

Mémoire présenté le :

pour l'obtention du **Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA**
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Anne Pellerin

Titre Une modélisation du risque sous-jacent aux traites CAT XL
par événement en vie

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

signature

Entreprise :

Nom : QBE Re Bruxelles

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Alexandre Masquelein

Signature :

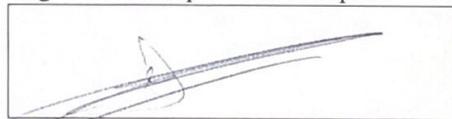
Invité :

Nom :

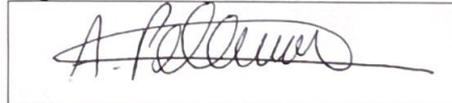
Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Mémoire d'actuariat

Une modélisation du risque sous-jacent aux traités
CAT XL par évènement en réassurance vie.

Par

ANNE PELLERIN



TUTEUR : ALEXANDRE MASQUELEIN

Département Analytics

QBE RE

JANVIER 2019

RÉSUMÉ

L'objectif de ce mémoire est d'établir un nouveau modèle de tarification et d'estimation du risque de souscription pour les traités CAT Excess Of Loss par évènement, dans le cadre de la réassurance vie. Dans toute la suite du mémoire, nous nous sommes intéressés aux garanties décès et invalidité avec versement d'un capital correspondant à la somme assurée définie contractuellement. L'une des problématiques majeures est de modéliser le nombre d'assurés d'une même compagnie touchés par un évènement CAT, notamment dans le cas de polices de groupe. Une meilleure prise en compte du risque de concentration et de l'hétérogénéité des profils de sommes assurées sont des apports importants par rapport au modèle de Strickler. Notre modélisation basée sur des évènements permet une meilleure flexibilité quant aux garanties des contrats et à la prise en compte de potentiels risques émergents. En outre, elle permet de déduire une méthode de suivi plus efficace de notre risque de souscription lié aux couvertures CAT.

Mots-clés : Réassurance vie, Evènement catastrophe (CAT), Risque de concentration, Tarification Excess Of Loss par évènement

ABSTRACT

The aim of this Master's thesis is to build a new model to price Excess of loss per event treaties in life reinsurance and to estimate the underlying underwriting risk taken by a reinsurance company. We will only focus on death and disability insurance covers with the payment of a lump sum for each victim, as contractually defined. One of the main aims is to model the number of insureds affected by a catastrophic event for a single company, particularly in the case of group policies. In this new model, the concentration risk and the heterogeneity of the sum insured profile are better taken into account compared to how there were in the Strickler model. This new model based on events is more flexible towards the contracts' specificities and the renewal data given by the insurance companies. Moreover, it can be easily adaptable to potential emerging threats. Finally, it also leads to a more efficient method of estimation of the underwriting risk for CAT covers. Key words : Life Reinsurance, Catastrophic events (CAT), Concentration risk, Excess of Loss per event pricing

Key words : Life Reinsurance, Catastrophic events (CAT), Concentration risk, Excess of Loss per event pricing

REMERCIEMENTS

Ce mémoire n'aurait jamais pu se réaliser sans l'aide de nombreuses personnes que j'aimerais remercier ici. Tout d'abord, mon tuteur professionnel, Alexandre Masquelein, qui n'a cessé d'être présent pour moi tout au long de l'année malgré ses nombreux autres objectifs professionnels et personnels. Sa patience, sa pédagogie et ses nombreux conseils tant méthodologiques que techniques m'ont permis de réaliser cette étude tout au long de mon année d'alternance. Je tiens également à le remercier pour la relecture de ce mémoire.

Je tiens également à remercier Aurélien Dubois, qui m'a permis d'intégrer cette belle entreprise qu'est QBE Re Bruxelles et m'a fait découvrir la réassurance à travers un premier stage en réassurance non vie.

Je souhaite également remercier tous mes collègues, aussi bien dans le département Analytics, Vie, Non Vie que Souscription pour leur accueil chaleureux dans cette entreprise, leur disponibilité et leur joie de vivre quotidienne qui participent à l'excellente atmosphère de travail qui règne à QBE Re Bruxelles.

Je tiens à remercier toute l'équipe pédagogique de l'I.S.FA pour ces trois années d'enseignement et en particulier mon promoteur de mémoire Stéphane Loisel.

Le mémoire signifie aussi la clôture de mes études. J'en profite alors pour remercier ma famille pour avoir toujours été là pour moi tout au long de cette période.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	v
	Page
Table des figures	ix
1 Introduction et Motivations	3
1.1 Les évènements CAT en réassurance vie	3
1.1.1 L'importance de la définition de l'évènement CAT dans le traité . .	3
1.1.2 Les différentes sources de risque	4
1.1.3 Les caractéristiques du traité CAT XL par évènement	8
1.2 Le modèle de tarification actuel : Strickler	11
1.2.1 Présentation du modèle	11
1.2.2 Avantages et inconvénients	15
1.2.3 Pistes d'amélioration du modèle	16
1.3 Le modèle de capital	16
1.3.1 Présentation du modèle actuel	16
1.3.2 Le nouveau modèle de tarification et de capital basés sur les mêmes évènements	17
1.3.3 Simulation d'une agrégation pour obtenir des tables ELT (Event Loss Table)	17
1.4 Résumé succinct du chapitre 1	19
2 Modélisation du coût pour un portefeuille d'assurés sachant qu'un évènement catastrophe s'est produit	21
2.1 Modélisation de la probabilité qu'une victime d'un évènement CAT soit un assuré de notre portefeuille	22
2.1.1 Le risque de concentration	22
2.1.2 La loi bêta-binomiale pour modéliser la probabilité qu'une victime d'un évènement CAT soit un assuré de notre portefeuille	22
2.2 Modélisation du coût d'un évènement pour le réassureur et calculs à l'aide de quantiles	28
2.2.1 Schéma de la modélisation et lien avec le modèle de capital	28

2.2.2	Test de l'intérêt des quantiles de la loi binomiale	31
2.2.3	Intérêt de subdiviser en sous-portefeuilles pour la prise en compte de l'hétérogénéité	33
2.2.4	Tests de sensibilité	36
2.2.5	Conclusion de ce modèle	42
2.3	Améliorations du modèle à l'aide de l'algorithme de Panjer	43
2.3.1	Rappels sur l'algorithme de Panjer	43
2.3.2	Modélisation avec l'algorithme de Panjer	45
2.3.3	Lien avec le modèle de capital	48
2.4	Résumé succinct du chapitre 2	49
3	Comparaisons des résultats avec l'ancien modèle et présentation de la méthode de la création d'une base de données	51
3.1	Comparaison des primes pures avec l'ancien modèle	52
3.1.1	Cas d'une police individuelle et d'une garantie décès	52
3.1.2	Cas d'une police de groupe et d'une garantie décès	59
3.2	Construction de la base de données en utilisant la crédibilité	61
3.2.1	La base de données EM-DAT	61
3.2.2	L'ajout de sinistres non compris dans la base de données EM-DAT .	61
3.2.3	Modélisation de la fréquence et de la sévérité des événements CAT	62
3.3	Résumé succinct du chapitre 3	65
A	Glossaire	71
	Bibliographie	73

TABLE DES FIGURES

FIGURE	Page
1.1 Tempêtes de 1999 en France : Lothar et Martin (source : RTL)	5
1.2 Nombre de catastrophes naturelles enregistrées dans le monde (source : EM DAT)	6
1.3 Nombre de décès résultant de catastrophes naturelles dans le monde (source : EM DAT)	7
1.4 Nombre de décès résultant d'attaques terroristes (source : GTD)	8
2.1 Fonction de densité de la loi beta avec 20% de part de marché et $d = 0.01$	24
2.2 Fonction de densité de la loi beta avec 20% de part de marché et $d = 1\ 000$. . .	24
2.3 Nombre d'assurés touchés par un évènement à l'aide de la béta-binomiale . . .	29
2.4 Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec et sans utiliser les quantiles de la loi binomiale	32
2.5 Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec et sans subdivision du portefeuille	34
2.6 Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec et sans subdivision du portefeuille	35
2.7 Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) en fonction de différentes tranches de réassurance	36
2.8 Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) en fonction de la part de marché	37
2.9 Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec (haut) et sans (bas) l'évènement fictif de l'attentat au Stade de France	39
2.10 Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles (entre 0.1 et 0.9) de la loi <i>binomiale</i>	40
2.11 Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles extrêmes de la loi <i>binomiale</i>	40
2.12 Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles de la loi beta pour $d = 100\ 000$	41
2.13 Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles de la loi beta pour $d = 10$	41

2.14	Schéma de l'étape 2	45
2.15	Schéma des étapes 2,3,4 : division d'un évènement groupe	47
2.16	Schéma de l'étape 6 : Agrégation distribution individuelle et groupe	47
3.1	Ecart relatif entre la prime pure obtenue avec l'ancien et le nouveau modèle dans le cas d'une police individuelle décès	52
3.2	Ecart relatif des primes pures par rapport à une prime de référence, en fonction du paramètre de tolérance utilisé dans l'agrégation des distributions	55
3.3	Primes pures obtenues en fonction du paramètre de tolérance utilisé dans l'agrégation des distributions	57
3.4	Ecart relatif des primes pures obtenues sans troncature vs avec troncature à 4000 décès, dans le cas individuel	58
3.5	Ecart relatif entre la prime pure obtenue avec l'ancien et le nouveau modèle dans le cas d'une police de groupe décès en fonction de différentes valeurs de d (pour le groupe)	60

INTRODUCTION

L'année 2017 a été une année où de nombreuses catastrophes naturelles se sont produites : les ouragans de l'Atlantique, les inondations meurtrières d'Asie du Sud et les tremblements de terre du Mexique ont fortement impacté le secteur assurantiel. Plus de 10 000 personnes ont perdu la vie à la suite de ces événements naturels extrêmes. Ce type d'événements n'est généralement pas mutualisable par les compagnies d'assurance en raison de leur très faible fréquence et de leur importante sévérité. C'est une des raisons pour lesquelles ces dernières achètent des couvertures de réassurance afin de se protéger de ces événements. Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons seulement aux contrats dont le sous-jacent est un portefeuille d'assurance vie et dont le montant en cas de décès ou d'invalidité d'un assuré est un montant forfaitaire défini contractuellement. Seules les couvertures CAT en Excess of Loss seront étudiées dans la suite. Ces dernières sont caractérisées par le fait que le réassureur commence à payer à partir d'un certain montant fixé contractuellement et appelé la priorité du traité. Tenter d'améliorer les modèles de tarification de ces événements est un enjeu majeur pour le secteur de la réassurance. L'objectif de ce mémoire a été de créer une nouvelle méthode de tarification en vie des contrats Excess of Loss. L'une des problématiques majeures de ce mémoire a été de chercher à modéliser le plus justement le nombre d'assurés dans un portefeuille donné touchés par un événement CAT, sachant que l'événement CAT s'est produit.

Dans une première partie introductive, les motivations de la création d'un nouveau modèle seront expliquées. Nous allons présenter l'ancien modèle de tarification utilisé, basé sur le modèle de Strickler, qui reste une référence sur le marché de la réassurance vie pour tarifier les événements catastrophes. Nous présenterons également le cahier des charges du nouveau modèle et notamment le fait que l'on veuille pouvoir facilement déduire une méthode de suivi de notre risque de souscription basée sur les mêmes événements que ceux utilisés pour la tarification des traités et non sur des « worst cases scénarios » indépendants de la tarification.

Dans une seconde partie, nous nous intéresserons à la modélisation du coût pour un portefeuille d'assurés sachant qu'un événement catastrophe s'est produit. Dans cette partie, les étapes qui ont menées au modèle final seront présentées, afin de bien comprendre les choix que nous avons faits. Cette étape a été l'une des étapes les plus longues dans notre recherche. En effet, l'une des motivations de remplacer l'ancien modèle de Strickler était le fait d'avoir un modèle plus flexible qui s'adapte aux données des cédantes

et aux risques qui peuvent émerger dans un futur proche ou plus lointain. De plus, la meilleure prise en compte du risque de concentration engendré par les polices de groupe et de l'hétérogénéité des profils de sommes assurées des portefeuilles sont deux apports importants de notre modèle par rapport à celui de Strickler.

Dans la dernière partie, nous avons comparé les résultats du nouveau modèle avec ceux de l'ancien. Pour des raisons de confidentialité, nous avons fait le choix de comparer les résultats à l'aide d'écart relatifs plutôt que de montants absolus. Enfin, nous avons également présenté une méthode de construction d'une base de données non pas uniquement historique mais faisant appel à la notion de crédibilité. Cette méthode a été détaillée mais n'a pas été implémentée en entreprise. En effet, la recherche d'indicateurs permettant de transposer certains sinistres ayant eu lieu dans des pays dans d'autres pays nécessite une étude approfondie qui s'inscrit parfaitement dans la continuité de ce mémoire.

De manière générale, en réassurance, nous avons peu de données à disposition. Particulièrement sur ce sujet d'étude, l'accès aux données est extrêmement limité. Cette contrainte nous mène parfois à faire des choix arbitraires, basés sur le qualitatif et le bon sens.

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

L'objectif de ce chapitre introductif est de présenter ce que sont les catastrophes (CAT) ainsi que leurs enjeux principaux en réassurance afin de construire un modèle de tarification qui modélise le plus justement les risques majeurs impactant les portefeuilles CAT en vie. Le modèle de tarification actuel de QBE Re, couramment appelé "Strickler", modèle de référence sur le marché de la réassurance vie, sera présenté afin de comprendre quelles sont les motivations de construire un nouveau modèle. L'estimation du risque de souscription relatif aux traités CAT en vie faite à Bruxelles sera expliquée dans les grandes lignes afin de comprendre les choix de construction du nouveau modèle de tarification. En effet, nous voulons que les modèles de tarification et de suivi du risque de souscription liés aux CAT vie soient couplés, c'est à dire basés sur les mêmes événements. Enfin, uniquement les notions de réassurance liées directement à la compréhension de ce mémoire seront présentées dans cette partie et dans ce mémoire.

1.1 Les événements CAT en réassurance vie

1.1.1 L'importance de la définition de l'évènement CAT dans le traité

Un événement catastrophe (CAT) en assurance ou réassurance est un accident causant de grands dommages tant humains que matériels liés à l'accumulation de polices touchées. La tempête Lothar qui a frappé l'Europe en 1999 en est un exemple. Leur faible fréquence et leur grande sévérité caractérisent ces événements. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement à l'impact de ces événements sur le contrat d'assurance vie contracté par les victimes, et plus particulièrement à l'impact sur la compagnie de réassurance.

Un événement CAT en réassurance vie est défini contractuellement par la survenance d'un événement engendrant un nombre de décès ou d'invalides dépassant un certain

nombre, fixé contractuellement. Ce nombre minimum m s'applique sur l'agrégation de toutes les polices d'assurance et non par police. Ainsi, l'évènement est défini par deux paramètres importants : le fait générateur et la clause temporelle. Pour appartenir à un même évènement CAT, les sinistres doivent avoir le même fait générateur (une tempête, un accident de transport, un acte terroriste...) et doivent se dérouler sur une période définie dans le contrat, appelée la clause horaire. En général, un évènement CAT en réassurance vie est généralement défini à partir de 2 ou 3 victimes et la clause horaire est souvent de 72 heures. En fonction des types de périls, la clause horaire diffère. Il est primordial que la définition de l'évènement dans le traité soit dénuée de toute ambiguïté. On peut rappeler les longues procédures qui ont été menées pour décider après les attentats du 11 Septembre 2001, si l'effondrement des deux tours constituait un ou deux évènements car chacune des tours a été percutée par un avion distinct. Concernant les catastrophes naturelles, il est rarement précisé ce qui définit le début d'un évènement : est-ce une dépression ou le premier sinistre constaté? Enfin, dans le cas d'évènements "mixtes", où les dégâts proviennent aussi bien de la pluie, de la grêle ou du vent, quelle clause horaire retenir? Celle du vent (72h), de la grêle (24h) ou de l'inondation (504h) ?

Plus généralement, il est difficile de définir une cause unique qui s'appliquerait à tous les périls, car plus on recherche une unique cause, plus on remonte à des phénomènes mondiaux. En général, l'évènement est nommé et il n'y a donc pas d'ambiguïté. Ainsi, en pratique, plutôt que de discuter longuement sur l'évènement générateur de l'évènement, la clause horaire prévaut tant que les sinistres déclarés dans l'évènement sont liés entre-eux. Ainsi, tous les sinistres s'étant produits pendant cette période de temps avec un nombre de victimes total supérieur au nombre de victimes minimum défini dans le traité, seront pris en charge par les réassureurs. Si par exemple une tempête se poursuit au-delà de la clause horaire définie, il est possible que la cédante déclare de nouveaux des sinistres aux réassureurs. Un deuxième évènement est alors défini.

1.1.2 Les différentes sources de risque

Un évènement CAT peut provenir de multiples sources de risque. Il est important de les repérer et les classer afin de ne pas en oublier dans l'élaboration de la base de données. Nous verrons dans la suite, que ces risques sont très fortement liés aux pays dans lesquels se trouvent les assurés. Ainsi, le paramètre géographique est sûrement l'un des paramètres les plus importants dans le choix des risques à considérer pour la tarification. Certains risques, comme le risque nucléaire, sont souvent exclus des contrats CAT. Il est néanmoins possible de les réassurer. Il est important que le modèle de tarification puisse s'adapter à la diversité des traités (risques sous-jacents, clauses, nombres de couverture...) Nous reviendrons dans le dernier chapitre sur le choix des catégories de risques à considérer dans la base de données des évènements. L'idée de cette partie est seulement de présenter globalement les risques majeurs et leurs enjeux dans la tarification des traités CAT.

1.1.2.1 Les catastrophes naturelles



FIGURE 1.1 – Tempêtes de 1999 en France : Lothar et Martin (source : RTL)

Une catastrophe naturelle est un évènement d'origine naturelle, qui survient de façon soudaine et qui entraîne souvent la mort et des destructions massives. Ces catastrophes sont directement liées à des évènements climatiques. Les catastrophes naturelles telles que les tremblements de terre ou les ouragans font parties des évènements les plus dévastateurs. La France a connu une grande tempête en 1999 (Lothar et Martin). Un autre exemple plus récent est l'ouragan Maria (2017) qui a tué plus de 4600 personnes principalement à la Dominique et à Porto Rico .

Bien qu'il est impossible de prédire avec exactitude où se produiront les prochaines catastrophes naturelles, il existe néanmoins des zones plus propices à certains types de catastrophes. Par exemple, les zones sismiques sont des zones proches des frontières de plaques tectoniques. Ainsi, le Japon, qui se trouve à la frontière entre la plaque eurasienne et la plaque philippine est une zone extrêmement sismique. En fonction du pays, la mortalité due aux catastrophes naturelles diffère donc énormément. Ainsi, la tarification des couvertures CAT sera fortement liée au pays où vivent les assurés. La situation financière du pays a également un grand impact. En général, plus les pays sont développés et meilleures sont les installations et précautions prises pour réduire le nombre de victimes en cas d'évènement CAT. On peut citer le Japon qui a énormément investi dans les installations parasismiques pour réduire fortement la probabilité qu'un immeuble ou une maison s'effondre en cas de tremblements de terre. Un séisme de même magnitude au Chili, dans une zone de densité similaire, ferait beaucoup plus de victimes qu'au Japon. Cependant,

dans les pays développés, le nombre d'assurés étant bien plus important, il peut arriver qu'une catastrophe avec peu de victimes coûte plus cher pour l'assureur qu'une grande dans un pays moins développé économiquement. Ainsi, la localisation géographique a un grand impact mais la situation économique du pays aussi.

Il est intéressant de remarquer que le nombre de catastrophes naturelles enregistrées a fortement augmenté depuis 1960 alors que le nombre de décès résultant de catastrophes naturelles a fortement diminué entre 1960 et aujourd'hui. Cette augmentation de la fréquence a plusieurs causes : la première peut être due au fait que les catastrophes naturelles étaient moins bien enregistrées à l'époque (ainsi, la fréquence indiquée est peut être sous évaluée par rapport à la fréquence réelle), la deuxième est sûrement due à une modification climatique. Inversement, la sévérité (en nombre de décès) de ces catastrophes a fortement diminué. Ceci est sûrement dû aux nouvelles installations et meilleures performances humaines (bâtiments parasismiques, barrages, secours plus efficaces...) permettant de diminuer le nombre de personnes tuées sachant qu'une catastrophe s'est produite.

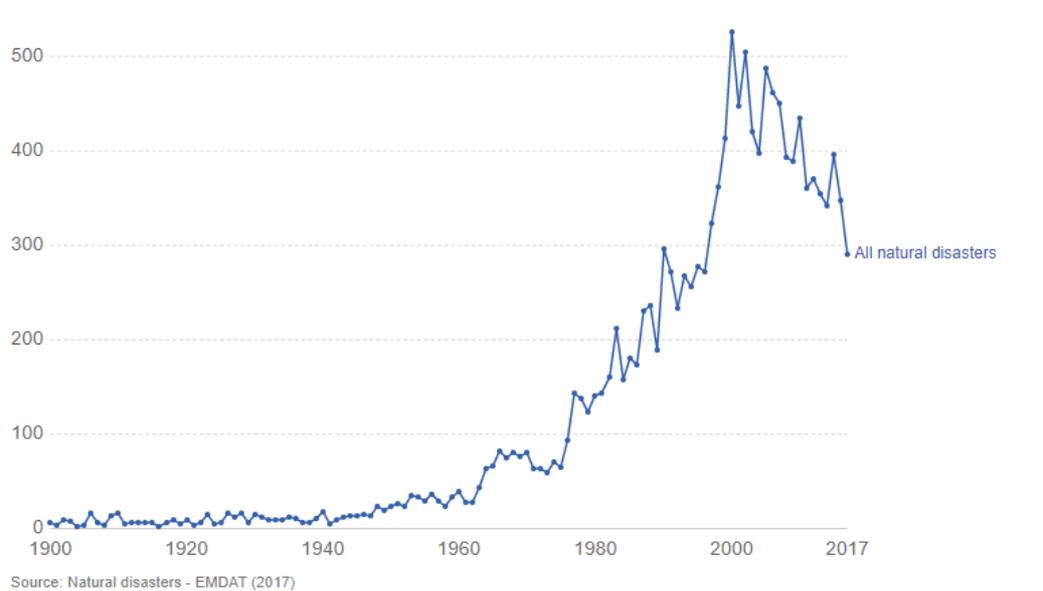


FIGURE 1.2 – Nombre de catastrophes naturelles enregistrées dans le monde (source : EMDAT)

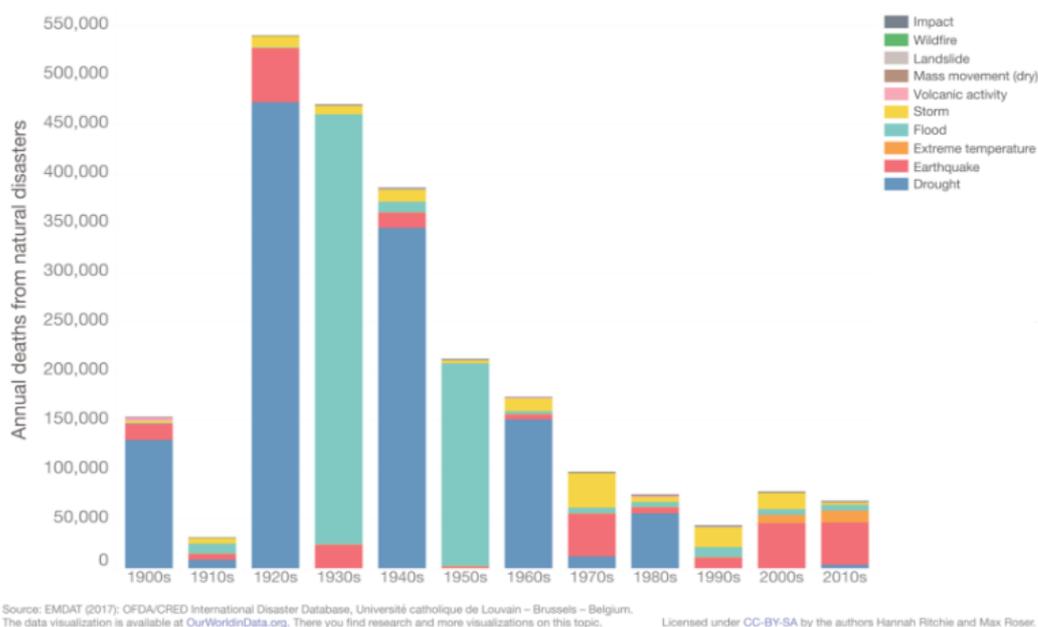


FIGURE 1.3 – Nombre de décès résultant de catastrophes naturelles dans le monde (source : EM DAT)

1.1.2.2 Les catastrophes humaines

Les catastrophes humaines regroupent tous les accidents causés par les hommes. On retrouve dedans principalement les catastrophes industrielles, les accidents de transport et le terrorisme. Les catastrophes industrielles et les accidents de transport ont fortement diminué, en terme de fréquence, durant les cinquante dernières années, en raison d'une amélioration des normes de sécurité dans les usines et les transports. Cette diminution n'est pas toujours très claire dans certains pays moins développés. En outre, les risques diffèrent fortement en fonction des pays. Par exemple, en France, les coups de grisou représentaient un risque majeur d'accident industriel. Aujourd'hui, puisque toutes les mines ont été fermées, ce risque n'est plus à considérer en France. Cependant, lorsque l'on tarifie un contrat dans certains pays comme la Turquie par exemple, on doit encore prendre en compte ce risque. En effet, en 2014, plus de 200 mineurs ont été tués en Turquie dans une mine. Le risque terrorisme a quant à lui augmenté, c'est pourquoi il est important de bien ajouter ce risque dans nos bases de données ou augmenter sa période de retour. Avoir un modèle qui nous permet de plus facilement tenir compte des risques émergents est une des motivations de la volonté de créer un nouveau modèle de tarification.

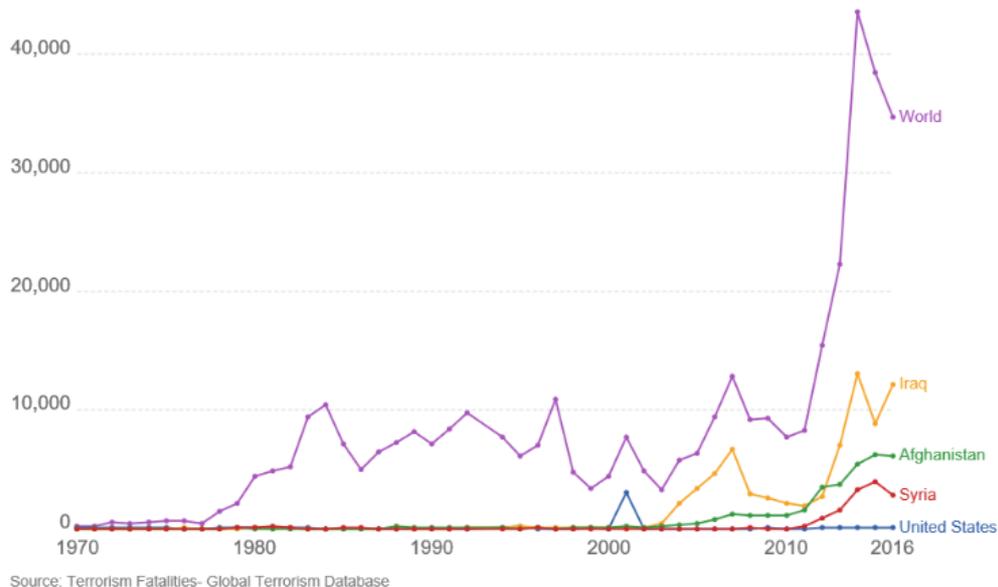


FIGURE 1.4 – Nombre de décès résultant d’attaques terroristes (source : GTD)

1.1.2.3 Les épidémies

Une épidémie est la propagation rapide d’une maladie de type infectieuse à grande échelle. Ce type de risque peut être extrêmement coûteux en assurance (et donc en réassurance). Il est très souvent exclu des traités CAT XL de réassurance vie. Cependant, il est plus fréquent dans les contrats de type Stop Loss car on considère qu’une épidémie peut tuer beaucoup d’assurés sur une longue période de temps et rarement dans les clauses horaires de CAT. Nous ne tiendrons donc pas compte du risque épidémique dans notre modélisation.

1.1.3 Les caractéristiques du traité CAT XL par évènement

1.1.3.1 Les risques assurés par ce traité

Il est important de comprendre que le contrat d’assurance vie sous-jacent n’est pas un contrat de type prévoyance ou santé. Concrètement, si une personne assurée par un contrat d’assurance vie devient invalide, elle ne touchera pas une rente d’invalidité ou ne se fera pas rembourser ses frais de santé résultant de son nouvel état. Le contrat d’assurance vie que nous réassurons fixe un **montant forfaitaire** pour chaque assuré en fonction de l’état dans lequel le met le sinistre (décès, incapacité, invalidité). Ce montant, appelé "somme assurée", varie en fonction des assurés du portefeuille et en fonction de l’état de la victime. Ainsi, les portefeuilles peuvent être très hétérogènes en terme de sommes assurées. La modélisation de cette hétérogénéité sera l’un des enjeux de notre nouveau modèle. Le fait que le montant soit forfaitaire et la nature du risque (risque accidentel) impliquent que notre modèle n’utilisera pas des tables de mortalité.

1.1.3.2 Prérequis succincts en réassurance

" La réassurance est une opération par laquelle une société d'assurance, ou cédante, s'assure elle-même auprès d'une autre société dénommée réassureur, ou cessionnaire, pour tout ou partie des risques qu'elle a pris en charge ." Tout comme nous, particuliers, souscrivons une assurance pour nous protéger d'un risque (par exemple le risque incendie), les compagnies d'assurance souscrivent elles aussi des contrats (appelés traités) pour se protéger de certains risques. Ces entreprises qui couvrent un risque des assurances sont les sociétés de réassurance dont QBE Re fait partie. En général, les assurances font appel aux réassureurs pour se couvrir de risques rares mais coûteux comme les catastrophes naturelles par exemple. La réassurance ne s'applique pas sur tout le risque des assureurs mais sur une partie du risque divisé en une ou plusieurs tranches, définies à l'aide d'un vocabulaire spécifique. Le seuil à partir duquel la réassurance s'applique s'appelle la priorité et l'étendue de la couverture s'appelle la portée. La priorité est une sorte de franchise pour l'assurance. Enfin, sur chaque tranche, le réassureur s'accorde généralement avec un courtier ou avec la cédante directement pour prendre une part. Cela permet aux réassureurs de prendre des risques sur différentes tranches de couverture tout en ne s'exposant pas à un risque trop important dans le cas où la tranche serait touchée. Le réassureur diversifie alors son portefeuille de risque même au sein d'un traité. Les réassureurs avec beaucoup de capacité, c'est-à-dire beaucoup de fonds, prendront en général des parts plus importantes, bien que cela dépend des traités et des risques en question.

Exemple

Si la priorité d'un traité est de 1 M € et sa portée de 2 M € et que le sinistre coûte 4 M €, alors le premier million est à la charge de l'assureur (car c'est en dessous de la priorité), 2 M € sont à la charge des réassureurs (car la portée est de 2 M €) et le dernier million est à la charge de l'assureur.

Il existe deux grands types de réassurance : la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle. Dans toute la suite, nous nous intéresserons seulement aux traités Excess of Loss par évènement. En d'autres termes, le programme de réassurance s'applique sur la sinistralité agrégée d'un évènement.

Excess of Loss(Excédent de sinistres)

Dans les traités non proportionnels, le réassureur et la cédante conviennent d'un seuil au-delà duquel le réassureur prendra en charge la sinistralité. Il n'existe aucune proportionnalité entre la prime de la réassurance et la prime d'assurance, ni entre les sinistres et l'engagement du réassureur sur ces derniers.

La réassurance non proportionnelle s'applique soit sinistre par sinistre (XL par risque) ou soit sur une agrégation de sinistres formant un évènement (XL par évènement). Le réassureur ne paiera que ce qui dépasse un certain montant de sinistre (nommé la priorité) jusqu'à un certain montant (nommé la limite).

Mathématiquement, cela s'écrit : Soit M le montant d'un sinistre (ou de la somme des sinistres). Soit X le montant du sinistre à charge du réassureur. Notons P la priorité du programme de réassurance et L sa limite.

$$X = \min(L - P, \max(0, M - P))$$

L'intérêt d'une couverture Excess of Loss est qu'elle permet à l'assureur de se protéger contre un évènement avec une fréquence très faible mais avec une sévérité très importante. Le risque est alors vendu à un ou plusieurs réassureurs. Si le réassureur peut supporter ce risque, contrairement à la plupart des assureurs, c'est qu'il réassure dans une zone géographique en général plus grande que celle de l'assureur. Ainsi, le portefeuille de risque du réassureur est plus diversifié. De plus, il prend souvent une part du risque et non le risque à 100 %.

1.1.3.3 Un exemple très simple d'un traité CAT XL par évènement en vie

Maintenant que nous avons vu le fonctionnement général des traités Excess of Loss et des traités CAT en vie, voici un petit exemple très simple afin de bien comprendre le risque du réassureur.

Programme de réassurance

Traité CAT XL par évènement avec un minimum de 4 têtes touchées 1 tranche : 2 000 000 XS 1 000 000 (notation qui signifie que la priorité est de 1 000 000 € et la portée de 2 000 000 €)

Composition du portefeuille à réassurer

- Groupe 1 : 990 personnes avec une somme assurée par personne en cas de décès de 100 000 €
- Groupe 2 : 10 personnes avec une somme assurée par personne en cas de décès de 1 000 000 €

Avis de sinistre suite à une tempête en France

- 9 personnes décédées dans le portefeuille
- Groupe 1 : 8 personnes décédées
 - Groupe 2 : 1 personne décédée

Montant total du sinistre M : $M = 8 * 100\,000 + 1 * 1\,000\,000 = 1\,800\,000$

Le traité de réassurance peut bien s'appliquer car il y a plus de 4 personnes décédées dans l'évènement et le montant total du sinistre dépasse la priorité du traité qui est à 1 000 000 €.

Le montant que le réassureur devra payer est donc :

$$X = \min(2,000,000 ; \max(0 ; 1\,800\,000 - 1\,000\,000)) = 800\,000 \text{ €}$$

1.2 Le modèle de tarification actuel : Strickler

1.2.1 Présentation du modèle

Le modèle actuel utilisé à QBE Re est basé sur le modèle développé par Strickler en 1960. Ce modèle est encore une référence dans la tarification de traités CAT XL par évènement. Strickler a utilisé des données issues du *Statistical Bulletin of the Metropolitan Life Insurance Company* à New-York. Ces données correspondent à des accidents avec cinq ou plus de victimes décédées entre 1946 et 1950.

Notons $A(y)$ le nombre de décès annuels résultant d'accidents tuant y ou plus de personnes, pour 1 million d'habitants. Le modèle de Strickler nous donne la distribution suivante :

$$A(y) = a100^{1/y}y^{-b}$$

Les paramètres a et b donnés par Strickler (basés sur les données de 1946-1950) donnaient $a = 8$ et $b = \frac{1}{3}$.

La calibration du paramètre a (adapté au pays et à aujourd'hui) peut être faite à l'aide de statistiques du pays. Par exemple, si on sait qu'en Belgique le taux d'accidents causant la mort d'une ou plus d'une personne est de 400 personnes par million d'habitants. Alors, avec la formule de Strickler, $A(1) = a100$ et $A(1) = 400$. On trouve alors que le paramètre a vaut 4 en Belgique.

Le nombre annuel d'accidents, par million d'habitants, avec exactement y décès, peut s'exprimer en fonction de $A(y)$:

$$H(y) = \frac{A(y) - A(y+1)}{y}$$

On en déduit que le nombre total d'accidents par million d'habitants est :

$$\sum_{i=1}^{\infty} H(y)$$

Ainsi, la probabilité qu'un accident cause exactement y morts est :

$$h(y) = \frac{H(y)}{\sum_{i=1}^{\infty} H(i)}$$

Notons Pop la population du pays. L'estimation du nombre de sinistres annuel est donné par :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{Pop \sum_{i=1}^{\infty} H(i)}{1\ 000\ 000}$$

Si on veut savoir le coût pour ces accidents dans la population générale, il suffit de prendre : $\mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X)$. Avec X le coût dans la tranche de réassurance d'un évènement CAT.

Les résultats précédents concernaient la population générale. En réassurance, on s'intéresse seulement aux personnes assurées.

Notons n le nombre d'assurés dans notre portefeuille.

Nous allons désormais exprimer la probabilité h^v que x personnes assurées meurent dans un accident. Notons v la part de marché de l'assureur.

$$v = \frac{n}{Pop}$$

$$h^v(x) = \sum_{j=0}^{Pop-n} \binom{x+j}{x} v^x (1-v)^j h(x+j)$$

Avec :

$$\binom{x+j}{x} = \frac{(x+j)!}{x!(x+j-x)!}$$

L'une des hypothèses fortes est que les sommes assurées sont distribuées selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{R}$. R représente la moyenne des sommes assurées. Cette hypothèse est forte car cela ne permet pas de prendre en considération l'hétérogénéité des sommes assurées et donc la possibilité d'un évènement touchant une ou plusieurs personnes avec d'énormes sommes assurées. De plus, le fait d'utiliser une loi binomiale est en fait une approximation de la loi hypergéométrique (n beaucoup plus petit que Pop).

Notons :

- N une variable aléatoire représentant le nombre d'évènements CAT annuels.
- X le coût dans la tranche de réassurance d'un évènement CAT.

Nous faisons l'hypothèse que les sommes assurées suivent une loi exponentielle.

Dans la suite, tous les calculs seront faits avec une distribution exponentielle de paramètre 1. En d'autres termes, tous les calculs seront faits pour une unité de somme assurée

moyenne.

La densité du coût des sinistres quand il y a x assurés décédés (ou invalides) s'écrit :

$$p(z) = \frac{z^{x-1} \exp(-z)}{(x-1)!}, z \geq 0$$

Si le portefeuille ne comporte que des assurés individuels, on peut aussi obtenir la fonction de densité du coût total engendré par un accident avec m ou plus de décès (ou d'invalides) assurés dans le portefeuille :

$$w(z) = \sum_{x=m}^w h^v(x) p(z), z \geq 0$$

Si $d=D/R$ et $c=C/R$ avec D la priorité, C la capacité du traité et R la somme assurée moyenne, la prime de réassurance pour un accident avec m ou plus de décès ou d'invalides peut s'écrire :

$$\int_d^{d+c} (z-d) w(z) dz + \int_{d+c}^{+\infty} c w(z) dz$$

En remplaçant $w(z)$ par son expression, on obtient que la prime s'écrit :

$$\int_d^{d+c} (z-d) \sum_{x=m}^w h^v(x) p(z) dz + \int_{d+c}^{+\infty} c \sum_{x=m}^w h^v(x) p(z) dz$$

En remplaçant $p(z)$ par son expression, on obtient que la prime s'écrit :

$$\int_d^{d+c} (z-d) \sum_{x=m}^w h^v(x) \frac{z^{x-1} \exp(-z)}{(x-1)!} dz + \int_{d+c}^{+\infty} c \sum_{x=m}^w h^v(x) \frac{z^{x-1} \exp(-z)}{(x-1)!} dz$$

En développant le terme $(z-d)$, on obtient :

$$\int_d^{d+c} z \sum_{x=m}^w h^v(x) \frac{z^{x-1} \exp(-z)}{(x-1)!} dz - \int_d^{d+c} d \sum_{x=m}^w h^v(x) \frac{z^{x-1} \exp(-z)}{(x-1)!} dz + \int_{d+c}^{+\infty} c \sum_{x=m}^w h^v(x) \frac{z^{x-1} \exp(-z)}{(x-1)!} dz$$

En utilisant le fait que la primitive de $x^n \exp(-x)$ est $-\sum_{k=0}^n \frac{x^k \exp(-x) n!}{k!}$, on obtient :

$$-x \sum_{x=m}^w h^v(x) \sum_{k=0}^x \frac{(d+c)^k \exp(-(d+c))}{k!} + d \sum_{x=m}^w h^v(x) \sum_{k=0}^{x-1} \frac{(d+c)^k \exp(-(d+c))}{k!} +$$

$$x \sum_{x=m}^w h^v(x) \sum_{k=0}^x \frac{d^k \exp(-d)}{k!} - d \sum_{x=m}^w h^v(x) \sum_{k=0}^{x-1} \frac{d^k \exp(-d)}{k!} + c \sum_{x=m}^w h^v(x) \sum_{k=0}^{x-1} \frac{(d+c)^k \exp(-(d+c))}{k!}$$

En rassemblant les termes en $d+c$ et ceux en d , on obtient :

$$\begin{aligned} & \exp(-d \sum_{x=m}^w h^v(x) \left(\frac{d^{x+1}}{x!} + (x-d) \sum_{k=0}^x \frac{d^k}{k!} \right)) \\ & - \exp(-(d+c) \sum_{x=m}^w h^v(x) \left(\frac{(d+c)^{x+1}}{x!} + (x-(d+c)) \sum_{k=0}^x \frac{(d+c)^k}{k!} \right)) \end{aligned}$$

Cette expression étant donnée par unité de somme moyenne assurée R, il suit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) = R \cdot & \exp(-d) \sum_{x=m}^w h^v(x) \left(\frac{d^{x+1}}{x!} + (x-d) \sum_{k=0}^x \frac{d^k}{k!} \right) \\ & - \exp(-(d+c)) \sum_{x=m}^w h^v(x) \left(\frac{(d+c)^{x+1}}{x!} + (x-(d+c)) \sum_{k=0}^x \frac{(d+c)^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

On trouve alors que la prime pure (sans chargement) vaut $\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$ où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) = R \cdot & \left[\exp(-d) \sum_{x=m}^w h^v(x) \left(\frac{d^{x+1}}{x!} + (x-d) \sum_{k=0}^x \frac{d^k}{k!} \right) \right. \\ & \left. - \exp(-(d+c)) \sum_{x=m}^w h^v(x) \left(\frac{(d+c)^{x+1}}{x!} + (x-(d+c)) \sum_{k=0}^x \frac{(d+c)^k}{k!} \right) \right] \end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{Pop \sum_{i=1}^{\infty} H(y)}{1\ 000\ 000}$$

avec :

- Tranche du traité XL : C XS D
- R représente la moyenne des sommes assurées
- $d = \frac{D}{R}$
- $c = \frac{C}{R}$
- w est le nombre maximal d'assurés pouvant être touchés par un évènement
- m est le nombre minimum de décès ou d'invalides

Dans le cas groupe, on ne considère plus $h^v(x)$ mais $h(x)$ qui représente la probabilité qu'un accident cause x décès. On plafonne le nombre de décès au nombre de personnes maximum dans un groupe. La fréquence dans le cas du groupe est multipliée par la part de marché, cela devient :

$$\mathbb{E}(N) = \frac{n_G \sum_{i=1}^{\infty} H(y)}{1\ 000\ 000}$$

avec n_G le nombre d'assurés par une police de groupe dans notre portefeuille.

1.2.2 Avantages et inconvénients

Avantages

- Rapide à utiliser
- Théorie derrière le modèle assez simple
- Après quelques chargements éventuels, le modèle de Strickler fonctionne très bien pour la France et l'Europe en général.

Inconvénients

- L'un des inconvénients est que ce modèle a été fondé sur d'**anciennes statistiques** (1960). Le modèle étant ad-hoc, nous pouvons difficilement utiliser les méthodes statistiques standards d'estimation comme le maximum de vraisemblance, pour estimer les paramètres avec de nouvelles données.
- Le fait que le nombre maximum d'assurés appartenant à une même compagnie soit de 1500 à la suite d'un même évènement, est un choix qui peut être remis en question.
- Le fait que les sommes assurées soient modélisées par une loi exponentielle ne permet pas de bien modéliser tous les scénarios possibles, comme par exemple très peu de personnes avec une somme assurée très importante qui décèdent en même temps. En effet, la loi des sommes assurées n'est pas prise en compte et est remplacée par la loi exponentielle donc le paramètre est déterminé à l'aide la somme assurée moyenne. Par exemple, si on a un portefeuille avec 5 000 assurés à 100 000 euros et 10 assurés à 1 million. La somme assurée moyenne est :
$$= \frac{5\,000 \cdot 100\,000 + 10 \cdot 1\,000\,000}{5\,010} = 101\,796\text{€}$$
. Sur cet exemple, on voit que le fait qu'il y ait seulement 10 personnes avec une très grande somme assurée n'impacte presque pas la somme assurée moyenne. Ainsi, la possibilité que 5 personnes des 10 meurent et que cela coûte 5 millions n'est pas pris en compte.
- **Le risque de concentration** est modélisé de manière sévère et ne prend pas en compte assez de scénarios possibles. On considère dans la tarification pour une police de groupe la population d'assurés plutôt que la population générale. Ainsi, si on a 100 assurés et que l'évènement fait 100 victimes on considérera toujours que tout le portefeuille est touché. La fréquence de l'évènement est la fréquence multipliée par la part de marché.
- La fréquence des évènements CAT considérés dans Strickler est sévère (si on ne considère pas les actes terroristes) pour les évènements extrêmes touchant une centaine de personnes. Par exemple, en France, la période de retour d'un évènement tuant 100 ou plus de personnes est de 7 ans. Lorsque l'on compare avec la base de données EM DAT, on se rend vite compte que cette fréquence est clairement surestimée. Cependant, pour un évènement touchant 3300 victimes ou plus, la

période de retour est de 256 ans. L'un des scénarios catastrophes de Solvabilité II est un évènement CAT tuant 3300 personnes (en considérant la population française égale à 66 000 000). On pourrait penser que la fréquence donnée par le modèle Strickler sous-estime la survenance des très grands évènements par rapport à ce que préconise Solvabilité II mais la différence vient du fait que la fréquence modélisée par Strickler est la fréquence d'un évènement de 3300 victimes **ou plus** et non exactement 3300 victimes comme dans le scénario de Solvabilité II.

1.2.3 Pistes d'amélioration du modèle

Le nouveau modèle que l'on veut créer doit prendre en compte ce risque de concentration. En d'autres termes, la probabilité que plusieurs assurés d'un contrat groupe soient touchés est plus grande que pour des contrats individuels. La meilleure prise en compte de ce risque est l'un des enjeux majeurs de ce nouveau modèle. Les sommes assurées ne seront plus modélisées par une loi exponentielle. L'hétérogénéité des sommes assurées au sein d'un portefeuille sera alors prise en compte dans le modèle. La possibilité que quelques assurés avec des sommes assurées très élevées touchent le programme de réassurance sera désormais existante, même si la probabilité sera extrêmement faible. Le nouveau modèle doit pouvoir s'adapter aux particularités de chaque cédante. En fonction des pays, les couvertures ne sont pas les mêmes. Certains pays peuvent définir plus de catégories différentes d'invalides que d'autres. De plus, les données fournies par les cédantes diffèrent grandement en fonction des pays. On veut que le modèle soit plus flexible que l'ancien et puisse s'adapter facilement à de nouvelles garanties. Enfin, on veut tenter de garder les avantages de l'ancien modèle de Strickler, c'est-à-dire qu'il ne soit pas trop compliqué et rapide à utiliser. La rapidité est un point important, notamment en période de renouvellement des contrats pendant laquelle les délais sont parfois très courts.

1.3 Le modèle de capital

1.3.1 Présentation du modèle actuel

Cette partie a pour but de décrire la méthode de suivi de notre exposition aux CAT vie pour les garanties décès, accidents vie privée pour les traités non proportionnels. Cette méthode est basée sur l'élaboration des "worst case scénarios". Deux grands types de scénarios sont à distinguer : les scénarios "globaux" et les scénarios "locaux". Les scénarios "globaux" sont développés pour chaque pays. Les scénarios locaux, eux, tiennent compte du risque de concentration du à la possible accumulation des assurés d'un contrat groupe à l'endroit où se produit la catastrophe. A chaque scénario, on détermine une période de retour. La règle générale est que lorsque le scénario est local, la période de retour est de

500 ans et lorsque le scénario est global, la période de retour est de 300 ans. Le choix de 300 ans est justifié par le fait que les scénarios suggérés par Solvabilité II avec une période de retour de 200 ans sont moins lourds que ceux choisis par l'entreprise.

1.3.2 Le nouveau modèle de tarification et de capital basés sur les mêmes évènements

L'un des objectifs est que ce modèle de tarification nous donne pour chaque cédante et pour chaque évènement la distribution de probabilités du montant des évènements pour le réassureur. Ainsi, une fois que l'on aura ces distributions, on pourra les utiliser pour le modèle de capital. Le modèle de capital et celui de tarification seront alors basés sur les mêmes évènements.

1.3.3 Simulation d'une agrégation pour obtenir des tables ELT (Event Loss Table)

L'objectif du modèle de tarification est d'obtenir pour chaque compagnie et chaque évènement (historique ou simulé) la distribution du coût de l'évènement pour le réassureur, c'est-à-dire la charge dans les tranches du programme de réassurance. On peut alors déduire pour chaque évènement, le montant engagé par le réassureur pour tous ses contrats CAT XL. En effet, l'intérêt d'avoir pour chaque évènement, la distribution de probabilités du nombre d'assurés touchés par l'évènement est que l'on peut alors à l'aide de simulation, rapidement déduire une table ELT (Event Loss Table) qui associe une probabilité à chaque scénario de montant engagé par la compagnie de réassurance.

Méthode

Pour chaque évènement de la base de données :

- On simule une loi uniforme entre 0 et 1.
- On applique la fonction de répartition inverse au point de probabilité trouvé à l'étape 1.
- On obtient alors un montant engagé par la compagnie de réassurance avec la probabilité associée qui correspond à la probabilité que la compagnie de réassurance paie ce montant sachant que l'évènement s'est produit. On multiplie alors par la fréquence de survenance de cet évènement.
- On réitère ces étapes pour chaque compagnie.

- On obtient en sommant les montants trouvés et les probabilités trouvées, un montant total d'engagement de la compagnie de réassurance avec une probabilité. On a alors une simulation.
- On effectue n fois de nouvelles toutes ces étapes pour avoir n simulations.

L'intérêt de passer par des simulations est que si le pas dans Panjer est petit et qu'il y a de nombreuses compagnies, effectuer toutes les combinaisons possibles seraient trop chronophage. On obtient ainsi la distribution des événements pour notre marché.

1.4 Résumé succinct du chapitre 1



Nous voulons créer un nouveau modèle de tarification pour tarifier les traités **CAT Excess of Loss par évènement** en réassurance **vie**. Concrètement, cela signifie que si au moins m personnes du portefeuille de l'assurance sont touchées par un évènement catastrophe (accident transport, tempête, attentat...), avec m une sorte de "seuil de déclenchement du traité de réassurance", le réassureur devrait payer pour chaque personne touchée la somme assurée correspondant à chacune des victimes. Ce montant dépend du montant de cotisation de l'assuré et peut varier grandement au sein d'un même portefeuille. A ce montant total (la somme des montants pour chaque victime du portefeuille) s'applique le programme de réassurance du traité Excess Of Loss (priorité, limite, clauses...).

L'une des motivations principales de ce nouveau modèle est de mieux tenir compte du **risque de concentration** et de l'**hétérogénéité des sommes assurées** dans le portefeuille. Enfin, l'un des objectifs est qu'à l'issue de chaque tarification, on obtienne pour la cédante concernée, la distribution de la charge du réassureur pour chaque évènement de la base de données. Ces distributions nous permettront d'avoir une vision plus claire sur l'engagement total d'un réassureur pour ses traités CAT en vie. Ainsi, **le modèle de suivi du risque de souscription sera basé sur les mêmes évènements que le modèle de tarification**. Le choix des évènements de la base de données à considérer sera vu dans le chapitre III.

MODÉLISATION DU COÛT POUR UN PORTEFEUILLE D'ASSURÉS SACHANT QU'UN ÉVÈNEMENT CATASTROPHE S'EST PRODUIT

L'objectif de ce chapitre est de modéliser le nombre d'assurés de notre portefeuille touchés par un évènement dans la population générale (celle de la France par exemple). Si une tempête se produit en France l'année prochaine, sachant les caractéristiques de la compagnie d'assurance, comment estimer le nombre d'assurés touchés par cette catastrophe? Comme nous l'avons vu précédemment dans les motivations d'un nouveau modèle, l'un des enjeux de ce chapitre est de modéliser l'impact d'une police d'assurance de groupe par rapport à une police d'assurance individuelle, afin de bien prendre en compte le risque de concentration. L'un des autres enjeux majeurs est que le modèle tienne compte de l'hétérogénéité des sommes assurées au sein d'un portefeuille d'assurés. Nous présenterons les différentes étapes de recherche qui nous ont amenées à choisir notre modèle final. La détermination de la probabilité qu'un évènement CAT se produise et celle de son intensité associée (le nombre de victimes) seront traitées dans le chapitre III.

2.1 Modélisation de la probabilité qu'une victime d'un évènement CAT soit un assuré de notre portefeuille

2.1.1 Le risque de concentration

Nous cherchons à modéliser le nombre de personnes touchées dans notre portefeuille par un évènement CAT. On pourrait considérer qu'en moyenne, le nombre de personnes touchées correspond à la part de marché du portefeuille multipliée par le nombre de personnes touchées par l'évènement dans la population générale. Donc, par exemple, si un évènement fait 100 victimes et que la part de marché est de 10 %, on pourrait considérer qu'en moyenne, il y a dix victimes dans le portefeuille. Seulement, pour un évènement CAT, qui par sa nature a une faible fréquence, raisonner en moyenne peut être dangereux. Le fait de raisonner en moyenne ne prend pas en compte le fait que dans un contrat groupe, le risque de concentration peut engendrer un nombre d'assurés touchés par l'évènement CAT bien supérieur à la moyenne attendue. En effet, l'un des cas extrêmes est celui de l'attentat du World Trade Center. Dans les deux tours qui se sont effondrées se trouvaient de nombreuses entreprises. Les salariés étaient généralement assurés par des contrats d'assurance collective d'entreprise et puisque tous les employés d'une même entreprise étaient généralement assurés par le même assureur, les pertes humaines pour ces assureurs ont été bien supérieures à la moyenne attendue en raison de la concentration. Dans un cas moins extrême, lors d'un accident de voiture, il est courant que plusieurs personnes d'une famille soient victimes. Souvent, au sein d'une famille, les membres s'assurent par un contrat collectif. Il y a également ici un risque de concentration. Ainsi, même dans le cas où la part de marché du portefeuille est importante, raisonner en moyenne sur le nombre d'assurés du portefeuille touchés par un évènement CAT peut mener à une sous-estimation du risque, en raison du risque de concentration.

2.1.2 La loi bêta-binomiale pour modéliser la probabilité qu'une victime d'un évènement CAT soit un assuré de notre portefeuille

L'idée est de modéliser le nombre d'assurés touchés par un évènement CAT dans notre portefeuille. Considérons un évènement faisant 100 victimes. Pour chaque victime, soit cette dernière appartient à notre portefeuille ou soit elle n'y appartient pas. On appelle p la probabilité que la victime soit dans notre portefeuille. Le nombre d'assurés touchés par l'évènement peut ainsi être modélisé par une loi *binomiale*(n, p). Comme on l'a vu précédemment, si nous prenons comme probabilité p la part de marché, cela revient à faire un raisonnement en moyenne et cela ne prend donc pas entièrement en compte le risque de concentration inhérent aux contrats de groupe. L'idée est alors de se dire que cette probabilité p , représentant la probabilité qu'une victime d'un évènement CAT appartienne à notre portefeuille d'assurés, peut varier en fonction de plusieurs paramètres comme

le caractère individuel ou collectif des contrats du portefeuille, le type d'évènement, le nombre de victimes... Pour cela on peut penser à prendre une loi *beta*. Nous voulions une loi qui puisse prendre des formes très différentes pour modéliser les polices de groupe et les polices individuelles. De plus, nous voulions également que les paramètres de cette loi se déterminent avec peu de données puisque nous ne disposons que de très peu de données en réassurance et particulièrement sur ce sujet. En assurance non vie (Woo 1999), la loi *beta* est souvent utilisée pour modéliser le pourcentage de destruction d'une habitation. Par analogie, on l'utilise pour modéliser un pourcentage de concentration d'assurés. En fonction des paramètres de la loi *beta*, on a soit une forte densité au niveau de la part de marché (contrat individuel) ou soit une forte densité aux extrêmes (contrat groupe).

Mathématiquement

- Notons n le nombre de victimes de l'évènement catastrophe
- Notons n_0 le nombre de victimes dans le **portefeuille** de l'assureur
- Notons p la probabilité qu'une victime de l'évènement soit un assuré
- Notons q la part de marché de la compagnie d'assurance ie $q = \frac{\text{nombre d'assurés dans le portefeuille}}{\text{population du pays}}$

On a alors :

$$\begin{aligned}n_0 &\sim \text{Bin}(n, p) \\ p &\sim \text{Beta}(a, b) \\ \text{avec : } a &= d * q \text{ et } b = d * (1 - q)\end{aligned}$$

d'où :

$$n_0 \sim \text{BetaBinomiale}(d * q, d * (1 - q))$$

d représente un paramètre modélisant le degré de concentration (en analogie en IARD avec le degré de dommage).

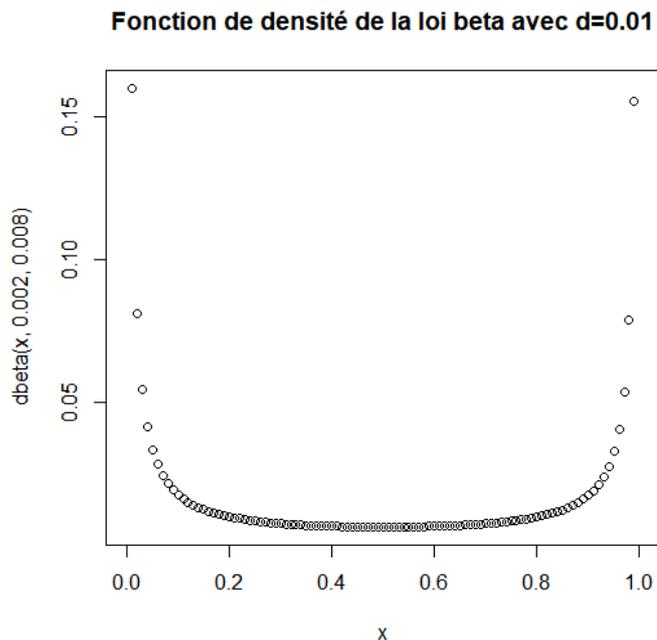


FIGURE 2.1 – Fonction de densité de la loi beta avec 20% de part de marché et $d = 0.01$

On remarque qu'au niveau des extrêmes, la masse de probabilité est importante. Cela permet donc bien de modéliser le fait qu'une police de groupe a plus de probabilité soit d'être touchée avec plus de victimes que dans le cas d'une police individuelle ou soit de ne pas être touchée du tout.

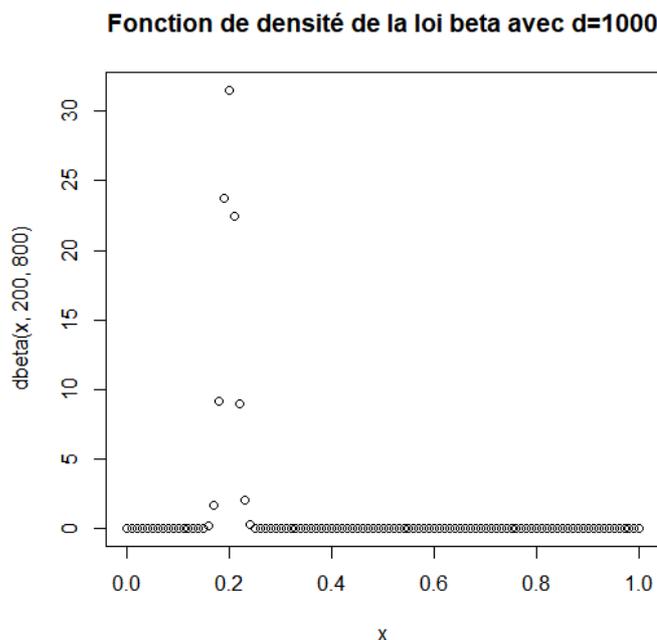


FIGURE 2.2 – Fonction de densité de la loi beta avec 20% de part de marché et $d = 1\ 000$

On remarque que la masse de probabilité est très grande au niveau de la part de marché qui est de 20 %. Une grande valeur de d permet de bien modéliser le risque dans le cas d'une police individuelle car dans une police individuelle, le risque de concentration est faible. Donc raisonner en moyenne en disant que le nombre d'assurés touchés représente la part de marché multipliée par le nombre de victimes dans la population n'est pas absurde dans ce cas là.

Calibration du paramètre d

Nous avons décidé d'utiliser la loi Beta-binomiale pour modéliser le comportement des polices de groupe et ajouter une sur-dispersion aux polices individuelles. Pour cela, nous avons introduit le paramètre d qui représente la dépendance entre les assurés lorsqu'un sinistre se produit. Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$n_0 \sim \text{binom}(n, \text{Beta}(a, b))$$

Avec :

- n_0 : le nombre d'assurés du portefeuille touchés par l'évènement
- n : nombre de personnes (assurées ou non assurées) touchées par l'évènement
- n_{pop} : population du pays
- $a = d * \frac{n_{assurés}}{n_{population}}$
- $b = d * (1 - \frac{n_{assurés}}{n_{population}})$

La moyenne de la loi Beta est :

$$\frac{a}{b+a} = \frac{n_{assurés}}{n_{population}}$$

qui représente la part de marché. C'est pourquoi, nous avons décidé de poser a et b comme défini ci-dessous avec d un paramètre représentant le degré de dépendance des assurés dans le portefeuille. La calibration du paramètre d n'est pas évidente. Nous proposons ci-dessous un choix de calibration en fonction du type de couverture (individuelle ou collective). Cette calibration est qualitative car nous n'avons aucune donnée disponible pour estimer le paramètre d .

Cas d'une police individuelle

Dans le cas individuel, nous avons décidé de fixer une sur-dispersion de 10 % par rapport à la loi binomiale classique. Cette sur-dispersion provient du fait que lorsque l'on soucrit une police individuelle, souvent on demande à des gens que l'on connaît. On

peut citer aussi les campagnes marketing qui ciblent certaines régions. Cela engendre une concentration.

$$Binomial(n_0, \frac{n_{assurés}}{n_{population}}).$$

On va alors résoudre l'équation suivante, afin d'exprimer le paramètre d :

$$\begin{aligned} 1.1 &= \sqrt{\frac{Var(Binomiale(n, Beta(a, b)))}{Var(Binomiale(n, q))}} \\ 1.1 &= \sqrt{\frac{n * a * b * \frac{a+b+n}{(a+b)^2 * (a+b+1)}}{n * q * (1-q)}} \\ 1.1 &= \sqrt{\frac{d * q * d(1-q) \frac{d+n}{d^2 * (d+1)}}{q * (1-q)}} \\ 1.1^2 &= \frac{d+n}{d+1} \\ d+n &= 1.1^2 * d + 1.1^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$d = \frac{1.1^2 - n}{1 - 1.1^2}$$

Cas d'une police de groupe

Dans le cas d'une police de groupe, nous aimerions modéliser le fait que si un assuré est touché par un évènement, il y a de grande chance que les autres personnes touchées par l'évènement soient dans le même portefeuille. En effet, en général, les assurés dans une même police d'assurance ont un lien entre eux et ont donc plus de chance de se trouver au même endroit lorsqu'un évènement se produit.

Pour cela, nous avons fait le choix suivant :

La probabilité que toutes les victimes soient des assurés du portefeuille sachant que le portefeuille est touché est de 90%.

Définissons les évènements suivants :

- A : Toutes les victimes sont des assurés du portefeuille
- B : Le portefeuille est touché

Cette probabilité peut s'écrire $\frac{P(A)}{P(B)}$.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \int_0^1 p^n P(p) dp \\
 &= \int_0^1 p^n * \frac{p^a * (1-p)^b}{B(a,b)} dp \\
 &= \int_0^1 \frac{p^{a+n} * (1-p)^b}{B(a+n,b)} * \frac{B(a+n,b)}{B(a,b)} dp \\
 &= \frac{B(a+n,b)}{B(a,b)} * \int_0^1 \frac{p^{a+n} * (1-p)^b}{B(a+n,b)} dp \\
 &= \frac{B(a+n,b)}{B(a,b)}
 \end{aligned}$$

De plus, en échangeant a et b, on obtient la probabilité que toutes les victimes ne soient pas des assurés dans notre portefeuille.

$$P(\bar{A}) = \frac{B(b+n, a)}{B(b, a)}$$

Donc,

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1 - P(\bar{B})} = \frac{\frac{B(a+n,b)}{B(a,b)}}{1 - \frac{B(b+n,a)}{B(b,a)}}$$

En remplaçant $B(b, a)$ par $\frac{\Gamma(a)*\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, on obtient :

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a+b+n)}}{1 - \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b+a+n)}}$$

Il reste donc :

$$0.9 = \frac{\Gamma(d * q + n)}{\Gamma(d + n) - \Gamma(d * (1 - q) + n)}$$

Dans la police de groupe, nous avons décidé d'obtenir d en minimisant :

$$\left(\frac{\Gamma(d * q + n)}{\Gamma(d + n) - \Gamma(d * (1 - q) + n)} - 0.9 \right)^2$$

Il est alors possible de déterminer d en fixant la déviation que l'on s'autorise par type d'évènements et de contrats (groupes/individuels). L'avantage d'utiliser la variation relative de la loi beta binomiale par rapport à celle de la beta, est que l'on prend en compte le nombre de victimes dans l'évènement, qui est un paramètre important. Souvent, un faible nombre de victimes est lié à un contrat groupe et donc comporte un risque de concentration plus important. Il semble logique de s'autoriser une plus grande variation relative pour un contrat groupe que pour un contrat individuel.

2.2 Modélisation du coût d'un évènement pour le réassureur et calculs à l'aide de quantiles

2.2.1 Schéma de la modélisation et lien avec le modèle de capital

Dans cette partie, la méthode générale de la modélisation sera présentée, ainsi que le lien avec le modèle de capital. Les justifications et les tests sur la pertinence des hypothèses de cette partie seront faits dans les parties suivantes. L'objectif de cette partie est simplement de donner les idées clés du fonctionnement de ce modèle. L'une des problématiques est que dans le modèle de Strickler, les sommes assurées sont modélisées par une loi exponentielle. Cela ne permet donc pas de dupliquer tous les scénarios possibles, comme un petit groupe d'assurés avec des sommes assurées très importantes qui décèdent en même temps. Nous allons dans cette partie proposer des solutions pour mieux prendre en compte l'hétérogénéité des sommes assurées.

Méthode dans le cas d'un portefeuille de polices individuelles avec des sommes assurées homogènes.

L'idée générale est d'utiliser plusieurs quantiles de la loi *beta* pour modéliser la probabilité p qu'une victime soit un assuré de notre portefeuille. Le fait d'utiliser différents quantiles nous permet d'avoir un "panel de scénarios" avec différents risques de concentration. Un modèle simplifié aurait été de dire que si une personne de la police groupe est touchée, alors toutes les personnes de la police groupe le sont (comme ce qui est fait dans le modèle de Strickler). Ce scénario est assez extrême et modélise mal le fait qu'il y a une plus grande probabilité qu'un évènement touche plusieurs victimes sans forcément que toute la police soit touchée. Nous avons décidé de prendre les espérances entre les dix quantiles équidistants de la loi *beta*. On trouve rapidement la formule de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi *beta* sur $[0, 1]$. Ici, on veut trouver l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire p sur un intervalle autre que $[0, 1]$. Soit i et j deux réels entre $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p|p \in [x_i, x_j]) &= \frac{\mathbb{E}(p \in [x_i, x_j])}{\mathbb{P}(p \in [x_i, x_j])} \\ \mathbb{E}(p|p \in [x_i, x_j]) &= \frac{\mathbb{E}(p \in [x_i, x_j])}{0.1} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[x_i, x_j]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p \in [x_i, x_j]) &= \int_{x_i}^{x_j} \frac{x^{a+1}(1-x)^b}{\beta(a,b)} dx \\ &= \frac{\beta(a+1,b)}{\beta(a,b)} \int_{x_i}^{x_j} \frac{x^{a+1}(1-x)^b}{\beta(a+1,b)} dx \\ &= \frac{\frac{\gamma(a+1)\gamma(b)}{\gamma(a+1+b)}}{\frac{\gamma(a)\gamma(b)}{\gamma(a+b)}} \int_{x_i}^{x_j} \frac{x^{a+1}(1-x)^b}{\beta(a+1,b)} dx \\ &= \frac{a}{a+b} \int_0^{x_j} \frac{x^{a+1}(1-x)^b}{\beta(a+1,b)} dx \end{aligned}$$

Comme $\int_{x_i}^{x_j} \frac{x^{a+1}(1-x)^b}{\beta(a+1,b)} dx$ est la fonction de répartition d'une *Beta* de paramètres $a+1$ et b , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p \in [x_i, x_j]) &= \frac{a}{a+b} * F_{(a+1,b)}(x \in [x_i, x_j]) \\ \mathbb{E}(p|p \in [x_i, x_j]) &= \frac{a}{a+b} * F_{(a+1,b)}(x_j) \frac{1}{0.1} - \frac{a}{a+b} * F_{(a+1,b)}(x_i) \frac{1}{0.1} \end{aligned}$$

Pour construire la colonne à gauche "Espérance entre les quantiles de la beta", on prend pour la 1ère ligne $x_i = 0, x_j = 0.1$, pour la deuxième ligne $x_i = 0.1, x_j = 0.2...$ On prend également 10 quantiles de la loi binomiale afin de se laisser "plusieurs scénarios" possibles également.

Quantiles de la binomiale	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	99%
Espérance entre les quantiles de beta										
2,69785E-05	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
4,07009E-05	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
4,98823E-05	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2
5,81223E-05	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3
6,62607E-05	0	0	0	0	0	1	1	1	1	3
7,48383E-05	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3
8,44582E-05	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3
9,61318E-05	0	0	0	0	1	1	1	1	2	3
0,000112347	0	0	0	0	1	1	1	2	2	4
0,000149371	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4

FIGURE 2.3 – Nombre d'assurés touchés par un évènement à l'aide de la béta-binomiale

On remarque qu'on obtient un tableau de 100 cases avec dedans des nombres de victimes par scénario pour un même évènement. Ce tableau étant construit avec les 10 quantiles des lois beta et binomiale, chaque case est equiprobable. Le fait d'avoir plusieurs scénarios permet de mieux prendre en compte le risque de concentration.

On multiplie ensuite chaque case par la somme assurée moyenne du portefeuille et on applique ensuite le programme de réassurance dans chaque case car chaque case représente un scénario possible. On trouve ensuite la prime pure (pour un seul évènement de la base de données) en sommant les cases et divisant par 100 car tous les scénarios sont equiprobables. On applique cette méthode pour chaque évènement (plus précisément

le nombre de personnes décédées dans chaque évènement) de notre base de données historique des évènements CAT et on pondère notre montant final trouvé par la fréquence annuelle de chaque évènement.

Méthode dans le cas d'un portefeuille de polices individuelles avec des sommes assurées hétérogènes.

La méthode avec des sommes assurées hétérogènes au sein du portefeuille est similaire à la méthode précédente. Ici, on veut tenir compte de cette hétérogénéité et pas faire une moyenne des sommes assurées. Considérons par exemple un portefeuille de 5000 personnes avec une somme assurée de 100 000 € et de 10 personnes avec une somme assurée de 1 000 000 €. On sépare alors le portefeuille en sous-portefeuilles indépendants les plus homogènes possibles entre-eux. On applique la même méthode que précédemment sur chaque sous-portefeuille. On fait ensuite un tableau 100x100 avec en ligne les nombres d'assurés touchés multipliés par leur somme assurée dans le portefeuille 1 et en colonne le nombre d'assurés touchés dans le portefeuille 2 multiplié par leur somme assurée. On somme ensuite pour avoir toutes les combinaisons possibles du montant total. On applique ensuite le programme de réassurance dans chacune des 10 000 cases. On note également que chaque case représente un scénario et qu'ils sont tous équiprobables. De même, on réitère pour chaque évènement et on pondère le montant final par la fréquence annuelle de chacun des évènements pour obtenir la prime pure finale.

Méthode dans le cas d'un portefeuille de polices de groupe avec des sommes assurées hétérogènes.

Dans le cas d'un contrat groupe CAT XL, avec comme sous-jacent un contrat d'assurance collective d'entreprise par exemple, il peut arriver que les différentes personnes assurées ne soient pas dans les mêmes locaux. Cette information est rarement donnée mais celui ou celle qui tarifie doit avoir une idée du nombre moyen de personnes par entreprise. Par exemple si on réassure le portefeuille d'assurance collective des salariés d'une grande chaîne de supermarché, tous les salariés ne peuvent pas être touchés en même temps par un évènement. L'idée est alors de déterminer un maximum de concentration (par exemple le nombre moyen d'employés par magasin) et de subdiviser notre évènement en sous-évènements. Lorsque le nombre total de personnes n'est pas un multiple du maximum de concentration, il y a alors un petit évènement « résiduel ». On considère que les sous-évènements sont indépendants. En effet, si une entreprise est touchée, il y a peu de chance que la même soit touchée dans une ville différente par exemple.

Le paramètre d de la loi beta sera plus petit, pour prendre en compte le risque de concen-

tration.

Pour chaque évènement de notre base de données, on va déterminer le nombre de sous-évènements à l'aide du maximum de concentration. On divise le nombre de personnes décédées dans l'évènement par le maximum de concentration pour avoir le nombre de sous-évènements. Ensuite, pour chaque sous-évènement, on applique de nouveau la méthode du cas individuel.

Lien avec le modèle de capital

On obtient pour chaque évènement et pour chaque cédante la distribution de sévérités. On se retrouve alors au point 3 du chapitre I (Modèle de capital). On peut alors déduire les tables de scénarios d'évènements et avoir une vision claire sur l'engagement en capital du réassureur pour les traités XL CAT souscrits.

2.2.2 Test de l'intérêt des quantiles de la loi binomiale

Nous avons décidé de prendre 10 quantiles de la loi binomiale. Testons l'intérêt de prendre des quantiles plutôt que de prendre la moyenne de la loi binomiale. Le test a été fait dans le cas fictif où le portefeuille est homogène. Les tests ont été faits pour différentes valeurs de d . On rappelle que plus d est petit, plus le risque de concentration est grand et plus d est grand, plus le portefeuille est composé de risques individuels et donc plus la modélisation du nombre d'assurés touchés par la part de marché multipliée par le nombre de personnes décédées dans l'évènement dans la population globale a du sens.

Hypothèses du test

- Somme assurée moyenne : 168 849 €
- Part de marché (q) : 13,7%
- Tranche 1 : 3M xs 1M
- Tranche 2 : 3M xs 4M
- Tranche 3 : 12 xs 8 M

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d=0,1	2%	2%	2%
d=1	12%	8%	5%
d=10	20%	13%	6%
d=100	21%	15%	6%
d=1000	18%	15%	5%
d=10000	22%	15%	6%

FIGURE 2.4 – Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec et sans utiliser les quantiles de la loi binomiale

En rouge se trouvent les tests avec plus de 10 % d'écart relatif. Plus les valeurs de d sont grandes et plus les résultats avec l'espérance de la beta sont éloignés de ceux sans les quantiles de la binomiale. La loi beta donne des valeurs extrêmes lorsque le paramètre d est petit. Il résulte que les quantiles de la binomiale sont extrêmes aussi. La moyenne est alors soit significativement au-dessus ou en dessous de la priorité. Par contre, avec de grandes valeurs de d , la bêta donne des valeurs proches de la moyenne et les quantiles sont proches de la priorité.

Conclusion du test

Le fait d'utiliser les quantiles de la loi binomiale plutôt que d'utiliser la moyenne de la loi binomiale pour chaque quantile de la loi beta, a un impact significatif surtout sur les tranches 1 et 2.

2.2.3 Intérêt de subdiviser en sous-portefeuilles pour la prise en compte de l'hétérogénéité

Dans la partie 2.1, on a présenté une méthode permettant de calculer la prime pure d'un contrat XL en subdivisant nos sommes assurées en différents sous-portefeuilles homogènes entre-eux. Cette méthode permet d'éviter de prendre une somme moyenne et donc de raisonner en moyenne. Dans cette partie, nous allons tester pour différentes tranches et différentes compositions de portefeuille, l'impact d'utiliser des sous-portefeuilles homogènes en terme de sommes assurées plutôt que de garder un seul portefeuille.

On rappelle que plus le paramètre d est petit, plus le risque de concentration est pris en compte. On peut donc associer un faible paramètre d à un portefeuille plutôt constitué de polices de groupe et un grand paramètre d à un portefeuille de polices individuelles.

Hypothèses générales des tests

- Population française : 60 M
- le paramètre d vaut 100 000
- Tranche 1 : 3,5 M XS 500 000
- Tranche 2 : 4 M XS 4 M
- Tranche 3 : 12 M XS 8 M La liste d'évènements retenue pour tester notre modèle provient de EM-DAT. Le nombre de personnes décédées par évènement a été indexé sur 2018 par la population actuelle par rapport à celle de l'année de l'évènement de la base de données. Cela correspond à 167 évènements entre 1906 et 2017.

Objectif du test 1

Le but est de tester l'intérêt de subdiviser le portefeuille d'assurés en sous-portefeuilles homogènes en terme de sommes assurées. Pour cela, nous allons prendre deux classes d'assurés avec des sommes assurées très hétérogènes. Nous comparerons les primes pures obtenues sur différentes tranches de réassurance avec la méthode des subdivisions en sous-portefeuilles et celle de garder un unique portefeuille et de considérer une somme assurée moyenne.

Hypothèses supplémentaires du test de la subdivision en sous-portefeuilles dans le cas d'un portefeuille hétérogène en terme de sommes assurées

- 20 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- 100 assurés à 1 000 000 € chacun de somme assurée

Nous discuterons dans la dernière partie de la pertinence de cette base de données pour l'utiliser comme base de données d'évènements pour notre tarification. L'intérêt de la base de données EM-DAT est seulement d'avoir une liste fiable d'évènements pour faire des tests de sensibilité.

	ASI
20.000 assurés	150.000
100 assurés	1.000.000

Tranche 1	3.5M xs 500k
Tranche 2	4M xs 4M
Tranche 3	12M xs 8M

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d = 100	1396%	127%	
d = 1000	18082%	930%	
d = 10000	18082%		
d = 100000			

FIGURE 2.5 – Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec et sans subdivision du portefeuille

Commentaires

La première constatation est que la couverture CAT XL en vie est toujours plus chère dans le cas de la subdivision en sous-portefeuilles (avec les hypothèses considérées) que dans le cas d'un portefeuille non subdivisé. En effet, les écarts relatifs sont tous positifs alors qu'on a toujours considéré l'écart relatif du coût de la couverture avec subdivision par rapport au coût de la couverture sans subdivision.

Tout d'abord, on remarque que l'écart relatif est très important sur la première tranche. Compte tenu de la part de marché des deux sous-portefeuilles, on s'attend à ce que les tranches 2 et 3 soient rarement touchées. L'écart est alors un peu plus faible. Les cases grisées représentent les cas où le coût de la couverture CAT pour le portefeuille sans subdivision vaut 0. Cependant, les valeurs pour la couverture avec subdivisions pour ces tranches sont très faibles aussi. Les écarts relatifs sont très élevés mais les valeurs absolues sont faibles.

Objectif du test 2

Le but est de tester l'intérêt de subdiviser le portefeuille d'assurés en sous-portefeuilles homogènes en terme de sommes assurées dans le cas où les sommes assurées de tous les assurés sont identiques (cas parfait d'un portefeuille homogène). Pour cela, nous allons prendre deux classes d'assurés avec des sommes assurées identiques et nous comparerons les primes pures obtenues sur différentes tranches de réassurance avec la méthode des subdivisions en sous-portefeuilles et celle de garder un unique portefeuille et de considérer une somme assurée moyenne.

Hypothèses supplémentaires du test de la subdivision en sous-portefeuilles dans le cas d'un portefeuille homogène en terme de sommes assurées

- 20 000 assurés à **150 000** € chacun de somme assurée
- 100 assurés à **150 000** € chacun de somme assurée

	ASI
20.000 assurés	150.000
100 assurés	150.000

Tranche 1	3.5M xs 500k
Tranche 2	4M xs 4M
Tranche 3	12M xs 8M

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d = 100	652%	113%	
d = 1000	7757%	763%	
d = 10000	7757%		
d = 100000			

FIGURE 2.6 – Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec et sans subdivision du portefeuille

Commentaires

Il y a un impact de subdiviser même quand les sommes assurées sont identiques (cas fictif).

Conclusion des tests 1 et 2

L'impact de subdiviser est d'autant plus important que les sommes assurées au sein d'un portefeuille sont hétérogènes.

2.2.4 Tests de sensibilité

Tous les tests sont faits sur la France. Dans cette section, nous allons tester la sensibilité du modèle par rapport à différents facteurs : les tranches de réassurance, les sommes assurées, le nombre d'assurés, la présence d'un très grand évènement, les quantiles retenus et le paramètre d .

Impact des tranches de réassurance

Objectif du test

Le but est de tester la sensibilité du modèle aux tranches de réassurance. Pour cela, nous allons comparer les primes pures obtenues sur les différentes tranches avec le modèle avec subdivisions. Nous prendrons des sommes assurées identiques pour tous les assurés afin de tester seulement l'impact sur les tranches de réassurance du modèle avec subdivisions par rapport au modèle sans.

Hypothèses supplémentaires du test

- 20 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- 100 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- Tranche 1 : 500 000 XS 500 000
- Tranche 2 : 1 M XS 1 M
- Tranche 3 : 1 M XS 2 M

	ASI
20.000 assurés	150.000
100 assurés	150.000

Tranche 1	500k xs 500k
Tranche 2	1M xs 1M
Tranche 3	1M xs 2M

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d = 100	160%	68%	37%
d = 1000	205%	138%	55%
d = 10000	205%	273%	236%
d = 100000	293%	280%	231%

FIGURE 2.7 – Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) en fonction de différentes tranches de réassurance

Impact de la part de marché

Objectif du test

Le but est de tester l'influence de la part de marché (donc du nombre d'assurés dans le portefeuille) dans le modèle avec et sans subdivisions en sous-portefeuilles homogènes.

Hypothèses du test

- **200 000 assurés** à 150 000 € chacun de somme assurée (tableau bas)
- **100 000 assurés** à 150 000 € chacun de somme assurée (tableau bas)
- 20 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée (tableau haut)
- 100 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée (tableau haut)
- Tranche 1 : 500 000 XS 500 000
- Tranche 2 : 1 M XS 1 M
- Tranche 3 : 1 M XS 2 M

	ASI	
20.000 assurés	150.000	Tranche 1 500k xs 500k
100 assurés	150.000	Tranche 2 1M xs 1M
		Tranche 3 1M xs 2M

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d = 100	160%	68%	37%
d = 1000	205%	138%	55%
d = 10000	205%	273%	236%
d = 100000	293%	280%	231%

	ASI	
200.000 assurés	150.000	Tranche 1 500k xs 500k
100.000 assurés	150.000	Tranche 2 1M xs 1M
		Tranche 3 1M xs 2M

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d = 100	160%	82%	44%
d = 1000	173%	90%	46%
d = 10000	173%	90%	51%
d = 100000	172%	90%	52%

FIGURE 2.8 – Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) en fonction de la part de marché

Impact d'un très grand évènement

Objectif du test

Le but est de tester la sensibilité du modèle avec subdivisions à l'ajout d'un très grand sinistre catastrophe (par exemple un attentat au stade de France) par rapport au modèle sans subdivision.

Hypothèses du test

- 200 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- 100 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- **Évènement (fictif) rajouté ou enlevé** : attentat au stade de France 8000 victimes
- Tranche 1 : 500 000 XS 500 000
- Tranche 2 : 1 M XS 1 M
- Tranche 3 : 1 M XS 2 M

Résultats

	ASI		
200.000 assurés	150.000	Tranche 1	500k xs 500k
100.000 assurés	150.000	Tranche 2	1M xs 1M
		Tranche 3	1M xs 2M

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d = 100	160%	82%	44%
d = 1000	173%	90%	46%
d = 10000	173%	90%	51%
d = 100000	172%	90%	52%

	ASI		
200.000 assurés	150.000	Tranche 1	500k xs 500k
100.000 assurés	150.000	Tranche 2	1M xs 1M
		Tranche 3	1M xs 2M

Sans event Stade France

	Tranche 1	Tranche 2	Tranche 3
d = 100	180%	90%	48%
d = 1000	195%	109%	54%
d = 10000	195%	114%	70%
d = 100000	194%	114%	73%

FIGURE 2.9 – Ecart relatif entre les montants à charge du réassureur (après application du programme de réassurance) avec (haut) et sans (bas) l'évènement fictif de l'attentat au Stade de France

Impact du dernier quantile de la loi *beta* et de la *binomiale*

Objectif du test

L'objectif de ces tests est de montrer l'impact de choisir le quantile à 100 % de la loi *binomiale* plutôt que le quantile à 99,9 % ou 99,99 % ou 99,999 %...

Le tableau ci-dessous donne le nombre de personnes victimes dans notre portefeuille en fonction des différents scénarios (différents quantiles de la loi *beta* et différents quantiles de la loi *binomiale*). Les quantiles marqués sont ceux de la loi *binomiale*. Ceux de la loi *beta* vont de 10 % en 10 %.

Hypothèses du test

- 200 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- 100 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- L'évènement du test fait 200 victimes dans la population générale

Le tableau ci-dessous donne le nombre de personnes victimes dans notre portefeuille en fonction des différents scénarios (différents quantiles de la loi *beta* et différents quantiles de la loi *biomiale*). Les quantiles marqués sont ceux de la loi *binomiale*. Ceux de la loi *beta* vont de 10 % en 10 %.

quantiles de la loi binomiale	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
0	0	0	0	0	1	1	1	2	2
0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2
0	0	0	1	1	1	1	1	2	2

FIGURE 2.10 – Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles (entre 0.1 et 0.9) de la loi *binomiale*

quantiles extremes de la loi binomiale	99%	99,99%	99,999%	99,9999%	99,99999%	99,99999999999999%
4	6	7	8	9	15	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	
8	6	7	8	9	16	

FIGURE 2.11 – Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles extrêmes de la loi *binomiale*

Conclusion du test sur les quantiles de la binomiale

Nous remarquons que le fait de choisir le quantile à 99% ou le quantile à 99,99999999999999% multiplie par deux le nombre de victimes considérées dans notre portefeuille. La sensibilité de la prime pure au choix de ce quantile est donc très grande.

Objectif du test

L'objectif de ces tests est de montrer l'impact de choisir le quantile à 100 % de la loi *beta* plutôt que le quantile à 99,9 % ou 99,99 % ou 99,999 %...

Hypothèses

- 200 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- 100 000 assurés à 150 000 € chacun de somme assurée
- L'évènement du test fait 200 victimes dans la population générale

	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	99,99990%
quantiles beta										
10%	0	0	0	0	1	1	1	2	2	8
20%	0	0	0	0	1	1	1	2	2	8
30%	0	0	0	0	1	1	1	2	2	8
40%	0	0	0	0	1	1	1	2	2	8
50%	0	0	0	0	1	1	1	2	2	8
60%	0	0	0	0	1	1	1	2	2	8
70%	0	0	0	1	1	1	1	2	2	8
80%	0	0	0	1	1	1	1	2	2	8
90%	0	0	0	1	1	1	1	2	2	8
99,999999999999%	0	0	0	1	1	1	1	2	2	8
99,9%	0	0	0	1	1	1	1	2	2	8

FIGURE 2.12 – Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles de la loi beta pour $d = 100\ 000$

	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	99,99990%
quantiles beta										
10%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
70%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
80%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
90%	0	0	0	0	0	0	1	1	1	6
99,999999999999%	5	6	7	8	8	9	10	11	12	25
99,9%	5	6	6	7	8	9	9	10	12	24

FIGURE 2.13 – Nombre de victimes dans notre portefeuille en fonction des différents quantiles de la loi beta pour $d = 10$

Conclusion du test sur les quantiles de la beta

Nous remarquons que le fait de choisir le quantile à 99 %, 99,9 % ou le quantile à 99,999999999999 % n'a aucun impact sur le nombre de victimes touchées dans notre portefeuille pour $d = 100000$ et a très peu d'impact pour $d = 10$. Il est logique que l'écart soit un peu plus grand pour le cas où d vaut 10 car la loi beta a une densité de probabilité très grande aux extrêmes pour un paramètre d petit, alors que quand d est grand, la masse de probabilité est très importante au niveau de la part de marché.

2.2.5 Conclusion de ce modèle

Le modèle construit en considérant une loi *beta – binomiale* pour déterminer le nombre de victimes dans notre portefeuille sachant un nombre de victimes dans la population générale semble répondre à une grande partie de nos critères. La loi beta permet de prendre différentes formes qui permettent de modéliser les caractères "groupes" et "individuels". De plus, cette loi ne nécessite que très peu de paramètres, ce qui est important puisque nous ne disposons que de très peu de données. Le risque de concentration est mieux pris en compte à l'aide du choix du paramètre d . Lorsque l'on a des contrats à tarifier de type police de groupe où le risque de concentration est plus présent que dans un contrat de type police individuelle, on fixera un d plus petit. En outre, le fait de subdiviser notre portefeuille en sous-portefeuilles homogènes entre eux en terme de sommes assurées permet de ne pas mettre une probabilité nulle sur le fait d'avoir un grand nombre de personnes touchées avec les plus grandes sommes assurées. Cette probabilité était extrêmement faible dans le modèle de Strickler car le fait de considérer une distribution exponentielle pour modéliser les sommes assurées ne permet pas de dupliquer tous les scénarios possibles. Ainsi, dans le cas de portefeuilles très hétérogènes, la probabilité de survenance d'un événement très extrême tuant peu de personnes avec une somme assurée très importante est désormais non nulle. .

Cependant, nous avons vu dans les tests de sensibilité, que l'influence du dernier quantile de la loi *binomiale* était très importante et que l'on pouvait passer d'un nombre de victimes dans notre portefeuille au double en considérant le quantile à 99 % ou 100 %. Ceci pose des problèmes car faire le choix du quantile à 100 % peut s'avérer trop "sévère" mais faire le choix du quantile à 99 % peut amener à ne jamais considérer les cas extrêmes que l'on retrouve avec des quantiles à 100 %. De plus, le fait de subdiviser en sous-portefeuilles et donc d'avoir différentes combinaisons de quantiles possible pour un même portefeuille d'assurés et pour une même garantie fait que certains assurés ont plus de chance de décéder que d'autres, alors que cette information n'est pas donnée.

Pour palier ces deux problèmes, nous avons utilisé l'algorithme de Panjer qui à partir des quantiles de la loi *beta* nous donne la distribution de toutes les possibilités de nombre de personnes touchées.

2.3 Améliorations du modèle à l'aide de l'algorithme de Panjer

2.3.1 Rappels sur l'algorithme de Panjer

Considérons

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i$$

En assurance, cette somme est très souvent utilisée car elle représente une distribution composée très classique quand N suit une loi de Poisson et Y_i représente le montant d'un sinistre.

Dans le cas où N appartient à la famille de Panjer et que les Y_i sont à valeurs dans \mathbb{N}^* , on peut calculer directement la masse de probabilité de S avec l'algorithme de Panjer.

Relation de Panjer

Il existe $a < 1$, b réel, quelque soit k appartenant à \mathbb{N}^* ,

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}$$

On rappelle que les lois qui vérifient la relation de Panjer sont exactement les lois binomiales, de Poisson et binomiales négatives.

Application dans notre cas

Dans notre cas, Y_i représente les différents montants possibles à payer pour l'assureur (le nombre d'assurés touché multiplié par la somme assurée de chacun des assurés touchés). N représente le nombre de victimes et suit une loi binomiale (n, p_i) avec n le nombre de personnes victimes dans la population et p_i la probabilité qu'une personne victime soit un assuré. On rappelle que p_i suit une loi beta et que les différents p_i représentent l'espérance entre les 10 quantiles equidistants de la loi beta. On peut donc à l'aide de l'algorithme trouver la distribution de probabilité de S .

Notons h le pas de la somme à payer par l'assureur. Soit k appartenant à \mathbb{N}^* .

Notons $f_k = P(Y_i = hk)$

Notons $p_k = P(N = k)$

Notons $g_k = P(S = hk)$

Pour une loi binomiale, $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On obtient alors, avec les notations de la relation de Panjer ci-dessus, que

$$a = \frac{-p}{1-p} \text{ et } b = \frac{p(n+1)}{1-p}$$

La récurrence de Panjer est la suivante :

$$g_0 = \frac{P_0}{(1-f_0 a)^{1+\frac{b}{a}}}$$
$$g_k = \frac{1}{1-f_0 a} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) f_j g_{k-j}$$

2.3.2 Modélisation avec l'algorithme de Panjer

Cas portefeuille avec des polices décès individuelles

- Étape 1 : On détermine la distribution de probabilité des sommes assurées.
- Étape 2 : Pour chaque évènement, on détermine les 10 p_i correspondant aux moyennes sur les intervalles des 10 quantiles de la loi beta. Et pour chaque p_i , on applique l'algorithme de Panjer avec comme loi de fréquence la loi binomiale (n, p_i) et de loi de sévérité la loi déterminée à l'étape 1. Pour une distribution de Panjer donnée, on a les probabilités associées à un pas, deux pas, trois pas ... le nombre de pas doit être choisi en fonction de la limite et des tranches de sommes assurées pour que les calculs soient plus rapides. On obtient alors 10 distributions (car on a pris 10 quantiles pour la loi beta) de Panjer pour chaque évènement. Pour obtenir une seule distribution, on applique la formule des probabilités totales sur les probabilités associées aux montants X_i .
- Étape 3 : On applique notre programme de réassurance aux X_i et on fait une somme pondérée des X_i dans la tranche de réassurance par les probabilités trouvées.
- Étape 4 : On réitère pour chaque évènement et on fait une somme pondérée des prix trouvés pour chaque évènement par la fréquence annuelle de chaque évènement.

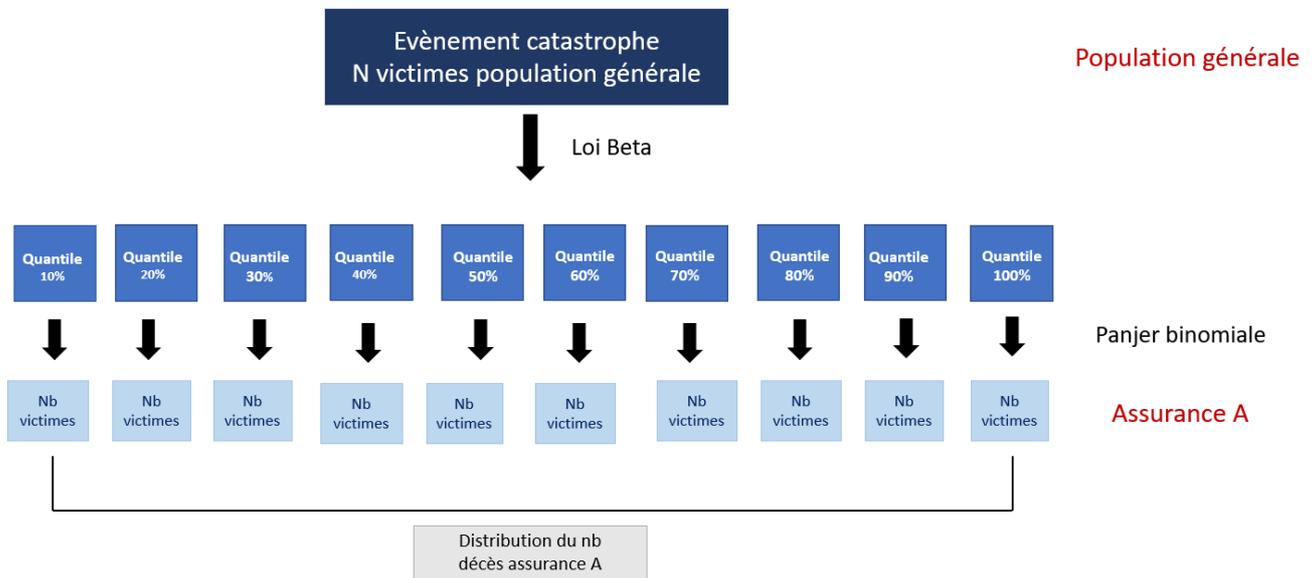


FIGURE 2.14 – Schéma de l'étape 2

Cas portefeuille avec des polices décès groupes

Les assurés d'une police de groupe peuvent décéder dans un accident avec les assurés de la police de groupe comme par exemple dans une voiture avec des autres membres de leur famille, assurés par la même police d'assurance. Mais, ils peuvent également décéder seul sans les autres assurés de la même police. Ainsi, dans la modélisation on prendra en compte le fait que l'assuré peut décéder de manière "individuelle" ou de manière "collective".

- Etape 1 : On détermine la distribution de probabilité des sommes assurées.
- Etape 2 : On subdivise chaque évènement en plusieurs sous-évènements à l'aide du maximum de concentration. On détermine les 10 p_i correspondant aux moyennes sur les intervalles des 10 quantiles. Et pour chaque p_i , on applique l'algorithme de Panjer avec comme loi de fréquence la loi binomiale (n_j, p_i) et de loi de sévérité la loi déterminée à l'étape 1. Le paramètre n_j représente dans le cas groupe le maximum de concentration quelque soit j quand le nombre de victimes est divisible par le maximum de concentration et pour le dernier j , n_j représente le résidu du nombre de victimes en cas de non divisibilité. Pour une distribution de Panjer donnée, on a les probabilités associées à un pas, deux pas, trois pas ... le nombre de pas doit être choisi en fonction de la limite et des tranches de sommes assurées pour que les calculs soient plus rapides. On obtient alors 10 distributions (car on a pris 10 quantiles pour la loi beta) de Panjer pour chaque sous-évènement. Pour obtenir une seule distribution par sous-évènement, on applique la formule des probabilités totales sur les probabilités associées aux montants X_i .
- Etape 3 : On agrège deux par deux les sous évènements indépendants. Pour cela, on crée deux matrices : une pour la sévérité (A) et une pour les probabilités associées (B) :
$$A(i, j) = X_i + X_j \text{ avec les } X_i \text{ les différentes valeurs de sévérité espacées par le pas de sévérité utilisé dans l'algorithme de Panjer.}$$
$$B(i, j) = P(X_i) * P(X_j)$$

On veut déterminer $P(X_k + Y_k = k * h)$. Cela revient à sommer les diagonales de la matrice des probabilités. On peut donc mettre le reste de la masse de probabilités sur le dernier montant correspondant à la limite du traité pour éviter de calculer des choses inutiles et donc rendre plus efficace le programme.
- Etape 4 : On obtient alors pour chaque évènement groupe, une distribution de probabilité.
- Etape 5 : On calcule la distribution pour un évènement individuel (voir méthode donnée précédemment)
- Etape 6 : On agrège de la même manière qu'à l'étape 3 la distribution collective et individuelle, pour chaque évènement.

- Etape 7 : On applique notre programme de réassurance aux X_i et on fait une somme pondérée des X_i dans la tranche de réassurance par les probabilités trouvées.
- Etape 8 : On réitère pour chaque évènement et on fait une somme pondérée des prix trouvés pour chaque évènement par la fréquence annuelle de chaque évènement.

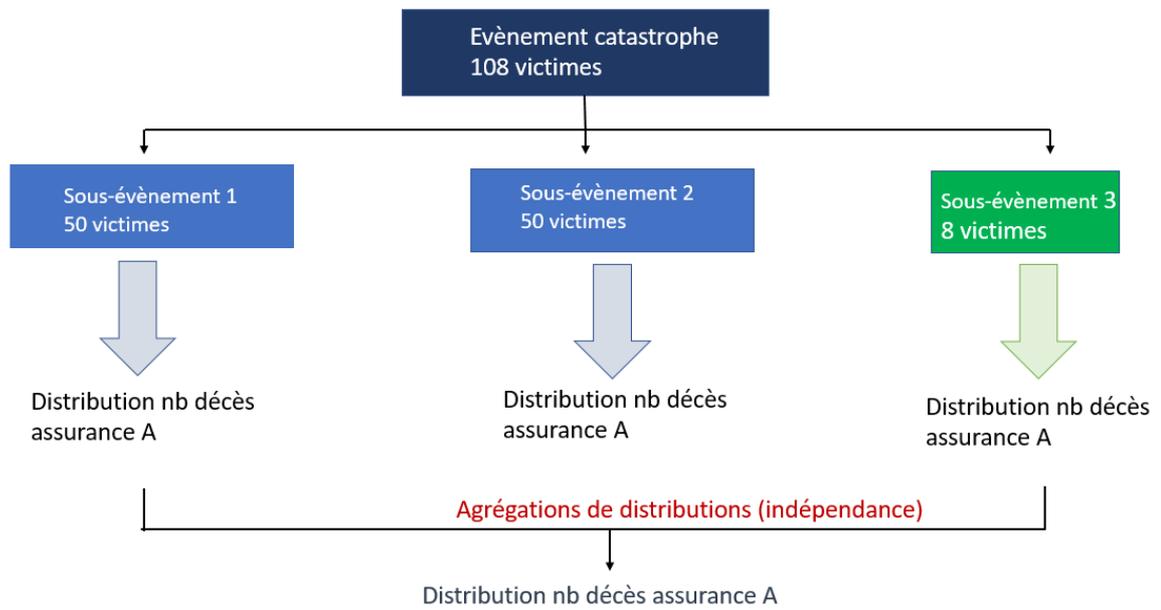


FIGURE 2.15 – Schéma des étapes 2,3,4 : division d'un évènement groupe

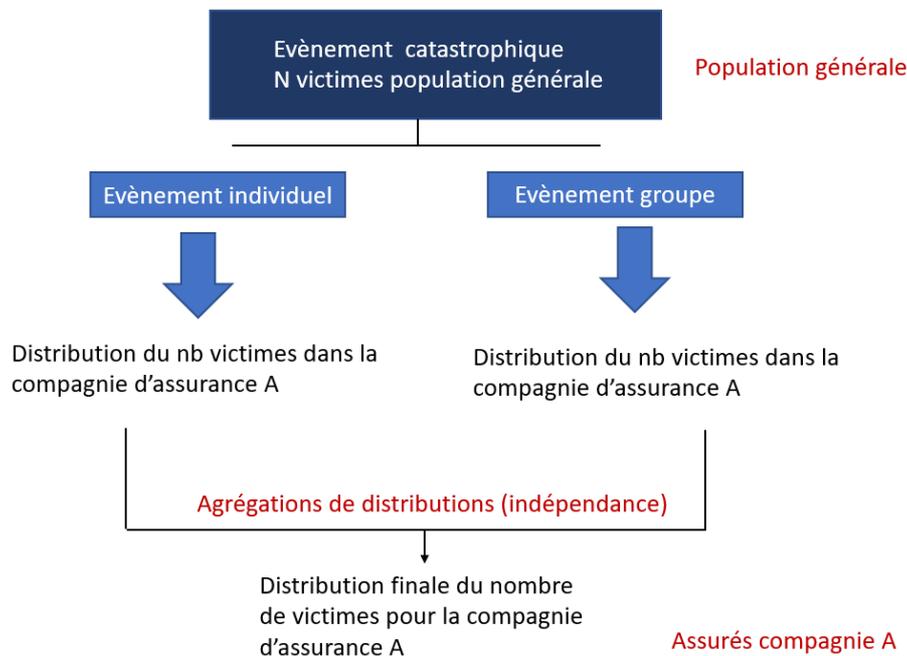


FIGURE 2.16 – Schéma de l'étape 6 : Agrégation distribution individuelle et groupe

Généralisation : cas portefeuille avec plusieurs polices (pas seulement la police décès)

Nous avons vu précédemment comment tarifier des contrats décès dans le cas de polices individuelles et dans le cas de polices décès. Il arrive souvent qu'un portefeuille soit composé de polices individuelles pour une partie du portefeuille et de polices groupes pour une autre partie du portefeuille. On applique les méthodes précédentes pour chaque partie du portefeuille. On fera bien attention à changer le vecteur avec l'espérance des quantiles de la loi *beta*. En effet, ce vecteur dépend de la part de marché et donc du nombre d'assurés pour cette couverture. Une fois qu'on a les distributions pour chaque évènement, on agrège de la même manière les distributions.

De manière générale, si on a plusieurs polices, par exemple une police décès et invalidité. On effectue les mêmes étapes que précédemment (cas individuel ou cas groupe). On fera attention à changer la liste d'évènements dans le cas invalidité et la distribution des sommes assurées. RMS suggère de choisir un ratio de 10% pour déterminer le nombre d'invalides à partir du nombre de décès. On discutera plus en détail de ce choix dans le dernier chapitre. Ensuite, on agrège nos distributions trouvées pour se ramener à une distribution par évènement.

2.3.3 Lien avec le modèle de capital

Pour chaque cédante, on obtient bien pour chaque évènement de la base de données, la distribution de coût pour l'assureur et pour le réassureur compte tenu des différentes couvertures. On peut alors obtenir des tables ELT (Event Loss Table) à l'aide de toutes les combinaisons possibles ou par simulation. La méthode a déjà été expliquée dans la section 1.3.3.

2.4 Résumé succinct du chapitre 2



Le modèle construit en considérant une loi **béta-binomiale** pour déterminer le nombre de victimes dans notre portefeuille sachant le nombre de victimes dans la population générale touchées par un évènement permet une meilleure prise en compte du risque de concentration. Cependant, nous avons vu grâce aux tests de sensibilité que l'influence du dernier quantile de la loi binomiale était très importante. Ainsi, pour palier ce problème, nous avons décidé d'utiliser **l'algorithme de Panjer**, qui, à partir des quantiles de la loi beta nous donne la distribution de toutes les possibilités de nombre de personnes touchées dans notre portefeuille. En outre, la construction du modèle nous permet de mieux prendre en compte l'hétérogénéité du portefeuille au niveau des sommes assurées.

La méthodologie basée sur des **agrégations de distributions** permet d'obtenir la distribution de probabilité des montants que le réassureur paiera quelque soit le type de police (individuelle ou groupe) et de garantie (décès, invalidité, décès + invalidité...). Cette **flexibilité** est très appréciée en réassurance car on est amené à tarifier des contrats pour un grand nombre de pays différents et les couvertures demandées sont très hétérogènes en fonction des pays.

La comparaison des primes pures entre l'ancien et le nouveau modèle de tarification sera faite dans le chapitre suivant.

COMPARAISONS DES RÉSULTATS AVEC L'ANCIEN MODÈLE ET PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DE LA CRÉATION D'UNE BASE DE DONNÉES

Nous avons vu dans les deux précédents chapitres les motivations que nous avions à construire un nouveau modèle de tarification. Nous avons conclu que le modèle utilisant l'algorithme de Panjer nous semblait le plus approprié pour déduire le montant à charge du réassureur sachant le nombre de personnes touchées par l'évènement dans la population générale. On peut ainsi voir le deuxième chapitre comme la modélisation de la sévérité dans le portefeuille dans un modèle collectif. La sévérité représente ici le nombre de têtes touchées dans notre portefeuille. Nous allons désormais nous intéresser à modéliser la fréquence et l'intensité des évènements CAT. En effet, nous avons jusqu'à présent pris une base de données fiable (EM-DAT) pour effectuer les tests présentés dans le chapitre 2. Nous allons réfléchir dans cette partie à construire une base de données plutôt que d'utiliser uniquement une base de données historique.

Nous testerons notre nouveau modèle avec les mêmes hypothèses prises dans Strickler. L'intérêt de faire cela est de pouvoir comparer des choses comparables. Les évènements sont donc générés suivant le modèle de Strickler (présenté en I.2.1). Les sommes assurées suivent une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$ avec λ la somme assurée moyenne du portefeuille. Le choix du portefeuille français est motivé par le fait que c'est l'un des plus grands portefeuilles en CAT vie de QBE Re Brussels.

3.1 Comparaison des primes pures avec l'ancien modèle

3.1.1 Cas d'une police individuelle et d'une garantie décès

Objectif du test

L'objectif de ce test est de comparer les résultats obtenus avec le nouveau modèle (avec les hypothèses de celles de l'ancien modèle) et de ceux obtenus avec l'ancien modèle (le modèle de Strickler). Le fait de prendre les **mêmes hypothèses** que celles du modèle de Strickler nous permet de réellement comparer des choses comparables. Les sommes assurées suivent donc une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$ et la liste des événements est une liste générée à partir de la distribution des accidents donnée dans le modèle de Strickler en plafonnant le nombre maximal de victimes en France à 4000.

Hypothèses

- Police individuelle - garantie décès
- 5 000 000 assurés
- Sommes assurées réparties selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$
- Population française : 60 M
- Le nombre maximum de décès par événement est fixé à 4000 (dans les deux modèles)
- Dans le modèle de Strickler on prendra $a = 3.5$ et $b = 0.3333$

Résultats

Priorité	Limit	Ecart relatif (Strickler/Panjer)
500.000	1.000.000	27%
1.000.000	5.000.000	19%
5.000.000	10.000.000	4%
10.000.000	50.000.000	11%

FIGURE 3.1 – Ecart relatif entre la prime pure obtenue avec l'ancien et le nouveau modèle dans le cas d'une police individuelle décès

Commentaires

Nous avons décidé de plafonner nos événements à 4000 victimes. C'est-à-dire que nous n'avons pas considéré la possible survenance d'un événement avec plus 4000 victimes en France. Nous aurions pu mettre la fréquence d'un événement avec 4000 ou plus de victimes sur l'évènement à 4000 pour tenir compte de la possibilité de ces événements. Cependant, nous voulions nous mettre dans les mêmes hypothèses que celles utilisées

dans le modèle de Strickler et Strickler possède deux paramètres : le nombre de décès maximum au sein des assurés et le nombre de décès maximum au sein des non assurés. Or, dans notre modèle de Panjer, on a le nombre maximum de décès total. Nous avons décidé de prendre au maximum l'évènement avec 4000 décès. La possible sous-évaluation des tarifs par rapport à ceux obtenus avec Strickler provient sûrement de cela.

Objectif du test

Tester l'ancien et le nouveau modèle dans le cas d'un portefeuille très hétérogènes. On va montrer qu'avec le modèle de Strickler, prendre une sous-partie d'un portefeuille hétérogène peut amener à un prix presque 2 fois plus grand que prendre le portefeuille entier, ce qui n'est pas du tout acceptable d'un point de vue de gestion des risques. En effet, réassurer des personnes en plus ne peut faire diminuer le prix total.

Hypothèses

- Police individuelle - garantie décès
- 100 000 assurés dont 99 000 avec une somme assurée de 100 000 € et 1000 avec une somme assurée de 2 000 000 €
- Priorité : 500 000 €
- Limite : 1 000 000 €
- Sommes assurées réparties selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$
- Population française : 60 M
- Le nombre maximum de décès par évènement est fixé à 4000 (dans les deux modèles)
- On a capé notre algorithme en ne considérant pas la possibilité d'un évènement plus sévère que l'évènement millénaire.
- Dans le modèle de Strickler on prendra $a = 3.5$ et $b = 0.3333$

Résultats

On obtient que la prime pure pour le sous-portefeuille (seulement les 1000 assurés) est 1,95 fois plus élevée que la prime pure pour le portefeuille entier en utilisant le modèle de Strickler. Le modèle de Panjer nous donne bien un prix inférieur en prenant le sous-portefeuille en question que lorsque l'on considère tout le portefeuille, ce qui est plus cohérent. De plus, le modèle de Panjer donne un prix 45 % plus cher que celui de la tarification du portefeuille entier avec Strickler.

Commentaires

Cette différence de prix (45 %) s'explique par le fait que Strickler utilise une somme assurée moyenne et une distribution exponentielle et ne prend donc pas en compte le cas où plusieurs assurés avec des sommes assurées très grandes décèdent ensemble. Le nouveau modèle reflète donc mieux l'hétérogénéité du portefeuille d'assurés.

Objectif du test

Afin d'augmenter la rapidité de calcul, nous avons décidé de fixer une condition d'arrêt dans le calcul de la distribution de Panjer et dans le calcul des agrégations de distributions. Pour cela, on se fixe un paramètre, que l'on appelle la tolérance. Ce paramètre représente la probabilité maximale associée à la survenance d'un évènement. L'objectif est de tester l'impact de plafonner l'algorithme calculant les agrégations des différentes distributions avec une tolérance donnée. Le facteur de tolérance utilisé dans l'algorithme de Panjer sera fixé à 0,99999 dans ce test afin de seulement tester l'impact du facteur de tolérance utilisé dans les agrégations.

Hypothèses

- 2 polices : une police individuelle - garantie décès et une police groupe- garantie invalidité
- 5 000 000 assurés
- Sommes assurées réparties selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$
- Population française : 60 M
- Dans le modèle de Strickler on prendra $a = 3.5$ et $b = 0.3333$

Résultats

	Priorité	Limite
Tranche 1	500,000	1,000,000
Tranche 2	1,000,000	5,000,000
Tranche 3	5,000,000	10,000,000
Tranche 4	10,000,000	50,000,000

Tolérance agrégation	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
Tranche 1	0.0%	102.7%	88.9%	87.4%	87.4%
Tranche 2	0.0%	2.1%	4.2%	4.8%	4.8%
Tranche 3	0.0%	1.3%	1.4%	1.4%	1.4%
Tranche 4	0.0%	0.4%	0.4%	0.4%	0.4%

FIGURE 3.2 – Ecart relatif des primes pures par rapport à une prime de référence, en fonction du paramètre de tolérance utilisé dans l'agrégation des distributions

Commentaires

Le paramètre de tolérance utilisé dans l'agrégation a un impact, notamment sur la première tranche. L'écart est très important entre 0.9 et 0.99.

Objectif du test

L'objectif est de tester l'impact de plafonner l'algorithme de Panjer. On impose une condition d'arrêt lorsque la probabilité est inférieure ou égale à 1 moins le facteur de "tolérance". Le facteur de tolérance utilisé dans l'algorithme des agrégations sera fixé à 0,99 dans ce test afin de seulement tester l'impact du facteur de tolérance utilisé dans l'algorithme de Panjer.

Hypothèses

- Police individuelle - garantie décès
- 5 000 000 assurés
- Sommes assurées réparties selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$
- Population française : 60 M
- Le nombre maximum de décès par événement est fixé à 4000 (dans les deux modèles)
- Dans le modèle de Strickler on prendra $a = 3.5$ et $b = 0.3333$

Résultats

	Priorité	Limite
Tranche 1	500,000	1,000,000
Tranche 2	1,000,000	5,000,000
Tranche 3	5,000,000	10,000,000
Tranche 4	10,000,000	50,000,000

Tolérance dans l'agrégation	0.99
Tolérance dans l'algorithme de Panjer	0.9
Tranche 1	w
Tranche 2	x
Tranche 3	y
Tranche 4	z

Tolérance dans l'agrégation	0.99
Tolérance dans l'algorithme de Panjer	0.99
Tranche 1	w
Tranche 2	x
Tranche 3	y
Tranche 4	z

Tolérance dans l'agrégation	0.99
Tolérance dans l'algorithme de Panjer	0.999
Tranche 1	11,48*w
Tranche 2	1.02*x
Tranche 3	y
Tranche 4	z

Tolérance dans l'agrégation	0.99
Tolérance dans l'algorithme de Panjer	0.9999
Tranche 1	18,87*w
Tranche 2	1,39*x
Tranche 3	y
Tranche 4	z

FIGURE 3.3 – Primes pures obtenues en fonction du paramètre de tolérance utilisé dans l'agrégation des distributions

Commentaires

Le choix du paramètre de tolérance servant à borner l'algorithme de Panjer a un énorme impact. Lorsque l'on passe de 0,99 à 0,9999, le prix est multiplié par 18,87! Pour nos calculs, nous garderons donc le paramètre de tolérance à 0,9999. (le fait d'augmenter encore la limite n'a d'impact sur aucune des tranches).

Objectif du test

L'objectif est de tester l'impact de ne pas limiter notre liste d'évènements à l'évènement maximal de 4000 victimes décédées mais de considérer la possibilité d'avoir 4000 victimes ou plus. Pour cela, nous mettrons le poids (d'un point de vue de fréquence) d'avoir 4000 victimes ou plus sur l'évènement à 4000 victimes.

Hypothèses

- Police individuelle - garantie décès
- 5 000 000 assurés
- Sommes assurées réparties selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$
- Population française : 60 M
- Dans le modèle de Strickler on prendra $a = 3.5$ et $b = 0.3333$

Résultats

	Priorité	Limite
Tranche 1	500.000	1.000.000
Tranche 2	1.000.000	5.000.000
Tranche 3	5.000.000	10.000.000
Tranche 4	10.000.000	50.000.000

Tranche 1	0%
Tranche 2	6%
Tranche 3	45%
Tranche 4	297%

FIGURE 3.4 – Ecart relatif des primes pures obtenues sans troncature vs avec troncature à 4000 décès, dans le cas individuel

Commentaires

Le fait de considérer comme évènement maximal en France un évènement engendrant 4000 victimes décédées (scénario plus sévère que le scénario catastrophe de Solvabilité II) ou de considérer des évènements faisant plus de 4000 victimes décédées a un grand impact sur la tranche 3 et un énorme impact sur la dernière tranche. Le fait de considérer l'évènement maximal à 4000 victimes en France ou plus est un choix complètement arbitraire qui pour certaines tranches impacte grandement le prix.

3.1.2 Cas d'une police de groupe et d'une garantie décès

Dans le cas d'une police de groupe, on rappelle que les assurés peuvent à la fois décéder d'évènements touchant un groupe d'assurés par la même police groupe (par exemple un accident sur le lieu de travail) mais aussi d'un évènement individuel (un attentat par exemple). Le risque de concentration n'est pas le même dans le cas d'un évènement CAT touchant une police de groupe ou une police individuelle. Le paramètre d qui permet de faire varier le risque de concentration n'a donc pas la même valeur dans le cas d'une police de groupe que d'une police individuelle. Dans la suite du mémoire, nous utiliserons l'abus de langage " d groupe" et " d individuel" pour la valeur du paramètre d dans le cas d'une police de groupe et individuelle respectivement.

Objectif du test

L'objectif de ce test est de comparer les résultats obtenus avec le nouveau modèle (avec les hypothèses de celles de l'ancien modèle) et de ceux obtenus avec l'ancien modèle (le modèle de Strickler). Le fait de prendre les **mêmes hypothèses** que celles du modèle de Strickler nous permet de réellement comparer des choses comparables. Les sommes assurées suivront donc une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$ et la liste des évènements est une liste générée à partir de la distribution des accidents donnée dans le modèle de Strickler en plafonnant le nombre de victimes maximum en France à 4000.

Hypothèses

- Police de groupe - garantie décès
- 5 000 000 assurés
- Sommes assurées réparties selon une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{130\,000}$
- Population française : 60 M
- Le nombre maximum de décès par évènement est fixé à 4000 (dans les deux modèles)
- Dans le modèle de Strickler on prendra $a = 3.5$ et $b = 0.3333$

Résultats

Numéro du Test	Priorité	Limit
1	500.000	1.000.000
d = 0,1	d= 1	d=10
95%	268%	374%

Numéro du Test	Priorité	Limit
2	1.000.000	5.000.000
d = 0,1	d= 1	d=10
-24%	33%	76%

Numéro du Test	Priorité	Limit
3	1.000.000	5.000.000
d = 0,1	d= 1	d=10
-66%	-39%	6%

Numéro du Test	Priorité	Limit
4	10.000.000	50.000.000
d = 0,1	d= 1	d=10
-15%	-4%	21%

FIGURE 3.5 – Ecart relatif entre la prime pure obtenue avec l'ancien et le nouveau modèle dans le cas d'une police de groupe décès en fonction de différentes valeurs de d (pour le groupe)

Commentaires

On remarque que notre modèle est très sensible au paramètre d . Plus les valeurs de d augmentent, pour une tranche donnée et plus le prix diminue, ce qui est logique.

3.2 Construction de la base de données en utilisant la crédibilité

3.2.1 La base de données EM-DAT

La base de données nommée précédemment "EM-data" est une base de données internationale des catastrophes. Le CRED (Center for Research on the Epidemiology of Disasters) a été fondé en 1973 et se situe en Belgique à l'université de Louvain (UCL). Sur leur site web : <https://www.emdat.be>, il est possible de consulter les bases de données. Pour qu'un sinistre soit ajouté à la base de données, il doit remplir au moins l'une des conditions suivantes :

- Etre à l'origine d'au moins 10 personnes décédées
- Etre à l'origine d'au moins 100 personnes affectées/ Blessées/sans habitation
- Etre à l'origine d'une déclaration d'un état d'urgence ou d'un appel à l'aide internationale de la part du pays concerné
- Etre un événement nommé (exemple : Lothar et Martin pour les tempêtes de 1999 en France)
- Etre identifié par un GLIDE (Global IDentifier number) : un code pour les catastrophes

3.2.2 L'ajout de sinistres non compris dans la base de données EM-DAT

La base de données EM-DAT est une base de données fiable pour les événements catastrophes. Cependant, les sinistres au dessous de 10 décès ne sont généralement pas répertoriés dedans. Bien qu'on parle de CAT, lorsque le nombre de têtes minimum est petit, de "petits sinistres", d'un point de vue du nombre de personnes touchées, peuvent impacter nos traités. Pour compléter la base de données EM-DAT, nous allons utiliser la distribution des sinistres donnée par Strickler, car il n'existe pas de base de données correspondant à ce nombre de têtes en libre accès. De plus, l'un des défauts de la distribution de Strickler était que cela prenait mal en compte les "événements catastrophes".

On rappelle que le nombre annuel d'accidents, par million d'habitants, avec exactement y décès, peut s'exprimer en fonction de $A(y)$:

$$H(y) = \frac{A(y) - A(y + 1)}{y}$$

On en déduit que le nombre total d'accidents par million d'habitants est :

$$\sum_{i=1}^{\infty} H(y)$$

On prend pour la France les paramètres suivants :

$$a = 3,5 \text{ et } b = 0,33$$

On multiplie ensuite par 66,7 car la population française est estimée à 66,7 millions d'habitants.

On gardera seulement les sinistres avec **moins de 10 personnes décédées** puisqu'au-dessus, le sinistre est déjà répertorié dans la base de données EM-DAT.

La base de données (EM-DAT + les petits sinistres rajoutés) constitue la base que nous avons utilisée pour faire les tests dans le chapitre 2. A cette dernière, nous avons ajouté également des événements "scénarios". En effet, ne considérer que des événements qui se sont déjà produits peut entraîner une sous-estimation du risque. Une autre idée aurait été d'utiliser la théorie des valeurs extrêmes pour fitter une gpd sur la distribution du nombre de têtes. Cependant, puisque la distribution du nombre de têtes touchées est discrète et que la distribution de type gpd est continue, on aurait également du faire une approximation. On a alors décidé d'utiliser des scénarios car intuitivement, on peut plus facilement se représenter l'impact d'enlever un scénario ou d'en modifier un plutôt que d'utiliser la théorie des valeurs extrêmes dans un cas où elle ne s'applique pas. Cependant, considérer une base de données purement historique pose plusieurs problèmes. Premièrement, ce n'est pas parce qu'un pays n'a jamais eu de sinistres catastrophes que cela signifie qu'il n'en aura jamais. Le fait d'utiliser une base de données historique ne prendra pas en compte la possibilité de survenance d'un grand événement catastrophe. Deuxièmement, d'un point de vue commercial, si un pays n'a jamais eu de sinistres catastrophes et que l'année suivante un grand sinistre se produit, son prix va d'une année à l'autre augmenter considérablement. Bien entendu, les prix de la réassurance sont cycliques et les prix fluctuent en fonction des catastrophes mais les prix ne sont pas multipliés par 10. C'est pourquoi, on a pensé qu'il serait intéressant de mutualiser certains sinistres qui pourraient se passer dans des pays qui en ont eu très peu ou pas de sinistres. C'est le sujet de la seconde section.

3.2.3 Modélisation de la fréquence et de la sévérité des événements

CAT

Jusqu'à présent on s'était uniquement intéressé à savoir combien d'assurés de notre portefeuille était touchés sachant qu'un événement CAT s'était produit. Dans cette section, on présentera la méthode pour modéliser la fréquence des événements ainsi que le nombre de victimes dans la population générale pour chaque type d'événements. Elle n'a pas été exécutée en entreprise par faute de temps mais pourra faire l'objet d'un prochain projet

ou stage.

L'une des motivations de cette méthode découle de la nature des évènements que l'on étudie : les évènements catastrophes. En effet, ces évènements ont une fréquence très faible. Lorsque l'on tarifie un contrat dans un pays, le fait qu'un pays ait connu très peu ou pas d'un certain type de sinistre ne signifie pas que la fréquence historique sera représentative de celle des prochaines années. En raison de ce trop faible nombre de données, les "statistiques" de fréquence pouvant être réalisées dessus ne seront pas assez robustes. L'idée est alors de trouver une méthode permettant d'augmenter la robustesse de nos estimations de fréquence. Une idée naturelle est de considérer une base de données d'un ensemble de pays (l'Europe par exemple au lieu de la France) puis d'estimer la fréquence. Cependant, l'échantillon statistique doit être constitué d'évènements indépendants et identiquement distribués. Le caractère indépendant ne semble pas trop difficile à vérifier. Il suffit dans la base de données de vérifier que ce n'est pas une même tempête qui est à l'origine de différents sinistres dans plusieurs pays. L'hypothèse que les évènements sont identiquement distribués n'est clairement pas vérifiée si l'on se contente de rassembler des sinistres de différents pays sans leur appliquer de transformation. Un accident d'autobus dans un pays avec un réseau routier fort développé n'a pas la même distribution de fréquence qu'un accident dans un pays utilisant très peu les autobus. Un autre exemple est le risque nucléaire. Il n'est pas le même dans un pays possédant beaucoup plus de centrales que dans un pays avec très peu de centrales. Ainsi, afin de rendre notre échantillon indépendant et identiquement distribué, on pourra transposer tous les sinistres dans un unique pays de référence.

Méthode générale pour la modélisation de la fréquence

- Etape 1 : Définir des catégories de risques : accidents de la route, attentats, tempêtes, séismes, accidents industriels...
- Etape 2 : Indexer la fréquence des sinistres de la base de données historique en fonction du type de risque pour l'année de cotation. On obtient alors une nouvelle base de données indexée.
- Etape 3 : Pour chaque catégorie, on va "transposer" le nombre d'évènements CAT de chacun des pays dans un unique pays (la France par exemple), en utilisant par exemple comme indicateur la population du pays par rapport à celle de la France.
- Etape 4 : Une fois tous les sinistres d'une catégorie transposés dans le pays choisi, on obtient une distribution d'évènements indépendants et identiquement distribués. On peut alors faire des estimations statistiques pour déterminer la fréquence (par exemple la moyenne).
- Etape 5 : On va ensuite multiplier la fréquence estimée trouvée par un facteur de

crédibilité α compris en 0 et 1 pour modéliser le fait qu'on accorde une certaine crédibilité au marché. En effet, certaines caractéristiques d'un pays, comme des comportements sociologiques sont difficiles à déterminer et modéliser. Le fait de déterminer un facteur de crédibilité permet de prendre en compte le marché mais également les comportements d'un pays en terme de sinistralité.

- Etape 6 : On utilise l'indicateur inverse pour transformer la fréquence estimée et corrigée par la crédibilité et la transposer de nouveau dans le pays d'origine.
- Etape 6 : On obtient alors une fréquence pour chaque pays et pour chaque catégorie de sinistres.

Méthode générale pour la modélisation de la sévérité

- Etape 1 : Définir des catégories de risques : accidents de la route, attentats, tempêtes, séismes, accidents industriels...
- Etape 2 : Indexer la sévérité des sinistres de la base de données historique en fonction du type de risque pour l'année de cotation. Par exemple, si une tempête avait fait x morts en 1980, combien elle ferait aujourd'hui en 2019? On obtient alors une nouvelle base de données indexée en sévérité sur l'année de cotation.
- Etape 3 : Pour chaque catégorie on va "transposer" le nombre de victimes par évènement CAT de chacun des pays dans tous les autres pays, en utilisant un indicateur par pays et par risque. Cet indicateur dépendra fortement de la catégorie du risque. En effet, pour les accidents de voiture, la sévérité a peu de chance de différer entre La France et l'Espagne par exemple, alors que la fréquence variera beaucoup.
- Etape 4 : On obtient alors une liste d'évènements pour chaque pays. La fréquence associée est la fréquence trouvée précédemment.

La difficulté réside dans l'indexation des sinistres historiques, la détermination de la transformation à appliquer à un évènement CAT pour le transposer dans un autre pays et la détermination du facteur de crédibilité α . Il faut trouver un indice qui prenne en compte différents critères comme la population du pays, la sinistralité, la possibilité de sinistralité s'il n'y a jamais eu de sinistres de ce type dans le pays. Par exemple, pour un accident de train, le nombre de kilomètres de rails pourrait être l'un des indicateurs à utiliser. La population n'est pas toujours un bon paramètre de l'indicateur de sévérité. Par exemple, si en Belgique il y a eu un accident de train avec 50 victimes, cela ne veut pas dire qu'en France l'accident aurait fait 300 victimes bien que la population soit 6 fois plus nombreuse. En effet, les trains belges et français ont globalement la même taille. Il faut donc examiner au cas par cas chaque catégorie d'évènements et chaque pays. L'expérience et l'expertise des personnes travaillant en assurance ou réassurance pourra grandement aider à la détermination des indices de passage et des facteurs de crédibilité en raison du fait qu'ils seront constitués d'une multitude de paramètres tant quantitatifs que qualitatifs.

3.3 Résumé succinct du chapitre 3



Dans ce chapitre, nous avons testé notre modèle en reprenant **les mêmes hypothèses que celles du modèle de Strickler** afin de comparer des choses comparables. Notre modèle permet une meilleure prise en compte des portefeuilles hétérogènes en terme de sommes assurées et une meilleure prise en compte du risque de concentration.

Nous avons également montré que **la troncature des évènements simulés suivant le modèle de décès de Strickler en France à 4000 décès avait un grand impact sur les tranches élevées.**

Enfin, nous avons proposé une méthode (qui n'a pas été implémentée en entreprise par faute de temps) permettant de créer une base de données d'évènements CAT **pas seulement basée sur l'historique de sinistralité d'un pays**. Après avoir indexé la fréquence et la sévérité des sinistres historiques, le nombre d'évènements CAT de chaque pays est transposé dans un unique pays et l'estimation de fréquence faite dans cet unique pays est plus robuste en raison d'un plus grand nombre de données. Elle est ensuite pondérée par un **facteur de crédibilité** qui modélise à quel point nous pensons que la sinistralité du pays va se comporter comme l'historique.

LIMITES

Dans cette partie nous allons annoncer les limites de notre modélisation. Tout d'abord, nous avons fait une approximation de la loi hypergéométrique par une loi binomiale dans notre modèle car le nombre d'assurés d'une compagnie d'assurance est en général petit par rapport à la population. La loi des sommes assurées n'est pas la distribution réelle mais cette approximation reste plus proche de la réalité que la modélisation par la loi exponentielle utilisée dans le modèle basé sur Strickler. D'autre part, la calibration de la loi beta reste un choix arbitraire car nous n'avons pas les données nécessaires (part de la population assurée dans les victimes et répartition par compagnie). Dans les agrégations de distribution dans le cas de plusieurs polices, nous avons fait une approximation. Par exemple, si on a une police décès et une police individuelle, on laisse la possibilité qu'une même personne soit à la fois décédée et invalide. Cependant, cette probabilité est très faible dans notre modèle. C'est le même problème que lorsque l'on considère une loi binomiale au lieu d'une loi hypergéométrique. Donc cette limite l'était aussi dans le modèle de Strickler. L'une des autres limites est, qu'afin de limiter le temps de calcul, nous avons tronqué l'algorithme de Panjer en laissant en paramètre le choix de cette troncature. Les sinistres de la base de données EM Dat ont été indexé en fonction de la population actuelle par rapport à la population à l'époque où le sinistre s'est produit. Cette indexation dépend de nombreux facteurs et les facteurs choisis peuvent être source de débat. Enfin, dans notre modèle de capital qui permet le suivi du risque de souscription lié aux contrats CAT en vie, le nombre de décès peut légèrement dépasser le nombre réel de décès, mais compte tenu de l'incertitude et de la variabilité quant à ce nombre, l'impact est petit.

CONCLUSION DU MÉMOIRE

Les raisons principales qui motivaient le développement d'un nouvel outil de tarification pour les traités CAT *Excess of Loss* étaient d'une part la volonté d'une meilleure prise en compte du risque de concentration pour les polices de groupe, de l'hétérogénéité des sommes assurées d'un portefeuille et d'autre part le fait de pouvoir avoir un modèle de suivi de nos risques de souscription CAT vie découlant directement des tarifications des traités souscrits.

Notre nouveau modèle se base sur une liste d'évènements. Nous avons d'abord testé l'utilisation d'une loi bêta binomiale avec une discrétisation de la binomiale pour modéliser le nombre d'assurés touchés dans notre portefeuille sachant qu'un évènement catastrophe s'est produit. Puis, à la suite des tests de sensibilité, nous nous sommes rendus compte de l'extrême sensibilité du dernier quantile de la loi binomiale. Pour palier ce problème, nous avons décidé d'utiliser l'algorithme de Panjer plutôt que la discrétisation de la binomiale. En effet, l'algorithme de Panjer renvoie à chaque montant possible que le réassureur pourrait payer, une probabilité associée à la survenance. La méthode d'agrèger plusieurs distributions nous permet de tarifier différents types de couverture et de pouvoir s'adapter facilement à un nouveau pays ou à une nouvelle garantie. Les résultats des tests montrent que notre modèle répond bien aux objectifs fixés au début de cette étude. Nous avons également mis en avant le grand impact sur les tranches hautes des traités CAT vie de la troncature des évènements engendrant plus de 4000 décès en France. Le fait que notre modélisation se base sur des évènements historiques ou "transformés" (cf. Chapitre III) permet d'adapter sans cesse le modèle avec plus de facilité aux nouveaux risques émergents : il suffit de rajouter des évènements correspondants aux nouveaux risques à notre base de données.

Enfin, la méthodologie quant à la construction d'une base de données ne contenant pas uniquement des évènements historiques a été présentée dans les grandes lignes. Après avoir indexé la fréquence et la sévérité des sinistres historiques, le nombre d'évènements CAT de chaque pays est transposé dans un unique pays et l'estimation de fréquence faite dans cet unique pays est plus robuste en raison d'un plus grand nombre de données. Elle est ensuite pondérée par un facteur de crédibilité qui modélise le degré de confiance que l'on accorde à l'historique pour prévoir la sinistralité d'un pays.

Ce travail s'inscrit parfaitement dans la continuité de ce mémoire.



GLOSSAIRE

L'idée de ce glossaire est de définir les termes techniques et les notations utilisés dans ce mémoire.

- **CAT** : abbréviation utilisée pour évènement catastrophe (dans le sens de la réassurance)
- **Cédante** : compagnie d'assurance qui se réassure auprès d'un réassureur.
- **Couverture de réassurance** : correspond au type de traité choisi par la compagnie d'assurance pour se réassurer. C'est souvent aussi associé au montant auquel le réassureur s'engage à payer, dans le cas où le sinistre traverse entièrement la ou les tranches.
- **A X S B** : B correspond à la priorité et A à la portée du traité
- **M** : La notation correspond à million(s)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *EM-DAT international disaster database, université catholique de louvain-brussels-belgium.*
<http://www.emdat.be>.
Accessed : 2018-08-12.
- [2] *Natural catastrophes.*
<https://ourworldindata.org/natural-catastrophes>.
Accessed : 2018-08-12.
- [3] *Réassurance des évènements naturels, problématique de la définition de l'évènement.*
https://www.apref.org/sites/default/files/espacedocumentaire/3._note_apref_septembre_2014_-_reassurance_des_evenements_naturels_-_problematique_de_la_definition_de_levenement.pdf.
Accessed : 2018-08-12.
- [4] *Terrorism.*
<https://ourworldindata.org/terrorism>.
Accessed : 2018-08-12.
- [5] O. EKHEDEN, E. ET HÖSSJER, *Pricing catastrophe risk in life (re)insurance*, Scandinavian Actuarial Journal, (2014), pp. 352–367.
- [6] M. HARBITZ, *Catastrophe Convers in Life Assurance*, no. 3, Transactions of the International Congress of Actuaries, Montreal, 1992.
- [7] J. MESSIAS, *Etude de la couverture de réassurance du pool catastrophe de bureau commun des assurances collectives*, Institut des Actuaires, (2017).
- [8] P. STRICKLER, *Rückversicherung des kumulrisikos in der lebensversicherung*, XVI International Congress of Actuaries in Brussels, (1960), pp. 666–679.
- [9] J.-F. WALHIN, *La réassurance*, Cahiers financiers, Larcier, 2007.

