
5	11%	13%	37%	47%	100%	56%	60%	41%	40%
6	8%	10%	29%	60%	56%	100%	61%	55%	50%
7	2%	8%	25%	45%	60%	61%	100%	81%	66%
8	2%	7%	27%	29%	41%	55%	81%	100%	76%
9	1%	7%	26%	30%	40%	50%	66%	76%	100%

TABLE 24 – Matrice de corrélation du modèle bayésien branche santé

A.3.2 Branche responsabilité employeur

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	100%	34%	32%	29%	24%	24%	19%	13%	11%	11%	11%	12%	10%	11%	10%	13%	12%	10%	9%
2	34%	100%	44%	40%	30%	24%	20%	15%	11%	10%	9%	11%	8%	9%	9%	11%	12%	9%	8%
3	32%	44%	100%	46%	36%	24%	20%	17%	13%	11%	9%	9%	6%	6%	8%	9%	11%	7%	6%
4	29%	40%	46%	100%	40%	29%	24%	21%	15%	15%	10%	10%	9%	9%	8%	10%	11%	8%	10%
5	24%	30%	36%	40%	100%	31%	27%	23%	18%	18%	16%	15%	12%	10%	11%	13%	15%	10%	10%
6	24%	24%	24%	29%	31%	100%	33%	29%	25%	25%	24%	24%	19%	18%	18%	19%	20%	17%	17%
7	19%	20%	20%	24%	27%	33%	100%	34%	31%	30%	29%	31%	27%	24%	22%	23%	23%	21%	20%
8	13%	15%	17%	21%	23%	29%	34%	100%	40%	38%	37%	35%	33%	31%	26%	25%	25%	21%	22%
9	11%	11%	13%	15%	18%	25%	31%	40%	100%	44%	40%	39%	36%	34%	33%	27%	25%	23%	23%
10	11%	10%	11%	15%	18%	25%	30%	38%	44%	100%	53%	49%	45%	45%	45%	41%	35%	31%	34%
11	11%	9%	9%	10%	16%	24%	29%	37%	40%	53%	100%	58%	54%	52%	51%	51%	47%	40%	46%
12	12%	11%	9%	10%	15%	24%	31%	35%	39%	49%	58%	100%	66%	61%	60%	61%	61%	58%	59%
13	10%	8%	6%	9%	12%	19%	27%	33%	36%	45%	54%	66%	100%	69%	66%	67%	66%	64%	64%
14	11%	9%	6%	9%	10%	18%	24%	31%	34%	45%	52%	61%	69%	100%	72%	70%	66%	61%	64%
15	10%	9%	8%	8%	11%	18%	22%	26%	33%	45%	51%	60%	66%	72%	100%	78%	70%	65%	69%
16	13%	11%	9%	10%	13%	19%	23%	25%	27%	41%	51%	61%	67%	70%	78%	100%	82%	73%	80%
17	12%	12%	11%	11%	15%	20%	23%	25%	25%	35%	47%	61%	66%	66%	70%	82%	100%	85%	89%
18	10%	9%	7%	8%	10%	17%	21%	21%	23%	31%	40%	58%	64%	61%	65%	73%	85%	100%	85%
19	9%	8%	6%	10%	10%	17%	20%	22%	23%	34%	46%	59%	64%	64%	69%	80%	89%	85%	100%

TABLE 25 – Matrice de corrélation de la régression branche responsabilité employeur

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	100%	43%	40%	36%	30%	29%	23%	17%	15%	14%	13%	14%	12%	13%	12%	15%	14%	11%	9%
2	43%	100%	53%	48%	37%	30%	25%	19%	15%	13%	11%	13%	10%	11%	11%	13%	14%	10%	8%
3	40%	53%	100%	55%	44%	31%	26%	22%	17%	14%	11%	11%	8%	8%	10%	11%	13%	8%	6%
4	36%	48%	55%	100%	49%	37%	31%	27%	20%	19%	13%	12%	11%	11%	9%	12%	13%	9%	10%
5	30%	37%	44%	49%	100%	40%	35%	30%	24%	22%	19%	17%	14%	12%	13%	15%	17%	11%	10%
6	29%	30%	31%	37%	40%	100%	40%	35%	30%	29%	27%	26%	21%	20%	20%	21%	22%	18%	17%
7	23%	25%	26%	31%	35%	40%	100%	40%	36%	34%	32%	33%	29%	26%	24%	24%	25%	22%	20%
8	17%	19%	22%	27%	30%	35%	40%	100%	46%	43%	41%	39%	35%	33%	28%	27%	27%	22%	22%
9	15%	15%	17%	20%	24%	30%	36%	46%	100%	49%	44%	42%	38%	35%	35%	29%	27%	24%	23%
10	14%	13%	14%	19%	22%	29%	34%	43%	49%	100%	56%	51%	47%	47%	46%	43%	37%	32%	35%
11	13%	11%	11%	13%	19%	27%	32%	41%	44%	56%	100%	60%	56%	53%	52%	53%	49%	41%	46%
12	14%	13%	11%	12%	17%	26%	33%	39%	42%	51%	60%	100%	68%	62%	61%	63%	63%	59%	60%
13	12%	10%	8%	11%	14%	21%	29%	35%	38%	47%	56%	68%	100%	70%	68%	69%	68%	65%	65%
14	13%	11%	8%	11%	12%	20%	26%	33%	35%	47%	53%	62%	70%	100%	73%	71%	67%	62%	65%
15	12%	11%	10%	9%	13%	20%	24%	28%	35%	46%	52%	61%	68%	73%	100%	79%	71%	66%	69%
16	15%	13%	11%	12%	15%	21%	24%	27%	29%	43%	53%	63%	69%	71%	79%	100%	83%	74%	80%
17	14%	14%	13%	13%	17%	22%	25%	27%	27%	37%	49%	63%	68%	67%	71%	83%	100%	86%	89%
18	11%	10%	8%	9%	11%	18%	22%	22%	24%	32%	41%	59%	65%	62%	66%	74%	86%	100%	86%
19	9%	8%	6%	10%	10%	17%	20%	22%	23%	35%	46%	60%	65%	65%	69%	80%	89%	86%	100%

TABLE 26 – Matrice de corrélation du GLM branche responsabilité employeur

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	100%	27%	24%	24%	19%	20%	15%	9%	8%	8%	8%	10%	8%	9%	8%	12%	11%	9%	9%
2	27%	100%	34%	34%	25%	19%	16%	11%	8%	7%	7%	9%	6%	7%	8%	10%	11%	9%	8%
3	26%	37%	100%	49%	39%	27%	22%	18%	14%	11%	8%	9%	7%	7%	8%	10%	12%	7%	6%
4	24%	34%	49%	100%	35%	24%	20%	17%	11%	12%	7%	7%	7%	7%	6%	8%	10%	7%	10%
5	19%	25%	39%	35%	100%	27%	23%	19%	15%	15%	13%	13%	10%	8%	9%	12%	13%	9%	10%
6	20%	19%	27%	24%	27%	100%	36%	31%	27%	26%	24%	24%	19%	18%	18%	20%	18%	15%	17%
7	15%	16%	22%	20%	23%	36%	100%	36%	33%	31%	29%	31%	27%	24%	22%	23%	21%	20%	20%
8	9%	11%	18%	17%	19%	31%	36%	100%	43%	40%	38%	37%	33%	31%	26%	26%	23%	20%	22%
9	8%	8%	14%	11%	15%	27%	33%	43%	100%	41%	37%	37%	34%	32%	31%	26%	23%	22%	22%
10	8%	7%	11%	12%	15%	26%	31%	40%	41%	100%	50%	47%	43%	43%	43%	40%	34%	30%	35%
11	8%	7%	8%	7%	13%	24%	29%	38%	37%	50%	100%	56%	52%	50%	49%	50%	45%	38%	45%
12	10%	9%	9%	7%	13%	24%	31%	37%	37%	47%	56%	100%	64%	59%	58%	60%	59%	57%	58%
13	8%	6%	7%	7%	10%	19%	27%	33%	34%	43%	52%	64%	100%	67%	64%	66%	64%	63%	63%
14	9%	7%	7%	7%	8%	18%	24%	31%	32%	43%	50%	59%	67%	100%	70%	69%	65%	60%	63%
15	8%	8%	8%	6%	9%	18%	22%	26%	31%	43%	49%	58%	64%	70%	100%	77%	68%	64%	69%
16	12%	10%	10%	8%	12%	20%	23%	26%	26%	40%	50%	60%	66%	69%	77%	100%	80%	71%	80%
17	11%	11%	12%	10%	13%	18%	21%	23%	23%	34%	45%	59%	64%	65%	68%	80%	100%	84%	89%
18	9%	9%	7%	7%	9%	15%	20%	20%	22%	30%	38%	57%	63%	60%	64%	71%	84%	100%	84%
19	9%	8%	6%	10%	10%	17%	20%	22%	22%	35%	45%	58%	63%	63%	69%	80%	89%	84%	100%

TABLE 27 – Matrice de corrélation du modèle bayésien branche responsabilité employeur

A.4 Taux EIOPA

Maturite	Taux spot central
1	-0,157%
2	-0,129%
3	-0,038%
4	0,096%
5	0,232%
6	0,381%
7	0,526%
8	0,667%
9	0,801%
10	0,921%
11	1,026%
12	1,120%
13	1,208%
14	1,284%
15	1,344%
16	1,388%
17	1,422%
18	1,454%
19	1,488%
20	1,527%
21	1,574%
22	1,627%
23	1,683%
24	1,741%
25	1,800%
26	1,859%
27	1,918%
28	1,976%
29	2,033%
30	2,088%
31	2,141%
32	2,193%
33	2,243%
34	2,292%
35	2,338%
36	2,383%
37	2,426%
38	2,468%
39	2,508%
40	2,547%

TABLE 28 – Taux EIOPA au 31/12/2015 sans *Volatility Adjustment*

A.5 Description des lignes d'activités

A.5.1 Santé

L'assurance santé couvre un individu contre les frais médicaux. La principale caractéristique de cette ligne d'activité, d'un point de vue provisionnement, est que le *run-off* des sinistres est relativement court. Par conséquent, durant les deux années suivant l'année de l'accident, la majorité du montant final du sinistre est réglé.

L'assurance santé est donc considérée comme étant une branche à développement court c'est-à-dire que le délai entre la date de survenance du sinistre et la date de clôture est court.

A.5.2 Responsabilité employeur

L'assurance responsabilité employeur, également appelée responsabilité civile professionnelle, couvre l'assuré ou ses ayants droit contre les conséquences pécuniaires de la responsabilité civile professionnelle encourue dans le cadre de l'exercice légal de son activité professionnelle.

La responsabilité employeur est l'un des cinq groupes principaux de risques sous l'assurance de responsabilité (avec responsabilité civile, responsabilité produit et indemnité professionnelle). L'assurance de responsabilité est considérée comme étant une branche à développement long c'est-à-dire que le délai entre la date de survenance du sinistre et la date de clôture est long.

Bibliographie

- [1] ACPR. *Analyse de l'exercice 2014 de préparation à Solvabilité II*, 2015.
- [2] ACPR. *Notice "Solvabilité II"*, 2015.
- [3] Waszink Actuarial Advisory. *Considerations on the Discount Rate in the Cost of Capital Method for the Risk Margin*, 2013.
- [4] Parlement Européen et le Conseil. *Directive 2009/138/CE*, 2009.
- [5] Commission Européenne. *QIS4 Technical Specifications*, 2007.
- [6] Commission Européenne. *QIS5 Technical Specifications*, 2010.
- [7] Commission Européenne. *Règlement délégué (UE) 2015/35*, 2014.
- [8] Compain H. Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme solvabilité ii. *Université de Paris Dauphine*, 2010.
- [9] Bailly L. and Douard H. Petites concessions entre assureurs et régulateurs? *Altia conseil*, 2010.
- [10] Daya-Viossat M. Market value margins for a non-life insurance company under solvency ii - practical calculations under the cost of capital approach. *CEA*, 2008.
- [11] Louis M. Evaluation des provisions techniques non-vie dans le contexte solvabilité II. *Université de Strasbourg*, 2010.
- [12] Wüthrich M. and Merz M. Modelling the claims development result for solvency purposes. *Casualty Actuarial Society E-Forum*, 2008.
- [13] Wüthrich M. and Merz M. *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*, 2008.
- [14] England P. and Millns R. Risk margins and solvency II. *GIRO conference and exhibition*, 2011.
- [15] Guibert Q., Juillard M., and Planchet. Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes. *ISFA - Laboratoire SAF*, 2010.
- [16] Purcell R. and Mee G. Solvency II risk margin : To hedge or not to hedge. *The Actuary*, 2012.
- [17] Christian Y. ROBERT. Market value margin calculations under the cost of capital approach within a bayesian chain ladder framework. *ISFA*, 2011.