

Estelle ADAM

Promotion 2000-2001



**L'analyse fractale des marchés
financiers**

Stage effectué à
Finama Asset Management

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur **Vincent ZELLER**, directeur des gestions, Madame **Pascale Auclair**, directrice de la gestion de taux et Monsieur **Emmanuel Paty**, responsable du service ingénierie financière, de m'avoir permis d'effectuer ce stage à Finama Asset Management, la société de gestion de portefeuilles du Groupama et du GAN.

Je remercie cordialement Mademoiselle **Ségolen Fontaine**, chargée des études financières, Mademoiselle **Emmanuelle Andouart** du service contrôle des risques et **Didier Guillaume**, responsable du service risques et performances pour leur aide et pour leur sympathie.

Je remercie également l'ensemble des gérants, l'ensemble du service ingénierie financière et du service risques et performances ainsi que toutes les personnes avec lesquelles j'ai été en relation pendant ce stage de m'avoir guidé par leur expérience professionnelle et leurs précieux conseils.

Je tiens également à remercier le Professeur **Jean-Marc Bardet**, Maître de Conférence, le Professeur **Rama Cont**, Chercheur au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, le Professeur **Jacques Chevalier**, directeur de l'ISUP ainsi que les Maître de Conférence **Charles El-Nouty** et **Jérôme Dedecker**, de l'Université Paris VI de m'avoir accordé un peu de leur temps pour répondre à mes questions.

Un grand merci aussi au Professeur **Paul Deheuvels** pour m'avoir mis en contact avec **Romain-François Peltier** à qui j'exprime ma profonde gratitude pour avoir répondu à mes questions et pour m'avoir permis de consulter sa thèse sur les processus stochastiques fractals.

Table des matières

<i>RESUME</i>	11
<i>ABSTRACT</i>	15
<i>INTRODUCTION</i>	19
<i>PARTIE I : LES FRACTALES ET LA FINANCE</i>	23
Chapitre 1. Généralités sur les fractales	24
1.1. La naissance des fractales	24
1.2. Fractale « auto-similaire » et fractale « auto-affine »	25
1.3. La dimension d'une fractale	27
Chapitre 2. Les défauts du modèle brownien ordinaire	30
2.1. L'efficience des marchés	30
2.2. Discontinuité des prix	32
2.3. Loi normale	33
2.4. Les grandes fluctuations	35
Chapitre 3. Particularités des chroniques financières	37
3.1. Domaine d'application	37
3.2. Le caractère fractal des cours et des taux	38
3.3. L'hypothèse de stabilité des marchés	39
3.4. L'effet Noé	41
3.5. L'effet Joseph	44

PARTIE II : MODELISATION AVEC LES LOIS STABLES	47
Chapitre 4. Généralités sur les lois stables	48
4.1. Stabilité au sens de Lévy ou L-stabilité	48
4.2. Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi stable	50
4.3. Propriétés arithmétiques	53
4.4. Générateur de variables aléatoires stables	55
Chapitre 5. Estimation des paramètres	57
5.1. Méthodes d'estimation des paramètres d'une loi stable	57
5.2. Estimation de α et β par la méthode de McCulloch	58
5.3. Estimation de σ et μ par la méthode de McCulloch	61
5.4. Application de la méthode de McCulloch à des variables aléatoires issues d'une loi stable connue	63
5.5. Estimation des paramètres α , β , σ et μ de quelques titres.	64
Chapitre 6. Tests d'auto-similarité	71
6.1. Tests d'auto-similarité sur des sous-échantillons de tailles variables	72
6.2. Tests d'auto-similarité sur des sous-échantillons de taille constante	73
6.3. Tests d'auto-similarité sur des chroniques financières	74
PARTIE III : GENERALISATION DU MEDAF A UN MARCHE STABLE	85
Chapitre 7. Lois stables multivariées	86
7.1. Définitions	86
7.2. Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire stable	87
7.3. Covariation	88
7.4. Norme de covariation	90
Chapitre 8. Estimations	91
8.1. Estimateur de l'exposant caractéristique α	91
8.2. Estimateur de la densité spectrale	93
8.3. Estimation de la covariation	95

Chapitre 9. MEDAF	96
9.1. Hypothèses	96
9.2. Description dans le cas gaussien	97
9.3. Extension du MEDAF à un marché stable	99
9.4. Définition du coefficient Bêta stable	100
9.5. Estimation du coefficient Bêta stable	101
<i>PARTIE IV : APPLICATION DU MEDAF SUR UN MARCHE STABLE</i>	103
Chapitre 10. Tests sur les bêtas	104
10.1. Qualité de l'estimation des bêtas	104
10.2. Stabilité du bêta	106
10.3. Taille optimale d'échantillon pour calculer le bêta « stable »	107
Chapitre 11. Procédures d'allocations	110
11.1. Stratégies à la hausse et à la baisse	110
11.2. Nos stratégies	112
11.3. Pouvoir prédictif du bêta	113
11.4. Détermination du poids de l'action en portefeuille	114
Chapitre 12. Application à l'allocation d'actifs avec n=30	117
12.1. Pouvoir prédictif du coefficient bêta	117
12.2. Suivi des performances	118
12.3. Améliorations apportées avec la loi stable	122
12.4. Evolution des tracking-errors	125
Chapitre 13. Application à l'allocation d'actifs avec n = 100	127
13.1. Pouvoir prédictif du coefficient bêta	127
13.2. Suivi des performances	128
13.3. Améliorations apportées avec la loi stable	131
13.4. Evolution des tracking-errors	133
Chapitre 14. Application à l'allocation d'actifs avec n = 200	135
14.1. Suivi des performances	136
14.2. Evolution des tracking-errors	138

PARTIE V : ETUDE DU RISQUE _____ **141**

Chapitre 15. Risque d'un portefeuille stable _____ **142**

15.1. Risque de marché	142
15.2. Notion de risque sur un marché « stable »	143
15.3. Estimateurs du risque	145
15.4. Estimations du risque d'une action	146
15.5. Qualité de l'estimation du risque	150
15.6. Mesure de risque cohérente	153

Chapitre 16. Value at Risk _____ **155**

16.1. Définition	155
16.2. Limites de la Value at Risk	156
16.3. Méthodes d'estimation	157

Chapitre 17. Tests sur la Value at Risk _____ **160**

17.1. Mise en place du test	160
17.2. Qualité de l'estimation de la Value at Risk	162
17.3. Evolution de la Value at Risk dans le temps	165
17.4. Comparaison des méthodes d'estimation de la VaR	170
17.5. Comparaison des méthodes pour la qualité de l'estimation	174

CONCLUSION _____ **177**

ANNEXES	183
Annexe 1 : Simulation de variables gaussiennes	184
Annexe 2 : Simulation de variables dans le domaine d'attraction des lois stables	185
Annexe 3 : Algorithmes pour obtenir le graphe de la fonction de densité d'une loi stable	186
Annexe 3.1. Obtention de la densité par la transformée de Fourier rapide	186
Annexe 3.2. Algorithme DNI	187
Annexe 4 : Présentation du box-plot	188
INDEX DES SERIES	189
INDEX DES NOTATIONS ET ABREVIATIONS UTILISEES	191
INDEX DES PROGRAMMES	192
BIBLIOGRAPHIE	194
SITES INTERNET CONSULTES	200

RESUME

Notre travail a pour objectif initial de découvrir et comprendre le fonctionnement des fractales, en particulier dans le domaine de la finance. Nous consacrons ensuite notre étude à un modèle fractal particulier : les lois stables appelées aussi lois de Pareto-Lévy, lois stables de Pareto, lois Lévy stables ou lois α -stables (elles sont également appelées dans quelques cas distributions fractales). Nous restreignons notre étude des portefeuilles et du risque au cas où le paramètre α est compris entre 1 et 2.

La plupart des modèles et des études empiriques réalisées sur les rendements des actifs ces dix dernières années font l'hypothèse que les rendements suivent une loi normale. Cependant, il a souvent été constaté que les distributions des rendements ont des queues épaisses. Certains chercheurs ont alors étendu la loi des rendements aux lois stables. Des études approfondies sur ce sujet ont mis en évidence certains décalages entre les lois stables et les lois réelles des rendements financiers. Plusieurs alternatives à la loi stable ont alors été présentées. Parmi les lois proposées, nous pouvons trouver les lois dans le domaine d'attraction des lois stables, la distribution de Student ou la distribution hyperbolique. Un grand inconvénient de ces modèles est leur manque de stabilité. Comme nous allons le voir la propriété de stabilité est très attrayante pour les rendements d'actifs et particulièrement pour l'analyse de portefeuille et la gestion de risque. De plus, nous allons découvrir que les critiques faites sur les lois stables ne sont pas vraiment fondées si nous excluons le fait que les lois stables échouent à expliquer les dépendances des rendements à court et à long terme.

Dans la première partie de ce mémoire, nous expliquons ce qu'est une fractale et nous donnons ses propriétés. Nous critiquons ensuite le modèle brownien et l'hypothèse d'efficience des marchés. Nous montrons que l'hypothèse de continuité n'est pas vérifiée, que la loi normale n'est pas adéquate dans la mesure où elle sous-estime les queues de distributions des actifs et le pic de distribution autour du rendement moyen. Puis, nous énonçons l'hypothèse de stabilité des marchés introduite pour la première fois par Edgar E. Peters en 1994. Nous mettons, ensuite, en évidence de manière empirique quelques

particularités des séries de rendements d'actifs, à savoir l'importance des grandes fluctuations qui contribue à rendre la variance instable et la dépendance des données.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des lois stables qui sont des distributions fractales. Nous donnons dans un premier temps les définitions et les propriétés de ces lois. Nous introduisons ensuite une méthode pour générer des variables aléatoires stables et nous montrons que la méthode d'estimation des paramètres de McCulloch est relativement précise sur des variables qui suivent une loi stable. Nous vérifions, pour finir cette partie, la propriété d'auto-similarité des rendements d'actifs.

La troisième partie développe le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF). Nous présentons au préalable les lois stables multivariées et introduisons la notion de covariation qui remplace la covariance étant donnée l'absence des moments d'ordre 2. Nous rappelons rapidement ce qu'est le MEDAF sous l'hypothèse d'efficience des marchés (basée sur la loi normale). Puis nous étendons la théorie à un marché stable (basé sur les lois stables non-gaussiennes). Nous présentons les méthodes d'estimation de la mesure spectrale et de l'indice de stabilité α dans le cas multivarié qui nous permettent d'estimer le coefficient bêta généralisé.

Etant maintenant capable de calculer le bêta classique (loi normale) et le bêta généralisé (loi stable), nous sommes en mesure de tester la qualité de l'estimation du bêta généralisé tout du moins dans le cas gaussien. Nous allons constater que notre méthode d'estimation est malheureusement loin d'être précise. Cependant nous allons tout de même mettre en place des stratégies d'allocation d'actifs basées sur les bêtas qui, comme nous le montrerons, possèdent un pouvoir prédictif. Nous comparons de cette manière les performances d'un portefeuille constitué à partir des bêtas généralisés (portefeuille dit « stable ») et celles d'un portefeuille composé à partir des bêtas classiques (portefeuille dit « normal »). Nous avons mis en évidence que quelles que soient les capacités du gérant à anticiper les tendances du marché, faire l'hypothèse que les rendements suivent une loi stable améliore les performances du portefeuille (surtout dans le cas où nous estimons les bêtas à partir des 100 derniers rendements journaliers). Enfin, nous constatons que sur un marché baissier, le portefeuille stable obtient de meilleurs résultats que le portefeuille « normal » ou le portefeuille indiciel.

La cinquième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'étude du risque. Nous commençons par définir le risque sous une loi stable ; puis nous estimons le risque de certaines actions françaises de diverses manières. Après une brève description de la *Value at Risk* et de son intérêt en finance, nous calculons sa valeur dans le cas gaussien puis dans le cas stable non gaussien. Nous montrons que la méthode gaussienne d'estimation de la *Value at Risk* sous-estime la *Value at Risk* réelle pour des quantiles très faibles (0.5% ou 1%). Ce résultat n'est pas étonnant dans la mesure où la *Value at Risk* est un outil basé sur les queues de distribution et que les lois gaussiennes ne prennent pas en considération l'épaisseur des queues de distributions des rendements d'actifs. Les autres méthodes proposées qui permettent de prendre en compte l'épaisseur des queues des distributions n'approchent pas mieux la *Value at Risk* réelle mais elles ont l'avantage de ne pas sous-estimer trop souvent la perte probable.

ABSTRACT

First, our work aims to discover and understand fractals' running, in particular in financial domain. Then, we dedicate our study to a particular fractal model : stable laws, also named Pareto-Lévy's laws, stable Pareto's laws or α -stable laws (they are called sometimes fractal distributions, as well). We restrict our study on portfolios and risk to the case where the parameter α is between 1 and 2.

Most models and empirical studies of assets returns carried out during the last ten years are based on the hypothesis that returns follow a normal distribution. However, people often observe that distributions have heavy tails. Some researchers extended then the returns' law to stable laws. Deepened studies on that subject pointed out some gaps between stable laws and real laws of financial returns. Several alternatives to stable law were proposed. Among these, we can find laws in the attractive stable laws domain, Student's distribution and hyperbolic distribution. An important drawback of these models is their lack of stability. As we are going to show it, the stability property is attractive for assets returns and particularly for portfolio analysis and risk management. Furthermore, we are discovering that criticisms made about stable laws are not really founded if we ignore the fact that stable laws failed to explain short-term returns' dependence.

In the first part of the report, we explain what is the fractal and we give its properties. Then, we criticise Brownian model and markets efficient hypothesis. We show that the continuity hypothesis is not verified, that gaussian law is not adequate insofar it underestimates assets' distribution tails and the distribution peak around mean return. Then, we enunciate markets stability hypothesis introduced for the first time by Edgar E. Peters in 1994. Afterwards, we emphasise with an empirical way some particularities of assets returns series, namely the importance of big fluctuations, which contribute to make the variance unstable and the datas' dependence.

The second part deals with stable laws, which are fractal distributions. We first give definitions and properties for these laws. Then, we introduce a method for generating stable random variables and we show that the McCulloch's parameters estimation method is quite precise on variables which follow a stable law. To end this part, we verify the property of auto-similarity of assets returns.

The third part develops the Capital Asset Pricing Model (CAPM). To begin with, we present multivariate stable laws and introduce the covariation notion which replaces covariance given that the moments of order two do not exist. We quickly remind what is the CAPM under the efficient markets hypothesis (based on normal law). Then, we extend the theory to a stable market (based on non-gaussian stable laws). We present estimation methods for the spectral measure and for the stability parameter α in multivariate case, which allow us to estimate the generalised beta coefficient.

Since we are now able to calculate the classical beta (normal law) and the beta generalised (stable law); we are also able to test the quality of the estimation of the generalised beta at least in the gaussian case. Unfortunately, our estimation method proves out to be far from precise. Nonetheless, we are going to define allocation strategies based on beta coefficient, which, as we are going to show it, have a predictive power.

That way, we compare on the performances of a portfolio constructed from generalised betas ("stable" portfolio) and the ones of a portfolio made from classical betas ("normal" portfolio). We come to the conclusion that whatever manager's capacities are to anticipate the trends of the market, making the hypothesis that returns follow a stable law improve the performances of the portfolio (especially when we estimate betas from the last 100 daily returns). At least, we observed that on a bear market, the "stable" portfolio gives better results than the "normal" portfolio or the benchmark.

The fifth and last part of this report deals with risk. We first define risk under the assumption of a stable law ; then we estimate the risk of some French equities with different estimators. After a brief description of the *Value at Risk* and of its interest in finance, we calculate its value first in gaussian case, then in non-gaussian case. We show that the estimation gaussian method of *Value at Risk* underestimate the fair *Value at Risk* for low quantiles (0.5% or 1%) This result is not surprising given the fact that the *Value at Risk* is an instrument based on tails distribution and that gaussian laws do not take into consideration the thickness of tails distribution of assets returns. Others proposed methods which take into account the thickness of tails distribution do not better approximate the *Value at Risk* but they have the advantage not to underestimate the probable loss too often.

INTRODUCTION

De nombreux modèles financiers supposent actuellement que les variations du logarithme des prix forment un mouvement brownien. Les analyses sont basées sur le rendement $R_t(T)$ d'un actif entre les dates t et $t + T$ défini par :

$$R_t(T) = \ln \frac{P_{t+T} + D_{[t; t+T]}}{P_t} \times 100$$

où P_t est le prix de l'actif à l'instant t ,

et $D_{[t; t+T]}$ est la rémunération générée par l'actif entre les dates t et $t + T$.

Dans la suite, nous écrirons P_{t+T} au lieu $P_{t+T} + D_{t+T}$ et nous noterons le rendement R_t lorsque T représente 1 jour.

Il est alors nécessaire de considérer que :

- H1. Le rendement est une fonction continue dans le temps.
- H2. Les accroissements du processus sont stationnaires.
- H3. Les accroissements sont indépendants.
- H4. Le moment d'ordre 2 des lois marginales du processus existe.

Nous allons montrer que ces hypothèses ne sont pas vérifiées en général par les chroniques financières. Nous sommes alors amenés à généraliser le mouvement brownien ordinaire. Nous allons découvrir que les chroniques financières possèdent des propriétés fractales comme la variance « infinie », l'auto-similarité et la mémoire longue. Deux extensions dans le cadre fractal sont envisageables :

- * L'utilisation des lois de Lévy qui permettent de travailler avec des accroissements non stationnaires et sans moment d'ordre 2.
- * L'utilisation des mouvements browniens fractionnaires qui acceptent une corrélation des accroissements.

Par manque de temps, nous n'allons consacrer notre étude qu'aux lois de Lévy. L'utilisation de ces lois en finance est très controversée. Mandelbrot et Fama proposent ces lois pour établir des modèles statistiques sur les rendements d'actifs. Cependant certains mathématiciens trouvent des divergences entre les lois des chroniques financières et les lois stables. En particulier, l'indice de stabilité ne reste pas constant lorsque que l'échelle de temps considérée augmente, lorsque nous passons, par exemple, des rendements journaliers, aux rendements hebdomadaires, aux rendements mensuels, etc. Nous allons voir dans la partie II que cette affirmation peut-être expliquée sans remettre en cause l'utilisation des lois stables. Face aux incohérences entre les lois des rendements et les lois stables, d'autres lois ont été proposées. Mais aucune de ces lois vérifient entièrement toutes les propriétés des chroniques boursières. Etant donné qu'actuellement il n'existe pas une loi ou un modèle meilleur qu'un autre, nous avons décidé de nous intéresser aux lois de Pareto-Lévy (aussi appelées loi α -stable ou loi Lévy-stable) et de nous faire notre propre avis sur le sujet.

Nous allons dans un premier temps étudier les raisons pour lesquelles les lois de Lévy sont si populaires en finance. Nous allons constater que les valeurs de la statistique de Kurtosis sont élevées pour les séries financières (partie I). Les lois des chroniques boursières sont donc leptokurtique, cela nous incite à considérer les lois de Lévy. Ces lois possèdent aussi la propriété d'être stable par addition ; propriété de stabilité, qui incita de nombreux chercheurs à considérer les lois stables pour les modèles de rendements d'actifs (partie II). Ces lois sont, de plus, caractérisées par quatre paramètres seulement, ce qui facilite grandement les analyses et les estimations.

Nous allons ensuite montrer graphiquement que dans certains cas, les lois de Lévy non gaussiennes approchent beaucoup mieux les lois des séries financières que la loi normale (partie II).

Les lois α -stables approchant mieux les lois des rendements d'actifs que la loi normale, nous sommes amenés à généraliser le modèle d'évaluation des actifs financiers à un marché α -stable (partie III). Nous allons présenter, dans un premier temps, les lois stables multivariées puis nous allons redéfinir la covariance, qui perd son sens avec les lois stables non gaussiennes, par la covariation. Après avoir défini le coefficient bêta généralisé et une fois le pouvoir prédictif du bêta démontré et les stratégies de composition du portefeuille définies,

nous allons comparer un portefeuille sur un marché « stable » à un portefeuille similaire sur un marché efficient (partie IV). Nous allons mesurer les performances des portefeuilles dans chaque cas et en déduire la meilleure loi.

Dans la cinquième partie, nous cherchons à évaluer le risque d'un titre ou d'un portefeuille sous l'hypothèse que les rendements suivent une loi α -stable. Nous proposons plusieurs estimateurs du risque de marché sur un marché stable. Nous estimons ce risque à l'aide de ces estimateurs sur plusieurs actions du Premier Marché français et comparons les résultats. Nous introduisons, de plus, une définition mathématique universelle du risque : le risque cohérent. Nous terminons cette partie sur l'étude de la *Value at Risk*, outil qui permet d'évaluer de manière quantitative la perte potentielle maximale qu'une entité financière peut subir à un niveau de probabilité donnée et dans un laps de temps donné. Après avoir expliqué les limites de cet objet mathématique, nous avançons quatre méthodes pour l'estimer. Nous estimons pour finir, la *Value at Risk* et nous la comparons à la *Value at Risk* empirique dans le but de repérer le meilleur estimateur.

Partie I :

Les fractales et la finance

Dans un premier temps, nous allons essayer de comprendre comment sont apparues les fractales. Dans un deuxième temps, nous allons expliquer ce qu'est une fractale. Il n'existe pas de définition précise de la fractale ; cependant deux propriétés qui la caractérisent reviennent tout le temps à savoir, l'auto-similarité (ou l'auto-affinité) et la dimension non entière. Nous allons voir ensuite son utilité sur les marchés financiers. Puis nous critiquerons le modèle brownien ordinaire qui est une fractale particulière. Le chapitre 3 met en évidence le caractère fractal des chroniques boursières et certaines caractéristiques des chroniques des rendements financiers. Dans ce chapitre, nous parlerons aussi rapidement de l'effet Noé et de l'effet Joseph, termes créés par Benoît Mandelbrot pour décrire deux particularités des chroniques financières qui mettent, notamment, en déroute les modèles browniens ordinaires.

Chapitre 2. GENERALITES SUR LES FRACTALES

2.1. La naissance des fractales

Benoît Mandelbrot est un mathématicien français d'origine polonaise. Il a développé en 1975 la théorie des objets fractals. Ce mathématicien ne pouvait pas accepter qu'on puisse simplifier la réalité au point de décrire les nuages avec des sphères, les montagnes avec des cônes, les chroniques financières avec des droites montantes ou descendantes représentant des « tendances »... Il a passé sa vie à étudier des objets irréguliers dans divers domaines tels que l'astronomie (répartition des galaxies dans l'univers), l'anatomie (la ramification des bronches et bronchioles), la finance etc. Ses études l'ont amené à découvrir un point commun à ces formes irrégulières : l'auto-similarité ou l'auto-affinité. En effet, ces formes ont la particularité de rester toujours aussi irrégulières, fragmentées ou poreuses quel que soit l'endroit d'où on les regarde. Cette particularité n'existe pas dans les formes géométriques simples telles que la sphère, le cercle, le carré ou le triangle. Prenons l'exemple de la planète Terre que l'on assimile à une boule, si on l'observe de la Lune. Approchons-nous de la Terre et regardons la maintenant d'un avion, nous voyons une surface plane (en faisant abstraction des constructions humaines). En zoomant énormément, la Terre ne peut plus être considérée comme une boule. Les fractales quant à elles gardent leur aspect irrégulier quelle que soit l'échelle à laquelle nous les observons. Lorsque nous augmentons le grossissement, nous découvrons toujours des irrégularités nouvelles.

Pour décrire ces objets irréguliers, Benoît Mandelbrot a inventé deux mots :

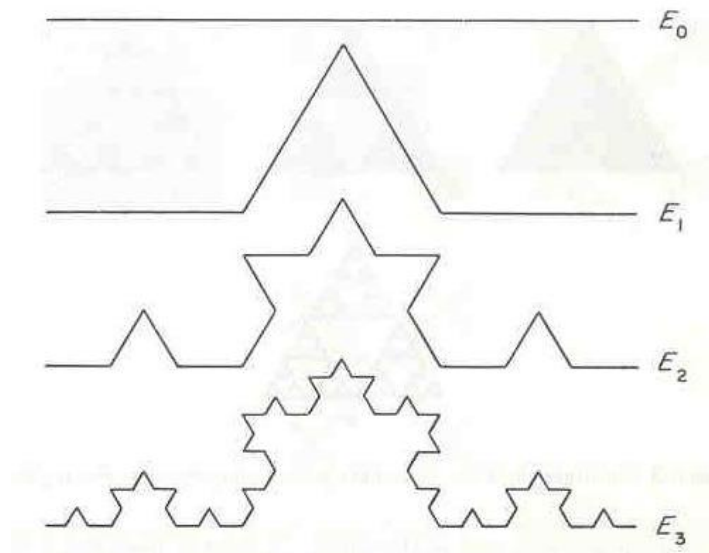
- l'adjectif *fractal* qui vient de l'adjectif latin « fractus » qui signifie irrégulier ou brisé,
- et le nom féminin *fractale*.

La mise en place de la théorie fractale fait naître un espoir pour décrire des formes si irrégulière que les modèles continus parfaitement homogènes ne peuvent pas approcher.

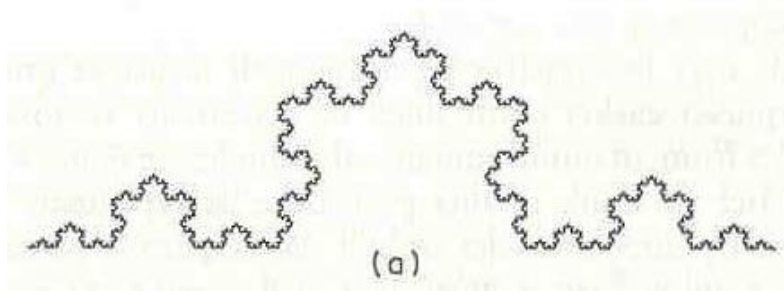
2.2. Fractale « auto-similaire » et fractale « auto-affine »

La courbe de Helge Von Koch est un bon exemple pour comprendre comment une fractale se construit. La procédure commence avec un segment. Ce segment est coupé en trois parties égales et la partie centrale est remplacée par deux segments inclinés de longueur égale au segment ôté tel que le montre la figure suivante.

Figure 1. Initialisation de la courbe de Helge Von Koch

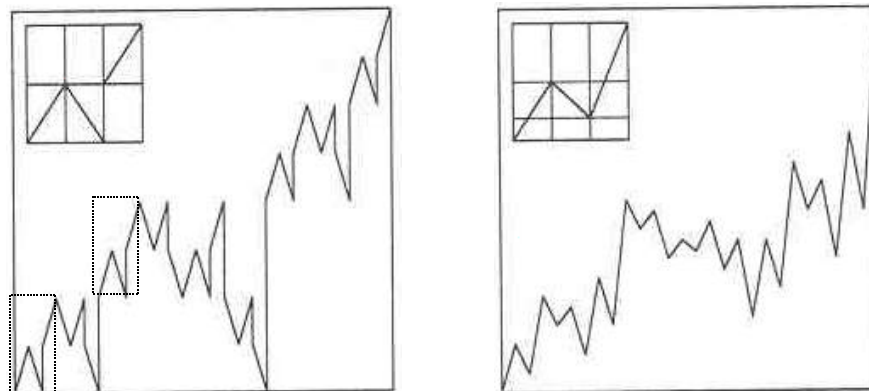


La même procédure est ensuite appliquée à chacun des quatre nouveaux segments (E_2) et ceci est répété une infinité de fois (figure 2).

Figure 2. La courbe de Helge von Koch

La courbe de Helge von Koch est une fractale qui possède la propriété d'*auto-similarité*. Ceci signifie que toute partie de l'objet convenablement dilaté peut être superposée sur une partie plus grande. Le facteur d'agrandissement est le même dans toutes les directions. Dans le cas de la courbe de Helge von Koch le processus d'itération est infini. Entre deux points de cette courbe, il y a une infinité de zigzags et sa longueur est infinie. Bien entendu, les fractales réelles ne sont pas répliquables à l'infini, il existe un rang à partir duquel agrandir la courbe ne permet plus de voir de nouveaux détails.

Le facteur d'échelle (facteur de dilatation) n'est pas forcément identique dans toutes les directions. De tels objets sont dits être des *fractales auto-affines*. Ces objets sont notamment utilisés pour étudier les cours financiers.

Figure 3. Fractales auto-affines :

La figure de départ est la diagonale de pente 1 d'un carré. Le générateur est représenté sur chaque graphe en haut à gauche. C'est une ligne brisée qui va du coin en bas à gauche au coin en haut à droite du carré. A l'étape suivante, chacun des segments diagonaux du générateur sera remplacé par une copie du générateur, réduite et translaturée.

Nous venons de voir qu'une fractale est une forme complexe qui est issue d'une formule simple. Il serait alors intéressant de savoir si nous pouvons associer à une forme compliquée une ou plusieurs formules simples qui permettent de retrouver la forme complexe. Plus généralement pouvons-nous considérer que toutes les figures à caractère apparemment fractal soient la limite (ou l'attracteur) d'une itération à partir d'une formule simple ? La réponse à cette question est malheureusement non. Actuellement nous ne savons pas, dans la majorité des cas, comment retrouver la forme simple d'une figure fractale et il n'existe pas de méthode mathématique pour obtenir la formule simple. Cependant il est possible d'apprécier le degré d'irrégularité de la courbe, ce qui permet d'avoir une idée de la « persistance » des données. Cette notion est liée à la dimension fractale que nous allons maintenant présenter.

2.3. La dimension d'une fractale

Nous venons de voir que la forme d'une fractale ne dépend pas de l'échelle à laquelle nous la considérons. Une fractale a aussi la particularité d'avoir une dimension non entière. Sa dimension peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 3. La dimension d'une fractale avec la propriété d'auto-similarité est donnée par la formule suivante : $D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{l}\right)}$

où D est la dimension de la fractale,

$\frac{L}{l}$ est le facteur de dilatation de l'élément caractéristique de taille l qui se répète dans la fractale de taille L,

N est le nombre d'éléments de taille l dans la fractale de taille L et de dimension D.

Prenons l'exemple de la courbe de Helge Von Koch. La figure initiale est un segment de taille L. Le générateur est une figure en forme de « chapeau » constituée de quatre segments (N = 4) de même longueur $l = \frac{L}{3}$. Donc la dimension de cette courbe est égale à $\frac{\log(4)}{\log(3)}$ soit D = 1,26.

Il n'existe pas actuellement de définition simple de la dimension pour les fractales « auto-affines ». Nous verrons dans les parties II et III, quelques méthodes pour calculer leur dimension.

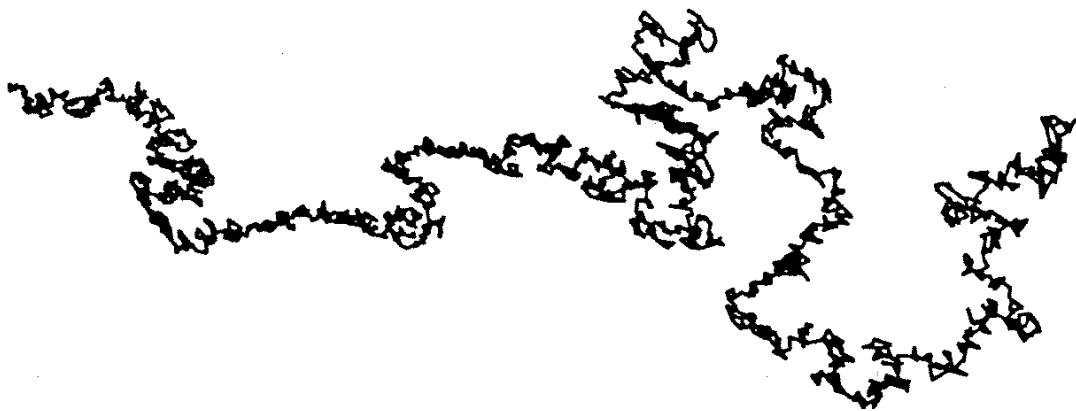
La *dimension de similitude* D montre comment en divisant la fractale de taille L en N fragments, la taille l de chaque fragment change. Elle donne une idée de l'irrégularité de la courbe. Plus D est grand, plus de détails apparaîtront si nous agrandissons la figure. $\frac{L}{l}$ est le facteur d'agrandissement.

La dimension d'un point (aussi appelé poussière) est 0, la dimension d'une droite est 1 et la dimension d'un plan est 2. Donc une fractale de dimension légèrement inférieure à 2 ou égale à 2 signifie qu'une trajectoire très longue aura tendance à noircir le plan ou tout du moins une région du plan.

La dimension de la fractale de Von Koch (Figure 2) est égale à $\log(4)/\log(3)$ soit 1,262. Elle est donc plus proche d'une droite que d'une surface. Elle est plus « massive » qu'une ligne ordinaire mais plus « effilée » qu'une surface.

Une courbe de dimension 2 est un mouvement brownien, c'est à dire une courbe dont tous les points sont indépendants et suivent une « marche au hasard ».

Figure 4. Simulation d'une trajectoire d'un mouvement brownien standard dans \hat{A}^2



Si nous construisons un mouvement brownien, nous constaterons qu'à long terme la courbe aura tendance à noircir le plan ou une région du plan, c'est pourquoi sa dimension est 2. Une dimension non entière signifie que la courbe connaît des liens de dépendance temporels. C'est précisément ce qu'établit Benoît Mandelbrot à propos des cours des actifs financiers.

En finance, une dimension proche de 2 va de pair avec une forte incertitude face à l'avenir. Parallèlement, si la dimension est égale à 1, alors les prix sont complètement contrôlés (situation de monopole).

Ainsi, la connaissance de la dimension d'une courbe fractale peut être intéressante pour mesurer l'intensité de dépendance des données.

Chapitre 3. LES DEFAUTS DU MODELE BROWNIEN ORDINAIRE

Les mouvements browniens ordinaires sont très utilisés en finance pour étudier l'évolution des rendements. Ils supposent que les rendements sont des fonctions continues du temps et suivent la distribution de Gauss et que leurs accroissements sont indépendants et stationnaires. Nous allons voir dans ce chapitre qu'approcher les chroniques financières par des mouvements browniens ordinaires n'est pas correct.

3.1. L'efficience des marchés

Nous allons dans ce paragraphe énoncer l'hypothèse d'efficience des marchés financiers, hypothèse que nous allons remettre en cause dans le chapitre 3 dans la section 3.5. traitant de l'effet Joseph.

Selon Lacaze [26], "Un marché est *efficace* dès lors que les prix intègrent instantanément l'ensemble des informations pertinentes et nécessaires à l'évaluation des actifs financiers qui y sont traités. Autrement dit, un marché efficace intègre instantanément les incidences des événements passés et reflète intégralement l'ensemble des anticipations des agents concernant les événements à venir".

Il existe 3 degrés d'efficience :

- *L'efficience au sens faible* : le prix de l'actif reflète pleinement toute l'information contenue dans la série passée du prix de l'actif en question. Les prix futurs dépendront uniquement des informations qui parviendront quotidiennement aux marchés. Le prix de l'actif suit un modèle de martingale.
- *L'efficience au sens semi-fort* : le prix de l'actif reflète pleinement toute l'information disponible publiquement.

- *L'efficience au sens fort* : le prix de l'actif reflète pleinement toute l'information qu'elle soit publique ou confidentielle. Dans ce cas, il est impossible de prévoir l'évolution des cours. On ne peut pas obtenir plus d'information que celle déjà intégrée dans les cours.

Que l'on considère l'efficience dans sa forme faible (on connaît l'ensemble des prix passés), dans sa forme semi-forte (l'information publique est intégrée dans les prix dès qu'elle est disponible) ou dans sa forme forte (l'ensemble informationnel est toute l'information qu'il est possible de connaître), il est impossible de prévoir l'évolution de ce prix puisqu'il n'existe pas d'information qui n'ait été intégrée dans le prix actuel. Il est donc impossible de tirer parti de cette information pour battre le marché.

L'hypothèse d'efficience des marchés, nous amène à considérer que les rendements suivent une marche aléatoire. Les variations successives du logarithme des cours sont totalement indépendantes. C'est pour cette raison que Bachelier a proposé de modéliser les rendements avec des mouvements browniens ordinaires.

Définition : Un **mouvement brownien** (ou processus de Wiener) est un processus aléatoire $(X(t))$ tel que :

1. Avec une probabilité égale à 1, $X(0) = 0$,
2. Les trajectoires de $X(t)$ sont continues,
3. Pour $t > s \geq 0$, l'accroissement $X(t)-X(s)$ a une distribution normale de moyenne nulle et de variance $t-s$,
4. Si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$, les accroissements $X(t_2)-X(t_1), \dots, X(t_m)-X(t_{m-1})$ sont indépendants.

Nous allons montrer que l'hypothèse du mouvement brownien n'est pas valable pour au moins 3 raisons :

1. Les prix et donc les rendements sont discontinus en réalité,
2. Les rendements logarithmes ne suivent pas une loi normale,
3. Les accroissements des rendements ne sont pas stationnaires.

3.2. Discontinuité des prix

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien alors la fonction $s \rightarrow X_s(\omega)$ est presque sûrement une fonction continue. Nous savons qu'en réalité l'évolution des prix au cours du temps est loin d'être continue car :

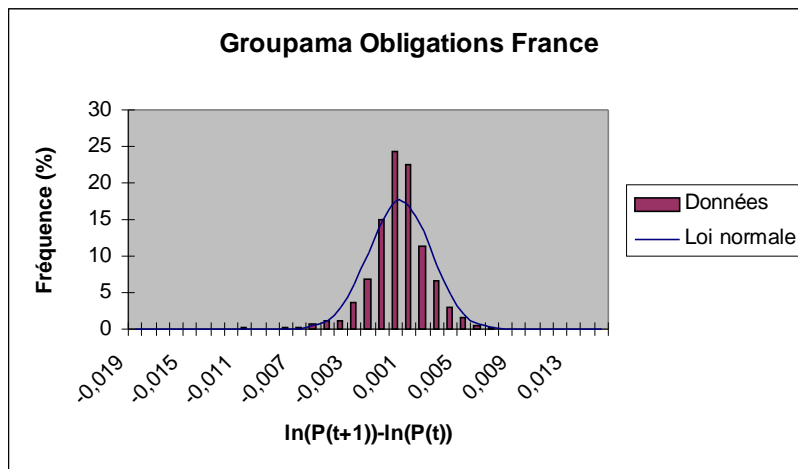
1. les prix ne sont pas infiniment divisibles (le prix est négocié au centime près),
2. les titres ne sont pas cotés 24 heures sur 24 et le temps ne peut pas être subdivisé au-delà d'un certain rang (30 seconde, par exemple),
3. les prix bougent instantanément quand une information importante est divulguée et des krachs surviennent de temps en temps.

Ainsi l'hypothèse de la continuité des cotations et par-là de la continuité du logarithme des prix est fausse. Ainsi les rendements ne forment pas une fonction continue du temps.

3.3. Loi normale

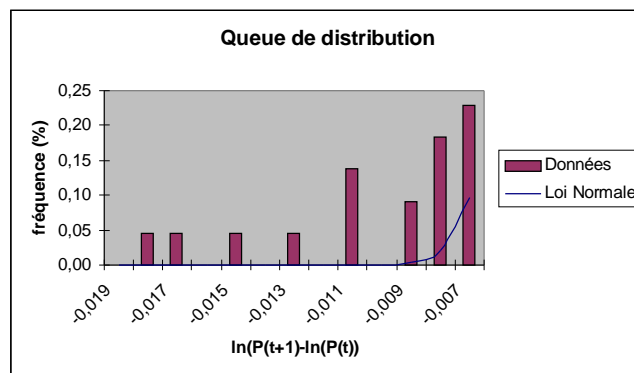
Le modèle brownien fait aussi appel à la loi normale. Si la série des rendements est un mouvement brownien alors les rendements sont des variables aléatoires gaussiennes. Le graphique ci-dessous représente l’histogramme de l’accroissement du logarithme des cours au jour le jour de l’OPCVM Groupama Obligations France du 25 octobre 1992 au 18 mai 2001.

Figure 5. Distribution de l’accroissement du logarithme du cours de l’OPCVM Groupama Obligations France



Cet histogramme paraît être symétrique. La distribution des données est plus pointue que la loi normale. Le graphique suivant montre que la queue de distribution des données réelles est plus épaisse et plus longue que la queue de distribution de la loi normale.

Figure 6. Agrandissement du graphique précédent



Pour vérifier que les accroissements quotidiens du logarithme du cours de certains titres ne suivent pas une loi gaussienne, nous allons calculer la statistique de Kurtosis associée. Le Kurtosis caractérise la forme du pic ou l'aplatissement relatif d'une distribution comparée à une distribution normale. Un Kurtosis positif indique une distribution relativement pointue, tandis qu'un Kurtosis négatif signale une distribution relativement aplatie. Le Kurtosis se

définit comme :

$$\text{KURTOSIS}_x = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]^2}$$

Nous trouvons pour la série sur les cours de l'OPCVM Groupama Obligations France un Kurtosis égal à 8,31 (contre 3 pour une loi gaussienne). La distribution de cette série est donc plus pointue et a des queues de distribution plus lourdes qu'une distribution normale.

Nous avons calculé la statistique de Kurtosis pour plusieurs chroniques financières et nous constatons que pour certaines séries elle est supérieure voire très supérieure à 3.

Figure 7. Statistiques de Kurtosis

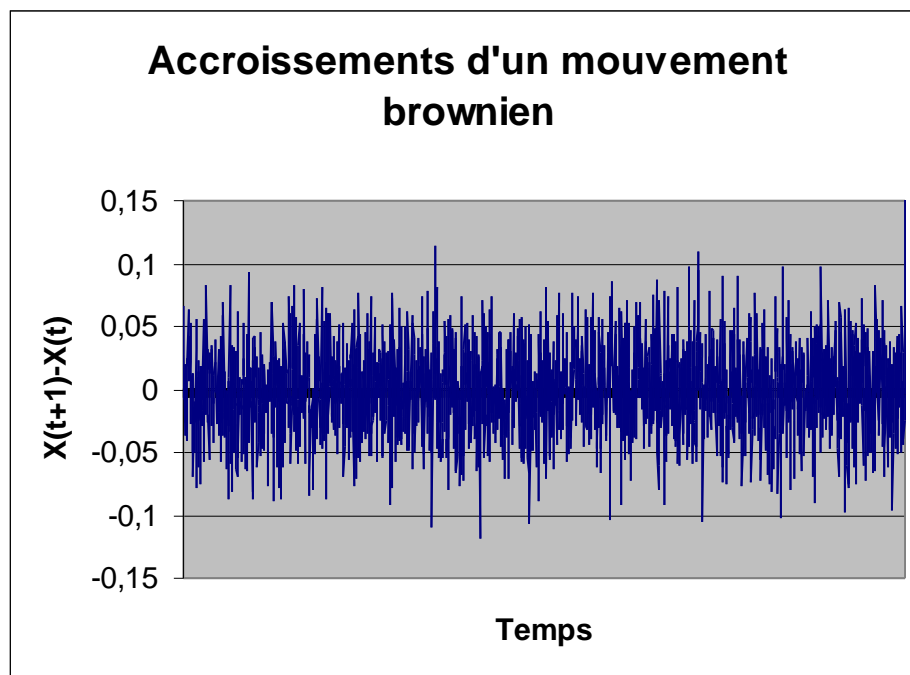
Série	Kurtosis	Série	Kurtosis
		Actions	
OPCVM		Renault	2,03
Nippon Gan	3,42	France Télécom	3
GAN Croissance	11,07	AXA	26,42
France GAN	14,07	Indices	
Ameri-GAN	259,11	CAC 40	5,24
GAN Rendement	364,47	SBF 250	3,01
Group. Oblig. France	8,3	Nikkei 300	3,67
		Dow Jones Industrials	59,43
		Nasdaq Composite	416,78

Il semble donc inexact de considérer que le rendement est toujours une variable aléatoire gaussienne. Nous venons de voir que les queues de la loi normale sont bien moins épaisses que les queues des distributions empiriques des rendements, ce qui pose un gros problème pour gérer le risque en finance.

3.4. Les grandes fluctuations

Le modèle brownien suppose aussi que les accroissements sont stationnaires (voir figure 8). Ces modèles excluent les grandes fluctuations, ils ne prennent donc pas en considération les krachs et mini-krachs qui se produisent de temps en temps. Ils sont donc insuffisants pour étudier les cours boursiers.

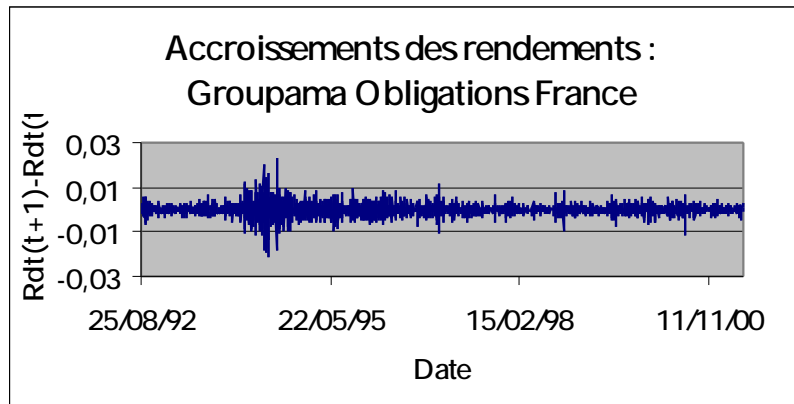
Figure 8. Simulation des accroissements d'un mouvement brownien ordinaire



Sur ce graphique, aucun accroissement n'est très différent des autres et la variance semble être à peu près constante au cours du temps. Les changements de prix sont réguliers et ne sont pas concentrés.

Prenons maintenant un exemple réel et examinons la suite des accroissements du cours de l'OPCVM Groupama Obligations France.

Figure 8. Suite des accroissements au jour le jour du cours de l'OPCVM Groupama Obligations France entre le 25/08/1992 et le 18/05/2001



Comme le montre le graphique précédent, les accroissements ne sont pas réguliers, il existe des sauts. Un certain nombre de variations quotidiennes extrêmes, tant positives que négatives, parfois supérieures à 10 %, dépassent de beaucoup les très nombreuses petites variations inférieures à 5 %. Les changements du logarithme du prix n'ont pas une variance constante au cours du temps, ce qui est un signe de non-stationnarité.

Nous venons de voir que l'hypothèse que le logarithme des prix suit un modèle brownien ordinaire est attrayante mais en désaccord complet avec la réalité. Nous avons montré graphiquement que le logarithme des prix n'est pas une fonction continue du temps et que leurs accroissements ne suivent pas une loi normale et ne sont pas stationnaires. De même, Andrew Lo dans LO [29], a montré que statistiquement c'était une erreur de considérer que le rendement suit une marche au hasard. De plus, nous allons voir dans le chapitre suivant que les variations des chroniques boursières ne sont pas indépendantes, ce qui rend la modélisation des cotations par un modèle brownien encore moins correcte.

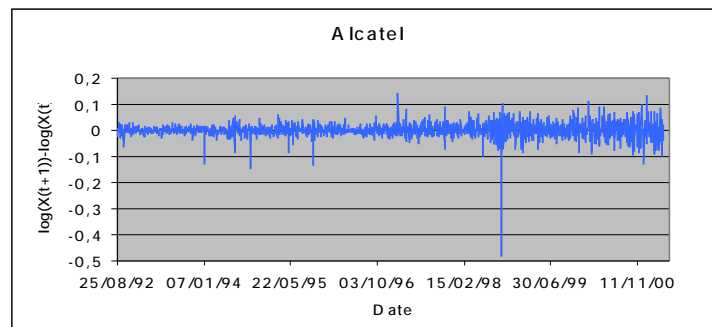
Chapitre 4. PARTICULARITES DES CHRONIQUES FINANCIERES

La théorie des objets fractals ne fait pas simultanément l'hypothèse que les rendements sont des fonctions continues du temps et que leurs accroissements suivent une loi normale. Elle est donc moins restrictive que l'étude avec les mouvements browniens ordinaires. Nous allons montrer que les chroniques boursières possèdent la propriété d'auto-similarité qui nous permet de penser qu'elles sont des fractales. Nous allons ensuite expliquer l'hypothèse de stabilité des marchés. Puis nous allons mettre en évidence deux particularités des chroniques financières qui soulèvent des problèmes en modélisation. Elles sont marquées régulièrement par des sauts (Effet Noé) et ont un comportement cyclique non-périodique (Effet Joseph).

4.1. Domaine d'application

L'étude fractale en finance s'effectue sur la variation du logarithme du prix, autrement dit sur le rendement logarithmique, soit $\ln(P_{t+T}) - \ln(P_t)$ noté dans la suite $L(t, T)$ et non directement sur les accroissements des cours. La variable $t + 1$ (i.e. $T = 1$) peut correspondre à $t + (1 \text{ jour})$ ou $t + (1 \text{ mois})$ etc. L'unité, par défaut, est le jour. Travailler avec des rendements, évite de rencontrer des prix négatifs et annule l'unité de prix. Nous pouvons considérer aussi bien le prix des actions que les taux de change, les indices boursiers, les cours des OPCVM, les prix des contrats à terme ou les cours des matières premières.

Figure 9. Suite des accroissements au jour le jour du logarithme des prix de l'action Alcatel entre le 3 juin 1987 et le 9 avril 2001



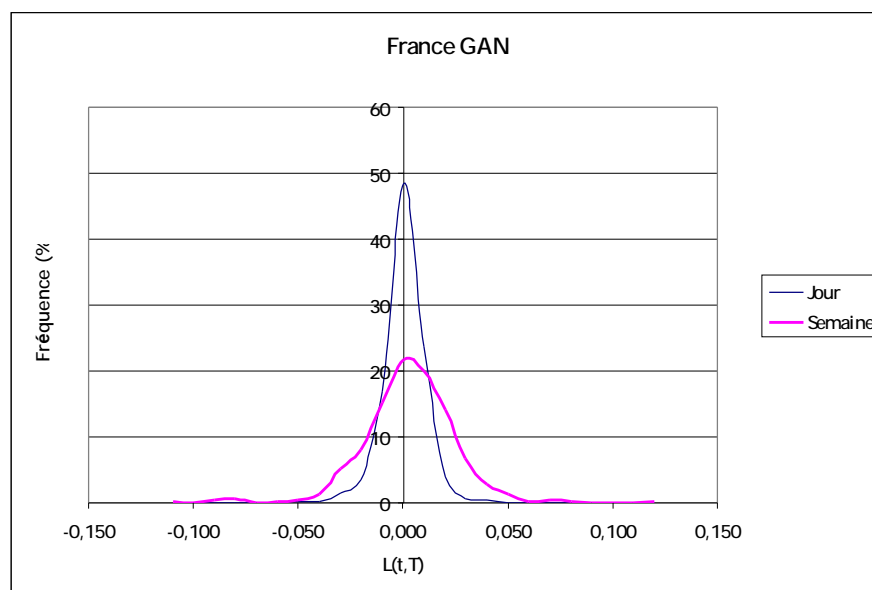
4.2. Le caractère fractal des cours et des taux

La notion de fractale est intimement liée à celle d'auto-similarité qui, dans un cadre statistique, correspond à l'égalité en loi (à un facteur près) entre un processus et ses dilatées temporelles.

Définition : Un *processus* $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ à valeurs réelles est *auto-similaire* d'exposant $H > 0$ si et seulement si pour tout $a > 0$, on a : $(X(at))_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} (a^H X(t))_{t \in \mathbb{R}}$

Les trajectoires montrent une similitude à elles-mêmes à des échelles différentes. Il ne faut pas comprendre par-là que les trajectoires sont identiques à différentes échelles mais qu'elles possèdent les mêmes caractéristiques (même degré d'irrégularité, même loi à un facteur près). L'accroissement du logarithme des prix a la même distribution (à un facteur près) que l'on considère l'accroissement quotidien, hebdomadaire, mensuel etc. Une chronique boursière apparaît donc posséder la propriété d'auto-similarité ; elle semble avoir un caractère fractal (pour plus d'explications et des tests d'auto-similarité, nous invitons le lecteur à se référer à la partie II).

Figure 10. Distribution des accroissements quotidiens et hebdomadaires du logarithme du cours de l'OPCVM France GAN (du 31 janvier 1992 au 18 mai 2001)



Lorsque nous regardons le graphique précédent, nous remarquons que les distributions sont à peu près symétriques. Nous constatons aussi que les queues de distribution sont d'autant plus lourdes et la distribution est d'autant plus aplatie que l'échelle de temps est grande. Nous allons expliquer dans la partie II pour quelles raisons nous considérons que cette chronique financière est auto-similaire.

4.3. L'hypothèse de stabilité des marchés

Lorsque nous travaillons sur des marchés « fractals », nous remplaçons l'hypothèse d'efficience des marchés par l'hypothèse de stabilité des marchés appelée aussi hypothèse des marchés fractals. Cette hypothèse, introduite par Peters [44], prend en compte l'impact de l'information et des horizons d'investissements sur le comportement des investisseurs. L'hypothèse des marchés fractals repose sur cinq points :

- * *H1* : Les marchés regroupent des investisseurs avec un grand nombre d'horizons différents.
- * *H2* : L'information a un impact différent selon l'horizon d'investissement.
- * *H3* : La stabilité du marché est en grande partie une question de liquidité. La liquidité est disponible lorsque le marché est composé de beaucoup d'investisseurs avec des horizons de placements différents.
- * *H4* : Les prix reflètent une combinaison d'échanges à court terme et à long terme.
- * *H5* : Si le cycle économique n'a aucun impact sur un titre, alors il n'aura pas de tendance à long terme. Les échanges à court terme domineront.

Revenons sur chacune de ces hypothèses et faisons quelques remarques.

H1- Le comportement d'un trader est très différent du comportement d'un gérant de fonds de pension. Dans le premier cas, l'horizon d'investissement est de quelques minutes dans le deuxième cas, il est de plusieurs années. Cette hypothèse assure une liquidité suffisante pour les traders.

H2- L'activité principale d'un trader est le commerce. Un trader sera plus concerné par l'information technique que par l'information fondamentale. A l'opposé, les investisseurs à long terme accordent plus d'importance à l'information fondamentale et ont tendance à mettre de côté l'information technique.

H3- Si les cours chutent sur une journée suite à une information négative, entraînant ainsi une perte pour les day-traders, certains investisseurs verront une opportunité d'achat car ils n'évalueront pas l'information de la même manière. Ils achèteront des titres et feront remonter ainsi le cours. Le marché peut de cette manière absorber les chocs aussi longtemps qu'il garde une structure fractale. Les marchés cessent d'être stables lorsque les investisseurs à long terme ne négocient plus ou lorsqu'ils deviennent des investisseurs à court terme. On assiste alors à un manque de liquidité.

En général, les horizons d'investissement se raccourcissent lorsque les gérants ne trouvent plus d'information pour faire une analyse fondamentale sûre. Ceci correspond notamment aux périodes de crises économique ou politique durant lesquelles les perspectives à long terme des sociétés deviennent incertaines. Lorsque l'information technique (à court terme) prend beaucoup plus d'importance que l'information « fondamentale », les investisseurs à long terme arrêtent de participer ; ce sont alors les traders qui font le marché ; et ce dernier devient instable. De même, si un événement remet en cause les informations à long terme, les investisseurs raccourcissent leurs horizons ou cessent de participer au marché ; ils se fient alors beaucoup plus aux informations techniques ; il n'y a plus d'investisseurs à long terme pour offrir des liquidités aux investisseurs à court terme ; le marché devient instable. Les prix arrêtent alors de refléter tous les horizons d'investissements.

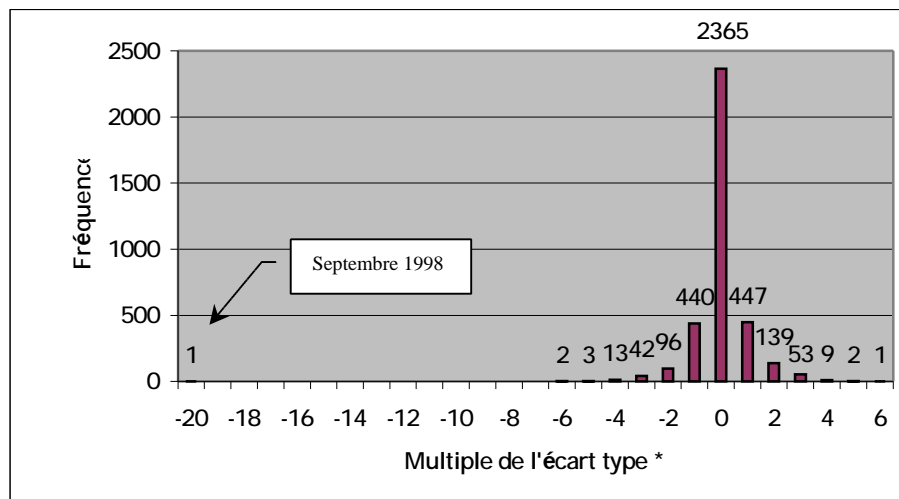
H4- Les variations des prix à court terme sont plus volatiles que ceux à long terme.

H5- Si le marché suit la croissance économique sur le long terme, alors le risque diminuera avec le temps car les cycles économiques dominent. Les cycles longs sont moins volatiles que les cycles courts, ce qui contribue à rendre les rendements des gérants à long terme moins volatiles qu'à court terme.

4.4. L'effet Noé

Nous allons constater l'*effet Noé* qui se traduit par d'énormes écarts par rapport à l'écart moyen sur la variable $L(t,1) = \ln(P(t+1)) - \ln(P(t))$. Le graphique suivant représente la distribution de $L(t,1)$ pour l'action Alcatel entre le 3 juin 1987 et le 9 avril 2001.

Figure 11. Histogramme de la distribution de $L(t,1)$ en fonction de l'écart type pour l'action Alcatel



* L'écart type est égal ici à l'écart type de l'accroissement quotidien du logarithme pour l'action Alcatel entre le 3 juin 1987 et le 9 avril 2001.

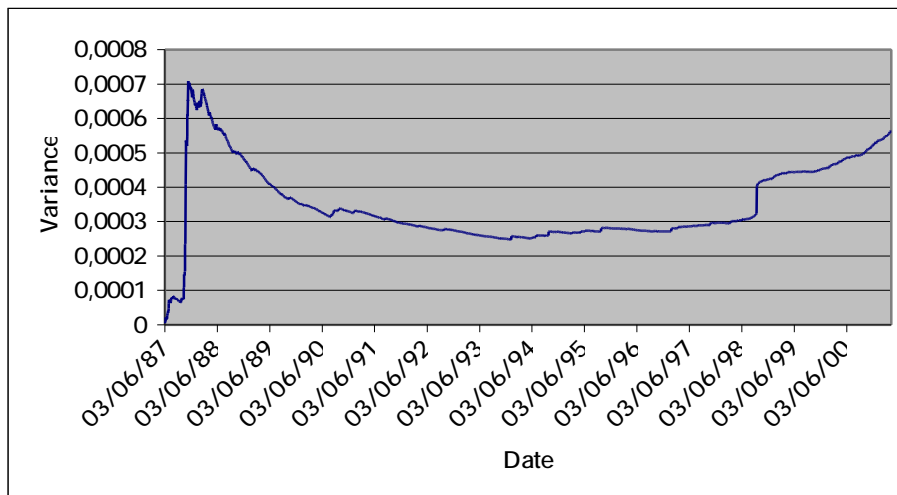
L'histogramme est à peu près symétrique. On retrouve la très grande fluctuation qui s'est produite entre le 16 et le 17 septembre 1998 ; elle correspond à 20 fois l'écart type.

Le risque qu'une grande fluctuation ait lieu est beaucoup plus important en réalité que ce que la loi normale donne. Par exemple, avec la loi normale, la probabilité qu'une fluctuation supérieure à 3 fois l'écart type se produise est égale à 0,5% alors que la figure 11, nous montre qu'en réalité cette probabilité est 0,03 soit 3%. Ainsi la probabilité qu'une grande fluctuation ait lieu est 6 fois supérieure à ce qu'indique la loi normale. De même, la probabilité qu'une fluctuation supérieure à 4 fois l'écart type se produise est égale à 0,01% pour la loi normale alors que la figure 11, nous montre qu'en réalité cette probabilité est 0,009 (= 31/3613) soit 0,9%. Ainsi la probabilité d'avoir une grande fluctuation est 90 fois

supérieure à ce qu'indique la loi normale. Nous pouvons montrer que plus nous considérons des grandes fluctuations et plus la distribution réelle du rendement s'éloigne de la loi normale. (voir Peters [44])

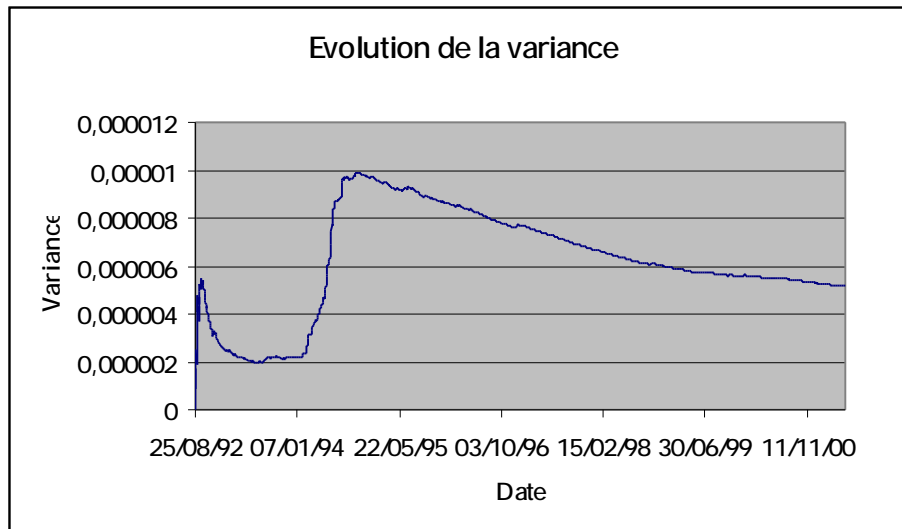
L'effet Noé a pour conséquence de rendre la variance instable. Les graphiques suivants représentent l'évolution de la variance de $L(t,1)$ de l'action Alcatel entre le 3 juin 1987 et le 9 avril 2001 et du logarithme du cours de l'OPCVM Groupama Obligations France entre le 25 août 1992 et le 18 mai 2001. A chaque fois l'échantillon augmente d'une unité en incluant l'échantillon précédent.

Figure 12. Evolution de la variance de $L(t,1)$ en fonction du temps pour l'action Alcatel.



Nous constatons une augmentation brutale de la variance en octobre 1987 au moment du krach boursier. Nous remarquons, de plus, que la variance du rendement journalier ne se stabilise pas.

Figure 13. . Evolution de la variance de $L(t,1)$ en fonction du temps pour une OPCVM de Groupama



Nous constatons une augmentation brutale de la variance en 1994. Nous remarquons, de plus, que la variance de $L(t,1)$ ne se stabilise pas.

Les périodes d'instabilité, pendant lesquelles les grandes fluctuations surviennent, arrivent lorsque le marché perd sa structure fractale : lorsque les investisseurs à long terme sortent du marché ou lorsqu'ils deviennent des investisseurs à court terme. Ces grandes variations affectent les rendements quel que soit l'horizon d'investissement.

Le modèle fractal devra prendre en compte les trois propriétés que nous venons de mettre en évidence à savoir :

1. le nombre non négligeable de grandes, voire très grandes fluctuations,
2. le caractère apparemment symétrique des hausses et des baisses des variations du logarithme des cours,
3. une variance pas forcément finie.

4.5. L'effet Joseph

Considérons un prix qui a considérablement changé pendant une période donnée. Nous pouvons nous demander si pendant cette période le changement de prix s'est fait progressivement et régulièrement ou s'il y a eu des variations brutales du prix. Nous constatons qu'en réalité les changements de prix se font sur des périodes courtes. Cette persistance des variations du prix a été définie par Benoît Mandelbrot par l'*effet Joseph* en référence au passage de la Genèse dans laquelle Joseph assiste à la succession de 7 années d'abondance et 7 années de famine.

Les cycles sont très difficiles à identifier graphiquement car ils sont très nombreux, n'ont pas tous la même durée et se chevauchent. Il faut néanmoins trouver un modèle qui prenne en compte ces cycles.

Pour déterminer la dimension de courbes diverses, Benoît Mandelbrot a proposé la fonction dite "mouvement brownien fractionnaire". Cette fonction s'inspire d'une invention statistique du physicien anglais H. E. Hurst qui permet de mettre en évidence la propension d'une chronique - les crues du Nil pour Hurst - à être cyclique mais non périodique. Cette expression démontre l'existence d'une dépendance statistique à long terme dans une chronique quand on n'y voit qu'une suite aléatoire de données. Nous n'allons pas nous attarder sur les mouvements browniens fractionnaires, cependant il est utile de connaître leur existence.

Définition 1 : Un *mouvement brownien fractionnaire*, noté $B_H(t)$, est un processus aléatoire dont les accroissements sont gaussiens et qui vérifie, pour tout t et T :

$$E[B_H(t+T) - B_H(t)] = 0$$
$$E[(B_H(t+T) - B_H(t))^2] \approx T^{2H} \quad 0 < H < 1$$

Le paramètre H est appelé exposant de Hurst.

Si $H = 1/2$ alors $B_H(t)$ est un mouvement brownien ordinaire.

Le paramètre H de cette fonction permet de mesurer les effets de persistance dans une série : lorsque $H = 0,5$ il n'y a aucune dépendance entre les différents accroissements de la série mais quand H croît de $0,5$ à 1 la persistance augmente, les valeurs ne sont plus gaussiennes et indépendantes, des corrélations apparaissent, concrètement des cycles non périodiques en tout genre deviennent de plus en plus distincts.

La dimension fractale de la série considérée est donnée par $1/H$. Ainsi une série qui suit une marche au hasard ($H = 0,5$) aura une dimension fractale égale à 2 , elle recouvrira tout le plan, c'est un mouvement brownien ordinaire. Mais un $H > 0,5$ correspond à une dimension inférieure à 2 ce qui est conforme intuitivement au fait que la courbe présente une certaine homothétie interne, elle ne remplira donc pas totalement le plan.

En se plaçant sur les marchés financiers on comprend donc qu'un $H = 0,5$ correspond à un marché efficient (indépendance des valeurs dans le temps) tandis qu'un H proche de 1 (donc une dimension fractale < 2) signifie que le marché n'est pas efficient (des liens de dépendance relient les prix dans le temps). Or plusieurs auteurs ont montré, à la suite de Mandelbrot, que les cours des actifs financiers avaient une dimension fractale strictement inférieure à 2 , autrement dit que les marchés n'étaient pas efficientes !

Les cours de bourse connaissent donc des liens de dépendance temporels, certes pas assez marqués pour être identifiés par les méthodes d'analyse statistiques usuelles, mais suffisamment forts pour contredire la théorie de la « marche au hasard ». Selon Christian Walter [52], l'espoir est permis de pouvoir tirer parti de ces liens de dépendance : " La présence, même faible d'un processus fractal persistant semble indiquer qu'il pourrait être possible de modéliser, à l'avenir, les « élans du marché » par une formalisation adaptée ".

Le modèle fractal devra prendre en compte des liens de dépendance temporels qui existent entre les prix et donc entre les rendements.

Partie II :

Modélisation avec les lois stables

Nous avons vu dans la partie I que la loi normale décrit mal les variations des chroniques boursières. Nous avons aussi mis en évidence que les cotations ne sont certainement pas indépendantes comme le souligne Benoît Mandelbrot en parlant de l'« effet Joseph ». Nous avons vu que certaines séries financières sont des fractales car ne connaissant pas l'échelle, il est difficile de savoir si la courbe représente une évolution d'heure en heure, de jour en jour ou de mois en mois. Deux modèles existent actuellement pour décrire ce phénomène appelé principe d'échelle. Le premier modèle (1963) prend en compte le caractère non gaussien des cours et suppose (à tort, mais par souci de simplification) que les chroniques financières sont indépendantes. Il accorde donc de l'importance à l'effet Noé et néglige l'effet Joseph. Ce modèle, qui fait appel aux lois stables est traité dans cette partie. Le second modèle proposé par Benoît Mandelbrot en 1965 tient compte de la dépendance des données et suppose que les chroniques suivent une loi normale. Nous ne le traiterons pas. Ces deux modèles ne décrivent pas correctement la réalité car ils supposent que l'effet Noé et l'effet Joseph sont séparables, ce qui est rarement le cas en finance. Dans cette partie, nous allons chercher à savoir si les lois stables non gaussiennes approchent mieux les lois des chroniques boursières que la loi normale.

Chapitre 5. Généralités sur les lois stables

Le premier modèle de Benoît Mandelbrot traite uniquement des discontinuités et fait l'hypothèse que les données sont indépendantes. Nous avons montré la présence non négligeable de grandes fluctuations des prix et l'existence d'une valeur de Kurtosis très supérieure à 3, il faut donc travailler avec une loi qui a des queues de distribution lourdes. De plus, la variance ne se stabilise pas. Etant donné que quelle que soit la taille de l'échantillon la variance continue à varier considérablement, il est impossible d'estimer cette variance. Comme la variance étudiée ne tend pas vers une valeur limite, nous disons que la variance est infinie, bien qu'en réalité nous puissions la calculer pour une taille donnée. Pour ces raisons (et d'autres que nous verrons au fur et à mesure), Benoît Mandelbrot utilise les lois stables.

5.1. Stabilité au sens de Lévy ou L-stabilité

Les lois Pareto-stables, appelées aussi lois Lévy-stables ou tout simplement lois stables, ont été introduites par Paul Lévy en 1924 (Lévy [28]). Les définitions et propriétés énoncées dans ce chapitre sont issues de Janicki et Weron [22] et de Samorodnitsky et Taqqu [47].

Selon le théorème central limite généralisé, si la somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) a une fonction de distribution limite quand le nombre de variables sommées tend vers l'infini, alors la distribution limite est un membre de la famille des lois stables (Lévy [28]). Cette propriété de stabilité par addition a incité de nombreux chercheurs à utiliser les lois stables pour représenter la loi des rendements financiers.

Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une loi stable.

Définition 1: Soit une suite de variable aléatoires réelles $(Y_n)_{n>0}$ indépendantes et identiquement distribuées de loi L . La **loi** de probabilité L sur \mathfrak{R} est dite **stable** s'il existe deux fonctions réelles A et B avec A fonction positive telles que :

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{A(n)} + B(n) \text{ ait la même distribution que chacun des } Y_i.$$

Dans le cas où la loi L est la loi normale, cette définition correspond au théorème central limite.

Cette propriété est très intéressante en finance, car elle suppose comme nous l'avons écrit au paragraphe 4.2. que la distribution des chroniques financières suit la même loi quelle que soit l'échelle considérée. Ceci signifie que l'on observe une invariance par changement d'échelle de la distribution étudiée. Pour cette raison, les lois stables sont quelques fois appelées lois fractales.

Définition 2: La variable aléatoire réelle Y est de **loi stable** de paramètres α, β, σ et μ , ce qu'on note $Y \equiv S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$, où $0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1, \sigma \geq 0, \mu$ réel, si sa fonction caractéristique est de la forme :

$$y_X(t) = \exp \left[-s^a |t|^a \left(1 - ib \cdot \text{sign}(t) \cdot \text{tg} \left(\frac{p\alpha}{2} \right) \right) + imt \right] \quad \text{si } a \neq 1,$$

$$y_X(t) = \exp \left[-s |t| \left(1 + \frac{2}{p} ib \cdot \text{sign}(t) \cdot \ln |t| \right) + imt \right] \quad \text{si } a = 1.$$

$$\text{où } \text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{quand } t > 0 \\ 0 & \text{quand } t = 0 \\ -1 & \text{quand } t < 0 \end{cases}$$

Les lois stables sont intéressantes car elles ne sont pas trop compliquées. En effet, il suffit de quatre paramètres pour les connaître complètement.

Le principal inconvénient est que les densités des lois stables sont inconnues sauf dans trois cas :

- La distribution gaussienne $S_2(0, \sigma, \mu)$ où $f(x) = \frac{1}{2s\sqrt{p}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{4s^2}\right)$
- La distribution de Cauchy $S_1(0, \sigma, \mu)$ où $f(x) = \frac{2s}{p((x-m)^2 + 4s^2)}$
- La distribution de Lévy $S_{1/2}(1, \sigma, \mu)$ où

$$f(x) = \left(\frac{s}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} (x-m)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{s}{2(x-m)}\right) \times I_{|m, \infty[}(x) \quad \text{avec } I \text{ fonction indicatrice.}$$

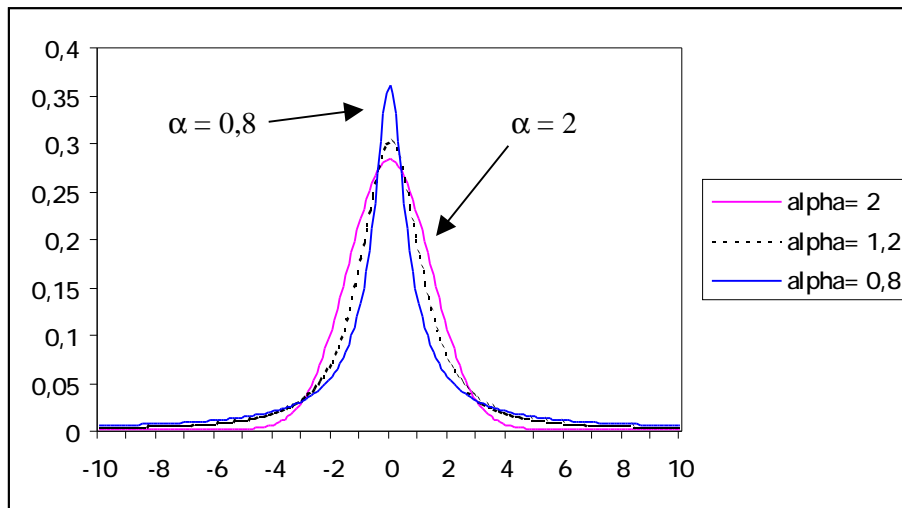
Mais, depuis l'implémentation de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform), les densités stables sont faciles à calculer. Nous pouvons approcher par cette méthode la densité : $f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \mathcal{Y}_X(t) dt$ (voir annexe 3). Dans la suite, nous allons générer les densités par une autre méthode décrite dans Nolan [42] et exposée dans l'annexe 3.2.

5.2. Interprétation des paramètres de la fonction caractéristique d'une loi stable

Nous venons de voir qu'une variable aléatoire stable est caractérisée par 4 paramètres :

1) Le paramètre α appelé *exposant caractéristique* ou indice de stabilité décrit la forme de la distribution ou le degré d'épaisseur de la queue de distribution ($0 < \alpha \leq 2$). Plus α est petit, plus les queues de la distribution sont épaisses. Autrement dit, plus α est petit, plus nous constatons l'existence de très grandes fluctuations. Une distribution gaussienne a la valeur maximum de α soit $\alpha = 2$.

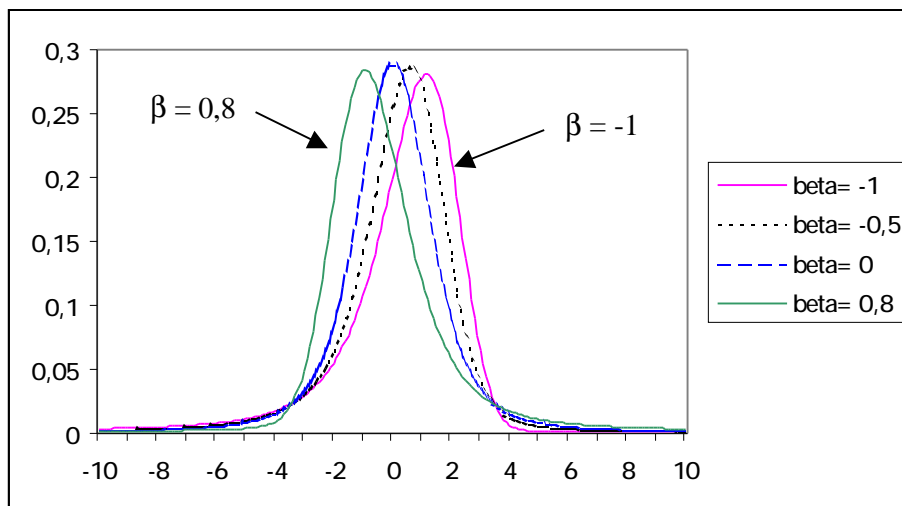
Figure 14. Courbe de la densité pour $a \hat{I} \{2 ; 1,2 ; 0,8\}$, $b = 0$, $s = 1$ et $m = 0$



Plus le paramètre α est petit, plus la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisse.

2) Le paramètre β donne une idée de l'asymétrie de la distribution. C'est le *paramètre d'asymétrie*. Si β est égal à -1 (resp. $+1$) la distribution est totalement asymétrique à gauche (resp. à droite). Lorsque β vaut zéro alors la distribution est symétrique.

Figure 15. Courbe de la densité pour $a = 1,5$; $b \hat{I} \{-1 ; -0,5 ; 0 ; 0,8\}$, $s = 1$ et $m = 0$

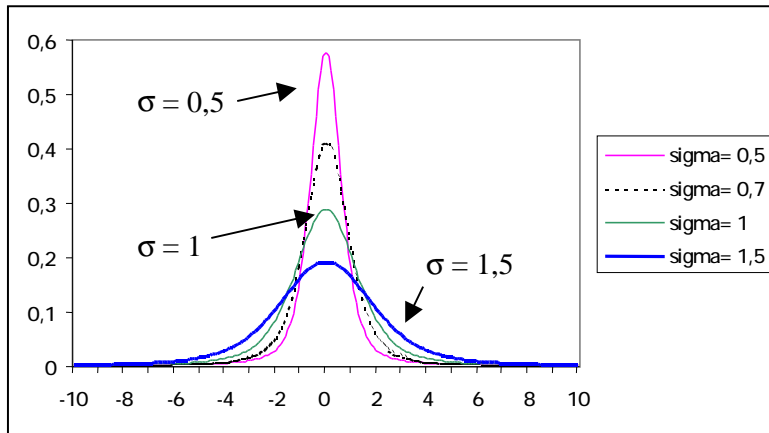


Lorsque β est positif (resp. négatif), le mode est à gauche (resp. à droite) de la moyenne.

Lorsque β est positif (resp. négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).

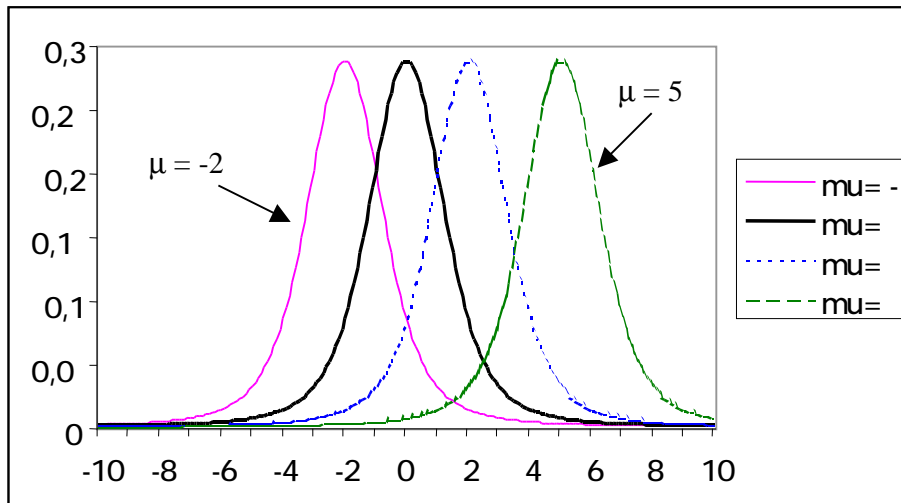
3) Le paramètre σ est appelé *facteur d'échelle*. Plus σ est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre σ permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution.

Figure 16. Courbe de la densité pour $a = 1,5$; $b = 0$; $s \hat{=} \{ 0,5 ; 0,7 ; 1 ; 1,5 \}$ et $m = 0$



4) Le *paramètre de localisation* μ correspond, pour α supérieur à 1, à la moyenne de la loi de distribution. Si, $\beta = 0$ alors μ est la médiane. Dans les autres cas le paramètre μ ne peut pas être interprété.

Figure 17. Courbe de la densité pour $a = 1,5$; $b = 0$; $s = 1$ et $m \hat{=} \{ -2 ; 0 ; 2 ; 5 \}$



5.3. Propriétés arithmétiques

Nous allons rappeler quelques propriétés importantes des variables aléatoires stables de loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Propriété 1: Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi stable $S_a(b_1; s_1; m_1)$ et $S_a(b_2; s_2; m_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$ avec :

$$s = (s_1^a + s_2^a)^{\frac{1}{a}}, \quad b = \frac{b_1 s_1^a + b_2 s_2^a}{s_1^a + s_2^a}, \quad m = m_1 + m_2.$$

Notons que si $\beta_1 = \beta_2$ alors $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

Cette propriété d'additivité est très intéressante en finance, car deux titres ayant les même valeurs des paramètres α peuvent être considérés ensemble et la loi qui résultera de cette association conservera les même valeurs du paramètre α mais les autres paramètres seront modifiés. Nous utiliserons cette propriété pour étudier des portefeuilles.

Propriété 2: Si X_1 et X_2 suivent une loi stable $S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$, $A \in \mathbb{R}^+$, $B \in \mathbb{R}^+$ et $C \in \mathbb{R}$ alors

$$AX_1 + BX_2 + C \stackrel{d}{=} S_\alpha(\beta; \sigma(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}; \mu(A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha} + C).$$

où $\stackrel{d}{=}$ signifie « a la même distribution que ».

Propriété 3: X est une variable aléatoire stable symétrique autour de μ si et seulement si la loi de X est $S_\alpha(0, \sigma, \mu)$. On note $S\alpha S$ une variable aléatoire symétrique avec $\mu = 0$.

Propriété 4: Soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ avec $\alpha \in]0; 2[$ alors

$$E|X|^p < \infty \text{ si } p \in]0; \alpha[$$

$$E|X|^p = \infty \text{ si } p \in [\alpha; \infty[$$

Propriété 5: Soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ avec $\alpha \in]1; 2]$ alors

$$E(X) = \mu.$$

Figure 18. Moments d'une variable aléatoire suivant une loi stable selon α

Soit $X \stackrel{d}{=} S_{\alpha}(\beta, \sigma, \mu)$

$0 < \alpha \leq 1$		$1 < \alpha < 2$		$\alpha = 2$	
$E(X) = \infty$	$\text{Var}(X) = \infty$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = \infty$	$E(X) = \mu$	$\text{Var}(X) = 2\sigma^2$

Rappelons que nous disons que la variance est infinie pour signaler que la variance est instable. Comme nous ne pouvons pas lui attribuer une valeur pour une période donnée (voir chapitre 3), nous préférons considérer que la variance n'existe pas.

La variance infinie ne représente pas un obstacle à la compréhension du phénomène dans lequel apparaissent des grands changements de prix, mais au contraire, elle permet d'expliquer ce phénomène. Supposons que X soit la somme de variables Lévy-stables X_i ; il est probable que la valeur x de X provienne en partie substantielle du plus grand des x_i . Les queues de distributions sont porteuses d'informations essentielles, il ne faut donc pas les négliger comme on le fait malheureusement en considérant la loi de Gauss. Nous allons voir dans ce mémoire que le problème des grands changements de prix semble pouvoir être résolu avec l'utilisation des lois stables à variance infinie.

5.4. Générateur de variables aléatoires stables

L'algorithme que nous allons présenter est l'algorithme de Chambers, Mallows et Stuck légèrement modifié (cf. Janicki et Weron [22] et Weron et Weron [54]). Cet algorithme permet de simuler des variables aléatoires X de loi stable $S_\alpha(\beta, 1, 0)$ avec $\alpha \in]0 ; 2]$ et $\beta \in [-1 ; 1]$. Nous avons choisi cet algorithme parmi d'autres (voir aussi Samorodnitsky et Taqqu [47]) pour deux raisons :

- Le temps de calcul est quasiment nul. Il faut moins d'une minute pour simuler un échantillon de taille 60 000.
- Les paramètres α et σ pour ce générateur sont très bien estimés par la méthode de McCulloch (voir chapitre suivant). Les paramètres μ et β sont correctement estimés par la méthode de McCulloch pour des petites valeurs de β , ce qui est souvent le cas pour des chroniques boursières.

Soit V une variable aléatoire uniforme sur $\left[-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right]$.

Soit W une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

$$\text{Posons } C = \frac{\arctan\left(b \tan\left(\frac{pa}{2}\right)\right)}{a} \text{ et } D = \left[1 + b^2 \tan^2\left(\frac{pa}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2a}}$$

$$\text{Alors } X = D \times \frac{\sin[a(V+C)]}{(\cos(V))^{\frac{1}{a}}} \times \left(\frac{\cos[V-a(V+C)]}{W}\right)^{\frac{1-a}{a}} \text{ suit une loi stable } S_\alpha(\beta, 1, 0), \alpha \neq 1.$$

$$\text{Et } X = \frac{2}{p} \left[\left(\frac{p}{2} + bV\right) \tan V - b \ln \left(\frac{W \cos V}{\frac{p}{2} + bV} \right) \right] \text{ suit une loi stable } S_1(\beta, 1, 0) (\alpha = 1).$$

De plus, si X suit une loi stable $S_\alpha(\beta, 1, 0)$

$$\text{alors } Y = \begin{cases} sX + m & a \neq 1 \\ sX + \frac{2}{p} bs \ln s + m & a = 1 \end{cases} \text{ suit une loi stable } S_\alpha(\beta, \sigma, \mu).$$

Nous pouvons ainsi simuler des variables Y de loi stable $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$.

Nous pouvons constater que le générateur de variables aléatoires stables choisi approche correctement la loi théorique. La distribution empirique a été construite à partir de N variables aléatoires simulées avec l'algorithme de Weron et Weron.

Figure 19. Distribution empirique d'une loi normale ($N = 60\ 000$)

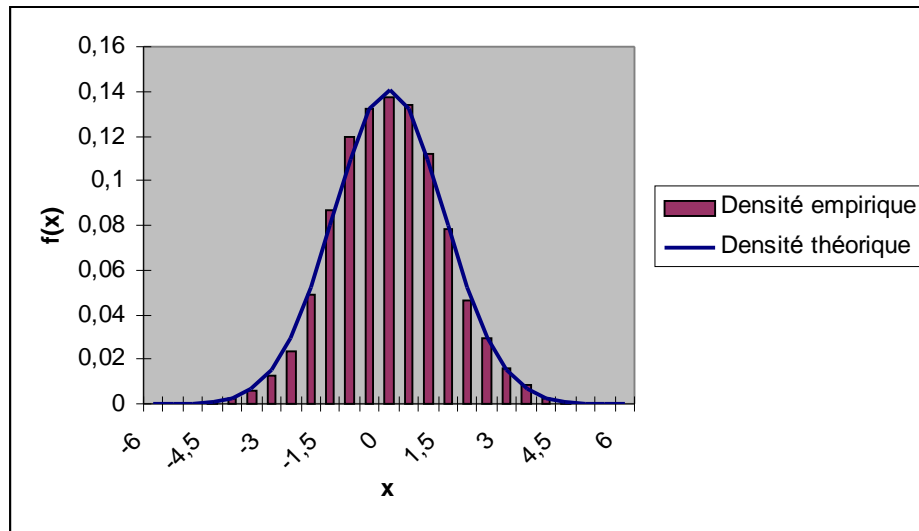
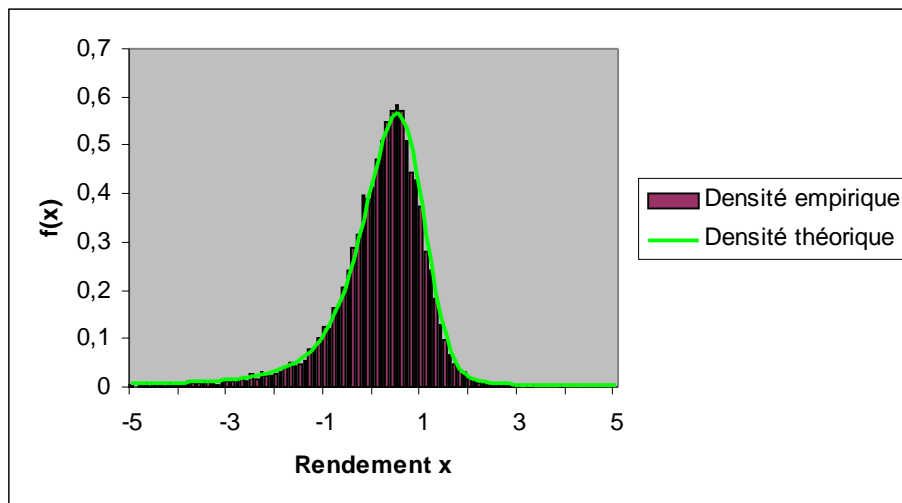


Figure 20. Distribution d'une loi stable de paramètre $a = 1,5$; $b = -0,8$; $s = 0,5$; $m = 0,02$ ($N=10\ 000$)



Chapitre 6. ESTIMATION DES PARAMETRES

6.1. Méthodes d'estimation des paramètres d'une loi stable

Un grand nombre de méthodes existent pour estimer les paramètres d'une loi stable. DuMouchel (1971) a développé un algorithme qui utilise le principe du maximum de vraisemblance. Press (1972), Paulson, Holcomb et Leitch (1975) estiment les quatre paramètres à l'aide de la transformée de Fourier des données. Même avec les ordinateurs actuels, ces deux méthodes exigent un temps de calcul très long et requièrent des valeurs initiales. Arad (1980), Koutrouvelis (1980, 1981), Feuerverger et McDunnough (1981) ont aussi travaillé à partir de la fonction caractéristique. McCulloch (1979) a développé un algorithme rapide qui estime les paramètres d'une loi stable symétrique ($\beta = 0$) à l'aide du maximum de vraisemblance. Zolotarev (1980) a estimé les paramètres α , β et σ par la méthode des moments après avoir fixé le paramètre de localisation (μ connu). Brockwell et Brown (1981) estimèrent α et σ avec une très grande précision dans le cas particulier où $\alpha < 1$, $\beta = 1$ et $\mu = 0$. Malgré la grande efficacité de la majeure partie des méthodes mentionnées ci-dessus, la méthode la plus employée ces vingt dernières années est la méthode de Fama et Roll (1968, 1971). Cependant cette méthode est restreinte au cas $\beta = 0$ et $\alpha \in [1 ; 2]$. Fieletz et Smith (1972) puis Leitch et Paulson (1975) ont montré que les rendements financiers ne sont pas symétriques, il est donc souhaitable d'étendre l'estimation à $\beta \in [-1 ; 1]$.

Notre objectif est de savoir si les chroniques financières sont mieux modélisées par une loi normale (qui sous-estime les grandes fluctuations) ou par une loi stable (qui sur-estime les variations importantes). Pour cela nous allons utiliser la méthode de McCulloch [30] (datant de 1986), qui a étendu la méthode de Fama et Roll aux cas $\beta \in [-1 ; 1]$ et $\alpha \in [0,6 ; 2]$. Cette méthode est efficace en ce qui concerne la précision des estimateurs par rapport au temps de calcul nécessaire à l'estimation. Elle est normalement utilisée pour fournir des valeurs initiales des paramètres pour démarrer des méthodes plus efficaces mais plus lourdes et plus longues. Dans notre étude, nous cherchons à savoir si les chroniques financières suivent une loi stable et si elles sont auto-similaires. Nous n'avons donc pas besoin de connaître les paramètres de manière très précise.

6.2. Estimation de a et b par la méthode de McCulloch

Les explications données sur l'estimation des paramètres α , β , σ et μ dans ce paragraphe proviennent de l'article de McCulloch [30].

Cette méthode utilise les quantiles d'un échantillon de variables aléatoires stables.

Posons $N_\alpha = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}$ et $N_\beta = \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.50}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}$ où \hat{x}_i est le $i^{\text{ème}}$ quantile de

l'échantillon.

Les valeurs de N_α et de N_β restent à peu près constante pour des paramètres α et β donnés et ne dépendent pas de σ et μ . Nous pouvons ainsi construire deux fonctions φ_1 et φ_2 telles que :

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = N_\alpha \text{ et } \varphi_2(\alpha, \beta) = N_\beta.$$

Ces fonctions ont été tabulées par DuMouchel (figures 21 et 22).

Figure 21. Table de DuMouchel pour N_α

$$v_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta).$$

α	β				
	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	2.439	2.439	2.439	2.439	2.439
1.90	2.512	2.512	2.513	2.513	2.515
1.80	2.608	2.609	2.610	2.613	2.617
1.70	2.737	2.738	2.739	2.742	2.746
1.60	2.912	2.909	2.904	2.900	2.902
1.50	3.148	3.136	3.112	3.092	3.089
1.40	3.464	3.436	3.378	3.331	3.316
1.30	3.882	3.834	3.720	3.626	3.600
1.20	4.447	4.365	4.171	4.005	3.963
1.10	5.217	5.084	4.778	4.512	4.451
1.00	6.314	6.098	5.624	5.220	5.126
0.90	7.910	7.590	6.861	6.260	6.124
0.80	10.448	9.934	8.779	7.900	7.687
0.70	14.838	13.954	12.042	10.722	10.370
0.60	23.483	21.768	18.332	16.216	15.584
0.50	44.281	40.137	33.002	29.140	27.782

Note that $\phi_1(\alpha, -\beta) = \phi_1(\alpha, \beta)$.

Figure 22. Table de DuMouchel pour N_b

$$v_\beta = \phi_2(\alpha, \beta).$$

α	β				
	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	0.018	0.036	0.053	0.071
1.80	0.0	0.039	0.077	0.113	0.148
1.70	0.0	0.063	0.123	0.178	0.228
1.60	0.0	0.089	0.174	0.248	0.309
1.50	0.0	0.118	0.228	0.320	0.390
1.40	0.0	0.148	0.285	0.394	0.469
1.30	0.0	0.177	0.342	0.470	0.546
1.20	0.0	0.206	0.399	0.547	0.621
1.10	0.0	0.236	0.456	0.624	0.693
1.00	0.0	0.268	0.513	0.699	0.762
0.90	0.0	0.303	0.573	0.770	0.825
0.80	0.0	0.341	0.634	0.834	0.881
0.70	0.0	0.387	0.699	0.890	0.927
0.60	0.0	0.441	0.768	0.936	0.962
0.50	0.0	0.510	0.838	0.970	0.985

Note that $\phi_2(\alpha, -\beta) = -\phi_2(\alpha, \beta)$.

Afin d'obtenir aisément des estimateurs des paramètres α et β , nous inversons ces tables pour connaître α et β en fonction de N_α et N_β ($\alpha = \psi_1(N_\alpha, N_\beta)$ et $\beta = \psi_2(N_\alpha, N_\beta)$).

Figure 23. Table de DuMouchel pour estimer α

$$\alpha = \psi_1(v_\alpha, v_\beta)$$

v_α	v_β						
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
2.5	1.916	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924
2.6	1.808	1.813	1.829	1.829	1.829	1.829	1.829
2.7	1.729	1.730	1.737	1.745	1.745	1.745	1.745
2.8	1.664	1.663	1.663	1.668	1.676	1.676	1.676
3.0	1.563	1.560	1.553	1.548	1.547	1.547	1.547
3.2	1.484	1.480	1.471	1.460	1.448	1.438	1.438
3.5	1.391	1.386	1.378	1.364	1.337	1.318	1.318
4.0	1.279	1.273	1.266	1.250	1.210	1.184	1.150
5.0	1.128	1.121	1.114	1.101	1.067	1.027	0.973
6.0	1.029	1.021	1.014	1.004	0.974	0.935	0.874
8.0	0.896	0.892	0.887	0.883	0.855	0.823	0.769
10.0	0.818	0.812	0.806	0.801	0.780	0.756	0.691
15.0	0.698	0.695	0.692	0.689	0.676	0.656	0.595
25.0	0.593	0.590	0.588	0.586	0.579	0.563	0.513

Note that $\psi_1(v_\alpha, -v_\beta) = \psi_1(v_\alpha, v_\beta)$.

Figure 24. Table de DuMouchel pour estimer β

$\beta = \psi_2(v_\alpha, v_\beta)$							
	v_β						
v_α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	0.0	2.160	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.5	0.0	1.592	3.390	1.0	1.0	1.0	1.0
2.6	0.0	0.759	1.800	1.0	1.0	1.0	1.0
2.7	0.0	0.482	1.048	1.694	1.0	1.0	1.0
2.8	0.0	0.360	0.760	1.232	2.229	1.0	1.0
3.0	0.0	0.253	0.518	0.823	1.575	1.0	1.0
3.2	0.0	0.203	0.410	0.632	1.244	1.906	1.0
3.5	0.0	0.165	0.332	0.499	0.943	1.560	1.0
4.0	0.0	0.136	0.271	0.404	0.689	1.230	2.195
5.0	0.0	0.109	0.216	0.323	0.539	0.827	1.917
6.0	0.0	0.096	0.190	0.284	0.472	0.693	1.759
8.0	0.0	0.082	0.163	0.243	0.412	0.601	1.596
10.0	0.0	0.074	0.147	0.220	0.377	0.546	1.482
15.0	0.0	0.064	0.128	0.191	0.330	0.478	1.362
25.0	0.0	0.056	0.112	0.167	0.285	0.428	1.274

Note that $\psi_2(v_\alpha, -v_\beta) = -\psi_2(v_\alpha, v_\beta)$. Entries in this table greater than 1.0 are required in order to permit accurate bivariate linear interpolation as β approaches 1.0 from below. As a result, sampling error in finite samples may yield an interpolated estimate of β greater than 1.0. In this case, the estimate should be truncated back to 1.0.

Nous utilisons ces deux dernières tables pour estimer α et β .

Considérons, par exemple, une série de 5000 rendements logarithmiques journaliers. Les quantiles 5%, 50%, 95% valent respectivement -0.05413 , 0.00533 , 0.05309 . De plus, nous avons $\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25} = 0.03354$.

$$\text{Alors } N_\alpha = \frac{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}}{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}} = 3.197 \quad \text{et} \quad N_\beta = \frac{\hat{x}_{0.95} + \hat{x}_{0.05} - 2\hat{x}_{0.50}}{\hat{x}_{0.95} - \hat{x}_{0.05}} = -0.1091.$$

Une interpolation linéaire de ces valeurs sur les tables 23 et 24 donne :

$$\hat{a} = 1.48,$$

$$\hat{b} = -0.22.$$

6.3. Estimation de s et m par la méthode de McCulloch

La table de DuMouchel de la figure 25 montre le comportement de $N_\sigma = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{s}$ comme une fonction de α et β .

Figure 25. Table de DuMouchel pour N_s

$$v_c = \phi_3(\alpha, \beta).$$

α	β				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	1.908	1.908	1.908	1.908	1.908
1.90	1.914	1.915	1.916	1.918	1.921
1.80	1.921	1.922	1.927	1.936	1.947
1.70	1.927	1.930	1.943	1.961	1.987
1.60	1.933	1.940	1.962	1.997	2.043
1.50	1.939	1.952	1.988	2.045	2.116
1.40	1.946	1.967	2.022	2.106	2.211
1.30	1.955	1.984	2.067	2.188	2.333
1.20	1.965	2.007	2.125	2.294	2.491
1.10	1.980	2.040	2.205	2.435	2.696
1.00	2.000	2.085	2.311	2.624	2.973
0.90	2.040	2.149	2.461	2.886	3.356
0.80	2.098	2.244	2.676	3.265	3.912
0.70	2.189	2.392	3.004	3.844	4.775
0.60	2.337	2.635	3.542	4.808	6.247
0.50	2.588	3.073	4.534	6.636	9.144

Note that $\phi_3(\alpha, -\beta) = \phi_3(\alpha, \beta)$.

Pour connaître la valeur estimée du paramètre d'échelle σ , nous calculons sur l'échantillon étudié $\hat{x}_{0.25}$ et $\hat{x}_{0.75}$; nous en déduisons que $\hat{s} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{N_s}$.

Dans notre exemple, $\hat{a} = 1.48$ et $\hat{b} = -0.22$. D'après la table 25, N_σ est égal à 1.953. Ainsi la valeur estimée de σ vaut 0.01717.

$$\text{Posons } G = \begin{cases} m + bS \tan\left(\frac{pa}{2}\right) & a \neq 1 \\ m & a = 1 \end{cases}.$$

Zolotarev a montré que la distribution de la variable aléatoire G ne rencontre pas de discontinuité quand α franchit la valeur 1 lorsque μ , σ et β restent constants.

La table 26 montre le comportement de $N_G = \frac{G - \hat{x}_{0.50}}{S}$ comme une fonction de α et β .

Figure 26. Table de DuMouchel pour N_G

$v_\zeta = \phi_5(\alpha, \beta).$

α	β				
	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	-0.017	-0.032	-0.049	-0.064
1.80	0.0	-0.030	-0.061	-0.092	-0.123
1.70	0.0	-0.043	-0.088	-0.132	-0.179
1.60	0.0	-0.056	-0.111	-0.170	-0.232
1.50	0.0	-0.066	-0.134	-0.206	-0.283
1.40	0.0	-0.075	-0.154	-0.241	-0.335
1.30	0.0	-0.084	-0.173	-0.276	-0.390
1.20	0.0	-0.090	-0.192	-0.310	-0.447
1.10	0.0	-0.095	-0.208	-0.346	-0.508
1.00	0.0	-0.098	-0.223	-0.383	-0.576
0.90	0.0	-0.099	-0.237	-0.424	-0.652
0.80	0.0	-0.096	-0.250	-0.469	-0.742
0.70	0.0	-0.089	-0.262	-0.520	-0.853
0.60	0.0	-0.078	-0.272	-0.581	-0.997
0.50	0.0	-0.061	-0.279	-0.659	-1.198

Note that $\phi_5(\alpha, -\beta) = -\phi_5(\alpha, \beta).$

Nous avons la relation $\hat{G} = \hat{x}_{0.50} + \hat{S}.N_G$

Le paramètre μ peut alors être estimé par $\hat{m} = \hat{G} - \hat{b}\hat{S} \tan\left(\frac{pa}{2}\right)$ si $\alpha \neq 1$ et $\hat{m} = \hat{G}$ si $\alpha = 1$.

Dans notre exemple, comme $\hat{a} = 1.48$ et $\hat{b} = -0.22$, nous trouvons $N_G = 0.060$. Ainsi nous obtenons une valeur de \hat{G} égale à 0.00636. D'où $\hat{m} = 0.00234$.

Notre échantillon suit donc une loi stable de paramètre $\hat{a} = 1.48$, $\hat{b} = -0.22$, $\hat{S} = 0.01717$ et $\hat{m} = 0.00234$.

6.4. Application de la méthode de McCulloch à des variables aléatoires issues d'une loi stable connue

Nous mesurons dans ce paragraphe la précision des estimateurs obtenus. Pour générer des variables aléatoires issues d'une loi stable $S_{\alpha}(\beta, \sigma, \mu)$, nous utilisons l'algorithme de Chambers, Mallows et Stuck. Nous simulons à chaque fois 5000 variables aléatoires alpha-stables avec des paramètres différents et nous appliquons le programme d'estimation à cet échantillon. Nous répétons cette étape 100 fois et nous calculons la moyenne, le maximum, le minimum et l'écart type des paramètres estimés. Les résultats sont résumés dans le tableau 27.

Figure 27. Statistiques sur les estimateurs des paramètres de la loi stable

	α	β	σ	μ
Valeur réelle	1 5	0	1	0
Moyenne	1,52699574	0,02873331	0,99394457	0,02899409
Ecart type	0,03014033	0,0524843	0,0246651	0,0526644
Minimum	1,44720681	-0,12620576	0,88715345	-0,11095407
Maximum	1,63559209	0,17037969	1,08406845	0,17619766
Valeur réelle	1 7	0 3	1	0
Moyenne	1,74193085	0,53027765	0,99811883	0,11372804
Ecart type	0,0530538	0,16505237	0,01950275	0,04780567
Minimum	1,61881911	0,08068787	0,95968972	-0,04864171
Maximum	1,9591536	1	1,09936016	0,23344641
Valeur réelle	1 8	0 5	2	0
Moyenne	1,85698619	0,93493005	2,0018376	0,20991247
Ecart type	0,04387585	0,12711124	0,03971143	0,11341769
Minimum	1,72403935	0,39877409	1,91440192	-0,07370782
Maximum	1,97586818	1	2,1041046	0,4971201
Valeur réelle	1 7	0 1	0 9	0
Moyenne	1,73747633	0,22024103	0,89558045	0,05601819
Ecart type	0,03288107	0,09672567	0,01259453	0,03179911
Minimum	1,65976975	-0,03207197	0,86320041	-0,01258201
Maximum	1,83528014	0,46789649	0,92725753	0,13125484
Valeur réelle	0 9	0 2	0 5	-0 9
Moyenne	0,9029717	0,20054672	0,51745276	-0,93422548
Ecart type	0,01633827	0,03741226	0,01080323	0,19634178
Minimum	0,85881408	0,06668427	0,48017455	-2,008821
Maximum	0,9606372	0,32703391	0,54503759	-0,55744859
Valeur réelle	2	0	1	0
Moyenne	1,99835554	0,97551284	0,99169682	-0,00297514
Ecart type	0,00624495	0,12263682	0,00946124	0,02485891
Minimum	1,9664402	0,21051472	0,96979925	-0,05240074
Maximum	2	1	1,01886294	0,0524951

Lorsque α est égal à 2, β est arbitrairement égal à $\text{sign}(\beta)$ où $\text{sign}(b) = \begin{cases} 1 & \text{quand } b > 0 \\ 0 & \text{quand } b = 0 \\ -1 & \text{quand } b < 0 \end{cases}$.

Ce choix s'explique par le fait que lorsque $\alpha = 2$, la valeur de β n'a aucune influence sur la distribution. Nous trouvons donc pour la loi normale un paramètre \hat{b} proche de 1.

Pour des données α -stables simulées, les paramètres α et σ sont relativement bien estimés et l'écart type est faible. Nous remarquons que le paramètre d'asymétrie β et le paramètre de localisation μ sont d'autant moins bien estimés que la valeur de β est éloignée de 0.

6.5. Estimation des paramètres a , b , s et m de quelques titres.

Cristina Butucea dans BUTUCEA [8] a mis au point un outil informatique pour estimer correctement les quatre paramètres qui caractérisent une loi de Lévy stable. Elle a, de plus, montré que sous l'hypothèse que les données sont indépendantes, il existe des différences entre les valeurs réelles et les valeurs théoriques. Elle a mis en évidence que les séries théoriques (suivant une loi de Lévy stable) surestiment la fréquence des grandes valeurs par rapport à la réalité. Ce modèle, qui exagère les grandes fluctuations, ne permet donc pas de modéliser correctement les séries financières. Il est possible que ces discordances entre la théorie et la réalité soient dues au fait que les termes des séries chronologiques ne sont pas indépendants.

D'une part, la loi normale sous-estime le nombre de grandes fluctuations, d'autre part les lois stables non gaussiennes surestiment les grandes variations. En estimant le paramètre α sur les variations logarithmiques de certaines chroniques financières, nous allons voir si les lois des séries boursières sont mieux modélisées par des lois stables non gaussiennes ou par la loi normale.

Nous avons constaté que les paramètres β et μ ne sont pas correctement estimés par la méthode de McCulloch, en particulier lorsque β est éloignée de 0. Il faut donc considérer leurs estimations avec prudence. Néanmoins, nous avons remarqué que les variations

logarithmique des chroniques financières sont à peu près symétriques, ce qui correspond à une valeur de β proche de 0.

Le tableau suivant contient les valeurs estimées des paramètres de la loi stable suivie par la série $[\ln(Y(t+1))-\ln(Y(t))]\times 100$ où $Y(t)$ représente le cours à la date t et $Y(t+1)$ représente le cours à la date $t+1$ (jours).

Figure 28. Paramètres estimés pour quelques actions, indices et OPCVM

	a	b	s	m
Action				
Alcatel	1,404	0,095	1,029	0,132
AXA	1,441	0,120	0,913	0,132
France Télécom	1,719	0,155	1,955	0,143
Renault	1,616	0,104	1,481	0,106
Microsoft	1,715	0,268	1,389	0,179
Indice				
CAC40	1,633	-0,003	0,709	-0,001
SBF250	1,629	-0,044	0,577	-0,003
Dow Jones Industrials	1,569	0,048	0,499	0,019
Nasdaq Composite	1,392	-0,177	0,458	-0,013
Nikkei 300	1,546	0,047	0,649	0,026
OPCVM Obligataires				
Groupama Oblig. France	1,503	-0,043	0,111	0,0311
GAN rendement	1,435	0,066	0,092	-0,021
OPCVM Actions				
Soleil Investissement (Intern.)	1,430	0,195	0,439	0,034
Améri-GAN (USA)	1,474	0,078	0,660	0,023
Nippon Gan (Asie)	1,511	-0,068	0,747	-0,036
France Gan (France)	1,533	0,225	0,485	0,002
Groupama Croissance (France)	1,526	0,132	0,5496	-0,017

Dans tous les cas la valeur du paramètre α est inférieure à 2. Il semble donc préférable d'approcher les lois des séries financières par des lois stables non gaussiennes dans l'hypothèse d'une distribution stable. Nous pouvons remarquer que quel que soit le titre, la valeur de α varie entre 1,39 et 1,72. Le paramètre σ représente une volatilité. Il est supérieur à 0,9 pour les actions avec un maximum égale à 1,96 pour l'action France Télécom. Il est petit pour les OPCVM obligataires ($\sigma < 0,12$). Il varie entre 0,4 et 0,8 pour les OPCVM actions et les indices boursiers.

En général, les titres boursiers ont une valeur de α comprise entre 1 et 2, cependant il arrive de temps en temps de trouver une valeur de α inférieure à 1. Dans ce dernier cas, plus on diversifie son portefeuille, plus le risque total augmente. Ceci vient du fait qu'un portefeuille de risques dont l'exposant de stabilité est inférieur à 1 se comporte comme le plus dangereux des risques : chaque nouveau risque ajouté au portefeuille, au lieu de limiter le risque global par diversification, vient au contraire ajouter une nouvelle possibilité de catastrophe.

Nous remarquons que la courbe de la densité de la loi stable, avec les paramètres estimés situés dans le tableau précédent, approche bien la distribution empirique de certains titres financiers (pour un pas approprié). La courbe associée à loi normale a été dessinée à partir de la densité de la loi gaussienne en prenant la moyenne empirique et la variance empirique des données. La courbe de la loi stable a été réalisée de manière empirique à partir de l'algorithme de simulation de variables aléatoire stable de Weron et Weron (présenté dans le paragraphe 5.4.) en considérant les valeurs des paramètres inscrites dans le tableau précédent. La variable x en abscisse désigne le rendement espéré (en %) et la variable $f(x)$ en ordonnée représente la probabilité de réaliser le rendement x . Dans certains cas, nous avons ajouté le graphique des queues de distributions négatives du titre considéré.

Figure 29. Distribution de l'action France Télécom

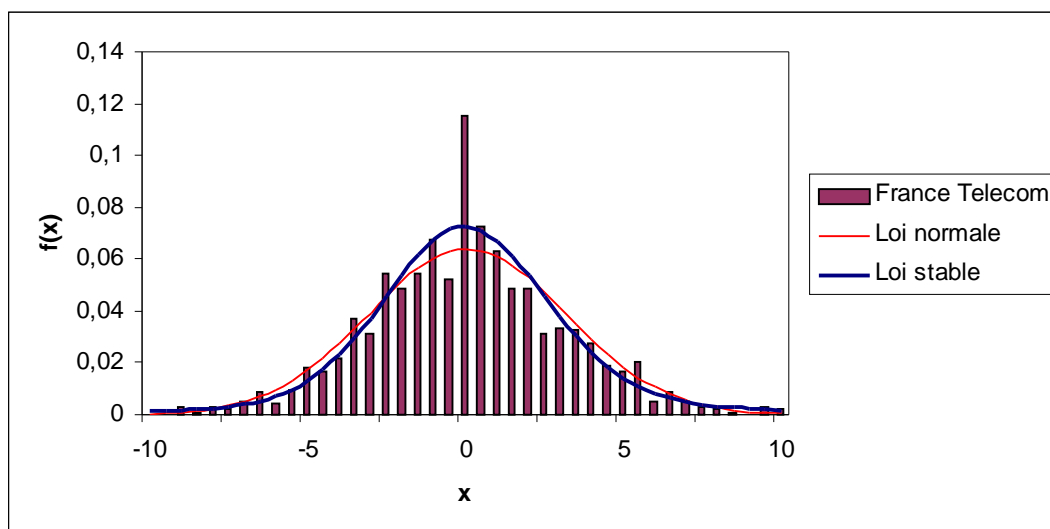


Figure 30. Distribution de l'indice Dow Jones Industrials

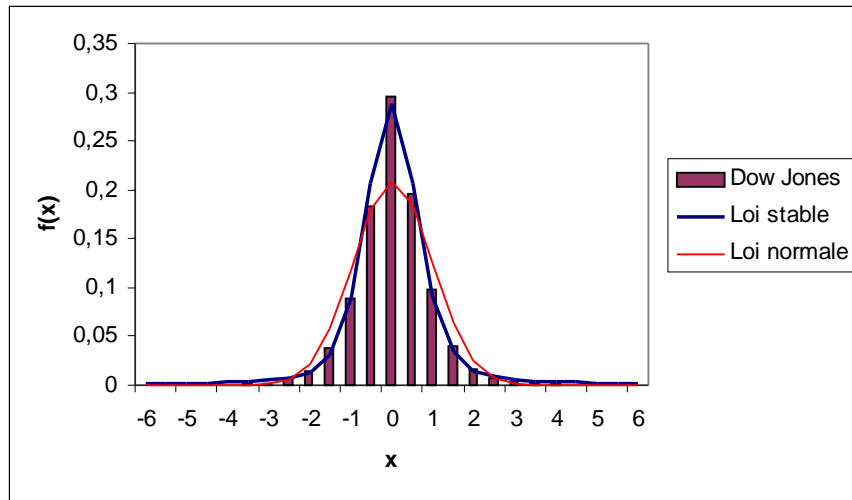


Figure 31. Queue de distribution des valeurs négatives du rendement

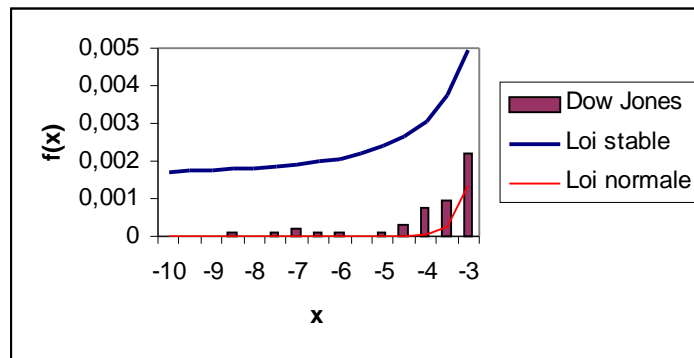


Figure 32. Distribution de l'action Renault

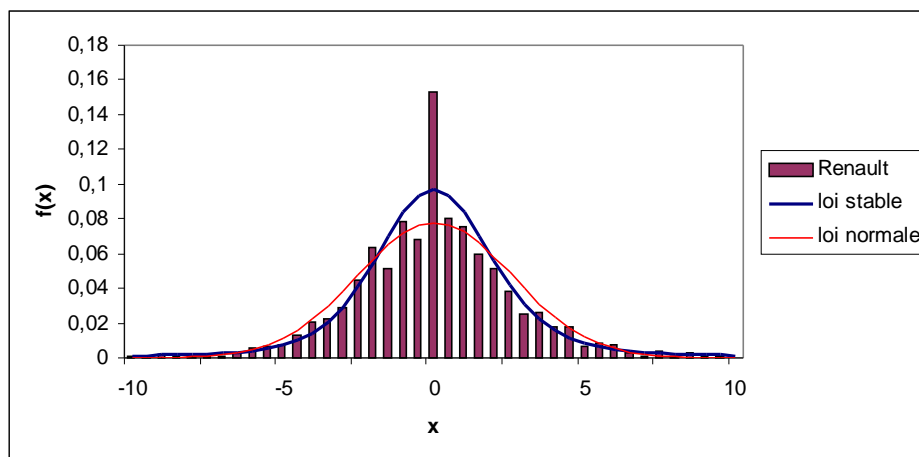


Figure 33. Distribution de l'OPCVM Actions Nippon Gan

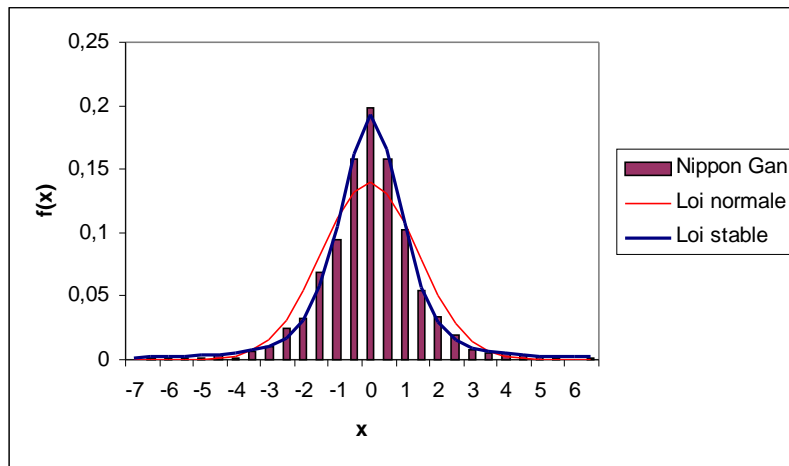


Figure 34. Queue de distribution des valeurs négatives du rendement

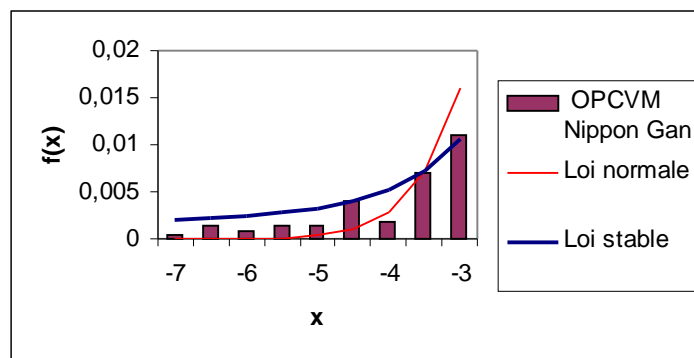


Figure 35. Distribution de l'indice Nasdaq Composite

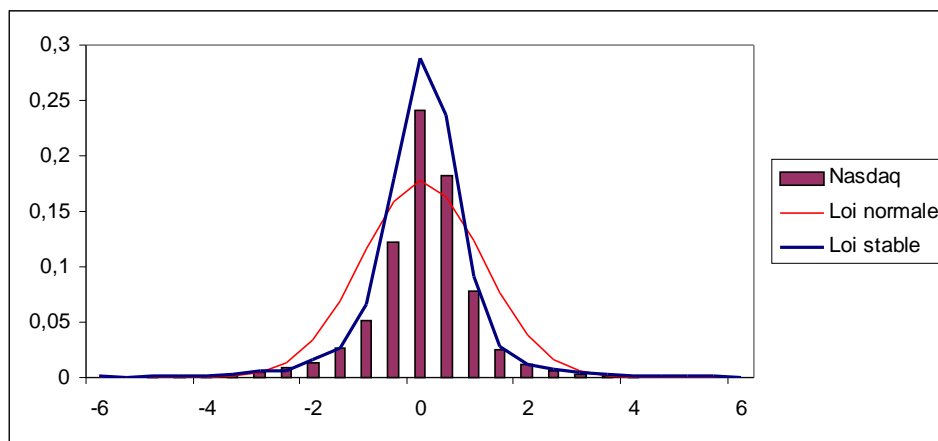


Figure 36. Distribution de l'OPCVM Obligations GAN Rendement

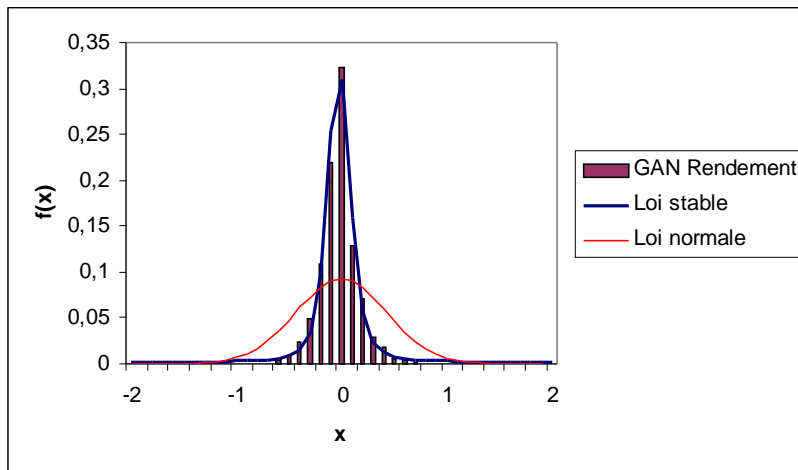


Figure 37. Distribution de l'OPCVM Obligations Groupama Obligations France

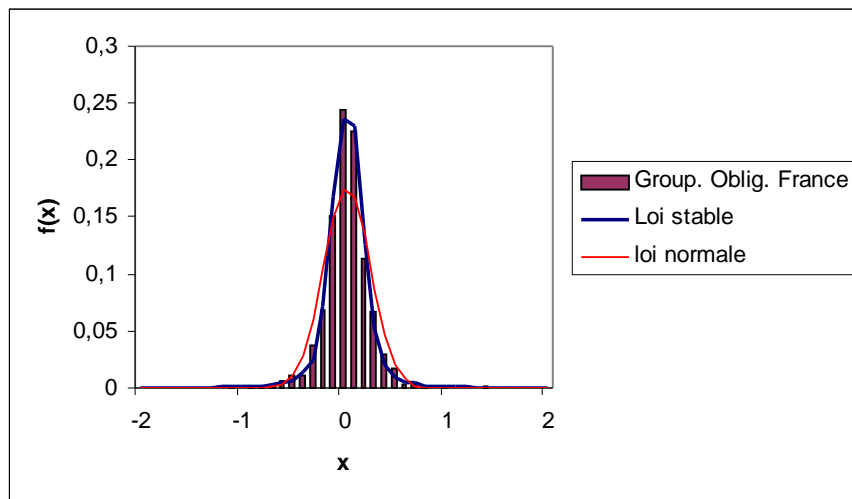


Figure 38. Queue de distribution des valeurs négatives du rendement

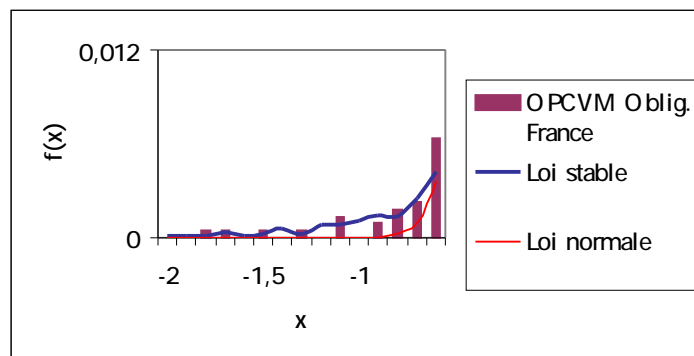
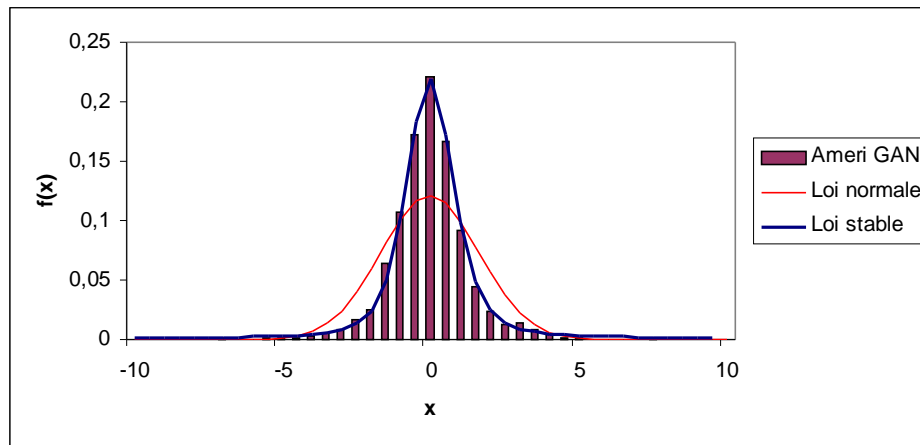


Figure 39. Distribution de l'OPCVM actions Améri GAN

La loi normale représente d'autant moins bien les séries financières que la valeur de la statistique de Kurtosis, calculée dans la partie I, est grande. Nous voyons que pour certains titres, indices ou OPCVM, la loi normale représente mal la loi des données et que la loi stable non gaussienne apporte une nette amélioration. Dans ce cas, il semble primordial de considérer que la chronique suit une loi stable. De plus, dans la majorité des autres exemples, les distributions empiriques des rentabilités sont plus conformes aux distributions stables qu'à la distribution normale, cependant l'amélioration apportée justifie-t-elle l'emploi d'une loi stable non gaussienne qui sera plus coûteuse dans la mesure il faudra réécrire tous les modèles qui utilisent la loi normale ?

Notons aussi que la loi stable a tendance à avoir des queues de distribution plus épaisses (voir le cas de l'indice Dow Jones, figure 31) que la loi empirique des rendements. Ce défaut a été noté plusieurs fois et est une des critiques majeures des lois stables de Pareto. Cependant, Mittnik et Rachev [40] et [41] et d'autres chercheurs ont noté que la surestimation des queues par les lois stables étaient due en général à l'emploi d'un estimateur de α qui ne convenait pas dans le cas où les données appartiennent au domaine d'attraction des lois stables.

Nous remarquons que lorsque nous utilisons loi normale pour modéliser les rendements financiers, nous sous-estimons le risque d'avoir des pertes très importantes. Nous sous-estimons aussi fortement la possibilité d'avoir un rendement situé autour du rendement moyen qui s'avèrent être dans la majorité des cas proche de zéro. Nous négligeons donc dans un marché baissier les possibilités de faire des mauvais résultats.

Chapitre 7. TESTS D'AUTO-SIMILARITE

Il n'existe pas en finance de fractales auto-similaires ; cependant par abus de langage, nous disons que les séries financières sont auto-similaires. Ce terme est souvent employé dans la littérature à la place du mot auto-affinité.

Nous disons que les lois stables sont des distributions fractales car les paramètres α et β ne dépendent pas du paramètre d'échelle σ . Cette propriété rend les distributions stables invariables par changements d'échelle. Autrement dit, ces lois ont une structure auto-similaire. Cette particularité des lois stables est une raison supplémentaire qui nous incite à utiliser ces lois parmi l'éventail de lois qui se trouve à notre disposition.

Dans ce chapitre, nous allons vérifier que le paramètre σ de la loi stable suit une loi d'échelle et que le paramètre α reste constant quelque soit le pas de temps considéré. Rappelons qu'un processus $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ à valeurs réelles est *auto-similaire* d'exposant $H > 0$ si et seulement si pour tout $a > 0$, on a :

$$(X(at))_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{d}{=} (a^H X(t))_{t \in \mathbb{R}}.$$

Ceci implique, d'après la propriété 2 de la section 4.3., que si $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta; \sigma; \mu)$ et est auto-similaire d'exposant H alors $(X(at))_{t \in \mathbb{R}}$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta; a^H \sigma; a^H \mu)$.

Nous allons effectuer deux tests d'auto-similarité :

- * un test sur la série complète, en augmentant le pas de temps de 1 à N jours. Dans ce cas, la taille du sous-échantillon diminue lorsque le pas de temps augmente.
- * Un test avec des sous-échantillons de taille constante. Le nombre de séries construites décroît lorsque le pas de temps n augmente. Nous estimons les paramètres sur chaque série obtenue à l'aide d'une procédure de fenêtre glissante. Cette approche demande plus de temps.

Avec le premier test, chaque série couvre à peu près la même période mais leur taille diminue avec le pas de temps. Les séries construites dans le second test ont la même taille mais elles couvrent des périodes qui augmentent avec le pas de temps n .

7.1. Tests d'auto-similarité sur des sous-échantillons de tailles variables

Nous adoptons les notations suivantes :

- * $(Y(t))_{t \in [1; T]}$ est l'échantillon initial,
- * T est la taille de l'échantillon initial,
- * $(R_{n,t,i})_{n \in [1; N]}$ est une série construite à partir de $(Y(t))_{t \in [1; T]}$,
- * n représente le pas de temps ($1 \leq n \leq N$),
- * t est la première observation de la série construite ($1 \leq t \leq n$),
- * i est l'indice des observations ($1 \leq i \leq \text{Ent}[(T-t)/n]$) où $\text{Ent}[\]$ désigne la partie entière.

Lorsque nous effectuons ce test sur des séries financières, nous posons :

$$R_{n,t,i} = (\ln[Y(i.n+t)] - \ln[Y((i-1).n + t)]) * 100$$

où $Y(j)$ est le prix d'un actif donné à la date j .

$(R_{n,t,i})_n$ est une série de pas de temps n et qui commence à la date t . Cette série représente le taux de rentabilité de l'actif de prix Y sur la période $\left[t; t + n \cdot \text{Ent} \left[\frac{T-t}{n} \right] \right] \approx [t; T]$.

Pour chaque valeur du pas n , il y a n séries $(R_{n,t,i})_n$. La taille des séries diminue lorsque le paramètre n augmente. Étant donnée la taille T de l'échantillon initial, nous choisissons une valeur de pas n raisonnable afin que la taille des séries pour cette valeur ne soit pas trop petite.

Ce test est rapide en temps de calcul, cependant il introduit une erreur d'échantillonnage venant du fait que la taille des séries diminue avec le pas de temps.

7.2. Tests d'auto-similarité sur des sous-échantillons de taille constante

Pour qu'il n'y ait pas d'erreur d'échantillonnage nous travaillons avec des séries $(R_{n,t,i})_{1 \leq n \leq N}$ de taille constante.

Nous adoptons les notations suivantes :

- * $(Y(t))_{t \in [1; T]}$ est l'échantillon initial,
- * T est la taille de l'échantillon initial,
- * $(R_{n,t,i})_{n \in [1; N]}$ est une série construite à partir de $(Y(t))_{t \in [1; T]}$,
- * $s = s_{n,t}$ est la taille des sous-échantillons $(R_{n,t,i})_n$
- * n représente le pas de temps ($1 \leq n \leq N$),
- * t est la première observation de la série construite ($1 \leq t \leq T-s.n$),
- * i est l'indice des observations ($1 \leq i \leq s$).

Nous appliquons ce test sur des séries financières avec :

$$R_{n,t,i} = (\ln[Y(i.n + t)] - \ln[Y((i-1).n + t)]) * 100$$

où $Y(j)$ est le prix d'un actif donné à la date j .

$(R_{n,t,i})_n$ est une série de pas de temps n qui commence à la date t et de taille constante s . Cette série représente le taux de rentabilité de l'actif de prix Y sur la période $[t ; t + sn]$.

Ce test consiste à estimer les paramètres de séries obtenues à l'aide d'une procédure de fenêtre glissante de pas égal à 1. Le nombre de séries construites décroît lorsque le pas de temps n augmente. Nous choisissons une valeur maximale N de n raisonnable afin que le nombre de séries construites soit suffisamment grand pour que les statistiques soient significatives. Nous choisissons de plus une taille s des sous-échantillons $(R_{n,t,i})_n$ suffisamment grande pour que les estimations soient précises.

Ce test nécessite un temps de calcul très supérieur au test précédant. Il faut environ 2 heures et demi pour estimer les paramètres sur une chronique financière avec $T = 5000$, $n = 10$, $s = 300$ (contre 30 secondes pour le premier test avec le même ordinateur (un Pentium III, 500 MHz)).

7.3. Exemple de construction des séries pour les tests

Il n'est pas évident de comprendre comment sont générées les séries $(R_{n,t,i})_n$ pour chacun des tests explicités précédemment. Nous allons donc prendre un exemple. Soit $(Y(t))_{t \in [1; 40]}$ une série de 40 termes. Posons $N = 2$, la valeur maximale du pas de temps. La valeur du pas de temps n peut donc être égale à 1 ou à 2. Nous choisissons $s = 5$ (taille des sous-échantillons) pour le deuxième test.

Figure 40. Construction des séries $(R_{n,t,i})_n$

Test 1 : la taille des sous-échantillons est variable			Test 2 : La taille des sous-échantillons est constante (s = 7)										
n=1	n=2		n=1				n=2						
Y(1)	Y(1)		Y(1)				Y(1)						
Y(2)		Y(2)	Y(2)	Y(2)				Y(2)					
Y(3)	Y(3)		Y(3)	Y(3)	..		Y(3)		Y(3)				
Y(4)		Y(4)	Y(4)	Y(4)	..		Y(4)			..			
Y(5)	Y(5)		Y(5)	Y(5)	..		Y(5)		Y(5)				
..		..		Y(6)	..		Y(6)			..			
..		Y(7)		Y(7)				
..		..					Y(8)			..			
..	..						Y(9)		Y(9)				
..		..					Y(10)			..		Y(32)	
..	..							Y(11)					Y(34)
..		..											Y(36)
..	..				Y(36)								
..		..			Y(37)								
..	..				Y(38)								Y(38)
Y(39)	Y(39)				Y(39)								
Y(40)		Y(40)			Y(40)								Y(40)

Pour le premier test avec $n = 1$, la série $(R_{n,t,i})_n$ est la série $(Y(t))_t$. Elle est de longueur 40.

Pour le premier test avec $n = 2$, il existe deux séries $(R_{n,t,i})_n$: la série des termes pairs de la série $(Y(t))_t$ et la série des termes impairs de $(Y(t))_t$.

Pour le deuxième test, avec $n = 1$, nous construisons 36 séries $(R_{n,t,i})_{n=1}$. La première série contient les cinq premiers termes de la série $(Y(t))_t$. La seconde série contient les termes 2 à 6 de la série $(Y(t))_t$ initiale. La troisième série contient les termes 3 à 7 de la série initiale ...

Pour le deuxième test, avec $n = 2$, nous construisons 32 séries. La première série contient les cinq premiers termes impairs de la série $(Y(t))_t$. La seconde série contient les cinq premiers termes pairs de la série $(Y(t))_t$ initiale ...

7.4. Tests d'auto-similarité sur des chroniques financières

Nous calculons les paramètres α et σ de la loi suivie par $(R_{n,t,i})_n$, série construite à partir d'un échantillon $(Y(t))$ de taille T de variables aléatoires stables de paramètres fixés α , β , σ et μ . Nous posons $R_{n,t,i} = (\ln[Y(i.n) + t] - \ln[Y((i-1).n + t)]) * 100$ où $Y(t)$ est le cours d'une action donnée à la date t et où $Y(t + N)$ est le cours de cette action N jours après la date t .

Si $(R_{1,t,i})_{n=1}$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta_1 ; \sigma_1 ; \mu_1)$; d'après la propriété 1 donnée dans la section 4.3., nous nous attendons à trouver que $(R_{n,t,i})_n$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta'' ; n^{1/\alpha} \sigma_1 ; \mu'')$. Donc le paramètre α ne varie pas et le paramètre σ évolue. Nous remarquons que la série $(R_{n,t,i})_n$ est auto-similaire d'exposant $H=1/\alpha$.

Le test d'auto-similarité sur des sous-échantillons de taille constante s'effectue sur des séries $(R_{n,t,i})_n$ qui se chevauchent. Ainsi pour une valeur de n fixée, les termes de cette série ne sont pas indépendants. Nous pouvons cependant appliquer la propriété 1 pour ce test après avoir réalisé les commentaires suivants. Si nous travaillons sur une période suffisamment grande, il n'est pas trop irréaliste de supposer que les sous-échantillons sont indépendants. Il faut parallèlement faire attention de ne pas étudier une période trop longue car le périmètre des entreprises change considérablement avec le temps à cause des fusions, acquisitions, opportunités économiques, restructurations, etc. Ceci explique qu'une action aujourd'hui n'a certainement pas le même comportement que l'action du même nom il y a 10 ou 20 ans.

Nous utilisons deux tests car chacun de ces tests possède un inconvénient statistique (erreur d'échantillonnage, dépendance des séries). Si ces deux tests, effectués séparément sur un même échantillon initial, fournissent les mêmes résultats alors nous pouvons espérer que les conclusions sont correctes.

Nous effectuons chacun des tests d'auto-similarité avec un pas de temps maximal égal à 10. Nous prenons des sous-échantillons de taille 300 pour faire le deuxième test d'auto-similarité ($s = 300$).

7.4.1. OPCVM France GAN

Nous réalisons d'abord le test d'auto-similarité sur des sous échantillons de tailles variables (voir section 6.1.).

Figure 41. Test d'auto-similarité sur l'OPCVM France GAN

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille de l'échantillon	2313	1156	770	578	462	385	330	288	256	230
\hat{a} (Ecart type)	1,505 (0)	1,509 (0,017)	1,706 (0,051)	1,678 (0,044)	1,801 (0,145)	1,802 (0,106)	1,805 (0,095)	1,811 (0,140)	1,730 (0,192)	1,809 (0,161)
\hat{s}_N (Ecart type)	0,0022 (0)	0,0033 (0)	0,0044 (0,0001)	0,0052 (0,0001)	0,0060 (0,0002)	0,0067 (0,0001)	0,0072 (0,0003)	0,0080 (0,0004)	0,0084 (0,0008)	0,0091 (0,0005)
$n^{1/\alpha} \sigma_1$	0,0022	0,0033	0,0042	0,0049	0,0056	0,0063	0,0069	0,0074	0,0079	0,0084

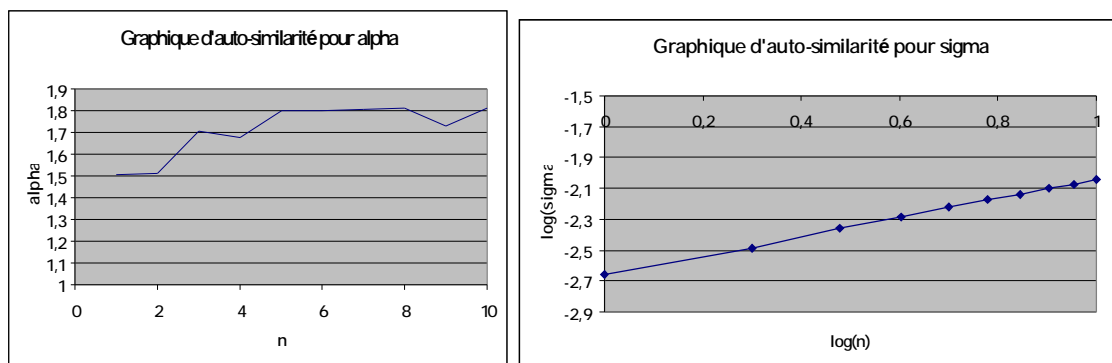
Le paramètre \hat{a} oscille entre 1,5 et 1,8. Sa valeur moyenne est 1,716.

Nous constatons que la valeur de \hat{s}_N augmente lorsque le pas de temps augmente. Sa valeur est peu éloignée de sa valeur attendue en respectant la relation d'auto-similarité $\sigma_n = n^{1/\alpha} \sigma_1$.

Si la série est auto-similaire alors nous avons la relation $\log(s_n) = \frac{1}{a} \log(n) + \log(s_1)$.

Lorsque nous régressons $\log(\sigma_n)$ en fonction de $\log(n)$ pour des séries auto-similaires, les points forment une droite de pente $\frac{1}{a}$.

Figure 42. Evolution de alpha et sigma en fonction du pas de temps n.



Les points du graphique d'auto-similarité pour sigma sont correctement alignés.

Nous réalisons aussi un second test d'auto-similarité basé sur des sous échantillons de taille constante.

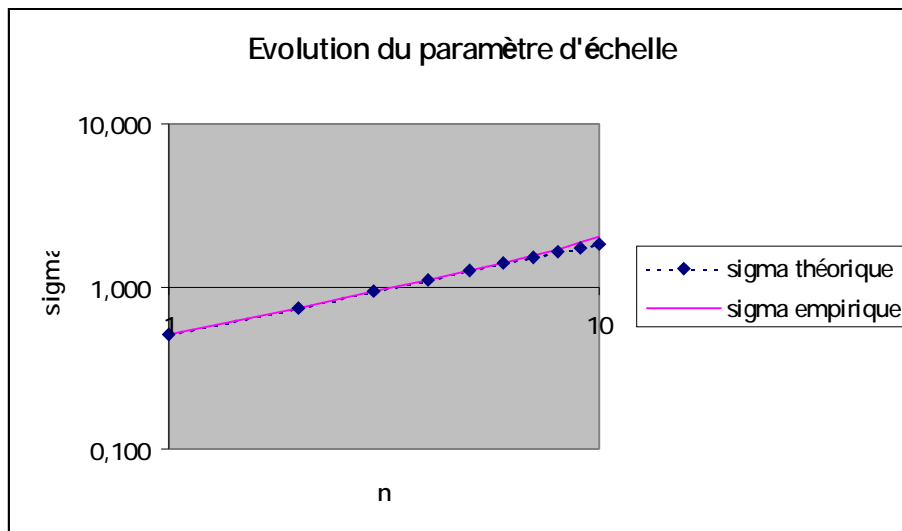
Figure 43. Deuxième test d'auto-similarité sur l'OPCVM France GAN

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de séries	3278	2978	2678	2378	2078	1778	1478	1178	878	578
$\hat{\alpha}$ (Ecart type)	1,686 (0,1882)	1,670 (0,1879)	1,777 (0,1776)	1,792 (0,1742)	1,831 (0,1394)	1,824 (0,1294)	1,837 (0,1134)	1,829 (0,1592)	1,787 (0,1486)	1,782 (0,1596)
\hat{s}_N (Ecart type)	0,504 (0,1651)	0,736 (0,1892)	0,946 (0,1929)	1,091 (0,1378)	1,256 (0,1208)	1,399 (0,1057)	1,533 (0,0945)	1,702 (0,1226)	1,855 (0,1729)	2,016 (0,0974)
$n^{1/\alpha} \sigma_1$	0,504	0,744	0,934	1,097	1,244	1,378	1,502	1,619	1,730	1,835

La valeur de l'exposant caractéristique α varie entre 1,67 et 1,837, elle vaut en moyenne 1,782. Le paramètre d'échelle suit bien la relation $\sigma_n = n^{1/\alpha} \sigma_1$ avec $\alpha = 1,782$.

Cette série est auto-similaire. Elle a donc un caractère fractal.

Figure 44. Valeurs estimées et valeurs théorique de s_n en fonction de n (échelle logarithmique)



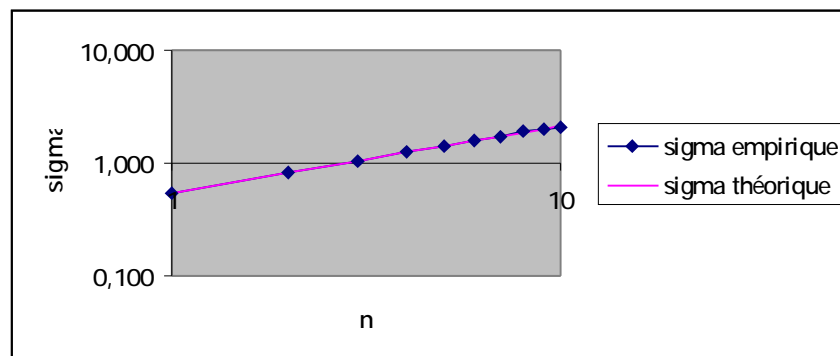
7.4.2. OPCVM Nippon Gan

Figure 45. Test d'auto-similarité sur l'OPCVM Nippon Gan

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille de l'échantillon	2570	1284	856	642	513	428	366	320	285	256
\hat{a} (Ecart type)	1,526 (0)	1,620 (0,124)	1,644 (0,037)	1,705 (0,068)	1,768 (0,120)	1,720 (0,098)	1,804 (0,116)	1,790 (0,133)	1,748 (0,105)	1,732 (0,138)
\hat{s}_N (Ecart type)	0,549 (0)	0,830 (0,045)	1,044 (0,014)	1,251 (0,026)	1,426 (0,063)	1,560 (0,064)	1,744 (0,061)	1,929 (0,139)	2,023 (0,101)	2,100 (0,154)
$n^{1/\alpha} \sigma_1$	0,549	0,824	1,045	1,237	1,410	1,570	1,718	1,858	1,991	2,117

Le paramètre \hat{a} oscille entre 1,53 et 1,8. Sa valeur moyenne est 1,706. Nous constatons que la valeur de \hat{s}_N augmente lorsque le pas de temps augmente. Sa valeur correspond à la valeur attendue si on suppose la relation d'auto-similarité suivante : $\sigma_n = n^{1/\alpha} \sigma_1$.

Figure 46. Evolution de sigma en fonction du pas de temps n.



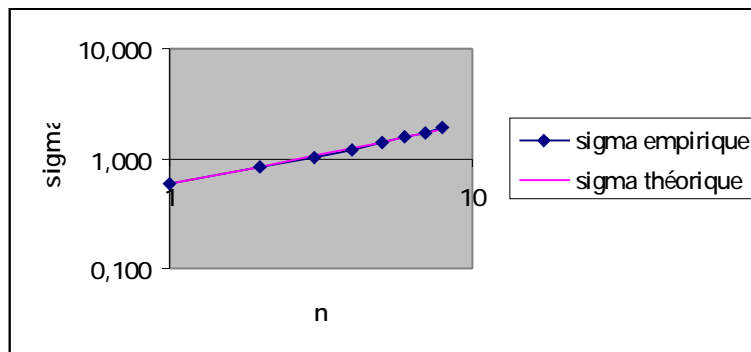
Les deux courbes sont superposées. Nous trouvons une droite de pente $1/\alpha$ avec α égal à 1,7. L'exposant d'auto-similarité H est donc égal à l'inverse de l'exposant caractéristique à savoir $1/\alpha$ où $\alpha = 1,7$.

Figure 47. Deuxième test d'auto-similarité sur l'OPCVM Nippon Gan

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de séries	2271	1971	1671	1371	1071	771	471	171
$\hat{\alpha}$ (Ecart type)	1,740 (0,1923)	1,797 (0,2026)	1,785 (0,1524)	1,831 (0,1495)	1,852 (0,1396)	1,789 (0,1315)	1,779 (0,1104)	1,751 (0,1523)
\hat{S}_N (Ecart type)	0,5783 (0,1940)	0,8535 (0,2222)	1,034 (0,2304)	1,200 (0,1706)	1,385 (0,1490)	1,545 (0,1490)	1,700 (0,1128)	1,885 (0,1622)
$n^{1/\alpha} \sigma_1$	0,578	0,852	1,068	1,254	1,421	1,573	1,715	1,847

La valeur moyenne de l'exposant caractéristique α est 1,79.

Figure 48. Evolution de sigma en fonction du pas de temps n.



Il est impossible graphiquement de distinguer les deux courbes. Les rendements de l'OPCVM Nippon Gan possèdent donc la propriété d'auto-similarité. Ce sont des fractales.

Ci-dessous, nous avons indiqué le comportement du paramètre d'échelle pour différents titres ou indices (obtenu avec le deuxième test).

Figure 49. Evolution de sigma en fonction du pas de temps n pour l'action France Télécom (échelle logarithmique)

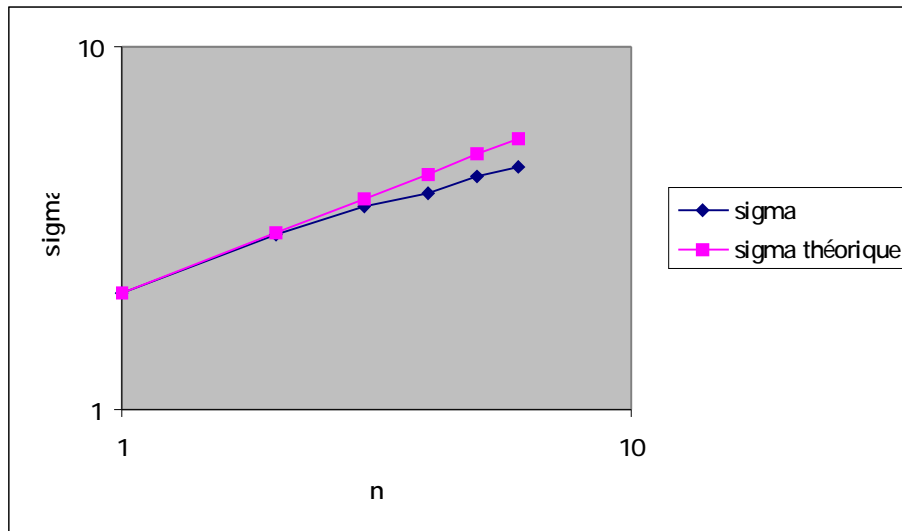


Figure 50. Evolution de sigma en fonction du pas de temps n pour l'indice Dow Jones Industriels (échelle logarithmique)

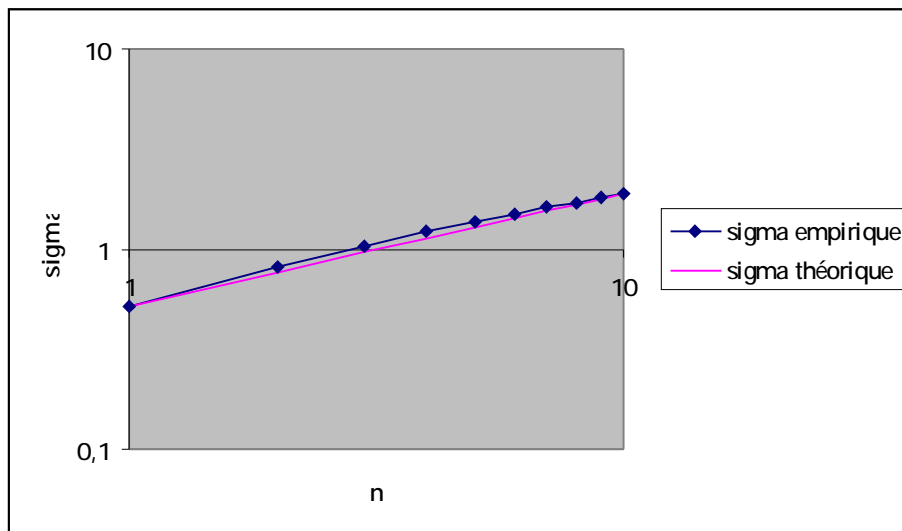
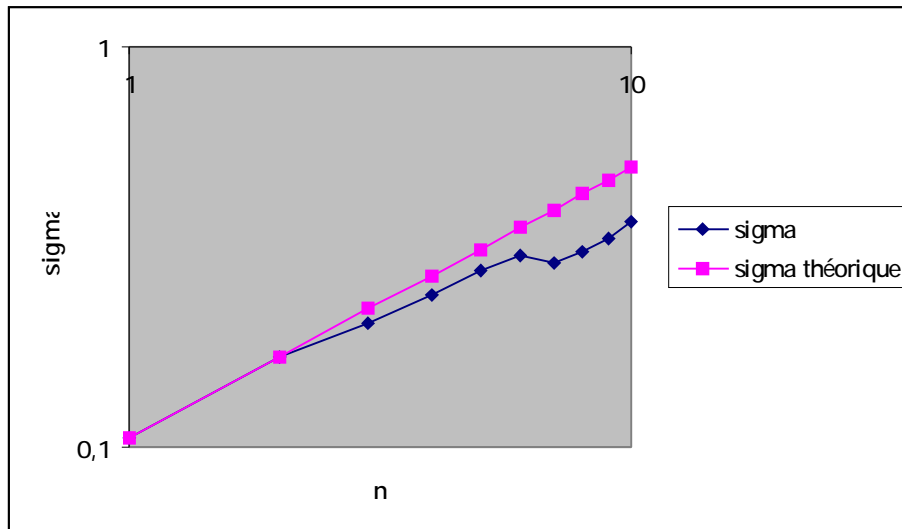


Figure 51. Evolution de sigma en fonction du pas de temps n pour l'OPCVM Obligations GAN Rendement (échelle logarithmique)



Dans tous les cas le paramètre α reste à peu près constant lorsque le pas de temps n augmente et le facteur d'échelle σ évolue suivant une puissance du pas de temps.

Dans certain cas, il semblerait que l'exposant d'auto-similarité ($1/\alpha$) prenne différentes valeurs selon le pas de temps n . Nous constatons aussi quelquefois une légère différence entre le degré d'auto-similarité (H) et l'inverse de l'exposant caractéristique ($1/\alpha$). Ceci est peut-être dû à la possibilité que l'hypothèse que les données suivent une loi stable ne soit pas vérifiée (Akgiray et Booth [1]). Une autre théorie affirme que les données ne sont pas stables mais dans le domaine d'attraction de la loi stable. Bertrand Gamrowski (Gamrowski [19]) a montré que l'estimateur de McCulloch est sensible à une déviation du modèle stable et a tendance dans ce cas à sous-estimer l'indice de stabilité lorsque le pas de temps est petit. Cette constatation ne remet donc pas en cause le caractère fractal des données. Il faut seulement considérer avec prudence les valeurs estimées de α données précédemment.

Sous l'hypothèse que les chroniques financières sont dans le domaine d'attraction de la loi stable, nous venons de montrer qu'avec un pas de temps compris entre 1 et 10 jours, la condition d'auto-similarité est apparemment vérifiée.

L'existence d'une dimension fractale ($1/\alpha$ pour une loi stable de paramètre de stabilité α) dans les cours de bourse contribue à remettre en cause la théorie d'efficience des marchés qui considère qu'il est totalement impossible de prévoir les variations futures des cours puisque tous les événements connus ou anticipés sont déjà intégrés dans le prix actuel ; seul un événement imprévisible pourra le modifier et ce, instantanément. Au contraire, la théorie fractale implique que le comportement passé du marché a une influence sur son comportement à venir. Dans ce cas, l'information aurait une impacte sur le cours actuel mais aussi sur les cours à venir. Les investisseurs ne se concentrent pas sur la même partie de l'information selon leurs horizons de placement.

Dans les parties suivantes, nous allons essayer de mesurer à quel point l'utilisation de la loi stable non gaussienne améliore les méthodes d'évaluation existantes. Nous allons aussi essayer de voir dans quels cas, il est nécessaire d'adapter les modèles existants en introduisant une loi α -stable avec $\alpha < 2$.

Partie III :

Généralisation du MEDAF à un marché stable

Nous avons montré dans les parties I et II que certains rendements financiers ont une structure fractale. La structure fractale est perceptible en utilisant les lois de Lévy. Le fait de considérer que les rendements suivent une loi de Lévy plutôt qu'une loi normale a plusieurs conséquences. Nous avons vu que les rendements des titres financiers suivent, en général, une loi stable de paramètre α compris entre 1 et 2. Ceci implique que la moyenne existe mais que la variance est infinie. Nous ne pouvons donc plus raisonner avec l'approche « Moyenne-Variance ». Il faut trouver une nouvelle façon d'allouer les actifs. Il faut, de la même façon, redéfinir les méthodes s'appuyant jusqu'alors sur la loi normale telles que le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF).

Dès que nous travaillons sur des portefeuilles (évaluation du risque, allocation d'actifs), nous faisons intervenir plusieurs titres, nous devons donc travailler sur un espace plus grand ; nous faisons alors intervenir les lois stables multivariées. Nous consacrons le chapitre 7 à définir ces lois. La composition optimale d'un portefeuille dépend fortement des covariances entre les rendements. La notion de covariance perd son sens avec les lois stables, nous définirons donc la covariation, objet qui nous permettra de déterminer la structure de dépendance entre les rendements des actifs d'un portefeuille sur un marché « stable ». Dans le chapitre 8, nous introduisons des estimateurs que nous utilisons dans la suite. Nous énonçons, dans le chapitre suivant, le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) sous l'hypothèse d'une distribution gaussienne puis nous le définissons sous l'hypothèse d'une distribution stable. Le MEDAF fait intervenir un nouveau paramètre, le coefficient bêta, qui est un coefficient de volatilité ou de sensibilité qui indique la relation existant entre les fluctuations de la valeur du titre et les fluctuations du marché.

Chapitre 8. LOIS STABLES MULTIVARIEES

La loi stable multivariée est la loi d'un vecteur aléatoire stable. Comme dans le cas univarié, nous ne pouvons pas toujours écrire la densité. Nous continuons donc à travailler avec la fonction caractéristique. Sa définition fait intervenir une mesure finie Γ sur la sphère unité de \mathfrak{R}^d et un vecteur μ^0 qui joue le rôle du paramètre de localisation μ de la loi univariée. Les définitions et théorèmes donnés dans ce chapitre sont tirés de Samorodnitsky et Taqqu [47].

8.1. Définitions

Les définitions suivantes sont simplement des extensions à \mathfrak{R}^d des définitions d'une variable aléatoire stable (voir Partie II).

Définition 1 : Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ est appelé *vecteur aléatoire stable* de \mathfrak{R}^d si pour tous nombres positifs A et B , il existe un nombre positif C et un vecteur $D \in \mathfrak{R}^d$ tels que $A X^{(1)} + B X^{(2)} \stackrel{d}{=} C X + D$, où $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ et X sont i.i.d..

Définition 2 : Le vecteur X est dit *strictement stable* si la relation de la définition 1 tient avec $D = 0$ pour tout $A > 0$ et $B > 0$. Le vecteur stable X est *symétrique* si $P(X \in A) = P(-X \in A)$ pour tout ensemble de Borel A de \mathfrak{R}^d . Un vecteur stable symétrique est strictement stable.

Définition 3 : Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ est appelé *vecteur aléatoire α -stable* de \mathfrak{R}^d si et seulement si pour tout $n \geq 2$, il existe $\alpha \in]0 ; 2]$ et un vecteur D_n tels que :

$$X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(n)} \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + D_n,$$

où $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, ..., $X^{(n)}$ et X sont i.i.d.. L'indice α est l'indice de stabilité ou l'exposant caractéristique du vecteur X .

Comme dans le cas gaussien, toute combinaison linéaire des composantes d'un vecteur aléatoire stable est une variable aléatoire stable. La réciproque est vraie lorsque le paramètre

α est supérieur à 1 ou lorsque toutes les combinaisons linéaires sont strictement stables. La preuve se trouve dans Samorodnitsky et Taqqu [47].

8.2. Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire stable

Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire stable de \mathfrak{R}^d .

Soit $Y_\alpha(\mathbf{q}) = Y_\alpha(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = E\{\exp[i(\mathbf{q}, \mathbf{X})]\} = E\left\{\exp\left[i\sum_{k=1}^d q_k X_k\right]\right\}$ sa fonction caractéristique.

Théorème 1 : Soit $0 < \alpha < 2$. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ un **vecteur aléatoire α -stable** de \mathfrak{R}^d si et seulement si il existe une mesure finie Γ sur la sphère unité S_d de \mathfrak{R}^d et un vecteur $\boldsymbol{\mu}^0$ de \mathfrak{R}^d tels que :

* Si $\alpha \neq 1$,

$$Y_\alpha(\mathbf{q}) = \exp\left\{-\int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}((\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})) \tan \frac{p\alpha}{2}\right) \Gamma(ds) + i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}^0)\right\}$$

* Si $\alpha = 1$,

$$Y_\alpha(\mathbf{q}) = \exp\left\{-\int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})| \left(1 + i \frac{2}{p} \operatorname{sign}((\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})) \ln |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})|\right) \Gamma(ds) + i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}^0)\right\}.$$

Où $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}) = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{s}$ avec $\mathbf{s} \in S_d$.

Le couple $(\Gamma, \boldsymbol{\mu}^0)$ est unique.

La mesure Γ est appelée la **mesure spectrale** du vecteur aléatoire α -stable \mathbf{X} . Γ remplace à la fois le paramètre d'échelle σ et le paramètre d'asymétrie β du cas univarié. Nous pouvons montrer aisément (Samorodnitsky et Taqqu [47]) que, dans le cas où $d = 1$, $Y_\alpha(\mathbf{q})$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire α -stable $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ avec

$$\mathbf{s} = (\Gamma(1) + \Gamma(-1))^{1/\alpha}, \quad \mathbf{b} = \frac{\Gamma(1) - \Gamma(-1)}{\Gamma(1) + \Gamma(-1)}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\mu}^0.$$

Le paramètre β vaut zéro si la mesure spectrale Γ est symétrique.

Les composantes du vecteur \mathbf{m}^0 dans le cas où $\alpha = 1$ ne sont pas égales aux paramètres de localisation μ des composantes X_1, X_2, \dots, X_d de \mathbf{X} .

Théorème 2 : \mathbf{X} est un *vecteur strictement α -stable* de \mathfrak{R}^d avec $0 < \alpha \leq 2$ si et seulement si :

- * Si $\alpha \neq 1$, $\mathbf{m}^0 = 0$,
- * Si $\alpha = 1$, $\int_{S_d} s_k \Gamma(ds) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, d$.

Théorème 3 : \mathbf{X} est un *vecteur α -stable symétrique* de \mathfrak{R}^d avec $0 < \alpha \leq 2$ si et seulement si il existe une unique mesure finie symétrique Γ sur la sphère unité S_d telle que :

$$E[\exp\{i(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{X})\}] = \exp\left\{- \int_{S_d} |(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})|^\alpha \Gamma(ds)\right\}.$$

Autrement dit \mathbf{X} est un *vecteur α -stable symétrique* de \mathfrak{R}^d avec $0 < \alpha \leq 2$ si et seulement si $\mu^0 = 0$ et Γ est symétrique.

Une distribution α -stable symétrique de \mathfrak{R}^d est notée $S\alpha S$. Dans le cas univarié ($d = 1$), $S\alpha S$ représente $S_\alpha(0, \sigma, 0)$ où $\sigma = (2\Gamma(\{1\}))^{1/\alpha}$.

8.3. Covariation

Quand $\alpha = 2$, le vecteur aléatoire est gaussien et sa structure de dépendance est complètement spécifiée par sa fonction d'autocovariance. Lorsque $\alpha < 2$, la covariance n'existe pas, mais lorsque $\alpha \geq 1$, on peut introduire la notion de covariation. La covariation partage quelques propriétés de la covariance.

Pour définir la covariance, nous avons besoin au préalable d'introduire la notation suivante :

$$a^{<p>} = |a|^p \cdot \text{sign}(a) = \begin{cases} a^p & \text{si } a \geq 0 \\ -|a|^p & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad a^{<p>} \text{ est appelée la } \textit{puissance signée}.$$

Par construction, nous avons $(ab)^{<p>} = a^{<p>} b^{<p>}$.

Définition 1 : Soit X_1 et X_2 deux variables α -stable symétriques $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$, soit Γ la mesure spectrale du vecteur aléatoire (X_1, X_2) . La **covariation** de X_1 sur X_2 est le nombre réel

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_d} s_1 s_2 \langle a^{-1} \rangle \Gamma(ds) \quad \text{avec } d = 2.$$

Dans le cas gaussien, $[X_1, X_2]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(X_1, X_2)$.

La définition précédente exige de connaître Γ la mesure spectrale qui apparaît dans la représentation spectrale de la fonction caractéristique du vecteur (X_1, X_2) . La définition suivante de la covariation est utile lorsque les représentations sont difficiles à obtenir explicitement.

Définition 2 : Soit X_1 et X_2 deux variables α -stable symétriques $S\alpha S$, $1 < \alpha \leq 2$.

Posons $Y = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$ où θ_1 et θ_2 sont des nombres réels. Soit $\sigma(\theta_1, \theta_2)$ le paramètre d'échelle de la variable aléatoire Y . La **covariation** $[X_1, X_2]_\alpha$ de (X_1, X_2) est :

$$[X_1, X_2]_\alpha = \frac{1}{a} \frac{\partial s^a(q_1, q_2)}{\partial q_1} \Big|_{q_1=0, q_2=1}.$$

Propriétés : Soient X_1, X_2, X et Y des variables aléatoires $S\alpha S$.

1. La covariation n'est pas commutative $[X, Y]_\alpha \neq [Y, X]_\alpha$ et $[X, X]_\alpha \neq 0$.
2. La covariation est additive sur son premier argument : $[X_1 + X_2, Y]_\alpha = [X_1, Y]_\alpha + [X_2, Y]_\alpha$

Mais elle ne l'est pas sur son second argument.

3. $[aX, bY]_\alpha = ab \langle a^{-1} \rangle [X, Y]_\alpha$.
4. Si X et Y sont conjointement $S\alpha S$ et indépendantes alors $[X, Y]_\alpha = 0$.
5. Si $1 < \alpha < 2$, il peut arriver que X et Y soient dépendants avec $[X, Y]_\alpha = 0$.
6. $[X, X]_\alpha = (\sigma_X)^\alpha$ où σ_X est le paramètre d'échelle de X . C'est la **variation**.

8.4. Norme de covariation

Quand $\alpha > 1$, la covariation induit une norme sur l'espace linéaire S_α des variables aléatoire conjointement $S\alpha S$.

Définition : La *norme de covariation* de X sur l'espace linéaire S_α des variables aléatoire conjointement $S\alpha S$, $\alpha > 1$, est $\|X\|_a = ([X, X]_a)^{1/a} = \sigma_X$ où σ_X est le paramètre d'échelle de X .

Propriété : Soit X et Y deux variables α -stable symétriques $S\alpha S$ avec $1 < \alpha \leq 2$. Alors

$$|[X, Y]_a| \leq \|X\|_a \|Y\|_a^{\alpha-1}.$$

Chapitre 9. ESTIMATIONS

Pour estimer le coefficient bêta dans le MEDAF stable, nous avons besoin de savoir estimer la covariation. Pour cela, nous devons définir, au préalable, un estimateur de l'indice de stabilité α et de la mesure spectrale Γ .

Les résultats de ce chapitre sont valables dans le domaine d'attraction d'une loi stable.

Définition : \mathbf{Z} est dans le domaine d'attraction de \mathbf{X} s'il existe $a_n > 0$ et $\mathbf{b}_n \in \mathfrak{R}^d$ tels que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}^{(i)} - \mathbf{b}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}$$

où les $\mathbf{Z}^{(i)}$ sont indépendants et suivent la même loi que \mathbf{Z} et \xrightarrow{d} signifie « ... converge en distribution vers ... ».

Si la loi de \mathbf{Z} est dans le domaine d'attraction d'une loi stable alors elle aura des propriétés proches de celles de la loi stable.

9.1. Estimateur de l'exposant caractéristique a

L'estimateur de α qui semble donner la meilleure approximation est l'estimateur de Hill généralisé indiqué ci-dessous.

Soient X_1, \dots, X_n , n observations de vecteurs de \mathfrak{R}^d pendant une période de temps. Nous supposons que les X_i ($i \in \{1; \dots; n\}$) sont dans le domaine d'attraction d'une loi stable.

Notons les coordonnées polaires de X_1, \dots, X_n par :

$$\rho = (|X_1|, \dots, |X_n|) \text{ où } |X| \text{ désigne la norme du vecteur } X.$$

$$\Theta = \theta(X) = (\theta_1(X), \dots, \theta_n(X)) \text{ où } \theta_i \text{ est un vecteur de dimension } d-1.$$

L'estimateur de Hill généralisé de α est choisi dans la famille des estimateurs suivants :

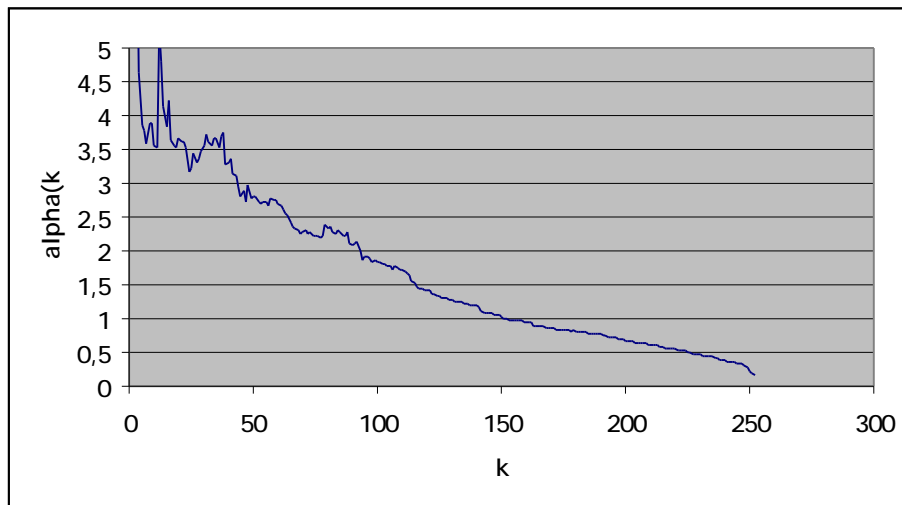
$$a_n(k) = \frac{\ln(2)}{\ln(r_{(n-k+1)}) - \ln(r_{(n-2k+1)})} \text{ avec } 1 \leq k \leq \frac{n}{2}, k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ et } \frac{k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$\rho_{(k)}$ est la $k^{\text{ème}}$ statistique d'ordre de (ρ_1, \dots, ρ_n) où ρ_k est la première coordonnée polaire de la $k^{\text{ème}}$ observation de l'échantillon initial.

Le choix de la valeur de k n'est pas trivial. Mittnik et Rachev [40] proposèrent une méthode pour obtenir la valeur optimale de k pour estimer α . Nous calculons dans un premier temps $\alpha_n(k)$ pour les premières valeurs de k ($k = 1, \dots, 250$, par exemple). Nous considérons le plus petit k à partir duquel la valeur de $\alpha_n(k)$ cesse de fluctuer beaucoup. Cette méthode est approximative et peut donner d'un individu à un autre des valeurs différentes de k .

Considérons l'action France Télécom et l'indice SBF250 entre le 1^{er} janvier 1999 et le 29 décembre 2000. Nous avons $n = 520$. Le graphe suivant représente les valeurs de $\alpha_n(k)$ en fonction de k .

Figure 52. $\alpha_n(k)$ en fonction de k pour le vecteur de données (France Télécom, SBF250) considéré entre le 1^{er} janvier 1999 et le 29 décembre 2000.



Il est difficile de trouver la valeur de k avec le graphique. Pour $k = 80$, nous observons une valeur de $\alpha_n(k)$ égale à 2,34. Nous sommes donc amenés à considérer que $\alpha_n(k)$ vaut 2 (car nous travaillons avec des lois Lévy stables pour lesquelles $0 < \alpha \leq 2$). Dans la majorité des cas, quels que soit les titres considérés nous trouvons une valeur de $\alpha_n(k)$ supérieure à 2. L'estimateur de Hill généralisé tend à accepter tout le temps la loi normale pour modéliser les rendements financiers or nous avons vu dans la partie II que ce n'était pas en général le cas.

Lofti Belkacem [4] a proposé une autre manière de trouver la valeur optimale de k . Nous nous sommes inspirés de cette méthode et de la méthode de Mittnik et Rachev [40] pour déterminer la valeur optimale de k . Nous avons cherché à déterminer la valeur optimale de k de manière à ce que la valeur estimée de $[X_1, X_2]_2$ approche le plus possible la valeur réelle $\frac{1}{2} \text{Cov}(X_1, X_2)$ pour respecter la relation théorique $[X_1, X_2]_2 = \frac{1}{2} \text{Cov}(X_1, X_2)$ et de manière à ce que la valeur de $\alpha_n(k)$ soit très proche de valeur attendue de alpha (2 dans le cas gaussien et 1,7 dans le cas d'un portefeuille quelconque d'actions). A partir de ces règles, nous avons choisi de considérer que la valeur optimale de k correspond à la plus petite valeur de k à partir de laquelle la valeur de $\alpha_n(k)$ franchit la barre $\alpha_n(k) = \hat{a}$ (nous choisissons dans la suite $\hat{a} = 1,7$ ou $\hat{a} = 2$).

Nous supposons que sur le marché français la valeur marginale de l'indice de stabilité est égal à 1,7. Cette approximation n'est pas loin de la réalité selon des études faites par Belkacem [4] et Walter [53]. Sur la figure ci-dessus, nous obtenons de cette manière une valeur optimale de k égale à 106.

Le gros inconvénient de cette méthode d'estimation est que nous obligeons le paramètre α à être égal à la même valeur pour tous les titres considérés bien que nous sachions que ce n'est pas le cas en pratique. Nous faisons déjà ceci en utilisant la loi normale en fixant la valeur de α à 2. Cette méthode permet seulement d'améliorer légèrement la réalité en prenant en compte plus de grandes fluctuations qu'avec la loi de Gauss. Cependant ce procédé reste très approximatif.

9.2. Estimateur de la densité spectrale

Soit Φ la fonction de densité de la mesure spectrale Γ .

Le support de Φ est $\Omega_d = [0, \pi]^{d-1} \times [0, 2\pi]$.

La mesure spectrale normalisée est donné par :

$$j(q) = \frac{\Phi(q)}{\Phi(\Pi)}, \text{ où } \Pi = (p, \dots, p, 2p) \text{ et } q = (q_1, \dots, q_{d-1}).$$

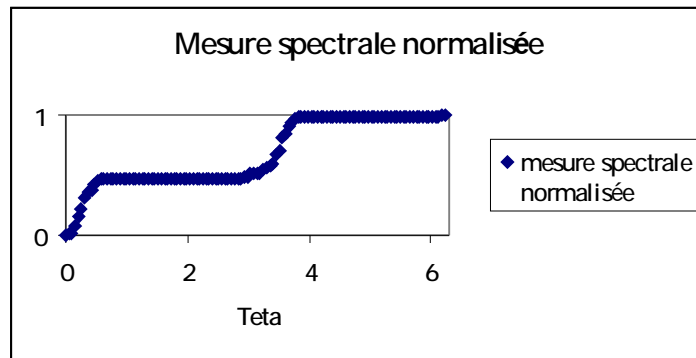
Un estimateur de $\varphi(\theta)$ est $j_n(q) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n I_{(\theta_i \leq q, r_i \geq r_{(n-k+1)})}$ où k est la valeur optimale de k utilisée pour estimer α .

Un estimateur de $\Phi(\Pi)$ est $\Phi_n(\Pi) = \frac{k}{n} r_{(n-k)}^{\alpha_n}$.

On obtient ainsi un estimateur de Φ : $\Phi_n(q) = j_n(q) \Phi_n(\Pi)$

L'estimateur de Φ dans le cas bivarié est $\Phi_n(q) = j_n(q) \Phi_n(2p)$ avec les notations ci-dessus.

Figure 53. Estimation de la mesure spectrale normalisée $j_n(q)$ pour le vecteur de données (France Télécom, SBF250) avec $\alpha = 1,7$



Lorsque la densité spectrale varie beaucoup sur le premier et le troisième quadrants, comme c'est le cas ici, alors les composantes du vecteur bivarié sont corrélées positivement. Dans le cas contraire, les composantes du vecteur sont corrélées négativement.

Cheng et Rachev [10] ont montré que ces estimateurs sont constants.

En effet, si $\frac{k}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ alors $\alpha_n(k) \xrightarrow{p.s.} \alpha$ quand n tend vers l'infini.

et si $\frac{k}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ alors $j_n(q) \xrightarrow{p.s.} j(q)$ quand n tend vers l'infini.

9.3. Estimation de la covariation

Soit X_1 et X_2 des variables conjointement S α S.

Dans le cas bivarié, l'estimateur de covariation du couple (X_1, X_2) est :

$$[X_1, X_2]_a^{(n)} = \int_0^{2\pi} (\cos q)(\sin q)^{\langle a_n^{-1} \rangle} d\Phi_n(q)$$

où $\Phi_n(\theta)$ est l'estimateur de la densité spectrale et α_n est l'estimateur de l'indice de stabilité.

Nous approchons cette intégrale par la formule suivante :

$$[X_1, X_2]_a^{(n)} = \frac{\Phi_n(\Pi)}{k} \sum_{i=1}^n \cos(q_i)(\sin(q_i))^{\langle a_n^{-1} \rangle} I_{(r_i \geq r(n-k+1))}$$

Pour avoir des renseignements complémentaires sur l'estimation de la covariation (avec $d > 2$, par exemple), nous invitons le lecteur à consulter Cheng et Rachev [10] ou Rachev et Xin [46].

Lorsque nous estimons la covariation pour des chroniques boursières, nous considérons que les variables $R_1 - \mu_1$ et $R_2 - \mu_2$ suivent une loi stable symétrique de même indice de stabilité α . Autrement dit, nous considérons que ces variables sont conjointement S α S. Dans tous les cas le paramètre de stabilité α est compris entre 1 et 2 ($1 < \alpha \leq 2$), nous estimons donc μ_i par la moyenne des rendements du titre i : $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_j^i$ où R_j^i est la $j^{\text{ème}}$ valeur du rendement du titre i .

Nous calculons l'indice de stabilité marginale α , nous en déduisons la valeur du paramètre k donné dans la section 9.1. . Puis nous estimons, la densité spectrale que nous utilisons pour calculer empiriquement la covariation $[R_1 - \mu_1 ; R_2 - \mu_2]_\alpha^{(n)}$.

Pour le couple (France Télécom, SBF250), nous obtenons une valeur de la covariation égale à 0,000338 lorsque avec $\hat{a} = 1,7$ et égale à 0,000094665 lorsque $\hat{a} = 2$.

Chapitre 10. MEDAF

Le MEDAF, Modèle d'Évaluation Des Actifs Financiers (ou Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers), appelé en anglais *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) est un modèle de détermination du prix du risque dans un marché en équilibre. Il est basé sur le fait que seul le risque de marché, ou risque non diversifiable, appelé aussi risque systématique est rémunéré par les investisseurs. Initialement développé par Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) dans le cas gaussien, Fama puis Ross l'élargirent à une loi stable. Cependant, aucun des deux hommes ne donna une expression simple du coefficient bêta. Gamrowski et Rachev en 1993 donnèrent des expressions du bêta qui permirent d'utiliser de façon empirique le MEDAF sur un marché dont les rendements suivent une loi Lévy stable (marché stable).

10.1. Hypothèses

Le modèle d'évaluation des actifs financiers s'applique sous les conditions suivantes :

- H1. Tous les investisseurs ont les mêmes anticipations à propos de la rentabilité des actifs.
- H2. Les investisseurs assignent la même distribution de probabilité au rendement de chaque titre.
- H3. Tous les investisseurs sont averses au risque.
- H4. Tout investisseur peut emprunter ou prêter des montants illimités à un même taux sans risque.
- H5. Les opérations s'effectuent sans frais.

Un portefeuille est efficient s'il est à variance minimale pour un rendement donné ou à un rendement maximal pour une variance donnée.

Les hypothèses H1 et H4 impliquent que les investisseurs ont le même ensemble d'efficience. L'hypothèse H3 signifie que les investisseurs cherchent à minimiser le risque de leur portefeuille pour un rendement donné.

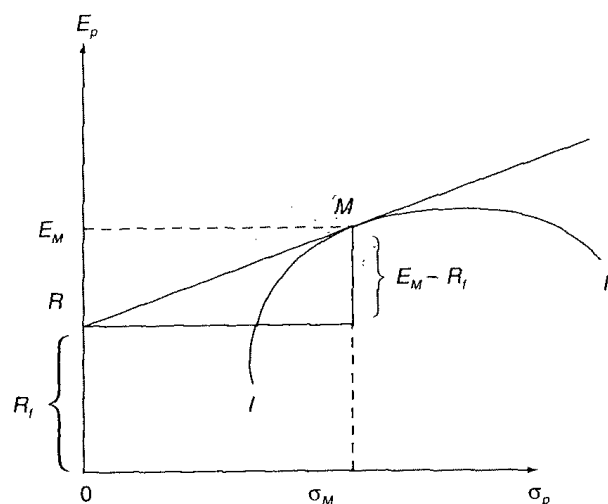
10.2. Description dans le cas gaussien

Nous allons décrire dans ce paragraphe le MEDAF dans le cas gaussien, c'est-à-dire dans le cas où l'hypothèse H2 se réduit à « les taux de rentabilité des actifs suivent une loi normale ». (voir aussi Duffie [15]).

Tout investisseur a la possibilité de constituer un portefeuille contenant une proportion x d'actifs sans risque de taux de rentabilité R_f (bons du Trésor, par exemple) et une proportion $1-x$ d'actif risqué de taux de rentabilité R_i . A l'équilibre du marché, tous les titres et tous les portefeuilles se situent sur la droite de marché, une droite dans le plan dont la pente est égale à la prime de risque sur le portefeuille de marché.

L'approche de Markovitz consiste à réduire le risque du portefeuille en choisissant des titres qui n'évoluent pas dans le même sens. Tout investisseur tente de construire un portefeuille efficient, c'est à dire un portefeuille qui ne peut pas réaliser une rentabilité espérée plus élevée sans augmenter le risque (courbe d'utilité). La composition de ce portefeuille ne dépend pas de l'attitude des investisseurs vis-à-vis du risque mais des informations dont ils disposent, ce qui leur permet d'évaluer les perspectives d'évolution de chaque action. Sans informations, les investisseurs détiendraient tous le portefeuille de marché de taux de rentabilité R_m .

Figure 54. Droite du marché (Security Market Line) et courbe d'utilité



Nous remarquons qu'il existe une corrélation positive entre la rentabilité obtenue et la prise de risque. Le problème de l'investisseur sera de savoir quel rendement il peut espérer d'un investissement quelconque, c'est-à-dire ni le portefeuille de marché, ni les bons du Trésor. Autrement dit, quelle est la prime de risque d'un portefeuille quelconque ? La réponse à cette question se trouve dans le modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF) qui a été créé au milieu des années 1960 par Sharpe, Lintner et Mossin. D'après ce modèle, la prime de risque d'un placement est directement proportionnelle au bêta.

Le MEDAF permet de quantifier la liaison entre le risque et la rentabilité et ainsi d'évaluer la prime de risque. Il se résume à la relation suivante :

$$E(R_i) = R_f + \beta_i (E(R_m) - R_f)$$

où $E(R_i)$ est le taux de rentabilité espéré du titre i ,
 $E(R_m)$ est le taux de rentabilité du portefeuille de marché,
 R_f est le taux de rentabilité de l'actif sans risque,
 β_i est appelé coefficient bêta du titre i .

Le coefficient β_i représente la sensibilité du taux de rentabilité d'une action par rapport aux fluctuations du taux de rentabilité de l'ensemble du marché. Lorsque la rentabilité du titre correspond à celle du marché le coefficient bêta vaut 1, tandis qu'un projet sans risque donne un bêta égal à 0. Plus l'investisseur prendra des risques, plus son bêta sera grand.

Dans le cas gaussien, il a été montré que $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$.

Des indicateurs ont été proposées pour représenter la position d'un portefeuille par rapport à la droite de marché, c'est-à-dire l'écart entre la rentabilité observée de ce portefeuille et celle prévue par le MEDAF. Ces indicateurs permettent de mesurer l'aptitude d'un gérant à sélectionner des titres sous-évalués.

10.3. Extension du MEDAF à un marché stable

L'hypothèse gaussienne n'est pas très bien adaptée étant donnée l'épaisseur des queues de distribution des rendements financiers. Nous avons vu que les lois des rendements sont mieux représentées par des lois stables. Pour cette raison, nous élargissons le modèle MEDAF à un marché stable. Nous nous plaçons maintenant sous les hypothèses énoncées au début de ce chapitre, dans le cas où l'hypothèse H2 est « les taux de rentabilités des actifs sont conjointement α -stables symétriques avec $1 < \alpha < 2$ ».

Considérons un portefeuille contenant une proportion θ d'actifs sans risque de rentabilité R_f et une proportion $1-\theta$ d'actif risqué I de rentabilité R_i (avec $0 < \theta < 1$). Nous avons alors :

$$E(R_p) = q.R_f + (1-q)E(R_i) ,$$

$$\|R_p\|_a^a = (1-q)^a \|R_i\|_a^a ,$$

où $E(R_i)$ est le taux de rentabilité espéré du titre i ,

$E(R_p)$ est le taux de rentabilité du portefeuille du gérant,

R_f est le taux de rentabilité de l'actif sans risque,

En extrayant θ de la deuxième équation et en le réinjectant dans la première équation, nous

obtenons :
$$E(R_p) = R_f + \frac{(E(R_i) - R_f)}{\|R_i\|_a} \|R_p\|_a ,$$

où $\|\dots\|_a$ représente la norme de covariation définie dans la section 8.4.

Ainsi l'ensemble des portefeuilles efficients est une demi-droite reliant R_f à l'actif risqué.

A partir de cette expression, nous obtenons l'équation de la droite de marché α -stable :

$$E(R_p) = R_f + \frac{(E(R_m) - R_f)}{\|R_m\|_a} \|R_p\|_a$$

où $E(R_m)$ est le taux de rentabilité espéré du portefeuille de marché.

10.4. Définition du coefficient Bêta stable

Nous avons vu précédemment que le bêta (ou coefficient bêta) d'un titre financier est un coefficient de volatilité ou de sensibilité qui indique la relation existant entre les fluctuations de la valeur du titre et les fluctuations du marché. Dans le cas d'une loi stable d'indice de stabilité α , ce coefficient est égal à :

$$b_i = \frac{[R_i; R_m]_a}{[R_m; R_m]_a} = \frac{[R_i; R_m]_a}{\|R_m\|_a^\alpha}.$$

Ce résultat est démontré dans Belkacem [4].

Considérons un portefeuille constitué de n actifs. Notons θ_i le poids de l'actif i dans le portefeuille ($1 \leq i \leq n$). Alors le coefficient bêta stable du portefeuille (noté β_p) est une combinaison linéaire pondérée des coefficients bêta stable β_i des actifs :

$$b_p = \sum_{i=1}^n \theta_i b_i.$$

Démonstration :

Soient R_1, R_2, \dots, R_n les vecteurs transposés des rendements logarithmiques des n actifs en portefeuille. Soit R_m le vecteur des rendements logarithmiques du portefeuille de marché et R_p le vecteur des rendements logarithmiques du portefeuille étudié. Nous supposons que tous ces vecteurs sont conjointement $S\alpha S$.

Nous avons vu à la section 7.3. que la covariation est additive sur son premier argument. Ainsi,

$$[R_p, R_m]_\alpha = [\theta_1 R_1 + \theta_2 R_2 + \dots + \theta_n R_n, R_m]_\alpha = \theta_1 [R_1, R_m]_\alpha + \theta_2 [R_2, R_m]_\alpha + \dots + \theta_n [R_n, R_m]_\alpha.$$

D'où en divisant cette expression par $\|R_m\|_a^\alpha$:

$$\beta_p = \theta_1 \beta_1 + \theta_2 \beta_2 + \dots + \theta_n \beta_n.$$

10.5. Estimation du coefficient Bêta stable

Il existe plusieurs estimateurs du coefficient « Bêta stable ».

Nous pouvons évaluer le coefficient bêta stable à l'aide du meilleur estimateur linéaire sans biais (BLUE : *Best Linear Unbiased Estimator*, en anglais). Nous ne savons pas actuellement calculer l'estimateur BLUE du bêta stable dans le cas général. Mais nous pouvons le calculer sous l'hypothèse que les risques spécifiques sont indépendants et pour $\alpha > 1$. En pratique, cette hypothèse n'est pas satisfaite, c'est pourquoi nous ne nous attarderons pas à décrire cet estimateur.

Gamrowski et Rachev [21] ont proposé un estimateur de p-moments du bêta :

$$\hat{b}_i(p) = \frac{\sum_{j=1}^T Y_j X_j^{(p-1)}}{\sum_{j=1}^T |X_j|^p}$$

où Y_j est le taux de rentabilité centré d'un actif donné à la date i , X_j est le taux de rentabilité centré de marché à l'instant j .

L'inconvénient est que nous ne pouvons pas assurer l'efficacité de cet estimateur et nous ne savons pas non plus comment choisir p de manière optimale.

L'estimateur que nous allons utiliser dans la suite est l'estimateur issu de la mesure spectrale. Nous allons estimer directement le coefficient bêta stable à partir des covariations empiriques. Un estimateur convergent du coefficient bêta stable de l'actif i est donné par :

$$\hat{b}_i = \frac{[R_i; R_m]_a^{(n)}}{[R_m; R_m]_a^{(n)}}$$

où $[R_i; R_m]_a^{(n)}$ est l'estimateur de Cheng et Rachev [10] de la covariation de R_i sur R_m donné dans le chapitre 9.

Pour le couple (France Télécom, SBF250), nous obtenons une valeur du bêta « stable » égale à 2,26 lorsque $\hat{\alpha} = 1,7$ et égale à 2,16 lorsque $\hat{\alpha} = 2$. Le bêta classique vaut 2,02 sous l'hypothèse que les rendements suivent une loi normale. Théoriquement le bêta classique est exactement égal au bêta stable avec $\hat{\alpha} = 2$; il y a donc ici une petite erreur d'estimation.

Partie IV :

Application du MEDAF sur un marché stable

Dans cette partie, nous prenons comme indice de référence le CAC40 car c'est l'indice de référence du Marché français et un *benchmark* très utilisé dans les portefeuilles. Il est calculé sur un échantillon de 40 valeurs cotées au Premier Marché, choisies parmi les cent plus fortes capitalisations. Principale référence de la Bourse de Paris, ses variations sont très fortement corrélés avec celles de l'ensemble du marché et il est naturellement l'indice support d'options et de contrats à termes négociés sur le MONEP. De ce fait, il est utilisé par de nombreux gestionnaires pour indexer leurs OPCVM.

Lorsque nous sous-entendons l'utilisation de lois stables dans notre raisonnement, nous parlerons de portefeuille « stable » et de marché « stable ». Par opposition, si nous faisons l'hypothèse que les rendements suivent une loi normale, nous parlerons de portefeuille « normal » et de marché « normal ».

Nous allons dans un premier temps apprécier la qualité des estimations des bêtas stables que nous calculons avec les méthodes exposées dans la partie précédente. Nous regardons dans un second temps si le bêta stable est plus stable dans le temps que le bêta classique. Dans le chapitre 15, nous exposons différentes stratégies pour allouer des actifs dans un portefeuille à partir des bêtas : la stratégie à la hausse, la stratégie à la baisse et la stratégie neutre. Le chapitre suivant donne les résultats de l'application de ces stratégies sur un marché « stable » et sur un marché « normal ». Nous allons vérifier que les bêtas ont un pouvoir prédictif et peuvent donc être utilisés en allocation d'actifs. Nous allons aussi pouvoir juger si la loi stable améliore la performance du portefeuille par rapport à la loi normale.

Chapitre 11. TESTS SUR LES BETAS

Maintenant que nous savons estimer les coefficients bêtas « stables » empiriquement, nous testons la précision de l'estimation sur le marché français.

11.1. Qualité de l'estimation des bêtas

Nous allons calculer les bêtas de quelques actions françaises par rapport à l'indice CAC40 sous l'hypothèse que les données suivent une loi normale et sous l'hypothèse que les données suivent une loi 1,7-stable. Nous allons ainsi pouvoir estimer l'importance de la différence entre les bêtas pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 1,7$ et la qualité de l'estimation dans le cas où $\alpha = 2$.

Nous faisons l'hypothèse que les rendements des actifs R_i suivent conjointement une loi α -stable symétrique avec $1 < \alpha < 2$. Nous commençons par calculer, pour chaque action du tableau suivant, la valeur optimale de k à partir de $R_i - \mu_i$ où R_i est le rendement du titre i et μ_i représente le paramètre de localisation de R_i , variable supposée être 1,7-stable. Nous estimons à partir de ces valeurs la densité spectrale comme expliqué dans la section 9.2. Nous en déduisons la valeur de la covariation du titre avec l'indice CAC40 puis la valeur du bêta notée $\beta_{1,7}$.

Nous faisons, à nouveau les calculs, en considérant cette fois que la variable $R_i - \mu_i$ suit une loi normale. Nous obtenons de cette manière β_2 .

Nous calculons aussi la valeur du bêta classique sous l'hypothèse que $R_i - \mu_i$ suit une loi

normale où
$$b = \frac{\text{cov}(R_i - \mu_i, R_{\text{CAC40}} - m_{\text{CAC40}})}{\text{Var}(R_{\text{CAC40}} - m_{\text{CAC40}})}$$
.

Nous mesurons, dans un premier temps, la qualité de l'estimation dans le cas où $\alpha = 2$ en comparant β et β_2 . Nous mesurons, dans un deuxième temps, l'écart d'estimation des bêtas dans le cas 1,7-stable et dans le cas gaussien en comparant β_2 et $\beta_{1,7}$. Les valeurs des bêtas situées dans le tableau suivant ont été calculées à partir des rendements de 11 titres considérés entre le 1^{er} septembre 1995 et le 15 juillet 2001, choisis complètement au hasard parmi les valeurs cotées au Premier Marché. Il y a 1531 cotations pour chaque titre.

Figure 55. Comparaison des bêtas « normaux » et des bêtas « 1,7-stables »

Nom des actions	Bêta classique	b_2	$\frac{ b - b_2 }{b_2}$	$b_{1,7}$	$\frac{ b - b_{1,7} }{b_{1,7}}$
Accor	0,79	0,82	3,7 %	0,89	11,2 %
Alcatel	1,57	1,44	9 %	1,59	1,3 %
Carrefour	0,82	0,88	6,8 %	0,92	10,9 %
Club Méditerranée	0,54	0,57	5,3 %	0,61	11,5 %
Danone	0,57	0,61	6,6 %	0,67	14,9 %
Euro Disney	0,32	0,47	31,9 %	0,36	11,1 %
Eurotunnel	0,38	0,42	9,5 %	0,42	9,5 %
Havas Advertising	0,88	1,03	14,6 %	0,90	2,2 %
Lafarge	0,73	0,77	5,2 %	0,79	7,6 %
Michelin	0,70	0,8	12,5 %	0,83	15,7 %
Usinor	0,68	0,76	10,5 %	0,75	9,3 %

Nous constatons des écarts assez importants entre les valeurs des bêta sous l'hypothèse d'une loi normale (β) et entre l'estimateur de bêta obtenu via les covariations sous l'hypothèse d'une loi stable gaussienne (β_2). Nous avons tendance avec notre méthode à surévaluer la valeur du bêta gaussien. Nous pouvons peut-être expliquer les écarts par le fait que l'estimateur du bêta stable gaussien β_2 converge lentement vers la valeur théorique du bêta classique. Nous rajoutons 200 observations à l'échantillon de départ et estimons à nouveau les bêtas.

Figure 56. Calcul des bêtas stables sur 1705 cotations (du 1^{er} janvier 1995 au 15 juillet 2001)

Nom des actions	Bêta classique	b_2	$\frac{ b - b_2 }{b_2}$
Accor	0,78	0,83	6 %
Alcatel	1,53	1,39	10,1 %
Carrefour	0,82	0,86	4,7 %
Club Méditerranée	0,55	0,58	5,2 %
Danone	0,57	0,63	9,5 %
Euro Disney	0,37	0,48	22,9 %
Eurotunnel	0,43	0,48	10,4 %
Havas Advertising	0,83	0,83	0 %
Lafarge	0,74	0,81	8,6 %
Michelin	0,72	0,79	8,9 %

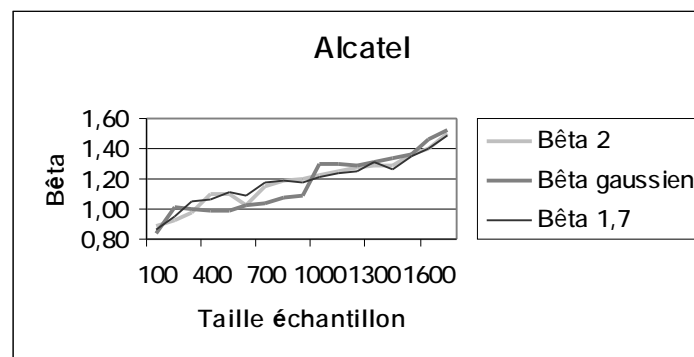
Sur les dix actions sélectionnées, les écarts entre le bêta classique et le bêta stable gaussien sont moins importants pour 4 actions. Les écarts ont très légèrement augmenté pour les actions Alcatel et Eurotunnel. Nous constatons enfin que l'écart entre les bêtas pour les valeurs Accor, Danone et Lafarge a presque doublé en augmentant la période d'étude de 6 mois. Ainsi il est peu probable que les écarts entre le bêta classique et le bêta stable gaussien s'explique par le fait que l'estimateur du bêta stable gaussien converge lentement vers le bêta classique.

Ceci nous amène à nous demander si il existe une taille d'échantillon optimale pour calculer bêta de façon précise. Nous allons étudier cette question dans la section 11.3.

11.2. Stabilité du bêta

Nous calculons pour cela le bêta classique et le bêta stable gaussien sur des échantillons croissants de cotations (Alcatel, CAC40) choisies entre le 1^{er} janvier 1995 et le 15 juillet 2001. Nous commençons par estimer les bêtas sur les 100 premières valeurs de cet échantillon puis nous ajoutons à l'échantillon précédent les 100 cotations suivantes avant de calculer à nouveau les bêtas. Nous recommençons cette opération en augmentant à chaque fois la taille de l'échantillon de 100 unités par rapport à l'échantillon précédent. Le graphique suivant représente l'évolution au cours du temps des valeurs des bêtas ainsi obtenues.

Figure 57. Stabilité des bêtas au cours du temps

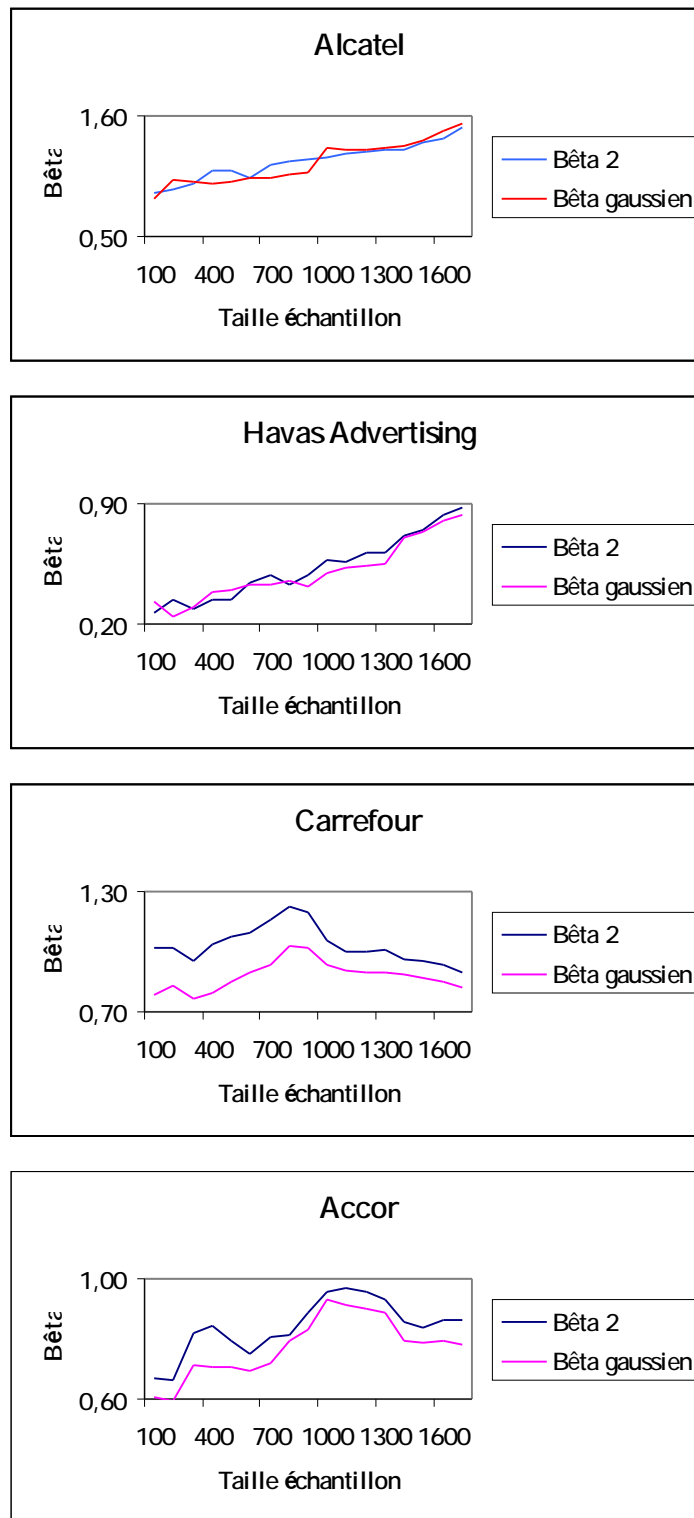


Le coefficient bêta pour le vecteur (Alcatel, CAC40) semble être une fonction à peu près croissante du nombre d'observations. Plus nous travaillons sur un échantillon grand, plus nous avons de chance de conclure que l'action Alcatel va suivre et amplifier les tendances du marché. Les bêtas 1,7-stable et 2-stable diffèrent peu. Le bêta classique évolue par palier. Il est très proche de 1 lorsque le nombre d'observations est inférieur à 1000. Puis il augmente brutalement à 1,3 puis au bout de 1600 observations il franchit un nouveau palier pour atteindre la valeur 1,5. Les bêtas « stables » évoluent plus régulièrement entre 0,8 et 1,5. Nous ne distinguons pas vraiment de paliers.

11.3. Taille optimale d'échantillon pour calculer le bêta « stable »

Le problème que nous rencontrons ici est de déterminer quelle taille d'échantillon est la meilleure pour utiliser le coefficient bêta comme aide à la décision en allocation d'actifs. Nous constatons que la courbe des valeurs du bêta stable coupe à plusieurs reprises la courbe du bêta classique. Il semble donc que pour le couple (Alcatel, CAC40) il existe plusieurs tailles optimale d'échantillon. Pour trouver la taille optimale, taille d'échantillon pour laquelle nous avons systématiquement $\beta = \beta_2$, nous calculons pour les couples (Carrefour, CAC40), (Havas Advertising, CAC40) et (Accor ; CAC40), comme précédemment, la valeur du bêta 2-stable (β_2) et la valeur du bêta classique (β) pour plusieurs tailles d'échantillons.

Figure 58 . Evolution du bêta en fonction de la taille de l'échantillon



Il est difficile de trouver la taille optimale de l'échantillon en regardant les graphiques précédents. L'observation des valeurs des bêtas pour l'action Carrefour laisse envisager que le bêta gaussien converge vers le bêta classique ; nous sommes alors amenés à choisir une grande taille d'échantillon. Mais l'étude des autres graphiques ne confirme pas cette impression.

Il ne semble pas y avoir une taille de l'échantillon optimale pour estimer bêta d'une manière précise. Pour cette raison, nous allons travailler dans la suite avec plusieurs tailles (30, 100 et 200). L'estimation obtenue ne sera certainement pas très bonne mais nous espérons que l'ordre de grandeur du bêta qui permet de comparer si une action est plus sensible au marché qu'une autre sera conservé. En d'autres termes, si l'action A amplifie les variation du marché dans le sens du marché (bêta élevé) et si l'action B est moins corrélée au marché que l'action A voire même anti-corrélée au marché (bêta moins élevé ou négatif), nous espérons que la valeur estimée du bêta-stable de l'action A sera supérieure à la valeur estimée du bêta-stable de l'action B. Nous espérons ainsi que les estimations des bêtas stables pourront nous aider à ordonner les actions selon leur sensibilité au marché ou à un indice. Nous allons vérifier cette propriété du bêta dans le chapitre suivant (pouvoir prédictif du bêta).

Chapitre 12. PROCEDURES D'ALLOCATIONS

Nous venons de voir que selon que nous considérons que le marché est stable ou efficient, nous n'obtenons pas les mêmes valeurs des coefficients bêta. Ceci a une incidence sur la composition des portefeuilles et notamment sur le poids accordé à chaque titre dans le portefeuille. Nous espérons que l'introduction de la loi stable, qui approche mieux la loi des rendements financiers que la loi normale, contribuera à modifier légèrement la composition du portefeuille et améliorera ainsi la performance.

12.1. Stratégies à la hausse et à la baisse

Nous allons tout d'abord élaborer une stratégie qui nous permettra de composer un portefeuille sur un marché stable ou sur un marché efficient.

Supposons que nous disposons de l'évolution des cours d'un grand nombre d'actions pour une période donnée. La procédure suggérée par Black est la suivante :

- * Calculer le rendement de chaque action pour une périodicité donnée sur la durée choisie.
- * Calculer le rendement de l'indice du marché pour la même périodicité et la même période (cet indice peut être soit un indice officiel, soit une moyenne, pondérée ou non, de tous les rendements des actions).
- * Estimer les bêtas de chacune des actions sur la période considérée.
- * Classer les actions par valeur croissante de leur bêta pour la période choisie et grouper les en fonction de leur bêta dans 10 portefeuilles avec le même nombre d'actions : le portefeuille n° 1 regroupant les actions avec les plus grands bêtas et le portefeuille n° 10 regroupant les actions avec les plus petits bêtas.

La composition de ces 10 portefeuilles varie avec le temps, puisque le bêta de chaque action est amené à changer.

Black propose ensuite 3 stratégies s'appuyant sur ces portefeuilles pour la période considérée. Pour mener à bien cette stratégie, nous faisons l'hypothèse que nous savons correctement anticiper l'évolution du marché sur une période à venir. La raison de cette hypothèse est de construire une stratégie reflétant le pouvoir prédictif du bêta.

La première stratégie est la stratégie à la hausse. A chaque date, si nous pensons que le marché va monter sur la période à venir (et par hypothèse, le marché va monter), alors nous investissons en suivant les portefeuille n° 1, n° 2 et n° 3. A l'opposé, si nous pensons que le marché va descendre sur la période à venir (et par hypothèse, nous avons raison), alors nous investissons en suivant les portefeuille n° 8, n° 9 et n° 10. Le but est de profiter de l'effet de levier associé à des grands bêtas dans le premier cas et de minimiser les pertes dans le second cas. Si le bêta a réellement un pouvoir prédictif, alors cette stratégie battra le portefeuille de marché.

La stratégie à la baisse est la stratégie opposée à la stratégie à la hausse. Si le marché monte pour la période à venir, nous investissons suivant les portefeuilles n° 8, n° 9 et n° 10 et si le marché baisse, nous investissons suivant les portefeuilles n° 1, n° 2 et n° 3. Nous nous attendons à ce que cette stratégie sous-performe le portefeuille de marché.

Une troisième stratégie appelée stratégie neutre consiste à suivre l'indice (ou le benchmark). Nous investissons toujours en suivant les n° 4, n° 5, n° 6 et n° 7. Cette stratégie doit être meilleure que la stratégie à la baisse mais moins bonne que la stratégie à la hausse.

12.2. Nos stratégies

Nous nous sommes inspirés des stratégies présentées par Black pour construire nos portefeuilles. La première stratégie est identique à la stratégie à la hausse. Cette stratégie peut être vue comme la stratégie d'un gérant « parfait », parfait dans le sens où le gérant anticipe correctement l'évolution à venir du marché. En d'autres termes, si l'indice monte sur la période à venir, le gérant anticipe cette hausse en mettant dans son portefeuille les actifs avec les plus forts bêtas. A l'inverse si le marché baisse sur la période à venir le gérant, qui a déjà correctement anticipé la baisse (car il ne se trompe jamais sur la tendance du marché), met dans son portefeuille des actions avec des bêtas faibles ou négatifs pour amortir voire même inverser la tendance du marché.

La seconde stratégie ressemble à la stratégie à la baisse. Elle correspond à la stratégie à la hausse d'un gérant qui se trompe systématiquement sur la tendance future du marché. Si l'indice monte sur la période à venir, le gérant qui a anticipé une baisse, met dans son portefeuille les actifs avec les bêtas les plus faibles. A l'inverse si le marché baisse sur la période à venir le gérant, qui a déjà anticipé une hausse (car il se trompe toujours sur la tendance du marché), met dans son portefeuille des actions avec des bêtas forts dans le but d'accentuer cette hausse. Mais au lieu de cela, comme il s'est trompé, le portefeuille accentue la baisse du marché.

La troisième stratégie part du principe que l'indice va évoluer pour la période à venir dans le même sens que pour la période passée. Le gérant alloue donc son portefeuille en adoptant une stratégie à la hausse mais comme il considère que le marché va évoluer dans le même sens que lors de la période passée, il a tendance à se tromper environ une fois sur deux.

Nous appellerons, dans la suite, la première stratégie la stratégie à la hausse, la seconde stratégie la stratégie à la baisse et la troisième stratégie la stratégie neutre.

12.3. Pouvoir prédictif du bêta

Nous appliquons ces stratégies sur 90 actions du marché français cotées au Premier Marché pour lesquelles les cotations journalières sont disponibles du 1^{er} janvier 1998 au 15 juillet 2001. Nous considérons les rendements journaliers (d'une clôture à la clôture suivante). Nous estimons dans un premier temps les bêtas « stables » et « gaussiens » à partir des 30 dernières observations ($n = 30$) puis dans un second temps à partir des 100 dernières observations ($n = 100$). Nous construisons 6 portefeuilles contenant chacun 30 actions : 3 portefeuilles « stables » et 3 portefeuilles « efficients ».

Les deux premiers portefeuilles censés battre le marché seront composés des actions avec les 30 plus forts bêtas (bêta stable pour le portefeuille n° 1 et bêta classique pour le portefeuille n° 2) les périodes où l'indice monte et des actions avec les 30 plus faibles bêtas les périodes où l'indice baisse. Nous souhaitons ainsi accentuer la hausse du marché et amortir ou renverser sa baisse avec nos portefeuille n°1 et 2.

Les deux autres portefeuilles seront constitués à l'opposé des actions avec les 30 plus faibles bêtas (bêta stable pour le portefeuille n° 3 et bêta classique pour le portefeuille n° 4) les périodes où l'indice monte et des actions avec les 30 plus forts bêtas les périodes où l'indice baisse. Nous souhaitons ainsi accentuer la baisse du marché et amortir ou inverser sa hausse avec nos portefeuille n° 3 et 4. Nous nous attendons à ce que ces portefeuilles sous-performent l'indice CAC40 si le bêta a réellement un pouvoir prédictif.

Les deux derniers portefeuilles seront constitués des actions avec les 30 plus forts bêtas (bêta stable pour le portefeuille n° 5 et bêta classique pour le portefeuille n° 6) si la période précédente l'indice a monté et des actions avec les 30 plus faibles bêtas si la période précédente l'indice a baissé. Nous avons remarqué que d'une période à l'autre le marché réagit différemment ; le risque d'anticiper une hausse alors que le marché va baisser ou réciproquement la probabilité d'anticiper une baisse du marché alors que celui-ci monte est de cette manière environ égale à $\frac{1}{2}$. Nous souhaitons ainsi construire des portefeuilles où nous anticipons de manière pseudo-aléatoire les tendances du marché.

Nous supposons que le gérant change la composition de son portefeuille le dernier jour ouvré de la semaine peu avant la fermeture de la bourse. Ainsi les prix de vente et d'achat correspondent au cours de clôture du dernier jour ouvré de la semaine.

La performance du portefeuille depuis sa création, est évaluée à chaque fois que le gérant modifie son portefeuille (c'est à dire chaque vendredi soir), de la manière suivante :

$$R_p(n) = \frac{\sum_{i=1}^{30} p_i P_i(n) - M_0}{M_0}$$

où $P_i(n)$ est le prix de l'action i à la fin de la semaine n (prix de vente),
 M_0 est le montant initial de l'investissement ($n = 1$),
 p_i est le poids de l'action i dans le portefeuille pendant la semaine n .

La performance du portefeuille pendant la semaine n est égale à :

$$R_p(n-1, n) = \frac{\sum_{i=1}^{30} p_i P_i(n) - \sum_{i=1}^{30} p_i P_i(n-1)}{\sum_{i=1}^{30} p_i P_i(n-1)}$$

où $P_i(n)$ est le prix de l'action i à la fin de la semaine n (prix de vente),
 $P_i(n-1)$ est le prix de l'action i à la fin de la semaine $n-1$ (prix d'achat),
 p_i est le poids de l'action i dans le portefeuille durant la semaine n .

Remarquons que $R_p(n) = R_p(n, n-1)$ car nous investissons chaque semaine la valeur totale du portefeuille. Nous avons, par conséquent, pour $n = 1$: $M_0 = \sum_{i=1}^{30} p_i P_i(n-1)$.

12.4. Détermination du poids de l'action en portefeuille

Selon la stratégie choisie, nous déterminons les 30 actions à inclure dans le portefeuille à partir des valeurs des bêtas estimés sur les 90 actions du marché français cotées au Premier Marché que nous avons sélectionnées (voir section précédente 11.3.). Il ne nous reste plus qu'à calculer la proportion de chaque action à introduire dans le portefeuille. Pour cela, nous avons inventé une règle qui est loin d'être utilisable en réalité et qui peu certainement être

améliorée dans le but de diminuer le risque (diversification par ligne et par secteur plus équitable).

Chaque semaine nous isolons les valeurs des bêtas des 30 actions à mettre en portefeuille. Trois cas se présentent alors en pratique :

- Nous cherchons à évoluer dans le sens du marché et tous les bêtas sont positifs. En d'autres termes, si le marché monte, nous cherchons à amplifier la hausse (ou si le marché baisse, nous cherchons à amplifier la baisse) en attribuant le poids le plus fort à l'action avec le bêta le plus élevé, un poids un peu moins fort à l'action avec le deuxième bêta le plus élevé etc... l'action avec le plus faible bêta (parmi les 30 actions sélectionnées) ayant le poids le plus faible.

Le poids p_i de l'action i introduite dans le portefeuille est calculée de la manière suivante :

$$p_i = \frac{b^i}{\sum_{j=1}^{30} b^j} \quad \text{où } \beta^i \text{ représente la valeur du coefficient bêta du titre } i \text{ (calculé à partir n}$$

dernières observations).

- Nous cherchons à évoluer dans le sens contraire du marché et tous les bêtas sont positifs. Autrement dit, si le marché monte nous composons un portefeuille dont la performance attendue sera inférieure au marché et si l'indice perd de la valeur nous constituons un portefeuille dans l'objectif de battre l'indice. Pour cela, nous accordons à l'action une importance d'autant plus grande dans le portefeuille que son bêta est faible.

Le poids p_i de l'action i introduite dans le portefeuille est alors calculée comme suit :

$$p_i = \frac{1}{b^i \sum_{j=1}^{30} \frac{1}{b^j}} \quad \text{où } \beta^i \text{ représente la valeur du coefficient bêta du titre } i \text{ (calculé à partir des n}$$

dernières observations).

® Nous cherchons à évoluer dans le sens contraire du marché et certains bêtas sont négatifs. Dans tous les cas, le nombre d'actions ayant un bêta négatif parmi les 90 valeurs du marché choisies initialement est faible. Ces actions se comptent sur les doigts de la main. Nous ne nous trouvons jamais dans le cas où la majorité des bêtas sont négatifs. Notre méthode consiste à renverser la tendance du marché avec notre portefeuille en investissant en grande partie sur des actions avec des bêtas négatifs. Nous choisissons d'investir 50% de la valeur totale du portefeuille sur des actions avec des bêtas négatifs et 50% de la valeur totale du portefeuille sur des actions avec des bêtas positifs ou nuls. Remarquons au passage que le bêta est nul si le rendement journalier est indépendant du marché c'est à dire si le rendement est constant sur les n dernières observations (i.e. les plus récentes observations) ; dans notre cas, la valeur de n est suffisamment grande et les actions sont suffisamment liquides pour que ceci ne se produise pas. Nous calculons le poids des actions à mettre en portefeuille de la façon suivante où β^i représente la valeur du coefficient bêta du titre i (calculé à partir des n dernières observations) et nb est le nombre d'actions ayant un bêta négatif.

Si le bêta de l'action est négatif : $p_i = \frac{|b^i|}{\sum_{j=1}^{nb} |b^j|} \times 0,5$. Nous accordons ainsi d'autant plus

d'importance à l'action que son bêta est fortement négatif.

Si le bêta de l'action est positif : $p_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{30} \frac{1}{|b^j|}} \times 0,5$. Le poids attribué à l'action dans le

portefeuille est important pour les bêtas faibles et moins important pour les bêtas les plus élevés.

Nous ne tenons pas compte ici des règles de diversification exigées par la réglementation pour les gérants professionnels. Nous ne tenons pas compte non plus de la liquidité et des frais de gestion qui contribuent à diminuer la performance réelle d'un portefeuille. Notre objectif n'est pas de comparer les performances réalisées avec notre modèle à celle des portefeuilles existants mais d'établir si oui ou non l'introduction de la loi stable dans le modèle à la place de la loi normale améliore la performance. Les contraintes que rencontrent les gérants n'ont donc pas forcément besoin d'être prises en compte.

Chapitre 13. APPLICATION A L'ALLOCATION D'ACTIFS AVEC N=30

Nous sommes incapables de trouver une valeur optimale de la taille de l'échantillon à utiliser pour calculer le bêta. Pour cette raison, nous avons décidé d'estimer les bêtas d'abord à partir des 30 dernières observations puis à partir des 100 et 200 dernières observations. Dans chaque cas, nous allons juger si l'introduction de la loi stable à la place de la loi normale améliore significativement les résultats.

Dans ce paragraphe, nous composons les portefeuilles 1 à 6 définis dans le chapitre précédent. Nous calculons les bêtas à partir des 30 dernières observations. Les rendements considérés sont les rendements logarithmiques journaliers.

13.1. Pouvoir prédictif du coefficient bêta

Le tableau recense le nombre de semaine où les portefeuilles des gérants obtiennent une meilleure performance (sur la semaine) que l'indice. Les portefeuilles 1 et 2 correspondent à la stratégie à la hausse, Les portefeuilles 3 et 4 sont associés à la stratégie à la baisse et portefeuilles 5 et 6 à la stratégie neutre. Le premier investissement a lieu le 20 février 1998. Le gérant recompose son portefeuille toutes les semaines.

Figure 59. Performance hebdomadaire des portefeuilles par rapport à l'indice

Numéro du portefeuille	Nombre de semaines total	Nombre de semaine où le portefeuille du gérant bat l'indice	Taux de réussite
1 ^(s)	176	114	64,8 %
2	176	118	67 %
3 ^(s)	176	72	40,9 %
4	176	65	36,9 %
5 ^(s)	176	87	49,4 %
6	176	89	50,6 %

^(s) portefeuille sur un marché stable

Si le portefeuille sur un marché « stable » surperforme le portefeuille sur un marché « normal », nous allons attribuer à notre variable statistique la valeur 1 et la valeur 0 dans le cas contraire. Nous supposons que la probabilité d'obtenir 1 est constante dans le temps et est égale à p . Ainsi la variable statistique suit une loi binomiale qui converge vers une loi normale centrée réduite à la fin des 176 semaines considérées. Cette variable qui correspond aux nombres de semaines où le portefeuille bat l'indice nous permet de calculer un intervalle de confiance pour déterminer si le portefeuille obtient une performance significativement meilleure ou moins bonne que celle de l'indice. Statistiquement, nous trouvons que le portefeuille bat significativement l'indice si il fait une meilleure performance que le marché durant au moins 99 semaines. A l'opposé, la performance du portefeuille du gérant est significativement moins bonne que celle du portefeuille du marché si elle est supérieure à la performance de l'indice pendant moins de 77 semaines. Dans les autres cas, nous ne pouvons pas dire si le portefeuille bat régulièrement le marché.

Les conclusions sont les suivantes :

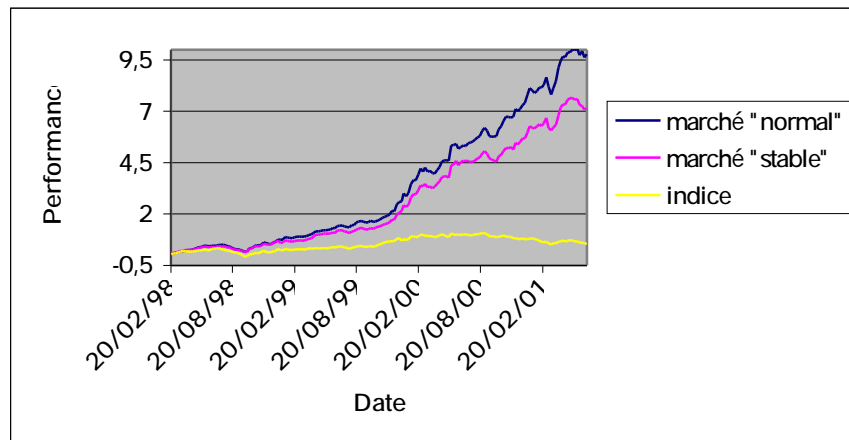
1. La stratégie à la hausse surperforme significativement le portefeuille indiciel.
2. La stratégie à la baisse sous-performe significativement le portefeuille de marché.
3. La stratégie neutre tend à suivre le portefeuille indiciel.

Par conséquent, nous concluons que le bêta a un pouvoir prédictif.

13.2. *Suivi des performances*

Les graphes suivants montrent les performances des portefeuilles pour la stratégie à la hausse (portefeuille 1 et 2), pour la stratégie à la baisse (portefeuille 3 et 4) et pour la stratégie neutre (portefeuille 5 et 6) ainsi que la performance du portefeuille de marché (indice CAC40). Le premier investissement a lieu le 20 février 1998. Le gérant recompose son portefeuille toutes les semaines.

Figure 60. Performance des portefeuilles 1 (marché « stable ») et 2 (marché « normal ») depuis le 20 février 1998 entre le 20 février 1998 et le 6 juillet 2001



Lorsque le gérant ne se trompe jamais sur la tendance haussière ou baissière de l'indice pour la période à venir nous constatons que le portefeuille sur un marché « stable » sous-performe le portefeuille construit à partir d'un marché « normal ».

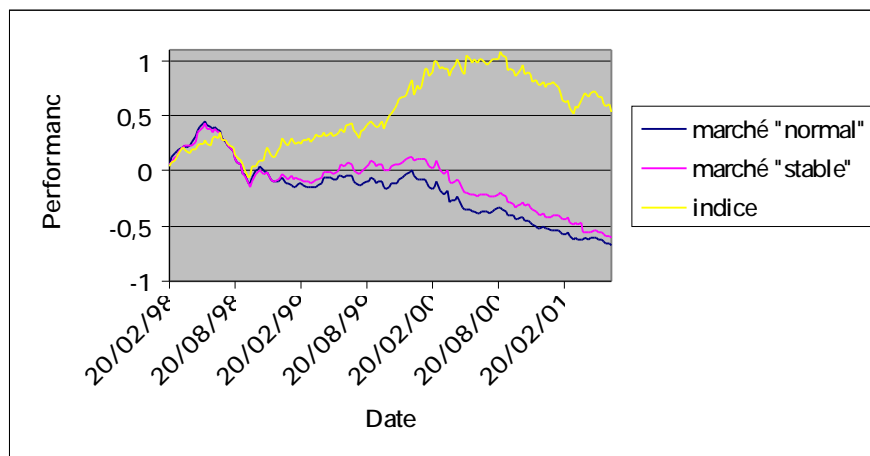
Nous avons relevé les performances de ces portefeuilles au bout d'un an, de deux ans, de trois ans et de trois ans et demi.

Figure 61. Performances des portefeuilles

	Au 19/02/1999	Au 18/02/2000	Au 23/02/2001	Au 06/07/2001
Portefeuille « stable »	65,5 %	295,8 %	628,8 %	714,3 %
Portefeuille « normal»	82,1 %	364,6 %	816,1 %	978,2 %
Indice	26,6 %	85,8 %	62,2 %	53,2 %

Les performances du portefeuille « normal » sont meilleures que celles du portefeuille « stable » lorsque le gérant anticipe correctement l'évolution à venir du marché.

Figure 62. Performance des portefeuilles 3 (marché « stable ») et 4 (marché « normal ») depuis le 20 février 1998 entre le 20 février 1998 et le 6 juillet 2001



Lorsque le gérant se trompe à chaque fois sur la tendance à venir du marché, nous constatons qu'il perd un peu moins d'argent sur un marché « stable » que sur marché « normal ».

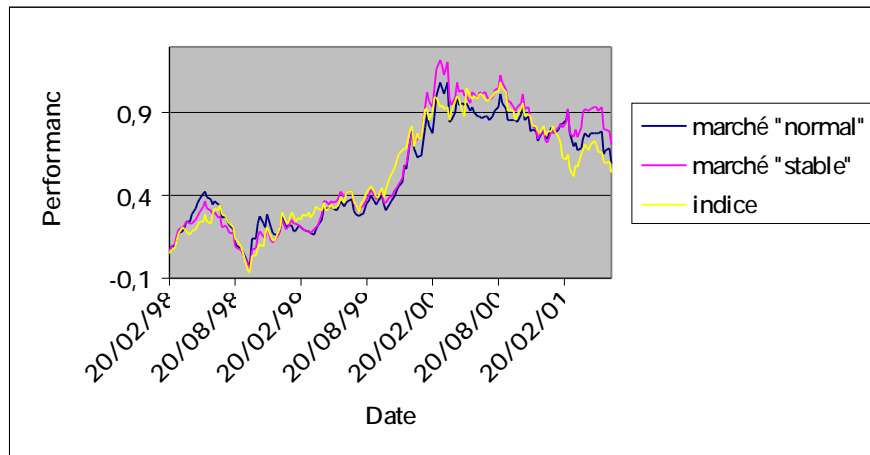
Nous avons relevé les performances de ces portefeuilles au bout d'un an, de deux ans, de trois ans et de trois ans et demi.

Figure 63. Performances des portefeuilles

	Au 19/02/1999	Au 18/02/2000	Au 23/02/2001	Au 06/07/2001
Portefeuille « stable »	- 8,6 %	+ 2,9 %	- 44,5 %	-60,7 %
Portefeuille « normal»	-12 %	-16,4 %	-57,7 %	- 67,3 %
Indice	26,6 %	85,8 %	62,2 %	53,2 %

En supposant que le marché est fractal, le gérant perd moins d'argent qu'en supposant que les rendements suivent une loi gaussienne.

Figure 64. Performance des portefeuilles 5 (marché « stable ») et 6 (marché « normal ») depuis le 29 mai 1998 entre le 29 mai 1998 et le 6 juillet 2001



Lorsque le gérant se trompe une fois sur deux de manière aléatoire sur la tendance du marché, il semble que le portefeuille constitué sur le marché « stable » ait une meilleure performance que le portefeuille constitué sur le marché « normal » lorsque le marché est baissier (c'est à dire depuis septembre 2000). La performance du portefeuille du gérant sur le marché « stable » et le marché « normal » a tendance à suivre la performance de l'indice.

Nous avons relevé les performances de ces portefeuilles au bout d'un an, de deux ans, de trois ans et de trois ans et demi.

Figure 65. Performances des portefeuilles

	Au 19/02/1999	Au 18/02/2000	Au 23/02/2001	Au 06/07/2001
Portefeuille « stable »	20,4 %	97,1 %	84,2 %	70,7 %
Portefeuille « normal »	21,1 %	82,1 %	85,9 %	59,2 %
Indice	26,6 %	85,8 %	62,2 %	53,2 %

Les performances à un an et à deux ans du portefeuille « normal » sont légèrement meilleures que celles du portefeuille « stable ». Mais les performances à un an et à presque 3 ans et demi sont bien meilleures pour le portefeuille « stable » que pour le portefeuille « normal ». Plus le temps passe est plus le portefeuille stable bat l'indice.

13.3. Améliorations apportées avec la loi stable

Nous allons maintenant chercher à savoir si sous l'hypothèse d'une loi stable avec $\alpha < 2$, chaque stratégie est meilleure que sous l'hypothèse d'une loi normale. En d'autres termes, nous souhaitons évaluer si l'introduction de la loi stable améliore les stratégies.

Nous allons baser notre test sur la fréquence des sous-performances et des surperformances de chacune des stratégies sur un marché « stable » et sur un marché « normal ». Si le portefeuille sur un marché « stable » surperforme le portefeuille sur un marché « normal », nous allons attribuer à notre variable statistique la valeur 1 et la valeur 0 dans le cas contraire. Nous supposons que la probabilité d'obtenir 1 est constante dans le temps et est égale à p . Ainsi la variable statistique suit une loi binomiale qui converge vers une loi normale centrée réduite à la fin des 176 semaines considérées.

Figure 66. Comparaison des performances du portefeuille « stable » et du portefeuille « normal »

Stratégie	Nombre de périodes où le portefeuille « stable » bat le portefeuille « normal »	Taux de réussite p en % (Loi stable meilleure que loi normale)
A la hausse	76	43,2 %
Neutre	95	54 %
A la baisse	107	60,8 %

La loi stable apporte une amélioration significative si \hat{p} est supérieure à 56,2 % (intervalle de confiance à 95 %). La loi normale est significativement meilleure que la loi stable si \hat{p} est inférieure à 43,8 % (intervalle de confiance à 95 %).

Nous concluons que pour la stratégie à la hausse et la stratégie neutre, utiliser la loi stable n'apporte pas d'amélioration par rapport à la loi normale. Dans le cas de la stratégie à la hausse, la valeur empirique de p sort légèrement de l'intervalle de confiance à 95 % mais reste à la limite de sa borne inférieure ; pour cette raison, nous n'affirmons pas avec certitude que la loi normale est meilleure que la loi stable pour la stratégie à la hausse. Par contre pour la stratégie à la baisse, un portefeuille construit avec une loi stable est significativement meilleur

qu'un portefeuille construit à partir d'une loi normale. Si le gérant est vraiment mauvais, il est donc préférable de redéfinir la stratégie avec une loi stable.

Associons la stratégie à la hausse à un excellent gérant qui anticipe parfaitement les tendances du marché, la stratégie neutre à un gérant qui se trompe une fois sur deux et la stratégie à la baisse au comportement d'un gérant qui a systématiquement tort. Ne connaissant pas les capacités d'un gérant à anticiper la tendance du marché pour la période à venir, il semble préférable d'utiliser avec $n = 30$ une loi stable, si l'objectif visé est une performance optimale quel que soit le gérant (afin d'améliorer les performances dans les cas où le gérant se trompe souvent).

Figure 67. Statistiques sur les portefeuilles « normaux » et « stables »

Sur la période étudiée (fin février 1998 à début juillet 2001), l'indice baisse durant 80 semaines soit dans 45,45% des cas.

Stratégie	
A la hausse	Nombre de fois où la loi stable est meilleure que la loi normale * lorsque l'indice baisse : 41 soit dans 51,25 % des cas où l'indice baisse, * lorsque l'indice monte : 35 soit dans 36,46 % des cas où l'indice monte.
Neutre	Nombre de fois où la loi stable est meilleure que la loi normale * lorsque l'indice baisse : 47 soit dans 58,75 % des cas où l'indice baisse, * lorsque l'indice monte : 48 soit dans 50 % des cas où l'indice monte.
A la baisse	Nombre de fois où la loi stable est meilleure que la loi normale * lorsque l'indice baisse : 51 soit dans 63,75 % des cas où l'indice baisse, * lorsque l'indice monte : 56 soit dans 58,33 % des cas où l'indice monte.

Selon les statistiques du tableau ci-dessus, il semble préférable de constituer son portefeuille à partir d'une loi normale lorsque le gérant ne se trompe jamais sur la tendance du marché pour la semaine à venir (stratégie à la hausse). En effet lorsque l'indice monte, ce gérant réalise plus souvent une meilleure performance en considérant la loi normale plutôt que la loi stable. Si notre gérant se trompe une fois sur deux sur la tendance du marché pour la semaine à venir (stratégie neutre), nous pouvons obtenir plus souvent une meilleure performance en utilisant une loi stable plutôt qu'une loi normale. En effet, dans plus de 58 % des cas, le portefeuille « stable » fait une meilleure performance que le portefeuille « normal » pendant les semaines où l'indice baisse. Dans le cas où l'indice monte, le portefeuille « stable » bat le portefeuille

« normal » une fois sur deux. Remarquons que nous avons déjà constaté ceci sur le graphique représentant l'évolution de la performance de chacun des portefeuilles entre le 20 février 1998 et le 6 juillet 2001. Enfin, il est significatif que le portefeuille « stable » bat plus souvent le portefeuille « normal » lors de la stratégie à la hausse.

Ainsi, statistiquement et quel que soit notre anticipation du marché, il semble préférable d'utiliser la loi stable que la loi normale lorsque l'indice baisse. Cependant lorsque l'indice monte, la conclusion est plus mitigée. La loi normale améliore la performance du portefeuille lorsque le gérant anticipe le plus souvent correctement la tendance du marché. Mais la loi stable semble être plus adaptée lorsque le gérant anticipe mal la tendance du marché.

Depuis le début du mois de juin 2000, le marché baisse, l'indice a perdu près de 25 % de sa valeur entre le 2 juin 2000 et le 6 juillet 2001. Durant cette période composée de 57 semaines, nous comptons 30 semaines où l'indice a diminué (soit 53,6 %). Ainsi dans un marché baissier, la proportion de semaines où l'indice diminue reste à peu près égale à 50%. Pendant cette période le portefeuille stable (géré par un gérant qui se trompe une fois sur deux) a obtenu une performance de - 14,87 % alors que le portefeuille normal (suivi par le même gérant) a fait une performance de -18,81 %. De même entre le 1^{er} septembre 2000 et le 6 juillet 2001, l'indice a perdu 26,6 % de sa valeur, le portefeuille stable a perdu 19,6 % et le portefeuille normal a baissé de 20,8 %.

Ceci conforte notre position qui consiste à utiliser une loi stable plutôt qu'une loi normale sur un marché baissier.

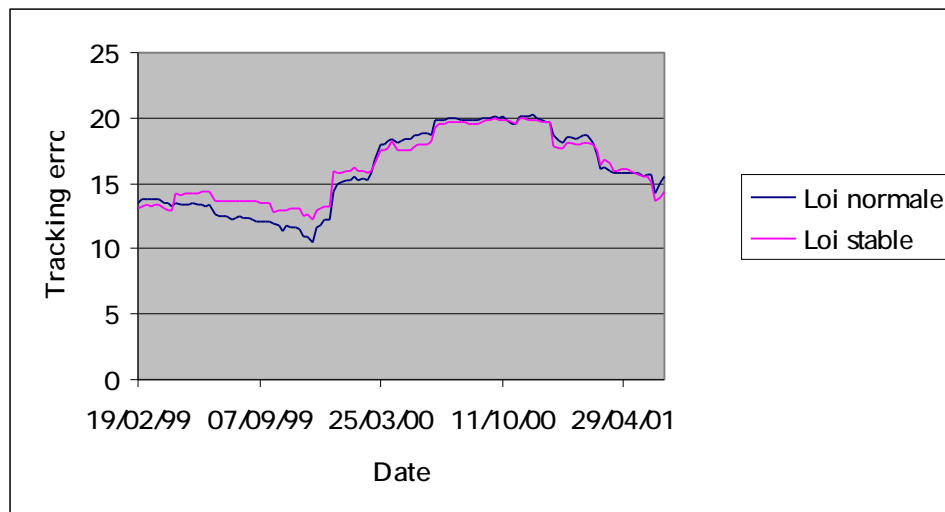
13.4. Evolution des tracking-errors

La tracking-error mesure le risque statistique de divergence entre la performance d'un portefeuille et celle d'un benchmark. La tracking-error est égal à l'écart-type non biaisé de la série des écarts entre les performances logarithmiques hebdomadaires du portefeuille et des performances du benchmark. Cet écart-type est annualisé.

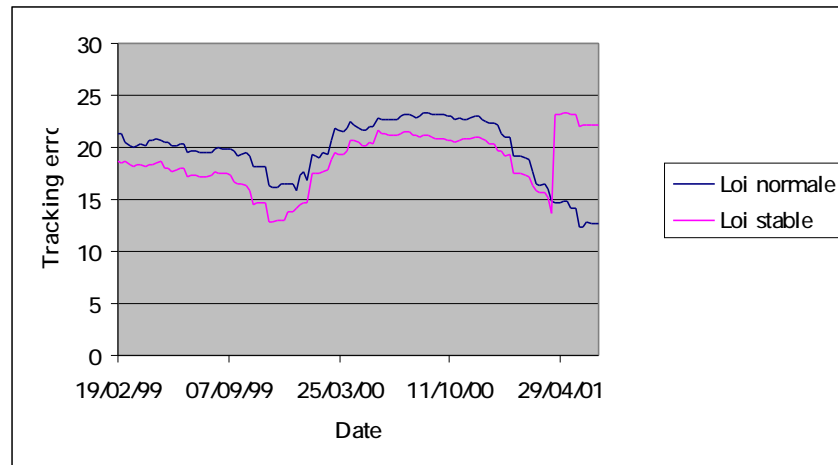
$$Te_{\text{hebd}} = \sqrt{\frac{52 \times \sum_{i=1}^{52} [(P_{\log_i} \text{portefeuille} - P_{\log_i} \text{benchmark}) - (\bar{P}_{\log_i} \text{portefeuille} - \bar{P}_{\log_i} \text{benchmark})]^2}{51}}$$

Nous avons calculé la tracking-error annualisée basée sur les rendements hebdomadaires pour chaque portefeuille.

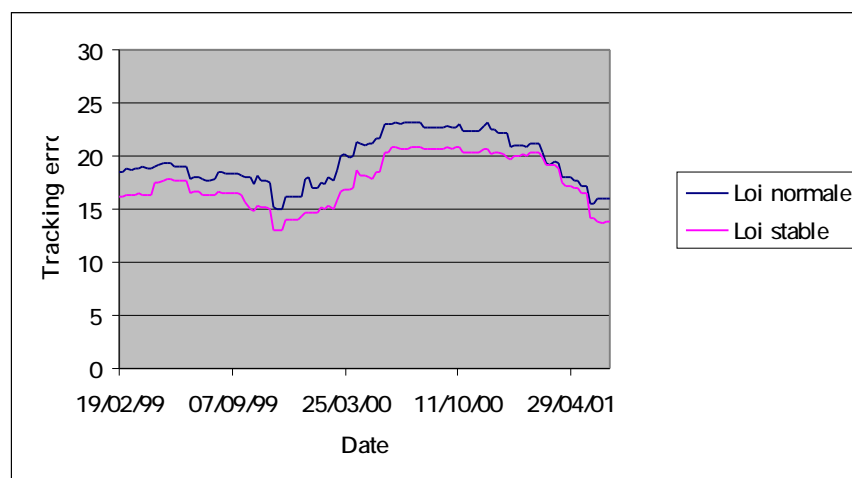
Figure 68. Evolution de la Tracking-error pour les portefeuilles 1 et 2



La tracking-error du portefeuille « stable » a tendance à être supérieure à celle du portefeuille « normal » en 1999. Leurs évolutions sont très similaires en 2000 et le premier semestre 2001.

Figure 69. Evolution de la Tracking-error pour les portefeuilles 3 et 4

Ce graphe correspond au comportement d'un gérant qui se trompe systématiquement sur l'évolution future du marché, la tracking-error associé au portefeuille « stable » est inférieure à celle associé à un portefeuille « normal » jusqu'au milieu du mois d'avril 2001. Nous observons ensuite une augmentation brutale de la tracking-error pour le portefeuille stable. Ceci est la conséquence d'une très forte variation du portefeuille qui s'explique par le très mauvais choix d'allocation des actifs en portefeuille effectué par le gérant au milieu du mois d'avril 2001.

Figure 70. Evolution de la Tracking error pour les portefeuilles 5 et 6

La tracking error est toujours plus faible avec un portefeuille « stable » lorsque on considère que l'évolution à venir du marché est fonction de son évolution passée.

Chapitre 14. APPLICATION A L'ALLOCATION D'ACTIFS AVEC N = 100

Dans ce paragraphe, nous composons à nouveau les portefeuilles 1 à 6 définis dans le chapitre précédent mais cette fois-ci nous calculons les bêtas à partir des 100 dernières observations. Les rendements considérés sont encore les rendements logarithmiques journaliers. Cette section est très similaire à la section précédente, nous cherchons de cette manière à voir si il existe un bêta pour lequel le portefeuille « stable » surperforme le portefeuille « normal ».

14.1. Pouvoir prédictif du coefficient bêta

Comme pour $n = 30$, nous comptons le nombre de semaines où les portefeuilles battent l'indice. Les résultats sont résumés dans le tableau.

Figure 71. Performance hebdomadaire des portefeuilles par rapport à l'indice

Numéro du portefeuille	Nombre de semaines total	Nombre de semaine où le portefeuille du gérant bat l'indice	Taux de réussite
1 ^(s)	162	104	64,2 %
2	162	105	64,8 %
3 ^(s)	162	51	31,5 %
4	162	52	32,1 %
5 ^(s)	162	82	50,6 %
6	162	80	49,4 %

^(s) portefeuille sur un marché stable

L' intervalle de confiance a 95 % sous H_0 : « Le portefeuille du gérant suit le portefeuille de marché » est légèrement modifié et est égal à $[70 ; 92]$ mais les conclusions restent inchangées :

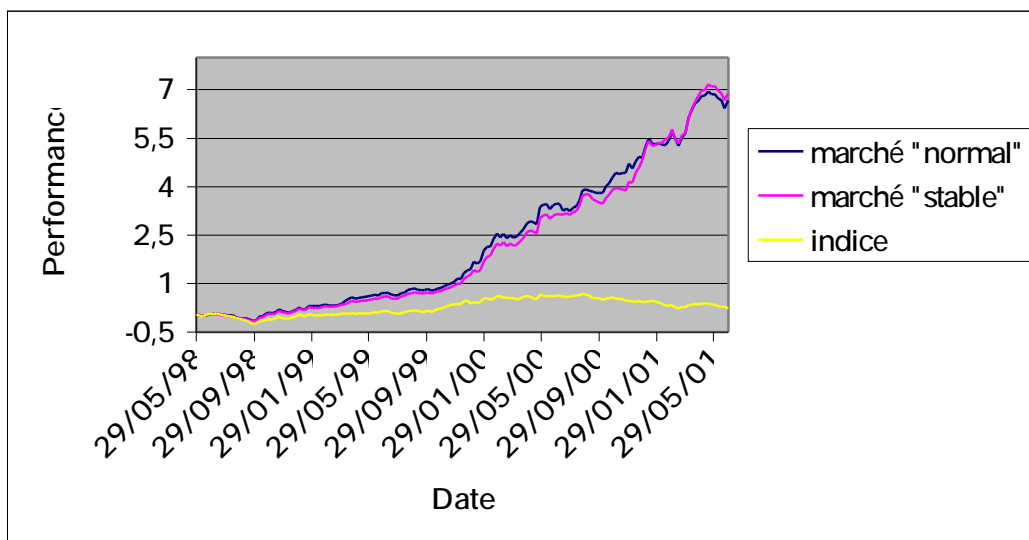
1. La stratégie à la hausse surperforme significativement le portefeuille indiciel.
2. La stratégie à la baisse sous-performe significativement le portefeuille de marché.
3. La stratégie neutre tend à suivre le portefeuille indiciel.

Par conséquent, nous concluons que le bêta a un pouvoir prédictif.

14.2. Suivi des performances

Les graphes suivants montrent les performances des portefeuilles pour la stratégie à la hausse (portefeuille 1 et 2), pour la stratégie à la baisse (portefeuille 3 et 4) et pour la stratégie neutre (portefeuille 5 et 6) ainsi que la performance du portefeuille de marché (indice CAC40). Le premier investissement a lieu le 29 mai 1998. Le gérant recompose son portefeuille toutes les semaines.

Figure 72. Performance des portefeuilles 1 (marché « stable ») et 2 (marché « normal ») depuis le 29 mai 1998 entre le 29 mai 1998 et le 6 juillet 2001



Lorsque le gérant ne se trompe jamais sur la tendance haussière ou baissière de l'indice pour la période à venir nous constatons que le portefeuille sur un marché « stable » sous-performe légèrement le portefeuille construit à partir d'un marché « normal » surtout sur la période où l'indice monte (de décembre 1998 à avril 2000).

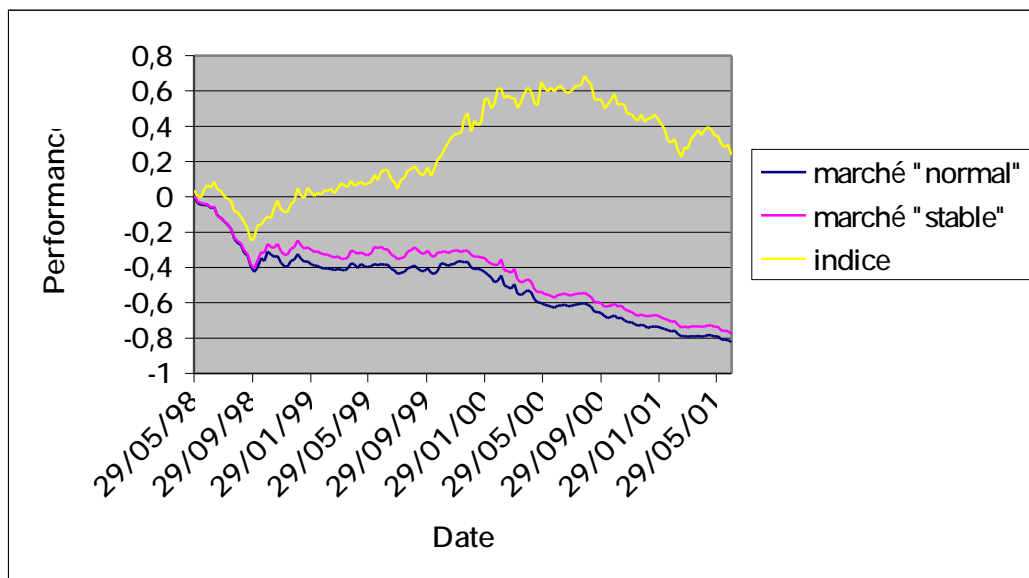
Nous avons relevé les performances de ces portefeuilles au bout d'un an, de deux ans et de trois ans.

Figure 73. Performances des portefeuilles

	Au 28 mai 1999	Au 02 juin 2000	Au 01 juin 2001
Portefeuille « stable »	47,2 %	302,9 %	709,3 %
Portefeuille « normal»	59,2 %	337,1 %	685,3 %
Indice	6,8 %	65,1 %	34,6 %

Les performances à 1 an et à 2 ans sont meilleures avec le portefeuille « normal » mais les performances à 3 ans sont plus élevées pour le portefeuille « stable ». Ce renversement de situation est peut-être dû au fait que l'hypothèse des marchés fractals est plus efficace sur les marchés baissiers.

Figure 74. Performance des portefeuilles 3 (marché « stable ») et 4 (marché « normal ») depuis le 29 mai 1998 entre le 29 mai 1998 et le 6 juillet 2001



Lorsque le gérant se trompe à chaque fois sur la tendance à venir du marché, nous constatons qu'il perd un peu moins d'argent sur un marché « stable » que sur marché « normal ».

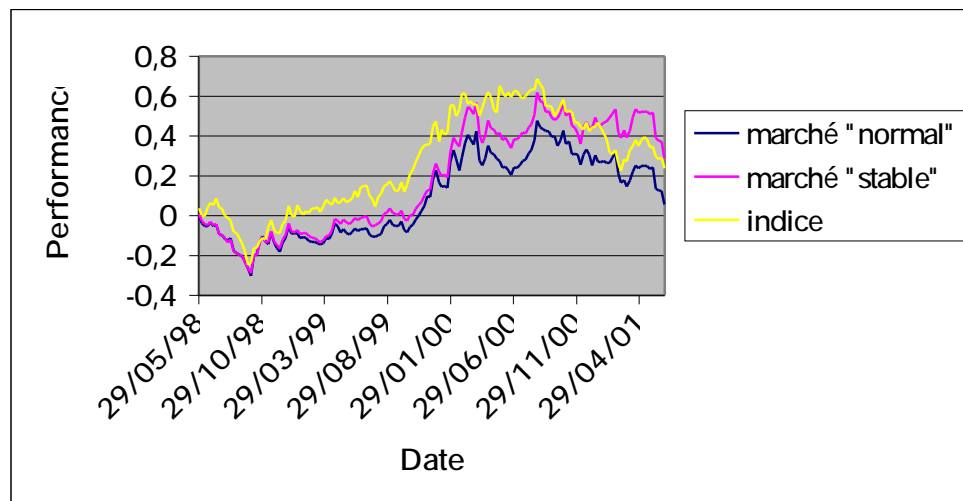
Nous avons relevé les performances de ces portefeuilles au bout d'un an, de deux ans et de trois ans.

Figure 75. Performances des portefeuilles

	Au 28 mai 1999	Au 02 juin 2000	Au 01 juin 2001
Portefeuille « stable »	-32,5 %	-53,8 %	- 73,7 %
Portefeuille « normal»	-39,3 %	-60,1 %	-79,2 %
Indice	6,8 %	65,1 %	34,6 %

Les conclusions sont les même que celle du graphique : le gérant perd moins d'argent lorsqu'il travaille sous l'hypothèse que les rendements des actifs suivent une loi stable.

Figure 76. Performance des portefeuilles 5 (marché « stable ») et 6 (marché « normal ») depuis le 29 mai 1998 entre le 29 mai 1998 et le 6 juillet 2001



Lorsque le gérant se trompe une fois sur deux de manière aléatoire sur la tendance du marché, nous observons que le portefeuille constitué sur le marché « stable » a une meilleure performance que le portefeuille constitué sur le marché « normal ». La performance du portefeuille du gérant sur le marché stable a tendance à sous-performer l'indice dans un marché haussier mais il rattrape (et parfois bat) l'indice dans les périodes où le marché baisse.

Nous avons relevé les performances de ces portefeuilles au bout d'un an, de deux ans et de trois ans.

Figure 77. Performances des portefeuilles

	Au 28 mai 1999	Au 02 juin 2000	Au 01 juin 2001
Portefeuille « stable »	- 4,2 %	37,8 %	51,7 %
Portefeuille « normal»	- 9,4 %	24,1 %	24,3 %
Indice	6,8 %	65,1 %	34,6 %

Chaque année la performance du portefeuille « stable » est meilleure que celle du portefeuille « normal ». Au bout de trois ans, le portefeuille « stable » obtient une performance deux fois supérieure à celle du portefeuille « normal ».

14.3. Améliorations apportées avec la loi stable

Nous essayons maintenant d'évaluer si l'introduction de la loi stable améliore les stratégies utilisées généralement avec une loi gaussienne. Nous allons baser notre test sur la fréquence des sous performances et sur-performances de chacune des stratégies sur un marché « stable » puis sur un marché « normal ». Si le portefeuille sur un marché « stable » surperforme le portefeuille sur un marché « normal », nous allons attribuer à notre variable statistique la valeur 1 et la valeur 0 dans le cas contraire. Nous supposons que la probabilité d'obtenir 1 est constante dans le temps et est égale à p. Ainsi la variable statistique suit une loi binomiale qui converge vers une loi normale centrée réduite à la fin des 162 semaines considérées.

Figure 78. Comparaison des performances des portefeuilles « stable » et « normal »

Stratégie	Nombre de périodes où le portefeuille « stable » bat le portefeuille « normal »	Pourcentage de réussite p (Loi stable meilleure que loi normale)
A la hausse	85	52,5 %
Neutre	91	56,2 %
A la baisse	102	63 %

La loi stable apporte une amélioration significative si \hat{p} est supérieure à 56,46 % (intervalle de confiance à 95 %).

Nous concluons que pour la stratégie à la hausse et la stratégie neutre, utiliser la loi stable n'apporte pas d'amélioration par rapport à la loi normale. Par contre pour la stratégie à la baisse, un portefeuille construit avec une loi stable est significativement meilleur qu'un portefeuille construit à partir d'une loi normale. Si le gérant est vraiment mauvais, il est donc préférable de redéfinir la stratégie avec une loi stable.

Associons la stratégie à la hausse à un excellent gérant qui anticipe parfaitement les tendances du marché, la stratégie neutre à un gérant qui se trompe une fois sur deux et la stratégie à la baisse au comportement d'un gérant qui a systématiquement tort. Ne connaissant pas les aptitudes d'un gérant à anticiper la tendance du marché pour la période à venir, il semble préférable d'utiliser avec $n = 100$ une loi stable, si l'objectif visé est une performance optimale quel que soit le gérant (afin d'améliorer les performances dans les cas où le gérant se trompe souvent).

Figure 79. Statistiques sur les portefeuilles « normaux » et « stables »

Sur la période étudiée (début juin 1998 à début juillet 2001), l'indice baisse durant 76 semaines soit dans 46,91% des cas.

Stratégie	
A la hausse	Nombre de fois où la loi stable est meilleure que la loi normale * lorsque l'indice baisse : 46 soit dans 60,53 % des cas où l'indice baisse, * lorsque l'indice monte : 39 soit dans 45,35 % des cas où l'indice monte.
Neutre	Nombre de fois où la loi stable est meilleure que la loi normale * lorsque l'indice baisse : 49 soit dans 64,47 % des cas où l'indice baisse, * lorsque l'indice monte : 42 soit dans 48,84 % des cas où l'indice monte.
A la baisse	Nombre de fois où la loi stable est meilleure que la loi normale * lorsque l'indice baisse : 53 soit dans 69,74 % des cas où l'indice baisse, * lorsque l'indice monte : 49 soit dans 56,98 % des cas où l'indice monte.

Selon les statistiques du tableau ci-dessus, il semble préférable de constituer son portefeuille à partir d'une loi stable lorsque l'indice diminue. En effet, dans plus de 60 % des cas, le portefeuille « stable » réalise une meilleure performance que le portefeuille « normal »

pendant les semaines où l'indice baisse. Il n'est pas significatif que la performance du portefeuille « stable » soit moins bonne que la performance du portefeuille « normal », les semaines où l'indice prend de la valeur. Ainsi, statistiquement et quel que soit notre anticipation du marché, il semble préférable d'utiliser la loi stable que la loi normale.

Depuis le début du mois de juin 2000, le marché baisse, l'indice a perdu près de 25 % de sa valeur entre le 2 juin 2000 et le 6 juillet 2001. Durant cette période composée de 57 semaines, nous comptons 30 semaines où l'indice a diminué (soit 53,6 %). Ainsi dans un marché baissier, la proportion de semaines où l'indice diminue reste à peu près égale à 50%. Pendant cette période le portefeuille stable (géré par un gérant qui se trompe une fois sur deux) a obtenu une performance de -9,1 % alors que le portefeuille normal (suivi par le même gérant) a fait une performance de -17,2 %. De même entre le 1^{er} septembre 2000 et le 6 juillet 2001, l'indice a perdu 26,6 % de sa valeur, le portefeuille stable a perdu 20,5 % et le portefeuille normal a baissé de 28,6 %.

Ceci conforte notre position qui consiste à utiliser une loi stable plutôt qu'une loi normale sur un marché baissier.

14.4. Evolution des tracking-errors

Nous avons calculé la tracking error annualisée basée sur les rendements hebdomadaires pour chaque portefeuille.

Figure 80. Evolution de la Tracking error pour les portefeuilles 1 et 2

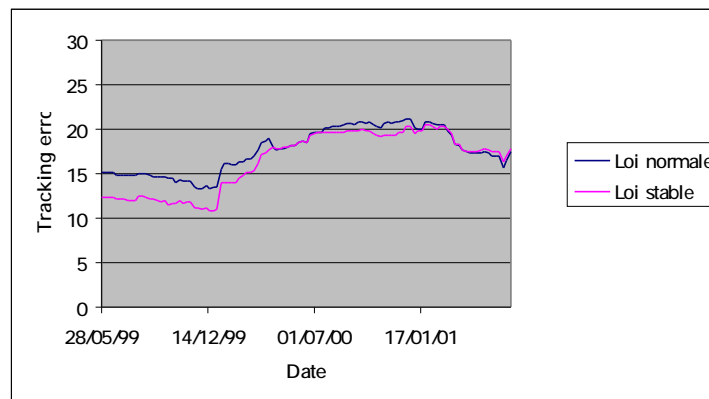
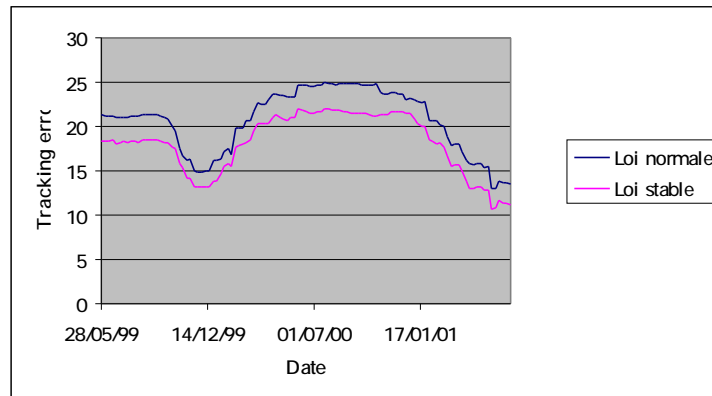
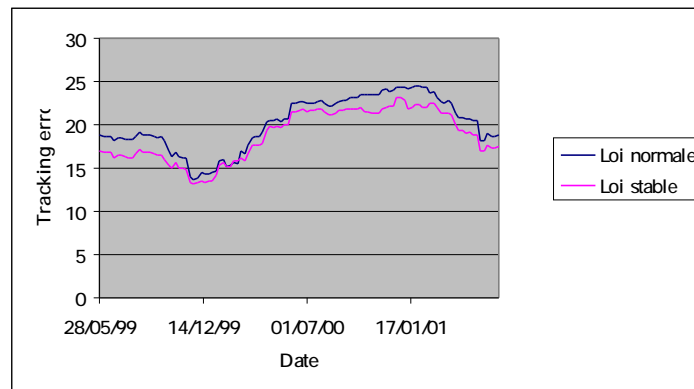


Figure 81. Evolution de la Tracking error pour les portefeuilles 3 et 4**Figure 82. Evolution de la Tracking error pour les portefeuilles 5 et 6**

La tracking-error associée au portefeuille « stable » est toujours moins forte que la tracking-error associée au portefeuille « normal » sauf peut-être sur un marché baissier dans le cas où le gérant ne se trompe jamais quant à l'évolution à venir du marché.

Chapitre 15. APPLICATION A L'ALLOCATION D'ACTIFS

AVEC $N = 200$

Le cas qui nous intéresse le plus est le cas où le gérant se trompe environ une fois sur deux. Ce gérant suppose que l'indice va évoluer comme la semaine précédente, c'est donc un comportement que l'on peut reproduire en pratique sans connaître les cours à venir. C'est sur ce cas que nous allons maintenant réfléchir. Il semble que plus le nombre d'observations (n) sur lesquelles nous estimons les bêtas est grand, plus les performances du portefeuille « stable » se distinguent de celles du portefeuille normal par :

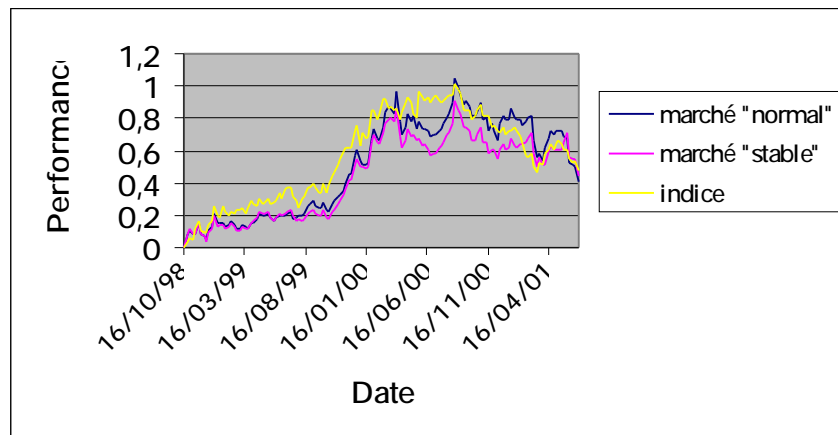
- Une plus grande régularité des résultats : le portefeuille « stable » bat le portefeuille « normal » plus souvent.
- Des différences de performances plus élevées dans le temps : les performances du portefeuille « stable » sont d'autant meilleures que celles du portefeuille « normal » que n est grand.
- Des performances meilleures lorsque l'indice baisse : plus n est grand, plus le portefeuille « stable » obtient de meilleures performances hebdomadaires que le portefeuille « normal ».
- Une tracking error pour le portefeuille « stable » plus faible que celle du portefeuille « normal ».

Ces constatations nous incitent à simuler des portefeuilles avec des valeurs croissantes de n . Nous recommençons donc l'expérience avec n égal à 200.

15.1. Suivi des performances

Nous composons à nouveau les portefeuilles 5 et 6. Nous restreignons notre étude à ces deux portefeuilles. Nous calculons, cette fois-ci, les bêtas à partir des 200 dernières observations. Les rendements considérés sont toujours les rendements logarithmiques journaliers. Le premier investissement a lieu le 16 octobre 1998. Le gérant recompose son portefeuille toutes les semaines.

Figure 83. Performance des portefeuilles 3 (marché « stable ») et 4 (marché « normal ») depuis le 16 octobre 1998 entre le 16 octobre 1998 et le 6 juillet 2001



Les performances des portefeuilles du gérant sur un marché fractal ou sur un marché efficient ont tendance à suivre celles du portefeuille de marché (indice CAC40). La performance du portefeuille « stable » est légèrement inférieure à celle du portefeuille « normal ».

Nous avons relevé les performances de ces portefeuilles au bout d'un an, de deux ans et à la date de clôture du portefeuille.

Figure 84. Performances des portefeuilles

	Au 15 octobre 1999	Au 20 octobre 2000	Au 06 juillet 2001
Portefeuille « stable »	18,5 %	66,9 %	43,8 %
Portefeuille « normal»	22,7 %	81,6 %	40,3 %
Indice	33,5 %	81,4 %	47,5 %

Il apparaît que le portefeuille « normal » bat légèrement le portefeuille « stable » au bout d'un an. Cet écart de performance s'accroît encore au profit du portefeuille « normal » au bout de deux ans. Par contre, le portefeuille « stable » bat le portefeuille « normal » à la date de clôture, le 6 juillet 2001.

De plus, le portefeuille « stable » bat le portefeuille « normal » 71 fois (sur 142) soit dans exactement 50 % des cas. Ainsi le portefeuille stable n'est pas "meilleur" que le portefeuille normal.

Enfin nous terminons notre étude en séparant les cas où l'indice CAC40 baisse sur la semaine ou monte sur la semaine. Sur la période étudiée (mi-octobre 1998 à début juillet 2001), l'indice baisse durant 62 semaines soit dans 43,66 % des cas.

Figure 85. Statistiques sur le portefeuille « normal » et sur le portefeuille « stable »

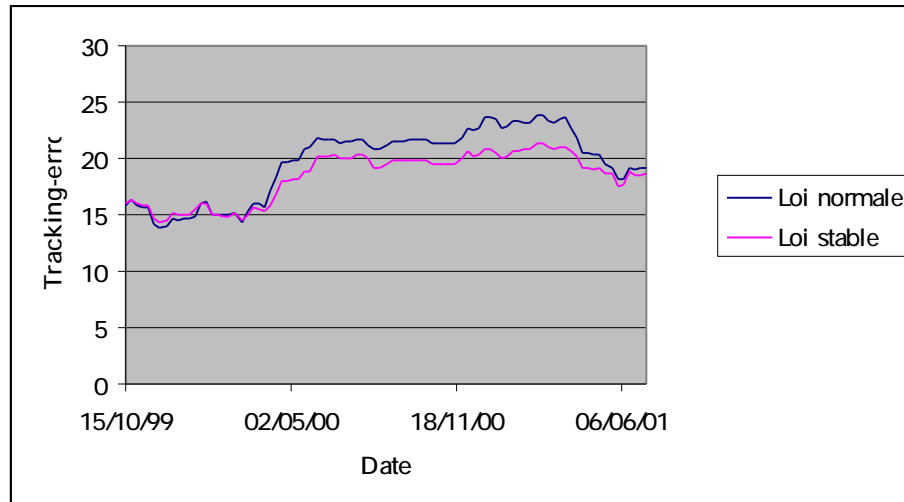
Stratégie	
Neutre	Nombre de fois où la loi stable est meilleure que la loi normale * lorsque l'indice baisse : 33 soit dans 53,23 % des cas où l'indice baisse, * lorsque l'indice monte : 38 soit dans 47,5 % des cas où l'indice monte.

Ces statistiques permettent de conclure que le portefeuille « normal » et le portefeuille « stable » sont équivalents en terme de performance. Autrement dit, nous ne pouvons pas dire d'un point de vue statistique, lequel des deux portefeuilles est le meilleur.

15.2. Evolution des tracking-errors

Enfin, nous avons calculé la tracking-error de chaque portefeuille.

Figure 86. Evolution de la tracking error des portefeuilles 5 et 6



La tracking-error du portefeuille « stable » et celle du portefeuille « normal » sont très proches l'une de l'autre au dernier trimestre de l'année 1999 puis la tracking-error du portefeuille « stable » devient plus faible que celle du portefeuille « normal ».

Dans le cas où nous estimons les bêtas à partir des 200 dernières observations journalières, nous ne pouvons pas dire que le portefeuille « stable » bat régulièrement le portefeuille normal. Nous avons vu graphiquement que la performance du portefeuille « normal » tend à être légèrement supérieure à celle du portefeuille « stable ». Cependant la tracking-error du portefeuille « normal » est plus forte que celle du portefeuille « stable ».

Pour conclure cette partie, nous ajouterons, qu'il semble que le portefeuille « stable » est préférable au portefeuille « normal » lorsque nous estimons les bêtas sur les 100 derniers rendements logarithmiques journaliers ($n = 100$). Dans le cas où $n = 30$ et où $n = 200$, les résultats sont plus mitigés. Nous ne pouvons pas dire pour ces cas, que le portefeuille « stable » apporte une nette amélioration par rapport au portefeuille « normal ».

Partie V :

Etude du risque

L'objectif de stabilité financière des clients impose aux professionnels de la gestion de la trésorerie d'approfondir leur connaissance des outils et des techniques nécessaires pour reconnaître et gérer le risque. L'étude du risque représente un enjeu important pour les établissements financiers car elle permet de contrôler les éventuelles pertes. Le mot risque est employé en général pour désigner plusieurs types de risque. Nous avons d'abord le risque de marché qui est un risque pris par le client. La réglementation impose aux établissements bancaires de mesurer ce risque et d'avoir un niveau de fonds propre satisfaisant. Le risque le plus important pour les gérants est le risque de dispersion, il mesure l'écart par rapport à un instrument de référence (benchmark, par exemple). Enfin un risque important pour les sociétés de gestion est le risque opérationnel. C'est le risque d'une erreur administrative, d'une erreur de compréhension entre un opérateur et son client, etc.

Nous allons étudier dans cette partie le risque de marché qui recouvre trois catégories de risques : le risque de position, le risque de contrepartie et le risque de liquidité. Le risque de marché est encore peu regardé par les financiers car il ne les concerne pas. Peu d'études ont été menée sur le sujet. Quelques chercheurs ont tenté de définir le risque sous l'hypothèse que les rendements suivaient une loi stable mais leurs études n'ont pas parues pas être rigoureuses. Les résultats sont intuitifs et n'ont pas été testés. Je vais montrer dans cette partie les points de leurs études qui me paraissent douteux.

Nous allons dans un deuxième temps parler de la *Value at Risk* qui est une mesure globale et probabilisée des risques de marché et présenter quelques méthodes pour la calculer.

Chapitre 16. RISQUE D'UN PORTEFEUILLE STABLE

La notion de risque en finance est très proche de celle d'incertitude. Le risque d'un titre financier peut ainsi avoir plusieurs origines. On distingue notamment les risques économiques (politiques, naturels, d'inflation) qui menacent les flux liés aux titres et relèvent du monde économique, et les risques financiers (liquidité, change, taux) qui ne portent pas directement sur ces flux et sont propres à la sphère financière. Quelle que soit sa nature, tout risque se traduit par une fluctuation de la valeur du titre financier. Le risque d'un titre financier se mesure à la volatilité de sa valeur (ou de son taux de rentabilité) : plus la volatilité est élevée, plus le risque est fort, et inversement.

Ce chapitre est consacré à l'étude du risque de marché d'un portefeuille dont les rendements suivent une loi α -stable. La variance étant infinie pour une loi stable de paramètre α inférieur à 2, nous ne pouvons plus définir le risque avec la variance. Les mathématiciens proposent d'utiliser le paramètre d'échelle pour estimer le risque sur un marché stable. Nous allons vérifier si cette mesure de risque est cohérente et nous allons apprécier la qualité des estimateurs proposés.

16.1. Risque de marché

Nous allons étudier dans cette partie le risque de marché qui recouvre trois catégories de risques : le risque de position, le risque de contrepartie et le risque de liquidité.

- Ø Le risque de position est le risque de perte dû à une évolution défavorable de certains paramètres tels que les taux d'intérêt, les prix des créances, les cours de change des devises, des actions, des matières premières etc.

- Ø Le risque de contrepartie mesure le niveau de défaillance des établissements avec lesquels ont été contractées des opérations de marchés.

- ∅ Le risque de liquidité mesure la probabilité de ne pas pouvoir réaliser une opération faute d'intervenants ou de prix sur le marché.

Le risque de marché est également appelé le risque systématique.

16.2. Notion de risque sur un marché « stable »

Décrire le risque par un seul nombre engendre une perte importante d'information. Cependant cette décision n'est pas absurde car décider d'accepter ou non un risque est une variable binaire dont la réponse est oui ou non.

Bawa et Lindenberg [3] ont montré que si plusieurs lois stables ont les mêmes valeurs des paramètres α , β et μ alors nous pouvons les ordonner en fonction du risque en regardant leur paramètre d'échelle σ . Etant donnée une fonction d'utilité concave (aversion au risque), nous allons préférer la loi la moins risquée en choisissant la loi avec la plus petite valeur du paramètre σ . Le paramètre d'échelle permet donc de mesurer le risque.

Supposons que les rendements suivent conjointement une loi stable symétrique d'exposant caractéristique α alors le risque est représenté par $r(q) = S^a({}^t q \cdot R) = \int_{S_d} |{}^t q \cdot s|^\alpha \Gamma(ds)$ où θ est le d-vecteur des poids des actifs en portefeuille et Γ est la mesure spectrale de vecteur aléatoire R des rentabilités des actifs sur la sphère unité S_d et σ est le paramètre d'échelle du portefeuille.

Signalons que lorsque le paramètre α varie d'une action à l'autre alors il nous est impossible de déterminer le risque du portefeuille étant donné qu'il n'existe actuellement aucune théorie mathématique nous permettant de considérer ensemble des lois stables avec des exposants caractéristiques différents. Nous supposons donc lorsque nous estimons un risque sur un marché stable que tous les rendements des actifs en portefeuille suivent une loi α -stable de même paramètre α . Pour que les changements de prix négatifs ou positifs soient pondérés de la même manière, il faut que les rendements centrés $R - \mu$, où μ est le paramètre de localisation

de la loi de R, soient symétriques. Nous faisons donc l'hypothèse que les rendements centrés $R-\mu$ sont conjointement $S\alpha S$.

Un aspect important de la gestion du risque est la diversification. Etudions un portefeuille contenant n actifs conjointement $S\alpha S$ de paramètre d'échelle s_i avec $1 \leq i \leq n$. Nous attribuons le poids θ_i à l'actif i du portefeuille. Le paramètre d'échelle de ce portefeuille est égal à $\left((q_1 s_1)^a + (q_2 s_2)^a + \dots + (q_n s_n)^a \right)^{\frac{1}{a}}$ d'après la propriété 1 donné dans la section 5.3.

Pour appuyer leur impression que le paramètre d'échelle puisse représenter une mesure du risque dans un portefeuille « stable », Gamrowski [19], Mittnik et Rachev [38] adoptent le raisonnement suivant :

"Fama considère n actifs α -stable i.i.d. et un portefeuille contenant ces actifs dans les même proportions. Alors le paramètre d'échelle de ce portefeuille est égal à :

$$\left(\left(\frac{S}{n} \right)^a + \dots + \left(\frac{S}{n} \right)^a \right)^{\frac{1}{a}} = n^{\frac{1-a}{a}} S$$

L'exposant de n est une fonction décroissante de α qui s'annule en $\alpha = 1$. Par conséquent, lorsque $1 < \alpha < 2$, plus nous mettons de titres en portefeuille, plus nous diminuons le risque ; c'est le principe de diversification. Si α est inférieur à 1 alors plus nous mettons d'actifs, plus le portefeuille devient risqué . "

Rappelons que ce raisonnement s'appuie sur l'hypothèse que tous les actifs ont le même paramètre d'échelle. Cette hypothèse est très restrictive et incompatible avec la réalité. Il aurait été préférable de généraliser cette approche, ce qui n'est pas évident apparemment.

16.3. Estimateurs du risque

Nous avons trouvé plusieurs estimateurs du risque $r(\theta)$.

Cheng et Rachev proposèrent d'estimer le risque d'un portefeuille stable à partir de la mesure spectrale dont un estimateur est fourni dans la section 9.2. Notons θ le d -vecteur des poids des actifs dans le portefeuille, R le d -vecteur des taux de rentabilité conjointement $S\alpha S$ des actifs du portefeuille et $\hat{r}(q)$ l'estimateur du risque alors :

$$\hat{r}(\theta) = \hat{S}_R^{\hat{\alpha}} ({}^t q \cdot R) = \int_{S_d} |{}^t q \cdot s|^{\hat{\alpha}} \hat{\Gamma}(ds) = \|R\|_{\hat{\alpha}}$$

où $\|R\|_{\hat{\alpha}}$ désigne la norme de covariation de R définie dans le paragraphe 8.4.

${}^t \theta$ est le vecteur transposé de θ

$\hat{\Gamma}$ est la mesure spectrale estimée de vecteur aléatoire R sur la sphère unité S_d . Elle est estimée dans la section 9.2. par $\Phi_n(\theta)$.

$\hat{\alpha}$ est l'estimateur de α .

Le risque est donc estimé par la variation de R . Cet estimateur est fortement consistant et asymptotiquement normal mais il exige un grand échantillon pour fournir une bonne précision.

Pour obtenir plus d'information sur le risque d'un portefeuille stable, nous invitons le lecteur à lire Cheng et Rachev [10] et Rachev et Xin [46].

Bertrand Gamrowski propose dans sa thèse un autre estimateur du risque basé sur les moments existants.

$$\hat{r}_p(q) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |R_j|^p, \quad 0 < p < \alpha \leq 2$$

où (R_1, \dots, R_N) est le N -vecteur des rentabilités (de moyenne nulle) du portefeuille sur une période donnée. R_t représentant la rentabilité du portefeuille entre les dates t et $t + 1$.

Le comportement asymptotique de cette famille d'estimateurs est décrit dans Gamrowski [19].

Rappelons (voir propriété 4 de la section 5.3.) que si une variable aléatoire X suit une loi stable d'exposant caractéristique α ($\alpha < 2$) alors pour tout $p \in]0 ; \alpha[$, nous avons $E|X|^p < \infty$ et pour tout $p > \alpha$, nous avons $E|X|^p = \infty$.

Le premier problème de cet estimateur consiste à évaluer la valeur du paramètre p la plus raisonnable.

Le second problème de cet estimateur est qu'il est basé sur les moments. Si p et p' sont deux réels différents compris strictement entre 0 et α alors nous ne pouvons pas comparer $\hat{r}_p(q)$ et $\hat{r}_{p'}(q)$. Ces risques ne sont pas comparables car ils ne font pas intervenir les mêmes moments. Il serait plus rigoureux d'estimer le risque par :

$$\hat{r}_p(q) = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |R_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 0 < p < \alpha$$

Gamrowski a considéré les rendements en valeur absolue pour éviter de se retrouver avec un risque négatif.

Nous travaillons avec des actifs ayant les mêmes valeurs des paramètres α et β . Lorsque ces conditions ne sont pas réunies alors il est impossible de mesurer le risque.

16.4. Estimations du risque d'une action

Nous considérons 11 actions du Premier Marché choisies au hasard parmi les actions sélectionnées dans la partie IV et dont les cotations sont disponibles depuis le 1^{er} janvier 1980. Nous travaillons avec 5647 rendements logarithmiques centrés pour chaque actions portant sur la période allant du 1^{er} janvier 1980 au 23 août 2001. Les rendements sont exprimés en pourcentage et les dividendes y sont inclus. Nous allons estimer le risque de chacune de ces actions avec plusieurs méthodes.

16.4.1. Estimateur de Cheng et Rachev

Nous estimons pour chaque action la mesure spectrale à partir des rendements logarithmiques journaliers centrés $R_i - \mu_i$, puis nous estimons la variation $[R_i - \mu_i, R_i - \mu_i]_{\alpha}^{(n)}$ avec $\hat{a} = 1,5$ (colonne 2); $\hat{a} = 1,7$ (colonne 3) et $\hat{a} = 2$ (colonne 4). Le tableau suivant regroupe les variations des 11 actions sélectionnées pour plusieurs valeurs de l'exposant caractéristique α classées par ordre croissant du risque avec $\hat{a} = 1,7$.

Figure 87. Estimation du risque via la variation

Nom de l'action	$[R_i - \mu_i, R_i - \mu_i]_{1,5}^{(n)}$	$[R_i - \mu_i, R_i - \mu_i]_{1,7}^{(n)}$	$[R_i - \mu_i, R_i - \mu_i]_2^{(n)}$
Danone	0,46	0,52	0,63
Lafarge	0,61	0,71	0,93
Accor	0,61	0,71	0,91
Sagem	0,59	0,73	1,01
Total Fina	0,64	0,74	0,95
Essilor Intl.	0,62	0,74	0,97
Peugeot SA	0,64	0,77	1,00
Michelin	0,7	0,83	1,10
CGIP	0,73	0,87	1,17
Galeries Lafayette	0,85	1,07	1,50
Vallourec	0,98	1,22	1,77

Le classement des actions suivant leur risque diffèrent légèrement selon les valeurs de \hat{a} .

16.4.2. Estimateur de McCulloch

Nous estimons les paramètres α et σ par la méthode de McCulloch et nous en déduisons l'estimateur de risque $\hat{S}^{\hat{a}}(R_i - m_i)$. Nous calculons aussi l'estimateur lorsque $\hat{a} = 2$ ($\hat{S}^2(R_i - m_i)$). Le tableau suivant contient les estimations du risque pour les 11 actions sélectionnées classées par ordre croissant de risque.

Figure 88. Estimation du risque par la méthode de McCulloch

Nom de l'action	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{S}^{\hat{\alpha}}(R_i - m_i)$	$\hat{S}^2(R_i - m_i)$
Sagem	1,19	0,71	0,67	0,5
Danone	1,57	0,87	0,8	0,76
Accor	1,47	0,97	0,96	0,94
Essilor Intl.	1,45	0,98	0,97	0,96
Lafarge	1,49	0,98	0,97	0,96
Total Fina	1,54	1,04	1,06	1,08
CGIP	1,45	1,06	1,09	1,12
Michelin	1,53	1,1	1,16	1,21
Peugeot SA	1,52	1,1	1,16	1,21
Galeries Lafayette	1,38	1,14	1,2	1,3
Vallourec	1,45	1,31	1,48	1,72

L'estimateur de McCulloch du paramètre d'échelle σ est très proche de 1 pour la majorité des actions. L'exposant caractéristique estimé est à peu près égal à 1,5 sauf pour l'action Sagem où il vaut 1,19.

Etant donné que l'estimateur de σ est proche de 1, l'estimateur du risque obtenu avec la méthode de McCulloch est souvent proche de 1. Nous remarquons que la valeur de $\hat{\alpha}$ ($\hat{\alpha} = 1$, $\hat{\alpha} = 2$ ou $\hat{\alpha}$ égal à la valeur estimée de α par la méthode de McCulloch) n'influence pas le classement des actions en fonction de leur risque.

16.4.3. Estimateur du risque de Gamrowski

Nous estimons le risque en utilisant l'estimateur fourni par Bertrand Gamrowski ($\hat{r}_p(q)$) en choisissant successivement $p = 1$; $p = 1,2$; $p = 1,5$ et $p = 2$. Etant donné que nous allons comparer dans le prochain paragraphe cet estimateur avec la variance et $\hat{S}^{\hat{\alpha}}$ avec $\hat{\alpha} = 2$, nous choisissons de travailler avec cet estimateur et non avec l'estimateur proche de l'écart type que nous avons proposé dans la section 15.3.

Figure 89. Estimation du risque pour plusieurs actions

Nom de l'action	$\hat{r}_1(q)$	$\hat{r}_{1,2}(q)$	$\hat{r}_{1,5}(q)$	$\hat{r}_2(q)$
Danone	1,13	1,27	1,59	2,56
Sagem	1,28	1,55	2,18	4,51
Accor	1,33	1,56	2,07	3,68
Lafarge	1,34	1,57	2,07	3,66
Essilor Intl.	1,36	1,61	2,17	3,93
Total Fina	1,38	1,62	2,17	3,92
Peugeot SA	1,42	1,67	2,25	4,1
Michelin	1,46	1,75	2,38	4,42
CGIP	1,5	1,80	2,51	4,84
Galeries Lafayette	1,65	2,04	2,94	5,99
Vallourec	1,84	2,33	3,46	7,51

Lorsque $p = 2$ nous retrouvons la variance du cas gaussien. L'action Sagem devient beaucoup plus risquée que la majorité des autres actions lorsque p est égal à 2 ; ce qui n'est pas le cas pour les autres valeurs de p .

16.4.4. Variance empirique

Enfin, dans le cas gaussien, nous estimons le risque du titre par sa variance empirique à partir des rendements logarithmique centrés exprimés en pourcentage.

Figure 90. Estimation du risque dans le cas gaussien par la variance

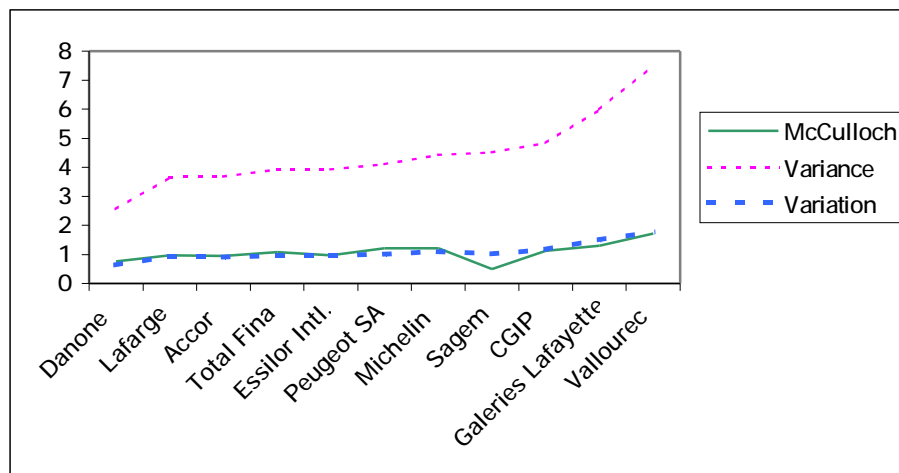
Nom de l'action	Var($R_i - \mu_i$)
Danone	2,56
Lafarge	3,66
Accor	3,68
Total Fina	3,92
Essilor Intl.	3,93
Peugeot SA	4,1
Michelin	4,42
Sagem	4,51
CGIP	4,84
Galeries Lafayette	5,99
Vallourec	7,51

16.5. Qualité de l'estimation du risque

Nous testons dans ce paragraphe l'estimateur du risque sur des chroniques financières. Le problème est que nous ne connaissons pas une mesure précise du risque qui nous permettrait de savoir quel estimateur du risque donne les meilleurs résultats.

Nous avons estimé le risque sur plusieurs titres dans le cas gaussien en utilisant la variance, l'estimateur de McCulloch et la variation avec $\hat{\alpha} = 2$. Nous allons ainsi pouvoir apprécier les écarts d'estimation, mais nous n'allons pas pouvoir décider de cette manière quel est l'estimateur le plus précis.

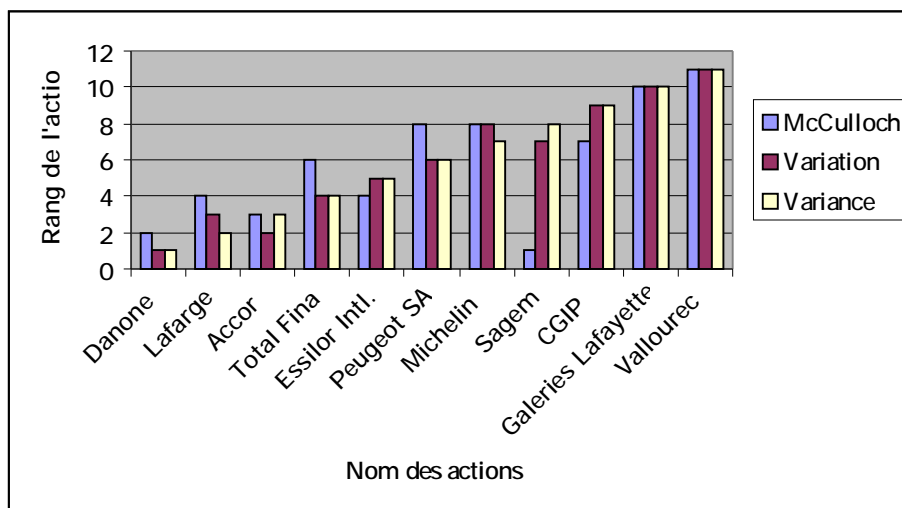
Figure 91. Comparaison des estimations du risque



Nous avons classé les actions (en abscisse) par ordre croissant de la variance. Nous constatons que bien que l'ordre de grandeur ne soit pas conservé dans le cas gaussien par les estimations du risque suivant la méthode de McCulloch et suivant la variation, le classement reste grosso modo identique sauf pour l'action Sagem qui semble être parmi les moins risquées lorsque nous utilisons la méthode de McCulloch et parmi les plus risquées dans les autres cas. Il apparaît que ces mesures du risque sont corrélées sauf pour l'action Sagem.

Le rang varie légèrement d'une action à l'autre suivant l'estimateur du risque considéré. Le financier peut être amené à prendre des décisions différentes selon l'estimateur de risque qu'il utilise.

Figure 92. Rang des actions par rapport à leur risque



Nous avons également comparé les estimations du risque dans le cas non gaussien. Nous avons classé les actions par ordre croissant de leur estimation de la variation pour $\hat{\alpha} = 1,7$ sur le graphique 76.

Figure 93. Estimation du risque dans le cas non gaussien

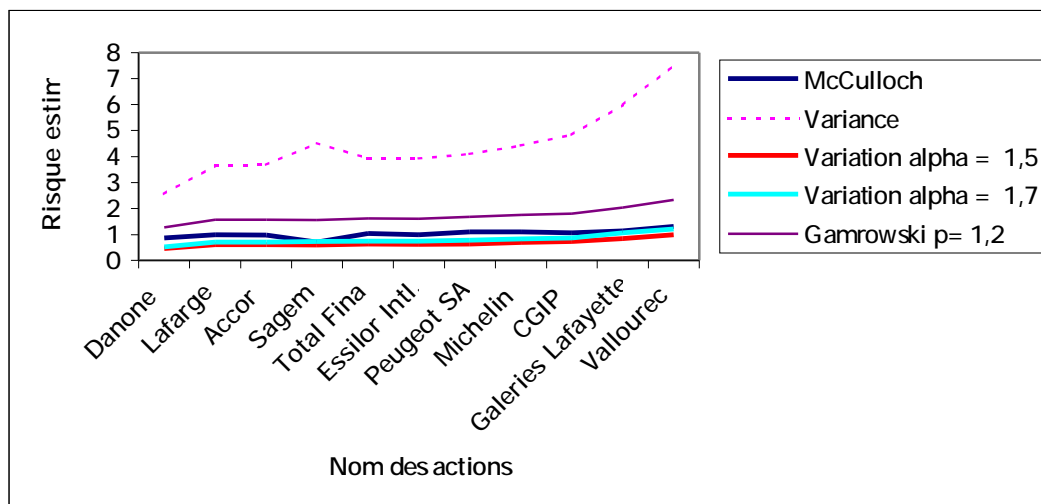
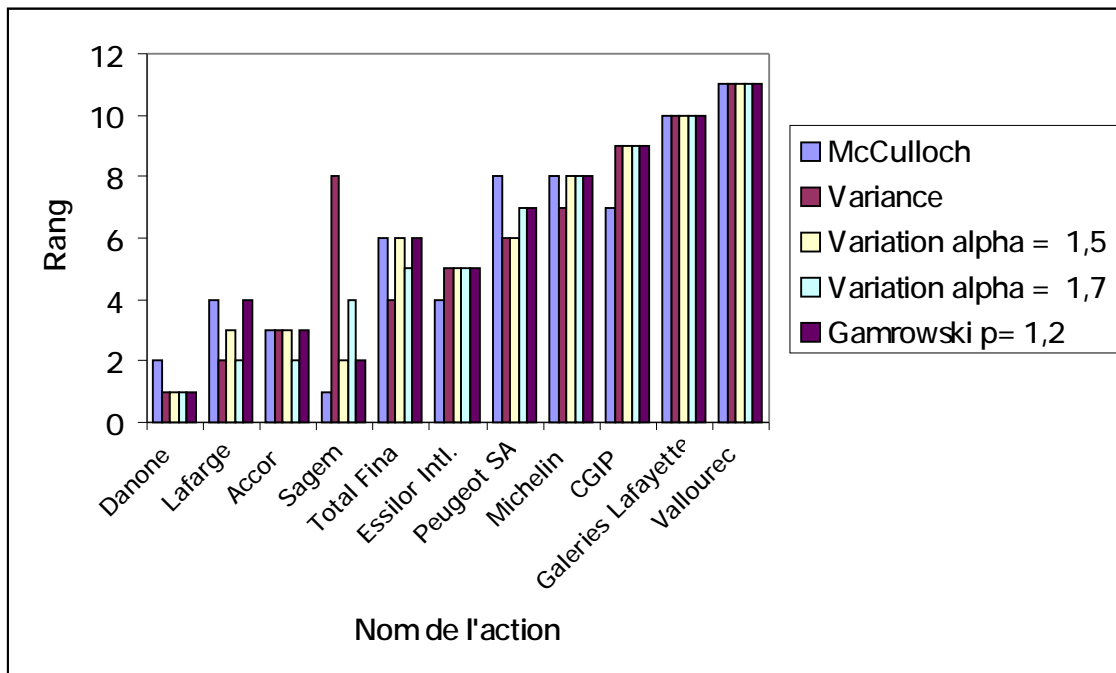


Figure 94. Rang des action selon leur risque estimé

Les conclusions sont peut différentes du cas gaussien.

Personne ne met en doute l'importance de considérer le risque en matière d'analyse d'investissement, mais ce que constitue le risque et comment il est mesuré restent controversés. Nous avons donné plusieurs estimateurs du risque dans le cas d'un marché « stable ». Nous avons vu que les estimations ne sont pas identiques selon les estimateurs choisis. Ces divergences peuvent amener le financier à prendre des décisions différentes selon l'estimateur qu'il utilise.

Notre problème est que nous sommes dans l'incapacité de dire quel estimateur est le meilleur. Certains mathématiciens ont tenté de résoudre ce problème en proposant des classes d'estimateurs acceptables en terme de risque financier.

16.6. Mesure de risque cohérente

Artzner, Delbaen, Eber et Heath [2] proposent 4 axiomes valables pour évaluer une mesure de risque. Si la mesure de risque considérée vérifie ces axiomes alors elle n'est pas absurde pour apprécier un risque.

Définition : Une *mesure de risque* $\rho(W)$ peut être vue comme une fonction de distribution d'un portefeuille W . Si elle satisfait les 4 axiomes suivants alors elle est dite *cohérente*.

Soient W_1 et W_2 deux portefeuilles différents tels qu'il n'existe pas $a \in \mathfrak{R}$ avec $W_1 = aW_2$.

1. Monotonie: Soient W_1 et W_2 deux portefeuilles tels que les rendements du portefeuille W_1 soient systématiquement supérieurs à ceux du portefeuille W_2 . Nous avons :

$$\rho(W_1) \leq \rho(W_2).$$

Le dépôt de garantie du portefeuille qui obtient les meilleurs résultats est inférieur à celui de l'autre portefeuille.

2. Invariance par translation : Pour tout réel k et étant donné le taux sans risque r , nous avons $\rho(W + k.r) = \rho(W) - k$.

Si nous plaçons k unité d'argent à la date t_0 au taux sans risque r alors nous réduisons le risque du portefeuille de k . Ainsi, ajouter des liquidités dans un portefeuille réduit son risque.

3. Homogénéité positive : pour tout $\lambda \geq 0$, $\rho(\lambda.W) = \lambda. \rho(W)$.

Si nous multiplions la taille d'un portefeuille par λ , nous multiplions le risque par le même facteur.

4. Sous-additivité : $\rho(W_1 + W_2) \leq \rho(W_1) + \rho(W_2)$.

Réunir deux portefeuilles ne peut pas augmenter le risque. C'est le principe de diversification.

La mesure de risque définie ci-dessus sert à évaluer un risque de perte. Elle peut-être vue comme une dépôt de garantie. C'est la somme (ou la fraction de prix) d'une marchandise, d'un

service ou d'un actif financier acheté à terme, versée au moment de la conclusion du contrat. Cette somme permet de faire face à une éventuelle perte de la valeur achetée.

Rappelons que le risque que nous cherchons à évaluer dans cette partie est le risque de marché qui correspond aussi à un risque de perte. Nous allons vérifier que la mesure de risque proposée par Gamrowski est cohérente.

Selon Gamrowski le risque peut être estimé par :

$$\hat{r}_p(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |R_j|^p \quad (0 < p < \alpha)$$

Le risque vu par Gamrowski est analogue à une fraction de prix ou à un pourcentage. Il ne peut donc pas être directement comparé aux axiomes de risque formulés par Artzner, Delbaen, Eber et Heath qui voient le risque comme un montant.

Vérifions, par exemple, le principe d'homogénéité positive. Notre démonstration est intuitive. Si nous multiplions la taille du portefeuille par λ ($\lambda \neq 1$), la proportion de chaque action dans le portefeuille reste la même, c'est seulement en terme de nombre de part que l'on observe une augmentation. Ainsi, le risque de marché vu comme une fraction d'un prix ou comme un pourcentage reste inchangé. Nous avons donc $\hat{r}_p(\lambda \mathbf{q}) = \hat{r}_p(\mathbf{q})$. Néanmoins si nous raisonnons en terme de somme, comme nous investissons λ fois plus (ou moins selon que λ est supérieur ou inférieur à 1), nous devons multiplier le dépôt de garanti par λ .

Le principe de diversification est vérifié pour $p \geq 1$ d'après *l'inégalité de Minkowsky* :

Définition : Si f et g sont deux fonctions positives et intégrables sur un intervalle $[a, b]$ alors pour tout $p \geq 1$:

$$\left[\int_a^b (f(x) + g(x))^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b (f(x))^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b [g(x)]^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Les axiomes de monotonie et d'invariance par translation ne sont pas vérifiables mathématiquement mais sont intuitifs.

Ainsi l'estimateur de risque proposé par Gamrowski est cohérent.

Chapitre 17. VALUE AT RISK

La méthode de la *Value at Risk* est aujourd'hui utilisée par la majorité des grandes banques pour évaluer le risque du marché. Cet outil permet de mesurer le risque du marché, ou de façon plus précise, d'évaluer de manière quantitative la perte potentielle maximale qu'une entité financière peut subir à un niveau de probabilité p donné et dans un laps de temps donné, en tenant compte du bénéfice réel de la diversification. Le principal attrait de cette mesure de risque réside dans le fait qu'elle permet de transformer le risque en un chiffre unique, simple et compréhensible par tous.

17.1. Définition

La *Value at Risk*, VaR en abrégé, représente un quantile d'une distribution de profits et de pertes dans un temps donné. Supposons que nous sommes chargés de mesurer le risque d'un portefeuille d'actifs financiers. Nous fixons une période dans laquelle étudier le risque - deux semaines par exemple. Nous pouvons ensuite nous demander quelle serait la perte maximale que nous pourrions subir sur ce portefeuille dans cet intervalle de temps. La réponse est une perte totale : par définition, nous pouvons être certains à 100 % que les pertes du portefeuille ne dépasseraient pas ce montant. Cependant, la perte totale donne une image trop pessimiste du risque car la pire issue possible ne se produira probablement pas. Nous rechercherons alors un montant (en dollars ou en francs par exemple) tel que nous pouvons être sûrs à 99 % que les pertes lui seront inférieures : c'est la *Value at Risk*. Plus exactement, c'est la VaR pour un horizon de deux semaines et un indice de confiance de 99 %.

Nous pouvons calculer la *Value at Risk* pour un seul actif ou pour un portefeuille de plusieurs actifs. Nous allons restreindre notre étude à un actif unique. La généralisation à un portefeuille est expliquée dans Mittnik et Rachev [38] ou Gamrowski [19]. Considérons que nous disposons de $N + n$ observations de rendements d'un actif donné pour un horizon de temps donné : $R_{-n+1}, R_{-n+2}, \dots, R_0, R_1, \dots, R_N$ où R_t est le rendement logarithmique d'un actif donné entre les dates t et $t + 1$. La *Value at Risk* à la date t d'intervalle de confiance associé à

la probabilité p , avec le même horizon de temps que les observations ci-dessus et une unité d'argent investie dans l'actif considéré est définie par la quantité VaR_t qui vérifie :

$$P(R_t < -VaR_t) = p.$$

Dans la suite, nous supposons que la VaR est estimée par rapport aux n dernières valeurs des rendements : $VAR_t^{(n)} = f(R_{t-1}, \dots, R_{t-n})$.

17.2. Limites de la Value at Risk

La *Value at Risk* a des limites. Elle n'est qu'un montant de perte potentiel et son évaluation peut être assez imprécise.

Son calcul dépend d'abord de la loi utilisée pour la calculer : plus la loi considérée sera proche de la loi réelle des rendements, meilleure sera l'estimation de la VaR. Pour cette raison et comme nous avons montré que la loi stable était plus pertinente que la loi normale, nous allons considérer que les rendements suivent une loi stable d'exposant caractéristique α .

De plus, la capacité du passé à anticiper l'avenir au travers des modèles de prévision économétriques est limité et la liquidité des marchés, qui suppose qu'on puisse vendre les positions à l'horizon choisi, n'est pas toujours celle qu'on attendait, surtout lors de forts mouvements. Ceci permet d'expliquer pourquoi la *Value at Risk* s'est révélée défaillante au moment de certaines crises financières. Les pertes constatées ont parfois été largement supérieures à ce qu'avaient prévu les calculs de VaR.

Les paramètres de calcul de la VaR varient avec le temps et renforcent l'effet de panique en période de crise. D'où la spirale suivante : une hausse de la volatilité entraîne une augmentation de la VaR mesurée, donc un dépassement des limites et une exigence de liquider des positions, ce qui, à son tour, a comme effet d'accroître la volatilité des marchés. Pour cette raison la *Value at Risk* n'est pas utilisable pendant les périodes de transition caractérisées par des changements de structure du marché, des risques supplémentaires ou une diminution de liquidité des actifs.

Enfin, le résultat dépend de la méthode utilisée. De nombreuses méthodes existent et si on applique simultanément chaque méthode au même problème, les résultats diffèrent.

17.3. Méthodes d'estimation

Les méthodes d'évaluation de la *Value at Risk* existantes sont les suivantes :

1. Estimation non-paramétrique, aussi appelée méthode de simulation sur l'historique, basée sur des statistiques d'ordre.
2. Estimation gaussienne.
3. Méthode RiskMetrics™
4. Méthode basée sur l'estimation de l'épaisseur des queues en utilisant la méthode de Hill.

Nous allons présenter rapidement ces méthodes. Nous notons $\text{VAR}_t^{(n)}$ l'estimateur de la *Value at Risk* VaR_t basé sur les n derniers rendements logarithmiques observés R_{t-1}, \dots, R_{t-n} .

17.3.1. Estimation non-paramétrique

Cette méthode est la plus intuitive et la plus simple à utiliser. Elle repose sur l'hypothèse que les mouvements passés des prix de marchés reflètent les mouvements futurs. Il est donc possible de les extrapoler.

Nous classons les n derniers rendements observés R_{t-1}, \dots, R_{t-n} par ordre croissant :

$$R_{(1)}, \dots, R_{(n)}.$$

Supposons que ces rendements sont indépendants et identiquement distribués de fonction de densité f et de fonction de répartition F . Alors quand n tend vers l'infini et si le rapport $p = \frac{k}{n}$

reste constant, $R_{(k)}$ tend asymptotiquement vers une loi normale de moyenne $\xi = F^{-1}(p)$ et

d'écart type $\frac{1}{f(x)} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Dans ce cadre, $R_{(k)}$ peut être considérée comme une approximation du quantile $100 \times p\%$.

L'avantage de cette méthode est que nous avons seulement fait l'hypothèse que les rendements sont indépendants et identiquement distribués. L'estimateur obtenu est asymptotiquement normal pour la plupart des distributions utilisées en finance.

L'inconvénient principal est que le rang des quantiles que l'on peut estimer sont limités : nous ne pouvons pas calculer correctement un quantile 0,5 % avec 100 observations (voir section 15.2.). De plus, estimer la *Value at Risk* de cette manière pour un portefeuille complexe peut s'avérer être long.

17.3.2. Méthode gaussienne

Nous adoptons une approche analytique. Nous pouvons calculer à partir des n dernières observations des rendements, la volatilité des rendements avec l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{S}_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_{t-i} - \bar{R}_t)^2 \quad \text{où } \bar{R}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{t-i} .$$

Les quantiles peuvent être déduits aisément à partir de l'approximation numérique de la fonction de distribution. L'hypothèse usuelle est la normalité des rendements R_{t-i} d'où le nom de cette méthode. Si les rendements des actifs du portefeuille suivent une loi normale, alors la perte maximale probable est :

$$\text{VAR}_t^{(n)} = E(R_p) + q_p \hat{S}_t$$

où q_p est le quantile de la loi normale centrée réduite associé à la probabilité p , et $E(R_p)$ est le rendement moyen du portefeuille.

17.3.3. Méthode RiskMetricsTM

La méthode RiskMetrics est basée sur la représentation du marché par des facteurs normalement distribués, sur une analyse de la volatilité et des corrélations et sur la matrice des probabilités de passage d'une classe dans une autre. Les facteurs sont les devises, les taux d'intérêt, les actions et les commodités (biens sans valeur ajoutée). L'une des hypothèses de base de RiskMetrics et de nombreux autres modèles de VaR est que l'on peut décrire le rendement des marchés par la notion statistique de distribution normale. Les volatilités et les corrélations sont estimées à partir des observations passées de ces facteurs. Il a été montré que cette méthode donne de bons résultats en terme de prédiction de volatilité.

Nous n'allons pas décrire cette méthode qui est assez complexe mais nous invitons le lecteur à consulter J.P. Morgan/Reuters, *RiskMetrics - Technical Document* (Fourth Edition, 1996) pour obtenir plus de renseignements sur cette méthode. Des mémoires ISUP ont aussi été réalisés sur ce sujet.

17.3.4. Méthode basée sur l'épaisseur des queues

Cette méthode est aussi appelée la méthode de Hill. Nous remplaçons dans cette méthode l'hypothèse gaussienne par l'hypothèse que les queues de distributions sont épaisses et vérifie

$F(x) \approx \frac{C}{|x|^a}$ où $F(x)$ est la fonction de répartition des rendements (queues de Pareto).

Soient $R_{(1)}, \dots, R_{(n)}$ les n derniers rendements observés rangés par ordre croissant. Hill proposa en 1975 un estimateur de α pour des distributions avec des queues de Pareto :

$$\hat{\alpha}_{HLL} = \frac{1}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln|R_{(i)}| - \ln|R_{(m+1)}|} \quad \text{où } m = \frac{n}{10}.$$

Notons $\hat{F}(x)$ la fonction de répartition de l'échantillon : $\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[R_{(i)} \leq x]}$.

L'estimateur de la *Value at Risk* d'intervalle de confiance de niveau p (p en %) est :

$$\text{VAR}_t^{(n)} = \exp\left(\frac{\ln(\hat{C}) - \ln(p)}{\hat{\alpha}}\right)$$

où $\ln(\hat{C}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(\hat{F}(R_{(i)})) + \hat{\alpha} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln|R_{(i)}|$.

L'estimateur de Hill est très utilisé pour estimer α même si il n'est pas robuste lorsque les lois ne sont pas exactement stable comme l'a montré Gamrowski. Les résultats sont similaires que nous utilisons l'estimateur de Hill ou l'estimateur de Hill généralisé (défini dans le paragraphe 9.1.).

Chapitre 18. TESTS SUR LA VALUE AT RISK

Notre objectif est de tester pour tout t , l'hypothèse nulle $H_0 : \langle P(R_t < -VaR_t) = p \rangle$. "La réglementation de la Banque des Règlements Internationaux et du Comité de la réglementation bancaire s'intéresse particulièrement à un horizon de gestion de 10 jours ouvrés et à un niveau de probabilité inférieur à 1%, ce qui correspond à une activité de trading. Un autre horizon important sera l'année, du fait de l'annuité des comptes " (El Alaoui [16]).

18.1. Mise en place du test

Nous avons vu que la distribution réelle des rendements a des queues de distribution plus lourdes que celles de la loi normale. Dans ce cas, le quantile à 1% est inférieur à celui de la loi normale, donc le risque est plus important. La perte estimée avec la loi normale est donc moins importante que la perte réelle. Ainsi calculer la *Value at Risk* sous l'hypothèse que la loi des rendements est normale conduit parfois à sous-estimer le risque.

Nous supposons que la précision de l'estimation de la *Value at Risk* est suffisamment bonne pour pouvoir écrire que $P(R_t < -VAR_t^{(n)}) = \tilde{p}$ n'est pas trop différente de p .

Vérifions que c'est le cas. Nous pouvons écrire :

$$\tilde{p} = \int_{-\infty}^{\infty} P(R_t < -n) f(-n) dn \quad \text{où } f \text{ est la densité de l'estimateur } VAR_t^{(n)}.$$

Supposons que la queue de distribution des rendements suit une loi de Pareto et que l'estimateur de la *Value at Risk* suit une loi normale, alors :

$$P(R_t < n) \approx \frac{C}{|n|^a} \quad \text{et} \quad f(n) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \exp\left(-\frac{(n - VaR)^2}{s^2}\right)$$

Nous pouvons ainsi calculer \tilde{p} .

Supposons que nous acceptons l'approximation $p = \tilde{p}$, alors l'hypothèse H_0 que nous testons peut s'écrire :

$$X_t = 1_{[R_t < -VAR_t^{(n)}]} = 1 \text{ avec une probabilité } p,$$

$$X_t = 1_{[R_t < -VAR_t^{(n)}]} = 0 \text{ avec une probabilité } 1-p.$$

X_t est une série de variable i.i.d. et $\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \left(\sum_{t=1}^n (X_t - p) \right)$ converge vers une loi normale $N(0 ; 1)$. Pour des valeurs de n assez grandes, l'hypothèse nulle est rejetée avec un niveau de confiance de $(1-c) \%$ si la variable $S = \sum_{t=1}^n X_t$ n'appartient pas à l'intervalle :

$$\left[np - q_c \sqrt{np(1-p)} ; np + q_c \sqrt{np(1-p)} \right]$$

où q_c est le quantile $100*c \%$ de la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donnent l'intervalle de confiance de niveau $1-c$ pour lequel l'hypothèse nulle ne peut être rejetée pour $p=0.5\%$, $p=1\%$, $p=5\%$ et $n=100$, $n=500$, $n=1000$ et $n=2000$.

Intervalle de confiance avec p = 0.5%				
n	100	500	1000	2000
c = 5%	[0 ; 1]	[0 ; 5]	[2 ; 8]	[5 ; 15]
c = 1%	[0 ; 2]	[0 ; 6]	[0 ; 10]	[3 ; 17]
Intervalle de confiance avec p = 1%				
n	100	500	1000	2000
c = 5%	[0 ; 2]	[2 ; 8]	[5 ; 15]	[13 ; 27]
c = 1%	[0 ; 2]	[0 ; 10]	[3 ; 17]	[10 ; 30]
Intervalle de confiance avec p = 5%				
n	100	500	1000	2000
c = 5%	[2 ; 8]	[17 ; 33]	[39 ; 61]	[84 ; 116]
c = 1%	[0 ; 10]	[14 ; 36]	[34 ; 66]	[78 ; 122]

18.2. Qualité de l'estimation de la Value at Risk

Nous faisons deux études de la *Value at Risk* sur le CAC40. La première étude concerne la période du 16 juillet 1987 au 6 août 1999 (3000 données). La seconde étude couvre la période du 4 septembre 1989 au 6 septembre 2001 (3000 données).

Nous estimons la *Value at Risk* avec chacune des méthodes exposées dans le chapitre précédent pour $p = 0.5 \%$, $p = 1 \%$ et $p = 5 \%$ et sur les $n = 100$ et $n = 1000$ premières observations de l'échantillon initial (3000 données). Nous calculons ensuite le nombre de rendements du CAC qui excèdent la valeur estimée de la *Value at Risk* pour un horizon N fixé avec $N = 100$; $N = 500$; $N = 1000$ et $N = 3000$. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant. Les résultats sont grisés lorsque l'hypothèse nulle est rejetée au niveau de confiance 95 %. Nous avons ajouté une astérisque lorsque le résultat est aussi refusé au niveau de confiance 99 %.

Figure 95. Nombre de rendements du CAC40 dépassant la *Value at Risk*

Méthode non-paramétrique

n	Du 16 juillet 1987 au 6 août 1999						Du 4 sept. 1989 au 6 sept. 2001					
	100 obs.			1000 obs.			100 obs.			1000 obs.		
	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %
N = 2000	Inc.	0*	2*	1*	9*	69*	Inc.	1*	74*	12	32*	122
N = 1000	Inc.	0*	2*	0	1*	25*	Inc.	0*	35	0	4	38
N = 500	Inc.	0	1*	0	1	12*	Inc.	0	24	0	1	18
N = 100	Inc.	0	0	0	0	2	Inc.	0	3	0	0	1

Méthode gaussienne

n	Du 16 juillet 1987 au 6 août 1999						Du 4 sept. 1989 au 6 sept. 2001					
	100 obs.			1000 obs.			100 obs.			1000 obs.		
	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %
N = 2000	2*	2*	11*	9	19	61*	16	28	83	25*	36*	106
N = 1000	2	2*	9*	1	3	22*	8	16	40	3	5	33*
N = 500	1	1	4*	1	1	16	6	10	27	1	1	16
N = 100	0	0	1	1	1	1	0	0	3	0	0	1

Méthode basée sur l'épaisseur des queues

n	Du 16 juillet 1987 au 6 août 1999						Du 4 sept. 1989 au 6 sept. 2001					
	100 obs.			1000 obs.			100 obs.			1000 obs.		
	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %	0.5 %	1 %	5 %
N = 2000	0*	0*	2*	1	5	73	1*	2*	77*	7	16	139*
N = 1000	0	0*	2*	0	1	27	0	1*	37	0	1*	43
N = 500	0	0	1*	0	0	12	0	1*	25	0	0	22
N = 100	0	0	0	0	0	2	0	0	3	0	0	1

La méthode non-paramétrique ne permet pas d'estimer la *Value at Risk* pour les très faibles quantiles ($p = 0.5\%$, par exemple) si on ne dispose pas de suffisamment d'observations. C'est la cas dans notre exemple pour 100 observations, d'où la notation *Inc.* (« inconnue »).

Nous constatons que la qualité de prédiction est meilleure pour la méthode basée sur l'épaisseur des queues lorsque nous utilisons 1000 observations pour estimer la *Value at Risk* que lorsque nous utilisons 100 observations. Pour les autres méthodes, la prédiction est mauvaise quel que soit le nombre d'observations choisi pour estimer la *Value at Risk*. Ceci suggère qu'il ne faut pas estimer la *Value at Risk* à partir de trop peu de rendements. L'estimer sur 100 observations est apparemment trop peu, mais il est très probable que l'évaluer à partir de 1000 observations est exagéré.

L'estimation de la *Value at Risk* est meilleure lorsque l'horizon de temps est petit ($N = 100$).

Lorsque p est égale à 5 %, les méthodes utilisées donnent de mauvais résultats. Plus généralement, plus le quantile p utilisé est grand, moins l'estimation de la *Value at Risk* est correcte.

La période allant du 16 juillet 1987 au 6 août 1999 commence par le krach boursier d'octobre 1987. Les observations qui ont permis d'estimer la *Value at Risk* prennent en compte le krach qui ne s'est pas reproduit avec la même ampleur jusqu'à la fin de la période considérée, à savoir le 6 août 1999. Ceci explique le fait que la *Value at Risk* estimée sur cette période est plus forte que la *Value at Risk* réelle.

Nous constatons que la méthode basée sur l'épaisseur des queues estime correctement la *Value at Risk* sur la période juillet 1987 - août 1989 pour p égal à 0.5 %, 1% ou 5% lorsque l'estimation est effectuée à partir de 1000 observations.

La période allant du 4 septembre 1989 au 6 septembre 2001 se termine par une période baissière assez volatile. Cette période n'inclut pas l'attentat aux USA du 11 septembre 2001 qui a entraîné l'effondrement des bourses. Le début de cette période n'a pas été marquée par des fluctuations exagérées des cours.

Sur cette période, nous ne pouvons pas trouver une méthode meilleure que les autres. La méthode gaussienne a tendance à sous-estimer la *Value at Risk* réelle pour le quantile p égale à 0.5%. La méthode non-paramétriques et la méthode basée sur l'épaisseur des queues ont tendance à surévaluer la *Value at Risk* réelle.

Lorsqu'on anticipe une période mouvementée, il semble qu'il faille mieux utiliser la méthode basée sur l'épaisseur des queues ou la méthode non-paramétrique, par contre lorsque l'on sort d'une période ombragée, il est préférable d'utiliser la méthode gaussienne pour estimer la *Value at Risk*. Globalement, la méthode gaussienne sous-évalue le risque de perte tandis que la méthode basée sur l'épaisseur des queues et la méthode non-paramétrique le surestime. Enfin l'estimation de la *Value at Risk* est d'autant meilleure que le quantile considéré est faible ($p = 0.5\%$ ou 1%).

18.3. Evolution de la Value at Risk dans le temps

Nous avons calculé la *Value at Risk* avec les trois méthodes, à savoir la méthode gaussienne, la méthode non paramétrique et la méthode basée sur l'épaisseur des queues. Nous avons effectué les calculs pour $p = 5\%$, $p = 1\%$ et $p = 0.5\%$ à partir de 250 observations. L'échantillon initial représente les rendements logarithmique du CAC 40 entre le 16 juillet 1987 et le 6 septembre 2001.

Figure 96. Evolution de la *Value at Risk* estimée en fonction du temps avec $p = 5\%$

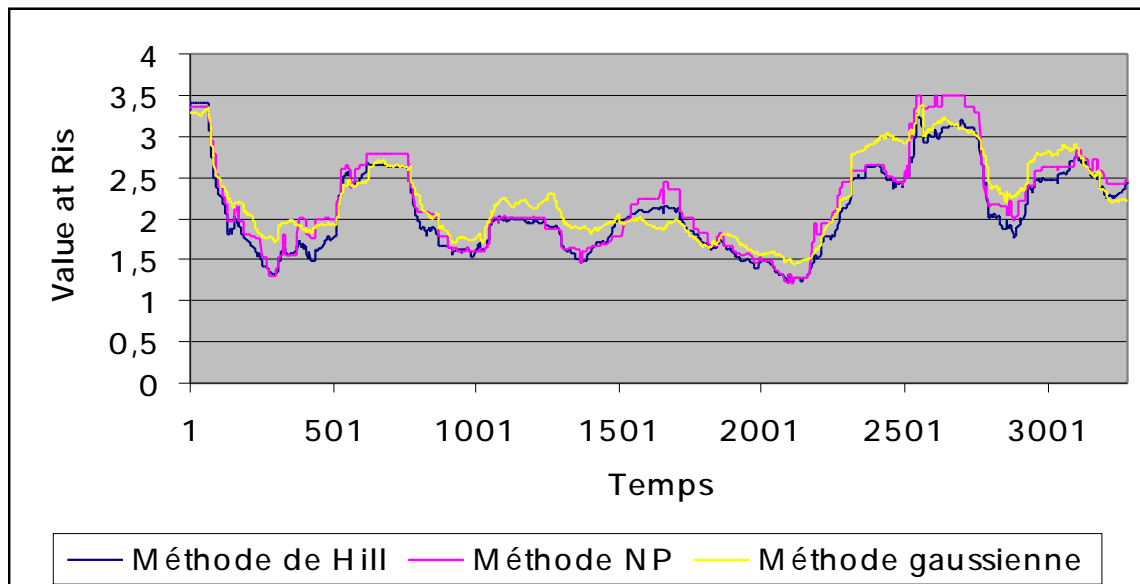
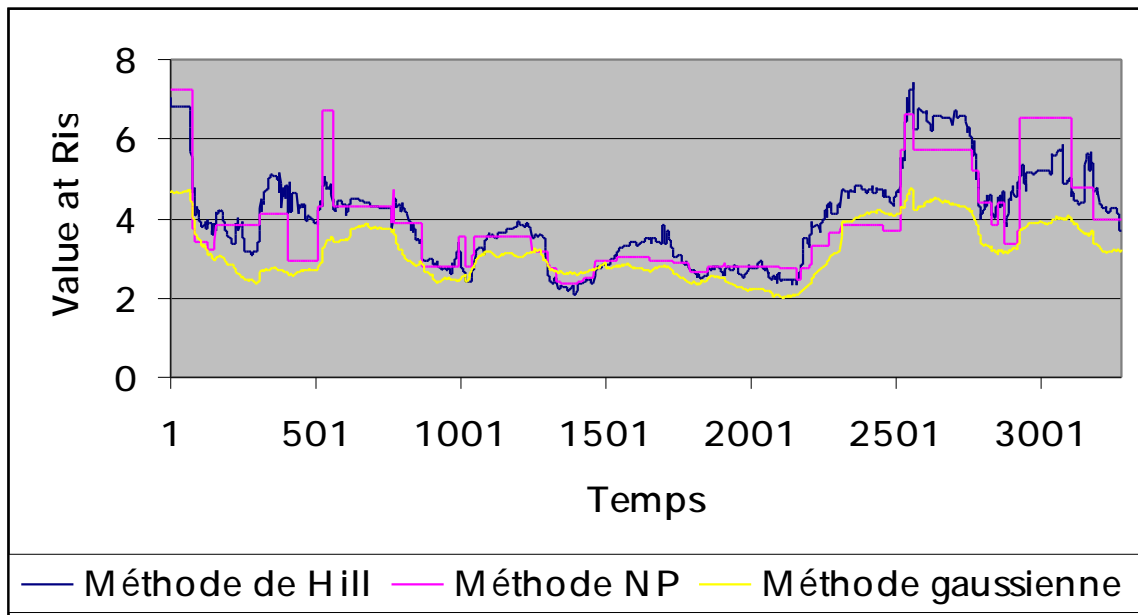
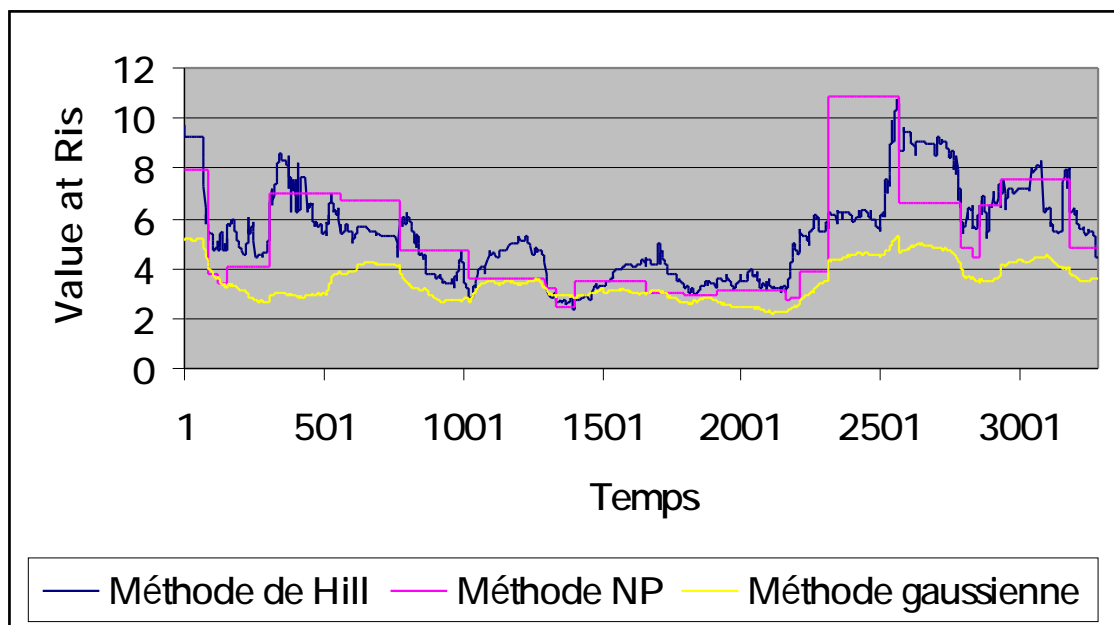


Figure 97. Evolution de la *Value at Risk* estimée en fonction du temps avec $p = 1\%$ Figure 98. Evolution de la *Value at Risk* estimée en fonction du temps avec $p = 0.5\%$ 

Plus la valeur du quantile est faible, plus la valeur estimée de la *Value at Risk* diffère selon les méthodes. Pour les faibles quantiles ($p = 1\%$ et $p = 0.5\%$), la méthode gaussienne fournit une estimation de la *Value at Risk* inférieure, en général, à celle donnée par les autres méthodes.

Avec la méthode paramétrique, la valeur estimée de la *Value at Risk* évolue par paliers d'autant plus prononcés que le quantile est petit.

Nous avons de plus calculé à chaque fois la *Value at Risk* réelle sur un horizon N pour une probabilité p donnée. Nous avons mesuré l'écart entre la *Value at Risk* réelle et la *Value at Risk* estimée (n = 250) avec chacune des méthodes.

Figure 99. Précision de l'estimation avec N = 500 pour p = 5%

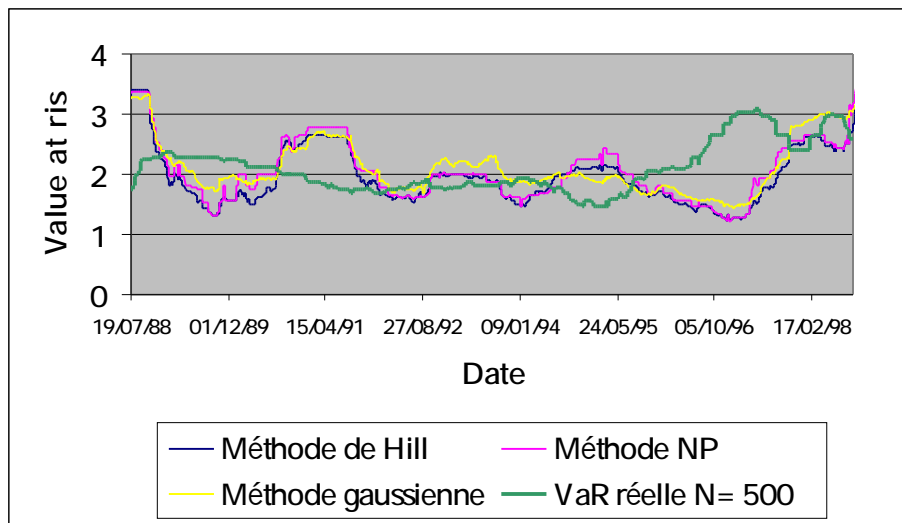
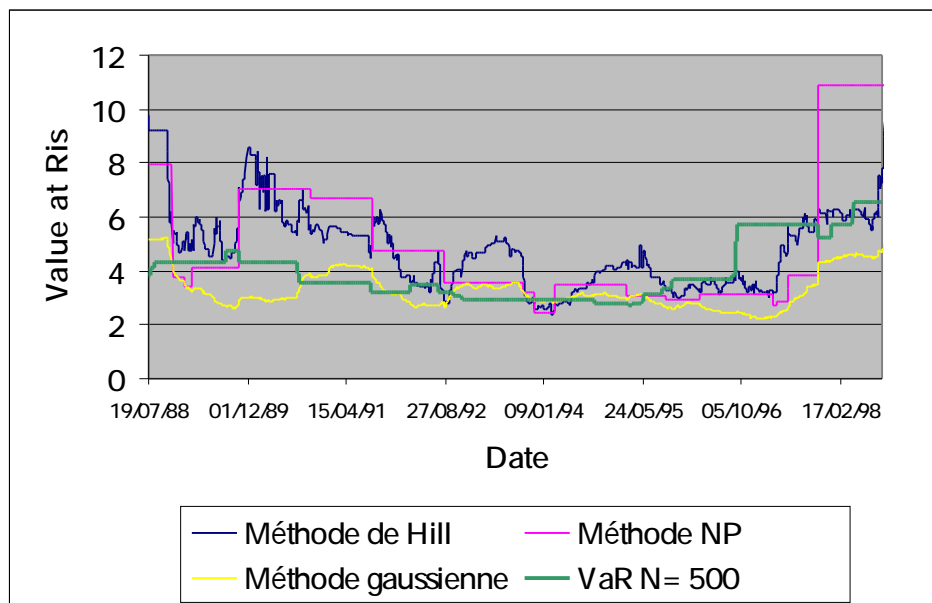


Figure 100. Précision de l'estimation avec N = 500 pour p = 0.5%



Nous observons un décalage entre la *Value at Risk* estimée et la *Value at Risk* réelle. Le décalage est moins prononcé pour le quantile p égal à 0.5 %. Nous constatons que la méthode gaussienne sous-estime quelquefois considérablement la *Value at Risk* réelle pour $p = 0.5\%$. La méthode non paramétrique et la méthode de Hill (basée sur l'épaisseur des queues) ont tendance à surestimer la *Value at Risk* réelle.

Figure 101. Précision de l'estimation avec $N = 100$ pour $p = 5\%$

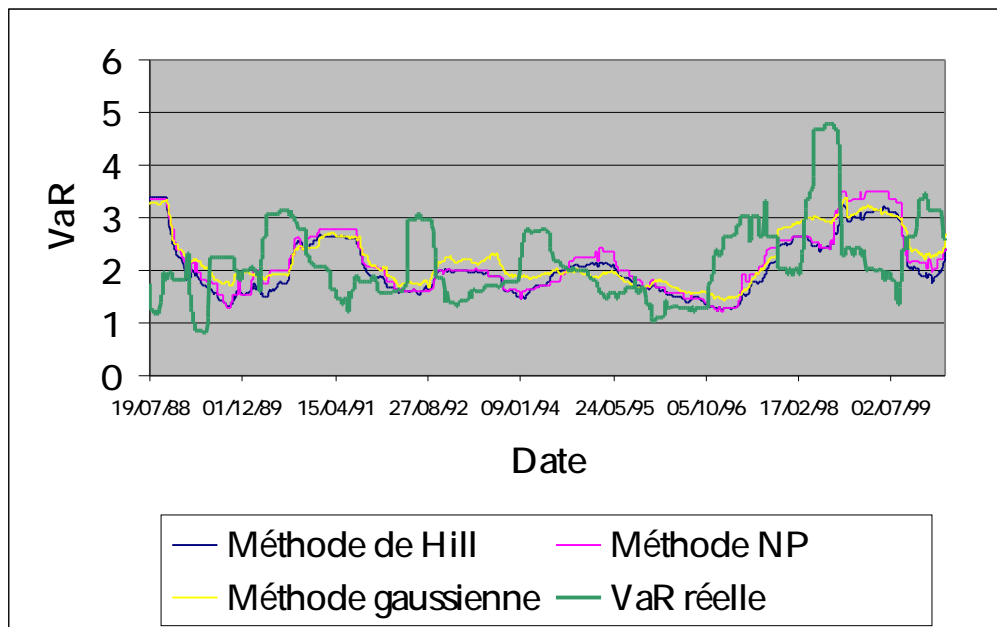
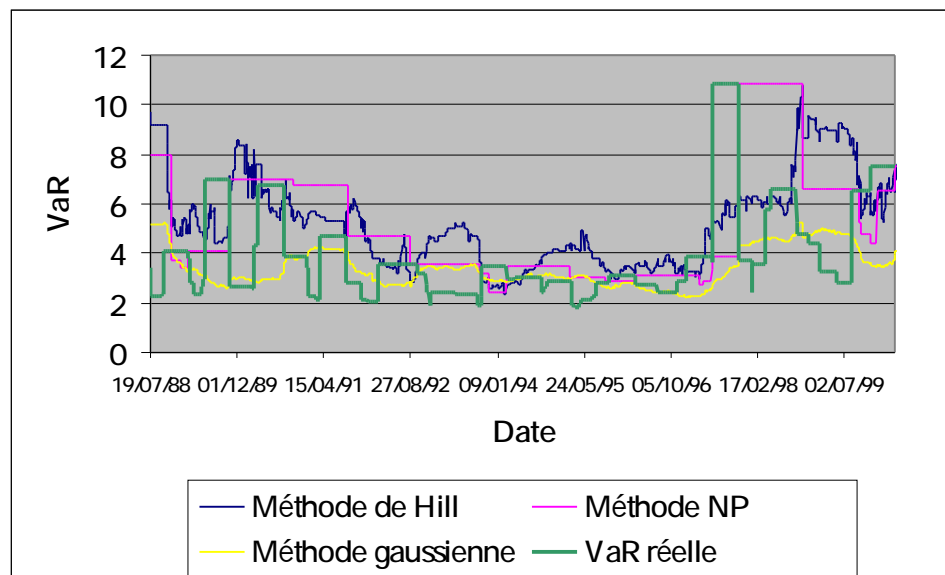
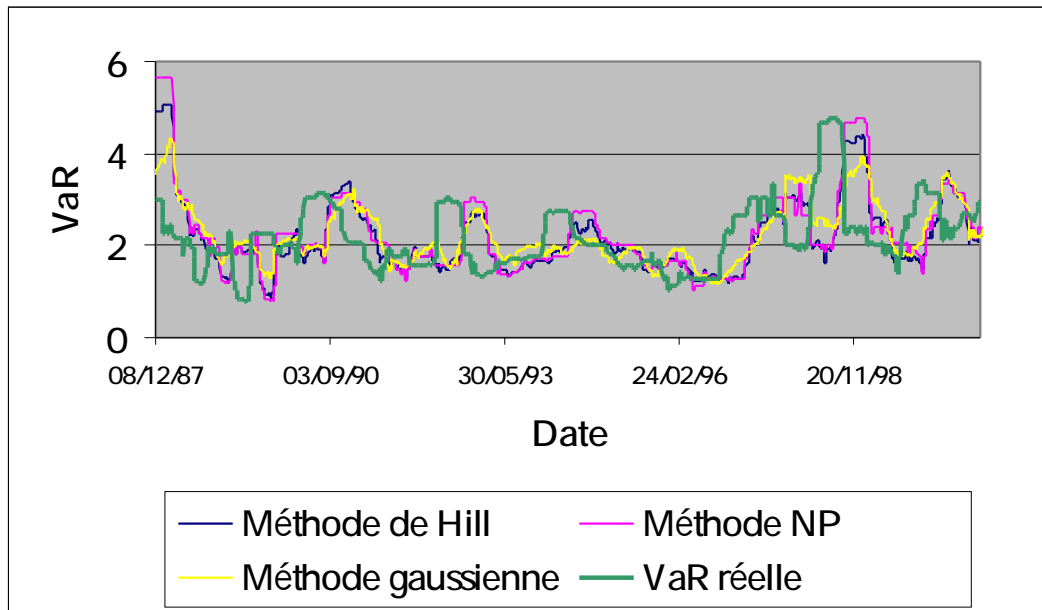


Figure 102. Précision de l'estimation avec $N = 100$ pour $p = 0.5\%$



Pour $p = 5\%$, la *Value at Risk* est sous estimée la moitié du temps par toutes les méthodes. Pour $p = 0.5\%$, seule la méthode gaussienne sous estime régulièrement la *Value at Risk* réelle.

Figure 103. Précision de l'estimation avec $n = N = 100$ pour $p = 5\%$



Ces graphiques montrent qu'il est important de mettre à jour la *Value at Risk* régulièrement à partir des derniers cours. En effet, lorsque le comportement des investisseurs sur les marchés se modifie, la *Value at Risk* évolue. Nous pouvons difficilement utiliser la *Value at Risk* comme un instrument de prévision. Nous avons toujours un temps de retard sur l'estimation de la *Value at Risk*. Pour les faibles quantiles, il est conseillé de ne pas utiliser la méthode gaussienne pour estimer la perte probable car la moitié du temps, elle sous estime la perte (voir section 17.5.).

18.4. Comparaison des méthodes d'estimation de la VaR

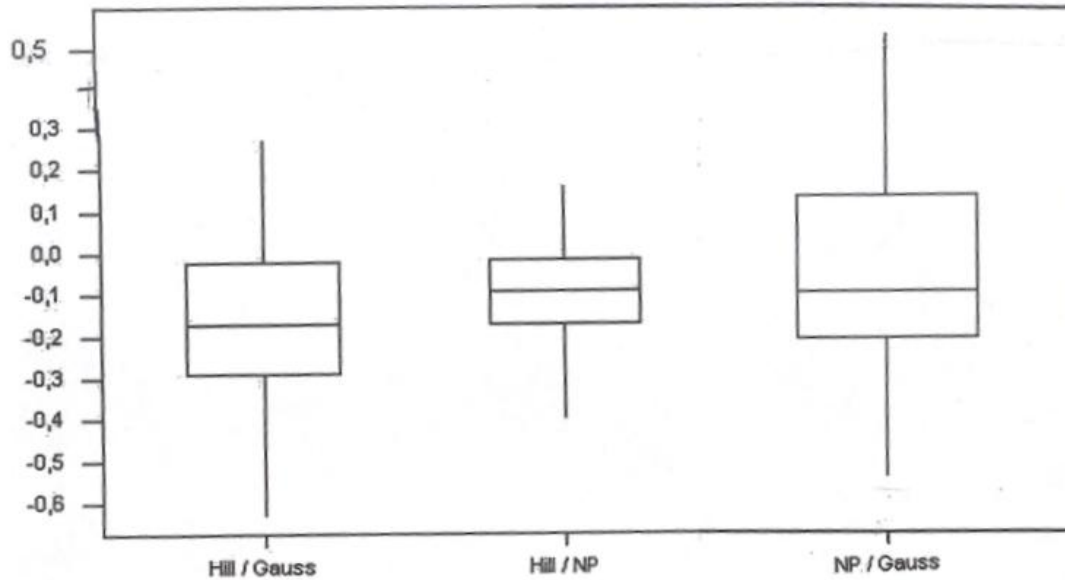
Nous comparons d'abord deux à deux les méthodes d'estimation de la *Value at Risk* pour différents niveaux de probabilité. Nous mesurons à chaque fois l'écart minimum, l'écart maximum, la moyenne des écarts et l'écart médian. Nous travaillons entre le 19 juillet 1988 et le 6 septembre 2001 sur 3279 observations. Les résultats sont regroupés dans les tableaux suivants. La notation Hill désigne la méthode basée sur l'épaisseur des queues de distribution (méthode de Hill), Gauss représente la méthode gaussienne et NP annonce la méthode d'estimation non-paramétrique.

Figure 104. Statistiques sur les écarts entre les méthodes avec $p = 5 \%$

	Hill / Gauss	Hill / NP	NP / Gauss
Minimum	-0,63	-0,48	-0,55
Médiane	-0,17	-0,09	-0,10
Maximum	0,27	0,16	0,55
Moyenne	-0,16	-0,11	-0,05

Les méthodes les plus similaires sont la méthode de Hill et la méthode non paramétrique.

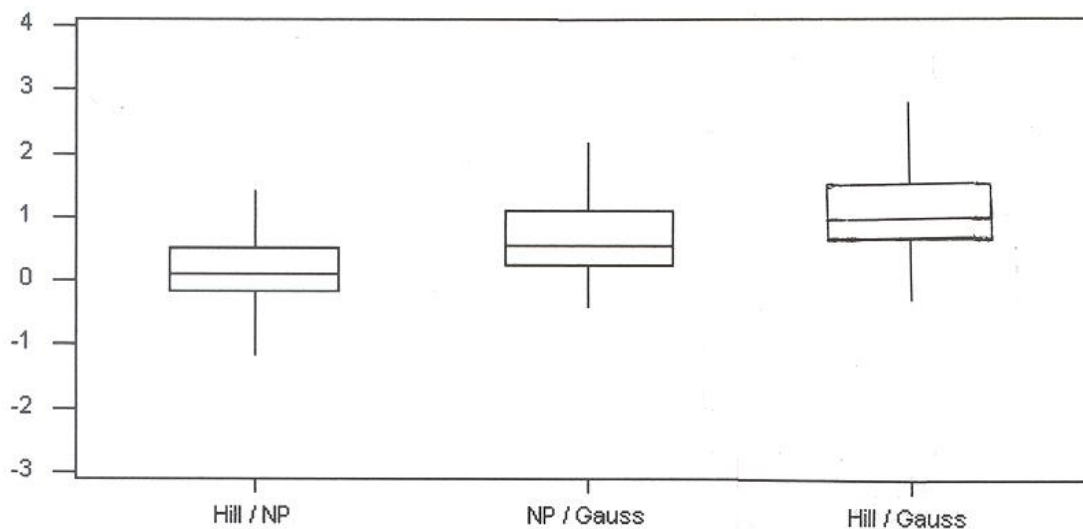
Nous pouvons mieux visualiser les divergences entre les méthodes en dessinant des *box-plots* (voir l'annexe 4 pour la présentation des informations indiquées sur un *box-plot*). Le box-plot permet de visualiser les traits caractéristiques d'une distribution. La boîte représente 50% des données, plus la boîte est grande et plus les données sont dispersées. La position de la médiane fournit une indication sur la symétrie. Plus la médiane est centrée dans la boîte et plus les données sont symétriques. Le rapport de la longueur des "moustaches" du box-plot est une autre indication de la symétrie. Deux "moustaches" de même taille est une indication de symétrie pour les queues de distribution. La quantité de données en dehors de l'intervalle interquartiles fournit une indication sur la taille des queues de distributions. Plus la queue de distribution est importante, plus il y aura de valeurs extrêmes associées au box-plot.

Figure 105. Box plots des écarts entre les méthodes pour $p = 5\%$ 

Lorsque p vaut 5 %, les méthodes les plus proches sont la méthode de Hill et la méthode non-paramétrique. En effet, la différence entre les *Value at Risk* estimée avec chacune de ces méthodes ont une distribution avec des queues peu épaisses et l'intervalle interquartile correspondant à leur distribution est le plus faible des trois intervalles interquartile calculés.

Figure 106. Statistiques sur les écarts entre les méthodes avec $p = 1 \%$

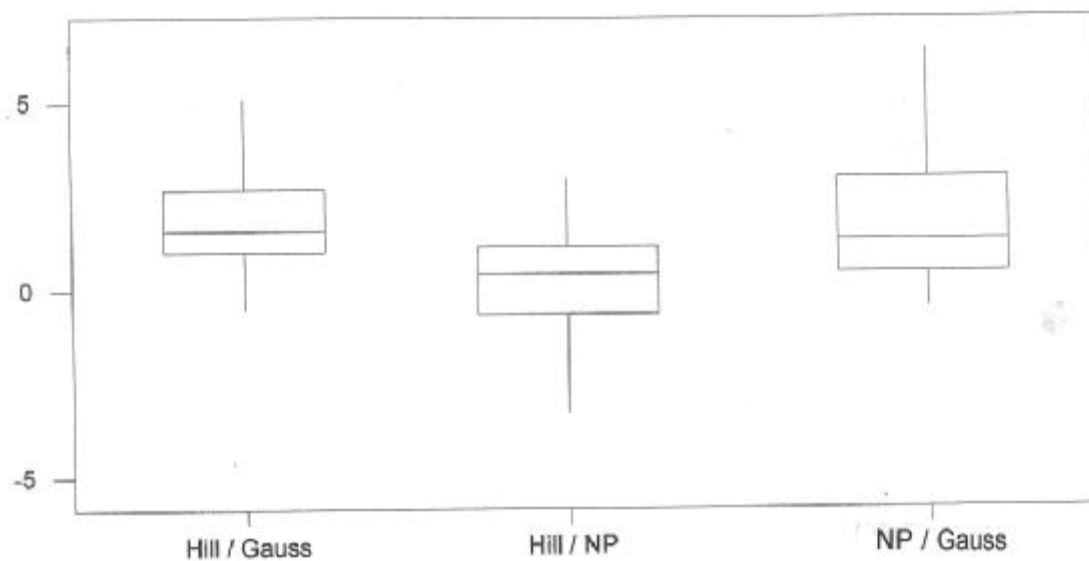
	Hill / Gauss	Hill / NP	NP / Gauss
Minimum	-0,55	-2,34	-0,45
Médiane	0,71	0,10	0,54
Maximum	2,68	1,99	3,70
Moyenne	0,86	0,12	0,74

Figure 107. Box plots des écarts entre les méthodes

Chaque boîte a à peu près la même hauteur, cependant la boîte correspondant aux écarts des *Value at Risk* estimées avec la méthode de Hill et avec la méthode non-paramétrique est la moins épaisses. Cette distribution est aussi la distribution la plus symétrique et la plus centrée autour de 0. Les distributions des écarts NP / Gauss et Hill / Gauss sont centrées autour d'une valeur strictement positive. Ceci signifie que la méthode non-paramétrique et la méthode de Hill fournissent en général une valeur estimée de la *Value at Risk* supérieure à la valeur de la *Value at Risk* estimée avec la méthode gaussienne.

Figure 108. Statistiques sur les écarts entre les méthodes avec $p = 0.5 \%$

	Hill / Gauss	Hill / NP	NP / Gauss
Minimum	-0,55	-5,34	-0,54
Médiane	1,58	0,39	1,29
Maximum	5,58	2,97	6,94
Moyenne	1,88	0,04	1,85

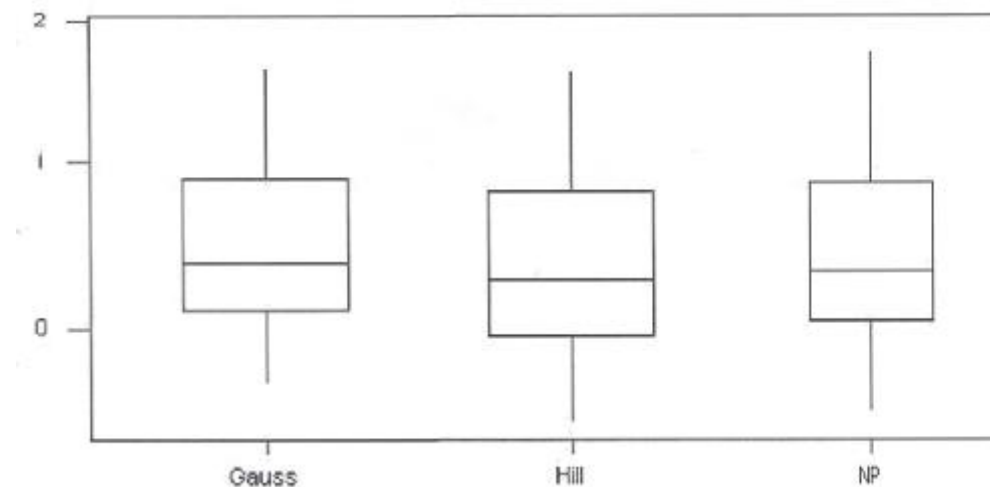
Figure 109. Box plots des écarts entre les méthodes

De même pour une probabilité de perte p égale à 0.5 %, les méthodes donnant les résultats les plus proches sont la méthode de Hill et la méthode non-paramétrique. Nous constatons encore que la méthode non-paramétrique et la méthode de Hill fournissent en général une valeur estimée de la *Value at Risk* supérieure à la valeur de la *Value at Risk* estimée avec la méthode gaussienne.

18.5. Comparaison des méthodes pour la qualité de l'estimation

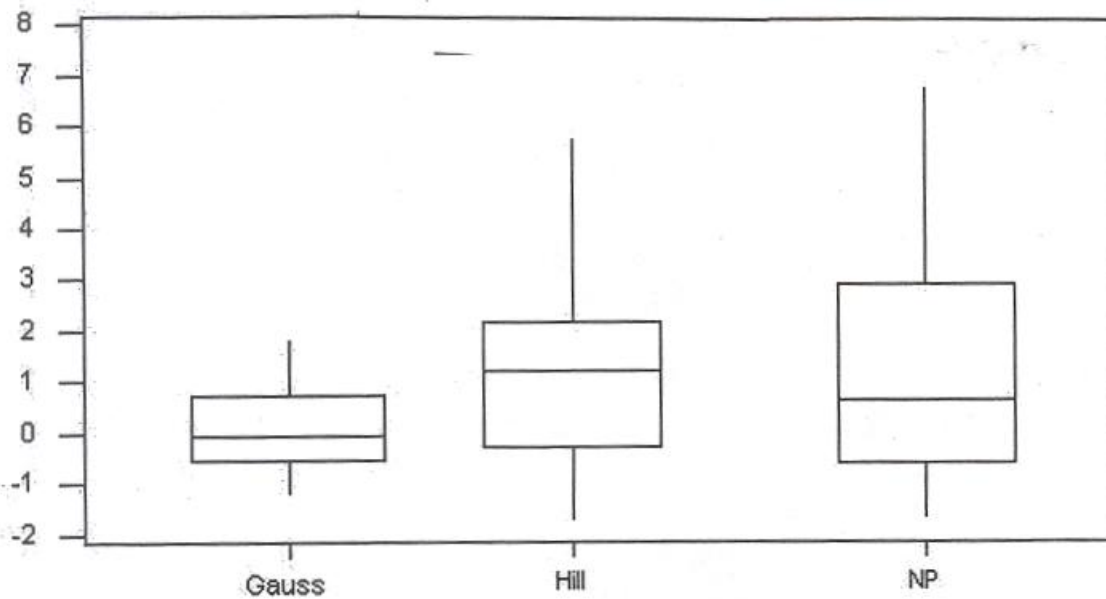
Nous mesurons maintenant les écarts entre la *Value at Risk* estimée avec chaque méthode et la *Value at Risk* empirique. Nous travaillons entre le 19 juillet 1988 et le 6 septembre 2001 sur 3279 observations. Nous avons représenté les résultats par des box-plots ce qui nous permet d'avoir un aperçu rapide de la répartition des écarts par rapport à la valeur empirique de la *Value at Risk*. La notation Hill désigne la distribution des écart entre la *Value at Risk* estimée avec la méthode basée sur l'épaisseur des queues de distribution (méthode de Hill) et la *Value at Risk* empirique, Gauss représente la distribution des écart entre la *Value at Risk* estimée avec la méthode gaussienne et la *Value at Risk* empirique et NP annonce la distribution des écart entre la *Value at Risk* estimée avec la méthode d'estimation non-paramétrique et la *Value at Risk* empirique. Nous faisons apparaître ci-dessous seulement les box-plots avec un horizon de temps égal à 100 jours ouvrés car les résultats avec un horizon de temps égal à 500 jours ouvrés sont très similaires.

Figure 110. Box-plots des écarts entre la VaR estimée et la VaR empirique avec $N = 100$ et $p = 5\%$



Lorsque la probabilité de perte est égale à 5 %, nous remarquons que les boîtes représentant les écarts entre la VaR empirique et la VaR estimée se ressemblent beaucoup quelle que soit la méthode utilisée. Il apparaît que ces méthodes donne à peu près les même résultats.

Figure 111. Box-plots des écarts entre la VaR estimée et la VaR empirique avec $N = 100$ et $p = 0.5\%$



Lorsque la probabilité de perte est égale à 0,5 %, nous remarquons que la boîte représentant les écarts entre la VaR empirique et la VaR estimée par la méthode gaussienne est la moins haute. De plus, l'écart le plus faible en valeur absolue est obtenu avec la méthode gaussienne. Ainsi, il semblerait qu'il est préférable d'utiliser la méthode gaussienne pour estimer la *Value at Risk* si la probabilité de perte est égale à 0,5%. Il apparaît aussi que la méthode gaussienne sous estime dans la moitié des cas la *Value at Risk* empirique, ce qui peut se révéler être dangereux en pratique. Les autres méthodes (Hill et NP) ont tendance, quant à elles, à surestimer souvent la *Value at Risk* empirique.

CONCLUSION

Les fractales sont des objets qui sont irréguliers, poreux ou fragmentés quel que soit l'endroit d'où on les regarde. Nous avons expliqué dans la première partie de ce mémoire pourquoi les mathématiciens pensaient que les chroniques financières pouvaient contenir des fractales.

Nous avons montré que l'hypothèse de normalité des variations des prix ou des rendements est mise à mal par certains mouvements extrêmes des marchés. La distribution réelle est plus large sur les bords (queue de distribution épaisse), plus cintrée et plus pointue. Les lois stables approchent mieux les lois des rendements financiers que les lois normales utilisées actuellement dans de nombreux modèles. Nous avons montré également que les rendements de certains actifs financiers sont auto-similaires ce qui fait d'eux des fractales.

La théorie fractale des marchés rejette l'hypothèse d'efficience des marchés qui se base sur le fait que l'information est instantanément intégrée dans les prix. Il est donc impossible de prévoir les cours à venir. L'hypothèse de stabilité des marchés suppose au contraire que le comportement passé du marché a une influence sur son comportement futur. Les investisseurs reçoivent l'information en même temps mais ne l'analysent pas de la même façon. Ils réagissent donc de manières différentes selon leur politique d'investissement.

Actuellement, il existe deux modèles mathématiques qui prennent en compte la structure fractale des marchés : les lois stables et les mouvements browniens fractionnaires. L'utilisation des lois Lévy stables en finance reste très controversée. Nous avons tout de même travaillé avec ces lois car elles possèdent de nombreuses qualités :

- Les distributions stables permettent de prendre en compte les queues de distribution épaisses observées en pratique sur la loi des rendements et intègrent les discontinuités observées sur le marché. Dans le cas où le paramètre de stabilité α est inférieur à 2, leur variance est infinie (i.e. instable).

- Les lois stables sont stables par combinaison linéaire et ce sont les seules qui s'obtiennent comme limites des sommes linéairement normées de variables i.i.d. Nous pouvons donc utilisé le théorème centrale limite généralisé.
- ® Les lois stables sont des distributions fractales du fait de leur propriété de stabilité par addition. En effet, la somme de deux variables α -stables i.i.d. est une variable stable de même exposant caractéristique α . Les variables stables possèdent ainsi des propriétés d'invariance d'échelle. (Nous pouvons généraliser cette proposition à n variables α -stables i.i.d.).
- Elles sont définies par seulement quatre paramètres, ce qui les rend simple à utiliser en pratique.
- ° Elles sont une généralisation de la loi normale. Nous n'avons donc pas à réfuter les modèles existants basés sur la loi de Gauss mais seulement à les généraliser.
- ± Elles possèdent un paramètre d'asymétrie qui permet de gérer le fait qu'à un mouvement à la baisse ne correspond pas forcément une fluctuation identique à la hausse.

Pour ces raisons, les lois stables sont très appréciées pour décrire les séries financières. Cependant nous avons mis en évidence quelques inconvénients.

Certaines personnes (voir Cont, Potters et Bouchaud [12]) affirment que les distributions stables ne sont pas invariantes d'échelle ; la propriété d'auto-similarité n'étant pas vérifiée pour tous les pas de temps mais seulement pour les plus petits (moins d'une semaine). De plus, si la propriété d'invariance d'échelle était vérifiée alors l'exposant d'auto-similarité H serait exactement égale à l'inverse de l'exposant caractéristique $1/\alpha$ quel que soit le pas de temps choisi, ce qui n'est pas toujours le cas. Cette critique des lois stables est contestée par d'autres chercheurs qui soutiennent que les données ne sont pas stables mais dans le domaine d'attraction de la loi stable. Il a été montré que l'estimateur de McCulloch est sensible à une déviation du modèle stable et a tendance dans ce cas à sous-estimer l'indice de stabilité lorsque le pas de temps est petit. Cette constatation ne remet donc pas en cause le caractère

fractal des données. Il faut seulement, selon eux, considérer avec prudence les valeurs estimées du paramètre α .

De plus, il a été signalé que les lois stables de Lévy représentent correctement la partie centrale de la distribution empirique des rendements logarithmiques mais surestiment l'épaisseur de la queue de distribution. Il apparaît que les lois gaussiennes sous-estiment la probabilité des grandes fluctuations et que les lois stables non-gaussiennes surestiment cette même probabilité. Pour palier à ce problème, les chercheurs proposent de travailler avec des lois Lévy-stables tronquées.

Un second problème est que nous considérons que tous les actifs d'un portefeuille suivent une loi stable avec la même valeur du paramètre α à savoir $\alpha = 1,7$. Or nous avons montré dans la partie II que les valeurs de l'exposant caractéristique α varie d'une action à l'autre entre 1,4 et 1,7 (α étant d'autant plus proche de 1 que le titre est volatile). Nous sommes néanmoins obligés de faire cette approximation car nous ne savons pas actuellement ajouter ensemble des distributions stables avec des valeurs différentes du paramètre α . Si un jour, nous savons comment ajouter des distributions stables avec des paramètres α distincts, nous pouvons espérer améliorer considérablement les performances des portefeuilles pour un risque fixé et évaluer de façon plus précise le risque dans un portefeuille.

Nous obligeons aussi le paramètre de stabilité α à être compris entre 1 et 2 ($1 < \alpha \leq 2$), or certains chercheurs ont montré qu'il était plus raisonnable de considérer que l'exposant caractéristique est compris le plus souvent entre 2 et 5. Les lois stables conviennent lorsque nous travaillons avec α inférieur à 2 mais nous utilisons des lois de Weibull si le paramètre α est supérieur à 2. Il est donc important de fixer au départ un intervalle pour α . De plus, la méthode de calcul pour évaluer le paramètre α est différente selon que l'on suppose que α prend ses valeurs entre 1 et 2 ou entre 2 et 5.

Enfin les méthodes d'estimation des bêtas et du risque sont très approximatives. Nous ne savons pas actuellement comment évaluer le risque de façon précise et fiable. Nous avons beaucoup de mal à évaluer l'intensité des dépendances entre les actifs d'un portefeuille ou entre un actif et un *benchmark*.

Il n'existe pas actuellement une loi qui permette de représenter exactement les données financières. Chaque modèle proposé présente des avantages et des inconvénients. Nous avons montré dans ce mémoire que les lois stables même si elles sont critiquées permettent d'améliorer la performance d'un portefeuille. En effet, nous avons mis en évidence que sous l'hypothèse d'une loi stable de paramètre α égal à 1.7, nous améliorons significativement les performances d'un portefeuille d'actions françaises lorsque l'indice baisse (CAC40). De plus, lorsque l'indice prend de la valeur d'une semaine sur l'autre, nous avons prouvé que le portefeuille construit sous l'hypothèse d'une loi gaussienne et le portefeuille construit sous l'hypothèse d'une loi stable non-gaussienne ne sont pas différents statistiquement. Ainsi, ne pouvant pas prévoir à l'avance l'évolution du marché, il semble préférable de raisonner avec des lois stables non-gaussiennes pour améliorer significativement les performances des portefeuilles d'actions françaises. Nous pourrions faire à nouveau cette expérience sous l'hypothèse d'une loi stable de paramètre α différent de 1.7 ou de 2 pour déterminer la valeur de α pour laquelle les performances du portefeuilles sont les meilleures.

Nous avons aussi essayé d'évaluer le risque sur un marché « stable » mais les résultats n'ont pas été concluants. En effet, nous n'avons pas été capables d'isoler un estimateur du risque de marché plus précis que les autres. Nous avons terminé notre étude des marchés fractals avec la *Value at Risk*. Nous avons comparé plusieurs estimations de la *Value at Risk* avec sa valeur empirique pour plusieurs niveaux de probabilité et plusieurs horizons de temps. Nous avons mis en évidence que la *Value at Risk* n'est pas un outil correct pour estimer le risque de perte probable futur étant donné qu'il a toujours un temps de retard avec la réalité. La capacité du passé à anticiper l'avenir est manifestement très limitée.

Nous pensons que les fractales, et en particulier les lois Lévy-stables, peuvent dans l'avenir devenir des outils très performants en finance. Cependant il faut au préalable trouver le moyen d'ajouter ensemble deux lois Lévy-stables de paramètres de stabilité α_1 et α_2 différents. De même, il pourrait s'avérer très profitable de connaître des méthodes plus précises pour estimer les paramètres de ces lois.

ANNEXES

ANNEXE 1 : Simulation de variables gaussiennes.

ANNEXE 2 : Simulation de variables dans le domaine d'attraction des lois stables.

ANNEXE 3 : Algorithmes pour obtenir le graphe de la fonction de densité d'une loi stable.

Annexe 3.1. : Obtention de la densité par la transformée de Fourier rapide.

Annexe 3.2. : Algorithme DNI.

ANNEXE 4 : Présentation du *box-plot*.

SIMULATION DE VARIABLES GAUSSIENNES

Cette méthode est tirée de Lamberton, Lapeyre [27].

Si (U_1, U_2) sont deux variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ indépendantes alors $\sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$ suit une loi gaussienne centrée et réduite.

Pour simuler des variables gaussiennes de moyenne m et de variance σ , il suffit de poser $X = m + \sigma \times G$ où G est une variable gaussienne centrée et réduite.

Le programme informatique suivant est une macro Visual Basic qui simule et écrit sur une feuille Excel un nombre n de variables aléatoires gaussiennes de moyenne m et de variance σ . Les trois paramètres n , m et σ sont choisis par l'opérateur. Pour être sûr que ces données seront bien aléatoires, nous appliquons la fonction Excel *Randomize* à la fonction *Rnd* utilisée dans la fonction qui simule des variables gaussiennes centrées et réduites.

Option Explicit

Function Gauss(m As Double, sigma As Double) As Double

Randomize

*Gauss = m + sigma * Sqr(-2 * Ln(Rnd)) * Cos(2 * Excel.WorksheetFunction.Pi * Rnd)*

End Function

Sub Ecrit()

Dim n As Long

Dim k As Long

Dim m As Double

Dim sigma As Double

n = CLng(InputBox("Rentrez le nombre de variables à simuler"))

m = CLng(InputBox("Rentrez la valeur de la moyenne "))

sigma = CLng(InputBox("Rentrez la valeur de l'écart type "))

Cells(1, 1) = "Var gaussienne"

For k = 2 To n + 1

Cells(k, 1) = Gauss(m, sigma)

Next k

End Sub

SIMULATION DE VARIABLES DANS LE DOMAINE D'ATTRACTION DES LOIS STABLES

Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$,

Posons $P(\alpha) = \frac{1}{U^{1/\alpha}} - \frac{\alpha}{\alpha-1}$. P est une variable de loi de Pareto centrée d'indice de stabilité

α .

Posons $R(n; \alpha; b) = \left(\frac{1+b}{2}\right)^{1/\alpha} \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n P_i^{(1)}(\alpha) - \left(\frac{1-b}{2}\right)^{1/\alpha} \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^n P_i^{(2)}(\alpha)$,

Où $P_i^{(1)}$ et $P_i^{(2)}$ sont des copies indépendantes de P .

On peut montrer que $R(n; \alpha; \beta)$ est dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice de stabilité α et de paramètre d'asymétrie β .

$R(n; \alpha; \beta)$ est d'autant plus proche d'une loi stable que n est grand.

ALGORITHMES POUR OBTENIR LE GRAPHE DE LA FONCTION DE DENSITE D'UNE LOI STABLE

Annexe 3.1. Obtention de la densité par la transformée de Fourier rapide

Cet algorithme est issu de Mittnik, Doganoglu et Chenyao [39]

La fonction de densité d'une loi stable peut s'écrire sous la forme d'une transformée de Fourier :

$$f(x; a, b, s, m) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} y_X(t) dt \quad (1)$$

La transformée de Fourier rapide est un algorithme efficace pour calculer les transformées de Fourier. Il exige $N \log_2(N)$ opérations. L'intégrale précédente est calculée pour N points également espacés d'une distance h , à savoir $x_k = (k-1-(N/2)) \times h$ où k varie de 1 à N .

Posons $t = 2\pi\omega$, (1) devient :

$$f(x_k; a, b, s, m) = \int_{-\infty}^{\infty} y_X(2p\omega) e^{-i2p\omega x_k} d\omega \quad (2)$$

L'intégrale (2) peut-être approximée par :

$$f(x_k; a, b, s, m) \approx s(-1)^{k-1-(N/2)} \times \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} y_X \left(2ps \left(n-1-\frac{N}{2} \right) \right) e^{(-i2p(n-1)(k-1))/N} \quad (3)$$

La somme dans (3) est calculée efficacement en effectuant la transformée de Fourier rapide sur la série :

$$(-1)^{n-1} y_X \left(2ps \left(n-1-\frac{N}{2} \right) \right), \quad n = 1, \dots, N.$$

On multiplie le $k^{\text{ème}}$ résultat par $s(-1)^{k-1-(N/2)}$, pour obtenir la valeur de la fonction de densité pour chaque point $k = 1, \dots, N$.

Annexe 3. 2. Algorithme DNI

Vous retrouverez cet algorithme dans Nolan [42].

La formule que nous utilisons pour calculer la densité est obtenue à partir de la formule

$$\text{d'inversion } p(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{p} \int \cos(h(x, t; a, b)) e^{-t^a} dt,$$

$$\text{où } h(x, t; a, b) = xt - \text{Im}(\ln(E(\exp(itZ)))) = \begin{cases} xt + b \left(\tan \frac{pa}{2} \right) (t - t^a), & a \neq 1 \\ xt + b \frac{2}{p} t \ln(t), & a = 1 \end{cases}$$

La fonction caractéristique normalisée ($\sigma = 1$ et $\mu = 0$) d'une variable aléatoire stable Z avec la paramétrisation de Zolotarev s'écrit :

$$E(\exp(itZ)) = \begin{cases} \exp \left\{ -|t|^a \left[1 + ib(\text{sign}(t)) \tan \left(\frac{pa}{2} \right) (|t|^{1-a} - 1) \right] \right\}, & a \neq 1, \\ \exp \left\{ -|t| \left[1 + ib(\text{sign}(t)) \frac{2}{p} \ln|t| \right] \right\}, & a = 1. \end{cases}$$

Pour obtenir la densité d'une loi stable X quelconque dans le cas univarié, il suffit de calculer la densité de Z ci-dessus, qui est représenté par $p(x; \alpha, \beta)$ puis d'appliquer la formule suivante :

$$f(x; \alpha, \beta, \sigma, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{s} p \left(\frac{x - \left(sb \tan \frac{pa}{2} + m \right)}{s}; a, b \right), & a \neq 1, \\ \frac{1}{s} p \left(\frac{x - \left(\frac{2}{p} bs \ln s + m \right)}{s}; a, b \right), & a = 1. \end{cases}$$

$$\text{où } X \stackrel{d}{=} \begin{cases} sZ + \left(sb \tan \frac{pa}{2} + m \right), & a \neq 1, \\ sZ + \left(\frac{2}{p} bs \ln s + m \right), & a = 1. \end{cases}$$

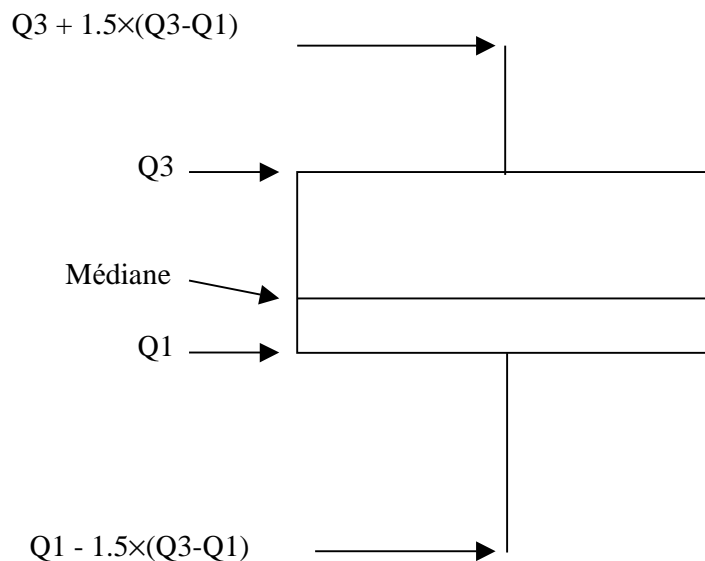
PRESENTATION DU BOX-PLOT

Les box-plots (ou boîtes à moustaches) mettent en évidence les quartiles d'une distribution. Ils donnent une bonne idée de la symétrie et de la dispersion d'une distribution. Ils facilitent les comparaisons entre plusieurs distributions. La longueur de la boîte correspond à l'écart interquartile ($Q3-Q1$). La médiane est indiquée par la verticale proche en générale du milieu. Une ligne ("moustache") reliant $Q3$ à la plus grande valeur inférieure ou égale à $Q3 + 1.5 \times (Q3-Q1)$ est dessinée. De manière symétrique, on représente une ligne reliant $Q1$ à la plus grande valeur supérieure ou égale à $Q1 - 1.5 \times (Q3-Q1)$. Toute donnée observée en dehors des moustaches est représentée par un point individuel et est considérée comme une valeur extrême (queue de distribution) ou une donnée suspecte (*outliers*). Une étude plus approfondie des données suspectes permet de déterminer les données aberrantes.

L'intérêt est qu'on voit d'un seul coup d'œil toutes les valeurs individuelles, où se trouvent 50% des données centrales (boîte), et à quel point la distribution est disymétrique.

$Q1$ représente le premier quartile, 25 % des données se trouvent en dessous de cette valeur.

$Q3$ représente le troisième quartile, 25 % des données ont une valeur supérieure à ce quartile.



INDEX DES SÉRIES

Dans cette section, nous récapitulons et donnons des indications sur les séries financières que nous avons utilisées dans les deux premières parties de ce mémoire. Tous les cours sont enregistrés à leur valeur de clôture.

Actions

Action du Premier Marché français

- * **Alcatel** (cours journaliers du 03/06/1987 au 09/04/2001), code SICOVAM 13000
- * **AXA** (cours journaliers du 27/09/1977 au 10/06/2001), code SICOVAM 12062
- * **France Télécom** (cours journaliers du 17/10/1997 au 10/06/2001), code SICOVAM 13330
- * **Renault** (cours journaliers du 17/11/1994 au 10/06/2001), code SICOVAM 13190

Action du Marché américain

- * **Microsoft** (cours journaliers du 03/06/1987 au 09/04/2001), code CUSIP 594918104

OPCVM Groupama et Gan

OPCVM de Taux

- * **Groupama Obligations France** (cours journaliers du 25/08/1992 au 18/05/2001)
- * **GAN rendement** (cours journaliers du 31/07/1992 au 30/03/2001)

OPCVM Actions

- * **Améri-GAN** (cours journaliers du 10/02/1992 au 30/03/2001)
- * **Nippon Gan** (cours journaliers du 01/01/1992 au 22/05/2001)
- * **France Gan** (cours journaliers du 07/10/1986 au 30/03/2001)
- * **Groupama Croissance** (cours journaliers du 28/12/1990 au 30/03/2001)

Indice

Indice français

- * **SBF 250** (cours journaliers du 28/12/1990 au 10/06/2001), code 399949

Indice internationaux

- * **Dow Jones industrials** (cours journaliers du 31/12/1964 au 10/06/2001)
- * **Nasdaq Composite** (cours journaliers du 05/02/1971 au 10/06/2001)
- * **Nikkei 300** (cours journaliers du 04/01/1991 au 10/06/2001)

INDEX DES NOTATIONS ET ABREVIATIONS UTILISEES

Notation	Signification
i.e.	Id est (c'est-à-dire)
resp.	Respectivement
$\stackrel{d}{=}$	Suit le même loi que ...
$\Psi_X(x)$	Fonction caractéristique de X
$f(x)$	Fonction de densité de X
$S_\alpha(\beta ; \sigma ; \mu)$	Loi stable de paramètre α , β , σ et μ
$\text{Ent}[X]$	Partie entière de X
$I_{[a; b]}(x)$	Fonction indicatrice : $I = 1$ si $x \in [a ; b[$ $I = 0$ sinon.
i.i.d.	Indépendant(s) et identiquement distribué(s)
\xrightarrow{d}	Converge en distribution vers ...
$x^{<k>} = x ^k \cdot \text{signe}(x)$	Puissance signée de x
$P(t)$	Prix à la date t
$L(t + T) = \ln(P(t + T)) - \ln(P(t))$ $= \ln \frac{P_{t+T} + D_{[t; t+T]}}{P_t}$	Rendement logarithmique avec un pas T (T en jours, par défaut) où $D_{[t; t+T]}$ représente rémunération générée par l'actif.
$ (q, s) ^a$	$ {}^t q \cdot s ^a$ où ${}^t X$ désigne le vecteur transposé de X
β_i	Coefficient bêta classique (loi de Gauss) ou généralisé (loi stable) selon les cas
VaR_t	<i>Value at Risk</i> à la date t
$\text{VAR}_t^{(n)}$	Valeur estimée de la <i>Value at Risk</i> à la date t calculée à partir des n dernières observations

INDEX DES PROGRAMMES

Les programmes indiqués ci-dessous ont été utilisés dans ce mémoire et sont disponibles sur Internet à l'adresse <http://www.multimania.com/eadam2/fractale>. Cette page personnelle ne contient que les programmes (macro Excel) que j'ai écrit et ne comprend pas les données utilisées dans les deux premières parties (cf. index des séries).

Cette page a pour premier objectif de faire gagner du temps aux personnes qui souhaiteraient travailler à nouveau sur les fractales ; elle leur évitera de reprogrammer les algorithmes indispensables à l'étude des fractales (méthode de McCulloch, graphe de la densité, générateur de variables aléatoires stables ...).

Elle a aussi été conçue comme outil de vérification rapide dans le cas où un test ou un graphique semblerait faux. Toutes les méthodes utilisées n'étant pas décrites en détail (les paramètres d'arrêt, par exemple, ne sont pas toujours précisés), ces programmes permettront au lecteur de connaître précisément les paramètres et les étapes utilisées.

Arborescence :

PARTIE 2

densité.xla :

- * densité : algorithme DNI décrit par Nolan [42] permettant de tracer la densité d'une loi stable (dont les paramètres sont choisis par l'utilisateur).

macro.xla :

- * alphastable : Générateur de variables aléatoires stables (Module 2).
- * estimation : programme qui estime les paramètres α , β , σ et μ d'une loi stable (Module 3).
- * autosimil1 : programme qui calcule α et σ pour différents pas de temps. La taille des sous-échantillons varie en fonction du pas de temps (Module 4).
- * autosimil2 : programme qui calcule α et σ pour différents pas de temps. La taille des sous-échantillons est fixée par l'utilisateur (Module 4).

PARTIES 3 ET 4

multivarié.xla :

- * dividende : programme qui ajoute automatiquement le dividende au cours de l'action concernée le jour où il tombe (Module 6).
- * calcul_beta : programme qui estime le bêta classique puis le bêta stable avec $\alpha = 1,7$ (Module 1).
- * portefeuille : programme qui permet de simuler les 6 portefeuilles de la partie IV explicité dans la section 11.2. (Module 4).

MarchéFrance98-00.xls :

Base de données recensant tous les cours et les dividendes des actions sélectionnées sur le Premier Marché. C'est la base qui a été utilisée pour construire les portefeuilles de la partie IV.

PARTIE 5

risque.xla :

- * estim_risque : programme qui estime le risque d'une action à partir de la variation (Module 2). L'opérateur choisit le nombre d'observations utilisées pour l'estimation et la valeur du paramètre de stabilité α .
- * main : programme qui permet de suivre l'évolution de la *Value at Risk* estimée et de la *Value at Risk* empirique (procédure de fenêtres glissantes) (Module 4).

Le mode d'emploi des programmes cités ci-dessus se trouve dans les fichiers lisez_moi.txt.

Sur ces fichiers sont indiqués pour chaque programme Visual Basic :

1. l'objet du programme,
2. la procédure à suivre,
3. la présentation des résultats qui apparaissent après l'exécution de la macro.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AKGIRAY V. et BOOTH G.G., 1988. *The stable law model of stock returns*. Journal of Business and Statistical Economics, **6**, p. 51-57.
- [2] ARTZNER Philippe, DELBAEN Freddy, EBER Jean-Marc et David HEATH, 1999. *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance, **9**, p.203-228.
- [3] BAWA Vijay S.et LINDENBERG Eric B., 1977. *Capital Market equilibrium in a mean-lower partial moment framework*. Journal of Financial Economics, **5**, p.189-200.
- [4] BELKACEM Lofti, 1996. *Processus stables et applications en finance : CAPM, risque, choix des portefeuilles, évaluation des options, dans un marché stable*. Paris IX, Thèse en sciences appliquées.
- [5] BELKACEM Lofti, LEVY-VEHEL Jacques, WALTER Christian, 2000. *CAPM, risk and portfolio selection in « α -stable markets »*. Fractals, **8**, p. 99-115.
- [6] BERAN Jan, 1994. *Statistics for long-memory processes*. New york, Chapman and Hall.
- [7] BLUME Marshall E., 1971. *On the assessment of risk*. Journal of Finance, **26**, p.1-10.
- [8] BUTUCEA Cristina, 1995. *Etude des processus fractals et applications en finance*. Paris, Mémoire ISUP.
- [9] CHAMBERS J.M., MALLOWS C.L., STUCK B.W., 1976. *A method for simulating stable random variables*. Journal of the American Statistical Association, **71**, p. 340-344.
- [10] CHENG B. N. et RACHEV Svetlozar, 1995. *Multivariate Stable Futures Prices*. Mathematical Finance, **5**, N° 2, p.133-153.

-
- [11] CONT Rama, 2001. *Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues*. Quantitative Finance, Vol. **1**, p. 223-236.
- [12] CONT Rama, POTTERS Marc et BOUCHAUD Jean-Philippe, 1997. *Scaling in stock market data : stable laws and beyond*. A paraître dans Scale Invariance and Beyond.
- [13] DAVIES R. , HARTE D., 1987. *Tests for Hurst effect*. Biometrika **74**, p. 95-101.
- [14] DIEBOLD Francis, 1993. Comment on "*Modelling Assets Returns with Alternative Stable Distributions*". Econometric Reviews, Vol. **12**, n° 3, p. 339-342.
- [15] DUFFIE Darrell, 1988. *Security Markets : Stochastic Models*. New York, Academic Press.
- [16] EL ALAOUI, 2001. *Mesure du risque par la perte maximale probable (Value at Risk)*. Paris, Fixage, Journée de formation du 2 mars 2001.
- [17] FAMA E.F., Roll R., 1971. *Parameter estimates for symmetric stable distributions*. Journal of the American Statistical Association, **66**, n° 334, p. 331-338.
- [18] FEDER Jens, 1988. *Fractals*. New York, Plenum Press.
- [19] GAMROWSKI Bertrand, 1996. *Modélisation des Risques de Marché des Position sur Instruments Financiers : Contributions à l'Approche Pareto-Stable*. Ecole Polytechnique, Thèse en Sciences de l'Homme et de la Société, spécialité Economie.
- [20] GAMROWSKI Bertrand et RACHEV Svetlozar, 1995. *Testing the Validity of Value-at-Risk Measures*. Lecture Notes in Statistics, 114, Vol. **1**, p. 307-320.
- [21] GAMROWSKI Bertrand et RACHEV Svetlozar, 1999. *A Testable Version of the Pareto-Stable CAPM*. Mathematical and Computer Modelling, **29**, N° 10-12, p. 61-81.
- [22] JANICKI Aleksander et WERON Aleksander, 1994. *Simulation and chaotic behavior of α -stable stochastic processes*. New York, Marcel Dekker.

- [23] JORION Philippe et KHOURY Sarkis Joseph, 1995. *Financial risk management : domestic and international dimensions*. U.S., Blackwell Publishers.
- [24] JORION Philippe, 2001. *Value at Risk : the new benchmark for managing financial risk*. 2nde edition, McGraw-Hill.
- [25] KOEDIJK K.G., SCHAFGANS M.M. et VRIES C.G., 1990. *The tail index of exchange rate returns*. Journal of International Economics, 29, p. 93-116.
- [26] LACAZE Xavier, 1995. *Le Dictionnaire Encyclopédique de la Finance 1995-1996, Volume 1*. Paris, 1993.
- [27] LAMBERTON Damien, LAPEYRE Bernard, 1997. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Paris, Ellipses.
- [28] LEVY Paul, 1925. *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars.
- [29] LO Andrew, 1997. *A Non-Random Walk Down Wall Street*. Proceedings of symposia in pure mathematics, **60**, p. 149-183.
- [30] McCULLOCH J. Huston, 1986. *Simple consistent estimators of stable distribution parameters*. Communications in Statistics – Computation and Simulation, **15**, p. 1109-1136.
- [31] MANDELBROT Benoît, WALLIS James, 1968. *Noah, Joseph and operational hydrology*. Water resources Research **4**, p. 909-918.
- [32] MANDELBROT Benoît, WALLIS James, 1969. *Computer experiments with fractional Gaussian noises, Part 1,2 & 3*. Water resources Research **5**, p. 228-267.
- [33] MANDELBROT Benoît, WALLIS James, 1969. *Some long-run properties of geophysical records*. Water resources Research **5**, p. 321-340.

-
- [34] MANDELBROT Benoît, WALLIS James, 1969. *Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence*. Water resources Research **5**, p. 967-988.
- [35] MANDELBROT Benoît, 1989. *Les objets Fractals : forme, hasard et dimension*. Paris, Flammarion.
- [36] MANDELBROT Benoît, 1997. *Fractals and Scaling in Finance : Discontinuity, Concentration, Risk*. New York, Springer-Verlag.
- [37] MANDELBROT Benoît, 1997. *Fractales, hasard et finance*. Paris, Flammarion.
- [38] MITTNIK Stefan et RACHEV Svetlozar, 2000. *Stable Paretian models in finance*. New York, Wiley.
- [39] MITTNIK Stefan, DOGANOGLU T. et CHENYAO D., 1999. *Computing the Probability Density Function of the Stable Paretian Distribution*. Mathematical and Computer Modelling, **29**, N° 10-12, p. 235-240.
- [40] MITTNIK Stefan et RACHEV Svetlozar, 1993. *Modelling Assets Returns with Alternative Stable Distributions*. Econometric Reviews, Vol. **12**, n° 3, p. 261-330.
- [41] MITTNIK Stefan et RACHEV Svetlozar, 1993. *Reply to Comments on "Modelling Asset Returns with Alternative Stable Distributions " and Some Extensions*. Econometric Reviews, Vol. **12**, n° 3, p. 347-389.
- [42] NOLAN J.P., 1999. *An Algorithm for Evaluating Stable Densities in Zolotarev's (M) Parameterization*. Mathematical and Computer Modelling, **29**, N° 10-12, p. 229-233.
- [43] PELTIER Romain François, 1998. *Processus stochastiques fractals avec applications en finance*. Paris VI, Thèse en Statistique Mathématique.
- [44] PETERS Edgar E., 1994. *Fractal market analysis : applying chaos theory to investment and economics*. New York, J. Wiley.

- [45] RACHEV Svetlozar T., KIM Jeong-Ryeol et MITTNIK Stefan, 1999. *Stable Paretian models in econometrics : part I*. Mathematical Scientist, **24**, p.24-55.
- [46] RACHEV Svetlozar T. et XIN Huang, 1993. *Test for association of random variables in the domain of attraction of multivariate stable law*. Probability and mathematical statistics, **14**, N°1, p. 125-141.
- [47] SAMORODNITSKY G. et TAQQU M.S., 1994. *Stable Non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, New York.
- [48] SAPOVAL Bernard, 1997. *Universalités et fractales : jeu d'enfants ou délit d'initiés ?* Paris, Flammarion.
- [49] SIMON Yves, 1997. *Encyclopédie des marchés financiers*. Economica, Paris.
- [50] TAQQU Murad, 1970. *Note on evaluations of R/S for fractionnal noises and geographical records*. Water Resources Research **6**, p. 349-350.
- [51] WALTER C., 3^{ème} trimestre 1989. *Les risques de marché et les distributions de Lévy*. Analyse financière, **78**, p.40-50.
- [52] WALTER C., 1990-1991. *L'utilisation des lois Levy-stables en finance : une solution possible au problème posé par les discontinuités des trajectoires financières*. Bulletin de l'Institut des Actuaire Français, **349**, p. 3-32 et **350**, p. 3-23.
- [53] WALTER, C., 1999. *Lévy-Stability-Under-Addition and Fractal structure of Markets : Implications for the Investment Management industry and Emphasized Examination of MATIF Notional Contract*. Mathematical and Computer Modelling, **29**, N°10-12, p.37-56.
- [54] WERON Aleksander et WERON Rafał, 1995. *Computer Simulation of Lévy α -Stable Variables and Processes*. Lecture Notes in Physics, **457**, p.379-392.
- [55] ZAJDENWEBER Daniel, 2000. *Economie des extrêmes*. Paris, Flammarion.

- [56] ZOLOTAREV V.M., 1986. *One-dimensional Stable Distributions*. American Mathematical Society, Vol. **65** of Translations of Mathematical monographs. American Mathematical Society, RhodeIsland. Translation from the original 1983 Russian edition.

SITES INTERNET CONSULTÉS

[Http://perso.club-internet.fr/herlin/chap5.html](http://perso.club-internet.fr/herlin/chap5.html) Thèse de HERLIN Philippe, 1998. *Les économies d'échelles sur les marchés financiers, une approche par la théorie de l'information.*

[Http://laic3.u-clermont1.fr/~deguy/publi/MBF/](http://laic3.u-clermont1.fr/~deguy/publi/MBF/) DEGUY Sébastien. *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur le mouvement brownien fractionnaire, les processus gaussiens auto-similaires, l'intermittence, H, p et leurs estimations sans jamais oser le demander.*

[Http://www.oecceb.be/actualities/Notionrisque.htm](http://www.oecceb.be/actualities/Notionrisque.htm) JANSSENS Claude. *Notion de risques, quelques rappels : Béta, CAPM.*

<http://www.pwcglobal.com/lu/eng/about/press-rm/lejeudi25012001.html> BERBÉ Christian, Directeur Global Risk Management Solutions, 2001. *Toujours préoccupés, les gestionnaires d'actifs - Quels indicateurs de risque ?*

http://www.pwcglobal.com/fr/fra/ins-sol/spec-int/les_echos_02.html BÉNÂTRE Didier et WALTER Christian PricewaterhouseCoopers, 2000. *Du hasard sage au hasard sauvage.*

<http://www.gloriamundi.org> SCHACHTER Barry. *All About Value-at-Risk™*.

http://www.lesechos.fr/formations/finance/articles/article_11_1.htm LES ECHOS. *VaR : quelle mise sur la table du casino ?*

<http://www.cmap.polytechnique.fr/~rama/papers> CONT Rama, chercheur au Centre de Mathématiques Appliquées, CNRS UMR 7641 à l'École Polytechnique. *Recent research papers.*

<http://fr.biz.yahoo.com/glos> VERNIMEN. *Guide de la finance : Glossaire.*

<http://www.riskeye.com/paper> DAVE Rakhal D., STAHL Gerhard. *On the accuracy of VaR estimates based on the Variance-Covariance approach.*

MA PAGE PERSONNELLE

<http://www.multimania.com/eadam2> ADAM Estelle. *Page personnelle.*