

**Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 26 juin 2012

Par : NGOC AN DINH & GILLES CHAU

Titre: MESURES DE PROVISION COHERENTES ET METHODES LIGNE A LIGNE POUR
DES RISQUES NON-VIE

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires* signature

Entreprise :

Nom :

Signature :

Membres présents du jury de la filière

Directeur de mémoire en entreprise :

*Nom: Frédéric Planchet et Arthur
Charpentier*

Signature :

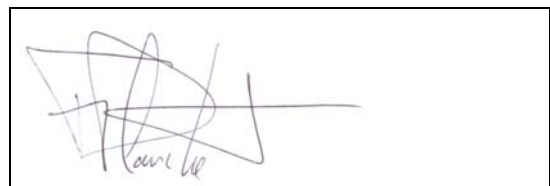
Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai
de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Secrétariat

Bibliothèque :

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET
DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

RAPPORT DU GROUPE DE TRAVAIL

**Mesures de Provision Cohérentes et
Méthodes Lignes à Lignes pour des
Risques Non-Vie**

Étudiants :

NGOC AN DINH¹

GILLES CHAU²

Encadrants :

FÉDÉRIC PLANCHET

ARTHUR CHARPENTIER

Correspondant :

ROMUALD ELIE

1. Ngoc.An.DINH@ensae-paristech.fr
ou ngoc-an.dinh@polytechnique.org

2. Gilles.CHAU@ensae-paristech.fr

22 juin 2012

Résumé

Le sujet de ce rapport est d'étudier le provisionnement pour des risques non-vie, en particulier les provisions pour sinistres à payer en se fondant sur les données individuelles des sinistres. Pour ce faire, nous proposons un cadre théorique standard dont les objets centraux sont des sinistres. Ces derniers sont caractérisés par trois éléments : une année d'origine, un processus de règlements et un processus d'états. De cette façon, le problème de provisionnement se résume au problème de modélisation des processus d'états et des processus de règlements. Pour les processus d'états, nous les ramenons à une notion équivalente : variables d'âge à horizon ultime dont la distribution est estimée par des méthodes de l'étude de survie avec censure en particulier, l'estimateur de Kaplan-Meier. Pour les processus de règlements, nous proposons deux approches : la première intitulée *dynamiques markoviennes* qui considère les processus de règlements comme des processus de Markov avec une certaine dynamique sous-jacente ; la deuxième dite *modèles linéaires généralisés* qui suppose que les règlements appartiennent à une famille de distribution paramétrique et les paramètres dépendent des facteurs liés aux règlements. Ces approches sont étudiées dans le cadre des mesures de provision cohérentes, une notion proposée pour contrôler la qualité des provisions.

Abstract

The subject of this report is to study claims reserving in non-life insurance, especially reserving for outstanding claims based on individual data. We propose a theoretical framework whose central objects are claims. They are characterized by three elements : an original year, a paying process and a states process. In this way, the reserving problem is reduced to the modeling of the states processes and of the paying processes. For the states processes, we transform them into an equivalent concept : age variables at final horizon whose distribution is estimated by the Kaplan-Meier estimator from survival analysis. For the paying processes, we propose two approaches : the first one entitled *Markov dynamics* considers the paying processes as Markov processes with a certain underlying dynamics, the second one called *generalized linear models* assumes that paying amounts are generated from a parametric distribution family whose parameters depend on factors related to the claims. These approaches are studied within the framework of coherent reserving measures, a concept proposed to control the quality of reserving estimators.

Note de synthèse

MOTS CLÉS : MÉTHODES LIGNE À LIGNE, PROVISION POUR SINISTRES À PAYER, CHAIN LADDER, MACK, MODÈLES LINÉAIRES GÉNÉRALISÉS, BOOTSTRAP, MESURES DE PROVISIONS COHÉRENTES, PROCESSUS D'ÉTAT, ESTIMATEUR KAPLAN-MEIER, PROCESSUS DE RÈGLEMENT, DYNAMIQUES MARKOVIANNES

Problématique et sujet

Depuis la crise des subprimes, le monde de l'assurance connaît un changement réglementaire considérable. En effet, les assureurs sont considérés comme les institutions financières qui peuvent avoir un impact économique dans le pays, voire dans le monde. Il est ainsi nécessaire de protéger certains protagonistes, et en particulier les assurés.

Le point faible du système d'assurance se trouve dans le fait que le cycle de production soit inversé, c'est-à-dire que l'assureur ne connaît son prix de revient qu'après avoir payé les sinistres. Les primes étant déjà encaissées, il est important pour lui d'avoir suffisamment de provisions pour pouvoir payer les sinistres futurs et donc rembourser ses dettes envers les assurés. Une première régulation, Solvabilité I, permet d'imposer les contours du marché de l'assurance, mais elle montre aussi ses faiblesses face à l'environnement financier peu stable. Dès lors, une nouvelle version, Solvabilité II, est en train de se mettre en place. Elle va permettre de corriger certains défauts tout en se fondant sur trois piliers : les exigences quantitatives, la gouvernance et le processus de contrôle et la transparence.

Notre étude sera axée sur le premier pilier, en particulier nous avons tenté de trouver une nouvelle méthode de provisionnement ligne à ligne. Nous nous sommes concentrés sur l'analyse de la provision pour sinistre à payer. Cette dernière correspond aux remboursements, envers les assurés, des sinistres qui sont déjà survenus mais pas encore ou du moins pas entièrement réglés. Elle représente en général la plus grande partie des provisions dans le bilan d'une compagnie d'assurance non-vie. Le règlement spécifie qu'elle doit être calculée sinistre

par sinistre. En général, l'assureur, par une dérogation, utilisent les méthodes statistiques. Nous utilisons ces modèles comme référence sur laquelle nous pouvons comparer les résultats de nos recherches. Intuitivement, en travaillant sur les méthodes ligne à ligne, nous pouvons espérer pouvoir estimer la provision d'une manière plus précise.

Méthodes proposées

La première partie du mémoire est consacré à la méthode de Chain Ladder avec plusieurs versions : la méthode de Chain Ladder déterministe, la méthode de Chain Ladder stochastique avec les processus de Mack et les modèles linéaires généralisés. Toutes ces méthodes serviront de références et pourront être comparés au modèle proposé. Ensuite, nous construirons un cadre théorique pour une étude de la provision avec les données lignes. Les notions de base comme le sinistre, les processus de règlements, les processus d'états, les mesures de provision et les mesures de provisions cohérente sont introduit dans le mémoire pour fixer un cadre à notre modèle.

Le cadre théorique étant établi, notre problématique se résume par la modélisation des processus d'états et des processus de règlements. Nous pouvons regarder les processus d'états comme des variables d'âge à horizon ultime. Ces variables sont plus facile à manipuler et surtout elles nous amènent à une situation classique : l'estimation de la durée de vie d'un individu représentatif dans une population homogène avec censure. L'estimateur non-paramétrique de Kaplan-Meier est enfin utilisé pour estimer la distribution de ces variables. En ce qui concerne les processus de règlements, nous avons introduit deux approches : les dynamiques markoviennes et les modèles linéaires généralisés.

Dans la première approche, nous considérons que les processus de règlements comme des processus markoviens dirigés par une dynamique sous-jacente. Cette modélisation permet de connaître la loi des règlements futurs conditionnellement à l'information disponible. La distribution des provisions est ensuite déduite grâce au théorème central limite avec la condition de Lyapunov. Nous montrons qu'avec un formalisme très flexible du modèle, nous pouvons effectuer les extensions pour prendre en compte d'autres facteurs où les modifier pour s'adapter aux données. Dans la deuxième approche, nous employons les modèles linéaires généralisés pour modéliser des règlements. Nous montrons qu'avec des distributions et des fonctions de lien bien choisies, nous pouvons assurer que les provisions obtenues vérifient les propriétés des mesures de provisions cohérentes. Enfin, pour terminer nous comparons ensuite les deux approches et discutons la question du choix de méthode. Nous allons dès à présent détailler chaque point dans la section suivante.

Travaux

Méthode Chain Ladder

Dans un premier temps, nous présenterons très rapidement les méthodes de base puisqu'elles sont très utilisées. L'objectif étant d'avoir une référence à nos méthodes par la suite.

Le modèle Chain Ladder est le plus utilisé en pratique, car il est simple à mettre en œuvre. Sa version déterministe est basée sur les triangles de règlements cumulés. Ces derniers sont obtenus en agrégeant les données individuelles des sinistres. Ce modèle suppose avant tout qu'il existe une cadence entre les paiements cumulés de deux années de développement. Ainsi, il suffit de trouver d'estimer les facteurs de développement pour compléter tout le tableau. Un estimateur naturel sera calculé par le ratio des sommes des montants payés entre deux années de développement. Malgré la simplicité de ce modèle, les provisions estimées sont ponctuelles et les erreurs ne peuvent pas être quantifiées. En revanche, la méthode de Mack corrige ces défauts. De plus, si les hypothèses du modèle est vérifiées, nous pouvons prouver que les estimateurs des facteurs de développement possèdent certains caractéristiques : sans biais, coïncide avec ceux de la méthode Chain Ladder et qu'il est possible de connaître l'erreur de prédiction.

Bien que la méthode de Mack propose une façon de quantifier l'erreur de prédiction, elle ne fournit pas une distribution des provisions, qui est le but ultime d'une méthode de provision surtout sous le cadre de Solvabilité 2. Les modèles linéaires permettent de faire cela en supposant explicitement la distribution paramétrique des règlements. Les paramètres sont estimés à partir les observations disponibles qui sert ensuite à estimer les règlements inconnus. Nous avons choisi la famille de distribution de Poisson surdispersée, car elle a deux caractéristiques intéressantes : une relation linéaire entre l'espérance et la variance, et elle est invariante par l'additivité. Ainsi, l'estimation des paramètres est facile à mettre en place et elle se fait par la méthode de Newton-Raphson. La qualité de l'ajustement est vérifiée en utilisant les résidus de Pearson et en traçant un quantile-quantile plot. Cette méthode permet de déterminer l'allure de la distribution de provision. Néanmoins, elle ne peut pas appréhender les risques extrêmes sous le cadre de Solvabilité 2.

Nous présentons dès à présent notre modèle en commençant par poser un cadre pour celui-ci.

Mesures de provision cohérentes

Avant de discuter la construction des méthodes, nous proposons de fixer certains critères que les provisions doivent satisfaire. Nous distinguons ici deux types de provisions : la provision à horizon 1 an représente celle qui est constituée pour l'année prochaine et elle est étudiée surtout sous le cadre de solvabilité 2 ; enfin la provision ultime correspond à la celle jusqu'à ce que le sinistre soit clos. L'objectif final est de nous rapprocher ces provisions par les familles de distributions habituelles. Cette opération doit être faite avec précaution car elle risque de faire perdre les propriétés intrinsèques des provisions. Pour éviter cela, nous choisissons les propriétés les plus importantes des provisions pour ensuite les conserver dans leurs mesures de provision : la positivité, l'additivité et l'invariance par changement numéraire. Ces caractéristiques sont très intuitives et pourtant la méthode de Mack ne vérifie pas la dernière propriété. Les mesures de provisions vérifiant ces propriétés sont qualifiées des mesures de provision cohérentes.

Le cadre étant posé, nous pouvons décrire notre modèle. Comme nous l'avons évoqué au début, la problématique est scindée en deux analyses : celle du processus d'état et celle du processus de règlement

Processus d'états

Les processus d'états constituent la composante stochastique dans la structure des sinistres. L'estimation des processus d'états est la première étape dans l'établissement des mesures de provision. Une façon commode pour le faire est de considérer les variables d'âge à l'horizon ultime, qui contiennent toutes les informations sur les processus d'états correspondants, au lieu d'étudier directement ces derniers. Cette transformation nous amène à un contexte classique : l'estimation de la durée de vie d'une population avec censure. Ainsi, l'ensemble des sinistres correspondra à la population ; le fil des années de développement représente le fil du temps ; la clôture d'un sinistre substituera au décès d'un individu ; et l'indisponibilité d'information des sinistres en cours correspondra la perte de vue des individus. Il convient de remarquer que cette comparaison est valide que si les durées de vie des sinistres sont indépendantes et identiquement distribuées. En effet, cette hypothèse permet de considérer les sinistres comme une population homogène et de transposer le fil des années de développement à la dimension temporelle habituelle. Ceci nous permet d'utiliser l'estimateur de Kaplan-Meier pour mesurer la fonction de survie qui aboutira à la distribution des variables d'âge. Par conséquent, nous pouvons connaître la population restante à chaque année, le nombre de sinistres clos, la fonction de survie, la probabilité que le sinistre soit clos etc.

Nous allons maintenant nous intéresser au processus de règlements qui sont

étudiés par deux approches : les dynamiques markoviennes et les modèles linéaires généralisés.

Processus de règlements : dynamiques markoviennes

Dans cette approche, les processus de règlements sont considérés comme des processus markoviens qui possèdent une dynamique lognormale. Nous avons supposé d'une certaine manière qu'il y a une certaine tendance entre les règlements de deux années de développement consécutives et une variation autour de cette tendance. L'idée de Mack était très similaire. La différence fondamentale réside dans le fait que nous utilisons une loi normale. D'autre part, sous ces hypothèses, nous pouvons, conditionnellement à l'information disponible à l'année actuelle, déterminer la loi des règlements. En fait, l'idée est très proche de la méthode Chain Ladder. La valeur espérée d'un règlement futur conditionnellement à l'information disponible est exprimée comme le produit du dernier règlement connu et un certain facteur dont le dynamisme suit la loi normale. Les paramètres de ce coefficient de passage sont estimés comme dans un cas gaussien. Ils sont sans biais, indépendants et ne dépendent pas de l'unité monétaire. Par conséquent, il est facile de déduire les mesures de provisions à horizon 1 an et à l'ultime en revenant à la définition de ces deux quantités. Nous montrons que ces mesures de provisions sont cohérentes et cela est dû à une dynamique bien formulée.

Regardons maintenant la deuxième approche.

Processus de règlements : modèles linéaires généralisés

Un ensemble de sinistres est essentiellement de même structure qu'un triangle de règlements avec une équivalence entre les règlements d'un sinistre et une ligne de règlements. Les notions de l'année d'origine ou des années de déroulement sont utilisées et portent autant d'importance dans la méthode Chain Ladder avec le triangle de règlement que dans la méthode ligne à ligne avec les données individuelles. Il est donc naturel de transposer l'idée de la méthode des modèles linéaires généralisés sur le triangle à notre ensemble de sinistre. En effet, Les règlements sont supposés indépendants et de la même famille de distribution mais avec de différents paramètres. Ces derniers sont estimés pas la méthode de maximum de vraisemblance. Après avoir obtenu l'estimation de distribution des règlements, nous construisons les mesures de provision dans le cadre des mesures de provision cohérentes.

Résultats

D'une part notre rapport contribue à la littérature sur les méthodes ligne à ligne en assurance non-vie en proposant un cadre théorique standard et flexible qui pourrait avoir des extensions pour adapter à la situation étudiée. La notion des mesures de provision cohérente, qui est dans le même esprit que les mesures de risque cohérentes, permet une orientation des méthodes pour pouvoir aboutir à des mesures de provision avec de bonnes propriétés.

D'autre part, avec une base de données utilisée pour tester les méthodes tout au long de notre rapport, nous montrons que nos méthodes produisent les résultats similaires avec ceux par Chain Ladder au niveau d'espérance de la provision. Au niveau de variance, nos méthodes sont meilleures. La distribution des provisions obtenues par nos méthodes sur les données individuelles abondantes sont justifiées contrairement à Chain Ladder où le nombre insuffisant de données met toujours un doute sur la distribution obtenue.

Summary

KEY WORDS : LINE BY LINE METHOD, OUTSTANDING CLAIMS RESERVING, CHAIN LADDER, MACK, GENERALIZED LINEAR MODELS, BOOTSTRAP, COHERENT RESERVE MEASURES, STATE PROCESS, KAPLAN-MEIER ESTIMATOR, PAYING PROCESS, MARKOV DYNAMICS

Context and subject

Since the subprime crisis, the insurance sector is experiencing a profound regulatory change. Indeed, insurers are nowadays considered financial institutions that may have an significant economic impact at national and global level. It is thus necessary to protect certain actors such as policyholders.

One of the weak points of insurance system resides in its inverted production cycle, i. e., the insurer does not know its cost while selling his product. Premiums already being collected, it is important for him to have enough reserves to be able to pay future claims and thus repay its debts to policyholders. The first regulation, Solvency I, allows the imposition of the contours of the insurance market, but it also shows weaknesses facing unstable financial environment. Therefore, a new version, Solvency II, is being set up. It will correct some defects of its predecessor will be basically based on three pillars : quantitative requirements, governance/-risk management and disclosure/transparency.

Our study will focus on the first pillar, in particular we try to find a new reserving line by line method. We focus on the analysis of reserving for outstanding claims. The latter corresponds to redemption, to policyholders, claims that are incurred but not yet at least not fully settled. It generally represents the largest portion of reserves in the balance sheet of a non-life insurance company. The regulation specifies that it must be determined claim by claim. In general, the insurer uses statistical methods to estimate it. We use these models as a reference on which we can compare our findings. Intuitively, with more data, working on line by line methods, we can expect to estimate the reserves with more precision.

Proposed Methods

The first part of the thesis is devoted to the Chain Ladder method with several versions : the Chain Ladder deterministic method, the stochastic Chain Ladder methods with Mack processes and generalized linear models. All these methods serve as references and can be compared to the our models proposed. Then we construct a theoretical framework for a study with individual data. Basic notions such as claims, paying processes, state process, reserve measures are introduced.

Once the theoretical framework is established, our problem is reduced to the modeling of state processes and paying processes. The state processes can be transformed to an equivalent concept : age variables at final horizon. These variables are easier to handle and above all they lead us to a classic situation : estimating the lifetime of a representative individual in a homogeneous censored population. The nonparametric estimator of Kaplan-Meier is used to estimate the distribution of these variables. Regarding the paying processes, we introduce two approaches : markov dynamics and generalized linear models.

In the first approach, we consider the paying processes as Markov processes with certain underlying dynamics. This modeling allows us to know the law of future claim amounts conditionally to the available information. The distribution of reserves is then deducted by the central limit theorem with the Lyapunov condition. We show that with a very flexible model, we can make extensions in order to take into account other factors or we can modify it to fit the data. In the second approach, we use generalized linear models to model claim amounts. We show that with distribution family and link functions well chosen, we can ensure that the reserves obtained will satisfy the properties of coherent reserve measures. To conclude, we then compare the two approaches and discuss the issue of choice of method. We will now detail each point in the next section.

Works

Chain Ladder Method

Chain Ladder model is the most used method in practice because it is simple to carry out. Its deterministic version is based on triangles of cumulative claim amounts. These are obtained by aggregating the individual data. This model assumes that there is a rate between the combined payments of two years of development. Thus, it is sufficient to estimate the development factors to complete the whole picture. A natural estimator is calculated by the ratio between the amounts paid by two consecutive development years. Despite its simplicity, this model can

not quantify the error of its estimation. The method of Mack corrects these shortcomings. Moreover, if the assumptions of the model are verified, we can prove that the estimators of development factors have some nice properties : they are unbiased and coincide with those produced by Chain Ladder method and it is possible to estimate the prediction error.

Although the method of Mack suggests a way to quantify the prediction error, it does not provide a distribution of reserves, which is the ultimate goal of a reserving method especially in the context of Solvency 2. Generalized linear models can do this by explicitly assuming the parametric distribution on the claim amounts. The parameters are estimated from available observations, which are then used to estimate the unknown claim amounts. We chose the overdispersed Poisson family distribution because it has two interesting features : a linear relationship between the mean and variance, and it is invariant under addition. Thus, parameters estimation is easy to implement and it is done by the Newton-Raphson algorithm. The goodness of fit is checked using the Pearson residuals and by plotting a quantile-quantile plot. This method help determine the shape of the reserves distribution. Nevertheless, it cannot study the extreme risks in the context of Solvency 2.

Coherent reserves measures

Before building new methods, we propose to set certain criteria that must meet the reserves. Here we distinguish two types of reserve : one year horizon reserve is one that is made for next year, discussed mainly in the context of Solvency 2 and the ultimate reserve which corresponds to the reserve until the claim is closed. The ultimate goal is to approach these reserves by usual family distributions. This must be done carefully as it risks losing the intrinsic properties of reserves. To avoid this, we choose the most important properties of reserves and then keep them in their reserve measures : positivity, additivity and numeraire invariance. Though these features are very intuitive, we prove that the Mack method does not verify the last property. Reserve measures that verify these properties are called coherent reserve measures.

The framework being well established, we can describe our model. As we mentioned at the beginning, the problem is split into two analyzes : the state processes and the paying processes.

States processes

The states processes are belong to the stochastic component in the structure of claims. The estimation of state processes is the first step into the establishing

reserve measures. A convenient way to do this is to consider the age variables ultimate horizon, which contain all the information of the corresponding state processes. This transformation leads us to a well known situation : estimating the lifetime of a population with censorship. Thus, our set of claims corresponds to the population, development years to the normal time line, the closing of a claim to the death of an individual, and the unavailability of information on outstanding claims to loss of view of individuals. It should be noted that this comparison is valid only if the lifetimes of the claims are independent and identically distributed. Indeed, this hypothesis allows us to consider our set of claims as a homogeneous population and consider the development years as a usual time line. This allows us to use the Kaplan-Meier estimator to estimate the survival function that will result in the distribution of age variables. Therefore, we can know the remaining population each year, the number of closed claims, the survival function, the probability that a claim is closed etc...

We will now discuss paying processes that are studied in two approaches : Markov dynamics and generalized linear models.

Paying Processes : Markov dynamics

In this approach, the paying processes are considered as Markov processes that have a lognormal dynamics. We assume somehow that there is a tendency between the payment amount of two consecutive development years and a variation around this trend. The idea of Mack was very similar. The fundamental difference lies in the fact that we use a normal distribution. Moreover, under these assumptions, we can, conditional on information available to the current year, determine the future payment amounts distribution. In fact, the idea is very close to the Chain Ladder method. The expected value of a future payment conditional on the available information is expressed as the product of the last known payment and a product of equivalent development factors. The parameters are then estimated as in a gaussian case. They are unbiased, independent and do not depend on the currency. Therefore, it is easy to deduce reserve measures at one year horizon and at ultimate horizon. We show that these reserve measures are coherent and this is due to a well formulated dynamics.

Now let take a look at the second approach.

Paying Processes : generalized linear models

A set of claims is essentially of the same structure as a triangle with an equivalence between a claim and a payment line. The concepts of the original year or development years as important in the Chain Ladder method as in our line by line

methods with individual data. It is therefore natural to translate the idea of the method of generalized linear models on the triangle to our method. Indeed, payment amounts are assumed to be independent and of the same distribution family with different parameters. These parameters are estimated by the maximum of likelihood method. After obtaining the estimated distribution of payment amount, we build reserve measures which are coherent.

Results

On the one hand, our report contributes to the literature on line by line methods in non-life insurance by proposing a flexible theoretical framework which can easily to be extended or modified to fit data. The notion of coherent reserve measures, which is in the same spirit as coherent risk measures, provides guidance for methods to result in reserve measures of good properties.

On the other hand, with a database used to test methods throughout our report, we show that our methods produce similar expected reserves to those by Chain Ladder. As for variance, our methods are better. Furthermore, our methods can provide justified reserve distributions which are not the case with Chain Ladder method because of the lack of data.

Remerciements

Nous tenons particulièrement à remercier nos deux tuteurs, M. Frédéric Planchet et M. Arthur Charpentier, d'avoir accepté d'encadrer notre groupe de travail, de leurs conseils et de leurs disponibilités.

Nos pensées vont aussi à l'équipe enseignante de l'ENSAE, en particulier celle de la voie actuariat et son responsable, M. Donatien Hainaut que nous remercions de nous avoir donné les cours essentiels pour l'aboutissement de ce mémoire et pour la suite de notre carrière.

Nous remercions également à l'ensemble des personnes qui se sont occupées des démarches administratives : M. Eric Gautier, pour l'organisation des groupes de travail, M. Xavier Milhaud, pour ces précieux rappels administratifs afin que l'on puisse obtenir le titre d'actuaire, et M. Romuald Elie qui a bien voulu d'être notre correspondant.

Enfin, nous tenons à remercier nos familles et nos proches qui nous ont tant soutenus durant ces années d'études.

Introduction

Le contexte

Une opération assurance est une opération synallagmatique par laquelle une partie, l'assuré, se fait promettre, moyennant une prime, pour lui ou pour un tiers, en cas de réalisation d'un risque, une prestation par une autre partie, l'assureur qui, prenant en charge un ensemble de risques, les compense conformément aux lois de la statistique. Cette définition implique que par nature, le cycle de production de l'assurance est inversé, c'est-à-dire que l'assureur perçoit le prix de son produit d'assurance avant de connaître son coût de production. Cette caractéristique est illustrée par son bilan (simplifié) où une grande partie son passif est composée des dettes probables (provisions techniques) envers ses assurés estimées souvent par des méthodes statistiques.

| ACTIF | PASSIF |
|------------|-----------------------|
| Placements | Fonds Propres |
| | Provisions Techniques |

Tableau 1 – Bilan simplifié d'une compagnie d'assurance

En raison de sa particularité et de sa position extrêmement importante dans l'économie, l'assurance est soumise à une réglementation supervisée par des autorités de contrôle. Les assureurs doivent détenir suffisamment de capital pour faire face à leurs engagements envers les assurés.

Une première réglementation en Europe a été mise en place : Solvabilité 1. Elle s'organise autour des provisions techniques et des exigences en fonds propres, mais elle présente quelques faiblesses à savoir que le régime n'est pas harmonisé au niveau européen ; que les calculs de solvabilité ne reflètent pas les risques supportés par l'assureur ; et enfin que les exigences sont principalement quantitatives. Depuis la crise des *subprimes* et à cause du fait que l'assureur est considéré comme une institution financière, la Commission européenne a souhaité mettre

en place une nouvelle réglementation, Solvency 2. L'objectif est de corriger les défauts de la précédente. L'aspect quantitatif le plus important de Solvabilité 2 est que les assureurs doivent détenir suffisamment de capital pour que la probabilité de ruine à horizon 1 an soit inférieure à 0,5%.

Notre sujet

En nous plaçant dans le contexte décrit précédemment, nous nous concentrons au cas de l'assurance non-vie en étudiant en particulier les provisions pour sinistres à payer (PSAP). Ces provisions correspondent aux remboursements envers les assurés pour les sinistres qui sont déjà survenus mais pas encore ou pas encore entièrement réglés. Elles représentent en général la plus grande partie des provisions dans le bilan d'une société d'assurance non-vie. Selon le Code des Assurances, l'article R 331-15 spécifie que :

La provision pour sinistres à payer est calculée exercice par exercice. Sans préjudice de l'application des règles spécifiques à certaines branches prévues à la présente section, l'évaluation des sinistres connus est effectuée dossier par dossier, le coût d'un dossier comprenant toutes les charges externes individualisables ; elle est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés.

La provision pour sinistres à payer doit toujours être calculée pour son montant brut, sans tenir compte des recours à exercer ; les recours à recevoir font l'objet d'une évaluation distincte.

Par dérogation aux dispositions du deuxième alinéa du présent article, l'entreprise peut, avec l'accord de l'Autorité de contrôle des assurances et des mutuelles, utiliser des méthodes statistiques pour l'estimation des sinistres survenus au cours des deux derniers exercices.

Les méthodes les plus traditionnelles et les plus souvent utilisées en pratique sont les méthodes basées sur le triangle de liquidation, un triangle qui agrège les paiements individuels des sinistres avec un axe représentant l'année de l'origine de sinistres, et un autre axe l'année de déroulement de paiements. Cette forme de représentation a pour avantage d'être très simple, parlante et concise. Néanmoins, ses points faibles sont multiples : elle ne présente pas toutes les informations disponibles, elle contient un nombre d'observations souvent insuffisant pour que les méthodes statistiques puissent fonctionner avec une grande précision telle que celle exigée sous Solvabilité 2.

Notre sujet consiste à revenir aux données individuelles des sinistres et à construire des méthodes statistiques sur ces données détaillées. Intuitivement,

avec plus d'information, nous pouvons espérer avoir des estimations plus précises. Par ailleurs, les données lignes présentent plusieurs avantages tels que nous pouvons sélectionner les bonnes et les mauvaises données, nous pouvons trier les données selon type de sinistres car de différents types ont des schémas de règlement différents.

Démarches et résultats

Résumons d'abord la problématique : nous disposons d'une base de données détaillées composée de plusieurs sinistres. Pour chaque sinistre, nous connaissons son année de survenance, son état (en cours ou clos) et son historique de règlement. Notre but, c'est de construire des mesures de provision à partir de ces informations disponibles en particulier, des mesures de provision à horizon ultime et des mesures de provision à horizon 1 an, une notion importante sous le cadre de Solvabilité 2. Précisons qu'une mesure de provision associe à chaque ensemble de sinistres une variable aléatoire qui donne un montant de provision à chaque état du monde et nous voulons évidemment estimer la distribution de cette variable aléatoire. Une fois cette estimation est faite, nous pouvons déduire les grandeurs intéressantes telles que les provisions espérées ou le capital requis qui est le quantile de 99,5% de la provision à horizon 1 an.

Pour aborder cette problématique, nous commençons en revisitant la méthode classique de Chain Ladder à la fois dans les versions déterministe et stochastique. Dans le cadre stochastique, nous choisissons d'étudier la méthode de Mack et les modèles linéaires généralisés car les idées dans ces deux approches vont être transposées dans notre étude avec les données individuelles.

Nous entrons ensuite dans le cœur de l'étude par l'établissement d'un cadre mathématique théorique. Nous définissons formellement les sinistres comme les objets caractérisés par trois éléments : une année d'origine, un processus de règlements et un processus d'états. À partir de ces notions de base, nous définissons formellement les mesures de provisions et surtout des mesures de provision cohérentes, une notion qui signifie que des mesures de provisions construites vérifient de bonnes propriétés préalablement choisies.

Avec le cadre théorique établi, notre problématique se résume par la modélisation des processus d'états et des processus de règlements. Pour des processus d'états, nous montrons qu'ils sont équivalents à des variables d'âge à horizon ultime (ou ultime simplement). Ces variables sont plus facile à manipuler et surtout elles nous amènent à une situation classique : estimation de la durée de vie d'un individu représentatif dans une population homogène avec censure. L'estimateur non-paramétrique de Kaplan-Meier est enfin utilisé pour estimer la distribution de

ces variables.

Pour modéliser les processus de règlements, nous proposons deux approches : les dynamiques markoviennes et les modèles linéaires généralisés. Dans la première approche, nous considérons les processus de règlements comme des processus markoviens dirigés par une dynamique sous-jacente. Cette modélisation permet de connaître la loi des règlements futurs conditionnellement à l'information disponible. La distribution des provisions est ensuite déduite grâce au théorème central limite avec la condition de Lyapunov. Nous montrons qu'avec un formalisme très flexible du modèle, nous pouvons effectuer les extensions pour prendre en compte d'autres facteurs ou la modifier pour adapter aux données.

Dans la deuxième approche, nous employons les modèles linéaires généralisés pour modéliser des règlements. Ces derniers sont supposés appartenir à une famille de distribution paramétrique et les paramètres dépendent des facteurs des règlements. Nous montrons qu'avec des distributions et des fonctions de lien bien choisies, nous pouvons assurer que les provisions obtenues vérifient les propriétés des mesures de provisions cohérentes. Nous comparons ensuite les deux approches et discutons la question du choix de méthode.

Tout au long de ce rapport, une base de données est utilisée pour illustrer et tester les méthodes. Cette base de données et la programmation en R du rapport sont accessibles sur le site <http://www.ressources-actuarielles.net/>.

Plan du rapport

Le Chapitre 1 sera consacré à la méthode de Chain Ladder avec plusieurs versions : la méthode de Chain Ladder déterministe, la méthode de Chain Ladder stochastique avec les processus de Mack et les modèles linéaires généralisés. Dans le Chapitre 2, nous construisons un cadre théorique pour une étude de la provision avec les données individuelles. Nous présentons les notions de base : sinistre, processus de règlements, processus d'états, mesures de provision et la notion de mesures de provisions cohérente. Dans le Chapitre 3, nous étudions les processus d'états. Pour étudier les processus de règlements, le chapitre 4 présente l'approche dynamique markovienne et le Chapitre 5 l'approche modèles linéaires généralisés. Nous terminons ce rapport par la conclusion.

Présentation des données

Les données de l'étude sont issues d'une compagnie d'assurance et sont organisées de la manière suivante :

| No. | Règlement | | | | | | | État | Origine |
|-----|-----------|------|------|------|------|-----|----|------|---------|
| 1 | 321 | 1077 | 1887 | 2921 | 3817 | ... | NA | 0 | 1988 |
| 2 | 150 | 249 | 369 | 1057 | 1479 | ... | NA | 0 | 1988 |
| 3 | 108 | 216 | 453 | 579 | 875 | ... | NA | 0 | 1988 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 836 | 159 | NA | NA | NA | NA | ... | NA | 1 | 2008 |

Tableau 2 – Base de données lignes

Nous avons donc un ensemble de 836 sinistres indexé de 1 à 836. Chaque ligne de ce tableau contient l'information concernant le sinistre correspondant : les règlements au cours des années, l'état (0 pour *clos*, 1 pour *en cours*) et l'année de survenance. La devise de ces données est € et leur unité est centaine € pour alléger les chiffres. Ce changement de devise a l'air innocent mais en réalité, il s'agit d'un point délicat dont nous discuterons plus en détail. Précisons que NA signifie l'absence ou la non connaissance de l'information sur le règlement associé, soit parce que le sinistre est clos, soit parce que le sinistre est en cours et que nous ne connaissons pas encore les montants de règlement futurs. Un point important à noter est que même si nous savons que l'inflation joue un rôle important sur les montants de règlements, nous l'écartons de l'étude pour simplifier les calculs et pour nous concentrer sur les points plus essentiels.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Méthode Chain Ladder | 20 |
| 1.1 | Triangles des règlements | 20 |
| 1.2 | Chain Ladder Déterministe | 21 |
| 1.3 | Méthode de Mack | 23 |
| 1.3.1 | Formalisme de Mack | 23 |
| 1.3.2 | Erreur de prédiction | 25 |
| 1.4 | Modèles linéaires généralisés (GLM) | 26 |
| 1.5 | GLM avec une loi de Poisson surdispersée | 26 |
| 1.5.1 | Le modèle de la loi de Poisson surdispersée | 26 |
| 1.5.2 | Estimation des paramètres | 27 |
| 1.5.3 | Qualité de l'ajustement | 29 |
| 1.5.4 | Tableau complet de sinistralité | 30 |
| 1.5.5 | Distributions estimées | 31 |
| 1.5.6 | Bootstrapping | 31 |
| 1.6 | Conclusions | 33 |
| 1.6.1 | Remarques sur Chain Ladder | 33 |
| 1.6.2 | Solvabilité 2 - Retour aux données individuelles | 34 |
| 1.6.3 | Apprendre de Chain Ladder | 34 |
| 2 | Mesures de provision cohérentes | 35 |
| 2.1 | Notions de base | 35 |
| 2.2 | Le formalisme | 38 |
| 2.3 | Mesures de provision cohérentes | 41 |
| 2.4 | Construction des mesures de provisions | 43 |
| 2.5 | Conclusion | 45 |
| 3 | Processus d'États | 46 |
| 3.1 | Variables d'âge ultime | 46 |
| 3.2 | Estimation | 47 |
| 3.3 | Conclusion | 51 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Processus de règlements - Dynamiques Markoviennes | 52 |
| 4.1 | Formalisme | 52 |
| 4.2 | Estimation des paramètres | 54 |
| 4.2.1 | Estimation | 54 |
| 4.2.2 | Qualité d'ajustement | 56 |
| 4.2.3 | Estimation des Règlements | 57 |
| 4.3 | Mesures de provision | 58 |
| 4.3.1 | Mesure de provision à horizon 1 an | 58 |
| 4.3.2 | Mesure de provision à horizon ultime | 61 |
| 4.4 | Extension du modèle | 64 |
| 4.4.1 | Risque de taux | 64 |
| 4.4.2 | Dynamiques markoviennes | 65 |
| 4.5 | Conclusion | 65 |
| 5 | Processus de Règlements - Modèles Linéaires Généralisés | 67 |
| 5.1 | Le modèle | 67 |
| 5.2 | Estimation | 68 |
| 5.2.1 | Estimation des paramètres | 68 |
| 5.2.2 | Estimation des règlements | 69 |
| 5.3 | Mesures de provision | 70 |
| 5.4 | Conclusion | 71 |

Chapitre 1

Méthode Chain Ladder

Dans ce chapitre, nous revisitons une méthode qui est devenue une technique standard pour les actuaires afin de calculer les provisions pour sinistres à payer : Chain Ladder. Cette méthode qui se base sur un triangle des règlements (cumulés ou non) a été développée d'abord dans un cadre déterministe et ensuite dans un cadre probabiliste pour appréhender l'incertitude liée à la prédiction. Nous allons en suivre l'histoire en rappelant l'approche déterministe et deux approches stochastiques : la méthode de Mack et les modèles linéaires généralisés qui sont l'inspiration de notre étude avec les données individuelles. Un modèle linéaire généralisé avec la loi de Poisson surdispersée sera étudié en détail. Nous discutons enfin les défauts de Chain Ladder notamment sous le cadre de Solvabilité 2.

1.1 Triangles des règlements

La méthode Chain Ladder est basée sur les triangles des règlements cumulés ou non cumulés. Pour obtenir, par exemple, un triangle des règlements non cumulés à partir des données lignes du Tableau 1, il suffit de sommer des règlements des sinistres par année d'origine et d'organiser les sommes obtenues en ordre :

| i, j | 1 | 2 | 3 | ... | 20 | 21 |
|--------|------|-------|-------|-----|------|-----|
| 1 | 5597 | 10378 | 17491 | ... | 1573 | 113 |
| 2 | 3641 | 6726 | 10881 | ... | 405 | |
| 3 | 3475 | 5738 | 8478 | ... | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | |
| 20 | 4436 | 8342 | | | | |
| 21 | 4209 | | | | | |

Tableau 1.1 – Triangle des règlements non cumulés

Les nombres $1, 2, 3, \dots, n$ avec $n = 21$ en verticale correspondent aux années d'origine des paiements et ceux en horizontale leurs années de déroulement (ou de développement). Dans notre étude, nous avons choisi l'année d'origine d'un sinistre comme son année de survenance et nous l'avons aussi normalisée. L'année de survenance la plus ancienne 1998 correspond à l'année d'origine 1 et la plus récente 2008 à l'année d'origine $n = 21$. Nous nous plaçons à l'année n appelée l'année actuelle. Le montant $Y_{i,j}$ en cellule (i, j) où $0 \leq i, j \leq n$ correspond au montant de règlement de l'année d'origine i et de l'année de déroulement j . Le triangle contient au total $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2 = 231$ chiffres.

Le triangle des règlements cumulés, quant à lui, est un tableau de la même taille que le Tableau 1.1 avec les cellules (i, j) contenant les montants $C_{i,j}$ qui sont les règlements de l'année d'origine i cumulés jusqu'à l'année de développement j . Mathématiquement, $C_{i,j} = \sum_{j'=1}^j Y_{i,j'}$. À partir du Tableau 1.1, nous obtenons le triangle des règlements non cumulé suivant :

| i, j | 1 | 2 | 3 | ... | 20 | 21 |
|--------|------|-------|-------|-----|--------|--------|
| 1 | 5597 | 15975 | 33466 | ... | 550036 | 550149 |
| 2 | 3641 | 10367 | 21248 | ... | 293823 | |
| 3 | 3475 | 9213 | 17691 | ... | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | |
| 20 | 4436 | 12778 | | | | |
| 21 | 4209 | | | | | |

Tableau 1.2 – Triangle des règlements cumulés

Nous pouvons constater que la construction des triangles de règlements fait perdre beaucoup d'information sur les règlements des sinistres et l'état des sinistres est complètement oublié.

1.2 Chain Ladder Déterministe

La méthode Chain Ladder déterministe s'applique aux triangles des règlements cumulés et est fondée sur l'hypothèse qu'il y a une récurrence dans les paiements par années de déroulement. Concrètement,

Hypothèse 1. Pour $1 \leq i, j \leq n$, soient $(C_{i,j})_{i,j}$ les règlements cumulés. Il existe des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que : $C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j}$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n - 1$ et $i = 1, 2, \dots, n$.

Précisons que dans le cadre déterministe, les règlements cumulés $(C_{i,j})_{i,j}$ sont considérés comme des valeurs déterministes. Parmi les $(C_{i,j})_{i,j}$ avec $1 \leq i, j \leq n$,

à l'année actuelle n , nous observons $C_{i,j}$ avec $i+j \leq n+1$ (c'est-à-dire le triangle du Tableau 1.2) et nous voulons estimer $C_{i,j}$ tel que $i+j > n+1$ (les cases vides du Tableau 1.2). Pour ce faire, constatons d'abord à partir de l'Hypothèse 1, nous avons :

$$\lambda_j = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \frac{C_{2,j+1}}{C_{2,j}} = \dots = \frac{C_{n-j,j+1}}{C_{n-j,j}} \quad (1.1)$$

Un estimateur pour λ_j basé sur les observations $(C_{i,j})_{i+j \leq n+1}$ apparaît naturellement. Il va, dans une certaine façon, moyenner les ratios de la relation (1.1) :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \quad (1.2)$$

Par ailleurs, nous pouvons étudier la validité des égalités (1.1) par l'examen de la moyenne et de l'écart-type des ratios. Concrètement, le Tableau 1.3 suivant est obtenu à partir du Tableau 1.2 qui contient les ratios $C_{i,j+1}/C_{i,j}$, les facteurs de développement λ_j et la moyenne (colonne μ) ainsi que l'écart-type (colonne σ) des ratios pour chaque année de développement j :

| j | 1 | 2 | 3 | ... | 19 | 20 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|
| 1 | 2,854 | 2,095 | 1,822 | ... | 1,003 | 1,000 |
| 2 | 2,847 | 2,050 | 1,862 | ... | 1,001 | |
| 3 | 2,651 | 1,920 | 1,643 | ... | | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | | |
| 19 | 2,862 | 2,038 | | | | |
| 20 | 2,881 | | | | | |
| λ_j | 2,873 | 2,095 | 1,828 | ... | 1,002 | 1,000 |
| μ | 2,864 | 2,090 | 1,825 | ... | 1,002 | 1,000 |
| σ | 0,189 | 0,083 | 0,079 | ... | 0,001 | 0,000 |
| $\frac{\sigma}{\mu}$ | 0,066 | 0,040 | 0,043 | ... | 0,001 | 0,000 |

Tableau 1.3 – Ratios et facteurs de développement

Un faible rapport σ/μ signifie que les égalités de l'équation (1.1) sont plutôt valides pour l'année de développement correspondante. Cela est le cas ici car pour la première colonne où la variation relative des ratios est la plus importante, le rapport σ/μ n'est que 0,066.

Après avoir obtenu les estimateurs $\hat{\lambda}_j$, nous pouvons estimer maintenant les règlements cumulés inconnus $C_{i,j}$ avec $i+j > n+1$ par :

$$\hat{C}_{i,j} = [\hat{\lambda}_{n+1-i} \dots \hat{\lambda}_{j-1}] C_{i,n+1-i} \quad (1.3)$$

Nous en déduisons l'estimation de la provision 1 an et de la provision ultime à chaque année d'origine et au niveau global :

$$\hat{R}_i^1 = \hat{C}_{i,n+2-i} - C_{i,n+1-i} \qquad \hat{R}^1 = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i^1 \qquad (1.4)$$

$$\hat{R}_i^u = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n+1-i} \qquad \hat{R}^u = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i^u \qquad (1.5)$$

| i, j | 1 | 2 | 3 | ... | 20 | 21 | 1 an | Ultime |
|--------|------|-------|-------|-----|--------|--------|--------|---------|
| 1 | | | | | | 550149 | 0 | 0 |
| 2 | | | | | 293823 | 293883 | 60 | 60 |
| 3 | | | | ... | 354955 | 355028 | 832 | 905 |
| ⋮ | | | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 20 | | 12778 | 26765 | ... | 449518 | 449610 | 13987 | 436832 |
| 21 | 4209 | 12092 | 25328 | ... | 425391 | 425478 | 7883 | 421269 |
| | | | | | | Total | 480817 | 3859633 |

Tableau 1.4 – Tableau complet des paiements

Les résultats sont présentés dans le Tableau 1.4. La provision à horizon 1 an s'élève à 48 081 700 € et celle à horizon ultime 385 963 300 €. Remarquons que la méthode Chain Ladder déterministe repose sur la régularité des règlements non cumulés au fil des années de déroulement ce qui est plutôt le cas ici. Par conséquent, les résultats obtenus dans cette partie pourraient être utilisés comme références pour d'autres méthodes. Si ces dernières sont bonnes, elles devraient reproduire un résultat similaire à celui de Chain Ladder déterministe sur les mêmes données.

1.3 Méthode de Mack

Dans la plupart des situations, l'Hypothèse 1 sur laquelle se base Chain Ladder déterministe n'est pas parfaitement vérifiée et cette méthode n'est pas en mesure de quantifier l'erreur de prédiction. Mack (1993) a proposé la première approche stochastique permettant de corriger ce défaut.

1.3.1 Formalisme de Mack

L'idée de Mack est de considérer les lignes de règlements cumulés comme des processus markoviens vérifiant certaines propriétés. Concrètement,

Hypothèse 2. Pour chaque $i \geq 1$ les paiements cumulés $(C_{i,j})_{j \geq 1}$ constituent un processus de Markov vérifiant :

1. Pour $i \neq i'$ les lignes de paiements $(C_{i,j})_{j \geq 1}$ et $(C_{i',j})_{j \geq 1}$ sont indépendantes.
2. Il existe des paramètres $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ tels que :

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1} | C_{i,j}, \dots, C_{i,1}] = \mathbb{E}[C_{i,j+1} | C_{i,j}] = \lambda_j C_{i,j} \quad (1.6)$$

3. Il existe des paramètres $(\sigma_j)_{j \geq 1}$ tels que :

$$\text{Var}[C_{i,j+1} | C_{i,j}, \dots, C_{i,1}] = \text{Var}[C_{i,j+1} | C_{i,j}] = \sigma_j^2 C_{i,j} \quad (1.7)$$

Cette hypothèse peut s'écrire dans une autre forme plus compacte et parlante dans laquelle nous voyons bien la dynamique des processus :

$$C_{i,j+1} = \lambda_j C_{i,j} + \epsilon_{i,j} \sqrt{C_{i,j}} \quad (1.8)$$

où les résidus $(\epsilon_{i,j})_{i \geq 1}$ sont i.i.d, centrés et de variance σ_j^2 . Cette formule définit clairement la dynamique du processus de règlements au fil des années de déroulement. Par ailleurs, elle nous permet d'estimer les paramètres $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ d'une manière légitime par l'estimateur de moindre carré :

$$\hat{\lambda}_j = \underset{\lambda_j}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{C_{i,j}} (C_{i,j+1} - \lambda_j C_{i,j})^2 \quad (1.9)$$

d'où la proposition suivante (sans démonstration) :

Proposition 1. Les estimateurs de moindre carré $(\hat{\lambda}_j)_{j \geq 1}$ du programme (1.9) sont donnés par :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} \quad (1.10)$$

Ces estimateurs sont sans biais et non corrélés.

Les estimateurs $(\hat{\lambda}_j)_{j \geq 1}$ de Mack coïncident ainsi aux $(\hat{\lambda}_j)_{j \geq 1}$ de Chain Ladder déterministe. Avec la proposition suivante, nous montrons que la méthode de Mack reproduit exactement les mêmes provisions que Chain Ladder déterministe :

Proposition 2. Sous l'Hypothèse 2.1-2, pour tout $j > n + 1 - i$, nous avons :

$$\mathbb{E}[C_{i,j} | \mathcal{F}_n] = [\lambda_{n+1-i} \dots \lambda_{j-1}] C_{i,n+1-i} \quad (1.11)$$

avec $\mathcal{F}_n = \{C_{i,j'} | i + j' \leq n + 1\}$. En outre, comme $(\hat{\lambda}_j)$ sont non corrélés, nous obtenons l'estimation :

$$\hat{\mathbb{E}}[C_{i,j} | \mathcal{F}_n] = [\hat{\lambda}_{n+1-i} \dots \hat{\lambda}_{j-1}] C_{i,n+1-i} \quad (1.12)$$

Les paramètres $(\sigma_j)_{j \geq 1}$ sont maintenant aisément estimés par :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \hat{\mathbb{E}}[\epsilon_{i,j}^2] = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} \left(\frac{C_{i,j+1} - \hat{\lambda}_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}} \right)^2 \quad (1.13)$$

Comme les paramètres $(\hat{\lambda}_j)$ et les provisions sont les mêmes que ceux déterminés par la méthode de Chain Ladder déterministe, nous montrons dans le tableau suivant les valeurs calculées de $(\hat{\sigma})_{j=1}^{n-1}$ dans le Tableau 1.5.

| $\hat{\sigma}_1$ | $\hat{\sigma}_2$ | $\hat{\sigma}_3$ | ... | $\hat{\sigma}_{19}$ | $\hat{\sigma}_{20}$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----|-----------------------|---------------------|
| $2,24 \times 10^{-2}$ | $6,03 \times 10^{-3}$ | $3,00 \times 10^{-3}$ | ... | $2,20 \times 10^{-7}$ | 0,00 |

Tableau 1.5 – Valeur de $(\hat{\sigma}_{j=1}^{n-1})$

1.3.2 Erreur de prédiction

L'innovation de la méthode de Mack par rapport à Chain Ladder déterministe est la possibilité de quantifier l'erreur de prédiction. Nous rappelons cette notion pour le risque ultime.

Définition 1. (Erreur quadratique moyenne) *L'erreur quadratique moyenne de prévision (mse_p) du risque ultime à chaque année d'origine i et au niveau global sont définies comme :*

$$\text{mse}_p(\hat{R}_i^u) = \mathbb{E}[(\hat{R}_i^u - R_i)^2 | \mathcal{F}_n] \quad (1.14)$$

$$\text{mse}_p(\hat{R}^u) = \mathbb{E}[(\hat{R}^u - R)^2 | \mathcal{F}_n] \quad (1.15)$$

où \hat{R}_i^u et \hat{R}^u sont définies de la même façon que (1.5).

Ces erreurs peuvent être estimées grâce aux résultats de la proposition (sans démonstration) suivante :

Proposition 3. *Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, nous avons des estimateurs :*

$$\widehat{\text{mse}_p}(\hat{R}_i^u) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n+2-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{i'=1}^{n+1-j} C_{i',j}} \right) \quad (1.16)$$

$$\widehat{\text{mse}_p}(\hat{R}^u) = \sum_{i=1}^n \left(\widehat{\text{mse}_p}(\hat{R}_i^u) + 2\hat{C}_{i,n} \sum_{i'=i+1}^n \hat{C}_{i',n} \sum_{j=n+1-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\lambda}_j^2 \sum_{i'=1}^{n+1-j} C_{i',j}} \right) \quad (1.17)$$

1.4 Modèles linéaires généralisés (GLM)

Bien que la méthode de Mack propose une façon de quantifier l'erreur de prédiction, elle ne fournit pas une distribution des provisions qui est le but ultime d'une méthode de provision surtout sous le cadre de Solvabilité 2. Les modèles linéaires généralisés permettent de faire cela en supposant explicitement la distribution paramétrique des règlements. Les paramètres sont estimés à partir des observations disponibles, ce qui servent ensuite à estimer les règlements inconnus et la distribution des provisions.

1.5 GLM avec une loi de Poisson surdispersée

1.5.1 Le modèle de la loi de Poisson surdispersée

L'idée principale d'un modèle linéaire généralisé dans cette étude est de capturer la tendance des règlements incrémentaux au fil des années d'origine et des années de développement en supposant que les règlements suivent une loi paramétrique. Parmi les familles de distribution possibles telles que Poisson surdispersée, lognormal, Gamma etc, nous choisissons de présenter la première car la théorie prouve qu'avec un GLM avec cette famille reproduit exactement les mêmes prédictions que la méthode de Chain Ladder déterministe. Avant d'entrer dans les détails, nous rappelons la notion d'une loi de Poisson surdispersée.

Définition 2. (Loi de Poisson surdispersée) *Soient μ, ϕ deux réels strictement positifs. Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson surdispersée de paramètre (μ, ϕ) si et seulement si X/ϕ suit une loi de Poisson de paramètre μ/ϕ . Dans ce cas, nous notons $X \stackrel{d}{=} \text{ODP}(\mu, \phi)$.*

Avec le paramètre ϕ en plus, une loi de Poisson surdispersée généralise une loi de Poisson habituelle. Elle permet ainsi une relation plus flexible entre la variance et l'espérance de la variable. Concrètement, $\text{Var}[X] = \phi \mathbb{E}[X]$. Par ailleurs, la famille de loi de Poisson surdispersée possède une propriété intéressante : elle est invariante par l'additivité montrée dans le théorème connu suivant :

Théorème 1. *Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires telles que $X_1 \stackrel{d}{=} \text{ODP}(\mu_1, \phi)$ et $X_2 \stackrel{d}{=} \text{ODP}(\mu_2, \phi)$. Alors, nous avons $X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} \text{ODP}(\mu_1 + \mu_2, \phi)$.*

Ces propriétés un rôle important dans le modèle linéaire généralisé basé sur l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3. (GLM, loi de Poisson surdispersée) *Soient $\Delta = (Y_{i,j})_{i \geq 1, j \geq 1}$ les règlements non cumulés, alors pour tout $i, j = 1, 2, \dots, n$:*

1. Les $(Y_{i,j})_{i,j}$ sont indépendants.
2. $Y_{i,j}$ suit la loi de Poisson surdispersée de paramètre $(\mu_{i,j}, \phi)$ avec $\phi > 0$.
3. Il existe des paramètres réels $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ tels que

$$\mu_{i,j} = \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) \quad (1.18)$$

4. $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 0$.

Les paramètres $(\alpha_i)_i$ ont pour rôle de capter la tendance des règlements par rapport aux années d'origine. De même façon, les $(\beta_j)_j$ décrivent la tendance des règlements par rapport aux années de développement alors que μ permet un contrôle global. L'Hypothèse 1.4 est une manière simple de faire face au problème de surparamétrisation. En effet, si nous n'avions pas cette hypothèse, le modèle ne serait pas identifiable car en remplaçant μ par $\mu - \epsilon$ et α_i par $\alpha_i + \epsilon$, les $\mu_{i,j}$ resteraient inchangés. C'est pour cette raison, α_1 et β_1 ne font pas partie des paramètres à estimer dans la suite et leurs valeurs sont déjà fixées, par l'Hypothèse 1.4, à zéros.

Nous avons à notre disposition la réalisation $y_{i,j}$ des variables aléatoires $Y_{i,j}$ avec $i + j \leq n$. Cet échantillon servira à estimer le vecteur des paramètres $\theta = (\mu, \alpha, \beta)$ où $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_2, \dots, \beta_n)$ par la méthode de maximum de vraisemblance. Une fois avoir obtenu l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ , nous remplirons les cases manquantes, c'est-à-dire les cases (i, j) où $n + 1 < i + j \leq 2n$ par leurs valeurs espérées estimées $\hat{\mathbb{E}}[Y_{i,j}] = \hat{\mu}_{i,j} = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$.

1.5.2 Estimation des paramètres

Etant donné que la variable $Y_{i,j}$ suit la loi de Poisson surdispersée de paramètres $(\mu_{i,j}, \phi)$, la densité de probabilité de $Y_{i,j}$ en $y_{i,j}$ est :

$$\mathbb{P}(Y_{i,j} = y_{i,j}) = \frac{(\mu_{i,j}/\phi)^{y_{i,j}/\phi} \exp(-\mu_{i,j}/\phi)}{(y_{i,j}/\phi)!} \quad (1.19)$$

Par ailleurs, l'indépendance des variables $Y_{i,j}$ et l'équation (2.8) nous permet d'écrire le logarithme de la vraisemblance du modèle comme suit :

$$\begin{aligned} l(\Delta, \theta) &= \log \prod_{i+j \leq n} \frac{(\mu_{i,j}/\phi)^{y_{i,j}/\phi}}{(y_{i,j}/\phi)!} \\ &= \frac{1}{\phi} \sum_{i+j \leq n} (y_{i,j}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)) - f(y_{i,j}, \phi) \end{aligned} \quad (1.20)$$

avec $f(y_{i,j}, \phi)$ qui regroupe tous les termes qui ne dépendent que de $y_{i,j}$ et ϕ . Remarquons que $f(y_{i,j}, \phi)$ et ϕ ne jouent aucun rôle dans la maximisation de la

vraisemblance par rapport au paramètre θ . De ce fait, l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre θ est le résultat du programme suivant :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \tilde{l}(\Delta, \theta) = \sum_{i+j \leq n} (y_{i,j}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)) \quad (1.21)$$

Pour résoudre ce programme, nous dérivons $\tilde{l}(\Delta, \theta)$ par rapport à chaque composante pour obtenir les conditions de premier ordre. La solution de ces conditions sera l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Les conditions de premier ordre sont :

$$\text{par rapport à } \mu : \sum_{i+j \leq n} x_{i,j} - \sum_{i+j \leq n} \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) = 0 \quad (1.22)$$

$$\text{par rapport à } \alpha_i : \sum_{j \leq n-i} x_{i,j} - \sum_{j \leq n-i} \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) = 0 \quad (1.23)$$

$$\text{par rapport à } \beta_j : \sum_{i \leq n-j} x_{i,j} - \sum_{i \leq n-j} \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) = 0 \quad (1.24)$$

Le système d'équations (1.22)-(1.24) est trop complexe pour être résolu analytiquement. Pour y parvenir, nous avons recours à une méthode connue : Newton-Raphson. Il s'agit d'un algorithme efficace pour trouver les zéros des équations du type $F(t) = 0$, où F est une fonction continûment dérivable de \mathbb{R}^k en \mathbb{R}^k . Elle consiste à choisir une valeur initiale $t^{(0)}$ dans \mathbb{R}^k pour ensuite construire une suite de valeurs $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$ dans \mathbb{R}^k par la formule d'itération suivante :

$$t^{(i+1)} = t^{(i)} - F'(t^{(i)})^{-1} F(t^{(i)}) \quad (1.25)$$

où $F'(t^{(i)})^{-1}$ est l'inverse de la matrice jacobienne de F en $t^{(i)}$. Si la valeur $t^{(0)}$ est adéquatement choisie, la suite $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$ convergera et sa limite sera un zéro de l'équation $F(t) = 0$. En pratique, nous ne pouvons qu'obtenir une approximation de la vraie valeur en arrêtant l'itération lorsque la distance entre $t^{(i+1)}$ et $t^{(i)}$ est inférieure à une précision prédéfinie.

Cette méthode s'avère adapter dans notre cas de figure. Les équations(1.22)-(1.24) définissent une équation du type $F(\theta) = 0$, où $\theta = (\mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2n-1}$. De ce fait, nous procédons en 4 étapes pour estimer les paramètres :

1. Initialiser la valeur de η : $\mu^{(0)} = 10, 2, \alpha^{(0)} = 0, \beta^{(0)} = 0$.
2. Écrire la matrice jacobienne $F'(\theta)$ de $F(\theta)$.
3. Construire la suite $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots$ par la formule d'intération $\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} - F'(\theta^{(i)})^{-1} F(\theta^{(i)})$.
4. Terminer l'itération lorsque la distance entre $\theta^{(i+1)}$ et $\theta^{(i)}$ est inférieure à 10^{-3} .

| No | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | 9 | 10 |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| μ | 10,196 | 9,443 | 8,920 | 8,661 | ... | 8,602 | 8,602 |
| α_2 | 0,000 | -0,463 | -0,593 | -0,627 | ... | -0,627 | -0,627 |
| α_3 | 0,000 | -0,355 | -0,425 | -0,439 | ... | -0,438 | -0,438 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots |
| α_{21} | 0,000 | -0,260 | -0,570 | -0,585 | ... | -0,257 | -0,257 |
| β_2 | 0,000 | 0,170 | 0,393 | 0,575 | ... | 0,628 | 0,628 |
| β_3 | 0,000 | 0,397 | 0,831 | 1,089 | ... | 1,146 | 1,146 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots |
| β_{21} | 0,000 | 0,221 | -0,168 | -0,872 | ... | -3,875 | -3,875 |

Tableau 1.6 – Valeur de $\eta^{(i)}$ avec $i = 0, 1, 2, \dots, 10$

Les valeurs détaillées des paramètres à chaque itération sont exposées dans le Tableau 1.6 où la dernière contient la valeur acceptée de l'estimateur. Cette dernière ne s'est achevée qu'après 10 itérations.

Maintenant, il nous reste à estimer ϕ . Cette estimation peut être réalisée par la formule suivante :

$$\hat{\phi} = \frac{\phi\chi^2}{p} = \frac{1}{p} \sum_{i+j \leq n} \frac{(y_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j})^2}{v(\hat{\mu}_{i,j})} = 869.232 \quad (1.26)$$

où $p = n(n+1)/2 - (2n-1) = 190$ est le nombre de degrés de liberté.

Les paramètres étant tous estimés, avant de passer à l'estimation des provisions, examinons d'abord la qualité d'ajustement du modèle.

1.5.3 Qualité de l'ajustement

Une manière classique d'étudier la qualité de l'ajustement d'un modèle linéaire généralisé est d'utiliser les résidus de Pearson, qui, dans le cas présent, se définissent comme :

$$r_{i,j}^P = \frac{y_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\phi}\hat{\mu}_{i,j}}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ tel que } i + j \leq n + 1 \quad (1.27)$$

Si le modèle s'ajuste bien aux données, les $r_{i,j}^P$ ne devraient pas contenir encore beaucoup d'informations et devraient être approximativement normalement distribués. Nous pouvons le vérifier en utilisant un QQ-plot entre l'échantillon $r_{i,j}^P$ et la loi normale centré réduite. Il est montré dans la Figure 1.1.

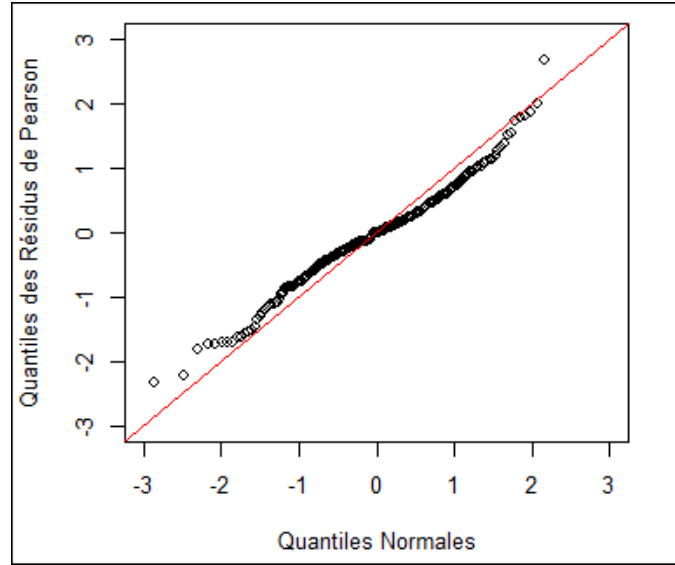


FIGURE 1.1 – QQ-plot, la loi normale centrée réduite et les résidus de Pearson

Nous pouvons constater que le nuage de points qui s’aligne approximativement au diagonal. Cela montre, en effet, que la distribution des résidus de Pearson est en effet approximativement normale centrée réduite. En d’autres termes, le modèle linéaire généralisé avec une loi de Poisson surdispersée s’ajuste bien aux données de l’étude.

1.5.4 Tableau complet de sinistralité

Après avoir estimé les paramètres (μ, α, β) par la méthode du maximum de vraisemblance, nous pouvons à ce stade obtenir le tableau de sinistralité complet en remplissant simplement les cellules manquantes du Tableau 1.1, c’est-à-dire les cellules (i, j) , où $n + 1 \leq i + j \leq 2n$, avec leur montant espéré estimé $\hat{\mu}_{i,j} = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$. Ainsi, la provision espérée à horizon 1 an et ultime par année d’origine et au niveau global sont estimées par :

$$\mathbb{E}[\hat{R}_i^1] = \hat{\mu}_{i,n+1-i} \qquad \mathbb{E}[\hat{R}^1] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[\hat{R}_i^1] \qquad (1.28)$$

$$\mathbb{E}[\hat{R}_i^u] = \sum_{j=n+1-i}^n \hat{\mu}_{i,j} \qquad \mathbb{E}[\hat{R}^u] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[\hat{R}_i^u] \qquad (1.29)$$

Le résultat est exposé dans le Tableau 1.7. La théorie prédit que le modèle linéaire généralisé avec la loi de Poisson surdispersée reproduit exactement la

| i, j | 1 | 2 | 3 | ... | 20 | 21 | Ultime | 1 an |
|--------|------|------|-------|-----|------|-------|---------|--------|
| 1 | | | | | | 113 | 0 | 0 |
| 2 | | | | | 689 | 60 | 60 | 60 |
| 3 | | | | ... | 832 | 73 | 905 | 832 |
| ⋮ | | | ⋮ | ⋱ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 20 | | 8330 | 13987 | ... | 1054 | 92 | 436832 | 13987 |
| 21 | 4209 | 7883 | 13236 | ... | 997 | 87 | 421269 | 7883 |
| | | | | | | Total | 3859633 | 480817 |

Tableau 1.7 – Tableau complet de sinistralité

même provision que la méthode Chain Ladder déterministe. En effet, la colonne charge "Ultime" et "1 an" du Tableau 1.7 sont identiques à celles du Tableau 1.4.

1.5.5 Distributions estimées

Comme nous l'avons évoqué, l'intérêt principal des modèles linéaires généralisés dans ce cadre est la possibilité de donner une estimation pour la distribution des provisions. Nous présentons ici deux façons de faire. Premièrement, nous déduisons directement cette estimation de distribution à partir de l'hypothèse sur la loi de Poisson surdispersée des règlements et les paramètres estimés. Deuxièmement, nous pouvons utiliser la technique de bootstrapping pour trouver d'une manière simulatrice la distribution des provisions. Examinons la première approche, la deuxième sera présentée dans la section suivante.

D'après l'Hypothèse, un règlement $Y_{i,j}$ suit la loi de Poisson surdispersée de paramètre $(\exp(\mu + \alpha_i + \beta_j), \phi)$. Il est donc naturel d'approcher les règlements non connus $Y_{i,j}$ avec $i + j > n + 1$ par $\hat{Y}_{i,j}$ telle que :

$$\hat{Y}_{i,j} = \text{ODP}(\exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j), \hat{\phi}) \quad (1.30)$$

En utilisant le Théorème 1 sur l'additivité de la famille de Poisson surdispersée, nous déduisons que :

$$\hat{R}^l \stackrel{d}{=} \text{ODP}(480817, 869) \quad (1.31)$$

$$\hat{R}^u \stackrel{d}{=} \text{ODP}(3859633, 869) \quad (1.32)$$

1.5.6 Bootstrapping

La deuxième approche pour estimer la distribution des provisions est la technique de bootstrapping. Nous n'entrons pas en détail théorique de cette méthode qui

peut être trouvé dans Efron B. & Tibshirani R.J. (1998) mais nous montrons sa mise en oeuvre en 4 étapes :

1. Pour chaque $b = 1, 2, \dots, B$, nous rééchantillons les résidus $r_{i,j}^P$ pour obtenir l'échantillon $r_{i,j}^{*b}$.

2. Nous calculons en suite le nouveau triangle des montants non cumulés par la formule suivante :

$$y_{i,j}^{*b} = \hat{\mu}_{i,j} + r_{i,j}^{*b} \sqrt{\hat{\phi} \hat{\mu}_{i,j}}. \quad (1.33)$$

3. Nous déterminons le nouveau risque ultime et 1 an associés au nouveau triangle des règlements non cumulés ($y_{i,j}^{*b}$) et nous les stockons. Après B simulations, nous obtenons un échantillon de B observations du risque global et risque à horizon 1 an qui nous permettent de tracer leur histogramme.

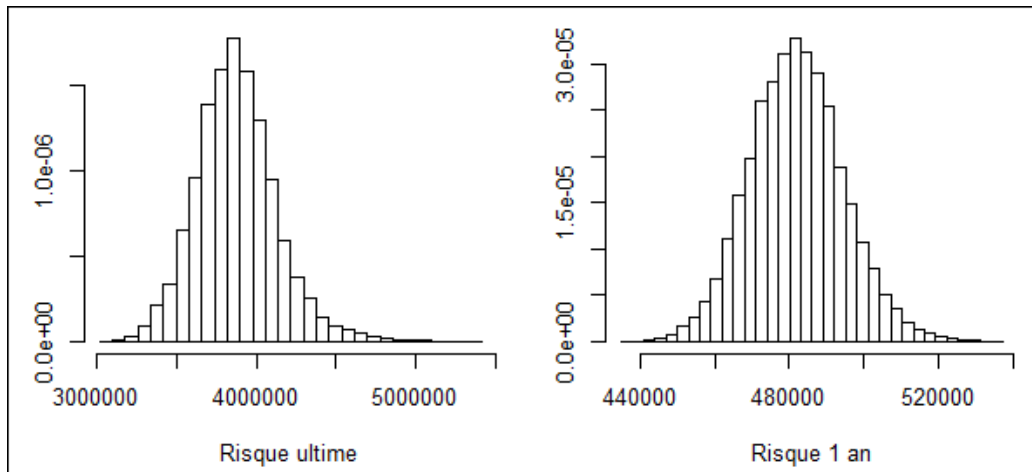


FIGURE 1.2 – Distributions bootstrappées : Risque ultime et 1 an

A partir de ces distributions, nous pouvons calculer les grandeurs importantes associées.

| | Risque 1 an | Risque Ultime |
|---------------------------|-------------|---------------|
| Provision de Chain Ladder | 48 081 700 | 385 963 300 |
| Provision bootstrappée | 48 194 270 | 387 618 500 |
| Ecart-type bootstrappé | 1 246 770 | 25 495 360 |

Tableau 1.8 – Quantités principales

Ces valeurs seront utilisées comme référence pour la suite du rapport. Notons que toutes ces méthodes ne nous permettent pas d'obtenir le capital requis qui est

la quantile 99,5% de la provision à horizon 1 an. Le nombre de données dans le triangle est insuffisant pour atteindre un niveau de risque extrême.

1.6 Conclusions

1.6.1 Remarques sur Chain Ladder

Bien que la méthode Chain Ladder soit simple, elle présente plusieurs types de défauts que nous pouvons classer en trois catégories.

La première classe se réfère au portefeuille de l'assureur. La méthode de Chain Ladder suppose qu'il ne change pas en terme de composition. En effet, pour que les cadences soient plus régulières, il faudrait aussi qu'il n'y ait pas de sinistres graves. Le portefeuille idéal serait composé un grand nombre de contrats avec une fréquence des sinistres non négligeable (ce qui n'est pas le souhait de l'assureur !). Avec la concurrence accrue entre les assureurs et les derniers événements de catastrophes naturels, il est difficile de croire à cette hypothèse. Ajouté à cela, la modification des règles de souscription ou la gestion de sinistre influencent aussi la cadence des paiements.

La deuxième catégorie se rapporte aux méthodes de calcul. Il convient d'abord de remarquer que les coefficients de passage sont calculés par un ratio de sorte que nous puissions mesurer l'évolution des montants cumulés d'une année de développement à l'autre. Autrement dit, quelque soit l'année de survenance, l'application de ces coefficients permet de trouver le montant à régler. Mais est-ce que les cadences futures coïncident avec celle du passé ? Il est évident que la réponse est négative. Nous pouvons citer par exemple l'inflation qui peut augmenter le montant des règlements de l'assureur car elle peut avoir un effet de "boule de neige" : pour une voiture accidentée à réparer, l'inflation peut modifier le prix des pièces, de la main d'œuvre, etc.

Deuxième remarque : l'utilisation des données agrégées fait perdre des informations utiles et donc la précision des calculs. Lorsque nous nous approchons de la fin des années de développement, nous avons de moins en moins de données pour calculer les coefficients de passages. Ainsi, le dernier coefficient est égale au rapport de deux valeurs et prétend être le même pour n'importe quelle année de survenance.

Enfin, la troisième catégorie concerne les défauts de ces méthodes par rapport à Solvabilité 2. A travers le pilier 1, l'un des points clés de cette réglementation réside dans l'horizon temporel. En effet, les assureurs doivent couvrir toutes les pertes potentielles, dans 99,5% des cas, pour l'année à venir. Cependant, les méthodes de Chain Ladder se fondent sur une vision à plus long terme. Ainsi, les

paramètres estimés pour calculer les exigences en capital sont sur-calibrés, surtout dans les branches à maturité longue comme la garantie décennale.

1.6.2 Solvabilité 2 - Retour aux données individuelles

Quelque soit la méthode basée sur le triangle de règlements, nous ne pouvons pas obtenir une distribution estimée précise des provisions à cause d'une insuffisance de données et d'une perte d'informations pertinentes. De ce fait, l'analyse des données individuelles semble être une approche plus adéquate pour résorber ces deux problèmes. Cette méthode présente plusieurs caractéristiques avantageuses.

D'abord, en terme de pratique par rapport aux méthodes classiques : il n'y a plus besoin de retraiter les données pour constituer un triangle. Il suffirait de connaître pour chaque sinistre les paiements déjà réglés avec leurs dates associées. De plus, nous avons un contrôle sur la qualité de données. Nous pouvons, par exemple, éliminer certaines données aberrantes pour rendre l'ensemble plus homogène. Cela ne peut pas être obtenu une fois que les données sont agrégées dans un triangle.

Deuxièmement, en gardant les données sinistre par sinistre avec leur règlement, notre base de données est plus grande, ce qui permet une utilisation plus efficace des modèles statistiques, à partir duquel nous pouvons obtenir la distribution des provisions avec plus de précision.

Troisièmement, la méthode ligne à ligne permet d'étudier les risques extrêmes exigés sous le cadre de Solvabilité 2. Nous avons plus d'informations sur les sinistres importants pour comprendre mieux leur présence, contrairement à la méthode du triangle qui mélange les petits et les gros sinistres. Ici, l'aspect extrême est alors diminué.

Enfin le quatrième avantage est le fait qu'il est possible d'intégrer dans une méthode dossier par dossier une réassurance non proportionnelle comme les traités en excédent de sinistres.

1.6.3 Apprendre de Chain Ladder

Dans les chapitres qui suivent, nous allons construire des méthodes appliquées sur les données individuelles. Nous avons vu que même si les données détaillées ont des informations supplémentaires telles que l'état des sinistres etc, la structure des règlements est très similaire à celle d'un triangle. En effet, cela nous inspire d'employer les méthodes d'estimation sur le triangle des règlements, à savoir les processus markoviens de type Mack et les modèles linéaires généralisés, pour estimer les règlements des sinistres. Nous allons voir en quoi cela consiste.

Chapitre 2

Mesures de provision cohérentes

La méthode Chain Ladder, malgré ses atouts, semble inappropriée pour appréhender les risques extrêmes exigés par Solvabilité 2. Le retour aux données individuelles s'avère inéluctable. Dans ce chapitre, nous construisons la base d'une étude de la provision sur les données individuelles par l'établissement d'un cadre théorique standard. Nous commençons par la définition des notions de base telles que : sinistres, processus de règlements, processus d'états. Nous établissons ensuite un formalisme avec l'introduction des filtrations représentant l'information disponible pour une année donnée sur les règlements et l'état des sinistres. Cela permet de définir formellement les mesures de provisions et le concept central : mesures de provision cohérentes.

2.1 Notions de base

Les objets fondamentaux d'une étude de la provision sur les données lignes sont des sinistres de longue durée, c'est-à-dire ceux qui nécessitent plusieurs années pour être entièrement réglés. Ils sont caractérisés par trois éléments : une année d'origine, un processus de règlements et un processus d'états. Nous donnons une définition mathématique du sinistre :

Définition 3. (Sinistre) *Un sinistre Y_i est un couple :*

$$Y_i = (n_i, X_i \oplus D_i) \quad (2.1)$$

où n_i est un entier non négatif représentant l'année d'origine du sinistre, X_i est un processus de règlements selon la Définition 4, D_i est un processus d'états selon la Définition 5. L'ensemble de tous les sinistres est noté \mathbb{Y} .

L'année d'origine marque le début de la dimension temporelle d'un sinistre. Elle est traditionnellement choisie comme l'année de survenance du sinistre. Les

règlements s'effectuent à partir de l'année d'origine, au cours des années de déroulement jusqu'à l'année de clôture du sinistre. Ces flux de paiements probables sont modélisés par des processus de règlements :

Définition 4. (Processus de règlements) *Soit Y_i un sinistre dont l'année d'origine est n_i . Un processus de règlements associé à Y_i est une suite de variables aléatoires non négatives $X_i = (X_{i,j})_{j \geq 1}$ définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ces règlements, s'ils auraient lieu, s'effectueront respectivement à la date $(n_i + j - 1)_{j \geq 1}$. Les indices j sont appelées années de déroulement de Y_i .*

Les processus de règlements représentent la première source d'incertitude du problème. En général, l'assureur ne connaît pas exactement le montant d'indemnisation à la survenance d'un sinistre ou les règlements futurs d'un sinistre partiellement réglé. La deuxième source d'incertitude est liée à l'état des sinistres. Pour un sinistre en cours, nous ne savons pas exactement la date de sa clôture. Par ailleurs, même si l'assureur estime les provisions seulement pour les sinistres en cours, les informations apportées par les sinistres clos sont tout à fait exploitables voire indispensables. Ainsi, cette notion joue un rôle primordial dans une étude de la provision. Pourtant, elle est complètement oubliée par la méthode Chain Ladder qui produit la même prédiction quelque soit l'état des sinistres. Nous présentons ici une définition formelle de l'état des sinistres :

Définition 5. (Processus d'états) *Un processus d'états du sinistre Y_i est une suite de variables aléatoires binaires $D_i = (D_{i,j})_{j \geq 1}$ définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$\mathbb{P}[D_{i,1} = 1] = 1 \quad (2.2)$$

$$\mathbb{P}[D_{i,j'} = 0 | D_{i,j} = 0] = 1 \text{ pour tout } j \geq 2 \text{ et } j' \geq j \quad (2.3)$$

avec la convention suivante :

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i \text{ est en cours en année de déroulement } j \\ 0 & \text{si } Y_i \text{ est clos en année de déroulement } j \end{cases} \quad (2.4)$$

L'ensemble de tous les processus d'états est noté \mathbb{D} .

Ainsi, à chaque année de déroulement, le processus d'états nous informe si le sinistre associé est encore en cours ou déjà clos. En année de développement j , le règlement $X_{i,j}$ aura lieu si et seulement si $D_{i,j} = 1$. D'une manière plus générale, le montant de règlement réel en année de développement j est :

$$Y_{i,j} = D_{i,j} X_{i,j} \quad (2.5)$$

De ce point de vue, nous avons décomposé le processus de règlements réels $(Y_{i,j})_{j \geq 1}$ en processus de règlements $(X_{i,j})_{j \geq 1}$ et processus d'états $(D_{i,j})_{j \geq 1}$. Un

avantage de cette décomposition c'est qu'elle nous permet de travailler indépendamment sur les deux processus, ce qui est plus facile que de travailler directement sur le processus de règlements réels.

La condition (2.2) nous assure qu'un sinistre a au moins un règlement et la condition (2.3) exprime une propriété intrinsèque des sinistres c'est que si un sinistre est clos à une année de déroulement donnée, il restera clos ultérieurement. Comme ces contraintes par nature rendent les processus d'états très difficile à travailler avec, nous introduisons la notion des processus d'âge. Il compte jusqu'à une année de développement donnée le nombre d'années pendant lesquelles un sinistre est actif. Formellement,

Définition 6. (Processus d'âge) Soit $(D_{i,j})_{j \geq 1}$ le processus d'états d'un sinistre Y_i . Le processus d'âge $(T_{i,j})_{j \geq 1}$ de Y_i est défini comme :

$$T_{i,j} = \sum_{j'=1}^j D_{i,j'} \text{ pour tout } j \geq 1 \quad (2.6)$$

Le processus $(T_{i,j})_{j \geq 1}$ est donc de valeurs entières non négatives et croissante. La proposition suivante montre l'utilité de cette notion :

Proposition 4. Soient X_i, D_i processus de règlements et processus d'âge d'un sinistre Y_i . Alors, pour tout $j \geq 1$

$$\sum_{j'=1}^j D_{i,j'} X_{i,j'} = \sum_{j'=1}^{T_{i,j}} X_{i,j'} \quad (2.7)$$

Démonstration. Notons d'abord que le côté droit de l'équation (2.7) est traditionnellement appelé le montant de règlement du sinistre Y_i cumulé jusqu'à l'année de développement j .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel se définit D_i . Pour un état du monde $\omega \in \Omega$, si $D_{i,j'}(\omega) = 1$ pour tout $j' = 1, 2, \dots, j$ alors $T_{i,j}(\omega) = j$, d'où :

$$\sum_{j'=1}^j D_{i,j'}(\omega) X_{i,j'} = \sum_{j'=1}^j X_{i,j'} = \sum_{j'=1}^{T_{i,j}(\omega)} X_{i,j'} \quad (2.8)$$

Dans le cas contraire, soit $\underline{j} = \max\{j' | 1 \leq j' \leq j, D_{i,j'} = 1\}$. Grâce à (2.3), nous déduisons que $D_{i,j'} = 0$ pour tout $j' > \underline{j}$, alors $T_{i,j}(\omega) = \underline{j}$. Cela implique :

$$\sum_{j'=1}^j D_{i,j'}(\omega) X_{i,j'} = \sum_{j'=1}^{\underline{j}} X_{i,j'} = \sum_{j'=1}^{T_{i,j}(\omega)} X_{i,j'} \quad (2.9)$$

d'où la conclusion. □

Pour terminer cette section, discutons de l'aspect financier dans la définition d'un sinistre. Un processus de règlements X_i est fondamentalement des flux monétaires dont la valeur varie selon la monnaie unitaire. Pour prendre en compte cet aspect sans devoir munir des sinistres d'une monnaie, nous introduisons la notion de changement de numéraire.

Définition 7. (Changement de numéraire) Soit $Y_i = (n_i, X_i \oplus D_i)$ un sinistre et c une constante positive. cY_i est appelé l'image de Y_i après un changement de numéraire taux $1 : c$ si :

$$cY_i = (n_i, cX_i \oplus D_i) \quad (2.10)$$

où $cX_i = (cX_{i,j})_{j \geq 1}$. Si $\mathbf{Y} = \{Y_i | i \in \mathbf{I}\}$ est un ensemble de sinistres, notons $c\mathbf{Y} = \{cY_i | i \in \mathbf{I}\}$.

Les notions de base étant définies, nous pouvons procéder à l'étape suivant : l'établissement du formalisme du problème de provisionnement sur les données individuelles.

2.2 Le formalisme

Le problème du provisionnement peut se résumer comme suit : nous avons un ensemble de sinistres $\mathbf{Y} = \{Y_i | i \in \mathbf{I}\}$ (par exemple, l'ensemble des sinistres représenté par notre base de données du Tableau 2). Conditionnellement à l'information disponible à une année n donnée, comment prédire certaines provisions liées à \mathbf{Y} ? Comment étudier la qualité de cette prédiction ?

Analysons quelques éléments du problème. D'abord, nous nous plaçons à l'année n . Cela implique que pour un sinistre Y_i , il est en année de déroulement $j_i = n - n_i + 1$. Un point important à remarquer, c'est que l'assureur à la date n et pour un sinistre Y_i donné, il sait déjà s'il doit encore payer pour ce sinistre ou pas. Autrement dit, il connaît déjà l'état du sinistre D_{i,j_i+1} à l'année $n + 1$.

En général, il existe une durée maximale durant laquelle un sinistre peut exister. Cela dépend de nombreux facteurs par exemple, la branche d'assurance, la réglementation du pays etc. Dans cette étude, nous travaillons sur les sinistres dont la durée de vie ne peut dépasser n comme dans toutes les études classiques de la provision. Formellement, les processus d'états se limite dans l'ensemble $\mathbb{D}_n \subseteq \mathbb{D}$ suivant :

$$\mathbb{D}_n = \{D_i | \mathbb{P}[D_{i,n+1} = 0] = 1\} \quad (2.11)$$

Cette restriction a une conséquence directe sur le processus d'âge $(T_{i,j})_{j \geq 1}$ associé. Concrètement, $T_{i,j}$ ne peut dépasser n pour tout $j \geq 1$ et ce processus s'arrête sûrement après l'année de déroulement n . De ce fait, nous appelons $T_{i,n}$

la variable d'âge à horizon ultime (ou simplement la variable d'âge ultime) du sinistre Y_i . Les contraintes sur $T_{i,j}$ s'écrivent :

$$\mathbb{P}[T_{i,j} \leq n] = 1 \quad \text{pour tout } j \geq 1 \quad (2.12)$$

$$\mathbb{P}[T_{i,j} = T_{i,n}] = 1 \quad \text{pour tout } j \geq n \quad (2.13)$$

Maintenant, nous pouvons modéliser l'information disponible à la date n par les filtrations générées par les processus $(X_i)_{i \in \mathbf{I}}$ et $(D_i)_{i \in \mathbf{I}}$ qui gouvernent la situation :

$$\mathcal{F}_n^X(\mathbf{Y}) = \sigma\{X_{i,j} | i \in \mathbf{I}, 1 \leq j \leq j_i\} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{F}_n^D(\mathbf{Y}) = \sigma\{D_{i,j} | i \in \mathbf{I}, 1 \leq j \leq j_i + 1\} \quad (2.15)$$

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{Y}) = \mathcal{F}_n^X(\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(\mathbf{Y}) \quad (2.16)$$

où le symbole $\sigma\{\cdot\}$ signifie "la plus petite tribu générée par". Dans la suite du rapport, s'il y a d'ambiguïté, nous notons \mathcal{F}_n pour $\mathcal{F}_n(\mathbf{Y})$. Pour faciliter la discussion sur les provisions, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 8. (Variable conditionnelle) *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Alors, nous appelons $X|\mathcal{F}$ la variable conditionnelle de X sachant \mathcal{F} la variable aléatoire réelle vérifiant :*

$$\mathbb{P}[(X|\mathcal{F}) \leq x] = \mathbb{P}[X \leq x | \mathcal{F}] \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

Remarquons que si X' est une autre variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors par la linéarité de la probabilité conditionnelle, nous déduisons aussi la linéarité des variables conditionnelles. En termes mathématiques, pour tout nombres réels α, α' nous avons :

$$(\alpha X + \alpha' X')|\mathcal{F} = \alpha(X|\mathcal{F}) + \alpha'(X'|\mathcal{F}) \quad (2.18)$$

Dans notre contexte, une provision associée à chaque ensemble de sinistres une variable aléatoire non négative qui, à chaque état du monde, conditionnellement à l'information disponible, donne un montant de provision. Nous parlons de la provision espérée d'un ensemble de sinistres lorsqu'il s'agit de l'espérance de la variable aléatoire en question. Il faut noter bien qu'il existe plusieurs types de provision avec de différents intérêts, par exemple : la provision ultime, la provision à horizon 1, 2, ... ans, etc :

Définition 9. (Provisions) *Soit \mathbf{Y} un ensemble de sinistres et n l'année actuelle. Pour chaque sinistre Y_i , j_i est son année de déroulement actuelle. Une provision R associée à chaque ensemble de sinistres $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Y}$ et conditionnellement à l'information disponible \mathcal{F}_n une variable aléatoire non-négative $R[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n]$.*

est donc appelée une mesure de provision de l'ensemble des sinistres \mathbf{A} sachant l'information \mathcal{F}_n . Nous distinguons notamment deux types de provisions étudiés dans ce rapport :

1. (Provision à horizon 1 an) R^1 est appelée la provision à horizon 1 an si :

$$R^1[Y_i|\mathcal{F}_n] = (1+r)^{-1}D_{i,j_i+1}X_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n \quad (2.19)$$

$$R^1[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n] = \sum_{Y_i \in \mathbf{A}} R^1[Y_i|\mathcal{F}_n] \quad (2.20)$$

2. (Provision ultime) R^u est appelée la provision ultime si :

$$R^u[Y_i|\mathcal{F}_n] = \sum_{j=j_i+1}^n (1+r)^{j_i-j} D_{i,j} X_{i,j}|\mathcal{F}_n \quad (2.21)$$

$$R^u[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n] = \sum_{Y_i \in \mathbf{A}} R^u[Y_i|\mathcal{F}_n] \quad (2.22)$$

où r est le taux d'actualisation.

La provision à horizon 1 an correspond à la provision pour l'année prochaine. Elle est étudiée surtout sous le cadre de Solvabilité 2. La provision ultime correspond à la provision jusqu'à ce que le sinistre soit clos. Pour le voir, grâce à la Proposition 4, écrivons $R^u[Y_i]$ dans la forme suivante :

$$R^u[Y_i|\mathcal{F}_n] = \sum_{j=j_i+1}^{T_{i,n}} (1+r)^{j_i-j} X_{i,j}|\mathcal{F}_n \quad (2.23)$$

Le taux d'actualisation r reflète une partie de l'aspect financier du problème liée à la dimension temporelle. Ce taux ne pose aucune difficulté technique pour l'étude, alors pour alléger les notations sans perdre la généralité, nous supposons pour la suite que $r = 0$.

Notre tâche est de trouver une estimation pour la provision à horizon 1 an et pour la provision ultime. Dans notre contexte, nous n'utilisons pas le terme estimateur de provision mais plutôt mesures de provisions. Ce sont essentiellement des objets de même nature que les provisions, qui tentent de les approximer par les familles de distribution usuelles. Cela nous permet de déduire plus d'informations intéressantes sur les provisions telles qu'espérance, variance, VaR etc.

Définition 10. Une mesure de provision \hat{R} associée à chaque ensemble de sinistres \mathbf{A} , conditionnellement à une information disponible \mathcal{F} , une variable aléatoire réelle $\hat{R}[\mathbf{A}|\mathcal{F}]$.

2.3 Mesures de provision cohérentes

Comme il est évoqué dans la section précédente, nous envisageons d'approcher les provisions intéressées par les familles de distributions connues. Cette opération doit être faite avec précaution car elle risque de faire perdre les propriétés intrinsèques des provisions. Pour éviter cela, nous allons choisir les propriétés les plus importantes des provisions pour ensuite les conserver dans leurs mesures de provision. Les trois propriétés communes que nous considérons indispensables pour les deux provisions de la définition 9 sont :

1. (Positivité) La provision à horizon 1 an (ultime) pour un ensemble quelconque de sinistres est toujours non négative. Cela vient du fait que les processus de règlements et les processus d'état sont tous non négatifs.

$$R^1[Y_i|\mathcal{F}_n] = D_{i,j_i+1}X_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n \geq 0 \quad (2.24)$$

$$R^u[Y_i|\mathcal{F}_n] = \sum_{j=j_i+1}^{T_{i,n}} X_{i,j}|\mathcal{F}_n \geq 0 \quad (2.25)$$

2. (Additivité) La provision à horizon 1 an (ultime) pour un ensemble de sinistres est égale à la somme des provisions à horizon 1 an (ultime) des sinistres individuels.

$$R^1[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n] = \sum_{Y_i \in \mathbf{A}} R^1[Y_i|\mathcal{F}_n] \quad (2.26)$$

$$R^u[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n] = \sum_{Y_i \in \mathbf{A}} R^u[Y_i|\mathcal{F}_n] \quad (2.27)$$

3. (Invariance par changement de numéraire) Si nous changeons de système monétaire la valeur de la provision à horizon 1 an (ultime) ne change pas.

$$R^1[c\mathbf{A}|\mathcal{F}_n^X(c\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(c\mathbf{Y})] = cR^1[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n^X(\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(\mathbf{Y})] \quad (2.28)$$

$$R^u[c\mathbf{A}|\mathcal{F}_n^X(c\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(c\mathbf{Y})] = cR^u[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n^X(\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(\mathbf{Y})] \quad (2.29)$$

Les mesures de provisions qui conservent ces trois propriétés sont appelées les mesures de provisions cohérentes.

Définition 11. Une mesure de provision R est cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes pour tout $\mathbf{Y} \subset \mathbb{Y}$ de cardinal fini et tout $n \geq 1$:

1. (Positivité) Pour tout $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$

$$\hat{R}[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n] \geq 0 \quad (2.30)$$

2. (Additivité) *Pour tout $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{Y}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$,*

$$\hat{R}[\mathbf{A} \cup \mathbf{B} | c] \stackrel{d}{=} \hat{R}[\mathbf{A} | \mathcal{F}_n] + \hat{R}[\mathbf{B} | \mathcal{F}_n] \quad (2.31)$$

3. (Invariance par changement de numéraire) *Pour tout $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{Y}$ et toute constante c positive,*

$$\hat{R}[c\mathbf{A} | \mathcal{F}_n^X(c\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(c\mathbf{Y})] \stackrel{d}{=} c\hat{R}[\mathbf{A} | \mathcal{F}_n^X(\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(\mathbf{Y})] \quad (2.32)$$

où $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(\mathbf{Y})$ et " $\stackrel{d}{=}$ " signifie "de même distribution".

Si nous voulons approcher les provisions en utilisant les familles de distributions connues, la première propriété nous suggère qu'il faut choisir plutôt les familles à support dans l'ensemble des réels non négatifs \mathbb{R}_+ . Cela pourrait nous éviter une situation où il existe certains états du monde dans lesquels nos provisions sont négatives ce qui est tout à fait absurde. La deuxième propriété indique la façon dont nous devrions établir nos mesures de provisions. Il faut d'abord construire les provisions pour tous les singletons (où simplement tous les sinistres). Après avoir fini cette étape, la provision pour un ensemble quelconque peut être exprimée par la somme des provisions de ses éléments. La troisième propriété exige l'indépendance de la valeur de la provision en unité monétaire utilisée. Prenons un exemple. Supposons qu'il y a seulement deux états du monde 1 et 2. Pour un ensemble, nous avons trouvé la provision à horizon 1 an telle que elle vaut 1 000 000 € en état du monde 1 et 2 000 000 € en 2. Maintenant, si nous convertissons le système de monnaie en dollar \$, avec $1\text{€} = 1,3\text{\$}$. Nous voulons évidemment retrouver une provision à horizon 1 an de 1 300 000 en état du monde 1 et de 2 600 000 en 2. Deux conséquences directes de la condition (2.32) sont :

$$\mathbb{E} \left[\hat{R}[c\mathbf{A} | \mathcal{F}_n^X(c\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(c\mathbf{Y})] \right] = c\mathbb{E} \left[\hat{R}[\mathbf{A} | \mathcal{F}_n^X(\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(\mathbf{Y})] \right] \quad (2.33)$$

$$\text{Var} \left[\hat{R}[c\mathbf{A} | \mathcal{F}_n^X(c\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(c\mathbf{Y})] \right] = c^2 \text{Var} \left[\hat{R}[\mathbf{A} | \mathcal{F}_n^X(\mathbf{Y}) \vee \mathcal{F}_n^D(\mathbf{Y})] \right] \quad (2.34)$$

Remarquons que même si la propriété d'invariance par changement de numéraire est définie dans notre notion des mesures de provision cohérentes, nous pouvons toutefois appliquer à d'autres cas par exemple à la méthode Chain Ladder stochastique. Par exemple, nous pouvons montrer que :

Proposition 5. *La provision à horizon 1 an donnée par la méthode de Mack ne vérifie pas la propriété d'invariance par changement de numéraire.*

Démonstration. Soient $\Delta = \{C_{i,j}\}_{i+j \leq n+1}$ le triangle de règlements cumulés, avec Y_1, \dots, Y_n ses lignes de règlements et $c\Delta = \{cC_{i,j}\}_{i+j \leq n+1}$ l'image de Δ après un changement de numéraire du taux $1 : c$, avec cY_1, \dots, cY_n ses lignes

de règlements. Selon la dynamique de Mack, nous pouvons établir la provision à horizon 1 an pour une ligne $i > 1$:

$$R^1[Y_i|\mathcal{F}_n(\Delta)] = \hat{\lambda}_{n+1-i}^\Delta C_{i,n+1-i} + \hat{\epsilon}_{i,n+1-i}^\Delta \sqrt{C_{i,n+1-i}} \quad (2.35)$$

$$R^1[cY_i|\mathcal{F}_n(c\Delta)] = \hat{\lambda}_{n+1-i}^{c\Delta} cC_{i,n+1-i} + \hat{\epsilon}_{i,n+1-i}^{c\Delta} \sqrt{cC_{i,n+1-i}} \quad (2.36)$$

À partir des équations (1-10) et (1-13), nous pouvons déduire les relations suivantes :

$$\hat{\lambda}_{n+1-i}^\Delta = \hat{\lambda}_{n+1-i}^{c\Delta} \quad (2.37)$$

$$\sqrt{c}\hat{\sigma}_{n+1-i}^\Delta = \hat{\sigma}_{n+1-i}^{c\Delta} \quad (2.38)$$

ce qui implique que :

$$\text{Var} [R^1[cY_i|\mathcal{F}_n(c\Delta)]] = c \text{Var} [R^1[Y_i|\mathcal{F}_n(\Delta)]] \quad (2.39)$$

La condition (2.34) n'est pas remplie, la provision à horizon 1 an donnée par Mack ne vérifie donc pas la propriété d'invariance par changement de numéraire. \square

La propriété d'invariance par changement de numéraire nous rappelle qu'il faut faire attention à la façon dont nous construisons le modèle d'estimation. La dynamique définie par Mack ne permet pas d'aboutir à une provision à horizon 1 an vérifiant cette propriété à cause de l'opération de racine carrée appliquée sur $C_{i,j}$, $\sqrt{C_{i,j}}$.

2.4 Construction des mesures de provisions

Nous avons vu qu'un point central dans notre construction du cadre théorique pour l'étude sur les données individuelles, c'est la séparation des processus d'états et les processus de règlements ce qui apportent deux avantages principaux. Premièrement, nous pouvons exprimer l'information disponible par les filtrations générées par ces processus. Deuxièmement, nous allons voir que cette décomposition nous permet de travailler indépendamment sur les deux processus ce qui est plus facile. Pour ce faire, nous avons besoin de l'hypothèse suivant :

Hypothèse 4. Soient $D_i = (D_{i,j})_{j \geq 1}$ un processus d'états et $X_{i'} = (X_{i',j})_{j \geq 1}$ un processus de règlements. Alors conditionnellement à l'information disponible \mathcal{F}_n , D_i et $X_{i'}$ sont indépendants.

Cette hypothèse, comme toutes les autres, est discutable. Pour deux indices différentes i, i' , D_i est indépendant de $X_{i'}$ d'une manière légitime. Il n'y a pas une raison forte pour que l'état d'un sinistre dépend des règlements d'un autre. Quand

$i = i'$, nous pouvons argumenter, par exemple, que les gros sinistres nécessitent plus d'années pour être réglés. Pour le moment nous acceptons l'hypothèse et nous discuterons d'éventuelles extensions.

Écrivons maintenant les provisions à horizon 1 an et ultime d'un sinistre Y_i sous la forme suivante :

$$R^1[Y_i|\mathcal{F}_n] = (D_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n)(X_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n) \quad (2.40)$$

$$R^u[Y_i|\mathcal{F}_n] = \sum_{j=j_i+1}^{T_{i,n}|\mathcal{F}_n} X_{i,j}|\mathcal{F}_n \quad (2.41)$$

à l'année actuelle n , nous connaissons déjà D_{i,j_i+1} . Les processus d'état ne jouent donc aucun rôle stochastique dans l'expression de la provision à horizon 1 an. L'estimation se porte seulement sur les processus de règlements. La provision ultime, quant à elle, fait intervenir les deux processus avec le processus d'états ramené à la variable d'âge ultime $T_{i,n}$. Si nous réussissons à approcher les variables conditionnelles $(X_{i,j}|\mathcal{F}_n)_{i \in \mathbf{I}, j \geq j_i}$ et les $(T_{i,n}|\mathcal{F}_n)_{i \in \mathbf{I}}$ par les variables dont nous connaissons la distribution notées $(\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n)_{i \in \mathbf{I}, j \geq j_i}$ et $(\hat{T}_{i,n}|\mathcal{F}_n)_{i \in \mathbf{I}}$, naturellement nous pouvons établir les mesures de provisions pour un sinistre Y_i quelconque :

$$\hat{R}^1[Y_i|\mathcal{F}_n] = (D_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n)(\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n) \quad (2.42)$$

$$\hat{R}^u[Y_i|\mathcal{F}_n] = \sum_{j=j_i+1}^{\hat{T}_{i,n}|\mathcal{F}_n} \hat{X}_{i,j}|\mathcal{F}_n \quad (2.43)$$

et les mesures de provision pour un ensemble de sinistres s'écrivent comme la somme des mesures de provision de ses sinistres. Cela nous assure déjà la propriété d'additivité des mesures de provisions cohérentes. Si les variables aléatoires $(\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n)_{i \in \mathbf{I}, j \geq j_i}$ sont non négatives, nos mesures de provisions vérifient la propriété de positivité. Il nous reste à vérifier la propriété d'invariance par changement de numéraire qui concerne seulement les $(\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n)_{i \in \mathbf{I}, j \geq j_i}$. Concrètement, nos méthodes doivent produire les denières de façon que pour toute $c > 0$:

$$\widehat{cX}_{i,j}|\mathcal{F}_n(c\mathbf{Y}) \stackrel{d}{=} c \left[\hat{X}_{i,j}|\mathcal{F}_n(\mathbf{Y}) \right] \quad (2.44)$$

et nous pouvons espérer d'avoir les mesures de provision cohérentes. Les étapes décrites peuvent être considérées comme une démarche standard pour construire les mesures de provision.

2.5 Conclusion

Nous avons défini les notions de base, établi le formalisme et donné la notion centrale des mesures de provisions. Nous avons discuté des étapes pour construire les mesures de provision et les mesures de provisions cohérentes.

Dans les chapitres suivants, nous allons suivre cette démarche. Le Chapitre 3 sera consacré à l'étude des processus d'états. Nous prouvons que nous pouvons ramener ces processus à la notion des variables d'âge ultime sans perdre de l'information. La distribution des variables d'âge est ensuite estimée. Après avoir fini cette étape, nous procédons dans les chapitres 4 et 5 pour étudier les processus de règlements par deux approches différentes. Pour chaque approche, nous établissons les mesures de provisions associées.

Chapitre 3

Processus d'États

Avec les processus de règlements, les processus d'états constituent la composante stochastique dans la structure des sinistres. L'estimation des processus d'états est la première étape dans l'établissement des mesures de provision. Dans ce chapitre, nous présentons une façon commode pour le faire : au lieu d'étudier directement les processus d'états, nous passons par les variables d'âge à l'horizon ultime qui contiennent toutes les informations sur les processus d'états correspondants. Cette transformation nous amène à un contexte classique : l'estimation de la durée de vie d'une population avec censure. L'estimateur de Kaplan-Meier est utilisé pour estimer la fonction de survie qui aboutira à la distribution des variables d'âge.

3.1 Variables d'âge ultime

Dans le chapitre précédent, nous avons observé une propriété intrinsèque des sinistres : ils n'ont pas de règlement après leur date de clôture. Cela a induit un caractère particulier des processus d'états parmi les processus binaires représenté par la relation (2.3). À cause de cette relation, il n'est pas facile de travailler directement sur les processus d'états. Pour cette raison, nous avons introduit la notion des processus d'âge qui possèdent des propriétés intéressantes comme montré dans la Proposition 4 et surtout dans l'équation (2.23) où ils font disparaître les processus d'états dans l'expression de la provision ultime. La proposition suivante confirme l'intérêt de cette notion :

Proposition 6. Soit $n \in \mathbb{N}_+$ l'année actuelle et $(D_{i,j})_{j \geq 1}$ un processus d'états appartenant à \mathbb{D}_n . Si $\mathcal{F}_{i,n}^T = \sigma\{T_{i,n}\}$ est la tribu générée par $T_{i,j}$, alors pour tout $1 \leq j \leq n$, $D_{i,j}$ est $\mathcal{F}_{i,n}^T$ -mesurable. En outre, $\mathcal{F}_n^D = \mathcal{F}_{i,n}^T$.

Démonstration. Rappelons que le processus d'états $(D_{i,j})_{j \geq 1}$ est défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Par définition, $T_{i,n} = \sum_{j=1}^n D_{i,j}$ est \mathcal{F}_n^D -mesurable.

Autrement dit, $\mathcal{F}_{i,n}^T \subseteq \mathcal{F}_n^D$. Pour chaque $1 \leq j \leq n$, nous avons :

$$\{\omega \in \Omega | D_{i,j}(\omega) = 0\} = \{\omega \in \Omega | T_{i,n}(\omega) < j\} \in \mathcal{F}_{i,n}^T \quad (3.1)$$

$$\{\omega \in \Omega | D_{i,j}(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega | T_{i,n}(\omega) \geq j\} \in \mathcal{F}_{i,n}^T \quad (3.2)$$

ce qui implique $D_{i,j}$ est $\mathcal{F}_{i,n}^T$ -mesurable pour tout $1 \leq j \leq n$. Par conséquent, $\mathcal{F}_n^D \subseteq \mathcal{F}_{i,n}^T$. Or, nous avons montré que $\mathcal{F}_{i,n}^T \subseteq \mathcal{F}_n^D$, d'où $\mathcal{F}_n^D = \mathcal{F}_{i,n}^T$. \square

Par ailleurs, comme $(D_{i,j})_{j \geq 1} \in \mathbb{D}_n$, nous savons sûrement que $D_{i,j} = 0$ pour tout $j > n$. Cela implique que $T_{i,n} = T_{i,\infty}$. C'est pour cette raison que nous pouvons appeler $T_{i,n} = T_{i,\infty}$ la variable d'âge ultime ou la durée de vie du sinistre Y_i . Cette variable est parfaitement équivalente au processus $(D_{i,j})_{j \geq 1}$ au sens d'informations générées au cours du temps comme montré par la Proposition 5. Ainsi, nous avons transposé l'étude sur le comportement du processus d'états $(D_{i,j})_{j \geq 1}$ au problème d'estimation de la distribution de la variable d'âge $T_{i,j}$ à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ qui est a priori plus facile à réaliser. Pour étudier $T_{i,n}$ statistiquement, nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5. Soient n l'année actuelle et $\mathbf{Y} = \{Y_i | i \in \mathbf{I}\}$ l'ensemble de sinistres étudiés. Supposons que $(T_{i,n})_{i \in \mathbf{I}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Certes, cette hypothèse est contestable, par exemple, la durée de vie des sinistres peuvent être différente entre les années d'origine à cause de plusieurs facteurs possibles, par exemple, des changements au niveau de la réglementation ou de la politique de la compagnie etc. Ces types de détails peuvent être incorporés dans l'hypothèse au cas par cas selon les données disponibles. Dans le but d'illustrer notre approche et dans le contexte où nous avons une base de données relativement homogène, nous acceptons la validité de cette hypothèse.

3.2 Estimation

Plaçons-nous à l'année actuelle n et étudions l'ensemble des sinistres $\mathbf{Y} = \{Y_i | i \in \mathbf{I}\}$. Pour chaque sinistre Y_i , soit t_i son âge actuel qui est la réalisation de T_{i,j_i} que nous connaissons à l'année n . D'une manière évidente, nous avons :

$$\begin{cases} t_i = j_i & \text{si } Y_i \text{ est en cours à l'année de développement } j_i \\ t_i \leq j_i & \text{si } Y_i \text{ est clos à l'année de développement } j_i \end{cases}$$

Pour chaque indice $j \geq 0$, soit $\mathbf{I}_j = \{i \in \mathbf{I} | t_i \geq j\}$ l'ensemble de sinistres dont l'âge actuel dépasse j . En d'autres termes, \mathbf{I}_j est l'ensemble des sinistres qui ont eu un règlement à l'année de développement j . D'une manière intuitive $(\mathbf{I}_j)_{j \geq 1}$ est une suite des ensembles décroissants :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I}_1 \supseteq \mathbf{I}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathbf{I}_n \supseteq \mathbf{I}_{n+1} = \emptyset \quad (3.3)$$

Cette décroissance est illustrée par la tableau suivant qui contient le nombre d'effectifs des ensembles (\mathbf{I}_j) avec $j = 1, 2, \dots, 22 = n + 1$:

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... | 20 | 21 | 22 |
| $\text{card}(\mathbf{I}_j)$ | 836 | 795 | 749 | 680 | 610 | 541 | 488 | ... | 14 | 4 | 1 |

Tableau 3.1 – Cardinal de \mathbf{I}_j avec $j = 1, 2, \dots, 22$

Nous partons d'un ensemble \mathbf{Y} de 836 sinistres. L'ensemble se réduit au cours du temps pour arriver à 0 sinistre à l'année de développement $n + 1$. Il y a deux raisons qui expliquent cette tendance décroissante. Premièrement, les sinistres sont clôturés au fil du temps. Un sinistre est clos juste après sa quatrième année de développement ne peut évidemment appartenir à \mathbf{I}_7 . Deuxièmement, comme les sinistres n'ont pas la même année d'origine, leur année de développement à l'année actuelle diffère. Prenons un exemple, si un sinistre en cours est actuellement en année de développement 5, alors il appartient à \mathbf{I}_5 mais pas à \mathbf{I}_6 .

Cette situation ressemble remarquablement à celle d'un modèle de survie avec censure dans lequel nous voulons estimer la probabilité de survie d'un individu représentatif d'une population homogène qui se réduit au fil du temps à cause des décès et de la perte de vue de certains individus. Dans le cas présent, l'ensemble des sinistres \mathbf{Y} correspond à la population, le fil des années de développement j au fil du temps, la clôture d'un sinistre correspond au décès d'un individu et l'indisponibilité d'information des sinistres en cours à la perte de vue des individus. Précisons qu'un individu n'est plus observable à partir de l'année j correspond à un sinistre en cours dont l'âge actuel t_i est égal à son année de développement actuelle j_i ou d'une manière équivalente, à un sinistre dont le dernier règlement s'effectue à l'année actuelle n .

Cette comparaison est seulement valide tant que l'Hypothèse 5 l'est. L'indépendance et l'identité de distribution de la durée de vie parmi les sinistres permettent de considérer \mathbf{Y} comme une population homogène et de transposer le fil des années de développement à la dimension temporelle habituelle. Cette transformation est importante car elle nous permet d'adapter les méthodes utilisées en étude de la survie à notre situation présente.

L'une des approches les plus connues et les plus employées en pratique dans ce cadre discuté a été proposée par Kaplan E. L, Meier P. (1958). Il s'agit d'estimateur de maximum de vraisemblance non-paramétrique pour la fonction de survie, en l'occurrence, la fonction $S(j) = \mathbb{P}[T_{i,n} > j]$. Notons que la fonction de survie $S(j)$ est simplement la complémentarité de la fonction de répartition de $T_{i,n}$: $S(j) = 1 - \mathbb{P}[T_{i,n} \leq j] = 1 - F(j)$. Pour établir l'estimateur de Kaplan-Meier de $S(j)$, soit d_j le nombre de sinistres clôturés juste après leur année de

| j | À Risque | Censuré | Décès | Survie | $\hat{S}(j)$ à 95% | $\hat{F}(j)$ | $\hat{P}(j)$ |
|-----|----------|---------|-------|--------|--------------------|--------------|--------------|
| 1 | 836 | 34 | 7 | 829 | 0,992 ± 0,006 | 0,008 | 0,008 |
| 2 | 795 | 34 | 12 | 783 | 0,977 ± 0,010 | 0,023 | 0,015 |
| 3 | 749 | 42 | 27 | 722 | 0,941 ± 0,016 | 0,059 | 0,035 |
| 4 | 680 | 42 | 28 | 652 | 0,903 ± 0,021 | 0,097 | 0,039 |
| 5 | 610 | 40 | 29 | 581 | 0,860 ± 0,025 | 0,140 | 0,043 |
| 6 | 541 | 32 | 21 | 520 | 0,826 ± 0,028 | 0,174 | 0,033 |
| 7 | 488 | 27 | 33 | 455 | 0,771 ± 0,032 | 0,229 | 0,056 |
| 8 | 428 | 24 | 40 | 388 | 0,699 ± 0,036 | 0,301 | 0,072 |
| 9 | 364 | 31 | 22 | 342 | 0,656 ± 0,038 | 0,344 | 0,042 |
| 10 | 311 | 24 | 33 | 278 | 0,587 ± 0,041 | 0,413 | 0,070 |
| 11 | 254 | 18 | 14 | 240 | 0,554 ± 0,042 | 0,446 | 0,032 |
| 12 | 222 | 24 | 18 | 204 | 0,509 ± 0,043 | 0,491 | 0,045 |
| 13 | 180 | 18 | 22 | 158 | 0,447 ± 0,045 | 0,553 | 0,062 |
| 14 | 140 | 14 | 27 | 113 | 0,361 ± 0,047 | 0,639 | 0,086 |
| 15 | 99 | 15 | 18 | 81 | 0,295 ± 0,047 | 0,705 | 0,066 |
| 16 | 66 | 8 | 15 | 51 | 0,228 ± 0,047 | 0,772 | 0,067 |
| 17 | 43 | 8 | 10 | 33 | 0,175 ± 0,046 | 0,825 | 0,053 |
| 18 | 25 | 3 | 8 | 17 | 0,119 ± 0,045 | 0,881 | 0,056 |
| 19 | 14 | 3 | 7 | 7 | 0,060 ± 0,038 | 0,940 | 0,060 |
| 20 | 4 | 1 | 2 | 2 | 0,030 ± 0,030 | 0,970 | 0,030 |
| 21 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0,000 | 1,000 | 0,030 |

Tableau 3.2 – Estimation de la durée de vie des sinistres

développement j . Alors,

$$\hat{S}(j) = \prod_{j'=1}^j \frac{\text{card}(\mathbf{I}_{j'}) - d_{j'}}{\text{card}(\mathbf{I}_{j'})} \quad (3.4)$$

Les éléments pour calculer $\hat{S}(j)$ peut se trouvent dans le Tableau 3.2 avec des terminologies de l'étude de survie. Dans la première colonne, nous avons (j), nous avons les années de développement de 1 jusqu'à $n = 21$. Dans la deuxième colonne (À Risque) nous retrouvons le cardinal des ensembles $(\mathbf{I}_j)_{j=1}^n$ (la population au début de l'année j). Dans la troisième colonne (Décès) se trouve le nombre de sinistres clos juste après l'année de développement j , ce qui correspond au terme d_j dans la formule (3.4) (nombre de décès juste après l'année j). Dans la quatrième colonne (Survie), pour une ligne j donnée nous avons le nombre de sinistre dont l'âge ultime sûrement dépasse j (nombre de survies juste après l'année j). Cela correspond par ailleurs aux $\text{Card}(\mathbf{I}_{j'}) - d_{j'}$ dans la formule (3.4). Dans la cinquième colonne (Censuré) se trouvent le nombre de sinistres dont le dernier règlement s'effectue à l'année actuelle n (le nombre d'individus perdu de

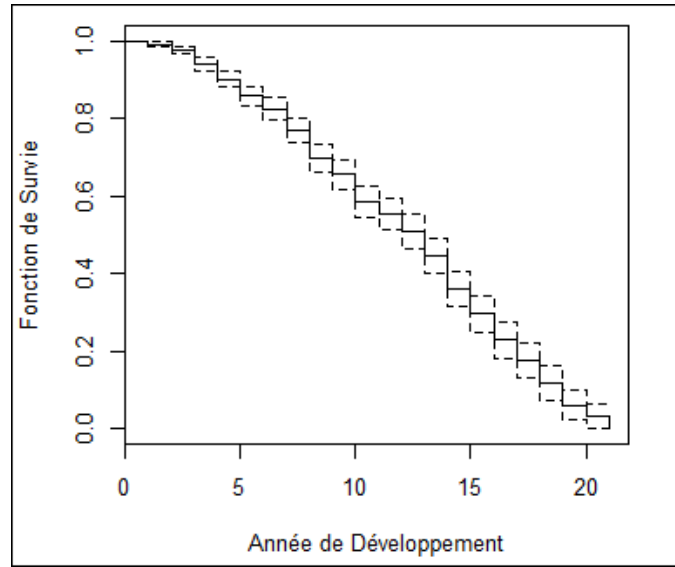


FIGURE 3.1 – L'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie de $T_{i,n}$ et son intervalle de confiance pontuel à 95%

vue). Nous avons observé que les ensembles $(\mathbf{I}_j)_{j=1}^n$ sont décroissants au cours du temps à cause des sinistres clos et "censurés". Nous y voyons très clairement ici, par exemple, entre l'année 1 et 2, la population se réduit de $836 - 795 = 41$ à cause d'un nombre de décès 7 et d'un nombre de pertes de vue 34.

Avec ces éléments, nous calculons $(\hat{S}(j))_{j=1}^n$. Les résultats sont exposés dans la colonne 6 et illustré par la Figure 3.1. Notons nous avons aussi déterminé une intervalle de confiance pour $S(j)$ à 95% par :

$$I_{95\%}[S(j)] = \left[\hat{S}(j) - 1,96 \hat{\sigma}[S(j)], \hat{S}(j) + 1,96 \hat{\sigma}[S(j)] \right] \quad (3.5)$$

où $\hat{\sigma}$ est un estimateur de l'écart-type de $\hat{S}(j)$ déterminé comme suit :

$$\hat{\sigma}^2[S(j)] = \widehat{\text{Var}}[\hat{S}(j)] = \hat{S}(j)^2 \sum_{j'=1}^j \frac{d_{j'}}{\text{card}(\mathbf{I}_{j'}) [\text{card}(\mathbf{I}_{j'}) - d_{j'}]} \quad (3.6)$$

Dans la colonne 7 et 8 du Tableau 3.2, nous calculons les quantités qui dérivent de $(\hat{S}(j))_{j=1}^n$. D'abord, l'estimateur de la fonction de répartition $\hat{F}(j) = 1 - \hat{S}_j$ de $T_{i,n}$ et la densité de probabilité $\hat{\mathbb{P}}(j) = \hat{F}(j) - \hat{F}(j-1)$ de $T_{i,n}$. Ce sont les $(\hat{\mathbb{P}}(j))_{j=1}^n$ que nous gardons pour la suite de l'étude. Elles sont illustrées par le Figure 3.2. À partir de cette probabilité estimée, nous pouvons estimer en moyenne un sinistre durent $\hat{\mathbb{E}}[T_{i,n}] = 11.9$ années.

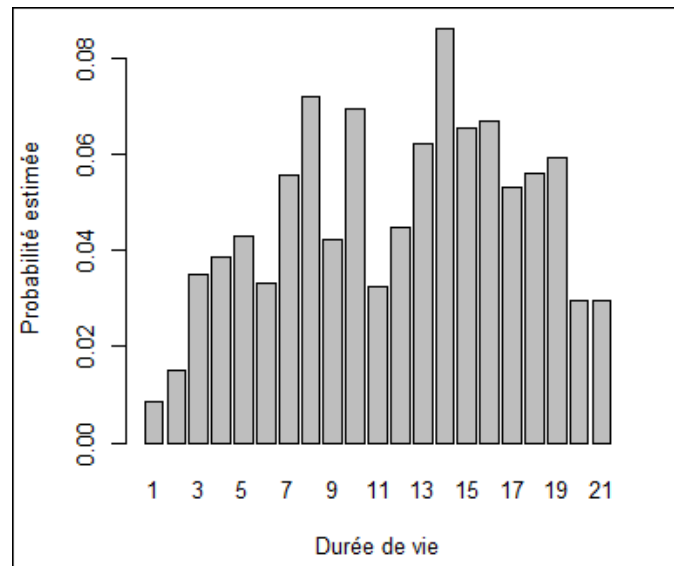


FIGURE 3.2 – La densité de probabilité estimée de $T_{i,n}$

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons bâti la première partie dans notre démarche pour construire les mesures de provision. Les processus d'états sont ramenés à la notion des variables d'âge ultimes qui sont équivalentes au niveau d'information générée est plus facile à manipuler. Nous avons montré que l'étude de ces variables est similaire à une étude de survie avec censure d'où l'utilisation de l'estimateur de Kaplan-Meier. La distribution estimée se trouvant dans la dernière colonne du Tableau 3.2 sera retenue pour la suite de l'étude.

Dans les deux chapitres suivants nous procéderons à la deuxième partie de la construction des mesures de provision : estimation des processus de règlements. Nous proposons dans ce rapport deux approches. La première présentée dans le Chapitre 4 est l'approche "dynamique markovienne" dans laquelle nous considérons les processus de règlements comme des processus de Markov avec une dynamique sous-jacente. Cette dynamique nous permet de déduire la distribution d'un règlement futur conditionnellement à l'information disponible et à partir de là, établir les provisions. Dans le Chapitre 5, nous présentons la deuxième approche appelée "modèles linéaires généralisés". Il s'agit d'imposer directement une distribution paramétrique sur les règlements et ensuite d'estimer les paramètres. Contrairement à la première approche comme nous allons voir, les modèles linéaires généralisés demande une analyse plus profonde sur la propriété d'invariance par changement de numéraire.

Chapitre 4

Processus de règlements - Dynamiques Markoviennes

L'estimation des processus de règlements constitue la deuxième partie de la construction des mesures de provision. Pour ce faire, dans ce chapitre, nous proposons la première approche dite "dynamiques markoviennes" qui s'inspire de la méthode de Mack Chain Ladder. Les processus de règlements sont considérés comme des processus markoviens qui possèdent une certaine dynamique sous-jacente. Nous allons voir que grâce à la source des données individuelles abondantes, nous pouvons dans un premier temps supposer implicitement la distribution des règlements et dans un second temps tester la validité de cette supposition ce qui n'était pas le cas avec la méthode de Mack. Après avoir estimé la distribution conditionnelle des règlements, nous établissons les mesures de provision. Nous discutons à la fin des possibilités d'étendre cette approche.

4.1 Formalisme

Un processus de règlement est essentiellement de même structure qu'une ligne de règlement du triangle de la méthode de Chain Ladder. Comme nous avons vu dans le Chapitre 1, Mack a considéré une ligne de règlement comme un processus markovien vérifiant la dynamique sous-jacente (1.8) sans préciser la distribution probabiliste. Nous allons aller dans cette direction mais en supposant implicitement la distribution des règlements. Ce changement est réalisé grâce à la source des données individuelles plus abondantes de celle fournie par le triangle des règlements, ce qui nous permet de tester la validité l'hypothèse sur la distribution.

Hypothèse 6. (Dynamique lognormale) *Soit $\mathbf{Y} = \{Y_i = (n_i, D_i \oplus X_i) | i \in \mathbf{I}\}$ l'ensemble de sinistres étudié, n est l'année actuelle. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. Les processus de règlements $(X_i)_{i \in \mathbf{I}}$ sont indépendants.
2. Pour tout $j \geq 1$, il existe des paramètres réels μ_j et $\sigma_j \geq 0$ tels que

$$U_{i,j} = \log \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2) \text{ pour tout } i \in \mathbf{I} \quad (4.1)$$

3. Pour chaque $i \in \mathbf{I}$ donné, les $(U_{i,j})_{j \geq 1}$ sont indépendants.

La relation (4.1) peut s'écrire autrement comme $X_{i,j+1}/X_{i,j} = \exp(U_{i,j})$ avec $U_{i,j} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ et μ_j, σ_j^2 dépendent seulement de l'année de développement j et non pas des indices de sinistre $i \in \mathbf{I}$. De cette façon, nous pouvons voir que nous avons supposé d'une manière sous-jacente qu'il y a une certaine tendance décrite par μ_j entre les règlements des années de développement consécutives $X_{i,j+1}$ et $X_{i,j}$, et une variation autour de cette tendance avec l'introduction du paramètre σ_j^2 . L'idée de Mack était très similaire. La différence fondamentale avec le cas présent réside dans le fait que nous explicitons la loi normale la loi normale de $U_{i,j}$.

À partir de la loi normale de $(U_{i,j})_{i \in \mathbf{I}, j \geq 1}$, nous pouvons, conditionnellement à l'information disponible à l'année actuelle, déterminer la loi des règlements. Ce propos est illustré par la proposition suivante :

Proposition 7. *Sous l'Hypothèse 6, à l'année actuelle n , pour chaque $i \in \mathbf{I}$, $j \geq j_i$, nous avons :*

$$X_{i,j} | \mathcal{F}_n = X_{i,j} | X_{i,j_i} \stackrel{d}{=} \log \mathcal{N}(\log X_{i,j} + \mu_{j_i,j}, \sigma_{j_i,j}^2) \quad (4.2)$$

en particulier,

$$\mathbb{E}[X_{i,j} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{i,j} | X_{i,j_i}] = X_{i,j_i} \exp\left(\mu_{j_i,j} + \frac{\sigma_{j_i,j}^2}{2}\right) \quad (4.3)$$

où $\mu_{i,j} = \sum_{j'=j_i}^{j-1} \mu_{j'}$ et $\sigma_{j_i,j}^2 = \sum_{j'=j_i}^{j-1} \sigma_{j'}^2$.

Démonstration. Comme $(U_{i,j})_{j \geq 1}$ sont indépendantes et normalement distribuées, alors toute combinaison linéaire de $(U_{i,j})_{j \geq 1}$ est aussi normalement distribuée. En particulier,

$$U_{i,j_i} + \dots + U_{i,j-1} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\left(\sum_{j'=j_i}^{j-1} \mu_{j'}, \sum_{j'=j_i}^{j-1} \sigma_{j'}^2\right) \quad (4.4)$$

Comme $U_{i,j} = \log X_{i,j+1} - \log X_{i,j}$, le côté gauche de l'équation (4.6) se simplifie et nous obtenons :

$$\log \frac{X_{i,j}}{X_{i,j_i}} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu_{j_i,j}, \sigma_{j_i,j}^2) \quad (4.5)$$

ce qui permet de conclure. □

La Proposition 7 nous confirme que notre idée est très proche de Chain Ladder. En effet, l'équation (4.3) peut se réécrire comme suit :

$$\mathbb{E}[X_{i,j}|\mathcal{F}_n] = X_{i,j_i} \prod_{j'=j_i}^{j-1} \exp\left(\mu_{j'} + \frac{\sigma_{j'}^2}{2}\right) \quad (4.6)$$

La valeur espérée d'un règlement futur conditionnellement à l'information disponible $\mathbb{E}[X_{i,j}|\mathcal{F}_n]$ est exprimée comme le produit du dernier règlement connu et les facteurs $\exp(\mu_{j'} + \sigma_{j'}^2/2)$ qui jouent exactement le même rôle que les facteurs de développement $\lambda_{j'}$ de Chain Ladder. De ce fait, dans ce chapitre, nous notons $\lambda_j = \exp(\mu_j + \sigma_j^2/2)$ pour tout $j \geq 1$.

4.2 Estimation des paramètres

4.2.1 Estimation

Les processus de règlements $(X_i)_{i \in \mathbf{I}}$ étant indépendants, alors pour $j \geq 1$ donné, $(U_{i,j})_{i \in \mathbf{I}}$ sont aussi indépendantes. (μ_j, σ_j^2) sont alors essentiellement l'espérance et la variance des variables aléatoires normales indépendantes $(U_{i,j})_{i \in \mathbf{I}}$. Il suffit donc d'employer les estimateurs standards pour ce cadre gaussien sur les observations disponibles. Il faut noter que nous observons $U_{i,j}$ si et seulement si nous observons le règlement $X_{i,j+1}$, c'est-à-dire, si et seulement si l'année de développement du dernier règlement du sinistre Y_i est supérieur à $j + 1$ ou encore $i \in \mathbf{I}_{j+1} = \{i \in \mathbf{I} | t_i \geq j + 1\}$. Les ensembles $(\mathbf{I}_j)_{j \geq 1}$ sont déjà évoqués dans le chapitre précédent. Rappelons ils sont décroissants et leur cardinal est donné par le Tableau 3.1.

Ainsi, pour chaque $j \geq 1$, nous observons $U_{i,j}$ pour $i \in \mathbf{I}_{j+1}$. L'estimateur de μ_j, σ_j est donc donné par :

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{\text{card}(\mathbf{I}_{j+1})} \sum_{i \in \mathbf{I}_{j+1}} U_{i,j} \quad (4.7)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{\text{card}(\mathbf{I}_{j+1}) - 1} \sum_{i \in \mathbf{I}_{j+1}} (U_{i,j} - \hat{\mu}_j)^2 \quad (4.8)$$

Ce sont deux estimateurs traditionnellement utilisés pour le cas gaussien. Ils ont des propriétés suivantes :

Proposition 8. *Sous l'Hypothèse 6, les estimateurs $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j^2)_{j \geq 1}$ vérifient :*

1. *Ils sont sans biais.*
2. *Pour tout $j \geq 1$, $\hat{\mu}_j$ est indépendant de $\hat{\sigma}_j^2$.*

| j | $\hat{\mu}_j$ | $\hat{\sigma}_j^2$ | j | $\hat{\mu}_j$ | $\hat{\sigma}_j^2$ |
|-----|----------------|--------------------|-----|----------------|--------------------|
| 1 | 0,547 ± 0,027 | 0.153 ± 0,015 | 11 | -0,076 ± 0,023 | 0,030 ± 0,006 |
| 2 | 0,473 ± 0,024 | 0.117 ± 0,012 | 12 | -0,123 ± 0,024 | 0,026 ± 0,005 |
| 3 | 0,425 ± 0,026 | 0.118 ± 0,013 | 13 | -0,153 ± 0,024 | 0,022 ± 0,005 |
| 4 | 0,327 ± 0,024 | 0.092 ± 0,010 | 14 | -0,161 ± 0,026 | 0,018 ± 0,005 |
| 5 | 0,247 ± 0,024 | 0.079 ± 0,009 | 15 | -0,197 ± 0,029 | 0,014 ± 0,005 |
| 6 | 0,165 ± 0,023 | 0.068 ± 0,009 | 16 | -0,250 ± 0,035 | 0,013 ± 0,006 |
| 7 | 0,086 ± 0,021 | 0.049 ± 0,007 | 17 | -0,237 ± 0,047 | 0,014 ± 0,008 |
| 8 | 0,008 ± 0,022 | 0.047 ± 0,007 | 18 | -0,261 ± 0,073 | 0,020 ± 0,015 |
| 9 | -0,017 ± 0,021 | 0.035 ± 0,006 | 19 | -0,324 ± 0,088 | 0,008 ± 0,011 |
| 10 | -0,060 ± 0,023 | 0.036 ± 0,006 | 20 | -0,426 ± 0,000 | 0,000 ± 0,000 |

Tableau 4.1 – Valeur de $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j^2)_{j \geq 1}$ avec $j = 1, 2, \dots, 20$

3. Les $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j^2)_{j \geq 1}$ sont indépendants.

4. Ils ne dépendent pas de l'unité monétaire de $(X_{i,j})_{i \in \mathbf{I}, j \geq 1}$.

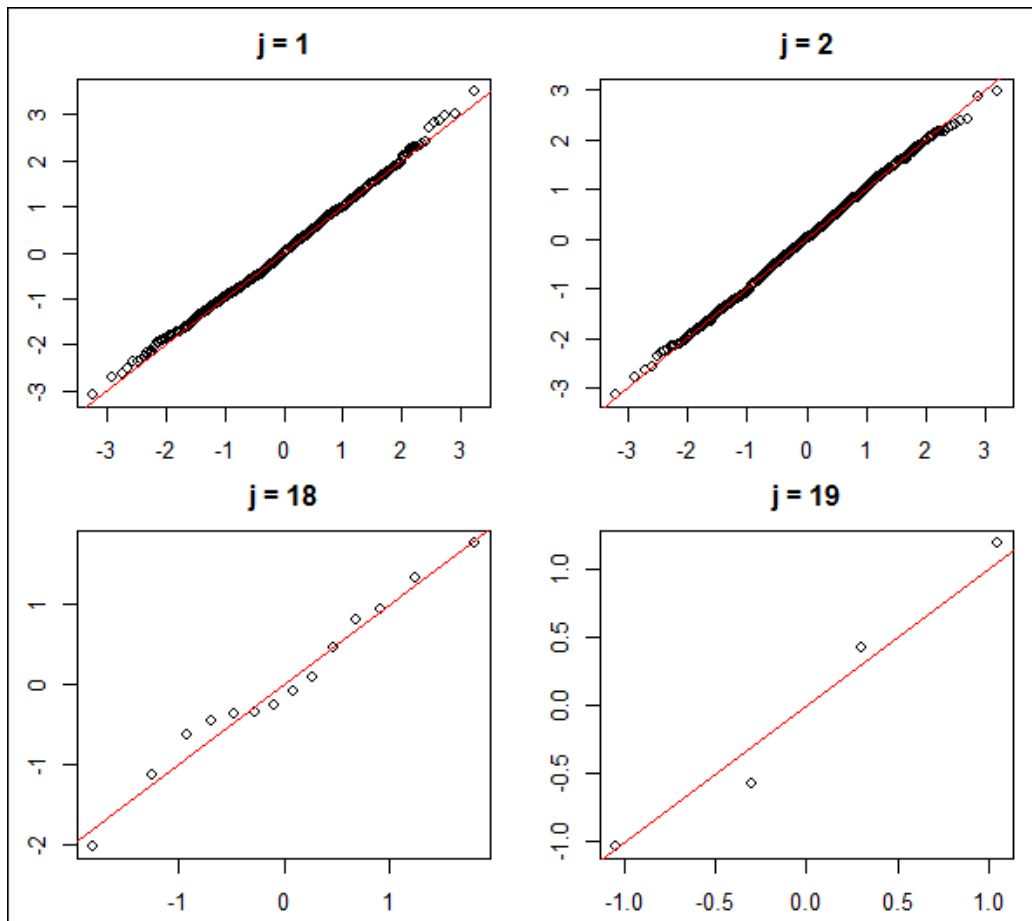
Démonstration. Les deux premières propriétés sont des propriétés connues pour l'estimateur gaussien. La démonstration détaillée se trouve dans Krishnamoorthy (2006). La troisième vient du fait que les processus de règlements $(X_i)_{i \in \mathbf{I}}$ sont indépendants entre eux. En fin, comme $U_{i,j} = \log(X_{i,j+1}/X_{i,j})$ ne dépend pas de l'unité monétaire de $(X_{i,j})_{i \in \mathbf{I}, j \geq 1}$, alors $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j^2)$ ne l'est non plus. \square

Par ailleurs, nous pouvons aussi obtenir les intervalles de confiances à 95% pour les paramètres (μ_j, σ_j^2) (c.f. Krishnamoorthy 2006) :

$$I_{95\%}(\mu_j) = \left[\hat{\mu}_j - 1,96 \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{\text{card}(\mathbf{I}_{j+1})}}, \hat{\mu}_j + 1,96 \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{\text{card}(\mathbf{I}_{j+1})}} \right] \quad (4.9)$$

$$I_{95\%}(\sigma_j^2) = \left[\hat{\sigma}_j^2 - 1,96 \frac{\sqrt{2}\hat{\sigma}_j^2}{\sqrt{\text{card}(\mathbf{I}_{j+1})}}, \hat{\sigma}_j^2 + 1,96 \frac{\sqrt{2}\hat{\sigma}_j^2}{\sqrt{\text{card}(\mathbf{I}_{j+1})}} \right] \quad (4.10)$$

Les résultats numériques sont présentés dans le Tableau 4.1. Par les formules (4.9-10) nous voyons bien que l'effet du cardinal de \mathbf{I}_{j+1} sur la longueur de l'intervalle de confiance des paramètres est direct. Plus j est grand, plus l'effectif de \mathbf{I}_{j+1} est petit et plus la longueur de l'intervalle de confiance pour (μ_j, σ_j^2) est grande. Cela implique une incertitude grandissante pour les grandes valeurs de j , par exemple, 17, 18 et 19. Par conséquence, nous ne pouvons estimer avec précision les règlements en ces grandes années de développement. Heureusement, l'impact de cette incertitude sur les provisions surtout la provision ultime est compensée par la probabilité de survie faible des sinistres en grandes années de développement.

FIGURE 4.1 – QQ-plot, $j = 1, 2, 18, 19$

4.2.2 Qualité d'ajustement

Si l'hypothèse sur la normalité de la distribution de $(U_{i,j})_{i \in \mathbf{I}, j \geq 1}$ est vérifiée, alors $(U_{i,j} - \hat{\mu}_j) / \hat{\sigma}_j$ doit suivre une loi normale centrée réduite. Pour le tester, on regarde le QQ-plot de ces deux lois. Le résultat pour $j = 1, 2, 18, 19$ est montré dans la Figure 4.1. Nous constatons que pour les valeurs $j = 1, 2$ les points noirs coïncide relativement avec la diagonale ce qui veut dire nous avons une très grande précision. Pour $j = 18, 19$, comme prévu précédemment, la précision est moins importante mais nous voyons que les points s'alignent relativement proche du diagonal. Nous pouvons conclure que l'hypothèse sur la normalité des $(U_{i,j})_{i \in \mathbf{I}, j \geq 1}$ est valide.

4.2.3 Estimation des Règlements

Après avoir obtenu les estimateurs $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j^2)_{j \in \mathbf{I}}$, nous pouvons, à ce stade, grâce à la Proposition 5, donner une estimation aux règlements futurs des sinistres. En effet, pour chaque $i \in \mathbf{I}$, posons :

$$\hat{X}_{i,j} | \mathcal{F}_n \stackrel{d}{=} \log \mathcal{N}(\hat{\mu}_{j_i,j} + \log X_{i,j_i}, \hat{\sigma}_{j_i,j}^2) \quad \text{pour tout } j_i < j \leq n \quad (4.11)$$

où $(\hat{\mu}_{j_i,j}, \hat{\sigma}_{j_i,j}^2)$ est l'estimateur de $(\mu_{j_i,j}, \sigma_{j_i,j}^2)$ défini par $\hat{\mu}_{j_i,j} = \sum_{j'=j_i}^{j-1} \hat{\mu}_{j'}$ et $\hat{\sigma}_{j_i,j}^2 = \sum_{j'=j_i}^{j-1} \hat{\sigma}_{j'}^2$. En particulier, nous pouvons estimer l'espérance et la variance de $X_{i,j}$ sachant \mathcal{F}_n :

$$\widehat{\mathbb{E}}[X_{i,j} | \mathcal{F}_n] = X_{i,j_i} \exp(\hat{\mu}_{j_i,j} + \hat{\sigma}_{j_i,j}^2/2) \quad (4.12)$$

$$\widehat{\text{Var}}[X_{i,j} | \mathcal{F}_n] = X_{i,j_i}^2 [\exp(\hat{\sigma}_{j_i,j}^2) - 1] \exp(2\hat{\mu}_{j_i,j} + \hat{\sigma}_{j_i,j}^2) \quad (4.13)$$

Un des points forts de ce modèle est le fait qu'il assure la propriété d'invariance par changement de numéraire d'une manière évidente. Commençons d'abord par prouver que les règlements estimés la vérifient.

Proposition 9. *Le modèle de dynamique markovienne lognormale décrite par l'Hypothèse 6 avec la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance produit des règlements estimés indépendants de l'unité de monnaie utilisée. Concrètement, pour toute $c > 0$ et pour tout $j > j_i$:*

$$c\widehat{X}_{i,j} | \mathcal{F}_n(c\mathbf{Y}) \stackrel{d}{=} c \left[\hat{X}_{i,j} | \mathcal{F}_n(\mathbf{Y}) \right] \quad (4.14)$$

Démonstration. Selon (4.11), pour tout $j > j_i$ nous avons :

$$c \left[\hat{X}_{i,j} | \mathcal{F}_n(\mathbf{Y}) \right] \stackrel{d}{=} \log \mathcal{N}(\hat{\mu}_{j_i,j}(\mathbf{Y}) + \log X_{i,j_i} + \log c, \hat{\sigma}_{j_i,j}^2(\mathbf{Y})) \quad (4.15)$$

$$c\widehat{X}_{i,j} | \mathcal{F}_n(c\mathbf{Y}) \stackrel{d}{=} \log \mathcal{N}(\hat{\mu}_{j_i,j}(c\mathbf{Y}) + \log cX_{i,j_i}, \hat{\sigma}_{j_i,j}^2(c\mathbf{Y})) \quad (4.16)$$

Or, par la Proposition 8, nous avons montré que les estimateurs $(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j^2)_{j \geq 1}$ sont constants par rapport à l'unité monétaire utilisée, ce qui implique que nous avons $(\hat{\mu}_{j_i,j}(\mathbf{Y}), \hat{\sigma}_{j_i,j}^2(\mathbf{Y})) = (\hat{\mu}_{j_i,j}(c\mathbf{Y}), \hat{\sigma}_{j_i,j}^2(c\mathbf{Y}))$ d'où la conclusion. \square

Cette proposition nous montre que le choix de la dynamique sous-jacente est crucial pour satisfaire la propriété d'invariance par changement de numéraire. Dans notre cas, la dynamique est basée sur le rapport entre les règlements consécutifs rend les paramètres indépendants de l'unité monétaire ce qui n'était pas le cas avec la méthode de Mack comme montré la Proposition 5.

4.3 Mesures de provision

Après avoir obtenu l'estimation des processus d'états et des processus de règlements, nous pouvons, à ce stade, combiner tous ces éléments pour construire entièrement les provisions et étudier leur propriété. Nous commençons d'abord par la mesure de provision à horizon 1 an et terminons par la mesure de provision ultime.

4.3.1 Mesure de provision à horizon 1 an

Dans la section précédente, nous avons réussi à estimer la variable conditionnelle $X_{i,j}|\mathcal{F}_n$ par $\hat{X}_{i,j}|\mathcal{F}_n$. La mesure de provision à horizon 1 an déroule naturellement comme suit :

$$\hat{R}^1[Y_i|\mathcal{F}_n] = D_{i,j_i+1}\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n \quad \text{pour tout } Y_i \in \mathbf{Y} \quad (4.17)$$

$$\hat{R}^1[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n] = \sum_{Y_i \in \mathbf{A}} \hat{R}^1[Y_i|\mathcal{F}_n] \quad \text{pour tout } \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Y} \quad (4.18)$$

Cette écriture nous permet de déduire aisément que :

Proposition 10. *La mesure de provision à horizon 1 an définie selon les équations (4.17-18) est une mesure de provision cohérente.*

Démonstration. La propriété d'additivité est évidente. Pour la propriété de positivité, il suffit de remarquer que la variable conditionnelle $\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n$ suit une loi lognormale. Enfin, pour la propriété d'invariance par changement de numéraire, soit c une constante positive quelconque. Alors, d'après la Proposition 9, pour tout $Y_i \in \mathbf{Y}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{R}^1[cY_i|\mathcal{F}_n(c\mathbf{Y})] &= D_{i,j_i+1}c\widehat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n(c\mathbf{Y}) \\ &= cD_{i,j_i+1}\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n(\mathbf{Y}) \\ &= c\hat{R}^1[Y_i|\mathcal{F}_n(\mathbf{Y})] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Par la propriété d'additivité de \hat{R}^1 nous déduisons que pour tout $\mathbf{A} \in \mathbf{Y}$:

$$\hat{R}^1[c\mathbf{A}|\mathcal{F}_n(c\mathbf{Y})] = c\hat{R}^1[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n(\mathbf{Y})] \quad (4.20)$$

ce qui permet de conclure. \square

Il va sans dire que parmi les ensembles de sinistres pour lesquels nous voulons estimer la provision à horizon 1 an, c'est l'ensemble \mathbf{Y} qui nous intéresse le plus.

Avant d'étudier sa distribution, calculons d'abord l'espérance et l'écart-type de $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$:

$$\mathbb{E}[\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] = \sum_{D_{i,j_i+1}=1} \mathbb{E}[\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n] \quad (4.21)$$

$$\text{Var}[\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] = \sum_{D_{i,j_i+1}=1} \text{Var}[\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n] \quad (4.22)$$

Notons que l'équation (4-22) est due à l'indépendance entre les variables aléatoires conditionnelles $\hat{X}_{i,j_i+1}|\mathcal{F}_n$. Appliquons les équations (4.21-22) à nos données, nous obtenons les résultats suivants en comparaison avec ceux de Chain Ladder :

| | Notre méthode | Chain Ladder bootstrap |
|------------|---------------|------------------------|
| Espérance | 44 805 470 | 48 194 270 |
| Écart-type | 721 236 | 1 246 770 |

Tableau 4.2 – L'espérance et l'écart-type de la mesure de provision à horizon 1 de l'ensemble de sinistres

Notre méthode reproduit un résultat similaire que Chain Ladder en terme de provision espérée avec une variation moins importante. Reppellons que notre méthode est basée sur une base de données beaucoup plus abondantes que Chain Ladder ce qui nous a permis de tester la validité du modèle d'une manière plus convaincante. Par ailleurs, notre méthode permet d'obtenir la distribution de la mesure de provision à horizon 1 an. En effet, $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ est essentiellement une somme des variables aléatoires lognormales indépendantes. Avec un nombre de sinistres important, nous pouvons appliquer le théorème central limite avec la condition de Lyapunov pour approximer asymptotiquement $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ par la loi normale. Nous rappelons ce théorème :

Théorème 2. Soit $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\bar{k}}$ une suite de variables aléatoire indépendantes avec Z_k est de moyenne μ_k et de variance σ_k^2 . Définissons $s_k^2 = \sum_{k'=1}^k \sigma_{k'}^2$. S'il existe $\delta > 0$ tel que la condition de Lyapunov :

$$\lim_{\bar{k} \rightarrow \infty} \frac{1}{s_{\bar{k}}^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{\bar{k}} \mathbb{E} \left[|Z_k - \mathbb{E}[Z_k]|^{2+\delta} \right] = 0 \quad (4.23)$$

est vérifiée, alors la somme de $(Z_k - \mu_k)/s_k$ converge en distribution à une variable aléatoire normale centrée réduite quand k tend vers infinité :

$$\frac{1}{s_k} \sum Z_k - \mu_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.24)$$

Pour pouvoir appliquer ce théorème à notre as, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1. Soit $Z_1, Z_2, \dots, Z_{\bar{k}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour chaque $k = 1, 2, \dots, \bar{k}$, Z_k suit une loi lognormale de paramètre (μ_k, σ_k) avec $\mu_k, \sigma_k > 0$ et (μ_k, σ_k) appartenant à un ensemble de cardinal fini \mathbf{P} . Posons $s_{\bar{k}}^2 = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \text{Var}[Z_k]$. Alors nous avons,

$$\lim_{\bar{k} \rightarrow \infty} \frac{1}{s_{\bar{k}}^4} \sum_{k=1}^{\bar{k}} \mathbb{E} [(Z_k - \mathbb{E}[Z_k])^4] = 0 \quad (4.25)$$

Démonstration. Posons $\mathbf{M} = \{\mu | (\mu, \sigma) \in \mathbf{P}\}$ et $\mathbf{S} = \{\sigma | (\mu, \sigma) \in \mathbf{P}\}$. Comme \mathbf{P} est de cardinal fini, \mathbf{M}, \mathbf{S} le sont aussi. Cela implique, il existe des valeurs minimaux $\underline{\mu} = \min(\mathbf{M}) > 0$ et $\underline{\sigma} = \min(\mathbf{S}) > 0$ de ces deux ensembles. Pour chaque $k = 1, 2, \dots, \bar{k}$, Z_k suit la loi $\log \mathcal{N}(\mu_k, \sigma^2)$, alors nous avons :

$$\mathbb{E} [(Z_k - \mathbb{E}[Z_k])^4] = \sigma_k^4 (e^{4\sigma_k^2} + 2e^{3\sigma_k^2} + 3e^{2\sigma_k^2} - 3) \quad (4.26)$$

Par ailleurs, comme $\text{Var}[Z_k] = (e^{\sigma_k^2} - 1)e^{2\mu_k + \sigma_k^2}$, nous avons $\text{Var}[Z_k] \geq (e^{\underline{\sigma}^2} - 1)e^{2\underline{\mu} + \underline{\sigma}^2}$. D'où

$$s_{\bar{k}}^4 \leq \bar{k}^2 (e^{\underline{\sigma}^2} - 1)^2 e^{4\underline{\mu} + 2\underline{\sigma}^2} \quad (4.27)$$

En combinant (4.24-25), nous avons :

$$\frac{1}{s_{\bar{k}}^4} \sum_{k=1}^{\bar{k}} \mathbb{E} [(Z_k - \mathbb{E}[Z_k])^4] \leq \frac{\underline{\sigma}^4 (e^{4\underline{\sigma}^2} + 2e^{3\underline{\sigma}^2} + 3e^{2\underline{\sigma}^2} - 3)}{\bar{k} (e^{\underline{\sigma}^2} - 1)^2 e^{4\underline{\mu} + 2\underline{\sigma}^2}} \quad (4.28)$$

qui tend vers 0 quand \bar{k} tend vers ∞ . \square

$\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ est une somme des variables lognormales indépendantes dont le paramètre est positif et appartient à un ensemble de cardinal fini $\{(\hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j | 1 \leq j \leq n)\}$. Nous pouvons alors appliquer le lemme 1 qui n'est rien d'autre que la condition de Lyapunov avec $\delta = 2$. Alors, en vertu du théorème central limite avec condition de Lyapunov, nous déduisons que $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ suit approximativement la loi normale d'espérance $\mathbb{E}[\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]]$ et de variance $\text{Var}[\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]]$. Notre application numérique donne :

$$\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(44\,805\,470, 721\,236^2) \quad (4.29)$$

Il existe une autre façon moins rigoureuse pour estimer la distribution de $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$. Elle consiste à dire que comme $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ est une somme des variables

aléatoires lognormales, alors elle est approximativement lognormale. Plus précisément, $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \tilde{R}^1$ où \tilde{R}^1 suit une loi lognormale de paramètre (μ, σ^2) telle que les moments d'ordre 1 et 2 de $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ et \tilde{R}^1 coïncident :

$$\mathbb{E}[\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[\tilde{R}^1] \quad (4.30)$$

$$\text{Var}[\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] = \text{Var}[\tilde{R}^1] \quad (4.31)$$

À partir de là, nous pouvons calculer $(\mu, \sigma) = (17, 618, 0, 016)$ ce qui implique que :

$$\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \log \mathcal{N}(17, 618, 0, 016) \quad (4.32)$$

La distribution de $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ étant estimée, nous pouvons établir le capital requis lié à l'ensemble de sinistre \mathbf{Y} qui n'est rien d'autre que le quantile 99,5% de la distribution de $\hat{R}^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$.

| | Approx. Normale | Approx. Lognormale |
|-------------|-----------------|--------------------|
| VaR à 99,5% | 46 663 251 | 46 696 129 |

Tableau 4.3 – Le capital requis

Notre but final est atteint. Maintenant passons à l'étude avec la provision à horizon ultime.

4.3.2 Mesure de provision à horizon ultime

D'une manière similaire que la mesure de provision à horizon 1 an, nous pouvons écrire la mesure de provision ultime comme suit :

$$\hat{R}^u[\mathbf{Y}_i|\mathcal{F}_n] = \sum_{j=j_i+1}^{\hat{T}_{i,j}|\mathcal{F}_n} \hat{X}_{i,j}|\mathcal{F}_n \quad \text{pour tout } \mathbf{Y}_i \in \mathbf{Y} \quad (4.33)$$

$$\hat{R}^u[\mathbf{A}|\mathcal{F}_n] = \sum_{\mathbf{Y}_i \in \mathbf{A}} \hat{R}^u[\mathbf{Y}_i|\mathcal{F}_n] \quad \text{pour tout } \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Y} \quad (4.34)$$

Par les mêmes raisonnements qu'avec la mesure de provision à horizon 1 an, nous pouvons montrer facilement que :

Proposition 11. *La provision à horizon ultime selon les équations (4.30-31) est une mesure de provision cohérente.*

La difficulté majeure pour calculer l'espérance et la variance de la mesure de provision à horizon ultime d'un ensemble de sinistres réside dans le fait qu'elle

est écrite comme la somme des variables aléatoires et le nombre de variables aléatoires lui-même est une variable aléatoire. En effet, le nombre de termes du côté droit de l'équation (4.30) est :

$$(\hat{T}_{i,j}|\mathcal{F}_n) - j_i = (\hat{T}_{i,j}|\hat{T}_{i,j} > j_i) - j_i \quad (4.35)$$

ou $\hat{T}_{i,n}$ est l'estimateur de variable d'âge ultime $T_{i,n}$ suivant la distribution \hat{P} déduite dans le chapitre précédente. De ce fait, il n'est pas direct de déduire l'espérance et la variance de $\hat{R}^u[Y_i|\mathcal{F}_n]$. Pour ce faire, nous allons montrés d'abord le lemme suivant :

Lemme 2. Soient \bar{t} un entier strictement positif et T une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{T} = \{1, 2, \dots, \bar{t}\}$. Soit $U_1, U_2, \dots, U_{\bar{t}}$ une suite de variables aléatoires normales indépendantes de paramètre $(\mu_t, \sigma_t^2)_{t=1}^{\bar{t}}$. Pour chaque $t \in \mathbf{T}$, définissons $Z_t = \exp(\log z_0 + U_1 + \dots + U_t)$ où z_0 est une valeur positive et posons $R_T = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_T$. Alors, nous avons :

$$\mathbb{E}[Z_t] = z_0 \exp(\mu_{1:t} + \sigma_{1:t}^2/2) \quad (4.36)$$

$$\mathbb{E}[R_T] = \sum_{t=1}^{\bar{t}} \mathbb{P}[T \geq t] \mathbb{E}[Z_t] \quad (4.37)$$

$$\text{Var}[R_T] = \sum_{(i,j) \in \mathbf{T}^2} \mathbb{P}[T \geq i \vee j] (\exp(\sigma_{1:i \wedge j}^2) - \mathbb{P}[T \geq i \wedge j]) \mathbb{E}[Z_i] \mathbb{E}[Z_j] \quad (4.38)$$

où $\mu_{1:t} = \sum_{t'=1}^t \mu_{t'}$, $\sigma_{1:t}^2 = \sum_{t'=1}^t \sigma_{t'}^2$, $i \wedge j = \min i, j$ et $i \vee j = \max(i, j)$.

Démonstration. D'après l'hypothèse sur la lognormalité et l'indépendance des $(U_t)_{t=1}^{\bar{t}}$, nous avons déduisons l'espérance de Z_t :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t] &= z_0 \prod_{t'=1}^t \mathbb{E}[\exp U_{t'}] \\ &= z_0 \exp(\mu_{1:t} + \sigma_{1:t}^2/2) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Pour $i, j \in \mathbf{T}$, notons $i \wedge j = \min(i, j)$ et $i \vee j = \max(i, j)$. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_i Z_j] &= z_0^2 \prod_{t=1}^{i \wedge j} \mathbb{E}[\exp 2U_t] \prod_{t=i \wedge j+1}^{i \vee j} \mathbb{E}[\exp U_t] \\ &= \exp(\sigma_{1:i \wedge j}^2) \mathbb{E}[Z_i] \mathbb{E}[Z_j] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Calculons maintenant l'espérance de R_T :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[R_T] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[R_T|T]] \\
 &= \sum_{t=1}^{\bar{t}} \mathbb{P}[T = t] \sum_{t'=1}^t \mathbb{E}[Z_{t'}] \\
 &= \sum_{t=1}^{\bar{t}} \mathbb{P}[T \geq t] \mathbb{E}[Z_t] \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Par définition, la variance de R_T est écrite comme $\text{Var}[R_T] = \mathbb{E}[R_T^2] - \mathbb{E}[R_T]^2$. Comme $\mathbb{E}[R_T]$ est donnée par l'équation (4.35), il suffit de calculer $\mathbb{E}[R_T^2]$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[R_T^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[R_T^2|T]] \\
 &= \sum_{t=1}^{\bar{t}} \mathbb{P}[T = t] \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t'=1}^t Z_{t'} \right)^2 \right] \\
 &= \sum_{t=1}^{\bar{t}} \mathbb{P}[T \geq i \vee j] \sum_{1 \leq i, j \leq t} \mathbb{E}[Z_i Z_j] \\
 &= \sum_{(i,j) \in \mathbf{T}^2} \mathbb{P}[T \geq i \vee j] \exp(\sigma_{1:i \wedge j}^2) \mathbb{E}[Z_i] \mathbb{E}[Z_j] \tag{4.42}
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que :

$$\text{Var}[R_T] = \sum_{(i,j) \in \mathbf{T}^2} \mathbb{P}[T \geq i \vee j] (\exp(\sigma_{1:i \wedge j}^2) - \mathbb{P}[T \geq i \wedge j]) \mathbb{E}[Z_i] \mathbb{E}[Z_j] \tag{4.43}$$

Les équation (4.36), (4.38) et (4.40) permettent de conclure. \square

Appliquons le Lemme 2 à notre problème. Selon (4.11), les variables aléatoires conditionnelles $(\hat{X}_{i,j}|\mathcal{F}_n)_{j>j_i}$ dans l'expression de $R^u[Y_i|\mathcal{F}_n]$ suivent la loi lognormale de paramètre $(\hat{\mu}_j + \log X_{i,j}, \hat{\sigma}_j^2)_{j>j_i}$. Le nombre de termes $(\hat{T}_{i,j}|\hat{T}_{i,j} > j_i) - j_i$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n - j_i\}$ donc la distribution est connue $\mathbb{P}[(\hat{T}_{i,j}|\hat{T}_{i,j} > j_i) - j_i = t] = \mathbb{P}[\hat{T}_{i,j} = t + j_i|\hat{T}_{i,j} > j_i]$. Le Lemme 2 nous donne donc l'espérance et la variance de $R^u[Y_i|\mathcal{F}_n]$. Par ailleurs, grâce à l'indépendance entre les processus de règlements, nous déduisons :

$$\mathbb{E}[R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] = \sum_{D_{i,j_i+1}=1} \mathbb{E}[R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] \tag{4.44}$$

$$\text{Var}[R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] = \sum_{D_{i,j_i+1}=1} \text{Var}[R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]] \tag{4.45}$$

Appliquons ces formules à nos données, nous trouvons que l'espérance et la variance de $R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ valent respectivement 364 184 200 et $19\,558\,050^2$. Il s'agit donc un résultat relativement proche de celui obtenu par Chain Ladder avec une meilleure précision d'estimation en terme de variance.

| | Notre méthode | Chain Ladder bootstrap |
|--|---------------|------------------------|
| Espérance | 364 184 200 | 387 618 500 |
| Écart-type | 19 558 050 | 25 495 360 |
| VaR à 99,5% ($\stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}$) | 414 562 400 | |
| VaR à 99,5% ($\stackrel{d}{\approx} \log \mathcal{N}$) | 417 569 829 | |

Tableau 4.4 – L'espérance et l'écart-type de la mesure de provision à horizon ultime de l'ensemble de sinistres

Suivons le même schéma que la section précédente, nous pouvons appliquer le théoème centrale limite pour déduire que $R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]$ est approximativement la loi normale de moyenne $\mathbb{E}[R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]]$ et de variance $\text{Var}[R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n]]$. Nous ne démontrons pas concrètement ici car les calculs sont relativement lourds mais l'esprit de la preuve reste la même qu'avec la mesure de provision à horizon 1 an. Par ailleurs, nous pouvons aussi faire un approximation lognormale. Numériquement, les deux approches nous donnent :

$$R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(364\,184\,200, 19\,558\,050^2) \quad (4.46)$$

$$R^u[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \log \mathcal{N}(19,713; 0.016^2) \quad (4.47)$$

Cette approximation nous permet de déduire la VaR à 99,5%. Les résultats sont exposés dans le Tableau 4.4.

4.4 Extension du modèle

4.4.1 Risque de taux

Nous avons vu tout au long de ce chapitre la convenance de la dynamique lognormale qui représente plusieurs avantages au niveau d'estimation des paramètres et des distributions des provisions d'un ensemble de sinistres. Par ailleurs, la distribution lognormale permet de prendre en compte d'autres facteurs de nature financière comme le taux d'intérêt. Nous avons défini au Chapitre 3 les provisions comme la somme des flux monétaires futurs actualisés par un taux d'actualisation déterministe. Avec la dynamique lognormale, nous pouvons même utiliser un taux stochastique ce qui est plus réaliste et plus prudent en terme de risk management.

Concrètement, soit r^c un taux continu qui est une variable aléatoire normale et Y_i un sinistre en cours. Pour $j > j_i$, le flux monétaire à l'année de déroulement j actualisé est :

$$\frac{X_{i,j}}{\exp(r^c(j - j_i))} \quad (4.48)$$

qui est lui-même de distribution lognormale. Par conséquent, le fait de prendre en compte un taux d'intérêt stochastique ne complique pas notre situation.

4.4.2 Dynamiques markoviennes

La dynamique lognormale est seulement un cas particulier des dynamiques markoviennes. Elle peut très bien fonctionner sur une base de données et ne pas fonctionner sur une autre de nature différente. Cela nous suggère de construire une dynamique qui correspond aux propriétés intrinsèques des données en question. D'une manière générale, une dynamique markovienne dans le cadre des processus de règlements peut être résumé par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 7. (Dynamiques markoviennes) Soient $\mathbf{Y} = \{Y_i = (n_i, D_i \oplus X_i) | i \in \mathbf{I}\}$ l'ensemble de sinistres étudié, n est l'année actuelle, \mathbb{P}^Θ une famille de distribution paramétrique. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. Les processus de règlements $(X_i)_{i \in \mathbf{I}}$ sont indépendants.
2. Pour tout $j \geq 1$, il existe des paramètres réels $(\theta_j)_{j \geq 1} \in \Theta$ tels que :

$$U_{i,j} = f(X_{i,j}; X_{i,j+1}) \stackrel{d}{=} \mathbb{P}^{\theta_j} \quad (4.49)$$

3. Pour chaque $i \in \mathbf{I}$ donné, les $(U_{i,j})_{j \geq 1}$ sont indépendants.

La fonction $f(X_{i,j}; X_{i,j+1})$ et la famille de distribution \mathbb{P}^Θ jouent un rôle primordial dans ce type de modèle. Pour espérer que le modèle va aboutir à des provisions cohérentes, il est souhaitable que les paramètres $(\theta_j)_{j \geq 1}$ soient indépendants de l'unité monétaire utilisée. Cela implique que $f(cX_{i,j}; cX_{i,j+1}) = f(X_{i,j}; X_{i,j+1})$ pour toute $c > 0$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la première approche pour modéliser les processus de règlements. Ces derniers sont considérés comme des processus markoviens vérifiant une dynamique sous-jacente. Cette dynamique lognormale nous a permis d'estimer les paramètres et d'obtenir les mesures de provisions cohérentes d'une manière relativement simple. Les résultats obtenus sont très similaires à ceux

de Chain Ladder, ce qui confirme l'exactitude de notre méthode. Par ailleurs, à partir des distributions estimées, nous pouvons déterminer les VaR à 99.5%, un niveau de risque qui ne peut être estimé avec les méthodes traditionnelles sur le triangle.

Dans le chapitre suivant, nous allons examiner la deuxième approche de modélisation des processus de règlements. Il s'agit des modèles linéaires généralisés.

Chapitre 5

Processus de Règlements - Modèles Linéaires Généralisés

En continuation du Chapitre 4, ce chapitre présente la deuxième approche pour étudier les processus de règlements en utilisant les modèles linéaires généralisés. Les règlements sont supposés indépendants et de la même famille de distribution mais avec de différents paramètres. Ces derniers sont estimés par la méthode de maximum de vraisemblance. Après avoir obtenu l'estimation de distribution des règlements, nous contruisons les mesures de provision dans le cadre des mesures de provision cohérentes.

5.1 Le modèle

Un ensemble de sinistres est essentiellement de même structure qu'un triangle de règlements avec une équivalence entre les règlements d'un sinistre et un ligne de règlements. Les notions de l'année d'origine ou des années de déroulement sont utilisées et portent tant d'importance dans la méthode Chain Ladder avec le triangle de règlement que dans la méthode ligne à ligne avec les données individuelles. Il est donc naturel de transposer l'idée de la méthode des modèles linéaires généralisés sur le triangle à notre ensemble de sinistre. Concrètement, considérons le modèle représenté par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 8. (Modèle linéaire généralisé) Soit $\mathbf{Y} = \{Y_i = (n_i, D_i \oplus X_i) | i \in \mathbf{I}\}$ l'ensemble de sinistres étudié, n est l'année actuelle. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. Les règlements $(X_{i,j})_{i \in \mathbf{I}, j \geq 1}$ sont indépendants.
2. Il existe des paramètres $\mu, \sigma > 0$, $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ et $(\beta_j)_{j \geq 1}$ tels que

$$X_{i,j} \stackrel{d}{=} \log \mathcal{N}(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma^2) \quad (5.1)$$

3. $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$.

De la même façon que le modèle linéaire généralisé appliqué au triangle des règlements, rôle de $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ et $(\beta_j)_{j \geq 1}$ est de capter la tendance des règlements aux années d'origine et aux années de déroulement. α_1 et β_1 sont fixés à zéros pour résoudre le problème de surparamétrisation. Notons qu'encore une fois, nous présentons le problème d'une manière explicite sans passer par la théorie des modèles linéaires généralisés.

L'Hypothèse 7 s'avère plus forte que l'Hypothèse 6 sur la dynamique lognormale. D'une part, nous supposons que les règlements sont indépendants dans ce modèle alors que nous avons seulement l'indépendance entre les lignes dans le modèle précédent. D'autre part, nous pouvons déduire la dynamique lognormale à partir de l'Hypothèse 7. Concrètement, pour $i \in \mathbf{I}, j \geq 1$, nous avons.

$$U_{i,j} = \log \frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu + \alpha_{j+1} - \alpha_j, 2\sigma^2) \quad (5.2)$$

Le terme $\mu + \alpha_{j+1} - \alpha_j$ qui ne dépend pas de l'année d'origine des sinistres joue donc exactement le même rôle que μ_j dans (4.1). Au niveau de variance, (5.2) représente une contrainte plus forte que (4.1) car $(U_{i,j})_{j \geq 1}$ possèdent la même variance $2\sigma^2$.

Passons à l'étape suivante pour estimer les paramètres

5.2 Estimation

5.2.1 Estimation des paramètres

À la date n , nous observons les règlements $X_{i,j}$ tels que $i \in \mathbf{I}$ et $j \geq t_i$. Étant donné que $X_{i,j}$ suit la loi lognormale de paramètre $(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma^2)$, nous pouvons écrire la vraisemblance du modèle :

$$L(\mathbf{Y}, \theta) = \prod_{i \in \mathbf{I}, j \leq t_i} \frac{1}{X_{i,j} \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(\log X_{i,j} - \mu - \alpha_{n_i} - \beta_j)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5.3)$$

L'estimateur de maximum de vraisemblance est la valeur de θ exprimée en fonction des valeurs observées des règlements $(X_{i,j})_{i \in \mathbf{I}, j \leq t_i}$ qui maximise $L(\mathbf{Y}, \theta)$ ou d'une manière équivalente son logarithme $l(\mathbf{Y}, \theta) = \log L(\mathbf{Y}, \theta)$. Concrètement,

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} l(\mathbf{Y}, \theta) \quad (5.4)$$

avec

$$l(\mathbf{Y}, \theta) = - \sum_{i \in \mathbf{I}, j \leq t_i} \left[\frac{(\log X_{i,j} - \mu - \alpha_{n_i} - \beta_j)^2}{2\sigma^2} + \log X_{i,j} + \log \sigma + \frac{\log 2\pi}{2} \right] \quad (5.5)$$

Afin de maximiser $l(\mathbf{Y}, \theta)$, nous la dérivons par rapport à chaque composante de θ sauf α_1, β_1 pour ensuite obtenir les conditions de premier ordre. Le fait que α_1, β_1 sont fixés à 0 pour faire face au problème de surparamétrisation assure que les conditions de premier ordre ont unique solution. Les conditions de premier ordre par rapport à :

$$\mu : \sum_{i \in \mathbf{I}, j \leq t_i} (\log X_{i,j} - \mu - \alpha_{n_i} - \beta_j) = 0 \quad (5.6)$$

$$\alpha_{i'}, i' = 2, \dots, n : \sum_{i \in \mathbf{I}, j \leq t_i} (\log X_{i,j} - \mu - \alpha_{n_i} - \beta_j) \mathbb{1}_{\{n_i=i'\}} = 0 \quad (5.7)$$

$$\beta_j, j = 2, \dots, n : \sum_{i \in \mathbf{I}} (\log X_{i,j} - \mu - \alpha_{n_i} - \beta_j) \mathbb{1}_{\{j \leq t_i\}} = 0 \quad (5.8)$$

$$\sigma : \frac{1}{\sum_{i \in \mathbf{I}} t_i} \sum_{i \in \mathbf{I}, j \leq t_i} (\log X_{i,j} - \mu - \alpha_{n_i} - \beta_j)^2 - \sigma^2 = 0 \quad (5.9)$$

Nous résolvons le système d'équations linéaires (5.4-9) pour trouver les estimateurs de maximum de vraisemblance. Nous trouvons $\hat{\mu} = 4.615$ et $\hat{\sigma} = 0,794$. La valeur des α_i et β_j avec $i, j = 2, 3, \dots, 21$ est montrée dans le tableau suivant :

| i | $\hat{\alpha}_i$ | i | $\hat{\alpha}_i$ | j | $\hat{\beta}_j$ | j | $\hat{\beta}_j$ |
|-----|------------------|-----|------------------|-----|-----------------|-----|-----------------|
| 2 | 0,032 | 12 | 0,135 | 2 | 0,549 | 12 | 2,088 |
| 3 | -0,049 | 13 | 0,105 | 3 | 1,026 | 13 | 1,979 |
| 4 | -0,098 | 14 | -0,052 | 4 | 1,451 | 14 | 1,802 |
| 5 | -0,027 | 15 | 0,349 | 5 | 1,772 | 15 | 1,615 |
| 6 | 0,044 | 16 | -0,045 | 6 | 2,026 | 16 | 1,487 |
| 7 | 0,182 | 17 | -0,023 | 7 | 2,184 | 17 | 1,293 |
| 8 | 0,248 | 18 | 0,031 | 8 | 2,240 | 18 | 1,193 |
| 9 | 0,150 | 19 | 0,054 | 9 | 2,266 | 19 | 1,114 |
| 10 | -0,045 | 20 | 0,098 | 10 | 2,238 | 20 | 1,088 |
| 11 | 0,072 | 21 | 0,011 | 11 | 2,177 | 21 | 0,083 |

Tableau 5.1 – Valeur de $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$ avec $i, j = 2, 3, \dots, 21$

5.2.2 Estimation des règlements

Après avoir estimé les paramètres, nous pouvons estimer la distribution des règlements non connus en remplaçant les paramètres par leur valeur estimé dans

l'hypothèse sur la lognormalité des règlements. Pour chaque $i \in \mathbf{I}$ et $j_i < j \leq n$, nous avons :

$$\hat{X}_{i,j}|\mathcal{F}_n \stackrel{d}{=} \log \mathcal{N}(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_{n_i} + \hat{\beta}_j, \hat{\sigma}^2) \quad (5.10)$$

Nous pouvons montrer que cette estimation ne dépend pas de l'unité monétaire utilisée par la proposition suivante :

Proposition 12. *Sous l'Hypothèse 7 et avec la méthode d'estimation de maximum de vraisemblance, pour toute $c > 0$ nous avons :*

$$\widehat{cX}_{i,j}|\mathcal{F}_n(\mathbf{cY}) \stackrel{d}{=} c\hat{X}_{i,j}|\mathcal{F}_n(\mathbf{Y}) \quad (5.11)$$

Démonstration. Si $\hat{\theta}(\mathbf{Y}) = (\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma})$ la solution du système d'équations $\mathcal{E}(\mathbf{Y})$ donné par (5.4-9), alors $\hat{\theta}(c\mathbf{Y}) = (\hat{\mu} + \log c, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma})$ est celle de $\mathcal{E}(\mathbf{Y})$. Cela implique que :

$$\widehat{cX}_{i,j}|\mathcal{F}_n(\mathbf{cY}) \stackrel{d}{=} \log \mathcal{N}(\log c + \hat{\mu} + \hat{\alpha}_{n_i} + \hat{\beta}_j, \hat{\sigma}^2) \quad (5.12)$$

d'où la conclusion. □

5.3 Mesures de provision

Après avoir obtenu l'estimation des règlements conditionnels, nous répétons les étapes présentées dans le chapitre précédent pour établir les mesures de provision. Les mesures de provision à horizon 1 an et ultime sont définies de la même manière que dans les équations (4.17-18) et (4.33-34). Avec la Proposition 12, nous montrons que ces mesures de provision sont aussi des mesures de provision cohérentes. L'estimation de distribution peut être aussi réalisée par l'approximation normale et lognormale, ce qui nous donne :

$$R^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(43\,097\,030; 2\,118\,517^2) \quad (5.13)$$

$$R^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \log \mathcal{N}(17,579; 0.016^2) \quad (5.14)$$

et pour la mesure de provision à horizon ultime :

$$R^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \mathcal{N}(326\,595\,200; 7\,665\,699^2) \quad (5.15)$$

$$R^1[\mathbf{Y}|\mathcal{F}_n] \stackrel{d}{\approx} \log \mathcal{N}(19,604; 0.007^2) \quad (5.16)$$

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité la deuxième approche pour modéliser les processus de règlements. Les règlements sont considérés appartenir à la famille de distribution lognormale. Les paramètres sont estimés par la méthode de maximum de vraisemblance. Les mesures de provision qui en découlent naturellement sont des mesures de provision cohérentes.

Conclusion

Résumons ce que nous avons parcouru dans ce rapport. Nous avons revisité la méthode Chain Ladder à la fois pour montrer ses points faibles et pour nous inspirer sur nos méthodes ligne à ligne. Nous avons construit un cadre théorique standard avec la notion centrale des mesures de provision cohérente. Nous avons ensuite étudié les processus d'état par les méthodes de l'analyse de la survie et enfin, nous avons travaillé sur les processus de règlements par deux approches. C'est le temps pour faire le bilan.

Solvabilité 2- Quelle méthode ?

L'arrivée de Solvabilité 2 pose de sérieuses questions sur les méthodes traditionnelles auxquelles les assureurs y sont si habitués. La provision technique est un exemple. La méthode Chain Ladder avec sa simplicité incontestable n'est pas adaptée pour étudier les risques extrêmes. Le triangle de règlements avec un nombre insuffisant de données et d'informations laisse toujours un doute sur l'estimation réalisée. Le retour aux données individuelles semble inévitable. Nous avons essentiellement proposé deux approches pour ce sujet : les dynamiques markoviennes et les modèles linéaires généralisés. Comparons ces deux résultats sur nos applications numériques :

| | Dynamiques de markov | GLM | Chain Ladder |
|--------------------|----------------------|-------------|--------------|
| Espérance (1 an) | 44 805 470 | 43 097 030 | 48 194 270 |
| Écart-type | 721 236 | 2 118 517 | 1 246 770 |
| VaR à 99,5% | 46 663 251 | 48 553 970 | |
| Espérance (ultime) | 364 184 200 | 326 595 200 | 387 618 500 |
| Écart-type | 19 558 050 | 7 665 699 | 25 495 360 |
| VaR à 99,5% | 414 562 400 | 346 340 700 | |

Tableau 5.2 – Comparaison des méthodes

À horizon 1 an, les dynamiques markoviennes produisent des prédictions avec moins de variance que celles avec des modèles linéaires généralisés. À horizon ul-

time, c'est le cas contraire. Cela est dû au fait que le modèle avec les dynamiques markoviennes est plus réaliste que les modèles linéaires généralisés. Nous avons montré que ces derniers utilisent les hypothèses très fortes à savoir les règlements sont indépendants et dépendent seulement des facteurs exogènes. Cela n'est pas tout à fait adapté. Par exemple, si le montant de règlement cette année est important, il est probable qu'il s'agit d'un gros sinistre et le montant de règlement de l'année prochaine sera important lui aussi. De ce point de vue, les dynamiques markoviennes s'avèrent plus adaptées. En outre, elles sont plus flexibles au niveau de modélisation et aboutissent naturellement à des mesures de provisions cohérentes alors qu'avec les modèles linéaires généralisés, il faut entrer vraiment dans les équations d'estimation des paramètres pour savoir si la méthode peut produire des mesures de provision cohérentes ou pas. Nous recommandons fortement l'utilisation des dynamiques markoviennes dans le cadre des méthodes ligne à ligne.

Pistes de développement

Dans le cadre d'un groupe de travail, nous n'avons pas suffisamment du temps pour réaliser toutes les pistes potentielles pour développer les modèles. Nous pouvons lister ici.

Premièrement, nous pouvons prendre en compte l'inflation. Ce facteur joue un rôle important et peut affecter le modèle d'une manière négative s'il n'est pas pris en compte. En effet, les méthodes développées se portent plutôt sur la relation des règlements et ses années de développement alors l'inflation est dans la dimension temporelle habituelle. Ce décalage peut perturber les estimations.

Deuxième, nous pouvons étudier d'autres risques financiers tels que le risque de taux d'intérêt. Ce point a été discuté brièvement dans le Chapitre 4 mais il peut mériter d'un travail d'ampleur car il est extrêmement intéressant d'étudier comment les provisions de l'assureur changent en fonction de taux d'intérêt. La prise en compte de cette variable stochastique donnera à une étude de la provision une dimension financière. Avec sa propre dimension actuarielle, cela peut aboutir à des résultats intéressants.

Troisièmement, nous avons choisi seulement deux cas représentatifs pour présenter nos deux approches. D'autres dynamiques markoviennes et d'autres modèles linéaires généralisés peuvent être testés avec de différentes données pour étendre les applications des approches proposées.

Bibliographie

- [1] Allain F. Z., Zuur A. F., Leno E. N. & Meesters E. H. W. (2009). *A Beginner's Guide to R*. Springer.
- [2] Antonio K. & Plat R (2010). *Micro-level stochastic loss reserving for general insurance*. Working Paper Series.
- [3] Bénéteau G. (2004). *Modèle de provisionnement sur données détaillées en assurance non-vie*. ENSAE Paristech.
- [4] Denuit M. & Charpentier A. (2004). *Mathématiques de l'assurance non-vie, Tome II*. Economica.
- [5] Dobson A. J. (2002). *An Introduction to Generalized Linear Models, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC.
- [6] Efron B. & Tibshirani R.J. (1998). *An introduction to Bootstrap*. ASTIN Bulletin. Chapman & Hall/CRC.
- [7] Hainaut D. (2011). *Économétrie de l'assurance - Transparents du cours*. ENSAE Paristech.
- [8] Kaplan E. L. & Meier P. (1958). *Nonparametric estimation from incomplete observations*. Journal of the American Statistical Association.
- [9] Krishnamoorthy K. (2006). *Handbook of Statistical Distributions with Applications*. Economica.
- [10] Mack T. (1993). *Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates*. ASTIN Bulletin.
- [11] Partrat C., et al. (2007). *Provisionnement technique en assurance non-vie*. Economica.
- [12] Planchet F. & Théron P. (2011). *Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles*. Economica.
- [13] Ohlsson E. & Johannsson B. (2010). *Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models*. Springer.
- [14] Venables W. N., et al. (2002). *An Introduction to R*. Network Theory Ltd.