

**Mémoire présenté le :**

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : COSTEMALE Adrien

Titre : CONSEIL POUR LA REVISION DE L'OPTIMALITE DE  
PROGRAMMES DE REASSURANCE NON-VIE

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.*

*Membres présents du jury de l'IA*

*Signature*

*Entreprise*

*Nom : JLT TOWERS RE*

*Signature :*

*Membres présents du jury de l'ISFA*

*Directeur de mémoire en entreprise*

*Nom : LEFEVRE*

*Signature : FAÏZA*

*Invité*

*Nom :*

*Signature :*

***Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)***

*Signature du responsable entreprise*

*Signature du candidat*

*Secrétariat :*

Mme Christine DRIGUZZI

*Bibliothèque :*

Mme Patricia BARTOLO

# Conseil pour la révision de l'optimalité de programmes de réassurance non-vie

---

ISFA

Adrien Costemale  
Master 2 SAF



## Mots clés

Réassurance non-proportionnelle, modélisation, tarification de programmes, optimisation de réassurance, conseil, crédibilité en réassurance.

## Résumé

La réassurance est une opération financière indispensable de nos jours. Elle permet le transfert des risques financiers d'une entité appelée cédante, à une autre, le cessionnaire en échange d'une prime.

Ceci engendre bien évidemment tout une série de problématiques liées à :

- l'évaluation et réduction de la charge sinistre de la cédante,
- l'amélioration de ses capacités de souscription
- la réduction de la prime de réassurance,
- la diminution des besoins en capitaux,
- la réduction des exigences de fonds propres,
- l'amélioration de ses résultats financiers

Dans ce mémoire, nous avons décidé de nous placer dans le cadre d'une situation de conseil envers une cédante non-vie, qui viendrait nous mandater pour revoir ses problématiques réassurantielles.

Cette révision consisterait, en accord avec ses activités et son appétence au risque, à répondre à l'ensemble de ses demandes pour l'ensemble de ses secteurs d'activités à savoir, l'IARD et la RCA :

- Modélisation des charges sinistres et des besoins en capitaux
- Analyse de la structure de réassurance existante
- Optimisation de la structure par rapport au résultat technique et des besoins en capitaux

Et, moins classiques :

- Optimisation des structures par rapport à un indice résumant l'efficacité des structures
- Recherche d'arguments techniques pour la négociation de la prime de réassurance

Pour répondre à ces interrogations nous allons, dans ce mémoire, procéder en trois temps.

Nous allons dans un premier temps procéder à la tarification des structures actuelles de la cédante. Pour ce faire, nous allons utiliser des modèles statistiques pour simuler les sinistralités de tous les secteurs d'activités de la cédante. Une fois les prix déterminés, nous les comparerons à ceux pratiqués par les réassureurs.

Dans un second temps, nous étudierons les processus d'optimisations sous deux angles et les tarifierons. Nous établirons d'une part différentes options de structures afin de rechercher une amélioration de résultat et de besoin en capitaux. Nous étudierons d'autres parts l'optimisation sous l'angle de la valeur économique de la réassurance.

Enfin, nous introduirons un modèle de crédibilité qui sera utilisé pour pondérer la tarification avec les pratiques du marché. Cela nous permettra d'observer si notre tarification de réassurance proposée à la cédante est bien évaluée.

Ce mémoire a vocation à présenter des solutions aux demandes de la cédante. La prise de décision lui appartenant totalement, nous ne ferons que donner, à l'aide des données fournies, des éléments de réponse. En effet, nous n'avons pas toutes les données (politique économique, produit, gestion des risques et business plan,...) de la cédante en main pour conduire une telle décision.

## Key words

Non-proportional reinsurance, modeling, reinsurance pricing, reinsurance optimisation strategy, advisory, reinsurance credibility.

## Abstract

Nowadays, reinsurance is an essential financial operation. Through reinsurance, an institution, the cedant, can transfer its financial risk to another company in exchange for a premium.

Such an operation drives to several issues which include :

- the valuation and reduction of cedant claims costs
- the improvement of its underwriting capacity
- the reduction of reinsurance premium
- the decrease of capital needs
- the reduction of capital requirements
- the improvement of financial results

For the purpose of this master's thesis, we will act like an advisory company, helping a non-life cedant to optimize its reinsurance strategy.

The revision will involve all its business lines (property and casualty and vehicle liability insurances). According to the cedant activities and risk appetite, our assistance will cover the following :

- Claims costs and capital needs modelling
- Analysis of the existing reinsurance structure
- Optimization of structures through technical result and capital needs improvements

We will also get involved in :

- Optimization of the existing structure through the maximization of the economic value
- Research of technical arguments to negotiate lower reinsurance premium

To meet these expectations, we will proceed in three steps.

We will first implement pricing models to evaluate the existing structure. For this, we will use statistical models to simulate all business lines claims experiences and price the structure. Then, we will compare these prices to those provided by reinsurers.

We will then propose two optimization processes adapted to the structure and price each of them. On one hand, several structures options will be suggested in order to improve results and capital needs of the company. On the other hand, an unusual optimization approach using the reinsurance economic value will be implemented.

Finally, we will introduce a credibility model that will be used to weight the pricing according to market practices. This will allow us to check that the reinsurance rates are correct, not over or under evaluate.

This paper aims to provide solutions to cedant's issues. Based on data given by the cedant, we tried to give some possible answers through these pages. However, the cedant is free to implement these solutions or not.

## Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribuées, de près ou de loin, à ce mémoire :

Bien évidemment, je tiens à exprimer, en tout premier lieu, toute ma gratitude envers ma tutrice de mémoire, Mme **Faïza Lefèvre**, sans qui rien de tout cela n'aurait été écrit.

Merci Faïza pour tes conseils, ta bonne humeur, ta pédagogie, tes relectures, tes critiques constructives et ton partage. C'était, c'est, et ce sera toujours un plaisir de travailler avec toi.

Merci également à Mr **Olivier Bourdin** pour sa gentillesse, son humour communicatif et ses conseils, et dont le seul défaut est d'être fan de l'Olympique Lyonnais. Personne n'est parfait. Allez Bordeaux !

---

Je tiens également à manifester ma reconnaissance envers Mme **Anne Eyraud-Loisel** et ma tutrice ISFA, Mme **Ying JIAO**.

Encore du côté de l'ISFA, je remercie Mr **Frédéric PLANCHET** dont la disponibilité est exemplaire, et qui m'a beaucoup aidé notamment dans l'obtention de documents indisponibles et ce, à toute heure de la journée.

Toujours du côté de l'ISFA, comment pourrai-je oublier l'aide que m'a apportée Mr **Pierre Therond**, pour sa disponibilité tout d'abord, mais également pour ses précieux conseils prodigués au téléphone et qui m'ont été indispensables lors de l'élaboration de la partie sur la théorie de la crédibilité.

Messieurs, merci pour votre aide.

---

Je tiens à remercier du fond du cœur **mon comité de relecture**, pour leurs conseils, leurs corrections et leur soutien. Une bien belle équipe composée de :

- **Evelyne,**
- **Gaëlle,**
- **Mélanie,**

Et, parité oblige :

- **Antoine,**
- **Matthias,**
- Ainsi que **moi-même.**

---

Enfin, **ma famille** et particulièrement **mon frère et mes parents**, bien qu'ils ne comprennent pas vraiment ce que je fais, me sont d'un secours irremplaçable. Merci pour votre soutien toutes ces années, je n'aurai jamais réalisé tout ce parcours sans vous.

Cerise sur le gâteau, je tiens à remercier **Gaëlle**, brillante diplômée de Paris Dauphine en Finance, et sans qui je ne serais pas vraiment le même à l'heure actuelle.

Ton inconditionnel soutien me donne toujours l'envie de me surpasser et de donner plus, tout le temps.

**Merci à tous.**

# Sommaire

<b>MOTS CLES</b> .....	<b>1</b>
<b>RESUME</b> .....	<b>1</b>
<b>KEY WORDS</b> .....	<b>2</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>2</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	<b>3</b>
<b>SOMMAIRE</b> .....	<b>4</b>
<b>PARTIE I : INTRODUCTION</b> .....	<b>7</b>
Section I.1 : Définition de la réassurance .....	8
Section I.2 : Besoin de couvertures .....	8
Section I.3 : Quelques précisions.....	8
Section I.4 : Contexte .....	9
<b>PARTIE II : CONTEXTE TECHNIQUE DE L'ETUDE</b> .....	<b>10</b>
<b>Chapitre 1 : La réassurance</b> .....	<b>11</b>
Section II.1.1 : La réassurance proportionnelle .....	11
Section II.1.2 : La réassurance non-proportionnelle .....	13
Section II.1.3 : Les clauses .....	14
<b>Chapitre 2 : La tarification des traités XS</b> .....	<b>18</b>
Section II.2.1 : Introduction.....	18
Section II.2.2 : Tarification sur expérience.....	18
Section II.2.3 : Tarification probabiliste.....	21
Section II.2.4 : Tarification sur exposition .....	22
Section II.2.5 : Passage de la prime pure à la prime commerciale.....	26
<b>Chapitre 3 : La cédante</b> .....	<b>27</b>
Section II.3.1 : Son domaine et ses risques assurés .....	27
Section II.3.2 : Ses programmes de réassurance en place.....	30
<b>PARTIE III : MODELISATION DES SINISTRALITES ET TARIFICATION DES TRAITES</b> .....	<b>32</b>
<b>Chapitre 1 : Les outils graphiques et statistiques</b> .....	<b>33</b>
Section III.1.1 : Le PP-plot.....	33
Section III.1.2 : Le QQ-Plot .....	33
Section III.1.3 : Le <i>Mean-Excess-Plot</i> .....	34

Section III.1.4 : Le coefficient de détermination $R^2$ .....	34
Section III.1.5 : Le test du $\chi^2$ .....	35
<b>Chapitre 2 : Modélisation de la sinistralité locative .....</b>	<b>35</b>
Section III.2.1 : Traitement des données et hypothèses .....	35
Section III.2.2 : Modèle utilisé .....	35
<b>Chapitre 3 : Modélisation de la sinistralité Incendie.....</b>	<b>36</b>
Section III.3.1 : Traitement des données et hypothèses .....	36
Section III.3.2 : Modèles utilisés et paramétrisation.....	36
<b>Chapitre 4 : Modélisation de la sinistralité tempêtes .....</b>	<b>42</b>
Section III.4.1 : Introduction .....	42
Section III.4.2 : Fonctionnement .....	42
Section III.4.3 : Calcul des sommes assurées .....	42
Section III.4.4 : Les <i>Event Loss Table</i> (ELT).....	44
Section III.4.5 : Application du modèle.....	46
Section III.4.6 : Quel Ecart-type prendre ? .....	48
<b>Chapitre 5 : Tarification de la structure de réassurance DAB .....</b>	<b>48</b>
<b>Chapitre 6 : Modélisation de la sinistralité RCA .....</b>	<b>49</b>
Section III.6.1 : Traitement des données et Hypothèses .....	49
Section III.6.2 : Modèle utilisé et paramétrisation.....	51
<b>Chapitre 7 : Tarification de la structure de réassurance RCA .....</b>	<b>56</b>
<b><i>PARTIE IV : OPTIMISATION DES STRUCTURES DE REASSURANCE.....</i></b>	<b>57</b>
<b>Chapitre 1 : Introduction.....</b>	<b>58</b>
<b>Chapitre 2 : Méthode et critères.....</b>	<b>58</b>
Section IV.2.1 : Méthode.....	58
Section IV.2.2 : Résultats financiers.....	59
Section IV.2.3 : Mesures de risque .....	60
Section IV.2.4 : Mesures de performance.....	62
Section IV.2.5 : Objectifs .....	62
<b>Chapitre 3 : Application et résultats .....</b>	<b>62</b>
<b>Chapitre 4 : Quid de la QP ? .....</b>	<b>66</b>
Section IV.4.1 : Suppression de la QP – Méthode.....	66
Section IV.4.2 : Résultats et choix.....	67
Section IV.4.3 : Comparaison de l’option choisie avec les options intégrant la QP : .....	70
<b>Chapitre 5 : Conclusions.....</b>	<b>72</b>
<b><i>PARTIE V : INTEGRATION D’UN MODELE DE CREDIBILITE.....</i></b>	<b>73</b>
<b>Chapitre 1 : Introduction.....</b>	<b>74</b>

<b>Chapitre 2 : Les modèles de crédibilité .....</b>	<b>74</b>
Section V.2.1 : Le modèle Bayésien.....	74
Section V.2.2 : Le modèle de Bühlmann .....	76
Section V.2.3 : Le modèle de Bühlmann-Straub .....	77
Section V.2.4 : Le modèle « à Variance » .....	81
<b>Chapitre 3 : Application .....</b>	<b>84</b>
Section V.3.1 : Méthodes choisies.....	84
Section V.3.2 : Modèle Bühlmann-Straub avec S/P .....	85
Section V.3.3 : Modèle Bühlmann-Straub avec ROL.....	87
Section V.3.4 : Modèle « à Variance » .....	90
<b>Chapitre 4 : Comparaison et conclusion .....</b>	<b>91</b>
 <b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	 <b>94</b>
 <b>ANNEXES.....</b>	 <b>96</b>
Annexe 1 : « Descriptif des lois de fréquence » : .....	97
Annexe 2 : « Descriptif des lois de sévérité » : .....	97
Annexe 3 : « Estimation des paramètres des lois de fréquence et de sévérité par la méthode de maximisation de la vraisemblance (EMV) » .....	98
Annexe 4 : « Démonstration Espérance-Variance de la charge sinistre ».....	99
Annexe 5 : « Code des Assurances ».....	100
Annexe 6 : « Echelle de Beaufort » .....	105
Annexe 7 : « QQ-Plots : Lois de probabilités utilisées » .....	106
Annexe 8 : « Preuve $\chi^2$ ».....	108
Annexe 9 : « Table $\chi^2$ ».....	111
Annexe 10 : « L'indice FFB ».....	112
Annexe 11 : « L'indice INSEE des taux de salaire horaire » .....	112
Annexe 12 : « Méthode Chain-Ladder ».....	113
Annexe 13 : « Corrélation positive des $X_j$ » .....	115
Annexe 14 : « Meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$ » .....	115
Annexe 15 : « Obtention des arguments (a,b) dans le modèle de Bühlmann».....	115
Annexe 16 : « Démonstration de la formule explicite de la variance » .....	117
Annexe 17 : «Démonstration convexité <b>VarPCcred</b> ».....	118
 <b>TABLE DES TABLEAUX .....</b>	 <b>1199</b>
 <b>TABLE DES FIGURES .....</b>	 <b>121</b>
 <b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	 <b>123</b>

## **Partie I : Introduction**

<u>Section I.1 : Définition de la réassurance</u> .....	8
<u>Section I.2 : Besoin de couvertures</u> .....	8
<u>Section I.3 : Quelques précisions</u> .....	8
<u>Section I.4 : Contexte</u> .....	9

### **Section I.1 : Définition de la réassurance**

En 1843, la première société de réassurance est créée en Allemagne. C'est la Weseler Rück. Mais le marché de la réassurance existe depuis bien longtemps sous d'autres formes.

Aujourd'hui, la réassurance est une opération financière par laquelle une entreprise d'assurance, appelée cédante, transfère des risques financiers à une autre entreprise, appelée cessionnaire ou réassureur, en l'échange d'une prime dite prime de réassurance.

C'est pourquoi on dit familièrement que *le réassureur est l'assureur de l'assureur*.

Ces risques peuvent être :

- D'assumer à la place de l'assureur une partie de ses engagements (transfert d'engagements) ou
- D'assumer une partie de ses pertes dans le cadre de son activité (transfert de pertes)

Les réassureurs peuvent également se réassurer. C'est le marché de la rétrocession.

### **Section I.2 : Besoin de couvertures**

Avec les nouvelles normes mises en place par Solvabilité 2, la réassurance prend une importance cruciale dans le calcul des fonds propres et des exigences de marges. Les entreprises d'assurance, dans le cadre de leurs activités, ont donc besoin d'une réassurance adaptée et efficace. Cela leur permet :

- d'avoir une plus grande stabilité dans leurs bilans en cas d'apparition de sinistres extrêmes à faible fréquence, de cumul non anticipé de sinistres ou encore de dérapage de bilan d'une branche en particulier
- d'augmenter leurs capacités de souscription
- d'obtenir un conseil des réassureurs aux niveaux économique, juridique et technique
- de lisser leurs résultats et en particulier de diminuer le coût du capital
- de recevoir une aide financière au démarrage d'une nouvelle entreprise

### **Section I.3 : Quelques précisions**

Il existe trois types de couvertures : les facultatives, facultatives-obligatoires et obligatoires.

Les facultatives concernent un risque bien spécifique à une police (exemple : risque industriel), le réassureur décide au cas par cas s'il couvre tout ou partie d'un nouveau risque visé par la police.

L'apériteur (le réassureur qui a la plus grosse part de risque) évalue, tarife et fixe les conditions du contrat.

Les facultatives-obligatoires sont des facultatives que le réassureur est obligé d'accepter.

Les traités obligatoires couvrent un ensemble de polices d'un portefeuille dans une branche précise (exemple : couverture Incendie). L'assureur peut donc souscrire de nouvelles polices sans en référer aux réassureurs.

Pour résumer :

Nature de la réassurance	Facultative	Fac-Ob	Traité
Réassureur (acceptation)	Facultatif	Obligatoire	Obligatoire
Cédante (cession)	Facultatif	Facultatif	Obligatoire

Tableau 1 : Types de contrats de réassurance

### **Section I.4 : Contexte**

Ce mémoire se place dans un contexte spécifique qui apparaît de plus en plus fréquemment au sein des courtiers ou des sociétés de conseil.

Il est réalisé dans le cadre d'une mission de conseil et de révision en réassurance.

Un assureur non-vie, appelée par la suite « la cédante », nous a mandatés afin de revoir ses structures de réassurance et de déterminer l'ensemble des solutions que nous pouvons apporter à ses problématiques.

Ses préoccupations sont :

- Une mesure de ses risques potentiels
- Le bon calibrage de ses programmes de réassurance face à ses risques potentiels
- L'adéquation de sa tarification face à ses risques
- L'adéquation de sa tarification face aux pratiques du marché
- L'optimisation de sa structure par rapport à ses résultats financiers et ses besoins en capitaux
- L'optimisation de sa structure par rapport à une mesure globale récapitulative
- L'obtention d'une force de négociation pour tirer ses prix de réassurance à la baisse

Le tout avec une gestion prudente au niveau de l'évaluation de ses sinistralités et de ses besoins en capitaux.

Pour cela, nous allons présenter dans un premier temps, le contexte technique de l'étude en présentant les techniques classiques et les principes de la réassurance.

Puis nous modéliserons les sinistralités probables de la cédante afin de tarifer ses programmes et d'étudier quelle réassurance lui serait la mieux adaptée.

Enfin nous chercherons quelles techniques de tarification peuvent être utilisées pour justifier une négociation à la baisse de ses traités.

## **Partie II : Contexte technique de l'étude**

<b><u>Chapitre 1 : La réassurance</u></b> .....	<b>11</b>
<u>Section II.1.1 : La réassurance proportionnelle</u> .....	11
<u>Section II.1.2 : La réassurance non-proportionnelle</u> .....	13
<u>Section II.1.3 : Les clauses</u> .....	14
<b><u>Chapitre 2 : La tarification des traités XS</u></b> .....	<b>18</b>
<u>Section II.2.1 : Introduction</u> .....	18
<u>Section II.2.2 : Tarification sur expérience</u> .....	18
<u>Section II.2.3 : Tarification probabiliste</u> .....	21
<u>Section II.2.4 : Tarification sur exposition</u> .....	22
<u>Section II.2.5 : Passage de la prime pure à la prime commerciale</u> .....	26
<b><u>Chapitre 3 : La cédante</u></b> .....	<b>27</b>
<u>Section II.3.1 : Son domaine et ses risques assurés</u> .....	27
<u>Section II.3.2 : Ses programmes de réassurance en place</u> .....	30

Dans cette partie nous présenterons tout d'abord les différents types de réassurance qui existent, à savoir la réassurance proportionnelle et ses traités Quote-Part et Excédent de plein, ainsi que la réassurance non-proportionnelle et ses traités Excédent de sinistres et Stop-loss. Ensuite, nous étudierons les grands axes de la tarification des traités non-proportionnels et leurs clauses, puisque cela nous servira, par la suite, dans notre étude de cas.

Commençons par les types de réassurance et leurs traités respectifs.

## Chapitre 1 : La réassurance

Les traités de réassurance se décomposent en deux sections. Les traités proportionnels et les traités non-proportionnels.

### Section II.1.1 : La réassurance proportionnelle

Les traités de réassurance proportionnels sont de deux types : la Quote-Part et l'Excédent de Plein.

- La Quote-Part : QP

Dans un traité en Quote-part, les primes et les sinistres sont cédés proportionnellement selon un taux de cession commun à toutes les polices. Le taux de conservation est le complément de ce taux. Il en est de même des primes.

Exemple : Taux à 50% et apparition de deux sinistres : S1 = 2M€ et S2 = 6M€.

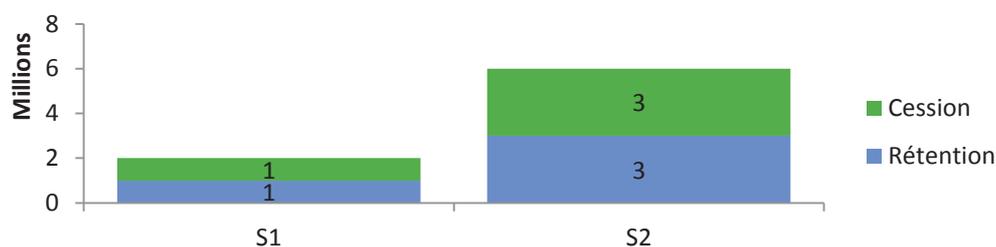


Figure 1 : Fonctionnement de la Quote-Part

Après 50 sinistres simulés selon une loi normale nous appliquons une Quote-Part à 65%, nous obtenons :

	Brut	Net
Min	400 000 €	140 000 €
Max	9 900 000 €	3 465 000 €
Moyenne	5 310 000 €	1 858 500 €
Ecart-type	2 459 126 €	860 694 €
Coef. de variation	46,31%	46,31%

Tableau 2 : Analyse du coefficient de variation après un traité Quote-Part

Nous remarquerons que la volatilité ne change pas après application de la Quote-Part. Ainsi, ce type de traité protège uniquement la cédante sous la forme d'une réduction du risque maximal. Elle ne modifie en aucun cas le profil du portefeuille.

- L'Excédent de Plein : XP

Nous définissons ici la notion de plein de rétention comme le montant maximal que la cédante est prête à assumer par sinistre.

Le taux de cession est calculé pour chaque police de la manière suivante :

- si le capital assuré est inférieur au plein de rétention alors le taux de cession est nul
- à contrario, il est égal au rapport entre la partie de capital assuré qui dépasse le plein sur le capital total

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i : \text{le capital assuré de la police } i \\ C : \text{la capacité de l'Excédent de Plein (multiple du plein de rétention)} \\ P : \text{le plein de rétention} \\ T_i : \text{le taux de cession pour le risque } i \end{array} \right.$$

Le taux de cession s'exprime alors comme :

$$T_i = \text{Min} \left[ \text{Max} \left( \frac{K_i - P}{K_i}, 0 \right), \frac{C}{K_i} \right]$$

Pour la cédante, l'excédent de plein permet donc de conserver la plus grande partie de sa prime tout en bénéficiant d'une protection proportionnelle pour ses risques les plus importants. Pour chaque police cédée, la prime et les sinistres sont cédés au même taux que le capital. Le taux de cession est donc unique pour chaque police.

Exemple : Excédent de plein avec plein de rétention à 5M€, capacité = 2 pleins. Deux capitaux assurés K1 = 10M€ et K2 = 15M€ auxquels surviennent deux sinistres S1 = 6M€ et S2 = 18M€.

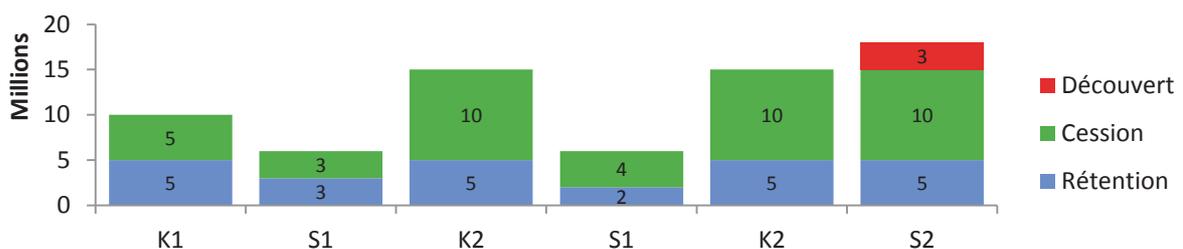


Figure 2 : Fonctionnement de l'Excédent de Plein

Ce type de réassurance plafonne les montants importants mais implique le paiement intégral des petits sinistres en conservation.

C'est une forme de réassurance très utilisée lorsque les capitaux assurés à la souscription sont bien connus, ce qui est assez rare et lourd en gestion pour la cédante.

Après la simulation de 50 sinistres selon une loi normale, nous appliquons l'Excédent de plein précédent, nous obtenons :

	Brut	Net
Min	100 000 €	100 000 €
Max	9 800 000 €	5 000 000 €
Moyenne	4 734 000 €	3 582 000 €
Ecart-type	2 890 302 €	1 660 204 €
Coef. de variation	61,05%	46,35%

Contrairement à une Quote-Part, l'Excédent de Plein diminue la volatilité du portefeuille.

Observons maintenant les traités non-proportionnels.

### Section II.1.2 : La réassurance non-proportionnelle

Les traités de réassurance non-proportionnels sont de deux types : l'Excédent de Sinistres et le Stop-loss.

- L'Excédent de Sinistres : XS

Chaque sinistre est cédé selon un dépassement d'un seuil appelé priorité à hauteur d'un maximum dit portée. Le montant priorité + portée est le plafond du traité. Tout montant dépassant le plafond est à charge de la cédante. Il se note *Portée XS Priorité*. La portée peut être limitée ou infinie.

De manière générale, pour une meilleure compréhension des risques d'un portefeuille, un excédent de sinistres est composé de plusieurs tranches d'XS. Chaque tranche est tarifée selon un pourcentage de l'assiette de prime de la cédante.

Un traité XS peut être par risque, par événement ou bien par risque et par événement.

Exemple : Excédent de sinistres par risque et par événement à 4 tranches, avec une rétention 1M€. Application à un sinistre de 17M€ et un événement de 6 sinistres, pour un total de 8M€.

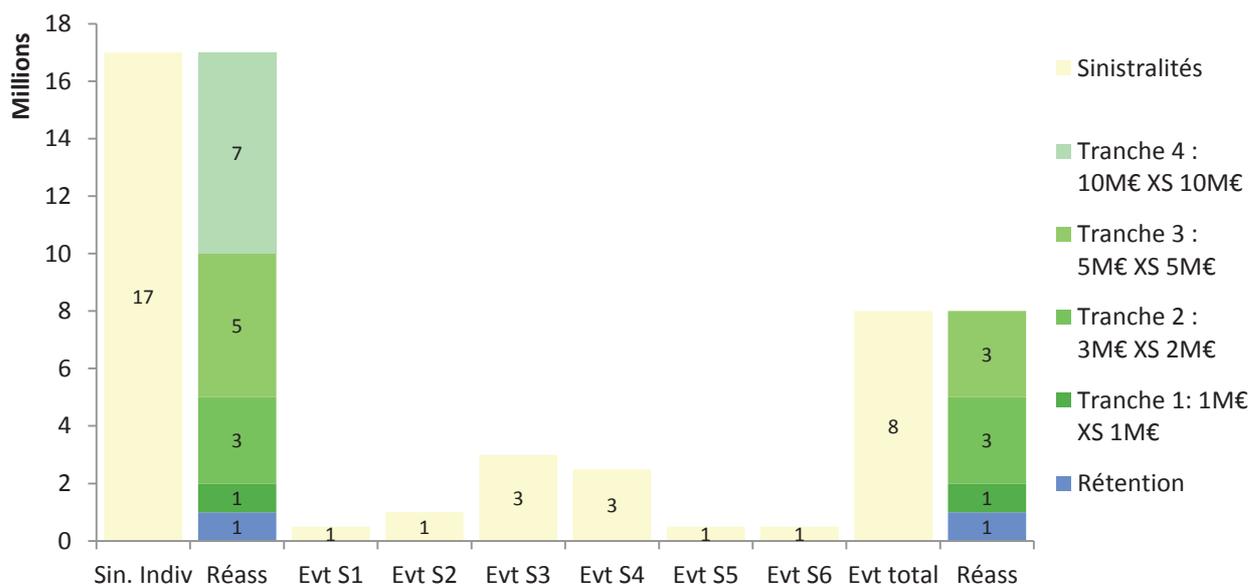


Figure 3 : Fonctionnement de l'Excédent de Sinistres

La montant réassuré R d'un sinistre de montant X est donc égal à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } X \leq \text{Priorité} \\ X - \text{Priorité} & \text{si } \text{Priorité} \leq X \leq \text{Plafond} \\ \text{Portée} & \text{si } X \geq \text{Plafond} \end{cases}$$

En résumé :

$$R = \text{Min} [\text{Max} (X - \text{Priorité} ; 0), \text{Portée}]$$

- L'Excédent de perte annuelle ou Stop-loss

Un stop-loss fonctionne de la même manière qu'un XS mais s'applique au S/P annuel de la cédante. Ainsi, la priorité, la portée et le plafond sont des pourcentages de la prime perçue.

Exemple : 100% XS 90%.

La cédante a reçu 80M€ de primes et a une charge sinistres de 100M€ → S/P = 125%.  
 La rétention est donc de 80M€ x 90% = 72M€.  
 La portée est de 80M€ x 100% = 80M€.  
 Le plafond est donc de 72M€ + 80M€ = 152M€.  
 La cession est donc de  $\text{Min} [\text{Max} (100\text{M€} - 72\text{M€}, 0), 80\text{M€}] = 28\text{M€}$  (35% des primes).  
 (En raisonnant en S/P :  $\text{Min} [\text{Max} (125\% - 90\%, 0\%), 100\%] = 35\%$  des primes.)

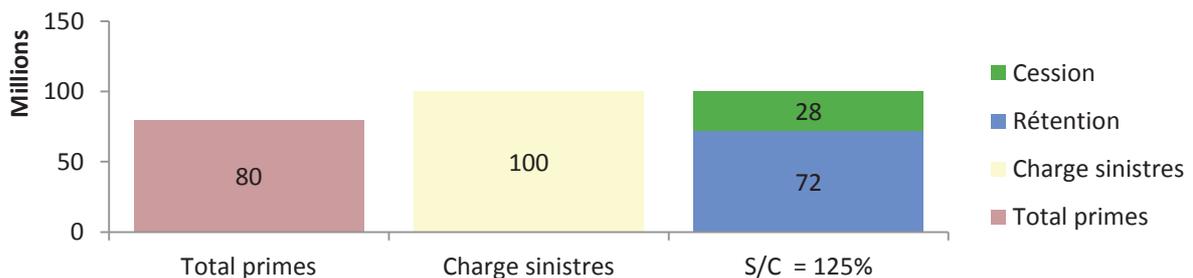


Figure 4 : Fonctionnement de l'Excédent de perte annuelle

L'avantage d'un tel traité réside dans la protection du risque de fréquence de la sinistralité. Cependant il n'est que rarement utilisé car il comporte un risque de dérapage de charge notamment si la cédante, étant protégée, ne contrôle plus sa politique de souscription.

Il est tout de même apprécié pour sa simplicité et son efficacité pour la couverture des risques de catastrophes naturelles et d'attentats.

Concernant les traités XS, leurs clauses spécifiques sont bien souvent employées dans le but de garder une certaine équité dans le partage des sinistres, mais également pour palier des consommations de réassurance imprévues.

### Section II.1.3 : Les clauses

Dans les programmes de réassurance, les traités XS peuvent présenter des clauses. Il est important de les connaître et de savoir les modéliser car elles peuvent radicalement changer le résultat financier de l'opération de réassurance. Nous présentons ici, les clauses principales.

- Clause de reconstitution de garantie

Dans un traité XS la charge totale réassurée peut être limitée. Le seul problème est qu'en cas de fréquence catastrophique ou d'un sinistre trop important, la cédante risque d'être à découvert. La clause de reconstitution de garanties protège la cédante de ce risque en engageant le réassureur à rétablir la couverture en l'échange d'une prime dite de reconstitution. Cela signifie que pour une tranche qui possède deux reconstitutions, le réassureur s'engage à couvrir trois fois cette tranche.

Les reconstitutions peuvent être gratuites ou payantes, illimitées ou limitées. Dans le cas de reconstitutions payantes, la prime additionnelle peut être calculée au prorata capita (selon le montant à reconstituer), au prorata temporis (selon la période de couverture restante) ou bien par double prorata (prorata temporis et prorata capita).

Par conséquent, la reconstitution en tant que couverture supplémentaire, mais également la prime additionnelle s'appliquent dès que l'XS est touché, et ce jusqu'à qu'à épuisement des garanties reconstituables.

Exemple : 50M€ XS 5M€ avec 3 reconstitutions gratuites et 2 payantes dont la prime est calculée au double prorata. Prime de réassurance = 70M€.

Numéro sinistre	Date de survenance	Sinistre brut	Charge XS	Charge prise en compte	Capacité de la reconstitution entamée	Reconstitutions gratuites restantes	Reconstitutions payantes restantes	Prorata Temporis	Prorata Capita	Prorata Total	Prime de reconstitution
0	01/01/2014					3	2				
1	15/01/2013	14 000 000 €	9 000 000 €	9 000 000 €	41 000 000 €	2	2				
2	14/02/2013	32 000 000 €	27 000 000 €	27 000 000 €	14 000 000 €	2	2				
3	05/03/2013	24 000 000 €	19 000 000 €	19 000 000 €	45 000 000 €	1	2				
4	27/03/2013	8 000 000 €	3 000 000 €	3 000 000 €	42 000 000 €	1	2				
5	04/04/2013	16 000 000 €	11 000 000 €	11 000 000 €	31 000 000 €	1	2				
6	17/04/2013	17 000 000 €	12 000 000 €	12 000 000 €	19 000 000 €	1	2				
7	30/04/2013	49 000 000 €	44 000 000 €	44 000 000 €	25 000 000 €	0	2				
8	08/05/2013	21 000 000 €	16 000 000 €	16 000 000 €	9 000 000 €	0	2				
9	12/06/2013	18 000 000 €	13 000 000 €	13 000 000 €	46 000 000 €	0	1	55,62%	8,00%	4,45%	3 114 521 €
10	26/07/2013	8 000 000 €	3 000 000 €	3 000 000 €	43 000 000 €	0	1	43,56%	6,00%	2,61%	1 829 589 €
11	18/08/2013	19 000 000 €	14 000 000 €	14 000 000 €	29 000 000 €	0	1	37,26%	28,00%	10,43%	7 303 014 €
12	06/09/2013	35 000 000 €	30 000 000 €	30 000 000 €	49 000 000 €	0	0	32,05%	60,00%	19,23%	13 463 014 €
13	02/10/2013	18 000 000 €	13 000 000 €	13 000 000 €	36 000 000 €	0	0	24,93%	26,00%	6,48%	4 537 534 €
14	04/11/2013	44 000 000 €	39 000 000 €	36 000 000 €	- €	0	0	15,89%	72,00%	11,44%	8 008 767 €
15	18/12/2013	12 000 000 €	7 000 000 €	- €	- €	0	0	3,84%	0,00%	0,00%	- €

Tableau 3 : Exemple de l'utilisation de la clause de reconstitution

- Clause d'indexation

Dans un traité pluriannuel, l'évolution monétaire peut changer complètement la répartition des sinistres entre réassureur et cédante car le coût d'un sinistre peut varier en fonction de l'inflation par exemple, les bornes d'un traité, elles, restent les mêmes. La clause d'indexation permet de recalculer les bornes d'un traité selon un indice de référence sensé refléter l'évolution monétaire afin de garder le traité « équitable ».

Exemple : Traité : 50M€ XS 5M€ en 2013, Taux annuel de l'XS : 5% de l'assiette.

Survenance d'un sinistre en 2013 :  
Indice de référence : 100  
Coût du sinistre : 20M€  
Assiette : 70M€

Survenance du même sinistre en 2014 :  
Indice de référence : 110  
Coût du sinistre : 20M€ x (110/100) = 22M€  
Assiette : 70M€ x (110/100) = 77M€

	2013	2014 Sans clause	Variation sans clause	2014 Avec clause	Variation avec clause
Traité	50M€ XS 5M€	50M€ XS 5M€		55M€ XS 5,5M€	
Prime	3,5M€	3,85M€	10%	3,85M€	10%
Sinistre brut	20M€	22M€	10%	22M€	10%
Charge de l'assureur	5M€	5M€	0%	5,5M€	10%
Charge du réassureur	15M€	17M€	13,33%	11,5M€	10%

Tableau 4 : Exemple de la clause d'indexation

- Clause de stabilisation

Dans les branches à développement long (Responsabilité Civile par exemple), le remboursement d'une garantie peut s'étaler sur plusieurs années. Si aucune clause n'est appliquée, les bornes du traité restent les mêmes et c'est par conséquent le réassureur, seul, qui supporte l'effet de l'inflation. En effet, si la priorité du traité est dépassée, tout ce qui l'excède sera à charge du réassureur.

Pour pallier ce problème, les traités XS comportent très souvent une clause de stabilisation visant à partager équitablement l'effet de l'inflation proportionnellement entre le réassureur et la cédante. En effet, cette clause implique que la proportion du sinistre prise en charge par les deux parties soit la même, quelle que soit la date de règlement du sinistre et la durée de déroulement de ce dernier.

Le calcul de la charge réassurée se fait en plusieurs étapes :

- Calcul du montant stabilisé de chacun des paiements.
- Application de la réassurance initiale sur le montant stabilisé. On obtient alors la proportion du sinistre à charge du réassureur.
- Application de cette proportion sur le montant actuel du sinistre. On obtient la charge du réassureur.

Exemple : Sinistre en 2009, indice 100. Traité 50M€ XS 5M€.

Paiements	Date	Indice	Paiements stabilisés
€ 1 000 000	2010	200	€ 500 000
€ 27 000 000	2011	300	€ 9 000 000
€ 6 000 000	2012	400	€ 1 500 000
€ 33 000 000	2013	500	€ 6 600 000
€ 67 000 000			€ 17 600 000

Tableau 5 : Exemple de la clause de stabilisation

Sans clause :  $Charge\ réassureur = 67M€ - 5M€ = 62M€$

Avec clause :  $Charge\ réassureur = \frac{17,6M€ - 5M€}{17,6M€} * 67M€ \sim 48M€$

Remarque :

- La clause est sensée baisser l'engagement du réassureur mais dans le cas d'un traité limité, elle peut lui être défavorable car si la priorité augmente, la portée également.
- Clause aggregate deductible : AAD

C'est une franchise qui s'applique sur les sinistres qui dépassent la priorité d'un XS, et que l'assureur conserve à sa charge jusqu'à la hauteur de cet aggregate.

La charge C du réassureur devient :  $C = \text{Max} (\text{Charge nette d'XS} - \text{AAD}, 0)$

- Clause aggregate limit ou clause de plafond annuel : AAL

C'est une limite du total de l'engagement pour le réassureur. C'est donc une charge maximum que le réassureur est prêt à assumer mais pas à dépasser afin de limiter le risque de ruine.

La charge C du réassureur devient :  $C = \text{Min} (\text{Charge nette d'XS}, \text{AAL})$

Exemple : 50M€ XS 5M€, C1 : AAD= 10M€ et C2 : AAL =100M€.

N° sinistre	Sinistres bruts	Charge XS	Charge XS avec C1 seulement	Charge XS avec C2 seulement	Charge XS avec C1 et C2
1	8 000 000 €	3 000 000 €	- €	3 000 000 €	- €
2	5 000 000 €	- €	- €	- €	- €
3	10 000 000 €	5 000 000 €	- €	5 000 000 €	- €
4	15 000 000 €	10 000 000 €	8 000 000 €	10 000 000 €	8 000 000 €
5	58 000 000 €	53 000 000 €	53 000 000 €	53 000 000 €	53 000 000 €
6	17 000 000 €	12 000 000 €	12 000 000 €	12 000 000 €	12 000 000 €
7	30 000 000 €	25 000 000 €	25 000 000 €	17 000 000 €	25 000 000 €
8	10 000 000 €	5 000 000 €	5 000 000 €		2 000 000 €
9	18 000 000 €	13 000 000 €	13 000 000 €		
10	8 000 000 €	3 000 000 €	3 000 000 €		
Total	179 000 000 €	129 000 000 €	119 000 000 €	100 000 000 €	100 000 000 €

Tableau 6 : Exemple de la clause AAL

- Clause de participation aux bénéfices

C'est une ristourne d'une part du bénéfice réalisé à la cédante si le solde de réassurance est positif.

*Solde de réassurance = Prime de réassurance*

*– Sinistres à charge du réassureur*

*– frais engagés par le réassureur*

- Clause de "No claim bonus"

Réduction d'un pourcentage de la prime payée accordée à la cédante si aucun sinistre n'a touché la tranche durant l'exercice.

Maintenant que nous avons bien cerné les différents types de réassurance et leurs principes, essayons de comprendre quels sont les risques auxquels notre cédante doit faire face.

## Chapitre 2 : La tarification des traités XS

### Section II.2.1 : Introduction

La prime pure est calculée en moyenne dans le temps sur la sinistralité au-delà du seuil de priorité. Elle dépend de nombreux facteurs :

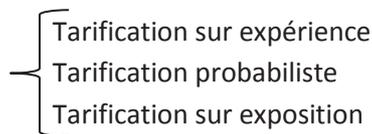
Environnement socio-économiques	Politique de souscription de la cédante	Profil de risque	Définitions des garanties accordées
Economie du pays	Règles de souscription (critères de sélection, ...)	Primes directes perçues	Franchise de base
Comportement de la branche sur un marché donné		Répartition des capitaux assurés	
Comportements sociaux vis-à-vis de l'assurance	Composition de son portefeuille par rapport à la structure moyenne du marché	Pleins de souscription	Exclusions particulières
Législation en vigueur sur les assurances	Vulnérabilité plus ou moins grandes des risques souscrits (efforts de prévention, ...)	Nombre de risques	

**Tableau 7 : Facteurs d'influence de la prime pure**

#### Remarque :

- La réassurance proportionnelle partageant équitablement la part de risque avec la prime de réassurance, les questionnements de tarifications ne se posent ici que pour la réassurance non proportionnelle. Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour la tarification des XS.

La tarification d'XS peut s'effectuer selon plusieurs modèles :



### Section II.2.2 : Tarification sur expérience

Cette méthode de tarification, plus communément appelée méthode *Burning Cost*, se base sur la sinistralité historique du portefeuille. Cette tarification est une approche par la méthode des moments. Le processus de tarification se déroule comme ceci :

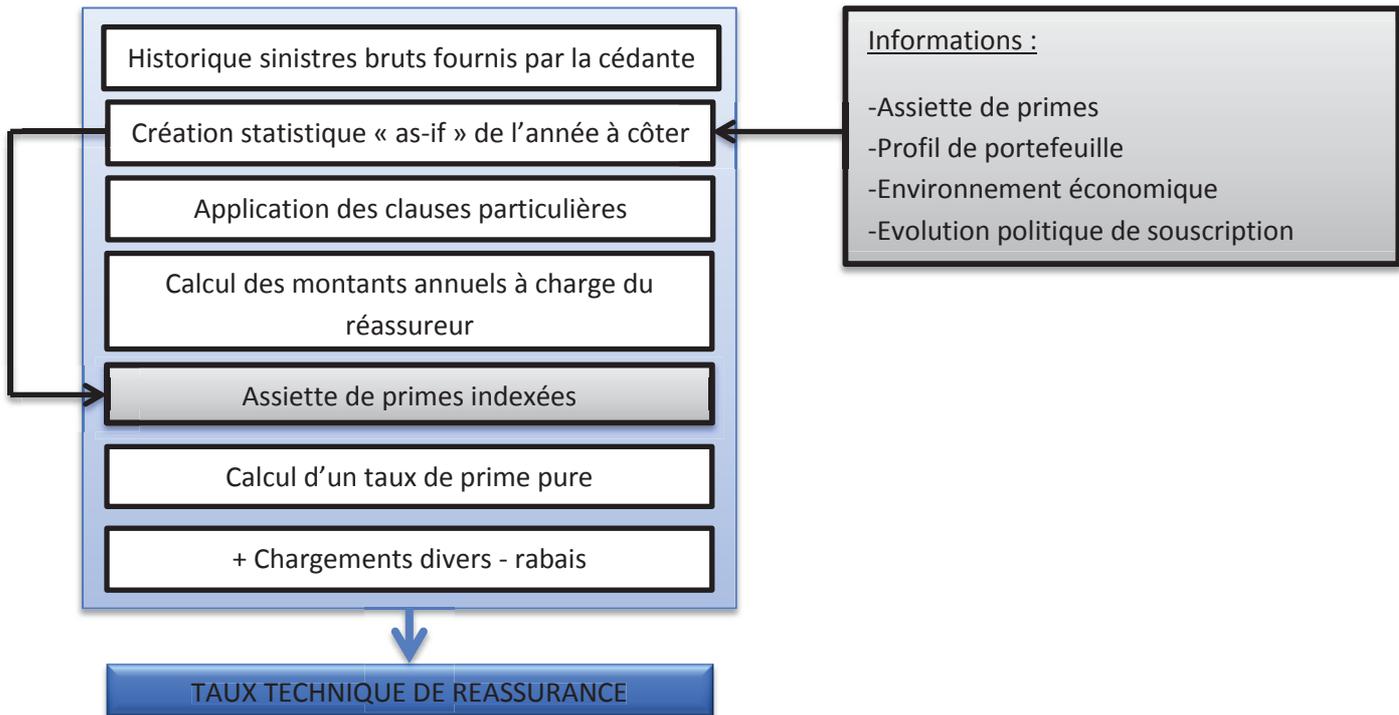


Figure 5 : Méthode de tarification sur expérience

Plus précisément, soit :

Le traité XS :  $P \times S \times p$

$x_i^j$ , le montant « as-if » brut de réassurance de l'i-ème sinistre de l'année j

$C_{asif}^j$ , le montant à charge de l'XS l'année j, i.e.  $C_{asif}^j = \sum_{i=1}^{N_j} [\text{Min} (\text{Max} (x_i^j - p ; 0) ; P)]$

S, le nombre d'années de l'historique

$A_j$ , l'assiette de prime de l'année j et  $N_j$ , le nombre de sinistres dans l'année j

$A_{éval}$ , l'assiette de prime de l'année à coter

Alors l'expression du taux de *Burning Cost* sera :

$$BC_{pur} = \frac{\sum_{j=1}^{N_j} C_{asif}^j}{\sum_{j=1}^{N_j} A_j}$$

Remarque :

- Le *Burning Cost* est une moyenne de ratios S/P un peu particuliers puisqu'ici, la charge est celle du réassureur et les primes celles perçues par la cédante.

On en déduit la prime pure :  $\text{Prime}_{pure} = A_{éval} * BC_{pur}$

C'est donc une moyenne des charges « as-if » de réassurance pondérée par la valeur des assiettes du portefeuille au fil des années.

Exemple : Recherche du taux de *Burning Cost* d'un traité XS Incendie : 80 M€ XS 20 M€.

Année / N° sinistre	Nbre sinistres	Sinistre	Indice	Facteur d'actualisation	Sinistre actualisé	Charge XS	Primes brutes	Primes actualisées	Ratio Cxs/P annuel
2004	3	€ 102 155 815	100	124%	€ 126 673 210	€ 66 673 210	€ 1 296 546 223	€ 1 607 717 317	4,15%
1		€ 23 479 141			€ 29 114 135	€ 9 114 135			
2		€ 32 168 615			€ 39 889 082	€ 19 889 082			
3		€ 46 508 059			€ 57 669 994	€ 37 669 994			
2005	3	€ 158 106 170	103	120%	€ 190 341 409	€ 136 104 113	€ 1 294 447 214	€ 1 558 363 636	8,73%
1		€ 71 994 836			€ 86 673 394	€ 66 673 394			
2		€ 11 826 141			€ 14 237 296	€ -			
3		€ 74 285 193			€ 89 430 718	€ 69 430 718			
2006	2	€ 95 245 718	105	118%	€ 112 480 658	€ 72 480 658	€ 1 298 325 981	€ 1 533 261 159	4,73%
1		€ 23 040 305			€ 27 209 504	€ 7 209 504			
2		€ 72 205 413			€ 85 271 154	€ 65 271 154			
2007	0	€ -	106	117%	€ -	€ -	€ 1 296 542 118	€ 1 516 709 647	0,00%
2008	4	€ 139 858 322	108	115%	€ 160 578 073	€ 82 818 255	€ 1 297 442 330	€ 1 489 656 009	5,56%
1		€ 20 590 975			€ 23 641 490	€ 3 641 490			
2		€ 15 468 229			€ 17 759 819	€ -			
3		€ 67 138 956			€ 77 085 467	€ 57 085 467			
4		€ 36 660 162			€ 42 091 297	€ 22 091 297			
2009	2	€ 81 237 744	111	112%	€ 90 752 074	€ 50 752 074	€ 1 304 562 441	€ 1 457 349 033	3,48%
1		€ 24 053 658			€ 26 870 754	€ 6 870 754			
2		€ 57 184 085			€ 63 881 320	€ 43 881 320			
2010	4	€ 246 468 875	115	108%	€ 265 757 744	€ 185 757 744	€ 1 302 698 623	€ 1 404 648 950	13,22%
1		€ 84 213 867			€ 90 804 517	€ 70 804 517			
2		€ 73 479 547			€ 79 230 120	€ 59 230 120			
3		€ 52 587 750			€ 56 703 313	€ 36 703 313			
4		€ 36 187 712			€ 39 019 793	€ 19 019 793			
2011	1	€ 44 509 935	117	106%	€ 47 172 922	€ 27 172 922	€ 1 302 123 054	€ 1 380 027 852	1,97%
1		€ 44 509 935			€ 47 172 922	€ 27 172 922			
2012	5	€ 173 688 705	120	103%	€ 179 478 329	€ 100 671 047	€ 1 354 896 542	€ 1 400 059 760	7,19%
1		€ 16 626 518			€ 17 180 736	€ -			
2		€ 1 574 077			€ 1 626 547	€ -			
3		€ 87 242 489			€ 90 150 572	€ 70 150 572			
4		€ 47 027 735			€ 48 595 327	€ 28 595 327			
5		€ 21 217 885			€ 21 925 148	€ 1 925 148			
2013	2	€ 143 542 915	124	100%	€ 143 542 915	€ 103 542 915	€ 1 846 507 894	€ 1 846 507 894	5,61%
1		€ 76 293 054			€ 76 293 054	€ 56 293 054			
2		€ 67 249 861			€ 67 249 861	€ 47 249 861			
<b>Taux de Burning Cost</b>									<b>5,44%</b>

Tableau 8 : Exemple de calcul d'un *Burning Cost*

### Section II.2.3 : Tarification probabiliste

L'objectif ici est de modéliser la fréquence des sinistres historiques et leurs sévérités. Le processus de tarification se déroule comme ceci :

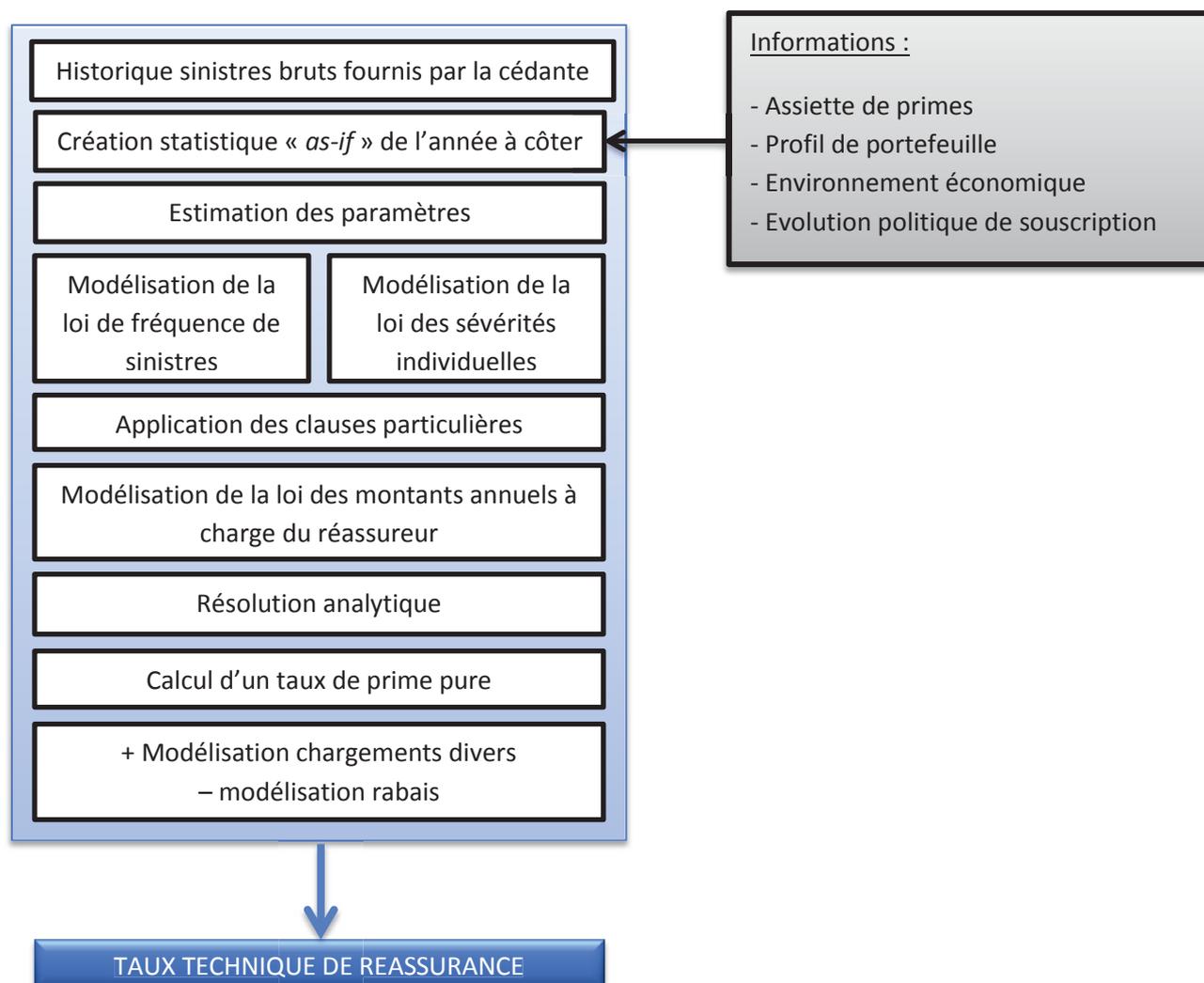


Figure 6 : Méthode de tarification probabiliste

- La fréquence :

Pour la modélisation de la fréquence, le plus souvent, la loi de Poisson est utilisée. Nous étudierons dans nos cas la loi de Poisson, la loi Binomiale Négative et la loi Normale Discrète. Un descriptif de ces lois est disponible dans l'Annexe 1 : « **Descriptif des lois de fréquence** ».

- La sévérité individuelle :

Pour la modélisation de la sévérité individuelle, le plus souvent, les lois Pareto et LogNormale sont utilisées. Nous élargirons, dans nos cas, l'étude aux lois de Pareto, LogNormale, Gamma, Exponentielle, Weibull et Burr. Un descriptif de ces lois est disponible dans l'Annexe 2 : « **Descriptif des lois de sévérité** ».

- Estimation des paramètres :

L'estimation des paramètres de ces lois s'effectue à l'aide de la technique de maximisation de la vraisemblance. Un tableau récapitulatif est disponible en Annexe 3 : « **Estimation des paramètres des lois de fréquence et de sévérité par la méthode de maximisation de la vraisemblance (MV)** ».

- Calcul de la prime pure :

Ici, la prime pure correspond à la consommation moyenne de la tranche d'XS tarifée.

Ainsi, après la modélisation des charges sinistres, nous appliquerons la structure de réassurance sur une simulation de nos sinistres. Nous déterminerons alors la consommation de la tranche pour chaque simulation et ensuite la moyenne de cette consommation. C'est la prime pure.

Dans le cadre d'un traité  $P$  XS  $p$  :

$N$ , le nombre de sinistres dans l'année suivant une des lois de fréquence

$X$ , la variable aléatoire réelle représentant le montant d'un sinistre individuel au premier euro suivant une des lois de sévérité

$Y$ , la variable aléatoire réelle représentant le montant à charge du réassureur

$S_N = \sum_{i=1}^N Y_i$ , la variable aléatoire réelle représentant le montant total à charge du réassureur

On suppose  $X$  et  $N$  indépendants et  $(X_i)_{\forall i}$  i.i.d.

Alors, avec les hypothèses et notations ci-dessus (démonstration en Annexe 4 : « **Démonstration Espérance-Variance de la charge sinistre** ») :

$$E(S_N) = E(N) * E(Y)$$

$$Var(S_N) = E(N) * Var(Y) + (E(Y))^2 * Var(N)$$

Or :

$$Y = P * \mathbb{1}_{\{X \geq P+p\}} + (X - p) * \mathbb{1}_{\{p \leq X < P+p\}}$$

On en déduit donc :

$$E(S_N) = E(N) * [P * Proba(X \geq P + p) - p * Proba(p \leq X < P) + E(X \mathbb{1}_{\{p \leq X < P+p\}})]$$

### Section II.2.4 : Tarification sur exposition

La tarification sur exposition va nous permettre de nous appuyer sur le profil du portefeuille de la cédante et non sur sa sinistralité historique.

Pour ceci nous allons, à partir d'un indicateur donné, comme les sommes assurées ou le nombre de contrats, définir des courbes d'exposition définie par :

$$F(x) = \text{Probabilité pour qu'un sinistre coûte moins que } x\% \text{ de la somme assurée}$$

Or ce qui nous intéresse pour tarifier sera la partie de la sinistralité au-dessus de la priorité : Le ratio

$\frac{\text{Priorité}}{\text{Exposition}}$  correspond à la limite de sinistralité qui ne touche pas le traité.

Ainsi, la prime pure va s'évaluer comme le produit entre la probabilité de toucher le traité et l'assiette :

$$\text{Prime pure} = EPI * F\left(\frac{\text{Priorité}}{\text{Exposition}}\right)$$

où l' *EPI* est l'assiette de primes.

Nous raisonnerons donc avec des taux de destruction.

La procédure habituelle de mise en place de la tarification sur exposition peut se définir comme ceci :

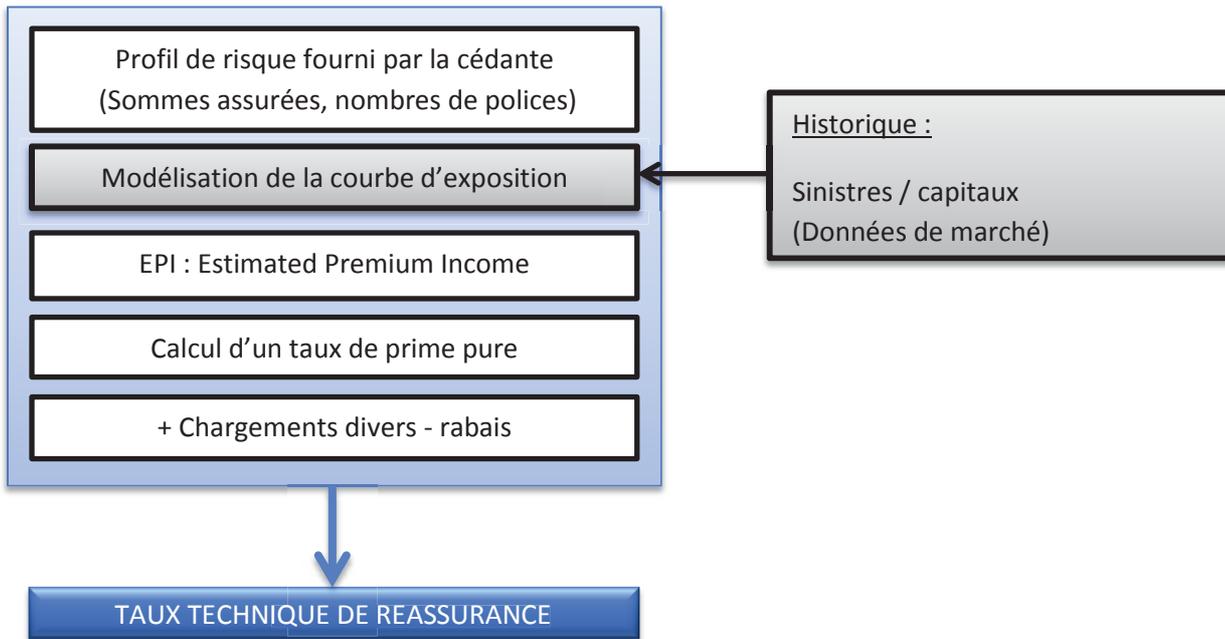


Figure 7 : Méthode de tarification par exposition

L'objectif, après cette introduction sera de construire la fonction de répartition empirique du taux de destruction.

Pour ce faire, nous devons disposer de données suffisamment conséquentes et structurées pour un type de risques donnés et leurs sommes assurées  $SA_{(i)}$  connues :

Numéro du risque	Montant du sinistre	Somme assurée exposée	Taux de destruction
1	$X_1$	$SA_1$	$X_1/SA_1$
2	$X_2$	$SA_2$	$X_2/SA_2$
3	$X_3$	$SA_3$	$X_3/SA_3$
⋮	⋮	⋮	⋮
N	$X_n$	$SA_n$	$X_n/SA_n$

Puis, en créant un autre tableau, nous allons construire la fonction de répartition du taux de destruction :

Taux de destruction $x\%$	Nombre de police avec $X/SA_i \leq x\%$	Sinistres avec $X/SA_i \leq x\%$ $A_x$	Sinistres avec $X/SA_i > x\%$	Premiers % des sinistres vérifiant $X/SA_i > x\%$ $B_x$	Coût total des premiers $x\%$ $C_x = A_x + B_x$	Fonction de répartition
0%	0	0	$\sum_i X_i$	0	0	0%
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\alpha\%$	$\sum_i 1_{\{X_i/SA_i \leq \alpha\}}$	$\sum_i X_i \cdot 1_{\{X_i/SA_i \leq \alpha\}}$	$\sum_i X_i \cdot 1_{\{X_i/SA_i > \alpha\}}$	$\alpha \cdot SA_i \cdot \left(\sum_i 1_{\{X_i/SA_i > \alpha\}}\right)$	$A_x + B_x$	$\frac{A_x + B_x}{\sum_i X_i}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100%	N	$\sum_i X_i$	0	0	$\sum_i X_i$	100%

Tableau 9 : Construction de la courbe d'exposition

Ainsi nous pouvons expliciter F telle que :

$$F(x\%) = \frac{\sum_i X_i \cdot 1_{\{X_i/SA_i \leq x\% \}} + x\% \cdot SA_i \cdot \left(\sum_i 1_{\{X_i/SA_i > x\% \}}\right)}{\sum_i X_i}$$

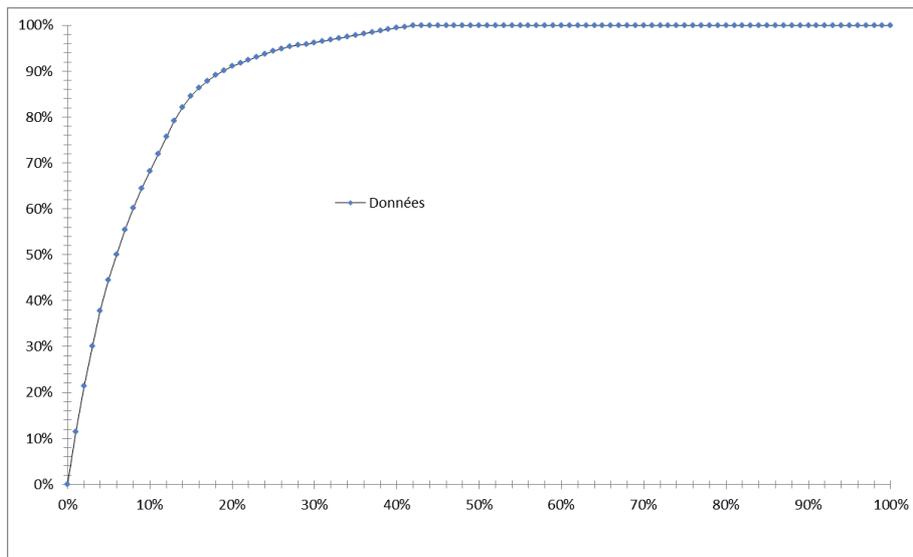


Figure 8 : Fonction de répartition d'un taux de destruction

Imaginons un traité  $\infty$  XS 10M€ et un bien de somme assurée égale à 50M€.

Pour que le traité soit touché, il faut que le taux de destruction soit d'au moins 10/50=20%. En dessous, toute sinistralité reste à charge de la cédante.

Ainsi, pour un taux de destruction de 20% c'est 91,09% des sinistres qui restent à charge de la cédante. Et par conséquent 91,09% des primes.

En conclusion, avec une prise en charge de 80% des sinistres, le réassureur recevra une prime commerciale (PC) équivalente à 100%-91,09%=8,91% de l'assiette.

Remarque :

- Cette courbe d'exposition fonctionne pour des traités à portée infinie. En effet nous ne modélisons pas ici de bornes supérieures lors de la construction de notre fonction de répartition.
- Pour tarifer par exposition des tranches d'XS limitées, il suffira de faire la soustraction de deux tranches illimitées :  $PC_{Portée\ XS\ Priorité}^{expo} = PC_{\infty\ XS\ Priorité}^{expo} - PC_{\infty\ XS\ Portée+Priorité}^{expo}$
- Approximation de la courbe par un modèle MBBEFD :

Pour modéliser les courbes d'exposition, nous considèrerons le taux de destruction comme une variable aléatoire de loi fonction de distribution MBBEFD (Maxwell-Boltzmann Bore-Einstein Fermi-Dirac) elle est de la forme (S.Bernegger [2004]) :

$$F_{a,b}(x) = a \left( \frac{a+1}{a+b^x} - 1 \right) \text{ pour } 0 \leq x < 1$$

$$1 \text{ pour } x \geq 1$$

Où

$$x = \frac{\text{montant du sinistre}}{\text{somme assurée}} = \text{taux de destruction}$$

$$a \in \mathbb{R}, b \in ]0, +\infty[$$

Les paramètres a et b pourront être estimés en minimisant l'erreur quadratique moyenne par rapport à nos données.

En reprenant l'exemple précédent :

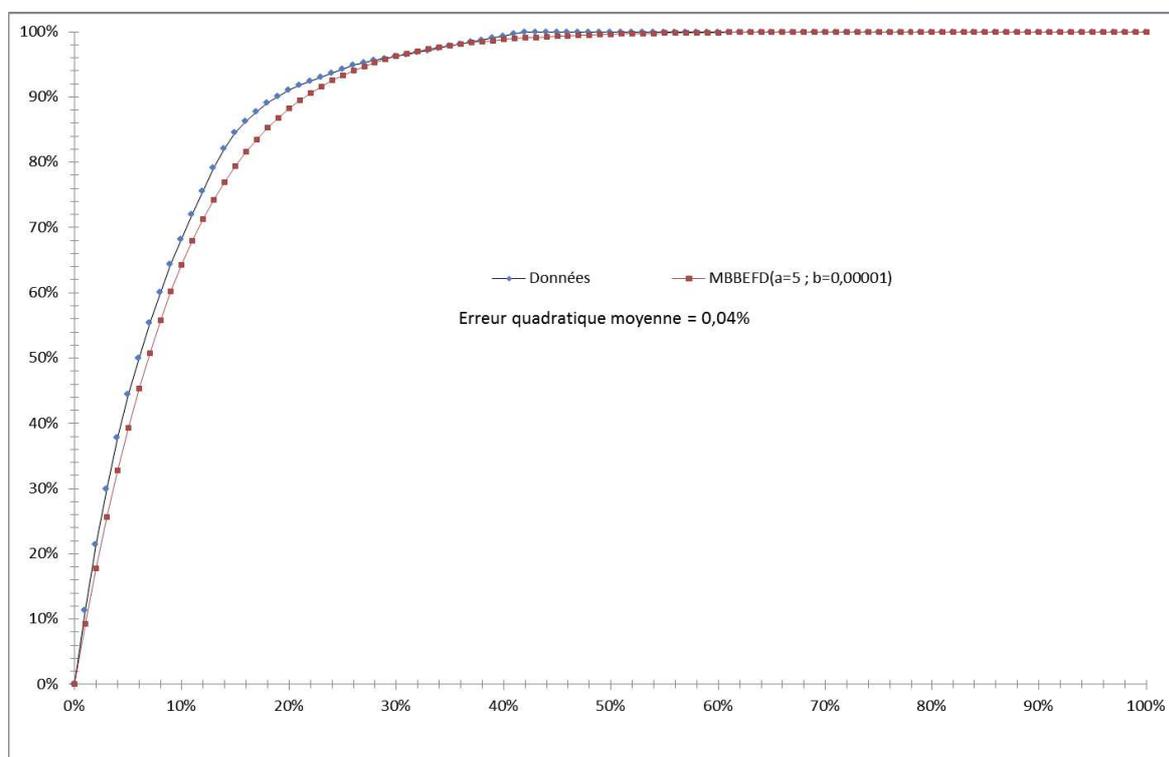


Figure 9 : Approximation de la courbe d'exposition par une MBBEFD

Ainsi, à partir de nos données empiriques nous pourrions :

1. Construire la courbe d'exposition selon la méthode présentée ci-dessus
2. L'approximer par une variable aléatoire de loi de distribution MBBEFD
3. Estimer les paramètres  $a$  et  $b$  de la loi en minimisant l'erreur quadratique moyenne
4. Calculer les moments d'ordre 1 et 2 (qui nous seront utiles plus tard)

### Section II.2.5 : Passage de la prime pure à la prime commerciale

De nos méthodes de tarification résulte toujours une seule et même chose : la prime pure. C'est-à-dire, le montant moyen de sinistralité cédé aux réassureurs.

Nous allons dorénavant définir la prime commerciale. C'est la prime totale qui sera payée par la cédante.

Elle dépend bien évidemment de la prime pure mais également du chargement de sécurité qui permet de pallier les écarts de sinistralités par rapport à la moyenne, de la marge du réassureur, des charges administratives et des frais de courtage. Le chargement de sécurité peut s'exprimer de plusieurs manières :

$$Prime_{chargée} = Prime_{pure} * (1 + Taux_{chargement\ de\ sécurité}) \quad (1)$$

Le taux de sécurité,  $Taux_{chargement\ de\ sécurité}$ , est fixé de manière arbitraire par les réassureurs en fonction de la branche de risques, des caractéristiques du traité et du client. Il peut également être appréhendé par un pourcentage de la variance de la charge sinistre.

La marge bénéficiaire et les charges du réassureur sont propres à chaque entité. Il est donc nécessaire de les définir précisément. De plus, elles sont souvent intégrées dans le chargement de sécurité en majorant ce dernier.

Les frais de courtage sont calculés par application d'un taux de courtage à la prime commerciale. Ils sont intégrés en considérant que :

$$Prime_{chargée} = Prime_{commerciale} * (1 - Taux_{courtage})$$

Et donc

$$Prime_{commerciale} = \frac{Prime_{chargée}}{1 - (Taux_{courtage})} \quad (2)$$

En insérant (1) dans (2) nous obtenons :

$$Prime_{commerciale} = \frac{Prime_{pure} * (1 + Taux_{chargement\ de\ sécurité})}{1 - (Taux_{courtage})}$$

Nous pouvons alors calculer le taux commercial qui est le taux de prime indiqué dans les traités. Ce dernier est calculé en rapportant la prime commerciale sur l'assiette de prime correspondant au traité :

$$Taux_{commercial} = \frac{Prime_{commerciale}}{Assiette}$$

Nous introduirons deux notions :

- Le *Rate On Line* (ROL) est le montant de la prime commerciale rapporté à la portée de l'XS tarifé. Il s'interprète donc comme le coût d'1€ d'XS :

$$ROL = \frac{\text{Prime commerciale}}{\text{Portée}}$$

- Le *Payback* est l'inverse du ROL. Il s'interprète comme le nombre d'années d'encaissement de primes nécessaire pour couvrir la couverture mise à disposition de la cédante :

$$\text{Payback} = \frac{1}{ROL} = \frac{\text{Portée}}{\text{Prime commerciale}}$$

## Chapitre 3 : La cédante

Dans l'introduction, nous avons vu pour quels objectifs la cédante nous a mandatés, puis nous avons décrit le contexte technique en rapport avec ses objectifs. Il est donc important maintenant de tenter de comprendre les problématiques qui sont posées et l'environnement dans lequel l'étude s'effectuera.

Nous décrirons donc les risques que notre cédante gère ainsi que ses programmes de réassurance.

### Section II.3.1 : Son domaine et ses risques assurés

La cédante est une entreprise d'assurance non-vie.

Elle va prendre en charge des risques de dommages aux biens, plus particulièrement les risques locatifs liés aux locations de logements, les garanties incendies et divers et les garanties tempêtes. De plus, elle assume aussi les garanties de Responsabilité Civile automobile (RC-Auto). L'ensemble de ces garanties est détaillé dans les paragraphes suivants.

- Les risques Incendie et Divers

La garantie incendie et risques divers couvre l'ensemble des souscriptions Incendie et risques annexes de la cédante à savoir : les risques locatifs, les recours des voisins et des tiers, le bris de glace, les dégâts des eaux, les vols, les tempêtes, et bien sûr le risque d'incendie.

Ce dernier est d'ailleurs explicité clairement dans le Code des Assurances, aux articles L122-1 et suivants qui se trouvent en Annexe 5 : « **Code des Assurances** »

*"L'assureur contre l'incendie répond de tous dommages causés par conflagration, embrasement ou simple combustion. Toutefois, il ne répond pas, sauf convention contraire, de ceux occasionnés par la seule action de la chaleur ou par le contact direct et immédiat du feu ou d'une substance incandescente s'il n'y a eu ni incendie, ni commencement d'incendie susceptible de dégénérer en incendie véritable."*

- Les risques locatifs

Le contrat d'assurance du locataire prévoit la garantie « risques locatifs ».

C'est une garantie obligatoire (sauf en cas de location meublée), qui permet au propriétaire d'être indemnisé par l'assureur d'un locataire, en cas d'incendie, d'explosion, de dégât des eaux, mais aussi d'attentats, d'émeutes, et même d'actes de terrorisme.

Si le locataire ne souscrit pas cette garantie, le propriétaire est en droit de résilier le bail.

Par le calcul de sommes assurées (cf. Partie III), il faut que le montant de cette garantie corresponde à la valeur totale de l'immeuble en cas de destruction totale.

Pour toutes les locations, y compris les locations vides, la garantie « recours des voisins et des tiers » est facultative mais, presque toujours proposée en même temps que la garantie « risques locatifs ». Elle est fortement conseillée car, en cas de sinistres responsables sur les biens des voisins, c'est également l'assureur qui les rembourse.

- Les risques tempêtes

Des garanties de protection face aux effets d'événements naturels importants (tempêtes, ouragan, tremblements de terre, etc...) ont toujours existées et sont regroupées en général sous le nom de garantie "tempêtes".

L'état de "tempêtes" est officiel à partir du moment où le vent dépasse le seuil de 89 km/h, correspondant au degré 10 de l'échelle de Beaufort (échelle de classification des vents selon douze degrés, en fonction de leurs effets sur l'environnement : cette échelle est disponible en Annexe 6 : « **Echelle de Beaufort** »).

Au départ ces garanties étaient facultatives, mais, la loi n°90-509 du 25 Juin 1990, institua l'article L122-7 du Code des Assurances disponible en Annexe 5 : « **Code des Assurances** » .

*Cet article précise : « Les contrats d'assurance garantissant les dommages d'incendie ou tous autres dommages à des biens situés en France, ainsi que les dommages aux corps de véhicules terrestres à moteur, ouvrent droit à la garantie de l'assuré contre les effets du vent dû aux tempêtes, ouragans et cyclones, sur les biens faisant l'objet de tels contrats, sauf en ce qui concerne les effets du vent dû à un événement cyclonique pour lequel les vents maximaux de surface enregistrés ou estimés sur la zone sinistrée ont atteint ou dépassé 145 km/h en moyenne sur dix minutes ou 215 km/h en rafales, qui relèvent des dispositions des articles L. 125-1 et suivants du présent code. »*

L'étendue de cette garantie doit être fixée dans la police car elle n'est pas nécessairement la même que pour le risque incendie.

Ce bien est ainsi assuré contre les sinistres causés par la force du vent, ou d'un objet projeté par le vent, un ouragan ou un cyclone sous certaines conditions de vitesse maximale et moyenne de vent (article L122-7 : disponible en Annexe 5 : « **Code des Assurances** »). Cependant, les sinistres dus à la grêle doivent être assurés par une police d'assurance spécifique.

Si ces conditions sont dépassées, la police d'assurance relève des articles L125-1 et suivants (disponible en Annexe 5 : « **Code des Assurances** ») du Code des assurances, disposant de l'indemnisation des dommages en cas de catastrophes naturelles.

En conséquence, les exclusions sont les mêmes pour la garantie tempête que pour la garantie Incendie :

- dommages résultant d'un manque d'entretien indispensable
- les bâtiments dont la construction ou la couverture comporte, en quelque proportion que ce soit, des plaques de toute nature non posées et non fixées selon les règles de l'art
- Parties vitrées de la construction
- Biens en plein air

Ces trois risques, bien que couverts par la même garantie, ont des caractéristiques bien à eux dans la gestion des données et du programme de réassurance. C'est pour cette raison qu'ils seront modélisés séparément.

- Les risques RC-Auto

La responsabilité civile automobile est une assurance obligatoire pour tout type de véhicule motorisé.

Destinée à réparer les dommages que nous pouvons causer à autrui avec notre véhicule, elle permet d'indemniser les victimes tant pour les dégâts matériels que corporels.

En effet, peu importe le degré de responsabilité du conducteur, l'assureur ne pourra jamais refuser d'indemniser la victime de l'accident. L'assureur peut seulement, par la suite, exercer son droit de recours, c'est à dire : se retourner contre le conducteur incriminé et lui réclamer le remboursement partiel ou total de ses dommages.

Etant obligatoire, cette garantie est réglementée par plusieurs législations :

- Code des assurances
- Contrat-type d'assurance obligatoire de la Responsabilité Auto (AR du 14/12/92)
- Loi sur le contrat d'assurance terrestre (loi du 25/06/92)
- Diverses directives européennes

Toutes ces législations réglementent les principaux points de l'assurance RC Auto et plus particulièrement le contrat d'assurance (résiliation du contrat, obligation du souscripteur/assureur, notion d'usagers faibles, durée du contrat, ...).

Il faut bien noter que notre propre assurance RC-Auto n'indemniserà jamais les dégâts matériels et corporels que nous nous causerons, d'où l'utilité d'avoir une assurance conducteur protégeant notre responsabilité si nous sommes « en tort » ou en cas d'incapacité à trouver le responsable lors d'un délit de fuite. En cas d'accident, nos frais médicaux seront pris en charge.

Au niveau de la tarification du contrat, un grand nombre d'éléments sont à prendre en compte dans le processus de tarification :

<u>Critères liés au conducteur</u>	<u>Critères liés au véhicule</u>
Lieu de résidence du conducteur	Marque et modèle du véhicule
Âge du conducteur	Type de carburant utilisé pour le véhicule
Ancienneté du permis de conduire	Puissance du véhicule
Situation familiale du conducteur	Catégorie de véhicule (citadin, familial, ...)
Profession du conducteur	Usage du véhicule
Conduite occasionnelle par d'autres personnes	Ancienneté du véhicule
Assujettissement à la TVA	Lieu où le véhicule est habituellement stationné
Antécédents de sinistralités	Véhicule particulier ou professionnel
Fréquence d'utilisation du véhicule	

Tableau 10 : Critères impactant le processus de tarification en RCA

Remarque :

- La législation impose depuis 2008 que le sexe du conducteur ne soit plus pris en compte par les assureurs dans leurs tarifications.

Puisque nous venons d'étudier les risques auxquels la cédante est exposée, regardons maintenant comme cette dernière s'en protège avec ses programmes de réassurance.

**Section II.3.2 : Ses programmes de réassurance en place**

Nous allons distinguer deux programmes en place. Le programme Dommages Aux Biens (DAB) dans lequel se regroupent les risques incendies, tempêtes et locatifs et le programme RC-Auto (RCA). Commençons par le programme DAB :

- Le programme DAB

Le programme DAB se compose de trois traités agissant les uns après les autres sur la sinistralité DAB.

Le premier est un Excédent de sinistres appelé XS1, par risques et par événements. Composé d'une seule tranche, sa priorité est de 3 M€ et sa portée égale à 37 M€. C'est donc un 37 000 000 € XS 3 000 000 €. Reconstitutions illimitées et gratuites.

Le second traité est un traité Quote-Part, appelé QP, qui va protéger la rétention de l'excédent de sinistres XS1. Son taux de cession est de 85%, la cédante conservera donc 15% de la rétention de l'XS1.

Le troisième et dernier traité est un traité en Excédent de sinistres sur rétention de la QP, appelé XS/RET. Composé d'une seule tranche, sa priorité est de 22 500 € et sa portée égale à 427 500 €. C'est donc un 427 500 € XS 22 500 €. Reconstitutions illimitées et gratuites.

- Le programme RCA

Le programme RC-Auto se compose de trois traités agissant les uns après les autres sur la sinistralité RCA.

Le premier est un Excédent de sinistres appelé XS1, par risques et par événements (y compris les dommages matériels dus aux événements naturels). Composé d'une seule tranche, sa priorité est de 3 M€ et sa portée infinie.

C'est donc un  $\infty$  XS 3 000 000 €. Reconstitutions illimitées et gratuites.

Le second traité est un traité Quote-Part, appelé QP, qui va protéger la rétention de l'excédent de sinistres XS1. Son taux de cession est de 85%, la cédante conservera donc 15% de la rétention de l'XS1.

Le troisième et dernier traité est un traité en Excédent de sinistres sur rétention de la QP, appelé XS/RET. Composé d'une seule tranche, sa priorité est de 22 500 € et sa portée égale à 427 500 €. C'est donc un 427 500 XS 22 500. Reconstitutions illimitées et gratuites.

Ces programmes peuvent se résumer de la manière suivante :

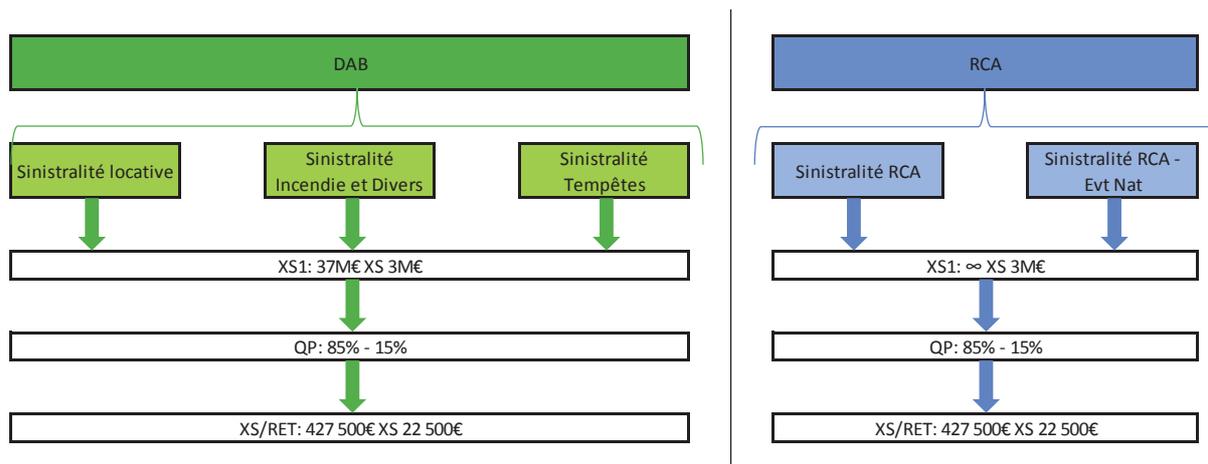


Figure 10 : Récapitulatif des programmes de réassurance en place

Nous avons pu apprécier, dans cette partie, tout l'aspect technique du contexte dans lequel nous nous trouvons.

Nous savons désormais que les problématiques de réassurance et de tarification nécessitent une bonne compréhension du domaine dans lequel nous évoluons, et qu'elles ne seront résolues que si nous pouvons les soumettre à des scénarii de sinistralités.

C'est pourquoi, nous allons nous attacher, maintenant, à tarifier l'ensemble des structures de réassurance de notre cédante selon les techniques décrites dans le chapitre 2 de cette partie.

## *Partie III : Modélisation des sinistralités et tarification des traités*

<b><u>Chapitre 1 : Les outils graphiques et statistiques</u></b> .....	<b>33</b>
<u>Section III.1.1 : Le PP-plot</u> .....	33
<u>Section III.1.2 : Le QQ-Plot</u> .....	33
<u>Section III.1.3 : Le <i>Mean-Excess-Plot</i></u> .....	34
<u>Section III.1.4 : Le coefficient de détermination <math>R^2</math></u> .....	34
<u>Section III.1.5 : Le test du <math>\chi^2</math></u> .....	35
<b><u>Chapitre 2 : Modélisation de la sinistralité locative</u></b> .....	<b>35</b>
<u>Section III.2.1 : Traitement des données et hypothèses</u> .....	35
<u>Section III.2.2 : Modèle utilisé</u> .....	35
<b><u>Chapitre 3 : Modélisation de la sinistralité Incendie</u></b> .....	<b>36</b>
<u>Section III.3.1 : Traitement des données et hypothèses</u> .....	36
<u>Section III.3.2 : Modèles utilisés et paramétrisation</u> .....	36
<b><u>Chapitre 4 : Modélisation de la sinistralité tempêtes</u></b> .....	<b>42</b>
<u>Section III.4.1 : Introduction</u> .....	42
<u>Section III.4.2 : Fonctionnement</u> .....	42
<u>Section III.4.3 : Calcul des sommes assurées</u> .....	42
<u>Section III.4.4 : Les <i>Event Loss Table</i> (ELT)</u> .....	44
<u>Section III.4.5 : Application du modèle</u> .....	46
<u>Section III.4.6 : Quel Ecart-type prendre ?</u> .....	48
<b><u>Chapitre 5 : Tarification de la structure de réassurance DAB</u></b> .....	<b>48</b>
<b><u>Chapitre 6 : Modélisation de la sinistralité RCA</u></b> .....	<b>49</b>
<u>Section III.6.1 : Traitement des données et Hypothèses</u> .....	49
<u>Section III.6.2 : Modèle utilisé et paramétrisation</u> .....	51
<b><u>Chapitre 7 : Tarification de la structure de réassurance RCA</u></b> .....	<b>56</b>

Dans un premier temps, avant toute modélisation, nous allons présenter l'ensemble des éléments qui vont nous permettre de réaliser chaque étude de cas. Ainsi, nous définirons les outils et leur fonctionnement qui nous aideront à l'élaboration de la sinistralité « *as-if* » qui reprend la sinistralité historique grâce à l'indexation par rapport aux primes ou aux coûts des sinistres. En effet, si un sinistre survenu il y a 10 ans se produisait aujourd'hui, il n'aurait pas le même coût pour les assureurs. Ceci nous sera utile pour la suite de nos travaux.

La modélisation de la charge sinistre « *as-if* » de notre portefeuille suit différentes étapes. Tout d'abord, aux sinistres bruts fournis par la cédante nous allons appliquer une indexation, ce qui nous permettra d'avoir une vision actuelle des sinistres passés. Cette étape pourra faire suite à un calcul de charge ultime au cas où nous aurions affaire à des triangles de liquidation comme données historiques. Puis, selon la forme de cette sinistralité, nous déciderons du type de modèles que nous appliquerons : modèle empirique, fréquence-coût ou agrégé.

Ensuite, la détermination des lois de probabilités et de leurs paramètres, selon le modèle choisi, s'effectuera après la réalisation d'une série de tests statistiques et de représentations graphiques afin de vérifier la pertinence de nos choix.

## **Chapitre 1 : Les outils graphiques et statistiques**

### **Section III.1.1 : Le PP-plot**

Le graphe probabilité-probabilité ou plus communément appelé PP-plot, est un graphe relativement facile à construire qui permet d'établir assez rapidement une adéquation entre une loi de probabilité observée et une loi de probabilité théorique.

En effet, il nous suffit ici de représenter les fréquences cumulées de nos observations  $O$  en ordonnées et celles de notre loi théorique en abscisses notée  $F$ .

Ainsi, si l'approximation est bonne, le nuage de points  $(O ; F)$  formé par les deux distributions s'approchera de la première bissectrice.

L'avantage de cette approche est la représentation simple de plusieurs lois théoriques, de distribution cumulée  $F$ ,  $G$  et  $H$  et leur comparaison avec notre distribution observée  $O$ , en observant les nuages de points  $(O ; F)$ ,  $(O ; G)$  et  $(O ; H)$ . Nous verrons ainsi laquelle se rapproche le plus de nos observations.

### **Section III.1.2 : Le QQ-Plot**

Afin d'évaluer la pertinence de notre choix de loi de probabilité, nous pouvons également nous servir du QQ-plot. Cet outil graphique utilisant les quantiles permet de comparer visuellement et rapidement la position de certains quantiles dans la population observée avec leur position dans la population théorique.

Comment procédons-nous ?

1. Ordonnons notre sinistralité, on obtient un  $N$ -échantillon.

2. Appelons  $x_i$  les quantiles de notre population observée et  $x_i^*$  les quantiles de la population théorique de notre loi de probabilité. Comme nos  $x_i$  forment une statistique d'ordre de notre échantillon, nous avons  $F(x_i) = U_i = \frac{i}{n+1}$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur  $[0,1]$ . Nous avons donc :

$$x_i^* = F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

3. Traçons ensuite l'ensemble des points  $(x_i^*; x_i)$  : plus notre choix de loi sera judicieux, plus cet ensemble sera proche de la première bissectrice.

Remarques :

- Si les points sont alignés suivant une droite d'équation  $x_i = ax_i^* + b$  c'est que le modèle choisi est valable à une transformation affine près.
- Cette méthode est utilisable pour chaque loi de probabilité, bien que parfois, une modification doit être faite sur notre échantillon.
- Les détails pour toutes les lois utilisées dans ce mémoire se trouvent en Annexe 7 : « **QQ-Plots : Lois de probabilités utilisées** ».

### Section III.1.3 : Le Mean-Excess-Plot

La fonction de dépassement moyen ou *mean excess function* est un outil graphique permettant d'étudier les valeurs extrêmes. Elle se définit par :

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u)$$

Nous définissons alors la fonction de dépassement moyen empirique par :

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}}}$$

Ainsi, en traçant, pour tout  $i=1, \dots, n$  le nuage de points  $(X_i, e_n(X_i))$ , nous obtenons le *mean excess plot*.

### Section III.1.4 : Le coefficient de détermination $R^2$

Un indicateur spécifique permet de traduire la variance expliquée par le modèle, il s'agit du coefficient de détermination. Sa formule est la suivante :

$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad 0 \leq R^2 \leq 1.$$

Remarque :

- Le  $R^2$  est inadapté si nous voulons comparer des modèles comportant un nombre différent de variables. Il faut plutôt utiliser le coefficient de détermination ajusté qui est corrigé des degrés de liberté :  $R^2_{\text{ajusté}} = R^2 - \frac{k(1-R^2)}{n-k-1}$ .
- Le  $R^2$  ajusté est toujours inférieur au  $R^2$  et peut même être négatif.

Le  $R^2$  est un indicateur simple, nous comprenons aisément que plus il s'approche de la valeur 1, plus le modèle est proche de nos données.

### Section III.1.5 : Le test du $\chi^2$

Pour commencer, nous devons formuler une hypothèse dite "nulle",  $H_0$ . C'est cette hypothèse que nous testerons. Ainsi nous choisirons comme hypothèse  $H_0$  : les données suivent la loi de probabilité ajustée précédemment.

Dès lors, il faut suivre le processus suivant :

- Répartir les données en  $k$  classes distinctes. On notera  $O_i$  l'effectif observé de la classe  $i$  et  $E_i$  l'effectif théorique de cette même classe.
- Calculer la distance  $D$  entre les effectifs par classes des données observées et théoriques :
  - $D = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
  - Sous l'hypothèse nulle  $D$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $k-1$  degrés de liberté (cf. Annexe 8 : «**Preuve  $\chi^2$** »).
- Choisir un niveau de rejet  $\alpha$  de notre hypothèse  $H_0$  (on prendra souvent  $\alpha = 5\%$ ).
- Déterminer le nombre de degrés de liberté =  $k-1$ .
- Déduire d'une table du  $\chi^2$  (cf. Annexe 9 : «**Table  $\chi^2$** »), la valeur maximum que peut prendre notre distance tout en validant  $H_0$ . Comme  $D \sim \chi_{k-1}^2$ , cette valeur est le quantile d'ordre  $1-\alpha$  de la loi  $\chi_{k-1}^2$  :  $F_{\chi_{k-1}^2}^{-1}(1-\alpha)$
- Définir notre zone de rejet de  $H_0$  :  $\left[ F_{\chi_{k-1}^2}^{-1}(1-\alpha); +\infty \right]$

Si la distance calculée n'appartient pas à cette zone, on valide  $H_0$ , sinon on la réfute.

Nous venons de voir l'ensemble des outils graphiques et statistiques qui vont nous permettre de procéder à la modélisation d'une sinistralité « *as-if* » afin de tarifer nos traités de réassurance.

## Chapitre 2 : Modélisation de la sinistralité locative

### Section III.2.1 : Traitement des données et hypothèses

La cédante, dans le cadre de notre évaluation de la sinistralité locative, nous a fourni un historique des sinistres remontant à 2005.

Après actualisation de ses sinistres et la création d'une statistique « *as-if* » nous remarquons que le traité XS1 n'a jamais été touché par des sinistres locatifs, la sinistralité étant excessivement faible. Etant donc dans l'impossibilité d'avoir une réelle vision de l'exposition au risque locatif de la cédante, nous devons trouver une autre solution.

### Section III.2.2 : Modèle utilisé

Cette solution, c'est le modèle empirique. Nous allons choisir de manière arbitraire une période de retour et un montant de sinistres pour envisager certains sinistres catastrophiques sans pour autant trop surévaluer la sinistralité.

Nous remarquons que le plafond du traité est relativement haut, ainsi, dans le but de prévenir un sinistre catastrophique et rare, nous prendrons comme valeur de sinistre le plafond du traité, égal à 40 000 000 €, avec une période de retour de 250 ans.

Certes, ce modèle est loin d'être idéal, mais faute de pouvoir produire une modélisation plus approfondie, nous choisirons ce dernier.

## Chapitre 3 : Modélisation de la sinistralité Incendie

### Section III.3.1 : Traitement des données et hypothèses

Les données fournies par la cédante ne sont pas très nombreuses. En effet, nous ne disposons que de l'historique des sinistres supérieurs à 15 000 € depuis 1999, de l'ensemble des charges sinistres annuelles depuis 1999 et du nombre de polices depuis 2002.

Nous actualiserons donc à l'aide de l'indice FFB, décrit dans l'annexe 10 : « **Indice FFB** », l'ensemble de ces données pour créer une sinistralité « *as-if* ».

La première donnée à fixer est la valeur seuil à partir de laquelle nous considérons qu'un sinistre est majeur. Comme nous disposons des sinistres à partir de 15 000€ nous garderons ce seuil dans notre modélisation.

Nous pouvons donc désormais déterminer la sinistralité attritionnelle revalorisée à partir des données.

En effet :

$$Sinistralité_{totale}^{actualisée} = Sinistralité_{attritionnelle}^{actualisée} + Sinistralité_{majeure}^{actualisée}$$

### Section III.3.2 : Modèles utilisés et paramétrisation

Avec les données qui nous ont été fournies, nous décidons d'approcher les sinistralités historiques par les modèles suivants :

Type	Modèle
Sinistralité attritionnelle	Agrégé
Sinistralité majeure (>15 000€)	Fréquence x Coûts

- Modèle agrégé :

Nous étudierons la loi de probabilité qui correspond le mieux aux sinistres attritionnels en utilisant un modèle agrégé. Nous simulerons ainsi un coût annuel total des "petits" sinistres survenus dans l'année.

Pour le modèle agrégé attritionnel nous nous servons des coûts annuels actualisés de la sinistralité attritionnelle, mais aussi de l'exposition qui sera ici le nombre de contrats. Données disponibles depuis 2002.

Les sinistres ne seront pas directement approximatés par des lois de probabilités. En effet, la sinistralité annuelle est directement impactée par la tarification et le nombre de polices assurées. Par conséquent, pour avoir une vraie vision de l'exposition au risque, nous introduisons une charge annuelle relative,  $CA_i^{relative}$ , telle que pour une année  $i$  :

$$CA_i^{relative} = \frac{CA_i}{\text{Nombre de polices}_i}$$

Avec :

$CA_i$  = sinistralité annuelle de l'année  $i$

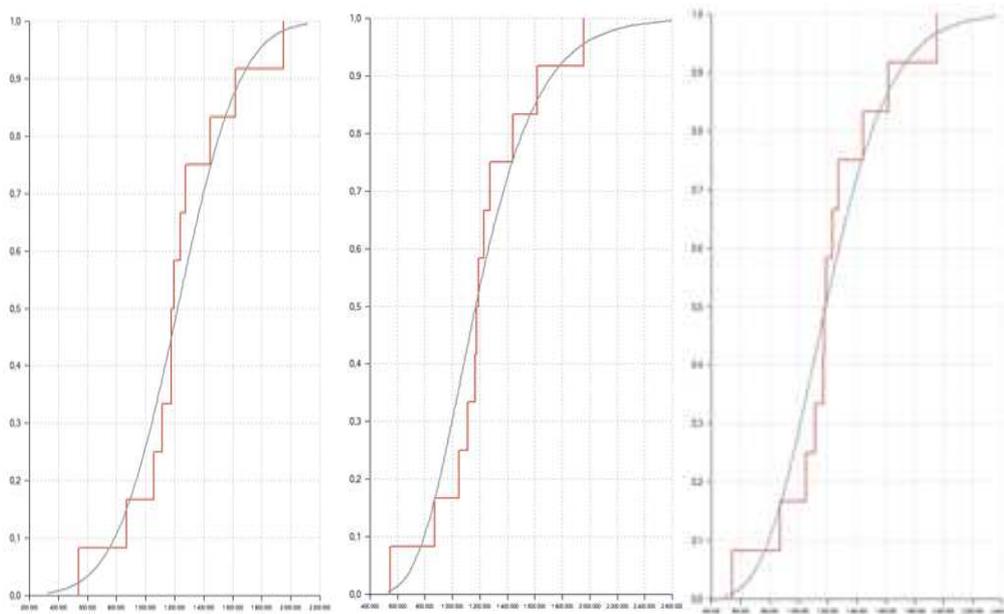
$\text{Nombre de polices}_i$  = nombre de polices de l'année  $i$

1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
?	?	?	42 496	41 291	40 276	39 039	36 528	35 083	32 309	35 552	33 374	32 932	32 666	32 001	29 575

**Tableau 11 : Nombre de polices incendie**

Ce sont ces sinistralités annuelles relatives que nous approcherons par des lois de probabilités et nous multiplierons, ensuite, leurs valeurs par le nombre de contrats pour l'année 2014 à savoir 29 575.

Après élimination des autres lois de sévérités, nous évaluons les distributions par rapport aux lois Normale, LogNormale et Gamma :



**Figure 11 : Distribution des données incendies comparée aux lois Normale, LogNormale et Gamma**

Nous pouvons voir en rouge, les valeurs que nous devons approcher. Nous remarquons que chaque loi correspond assez bien, en distribution, à nos données. Ainsi, pour arrêter notre choix, regardons les éléments suivants :

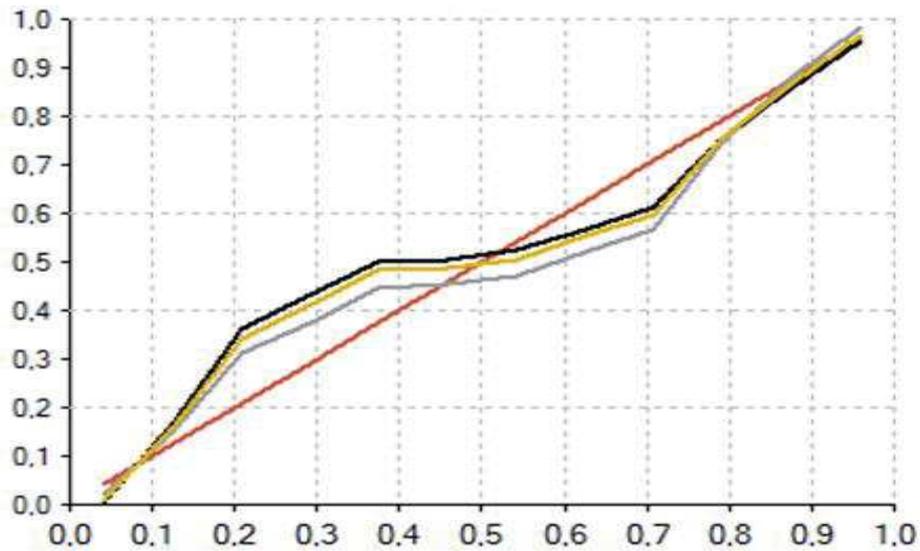


Figure 12 : PP-Plots Incendie : Rouge = données, Gris = Normale, Noir = LogNormale et Jaune = Gamma

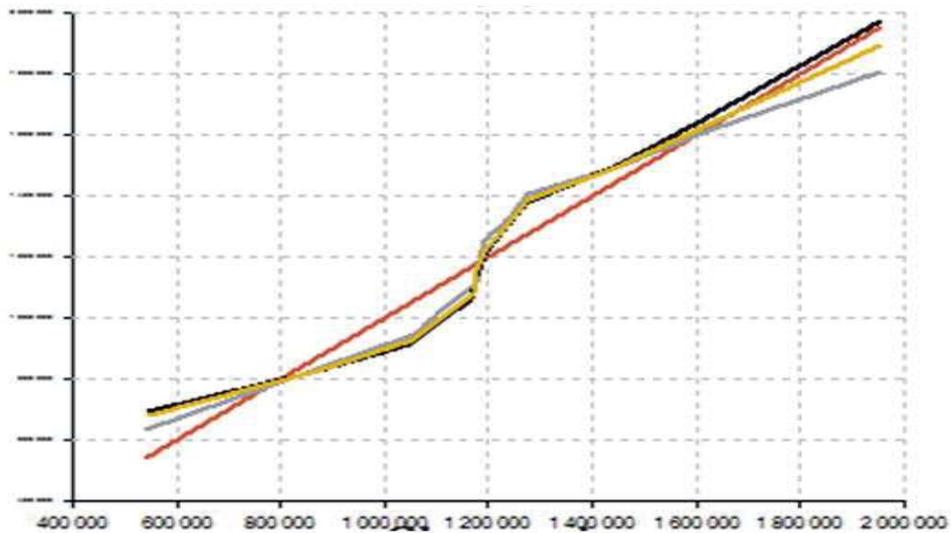


Figure 13 : QQ-Plots Incendie : Rouge = données, Gris = Normale, Noir = LogNormale et Jaune = Gamma

De plus :

Loi	P-value test $\chi^2$
Normale	0,9143
Log Normale	0,8732
Gamma	0,8901

Tableau 12 : Test du  $\chi^2$  pour la sinistralité attritionnelle incendie

Pour modéliser les coûts attritionnels futurs, nous choisirons la loi Normale pour sa proximité avec nos données. Elle est de plus confirmée par le test du  $\chi^2$ . Ainsi :

Loi	Paramètre 1 : Moyenne	Paramètre 2 : Ecart-type
Normale	1 220 338,26	339 189,09

- Modèle fréquence-coûts :

Pour le modèle fréquence-coût des événements majeurs nous nous servons du nombre de sinistres et de la même exposition (nombre de contrats) pour la fréquence et pour les coûts, nous utiliserons les montants des événements majeurs (>15 000€). Là encore, les données remonteront à 2002. Nous simulerons tout d'abord, le nombre de sinistres dans l'année, puis, dans un second temps, nous simulerons le coût de chaque sinistre.

Les fréquences ne seront pas directement approximées par des lois de probabilités. En effet, la fréquence de sinistres est directement influencée par le nombre d'assurés, on peut penser que plus il y a d'assurés, plus il y a de sinistres. Par conséquent, pour avoir une vraie vision de l'exposition au risque, nous introduisons une fréquence relative telle que pour une année  $i$  :

$$Fréquence_i^{relative} = \frac{Fréquence_i}{Nombre\ de\ polices_i}$$

Avec :

$Fréquence_i$  = nombre de sinistres de l'année  $i$

$Nombre\ de\ polices_i$  = nombre de polices de l'année  $i$

Ce sont ces fréquences relatives que nous approcherons par des lois et nous multiplierons leurs valeurs par le nombre de contrats pour l'année 2014 : 29 575.

Nous approximations ces données par rapport aux distributions de deux lois : Poisson et Binomiale négative. Voici les résultats que nous obtenons :

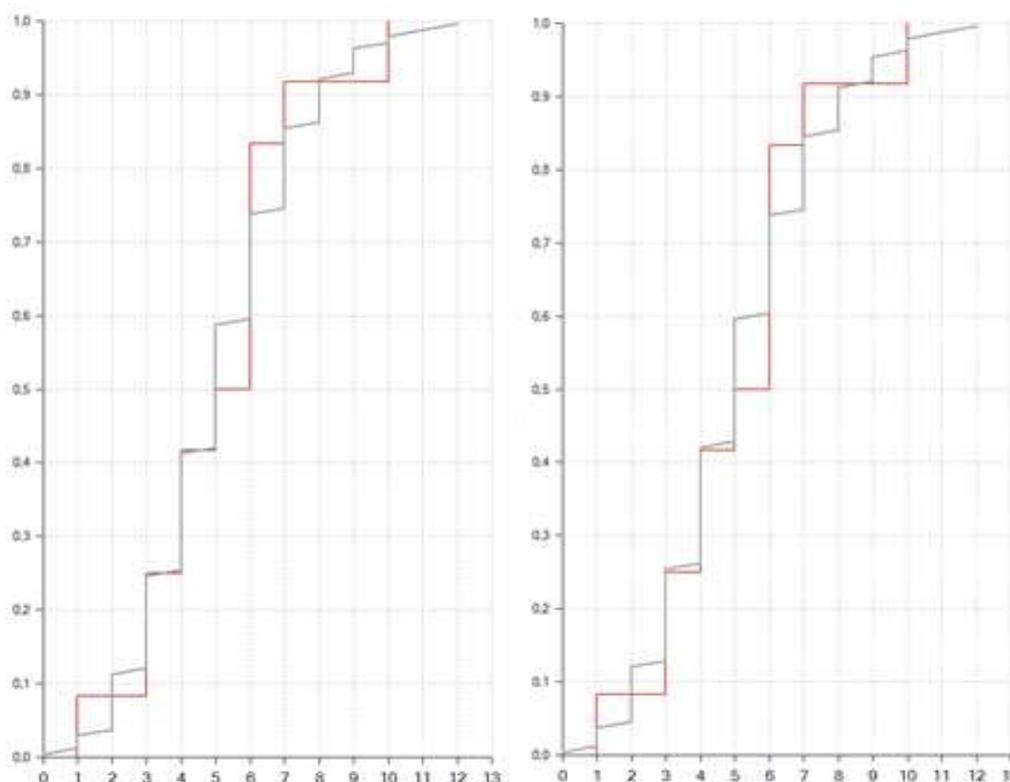


Figure 14 : Comparaison des distributions de fréquence : Rouge = Données, Gris = Lois (Poisson à gauche, Binomiale Négative à droite)

Les deux lois semblent proches, mais à partir des données nous remarquons une proximité entre la moyenne (5,246) et la variance (5,254), cela nous confirme que la Poisson est adéquate.

En effet, théoriquement, la moyenne et la variance de la loi de Poisson sont égales au paramètre de la loi. Enfin, nous savons que par expérience, c'est une loi qui est très souvent utilisée dans les modèles et l'erreur de paramétrisation sera moindre puisque nous n'évaluerons qu'un seul paramètre contre deux pour la Binomiale Négative.

Ainsi nous choisirons :

Loi	Paramètre : $\lambda$
Poisson	5,253

Pour la simulation des coûts, nous comparons les données par rapport aux distributions de six lois : Pareto, Log-Normale, Gamma, Weibull, Burr et Exponentielle.

Voici les résultats que nous obtenons pour les QQ-Plots :

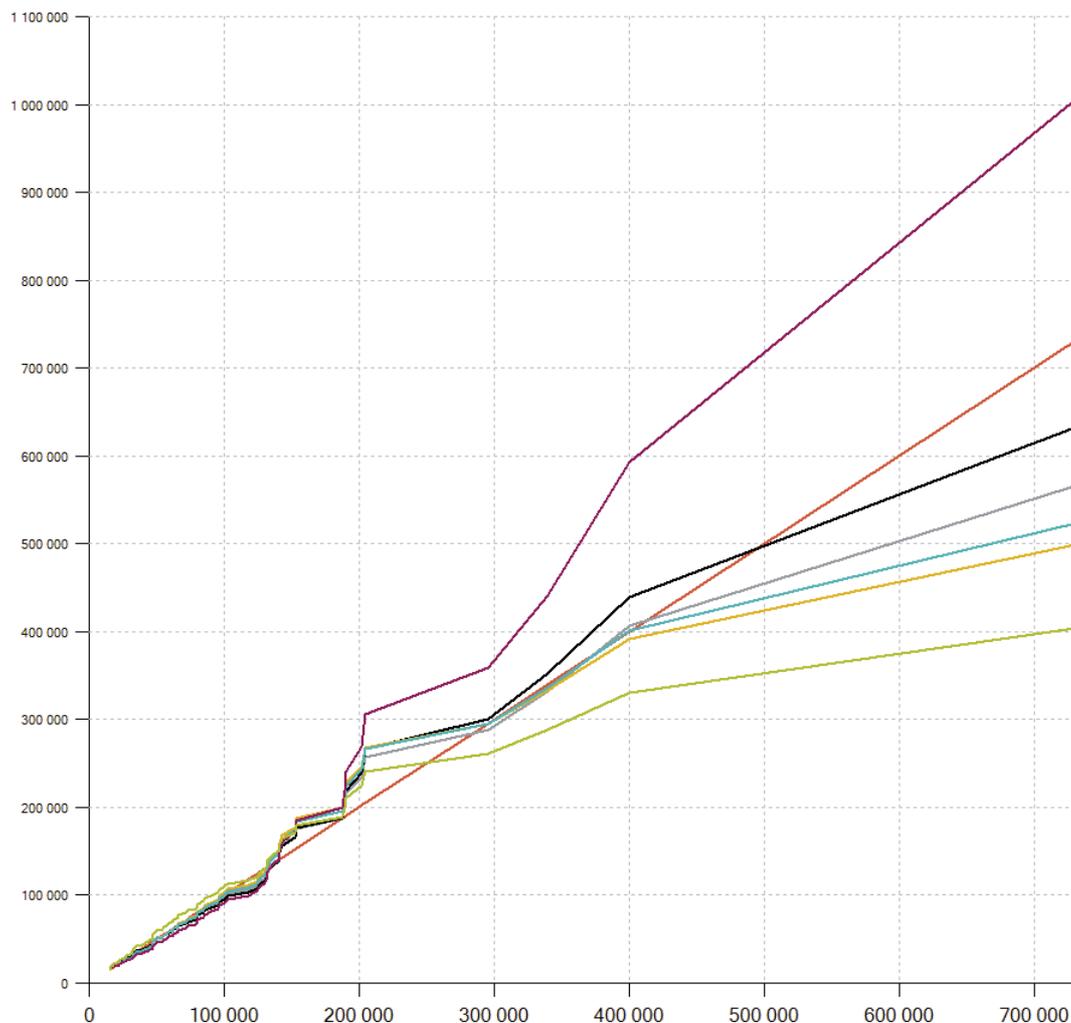


Figure 15 : QQ-Plots sinistralité « majeurs » incendie : Rouge = données, Gris = Pareto généralisée, Noir = LogNormale, Jaune = Gamma, Bleu = Weibull, Violet = Burr et Vert = Exponentielle

Après élimination de trois lois qui ne correspondaient vraiment pas, nous n'affichons ici que les lois Log-Normale, Weibull et Burr pour les PP-plots et les Mean-Excess plots :

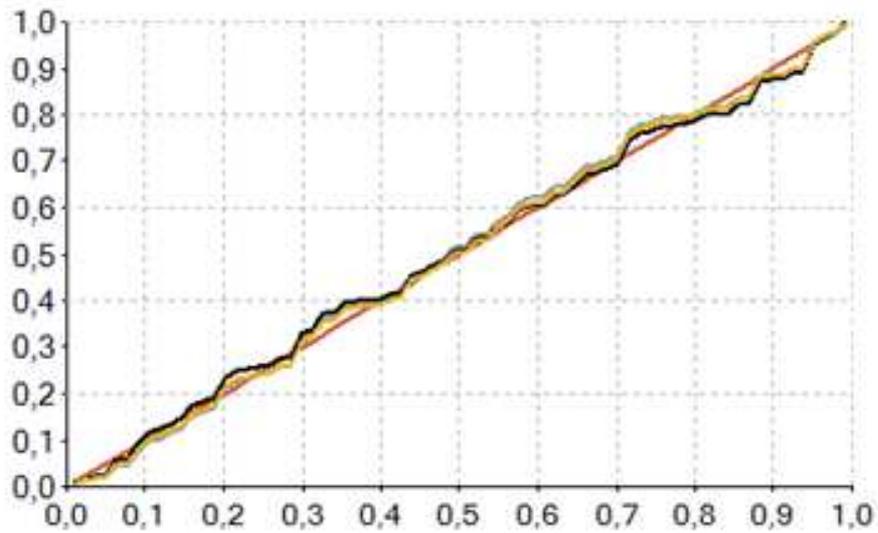


Figure 16 : PP-Plots sinistralité « majeurs » incendie : Rouge = données, Gris = LogNormale, Noir = Weibull et Jaune = Burr



Figure 17 : Mean-Excess Plots sinistralité "majeurs" incendie : Rouge=données, Gris = LogNormale, Noir = Weibull et Jaune= Burr

Il paraît clair que nous choisirons la loi LogNormale pour modéliser les coûts des événements majeurs :

Loi	Paramètre 1 : $\alpha$	Paramètre 2 : $\beta$	Seuil
Poisson	10,869	1,019	15 000€

## Chapitre 4 : Modélisation de la sinistralité tempêtes

### Section III.4.1 : Introduction

Avec un intérêt grandissant dans la prévision des risques climatiques, et afin de mieux les appréhender, de nombreux logiciels CAT sont apparus ces dernières années. Que ce soit dans le but de connaître son exposition au risque tempête ou de bien calibrer une tarification de traité de réassurance, il est désormais essentiel de connaître l'exposition de son portefeuille.

Parmi eux, un outil de modélisation des risques naturels est incontournable : Risk Management Solutions, mieux connu sous le nom de RMS.

### Section III.4.2 : Fonctionnement

On apporte au modèle les données fournies par la cédante. Puis, le modèle se décomposant en trois sous modules, évalue le risque de tempêtes sur l'exposition de la cédante. Enfin, nous combinons ces trois éléments pour simuler différents scénarii probables qui pourraient s'abattre sur le portefeuille.

<i>Nom du module</i>	<i>Fonction</i>
Les évènements stochastiques	S'inspire d'une base de tempêtes historiques afin de simuler un grand échantillon de tempêtes, en variant les paramètres physiques et de fréquence.
L'aléa	Grâce à des informations techniques (constitution du sol, environnement,...), permet de simuler une force de vent et une direction pour chaque évènement stochastique.
L'exposition ou la vulnérabilité	Modélise des taux de destruction variables à partir d'informations, fournies pour chaque hasard simulé, sur les bâtiments et les contenus.

Le modèle permet avec ses trois informations de calculer ce que nous appelons les ELT, *Event Loss Table*, qui nous fournissent une liste des évènements ainsi que leurs fréquences qui pourrait potentiellement affecter notre portefeuille.

Néanmoins, pour l'élément « vulnérabilité » nous avons besoin d'informations sur les bâtiments et leurs contenus afin de définir des taux de destruction. C'est-à-dire des taux d'endommagement par rapport aux montants assurés.

Nous appelons ces valeurs les sommes assurées.

### Section III.4.3 : Calcul des sommes assurées

- Méthodologie :

Comme annoncé, la somme assurée est le montant pour lequel les biens (bâtiments et leurs contenus) sont couverts. En France, les contrats ne prévoient pas, en général, de calcul explicite de valeur assurée : les primes sont déterminées à partir du nombre de pièces ou de la surface du bien et les indemnisations en cas de sinistres sont basées sur la valeur de remplacement ou de reconstruction du bien endommagé.

Les sommes assurées sont réparties en deux types : les valeurs « bâtiments » et les valeurs « contenu » qui sont les biens contenus dans les bâtiments.

Toutes les compagnies ont une indication moyenne des valeurs assurées « contenu » dans leurs contrats d'assurances. Dans le cas où elles sont dans l'incapacité de les fournir, il est possible d'utiliser des benchmarks clients ou bien la base RMS.

Données client fournies : (du plus général au plus fin)

- Le nombre de polices au niveau national
- Le nombre de polices par département
- Le nombre de polices et une indication à l'échelle nationale du type d'occupation, de bâtiment
- La répartition des polices par département, type d'occupation, type de bâtiment, nombre de pièce ou surface.
- La répartition des polices par département, type d'occupation, type de bâtiment, nombre de pièces ou surface et valeurs assurées « contenu »
- La répartition des polices par département, type d'occupation, type de bâtiment, nombre de pièces ou surface et valeurs assurées « contenu » et « bâtiments »

Sources de données :

- Cote annuelle des valeurs vénales immobilières (Ouvrage édition Callon)

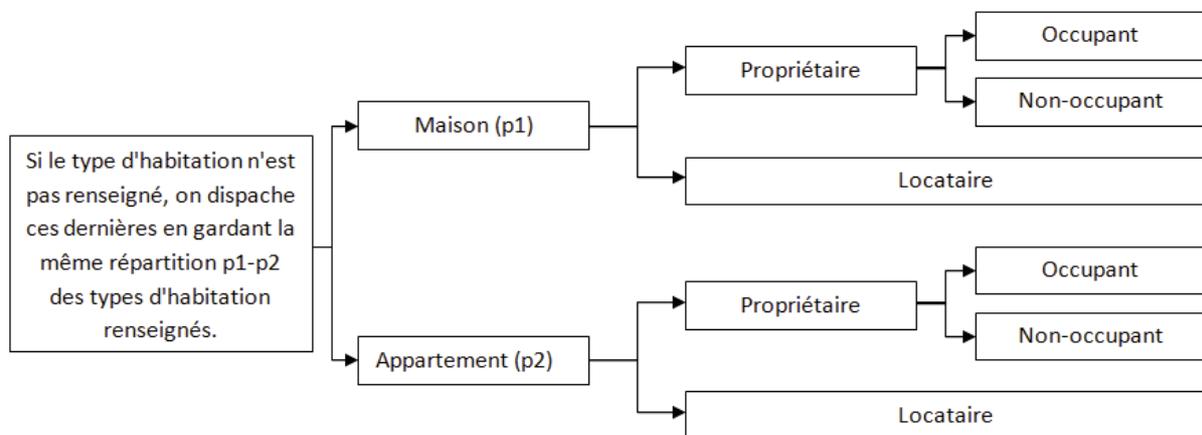
Les prix reflètent les moyennes nationales et correspondent à des prix de revient TTC de la construction.

- Données INSEE

Nombre de logements par commune (résidences principales, secondaires et logements vacants).

Pour les résidences principales :

- . Répartition du type de bâtiment (appartement/maison)
- . Répartition du type d'occupation (locataire/propriétaire/propriétaire non-occupant)



- . Nombre de pièces par type de bâtiment

- Base Sitadel (Système d'Information et de Traitement Automatisé des Données Élémentaires sur les Logements et les locaux)

Surface moyenne par localisation géographique, type de bâtiment et nombre de pièces, disponible sur le site du ministère de l'environnement, du développement durable et de l'énergie.

Grâce à ses informations nous allons pouvoir calculer les sommes assurées de notre portefeuille, contre le risque tempête.

- Calcul des sommes assurées

La répartition vue précédemment nous permet, par département, de déterminer selon le type de bâtiment, son nombre de pièces moyen grâce à la base INSEE. La base Sitadel nous permet de déterminer à partir du nombre de pièces, la surface moyenne des logements. Ainsi, nous calculons le nombre  $S$  de  $m^2$  assurés par département selon le type d'habitation. Le Callon nous fournissant par département le prix moyen  $P$  du  $m^2$ , nous pouvons calculer par département l'ensemble des sommes assurées bâtiments (SAB) selon le type d'habitation.

$$SAB_{dpt} = S_{dpt}^{appt} * P_{dpt}^{appt} + S_{dpt}^{maison} * P_{dpt}^{maison}$$

Remarque :

- Pour un locataire, les sommes assurées bâtiments sont nulles puisque c'est le propriétaire, occupant ou non-occupant, qui assure le logement.

Enfin, comme la cédante nous fournit pour chaque police la somme assurée du contenu (SAC) nous pouvons calculer la somme assurée du contenu par département et en déduire les sommes assurées totales (SAT) :

$$SAT_{dpt} = SAB_{dpt} + SAC_{dpt}$$

A l'aide de RMS, différents scénarii de tempêtes vont être simulés.

Le résultat sera les *Event Loss Table* ou ELT.

### Section III.4.4 : Les *Event Loss Table* (ELT)

- Présentation :

Ci-dessous une partie des ELT :

Gross ELT						
EVENTID	RATE	PERSPV	STDDEVI	STDDEVC	EXPVALUE	
2900001	0.0000000001		2	9	28	284,805,158
2900002	0.0000000001	30,310	6,552	26,709		1,351,609,030
2900003	0.0000000001	1,731,784	88,564	665,678		2,312,478,734
2900004	0.0000000001	305,558	31,273	145,319		1,905,527,596
2900005	0.0000000001	431,685	41,316	175,306		956,012,828
2900006	0.0000000001	911,038	63,312	332,559		1,770,089,719

Tableau 13 : Exemple d'ELT

Ici n'est présenté qu'un extrait des ELT. En effet, ils comptent plus de 12 000 lignes. C'est donc plus de 12 000 évènements potentiels qui pourraient s'abattre sur notre portefeuille.

La première colonne correspond à la dénomination de l'évènement, sans grande importance ici. Par contre, la deuxième colonne correspond à la probabilité de survenance de cet évènement. Ici comme le portefeuille est très segmenté la probabilité est très faible. Ce qui est plutôt rassurant lorsque l'on est potentiellement sous risque de 12 000 évènements.

La troisième colonne correspond au coût moyen que l'évènement va avoir sur notre portefeuille. Les valeurs vont de 0,79€ à un peu moins de 13M€ ce qui est, de nouveau, rassurant.

La dernière colonne représente le nombre d'exposés à l'évènement. Comme RMS modélise les tempêtes au niveau mondial, ces valeurs sont particulièrement grandes. C'est pour cela que certains évènements ont une forte exposition mais un coût très faible : c'est comme si nous simulions une tempête qui passait en Inde, par rapport à notre portefeuille situé en France. La quatrième et cinquième colonne nous informent sur l'écart-type de l'évènement par rapport à son coût moyen.

- L'écart-type de l'évènement :

Pourquoi deux écarts-types ?

Prenons un exemple. Supposons deux zones A et B sur lesquels passe un évènement d'impact  $X_A$  et  $X_B$ .

Le coût moyen est donc  $E[X_A + X_B] = E[X_A] + E[X_B]$

Et sa variance :

$$V[X_A + X_B] = V[X_A] + V[X_B] + 2 * Cov(X_A, X_B)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2 * \rho_{A,B} * \sigma_A * \sigma_B$$

Prenons alors deux cas :

- Considérons les zones A et B indépendantes. Alors  $\rho_{A,B} = 0$

$$\Leftrightarrow \sigma_{A+B}^{indep.2} = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{A+B}^{indep.} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

C'est le cas de la quatrième colonne. STDDEVI = *Standard deviation independent*.

- Considérons les zones A et B complètement corrélées. Alors :  $\rho_{A,B} = 1$

$$\Leftrightarrow \sigma_{A+B}^{corr.2} = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2 * \sigma_A * \sigma_B = (\sigma_A + \sigma_B)^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{A+B}^{corr.} = \sigma_A + \sigma_B$$

C'est le cas de la cinquième colonne. STDDEVC = *Standard deviation correlated*

Remarque :

- La STDDEVC est plus forte que la STDDEVI.

Nous venons de présenter toutes les composantes de la modélisation avec RMS. Il faut dorénavant appliquer ce modèle pour en dégager une sinistralité simulée sur notre portefeuille.

### Section III.4.5 : Application du modèle

A l'aide des outils étudiés précédemment, nous allons, comme pour les autres risques, simuler une sinistralité avec des lois de probabilité. Nous utiliserons le modèle « fréquence x coûts » pour notre portefeuille.

L'objectif est donc de simuler un nombre de sinistres par une loi de Poisson dont il faudra déterminer le paramètre. C'est l'incertitude de première espèce, à savoir : Est-ce qu'un sinistre se produit ou non ?

Puis, pour chaque fréquence nous devons simuler un coût. Nous nous servirons des ELT pour en déterminer la loi et ses paramètres. C'est l'incertitude de seconde espèce, à savoir : Le sinistre se produit, certes, mais quelles pertes engendre-t-il ?

#### Remarque :

- Si l'on ne veut pas modéliser l'incertitude de seconde espèce il suffira de « piocher » une valeur parmi les coûts moyens des évènements dans les ELT.
  - Nous nous servirons des ELT pour déterminer les paramètres de chaque loi.
- La fréquence :

Nous avons vu, dans les ELT, que ces derniers présentaient la fréquence annuelle d'apparition de chaque évènement. Ainsi, si nous sommes toutes ces valeurs (à savoir l'ensemble de la deuxième colonne), nous obtiendrons la fréquence annuelle moyenne d'apparition de tempêtes. C'est ce que nous prendrons comme paramètre de notre loi de Poisson. Car si  $X \rightarrow P(\lambda)$  alors  $E[X] = \lambda$ .

Dans nos ELT, 12 386 tempêtes, pour une fréquence annuelle moyenne de 28,65, ont été simulées. Rappelons-nous que cette modélisation est au niveau mondial et que certaines de ces tempêtes auront un coût minime. Ce n'est pas 28 tempêtes dévastatrices qui s'abattront sur notre portefeuille.

- Le coût :

Pour modéliser le coût des sinistres, nous approximerons une loi de probabilité sur le taux de destruction :

$$\text{Taux de destruction} = \frac{\text{Sinistre}}{\text{Exposition}}$$

Puis, après simulation des différents taux, nous multiplierons ces valeurs par l'exposition correspondante pour en retrouver le montant du sinistre.

Nous ferons l'hypothèse que le taux de destruction suit une loi Beta. Ce choix est motivé par le fait que la loi Beta( $\alpha, \beta$ ) peut modéliser de multiples courbes de densité (et donc des scénarii très différents : cf. illustration plus bas) selon les paramètres choisis, mais aussi parce que son domaine de définition est [0;1] : plutôt pratique pour approximer un taux.

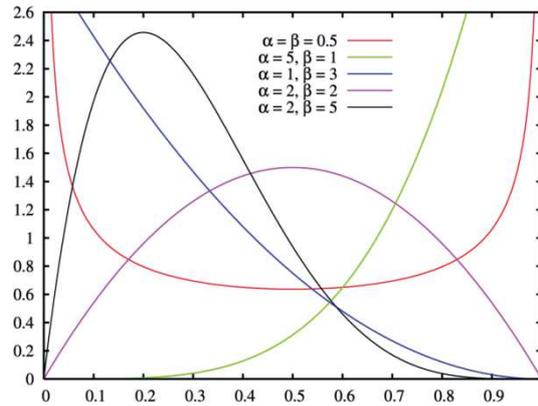


Figure 18 : Multiples représentations de la densité de la loi Beta selon différentes valeurs des paramètres

Nous allons fixer les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la loi Beta de notre taux de destruction. Soit  $\mu$  l'espérance du taux de destruction et  $\sigma^2$  sa variance.

$$\text{Remarquons d'abord que } \mu = E[\text{Taux de destruction}] = \frac{\text{Coût moyen}}{\text{Exposition}} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\Leftrightarrow \mu * (\alpha + \beta) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha * (1 - \mu)}{\mu} \quad (1)$$

$$\text{Remarquons également que } \sigma = \sqrt{V(\text{Taux de destruction})} = \frac{\text{Ecart-type}}{\text{Exposition}} = \sqrt{\frac{\alpha * \beta}{(\alpha + \beta)^2 * (\alpha + \beta + 1)}} \quad (2)$$

$$\text{On injecte (1) dans (2)} \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\alpha * \frac{\alpha * (1 - \mu)}{\mu}}{\left(\alpha + \frac{\alpha * (1 - \mu)}{\mu}\right)^2 * \left(\alpha + \frac{\alpha * (1 - \mu)}{\mu} + 1\right)}}$$

Après quelques lignes de calcul :

$$\beta = \frac{\mu * (1 - \mu)^2}{\sigma^2} + \mu - 1$$

Ainsi à partir de  $\mu$  et  $\sigma$  nous pouvons calculer les paramètres de la loi Beta de notre modèle.

$$\text{Petit rappel : } \mu = \frac{\text{Coût moyen}}{\text{Exposition}} = \frac{\text{colonne 3}}{\text{colonne 5}} \text{ dans notre exemple.}$$

$$\text{Cependant : } \sigma = \frac{\text{Ecart-type}}{\text{Exposition}} = \frac{\text{Mais quel Ecart-type prendre ?}}{\text{colonne 5}}$$

### Section III.4.6 : Quel Ecart-type prendre ?

Comme nous l'avons vu précédemment l'écart type peut être variable selon que nous considérons les zones corrélées ou non. En effet, plus un évènement sera concentré, plus les zones sinistrées seront corrélées entre elles et si l'évènement se disperse, les zones seront considérées indépendantes.

Nous remarquons donc que l'écart-type de notre évènement est forcément borné par ces deux cas particuliers :  $\sigma^{indep.} \leq \text{Ecart - type} \leq \sigma^{corr.}$ .

Par conséquent nous introduirons un poids  $\omega$ , tel que  $0 \leq \omega \leq 1$ , et affirmerons que l'écart-type de l'évènement peut donc se décomposer en une partie indépendante et une partie corrélée.

Ainsi :  $\text{Ecart - type} = \omega * \sigma^{corr.} + (1 - \omega) * \sigma^{indep.}$ .

Avec (cf. Section III.4.4) :  $\sigma^{corr.} = \sum \sigma_{zones}$  et  $\sigma^{indep.} = \sqrt{\sum \sigma_{zones}^2}$

Et donc notre taux de destruction devient :  $\sigma = \frac{\text{Ecart-type}}{\text{Exposition}} = \frac{\omega * \sigma^{corr.} + (1 - \omega) * \sigma^{indep.}}{\text{colonne 5}}$

Remarque :

- $\omega$  est à fixer arbitrairement selon la connaissance du risque. Dans notre étude, la tempête s'abattant sur un territoire restreint, nous considérerons les zones fortement corrélées et prendront donc  $\omega=1$ .

## Chapitre 5 : Tarification de la structure de réassurance DAB

Après application de nos modèles, nous avons agrégé l'ensemble de nos modélisations pour obtenir la charge sinistre annuelle ultime qui impacte notre traité.

Nous appliquons alors la structure de réassurance décrite en partie 2 et obtenons ainsi la prime chargée et le taux de prime de réassurance. Les résultats sont explicités ici :

Traités DAB	XS1	Prime pure	48 082
		Chargement	25%
		Prime commerciale	60 103
		Assiette	2 611 673
	Taux de prime		2,30%
	Quote-Part	Assiette	2 611 673
		Taux de Quote-Part	85%
		Prime commerciale	2 219 922
	XS sur rétention	Prime pure	29 100
Chargement		50%	
Prime commerciale		43 650	
Assiette		391 751	
Taux de prime		11,14%	

Tableau 14 : Résumé de la tarification du programme DAB

Qui se résumant :

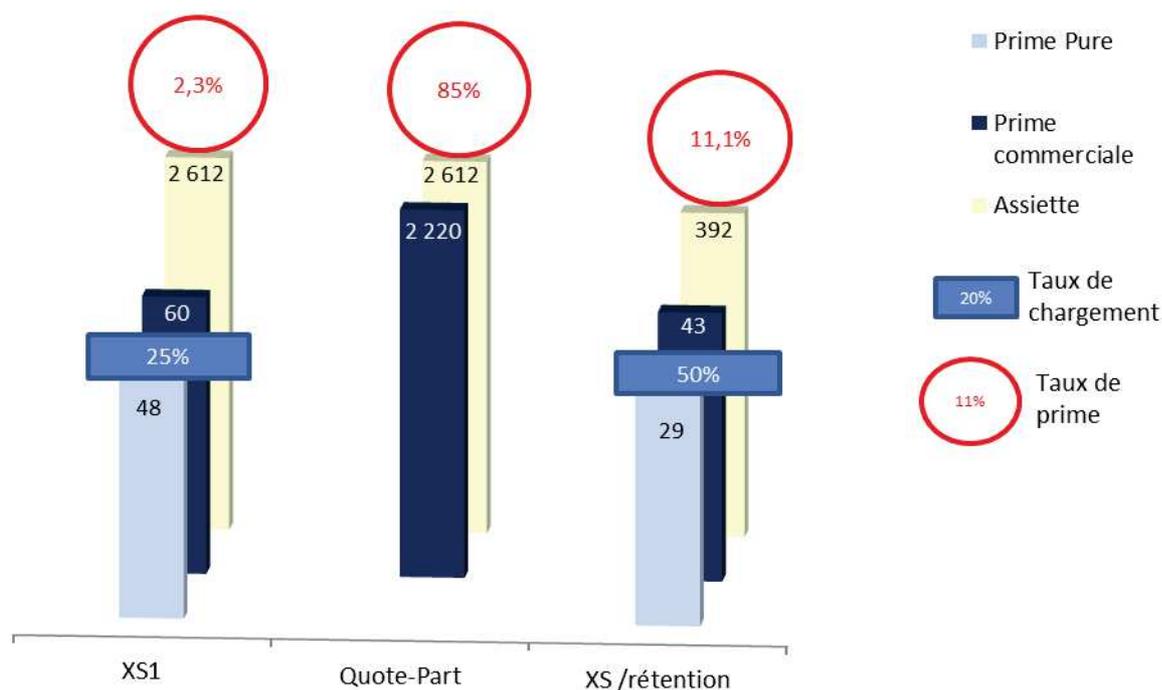


Figure 19 : Récapitulatif de la tarification du programme DAB

## Chapitre 6 : Modélisation de la sinistralité RCA

### Section III.6.1 : Traitement des données et Hypothèses

La cédante nous a fourni de nombreuses données, à savoir un historique des sinistres supérieurs à 25 000€ ainsi que leurs triangles de liquidation, les assiettes de cotisations depuis l'an 2000 et le nombre de contrats depuis 2009. Nous avons également reçu la liquidation des sinistres dus aux événements naturels rentrant dans la garantie RCA à différentes vues (de fin 2004 à fin 2013).

Ainsi, avec ces données et pour modéliser les sinistres RCA, il a fallu formuler quelques hypothèses :

- Tout d'abord, un historique détaillé des cotisations acquises fourni par la cédante remonte jusqu'à l'année 2000. Comme nous pouvions évaluer les autres données nécessaires jusqu'à une date antérieure à 2000, il a été décidé de s'aligner à cette même date de départ.
- Pour l'évaluation de la sinistralité due aux événements naturels et aux catastrophes naturelles, il a fallu déterminer la sinistralité historique de ces risques. N'ayant qu'un historique remontant à 2004, et dans l'objectif de remonter à 2000, nous avons reconstitué une base antérieure en considérant que les vues à fin, au-delà de N+10, demeureraient constantes.
- Pour calculer des sinistralités et fréquences relatives, un premier choix a été porté sur l'historique des cotisations de la branche RC qui était fourni.  
Or, cette exposition dépend du prix pratiqué et donc des politiques de tarification.

Pour éviter de dépendre de ces facteurs, le choix a donc été porté sur le nombre de contrats. Nous n'avons que 5 valeurs historiques de 2009 à 2013 mais qui semblent avoir une tendance linéaire :

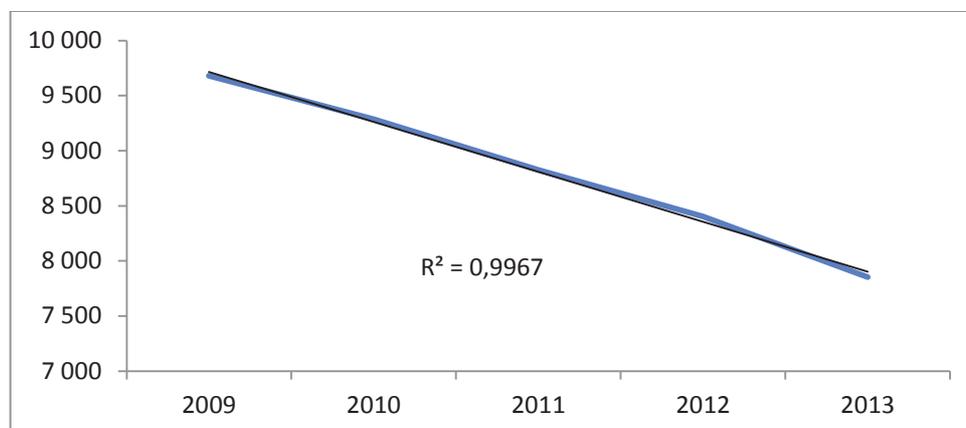


Figure 20 : Nombre de contrats RCA

Nous pouvons ainsi reconstituer les valeurs manquantes. Cette méthode est loin d'être idéale, mais faute de mieux, et afin de pouvoir utiliser le plus de données historiques, nous l'utiliserons. Voici ce que nous obtenons :

Année	Données	Evaluation	Erreur	Hypothèse
2000		13 798		13 798
2001		13 345		13 345
2002		12 891		12 891
2003		12 438		12 438
2004		11 984		11 984
2005		11 531		11 531
2006		11 077		11 077
2007		10 624		10 624
2008		10 170		10 170
2009	9 679	9 717	0,39%	9 679
2010	9 286	9 263	0,25%	9 286
2011	8 825	8 810	0,17%	8 825
2012	8 403	8 356	0,56%	8 403
2013	7 853	7 903	0,64%	7 853
2014		7 449		7 449

Tableau 15 : Reconstitution de l'historique du nombre de contrats RCA

Avec une erreur très faible sur nos données et un  $R^2$  de 99,67% l'approximation du nombre de contrats est considérée comme bonne. Nous garderons donc bien cette hypothèse.

Pour la modélisation des sinistres majeurs RC nous avons utilisé le triangle des sinistres à partir de 1997 ayant dépassé au moins une fois le seuil de 25 000€. Nous traiterons ces sinistres en prenant en compte une sur-inflation annuelle de 3% en plus d'une indexation à l'indice INSEE des taux de salaire horaire des ouvriers par activité - Activités pour la santé humaine (2<sup>ème</sup> trimestre). Une description de cet indice est disponible en Annexe 11 : « **Indice INSEE – Taux de salaire horaire** ».

Pour la sinistralité attritionnelle nous avons les données nécessaires pour la modélisation :

Année	SIN ATTRI RC
2000	€ 2 894 844,44
2001	€ 2 649 283,09
2002	€ 2 394 420,87
2003	€ 2 406 596,13
2004	€ 2 082 039,23
2005	€ 1 877 339,16
2006	€ 1 955 597,63
2007	€ 1 876 018,63
2008	€ 1 665 136,06
2009	€ 1 813 837,85
2010	€ 1 488 871,54
2011	€ 1 689 105,66
2012	€ 1 633 296,29
2013	€ 1 571 461,12
2014	?

Tableau 16 : Historique de la sinistralité attritionnelle RCA

### Section III.6.2 : Modèle utilisé et paramétrisation

- RC Attritionnel :

La sinistralité attritionnelle ne touchant pas le traité XS a été modélisée de manière agrégée. Après élimination de certaines lois de probabilités nous étudions la concordance avec les lois Normale, Lognormale et Gamma :

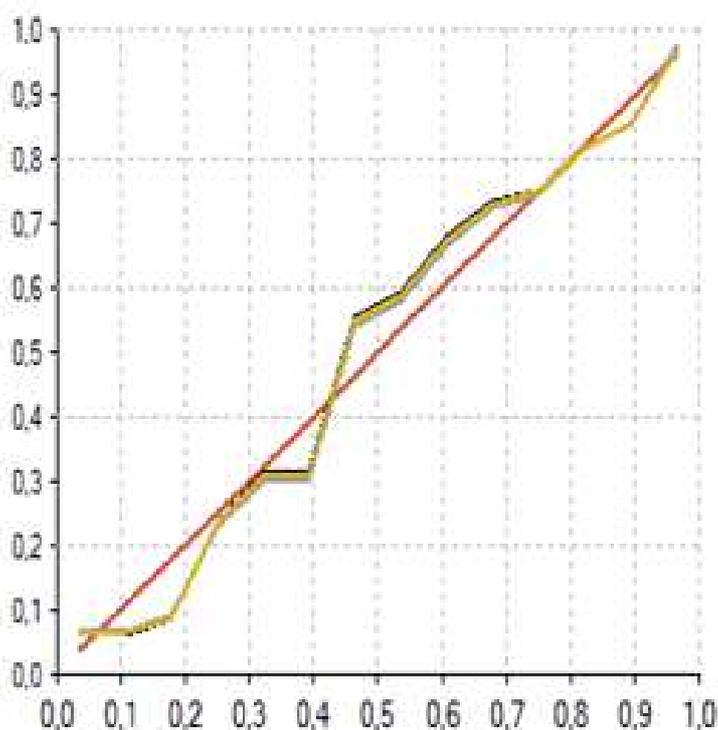


Figure 21 : PP-Plots Sinistralité attritionnelle RCA : Rouge= Données, Gris=Normale, Noir=LogNormale et Jaune = Gamma

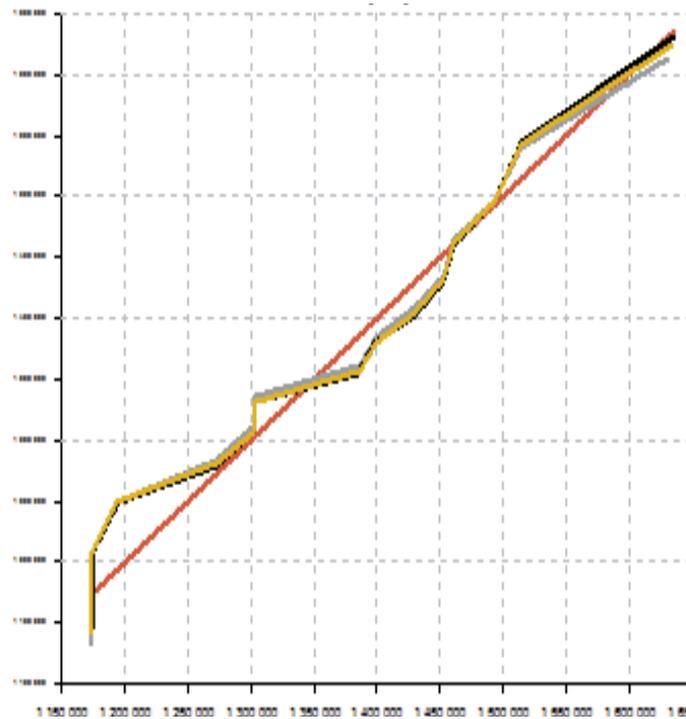


Figure 22 : QQ-Plots Sinistralité attritionnelle RCA : Rouge= Données, Gris=Normale, Noir=LogNormale et Jaune = Gamma

Nous remarquons que les trois lois concordent assez bien, mais en regardant les p-values, il a été décidé que les sinistres attritionnels seraient évalués par une loi Normale.

	PValue	Paramètres Normale	
Normal	0,8831	Moyenne	1 372 945,86
Lognormale	0,8683	Ecart-type	133 908,37
Gamma	0,8768		

Tableau 17 : Test du  $\chi^2$  pour la sinistralité attritionnelle RCA

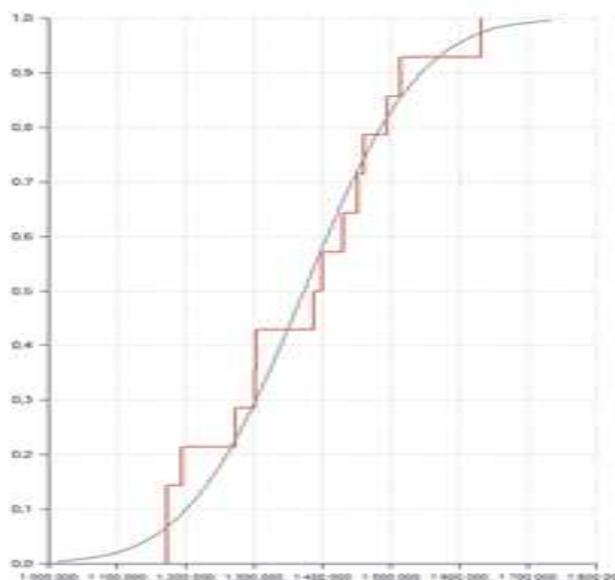


Figure 23 : Comparaison de la distribution de la loi Normale(Gris) avec la sinistralité attritionnelle RCA (Rouge)

- RC Majeurs :

La modélisation des sinistres est faite avec une approche fréquence-coûts individuels. Les flux futurs sont produits à partir d'une cadence de paiement. Ils sont alors inflatés et développés à l'aide de la méthode Chain-Ladder (décrite en Annexe 12 : « **Méthode Chain-Ladder** ») pour connaître les montants ultimes.

Pour évaluer la sévérité, nous gardons les sinistres « cohérents » et supérieurs au seuil de 25 000€ puis nous ajustons sur les sinistres « *as-if* » différentes lois de probabilité.

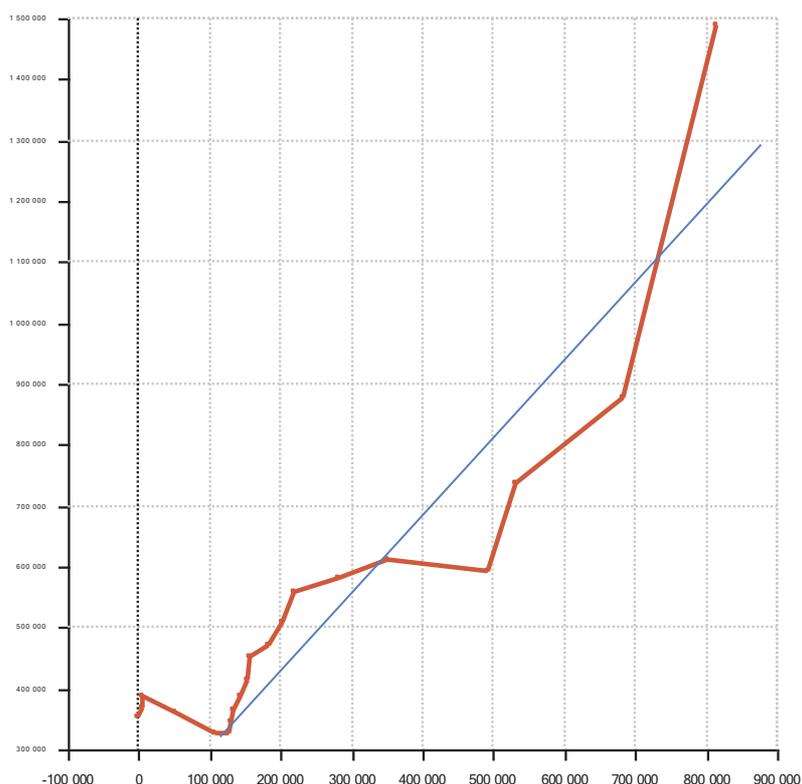


Figure 24 : Mean-Excess Plot de la sinistralité historique <<majeurs>> RCA (en rouge)

En regardant ce graphe (Mean Excess Plot), nous pouvons remarquer que nos données suivent une tendance presque linéaire à partir du seuil de 100 000€. En appliquant la théorie des valeurs extrêmes, nous appliquerons (si cela s'avère cohérent en comparaison avec d'autres lois) une loi de Pareto pour modéliser nos sinistres.

Après étude de ces lois, la Pareto simple est éliminée car elle surévalue énormément nos montants. La préférence se portera donc sur la Pareto Généralisée.

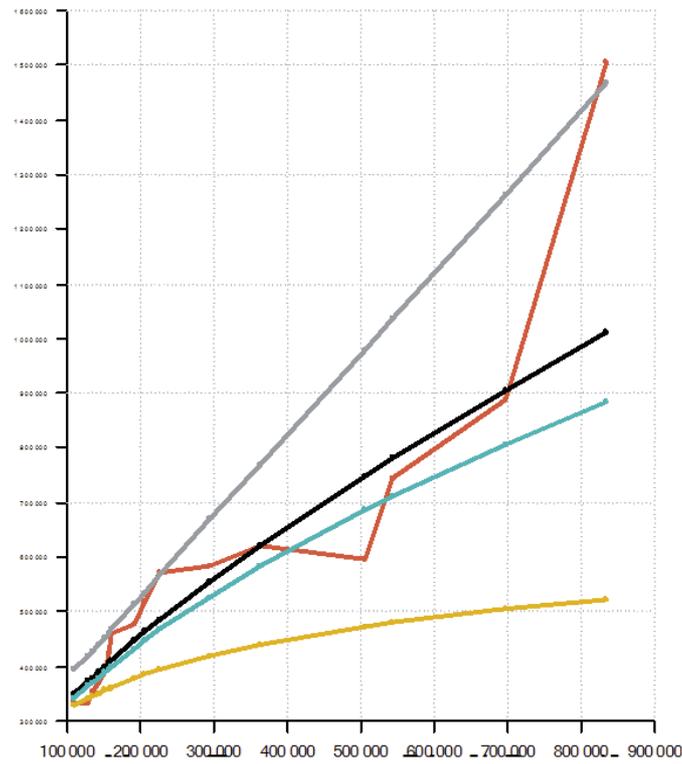


Figure 25 : Mean-excess plot sinistralité "majeurs" RCA : Rouge = Données, Gris= Paréto Généralisée, Noir = Lognormale Tronquée, Bleu= Weibull Tronquée et Jaune = Gamma Tronquée

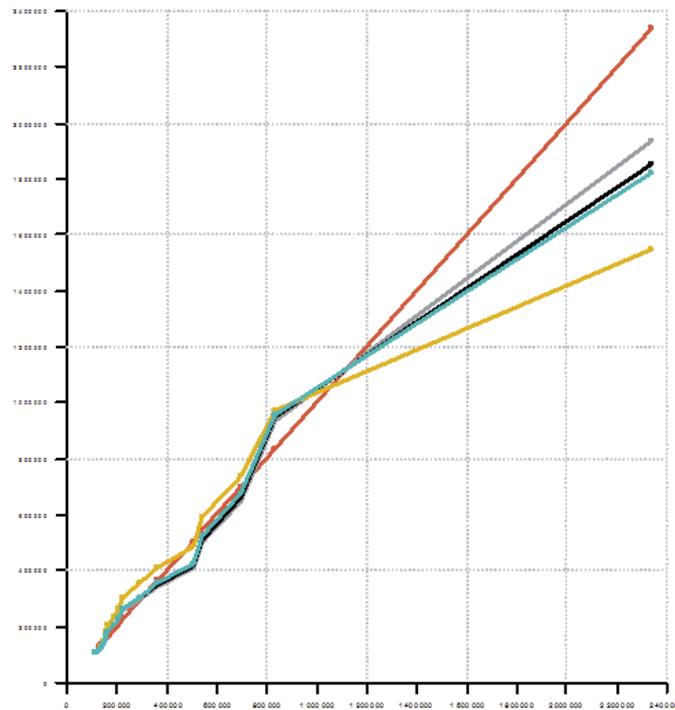


Figure 26 : QQ-Plots sinistralité "majeurs" RCA, Rouge = Données, Gris= Paréto Généralisée, Noir = Lognormale Tronquée, Bleu= Weibull Tronquée et Jaune = Gamma Tronquée

La Pareto Généralisée correspond assez bien à nos sinistres même si elle les surévalue un peu. Mais notre hypothèse de départ et l'incitation à la prudence nous font choisir définitivement cette loi de probabilité.

Pareto Généralisée	scale	151 985,01
	shape	0,598

Pour la fréquence, la paramétrisation sera simple. Nous remarquons d'abord que la moyenne depuis 2000 de la survenance d'évènements de plus de 100 000€ est de 1,07 et la variance d'environ 0,92. Ainsi si le paramètre de la loi Poisson est proche de 1 dans le calibrage suivant, nous pourrions considérer que la loi est appropriée.

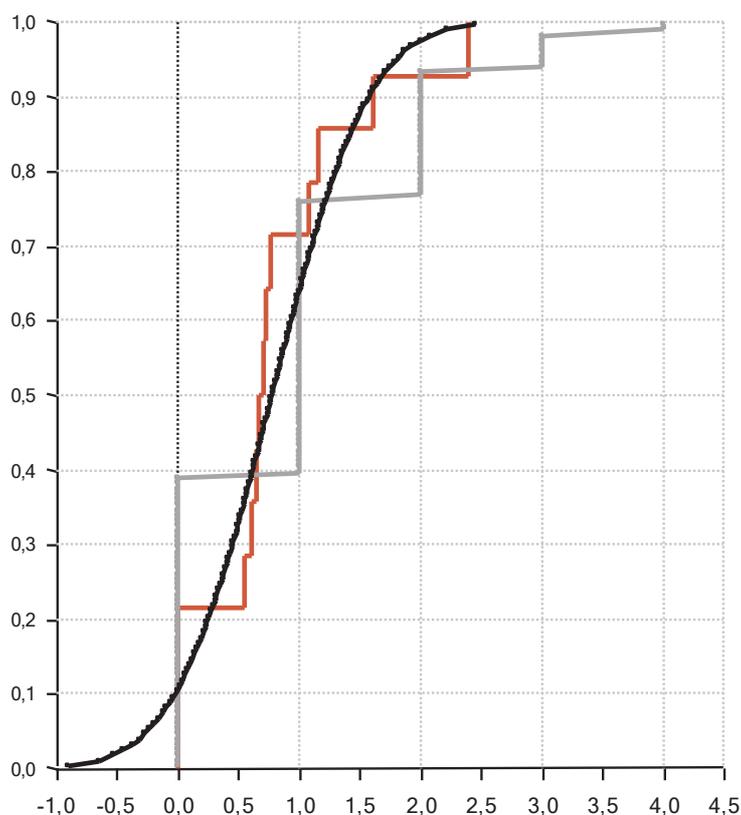


Figure 27 : Comparaison des distributions de fréquence de la sinistralité "majeurs" RCA : Rouge = Données, Gris = Poisson et Noir = Normale discrète

Nous obtenons :

Poisson	Lambda	0,929
---------	--------	-------

Comme le paramètre est proche de 1, nous conserverons la loi de Poisson comme loi de fréquence. Ainsi s'achève la dernière modélisation que nous devons effectuer.

## Chapitre 7 : Tarification de la structure de réassurance RCA

Après application de notre modèle, nous avons regroupé l'ensemble de nos résultats pour obtenir la charge sinistre annuelle ultime qui impacte notre traité.

Nous appliquons alors la structure de réassurance décrite en partie II et obtenons ainsi la prime chargée et le taux de prime de réassurance. Les résultats sont explicités ici :

Traités RCA	XS1	Prime pure	78 286	
		Chargement	25%	
		Prime commerciale	97 857	
		Assiette	2 450 465	
			Taux de prime	3,99%
	Quote-Part	Assiette	2 450 465	
		Taux de Quote-Part	85%	
		Prime commerciale	2 082 895	
	XS sur rétention	Prime pure	29 100	
Chargement		50%		
Prime commerciale		43 650		
Assiette		367 570		
		Taux de prime	11,88%	

**Tableau 18 : Résumé de la tarification du programme RCA**

Qui se résument :



**Figure 28 : Récapitulatif de la tarification du programme RCA**

## **Partie IV : Optimisation des structures de réassurance**

<b><u>Chapitre 1 : Introduction</u></b> .....	<b>58</b>
<b><u>Chapitre 2 : Méthode et critères</u></b> .....	<b>58</b>
<u>Section IV.2.1 : Méthode</u> .....	58
<u>Section IV.2.2 : Résultats financiers</u> .....	59
<u>Section IV.2.3 : Mesures de risque</u> .....	60
<u>Section IV.2.4 : Mesures de performance</u> .....	62
<u>Section IV.2.5 : Objectifs</u> .....	62
<b><u>Chapitre 3 : Application et résultats</u></b> .....	<b>62</b>
<b><u>Chapitre 4 : Quid de la QP ?</u></b> .....	<b>66</b>
<u>Section IV.4.1 : Suppression de la QP – Méthode</u> .....	66
<u>Section IV.4.2 : Résultats et choix</u> .....	67
<u>Section IV.4.3 : Comparaison de l’option choisie avec les options intégrant la QP :</u> .....	70
<b><u>Chapitre 5 : Conclusions</u></b> .....	<b>72</b>

## Chapitre 1 : Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons modélisé et tarifié les structures de réassurance de notre cédante, et ce, sans nous poser la question de l'optimalité de ces dernières.

En effet, au-delà du bon ou mauvais prix que la cédante va payer pour ses traités, il existe une vraie problématique quant au bénéfice pour la cédante de la mise en place de ses structures, en particulier si celles-ci sont calibrées de manière efficiente selon les besoins de notre cédante.

Pour ce faire, nous aurons besoin d'appréhender deux éléments : les conséquences de la réassurance sur le résultat technique et le besoin en capital qu'elle représente.

Ainsi, après avoir choisi un panel de structures à comparer, nous définirons et utiliserons différentes mesures de risques et de performances pour obtenir un critère graphique dans le choix d'une structure optimale.

Avant de conclure, nous nous poserons également la question de l'utilité de la quote-part qui fait office de tampon entre les deux XS.

## Chapitre 2 : Méthode et critères

### Section IV.2.1 : Méthode

- Choix d'un panel de comparaison

Le panel de comparaison a été choisi de manière à ne pas bouleverser complètement les structures déjà mises en place par la cédante. Nous conserverons donc la structure XS1 - 85% QP 15% - XS/RET et apporterons des modifications sur les niveaux de priorité des XS.

Les portées ne sont pas modifiées pour deux raisons :

- La portée XS1 de la RCA étant infinie et celle du DAB étant bien au-dessus du sinistre maximum, nous considérons ces portées bien définies.
- Pour éviter tout trou de couverture, les portées des XS/RET dépendent de la rétention des quotes-parts qui dépendent du niveau de priorité de l'XS1. Elles seront donc calculées.

Ainsi nous nous porterons sur les options suivantes :

Options		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4	Option 5
	20 000	Option 6	Option 7	Option 8	Option 9	Option 10
	22 500	Option 11	Option 12	Structure actuelle (SA)	Option 13	Option 14
	25 000	Option 15	Option 16	Option 17	Option 18	Option 19
	30 000	Option 20	Option 21	Option 22	Option 23	Option 24

Tableau 19 : Panel d'options classiques

Ce sont les mêmes pour les structures DAB (que nous afficherons en vert) et RCA (en bleu).

Ainsi, chaque option est appliquée sur les simulations qui nous ont permis de tarifer les structures existantes dans la Partie III.

- Processus d'évaluation des structures

Chaque option sera comparée à travers des indicateurs de risque (comme la Value-at-Risk) et de performance (comme le résultat financier), que nous allons décrire maintenant.

## Section IV.2.2 : Résultats financiers

Nous pouvons, à ce stade, obtenir deux résultats : le coût de la réassurance, à savoir les nouveaux niveaux de prime chargée et le résultat technique moyen.

- Coût de la réassurance

Le calcul des primes pures est effectué de la même manière que dans la partie 3 pour les options DAB :

Primes		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	2 518 239	2 373 960	2 346 298	2 339 214	2 336 605
	20 000	2 512 176	2 368 451	2 341 122	2 334 053	2 331 445
	22 500	2 509 557	2 366 003	2 338 898	2 331 849	2 329 242
	25 000	2 507 152	2 363 720	2 336 849	2 329 839	2 327 233
	30 000	2 502 862	2 359 578	2 333 140	2 326 272	2 323 675

Tableau 20 : Coût de la réassurance DAB par option

et pour les options RCA :

Primes		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	2 437 258	2 334 923	2 288 186	2 259 788	2 239 588
	20 000	2 434 205	2 331 870	2 285 133	2 256 735	2 236 535
	22 500	2 432 784	2 330 449	2 283 712	2 255 314	2 235 114
	25 000	2 431 427	2 329 091	2 282 355	2 253 957	2 233 756
	30 000	2 428 888	2 326 552	2 279 816	2 251 417	2 231 217

Tableau 21 : Coût de la réassurance RCA par option

Nous remarquerons que, plus les niveaux de priorité sont hauts, moins les structures sont chères. Ceci est totalement logique puisque plus les niveaux de priorité sont hauts moins il y a de réassurance et donc la cédante paiera moins.

Ceci pourrait être un premier critère de sélection, si la cédante souhaite uniquement réduire son coût de réassurance sans pour autant complètement modifier sa structure.

- Résultat technique moyen

Le résultat technique (RT) est calculé selon la formule suivante :

$$RT = EPI$$

- Sinistralité à 100%
- +Récupération de la réassurance
- Prime de réassurance
- Frais
- +Commissions sur frais
- +Résultat des produits financiers

} Résultat de la réassurance (RR)

Les frais sont estimés à 20% de l'assiette de prime.

Les commissions sur frais sont les reversements des réassureurs auprès des cédantes dans le partage équitable des charges. Ici par la quote-part à 85%, c'est 85% des frais qui seront reversés.

Les produits financiers génèrent une plus-value de 4% de l'assiette de prime.

Le résultat technique moyen  $\overline{RT}$  est la moyenne sur toute les simulations des  $RT$ . C'est ce qu'il va rester en moyenne à la cédante après toutes les opérations.

Nous obtenons alors :

RT DAB net		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	- 79 073	65 206	92 868	99 952	102 561
	20 000	- 78 011	65 715	93 044	100 113	102 721
	22 500	- 77 891	65 662	<b>92 768</b>	99 816	102 424
	25 000	- 77 986	65 446	92 317	99 327	101 933
	30 000	- 78 696	64 588	91 026	97 894	100 491

Tableau 22 : Résultat technique (RT) net de réassurance DAB par option

RT RCA net		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	- 175 873	- 73 538	- 26 801	1 597	21 797
	20 000	- 174 856	- 72 520	- 25 784	2 614	22 815
	22 500	- 174 382	- 72 047	- <b>25 310</b>	3 088	23 289
	25 000	- 173 930	- 71 594	- 24 858	3 540	23 741
	30 000	- 173 083	- 70 748	- 24 011	4 387	24 587

Tableau 23 : Résultat technique (RT) net de réassurance RCA par option

Les différences entre les résultats techniques sont importantes. Ils se bonifient lorsque la priorité de l'XS1 est forte et ce pour deux raisons :

- Nous avons vu précédemment que les structures coutaient moins cher avec les priorités plus hautes. La prime de réassurance est donc plus faible et, de par la formule de calcul du résultat technique, ce dernier l'est aussi.
- Si la priorité de l'XS1 est plus haute, la rétention de cet XS l'est aussi et par conséquent le montant déversé dans la quote-part à 85% aussi. Or cette Quote-Part, avec son taux de 85%, a une cession en réassurance plus forte que l'XS1 alors qu'elle ne coûte toujours que 85% de l'assiette. Ce qui n'est plus pris en charge par l'XS1 à cause du rehaussement de la rétention est épongé par la quote-part. Elle réassure plus et pour le même prix. Pour résumer, nous payons moins cher pour l'XS1 et le même prix pour la Quote-Part mais qui réassure plus. Le résultat de la réassurance est donc meilleur. Le résultat technique aussi.

Dans la suite, appelons :

$X$  : la sinistralité à charge de la cédante brute de réassurance

$Y$  : la sinistralité à charge de la cédante nette de réassurance

### Section IV.2.3 : Mesures de risque

- Value at Risk (VaR)

On appelle Value at Risk de niveau  $\alpha \in [0,1]$  le quantile de niveau  $\alpha$ ,  $P(X \leq VaR_\alpha(X)) = \alpha$

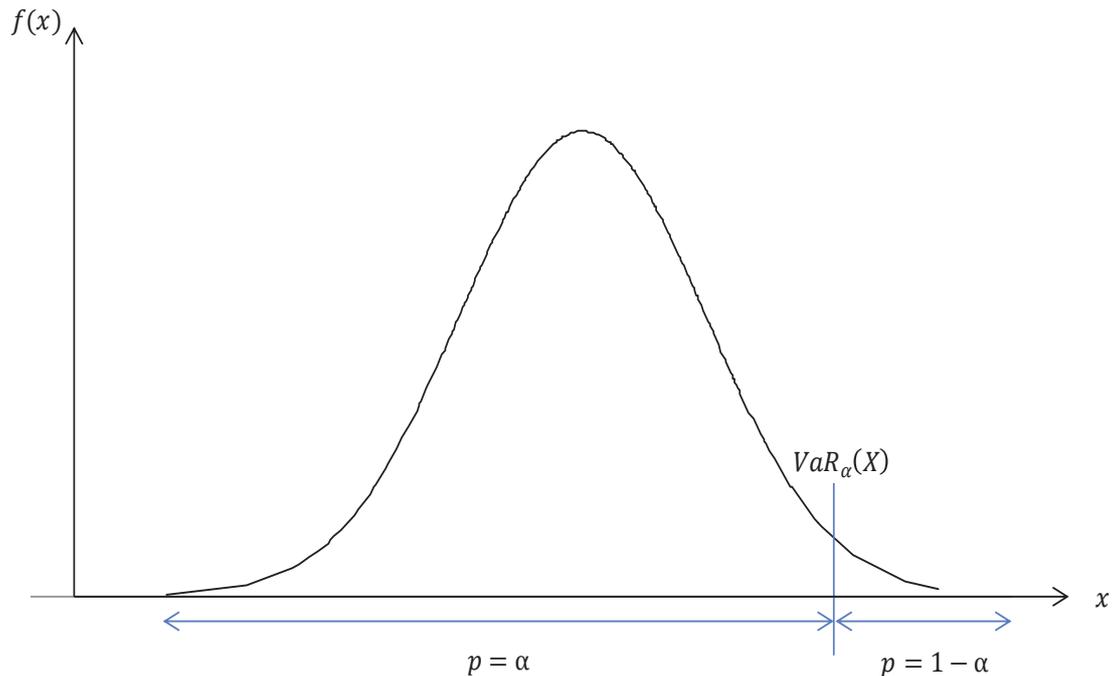


Figure 29 : Illustration du principe de la VaR

Nous pouvons également écrire la VaR sous la forme :

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x, P(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

La VaR correspond à la perte maximale probable sur un horizon donné avec un niveau de confiance  $\alpha$ .

Comme le recommandent les nouvelles réglementations, elle va nous permettre de réaliser le calcul d'un besoin en capital (BC) en calculant la donnée  $BC = VaR_{99,5\%}(Y)$ .

Elle sera préférée à la TVaR (définie ci-après).

- Tail Value-at-Risk (TVaR)

On appelle Tail Value at Risk de niveau  $\alpha \in [0,1]$  la moyenne des VaR de niveau supérieur à  $\alpha$ ,

$$TVaR_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_t(X) dt$$

C'est donc la perte moyenne au-dessus de la VaR de même niveau  $\alpha$ . Pour un  $\alpha$  donné, elle est donc plus conservatrice :

$$VaR_{\alpha}(X) \leq TVaR_{\alpha}(X)$$

### Section IV.2.4 : Mesures de performance

- Valeur économique de la structure (VE)

Nous définissons la valeur économique d'un programme de réassurance comme la somme entre le résultat de la réassurance et l'économie de rémunération du capital que permet le programme.

Prenons l'hypothèse d'une rémunération du capital d'un taux  $\tau$ .

Avec les notations précédentes nous obtenons :

$$VE = \tau * (VaR_{99,5\%}(X) - VaR_{99,5\%}(Y)) + RR$$

### Section IV.2.5 : Objectifs

**OBJECTIF 1 :** Le but de l'optimisation est d'augmenter le résultat technique net de réassurance et de minimiser le besoin de capital. Nous tracerons donc un graphe RT – BC.

**OBJECTIF 2 :** Le but de l'optimisation est d'augmenter le résultat technique net de réassurance et de maximiser sa valeur économique. Nous tracerons donc un graphe RT – VE.

Remarques :

- L'objectif 1 est consacré à l'impact de la réassurance sur l'activité globale de la cédante.
- L'objectif 2 est consacré à la rentabilité de l'opération de réassurance uniquement.

## Chapitre 3 : Application et résultats

Comme annoncé précédemment, nous avons appliqué les différentes options aux sinistralités simulées en partie III. Nous obtenons les résultats suivants :

- Besoin en capital :

BC net DAB		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	328 526	328 526	328 526	328 526	328 526
	20 000	333 526	333 526	333 526	333 526	333 526
	22 500	336 026	336 026	336 026	336 026	336 026
	25 000	338 526	338 526	338 526	338 526	338 526
	30 000	343 526	343 526	343 526	343 526	343 526

Tableau 24 : Besoin en capital (BC) net de assurance DAB par option

BC net RCA		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	272 027	272 027	272 027	272 027	272 027
	20 000	275 550	275 550	275 550	275 550	275 550
	22 500	277 653	277 653	277 653	277 653	277 653
	25 000	279 670	279 670	279 670	279 670	279 670
	30 000	283 587	283 587	283 587	283 587	283 587

Tableau 25 : Besoin en capital (BC) net de réassurance RCA par option

Nous remarquerons que le BC ne dépend en aucun cas de la priorité de l'XS1, seulement de la priorité de l'XS/RET.

En effet, toute la rétention de l'XS1 est absorbée par la suite par la quote-part et par l'XS/RET. Plus la priorité de l'XS/RET est faible, moins forte est l'exigence en capital.

Avec les résultats obtenus dans le calcul du résultat technique réalisé plus haut et le calcul du BC réalisé à l'instant, nous pouvons désormais effectuer une pré-sélection des options.

Analysons donc quelles options augmentent notre résultat technique et baissent notre besoin en capital en réalisant le graphe RT-BC :

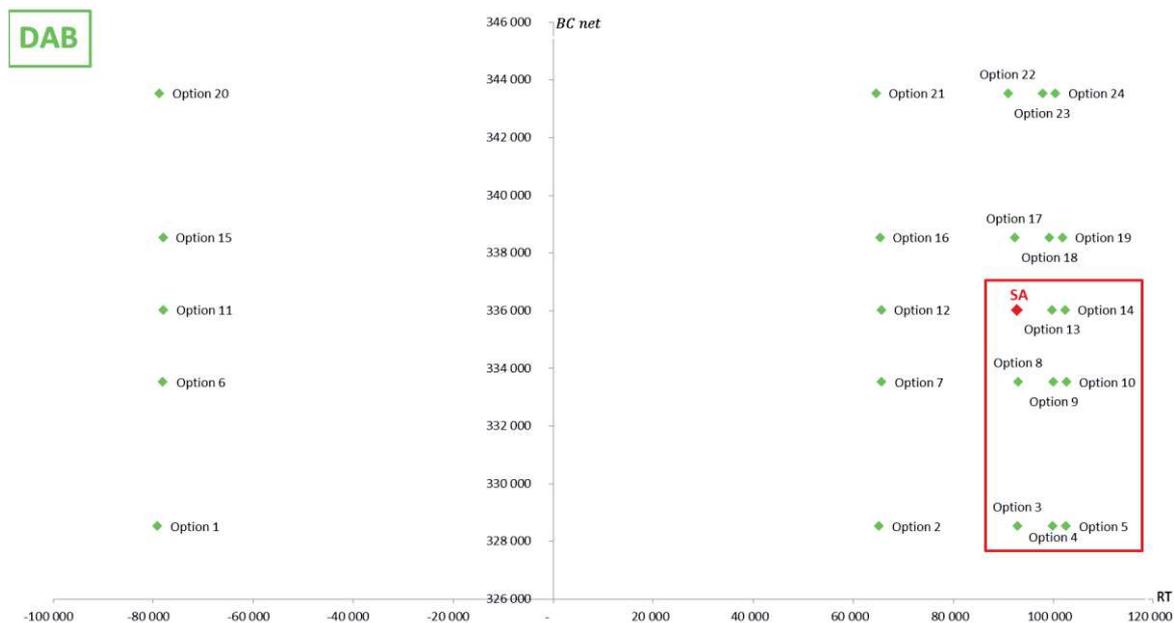


Figure 30 : Graphe RT-BC pour la réassurance DAB

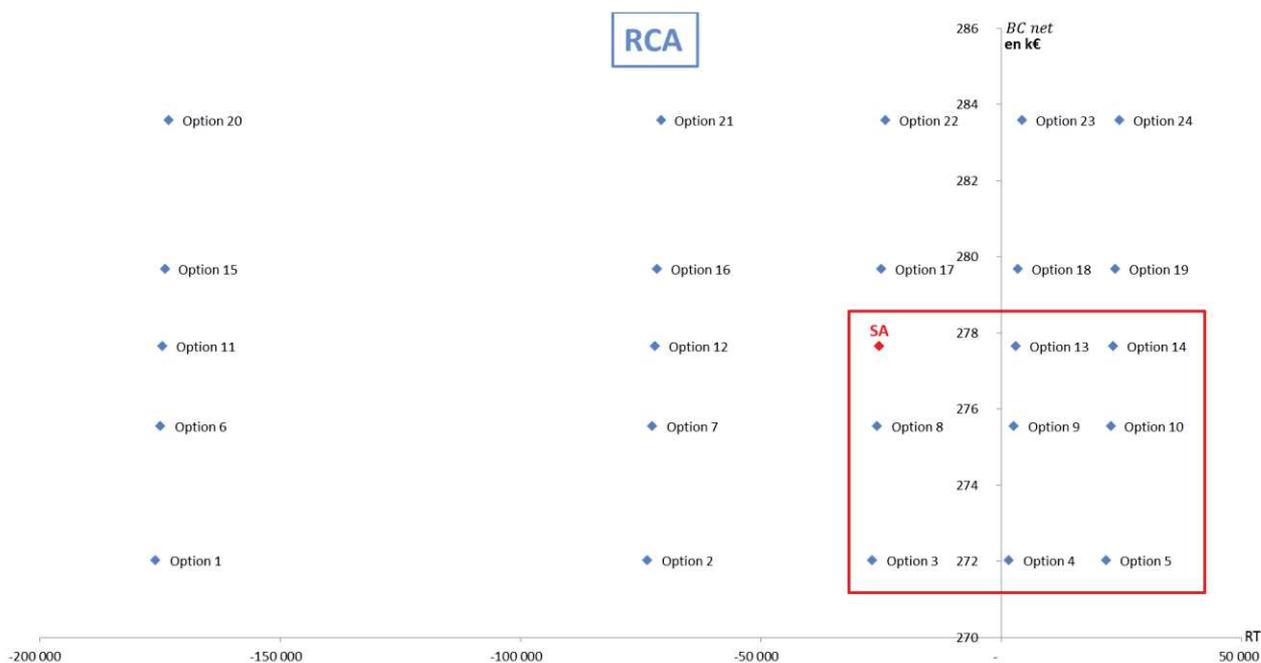


Figure 31 : Graphe RT-BC pour la réassurance RCA

Nous présélectionnons donc les options 3, 4, 5, 8, 9, 10, SA, 13, 14 puisqu'elles améliorent au moins l'une des deux variables. Les autres sont éliminées :

Options		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4	Option 5
	20 000	Option 6	Option 7	Option 8	Option 9	Option 10
	22 500	Option 11	Option 12	Structure actuelle (SA)	Option 13	Option 14
	25 000	Option 15	Option 16	Option 17	Option 18	Option 19
	30 000	Option 20	Option 21	Option 22	Option 23	Option 24

Tableau 26 : Présélection d'options classiques

Comment maintenant, départager plus efficacement les options restantes ?  
Cela sera effectué grâce à la mesure de performance que nous avons définie plus haut.

- Valeur économique :

A l'aide des formules définies dans le chapitre précédent nous avons pu calculer la VE de chaque option et pour chaque branche. Comme annoncé, une représentation graphique RT-VE a été effectuée.

Pour la branche DAB :

VE DAB		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	5 305 068	5 449 347	5 477 010	5 484 094	5 486 702
	20 000	5 305 931	5 449 656	5 476 985	5 484 055	5 486 663
	22 500	5 305 950	5 449 504	5 476 609	5 483 658	5 486 265
	25 000	5 305 755	5 449 188	5 476 059	5 483 068	5 485 674
	30 000	5 304 845	5 448 130	5 474 568	5 481 436	5 484 033

Tableau 27 : Valeur économique de la réassurance DAB par option

Pour la branche RCA :

VE RCA		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	- 612 431	- 510 095	- 463 359	- 434 961	- 414 760
	20 000	- 611 554	- 509 219	- 462 482	- 434 084	- 413 884
	22 500	- 611 165	- 508 829	- 462 093	- 433 695	- 413 494
	25 000	- 610 793	- 508 458	- 461 721	- 433 323	- 413 122
	30 000	- 610 103	- 507 768	- 461 031	- 432 633	- 412 433

Tableau 28 : Valeur économique de la réassurance RCA par option

Nous remarquons que ce sont les mêmes options qui améliorent nos VE et pour les deux branches. Mais dans le sens inverse pour la RCA.

Graphiquement nous obtenons :

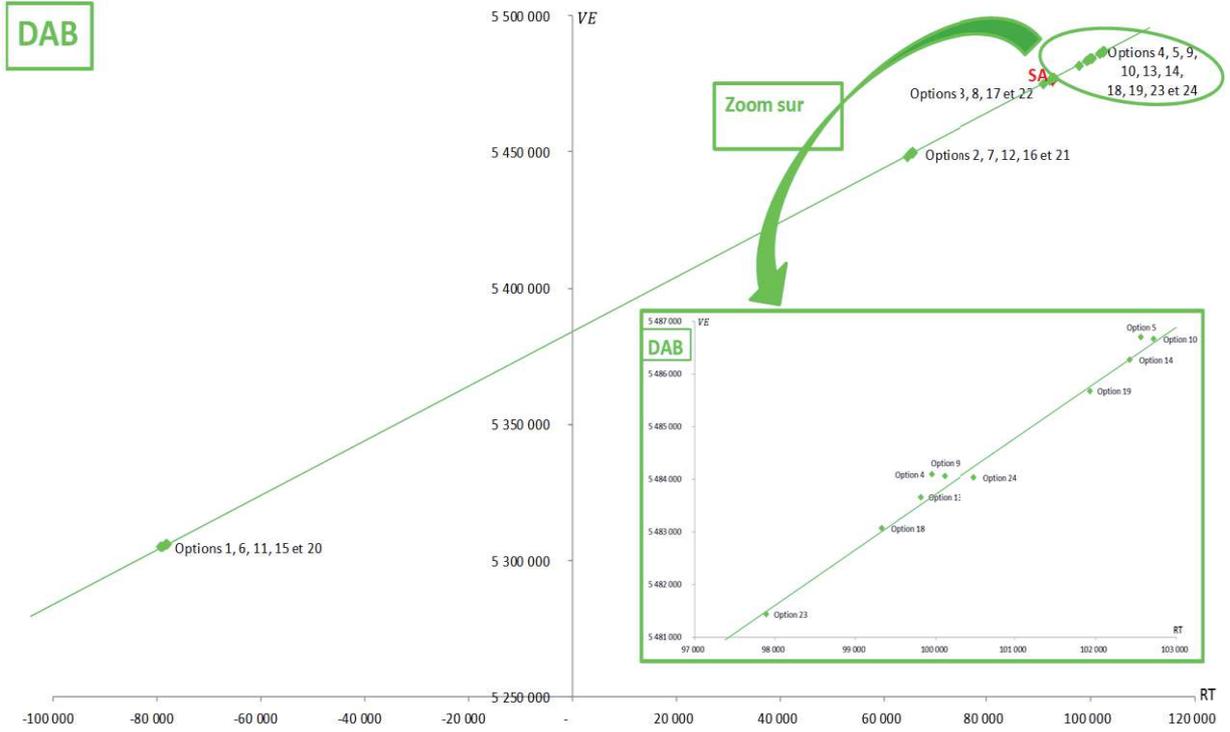


Figure 32 : Graphe RT-VE de la réassurance DAB

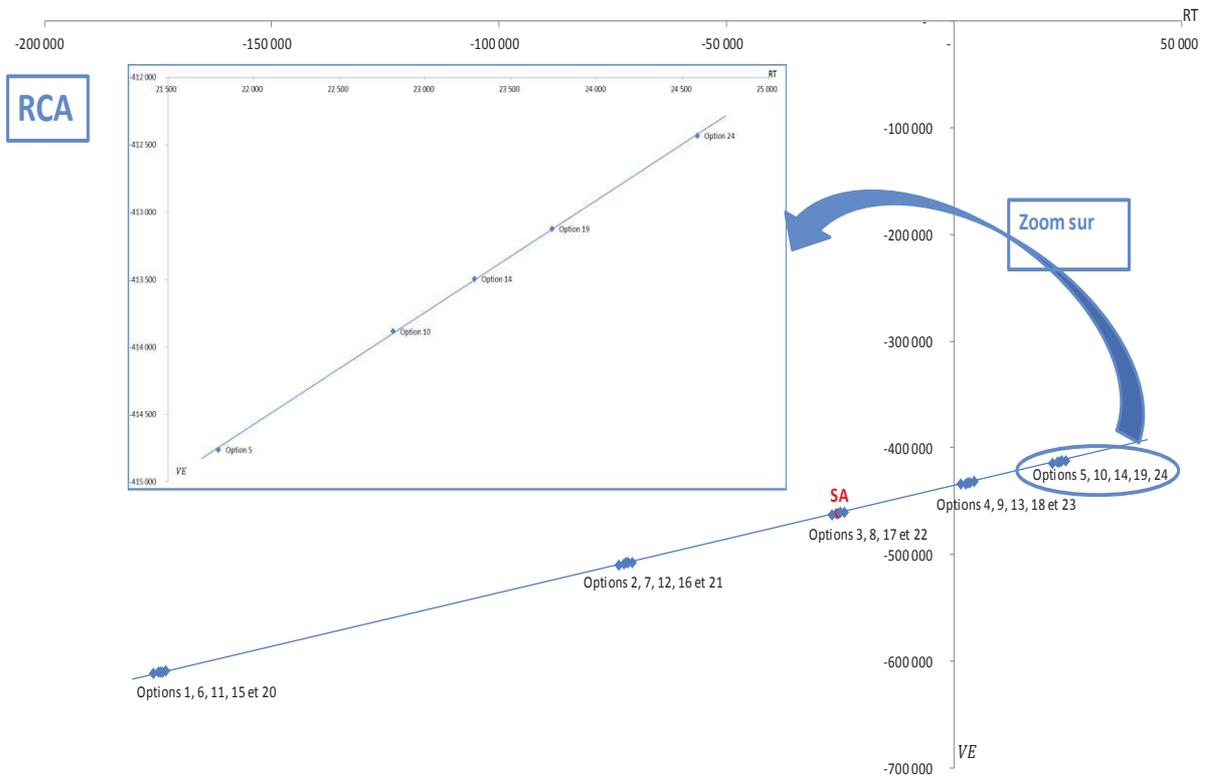


Figure 33 : Graphe RT-VE de la réassurance RCA

Sont encadrées les options qui dépassent la structure actuelle : en prenant en compte les options déjà éliminées, les options retenues sont donc les options 3, 4, 5, 8, 9, 10, SA, 13 et 14. Les autres sont éliminées.

Cependant parmi ces options, cinq d'entre-elles se distinguent particulièrement par leurs meilleurs résultats : les options 5, 10, 14, 19 et 24. Les options sélectionnées précédemment et qui ne figurent pas dans cette liste seront grisées pour mettre en valeur les dernières :

Options		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4	Option 5
	20 000	Option 6	Option 7	Option 8	Option 9	Option 10
	22 500	Option 11	Option 12	Structure actuelle (SA)	Option 13	Option 14
	25 000	Option 15	Option 16	Option 17	Option 18	Option 19
	30 000	Option 20	Option 21	Option 22	Option 23	Option 24

Tableau 29 : Choix d'options classiques

Nous choisirons l'option 5 car là où elle est battue par ses concurrentes, ne compense pas la plus grande baisse de BC qu'elle permet.

Cependant, en cas de difficulté de placement de la structure auprès des réassureurs, la cédante saura qu'elle pourra toujours se rabattre sur les options 10 et 14 pour améliorer sa réassurance.

Remarque :

- Les options 5, 10 et 14 sont celles qui octroient la bande la plus large à la quote-part. La quote-part semble donc importante puisque plus son champ d'intervention est grand, meilleurs sont les résultats. Cependant, c'est cette même quote-part, par sa cession à 85% de l'assiette, qui alimente le plus la prime de réassurance. Ainsi, nous sommes en mesure de nous demander si cette quote-part est vraiment indispensable ou si, en cas de suppression de cette dernière, le gain en prime pure de réassurance vaut largement la prise de risque plus grande pour la cédante.

C'est ce à quoi nous allons tenter de répondre dans le prochain chapitre.

## Chapitre 4 : Quid de la QP ?

### Section IV.4.1 : Suppression de la QP – Méthode

Par la structure du programme de réassurance, et en évitant tout trou de couverture, la suppression de la quote-part entraînerait le rehaussement du plafond de l'XS/RET au niveau de la priorité de l'XS1.

Ainsi nous nous retrouvons dans le cas d'un seul XS à deux tranches. Nous l'étudierons donc comme les fois précédentes à savoir en le tarifant de manière globale et en faisant fluctuer le niveau de priorité pour optimiser les résultats de cet XS.

Pour le choix d'un panel de priorité à tester, les options suivantes ont été choisies :

Options	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4	Option 5	Option 6	Option 7	Option 8
Priorités	15 000	20 000	22 500	25 000	30 000	50 000	100 000	200 000
Options	Option 9	Option 10	Option 11	Option 12	Option 13	Option 14	Option 15	Option 16
Priorités	300 000	400 000	500 000	1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000

Tableau 30 : Panel d'options hors QP

Les critères de sélection et les graphiques réalisés sont les mêmes que pour le chapitre précédent.

### Section IV.4.2 : Résultats et choix

Nous avons appliqué les sinistralités simulées sur nos différentes options et avons calculé les mesures de risques et de performance pour chaque branche.

Nous obtenons les résultats suivants:

Pour la branche DAB :

DAB								
Options	Rétention	Primes réass	EPI net	BC net DAB	Gain en BC	Résultat réass	RT DAB net	VE
Option 1	15 000	1 773 404	838 269	2 105 173	7 624 074	4 633 339	- 818 758	4 938 302
Option 2	20 000	1 760 204	851 469	2 110 173	7 619 074	4 641 538	- 810 559	4 946 301
Option 3	22 500	1 752 535	859 138	2 112 673	7 616 574	4 646 707	- 805 390	4 951 370
Option 4	25 000	1 744 257	867 416	2 115 173	7 614 074	4 652 486	- 799 611	4 957 049
Option 5	30 000	1 726 165	885 508	2 120 173	7 609 074	4 665 578	- 786 519	4 969 941
Option 6	50 000	1 644 410	967 263	2 140 173	7 589 074	4 727 333	- 724 764	5 030 896
Option 7	100 000	1 440 839	1 170 834	2 190 173	7 539 074	4 880 904	- 571 193	5 182 467
Option 8	200 000	1 270 910	1 340 763	2 240 173	7 489 074	5 000 833	- 451 264	5 300 396
Option 9	300 000	1 130 376	1 481 297	2 290 173	7 439 074	5 091 368	- 360 729	5 388 931
Option 10	400 000	910 967	1 700 706	2 390 173	7 339 074	5 210 787	- 241 310	5 504 350
Option 11	500 000	627 369	1 984 304	2 590 173	7 139 074	5 294 405	- 157 692	5 579 968
Option 12	1 000 000	319 422	2 292 251	3 090 173	6 639 074	5 102 578	- 349 519	5 368 141
Option 13	2 000 000	193 949	2 417 724	4 090 173	5 639 074	4 234 332	-1 217 765	4 459 895
Option 14	3 000 000	180 916	2 430 757	5 077 776	4 651 472	3 286 216	-2 165 881	3 472 275
Option 15	4 000 000	168 054	2 443 619	6 071 768	3 657 480	2 420 890	-3 031 207	2 567 189
Option 16	5 000 000	149 620	2 462 053	7 047 745	2 681 502	1 692 714	-3 759 383	1 799 974

Tableau 31 : Résultats globaux nets de réassurance DAB hors QP par option

Graphiquement cela donne :

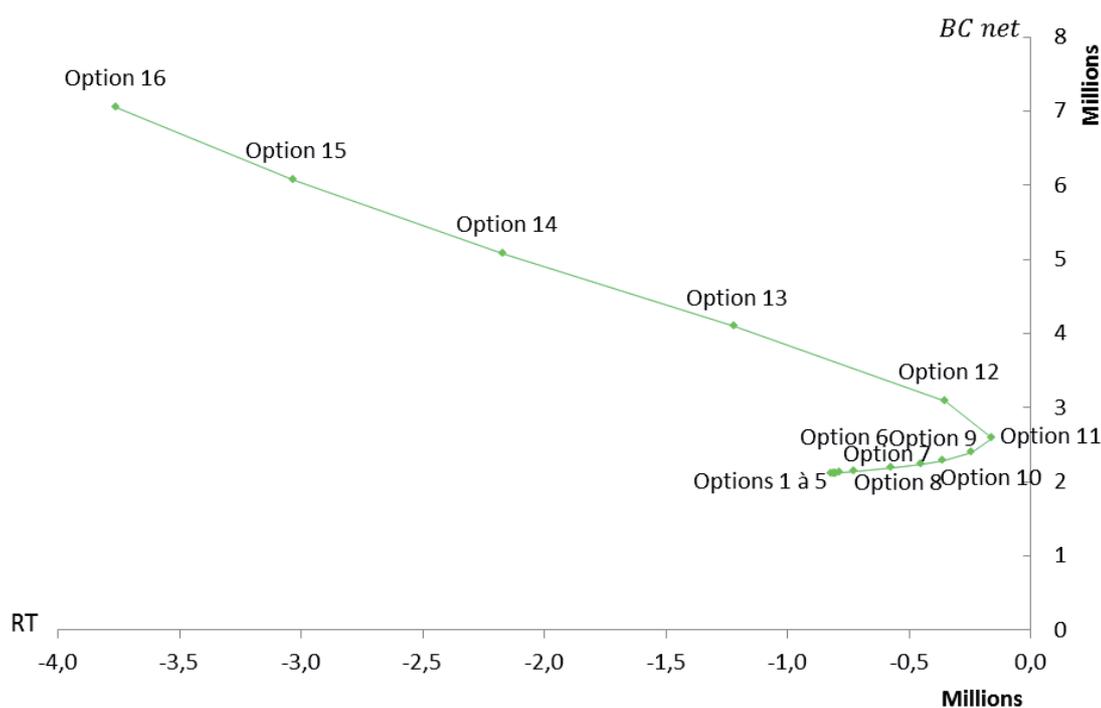


Figure 34 : Graphe RT-BC de la réassurance DAB hors QP

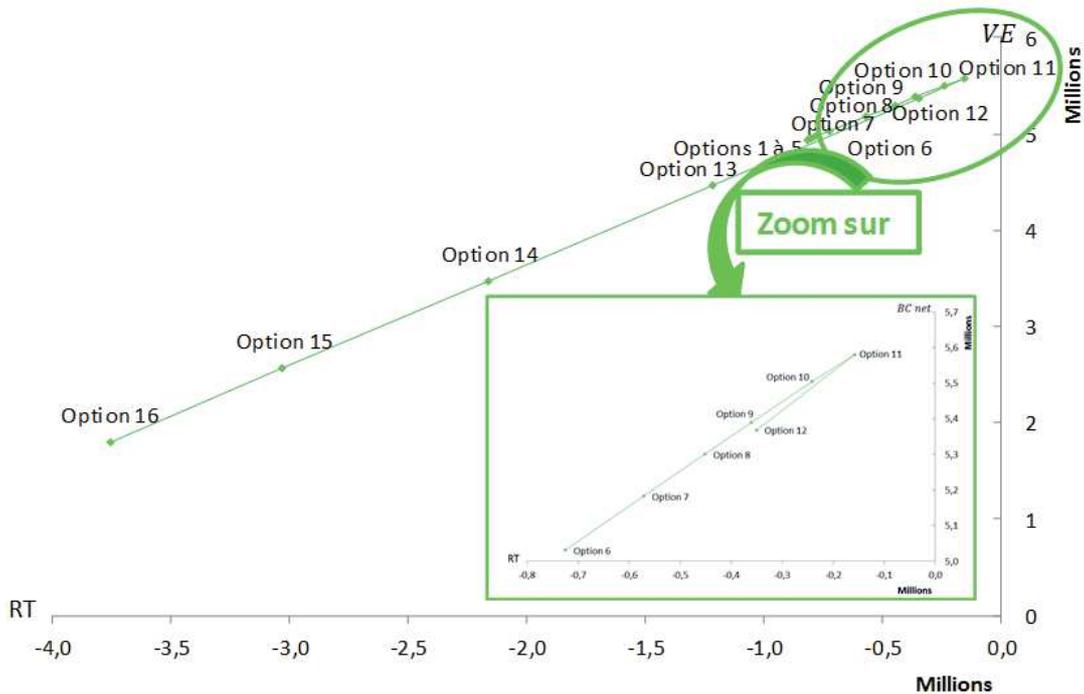


Figure 35 : Graphe RT-VE de la réassurance DAB hors QP

Avec une meilleure VE, un meilleur RT et un BC équivalent, nous sélectionnerons l'option 11 :

DAB								
Options	Rétention	Primes réass	EPI net	BC net DAB	Gain en BC	Résultat réass	RT DAB net	VE
Option 11	500 000	627 369	1 984 304	2 590 173	7 139 074	5 294 405	- 157 692	5 579 968

Tableau 32 : Choix de l'option de réassurance DAB hors QP

Pour la branche RCA :

RCA								
Options	Rétention	Primes réass	EPI net	BC net RCA	Gain en BC	Résultat réass	RT RCA net	VE
Option 1	15 000	920 148	1 530 317	1 756 773	6 332 170	- 576 965	- 244 310	- 323 678
Option 2	20 000	910 799	1 539 666	1 759 025	6 329 919	- 570 380	- 237 724	- 317 183
Option 3	22 500	906 213	1 544 252	1 761 209	6 327 734	- 567 157	- 234 502	- 314 047
Option 4	25 000	901 687	1 548 778	1 762 389	6 326 555	- 563 982	- 231 326	- 310 920
Option 5	30 000	892 793	1 557 672	1 766 857	6 322 086	- 557 756	- 225 101	- 304 873
Option 6	50 000	859 255	1 591 210	1 783 367	6 305 577	- 534 460	- 201 804	- 282 236
Option 7	100 000	787 259	1 663 206	1 813 516	6 275 428	- 485 420	- 152 765	- 234 403
Option 8	200 000	727 773	1 722 692	1 851 017	6 237 926	- 445 821	- 113 166	- 196 304
Option 9	300 000	677 846	1 772 619	1 890 579	6 198 364	- 413 214	- 80 558	- 165 279
Option 10	400 000	598 355	1 852 110	1 969 615	6 119 329	- 362 508	- 29 853	- 117 735
Option 11	500 000	488 592	1 961 873	2 149 013	5 939 930	- 294 700	37 956	- 57 102
Option 12	1 000 000	342 225	2 108 240	2 600 984	5 487 960	- 207 016	125 639	12 502
Option 13	2 000 000	219 561	2 230 904	3 509 721	4 579 223	- 134 322	198 333	48 847
Option 14	3 000 000	163 678	2 286 787	4 435 205	3 653 739	- 100 697	231 958	45 453
Option 15	4 000 000	129 761	2 320 704	5 381 858	2 707 086	- 80 142	252 513	28 141
Option 16	5 000 000	105 686	2 344 779	6 352 517	1 736 427	- 65 363	267 292	4 094

Tableau 33 : Résultats globaux de la réassurance RCA hors QP

Graphiquement cela donne :

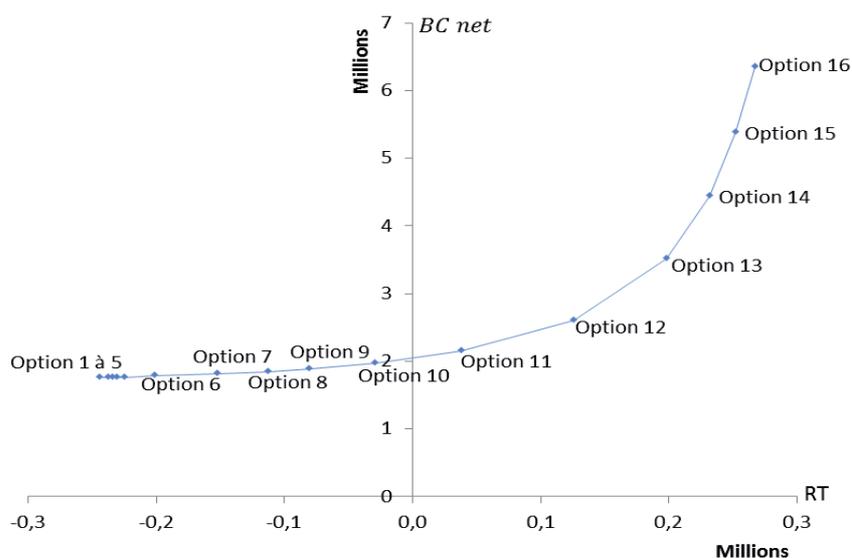


Figure 36 : Graphe RT-BC de la réassurance RCA hors QP

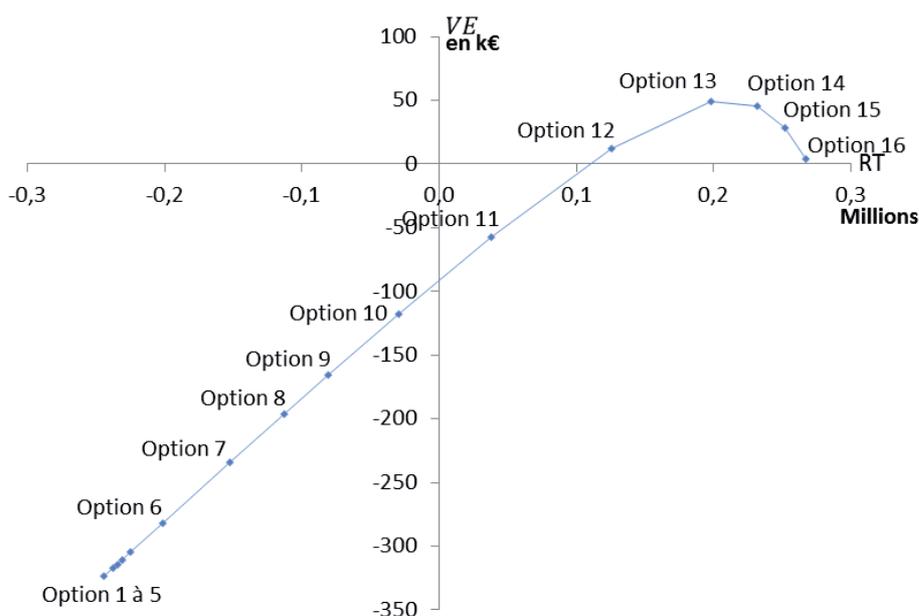


Figure 37 : Graphe RT-VE de la réassurance RCA hors QP

Avec une bonne VE, un RT et un BC corrects, l'option 13 semble un bon compromis. Nous la sélectionnons :

RCA								
Options	Rétention	Primes réass	EPI net	BC net RCA	Gain en BC	Résultat réass	RT RCA net	VE
Option 13	2 000 000	219 561	2 230 904	3 509 721	4 579 223	- 134 322	198 333	48 847

Tableau 34 : Choix de l'option de réassurance RCA hors QP

### Section IV.4.3 : Comparaison de l'option choisie avec les options intégrant la QP :

Maintenant que nous avons choisi les meilleures options après suppression de la quote-part, il convient d'observer ces dernières par rapport à notre étude du chapitre précédent. Ainsi, les graphiques sont repris par branche et l'option optimale sans Quote-Part (SQP) a été ajoutée.

Pour la branche DAB :

Pour un résultat technique négatif, la structure sans Quote-Part admet un besoin de capital beaucoup plus fort :

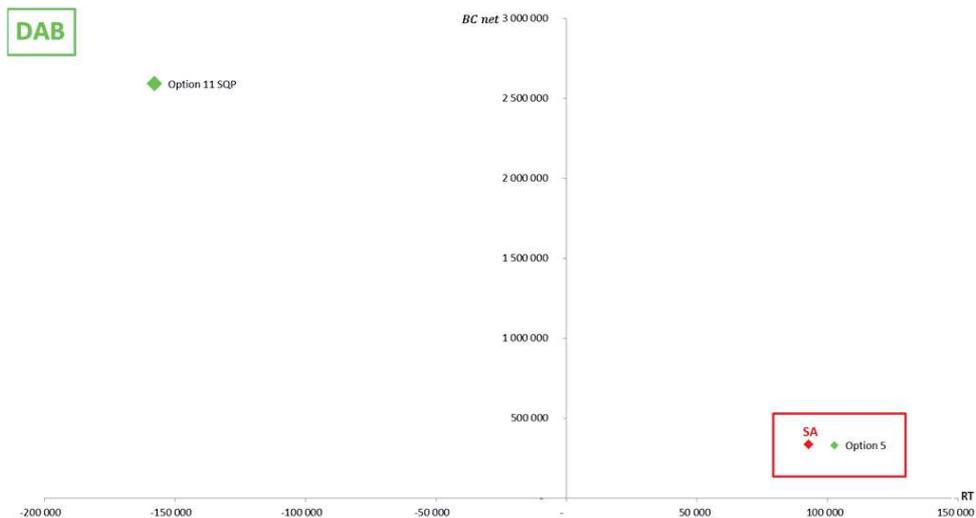


Figure 38 : Graphe RT-BC comparatif des options RCA classiques et hors QP choisies



Figure 39 : Graphe RT-VE comparatif des options DAB classiques et hors QP choisies

Malgré une valeur économique meilleure, de tels niveaux de BC et de RT ne peuvent être assumés par notre cédante.

La suppression de la Quote-Part dans la structure DAB est inenvisageable.

Pour la branche RCA :

L'option choisie admet également un besoin en capital plus fort et dégage un résultat technique moyen bien plus important que les meilleures options avec QP :

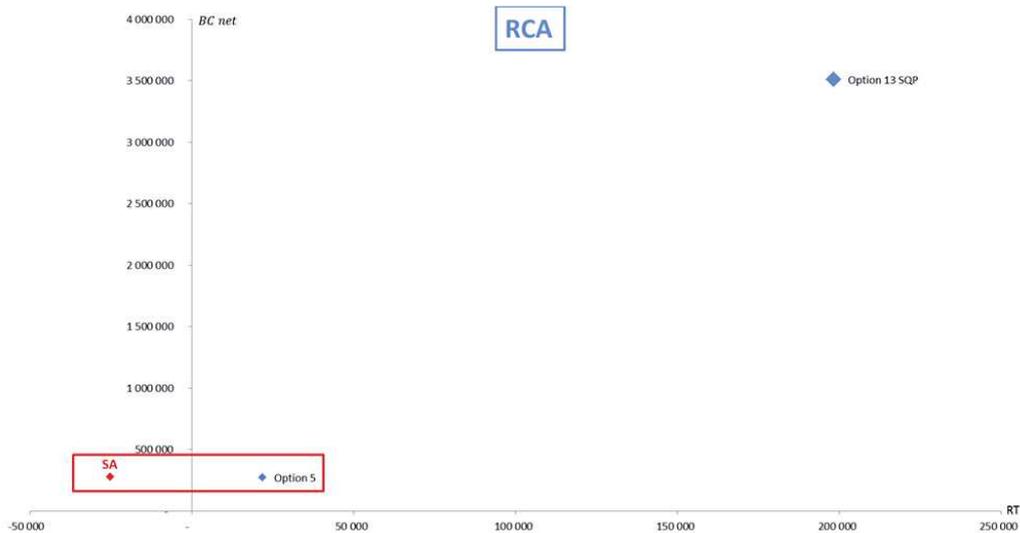


Figure 40 : Graphe RT-BC comparatif des options RCA classiques et hors QP choisies

Il est donc essentiel d'observer le graphe RT-VE pour situer l'option SQP par rapport aux autres :

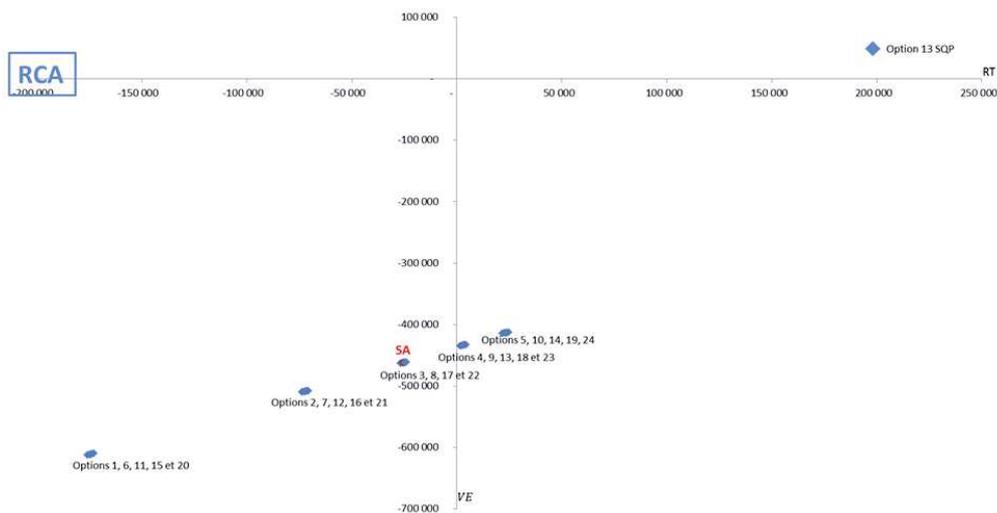


Figure 41 : Graphe RT-VE comparatif des options RCA classiques et hors QP choisies

Sur ce graphique le constat est rapide, l'option sans Quote-Part est meilleure que la majorité des options avec Quote-Part. Cependant la suppression de cette dernière entraînerait un besoin en capital cinq fois plus important. Ce que la cédante ne peut se permettre.

La suppression de la Quote-Part dans la structure DAB est inenvisageable.

## Chapitre 5 : Conclusions

Dans cette partie, nous avons étudié différentes structures de réassurance afin de déterminer la structure optimale pour notre cédante selon des critères bien définis.

Ces critères sont le Résultat Technique moyen (RT), le Besoin en Capital (BC) et la Valeur Economique de la couverture (VE).

Les options testées étaient en concordance avec la structure actuelle mais nous nous sommes également attachés à étudier l'utilité de la Quote-Part en « éponge » entre les deux XS, pour nous rendre compte, au final, que cette dernière, et ce malgré son prix, est indispensable.

Nous avons pu remarquer également, que plus la priorité de l'XS1 était haute, meilleure était l'option. Cela est dû au fait qu'une augmentation de la priorité de l'XS1 élargi la bande passante de la QP.

Ainsi, dans la suite de ce mémoire, notre choix portera, en adéquation avec l'étude menée, sur l'option avec Quote-Part numéro 5 pour les deux branches :

Options		Priorité XS1				
		1 000 000	2 000 000	3 000 000	4 000 000	5 000 000
Priorité XS/RET	15 000	Option 1	Option 2	Option 3	Option 4	Option 5
	20 000	Option 6	Option 7	Option 8	Option 9	Option 10
	22 500	Option 11	Option 12	Structure actuelle (SA)	Option 13	Option 14
	25 000	Option 15	Option 16	Option 17	Option 18	Option 19
	30 000	Option 20	Option 21	Option 22	Option 23	Option 24

**Tableau 35 : Choix final-options classiques**

Ce à quoi nous pouvons réfléchir à ce stade, en concordance avec les demandes de la cédante, est notre capacité à trouver un moyen de négociation, afin de faire baisser sa prime commerciale.

Ayant un programme de réassurance assez atypique et une base de données relativement faible, nous pouvons dire que la tarification de manière individuelle n'est pas adaptée et qu'il faut se tourner vers la théorie de la crédibilité pour obtenir un tarif adéquat.

Cela nous permettra également de positionner la tarification de notre cédante par rapport à d'autres clients « équivalents » et d'évaluer un niveau de confiance.

## **Partie V : Intégration d'un modèle de crédibilité**

<b><u>Chapitre 1 : Introduction</u></b> .....	<b>74</b>
<b><u>Chapitre 2 : Les modèles de crédibilité</u></b> .....	<b>74</b>
<u>Section V.2.1 : Le modèle Bayésien</u> .....	74
<u>Section V.2.2 : Le modèle de Bühlmann</u> .....	76
<u>Section V.2.3 : Le modèle de Bühlmann-Straub</u> .....	77
<u>Section V.2.4 : Le modèle « à Variance »</u> .....	81
<b><u>Chapitre 3 : Application</u></b> .....	<b>84</b>
<u>Section V.3.1 : Méthodes choisies</u> .....	84
<u>Section V.3.2 : Modèle Bühlmann-Straub avec S/P</u> .....	85
<u>Section V.3.3 : Modèle Bühlmann-Straub avec ROL</u> .....	87
<u>Section V.3.4 : Modèle « à Variance »</u> .....	90
<b><u>Chapitre 4 : Comparaison et conclusion</u></b> .....	<b>91</b>

## Chapitre 1 : Introduction

Dans le cadre du conseil pour notre cédante et par conséquent, dans le cadre d'une amélioration de ses conditions tarifaires, nous essaierons de mettre en place un modèle de crédibilité dans le processus de tarification des traités.

Dans un cadre général, cette étude permettra de poser les bases d'une nouvelle méthode de tarification et :

- D'obtenir une tarification cohérente en cas d'une absence de sinistralité historique
- De tarifier des tranches peu ou pas travaillantes
- D'établir un niveau de confiance des données de la cédante par rapport à celles du marché
- De positionner la tarification de la cédante par rapport au marché

Nous allons donc, à la suite de cette introduction, présenter différents modèles de crédibilité avant d'en appliquer trois de manière adaptée à la réassurance. Enfin, nous comparerons les résultats et les analyserons.

## Chapitre 2 : Les modèles de crédibilité

### Section V.2.1 : Le modèle Bayésien

Soit  $(X_j)_{j=1\dots n}$ , un montant agrégé individuel de sinistres pour une période  $j$ . L'objectif est d'obtenir la prime pure pour la période  $n+1$  c'est-à-dire  $E[X_{n+1}]$ .

Faisons alors les hypothèses suivantes :

- Les  $X_j$  sont indépendants conditionnellement à  $\theta$  et identiquement distribués de loi  $F_\theta$  où  $\theta \in \Theta$  est le profil du risque. Notons  $\mu(\theta) = E[X_j | \theta = \theta]$  et  $\sigma^2(\theta) = Var[X_j | \theta = \theta]$
- Il existe une fonction de distribution  $U(\theta)$  sur  $\Theta$  qui représente l'information collective que nous avons sur le portefeuille.  $U(\theta)$  est appelée la fonction de structure du portefeuille.
- $\mu(\theta) = E[X_j | \theta = \theta]$  et  $\sigma^2(\theta) = Var[X_j | \theta = \theta]$ .

Ainsi, la prime collective est le montant certain moyen de sinistre espéré par risque sur l'ensemble du portefeuille, elle est donnée par :

$$P^{coll} = \int_{\theta_j} \mu(\theta) dU(\theta) = \mu_0$$

Et la prime individuelle pour un assuré de profil de risque  $\Theta$  est une variable aléatoire qui s'écrit :

$$P^{ind}(\theta) = E[X_{n+1} | \theta] = \mu(\theta)$$

Remarque :

- Les  $X_j$  sont positivement corrélés (démonstration Annexe 13 : « **Corrélation positive des  $X_j$**  »).

Ainsi, conditionnellement à un historique  $X = (X_1, \dots, X_n)$  des sinistres fournis par l'assuré nous devons évaluer pour chaque risque la prime  $\mu(\theta)$ .

C'est la définition de la prime de Bayes :  $P^{Bayes} = E[\mu(\theta) | X] = \widehat{\mu(\theta)}$ .

Remarque :

- Au regard de l'erreur quadratique moyenne, la prime de Bayes est le meilleur estimateur de  $\mu(\theta)$ . Ceci est démontré en Annexe 14 : « **Meilleur estimateur de  $\mu(\theta)$**  ».

L'objectif maintenant sera de trouver un estimateur de  $\mu(\theta)$ .

Pour simplifier, nous chercherons un estimateur linéaire en  $X$ , appelons-le  $P^{cred}$  :

$$P^{cred} = a + b\bar{X}$$

$$(a, b) = \operatorname{argmin} E[(\mu(\theta) - a - b\bar{X})^2]$$

En dérivant par rapport à  $a$  et  $b$ , nous obtenons les équations différentielles, que nous résolvons à l'aide de la structure de dépendance du modèle. Nous obtenons alors (Démonstration Annexe 15 : « **Obtention des arguments (a,b) dans le modèle de Bühlmann** ») :

$$b = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

$$a = (1 - b)\mu_0$$

Avec

$$\tau^2 = \operatorname{Cov}(\bar{X}, \mu(\theta)) = \operatorname{Var}(\mu(\theta))$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la prime crédibilisée :

$$P^{cred} = \omega\bar{X} + (1 - \omega)\mu_0$$

Avec :

$$\mu_0 = E[\mu(\theta)]$$

$$\omega = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

Remarque :

-  $K = \frac{\sigma^2}{\tau^2}$  est appelé le coefficient de crédibilité

$$- K = \frac{\sigma^2}{\tau^2} = \left( \frac{\frac{\sigma}{\tau}}{\frac{\mu_0}{\mu_0}} \right)^2 = \left( \frac{\frac{\sqrt{E[\operatorname{Var}(X_j|\theta)]}}{E[X_j]}}{\frac{\operatorname{Cov}a[\mu(\theta)]}{\mu_0}} \right)^2$$

et donc  $\sqrt{K} = \frac{\sqrt{E[\operatorname{Var}(X_j|\theta)]}}{\frac{E[X_j]}{\operatorname{Cov}a[\mu(\theta)]}}$  c'est le rapport entre la variabilité interne du risque et l'hétérogénéité du portefeuille

- Le facteur de crédibilité  $\omega$  croît avec le nombre d'années d'historique  $n$
- Le facteur de crédibilité  $\omega$  croît avec l'hétérogénéité du portefeuille  $\frac{\tau}{\mu_0}$
- Le facteur de crédibilité  $\omega$  décroît avec la variabilité interne du risque  $\frac{\sigma}{\mu_0}$
- Lorsque la prime de Bayes est linéaire, elle coïncide avec la prime de crédibilité. C'est la crédibilité exacte
- Les paramètres  $\tau^2, \sigma^2$  et  $\mu_0$  peuvent être estimés empiriquement sur l'ensemble du portefeuille ou fixés par avis d'expert

### Section V.2.2 : Le modèle de Bühlmann

Dans le modèle de Bühlmann, nous ne tarifons plus un risque mais un portefeuille de J risques similaires. C'est une généralisation du modèle Bayésien.

Nous allons noter :

- $j$  : le numéro de la classe de risque ( $j=1 \dots J$ )
- $n$  : la longueur de l'historique pour la classe  $j$
- $X_j = (X_{j,1}, \dots, X_{j,n})$  : la sinistralité de la classe  $j$  pour les  $n$  observations et  $\theta_j$  son profil de risque.

Nous ferons alors les hypothèses suivantes :

- Les classes  $j$  sont indépendantes pour tout  $j$
- A chaque classe  $j$  est associé un facteur de risque non-observable  $\theta_j$  tel que les  $\theta_j$  soient indépendants pour tout  $j$  et de loi de distribution  $U(\theta)$
- $X_{j,t} | \theta_j = \theta$  sont indépendants pour tout  $t$  et identiquement distribués de loi  $F_\theta$  et, de plus,

$$\mu(\theta_j) = E[X_{j,t} | \theta_j]$$

$$\sigma^2(\theta_j) = Var[X_{j,t} | \theta_j]$$

Nous cherchons alors à estimer  $P_j^{cred}$  l'estimateur linéaire de  $\mu(\theta_j)$  en supposant que

$$P_j^{cred} = a^j + \sum_{k=1}^J b_k^j * \bar{X}_k$$

Avec

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{t=1}^n X_{k,t}}{T_j}$$

Comme pour le modèle Bayésien nous allons chercher une estimation  $(a^j, b^j)$  telle que

$$(a^j, b^j) = \operatorname{argmin} E \left[ \left( \mu(\theta_j) - a^j - \sum_{k=1}^J \beta_k^j * \bar{X}_k \right)^2 \right]$$

En dérivant par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ , nous obtenons les équations différentielles, que nous résolvons à l'aide de la structure de dépendance du modèle. Nous obtenons alors :

$$b = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

$$a = (1 - b)\mu_0$$

Avec  $\tau^2 = Cov(\bar{X}, \mu(\theta)) = Var(\mu(\theta))$

Nous obtenons ainsi l'expression de la prime crédibilisée :

$$P_j^{cred} = \omega \bar{X}_j + (1 - \omega)\mu_0$$

Avec :

$$\mu_0 = E[\mu(\theta)]$$

$$\omega = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

Remarque :

- Le résultat est plus fort que pour le modèle Bayésien car il fait intervenir l'ensemble des observations (ou antériorité) du portefeuille.

### Section V.2.3 : Le modèle de Bühlmann-Straub

Le modèle de Bühlmann-Straub est une généralisation du modèle de Bühlmann trop restreint par l'hypothèse

$$\sigma^2(\theta_j) = \text{Var}[X_{j,t} | \theta_j]$$

Dans ce modèle, nous allons donc introduire des poids qui vont permettre de passer outre cette hypothèse et d'avoir une variance décroissante par rapport à l'exposition au risque.

Ainsi, nous noterons :

$j$  : le numéro de la classe de risque ( $j=1 \dots J$ )

$T_j$  : la longueur de l'historique pour la classe  $j$

$X_{j,t}$  : le ratio de sinistres du risque  $j$  durant l'année  $t$

$\delta_{j,t}$  : le poids associé à  $X_{j,t}$

$X_j = (X_{j,1}, \dots, X_{j,n})$  : la sinistralité de la classe  $j$  pour les  $n$  observations et  $\theta_j$  son profil de risque

Nous ferons alors les hypothèses suivantes :

- Les classes  $j$  sont indépendantes pour tout  $j$
- A chaque classe  $j$  est associé un facteur de risque non-observable  $\theta_j$  tel que les  $\theta_j$  soient indépendants pour tout  $j$  et de loi de distribution  $U(\theta)$
- $X_{j,t} | \theta_j = \theta$  sont indépendants pour tout  $t$  et identiquement distribués de loi  $F_\theta$  et, de plus,

$$\mu(\theta_j) = E[X_{j,t} | \theta_j]$$

$$\sigma^2(\theta_j) = \delta_{j,t} * \text{Var}[X_{j,t} | \theta_j]$$

Remarques :

- $\delta_{j,t}$  tient compte du fait que l'exposition au risque change d'une classe à l'autre et d'une année sur l'autre
- Le nombre d'années d'observations peut être différent selon les risques. On obtiendra alors des poids nuls
- Les risques sont considérés à priori
- Pour chaque risque le ratio de sinistres est stable au cours du temps, ce qui crée le besoin de l'évaluation d'une sinistralité « *as-if* »
- La variance de  $X_{j,t}$  est la somme de la mesure de l'hétérogénéité du portefeuille et de la mesure du risque interne au risque individuel (Démonstration Annexe 16 : « **Démonstration de la formule explicite de la variance** »).

Nous cherchons alors à estimer  $P_j^{cred}$  l'estimateur linéaire de  $\mu(\theta_j)$  en supposant que

$$P_j^{cred} = a_j + \sum_{t=1}^{T_j} b_{j,t} * X_{j,t}$$

Dans ce modèle, le meilleur estimateur sans biais de  $\mu(\theta_j)$  est :

$$X_{j.} = \sum_t \frac{\delta_{j,t}}{\delta_j} X_{j,t} \text{ avec } \delta_j = \sum_{t=1}^{T_j} \delta_{j,t}$$

Et nous obtenons :

$$E[X_{j.} | \theta_j] = \mu(\theta_j)$$

$$Var[X_{j.} | \theta_j] = \sum_t \left( \frac{\delta_{j,t}}{\delta_j} \right)^2 * Var[X_{j,t} | \theta_j] = \frac{\sigma^2(\theta_j)}{\delta_j}$$

$$Var[X_{j.}] = \frac{\sigma^2}{\delta_j} + \tau^2$$

Nous obtenons ainsi que l'estimateur de crédibilité ne dépend que des  $X_{j.}$  et que :

$$P_j^{cred} = \omega_j X_{j.} + (1 - \omega_j) \mu_0$$

De plus, il satisfait l'équation:

$$Cov(P_j^{cred}, X_{j.}) = Cov(\mu(\theta_j), X_{j.})$$

Or

$$Cov(P_j^{cred}, X_{j.}) = \omega_j Cov(X_{j.}, X_{j.}) + 0 = Var(X_{j.})$$

D'où

$$\begin{aligned} \omega_j &= \frac{Cov(\mu(\theta_j), X_{j.})}{Var(X_{j.})} \\ &= \frac{E[Cov(\mu(\theta_j), X_{j.}) | \theta_j] + Cov(\mu(\theta_j), E[X_{j.} | \theta_j])}{Var(X_{j.})} \\ &= \frac{E[Cov(\mu(\theta_j), X_{j.}) | \theta_j] + Cov(\mu(\theta_j), E[X_{j.} | \theta_j])}{Var(X_{j.})} \\ &= \frac{0 + E[\mu(\theta_j) E[X_{j.} | \theta_j]] - E[\mu(\theta_j)] E[E[X_{j.} | \theta_j]]}{Var(X_{j.})} \\ &= \frac{E[\mu(\theta_j)^2] - E[\mu(\theta_j)]^2}{Var(X_{j.})} \\ &= \frac{Var(\mu(\theta_j))}{Var(X_{j.})} \end{aligned}$$

**Rappel :**

$$Var(\mu(\theta_j)) = \tau^2$$

$$Var[X_{j.}] = \frac{\sigma^2}{\delta_j} + \tau^2$$

Donc

$$\omega_j = \frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{\delta_j} + \tau^2} = \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \frac{\delta_j}{\delta_j + K} \text{ avec } K \text{ le coefficient de crédibilité.}$$

Calculons à présent l'erreur quadratique moyenne :

$$\begin{aligned}
 E \left[ \left( P_j^{cred} - \mu(\theta_j) \right)^2 \right] &= (1 - \omega_j) \tau^2 \\
 &= \left( 1 - \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \right) \tau^2 \\
 &= \left( \frac{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2} - \delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \right) \tau^2 \\
 &= \frac{\sigma^2}{\tau^2 \delta_j + \sigma^2} \\
 &= \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 \delta_j + \sigma^2} \\
 &= \frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{\delta_j} + \tau^2} * \frac{\sigma^2}{\delta_j} \\
 &= \omega_j * \frac{\sigma^2}{\delta_j}
 \end{aligned}$$

Après l'évaluation de tous ces éléments, nous remarquerons qu'il nous manque une évaluation simple de  $\mu_0 = E[\mu(\theta)]$  pour appliquer le modèle.

C'est pourquoi nous allons introduire la notion d'estimateur homogène dans le modèle de Bühlmann-Straub.

Cela donnera une estimation moins précise (que nous verrons par le calcul de l'erreur quadratique), mais plus facilement applicable.

Ainsi, nous noterons :

$$P_j^{cred-hom} = \omega_j X_j + (1 - \omega_j) \widehat{\mu}_0$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_j = \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} \\ \omega = \sum_j \omega_j \\ \widehat{\mu}_0 = \sum_{j=1}^J \frac{\omega_j}{\omega} X_j \end{array} \right.$$

L'erreur quadratique devient alors :

$$\begin{aligned} E \left[ \left( P_j^{cred-hom} - \mu(\theta_j) \right)^2 \right] &= \tau^2 (1 - \omega_j) \left( 1 + \frac{1 - \omega_j}{\omega} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{1 - \omega_j}{\omega} \right) E \left[ \left( P_j^{cred-hom} - \mu(\theta_j) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Comme  $\frac{1 - \omega_j}{\omega} \geq 0$ , il y a une perte de précision due à l'estimation de  $\mu_0$ .

Récapitulons le modèle de Bühlmann-Straub homogène :

$$P_j^{cred-hom} = \omega_j X_j + (1 - \omega_j) \widehat{\mu}_0$$

Avec

$$\omega_j = \frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{\delta_j} + \tau^2} = \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \frac{\delta_j}{\delta_j + K}$$

$$\omega = \sum_j \omega_j$$

$$X_j = \sum_t \frac{\delta_{j,t}}{\delta_j} X_{j,t}$$

$$\delta_j = \sum_{t=1}^{T_j} \delta_{j,t}$$

$$\delta = \sum_{j=1}^J \delta_j$$

$$\widehat{\mu}_0 = \sum_{j=1}^J \frac{\omega_j}{\omega} X_j$$

Et remarquons qu'il nous manque encore deux éléments à expliciter : les paramètres de structure  $\tau^2$  et  $\sigma^2$ .

Acceptons les estimateurs suivants :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{J(n-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^n \delta_{j,t} (X_{j,t} - X_j)^2$$

$$\widetilde{\tau^2} = \frac{\delta}{\delta^2 - \sum_{j=1}^J \delta_j^2} \left[ \sum_{j=1}^J \delta_j (X_j - \bar{X})^2 - (J-1) \widehat{\sigma^2} \right]$$

Ils sont sans biais et convergents (si  $\lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^J \left( \frac{\delta_j}{\delta} \right)^2 = 0$ )

Comme  $\widetilde{\tau^2}$  peut être négatif nous prendrons :

$$\widehat{\tau^2} = \max(\widetilde{\tau^2}; 0)$$

Remarque :

- Si  $\widehat{\tau^2} = 0$  alors  $\omega_j = 0$ , nous sommes dans le cas d'une crédibilité nulle et nous retenons la prime collective.

Ainsi le modèle final estimé devient :

$$P_j^{cred-hom} = \widehat{\omega}_j X_j + (1 - \widehat{\omega}_j) \widehat{\mu}_0$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\omega}_j = \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \frac{\delta_j}{\delta_j + \bar{K}} \\ \widehat{\omega} = \sum_j \widehat{\omega}_j \\ X_j = \sum_t \frac{\delta_{j,t}}{\delta_j} X_{j,t} \\ \delta_j = \sum_{t=1}^{T_j} \delta_{j,t} \\ \delta = \sum_{j=1}^J \delta_j \\ \widehat{\mu}_0 = \sum_{j=1}^J \frac{\widehat{\omega}_j}{\widehat{\omega}} X_j \end{array} \right.$$

Ce modèle admet donc une logique à respecter dans le processus d'estimation de ses paramètres et que nous détaillons dans le mode opératoire qui suit. Ce dernier sera utilisé dans la mise en place d'une tarification crédibilisée par le modèle de Bühlmann-Straub homogène-estimé pour notre cédante :

1. Obtention des données initiales à savoir les  $X_{j,t}$  et les  $\delta_{j,t}$  associés (avec  $j=1, \dots, J$  et  $t=1, \dots, n$ ).
2. Calcul des  $\delta_j = \sum_{t=1}^n \delta_{j,t}$
3. Calcul des  $X_j = \sum_t \frac{\delta_{j,t}}{\delta_j} X_{j,t}$
4. Estimation de  $\sigma^2$  par  $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{J(n-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^n \delta_{j,t} (X_{j,t} - X_j)^2$
5. Estimation de  $\tau^2$  par  $\widehat{\tau}^2 = \max \left( \frac{\delta}{\delta^2 - \sum_{j=1}^J \delta_j^2} \left[ \sum_{j=1}^J \delta_j (X_j - \bar{X})^2 - (J-1) \widehat{\sigma}^2 \right]; 0 \right)$
6. Estimation des  $\omega_j$  par  $\widehat{\omega}_j = \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$
7. Calcul des  $\widehat{\omega} = \sum_j \widehat{\omega}_j$
8. Estimation de  $\mu_0$  par  $\widehat{\mu}_0 = \sum_{j=1}^J \frac{\widehat{\omega}_j}{\widehat{\omega}} X_j$ .
9. Calcul de  $P_j^{cred-hom} = \widehat{\omega}_j X_j + (1 - \widehat{\omega}_j) \widehat{\mu}_0$

#### **Section V.2.4 : Le modèle « à Variance »**

Introduisons une nouvelle méthode où la crédibilité se fera entre deux techniques de tarification.

Le modèle, bien qu'ayant la même forme, sera donc adapté et appelé modèle « à Variance » du fait de l'expression finale du facteur de crédibilité que nous allons trouver.

Nous remarquerons qu'en réassurance, et comme nous l'avons vu dans la partie II, la tarification sur exposition est assimilable à une moyenne du marché et les autres techniques de tarification à un modèle individuel.

Ainsi, nous remplacerons  $P^{ind}(\theta)$  par le calcul de la prime commerciale individuelle réalisée dans la partie III de ce mémoire et que nous appellerons  $PC^{expé}$ .

Nous remplacerons également  $P^{coll}$  par la prime commerciale obtenue par une tarification sur exposition et que nous appellerons  $PC^{expo}$ .

Nous obtenons alors le modèle suivant :

$$PC^{cred} = \omega PC^{expé} + (1 - \omega) PC^{expo}$$

Remarque :

- Le changement par rapport à l'expression du modèle classique réside dans l'utilisation de la tarification sur exposition pour l'estimation de la prime du marché, et non plus dans le calcul de l'espérance des sinistres.

A partir de ce postulat, l'objectif sera de trouver un moyen de calculer  $\omega$ .

- Détermination de  $\omega$  :

Remarquons que la variance de  $PC^{cred}$  est :

$$Var(PC^{cred}) = \omega^2 Var(PC^{expé}) + (1 - \omega)^2 Var(PC^{expo}) + 2\omega(1 - \omega) Cov(PC^{expé}; PC^{expo})$$

Nous ferons l'hypothèse que  $PC^{expé}$  et  $PC^{expo}$  sont indépendantes.

Cette hypothèse se justifie par la différence des processus de tarification sur expérience et sur exposition puisque, l'un se base sur la sinistralité d'une cédante et l'autre sur l'ensemble des capitaux assurés du marché.

Ainsi  $Cov(PC^{expé}; PC^{expo}) = 0$  et nous obtenons :

$$Var(PC^{cred}) = \omega^2 Var(PC^{expé}) + (1 - \omega)^2 Var(PC^{expo})$$

Or, nous remarquerons que pour tout  $x$  de  $[0,1]$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , la fonction  $f(x) = ax^2 + b(1 - x)^2$  est convexe en  $\omega$  (Démonstration en Annexe 17 : « **Démonstration convexité  $Var(PC^{cred})$**  »). En annulant la dérivée de cette fonction, nous trouverons un minimum local qui, dans le cas d'une fonction convexe, est un minimum global.

Trouver ce minimum nous permettra d'ailleurs de minimiser  $Var(PC^{cred})$  par rapport à  $\omega$  et d'obtenir une prime pure crédibilisée plus stable.

Ainsi

$$\frac{\partial Var(PC^{cred})}{\partial \omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\omega Var(PC^{expé}) - 2(1 - \omega) Var(PC^{expo}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{Var(PC^{expo})}{Var(PC^{expé}) + Var(PC^{expo})}$$

Remarque :

$$- \quad Var(PC^{cred}) = \frac{Var(PC^{expé}) * Var(PC^{expo})}{Var(PC^{expé}) + Var(PC^{expo})}$$

Pour obtenir  $\omega$  il nous manque donc deux données  $Var(PC^{exp\acute{e}})$  et  $Var(PC^{expo})$ .

- Détermination de  $Var(PC^{exp\acute{e}})$  :

Cette donnée est obtenue lors de la tarification des traités. En effet, le processus de tarification par expérience nécessite d'évaluer la sinistralité à charge de la réassurance avec une loi de probabilité simulée. Il suffit alors de calculer la variance de cette charge en simulant l'ensemble des simulations pour obtenir  $Var(PP^{exp\acute{e}})$ .

- Détermination de  $Var(PC^{expo})$  :

Dans la partie II nous avons vu que la prime pure sur exposition est obtenue grâce aux courbes d'exposition qui nous fournissent, à partir d'un taux de destruction, le taux de prime pure  $\tau_{PP}$ .

Or

$$\tau_{PP} = \frac{PC^{expo}}{Assiette}$$

donc

$$PP^{expo} = Assiette * \tau_{PP}$$

Et donc

$$Var(PC^{expo}) = Assiette^2 * Var(\tau_{PP})$$

L'assiette peut être connue ou rapidement évaluée.

Comment évaluer  $Var(\tau_{PP})$  ?

- Détermination de  $Var(\tau_{PP})$  :

Nous savons (cf. partie 2) que les courbes d'exposition peuvent être modélisées par des courbes MBBEFD d'expression :

$$F_{a,b}(x) = a \left( \frac{a+1}{a+b^x} - 1 \right) \text{ pour } 0 \leq x < 1$$

$$1 \text{ pour } x \geq 1,$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\text{montant du sinistre}}{\text{somme assurée}} = \text{taux de destruction} \\ a \in \mathbb{R}, b \in ]0, +\infty[ \end{array} \right.$$

Ainsi, en considérant  $\tau_{PP}$  comme une variable aléatoire de fonction de répartition  $F_{a,b}$  nous pouvons calculer les différents moments nécessaires au calcul de la variance :

Soit :

$$f_{a,b}(x) = -\frac{a(a+1)\ln(b)b^x}{(a+b^x)^2} \text{ pour } 0 \leq x < 1 : \text{ la densité de } \tau_{PP}.$$

Alors :

$$Var(\tau_{PP}) = \int_{\frac{Priorité}{Somme Assurée}}^{\min(\frac{Plafond}{Somme Assurée};1)} x^2 f_{a,b}(x) dx - \left( \int_{\frac{Priorité}{Somme Assurée}}^{\min(\frac{Plafond}{Somme Assurée};1)} x f_{a,b}(x) dx \right)^2$$

Nous avons dorénavant l'ensemble des éléments nécessaires pour mettre en place notre modèle. Voici le mode opératoire qui sera utilisé dans la mise en place d'une tarification crédibilisée par notre modèle à variance pour notre cédante :

1. Calcul de  $PP^{expé}$ .
2. Calcul à partir de la tarification sur expérience de  $Var(PP^{expé})$ .
3. Calcul de  $PP^{expo}$ .
4. Modélisation de la courbe d'exposition par une MBBEFD(a,b).
5. Calcul de

$$Var(\tau_{PP}) = \int_{\frac{Priorité}{Somme Assurée}}^{\min(\frac{Plafond}{Somme Assurée};1)} x^2 f_{a,b}(x) dx - \left( \int_{\frac{Priorité}{Somme Assurée}}^{\min(\frac{Plafond}{Somme Assurée};1)} x f_{a,b}(x) dx \right)^2$$

6. Calcul de  $Var(PP^{expo}) = Assiette^2 * Var(\tau_{PP})$ .
7. Calcul de  $\omega = \frac{Var(PP^{expo})}{Var(PP^{expé}) + Var(PP^{expo})}$ .
8. Calcul de  $PP^{cred} = \omega PP^{expé} + (1 - \omega) PP^{expo}$

**Ainsi, nous pouvons dorénavant, utiliser les différents modèles. Dans le chapitre 3, sont détaillés les résultats pour le traité XS1 de la branche RCA uniquement. L'ensemble des résultats pour chaque traité sera récapitulé dans le chapitre 4.**

## Chapitre 3 : Application

### Section V.3.1 : Méthodes choisies

Notre choix se portera sur l'utilisation de deux modèles : Bühlmann-Straub et « à Variance ».

Pour appliquer les modèles de Bühlmann-Straub, nous avons donc récupéré les données relatives aux traités de mêmes caractéristiques (priorités et plafonds semblables, même fonction de distribution des sinistres, primes pures calculées, assiettes de primes etc...).

Ceci nous permet, par les études qui ont été réalisées précédemment, de retrouver l'ensemble des primes commerciales calculées pour chaque client et pour chaque année. C'est en quelques sorte la « sinistralité réassurantielle » de notre cédante. Et c'est donc cette donnée que nous allons crédibiliser.

Remarques :

- Nous ne pouvons pas utiliser l'ensemble de la base sans filtrer par catégorie de traités car deux traités différents auront forcément des primes pures, des chargements différents mais surtout ne feront pas face aux mêmes risques notamment en terme de fréquence (ce qui se caractérise souvent pas un écart important sur le nombre de contrats ou sur l'assiette de primes).
- Pour respecter l'hypothèse d'homogénéité du modèle de Bühlmann-Straub, il a été décidé de travailler avec un même étalon pour les différentes cédantes comparées. Ainsi, au lieu de travailler avec les primes commerciales, nous travaillerons avec les *Rate On Line* qui correspondent au coût d'un euro de couverture de réassurance et avec les S/P qui correspondent au coût réassurantiel d'un euro de prime.

Nous avons pu extraire de la base :

- 5 cédantes qui ont les mêmes caractéristiques de traités XS1 DAB que notre client pour les 6 dernières années
- 5 cédantes qui ont les mêmes caractéristiques de traités XS/RET DAB que notre client pour les 6 dernières années
- 3 cédantes qui ont les mêmes caractéristiques de traités XS1 RCA que notre client pour les 4 dernières années
- 3 cédantes qui ont les mêmes caractéristiques de traités XS/RET RCA que notre client pour les 4 dernières années

De plus, à titre de comparaison, nous utiliserons également le modèle « à Variance ».

### **Section V.3.2 : Modèle Bühlmann-Straub avec S/P**

Dans cette section, nous allons mettre en place un modèle de crédibilité de Bühlmann-Straub afin de tarifer nos traités de réassurance.

Pour plus de simplicité nous reprendrons étape par étape le mode opératoire défini plus haut :

1. *Obtention des données initiales à savoir les  $X_{j,t}$  et les  $\delta_{j,t}$  associés (avec  $j=1,\dots,J$  et  $t=1,\dots,n$ ) :*

Nous prendrons comme  $X_{j,t}$  les S/P de réassurance calculés les années précédentes et comme  $\delta_{j,t}$  les assiettes de primes associées.

## RCA - XS1

Primes coms	Années				
	Cédante	1	2	3	4
1		52 667	51 975	56 050	54 430
2		162 948	140 973	141 780	141 917
3		79 111	80 110	83 025	83 996

Assiettes	Années				
	Cédante	1	2	3	4
1		2 903 122	2 764 298	2 583 367	2 450 465
2		6 826 623	6 547 743	6 549 503	6 526 410
3		3 543 100	3 771 780	4 288 066	4 427 206

S/P	Années				
	Cédante	1	2	3	4
1		1,81%	1,88%	2,17%	2,22%
2		2,39%	2,15%	2,16%	2,17%
3		2,23%	2,12%	1,94%	1,90%

Tableau 36 : Données initiales du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

$$2. \text{ Calcul des } \delta_j = \sum_{t=1}^n \delta_{j,t}$$

RCA - XS1	
cédante	$\delta_j$
1	10 701 252
2	26 450 279
3	16 030 152

Tableau 37 : Calcul des  $\delta_j$  du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

$$3. \text{ Calcul des } X_j = \sum_t \frac{\delta_{j,t}}{\delta_j} X_{j,t}$$

RCA - XS1	
cédante	$X_j$
1	2,01%
2	2,22%
3	2,04%

Tableau 38 : Calcul des  $X_j$  du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

$$4. \text{ Estimation de } \sigma^2 \text{ par } \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{J(n-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^n \delta_{j,t} (X_{j,t} - X_j)^2$$

$$5. \text{ Estimation de } \tau^2 \text{ par } \widehat{\tau}^2 = \max \left( \frac{\delta}{\delta^2 - \sum_{j=1}^J \delta_j^2} \left[ \sum_{j=1}^J \delta_j (X_j - \bar{X})^2 - (J-1) \widehat{\sigma}^2 \right]; 0 \right)$$

RCA - XS1	
$\sigma^2$	978,3181344%
$\tau^2$	0,0001086%

Tableau 39 : Estimation de  $\sigma^2$  et de  $\tau^2$  du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

$$6. \text{ Estimation des } \omega_j \text{ par } \widehat{\omega}_j = \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

7. Calcul des  $\widehat{\omega} = \sum_j \widehat{\omega}_j$

RCA - XS1	
$\omega_1$ .	54,30%
$\omega_2$ .	74,60%
$\omega_3$ .	64,03%
$\omega$	192,93%

Tableau 40 : Calcul des  $\widehat{\omega}$  du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

8. Estimation de  $\mu_0$  par  $\widehat{\mu}_0 = \sum_{j=1}^J \frac{\widehat{\omega}_j}{\widehat{\omega}} X_j$ .

RCA - XS1	
$\mu_0$	2,10%

Tableau 41 : Estimation de  $\mu_0$  du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

9. Calcul de  $S/P_j^{cred-hom} = \widehat{\omega}_j X_j + (1 - \widehat{\omega}_j) \widehat{\mu}_0$

RCA - XS1	
S/Pcred	2,05%

Tableau 42 : Calcul de de  $S/P_j^{cred-hom}$  du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

Nous rajoutons maintenant l'étape suivante pour obtenir la prime commerciale crédibilisée :

10. Calcul de  $P_j^{cred-hom} = S/P_j^{cred-hom} * Assiette$

RCA - XS1	
S/Pcred	50 268

Tableau 43 : Calcul de de  $P_j^{cred-hom}$  du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1

Nous venons de déterminer un résultat par la crédibilité de Bühlmann-Straub à l'aide des S/P fournis par la cédante. Dans la section suivante, le travail est repris avec les ROL.

### Section V.3.3 : Modèle Bühlmann-Straub avec ROL

Dans cette section, nous allons mettre en place un modèle de crédibilité de Bühlmann-Straub afin de tarifier nos traités de réassurance.

Le plafond infini pour le traité RCA-XS1 a été figé à 100 M€ pour permettre les calculs. Pour plus de simplicité nous reprendrons étape par étape le mode opératoire défini plus haut :

1. Obtention des données initiales à savoir les  $X_{j,t}$  et les  $\delta_{j,t}$  associés (avec  $j=1, \dots, J$  et  $t=1, \dots, n$ ) :

Nous prendrons comme  $X_{j,t}$  les ROL calculés les années précédentes :

**RCA - XS1**

<b>Primes coms</b>	Années			
Cédante	1	2	3	4
1	52 667	51 975	56 050	54 430
2	162 948	140 973	141 780	141 917
3	79 111	80 110	83 025	83 996

**Portée**

95 000 000

<b>ROL</b>	Années			
Cédante	1	2	3	4
1	0,06%	0,05%	0,06%	0,06%
2	0,17%	0,15%	0,15%	0,15%
3	0,08%	0,08%	0,09%	0,09%

Tableau 44 : Données initiales du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

Et comme  $\delta_{j,t}$  les assiettes de primes associées :

<b>Assiettes</b>	Années			
Cédante	1	2	3	4
1	2 903 122	2 764 298	2 583 367	2 450 465
2	6 826 623	6 547 743	6 549 503	6 526 410
3	3 543 100	3 771 780	4 288 066	4 427 206

Tableau 45 : Assiettes initiales du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

2. Calcul des  $\delta_j = \sum_{t=1}^n \delta_{j,t}$

<b>RCA - XS1</b>	
cédante	$\delta_j$
1	10 701 252
2	26 450 279
3	16 030 152

Tableau 46 : Calcul des  $\delta_j$  du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

3. Calcul des  $X_j = \sum_t \frac{\delta_{j,t}}{\delta_j} X_{j,t}$

<b>RCA - XS1</b>	
cédante	$X_j$
1	0,06%
2	0,15%
3	0,09%

Tableau 47 : Calcul des  $X_j$  du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

4. Estimation de  $\sigma^2$  par  $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{J(n-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^n \delta_{j,t} (X_{j,t} - X_j)^2$

5. Estimation de  $\tau^2$  par  $\hat{\tau}^2 = \max\left(\frac{\delta}{\delta^2 - \sum_{j=1}^J \delta_j^2} \left[ \sum_{j=1}^J \delta_j (X_j - \bar{X})^2 - (J-1)\hat{\sigma}^2 \right]; 0\right)$

RCA - XS1	
$\sigma^2$	2,9695935%
$\tau^2$	0,0000314%

Tableau 48 : Estimation de  $\sigma^2$  et de  $\tau^2$  du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

6. Estimation des  $\omega_j$  par  $\hat{\omega}_j = \frac{\delta_j}{\delta_j + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$

7. Calcul des  $\hat{\omega} = \sum_j \hat{\omega}_j$

RCA - XS1	
$\omega_1$	99,12%
$\omega_2$	99,64%
$\omega_3$	99,41%
$\omega$	298,18%

Tableau 49 : Calcul des  $\hat{\omega}$  du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

8. Estimation de  $\mu_0$  par  $\hat{\mu}_0 = \sum_{j=1}^J \frac{\hat{\omega}_j}{\hat{\omega}} X_j$ .

RCA - XS1	
$\mu_0$	0,10%

Tableau 50 : Estimation de  $\mu_0$  du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

9. Calcul de  $ROL_j^{cred-hom} = \hat{\omega}_j X_j + (1 - \hat{\omega}_j) \hat{\mu}_0$

RCA - XS1	
ROLcred	0,06%

Tableau 51 : Calcul de  $ROL_j^{cred-hom}$  du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

Nous rajoutons maintenant l'étape suivante pour obtenir la prime commerciale crédibilisée :

10. Calcul de  $P_j^{cred-hom} = ROL_j^{cred-hom} * Portée$

RCA - XS1	
Pcred	54 064

Tableau 52 : Calcul de  $P_j^{cred-hom}$  du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1

Nous venons de déterminer un résultat par la crédibilité de Bühlmann-Straub à l'aide des ROL fournis par la cédante. Dans la section suivante, nous introduisons le modèle dit « à Variance ».

### Section V.3.4 : Modèle « à Variance »

Dans le cadre de notre traité RCA-XS1 nous devons déterminer deux pré-requis pour utiliser correctement ce modèle.

Tout d'abord, à partir de l'ensemble de la sinistralité des différents portefeuilles clients, nous créons une courbe d'exposition comme définie dans la partie II puis la modélisons par une courbe MBMEFD :

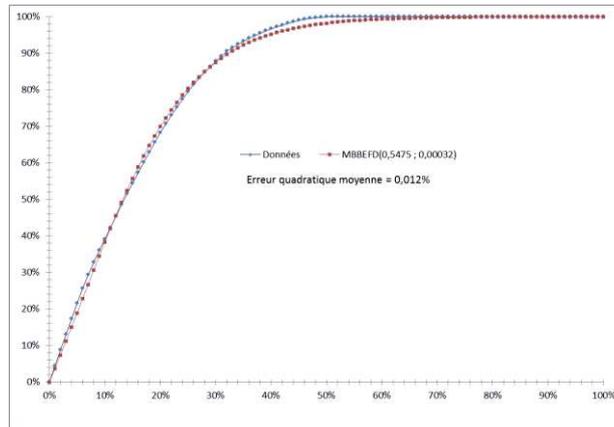


Figure 42 : Courbe MBMEFD pour la RCA

Ensuite, dans le but d'utiliser cette courbe, nous définissons la somme assurée de la sinistralité RCA. Comme cette dernière peut-être infinie, nous choisissons un sinistre maximum pour l'évaluer : c'est le sinistre Selby Rail Crash qui a coûté près de 60M€.

Ainsi, nous obtenons dans un premier temps les éléments suivants :

<b>RCA - XS1</b>	Priorité	Plafond
	5 000 000	$\infty$
Taux destruction	8,33%	$\infty$
Taux prime	31,89%	100,00%

Tableau 53 : Données initiales du modèle « à Variance »

Ici, le taux de prime représente la part des primes qui sera conservée pour le traité  $\infty$  XS 5M€. Ce qui sera reversé aux réassureurs sera :  $100\% - 31,89\% = 68,11\%$  des primes.

Cela peut paraître conséquent mais n'oublions pas que ce calcul sera pondéré par notre facteur de crédibilité :

<b>RCA - XS1</b>	
$\Delta$ Taux de prime	68,11%
Assiette	2 450 465
PCexpo	2 253 156

Tableau 54 : Calcul de  $PC^{exp0}$

A l'aide du calcul réalisé au moment de la tarification des traités par la méthode probabiliste dans la partie III nous avons pu calculer les éléments suivants :

<b>RCA - XS1</b>	
PCexpé	54 430
Var(PCexpé)	4 600 658 434

Tableau 55 : Calcul de  $PC^{expé}$

Nous calculons ensuite  $Var(PC^{expo}) = Assiette^2 * \left( \int_{0,05}^1 x^2 f_{a,b}(x) dx - \left( \int_{0,05}^1 x f_{a,b}(x) dx \right)^2 \right)$  :

<b>RCA - XS1</b>	
Var(tau)-Intégrale	1,53%
Assiette	2 450 465
Var(PCexpo)	91 745 849 417

Tableau 56 : Calcul de  $Var(PC^{expo})$

Enfin nous pouvons calculer notre facteur de crédibilité  $\omega$  et la prime pure crédibilisée :

<b>RCA - XS1</b>	
$\omega$	95,22%
PCcred	159 422

Tableau 57 : Calcul de  $PC^{cred}$

## Chapitre 4 : Comparaison et conclusion

Nous venons de détailler l'application de nos modèles sur le traité XS1 de la branche RCA, nous avons utilisé le même procédé pour l'ensemble des traités que nous voulions tarifer.

Les résultats des modèles de Bühlmann-Straub sur ROL, de Bühlmann-Straub sur S/P et « à Variance » et leurs gains par rapport au modèle probabiliste optimisé calculé en partie IV, sont présentés dans les tableaux ci-dessous :

<b>DAB - XS1</b>	$\omega$	Prime Pure Crédibilisée	Gain/PCexpé: 48382
Modèle Variance	22,02%	294 354	- 245 972
Modèle BS sur ROL	98,18%	47 890	492
Modèle BS sur S/P	98,40%	43 532	4 850

<b>DAB - XS/RET</b>	$\omega$	Prime Pure Crédibilisée	Gain/PCexpé: 85900
Modèle Variance	1,44%	7 008	78 892
Modèle BS sur ROL	97,21%	85 977	- 77
Modèle BS sur S/P	93,97%	87 041	- 1 141

<b>RCA - XS1</b>	$\omega$	Prime Pure Crédibilisée	Gain/PCexpé: 54430
Modèle Variance	95,22%	159 422	- 104 992
Modèle BS sur ROL	99,12%	54 064	366
Modèle BS sur S/P	54,30%	50 268	4 162

<b>RCA - XS/RET</b>	$\omega$	Prime Pure Crédibilisée	Gain/PCexpé: 54913
Modèle Variance	99,41%	33 601	21 312
Modèle BS sur ROL	67,06%	54 634	279
Modèle BS sur S/P	92,66%	50 848	4 065

Tableau 58 : Résultats globaux toutes méthodes et toutes branches

- Analyse :

Les résultats ci-dessus font ressortir clairement que pour le modèle à variance, les facteurs de crédibilité et les montants des primes pures crédibilisées semblent trop s'écartier des valeurs raisonnables. Nous pouvons nous attendre à ce résultat pour deux raisons :

- Ce modèle utilise la technique de tarification par exposition. Cette technique est très utile notamment lors de la tarification de tranches non-travaillantes. Ce qui n'est pas le cas ici. Elle n'est, de plus, que peu utilisée pour la branche RCA, les couvertures étant infinies et les sinistralités très divergentes selon les portefeuilles.
- Le montant des sommes assurées dans la branche DAB étant fort, les taux de destructions calculés dans les intégrales sont très bas.

Cela nous place donc dans la partie la plus croissante des courbes d'exposition où la volatilité est la plus forte.

De plus, les sommes assurées sont aussi hautes à cause des caractéristiques des traités. Ces derniers sont par risques et par évènement, la somme assurée est donc agrégée à l'ensemble du portefeuille.

Cette analyse se confirme pour la partie RCA où les facteurs de crédibilité sont plus proches par rapport aux autres modèles, et où la somme assurée a été fixée à un seul sinistre maximum de 60M€ : cela n'empêche pas le refus du modèle puisque pour cette branche, les primes crédibilisées ne représentent aucun gain, et donc aucun intérêt pour notre cédante, par rapport au modèle probabiliste :

<b>Bilan</b>	Gain
Modèle Variance	-250 759
Modèle BS sur ROL	1 060
Modèle BS sur S/P	11 936

Tableau 59 : Bilan global des méthodes de crédibilité

Au vu de ce tableau et des résultats nous retiendrons le modèle de Bühlmann-Straub sur S/P.

Nous pouvons également émettre quelques critiques :

- Nous pouvons avoir certaines réserves quant à l'utilité d'une procédure aussi lourde pour un gain de 11 936 € soit seulement 0,54% de la facture finale de la réassurance. Ceci est sûrement dû au cas très particulier auquel nous avons affaire ici.
- Le panel de données semblables qui puisse être utilisé en comparaison de notre cédante étant relativement faible, nous pouvons également douter de la véracité des résultats. Un portefeuille client plus fourni sur ces traités-ci aurait peut-être amené à des conclusions différentes.

- La particularité des programmes de réassurance de notre cédante peut influencer les résultats. Aucune étude comparative avec des programmes plus « classiques » n'a été réalisée.

## Conclusion générale

Ce mémoire avait pour objectif le développement d'une étude de conseil pour la révision des programmes de réassurance d'une petite assurance non-vie qui avait deux programmes de réassurance. Un pour ses contrats Incendie-Accidents-Risques Divers (IARD) et l'un pour ses contrats en Responsabilité Civile Automobile (RCA).

Pour répondre à sa demande, tout en respectant les contraintes imposées, nous avons construit une étude détaillée en faisant appel à différentes techniques actuarielles.

Les réponses apportées ne sont pas uniques, d'autres éléments techniques auraient pu être utilisés pour répondre différemment aux problématiques posées.

La demande de la cédante et ses contraintes étaient précises. Notre étude devait lui apporter des éléments de réponse sur :

- Une mesure de ses risques potentiels
- Le bon calibrage de ses programmes de réassurance face à ses risques potentiels
- L'adéquation de sa tarification face à ses risques
- L'adéquation de sa tarification face aux pratiques du marché
- L'optimisation de sa structure par rapport à ses résultats financiers et ses besoins en capitaux
- L'optimisation de sa structure par rapport à une mesure globale récapitulative
- L'obtention d'une force de négociation pour tirer ses prix de réassurance à la baisse

Le tout avec une gestion prudente au niveau de l'évaluation de ses sinistralités et de ses besoins en capitaux.

En introduisant dans un premier temps les différentes techniques de tarification en réassurance, nous avons montré la place que prenait la modélisation des sinistralités probables.

Nous nous sommes donc par la suite, appliqués à modéliser l'ensemble des sinistralités potentielles auxquelles la cédante est soumise. Il a fallu, pour cela, retraiter les données fournies par la cédante, choisir un modèle (agrégé, fréquence x coût, etc...), approximer ces données par des lois de probabilité et à l'aide d'outils statistiques, choisir la plus représentative.

Puis, nous avons simulé les sinistralités potentielles et nous leurs avons appliqué les programmes de réassurance. Ce qui nous a permis :

- De constater que les programmes étaient assez bien calibrés par rapport à l'exposition de la cédante.
- D'amorcer le processus de tarification.

Après avoir formulé les hypothèses nécessaires, nous avons pu tarifier les programmes de réassurance DAB et RCA. Ceci allait permettre à la cédante de comparer les prix que nous avons obtenus avec sa véritable tarification (données tarifaires non communiquées).

Enfin, nous nous sommes attaqués aux problématiques d'optimisation des structures. Nous avons introduit une mesure de risque, à savoir, le besoin en capital et une mesure de performance, le résultat technique.

Comme le souhaitait également la cédante, nous avons introduit une valeur récapitulative (valeur économique de la couverture de réassurance) qui permettait d'appréhender le problème avec un calcul général.

Des lors, nous avons décrit une stratégie pour optimiser les programmes : stratégie traduite par la caractérisation d'un panel de programmes de réassurance à tester. Chaque élément de ce panel, ou « option », a été analysé, tarifé et explicité par les mesures de risque et de performance. Ceci nous a permis de définir un programme optimal pour chaque branche d'activité. Dans ce processus, nous nous sommes aussi questionnés sur l'utilité et l'efficacité de la présence d'une Quote-Part dans les programmes.

Pour terminer, nous avons introduit les modèles de crédibilité dans le processus de tarification : idée motivée par le fait que la cédante avait un portefeuille, des programmes de réassurance et une consommation en réassurance très particuliers. Une tarification individuelle n'était alors probablement pas adaptée.

Il a fallu, tout d'abord, expliciter les trois modèles de crédibilité que nous allions utiliser, puis, travailler les données fournies pour respecter les hypothèses des modèles.

Par la suite, nous avons appliqué ces modèles sur la structure optimale choisie préalablement.

En conclusion, deux des trois modèles obtenaient une réduction de la prime de réassurance.

Il est important de noter que ce mémoire a procédé dans une logique respectant les demandes de la cédante et la particularité de son portefeuille. L'étude comme nous venons de la décrire a été menée avec les données mises à notre disposition. Cependant, certains modèles réfutés dans cette étude, et certaines stratégies écartées pour ce cas précis, auraient été probablement testés et exploités si nous avions été en possession de données plus importantes.

Ce mémoire constitue un exposé du type de réflexions que ces sujets peuvent inspirer.

## Annexes

<u>Annexe 1 : « Descriptif des lois de fréquence »</u> :	97
<u>Annexe 2 : « Descriptif des lois de sévérité »</u> :	97
<u>Annexe 3 : « Estimation des paramètres des lois de fréquence et de sévérité par la méthode de maximisation de la vraisemblance (EMV) »</u> :	98
<u>Annexe 4 : « Démonstration Espérance-Variance de la charge sinistre »</u>	99
<u>Annexe 5 : « Code des Assurances »</u>	100
<u>Annexe 6 : « Echelle de Beaufort »</u>	105
<u>Annexe 7 : « QQ-Plots : Lois de probabilités utilisées »</u>	106
<u>Annexe 8 : « Preuve <math>\chi^2</math> »</u>	108
<u>Annexe 9 : « Table <math>\chi^2</math> »</u>	111
<u>Annexe 10 : « L'indice FFB »</u>	112
<u>Annexe 11 : « L'indice INSEE des taux de salaire horaire »</u>	112
<u>Annexe 12 : « Méthode Chain-Ladder »</u>	113
<u>Annexe 13 : « Corrélation positive des <math>X_j</math> »</u>	115
<u>Annexe 14 : « Meilleur estimateur de <math>\mu(\theta)</math> »</u>	115
<u>Annexe 15 : « Obtention des arguments (a,b) dans le modèle de Bühlmann »</u>	115
<u>Annexe 16 : « Démonstration de la formule explicite de la variance »</u>	117
<u>Annexe 17 : « Démonstration convexité <math>\text{VarPCcred}</math> »</u>	118

**Annexe 1 : « Descriptif des lois de fréquence » :**

Loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Poisson	$\lambda$	$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^n}{n!}$	$\lambda$	$\lambda$
Binomiale Négative	$r, p$	$P(N = n) = \frac{\Gamma(r + n)}{n! * \Gamma(r)} * p^r * (1 - p)^n$	$\frac{r * (1 - p)}{p}$	$\frac{r * (1 - p)}{p^2}$
Normale discrète	$\mu, \sigma$	$P(N = n) = \phi\left(n + \frac{1^-}{2}\right) - \phi\left(n - \frac{1^+}{2}\right)$	Pas d'expression	Pas d'expression

**Annexe 2 : « Descriptif des lois de sévérité » :**

Loi	Paramètres	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Pareto	$t, \alpha$ $t > 0, \alpha > 0, x \geq t$	$1 - \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha$	$\frac{\alpha t}{\alpha - 1}$ pour $\alpha \geq 1$	$\frac{\alpha t^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$ Pour $\alpha \geq 2$
LogNormale	$t, \mu, \sigma$ $(t > 0, \mu \text{ fini}, \sigma > 0, x > t)$	$\Phi\left(\frac{\ln(x - t) - \mu}{\sigma}\right)$ $\Phi$ étant la fonction de répartition de la loi N(0,1)	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$
Gamma	$\alpha, \beta$	$\Gamma(\alpha, \beta) =$ expression à trouver	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Exponentielle	$\lambda$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Weibull	$\tau, \alpha$	$1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\tau}$	$\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\tau} + 1\right)$	$\alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \left(\alpha \Gamma\left(\frac{1}{\tau} + 1\right)\right)^2$
Burr	$\alpha, \lambda, \tau$	$1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x^\tau}\right)^\alpha$	$\frac{\lambda^{\frac{1}{\tau}}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{\tau}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)$	Pas d'expression simple

**Annexe 3 : « Estimation des paramètres des lois de fréquence et de sévérité par la méthode de maximisation de la vraisemblance (EMV) »**

La fonction de vraisemblance est une fonction de probabilités conditionnelles. En supposant que les  $x_i$  sont indépendants et identiquement distribués selon une loi statistique, la vraisemblance permet d'exprimer ces  $x_i$  en fonction de la densité de la loi et de ses paramètres supposés connus. Son expression est :

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \text{ ou } \theta \text{ vecteur des paramètres.}$$

Elle permet de calculer l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance qui est une technique statistique permettant d'évaluer les paramètres d'une loi en maximisant sa vraisemblance par rapport à un échantillon donné.

Pour cela nous allons calculer la Log-vraisemblance c'est-à-dire  $\ln(L)$  et la dériver selon chaque paramètre.

Ainsi nous calculons pour tout  $i$   $\frac{\partial \ln(L(x_1, \dots, x_n | \theta))}{\partial \theta_i}$  et nous l'annulons pour retrouver une expression des paramètres.

Loi	Paramètres	Estimations par MV
Poisson	$\lambda$	$\bar{N}$
Binomiale Négative	$r, p$	Pas de résolution analytique, besoin d'un solveur pour déterminer les paramètres.
Normale discrète	$\mu, \sigma$	Pas de résolution analytique, besoin d'un solveur pour déterminer les paramètres.
Pareto	$t, \alpha$	$\tilde{t} = \text{Min}_i(x_i)$ $\tilde{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\tilde{t}}\right)}$
LogNormale	$t, \mu, \sigma$	$\tilde{t} = \text{Min}_i(x_i)$ $\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\tilde{t}}\right)$ $\tilde{\sigma} = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \ln\left(\frac{x_i}{\tilde{t}}\right) \right)^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\tilde{t}}\right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$
Gamma	$\alpha, \beta$	Pas de résolution analytique, besoin d'un solveur pour déterminer les paramètres.
Exponentielle	$\lambda$	$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$
Weibull	$\tau, \alpha$	Pas de résolution analytique, besoin d'un solveur pour déterminer les paramètres.
Burr	$\alpha, \lambda, \tau$	Pas de résolution analytique, besoin d'un solveur pour déterminer les paramètres.

### Annexe 4 : « Démonstration Espérance-Variance de la charge sinistre »

Avec les notations du mémoire, nous allons démontrer :

$$E[S_N] = E\left[\sum_{i=1}^N Y_i\right] = E[N] E(Y_1)$$

Nous avons :

$$E[S_N] = E[E[S_N|N]]$$

$$= E\left[E\left[\sum_{i=1}^N Y_i | N\right]\right]$$

$$\text{Or } E\left[E\left[\sum_{i=1}^N Y_i | N\right]\right] = E[N * E[Y_1]]$$

donc :

$$E[S_N] = E[N * E[Y_1]]$$

$$= E[N] * E[E[Y_1]]$$

$$= E[N] E[Y_1]$$

**CQFD**

Avec les notations du mémoire, nous allons démontrer :

$$V(S_N) = V\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right) = E[N] V(Y_1) + (E[Y_1])^2 V(N)$$

$$\begin{aligned} V(S_N) &= E[S_N^2] - (E[S_N])^2 \\ &= E\left[E[S_N^2|N]\right] - (E[E[S_N|N]])^2 \\ &= E\left[E[S_N^2|N]\right] - E[(E[S_N|N])^2] + E[(E[S_N|N])^2] - (E[E[S_N|N]])^2 \\ &= E\left[E[S_N^2|N] - (E[S_N|N])^2\right] + V(E[S_N|N]) \\ &= E[V(S_N|N)] + V(E[S_N|N]) \quad (1) \end{aligned}$$

Or :

$$V(E[S_N|N]) = V(N * E[Y_1]) = (E[Y_1])^2 V(N) \quad (2)$$

Et:

$$\begin{aligned}
 V(S_N|N) &= E[S_N^2|N] - (E[S_N|N])^2 \\
 &= E\left[\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right)^2|N\right] - (N * E[Y_1])^2 \\
 &= E\left[\sum_{i=1}^N Y_i^2|N\right] + E\left[\sum_{i \neq j} Y_i Y_j|N\right] - N^2(E[Y_1])^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N E[Y_i^2|N] + \sum_{i \neq j} E[Y_i Y_j|N] - N^2(E[Y_1])^2 \\
 &= N * E[Y_1^2] + \sum_{i \neq j} Cov(Y_i, Y_j) + \sum_{i \neq j} E[Y_i|N] E[Y_j|N] - N^2(E[Y_1])^2 \\
 &= N * E[Y_1^2] + (N^2 - N)(E[Y_1])^2 - N^2(E[Y_1])^2 \quad \text{car les } Y_i \text{ sont iid donc } \sum_{i \neq j} Cov(Y_i, Y_j) = 0 \\
 &= N * E[Y_1^2] - N(E[Y_1])^2 \\
 &= NV(Y_1)
 \end{aligned}$$

Et donc :

$$E[V(S_N|N)] = E[N] V(Y_1)$$

## CQFD

### Annexe 5 : « Code des Assurances »

#### Article L122-1

L'assureur contre l'incendie répond de tous dommages causés par conflagration, embrasement ou simple combustion. Toutefois, il ne répond pas, sauf convention contraire, de ceux occasionnés par la seule action de la chaleur ou par le contact direct et immédiat du feu ou d'une substance incandescente s'il n'y a eu ni incendie, ni commencement d'incendie susceptible de dégénérer en incendie véritable.

#### Article L122-2

Les dommages matériels résultant directement de l'incendie ou du commencement d'incendie sont seuls à la charge de l'assureur, sauf convention contraire.

Si, dans les trois mois à compter de la remise de l'état des pertes, l'expertise n'est pas terminée, l'assuré a le droit de faire courir les intérêts par sommation ; si elle n'est pas terminée dans les six mois, chacune des parties peut procéder judiciairement.

#### Article L122-3

Sont assimilés aux dommages matériels et directs les dommages matériels occasionnés aux objets compris dans l'assurance par les secours et par les mesures de sauvetage.

#### Article L122-4

L'assureur répond de la perte ou de la disparition des objets assurés survenue pendant l'incendie, à moins qu'il ne prouve que cette perte ou cette disparition est provenue d'un vol.

#### Article L122-5

L'assureur, conformément à l'article L. 121-7, ne répond pas des pertes et détériorations de la chose assurée provenant du vice propre ; mais il garantit les dommages d'incendie qui en sont

la suite, à moins qu'il ne soit fondé à demander la nullité du contrat d'assurance par application de l'article L. 113-8, premier alinéa.

#### **Article L122-6**

Sauf convention contraire, l'assurance ne couvre pas les incendies directement occasionnés par les éruptions de volcan, les tremblements de terre et autres cataclysmes.

#### **Article L122-7**

Les contrats d'assurance garantissant les dommages d'incendie ou tous autres dommages à des biens situés en France, ainsi que les dommages aux corps de véhicules terrestres à moteur, ouvrent droit à la garantie de l'assuré contre les effets du vent dû aux tempêtes, ouragans et cyclones, sur les biens faisant l'objet de tels contrats, sauf en ce qui concerne les effets du vent dû à un événement cyclonique pour lequel les vents maximaux de surface enregistrés ou estimés sur la zone sinistrée ont atteint ou dépassé 145 km/h en moyenne sur dix minutes ou 215 km/h en rafales, qui relèvent des dispositions des articles L. 125-1 et suivants du présent code.

Sont exclus les contrats garantissant les dommages d'incendie causés aux récoltes non engrangées, aux cultures et au cheptel vif hors bâtiments.

Sont également exclus les contrats garantissant les dommages d'incendie causés aux bois sur pied.

En outre, si l'assuré est couvert contre les pertes d'exploitation, cette garantie est étendue aux effets des tempêtes, ouragans ou cyclones, dans les conditions du contrat correspondant.

#### **Article L122-8**

Dans le cas où les dommages garantis par un contrat d'assurance procèdent d'un incendie de forêt, l'assureur peut, s'il est établi que l'assuré ne s'est pas conformé aux obligations découlant des articles L131-4, L131-8, L131-12, L131-14 à L131-18, L134-4 à L134-12, L135-2, L162-2, L163-4 à L163-6 du nouveau code forestier, pratiquer, en sus des franchises prévues le cas échéant au contrat, une franchise supplémentaire d'un montant maximum de 5 000 euros.

#### **Article L125-1**

Les contrats d'assurance, souscrits par toute personne physique ou morale autre que l'Etat et garantissant les dommages d'incendie ou tous autres dommages à des biens situés en France, ainsi que les dommages aux corps de véhicules terrestres à moteur, ouvrent droit à la garantie de l'assuré contre les effets des catastrophes naturelles, dont ceux des affaissements de terrain dus à des cavités souterraines et à des marnières sur les biens faisant l'objet de tels contrats.

En outre, si l'assuré est couvert contre les pertes d'exploitation, cette garantie est étendue aux effets des catastrophes naturelles, dans les conditions prévues au contrat correspondant.

Sont considérés comme les effets des catastrophes naturelles, au sens du présent chapitre, les dommages matériels directs non assurables ayant eu pour cause déterminante l'intensité anormale d'un agent naturel, lorsque les mesures habituelles à prendre pour prévenir ces dommages n'ont pu empêcher leur survenance ou n'ont pu être prises.

L'état de catastrophe naturelle est constaté par arrêté interministériel qui détermine les zones et les périodes où s'est située la catastrophe ainsi que la nature des dommages résultant de celle-ci couverts par la garantie visée au premier alinéa du présent article. Cet arrêté précise, pour chaque commune ayant demandé la reconnaissance de l'état de catastrophe naturelle, la décision des ministres. Cette décision est ensuite notifiée à chaque commune concernée par le représentant de l'Etat dans le département, assortie d'une motivation. L'arrêté doit être publié au Journal officiel dans un délai de trois mois à compter du dépôt des demandes à la préfecture. De manière exceptionnelle, si la durée des enquêtes diligentées par le représentant de l'Etat dans le département est supérieure à deux mois, l'arrêté est publié au plus tard deux mois après la réception du dossier par le ministre chargé de la sécurité civile.

Aucune demande communale de reconnaissance de l'état de catastrophe naturelle ne peut donner lieu à une décision favorable de reconnaissance de l'état de catastrophe naturelle par arrêté interministériel lorsqu'elle intervient dix-huit mois après le début de l'événement naturel qui y donne naissance. Ce délai s'applique aux événements naturels ayant débuté après le 1er janvier 2007. Pour les événements naturels survenus avant le 1er janvier 2007, les demandes communales de reconnaissance de l'état de catastrophe naturelle doivent être déposées à la préfecture dont dépend la commune avant le 30 juin 2008.

Les cavités souterraines considérées peuvent être naturelles ou d'origine humaine. Dans ce dernier cas, sont exclus de l'application du présent chapitre les dommages résultant de l'exploitation passée ou en cours d'une mine.

### **Article L125-2**

Les entreprises d'assurance doivent insérer dans les contrats mentionnés à l'article L. 125-1 une clause étendant leur garantie aux dommages visés au troisième alinéa dudit article.

La garantie ainsi instituée ne peut excepter aucun des biens mentionnés au contrat ni opérer d'autre abatement que ceux qui seront fixés dans les clauses types prévues à l'article L. 125-3.

Elle est couverte par une prime ou cotisation additionnelle, individualisée dans l'avis d'échéance du contrat visé à l'article L. 125-1 et calculée à partir d'un taux unique défini par arrêté pour chaque catégorie de contrat. Ce taux est appliqué au montant de la prime ou cotisation principale ou au montant des capitaux assurés, selon la catégorie de contrat.

Les indemnités résultant de cette garantie doivent être attribuées aux assurés dans un délai de trois mois à compter de la date de remise de l'état estimatif des biens endommagés ou des pertes subies, sans préjudice de dispositions contractuelles plus favorables, ou de la date de publication, lorsque celle-ci est postérieure, de la décision administrative constatant l'état de catastrophe naturelle. Les indemnités résultant de cette garantie ne peuvent faire l'objet d'aucune franchise non prévue explicitement par le contrat d'assurance. Les franchises éventuelles doivent également être mentionnées dans chaque document fourni par l'assureur et décrivant les conditions d'indemnisation. Ces conditions doivent être rappelées chaque année à l'assuré.

En tout état de cause, une provision sur les indemnités dues au titre de cette garantie doit être versée à l'assuré dans les deux mois qui suivent la date de remise de l'état estimatif des biens endommagés ou des pertes subies, ou la date de publication, lorsque celle-ci est postérieure, de la décision administrative constatant l'état de catastrophe naturelle.

### **Article L125-3**

Les contrats mentionnés à l'article L. 125-1 sont réputés, nonobstant toute disposition contraire, contenir une telle clause.

Des clauses types réputées écrites dans ces contrats sont déterminées par arrêté.

#### **Article L125-4**

Nonobstant toute disposition contraire, la garantie visée par l'article L. 125-1 du présent code inclut le remboursement du coût des études géotechniques rendues préalablement nécessaires pour la remise en état des constructions affectées par les effets d'une catastrophe naturelle.

#### **Article L125-5**

Sont exclus du champ d'application du présent chapitre les dommages causés aux récoltes non engrangées, aux cultures, aux sols et au cheptel vif hors bâtiment, dont l'indemnisation reste régie par les dispositions du chapitre Ier du titre VI du livre III du code rural et de la pêche maritime.

Sont exclus également du champ d'application du présent chapitre les dommages subis par les corps de véhicules aériens, maritimes, lacustres et fluviaux, ainsi que les marchandises transportées et les dommages mentionnés à l'article L. 242-1.

Les contrats d'assurance garantissant les dommages mentionnés aux alinéas précédents ne sont pas soumis au versement de la prime ou cotisation additionnelle.

#### **Article L125-6**

Dans les terrains classés inconstructibles par un plan de prévention des risques naturels prévisibles approuvé dans les conditions fixées par les dispositions du chapitre II du titre VI du livre V du code de l'environnement, l'obligation prévue au premier alinéa de l'article L. 125-2 ne s'impose pas aux entreprises d'assurance à l'égard des biens et activités mentionnés à l'article L. 125-1, à l'exception, toutefois, des biens et des activités existant antérieurement à la publication de ce plan.

Cette obligation ne s'impose pas non plus aux entreprises d'assurance à l'égard des biens immobiliers construits et des activités exercées en violation des règles administratives en vigueur lors de leur mise en place et tendant à prévenir les dommages causés par une catastrophe naturelle.

Les entreprises d'assurance ne peuvent toutefois se soustraire à cette obligation que lors de la conclusion initiale ou du renouvellement du contrat.

A l'égard des biens et activités situés sur des terrains couverts par un plan de prévention des risques, les entreprises d'assurance peuvent exceptionnellement déroger aux dispositions du deuxième alinéa de l'article L. 125-2 sur décision d'un bureau central de tarification, dont les conditions de constitution et les règles de fonctionnement sont fixées par décret en Conseil d'Etat, lorsque le propriétaire ou l'exploitant ne se sera pas conformé dans un délai de cinq ans aux mesures visées au 4° du II de l'article L. 562-1 du code de l'environnement.

Le bureau central de tarification fixe des abattements spéciaux dont les montants maxima sont déterminés par arrêté, par catégorie de contrat.

Lorsqu'un assuré s'est vu refuser par une entreprise d'assurance l'application des dispositions du présent chapitre, il peut saisir le bureau central de tarification, qui impose à l'entreprise d'assurance concernée de le garantir contre les effets des catastrophes naturelles. Lorsque le

risque présente une importance ou des caractéristiques particulières, le bureau central de tarification peut demander à l'assuré de lui présenter, dans les mêmes conditions, un ou plusieurs autres assureurs afin de répartir le risque entre eux.

Toute entreprise d'assurance ayant maintenu son refus de garantir un assuré dans les conditions fixées par le bureau central de tarification est considérée comme ne fonctionnant plus conformément à la réglementation en vigueur et encourt le retrait de l'agrément administratif prévu aux articles L. 321-1 ou L. 321-7 à L. 321-9.

Est nulle toute clause des traités de réassurance tendant à exclure le risque de catastrophe naturelle de la garantie de réassurance en raison des conditions d'assurance fixées par le bureau central de tarification.

Le préfet ou le président de la caisse centrale de réassurance peuvent saisir le bureau central de tarification lorsque les conditions dans lesquelles un bien ou une activité bénéficie de la garantie prévue de l'article L. 125-1 leur paraissent injustifiées eu égard au comportement de l'assuré ou à l'absence de toute mesure de précaution de nature à réduire la vulnérabilité de ce bien ou de cette activité. Le bureau central de tarification fixe des abattements spéciaux dans les conditions prévues au cinquième alinéa.

## Annexe 6 : « Echelle de Beaufort »

Force	Termes	Vitesse en km/h	État de la mer	Effets à terre
				(à 10 m de hauteur, en terrain plat et à découvert)
0	Calm	moins de 1	La mer est comme un miroir	La fumée monte verticalement. Les feuilles des arbres ne témoignent aucun mouvement.
1	Très légère brise	1 à 5	Quelques rides ressemblant à des écailles de poisson, mais sans aucune écume	La fumée indique la direction du vent. Les girouettes ne s'orientent pas.
2	Légère brise	6 à 11	Vaguelettes ne déferlant pas	On sent le vent sur le visage. Les feuilles s'agitent. Les girouettes s'orientent.
3	Petite brise	12 à 19	Très petites vagues. Les crêtes commencent à déferler. Écume d'aspect vitreux. Parfois quelques moutons épars	Les drapeaux flottent au vent. Les feuilles sont sans cesse en mouvement.
4	Joie brise	20 à 28	Petites vagues, de nombreux moutons	Les poussières s'envoient. Les petites branches plient.
5	Bonne brise	29 à 38	Vagues modérées, moutons, éventuellement embruns	Le tronc des arbustes et arbres eux en feuilles balance. La cime de tous les arbres est agitée. Des vaguelettes s'enforment sur les eaux intérieures.
6	Vent frais	39 à 49	Crêtes d'écume blanches, lames, embruns	On entend siffler le vent. Les branches de large diamètre s'agitent. Les parapluies sont susceptibles de se retourner.
7	Grand vent frais	50 à 61	Trainées d'écume, lames déferlantes	Tous les arbres balancent. La marche contre le vent peut devenir difficile.
8	Coup de vent	62 à 74	Tourbillons d'écumes à la crête des lames, trainées d'écume	Les branches sont susceptibles de casser. La marche contre le vent est très difficile, voire impossible.
9	Fort coup de vent	75 à 88	Lames déferlantes grosses à énormes, visibilité réduite par les embruns	Le vent peut légèrement endommager les bâtiments : envois de tuiles, d'ardoises, chutes de cheminées.
10	Tempête	89 à 102	Conditions exceptionnelles : Très grosses lames à longue crête en panache. L'écume produite s'agglomère en larges bancs et est soufflée dans le lit du vent en épaisses trainées blanches. Dans son ensemble, la surface des eaux semble blanche. Le déferlement en rouleaux devient intense et brutal. Visibilité réduite	Dégâts importants aux bâtiments. Les toits sont susceptibles de s'envoler. Certains arbres sont déracinés.
11	Violente tempête	103 à 117	Conditions exceptionnelles : Lames exceptionnellement hautes (les navires de petit et moyen tonnage peuvent, par instant, être perdus de vue). La mer est complètement recouverte de bancs d'écume blanche élongés dans la direction du vent. Partout, le bord de la crête des lames est soufflé et donne de la mousse. Visibilité réduite	Ravages étendus et importants.
12	Couragan ou bombe météorologique au-dessus du 40° parallèle	supérieur à 118	Conditions exceptionnelles : L'air est plein d'écume et d'embruns. La mer est entièrement blanche du fait des bancs d'écume dérivants. Visibilité fortement réduite	Dégâts très importants de l'ordre de la catastrophe naturelle.

## Annexe 7 : « QQ-Plots : Loïs de probabilités utilisées »

### Ajustement loi Normale à l'aide des QQ-Plots

Nous allons ici, donner la méthode pour vérifier une adéquation de nos données à une loi normale.

1. On ordonne notre échantillon de  $x_i$  par ordre croissant : on obtient un n-échantillon d'ordre  $(x(i))$
2. On simule un échantillon de loi normale centrée réduite que l'on ordonne :  $y(i)$
3. On trace l'ensemble des points  $[x(i); y(i)]$  : Si l'adéquation est bonne, les points se trouveront sur une droite linéaire de pente a et d'ordonnée à l'origine b :  $y(i) = ax(i) + b$
4. On en déduit que  $X \sim N\left(\frac{-b}{a}; \frac{1}{a}\right)$

### Ajustement loi LogNormale à l'aide des QQ-Plots

Nous allons ici, donner la méthode pour vérifier une adéquation de nos données à une loi Lognormale.

On sait que  $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$  si  $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ainsi on reprend le même procédé que précédemment mais on élève les  $y(i)$  à l'exponentielle.

1. On ordonne notre échantillon de  $x_i$  par ordre croissant : on obtient un n-échantillon d'ordre  $(x(i))$
2. On simule un échantillon de loi normale centrée réduite que l'on ordonne :  $y(i)$
3. On trace l'ensemble des points  $[\ln(x(i)); y(i)]$  : Si l'adéquation est bonne, les points se trouveront sur une droite linéaire de pente a et d'ordonnée à l'origine b :  
 $y(i) = a \ln(x(i)) + b$
4. On en déduit que  $X \sim \text{LN}\left(\frac{-b}{a}; \frac{1}{a}\right)$

### Ajustement par une loi Exponentielle à l'aide des QQ-Plots

Nous allons ici, donner la méthode pour vérifier une adéquation de nos données à une loi exponentielle.

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , si pour  $x > 0$ ,  $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$

Ainsi :

1. On ordonne notre échantillon de  $x_i$  par ordre croissant : on obtient un n-échantillon d'ordre  $(x(i))$
2. On a alors que  $F(x(i)) \approx \frac{i}{n+1}$  donc  $1 - \exp(-\lambda x(i)) \approx \frac{i}{n+1}$   
Et donc  $x(i) \approx \frac{-\ln(1 - \frac{i}{n+1})}{\lambda}$
3. On trace l'ensemble des points  $\left[x(i); \frac{-\ln(1 - \frac{i}{n+1})}{\lambda}\right]$  : Si l'adéquation est bonne, les points se trouveront sensiblement sur la première bissectrice.

## Ajustement par une loi de Paréto à l'aide des QQ-Plots

Nous allons ici, donner la méthode pour vérifier une adéquation de nos données à une loi de Pareto.

$$X \sim P(A, \alpha) \text{ avec } \alpha > 0 \text{ et } A > 0 \text{ si : } F(x) = 1 - \left(\frac{A}{x}\right)^\alpha \text{ si } x \geq A$$

0 sinon

De plus, nous remarquons que si  $X \sim P(A, \alpha)$  alors  $Y = \ln\left(\frac{X}{A}\right) \sim \text{Exp}(\alpha)$

### Démonstration :

$$P\left(\ln\left(\frac{X}{A}\right) \leq x\right) = P(X \leq A \exp(x)) = 1 - \left(\frac{A}{A \exp(x)}\right)^\alpha = 1 - \exp(-\alpha x) \quad \mathbf{CQFD.}$$

Ainsi :

1. On ordonne notre échantillon de  $x_i$  par ordre croissant : on obtient un n-échantillon d'ordre  $(x(i))$
2. On calcule les  $y(i)$  tels que  $y(i) = \ln\left(\frac{x(i)}{A}\right)$
3. On a alors que les  $(y(i))$  suivent une loi exponentielle de paramètre  $\alpha$   
 $F(y(i)) \approx \frac{i}{n+1}$  donc  $1 - \exp(-\alpha y(i)) \approx \frac{i}{n+1}$   
 Et donc  $y(i) \approx \ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)$   
 Et enfin  $x(i) \approx \frac{A}{1 - \frac{i}{n+1}}$
4. On trace l'ensemble des points  $\left[x(i); \frac{A}{1 - \frac{i}{n+1}}\right]$  : Si l'adéquation est bonne, les points se trouveront sensiblement sur la première bissectrice.

## Ajustement par une loi de Weibull à l'aide des QQ-Plots

Nous allons ici, donner la méthode pour vérifier une adéquation de nos données à une loi de Weibull.

$$X \sim P(\alpha, \tau) \text{ si pour } x > 0, F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\alpha}\right)^\tau$$

Ainsi :

1. On ordonne notre échantillon de  $x_i$  par ordre croissant : on obtient un n-échantillon d'ordre  $(x(i))$
2. On a alors que  
 $F(x(i)) \approx \frac{i}{n+1}$  donc  $1 - \exp\left(\frac{-x(i)}{\alpha}\right)^\tau \approx \frac{i}{n+1}$   
 Et donc  $x(i) \approx \alpha \left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right)^{\frac{1}{\tau}}$
3. On trace l'ensemble des points  $\left(x(i); \alpha \left(-\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\right)^{\frac{1}{\tau}}\right)$  : Si l'adéquation est bonne, les points se trouveront sensiblement sur la première bissectrice

### Ajustement par une loi de Burr à l'aide des QQ-Plots

Nous allons ici, donner la méthode pour vérifier une adéquation de nos données à une loi de Burr.

$X \sim SM(c, k)$  si  $c > 0, k > 0$  et

$$F(x, c, k) = 1 - (1 + x^c)^{-k} \quad \text{si } x > 0$$

$$0 \quad \text{sinon}$$

Ainsi

1. On ordonne notre échantillon de  $x_i$  par ordre croissant : on obtient un n-échantillon d'ordre  $(x(i))$
2. On a alors que  $F(x(i)) \approx \frac{i}{n+1}$  donc  $1 - (1 + (x(i))^c)^{-k} \approx \frac{i}{n+1}$   
Et donc  $x(i) \approx \left( \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^{\frac{-1}{k}} - 1 \right)^{\frac{1}{c}}$
3. On trace l'ensemble des points  $\left( x(i); \left( \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^{\frac{-1}{k}} - 1 \right)^{\frac{1}{c}} \right)$  : si l'adéquation est bonne, les points se trouveront sensiblement sur la première bissectrice.

### Annexe 8 : « Preuve $\chi^2$ »

En reprenant les notations de la page 23, nous allons montrer que, sous l'hypothèse nulle, la loi de D converge vers une loi du  $\chi^2$  à  $k-1$  degrés de liberté.

Soit  $Y$  une variable aléatoire telle que, pour  $i$  variant de 1 à  $k$ ,  $P(Y = j) = p_j$ .

On introduit le vecteur aléatoire suivant :

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k) = \left( \frac{[Y = 1] - p_1}{\sqrt{p_1}}, \frac{[Y = 2] - p_2}{\sqrt{p_2}}, \dots, \frac{[Y = k] - p_k}{\sqrt{p_k}} \right)$$

$$\text{où : } [Y = j] = \begin{cases} 1 & \text{si } Y = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa matrice de variance-covariance est  $\Gamma_Z = Id_k - \sqrt{p}^t * \sqrt{p}$ , avec  $\sqrt{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \sqrt{p_2} \\ \dots \\ \sqrt{p_k} \end{pmatrix}$ .

Ce dernier point sera démontré à la fin de cette démonstration (cf. paragraphe « Démonstration matrice variance-covariance »).

De plus, pour tout  $j$ ,  $E(Z_j) = 0$ . En effet :  $E(Z_j) = \frac{E([Y=j]) - p_j}{\sqrt{p_j}} = \frac{1 * p_j + 0 * P([Y \neq j]) - p_j}{\sqrt{p_j}} = 0$

Ainsi, si nous disposons d'un N-échantillon  $y_1, \dots, y_N$  de la variable  $Y$ , nous pouvons en déduire un N-échantillon  $z_1, \dots, z_N$  de la variable  $Z$ .

Nous en déduisons, par le théorème central limite, que  $\frac{Z_1 + \dots + Z_N}{\sqrt{N}}$  converge lorsque N tend vers l'infini, vers une loi normale centrée de matrice de variance-covariance  $\Gamma_Z$ .

Cette loi n'est autre que celle du projeté d'un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^k$  suivant une loi normale centrée réduite sur l'hyperplan orthogonal à  $\sqrt{p}$  de dimension  $k - 1$ .

Le carré de ce projeté suit alors une loi du  $\chi^2$  à  $(k-1)$  degrés de liberté.

C'est la loi limite du carré de  $\frac{Z_1 + \dots + Z_N}{\sqrt{N}}$  qui est D.

## CQFD.

### Démonstration matrice variance-covariance :

Nous avons annoncé dans la démonstration précédente que  $\Gamma_Z = Id_k - \sqrt{p}^t * \sqrt{p}$ . Démontrons-le.

Pour tout  $i$ ,

$$V(Z_i) = V\left(\frac{[Y=i]-p_i}{\sqrt{p_i}}\right) = \frac{V([Y=i]-p_i)}{p_i} = \frac{V([Y=i])}{p_i} = \frac{E([Y=i]^2) - E([Y=i])^2}{p_i} = \frac{1 * p_i - 1 * p_i^2}{p_i} = 1 - p_i$$

Pour tout  $i \neq j$ ,

$$Cov(Z_i, Z_j) = E(Z_i * Z_j) - E(Z_i) * E(Z_j)$$

$$= E(Z_i * Z_j)$$

$$= E\left(\frac{[Y=i]-p_i}{\sqrt{p_i}} * \frac{[Y=j]-p_j}{\sqrt{p_j}}\right)$$

$$= \frac{E(( [Y=i]-p_i ) * ( [Y=j]-p_j ))}{\sqrt{p_i * p_j}}$$

$$= \frac{E([Y=i]*[Y=j] - [Y=i]*p_j - [Y=j]*p_i + p_i * p_j)}{\sqrt{p_i * p_j}}$$

$$= \frac{E([Y = i] * [Y = j]) - E([Y = i] * p_j) - E([Y = j] * p_i) + p_i * p_j}{\sqrt{p_i * p_j}}$$

$$= \frac{0 - p_i * p_j - p_i * p_j + p_i * p_j}{\sqrt{p_i * p_j}}$$

$$= -\sqrt{p_i * p_j}$$

$$\text{On a donc } \Gamma_Z = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & -\sqrt{p_1 * p_2} & \dots & -\sqrt{p_1 * p_k} \\ -\sqrt{p_2 * p_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\sqrt{p_{k-1} * p_k} \\ -\sqrt{p_k * p_1} & \dots & -\sqrt{p_k * p_{k-1}} & 1 - p_k \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{p_1 * p_1} & -\sqrt{p_1 * p_2} & \dots & -\sqrt{p_1 * p_k} \\ -\sqrt{p_2 * p_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\sqrt{p_{k-1} * p_k} \\ -\sqrt{p_k * p_1} & \dots & -\sqrt{p_k * p_{k-1}} & -\sqrt{p_k * p_k} \end{pmatrix}$$

Et donc

$$\Gamma_Z = Id_k - \sqrt{p}^t * \sqrt{p}, \text{ avec } \sqrt{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \sqrt{p_2} \\ \dots \\ \sqrt{p_k} \end{pmatrix}.$$

**CQFD.**

Annexe 9 : « Table  $\chi^2$  »

$n \backslash \alpha$	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,0	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,56	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,1	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	33,7	39,3	45,6	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	52,3	59,3	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	61,7	69,3	77,6	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	71,1	79,3	88,1	96,6	101,9	106,6	112,4	116,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	80,6	89,3	98,6	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109,1	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

### Annexe 10 : « L'indice FFB »

L'indice FFB du coût de la construction (ICC FFB) est un indice trimestriel, base 100 au 1er janvier 1941, calculé par la Fédération Française du Bâtiment à partir du prix de revient d'un immeuble de type courant à Paris. Il enregistre les variations de coût des différents éléments qui le compose sans toutefois prendre en compte la valeur des terrains.

Année	FFB 4e trim.
1999	567.3
2000	589.9
2001	603.6
2002	624.9
2003	648.7
2004	683.2
2005	699.4
2006	749.1
2007	773.5
2008	802.9
2009	817.9
2010	851.2
2011	879.8
2012	903.1
2013	920.8
<b>2014</b>	<b>939.2</b>

Valeur évaluée

### Annexe 11 : « L'indice INSEE des taux de salaire horaire »

L'indice INSEE des taux de salaire horaire des ouvriers par activité - Activités pour la santé humaine

C'est une enquête trimestrielle qui couvre les entreprises comptant 10 salariés ou plus (hors stagiaires et intérimaires), situées en France métropolitaine. Environ 34 000 unités sont enquêtées.  
Base 100 : au 4ème trimestre de l'année 2008

Elle mesure l'emploi salarié total en fin de trimestre : l'ensemble des salariés ayant un contrat de travail et qui sont payés par l'établissement sont décomptés. Le détail du nombre de salariés à temps partiel et en contrat à durée déterminée est également étudié.

Ainsi, le salaire horaire de base est obtenu en divisant le salaire mensuel brut par l'horaire mensuel de base du salarié, calculé en moyenne sur l'année.

Année	INSEE 2e trim.
1999	76.4
2000	80.8
2001	84
2002	86.8
2003	88.8
2004	91.2
2005	92.8
2006	95.5
2007	97.3
2008	98.9
2009	100.6
2010	102.1
2011	103.4
2012	104.7
2013	106.2
<b>2014</b>	<b>107.8</b>

Valeur évaluée

Dans notre étude, nous aurons également besoin de statistiques et de tests pour réaliser à bien les modélisations.

### Annexe 12 : « Méthode Chain-Ladder »

Cette méthode nous permet, lorsque la sinistralité est fournie sous forme de triangles de liquidation, d'évaluer une charge à l'ultime, ce qui nous servira de sinistralité « *as-if* ». C'est en effet sur cette donnée nouvellement calculée par projection que nous réaliserons les modélisations.

On appelle :

AE, l'année d'exercice

AD, l'année de développement

$P_{i,j}$ , le montant du paiement cumulé brut de l'année d'exercice  $i$  pour l'année de développement  $j$

On obtient donc un triangle des paiements comme ceci :

AE \ AD	1	2	...	j	...	n
1	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	...	$P_{1,j}$	...	$P_{1,n}$
2	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	...	$P_{2,j}$	...	$P_{2,n-1}$
...						
i	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	...	$P_{i,j}$	$P_{i,n-i+1}$	
...	...	...				
n	$P_{n,1}$	$P_{n-1,2}$				

Ici les montants sont bruts et correspondent aux valeurs notifiées à chaque exercice. Comme vu précédemment, il faut réévaluer ces montants et créer une statistique « *as-if* »:

Soit  $P'_{i,j}$ , le montant du paiement cumulé « *as-if* » de l'année d'exercice  $i$  pour l'année de développement  $j$ .

AE \ AD	1	2	...	j	...	n
1	$P'_{1,1}$	$P'_{1,2}$	...	$P'_{1,j}$	...	$P'_{1,n}$
2	$P'_{2,1}$	$P'_{2,2}$	...	$P'_{2,j}$	...	$P'_{2,n-1}$
...						
i	$P'_{i,1}$	$P'_{i,2}$	...	$P'_{i,j}$	$P'_{i,n-i+1}$	
...	...	...				
...		$P'_{n-1,2}$				
n	$P'_{n,1}$					

Avec

$$P'_{i,j} = \sum_{k=1}^i P_{i,j}$$

C'est sur ce triangle que nous allons appliquer notre méthode Chain Ladder pour évaluer la sinistralité à l'ultime.

D'après le modèle de Mack (1997) :

$$P'_{i,j+1} = P'_{i,j} * f_j^{CL} + \varepsilon_j$$

Où  $\varepsilon_j$  sont les résidus du modèle, indépendants des  $P'_{i,j}$  et suivant une loi  $N(0, \sigma_j^2 * P'_{i,j})$ .

Nous ferons l'approximation suivante :

$$\tilde{f}_j^{CL} = \frac{\sum_{k=1}^{n-j} P'_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{n-j} P'_{k,j}}$$

Et pour tout  $i > j$ ,

$$P'_{i,j} = P'_{i,i} * \prod_{k=i}^{j-1} \tilde{f}_k^{CL}$$

Ainsi, nous pouvons remplir la partie inférieure du triangle ce qui nous donnera la cadence des paiements, utile dans le cadre de branches à développement long, et les charges à l'ultime, intéressante pour modéliser l'ensemble des sévérités.

### Annexe 13 : « Corrélation positive des $X_j$ »

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2] \\
&= E[E[X_1 X_2 | \theta]] - E[E[X_1 | \theta]]E[E[X_2 | \theta]] \\
&= E[E[X_1 X_2 | \theta]] - E[E[X_1 | \theta]E[X_2 | \theta]] + E[E[X_1 | \theta]E[X_2 | \theta]] - E[E[X_1 | \theta]]E[E[X_2 | \theta]] \\
&= E[E[X_1 X_2 | \theta] - E[X_1 | \theta]E[X_2 | \theta]] + E[E[X_1 | \theta]E[X_2 | \theta]] - E[E[X_1 | \theta]]E[E[X_2 | \theta]] \\
&= E[Cov(X_1, X_2 | \theta)] + Cov(E[X_1 | \theta], E[X_2 | \theta]) \\
&= 0 + Cov(\mu(\theta), \mu(\theta)) \\
&= Var(\mu(\theta))
\end{aligned}$$

**CQFD.**

### Annexe 14 : « Meilleur estimateur de $\mu(\theta)$ »

Critère de l'erreur quadratique moyenne : un estimateur  $\hat{\mu}$  de  $\mu$  est au moins aussi bon qu'un estimateur  $\hat{\mu}^*$  si :

$$E[(\hat{\mu} - \mu)^2] \leq E[(\hat{\mu}^* - \mu)^2]$$

Supposons  $\widehat{\mu(\theta)}^*$  un estimateur de  $\mu(\theta)$  et  $\widehat{\mu(\theta)}$  la prime de Bayes.

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \mu(\theta)\right)^2\right] &= E\left[E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \widehat{\mu(\theta)} + \widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta)\right)^2 \middle| X\right]\right] \\
&= E\left[E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \widehat{\mu(\theta)}\right)^2 + \left(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta)\right)^2 + 2 * \left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \mu(\theta)\right) \left(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta)\right) \middle| X\right]\right] \\
&= E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \mu(\theta)\right)^2\right] + E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta)\right)^2\right] + 2 * E\left[E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \mu(\theta)\right) \left(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta)\right) \middle| X\right]\right]
\end{aligned}$$

Or

$$E[E[(\hat{\mu}^* - \hat{\mu})(\hat{\mu} - \mu) | X]] = E[\hat{\mu}E[\hat{\mu}^* | X] - E[\mu\hat{\mu}^* | X] - \hat{\mu}^2 + \hat{\mu}^2] = 0$$

Donc

$$E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \mu(\theta)\right)^2\right] = E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \mu(\theta)\right)^2\right] + E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta)\right)^2\right]$$

Et donc

$$E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)}^* - \mu(\theta)\right)^2\right] \geq E\left[\left(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta)\right)^2\right] \text{ pour tout } \widehat{\mu(\theta)}^*.$$

**CQFD.**

### Annexe 15 : « Obtention des arguments (a,b) dans le modèle de Bühlmann »

On cherche à démontrer que :

$$(a, b) = \operatorname{argmin}_{\alpha, \beta} E[(\mu(\theta) - \alpha - \beta\bar{X})^2]$$

Appelons  $L = E[(\mu(\theta) - \alpha - \beta\bar{X})^2]$

$$\text{En développant : } L = E\left[(\mu(\theta))^2\right] + \alpha^2 + \beta^2 E[\bar{X}^2] + 2\alpha\beta E[\bar{X}] - 2\alpha E[\mu(\theta)] - 2\beta E[\mu(\theta)\bar{X}]$$

Afin de minimiser  $L$  nous allons annuler les équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 2\alpha + 2\beta E[\bar{X}] - 2E[\mu(\theta)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$$

$$\leftrightarrow \alpha = E[\mu(\theta)] - \beta E[\bar{X}]$$

$$= \mu_0 - \beta E\left[\frac{\sum_i X_i}{n}\right]$$

$$= \mu_0 - \frac{\beta}{n} \sum_i E[E[X_i|\theta]]$$

$$= \mu_0 - \frac{\beta}{n} n E[\mu(\theta)]$$

Et donc :

$$\alpha = (1 - \beta)\mu_0$$

**CQFD1.**

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 2\beta E[\bar{X}^2] + 2\alpha E[\bar{X}] - 2E[\mu(\theta)\bar{X}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \leftrightarrow \beta E[\bar{X}^2] + (E[\mu(\theta)] - \beta E[\bar{X}])E[\bar{X}] - E[\mu(\theta)\bar{X}] = 0$$

$$\leftrightarrow \beta E[\bar{X}^2] + E[\mu(\theta)]E[\bar{X}] - \beta(E[\bar{X}])^2 - E[\mu(\theta)\bar{X}] = 0$$

$$\leftrightarrow \text{Cov}(\mu(\theta), \bar{X}) - \beta \text{Var}(\bar{X}) = 0$$

$$\leftrightarrow \beta = \frac{\text{Cov}(\mu(\theta), \bar{X})}{\text{Var}(\bar{X})} \quad (1)$$

$$\text{Cov}(\mu(\theta), \bar{X}) = \text{Cov}\left(\mu(\theta), \frac{\sum_i X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \text{Cov}(\mu(\theta), \sum_i X_i) = \frac{1}{n} \sum_i \text{Cov}(\mu(\theta), X_i)$$

Or, pour tout  $i$  :

$$\text{Cov}(\mu(\theta), X_i) = E[\mu(\theta)X_i] - E[\mu(\theta)]E[X_i]$$

$$= E[E[\mu(\theta)X_i|\theta]] - E[\mu(\theta)]E[E[X_i|\theta]]$$

$$= E[\mu(\theta)E[X_i|\theta]] - E[\mu(\theta)]E[E[X_i|\theta]]$$

$$= E\left[(\mu(\theta))^2\right] - (E[\mu(\theta)])^2$$

$$= \text{Var}(\mu(\theta))$$

Donc

$$\text{Cov}(\mu(\theta), \bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_i \text{Cov}(\mu(\theta), X_i)$$

$$= \frac{1}{n} n \text{Var}(\mu(\theta))$$

$$\text{Cov}(\mu(\theta), \bar{X}) = \text{Var}(\mu(\theta)) = \tau^2 \quad (2)$$

De plus,

$$\text{Var}(\bar{X}) = E[\bar{X}^2] - (E[\bar{X}])^2 = E[E[\bar{X}^2|\theta]] - (E[E[\bar{X}|\theta]])^2$$

Or

$$E[\bar{X}|\theta] = E\left[\frac{\sum_i X_i}{n} \mid \theta\right] = \frac{1}{n} E[\sum_i X_i \mid \theta] = \frac{1}{n} \sum_i E[X_i|\theta] = \frac{1}{n} n \mu(\theta) = \mu(\theta)$$

Et

$$E[\bar{X}^2|\theta] = E\left[\frac{(\sum_i X_i)^2}{n^2} \mid \theta\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} E[\sum_i X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j \mid \theta]$$

$$= \frac{1}{n^2} E[\sum_i X_i^2 \mid \theta] + \frac{1}{n^2} E[\sum_{i \neq j} X_i X_j \mid \theta]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \sum_i E[X_i^2 | \theta] + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} E[X_i X_j | \theta] \\
&= \frac{1}{n} E[X_1^2 | \theta] + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i X_j | \theta) + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} E[X_i | \theta] E[X_j | \theta] \\
&= \frac{1}{n} E[X_1^2 | \theta] + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} (\mu(\theta))^2 \\
&= \frac{1}{n} E[X_1^2 | \theta] + \frac{n^2 - n}{n^2} (\mu(\theta))^2 \\
&= \frac{1}{n} (E[X_1^2 | \theta] - (E[X_1 | \theta])^2) + (\mu(\theta))^2 \\
&= \frac{1}{n} \sigma^2(X_1 | \theta) + (\mu(\theta))^2
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\bar{X}) &= E[E[\bar{X}^2 | \theta]] - (E[E[\bar{X} | \theta]])^2 \\
&= E \left[ \frac{1}{n} \sigma^2(X_1 | \theta) + (\mu(\theta))^2 \right] - (E[\mu(\theta)])^2 \\
&= \frac{E[\sigma^2(X_1 | \theta)]}{n} + \text{Var}(\mu(\theta)) \\
\text{Var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2 \quad (3)
\end{aligned}$$

En injectant (2) et (3) dans (1) on obtient :

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2} \\
&= \frac{\tau^2}{\frac{\tau^2(\sigma^2 + n)}{n}}
\end{aligned}$$

Et enfin

$$\beta = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

**CQFD2.**

**CQFD1.+ CQFD2.= CQFD.**

### Annexe 16 : « Démonstration de la formule explicite de la variance »

$$\begin{aligned}
\text{Var}[X_{j,t}] &= E[X_{j,t}^2] - (E[X_{j,t}])^2 = E[E[X_{j,t}^2 | \theta_j]] - (E[E[X_{j,t} | \theta_j]])^2 \\
&= E[E[X_{j,t}^2 | \theta_j]] - E[(E[X_{j,t} | \theta_j])^2] + E[(E[X_{j,t} | \theta_j])^2] - (E[E[X_{j,t} | \theta_j]])^2 \\
&= E[E[X_{j,t}^2 | \theta_j] - (E[X_{j,t} | \theta_j])^2] - E[(E[X_{j,t} | \theta_j])^2] + (E[E[X_{j,t} | \theta_j]])^2 \\
&= E[\text{Var}[X_{j,t} | \theta_j]] + \text{Var}[E[X_{j,t} | \theta_j]] \\
&= E \left[ \frac{\sigma^2(\theta_j)}{\delta_{j,t}} \right] + \text{Var}[\mu(\theta_j)] \\
&= \frac{\sigma^2}{\delta_{j,t}} + \mu^2
\end{aligned}$$

Et

$\mu^2$  représente l'hétérogénéité du portefeuille

$\frac{\sigma^2}{\delta_{j,t}}$  représente le risque interne au risque individuel

**CQFD.**

**Annexe 17 : «Démonstration convexité  $\text{Var}(\text{PC}^{\text{cred}})$  »**

$$\text{Var}(\text{PC}^{\text{cred}}) = \omega^2 \text{Var}(\text{PC}^{\text{expé}}) + (1 - \omega)^2 \text{Var}(\text{PC}^{\text{expo}})$$

Soit

$$f(x) = ax^2 + b(1 - x)^2 \text{ avec } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0$$

$x \rightarrow (1 - x)$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ ,

$x \rightarrow x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ ,

donc  $x \rightarrow (1 - x)^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ ,

et comme  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  et que la somme de deux convexes est convexe alors,

$x \rightarrow ax^2 + b(1 - x)^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**CQFD.**

## Table des tableaux

Tableau 1 : Types de contrats de réassurance .....	9
Tableau 2 : Analyse du coefficient de variation après un traité Quote-Part.....	11
Tableau 3 : Exemple de l'utilisation de la clause de reconstitution .....	15
Tableau 4 : Exemple de la clause d'indexation.....	16
Tableau 5 : Exemple de la clause de stabilisation .....	16
Tableau 6 : Exemple de la clause AAL .....	17
Tableau 7 : Facteurs d'influence de la prime pure .....	18
Tableau 8 : Exemple de calcul d'un <i>Burning Cost</i> .....	20
Tableau 9 : Construction de la courbe d'exposition.....	24
Tableau 10 : Critères impactant le processus de tarification en RCA .....	30
Tableau 11 : Nombre de polices incendie .....	37
Tableau 12 : Test du $\chi^2$ pour la sinistralité attritionnelle incendie.....	38
Tableau 13 : Exemple d'ELT .....	44
Tableau 14 : Résumé de la tarification du programme DAB .....	48
Tableau 15 : Reconstitution de l'historique du nombre de contrats RCA.....	50
Tableau 16 : Historique de la sinistralité attritionnelle RCA .....	51
Tableau 17 : Test du $\chi^2$ pour la sinistralité attritionnelle RCA.....	52
Tableau 18 : Résumé de la tarification du programme RCA .....	56
Tableau 19 : Panel d'options classiques .....	58
Tableau 20 : Coût de la réassurance DAB par option.....	59
Tableau 21 : Coût de la réassurance RCA par option .....	59
Tableau 22 : Résultat technique (RT) net de réassurance DAB par option .....	60
Tableau 23 : Résultat technique (RT) net de réassurance RCA par option .....	60
Tableau 24 : Besoin en capital (BC) net de réassurance DAB par option.....	62
Tableau 25 : Besoin en capital (BC) net de réassurance RCA par option .....	62
Tableau 26 : Présélection d'options classiques .....	64
Tableau 27 : Valeur économique de la réassurance DAB par option.....	64
Tableau 28 : Valeur économique de la réassurance RCA par option .....	64
Tableau 29 : Choix d'options classiques .....	66
Tableau 30 : Panel d'options hors QP .....	66
Tableau 31 : Résultats globaux nets de réassurance DAB hors QP .....	67
Tableau 32 : Choix de l'option de réassurance DAB hors QP .....	68
Tableau 33 : Résultats globaux de la réassurance RCA hors QP .....	68
Tableau 34 : Choix de l'option de réassurance RCA hors QP .....	69
Tableau 35 : Choix final-options classiques.....	72
Tableau 36 : Données initiales du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1.....	86
Tableau 37 : Calcul des $\delta_j$ du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1 .....	86
Tableau 38 : Calcul des $X_j$ du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1 .....	86
Tableau 39 : Estimation de $\sigma^2$ et de $\tau^2$ du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1 .....	86
Tableau 40 : Calcul des $\omega$ du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1 .....	87
Tableau 41 : Estimation de $\mu_0$ du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1.....	87
Tableau 42 : Calcul de $de S/Pjcred - hom$ du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1.....	87

Tableau 43 : Calcul de $de Pjcred - hom$ du modèle de Bühlmann-Straub sur S/P - RCA-XS1.....	87
Tableau 44 : Données initiales du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1.....	88
Tableau 45 : Assiettes initiales du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1.....	88
Tableau 46 : Calcul des $\delta_j$ du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1 .....	88
Tableau 47 : Calcul des $X_j$ du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1.....	88
Tableau 48 : Estimation de $\sigma^2$ et de $\tau^2$ du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1.....	89
Tableau 49 : Calcul des $\omega$ du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1 .....	89
Tableau 50 : Estimation de $\mu_0$ du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1.....	89
Tableau 51 : Calcul de $ROLjcred - hom$ du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1 .....	89
Tableau 52 : Calcul de $Pjcred - hom$ du modèle de Bühlmann-Straub sur ROL - RCA-XS1 .....	89
Tableau 53 : Données initiales du modèle « à Variance » .....	90
Tableau 54 : Calcul de $PCexpo$ .....	90
Tableau 55 : Calcul de $PCexpé$ .....	90
Tableau 56 : Calcul de $VarPCexpo$ .....	91
Tableau 57 : Calcul de $PCcred$ .....	91
Tableau 58 : Résultats globaux toutes méthodes et toutes branches .....	91
Tableau 59 : Bilan global des méthodes de crédibilité.....	92

## Table des figures

Figure 1 : Fonctionnement de la Quote-Part .....	11
Figure 2 : Fonctionnement de l'Excédent de Plein.....	12
Figure 3 : Fonctionnement de l'Excédent de Sinistres .....	13
Figure 4 : Fonctionnement de l'Excédent de perte annuelle.....	14
Figure 5 : Méthode de tarification sur expérience.....	19
Figure 6 : Méthode de tarification probabiliste .....	21
Figure 7 : Méthode de tarification par exposition .....	23
Figure 8 : Fonction de répartition d'un taux de destruction.....	24
Figure 9 : Approximation de la courbe d'exposition par une MBBEFD.....	25
Figure 10 : Récapitulatif des programmes de réassurance en place .....	31
Figure 11 : Distribution des données incendies comparée aux lois Normale, LogNormale et Gamma	37
Figure 12 : PP-Plots Incendie : Rouge = données, Gris = Normale, Noir = LogNormale et Jaune = Gamma .....	38
Figure 13 : QQ-Plots Incendie : Rouge = données, Gris = Normale, Noir = LogNormale et Jaune = Gamma .....	38
Figure 14 : Comparaison des distributions de fréquence : Rouge = Données, Gris = Lois (Poisson à gauche, Binomiale Négative à droite) .....	39
Figure 15 : QQ-Plots sinistralité « majeurs » incendie : Rouge = données, Gris = Pareto généralisée, Noir = LogNormale, Jaune = Gamma, Bleu = Weibull, Violet = Burr et Vert = Exponentielle .....	40
Figure 16 : PP-Plots sinistralité « majeurs » incendie : Rouge = données, Gris = LogNormale, Noir = Weibull et Jaune = Burr .....	41
Figure 17 : Mean-Excess Plots sinistralité "majeurs" incendie : Rouge=données, Gris = LogNormale, Noir = Weibull et Jaune= Burr .....	41
Figure 18 : Multiples représentations de la densité de la loi Beta selon différentes valeurs des paramètres .....	47
Figure 19 : Récapitulatif de la tarification du programme DAB .....	49
Figure 20 : Nombre de contrats RCA.....	50
Figure 21 : PP-Plots Sinistralité attritionnelle RCA : Rouge= Données, Gris=Normale, Noir=LogNormale et Jaune = Gamma.....	51
Figure 22 : QQ-Plots Sinistralité attritionnelle RCA : Rouge= Données, Gris=Normale, Noir=LogNormale et Jaune = Gamma .....	52
Figure 23 : Comparaison de la distribution de la loi Normale(Gris) avec la sinistralité attritionnelle RCA (Rouge).....	52
Figure 24 : Mean-Excess Plot de la sinistralité historique <<majeurs>> RCA (en rouge).....	53
Figure 25 : Mean-excess plot sinistralité "majeurs" RCA : Rouge = Données, Gris= Paréto Généralisée, Noir = Lognormale Tronquée, Bleu= Weibull Tronquée et Jaune = Gamma Tronquée.....	54
Figure 26 : QQ-Plots sinistralité "majeurs" RCA, Rouge = Données, Gris= Paréto Généralisée, Noir = Lognormale Tronquée, Bleu= Weibull Tronquée et Jaune = Gamma Tronquée.....	54
Figure 27 : Comparaison des distributions de fréquence de la sinistralité "majeurs" RCA : Rouge = Données, Gris = Poisson et Noir = Normale discrète .....	55
Figure 28 : Récapitulatif de la tarification du programme RCA.....	56
Figure 29 : Illustration du principe de la VaR .....	61

Figure 30 : Graphe RT-BC pour la réassurance DAB.....	63
Figure 31 : Graphe RT-BC pour la réassurance RCA .....	63
Figure 32 : Graphe RT-VE de la réassurance DAB.....	65
Figure 33 : Graphe RT-VE de la réassurance RCA.....	65
Figure 34 : Graphe RT-BC de la réassurance DAB hors QP .....	67
Figure 35 : Graphe RT-VE de la réassurance DAB hors QP .....	68
Figure 36 : Graphe RT-BC de la réassurance RCA hors QP .....	69
Figure 37 : Graphe RT-VE de la réassurance RCA hors QP .....	69
Figure 38 : Graphe RT-BC comparatif des options RCA classiques et hors QP choisies.....	70
Figure 39 : Graphe RT-VE comparatif des options DAB classiques et hors QP choisies.....	70
Figure 40 : Graphe RT-BC comparatif des options RCA classiques et hors QP choisies.....	71
Figure 41 : Graphe RT-VE comparatif des options RCA classiques et hors QP choisies.....	71
Figure 42 : Courbe MBBEFD pour la RCA .....	90

## Bibliographie

- Bernegger, S. [2004]. *The Swiss Re exposure curves and the MBBEFD distribution class*.
- Blondeau, J., & Partrat, C. [2003]. *La Réassurance : Approche technique*. Paris, France : ECONOMICA.
- Bonche, S. [2005]. *Credibility and Reinsurance*. (Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon, ISFA, Lyon, France).
- *Côte Annuelle des valeurs vénales immobilières*. Edition Callon 2013.
- De Tessières, A. [1999]. *Etude de la RC-Automobile : Courbe des Taux de Marché de Réassurance et Clause sur les Rentes Indemnitaires*. (Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme d'Actuaire, ISFA, Lyon, France).
- Gurenko, E., & Itigin, A. [2013]. *Reinsurance optimization tool under solvency II*. (World Bank- Policy Research Working Paper).
- Lang, Y. [2010]. *Evaluation des programmes de réassurance dans le référentiel Solvabilité II*. (Mémoire présenté devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon, ISFA, Lyon, France).
- Parodi, P., & Bonche, S. [2008]. *Uncertainty-Based Credibility and its Application to Excess-of-Loss Reinsurance*. (Casualty Actuarial Society).
- Patrik, G., & Mashitz, I., [2002]. *Credibility for treaty reinsurance excess pricing*.
- Poulin, M. [2012]. *Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie*. (Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuariales pour l'obtention du diplôme du Centre d'Etudes Actuarielle et l'admission à l'Institut des Actuaires, CEA, Paris, France).
- Reiz, O. [1997]. *Tarification des branches I.A.R.D. à développement long en réassurance en excédent de sinistre*. (Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme d'Actuaire, ISFA, Lyon, France).
- Saunier, J. [2005]. *Courbes d'exposition : Approximation par les distributions MBBEFD et Pareto via maximum de vraisemblance et intervalles de confiance. Analyse en fonction du capital assuré*.