

**Mémoire présenté  
pour l'obtention  
du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg « DUAS »  
et du Diplôme du Master mention Finance  
spécialité « Actuariat et Gestion du Risque »  
le 5 octobre 2010**

par : Marie DOUISSARD

Titre : **Mesure du risque porté par les instruments  
financiers complexes : l'avenir de la VaR**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

Membres du jury de l'institut des Actuaires :

Entreprise :



Directeur de mémoire en entreprise :  
M. Yvain RITTAUD

Membres du jury de l'université de Strasbourg :

Invité :

M. Michel GUILLEMIN

Mme Armelle GUILLOU  
M. Jean-Luc NETZER  
M. Hansjoerg ALBRECHER  
M. Philippe ARTZNER  
M. Frédéric BERTRAND  
Mme Marie-Hélène BROIHANNE  
M. Karl-Théodor EISELE  
M. Jacques FRANCHI  
M. Christophe GODLEWSKI  
M. Bernard HEINKEL  
M. Nicolas KLUTCHNIKOFF  
M. Bertrand KOEBEL  
M. Maxime MERLI  
M. Patrick ROGER

**Autorisation de mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels**  
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Secrétariat : Mme Pierrette XIMENEZ

61 avenue de la Forêt Noire

67085 STRASBOURG

Tél : 03 68 85 20 54

Bibliothèque du PEGE : Tél : 03 68 85 22 23



## SOMMAIRE

<b>RESUME.....</b>	<b>4</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>6</b>
<b>LES INSTRUMENTS FINANCIERS COMPLEXES .....</b>	<b>8</b>
<b>I. Introduction .....</b>	<b>8</b>
<b>II. Définitions et fonctionnement .....</b>	<b>8</b>
II-1 Les Obligations Convertibles (OC) .....	8
II-2 Les dérivés de crédit.....	9
II-2-i Les Credit Default Swap (CDS) .....	10
II-2-ii Les indices de crédit.....	11
II-2-iii Les Collateralised Debt Obligation (CDO) .....	12
II-2-iv Les CDO synthétiques .....	13
II-2-v Les tranches d'indices CDS.....	14
II-3 Les dérivés climatiques et d'assurance .....	15
<b>III. Le rôle des dérivés de crédit durant la crise.....</b>	<b>16</b>
III-1-i L'opacité .....	16
III-1-ii Le manque de régulation .....	17
III-1-iii Les difficultés d'évaluation .....	17
III-1-iv Le cas particulier des produits de financement structuré.....	17
<b>LA VALUE-AT-RISK .....</b>	<b>19</b>
<b>I. Introduction à la Value-at-Risk .....</b>	<b>19</b>
I-1 L'expansion de la mesure VaR .....	19
I-2 Définition mathématique et financière de la VaR.....	20
I-3 Une mesure adoptée par le Comité de Bâle.....	20
I-3-i Bâle 1 .....	20
I-3-ii Bâle 2 .....	21
I-3-iii Révisions de Bâle 2.....	22
I-3-iv VaR et exigences de fonds propres .....	22
I-4 Les différentes méthodes VaR.....	23
I-4-i La méthode variance-covariance .....	23
I-4-ii La méthode Riskmetrics.....	24
I-4-iii La simulation Monte Carlo.....	25
<b>II. La VaR historique.....</b>	<b>25</b>
II-1 Méthode de calcul .....	25
II-2 L'effet de l'agrégation.....	26
<b>LA VAR HISTORIQUE APPLIQUEE AUX PRODUITS COMPLEXES ...</b>	<b>30</b>
<b>I. Les paramètres de la VaR .....</b>	<b>30</b>
<b>II. Les facteurs de risque .....</b>	<b>30</b>
<b>III. L'évaluation des produits complexes.....</b>	<b>31</b>
III-1 L'évaluation des OC.....	31
III-1-i Quelques modèles existants .....	31
III-1-ii Le modèle utilisé .....	32

III-1-iii Critiques du modèle.....	41
III-2 L'évaluation des dérivés de crédit.....	42
III-2-i Les modèles d'évaluation du risque de crédit.....	42
III-2-ii Le modèle CDS.....	42
III-2-iii Critiques du modèle d'évaluation des CDS.....	48
III-2-iv Le modèle des CDO synthétiques.....	49
III-2-v Limites du modèle d'évaluation des CDO synthétiques.....	55
III-3 L'évaluation des dérivés climatiques.....	55
III-3-i Les modèles existants.....	55
III-3-ii Le modèle.....	56
III-3-iii Limites du modèle d'évaluation des dérivés climatiques.....	57
<b>IV. La distribution des pertes et profits.....</b>	<b>57</b>
<b>V. Application et résultats.....</b>	<b>57</b>
V-1 Le risque d'une OC.....	58
V-2 Le risque d'un CDS.....	60
V-3 Le risque d'un portefeuille d'OC.....	62
V-4 Les effets d'agrégation observés.....	62
V-4-i Sur une OC.....	62
V-4-ii Sur un CDS.....	63
V-4-iii Sur un portefeuille d'OC.....	64
<b>L'APRES-CRISE.....</b>	<b>66</b>
<b>I. Les limites de la VaR historique.....</b>	<b>66</b>
I-1 Les hypothèses.....	66
I-2 Le risque de liquidité.....	66
I-3 Les propriétés.....	67
I-4 La procyclicité.....	67
<b>II. Une mesure alternative : la Tail-VaR.....</b>	<b>68</b>
II-1 Définition.....	68
II-2 Application à un portefeuille d'OC.....	70
II-3 Critiques des mesures basées sur la VaR.....	72
<b>III. Mesure proposée par le régulateur.....</b>	<b>74</b>
III-1 La VaR stressée.....	74
III-1-i Contexte et définition.....	74
III-1-ii Les paramètres de la VaR stressée.....	74
III-1-iii VaR stressée et exigences minimales de fonds propres.....	75
III-2 Application numérique.....	75
III-3 Analyse des nouvelles exigences réglementaires.....	76
<b>IV. Comparaison des mesures.....</b>	<b>77</b>
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>80</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>82</b>
<b>TABLES DES ILLUSTRATIONS.....</b>	<b>86</b>
<b>LISTE DES ABREVIATIONS.....</b>	<b>88</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>89</b>

## **REMERCIEMENTS**

*Je tiens à témoigner ma reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.*

*Je souhaite tout d'abord remercier le jury pour avoir accepté de juger mon travail.*

*Ensuite, je remercie Monsieur Michel Guillemin pour m'avoir accueillie dans son service et Monsieur Yvain Rittaud, mon maître de stage, pour m'avoir permis de traiter ce sujet au sein de son équipe, pour son oreille attentive et son soutien.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur Patrick Roger, mon tuteur universitaire, pour ses précieux conseils.*

*Je n'oublie pas bien sûr tous mes collègues du service Audit, avec qui ce fut un plaisir de travailler tout au long de ce stage.*

*Aux personnes qui ont accepté de relire tout ou partie de ce mémoire,*

*A ma famille et mes amis pour leur présence et leur patience : merci.*

---

## RESUME

---

Suite à la crise financière de 2007, les instruments financiers complexes sont montrés du doigt. Mal connus, il peut être difficile en effet de les évaluer ou de cerner le risque auquel une institution financière s'expose en détenant l'un d'entre eux. Tout d'abord, ce mémoire présente de façon détaillée la méthode la plus utilisée pour mesurer le risque de marché des instruments et portefeuilles financiers : la Value-at-Risk (VaR) historique. Cette méthode a été appliquée aux Obligations Convertibles (OC), aux Credit Default Swap (CDS), aux Collateralized Debt Obligation (CDO) synthétiques et aux dérivés climatiques qui sont tous des produits nécessitant une modélisation avancée. Cette problématique a ensuite conduit à s'interroger sur la pertinence de la VaR historique pour mesurer le risque de marché des portefeuilles de négociation et pour calculer les exigences minimales de fonds propres des banques. Depuis des années déjà, cette méthode est très critiquée. Ainsi, les institutions financières, les chercheurs et les instances de régulation cherchent tous à pallier les lacunes de cette méthode et de la VaR classique. Cependant ce mémoire montre que leurs objectifs peuvent être divergents. Les chercheurs et les théoriciens sont à la recherche de la précision, de la mesure qui leur permettra de se rapprocher au plus juste des risques observés. De nombreux chercheurs proposent la Tail-VaR ou Expected Shortfall comme alternative à la VaR et d'autres rejettent catégoriquement toute mesure basée sur la VaR. Les praticiens cherchent certes aussi la précision mais surtout une mesure qui permette une gestion fonctionnelle des risques financiers et une grande simplicité de mise en œuvre. Leur conclusion semble converger vers celle des chercheurs et retenir l'Expected Shortfall comme mesure optimale du risque. Enfin, les régulateurs cherchent une réponse efficace à la crise en intégrant de la prudence dans la détermination des capitaux réglementaires. Pour ce faire, ils proposent de conserver la VaR comme outil de mesure du risque de marché mais de la compléter par le calcul d'une VaR stressée.

**Mots clés :** *Instruments financiers complexes, modélisation, risque de marché, Value-at-risk, méthode historique, Expected Shortfall, exigences réglementaires, VaR stressée.*

---

## ABSTRACT

---

Following the 2007 financial crisis, fingers are pointed at complex financial instruments. Indeed some products are poorly known and it may be difficult to price them or to identify the risk that a financial institution is facing by holding one of them. First, this paper introduces the most common method to evaluate market risk: the historical Value-at-risk. This method is applied to Convertible Bonds, Credit Default Swap, synthetic CDO and weather derivatives. The VaR calculation has then led to the question of historical VaR's relevance to capture banks' trading book's risk and to be used as a basis for the capital requirement calculation. This method is widely criticized since many years already. Financial institutions, researchers and regulation authorities are all trying to overcome the deficiency of this method and VaR in general. However, the conclusion of this study is that their objective can be divergent. Researchers and theorists are looking for accuracy, for the measure that will allow them to fit closely to the observed risk. Many researchers suggest the Tail-VaR or Expected Shortfall as an alternative to the VaR method and others reject all measures based on VaR. Practitioners seek precision too but, above all, a measure that is easy to implement and that allow them for a functional management of financial risk. Their conclusion seems to converge toward that of the researchers and they retain Expected Shortfall as the best risk measure. Finally, regulators look for an effective response to the crisis and want to integrate prudence in the determination of regulatory capital. In order to achieve this, their proposal is to keep the VaR measure as a tool to evaluate market risk, and to complement it with the calculation of a stressed VaR to compute the regulatory capital.

**Key words :** *Complex financial instruments, model, market risk, Value-at-risk, historical method, Expected Shortfall, regulatory requirements, stressed VaR.*

---

## INTRODUCTION

---

Ces dernières années, l'innovation financière a donné lieu à la multiplication de produits complexes, à la fois dans leur fonctionnement mais aussi et surtout, dans leur évaluation. Lors de la crise de 2007-2008, cette complexité a fortement contribué à dissimuler l'ampleur du niveau d'endettement et des pertes subies par les institutions financières. Depuis, l'amélioration de la transparence des systèmes financiers apparaît comme un point crucial pour les régulateurs. Il apparaît donc essentiel d'étudier les risques générés par les instruments financiers complexes les plus utilisés comme notamment les obligations convertibles ou les dérivés de crédit ainsi qu'à des produits plus récents tels que les dérivés climatiques. De nombreux autres instruments peuvent être classés dans la catégorie des produits complexes. Cette sélection a été réalisée en fonction des besoins du Crédit Mutuel et du rôle actuel des instruments sur les marchés financiers.

Afin de mesurer le risque de marché, il est courant d'utiliser le concept de Value-at-Risk (VaR). La VaR traduit le montant maximal des pertes sur un horizon de temps donné, qui ne sera pas dépassé à un niveau de confiance donné [9]. Son utilisation est très répandue puisque cette mesure a été adoptée par le comité de Bâle et par le droit français dans l'arrêté du 20 février 2007.

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la VaR. La méthode historique est généralement retenue par les institutions financières puisqu'elle est simple à mettre en œuvre et ne fait aucune hypothèse sur les distributions de pertes et profits (P&L) ou sur l'évolution des paramètres de marché. Cette absence d'hypothèse lui permet de s'adapter à tous types d'instruments, même ceux dont la distribution n'est pas gaussienne. Un autre avantage de la VaR historique est qu'elle peut être calculée à différents niveaux de consolidation. Au sein des banques, des calculs sont faits notamment par filiales, par activités, par types d'instruments, ou encore par facteurs de risque. La VaR historique se présente donc dans un premier temps comme une mesure adaptée à la détermination du risque porté par les instruments ciblés dans notre étude.

D'un point de vue plus général cette fois, la VaR est utilisée pour mesurer le risque porté par le portefeuille de négociation<sup>1</sup>. Cependant, la crise a mis en évidence les limites de cette méthode. De nombreuses banques ont en effet enregistré des pertes au-delà des VaR estimées sur leurs activités de négociation. C'est pourquoi, beaucoup se tournent vers un substitut de la VaR historique, à savoir la Tail-VaR. Cette dernière se définit comme la moyenne des pertes strictement supérieures à la VaR et a l'avantage d'être une mesure de risque cohérente, tout en restant simple à mettre en œuvre. Du côté de la réglementation, la VaR a toujours son rôle dans le calcul des exigences de fonds propres mais depuis juillet 2009 [54] le Comité de Bâle recommande de calculer une VaR

---

<sup>1</sup> Trading book



stressée en complément de celle-ci. Cette nouvelle mesure est dite « stressée » car son calcul repose sur une période d'observation de stress financier.

Il est alors légitime de s'interroger sur la place et le rôle de la VaR pour le calcul du capital réglementaire et la gestion des risques financiers.

L'objectif de ce mémoire est d'appliquer la VaR historique aux instruments financiers complexes, en mettant en évidence les difficultés qui peuvent être rencontrées puis de s'interroger sur l'avenir de cette méthode comme mesure du risque de marché. La première partie décrit les instruments financiers complexes qui ont été sélectionnés et leur rôle au sein des banques et du système financier. La deuxième partie présente la VaR et son implication dans la réglementation bancaire internationale en se focalisant surtout sur la méthode de la VaR historique. Dans une troisième partie, la VaR historique est appliquée aux instruments complexes. Enfin, nous nous interrogeons sur les limites de cette mesure et les solutions proposées par les chercheurs, les praticiens et les régulateurs.

---

# LES INSTRUMENTS FINANCIERS COMPLEXES

---

## I. Introduction

Depuis les années 1990, l'utilisation de nouveaux instruments financiers complexes est de plus en plus fréquente. Avant tout, il y a lieu de clarifier la notion de « produits complexes ». Il n'existe pas de définition rigoureuse, ni de liste exhaustive des produits complexes. L'article 314-57 du Règlement Général de l'AMF<sup>2</sup>, fournit tout de même une liste des instruments financiers non complexes :

- « Les actions admises à la négociation sur un marché réglementé d'un Etat partie à l'accord sur l'Espace économique européen ou sur un marché équivalent d'un pays tiers ;
- Les instruments du marché monétaire ;
- Les obligations et autres titres de créance, à l'exception des obligations et autres titres de créances qui comportent un instrument dérivé ;
- Les parts ou actions d'OPCVM conformes à la Directive 85/611/CEE du 20 décembre 1985. »

Les instruments complexes retenus dans ce mémoire sont les obligations convertibles, certains dérivés de crédit et les dérivés climatiques et d'assurance. Le périmètre d'étude étant ainsi défini, il est à présent utile de se pencher sur l'environnement dans lequel sont nés et se sont développés ces produits.

## II. Définitions et fonctionnement

### II-1 Les Obligations Convertibles (OC)

Une OC est une obligation à laquelle est attachée une option de conversion qui permet à son détenteur d'échanger l'obligation contre des actions, selon des modalités prévues lors de l'émission, et à certaines dates de la vie de l'obligation. Elle est assimilée à un instrument hybride qui a le comportement d'une action à la hausse et celui d'une obligation à la baisse.

Les OC rencontrent, depuis le début des années 1980, un véritable succès. Elles présentent en effet un intérêt certain pour les investisseurs et pour les émetteurs. L'option de conversion permet à l'investisseur d'arbitrer entre action et obligation selon sa

---

<sup>2</sup> Transposition de l'article 38 de la directive européenne d'application de la réforme MIF

stratégie d'investissement, mais aussi selon la santé des marchés financiers. Les détenteurs de ce type de produit sont donc protégés à la baisse tout en ayant la possibilité de profiter de la hausse des marchés actions. Du point de vue de l'émetteur, l'obligation convertible est un compromis intéressant entre l'action, peu coûteuse mais diminuant le pouvoir des dirigeants en concédant le droit de vote aux actionnaires, et l'obligation, plus coûteuse mais moins contraignante.

Les OC ont subi les effets de la crise financière en 2008. Cependant, depuis l'année 2009, ce marché se porte beaucoup mieux grâce au rebond des marchés actions et à la reprise du marché du crédit.

## **II-2 Les dérivés de crédit**

A la fin des années 1990, les innovations les plus intéressantes sur les marchés des actifs dérivés ont été les dérivés de crédit. Au lancement de ces produits, les investisseurs ont tout d'abord été méfiants. Leur opacité, ainsi que la complexité et la subjectivité entourant la mesure du risque de crédit, ne rendent pas leur expansion facile. Toutefois, les nombreuses faillites de cette période ont accentué la crainte des investisseurs vis-à-vis du risque de contrepartie et l'appréhension des investisseurs a commencé à se dissiper notamment pour deux raisons [64] :

- Les émetteurs se sont multipliés : banques, assurances, entreprises ;
- Une attention particulière a été portée à la transparence.

Les dérivés de crédit ont incontestablement séduit un grand nombre d'investisseurs, tout du moins jusqu'à la crise financière de 2007. La question du rôle des produits dérivés durant la crise sera abordée plus loin dans ce mémoire.

Un dérivé de crédit est un produit dérivé dont le sous-jacent est un actif de type crédit, c'est-à-dire une créance ou un titre représentatif d'une créance comme une obligation. Le but de ce produit est de transférer les risques relatifs au crédit, sans transférer l'actif lui-même. En d'autres termes, il permet à une entité, l'acheteur de protection, de transférer un risque de crédit à une ou plusieurs contreparties, appelés vendeurs de protection, tout en restant propriétaire de l'actif. Pour les vendeurs de protection, les dérivés de crédit permettent de s'exposer à un risque sans détenir l'obligation sous-jacente.

L'utilisation des dérivés de crédit est multiple. Ils permettent de se couvrir contre le risque de défaut des contreparties et peuvent jouer un rôle important dans la diversification des portefeuilles de crédit des banques. Par exemple deux banques, l'une spécialisée dans le crédit au secteur agricole, l'autre dans le crédit à l'industrie, peuvent acheter chacune une part des revenus liés au portefeuille de l'autre. Chacune diversifie ainsi les risques encourus, en bénéficiant en plus de l'expertise de sa contrepartie dans son domaine d'activité. Les dérivés de crédit trouvent leur utilité également auprès des emprunteurs, qui peuvent ainsi se couvrir contre des évolutions de marché qui rendraient défavorables

leurs conditions de financement. Pour finir, ils peuvent aussi permettre de contribuer à l'allègement du coût du capital, tout comme le ferait un contrat d'assurance.

Les Credit Default Swap, présentés ci-après, sont assurément les dérivés de crédit les plus connus et les plus prisés<sup>3</sup>.

### II-2-i Les Credit Default Swap (CDS)

Le swap de défaut, communément appelé CDS, s'apparente à un contrat d'assurance. L'acheteur de protection souhaite se protéger contre la survenance d'un événement qui affecte la solidité financière d'une entreprise donnée appelée entité de référence. Il s'engage alors à verser une prime périodique au vendeur de protection, contre l'engagement de ce dernier à le dédommager en cas de survenance d'un défaut sur l'entité de référence.

Plus concrètement, une partie A, acheteur de protection, souhaite se protéger contre le risque de défaut de l'entité de référence C en faisant appel à une contrepartie, le vendeur de protection V. En échange de la protection, A verse une prime périodique<sup>4</sup> à V, appelée jambe du swap, jusqu'à la maturité du swap ou jusqu'à la survenance d'un événement de défaut. Cet événement peut être par exemple la faillite de l'entité de référence, le défaut de paiement sur l'obligation de référence ou la restructuration de sa dette. En contrepartie, V effectue un paiement à A si l'événement de défaut touchant l'entité de référence intervient avant l'échéance du swap. Le paiement peut être effectué par livraison du sous-jacent (*physical settlement*) ou en cash (*cash settlement*). Dans le premier cas, A livre à V les obligations émises par C et reçoit en retour leur valeur nominale. Dans le second cas, un paiement en cash qui correspond à la valeur nominale des obligations diminuée du taux de recouvrement est effectué par V. Ce taux de recouvrement est calculé à partir de cotations obtenues quelque temps après que le défaut se soit produit. Dans le cas du swap de défaut avec livraison du sous-jacent, on obtient schématiquement la figure ci-dessous.

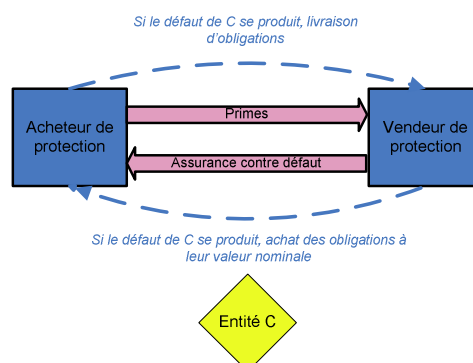


Figure 1 : Fonctionnement d'un CDS avec règlement par livraison du sous-jacent

<sup>3</sup> « Le plus populaire » d'après J. Hull [7], « le plus répandu » d'après A. Alfonsi [58]

<sup>4</sup> Généralement payée trimestriellement.

Dans le cas du swap de défaut avec règlement en cash, on obtient schématiquement la figure 2.

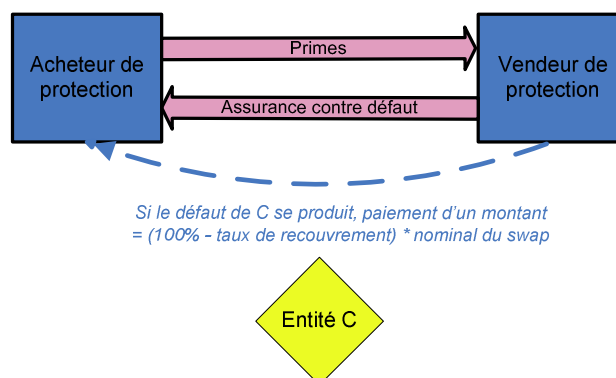


Figure 2 : Fonctionnement d'un CDS avec règlement en cash

### II-2-ii Les indices de crédit

Au fil des années, le marché des CDS est devenu plus transparent et plus liquide, ce qui a conduit à la création d'indices standardisés de CDS, dont principalement l'iTraxx pour l'Europe et l'Asie, et le CDX pour l'Amérique du Nord. Ces indices reflètent l'état de santé du marché du crédit. L'iTraxx a été créé en 2004, suite à la fusion de deux indices, le Trac-X et l'iBoxx. Les indices iTraxx et CDX sont des portefeuilles composés, de manière équilibrée, d'un panier de 125 swaps de défaut. Les titres du panier sont choisis pour leur liquidité et leur notation sur le marché des CDS (*Investment Grade*). La valeur de l'indice traduit le coût nécessaire pour se couvrir contre les événements de défaut des entités composant l'indice. Donc, si la qualité de crédit des entités présentes dans l'indice se détériore, la valeur de l'indice augmente.

Les contrats d'indice CDS permettent d'acheter ou de vendre de la protection sur un portefeuille composé de contrats CDS ayant des entités de références différentes. On a donc, comme pour le CDS, un acheteur et un vendeur de protection. L'acheteur verse une prime trimestrielle au vendeur, égale à la somme de toutes les primes de CDS inclus dans l'indice à la date de lancement, le 20 mars ou le 20 septembre. Le paiement de la prime se fera le 20 mars, le 20 juin, le 20 septembre et le 20 décembre de chaque année. Si aucun aléa de crédit ne survient avant l'échéance du contrat, l'acheteur aura perdu l'ensemble des primes, comme dans un contrat d'assurance classique. Si, en revanche, un aléa de crédit affecte l'une des entités de référence k, l'acheteur doit remettre au vendeur une obligation émise par cette entité, de nominal égal à celui du contrat initial, divisé par le nombre d'entités de référence. Quant au vendeur, il assure à l'acheteur un paiement de montant égal au nominal du contrat d'indice CDS, divisé par le nombre d'entités de référence. Suite à cela, le contrat se poursuit mais le nominal de l'indice diminue du nominal de l'entité k et celle-ci est retirée du contrat. Les flux relatifs à un contrat sur indice CDS sont récapitulés en figure 3.

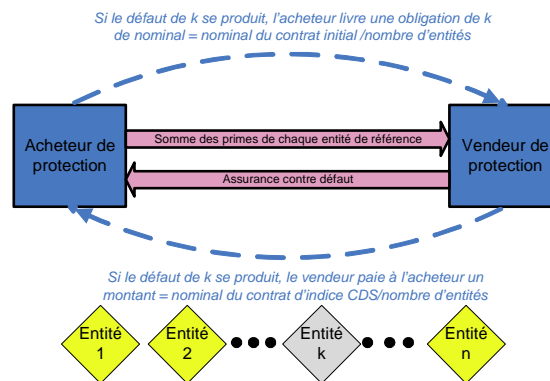


Figure 3 : Fonctionnement d'un contrat d'indice CDS

### II-2-iii Les Collateralised Debt Obligation (CDO)

Les CDO sont des instruments qui permettent de transformer des titres de dettes, comme des obligations, des prêts, des *Asset Backed Securities*<sup>5</sup>, en actifs financiers. Les CDO sont donc une forme de titrisation. L'objectif de l'institution d'origine est d'apporter de la liquidité à son bilan et de réduire son capital réglementaire en faisant sortir tout ou partie du risque de crédit de son bilan. La structure du CDO permet d'autre part aux investisseurs de diversifier leurs portefeuilles et d'investir dans des actifs adaptés à leur profil de risque-rendement.

L'arrangeur, ou initiateur du CDO est généralement une banque qui désire transférer le risque de crédit de son portefeuille. Pour cela, elle va donc céder son portefeuille, appelé portefeuille de référence, vers une société de gestion d'actif spécialisée, appelée société « ad hoc » ou *Special Purpose Vehicle* (SPV). Celui-ci émet finalement des tranches de CDO qui correspondent à différents niveaux de risque. Il existe quatre types de tranches (*super senior*, *senior*, *mezzanine* et *equity*), qui donnent lieu à des rémunérations différentes selon leur niveau de risque. Les tranches sont ensuite disponibles pour les investisseurs. Elles reflètent le risque supporté par les investisseurs, ainsi que l'ordre dans lequel ils seront remboursés en cas de survenance d'un événement de défaut. Il peut arriver que le processus d'un CDO se fasse sans l'intervention d'un SPV, auquel cas l'initiateur est la contrepartie directe de l'investisseur. La structuration en tranches permet d'obtenir des probabilités de défaut plus faibles que la moyenne des probabilités de défaut des actifs sous-jacents pour les tranches supérieures, et plus élevées que la moyenne pour les tranches inférieures. Les flux d'un CDO sont décrits dans la figure ci-après.

<sup>5</sup> Titres adossés à des actifs

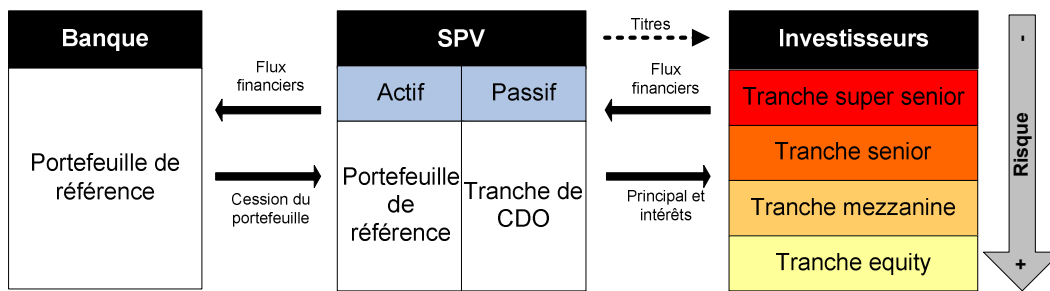


Figure 4 : Mécanisme d'un cash CDO

En présence d'anti-sélection ou d'asymétrie d'information, cette hiérarchisation permet de créer de la valeur par rapport au lot initial d'actifs. L'asymétrie d'information peut se situer au niveau des investisseurs ou entre ceux-ci et l'initiateur. L'institution d'origine peut alors émettre une tranche supérieure très peu exposée au risque de défaut, achetée par les investisseurs les moins bien informés et une tranche inférieure achetée par les mieux informés ou conservée par l'institution elle-même. La segmentation des marchés peut également conduire les arrangeurs à proposer des actifs adaptés aux différentes catégories d'investisseurs et contribuer ainsi à la complétude des marchés. Toutefois, si la hiérarchisation permet de pallier certaines imperfections des marchés, elle est également la cause de problèmes d'évaluation liés à ces produits<sup>6</sup>.

Il existe deux grandes catégories de CDO. Si l'objectif est d'exploiter l'écart entre le rendement moyen du portefeuille sous-jacent et le paiement fait aux investisseurs des tranches, on parle de CDO d'arbitrage. Cela permet de dégager une marge d'intérêt qui peut être utilisée pour rémunérer la tranche *Equity* et pour rehausser le crédit des autres tranches. Dans le cas d'un CDO d'arbitrage, l'initiateur n'est pas tenu de détenir le portefeuille de référence et peut l'assembler via le marché. Si l'objectif du CDO est de sortir des actifs du bilan de l'initiateur, de libérer des fonds propres ou de diversifier son portefeuille de crédit, alors on parle de CDO de bilan. Toutefois, l'initiateur peut également dans ce cas bénéficier de la marge d'intérêt décrite précédemment. Pour ces deux types de CDO, le transfert du risque peut se faire de deux manières, par une cession des actifs comme le représente la figure 4 ou de manière synthétique.

### II-2-iv Les CDO synthétiques

Les montages de CDO synthétiques se sont développés à partir de 2001 et ont joué un rôle important dans le développement du marché des dérivés de crédit. Généralement, les banques utilisent les CDO pour transférer le risque auquel elles s'exposent et ainsi réduire leurs exigences de fonds propres. Comme elles n'ont pas pour autant besoin de

<sup>6</sup> BROWN A. [2010] : « Structured Finance and Price Discovery », avril  
Rapport trimestriel BRI [19],

Fender I., Mitchell J. [2005] : « Financement structuré : complexité, risque et recours aux notations »

liquidité, les CDO synthétiques ont été créés. La banque va dans ce cas céder le portefeuille de référence, sans qu'il y ait de transfert de liquidité. Le transfert de risque se fait par le biais d'un portefeuille de swaps de défaut. Il n'y a donc pas de transfert physique des titres sous-jacents. Le SPV vend une protection à l'initiateur du montage et en contrepartie reçoit une prime périodique. Il peut alors transférer le risque aux investisseurs en émettant des titres de créances.

Le mécanisme de cet instrument est exposé en figure 5.

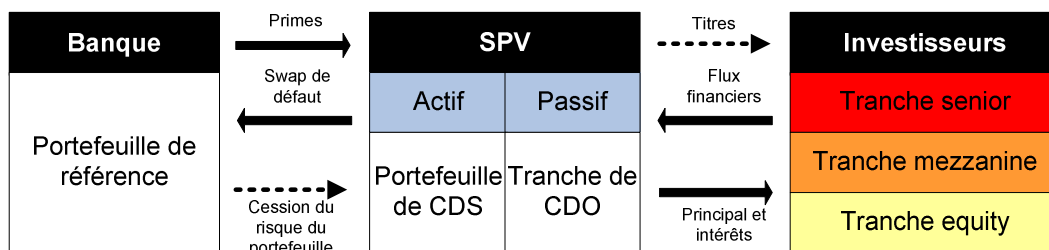


Figure 5 : Mécanisme d'un CDO synthétique

### II-2-v Les tranches d'indices CDS

Une tranche d'indices CDS peut être comparée à une tranche de CDO synthétique basé sur un indice de CDS. En investissant sur ces produits, les vendeurs de protection peuvent participer à un segment spécifique de la distribution de défaut de l'indice CDS.

Les tranches standards sur indices CDX et iTraxx Europe sont définies comme le montre la figure 6 :

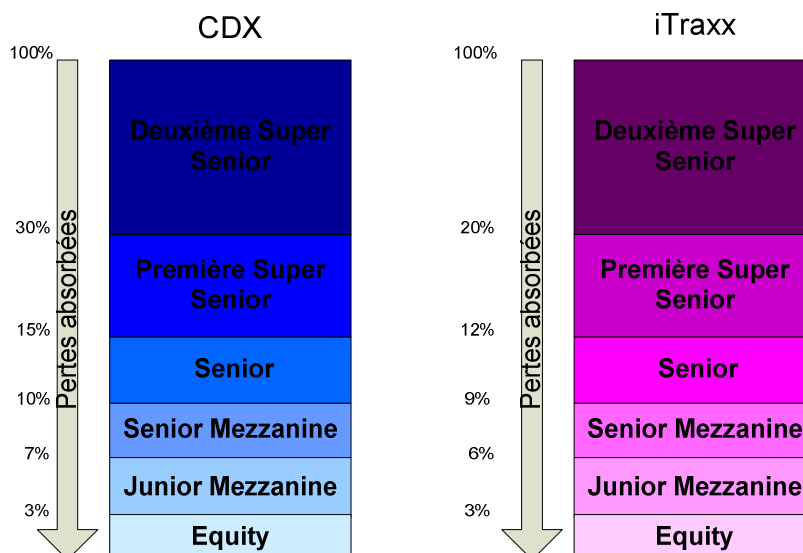


Figure 6 : Tranches de CDO standardisés sur les indices CDX et iTraxx



### II-3 Les dérivés climatiques et d'assurance

Plus récemment, on a pu observer l'émergence d'une nouvelle classe d'actifs : les dérivés climatiques et d'assurance. Ces produits ont pris naissance suite à la volonté de nombreux investisseurs, et particulièrement les assureurs, de diversifier leurs sources de risque. La première opération sur les dérivés climatiques a été initiée par la compagnie d'énergie Enron en 1997. Son but était alors de se protéger contre un hiver trop doux grâce à un dérivé ayant pour sous-jacent la température atmosphérique. Quant aux dérivés d'assurance, ils ont été créés pour répondre au problème de gestion des risques des compagnies d'assurance. Face à l'accroissement du marché de l'assurance et l'augmentation de la richesse mondiale, les assureurs ont jugé leur capacité financière insuffisante par rapport aux risques encourus. C'est pourquoi ils ont tout d'abord fait appel aux compagnies de réassurance mais la capacité financière de celles-ci s'est également montrée insuffisante. Dès lors, les assureurs se sont tournés vers les marchés financiers pour transférer une partie de leur risque. L'intérêt des dérivés climatiques pour les entreprises est de se couvrir contre les effets négatifs dus aux aléas climatiques, comme par exemple ceux provoqués par des variations anormales de la température. Les dérivés d'assurance permettent aux compagnies d'assurance de transférer certains risques naturels causés par des événements extrêmes. Ces deux produits prennent la forme de dérivés classiques mais leur support peut être de nature variée. Les dérivés climatiques apparaissent souvent sous la forme d'options et les dérivés d'assurance plutôt sous forme d'obligations.

Les dérivés climatiques sont en général souscrits par les entreprises pour compenser les pertes d'activité ou de résultat qui pourraient être engendrées par la survenance de phénomènes climatiques particuliers. C'est le cas du distributeur d'énergie pour qui l'augmentation des températures risque d'entraîner une baisse de ses ventes de gaz, et ainsi une diminution de son résultat. Une option d'achat sur la température hivernale pourrait alors lui permettre de compenser les pertes subies en agissant comme un actif de couverture. Il en va de même pour les métiers de l'agriculture souhaitant se protéger contre les aléas du soleil, de la pluie ou du gel, des métiers du textile pouvant être affectés par les conditions de température, et les métiers du tourisme ou du transport, pour lesquels le succès dépend directement de l'ensoleillement, de l'enneigement...

Les dérivés d'assurance répondent plus particulièrement aux besoins des compagnies d'assurance et de réassurance. C'est en effet pour eux un moyen de transférer le risque, sur le même principe que la réassurance mais à une plus grande échelle et avec une meilleure capacité financière. Côté investisseur, la demande est forte pour ces produits à taux fixes dont le sous-jacent est un risque technique (catastrophe, mortalité, autres) non corrélé au marché financier. Les produits les plus répandus sont les obligations catastrophes, plus connues sous leur appellation anglo-saxonne *cat bonds*. Ces obligations ont les mêmes caractéristiques qu'une obligation classique, à la différence près qu'en cas de survenance d'un sinistre, l'émetteur, très souvent une compagnie

d'assurance, cesse de payer le coupon. L'économie qui en découle lui permet de répondre aux pertes engendrées par le sinistre.

### **III. Le rôle des dérivés de crédit durant la crise**

Les dérivés de crédit étaient déjà qualifiés d' « armes de destruction massive » par le célèbre investisseur américain Warren Buffet, en 2003. Ce sont certainement les produits complexes qui ont le plus contribué à la récente crise financière. Il est donc intéressant de se pencher plus en détail sur ces produits.

La crise de 2007-2008 a mis en évidence de nombreuses faiblesses dans le système financier. En effet, la plupart des banques n'avaient aucune idée des risques auxquels elles s'exposaient en détenant des produits mal appréhendés. Malgré ce manque de connaissance, les volumes de produits dérivés traités et le nombre d'investisseurs ont augmenté de manière conséquente ces dix dernières années. Cette frénésie s'explique à la fois par leur caractère innovant en termes de gestion du risque de crédit mais également par leur implication sur les conditions de financement, comme cela a été vu à la section II-2. Les années de stabilité, et même de croissance, qu'ont connues les marchés financiers entre 2001 et début 2007 ont dans un premier temps encouragé cette confiance aveugle puisqu'il a été constaté que la mutualisation du risque de crédit engendrée par ces produits était bénéfique au marché. Toutefois, depuis les premières perturbations en 2007, les marchés se sont vus entraîner dans une crise de confiance et de liquidité. Les produits dérivés ont eu leur part de responsabilité dans la crise financière, ce que plusieurs éléments corroborent, comme notamment le manque de transparence des produits, le manque de régulation de certains acteurs et d'autres éléments concernant les produits de financement structuré.

#### ***III-1-i L'opacité***

Dans le cas des CDO synthétiques étudiés dans ce mémoire, il est difficile de connaître le créancier final. Même dans le cas des CDS, comme le contrat peut être échangé d'un investisseur à un autre, l'identité du vendeur final de protection n'est pas connue avec certitude. En outre, les deux parties peuvent vendre ou acheter leur contrat librement. De plus, les dérivés de crédit étaient à l'origine traités par des banques ou des institutions financières régulées et transparentes mais l'augmentation et la diversification des acteurs ont contribué à opacifier ces produits.

### **III-1-ii Le manque de régulation**

Il a été dit précédemment que les acteurs s'étaient multipliés. En effet, le marché des dérivés de crédit s'est étendu aux *hedge funds*<sup>7</sup> et aux compagnies d'assurance par exemple. Or ces nouveaux acteurs n'étaient pas soumis aux mêmes exigences de fonds propres que les institutions bancaires. Ils n'avaient donc pas les mêmes contraintes par rapport aux expositions qu'ils prenaient. Ceci a provoqué la faillite de plusieurs acteurs et semé le trouble sur les marchés financiers.

### **III-1-iii Les difficultés d'évaluation**

Pendant la crise de 2007-2008, la mauvaise évaluation des produits, due à leur complexité et à l'inadéquation des modèles, a conduit à une confusion quant à la valeur des actifs détenus en portefeuille. Différentes méthodes existent pour évaluer le risque de crédit comme nous le verrons par la suite. Le risque de modèle y est très important et plusieurs documents y faisaient déjà référence avant la crise, comme notamment le rapport trimestriel de la Banque des Règlements Internationaux [19] et la revue de la stabilité financière de la Banque de France [11] de juin 2005 pour le cas particulier des produits de financement structuré. Le risque de modèle peut être dû à des défauts de conception, comme par exemple des hypothèses non robustes, des problèmes de modélisation face à l'incertitude ou à des erreurs humaines. A titre d'exemple, l'hypothèse de la copule gaussienne pour les CDO synthétiques a été baptisée par la presse « la formule qui a tué Wall Street ».

### **III-1-iv Le cas particulier des produits de financement structuré**

*« Le financement structuré consiste à regrouper des actifs et à vendre ensuite à des investisseurs des droits, structurés en tranches, fondés sur les flux de revenus générés par les actifs sous-jacents. »* d'après I. Fender et J. MITCHELL [19]. Les CDO et CDO synthétiques sont des produits de financement structuré. Dans son article « Finance structurée, gestion des risques et récente crise financière » datant de septembre 2009, G. Dionne remet en cause la gestion du risque de ces instruments. Il cite notamment :

- L'absence de contrats incitatifs en présence d'asymétrie d'information : les institutions financières ont baissé leur vigilance sur les risques de défaut de leurs clients puisque les pertes potentielles étaient transférées au marché ;
- La mauvaise évaluation des produits structurés par les agences de notation : il était difficile pour les agences de notation d'évaluer ces produits, manquant de

---

<sup>7</sup> « Les *hedge funds* peuvent se définir comme des fonds d'investissement privés qui investissent dans des instruments négociables, qui ont parfois recours à l'effet de levier par différents moyens, notamment l'utilisation de positions courtes, et qui ne sont généralement pas régulés. » ,CLOE R., FELDBERG G., LYNCH D. :  
« Hedge funds, transfert du risque de crédit et stabilité financière ».

- données et de modèles, c'est pourquoi elles ont noté les tranches comme des obligations régulières, sans tenir compte des corrélations entre les tranches ;
- Les conflits d'intérêt des agences de notation.

---

Pour mesurer le risque des instruments décrits ci-dessus, le concept de VaR sera utilisé. La partie suivante a donc pour but de présenter cette mesure, son rôle dans la réglementation internationale (Bâle), les différentes méthodes existantes pour la calculer et plus particulièrement la méthode historique.

---

# LA VALUE-AT-RISK

---

La principale méthode d'évaluation du risque des instruments financiers est la Value-at-Risk. Ce chapitre a pour objet de présenter cette mesure, quelques méthodes possibles pour la calculer et sa place dans la réglementation internationale et dans la gestion des risques des institutions financières.

## I. Introduction à la Value-at-Risk

### I-1 L'expansion de la mesure VaR

La Value-at-Risk (parfois traduite en français « valeur en risque »), notée VaR, est une méthode d'évaluation du risque de marché d'un portefeuille d'instruments financiers. Elle est réputée pour sa capacité à résumer en un seul nombre l'exposition au risque d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs.

Avant les années 1990, les méthodes utilisées pour quantifier le risque de marché n'étaient applicables qu'à certains produits [59]. C'est notamment suite à un enchaînement de catastrophes financières, au développement des instruments dérivés et à l'augmentation de la volatilité des marchés financiers que le besoin de décrire le risque à travers un indicateur unique est né.

Depuis la publication d'une étude du « groupe des trente »<sup>8</sup> en 1993, recommandant la VaR comme mesure de risque de marché des portefeuilles de dérivés, cette méthode a commencé à se répandre. Suite à cela, la banque JP Morgan, au travers de son système RiskMetrics, a mis à disposition gratuitement sur internet des données financières et a surtout dévoilé sa méthodologie de calcul de VaR d'un portefeuille. Cette source d'informations a évidemment joué un rôle considérable dans l'adoption de cette mesure de risque par un grand nombre d'établissements financiers, d'entreprises et de fournisseurs de programme.

La réglementation financière a également contribué à l'essor de la VaR puisqu'en 1996, le Comité de Bâle a fait adopter de nouvelles règles qui contraignent les établissements financiers à détenir un niveau minimal de fonds propres ajusté aux risques auxquels ils s'exposent. Pour le calcul de ces exigences au titre du risque de marché, les institutions financières ont eu dès lors le choix entre :

- L'utilisation de la méthode standard (pondération des positions nettes) ;
- Le développement de systèmes internes (basés sur le calcul de VaR).

---

<sup>8</sup> Group of Thirty [1993] : « Derivatives : Practices and principles » aussi connu sous le nom « G-30 Report »

## I-2 Définition mathématique et financière de la VaR

Selon la définition de P. Jorion [9], la VaR correspond à la perte maximale attendue sur un horizon donné, à un niveau de confiance donné. Ainsi, dans le cas d'un portefeuille d'actifs financiers, la VaR traduit le montant maximal attendu des pertes du portefeuille dues aux mouvements de marché sur un horizon de temps donné, à un niveau de confiance donné.

Mathématiquement, la VaR d'un portefeuille d'actifs se matérialise comme un quantile de distribution des pertes et profits (P&L) de ce portefeuille. Une VaR de portefeuille égale à M, calculée sur un horizon de n jours avec un seuil de confiance de  $\alpha$  signifie qu'avec un degré de certitude  $\alpha$ , le portefeuille ne subira pas de perte de valeur supérieure à M dans les n prochains jours.

Précisons que :

- Le niveau de confiance  $\alpha$  est compris entre 0 et 1. Il représente la probabilité que la perte soit inférieure à la VaR.
- L'horizon de détention de l'actif n est généralement fixé à 1 jour. A partir de cette VaR à un jour, il est possible d'estimer la VaR sur une durée de détention plus longue, par exemple grâce à la formule de la racine carrée qui sera vue plus loin.

Notons X un risque et  $\alpha$  un niveau de probabilité, alors la VaR de X au niveau  $\alpha$ , sur un horizon de n jours, est définie comme<sup>9</sup> :

$$\text{VaR}_X[\alpha, n] = F_X^{\leftarrow}(\alpha)$$

Où  $F_X(\cdot)$  correspond à la fonction de répartition associée à la distribution de pertes et profits (P&L) du risque X.

## I-3 Une mesure adoptée par le Comité de Bâle

### I-3-i Bâle 1

Le Comité de Bâle a été instauré en 1974 par les gouverneurs des banques centrales des pays membres du G10. Les objectifs de cette institution sont :

- Le renforcement de la sécurité et de la fiabilité du système financier ;
- L'établissement de standards minimaux en matière de contrôle prudentiel ;
- La diffusion et la promotion des meilleures pratiques bancaires et de surveillance ;
- La promotion de la coopération internationale en matière de contrôle prudentiel.

Dans le premier accord de Bâle datant de 1988, les exigences minimales de fonds propres des banques se traduisent par un ratio, appelé ratio Cooke, en référence au

---

<sup>9</sup> Cf. Annexe B : *Démonstration VaR*

président du Comité à cette époque. Le ratio Cooke, c'est-à-dire le rapport entre les fonds propres réglementaires et les engagements de crédit, ne doit pas passer sous le seuil de 8% :

$$\text{Ratio Cooke} = \frac{\text{Fonds propres réglementaires}}{\text{Risque de crédit}} \geq 8\%$$

L'application du ratio Cooke a contraint les banques à se couvrir en fonds propres à hauteur de 8% de leurs engagements pondérés et, ce faisant, a permis de réduire les inégalités concurrentielles. Néanmoins, ce ratio présente de nombreuses limites. Tout d'abord, le risque est évalué de manière forfaitaire, sans prendre en compte le caractère plus ou moins risqué des emprunteurs. De plus, ni le risque de taux, ni les procédés de réduction du risque ne sont pris en compte.

En 1996, un amendement à l'accord de 1988 introduit le risque de marché dans le ratio qui définit les exigences minimales de fonds propres. Dorénavant, le risque de marché peut être calculé soit par une méthode standardisée, soit par un modèle interne. Comme les modèles internes basés sur la VaR impliquent des exigences de fonds propres moindres, leur utilisation est devenue de plus en plus fréquente. Le Règlement CRBF n° 95-02 fait état de recommandations (reprises dans l'arrêté du 20 février 2007) pour l'utilisation des modèles internes. La nature des modèles reste un choix de la banque mais certains critères doivent être respectés, comme notamment :

- La perte potentielle doit être calculée quotidiennement ;
- Le seuil de confiance  $\alpha$  doit être de 99% ;
- La période de détention minimale  $n$  est de 10 jours ouvrés et les banques ont la possibilité de calculer un montant estimé en pondérant par la racine carrée du temps la VaR calculée sur une période de détention plus courte ;
- La période d'observation  $N$  doit être limitée au minimum d'un an.

### ***I-3-ii Bâle 2***

Les limites du ratio Cooke évoquées précédemment ont conduit, en 2004, à la refonte de la réglementation. Le Comité de Bâle, présidé par W. McDonough, a mis au point une réforme, baptisée Bâle II. Cette réforme s'articule autour de trois piliers qui sont présentés sommairement dans le tableau ci-dessous.

<b>Bâle II</b>		
<b>Pilier I</b> <i>Exigences minimales en fonds propres</i>	<b>Pilier II</b> <i>Surveillance prudentielle</i>	<b>Pilier III</b> <i>Discipline de marché</i>
Calcul des exigences en fonction de l'évaluation du risque de marché, du risque de crédit et du risque opérationnel	-Calcul du capital économique et allocation du capital -Test d'adéquation des fonds propres en cas de crise	-Uniformisation des pratiques financières -Renforcement de la communication -Transparence

**Tableau 1 : Les trois piliers de Bâle II**

Les fonds propres ne doivent plus seulement couvrir le risque de crédit, de contrepartie, et de marché, comme c'était le cas avec le ratio Cooke modifié par l'amendement de 1996, mais également le risque opérationnel. De plus, chaque risque doit être à présent évalué avec le plus de précision possible et en tenant compte au mieux de la réalité.

En pratique, il s'agit de veiller à ce que le ratio McDonough, défini dans Bâle II comme le rapport entre les fonds propres réglementaires et la somme des risques, soit toujours au moins égal à 8% :

$$\text{Ratio Mc Donough} = \frac{\text{Fonds propres réglementaires}}{\text{Risque de crédit} + \text{risque opérationnel} + \text{risque de marché}} \geq 8\%$$

### ***I-3-iii Révisions de Bâle 2***

Dans le cadre de Bâle II, l'évaluation du risque de marché n'a pas changé. Cependant, de nouvelles révisions sont en cours. En effet, suite à la crise financière de 2007-2008, le Comité de Bâle a publié plusieurs documents de propositions, comme par exemple « Revisions to the Basel II Market Risk Framework » en juillet 2009. Certaines modifications sont apportées concernant le calcul de VaR, notamment :

- La période de détention minimale est de 10 jours ouvrés. Les banques qui souhaitent calculer une VaR sur une période de détention plus courte n'ont pas l'obligation de la pondérer par la racine carrée de la durée mais peuvent utiliser une autre méthode, qui doit toutefois être justifiée périodiquement et approuvée par le régulateur ;
- Les banques ont pour obligation de calculer une VaR stressée. Celle-ci sera présentée dans la suite du mémoire.

### ***I-3-iv VaR et exigences de fonds propres***

Dans le cas des modèles internes, les exigences de fonds propres dépendent directement de l'estimation de la VaR. En effet, l'amendement de 1996 et l'arrêté du 20 février 2007<sup>10</sup> stipulent que les banques doivent détenir un niveau de fonds propres équivalent au montant maximum entre la VaR du jour précédent et  $m_c$  fois la moyenne des  $\text{VaR}[99\%;10]$  sur les 60 derniers jours ouvrés.

---

<sup>10</sup> L'Arrêté du 20 février 2007 transpose en droit français les dispositions Bâle II (via les Directives européennes 2006/48/CE et 2006/49/CE)



En notant :

- $EMC_1$  les exigences minimales de fonds propres ;
- $VaR_{t-1}[99\%;10]$  la VaR du jour précédent ;
- $VaR_{moy}[99\%;10]$  la moyenne des  $VaR[99\%;10]$  sur les 60 derniers jours ouvrés ;
- $m_c \in [3;4]$  un facteur qui dépend des résultats aux contrôles ex-post.

Les exigences minimales de fonds propres s'écrit :

$$EMC_1 = \max(VaR_{t-1}[99\%;10]; m_c \cdot VaR_{moy}[99\%;10])$$

#### **I-4 Les différentes méthodes VaR**

Les principales méthodes pour le calcul de VaR sont :

- La méthode historique ;
- La méthode variance-covariance ;
- La méthode RiskMetrics ;
- La simulation Monte Carlo.

La VaR historique a l'avantage par rapport aux autres méthodes d'être facile à mettre en œuvre et c'est pourquoi elle est utilisée par la plupart des institutions bancaires comme en attestent par exemple les rapports annuels 2009 des établissements français. Un autre point positif de cette méthode est qu'elle ne fait aucune hypothèse sur la distribution, elle est non paramétrique. Encore plus important, elle tient compte des queues de distribution épaisses dans le sens où elles sont présentes dans l'historique. Ce sont les raisons pour lesquelles la VaR historique est retenue pour mesurer le risque des instruments complexes dans ce mémoire. Une brève présentation des autres méthodes est toutefois fournie ci-dessous.

##### ***I-4-i La méthode variance-covariance***

La méthode variance-covariance, ou VaR paramétrique, suppose que les rendements de l'actif ou du portefeuille, ainsi que les rendements des facteurs de risque, sont gaussiens. Cette hypothèse permet de nombreuses simplifications mais elle est fortement critiquée puisqu'elle ne correspond pas à ce que l'on peut observer en réalité sur les marchés. Pour calculer la VaR paramétrique, il faut estimer la moyenne  $m$  et l'écart-type  $\sigma$  des rendements de l'actif ou du portefeuille à partir des données historiques.

### Dans le cas d'un actif :

Comme on suppose que les rendements suivent une loi normale de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ , alors<sup>11</sup>:

$$\text{VaR}[99\%;1] = m + 2,33 \cdot \sigma$$

Il est fréquent en pratique de considérer que  $m$  est négligeable par rapport à  $\sigma$ , donc :

$$\text{VaR}[99\%;1] \approx 2,33 \cdot \sigma$$

### Dans le cas d'un portefeuille de deux actifs :

En notant  $\rho_{A,B}$  la corrélation entre la rentabilité de l'actif A et la rentabilité de l'actif B, la VaR du portefeuille s'écrit<sup>12</sup> :

$$\text{VaR}_{A+B}[99\%;1] = \sqrt{\text{VaR}_A^2[99\%;1] + \text{VaR}_B^2[99\%;1] + 2 \cdot \rho_{A,B} \cdot \text{VaR}_A[99\%;1] \cdot \text{VaR}_B[99\%;1]}$$

### Cas général :

Soient  $X_i$  les rentabilités des différents titres composant le portefeuille et  $\Sigma$  la matrice de variance-covariance des rentabilités, la formule matricielle est la suivante :

$$\text{VaR}[99\%,1] = 2,33 \cdot \sqrt{\sum_{i,j} X_i \cdot X_j \cdot \text{cov}(X_i, X_j)} = 2,33 \cdot \sqrt{X \Sigma X}$$

En résumé, cette méthode est relativement simple mais l'hypothèse sous-jacente, à savoir la normalité des rendements des actifs et des paramètres de marché n'est pas réaliste, surtout dans le cas des instruments complexes.

## ***I-4-ii La méthode Riskmetrics***

La méthode Riskmetrics est très semblable à la méthode variance-covariance. La différence provient de l'estimation de la volatilité. Le principe consiste à faire varier la volatilité dans le temps et à donner un plus grand poids aux volatilités récentes afin de s'adapter aux nouvelles conditions de marché. La VaR estimée est basée sur une moyenne  $\mu_t$  et une matrice de variance-covariance  $\Sigma_t$  données par<sup>13</sup> :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \lambda \cdot \mu_{t-1} + (1-\lambda) \cdot \hat{\mu} \\ \Sigma_t &= \lambda \cdot \Sigma_{t-1} + (1-\lambda) \cdot \hat{\Sigma} \end{aligned}$$

Avec  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\Sigma}$  les estimations respectives de la moyenne et de la matrice de variance-covariance, basées sur les prix de marché historiques.  $\lambda$  correspond à une constante de

<sup>11</sup> Cf. Annexe C : *Démonstration méthode paramétrique*

<sup>12</sup> Cf. Annexe C : *Démonstration méthode paramétrique*

<sup>13</sup> JPMorgan : « Exploratory stress-scenario analysis with applications to EMU »

lissage, qui permet de contrôler le poids donné aux valeurs de l'historique. RiskMetrics recommande d'utiliser un facteur de lissage de 0.94 pour des données journalières<sup>14</sup>.

L'inconvénient de cette méthode est, comme pour la méthode variance-covariance, l'hypothèse de normalité sous-jacente.

### ***I-4-iii La simulation Monte Carlo***

La méthode Monte Carlo est analogue à la méthode historique, mis à part que l'évolution des facteurs de risque n'est pas déduite des données passées mais simulée.

L'avantage est alors que le choix de la distribution du rendement de chaque facteur de risque est libre. Il est donc possible de tester plusieurs scénarios et d'y inclure des queues de distribution épaisses. Cependant, l'inconvénient de cette méthode est la puissance et le temps de calcul requis pour des portefeuilles importants. De plus, comme pour la VaR historique, le risque de modèle y est important.

## **II. La VaR historique**

### **II-1 Méthode de calcul**

Le calcul de la VaR historique repose sur l'hypothèse que les rendements des paramètres de marché sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d), ce qui signifie que la distribution de rendements futurs est supposée être la même que celle des rendements passés.

Pour déterminer la VaR historique d'une position, les étapes sont les suivantes :

- Identifier les facteurs de risque représentatifs du risque de la position<sup>15</sup> ;
- Déterminer N scénarii : collecter les valeurs historiques des paramètres sur une période d'un an pour les jours d'ouverture des marchés (262 jours) ;
- Déformer les paramètres du jour en fonction de ces N scénarii ;
- Revaloriser la position du jour selon les N scénarii ;
- Construire une distribution de probabilité des variations de la valeur de la position sur N jours ;
- En déduire la distribution des P&L de la position ;
- Déterminer la VaR à 1 jour, comme la  $N \cdot (1 - \alpha)^{\text{ème}}$  pire perte.

---

<sup>14</sup> RiskMetrics : « Technical document », section 5.3

<sup>15</sup> Par facteurs de risque, sont entendues les variables dont les mouvements entraînent une variation de la valeur de la position.

Rappelons que  $VaR_x[\alpha;n] = M$  signifie que l'on peut affirmer, avec un degré de certitude  $\alpha$ , que la position ne va pas subir une perte supérieure à  $M$  sur les  $n$  prochains jours. Par exemple, si l'on se base sur un historique de 300 jours,  $VaR_x[99\%;1]$  correspond à la troisième pire perte générée par les scénarii.

**Exemple :**

A partir des P&L d'un actif ou d'un portefeuille sur 500 jours, on déduit facilement la  $VaR[99\%;1]$  comme étant la cinquième pire perte. On pense ne pas subir de pertes quotidiennes supérieures à  $VaR[99\%;1]$  avec un degré de confiance de 99%.

Le tableau ci-après est un exemple illustratif de la détermination de la VaR à partir des résultats du portefeuille.

	Date	Pertes et profits en €	Pertes et profits triés en €
1	01/01/2009	54 698	-222 569
2	02/01/2009	24 651	-198 657
3	05/01/2009	-94 654	-154 896
4	06/01/2009	30 256	-134 947
5	07/01/2009	-76 543	-118 975
6	08/01/2009	-19 456	-99 653
7	09/01/2009	45 624	-98 456
8	12/01/2009	-24 958	-94 654
9	13/01/2009	-98 456	-89 753
10	14/01/2009	115 654	-88 956
11	15/01/2009	88 325	-84 563
...			
500	01/12/2010	21 320	306 842

Tableau 2 : Exemple de VaR historique

La VaR ainsi obtenue est :  $VaR_x[99\%;1]= 118\,975\text{€}$ .

## II-2 L'effet de l'agrégation

Un grand nombre de banques publient une VaR individuelle pour chaque catégorie de risque (risque action, risque de taux, risque de spread de crédit, etc). Cette décomposition donne une vision de l'exposition courante des portefeuilles de négociation de la banque, en accord avec les principales sources de risque de marché. De plus, elle permet aux banques de fixer des limites de VaR par type de risque. Ces limites suivent bien souvent l'organisation hiérarchique de l'établissement et traduisent les prévisions de

risque et de rendement. Elles permettent ainsi aux dirigeants d'affecter le capital de manière dynamique aux activités qui présentent le plus d'opportunités, ou pour lesquelles l'expérience est meilleure.

Calculer une VaR à différents niveaux permet de mesurer les risques de la banque, par activité, par desk, par portefeuille ou par facteur de risque. La VaR n'est pas additive, ni pour les positions, ni pour les facteurs de risque. Ceci implique que la VaR d'un portefeuille ne correspond pas à la somme des VaR partielles de chaque sous-portefeuille constitutif. Si un nouvel instrument est ajouté au portefeuille, il est alors nécessaire de recalculer la VaR totale pour connaître le risque du portefeuille. De la même manière, pour un portefeuille dépendant de plusieurs facteurs de risque, la VaR ne correspond pas non plus à la somme des VaR partielles de chaque facteur de risque. La non-additivité de la VaR rend les calculs plus nombreux et plus compliqués. Cependant, cette caractéristique a l'avantage de mettre en évidence l'effet de la mutualisation des positions et l'effet de la mutualisation des facteurs de risques. Pour observer l'effet de l'agrégation des VaR, on définit le coefficient d'agrégation empirique  $\alpha_E$ . Le terme de « bénéfice de diversification » n'est pas utilisé puisque la VaR n'est pas sous-additive comme nous le verrons dans la suite.

La salle des marchés du Groupe CM5-CIC<sup>16</sup> (CM-CIC Marchés) effectue de manière quotidienne des calculs de VaR. Ceux-ci sont réalisés pour chaque opération élémentaire ainsi qu'à différents niveaux de regroupement : par stratégie, par portefeuille et par activité. Les stratégies correspondent à des ensembles de positions ayant un sens économique commun. Chaque portefeuille regroupe des stratégies ayant un objectif similaire et présentant des besoins de restitutions comptables ou réglementaires semblables. Enfin, les activités sont des modes de gestion (par exemple *M&A*, *Arbitrage hybrides*, *Fixed Income*) et sont composés de plusieurs portefeuilles.

Un exemple numérique comportant les effets de l'agrégation des VaR à ces différents niveaux structurels, est présenté ci-dessous.

Les notations sont :

1. La VaR agrégée AVaR représente la VaR globale de CM-CIC Marchés sans distinction par palier.

2. La VaR non agrégée correspond à la somme des VaR par palier, donc en notant N le nombre de VaR individuelles du palier :

$$NAVAR = \sum_{i=1}^N VaR_i$$

---

<sup>16</sup> Cf. Annexe A : *Le Groupe Crédit Mutuel*

3. Le bénéfice de l'agrégation  $\Delta$  correspond à la différence entre la VaR non agrégée et la VaR agrégée :

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \text{VaR}_i - \text{AVaR}$$

4. Le coefficient d'agrégation empirique correspond au rapport entre le bénéfice de l'agrégation et la VaR non agrégée :

$$\alpha_E = \frac{\sum_{i=1}^N \text{VaR}_i - \text{AVaR}}{\sum_{i=1}^N \text{VaR}_i}$$

Notons :

- A le nombre d'activités au sein de CM-CIC Marchés ;
- n le nombre de portefeuilles au sein de CM-CIC Marchés ;
- S le nombre de stratégies au sein de CM-CIC Marchés ;
- P le nombre de positions au sein de CM-CIC Marchés.

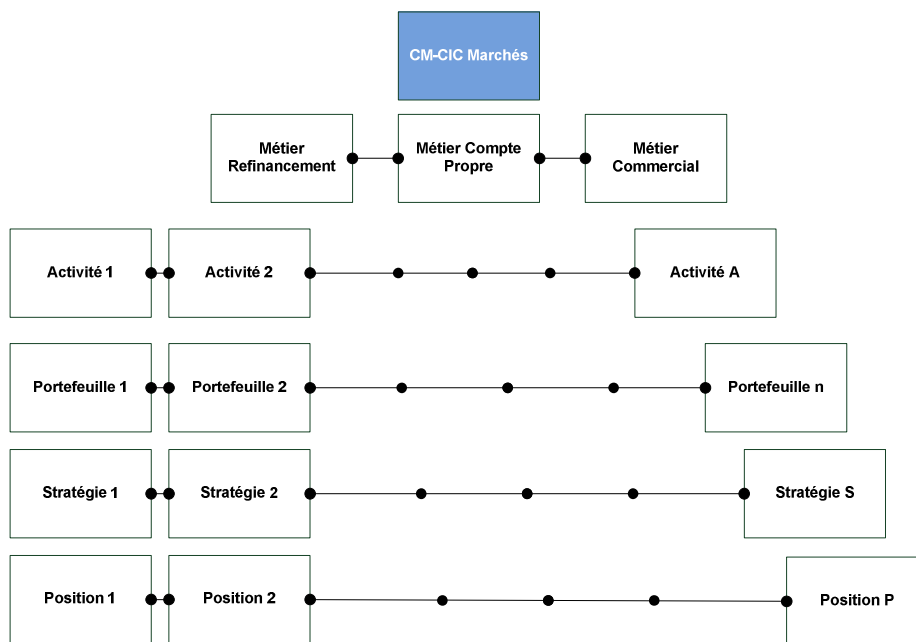


Figure 7 : Les niveaux de calcul de VaR

Les effets de l'agrégation peuvent être observés à chacun de ces paliers.

Par exemple, le 02/06/2010, on constate que la VaR de l'activité *Fixed Income* est de 22 771 926 € alors que les VaR non agrégées sont nettement supérieures.

Les bénéfices et coefficients d'agrégation sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Activité « Fixed Income »	VaR non agrégée €	Bénéfice de l'agrégation €	Coefficient d'agrégation €
<b>Par portefeuilles (54)</b>	38 234 961	15 463 035	40%
<b>Par stratégies (531)</b>	61 520 314	38 748 388	63%
<b>Par positions (1370)</b>	144 526 456	121 754 530	84%

**Tableau 3 : Illustration des bénéfices d'agrégation**

On remarque que le bénéfice dû à l'agrégation augmente avec le degré de découpage et peut devenir très important dès lors que l'on agrège les VaR par positions.

Les effets de l'agrégation entre les VaR seront de la même façon observés dans le cas des instruments complexes.

---

La VaR, son rôle dans la réglementation internationale, ainsi que les différentes méthodes de calcul ont été présentés. Dans la section suivante, le risque porté par les instruments financiers complexes est mesuré à l'aide de la méthode historique.

---

# LA VAR HISTORIQUE APPLIQUEE AUX PRODUITS COMPLEXES

---

Pour calculer une VaR, il faut dans un premier temps fixer les paramètres, en les adaptant aux besoins de la banque et aux exigences des régulateurs. Il s'agit ensuite de dérouler la méthodologie du calcul de la VaR historique, en prêtant une attention particulière au choix des facteurs de risque et à l'évaluation des produits complexes, difficulté majeure pour l'élaboration de la distribution des P&L.

## I. Les paramètres de la VaR

L'Arrêté du 20 février 2007 relatif aux exigences de fonds propres<sup>17</sup> fournit les critères quantitatifs qui régissent le calcul de VaR. Ces critères seront respectés dans les applications numériques. Ainsi, les facteurs suivants sont retenus :

- Un niveau de confiance  $\alpha$  de 99% ;
- Un horizon de détention  $n$  de 10 jours ;
- Une période d'observation (données historiques)  $N$  de 262 jours, ce qui correspond à une année dont les week-ends ont été décomptés.

Dans un premier temps, une VaR à 1 jour, notée  $VaR[99\%;1]$  est calculée. La  $VaR[99\%;10]$  peut généralement en être déduite grâce à la règle de la racine carrée  $VaR[99\%;n] = \sqrt{n}VaR[99\%;1]$ . Toutefois cette équation suppose que les variations successives de la valeur de l'actif sont gaussiennes et indépendantes alors que des études sur les données financières journalières ont illustré les propriétés asymétriques et leptokurtiques<sup>18</sup> dans les distributions empiriques.

## II. Les facteurs de risque

Rappelons la première étape de la méthodologie qui consiste à identifier les facteurs représentatifs du risque de la position, qui sont propres à chaque type d'instrument. Par définition, toute variation de la valeur du facteur de risque entraîne une variation de la valeur de l'instrument. Il convient donc, pour chaque produit, d'établir une liste exhaustive de ces facteurs. La VaR totale d'un actif ou d'un portefeuille est obtenue en faisant varier tous les facteurs simultanément.

La VaR peut également être calculée en utilisant uniquement certains paramètres. Il est effectivement possible de calculer la VaR pour un facteur de risque, en fixant tous les

---

<sup>17</sup> Chapitre VI, section V

<sup>18</sup> Une distribution leptokurtique est plus large sur les bords et plus cintrée.



autres. Cela permet d'obtenir des VaR partielles, comme la VaR taux ou la VaR action par exemple. La décomposition de la VaR s'avère une option intéressante dans le cas des produits complexes étant donné qu'ils sont exposés à plusieurs facteurs de risque.

### **III. L'évaluation des produits complexes**

L'évaluation des instruments complexes est importante pour deux raisons.

Tout d'abord, depuis la crise, l'opacité des instruments financiers est montrée du doigt. En effet, en 2007, le manque de transparence des positions a accru l'incertitude sur le montant des engagements et sur le montant des pertes des banques. C'est alors que sont nées la crainte et la méfiance des banques : celles-ci ont commencé à refuser de se prêter des liquidités. C'est pourquoi l'évaluation des instruments financiers, et plus particulièrement ceux dont l'évaluation ou le fonctionnement sont complexes, ou mal connus, constitue l'une des préoccupations des intervenants sur le marché, des institutions financières, des régulateurs et des services de contrôle.

D'autre part, dans le cadre d'une éventuelle homologation de l'utilisation de modèle interne par le Groupe Crédit Mutuel, la VaR est employée comme mesure du risque de marché. Les modèles de prix des actifs sont au cœur du calcul de la VaR historique. Le service Audit porte donc une attention particulière à ceux qui sont employés par CM-CIC Marchés, à leurs limites et aux améliorations qui peuvent leur être apportées. Cette partie du mémoire a donc pour objectif de présenter les modèles actuellement utilisés par CM-CIC Marchés pour valoriser les OC, les CDS et les CDO synthétiques, de mettre en évidence leurs principales limites et de présenter quelques alternatives possibles. Le Groupe Crédit Mutuel ne possédant pas de dérivés climatiques en portefeuille, les principaux modèles existants et leurs caractéristiques seront proposés.

#### **III-1 L'évaluation des OC**

##### ***III-1-i Quelques modèles existants***

Il existe différentes approches pour évaluer les obligations convertibles [10] :

- L'approche structurelle, pour laquelle la variable sous-jacente est la valeur des actifs de l'entreprise. Le défaut est alors un événement endogène qui se produit lorsque l'émetteur de la dette n'est plus en mesure d'honorer ses engagements. On peut notamment se tourner vers les ouvrages de Merton [1974], Ingersoll [1977], Brennan et Schwarz [1980] ou Augros. Ces modèles ont l'avantage de prendre en compte à la fois le risque lié à l'évolution des paramètres de marché et le risque d'exploitation de l'entreprise. Toutefois, l'inconvénient est que ces modèles peuvent être difficiles à mettre en œuvre puisqu'ils font appel à

l'estimation de la valeur de la firme non observable et à sa volatilité. De plus, ils ne rendent pas compte efficacement de la structure des spreads de crédit observée.

- Les modèles basés sur le prix de l'action initiés par McConnell et Schwarz [1986], le modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein [1979] faisant partie de cette catégorie.
- Les modèles qui décomposent l'OC en deux composantes, l'action et l'obligation, proposés par Tsiveriotis et Fernandes [1998].
- Les modèles réduits qui modélisent le défaut comme un événement dont la loi est gouvernée par un processus stochastique appelé taux de hasard. On peut citer par exemple Jarrow et Turnbull [1995], Lando [1998] et Duffie et Singleton [1997]. L'avantage de ces modèles est que les paramètres peuvent facilement être estimés à partir de l'observation de la structure des spreads de crédit et qu'ils présentent des prix relativement proches de ceux observés sur le marché. Néanmoins, on peut leur reprocher de ne pas tenir compte du risque d'exploitation qui affecte la valeur de la firme.

### **III-1-ii Le modèle utilisé**

Le modèle utilisé fait appel à la méthode simplifiée de Cox-Ross-Rubinstein [39] qui n'est autre qu'un cas particulier du modèle de Black and Scholes [37] concernant l'évaluation d'options. Ce modèle est renommé parce qu'il conduit à une procédure numérique simple et efficace. La principale difficulté dans l'évaluation vient du fait que l'OC dépend aussi bien du prix du sous-jacent que de la structure par terme des taux d'intérêt. De plus, le caractère optionnel de cet instrument rend impossible son évaluation par une formule fermée. Le modèle utilisé repose donc sur la construction d'arbres binomiaux dans un univers risque neutre. Il s'agit d'un modèle à un facteur, c'est-à-dire que la seule source d'incertitude est le prix de l'action dans le futur et que les autres paramètres, taux d'intérêt ou volatilité par exemple, sont connus.

#### **Hypothèses retenues**

1. Tous les taux d'intérêts futurs, notamment le taux sans risque et le spread de crédit de l'émetteur, ainsi que la volatilité du prix de l'action, sont connus avec certitude ;
2. Il n'y a pas de limites d'achat ou de vente, ni de taxes, coûts de transaction ou d'appels de marge ;
3. Les individus peuvent vendre à découvert ;
4. Le taux de placement est le même que le taux d'emprunt ;
5. Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage ;
6. Le prix de l'action suit un processus binomial multiplicatif sur des périodes discrètes.
7. La probabilité de hausse et la probabilité de baisse sont égales :  $q=1-q$ .

### Notations

N	Ratio de conversion c'est-à-dire nombre d'actions obtenues pour la conversion d'une obligation
F	Valeur faciale de l'obligation
R	Valeur de remboursement de l'obligation exprimée en pourcentage de la valeur faciale
S	Prix de l'action sous-jacente
H	Valeur de portage
T	Maturité, date à laquelle le principal de l'obligation est remboursé
F	Fréquence de paiement des coupons de l'obligation
C	Coupon, en pourcentage annuel
$\sigma^2$	Volatilité de l'action, en pourcentage annuel
$\delta$	Taux de dividende continu de l'action sous jacente en pourcentage annuel
$r_B$	Taux d'actualisation continu pour une période $\Delta_t$
$r_S$	Taux sans risque pour une période $\Delta_t$
$\Delta_t$	Intervalle de temps entre 2 nœuds de l'arbre défini par $\Delta_t = t/M$ où M est le nombre de pas de temps dans l'arbre
u,d	Facteurs multiplicatifs appliqués à l'arbre binomial pour déterminer les états haussiers (up) et baissiers (down)
$S_u, S_d$	Valeur de l'action correspondant aux états up et down $S_u = u \cdot S$ et $S_d = d \cdot S$
$V_u, V_d$	Valeur de l'obligation convertible correspondant aux états up et down
Q	Probabilité de hausse du sous-jacent

### Evolution du sous-jacent de l'OC

En temps discret, le rendement de l'action à chaque période peut avoir deux valeurs possibles :

- u-1 avec une probabilité q ;
- d-1 avec une probabilité 1-q.

A la date d'évaluation, le prix de l'action est  $S_0$  et à la fin de la première période, son prix sera  $uS_0$  ou  $dS_0$ .

Dans le cas d'un arbre à deux périodes, on obtient le diagramme suivant :

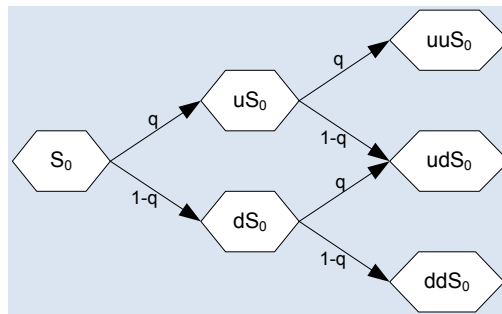


Figure 8 : Evolution de la valeur de l'action

Le modèle de valorisation des OC s'appuie sur le modèle de Cox-Ross-Rubinstein concernant la valorisation des options. Il y a lieu de rappeler brièvement son principe.

**Evolution d'une option d'achat de prix d'exercice  $K$  sur le sous-jacent**

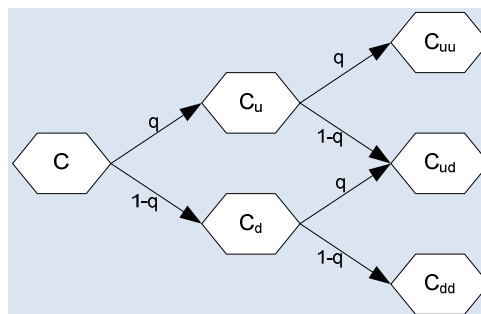


Figure 9 : Evolution de la valeur du call

La valeur initiale de ce call est trouvée rétroactivement selon la méthode d'induction arrière de Cox-Ross-Rubinstein :

**Etape 1 :**

La première étape consiste à déterminer le prix du Call à l'échéance.

$$C_{uu} = \max(0, S_0 \cdot u^2 - K)$$

$$C_{ud} = \max(0, S_0 \cdot u \cdot d - K)$$

$$C_{dd} = \max(0, S_0 \cdot d^2 - K)$$

Ces formules traduisent le fait que le détenteur exerce le call uniquement si son profit est positif.

**Etape 2 :**

La valeur du call au deuxième nœud est exprimée comme la moyenne actualisée de ses valeurs futures.

$$C_u = \frac{1}{1+r_s} \cdot [p \cdot C_{uu} + (1-p) \cdot C_{ud}]$$

$$C_d = \frac{1}{1+r_s} \cdot [p \cdot C_{ud} + (1-p) \cdot C_{dd}]$$

Dans ces équations,  $p = \frac{r-d}{u-d}$  et p est une mesure de probabilité.

---

**Etape 3 :**

La valeur initiale de l'option d'achat est finalement l'espérance actualisée des valeurs de celle-ci au deuxième nœud.

$$C = \frac{1}{1+r_s} \cdot [p \cdot C_u + (1-p) \cdot C_d]$$


---

Sous l'hypothèse que les investisseurs sont neutres au risque, on a<sup>19</sup>  $p=q$ .

**Calcul des paramètres d'évolution du sous-jacent u et d**

On veut imiter en temps discret la dynamique continue du prix des actions. On cherche donc à ce que notre processus à temps discret ait la même espérance et variance que le processus à temps continu<sup>20</sup>.

Supposons que l'évolution suivie par le sous-jacent en temps continu corresponde à un mouvement brownien géométrique<sup>21</sup> :

$$dS = (r_s - \delta) \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW_t$$

Où  $r_s$  est le taux sans risque,  $\delta$  le taux de dividendes et  $dW_t$  est un processus de Wiener<sup>22</sup>.

Donc on peut écrire :

$$\frac{dS}{S} = (r_s - \delta) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$


---

<sup>19</sup> Cf. Annexe D : *Démonstration de la formule de CRR pour les options*

<sup>20</sup> Documentation RiskMetrics

<sup>21</sup> Cf. Annexe E : *Processus de Wiener*

<sup>22</sup> Cf. Annexe E : *Processus de Wiener*

L'espérance de rentabilité de  $S_T$  et la variance de  $S_T$  en temps continu sont données par<sup>23</sup> :

$$\begin{cases} E(S_T) = S_0 \cdot e^{(r_s - \delta)T} \\ \text{Var}(S_T) = S_0^2 \cdot e^{2(r_s - \delta)T} \cdot (e^{\sigma^2 T} - 1) \end{cases}$$

Afin de se ramener en temps discret, on suppose désormais que le cours de  $S$  fluctue à l'issue de chaque intervalle de temps  $\Delta_t$  donc on a finalement :

$$\begin{cases} E(S_{\Delta_t}) = S_0 \cdot e^{(r_s - \delta) \cdot \Delta_t} \\ \text{Var}(S_{\Delta_t}) = S_0^2 \cdot e^{2(r_s - \delta) \cdot \Delta_t} \cdot (e^{\sigma^2 \Delta_t} - 1) \end{cases}$$

On impose donc :

$$\begin{cases} S_0 \cdot e^{(r_s - \delta) \cdot \Delta_t} = p \cdot u \cdot S_0 + (1-p) \cdot d \cdot S_0 \\ S_0^2 \cdot e^{(2(r_s - \delta) + \sigma^2) \cdot \Delta_t} - S_0^2 \cdot e^{2(r_s - \delta) \cdot \Delta_t} = p \cdot u^2 \cdot S_0^2 + (1-p) \cdot d^2 \cdot S_0^2 - (p \cdot u + (1-p) \cdot d)^2 \cdot S_0^2 \end{cases}$$

Si on pose  $p = 0.5$ , on obtient les multiplicateurs suivants<sup>24</sup> :

$$\begin{cases} u = e^{(r_s - \delta) \cdot \Delta_t} \cdot \left( 1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \cdot \Delta_t} - 1} \right) \\ d = e^{(r_s - \delta) \cdot \Delta_t} \cdot \left( 1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \cdot \Delta_t} - 1} \right) \end{cases}$$

L'arbre du sous-jacent étant établi, étudions le modèle à deux périodes d'une OC classique.

### Construction de l'arbre de l'OC

Un taux unique à travers l'arbre pour l'actualisation pourrait être utilisé car cette méthode est largement répandue sur les marchés des obligations convertibles. Or, pour tenir compte des effets de variation non parallèles de la courbe des rendements, les flux sont actualisés avec l'ensemble de la courbe de rendement.

A chaque nœud, le détenteur d'une OC a le choix entre :

- Recevoir des coupons dans le futur et le paiement du principal ;
- Renoncer aux coupons en échange d'une ou plusieurs actions sous réserve de la « call provision » et de la « put provision » dont il sera question plus tard.

<sup>23</sup> Cf. Annexe F : Calcul de l'espérance/variance d'une loi LogNormale

<sup>24</sup> Cf. Annexe G : Calcul des paramètres  $u$  et  $d$

Le but est de calculer les valeurs de l'OC à chaque nœud de l'arbre représenté par le schéma suivant :

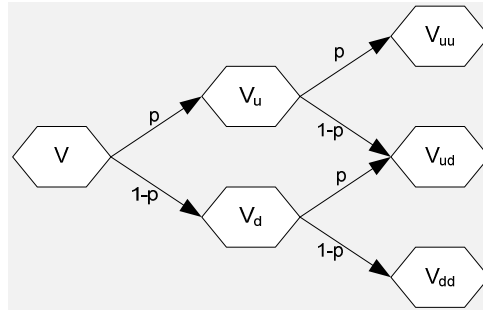


Figure 10 : Arbre à deux périodes de l'OC

**A l'échéance :**

Comme le détenteur cherche à maximiser son revenu, la valeur de l'OC à l'échéance s'exprime comme suit :

Dans l'état haussier	Dans l'état intermédiaire	Dans l'état baissier
$V_{uu} = n \cdot \max\left(\frac{R \cdot F + c \cdot F}{n}; S_{uu}\right)$	$V_{ud} = n \cdot \max\left(\frac{R \cdot F + c \cdot F}{n}; S_{ud}\right)$	$V_{dd} = n \cdot \max\left(\frac{R \cdot F + c \cdot F}{n}; S_{dd}\right)$

Tableau 4 : Valeurs de l'OC à l'échéance

Rappelons que :

- n est le ratio de conversion ;
- F est la valeur faciale ;
- R est la valeur de remboursement en pourcentage de la valeur faciale ;
- c est le coupon en pourcentage de la valeur faciale.

**Au second nœud :**

Nous avons vu que le détenteur de l'OC peut arbitrer entre :

- Conserver l'OC ;
- L'échanger contre des actions.

Pour ce faire, il compare donc l'espérance des gains futurs actualisés que lui procure l'obligation avec la valeur de l'action à ce nœud.

La valeur de l'OC au second nœud est donnée par les formules ci-dessous :

Dans l'état haussier	Dans l'état intermédiaire
$V_u = n \cdot \max\left(\frac{H_u}{n}; S_u\right)$	$V_d = n \cdot \max\left(\frac{H_d}{n}; S_d\right)$

Tableau 5 : Valeurs de l'OC au nœud intermédiaire

Où  $H_u$  la valeur de portage de l'OC au second nœud à l'état up :

$$H_u = \frac{1}{2} e^{-r_B \cdot \Delta t} \cdot [V_{uu} + V_{ud}] + c'$$

Et  $H_d$  la valeur de portage de l'OC au second nœud à l'état down :

$$H_d = \frac{1}{2} e^{-r_B \cdot \Delta t} \cdot [V_{ud} + V_{dd}] + c'$$

Avec :

$r_B$	Taux d'actualisation risqué de la seconde période En d'autres termes, c'est le taux forward entre $(T - \Delta t)$ et $T$ , où $T$ est la maturité de l'obligation. En pratique, il correspond à la somme du taux de marché et du spread de taux. En effet, les taux de la structure par terme indiquent les conditions auxquelles peut prétendre un emprunteur sans risque. Il convient donc d'ajouter la prime de risque de défaillance.
$c'$	Montant des coupons versés au cours de la dernière période actualisés au deuxième nœud

### **A la date d'évaluation :**

La valeur de l'OC est finalement donnée par :

$$V = n \cdot \max\left(\frac{H}{n}; S\right) \text{ où } H = \frac{1}{2} e^{-r_B \cdot \Delta t} \cdot [V_u + V_d] + c''$$

Avec :

$r_B$	Taux d'actualisation risqué de la première période
$c''$	Montant des coupons versés au cours de la première période actualisés à la date d'évaluation

### ***Prise en compte des clauses d'optionnalité***

Pour affiner le modèle, il faut tenir compte des clauses d'optionnalité qui peuvent s'appliquer à l'OC. Il existe en effet deux sources d'optionnalité possibles :

#### **A. Le call émetteur**

Le **call émetteur**, encore appelé clause de rappel ou clause de remboursement anticipé, est un droit pour l'émetteur de racheter l'obligation convertible à un prix fixé d'avance. Ce



rappel ne peut toutefois pas avoir lieu à une date quelconque. Il faut tenir compte de deux contraintes :

- L'OC ne peut pas être rappelée pendant la période de « *hard call protection* » ;
- Elle peut être rappelée dans la période de « *soft call protection* » seulement si le prix de l'action dépasse un certain seuil, noté K.

La figure 11 présente les conditions nécessaires pour exercer le call émetteur. Les périodes sont définies contractuellement.

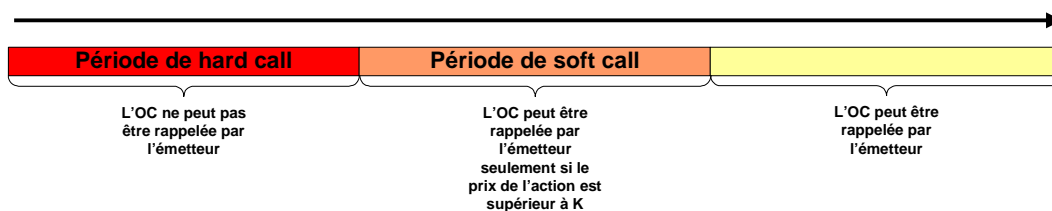


Figure 11 : Les conditions du call émetteur

### B. Le put porteur

Le **put porteur** est une option au gré du porteur qui constitue une assurance et lui donne le droit de se faire rembourser avant l'échéance, au cas où l'action chuterait. Ainsi, l'investisseur bénéficie du droit de forcer l'émetteur à racheter l'OC à un prix fixé d'avance à certaines dates fixes.

Pour que le prix de l'OC soit le plus exact possible, il est important d'inclure ces possibilités dans l'évaluation. Le modèle binomial peut de nouveau être utilisé pour prendre en compte ces clauses. La valeur de l'OC aura une limite à la hausse en présence d'une clause de remboursement et une limite à la baisse en présence d'une clause au gré du souscripteur. Il suffit alors, à chaque nœud de l'arbre, de déclencher l'exercice de ces clauses chaque fois que les seuils sont dépassés. A chaque nœud, il convient donc de déterminer si l'OC est callable.

Lorsque le nœud est dans la période de soft call, l'OC est callable si le prix de l'action est supérieur à un seuil de déclenchement, c'est-à-dire si le prix de l'action est supérieur au produit du seuil défini contractuellement et du prix de conversion.

Le prix de conversion correspond à  $PC = \frac{F}{n}$ .

Une fois que l'on sait si l'obligation est callable, on obtient sa valeur au nœud de la façon suivante :

$$V = \max(n \cdot S; X_p + a; \min(H; X_c + a))$$

Avec :

$X_P$	Prix du put
$X_C$	Prix du call
$a$	Intérêts courus
$H$	Valeur de portage de l'OC

Si l'OC est à la fois *callable* et *putable*, le détenteur de l'OC arbitre entre trois situations :

- La conversion ;
- L'exécution du put porteur auquel cas il touche la valeur de remboursement et les intérêts sur obligation ;
- Le portage de l'obligation mesuré comme la valeur espérée attendue actualisée à laquelle vont s'ajouter les coupons payés pendant la période.

Il faut également prendre en compte le fait que l'émetteur arbitre lui-même entre rappeler l'OC ou non.

A chaque nœud, plusieurs situations sont possibles. Les formules correspondantes à chaque cas sont présentées ci-dessous. Les indices  $i$  et  $j$  correspondent aux états haussiers ou baissiers, c'est-à-dire  $i = u, d$  et  $j = u, d$ .

### A l'échéance :

Si l'on se place au nœud terminal, on obtient les formules suivantes :

Si l'obligation est callable et <i>putable</i>	Si l'obligation n'est que <i>putable</i>
$V_{ij} = \max \left( n \cdot S_{ij}; X_P; \min \left( N + \frac{c \cdot F}{f}; X_C \right) \right)$ <p style="text-align: center;">(1)</p>	$V_{ij} = \max \left( n \cdot S_{ij}; X_P; N + \frac{c \cdot F}{f} \right)$ <p style="text-align: center;">(2)</p>

Tableau 6 : Prix de l'OC à l'échéance en tenant compte des optionalités

### Au deuxième nœud :

Si l'on se place au deuxième nœud, on obtient les formules suivantes :

Si l'obligation est <i>callable</i>	Si l'obligation n'est pas <i>callable</i>
$V_i = \max(n \cdot S_i; X_P; \min(H_i; X_C))$ <p style="text-align: center;">(1)</p>	$V_i = \max(n \cdot S_i; X_P; H_i)$ <p style="text-align: center;">(2)</p>

Tableau 7 : Prix de l'OC au nœud intermédiaire en tenant compte des optionalités

Dans tous les cas :

$$H_i = \frac{1}{2} e^{-r_B \cdot \Delta t} \cdot [V_{ii} + V_{ij}] + c'$$

Comme précédemment, les notations sont :

$r_B$	Taux d'actualisation risqué de la deuxième période
$c'$	Montant des coupons versés au cours de la dernière période actualisés au deuxième nœud

**A la date d'évaluation :**

Si l'on se place à la date d'évaluation, on obtient les formules suivantes :

Si l'obligation est <i>callable</i>	Si l'obligation n'est pas <i>callable</i>
$V = \max(n \cdot S; X_p + a; \min(H; X_C + a))$ <p style="text-align: center;">(1)</p>	$V = \max(n \cdot S; X_p + a; H)$ <p style="text-align: center;">(2)</p>

Tableau 8 : Prix de l'OC à la date d'évaluation en tenant compte des optionalités

Avec 
$$H = \frac{1}{2} e^{-r_B \cdot \Delta t} \cdot [V_u + V_d] + c''$$

Comme précédemment :

$r_B$	Le taux d'actualisation risqué de la première période
$c''$	Le montant des coupons versés au cours de la première période actualisés à la date d'évaluation

**III-1-iii Critiques du modèle**

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein permet de prendre en compte un grand nombre de caractéristiques complexes des OC et il a fait ses preuves dans de nombreuses études<sup>25</sup>. Il existe toutefois des extensions à l'arbre binomial, comme par exemple les arbres trinomiaux (ou même quadrinomiaux), qui supposent que le prix de l'action puisse prendre trois valeurs à chaque nœud. L'avantage de ces modèles est d'apporter une précision supplémentaire par rapport aux modèles binomiaux. Cependant, le nombre de nœuds est beaucoup plus élevé, donc le nombre de calculs aussi. Rubinstein a

---

<sup>25</sup> Exemple : étude de AMMANN M., KIND, A., WILDE C. « The pricing of Convertibles Bonds »

également développé un arbre implicite qui prend en compte, au moment de sa construction, les prix observés des options.

Pour améliorer le modèle, il aurait été possible de différencier le taux d'actualisation de l'option et le taux de la partie obligation. En effet, pour une option sur action, le taux d'actualisation approprié est le taux sans risque, alors que les cash flows d'une obligation doivent être actualisés à un taux risqué reflétant l'exposition au risque de défaut de l'émetteur. Une OC se comporte comme une action quand le prix de l'action est élevé et comme une obligation lorsque le prix de l'action est bas donc une possibilité pour améliorer le modèle décrit ci-dessus serait d'ajuster à chaque nœud de l'arbre le taux d'actualisation pour tenir compte des caractéristiques de conversion.

## **III-2 L'évaluation des dérivés de crédit**

### ***III-2-i Les modèles d'évaluation du risque de crédit***

Les modèles académiques d'évaluation du risque de crédit sont généralement classés en deux catégories [36] :

- Les modèles structurels qui reposent sur la valeur de la firme comme il a été vu précédemment pour le cas des OC. Il est possible de citer l'approche de Merton et ses variantes proposées par exemple par Geske en 1977 ou Buffet en 2000. Ces modèles sont adaptés aux instruments de dette à maturités finies et supposent que le défaut puisse se produire uniquement à la date de maturité de la dette. D'autres modèles structurels tels que les approches de Black and Cox en 1976, Brennan et Schwarz en 1977 et Nielson en 1993 supposent cette fois que le défaut peut se produire durant toute la durée de vie de l'instrument de dette. L'avantage principal de l'approche structurelle est qu'elle lie les événements de défaut à l'évolution de la structure de capital de la firme et donc fait référence aux fondamentaux de marché.
- Les modèles à formes réduites ou approches à intensité tels que ceux de Lando en 1994, Jarrow et Turnbull en 1995, Hull et White en 1995, Duffie et al en 1996. Ils laissent place aux événements inattendus contrairement aux modèles structurels, ce qui constitue une caractéristique très intéressante. La probabilité de défaut est directement modélisée à partir des prix de marché.

### ***III-2-ii Le modèle CDS***

Le modèle présenté est une version modifiée de l'approche à forme réduite de Hull et White pour les CDS vanilles. Le modèle de Hull-White fait appel aux données relatives aux obligations pour calculer les probabilités de défaut, alors que dans notre cas, elles sont déduites des données relatives aux CDS.

Rappelons les flux qui sont échangés dans le cadre d'un contrat sur CDS. L'acheteur de protection paie une prime, d'appellation anglo-saxonne spread, de manière périodique au vendeur de protection. En cas de survenance d'un aléa de défaut, et dans le cas du

paiement par livraison du sous-jacent, le vendeur de protection achète l'obligation de l'entité de référence à sa valeur faciale diminuée de sa valeur de marché juste après la survenance de l'aléa de défaut. De plus, l'acheteur de protection doit généralement faire un paiement supplémentaire en cas de défaut. Il lui reste effectivement à payer la fraction de prime couvrant la période allant de la date de dernière prime versée à la date de défaut.

### **Hypothèses**

1. Les probabilités de défaut, les taux d'intérêt et les taux de recouvrement sont indépendants ;
2. Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage ;
3. Il existe une probabilité risque neutre ;
4. Le taux de recouvrement<sup>26</sup> est fixé à 40 % ;
5. En cas de défaut, le détenteur de l'obligation exige le paiement de la valeur nominale de l'obligation et de l'intérêt couru<sup>27</sup> ;
6. Il n'y a pas de risque que la contrepartie fasse défaut ;
7. Les taux sont connus avec certitude ;
8. Les événements de défaut peuvent survenir aux dates de paiements ;
9. Les obligations sous-jacentes au contrat sont émises par l'entité de référence ou par une autre entreprise dont les probabilités de défaut sont les mêmes dans le futur.

---

<sup>26</sup> Pourcentage de notionnel remboursé en cas de survenance d'un événement de défaut.

<sup>27</sup> Quand le taux de recouvrement n'est pas nul, il est nécessaire de faire une hypothèse sur l'exigence des détenteurs d'obligation en cas de défaut. Jarrow et Turnbull (1995), Hull et White (1995) supposent que l'exigence est égale à la non défaillance de l'obligation. Singleton (1997) suppose que l'exigence est égale à la valeur de l'obligation immédiatement avant le défaut. Comme l'on souligné J.P. Morgan (1999), Jarrow et Turnbull (2000), ces hypothèses ne correspondent pas aux lois sur la faillite de la plupart des pays. L'hypothèse la plus adaptée est que l'exigence en cas de défaut est égale à la valeur faciale de l'obligation plus l'intérêt accumulé. Hull J. et White A., « Valuing Credit Default Swap I : No counterparty risk »

### Notations

C	Coupon de l'obligation sous-jacente, en pourcentage du principal
R	Taux de recouvrement de l'obligation, par hypothèse égal à 40%
S	Total des paiements par an effectués par l'acheteur de protection du CDS, en points de base
T	Vie du CDS
f(t)	Probabilité de défaut à l'instant t
F(t)	Probabilité de faire défaut entre 0 et t ou probabilité cumulée
u(t)	Valeur présente des paiements effectués avant t sachant que les paiements sont de 1€ par an
a(t)	Valeur présente d'un paiement résiduel en t égal à $t^*-t$ où $t^*$ est la date de paiement précédent t
A(t)	Intérêts courus de l'obligation de référence en t, en pourcentage du principal
D(t)	Valeur présente de 1€ reçu en t

La valeur présente PV d'un CDS pour l'acheteur de protection s'exprime comme la différence entre les pertes attendues actualisées et les paiements de spread attendus actualisés.

Dans la suite, on suppose que le montant notionnel est de 1€.

### Détermination de la valeur présente des spreads attendus :

Si un événement de défaut se produit en date t, avec  $t < T$ , alors l'acheteur de protection aura payé le montant s chaque année jusqu'en t. Il suffit alors d'actualiser les paiements et les intérêts courus. Dans ce cas, la valeur présente des paiements annuels vaut :

$$PV = s \cdot [u(t) + a(t)]$$

Si aucun événement de défaut ne se produit avant la date T, l'acheteur de protection aura payé le montant s chaque année jusqu'en T. La valeur présente des paiements sera alors égale à :

$$PV = s \cdot u(T)$$

En tenant compte des probabilités de défaut f(t), la valeur présente espérée des paiements (jambe de l'acheteur)  $PV_{\text{spread}}$  est donc donnée par :

$$PV_{\text{spread}} = s \int_0^T [u(t) + a(t)] \cdot f(t) \cdot dt + s \cdot (1 - F(T)) \cdot u(T)$$

Les facteurs d'actualisation sont définis mathématiquement comme suit :

$$u(t) = \sum_{i=1}^n D(t_i) \quad \text{avec } t_n \leq t < t_{n+1}$$

$$a(t) = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} D(t) \quad \text{avec } t_n < t < t_{n+1}$$

$$D(t_i) = e^{-r_i \cdot t_i}$$

Où  $r_i$  est le taux d'actualisation continu qui s'applique dans la période  $]t_{i-1}; t_i]$

Supposons qu'il y ai N dates de paiements  $t_1, \dots, t_N$ , et notons m la fréquence de versement des primes (par exemple  $m = 4$  si le paiement est trimestriel) alors à chaque date de paiement, l'acheteur verse une prime égale à  $s/m$ . On peut réécrire la jambe de l'acheteur comme :

$$PV_{\text{spread}} = \frac{s}{m} \cdot \sum_{n=1}^N (1 - F(t_n)) \cdot D(t_n)$$

### **Paiements supplémentaires**

L'acheteur de protection est souvent tenu par le contrat de verser une prime supplémentaire en cas de défaut. Il faut tenir compte de celle-ci pour évaluer plus précisément le CDS. Le paiement supplémentaire fait par l'acheteur de protection en cas de défaut peut être approximé par [50] :

$$PV_{\text{accrued spread}} \approx \frac{s_N}{2} \cdot \sum_{n=1}^N f(t_n) \cdot D(t_n)$$

Cela traduit le fait que si un défaut se produit entre deux dates de paiement des primes, le montant supplémentaire dû est égal à la moitié de la prime totale qui aurait été payée à la fin de la période.

Finalement la jambe de l'acheteur est donnée par :

$$PV_{\text{spread}} = \frac{s}{m} \cdot \sum_{n=1}^N D(t_n) \cdot \left[ (1 - F(t_n)) + \frac{1}{2} \cdot f(t_n) \right]$$

### **Détermination de la valeur présente des payoffs attendus :**

Le payoff d'un CDS en cas de défaut à la date t correspond à la valeur faciale de l'obligation de référence diminuée de sa valeur de marché juste après t. L'hypothèse vue précédemment, selon laquelle le détenteur de l'obligation la vend à sa valeur nominale plus les intérêts courus, implique que la valeur de marché de l'obligation de référence juste après le défaut correspond au taux de recouvrement multiplié par la somme de sa valeur faciale et des intérêts accumulés soit :  $R[1 + A(t)]$ .

Le payoff d'un CDS en date  $t$  pour un principal de 1€ est finalement donné par :

$$1 - R \cdot [1 + A(t)] = 1 - R - A(t) \cdot R$$

En tenant compte des probabilités de défaut, la valeur présente des payoffs espérés (jambe du vendeur)  $PV_{\text{payoff}}$  est donc :

$$PV_{\text{payoff}} = \int_0^T [1 - R - A(t) \cdot R] \cdot f(t) \cdot D(t) \cdot dt$$

Où les intérêts courus sont donnés par :

$$A(t) = c \cdot \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \text{ avec } t_n \leq t < t_{n+1}$$

Nous avons fait l'hypothèse que les événements de défaut peuvent se produire uniquement à certaines dates finies et plus précisément aux dates de versement des primes donc on peut réécrire la jambe du vendeur de la manière suivante :

$$PV_{\text{payoff}} = [1 - R - A(t) \cdot R] \cdot \sum_{n=1}^N f(t_n) \cdot D(t_n)$$

### Détermination du spread pur :

Les méthodes de calcul de la jambe de l'acheteur et de la jambe du vendeur ont été présentées. Pour être en mesure d'évaluer le CDS, il nous reste à déterminer les probabilités de défaut. Dans ce modèle, les probabilités sont déduites directement des spread de CDS cotés sur le marché. Le spread pur du contrat est en effet calibré au spread de CDS cotés sur le marché. La prime pure ou *breakeven spread*,  $s^*$ , est la prime que devrait payer l'acheteur de protection pour que le contrat soit équitable pour les deux parties.  $s^*$  est donc le spread qui égalise la jambe de l'acheteur et la jambe du vendeur.

Comme celles-ci ont été calculées dans les sections précédentes, le spread pur peut s'écrire :

$$s^* = \frac{[1 - R - A(t) \cdot R] \cdot \sum_{n=1}^N f(t_n) \cdot D(t_n)}{\frac{s}{m} \cdot \sum_{n=1}^N D(t_n) \cdot \left[ (1 - F(t_n)) + \frac{1}{2} \cdot f(t_n) \right]} \quad (*)$$

L'idée du modèle est de calibrer la prime pure (\*) aux cotations de spread de CDS observées sur le marché afin d'en déduire les probabilités de défaut. On a en effet une relation qui lie directement les cotations de marché et les probabilités de défaut implicites. Or nous avons ici une équation et plusieurs inconnues puisque les probabilités de défaut sont différentes à chaque date de versement de primes. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire la notion de taux de hasard ou probabilité de défaut conditionnelle et de faire quelques hypothèses supplémentaires.



### Calcul des intensités de défaut à partir des spreads de CDS

Le taux de hasard, ou intensité de défaut, correspond à la probabilité qu'un défaut se produise entre  $t$  et  $t+\Delta t$  sachant qu'il n'y a pas eu de défaut avant  $t$ . Comme la probabilité de défaut est notée  $f(t)$  alors, par définition des probabilités conditionnelles, le taux de hasard est donné par :

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

Donc :

$$h(t) = \frac{F'(t)}{1-F(t)}$$

En intégrant des deux côtés, on a :

$$-\int_0^t h(s) \cdot ds = \ln(1-F(t))$$

D'où :

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(s) \cdot ds}$$

En pratique, les spreads sont cotés par maturité, c'est pourquoi il est fait l'hypothèse que l'intensité de défaut est constante par morceaux. Le modèle est donc calibré aux cotations de spread  $s_{N_i}$  des CDS d'échéances  $N_i$ .

La structure par terme des intensités de défaut peut à présent être déduite de la formule (\*) à partir des spreads de CDS observés sur le marché en utilisant la méthode du bootstrap. Tout d'abord, le premier taux de hasard est calculé à partir du contrat de plus petite maturité. Pour ce faire, on utilise la fonctionnalité « valeur cible » d'Excel. Cette méthode est ensuite réitérée pour le contrat de maturité supérieure et cela jusqu'à la maturité finale du CDS.

Les taux de hasard ainsi calculés sont des taux en absence d'opportunité d'arbitrage. Ce sont les taux de hasard choisis de manière à ce que le modèle soit en phase avec le marché.

A partir de la structure par terme des taux de hasard obtenue, nous pouvons déduire facilement les probabilités de défaut.

Il a été fait l'hypothèse que le taux de hasard pour un CDS donné était constant jusqu'à sa maturité. Donc si le CDS a une maturité de  $N$  années, la fonction de répartition du défaut est donnée par :

$$F(t_i) = 1 - e^{-h_i/m} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N \cdot m.$$

S'il existe une structure de spreads de CDS pour les maturités  $N_1$  et  $N_2$ , alors on suppose qu'il existe deux taux de hasard  $h_1$  et  $h_2$  de maturité  $N_1$  et  $N_2$ . Les probabilités de défaut cumulatives pour la maturité  $N_1$  sont calculées avec la formule précédente. Pour la maturité  $N_2$ , on utilise :

$$F(t_i) = 1 - \left(1 - F(t_{m \cdot N_1})\right) \cdot e^{\left(\frac{h_2 \cdot (i - m \cdot N_1)}{m}\right)} \text{ pour } i = m \cdot N_1, \dots, m \cdot N_2$$

### Détermination de la valeur présente du CDS :

A partir des probabilités de défaut ainsi calculées, il est à présent possible d'évaluer le CDS. La valeur présente du CDS pour l'acheteur,  $PV_{\text{CDS}}$ , s'exprime comme la différence entre la jambe du vendeur et la jambe de l'acheteur.

On obtient donc la formule suivante :

$$PV_{\text{CDS}} = [1 - R - A(t) \cdot R] \cdot \sum_{n=1}^N f(t_n) \cdot D(t_n) - \frac{s}{m} \cdot \sum_{n=1}^N D(t_n) \cdot \left[ (1 - F(t_n)) + \frac{1}{2} \cdot f(t_n) \right]$$

### III-2-iii Critiques du modèle d'évaluation des CDS

Le modèle présenté est un standard d'évaluation adopté par le marché des dérivés de crédit pour l'évaluation des CDS. Il est relativement simple et capture les différentes composantes du risque de marché, si l'on suppose que le risque de liquidité est traduit dans les spreads de CDS.

Toutefois, on suppose que les taux d'intérêt, les probabilités de défaut et le taux de recouvrement sont indépendants, or ce n'est pas le cas en réalité.

De plus, la crise de 2007 a révélé l'inexactitude de l'hypothèse d'un taux de recouvrement égal à 40%<sup>28</sup>. Cette hypothèse conduit à des valorisations incohérentes dans des situations de perturbations.

Une amélioration du modèle pourrait être effectuée, en tenant compte du risque que la contrepartie fasse défaut et en tenant compte des situations où le payoff est subordonné à plusieurs entités de référence (basket CDS) [45].

Afin de tenir compte du risque de défaut de la contrepartie, on intègre au modèle :

- La probabilité  $\theta(t) \cdot \Delta_t$  que l'entité de référence fasse défaut entre  $t$  et  $(t + \Delta_t)$  et que la contrepartie n'ait pas fait défaut avant ;
- La probabilité  $\Phi(t) \cdot \Delta_t$  que la contrepartie fasse défaut entre  $t$  et  $(t + \Delta_t)$  et qu'aucune entité de référence n'ait fait défaut avant cela.

<sup>28</sup> Pricing Partners

Le paiement cesse si un défaut survient. Le défaut peut cette fois être celui de l'entité de référence ou de la contrepartie. Si l'entité de référence fait défaut, alors il y a un paiement supplémentaire final et un payoff comme dans le modèle décrit précédemment. En revanche, si la contrepartie fait défaut, il n'y a pas de paiements supplémentaires ni de payoff. Le spread pur obtenu en tenant compte du risque que la contrepartie fasse défaut devient alors :

$$S^* = \frac{\int_0^T (1 - R - A(t) \cdot R) \cdot \theta(t) \cdot D(t) \cdot dt}{\int_0^T [\theta(t) \cdot u(t) + \theta(t) \cdot a(t) + \Phi(t) \cdot u(t)] dt + (1 - F(t)) \cdot u(T)}$$

Pour un basket CDS, plusieurs entités de référence différentes sont spécifiées et on intègre au modèle les notations suivantes :

- La probabilité  $\theta(t) \cdot (t)$  que la première entité de référence fasse défaut entre  $t$  et  $(t + \Delta_t)$  et que la contrepartie n'ait pas fait défaut avant ;
- La probabilité  $\Phi(t) \cdot \Delta_t$  que la contrepartie fasse défaut entre  $t$  et  $(t + \Delta_t)$  et qu'aucune entité de référence n'ait fait défaut avant cela.

L'équation précédente peut encore être appliquée.

Si une entité de référence fait défaut en premier, alors les paiements ainsi qu'un paiement supplémentaire final sont effectués jusqu'à la date de défaut et il y a un payoff. Sinon, la contrepartie fait défaut en premier, alors les paiements continuent jusqu'au défaut mais il n'y a bien sûr ni paiements supplémentaires ni payoff. Sinon, si aucune partie ne fait défaut, alors les paiements sont poursuivis sur la vie du basket CDS et il n'y a pas de payoff.

### **III-2-iv Le modèle des CDO synthétiques**

Le modèle présenté est le modèle mono-facteur à copule gaussienne, standard de marché depuis les années 2000 mais extrêmement décrié depuis la crise de 2007.

Pour appréhender et évaluer un CDO, il faut à la fois comprendre :

- Les crédits individuels sous-jacents ;
- La manière dont ils interagissent ;
- L'interaction entre le portefeuille de crédit et les tranches.

#### **Hypothèses :**

1. Les pertes et les primes surviennent aux mêmes dates ;
2. Le défaut des noms est conduit par une variable  $Z$  de loi normale ;
3. La corrélation entre deux noms du portefeuille est constante et égale à  $\omega$ .

Pour déterminer la valeur de la tranche, il faut estimer tout d'abord les pertes que la tranche va subir sur la durée de vie du contrat et actualiser ces pertes à la date d'évaluation. De même, les paiements de primes que la tranche va recevoir sont estimés et actualisés à la date d'évaluation. Chaque paiement de prime attendu est le produit du spread et de la part de nominal que la tranche couvre encore à la date de paiement. Ils dépendent donc aussi de la distribution de pertes. La valeur de la tranche est finalement obtenue en soustrayant la somme des pertes attendues actualisées de la somme des paiements de primes attendus actualisés.

### **Construction de la courbe de crédit**

Afin d'évaluer un CDO, il est nécessaire de déterminer les probabilités de défaut des CDS composant le portefeuille. Comme pour le modèle des CDS vu précédemment, les probabilités de défaut des crédits sous-jacents à chaque date de paiement sont déduites des courbes de spread de CDS. La méthode est exactement identique.

### **Interaction des défauts entre les CDS du portefeuille**

Une difficulté dans l'évaluation des CDO synthétiques consiste à établir la distribution de pertes du portefeuille de CDS. Pour obtenir la distribution de pertes de l'ensemble du portefeuille, il faut à la fois connaître le comportement de défaut de chaque nom individuellement, mais aussi leur distribution jointe. Pour ce faire, on utilise un modèle à un facteur qui consiste à former la distribution de défaut jointe en passant par une corrélation constante des actifs. Ensuite, à partir de l'hypothèse sur le taux de recouvrement, la distribution de pertes peut être déduite.

Notons  $N$  le nombre de noms dans le portefeuille de crédit sous-jacent. Le  $j^{\text{ème}}$  nom a une probabilité  $p_j$  de faire défaut avec  $j \leq N$ .

Par hypothèse, le défaut du  $j^{\text{ème}}$  nom est entraîné par une variable aléatoire  $Z_j$  telle que :

$$Z_j = \omega \cdot Z + \sqrt{1 - \omega^2} \cdot \varepsilon_j$$

Où  $Z$ ,  $Z_j$  et  $\varepsilon_j$  sont des variables aléatoires normales centrées réduites.

De plus,  $Z$  et  $\varepsilon_j$  sont indépendants donc pour deux noms différents  $j$  et  $k$  :

$$\rho_{Z_j, Z_k} = \text{cov}(\omega \cdot Z, \omega \cdot Z) = \omega^2.$$

Le facteur  $Z$  explique toutes les corrélations entre les défauts des différents noms, c'est pourquoi le modèle est dit « à un facteur ».

Soit  $\Phi$  la fonction de répartition d'une loi Gaussienne centrée réduite, le  $j^{\text{ème}}$  nom fait défaut si :

$$Z_j < \Phi^{-1}(p_j)$$

Car  $p_j = \Phi(\Phi^{-1}(p_j)) = P(Z_j < \Phi^{-1}(p_j))$ .

Notons  $\alpha_j = \Phi^{-1}(p_j)$ , alors le défaut du  $j^{\text{ème}}$  nom se produit quand  $Z_j < \alpha_j$ .

Si  $Z_j = z$ , alors le défaut  $Z_j$  est entraîné uniquement par la partie déterministe  $\varepsilon_j$  donc les défauts de deux titres distincts sont indépendants. Cette condition permet facilement de connaître les comportements de défaut pour  $z$  fixé. En effet, si  $Z = z$ , la condition  $Z_j < \alpha_j$  est équivalente à :

$$\varepsilon_j < \frac{\alpha_j - \omega \cdot Z}{\sqrt{1 - \omega^2}}$$

### Démonstration :

$$Z_j < \alpha_j \Leftrightarrow \omega \cdot Z + \sqrt{1 - \omega^2} \cdot \varepsilon_j < \alpha_j \Leftrightarrow \varepsilon_j < \frac{\alpha_j - \omega \cdot Z}{\sqrt{1 - \omega^2}}$$

Comme  $\varepsilon_j$  suit une loi normale, la probabilité de défaut de  $j$  conditionnelle à  $Z = z$  est :

$$p_j(z) = \Phi\left(\frac{\alpha_j - \omega \cdot z}{\sqrt{1 - \omega^2}}\right)$$

### Démonstration :

$$p_j(z) = P(Z_j < \alpha_j / Z = z) = P\left(\varepsilon_j < \frac{\alpha_j - \omega \cdot z}{\sqrt{1 - \omega^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha_j - \omega \cdot z}{\sqrt{1 - \omega^2}}\right)$$

### **Construction de la distribution de pertes du portefeuille [48]**

Notons  $\ell_j$  la perte induite en cas de défaut du  $j^{\text{ème}}$  nom, et supposons que la perte en cas de défaut pour chaque nom est un multiple entier d'un montant, appelé perte de base ; c'est-à-dire que les pertes s'expriment en unité de la perte de base.

Notons  $p(k/z)$  la probabilité que la perte du portefeuille soit égale à l'entier  $k$  sachant que  $Z = z$ . Afin de déterminer la distribution de pertes du portefeuille à partir des probabilités de défaut conditionnelles, on utilise les fonctions génératrices. Le but est donc d'arranger  $p(k/z)$  dans une fonction génératrice de probabilité  $f(t/z)$ .

**Rappel :**

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeur dans  $\mathbb{N}$ , alors la fonction génératrice de  $X$ ,  $G_X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , est la série entière telle que :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot t^k$$

Par définition de l'espérance, on a la propriété suivante:  $G_X(t) = E(t^X)$

Donc la probabilité de défaut conditionnelle peut s'écrire ici :

$$f(t/z) = p(0/z) + p(1/z) \cdot t + p(2/z) \cdot t^2 + \dots + p(M/z) \cdot t^M.$$

Dans cette équation,  $z$  est une constante et  $t$  est inconnu, donc on peut voir  $f(t/z)$  comme un polynôme en  $t$  de degré  $M$ .  $M$  correspond à la perte maximale du portefeuille  $M = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_N$ .

La propriété s'écrit :

$$f(t/z) = E(t^L)$$

Où  $L$  est la variable aléatoire représentant la perte du portefeuille.

Les probabilités inconnues  $p(k/z)$  sont déterminées en calculant auparavant la fonction génératrice  $f(t/z)$ .

Pour ce faire, il faut tenir compte des différentes possibilités :

- Si le  $j^{\text{ème}}$  nom fait défaut, ce qui arrive avec une probabilité  $p_j(z)$ , alors la perte sera de  $\ell_j$ . On obtient alors  $p(\ell_j/z) = p_j(z)$  ;
- Si, au contraire, le  $j^{\text{ème}}$  nom ne fait pas défaut, ce qui arrive avec une probabilité  $1 - p_j(z)$ , alors la perte est nulle et donc  $p(0/z) = 1 - p_j(z)$  ;
- Aucune autre valeur n'est possible donc  $p(k/z) = 0$  pour tout autre  $k$ .

Finalement, la fonction génératrice pour les pertes du  $j^{\text{ème}}$  nom est donnée par :

$$f_j(t/z) = (1 - p_j(z)) + p_j(z) \cdot t^{\ell_j}$$

**Calcul de la loi de la perte agrégée**

Le résultat de la méthode de l'indépendance conditionnelle est que, lorsque les défauts des différents noms sont indépendants, alors :

$$f(t/z) = \prod_{j=1}^N f_j(t/z)$$

Afin de déterminer  $f(t/z)$ , la méthode *Fast Fourier Transform* (FFT) est utilisée. Pour chaque  $f_j(t/z)$ , des transformations de Fourier sont effectuées, puis le produit des résultats et une transformation de Fourier inverse<sup>29</sup>.

L'étape finale consiste à intégrer la distribution de pertes conditionnelle au facteur  $z$  afin d'obtenir la distribution de pertes inconditionnelle.

En effet, la probabilité inconditionnelle de perdre  $k$  unités de nominal est :

$$p(k) = \int_0^{\infty} p(k/z) \cdot dz$$

La série des  $p(k)$  correspond à la distribution de pertes du portefeuille de crédit.

### Evaluation des tranches

Si le montant de perte de base est  $L$ , alors dans un scénario où le portefeuille subit  $k$  pertes de base, la perte du portefeuille  $PL(k)$  est donnée par :

$$PL(k) = k \cdot L$$

La perte d'une tranche de CDO de point d'attachement  $a$  et de détachement  $d$ , est donnée par :

$$TL(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } PL(k) < a \\ PL(k) - a & \text{si } a \leq PL(k) \leq d \\ d - a & \text{si } PL(k) > d \end{cases}$$

Notons :

$t_i$	Date du $i^{\text{ème}}$ paiement
$TL_i$	Perte totale à l' $i^{\text{ème}}$ date de paiement
$N_i$	Nominal de la tranche sur lequel est basé le $i^{\text{ème}}$ paiement
$p_i(k)$	Probabilité que le portefeuille ait subi $k$ pertes de base à la $i^{\text{ème}}$ date de paiement
$D_i$	Facteur d'actualisation à la date $t_i$
$S$	Spread reçue par la tranche
$F$	Fréquence de paiement de la tranche
$N$	Nombre maximal de pertes de base que le portefeuille peut subir

<sup>29</sup> Des précisions sur les transformées de Fourier peuvent être trouvées dans les travaux de Strang (1988) ou de Press (1992)

S'il est évident que la perte sur la tranche  $L_i$  à la date  $t_i$  dépend des pertes subies par le portefeuille de crédit à la date  $t_i$ , il faut préciser que le nominal de la tranche  $N_i$  en dépend aussi.

Il existe trois conventions :

- **Primes sans risque** : la tranche reçoit des primes entières jusqu'à ce que le contrat arrive à maturité. Donc si  $N_0$  est le nominal initial de la tranche, alors  $N_i = N_0$  pour  $i = 1, 2, \dots, M$ .
- **Primes sans risque partielles** : la tranche reçoit des primes entières jusqu'à ce qu'elle soit éliminée, alors  $N_i = N_0$  pour  $TL_i < N_0$  et 0 autrement.
- **Primes risquées** : chaque prime est un coupon du collatéral restant de la tranche qui a encore besoin de protection après les pertes de crédit, donc  $N_i = N_0 - L_i$ .

A partir de la distribution de pertes du portefeuille, il est possible de déduire  $E(N_i)$  et  $E(TL_i)$  puis l'espérance des primes actualisées et l'espérance des pertes actualisées.

A la date  $t_i$ , la tranche reçoit un paiement de primes de  $s \cdot N_i$ . L'espérance des paiements de primes actualisés est donc donnée par :

$$s \cdot \sum_i D_i \cdot E(N_i)$$

D'autre part, à la date  $t_i$ , la tranche paie un montant de  $TL_i - TL_{i-1}$  qui correspond à la perte subie depuis la dernière date de paiement. L'espérance des pertes actualisées est donnée par :

$$\sum_i D_i \cdot (E(TL_i) - E(TL_{i-1}))$$

Où la perte attendue à l' $i^{\text{ème}}$  date de paiement sur la tranche s'écrit :

$$E(TL_i) = \sum_{k=1}^N TL(k) \cdot p_i(k).$$

Donc la valeur de la tranche du point de vue du vendeur de protection  $PV_{\text{tranche}}$  est donnée par :

$$PV_{\text{tranche}} = \sum_{i=1}^M D_i \cdot [s \cdot E(N_i) - E(TL_i) + E(TL_{i-1})]$$

Où  $M$  est le nombre périodes de paiement restantes.



Finalement, le spread pur  $s_f$  rend la valeur de la tranche égale à zéro c'est-à-dire :

$$s_f = \frac{\sum_{i=1}^M D_i \cdot [E(TL_i) - E(TL_{i-1})]}{\left( \sum_{i=1}^M D_i \cdot E(N_i) \right)}$$

### **III-2-v Limites du modèle d'évaluation des CDO synthétiques**

Malgré les critiques du monde universitaire, de nombreux praticiens continuent d'employer le modèle à facteur gaussien pour l'évaluation et la couverture des tranches de CDO. Le plus gros reproche fait à ce modèle est l'hypothèse que les défauts sont conjointement distribués selon une loi normale. Cette structure de dépendance gaussienne implique une dépendance de queue nulle, c'est-à-dire que les événements de queue d'une copule gaussienne sont indépendants les uns des autres. Or en finance, il est certain que des événements extrêmes coexistent en permanence. De plus, la corrélation n'est pas suffisante pour décrire les structures de dépendances complexes que l'on peut observer sur le marché.

D'autre part, la corrélation est supposée unique pour tous les noms du portefeuille. Cette hypothèse facilite certes le modèle mais n'est pas en phase avec ce qui est observé sur le marché.

Comme pour les CDS, le taux de recouvrement fixé à 40% peut conduire à des imprécisions. Il pourrait être modélisé en se basant sur les données historiques ou en tenant compte des facteurs qui l'influencent.

Pour améliorer le modèle, il est possible d'envisager un modèle gaussien avec une extension stochastique de la corrélation. D'autre part, de nombreux chercheurs, notamment [43] proposent d'utiliser une distribution de Student en remplacement de la distribution gaussienne, qui manque de dépendance dans les queues. Des travaux récents [46] présentent aussi l'introduction d'une copule à facteur *Normal Inverse Gaussian* (NIG), plus avantageuse en termes de temps de calcul.

## **III-3 L'évaluation des dérivés climatiques**

### **III-3-i Les modèles existants**

Les principaux modèles d'évaluation des dérivés climatiques sont les suivants :

- **La méthode Burn Analysis**, qui consiste à calculer l'espérance des payoffs à partir de leur distribution historique. Cette méthode est très simpliste et peut poser

problème lorsqu'il s'agit d'évaluer une option de prix d'exercice non encore atteint dans l'historique puisque cela conduit à une prime nulle mais à un risque non nul.

- **L'évaluation actuarielle** qui consiste à simuler la loi du sous-jacent puis à calculer l'espérance des payoffs.
- **Les séries temporelles** qui modélisent la valeur du sous-jacent à l'aide de processus aléatoires. Les plus utilisés sont les processus autorégressifs AR, les processus à moyenne mobile MA, les processus autorégressifs et à moyenne mobile ARMA et le processus de retour à la moyenne de Ornstein-Uhlenbeck [41].

Une étude réalisée en 2009 [62] précise que l'évaluation actuarielle donne de meilleurs résultats que la méthode Burn Analysis. D'autre part, les modèles basés sur les séries temporelles sont solides mathématiquement mais sont également exposés au risque de modèle.

### **III-3-ii Le modèle**

La difficulté dans l'évaluation des dérivés climatiques repose dans la nature même du sous-jacent puisque les indices météorologiques ne sont pas négociables sur les marchés financiers. Ceci compromet donc l'utilisation de techniques traditionnelles, comme la méthode de Black et Scholes. Une solution aurait pu être de remplacer l'indice climatique par un titre échangeable sur le marché qui soit lié à la valeur de l'indice, or cela est difficilement envisageable car le niveau du sous-jacent est très faiblement corrélé aux prix des autres actifs financiers. Le modèle présenté est une approche actuarielle qui évalue un dérivé climatique comme étant la valeur espérée actualisée des futurs payoffs du sous-jacent.

Prenons le cas d'un indice *Heating Degree Day (HDD)* qui mesure l'écart entre une température moyenne<sup>30</sup> et une valeur de référence<sup>31</sup>. Nous faisons l'hypothèse que cet indice suit une loi Normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , et le taux  $r$  est constant.

#### **Cas d'une option sur l'indice HDD de prix d'exercice K :**

Le sous-jacent ne peut pas être échangé, et n'a pas de valeur de marché. C'est pourquoi on définit  $k$  le prix unitaire attribué à chaque degré de température<sup>32</sup>. Alors, dans le cas d'une option d'achat, le payoff s'écrit :

$$P_T = k \cdot \max(\text{HDD}_T - K; 0)$$

L'actualisation des payoffs  $P_T$  en 0 nous donne le prix actuariel :

$$C_{P_T}(0) = e^{-r(T-t)} \cdot E[P_T]$$

---

<sup>30</sup> Généralement la moyenne entre les deux températures extrêmes d'une journée.

<sup>31</sup> Souvent 65°F c'est-à-dire 18,3°C

<sup>32</sup> Appelé tick en anglais.

Où l'espérance des payoffs est <sup>33</sup>:

$$E[P_T] = k \cdot \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right)^2} + (\mu - K) \cdot \Phi\left(\frac{\mu - K}{\sigma}\right) \right]$$

### **III-3-iii Limites du modèle d'évaluation des dérivés climatiques**

La méthode actuarielle présente un risque de modèle élevé. En effet, le prix du dérivé dépend de l'hypothèse faite sur la loi de distribution du sous-jacent.

## **IV. La distribution des pertes et profits**

Rappelons que la VaR est un fractile de la fonction de distribution des P&L. L'identification et la collecte des facteurs de risque sur 262 jours, puis l'évaluation des instruments vont permettre d'établir la distribution des rendements.

La distribution des P&L est directement déduite en multipliant les rendements par la valeur de marché de l'instrument en date d'évaluation.

Pour calculer une VaR totale, l'instrument financier est revalorisé en faisant varier tous les facteurs de risque simultanément. La distribution des rendements est obtenue à partir des 262 prix ainsi déterminés.

La formule des rendements arithmétiques est utilisée:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Où  $P_t$  correspond au prix de l'instrument calculé en date  $t$ .

Afin de calculer une VaR pour un risque spécifique, l'instrument financier est revalorisé en faisant varier uniquement le facteur de risque concerné.

## **V. Application et résultats**

Dans cette section, la VaR historique est appliquée à deux instruments complexes : les obligations convertibles et les Credit Default Swap, ainsi qu'à un portefeuille d'obligations convertibles. Une attention particulière sera portée aux gains de compensation lors de l'agrégation au niveau des instruments du portefeuille et au niveau des facteurs de risque.

---

<sup>33</sup> Cf. Annexe H : *Méthode actuarielle pour un call sur HDD*

## V-1 Le risque d'une OC

Dans un premier temps, la VaR[99%;1] d'une OC est calculée par la méthode historique afin de mesurer le risque de celle-ci. Dans un second temps, il est intéressant de déterminer la VaR par facteurs de risque pour observer l'effet de l'agrégation de ces facteurs. Les caractéristiques de l'OC étudiée sont présentées ci-dessous.

<b>Maturité</b>	31/07/2011
<b>Nombre de périodes</b>	2
<b>Prix initial de l'action <math>S_0</math></b>	101,3
<b><math>\Delta</math></b>	0
<b><math>\sigma^2</math></b>	24,26%
<b>Ratio de conversion n</b>	1,036
<b>Nominal</b>	17 310 709
<b>Valeur faciale F</b>	124,1
<b>Valeur de remboursement R</b>	1,21
<b>Coupon de l'obligation c</b>	2,00%
<b>Nombre de coupons par an f</b>	1
<b>Présence d'un call</b>	oui
<b>Présence d'un put</b>	non
<b>Période de hard call</b>	non
<b>Fin soft call protection</b>	06/06/2011
<b>Soft call provision</b>	25
<b>Prix du call Xcall</b>	112,27

Tableau 9 : Caractéristiques de l'OC

La valeur de l'OC en date d'évaluation est calculée à partir des caractéristiques de l'OC et des paramètres du jour grâce au modèle des arbres binomiaux décrit précédemment implémenté dans un fichier Excel. En date d'évaluation du 08/04/2010, on trouve une valeur de 20 295 795€.

Rappelons que la méthode de calcul de la VaR historique est la suivante :

1. Identifier les facteurs de risque représentatifs du risque de la position ;
2. Déterminer 262 scenarii. Les valeurs historiques des paramètres sont collectées entre le 07/04/2009 et le 07/04/2010 pour une date d'évaluation au 08/04/2010 ;
3. Déformer les paramètres du jour en fonction de ces N scenarii ;
4. Revaloriser la position du jour selon les N scenarii ;
5. Construire une distribution de probabilité des variations de la valeur de la position sur N jours ;
6. En déduire la distribution des P&L de la position ;
7. Déterminer la VaR à 1 jour, comme la  $N \cdot (1 - \alpha)^{\text{ème}}$  pire perte.

Les facteurs de risque retenus pour une OC sont :

- La structure par terme des taux d'intérêt ;
- Les spreads de CDS ;
- Le prix de l'action ;
- La volatilité du prix de l'action.

Un extrait des 262 scenarii est présenté dans le tableau ci-dessous :

	Taux 1 mois	Taux 3 mois	Taux 6 mois	Taux 9 mois	Taux 12 mois	Taux 24 mois	Spread de CDS 6 mois	Spread de CDS 1 an	Spread de CDS 2 ans	Prix de l'action	Volatilité
07/04/2009	0,0113	0,0141	0,0136	0,0138	0,0145	0,0182	0,0270	0,0280	0,0259	52,9700	0,4811
08/04/2009	0,0110	0,0134	0,0132	0,0136	0,0143	0,0179	0,0252	0,0261	0,0272	54,5000	0,4774
09/04/2009	0,0109	0,0133	0,0132	0,0136	0,0143	0,0180	0,0248	0,0256	0,0268	57,8100	0,4759
10/04/2009	0,0109	0,0133	0,0132	0,0136	0,0143	0,0180	0,0251	0,0258	0,0270	57,8100	0,4759
13/04/2009	0,0110	0,0135	0,0133	0,0136	0,0143	0,0180	0,0252	0,0258	0,0269	57,8100	0,4759
14/04/2009	0,0107	0,0131	0,0130	0,0133	0,0139	0,0175	0,0243	0,0249	0,0260	57,0700	0,4765
15/04/2009	0,0105	0,0128	0,0128	0,0131	0,0137	0,0171	0,0237	0,0243	0,0254	57,0700	0,4759

Tableau 10 : Extrait des 262 scenarii pour l'OC

Une fois ces scenarii définis, ils sont utilisés pour déformer les paramètres du jour et réévaluer l'OC. Alors, à partir des 262 prix trouvés, on peut construire la distribution des rendements arithmétiques.

Rappelons que  $r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ .

Enfin, la distribution de P&L de l'OC est déduite par produit du rendement et de la valeur de l'OC en date d'évaluation. Par exemple, le profit de la ligne 1 du tableau 11 peut de retrouver, à l'erreur d'arrondi près :  $0,2345 / 100 \times 20\,295\,795 = 47\,594$ .

Les résultats de ces étapes sont obtenus grâce à des macros VBA<sup>34</sup> et sont insérés dans un tableau dont voici un extrait :

Dates	Prix OC	Rendements	P&L
07/04/2009	18 700 705	0,2345%	47 602
08/04/2009	18 744 522	0,0583%	11 823
09/04/2009	18 755 436	-0,0212%	-4 310
10/04/2009	18 751 455	-0,0083%	-1 676
13/04/2009	18 749 915	0,1787%	36 262
14/04/2009	18 783 421	0,1114%	22 618
15/04/2009	18 804 348	0,04%	7 829

Tableau 11 : Construction de la distribution de pertes et profits

<sup>34</sup> Cf. Annexe I : Code VBA

La VaR 1 jour découle facilement de la distribution de P&L puisqu'il s'agit d'un fractile de cette distribution. Ainsi, pour la calculer, il est possible d'utiliser simplement la fonction centile(.) d'Excel avec comme paramètres la plage de cellules comprenant la distribution de P&L et le fractile, ici de 1%.

La VaR[99%;1] correspond en fait à la 2,62<sup>ème</sup> pire perte, c'est-à-dire à une interpolation linéaire entre la 2<sup>ème</sup> et la 3<sup>ème</sup> pire perte. La VaR obtenue est de 129 002€.

Pour calculer la VaR par facteurs de risque, la même méthode est utilisée. En revanche, on ne définit des scénarii que pour le facteur de risque concerné, les autres étant fixés à leur dernière valeur.

Plus précisément :

- La VaR de Risque Général de Taux (RGT) est calculée en faisant varier uniquement la structure par terme des taux ;
- La VaR de Risque Spécifique de Taux (RST) est calculée en faisant varier uniquement les spreads de CDS ;
- La VaR Action est calculée en faisant varier uniquement le prix de l'action ;
- La VaR Volatilité est calculée en faisant varier uniquement la volatilité du prix de l'action.

Les résultats en euro obtenus via un modèle réalisé sous VBA sont donnés par le tableau 12.

VaR totale	VaR RGT	VaR RST	VaR action	VaR volatilité
129 002	20 677	14 212	148 244	72 603

Tableau 12 : VaR de l'OC

La VaR action est ici élevée. Cela peut s'expliquer par le fait que l'évolution du prix de l'OC est conditionnée au prix de l'action. En outre, une OC se comporte comme une action lorsque le prix de l'action augmente.

## V-2 Le risque d'un CDS

L'objectif est de calculer une VaR[99%;1] globale puis par facteurs de risque pour le CDS dont les caractéristiques sont présentées ci-dessous.

<b>Maturité</b>	13/05/2011
<b>Nominal</b>	15 000 000
<b>Coupon de l'obligation</b>	0,80%
<b>Taux de recouvrement R</b>	40%
<b>Spread s en points de base</b>	54,5
<b>Fréquence de paiements m</b>	4
<b>Position</b>	Vendeur

Tableau 13 : Caractéristiques du CDS

De la même manière que pour les OC, le modèle réduit de Hull et White a été implémenté dans un tableur Excel. Ainsi, à partir des caractéristiques du CDS et des taux observables sur le marché, sont calculées les probabilités de défaut puis le prix du CDS.

La date d'évaluation est le 17/06/2009 donc les facteurs de risque sont collectés entre le 16/06/2009 et le 16/06/2010.

Les facteurs de risque retenus pour les CDS sont les suivants :

- La structure par terme des taux ;
- Les spreads de CDS.

Un extrait des 262 scenarii est présenté dans le tableau ci-dessous.

	Taux 1 mois	Taux 3 mois	Taux 6 mois	Taux 9 mois	Taux 12 mois	Taux 24 mois	Taux 36 mois	Taux 60 mois	Spread de CDS 6 mois	Spread de CDS 1 an	Spread de CDS 2 ans
16/06/2009	0,0102	0,0138	0,0129	0,0132	0,0138	0,0186	0,0243	0,0303	0,0319	0,0388	0,0424
17/06/2009	0,0101	0,0133	0,0127	0,0130	0,0136	0,0185	0,0243	0,0304	0,0329	0,0378	0,0443
18/06/2009	0,0101	0,0131	0,0125	0,0127	0,0133	0,0180	0,0238	0,0300	0,0343	0,0407	0,0446
19/06/2009	0,0100	0,0131	0,0124	0,0126	0,0132	0,0179	0,0239	0,0305	0,0345	0,0425	0,0466
22/06/2009	0,0098	0,0128	0,0123	0,0125	0,0130	0,0178	0,0238	0,0302	0,0347	0,0409	0,0445
23/06/2009	0,0098	0,0127	0,0121	0,0123	0,0127	0,0173	0,0233	0,0299	0,0384	0,0436	0,0464
24/06/2009	0,0098	0,0121	0,0118	0,0121	0,0126	0,0174	0,0234	0,0299	0,0389	0,0442	0,0456

**Tableau 14 : Extrait des 262 scenarii pour le CDS**

Le CDS est valorisé selon les 262 scenarii de chaque facteur de risque, ce qui permet de construire la distribution de P&L. Puis la VaR totale en est déduite comme étant la 2,62<sup>ème</sup> pire perte.

La même méthode que pour les OC est utilisée pour calculer les VaR par facteurs de risque. Les résultats en euro sont les suivants :

VaR Totale	VaR RGT	VaR RST
78 898	69	78 906

**Tableau 15 : VaR du CDS**

Ce produit est beaucoup plus exposé au risque spécifique de taux qu'au risque général de taux. On en conclut donc que, sur la période considérée, les pertes du CDS dépendent fortement de l'appréciation de l'émetteur par le marché.

### V-3 Le risque d'un portefeuille d'OC

Pour calculer la VaR sur un portefeuille, il suffit de sommer les P&L de chaque instrument composant le portefeuille et la démarche est ensuite la même que dans le cas d'une seule OC. Au 6 août 2010, sur un portefeuille de neuf OC, on obtient les résultats suivants en euro :

	VaR totale	Var RGT	VaR RST	VaR Action	VaR Volatilité
OC 1	20 280	13 318	13 908	5 993	9 660
OC 2	55 919	5 902	55 964	3 998	3 542
OC 3	60 637	5 783	55 755	18 873	13 575
OC 4	143 419	4 068	2 243	188 273	40 797
OC 5	65 203	4 460	4 801	73 075	16 079
OC 6	533 429	6 098	5 750	576 396	83 361
OC 7	1 637 459	262	3 179	1 494 492	751 038
OC 8	38 367	9 414	26 482	38 070	27 261
OC 9	188 180	14 405	18 389	207 511	63 805
Portefeuille	2 103 021	51 361	106 959	2 082 188	700 990

Tableau 16 : VaR d'un portefeuille d'OC

Les VaR les plus élevées sont toujours la VaR action ou la VaR du risque spécifique de taux. Cela s'explique par l'évolution de ces paramètres sur la période observée et du fait qu'une OC se comporte comme une action quand le prix de l'action augmente et comme une obligation lorsque que le prix de l'action diminue.

### V-4 Les effets d'agrégation observés

Il a été vu précédemment que des effets de l'agrégation à différents paliers peuvent être observés. Nous allons nous intéresser maintenant aux effets de l'agrégation des VaR par type d'instruments et par facteurs de risque. Rappelons que les bénéfices observés ne sont pas nécessairement dus à la diversification des risques puisque la VaR n'est pas sous-additive.

#### V-4-i Sur une OC

Pour l'OC présentée précédemment, on constate un bénéfice dans l'agrégation des VaR par facteurs de risque. Il est exprimé dans le tableau 17.



Les notations sont les suivantes :

1. La VaR agrégée AVaR représente la VaR globale de l'OC sans distinction par facteurs de risque.

2. La VaR non agrégée correspond à la somme des VaR par facteurs de risque :

$$NAVaR = \sum_{f=1}^4 VaR_f$$

3. Le bénéfice de l'agrégation  $\Delta$  correspond à la différence entre la VaR non agrégée et la VaR agrégée :

$$\Delta = \sum_{f=1}^4 VaR_f - AVaR$$

4. Le coefficient d'agrégation empirique correspond au rapport entre le bénéfice de l'agrégation et la VaR non agrégée :

$$\alpha_E = \frac{\sum_{f=1}^4 VaR_f - AVaR}{\sum_{f=1}^4 VaR_f}$$

VaR agrégée	Somme des VaR individuelles	Bénéfice de l'agrégation	Coefficient d'agrégation
129 002	255 736	126 734	50%

Tableau 17 : Agrégation de la VaR OC

La différence entre la somme des VaR par facteurs de risque et la VaR agrégée est positive donc on peut parler de bénéfice d'agrégation. L'agrégation des VaR permet une diminution des risques de 50% par rapport à la somme des VaR individuelles, ce qui n'est pas négligeable.

#### V-4-ii Sur un CDS

En reprenant les mêmes notations que précédemment, on obtient les résultats suivants :

VaR agrégée	VaR non agrégée	Bénéfice de l'agrégation	Coefficient d'agrégation
78898	78975	77	0,10%

Tableau 18 : Agrégation de la VaR CDS

On observe le même phénomène pour le CDS mais dans une moindre mesure. Ceci peut s'expliquer par le nombre plus restreint de facteurs de risque pour cet instrument.

### V-4-iii Sur un portefeuille d'OC

Pour chaque OC et pour le portefeuille, on observe à nouveau l'effet de l'agrégation dû à la distinction par facteurs de risque avec les mêmes notations que précédemment.

	VaR agrégée	VaR non agrégée	Bénéfice de l'agrégation	Coefficient d'agrégation
OC 1	20 280	42 879	22 599	53%
OC 2	55 919	69 406	13 486	19%
OC 3	60 637	93 987	33 350	35%
OC 4	143 419	235 381	91 962	39%
OC 5	65 203	98 415	33 213	34%
OC 6	533 429	671 605	138 176	21%
OC 7	1 637 459	2 248 971	611 512	27%
OC 8	38 367	101 227	62 860	62%
OC 9	188 180	304 110	115 929	38%
Portefeuille	2 103 021	2 941 498	838 477	29%

Tableau 19 : Agrégation de la VaR du portefeuille par facteurs de risque

De plus, on peut constater un nouvel effet d'agrégation par produits composant le portefeuille.

Les notations deviennent :

1. La VaR agrégée AVaR représente la VaR globale du portefeuille sans distinction par OC.
2. La VaR non agrégée correspond à la somme des VaR par OC :

$$NAVaR = \sum_{i=1}^9 VaR_i$$

3. Le bénéfice de l'agrégation  $\Delta$  correspond à la différence entre la VaR non agrégée et la VaR agrégée :

$$\Delta = \sum_{i=1}^9 VaR_i - AVaR$$

4. Le coefficient d'agrégation empirique correspond au rapport entre le bénéfice de l'agrégation et la VaR non agrégée définie ci-dessus :

$$\alpha_E = \frac{\sum_{i=1}^9 VaR_i - AVaR}{\sum_{i=1}^9 VaR_i}$$

VaR agrégée	VaR non agrégée	Bénéfice de l'agrégation	Coefficient d'agrégation
2 103 021	2 742 893	639 872	23%

Tableau 20 : Agrégation de la VaR du portefeuille par instruments

Sur un portefeuille constitué de seulement 9 OC, on observe un bénéfice dans l'agrégation des VaR par instruments de l'ordre de 23%, il est alors facile d'imaginer l'importance des compensations que l'on peut obtenir sur un portefeuille de négociation entier. C'est d'ailleurs le point sur lequel nous avons mis l'accent en section II-2 de la partie *Value-at-Risk*.

La seule grande difficulté dans le calcul de VaR historique est d'évaluer les produits étudiés et de récolter les données suffisantes pour les paramètres de marché. Le succès de cette mesure auprès des banques est donc aisément compréhensible. De plus, la VaR calculée permet par exemple de comparer le risque entre les facteurs de risque ou entre les instruments composant un portefeuille. Il est possible également de mettre en évidence l'effet de l'agrégation des VaR à différents niveaux. L'utilité et les avantages de cette mesure ayant été mis en évidence, il convient de s'intéresser à présent à ses défaillances.

---

# L'APRES-CRISE

---

## I. Les limites de la VaR historique

Bien avant la crise de 2007, la VaR était déjà très critiquée. Avec la publication de « Thinking Coherently »<sup>35</sup> en 1997 puis « Coherent Measures of risk »<sup>36</sup> les progrès théoriques ont commencé à discréditer les pratiques de marchés. D'autres publications, en 2000 [25] et 2001 [14], mettaient en garde contre les conséquences de la VaR. L'une d'entre elles disait déjà que la VaR pouvait déstabiliser une économie et provoquer des krachs qui, sans cette mesure, ne se produiraient pas. Depuis la récente crise, les discussions autour de la VaR s'intensifient. Par exemple, l'article de J. Nocera en janvier 2009 [23] transcrit la part de responsabilité de l'utilisation de la mesure VaR dans la crise financière de 2007. Il est donc nécessaire de s'intéresser aux principales failles de la VaR historique.

### I-1 Les hypothèses

Le principal reproche fait à cette méthode est qu'elle repose sur une hypothèse très forte. Il semble en effet peu probable que l'évolution des paramètres de marché se reproduise de la même façon dans le futur, comme le suppose la méthode historique. De plus, il n'est pas toujours possible d'avoir un historique suffisamment riche pour utiliser cette méthode et il existe un degré de liberté dans le choix de l'historique, ce qui peut changer totalement les résultats obtenus. Il faut relever également un risque de modèle élevé, surtout dans le cas particulier des instruments financiers complexes.

### I-2 Le risque de liquidité

La VaR historique ne capture pas de manière satisfaisante le risque de liquidité, composante du risque de marché. En effet, on suppose implicitement dans les calculs que les positions peuvent être liquidées ou couvertes dans un délai court (1 jour ou une semaine) et que la liquidation de positions n'a pas d'impact sur le marché. De plus, le prix utilisé pour le calcul de la VaR historique correspond à la dernière cotation connue. Or les prix cotés sur le marché ne peuvent être utilisés pour évaluer un portefeuille vendu sur un marché non parfaitement liquide. Pour pallier cette lacune, différentes méthodes existent, notamment augmenter la volatilité des positions jugées illiquides, allonger l'horizon de détention ou ajouter un coût de liquidité à la VaR (*liquidity adjusted VaR*).

---

<sup>35</sup> ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J-M., HEATH D. [1997] «Thinking Coherently »

<sup>36</sup> ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J-M., HEATH D. [1999] «Coherent Measures of risk »

### I-3 Les propriétés

Pour certains chercheurs [29], la VaR ne peut être qualifiée de mesure de risque puisqu'elle ne vérifie pas les propriétés de cohérence au sens d'Artzner et al. présentés ci-après.

Une mesure  $\rho$  est une mesure de risque cohérente si elle vérifie ces 4 axiomes :

#### **Invariance par translation**

$$\rho(X + a) \leq \rho(X) - a \text{ pour toute variable aléatoire } X \text{ et pour tout réel } a$$

Le risque d'un portefeuille peut être réduit en investissant dans l'actif sans risque.

#### **Sous-additivité**

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \text{ pour toute variable aléatoire } X_n.$$

Cette propriété implique que diversifier le portefeuille ne peut pas augmenter le risque.

#### **Homogénéité positive**

$$\rho(h \cdot X) \leq h \cdot \rho(X) \text{ pour tout } h \geq 0 \text{ et toute variable aléatoire } X.$$

Cette propriété implique qu'augmenter la taille du portefeuille de  $h$  revient à multiplier le risque total par le même facteur  $h$ .

#### **Monotonie**

$$\rho(Y) \leq \rho(X) \text{ si } X \leq Y \text{ pour toutes variables aléatoires } X \text{ et } Y.$$

Si le portefeuille  $X$  a un rendement inférieur à celui de  $Y$  dans tous les états du monde, alors le risque de  $X$  est supérieur à celui de  $Y$ .

La VaR est invariante par translation, homogène positive et monotone mais n'est pas sous-additive. La non sous-additivité n'est pas à négliger puisqu'elle peut avoir des conséquences importantes, notamment :

- Le contrôle à un certain seuil de deux risques ne garantit pas le contrôle au même seuil du risque agrégé ;
- La VaR pourrait conduire à préférer une situation de risques concentrés à une situation de risques diversifiés.

Toutefois, dans le cas où les rendements suivent une distribution elliptique (par exemple loi de Student ou loi Normale), la VaR vérifie ces quatre propriétés.

### I-4 La procyclicité

Le modèle de VaR historique permet, comme nous l'avons vu, de déterminer la distribution de P&L future en s'appuyant sur les valeurs historiques des facteurs de risque. Les estimations de la VaR permettent donc de saisir la volatilité de ces paramètres financiers. On dit que la VaR est cyclique, puisqu'elle diminue ou augmente

avec la volatilité des marchés. Une illustration flagrante est l'augmentation considérable des mesures VaR en période de crise. Ceci conduit alors à un cycle sans fin sur les marchés : lorsque les mesures de VaR sont élevées, les banques ont tendance à réagir en liquidant leurs positions pour limiter les risques, ceci conduit à la réaction simultanée d'un grand nombre d'acteurs sur le marché ; les prix chutent encore plus et les VaR continuent d'augmenter. En période de forte instabilité des marchés, la VaR de marché se voit en moyenne multipliée par 2,6 par rapport à une période de forte croissance [20]. On dit ainsi que les mouvements cycliques de la VaR sont source de procyclicité, c'est-à-dire que les fluctuations naturelles du marché sont amplifiées. La procyclicité peut avoir comme effet d'ébranler la stabilité financière et économique. Rappelons que les exigences de fonds propres correspondent au maximum entre la VaR du jour précédent et  $m_c$  fois la moyenne des VaR[99%;10] sur les 60 derniers jours ouvrés. L'exigence de capital minimale est donc liée directement aux dernières estimations du risque. Finalement, lorsque les institutions financières plafonnent leurs risques à partir des estimations VaR, le caractère cyclique de celle-ci peut conduire à des perturbations conséquentes sur les marchés financiers. Le but de la mesure VaR est de gérer les risques au niveau de la banque, mais on constate que le fait de calculer le capital réglementaire sur cette base peut conduire à amplifier les risques au niveau du système. Toutefois, la procyclicité est quelque peu atténuée par le calcul de la moyenne des VaR sur 60 jours qui permet de lisser les variations importantes.

---

Les défaillances de la VaR présentées ci-dessus ont conduit à chercher des mesures de risques capables de la remplacer.

## II. Une mesure alternative : la Tail-VaR

La VaR nous donne une indication sur la perte minimale attendue lorsque l'on considère  $(1-\alpha)$  événements défavorables du portefeuille. Elle ne fournit donc aucune indication sur l'importance des pertes au delà du seuil qu'elle représente. De plus, le fait qu'elle ne satisfasse pas aux conditions d'une mesure de risque cohérente doit remettre en question l'utilisation qui en est faite par les institutions bancaires. C'est pourquoi, les universitaires et certains praticiens se tournent vers la Tail-VaR.

### II-1 Définition

Comme précédemment, notons  $X$  un risque et  $\alpha$  un niveau de probabilité, alors la Tail-VaR de  $X$  au niveau  $\alpha$ , encore appelée Expected Shortfall, est définie comme :

$$\text{TVaR}[X, \alpha] = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int_{\alpha}^1 \text{VaR}[X, \zeta] \cdot d\zeta$$

Il s'agit de la moyenne des VaR pour tous les niveaux supérieurs à  $\alpha$ . Elle donne donc une information sur la profondeur des pertes une fois que la VaR est dépassée. Contrairement à la VaR, la Tail-VaR permet de tenir compte de toute l'information disponible dans la queue de distribution et a l'avantage d'être une mesure de risque cohérente.

Elle est souvent retenue par rapport aux autres alternatives de la VaR, pour les raisons suivantes [29] :

- C'est un concept simple ;
- C'est une mesure de risque cohérente ;
- Elle peut être appliquée à tout type d'instruments et pour tout type de risque ;
- Elle donne une évaluation unique globale pour les portefeuilles exposés à différentes sources de risques ;
- Toutes les banques qui ont un système de gestion des risques basé sur la VaR pourraient passer à la T-VaR sans y apporter de modifications trop importantes.

### Exemple :

Reprenons l'exemple utilisé pour la VaR historique :

	Date	Pertes et profits en €	Pertes et profits triés en €
1	01/01/2009	54 698	-222 569
2	02/01/2009	24 651	-198 657
3	03/01/2009	-94 654	-154 896
4	04/01/2009	30 256	-134 947
5	05/01/2009	-76 543	-118 975
6	06/01/2009	-19 456	-99 653
7	07/01/2009	45 624	-98 456
8	08/01/2009	-24 958	-94 654
9	09/01/2009	-98 456	-89 753
10	10/01/2009	115 654	-88 956
11	11/01/2009	88 325	-84 563
...			
500	15/05/2010	21 320	306 842

Tableau 21 : Exemple de calcul de TVaR

La VaR[99%;1] était de 118 975€. La Tail-VaR est la moyenne des pertes strictement supérieures à la VaR.

$$\text{Ici : TVaR}[99\%;1] = \frac{222\,569 + 198\,657 + 154\,896 + 134\,947}{4} = 177\,767\text{€}$$

## II-2 Application à un portefeuille d'OC

Au 6 août 2010, les résultats de TVaR sur le même portefeuille d'OC que précédemment sont donnés par le tableau ci-dessous.

	TVaR totale	TVaR RGT	TVaR RST	TVaR Action	TVaR Volatilité
OC 1	20 646	15 074	17 314	6 276	13 085
OC 2	61 122	7 401	57 542	4 511	4 901
OC 3	64 200	7 555	57 759	21 330	11 334
OC 4	228 117	5 389	2 910	271 246	41 116
OC 5	18 849	1 297	1 307	20 037	5 116
OC 6	601 824	9 481	9 293	732 387	105 750
OC 7	2 774 367	645	460	2 140 111	1 011 519
OC 8	29 630	6 590	19 865	27 155	27 531
OC 9	199 277	18 645	20 036	214 013	80 368
Portefeuille	3 359 737	58 704	115 428	2 811 225	1 092 742

Tableau 22 : TVaR d'un portefeuille d'OC

On peut facilement remarquer que les T-VaR obtenues sont bien supérieures aux VaR calculées sur le même portefeuille. La VaR du portefeuille était de 2 103 021€ tandis que la T-VaR est de 3 359 737€.

Comme pour la VaR, il est possible de quantifier l'effet de l'agrégation entre les TVaR de différents niveaux. Cependant cette fois, la propriété de sous-additivité de la Tail-VaR nous permet de dire que le risque du portefeuille peut être réduit grâce à la diversification. Les écarts observés peuvent donc cette fois être appelés bénéfices de diversification.

1. La TVaR diversifiée DTVaR représente la TVaR globale de l'OC sans distinction par facteurs de risque.

2. La TVaR non diversifiée NDTVaR correspond à la somme des TVaR par facteurs de risque :

$$\text{NDTVaR} = \sum_{f=1}^4 \text{TVaR}_f$$

3. Le bénéfice de diversification  $\zeta$  correspond à la différence entre la TVaR non diversifiée et la TVaR diversifiée :

$$\zeta = \sum_{f=1}^4 \text{TVaR}_f - \text{DTVaR}$$



4. Le coefficient de diversification empirique  $\delta_E$  correspond au rapport entre le bénéfice de diversification et la TVaR non diversifiée :

$$\delta_E = \frac{\sum_{f=1}^4 \text{TVaR}_f - \text{DTVAR}}{\sum_{f=1}^4 \text{TVaR}_f}$$

Pour chaque OC et pour le portefeuille, on observe l'effet de la diversification des facteurs de risque, comme le montre le tableau ci-dessous.

	TVaR diversifiée	TVaR non diversifiée	Bénéfice de diversification	Coefficient de diversification
OC 1	20 646	51 749	31 103	60%
OC 2	61 122	74 355	13 233	18%
OC 3	64 200	97 978	33 778	34%
OC 4	228 117	320 661	92 544	29%
OC 5	18 849	27 757	8 908	32%
OC 6	601 824	856 911	255 087	30%
OC 7	2 774 367	3 152 735	378 368	12%
OC 8	29 630	81 141	51 511	63%
OC 9	199 277	333 062	133 785	40%
Portefeuille	3 359 737	4 078 099	718 362	18%

Tableau 23 : Agrégation de la TVaR du portefeuille par facteurs de risque

On peut constater également un effet de diversification au niveau de l'agrégation par produits composant le portefeuille. Les notations deviennent :

1. La TVaR diversifiée DTVaR représente la TVaR globale du portefeuille sans distinction par OC.

2. La TVaR non diversifiée NDTVAR correspond à la somme des TVaR par OC :

$$\text{NDTVAR} = \sum_{i=1}^9 \text{TVaR}_i$$

Le bénéfice de diversification  $\zeta$  correspond à la différence entre la TVaR non diversifiée et la TVaR diversifiée :

$$\zeta = \sum_{i=1}^9 \text{TVaR}_i - \text{DTVAR}$$

Le coefficient de diversification empirique correspond au rapport entre le bénéfice de diversification et la TVaR non diversifiée définie ci-dessus :

$$\delta_E = \frac{\sum_{i=1}^9 \text{TVaR}_i - \text{DTVAR}}{\sum_{i=1}^9 \text{TVaR}_i}$$

L'effet de diversification au niveau des OC est :

TVaR diversifiée	TVaR non diversifiée	Bénéfice de diversification	Coefficient de diversification
3 359 737	3 998 032	638 295	16%

Tableau 24 : Agrégation de la TVaR du portefeuille par instruments

La diversification du portefeuille permet donc de réduire le risque de 16 %. Cette conclusion est possible grâce à la cohérence de la T-VaR. En effet, pour les mesures de risque cohérentes, la diversification conduit à une réduction des risques.

Depuis quelques années déjà, la Tail-VaR est présentée par certains auteurs comme une meilleure mesure que la VaR. Il faut citer en particulier les publications en 2001 et en 2002 de C. Acerbi et D. Tasche [29]. Plus récemment, C. Acerbi, C. Nardio et C. Sirtori ont publié un document dans lequel ils présentent la Tail-VaR comme une excellente candidate pour remplacer la VaR dans le contexte de la gestion des risques. Selon eux, la Tail-VaR correctement mesurée représente un instrument solide pour l'évaluation des risques. Ils soulignent toutefois les mesures de précaution à appliquer, notamment la publication des hypothèses sous-jacentes au modèle.

Les propriétés spécifiques à la Tail-VaR semblent encourager les banques à s'y intéresser<sup>37</sup>. En 2005 déjà, un article publié par la Banque de France [22] spécifiait que les banques peuvent utiliser la Tail-VaR en complément de la VaR, même si cette mesure n'est pas publiée. En 2009, P. Tankov [28] souligne que certaines grandes banques utilisent la Tail-VaR en gestion interne mais que la VaR reste de loin la mesure la plus utilisée pour le calcul du capital réglementaire. Il dénonce le fait que la Tail-VaR ne soit pas mentionnée dans les accords de Bâle. Le 19 avril 2010, un article de D. Elliott explique que les méthodes alternatives, comme la Tail-VaR, prennent aujourd'hui de plus en plus d'importance [18].

### II-3 Critiques des mesures basées sur la VaR

S'il est certain que beaucoup s'interrogent sur l'avenir de la VaR, il semble cependant qu'aucun consensus n'ait été trouvé pour la remplacer. Même si de multiples intervenants paraissent se tourner vers l'Expected Shortfall, d'autres rejettent cette mesure ainsi que toutes mesures basées sur la VaR. Il est incontournable de citer le professeur N. Taleb qui mène « une guerre contre la VaR » depuis 1996<sup>38</sup>. La plus importante critique de la VaR réside dans sa définition même. En effet, elle représente la

<sup>37</sup> E. Le Goistre [2009] : « La mesure Value-at-risk (VaR) et ses méthodes alternatives »

<sup>38</sup> TALEB N. : « Report on The Risks of Financial Modeling, VaR and the Economic Breakdown »

TALEB N. [1997] : « Against Value-at-Risk : Nassim Taleb Replies to Philippe Jorion »

perte attendue qui ne sera pas dépassée dans  $\alpha$  (par exemple 99%) des cas. Or il est important de considérer ce qui se passe dans le  $(1-\alpha)$  (par exemple 1%) restant, c'est-à-dire dans le cas extrême qui a si peu de chance de se produire. Comme il a été vu auparavant, la VaR ne donne pas d'indication sur l'ampleur des pertes dans le cas où elle est dépassée. Aux personnes qui considèrent que la VaR est une bonne mesure en général, N. Taleb répond qu'un trader qui gagne 8 MUSD en 8 ans et qui perd 80 MUSD en 8 minutes peut tout aussi bien être qualifié de bon trader en général. Cet exemple caricatural illustre bien le vrai problème derrière la notion de perte maximale à un niveau de confiance donné. Il a été vu que la Tail-VaR pouvait répondre partiellement à la question de l'ampleur des pertes attendues. Toutefois, N. Taleb la considère, au même titre que toutes les mesures quantitatives (et probabilistes) basées sur la notion de pertes associées à de rares événements, comme défectueuse. L'argument principal du rejet de ces méthodes étant que les pertes passées ne prédisent pas les pertes futures. Comme il a été vu précédemment, et surtout dans le cas des produits complexes, la VaR et la TVaR sont également sujettes à des risques de modèle importants. Comme solution, N. Taleb préconise d'une part l'adoption de certains comportements, comme celui d'éviter que les institutions ne deviennent « too big to fail » ou d'interdire les instruments dérivés complexes, et d'autre part utiliser une mesure robuste comme le ratio de levier<sup>39</sup>. Par ailleurs, R. Bookstaber<sup>40</sup>, en 2009, préconise également le recours au ratio de levier pour remplacer la VaR.

Il est encore possible de trouver des défenseurs de la VaR [16]. En effet, la VaR développée par RiskMetrics n'avait pas vocation à décrire le risque supporté par un portefeuille en cas de crise systémique. De par sa définition, la VaR était au départ un outil permettant de donner une indication du risque dans  $\alpha$  (par exemple 99%) des cas. Elle était alors utilisée pour regarder l'évolution du risque d'un actif ou d'un portefeuille, de comparer les risques entre différents instruments ou différentes activités hors période de perturbations exceptionnelles des marchés. Depuis que cette mesure a pris de l'importance, depuis qu'elle a été adoptée par la plupart des institutions financières et surtout depuis qu'elle est à la base du calcul des capitaux réglementaires, beaucoup se sont mépris sur son utilité et ses capacités. La VaR peut être très utile comme outil de gestion des risques mais ne constitue pas à elle seule l'image du risque supporté par la banque. En complément d'un suivi détaillé des activités, d'un management rigoureux, de la mise en place et du suivi de limites et de réalisation de stress tests, la VaR a sa place en gestion des risques d'une banque, à condition d'être bien interprétée.

Le point de vue de plusieurs chercheurs et praticiens vient d'être évoqué : en résumé, certains préconisent l'utilisation d'une mesure alternative à la VaR et d'autres rejettent totalement cette mesure ainsi que toutes ses variantes possibles. Il est à présent utile de s'intéresser à l'une des récentes évolutions de Bâle II.

---

<sup>39</sup> Fonds propres sur expositions totales

<sup>40</sup> BOOKSTABER R., [2009] : « The Risks of Financial Modeling : VaR and the Economic Meltdown », 10 septembre

### **III. Mesure proposée par le régulateur**

#### **III-1 La VaR stressée**

##### ***III-1-i Contexte et définition***

En réponse à la crise de 2007-2008, le comité de Bâle a publié en juillet 2009 un document<sup>41</sup> sur la révision de la prise en compte du risque de marché dans les accords de Bâle II. Les modifications finales devaient entrer en vigueur d'ici la fin de l'année 2010 mais seront finalement repoussées au 31 décembre 2011 [56]. Il a été précisé auparavant que la crise de 2007 avait révélé une sous-estimation du risque mesuré par des modèles VaR en période de forte volatilité. Les pertes de la plupart des portefeuilles de négociation des banques ont été largement supérieures au capital requis pendant la crise financière. Ce phénomène a démontré que l'exigence minimale en capital n'était pas assez prudente. C'est la raison pour laquelle les révisions de juillet 2009 recommandent le calcul d'une VaR dite stressée, basée sur un scénario de crise, pour capturer les événements de perturbation des marchés. La mesure est établie sur un historique d'observation incluant une période de fortes turbulences. Ce calcul a pour but d'atténuer le phénomène de procyclicité des fonds propres réglementaires. Néanmoins, la réglementation précise que le seul calcul d'une VaR stressée ne sera pas suffisant pour capturer les pertes extrêmes que peuvent subir les institutions financières en période de crise. Comme pour la VaR standard, des stress-tests quantitatifs et qualitatifs doivent être mis en œuvre périodiquement afin de prendre en compte l'effet de scénarios défavorables sur le capital réglementaire.

##### ***III-1-ii Les paramètres de la VaR stressée***

Les critères fixés par le comité de Bâle pour le calcul de la VaR stressée, SVaR, sont les suivants :

- La VaR stressée doit être calculée hebdomadairement ;
- Le niveau de confiance est de 99% ;
- L'horizon minimal de détention n est de 10 jours ouvrés;
- La période d'observation N n'est pas fixée.

La période d'observation doit correspondre à une période de stress financier significatif et approprié au portefeuille de la banque. Pour la plupart des portefeuilles, le Comité de

---

<sup>41</sup> « Revisions to the Basel II market risk framework »

Bâle préconise une période de un an relative aux pertes importantes de 2007/2008. D'autres périodes peuvent être retenues par les banques mais nécessitent l'aval des superviseurs.

### **III-1-iii VaR stressée et exigences minimales de fonds propres**

Le maximum entre la VaR stressée et la moyenne des soixante dernières VaR stressées, multiplié par le facteur  $m_s$ , doit être additionné aux exigences de fonds propres calculées suivant la méthode vue en section I-3-iv du chapitre précédent.

En notant :

- $EMC_2$  l'exigence minimale de capital tenant compte de la VaR stressée ;
- $SVaR_{t-1}[99\%;10]$  la VaR stressée de la veille ;
- $SVaR_{moy}[99\%;10]$  la moyenne des VaR stressées sur les 60 jours ouvrés précédents ;
- $m_c \in [3;4]$  et  $m_s \in [3;4]$  dépendent des contrôles ex-post ou sont fixés par les superviseurs.

Les exigences minimales de fonds propres s'écrivent alors :

$$EMC_2 = EMC_1 + \max(SVaR_{t-1}[99\%;10]; m_s \cdot SVaR_{moy}[99\%;10])$$

Ou encore :

$$EMC_2 = \max(VaR_{t-1}[99\%;10]; m_c \cdot VaR_{moy}[99\%;10]) + \max(SVaR_{t-1}[99\%;10]; m_s \cdot SVaR_{moy}[99\%;10])$$

### **III-2 Application numérique**

La méthode historique est appliquée de la même manière que pour la VaR, la seule différence étant la période d'observation. En effet, le calcul de la distribution des P&L est effectué à partir des valeurs de marché observées en période de stress financier. Dans l'exemple suivant, les facteurs de risque sont ainsi collectés sur l'année 2008 (du 1<sup>er</sup> janvier 2008 au 1<sup>er</sup> janvier 2009).

Au 6/08/2010, les résultats de VaR stressée SVaR[99%,1] sur le portefeuille d'OC en euro sont les suivants :

	SVaR totale	SVaR RGT	SVaR RST	SVaR Action	SVaR Volatilité
OC 1	35 234	23 544	39 466	10 734	9 450
OC 2	47 752	11 062	47 376	4 733	4 694
OC 3	178 322	16 048	163 118	25 594	22 617
OC 4	217 986	10 670	4 039	276 102	59 297
OC 5	29 129	1 967	5 115	31 527	3 257
OC 6	895 459	14 388	15 271	875 008	69 994
OC 7	3 191 647	830	5 094	3 287 345	69 085
OC 8	46 466	11 456	12 404	48 593	27 413
OC 9	300 203	33 762	48 712	290 994	64 460
Portefeuille	3 991 109	108 060	270 127	4 057 160	146 148

Tableau 25 : SVaR d'un portefeuille d'OC

### III-3 Analyse des nouvelles exigences réglementaires

Il semble que l'utilisation de la VaR stressée soit recommandée dans un rôle d'augmentation du niveau de capital et non dans le but de mesurer plus précisément le risque auquel est exposée une institution financière. En effet, comme la SVaR est additionnée à la VaR standard, le résultat obtenu n'est pas une mesure de risque. Cette somme soulève énormément de questions. Elle revient à considérer que, sur les marchés, il est possible qu'existent simultanément une période de volatilité classique et une période de turbulences. Il paraîtrait plus intuitif de baser uniquement le calcul d'exigence de fonds propres sur la VaR stressée, ce qui correspondrait alors à une méthode prudente, ou pessimiste. Une autre méthode qui paraît plus adaptée consisterait à retenir la moyenne de la VaR standard et de la VaR stressée ; il semble plus facilement compréhensible de faire la moyenne entre une mesure tenant compte des événements normaux ayant tendance à sous-estimer les pertes, et une mesure très prudente, basée sur une situation de crise, plutôt que de sommer les deux.

Le Comité de Bâle a réalisé les premières estimations de l'impact de la VaR stressée sur le capital réglementaire à partir d'un échantillon de 38 banques de 10 pays différents. Cette étude a montré qu'en calculant une VaR stressée à partir des données de perturbations (2008) et des données d'une période de faible stress (2006), en moyenne une augmentation de 110 % des exigences minimales de fonds propres a été constatée [55].

De leur côté, les banques craignent que l'augmentation des exigences de fonds propres ne diminue leur capacité à octroyer des crédits et plus généralement à financer

l'économie<sup>42</sup>. Elles assurent que les nouvelles propositions de Bâle risquent de freiner la croissance<sup>43</sup>.

L'objectif premier de l'introduction de la VaR comme outil de gestion des risques financiers et comme standard réglementaire, était de faire correspondre les exigences minimales de fonds propres avec les risques supportés par le portefeuille de négociation des banques. En effet, le capital réglementaire défini par Bâle II est sensible au risque, c'est-à-dire qu'il est adapté aux risques estimés d'une institution financière. Ce principe est judicieux, mais il est peut-être trop ambitieux dans la mesure où nous avons vu qu'il était très difficile, voire impossible, de donner une évaluation précise du risque. De plus, J. Danielsson<sup>44</sup> souligne le fait que les mesures de risque et de capital peuvent être manipulées par les banques dans le but de faire diminuer leur capital requis et précise qu'une mesure basée sur le ratio de levier est plus conservatrice et plus difficile à manipuler. Bien que les autorités de régulation ne recommandent pas de passer à une mesure forfaitaire pour la détermination des capitaux réglementaires, elles semblent tout de même s'éloigner de l'objectif initial de capital ajusté aux risques. L'exigence additionnelle va empêcher les fonds propres de chuter d'une manière excessive lorsque la volatilité des marchés sera faible mais ne permettra pas de mieux capter le risque. La VaR et la VaR stressée sont certes des mesures de risque, la somme des deux ne l'est pas. Cela implique que les capitaux réglementaires vont évoluer en fonction des risques, mais n'y seront pas ajustés, puisque fixés dans un objectif de prudence et de réponse à la crise.

## IV. Comparaison des mesures

Rappelons les valeurs à la même date des VaR, TVaR et SVaR sur le portefeuille d'OC calculées précédemment :

VaR	TVaR	SVaR
2 103 021€	3 359 737€	3 991 109€

Tableau 26 : Résultats des trois mesures

Le risque mesuré par la VaR stressée pour ce portefeuille est donc supérieur de 90% au risque mesuré par la VaR et de 19% au risque mesuré par la TVaR. Au 6 août 2010, sur un portefeuille seulement constitué de 9 OC, on constate donc une différence importante entre ces trois mesures de risque. Celles-ci sont toutes basées sur les pertes potentielles déduites de la distribution historique des prix mais néanmoins, le choix de la mesure conduit à des écarts non négligeables. Par conséquent, ce choix a un impact dans la

<sup>42</sup> Reuters [2010] : « Les banques craignent que Bâle III pénalise le crédit », janvier

<sup>43</sup> Boursier.com [2010] : « Bâle 3 : Un coup de massue pour la croissance, affirment les banques », juin

L'express [2010] : « La régulation bancaire de Bâle 3 : info ou intox ? », mars

<sup>44</sup> DANIELSSON J. [2009] : « Le mythe du risquomètre », Telos, 2 mars

gestion des risques des banques. Les institutions doivent donc préciser dans leurs publications les mesures utilisées et les hypothèses sous-jacentes. De plus, pour le calcul du capital réglementaire, rappelons que la SVaR est additionnée à la VaR. L'introduction de la VaR stressée sur le portefeuille de négociation des banques va donc considérablement augmenter les exigences minimales de fonds propres.

La comparaison des trois mesures peut être résumée dans le tableau ci-dessous :

	En tant que mesure de risque		Pour le calcul des capitaux réglementaires	
	Avantages	Inconvénients	Avantages	Inconvénient
VaR	Simple à mettre en œuvre	-Non cohérente -Procyclique	-Réduit les exigences (en comparaison avec la méthode standard) en période de stabilité.  -Rend les capitaux réglementaires sensibles au risque.	-Introduit la procyclicité dans les capitaux réglementaires.  -Conduit à des exigences insuffisantes en période de crise.
TVaR	-Simple à mettre en œuvre  -Cohérente	Procyclique	-Réduit les exigences (en comparaison avec la méthode standard) en période de stabilité.  -Rend les capitaux réglementaires sensibles au risque.	-Introduit la procyclicité dans les capitaux réglementaires.  -Peut conduire (mais dans une moindre mesure que la VaR) à des exigences insuffisantes en période de crise exceptionnelle.
SVaR	Non procyclique	Mesure pessimiste	-Doit permettre de constituer des réserves suffisantes en période de crise.	-Conduit à des exigences conservatrices en période de stabilité (coûteux).  -Les exigences ne sont plus proportionnelles au risque encouru.

Tableau 27 : Tableau comparatif des mesures



Parmi les méthodes historiques basées sur les pertes potentielles, la Tail-VaR semble la plus adaptée à la gestion des risques d'une institution financière. Cette mesure conserve les avantages de la VaR, tout en répondant à certaines de ses lacunes. La VaR stressée peut fournir une indication sur les pertes qui seraient potentiellement subies par le portefeuille de négociation en cas de perturbation des marchés, mais ne peut être retenue comme unique mesure. En ce qui concerne les exigences minimales de fonds propres, la VaR a conduit à les sous-estimer en période de crise. Utiliser la VaR stressée ou la Tail-Var permettrait d'augmenter les capitaux réglementaires et donc de répondre partiellement à ce problème. En revanche, si utiliser la somme de la VaR stressée et de la VaR introduit une prudence qui se veut rassurante et réduit la procyclicité, cela pourrait conduire à exiger des capitaux conservateurs (en période normale) et à remettre en cause l'adéquation des capitaux réglementaires au profil de risque des banques.

---

## CONCLUSION

---

L'évaluation des instruments financiers étudiés dans ce mémoire peut donner lieu à un risque de modèle important. Les erreurs peuvent notamment être dues à la conception du modèle ou à des erreurs humaines. En effet, la structure complexe de ces produits nécessite l'admission d'hypothèses fortes, des calculs parfois conséquents et des techniques de modélisation avancées. Supposer que les marchés sont parfaits (modèle des OC) et utiliser la copule gaussienne pour la structure de dépendance des temps de défauts (modèle des CDO synthétiques) peuvent par exemple poser problème.

Même si la VaR historique reste une méthode très prisée par les institutions financières pour l'évaluation du risque des actifs financiers, elle peut poser problème dans le cas particulier des produits complexes. En effet, celle-ci est dépendante de la méthode d'évaluation de ces produits, et par conséquent est directement concernée par les risques de modèle qui leur sont spécifiques.

En élargissant le périmètre d'étude à l'ensemble du portefeuille de négociation, il a été constaté durant la crise financière de 2007-2008 que les exigences de fonds propres calculées à partir de la VaR étaient largement insuffisantes pour couvrir les pertes enregistrées. Toutefois, les organes de régulation internationaux ne rejettent pas la VaR, ni même la VaR historique, mais ont émis de nouvelles recommandations qui exigent le calcul additionnel d'une VaR stressée, c'est-à-dire basée sur une période de fortes turbulences des marchés. Les superviseurs attendent de cette dernière qu'elle conduise à la réduction de la procyclicité des fonds propres et que le capital requis permette de couvrir les pertes supportées par les institutions financières au titre du risque de marché.

L'utilisation de la VaR pour le calcul des exigences minimales de fonds propres est aujourd'hui remise en question, mais ce n'est pas tout : la place de cette mesure dans la gestion des risques des banques est également discutée. Et pour cause, elle n'est pas cohérente, est procyclique et ne tient pas compte, ni des événements défavorables qui se produisent dans  $(1-\alpha)$  (par exemple 1%) des cas, ni du risque de liquidité. Plusieurs banques envisagent ainsi de se tourner vers l'Expected Shortfall (Tail-VaR), mesure cette fois cohérente et qui tient compte de toute l'information disponible dans la queue de distribution des P&L. De plus, cette méthode est simple à mettre en œuvre, ce qui semble être un critère important pour les praticiens. Certains chercheurs confirment d'ailleurs les capacités de la Tail-VaR à pallier différentes lacunes de la VaR. En revanche, d'autres ne la voient pas comme un progrès et estiment que les événements futurs ne peuvent pas être modélisés par le passé.

Même si le débat actuel autour de la VaR est justifié, l'outil mathématique en lui-même ne devrait pas être au centre des préoccupations. En effet, l'utilisation des données passées pour modéliser les événements futurs est une méthode probabiliste utilisée dans de nombreux domaines comme par exemple la géophysique, l'économie, l'assurance ou le marketing. La cause du problème est plutôt la manière dont elle est interprétée

aujourd'hui et l'utilisation qui en est faite. Depuis son adoption par le Comité de Bâle en tant que mesure du risque de marché, beaucoup ont oublié qu'elle représente la pire perte supportée à un intervalle de confiance donné. Ainsi la VaR, bien que présentant un intérêt certain dans la gestion des risques, n'est pas à elle seule, représentative des pertes qui peuvent être subies en période de crise systémique. Il était donc important que le capital réglementaire basé sur cette unique mesure soit révisé. Néanmoins, la solution apportée par Bâle II, à savoir exiger un montant de capital supplémentaire au titre d'une VaR stressée, laisse place comme nous l'avons vu à certaines interrogations. Les nouvelles exigences de fonds propres devraient conduire à la réduction de la procyclicité des fonds propres, mais seront-elles plus en adéquation avec le niveau de risque supporté par les banques ?

---

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

### **Ouvrages :**

- [1] AMENC N., BONNET S., HENRY G., MARTELLINI L., WEYTENS A. [2004] : « La gestion alternative », Economica.
- [2] BELLALAH M. [2005] : « Gestion des risques de taux d'intérêt et de change : théorie et exercices », De Boeck.
- [3] CAZAUBIEILH F. [2003] : « Théorie et pratique des obligations convertibles en actions et produits assimilés », Maxima.
- [4] COLMANT B., DELFOSSE V. [2005] : « Les obligations convertibles : mathématique financière et comptabilisation », Larcier.
- [5] GATHERAL J. [2006] : « The volatility surface : A Practitioner's Guide », Wiley.
- [6] HAGER S. [2007] : « Pricing portfolio Credit Derivatives by means of evolutionary algorithms », Gabler.
- [7] HULL J., édition française dirigée par ROGER P. [2007] : « Options, futures et autres actifs dérivés », 6<sup>ème</sup> édition, Pearson Education.
- [8] JOKUNG NGUENA O. [2004] : « Mathématiques et gestion financière : Applications avec exercices corrigés », De Boeck.
- [9] JORION P. [2007] : « Value-at-risk : The New Benchmark for Managing Financial risk », 3<sup>ème</sup> édition, Mc Graw-Hill.
- [10] KOZIOL C. [2003] : « Valuation of Convertibles Bonds when investors Act Strategically », Gabler.

### **Articles :**

- [11] BOOKSTABER R., [2009] : «The Risks of Financial Modeling : VaR and the Economic Meltdown », 10 septembre.
- [12] Boursier. com [2010] : « Bâle 3 : Un coup de massue pour la croissance, affirment les banques », juin
- [13] COUSSERAN O., RAHMOUNI I. [2005] : « Le Marché des CDO. Modalités de fonctionnement et implications en termes de stabilité financière », *Revue de la stabilité financière*, juin.
- [14] DANIELSSON J. [2001] : « An academic Response to Basel II ».
- [15] DANIELSSON J. [2009] : « Le mythe du risquomètre », Telos, 2 mars
- [16] DE LIMA P., GUERRIER P. [2009] : « La Value at Risk reste un outil efficient », L'AGEFI.

- [17] DIONNE G. [2009] : « Finance structurée, gestion des risques et récente crise financière ».
- [18] ELLIOTT D. [2010] : « Fear drives rethink of Value-at-Risk models », *Financial News*, 19 avril.
- [19] FENDER I., MITCHELL J. [2005] : « Financement structuré : complexité, risque et recours aux notations », juin.
- [20] GARNOTEL G. [2010] : « Bâle II 2010 : réponse à la crise mais à quel prix? », *Lettre OTC Conseil*, avril.
- [21] L'express [2010] : « La régulation bancaire de Bâle 3 : info ou intox ? », mars.
- [22] LEVY-RUEFF G. [2005] : « Portée et limites des VaR publiées par les grandes institutions financières », Banque de France, *Revue de la stabilité financière*.
- [23] NOCERA J. [2009] : « Risk Mismanagement », *The New York Times*, 4 janvier.
- [24] REUTERS [2010] : « Les banques craignent que Bâle III pénalise le crédit », janvier.
- [25] SCHOLLES S. [2000] : « Crisis and risk management ».
- [26] TALEB N. : « Report on The Risks of Financial Modeling, VaR and the Economic Breakdown ».
- [27] TALEB N. [1997]: « Against Value-at-Risk : Nassim Taleb Replies to Philippe Jorion ».
- [28] TANKOV P. [2009] : « Introduction to financial risk management », novembre.

### **Publications et recherche**

- [29] ACERBI C., TASCHE D. [2001] : « Expected Shortfall : a natural coherent alternative to Value-at-Risk », mai.
- [30] ACERBI C., TASCHE D. [2002] : « On the coherence of Expected Shortfall », 19 avril.
- [31] ACERBI C., NORDIO C., SIRTORI C. [2008] : « Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management », 1 février.
- [32] ANDRE-LE POGAMP F., MORAUX F. [2003] : « Sur les Obligations Convertibles à Option Retardée de Remboursement Anticipé au Gré de l'émetteur ».
- [33] AUGROS J-C, QUERUEL M. [2001], « Les dérivés climatiques et naturels : de nouvelles opportunités pour les investisseurs », juillet.
- [34] AUGROS J-C, LEBOISNE N. [1996], « Validation empirique d'un modèle d'évaluation d'obligations convertibles », *Banque et marché*, n°24, septembre.
- [35] BARDHAN I. , BERGIER A., DERMAN E., DOSEMBET C. , KANI I. [1994] « Valuing Convertible bonds as derivatives », Goldman Sachs.

- [36] BIELECKI R., RUTKOWSKI M. [2001] : « Credit Risk : Modeling, Valuation, and Hedging », décembre.
- [37] BLACK F., SCHOLES M. [1973], « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy*, mai-juin, Vol. 81, No. 3, p. 637-654.
- [38] BROWN A. [2010] : « Structured Finance and Price Discovery », avril.
- [39] COX J., ROSS S, RUBINSTEIN M. [1979] « Option pricing : a simplified approach », *Journal of Financial Economics*, septembre, Vol. 7, p. 229-263.
- [40] D AMATO J., GYNTEMBERG J. [2005], « CDS index tranches and the pricing of credit risk correlations », *Quarterly review*, mars.
- [41] DUTANG C., BOURGES M., SIBILLEAU M., BIARD R. [2007] : « Les dérivés climatiques et énergétiques », 1 février.
- [42] FINGER C. [2004] : « Issues in the pricing of synthetic CDOs », novembre.
- [43] GOEGEBEUR Y., HOEDEMAKERS T., TISTAERT J. [2009] : « Synthetic CDO Pricing Using the Student Factor Model with random Recovery ».
- [44] HULL J., WHITE A. [2000] : « Quantitative strategies research notes Valuing Credit Default Swap I: no counterparty default risk », avril.
- [45] HULL J., WHITE A. [2000] : « Valuing Credit Default Swap II : Modeling Default Correlations ».
- [46] KALEMANOVA A., SCHMID B., WERNER R. [2007] : « The Normal Inverse Gaussian Distribution for Synthetic CDO Pricing », janvier.
- [47] MEYFREDI J-C [], « Intégration de taux d'intérêt différenciés dans l'évaluation des obligations convertibles ».
- [48] MINA J., STERN E. [2003] « Examples and applications of closed-form CDO pricing ».
- [49] MORENO M., ROUSTANT O. [2002] : « Modélisation de la température. Application aux dérives climatiques »
- [50] O'KANE D., TURNBULL S. [2003] : « Valuation of Credit Default Swap », avril.
- [51] PLATEN E., WEST J. [2004] : « Fair Pricing of Weather Derivatives », 2 juillet.
- [52] YOUNGMAN P. [2009] : « La procyclicité et la valeur exposée au risqué », *Banque du Canada*, juin.
- [53] ZENG L. [2000] : « Pricing Weather Derivatives ».

***Documents réglementaires :***

- [54] Basel Committee on banking supervision [2009] : « Revisions to the Basel II Market Risk Framework », juillet.
- [55] Basel Committee on banking supervision [2009]: « Analysis of the trading book quantitative impact study », octobre.
- [56] Bank for international settlements [2010]: « Adjustments to the Basel II market risk framework announced by the Basel Committee”, 18 juin.
- [57] International Federation of accountants [2009] : « Auditing Complex Financial Instrument », octobre.

***Thèses et Mémoires :***

- [58] ALFONSI A. [2006] : « Modélisation en risque de crédit. Calibration et discrétisation de modèles financiers », juin.
- [59] BERTHE F. [2005] : « Value-at-Risk et hypothèse de normalité », mai.
- [60] FAZI J-B [2009] « La pertinence de la mesure VaR dans le cadre de la gestion alternative », octobre.
- [61] FINUCCI F. [2009], « Produits dérivés de l'immobilier et indices immobiliers », mai.
- [62] GUILLERME P.Y. [2009] : « Dérivés climatiques. Evaluation d'options », juin.
- [63] HLIASSA T. F. : « Le risque de crédit et la rentabilité financière ».
- [64] KLEIN I. [2008] : « Les Dérivés de Crédit : un danger pour la stabilité financière ? »
- [65] LEGOISTRE E [2009] « La mesure Value-at-Risk (VaR) et ses méthodes alternatives ».
- [66] RICHARD, J-C « Une description de différentes options exotiques à partir du modèle de Cox-Ross-Rubinstein sur quelques périodes ».

***Sites internet :***

[www.banque-france.fr](http://www.banque-france.fr)

[www.bis.org](http://www.bis.org)

[www.creditmutuel.fr](http://www.creditmutuel.fr)

[www.fimarkets.com](http://www.fimarkets.com)

[www.riskmetrics.com](http://www.riskmetrics.com)

[www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

---

## TABLES DES ILLUSTRATIONS

---

### **Figures :**

Figure 1 : Fonctionnement d'un CDS avec règlement par livraison du sous-jacent	10
Figure 2 : Fonctionnement d'un CDS avec règlement en cash	11
Figure 3 : Fonctionnement d'un contrat d'indice CDS	12
Figure 4 : Mécanisme d'un cash CDO	13
Figure 5 : Mécanisme d'un CDO synthétique	14
Figure 6 : Tranches de CDO standardisés sur les indices CDX et iTraxx	14
Figure 7 : Les niveaux de calcul de VaR	28
Figure 8 : Evolution de la valeur de l'action	34
Figure 9 : Evolution de la valeur du call	34
Figure 10 : Arbre à deux périodes de l'OC	37
Figure 11 : Les conditions du call émetteur	39



**Tableaux :**

Tableau 1 : Les trois piliers de Bâle II	21
Tableau 2 : Exemple de VaR historique	26
Tableau 3 : Illustration des bénéfices d'agrégation	29
Tableau 4 : Valeurs de l'OC à l'échéance	37
Tableau 5 : Valeurs de l'OC au nœud intermédiaire	37
Tableau 6 : Prix de l'OC à l'échéance en tenant compte des optionalités	40
Tableau 7 : Prix de l'OC au nœud intermédiaire en tenant compte des optionalités	40
Tableau 8 : Prix de l'OC à la date d'évaluation en tenant compte des optionalités	41
Tableau 9 : Caractéristiques de l'OC	58
Tableau 10 : Extrait des 262 scenarii pour l'OC	59
Tableau 11 : Construction de la distribution de pertes et profits	59
Tableau 12 : VaR de l'OC	60
Tableau 13 : Caractéristiques du CDS	60
Tableau 14 : Extrait des 262 scenarii pour le CDS	61
Tableau 15 : VaR du CDS	61
Tableau 16 : VaR d'un portefeuille d'OC	62
Tableau 17 : Agrégation de la VaR OC	63
Tableau 18 : Agrégation de la VaR CDS	63
Tableau 19 : Agrégation de la VaR du portefeuille par facteurs de risque	64
Tableau 20 : Agrégation de la VaR du portefeuille par instruments	65
Tableau 21 : Exemple de calcul de TVaR	69
Tableau 22 : TVaR d'un portefeuille d'OC	70
Tableau 23 : Agrégation de la TVaR du portefeuille par facteurs de risque	71
Tableau 24 : Agrégation de la TVaR du portefeuille par instruments	72
Tableau 25 : SVaR d'un portefeuille d'OC	76
Tableau 26 : Résultats des trois mesures	77
Tableau 27 : Tableau comparatif des mesures	78

---

## LISTE DES ABBREVIATIONS

---

<b>AMF</b>	Autorité des Marchés Financiers
<b>AR</b>	AutoRegressive
<b>ARMA</b>	AutoRegressive Moving Average
<b>AVaR</b>	Aggregate Value-at-Risk
<b>CDO</b>	Collateralized Debt Obligation
<b>CDS</b>	Credit Default Swap
<b>CRBF</b>	Comité de la Réglementation Bancaire et Financière
<b>CRR</b>	Cox-Ross-Rubinstein
<b>DTVAr</b>	Diversified Tail Value-at-Risk
<b>EMC</b>	Exigence Minimale de Capital
<b>FFT</b>	Fast Fourier Transform
<b>HDD</b>	Heating Degree Day
<b>LVaR</b>	Liquidity Value-at-Risk
<b>MA</b>	Moving Average
<b>NAVAr</b>	Non Aggregate Value-at-Risk
<b>NIG</b>	Normal Inverse Gaussian
<b>NTVaR</b>	Non Diversified Tail Value-at-Risk
<b>OC</b>	Obligation Convertible
<b>OPCVM</b>	Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières
<b>P&amp;L</b>	Profit & Loss
<b>PV</b>	Present Value
<b>RGT</b>	Risque Général de Taux
<b>RST</b>	Risque Spécifique de Taux
<b>SPV</b>	Special Purpose Vehicle
<b>SVaR</b>	Stressed Value-at-Risk
<b>TVaR</b>	Tail Value-at-Risk
<b>VaR</b>	Value-at-Risk
<b>VBA</b>	Visual Basic for Applications

---

## ANNEXES

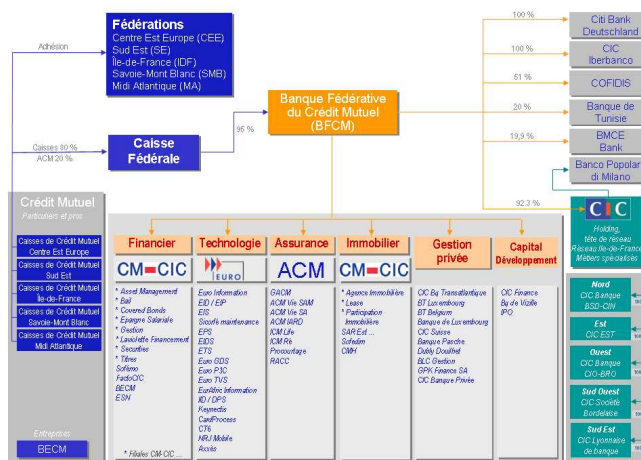
---

<b>ANNEXE A : LE GROUPE CREDIT MUTUEL.....</b>	<b>90</b>
<b>ANNEXE B : DEMONSTRATION VAR.....</b>	<b>92</b>
<b>ANNEXE C : DEMONSTRATION METHODE PARAMETRIQUE.....</b>	<b>93</b>
<b>ANNEXE D : DEMONSTRATION DE LA FORMULE DE CRR POUR LES OPTIONS..</b>	<b>94</b>
<b>ANNEXE E : PROCESSUS DE WIENER.....</b>	<b>96</b>
<b>ANNEXE F : CALCUL DE L'ESPERANCE/VARIANCE D'UNE LOI LOGNORMALE... </b>	<b>98</b>
<b>ANNEXE G : CALCUL DES PARAMETRES U ET D.....</b>	<b>100</b>
<b>ANNEXE H : METHODE ACTUARIELLE POUR LES DERIVES CLIMATIQUES.....</b>	<b>102</b>
<b>ANNEXE I : CODE VBA .....</b>	<b>103</b>

## ANNEXE A : Le Groupe Crédit Mutuel

Le Crédit Mutuel est né en 1847 en Rhénanie sous l'impulsion de Frédéric-Guillaume Raiffeisen. C'est dans le village de La Wantzenau, près de Strasbourg, qu'est fondée la première Caisse du Crédit Mutuel en 1882. Dès cette première année, 17 autres Caisses voient le jour en Alsace et en Lorraine. L'essor est ensuite rapide.

Contrairement à une banque purement commerciale qui répond à ses actionnaires, le Crédit Mutuel est responsable vis-à-vis de ses sociétaires. Ainsi, en parallèle d'une organisation bancaire traditionnelle, il existe une organisation politique qui vise à assurer la représentativité des sociétaires dans les différentes instances du Groupe. Son développement est basé sur la banque de proximité, la bancassurance et le leadership technologique. Le Groupe rassemble une banque coopérative, mutualiste à fort ancrage régional et local, et le CIC. Ces deux enseignes, Crédit Mutuel et CIC, complétées en 2008 par celles de Citibank (devenue TargoBank en 2010) en Allemagne et de CIC Iberbanco, constituent un réseau de plus de 5 600 points de vente. Le Groupe CM5-CIC est constitué d'une part, des caisses du réseau Crédit Mutuel ainsi que de la Caisse Fédérale du Crédit Mutuel et, d'autre part, des cinq pôles de la banque CIC. La figure ci-dessous représente l'organisation du Groupe CM5-CIC.



Deux groupes inter-régionaux, nommés Caisses Fédérales, représentent à eux seuls environ 90% du groupe en résultats et en PNB :

- Le Crédit Mutuel Centre Est Europe basé à Strasbourg ;
- Le Crédit Mutuel Arkea, basé à Brest.

C'est au sein du service Audit que s'est déroulé le stage. Les besoins du service pour modéliser les instruments financiers complexes, juger la pertinence des modèles et s'interroger sur l'avenir de la VaR en tant que mesure du risque de marché dans le contexte actuel post-crise a donné lieu au sujet de ce mémoire.

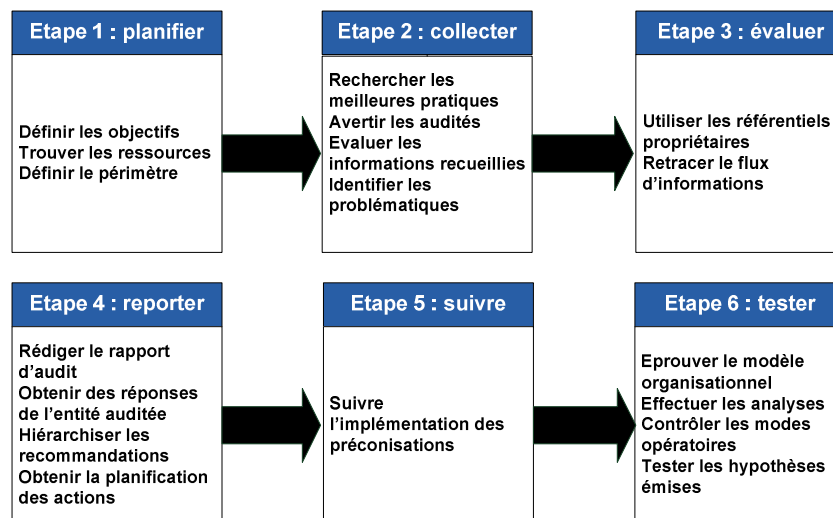
Le service Audit effectue le contrôle périodique des activités. Son rôle consiste à organiser et promouvoir un contrôle périodique efficace des filiales et des filières spécialisées du Groupe CM5-CIC.

Le champ d'intervention du « Contrôle périodique métiers » porte entre autres sur les domaines suivants :

- L'efficacité des dispositifs de contrôle permanent ;
- L'efficacité des procédures de gestion des risques et le respect de leur application;
- La sincérité et la fiabilité de l'information financière ;
- L'efficacité et la pérennité des modèles économiques et organisationnels des filiales et des filières.

Conformément aux exigences réglementaires définies par le Règlement CRBF n° 97-02 modifié, les auditeurs réalisent des contrôles de sécurité, de conformité et d'efficacité. En fin de mission, le responsable du Contrôle périodique métiers rend compte de ses observations, conclusions et recommandations aux responsables des structures auditées et à l'organe exécutif du Groupe. Il délivre par ailleurs une information régulière au Comité du Contrôle et de la Conformité dont il est membre.

Une mission-type est organisée en six étapes et dure généralement entre six et huit semaines. Les étapes sont présentées ci-dessous.



## ***ANNEXE B : Démonstration VaR***

Comme la VaR correspond au montant de pertes qui ne devrait pas être dépassé avec une probabilité  $\alpha$ , alors on peut écrire :

$$P(X \leq \text{VaR}_X[\alpha, n]) = \alpha$$

Ou encore :

$$F_X(\text{VaR}_X[\alpha, n]) = \alpha$$

D'où :

$$\text{VaR}_X[\alpha, n] = F_X^{\leftarrow}(\alpha) \text{ lorsque } F \text{ est continue et strictement monotone.}$$

## **ANNEXE C : Démonstration méthode paramétrique**

Supposons que la distribution de P&L sur une seule période soit une loi normale d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

$$\alpha = 99\% = P(R_t \leq \text{VaR}[99\%;1]) = P\left(\frac{R_t - m}{\sigma} \leq \frac{\text{VaR}[99\%;1] - m}{\sigma}\right)$$

Alors :

$$\frac{\text{VaR}[99\%;1] - m}{\sigma} = z_\alpha = 2,33$$

Puisqu'il correspond au quantile d'une loi normale au seuil de 99%.

Donc :

$$\text{VaR}[99\%;1] = 2,33 \cdot \sigma + m$$

Comme :

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_{AB}$$

Et :

$$\sigma_{AB} = \rho \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$$

Alors :

$$\sigma_{A+B}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2 \cdot \rho \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$$

En multipliant par  $z_\alpha^2$ , on obtient :

$$z_\alpha^2 \cdot \sigma_{A+B}^2 = z_\alpha^2 \cdot \sigma_A^2 + z_\alpha^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot \rho \cdot z_\alpha^2 \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$$

Donc :

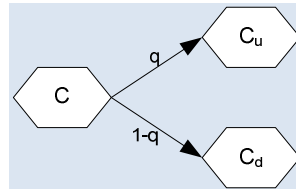
$$\text{VaR}_{A+B}(\alpha,1)^2 = \text{VaR}_A(\alpha,1)^2 + \text{VaR}_B(\alpha,1)^2 + 2 \cdot \rho \cdot \text{VaR}_A(\alpha,1) \cdot \text{VaR}_B(\alpha,1)$$

Finalement,

$$\text{VaR}_{A+B}(\alpha,1) = \sqrt{\text{VaR}_A(\alpha,1)^2 + \text{VaR}_B(\alpha,1)^2 + 2 \cdot \rho \cdot \text{VaR}_A(\alpha,1) \cdot \text{VaR}_B(\alpha,1)}$$

## **ANNEXE D : Démonstration de la formule de CRR pour les options**

Soit  $C$  la valeur du Call aujourd'hui,  $C_u$  sa valeur à la fin de la première période en cas d'état haussier et  $C_d$  sa valeur à la fin de la première période en cas d'état baissier.



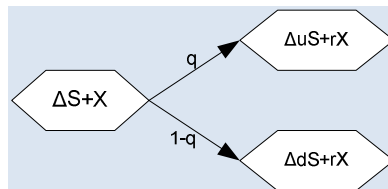
En date terminale, le call peut avoir les valeurs suivantes :

$$C_u = \max(0, S_0 \cdot u - K)$$

$$C_d = \max(0, S_0 \cdot d - K)$$

Construisons un portefeuille composé de  $\Delta$  actions de valeur  $S$  et d'actif sans risque pour un montant  $X$ . Le taux sans risque unique est noté  $r_S$ . Ce portefeuille a un coût initial de  $\Delta \cdot S + X$ .

Posons  $r = 1 + r_S$ , alors on obtient l'évolution du prix du portefeuille suivante :



Choisissons  $\Delta$  et  $X$  de manière à égaliser les valeurs du portefeuille et du Call à la fin de la période. Le système d'équations suivant en découle :

$$\begin{cases} \Delta \cdot u \cdot S + r \cdot X = C_u \\ \Delta \cdot d \cdot S + r \cdot X = C_d \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient :

$$\Delta \cdot u \cdot S - \Delta \cdot d \cdot S = C_u - C_d$$

D'où

$$\begin{cases} \Delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d) \cdot S} \\ X = \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(u - d) \cdot r} \end{cases}$$



Avec l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, la valeur actuelle  $C$  du Call ne peut pas être inférieure à la valeur actuelle du portefeuille  $\Delta \cdot S + X$ . Si cela était le cas, un profit certain sans risque et sans investissement initial serait envisageable en achetant le Call et en vendant le portefeuille. Il n'est pas possible non plus d'avoir  $C$  supérieure à la valeur du portefeuille sinon il suffirait de vendre le Call et d'acheter le portefeuille pour réaliser une opportunité d'arbitrage.

On a donc :

$$C = \Delta \cdot S + X = \frac{C_u - C_d}{(u - d)} + \frac{u \cdot C_d - d \cdot C_u}{(u - d) \cdot r} = \frac{1}{r} \left[ \frac{(r - d)}{u - d} \cdot C_u + \frac{u - r}{u - d} \cdot C_d \right]$$

Posons  $p = \frac{r - d}{u - d}$ ,

Par conséquent  $1 - p = \frac{u - r}{u - d}$ ,

La valeur actuelle du Call s'écrit alors :

$$C = \frac{1}{r} [p \cdot C_u + (1 - p) \cdot C_d]$$

Du fait de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage,  $d < r < u$ .

Cela implique que  $0 < p < 1$ .

Donc  $p$  vérifie les propriétés d'une probabilité.

D'autre part, si les investisseurs sont risque-neutres, le gain espéré sur l'action serait le taux sans risque, ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$q \cdot (u \cdot S) + (1 - q) \cdot (d \cdot S) = r \cdot S$$

En isolant  $q$ , il vient :

$$q = \frac{r - d}{u - d}$$

Donc  $q = p$

## **ANNEXE E : Processus de Wiener<sup>45</sup>**

### **Processus de Markov :**

Un processus stochastique est une suite de variables aléatoires indexées par le temps. Les processus de Markov sont des processus stochastiques pour lesquels seule la valeur présente d'une variable est utile pour anticiper sa distribution future.

### **Processus de Wiener standard :**

Le processus de Wiener standard est un type particulier de processus de Markov en temps continu avec des accroissements espérés nuls et une variance de ces accroissements égale à 1 par an. Il est également appelé mouvement brownien.

Une variable  $z$  suit un processus de Wiener si :

- La variation  $\Delta z$  durant un court intervalle de temps de longueur  $\Delta t$  s'écrit :  $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$  où  $\varepsilon$  suit une loi normale centrée réduite. Cette propriété implique que  $\Delta z$  suit une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type  $\sqrt{\Delta t}$ .
- Les valeurs de  $\Delta z$  pour deux courts intervalles de longueur  $\Delta t$  qui ne se chevauchent pas, sont indépendantes. Cette propriété implique que  $z$  suit un processus de Markov.

On peut décomposer un accroissement de  $z$  sur une période relativement longue  $z(T) - z(0)$  en la somme des accroissements de  $z$  dans  $N$  petits intervalles de longueur  $\sqrt{\Delta t}$  où  $N = T/\Delta t$ . Donc :

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Où les  $\varepsilon_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) suivent des lois normales centrées réduites. Or selon la seconde propriété des processus de Wiener, les  $\varepsilon_i$  sont des variables aléatoires indépendantes. On en déduit donc que  $z(T) - z(0)$  suit une loi normale de moyenne nulle, de variance  $T$ .

---

<sup>45</sup> HULL J., édition française dirigée par ROGER P. [2007] : "Options, futures et autres actifs dérivés", 6<sup>ème</sup> édition.

### **Processus de Wiener général :**

Un processus de Wiener général pour une variable  $x$  s'écrit :

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dz$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constantes et  $z$  le processus de Wiener standard décrit ci-dessus.

Sur un intervalle de longueur  $\Delta t$ , la variation  $\Delta x$  de  $x$  est donnée par :

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Donc la distribution de  $\Delta x$  suit une loi normale d'espérance  $a \cdot \Delta t$  et de variance  $b^2 \cdot \Delta t$ . Comme pour le processus de Wiener standard, on peut montrer que la variation de  $x$  sur un intervalle de longueur  $T$  est normalement distribuée avec une moyenne  $a \cdot T$  et une variance  $b^2 \cdot T$ .

### **Mouvement Brownien géométrique :**

Un processus stochastique généralement retenu pour modéliser le cours d'une action  $S$  est le mouvement brownien géométrique :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$\mu$  représente l'espérance de rentabilité de l'action et  $\sigma$  sa volatilité.

Le processus de Wiener n'est en général pas utilisé car il suppose un drift et un paramètre de variance constants pour le cours de l'action. Le mouvement brownien permet de lever ces hypothèses et de les remplacer par un drift constant pour le processus de rentabilité et un écart-type de la variation du cours proportionnel au cours de l'action, hypothèses plus cohérentes avec la réalité.

## **ANNEXE F : Calcul de l'espérance/variance d'une loi LogNormale**

Les fluctuations de l'action sont supposées données par un mouvement brownien géométrique :

$$dS = \mu S \cdot dt + \sigma S \cdot dWt$$

D'après le lemme d'Itô, le processus suivi par une fonction G de S et t est défini par :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S \cdot dWt$$

Soit  $G = \ln(S)$ , il vient :

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Et donc :

$$dG = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \cdot dWt$$

Si  $\mu$  et  $\sigma$  sont constants, alors G suit un processus de Wiener général. D'où :

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right)$$

Autrement écrit :

$$\ln(S_T) \sim N \left( \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right)$$

On a maintenant que  $\ln(S_T)$  suit une loi Normale de moyenne  $\ln(S_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T$  et d'écart-type  $\sigma \sqrt{T}$ .

Le cours d'une action suit donc une loi LogNormale. L'espérance et la variance d'une variable distribuée selon une loi LogNormale sont déterminées de la façon suivante :

Sous l'hypothèse que X suive une loi LogNormale,

Alors  $Y = \ln(X)$  suit une loi Normale de paramètres notés m et s.

La densité de Y s'écrit :

$$g(y) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y-m}{s} \right)^2}$$

Et la densité de  $X$  :

$$f(x) = \frac{1}{sx\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-m}{s}\right)^2}$$

Le moment d'ordre  $n$  noté  $M_n(X)$  vaut :

$$M_n(X) = \int_0^{\infty} x^n \cdot f(x) \cdot dx$$

$$M_n(X) = \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{s\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-m}{s}\right)^2} dx$$

Comme  $x = e^y$ ,

Alors :

$$M_n(X) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ny - \frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{s}\right)^2} dy$$

$$M_n(X) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m-ns^2}{s^2}\right)^2} e^{\frac{1}{2}\frac{1n^2s^4+2mns^2}{s^2}} dy$$

$$M_n(X) = e^{mn + \frac{n^2s^2}{2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-m-ns^2)^2}{s^2}} dy}_{= 1}$$

Somme d'une densité d'une loi normale de moyenne  $m+ns^2$  et d'écart-type  $s$

Donc :

$$E(X) = e^{m + \frac{s^2}{2}}$$

$$E(X^2) = e^{2(m+s^2)}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e^{2(m+s^2)} \cdot (e^{s^2} - 1)$$

En posant  $m = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T$  et  $s = \sigma\sqrt{T}$ , il vient :

$$E(X) = e^{\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \frac{\sigma^2 T}{2}} = S_0 \cdot e^{\mu T}$$

$$\text{Var}(X) = e^{2\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)} \cdot (e^{\sigma^2 T} - 1) = S_0^2 \cdot e^{2\mu T} \cdot (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

## ANNEXE G : Calcul des paramètres $u$ et $d$

Rappelons que l'on veut imiter en temps discret la dynamique continue du prix des actions. On cherche donc à ce que notre processus à temps discret ait la même espérance et la même variance que le processus à temps continu.

Le sous-jacent en temps continu suit un mouvement brownien géométrique :  $dS = (r_S - \delta) \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dW_t$  où  $r_S$  est le taux sans risque,  $\delta$  le taux de dividendes et  $dW_t$  est un processus de Wiener.

$$\text{Donc : } \frac{dS}{S} = (r_S - \delta) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

On impose donc :

$$\begin{cases} S_0 \cdot e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} = p \cdot u \cdot S_0 + (1-p) \cdot d \cdot S_0 \\ S_0^2 \cdot e^{(2(r_S - \delta) + \sigma^2) \cdot \Delta t} - S_0^2 e^{2(r_S - \delta) \cdot \Delta t} = p \cdot u^2 \cdot S_0^2 + (1-p) \cdot d^2 \cdot S_0^2 - (p \cdot u + (1-p) \cdot d)^2 \cdot S_0^2 \end{cases}$$

En simplifiant les deux équations, on obtient :

$$\begin{cases} e^{(r_S - \delta) \Delta t} = p \cdot u + (1-p) \cdot d \\ e^{(2(r_S - \delta) + \sigma^2) \Delta t} - e^{2(r_S - \delta) \Delta t} = p \cdot u^2 + (1-p) \cdot d^2 - (p \cdot u + (1-p) \cdot d)^2 \end{cases}$$

En factorisant à gauche et en développant à droite la deuxième équation, il vient :

$$\begin{cases} e^{(r_S - \delta) \Delta t} = p \cdot u + (1-p) \cdot d \\ e^{2(r_S - \delta) \Delta t} \cdot (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) = p \cdot u^2 + (1-p) \cdot d^2 - p^2 \cdot u^2 - (1-p)^2 \cdot d^2 - 2p \cdot u \cdot d \cdot (1-p) \end{cases}$$

Après factorisation supplémentaire de la deuxième équation :

$$\begin{cases} e^{(r_S - \delta) \Delta t} = p \cdot u + (1-p) \cdot d \\ e^{2(r_S - \delta) \Delta t} \cdot (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) = p \cdot u^2 \cdot (1-p) + (1-p) \cdot d^2 \cdot [1 - (1-p)] - 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot u \cdot d \end{cases}$$

La deuxième équation une fois simplifiée et la première factorisée par  $p$ , on a :

$$\begin{cases} e^{(r_S - \delta) \Delta t} = p \cdot (u - d) + d \\ e^{2(r_S - \delta) \Delta t} \cdot (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) = p \cdot u^2 \cdot (1-p) + (1-p) \cdot d^2 \cdot p - 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot u \cdot d \end{cases}$$

En isolant  $p$  dans la première équation et en réarrangeant la deuxième, on obtient :

$$\begin{cases} p = \frac{e^{(r_S - \delta) \Delta t} - d}{u - d} \\ e^{2(r_S - \delta) \Delta t} \cdot (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) = p \cdot (1-p) \cdot (u^2 - 2 \cdot u \cdot d + d^2) \end{cases}$$

Comme, selon nos hypothèses,  $p=0.5$ , on peut exprimer  $u$  en fonction de  $d$ , d'où :

$$\begin{cases} u = 2 \cdot e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} - d \\ 4 \cdot e^{2(r_S - \delta) \cdot \Delta t} \cdot (e^{\sigma^2 \cdot \Delta t} - 1) = (2 \cdot e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} - d - d)^2 \end{cases}$$

Il reste :

$$\begin{cases} u = 2e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} - d \\ 2e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} \sqrt{e^{\sigma^2 \cdot \Delta t} - 1} = 2 \cdot e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} - 2 \cdot d \end{cases}$$

Donc finalement :

$$\begin{cases} d = e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} \left( 1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \cdot \Delta t} - 1} \right) \\ u = e^{(r_S - \delta) \cdot \Delta t} \left( 1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \cdot \Delta t} - 1} \right) \end{cases}$$

## **ANNEXE H : Méthode actuarielle pour les dérivés climatiques**

**Cas d'une option sur l'indice HDD de prix d'exercice K :**

Les payoffs du call s'écrivent :

$$P_T = k \cdot \max(\text{HDD}_T - K; 0)$$

Notons  $f(\cdot)$  la fonction de distribution de la loi Normale et  $\Phi(\cdot)$  sa fonction de répartition,

$$E[P_T] = k \cdot E[\max(\text{HDD}_T - K; 0)]$$

$$E[P_T] = k \cdot \int_0^{\infty} \max(x - K; 0) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$E[P_T] = k \cdot \int_K^{\infty} (x - K) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$E[P_T] = k \cdot \int_K^{\infty} (x - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Posons  $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ , on a alors  $dx = \sigma \cdot du$

En ce qui concerne les bornes, si  $x=K$  alors  $u = \frac{K - \mu}{\sigma}$  et si  $x = \infty$  alors  $u = \infty$

On a donc :

$$E[P_T] = k \cdot \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{\infty} (u \cdot \sigma + \mu - K) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du$$

En développant, on peut écrire :

$$E[P_T] = k \cdot \left[ \sigma \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{u \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot du + (\mu - K) \int_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du \right]$$

L'intégration donne :

$$E[P_T] = k \cdot \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-\frac{u^2}{2}} \right]_{\frac{K-\mu}{\sigma}}^{\infty} + (\mu - K) \cdot \left( 1 - \Phi\left(\frac{K-\mu}{\sigma}\right) \right) \right]$$

L'espérance des payoffs est finalement donnée par :

$$E[P_T] = k \cdot \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-K)^2}{2\sigma^2}} + (\mu - K) \cdot \Phi\left(\frac{\mu-K}{\sigma}\right) \right]$$



## ANNEXE I : Code VBA

### Sub VaR\_totale()

' Initialisation des paramètres

' Spread

For l = 1 To 6

Worksheets("pricer").Cells(l+3,9).Value=Worksheets("courbestaux").Cells(263, 12).Value

Next l

' Gamme des taux

For j = 1 To 6

Worksheets("pricer").Cells(j+3,7).Value=Worksheets("courbestaux").Cells(263,1 + j).Value

Next j

' Volatilité

Worksheets("pricer").Cells(11, 4).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(263, 23).Value

' Prix de l'action

Worksheets("pricer").Cells(9, 3).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(263, 22).Value

dates\_resultats\_totale

pricing\_multiple\_totale

mise\_en\_page\_totale

profit\_loss\_totale

**End Sub**

---

### Sub dates\_resultats\_totale()

' Copie des dates vers resultats

Sheets("courbes taux").Select

Columns("A:A").Select

Selection.Copy

Sheets("resultats\_totale").Select

Columns("A:A").Select

ActiveSheet.Paste

**End Sub**

---

### Sub pricing\_multiple\_totale()

For i = 1 To 262

' Copie des taux vers le pricer

' Courbe de taux

For j = 1 To 6

Worksheets("pricer").Cells(j + 3, 7).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, j + 1).Value

Next j

' Spread

Worksheets("pricer").Cells(4, 9).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 15).Value

Worksheets("pricer").Cells(6, 9).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 15).Value

Worksheets("pricer").Cells(5, 9).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 15).Value

Worksheets("pricer").Cells(8, 9).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 15).Value

Worksheets("pricer").Cells(7, 9).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 15).Value

Worksheets("pricer").Cells(9, 9).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 15).Value

' Prix de l'action

Worksheets("pricer").Cells(9, 3).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 22).Value

' Volatilité

Worksheets("pricer").Cells(11, 4).Value = Worksheets("courbes taux").Cells(i + 1, 23).Value

' Prix de l'action

Worksheets("pricer").Select

Cells(38, 5).Copy

Worksheets("resultats\_totale").Select

Cells(i + 1, 2).Select

Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks\_:=False,

Transpose:=False

Next i

**End Sub**

**Sub profit\_loss\_totale()**

' Calcul des rendements

For i = 1 To 261

Worksheets("resultats\_totale").Cells(i+1,3)=(Worksheets("resultats\_totale").Cells(i+2,2)-

Worksheets("resultats\_totale").Cells(i + 1, 2)) / Worksheets("resultats\_totale").Cells(i + 1, 2)

Next i

' Calcul des rendements triés

Worksheets("resultats\_totale").Select

Range("C2:C264").Select

Selection.Copy

Range("D2").Select

Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks\_:=False, Transpose:=False

Range("D2:D264").Select

```
Selection.Sort Key1:=Range("D2"), Order1:=xlAscending, Header:=xlNo, _  
OrderCustom:=1, MatchCase:=False, Orientation:=xlTopToBottom, _  
DataOption1:=xlSortNormal
```

### 'Calcul des P&L

```
For i = 1 To 263
```

```
    Worksheets("resultats_totale").Cells(i+1,5)=Worksheets("resultats_totale").Cells(i+1,4)*  
    Worksheets("resultats_totale").Cells(2, 9)
```

```
Next i
```

```
End Sub
```