

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Jimmy MAHOUDEAU

Sujet : Risk Appetite à l'actif d'une entreprise de réassurance non-vie en
run-off

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

*Membre présents du jury de
l'Institut des Actuaires*

*Membres présents du jury de la
filière*

Entreprise :

Nom : AXA Liabilities Managers

Signature :

*Directeur de mémoire en
entreprise :*

Nom : Dominique Nozay

Signature :

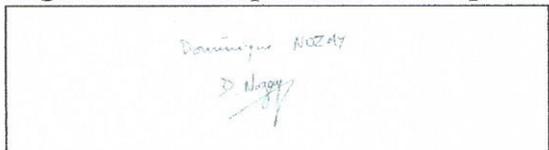
Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)**

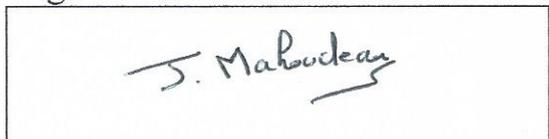
Signature du responsable entreprise



Secrétariat

Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

La Directive Solvabilité II est appliquée depuis le 1^{er} janvier 2016 et demande aux assureurs au titre du pilier 2 de mettre en place un dispositif de pilotage de leur exposition au risque au travers de l'ORSA. Sans une compréhension claire des risques de leur business, les dirigeants peuvent adopter des plans stratégiques risqués. Il apparaît opportun pour les assureurs de définir les impacts de certaines décisions sur leur exposition au risque et leur exigence de capital par un cadre d'appétence au risque pour la société.

Des modèles complexes de gestion des risques et des stress tests peuvent aider à évaluer l'impact quantitatif des risques mais la compréhension en amont de ceux-ci est tout aussi importante. Le *Risk Appetite* définit le niveau de risque qu'une entreprise accepte de prendre pour atteindre ses objectifs stratégiques. Il permet notamment de trouver un équilibre optimal entre le risque et le rendement à l'aide d'indicateurs qualitatifs et quantitatifs. Le *Risk Appetite* doit notamment permettre de répondre à la question : la compagnie est-elle capable de faire face à des événements extrêmes ?

L'objectif de ce mémoire est de présenter la notion d'appétence au risque au travers du cadre d'étude d'un portefeuille de réassurance non-vie en run-off. Les étapes du processus de *Risk Appetite* seront présentées de la déclinaison des niveaux de risque aux outils de contrôle. Cet appétit au risque se matérialisera par des seuils permettant un contrôle efficace des risques de l'entreprise. L'étude de l'allocation d'actifs initiale du portefeuille couplée au processus de gestion des risques développé conduira à la formulation d'une nouvelle allocation conforme au processus de *Risk Appetite* défini.

Mots clés : *Risk Appetite* – Allocation des risques – Pilotage stratégique des risques financiers - Run-Off - Solvabilité II - ORSA - *Risk Profile*

Abstract

The Solvency II Directive has been applied since January 2016 and urges insurers under Pillar 2 to set up a steering group of their exposure to risk through the ORSA. Without a clear understanding of the risks of their business, leaders could engage in risky strategic plans. It appears sensible for insurers to define the impact of certain decisions on their risk exposure and capital requirement by a Risk Appetite framework for the company.

Advanced risk management models and stress testing can help assess the quantitative impact of risks but understanding the risks before taking them is equally important. The Risk Appetite defines the level of risk a company is willing to take in achieving its strategic objectives. It allows to find an optimal balance between risk and return through qualitative and quantitative indicators. The Risk Appetite framework must be able to answer the question : Is the company capable of surviving extreme events ?

The objective of this memory is to present the concept of Risk Appetite through the study of a non-life reinsurance portfolio in run-off. The steps of Risk Appetite will be presented from the declination of risk levels to control tools. This appetite for risk will be materialized by thresholds for an effective control of business risks. The study of the initial allocation of portfolio assets coupled with the developed risk management process will lead to the formulation of a new allocation consistent with the process of Risk Appetite defined.

Key words : *Risk Appetite* – Risk allocation – Strategic management of financial risks
- Run-Off - Solvency II - ORSA - *Risk Profile*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier **Dominique Nozay**, mon maître de stage, pour son encadrement, sa disponibilité, ses conseils et ses remarques pertinentes qui m'ont permis d'évoluer tout au long de mon alternance.

Mes sincères remerciements s'adressent également à l'ensemble des membres de mon équipe Corporate Finance composée de **Arnaud de Resseguier**, **Dominique Nozay** et **Yasmina El Jahiri** ainsi qu'à toute l'équipe du service Actuariat pour leur disponibilité et leurs conseils.

Je voudrais ensuite remercier l'équipe pédagogique de l'ISUP qui m'a permis d'avoir des connaissances suffisantes pour effectuer cette alternance au sein de l'équipe Corporate Finance ainsi que mon tuteur pédagogique, **Jean-Marie Nessi**, pour ses remarques pertinentes dans l'élaboration de mon mémoire.

Enfin, j'adresse également tous mes remerciements à l'ensemble des personnes que j'ai pu rencontrer au sein d'AXA Liabilities Managers pour leur accueil et l'ambiance agréable qui a régné pendant toute mon alternance.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Table des figures	ix
Introduction	1
1 Appétit pour le risque et outils associés	3
1.1 Solvabilité II et Risk Appetite	3
1.2 Définition du Risk Appetite	5
1.2.1 Notions liées au Risk Appetite	5
1.2.2 Les étapes du Risk Appetite	7
1.2.2.1 Processus de pilotage des risques	7
1.2.2.2 Validation du processus <i>Risk Appetite</i>	8
1.3 Dimensions couvertes par le Risk Appetite	10
1.4 La mesure du risque	11
1.4.1 Choix des normes	11
1.4.2 Le choix de la métrique	12
1.4.3 Key Financial Indicators	13
1.4.4 Functional Risk Indicators	14
1.4.5 Processus en cas de dépassement d'un seuil	15
2 Présentation du run-off de réassurance non-vie	17
2.1 Le run-off de réassurance non-vie	17
2.1.1 Définition	17
2.1.2 Particularités	18
2.1.3 Contexte du run-off et d'AXA LM	18
2.1.4 Réglementation des entreprises en run-off de réassurance	19
2.1.5 Application de Solvabilité II	20
2.2 Les commutations	20
2.2.1 Levier de création de valeur sur les portefeuilles en run-off	20
2.2.2 Définition	20
2.2.3 Les raisons des commutations	21
2.2.4 Le prix de commutation	22
2.3 Cadence de règlement	23

2.3.1	La méthode Chain-Ladder	23
2.3.2	Triangle run-off et retraitement	24
2.4	De Solvabilité I à Solvabilité II	25
2.5	Présentation d'un portefeuille fictif	25
3	Éléments constitutifs du <i>Risk Appetite</i> pour le portefeuille <i>RUNOFF</i>	29
3.1	Contrainte et métrique retenues	29
3.2	Module risque de marché	32
3.2.1	Le risque de taux d'intérêt (SCR_{taux})	32
3.2.2	Le risque sur les actions (SCR_{action})	33
3.2.3	Le risque sur l'immobilier ($SCR_{\text{immobilier}}$)	34
3.2.4	Le risque de change (SCR_{change})	34
3.2.5	Le risque de crédit (SCR_{spread})	35
3.2.6	Le risque de concentration ($SCR_{\text{concentration}}$)	36
3.2.7	Agrégation des risques de marchés	37
3.3	Outil d'allocation du <i>Risk Appetite</i>	38
3.3.1	Outil théorique d'allocation	38
3.3.2	Principe	40
3.3.3	Application	40
3.4	Allocation d'actifs pour le portefeuille	42
3.5	Contrainte de résultat	44
3.6	Contrainte de liquidité	46
3.6.1	Liquidité en cash	46
3.6.2	Approche liquidité globale	46
4	Comparaison des chocs d'appétence au risque modélisés par les modèles classiques et ceux donnés par le GRM	49
4.1	Simulation de loi Uniforme	49
4.2	Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	51
4.3	Modèle de Vasicek	55
4.4	Modèle de Merton	58
4.5	Comparaison des chocs	64
5	Approche ALM et sensibilité des limites à des chocs	65
5.1	Développement ALM du modèle Excel	65
5.2	Sensibilité sur les réserves	68
5.3	Sensibilité sur les commutations	71
5.4	Sensibilités sur les réserves et commutations	73
5.5	Liquidité et niveau de cash	74
5.6	Réallocation finale	75
5.7	Actif Infrastructure	76
	Conclusion	81
	A Données	83
A.1	Données de marché	83

A.1.1	Taux EONIA 2015-2016	83
A.1.2	Données générales de marché	83
A.1.3	Symetric Adjuster Action	85
A.2	Données non-vie	85
A.2.1	Matrice de corrélation non-vie	85
A.2.2	Diversification géographique du portefeuille <i>RUNOFF</i>	86
B	Schéma d'allocation d'Euler	87
B.1	SCR _{macro-risque} allocation	87
B.2	SCR _{micro-risque} allocation	88
C	Modèles de simulation des chocs	90
C.1	Modèle de Taux	90
C.1.1	Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	90
C.1.2	Modèle de Vasicek	90
C.2	Modèle de Merton	91
C.2.1	Introduction processus Z_i	91
C.2.2	Propriété des rendements	91
C.2.3	Calcul des moments	93
	Bibliographie	94

Table des figures

1.1	Les 3 piliers de Solvabilité II	4
1.2	Bilan Solvabilité II	5
1.3	Définition du cadre de <i>Risk Appetite</i>	9
1.4	Contraintes dans le cadre du <i>Risk Appetite</i>	14
1.5	Alerte et Limite du <i>Risk Appetite</i>	14
2.1	Prix d'une commutation à l'équilibre	22
2.2	Triangle de paiements cumulés	23
2.3	Triangle de paiements cumulés en run-off	24
2.4	Triangle de paiements cumulés ajusté	24
2.5	Répartition des réserves par LoB	26
2.6	Répartition des actifs investis du portefeuille	26
2.7	Cash-flows constitutifs de notre BEL	27
2.8	Hypothèses de commutations du portefeuille <i>RUNOFF</i>	27
2.9	Cash-flows réels de nos passifs incluant les commutations	27
3.1	Tableau des chocs des risques financiers	30
3.2	Tableau des chocs des risques non-vie	30
3.3	Tableau des chocs du risque opérationnel	30
3.4	Modélisation de notre outil <i>Risk Appetite</i>	32
3.5	Corrélations et chocs SCR_{Action}	34
3.6	Avant Allocation d'Euler	40
3.7	Après Allocation d'Euler	41
3.8	Répartition par sous-risque du <i>Risk Capacity</i>	41
3.9	Diversification du <i>Risk Capacity</i> sur les 3 sous-modules	42
3.10	Répartition des allocations possibles en fonction du SCR	44
3.11	Rendement des allocations en fonction du SCR	45
3.12	Position actuelle, Alerte et Limite du Risque de Liquidité	47
4.1	Simulation de la loi uniforme par l'algorithme du Tore $p_d = 5$	50
4.2	Paramètres du modèle de Cox-Ingersoll-Ross	53
4.3	Courbes des taux zéro-coupon	53
4.4	Chocs fournis par le modèle de Cox-Ingersoll-Ross	54
4.5	Paramètres du modèle de Vasicek sous la probabilité \mathbb{Q}	56
4.6	Paramètres du modèle de Vasicek sous la probabilité \mathbb{P}	57
4.7	Chocs fournis par le modèle de Vasicek	57
4.8	Estimateurs du modèle de Black & Scholes	58
4.9	Evolution historique des actifs	62

4.10	Chocs fournis par le modèle de Merton	62
5.1	<i>Cash Flow Matching</i> avec notre allocation initiale au 31/12/2015	67
5.2	Evolution des SCR avec l'utilisation du modèle ALM et allocation initiale	67
5.3	Contraintes d'investissements et dimensions de notre <i>Risk Appetite</i>	68
5.4	Cash-flows du BEL suite à la sensibilité de +13%	69
5.5	Cash-flows de nos passifs suite à la sensibilité de +13%	69
5.6	Cash-flows de nos passifs suite aux sensibilités +/- 20%	72
5.7	Montant de cash relatif au risque de liquidité, méthode globale standard	74
5.8	Montant de cash relatif au risque de liquidité, méthode proposée	74
5.9	Contraintes d'investissements et dimensions de notre <i>Risk Appetite</i>	75
5.10	Allocation initiale et allocation cible	76
A.1	Taux EONIA sur l'année 2015-2016	83
A.2	Symetric Adjuster Action	85
A.3	Diversification géographique du portefeuille <i>RUNOFF</i>	86

Introduction

Les notions d'appétence au risque (*Risk Appetite*) et de tolérance au risque (*Risk Tolerance*) sont devenues des thèmes d'étude pour une mise en place au sein des compagnies d'assurance d'une gestion stratégique des risques. Cette gestion s'intègre parfaitement dans le cadre de Solvabilité II qui introduit des pré-requis en terme de pilotage qualitatif et quantitatif des risques.

L'objectif de ce mémoire est double : d'une part, il doit permettre l'assimilation du concept du *Risk Appetite* et, d'autre part, il illustre sa formulation et son intégration dans le processus de gestion des risques d'une entreprise de réassurance non-vie en run-off. L'approche des sociétés en run-off est particulière car la gestion des risques est d'autant plus primordiale que le montant des revenus est quasi-nul voire nul si l'on exclut les primes marginales comme la prime de reconstitution.

L'ensemble des étapes d'intégration du *Risk Appetite* dans le processus de gestion des risques sera présenté : formulation du *Risk Appetite*, déclinaison à tous les niveaux de hiérarchie jusqu'au niveau opérationnel, outils de contrôle, etc. Cette formalisation de l'appétence au risque de l'entreprise permettra d'établir l'exposition de la compagnie autour de 4 dimensions : solvabilité, valeur, résultat et liquidité. Par la suite, l'application du *Risk Appetite* au sein d'un portefeuille fictif de réassurance non-vie en run-off permettra de mieux comprendre le réel avantage de la mise en place du *Risk Appetite* dans la gestion des risques, plus particulièrement notre appétit pour le risque à l'actif.

L'approche a consisté à doter l'entreprise d'un réel outil reflétant une vision globale de ses risques financiers. Le but étant de passer d'une vision de gestion où le Comité Exécutif fixait des limites d'investissements de façon empirique à une approche plus fine permettant la définition de limites d'allocations (*Risk Limits*) pour chaque classe d'actifs. Ainsi, nous montrerons comment le *Risk Appetite* permet d'optimiser la valeur de l'entreprise tout en restant dans le cadre de risque défini par la Direction.

Chapitre 1

Appétit pour le risque et outils associés

1.1 Solvabilité II et Risk Appetite

Une des conséquences majeures de l'application de Solvabilité II depuis le 1^{er} janvier 2016 est de remettre en question les processus actuels de Risk Management.

L'appétence au risque n'est pas une notion récente. En revanche, c'est une notion qui est de plus en plus abordée car elle permet de répondre aux nouvelles exigences réglementaires en matière de gestion des risques internes.

La réforme Solvabilité II se compose de 3 piliers :

- 1 Premier pilier : les exigences quantitatives, notamment en matière de fonds propres et de calculs des provisions techniques
- 2 Deuxième pilier : les exigences en matière d'organisation et de gouvernance des organismes
- 3 Troisième pilier : les exigences en matière d'informations prudentielles et de publication

Le pilier 1 a pour objectif de mettre en place :

- les méthodes d'évaluation des provisions techniques : en accord avec les développements de l'IASB (International Accounting Standards Committee), les provisions techniques doivent être calculées en « Best Estimate », puis tenir compte d'une marge pour risque (Risk Margin) et d'une marge résiduelle (Residual Margin) ;
- les méthodes d'estimation des besoins en capital : évaluation du MCR (Minimum Capital Requirement) et SCR (Solvency Capital Requirement).

Le pilier 2 a deux objectifs :

- s'assurer que la compagnie est bien gérée et est en mesure de calculer et maîtriser ses risques ;
- s'assurer qu'elle est bien capitalisée.

Le pilier 3 et dernier pilier énonce les éléments propres au nouveau rapport de solvabilité et de situation financière qui devra être présenté au public et aux autorités de contrôle avec au minimum une périodicité annuelle.

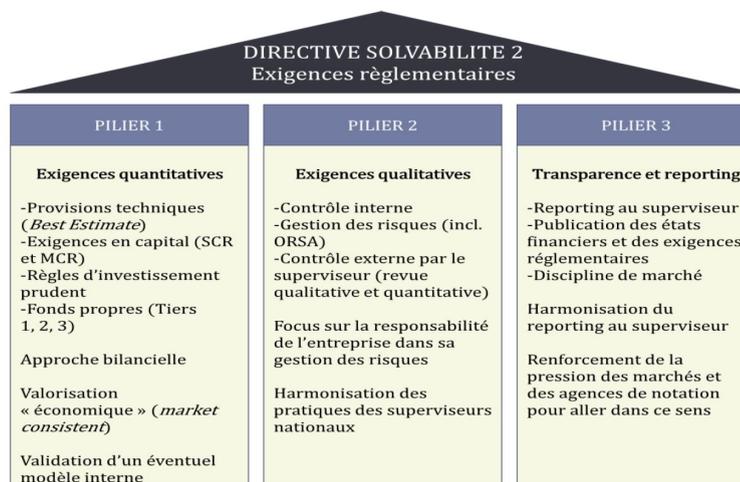


FIGURE 1.1: Les 3 piliers de Solvabilité II

Solvabilité II a mis en place deux niveaux d'exigence en capital règlementaire relatifs au pilier 1 :

- Le MCR (Minimum Capital Requirement) : minimum de fonds propres que doit détenir une entreprise d'assurances pour exercer. Son calcul doit être effectué une fois par trimestre. Lorsque le montant des fonds propres de base éligibles tombe en dessous du minimum de capital requis, l'agrément des entreprises d'assurance et de réassurance leur est retiré si elles se révèlent incapables de ramener rapidement ce montant au niveau du minimum de capital requis. Les Autorités de contrôle prennent la direction de l'entreprise et sont en charge de ramener la compagnie à une situation financière plus favorable.
- Le SCR (Solvency Capital Requirement) : capital cible qui a pour but d'absorber les pertes significatives en cas de sinistralité exceptionnelle et de garantir aux assurés le paiement des prestations contractuelles à tout moment. Un niveau de fonds propres supérieur au SCR garantit la solvabilité de l'entreprise. Le SCR est calculé à un niveau de quantile 99,5% soit un scénario de perte de 1 tous les 200 ans.

Un autre élément de Solvabilité II est l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment ou Évaluation interne des risques et de la solvabilité) relatif au pilier 2 :

L'évaluation de sa propre position en termes de risque et de solvabilité est primordiale pour un régime risk-based comme Solvabilité II. Cette approche nécessite, notamment, que l'entreprise détienne un montant proportionné au risque auquel elle est exposée. L'ORSA permet également à l'entité d'obtenir une perspective tournée vers l'avenir. Il est crucial que celle-ci s'interroge sur les évolutions probables de son profil de risque¹ en fonction de l'environnement extérieur dans le long terme.

Mettre en place l'ORSA force l'entreprise à obtenir une compréhension réelle et pratique des risques qu'elle encourt. Il permet de déterminer les problèmes qui impactent majoritairement les besoins globaux en solvabilité.

Nous allons nous intéresser au concept d'appétence au risque inclus dans l'ORSA, en insistant notamment sur les définitions utilisées pour ce mémoire.

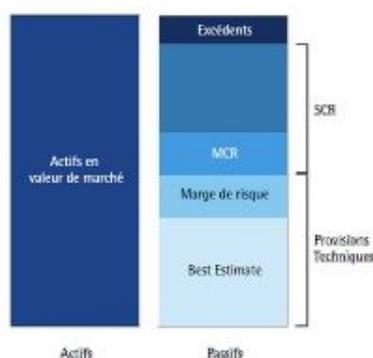


FIGURE 1.2: Bilan Solvabilité II

1.2 Définition du Risk Appetite

1.2.1 Notions liées au Risk Appetite

L'agence de notation Standard and Poor's définit le *Risk Appetite* comme : « un cadre dans lequel l'assureur établit les risques qu'il souhaite acquérir, éviter, retenir ou retirer ».

Trois termes particuliers sont liés à la notion de *Risk Appetite* :

- les *Risk Preferences* qui sont des notions qualitatives ;
- les *Risk Tolerances* qui sont des notions quantitatives ;
- les *Risk Limits* qui sont des notions quantitatives.

Le *Risk Limit* (la limite au risque) est constitué du *Risk Preference* et du *Risk Tolerance*. L'entreprise doit donc choisir quels risques elle veut prendre afin de poursuivre son

1. *Risk Profile*

activité. Pour chacun d'entre eux, elle doit déterminer sa tolérance au risque. Ces deux éléments permettent de déterminer la limite que s'impose l'entreprise, pour le risque en question.

Définissons les termes relatifs au *Risk Appetite* :

Préférence de risque (*Risk Preference*) :

Type de risque que l'entreprise est encline à prendre en vue de poursuivre son activité et son développement.

Tolérance au risque (*Risk Tolerance*) :

Niveau de risque que l'entreprise accepte de prendre en vue de poursuivre son activité et son développement pour un périmètre plus restreint. C'est une répartition à un niveau plus fin du Risk Appetite lequel est à un niveau global.

Limites opérationnelles (*Risk Limits*) :

Niveau maximal par type de risque, alloué aux différentes entités opérationnelles ou aux différentes branches d'assurances afin que celles-ci exercent leurs activités courantes de façon cohérente.

Profil de Risque (*Risk Profile*) :

Ensemble des caractéristiques de l'entreprise relatives au risque (ensemble des risques, expositions correspondantes, choix des modes de protection, etc).

Le *Risk Profile* représente le panel d'informations disponibles permettant de traiter la mesure des risques de la société.

Il s'agit donc d'une notion :

- agrégée : elle concerne tous les risques qui peuvent impacter l'organisme ;
- globale : elle ne traite pas les risques séparément.

En fonction des niveaux de pertes constatées et des conséquences au niveau de l'entreprise, les membres de la Direction doivent décider quel point de la courbe devra représenter le niveau de risque maximal qu'ils sont prêts à prendre pour poursuivre le développement de leur activité. C'est précisément ce que l'on appelle le *Risk Appetite* dont on donne une définition succincte.

***Risk Appetite* :**

Niveau de risque agrégé qu'une entreprise accepte de prendre afin de mener à bien son objectif de pérennité et de développement de son activité.

1.2.2 Les étapes du Risk Appetite

Le processus de Risk Appetite se fait en 7 étapes segmentées en 2 parties.

Les 4 premières étapes constituent un modèle de type Top-Down permettant de passer d'une approche globale d'appétence au risque à une approche plus fine.

Les 3 étapes suivantes permettent la validation du processus développé pour maîtriser les risques via un modèle de type Bottom-Up.

1.2.2.1 Processus de pilotage des risques

L'utilisation des risques comme outil d'aide à la décision est précisément ce que l'on nomme le pilotage des risques. Le pilotage du profil de risque se fait en quatre étapes via un modèle de décision Top-Down :

Etape 1 *Risk Capacity*

L'entreprise doit déclarer son niveau maximal de risque à un niveau global (*Risk Capacity*). Ce niveau doit être cohérent avec ses objectifs de développement. Cette enveloppe de risque est déterminée par le Comité Exécutif et constitue la première étape du *Risk Appetite*.

L'évaluation de ce montant nécessite les informations qui suivent :

- la vision économique du montant de capital disponible ;
- la liquidité du capital et la capacité à lever du capital ;
- la qualité du capital ;
- la solidité des résultats ;
- et la capacité de l'activité à générer de la valeur.

Etape 2 *Risk Preference*

L'entreprise doit traduire de façon qualitative ses préférences (*Risk Preference*) en matière de risque.

Etape 3 *Risk Tolerance*

Afin d'opérationnaliser le *Risk Appetite* défini par la Direction et obtenir notre *Risk Tolerance*, nous procédons à l'allocation de la limite globale en classes de risques de façon quantitative, c'est ce que l'on appelle l'allocation du *Risk Appetite*. Le *Risk Tolerance* est une traduction à un niveau plus restreint de l'appétence au risque.

Etape 4 *Risk Limits*

Enfin, nous réallouons chacun de nos *Risk Tolerance* et *Risk Preference* afin d'obtenir des contraintes pratiques pour le pilotage de l'entreprise. Ces *Risk Limits* sont des seuils de contrôle de l'activité et ont un objectif purement opérationnel.

La stratégie de gestion des risques de l'entreprise est complétée avec la détermination des risques qu'elle souhaite acquérir, céder, diversifier ou retenir.

L'estimation d'un niveau de risque agrégé nécessite :

- les métriques qui seront retenues pour l'évaluation des risques ;
- les modes d'agrégation et d'allocation des risques utilisés² ;
- l'outil d'agrégation.

Les objectifs du pilotage des risques sont les suivants :

- le suivi des évolutions des risques et, en cas de dépassement des seuils limites déterminés au niveau opérationnel, donner l'alerte ;
- le choix des risques que l'entreprise souhaite étudier et la détermination de l'entreprise par rapport à ces risques : acquisition, diversification, cession ou conservation.

Une fois les objectifs de l'entreprise définis, le pilotage de risque, pour être efficace, demande la création et la mise en place des éléments suivants :

- Des tableaux de bord complétés par des indicateurs-clés³ adaptés aux risques étudiés.

Les informations étudiées dans ces tableaux de bord sont régulièrement actualisées et contrôlées. Ceci permettra d'effectuer un suivi fiable, exhaustif et fréquent des facteurs de risque. Ils seront à l'origine de prises de décisions dans le cas de la réalisation d'un évènement majeur qui rapproche la valeur des indicateurs clés des seuils opérationnels.

- La mise en place d'une gouvernance des risques.

Ces unités permettront de faire le lien entre le *Risk Appetite* défini au niveau global, et toutes ses traductions à des niveaux moindres, jusqu'au niveau opérationnel avec les *Risk Limits*. Pour être efficaces, ces unités devront être présentes pour tous les facteurs de risque étudiés. En cas d'éloignement ou de modification soudaine du *Risk Appetite* par décision de la Direction, cette gouvernance doit agir en conséquence et prendre des mesures pour mettre en place les nouveaux objectifs (changement de seuils, des outils utilisés, ...).

1.2.2.2 Validation du processus *Risk Appetite*

Une fois les limites globales traduites en limites opérationnelles (*Risk Limits*), un processus de validation doit s'effectuer afin de s'assurer du respect des règles fixées.

2. Partie III du mémoire

3. *KFI* et *FRI* au I.4

Etape 5 Communication

Cette étape a pour objectif de vérifier que les objectifs et limites ont été correctement traduits à tous les niveaux hiérarchiques et opérationnels. Le manager s'assure que la politique de risque est communiquée à tous les échelons de l'organisation et que chacun comprend son rôle et ses responsabilités au sein de l'organisation. Les informations pertinentes sur les risques sont communiquées aux différentes parties prenantes de l'entreprise.

Etape 6 Reporting

Cette étape a pour objectif de restituer les chiffres à la fin de période de pilotage des risques aux niveaux hiérarchiques supérieurs. A la fin de la période de suivi, toutes les données sont restituées au niveau hiérarchique supérieur de façon à assembler les suivis de tous les risques susceptibles d'impacter la société et que la Direction a décidé d'étudier.

Etape 7 Contrôle

L'objectif est de s'assurer que le niveau du *Risk Appetite* est vérifié à un niveau agrégé. Cette étape constitue l'ultime étape de la formulation du *Risk Appetite* en fin de période. C'est l'étape de vérification des limites fixées par la Direction dans la prise de risque de l'entreprise. Les données qui ont été transmises pendant la période de reporting sont agrégées de façon à vérifier que l'appétence au risque a été respectée au niveau global de la société.

Ainsi, une fois que le profil de risque au niveau opérationnel est obtenu, il doit être agrégé au niveau intermédiaire puis de nouveau agrégé de façon à vérifier qu'il correspond au niveau de *Risk Appetite* défini en début de période.

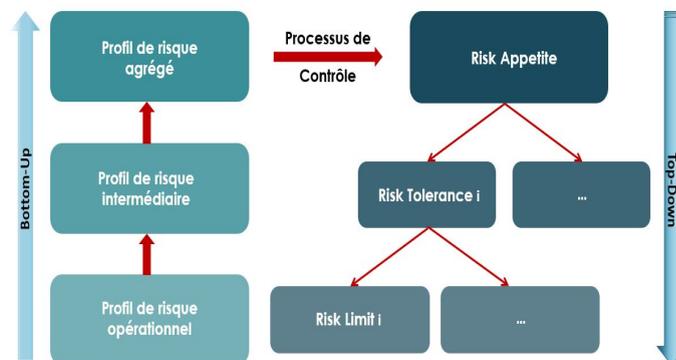


FIGURE 1.3: Définition du cadre de *Risk Appetite*

1.3 Dimensions couvertes par le Risk Appetite

Le *Risk Appetite* a été défini comme le niveau de risque agrégé qu'une entreprise accepte de prendre en vue de la poursuite de son activité et de son développement. Au moment de définir le processus, il faut généralement commencer par identifier les parties intéressées par la stratégie de pilotage des risques de l'entreprise. La présentation de ses différents acteurs, certes réductrice au regard de la complexité de leurs rôles, est nécessaire. L'un des principaux challenges de la définition du *Risk Appetite* est de réconcilier les différentes parties prenantes :

- Les actionnaires : Intéressés par le retour sur investissement, la création de valeur et la faible volatilité des résultats ;
- Les assurés : Intéressés par un ratio de solvabilité satisfaisant ;
- Le régulateur : Intéressé par un ratio de solvabilité suffisant et une bonne maîtrise des risques ;
- Les détenteurs de dette : Intéressés par un haut niveau de capital ;
- Les agences de notation : Intéressées par une bonne maîtrise des risques et un niveau de capital suffisant ;
- Les gestionnaires internes : Intéressés par une cohérence dans le profil de risque suivi ;
- La Direction : Intéressée par la réconciliation des intérêts des différents acteurs, notamment les actionnaires et les assurés.

D'un point de vue opérationnel, il peut s'avérer que la multiplicité des intérêts des parties prenantes et le trop grand nombre de dimensions de risque rendent les décisions de gestion compliquées, voire contradictoires. Il semble donc préférable de ne pas trop multiplier le nombre de mesures et de ne retenir que les dimensions essentielles que l'entreprise souhaite piloter en priorité.

Le *Risk Appetite* efficient doit reposer sur un nombre limité de dimensions, nous en re-tenons quatre :

- 1 **Résultat** : la différence entre un quantile et l'espérance de la distribution du résultat économique à un horizon donné.
- 2 **Valeur** : la différence entre le quantile et l'espérance de la distribution de la valeur du bilan à un horizon donné.
- 3 **Solvabilité** : le SCR selon la norme Solvabilité II. Cette dimension est particulièrement suivie par les investisseurs car elle correspond au capital consommé pour que l'entreprise exerce l'activité. Le plan de développement et les processus

de gestion des risques sont largement suivis par la Direction afin de minimiser la consommation en capital de l'entreprise.

- 4 **Liquidité** : probabilité que l'entreprise possède une ressource de cash insuffisante pour payer les cash flows présents ou futurs. L'entreprise doit maintenir une liquidité suffisante pour faire face aux paiements.

Dans notre étude, l'horizon donné pour le calcul est d'une année.

Le *Risk Profile* sera mesuré avec une approche dérivée de celle utilisée pour le calcul du SCR. Des facteurs de risques significatifs seront identifiés, des chocs sur ces facteurs de risques seront appliqués. Ils seront ensuite agrégés avec des matrices de corrélations de la formule standard. Ce choix est réalisé pour limiter la complexité des études techniques préalables au déploiement du processus.

Le *Risk Appetite* ne se limite pas à savoir sur quelles dimensions il sera appliqué, l'entreprise doit également s'interroger sur le niveau de sévérité des risques qu'elle souhaite considérer. Par exemple, les investisseurs peuvent souhaiter avoir une maîtrise des risques survenant une fois tous les 5 à 10 ans car cette durée correspond à la durée moyenne d'un mandat de direction. Une maîtrise des risques à un niveau plus faible n'est pas souhaitable car elle apporte plus de contraintes avec plus de processus internes tout en perdant son rôle de contrôle à moyen terme. La maîtrise des risques ne doit pas s'éloigner des problématiques courantes de l'entreprise. Aussi, la définition du niveau de risque aura également un impact opérationnel sur la complexité d'administration de l'ensemble.

1.4 La mesure du risque

La mesure de risque est laissée au choix de l'entreprise, mais elle fait partie intégrante de la définition du processus de pilotage des risques. Cela implique le choix d'une norme et d'une métrique, d'outils mathématiques mesurant le risque et le choix d'indicateurs clés mesurant les seuils d'alerte et de limite.

1.4.1 Choix des normes

Le choix des normes de mesure a également un fort impact sur les résultats de mesure. Il en existe principalement deux sortes :

- la valorisation économique : la notion d'évaluation économique ne prend pas en compte l'aspect prudentiel. Il s'agit donc du calcul de valeur à l'instant présent de l'entreprise et de son activité.
- La valorisation comptable : couramment utilisée en valeur historique avant le passage sous la norme Solvabilité II, aujourd'hui les normes comptables se tournent

vers les normes French GAAP ou IFRS. De par la construction des normes IFRS, l'évaluation comptable repose sur un aspect prudentiel.

Comme défini dans la dimension résultat, nous choisirons l'approche économique dans notre processus de pilotage.

1.4.2 Le choix de la métrique

Le choix de cette métrique doit permettre une mise en place réussie de l'évaluation des risques au sein de la compagnie et de faciliter la procédure d'évaluation.

Cette métrique est aussi un outil de communication. La communication du niveau de *Risk Appetite* doit être aisée afin de garantir une assimilation auprès de toutes les parties prenantes. Le *Risk Appetite* efficient doit reposer sur un nombre limité de métriques. Les métriques choisies sont adaptées si elles peuvent être consolidées et agrégées sur l'ensemble des secteurs et activités de l'entreprise.

Les métriques utilisées pour la mesure de risque doivent être intuitives, stables, faciles à calculer, cohérentes et interprétables en termes économiques.

Développons la notion de cohérence selon [4] Artzner (1999) : pour être cohérente, une mesure de risque doit satisfaire plusieurs propriétés.

□ **Propriété** Mesure de risque cohérente

Soient deux mesures positions de risque X et Y . La mesure de risque $\rho(\cdot)$ est considérée cohérente si elle est :

- Invariante par translation : $\forall n \in \mathbb{R}, \rho(X + n) = \rho(X) + n$
- Sous-additive : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- Homogène positive : $h > 0, \rho(h.X) = h.\rho(X)$
- Monotone : $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

Un premier exemple de mesure de risque est la *Value-at-Risk* (VaR).

La *Value-at-Risk* à un quantile p est définie tel que :

$$VaR_p[X] = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq p\}, \quad p \in (0, 1) \quad (1.1)$$

où $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$

Cependant, la *Value-at-Risk* n'est pas une mesure cohérente. Pour obtenir de l'information sur ce qui se passe après ce quantile p , il faut considérer une autre mesure de risque, la *Tail Value-at-Risk* (TVaR), définie par :

$$TVaR_p[X] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 VaR_q[X] dq, \quad p \in (0, 1) \quad (1.2)$$

La *Tail Value-at-Risk* est une mesure de risque cohérente. Ces deux mesures sont des cas particuliers de mesure de distorsion utilisées en assurance.

Nous choisissons la métrique *Value-at-Risk* pour des raisons pratiques en termes d'application et par la nature du calcul du SCR. La *Tail Value-at-Risk* peut donner une idée de la dispersion de la queue de distribution.

Compte tenu de ce choix et des dimensions retenues dans notre *Risk Appetite*, deux mesures semblent adaptées :

- La mesure *Earning-at-Risk* à un quantile $x\%$ à l'horizon d'un an ($EaR_{x\%}^{1an}$). Cette mesure désigne, pour un niveau de probabilité souhaité, le montant potentiel de diminution des résultats par rapport aux résultats attendus sur une période d'un an.
- La mesure *Capital-at-Risk* à un quantile $x\%$ à l'horizon d'un an ($CaR_{x\%}^{1an}$). Cette mesure peut notamment intervenir sur la dimension valeur du *Risk Appetite*.

1.4.3 Key Financial Indicators

Les indicateurs financiers clés (*Key Financial Indicators* ou *KFIs*) permettent au niveau opérationnel de mettre en évidence quand et comment les limites sont dépassées ou atteignent des seuils d'alerte. Les indicateurs sont choisis par le Comité Exécutif et couvrent les 4 dimensions.

Risk Appetite : Key Financial Indicators

Type d'indicateur		Choc	Alerte	Limite
Résultat	Economique	1 : 20 ans	60% résultat	50% résultat
Solvabilité	Ratio Solvabilité II	1 : 20 ans	100%	80%
Valeur	Fonds Propres	1 : 20 ans	var. 30%	var. 40%
Liquidité	Excès de liquidité	1 : 200 ans	A définir ⁴	0 €

Le *Risk Appetite* stratégique est défini comme la volatilité acceptée sur nos *KFIs*. Cette volatilité est capturée à travers les chocs :

- Choc sévère : 1 tous les 20 ans, intervalle de confiance à 95% ;
- Choc extrême : 1 tous les 200 ans, intervalle de confiance à 99,5%.

4. Ce seuil est calculé de façon à correspondre à 80% du niveau limite

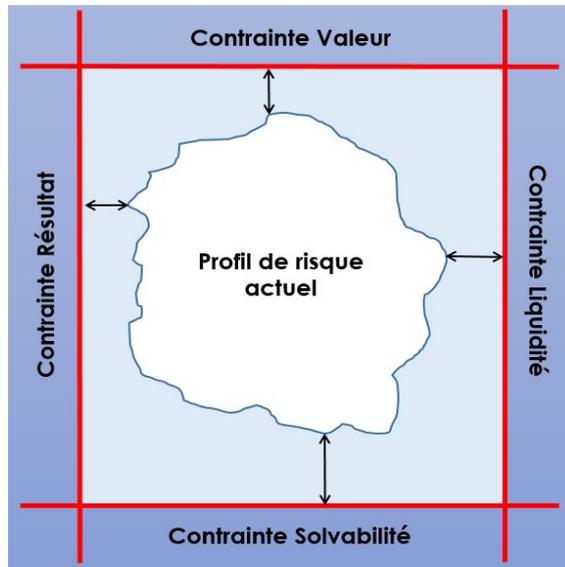


FIGURE 1.4: Contraintes dans le cadre du *Risk Appetite*

Les deux seuils (alerte et limite) nous permettent dès lors de segmenter notre risque en 3 zones :

- Zone rouge : l'exposition au risque est au dessus de la limite ;
- Zone orange : l'exposition au risque est en dessous de la limite mais au dessus de l'alerte ;
- Zone verte : l'exposition est en dessous de l'alerte, c'est la zone de management.

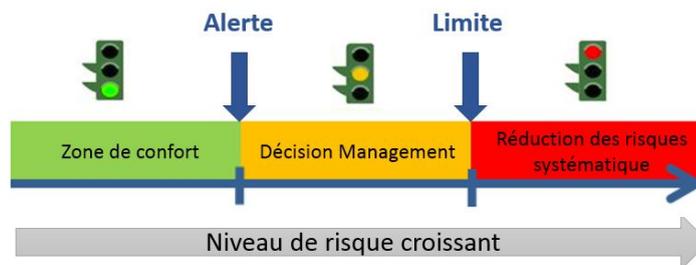


FIGURE 1.5: Alerte et Limite du *Risk Appetite*

1.4.4 Functional Risk Indicators

Les indicateurs de risque opérationnels (*Functional Risk Indicators* ou *FRI*s) permettent de contrôler le risque au travers des décisions de tous les jours. En effet, la position en fonds propres ou le niveau de SCR n'étant pas calculés constamment, il est nécessaire de définir des limites opérationnelles pour la gestion quotidienne.

Les *FRI*s sont très liés aux *KFI*s, ils permettent d'avoir une vision beaucoup plus rapide des positions de risque tenues chaque jour. Les *FRI*s doivent être cohérents avec nos *KFI*s afin de vérifier que le respect des seuils des *FRI*s assure le respect de ceux des

KFIs. Par ailleurs, le nombre de *FRI*s doit être suffisamment fin et limité afin qu'ils soient facilement utilisables et pas trop contraignants. Pour chaque *FRI* on définit un plan d'action en cas de dépassement des seuils.

La représentation des seuils se fait de la même façon que pour les *KFIs* comme le montre la figure 1.5 Alerte et Limite du *Risk Appetite*.

1.4.5 Processus en cas de dépassement d'un seuil

Dès que le niveau d'alerte est dépassé pour un *Risk Limit*, un *KPI* ou un *FRI*, une analyse sur l'origine du dépassement et une étude sur les actions possibles de réduction du risque sont effectuées.

Dès que la limite est dépassée, la procédure de réduction des risques est enclenchée.

Tant que la limite n'est pas dépassée, la procédure de réduction des risques n'est pas obligatoire, c'est aux acteurs en charge des indicateurs de prendre la décision.

Pour les *FRI*s et les *Risk Limits*, c'est au Risk Management de prendre les décisions adaptées en cas de dépassement du seuil d'alerte.

Pour les *KPI*s, leurs fonctions étant plus globales, le Comité Exécutif est directement informé.

Chapitre 2

Présentation du run-off de réassurance non-vie

2.1 Le run-off de réassurance non-vie

2.1.1 Définition

Lorsqu'une compagnie d'assurances ou de réassurance décide de cesser les souscriptions d'une certaine branche d'activité (de dommages, responsabilité civile ou RC, ...), cette branche est placée en « run-off ». De nombreuses compagnies ont ainsi des filiales ou des portefeuilles dont elles arrêtent l'activité, à cause d'un changement d'orientation stratégique ou de résultats techniques déficients liés à une souscription de mauvaise qualité.

Ces portefeuilles en run-off sont généralement classés selon les deux types de passifs qu'ils peuvent contenir :

- Déroulement court : les passifs à déroulement court (tels que ceux liés à des risques de dommages type incendie ou tempête) tendent à se régler sur une période de 2 à 4 ans, et la prévisibilité de leur coût final est bonne.
- Déroulement long : les passifs à déroulement long (de type responsabilité civile employeur, amiante, pollution, risques de santé, ...) peuvent nécessiter plus de 20 ans pour être réglés, compte tenu des multiples et complexes procédures juridiques. Ces risques sont dits « volatils », car la prévisibilité initiale liée à la durée et au coût de leur règlement est peu fiable.

2.1.2 Particularités

Les quatre principales particularités du run-off sont les suivantes :

- ① Quasi absence de primes : quand un portefeuille est mis en run-off, la souscription de nouveaux contrats est arrêtée, il n'y a donc pas de rentrée de fonds. Il peut néanmoins y avoir des primes de recouvrement et des primes d'ajustement, mais le flux qu'elles génèrent est négligeable par rapport aux paiements des sinistres.
- ② Longue durée des sinistres : très souvent les contrats en run-off sont des contrats liés aux risques pollution, amiante ou RC. Or, les conséquences d'un tel type de sinistres peuvent s'étaler sur des dizaines d'années après la survenance du sinistre. Des exemples typiques sont les maladies causées par l'amiante (comme la mésothéliome) qui peuvent se déclarer 30 ou 40 ans après l'exposition aux facteurs de risque.
- ③ Sinistralité atypique : la sinistralité atypique est due au fait qu'une partie des run-off ne concerne pas des sinistres de masse (que l'on appelle couramment sinistres attritionnels). Les sinistres RC, amiante ou pollution ne peuvent pas être gérés de la même façon.
- ④ Solvabilité des réassureurs : du fait que les contrats ont été souscrits il y a longtemps, les réassureurs du passé n'ont plus forcément la même solidité financière que lors de la signature du traité. Le risque de crédit est donc très présent.

Les principales conséquences directes de ces particularités sont :

- L'ajustement tarifaire n'est pas possible : Un sous provisionnement des exercices passés ne peut pas être compensé par une augmentation des tarifs sur les affaires nouvelles. Les solutions sont alors l'augmentation des produits financiers ou la baisse des frais généraux.
- Il y a une grande volatilité des cash flows et de la charge finale.
- Le risque de défaut des réassureurs augmente avec le temps.

2.1.3 Contexte du run-off et d'AXA LM

Le phénomène du « run-off » apparaît vers la fin des années 70. Avec l'augmentation des fusions, des acquisitions et des faillites de compagnies, il prend de plus en plus d'ampleur dans le monde de l'assurance et de la réassurance.

Les compagnies qui ont des affaires en run-off, ont plusieurs solutions pour gérer leurs passifs :

- Jusque dans les années 2000, la stratégie la plus souvent adoptée était d'ignorer le problème, dans l'espoir qu'il s'agissait d'une situation temporaire pouvant être gérée avec les méthodes traditionnelles.

- Une alternative est de séparer le run-off des autres affaires et de le gérer en interne. Les entreprises qui prennent cette décision estiment que le problème est encore gérable et qu'il n'aura pas d'effet sur les nouvelles affaires ou sur la notation de la firme.
- Une autre possibilité est d'essayer de créer de la valeur en transformant systématiquement les problèmes de run-off en des opportunités de gain. Il s'agit des entreprises qui ne s'occupent que de la gestion des portefeuilles en run-off. C'est dans ce contexte que AXA Liabilities Managers a été créée en 2001. Elle propose au groupe AXA et au marché du run-off de gérer les contrats en run-off, tout en optimisant l'investissement des actifs pour permettre la création de valeur.
- La dernière approche est de se séparer de ces portefeuilles de run-off afin de ne pas se voir pénaliser dans le résultat ou bien même dans la notation de l'entreprise. Cela permet également de libérer le capital bloqué et dont le coût en capital est élevé en comparaison des rendements.

En 2007, AXA LM a créé un fonds afin de racheter des portefeuilles de réassurance en run-off à des entités ne souhaitant pas les garder. Cela permet de valoriser l'expérience acquise dans ce domaine sur d'autres portefeuilles.

2.1.4 Réglementation des entreprises en run-off de réassurance

La signature en 2005 de la Directive Européenne sur la réassurance par le parlement européen et l'engagement pris par les états membres de la mettre en application en droit local ont contraint les compagnies de réassurance à se soumettre à certaines contraintes réglementaires. En droit français, la Directive Européenne sur la Réassurance a été transposée par la promulgation d'une ordonnance le 13 juin 2008.

Notons toutefois que ce principe de contrôle de l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution) sur les compagnies d'assurance ne s'applique a priori pas aux compagnies de réassurance strictement en run-off, à savoir « celles qui ont cessé toute nouvelle souscription et qui se contentent d'administrer leur portefeuille existant en vue de mettre un terme à leur activité. Cette exemption ne s'applique pas aux entreprises de réassurance qui reprennent et gèrent les portefeuilles d'entreprises en run-off. ».

AXA LM rachetant des portefeuilles est donc soumise à la réglementation Solvabilité II pour certains de ces portefeuilles.

2.1.5 Application de Solvabilité II

La mise en application de cette nouvelle norme prend en compte des risques non considérés auparavant en droit local tels que les risques de contrepartie, de marché ou opérationnel. Elle va amener les actionnaires et gérants de portefeuilles en run-off à s'interroger sur le coût réel de la détention de ces portefeuilles, en prenant en compte le coût du capital immobilisé pour ces derniers. Cela a conduit notamment à des ventes de portefeuilles en run-off qui eux seront dès lors régulés.

2.2 Les commutations

2.2.1 Levier de création de valeur sur les portefeuilles en run-off

La création de valeur en run-off se fait par le biais d'une gestion proactive menant au recours de solutions de finalité. Les solutions de finalité sont utilisées pour mettre fin à la relation existant entre le réassureur et les cédantes. Elles visent à réduire l'exposition à la volatilité sur l'ensemble du portefeuille, à réduire la probabilité d'aggravation des engagements et à libérer le capital immobilisé par les engagements à commuter.

Elles peuvent prendre différentes formes, selon le but à atteindre, ou selon les solutions envisageables règlementairement :

- Transferts de portefeuilles : les contrats en run-off sont transférés à un autre réassureur.
- Réassurance : en mettant en place une politique de réassurance, l'entité peut se couvrir rapidement contre les dégradations (jusqu'à une certaine limite), mais à un coût assez élevé.
- Commutations : le réassureur et la cédante se mettent d'accord sur un prix que le réassureur règlera à la cédante pour mettre un terme à leurs engagements mutuels.

Dans notre contexte, la gestion proactive la plus adéquate est le recours aux commutations, dont nous allons préciser les termes.

2.2.2 Définition

Une commutation consiste en un accord entre un réassureur et une cédante dans lequel un paiement (ou une série de paiements) règle contractuellement un ensemble d'engagements présents ou à venir.

Les éléments concernés par une commutation peuvent être de différentes natures :

- PSAP ou suspens : engagements correspondant à des sinistres déclarés, mais non encore réglés ;

- IBNR (Incurred But Not Reported) : engagements correspondant aux sinistres survenus mais non encore connus du réassureur (IBNR), ainsi qu'aux aggravations de sinistres (IBNER : Incurred But Not Enough Reported) ;
- Primes de reconstitution : primes payées sur un traité non-proportionnel lorsque la limite a été entièrement utilisée, et que la cédante a la possibilité de reconduire la couverture contre le paiement d'une prime additionnelle de reconstitution ;
- Balances : montants correspondant aux dettes et créances de réassurance entre le réassureur et la cédante ;
- Dépôts : actifs ou espèces déposés chez la cédante en représentation des engagements du réassureur ;
- LOC (Letter of Credit) : système de garantie de paiement du réassureur à la cédante, via une banque.

Nous pouvons distinguer quatre types de commutation, selon leur périmètre :

- ① Sinistre unique ;
- ② Traité unique (par exemple un traité XS ou quote-part) ;
- ③ Multi-traités ;
- ④ Globale, à savoir tous les traités avec la cédante sur toutes les branches, qu'ils soient en acceptation ou en rétrocession.

2.2.3 Les raisons des commutations

Les deux parties peuvent tirer profit d'une commutation. Du point de vue de la cédante, les motivations pour une commutation peuvent être :

- Un règlement accéléré des engagements, sous forme de cash, dans le cas où l'entité a un besoin de liquidités ;
- Une amélioration de la « richesse » perçue de l'entité, en convertissant des actifs non liquides en actifs liquides ;
- Un montant certain reçu immédiatement se substitue à un versement futur incertain (risque de défaut potentiel du réassureur) ;
- Les raisons pour lesquelles la réassurance avait été souscrite peuvent ne plus être d'actualité.

Du point de vue du réassureur, les motivations pour une commutation peuvent être :

- Réduction du risque global lié aux engagements dans le cas où le portefeuille commuté est volatil, et donc libération potentielle de capital immobilisé ;
- Un règlement certain versé immédiatement, non sujet à des développements futurs incertains ;

- Des économies potentielles de frais de gestion, relativement aux engagements. En effet, au regard de la diminution progressive des engagements, les frais de gestion correspondant au suivi, au recouvrement, à l'enregistrement et à l'audit peuvent devenir disproportionnés par rapport aux paiements ;
- Création d'un résultat technique positif dans le cas où le montant réglé est inférieur au montant provisionné.

2.2.4 Le prix de commutation

Le prix d'une commutation doit prendre en considération un certain nombre d'éléments en plus de la définition des engagements que l'on souhaite commuter.

En effet, le prix d'une commutation est défini notamment par l'ensemble des éléments suivants :

- 1 Facteurs d'actualisation ;
- 2 Montant des réserves ;
- 3 Produits financiers futurs relatifs aux engagements ;
- 4 Frais Généraux et Taxes ;
- 5 Capital requis (SCR) et Marge pour risque.

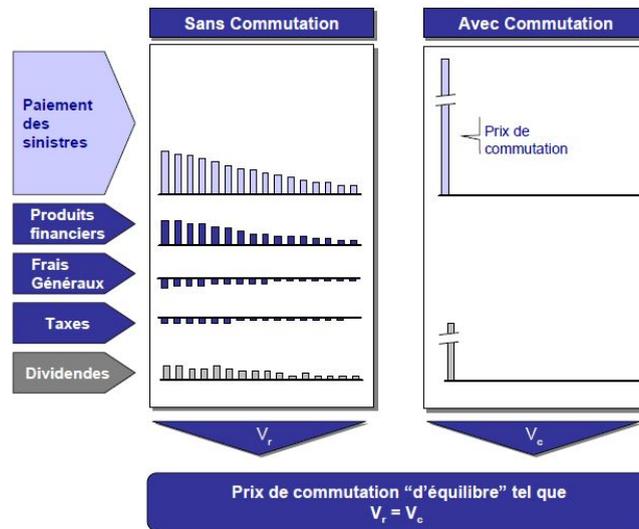


FIGURE 2.1: Prix d'une commutation à l'équilibre

Dans notre mémoire, lorsque nous avons recours aux commutations, nous considérons que leurs prix sont définis par les éléments 1, 2, 3 et 4, laissant ainsi une marge de profit et un dividende possible (5) liés à la libération du capital de la marge pour risque et du capital immobilisé dans les Fonds Propres via le SCR.

2.3 Cadence de règlement

2.3.1 La méthode Chain-Ladder

Parmi les très nombreuses méthodes déterministes, la méthode utilisée principalement dans notre cadre est celle dite de Chain-Ladder.

Nous considérons le triangle des paiements cumulés suivant :

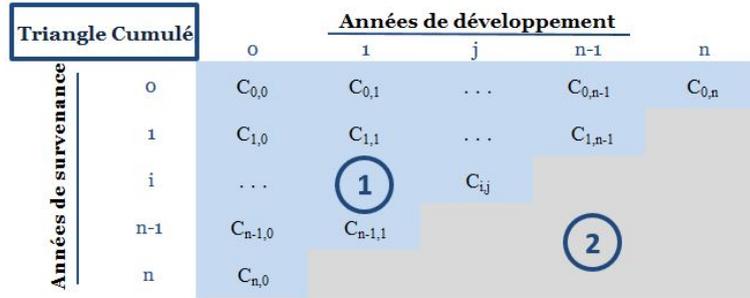


FIGURE 2.2: Triangle de paiements cumulés

où $C_{i,j}$ le montant cumulé payé en $i + j$ au titre de l'année i .

- Légende:**
- ① Triangle des payés
 - ② Estimation des payés par Chain-Ladder
 - ③ Extrapolation des payés

La méthode Chain-Ladder repose sur deux hypothèses :

- Hyp 1 : Les montants cumulés par année de survenance sont indépendants, ce qui peut s'écrire : Les vecteurs $\{C_{y,1}, \dots, C_{y,K}\}$ et $\{C_{z,1}, \dots, C_{z,K}\}$ avec $y \neq z$ sont indépendants.
- Hyp 2 : Les facteurs de passage f_k sont stables par année de survenance, ce qui peut également s'écrire : Pour $k = 1, \dots, K - 1$, il existe un paramètre f_k tel que conditionnellement on ait : $\mathbb{E}[C_{i,k+1}|C_{i,k}] = f_k \cdot C_{i,k}$

On définit les facteurs de Chain-Ladder par :

$$\forall j \in \{0, \dots, n - 1\}, \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}} \quad (2.1)$$

On définit les cadences de règlements par :

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, p_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,n}} \quad (2.2)$$

A l'aide des facteurs, on calcule les estimateurs $\widehat{C}_{i,j}$ par :

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,n-i+1} \prod_{k=n-i+1}^{j-1} \widehat{f}_k \quad \text{où } i+j > n+1 \quad (2.3)$$

On obtient donc un rectangle de liquidation à partir duquel on calcule les paiements ultimes $\widehat{C}_{i,n}$, les provisions à chaque année de survenance $\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - \widehat{C}_{i,n-i+1}$ et la provision globale $\widehat{R} = \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i$.

2.3.2 Triangle run-off et retraitement

Dans le cas du run-off, l'arrêt des souscriptions engendre une déformation du triangle pour former un trapèze.

Dans le cas où les souscriptions s'arrêtent en fin d'année k, nous avons alors un triangle du type :

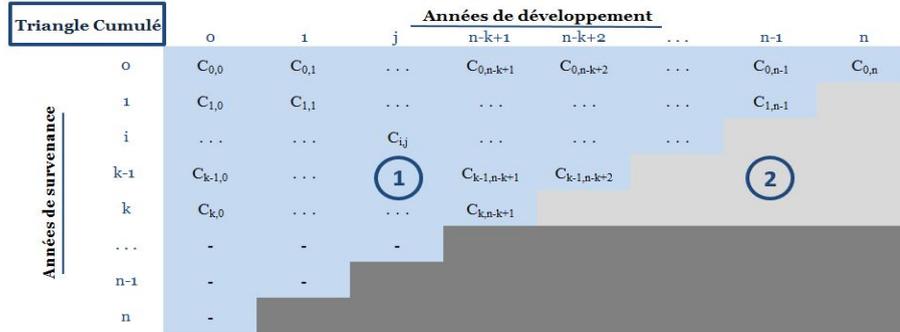


FIGURE 2.3: Triangle de paiements cumulés en run-off

Il est nécessaire de retraiter le triangle de sa partie connue afin d'appliquer la méthode Chain Ladder vue précédemment. De plus, des extrapolations peuvent être effectuées sur notre triangle.

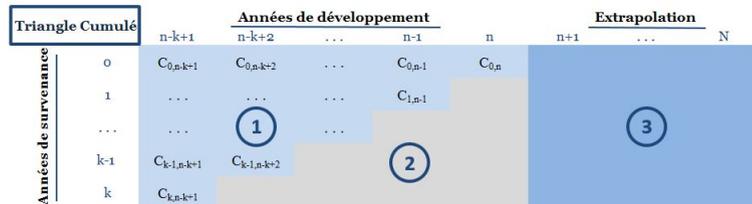


FIGURE 2.4: Triangle de paiements cumulés ajusté

2.4 De Solvabilité I à Solvabilité II

Le passage de Solvabilité I à Solvabilité II nécessite notamment la mise en oeuvre de l'ORSA et la rédaction du rapport ORSA. L'un des objectifs du mémoire est de challenger le niveau de précision demandé par l'ACPR dans ce rapport dans le cadre d'une entreprise de réassurance non-vie en run-off.

L'un des risques importants non modélisé dans la Formule Standard est le risque de non adossement Actif-Passif. L'ORSA est donc en partie dédié à cette lacune.

En réglementation Solvabilité I, le risque à l'actif est globalement indépendant de notre risque au passif dans la mesure où les provisions techniques ne sont pas escomptées (absence de risque de taux Actif-Passif). La relation de l'actif avec le passif ne se fait que par le lien avec les cash-flows de paiements.

En réglementation Solvabilité II, les passifs sont évalués en *Best Estimate*. Un risque de taux peut alors être évalué de par cet escompte sur les provisions. Cependant, le rajout de la Marge pour Risque compense globalement cette réduction due à l'escompte, rendant quasiment nul le risque de taux évoqué.

L'indépendance est donc de nouveau globalement gardée dans le changement de norme avec seulement des contraintes de cash-flows et de taux de change si le passif est en multi-devises.

Une partie ALM (Asset and Liability Management) est abordée dans ce mémoire¹ et est présente dans le but d'affiner notre gestion des risques et de gérer un risque de liquidité par rapport à notre business de réassurance non vie de run-off.

2.5 Présentation d'un portefeuille fictif

Pour des raisons de confidentialité des portefeuilles gérés par AXA LM, nous allons étudier un portefeuille fictif que l'on nommera *RUNOFF*.

Nous allons entamer la description du portefeuille fictif *RUNOFF* géré par une entreprise de réassurance non-vie en run-off. Les caractéristiques de l'activité de l'entreprise ont été décrites précédemment. Nous nous plaçons au 31/12/2015. Les données de marché seront prises à cette date. De même, le bilan du portefeuille est donné à cette date.

Commençons par étudier les passifs que le portefeuille contient au format des *Lines of Business* (LoB) de Solvabilité II.

Ces 6 LoB sont nos risques non-vie du portefeuille. Notre portefeuille est donc constitué de réassurance non-vie principalement non-proportionnelle (73,7%).

1. Dans le Chapitre V, nous prenons en compte les cash flows futurs de paiements

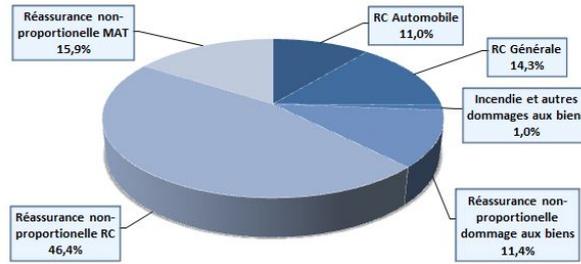


FIGURE 2.5: Répartition des réserves par LoB

Bilan Solvabilité II

Actif		Passif	
Cash	11 000 000	Fonds Propres	31 431 900 ²
Obligations d'Entreprise <i>Investment Grade</i>	39 300 000	Marge pour risque	7 752 153
Obligations d'Entreprise <i>High Yield</i>	1 300 000		
Obligations d'Etat	38 400 000	<i>Best Estimate</i>	60 815 948
Immobilier	10 000 000		
Total	100 000 000	Total	100 000 000

Comme vu dans le bilan, cette répartition d'actif est telle que :

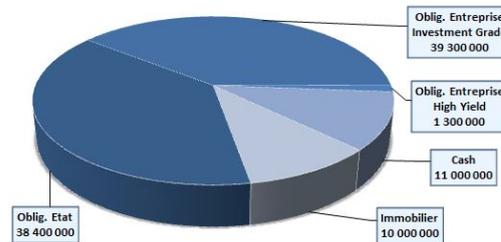


FIGURE 2.6: Répartition des actifs investis du portefeuille

Autres données	
Duration Actif	5,1
Duration Passif	5,4
<i>Mismatch</i> Devise	6 467 570
SCR _{marché}	6 232 871
SCR _{non-vie}	14 830 193
SCR _{contrepartie}	329 984

Pour le risque de contrepartie, on considère que le portefeuille *RUNOFF* n'a pas de contrat de rétrocession et n'a pas de dépôt auprès des cédantes. Seul son cash en banque est considéré pour ce risque.

2. L'ensemble de ces fonds propres sont éligibles et utilisables lors des calculs de ratio de solvabilité avec la notion de Tier 1, 2 et 3 dans le référentiel Solvabilité II.

L'ensemble des frais généraux et la projections des cash-flows des réserves par le triangle de paiements nous fournissent notre *Best Estimate of Liabilities* (BEL).

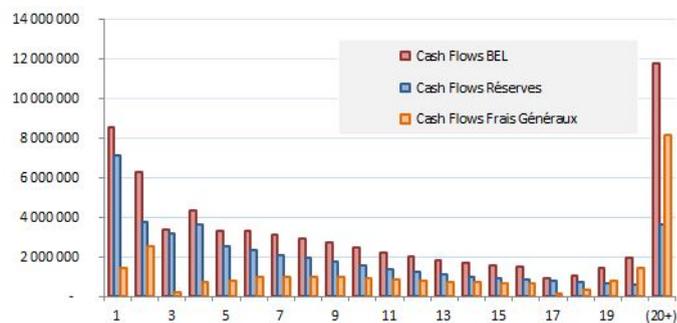


FIGURE 2.7: Cash-flows constitutifs de notre BEL

Comme défini dans ce chapitre, un levier de création de valeur pour notre portefeuille passe par les commutations. Des hypothèses de commutations sont également fournies pour ce portefeuille :

Années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	(10+)
% réserves totales	7%	6%	5%	5%	4%	4%	3%	3%	2%	1%	0%

FIGURE 2.8: Hypothèses de commutations du portefeuille *RUNOFF*

Cette gestion proactive sur nos réserves implique un changement de notre séquence de cash-flows.

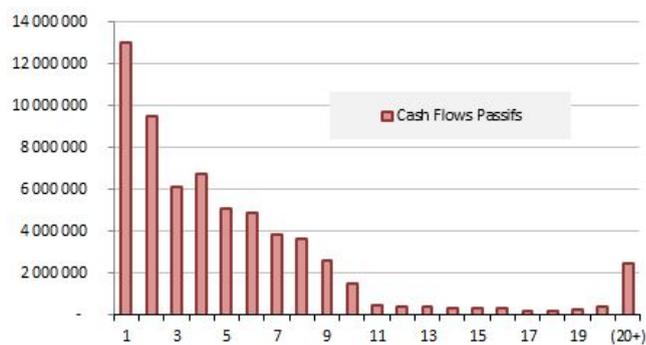


FIGURE 2.9: Cash-flows réels de nos passifs incluant les commutations

Chapitre 3

Eléments constitutifs du *Risk Appetite* pour le portefeuille *RUNOFF*

3.1 Contrainte et métrique retenues

Notre *Risk Appetite* étant défini à travers nos *KFIs*, il est nécessaire de définir les chocs relatifs aux quantiles 95% et 99,5%.

Le cadre de *Risk Appetite* retenu sera celui défini par le GRM (*Group Risk Management*) fournissant aux filiales d'AXA des chocs en vue d'effectuer le *Risk Appetite*. Voici notamment les chocs fournis :

- « 1 : 20 » : qui correspond à un choc calibré sur une probabilité d'occurrence de 1 tous les 20 ans ;
- « 1 : 200 » : qui correspond à un choc calibré sur une probabilité d'occurrence de 1 tous les 200 ans ;
- bas : le régime de taux d'intérêt de la devise considérée est bas (taux 10 ans \leq 2% continuellement pendant les 6 derniers mois) ;
- std : le régime de taux d'intérêt de la devise considérée est standard (taux 10 ans entre 2% et 6% continuellement pendant les 6 derniers mois) ;
- ht : le régime de taux d'intérêt de la devise considérée est haut (taux 10 ans \geq 6% continuellement pendant les 6 derniers mois) ;
- corp. : *Corporates* (Obligations d'Entreprises) ;
- gov. : *Govies* (Obligations d'Etats) ;
- FX : *Foreign Exchange* (Taux de change).

Définition des chocs à l'actif		Adverse	Extrême
Facteur de risque	Type de choc	1 : 20	1 : 200
Tx intérêt - baisse (bas)	décalage absolu	-50 bp	-60 bp
Tx intérêt - baisse (std)	décalage absolu	-100 bp	-150 bp
Tx intérêt - baisse (ht)	décalage absolu	-300 bp	-500 bp
Tx intérêt - hausse (bas)	décalage absolu	+100 bp	+250 bp
Tx intérêt - hausse (std)	décalage absolu	+100 bp	+250 bp
Tx intérêt - hausse (ht)	décalage absolu	+300 bp	+500 bp
<i>Spreads corp.</i>	décalage absolu	+75 bp	+150 bp
<i>Defaults corp.</i>	décalage absolu	+1%	+2%
<i>Spreads gov. (bas)</i>	décalage absolu	+50 bp	
<i>Spreads gov. (std)</i>	décalage absolu	+100 bp	
<i>Spreads gov. (ht)</i>	décalage absolu	+300 bp	
Action	choc relatif	-25%	-40%
Action non listée	choc relatif	-25%	-40%
Immobilier	choc relatif	-10%	-25%
Investissement spéculatif	choc relatif	-10%	-25%
FX	choc relatif	-25%	-30%

FIGURE 3.1: Tableau des chocs des risques financiers

Choc non-vie individuel		
Facteur de risque	1 : 20	1 : 200
Réserves	+8%	+13%
Attritionnel - SCR	+5%	+8%
Catastrophe - SCR	+2%	+8%

FIGURE 3.2: Tableau des chocs des risques non-vie

Choc risque opérationnel		
Facteur de risque	1 : 20	1 : 200
Perte Opérationnelle	+100%	+200%

FIGURE 3.3: Tableau des chocs du risque opérationnel

Les décisions prises sur le portefeuille *RUNOFF* pouvant avoir un impact sur notre *Risk Profile* sont :

- la réassurance ;
- les commutations ;
- le risque opérationnel ;
- l'allocation d'actifs.

Le portefeuille *RUNOFF* est provisionné qu'il y ait ou non des commutations. De plus, celles-ci améliorent le *Risk Profile* de par la libération de capital qu'elles génèrent le

plus souvent. Par conséquent, aucune partie de notre *Risk Capacity* ne sera dédiée aux commutations.

Le risque opérationnel est également un élément de risque qui peut être augmenté. Nous ferons l'hypothèse que l'entreprise ne souhaite pas augmenter ce risque plus que sa position actuelle déjà couverte via le SCR.

Enfin, la réassurance peut être utile par le fait qu'au-delà d'une certaine limite sur un risque non-vie, on peut envisager d'utiliser de la réassurance (dans notre cadre de la rétrocession) pour se couvrir. Cependant, cette technique est lourde en gestion et peut engendrer des coûts de gestion parfois très importants par rapport au montant de réserves du fait que le business du portefeuille soit en run-off.

Ainsi, seule l'allocation d'actifs sera étudiée comme facteur d'évolution voulu dans notre *Risk Appetite* via le calcul notamment d'un nouveau $SCR_{\text{marché}}$ spécifique à l'allocation considérée. L'ensemble de notre *Risk Capacity* sera donc mobilisé sur le risque de marché en vue d'augmenter le rendement financier.

La première étape du *Risk Appetite* comme vu dans le chapitre I du présent mémoire est de définir le *Risk Capacity*, fourni par le Comité Exécutif. Dans la pratique, cette étape est délicate, car la Direction a besoin d'indicateurs pour estimer cette marge de risque supplémentaire que l'entreprise peut être encline à prendre.

Ce chapitre va nous permettre tout d'abord de nous concentrer sur deux dimensions du *Risk Appetite* incluses dans nos *KFIs* : la valeur et la solvabilité. Le portefeuille *RUNOFF* étant en run-off, ces indicateurs sont vitaux pour le bon déroulement des paiements relatifs aux passifs. Nous verrons ensuite dans ce chapitre les dimensions résultat et liquidité.

Après avoir défini les paramètres constitutifs du $SCR_{\text{marché}}$, nous développerons une méthode permettant de définir des *Risk Limits* sur notre SCR.

Puis, nous effectuerons une seconde approche avec le modèle Excel que nous avons développé pour la mise en place du *Risk Appetite*, en comparant notre ratio de solvabilité actuel avec celui en dessous duquel nous ne serions pas prêts à descendre.

Le modèle de *Risk Appetite* dans la seconde approche est donc le suivant :

- Calcul de la position actuelle en termes de risques (Fonds Propres, SCR, Ratio de solvabilité) ;
- Application des chocs donnés et calcul d'impacts (Application du choc 1 : 20 ans à l'actif) ;
- Vérification du respect en termes de ratio de solvabilité et de fonds propres après choc.

Nous pouvons résumer ce modèle par la figure suivante :

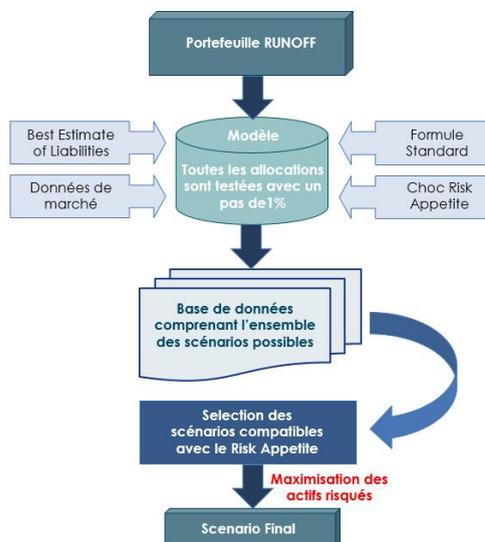


FIGURE 3.4: Modélisation de notre outil *Risk Appetite*

3.2 Module risque de marché

Notre *Risk Appetite* reposant sur l'allocation d'actifs, cette section est consacrée au calcul du risque de marché. L'exigence de capital sous Solvabilité II (SCR) est notamment liée au risque de marché ($SCR_{\text{marché}}$).

La formule standard utilisée dans la présente section provient des spécifications techniques des «*Delegated Acts*» fournies par l'EIOPA. Dans la formule standard, le risque de marché résulte du niveau et de la volatilité des taux et des prix de marché des instruments financiers. Le modèle proposé cherche à mesurer l'impact sur la valeur des actifs et des passifs des mouvements des variables financières comme : les cours des actions, les taux d'intérêt, les prix de l'immobilier et les taux de change. Le capital requis pour le risque de marché se calcule en combinant les différents sous-risques par l'intermédiaire d'une matrice de corrélation, donnée dans la réglementation. Pour chaque facteur de risque, le SCR correspondant se calcule en mesurant l'impact de ce choc sur les «*Basic Own Funds*», c'est-à-dire sur la valeur de marché de l'actif moins la «*fair value*» du passif ajustée de la dette subordonnée (ajoutée) et des actions propres (déduites). Le réassureur doit mesurer l'impact du choc, simultanément sur l'actif et sur le passif.

3.2.1 Le risque de taux d'intérêt (SCR_{taux})

Ce module vise à quantifier le besoin en capital nécessaire pour faire face à l'impact d'une évolution de la structure de la courbe des taux (à la hausse ou la baisse) sur la valeur du

bilan. Le risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux changements de taux d'intérêt. A l'actif les instruments financiers concernés sont les produits de taux simples (obligations, OPCVM obligataires, titres de créances), les dérivés (options, swaps, futures), produits structurés (CDO). L'actualisation des provisions techniques aux taux du marché rend ces éléments sensibles aux taux. L'effet de la hausse ou de la baisse des taux d'intérêt sur la valeur des provisions techniques doit être appliqué uniquement sur la courbe des taux sans risque, laissant les ajustements de crédit (*Credit Risk Adjustment*) et de volatilité (*Volatility Adjustment*) inchangés.

$$SCR_{taux}^{Up} = \Delta BOF|_{up}$$

$$SCR_{taux}^{Down} = \Delta BOF|_{down}$$

Le besoin en capital est égal à la perte maximum générée par une hausse (Up) ou une

baisse (Down) de la courbe de taux par maturité des flux : $SCR_{taux} = \max(SCR_{taux}^{Up}; SCR_{taux}^{Down})$

Le stress appliqué est instantané. Le stress haussier doit être au minimum de 100bps.

Les chocs relatifs à la hausse et à la baisse des taux sont les suivants :

Maturité t	≤1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Choc Hausse	70%	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%	44%	42%
Choc Baisse	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%	-33%	-31%

t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	≥90
Hausse	39%	37%	35%	34%	33%	31%	30%	29%	27%	26%	20%
Baisse	-30%	-39%	-28%	-28%	-27%	-28%	-28%	-28%	-29%	-29%	-20%

Pour les maturités non spécifiées dans la table, la valeur est déduite par interpolation linéaire.

3.2.2 Le risque sur les actions (SCR_{action})

Le risque sur les actions résulte de la volatilité des prix de marché des actions. Notre portefeuille étant composé de passifs de réassurance non-vie en run-off, seul l'actif est soumis à une variation.

Le modèle en formule standard distingue deux types d'actions :

- Actions Type 1 (Actions globales) : actions listées dans un pays membre de l'Union Européenne ou de l'OCDE ;
- Actions Type 2 (Autres actions) : actions listées hors OCDE, actions non listées, Hedge funds, ...

- Choc Actions Type 1 : - 39% (+/- 10% selon le facteur d'ajustement) ;
- Choc Action Type 2 : - 49% (+/- 10% selon le facteur d'ajustement) ;
- Choc pour les participations : - 22%.

$$SCR_{Action} = \max(\Delta BOF|_{\text{choc action}}; 0)$$

Le facteur d'ajustement (ou *Symmetric Adjustment SA*) modifie l'amplitude du choc du module action en fonction du niveau des marchés actions à la date de calcul du SCR par rapport au niveau moyen sur 3 ans des marchés actions. Au 31/12/2015, ce facteur vaut -2,24%¹. Il est calculé à partir de l'indice Action MSCI Europe.

Un coefficient de corrélation est également appliqué entre les deux types d'actions :

Action	Type 1	Type 2	Corrélation	Type 1	Type 2
Choc	-39%	-49%	Type 1	1	0,75
			Type 2	0,75	1

FIGURE 3.5: Corrélations et chocs SCR_{Action}

Le risque Action est alors donné par la formule :

$$SCR_{Action} = \sqrt{SCR_{ActionType1}^2 + SCR_{ActionType2}^2 + 2 * 0,75 * SCR_{ActionType1} * SCR_{ActionType2}}$$

3.2.3 Le risque sur l'immobilier ($SCR_{immobilier}$)

Le risque sur l'immobilier résulte de la volatilité des prix de marché de l'immobilier. Pour les actifs traités comme de l'immobilier, le principe est de simuler la variation de la valeur nette des actifs dans l'hypothèse d'une chute de 25% des marchés immobiliers, en tenant compte des détentions directes et indirectes en matière d'immobilier. La mise en oeuvre du calcul est la même que dans le cas du risque action.

$$SCR_{Immobilier} = \max(\Delta BOF|_{\text{choc immobilier}}; 0)$$

3.2.4 Le risque de change (SCR_{change})

Le risque de change résulte de la volatilité des taux de change. Le principe est de simuler la variation de la valeur nette des actifs, dans l'hypothèse d'une variation (à la hausse ou à la baisse) de 25% des devises étrangères, en tenant compte notamment des éventuelles couvertures. Pour chaque devise étrangère C, le besoin en capital $SCR_{change,C}$ correspond au maximum entre $SCR_{change,C^{hausse}}$ et $SCR_{change,C^{baisse}}$:

$$SCR_{change,C^{hausse}} = \Delta BOF|_{\text{choc à la hausse de la devise C}}$$

$$SCR_{change,C^{baisse}} = \Delta BOF|_{\text{choc à la baisse de la devise C}}$$

1. Le lecteur intéressé trouvera l'évolution du facteur d'ajustement dans l'annexe A.1.3.

Le besoin en capital total pour ce risque de change SCR_{change} est la somme de tous les besoins en capitaux $SCR_{change,C}$ ainsi calculés par la devise.

$$SCR_{change} = \sum_C SCR_{change,C}$$

3.2.5 Le risque de crédit (SCR_{spread})

Le risque de crédit correspond à la part de risque provenant de la volatilité du spread par rapport au taux sans risque. Le risque de spread est divisé en 3 sous modules :

$$SCR_{spread} = SCR_{sp}^{oblig} + SCR_{sp}^{titri} + SCR_{sp}^{cd}$$

- SCR_{sp}^{oblig} : capital requis pour le risque de spread sur les obligations ou les prêts hors prêt résidentiel
- SCR_{sp}^{titri} : capital requis pour les risques de titrisation
- SCR_{sp}^{cd} : capital requis pour le risque de spread sur les dérivés de crédit

Dans notre cas, seul le SCR_{sp}^{oblig} nous concerne, seul celui-ci sera développé.

$$SCR_{sp}^{oblig} = \max(\Delta BOF |_{\text{choc spread sur les obligations}} ; 0)$$

Le choc est défini par la formule : $\sum_i MV_i * F(rating_i, dur_i)$ avec :

- $F(rating_i, dur_i)$ une fonction du risque de crédit calibrée pour donner un choc lié à une VaR de 99,5% ;
- MV_i = la valeur d'exposition au risque de crédit du sous-jacent i ;
- $rating_i$ = la qualité de crédit de l'exposition ;
- dur_i = la duration de l'exposition i.

La fonction possède deux tables de lecture suivant que l'obligation soit émise par un Etat ou une entreprise.

Les titres pour lesquels le spread est nul sont :

- Obligations émises en euro par des Etats membres de l'Union Européenne ;
- Obligations émises par la BCE ;
- Obligations émises par des banques multilatérales de développement ;
- Obligations émises par des organisations internationales.

Pour les obligations d'entreprises, la table de référence pour F est :

	≤ 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	≥ 20
AAA	0,9%.dur	4,5% + 0,5%.(dur-5)	7,2% + 0,5%.dur-10)	9,7% + 0,5%.(dur-15)	12,2% + 0,5%. (dur-20)
AA	1,1%.dur	5,5% + 0,6%.(dur-5)	8,4% + 0,5%.(dur-10)	10,9% + 0,5%.(dur-15)	13,4% + 0,5%.(dur-20)
A	1,4%.dur	7,0% + 0,7%.(dur-5)	10,5% + 0,5%.(dur-10)	13,0% + 0,5%.(dur-15)	15,5% + 0,5%.(dur-20)
BBB	2,5%.dur	12,5% + 1,5%.(dur-5)	20,0% + 1,0%.(dur-10)	25,0% + 1,0%.(dur-15)	30,0% + 0,5%.(dur-20)
BB	4,5%.dur	22,5% + 2,5%.(dur-5)	35% + 1,8%.(dur-10)	44% + 0,5%.(dur-15)	46,6% + 0,5%.(dur-20)
B	7,5%.dur	37,5% + 4,2%.(dur-5)	58,5% + 0,5%.(dur-10)	61,0% + 0,5%.(dur-15)	63,5% + 0,5%.(dur-20)
Lower or Unrated	7,5%.dur	37,5% + 4,2%.(dur-5)	58,5% + 0,5%.(dur-10)	61,0% + 0,5%.(dur-15)	63,5% + 0,5%.(dur-20)

Pour les obligations d'Etat hors EEE², émises dans la devise de l'Etat considéré, la fonction F est définie par :

	≤ 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	≥ 20
AAA	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
AA	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
A	1,1%.dur	5,5% + 0,6%.(dur-5)	8,4% + 0,5%.(dur-10)	10,9% + 0,5%.(dur-15)	13,4% + 0,5%.(dur-20)
BBB	1,4%.dur	7,0% + 0,7%.(dur-5)	10,5% + 0,5%.(dur-10)	13% + 0,5%.(dur-15)	15,5% + 0,5%.(dur-20)
BB	2,5%.dur	12,5% + 1,5%.(dur-5)	20,0% + 1%.(dur-10)	25,0% + 1,0%.(dur-15)	30,0% + 0,5%.(dur-20)
B	4,5%.dur	22,5% + 2,5%.(dur-5)	35,0% + 1,80%.(dur-10)	44,0% + 0,5%.(dur-15)	46,5% + 0,5%.(dur-20)
Lower or Unrated	4,5%.dur	22,5% + 2,5%.(dur-5)	35,0% + 1,80%.(dur-10)	44,0% + 0,5%.(dur-15)	46,5% + 0,5%.(dur-20)

3.2.6 Le risque de concentration ($SCR_{\text{concentration}}$)

Le risque de concentration vient du fait que la volatilité d'un portefeuille augmente avec sa concentration :

- Sur un même émetteur ;
- Dans un même domaine d'activité ;
- Dans une même zone géographique.

La diversification par rapport à tous ces éléments permet de diminuer le risque de perte en valeur des actifs. Le calcul de l'exigence en capital liée au risque de concentration prend en compte les produits de taux et les actions, ainsi que les produits dérivés de

2. Espace Economique Européen

ces actifs et les actifs immobiliers. Le calcul du besoin en capital pour le risque de concentration s'effectue en 4 étapes.

Etape 1 : Regroupement par émetteur

Les expositions au risque des actifs sont à regrouper par émetteur. Les sociétés d'un même groupe sont considérées comme un même émetteur. L'exposition à une contrepartie est notée E_i .

Etape 2 : Exposition excessive

Le risque de concentration apparaît, lorsque le taux d'exposition à la contrepartie i , est supérieur à un seuil fixé a priori, en fonction de la notation de la contrepartie i . L'exposition excessive est : $XS_i = \max(0; E_i - CT_i * \text{Actif})$.

Où : E_i correspond au montant d'exposition, CT correspond aux seuils d'excès de concentration définis par :

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B and lower
CT	3%	3%	3%	1,5%	1,5%	1,5%

Actif comprend l'ensemble des actifs liés au risque de concentration.

Etape 3 : Risque de concentration par émetteur

Le choc sur le niveau de concentration pour l'émetteur i est défini par : $XS_i * g_i$ où le paramètre g_i dépend du rating de la contrepartie i :

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B and lower
CT	12%	12%	21%	27%	73%	73%

Etape 4 : Calcul du risque de concentration global

Le besoin en capital pour le risque de concentration financier est calculé en supposant une corrélation nulle entre les risques calculés pour chaque émetteur :

$$SCR_{concentration} = \sqrt{\sum_i (E_i * XS_i * g_i)^2}$$

Les mêmes obligations pour lesquelles le risque de spread est nul ont un besoin en capital pour le risque de concentration nul.

3.2.7 Agrégation des risques de marchés

La matrice de corrélation pour un quantile 99.5% est donnée par :

Corrélation	Action	Taux	Immobilier	Change	Spread	Concentration
Action	1	0,5 0	0,75	0,25	0,75	0
Taux	0,5 0	1	0,5 0	0,25	0,5 0	0
Immobilier	0,75	0,5 0	1	0,25	0,5	0
Change	0,25	0,25	0,25	1	0,25	0
Spread	0,75	0,5 0	0,5	0,25	1	0
Concentration	0	0	0	0	0	1

- 0 : Cas de hausse des taux d'intérêt
- 0,5 : Cas de baisse des taux d'intérêt

3.3 Outil d'allocation du *Risk Appetite*

3.3.1 Outil théorique d'allocation

Comme défini au I, le processus de *Risk Appetite* nécessite une allocation du risque global vers une segmentation plus fine (*Risk Tolerance* et *Risk Limits*).

Nous allons exposer un premier pas en termes de *Risk Appetite* en ne cherchant à effectuer l'allocation que sous la dimension SCR. L'objet de ce paragraphe est de fournir une méthode d'allocation théorique de notre capacité de risque supplémentaire en fonction du SCR actuel.

La Formule Standard possède une architecture de type «standard» avec deux niveaux d'agrégations.

Le risque global est alloué en composantes plus simples à deux reprises avec les notations suivantes :

- $i \in \{1, \dots, n\}$ pour les macro-risques et n le nombre de macro-risques ;
- $j \in \{1, \dots, m_i\}$ pour les micro-risques et $n.m_i$ le nombre de micro-risques.

Soit des variables aléatoires L_{ij} appartenant à l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

L_{ij} décrit une variable aléatoire de pertes sur un horizon annuel.

On définit les pertes inattendues par : $Y_{ij} = L_{ij} - \mathbb{E}[L_{ij}]$

Le macro-risque i se définit alors comme une variable aléatoire Y_i avec , $Y_i = \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$.

Les risques totaux de l'entreprise sont : $Y = \sum_i^n Y_i = \sum_i^n \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$.

Cette variable aléatoire de perte Y peut alors directement être reliée à une mesure de risque propre à Solvabilité II, le SCR.

Le capital requis par la Formule Standard de Solvabilité II pour le risque spécifique j est alors :

- $SCR_{ij} = VaR_{99,5\%}(Y_{ij})$
- $SCR_i = \sqrt{\sum_{x=1}^{m_i} \sum_{y=1}^{m_i} SCR_{ix} \cdot SCR_{iy} \cdot \rho_{ix,iy}}$
- $SCR_i = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{w=1}^n SCR_i \cdot SCR_w \cdot \rho_{i,w}}$

Notons que la racine carrée de la formule d'agrégation implique que les variables aléatoires $Y_{ij}(j = 1, \dots, m_i)$ sont des distributions normales multivariées et sont linéairement corrélées ; ceci permettant la cohérence de la mesure de risque SCR.

En vue de l'allocation de capital, nous avons besoin du lemme suivant :

□ **Lemme** Principe d'allocation d'Euler

Soit $\pi(X)$ une mesure de risque, fonction homogène, continue et différentiable telle que $\Pi : A \rightarrow \mathbb{R}^q$, q étant le nombre de sous-risques

S'il existe des contributions au risque $[\pi(X_1|X), \dots, \pi(X_q|X)]$ qui sont RORAC (Return On Risk Ajusted Capital) compatibles :

$$\pi_{Euler}(X_i|X) = \pi(X_i) \cdot \frac{\partial \pi(X)}{\partial \pi(X_i)} \quad i = 1, \dots, q \quad (3.1)$$

Le principe d'Euler assure la RORAC compatibilité.

L'allocation en capital dans le cas de la Formule Standard est donnée par application du principe d'Euler :

- Allocation en macro-risques³ :

$$SCR(Y_i|Y) = SCR_i \cdot \frac{\sum_{w=1}^n SCR_w \cdot \rho_{w,i}}{SCR_Y} \quad (3.2)$$

où $SCR(Y_i|Y)$ est l'allocation du i-ème macro-risque

3. Démonstration de cette formule en annexe B.1.

- Allocation en micro-risques ⁴ :

$$SCR(Y_{ix}|Y, Y_i) = SCR_{ix} \cdot \frac{\sum_{y=1}^{m_i} SCR_{iy} \cdot \rho_{ix, iy}}{SCR_i} \cdot AR_i \quad (3.3)$$

où $x \in \{1, \dots, m_i\}$ et $AR_i = \frac{SCR(Y_i|Y)}{SCR_i}$ est l'allocation du i-ème micro-risque.

3.3.2 Principe

Pour définir notre *Risk Capacity*, nous allons effectuer les étapes suivantes :

- Calcul du ratio de solvabilité initial ;
- Application des chocs aux actifs en portefeuille ;
- Calcul du nouveau ratio de solvabilité ;
- Définition du seuil de *Risk Capacity* en fonction du ratio minimal souhaité après-choc (100%).

3.3.3 Application

Voici les caractéristiques d'origine du portefeuille *RUNOFF* :

Sous-risque	Taux	Action	Immobilier	Change	Spread	Concentration
Capital requis	744 939	0	2 500 000	3 074 273	2 591 849	0

D'après les formules d'allocations vues précédemment, pour le risque de taux, nous aurons :

$$SCR(Y_{marché;taux}|Y, Y_{marché}) = SCR_{marché;taux} \cdot \frac{\sum_{y=1}^{m_i} SCR_{marché;y} \cdot \rho_{marché;taux, marché;y}}{SCR_{marché}} \cdot AR_{marché}$$

En adaptant la formule ci-dessus pour les autres sous-risques, nous obtenons alors les résultats suivants :

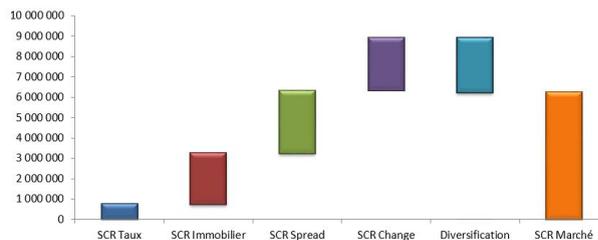


FIGURE 3.6: Avant Allocation d'Euler

D'après les éléments constitutifs de notre portefeuille *RUNOFF*, nous avons un ratio de solvabilité initial : $\frac{FP_i}{SCR_i} = 162\%$.

4. Démonstration fournie en annexe B.2.

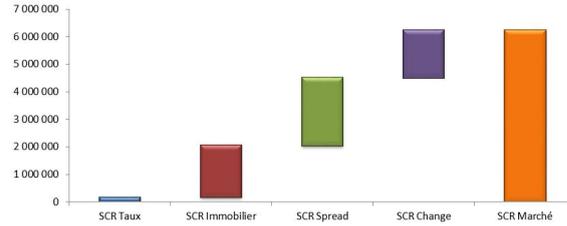


FIGURE 3.7: Après Allocation d'Euler

Après application des chocs, nous avons alors : $\frac{FP_{choc}}{SCR_i} = 134\%$.

Notre limite en ratio de solvabilité étant 100%, nous en déduisons que nous avons 34pts de ratio à disposition, soit un montant total de *Risk Capacity* théorique de 6 349 081€⁵.

Nous avons vu dans la partie 1 de ce chapitre que la première allocation était entièrement consacrée à l'allocation d'actifs et donc au risque de marché en Formule Standard. Nous justifions ce point par l'analogie entre SCR et BSCR car les ajustements et le risque opérationnel ne sont pas des points relatifs à notre *Risk Appetite*.

Il reste à répartir notre *Risk Capacity* sur les différents modules de marché. Ce *Risk Capacity* se traduit en $SCR_{marché}$ après diversification pour un montant de 8 763 719€.

Cette division par sous-risque d'après le principe d'allocation d'Euler nous permet d'obtenir les marges de risque suivantes :

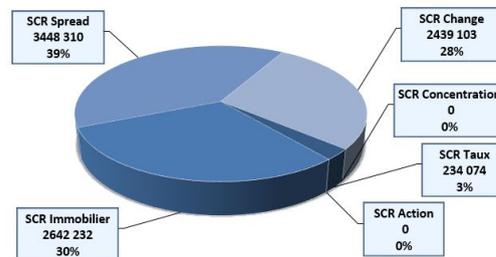


FIGURE 3.8: Répartition par sous-risque du *Risk Capacity*

Nous ne pensons pas augmenter notre appétit sur le risque de Change ou de Concentration⁶. De même, l'immobilier étant un actif très peu liquide et la liquidité relevant d'une des 4 dimensions de notre *Risk Appetite*, nous n'augmenterons pas ce risque.

La poche de *Risk Capacity* n'est donc en réalité à répartir que sur 3 sous-risques : Taux, Action et Spread.

La diversification réalisée sera contenue dans la matrice de corrélation de la Formule Standard avec ces 3 modules⁷ :

5. Ce montant ne correspond pas totalement au *Risk Capacity* réel car le $SCR_{initial}$ est maintenu alors que nos actifs ont subi une dépréciation

6. Ces deux risques sont difficilement reliables à une performance supplémentaire, voir notamment la partie Résultat se trouvant à la partie 4 de ce chapitre

7. D'après l'allocation initiale, c'est la matrice dans le cas d'un risque de taux à la hausse qui est retenue

	Taux	Action	Spread
Taux	1	0	0
Action	0	1	0,75
Spread	0	0,75	1

L'allocation d'Euler ne nous offre aucune marge de risque en Action qui semble pourtant une piste à développer dans notre allocation. Nous supposons pour cette répartition avoir la condition suivante : $S\tilde{C}R_{Taux} = S\tilde{C}R_{Action} = S\tilde{C}R_{Spread}$.

Notre *Risk Capacity* sera donc mobilisé sur ces 3 sous-modules à travers des $S\tilde{C}R_{marché}$, l'ensemble des risques permettant de satisfaire la condition minimale requise :

$$\frac{FP_{choc}}{SCR} \geq 100\%.$$

Sous-risque	Taux	Action	Immobilier	Change	Spread	Concentration
$S\tilde{C}R_{marché}$	2 704 771	4 733 349	0	0	4 733 349	0
$SCR_{marché}$	3 449 710	4 733 349	2 500 000	2 591 849	7 807 622	0

Ce qui nous permet d'obtenir :

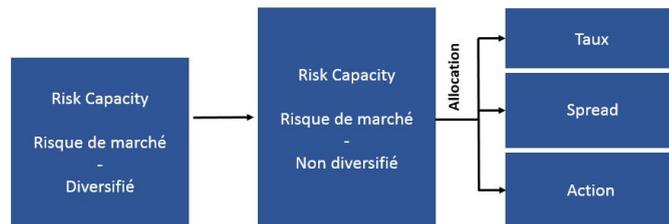


FIGURE 3.9: Diversification du *Risk Capacity* sur les 3 sous-modules

3.4 Allocation d'actifs pour le portefeuille

Notre appétit au risque supplémentaire de la section précédente se matérialise concrètement en testant d'autres allocations d'actifs par rapport à notre allocation actuelle.

Cependant, ces limites fournies ne peuvent être considérées comme opérationnelles. En effet, prenons une obligation d'Entreprise notée BBB (catégorie *Investment Grade*), celle-ci contribuerait alors à plusieurs risques sous la Formule Standard (notamment Taux et Spread).

Il est judicieux de définir nos *FRI*s de façon à obtenir de vraies limites opérationnelles. Nous allons utiliser l'outil Excel que nous avons développé à cet effet dont la méthodologie est définie dans la partie 1 de ce chapitre par la figure 3.4 Modélisation de notre outil Risk Appetite.

Toutes les allocations testées sont relatives aux catégories d'actifs suivantes :

- Action ;
- Obligation d'Etat ;
- Obligation d'Entreprise - *Investment Grade* ;
- Obligation d'Entreprise - *High Yield*.

Avec un pas d'incrémentation de 1% pour chacun de ces 4 actifs, cela représente un total de 176 851 allocations d'actifs différentes en supposant le cash constant.

Ces 4 catégories d'actifs feront partie de nos *FRI*s afin de respecter nos contraintes globales.

Dans un premier temps ces 4 catégories d'actifs vont se réduire aux 4 actifs suivants :

- Action : indice du CAC 40 ;
- Obligation d'Etat, notée AAA ;
- Obligation d'Entreprise, notée A (*Investment Grade*) ;
- Obligation d'Entreprise, notée BB (*High Yield*).

Deux autres catégories d'actifs sont également présentes mais leur proportion restera constante, le cash et l'immobilier. Pour chaque hypothèse de simulation, le montant de cash qui sera constant, sera précisé. L'immobilier représente 10% de nos actifs en début de simulation, sa nature très illiquide nous incite à le garder, tout en s'assurant de la liquidité globale ensuite.

Les obligations modélisées seront définies comme des zéro-coupons, de maturité identique égale à la durée des actifs du portefeuille initial⁸.

Par rapport aux allocations d'actifs testées, on peut remarquer que la perte en valeur engendrée par le *Risk Appetite* est liée à un choc de hausse des taux (perte en valeur des obligations).

Les chocs fournis par le GRM sur nos actifs sont des chocs individuels. Nous utiliserons la matrice de corrélation de la Formule Standard pour corréler nos chocs.

Nos chocs utilisés dans le cadre du *Risk Appetite* vont réduire en valeur nos actifs et donc le $SCR_{\text{marché}}$. Un calcul de SCR après choc est ainsi réalisé.

Nos simulations d'allocations sont donc regroupées et seules celles en adéquation avec notre *Risk Appetite* sur les deux dimensions valeur et solvabilité sont gardées. Notre niveau de cash dans ce cas est celui constaté au 31/12/2015 soit 11 000 000€.

Voici quelques allocations possibles fournies par le modèle en choisissant de se mettre au niveau maximal après choc (ratio Solvabilité II égal à 1), tout en respectant la contrainte sur la variation de nos fonds propres (< 30%).

8. Dans le cas où cette durée n'est pas entière, nous prendrons la valeur des risques la plus importante entre les entiers l'encadrant et le rendement le plus faible

Sim. n°	Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	ratio SII	FP après choc	ratio SII-choc
9313	10%	10%	55%	25%	133%	23 715 239	100%
14003	25%	23%	50%	2%	132%	23 806 324	100%
11126	13%	6%	63%	18%	132%	23 732 628	100%

On remarque que la somme des 4 actifs simulés correspond à 100% (La simulation 9313 donne par exemple, 10% d'action, 10% d'obligation d'état, 55% d'obligation d'entreprise et 25% d'obligation High Yield soit un total de 100%). Ces 100% sont relatifs et à retrancher des 10% d'immobilier et des 11% de cash. La somme totale investie dans ces 4 actifs simulés est donc de 100 000 000.(1-11%-10%) soit 79 000 000€.

Il reste à savoir si ces allocations choisies sont compatibles avec nos deux autres dimensions (Résultat et Liquidité).

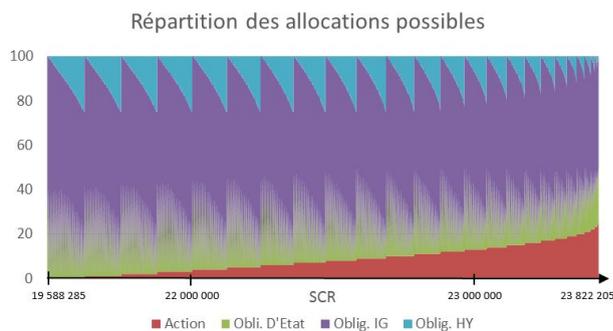


FIGURE 3.10: Répartition des allocations possibles en fonction du SCR

3.5 Contrainte de résultat

La dimension Résultat n'a pas été traitée jusqu'à présent, car notre outil ne l'intégrait pas. Elle peut être définie au travers des *Earnings-at-Risk* à 95% ($EaR_{95\%}$) soit le montant de perte du résultat à un quantile 95% par rapport au résultat attendu.

L'idée de cette dimension est de préserver nos gains financiers malgré les chocs possibles. Nous avons vu que les deux dimensions Valeur et Solvabilité nous conduisent à un nombre conséquent de choix possibles.

L'allocation la plus attractive est celle fournissant le rendement le plus élevé. Nous calculons donc un rendement pour chacun de nos actifs. Les zéro-coupons ont un rendement annualisé, fonction des conditions de marché⁹. Pour les deux autres classes d'actifs, nous prendrons 4,0% pour les actions et 6,0% pour l'immobilier¹⁰.

9. Les conditions de marchés à la date d'évaluation se trouvent en annexe A.1.

10. Données des performances actions et de l'immobilier sur 10 ans, recueillies depuis la publication du cabinet EY à fin 2015. Ces deux rendements portent sur le marché Français, pour les actions, le TRI est celui du CAC40 et calculé selon la méthodologie PME (Public Market Equivalent) : méthode de référence qui permet de répliquer les flux entrants et sortants du capital-investissement dans un indice de marché de référence.

Notons que notre résultat est affecté par 3 points dans l'ordre ci-dessous :

- 1 Coupons, Dividendes, Rentes ;
- 2 Nominal des obligations ;
- 3 Ventes en plus ou moins value d'actifs.

Nous allons donc considérer le rendement et donc le résultat attendu par les gains liés au 1.

Celui-ci sera à comparer avec nos *Earnings-at-Risk* à 95% incluant les points 1, 2 et 3.

Pour les différents chocs à un niveau de quantile 95%, nous gardons les chocs fournis par le GRM, à savoir 25% sur les dividendes actions et 10% sur les rentes immobilières. Pour nos obligations nous pouvons définir deux risques principaux susceptibles de réduire nos résultats financiers :

- Risque de taux si coupon variable ;
- Risque de défaut.

L'ensemble de nos coupons étant à taux fixe, seul le risque de défaut doit être considéré. La probabilité de défaut est celle définie pour un choc à 20 ans par le GRM. Lors d'un défaut, une valeur de recouvrement permet de ne pas perdre l'ensemble de l'investissement dans l'obligation. Les obligations IG auront une valeur de recouvrement de 50% du nominal et les obligations HY 20% de celui-ci.

Voici quelques résultats d'allocations avec nos rendements et nos *Earnings-at-Risk* fournissant un rendement choqué (ce rendement n'intègre pas à ce stade les ventes d'actifs en moins-value s'agissant d'une allocation possible initiale) :

Sim. n°	Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	ratio SII	FP après choc	ratio SII-choc
10549	18%	0%	77%	5%	133%	22 684 613	100%
13623	20%	11%	62%	7%	132%	22 660 429	100%

Simulation n°	Rendement attendu	Rendement choqué	Résultat préservé
10549	2,32%	1,49%	64,5%
13623	2,27%	1,37%	60,2%

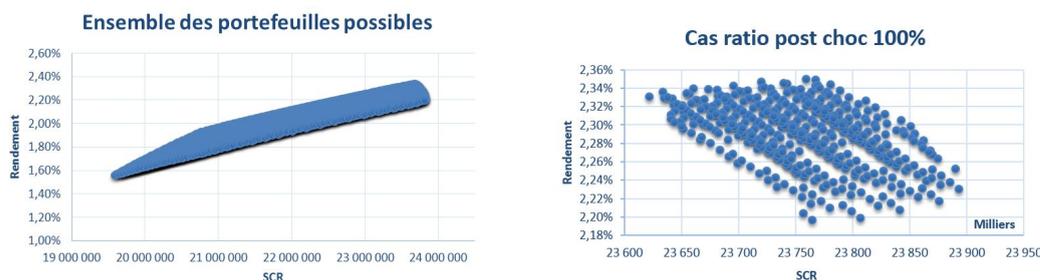


FIGURE 3.11: Rendement des allocations en fonction du SCR

3.6 Contrainte de liquidité

3.6.1 Liquidité en cash

La liquidité est très importante dans le cadre de notre *Risk Appetite* et les autres dimensions définies ne la prennent pas en compte¹¹.

Le risque de liquidité mesure la probabilité qu'une compagnie ait une ressource de cash insuffisante pour payer les cash-flows présents ou futurs. La perte intervient alors par les coûts liés à la vente forcée d'actifs qui peuvent être en moins-value. L'allocation stratégique doit inclure le coût associé à la revente d'actifs sous un scénario de stress.

Là où nous avons effectué une approche Top-Down pour l'allocation sous risques à l'actif, le risque de liquidité se pilote plus via une approche Bottom-Up. L'approche Bottom-Up se justifie par le fait que ce sont notamment la variabilité de nos cash-flows nets et la vente forcée d'actifs qui permettent d'obtenir le montant en cash qui nous est nécessaire.

Nous avons défini le *Risk Appetite* pour la liquidité tel que :

La compagnie maintient une liquidité suffisante pour un choc 1 : 200 ans sur une année.

A ce stade du mémoire, nous ne prenons pas en compte les cash-flows lors de la définition des limites d'allocations du *Risk Appetite*, il n'est donc pas possible d'obtenir le montant de liquidité nécessaire pour la variabilité des cash-flows. Ce risque de liquidité sur nos cash-flows sera étudié dans le chapitre V par une étude ALM. Nous pouvons tout de même définir le risque de liquidité sur nos actifs.

Pour notre allocation initiale, ce risque représente 12 444 728€ si l'on considère la totalité des actifs du bilan. Le risque de revente forcée est lié à notre passif. Ainsi, nous considérerons seulement la perte des actifs en face des passifs engageants, soit le BEL et la marge pour risque correspondant à 68,6% des passifs. L'allocation compatible avec notre *Risk Appetite*, nécessite 8 533 133€ de cash alloués au risque de liquidité, soit un niveau d'alerte à 10 666 392€.

3.6.2 Approche liquidité globale

Il est également possible de définir ce que l'on appelle la liquidité globale du portefeuille. Nous pouvons segmenter la liquidité globale de nos actifs en 3 tiers :

- Tier 1 : Très liquide : Cash, Obligation d'Etat ;
- Tier 2 : Liquide : Obligation d'Entreprise, Coupon, Dividende, Rente ;
- Tier 3 : Non liquide : La vente de ces actifs crée un fort impact de marché et un coût de liquidité élevé.

11. La Formule Standard ne peut pas modéliser la liquidité notamment.

De par les conditions de marché fournies par l'article de PwC [20], notre capital disponible est alors défini par :

$$\text{Capital Disponible} = 98\% \cdot \text{Tier 1} + 80\% \cdot \text{Tier 2}$$

A tout moment le respect du risque de liquidité est : $\text{Capital Requis} \leq \text{Capital Disponible}$

Au 31/12/2015, avec l'allocation initiale, la liquidité globale s'élève alors à 80 892 000€ (80,9% de liquidité globale).

Nous avons vu qu'une allocation possible maximisant nos actifs risqués est :

Sim. n°	Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	ratio SII	FP après choc	ratio SII-choc
10549	18%	0%	77%	5%	133%	22 684 613	100%

Dans le cas d'un choc financier de 1 : 200 ans, le capital requis pour notre dimension liquidité du *Risk Appetite* est de 8 533 133€ et la liquidité globale s'élève à 71 668 039€ (81,9% de liquidité globale).

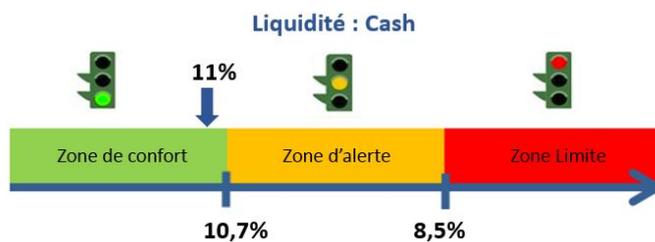


FIGURE 3.12: Position actuelle, Alerte et Limite du Risque de Liquidité

Nous remarquons que la contrainte de liquidité est respectée dans le cadre de notre *Risk Appetite*.

Chapitre 4

Comparaison des chocs d'appétence au risque modélisés par les modèles classiques et ceux donnés par le GRM

Le but de ce chapitre est de challenger les chocs fournis par le GRM pour notre *Risk Appetite*, en développant des modèles usuels. Nous avons donc choisi de simuler deux de nos risques principaux : taux et action.

L'idée est de projeter à un an nos modèles et de récupérer les quantiles relatifs comme dans l'approche Formule Standard, puis les comparer à nos chocs *Risk Appetite*.

Pour chaque modèle de projection étudié, 5 principaux points seront à définir :

- 1 Choix du modèle de projection ;
- 2 Choix des inputs ;
- 3 Calibration du modèle ;
- 4 Génération des scénarios ;
- 5 Validation des scénarios générés.

4.1 Simulation de loi Uniforme

Dans la projection de nos modèles sur une année, nous allons avoir recours à la loi normale. Cependant, pour simuler aléatoirement cette loi normale, nous devons passer par sa fonction de répartition F et simuler une loi uniforme aléatoire. La fonction $Rnd()$ d'Excel existe, les résultats fournis par cette fonction peuvent être décevants en termes

de répartition par rapport à une loi uniforme théorique comme le montre [16] [Planchet and Jacquemin](#).

Pour remédier à cela, on propose le recours à *l'algorithme du tore*, et notamment la *translation irrationnelle du tore* particulièrement efficace et facile d'implémentation. Il s'agit d'un générateur quasi-aléatoire, contrairement à la fonction $Rnd()$ pseudo-aléatoire, qui part d'une valeur initiale (changer cette valeur initiale permet de changer la suite de nombres).

Ce générateur multidimensionnel donne à la n -ème réalisation de la d -ème variable aléatoire uniforme à simuler la valeur u_n :

$$u_n = n \cdot \sqrt{p_d} - \lfloor n \cdot \sqrt{p_d} \rfloor \quad (4.1)$$

Par exemple pour $d=3$, le 3^{ème} nombre premier est $p_d = 5$. Nous pouvons alors simuler 10000 fois pour obtenir le graphique suivant :

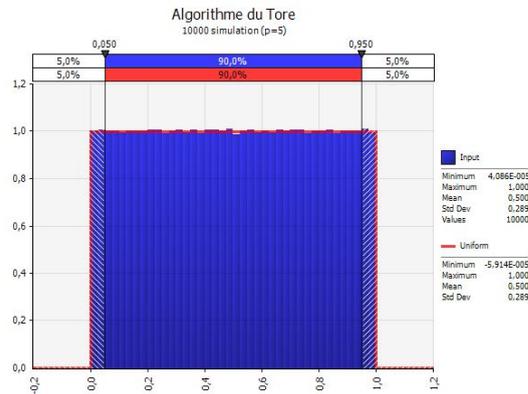


FIGURE 4.1: Simulation de la loi uniforme par l'algorithme du Tore $p_d = 5$

Cependant, comme le montre une étude de [17] [Planchet and Thérond](#), cet algorithme crée des dépendances terme à terme. Il est donc nécessaire pour contourner ce problème de passer par *l'algorithme du tore mélangé*.

Notons (u_n) la suite générée par le nombre premier p . Au lieu d'utiliser le nombre u_n lors du n -ème tirage de la loi uniforme sur $[0, 1]$, nous proposons d'utiliser u_m où m est choisi de manière aléatoire dans N .

Son implémentation se fait telle que :

$$u_m = u_h(m) \quad (4.2)$$

$$h(m) = \lfloor n\alpha \cdot N \cdot \tilde{u} + 1 \rfloor \quad (4.3)$$

N est le nombre de réalisations que l'on souhaite générer sur notre variable aléatoire et, comme nous choisirons un pas mensuel de projection sur une année, nous prendrons $N = 12$.

Le facteur α de l'équation a pour vocation de réduire le nombre de tirages qui donneraient lieu au même indice et donc au même nombre aléatoire¹.

Le générateur ainsi obtenu présente les mêmes bonnes caractéristiques globales que l'algorithme du tore sans la dépendance terme à terme. Nous nous servirons de cet algorithme lors de l'utilisation de la loi uniforme pour nos projections.

4.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Choix du modèle

Dans notre cas, comme nous ne cherchons pas de valorisation des actifs mais un niveau de choc sur les taux, nous choisissons d'écarter les approches multifacteurs, complexes à mettre en oeuvre, pour nous intéresser aux modèles monofacteur, comme le modèle de taux de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) développé en 1985.

Sous la probabilité historique \mathbb{P} , le modèle CIR se définit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

- r_t est le taux court à l'instant t
- a est le coefficient de vitesse de retour à la moyenne
- b le taux moyen à long terme
- σ une constante de volatilité
- W_t un mouvement brownien

Ce modèle ne produit que des taux positifs sous la condition : $2ab > \sigma^2$.

Cette modélisation est simple d'implémentation et intuitive du fait de l'interprétation de ses paramètres. Elle est également simple d'utilisation et de calcul d'un point de vue informatique et dispose aussi d'expressions analytiques pour les produits de taux standards comme les zéro-coupons et les obligations. Elle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constaté sur les taux d'intérêt, qui correspond aux observations empiriques.

Le modèle CIR est un modèle de volatilité conditionnelle, lorsque le taux court est élevé, la volatilité est également élevée.

1. Les résultats de l'étude montrent que $\alpha = 10$ est suffisant.

En revanche, ce modèle simple a l'inconvénient d'avoir des paramètres de diffusions constants. Il est non compatible avec la courbe des taux car il n'a qu'une seule composante tendancielle (croissance ou décroissance).

Choix des inputs

Pour nos inputs, nous allons choisir la courbe des taux zéro-coupons de l'Institut des Actuaire. Notre étude étant au 31/12/2015, celle retenue sera la publication des taux fin décembre 2015. Pour notre taux court de départ, nous partirons du premier taux EONIA² de l'année 2016³, $r_0 = -0,241\%$.

Le taux EONIA est le taux d'intérêt interbancaire pour la zone euro avec une échéance de 1 jour. Cependant, le taux fourni par le modèle CIR doit être positif, nous sommes donc contraints à prendre 0,0% comme taux de départ. Le modèle très répandu CIR semble donc trouver ces limites dans notre environnement de taux négatifs de par l'initialisation même du modèle.

Calibration du modèle

Avant de calibrer notre modèle, nous allons passer par la forme explicite d'évaluation des zéro-coupons. Cette méthode requiert le passage sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , obtenue par le théorème de Girsanov. La forme de l'Equation Différentielle Stochastique (EDS) du modèle reste identique sous la probabilité risque neutre⁴ :

$$dr_t = \tilde{a}(\tilde{b} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (4.4)$$

A la date t , le prix d'un zéro-coupon de maturité T est donné par :

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot e^{-B(t, T)r_t} \quad (4.5)$$

avec :

$$A(t, T) = \left(\frac{2\gamma e^{\frac{(\gamma+\tilde{a})(T-t)}{2}}}{(\gamma + \tilde{a})(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right)^{\frac{2\tilde{a}\tilde{b}}{\sigma^2}}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + \tilde{a})(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\tilde{a}^2 + 2\sigma^2}$$

2. Euro OverNight Index Average.

3. Nous ne prenons pas le dernier taux 2015 car un GAP de taux est présent entre ces deux dates comme le montre le graphique en annexe A.1.1.

4. Coefficients de \tilde{a} et \tilde{b} en lien avec a et b en annexe C.1.1.

De plus, nous avons :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$$

$$R(t, T) = \frac{r_t \cdot B(t, T) - \ln(A(t, T))}{T-t}$$

La calibration a été effectuée à partir de la courbe des taux de l'Institut des Actulaires. Nous allons estimer les paramètres (a, b, σ) en minimisant la distance (méthode des moindres carrés) entre les taux zéro-coupon observés⁵ et ceux donnés par le modèle CIR. Cette minimisation se fait sur 10 années avec un pas de taux mensuel, soit $n = 120$.

$$\min_{a, b, \sigma} \left[\sum_{i=1}^n [R_i - R_{ob, i}]^2 \right] \quad (4.6)$$

- R_i est le taux d'intérêt théorique de maturité i ;
- $R_{ob, i}$ est le taux d'intérêt observé de maturité i .

De plus, nous fixons notre volatilité mensuelle à l'aide de la courbe des taux de l'Institut des Actulaires sur 10 ans soit $\sigma_m = 0,45\%$.

Cela fournit une volatilité annuelle de $\sigma_a = 1,56\%$.

Avec notre calibration nous obtenons :

Paramètres	Estimateurs
\hat{a}	9,05%
\hat{b}	2,5%
$\hat{\sigma}$	1,56%

FIGURE 4.2: Paramètres du modèle de Cox-Ingersoll-Ross

La condition $2\hat{a}\hat{b} > \hat{\sigma}$ est vérifiée, nous pouvons dès lors représenter nos deux courbes zéro-coupon :

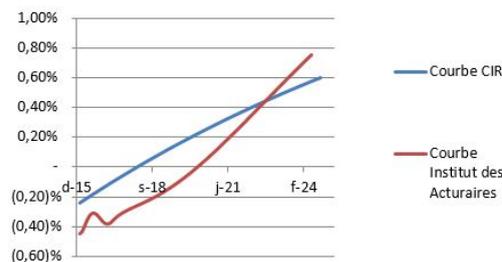


FIGURE 4.3: Courbes des taux zéro-coupon

5. Ceux fournis par l'Institut des Actulaires.

Comme nous pouvons le constater, il est difficile d'expliquer une courbe de taux à l'aide d'un simple taux court.

La somme des écarts au carré nous donne : $\sum_{i=1}^{120} [R_i - R_{ob,i}]^2 = 0,05\%$

Simulation du taux court

Ce processus n'admet ni une solution explicite, ni une discrétisation exacte. Il convient alors d'utiliser une méthode d'approximation, les plus connues étant les développements d'Itô-Taylor. Le Schéma d'Euler reprend le développement d'Itô-Taylor à l'ordre 1 et consiste en l'approximation du processus continu r par le processus discret \tilde{r} :

$$r_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\delta \epsilon \quad (4.7)$$

où ϵ est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et δ est le pas de discrétisation retenu.

Pour une meilleure approximation, au sens de la convergence forte, on peut préférer le schéma de Milstein qui est un développement d'Itô-Taylor à l'ordre 2. L'approximation du taux court dans le modèle de CIR s'écrit alors :

$$r_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\delta \epsilon + \frac{\sigma^2}{4}.\delta(\epsilon^2 - 1) \quad (4.8)$$

Les chocs retenus sont alors les suivants :

Choc	Quantile	Taux d'intérêt	choc bps
1 : 20	Quantile 5%	0,13%	0
	Quantile 95%	0,28%	28
1 : 200	Quantile 0,5%	0,19%	0
	Quantile 99,5%	0,35%	35

FIGURE 4.4: Chocs fournis par le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Comme nous partons d'un taux de départ de 0,00% et que les taux simulés sont positifs, nous n'avons pas de baisse des taux. De plus, la hausse des taux est très concentrée de par le taux de départ nul qui empêche les fortes variations.

4.3 Modèle de Vasicek

Choix du modèle

Le modèle précédent ne prenait pas en considération les taux négatifs qui sont présents notamment à notre date d'évaluation. Le modèle de Vasicek est un modèle simple répondant à ce critère. Sous la probabilité historique \mathbb{P} , le modèle Vasicek se définit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Il possède globalement les mêmes caractéristiques que le modèle CIR vu précédemment. Nous allons pour ce modèle, faire une projection des taux sur une année à la fois en probabilité risque neutre \mathbb{Q} , mais également en probabilité historique \mathbb{P} .

Ce choix de tester les deux cas vient du fait que nous cherchons à retrouver les chocs fournis par le GRM sans utiliser ces taux en vue d'une projection.

Le modèle de Vasicek sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} s'écrit :

$$dr_t = a(\tilde{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

où on a posé $\tilde{b} = b - \frac{\sigma\lambda}{a}$ pour $\tilde{\lambda} = \lambda$ et le théorème de Girsanov.

Comme le montre l'expression, les paramètres a et σ sont théoriquement les mêmes sous \mathbb{Q} et sous \mathbb{P} , ce qui nous amène à conduire ces deux études en même temps.

Choix des inputs

Nous avons deux modélisations à conduire en parallèle pour ce modèle, une sous \mathbb{Q} et l'autre sous \mathbb{P} .

Pour celle relative à la probabilité risque neutre, nous reprendrons les mêmes inputs que pour le modèle CIR.

Pour la partie probabilité historique, nous utiliserons le taux EONIA sur la période 1999-2015. C'est ce même taux qui sert à initialiser notre calibration sous la probabilité \mathbb{Q} que nous avons vue précédemment avec le modèle CIR.

Calibration du modèle

- Pour la calibration sous la probabilité risque neutre :

La solution de cette Equation Différentielle Stochastique sous la probabilité \mathbb{Q} est :

$$r_t = r_0 \cdot e^{-at} + \tilde{b}(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s^{\mathbb{Q}} \quad (4.9)$$

Le taux d'un zéro-coupon $R(t, T)$ est alors donné par :

$$R(t, T) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \quad (4.10)$$

avec :

$$R_\infty = \tilde{b} - \frac{\sigma^2}{2a^3}$$

Nous estimons les paramètres (a, b, σ) en minimisant la distance :

$$\min_{a, b, \sigma} \left[\sum_{i=1}^n [R_i - R_{ob, i}]^2 \right] \quad (4.11)$$

Cette minimisation se fait sur 10 années avec un pas de taux mensuel, soit $n = 120$.

Avec notre calibration nous obtenons :

Paramètres	Estimateurs
\hat{a}	20,68%
\hat{b}	2,5%
$\hat{\sigma}$	1,56%

FIGURE 4.5: Paramètres du modèle de Vasicek sous la probabilité \mathbb{Q}

- Pour la calibration sous la probabilité historique :

Nous avons procédé à la régression linéaire par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires en considérant le processus d'Ornstein-Uhlenbeck comme étant un processus autorégressif d'ordre 1 (AR1) : $r_{t+1} = \beta_2 r_t + \beta_1 + \beta_0 \epsilon_t$ avec ϵ_t un bruit blanc représentant le terme d'erreur.

Les coefficients associés sont alors ⁶ :

$$\begin{array}{l} \beta_2 = e^{-a} \\ \beta_1 = b(1 - e^{-a}) \\ \beta_0 = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a}}{2a}} \end{array} \iff \begin{array}{l} \hat{a} = -\ln(\hat{\beta}_2) \\ \hat{b} = \frac{\hat{\beta}_1}{1 - \hat{\beta}_2} \\ \hat{\sigma} = \hat{\beta}_0 \frac{2\ln(\hat{\beta}_2)}{\hat{\beta}_2^2 - 1} \end{array}$$

6. On retrouve ces coefficients notamment par analogie avec la discrétisation du processus que l'on voit dans la partie simulation.

On obtient les paramètres :

Paramètres	Estimateurs
\hat{a}	0,31%
\hat{b}	1,75%
$\hat{\sigma}$	0,13%

FIGURE 4.6: Paramètres du modèle de Vasicek sous la probabilité \mathbb{P}

On remarque que ceux-ci sont différents de ceux de la calibration en probabilité risque neutre car notre régression est faite avec un pas journalier et donc des coefficients journaliers.

En passant notre volatilité journalière en annuelle, nous obtenons : $\sigma_a = 2,04\%$ à comparer aux $1,56\%$ choisis via la courbe de l'Institut des Actuaire.

Simulation du taux court

Nous avons vu dans la calibration du modèle la dynamique du modèle sous \mathbb{Q} , cette dynamique est identique dans l'univers historique :

$$r_t = r_0 \cdot e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien conduisent à la discrétisation exacte ⁷ :

$$r_{t+\delta t} = r_t e^{-a\delta t} + b(1 - e^{-a\delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta t}}{2a}} \epsilon \quad (4.12)$$

Cette discrétisation est à ajuster aux coefficients respectifs pour les probabilités \mathbb{P} et \mathbb{Q} , notamment \tilde{b} sous la probabilité risque neutre.

Les chocs retenus sont alors les suivants :

Choc	Quantile	Taux \mathbb{Q}	choc bps \mathbb{Q}	Taux \mathbb{P}	choc bps \mathbb{P}
1 : 20	Quantile 5%	-2,15%	-191	-1,09%	-81
	Quantile 95%	2,36%	260	0,75%	103
1 : 200	Quantile 0,5%	-3,34%	-310	-1,67%	-138
	Quantile 99,5%	3,71%	395	1,16%	144

FIGURE 4.7: Chocs fournis par le modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek fournit des résultats de chocs plus étendus du fait de la prise en compte des taux négatifs de départ. Les résultats sous \mathbb{Q} et \mathbb{P} sont très différents. On ne

⁷. La démonstration de cette discrétisation se trouve en annexe C.1.2.

peut pas vraiment conclure par rapport aux -60 bps et +250 bps du GRM dans le cas de taux bas et pour un choc bicentenaire.

4.4 Modèle de Merton

Choix du modèle

Pour la modélisation action, nous avons choisi le modèle de Merton pour la raison qu'il ne minimise pas la queue de distribution comme le ferait la loi normale sous Black & Scholes. Le modèle de Merton intègre des sauts qui tiennent compte de l'arrivée d'informations impactant le cours de l'actif.

Le modèle de Black & Scholes repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS), en supposant que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique (ou processus de Wiener généralisé).

Cette équation (EDS) s'écrit pour tout instant $t > 0$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t \quad (4.13)$$

- S_t est le prix de l'action à la date t
- μ et σ sont des constantes
- W est un processus de Wiener généralisé

Par le lemme d'Itô, la solution de cette équation s'écrit :

$$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t + \sigma \cdot W_t} \quad (4.14)$$

Le rendement journalier «logarithmique» est alors donné par :

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \cdot W_1 \quad (4.15)$$

La méthode des moments et celle du maximum de vraisemblance conduisent aux mêmes estimateurs.

$\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T r_t = \bar{r}$	Moyenne empirique
$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (r_t - \bar{r})^2$	Variance empirique

FIGURE 4.8: Estimateurs du modèle de Black & Scholes

Le modèle de Merton se fait donc par rajout de sauts dans le modèle de Black & Scholes. L'équation différentielle stochastique associée au modèle est alors :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t + dJ_t \quad (4.16)$$

avec :

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i \quad (4.17)$$

Nous devons donc définir une famille de sauts U_1, U_2, \dots, U_j , à des instants $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$. Nous introduisons alors les processus suivants :

- N_t un processus de Poisson d'intensité λ . Il compte le nombre de sauts ayant eu lieu avant l'instant t . Les propriétés fondamentales d'un processus de Poisson imposent que N_t soit à accroissements indépendants et stationnaires.
- $Z_i \sim N(0, \sigma_z^2)$ ⁸

Les processus W, N et Z sont indépendants. Le modèle de Merton possède une solution exacte :

$$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t + \sigma \cdot W_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i} \quad (4.18)$$

Notons que le cas où $N_t = 0$, la composante de saut est alors nulle, et on retrouve le modèle de Black & Scholes. En notant n le nombre d'observations sur notre intervalle d'observations, $\forall i \in [0, n]$, les rendements entre deux dates s'écrivent :

$$r_{t_i} = \ln \left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \cdot (W_t - W_{t-1}) + \left(\sum_{k=1}^{N_t} Z_k - \sum_{k=1}^{N_{t-1}} Z_k \right) \quad (4.19)$$

On prouve en annexe C.2.2 que les variables aléatoires r_1, \dots, r_n sont indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres termes, les rendements sur des intervalles disjoints sont indépendants et la distribution du rendement dépend de la longueur de l'intervalle mais pas de sa position.

Choix des inputs

Pour nos inputs, nous avons choisi les 2 courbes suivantes :

- l'indice CAC 40 de 1999 à août 2016 ;
- Cours Alcatel de 2008 à août 2016.

Nous utilisons plusieurs inputs afin de ne pas restreindre notre vision sur un seul titre ou indice peu ou trop volatil.

8. Le détail d'introduction de ce processus est expliqué en annexe C.2.1.

Calibration du modèle

Afin de calibrer le modèle de Merton, nous allons utiliser la méthode des moments. La densité des rendements est donnée par la formule⁹ :

$$f_r(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 + n\sigma_z^2}} e^{-\frac{(x-\mu+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2(\sigma^2+n\sigma_z^2)}} \right] \quad (4.20)$$

La symétrie de la distribution nous permet de conclure que les moments centrés d'ordre impair sont nuls.

Les moments centrés d'ordre pair sont alors¹⁰ :

$$\mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} (\sigma^2 + n\sigma_z^2)^k \quad (4.21)$$

Notre modèle est donc composé des quatre paramètres : λ , σ^2 , σ_z^2 et μ . Il suffit donc de 4 équations indépendantes pour les estimer à partir de nos rendements observés (r_1, \dots, r_K) :

$$\begin{cases} m = \mathbb{E}[r] = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^2] = \sigma^2 + \lambda\sigma_z^2 \\ \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^4] = 3((\sigma^2 + \lambda\sigma_z^2)^2 + \lambda\sigma_z^4) \\ \mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^6] = 15((\sigma^2 + \lambda\sigma_z^2)^3 + 3\lambda\sigma_z^4(\sigma^2 + \lambda\sigma_z^2) + \lambda\sigma_z^6) \end{cases} \quad (4.22)$$

Posons les valeurs liées à notre rendement observé, avec K le nombre d'observations :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_k = \bar{r} \\ m_2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (r_k - \bar{r})^2 \\ m_4 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (r_k - \bar{r})^4 \\ m_6 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (r_k - \bar{r})^6 \end{cases} \quad (4.23)$$

9. Démonstration de cette densité en annexe C.2.2.

10. Démonstration de cette formule des moments en annexe C.2.3.

Ce qui revient à résoudre :

$$\begin{cases} F_1(x) = \mathbb{E}[r] - m_1 \\ F_2(x) = \mathbb{E}[r - m]^2 - m_2 \\ F_3(x) = \mathbb{E}[r - m]^4 - m_4 \\ F_4(x) = \mathbb{E}[r - m]^6 - m_6 \end{cases} \quad (4.24)$$

Ce qui se traduit finalement par la minimisation de la fonction h suivante :

$$h(x) = F_1(x)^2 + F_2(x)^2 + F_3(x)^2 + F_4(x)^2$$

Cette fonction h étant convexe, minimiser h dans un voisinage de solution de système revient à résoudre :

$$\Delta h(x) = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial \lambda} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial \sigma^2} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial \sigma_z^2} \quad \frac{\partial h(x)}{\partial \mu} \right) = 0$$

Pour la résolution de ces équations non linéaires sans contrainte, nous utilisons le package *nleqslv* du logiciel *R* avec les paramètres adaptés. Les fonctions fournies par les packages (*nleqslv*, *testnslv* et *searchzeros*) permettent ensemble de trouver la solution optimale du système en minimisant h .

- *nleqslv* est la fonction principale du package qui permet de trouver une convergence locale à une situation et une méthode initiale définie
- *testnslv* permet de tester plusieurs méthodes de convergence
- *searchzeros* lance plusieurs fois *nleqslv* avec des valeurs initiales différentes

L'utilisation de toutes ces fonctions permet d'aboutir à un point de convergence global pour notre système.

Application à nos inputs

Paramètres	Indice CAC 40	Action Alcatel
Moyenne r	$1,31 \cdot 10^{-5}$	$-3,52 \cdot 10^{-4}$
Variance r	$2,21 \cdot 10^{-4}$	$1,54 \cdot 10^{-3}$
Calibration		
λ	$9,62 \cdot 10^{-2}$	$2,34 \cdot 10^{-1}$
σ^2	$1,36 \cdot 10^{-4}$	$3,83 \cdot 10^{-4}$
σ_z^2	$8,77 \cdot 10^{-4}$	$3,07 \cdot 10^{-3}$
μ	$8,13 \cdot 10^{-5}$	$3,26 \cdot 10^{-5}$

On remarque que l'action Alcatel est nettement plus volatile que notre indice CAC 40.

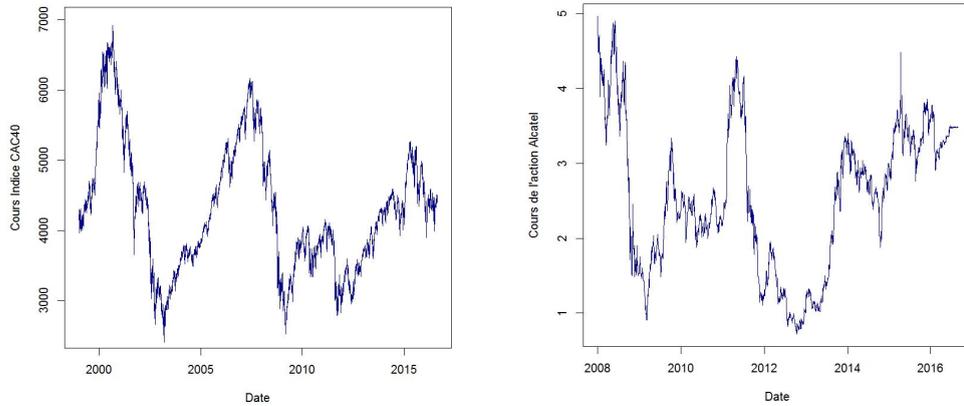


FIGURE 4.9: Evolution historique des actifs

Simulation d'une action fictive

Comme pour le modèle de Black & Scholes, une discrétisation exacte existe pour simuler la trajectoire de Merton ¹¹.

$$S_t = S_{t-\Delta t} \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot \epsilon_t + \sum_{j=1}^{N_{\Delta t}} Z_j} \quad (4.25)$$

Où :

$$\begin{cases} N_{\Delta t} \sim P(\lambda \Delta t) \\ Z_j \sim N(0, \sigma_z^2) \\ \epsilon_t \sim N(0, 1) \end{cases}$$

Les chocs retenus sont alors les suivants :

Choc	Quantile	Choc indice CAC 40	Choc action Alcatel
1 : 20	Quantile 5%	-32,8%	-62,5%
	Quantile 95%	51%	155%
1 : 200	Quantile 0,5%	-45,4%	-78,0%
	Quantile 99,5%	101%	354%

FIGURE 4.10: Chocs fournis par le modèle de Merton

Les deux chocs à 200 ans sont plus importants que ceux du GRM. Il faudrait effectuer notre étude sur plusieurs actions pour réellement comparer nos chocs.

11. Le pas de discrétisation est journalier en considérant 255 jours par an.

Test d'adéquation du modèle aux données

Il s'agit de vérifier l'adéquation de notre modèle de Merton pour l'indice CAC 40 et l'action Alcatel par rapport à leurs données empiriques. Nous effectuons pour cela un test d'adéquation du χ^2 .

Présentation du test :

Pour effectuer ce test, il convient de diviser nos rendements empiriques en K classes. Notons n_i le nombre de données appartenant à la classe i ($i = 1, \dots, K$). Alors $\sum_{i=1}^K n_i = N$ est le nombre total de nos données.

Sous l'hypothèse H_0 , notre modèle est en adéquation avec nos données, n_i suit une loi binomiale $\mathbb{B}(N, p_i)$ où p_i est la probabilité qu'un événement aléatoire suivant notre modèle appartienne à la classe i .

D'après le théorème central limite, $\forall i = 1, \dots, K$, $H_0 : \frac{(n_i - Np_i)}{\sqrt{Np_i}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{N}(0, \sqrt{1 - p_i})$

Donc sous H_0 , la statistique de $T_N = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$ suit asymptotiquement une loi du χ^2 à $K - r - 1$ degrés de liberté (où r est le nombre de paramètres de notre modèle soit $r=4$).

Le critère de Cochran permet d'admettre que si aucune classe n'est vide en espérance ($\mathbb{E}(n_i) = N.p_i \geq 1 \forall i = 1, \dots, K$) et au moins 80% des classes ont plus de 5 observations en espérance ($\mathbb{E}(n_i) = N.p_i \geq 5$) alors on accepte l'hypothèse H_0 si on a : $T_N \leq \chi_{K-r-1}^2(\alpha)$.

Où $\chi_{K-r-1}^2(\alpha)$ est le quantile à l'ordre α du χ^2 à $K - r - 1$ degrés de liberté, α est l'erreur de première espèce du test.

Nous trions nos rendements en 10 classes tout en respectant le critère de Cochran évoqué ci-dessus : $] - \infty; -2\%[$; $] - 2\%; -1,2\%[$; $] - 1,2\%; -0,8\%[$; $] - 0,8\%; -0,4\%[$; $] - 0,4\%; 0\%[$; $] 0\%; 0,4\%[$; $] 0,4\%; 0,8\%[$; $] 0,8\%; 1,2\%[$; $] 1,2\%; 2\%[$; $] 2\%; \infty[$

Pour nos modèles, le nombre de degrés de liberté est de 5 ($10 - 4 - 1$).

	Statistique T_N	Valeur du quantile du χ^2 correspondant à $\alpha=0,95$	Valeur du quantile du χ^2 correspondant à $\alpha=0,995$
CAC 40	42,90	11,07	15,09
Alcatel	8,16	11,07	15,09

Le test nous permet de montrer que, pour le cours Alcatel, notre modélisation est en adéquation avec les données historiques et on ne rejette pas H_0 , ce qui n'est pas le cas pour notre indice CAC 40.

4.5 Comparaison des chocs

Nos chocs obtenus par nos modèles sont très volatils de par la ressource de données mobilisées qui est peu importante. On retrouve malgré tout l'ordre d'idée des chocs dans le cas action. Nos modèles de taux trop simplistes et les niveaux de taux actuels associés ne permettent pas de challenger les chocs du GRM.

Nous garderons pour la suite de l'étude les chocs du GRM définis au chapitre III.

Chapitre 5

Approche ALM et sensibilité des limites à des chocs

5.1 Développement ALM du modèle Excel

Dans le Chapitre III, nous avons pu obtenir des premiers résultats sur les allocations éventuelles vers lesquelles nous pouvions nous tourner compte tenu de notre bilan initial. Nous pouvons faire quelques remarques concernant ce premier modèle :

- 1 La séquence de cash-flows des paiements n'est pas prise en compte, seule une duration globale pilote nos investissements.
- 2 Les ratings des obligations ne sont pas tous représentés avec seulement la présence de deux obligations pour les entreprises (*Investment Grade* et *High Yield*). Nous pouvons envisager de considérer les différents ratings dans ces 2 catégories (AAA, AA, A, BBB pour *Investment Grade* et BB, B, CCC pour le *High Yield*).
- 3 Les maturités pour lesquelles les investissements de chaque classe sont effectués doivent être considérées dans le cas où les deux premiers points sont respectés.

Nous allons développer un modèle ALM simplifié de *Risk Appetite* afin d'être plus juste dans notre modélisation. Considérons tout d'abord le passage du *Duration Matching* vers un *Cash Flow Matching*.

Le premier élément est notre séquence de cash-flows liée aux passifs de réassurance.

A cela s'ajoutent d'autres séquences :

- Les commutations¹ ;
- Les frais de personnel, d'IT et de locaux, les taxes et autres dépenses.

1. Nous considérons que pour nos commutations, nous proposons à la cédante l'ensemble de nos réserves pour ce risque de telle façon que nous ne dégagions pas de résultat technique de cette opération. Seul le capital relatif au SCR et la marge pour risque sont alors libérés en fonds disponibles pour la société.

L'ensemble de ces flux nous donne nos cash-flows totaux. L'allocation se faisant via des zéro-coupons, nous avons la propriété : $Duration = Maturité$.

Nous choisissons de faire un *Cash Flow Matching* sur nos 10 premières années de paiements. Le reste des actifs à allouer en obligations constitue un portefeuille obligataire que l'on nomme *Free Portfolio* à une maturité $Mat_{Oblig. restante}$ telle que :

$$D_A \cdot M_A = Mat_{Obligation} \cdot M_{10 \text{ premières années}} + Mat_{Oblig. restante} \cdot M_{Oblig. restante}$$

Notre méthode hybride repose donc sur un *Cash Flow Matching* sur 10 ans puis sur un *Duration Matching* pour le reste des actifs². Dans notre cas, on obtient une duration pour notre *Free Portfolio* égale à 7,3 ans (arrondi à 7 ans lors de l'investissement en zéro-coupon).

Par ailleurs, nous allons augmenter la précision liée à nos investissements en répartissant nos Obligations d'Entreprises *Investment Grade* et *High Yield* en ratings plus fins (respectivement AAA, AA, A, BBB et BB, B, CCC). Il est à noter que nous ne pouvons cependant pas tester l'ensemble des combinaisons possibles avec notre outil. L'idée est alors de répartir nos 2 catégories d'actifs (*Investment Grade* et *High Yield*) de façon fixe sur leurs ratings possibles.

Pour l'ensemble de ce chapitre nous choisirons cette répartition :

<i>Investment Grade</i>		<i>High Yield</i>	
Corp. AAA	10%	Corp. BB	80%
Corp. AA	10%	Corp. B	10%
Corp. A	70%	Corp. CCC	10%
Corp. BBB	10%	Corp. CC	0%

Enfin, l'allocation ne se fera pas proportionnellement entre les 3 classes (Obligation d'Etat, Obligation d'entreprise IG & HY) mais en reprenant les résultats présentés dans une étude sur les impacts de Solvabilité II sur la gestion obligataire [3]³. Celle-ci indique clairement qu'il est préférable d'investir dans des Obligations d'Entreprises HY de courte maturité et dans des Obligations d'Etats de plus longue maturité, celles-ci optimisant au mieux le rapport $\frac{\text{rentabilité}}{\text{coût en capital}}$.

Nous effectuerons donc notre allocation d'obligations dans cet ordre à maturité croissante (Obligations d'entreprises HY puis Obligations d'Entreprises IG et enfin Obligations d'Etats).

2. Nous choisissons une duration Actif égale à celle du Passif soit 5,4 années. Ce choix est lié au fait que nous souhaitons minimiser notre risque de réinvestissement.

3. Cette étude a été réalisée en 2012 par le Pôle Recherche de l'EDHEC, la baisse des taux depuis cette date ne fait que renforcer à notre sens leurs conclusions.

Ces deux derniers points nous permettent d'obtenir le *Cash Flow Matching* suivant sur nos actifs :

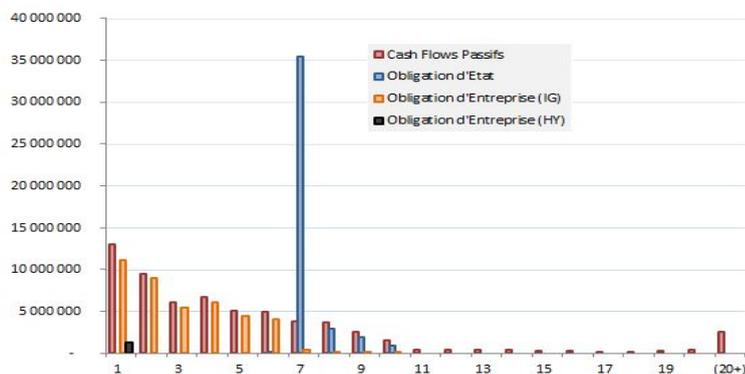


FIGURE 5.1: *Cash Flow Matching* avec notre allocation initiale au 31/12/2015

	$SCR_{\text{sans CFM}}$	$SCR_{\text{avec CFM}}$
$SCR_{\text{Marché}}$	6 232 871€	6 343 853€
SCR	19 460 567€	19 523 876€

FIGURE 5.2: Evolution des SCR avec l'utilisation du modèle ALM et allocation initiale

De plus, nous considérons notre besoin en cash en lien avec la partie liquidité du chapitre III. Nous choisissons de garder notre liquidité sur nos actifs à 10 666 392€ correspondant à 10,7 points d'allocation. On le justifie par le fait que la dimension liquidité telle que définie est encore incomplète et qu'une étude plus approfondie sur la liquidité sera faite dans les parties suivantes. Notons que suivant cette contrainte, notre risque de liquidité augmente du fait d'une durée plus élevée (5,1 à 5,4 ans) et d'une allocation sur des actifs plus risqués.

Ce choix de prendre une liquidité à 10,7 points d'allocation implique un $SCR_{\text{contrepartie}}$ légèrement plus faible que précédemment à 320 984€.

Les simulations nous donnent des allocations privilégiées retenues dans notre cadre *Risk Appetite* :

Cas	Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	Cash	Immobilier	ratio SII
1	4%	2,3%	55,5%	17,5%	10,7%	10%	132%
2	11,9%	0%	62,6%	4,8%	10,7%	10%	133%

Cas	FP après choc	ratio SII après choc	Rendement attendu	Rendement choqué	Résultat préservé
1	22 927 029	100%	2,25%	0,48%	21,1%
2	22 740 769	100%	2,28%	1,40%	61,7%

La première allocation ne respecte pas la dimension résultat (21,1%) tandis que la deuxième la respecte (61,7%). Nous n'avons jusqu'à présent pas considéré de ventes

forcées à l'actif et déjà il semble difficile de satisfaire la contrainte de résultat. Nous verrons par la suite que nous satisferons la contrainte de résultat que dans le cadre du *Risk Appetite* sans considération des éventuelles ventes forcées. De plus, la pertinence de la dimension résultat est contestable car seul le résultat sur l'actif est considéré.

On obtient les résultats suivants concernant nos contraintes d'investissements dans chaque classe d'actifs et sur nos différentes dimensions dans le cas 2 :

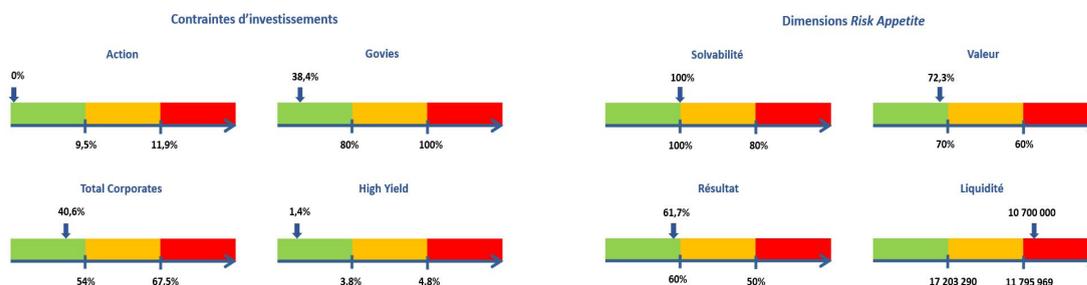


FIGURE 5.3: Contraintes d'investissements et dimensions de notre *Risk Appetite*

5.2 Sensibilité sur les réserves

Notre *Risk Appetite* s'est jusqu'à présent effectué sous des scénarios de stress définis à l'actif mais à passif fixe (duration et/ou flux de paiements fixes). Cette partie consiste à faire varier notre passif et étudier ses répercussions sur la définition de nos limites d'allocations.

Ces sensibilités au passif vont également nous permettre d'étudier plus précisément nos besoins en liquidité dans le cadre de notre *Risk Appetite*. Les chocs fournis par le GRM mettent en évidence par exemple une hausse des réserves de 13% en cas de choc bicentenaire. Dans le cadre de notre risque de liquidité, nous allons donc étudier les impacts sur nos cash-flows de cette sensibilité. Ce choc implique une hausse des coûts de gestion des sinistres notamment, que nous traduirons directement par une hausse des frais généraux de 13%.

Ainsi, le premier cas étudié va être une hausse globale de 13% de notre *Best Estimate of Liabilities*⁴. Cette hausse de notre BEL se fera en rapport avec notre triangle de paiements, soit in fine une hausse de chacun de nos cash-flows de 13%. Cette hausse homogène sur notre triangle de paiements est justifiée par le fait qu'en run-off, il n'y a pas d'aléa quant à la survenance des sinistres.

4. En considérant le *Credit Risk Adjuster* et le *Volatility Adjuster*, se référer aux conditions de marché en annexe A.1.2.

L'application de ces sensibilités se déroulera en 5 étapes avec les calculs de :

- 1 *Best Estimate of Liabilities* ;
- 2 SCR ;
- 3 Marge pour Risque ;
- 4 Duration passif et duration *Free Portfolio* ;
- 5 Coût de réinvestissement ⁵.

Avec cette sensibilité, notre BEL passe donc de 60 815 948€ à 68 722 021€.

La séquence cash-flows du BEL est représentée comme suit :

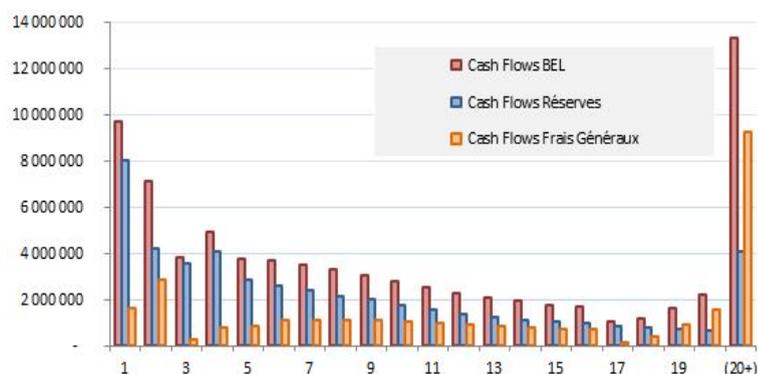


FIGURE 5.4: Cash-flows du BEL suite à la sensibilité de +13%

Nos nouveaux cash-flows sont donc :

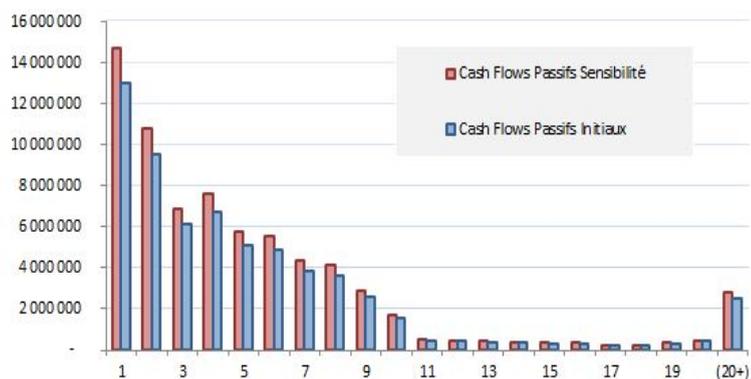


FIGURE 5.5: Cash-flows de nos passifs suite à la sensibilité de +13%

Rappelons qu'il existe 3 types de risques non-vie dans la formule standard :

- Risque de réserve et risque de prime ;
- Risque de rachat ;
- Risque catastrophe.

5. Lors du passage d'une allocation à une autre, des moins-values à l'actif peuvent apparaître. Cependant, nous considérerons que celles-ci sont nulles pour toutes nos sensibilités sur nos passifs afin d'isoler leur impact sur notre *Risk Appetite*.

Seul le risque de réserve nous concerne pour le portefeuille *RUNOFF*. Les risques sont segmentés en 12 lignes de business et une diversification est intégrée via une matrice de corrélation.⁶ Il est à noter qu'une diversification géographique est prise en compte⁷. La formule de calcul pour notre SCR non-vie se résume donc à :

$SCR_{Non-Vie} = 3.\sigma.V$ avec σ la déviation standard du portefeuille et V le volume total de passif.

Ainsi, notre nouveau $SCR_{Non-vie}$ est de 16 758 118€ contre 14 830 193€.

Pour le calcul de la marge pour risque (RM : Risk Margin), nous ferons une simplification à partir des données initiales.

$$RM_n = RM_i \cdot \frac{SCR_n}{SCR_i} \quad (5.1)$$

La nouvelle marge pour risque est alors de 8 759 932€. La duration de nos passifs n'a pas changé pour cette sensibilité car la hausse est répartie sur l'ensemble de nos cash-flows par un triangle de paiements. La formule de calcul de la nouvelle duration dans le cas où celle-ci est amenée à changer est telle que :

$$Dur_n = \frac{1}{V_M} \cdot \sum_{i=1}^T t_i \cdot CF_i \text{ où :}$$

- T est la maturité maximale ;
- V_M est le montant total de passifs ;
- t_i représente l'année du cash-flow ;
- CF_i représente le montant du cash-flow de l'année i .

Enfin, les PMVL (Plus ou Moins Values Latentes) étant négligées dans notre sensibilité, seul le coût du réinvestissement est considéré par la formule⁸ :

$$Coût = 2 * Montant à réinvestir * 0,002$$

Pour cette sensibilité, le coût de réinvestissement est alors de 6 766€ qui sera directement retranché de nos fonds propres.

Ces nouvelles données sur notre portefeuille nous permettent d'obtenir un nouveau profil de *Risk Appetite*.

Avec un tel choc au passif, notre allocation initiale nous donne un ratio de solvabilité de : $\frac{FP_{sensi}}{SCR_{sensi}} = \frac{22\,484\,218}{20\,475\,395} = 104\%$.

6. Matrice de corrélation des 12 LoB en annexe A.2.1.

7. Répartition de la diversification géographique du portefeuille *RUNOFF* en annexe A.2.2.

8. Le facteur multiplicatif par 2 est dû aux deux opérations : vente d'un actif et l'achat du nouvel actif.

Dans de telles conditions, notre allocation au risque pour l'actif devient plus délicate car, après nos chocs de *Risk Appetite* à l'actif, le ratio est de $\frac{FP_{choc-sensi}}{SCR_{choc-sensi}} = 74\%$, bien en deçà du ratio limite voulu de 80%.

Nous allons donc donner les résultats pour 2 cas, l'un avec un ratio de solvabilité post choc le plus proche de l'alerte qui est de 100% [1] et l'autre à 80% [2], c'est-à-dire en se plaçant au niveau limite.

Après simulation, l'allocation retenue dans les deux cas maximisant nos actifs risqués et compatible avec notre *Risk Appetite* est :

Cas	Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	Cash	Immobilier	ratio SII
[1]	0%	79,3%	0%	0%	10,7%	10%	110%
[2]	0%	46%	33,3%	0%	10,7%	10%	106%

Cas	FP après choc	ratio SII après choc	Rendement attendu	Rendement choqué	Résultat préservé
[1]	17 433 427	85%	1,01%	0,95%	94,1%
[2]	16 857 279	80%	1,40%	1,17%	83,8%

Comme prévu, cette mauvaise nouvelle modélisée par cette sensibilité nous contraint fortement dans notre allocation d'actifs limite de *Risk Appetite*. Le choc passif est relativement important car il s'applique à l'ensemble de nos contrats sur toutes les branches. Même si notre *Risk Appetite* se restreint à une marge à l'actif, il est intéressant de regarder l'impact qu'un choc passif peut avoir sur nos possibilités d'allocations. Le but principal de cette manipulation, au vu de notre définition du *Risk Appetite*, est de trouver un niveau de liquidité relatif à notre portefeuille *RUNOFF* le plus adéquat possible.

Etude de la liquidité nécessaire au choc passif

Notre risque de liquidité a été donné pour un choc 1 : 200 ans et se calcule sur une année. Pour le risque lié à l'augmentation des réserves et des frais généraux, il suffit de prendre le montant d'écart du premier cash-flow stressé avec celui du cas standard. Cela nous donne alors un montant requis de liquidité de 1 691 454€ auquel s'ajoutent les 6 766€ de coût de réinvestissement.

5.3 Sensibilité sur les commutations

Comme décrit dans le chapitre II, des commutations sont également réalisées dans le but de libérer du capital. Une sensibilité présentée ici consiste à définir un cas où l'on réalise plus (ou moins) de commutations que prévu, ce qui correspond à une accélération (décélération) de nos paiements. Nous avons vu que nos hypothèses de commutations se répartissent sur 10 ans à hauteur de 40% des réserves. N'ayant pas de valeur de sensibilité pour notre *Risk Appetite*, nous choisissons en concertation avec le département

Commutation une sensibilité de +/- 20% sur les hypothèses de commutations en les répartissant comme dans le cas d'un triangle de paiements (soit une variation des commutations de +/- 8 % et des niveaux compris entre 32% et 48%). Les frais généraux sont également affectés par ces commutations comme nous avons pu le voir au chapitre II du mémoire.

Comme énoncé dans la note de la partie 1 de ce chapitre, lors de nos commutations, nous supposons qu'aucun profit technique n'est réalisé.

Les étapes et hypothèses retenues sont identiques à celles de la sensibilité sur nos réserves. Cette sensibilité nous donne les résultats suivants :

Elements	Sans choc	Avec choc +20%	Avec choc -20%
BEL	60 815 948€	60 815 948€	60 815 948€
SCR	14 830 193€	14 830 193€	14 830 193€
Marge de risque	7 752 153€	7 752 153€	7 752 153€
Duration	5,4	4,3	6,5
Coût réinvestissement	0€	3 560€	3 560€

On remarque que la plupart des éléments n'ont pas changé car les commutations reposent sur des hypothèses empiriques et ne sont pas prises en considération dans les calculs de BEL, SCR et Marge de risque. En revanche notre duration au passif change sensiblement du fait de ces variations, ce qui nous conduit à changer la duration de nos actifs investis dans le même temps.

On peut comparer les cash-flows à l'issue des deux sensibilités :

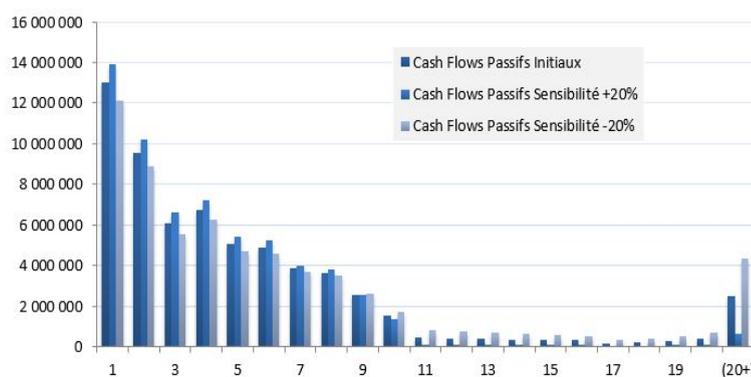


FIGURE 5.6: Cash-flows de nos passifs suite aux sensibilités +/- 20%

Nous allons donc donner les résultats d'allocations compatibles avec notre *Risk Appetite*, tout en maximisant notre rendement pour les deux cas ([1] pour le cas où les hypothèses de commutations sont plus fortes de 20% et [2] pour le cas où les hypothèses de commutations sont plus faibles de 20%).

Cas	Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	Cash	Immobilier	ratio SII
[1]	8%	0%	51,3%	20%	10,7%	10%	132%
[2]	4,8%	11,1%	51,5%	11,9%	10,7%	10%	133%

Cas	FP après choc	ratio SII après choc	Rendement attendu	Rendement choqué	Résultat préservé
[1]	22 985 442	100%	2,18%	0,20%	9,2%
[2]	22 693 427	100%	2,24%	0,92%	41,2%

La commutation permettant une libération de capital, les allocations compatibles avec le *Risk Appetite* sont de ce fait plus nombreuses dans le cas de la sensibilité à +20% et moins nombreuses pour celle à -20%. De plus, les obligations dans le deuxième cas ont une maturité plus longue ce qui engendre des pertes aux chocs de *Risk Appetite* plus importantes ainsi qu'un SCR_{Spread} plus élevé.

Etude de la liquidité nécessaire au choc de commutation

Seul le cas d'une sensibilité à +20% de commutation engendre un risque de liquidité à un an évalué à 890 167€ auquel s'ajoute le coût de réinvestissement de 3 560€.

5.4 Sensibilités sur les réserves et commutations

Nous pouvons à présent combiner les deux sensibilités vues précédemment.

En termes d'allocations, la sensibilité la plus contraignante sera une hausse des réserves associée à une baisse des commutations.

En termes de liquidité, c'est la hausse des réserves couplée à une hausse des commutations qui fournira le montant requis le plus important.

Limite d'allocation

Comme dans le cas des sensibilités sur les réserves, on regarde les allocations compatibles avec le *Risk Appetite* à un niveau limite sur le ratio de solvabilité post choc soit 80%.

Une allocation possible est alors :

Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	Cash	Immobilier	ratio SII
0%	63,5%	15,8%	0%	10,7%	10%	108%

Risque de liquidité

Le risque de liquidité pour la sensibilité combinée de l'augmentation des réserves et de la hausse des commutations est alors de 2 581 621€ et de 10 326€ pour le coût de réinvestissement.

5.5 Liquidité et niveau de cash

Ces dernières études de sensibilité sur nos passifs nous ont permis de définir le risque de liquidité associé aux variations de cash-flows.

Il faut également prendre en compte le risque opérationnel ainsi que le risque sur nos actifs tel que défini au chapitre III.

Dans la pratique, deux types de cash sont à considérer, le cash que possède la compagnie pour régler les sinistres et le cash que possède le gérant d'actifs pour assurer les investissements. Dans notre cadre, nous supposons que les actifs sont déjà investis, le cash se résumera donc au cash que possède l'entreprise.

Pour notre risque de liquidité nous allons considérer deux méthodes :

1 Méthode standard globale :

$$M_{Liquidité} = M_{Op.} + \sqrt{M_{passif}^2 + M_{actif}^2 + 2.0,25.M_{passif}.M_{actif}}$$

2 Méthode proposée :

$$M_{Liquidité} = M_{Op.} + M_{passif} + M_{Réinv.choc}$$

- $M_{Op.}$: Montant de liquidité relatif au risque opérationnel ;
- M_{passif} : Montant requis pour le risque de liquidité relatif au passif ;
- M_{actif} : Montant requis pour le risque de liquidité relatif à l'actif ;
- $M_{Réinv.choc}$: coût réinvestissement des actifs sous un scénario choqué 1 : 200 ans.

Méthode standard globale : 1

$M_{Op.}$	1 824 478€
M_{passif}	2 581 621€
M_{actif}	8 533 133€
$M_{Liquidité}$	11 337 300€

FIGURE 5.7: Montant de cash relatif au risque de liquidité, méthode globale standard

Méthode proposée : 2

$M_{Op.}$	1 824 478€
M_{passif}	2 581 621€
$M_{Réinv.choc}$	1 115 480€ ⁹
$M_{Liquidité}$	4 882 081€

FIGURE 5.8: Montant de cash relatif au risque de liquidité, méthode proposée

La méthode proposée nécessite une validation par Bottom-Up à chaque allocation testée. En effet, pour chaque allocation, on doit tester si le niveau en cash défini est en adéquation avec notre dimension liquidité. Le niveau de liquidité proposé dans la méthode s'applique pour une sensibilité combinée de l'augmentation des réserves et de la hausse des commutations et une allocation d'actifs initiale au 31/12/2015.

5.6 Réallocation finale

L'ensemble des parties du mémoire nous permet maintenant de définir notre allocation finale en cohérence avec notre *Risk Appetite*. Le montant en cash retenu dans notre allocation sera celui obtenu par la méthode proposée précédemment.

L'utilisation de notre outil couplé au modèle ALM nous donne l'allocation optimale suivante :

Action	Oblig. Etat	Oblig. IG	Oblig. HY	Cash	Immobilier	ratio SII
10%	0%	68,1%	5,4%	6,5%	10%	133%

FP après choc	ratio SII après choc	Rendement attendu	Rendement choqué	Résultat préservé
22 638 556	100%	2,33%	1,45%	61,7%

Notre montant de réinvestissement à l'actif est alors de $M_{Réinv.choc} = 1\,507\,813\text{€}$. Le $SCR_{contrepartie}$ est de 194 990€ et la durée de notre *Free Portfolio* dans ce cas est de 8,2 ans.

Les limites d'investissements et les dimensions du *Risk Appetite* sont alors :

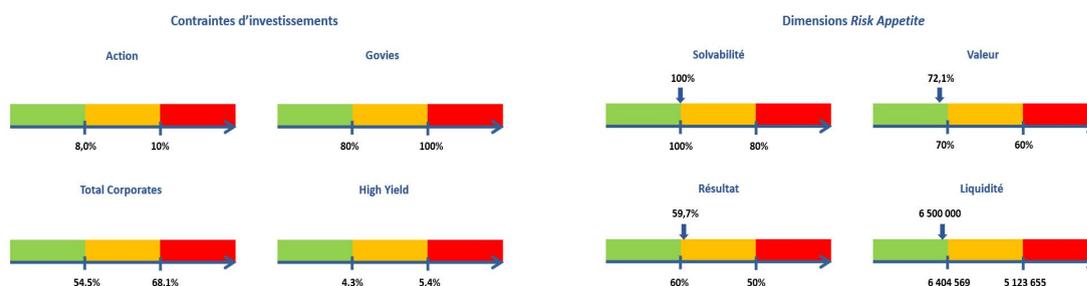


FIGURE 5.9: Contraintes d'investissements et dimensions de notre *Risk Appetite*

On pourrait donc changer d'allocation au 31/12/2015 sur notre portefeuille *RUNOFF* en passant d'un rendement actif de 1,50% à un rendement de 2,33% tout en respectant notre cadre de *Risk Appetite*.

9. 1 099 160€ au titre des pertes de *Risk Appetite* lors de la vente et 16 320€ au titre du coût de réinvestissement.

L'évolution de notre allocation initiale serait alors :

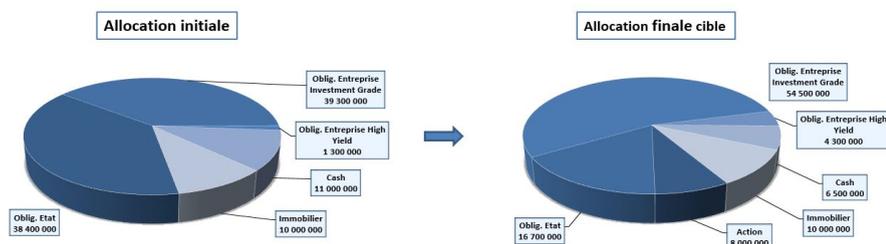


FIGURE 5.10: Allocation initiale et allocation cible

De plus, notre *Risk Appetite* pour notre portefeuille *RUNOFF* est différent du *Risk Appetite* défini par le groupe car nous avons dû affiner notre démarche à la spécificité du portefeuille. Ces points sont vrais principalement sur les dimensions liquidité et résultat comme nous l'avons vu au travers de ce mémoire.

5.7 Actif Infrastructure

Parmi les classes d'actifs dans lesquels les assureurs et réassureurs peuvent investir, l'investissement en actif infrastructure est une nouvelle classe qui semble être traitée plus spécifiquement ces dernières années par les régulateurs, l'Union Européenne et les compagnies. Notre marge de risque défini par notre *Risk Appetite* et nos allocations n'ont pas pris en compte cet actif particulier. Nous consacrons donc ici une partie sur ce nouvel investissement, permettant une diversification possible future de notre portefeuille.

Le Plan d'Investissement pour l'Europe

Le plan d'investissement pour l'Europe adopté par la Commission en novembre 2014 met l'accent sur la suppression des obstacles à l'investissement, sur l'apport d'une visibilité et d'une assistance technique aux projets d'investissements et sur une utilisation plus efficace des ressources financières existantes et nouvelles. Pour contribuer à l'objectif de croissance à long terme visée par l'Union Européenne, il conviendrait de permettre aux entreprises d'assurance, qui sont d'importants investisseurs institutionnels, d'investir plus facilement dans des infrastructures ou par l'intermédiaire du FESI (Fonds Européens Structurels et d'Investissement). Pour faciliter ces investissements, et dans le cadre de la mise en place de Solvabilité II, une nouvelle catégorie d'actifs pour les investissements d'infrastructure serait souhaitable.

Un cadre actuel trop restrictif

Le 30 Septembre 2015, la Commission Européenne a apporté un amendement aux mesures d'exécution de Solvabilité II en suivant l'avis de l'EIOPA (European Insurance and

Occupational Pensions Authority). Le coeur de cet amendement concerne les investissements en infrastructure, en instaurant une classe d'actifs propre aux «investissements en infrastructure éligibles».

Les investissements peuvent prendre la forme d'actions ou de prêts / dettes.

Pour les actions, la formule retient un choc de 30% ; pour la dette, des chocs réduits par rapport à la dette non financière sont instaurés.

Plusieurs parties prenantes ont considéré que la catégorie d'investissements en infrastructure éligibles était trop restrictive. La Commission Européenne a demandé à l'EIOPA de réaliser une consultation pour élargir la classe d'actifs en infrastructure.

Vers un assouplissement des critères

L'EIOPA a rendu son rapport le 30 juin 2016. Les deux principales conclusions du rapport sont :

- ① Les exigences pour la classe d'actifs «projets d'infrastructure éligibles» devraient être assouplies. L'EIOPA a notamment élargi cette catégorie à des structures autres que des SPV (*Special Purpose Vehicle*).
- ② Une nouvelle classe d'actifs, les «compagnies d'infrastructure éligibles», a été créée. Cette catégorie d'actifs est moins restrictive que celle des projets en infrastructure, notamment en ce qui concerne la nécessité d'appliquer des stress tests et le cadre contractuel.
 - Cette catégorie est limitée aux investissements sur certains secteurs bien précis et est uniquement dédiée pour les investissements en actions. Le choc retenu est de 36% sur les investissements en actions.
 - Les investissements en dette ou prêts ne bénéficient pas d'un choc réduit par rapport à la formule standard.

Nous pouvons donc relever 4 cas de figure possibles :

- ① L'actif vérifie les critères d'exigibilité des projets en infrastructure tels que définis dans l'amendement de la directive Solvabilité II du 2 avril 2016 ;
- ② L'actif ne vérifie pas les critères en vigueur, mais satisfait potentiellement les critères d'exigibilité des projets en infrastructure tels que proposés par le rapport 16-490 de l'EIOPA du 30 juin 2016 ;
- ③ L'actif ne vérifie pas les critères en vigueur, mais satisfait potentiellement les critères d'exigibilité des compagnies d'infrastructure tels que proposés par le rapport 16-490 de l'EIOPA du 30 juin 2016 ;
- ④ L'actif ne vérifie pas les critères en vigueur et ne paraît pas éligible pour l'une des catégories d'infrastructure définies dans le rapport 16-490 de l'EIOPA du 30 juin 2016.

Avant de détailler les deux types d'investissements composés des projets et des compagnies d'infrastructure, donnons la définition générale d'un «Actif infrastructure» par l'EIOPA.

Actif Infrastructure :

C'est un actif physique, une structure, un système ou un réseau fournissant des services publics essentiels.

Compagnies d'infrastructure

La qualification d'investissement action en infrastructure d'entreprise est recommandée pour désigner les investissements qui satisfont les critères définis ci-dessous.

Le terme compagnie d'infrastructure désigne une entité ou un groupe d'entreprises qui génère l'essentiel de ses revenus en possédant, finançant ou développant des actifs d'infrastructure dans l'EEE (Espace Economique Européen) ou l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economique) dans les branches de business suivantes :

- Génération, transmission ou distribution d'électricité ou d'énergie thermique ;
- Distribution ou transmission de gaz naturel ou de pétrole ;
- Fournisseur d'eau ou service d'eaux usées ;
- Gestion des déchets et services de recyclage ;
- Réseau de transport et fonctionnement de ce réseau ;
- Infrastructure sociale.

La prédictibilité des revenus de l'actif infrastructure doit vérifier certaines conditions (pour plus de précisions se référer au rapport de l'EIOPA [10]).

La structure financière est également étudiée par la qualité du rating de l'entreprise (au minimum un rating BBB).

Projets d'infrastructure

La qualification en projet d'infrastructure nécessite de satisfaire à l'ensemble des critères définis ci-dessous et s'applique à tout type d'investissement (action, obligation avec ou sans rating).

Le projet d'infrastructure désigne une entité ou un groupe d'entreprises qui génère l'essentiel de ses revenus en possédant, finançant ou développant des actifs d'infrastructure.

Les cash-flows générés par l'actif infrastructure doivent être prédictibles pour les actionnaires et les détenteurs de dette. Le projet d'infrastructure doit faire l'objet d'un cadre régulé et contractuel fournissant une protection pour les actionnaires et détenteurs de dette. Lorsque l'investissement se réalise par de la dette, celle-ci doit être dans un rating *Investment Grade* ou fournir des éléments lorsque cela n'est pas le cas. Si le projet

d'infrastructure ne possède pas de rating ou que l'investissement se fait par action, des critères supplémentaires doivent être respectés.

Les spécifications techniques

Afin de pouvoir intégrer ces nouveaux investissements dans la directive Solvabilité II, des études ont été faites par l'EIOPA.

L'évaluation de l'actif doit donc s'inscrire dans le cadre de Solvabilité II et nécessite notamment de faire le choix d'une évaluation des investissements en valeur de marché même si cette évaluation n'est pas totalement représentative. De plus, la considération de la durée d'investissement est également une option possible non retenue. En effet, la directive Solvabilité II étant basée sur une mesure de risque à un an des «*Basic Own Funds*» en valeur de marché, l'utilisation d'une autre mesure de risque signifierait que les changements du niveau de fonds propres ne sont pas capturés.

Deux calibrations doivent être réalisées, l'une sur l'investissement en action, l'autre sur la dette.

Calibration Action

L'EIOPA recommande un risque sur les actions en compagnie d'infrastructure à 36% avec un coefficient de corrélation de 0,75 pour les actions de type 1 et un coefficient de 1 pour les actions de type 2. Au vu de la proximité entre le choc proposé pour les investissements en action de compagnies d'infrastructure de 36% et les 39% des actions de type 1, l'EIOPA n'a pas regardé plus en détail la question d'un *Symetric Adjuster* (SA) autre que celui utilisé pour les actions de type 1 et 2.

Calibration Spread

Le nombre limité d'obligations d'entreprises de type infrastructure durant la crise financière en *Investment Grade* et de maturité longue ainsi que les variations présentes en fonction du rating et des différentes maturités n'ont pas permis de calibration satisfaisante.

De plus, l'EIOPA n'a pas trouvé de preuve suffisante pour conclure que le choc de spread sur les compagnies d'infrastructure soit plus limité que ceux actuellement définis dans la réglementation.

Application aux investisseurs

Les assureurs et réassureurs doivent conduire les procédures de vérification adéquates pour la qualification de projets en infrastructure dont notamment :

- S'assurer que le projet répond continuellement aux critères;
- S'assurer de la validation du modèle financier de projection des cash-flows et des stress tests;

- Prouver par une étude de gestion actif-passif que l'investissement effectué en infrastructure peut être détenu jusqu'à maturité.

Conclusion

Dans le cadre du processus ORSA, une entreprise du secteur assurantiel doit définir son appétence au risque à partir de son profil de risque et en cohérence avec sa stratégie. L'objet de ce mémoire est de présenter l'ensemble de la démarche du dispositif *Risk Appetite* et de montrer comment il s'intègre de façon effective dans la politique de gestion des risques d'une compagnie d'assurances.

Nous avons proposé en plusieurs étapes un processus global d'intégration de l'appétit pour le risque. Il consiste en premier lieu à formuler le cadre de risque au niveau global de l'entreprise, en définissant les différentes dimensions qu'elle souhaite piloter (résultat, valeur, solvabilité et liquidité) et en fixant des limites de tolérance sur chacune d'elles via des indicateurs de type *Key Financial Indicators* et *Functional Risk Indicators*. L'un des points essentiels pour un Comité Exécutif est d'attribuer des priorités entre les différentes dimensions et de garantir une cohérence d'ensemble de la politique de gestion des risques avec les grands axes stratégiques. Dans le cadre du run-off, le respect de la solvabilité s'est révélé être un élément majeur de l'ensemble de notre étude.

La déclinaison du processus de *Risk Appetite* d'un niveau global à un niveau local s'est effectuée par des approches Top-Down et Bottom-Up afin de contrôler en permanence notre niveau de risque. La mise en oeuvre du dispositif requiert une implémentation en cascade des tolérances jusqu'à l'obtention de limites opérationnelles locales. Sur le plan de la mise en oeuvre opérationnelle, cela nécessite une mise à jour régulière du dispositif de déploiement de l'appétit pour le risque. Ainsi dans le cadre de Solvabilité II, le processus ORSA doit être réalisé au minimum annuellement et à chaque fois que le profil de risque de l'entreprise change de façon significative.

Dans le cas du run-off, ce déploiement du *Risk Appetite* est très important dans le cadre de la politique de gestion des risques mais ne conduira pas à des changements majeurs une fois implémenté. Un bilan d'origine confortable (ratio de solvabilité $\geq 120\%$) et le respect des dimensions majeures (solvabilité et liquidité) permettent un pilotage plus aisé sur un portefeuille de réassurance non-vie en run-off et donnent la possibilité de chercher un rendement plus élevé à l'actif sous les contraintes du *Risk Appetite* défini.

Le respect des seuils (alertes et limites) et le suivi des indicateurs permettent un pilotage stratégique clair pour la Direction et des contraintes opérationnelles facilement évaluables tout en maximisant le rendement en s'orientant vers des allocations compatibles plus rémunératrices. Cette démarche de *Risk Appetite* permet de réconcilier au mieux l'ensemble des acteurs présents et ayant des attentes en termes de management des risques souvent antinomiques.

Enfin, le *Risk Appetite* de notre portefeuille est bien différent de celui d'un portefeuille d'assurance classique avec un niveau de liquidité requis inférieur et des dimensions (solvabilité) plus importantes que d'autres (résultat). La démarche de *Risk Appetite* nous a permis de montrer que nous pouvions nous tourner vers l'étude de nouveaux actifs comme l'investissement en infrastructure.

Annexe A

Données

A.1 Données de marché

A.1.1 Taux EONIA 2015-2016

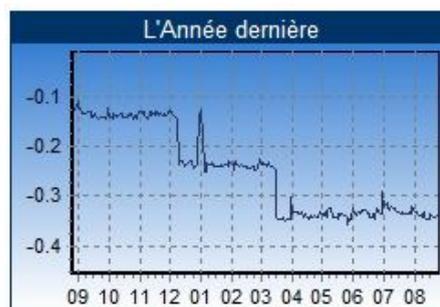


FIGURE A.1: Taux EONIA sur l'année 2015-2016

A.1.2 Données générales de marché

L'ensemble des données fournies sont pour une devise en Euro (€).

Au 31/12/2015, nous avons :

- Credit Risk Adjuster = 0,10%
- Volatility Adjuster = 0,21%

Courbe SII		Taux spot Govies		Taux spot Swap	
mat.	31/12/2015	mat.	31/12/2015	mat.	31/12/2015
1	-0,16%	1	-0,25%	1	-0,06%
2	-0,13%	2	-0,14%	2	-0,03%
3	-0,04%	3	-0,04%	3	0,06%
4	0,10%	4	0,12%	4	0,25%
5	0,23%	5	0,31%	5	0,33%
6	0,38%	6	0,52%	6	0,48%
7	0,53%	7	0,73%	7	0,63%
8	0,67%	8	0,92%	8	0,77%
9	0,80%	9	1,10%	9	0,90%
10	0,92%	10	1,26%	10	1,02%
11	1,03%	11	1,40%	11	1,13%
12	1,12%	12	1,52%	12	1,22%
13	1,21%	13	1,63%	13	1,31%
14	1,28%	14	1,73%	14	1,39%
15	1,34%	15	1,81%	15	1,45%
16	1,39%	16	1,89%	16	1,49%
17	1,42%	17	1,95%	17	1,53%
18	1,45%	18	2,01%	18	1,56%
19	1,49%	19	2,07%	19	1,59%
20	1,53%	20	2,11%	20	1,63%
21	1,57%	21	2,16%	21	1,65%
22	1,63%	22	2,25%	22	1,66%
23	1,68%	23	2,23%	23	1,67%
24	1,74%	24	2,27%	24	1,67%
25	1,80%	25	2,30%	25	1,66%
26	1,86%	26	2,32%	26	1,67%
27	1,92%	27	2,35%	27	1,67%
28	1,98%	28	2,37%	28	1,67%
29	2,03%	29	2,40%	29	1,67%
30	2,09%	30	2,42%	30	1,67%

Spread obligations corporates							
mat.	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
1	0	46	64	131	197	264	330
2	0	54	76	137	199	261	323
3	0	63	87	144	201	258	315
4	0	71	99	151	204	256	309
5	0	79	110	172	234	296	358
6	0	87	120	191	263	334	405
7	0	87	126	199	272	345	419
8	0	87	131	206	282	357	432
9	0	89	133	213	294	374	454
10	0	93	134	220	306	393	479
15	0	110	135	252	369	486	603

A.1.3 Symetric Adjuster Action

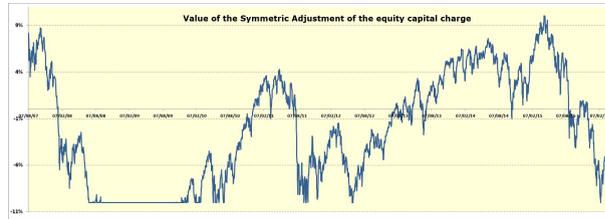


FIGURE A.2: Symetric Adjuster Action

A.2 Données non-vie

A.2.1 Matrice de corrélation non-vie

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
[1]	100%	50%	50%	25%	50%	25%	50%	25%	50%	25%	25%	25%
[2]	50%	100%	25%	25%	25%	25%	50%	50%	50%	25%	25%	25%
[3]	50%	25%	100%	25%	25%	25%	25%	50%	50%	25%	25%	50%
[4]	25%	25%	25%	100%	25%	25%	25%	50%	50%	50%	25%	50%
[5]	50%	25%	25%	25%	100%	50%	50%	25%	50%	25%	50%	25%
[6]	25%	25%	25%	25%	50%	100%	50%	25%	50%	25%	50%	25%
[7]	50%	50%	25%	25%	50%	50%	100%	25%	50%	25%	50%	25%
[8]	25%	50%	50%	50%	25%	25%	25%	100%	50%	50%	25%	25%
[9]	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	50%	100%	25%	25%	50%
[10]	25%	25%	25%	50%	25%	25%	25%	50%	25%	100%	25%	25%
[11]	25%	25%	25%	25%	50%	50%	50%	25%	25%	25%	100%	25%
[12]	25%	25%	50%	50%	25%	25%	25%	25%	50%	25%	25%	100%

- [1] : Responsabilité civile automobile
- [2] : Automobile autres
- [3] : Assurances maritimes, aériennes et de transport
- [4] : Incendie et autres dommages aux biens
- [5] : Responsabilité Civile
- [6] : Crédit - Caution
- [7] : Protection juridique
- [8] : Assistance
- [9] : Pertes pécuniaires diverses
- [10] : Réassurance non-proportionnelle dommage aux biens
- [11] : Réassurance non-proportionnelle responsabilité civile
- [12] : Réassurance non-proportionnelle maritime, aérien et transport

A.2.2 Diversification géographique du portefeuille *RUNOFF*

En %	Total	Central & Western Asia	Eastern Asia	South and South-Eastern Asia	Oceania	Northern Africa	Southern Africa	Eastern Europe	Northern Europe	Southern Europe	Western Europe	Northern America excluding the USA	Caribbean & Central America	Eastern South America	Western and southern South America	North-east US	South-east US	Mid-west US	Western US	DIV
Motor/Third-party liability	100.0%	0.9%	-	-	-	0.0%	-	6.6%	-	6.8%	83.3%	-	-	-	-	-	-	-	-	71.6%
Fire and other damage to property	100.0%	3.4%	0.2%	-	-	1.7%	-	0.1%	6.2%	16.6%	7.0%	-	-	-	0.0%	26.4%	16.5%	5.5%	16.5%	16.5%
Third-party liability	100.0%	0.5%	3.5%	-	-	0.3%	-	0.2%	3.7%	13.0%	19.8%	-	1.0%	-	1.0%	23.3%	14.5%	4.8%	14.5%	15.7%
Non-Proportional fire property	100.0%	-	-	-	-	-	-	-	13.2%	2.2%	3.0%	-	-	-	-	33.3%	20.7%	6.9%	23.7%	22.8%
Non-Proportional fire casualty	100.0%	-	-	-	-	0.0%	-	0.4%	0.4%	5.7%	39.7%	0.0%	-	-	0.0%	24.5%	12.5%	4.2%	15.5%	55.4%
Non-Proportional fire Marine, Aviation, Transp.	100.0%	-	-	-	-	-	-	0.0%	3.0%	0.1%	2.2%	-	-	-	-	94.1%	0.2%	0.1%	0.2%	88.7%

FIGURE A.3: Diversification géographique du portefeuille *RUNOFF*

On note qu'aucune diversification géographique ne peut-être prise en compte pour les LoB concernant les parties réassurance non-proportionnelle comme indiqué dans les spécifications techniques.

Annexe B

Schéma d'allocation d'Euler

B.1 SCR_{macro-risque} allocation

Proposition : Dans le cas de la formule standard de Solvabilité II, l'allocation à RAROC compatible du SCR global par chaque macro-risque est telle que :

$$SCR(Y_i|Y) = SCR_i \cdot \frac{\sum_{w=1}^n SCR_w \cdot \rho_{w,i}}{SCR_Y}$$

où $SCR(Y_i|Y)$ est l'allocation du i-ème macro-risque

Démonstration

Pour rappel : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

D'après le Lemme d'Euler :

$$\begin{aligned} SCR(Y_i|Y) &= SCR_i \cdot \frac{\partial SCR_Y}{\partial SCR_i} \\ &= SCR_i \cdot \frac{\partial \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{w=1}^n SCR_i \cdot SCR_w \cdot \rho_{i,w}}}{\partial SCR_i} \\ &= SCR_i \cdot \frac{2 \cdot SCR_i + 2 \cdot \sum_{w=1, w \neq i}^n SCR_w \cdot \rho_{i,w}}{2 \cdot SCR_Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= SCR_i \cdot \frac{SCR_i \cdot \rho_{i,i} + \sum_{w=1, w \neq i}^n SCR_w \cdot \rho_{i,w}}{SCR_Y} \\
&= SCR_i \cdot \frac{\sum_{w=1}^n SCR_w \cdot \rho_{w,i}}{SCR_Y}
\end{aligned}$$

B.2 SCR_{micro-risque} allocation

Proposition : Dans le cas de la formule standard de Solvabilité II, l'allocation à RAROC compatible de chaque macro-risque pour chaque micro-risque est telle que :

$$SCR(Y_{ix}|Y, Y_i) = SCR_{ix} \cdot \frac{\sum_{y=1}^{m_i} SCR_{iy} \cdot \rho_{ix, iy}}{SCR_i} \cdot AR_i$$

où $x \in \{1, \dots, m_i\}$ et $AR_i = \frac{SCR(Y_i|Y)}{SCR_i}$ est l'allocation du i-ème micro-risque

Démonstration

On a :

$$SCR(Y_{ix}|Y, Y_i) = SCR_{ix} \cdot \frac{\partial SCR_Y}{\partial SCR_{ix}}$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial SCR_Y}{\partial SCR_{ix}} = \frac{\partial SCR_Y}{\partial SCR_i} \cdot \frac{\partial SCR_i}{\partial SCR_{ix}}$$

Par l'allocation macro-risque,

$$\frac{\partial SCR_Y}{\partial SCR_{ix}} = \frac{\sum_{w=1}^n SCR_w \cdot \rho_{w,i}}{SCR_Y} \cdot \frac{\partial SCR_i}{\partial SCR_{ix}}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial SCR_i}{\partial SCR_{ix}} &= \frac{\partial \sqrt{\sum_{x=1}^{m_i} \sum_{y=1}^{m_i} SCR_{ix} \cdot SCR_{iy} \cdot \rho_{ix,iy}}}{\partial SCR_{ix}} \\
&= \frac{2 \cdot SCR_{ix} + 2 \cdot \sum_{y=1, y \neq x}^{m_i} SCR_{iy} \cdot \rho_{ix,iy}}{2 \cdot SCR_i} \\
&= \frac{SCR_{ix} \cdot \rho_{ix,ix} + \sum_{y=1, y \neq x}^n SCR_{iy} \cdot \rho_{ix,iy}}{SCR_i} \\
&= \frac{\sum_{y=1}^{m_i} SCR_w \cdot \rho_{ix,iy}}{SCR_i}
\end{aligned}$$

D'où,

$$SCR(Y_{ix}|Y, Y_i) = SCR_{ix} \cdot \frac{\sum_{w=1}^{m_i} SCR_w \cdot \rho_{ix,iy}}{SCR_i} \cdot AR_i$$

Annexe C

Modèles de simulation des chocs

C.1 Modèle de Taux

C.1.1 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Le passage en la probabilité \mathbb{P} à la probabilité \mathbb{Q} en considérant la prime de risque telle que $\lambda_t = \lambda \cdot \sqrt{r_t}$ donne :

- $\tilde{a} = a + \sigma\lambda$
- $\tilde{b} = \frac{ab}{a + \sigma\lambda}$

C.1.2 Modèle de Vasicek

Discrétisation exacte du processus de Vasicek

La dynamique du modèle de Vasicek est : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$

En appliquant le lemme d'Itô à $x_t = e^{at} r_t$, on peut écrire :

$$r_t = r_0 \cdot e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

Or, $\int_0^t e^{as} dW_s$ est une intégrale de Wiener qui suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $\int_0^t (e^{as})^2 ds = \frac{e^{2at} - 1}{2a}$. Nous pouvons donc réécrire l'équation du modèle de Vasicek :

$$r_t = r_0 \cdot e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2at}}{2a}} \epsilon$$

où $\epsilon \sim N(0, 1)$

De même, on peut écrire :

$$r_t = r_s \cdot e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a}} \epsilon$$

Le modèle de Vasicek a donc bien une solution explicite et une discrétisation exacte :

$$r_{t+\delta t} = r_t e^{-a\delta t} + b(1 - e^{-a\delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta t}}{2a}} \epsilon$$

C.2 Modèle de Merton

C.2.1 Introduction processus Z_i

Avec l'hypothèse que les sauts à la hausse et à la baisse ont la même intensité λ , autrement dit nous pouvons noter : $N(\lambda t) = N_t$.

Ainsi, par un raisonnement par récurrence on en déduit : $S_t = S_0 \cdot \left(\prod_{i=1}^{N_t} Y_i \right) \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t + \sigma \cdot W_t}$

Avec, $Y_i = 1$ si $N_t = 0$ et le taux d'accroissement $Y_i = 1 + U_i$ si $N_t \neq 0$.

En posant $Z_i = \ln(Y_i)$, on obtient $S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t + \sigma \cdot W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Z_i}$

Ainsi, nous faisons l'hypothèse suivante sur la loi des sauts :

$$Y_i \sim \log N(0, \sigma_z^2) \iff \ln(Y_i) \sim N(0, \sigma_z^2).$$

Cette hypothèse est notamment nécessaire pour limiter le nombre de paramètres à 4 dans le modèle.

C.2.2 Propriété des rendements

Il nous faut prouver que les variables aléatoires r_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Pour un intervalle de temps T avec n observations, en notant $t_i = \frac{iT}{n}$, nous avons :

$$r_i = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \frac{T}{n} + \sigma \cdot \left(W_{\frac{iT}{n}} - W_{\frac{(i-1)T}{n}} \right) + \sum_{k=1}^{\frac{iT}{n}} Z_k - \sum_{k=1}^{\frac{(i-1)T}{n}} Z_k$$

La différence des deux sommes représente l'intensité totale des sauts ayant lieu dans l'intervalle $[\frac{(i-1)T}{n}; \frac{iT}{n}]$. Comme le nombre de sauts produits avant t est modélisé par un processus de Poisson, on sait que les nombres d'évènements survenus entre deux intervalles disjoints sont indépendants.

Par conséquent les variables $\sum_{k=1}^{\frac{iT}{n}} Z_k - \sum_{k=1}^{\frac{(i-1)T}{n}} Z_k$ sont à accroissements indépendants.

Les processus de Wiener étant eux aussi à accroissements indépendants, les r_i sont à accroissements indépendants et sont stationnaires.

Densité des rendements

D'après la formule des probabilités totales, sur la période $[t, t + 1]$, la densité des rendements est telle que :

$$P(r \leq x) = P(r = x | N_1 = 0) \cdot P(N_1 = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(r \leq x | N_1 = n) \cdot P(N_1 = n)$$

On peut donc écrire :

$$P(r \leq x | N_1 = 0) = P\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \cdot W_1 \leq x\right)$$

$$P(r \leq x | N_1 = 0) = P\left(W_1 \leq \frac{x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)$$

D'où,

$$\frac{\partial}{\partial x} P(r \leq x | N_1 = 0) = f_{BS}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Comme : $P(r \leq x | N_1 = n) = P\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \cdot W_1 + \sum_{k=1}^n Z_k \leq x\right)$

On a ici $n+1$ lois normales indépendantes, qui par propriété nous fournissent :

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma \cdot W_1 + \left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sqrt{\sigma^2 + n\sigma_z^2}\right)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} P(r \leq x | N_1 = n) = f_{BS}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + n\sigma_z^2)}} e^{\left(-\frac{(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_z^2)}\right)}$$

N_1 est un processus de Poisson homogène, on a alors $\forall n : P(N_1 = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

Ainsi, la densité de rendement du modèle s'écrit :

$$f_r(x) = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 + n\sigma_z^2}} e^{-\frac{(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^2}{2(\sigma^2 + n\sigma_z^2)}} \right]$$

C.2.3 Calcul des moments

A partir de la fonction de densité des rendements, on peut déduire la formule des moments d'ordre k centrés telle que :

$$\mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^k] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2})^k}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + n\sigma_z^2)}} e^{-\left(\frac{x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma^2}\right)^2} dx$$

Pour une raison de symétrie des variables aléatoires contenues dans l'expression de r , les moments centrés d'ordre impair de r sont nuls. Il ne nous reste plus qu'à déterminer ces moments centrés d'ordre pair soit $\mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^{2k}]$ pour tout k entier.

On pose : $u = \frac{x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_z^2)}}$ et $du = \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 + n\sigma_z^2)}} dx$

D'où : $\mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^{2k}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\sigma_z^2)^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Par intégration par parties, on a : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^{2k}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{(2k)!}{2^k k!}$

Ce qui donne l'expression finale suivante :

$$\mathbb{E}[(r - \mathbb{E}(r))^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\sigma_z^2)^{2k}$$

Enfin, les 4 équations dans le mémoire sont simplifiées en remarquant que : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}$

Bibliographie

- [1] Xavier Agenos. Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie. *Actuary Memorandum*, 2010.
- [2] Michael Alix, Shyam Venkat, Zubin Mogul, Som-lok Leung, Marcia A Banks, and Juliane Saary-Littman. Risk appetite frameworks : Insights into evolving global practices. *Global Credit Review*, 2015.
- [3] L Arias, P Foulquier, and A Le Maistre. Les impacts de solvabilité II sur la gestion obligataire, 2012.
- [4] Philippe Artzner. Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 1999.
- [5] Caroline Bennet and Kelly Cusick. Risk appetite : practical issues for the global financial services industry. *Presentation to the Institute of Actuaries of Australia*, 2007.
- [6] Sophie Decupère. Agrégation des risques et allocation de capital sous solvabilité II. *Mémoire d'actuariat*, 2011.
- [7] Membre du GT. Groupe de travail "best estimate liabilities" non-vie. *Institut des Actuaïres*, 2016.
- [8] EIOPA. Identification and calibration of infrastructure investment risk categories. *Consultation Paper no. CP-15-004*, 2015.
- [9] EIOPA. Identification and calibration of other infrastructure investment risk categories. *Consultation Paper no. CP-16-005*, 2016.
- [10] EIOPA. Technical advice on the identification and calibration of other infrastructure investment risk categories. *Final Report 16-490*, 2016.
- [11] Susanne Emmer, Marie Kratz, and Dirk Tasche. What is the best risk measure in practice ? a comparison of standard measures. *Journal of Risk*, 2015.
- [12] Roger Fletcher and Michael JD Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *The Computer Journal*, 1963.

- [13] Ivan Granito and Paolo De Angelis. Capital allocation and risk appetite under solvency II framework. 2015.
- [14] John C Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India, 2006.
- [15] H Pham. Introduction aux mathématiques et modèles stochastiques des marchés financiers. *Université Paris*, 2007.
- [16] F Planchet and J Jacquemin. L'utilisation de méthodes de simulation en assurance, 2003.
- [17] Frédéric Planchet and Pierre-Emanuel Thérond. Simulation de trajectoires de processus continus. 2010.
- [18] Michael JD Powell. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The computer journal*, 1964.
- [19] Michael JD Powell. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In *Numerical analysis*. Springer, 1978.
- [20] PwC. Global financial markets liquidity study. 2015.
- [21] Peter Tankov and Ekaterina Voltchkova. Jump-diffusion models : a practitioner's guide. *Banque et Marchés*, 2009.
- [22] Dirk Tasche. Allocating portfolio economic capital to sub-portfolios, 2004.
- [23] Dirk Tasche. Capital allocation to business units and sub-portfolios : the euler principle. 2007.
- [24] Pierre-Emmanuel Thérond. *Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière*. PhD thesis, Université Claude Bernard–Lyon 1, 2007.
- [25] Pierre-Emmanuel Thérond and Pierre Valade. Appétence au risque : intégration au pilotage d'une société d'assurance. *Assurances et gestion des risques*, 2010.
- [26] Alex Verroelst. Création de valeur sur les portefeuilles de réassurance non-vie en run-off par les commutations. *Actuary Memorandum*, 2006.