

**Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles
pour l'obtention du diplôme
du Centre d'Etudes Actuarielles
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le : 22 juin 2011**

Par : Fabien DE BARROS et Antoine CHRISTIEN

Titre : Modèle de provisionnement économique AUTOMOBILE incluant l'indemnisation sous
forme de rentes

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de signature
l'Institut des Actuaire :

Membres présents du jury du
Centre d'Etudes Actuarielles :

Thomas BEHAR

Vincent DAMAS

Gérard CROSET

Arnaud COHEN

Jean-Pierre DIAZ

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Michel FROMENTEAU

Benoît HUGONIN

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Florence PICARD

Christian-Yann ROBERT

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : MAAF ASSURANCES

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Aurélie LAGRE

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé

Notre mémoire porte sur la modélisation économique des provisions en Automobile, en dissociant les sinistres graves des sinistres de fréquence. Pour les sinistres de fréquence, nous exploitons des méthodes classiques de provisionnement (*Chain Ladder*, Mack, *Bootstrap*). Nous définissons une segmentation homogène des risques et nous redressons les paiements par l'inflation.

Pour les sinistres graves, nous proposons un modèle d'évaluation des paiements individuels des dossiers. En outre, nous tenons compte des indemnisations sous forme de rente pour certains postes de préjudice. Pour la partie hors rentes, nous avons mis au point un modèle basé sur une probabilité de paiement exercice nul ainsi qu'une distribution de paiements exercice dans le cas non nul. Cette approche nous permet une évaluation précise des cessions en réassurance, intégrant les clauses spécifiques aux traités RC non proportionnels.

Finalement, nous proposons une consolidation des segments d'analyse afin de constituer la provision globale automobile.

Mots clés :

Modèle interne partiel, Solvabilité II, Rente Non-Vie, Provisionnement, Chain-Ladder, Mack, Bootstrap, Inflation, Dépendance, Réassurance non proportionnelle

Abstract

Our thesis focuses on an economic modeling of motor reserves, by separating large claims from attritional claims. We employ traditional reserving methods (Chain Ladder, Mack, Bootstrap) in order to evaluate attritional claims reserves. We define a segmentation of homogeneous risks and we adjust payments according to the inflation rate.

For large claims, we build a model for assessing individual claims payments. Moreover, we take into account annuity payments. Except for the annuities part, we develop a model based on an annual probability of non-payment, mixed with a distribution of annual non-zero payments. It allows us an accurate assessment of reinsurance, incorporating specific clauses for non-proportional liability treaties.

Finally, we consolidate all the segments analyzed before building the total motor reserve.

Keywords :

Partial Internal Model, Solvency 2, Annuity from non life contracts, Reserving, Chain-Ladder, Mack, Bootstrap, Inflation, Dependency, Non Proportionnal Reinsurance.

Remerciements

Nous tenons à remercier Aurélie LAGRE notre responsable au sein de la Division Actuariat de MAAF Assurances pour avoir tenu son rôle de directeur de mémoire avec application.

Nous remercions également Valérie PION et Sandrine BOULET pour leur expertise et Richard REY pour son soutien et ses encouragements répétés.

Sommaire

Introduction	7
1 Engagements en Automobile	8
1.1 Assurance Automobile	8
1.2 Garanties du contrat MAAF	8
1.2.1 Garantie Responsabilité civile	8
1.2.2 Garantie Recours.....	9
1.2.3 Garantie Dommages corporels du conducteur.....	9
1.2.4 Garanties dommage	9
1.2.5 Garantie Assistance.....	9
1.3 Conventions	10
1.3.1 IRSA	10
1.3.2 IRCA.....	10
1.4 Indemnisation des victimes RC Corporelle	11
1.4.1 Généralités.....	11
1.4.2 Loi Badinter.....	11
1.4.3 Nomenclature Dintilhac	11
1.4.4 Base AGIRA ou Fichier des indemnités allouées aux victimes d'accidents de la circulation.....	12
1.4.5 Barème de capitalisation	12
1.4.6 Provisionnement des rentes IARD	13
1.4.7 Process de gestion MAAF	14
1.4.8 Proposition de loi Lefrand et base JuriCA	15
1.4.9 Revalorisation des rentes.....	15
1.5 Réassurance	16
1.5.1 Types de traités	16
1.5.2 Traités proportionnels	16
1.5.3 Traités non proportionnels.....	16
2 Solvabilité 2	18
2.1 De solvabilité 1 à Solvabilité 2	18
2.1.1 Rappels sur Solvabilité 1	18
2.1.2 Fondements de Solvabilité 2.....	18
2.1.3 Zoom sur les 3 piliers	19
2.2 Caractéristiques Solvabilité 2	20
2.2.1 Bilan économique SII.....	20
2.2.2 Zoom sur les provisions techniques	21
2.3 Formule Standard SII selon QIS5	22
3 Modèle de provisionnement des sinistres de masse	26
3.1 Données disponibles.....	26
3.2 Modèles étudiés	28
3.2.1 Chain ladder.....	28
3.2.2 Modèle de Mack	31
3.2.3 <i>Bootstrap</i> appliqué au modèle de Mack	33
3.3 Modélisation retenue	36
3.3.1 Redressement de l'inflation	36
3.3.2 Application du modèle de Mack	39
3.3.3 Utilisation du <i>Bootstrap</i>	42
3.3.4 Prise en compte des conventions	48
4 Provisionnement des sinistres graves	49
4.1 Généralités.....	49
4.1.1 Objectifs	49
4.1.2 Différences entre le modèle de provisionnement et le modèle de souscription	49
4.1.3 Etat des lieux	49
4.1.4 Données disponibles	51
4.2 Description du modèle.....	52

4.2.1	Principes	52
4.2.2	Théorie	57
4.2.3	Inflation	62
4.2.4	Estimation de paramètres	64
4.3	Réassurance RC	79
4.3.1	Généralités	79
4.3.2	Clauses importantes	80
4.3.3	Synthèse sur la réassurance	84
4.4	Mise en œuvre	85
4.4.1	Paievements exercice	86
4.4.2	Rentes	86
4.5	Résultats	87
4.5.1	Résultats du calibrage	88
4.5.2	Résultats en version centrale	91
4.5.3	Sensibilité	94
5	Consolidation des provisions	98
5.1	Mesure de dépendance	98
5.1.1	Mesure de concordance	98
5.1.2	Coefficient de corrélation linéaire de Pearson	98
5.1.3	Coefficient de corrélation de Kendall	99
5.1.4	Coefficient de corrélation de Spearman	99
5.2	Type de dépendance	99
5.2.1	Corrélation linéaire	99
5.2.2	Copules	100
5.3	Méthodes utiles avec une modélisation par triangles	101
5.3.1	Corrélation des facteurs de développement (Braun)	101
5.3.2	Dépendance lors du Bootstrap	104
5.4	Application	104
5.4.1	Mesure des enjeux	105
5.4.2	Etude des dépendances	105
5.4.3	Choix du modèle	110
5.4.4	Résultats	111
	Conclusion	113
	Annexes	115
	Provisions mathématiques	115
	Loi n°74-1118 du 27 décembre 1974 relative à la revalorisation de certaines rentes allouées en réparation du préjudice causé par un véhicule terrestre à moteur (extrait)	115
	Proposition de loi Lefrand (Extrait)	116
	Proposition de loi Béteille (Extrait)	116
	Annexe Garanties	117
	Garantie RC	117
	Modélisation du recours pour les sinistres graves en RC Corporelle	118
	Bibliographie	121

Introduction

Le présent mémoire a pour objet la modélisation économique des provisions de la branche automobile. Il s'inscrit en première étape de développement d'un modèle interne partiel. Il traite du risque de provisionnement sur la principale branche de l'entreprise MAAF Assurances, à savoir l'automobile.

Cette branche est aujourd'hui fortement exposée à des évolutions législatives, notamment sur l'indemnisation corporelle. Les projets de loi Lefrand et Béteille visent effectivement à faire évoluer le système et les référentiels d'indemnisation des victimes de manière à les rendre plus homogènes et transparents.

La réforme prudentielle Solvabilité 2 et le durcissement du marché de l'assurance en général et en automobile en particulier conduisent les compagnies d'assurances à devoir estimer au plus juste les risques qu'elles portent. Pour bien prendre la mesure de leur passif lié à leur activité les assureurs mettent en place des outils d'estimation de leurs engagements probables et de la volatilité associée. Le choix des méthodes et des hypothèses sous-jacentes, tant économiques que statistiques, est dicté aussi bien par le législateur et que par les orientations stratégiques de l'entreprise. Ces travaux s'inscrivent dans différentes séquences de la vie de l'entreprise :

- Modèle interne total ou partiel pour répondre aux nouvelles normes de solvabilité dont l'ORSA
- Décisions tarifaires,
- Stratégies d'allocation financière,
- Autre : Cession d'un portefeuille etc...

Après de brèves descriptions des engagements en automobile et de la réforme Solvabilité 2, nous entrons dans la modélisation des provisions. Nous dissociions dans la modélisation les sinistres graves de l'ensemble de la masse des sinistres.

Pour la partie hors graves, nous utilisons des modèles désormais classiques de provisionnement mais pour lesquels nous insistons sur la qualité des données :

- Etude de segmentation optimale des garanties avec a minima la maille requise pour Solvabilité 2,
- Redressement de l'inflation afin de réaliser des hypothèses explicites d'inflation future,
- Impact de ces retraitements sur la validation des hypothèses du modèle.

Pour les sinistres graves (RC Corporelle), nous n'utilisons pas de modèles classiques basés sur la projection individuelle des dossiers. En effet, ils ne répondent pas directement à nos objectifs puisqu'aucun ne projette les flux futurs, comme le précise la définition du *Best Estimate* sous Solvabilité 2. Nous proposons donc une modélisation individuelle des sinistres permettant de projeter ces flux futurs, en dissociant le risque vie du risque non vie. En outre, nous souhaitons qu'il permette d'évaluer les cessions de réassurance non proportionnelle en tenant compte de clauses spécifiques au risque RC.

Enfin, nous terminons ce mémoire par la consolidation des segments étudiés (graves et hors graves) afin d'obtenir une distribution des provisions de la branche Automobile. Pour cela, nous mesurons les dépendances entre ces segments puis mettons en œuvre la structure nous semblant la plus adaptée.

1 Engagements en Automobile

1.1 Assurance Automobile

Le XX^{ème} siècle a vu l'avènement de l'ère automobile et dans son sillage l'émergence d'un marché d'assurances couvrant les risques liés à son usage. Les acteurs de ce marché ont pu prendre plusieurs formes à caractère juridique distinct : mutuelle corporative d'assurances ou société anonyme, à réseaux salariés, à agents généraux ou courtiers. En France, la loi du 27 février 1958 instaure l'obligation pour tout conducteur de souscrire auprès d'une compagnie agréée un contrat de responsabilité civile. En effet, jusqu'alors cette assurance était facultative et un fonds créé en 1951 permettait d'indemniser les victimes en cas d'insolvabilité ou non identification du responsable. Mais devant l'augmentation du nombre et des coûts des sinistres la pérennité du fonds n'était pas assurée d'où la nécessité de rendre obligatoire l'assurance.

De l'après guerre au milieu de l'année 1980, le parc automobile n'a cessé de croître, permettant un essor de l'assurance automobile. Depuis le marché a atteint sa maturité et la concurrence s'est durcie avec l'arrivée de nouveaux acteurs venus du monde bancaire forts de leurs réseaux de distribution.

Le chiffre d'affaires de l'assurance automobile en France en 2009 est de presque 19 milliards d'euros, dont plus d'un tiers au titre de la garantie de responsabilité civile, pour un peu plus de 16 milliards d'euros de coût de sinistres (paiements et provisions).

1.2 Garanties du contrat MAAF¹

La Maaf est historiquement une mutuelle d'assurance sans intermédiaire créée pour proposer des contrats d'assurance automobile aux artisans. Depuis l'offre des contrats possibles s'est étendue à l'assurance multi risque habitation, multi risque professionnel, décennale entre autres mais l'assurance automobile reste les 2/3 de l'activité. De plus la souscription désormais est ouverte à tous les particuliers pour leur déplacement privé et professionnel. La branche Automobile regroupe aussi bien les voitures, les motos/cyclos que les camions, remorques et autres véhicules divers, des particuliers ou des professionnels, dont les artisans taxi, hors flotte.

Nous proposons 5 formules de garanties :

- Tiers Simple (RC, Recours, Dommages corporels du conducteur et assistance)
- Tiers médian (formule précédente + Bris de glace et Catastrophes naturelles)
- Tiers maxi (formule précédente + Evénements climatiques, incendie/explosion, Vol)
- Tierce Collision (formule précédente + Tierce Collision)
- Tous risques (formule précédente + Dommages tous accidents)

Au travers de ces formules, nous offrons la possibilité de souscrire des options telles que :

- Contenu privé,
- Contenu professionnel,
- Accessoires hors série,
- Aménagements professionnels,
- Assistance 0km
- Véhicule de remplacement,
- Immobilisation du véhicule,
- Indemnisation +,
- Réparation +,
- Défense juridique.

1.2.1 Garantie Responsabilité civile

La garantie de responsabilité civile est obligatoire (article L211-1 du code des assurances). Le montant de la garantie est illimité pour le dommage corporel et plafonné à 100M€ pour le matériel. Cette garantie permet de compenser financièrement les dommages matériels et corporels subis par les tiers lorsque la responsabilité de l'assuré est engagée à la suite d'accident, incendie ou explosion causés par le véhicule assuré.

Cette garantie s'accompagne d'une défense amiable ou juridique des assurés.

1.2.2 Garantie Recours

Cette garantie permet aux personnes assurées d'obtenir la réparation des dommages matériels ou corporels subis à la suite d'un accident de la circulation impliquant le véhicule assuré et engageant la responsabilité de l'adversaire des personnes assurées.

1.2.3 Garantie Dommages corporels du conducteur

Après un accident garanti, cette garantie permet au conducteur assuré de percevoir :

- Une aide financière immédiate,
- Des indemnités s'il est responsable,
- Des avances de fonds s'il ne l'est pas.

Les montants garantis sont :

- En cas de blessures du conducteur : de 13 400€ à 990 000€ selon le taux d'Incapacité Permanente Partielle (IPP) et le niveau souscrit, sous forme de capital invalidité. Des majorations sont possibles suivant les circonstances : Majoration de 25% du capital si une assistance tierce personne est nécessaire,
- Frais médicaux, d'études... dans la limite de 7 600 €.

1.2.4 Garanties dommage

Pour les garanties dommages, les biens garantis sont indemnisés selon le principe défini par l'article L121-1 du code des assurances.

Les dommages sont évalués de gré à gré ou par expert.

L'indemnité est égale au montant des réparations dans la limite de la valeur de remplacement du véhicule assuré ou de sa valeur argus, si celle-ci est plus élevée (déduction faite du prix de l'épave si le véhicule n'est pas réparé).

Ces garanties sont soumises à franchise et/ou à plafond.

L'existence au contrat de ces garanties induit l'obligation d'assurer le risque catastrophe naturelle (L125-1).

1.2.5 Garantie Assistance

Les garanties d'assistance sont des garanties de service, elles interviennent en cas de panne ou d'accident nécessitant le remorquage du véhicule et la prise en charge des passagers. D'autres prestations complémentaires peuvent être proposées : prêt de véhicule ...

1.3 Conventions

Les conventions décrites ci-après sont mises en place afin de faciliter la gestion des sinistres impliquant deux parties adverses et dont les montants de préjudice sont faibles. A des rares exceptions, y adhère l'ensemble du marché.

1.3.1 IRSA

Convention Générale d'Indemnisation et de Recours entre Sociétés d'Assurances Automobiles ou Convention d'Indemnisation directe de l'assuré et de Recours entre Sociétés d'assurances Automobiles.

Cette convention datant de la fin des années soixante concerne les sinistres à caractère matériel impliquant au moins deux véhicules terrestres à moteur en France (ou à l'étranger sous certaines conditions) dont les compagnies d'assurances sont signataires de la convention.

Le titre 3.1 de cette convention définit le cadre d'application du forfait IDA (**I**ndemnisation **D**irecte de l'**A**ssuré):

Il concerne les sinistres impliquant deux et seulement deux véhicules et dont le coût du préjudice est estimé à moins de 6 500€. Dans ce cas l'assureur indemnise son assuré à hauteur de son préjudice avant d'émettre un recours partiel ou total auprès de la compagnie adverse (cas d'une responsabilité partagée ou d'absence de responsabilité de son assuré) sur la base du forfait (50% ou 100% du forfait, anciennement les taux de responsabilité étaient divisés en quarts). Depuis plusieurs années ce forfait est stable mais a été réévalué en 2011.

Suite à une déclaration de sinistre entrant dans le cadre du titre 3.1, le rédacteur détermine à la lecture du constat amiable et sur la base des cas de figure décrits dans la convention le taux de responsabilité de son assuré et le cas échéant émet par voie informatique un recours auprès de l'organisme centralisateur qui retransmet la demande. La compagnie adverse peut contester cette demande ou s'exécuter.

Si le préjudice dépasse les 6 500€, le titre 3.2 de la même convention s'applique et la demande de recours n'est plus forfaitaire mais sur la base du coût réel du sinistre.

Un recours peut être émis au plus tard 24 mois après la date du sinistre.

	2009	2010	2011
Forfait IDA	1 204€	1 204€	1 236€
<i>Evolution</i>		0%	2,7%

1.3.2 IRCA

Convention d'Indemnisation et de Recours Corporel Automobile.

Cette autre convention mise en place en 2002 concerne les sinistres corporels impliquant au moins 2 véhicules terrestres à moteur en France (ou à l'étranger sous certaines conditions) dont les compagnies d'assurances sont signataires de la convention.

Un assureur est mandaté suivant les dispositions de la convention et il lui incombe la gestion du dossier pour l'ensemble des parties.

Il existe également dans ce cadre un mécanisme de forfait pour les sinistres dont les préjudices corporels n'entraînent pas de conséquence à long terme (Taux AIPP nul) et dont le coût réel est inférieur à 30K€ par personne et 80K€ par véhicule. Cependant il n'existe pas encore de système automatique « universel » d'émission de recours comme pour l'IDA. Des pourparlers sont menés actuellement pour étendre le système de forfait aux dossiers avec AIPP jusqu'à 5%.

	2009	2010	2011
Forfait IRCA	1 490€	1 490€	1 490€
<i>Evolution</i>		0%	0%

1.4 Indemnisation des victimes RC Corporelle

1.4.1 Généralités

Dans le cas d'un sinistre avec préjudice corporel d'un tiers le dénouement du dossier peut se faire de deux manières :

- Par transaction, c'est-à-dire avec un accord amiable avec la partie adverse
- Par voie judiciaire, c'est-à-dire que le juge détermine les indemnités à verser.

Concernant les indemnités de réparation du préjudice, elles peuvent prendre deux formes :

- Versement d'un capital sur la base d'un barème de capitalisation ou autre fondement à l'appréciation des parties ou du juge.
- Mise en place d'une rente au bénéfice de la victime, ou de ses ayants droit, jusqu'à un terme prévu (éventuellement viagère).

Une notion fondamentale qui mesure la gravité du préjudice est le taux d'AIPP dont la définition est la suivante² :

« Atteinte à l'Intégrité Physique et Psychique : Réduction définitive du potentiel physique et/ou psychique médicalement constatable ou médicalement explicable à laquelle s'ajoutent les douleurs et les répercussions psychiques que le médecin sait normalement liées à la séquelle ainsi que les conséquences dans la vie de tous les jours habituellement et objectivement liées à cette séquelle ».

1.4.2 Loi Badinter

La loi du 5 juillet 1985 dite « loi Badinter » a pour objet principal de garantir aux victimes d'accident de la route, une indemnisation rapide et convenable de leur préjudice corporel. Elle encourage les règlements amiables entre les parties et défend particulièrement les personnes vulnérables (personnes âgées, mineurs, handicapés). Elle place en premier lieu le principe de droit à l'indemnisation plutôt que la recherche de la responsabilité, ce qui conduit à indemniser une victime (piéton, cycliste) même en cas d'absence de responsabilité du conducteur du véhicule impliqué.

La loi contraint l'assureur du conducteur ayant causé le dommage à proposer dans un délai de huit mois une offre d'indemnisation à la victime ou à défaut à proposer une avance si son état n'est pas stabilisé (article 12).

Si le juge estime que l'offre est « manifestement insuffisante », il peut condamner l'assureur à verser une pénalité de l'ordre de 15% du montant de l'indemnité (article 17).

Par l'article 22, elle offre la possibilité à la victime dans un délai de 10 ans après la survenance du sinistre et l'aggravation de son état de demander réparation de son préjudice.

Par cette loi, un suivi des indemnités versées est publié périodiquement (article 26).

Si une rente est allouée, cette loi offre la possibilité au rentier de saisir le juge pour la conversion de la rente en capital sur la base d'une table de conversion réglementaire (article 44).

1.4.3 Nomenclature Dintilhac³

La nomenclature « Dintilhac », du nom de président de la commission chargée de l'élaborer en 2005, a pour objectif de poser les bases d'une normalisation des indemnités de réparation des préjudices subis par les victimes d'accidents corporels. En effet, devant l'hétérogénéité de la nature et des montants des indemnités consenties par transaction ou par décision judiciaire et dans un souci de protéger les intérêts des victimes, il semblait important de dégager une grille d'évaluation consensuelle du préjudice. Les résultats s'appuient sur la jurisprudence antérieure et s'inspirent également des réflexions de plusieurs groupes de travail de la commission européenne ainsi que des échanges que la commission Dintilhac a pu avoir avec les différentes parties intervenant dans le dénouement d'un dossier (magistrats, médecins experts, avocat, assureur...). L'idée principale de cette commission est d'évaluer poste par poste le préjudice subi et non pas d'allouer une indemnité globale comme précédemment. Le but d'un découpage précis et clair est de traiter d'une manière égalitaire les victimes devant les tribunaux et de protéger leurs intérêts vis-à-vis des organismes sociaux qui, de ce fait, ne peuvent préempter que la partie de l'indemnité couvrant les frais qu'ils ont engagés.

Par ailleurs les assureurs ont accueilli favorablement cette nouvelle grille d'évaluation car elle diminue l'incertitude juridique d'alors.

L'adoption de cette nomenclature par la majorité est une avancée importante mais il reste de nombreux points qu'elle ne règle pas. De plus dans les faits, d'après les statistiques de l'AGIRA (Association pour la Gestion des Informations sur le Risque en Assurance), l'application de cette nomenclature est pour l'instant loin d'être systématique.

Détail de la nomenclature

Elle divise les préjudices suivant trois axes :

- Les préjudices de la victime directe et les préjudices des victimes indirectes,
- Les préjudices économiques patrimoniaux et les préjudices non économiques personnels,
- Les préjudices temporaires et les préjudices permanents

Préjudices de la victime directe

	Préjudices patrimoniaux		Préjudices extra patrimoniaux	
Temporaires (avant consolidation)	Dépenses de Santé Actuelles	DSA	Déficits Fonctionnels Temporaires	DFT
	Frais Divers		Souffrances Endurées	SE
	Pertes de gains professionnels Actuelles	PGPA	Préjudices Esthétiques Temporaires	PET
Permanents (après consolidation)	Dépenses de Santé Futures	DSF	Déficits Fonctionnels Permanents	DFP
	Frais de logement adapté	FLA	Préjudice d'Agrément	PA
	Frais de véhicule adapté	FVA	Préjudices Esthétiques Permanents	PEP
	Assistance Tierce Personne	ATP	Préjudices Sexuels	PS
	Pertes de gains professionnels Futures	PGPF	Préjudices d'Etablissement	PEP
	Incidence Professionnelle	IP	Préjudices Permanents Exceptionnels	PPE
	Préjudice Scolaire, universitaire ou d'études	PSU		
Evolutifs (hors consolidation)			Préjudices pour pathologies évolutives	PEV

Préjudices des victimes indirectes

	Préjudices patrimoniaux		Préjudices extra patrimoniaux	
Cas de décès de la victime directe	Frais d'Obsèques	FO	Préjudices d'Accompagnement	PAC
	Frais de Revenus des Proches	PR	Préjudices d'Affection	PAF
	Frais Divers des Proches	FD		
Cas de survie de la victime directe	Frais de Revenus des Proches	PR	Préjudices d'Affection	PAF
	Frais Divers des Proches	FD	Préjudices Extra patrimoniaux Exceptionnels	PEX

Figure 1 Synthèse de la nomenclature Dintilhac des postes de préjudices.

1.4.4 Base AGIRA ou Fichier des indemnités allouées aux victimes d'accidents de la circulation

Par application de la loi Badinter, cette base recense théoriquement l'ensemble des prestations versées aux victimes. Elle est consultable par tous afin d'estimer son droit à l'indemnisation⁴. Elle est principalement alimentée par les assureurs mais aussi par le Fonds de Garantie des Assurances Obligatoires de dommages en ce qui concerne les décisions ou transactions qu'il a obtenues alors que le responsable est inconnu ou non assuré.

L'organisme chargé de sa gestion (AGIRA) publie annuellement des statistiques détaillées. Cependant pour les AIPP au-delà de 30% l'information semble ne pas être exhaustive.

1.4.5 Barème de capitalisation

Le Barème de Capitalisation pour l'Indemnisation des Victimes (BCIV) a été élaboré ces dernières années par les associations représentatives des assureurs dans l'attente de la publication d'un décret uniformisant l'indemnisation en capital.

Le BCIV fait actuellement référence à la table de mortalité TD88-90 avec un taux d'actualisation égal à la moyenne semestrielle du TEC10 (3,67% au 31/12/2009), qui est supérieur au taux retenu par la réglementation pour le provisionnement (voir 1.4.6). Table et taux sont jugés trop défavorables par les avocats. De ce fait un autre barème est généralement opposé aux assureurs par les défenseurs des victimes, le barème dit « Gazette du Palais », utilisant les tables de mortalité par sexe INSEE de 2001 et un taux technique de 3,20%⁵.

1.4.6 Provisionnement des rentes IARD

En assurance non vie, les rentes RC peuvent toucher deux types de provisions :

- La Provision pour Sinistres A Payer lorsque la rente est potentielle, c'est-à-dire tant que la décision (amiable ou judiciaire) n'est pas arrêtée.
- La Provision Mathématique lorsque la rente est servie (après décision),

Les articles R331-6, R331-7, R331-10, R331-12 du code des assurances (annexés en §0) sont relatifs à la provision mathématique en assurance non vie. Ils stipulent les conditions de calcul de cette provision :

- Table de mortalité : TD88-90.
- Taux d'actualisation : inférieur à 60% du taux moyen d'emprunt de l'Etat français sur base semestrielle, sans dépasser 3,5%. Il est à noter toutefois qu'un arrêté paru au Journal Officiel du 23/12/2010 indique que le TME doit être désormais calculé sur deux ans.
- Age des rentiers : la date de naissance du rentier est reportée au 31 décembre le plus voisin.

Le montant de la provision par rente est le produit du montant annuel des arrérages à verser par l'euro de rente correspondant aux caractéristiques du dossier (âge, terme, différé...).

Calcul d'un euro de rente :

A l'inventaire 31/12/N, le calcul de l'euro de rente en tenant compte des articles A331-10 et A331-12 est le suivant :

Soit x l'âge retenu du rentier :

$$x = N - N_{naissance} + a$$

avec $N_{naissance}$, l'année de naissance du rentier

$$\text{et } a = \begin{cases} 1 & \text{si la naissance du rentier a eu lieu dans le premier semestre} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit ω l'âge maximum de la table TD88-90.

Soit i le taux technique.

$$i = \min(3,5\% ; 60\% \text{ du TME publié au } 01/01/N+1)$$

$$\text{Nous posons } v = \frac{1}{1+i}.$$

Soit l_x le nombre de survivant d'âge x issu de la table TD88-90.

Nous posons ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ la probabilité pour un individu d'âge x d'atteindre l'âge $x+n$.

Soit ${}_n E_x = (1+i)^{-n} \cdot {}_n p_x = v^n \cdot {}_n p_x$ l'engagement de verser 1€ dans n années à un individu d'âge x (cette quantité est appelée capital différé ou facteur d'escompte viager).

En introduisant la nouvelle quantité ou nombre de commutations $D_x = v^x l_x$ nous pouvons réécrire :

$${}_n E_x = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Soit ${}_{m|n} a_x$ l'euro de rente correspondant à l'engagement de payer annuellement 1€ à terme échu pendant n années à partir de m années à un individu d'âge x (rente annuelle temporaire viagère avec différé) :

$${}_{m|n} a_x = \sum_{j=m+1}^{m+n} {}_j E_x$$

En introduisant la nouvelle quantité ou nombre de commutations $N_x = D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega$, nous pouvons réécrire :

$${}_{m|n} a_x = \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{j=m+1}^{m+n} D_{x+j} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

Dans le cas d'un engagement de payer annuellement 1€ à un individu d'âge x jusqu'à son décès (rente annuelle viagère immédiate) l'euro de rente s'écrit :

$$a_x = \sum_{j=1}^{\omega-x} {}_jE_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Dans le cas où la rente n'est plus annuelle mais mensuelle, trimestrielle ou semestrielle (sans différé, par la règle de l'escompte viager, ${}_{m+p}E_x = {}_mE_x \cdot {}_pE_{x+m}$, nous pouvons nous ramener à ce cas) :

Soit k le fractionnement i.e. la fréquence annuelle des versements de $\frac{1}{k}$ €.

Soit ${}_n a_x^{(k)}$ l'euro de rente correspondant à l'engagement de payer annuellement 1€ en k fois à terme échu pendant n années à un individu d'âge x (rente fractionnée temporaire viagère immédiate)

$${}_n a_x^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{nk} {}_{\frac{j}{k}}E_x = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^n A_l$$

Avec
$$A_l = \sum_{j=1}^k {}_{l-1+\frac{j}{k}}E_x$$

Comme les tables de mortalité sont construites avec des âges entiers, nous devons interpoler linéairement :

$$z_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot z_1 + x_1$$

$${}_{l-1+\frac{j}{k}}E_x \approx {}_{l-1}E_x + \frac{j}{k} [{}_lE_x - {}_{l-1}E_x]$$

D'où
$$A_l \approx k \cdot {}_{l-1}E_x + \frac{k+1}{2} [{}_lE_x - {}_{l-1}E_x]$$

Et :
$${}_n a_x^{(k)} \approx \frac{1}{k} \left[\sum_{l=1}^n k \cdot {}_{l-1}E_x + \frac{k+1}{2} \left(\sum_{l=1}^n {}_lE_x - \sum_{l=1}^n {}_{l-1}E_x \right) \right] = \sum_{l=0}^{n-1} {}_lE_x + \frac{k+1}{2k} \left(\sum_{l=1}^n {}_lE_x - \sum_{l=0}^{n-1} {}_lE_x \right)$$

$${}_n a_x^{(k)} \approx \sum_{l=1}^n {}_lE_x + {}_{1-n}E_x + \frac{k+1}{2k} ({}_nE_x - 1)$$

$${}_n a_x^{(k)} \approx {}_n a_x + \frac{k-1}{2k} (1 - {}_nE_x)$$

Et pour le cas d'une rente viagère fractionnée immédiate

$$a_x^{(k)} \approx a_x + \frac{k-1}{2k}$$

1.4.7 Process de gestion MAAF

Nous avons représenté le process de gestion MAAF par le schéma suivant. L'objectif est de distinguer le provisionnement rentes de celui en capital.

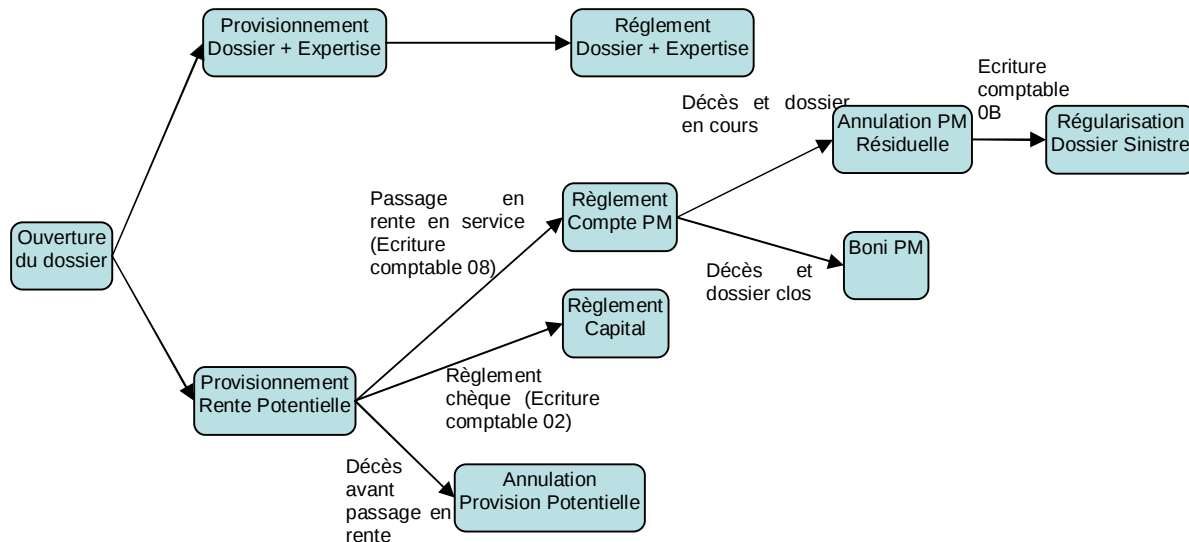


Figure 2 : Process de gestion MAAF synthétique

Utiles dans le cadre de retraitements présentés par la suite, nous identifions ainsi les principaux flux d'alimentation des comptes de PM (écritures comptables de type 08) et régularisations comptables suite notamment à décès (écritures comptables de type 0B).

En terme de provisionnement des dossiers réglés en capital, la pratique de notre entité de gestion des sinistres est :

- Pour le corporel médian auto (inférieur à 150 mille euro), utilisation du barème publié dans la gazette du palais généralement plus prudent que le BCIV du fait de l'utilisation d'une table plus récente.
- Pour le corporel important, utilisation de la table TD88-90 avec un taux d'actualisation à 2,43% pour le provisionnement. Le choix d'un taux technique fixe et non pas lié automatiquement aux variations du TME, a pour intérêt de limiter les variations de notre passif dues aux changements de taux technique.

Par contre les provisions mathématiques des rentes effectives sont calculées avec le taux et la table en vigueur à l'inventaire (§ 1.4.6).

1.4.8 Proposition de loi Lefrand et base JuriCA

Le projet de loi Lefrand (Cf annexes) vise à améliorer et uniformiser l'indemnisation des victimes corporelles à la suite d'un accident de la circulation. Il intervient dans la continuité de la rédaction du livre blanc⁶ en 2008 par l'AFA.

Nous soulignons ici deux aspects importants de ce projet.

Tout d'abord, il vise à définir une nomenclature des principaux postes de préjudices. Il donne ainsi une valeur réglementaire et contraignante à la nomenclature Dintilhac. Cette liste des postes n'est pas limitative.

Ensuite, afin d'évaluer financièrement les postes de préjudices, il préconise la mise en place d'une base de données en matière de dommages corporels. L'objectif est de recenser toutes les transactions amiables ainsi que les décisions judiciaires. Elle se veut exhaustive, contrairement à la base AGIRA.

1.4.9 Revalorisation des rentes

La revalorisation des rentes est régie par la loi du 27 décembre 1974 dont un extrait est annexé.

Dans le but de maintenir le pouvoir d'achat des bénéficiaires des rentes allouées en réparation d'un préjudice causé par un accident de la circulation, le texte prévoit la revalorisation des arrérages, le taux étant défini par le code de la Sécurité Sociale (article 1^{er} de la loi). Ce coût initialement à la charge de l'Etat est supporté aujourd'hui par le FGAO (alinéa 2 de l'article 2).

Ainsi, cette revalorisation des rentes n'est pas provisionnée par les assureurs. Cependant une proposition de loi (Cf annexes), déposée au sénat le 9 juillet 2010 par Laurent Bêteille prévoit des

évolutions notamment dans le dommage corporel. Ainsi le mécanisme de revalorisation des rentes pourrait être remis en cause et incomber aux assureurs afin de ne pas pénaliser les rentiers. Ce sujet est très préoccupant car ce transfert pourrait être lourd de conséquence dans le bilan des assureurs automobile.

1.5 Réassurance

Afin de limiter leurs éventuelles pertes techniques et de protéger leurs fonds propres, les assureurs ont recours à la réassurance.

1.5.1 Types de traités

Les traités de réassurance se divisent en deux grands types :

- Les traités proportionnels où cédante (assureur) et cessionnaire (réassureur) se partagent les primes et les sinistres suivant un taux défini.
- Les traités non proportionnels où le cessionnaire s'engage à payer les sinistres ou les événements dépassant un seuil défini contre paiement d'une prime.

1.5.2 Traités proportionnels

1.5.2.1 Excédent de capitaux ou de plein

Pour chaque contrat i du portefeuille de n risques de l'assureur, la cédante et le cessionnaire conviennent de se partager la cotisation P_i et l'éventuelle charge de sinistres S_i suivant un taux θ_i .

Les primes se partagent en $\sum_{i=1}^n \theta_i P_i$ pour l'assureur et $\sum_{i=1}^n (1-\theta_i) P_i$ pour le réassureur. De manière

équivalente les sinistres $\sum_{i=1}^n \theta_i S_i$ pour l'assureur et $\sum_{i=1}^n (1-\theta_i) S_i$ pour le réassureur.

1.5.2.2 Quote-part

Les traités en quote-part sont un cas particulier de traité en excédent de plein, le taux convenu est un taux uniforme sur le portefeuille de risques. L'inconvénient est que tous les risques petits et grands sont réassurés de la même manière.

Ces traités donnent lieu au versement de commission de la part du réassureur afin de participer aux frais de gestion des sinistres qui incombent à l'assureur. Des clauses de participation au bénéfice peuvent être aussi conclues.

1.5.3 Traités non proportionnels

Il s'agit de couvertures classiques en RC puisque ces couvertures permettent de réduire la volatilité du risque. Nous présentons ici les grandes catégories de traités non proportionnels, sachant que le traité en XS sera détaillé dans la partie 4.3 Réassurance RC.

1.5.3.1 Excédent de sinistre (XS) ou *excess of loss* (XL)

Dans les traités en XS, sont définies une priorité et une portée :

- La priorité correspondant à une franchise sur le coût d'un sinistre ou d'un événement
- la portée correspondant elle à la charge maximale supportée par le réassureur sur ce sinistre ou événement.

Une notation conventionnelle pour décrire ces traités est la suivante : « Portée XS Priorité ».

Par exemple dans le cas d'un traité 4M€ XS 5M€, si l'on constate la survenance d'un sinistre estimé à 8M€, le réassureur s'engage à payer 3M€, 5M€ restant à la charge de l'assureur. Si l'on constate une sinistre à 10M€, le réassureur payera 4M€, la portée, et l'assureur conservera 6M€.

1.5.3.2 Excédent de perte ou *stop loss* (SL)

Dans un traité SL, si la charge de sinistre de l'assureur dépasse un certain pourcentage des primes défini par le traité, l'excédent de coût, à concurrence d'une portée, est supporté par le réassureur. Autrement dit le réassureur intervient dès lors que le ratio de sinistre sur prime (S/C) dépasse le seuil.

1.5.3.3 Primes de reconstitution

Il est fréquent en traité XS d'avoir des primes de reconstitution. En cas de survenance d'un nombre déterminé de sinistres importants, l'assureur doit verser une surprime ou prime de reconstitution pour continuer de bénéficier de la garantie qui a déjà joué à leur profit.

Le nombre de fois que cette opération peut être renouvelée est variable, comme l'est le coût de cette reconstitution.

2 Solvabilité 2

2.1 De solvabilité 1 à Solvabilité 2

2.1.1 Rappels sur Solvabilité 1

Le système actuel de solvabilité a été mis en place à la fin des années 1970, et a fait l'objet de mises à jour régulières. Ce système impose aux assureurs d'être suffisamment solides financièrement pour être solvables. Plus précisément, les assureurs doivent avoir :

- un niveau suffisant de provisions,
- des actifs sûrs, liquides, diversifiés et rentables,
- un minimum de capitaux propres excédent le seuil réglementaire de l'Exigence Minimale de Solvabilité (EMS).

Solvabilité 1 est basé sur un calcul forfaitaire de l'exigence minimale, y compris pour la couverture de réassurance.

Bien que simple, le régime actuel est efficace car il y a eu un nombre limité de faillites relativement, surtout en Europe.

Cependant, elle s'appuie sur une vision très administrative et comptable des règles prudentielles. Elle aboutit à quelques résultats paradoxaux comme :

- Moins une société vie est provisionnée, moins elle a besoin de capital,
- Pas de vision prospective du risque,
- Absence de considération des spécificités d'une couverture...

Ainsi, elle n'est pas du tout exploitée par la communauté financière. Cette dernière a mis en oeuvre depuis longtemps ses propres modèles d'appréhension de la solvabilité.

En synthèse, les règles assez rigides qui définissent la solvabilité actuelle n'incitent pas les sociétés à contrôler leurs propres risques.

2.1.2 Fondements de Solvabilité 2

La réforme de solvabilité intervient dans un environnement en pleine mutation. Tout d'abord, nous citerons les nouvelles normes comptables internationales IFRS entrées en vigueur en 2005. Une deuxième phase est prévue désormais en 2012. Ensuite, les banques ont connu leur changement de solvabilité avec la mise en œuvre de Bâle 2. Enfin, nous mentionnerons la définition par le CRO Forum de l'*European Embedded Value* (EEV) et la *Market Consistent Embedded Value* (MCEV) en 2008 et 2009.

L'union européenne souhaite établir des exigences de solvabilité mieux adaptées aux risques effectivement assumés par les entreprises d'assurance. En outre, elle désire encourager celles-ci à mieux identifier, évaluer et contrôler leurs risques. Ainsi, elle veut favoriser la mise en œuvre de modèles de gestion plus sophistiqués.

De mars 2003 à juillet 2007, les travaux sur cette nouvelle norme ont consisté tout d'abord à identifier les principaux risques (Marché, Crédit, Souscription, Opérationnel). Puis ils ont permis de définir un MCR (*Minimal Capital Requirement*) et un SCR (*Solvency Capital Requirement*) au travers d'une formule standard tout en favorisant les modèles internes (capital économique).

Le projet de directive a vu le jour en 2007 mais la directive n'a été adoptée qu'en avril et juin 2009 par le parlement européen puis par le conseil ECOFIN en mai.⁷

La nouvelle régulation prudentielle est élaborée en deux phases :

- La première de 2001 à 2003 vise à fixer le cadre : Comme Bâle II, l'architecture du système de contrôle prudentiel repose sur 3 piliers :
 1. Aspects quantitatifs : Les règles de calcul des risques et de la solvabilité,
 2. Contrôles internes, gestion des risques et principes de gouvernance
 3. Communication : Informations et rapports au marché.

- La seconde de 2003 à 2012 vise à définir de manière détaillée les mesures techniques des différents risques dans le système SII.

2.1.3 Zoom sur les 3 piliers

Pilier 1 : Aspects quantitatifs - Les règles de calcul des risques et de la solvabilité

Il s'agit d'exigences quantitatives visant tout d'abord à valoriser économiquement le bilan (Provisions techniques, Actifs et Fonds Propres). En outre, il définit les deux niveaux de capital que sont le MCR (*Minimum Capital Requirement*) et le SCR (*Solvency Capital Requirement*) sous une probabilité de ruine de 0,5% à un an.

Il définit deux grandes catégories d'évaluation de la solvabilité : l'approche par la formule standard ou bien la modélisation interne. Il existe toutefois des strates intermédiaires que sont la formule standard associée à des paramètres spécifiques (*Undertaking Specific Parameters*), ou bien encore la modélisation interne partielle de risques.

Pilier 2 : Contrôles internes, gestion des risques et principes de gouvernance

Le pilier 2 vise à fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne des sociétés. Elle définit également comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte.

Outre de veiller à un niveau de capital suffisant, un des principaux objectifs de ce pilier est de s'assurer que la compagnie est bien gérée et est en mesure de calculer et maîtriser ses risques. Ce point constitue un développement majeur par rapport à la solvabilité actuelle. Il encourage les compagnies à adopter la démarche *Enterprise Risk Management* afin qu'elles soient en mesure d'apprécier et de mesurer leurs risques par elles-mêmes. Au-delà de la simple validation d'une liste de points de contrôle, l'autorité de tutelle aura le pouvoir de contrôler la qualité des données et des procédures d'estimation, ainsi que des systèmes mis en place pour mesurer les risques au cas où ils se matérialiseraient.

L'identification des sociétés "les plus risquées" est un objectif. Les autorités de contrôle auront en leur pouvoir la possibilité de réclamer à ces sociétés de détenir un capital plus élevé que le montant suggéré par le calcul du SCR et/ou de réduire leur exposition aux risques.

Vis-à-vis du système de gouvernance, la directive définit la mise en oeuvre d'une structure organisationnelle transparente, adéquate, avec séparation claire et appropriée des responsabilités, ainsi qu'un dispositif efficace de transmission des informations. Les politiques en matière de gestion des risques, contrôle interne, audit interne et sous-traitance doivent être écrites, avec une révision au moins annuelle.

Les organes devant apparaître dans la structure organisationnelle sont les suivants :

- La gestion des risques :
 - Mise en oeuvre d'un système de gestion des risques intégré à la structure organisationnelle avec plan d'urgence et interdépendance des risques.
 - Risques (au minimum) : souscription, provisionnement, Gestion Actif-Passif, investissements, liquidité, concentration, techniques d'atténuation des risques.
 - si modèle interne : conception, mise en oeuvre, test, validation, suivi documentaire, performance, efforts déployés pour remédier aux éventuels manques amenant à la production de rapports relatifs à cette analyse.
- La fonction actuarielle : Définition des compétences et liste des rôles et fonctions des personnes exerçant la fonction d'actuaire (dont avis sur la politique de souscription, provisionnement et réassurance).
- L'honorabilité et la compétence des dirigeants et personnes clés dans la société (information des autorités de contrôle de tout changement de personnes).
- ORSA : Rapport sur la solvabilité et la solidité financière (*Own Risk and Solvency Assessment*).
 - Processus d'évaluation interne de la solvabilité de l'entreprise et outil à la disposition des autorités de contrôle
 - Description des processus de gouvernance (contexte et toile de fonds de

l'environnement de l'entreprise, philosophie de la gestion du risque et appétit aux risques, identification et contrôle des risques, etc.)

- o Respect permanent des exigences de solvabilité (y compris au regard de la politique commerciale, profil de risque, limite de tolérance) et analyse des écarts avec les hypothèses sous-jacentes au SCR et stress tests
- Contrôle interne efficace : procédures administratives, comptables, fonction permanente de vérification de la conformité.
- Audit interne efficace : indépendant des fonctions opérationnelles, il évalue l'adéquation et l'efficacité du contrôle interne et autres éléments de gouvernance.
- Sous-traitance : elle ne doit pas accroître le risque opérationnel et dégrader la qualité de la gouvernance. La société conserve l'entière responsabilité du respect de la Directive.

Pilier 3 : Communication - Informations et rapports au marché

D'une part, il s'agit de définir des informations à destination des autorités de contrôle. Elles doivent permettre d'évaluer l'exposition aux risques, les principes d'évaluation dans le cadre de la solvabilité, le système de gouvernance, de gestion des risques, de gestion du capital, la structure du capital et les besoins en capital. Pour cela, il se base sur des éléments quantitatifs et qualitatifs (historiques, actuels et prospectifs; de sources internes et/ou externes; accessibles, complets, comparables et pertinents, fiables et compréhensibles). Ces éléments doivent refléter la nature, l'ampleur et la complexité des activités.

D'autre part, il s'agit de définir des informations à destination du public :

- description de l'activité et des résultats de l'entreprise
- du système de gouvernance et de son adéquation au profil de risque
- de chaque catégorie de risques (exposition, concentration, atténuation, sensibilité)
- des méthodologies retenues dans l'évaluation des actifs et passifs
- la gestion du capital (structure, montant, SCR, MCR, éléments de calcul)

2.2 Caractéristiques Solvabilité 2

2.2.1 Bilan économique SII

Le calcul du capital réglementaire repose sur un bilan SII déterminé en valeur économique. Le montant selon lequel les actifs et passifs pourraient être échangés (transférés ou réglés) dans le cadre d'une transaction, conclue dans des conditions normales de concurrence, entre parties informées et consentantes.

Les provisions techniques sont évaluées à leur valeur de sortie actuelle. Ainsi, elles correspondent au montant qu'une société devrait payer à une autre entité, si elle transférait toutes ses obligations contractuelles immédiatement, dans des conditions normales de concurrence entre des parties informées et consentantes. Elles sont constituées :

- Du *Best Estimate*,
- De la Marge de risque

L'évaluation de ces deux éléments doit se faire de manière distincte sauf si les engagements sont répliquables par un actif.

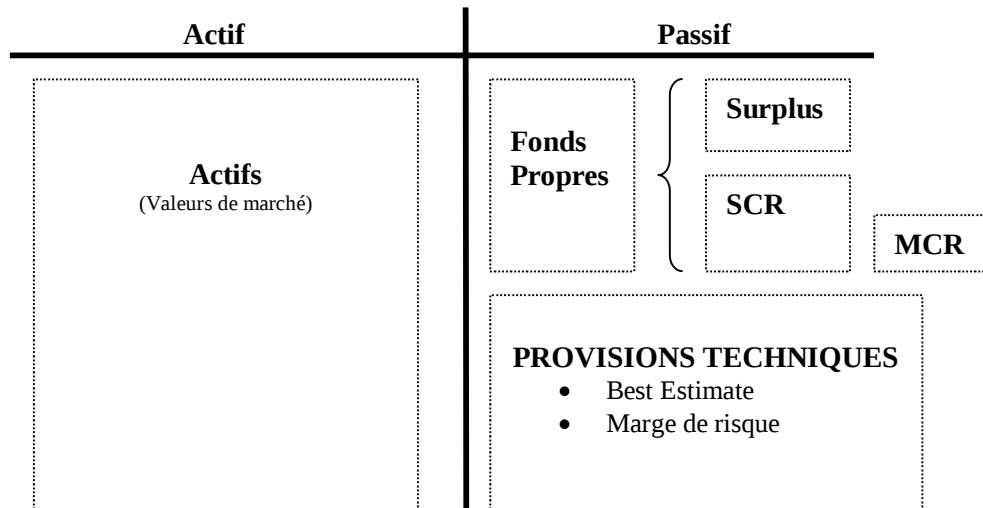


Figure 3 : Bilan économique Solvabilité 2

2.2.2 Zoom sur les provisions techniques

2.2.2.1 Best Estimate

Le *Best Estimate* correspond à une moyenne pondérée des probabilités des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente.

Il intègre les flux couvrant la totalité de la vie des contrats sous une hypothèse de liquidation.

Il doit être évalué brut de réassurance et de titrisation avec des méthodes déterministes ou stochastiques.

L'objectif de la segmentation des obligations de l'assureur est d'obtenir une évaluation de provisions techniques la plus précise possible. Les lignes d'activités choisies doivent représenter au mieux les caractéristiques des risques sous-jacents. La directive exige une segmentation au minimum par ligne d'activité.

En outre, les contrats couvrant des risques en assurance vie et non-vie doivent être dégroupés selon une composante vie et une en non vie. Il en est de même pour les contrats couvrant des risques sur plusieurs lignes d'activité. Il s'agit alors de les dégroupier selon les lignes d'activité appropriées.

Les causes d'incertitude des flux du *Best Estimate* résident dans :

- Les fluctuations du timing, fréquence et sévérité des sinistres;
- Les fluctuations du temps nécessaire pour régler les sinistres ou les dépenses;
- Les fluctuations du montant des dépenses;
- Les variations de la valeur de l'indice ou valeur de marché utilisée pour déterminer les montants des sinistres;
- Les variations sur les facteurs pertinents spécifiques à l'entité et au portefeuille tels que des facteurs légaux, sociaux et économiques;
- L'incertitude par rapport aux comportements des assurés;
- Les futures actions discrétionnaires du management;
- La trajectoire parcourue pour arriver au résultat (*Path dependency*).

Le *best estimate* est calculé brut des montants de créances de contrats de réassurance et de titrisation. Ces derniers montants doivent être présentés séparément dans les actifs du bilan. Ils sont évalués selon la même méthode que le brut (moyenne des flux futurs pondérés de leur probabilité tenant compte de

la valeur temps) et sont ajustés pour tenir compte des pertes espérées en cas de défaut des contreparties.

2.2.2.2 Marge de risque

Le rôle de la marge pour risque est d'absorber l'écart potentiel entre la moyenne et la réalité. Solvabilité 2 définit une méthode de calcul homogène en Europe.

Elle est déterminée par le coût de mobilisation du montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis.

La détermination de la marge de risque suppose de projeter les SCR futurs, hormis le risque de marché.

Ensuite, le coût de mobilisation est égal, depuis QIS4, à 6% des futurs SCR.

La marge de risque s'obtient finalement par actualisation des coûts de mobilisation avec la courbe des taux sans risque.

Nous renvoyons aux articles du titre I chapitre VI section 2 de la directive 2009 138 CE.

2.3 Formule Standard SII selon QIS5

Le SCR est défini comme étant le capital économique nécessaire afin d'absorber les chocs exceptionnels. Pour cela, la mesure de risque définie dans la directive est la VaR à 99.5% à un horizon d'un an (annexe IV directive 2009 138 CE).

Au premier niveau, le SCR est décomposé de la manière suivante.

$SCR = BSCR + SCR\ Op - Adj$ où :

- BSCR : Capital de Solvabilité Requis de Base
- SCR Op: chargement en capital au titre du risque opérationnel
- Adj : ajustement au titre de l'effet d'absorption des risques des futures participations aux bénéfices et des impôts différés

Sans rentrer dans le détail du calcul du MCR, nous souhaitons juste indiquer qu'il est désormais obtenu en prenant le maximum d'un seuil absolu et d'une formule combinée. Cette dernière est déterminée au moyen :

- D'une estimation linéaire du MCR,
- D'un encadrement exprimé en % du SCR (25% et 45%).

Graphiquement, le SCR selon QIS5 est constitué des modules suivants :

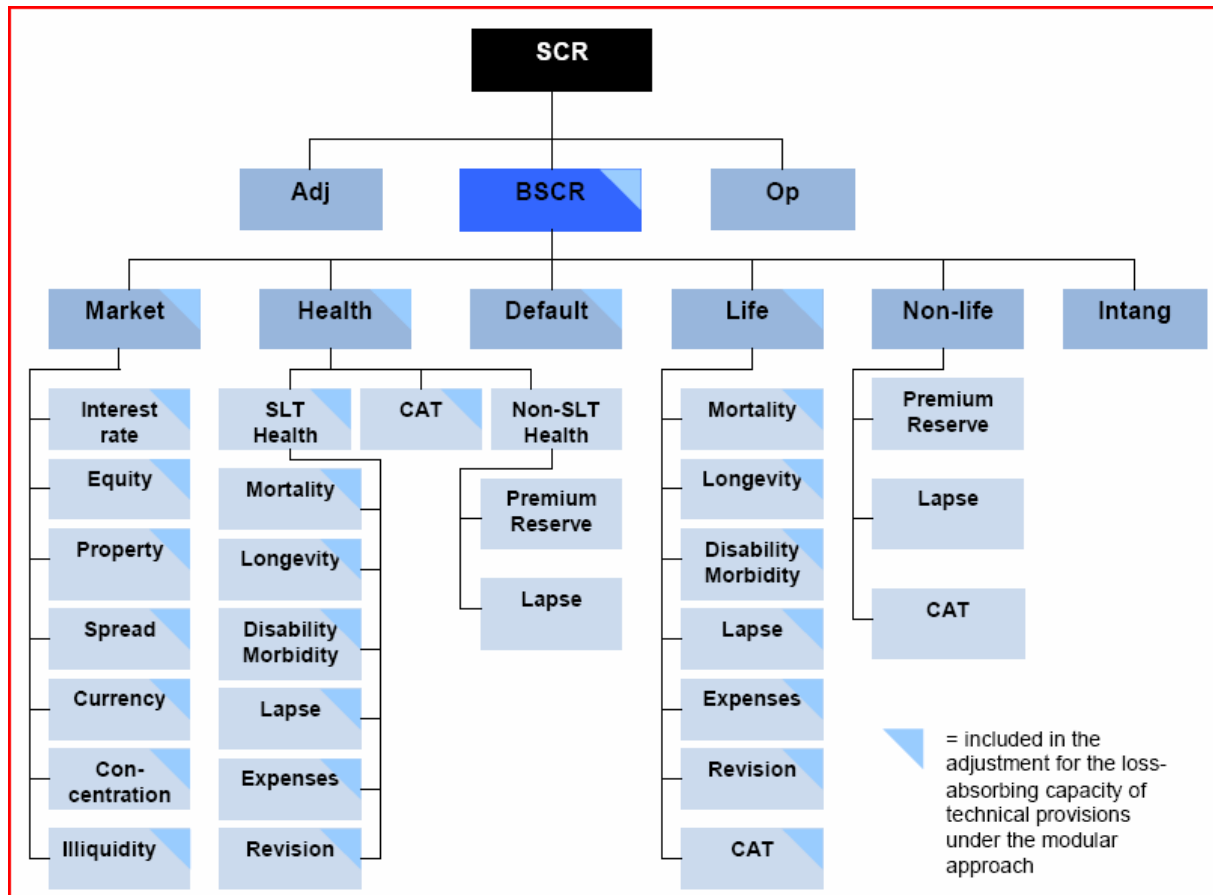


Figure 4 : Structure du SCR QIS5

Chaque sous module de risque est agrégé selon une matrice de corrélations linéaires.

Nous décrivons uniquement le risque de primes et provisions tel que défini dans le module de souscription non vie de la formule standard QIS5.

Dans la suite du mémoire, une partie sera estimée via une approche de modèle interne partiel (provisions automobiles).

Dans le sous module primes et provisions du risque de souscription non vie, les primes et *Best Estimate* non vie sont segmentés selon les branches suivantes :

- RC Auto (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Dommages auto (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Marine Aviation Transport (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- RC Générale (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Dommages aux biens (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Assistance (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Protection juridique (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Crédit Caution (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Divers (y compris acceptations proportionnelles et cessions),
- Acceptations Dommages non proportionnelles,
- Acceptations RC non proportionnelles,
- Acceptations Marine Aviation Transport non proportionnelles,

Ces *Best Estimate* sont obtenus à partir d'une actualisation des flux futurs via une courbe des taux comprenant 50% de la prime d'illiquidité.

Les courbes de taux avec 50%, 75% et 100% ont le profil suivant.

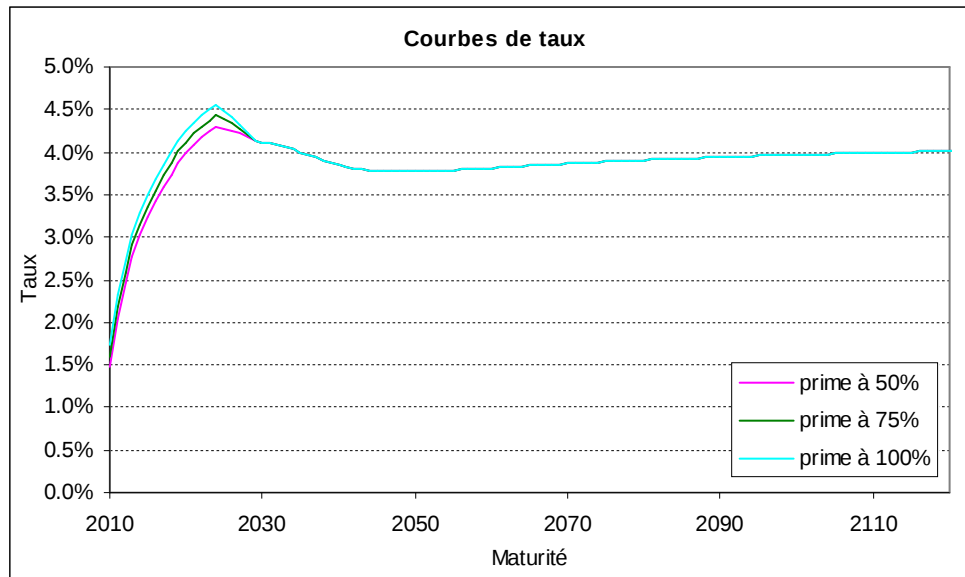


Figure 5 : Courbes des taux QIS5

Le risque de primes correspond au risque lié à la sinistralité du prochain exercice (sous tarification). Le risque de provisions vise à modéliser un sous provisionnement au moment du calcul de la solvabilité.

Ces deux risques sont calculés globalement par branches, par la formule :

$$NL_{PR}(b) = V(b) \cdot \rho(b)$$

Le Volume $V(b)$ est la somme des primes du prochain exercice et des provisions *Best Estimate* relatives à la branche b avec toutefois la prise en compte d'un bénéfice de diversification géographique.

Le coefficient de chargement $\rho(b)$ est agrégé à partir des volatilités propres des primes et provisions et en tenant compte :

- D'une corrélation de 50% entre ces deux risques,
- D'une pondération par le volume de ces deux risques

Le coefficient de chargement suppose que le risque sous jacent est distribué lognormalement. Il est déterminé à partir d'une volatilité $\sigma(b)$ par la formule suivante :

$$\rho(b) = \frac{e^{u \sqrt{\ln(1+\sigma(b)^2)}}}{\sqrt{1+\sigma(b)^2}} - 1, \text{ où } u \text{ est le quantile à 99,5\% de la distribution normale centrée réduite.}$$

Les volatilités du marché proposées $\sigma(b)$ pour le QIS5 sont les suivantes. Nous y indiquons également le coefficient de chargement $\rho(b)$.

Calibrage QIS5 des volatilités marché

	Provisions		Tarification	
	σ	ρ	σ	ρ
SANTE NON VIE				
FRAIS DE SANTE	4.0%	10.8%	4.0%	10.8%
PROTECTION REVENUS	14.0%	41.9%	8.5%	24.0%
ACCIDENTS DU TRAVAIL	11.0%	31.9%	5.5%	15.1%
ACCEPTATIONS SANTE NP	20.0%	63.5%	17.0%	52.4%
NON VIE				
RC AUTO	9.5%	27.1%	10.0%	28.7%
DOMMAGES AUTO	10.0%	28.7%	7.0%	19.5%
MARINE, AVIATION, TRANSPORT	14.0%	41.9%	17.0%	52.4%
DOMMAGES AUX BIENS	11.0%	31.9%	10.0%	28.7%
RC GENERALE	11.0%	31.9%	15.0%	45.3%
CREDIT	19.0%	59.7%	21.5%	69.2%
PROTECTION JURIDIQUE	9.0%	25.6%	6.5%	18.0%
ASSISTANCE	11.0%	31.9%	5.0%	13.6%
DIVERS	15.0%	45.3%	13.0%	38.5%
ACCEPTATIONS RC NP	20.0%	63.5%	17.5%	54.2%
ACCEPTATIONS DAB NP	20.0%	63.5%	17.0%	52.4%
ACCEPTATIONS MAT NP	20.0%	63.5%	16.0%	48.8%

Figure 6 : Calibrage QIS5 des risques de provisionnement et de tarification

Pour le risque de tarification, la volatilité peut-être réduite par un coefficient spécifique au programme de réassurance non proportionnelle. Les volatilités indiquées ci-dessus ne considèrent pas ce dernier coefficient.

3 Modèle de provisionnement des sinistres de masse

3.1 Données disponibles

Pour l'étude et la détermination des provisions de sinistre de la branche automobile nous disposons de la somme des paiements et de la somme des recours encaissés par exercices de survenance de sinistre et par années de gestion sur 10 ans maximum avec un détail par « garantie sinistre ». Les montants étudiés n'intègrent pas les frais de gestion des sinistres. Nous ne déterminerons pas ici le montant des provisions pour frais de gestion de sinistre. Une méthode classique est de considérer un taux à appliquer au PSAP. De plus, nous n'utiliserons pas les charges de sinistres (paiements déjà effectués + provision estimée par dossier) issues du système de gestion. En effet, pour faciliter le traitement des dossiers par les rédacteurs, un forfait d'ouverture automatique est utilisé ce qui pourrait influencer la modélisation. De plus nous voulons privilégier une approche par flux qui est préconisée par les nouvelles normes de solvabilité et comptables internationales. Enfin, concernant les données de la partie assistance, nous ne disposons que de paiements nets de recours, la gestion de ces sinistres étant déléguée chez un spécialiste (IMA jusqu'en 2008 puis FIDELIA en 2009).

Le contrat automobile garantit l'assuré contre les conséquences de la survenance d'un ensemble de sinistres de natures très différentes et dont les répercussions pécuniaires sont aussi très hétérogènes. En effet, la couverture va du remboursement d'un bris de glace à l'indemnisation des préjudices corporels et économiques d'une victime d'un accident dont notre assuré est jugé responsable. Il paraît naturel d'étudier séparément ces événements dont les enjeux économiques ne sont pas comparables. Nous pouvons scinder l'ensemble des sinistres en deux sous groupes :

- Le premier étant composé des sinistres dit « de masse », c'est-à-dire dont la fréquence de réalisation est élevée mais dont le coût unitaire est limité.
- Les sinistres graves dont le coût unitaire est important mais dont la fréquence de réalisation est faible.

Il convient de terminer la frontière entre ces deux ensembles de sinistres :

- le plus simple : dès que le coût estimé du sinistre dépasse un certain seuil. Cette méthode porte des inconvénients :
 - comme nous analysons des observations sur dix ans, faut-il indexer le seuil ?
 - L'évaluation dépend des pratiques de gestion
 - Un sinistre peut entraîner le règlement de prestation au titre de plusieurs garanties, par exemple RC corporelle et Dommage corporel du conducteur, faut-il considérer la somme des deux garanties ?
- Avec ou sans une rente potentielle. C'est effectivement cette composante qui augmente la charge du dossier.

D'un point de vue pragmatique et pour s'intégrer dans un processus global d'entreprise, nous désignerons par « graves » la partie RC corporelle des dossiers dont l'évaluation à la date d'aujourd'hui dépasse un certain seuil, sans indexation de ce seuil. D'un point de vue statistique descriptive, le seuil de 300 mille euro correspond à 0,5% de l'effectif (soit environ 100 sinistres par an) et à 55% de la charge de la garantie. En outre, une étude des fonctions de répartition et des espérances résiduelles, menée en 2002, nous avait conduit à retenir ce seuil.

D'autre part nous devons également déterminer une segmentation par natures de sinistres homogènes. Plusieurs choix de segmentation sont possibles :

- Par catégorie de risque (Auto, moto, cyclo, etc)
- Par garantie sinistre ou agrégat de garantie sinistre
- Garantie tarifée
- Par catégorie utilisée pour les Etat Ministériels
- Par « Line of Business » (LoB) du Qis 4 et 5

Les critères que nous retenons pour regrouper les sinistres sont les suivants:

- A minima la segmentation de type Solvabilité II, c'est-à-dire la segmentation du QIS5
- Garanties sinistres dont les cadences de règlement sont homogènes.

De plus comme nous constatons que les sinistres liés exclusivement aux événements climatiques ou naturels n'ont pas de fréquence d'apparition stable d'une année de survenance à l'autre, nous les étudierons à part.

Une première étude des cadences de règlement, la segmentation QIS5 et notre remarque précédente nous conduisent au découpage suivant :

- RC : Responsabilité Civile (QIS5)
- ASS : Assistance (QIS5)
- DCC : Dommages Corporels du Conducteur (QIS5)
- 013 : Défense (étude cadence)
- 015 : Recours (étude cadence)
- APJ : Protection Juridique (étude cadence)
- 009 : Catastrophes Naturelles (remarque)
- 011 : Événements Climatiques (remarque)
- Dommages : Autres garanties dommages (étude cadence)

Cependant les regroupements RC et Dommages représentent plus de 90% des paiements d'une année comptable.

Pour des contraintes liées à la gestion sinistre, nous ne pouvons pas distinguer pour tous les sinistres RC survenus avant 2005 la part matérielle de la part corporelle. C'est pourquoi nous retenons un groupe RC sans distinction.

Idéalement les garanties « 013 », « 015 » et APJ devrait être étudiées séparément mais dans les estimation du paragraphe 3.3 pour des problèmes de volume nous les regrouperons bien qu'elles ne soient pas de cadences identiques.

Ci-dessous le graphique des cadences estimées de règlement (hors RC) pour illustrer le choix des regroupements. Il apparaît que seules les garanties DCC, 013, 015 et APJ se détachent des autres. Les cadences par garanties exhibées dans ce graphique ont été obtenues à partir d'une projection des règlements pour chaque survenance par la méthode du *Chain ladder* qui sera décrite ci-après.

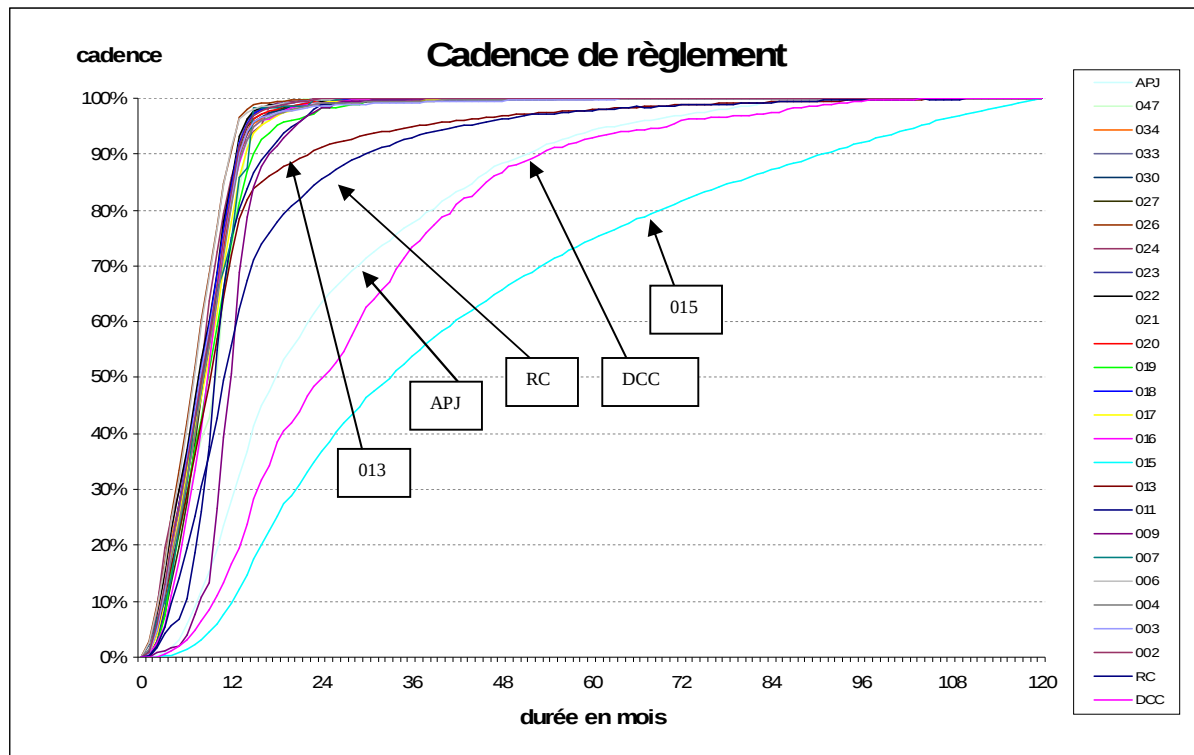


Figure 7 : cadence des règlements

Concernant spécifiquement les recours/sauvetages à encaisser nous pouvons les déterminer par l'étude des triangles de recours ou par différence entre la PSAP brute estimée et la PSAP nette de recours estimée. Le choix de la méthode reposant sur le pourcentage de recours par rapport aux paiements de la segmentation (taux de recours) : s'il est faible, il peut être intéressant d'analyser les triangles bruts

et les triangles nets et d'en déduire les recours. Une troisième possibilité est de projeter le taux de recours et de l'appliquer à la PSAP estimée.

3.2 Modèles étudiés

3.2.1 Chain ladder

La méthode de *Chain ladder* pour estimer le stock de provision à constituer repose sur une idée simple et intuitive, selon laquelle pour toutes les survenances, il existe une suite de coefficients qui permettent de passer des paiements cumulés d'une année de développement à la suivante. L'étude des données historiques nous permet d'obtenir une estimation de ces coefficients que nous appliquons aux survenances récentes pour ainsi prévoir le cadencement des futurs paiements qui correspondent à la provision à enregistrer à la date du calcul. Cette méthode a la réputation d'être la plus largement utilisée par les compagnies d'assurances et d'être robuste. C'est pour cela qu'elle est préconisée par le régulateur comme méthode « étalon » pour l'estimation de l'espérance de réserve à constituer dans le cadre des travaux préparatoire au passage à solvabilité 2.

3.2.1.1 Formalisation

Nous introduisons les notations suivantes :

Soit n le nombre d'année maximum de recul de l'historique des données.

Soit $C_{i,j}$ le montant cumulé des paiements bruts, nets ou recours encaissés de la survenance i sur une période de durée j , $1 \leq i, j \leq n$. Pour $i+j \leq n+1$, les montants $C_{i,j}$ sont observés, pour $i+j > n+1$, ils sont à déterminer. La matrice triangulaire ci-dessous représente les données observées :

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,n-1} & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,n-1} & \\ \vdots & & \ddots & & \\ C_{n-1,1} & C_{n-1,2} & & & \\ C_{n,1} & & & & \end{pmatrix}$$

Le but de la modélisation est de compléter cette matrice pour le triangle inférieur et d'en déduire la provision toutes survenances confondues :

$$R = \sum_{i=2}^n R_i \text{ avec } R_i = C_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

Avec ces notations, l'hypothèse du modèle est la suivante :

Pour $1 \leq i, j \leq n-1$, le coefficient $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ est indépendant de l'année de survenance i .

Nous pouvons formaliser le modèle par :

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n-1.$$

Le coefficient f_j , appelé *link ratio* ou coefficient de passage est estimé à partir des éléments du triangle d'observations :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1 \quad (1)$$

Remarque : nous pourrions introduire des pondérations $(\omega_{i,j})$ pour donner plus ou moins d'importance aux survenances les plus anciennes :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \omega_{i,j} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}}{\sum_{i=1}^{n-j} \omega_{i,j}}, \text{ l'estimation (1) étant un cas particulier avec } \omega_{i,j} = C_{i,j}.$$

Par le jeu des poids nous pouvons également éliminer une observation qui serait jugée atypique.

A partir de ces coefficients estimés et des éléments de la diagonale de la matrice (ie $C_{i,j}$ avec $i+j=n+1$), nous en déduisons les montants cumulés futurs :

$$\hat{C}_{i,j+1} = \prod_{k=n+1-i}^j \hat{f}_k C_{i,n+1-i} \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n \text{ et } n+1-i \leq j \leq n-1 \quad (2)$$

Et enfin l'estimation de la provision totale à constituer :

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}$$

3.2.1.2 Tail factor

Présenté ainsi, le modèle considère que pour i donné, la suite $(C_{i,j})_{j \geq n}$ est constante. Cependant il n'est pas exclu de considérer qu'il y ait des paiements au-delà de la $n^{\text{ième}}$ année de gestion. Pour cela il faut prolonger la suite des $\hat{f}_j$ pour $n < j \leq n+m-1$, m fixé. Nous pouvons utiliser par exemples les ajustements du type :

- puissance inverse $f(t) = 1 + a(c+t)^{-b}, a, b > 0$
- exponentielle négative $f(t) = 1 + ae^{-bt}, b > 0$
- Weibull. $f(t) = 1 + a(1+t)^b e^{-ct}, a, b, c > 0$

Le coefficient $\hat{f}_{ult} = \prod_{j=n}^{n+m-1} \hat{f}_j = \prod_{j=n}^{n+m-1} f(j)$ qui permet de passer de $\hat{C}_{i,n}$ à $\hat{C}_{i,n+m}$ est appelé *tail factor* ou facteur de queue.

Remarque : ce type d'ajustement n'admet que des valeurs supérieures à 1 et donc ne peut s'appliquer que pour des données cumulées croissantes dans le temps. Il peut arriver que la suite de paiements nets de recours $(C_{i,j})$ soit décroissante.

3.2.1.3 Inflation

Par ailleurs, sur la base des règlements enregistrés, le modèle considère une inflation implicite et régulière et reproduit pour les années à venir l'inflation du passé. Cependant il se peut que pour diverses raisons cette hypothèse ne soit pas acceptable, il convient donc de passer de données en monnaie courante à des données en monnaie constante afin d'annuler l'effet inflation dans nos triangles. Nous devons faire le choix d'un indice de mesure d'inflation de la garantie ou à défaut de la branche la plus appropriée. De plus nous prenons comme hypothèse que les paiements ont lieu en milieu de période, c'est-à-dire au 30 juin de chaque année.

Soit $(\tau_i)_{i=1..n-1}$ la suite des variations de fin juin à fin juin de l'indice retenu, le premier terme correspondant à la variation entre l'année 1 et l'année 2, τ le taux de variation de l'indice entre le 01/07/n et le 31/12/n,

$$\text{et } X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,n-1} & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,n-1} & \\ \vdots & & & & \\ X_{n-1,1} & X_{n-1,2} & & & \\ X_{n,1} & & & & \end{pmatrix} \quad \text{la matrice des paiements décumulés ou}$$

incréments avec $X_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$, et $C_{i,0} = 0$

Nous déterminons la matrice triangulaire $(X_{i,j}^{(a)})_{i+j \leq n+1}$ des paiements décumulés actualisés par la relation:

$$X_{i,j}^{(a)} = X_{i,j} (1+\tau) \prod_{k=i+j-1}^{n-1} (1+\tau_k) \quad \text{pour } i+j < n+1$$

$$X_{i,j}^{(a)} = X_{i,j} (1+\tau) \quad \text{pour } i+j=n+1$$

ou directement depuis le vecteur des indices :

$$X_{i,j}^{(a)} = X_{i,j} \frac{\text{indice}_{31/12/n}}{\text{indice}_{30/06/i+j-1}}$$

Nous en déduisons les paiements cumulés actualisés $C_{i,j}^{(a)} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}^{(a)}$ qui sont injectés dans le modèle précédent avec introduction d'un facteur de queue. Nous obtenons donc la matrice triangle inférieure des paiements décumulés futurs estimés :

$$\begin{pmatrix} & & & \hat{X}_{1,n+1}^{(a)} & \hat{X}_{1,n+2}^{(a)} & \dots & \hat{X}_{1,n+m-1}^{(a)} & \hat{X}_{1,n+m}^{(a)} \\ & & & \hat{X}_{2,n}^{(a)} & \hat{X}_{2,n+1}^{(a)} & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & \\ & \hat{X}_{n-1,3}^{(a)} & & & & & \hat{X}_{n-1,n+m-1}^{(a)} & \hat{X}_{n-1,n+m}^{(a)} \\ \hat{X}_{n,2}^{(a)} & \hat{X}_{n,3}^{(a)} & \dots & & & \dots & \hat{X}_{n,n+m-1}^{(a)} & \hat{X}_{n,n+m}^{(a)} \end{pmatrix}$$

Si on note τ' l'estimation du taux de variation de l'indice entre le 01/01/n+1 et le 30/06/n+1 et $(\tau'_i)_{i=n+1 \dots 2n+m}$ la suite des variations estimées de fin juin à fin juin, on peut en déduire la matrice $(\hat{X}_{i,j}^{(a)})_{i \leq n, 2 \leq j \leq n+m, i+j > n+1}$ des incréments futurs en monnaie courante avec :

$$\hat{X}_{i,j}^{(a)} = \hat{X}_{i,j}^{(a)} (1+\tau') \quad \text{pour } i+j=n+2$$

$$\hat{X}_{i,j}^{(a)} = \hat{X}_{i,j}^{(a)} (1+\tau') \prod_{k=i+j}^{2n+m-j} (1+\tau'_k) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n+m, i+j > n+2$$

$$\hat{X}_{i,j}^{(a)} = \hat{X}_{i,j}^{(a)} \frac{\text{indice}_{30/06/i+j-1}}{\text{indice}_{31/12/n}}$$

Remarque : pour la projection de l'indice de référence pour les m années à venir, nous retenons le résultat d'une logregression sur les n derniers indices connus. D'autres méthodes pourraient être utilisées, par exemple une série temporelle sur les variations de l'indice qui permettrait de ne pas projeter l'inflation suivant un taux constant mais d'introduire de la cyclicité.

3.2.1.4 Escompte

De plus, en sortant du cadre règlementaire et comptable français, nous pourrions avoir intérêt à connaître la valeur actuelle de ces flux futurs. Pour actualiser ces paiements à la date d'aujourd'hui (31/12/n) et toujours sous hypothèse d'un décaissement en milieu d'année, nous pouvons transformer la matrice précédente pour $i+j > n+1$:

$$\hat{X}_{i,j}^{(b)} = \hat{X}_{i,j}^{(a)} \frac{1}{(1+\theta(i+j-n-\frac{3}{2}))^{i+j-n-\frac{3}{2}}}$$

avec $\theta(k)$ taux à k année retenu.

Remarque: nous retenons ici la courbe des taux sans risque fournie par le CEIOPS pour le QIS5. Comme préconisé dans cette consultation, nous appliquons une prime d'illiquidité de 50% sur notre périmètre d'étude. Pour rappel cette prime d'illiquidité représente le gain supplémentaire que peut obtenir l'assureur en prenant des actifs moins facilement cétables en cas de besoin immédiat mais plus rentables que des OAT de même duration. La condition pour appliquer cette prime, est que l'assureur connaisse presque sûrement les montants et les dates de ses décaissements et ne pas se retrouver en situation de devoir céder des titres dans l'urgence pour couvrir un besoin non prévu.

Et ainsi par sommation des éléments de cette matrice nous déterminons $\hat{R}$.

3.2.2 Modèle de Mack

Le résultat déterministe précédent est insuffisant car il n'est accompagné d'aucune appréciation sur la qualité de son estimation. C'est pourquoi Thomas Mack propose dans un article⁸ une version stochastique de la méthode *Chain ladder* afin de préciser l'erreur d'estimation du montant fourni par la méthode connaissant le triangle supérieur $(C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$.

3.2.2.1 Le modèle

Trois hypothèses sont nécessaires :

$$E(C_{i,j+1} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = f_j C_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1 \quad (3)$$

$$\{C_{i1}, \dots, C_{i,n}\}, \{C_{i'1}, \dots, C_{i',n}\} \text{ } i \neq i' \text{ sont indépendants} \quad (4)$$

$$Var(C_{i,j+1} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = C_{i,j} \sigma_j^2, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1 \quad (5)$$

Les hypothèses (3) et (4) sont celles du *Chain Ladder* que nous n'avons pas explicitées précédemment. Un premier résultat de l'article est que connaissant $(C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$, $\hat{C}_{i,n}$ et $\hat{R}_i$ issus du *Chain ladder* sont des estimateurs sans biais de $C_{i,n}$ et R_i respectivement. La preuve repose sur le fait que les $\hat{f}_j$ sont des estimateurs sans biais de f_j et sont non corrélés entre eux.

Pour chaque année de survenance i , $1 \leq i \leq n$, la mesure de l'incertitude de l'estimation de $C_{i,n}$ par $\hat{C}_{i,n}$ se fait par la *mean squared error* ou erreur quadratique moyenne connaissant l'ensemble T engendré par $(C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$:

$$mse(\hat{C}_{i,n}) = E[(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | T]$$

Et comme $R_i = C_{i,n} - C_{i,n+1-i}$ et $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i}$:

$$mse(\hat{R}_i) = E[(\hat{R}_i - R_i)^2 | T] = E[(\hat{C}_{i,n} - C_{i,n})^2 | T] = mse(\hat{C}_{i,n})$$

Par application de la relation $E(X-a)^2 = Var(X) + (E(X)-a)^2$ nous obtenons la décomposition suivante,

$$mse(\hat{C}_{i,n}) = Var(C_{i,n} | T) + (E(C_{i,n} | T) - \hat{C}_{i,n})^2$$

le premier terme étant la variance du processus c'est-à-dire le reflet du caractère aléatoire de la réalisation suivant le modèle et le second l'erreur d'estimation.

T. Mack démontre par récurrence sur les deux termes précédents que nous obtenons un estimateur de l'erreur quadratique moyenne :

$$\overline{mse(\hat{R}_i)} = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}} \right)$$

Avec
$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

et
$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2) \right)$$

3.2.2.2 Intervalle de confiance

Maintenant que pour la variable aléatoire R_i nous avons une estimation de la moyenne, $\hat{R}_i$, et de son écart-type, erreur standard ou *standard error* $\overline{se}(\hat{R}_i) = \sqrt{mse(\hat{R}_i)}$, reste à faire l'hypothèse d'une distribution de R_i pour la construction d'un intervalle de confiance. A ce moment nous passons d'une

modélisation non paramétrique à une modélisation paramétrique. Comme les provisions sont positives, une loi Lognormale de paramètre (μ_i, σ_i^2) peut être envisagée :

$$\begin{cases} e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} = \hat{R}_i \\ e^{2\mu_i + \sigma_i^2} (e^{\sigma_i^2} - 1) = \overline{se}(\hat{R}_i)^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \mu_i = \ln(\hat{R}_i) - \frac{\sigma_i^2}{2} \\ \sigma_i^2 = \ln \left(1 + \left(\frac{\overline{se}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i} \right)^2 \right) \end{cases}$$

Et les bornes d'un intervalle à 95% sont :

$$\left[e^{\mu_i - 1,96\sigma_i}, e^{\mu_i + 1,96\sigma_i} \right] = \left[\hat{R}_i e^{-\frac{\sigma_i^2}{2} - 1,96\sigma_i}, \hat{R}_i e^{-\frac{\sigma_i^2}{2} + 1,96\sigma_i} \right]$$

Remarque: Il est possible d'appliquer le modèle sur des triangles de paiements nets de recours, auxquels cas nous devons utiliser une loi normale qui permet d'atteindre des valeurs négatives et l'intervalle devient:

$$\left[\hat{R}_i - 1,96\overline{se}(\hat{R}_i), \hat{R}_i + 1,96\overline{se}(\hat{R}_i) \right]$$

De plus connaissant pour chaque année de survénance l'intervalle de confiance, il est légitime dans un but de synthèse de vouloir connaître l'intervalle de confiance de la provision toutes survénances confondues. Parce que les erreurs standard $\overline{se}(\hat{R}_i)$ des réserves par survénance sont corrélées (elles sont fonction de $\hat{f}_j$ et de $\hat{\sigma}_j^2$), nous ne pouvons pas en faire directement la somme. T.Mack propose l'estimateur de l'erreur quadratique moyenne de la réserve totale suivant :

$$\overline{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left[\overline{mse}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left(\sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{l=1}^{n-j} C_{l,j}} \right]$$

La construction de l'intervalle se fait comme pour la réserve de l'année i avec un choix de distribution.

3.2.2.3 Validation des hypothèses

Avant de pouvoir utiliser le modèle de Mack, il convient d'en valider les hypothèses.

Comme le décrit T. Mack dans un autre article⁹, le protocole de validation peut être le suivant :

La première hypothèse traduit un lien affine entre $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$. Il faut vérifier que pour j fixé, les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont alignés sur une droite passant par l'origine et de pente proche de $\hat{f}_j$.

La deuxième hypothèse sur l'indépendance des survénances entre-elles est validée au travers de l'étude des diagonales supérieures de la matrice (absence d'effet calendaire). En effet, s'il existe un phénomène commun à toutes les survénances, il n'est pas aberrant de penser qu'il se manifeste au même moment, et que nous en voyons les effets sur le passage d'une diagonale à la suivante. Pour la construction de la statistique Z servant au test voir le paragraphe 2.5.3 de l'article Pitrebois et al¹⁰, elle repose sur le fait qu'en cas d'absence de corrélation, par diagonale le nombre d'éléments supérieur et à la médiane des éléments de colonne à laquelle il appartient ne s'éloigne pas d'une binômiale $Bin(\#diagonale, 1/2)$.

La troisième hypothèse peut se vérifier graphiquement également. L'hypothèse induit qu'à j fixé, les résidus ne doivent pas être autocorrélés. Ainsi nous devons constater une absence de tendance dans le

nuage de points $\left(C_{i,j}, \frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}} \right)$.

3.2.3 Bootstrap appliqué au modèle de Mack

Nous venons de construire un intervalle de confiance sous l'hypothèse de lognormalité ou normalité de la réserve. Cependant nous pourrions vouloir étudier les quantiles de la réserve sans pour autant faire une hypothèse paramétrique sur la distribution. Une méthode pour atteindre cet objectif est l'utilisation de la méthode *Bootstrap* développée par Efron¹¹ et largement utilisée aujourd'hui dans l'assurance.

3.2.3.1 Généralité

La méthode générale d'estimation par *Bootstrap* consiste en un ré-échantillonnage des observations d'une variable aléatoire un grand nombre de fois afin de construire empiriquement la distribution d'un paramètre d'intérêt. Par exemple, nous disposons d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ dont les composantes sont supposées indépendantes et identiquement distribuées (iid) d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F inconnue dont nous aimerions estimer un paramètre $\theta(F)$ et nous désirons également mesurer l'erreur d'estimation faite.

Soit $\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{]-\infty; x]}(X_i)$ la fonction de répartition empirique associée à $(X_1, \dots, X_n)$. et $(x_1, \dots, x_n)$

une réalisation.

Soit $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$ un estimateur du paramètre étudié.

Nous cherchons donc à estimer T_n , $mse(T_n)$ et $V(T_n)$.

Premier élément, par principe de substitution nous avons : $T_n = \theta(\hat{F}_n)$

Nous introduisons les définitions suivantes :

Un échantillon *bootstrap* $(X_1^*, \dots, X_n^*)$ est un échantillon de f.r. empirique F_n tel que $P[X_i^* = X_j^*] = 1/n$

Donc une réalisation $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ serait un tirage avec remise dans $(x_1, \dots, x_n)$.

$T_n^* = T(X_1^*, \dots, X_n^*)$ est appelée réplique *bootstrap* de T_n .

Soit B échantillons *bootstrap* $\left[(X_1^{*b}, \dots, X_n^{*b})_{b=1, \dots, B} \right]$, alors pour B suffisamment grand :

$$\bar{T}_n^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_n^{*b} \text{ est une approximation de } T_n$$

$$V_{boot}^{(B)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (T_n^{*b} - \bar{T}_n^*)^2 \text{ est une approximation de } V(T_n)$$

$$\text{et } mse_{boot}^{(B)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (T(X_1^{*b}, \dots, X_n^{*b}) - \theta(\hat{F}_n))^2 \text{ est une approximation de } mse(T_n).$$

L'application de la méthode est envisageable dès que n est suffisamment significatif afin que l'échantillon initial soit représentatif.

3.2.3.2 Application au provisionnement

Dans le cadre du provisionnement, la méthode *chain-ladder* nous donne une estimation $\hat{R}$ de l'espérance de la réserve R considérée comme variable aléatoire, par *bootstrapping* nous désirons obtenir une estimation des différents quantiles.

Nous partons des hypothèses de T. Mack connaissant $C_{i,j}$, pour $i+j \leq n+1$. Le modèle peut être mis sous la forme d'un modèle linéaire :

$C_{i,j+1} = \hat{f}_j C_{i,j} + \varepsilon_{i,j}$ avec $E(\varepsilon_{i,j}) = 0$, $(\varepsilon_{i,j})$ iid et $\hat{f}_j$ estimé à partir de notre triangle d'observations.

Les paiements n'étant pas identiquement distribués, nous ferons le *bootstrap* sur des résidus satisfaisant à cette condition.

Par définition nous avons exactement $C_{i,j+1} = f_{i,j} C_{i,j}$

D'où $f_{i,j} C_{i,j} = \hat{f}_j C_{i,j} + \varepsilon'_{i,j}$ ce qui est équivalent à $f_{i,j} = \hat{f}_j + \varepsilon'_{i,j}$

Notre modélisation se réduit donc à un *bootstrap* sur les résidus des *link ratio*.

Pour $i+j \leq n$, j nous pouvons en déduire le résidu.

Remarque le résidu correspondant $i=1$ et $j=n-1$ est nul car $f_{1,n-1} = \hat{f}_n$.

Afin de satisfaire au caractère iid, pour pouvoir opérer un rééchantillonnage nous devons retenir un résidu normé à partir du résidu brut, soit le résidu de Pearson :

$$r_{i,j}^P = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j+1}^{\text{théorique}}}{\sqrt{\text{Var}(C_{i,j+1}^{\text{théorique}})}} = \frac{C_{i,j}(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\sqrt{C_{i,j}\hat{\sigma}_j^2}} = \frac{(f_{i,j} - \hat{f}_j)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}}}}$$

Il faut toutefois s'assurer que la moyenne des résidus fasse bien zéro et qu'ils se distribuent aléatoirement suivant les années de survénance, les années de développement et les années calendaires.

De plus England et Verrall dans un article de 1999¹² préconisent de modifier la variance $\hat{\sigma}_j^2$ en la multipliant par $\frac{l}{l-p}$ pour en réduire le biais où l est le nombre d'éléments du triangle supérieur

($l = \frac{n(n-1)}{2}$ résidus) et p est le nombre de paramètres estimés ($p=n$). T. Mack propose plutôt le

coefficient $\frac{n-j-1}{n-j-2} \frac{l-z}{l-p}$ à appliquer à la variance $\hat{\sigma}_j^2$, où z est le nombre de *link ratio*.

Pour assurer une moyenne nulle, il faut soustraire également à chaque résidu la moyenne des résidus.

$$\bar{r}^P = \frac{1}{l} \sum_{i,j} r_{i,j}^P$$

Nous aboutissons à un résidu de Pearson modifié :

$$\tilde{r}_{i,j}^P = \sqrt{\frac{l-p}{l}} (r_{i,j}^P - \bar{r}^P)$$

Le modèle devient ;

$$C_{i,j+1} = \hat{f}_j C_{i,j} + \hat{\sigma}_j \sqrt{\frac{l}{C_{i,j}(l-p)}} \tilde{r}_{i,j}^P$$

ou

$$f_{i,j} = \hat{f}_j + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{C_{i,j}} \frac{l}{l-p}} \tilde{r}_{i,j}^P$$

L'algorithme que nous utiliserons est le suivant :

1. Pour obtenir notre jeu de résidus dans lequel tirer aléatoirement nous calculons à rebours à partir de la diagonale de la matrice d'observation, les $C_{i,j}$ théoriques qui nous auraient amenés jusqu'à la diagonale :

$$C_{i,j}^{\text{théorique}} = \hat{f}_j^{-1} C_{i,j+1}^{\text{théorique}} \quad \text{pour } i+j \leq n$$

Nous en déduisons les résidus :

$$r_{i,j}^P = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j+1}^{\text{théorique}}}{\sqrt{C_{i,j}\hat{\sigma}_j^2}}$$

puis $\tilde{r}_{i,j}^P$

2. Nous tirons aléatoirement avec remise dans ces résidus pour obtenir un échantillon *bootstrap* :

$$(\tilde{r}_{i,j}^{P*})_{i+j \leq n}$$

3. Puis nous recalculons un ensemble de *link ratio* pour $i+j \leq n$:

$$f_{i,j}^* = \hat{f}_j + \sqrt{\frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}} \frac{l}{l-p}} \tilde{r}_{i,j}^{P*}$$

4. En repartant de la diagonale, nous calculons à rebours un nouveau triangle de paiements cumulés :

$$C_{i,j}^* = (f_{i,j}^*)^{-1} C_{i,j+1}^*$$

5. Par la méthode *chain-ladder* (1)/Mack nous calculons un nouveau vecteur $(\hat{f}_j^*)$ ainsi que la variance $\hat{\sigma}_j^*$ associée.

6. Depuis notre diagonale des observations nous appliquons récursivement le modèle linéaire

$$\hat{C}_{i,j+1}^* = \hat{f}_j^* C_{i,j}^* + \hat{\sigma}_j^* \sqrt{C_{i,j}^*} \varepsilon \text{ où } \varepsilon \text{ est tiré dans une loi } N(0,1),$$

7. Enfin nous calculons les réserves :

$$\hat{R}_i^* = \hat{C}_{i,n}^* - C_{i,n-i+1} \text{ par année de survenance } i$$

$$\hat{R}^* = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^*$$

Nous réitérons les points 2. à 6. B fois.

De la moyenne empirique et l'écart-type de cet échantillon $(\hat{R}^{*b})_{b=1,\dots,B}$ nous tirons une estimation de la réserve et l'erreur d'estimation.

Remarque : à l'étape 6., nous n'appliquons pas la formule (2) du *chain ladder* mais nous réutilisons notre modèle de base pour introduire l'erreur de processus.

Toujours à l'étape 6., nous avons fait le choix suivant qui est une reformulation :

$$\hat{C}_{i,j+1}^* \approx N(\hat{f}_j^* \hat{C}_{i,j}^*, \hat{\sigma}_j^* \hat{C}_{i,j}^*)$$

mais nous aurions pu, afin de nous prémunir contre des valeurs négatives, utiliser une loi Gamma ou Lognormale de même moment.

Enfin, une autre possibilité aurait été de retirer dans notre jeu de résidus plutôt que dans une loi normale mais avec le risque de faire apparaître un grand nombre de fois un résidu éloigné de 0.

Remarque : une autre approche serait de considérer les incréments $X_{i,j}$ comme suivant une loi de Poisson $P(m_{i,j})$ ou Poisson surdispersée $P(m_{i,j}, \Phi)$ (ie. $\text{Var}(X) = \Phi E(X)$) et le modèle retenu serait de la forme

$$m_{i,j} = e^{c+\alpha_i+\beta_j} \text{ avec les contraintes } \alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

L'estimation de $\hat{c}$, $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_j$ composantes de l'estimation de la moyenne $\hat{m}_{i,j}$ se fait par la méthode du maximum de vraisemblance.

L'estimation de réserve par ce modèle est la même que celle du *Chain ladder* (Renshaw et Verall¹³)

Pour l'application du *bootstrap*, les résidus sont de la forme :

$$r_{i,j}^P = \frac{X_{i,j} - \hat{m}_{i,j+1}}{\sqrt{\hat{m}_{i,j+1}}} \text{ avec le même type d'ajustement que précédemment.}$$

Cependant cette approche ne permet pas d'avoir des incréments négatifs, et donc ne permet pas de modéliser des paiements nets de recours.

3.2.3.3 Validation du caractère iid des résidus

Pour juger du caractère iid de nos résidus il n'existe pas de test, toutefois nous pouvons considérer le vecteur $(r_k)_{k=1,\dots,\frac{n(n-1)}{2}-1}$ obtenu à partir du triangle des résidus lu diagonale supérieure à diagonale inférieure, de droite à gauche (l allant de 1 à n , i allant de 1 à l , $r_{i, l-i+1}$) comme les résidus d'un processus temporel et avoir recours à un test non paramétrique dit du « Up and Down »¹⁴. Nous construisons une statistique de test comme suit :

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{i+1} > r_i \\ 0 & \text{si } r_{i+1} < r_i \end{cases}$$

Remarque : les résidus étant des variables aléatoires continues, $P[r_{i+1} = r_i] = 0$

Nous obtenons une succession de 0 ou de 1 qui ne doit pas laisser apparaître de structure. Nous appellerons séquence une suite du même symbole encadrée par l'autre symbole (ou de rien si nous sommes au début ou la fin du vecteur).

Le but est d'observer dans la suite binaire des z_i , réalisations des Z_i , le nombre S de séquences différentes.

Nous testons l'hypothèse :

« H_0 : la loi de S est indépendante de la distribution de r_i . »

Un autre test si nous faisons une hypothèse sur la distribution des résidus, gaussienne, est le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov.

3.3 Modélisation retenue

Par convention et pour pouvoir faire le lien avec les développements théoriques *supra*, les valeurs prise par (i,j) ne seront plus dans $[1, n]^2$ mais dans $[2000, 2009] \times [0, 9]$.

De plus les montants dans cette partie 3.3 sont en millier d'euro.

3.3.1 Redressement de l'inflation

Nous décrivons ici les indices utilisés dans le cadre du redressement des données. Ces indices ont été retenus puisqu'ils permettent de gommer les tendances long terme des historiques de règlement. L'intérêt de niveler l'effet « inflation » est de mettre en avant par exemple l'accélération des cadences de règlement due à des gains de productivité de l'appareil de gestion et de faire en sorte de ne pas reproduire cet effet dans le futur. Il est vrai que sur la branche automobile ces gains sont faibles, mais sur d'autre branche, complémentaire santé par exemple par la mise en place de flux informatique, ce phénomène est observable.

Pour chacun de ces indices, nous estimons également une tendance moyenne par régression linéaire des logarithmes népériens des indices. Cette tendance moyenne est ensuite injectée dans le modèle pour tenir compte de l'inflation future. Cette dernière étape pourrait être complétée par des éléments de conjoncture visant à modifier les résultats de la régression.

Une amélioration intéressante du modèle serait de mettre en place une vision stochastique de l'inflation future. Celle-ci peut-être plus ou moins sophistiquée en allant du modèle linéaire, aux modèles autorégressifs avec la modélisation de Wilkie par exemple.

Indices des prix à la consommation (INSEE)

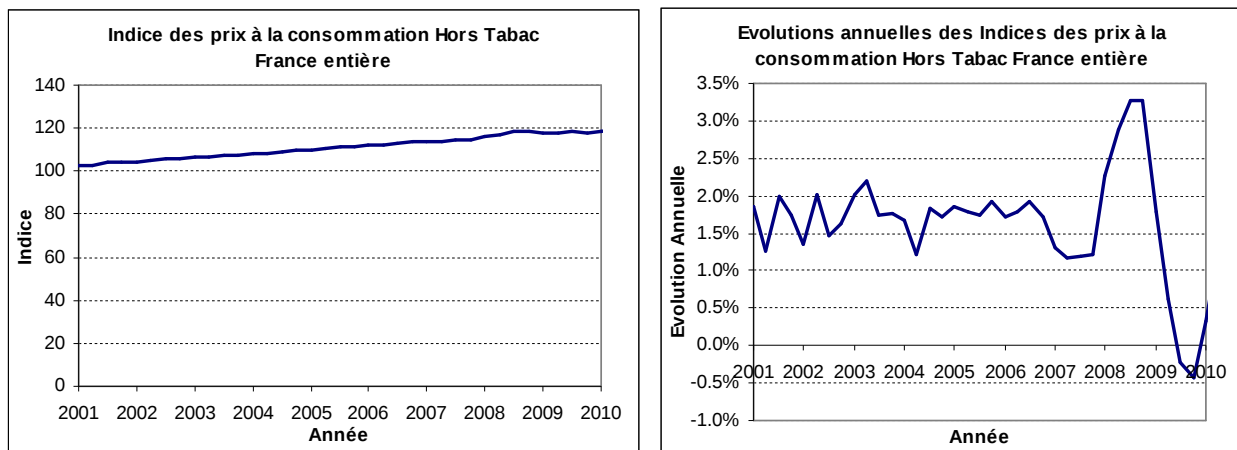


Figure 8 : Indice des prix à la consommation hors tabac, France entière.

Cet indice de référence pour le calcul de l'inflation générale française évolue depuis 2001 à fin 2007 de 1,5% à 2% par an environ. Fin 2007, il amorce une hausse violente atteignant presque +3,5%/an pour devenir légèrement négatif courant 2009. Les points n'apparaissent pas sur le graphique mais depuis deux trimestres, il est revenu à un niveau de +1,5%/an.

Depuis de nombreuses années la politique monétaire européenne tend à juguler l'inflation et comme cet indice sera retenu pour estimer les flux futurs de garantie à cadence de liquidation rapide, nous retenons une inflation de +1,7% malgré les soubresauts constatés en 2009. Il est évident que si nous devions estimer une tendance long terme, il faudrait considérer d'autres arguments plaidants pour un retour à l'inflation comme nous l'avons connus au début de années 80 : hausse des cours des matières premières pétrole en tête, hausse de la fiscalité, rattrapage économique des nouveaux entrants dans l'Union Européenne, hausse des produits manufacturés provenant de Chine, perte de confiance dans l'Euro, sortie de crise et baisse du chômage...

Une alternative serait de s'en remettre aux anticipations faites par les marchés financiers au travers de produits indexés sur l'inflation.

Nous utilisons un jeu d'indices produit par le service Etudes et Statistiques FFSA GEMA.

Indices des dommages corporels (FFSA/GEMA)

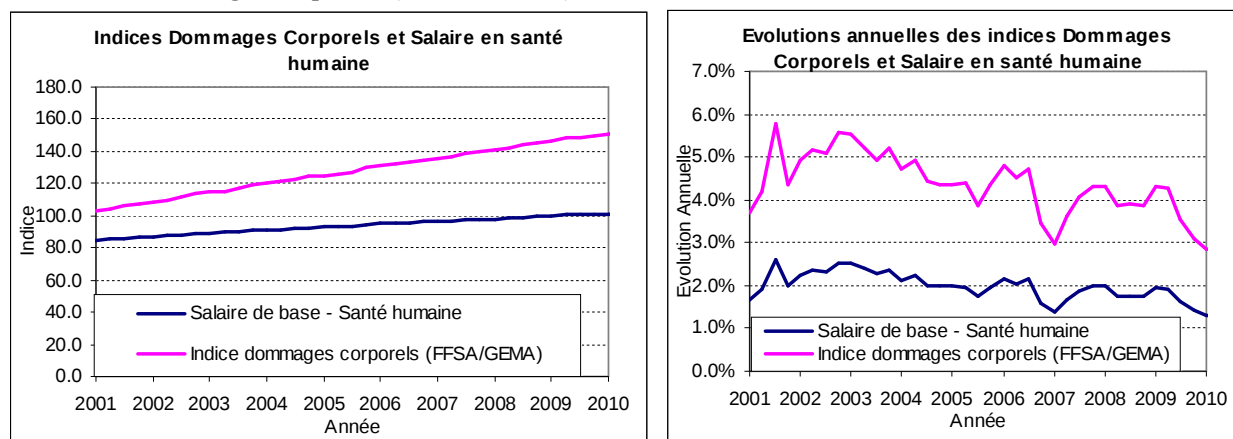


Figure 9 : Indice FFSA/GEMA dommages corporels et indice INSEE de salaire de base de la santé humaine.

L'indice FFSA/GEMA des dommages corporels (IDCA) évolue par définition, 2,18 fois plus fortement que l'indice INSEE des salaires de base en santé humaine. En valeurs, ces évolutions sont comprises depuis 2001 entre 3% et 6% par an. La régression sur les logarithmes nous amène à une évolution de 4,3%/an. Nous retenons cette évolution pour projeter l'indice.

Indices des dommages matériels automobile (FFSA/GEMA)

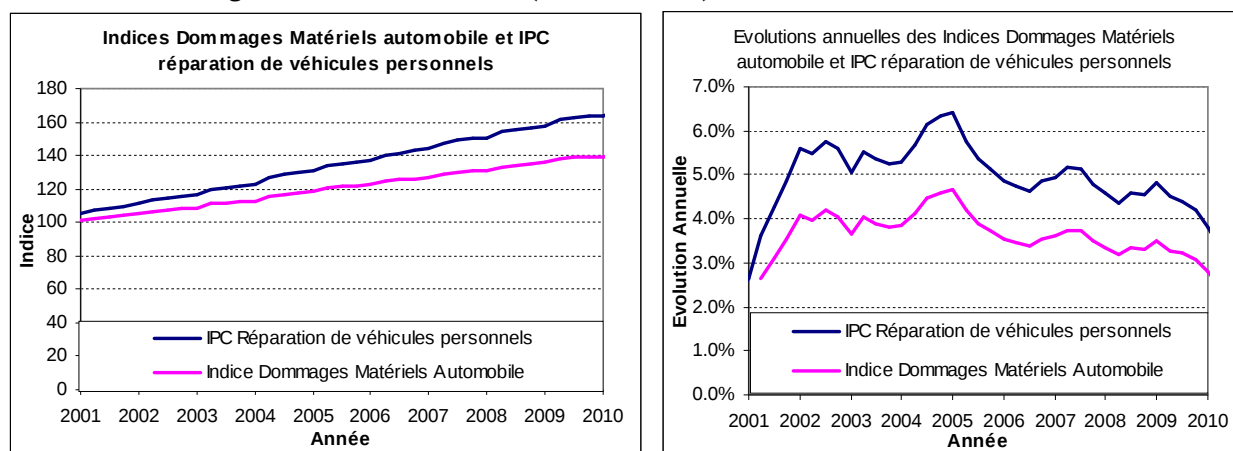


Figure 10 : Indice FFSA/GEMA des dommages matériels automobile et indice INSEE IPC réparation de véhicules personnels.

L'indice FFSA/GEMA des dommages matériels automobile (IDMA) est construit à partir de l'indice INSEE IPC réparation de véhicules personnels. Ses évolutions sont égales à 0,73 fois l'indice de référence. Ainsi, elles sont comprises entre 3% et 6,5% par an depuis 2001. Le niveau depuis 2006 est toutefois inférieur à 5%/an.

Nous retenons une évolution de +3,7% par an de l'indice IDMA.

Indices des dommages bris de glace automobile (FFSA/GEMA)

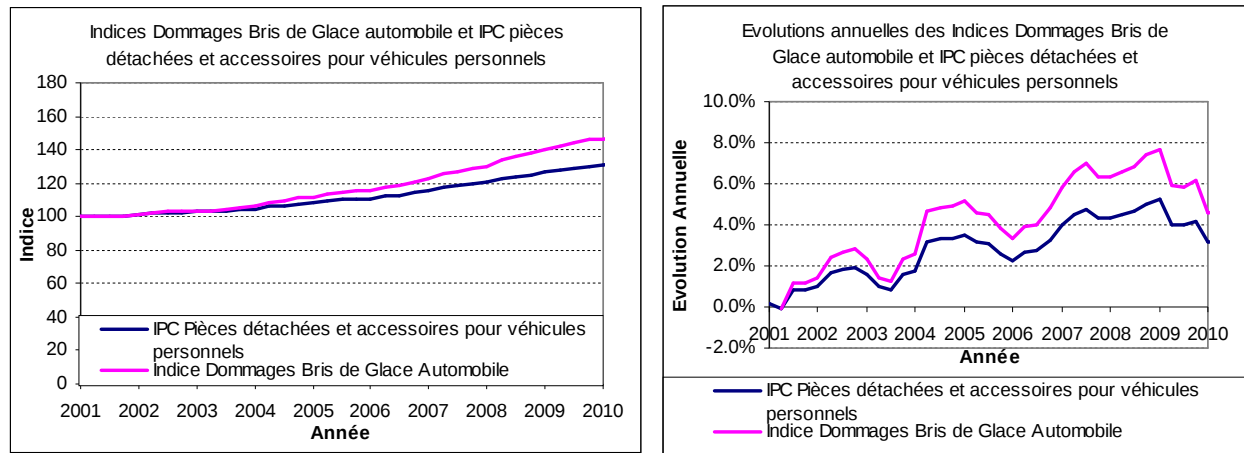


Figure 11 : Indice FFSA/GEMA des dommages bris de glace automobile et indice INSEE IPC Pièces détachées et accessoires pour véhicules personnels.

Finalement, les évolutions de l'indice INSEE IPC Pièces détachées et accessoires pour véhicules personnels sont majorées de 46% pour construire l'indice FFSA/GEMA des dommages bris de glace automobile (IBGA).

Cet indice est le plus volatile puisque son évolution était quasiment nulle en 2001 et qu'elle a culminé à 8% fin 2008.

Même si l'amplitude des évolutions récentes est importante, nous estimons à +4,8% la croissance annuelle de l'indice IBGA.

Nous avons recalculé des index spécifiques par nature de garantie (RC et Dommages) sur la base de la méthodologie proposée par le service des études de la FFSA/GEMA.

Il propose le calcul d'un index générale, l'Index Global Automobile (IGA), dont la variation est :

$$\Delta_{IGA} = 56\% \Delta_{IDMA} + 7,6\% \Delta_{IBGA} + 36,4\% \Delta_{IDCA}$$

En reprenant ce principe nous calculons nos indices mais en mettant à zéro la pondération qui ne concerne pas *a priori* la garantie (par exemple pour la RC la variation de l'index bris de glace n'est pas utilisée). Pour les autres garanties, en l'absence d'indice pertinent nous utilisons l'IPC par défaut. En effet, par exemple, le dommage corporel étant une garantie dont le montant de prestation est contractuel est donc peu soumis à une inflation forte.

Nous avons retenu par segment les indices et pondérations suivants :

pondération	IPC	IDMA	IBGA	IDCA
RC (hors grave)		61%		39%
Dommages		88%	12%	
DCC	100%			
013 015 APJ	100%			
011	100%			
ASS	100%			
009	100%			

3.3.2 Application du modèle de Mack

La première étape consiste en une validation des hypothèses d'application du modèle Mack à nos triangles de règlements.

Pour illustrer cette opération nous considérons les paiements bruts de la segmentation « Dommages », l'étude des autres segments est en annexe.

Nous devons contrôler l'alignement des $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$. Il apparaît une tendance linéaire mais peu probante pour $j=0$:

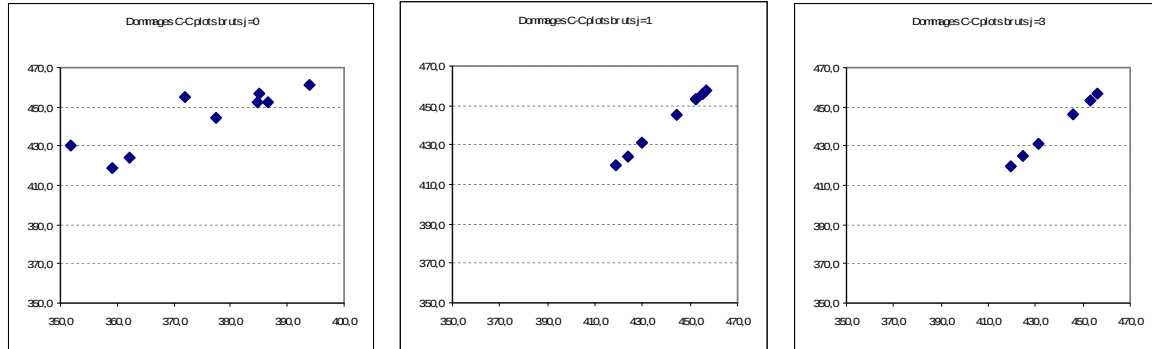


Figure 12: Dommages, C_{i0} vs C_{i1} avant et après redressement de l'inflation

Nous pouvons redresser de l'inflation les données, pour cela il faut faire le choix d'un indice. Nous avons retenu un indice composite calculé à partir des indices de la réparation et du bris de glace publiés par la FFSA et le GEMA. Nous obtenons pour $j = 0$ à 2 :

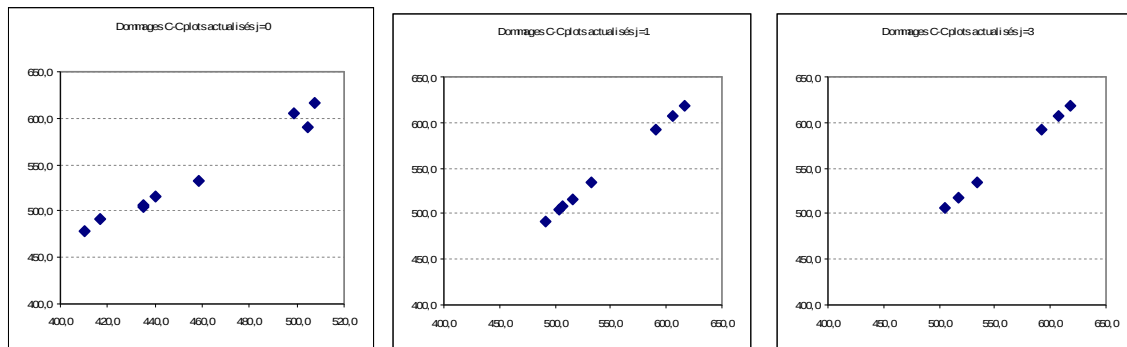


Figure 13: Dommages, C_{ij} vs C_{ij+1} après redressement de l'inflation

Cette prise en compte de l'inflation nous permet de valider cette première hypothèse. Par la suite nous utiliserons uniquement des triangles de règlements corrigés de l'inflation.

La 2^{ème} hypothèse est validée par le test statistique dont le résultat est le suivant :

$Z=9$, l'intervalle est $[8,9 ; 16,6]$, Z appartient bien à l'intervalle et l'hypothèse d'indépendance des années de survenance entre elles n'est pas rejetée.

Enfin pour $j=0$ à 8, les résidus semblent se répartir aléatoirement dans le plan, ce qui valide la 3^{ème} hypothèse :

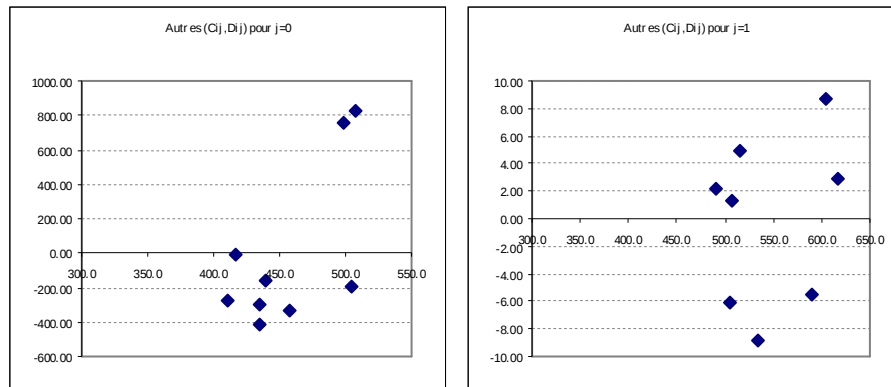


Figure 14: Dommages, résidus

Ci-après nous présentons les résultats du modèle de Mack appliqués à notre groupement de garanties « Dommages », les montants sont en millier d'euro.

En premier lieu, nous devons déterminer les *link ratio* que nous allons retenir pour les projections, une première observation du graphique des ratios pour $j=0$ nous conduit à exclure sans doute les *link ratio* $f_{2000,0}$ et $f_{2001,0}$:

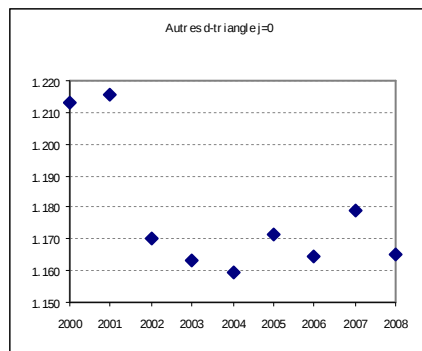


Figure 15: Dommages, *link ratio* 1ère année de développement

Cette suppression des deux points, a pour effet de diviser par 3 la volatilité de l'estimation de la réserve toutes survenances :

	Réserve	Standard Error en montant	Standard Error %
Avant suppression	78 794	10 299	13.07%
Après suppression	76 283	2 982	3.91%

Figure 16: Dommages, comparaisons des réserves avant et après censure de coefficients de passage

L'examen des ratios de l'année de développement suivante laisse à penser que les deux premières survenances ne se comportent pas différemment des autres :

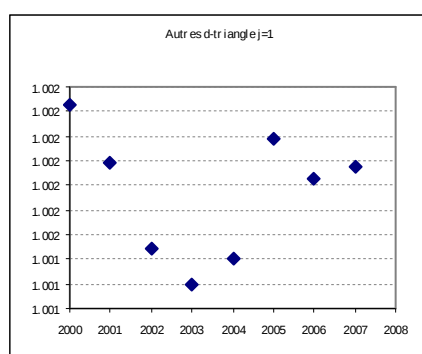


Figure 17: Dommages, *link ratio* 2ème année de développement

Comme explication de la singularité des deux premiers ratios de première année de développement, surtout celui de 2000, nous pouvons avancer qu'il y a eu sans doute un contrecoup des tempêtes de décembre 1999 sur les délais de gestion. En effet, les sinistres liés à Lothar et Martin ont mobilisé l'ensemble de l'appareil de gestion bien au delà des équipes spécialisées en IRD et de ce fait ont pénalisé la gestion des autres sinistres. Nous décidons donc de ne pas utiliser ces deux premiers coefficients.

Toujours en étudiant les coefficients de passage nous estimons qu'il n'est pas nécessaire d'introduire un facteur de queue. En effet, les derniers coefficients sont très proches de 1, ce qui tend à penser que la liquidation est complète au bout de 10 ans.

Donc finalement les réserves estimées sans prise en compte de l'inflation future sont les suivantes :

Année de survenance	Réserve (sans inflation future)	Erreur standard		Intervalle $\alpha=95\%$	
		en montant	En %	Normale	Lognormale
2000	0	0	0.00%		
2001	3	4	117.73%	[-4 ; 11]	[0 ; 14]
2002	7	5	75.50%	[-3 ; 17]	[1 ; 20]
2003	21	6	31.07%	[8 ; 33]	[11 ; 36]
2004	57	34	58.88%	[-9 ; 123]	[17 ; 143]
2005	139	57	40.62%	[28 ; 250]	[60 ; 278]
2006	303	97	32.12%	[112 ; 493]	[156 ; 532]
2007	567	141	24.78%	[292 ; 843]	[341 ; 888]
2008	1 353	197	14.57%	[967 ; 1 740]	[1 008 ; 1 779]
2009	73 833	2 964	4.01%	[68 024 ; 79 643]	[68 194 ; 79 811]
Total	76 283	2 982	3.91%	[70 439 ; 82 128]	[70 605 ; 82 292]

Figure 18: Dommages, provisions pour paiement par modèle de Mack

L'étude du triangle des recours nous conduit également à censurer les deux premiers coefficients de développement. Nous aboutissons à la prévision de recours à encaisser suivante :

Année de survenance	Réserve (sans inflation future)	Erreur standard		Intervalle $\alpha=95\%$	
		en montant	En %	Normale	Lognormale
2000	0	0	0.00%		
2001	4	20	513.44%	[-36 ; 44]	[0 ; 27]
2002	23	26	110.20%	[-27 ; 73]	[3 ; 89]
2003	69	36	51.88%	[-1 ; 140]	[24 ; 160]
2004	140	53	37.81%	[36 ; 243]	[64 ; 268]
2005	265	56	20.99%	[156 ; 374]	[173 ; 389]
2006	485	76	15.58%	[337 ; 634]	[354 ; 650]
2007	1 013	116	11.46%	[785 ; 1 241]	[805 ; 1 259]
2008	3 024	346	11.44%	[2 346 ; 3 702]	[2 402 ; 3 757]
2009	28 607	1 146	4.01%	[26 361 ; 30 854]	[26 426 ; 30 919]
Total	33 631	1 232	3.66%	[31 216 ; 36 046]	[31 280 ; 36 109]

Figure 19: Dommages, provisions de recours par modèle de Mack

Nous constatons que l'erreur standard des recours est comparable à celle de la PSAP.

Mais si nous comparons les provisions de recours issues de l'analyse directe et celles obtenues par différence entre la PSAP « brute » et PSAP « nette » il apparaît une différence de l'ordre de 5%, la deuxième approche anticipant plus de recours. Dans un souci de prudence nous retiendrons la première approche.

Année de survenance	directe	Brute-nette	différence
2000	0	0	
2001	4	4	3%
2002	23	24	5%
2003	69	75	9%
2004	140	145	4%
2005	265	277	4%
2006	485	515	6%
2007	1 013	1 036	2%
2008	3 024	3 178	5%
2009	28 607	30 084	5%
Total	33 631	35 339	5%

Figure 20: Dommages, comparaison des provisions de recours par 2 approches

3.3.3 Utilisation du *Bootstrap*

Maintenant nous désirons déterminer notre distribution de PSAP en appliquant la méthode du *bootstrap*. Nous suivons le plan défini dans la section précédente.

A partir des ratios estimés par la méthode de Mack, nous déterminons les résidus bruts.

Puis nous calculons les résidus de Pearson que nous ajustons et que nous centrons. Comme nous avons censuré deux coefficients de passage précédemment, nous ne calculons pas de résidus pour ces points.

Avant de pouvoir lancer les itérations, il convient de s'assurer que notre échantillon respecte l'hypothèse de base du *Bootstrap*.

Un premier examen de la distribution autour de zéro des résidus retraités suivant chaque axe de vision peut être fait :

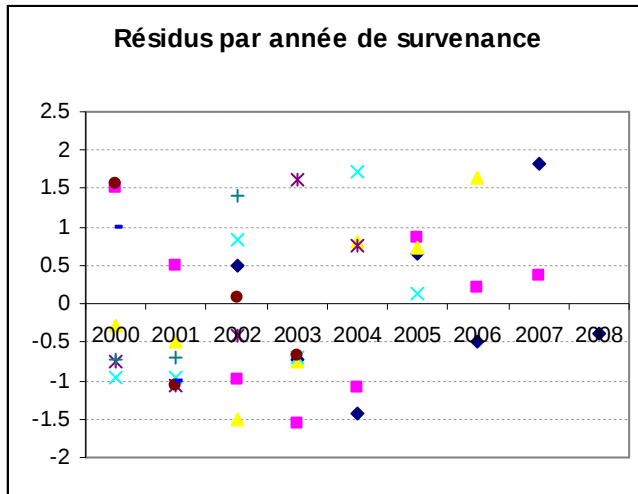


Figure 21 : Dommages, résidus par année de survenance

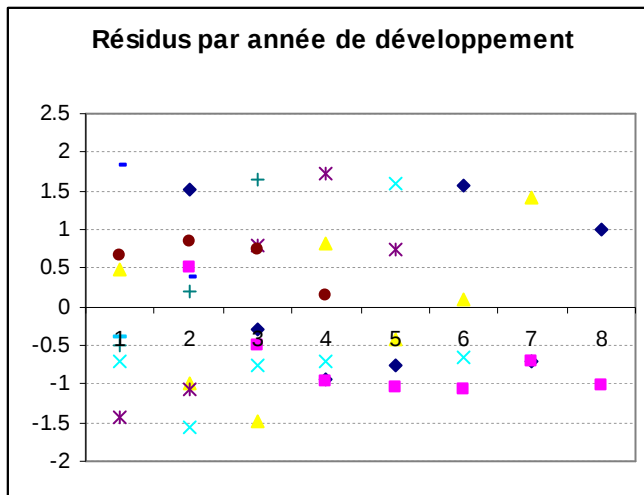


Figure 22 : Dommages, résidus par année de développement

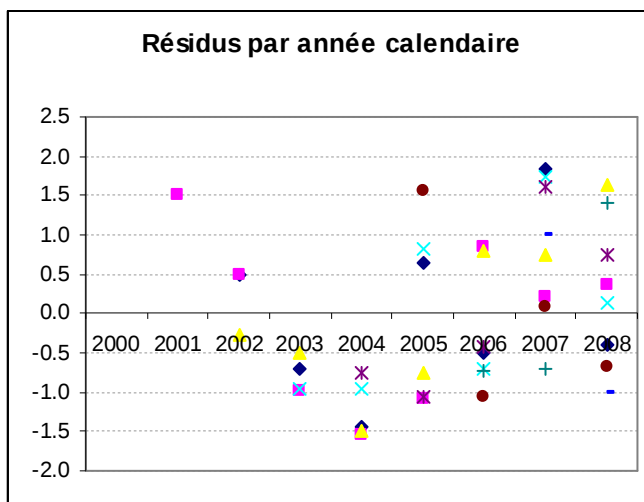


Figure 23 : Dommages, résidus par année calendaires

De ces trois représentations des résidus nous pouvons déjà tirer quelques remarques :

Dans le 2ème graphique, nous constatons que l'année de survenance 2001 matérialisée par des carrés, est quasiment systématiquement en dessous de l'axe des abscisses.

Les années calendaires 2003 et 2004 sont atypiques, tous les résidus sont en dessous de l'axe.

Le résultat du test est le suivant en considérant l'approximation normale de la loi de S :

$S=28$ appartient à l'intervalle $[E(S) - 1,96\sigma(S); [E(S) + 1,96\sigma(S)]=[22,4;32,9]$.

Nous ne rejetons donc pas H_0 .

A ce stade nous pouvons désirer savoir si les résidus suivent une loi normale. Pour répondre à cette question, nous traçons le graphique des quantiles empiriques vs les quantiles de la loi normale $N(0,1)$ (QQ_plot) et constatons que les points s'éloignent significativement de la bissectrice ce qui nous incite à douter de la normalité des résidus :

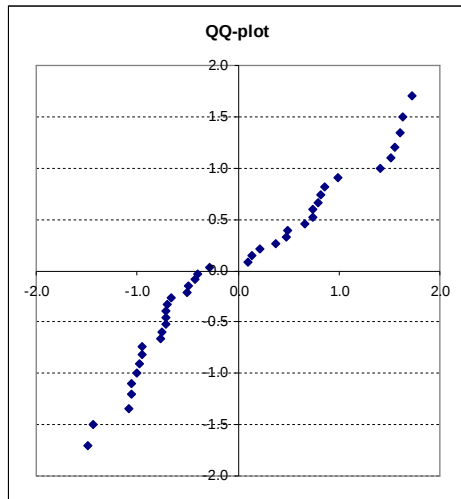


Figure 24 : Dommages, QQ-plot résidus sur triangle de paiement

Cependant un test de Kolmogorov-Smirnov basé sur la distance maximum entre la f.r. empirique et le f.r. théorique, en l'espèce une loi normale, ne rejette pas l'hypothèse de normalité au seuil de 5%.

Quand nous faisons l'étude sur les paiements nets nous obtenons :

$S=26$ appartient à $[22,4;32,9]$ et nous ne rejetons donc pas H_0 .

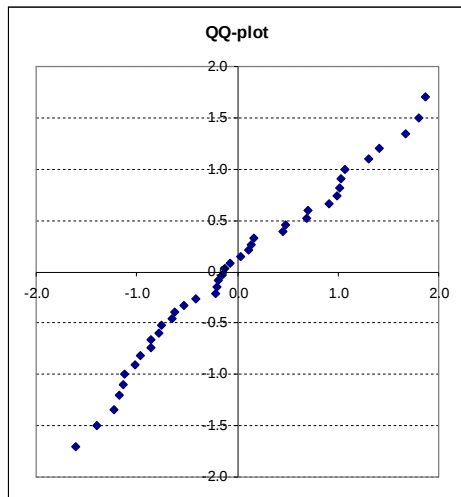


Figure 25 : Dommages, QQ-plot résidus sur triangle de paiements nets

Pour les recours :

$S=30$ appartient à $[22,4;32,9]$ et nous ne rejetons donc pas H_0 .

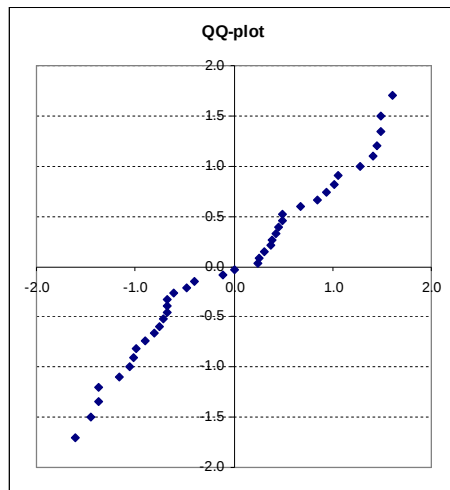


Figure 26 : Dommages, QQ-plot résidus sur triangle de recours

L'hypothèse d'indépendance et d'identité de la distribution de résidus pour chaque approche (en brut, en net et en recours) étant acquise, nous pouvons procéder au ré-échantillonnage.

Nous fixons le nombre de simulation à 10 000 et nous prenons à l'étape 6. de l'algorithme un processus s'appuyant sur une loi gamma.

survenance	Bootstrap			Mack			différence Bootstrap-Mack		
	Réserve (sans inflation future)	Erreur standard		Réserve (sans inflation future)	Erreur standard		Réserve	Erreur standard	
		montant	%		montant	%		montant	%
2000	0	0	0.0%	0	0	117.7%	0	0	- 117.7%
2001	3	3	93.5%	3	4	117.7%	0	- 1	- 24.2%
2002	7	4	60.1%	7	5	75.5%	0	- 1	- 15.4%
2003	21	5	26.5%	21	6	31.1%	0	- 1	- 4.6%
2004	57	33	58.0%	57	34	58.9%	0	- 1	- 0.8%
2005	139	56	40.0%	139	57	40.6%	0	- 1	- 0.6%
2006	302	100	33.0%	303	97	32.1%	0	3	0.9%
2007	568	146	25.7%	567	141	24.8%	1	5	0.9%
2008	1 351	205	15.2%	1 353	197	14.6%	- 2	8	0.6%
2009	73 856	3 160	4.3%	73 833	2 964	4.0%	23	196	0.3%
Total	76 304	3 176	4.2%	76 283	2 982	3.9%	21	195	0.3%

Figure 27, Dommages, provisions pour paiement par la méthode du *Bootstrap*

Les deux méthodes convergent vers la même valeur de réserve, cependant le rééchantillonnage augmente l'erreur de prédiction.

En retenant un processus gaussien plutôt que gamma, le résultat reste identique (76 271 K€, 3 148 K€ et 4,1%).

Si à présent nous augmentons le nombre d'itérations d'un facteur 10, nous obtenons une réserve de 76 275 K€, et une erreur de 3 105 K€ soit 4,1% de la réserve.

Finalement en conservant nos 10^4 simulations, nous obtenons la distribution empirique suivante :

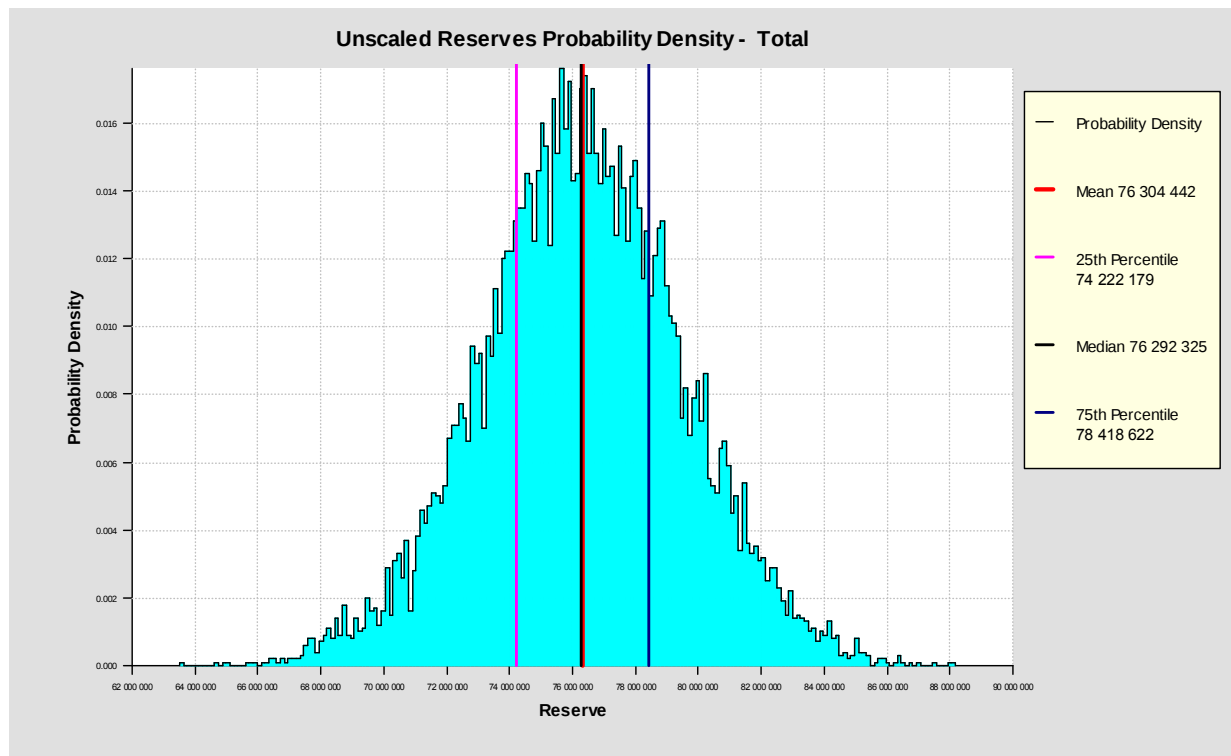


Figure 28: Dommages, distribution empirique par la méthode du *Bootstrap*

Le quantile à 95% que nous obtenons est de 81 553 K€ comparable au résultat de la méthode de Mack sous hypothèse de normalité de la réserve.

Pour aboutir à l'estimation de la réserve finale de ce regroupement, nous introduisons l'inflation estimée et nous obtenons une réserve de 77 648 K€ avec une erreur de 4,2% et un quantile à 95% de 82 948 K€.

Pour les autres garanties en suivant la même méthodologie nous obtenons les provisions de paiements du tableau suivant. A noter que pour les garantie RC et 013-015-APJ nous introduisons des facteurs de queue.

La méthode du *bootstrap* appliquée au triangle de recours de la garantie Cat Nat (009) donne des estimations aberrantes. En effet, le peu de recours encaissés et la forte variance des résidus sont peu compatibles avec l'application de la méthode.

Comme l'objectif *in fine* de l'étude est de modéliser la provision de paiements nets de recours et que pour les garanties autres que RC et Dommages les recours sont faibles, il semble judicieux de se limiter à :

- Provisions pour paiements et provisions de recours pour les garanties RC et Dommages et d'en déduire les réserves pour paiement net de recours.
- Provisions pour paiement net de recours directement pour les autres.

garantie	sans inflation future			avec inflation future			différence avec et sans inflation		
	Réserve	Erreur de prédiction		Réserve	Erreur de prédiction		Réserve	Erreur de prédiction	
		montant	%		montant	%		montant	%
Dommages	76 304	3 176	4,2%	77 648	3 228	4,2%	1 343	52	0,0%
RC	346 193	8 833	2,6%	364 815	9 384	2,6%	18 622	551	0,0%

Figure 29: Provisions paiement avant et après inflation future

garantie	sans inflation future			avec inflation future			différence avec et sans inflation		
	Réserve	Erreur de prédiction		Réserve	Erreur de prédiction		Réserve	Erreur de prédiction	
		montant	%		montant	%		montant	%
Dommages	33 635	1 280	3,8%	34 478	1 310	3,8%	843	31	0,0%
RC	126 008	9 103	7,2%	133 871	10 400	7,8%	7 862	1 297	0,5%

Figure 30: Provisions de recours avant et après inflation future

garantie	sans inflation future			avec inflation future			différence avec et sans inflation		
	Réserve	Erreur de prédiction		Réserve	Erreur de prédiction		Réserve	Erreur de prédiction	
		montant	%		montant	%		montant	%
013 015 APJ	23 250	768	3.3%	23 265	594	2.6%	- 14	175	0.8%
Domm. Corp. du conduct.	17 454	3 783	21,7%	18 006	3 920	21,8%	552	137	0,1%
Evts clim	7 309	1 536	21,0%	7 374	1 556	21,1%	65	20	0,1%
Assistance	5 354	600	11,2%	5 410	606	11,2%	56	6	0,0%
Cat Nat	531	771	145,3%	536	779	145,3%	6	8	- 0,1%

Figure 31: Provisions paiement net de recours avant et après inflation future

Enfin, les flux de paiements par années de développement simulés par la méthode du *bootstrap* peuvent être actualisés sur la base de la courbe des taux afin de calculer la provision escomptée. Le graphique ci-dessous présente le cadencement des flux hors graves attendus en valeur centrale.

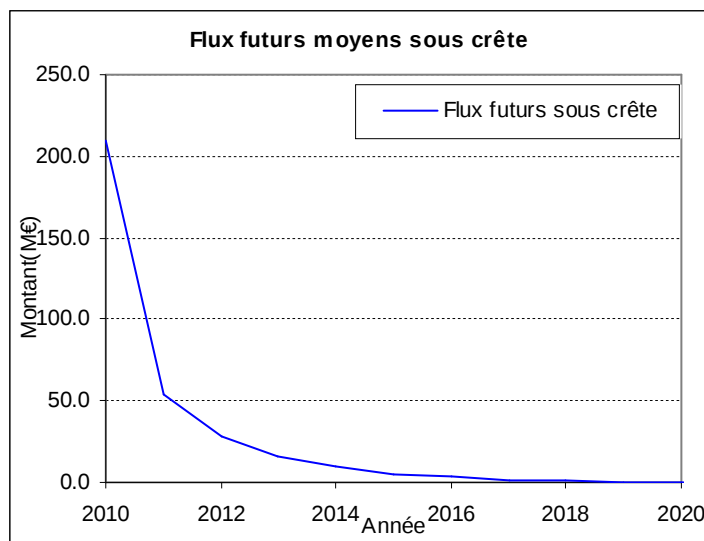


Figure 32 : Flux futurs hors graves

Pour illustrer le caractère hétérogène des segments nous pouvons calculer les durations de chaque segment :

Duration du BE

RC AUTO sous crête	1.3
DOMMAGES	0.4
013 015 APJ	2.5
DCC	1.7
011	0.5
ASS	0.6
009	0.5

Figure 33 : Durations des segments

Il apparaît que ce sont les garanties de protection juridique qui en moyenne ont une vitesse de liquidation la plus faible.

Provisions SII (M€)	BE	Ecart type	Cov	Q99.5	Chargement
RC AUTO sous crête	224.3	12.8	6%	257.6	15%
DOMMAGES	43.0	3.4	8%	51.7	20%
013 015 APJ	21.5	0.7	3%	23.2	8%
DCC	17.2	3.7	22%	27.3	58%
011	0.5	0.8	145%	2.7	399%
ASS	5.4	0.6	11%	6.9	29%
009	7.3	1.5	21%	11.3	54%

Figure 34 : Passage au *Best Estimate* net de recours, sans corrélation entre brut et recours.

3.3.4 Prise en compte des conventions

Actuellement des négociations entre les représentants des sociétés d'assurance sont en cours pour réévaluer le forfait IDA. Le forfait n'ayant pas été revu depuis plusieurs années, une évolution de celui-ci devrait avoir un effet sur le montant à provisionner. Une succincte étude de sensibilité peut être faite : si il avait été décidé de réévaluer le forfait de 1% en 2009, les règlements bruts aurait été augmenter de 0,3% et la PSAP à constituer de 0,3% également.

4 Provisionnement des sinistres graves

4.1 Généralités

4.1.1 Objectifs

Nous abordons désormais le modèle de provisionnement des graves. Il s'inscrit dans le cadre des travaux visant à répondre aux nouvelles exigences de solvabilité. Ainsi, il doit nous permettre d'évaluer l'ensemble des trajectoires possibles des flux futurs sur ce segment, avec une probabilité associée.

Ce modèle doit également permettre d'estimer nos engagements cédés de manière la plus fidèle possible. De manière plus concrète, il s'agit de tenir compte des clauses spécifiques à la réassurance RC détaillées dans le paragraphe 4.3 Réassurance RC (clauses de rentes et de stabilité).

Nous inscrivons également ce projet en réponse à des besoins de pilotage de risque puisque ses résultats :

- alimenteront notre Revue Actuarielle du provisionnement,
- permettront de bâtir les trajectoires des Business Plan Tarif,
- sont au centre de calculs potentiels de sensibilité sur des changements réglementaires, jurisprudentiels, ou contextuels.

La définition des sinistres graves a déjà été rédigée dans la partie 3 sur le provisionnement hors graves (Cf 3.1 Données disponibles).

Il s'agit des garanties de RC Corporelles dont l'évaluation brute gestionnaire lors du dernier inventaire dépasse 300k€ (strictement).

4.1.2 Différences entre le modèle de provisionnement et le modèle de souscription

Nous souhaitons ici mettre en exergue les différences fondamentales entre un modèle de projection de la sinistralité future (souscription) et un modèle de projection de la sinistralité déclarée (provisionnement, aux tardifs près) sur les sinistres graves.

Dans le premier cas, nous n'avons aucune connaissance des sinistres sur l'année de souscription modélisée. Classiquement, les modèles utilisés sont souvent des modèles dits composés. Ils sont calibrés sur la sinistralité passée, et visent à donner une projection à l'ultime de chaque dossier. Outre l'incertitude sur les paramètres et l'erreur de modèle, la volatilité provient aussi bien des nombres que des montants individuels de sinistres.

Dans la modélisation des provisions des graves, il est difficile d'utiliser ces types de modèles. En effet, nous avons déjà connaissance d'une partie des nombres et d'une partie des montants individuels. Il est essentiel d'assurer une cohérence entre le montant ultime simulé, et le niveau dernier observé de paiements cumulés.

4.1.3 Etat des lieux

Les modèles classiques de provisionnement sont essentiellement des modèles de développement de triangles agrégés tels ceux développés dans la partie hors graves. Nous faisons deux principales critiques de ces modèles dans le cadre de leur application à des sinistres graves :

- L'application est difficile, avec souvent des hypothèses sous-jacentes non respectées. Les coefficients de passage peuvent être très volatiles. Pour les méthodes déterministes, la

sélection des coefficients de passage est alors très sensible. Pour les méthodes stochastiques, la distribution de provisions obtenues a un écart type important.

- Le travail sur des données agrégées ne permet pas d'évaluer les cessions de traités non proportionnels, très fréquents sur ce type de garanties.

Parmi les modèles individuels existants, celui se rapprochant le plus de nos objectifs est celui de K.Murphy / A.Mc Lennan¹⁵. En effet, il vise à projeter individuellement à l'ultime chaque dossier. Pour cela, il utilise des coefficients de développement individuels et leur probabilité d'occurrence, observés dans le passé sur les dossiers ayant au moins une fois dépassé le seuil. Ainsi, la projection aboutit à arbre probabilisé de développement pour chaque dossier, tenant compte de son état (en cours ou clos).

Ce modèle a été mis en oeuvre dans le mémoire de C.Hubert et P.Guay¹⁶.

Il présente l'avantage de fournir une évaluation individuelle des dossiers. Son application sur la RC médicale, amenait à un écart type très important. De plus, ce modèle ne répond pas précisément aux exigences de Solvabilité 2 puisqu'il ne donne aucune trajectoire de règlements (uniquement en évaluation ultime).

Selon un principe relativement similaire, J.B. Mahon¹⁷ avait détaillé l'utilisation d'une matrice de transition pour projeter individuellement chaque dossier. Son modèle nécessite tout d'abord de définir des classes de dossiers (suivant leur montant et leur état) et d'en comptabiliser l'effectif à la fin de chaque exercice de développement. Cette étape permet alors de calculer les probabilités de transition d'une classe à l'autre (Chaîne de Markov). Ces dernières sont finalement utilisées pour développer les dossiers.

Après ce bref tour d'horizon des modèles de marché, nous évoquons le modèle utilisé actuellement à la MAAF, qui a donné lieu à un mémoire d'actuariat en 2004¹⁸.

Il s'agit également d'un modèle de distribution des montants individuels à l'ultime.

Il part d'un échantillon initial des montants individuels de sinistres pris au seuil de 75k€. A partir de celui-ci, un deuxième échantillon est créé en ne conservant que les montants supérieurs à 300k€.

D'une part, les fréquences de chacun des échantillons (2 triangles) sont projetées à l'ultime via *Chain Ladder*. On obtient des fréquences ultimes par survenances, des sinistres > 75k€ et des sinistres > 300k€ (f_1 au seuil de 75k€ et f_2 au seuil de 300k€).

D'autre part, une adéquation de loi lognormale est réalisée pour chacun des deux échantillons de montants pour chaque exercice de survenance et exercice de gestion. Par exemple, les montants > 75k€ de la survenance 2000, vus fin 2000 sont modélisés par une lognormale.

La loi Lognormale ayant 2 paramètres (μ et σ), nous obtenons 4 triangles de paramètres :

- Un triangle de μ au seuil de 75k€,
- Un triangle de σ au seuil de 75k€,
- Un triangle de μ au seuil de 300k€,
- Un triangle de σ au seuil de 300k€.

A la fin de l'étape d'estimation des paramètres, nous obtenons 2 triangles de paramètres μ et 2 autres de σ .

Nous projetons à l'ultime ces paramètres via *Chain Ladder*. Finalement, nous aboutissons à des μ et σ ultimes.

Paramètres de la loi de distribution	Gestion										
	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9	N+10
1995	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1996	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1997	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1998	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1999	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2000	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2001	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2002	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2003	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2004	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2005	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Figure 35 : Projection Chain Ladder des paramètres du modèle actuel.

A ce niveau nous disposons de 2 primes pures :

- La première, au seuil de 75k€ (Montant - 75k€). L'objectif étant de modéliser les sinistres > 300k€, la distribution de montant est tronquée à 225k€. Cette prime pure tronquée est notée pp_1 .
- La seconde, pp_2 , au seuil de 300k€. (Montant - 300k€)

La dernière étape du modèle de distribution consiste à estimer un poids w , par minimisation de la somme des écarts au carré, telle que les primes pures inventaire soient le plus proche de la formule théorique : $w * pp_1 + (1-w) * pp_2 + f_2 * 300\,000$.

Par la même formule, mais avec les paramètres de pp_1 et pp_2 à l'ultime, nous obtenons la prime pure ultime.

Les principales critiques formulées au sujet de ce modèle sont les suivantes :

- Les résultats manquent de transparence par rapport aux évolutions de l'inventaire,
- Le modèle projette des montants sans distinction de la partie rente. Celle-ci contient une part d'actualisation à des taux variables selon les inventaires.
- La simulation de trajectoires stochastiques est peu satisfaisante. En effet, à ce stade, le modèle ne fournit « que » des montants individuels à l'ultime. Or nous souhaitons :
 - disposer de trajectoires de flux futurs.
 - Tenir compte des règlements déjà effectués sur les dossiers afin de réduire la volatilité des survenances anciennes (en référence à celle des survenances récentes).

4.1.4 Données disponibles

Les données que nous exploitons dans le cadre du modèle proposé sont issues de trois sources.

La première est une base individuelle de sinistres, figée chaque fin d'année. Elle stocke des informations concernant l'ensemble des sinistres et garanties ouverts ou en cours dans l'année de gestion. Les informations exploitées sont les paiements cumulés depuis la déclaration du sinistre ainsi que la provision gestionnaire associée. Elle nous permet notamment de délimiter le périmètre des sinistres graves avec la profondeur maximale (survenance 1995).

Pour les sinistres corporels graves, cette source mêle, sans distinction :

- Les capitaux constitutifs des rentes servies dans les paiements cumulés,
- Les capitaux constitutifs des rentes potentielles ainsi qu'une provision pour surinflation dans la provision gestionnaire.

La seconde source de données est une extraction des outils de gestion des rentes non vie alimentés par le service « Corporels Importants ». Cette extraction concerne aussi bien les rentes en service que les rentes potentielles. Toutefois, les informations disponibles pour ces deux types de provisions sont différentes. La base des rentes potentielles est la plus fine avec notamment un détail des postes tierce personne (nombre d'heures et coûts horaires)

La dernière source est une base de détail des règlements, de l'ensemble des écritures comptables par garanties. Elle nous permet de recenser les écritures d'alimentation des comptes de Provisions Mathématiques lors de passage en rentes.

Les données utilisées par la suite sont arrêtées au 31/12/2009.

Le schéma ci-dessous fait le parallèle entre l'évaluation du dossier et les sources de données.

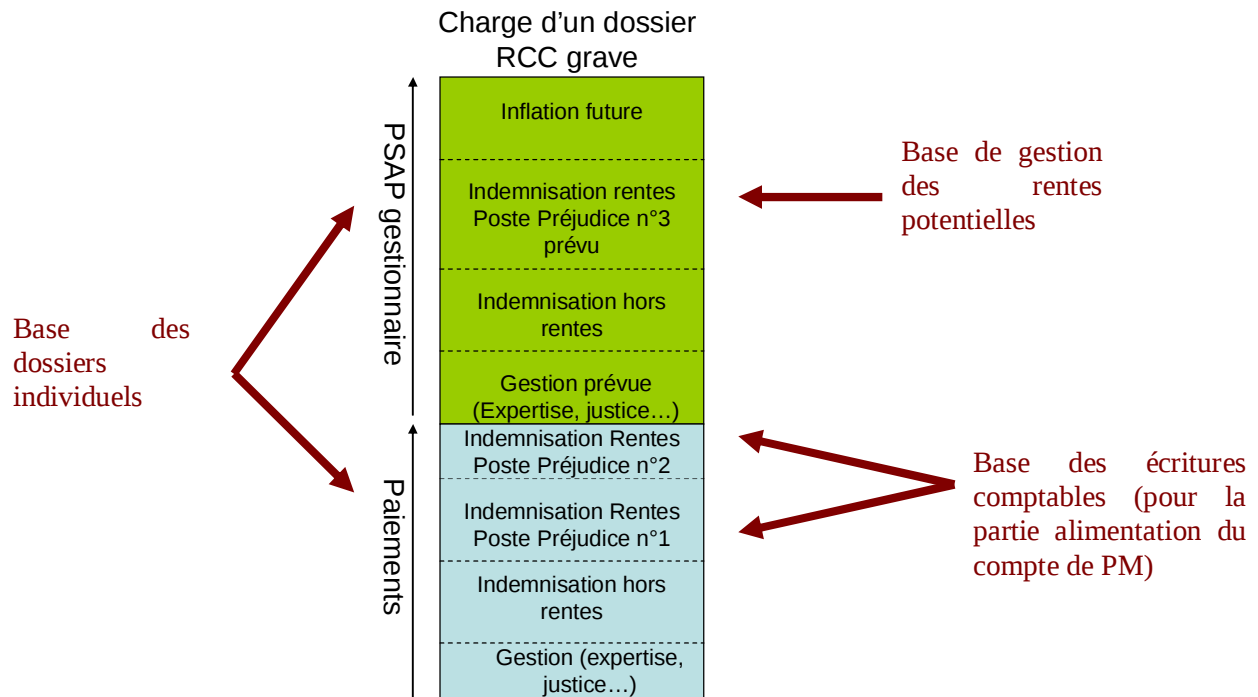


Figure 36 : Composition de la charge d'un dossier RC Corporel grave

Nous notons toutefois que :

- les paiements sinistres « Indemnisation Rentes » servent uniquement à alimenter le compte de PM. Il s'agit d'un flux « intra société » puisque les paiements envers la victime seront des arrérages du montant du capital constitutif de la rente.
- dans la base de gestion des rentes potentielles, certains postes sont provisionnés en rentes alors qu'ils pourront donner lieu finalement à un règlement en capital (préjudice économique principalement).

4.2 Description du modèle

4.2.1 Principes

Ce paragraphe pose les principes de la modélisation retenue. Une étude plus théorique lui fera suite.

Afin d'obtenir une évaluation précise de nos engagements bruts ou cédés, nous proposons, car nous en avons la capacité, de distinguer les postes de préjudices contenant des rentes, des autres postes. En effet, les capitaux constitutifs des rentes sont évalués avec escompte de produits financiers futurs et sont différents des autres postes :

Ils doivent faire l'objet d'une nouvelle évaluation de manière à actualiser les arrérages non pas à taux fixe mais avec une courbe des taux comme demandé dans le cadre de solvabilité 2.
Ils font souvent l'objet de clauses spécifiques dans les traités de réassurance.
Leur durée est très longue car ils sont liés à la durée de vie de la victime.

Le graphique ci-après permet d'illustrer un intérêt de cette segmentation. Tous dossiers graves confondus, il représente pour un dossier en moyenne les paiements cumulés depuis la déclaration :

- Tous flux confondus (courbe supérieure) permettant de bâtir une référence à 100% au bout de 15 ans,
- Tous flux hors capitaux constitutifs des rentes (courbe inférieure).

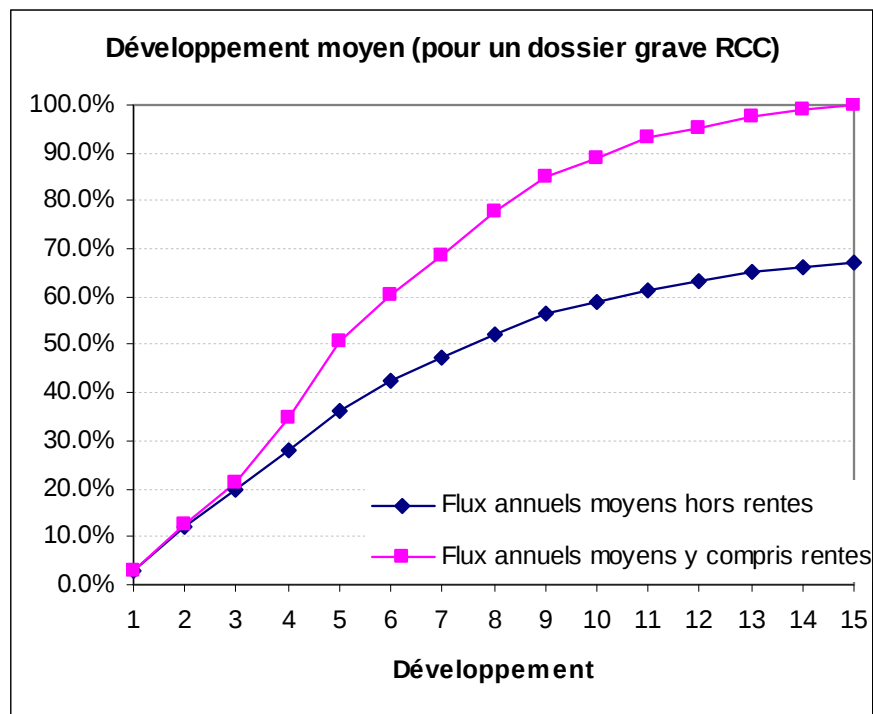


Figure 37 : Développement moyen d'un dossier grave

On observe sur la courbe supérieure (tous flux confondus), un décrochement à partir de la 4^{ème} année. La courbe inférieure montre que :

- Avec un recul de 15 ans, la partie hors rente du dossier compte pour 2/3 du montant total,
- La trajectoire des paiements hors rentes est plus lisse autour de la 4^{ème} année.

Le ratio de 2/3 du dossier pour la partie hors rente est bien sûr fonction de notre politique d'indemnisation. En effet, si nous réglons de plus en plus sous forme de capital, ce ratio tendra vers 100%. A l'inverse, si l'indemnisation en rentes est favorisée, ce ratio baissera. Toutefois, il ne tendra pas vers 0 mais vers un niveau représentant le maximum de préjudices indemnifiables sous forme de rentes.

Concrètement, nous exploiterons les extractions des outils de gestion pour projeter et simuler les flux futurs d'arrérages. Ils donnent pour chaque rente en service ou potentielles l :

- Dates de naissance des créditrentiers,
- Les rattachements possibles (sociétés, sinistres...)
- Les arrérages,
- Les postes de préjudice (Tierce Personne, Préjudice Economique, Frais futurs..),
- Les natures (Droit commun, Sécurité Sociale..),
- Les nombres d'heures et coûts horaires dans le cas d'un besoin potentiel de tierce personne.

Nous devons identifier des lois de vieillissement des rentes potentielles en concertation avec la gestion. Parmi elles, nous pouvons à ce stade envisager :

- Des postes qui seront finalement réglés sous forme de capitaux,
- Des biais tels ceux inclus dans les consignes de gestion ou des aléas portés par le principe d'évaluation ...

Pour la partie hors rentes, nous souhaitons disposer d'un modèle projetant les flux futurs pour chacun de dossiers.

Cependant, nous ne travaillons pas directement sur chaque règlement car ceux-ci seraient trop nombreux et demanderaient des ressources trop importantes. Nous les agrégeons à une maille annuelle de manière à travailler sur ce que nous appellerons par la suite des paiements de l'exercice par dossiers. Ainsi, ces derniers sont définis par la somme des règlements effectués dans l'année civile.

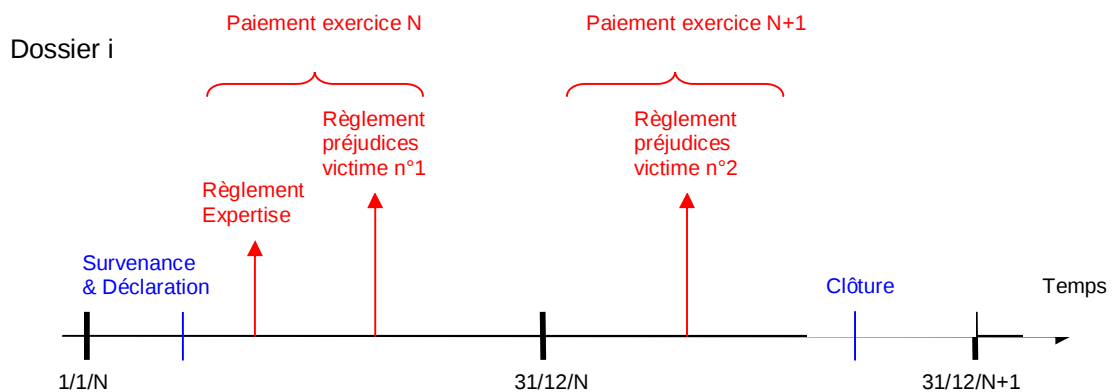


Figure 38 : Schéma des paiements exercice.

Nous anticipons la problématique des paiements exercice négatifs possibles avec une approche globale nette de recours. En effet, les lois usuelles de distribution sont souvent définies sur des supports strictement positifs (Lognormal, Gamma, Weibull...). Cela rend difficile l'approche directe en nette de recours.

Ainsi, nous préconisons de travailler distinctement sur du brut et sur du recours. Nous essaierons d'appliquer la même méthodologie bien que le poids du recours soit marginal par rapport au brut dans notre cas (moins de 2% du brut).

Ainsi, la modélisation du brut et l'estimation des paramètres seront détaillées pour le brut. Les estimations du recours seront données en annexe. Les résultats de la section 4.5 Résultats sont en nets de recours.

Cette méthodologie, pour la partie hors rente, repose sur une articulation entre :

- La probabilité d'avoir un paiement exercice nul pour chaque année de développement du dossier,
- Une distribution des paiements exercice non nuls.

Voici ci-après un exemple sur le sinistre n°17 (pris au hasard parmi ceux possédant des rentes en service et des régularisations comptables). Tout d'abord voici les données concernant ce sinistre de la survenance 1995.

Numéro de dossier	Survénance	Développement	Paielements exercice bruts hors rentes	Recours exercice	Capitaux constitutifs Exercice
[a]	[b]	[c]	[d]	[e]	[f]
17	1995	1	1 336.7	0.0	0.0
17	1995	2	258 127.7	152.4	0.0
17	1995	3	118 150.3	0.0	0.0
17	1995	4	0.0	0.0	0.0
17	1995	5	264 970.1	0.0	159 121.2
17	1995	6	3 715.9	0.0	-13 892.2
17	1995	7	3 847.0	0.0	35 775.3
17	1995	8	0.0	0.0	0.0
17	1995	9	0.0	0.0	0.0
17	1995	10	0.0	0.0	0.0
17	1995	11	0.0	0.0	0.0
17	1995	12	38 360.0	0.0	0.0
17	1995	13	374 412.2	0.0	0.0
17	1995	14	61 640.9	0.0	0.0
17	1995	15	135 833.8	0.0	0.0
TOTAL DES REGLEMENTS PAR POSTE			1 260 394.6	152.5	181 004.2
TOTAL DES REGLEMENTS			1 441 246.3		

Figure 39 : Exemple chiffré du sinistre 17

Les paiements totaux nets de recours enregistrés au 31/12/2009 sur ce dossier sont de 1 441 246€. Ils sont composés de :

- paiements bruts, hors capitaux constitutifs de rentes pour 1 260 395€. Les paiements exercice pour les années de développement 4, 8, 9, 10, 11 sont nulles.
- Paiements de recours positifs uniquement en 2^{ème} année,
- Paiements de capitaux constitutifs visant à alimenter le compte de PM pour 181 004€. A noter une annulation de capitaux en année 6 suite au décès d'une victime.

En parallèle, les fichiers des rentes potentielles à fin 2009 nous indiquent pour ce dossier :

- Une rente potentielle de 57 844€ annuel, de catégorie Placement (placement dans un organisme hospitalier) dont la date de passage en rente est estimée être dans un an,
- Deux rentes encore servies d'arrérages 5 561€ et 1 283€ annuels de catégories respectives Tierce Personne et Frais futurs.

La modélisation hors rentes ne fait référence qu'aux colonnes [d] et [e] de l'exemple. Ces dernières permettront d'estimer :

- Le taux de paiement exercice nul par année de développement,
- Les lois de distributions des paiements exercice non nuls, pour le brut et le recours.

Voici une justification visuelle de cette approche, sur les flux bruts uniquement

Nous commençons tout d'abord par donner des éléments sur la volumétrie des paiements exercice de notre échantillon.

Développement	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	TOTAL
Nombre total	981	969	902	818	728	650	583	514	443	358	273	217	166	117	48	7767
dont nuls	390	76	136	178	235	300	328	342	309	273	215	175	139	100	43	3239
dont non nuls	591	893	766	640	493	350	255	172	134	85	58	42	27	17	5	4528

Figure 40 : Nombre de paiements exercice par année de développement

Il apparaît ainsi que les développements 14 et 15 des paiements exercice non nuls ne sont pas significatifs du fait de leur faible volume.

Représentés sans aucun retraitement, les paiements exercice (nuls et non nuls), en moyenne pour un sinistre, ont le profil suivant.

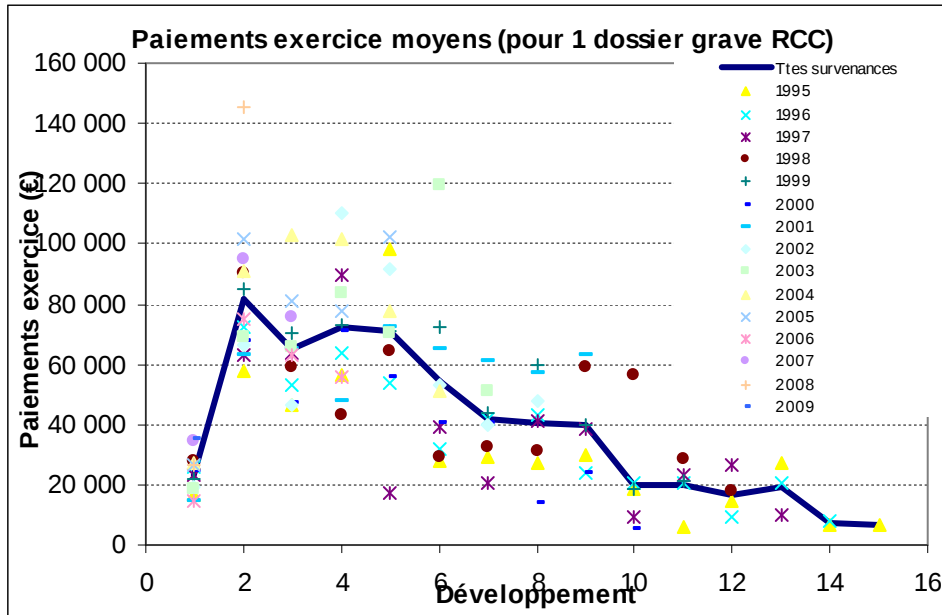


Figure 41 : Paiements exercice moyens y compris paiements exercice nuls (en brut).

La moyenne est basse en 1^{ère} année (20k€) et augmente fortement en deuxième (80k€ en moyenne, et jusqu'à 150k€ pour la survenance 2008). De la 2^{ème} à la 15^{ème}, le niveau moyen est en quasi stricte décroissance jusqu'à 5k€.

Ce profil décroissant est fortement lié au poids des paiements exercice nuls. Ainsi, hors paiements exercice nuls, le profil devient le suivant.

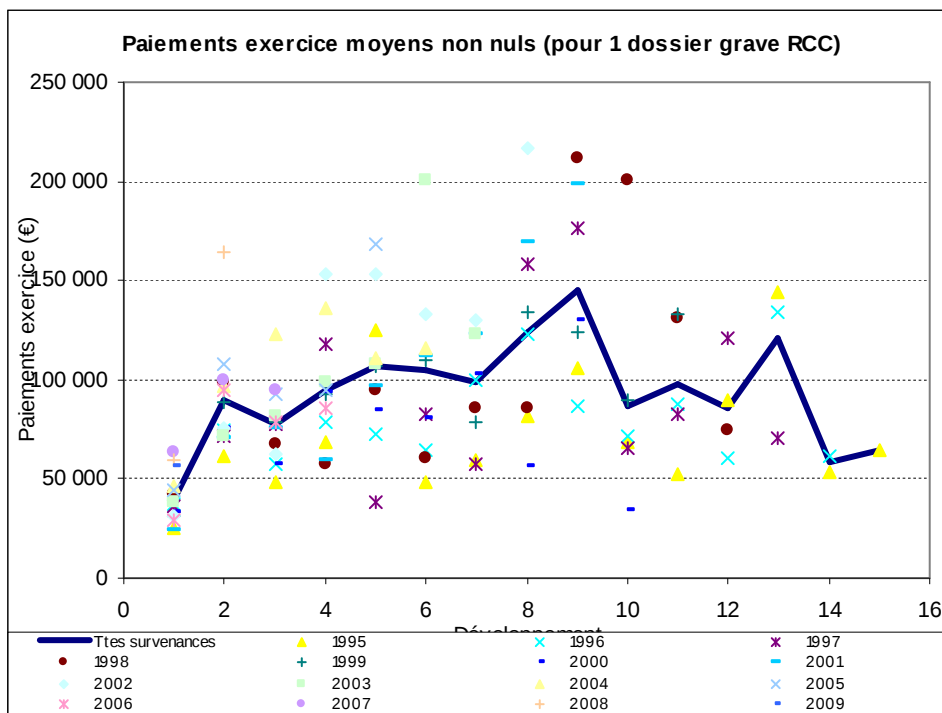


Figure 42 : Paiements exercice non nuls moyens (en brut).

Nous observons alors que le profil de la courbe est bien plus stable autour d'une valeur moyenne de 100k€ et dans un intervalle de 20k€ à 220k€ :

- Le niveau moyen de 1^{ère} année est concentré autour d'une valeur basse comparativement aux autres années.
- Le niveau moyen de 9^{ème} année est élevé avec des valeurs basses plus élevées que les autres développements.

4.2.2 Théorie

Nous reprenons sous format plus théorique cette modélisation.

4.2.2.1 Brefs rappels sur les outils manipulés

Pour pouvoir modéliser les éléments décrits au paragraphe suivant, nous allons ci-après :

- rappeler les caractéristiques de certaines distributions,
- reprendre le principe des deux grands tests d'adéquation,
- décrire la notion d'espérance résiduelle.

Ils s'inspirent de l'ouvrage de C.Partrat et JL Besson sur la modélisation et la simulation en assurance non vie¹⁹.

4.2.2.1.1 Distribution Gamma $\gamma(\alpha, \beta)$

Les paramètres de forme α et d'échelle β sont strictement positifs. Cette distribution appartient à la famille des distributions exponentielles.

Sa densité est définie par : $f_{\gamma}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ pour tout $x > 0$.

Ainsi pour $\alpha=1$, on obtient la loi exponentielle $\varepsilon(\beta)$.

On obtient la fonction de répartition suivante : $F_{\gamma}(x) = \Gamma(\alpha, \beta x) = F_{\chi^2_{2\alpha}}(2\beta x)$

L'espérance de la loi Gamma $\gamma(\alpha, \beta)$ est : $E_{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$.

La variance a pour expression : $V_{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta^2}$

A noter que cette loi est semi additive, c'est-à-dire que la somme de deux variables aléatoires $C1$ et $C2$ indépendantes, distribuées respectivement selon des lois $\gamma(\alpha1, \beta)$ et $\gamma(\alpha2, \beta)$, suit la loi $\gamma(\alpha1+ \alpha2, \beta)$.

Nous terminons par préciser que l'estimation des paramètres selon la méthode du maximum de vraisemblance aboutit à une résolution numérique d'un système d'équations.

Seule la méthode des moments offre la possibilité d'exprimer analytiquement des estimateurs.

4.2.2.1.2 Distribution Weibull $W(\alpha, \beta)$

Les paramètres de forme α et d'échelle β sont strictement positifs. Cette distribution appartient aussi à la famille des distributions exponentielles.

Sa densité est définie par : $f_w(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$ pour tout $x > 0$.

Ainsi pour $\alpha=1$, on obtient la loi exponentielle $\varepsilon(1/\beta)$. De plus, C est distribuée selon la loi $W(\alpha, \beta)$ si et seulement si $\left(\frac{C}{\beta}\right)^\alpha$ suit la loi exponentielle $\varepsilon(1)$.

On obtient la fonction de répartition suivante : $F_w(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$

L'espérance de la loi Weibull $W(\alpha, \beta)$ est : $E_w = \beta \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$.

La variance a pour expression : $V_w = \beta \left[\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \right]$

Nous précisons ici que la méthode des moments comme la méthode du maximum de vraisemblance ne conduisent pas à une expression analytique des estimateurs des moments.

4.2.2.1.3 Distribution Lognormale $LN(\mu, \sigma^2)$

Le paramètre μ appartient aux réels, et σ est strictement positif.

La loi lognormale est une transformée exponentielle de la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$:

C suit une loi $LN(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si $\ln C$ suit la loi $N(\mu, \sigma^2)$.

Sa densité est définie par : $f_{LN}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}$ pour tout $x > 0$.

On obtient la fonction de répartition suivante : $F_{LN}(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

L'espérance de la loi Lognormale $LN(\mu, \sigma^2)$ est : $E_{LN} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

La variance a pour expression : $V_{LN} = e^{2\mu + 2\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

Nous reprenons ci-après les estimations des paramètres selon la méthode du maximum de vraisemblance. Les $\{X_i\}_{i=1}^n$ sont les n observations de l'échantillon.

$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}{n}$, estimateur sans biais et convergent de μ .

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(X_i) - \hat{\mu}}{n}$, estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais et convergent pour σ^2 .

4.2.2.1.4 Tests Statistiques d'adéquation

Les tests statistiques d'adéquation ont pour objectif de mesurer la qualité d'ajustement du modèle aux données. Elle est fréquemment mesurée par la P-Value d'un test d'adéquation aux observations de la famille de lois examinées. Il ne s'agit pas des seules méthodes permettant d'aboutir à ce résultat. Nous citons également des méthodes exploratoires et graphiques : Fonction de répartition, QQ Plot / PP Plot, Espérance résiduelle.

Nous nous limitons ici à deux tests basés sur les fonctions de répartition empiriques (EDF) :

- Kolmogorov-Smirnov,
- Anderson-Darling : adapté à l'assurance non vie car surpondère la queue de distribution.

Nous reprenons notre n-échantillon $\{X_i\}_{i=1}^n$ de la variable aléatoire continue X de fonction de répartition F et F_n sa fonction de répartition empirique :

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{X_i \in]0; x[}}{n}, x \geq 0$$

Le lemme de Glivenko-Cantelli montre une forte proximité probable asymptotique entre F_n et F :

$$\sup_{x \geq 0} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ps} 0.$$

Les écarts à une fonction de répartition entièrement spécifiée F_0 sont les suivants :

- Kolmogorov-Smirnov : $D_n(G) = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$,
- Anderson-Darling : $Q_n(G) = n \int_0^{+\infty} [F_n(x) - F_0(x)]^2 w[F_0(x)] dF_0(x)$, où $w(x) = \frac{1}{x(1-x)}$.

Il reste alors à évaluer le test $H_0 : F=F_0$ contre $H_1 : F \neq F_0$ au travers de la région critique au seuil α :

- $W_\alpha = \{(X_i) : D_n > D_n(1-\alpha)\}$ pour Kolmogorov-Smirnov, où $D_n(1-\alpha)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la distribution, indépendante de F_0 , D_n sous H_0 .
- $W_\alpha = \{(X_i) : T_n > T_n(1-\alpha)\}$ pour Anderson-Darling, où $T_n(1-\alpha)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la distribution, indépendante de F_0 , T_n sous H_0 .

Leur mise en œuvre nécessite bien sûr la connaissance des quantiles $D_n(1-\alpha)$ et $T_n(1-\alpha)$ selon les valeurs de n et α .

4.2.2.1.5 Espérance résiduelle

L'espérance résiduelle, où *Mean Excess* en anglais, est utilisée dans le cadre de la théorie des valeurs extrêmes. Elle permet d'étudier le comportement des queues de distribution.

Pour une variable aléatoire X, elle est définie de la manière suivante :

$$ME_X(t) = E[X - t | X > t]$$

Voici le graphique des espérances résiduelles des lois Gamma, Weibull et LogNormale.

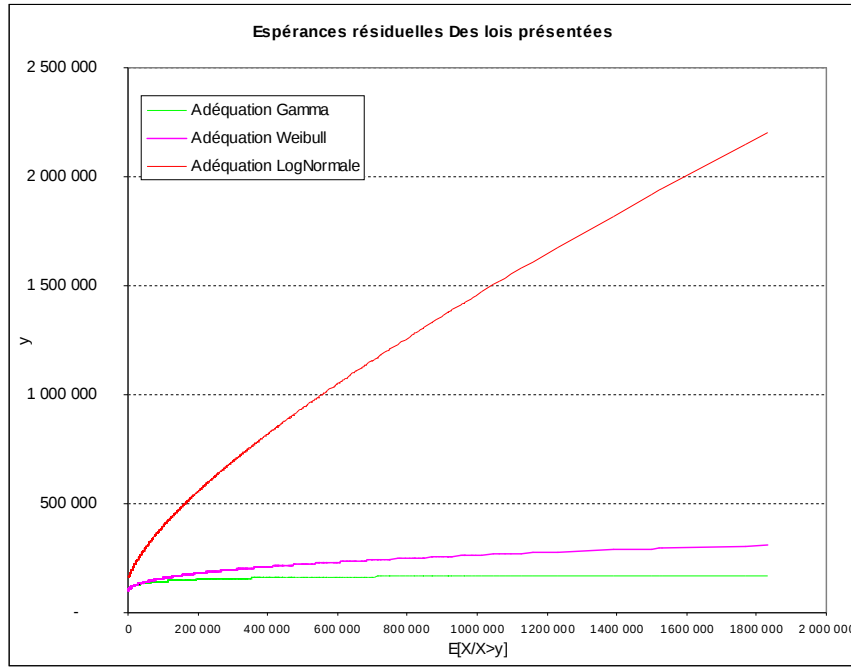


Figure 43 : Espérance résiduelle des lois Gamma, Weibull et Lognormale.

4.2.2.2 Modélisation d'un dossier

Voici une description mathématique de la modélisation retenue :

Soit S_i le montant du dossier n°i.

Nous commençons par en séparer la partie rente de la partie hors rente.

$S_i = S_i^R + S_i^{HR}$ où :

- S_i^R correspond à la partie indemnisée sous forme de rentes du $i^{\text{ème}}$ dossier (éventuellement nulle si aucun poste de préjudice n'est réglé sous forme de rentes).
- S_i^{HR} correspond à la partie hors rentes du $i^{\text{ème}}$ dossier.

Ces deux parties distinctes du dossier sont évaluées de la manière suivante :

- $S_i^{HR} = \sum_{t=1}^d 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{brut}^{+,i,t} - \sum_{t=1}^d 1_{\{F_{recours}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{recours}^{+,i,t}$ où
 - o d , est le nombre d'années maximal pour le règlement de la partie hors rentes du dossier. Nous le considérons connu.
 - o $1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}}$ et $1_{\{F_{recours}^{i,t} > \varepsilon\}}$ sont les indicatrices valorisées à 1 si le paiement exercice brut en t (respectivement recours) du $i^{\text{ème}}$ dossier est positif ($>\varepsilon$) et 0 sinon.
 - o $F_{brut}^{+,i,t}$ et $F_{recours}^{+,i,t}$ sont les variables aléatoires positives décrivant les paiements exercice bruts (respectivement recours) sachant qu'ils sont non nuls ($>\varepsilon$).

N.B. : Les paiements exercice sont considérés non nuls si ils dépassent un seuil noté ε afin de palier la précision des retraitements des données (pour la suite $\varepsilon=1\text{€}$).

- $S_i^R = 1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} v^t r_{i,j} 1_{\{T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} > t\}}$ où

- o C_i est le nombre de postes de préjudices associés au dossier i et réglés sous forme de rente. Il peut être nul dans le cas d'un dossier sans rente. Ce nombre est supposé connu.
- o $\Delta_{i,j}$ est le différé de versement de la rente.
- o $l_{i,j}$ est la durée de versement de la rente.
- o $r_{i,j}$ est égal à l'arrérage annuel du $j^{\text{ème}}$ poste de préjudice du $i^{\text{ème}}$ dossier. L'arrérage est supposé constant dans le temps (pas de revalorisation).
- o v^t est le facteur d'actualisation en t .
- o $T_{X_{i,j}}$ est une variable aléatoire de durée de survie de la $j^{\text{ème}}$ victime du $i^{\text{ème}}$ dossier, agée de $X_{i,j}$ années. Donc $1_{\{T_{X_{i,j}} > t\}}$ vaut :
 - 1 avec la probabilité $p_{X_{i,j}}(t)$ si la victime du $j^{\text{ème}}$ poste de préjudice du $i^{\text{ème}}$ dossier est en vie en t .
 - 0 avec la probabilité $1 - p_{X_{i,j}}(t)$ si la victime du $j^{\text{ème}}$ poste de préjudice du $i^{\text{ème}}$ est décédée en t .

Dans le cas du provisionnement des rentes potentielles (PSAP) :

- La durée de survie $T_{X_{i,j}}$ de la victime est aléatoire.
- Le nombre de postes de rentes C_i est aléatoire. Par simplification de la partie théorique, nous le supposons connu.
- L'arrérage $r_{i,j}$ est aléatoire (mais ne dépend pas du temps).
- Le différé $\Delta_{i,j}$ et la durée $l_{i,j}$ sont aléatoires. Par simplification de la partie théorique, nous les supposons connus.

Dans le cas du provisionnement des rentes en service (PM), seules deux sources d'aléa subsistent :

- La durée de survie $T_{X_{i,j}}$ de la victime est aléatoire.
- L'arrérage $r_{i,j}$ en cas d'aggravation situationnelle, médicale...

4.2.2.2.1 Espérance Variance de la partie hors rentes d'un dossier

Afin de simplifier les écritures ci-dessous, nous développons les formules pour la partie brute uniquement. Ainsi, nous nous retrouvons dans le cas suivant :

$$S_i^{HR} = \sum_{t=1}^d 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{brut}^{+,i,t}$$

$$E[S_i^{HR}] = E\left[\sum_{t=1}^d 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{brut}^{+,i,t}\right],$$

$$E[S_i^{HR}] = \sum_{t=1}^d \left(E[1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}}] E[F_{brut}^{+,i,t}]\right) \text{ car } 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} \text{ et } F_{brut}^{+,i,t} \text{ sont indépendants par construction.}$$

$$E[S_i^{HR}] = \sum_{t=1}^d \left((1 - P(F_{brut}^{i,t} < \varepsilon)) E[F_{brut}^{+,i,t}]\right)$$

$$Var[S_i^{HR}] = Var\left[\sum_{t=1}^d 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{brut}^{+,i,t}\right],$$

$$Var[S_i^{HR}] = \sum_{t=1}^d \left(Var\left[1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{brut}^{+,i,t}\right] \right) \text{ en supposant l'indépendance temporelle des variables } 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} \text{ et } F_{brut}^{+,i,t}.$$

$$Var[S_i^{HR}] = \sum_{t=1}^d \left(E\left[Var\left(1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{brut}^{+,i,t} / 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}}\right)\right] + Var\left[E\left(1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}} F_{brut}^{+,i,t} / 1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}}\right)\right] \right), \text{ par application de la formule de décomposition de la variance.}$$

$$Var[S_i^{HR}] = \sum_{t=1}^d \left(E\left[1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}}\right] Var[F_{brut}^{+,i,t}] + Var\left[1_{\{F_{brut}^{i,t} > \varepsilon\}}\right] E^2[F_{brut}^{+,i,t}] \right)$$

4.2.2.2.2 Espérance Variance de la partie rentes d'un dossier

$$E[S_i^R] = E\left[1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} v^t r_{i,j} 1_{\{T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} > t\}}\right] = 1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} v^t E[r_{i,j} 1_{\{T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} > t\}}],$$

$$E[S_i^R] = 1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} v^t E[r_{i,j}]_t p_{X_{i,j} + \Delta_{i,j}}$$

$$S_i^R = 1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} v^t r_{i,j} 1_{\{T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} > t\}} = 1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} r_{i,j} 1_{\{t \leq T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} < t+1\}} \sum_{k=1}^t v^k$$

$$E[(S_i^R)^2] = 1_{\{C_i > 0\}} E\left[\left(\sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} r_{i,j} 1_{\{t \leq T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} < t+1\}} \sum_{k=1}^t v^k\right)^2\right]$$

avec les $1_{\{t \leq T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} < t+1\}}$ sont disjoints deux à deux. Donc :

$$\left(\sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} 1_{\{t \leq T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} < t+1\}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{t=1}^{l_{i,j}} 1_{\{t \leq T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} < t+1\}}$$

$$E[(S_i^R)^2] = E\left[1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} r_{i,j}^2 \sum_{t=1}^{l_{i,j}} 1_{\{t \leq T_{X_{i,j}} + \Delta_{i,j} < t+1\}} \left(\sum_{k=1}^t v^k\right)^2\right]$$

$$E[(S_i^R)^2] = 1_{\{C_i > 0\}} \sum_{j=1}^{C_i} E[r_{i,j}^2] \sum_{t=1}^{l_{i,j}} \left({}_t p_{X_{i,j} + \Delta_{i,j}} - {}_{t+1} p_{X_{i,j} + \Delta_{i,j}} \right) \left(\frac{1-v^t}{1-v} \right)$$

4.2.3 Inflation

Dans notre modélisation des paiements exercice hors rentes, nous devons travailler en euros constants. Ainsi, nous allons estimer l'inflation contenue dans les paiements afin de :

- Les redresser pour pouvoir estimer les paramètres du modèle,
- Projeter l'inflation future.

Les données à redresser sont les paiements exercice non nuls hors rentes tels que représentés dans le graphique Figure 42 : Paiements exercice non nuls moyens (en brut).

Nous déroulons d'abord le redressement des données par l'inflation pour la survénance 1995.

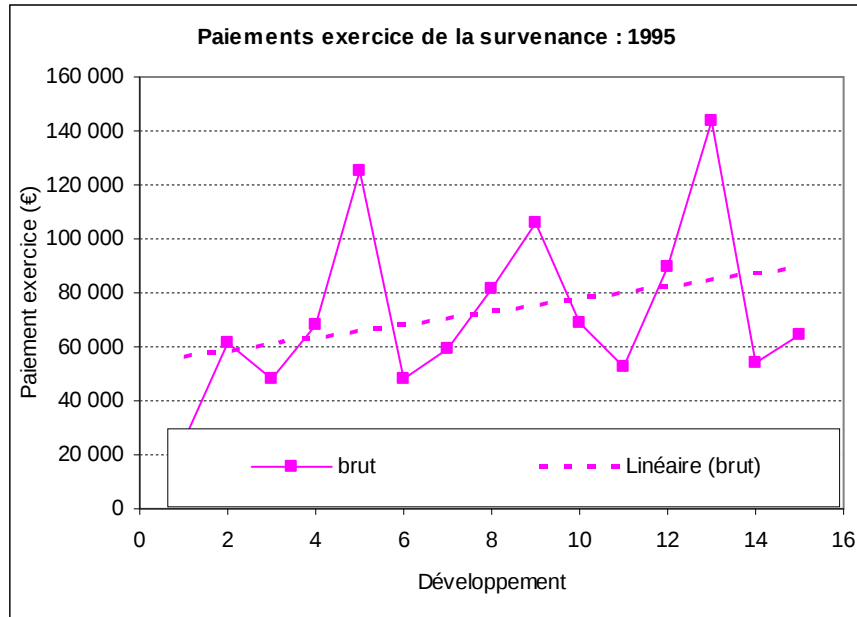


Figure 44 : Paiements exercice moyens de la survénance 1995, hors paiements exercice nuls.

Bien que certains points soient volatiles (5^{ème}, 9^{ème} et 13^{ème} développement), nous mettons en évidence une tendance linéaire à la hausse de l'ordre de 4%. Cette tendance est également observée sur les autres survénances avec des pentes entre 3,5 et 5% par an.

Nous sélectionnons donc des indices dont les évolutions sont comprises entre 3,5% et 5% par an. Ainsi, nous sélectionnons l'index dommages corporels automobiles publié par la FFSA/GEMA et utilisé pour le provisionnement hors graves (Cf 3.3.1 Redressement de l'inflation). Nous rappelons que son évolution moyenne est évaluée, dans le cadre du mémoire, à +4,3%/an.

Appliqué à nos paiements exercice, nous observons que cet indice permet de gommer la tendance à la hausse.

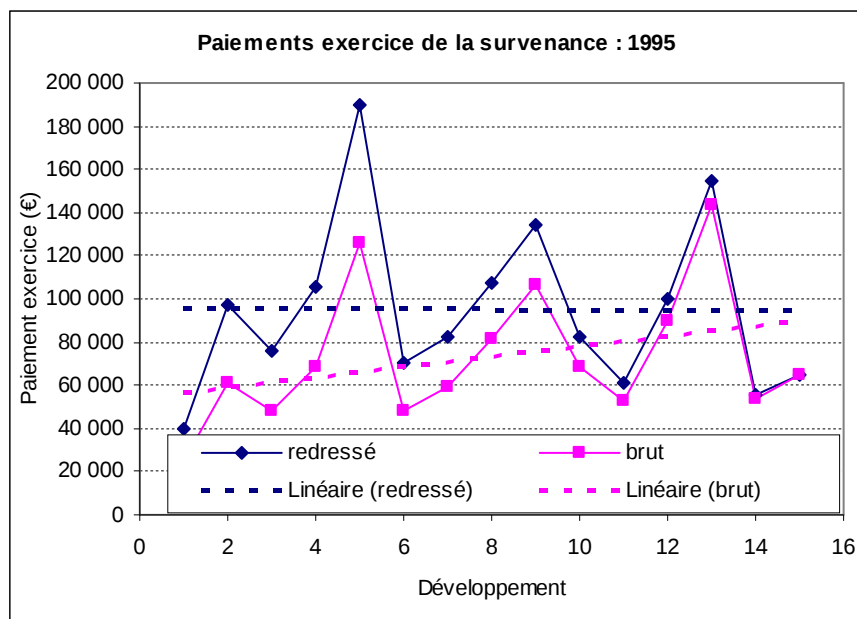


Figure 45 : Paiements exercice moyens de la survénance 1995 redressées de l'indice FFSA/GEMA des dommages corporels, hors paiements exercice nuls.

Après correction de la série par l'indice, la tendance haussière disparaît. Il s'agit ici d'une validation visuelle de traitement.

Les méthodes basées sur des tests statistiques ne sont pas concluants ici puisque notre échantillon ne possède pas de recul suffisant. Nous aurions pu par exemple mettre en œuvre un test de type « up and down », comme sur la partie hors graves.

Nous validons également cette étape de correction de l'inflation par le graphique suivant, toutes survenances confondues.

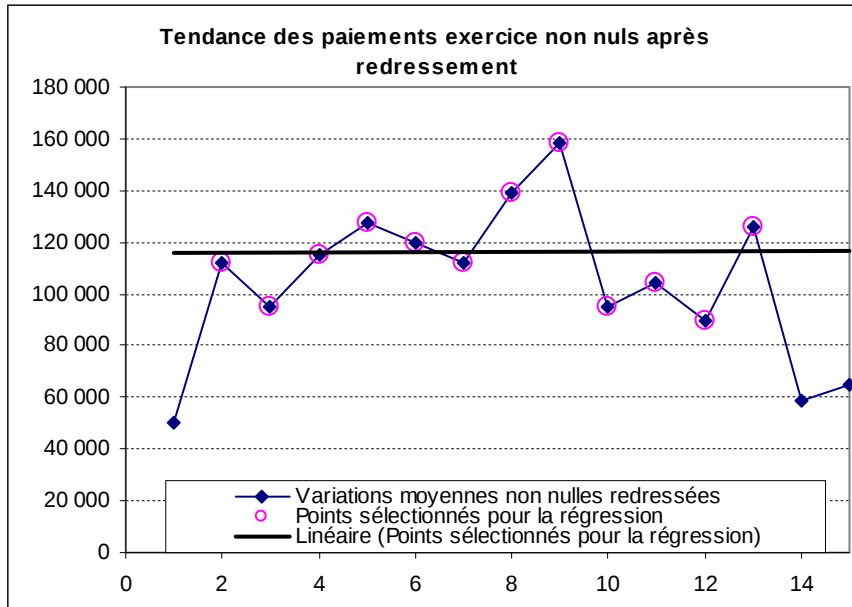


Figure 46 : Redressement de l'inflation sur les paiements exercice non nuls, toutes survenances confondues.

La tendance obtenue sur les paiements exercice non nuls, corrigés de l'inflation est nulle. Pour calculer cette tendance, nous avons exclu

- les développements pour lesquels les volumes étaient trop faibles (années 14 et 15) comparativement aux autres développements (Cf Figure 40 : Nombre de paiements exercice par année de développement),
- le développement de 1^{ère} année dont le niveau est très faible.

4.2.4 Estimation de paramètres

Le détail de l'estimation des paramètres est donné dans le corps du mémoire pour le brut uniquement. Les éléments de la partie recours sont placés en annexe.

4.2.4.1 Taux de paiements exercice nuls

Les objectifs de cette partie sont de :

- Etudier les profils de taux de paiements exercice nuls,
- Trouver une courbe d'interpolation de ces taux,
- En réaliser une extrapolation jusqu'à la durée maximale de liquidation.

Le graphique ci-après permet de visualiser le profil moyen de ce taux en fonction des années de développement.

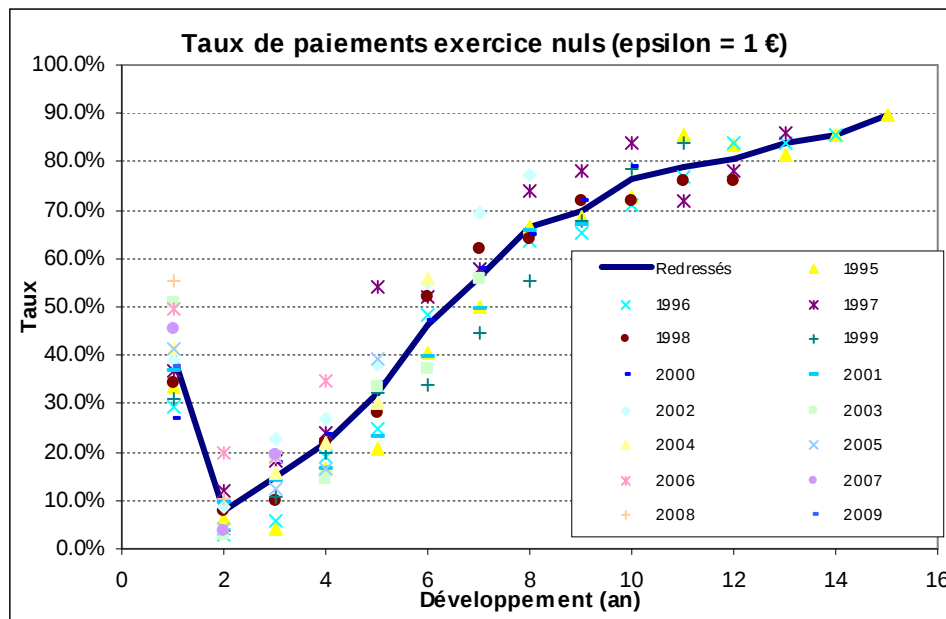


Figure 47 : Représentation des taux de paiements exercice nuls.

Ce graphique met en évidence un profil de développement relativement lisse à partir de la 2^{ème} année :

- Moins de 20% la deuxième année,
- Plus de 80% la 13^{ème} année.

La 1^{ère} année n'est pas dans cette même tendance puisque le taux est fort, compris entre 30% et 60%. Ce taux de 1^{ère} année n'est pas utile pour la projection des sinistres déclarés. En effet, le règlement de l'année 1 est connu dans ce cas. Ce taux intervient toutefois dans la projection des sinistres tardifs, que nous simulons depuis la 1^{ère} année.

Nous cherchons donc à ajuster cette courbe à partir de la 2^{ème} année avec des fonctions dont le domaine de valeurs est compris entre 0 et 1. Ainsi, nous testons certaines fonctions de répartition comme celle de la loi normale, lognormale, et gamma. Nous essayons également une fonction exponentielle de type : $1 + \beta^{\alpha^t}$, pour $\beta < 0$.

Voici graphiquement les résultats des adéquations obtenues par minimisation de la somme des carrés des écarts sur les développements de la 2^{ème} année à la 13^{ème} (les volumes des années suivantes ne sont pas suffisants).

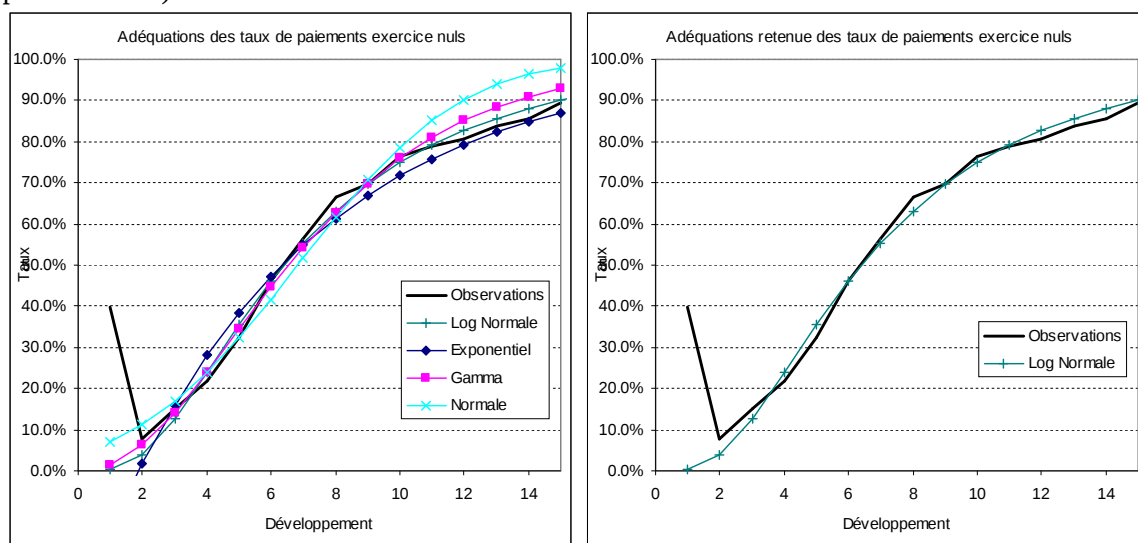


Figure 48 : Interpolation des taux de paiements exercice nuls.

Trois fonctions sont proches des taux moyens de paiements exercice nuls observés :

- La loi lognormale,
- La fonction exponentielle
- La loi Gamma.

L'erreur standard de la loi Gamma est plus faible que celle des fonctions Lognormale et exponentielle (6,3% contre 6,4% et 7,4%).

Cependant, elle apparaît éloignée sur les derniers développements (à partir du 11^{ème}). Ainsi, nous préférons la loi lognormale qui présente une erreur standard quasi identique. Elle est retenue pour la suite de l'étude.

Les écarts type des résidus avec la courbe retenue sont les suivants :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ecart type résidus	8.2%	6.0%	5.9%	6.2%	9.7%	7.8%	7.4%	7.6%	4.3%	5.3%	5.7%	4.9%	3.4%
Ecart Type / (1 - interpolation)	14%	6%	7%	8%	14%	14%	17%	23%	14%	22%	27%	25%	21%
Moyenne des années 10 à 13 :												24%	

Figure 49 : Ecarts type des résidus de l'interpolation des taux de paiements exercice nuls.

Nous extrapolons ensuite les courbes testées ci-dessus afin de déterminer les taux futurs ainsi que la durée maximale de liquidation.

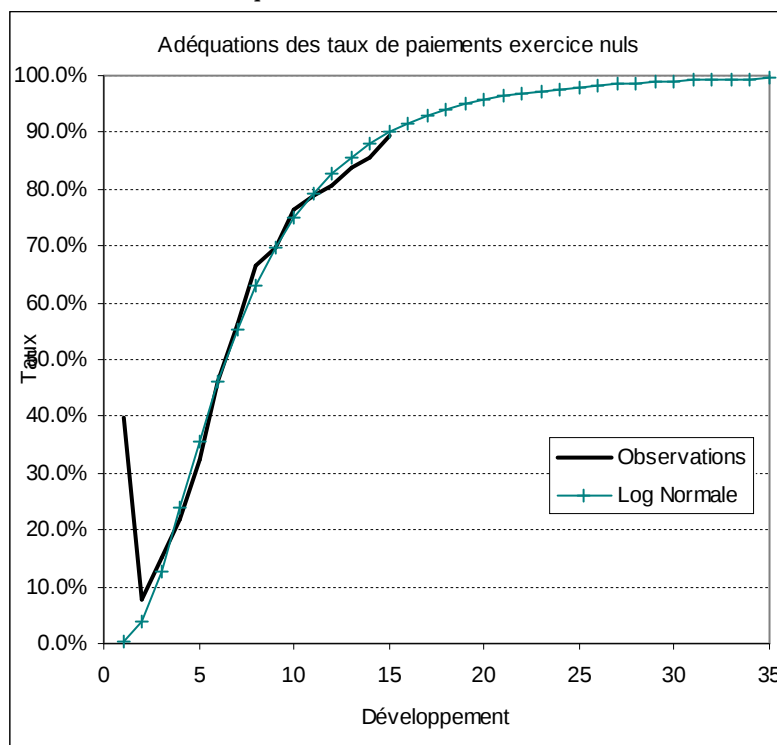


Figure 50 : Extrapolation des taux des paiements exercice nuls.

L'extrapolation des taux suivant la lognormale nous amène à envisager une durée maximale de liquidation de 35 ans (taux à 99,5%).

Remarque : Si nous avions retenu la loi Gamma, cette durée maximale aurait été revue à 25 ans (pour un même taux à 99,5%), soit 10 ans de moins.

Afin de simuler l'incertitude sur les paramètres, nous extrapolons également l'écart type au-delà de 10 ans. Pour cela, nous utilisons un pourcentage moyen du taux de flux non nuls. Ainsi, l'écart type tend vers 0 quand le taux de flux nuls tend approche 100%.

Nous évaluons ce pourcentage à 24% (Cf Figure 49 : Ecarts type des résidus de l'interpolation des taux de paiements exercice nuls.).

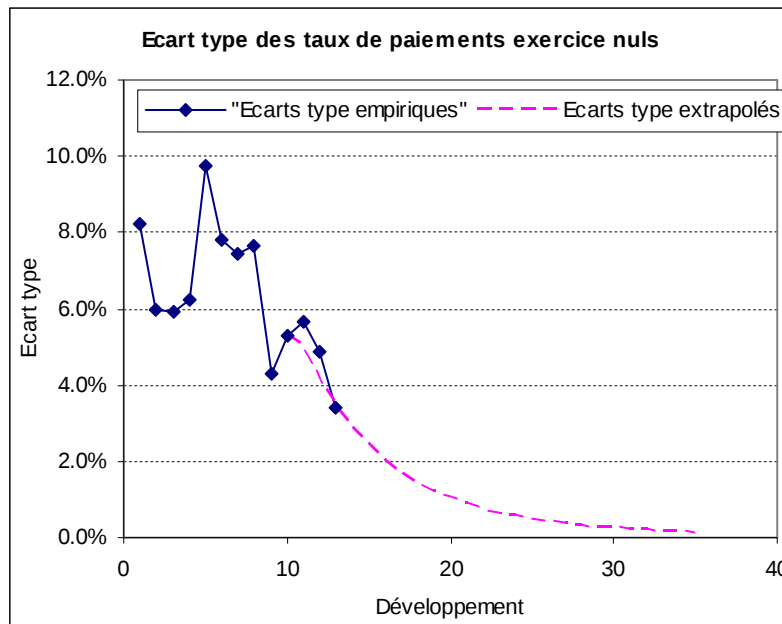


Figure 51 : Ecarts type extrapolés pour les taux de paiements exercice nuls.

4.2.4.2 Paiements exercice non nuls

L'objectif de cette partie est de trouver une ou plusieurs lois de probabilité qui permettent de reproduire les paiements exercice non nuls, redressés de l'inflation.

Tout d'abord, nous commençons par estimer les paramètres en maximisant la vraisemblance du modèle. Nous explorons deux pistes :

- Estimation distincte pour chaque année de développement,
- Estimation globale, tous développements confondus.

Pour valider ou non les adéquations, nous utilisons un certain nombre de méthodes :

- des méthodes « visuelles » à partir des graphiques confrontant les fonctions de répartition empiriques à celles théoriques des distributions précédemment citées
- ces mêmes démarches avec les PP Plots et les espérances résiduelles
- Nous exploitons également des tests statistiques (Kolmogorov Smirnov et Anderson Darling).

4.2.4.2.1 Adéquation par exercices de développement

L'estimation des paramètres est réalisée pour chaque année de développement en maximisant la vraisemblance du modèle.

Nous débutons tout d'abord avec l'examen des fonctions de répartition. Nous n'allons pas ici représenter les 15 années de développement mais uniquement nous intéresser à quelques une d'entre elles.

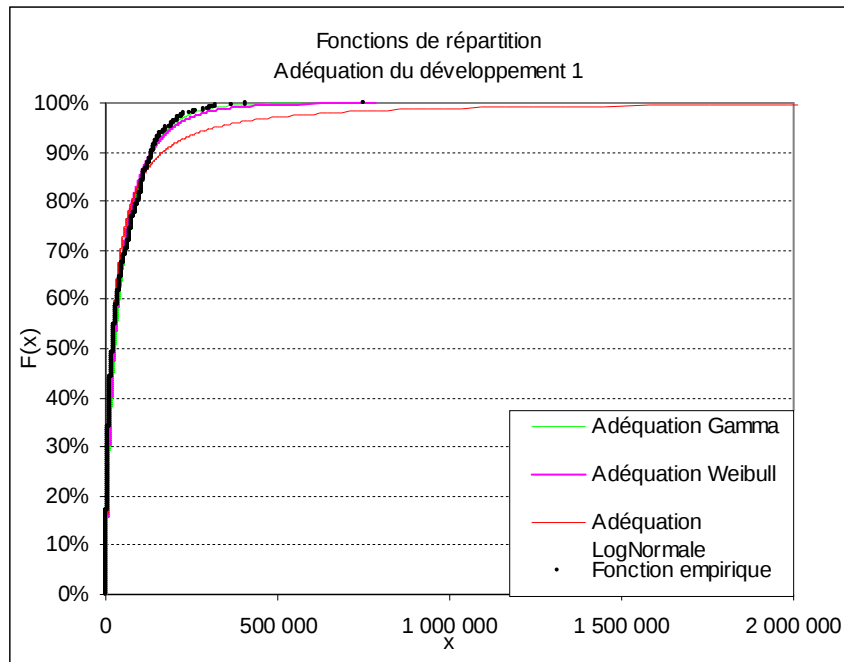


Figure 52 : Fonctions de répartition de l'adéquation de l'année de développement 1

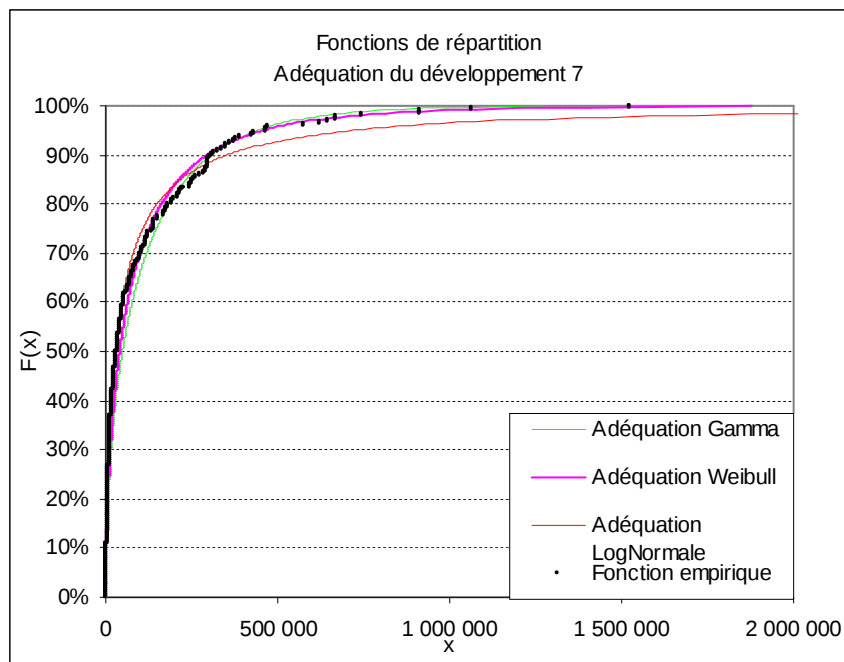


Figure 53 : Fonction de répartition de l'adéquation de l'année de développement 7

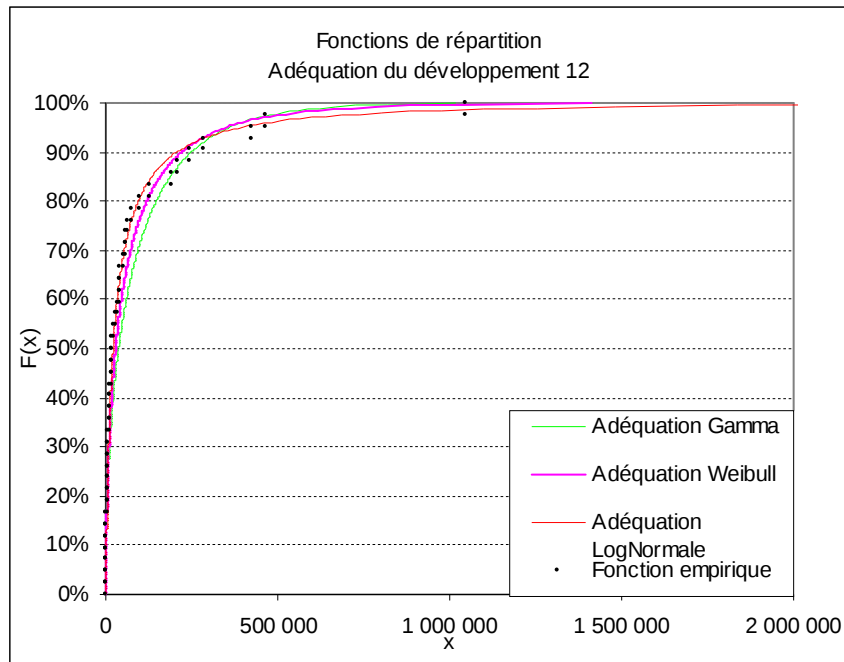


Figure 54 : Fonction de répartition de l'adéquation de l'année de développement 12

Les deux lois Weibull et Gamma donnent systématiquement de meilleurs résultats. L'écart entre ces deux lois est souvent très faible. Suivant les années de développement, l'une ou l'autre arrive en tête :

- Sur l'année de développement 1, la loi Gamma semble meilleure,
- Sur l'année de développement 7, la loi Weibull semble meilleure,
- A partir de l'année de développement 12, l'adéquation à une loi est délicate du fait notamment d'un volume plus restreint.

Voici maintenant les résultats sur les PP Plots.

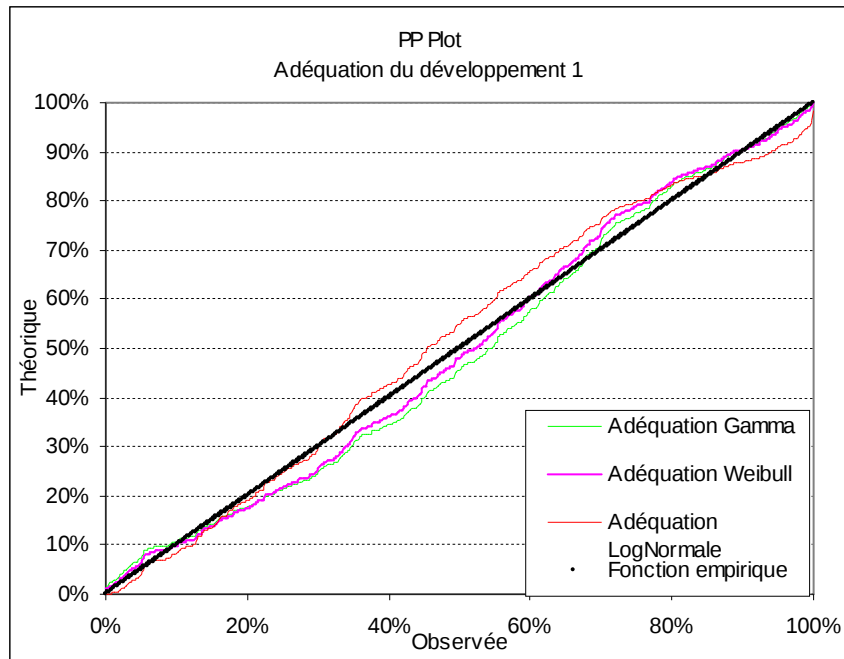


Figure 55 : PP Plot de l'adéquation de l'année de développement 1

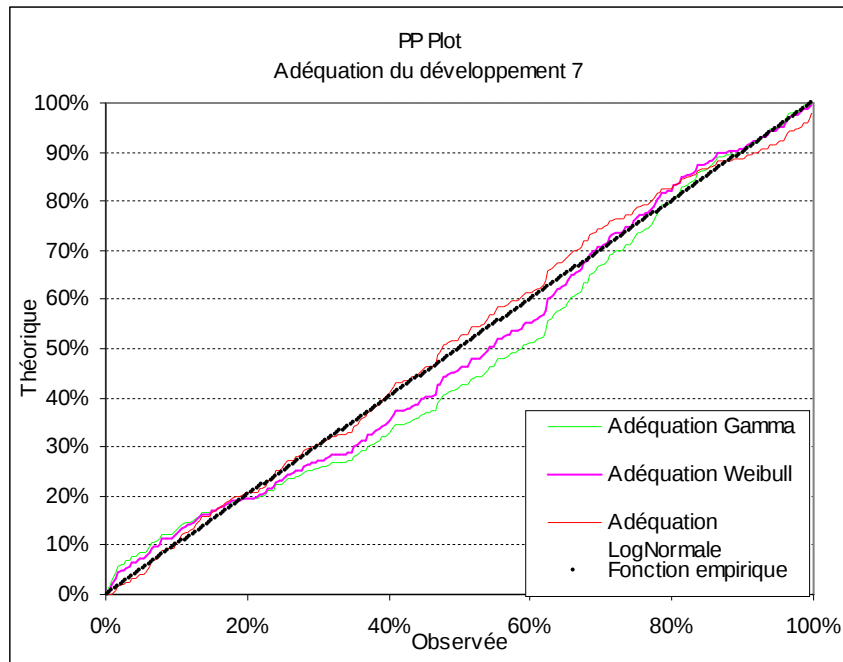


Figure 56 : PP Plot de l'adéquation de l'année de développement 7

L'étude des PP Plots révèle des résultats plus mitigés que celle des fonctions de répartition. Autour de la médiane, la loi lognormale est aussi distante de la bissectrice que les autres lois. Par contre, sur la queue de distribution la loi lognormale est systématiquement éloignée.

Nous étudions également l'espérance résiduelle à l'aide de graphiques ci-après.

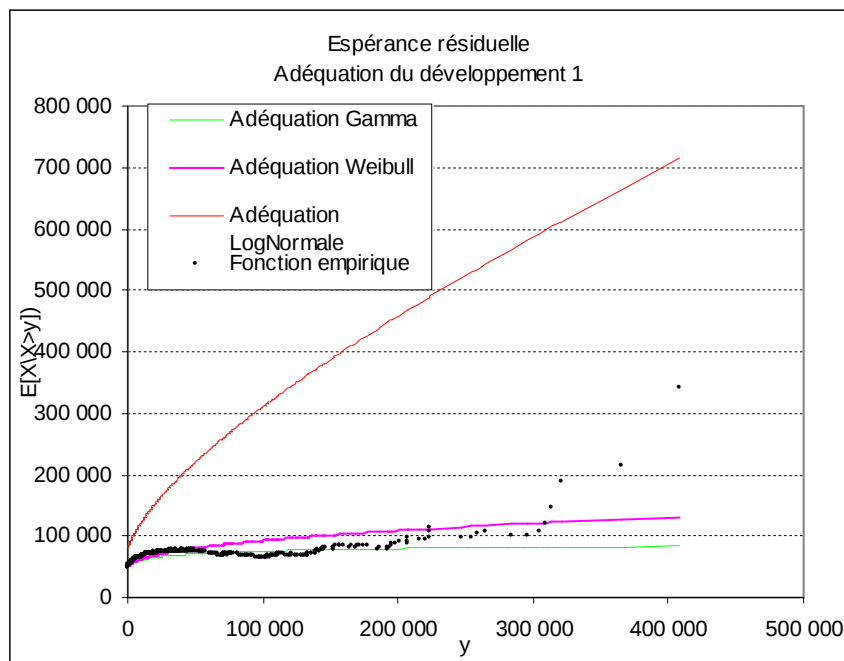


Figure 57 : Espérance résiduelle de l'adéquation de l'année de développement 1

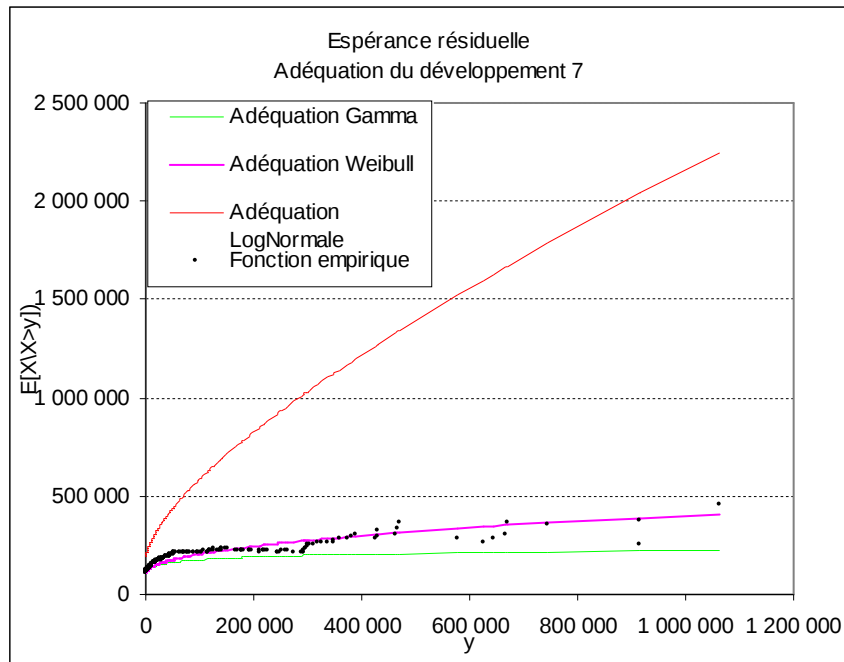


Figure 58 : Espérance résiduelle de l'adéquation de l'année de développement 7

L'espérance résiduelle est toujours en faveur des lois Weibull et Gamma. Ces graphiques écartent clairement la loi lognormale.

Enfin, nous terminons cette validation par des tests statistiques de Kolmogorov Smirnov et d'Anderson Darling. Notons que le second accorde plus d'importance à l'adéquation sur la queue de distribution.

Kolmogorov Smirnov Développement	Gamma		Weibull		LogNormale	
	Pvalue	Stat	Pvalue	Stat	Pvalue	Stat
1	1.8%	0.06	7.7%	0.05	1.1%	0.07
2	72.8%	0.02	62.8%	0.02	0.0%	0.09
3	0.3%	0.06	8.9%	0.04	17.3%	0.04
4	0.0%	0.09	3.3%	0.06	6.4%	0.05
5	0.0%	0.10	1.2%	0.07	20.3%	0.05
6	1.4%	0.08	23.6%	0.05	34.7%	0.05
7	1.7%	0.10	29.6%	0.06	55.5%	0.05
8	6.3%	0.10	58.0%	0.06	41.2%	0.07
9	14.0%	0.10	28.5%	0.08	16.0%	0.10
10	6.5%	0.14	59.7%	0.08	82.1%	0.07
11	40.5%	0.11	88.9%	0.07	83.7%	0.08
12	28.3%	0.15	74.6%	0.10	99.1%	0.06
13	64.8%	0.14	58.3%	0.14	69.4%	0.13

Figure 59 : Tableau des statistiques de Kolmogorov Smirnov par année de développement

Anderson Darling Développement	Gamma		Weibull		LogNormale	
	Pvalue	Stat	Pvalue	Stat	Pvalue	Stat
1	2.0%	3.28	4.9%	2.51	0.2%	5.16
2	70.4%	0.54	52.3%	0.74	0.0%	15.65
3	0.3%	5.11	2.9%	2.96	4.2%	2.64
4	0.1%	5.65	5.6%	2.41	2.7%	3.00
5	0.4%	4.68	9.7%	1.96	9.8%	1.95
6	2.6%	3.06	45.9%	0.83	15.4%	1.60
7	2.4%	3.13	22.6%	1.32	35.8%	1.00
8	7.5%	2.16	32.9%	1.06	47.7%	0.81
9	25.5%	1.23	39.6%	0.93	22.5%	1.32
10	3.8%	2.72	28.4%	1.16	95.0%	0.28
11	56.6%	0.69	96.5%	0.26	83.4%	0.41
12	19.3%	1.43	59.9%	0.65	99.3%	0.19
13	60.8%	0.64	60.5%	0.64	55.3%	0.71

Figure 60 : Tableau des statistiques d'Anderson Darling par année de développement

L'étude des statistiques KS et AD donnent des interprétations mitigées quant à la qualité de l'adéquation. La loi Gamma est moins fréquemment rejetée (à 5%) que les lois Weibull et Lognormale.

En synthèse, nous retenons que l'adéquation est en général de bonne qualité avec les lois Weibull et Gamma. La loi Lognormale surestime fortement la queue de distribution. Nous notons toutefois que des adéquations pour certaines années de développement sont de moindre qualité.

4.2.4.2.2 Adéquation au global

Les adéquations sont réalisées là encore par le maximum de vraisemblance sur les lois :

- Gamma,
- Weibull,
- Lognormale.

Nous commençons par les fonctions de répartition.

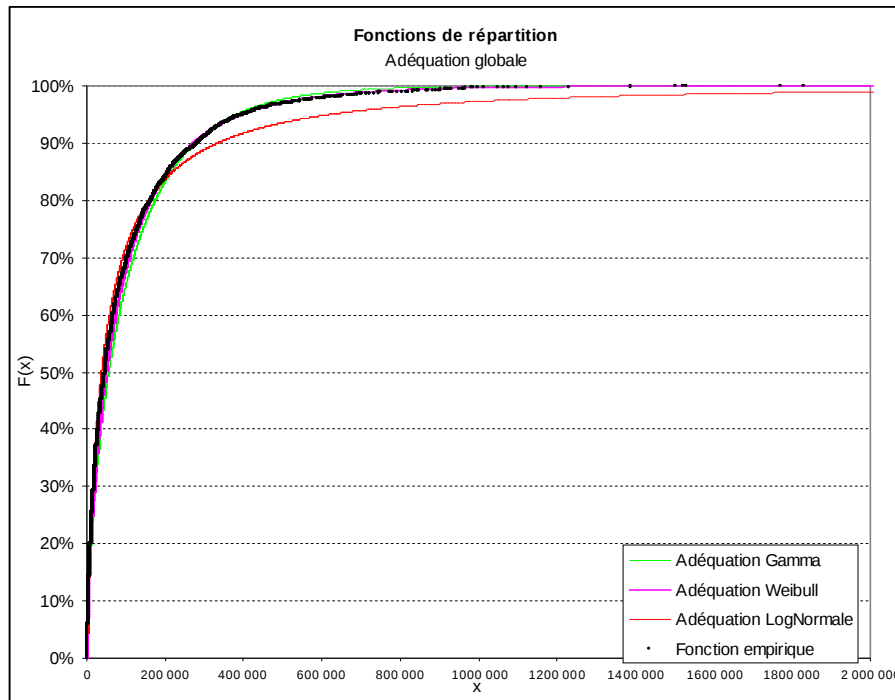


Figure 61 : Fonctions de répartition de l'adéquation globale

La loi lognormale est en fort déphasage avec l'échantillon, notamment sur la queue. En revanche, les lois Weibull et Gamma donnent de très bons résultats.

Voyons ce que donnent les PP Plots.

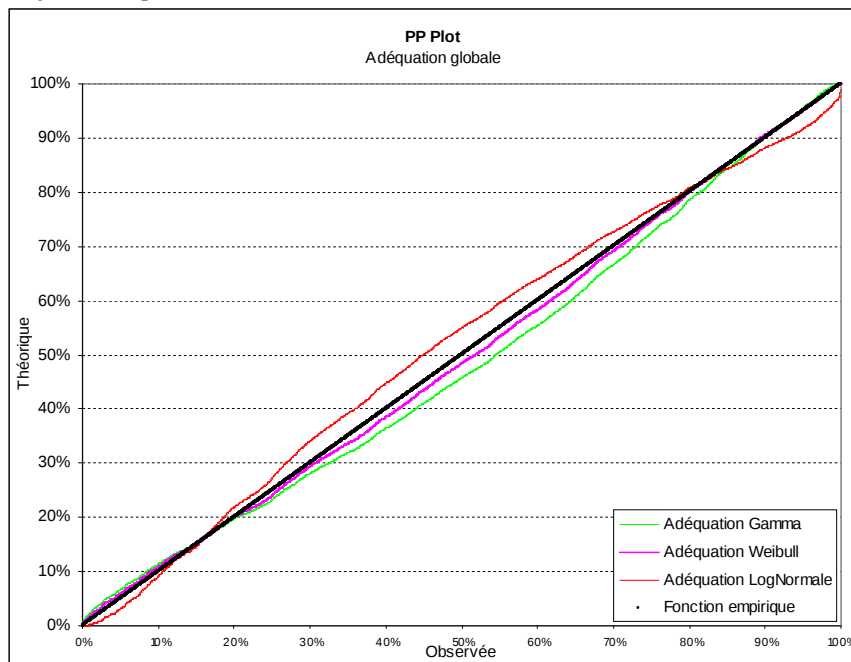


Figure 62 : PP Plot de l'adéquation globale

La loi Weibull donne les meilleurs résultats puisqu'elle s'éloigne le moins de la bissectrice. La loi Lognormale arrive en dernière position. Elle oscille assez largement autour de cette bissectrice.

Nous pouvons aussi étudier l'espérance résiduelle.

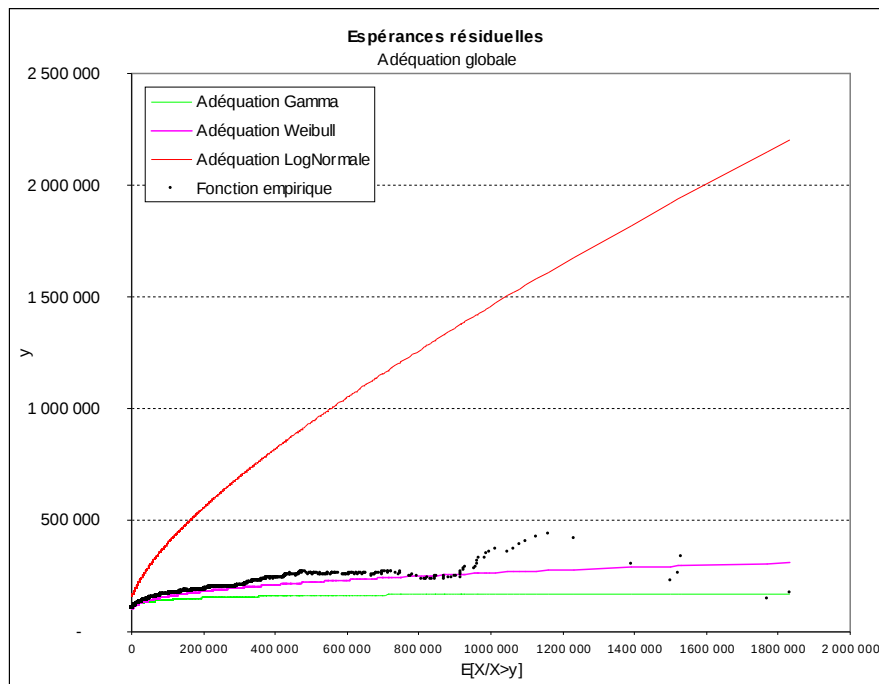


Figure 63 : Espérances résiduelles de l'adéquation globale.

La loi Lognormale est encore ici clairement écartée. La Weibull semble la plus adaptée.

Enfin, nous terminons cette validation par des tests statistiques Kolmogorov Smirnov et Anderson Darling.

	Adéquation		
	Gamma	Weibull	Lognormale
Stat AD	17.6	3.0	28.7
PValue AD	1.38E-07	2.73E-02	1.33E-07
Stat KS	0.048	0.020	0.053
PValue KS	1.70E-09	5.74E-02	1.33E-11

Figure 64 : Tests statistiques sur l'adéquation globale

Les statistiques calculées via les tests amènent à des P Value très faibles. Ceci s'explique par le volume important de données. Une alternative à la constitution de classes, serait de constituer des sous échantillons plus adaptés, par tirage aléatoire dans l'échantillon initial.

De l'ensemble de ces éléments d'analyse, nous retenons que l'adéquation est meilleure avec Weibull. La loi Gamma donne des résultats assez proches. En revanche, la loi Lognormale surestime fortement la queue de distribution.

Nous retenons donc la loi Weibull pour la suite de notre étude.

Loi Weibull	<u>p1</u>	<u>p2</u>
Paramètres	0.70	82 413.3
Erreur Standard	0.0080	1 842.1

Figure 65 : Paramètres Weibull des paiements exercice non nuls.

4.2.4.2.3 Arbitrage entre l'adéquation par exercices de développement et l'adéquation globale

Nous allons désormais étudier la sensibilité à l'utilisation de paramètres spécifiques à un exercice de développement par rapport à des paramètres globaux.

Pour cela, nous allons développer en moyenne théorique un sinistre grave hors rentes jusqu'à sa 13^{ème} année. On utilise alors les paramètres estimés jusqu'ici dans l'étude à savoir :

- Les taux de paiements exercice nuls,
- Les distributions de paiements exercice non nuls estimées soit globalement (Weibull), soit par exercice de développement (Weibull).

Echantillon			Modélisation par exercice de développement						Modélisation au global					
Paielements exercice		Paielements cumulés moyens	alpha	beta	Paielements exercice		Paielements cumulés moyens	alpha	beta	Paielements exercice		Paielements cumulés moyens		
1	30 251	30 251	1	0.68	38772	30 372	30 372	1	0.70	82413	62 708	62 708	640 267	
2	103 048	133 299	2	0.93	107710	103 011	133 383	2	0.70	82413	96 047	158 755	577 559	
3	81 012	214 312	3	0.83	84969	80 272	213 655	3	0.70	82413	88 930	247 685	481 512	
4	87 821	302 133	4	0.71	90592	86 602	300 257	4	0.70	82413	79 663	327 348	392 583	
5	84 423	386 556	5	0.68	96860	83 337	383 594	5	0.70	82413	69 117	396 465	312 919	
6	67 167	453 723	6	0.62	80972	65 638	449 231	6	0.70	82413	58 274	454 739	243 803	
7	51 612	505 335	7	0.59	72212	50 724	499 955	7	0.70	82413	47 952	502 692	185 528	
8	51 765	557 100	8	0.62	95026	51 118	551 073	8	0.70	82413	38 680	541 371	137 576	
9	46 711	603 811	9	0.59	105409	47 612	598 685	9	0.70	82413	30 706	572 077	98 896	
10	21 925	625 736	10	0.57	54187	19 989	618 673	10	0.70	82413	24 072	596 149	68 190	
11	18 733	644 469	11	0.59	67255	18 502	637 175	11	0.70	82413	18 688	614 837	44 119	
12	12 437	656 906	12	0.58	52107	11 419	648 594	12	0.70	82413	14 399	629 236	25 431	
13	13 356	670 262	13	0.56	80848	14 268	662 862	13	0.70	82413	11 031	640 267	11 031	
							-1.1%							

- Pour les années suivantes, les paiements exercice obtenus par adéquation globale sont plus faibles que celles obtenues par adéquation selon les années de développement (Développements 4,5 et 9).

Ainsi, en vision cumulée, la courbe de l'adéquation globale est plus élevée en 1^{ère} année. Puis les deux courbes convergent vers la 6^{ème} ou 7^{ème} année avant que la courbe de l'adéquation globale passe en dessous de celle par année de développement.

Cependant, l'adéquation globale présente un certain nombre d'avantages liés à sa simplicité :

- Elle ne nécessite qu'une seule loi de distribution (2 paramètres à estimer dans notre cas), là où l'adéquation par années de développement en requiert autant que d'années de développement ($2 \times 13 : 26$ avec le regroupement des 3 dernières). Il se peut en outre que pour certaines années un type de loi convienne mieux (Weibull par exemple), alors que pour d'autres, il en s'agira d'un deuxième (Gamma par exemple).
- L'adéquation globale semble plus robuste aux vues des différentes adéquations :
 - Au global, l'adéquation est très concluante,
 - Il existe des exercices de développement pour lesquels l'adéquation n'est pas bonne.

Nous retenons l'adéquation globale pour la suite du mémoire.

Cependant, nous précisons que nous pouvons aussi envisager une solution intermédiaire : en partant de l'adéquation globale, on peut utiliser des paramètres spécifiques aux développements 4,5 et 9.

4.2.4.3 Passage en rentes servies

Ce paragraphe vise à décrire la manière dont nous modélisons le vieillissement des rentes potentielles, jusqu'à leur passage en rente servie.

Nous signalons que nous avons réalisé une étude pragmatique visant à matérialiser les effets liés à la gestion afin de calibrer un modèle à partir de l'outil de gestion actuel. Un nouvel outil de gestion nous permettra de faire évoluer largement ce point. Il repose sur une base de données historisée des évaluations des gestionnaires. Nous ne pourrons l'exploiter qu'en 2011.

Nous distinguons dans le modèle 4 grands types de rentes :

- Les rentes de Tierce Personne : Intervention d'une personne pour aider la victime à son domicile, un certain nombre de jours par an, un certain nombre d'heures par jour et à un certain coût ;
- Les rentes de Pertes de Gains Professionnels Futurs : Prise en charge par l'assureur de la perte de revenus liée à l'accident et de toute incidence professionnelle sur les revenus ;
- Les rentes de Frais Futurs : hospitalisation et traitement médical;
- Les autres postes : adaptation du véhicule, du logement, préjudices d'agrément, Déficits fonctionnels permanents...

Les gestionnaires ont la possibilité actuellement de mentionner au travers de l'outil de gestion, la certitude ou non de l'évaluation réalisée. Ainsi, toutes les rentes indiquées « non modifiables » sont conservées en l'état. Elles représentent 13% (en nombre) du portefeuille modélisé.

Les postes de Pertes de Gains Professionnels Futurs, provisionnés systématiquement sous forme de rente par le service corporel important, sont vieillis en considérant que 2 dossiers sur 3 sont réglés en capital. Dans le modèle, le règlement en capital est traduit par une suppression de la rente, puisqu'il est repris dans la projection des paiements exercice (inclus dans l'échantillon initial). Ce poste de préjudice est également provisionné par le service Corporel médian, mais jamais sous forme de rentes (encore une fois, les paiements correspondant sont simulés par le modèle de paiements exercice).

Le dernier poste de préjudice potentielle qui subit un vieillissement est celui de la tierce personne. Il s'agit du principal poste de préjudice sur lequel nous avons essayé de calibrer une courbe de vieillissement.

Pour cela, nous avons repris les 4 derniers fichiers d'inventaire (2006 à 2009) des rentes potentielles et en service. Nous avons fait correspondre 65 rentes Tierce Personne entre le fichier des rentes potentielles et celui des rentes en service. Bien que limitée, nous avons exploité cette correspondance pour tracer la courbe de distribution du rapport entre :

- Arrérage alors que la rente est servie,
- Dernier arrérage provisionné en potentiel.

Ce rapport est baptisé coefficient de vieillissement et est tracé dans le graphique ci-après.

De nos observations, ce coefficient est compris entre une baisse de quasiment 100% et une hausse de 50%.

Une justification de ce ratio est une règle prudentielle d'évaluation :

- Sans élément concret, le poste est provisionné à 100% de responsabilité,
- Avec des éléments, la rente potentielle est provisionnée avec $\frac{1}{4}$ de point de plus de responsabilité (dans la limite de 100%)

Pour modéliser ce taux, nous avons essayé de réaliser des adéquations (maximisation de la vraisemblance) à des lois de distributions classiques. La loi Weibull donne les meilleurs résultats.

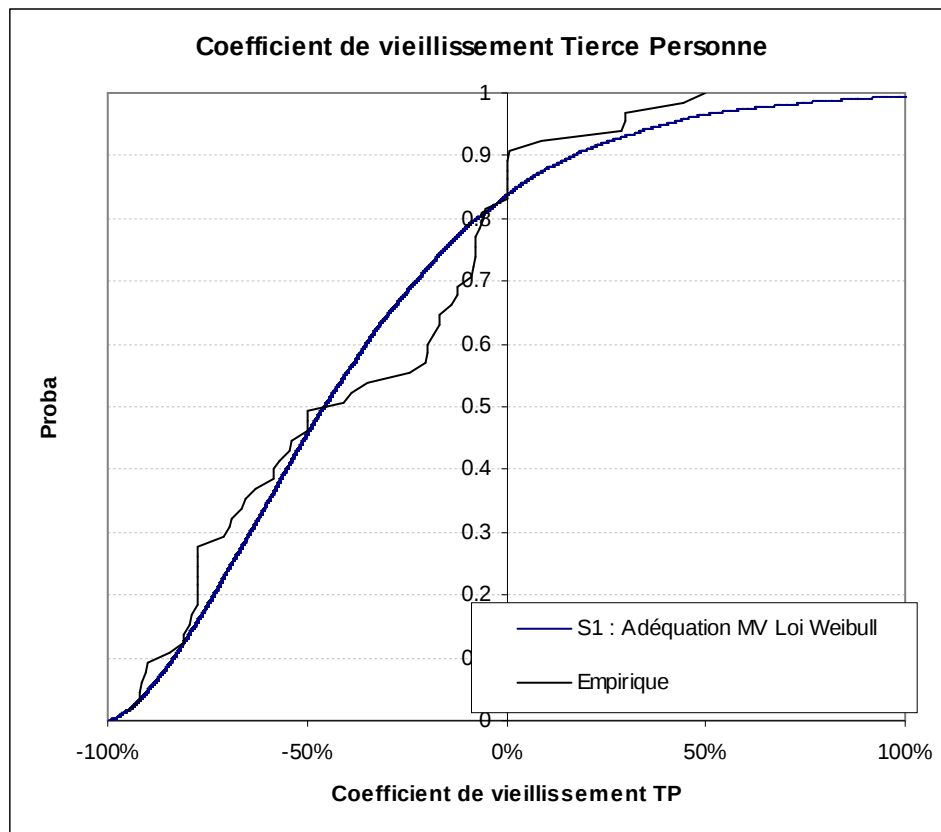


Figure 68 : Coefficient de vieillissement Tierce Personne modélisé

Le modèle Weibull initial n'est pas bon entre -50% et -10% puisqu'il sous-estime sa probabilité. C'est pourquoi nous présentons également le modèle alternatif à +25 points par rapport au modèle initial.

4.2.4.4 Nombre de sinistres tardifs

Pour la modélisation des nombres de sinistres tardifs, nous utilisons une loi de Poisson. Les paramètres sont obtenus par une projection de type Chain Ladder des fréquences des sinistres ayant dépassé 300k€.

Fréquence pour 1M de polices

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1995	13.1	20.5	22.6	21.6	23.1	23.1	22.6	23.7	25.2	25.2	24.7	25.8	25.2	25.2	25.2
1996	18.8	27.9	30.4	33.0	33.0	31.5	32.5	34.0	34.0	35.5	34.5	35.0	35.5	36.0	36.0
1997	14.2	21.3	21.3	22.2	21.7	21.7	21.3	22.2	22.7	23.2	25.1	26.0	25.1	25.3	25.3
1998	17.4	20.5	20.9	20.5	20.9	20.5	21.8	22.3	22.7	24.5	24.5	25.0	24.7	24.9	24.9
1999	17.3	26.6	27.0	27.4	29.1	27.8	25.3	24.9	24.9	25.3	24.5	25.1	24.9	25.1	25.1
2000	19.0	26.6	29.8	31.3	30.1	33.7	35.3	34.1	34.9	34.5	34.4	35.3	34.9	35.2	35.2
2001	15.0	24.2	22.7	26.5	31.1	32.3	33.5	34.2	32.7	33.4	33.3	34.2	33.8	34.1	34.1
2002	16.5	20.2	24.3	25.4	26.2	27.3	27.3	27.7	27.9	28.6	28.5	29.2	28.9	29.2	29.2
2003	9.1	17.9	18.9	20.8	23.0	22.2	25.1	25.5	25.8	26.4	26.3	27.0	26.7	26.9	26.9
2004	14.4	21.1	24.0	27.1	27.1	24.7	25.1	25.5	25.8	26.3	26.3	27.0	26.7	26.9	26.9
2005	15.7	22.3	25.0	26.6	26.0	25.9	26.4	26.8	27.1	27.7	27.6	28.3	28.0	28.3	28.3
2006	16.1	25.3	26.6	30.1	30.9	30.8	31.4	31.9	32.2	32.9	32.8	33.7	33.3	33.6	33.6
2007	16.9	23.4	24.9	27.3	28.0	28.0	28.5	28.9	29.2	29.9	29.7	30.6	30.2	30.5	30.5
2008	10.2	21.0	22.8	24.9	25.6	25.5	26.0	26.4	26.7	27.3	27.2	27.9	27.6	27.8	27.8
2009	13.7	20.4	22.2	24.3	24.9	24.9	25.3	25.7	26.0	26.6	26.5	27.2	26.9	27.1	27.1
Cadence retenue	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	
	1.49	1.09	1.09	1.03	1.00	1.02	1.02	1.01	1.02	1.00	1.03	0.99	1.01	1.00	

Figure 69 : Projection des fréquences à l'ultime

Nous obtenons le nombre moyen de tardifs par différence entre le nombre projeté à l'ultime et dernier nombre connu.

	Nb 31/12/2009	Nb ultime	Nombre moyen de Tardifs
1995	48	48	0
1996	69	69	0
1997	50	51	1
1998	50	50	0
1999	56	58	2
2000	85	87	2
2001	86	90	4
2002	72	76	4
2003	69	74	5
2004	70	77	7
2005	74	81	7
2006	95	107	12
2007	82	101	19
2008	69	92	23
2009	48	95	47

Figure 70 : Nombre moyen de sinistres tardifs

Les paramètres des lois de Poisson utilisées pour simuler le nombre de sinistres tardifs sont les nombres moyens de sinistres tardifs calculés ci-dessus.

Les sinistres tardifs ne sont pas des dossiers tardivement déclarés. Ils correspondent dans la majorité des cas à des dossiers qui ont subi une forte réévaluation à la hausse, dépassant ainsi la seuil de gravité du modèle.

Dans la simulation des paiements sur tardifs, nous supposons prudemment qu'aucun règlement sur tardifs n'a déjà eu lieu. Ainsi, nous projetons tous les paiements de ces dossiers à partir de l'année suivant le dernier inventaire.

Nous utilisons alors des paramètres identiques à ceux des sinistres déclarés pour la partie hors rentes. Nous considérons que l'ancienneté de ces sinistres tardifs est nulle (même si l'ancienneté réelle de ces dossiers n'est pas nulle car ils étaient certainement présents dans les sinistres de fréquence, hors graves).

Les rentes des dossiers tardifs sont obtenues en reprenant au hasard les rentes des dossiers connus. Nous restreignons l'échantillon aux dossiers des deux dernières survenances, pour lesquels aucune rente n'est passée en service. Pour chaque sinistre tardif, nous tirons aléatoirement un numéro de dossier déclaré (parmi les deux dernières survenances). Nous reprenons alors pour le dossier tardif toutes les caractéristiques des rentes du dossier déclaré associé. En particulier, si ce dernier ne possède pas de rente, le dossier tardif n'aura pas, pour cette itération, de rente.

4.3 Réassurance RC

4.3.1 Généralités

La RC Corporelle est une garantie dont le montant est illimité en France. Ainsi, les programmes de réassurance RC sont souvent composés de traités non proportionnels. On trouve essentiellement des traités en excédent de sinistres sous forme individuelle (XS) ou bien globale (SL).

Nous nous arrêtons ici sur la protection en XS puisqu'elle compose notre protection RC.

Basiquement, un traité en XS fait appel à deux notions :

- La priorité : seuil à partir duquel le traité est déclenché.
- La portée : Montant maximal à charge du traité par dossier.

Nous représentons schématiquement ce type de traité comme suit :

Exemple : traité 1, B XS A

... en chiffres :

A = 5M€, B = 4M€

Pour un sinistre à 12M€, le traité prendra 4M€ à sa charge s'il est placé à 100%.

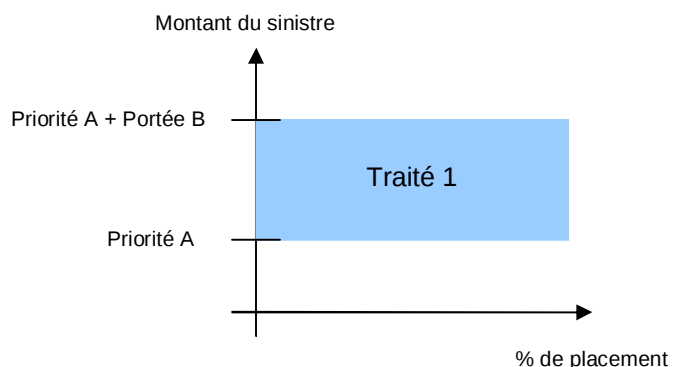


Figure 71 : Exemple de traité en XS

Le plus souvent, les traités sont négociés sur base annuelle (protection d'un exercice de survenance), mais il est possible d'obtenir des conditions pluriannuelles (ex : triennales).

Un seul traité compose rarement la protection de tout un exercice de survenance. Le plus souvent, il s'agit de superposition de tranches, avec la particularité que certaines peuvent être illimitées.

Enfin, un traité n'implique jamais (rarement) un seul réassureur mais plusieurs. En revanche, un est leader (l'apériteur) et tous ont les mêmes conditions. On dit que chaque réassureur a un certain placement du traité.

Exemple : traité 1, B XS A (suite)

*N réassureurs ont signés le traité
avec une part P_i , $i=1\dots N$*

*Suite de l'exemple chiffré du traité 1
3 réassureurs ont signé le traité :*

R1 : 50% (apéríteur)

R2 : 25%

R3 : 25%

Les 4 M€ à charge du traité sont ventilés comme suit :

R1 : 2 M€

R2 : 1 M€

R3 : 1 M€

Figure 72 : Exemple de placement du traité XS

4.3.2 Clauses importantes

La complexité de l'évaluation précise des provisions cédées n'est que peu perceptible au travers du paragraphe précédent. Ainsi, il nous semble nécessaire d'y ajouter des notions supplémentaires dont certaines sont propres au risque RC.

4.3.2.1 Franchises

Les premières notions concernent les franchises. En effet, comme en assurance directe, des franchises existent en réassurance. Il s'agit de franchises agrégées, i.e. elles s'apprécient au cumul des sinistres à charge (et non sur base individuelle) :

- Franchise agrégée limite (AAL) : montant cumulé maximum à charge du traité,
- Franchise agrégée déductible (AAD) : montant cumulé minimum avant prise en charge des cessions.

Exemple :

<i>En M€</i>	<i>Exemple de traité avec</i>
	<i>Priorité 5 M€</i>
	<i>Portée 4 M€</i>
	<i>Franchise AAD 2 M€</i>
	<i>Franchise AAL 7 M€</i>

N° Sinistre	Montant	A charge du traité avant
		AAD AAL
1	12	4
2	9	4
3	7	2
4	7	2
5	6	1
TOTAL avant AAD AAL		41 13
Après Franchise AAD de 2 M€		<i>Max (13-2; 0)</i> 11
Après Franchise AAL de 7 M€		<i>Min(11;7)</i> 7
A charge du traité au final		7

Figure 73 : Exemple de franchises AAD AAL**4.3.2.2 Clause de stabilité**

Ensuite, nous préciserons que les traités à liquidation longue comme la RC, incluent fréquemment des clauses dites de stabilité. Elles permettent aux réassureurs de se prémunir contre une dérive d'inflation. Dans les traités récents, l'indice utilisé est le GIMRP (indice du Groupe des Industries de la Métallurgie dans la Région Parisienne).

Cette clause consiste à recalculer les priorités et portées des traités en fonction de l'impact de l'indice sur les paiements.

Nous en détaillons le calcul dans le tableau ci-après.

Description du traité

Priorité	5.0	M€
Portée	4.0	M€
Clause de stabilité avec indice GIMRP et marge de 10%		

Développement du dossier évalué à 10.5M€

Année	Paiements annuels (M€)	Indice GIMRP	Paiements stabilisés (M€)	Paiements cédés pour calcul clause (M€)
1	0.0	273.9	0.0	0.0
2	0.1	280.4	0.1	0.0
3	0.4	284.6	0.4	0.0
4	0.4	288.9	0.4	0.0
5	0.2	293.3	0.2	0.0
6	0.8	297.7	0.8	0.0
7	0.0	302.1	0.0	0.0
8	0.0	306.6	0.0	0.0
9	0.0	311.2	0.0	0.0
10	0.0	315.9	0.0	0.0
11	0.0	320.7	0.0	0.0
12	0.0	325.5	0.0	0.0
13	0.0	330.3	0.0	0.0
14	0.0	335.3	0.0	0.0
15	8.6	340.3	6.9	4.6

Coefficient de stabilité pour ce dossier

Montant avant stabilité (somme des paiements annuels)	10.5	M€
Montant après stabilité (somme des paiements annuels stabilisés)	8.8	M€
Coef	119%	

Caractéristiques du traité après stabilité

Priorité	6.0	M€
Portée	4.8	M€

Sensibilité à la clause

A charge du traité sans clause de stabilité	4.0	M€
A charge du traité après clause de stabilité	2.9	M€

Figure 74 : Principe clause de stabilité

Les paiements annuels sont actualisés avec l'indice à l'origine du traité (de la survenance). A noter que dans la pratique, une évolution en deçà de 10% rend inactive la clause de stabilité (atteinte dans l'exemple en 7^{ème} année).

Ainsi, le dossier initialement évalué à 10,5M€ est comptabilisé dans le cadre du traité à 8,8M€ soit 1,7 M€ en dessous.

Concrètement le montant du dossier est conservé, mais la priorité et la portée sont augmentées de 19% (passage de 5M€ à 6M€).

4.3.2.3 Clause de rente

Enfin, le dernier point réside dans la clause de rente. Il existe plusieurs modes de fonctionnement des traités pour l'indemnisation sous forme de rente :

- Le suivi : les réassureurs remboursent la cédante, arrérage versé après arrérage.

- Le règlement en capital : les réassureurs remboursent à la cédante un capital constitutif suite à la création de la rente (PM). Ainsi, le réassureur n'est pas tenu de suivre toute la liquidation du dossier, dès lors que l'arrérage a commencé à être servi.

Dans le deuxième cas, les traités spécifient un référentiel de calcul du capital constitutif avec une table de mortalité et un taux d'actualisation. Ce référentiel correspond rarement à celui utilisé par l'assureur de la rente.

Nos traités étant sur ce 2^{ème} principe, nous avons étudié l'impact de cet écart.

Le graphique suivant donne un exemple de sensibilité au référentiel réassurance dans l'évaluation du capital constitutif. Il représente pour chaque âge, les rapports entre :

- Un euro de rente réassurance calculé avec la table TD8890 et actualisé à 3% (taux classiquement utilisé dans nos traités de réassurance),
- Un euro de rente assurance calculé avec la table TD8890 et actualisé à 2,43% (taux utilisé en provisionnement par la gestion sinistre).

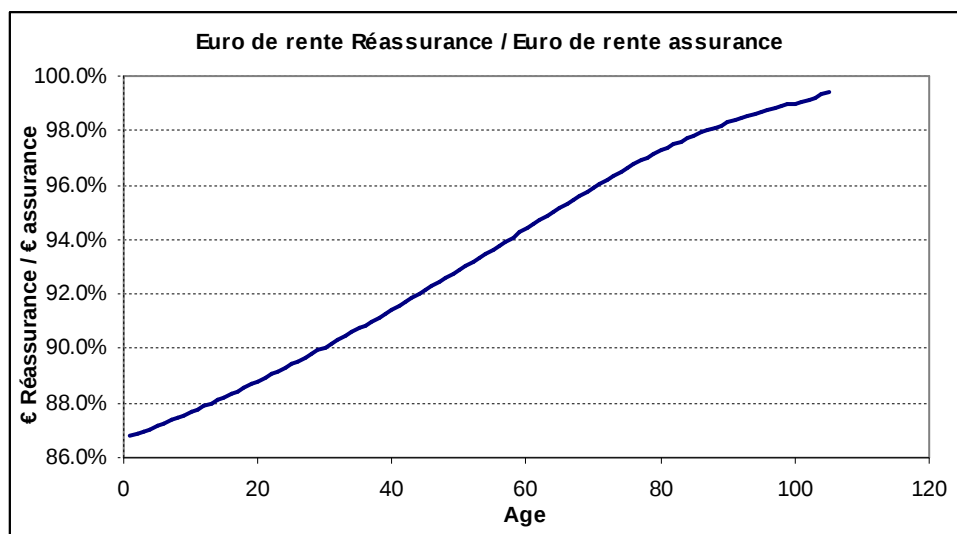


Figure 75 : Euro de rente référentiel assurance / Euro de rente référentiel assurance

La réduction de l'euro de rente réassurance est de l'ordre de 13% pour un bébé et de 8% pour un adulte de 40 ans.

Exemple d'impact de la clause de renteEvaluation assurance

Total du dossier 7.0 M€
dont 2.0 M€ hors rentes
dont 5.0 M€ pour une rente d'un adulte de 40 ans

Traité de réassurance

Priorité 5.0 M€
Portée 4.0 M€
Clause rente : TD 88-90 à 3%

Impact de la clause sur l'euro de rente: -8%

Evaluation réassurance

Total du dossier 6.6 M€
dont 2.0 M€ hors rentes
dont 4.6 M€ pour la rente (impact de la clause)

Impact relatif de la clause sur le dossier -6%

Impact de la clause

Cession sans clause 2.0 M€
Cession avec clause 1.6 M€
Impact relatif de la clause sur la cession -20%

Figure 76 : Exemple d'impact de la clause de rente sur les cessions.

4.3.3 Synthèse sur la réassurance

L'ensemble de ces précisions vise à mettre en relief que le référentiel d'évaluation réassureur est souvent différent de celui de l'assureur. Ainsi, les impacts peuvent être très forts, notamment avec des dossiers ayant des postes de préjudices évalués en rentes.

L'intérêt du modèle de provisionnement développé dans ce mémoire est que :

- Il projette des paiements annuels, donc il permet d'évaluer dynamiquement la clause de stabilité.
- Il s'appuie sur un détail des postes de préjudices des rentes et permet dès lors d'évaluer la clause de rentes.

Nous présentons dans le tableau ci-après le programme de réassurance simulé.

En M€	Tranche 1 (en M€)						Tranche 2 (en M€)					
Survénance	Priorité	Portée	Clasuse Rentes	Stabilité	AAD	AAL	Priorité	Portée	Clasuse Ren	Stabilité	AAD	AAL
1995	3.8	ill	TD8890-3%	GIMRP								
1996	3.8	ill	TD8890-3%	GIMRP								
1997	3.8	ill	TD8890-3%	GIMRP								
1998	3.8	ill	TD8890-3%	GIMRP								
1999	3.8	ill	TD8890-3%	GIMRP								
2000	3.8	ill	TD8890-3%	GIMRP								
2001	6.1	ill	TD8890-3%	GIMRP								
2002	6.1	ill	TD8890-3%	GIMRP								
2003	6.1	ill	TD8890-3%	GIMRP								
2004	6.1	ill	TD8890-3%	GIMRP								
2005	4.0	2.1	TD8890-3%	GIMRP	8.0		6.1	ill	TD8890-3%	GIMRP		
2006	4.0	2.1	TD8890-3%	GIMRP	12.0		6.1	ill	TD8890-3%	GIMRP		
2007	5.0	4.0	TD8890-3%	GIMRP	12.0		9.0	ill	TD8890-3%	GIMRP		
2008	5.0	4.0	TD8890-3%	GIMRP	12.0		9.0	ill	TD8890-3%	GIMRP		
2009	5.0	4.0	TD8890-3%	GIMRP	12.0		9.0	ill	TD8890-3%	GIMRP		

N.B. : le programme des survénances 1995 à 2000 reste à actualiser. Par défaut, il est maintenu constant.

Figure 77 : Programme de réassurance simulé.

Dans cette structure de programme, nous modélisons au maximum 2 tranches par année de survenance.

4.4 Mise en œuvre

La mise en œuvre de cette modélisation a été réalisée à l'aide du logiciel Igloo édité par la société EMB. Cet outil est largement orienté en assurance non vie mais offre suffisamment de souplesse pour permettre de gérer les techniques vie.

De manière schématique, le modèle est représenté comme suit :

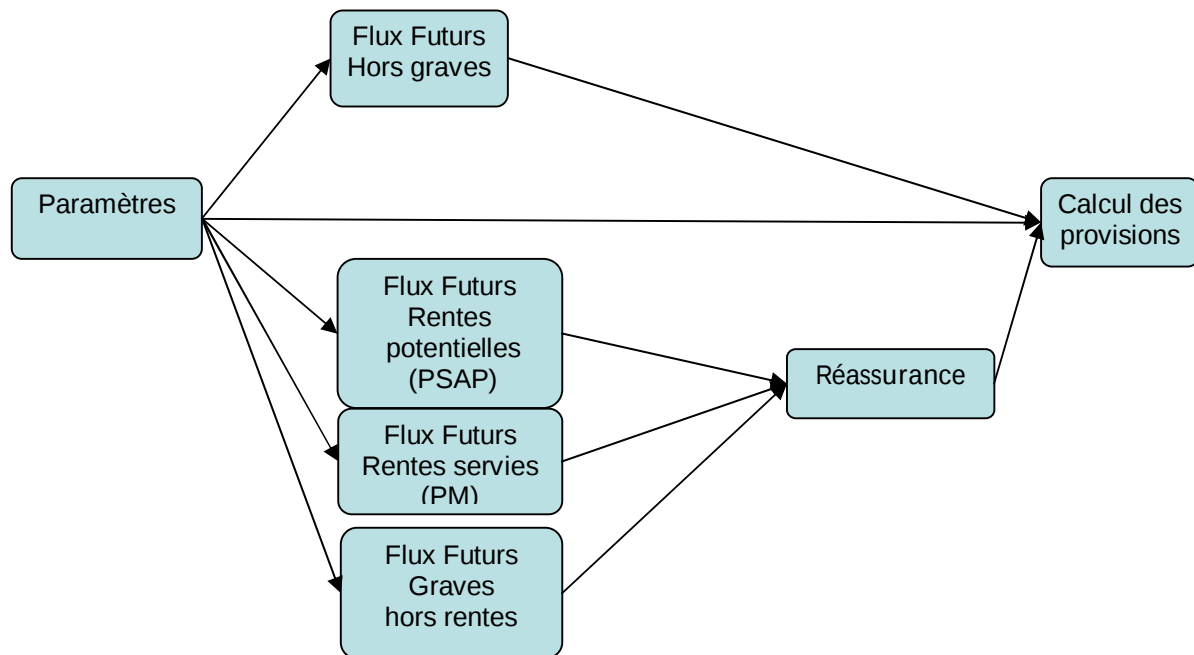


Figure 78 : Architecture du modèle

L'ensemble des paramètres et des données d'entrée est rassemblé dans un unique module. Les projections d'indices, les nombres de sinistres tardifs sont simulés à ce niveau.

Le module réassurance vise à calculer les flux de cessions en réassurance selon les traités de réassurance en vigueur.

L'intérêt d'avoir découpé le projet en sous projets réside dans la rapidité d'exécution du modèle. A titre d'information, il nous faut environ 30 minutes pour exécuter 1 000 itérations sur PC Portable « classique » (bureautique). La simulation finale avec 10 000 itérations est plus longue, environ 5h.

Le modèle développé est conforme aux concepts théoriques présentés précédemment. Nous les rappelons brièvement.

4.4.1 Paiements exercice

Une loi de Bernoulli permet de simuler la stabilité dans les règlements annuels de chaque dossier. La probabilité moyenne de paiement exercice nul est donnée par la courbe Figure 50 : Extrapolation des taux des paiements exercice nuls.

Les paiements exercice non nuls sont simulés selon des lois Weibull dont les paramètres sont constants quelque soit l'année de développement (Figure 65 : Paramètres Weibull des paiements exercice non nuls.). Une inflation déterministe de 4,3% est appliquée aux montants simulés selon l'indice de la **Figure 9 : Indice FFSA/GEMA dommages corporels** et indice INSEE de salaire de base de la santé humaine.

L'incertitude sur les paramètres est prise en compte aussi bien pour les probabilités de paiements exercice nuls que les distributions de paiements exercice non nuls. Pour chaque itération, les paramètres sont issus de tirage dans une loi normale de paramètres la valeur moyenne et l'erreur standard. L'erreur standard suit les courbes

- Figure 51 : Ecarts type extrapolés pour les taux de paiements exercice nuls. pour les taux de paiements exercice nuls.
- Figure 65 : Paramètres Weibull des paiements exercice non nuls. pour les paiements exercice non nuls.

Cette technique certes simple est efficace en terme de temps de traitement. Elle ne gère notamment pas les dépendances entre paramètres. Nous supposons en outre que les paramètres sont distribués normalement (hypothèse non vérifiée). Pour améliorer ce point, nous pourrions utiliser des techniques bayésiennes, comme l'échantillonnage de GIBBS par exemple. Le temps d'exécution et les ressources associées deviennent malheureusement trop importants.

Les paiements de 1^{ère} année des sinistres déclarés sont connus, y compris pour la dernière survenance. Par conséquent, les taux de paiements exercice nuls et les paramètres de distribution des paiements exercice non nuls de 1^{ère} année ne sont pas utilisés pour la simulation des sinistres déclarés.

En revanche, pour les sinistres tardifs, nous ne connaissons aucun règlement :

- Soit il s'agit d'un tardif réel, et aucun règlement n'a été effectué puisque le dossier n'est pas déclaré,
- Soit il s'agit d'un dossier n'ayant pas encore dépassé le seuil de gravité. Il peut y avoir eu des règlements sur ce dossier, dans la limite du seuil de gravité. Ils ne sont pas recensés au travers de l'échantillon du modèle de graves.

Nous utilisons, pour la simulation de cette 1^{ère} année de développement le taux moyen de paiements exercice nuls de 1^{ère} année (avec un écart type empirique). Les paramètres de la distribution des paiements exercice non nuls sont les mêmes.

4.4.2 Rentes

Les rentes potentielles, qui sont rattachées à leur dossier dans le modèle, reprennent les caractéristiques du portefeuille issu de la gestion.

Leur passage en rente en service est simulé avec :

- Un délai identique à celui par la gestion,
- Les règles de vieillissement décrits dans le paragraphe 4.2.4.3 Passage en rentes servies.

En version centrale, nous appliquons, sur les arrérages potentiels, une inflation de 4,3% par an jusqu'à leur transformation en rente servie, sauf pour les rentes Préjudices Economiques qui évoluent de 2% par an.

Nous précisons en outre que les rentes sont également explicitement rattachées à un crédit rentier. Nous simulons l'état de vie de chaque victime et non de chaque rente (0 en cas de décès et 1 en cas de

vie). Tant que la victime est en vie, son état futur est obtenu par tirage dans une bernoulli de paramètre p_x , la probabilité de survie annuelle de la victime.

Chacun des sinistres tardifs reprend les caractéristiques des rentes de dossiers déclarés tirés aléatoirement dans les deux dernières survenances.

4.5 Résultats

Le tableau ci-après vise à recenser toutes les simulations réalisées et d'en donner les principales caractéristiques.

n°	Nom	Objectif	Hors rentes			Rentes potentielles				Inflation avant passage en service
			Taux paiements exercice nuls	Incertitude	Inflation	Table	Viellissement TP	Viellissement PJE	Autre Poste	
1	Centrale	Simulation	Lognormale sur 35 ans	oui	4,3%	TD8890	Coef Weibull & Incertitude	1 rente sur 3 conservée	Aucun	4,3% sauf PJE à 2%/an tous les postes
2	Sans incertitude	Calibrage	Lognormale sur 35 ans	non	4,3%	TD8890	Coef Weibull moyen	1 rente sur 3 conservée	Aucun	4,3% sauf PJE à 2%/an tous les postes
3	Calibrage rentes	Calibrage	Lognormale sur 35 ans	oui	4,3%	TD8890	aucun	aucun	Aucun	Aucun
4	Stress Inflation	Sensibilité	Lognormale sur 35 ans	oui	6,3%	TD8890	Coef Weibull & incertitude	1 rente sur 3 conservée	Aucun	6,3% sauf PJE à 4%/an tous les postes
5	Stress Vieillessement Rentes	Sensibilité	Lognormale sur 35 ans	oui	4,3%	TD8890	Coef Weibull + 25 pts & incertitude	1 rente sur 3 conservée	Aucun	4,3% sauf PJE à 2%/an tous les postes
6	Stress Mortalité	Sensibilité	Lognormale sur 35 ans	oui	4,3%	TD8890 avec Qx minorés de 25%	Coef Weibull & incertitude	1 rente sur 3 conservée	Aucun	4,3% sauf PJE à 2%/an tous les postes

Figure 79 : Caractéristiques principales des versions de simulation.

La simulation n°1 est celle que nous estimons comme étant calibrée le plus justement. Nous retiendrons au final les résultats de cette simulation.

Les simulations 2 et 3 ont été réalisées dans l'objectif de vérifier la cohérence des résultats du modèle par rapport à sa définition. Il s'agit notamment :

- D'étudier l'impact de volatilité sur les paramètres.
- De s'assurer que la simulation des rentes potentielles est correcte. Sans hypothèse de vieillissement ni d'inflation, elle doit converger en moyenne vers les valeurs du portefeuille de rentes issu de la gestion.

Les simulations 4 à 6 ont pour objectif de tester la sensibilité du modèle aux principales hypothèses :

- Un test sur l'inflation future aussi bien sur la partie rentes que sur la partie hors rentes (surinflation de +2 points dans les 2 cas),
- Un test sur le vieillissement des rentes,
- Un test sur la table de mortalité (stress équivalent à celui du QIS5),

Nous aborderons successivement :

- Le calibrage du modèle,
- Les résultats en version centrale,
- La sensibilité aux hypothèses.

Nous définissons ici deux notions qui seront reprises par la suite :

- Les provisions économiques : Il s'agit d'une estimation la plus réaliste des PSAP en normes actuelles. Elles ne sont donc pas actualisées excepté pour la partie rentes potentielles (le taux utilisé est celui de la gestion à 2,43%).
- Les provisions *Best Estimate* : Il s'agit de la même estimation de provision mais réalisée dans le référentiel Solvabilité 2. Cette provision est actualisée suivant la courbe des taux définie par le CEIOPS (courbe des taux swap au 31/12/2009 avec 50% de prime d'illiquidité, Cf 2.3 Formule Standard SII selon QIS5)

4.5.1 Résultats du calibrage

Le tableau ci-après donne les principales statistiques des nombres de sinistres graves simulés.

Nombre de sinistre

M€	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Moyenne	48	69	51	50	58	87	90	76	74	77	81	107	101	92	95
Q25	48	69	50	50	57	86	89	75	72	75	79	105	98	89	90
Q40	48	69	51	50	57	86	89	75	73	76	80	106	100	91	93
Q60	48	69	51	50	58	87	90	76	74	78	82	108	102	93	97
Q75	48	69	52	50	59	88	91	77	75	79	83	109	104	95	100
Q99.5	48	69	54	50	62	91	96	82	81	85	89	117	113	105	114
CoV	0.0%	0.0%	2.0%	0.0%	2.4%	1.6%	2.2%	2.6%	3.0%	3.4%	3.3%	3.2%	4.3%	5.2%	7.2%
Coef Chgt Q99.5	0%	0%	6%	0%	7%	5%	7%	8%	9%	10%	10%	9%	12%	14%	20%

Figure 80 : Statistiques des nombres de sinistres graves simulés.

Nous retrouvons en moyenne les nombres ultimes de sinistres obtenus par *Chain Ladder*.
La volatilité des survenances 1995 à 1998 est nulle puisque nous n'attendons pas de tardifs.
La volatilité est importante sur les deux dernières survenances.

1.1.1.1 Taux de paiements exercice nuls

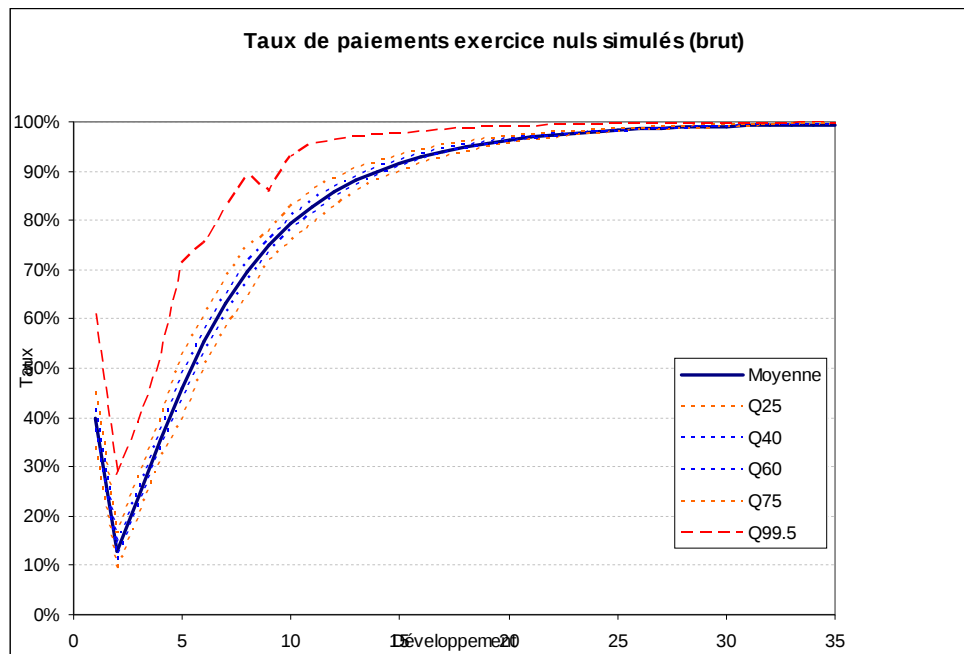


Figure 81 : Taux simulés de paiements exercice nuls (bruts)

Représenté ci-dessus, le taux de paiements exercice nuls possède les caractéristiques souhaitées :

- En moyenne, ce taux converge vers 100%,

- L'écart type associé converge vers 0 au fur et à mesure que la moyenne se rapproche de 100%.

Dans le tableau suivant, nous réalisons une simulation sans incertitude sur les paramètres pour évaluer son effet sur les provisions économiques simulées.

Impact de l'incertitude sur les paramètres

	Avec	Sans	
Moyenne	933	935	0.3%
Q25	899	905	0.7%
Q40	919	923	0.4%
Q60	943	944	0.0%
Q75	964	963	-0.2%
Q99.5	1 071	1 061	-0.9%
CoV	5.3%	4.7%	
Coef Chgt Q99.5	15%	14%	

Figure 82 : Impact de l'incertitude sur les paramètres

Sur la moyenne, la prise en compte de l'incertitude augmente de 1M€ la provision totale. Sur le quantile à 99,5%, son impact est de 22M€. Pour évaluer ce dernier impact, nous précisons que nous avons dû faire des simulations de 10 000 itérations. Les résultats obtenus avec 1 000 n'étaient pas cohérents.

4.5.1.1 Rétro simulation de la partie hors rente.

L'objectif de la « rétro simulation » est de tester la cohérence du modèle utilisé pour la partie hors rentes. Pour cela, nous générons avec le modèle des 10 000 trajectoires de développement de sinistre. Nous en sélectionnons finalement les principales statistiques (moyenne, Quantiles à 25, 40, 60 et 75%).

Nous traçons ces statistiques en les superposant avec les développements moyens des sinistres connus (raisonnement pour un sinistre par survenance en ne prenant que la partie hors rente bien entendu). Afin d'assurer la comparabilité, nous redressons de l'inflation les paiements des sinistres connus.

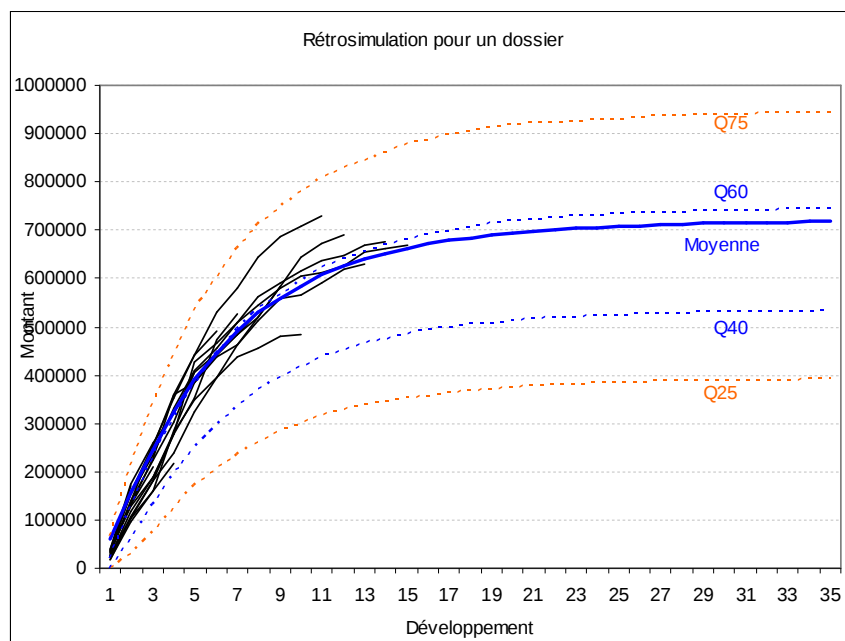


Figure 83 : Rétro simulation des paiements exercice hors rentes pour un dossier

On observe que toutes les trajectoires passées se situent dans l'intervalle formé par les quantiles à 40 et 75% des simulations.

On observe qu'en euros d'aujourd'hui, la charge moyenne ultime hors rente d'un dossier est de 725k€ et que dans 75% des cas elle est inférieure à 950k€.

Les deux trajectoires extrêmes issues de développements connus sont les survenances 1999 (la plus haute) et 2000 (la plus basse).

La rétro simulation donne des résultats concluants.

4.5.1.2 Calibrage des rentes

Pour vérifier le calibrage des rentes, nous changeons les paramètres du modèle de sorte que les rentes potentielles simulées correspondent aux rentes potentielles en portefeuille au 31/12/2009. Ainsi :

- L'inflation sur les postes rentes (Tierce Personne, Préjudice Economique et Frais Futurs) est nulle.
- L'arrérage connu au 31/12/2009 est figé.
- Toutes les rentes sont conservées.

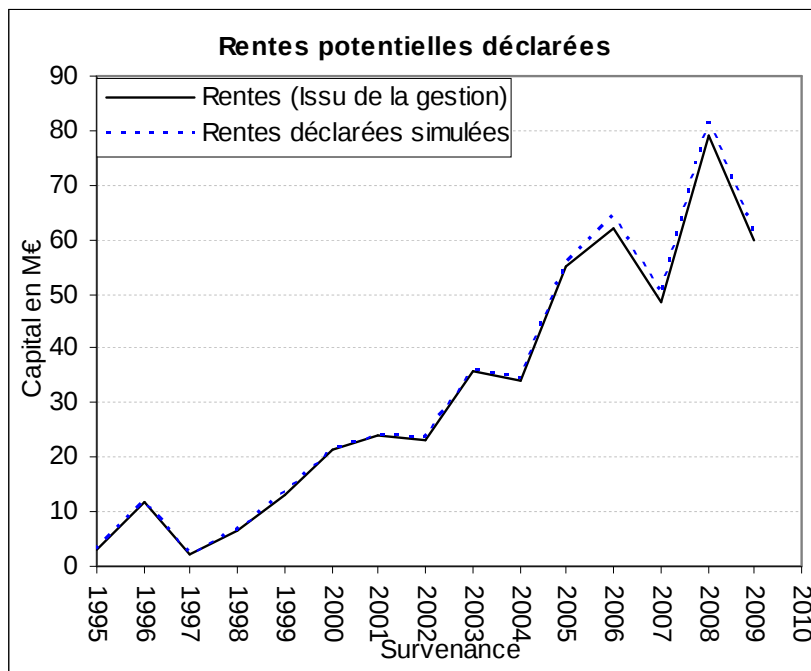


Figure 84 : Calibrage des rentes potentielles (portefeuille au 31/12/2009, hors chargement pour frais de gestion).

Les courbes représentant le calcul classique de la gestion et la moyenne des simulations sont quasiment superposées. L'écart observé en moyenne correspond aux différences :

- Dans le fractionnement des rentes. Dans le modèle, les rentes sont simulées selon un versement annuel à mi-année. Dans l'évaluation gestion, les rentes sont quasiment toutes à fractionnement mensuel (à terme échu).
- Dans le calcul de l'âge de victime. Dans le modèle, l'âge est calculé par différence entre la date de l'inventaire (2010 pour représenter le 31/12/2009) et l'année de naissance de la victime. Dans le fichier de la gestion, l'âge est calculé conformément à l'article A331-12, en tenant compte du semestre de la naissance (millésime).

Ainsi, le modèle se montre prudent par rapport à un calcul plus fin puisque les capitaux moyens simulés sont systématiquement supérieurs (+2% environ, soit 9M€).

4.5.2 Résultats en version centrale

Voici les PSAP brutes de cessions en normes actuelles issues du modèle en version centrale (Cf Figure 79 : Caractéristiques principales des versions de simulation.). Nous les comparons à celles en l'inventaire au 31/12/2009 (PSAP gestionnaires).

	av 1995	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	Total
Inventaire 31/12/2009																	
Nombre de dossiers ouverts	143	18	28	23	33	26	51	52	50	57	60	75	93	81	70	48	908
PSAP gestionnaire (M€)	69	5	13	7	15	14	41	40	43	63	56	91	122	98	147	113	938
Poids en PSAP des survenances	7%	1%	1%	1%	2%	1%	4%	4%	5%	7%	6%	10%	13%	10%	16%	12%	100%
dont rentes potentielles (M€)	35	3	12	2	6	13	22	24	23	36	34	55	63	49	81	61	519
Poids des rentes	51%	60%	90%	30%	43%	96%	52%	60%	54%	57%	61%	61%	51%	50%	55%	54%	55%
Modèle en moyenne																	
PSAP économique(M€)		5	14	8	11	20	33	41	41	55	61	81	115	118	157	172	933
Poids des survenances		1%	2%	1%	1%	2%	4%	4%	4%	6%	7%	9%	12%	13%	17%	18%	100%
Dont déclarés yc rentes (M€)		5	14	6	11	16	30	34	34	46	48	68	93	83	114	84	684
Poids des déclarés		100%	100%	75%	100%	81%	89%	82%	82%	83%	79%	84%	80%	70%	73%	49%	73%
dont rentes potentielles (M€)		3	9	2	5	11	20	23	23	34	35	48	64	60	95	97	529
Poids des rentes		46%	65%	32%	51%	57%	58%	56%	56%	61%	57%	60%	56%	51%	60%	57%	57%
Modèle en Q75																	
PSAP économique(M€)		6	16	9	12	23	37	46	45	60	67	87	123	127	168	186	964
Q75 - moyenne (M€)		1	2	1	1	3	4	4	4	5	6	6	8	9	11	14	32
Coef chargement à Q75		15%	12%	17%	12%	15%	11%	10%	10%	9%	9%	8%	7%	7%	7%	8%	3%
Modèle en Q99.5																	
PSAP économique(M€)		10	23	21	16	39	53	64	63	80	90	112	154	161	211	237	1071
Q99.5 - moyenne (M€)		4	8	14	5	19	20	23	22	25	28	31	39	43	54	65	139
Coef chargement à Q99.5		76%	58%	180%	51%	97%	60%	55%	54%	45%	46%	39%	34%	37%	35%	38%	15%

Figure 85 : Simulation en version centrale des PSAP graves en normes actuelles.

Les provisions en inventaire au 31/12/2009 sur les sinistres corporels de plus de 300k€ sont de 938M€ (hors frais de gestion, même des rentes). Hors les années antérieures à 1995, ces provisions sont réduites de 70M€, soit 868M€. Elles sont constituées pour moitié de capitaux constitutifs de rentes potentielles, sauf pour 1996 et 1999 (90% et 95% de rentes potentielles resp.).

Sur le périmètre débutant à 1995, le modèle prévoit en moyenne une provision de 933M€, y compris tardifs.

Sur les seuls sinistres déclarés, cette provision est évaluée en moyenne par le modèle à 684M€, soit 185M€ en dessous de la gestion. Ce sur provisionnement est d'autant plus important que la survenance est récente.

Les tardifs représentent moins de 30% de la provision exceptée pour la dernière survenance pour laquelle ils en représentent 50%.

Le poids des capitaux constitutifs des rentes potentielles est identique dans le modèle (en moyenne) et à l'inventaire (55%). D'un côté, sur les rentes des dossiers déclarés, le modèle :

- Applique une inflation différenciée par poste de préjudice,
- Assure une vision à l'ultime des arrérages notamment sur le préjudice économique (souvent versé en capital) et la tierce personne (en général surprovisionné).

D'un autre côté, le modèle simule des rentes sur les dossiers tardifs par rééchantillonnage des rentes potentielles des survenances les plus récentes.

Un provisionnement à une sécurisation de 75% au global nécessite 32M€ de provisions en plus par rapport à la moyenne. Pour arriver au niveau de 99,5%, il s'agit de 139M€ de plus que la moyenne (+15%), soit quasiment une survenance récente supplémentaire.

Nous nous intéressons également au coût moyen des dossiers au-delà de 5M€.

Au seuil de 5M€	CM (M€)
Moyenne	7.6
Q25	18.0
Q40	6.8
Q60	7.1
Q75	7.6
Q99.5	8.1

Figure 86 : Coût moyen au-delà de 5M€

En moyenne, le coût moyen des tardifs supérieurs à 5M€ est simulé à 7,6 M€ alors qu'il est en inventaire à 7M€ (moyenne depuis 1995). Il y a cependant des disparités assez fortes sur ce coût moyen observé. Le coût moyen inventaire nécessiterait d'être projeté à l'ultime pour assurer la comparabilité.

En terme de cessions, le modèle donne les résultats suivants, en provisions cédées :

PSAP cédée simulée M€	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Moyenne	0	0	0	0	1	0	1	0	2	1	3	2	0	6	2
Q25	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	0
Q40	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	2	0
Q60	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	3	2	0	4	0
Q75	0	0	0	0	1	0	1	0	2	1	5	3	0	7	2
Q99.5	0	1	3	1	7	7	6	5	8	8	21	22	11	35	24

Figure 87 : PSAP cédées simulées en version centrale

Le tableau ci-dessus n'intègre pas le défaut des réassureurs.

En moyenne, les provisions cédées sont assez faibles. Toutefois, sur des scénarios extrêmes (Q99,5), nous évaluons des cessions qui peuvent être importantes.

Maximum des simulations	Max (M€)
Moyenne	11.5
Q25	9.5
Q40	10.5
Q60	11.8
Q75	12.9
Q99.5	23.6
Maximum	38.9

Figure 88 : Distribution du sinistre maximum simulé.

Nous nous intéressons finalement à la distribution du montant individuel maximum de chaque itération. En moyenne, il est évalué à 11,5M€ avec une distribution fortement dissymétrique. Ainsi le quantile à 99,5% est à 24M€ et le maximum à 39M€.

Ces montants semblent tout à fait réalistes sur ce segment et nous soulignons ici qu'il s'agit de résultats « naturels » du modèle. Avec des modèles de distributions classiques de montants individuels, il est fréquent d'avoir recours à des troncatures de distribution pour éviter d'obtenir des montants totalement irréalistes.

Les provisions étudiées jusqu'ici sont obtenues sous les projections des flux futurs suivants.

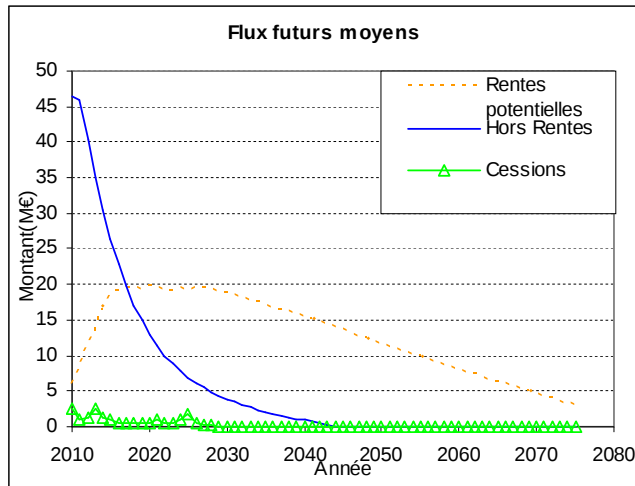


Figure 89 : Flux annuels futurs moyens du brut et de cession

La quasi stabilité de 2^{ème} année (2011) pour les flux hors rentes provient des hypothèses de liquidation sur les sinistres tardifs. En effet, nous supposons que leur règlement débute en 2010. Avec le profil de taux de paiements exercice nuls, le montant est maximal en 2^{ème} année de développement (en 2011 pour les tardifs).

Sur les 10 premières années, les règlements hors rentes sont les plus massifs. De 47M€ en 2010 à 15M€ en 2020. Les flux rentes sont plus diffus dans le temps et s'élèvent au maximum à 20M€. En 2050, on estime que l'on règlera encore 10 M€ par an d'arrérages.

Nous comparons ensuite ces flux moyens bruts avec ceux utilisés dans le QIS5.

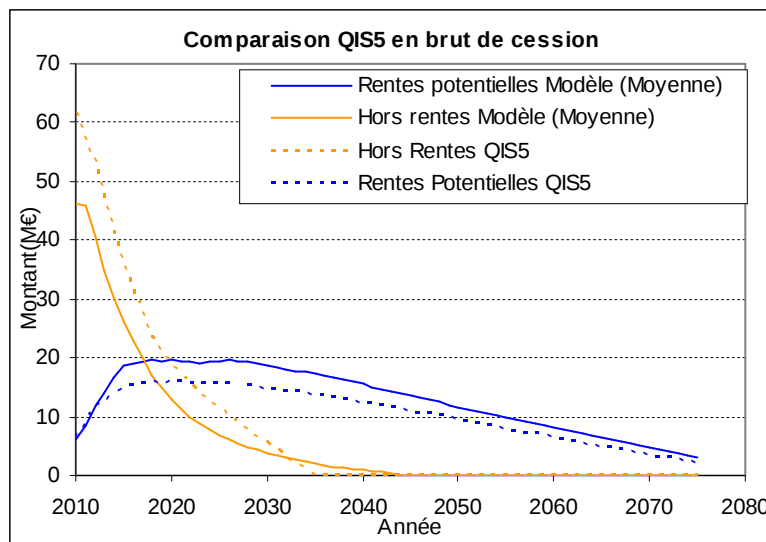


Figure 90 : Flux annuels futurs bruts moyens, comparés aux flux QIS5

Pour le QIS5, nous avons projeté le périmètre des sinistres graves sans distinction rentes / hors rentes. Le coefficient de passage à l'ultime global avait été appliqué uniformément au stock de capitaux constitutifs de rentes potentielles au 31/12/2009 ainsi qu'à l'inventaire hors rentes potentielles au 31/12/2009.

Le modèle nous indique ainsi que la trajectoire des rentes potentielles avait été sous-estimée dans le QIS5. En revanche, la partie hors rente avait été sur-estimée.

En appliquant la courbe des taux QIS5 CEIOPS à ces flux futurs moyens, nous obtenons les provisions *Best Estimate*.

Hors ajustement pour défaut moyen des réassureurs, les provisions *Best Estimate* brutes et nettes sont les suivantes.

Passage en BE

M€	Eco	BE	Tx actu
PSAP brute	933	686	-26%
Dont :			
Rentes	529	367	-31%
Hors rentes	403	320	-21%
PSAP nette	914	672	-26%

Figure 91 : Provisions Best Estimate

Le taux d'abattement lié à l'escompte de produits financiers est de 26% sur ce périmètre. Ce taux d'abattement ne concerne que la PSAP (hors rentes en service). De plus, pour les rentes potentielles, la provision dite « économique en norme actuelle » est déjà actualisée à taux fixe (2,43%).

Lorsque l'on zoome sur les cessions, le taux d'abattement est de 31%. Il est plus important puisqu'il faut attendre quelques années avant les règlements dépasse la priorité. Il n'est toutefois pas excessivement élevé puisque la clause de rentes impose un règlement en capital.

Passage au Best Estimate

M€	BE	Q99.5	Chgt ρ	Capital
PSAP brute	686	778	13.3%	91
PSAP nette	672	759	12.9%	87

Figure 92 : Capital à horizon infini

Selon la définition QIS5 du capital économique, ce segment nécessite environ 90M€ d'après le modèle, soit chargement ρ de 13%. L'impact du programme de réassurance est faible sur le coefficient ρ de chargement en capital.

Pour être comparé à la formule standard, ce capital nécessiterait d'être calculé à horizon 1 an. Le chargement nécessaire dans le QIS 5 sur le segment des provisions RC AUTO (regroupe des dossiers graves ou non, avec du corporel et du matériel), est bien plus élevé à 27,1% (Cf Figure 6 : Calibrage QIS5 des risques de provisionnement et de tarification). Appliqué à l'assiette de *Best Estimate*, cela représente 185M€.

4.5.3 Sensibilité

4.5.3.1 Stress de sur-inflation

Dans ce scénario (4^{ème}), nous testons la sensibilité du modèle à une sur inflation de 2 points au dessus de l'inflation initiale. Ainsi, l'indice des salaires en santé humaine passe d'une évolution annuelle future de 4,3% à 6,3%.

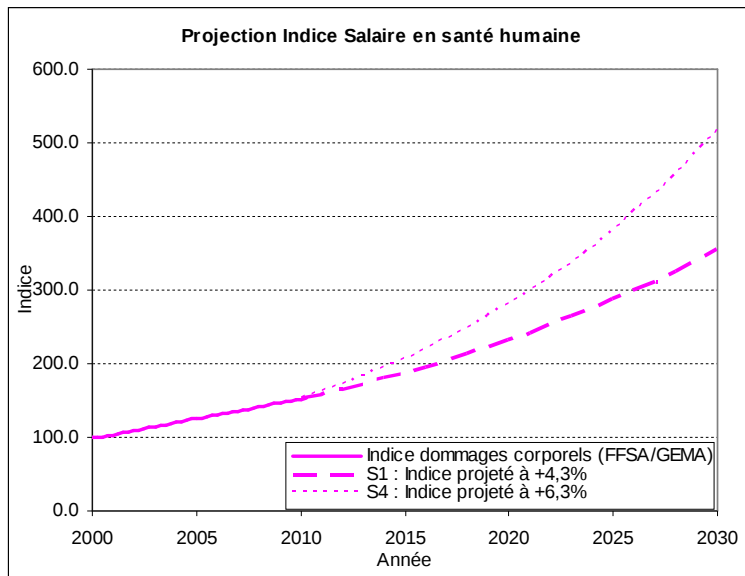


Figure 93 : Stress sur l'indice des salaires en santé humaine

Nous réalisons simultanément le même stress sur l'inflation du poste de préjudice économique, dont l'inflation passe de +2% à 4%.

4.5.3.2 Stress sur la courbe de vieillissement

Dans ce scénario (5^{ème}), nous allons tester la sensibilité du modèle à un vieillissement des rentes moins favorable qu'estimé. Nous nous limitons au vieillissement du poste tierce personne. La distribution de vieillissement des rentes Tierce Personne sera majorée de 25 points.

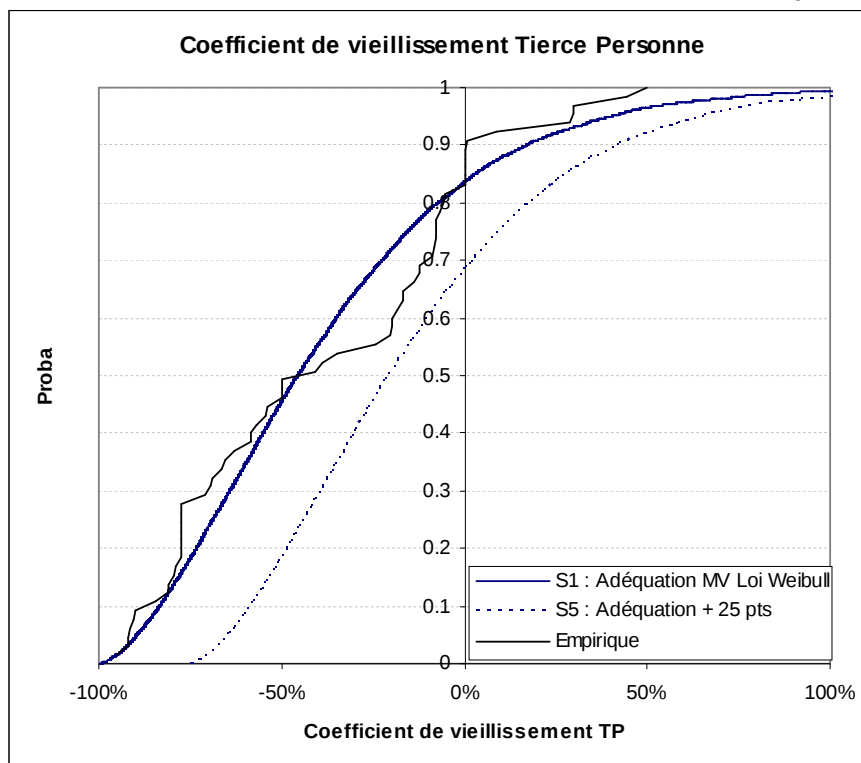


Figure 94 : Stress sur la courbe de vieillissement des rentes tierce personne.

4.5.3.3 Stress de la courbe de mortalité

Voici la courbe de l_x utilisée dans le cadre de la simulation de stress sur la mortalité (6^{ème} scénario). La table de mortalité de base étant la TD8890, nous minorons les Q_x de 20%, en reprenant ainsi le scénario de choc de la formule standard de Solvabilité 2 (QIS5). Les l_x obtenus sont proches de ceux de la table TH0002.

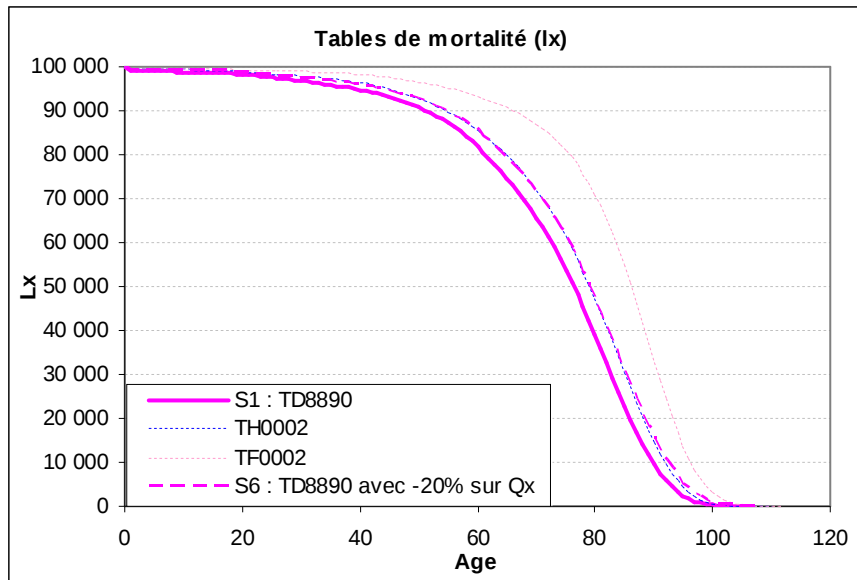


Figure 95 : Stress sur la courbe de mortalité

4.5.3.4 Synthèse des sensibilités

Voici le tableau de synthèse des sensibilités décrites auparavant. Nous nous intéressons uniquement aux PSAP économiques.

		S1	S4	S5	S6
		Centrale	Surinflation	Vieillessement moindre	Sous mortalité
		PSAP Eco	Evol (%)	Evol (%)	Evol (%)
Eco Brute	Moyenne	932.6	12.3%	12.1%	2.4%
	Q99.5	1 071.1	13.1%	11.6%	2.3%
Eco nette	Moyenne	913.9	10.6%	10.6%	2.5%
	Q99.5	1 035.2	10.4%	9.8%	2.5%

Figure 96 : Synthèse des sensibilités

Le scénario ayant le moins d'impact sur les provisions est celui relatif à la table de mortalité. L'impact est d'environ +2,5% sur les provisions.

Les scénarios sur la surinflation et sur le vieillissement moindre des rentes sont relativement équivalents sur la provision moyenne. Sur la quantile à 99,5%, le scénario sur la surinflation semble plus sensible que celui sur le vieillissement des rentes.

5 Consolidation des provisions

Les distributions des réserves ont été déterminées par segment. Il reste désormais à déterminer la PSAP globale de la branche et sa volatilité. Les réserves par segment sont autant de variables aléatoires dont les lois marginales doivent nous amener à déterminer la loi jointe de la réserve globale. Il est naturel de penser qu'il existe un lien entre les paiements bruts et les recours encaissés d'un garant ainsi que entre les garanties elles même.

Ces dépendances auront une influence sur la volatilité de la réserve globale.

Nous parlons de dépendance et non de corrélation, cette dernière n'étant qu'un cas particulier de la première.

Nous abordons tout d'abord les concepts théoriques de manière succincte. Nous nous arrêterons sur deux approches de prise en compte des dépendances lorsque les provisions sous-jacentes sont obtenues par des méthodes basées sur des triangles (Mack, *bootstrap*). Nous réaliserons finalement une application pragmatique.

5.1 Mesure de dépendance

Ce paragraphe est largement inspiré des ouvrages de M.Denuit et A.Charpentier « mathématiques de l'assurance non-vie »²⁰ et de C.Partrat et J.L. Besson « Assurance non-vie. Modélisation, simulation »¹⁹.

Nous considérons dans ce paragraphe un n-échantillon du couple de variables aléatoires (X_1, X_2) .

5.1.1 Mesure de concordance

Pour des raisons pratiques, une mesure de dépendance δ doit avant tout être une mesure de concordance, c'est-à-dire posséder les propriétés suivantes :

- P1 : $\delta(X_1, X_2) = \delta(X_2, X_1)$.
- P2 : $-1 \leq \delta(X_1, X_2) \leq +1$.
- P3 : $\delta(X_1, X_2) = 1$ si et seulement si X_1 et X_2 sont comonotones.
- P4 : $\delta(X_1, X_2) = -1$ si et seulement si X_1 et X_2 sont antimonotones.
- P5 : quelle que soit la fonction strictement croissante (respectivement décroissante) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\delta(g(X_1), X_2) = \delta(X_1, X_2)$ (respectivement) $\delta(g(X_1), X_2) = -\delta(X_1, X_2)$).

5.1.2 Coefficient de corrélation linéaire de Pearson

Le coefficient de corrélation de Pearson, ou coefficient de corrélation linéaire repose sur la propriété suivante :

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$$

Le signe de la covariance renseigne sur le sens de la covariation entre X_1 et X_2 :

- Une covariance positive indique une dépendance positive entre les deux variables ;
- Une covariance négative indique une dépendance négative entre les deux variables.

En revanche, la valeur n'indique pas l'intensité de cette dépendance puisqu'elle dépend à la fois des variations de X_1 mais aussi de X_2 . Notamment la covariance est sensible aux changements d'unité.

C'est pourquoi un premier aboutissement dans la mesure des dépendances réside dans le coefficient de

corrélation de Pearson définit par : $r(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$.

Le coefficient de Pearson varie entre -1 (antimonotonie) et +1 (comonotonie). Lorsque les deux variables X_1 et X_2 sont indépendantes, $r(X_1, X_2)=0$, la réciproque étant en générale fausse.

Le coefficient de corrélation de Pearson ne possède pas les propriétés P3 et P4 d'une mesure de concordance. Toutefois, il reste très utilisé puisque notamment :

- Il apparaît naturellement comme paramètre de la densité de vecteurs gaussiens,
- Il a un rôle important dans les modèles de régression linéaire,

5.1.3 Coefficient de corrélation de Kendall

Cette mesure, comme celle de Spearman, repose sur l'étude des concordances et des discordances dans l'échantillon de données. Il s'agit d'une mesure de concordance.

Soient deux couples (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) indépendants et identiquement distribués. Le τ de Kendall est défini de la manière suivante :

$$\tau(X_1, X_2) = P((X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0) - P((X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0)$$

Le principe calculatoire de ce coefficient est le suivant :

- A partir d'une série d'observations des couples (X_1, X_2) , ces derniers sont réordonnés par X_1 croissants.
- Dès lors, nous ne nous intéressons qu'aux réalisations de la variable X_2 . Nous reformons toutes les combinaisons possibles de rapprochement deux à deux des X_2 . Pour chacun deux, nous conservons l'indication de concordance (1^{ère} valeur du couple $>$ 2^{ème} valeur du couple sur X_2) ou de discordance (1^{ère} valeur du couple $<$ 2^{ème} valeur du couple sur X_2),
- Le nombre de concordances est noté n_c ; celui de discordances n_d .
- Nous calculons alors le coefficient de Kendall par $\frac{n_c - n_d}{n(n-1)}$.

La limite de ce coefficient réside dans la prise en compte des ex aequo.

5.1.4 Coefficient de corrélation de Spearman

Le coefficient de Spearman repose aussi sur le principe de concordance. Il s'agit d'une mesure de concordance. Il se définit de la manière suivante :

$\rho(X_1, X_2) = 3 * (P((X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) > 0) - P((X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) < 0))$, dans lequel le couple (X_1^*, X_2^*) a les mêmes marginales que X mais est indépendant.

Le principe calculatoire repose sur les rangs de chacune des variables X_1 et X_2 pour chaque couple (X_1, X_2) . Nous notons d_i la différence de rang entre X_1 et X_2 pour chacun des couples.

Nous calculons alors le coefficient de Spearman : $\rho(X_1, X_2) = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$.

La limite formulée pour le coefficient de Kendall sur le traitement des ex aequo est aussi valable pour le coefficient de Spearman.

5.2 Type de dépendance

5.2.1 Corrélation linéaire

Il s'agit du lien affine entre deux variables aléatoires X_1 et X_2 . Cette dépendance est mesurée au travers du coefficient de corrélation linéaire de Pearson précédent.

Nous avons la propriété suivante :

$|r| = 1$ si et seulement si il existe a réel différent de 0 et b réel tels que $X_2 = aX_1 + b$

L'idée qu'il puisse y avoir une dépendance uniforme entre deux variables pour les petites comme les grandes valeurs est souvent mise en défaut mais elle peut être retenue comme première approximation.

5.2.2 Copules

Le concept de copules a été introduit par Abe Sklar en 1959. Depuis, le milieu des années 1980, les copules sont devenues un outil de base dans la modélisation des distributions multivariées en finance et en assurance.

Afin de simplifier les notations et la lecture, nous continuons dans ce paragraphe à nous placer dans le cas bivarié.

Tout d'abord nous rappelons la définition de copule :

Une copule C à deux dimensions est une application C de $[0;1] \times [0;1]$ dans $[0;1]$ satisfaisant :

- $C(u,0) = C(0,u) = 0$ pour tout u de $[0;1]$
- $C(u, 1) = C(1,u) = 1$ pour tout u de $[0;1]$
- C est une fonction supermodulaire, c'est-à-dire qu'elle assure, pour tout x_1 et $x_2 \in [0;1]$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$C(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2) - C(x_1 + \varepsilon_1, x_2) \geq C(x_1, x_2 + \varepsilon_2) - C(x_1, x_2)$$

5.2.2.1 Théorème de sklar

Soit un couple X dont la fonction de répartition F_X possède des fonctions de répartition F_1 et F_2 continues. Il existe alors une unique copule C telle que quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$:

$$F_X(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

5.2.2.2 Estimation des paramètres

Il existe différentes méthodes d'estimation des paramètres des copules dont les plus connues sont les suivantes :

Méthode des moments

Elle consiste à résoudre l'équation égalant l'expression analytique de la mesure de dépendance avec un estimateur non paramétrique de cette même mesure.

Ainsi, les relations sont classiquement exploitées à partir du τ de Kendall. Nous notons ci-après les principales, θ étant le paramètre de la copule :

- Clayton : $\theta = \frac{2\tau}{1-\tau}$
- Gumbel : $\theta = \frac{1}{1-\tau}$
- Normale : $\theta = \sin\left(\frac{\tau}{2}\pi\right)$

Méthode de maximisation de la fonction de vraisemblance du modèle.

Cette méthode consiste comme pour une densité classique à maximiser la fonction de vraisemblance. Nous précisons, afin de bien différencier la méthode suivante, que l'ensemble des paramètres du modèle est estimé dans une même étape (paramètres des lois marginales et paramètres de la copule).

Méthode IFM (inference fonction for margins)

Cette méthode est assez proche de la précédente dans le sens où elle exploite également la maximisation de la vraisemblance. Elle présente toutefois l'avantage d'être inscrite dans un processus décomposé d'estimation des paramètres puisque :

- La première étape consiste à déterminer les estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres des marginales.
- La seconde étape consiste, à partir des paramètres estimés précédemment, à estimer par maximum de vraisemblance les paramètres de la copule.

5.3 Méthodes utiles avec une modélisation par triangles

5.3.1 Corrélation des facteurs de développement (Braun)

Les garanties n'ayant pas toutes la même cadence de règlement, il paraît normale de supposer que les liens de dépendance sont fonction de l'année de développement. De forts règlements en première année sur la partie corporelle de la RC laissent supposer une forte sinistralité donc de forts règlements en assistance par exemple. Par contre de forts règlements en 10^{ème} année ne nous donne pas d'information pour l'assistance. Partant de cette remarque, il semble que l'idée d'une dépendance uniforme sur toutes les années de développement comme le décrit une corrélation linéaire déterminée en une fois à partir de l'ensemble des observations des triangles ne mesure pas suffisamment les liens entre les triangles.

C. Braun²¹ propose de prolonger le modèle Mack à deux triangles en *run-off* et d'estimer la variance de la somme des réserves calculées à partir de chaque triangle en ayant à l'esprit la remarque précédente.

Repartant du modèle de Mack et des notations de la partie 2., si nous considérons un second triangle de données $(D_{i,j})_{i+j \leq n+1}$, nous posons :

$$g_{i,j} = \frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}}$$

Les trois hypothèses reformulées sont :

$$E(D_{i,j+1} | D_{i1,...}, D_{i,j}) = g_j D_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$$

$$\{D_{i1,...}, D_{i,n}\}, \{D_{i'1,...}, D_{i',n}\} \text{ } i \neq i' \text{ sont indépendants}$$

$$\text{Var}(D_{i,j+1} | D_{i1,...}, D_{i,j}) = D_{i,j} \tau_j^2, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$$

Avec les estimations

$$\hat{g}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j}} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1$$

$$\hat{\tau}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j} \left(\frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}} - \hat{g}_j \right)^2, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

L'idée est de mesurer la dépendance entre les facteurs de développement $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$ à j fixé.

Pour illustrer cette assertion, ci-dessous une suite de graphique représentant le lien entre les rangs des coefficients de développement des recours et des paiements de la RC au fil des années de développement :

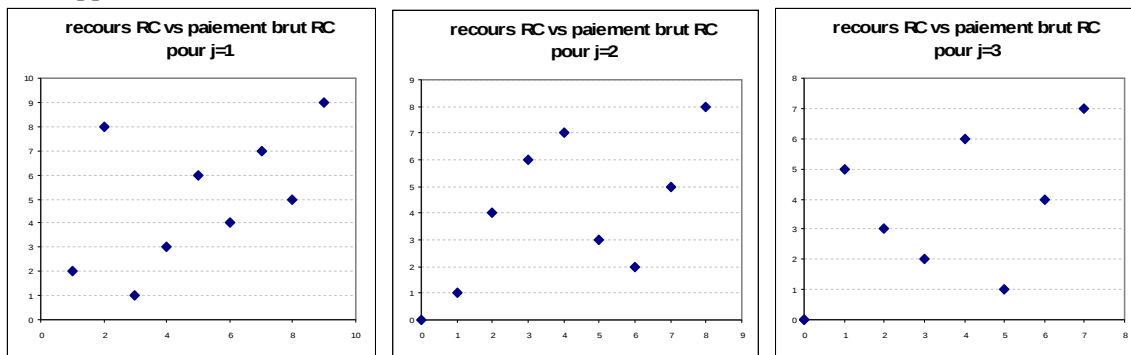


Figure 97: RC, comparaisons des rangs des *link ratio* paiement et recours

La même représentation peut être faite pour matérialiser le lien entre deux garanties :

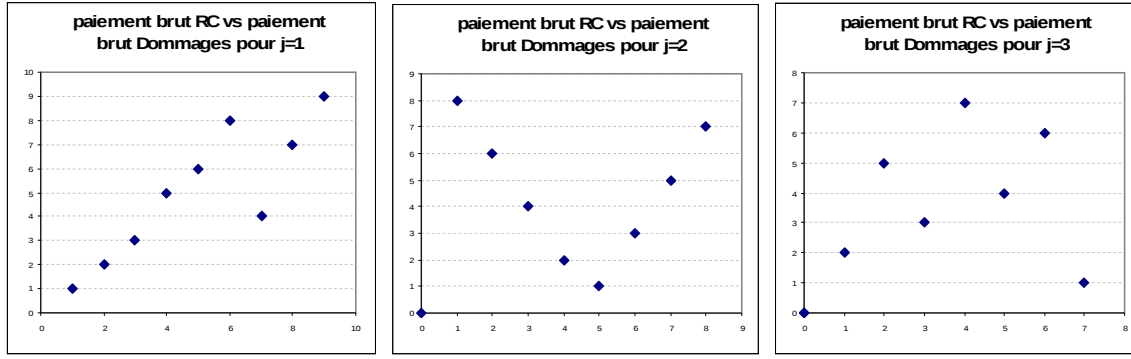


Figure 98: Paiement, comparaisons des rangs des *link ratio* RC et Dommages

Nous constatons sur les graphiques précédents représentant que la structure semble forte pour la première année de développement puis semble plus diffuse après.

Par indépendance des survenances entre elles, $f_{i,j}$ et $g_{i',j}$ avec $i \neq i'$ sont indépendants.

Si on note pour i fixé, $T_{i,j}$ l'ensemble de l'information disponible en j pour la survenance i , c'est à dire engendrée par $(C_{i,j})$ et $(D_{i,j})$, $i+j \leq n+1$ (les j premiers éléments de la ligne i) et T_j l'ensemble de l'information disponible en j c'est à dire l'ensemble des $C_{i,k}$ et $D_{i,k}$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq j$ et $i+j \leq n+1$ (partie du triangle à gauche de j)

Les hypothèses (1) et (3) sont équivalentes à :

$$E(f_{i,j} | C_{i,1} \dots C_{i,j}) = f_j \text{ et } E(g_{i,j} | D_{i,1} \dots D_{i,j}) = g_j \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$$

$$Var(f_{i,j} | C_{i,1} \dots C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}} \text{ et } Var(g_{i,j} | D_{i,1} \dots D_{i,j}) = \frac{\tau_j^2}{D_{i,j}} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1$$

C. Braun complète par l'hypothèse sur la forme de la covariance :

$$Cov(f_{i,j}, g_{i,j} | T_{i,j}) = \frac{\rho_j}{\sqrt{C_{i,j} D_{i,j}}} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1 \quad (6)$$

A l'instar de l'estimation de la variance proposée par T. Mack, il obtient l'estimation suivante :

$$\hat{\rho}_j = \frac{1}{n-j+\omega_j^2} \sum_{i=1}^{n-j} \sqrt{C_{i,j} D_{i,j}} (f_{i,j} - \hat{f}_j)(g_{i,j} - \hat{g}_j)$$

Avec

$$\omega_j^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-j} \sqrt{C_{i,j} D_{i,j}} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j}}$$

Pour chaque survenance i , nous cherchons maintenant à estimer l'erreur de la somme des estimations des paiements cumulés en $j=n$:

$$mse(\hat{C}_{i,n} + \hat{D}_{i,n}) = E\left((C_{i,n} + D_{i,n} - \hat{C}_{i,n} - \hat{D}_{i,n})^2 | T_n\right) \approx Var(C_{i,n} + D_{i,n} | T_{n+1-i}) + Var(\hat{C}_{i,n} + \hat{D}_{i,n} | T_{n+1-i})$$

Comme pour le cas d'un triangle, le premier terme est l'erreur de processus et le second l'erreur d'estimation.

Nous pouvons décomposer la première variance conditionnelle par

$$\text{Var}(C_{i,n} + D_{i,n} | T_{n+1-i}) = \text{Var}(C_{i,n} | T_{n+1-i}) + 2\text{Cov}(C_{i,n}, D_{i,n} | T_{n+1-i}) + \text{Var}(D_{i,n} | T_{n+1-i})$$

L'estimation des variances étant celle faite dans l'article de Mack, reste l'estimation de la covariance qui se calcule par récurrence pour $i+j > n+1$:

$$\overline{\text{Cov}}(C_{i,j+1}, D_{i,j+1} | T_{i,j}) = \overline{\text{Cov}}(C_{i,j}, D_{i,j} | T_{i,j-1}) \hat{f}_j \hat{g}_j + \hat{\rho}_j \sqrt{\hat{C}_{i,j} \hat{D}_{i,j}}$$

Avec comme valeur initiale $\overline{\text{Cov}}(C_{i,n+1-i}, D_{i,n+1-i} | T_{i,n-i}) = 0$ car les éléments de la diagonale sont connus.

De même pour la deuxième partie de l'erreur, il convient d'estimer la covariance des paiements cumulés estimés par récurrence pour $i+j > n+1$:

$$\overline{\text{Cov}}(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{D}_{i,j+1} | T_{i,j}) = \overline{\text{Cov}}(\hat{C}_{i,j}, \hat{D}_{i,j} | T_{i,j-1}) \hat{f}_j \hat{g}_j + \frac{\hat{C}_{i,j} \hat{D}_{i,j}}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j} \sum_{k=1}^{n-j} D_{k,j}} \hat{\rho}_j \sum_{k=1}^{n-j} \sqrt{C_{k,j} D_{k,j}}$$

Avec $\overline{\text{Cov}}(\hat{C}_{i,n+1-i}, \hat{D}_{i,n+1-i} | T_{i,n-i}) = 0$ car les éléments de la diagonale sont connus.

Enfin, il nous reste à estimer l'erreur de la somme des paiements cumulés toutes survenances confondues.

$$\begin{aligned} \text{mse}\left(\sum_{i=2}^n \hat{C}_{i,n} + \hat{D}_{i,n}\right) &= E\left(\left(\sum_{i=2}^n C_{i,n} + D_{i,n} - \hat{C}_{i,n} - \hat{D}_{i,n}\right)^2 | T_n\right) \\ &\approx \text{Var}\left(\sum_{i=2}^n C_{i,n} + D_{i,n} | T_{n+1-i}\right) + \text{Var}\left(\sum_{i=2}^n \hat{C}_{i,n} | T_{n+1-i}\right) + 2 \sum_{2 \leq i < k \leq n} \text{Cov}(\hat{C}_{i,n}, \hat{C}_{k,n} | T_{n+1-i}) + \text{Var}\left(\sum_{i=2}^n \hat{D}_{i,n} | T_{n+1-i}\right) \\ &\quad + 2 \sum_{2 \leq i < k \leq n} \text{Cov}(\hat{D}_{i,n}, \hat{D}_{k,n} | T_{n+1-i}) + 2 \sum_{1 \leq i, k \leq n} \text{Cov}(\hat{C}_{i,n}, \hat{D}_{k,n} | T_{n+1-\min(i,k)}) \end{aligned}$$

Le premier terme étant toujours l'erreur de process et le reste l'erreur d'estimation.

$$\begin{aligned} &\text{Var}\left(\sum_{i=2}^n C_{i,n} + D_{i,n} | T_{n+1-i}\right) \\ &= \text{Var}\left(\sum_{i=2}^n C_{i,n} | T_{n+1-i}\right) + \text{Var}\left(\sum_{i=2}^n D_{i,n} | T_{n+1-i}\right) + 2\text{Cov}\left(\sum_{i=2}^n C_{i,n}, \sum_{i=2}^n D_{i,n} | T_{n+1-i}\right) \end{aligned}$$

Comme pour le calcul de l'erreur par survenance, les estimations des variances sont celles de Mack, restent les covariances :

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=2}^n C_{i,n}, \sum_{i=2}^n D_{i,n} | T_{n+1-i}\right) = \sum_{i=2}^n \text{Cov}(C_{i,n}, D_{i,n}) \text{ car pour } i \neq j, C_{i,n} \text{ et } D_{j,n} \text{ sont non corrélés par}$$

indépendance des survenances.

Nous obtenons une estimation de la quantité précédente par récurrence pour $j \geq 2$:

$$\overline{\text{Cov}}\left(\sum_{i=n+1-j}^n C_{i,j+1}, \sum_{i=n+1-j}^n D_{i,j+1} | T_j\right) = \overline{\text{Cov}}\left(\sum_{i=n+2-j}^n C_{i,j}, \sum_{i=n+2-j}^n D_{i,j} | T_{j-1}\right) \hat{f}_j \hat{g}_j + \hat{\rho}_j \sum_{i=n+1-j}^n \sqrt{\hat{C}_{i,j} \hat{D}_{i,j}}$$

Et enfin la dernière partie également par récurrence :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,k=n+1-j} \overline{\text{Cov}}(\hat{C}_{i,j+1}, \hat{D}_{k,j+1} | T_{n+1-\min(i,k)}) \\
&= \sum_{i,k=n-j} \text{Cov}(\hat{C}_{i,j}, \hat{D}_{k,j} | T_{n+1-\min(i,k)}) \hat{f}_j \hat{g}_j + \frac{\sum_{l=n-j+1}^n \hat{C}_{l,j} \sum_{l=n-j+1}^n \hat{D}_{l,j}}{\sum_{l=1}^{n-j} C_{l,j} \sum_{l=1}^{n-j} D_{l,j}} \hat{\rho}_j \sum_{l=1}^{n-j} \sqrt{C_{l,j} D_{l,j}}
\end{aligned}$$

Application :

En utilisant cette méthode et en généralisant le cas bivarié sur l'ensemble de nos garanties, nous aboutissons à une erreur standard de 6,2% des provisions. En supposant les garanties non-corrélées, elle est de 3,5% et au contraire en supposant une corrélation totale elle serait 7,7%.

5.3.2 Dépendance lors du Bootstrap

Soient $(r_{i,j}^{(1)})_{i+j \leq n}$ et $(r_{i,j}^{(2)})_{i+j \leq n}$ les résidus du premier et du second triangle respectivement. Une manière d'introduire de la dépendance dans le *Bootstrap* des résidus de deux triangles est de tirer à l'étape 2. non pas dans le premier jeu pour le premier triangle puis dans le second jeu pour le second triangle mais de tirer un couple $(r_{i,j}^{(1)}, r_{i,j}^{(2)})$ ce qui équivaut à tirer les coordonnées i et j et à utiliser les résidus correspondants.

Une autre approche peut être envisagée après avoir fait les ré-échantillonnages des garanties indépendamment les uns des autres, G. KIRSCHNER²² propose une méthode basée sur les rangs :

Par *bootstrap*, nous obtenons B simulations de paiements pour chaque cellule du premier triangle et nous calculons le rang de ces simulations. Idem pour le deuxième triangle.

A partir d'une matrice de corrélation donnée, nous simulons B couples de variables aléatoires corrélées suivant cette matrice.

Pour chaque couple de simulations nous calculons le rang de ses composantes puis cellule par cellule nous formons un couple de simulations de paiement ayant les mêmes rangs.

La limite de cette méthode étant toujours d'utiliser une corrélation uniforme sur toutes les années de développement et de sinistre et d'avoir une matrice de corrélation *a priori*.

5.4 Application

Les niveaux d'agrégation sur lesquels nous devons modéliser des dépendances sont les suivants :

- Au sein d'un segment, entre le brut et le recours : Il existe de manière triviale un lien entre paiement et recours, les recours étant faits, en théorie, à hauteur des avances faites par l'assureur. Mais cette dépendance entre les deux flux opposés peut se manifester avec décalage de temps. D'où une difficulté à bien mesurer cette dépendance. En utilisant un triangle de paiement net de recours, nous obtenons un résultat avec une dépendance implicite ce qui facilite la démarche mais nous perdons de l'information et nous ne pouvons pas compléter un bilan qui détaillerait le brut du recours. Nous rappelons que le brut est dissocié du recours les segments RC AUTO hors graves et DOMMAGES.
- Entre les segments modélisés : La liquidation des différents segments est elle hétérogène puisque les garanties dommages sont liquidées en 2 ans alors que les garanties RC peuvent se liquider sur plus de 35 ans (graves RC).

5.4.1 Mesure des enjeux

Afin de mesurer les enjeux de la mise en œuvre de dépendances sur le modèle, nous étudions la composition des provisions économiques :

- en moyenne, insensibles aux dépendances,
- au quantile 99,5 en supposant une comonotonie totale entre les segments. Il s'agit donc ici du scénario le plus défavorable en termes de dépendances.

Nous ne tenons pas compte des recours RC AUTO hors graves et dommages. En effet, les inclure avec une dépendance totale génèrerait un quantile à 99,5% trop faible et donc imprudent. Toutefois, il semble assez naturel qu'il y ait une dépendance entre le brut et le recours. Pour la suite, nous définissons le scénario de dépendance extrême en supposant que le brut et le recours ne sont pas corrélés.

Provisions Eco (M€)	Moyenne	%	Q99.5	%
RCC Graves	932.6	65.2%	1071.1	66.1%
RC AUTO brute hors graves	364.8	25.5%	389.1	24.0%
DOMMAGES bruts	77.6	5.4%	85.9	5.3%
PJ	23.3	1.6%	25.2	1.6%
DCC	18.0	1.3%	28.6	1.8%
CAT NAT	0.5	0.0%	2.7	0.2%
ASSISTANCE	5.4	0.4%	7.0	0.4%
EVENEMENTS CLIMATIQUES	7.4	0.5%	11.4	0.7%
TOTAL hors recours RC et Dommages	1429.6			
Cas comonotone			1621.0	
Cas indépendant			1570.7	

Figure 99 : Mesure des enjeux des dépendances

Le montant dans le cas indépendant est inférieur à celui dans le cas comonotone de 50M€ environ soit 3%. L'enjeu maximum de cette partie est donc de 3% des provisions, soit un faible enjeu.

En effet, nous mettons en évidence ici que les deux segments RC représentent plus de 90% des provisions automobile. Les graves en RC Corporelle représentent plus de 70% de la provision AUTO. Ainsi, il est logique que les dépendances influencent peu le résultat consolidé. La volatilité du segment des graves en RC Corporelle apporte quasiment toute la volatilité de la consolidation.

La dépendance la plus sensible sur la consolidation concerne la RC AUTO hors graves avec les graves en RC Corporelle.

5.4.2 Etude des dépendances

Cette étape devrait théoriquement viser à estimer les dépendances case par case entre les triangles. En effet, une case correspond à une variable aléatoire. Cependant, nous n'avons pas les données suffisantes pour travailler à ce niveau de détail. Plus raisonnablement, notre objectif est de déterminer une seule structure de dépendance pour chaque couple de triangles.

Nous commençons par calculer les principales mesures de dépendance sur nos triangles de règlements. Nous associons également les graves en constituant le triangle ad hoc.

Le tableau ci-après recense l'ensemble des couples possibles de dépendance et y associe pour chacun les mesures de Kendall, Spearman et Pearson.

Segment 1	Segment 2	spearman	Kendall	Pearson
RC AUTO brute (hors graves)	RC AUTO recours (hors graves)	98.9%	92.5%	99.3%
RC AUTO brute (hors graves)	PJ	98.1%	89.1%	97.6%
RC AUTO brute (hors graves)	ASSISTANCE	68.9%	56.3%	79.0%
RC AUTO brute (hors graves)	DCC	76.8%	57.9%	45.2%
RC AUTO brute (hors graves)	DOMMAGE AUTO brut	98.4%	90.8%	94.7%
RC AUTO brute (hors graves)	DOMMAGE AUTO recours	99.3%	94.1%	98.3%
RC AUTO brute (hors graves)	EVENEMENTS CLIMATIQUES	82.8%	61.7%	60.4%
RC AUTO brute (hors graves)	CAT NAT	84.1%	64.1%	52.6%
RC AUTO brute (hors graves)	RCC Graves	-9.8%	-13.2%	-18.6%
RC AUTO recours (hors graves)	PJ	98.1%	88.3%	98.9%
RC AUTO recours (hors graves)	ASSISTANCE	69.1%	55.1%	82.3%
RC AUTO recours (hors graves)	DCC	77.8%	59.3%	37.1%
RC AUTO recours (hors graves)	DOMMAGE AUTO brut	98.1%	89.7%	97.8%
RC AUTO brute (hors graves)	DOMMAGE AUTO recours	98.5%	91.1%	99.7%
RC AUTO recours (hors graves)	EVENEMENTS CLIMATIQUES	79.4%	58.6%	57.7%
RC AUTO recours (hors graves)	CAT NAT	86.4%	65.5%	54.0%
RC AUTO recours (hors graves)	RCC Graves	-10.1%	-11.5%	-21.9%
PJ	ASSISTANCE	72.3%	60.7%	88.6%
PJ	DCC	77.4%	58.8%	34.2%
PJ	DOMMAGE AUTO brut	97.6%	86.6%	98.3%
PJ	DOMMAGE AUTO recours	97.9%	87.7%	99.0%
PJ	EVENEMENTS CLIMATIQUES	80.6%	59.5%	54.7%
PJ	CAT NAT	86.7%	68.6%	64.0%
PJ	RCC Graves	-8.4%	-10.4%	-22.3%
ASSISTANCE	DCC	52.5%	36.8%	14.2%
ASSISTANCE	DOMMAGE AUTO brut	69.5%	56.0%	87.8%
ASSISTANCE	DOMMAGE AUTO recours	69.4%	56.5%	83.8%
ASSISTANCE	EVENEMENTS CLIMATIQUES	54.0%	38.9%	42.7%
ASSISTANCE	CAT NAT	78.1%	64.8%	80.5%
ASSISTANCE	RCC Graves	-7.2%	-8.3%	-25.6%
DCC	DOMMAGE AUTO brut	76.9%	58.5%	20.7%
DCC	DOMMAGE AUTO recours	76.6%	57.7%	30.7%
DCC	EVENEMENTS CLIMATIQUES	66.3%	45.6%	31.8%
DCC	CAT NAT	70.4%	50.0%	15.2%
DCC	RCC Graves	13.3%	14.0%	20.2%
DOMMAGE AUTO brut	DOMMAGE AUTO recours	98.1%	89.4%	98.9%
DOMMAGE AUTO brut	EVENEMENTS CLIMATIQUES	78.9%	57.2%	52.0%
DOMMAGE AUTO brut	CAT NAT	85.6%	66.9%	58.5%
DOMMAGE AUTO brut	RCC Graves	-8.6%	-13.2%	-27.4%
DOMMAGE AUTO recours	EVENEMENTS CLIMATIQUES	83.1%	62.5%	56.3%
DOMMAGE AUTO recours	CAT NAT	84.2%	63.0%	55.0%
DOMMAGE AUTO recours	RCC Graves	-9.5%	-13.8%	-24.1%
EVENEMENTS CLIMATIQUES	CAT NAT	72.6%	51.8%	26.7%
EVENEMENTS CLIMATIQUES	RCC Graves	-10.6%	-7.1%	-9.8%
CAT NAT	RCC Graves	-2.9%	-4.7%	-15.3%

Figure 100 : Mesures de dépendance entre les segments, à partir des règlements.

Les résultats obtenus sont très mitigés car très influencés par deux facteurs :

- Celui sur les années de développement, c'est-à-dire les cadences moyennes de règlements. Cette remarque avait été formulée dans le mémoire de G.Krauth²³. En effet, nous observons soit des dépendances très fortes sur des segments ayant des profils de liquidation proches. Soit, au contraire, nous observons des dépendances négatives lorsque les profils de liquidation sont très éloignés. Cela est systématiquement le cas avec les graves RC Corporelles.
- Celui sur les survenances : l'évolution même du portefeuille amène, par exemple une croissance des règlements de 1^{ère} année lorsque le portefeuille est lui aussi en croissance.

G.Krauth avait restreint son analyse aux garanties ayant des profils de liquidation courts (Exclusion de la RC Corporelle notamment).

Nous essayons alors de calibrer les dépendances sur la partie purement aléatoire, hors effet de cadencement. L'idée est donc de travailler à partir des résidus des modèles. Pour cela, nous pouvons travailler sur les résidus des modèles de *bootstrap*.

La difficulté réside dans le traitement des sinistres graves. En effet, ils n'ont pas été projetés par *Chain Ladder* ou *bootstrap* mais sont issus d'un modèle individuel. Nous ne disposons donc pas de résidus pour les sinistres graves. Afin de palier ce problème, nous réalisons une projection *Chain Ladder* destinée uniquement à estimer les dépendances avec les autres segments, par les résidus.

Segment 1	Segment 2	spearman	Kendall	Pearson
RC AUTO brute (hors graves)	RC AUTO recours (hors graves)	46.8%	32.2%	48.2%
RC AUTO brute (hors graves)	PJ	26.8%	17.7%	25.2%
RC AUTO brute (hors graves)	ASSISTANCE	14.5%	11.8%	19.1%
RC AUTO brute (hors graves)	DCC	8.4%	3.8%	8.1%
RC AUTO brute (hors graves)	DOMMAGE AUTO brut	39.4%	28.4%	51.0%
RC AUTO brute (hors graves)	DOMMAGE AUTO recours	30.3%	21.9%	44.0%
RC AUTO brute (hors graves)	EVENEMENTS CLIMATIQUES	1.5%	0.8%	2.9%
RC AUTO brute (hors graves)	CAT NAT	-6.5%	-5.9%	-3.6%
RC AUTO brute (hors graves)	RCC Graves	-12.5%	-9.6%	-11.5%
RC AUTO recours (hors graves)	PJ	21.8%	14.5%	30.1%
RC AUTO recours (hors graves)	ASSISTANCE	-23.2%	-15.2%	-22.9%
RC AUTO recours (hors graves)	DCC	16.8%	10.7%	17.8%
RC AUTO recours (hors graves)	DOMMAGE AUTO brut	9.7%	6.8%	8.3%
RC AUTO brute (hors graves)	DOMMAGE AUTO recours	-15.7%	-10.1%	-11.0%
RC AUTO recours (hors graves)	EVENEMENTS CLIMATIQUES	-13.3%	-10.0%	-11.9%
RC AUTO recours (hors graves)	CAT NAT	-5.7%	-2.7%	-10.3%
RC AUTO recours (hors graves)	RCC Graves	3.9%	0.9%	3.9%
PJ	ASSISTANCE	26.1%	18.7%	29.1%
PJ	DCC	29.7%	21.6%	29.9%
PJ	DOMMAGE AUTO brut	-7.1%	-4.4%	-11.9%
PJ	DOMMAGE AUTO recours	-4.5%	-3.7%	-4.3%
PJ	EVENEMENTS CLIMATIQUES	-17.1%	-11.4%	-11.8%
PJ	CAT NAT	-8.5%	-5.0%	-3.7%
PJ	RCC Graves	8.1%	5.7%	5.9%
ASSISTANCE	DCC	-5.4%	-3.8%	-2.3%
ASSISTANCE	DOMMAGE AUTO brut	3.3%	2.6%	15.8%
ASSISTANCE	DOMMAGE AUTO recours	27.4%	18.4%	37.8%
ASSISTANCE	EVENEMENTS CLIMATIQUES	-13.3%	-7.2%	-22.8%
ASSISTANCE	CAT NAT	-9.8%	-9.2%	-6.9%
ASSISTANCE	RCC Graves	-2.8%	-1.6%	-11.9%
DCC	DOMMAGE AUTO brut	-19.5%	-14.0%	-11.6%
DCC	DOMMAGE AUTO recours	-14.9%	-10.0%	-15.1%
DCC	EVENEMENTS CLIMATIQUES	12.6%	6.6%	22.3%
DCC	CAT NAT	-4.9%	-4.0%	-12.3%
DCC	RCC Graves	-13.6%	-8.5%	-10.8%
DOMMAGE AUTO brut	DOMMAGE AUTO recours	34.8%	24.1%	69.4%
DOMMAGE AUTO brut	EVENEMENTS CLIMATIQUES	2.7%	1.3%	6.3%
DOMMAGE AUTO brut	CAT NAT	2.0%	2.2%	-7.2%
DOMMAGE AUTO brut	RCC Graves	-10.4%	-7.3%	-3.2%
DOMMAGE AUTO recours	EVENEMENTS CLIMATIQUES	12.9%	9.3%	7.6%
DOMMAGE AUTO recours	CAT NAT	-17.9%	-13.1%	-15.2%
DOMMAGE AUTO recours	RCC Graves	19.2%	12.4%	11.3%
EVENEMENTS CLIMATIQUES	CAT NAT	10.8%	7.5%	15.4%
EVENEMENTS CLIMATIQUES	RCC Graves	4.6%	3.0%	3.0%
CAT NAT	RCC Graves	-16.4%	-9.3%	-5.3%

Figure 101 : Mesures de dépendance entre les segments, à partir des résidus.

Les garanties assistance, événements climatiques et cat nat sont affichées pour information mais aucune dépendance ne sera leur sera associée. En effet, les liquidations de ces garanties sont quasiment sur une année. De plus, l'enjeu pour l'auto est très faible.

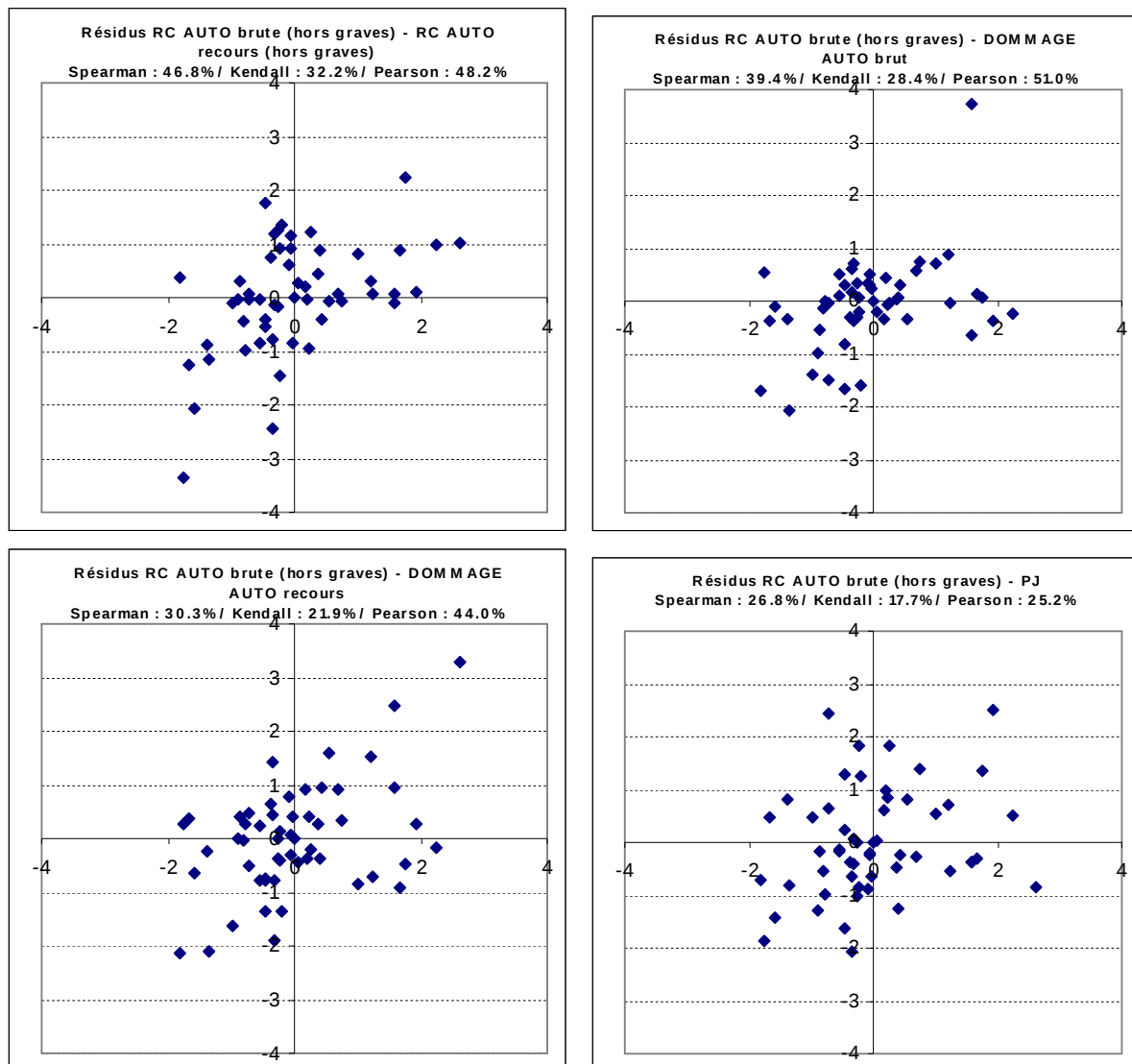
De ces mesures, nous identifions 7 couples significatifs de dépendances :

- RC AUTO Brute (hors graves) et RC AUTO recours (hors graves)
- RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO brut
- RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO recours
- RC AUTO Brute (hors graves) – PJ
- RC AUTO Recours (hors graves) – PJ
- PJ – DCC
- DOMMAGE AUTO Brut et DOMMAGE AUTO recours

Le lien entre la garantie RC et la PJ s'explique par la garantie défense incluse dans la RC. Celui entre la PJ et la DCC est issue de la garantie recours agrégée avec la PJ.

La relation entre les sinistres graves et la RC AUTO hors graves semble quasi inexistante.

Nous étudions alors les corrélogrammes des couples identifiés.



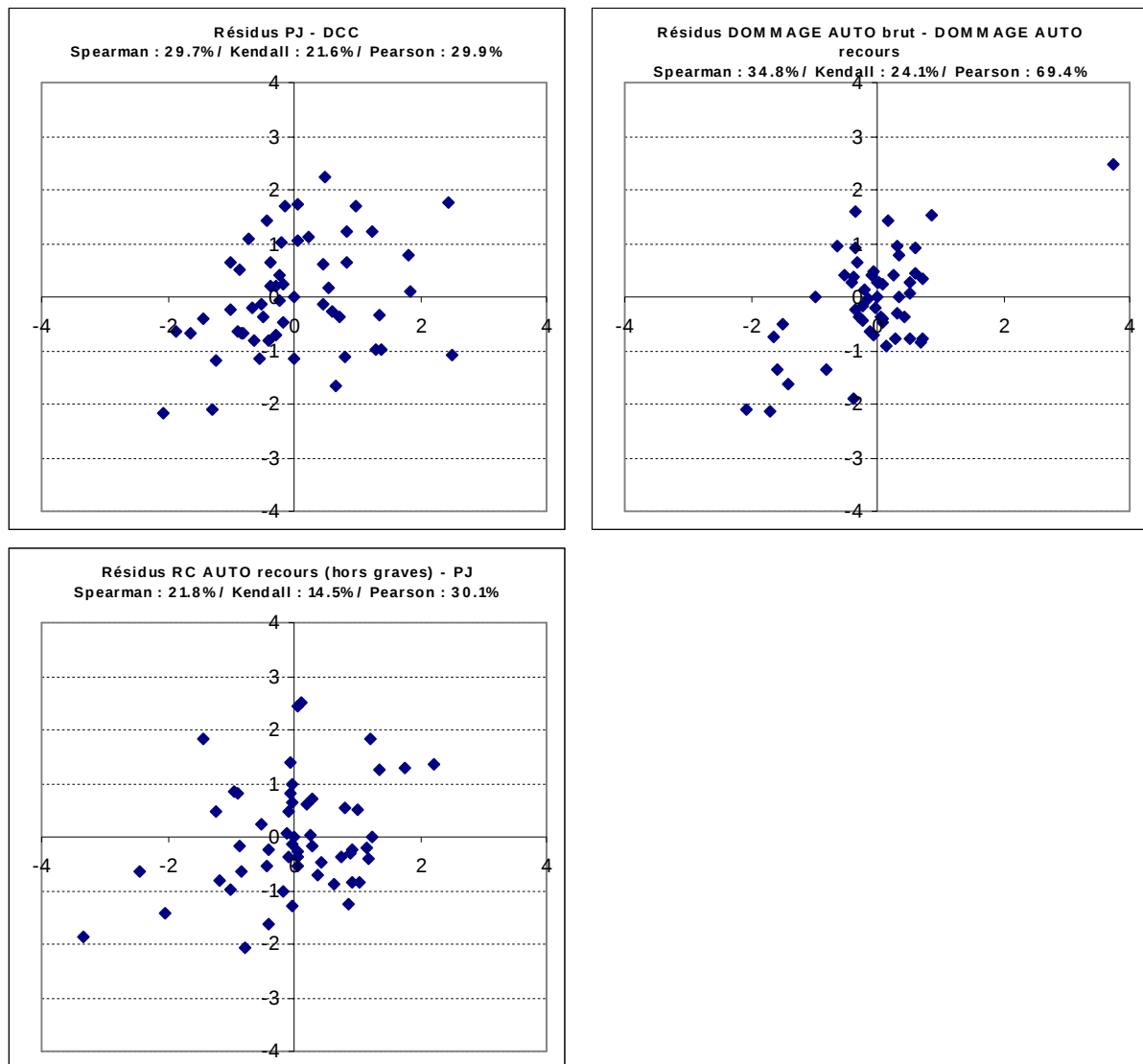


Figure 102 : Graphiques des résidus entre couples de segments.

On s'aperçoit que pour les couples associant une garantie longue avec une courte, les mesures de dépendances sont biaisées par les résidus nuls plus nombreux sur la branche courte. Nous observons ce phénomène sur :

- RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO brut
- RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO recours

Pour ces deux couples, nous proposons alors de limiter l'analyse à la profondeur de la branche courte. Ainsi, nous ne représentons plus que les résidus des deux premières années de développement.

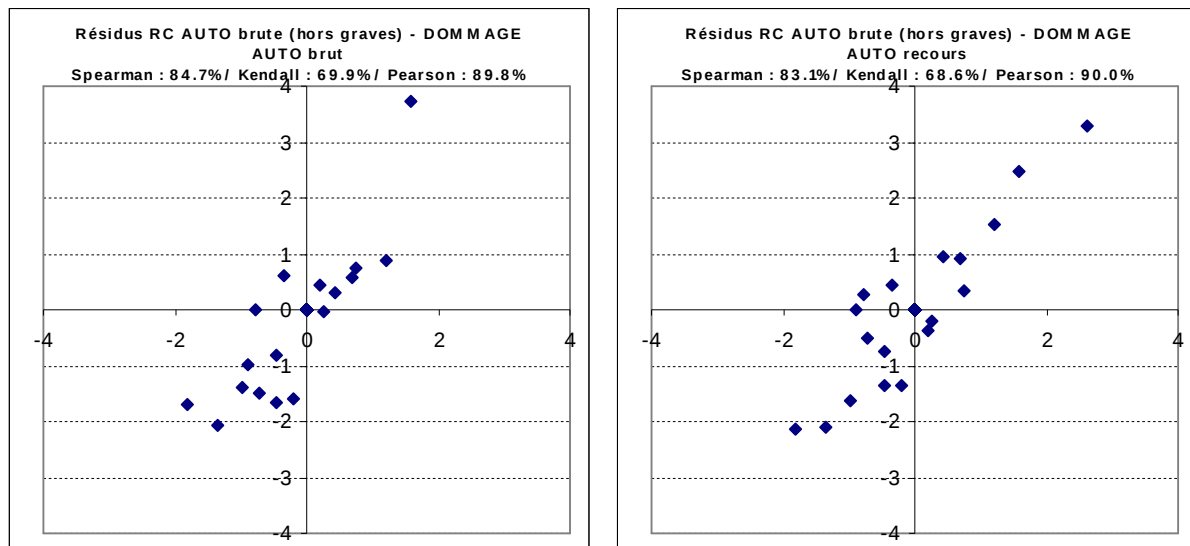


Figure 103 : Graphiques des résidus entre couples de segments sur les deux 1ères années de développement.

5.4.3 Choix du modèle

Nous sommes conscients que les dépendances influenceront peu les résultats. De plus, étant données les approximations de la démarche, le faible nombre d'observations, la faible densité de couples extrêmes de résidus, nous préférons adopter une démarche pragmatique dont les avantages sont :

- La simplicité de mise en œuvre,
- Sa pérennité.

Il nous semble en revanche important de rappeler, avec les résultats obtenus, les deux scénarios de référence :

- l'indépendance,
- le scénario extrême : comonotonie entre les segments exceptés sur les recours RC AUTO et les recours DOMMAGES considérés indépendants des autres segments.

Aussi, nous décidons de tenir compte de dépendances entre les 7 couples précédemment identifiés à savoir :

- RC AUTO Brute (hors graves) et RC AUTO recours (hors graves)
- RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO brut
- RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO recours
- RC AUTO Brute (hors graves) – PJ
- RC AUTO Recours (hors graves) – PJ
- PJ – DCC
- DOMMAGE AUTO Brut et DOMMAGE AUTO recours

Pour cela, nous mettons en œuvre une copule normale, dont le paramètre est obtenu par la méthode des moments (relation décrite dans le paragraphe 5.2.2.2 Estimation des paramètres).

	τ de Kendall	θ copule normale
RC AUTO Brute (hors graves) et RC AUTO recours (hors graves)	32%	48%
RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO brut	70%	89%
RC AUTO Brute (hors graves) – DOMMAGE AUTO recours	69%	88%
RC AUTO Brute (hors graves) – PJ	18%	27%
RC AUTO Recours (hors graves) – PJ	14%	23%
DOMMAGE AUTO Brut et DOMMAGE AUTO recours	75%	92%
PJ - DCC	22%	33%

θ estimé par la méthode des moments

5.4.4 Résultats

Nous commençons par étudier les fonctions de répartition des provisions auto.

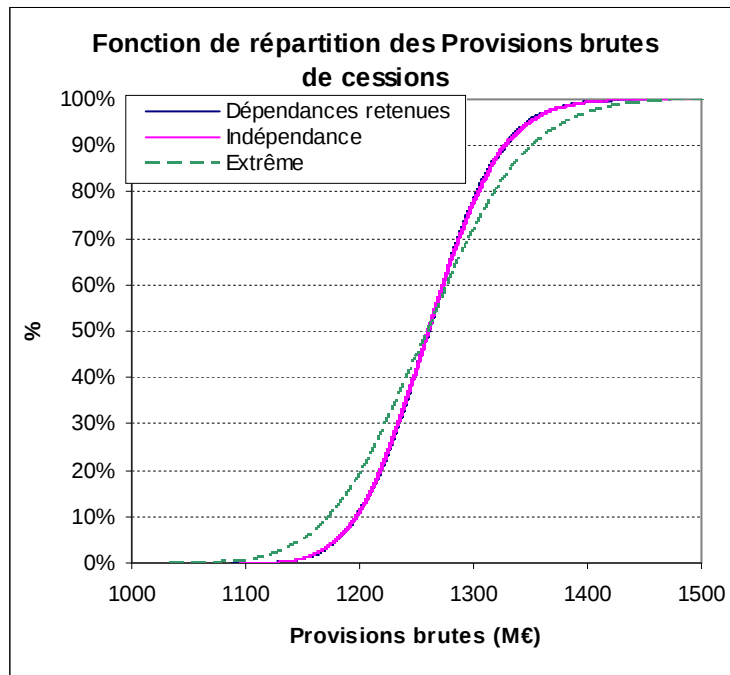


Figure 104 : Impact des dépendances sur la distribution des provisions automobile.

La distribution des provisions brutes est, avec la structure de dépendance retenue, quasiment superposée avec le scénario indépendant. En effet, les fortes dépendances entre le brut et recours annulent l'effet des dépendances positives des autres segments. Nous rappelons que le segment le plus influent sur les résultats est supposé indépendant des autres.

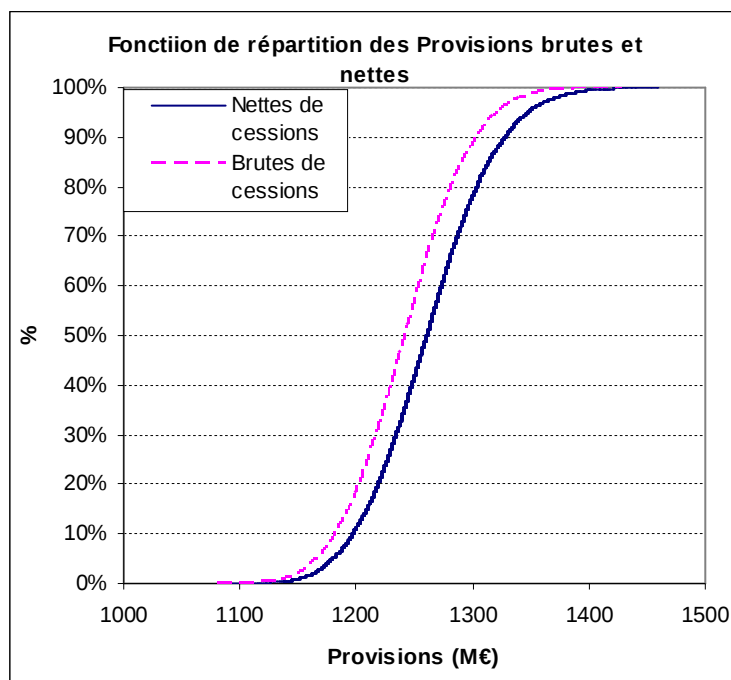


Figure 105 : Distributions de provisions automobile, brutes et nettes de cessions.

Nous visualisons ici les distributions des provisions totales auto, brutes et nettes de réassurance. Les provisions moyennes nettes sont inférieures à celles brutes puisque la courbe en net est décalée sur la gauche. La volatilité des provisions nettes est moindre que celles en brut, l'écart horizontal entre les deux courbes étant moindre en bas qu'en haut.

Au quantile à 99,5, les provisions automobiles sont les suivantes :

Provisions Eco au Q99.5(M€)	Indépendance	Dépendances retenues	Dépendance extrême
Provisions	1403.9	1400.5	1452.9
Delta (M€)		-3.5	49.0
% / indépendance		-0.2%	3.5%

Dépendance extrême : tous les segments sont parfaitement dépendants, sauf les recours considérés comme indépendants.

Figure 106 : Provisions brutes de cessions au quantile à 99,5 pour les 3 scénarii.

Nous observons sans surprise des quantiles à 99,5 similaires pour les scénarii « indépendance » et « dépendance estimée ». Le scénario extrême est lui supérieur de quasiment 50M€ comme mentionné dans le paragraphe 5.4.1 Mesure des enjeux.

Finalement, nous comparons à la maille solvabilité 2, les chargements ρ obtenus au travers des simulations avec ceux du QIS5.

Nous soulignons que ces coefficients sont déterminés suivant un horizon de risque 1 an pour le QIS5, alors qu'ils sont calculés au travers du modèle sur un horizon infini. Les chargements du modèle sont donc surestimés par rapport à ceux du QIS5.

Nets de cessions	Chargement ρ modèle (ultime)		Chargement ρ QIS5 (1 an)
	Dépendances retenu	Extrême	
RC AUTO	11%	13%	27%
DOMMAGES AUTO	10%	29%	29%
ASSISTANCE	29%	29%	32%
PJ	9%	9%	26%
PROTECTIONS REVENUS	59%	59%	42%

Figure 107 : Comparaisons des chargements en capital.

Entre les deux scénarii du modèle, des différences sont générées en RC AUTO et dommages auto. En effet, ils sont composés des sous segments suivants :

- RC AUTO : RC AUTO hors graves bruts, RC AUTO hors graves recours et RC AUTO Graves.
- DOMMAGES AUTO : Dommages auto bruts, dommages auto recours, cat nat, évènements climatiques

La différence entre les deux scénarii est particulièrement sensible pour les dommages auto.

Les chargements QIS5 sont systématiquement supérieurs à ceux du modèle, sauf pour le segment protection de revenus (Dommages corporels du conducteur).

Conclusion

Nous venons de proposer et décrire un modèle de provisionnement de la branche automobile. Pour cela, nous avons adopté une démarche ascendante (« bottom-up »).

Pour la partie hors graves, nous avons exploité des méthodes classiques de provisionnement à partir des données agrégées en triangles de règlements. Ces méthodes sont « compatibles » avec Solvabilité 2 puisqu'elles sont basées sur la projection des flux futurs. Nous avons mis l'accent sur le retraitement des données avec la mise au point d'une segmentation homogène de risques ainsi que le redressement des paiements par l'inflation.

L'intérêt de ces travaux réside dans :

- Le respect des hypothèses des modèles utilisés.
- L'expression explicite d'une hypothèse d'inflation future permettant notamment d'en étudier la sensibilité sur les résultats.

La principale limite à laquelle nous avons été confronté dans cette démarche est la projection des risques climatiques et catastrophes naturelles.

Dans la partie suivante, nous avons proposé un modèle d'évaluation individuelle des provisions pour sinistres graves. Pour cela, nous avons dressé le constat qu'il n'existe pas dans la littérature de modèles visant à projeter les flux futurs des sinistres graves (exigence Solvabilité 2). De manière pragmatique, nous avons mis au point un modèle de sinistres graves basé sur :

- Un taux de paiement exercice nul (fonction de l'année de développement du sinistre),
- Une distribution de paiements exercice non nuls.

Mise en œuvre sur la garantie RC Corporelle, nous avons associé à ce modèle, une évaluation spécifique des capitaux constitutifs de rentes et de leur liquidation.

Ainsi, il nous permet une évaluation précise des cessions en réassurance, c'est-à-dire intégrant les clauses spécifiques aux traités RC non proportionnels.

La principale critique que nous retenons à ce stade est la simplicité du modèle de projection des rentes potentielles.

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à la consolidation des différents segments d'analyse afin de constituer la provision globale automobile. Dans l'étude des dépendances, nous avons mis en avant des liens entre le brut et le recours ainsi qu'entre les garanties RC, dommages, PJ, dommages corporels du conducteur. Toutefois, leur impact est faible par rapport à une vision indépendante des risques. Le segment le plus influent sur les résultats, à savoir les graves RC, est indépendant des autres segments. Il faut toutefois apporter un peu de relief à cette analyse, puisque de nombreuses approximations ont dû être formulées.

En synthèse, nous dégagons de ce modèle de nombreux avantages :

- Un modèle « tout-en-un » : évaluation économique des provisions (pas d'actualisation sur la partie hors rentes) ou bien au référentiel Solvabilité 2 (actualisation des flux futurs avec une courbe des taux); Evaluation des provisions brutes ou nettes de cessions ; Analyse des flux futurs...
- Un modèle exploitable d'un point de vue opérationnel.
- Un modèle dégageant des possibilités intéressantes en termes de calculs de sensibilité.

Une étape supplémentaire aussi bien sur la partie hors graves que sur la partie des graves consiste à projeter les frais de gestion sinistres.

L'objectif est d'utiliser ce modèle dès 2011 pour les travaux de valorisation économique des provisions aussi bien en normes actuelles que pour Solvabilité 2.

Enfin, nous envisageons des pistes d'évolution pour ce modèle. Nous commençons par mentionner la modélisation stochastique de l'inflation qui apporterait une volatilité supplémentaire au modèle. Nous devrions également modéliser le portefeuille de rentes en service pour avoir le panorama complet de la branche. Sur ce dernier point, nous pourrions dupliquer le modèle des rentes potentielles.

En ce qui concerne le modèle de sinistres graves, nous souhaitons :

- Un modèle stochastique de mortalité
- L'élargir à d'autres branches (incendie, RC familiale, RC Générale),
- Inclure les frais de gestion

Annexes

Provisions mathématiques

Code des assurances

Article R331-6 (extrait)

*« Les provisions techniques correspondant aux autres opérations d'assurance sont les suivantes :
1° Provision mathématique des rentes : valeur actuelle des engagements de l'entreprise en ce qui concerne les rentes et accessoires de rentes mis à sa charge ;
... »*

Article R331-7

« La provision mathématique des rentes à la charge des entreprises mentionnées aux 2° et 3° de l'article L. 310-1 ainsi que les capitaux constitutifs desdites rentes sont calculés dans les conditions fixées par arrêté du ministre chargé de l'économie et des finances. »

Article A331-10

« Les provisions techniques des rentes d'incapacité et d'invalidité issues de contrats d'assurance couvrant des risques visés au 3° du premier alinéa de l'article L. 310-1 du code des assurances sont la somme :

1° Des provisions correspondant aux rentes d'incapacité de travail à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres en cours à cette date majorées des provisions dites pour rentes en attente relatives aux rentes d'invalidité susceptibles d'intervenir ultérieurement au titre des sinistres d'incapacité en cours au 31 décembre de l'exercice ;

2° Des provisions correspondant aux rentes d'invalidité à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres d'invalidité en cours à cette date.

Le calcul des provisions techniques de prestations d'incapacité de travail et d'invalidité est effectué à partir des éléments suivants :

1° Une loi de survie en invalidité définie par la table TD 88-90 homologuée par l'arrêté du 27 avril 1993 réactualisant les tables de mortalité ;

Toutefois, il est possible pour une entreprise d'assurances d'utiliser une loi de survie en invalidité établie par l'entreprise d'assurance et certifiée par un actuaire indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaire reconnues par l'Autorité de contrôle prudentiel ;

2° Un taux d'actualisation qui ne peut excéder 60 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur base semestrielle, sans pouvoir dépasser 3,5 %. »

Article A331-12 (extrait)

« Pour le calcul de la provision mathématique, la date de naissance du rentier est reportée au 31 décembre le plus voisin.

Il est tenu compte du fractionnement des rentes et de la non-coïncidence de leur entrée en jouissance avec la date de l'inventaire.

... »

Loi n°74-1118 du 27 décembre 1974 relative à la revalorisation de certaines rentes allouées en réparation du préjudice causé par un véhicule terrestre à moteur (extrait)

«

Article 1

Sont majorées de plein droit, selon les coefficients de revalorisation prévus à l'article L. 455 du code de la sécurité sociale, les rentes allouées soit conventionnellement, soit judiciairement, en réparation du préjudice causé, du fait d'un accident de la circulation, à la victime ou, en cas de décès, aux personnes qui étaient à sa charge.

Article 2

Les majorations prévues à l'article précédent sont à la charge du débiteur de la rente ou de l'organisme qui lui est substitué.

Les majorations dont le versement incombe aux sociétés d'assurance et au fonds de garantie prévu à l'article L. 421-1 du code des assurances sont gérées et financées par ledit fonds.

Proposition de loi Lefrand (Extrait)

« Article 1^{er}

Création, sous contrôle de l'État, d'une base de données accessible au public sur internet, recensant les transactions et les décisions judiciaires et administratives en matière de réparation du dommage corporel de personnes victimes d'un accident de la circulation.

Article 2

Établissement par décret, d'ici à deux ans, d'un barème médical unique d'évaluation des atteintes à l'intégrité physique et psychique.

Article 3

Établissement par décret en Conseil d'État d'une nomenclature unique non limitative des chefs de préjudices indemnissables.

Article 5

Obligation, pour l'assureur, d'envoyer à la victime d'un accident de la circulation une notice d'information sur ses droits.

Article 7

Interdiction, pour un médecin d'être conseil de la victime d'un accident de la circulation vis-à-vis d'une compagnie d'assurance dont il est aussi habituellement médecin conseil. Obligation, pour les médecins de déclarer auprès des conseils départementaux de l'ordre des médecins, les noms des compagnies d'assurance pour lesquels ils travaillent.

Article 8

Obligation, pour l'assureur, de verser une provision à la victime dès lors qu'il est probable que des aménagements dans son appartement, ou sa voiture ou que la présence d'une tierce personne seront nécessaires.

Article 9

Allongement de 15 à 30 jours du délai de dénonciation de la transaction concluant la procédure amiable entre la victime et l'assureur. »

Proposition de loi Béteille (Extrait)

« Article 1386-28

lorsque le juge statue en matière de dommage corporel, il se réfère à une nomenclature ainsi qu'à un barème national d'invalidité régulièrement mis à jour, définis par voie réglementaire.

Article 1386-29

les dommages et intérêts peuvent être alloués sous forme de capital ou de rente, mais lorsque l'indemnité sera inférieure à un certain montant défini par décret, l'indemnité sera, en priorité, allouée sous forme de capital.

Article 1386-30

lorsque l'indemnité sera versée sous forme de rente, le juge pourra décider de l'indexation et des portant réforme de la responsabilité civile et des conditions dans lesquelles elle sera révisée, en cas d'aggravation ou de diminution du dommage. »

Annexe Garanties

Garantie RC

Pour l'application du modèle de Mack, les représentations graphiques et tests pour valider les hypothèses sont les suivants :

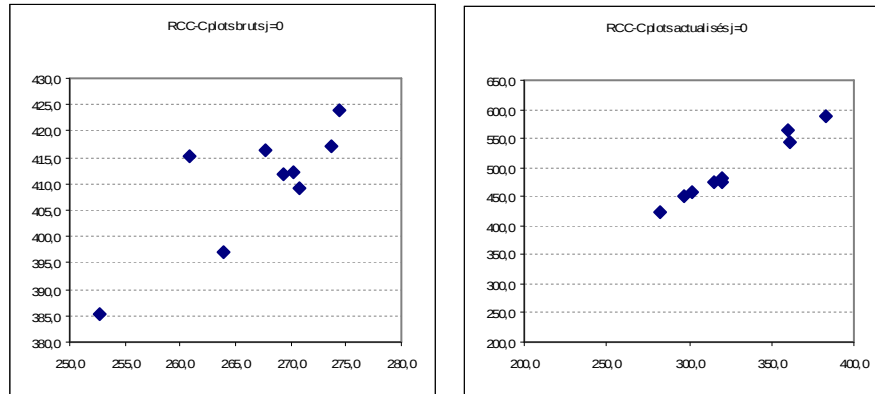


Figure 108: RC hors graves, Ci0 vs Ci1 avant et après redressement de l'inflation

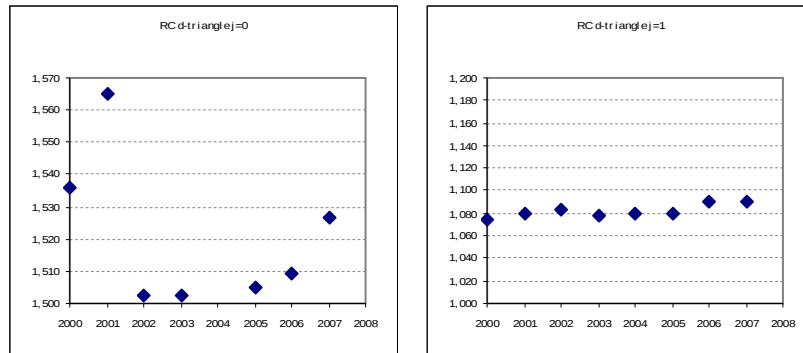


Figure 109: RC hors graves, link ratio 1^{ère} et 2^{ème} année de développement

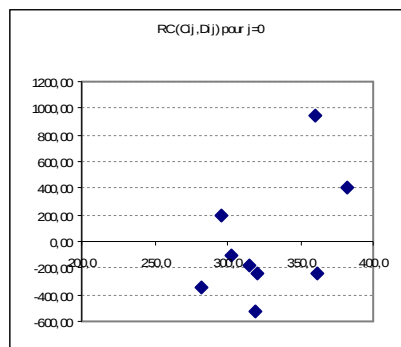


Figure 110: RC hors graves, résidus

Pour l'application du *bootstrap*, les études préliminaires sont les suivantes :

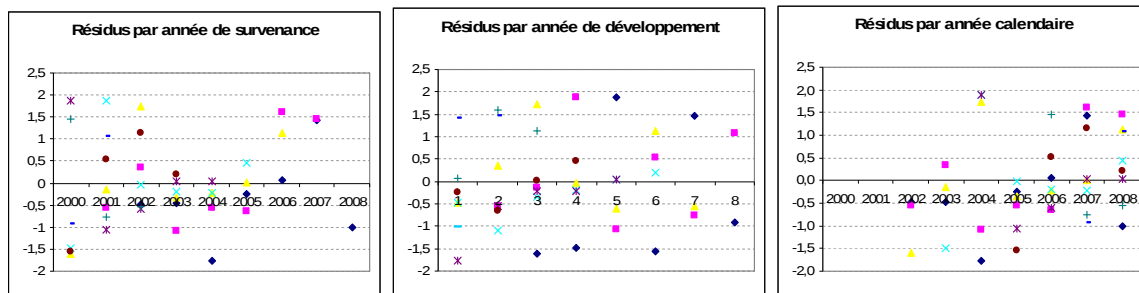


Figure 111: RC hors graves, résidus sur triangle de paiement

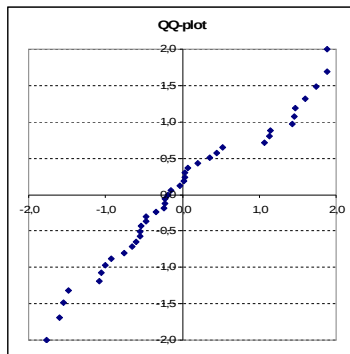
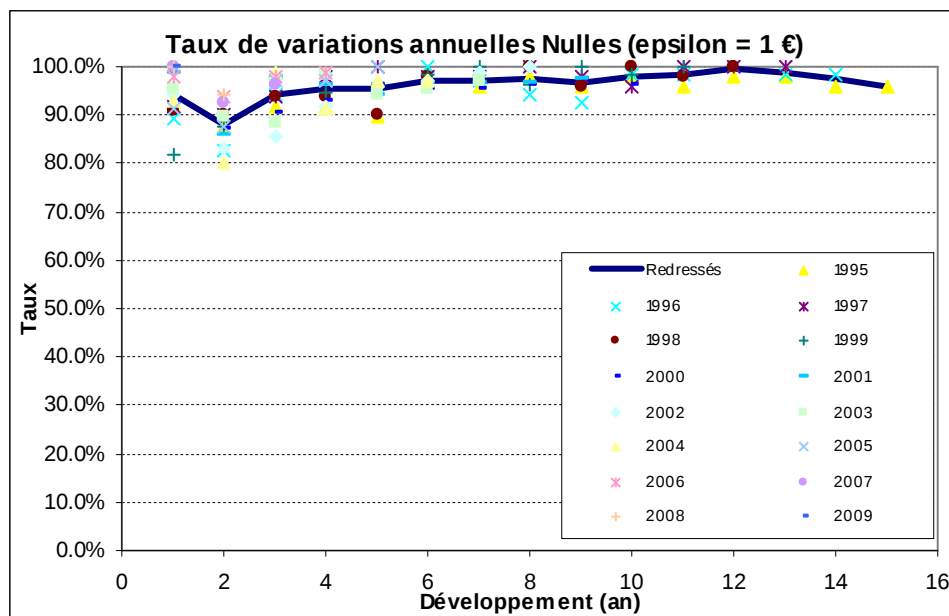
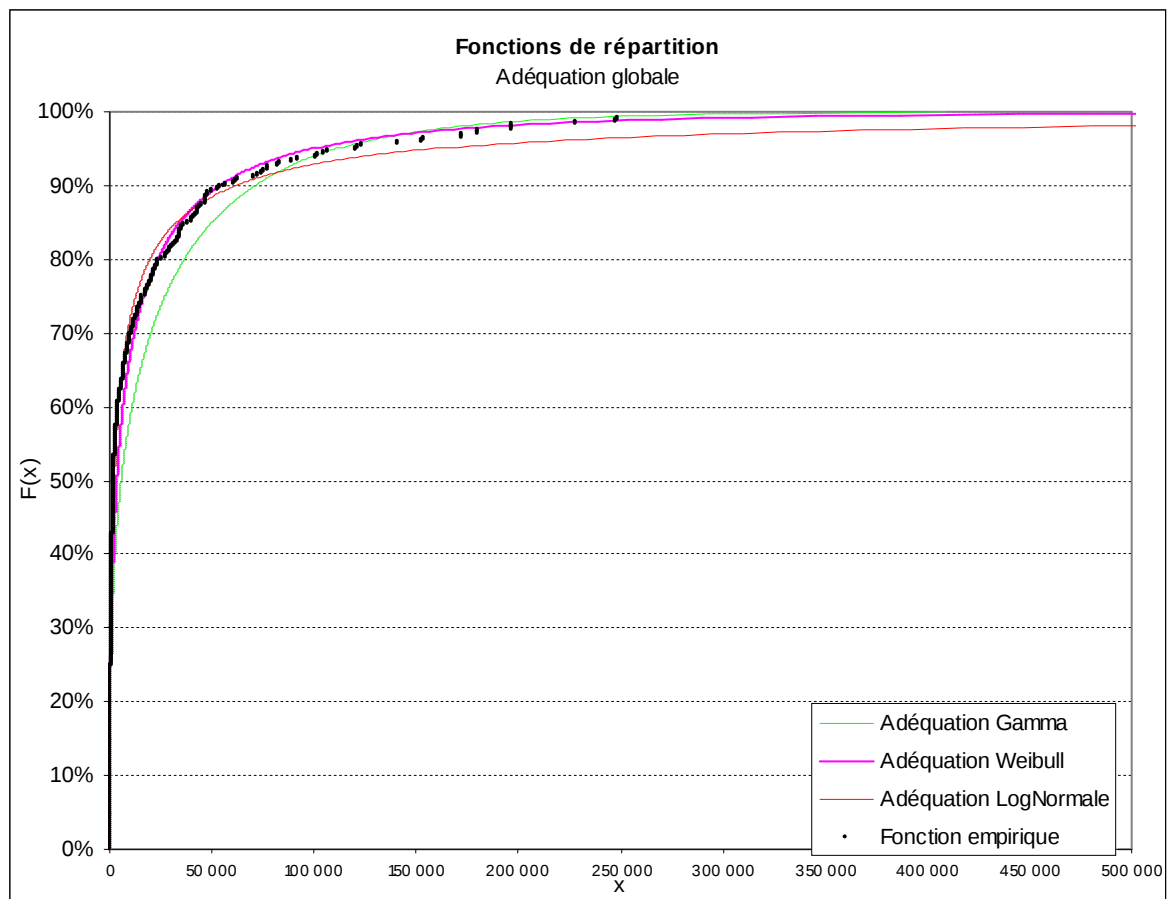
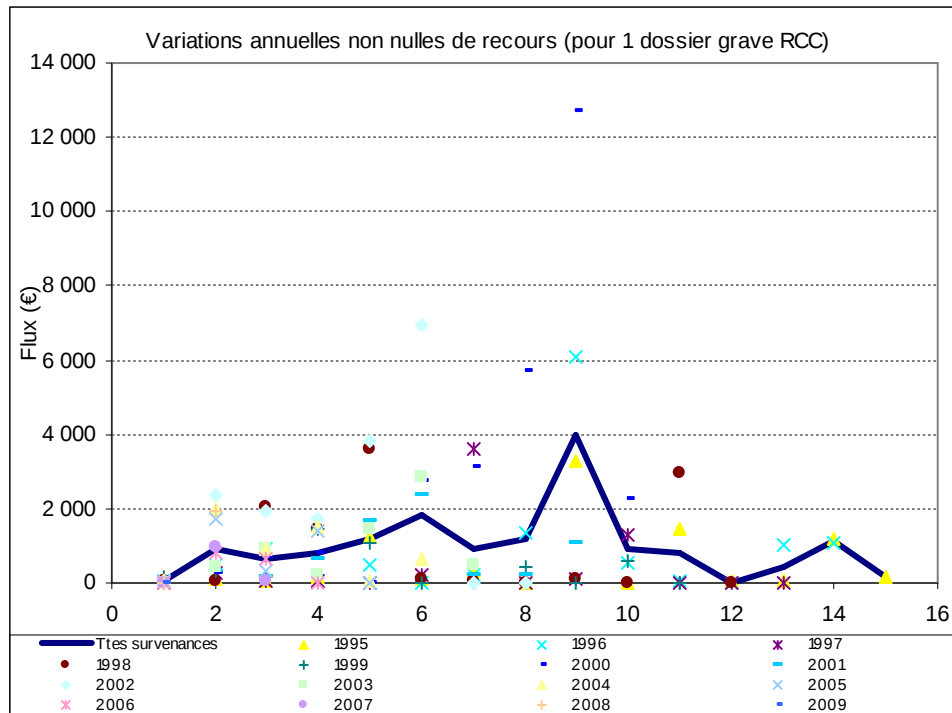


Figure 112: RC hors graves, QQ-plot résidus sur triangle de paiement

Le test « Up and Down » est positif. Le résultat du test de Kolmogorov-Smirnov ne rejette pas l'hypothèse de normalité des résidus au seuil de 5%.

Modélisation du recours pour les sinistres graves en RC Corporelle





Loi Weibull

	<u>p1</u>	<u>p2</u>
Paramètres	0.43	7 680.8
Erreur Standard	0.0167	979.8
P Value AD	4.3%	
P Value KS	1.3%	

Loi Gamma

	<u>p1</u>	<u>p2</u>
Paramètres	0.29	83 114.9
Erreur Standard	0.0166	9 321.6
P Value AD	0.00%	
P Value KS	0.00%	

Bibliographie

- ¹ Conditions générales du contrat AUTO MAAF, 2009.
- ² Guide barème européen d'évaluation médicale des atteintes à l'intégrité physique et psychique – CEREDOC / Groupe « ROTHLEY », septembre 2004
- ³ JP Dintilhac, Rapport du groupe de travail chargé d'élaborer une nomenclature des préjudices corporels, Juillet 2005.
- ⁴ <http://www.victimesindeemnieees-fvi.fr/>
- ⁵ Gazette du Palais du dimanche 7 au mardi 9 novembre 2004, p11-15.
- ⁶ AFA, Livre blanc sur l'indemnisation du dommage corporel, avril 2008
- ⁷ DIRECTIVE 2009/138/CE DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)
- ⁸ Mack T. (1993) : « Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates », *ASTIN Bulletin*, 23, 213-225.
- ⁹ Mack, T. (1993) : « Measuring the variability of chain ladder reserves estimates », *Meeting of the Casualty Actuarial Society*, 101-182.
- ¹⁰ Pitrebois, S., De Longueville, P., Denuit, M., Wahlin, J-F. (2002) : « Etude de techniques IBNR modernes », *actu-L* 2, 29-62.
- ¹¹ Efron, B., Tibshirani, R. J. (1993) : « An introduction to the bootstrap » *Chapman and Hall*.
- ¹² England, P. D., Verrall, R. J. (1999) : « Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving » *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 281-293.
- ¹³ Renshaw, A. E. Verrall, R. J. (1998) : « A stochastic model underlying the chain-ladder technique » *B.A.J.* 4, 903-923.
- ¹⁴ Partrat, C., Lecœur, E., Nessi, J-M., Nisipasu, E., Reiz, O. « Provisionnement technique en Assurance Non-Vie, perspectives actuarielles modernes », *Economica*, 217-218.
- ¹⁵ Murphy K., McLennan A. (2006) : « A Method For Projecting Individual Large Claims ». CAS Forum
- ¹⁶ Hubert C., Guay P. (2008) : « Mesure d'incertitude en provisionnement IARD : modélisation des branches longues et traitement des valeurs extrêmes », Mémoire CEA.
- ¹⁷ Mahon J.B. (2005) : « Transition Matrix Theory And Individual Claim Loss Development ». CAS Forum.
- ¹⁸ Caillaud DC (2005) : « Modélisation des sinistres graves en assurance non vie. » Mémoire ISUP.
- ¹⁹ Partrat C., J.L. Besson (2004) : « Assurance non-vie. Modélisation, Simulation ». *Economica*
- ²⁰ Denuit M., Charpentier A. (2004) : « Mathématiques de l'assurance non vie », *Economica*.
- ²¹ Braun, C. (2004) : « The prediction error of the chain ladder method applied to correlated run-off triangles », *ASTIN Bulletin*, 34, 399-423.
- ²² Kirschner G., Kerley, C., Isaacs, B.(2002) : « Two approaches to calculating correlated reserve indications across multiple lines of business », Reserves discussion papers, CAS Forum
- ²³ Krauth G. (2007) : « Provisionnement et corrélation entre branches », mémoire CNAM.