

**Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et d'Informatique
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le Jeudi 03 octobre 2013

Par : Mlle Ophélia Berné

Titre: Estimation des lois de rachat et de mortalité en assurance vie

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres du jury de l'Institut des
Actuaires*
Mme Florence Picard
M. Alexandre You

signature

Entreprise :
Assurances du Crédit Mutuel
Nom : M. Olivier Belguise

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :
Nom : M. Olivier Belguise

Membres du jury de l'UdS :

M. Jacques Franchi
Mme Sandrine Spaeter-Loehrer
M. Karl-Théodor Eisele
M. Jean-Lucien Netzer
Mme Myriam Maumy-Bertrand
M. Bernard Heinkel
M. Patrick Rondé
M. Jean Bérard
Invités :
M. Philippe Artzner
M. Pierre Devolder
M. Jean Modry
Mme Magali Kelle-Vignon
M. Alexandre You

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels***
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)

Signature du responsable entreprise



*Secrétariat : Mme Maire-Lantz
Mme Fidelin*

Signature du candidat



Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Remerciements

Je souhaite exprimer ma gratitude à tous ceux qui m'ont apporté leur aide dans l'accomplissement de ce mémoire, de près ou de loin et de quelque manière que ce soit.

Merci à Monsieur Pierre Reichert, directeur général adjoint et responsable du pôle Comptes et Réassurance des Assurances du Crédit Mutuel à Strasbourg, pour l'opportunité qu'il m'a offerte et la confiance qu'il m'a accordée en m'accueillant dans ses équipes.

Merci à mon maître de stage, Monsieur Olivier Belguise, responsable du Contrôle de gestion et de la Fonction actuarielle des Assurances du Crédit Mutuel, pour le sujet d'actuariat riche et ô combien intéressant qu'il m'a fait l'honneur de me confier. Je lui suis reconnaissante de sa grande disponibilité et de la qualité de son encadrement.

Merci à l'ensemble de mes collègues actuaires de la Fonction actuarielle, qui se sont toujours montrés d'une extrême gentillesse et dont la convivialité a fortement contribué à mon intégration. J'ai tout particulièrement bénéficié des commentaires plus que judicieux de Madame Frédérique Henge et des indications avisées de Monsieur Yves Houpert.

Merci à la grande famille des Duassiens des Assurances du Crédit Mutuel, pour leur encouragement.

Merci à Monsieur Sylvain Gadenne, directeur de l'actuariat chez Deloitte Conseil, d'avoir si bien tenu son rôle de tuteur au moment de me prodiguer ses dernières remarques qui ont enrichi ce mémoire.

Merci enfin à ma famille, pour son soutien indéfectible.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'estimation de **lois de rachat et de mortalité d'expérience en épargne individuelle**.

Il a été réalisé au sein d'une équipe « **fonction actuarielle** », actuellement en charge des provisions techniques des sociétés d'assurance du Groupe des Assurances du Crédit Mutuel et de tout le *reporting* y afférant auprès des autorités de contrôle.

Avec une mise en place progressive de la directive Solvabilité II qui se profile à horizon 2016, les Assurances du Crédit Mutuel ont opté pour un système entre quatre yeux, avec un *process* d'évaluation des passifs « S II » bien distinct d'un *process* de validation, responsabilité de la fonction actuarielle.

Les éléments importants ayant conduit à cette validation seront d'ailleurs amenés à être repris dans le rapport de la fonction actuarielle.

L'estimation des « *Best Estimate* » en épargne individuelle constituera, vu la nature de l'activité des sociétés du groupe, un point primordial de cette phase de validation, ce qui confère donc à l'estimation des lois de rachat et de mortalité un enjeu tout particulier.

- ✓ **Dès lors, l'adoption d'un *process* complet, souple d'utilisation aussi bien dans l'optique d'une mise à jour annuelle que dans le cadre d'une redéfinition des hypothèses est indispensable.**

La **fiabilité des estimations** repose bien entendu sur la méthode d'estimation en tant que telle, mais dépend également du découpage des lois et de la période d'observation retenus.

L'estimation des décès et des rachats de contrats d'**assurance vie** détermine notamment la duration des passifs des sociétés, duration elle-même prise en considération lors des choix d'investissements à l'actif.

Si l'estimation de la mortalité est un exercice qui ne présente aucun obstacle particulier, le phénomène de rachat apparaît plus délicat à modéliser.

- ⇒ Les rachats sont en effet étroitement liés au comportement des assurés. Or, il est actuellement difficile d'établir une distinction entre les parts attribuables respectivement au structurel et au conjoncturel, particulièrement lorsque l'on ignore les raisons qui ont poussé un assuré à racheter son contrat. Nous partirons en première approche du postulat selon lequel les rachats conjoncturels sont nuls dans

l'historique des données¹, nous nous affranchissons de cette contrainte en estimant des lois de rachat « globales », utilisables exclusivement pour la part structurelle des rachats.

Par ailleurs, ce mémoire n'a pas vocation à fournir des lois dynamiques, dont les fondements reposent souvent sur des hypothèses difficilement vérifiables en pratique.

Nous avons défini un découpage, que nous avons souhaité à la fois exhaustif et homogène et qui devrait capter l'essentiel des comportements à la lumière de l'expérience des dernières années.

- ⇒ Les rachats sont en outre ventilés selon leur caractère total ou partiel. Contrairement au rachat total, le rachat partiel ne met pas un terme au contrat d'assurance, il ne constitue pas un acte unique et son montant également est aléatoire. Cette dernière particularité nous conduit à réaliser des estimations séparées de rachat total et de rachat partiel.
- ✓ **Au final, le *process* doit intégrer l'estimation de trois groupes séparés de lois, relatifs au rachat total, au rachat partiel et à la mortalité.**

En termes d'estimation, le rachat total et le décès relèvent du même mécanisme, en tant que variables binaires. Les techniques classiques d'estimation « en nombre » comme celle de **Kaplan-Meier** se prêtent alors particulièrement bien à ces deux cas de figures et fournissent des lois de rachat et de mortalité d'expérience adaptées notamment aux **données incomplètes**. Une estimation « en montant » des rachats partiels serait en revanche à privilégier en raison du caractère aléatoire du montant de rachat partiel. Dans ce cas, le taux de rachat d'un exercice donné ne serait pas un pourcentage du volume de contrats en portefeuille en fin d'exercice, mais un pourcentage de leurs encours en début d'exercice.

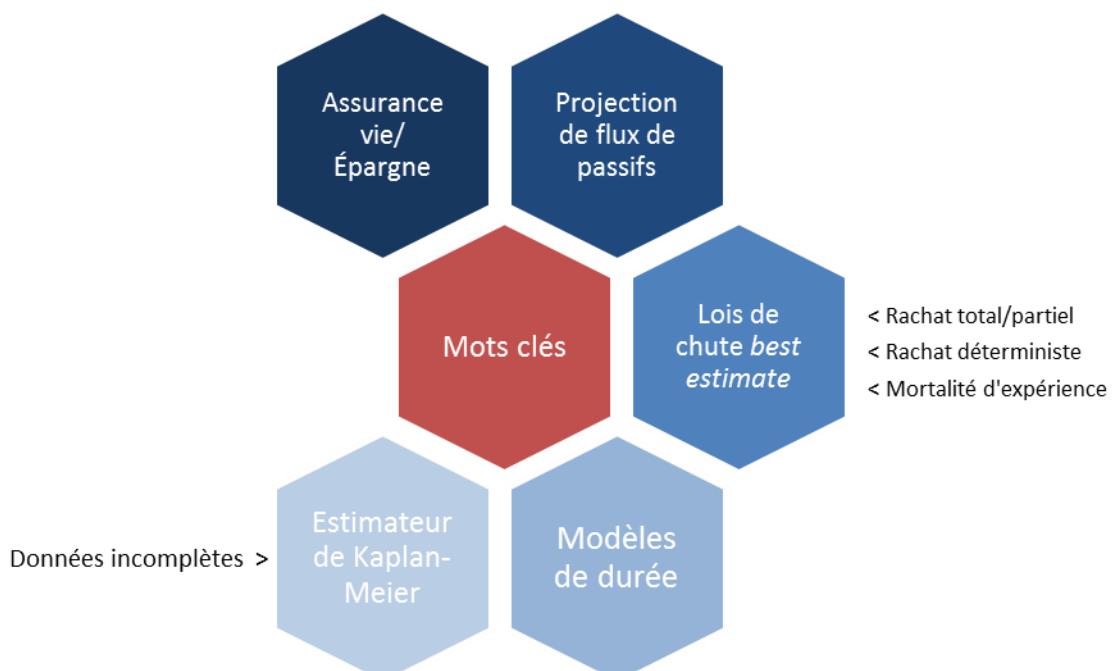
- ✓ **Trois procédures distinctes sont établies selon chaque groupe de lois, qui bénéficie d'un découpage personnalisé :**
 - ❶ En ce qui concerne le **rachat total** tout d'abord, deux études de Kaplan-Meier sont successivement mises en œuvre, suivant deux périodes d'observation. La première utilise un maximum d'historique et exclut les contrats d'une société intégrée en cours d'observation, ce qui la rend exempte de troncature à gauche. La seconde étude offre un double avantage lié à la réduction de la fenêtre d'observation et la prise en compte du phénomène de troncature à gauche, pour une fiabilité accrue. Les résultats obtenus représentent en effet davantage les comportements de rachat récents et sont améliorés grâce à un découpage affiné par l'apport du réseau de

¹ Cet argument trouve une justification dans la supériorité des taux de rendement des contrats d'assurance vie par rapport au taux des obligations d'État depuis une vingtaine d'années.

distribution. Malgré une fenêtre d'observation réduite, les effectifs sous risques sont de plus augmentés de l'intégration des contrats jusque-là exclus du périmètre d'estimation. Cette seconde étude retient donc notre préférence.

- ② Dans le cas des **rachats partiels**, l'étude en montant initialement envisagée se heurte à un problème de disponibilité immédiate de l'information. En effet, les fichiers utilisés au cours de ce mémoire ne comportent que les montants de provisions mathématiques à la clôture, hors incorporation de la participation aux bénéfices, pourtant nécessaire au calcul des taux de rachats partiels en montant. Afin d'éviter une estimation de taux de rachats partiels qui soit biaisée, nous privilégions finalement une autre approche. Nous tirons en effet profit de la proportionnalité observée (par ancienneté) entre les montants de rachats totaux et partiels, à partir de laquelle nous établissons un taux de rachats partiels, fonction des montants de rachats totaux par ancienneté.
 - ③ Enfin, l'estimation de lois de **mortalité** d'expérience, à la fois mixte et par sexe, est mise en œuvre à l'aide d'une méthode inspirée de celle des moments de Hoem et proche en termes de résultats de celle de Kaplan-Meier. Elle est préférée à cette dernière pour des raisons opérationnelles, par souci de rapidité et pour la facilité de son implémentation.
- ✓ **Tout ce processus fait bien évidemment l'objet d'une documentation, afin d'en garantir la transmission et la bonne prise en main.**

Les résultats obtenus sont en définitive évalués par *back-testing*, dont les premiers résultats révèlent une bonne adéquation entre les sinistres réellement survenus et leur projection.



Abstract

This report is relating to **experienced surrender and mortality rates in individual savings**.

It has been conducted in an “**actuarial function**” team, which is responsible for technical provisions of Groupe des Assurances du Crédit Mutuel insurance companies and the related whole reporting among supervisory authorities.

With a progressive implementation of the directive Solvency II by 2016, Assurances du Crédit Mutuel have adopted the four eyes principle with a S II valuation of assets and liabilities process well marked from an approval process, responsibility of the actuarial function.

Important elements, which have led to this validation, will besides be included in the actuarial function report.

Having regards to the kind of the activities in which the companies of Groupe des Assurances du Crédit Mutuel are engaged, the “**Best Estimate**” calculation in individual savings will be a crucial issue of this validation phase. Thus surrender rates’ and mortality rates’ estimate is a particular issue.

As a consequence, the adoption of a complete process, which is flexible both in terms of an annual updating and in terms of redefining assumptions, is essential.

The **reliability of estimates** is of course based on the estimation method, but also depends on the laws’ segmentation and on the observation period applied.

Death claims and surrenders of **life insurance** contracts’ estimates determine in particular the duration of companies’ liabilities, which is itself taken into consideration when investment choices are made.

Although the estimate of mortality rates has no particular problem, the surrender is tricky to model.

⇒ Surrenders are indeed closely linked to the policyholders’ behavior. It is very difficult to make a clear differentiation between structural and cyclical parts of surrenders, especially when their specific reasons are unknown.

Starting in a first approach from the idea that cyclical surrenders are nil in the data history, we avoid this differentiation by estimating global surrender rates, which are exclusively useful for structural surrenders.

Furthermore, this report is not in any event whatsoever intended to model dynamic behavior rules, which are often founded on assumptions difficult to verify in practice.

We have wanted to define a both exhaustive and homogeneous segmentation, in order to catch most of the behaviors, by only looking taking into account the past few years.

- ⇒ In addition, surrenders are broken up according to their total or partial character. Contrary to the total surrender of the policy, the partial surrender does not terminate the contract, it is not a single act and its value is also random. This last particularity leads us to estimate separately total and partial surrenders.
- ✓ **As a result, the process must integrate the estimate of three separate groups respectively for total surrender, partial surrender and mortality.**

In terms of estimates, the total surrender and the death claim involve the same mechanism as binary variables. Traditional frequentist statistical methods such as the **Kaplan-Meier** method are consequently suitable to model these two events and provide experienced surrender and mortality rates which are adapted to accommodate the possibility of **incomplete data**. To estimate the amount of partial surrenders would be preferred, because of the randomness of their amount. In this case, the surrender rate for a given year would not be a percentage of the volume of the contracts in the portfolio at the end of the year, but a percentage of outstandings at the start of the year.

- ✓ **Three separate procedures have been established through each group benefiting from personalized segmentation :**
- ① First, with regard to the total surrender, two studies based on the Kaplan-Meier method are carried out successively over two observation periods. The first period use the largest number of available data history. Moreover insurance contracts of an insurance company integrated during observation are excluded from the study perimeter. This first study is left truncation-free. The second study offers a double advantage with the narrowing of the observation window and the supporting of left truncation. The result is an increased reliability for estimates. Results represent more the recent behaviors and are improved thanks to a more targeted segmentation by inserting the distribution network. Despite a reduced observation window, the size of the study population is increased by the integration of contracts that were hitherto excluded from the study perimeter. Thus this second study should be preferred.
- ② In the case of partial surrenders, the estimate of amounts initially foreseen is hampered by an immediate availability of information problem. Indeed, the files used in this report only contain the mathematical provisions at the balance sheet date, excluding the incorporation of profit sharing, which are however needed to calculate partial surrender rates based on amounts. To prevent a biased estimate of partial surrender rates, we finally prefer to adopt another approach. We can take advantage

of the proportionality (by the age) between the amounts of total and partial surrenders, from which we set a partial surrender rate, in relation to the amounts of total surrender by the age of the contract.

- ③ Lastly, the estimate of mortality rates, both unisex and by sex, is implemented using a Hoem estimator based method and close to the Kaplan-Meier method in terms of results. It is rather used than the Kaplan-Meier estimator, in the interests of speed and operational ease.

- ✓ **This whole process is of course documented to insure its transmission and ownership.**

Results are ultimately assessed by back testing, whose firsts results indicate the relevance of the projections and the extent to which they meet actual claims.

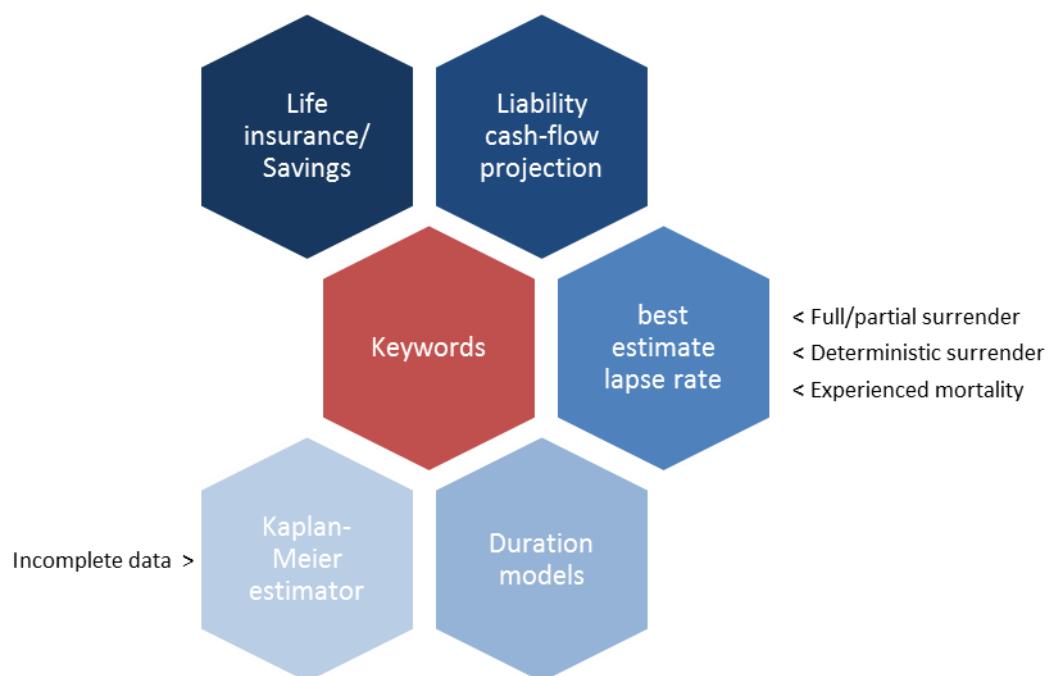


Table des matières

<i>Remerciements</i>	1
<i>Résumé</i>	2
<i>Abstract</i>	5
<i>Table des matières</i>	8
<i>INTRODUCTION</i>	12
<i>I. Contexte de l'étude</i>	14
1 Présentation de la société.....	14
1.1 Le Groupe Crédit-Mutuel – CIC (CM – CIC)	14
1.1.1 Organisation	14
1.1.2 Expansion	14
1.2 Le Groupe des Assurances du Crédit Mutuel (GACM)	15
1.2.1 Informations générales et organigramme.....	15
1.2.2 Le GACM en quelques chiffres	17
1.2.3 Zoom sur les filiales « Vie » du GACM	18
1.3 La fonction actuarielle.....	19
2 L'assurance vie	20
2.1 La sécurité	20
2.2 La liquidité.....	20
2.3 La fiscalité.....	22
2.3.1 Au cours de la vie du contrat et au moment de son rachat	22
2.3.2 Au décès de l'assuré	23
3 Les domaines d'application des lois de chute	26
3.1 Les exigences prudentielles	27
3.1.1 Les provisions réglementaires	27
3.1.2 Les états réglementaires	29
3.1.3 Le Capital de Solvabilité requis (SCR)	31
3.2 Les exigences comptables et financières	31
3.2.1 Les normes IFRS 4 Phase 2.....	31
3.2.2 L' <i>Embedded Value</i> (EV).....	32
4 Présentation des lois de rachat et de mortalité actuelles	34
5 Présentation des portefeuilles étudiés	35
a) Bons de capitalisation.....	35
b) Autres contrats d'épargne	35
6 Back testing des lois de rachat et de mortalité	43
6.1 Modalités du <i>back testing</i>	43
6.2 Périmètre du <i>back testing</i>	43

6.2.1	Vérification comptable des montants récupérés	43
6.2.2	Segmentation appliquée	43
6.3	Conclusions générales du <i>back testing</i>	44
II. Mise à jour des lois de rachat	45	
1	Préambule	45
1.1	Statistiques descriptives	45
1.1.1	Évolution de la sinistralité entre 2009 et 2012.....	45
1.1.2	Tendance de rachat entre 2007 et 2012	46
a)	Principe général de l'estimateur actuel	47
b)	Formalisation mathématique	47
c)	Application de l'estimateur actuel au calcul des taux de rachat.....	47
2	Mise à jour du découpage des lois de rachat	50
2.1	Significativité des variables actuelles	50
2.1.1	Détail du découpage.....	50
2.1.2	Tests de significativité	53
2.1.3	Conclusions	54
2.2	Redéfinition du découpage	55
2.2.1	Actualisation des classes d'âge à la souscription	55
2.2.2	Introduction de nouvelles variables explicatives.....	55
a)	Variables candidates.....	55
b)	Sélection des variables	56
2.2.3	Récapitulatif du découpage final.....	57
3	Définition du périmètre de l'étude et préparation du fichier initial	57
3.1	Périmètre de l'étude	57
3.1.1	Définition des rachats.....	57
3.1.2	Contrats d'épargne	58
a)	Branches	58
b)	Sociétés.....	58
3.2	Préparation du fichier initial	59
3.2.1	Détail de la procédure	59
a)	Période d'observation	59
b)	Représentativité et cohérence des données	60
c)	Variables explicatives	60
3.2.2	Mise en œuvre.....	61
a)	Caractéristiques du fichier source	61
b)	Construction du fichier initial	62
4	Les modèles de durée	66
4.1	Sélection de la méthode	66
4.2	Caractéristiques des modèles de durée	67
4.2.1	Méthodes paramétriques, semi-paramétriques et non paramétriques	67
4.2.2	Les variables de durée	67
a)	Rappels sur les variables de durée : notations et formules principales	68
b)	Données incomplètes : censures et troncatures affectant notre fichier initial.....	70
5	Estimation des taux bruts de rachat « en nombre »	74
5.1	Méthode de Kaplan-Meier	75
5.1.1	Intérêt de la méthode.....	75

5.1.2	Principe	75
5.1.3	Formalisation mathématique	76
a)	Cadre général	76
b)	Estimateur de Kaplan-Meier adapté aux données tronquées à gauche et censurées à droite	78
c)	Propriétés de l'estimateur de Kaplan-Meier	79
5.1.4	Application à notre portefeuille	79
a)	Première période d'observation : cas des censures à droite	79
b)	Seconde période d'observation : cas de données censurées à droite et tronquées à gauche	82
5.1.5	Variance de l'estimateur de Kaplan-Meier et intervalles de confiance	92
a)	Estimateur de Greenwood	92
b)	Intervalles de confiance asymptotiques	94
5.2	Lissage des taux bruts de rachat	94
5.2.1	Méthodes de lissage	94
a)	Les modélisations paramétriques (\Leftrightarrow Ajustements)	94
b)	Les lissages paramétriques	95
c)	Les lissages non paramétriques	95
d)	Les modèles relationnels	96
5.2.2	Choix de la méthode	96
a)	« Ex ante » : Critères d'adéquation	96
b)	« Ex post » : Tests statistiques	97
5.2.3	Ajustement paramétrique par une loi de Weibull	98
a)	Distribution de Weibull à deux paramètres	99
b)	Distribution de Weibull à quatre paramètres	99
c)	Combinaison de deux méthodes lissages	110
6	Détermination des taux de rachat partiel	114
III. Mise à jour des lois de mortalité	117	
1	Découpage des lois de mortalité	118
1.1	Modèle de la régression logistique binaire	118
1.2	Sélection des variables explicatives	119
1.3	Choix de la méthode d'estimation	119
2	Estimation des taux bruts de décès	121
2.1	Méthode 1 : nombre de décès rapporté à l'effectif sous risque	121
2.1.1	Période d'observation	121
2.1.2	Notations et définitions	121
2.2	Méthode 2 : Kaplan-Meier	123
2.3	Intervalles de confiance	123
3	Lissage des taux bruts de décès	124
3.1	Choix de la plage de lissage	124
3.2	Lissage de Whittaker-Henderson	124
3.2.1	Théorie	124
a)	Principe	124
b)	Notations et formules	124
3.2.2	Résultats	127
a)	Loi de mortalité « mixte »	128
b)	Lois de mortalité par sexe	130
3.3	Régression de Poisson	132
3.3.1	Principe	132

3.3.2	Résultats	133
a)	Loi de mortalité « mixte »	134
b)	Lois de mortalité par sexe	136
3.4	Critères d'adéquation et tests statistiques	138
3.4.1	Critères de fidélité et de régularité	138
3.4.2	Test d'ajustement du Khi-deux.....	139
3.4.3	Test des changements de signe.....	140
4	Comparaison des taux de mortalité d'expérience et réglementaires	141
5	Extrapolation des taux de mortalité aux âges extrêmes.....	144
5.1	Procédure.....	144
5.1.1	Ouverture de la table	144
5.1.2	Fermeture de la table	144
5.2	Résultats.....	146
5.2.1	Loi de mortalité mixte	146
a)	Méthode 1	146
b)	Méthode 2 (KM)	146
5.2.2	Lois de mortalité par sexe	147
a)	Méthode 1	147
b)	Méthode 2 (KM)	147
<i>CONCLUSION</i>	148
<i>Annexe 1 : Liste des abréviations.....</i>	151
<i>Annexe 2 : Découpage des lois de rachat</i>	152
<i>Bibliographie</i>	153
<i>Table des figures.....</i>	154

INTRODUCTION

Les hypothèses de **lois de chute** (comme la mortalité et le rachat) déterminent la duration² d'un portefeuille de contrats d'assurance : elles permettent d'évaluer la séquence de flux de sinistres auxquels sont confrontées les compagnies d'assurance et qui peuvent avoir une incidence tout à la fois sur leur solvabilité et leur politique d'investissements.

Toute compagnie d'assurance sur la vie et de capitalisation est donc amenée à projeter ce qu'on appelle plus communément des « **flux de passif** », dans le but notamment d'appréhender le comportement potentiel de la sinistralité. Cette projection est d'ailleurs exigée par l'autorité de tutelle (ACP). Elle permet notamment la constitution de provisions réglementaires et l'alimentation d'états réglementaires prudents sous Solvabilité I ou le calcul du SCR³ en valeur de marché sous Solvabilité II.

Les **contrats en euros** et la part de l'épargne investie sur les fonds en euros sont caractérisés par la **garantie en capital à tout instant**, soumettant la compagnie d'assurance à un risque d'investissement unilatéral. Si le contrat d'assurance formalise un engagement irrévocable de l'assureur, celui de l'assuré est dans la plupart des cas révocable, offrant notamment à l'assuré le droit de racheter tout ou partie de son contrat. Le rachat libère certes définitivement la compagnie d'assurance de sa garantie, mais encore faut-il que les fonds correspondant à la valeur de rachat du contrat et qui ont été placés sur les marchés financiers soient disponibles.

Pour prévenir les différents risques qui se présentent à l'assureur et vérifier s'il est en mesure de résister aux aléas parfois brutaux de la conjoncture financière, la réglementation prudentielle a établi la série de mesures et d'états, mentionnés un peu plus haut, à calculer suivant une fréquence régulière.

Les sociétés d'assurance du holding Groupe des Assurances du Crédit Mutuel (GACM) agréémentées dans les branches Vie et Capitalisation sont soumises à cette réglementation. Leur fonction actuarielle est à ce titre chargée de garantir le caractère approprié des méthodologies, des modèles sous-jacents et des hypothèses prises en compte, après avoir apprécié la suffisance et la qualité des données.

C'est dans ce contexte que s'inscrit ce mémoire, qui a pour objectif de mettre en place un process d'estimation des lois de chute. Visant à suivre au mieux les comportements des assurés et à intégrer les évolutions fiscales, juridiques, contractuelles et toute autre modification structurelle susceptible d'affecter le portefeuille, ce process se veut souple et

² La duration du portefeuille équivaut à sa durée de vie moyenne, pondérée par les flux.

³ Solvency Capital Requirement.

exhaustif, permettant de réactualiser annuellement les lois et d'en revoir le périmètre d'évaluation et le découpage de la manière la plus aisée possible.

Après une première partie qui dresse le contexte général de l'étude (assurance vie, utilité des lois de chute, portefeuille étudié et *back testing* des lois actuelles), le mémoire est jalonné par les différentes étapes suivantes :

- ✓ Une **analyse statistique** conforte d'une part les résultats du *back testing* et guide d'autre part la redéfinition du **découpage** des lois de rachat ;
- ✓ Une **mise à jour des lois de rachat** est effectuée selon la méthode fréquentiste de Kaplan-Meier, avec pour ambition d'en accroître la fiabilité ;
- ✓ La prise en compte des rachats partiels est réalisée au moyen de **taux de rachats partiels** proportionnels aux montants de rachats totaux ;
- ✓ Les **lois de mortalités** sont enfin redéfinies ;

I. Contexte de l'étude

1 Présentation de la société

1.1 Le Groupe Crédit-Mutuel – CIC (CM – CIC)

1.1.1 Organisation

Le Groupe Crédit Mutuel est constitué de deux réseaux distincts, le Crédit Mutuel et le CIC.

Le Crédit Mutuel est organisé en un réseau de **Caisses locales**, au nombre de 2 116, dont les sociétaires sont à la fois les clients et les détenteurs. Ils élisent parmi eux en Assemblée générale, les membres bénévoles des Conseils d'Administration et de Surveillance.

- ✓ Chaque Caisse adhère à l'une des onze **Fédérations régionales** ;
- ✓ Les Caisse détiennent à 82 % la **Caisse Fédérale**⁴, organe national du réseau qui met à leur disposition tous les moyens de leur fonctionnement ;
- ✓ La Caisse Fédérale détient 93 % du capital de la **Banque Fédérative du Crédit Mutuel** (BFCM), holding du Groupe, qui intervient sur les marchés financiers et gère les filiales.

Le CIC est un holding et une banque de réseau. Il fédère cinq **banques régionales**, qui regroupent 2 074 agences au total. En plus de son réseau d'agences, le CIC possède également un système de gestion privée, qui est dédié aux patrimoines importants dont les comportements diffèrent de ceux de la clientèle « grand public » et méritent un traitement distinct.

1.1.2 Expansion

En 1998, la BFCM a racheté le CIC, permettant au Groupe de passer de 8 % à 12 % de parts de marché en France et lui conférant une dimension européenne.

Le Groupe est ainsi constitué de :

⁴ Les Assurances du Crédit Mutuel en détiennent les 18 % restants.

- ✓ **Deux réseaux**, le Crédit Mutuel et le CIC, qui conservent chacun leur enseigne, leur autonomie et leur propre politique commerciale, mais partagent le même système informatique, un socle social et des centres de métiers communs CM – CIC ;
- ✓ De **nombreuses filiales** regroupées par filière sous des marques homogènes et mises au service du réseau :
 - Financier (CM-CIC) ;
 - Technologie (Euro-Information) ;
 - Assurance (Assurances du Crédit Mutuel) ;
 - Immobilier (CM-CIC Immobilier) ;
 - Gestion privée (CIC Banque Privée) ;
 - Capital développement (CM-CIC).

Depuis 2008, le Groupe s'est renforcé à la fois à l'international et dans le crédit à la consommation, avec l'acquisition du réseau Banco Popular France (renommé CIC Iberbanko), de Banque Casino, de Cofidis et D'Agrupacio Mutua en Espagne, mais également la création de RACC Seguros, compagnie d'Assurance commune aux ACM et au Royal Automobile Club de Catalogne, de Targobank en Allemagne (reprise du réseau Citibank Deutschland) et de Targobank Espagne (plateforme bancaire commune avec Banco Popular).

1.2 Le Groupe des Assurances du Crédit Mutuel (GACM)

1.2.1 Informations générales et organigramme

Le Crédit Mutuel est un précurseur de la **bancassurance**. Depuis 1970, son réseau commercialise en effet, en sus de ses produits bancaires, des contrats à la fois d'assurance vie et de risques (auto, habitation, ...).

En 2011, il occupait respectivement les places de :

- ✓ 1^{er} bancassureur non-vie avec 41 % de parts de marché ;
- ✓ 4^{ème} bancassureur vie avec 13 % de parts de marché⁵.

Depuis 1993, le holding GACM SA regroupe de nombreuses filiales parmi **cinq grands pôles d'activités** (Services, Immobilier, Vie, IARD et International), résumés selon l'organigramme suivant⁶ :

⁵ Derrrière Predica pour le Crédit Agricole et LCL (26 % pdm), CNP pour La Banque Postale et Caisse d'Épargne (25 % pdm) et ex aequo avec BNP Paribas Assurances pour BNP PARIBAS (13 % de pdm) (Sources : Argus et FFSA).

⁶ Au 31/12/2012. Les participations croisées inférieures à 5 % ne sont pas représentées. Les sociétés de la sphère vie et capitalisation sont coloriées en rouge.

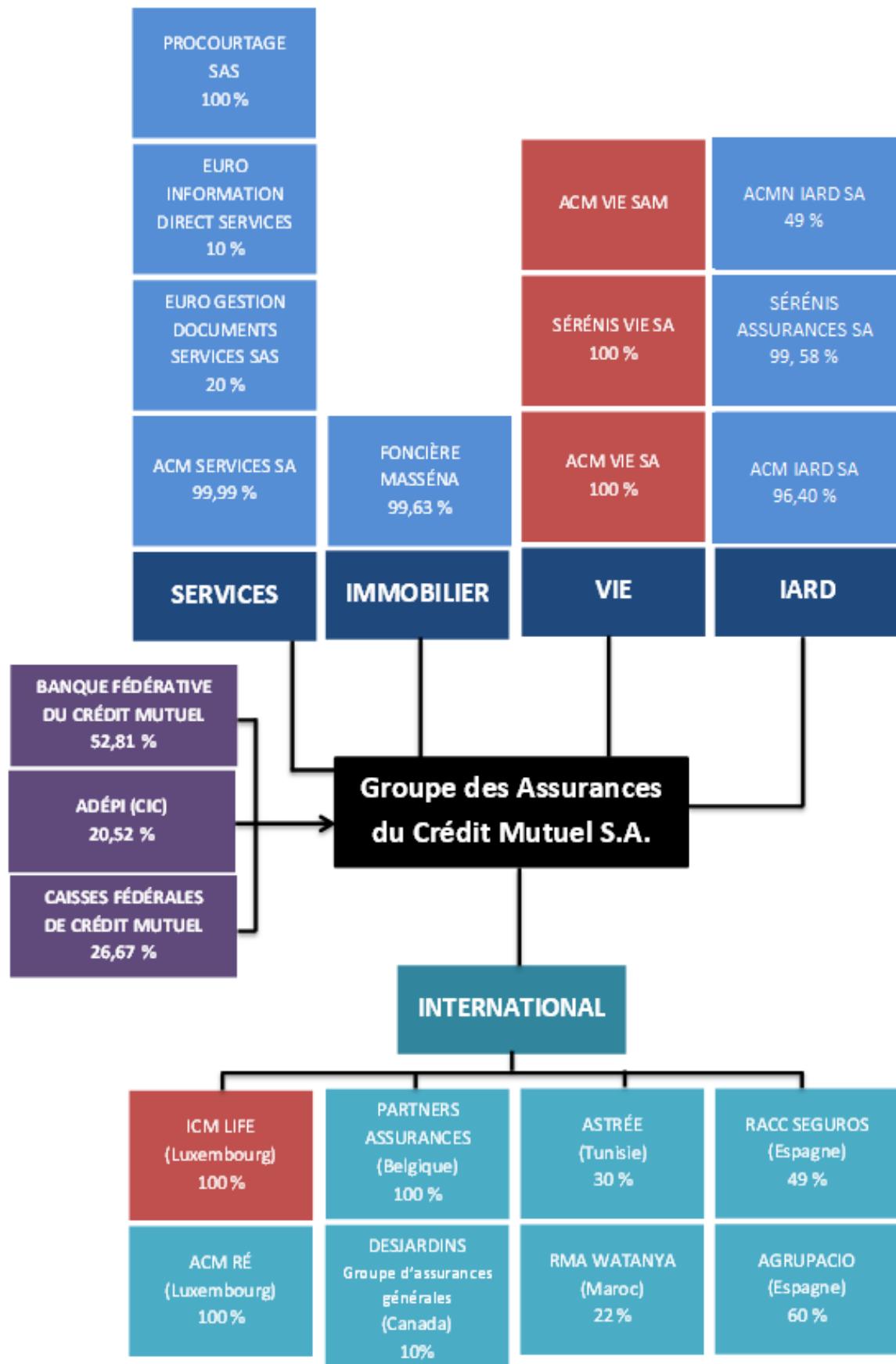


Fig. 1 : Organigramme du Groupe des Assurances du Crédit Mutuel au 31/12/2012

1.2.2 Le GACM en quelques chiffres⁷

- ✓ 24,8 millions de contrats en cours ;
- ✓ 7,9 millions d'assurés ;
- ✓ 8,3 milliards d'euros de chiffre d'affaires.

En 2012, les branches vie et capitalisation ont contribué au chiffre d'affaires assurances à près de 56%, avec 12% du portefeuille de contrats en cours.

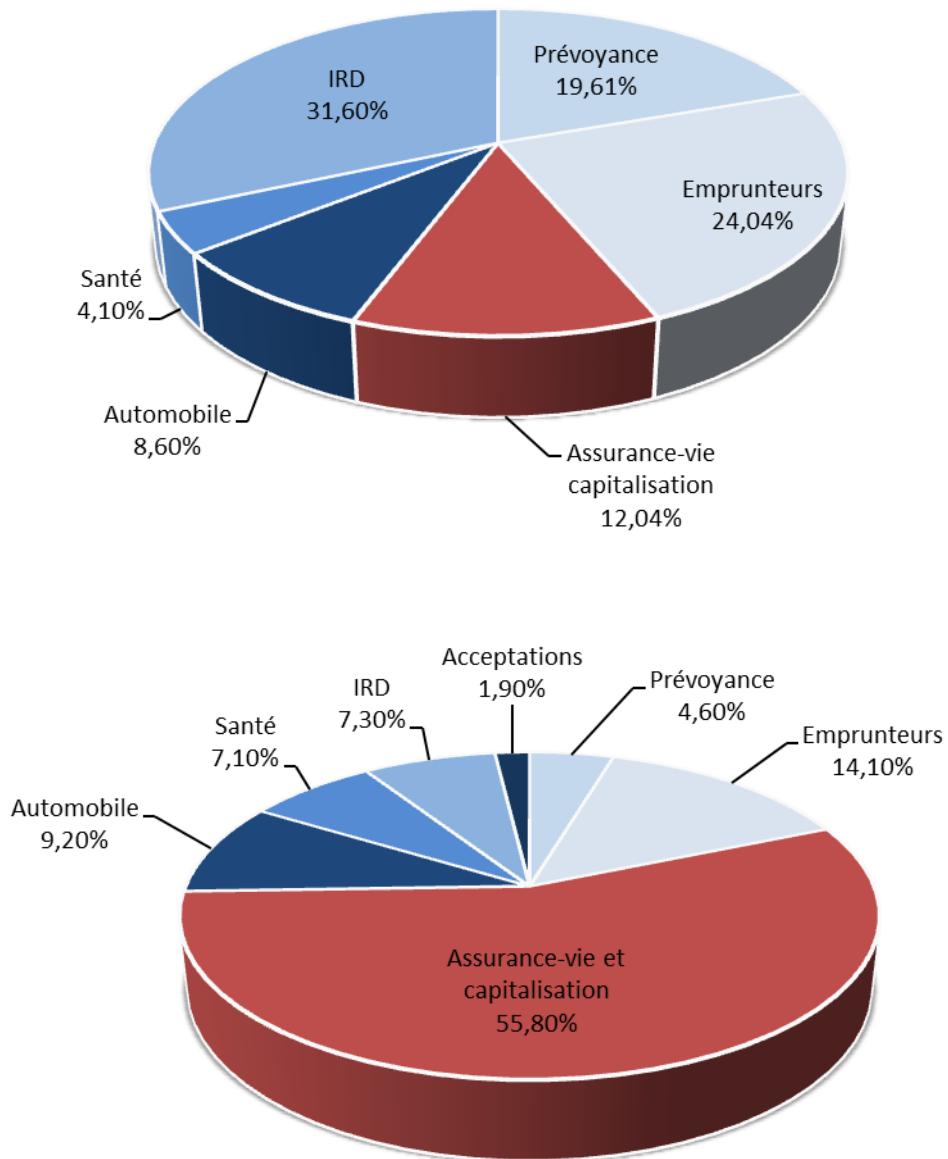


Fig. 2 : Répartition des contrats au 31/12 et du chiffre d'affaires par branche pour 2012

⁷ À fin 2012, toutes branches confondues du portefeuille total des ACM. Source : *Rapport d'Activité 2012 du GACM*.

1.2.3 Zoom sur les filiales « Vie » du GACM

Dans notre étude, nous nous intéressons plus particulièrement aux sociétés de la sphère vie et capitalisation du GACM, dont les principales caractéristiques sont reprises dans le tableau suivant :

	ACM Vie SA	ACM Vie Mutuelle	Sérénis Vie	ICM Life
Logo	Assurances Crédit Mutuel		SÉRÉNIS VIE	ICM Life
Création/Intégration	1993	1970-71	2002	1996
Spécificités	2001 : intégration portefeuille Socapi ⁸ Depuis 2004 : gamme commune	Depuis 1994 : <i>run off</i> suite au rachat des ARF, rebaptisée ACM Vie SA	✓ Ex Télévie ✓ Spécialisation épargne patrimoniale	✓ Droit luxembourgeois ✓ Large éventail de supports
CA ⁹	5 071,2	313,9	500,8	27,461
PT ¹⁰	53 855,8	10 258,5	2242,0	740,701

Fig. 3 : Principales caractéristiques des filiales Vie du GACM

Ces sociétés distribuent leurs contrats d'assurance uniquement via un réseau d'agences bancaires, sans faire appel au courtage.

L'assurance vie du GACM répond principalement aux besoins en termes de :

- ✓ Constitution d'épargne ;
- ✓ Préparation de la retraite ;
- ✓ Transmission.

Elle s'adresse aussi bien aux particuliers, qu'aux professionnels indépendants et aux exploitants agricoles et fonctionne sur la base de **contrats collectifs à adhésion individuelle** : les contrats sont souscrits auprès des ACM par les fédérations, dont les caisses commercialisent les produits à leurs clients.

⁸ Filiale d'assurance vie du CIC (lui-même racheté en 1998), dont GAN-Groupama possédait encore 23 % du capital.

⁹ Chiffre d'affaires en millions d'euros au 31/12/2012.

¹⁰ Provisions techniques en millions d'euros au 31/12/2012.

1.3 La fonction actuarielle

Dans son article 48, la directive Solvabilité II introduit en effet les fonctions nécessaires à une bonne gouvernance. Au nombre de quatre, les « **fonctions clés** » sont les suivantes :



Les tâches confiées à la fonction actuarielle au titre de l'article 48 de la directive sont les suivantes :

- ✓ Coordination du calcul des provisions techniques (PT) ;
- ✓ Garantie du caractère approprié des méthodologies, des modèles sous-jacents et des hypothèses utilisées pour le calcul des PT ;
- ✓ Appréciation de la suffisance et la qualité des données utilisées dans le calcul des PT ;
- ✓ Comparaison des meilleures estimations aux observations empiriques ;
- ✓ Information de l'organe d'administration, de gestion ou de contrôle de la fiabilité et du caractère adéquat du calcul des PT ;
- ✓ Supervision du calcul des PT dans les cas visés à l'article 82 ;
- ✓ Émission d'un avis sur la politique globale de souscription ;
- ✓ Émission d'un avis sur l'adéquation des dispositions prises en matière de réassurance ;
- ✓ Contribution à la mise en œuvre effective du système de gestion des risques visé à l'article 44.

La directive prévoit en outre que les actuaires rédigent un rapport annuel, à soumettre à l'organe d'administration, de gestion ou de contrôle, dans lequel ils émettent un avis sur le calcul des PT ainsi que les politiques de souscription et de réassurance.

Les ACM ont décidé de mettre en place un double regard pour ce qui a trait au calcul des engagements techniques prudentiels, à savoir les « *best estimate* » à proprement parler, mais également la « *risk margin* » y afférant. En d'autres termes, les équipes chargées d'effectuer les calculs seront indépendantes de celles chargées de les valider.

La fonction actuarielle ne sera donc pas amenée à faire elle-même les calculs de « *best estimate* Solvabilité II ». Ces calculs seront effectués par deux équipes dédiées « Modélisation-S2 » rattachées à la direction financière.

2 L'assurance vie

L'assurance vie reste l'un des placements préférés des Français pour au moins trois raisons :

- 1) La garantie en capital à tout moment qu'elle offre aux détenteurs de contrats en euros ;
- 2) Sa liquidité à tout moment ;
- 3) Sa fiscalité avantageuse : lors de la vie du contrat, au moment de son rachat et en termes successoraux.

2.1 La sécurité

Les contrats d'assurance vie en euros¹¹ sont appréciés pour la sécurité qu'ils apportent à leurs détenteurs plus ou moins averses au risque et qui se traduit plus précisément par :

- ✓ **La garantie en capital à tout moment** : les sommes investies sur les supports euros sont légalement garanties par l'assureur. Cela signifie que même en cas de retournement des marchés, elles ne peuvent pas baisser ;
- ✓ **L'effet cliquet**, qui permet au souscripteur de conserver définitivement les intérêts acquis de la revalorisation annuelle du capital au taux de rendement contractuel.

C'est donc l'assureur qui porte l'intégralité des risques inhérents à la rémunération de ce type de contrat d'épargne, à l'inverse des supports en unités de compte¹².

2.2 La liquidité

Les cas de révocabilité du contrat d'assurance, ou plutôt leurs exceptions sont listées dans le Code des Assurances et le Code de la Mutualité, aux articles L132-23 et L223-22 respectivement. Il s'agit typiquement des produits qui portent un risque d'anti-sélection. Le caractère révocable du contrat d'assurance vie peut se traduire sous différentes formes, parmi lesquelles :

- ✓ **La renonciation** : c'est la résiliation du contrat d'assurance vie, qui a lieu dans un délai légal de trente jours suivant la délivrance du dernier document¹³ ;

¹¹ Un fonds en euros est l'un des supports financiers d'un contrat multi-supports ou l'unique support sur un mono-support en euros.

¹² Les contrats en unités de compte (UC) sont exprimés en référence à des UC comme des parts d'OPCVM. L'assureur s'engage non pas sur la valeur des UC, mais sur leur nombre, transférant l'intégralité du risque d'investissement à l'assuré. Ainsi, selon l'évolution des marchés financiers, la valeur des supports UC peut varier à la hausse comme à la baisse.

- ✓ **Le rachat** : le souscripteur d'un contrat d'assurance vie peut demander à tout moment le rachat d'une partie (**rachat partiel**) ou de la totalité (**rachat total**) de l'épargne acquise sur son contrat ;
- ✓ **L'avance**¹⁴ : en cas de besoin ponctuel de trésorerie, il s'agit d'un prêt accordé par l'assureur au souscripteur d'un contrat, moyennant le paiement d'un intérêt égal au taux moyen des emprunts d'Etat majoré de frais de gestion. L'avance permet de ne pas clôturer le contrat et en conserver l'antériorité fiscale. Ainsi, les avances peuvent constituer une alternative aux rachats partiels. Le choix entre une avance ou un rachat partiel dépend du montant des contrats et de l'objectif du client (épargne, succession, ...). Les rachats portent sur la partie épargne, qui est proportionnellement plus importante sur les petits contrats.



Aux ACM, l'orientation du client vers une avance ou un rachat partiel est laissée à la libre appréciation du chargé de clientèle, sans qu'aucune politique de rémunération des agents ne crée de biais dans cette orientation.

On isole communément deux grands types de rachat, assez difficile à distinguer :

- ✓ Les **rachats structurels** dépendent des caractéristiques des contrats et des assurés : ancienneté du contrat, réseau de distribution et âge de l'assuré principalement. Certaines situations de la vie de l'assuré nécessitent par exemple un besoin de liquidités (études, accession à la propriété, départ à la retraite, etc.) et ont une incidence sur le rachat de contrats d'assurance vie et de capitalisation ;
- ✓ Les **rachats conjoncturels** dépendent directement de l'évolution des marchés financiers, des modifications réglementaires ou encore fiscales et du comportement des assurés qui formulent des stratégies d'arbitrages. Ces rachats sont particulièrement craints par tout assureur, car, lorsqu'ils sont réalisés en masse, dans une conjoncture financière généralement tendue, l'assureur risque de devoir vendre des actifs en moins-value, essuyer de nombreuses pertes et engager sa solvabilité. Dans un autre cas de figure, lorsque les taux grimpent sur les marchés, les assurés sont incités à racheter leur contrat d'assurance vie pour réallouer leur épargne dans des investissements plus rémunérateurs.

N.B. : Nous ne cherchons ni à modéliser les phénomènes de rachats conjoncturels, ni ceux d'arbitrages. Cette catégorie de rachats n'étant pas l'objet de ce mémoire, nous ne nous y attardons pas plus longuement.

Le rachat peut également être réalisé selon différentes modalités, sous forme de :

¹³ Ce délai peut être prorogé en cas de manquement à l'obligation d'information de l'assureur, dans une certaine limite.

¹⁴ L'existence d'une valeur de rachat est la garantie qui permet à l'assureur d'accorder des avances au souscripteur.

- ✓ **Rachat total (RT)** : L'assuré réclame l'intégralité de son épargne acquise et met ainsi un terme à son contrat, avant l'échéance contractuelle ;
- ✓ **Rachat(s) partiel(s) (RP)** : L'assuré récupère une partie de son épargne acquise, ce qui ne clôture pas son contrat, mais en réduit le montant capitalisable et éventuellement les produits accumulés depuis sa souscription. Les rachats partiels sont réalisables tout au long de la durée de vie du contrat, seules les conditions fiscales applicables peuvent varier selon le moment de l'opération et des pénalités de rachat sont éventuellement réclamées ;
- ✓ **Rachats partiels programmés (RPP)** : L'assuré peut choisir l'option de percevoir automatiquement des revenus réguliers, au bénéfice de la fiscalité relative à l'assurance vie. Il détermine, lors de la souscription ou en cours de contrat, le montant qu'il souhaite racheter, le montant des versements automatiques, la périodicité des versements etc.

N.B. : Les rachats partiels, qu'ils soient programmés ou non, ont pour avantage de permettre de continuer à faire fructifier le reste du capital restant investi, car ils ne concernent qu'une partie de l'épargne acquise.

2.3 La fiscalité

Les contrats d'assurance vie bénéficient d'un régime fiscal particulier, notamment pour la succession. De plus, au-delà des aspects fiscaux, les clauses bénéficiaires sont un outil de gestion de sa succession.

2.3.1 Au cours de la vie du contrat et au moment de son rachat

En cas de rachat, les produits acquis ou constatés depuis le 1^{er} janvier 1998¹⁵, pour des versements réalisés depuis le 26 septembre 1996, sont imposables¹⁶ selon deux modalités qui varient en fonction de l'ancienneté du contrat d'assurance vie :

Ancienneté ¹⁷	Déclaration de revenus	Prélèvement libératoire Forfaitaire
0 – 4 ans	Intégration des intérêts dans le revenu imposable + P.S. ¹⁸	35 % + P.S.
4 – 8 ans	Intégration des intérêts dans le revenu imposable + P.S.	15 % + P.S.
> 8 ans	Abattement annuel sur les intérêts de 4 600 € pour une personne seule/ 9 200 € pour un couple + P.S. Intégration des intérêts dans le revenu imposable + P.S.	7,5 % + P.S.

Fig. 4 : Détail de la fiscalité de l'assurance vie

¹⁵ Les produits acquis ou constatés avant le 1^{er} janvier 1998 sont exonérés.

¹⁶ Certains cas de force majeure comme le licenciement ou l'invalidité exonèrent d'imposition le rachat ou le dénouement du contrat d'assurance vie.

¹⁷ C'est la date de souscription du contrat qui importe.

¹⁸ Prélèvements sociaux.

Les produits d'assurance vie sont de plus assujettis à différents prélèvements et contributions sociales :

- ✓ Chaque année pour les contrats en euros et pour les supports en euros des contrats multi-supports ;
- ✓ Au moment du rachat pour les contrats en unités de compte ;

Depuis le 1^{er} juillet 2012, le montant total des prélèvements et contributions sociales s'élève à **15,5%** et est composé de quatre éléments :

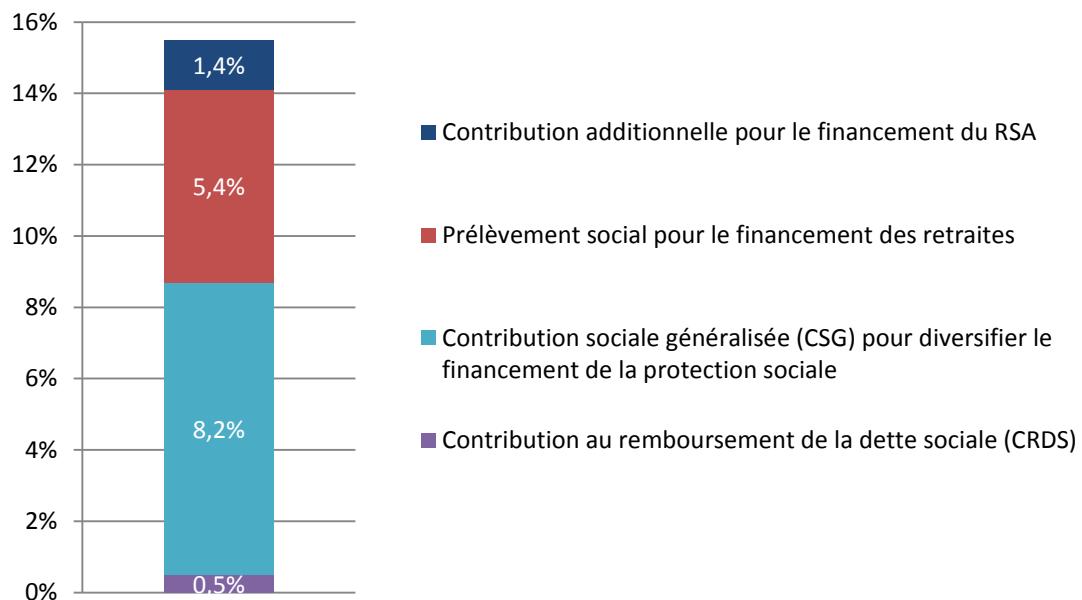


Fig. 5 : Détail des prélèvements et contributions sociales en assurance vie

Cette fiscalité peut dissuader le rachat. Avant une ancienneté de huit ans, les assurés peuvent tout d'abord préférer conserver leur contrat, car aucune exonération fiscale ne leur est offerte. Ensuite, une fois le « saut fiscal » passé, le rachat total clôture le contrat d'assurance, fait perdre à son détenteur l'avantage de l'antériorité fiscale qu'il a mis huit années à acquérir.

2.3.2 Au décès de l'assuré

Nous rappelons brièvement quelques règles générales de la fiscalité du droit successoral. En particulier, les contrats d'assurance vie, en tant que biens entrant dans la succession du défunt bénéficient, sous certaines conditions, d'avantages tels que des exonérations ou des abattements. L'assurance vie au décès de l'assuré varie ainsi selon le degré de parenté et la situation du ou des bénéficiaire(s) avec l'assuré :

- ✓ Si le bénéficiaire est le **conjoint survivant**, le partenaire de PACS du défunt ou un frère ou une sœur du défunt, célibataire, veuf ou divorcé et âgé de plus de 50 ans ou atteint d'une infirmité le mettant dans l'impossibilité de subvenir par son travail à ses

besoins ou encore domicilié constamment avec le défunt pendant les cinq années qui ont précédé son décès, alors ce bénéficiaire est **totalement exonéré de droits de succession** ;

- ✓ Sinon, les droits de succession appliqués à tout autre type de bénéficiaire sont à distinguer selon la date de souscription du contrat d'assurance vie et la date de versement des primes. Les différents cas de figures possibles sont résumés dans le tableau suivant :

		Souscription du contrat		
		Après le 20/11/1991		
Versement primes par le défunt	Avant le 13/10/1998	Avant le 20/11/1991	Avant 70 ans	Après 70 ans
	A partir du 13/10/1998	Exonération de droits	- Prélèvement forfaitaire de 20 % après abattement de 152 500 € par bénéficiaire (tous contrats confondus) - Pour les décès survenus après le 30 juillet 2011, le taux passe à 25 % pour la part nette taxable (après abatt.) supérieure à 902 838 €	Sommes appartenant à la succession ⇒ Soumission aux droits de succession après abatt. de 30 500 €

Fig. 6 : Fiscalité du droit successoral en assurance vie

Les phénomènes de **fiscalité**, qui ponctuent la vie d'un contrat d'assurance vie, en font donc une **variable explicative potentiellement importante dans l'évaluation des rachats**.

N.B. : La clause bénéficiaire, rédigée par le souscripteur à la souscription d'un contrat d'assurance vie, en désigne les bénéficiaires. Deux types de clauses existent :

- ✓ La **clause standard** profite par défaut aux héritiers de l'assuré et stipule en effet qu'en cas de décès de l'assuré, le capital sera transmis « au conjoint, à défaut aux enfants nés ou à naître, vivants ou représentés, à défaut aux héritiers ». Cette clause standard privilégie donc la transmission au conjoint ;
- ✓ Mais des **clauses « personnalisées »** peuvent préciser le ou les bénéficiaire(s) et leur part respective.

Une clause bénéficiaire personnalisée peut révéler une volonté de transmission successorale, avec un attachement à la désignation du ou des bénéficiaire(s), limitant logiquement la propension au rachat du contrat. A l'inverse, une clause standard peut signifier une priorité au rendement et suggérer une tendance au rachat plus marquée.

La problématique attachée à la clause bénéficiaire constitue donc un point primordial à aborder dans une étude sur les rachats. Néanmoins nous ne disposons pas d'informations suffisantes pour présumer des motivations réelles du souscripteur.

De par son comportement particulier, le réseau gestion privée du CIC mériterait une étude spécifique par rapport au réseau grand public. Toutefois, il concerne moins de 2 % des contrats CIC pour 9 % de ses engagements.

3 Les domaines d'application des lois de chute

Pour accompagner les compagnies d'assurance dans leur mission auprès des assurés et prévenir toute faillite, des **organismes de tutelle** comme l'ACP en France et des **règles prudentielles** comme les directives Solvabilité I et bientôt Solvabilité II à l'échelle européenne, ont établi une série de mesures à suivre de façon régulière (annuellement, trimestriellement, etc.) et qui nécessitent la réalisation de projections de flux de trésorerie et donc l'utilisation de lois de chute.

D'autres référentiels imposent l'évaluation de la solidité d'une compagnie d'assurance, qui passe nécessairement par la valorisation de ses flux de trésorerie. Il s'agit en l'occurrence des **référentiels comptable et de communication financière**, à travers respectivement la norme IFRS¹⁹ 4 phase 2 et le calcul de l'*Embedded Value* (EV).

Les équipes actuarielles sont par conséquent sollicitées à l'occasion de différents calculs requérant l'utilisation de lois de chute, dont l'aperçu ci-dessous nous permet d'en mesurer toute la portée :

- ✓ L'évaluation de différentes provisions comme la PAF²⁰ et la PGG²¹ ;
- ✓ Le renseignement des états réglementaires T3 et C6 bis à destination de l'ACP. ;
- ✓ Le calcul du SCR ;
- ✓ Le calcul de l'EV ;
- ✓ A horizon plus lointain, les normes IFRS 4 phase 2 ;
- ✓ La tarification de certaines garanties complémentaires ou de la garantie plancher.

Les applications qui peuvent être faites des lois de chute estimées ne constituent pas l'objet de ce mémoire, leur présentation reste relativement succincte, mais permet toutefois d'en entrevoir la grande variété.

¹⁹ *International Financial Reporting Standards*.

²⁰ Provision pour Aléas Financiers.

²¹ Provision Globale de Gestion.

3.1 Les exigences prudentielles

Les règles prudentielles de Solvabilité I et bientôt celles de Solvabilité II ont pour point commun l'encadrement de l'activité d'assurance afin que les compagnies d'assurance puissent toujours être en mesure de respecter les engagements qu'elles ont contractés envers leurs assurés. Néanmoins, leurs visions respectives sur la valorisation des flux de trésorerie diffèrent fortement. Alors que Solvabilité I adoptait plutôt une valeur « prudente », la valeur comptable, Solvabilité II porte une vision économique du bilan, qu'elle valorise selon le principe de la « juste valeur », c'est-à-dire la valeur d'échange, aussi qualifiée de *market consistent*. Même si la nature des risques dans leur ensemble est mieux prise en compte sous Solvabilité II, la pro-cyclicité naturelle des ratios de solvabilité que ce référentiel sous-tend pose d'autres problèmes.

Leurs structures bilancielles de ces deux directives peuvent être représentées selon chaque schéma suivant :

Bilan Solvabilité I	
Actif	Passif
Valeur comptable des actifs (<i>French GAAP</i>)	Excès
	EMS ²²
	PT prudentes (<i>French GAAP</i>)

Bilan Solvabilité II	
Actif	Passif
Valeur de marché des actifs	FP ²³
	Marge de risque
	Provision <i>best estimate</i>

3.1.1 Les provisions réglementaires

Les engagements pris par les compagnies d'assurance le sont souvent à long terme, particulièrement en ce qui concerne les produits d'assurance vie ou de retraite.

Les provisions techniques relatives aux contrats d'épargne sont listées à l'article R331-3 du Code des Assurances, dont certaines nécessitent de liquider le portefeuille en fonction des sorties (rachats et décès) et des revalorisations appliquées. Nous en relevons au moins deux dans le tableau suivant :

²² L'Exigence de marge de solvabilité.

²³ Fonds propres.

	Objectif	Produits concernés et méthode de calcul
Provision pour Aléas Financiers (PAF)²⁴	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Interactions entre l'actif et le passif ✓ Pallier toute insuffisance du rendement des actifs financiers par rapport aux engagements de taux garantis sur les contrats d'épargne 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Contrats à taux garantis élevés ✗ Exception : contrats en unités de compte et de prévoyance collective
Provision Globale de Gestion (PGG)²⁶	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Frais de gestion futurs des contrats en euro non financés par les produits financiers et les prélèvements de gestion attendus <p style="color: red; margin-left: 20px;"><i>⇒ « Destinée à couvrir les charges de gestion future des contrats non couvertes par ailleurs »</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Contrats en euros <p style="color: red; margin-left: 20px;"><i>⇒ « Destinée à couvrir les charges de gestion future des contrats non couvertes par ailleurs »</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Projection des comptes de résultats futurs, selon des hypothèses techniques réglementaires sur les taux de chute moyens réellement observés et les taux de frais de gestion <p style="color: cyan; margin-left: 20px;">N.B. : Les lois estimées dans ce mémoire n'interviennent pas dans le calcul de la PGG</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ Actualisation réalisée à un taux de rendement prospectif

Fig. 7 : Présentation de la provision pour aléas financiers et de la provision globale de gestion

²⁴ Cf. Article A331-2 du Code des Assurances.

²⁵ Intérêts techniques.

²⁶ Cf. Article A331-1-1 du Code des Assurances.

Le pilier I de Solvabilité II, consacré aux exigences quantitatives, impose de valoriser les provisions techniques comme la somme du *best estimate* et d'une marge de risque²⁷. Le *best estimate* prend en compte la valeur temps des options²⁸ et des garanties offertes aux assurés. Son calcul nécessite donc une base solide de départ en termes de modélisation des prestations pour décès et rachats structurels.

N.B. : Les lois d'expérience sont *best estimate*, c'est-à-dire qu'elles doivent refléter le plus fidèlement possible la réalité. Dans cette optique, la fonction actuarielle intervient dans la supervision de la qualité des données utilisées ainsi que les méthodes d'estimation et leurs hypothèses. Ces lois sont donc adaptées à l'évaluation relative au référentiel Solvabilité II (approche *market consistent* et *risk-oriented*). .

3.1.2 Les états réglementaires

Les états réglementaires prospectifs T3 et C6 bis sont relatifs aux simulations actif-passif et possèdent une portée strictement informative, dans la limite de toutes procédures de redressement ou de sauvegarde. En voici les principales caractéristiques :

²⁷ Cette définition est valable pour les passifs *non hedgeables*.

²⁸ Le rachat est une des options du contrat d'assurance vie.

	Objectif	modalités de calcul ²⁹
État T3 ³⁰	<ul style="list-style-type: none"> ✓ A dessein exclusif de contrôle de la solvabilité de la société d'assurance ✗ N'intervient pas dans le résultat ✓ Retracer l'incidence de différentes hypothèses de variations de taux d'intérêt, de marchés et de valeurs mobilières, sur la valeur de réalisation des placements des compagnies d'assurance (actif) et leurs PM (passif) 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Modèle³¹ à compléter et à remettre à l'ACP dans un délai d'un mois suivant la fin de chaque trimestre ✓ Les simulations au passif consistent en une simple projection des flux, sans actualisation, car il ne s'agit pas d'un calcul de provision
État C6 bis ou « Test d'exigibilité » ³²	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Test annuel de quantification de l'impact sur les fonds propres de conditions de marché très dégradées, tant au niveau des engagements que des actifs investis ✓ Réalisé sur la base d'un portefeuille en <i>run off</i> <p>N.B. : L'IA recommande aux compagnies d'assurance de réaliser des simulations complémentaires au test d'exigibilité, au moyen de modèles actif-passif internes et notamment de lois de sorties d'expérience</p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ <u>Étape 1</u> : Solde des encaissements et décaissements futurs sur cinq années de projection, marquées par : <ul style="list-style-type: none"> - L'absence de VL futurs - La dégradation conséquente de la sinistralité au passif (triplement du taux de rachat annuel moyen annuel constaté au cours des trois derniers exercices et sur l'ensemble du portefeuille) - La stabilité des marchés financiers ✓ <u>Étape 2</u> : Détérioration des conditions de marché et des résultats des cessions éventuellement nécessaires pour régler les prestations. Cinq scénarios d'actif sont envisagés : <ul style="list-style-type: none"> - Référence sans détérioration - Haute des taux - Baisse des actions - Baisse de l'immobilier - Détériorations simultanées sur tous les marchés <p>Le résultat des cessions est le produit du pourcentage des placements à céder par la PMVL pour chaque scénario</p>

Fig. 8 : Présentation des états réglementaires T3 et C6 bis

N.B. : Les états T3 et C6 bis sont amenés à disparaître avec la mise en vigueur de Solvabilité II, qui vise à harmoniser les mesures de solvabilité à échelle européenne et, à plus long terme, internationale.

²⁹ Pour l'assurance vie et plus particulièrement les contrats en euros et les fonds euros des contrats multi-profil, distinction faites des cantons réglementaires L441 et PERP dans le cas du C6 bis.

³⁰ Cf. article R 332-1-2 du Code des Assurances.

³¹ Fixé en Annexe à l'article A344-13 du Code des Assurances.

³² Cf. article R344-4 du Code des Assurances.

3.1.3 Le Capital de Solvabilité requis (SCR)

Intégrant les objectifs du premier pilier de Solvabilité II, le SCR est défini comme le capital réglementaire exigé sous Solvabilité II et permettant à une compagnie d'assurance ou de réassurance de faire face, dans 99,5% des cas et à horizon un an, au choc provoqué par un risque majeur (par exemple une sinistralité exceptionnelle).

Le calcul du SCR est réalisé, selon son profil de risque, à l'aide de :

- ✓ La **formule standard** qui fonctionne selon une architecture modulaire des risques attribués à chaque branche d'assurance. Le SCR est calculé indépendamment pour chaque risque, puis agrégé au niveau global à l'aide de matrices de corrélation des risques. La branche Vie, par exemple, comprend les risques de mortalité, de longévité, d'incapacité/invalidité, de rachat, de frais, de révision et le risque catastrophe ;
- ✓ Un **modèle (partiellement) interne** à valider par l'ACP.
 - ⇒ Le SCR requiert ainsi de valoriser les passifs, y compris les rachats, en valeur de marché.



Les ACM ont choisi de mesurer leurs risques à l'aide de la formule standard.

3.2 Les exigences comptables et financières

Le référentiel comptable (normes IFRS phase 2) comme le référentiel MCEV ont fait le choix de valoriser les passifs d'assurance selon une approche économique, ce qui permet leur rapprochement avec le référentiel prudentiel (Solvabilité II).

3.2.1 Les normes IFRS 4 Phase 2

Les IFRS sont des normes comptables instituées par l'*International Accounting Standards Boards* (IASB) et entrées en vigueur à partir de 2005, pour toutes les sociétés cotées ou faisant appel à des investisseurs.

Les IFRS ont notamment pour but l'harmonisation des normes comptables internationales et le renforcement de la sécurité et de la transparence financières. Ainsi, la sincérité de l'information financière est instaurée par la règle de valorisation de l'actif et du passif à leur juste valeur plutôt qu'à leur coût historique. La vision adoptée correspond donc à celle d'un investisseur.

En particulier, la norme comptable IFRS 4, relative aux contrats d'assurance, impose une évaluation économique des passifs d'assurance. Sa mise en œuvre a été prévue en deux phases, dont la seconde, IFRS phase 2, implique l'adoption d'une vision prospective qui intègre l'actualisation des flux de trésorerie futurs comprenant les différentes options et garanties, parmi lesquelles les rachats, ainsi que la prise en compte d'une marge résiduelle.

3.2.2 L'Embedded Value (EV)

Dans l'optique d'une valorisation d'une compagnie d'assurance, l'*Embedded Value* (EV) constitue une technique couramment admise.

A l'origine, censée prendre en compte des éléments de valeur « invisibles » dans les comptes mais jugés essentiels dans l'évaluation d'une compagnie d'assurance, l'EV se révèle aujourd'hui être également un instrument de gestion. La variation dans le temps de cette valeur renseigne en effet sur les facteurs qui en sont responsables et qu'il serait éventuellement bon de corriger.

Cet indicateur vise à établir le prix théorique qu'un investisseur extérieur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la compagnie, en tenant compte de :

- ✓ L'actif net réévalué : part de l'actif revenant aux actionnaires en date d'évaluation ;
- ✓ La valeur de l'*in force* ; valeur actuelle des profits futurs distribuables du portefeuille en stock (hors souscriptions nouvelles et en tenant compte du coût du capital).

N.B. : Depuis une dizaine d'années, l'EV traditionnelle est vivement critiquée, car elle base ses projections sur des hypothèses fixes de taux de rendements et ne prend pas en compte le risque de pertes. Depuis, les techniques ont fortement évolué et se sont orientées vers une valorisation économique de l'activité (EV stochastique), cohérente avec les informations disponibles sur le marché.

A partir de 2008, le CFO Forum³³ a institué la *Market Consistent Embedded Value* (MCEV) afin d'homogénéiser les livrables et les hypothèses de calcul de l'EV.

Nous citons en particulier les septième et onzième principes constitutifs de la MCEV, qui guident le calcul de l'EV en termes d'estimation des flux de trésorerie :

³³ Le CFO (*Chief Financial Officers*) Forum est un comité constitué des directeurs financiers des plus grandes compagnies européennes.

Principe 7

« L'*Embedded Value* doit tenir compte de l'impact éventuel des options³⁴ et garanties financières sur les bénéfices futurs distribuables. Cet impact doit tenir compte de la valeur temps des options et garanties financières calculée à l'aide de méthodes stochastiques suivant des hypothèses cohérentes avec celles utilisées pour le calcul de l'*Embedded Value*. Les flux futurs doivent être évalués selon des hypothèses économiques telles que l'estimation de ces flux soit en ligne avec celle de flux similaires échangés sur les marchés financiers. Il peut être tenu compte des stratégies de management dans la valorisation des options. L'évaluation est non nécessairement *Market-Consistent* ».

Principe 11

« La détermination des hypothèses doit se fonder sur l'analyse de l'expérience passée, présente et future et de toute information utile. Il doit s'agir d'hypothèses établies en « *Best Estimate* » et propres à chaque compagnie plutôt que basées sur des hypothèses de marché. Il peut être tenu compte de conditions futures différentes de celles du présent uniquement si les changements sont suffisamment étayés. Les hypothèses doivent être revues régulièrement ».

³⁴ Y compris les rachats.

4 Présentation des lois de rachat et de mortalité actuelles

- ✓ Les **lois de rachat** actuelles sont déterministes. Elles sont établies à partir de l'historique des contrats d'épargne, selon un découpage homogène, qui est fonction de divers critères discriminants parmi le type de produit, la fiscalité, l'âge à la souscription et le montant investi.
La méthode utilisée s'appuie sur l'estimateur de Kaplan-Meier³⁵, qui fait ensuite l'objet d'un ajustement paramétrique. Il s'agit d'une distribution de Weibull³⁶ à quatre paramètres, laquelle permet de tenir compte du saut fiscal et de prolonger la loi au-delà des durées déjà courues pour les contrats les plus anciens.
- ✓ Les **probabilités de décès** sont quant à elles issues de la table TD88-90 abattue de 50 %, qui représente la probabilité d'un assuré de décéder en fonction de son âge.

Ces lois de chute permettent alors d'établir une loi d'écoulement des provisions mathématiques en épargne³⁷ sur quarante années, utile à la projection des flux de passif. En effet, c'est le croisement des PM, agrégées en groupes homogènes, avec les lois de rachats théoriques, les tables de mortalité et les rachats partiels et programmés³⁸, qui permet de dresser un **échéancier de flux**, fonction des caractéristiques des contrats et des assurés.

³⁵ A partir de la PROC LIFETEST de SAS®. Cet estimateur sera détaillé un peu plus loin.

³⁶ Les principales caractéristiques de cette loi et la procédure d'ajustement paramétrique sont présentés dans la suite de ce mémoire, à l'occasion de leur mise en œuvre.

³⁷ Les contrats d'épargne étudiés sont les bons de capitalisation, les primes uniques, les versements libres et les supports euro des contrats multi-profil.

³⁸ Un taux arbitraire de rachats partiels et programmés est appliqué au montant de provisions mathématiques.

5 Présentation des portefeuilles étudiés³⁹

Seuls les **contrats en euros** sont étudiés. Nous distinguons les bons de capitalisation qui font l'objet, du fait de leurs caractéristiques spécifiques, d'un traitement informatique différent.

a) *Bons de capitalisation*

Les bons de capitalisation (CAPI) sont des contrats à versement unique, qui possèdent une durée maximale variable selon la génération de commercialisation (généralement huit ans), durant laquelle le montant net investi est capitalisé à un taux d'intérêt garanti, majoré de la PB. Leur rachat n'est possible qu'une fois le terme survenu. A défaut de rachat au terme de leur durée initiale, ces contrats ne bénéficient plus d'aucune rémunération.

Ces contrats peuvent rester anonymes et sont dans ce cas dits « au porteur ». Il est par conséquent inenvisageable de distinguer les produits de capitalisation selon l'âge de l'assuré à la souscription.

- ✓ Les **bons de capitalisation** (CAPI) ne sont plus commercialisés (environ 25 000 contrats pour 650 M € d'encours subsistent en portefeuille).

b) *Autres contrats d'épargne*

- ✓ Les contrats à **prime unique** (PU) ne sont plus commercialisés par le réseau depuis 1997 (environ 190 000 contrats pour moins de 2,5 Mds € d'encours et 12 k€ en moyenne) ;
- ✓ Les contrats à **versements libres** (VL) (environ 1 250 000 contrats pour 28,3 Mds € d'encours et 20 k€ en moyenne) ont été commercialisés parallèlement aux contrats PU et CAPI et leur émergence tient essentiellement du fait :
 - De la préoccupation grandissante des retraites ;
 - Des avantages fiscaux : les VL permettent, comme leur nom l'indique, d'effectuer des versements à tout moment, sachant que leur date de souscription vaut prise d'effet de l'antériorité fiscale.
- ✓ Les contrats **multi-profil** (MP) ou plus précisément leur partie euro⁴⁰ (environ 1 500 000 contrats pour 27,5 Mds € d'encours sur les supports euros et une moyenne de 20 k€ par contrat⁴¹) possèdent les mêmes caractéristiques et modes de fonctionnement que les contrats VL, qui peuvent être considérés comme des mono-supports euros. Pour cela, ces deux types de produits seront regroupés dans les estimations à suivre. Ce regroupement constitue une approximation dans la mesure

³⁹ Au 1^{er} juillet 2013.

⁴⁰ La catégorie « MP » représente exclusivement la partie euro des contrats multi-supports dans toute la suite de cette étude.

⁴¹ Le montant moyen des contrats multi-profil au global (supports euros et UC) s'élève à 27 k€.

où les contrats MP possèdent une part conjoncturelle et sont notamment sujets à un risque conjoncturel d'arbitrage des supports euros vers les supports UC et vice versa, en fonction des marchés financiers. Nous ne prenons toutefois pas cet élément en compte, car en période de crise, les arbitrages du support euro vers les UC sont minoritaires à 5 % du total des arbitrages.



Le premier produit MP commercialisé par les ACM remonte à 1995.

N.B. : Le Fonds Général est le fonds euro des ACM, destiné à la fois aux produits VL et MP.

Il est primordial de bien cerner le profil du portefeuille d'étude, qu'il s'agisse des contrats en cours ou rachetés. Le but de cette partie est précisément d'accéder à une vision d'ensemble du portefeuille, dans l'optique de déterminer des lois de rachat homogènes. Il s'agit formellement d'éviter tout biais de risque de comportement, en l'occurrence de rachat, dans l'estimation à suivre des lois de rachat.

Pour garantir l'homogénéité comportementale du portefeuille étudié, des statistiques descriptives préalables sont réalisées successivement sur la base du portefeuille de contrats courants au 31/12/2012, puis sur les contrats rachetés de 2007 à 2012.

- ✓ Nous cherchons tout d'abord à identifier le profil des **contrats en cours** dans le portefeuille⁴², qui sont potentiellement rachetables ;
- ✓ L'analyse des **contrats rachetés** dans le portefeuille sur la période de 2007 à 2012, soit six années d'historique récentes, nous permet ensuite d'identifier un profil général de rachat, tant au niveau des différentes sociétés et réseaux de distribution visés que des types de produits ou des montants de PM considérés.

Le périmètre de l'étude se réduit aux contrats d'assurance et de retraite (hors PERP et PERE) au sens strict, à l'exclusion des contrats d'épargne patrimoniale, autrement qualifiée d'« épargne sur mesure », vers lesquels sont orientés les clients fortunés et qui représentent donc les capitaux sous risques les plus importants⁴³. En outre, seule la part euro des contrats MP est prise en compte et ce dans toute la suite de l'étude.

⁴² A la date de la dernière sauvegarde annuelle, le 31/12/2012.

⁴³ Les contrats d'épargne sur mesure feront l'objet d'une étude ultérieure à part.

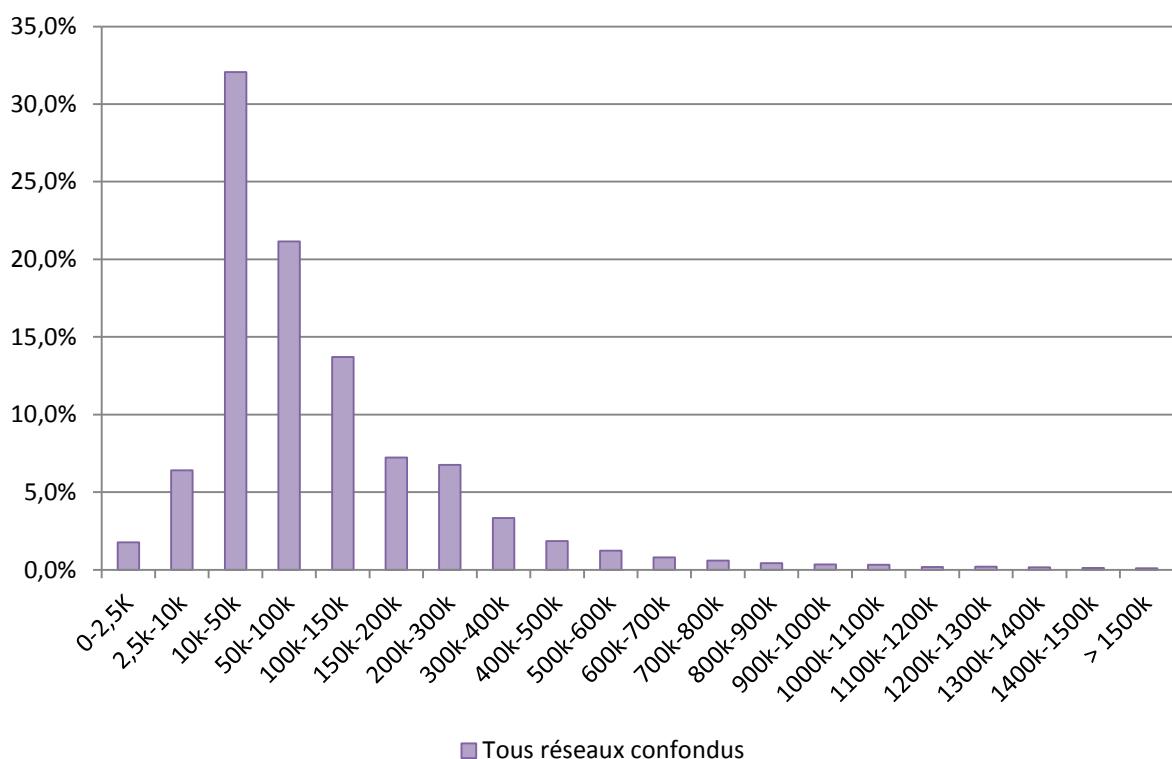
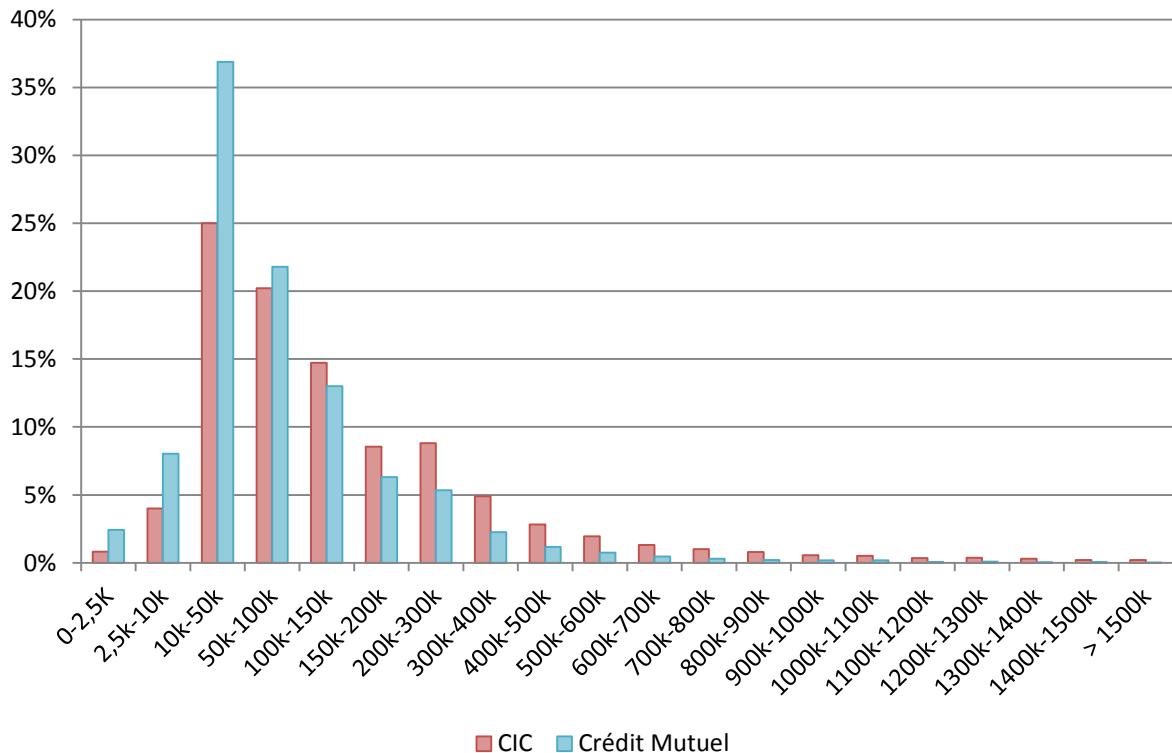


Fig 10 : Distribution du portefeuille étudié en pourcentage de PM par tranche de PM

Le graphique précédent indique que la clientèle du périmètre d'étude est essentiellement répartie sur les montants entre 10 000 et 100 000 €. La PM moyenne s'élève à près de 21 000 €, avec un écart-type de 50 000 €. Les contrats d'assurance vie retenus se partagent entre trois sociétés Vie, sur deux réseaux de distribution.

Répartition du nombre de contrats		Réseau		
		CIC	CM	Tous réseaux confondus
Société	ACM Vie Mutuelle	négligeable	16 %	12 %
	ACM Vie SA	> 99 %	84 %	88 %
	Sérénis Vie	négligeable		
	Toutes sociétés confondues	28 %	73 %	

*négligeable $\Leftrightarrow < 1 \%$

Fig. 9 : Répartition du nombre de contrats par réseau et société

Répartition du montant de PM		Réseau		
		CIC	CM	Tous réseaux confondus
Société	ACM Vie Mutuelle	négligeable	21 %	14 %
	ACM Vie SA	> 99 %	79 %	86 %
	Sérénis Vie	négligeable		
	Toutes sociétés confondues	42 %	58 %	

*négligeable $\Leftrightarrow < 1 \%$

Fig. 10 : Répartition du montant de PM par réseau et société

D'après le faible volume de données attachées au réseau CIC pour les contrats des sociétés ACM Vie Mutuelle et Sérénis Vie du périmètre d'étude, tant en nombre qu'au niveau des engagements concernés, nous choisissons la maille suivante pour réaliser les statistiques :

- ✓ ACM Vie Mutuelle ;
- ✓ ACM Vie SA – CIC ;
- ✓ ACM Vie SA – CM ;
- ✓ Sérénis Vie.

⇒ C'est au sein même de ces catégories que doit être assurée l'homogénéité du portefeuille.

Nous remarquons immédiatement l'importance du réseau CIC qui possède plus de 40 % des montants de PM pour seulement le quart des effectifs au sein du groupe CM – CIC. Nous sommes dès à présent incités à distinguer les deux réseaux dans nos études sur les comportements de rachat, car il semble évident que les contrats du réseau CIC soient plus « riches » que ceux du CM⁴⁴. Ces deux réseaux possèdent en effet deux historiques parallèles

⁴⁴ Cette distinction sera confirmée par la suite, dans la détermination du découpage des lois de rachat.

mais distincts, tant au niveau de leurs logiques commerciales que de leurs clientèles respectives.

N.B. : Le CIC a été racheté en 1998 par le groupe CM. Depuis, les deux réseaux évoluent selon une gamme commune de produits d'épargne, tout en conservant leurs portefeuilles antérieurs, fusionnés au moment du rachat. La clientèle n'en demeure pas moins spécifique à chaque réseau. Ainsi, celle du CIC est supposée être en moyenne plus aisée et plus âgée⁴⁵.

Rappelons par ailleurs que les contrats étudiés sont de trois types différents, ce qui peut influer sur le comportement de rachat :

- ✓ Prime unique (**PU**) ;
- ✓ Versements libres (**VL**) ;
- ✓ Fonds en euros des contrats multi-profil (**MP**).

Les contrats à prime unique sont ici moins importants, en raison de leurs volumes et encours forcément décroissants. Nous nous intéressons donc principalement aux produits de types VL et MP.

- ✓ Nous ajoutons un quatrième type de produit à cette étude, en distinguant les contrats qui sont marqués par différentes règles contractuelles de rémunération en fonction de leur génération de commercialisation. Certains de ces contrats possèdent des taux garantis viagèrement, particulièrement attractifs⁴⁶. Les rares contrats subsistants en portefeuille qui maintiennent cette garantie sont en situation de liquidation et seront pris en compte séparément par la suite, sous l'appellation de « **Viager** ». Les autres contrats présentant un taux minimum garanti ont systématiquement donné lieu à un versement de PB complémentaire.

Les statistiques suivantes nous permettent de vérifier si les spécificités attendues pour chaque réseau sont effectives.

⁴⁵ Nous ne distinguons cependant pas les clientèles grand public et banque privée au sein même du réseau CIC.

⁴⁶ Les produits de type « **Viager** » sont représentés par les contrats qui ont un TMG viager de 4,50 % et ne bénéficient pas de PB, pour les sociétés ACM Vie Mutuelle et ACM Vie SA.

	PU	VL	MP	Viager	TOTAL
ACM Vie Mutuelle	% contrats	42 %	14 %	6 %	38 %
	Total PM (M€)	1 075	1 800	870	5 425
	% PM	12 %	20 %	9 %	59 %
	PM moy. (k€)	7,1	35,9	38,1	39,1
	Âge souscription moyen	54	46	57	43
	Ancienneté moy.	20	18	6	23
	Âge moyen	74	64	63	66
ACM Vie SA - CM	% contrats	1 %	41 %	57 %	1 %
	Total PM (M€)	209	9 354	14 765	564
	% PM	1 %	38 %	59 %	2 %
	PM moy. (k€)	9,8	13,2	15,1	33,8
	Âge souscription moyen	60	47	48	47
	Ancienneté moy.	15	8	5	22
	Âge moyen	76	55	53	69
ACM Vie SA - CIC	% contrats	3 %	44 %	53 %	26 %
	Total PM (M€)	993	10 565	12 659	24 217
	% PM	4 %	44 %	52 %	41 %
	PM moy. (k€)	51,7	32,4	32,6	33,1
	Âge souscription moyen	60	49	49	49
	Ancienneté moy.	20	12	6	9
	Âge moyen	80	61	55	58
SÉRÉNIS VIE	% contrats		1 %	99 %	négligeable
	Total PM (M€)		2	158	160
	% PM		1 %	99 %	négligeable
	PM moy. (k€)		35,9	38,1	38,0
	Âge souscription moyen		46	57	49
	Ancienneté moy.		18	6	20
	Âge moyen		64	63	69
TOTAL	% contrats	7 %	38 %	49 %	6 %
	Total PM (M€)	2 278	21 722	28 452	5 989
	% PM	4 %	37 %	49 %	10 %
	PM moy. (k€)	11,9	20,1	20,4	38,5
	Âge souscription moyen	56	48	48	43
	Ancienneté moy.	19	10	5	23
	Âge moyen	75	57	54	66

Fig. 11 : Population des contrats appartenant au périmètre d'étude et en cours au 31/12/2012

	PU	VL	MP	Viager	TOTAL
ACM Vie Mutuelle	% RT	60 %	11 %	4 %	25 %
	Total RT (M€)	210	106	76	252
	% montant RT	33 %	16 %	12 %	39 %
	RT moy. (k€)	5,5	15,1	30,5	15,7
	Âge souscription moyen	52	43	55	41
	Ancienneté moy ⁴⁷	17	15	4	20
	Âge moyen ⁶	69	57	60	61
ACM Vie SA - CM	% RT	2 %	47 %	51 %	négligeable
	Total RT (M€)	36	760	1 154	26
	% montant RT	2 %	38 %	59 %	1 %
	RT moy. (k€)	8,1	6,0	8,4	15,3
	Âge souscription moyen	57	43	45	44
	Ancienneté moy ⁶	12	6	4	18
	Âge moyen ⁶	70	50	49	62
ACM Vie SA - CIC	% RT	2 %	44 %	54 %	
	Total RT (M€)	106	1 071	1 630	
	% montant RT	4 %	38 %	58 %	
	RT moy. (k€)	31,3	12,3	15,2	
	Âge souscription moyen	60	45	46	
	Ancienneté moy ⁶	16	8	5	
	Âge moyen ⁶	76	53	51	
SÉRÉNIS VIE	% RT			100 %	négligeable
	Total RT (M€)			8	8
	% montant RT			100 %	négligeable
	RT moy. (k€)			102	102
	Âge souscription moyen			50	50
	Ancienneté moy ⁶			2	2
	Âge moyen ⁶			51	51
TOTAL	% RT	9 %	41 %	47 %	3 %
	Total RT (M€)	352	1 937	2 868	278
	% montant RT	6 %	37 %	53 %	5 %
	RT moy. (k€)	7,6	8,8	11,6	15,6
	Âge souscription moyen	53	44	45	41
	Ancienneté moy ⁶	16	7	5	20
	Âge moyen ⁶	70	51	50	61

Fig. 12 : Population des contrats appartenant au périmètre d'étude et rachetés entre 2007 et 2012 (inclus)

⁴⁷ Au moment du rachat.

- ✓ L'essentiel des contrats de notre périmètre d'étude appartient à la société ACM Vie SA. Ceci se justifie aisément par le fait que le portefeuille de la société ACM Vie Mutuelle soit en *run off* et que la société Sérénis Vie propose presque exclusivement des produits d'épargne sur mesure⁴⁸ ;
 - ✓ Le profil de la société ACM Vie Mutuelle est essentiellement constitué de produits Viagers⁴⁹ et PU, à 80 % en nombre et plus de 70 % en montants de PM. Cette société est en effet en *run off* depuis 1994. Ses assurés sont logiquement plus âgés et leurs contrats plus anciens que ceux de la société ACM Vie SA, qui a pris la relève à partir de cette période et est donc majoritairement constituée de produits VL et MP représentatifs de la majorité des produits étudiés ;
 - ✓ Au sein même de la société ACM Vie SA, le CM est le réseau le plus représenté en termes d'effectif de contrats. Cependant, les engagements du réseau CIC sont proportionnellement plus élevés. Du côté des rachats, leur nombre est supérieur au CM, mais leur montant plus élevé au CIC (les montants de rachats sont en moyenne deux fois plus élevés pour le réseau CIC que pour le réseau CM) ;
- ⇒ **Ceci tend à confirmer le fait que la clientèle du CIC soit globalement plus aisée.**
- ✓ Les contrats MP ont une ancienneté moyenne inférieure à celle des autres types de produits, notamment parce qu'ils ne sont commercialisés que depuis la seconde moitié des années 1990.

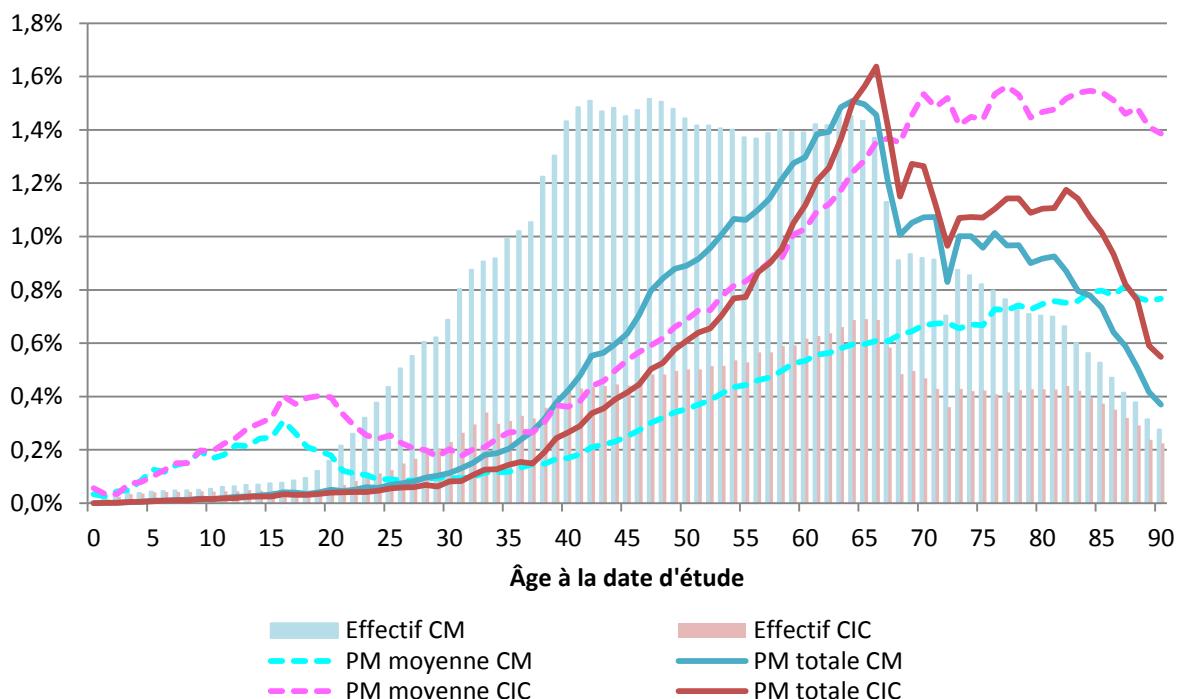


Fig 13 : Répartition des effectifs, PM moyenne et totale en fonction de l'âge atteint, pour chaque réseau de la société ACM Vie SA

⁴⁸ Hors périmètre d'étude.

⁴⁹ Les produits de type « Viager » sont presque exclusivement issus de la société ACM Vie Mutuelle.

6 *Back testing* des lois de rachat et de mortalité

6.1 Modalités du *back testing*

La réalisation d'un *back testing* des lois de rachat et de mortalité actuelles constitue un premier état des lieux. Nous souhaitons nous assurer que les résultats obtenus de la projection des flux de passif ne soient pas décorrélés de la réalité. A cette fin, la comparaison des flux projetés aux flux réels doit nous indiquer si les lois de rachat et de mortalité actuelles sont représentatives des comportements empiriques.

- ✓ Il s'agit en l'occurrence et a minima de comparer les sinistres, décès et rachats (partiels et totaux) de l'année 2012, au premier des quarante flux de sinistres projetés à partir des données à fin 2011 et à l'aide des lois actuelles.

6.2 Périmètre du *back testing*

6.2.1 Vérification comptable des montants récupérés

- ✓ L'agrégat de PM reconstitué au titre de l'exercice 2011 et selon la maille de projection définie, l'est en veillant à ce que le montant des PM soit identique avec celui des comptes de participations aux bénéfices ;
- ✓ Afin de vérifier la fiabilité des montants récupérés pour les sinistres réellement survenus en 2012 et disposer d'une base de comparaison sûre, nous rapprochons nos données techniques de celles du service de Comptabilité. Nous constatons que nos données couvrent plus de 99 % des données comptables, ce qui nous assure la représentativité du portefeuille dans notre analyse.

N.B. : Pour adopter le même périmètre que celui du modèle de projection, seuls la partie euro des PM à projeter et les sinistres relatifs aux contrats en euros sont retenus.

6.2.2 Segmentation appliquée

L'étude est réitérée pour **deux mailles distinctes**. Les sinistres sont ainsi détaillés par :

- ✓ **Code produit et branche** (Prime unique (PU), versements libres (VL), partie euro des contrats multi-profil (MP) et bons de capitalisation (CAPI)) ;
- ✓ **Loi de rachat et société** (ACM Vie SA, ACM Vie Mutuelle et Sérénis Vie).

Nous constatons une sous-estimation des rachats de l'ordre de 20% au global et une surestimation des décès de près de 10%.

6.3 Conclusions générales du *back testing*

Nous sommes conscients que le choix de réaliser un *back testing* sur la base d'une seule année pourrait induire un biais, dans l'éventualité où cette année serait concernée par une mortalité catastrophique ou une vague de rachats massive. Cependant, la volatilité des écarts en valeur absolue est générale, dans la mesure où elle concerne près de trois cents codes produits observés.

- ✓ De ce *back testing* initial ressort **une sous-estimation globale des rachats**. Quelle que soit la maille retenue, les résultats obtenus expriment des dissemblances entre la projection et la réalité, probablement dues à l'évolution du portefeuille⁵⁰, mais également à une inadéquation de ces lois de rachat avec un contexte économique profondément modifié ;
- ✓ Les décès projetés semblent devoir être affinés étant donné l'inadéquation observée de la table de mortalité d'expérience actuelle.

Afin d'identifier les raisons de la divergence constatée entre flux réels et flux projetés, il est nécessaire de réaliser au préalable quelques statistiques descriptives plus détaillées.

Nous commençons par nous intéresser aux rachats, nous enchaînerons avec la mise à jour des lois de mortalité.

⁵⁰ Les statistiques descriptives de la section suivante présentent les modalités de l'évolution du portefeuille évoquée ici.

II. Mise à jour des lois de rachat

1 Préambule

1.1 Statistiques descriptives

1.1.1 Évolution de la sinistralité entre 2009 et 2012

Une première série de statistiques est réalisée dans le but de déterminer si la sinistralité de l'année d'étude du *back testing* relève d'un comportement « isolé » ou si elle représente au contraire une tendance sur les dernières années. La période choisie s'étend de 2007 à 2012, soit un total de six années, incluant notamment trois crises (celles des *subprimes* en 2007, de Lehman Brothers en 2008 et plus récemment de la dette grecque, en 2011). Ces épisodes de déséquilibre financier n'influencent a priori que les rachats dits conjoncturels, sans trop impacter les rachats structurels. Nous pouvons tout de même soupçonner un « effet crise », révélé par une forte inflation de la sinistralité en 2011, particulièrement dans les tranches hautes de PM, avec une stabilisation en 2012. Ce constat pourrait éventuellement expliquer la sous-estimation globale des projections réalisées dans le cadre du *back testing* initial.

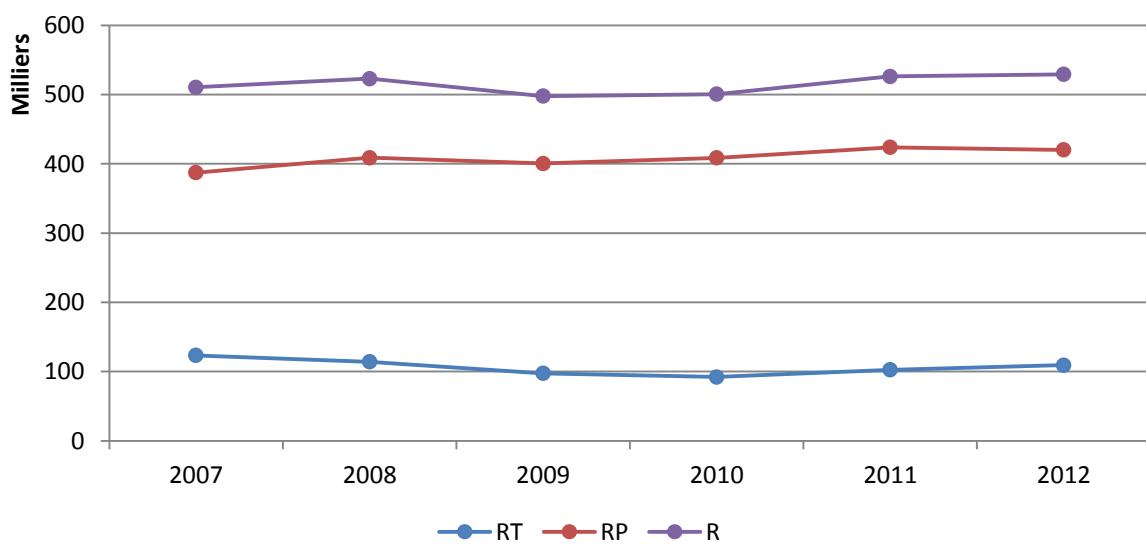


Fig. 15 : Évolution du volume des rachats (en milliers) par type de 2007 à 2012

Les rachats partiels sont logiquement (quatre fois) plus nombreux que les rachats totaux. Quel que soit le type de rachat, leur **volume** est resté relativement stable sur la période

étudiée. Ce n'est pas le cas des **montants** de rachats, qui sont nettement plus volatils, comme en témoigne le graphique suivant.

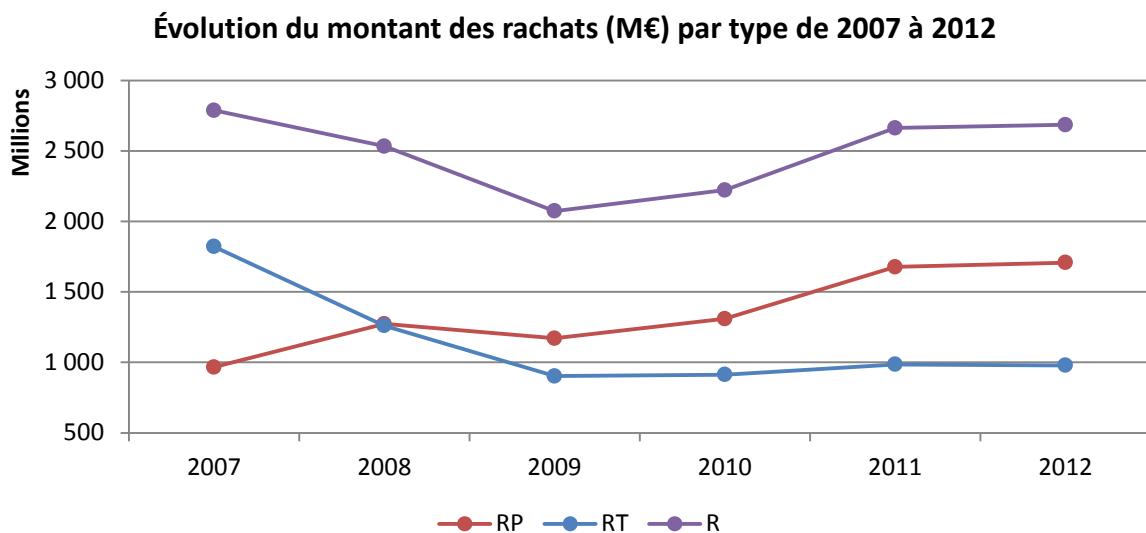


Fig. 16 : Évolution du montant des rachats (€) par type de 2007 à 2012

Les montants de rachats partiels sont croissants, dépassant même, à partir de 2009, les montants de rachats totaux stabilisés autour du milliard d'euros à partir de 2009.

		2007	2008	2009	2010	2011	2012
RP	Δ Nombre	-	5,57 %	-2,04 %	2,00 %	3,74 %	-0,87 %
	Δ Montant	-	31,78 %	-8,04 %	11,84 %	28,07 %	1,83 %
RT	Δ Nombre	-	-7,33 %	-14,74 %	-5,47 %	11,43 %	6,41 %
	Δ Montant	-	-30,82 %	-28,38 %	1,22 %	7,93 %	-0,74 %
Global	Δ Nombre	-	2,45 %	-4,81 %	0,54 %	5,15 %	0,55 %
	Δ Montant	-	-9,12 %	-18,16 %	7,21 %	38,50 %	0,88 %

Fig. 17 : Variation annuelle du nombre et du montant de rachats par année entre 2007 et 2012

1.1.2 Tendance de rachat entre 2007 et 2012

Afin d'obtenir des taux de rachat **total** annuels moyens par ancienneté sur les six derniers exercices, nous décidons d'utiliser l'estimateur actuariel. Il s'agit ici de capter une tendance et non de déterminer avec précision une estimation des taux de rachats. Une partie spécifique est par la suite consacrée à l'estimation à proprement parler des taux de rachat bruts.

a) Principe général de l'estimateur actuariel

Il s'agit de la première méthode d'analyse de survie, introduite en 1912 par P. Böhmer dans l'article « *Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten* ».

b) Formalisation mathématique

Nous fixons g intervalles de temps $[0, t_1[$, $[t_1, t_2[$, ..., $[t_{g-1}, t_g[$ et nous définissons⁵¹ :

- d_i : nombre de sorties pour la cause cible⁵² dans le $i^{\text{ème}}$ intervalle $[t_{i-1}, t_i[$ (avec $t_0 = 0$ et $t_g = \infty$) ;
- n_i : nombre d'individus à risque dans l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$;
- n_{i-1} : nombre d'individus encore à risque à l'instant t_{i-1} ;
- c_i : nombre de sorties toutes causes dans l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$ (on parle de censure);
- T_i : nombre d'individus supplémentaires à risque au cours de l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$ (on parle de troncature).

Nous supposons que les entrées et les sorties ont lieu en milieu de période. Le nombre d'individus à risque dans l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$ est alors le suivant :

$$n_i = n_{i-1} - \frac{c_{i-1}}{2} + \frac{T_{i-1}}{2}$$

Ensuite, le taux de chute sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$, conditionné à sa survie en t_{i-1} est estimé par $\hat{p}_i = \frac{d_i}{n_i}$. L'estimateur de la fonction de survie en découle directement comme étant égal à :

$$\hat{S}_A(t) = \prod_{i: t_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

c) Application de l'estimateur actuariel au calcul des taux de rachat

Si nous reformulons l'estimateur actuariel présenté précédemment, il s'agit simplement du nombre de rachats **totaux** sur la période, rapporté à la somme du nombre de contrats en cours en fin d'année et de la moitié des contrats sortis, quelle qu'en soit la cause ou « nombre de contrats à risque » :

$$\text{Taux de rachat} = \frac{\text{nombre de contrats rachetés}}{\text{nombre de contrats à risque}}$$

⁵¹ Les notations et formules adoptées s'inspirent de l'ouvrage de PLANCHET F. et THÉROND P., « *Modèles de durée – Applications actuarielles* ».

⁵² Pouvant être le décès en cas d'estimation de taux de mortalité, le rachat en cas d'estimation de taux de rachat, etc.

Les taux de rachat obtenus à l'aide de l'estimateur actuariel sont présentés sur le graphique ci-dessous :

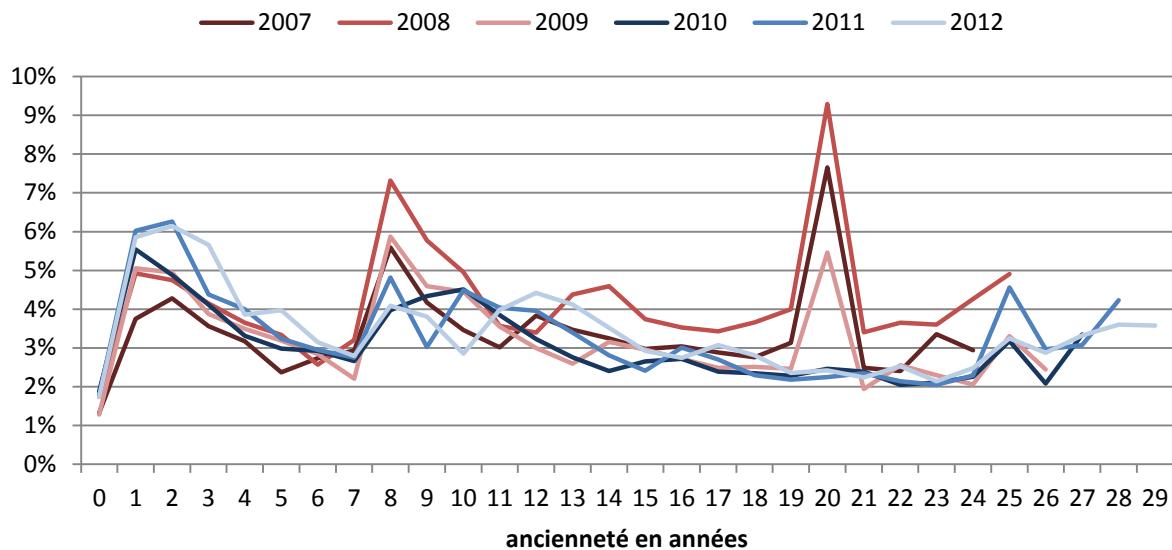


Fig. 18 : Taux de rachat (estimateur actuariel) par ancienneté de 2007 à 2012

Les principales constatations tirées du graphique précédent sont les suivantes :

- le saut fiscal est bien marqué à huit ans d'ancienneté, quelle que soit l'année ;
- sur les trois exercices 2007, 2008 et 2009, nous remarquons un pic de taux de rachat à vingt ans d'ancienneté, correspondant au terme de contrats à PU ;
- hors zone de saut fiscal, les comportements de rachat selon les années d'étude ont des ordres de grandeur relativement différents. Ainsi, nous relevons une tendance au rachat globalement plus forte les deux premières années d'étude, excepté pour les périodes précédant le saut fiscal.

Une attention particulière doit être portée au comportement de rachat en 2008, qui est nettement plus élevé que celui des autres années d'étude. Nous pouvons légitimement nous demander si ceci peut rétrospectivement s'interpréter comme une marque de défiance temporaire à l'égard des instances financières d'une manière générale. Dans ce cas, nous pourrions à terme envisager d'écrêter au niveau des pics ou supprimer cette année de notre étude.

La moyenne des taux de rachat obtenus par la méthode de l'estimateur actuariel fournit un taux lissé sur la période globale, dont l'allure est la suivante, selon que nous incluons ou non l'année 2008 :

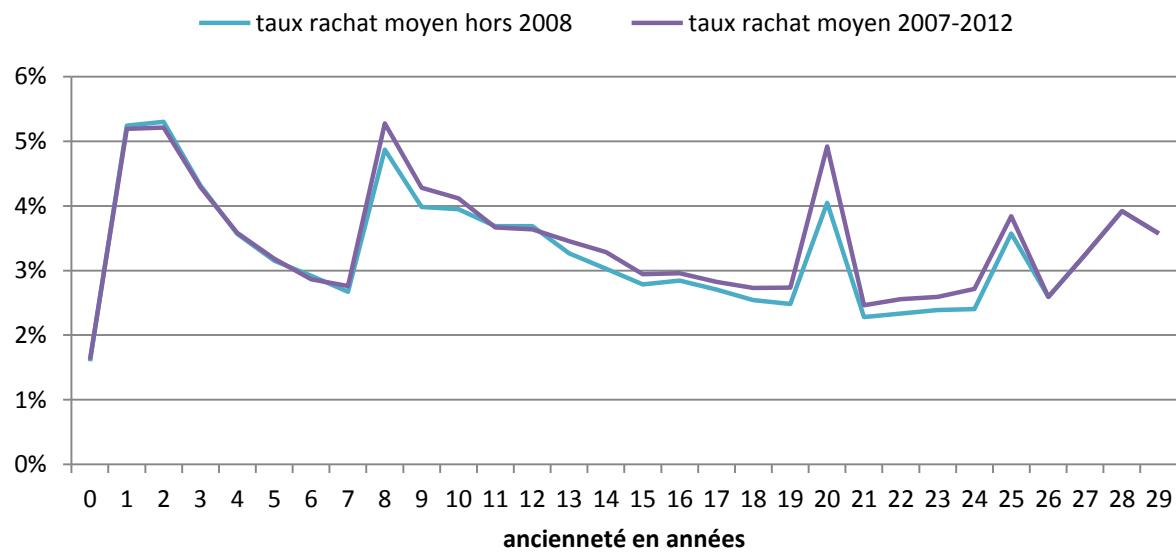


Fig. 19 : Taux de rachat moyen par ancienneté de 2007 à 2012, avec et sans l'année 2008

Prendre en compte l'année 2008 majore notre estimation du taux de rachat sur les intervalles de huit à dix ans d'ancienneté et de treize à vingt-six ans d'ancienneté.

2 Mise à jour du découpage des lois de rachat

La mise à jour des lois de rachat requiert la redéfinition préalable de leur découpage, qui doit être le plus homogène et explicatif possible. Constraint par la forme des données, le travail réalisé repose sur le découpage existant et se concentre en pratique essentiellement sur les produits les plus importants en termes d'effectifs et d'engagements, à savoir les versements libres et la part euro des multi-profil.

2.1 Significativité des variables actuelles

2.1.1 Détail du découpage

Nous cherchons dans un premier temps à vérifier la pertinence du découpage actuel des lois de rachat, qui sont projetées pour chaque société, en fonction du **type de produit** :

- CAPI ;
- PU ;
- VL et partie euro des MP, regroupés en raison de leurs profils proches de rachat ;
- Viager ;
- Autres types de contrats (PERP⁵³, PERE⁵⁴, engagements sociaux, etc.).

Chaque type de produit est ensuite éventuellement détaillé selon les variables discriminantes suivantes, en fonction de la finesse souhaitée et de la significativité des variables :

- ✓ La **fiscalité en usage à la souscription** du contrat, parmi trois modalités :
 - F1 : Souscription antérieure 1983 ⇔ Absence de fiscalité ;
 - F2 : Souscription entre 1983 et 1989 (inclus) ⇔ Saut fiscal à six ans d'ancienneté ;
 - F3 : Souscription postérieure à 1989 ⇔ Saut fiscal à huit ans d'ancienneté.
- ✓ L'**âge du souscripteur à la souscription** du contrat, parmi trois classes d'âges :
 - A1 : Souscription avant 35 ans ⇔ Population jeune ;
 - A2 : Souscription entre 35 et 64 ans (inclus) ⇔ Population d'âge moyen ;
 - A3 : Souscription après 65 ans ⇔ Population senior.
- ✓ Le **montant initial investi**⁵⁵ :
 - M1 : Montant investi strictement inférieur à 4 000 € ;

⁵³ Plan d'épargne retraite populaire : plan d'épargne retraite individuel dont les sommes sont bloquées jusqu'à la retraite et servies sous forme de rente.

⁵⁴ Plan d'épargne retraite entreprise : dispositif d'épargne d'entreprise destiné à la retraite des salariés, à travers l'ouverture d'un compte individuel pour chaque salarié, alimenté par l'entreprise et éventuellement le salarié.

⁵⁵ La variable montant investi plutôt que le montant de PM a été intégrée au découpage des lois de rachat, car elle n'est appliquée qu'aux contrats à prime unique, qui par définition n'autorisent pas de versements libres. Il s'agit de la somme des versements bruts nets de rachats partiels.

- M2 : Montant investi compris entre 4 000 et 21 000 € ;
- M3 : Montant investi supérieur ou égal à 21 000 € ;
- MU : Montant unique, pour tous les contrats autres que les PU.

Au total, cinquante lois de rachat sont ainsi constituées, dont un aperçu est consultable en annexe (page 152).

N.B. : Il est important de préciser qu'une étude antérieure sur les produits VL-MP a conclu à la dépendance des variables relatives à l'âge à la souscription et au montant investi. La difficulté dans l'utilisation de la variable « montant investi », pour tout ce qui concerne la détermination des lois de rachat, est qu'elle est à la fois une variable discriminante dans le comportement de rachat, mais elle peut également être interprétée comme la conséquence à l'instant t d'une durée de vie du contrat plus longue. Le montant investi dans un contrat d'assurance vie influence significativement le comportement de rachat de l'assuré. Nous avons ainsi constaté que les contrats à faible montant investi ont tendance à être rachetés plus tôt, tandis que les contrats à investissement très élevé sont rachetés plus tardivement. Toutefois, le montant investi étant fortement corrélé positivement avec l'âge de l'assuré⁵⁶, son intégration dans le découpage est en partie prise en compte.

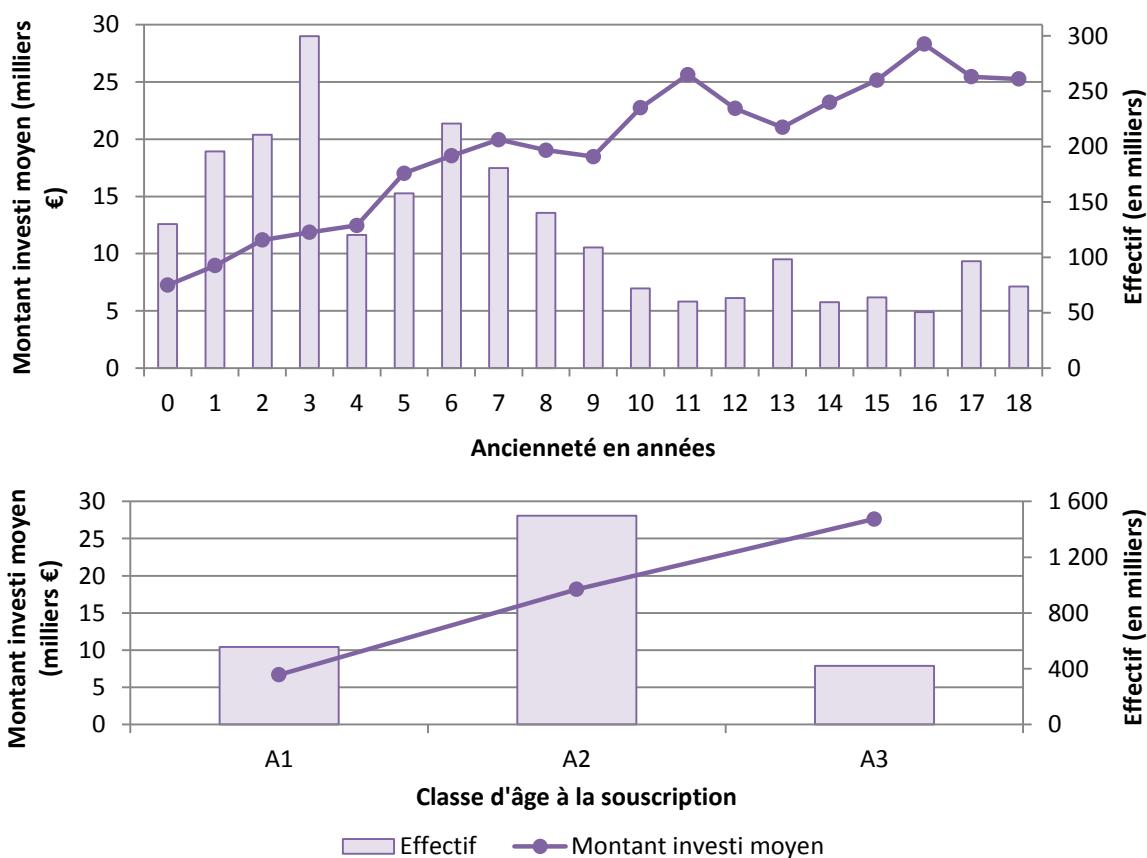


Fig. 20 : Montant investi moyen par ancienneté puis par âge à la souscription, pour les contrats VL-MP

⁵⁶ Les assurés les plus jeunes investissent des sommes généralement faibles, à l'inverse des assurés plus âgés.

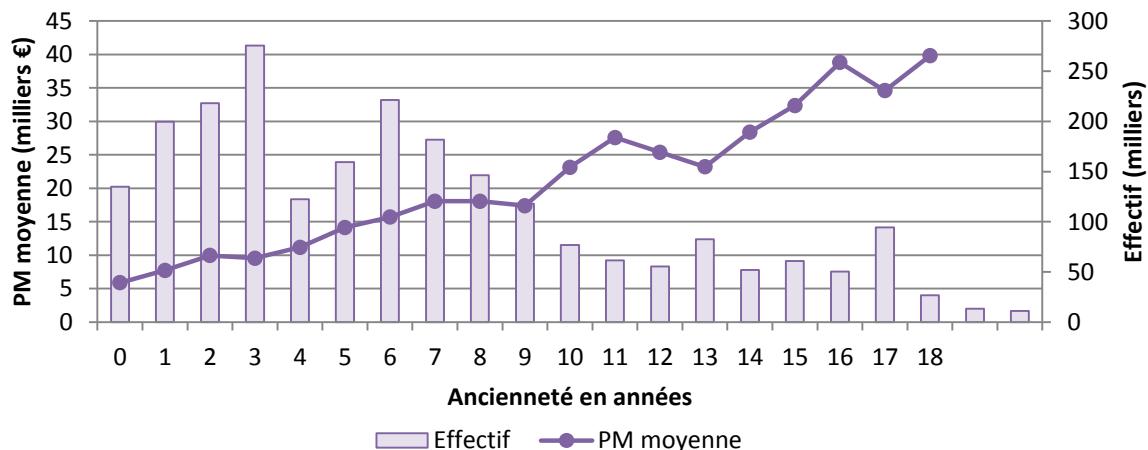


Fig. 20 bis : PM moyenne par ancienneté, pour les contrats VL-MP

Le tableau suivant reprend les variables explicatives retenues pour le découpage, selon le type de produit considéré. Il relève également les particularités majeures des produits.

Produit	Fiscalité	Âge souscription	Montant investi	Particularités
CAPI	✓ Sauts fiscaux variables selon la génération de commercialisation	✗ Cf. Anonymat des bons au porteur	✗	Run off ↔ Peu de volume
Autres types de contrats	✗	✗	✗	Rachat anticipé impossible ⁵⁷
PU	✓	✓	✓	Run off ↔ Peu de volume
VL-MP	✓	✓	✗	Volumes élevés
Viager	✓	✗ Cf. Évolutif par définition		Taux contractuel particulièrement attractif

✓ Critère adopté / ✗ Critère non pris en compte

Fig. 21 : Sélection des variables explicatives par type de produit

En considérant les seules caractéristiques du portefeuille, nous pouvons d'ores et déjà dresser le constat que le découpage selon la fiscalité ne se justifie plus :

- ✓ Seuls quelques contrats souscrits avant 1983 subsistent en portefeuille ;
- ✓ L'ancienneté des contrats souscrits entre 1982 et 1990 excède à présent les vingt ans et leur comportement est similaire à celui des contrats souscrits depuis 1990.

⁵⁷ Sauf exceptions mentionnées à l'article L132-23 du Code des Assurances.

2.1.2 Tests de significativité

En particulier, la construction d'un modèle d'ajustement des données à différentes distributions de probabilité (fonction de Weibull, fonction exponentielle, etc.), peut nous indiquer le degré de significativité des variables exogènes précédentes (conservées en l'état) sur le phénomène de rachat.

La « PROC LIFEREG » de SAS® permet justement d'estimer des modèles de durée en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance et l'algorithme de résolution numérique de Newton-Raphson pour maximiser la log-vraisemblance.⁵⁸ L'estimateur du maximum de vraisemblance étant à la fois asymptotiquement convergent et normal et de loi asymptotique connue, il est de plus possible de réaliser des tests asymptotiques de spécification sur les paramètres estimés, parmi lesquels :

- ✓ **Le test du rapport de vraisemblance** ;
- ✓ **Le test de Wald** ;
- ✓ **Le test du score**.

N.B. : L'interprétation statistique des trois tests précédents est similaire. Nous pouvons à ce titre les considérer comme équivalentes et choisissons de ne présenter que le test de Wald.

Hypothèses :

$$[H_0] : f(\theta) = 0 \Leftrightarrow \text{La variable n'est pas significative} ;$$

Contre

$$[H_1] : f(\theta) \neq 0 \Leftrightarrow \text{La variable est significative.}$$

Où :

- f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^r ;
- $\hat{\theta}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance ;
- r est le nombre de variables explicatives ;
- Le vecteur $f(\theta)$ est de dimension r et l'on suppose que la matrice $\frac{\partial^t f}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial \theta_i} \right)$, de dimension (p, r) , est de rang r .

Test de Wald :

La statistique de test est la suivante :

$$T_W = n * f'(\hat{\theta}) \left[\frac{\partial f(\hat{\theta})}{\partial^t \theta} I(\hat{\theta})^{-1} \frac{\partial f'(\hat{\theta})}{\partial \theta} \right]^{-1} f(\hat{\theta})$$

$$T_W \xrightarrow{\text{sous } H_0} \chi^2_r$$

Où $I(\hat{\theta})^{-1}$ est l'inverse de la matrice d'information de Fisher.

⁵⁸ La PROC LIFEREG a pour avantage d'être adaptée aux données censurées, contrairement à la « PROC LOGISTIC » utilisée initialement et qu'on ne retient donc pas.

Région critique :

La statistique de test précédente doit être comparée à la loi du Khi-deux à r degrés de liberté, déterminée pour un niveau de confiance asymptotique α , tel que :

$$\mathcal{W} = \{T_{\mathcal{W}} > q_r(1 - \alpha)\}$$

Où $q_r(y)$ est le quantile d'ordre y d'une loi de Khi-deux à r degrés de liberté.

La p -value découle directement de la région critique, telle que :

$$p\text{-value} = \mathbb{P}(\chi^2_{1-\alpha}(r) > T_{\mathcal{W}})$$

Règle de décision :

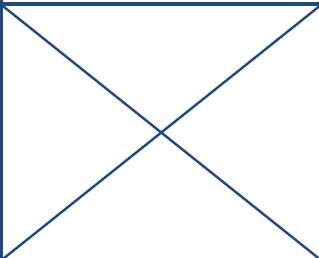
- ✓ Si $p\text{-value} < \alpha$: on peut rejeter H_0 au seuil α . En d'autres termes, la variable est significativement différente de zéro au seuil α .

2.1.3 Conclusions

Pour les produits PU et VL-MP et sur la période récente allant de 2007 à 2012, nous testons successivement l'ajustement du nombre de rachats totaux aux trois modèles suivants :

- ✓ Distribution log-normale ;
- ✓ Distribution de Weibull ;
- ✓ Distribution exponentielle.

Les résultats⁵⁹ et leurs conclusions sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Distribution	Fiscalité	Âge souscription	Montant investi
PU	Log-normale	$p\text{-value } F2 < 0.0001$	$p\text{-value} < 0.0001$	$p\text{-value } M2 = 0.3544$
	Weibull	$p\text{-value } F2 < 0.0001$	$p\text{-value} < 0.0001$	$p\text{-value } M2 = 0.0462$
	Exponentielle	$p\text{-value } F2 < 0.0001$	$p\text{-value} < 0.0001$	$p\text{-value } M2 = 0.4653$
	Conclusion	✗	✓	✗
VL-MP	Log-normale	$p\text{-value } F2 = 0.0163$	$p\text{-value} < 0.0001$	
	Weibull	$p\text{-value } F2 = 0.0262$	$p\text{-value} < 0.0001$	
	Exponentielle	$p\text{-value } F2 = 0.0516$	$p\text{-value} < 0.0001$	
	Conclusion	✗	✓	

✓ Maintien du critère / ✗ Abandon du critère

Fig. 22 : Résultats et conclusions du test de Wald 1 – produits PU et VL-MP

⁵⁹ Il s'agit en l'occurrence des résultats du test de Wald pour un niveau de confiance fixé à $\alpha = 5\%$.

Malgré la significativité de la variable « fiscalité » sur les rachats de la branche PU, nous décidons d'abandonner ce critère pour les deux raisons énoncées plus haut.

La variable « Montant investi » relative à la branche PU est également abandonnée, car le regroupement de la modalité intermédiaire « M2 » avec les modalités inférieure et supérieure ne fournit pas de résultats plus concluants.

Seule la variable « Âge souscription » est finalement conservée, quel que soit le produit considéré, PU ou VL-MP.

2.2 Redéfinition du découpage

Notre objectif est d'aboutir à un nombre plus restreint de lois, l'ancien découpage n'étant plus adapté à la situation actuelle du portefeuille :

- Nous assistons au vieillissement des produits à prime unique, qui ne sont plus commercialisés depuis plusieurs années et dont les volumes sont plutôt faibles ;
- La génération fiscale n'a plus d'influence sur le comportement de rachat du portefeuille actuel et à venir ;
- Les produits présentant des taux garantis viagers devraient être pris en compte séparément et différemment des autres produits, en raison de leur caractère particulièrement attractif. Le taux minimum garanti sans limitation de durée qu'ils offrent à leurs détenteurs dissuade généralement le rachat. Précisons toutefois qu'ils ne représentent qu'une faible part des engagements ;
- Les bons de capitalisation ne justifient pas plus d'une loi car ils sont en *run off* et peuvent seulement être prorogés au-delà de leur terme à huit ans, sans bénéficier d'intérêts.

2.2.1 Actualisation des classes d'âge à la souscription

Les tests de significativité réalisés précédemment ont unanimement confirmé la pertinence du découpage de la variable d'âge à la souscription en trois classes ($p\text{-value} < 0.0001$) au seuil de 95 %.

2.2.2 Introduction de nouvelles variables explicatives

a) *Variables candidates*

Outre les variables explicatives du rachat structurel, qui étaient utilisées dans le découpage actuel, d'autres variables sont susceptibles d'affiner le découpage des lois de rachat en

classes homogènes. Le recensement des ces variables disponibles dans nos fichiers et « potentiellement » explicatives, mais pas forcément significatives, est le suivant :

- ✓ La catégorie socio-professionnelle du souscripteur ;
- ✓ La situation familiale du souscripteur (marié, célibataire, etc.) ;
- ✓ Le sexe du souscripteur ;
- ✓ Le réseau de distribution des contrats.

b) Sélection des variables

- ✗ Des informations telles que la catégorie socio-professionnelle et la situation familiale du souscripteur influent certes sur le comportement de rachat, mais sont évolutives dans le temps et reposent de ce fait sur un échange régulier entre l'agence et l'assuré, qui n'est toutefois pas garanti. Ne disposant pas de données suffisamment fiables, il nous est impossible de poursuivre l'étude de leur significativité ;
- ✗ Le sexe du souscripteur n'est pas un critère pertinent de découpage dans le cas des rachats. Cette intuition est confirmée par la PROC LIFEREG et le test de Wald notamment, dont la *p-value* est bien supérieur au niveau de confiance fixé à 5 % ;
- ✓ L'intégration du réseau de distribution peut en revanche constituer une plus-value dans notre estimation des lois de rachat. Cette variable possède en effet un certain impact sur les rachats structurels. Rappelons que le Groupe CM-CIC commercialise la grande majorité de ses produits via deux réseaux, comme son nom l'indique : le CIC (R1) et le Crédit Mutuel (R2). Leurs histoires et leurs logiques commerciales propres conditionnent un certain type de clientèle, plus âgée et aisée au CIC qu'au CM, impactant très certainement le comportement de rachat. Les deux réseaux possèdent une gamme commune de contrats développée depuis leur fusion en 1998.

L'intérêt de cette dernière variable pour le nouveau découpage peut être justifié à l'aide de la PROC LIFEREG, dont les résultats du test de Wald au seuil de 5 % sont présentés ci-après :

	Distribution	Réseau distribution	Âge souscription
PU	Log-normale	<i>p-value</i> R2 = 0,2190	<i>p-value</i> < 0.0001
	Weibull	<i>p-value</i> R2 = 0,4766	<i>p-value</i> < 0.0001
	Exponentielle	<i>p-value</i> R2 = 0,4076	<i>p-value</i> < 0.0001
	Conclusion	✗	✓
VL-MP	Log-normale	<i>p-value</i> < 0.0001	<i>p-value</i> < 0.0001
	Weibull	<i>p-value</i> < 0.0001	<i>p-value</i> < 0.0001
	Exponentielle	<i>p-value</i> < 0.0001	<i>p-value</i> < 0.0001
	Conclusion	✓	✓

✓ Adoption du critère / ✗ Abandon du critère

Fig. 23 : Résultats et conclusions du test de Wald 2 – produits PU et VL-MP

Le réseau de distribution n'apporte aucune amélioration dans l'estimation des taux de rachats de la branche PU, car le réseau CIC y est largement sous-représenté, avec un nombre de contrats très faible.

En revanche, la part informative apportée par le réseau de distribution semble a priori suffisamment significative pour que cette variable soit adoptée dans le découpage des produits VL-MP.

2.2.3 Récapitulatif du découpage final

Le découpage finalement retenu est présenté ci-dessous :

- ✓ Une loi dédiée aux produits de capitalisation ;
- ✓ Une loi dédiée aux produits souscrits à taux garanti à caractère viager ;
- ✓ Trois lois dédiées aux produits PU selon l'âge du souscripteur lors de la conclusion du contrat ;
- ✓ Six lois dédiées aux produits VL-MP selon le réseau de distribution et l'âge du souscripteur lors de la conclusion du contrat.

N.B. : Seules les lois relatives aux produits PU et VL-MP sont présentées dans ce mémoire.

3 Définition du périmètre de l'étude et préparation du fichier initial

3.1 Périmètre de l'étude

3.1.1 Définition des rachats

Nous cherchons à appréhender le comportement de rachat total (i.e. rachat total de l'encours du contrat de l'assuré, mettant fin au contrat). De ce fait, notre analyse ne couvre pas les autres raisons qui peuvent conduire à la clôture du contrat d'épargne, à savoir :

- Le décès du souscripteur ;
- Le transfert Fourgous du contrat⁶⁰ ;
- L'arrivée à échéance du contrat.

⁶⁰Depuis fin 2005, le transfert Fourgous permet aux détenteurs de contrats mono support en euros de transférer leur épargne vers des contrats multi-supports (dans la limite d'un investissement minimal de 20 % en unités de compte et au sein de la même compagnie d'assurance). L'intérêt de cette opération est de bénéficier de rendements éventuellement supérieurs à ceux des contrats euros, tout en conservant l'antériorité fiscale associée au contrat d'origine.

Nous excluons du champ des rachats les transferts Fourgous, de même que les arrivées au terme de contrats, dont les comportements ne sont pas du tout comparables à celui des rachats. De plus, nous ne tenons pas compte des arbitrages, car nous n'avons pas accès à cette information.

En outre, la répartition des différentes causes de sortie depuis 2007 confirme la proportion négligeable des transferts Fourgous dans le portefeuille des contrats d'épargne. Seule l'année 2007 témoigne d'un certain intérêt pour cette opération instaurée fin 2005.

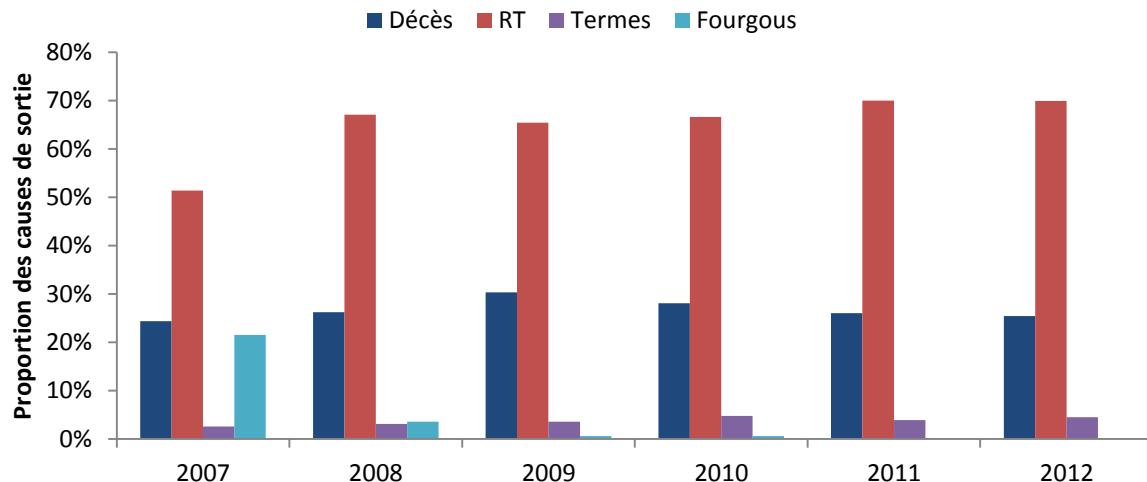


Fig. 24 : Répartition des différentes causes de sortie entre 2007 et 2012

3.1.2 Contrats d'épargne

Les contrats retenus sont ceux appartenant à la sphère « euro » de l'épargne individuelle, segmentés selon leur branche et leur société d'appartenance.

a) *Branches*

L'étude porte sur les contrats rattachés aux trois branches suivantes :

- ✓ Prime unique (PU) ;
- ✓ Versements libres (VL) ;
- ✓ Multi-profil (MP) dont on ne conserve que la part euro.

N.B. : Les bons de capitalisation et les contrats de la branche Capitalisation (CAPI) en général sont provisoirement exclus du champ d'étude.

b) *Sociétés*

Les contrats étudiés sont sélectionnés parmi les portefeuilles des sociétés d'assurance vie du GACM, à savoir :

- ✓ ACM Vie SA ;

- ✓ ACM Vie Mutuelle ;
- ✓ Sérénis Vie.

N.B. : Certains contrats sont provisoirement exclus du champ d'étude, à savoir :

- ✗ Les contrats de la société ICM Life, dont l'historique est réduit ;
- ✗ Les produits d'épargne sur mesure (ESM).

3.2 Préparation du fichier initial

3.2.1 Détail de la procédure

Étape préalable à l'estimation des taux bruts de rachats, la préparation du fichier initial est fondamentale et consiste à vérifier la pertinence et la qualité des données utilisées. La procédure suivie⁶¹ est celle préconisée par l'Institut des Actuaires. En voici les grandes lignes :

- Pertinence du choix de la période d'observation ;
- Garantie de la représentativité des données ;
- Connaissance de l'assuré ;
- Vérification de la cohérence des données ;
- Utilisation des variables explicatives.

a) *Période d'observation*

- ✓ La période d'observation est idéalement plutôt « récente, mais pas trop », afin de représenter au mieux les comportements de rachat des assurés et notamment neutraliser d'éventuelles modifications structurelles telles qu'un changement de fiscalité, sans exclure les éventuelles déclarations tardives de sinistres⁶² ;
- ✓ L'intervalle choisi doit de préférence correspondre à un multiple de douze mois ;
- ✓ « Une période d'observation de trois à cinq ans paraît un choix raisonnable ».

Nous décidons de mener deux études successives, suivant deux périodes d'observations différentes :

⁶¹ Telle que recommandée dans les « Lignes directrices de la mortalité de la Commission d'Agrément » en 2006, qui fixent la procédure de certification des tables de mortalité d'expérience et que l'on va adapter ici aux rachats.

⁶² Cette dernière constatation se rapporte essentiellement à l'estimation de la mortalité et ne concerne donc pas notre étude sur les rachats, qui peut inclure l'année 2012 sans y intégrer trop de biais

- Conformément à la méthode employée jusqu'à présent, qui utilise l'intégralité de l'historique du portefeuille d'épargne, la première estimation des taux bruts de rachat est réalisée sur la période :

[01/01/1990 – 31/12/2012]

↔ Soit vingt-trois années d'historique.

Cette première étude concerne tous les contrats **souscrits** depuis le 1^{er} janvier 1990, quelle que soit leur situation. La suppression préalable de l'ensemble des contrats souscrits avant cette date présente un double intérêt :

- ✓ L'étude est d'une part exempte de données tronquées à gauche ;
- ✓ Ce point de départ neutralise l'impact éventuel de l'ancienne fiscalité⁶³.

- La seconde estimation des taux bruts de rachat est réalisée sur un intervalle plus restreint :

[01/01/2007 – 31/12/2012]

↔ Soit six années d'historique.

Cette seconde étude a l'avantage de prendre en considération la troisième recommandation et de capter les comportements de rachat les plus récents.

b) Représentativité et cohérence des données

- ✓ Le fichier initial doit être représentatif du portefeuille » pour lequel les lois de rachat seront utilisées. Il faut traiter tous les types de sortie et considérer le cas des données incomplètes.
- ✓ Les variables utilisées pour l'estimation, en particulier les différentes dates qui marquent la vie du contrat (souscription, sortie) doivent être bien renseignées et respecter une certaine chronologie de survenance. Un « nettoyage » doit donc supprimer toutes les données aberrantes du fichier initial ;
- ✓ La proportion de contrats supprimés du champ d'étude doit être indiquée;

c) Variables explicatives

- ✓ Les variables explicatives du comportement de rachat sont un baromètre de l'homogénéité des données et du découpage déterminé. Elles permettent de vérifier à tout moment l'adéquation des lois de rachat au portefeuille auquel elles s'appliquent.

⁶³ L'évolution de la fiscalité en 1989 a en effet reculé la survenue du saut fiscal de 6 à 8 ans. Ainsi, l'année 1990 a donné naissance à une nouvelle « génération fiscale », dont les comportements de rachat sont marqués par un saut fiscal à 8 ans d'ancienneté.

3.2.2 Mise en œuvre

Il y a tout d'abord lieu de préciser que le fichier de travail restitue tous les contrats d'épargne. Nous travaillons ainsi sur la base de données qui sont *a priori* exactes. C'est d'ailleurs tout l'enjeu de la qualité des données, notion fondamentale de la fonction actuarielle. Pour s'en convaincre, des rapprochements statistiques ont été effectués entre le fichier de travail et les données du service de Comptabilité.

Le « fichier initial » est le même pour les deux périodes d'étude. Seuls les contrats anciennement Socapi⁶⁴ sont exclus de la première étude ne tenant pas compte des troncatures à gauche.

a) Caractéristiques du fichier source

La construction de notre fichier initial nécessite une connaissance exacte du contenu et des règles de constitution du fichier source que l'on appelle « DATA ». Il s'agit plus précisément d'une image du portefeuille des contrats d'épargne individuelle et collective à la fin de chaque mois, qui recense ainsi les contrats à prime unique, à versement libre et les contrats multi-profil.

Le fichier DATA restitue les informations sur les contrats en cours ou rachetés dans nos bases de données, dans une certaine limite toutefois. En effet, au moment de la création du fichier :

Sont exclus par le système informatique :

- ✗ Les contrats annulés (quelle que soit leur date d'annulation) ;
- ✗ Les contrats rachetés totalement et dont l'effet excède 20 ans.

Sont restitués :

- ✓ Tous les autres contrats, ni rachetés, ni annulés, sans qu'il n'y ait aucune sélection de date pour leur inclusion.

N.B. : Un traitement d'archivage en 2011 a modifié le périmètre habituel de ce fichier, supprimant des bases tous les rachats à effet antérieur au 1^{er} janvier 2003 (sauf ceux éventuellement saisis à partir de 2011).

Ainsi, si nous intégrons ce traitement d'archivage, le fichier DATA constitué au 30/05/2013 comprend en fait :

- ✓ Tous les contrats rachetés totalement depuis le 01/01/2003 ;

⁶⁴ Cette filiale d'assurance vie du CIC a intégré les ACM et a doublé la taille de leur branche assurance vie fin 2001. L'absence d'information dans nos fichiers sur les rachats antérieurs à 2001 nous conduit à traiter ces contrats séparément.

- ✓ Les contrats rachetés totalement et dont la date de saisie est postérieure à l'archivage, quelle que soit leur date d'effet ;
- ✓ Tous les contrats encore en cours à cette date, quelle que soit leur date de souscription.

b) Construction du fichier initial

1) Concaténation des fichiers DATA_2009 et DATA_2013

L'objectif est de reconstituer un fichier initial qui efface les effets de l'archivage de 2011. Il s'agit plus particulièrement de réintégrer dans le fichier DATA_2013⁶⁵ tous les rachats totaux antérieurs à 2003, qui ont été purgés en 2011.

Le fichier DATA_2009⁶⁶ nous permet d'avoir un recul de 20 ans en termes de rachats totaux, ramenant la date de début d'observation au 01/01/1990. En complétant, à l'aide du fichier DATA_2013, par les données disponibles jusqu'au 31/12/2012, le recul obtenu augmente à 23 ans.

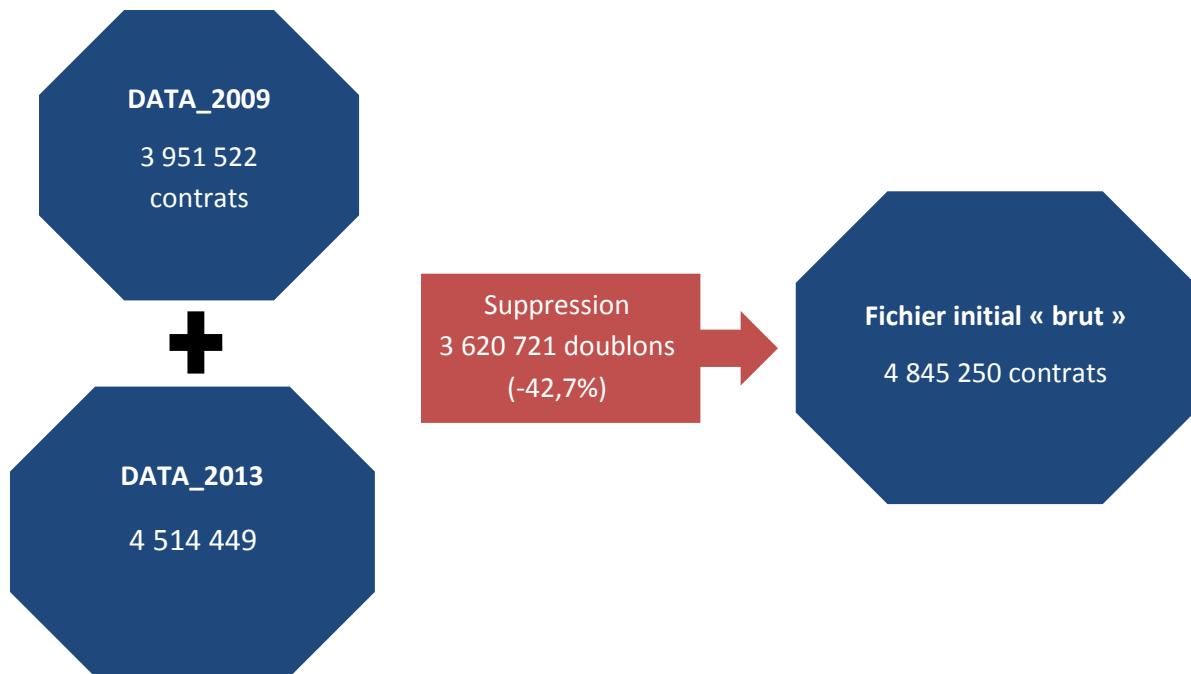
Suite à la concaténation des deux fichiers, réalisée de sorte à supprimer les doublons, nous obtenons un total de 4 845 250 contrats⁶⁷. Nous conservons en l'état les contrats qui apparaissent uniquement dans le DATA_2009 (i.e. les contrats rachetés et archivés en 2011), ceux qui apparaissent uniquement dans le DATA_2013 (i.e. les contrats souscrits depuis le 01/01/2010). Nous conservons également les contrats communs aux deux fichiers, en veillant toutefois à leur appliquer les informations mises à jour du fichier DATA_2013 (i.e. les contrats en cours au 31/12/2009 et/ou rachetés depuis le 01/01/2010).

L'opération de concaténation est schématisée ci-dessous :

⁶⁵ Sauvegardé au 31/05/2013.

⁶⁶ Sauvegardé au 31/12/2009.

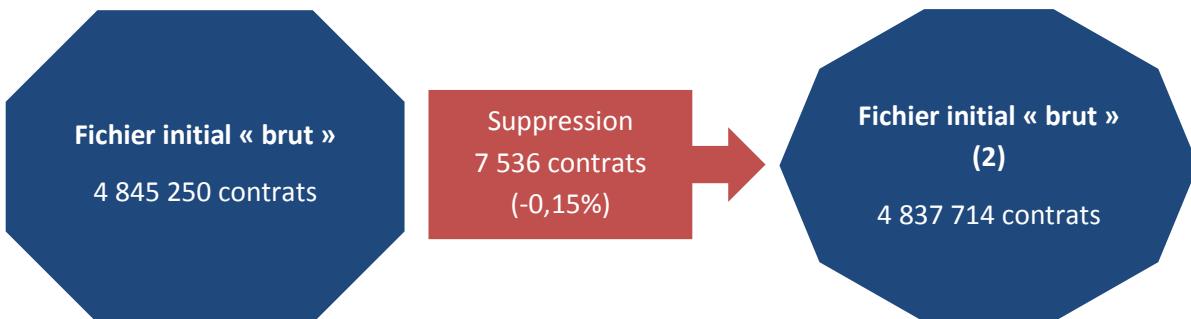
⁶⁷ 3 620 721 doublons ont été supprimés à l'issue de la concaténation.



2) *Nettoyage du fichier initial « brut »*

Suppression des contrats dont la date de naissance est :

- Postérieure à la date de souscription ;
- Manquante.



Suppression des contrats souscrits hors de la période d'observation :

- Souscrits (et/ou sinistrés) avant le 01/01/1990 ;
- Souscrits après le 31/12/2012 ;



Changement de statut des contrats sinistrés après le 31/12/2012 :

Les contrats souscrits au sein de la période d'étude et sinistrés après le 01/01/2013 étaient toujours en cours au 31/12/2012, on leur applique systématiquement une censure à droite à la date de fin d'observation

- ✓ Le contrat ne sera plus renseigné comme étant sinistré, mais en cours (variable « situation du contrat ») ;
- ✓ Au motif du rachat total se substituera un champ vide (variable « motif de la situation ») ;
- ✓ La date de situation du contrat sera remplacée par sa date de souscription (variable « date de situation »), signifiant que le contrat court toujours.



Traitement	Fichier	Variation		
		Nombre contrats	%	% cumulé
Suppression doublons	Concaténation des deux fichiers source	- 3 620 721	- 42,7	-
Suppression dates de naissance mal renseignées	Fichier initial « brut »	- 7 536	- 0,15	- 0,15
Suppression contrats souscrits hors période d'observation	Fichier initial « brut »	- 524 286	- 10,8	- 10,95
Censure sinistres post. date d'observation	Fichier initial « brut »	-	-	- 10,95

Fig. 25 : Variation du volume de contrats après chaque traitement dans la construction du fichier initial

Vérification du périmètre obtenu :

- ✓ Intervalle de souscription : [01/01/1990 ; 31/12/2012] ;
- ✓ Intervalle de « situation du contrat » : [01/01/1990 ; 31/12/2012] ;
- ✓ Vérification qu'une société et une branche soient attribuées à chaque contrat.

Après la suppression des contrats autrefois rattachés à la société Socapi, le nombre de contrats du portefeuille d'étude sur la période du 01/01/1990 au 31/12/2012 est ramené à 3 679 936.

4 Les modèles de durée

4.1 Sélection de la méthode

Les phénomènes de durée peuvent être modélisés selon deux méthodes différentes :

- **Les modèles de durée** ;
- **Les modèles de régression multiple**.

Alors que la première méthode détermine la probabilité de survenance d'un événement par la seule indication des durées écoulées avant la réalisation de cet événement, la seconde permet l'intégration de variables explicatives dans l'étude de cette fonction temporelle.

Dans ce mémoire, nous nous focalisons sur les modèles de durée à proprement parler, nous permettant d'étudier tour à tour :

- la durée de détention d'un contrat avant son rachat
 \Leftrightarrow Relation entre l'ancienneté du contrat et sa probabilité de rachat ;
- la durée de vie « classique » d'un individu
 \Leftrightarrow Relation entre l'âge de l'individu et sa probabilité de décès.

Ce choix de méthode est fondé sur les trois points suivants :

- ✓ Les variables explicatives sont déjà captées dans le découpage homogène des lois de rachat ;
- ✓ Nous souhaitons prendre en compte le fait que certaines durées soient censurées :
 - les exclure ne serait envisageable que dans l'éventualité où elles soient peu fréquentes ;
 - les remplacer par la plus grande durée observée entraînerait une sous-estimation probable de la vraie durée, celle qui aurait été observée en cas d'intervalle d'observation infini ;
- ✓ Nous pourrions envisager de remplacer la variable de durée, continue ou discrétisée selon un pas temporel à valeurs dans \mathbb{N} , par une variable à caractère dichotomique, valant 1 en cas de réalisation de l'événement dans l'intervalle d'observation considéré, 0 sinon. Cette substitution permettrait alors l'application d'un modèle binaire de type « Logit ». Mais on préfère éviter la fixation arbitraire d'une date limite et l'attribution sur un large intervalle d'une valeur identique à la variable dépendante, qui engendrerait une perte d'information précieuse.

4.2 Caractéristiques des modèles de durée

Les modèles de durée portent sur l'étude d'une probabilité conditionnelle dépendante du temps écoulé : le **taux de hasard** ou encore **taux de survie**. Il s'agit plus précisément de la probabilité de réalisation d'un événement déterminé, qui achève une période durant laquelle il n'a pas encore eu lieu.

La mise en œuvre d'un modèle de durée requiert donc de disposer précisément des dates de survenance de l'événement étudié, qui sont assimilables à une « *rupture* ».

4.2.1 Méthodes paramétriques, semi-paramétriques et non paramétriques

Différents modèles statistiques permettent l'estimation des données de durée. Ils sont regroupés suivant trois grandes catégories :

- Les **méthodes paramétriques** s'appuient sur des distributions particulières (exponentielle, log-normale, Weibull, etc). Le choix du modèle détermine la forme de la fonction de hasard. Le modèle de Makeham est un exemple de modèle paramétrique courant dans l'étude de la mortalité ;
- Les **méthodes non paramétriques** ont pour spécificité de ne faire aucune hypothèse particulière, ni sur l'allure du taux de rupture, ni sur celle de la distribution des durées ;
- Intermédiaires aux modèles paramétriques et non paramétriques, les **méthodes semi-paramétriques** (comme celle définie par Cox⁶⁸) n'imposent aucune distribution particulière pour les durées, mais le rapport des taux de rupture, pour deux individus à un même moment, n'est pas fonction du temps. De tels modèles sont qualifiés de « modèles proportionnels de rupture ».

4.2.2 Les variables de durée

Les temps de survie mesurés à partir d'une origine appropriée possèdent deux caractéristiques essentielles :

- ✓ Ils sont positifs et tels qu'une hypothèse de normalité n'est généralement pas raisonnable en raison d'une asymétrie prononcée ;
- ✓ Certains individus ne sont pas observés totalement et/ou l'événement étudié ne se produit pas pendant la période d'observation.

Ces deux particularités sont explicitées ci-après.

⁶⁸ COX D. R. [1972], «Regression models and life tables» *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 34, N°2, pp. 187-220.

a) Rappels sur les variables de durée : notations et formules principales

- Nous considérons la variable aléatoire de durée de vie d'un individu à la naissance, $X \in \mathbb{R}^+$, continue sauf mention contraire ;
- Les âges x représentent les valeurs prises par X dans \mathbb{R}^+ (ou \mathbb{N} dans un contexte discret).

Selon que nous étudions les événements « décès de souscripteur » ou « rachat de contrat d'épargne », le point d'origine $x = 0$ correspond respectivement à la date de naissance de l'individu ou la date de souscription du contrat. Pour information, le tableau suivant récapitule les équivalences dans l'étude de la survie entre un individu et un contrat d'épargne.

Durée étudiée X	Événement étudié	Individu concerné	Origine $x = 0$
Probabilité de décès à l'âge x	Décès	Souscripteur	Date de naissance
Probabilité de rachat à l'ancienneté x	Rachat	Contrat d'épargne	Date de souscription

- Soit $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ la fonction de répartition des probabilités de mortalité ;

Nous n'étudions plus la fonction de répartition, mais les fonctions de survie et de hasard :

- La probabilité complémentaire de la fonction de répartition représente la **fonction de survie** notée $S(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$;

Étant donné qu'on approxime la loi de probabilité par une fonction continue, nous déterminons une fonction de densité notée $f(x)$ en dérivant $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = -\frac{d}{dx} S(x)$$

- Le taux de hasard ou **taux instantané de mortalité** est une probabilité conditionnelle. C'est en effet la probabilité de décéder dans l'instant, sachant que l'individu était en vie jusqu'à présent :

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} S(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} \ln S(x)$$

La période observée étant infiniment courte, il s'agit de la limite du taux moyen de mortalité entre les instants x et x' lorsque $(x - x')$ tend vers 0. Inversement, nous retrouvons la fonction de survie à partir du taux instantané de mortalité :

$$S(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu(t) dt\right)$$

- $t p_x$: probabilité pour un individu d'âge x de rester en vie pendant t années ;
- $t q_x$: probabilité pour un individu d'âge x de décéder dans les t prochaines années.

Par définition, nous avons : $t p_x + t q_x \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Dans l'optique de détermination des taux annuels bruts de mortalité à l'âge entier x , nous nous intéressons plus particulièrement à la probabilité de décéder sur l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$ sachant que l'individu a x an(s) :

- q_x est la probabilité pour un survivant à l'âge x de décéder dans l'année. C'est aussi la probabilité complémentaire à p_x , la probabilité pour un individu d'âge x de rester en vie l'année qui suit.

$$\text{En fait } q_x = {}_1 q_x = \mathbb{P}(X \leq x + 1 | X > x) = \mathbb{P}(X_x \leq 1 | X_x > 0) = \mathbb{P}_x(X_x \leq 1)$$

Où :

- $X_x = X - x$ est la durée de survie résiduelle d'un individu d'âge x (pour $X > x$) ; et
- $\mathbb{P}_x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | X > x)$

D'après la **formule de Bayes (B)**, on a :

$$\begin{aligned} q_x \stackrel{(B)}{=} & \frac{\mathbb{P}(X \leq x + 1; X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} \\ & = \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + 1)}{\mathbb{P}(X > x)} \\ & = \frac{F(x + 1) - F(x)}{S(x)} \\ & = 1 - \frac{S(x + 1)}{S(x)} \\ \Leftrightarrow q_x & = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \end{aligned}$$

Où :

- l_x est le nombre de personnes vivantes d'âge x , initialisé à $l_0 = 100\ 000$;
- d_x est le nombre de personnes décédées à l'âge x .

Nous avons la relation suivante : $l_{x+1} = l_x - d_x$

Le passage des taux bruts de mortalité \hat{q}_x au taux instantané de mortalité μ_x se fait à partir d'une hypothèse sur la répartition des décès dans l'année. Dans l'hypothèse de constance du taux instantané de mortalité, l'estimateur obtenu est le suivant :

$$\mu_x = -\ln(1 - \hat{q}_x)$$

b) Données incomplètes : censures et troncatures affectant notre fichier initial

Il semblerait à première vue idéal de réaliser l'étude sur une période « infinie », afin d'éviter les censures à droite ou les troncatures à gauche, sources de déperdition d'information. Une telle situation, si tant est qu'elle soit possible, serait néanmoins à double tranchant, car elle aurait tendance à noyer l'information la plus récente et donc la plus pertinente, en accordant trop d'importance aux comportements anciens.

Pour faire au mieux, les lois de rachat doivent être mises à jour régulièrement et sur la base des historiques les plus récents et les plus représentatifs de la situation actuelle du portefeuille, en veillant donc à utiliser des méthodes adaptées aux données incomplètes.

Notre variable d'intérêt est la **durée de détention du contrat** (ancienneté au moment du rachat) (X), l'événement d'intérêt étant le **rachat total** du contrat (R).

Dans notre étude sur les rachats, nous avons choisi de suivre les contrats sur deux périodes, allant soit :

- ✓ Du 01/01/1990 au 31/12/2012 ;
- ✓ Du 01/01/2007 au 31/12/2012.

Afin de ne pas introduire de biais dans l'estimation de nos taux de rachats, il est essentiel de tenir compte du fait que certains contrats ne soient observés qu'à partir d'une certaine ancienneté et il faut également formaliser le fait que certains contrats soient toujours en cours à la fin de la période d'observation.

1) Définition du phénomène de troncature à gauche

Un contrat souscrit avant le début de l'étude n'intègre l'échantillon qu'à partir d'une certaine ancienneté et correspond à ce qui est couramment appelé une observation « tronquée à gauche ». Seuls pourront être observés :

- ✓ Les contrats souscrits depuis le début de la période d'observation ;
- ✓ Les contrats souscrits avant, mais non encore rachetés.

La troncature à gauche peut être formalisée de la façon suivante :

Soit T une variable aléatoire indépendante de X (notre variable d'intérêt). Nous disons qu'il y a troncature à gauche lorsque X n'est observable que si $X > T$.

⇒ Nous observons alors le couple (X, T) , avec $X > T$.

2) Définition du phénomène de censure à droite

Si le contrat a été souscrit après le début de la période d'observation, nous ne lui appliquons pas de troncature à gauche. Pour autant, cela ne signifie pas que l'observation soit complète.

Considérons à présent la **borne supérieure de notre fenêtre d'observation** et ce qu'il s'y passe après, afin de détecter une éventuelle perte d'information :

- Un contrat non racheté avant la fin de l'étude est une observation « censurée à droite ». La seule certitude est que sa durée de vie sera supérieure à sa valeur connue à la fin de l'étude ;
- Certaines durées de contrats ne sont que partiellement observées, en raison de la sortie prématurée de l'individu de l'étude. Les contrats sortis pour une autre cause que le rachat sont donc « censurés à droite ».

Ne pas prendre en compte les données censurées reviendrait à sous-estimer fortement l'espérance de durée de détention réelle.

La censure à droite peut être formalisée de la sorte :

A la fin de la durée d'observation, si le contrat n'a pas connu l'événement d'intérêt, son délai d'apparition de l'événement « rachat » est dit censuré à droite et sa durée d'observation constitue le délai de censure C . Ici, ce délai de censure C n'est pas une variable aléatoire indépendante de la variable d'intérêt X , la censure n'est donc pas aléatoire, mais fixée à la date de fin d'observation. Nous associons à chaque contrat un couple de variables aléatoires (Y, \mathbb{I}_c) , relié à la variable X par le modèle suivant :

- $Y = \min(X, C)$
- $\mathbb{I}_c = \begin{cases} 0 & \text{si } X > C \\ 1 & \text{si } X \leq C \end{cases}$

Où \mathbb{I}_c est la variable indicatrice de censure qui vaut :

- 1 si la variable d'intérêt X est observée (i.e. en cas de rachat dans la fenêtre d'observation) et l'observation est dans ce cas dite « non censurée » ;
- 0 si c'est la variable de censure C qui est observée et l'observation est alors dite « censurée à droite ».

Le phénomène de troncature est très différent de celui de la censure :

- Dans le cas de la censure, nous avons connaissance du fait qu'il existe une information, mais nous ignorons sa valeur exacte, nous savons seulement qu'elle dépasse un certain seuil ;
- Dans le cas de la troncature, nous n'avons pas cette information.

Les schémas suivants répertorient les différentes configurations possibles en termes d'observation des individus :

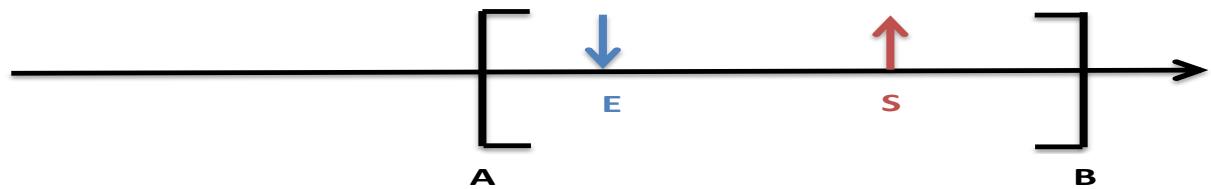
A = début de la fenêtre d'observation ;

B = fin de la fenêtre d'observation ;

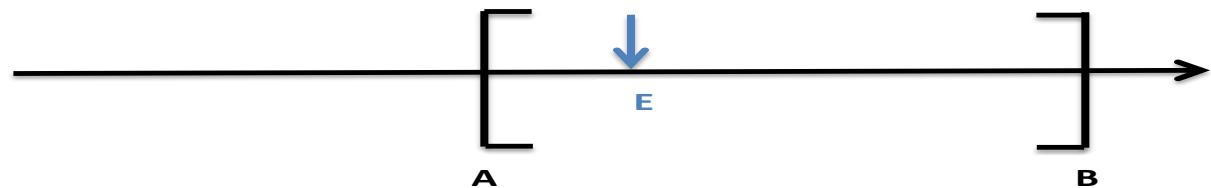
E = entrée de l'individu \Leftrightarrow date de souscription du contrat ;

S = sortie de l'individu \Leftrightarrow date de rachat du contrat.

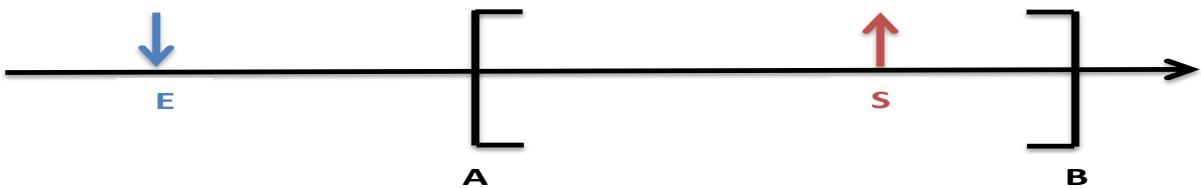
Configuration 1 : Donnée complète



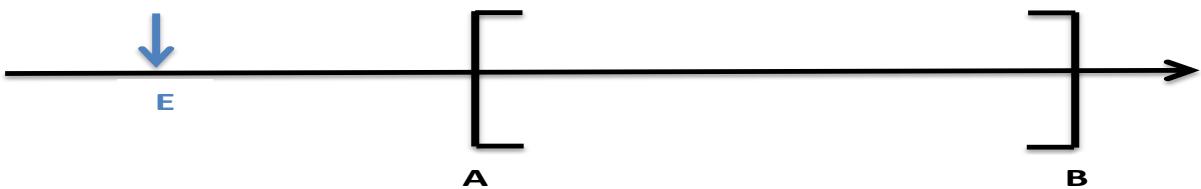
Configuration 2 : Donnée censurée à droite



Configuration 3 : Donnée tronquée à gauche



Configuration 4 : Donnée censurée à droite et tronquée à gauche



Configuration 5 : Donnée non observée (également valable lorsque l'individu entre et sort après la fin de la période d'observation)

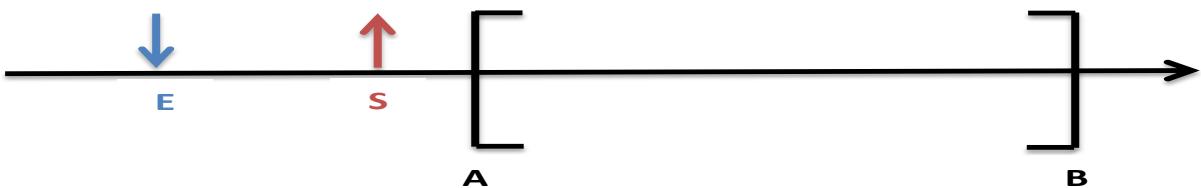


Fig. 26 : Données incomplètes et différentes configurations possibles en termes d'observation des individus

La fenêtre d'observation $[A ; B]$ est-elle-même subdivisée en plusieurs intervalles temporels d'estimation des lois. Ainsi, une même donnée observée est utilisée à chaque fois qu'elle entre dans un nouveau sous-intervalle, mais les phénomènes de censure et troncature n'interviennent potentiellement qu'à une seule reprise pour le sous-intervalle correspondant. Une illustration sera développée plus en détail par la suite (cf. partie « Notations et définitions nécessaires à l'estimation des taux annuels bruts de rachat » en page 82).

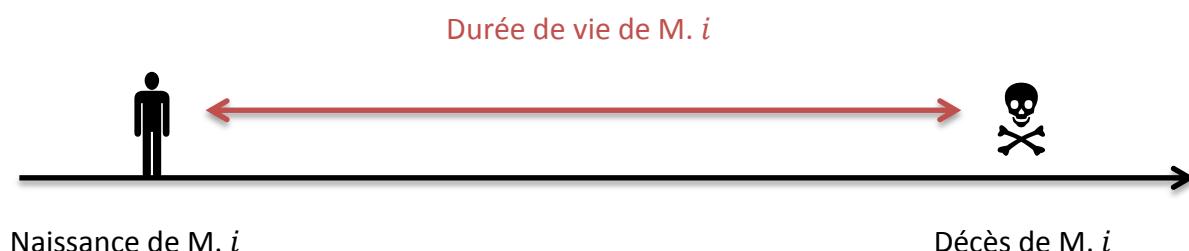
5 Estimation des taux bruts de rachat « en nombre »

Les modèles de durée étaient à l'origine appliqués aux phénomènes de mortalité, mais sont tout aussi appropriés à l'estimation d'autres phénomènes assurantiels, tels que les rachats de contrats d'épargne.

Nous adapterons donc la méthode de Kaplan-Meier au cas des rachats, en dressant un simple parallèle entre les états « décès » et « rachat » :

- ✓ Le rachat peut en effet être assimilé à un décès,
- ✓ dont l'individu concerné est le contrat d'assurance,
- ✓ sa naissance ou origine étant la date d'effet de sa souscription
- ✓ et l'événement étudié n'est plus la survie du souscripteur, mais celle du contrat.

Étude de la mortalité



Étude du rachat



N.B. : Par la suite, les notations et définitions des estimateurs de Kaplan-Meier seront présentées dans le cas particulier des rachats. Leur application à l'estimation des taux bruts de mortalité est identique, à la terminologie près.

5.1 Méthode de Kaplan-Meier

Comme son nom l'indique, l'estimateur de Kaplan-Meier a été établi par Edward L. Kaplan et Paul Meier. Sa première apparition dans la littérature scientifique remonte à juin 1958, dans un article du journal de l'*American Statistical Association*, intitulé « Nonparametric estimation from incomplete observations ».

5.1.1 Intérêt de la méthode

Le choix de l'estimateur de Kaplan-Meier est relativement évident.

- ✓ Appartenant à la famille des **estimateurs non paramétriques** dans la catégorie des **méthodes d'estimation « fréquentistes »**, l'estimateur de Kaplan-Meier est très simple à calculer dans la pratique. Rappelons en effet que les méthodes non paramétriques ne requièrent aucune loi de survie a priori, dont la fonction est estimée directement dans un espace de dimension infinie ;
- ✓ En particulier, il permet d'estimer la fonction de survie uniquement en associant la probabilité de réalisation et le délai de survenance de l'événement étudié ;
- ✓ En assurance, l'estimateur de Kaplan-Meier est un outil de base dans la mesure des taux de chutes (décès, rachats, ...), notamment parce qu'il possède l'avantage incontestable d'être **adapté au cas des données censurées**. C'est pourquoi nous l'utilisons comme base préalable à toute étude sur les durées, guidant ensuite le choix d'une forme paramétrique particulière.

5.1.2 Principe

La méthode de Kaplan-Meier a été développée à partir du principe très intuitif d'**être en vie juste avant un instant t et de ne pas décéder à l'instant t** . La probabilité d'avoir survécu à un instant donné se calcule ainsi conditionnellement au fait d'être en vie juste avant cet instant. L'estimateur de Kaplan-Meier et l'estimateur actuariel (utilisé précédemment dans l'analyse descriptive du portefeuille) sont donc construits selon le même principe, à la nuance près que les probabilités du premier sont estimées pour des intervalles temporels déterminés par la survenance d'événements donnés, tandis que le second se base sur des intervalles temporels fixés arbitrairement (généralement le mois, le semestre ou l'année).

La variable de durée n'est dans la pratique pas continue et le temps est généralement mesuré selon un pas mensuel ou annuel. Nous décidons de présenter la version discrétisée de l'estimateur de Kaplan-Meier, car nous n'utiliserons pas sa version continue.

N.B. : *Cette méthode est pertinente dans la mesure où le pas de temps considéré reste « petit » par rapport à la vitesse de variation de la fonction de survie. Nous vérifions donc que la discrétisation opérée ne génère pas de biais trop importants sur l'estimation.*

5.1.3 Formalisation mathématique

a) Cadre général

Un contrat en cours après x périodes temporelles, implique qu'il ait survécu au moins une période, au moins deux, ..., puis au moins x périodes, ce qui se formalise de la façon suivante.

Nous reprenons $S(x)$ comme fonction de survie et X comme durée de vie résiduelle d'un contrat :

$$\begin{aligned} S(x) &= \mathbb{P}(X \geq x) \\ &= \mathbb{P}(X \geq x / X \geq x - 1) * \mathbb{P}(X \geq x - 1) \\ &= \mathbb{P}(X \geq x / X \geq x - 1) * S(x - 1) \\ &= \prod_{i=1}^t \mathbb{P}(X \geq i / X \geq i - 1) \end{aligned}$$

Si nous notons p_x la probabilité conditionnelle que le contrat soit encore en cours à l'instant x sachant qu'il était en cours juste avant, soit $p_x = \mathbb{P}(X \geq x / X \geq x - 1)$, nous pouvons réécrire la fonction de survie sous la forme suivante :

$$S(x) = p_x * p_{x-1} * \dots * p_0$$

L'estimation de la survie $S(x)$ est alors le produit des estimations de p_i , \hat{p}_i , pour $i = 0, \dots, x$, qui sont égales à la proportion observée de contrats ayant survécu à l'instant x , parmi tous les contrats en vie juste avant x . C'est autrement dit la probabilité que le contrat n'ait pas encore été racheté en x :

$$\hat{S}(x) = \hat{p}_x * \hat{p}_{x-1} * \dots * \hat{p}_0$$

↔

$$\hat{S}_{KM}(x) = \prod_{0=x_i \leq x} \hat{p}_{x_i} = \prod_{x_i \leq x} (1 - \hat{q}_{x_i})$$

Où \hat{q}_x estime la probabilité de sortir en x , c'est-à-dire dans l'intervalle d'âge $[x, x + 1]$.

L'estimateur de la fonction de survie, $\hat{S}(x)$, est constant entre deux temps de rachats consécutifs et l'allure de notre fonction de survie est donc comparable à un « escalier » dont les marches sont d'autant plus hautes que le taux de survie décroît.

Considérons un groupe initial de N contrats d'ancienneté x soumis à une même loi de rachat. Nous adoptons les notations suivantes, inspirées de l'ouvrage de F. Planchet et P. Thérond « *Modèles de durée – Applications actuarielles* » :

- x_g : durée globale d'observation de la population ;
- i : indice courant des temps de sortie tel que $i = \{1, 2, \dots, g\}$;

- x_i : instants auxquels des sorties sont observées ;
- n_i : nombre de contrats en cours juste avant x_i (i.e. la population sous risque en x_i) ;
- r_i : nombre de rachats observés à l'instant x_i . Les rachats sont observables dans les intervalles correspondants aux dates successives $0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_g$;

Et avec les relations suivantes : $x_0 = 0$; $r_0 = 0$ et $n_0 = N$.

Les observations sont classées par ordre croissant de leur durée d'observation. Pour tout $i = 1, 2, \dots, g$, on a :

$$n_i = n_{i-1} - r_{i-1}$$

Si toutes les observations sont complètes et qu'aucune sortie imprévue n'est possible, l'estimation de la probabilité de rachat s'apparente à un modèle binomial classique : entre x_i et x_{i+1} , nous enregistrons r_i rachats suivant une Binomiale de paramètres n_i et q_i , dont la fonction de vraisemblance sur l'ensemble de la population N s'obtient par le produit des vraisemblances de chaque observation :

$$\mathcal{L} = \prod_{i=0}^{g-1} \binom{n_i}{r_i} * q_i^{r_i} * (1 - q_i)^{n_i - r_i}$$

La log-vraisemblance vaut alors :

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L} &= \log \left\{ \prod_{i=0}^{g-1} \binom{n_i}{r_i} * q_i^{r_i} * (1 - q_i)^{n_i - r_i} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{g-1} \log \left\{ \binom{n_i}{r_i} * q_i^{r_i} * (1 - q_i)^{n_i - r_i} \right\} \\ &= \sum_{i=0}^{g-1} \left[\log \binom{n_i}{r_i} + r_i \log q_i + (n_i - r_i) \log(1 - q_i) \right] \end{aligned}$$

Nous annulons ensuite la dérivée par rapport à q_i de la log-vraisemblance, afin d'obtenir l'estimateur du maximum de vraisemblance de q_i :

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{r_i}{q_i} - \frac{(n_i - r_i)}{(1 - q_i)} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{(1 - q_i)}{q_i} = \frac{(n_i - r_i)}{r_i}$$

\Leftrightarrow

$$q_i = \frac{r_i}{n_i}$$

□

Nous obtenons enfin la formule usuelle de l'estimateur de Kaplan-Meier, pour $x < x_g$:

$$\hat{S}_{KM}(x) = \prod_{x_i \leq x} \left(1 - \frac{r_i}{n_i}\right)$$

Une fois les fonctions de survie déterminées pour chaque âge x , les taux de sortie associés à chaque âge découlent de la relation suivante :

$$\hat{q}_x = \frac{\hat{S}_{KM}(x) - \hat{S}_{KM}(x+1)}{\hat{S}_{KM}(x)}$$

b) Estimateur de Kaplan-Meier adapté aux données tronquées à gauche et censurées à droite

A chaque période, l'exposition au risque représente la différence entre le nombre de contrats non tronqués et le nombre de contrats censurés pour la période, selon la formule générique suivante :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^{N_x} \mathbb{I}_{\{t_i \leq t\}} - \sum_{i=1}^{N_x} \mathbb{I}_{\{s_i < t\}}$$

Où :

- N_x est le nombre d'individus potentiellement observables sur $[x; x+1[$;
- t_i est la durée non observée au début de l'âge x (si le contrat est entré sous observation à un âge égal à l'âge considéré) ;
- s_i est l'ancienneté du contrat i à sa sortie d'observation sur l'intervalle $[x; x+1[$.

La méthodologie sera amplement développée lors de son application à notre portefeuille (page 82).

N.B. : Dans le cas de données exclusivement censurées à droite, comme c'est le cas pour notre premier échantillon d'étude, la formule appliquée aux données complètes peut être adaptée simplement, en modifiant la détermination de son effectif sous risque.

Nous notons c_i le nombre de contrats censurés entre x_i et x_{i+1} , avec $c_0 = 0$.

Pour tout $i = 1, 2, \dots, g$, la formule de l'effectif sous risque de rachat devient la suivante :

$$n_i = n_{i-1} - r_{i-1} - c_{i-1}$$

⇒ La censure vient donc en déduction de l'effectif sous risque.

c) Propriétés de l'estimateur de Kaplan-Meier⁶⁹

Les propriétés de l'estimateur de Kaplan-Meier sont plutôt avantageuses. Sous condition que les distributions de survie et de censure ne présentent aucune discontinuité commune, il est en effet :

- ✓ Cohérent ;
- ✓ Convergent ;
- ✓ Asymptotiquement sans biais ;
- ✓ Asymptotiquement Normal.

Ces propriétés compensent nettement le fait que cet estimateur soit biaisé positivement.

5.1.4 Application à notre portefeuille

a) Première période d'observation : cas des censures à droite

1) Mise en œuvre

La période d'observation s'étend du 01/01/1990 au 31/12/2012. La constitution de cet intervalle est telle qu'il est exempt de toute troncature à gauche⁷⁰.

La population étudiée est représentée par le portefeuille de contrats en épargne, limités à leur partie euro, pour lequel on définit successivement :

- Les anciennetés de détention de contrat ;
- Les sorties comme les rachats totaux de contrats ;
- Les censures comme les contrats toujours en cours à la fin de la période d'observation et ceux sinistrés pour une autre raison que le rachat total.

Nous adoptons la version discrétisée de l'estimateur de Kaplan-Meier, comptabilisant le nombre de rachats totaux « mois par mois ». L'ancienneté d'un contrat est par conséquent exprimée en mois. Ce degré de précision est suffisant, étant donné que l'on utilise in fine des taux de rachat annuels. La formule de Kaplan-Meier, estimateur « Produit-Limite », consiste alors à multiplier des fonctions de survie mensuelle, pour en retirer l'estimation d'un taux de rachat annuel.

La mise en œuvre de cette estimation est réalisée en deux temps : une première en appliquant directement la méthode de Kaplan-Meier et une seconde à l'aide la procédure dédiée sous SAS®, « PROC LIFETEST ».

Dans les deux cas, le découpage des lois de rachat en groupes homogènes est similaire.

⁶⁹ Énoncées dans l'ouvrage de F. Planchet et P. Thérond, « *Modèles de durée – Applications actuarielles* ».

⁷⁰ Cf. Étape de préparation du fichier initial.

Pour chaque contrat relatif à un découpage particulier, quatre variables sont nécessaires à l'estimation des taux bruts de rachat :

- **Sa date d'effet de souscription** DE_i ;
- **Sa situation**⁷¹ ;
- **Le motif⁷² de la situation** ;
- **La date de situation** DS_i .

A chaque contrat est associée une **date de fin d'observation** DF_i définie comme :

- La date de situation si le contrat a été remboursé, quel qu'en soit le motif ; ou
- La date de fin d'observation⁷³ si le contrat court toujours.

L'ancienneté du contrat résulte alors de la différence entre sa date de fin d'observation et sa date de souscription :

$$X_i = DF_i - DE_i$$

A chaque contrat est également associée une indicatrice de censure valant :

- 1 si la variable d'intérêt X_i est observée (i.e. en cas de rachat dans la fenêtre d'observation) et l'observation est dans ce cas dite « non censurée » ;
- 0 en cas de censure à droite, c'est-à-dire si :
 - $DF_i = B$ et le contrat court toujours ;
 - $DF_i = DS_i$ et le contrat est sinistré pour une autre cause que le rachat total.

2) Résultats

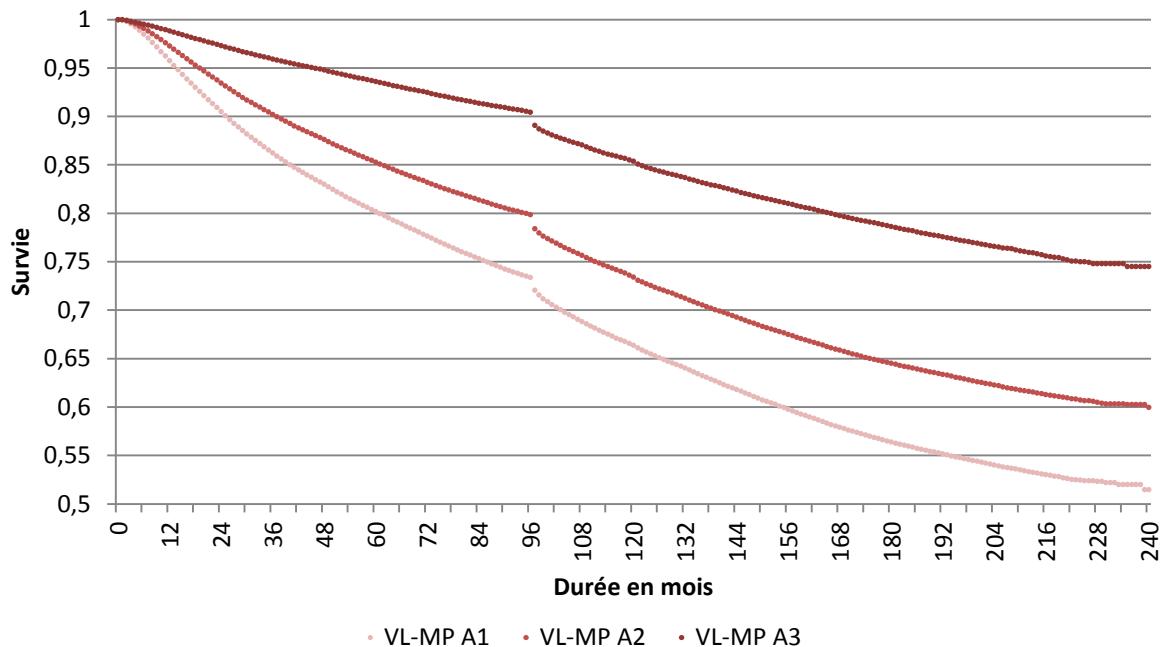
Les lois de survie mensuelles relatives aux branches VL-MP et PU et estimées entre 1990 et 2012 sont présentées ci-dessous, sur une période de vingt années (soit deux cent quarante mois) :

⁷¹ La « situation » du contrat nous indique si ce dernier est remboursé ou s'il court toujours.

⁷² Le « motif » est renseigné en cas de remboursement du contrat, parmi les différentes causes de sortie.

⁷³ La date de fin d'observation est fixée au 31/12/2012.

Lois de survie mensuelles VL-MP (1^{ère} période d'observation)



Lois de survie mensuelles PU (1^{ère} période d'observation)

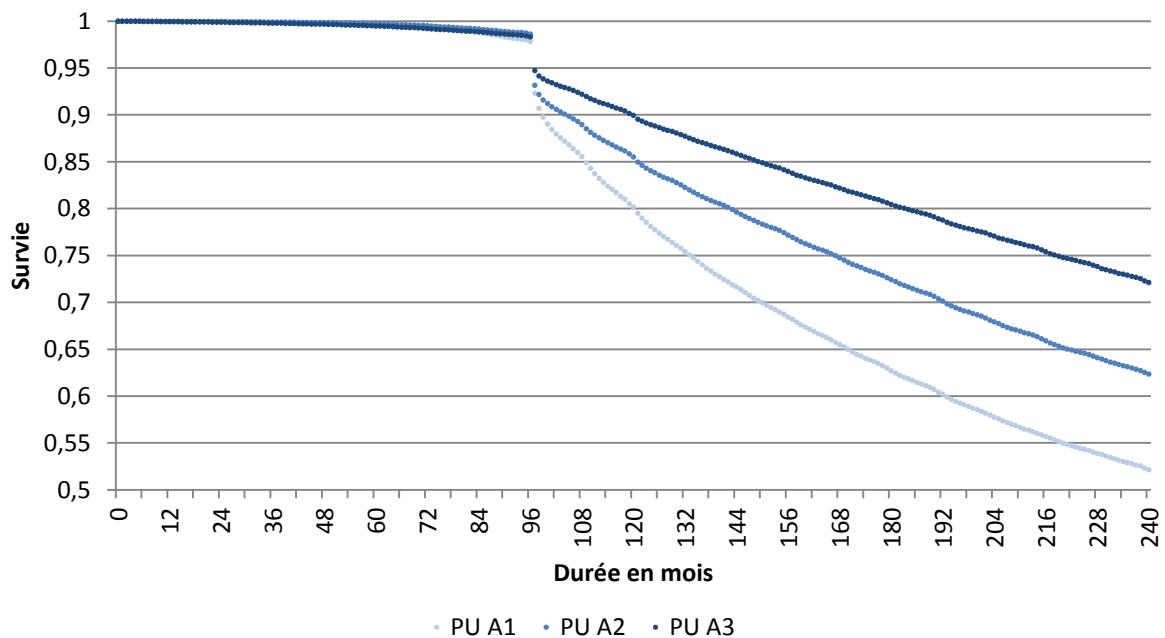


Fig. 27 : Lois de survie mensuelles brutes VL-MP et PU – première période d'observation

- ✓ Nous constatons immédiatement que plus les assurés souscrivent leur contrat à un âge jeune, plus ils le rachètent rapidement et vice versa ;
- ✓ Le saut fiscal est assez net au quatre-vingt sixième mois de détention du contrat, quel que soit l'âge de souscription ;
- ✓ Les contrats à PU sont rachetés massivement à partir du saut fiscal.

b) Seconde période d'observation : cas de données censurées à droite et tronquées à gauche

1) Définition de la fenêtre d'observation

- A est la date calendaire de début d'observation, fixée au 01/01/2007 ;
- B est la date calendaire de fin d'observation, fixée au 31/12/2012 ;
⇒ A et B constituent donc les deux bornes de la fenêtre d'observation.

Les contrats sont dits **potentiellement** observables à leur inclusion sur cette période, car les observations ne sont pas forcément complètes et peuvent être tronquées et/ou censurées.

2) Notations et définitions nécessaires à l'estimation des taux annuels bruts de rachat

La détermination des taux annuels bruts de rachat à l'âge entier x , consiste à calculer le q_x , que nous avons préalablement défini comme la probabilité que le contrat soit racheté sur l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$ sachant qu'il a atteint x année(s) d'ancienneté.

Chaque contrat est ainsi observé sur la plage d'âge $[x; x + 1[$, sans qu'il soit néanmoins forcément observable sur l'intégralité de sa $x + 1^{\text{ème}}$ année de détention.

Populations et contrats

- x correspond à l'âge (en année) du contrat, tel que $x \in \{0, 1, \dots, 20\}$;
- P_x représente la population des individus potentiellement observables sur l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$, c'est-à-dire les individus utiles à l'estimation du taux q_x et qui sont, par définition, vivants à l'âge x ;
- $N_x = \text{Card}(P_x)$ est l'effectif de la population P_x , autrement dit le nombre d'individus potentiellement observables sur $[x; x + 1[$;
- X_i est la variable réponse du modèle. Il s'agit en l'occurrence de la durée de détention (ou âge) du contrat i ;
- i est l'indice du contrat appartenant à la population P_x , tel que $i \in \{1, 2, \dots, N_x\}$.

Hypothèses générales :

$[H_1]$: Sur l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$, tous les rachats éventuels de contrats sont des événements indépendants ;

$[H_2]$: Tous les N_x individus ont la même probabilité d'être rachetés dans leur $x + 1^{\text{ème}}$ année.

Seuls les individus observés vivants sur une partie ou sur l'intégralité de leur $x + 1^{\text{ème}}$ année interviennent dans l'estimation des taux bruts de rachat, à l'exclusion de toute autre observation relative aux âges voisins. Cette estimation « brute » du taux de rachat fera l'objet d'un lissage ultérieur afin de retranscrire les informations relatives à une plage d'âge particulière et non plus celles d'âges isolés.

Les intervalles de sorties (rachats) sont définis comme suit :

$$0 = x < x + 1 < \dots < x + n = +\infty$$

avec τ la largeur de chaque intervalle.

L'adoption d'un pas annuel nous amène à formuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse locale : L'estimation est réalisée par rapport à un intervalle d'âge $[x; x + 1]$, tel que :

$$[h_1] : \tau = (x + 1) - x = 1$$

\Rightarrow La première assertion indique que, dans notre cas, les intervalles sont tous unitaires.

$$[h_2] : B - A > \tau \Leftrightarrow B - A > 1.$$

\Rightarrow La deuxième assertion constraint à définir une période d'observation supérieure à la largeur de l'intervalle $\tau = 1$, ce qui est notre cas avec $B - A = 6$.

Dates

Pour chaque contrat i , on définit les dates et les anciennetés suivantes :

- DE_i est la **date d'entrée en état**, c'est-à-dire la date de souscription du contrat d'assurance, telle que $x_i = 0$;
- DF_i est la **date de fin d'observation** du contrat i , qui correspond, selon que le contrat est sinistré ou non, à la date de survenance du sinistre DS_i ou à B :

$$DF_i = B * \mathbb{I}_{\{\text{contrat en cours}\}} + DS_i * \mathbb{I}_{\{\text{contrat sinistré}\}}$$

$$\Rightarrow X_i = DF_i - DE_i$$

- a_i est l'**ancienneté initiale**, c'est-à-dire l'âge du contrat courant au début de la fenêtre d'observation, soit en A . Exprimée en année⁷⁴, elle n'est valable que pour les contrats souscrits avant le début de la fenêtre d'observation (i.e. tronqués à gauche). Pour les contrats souscrits au sein de la fenêtre d'observation, nous avons logiquement $a_i = 0$:

$$a_i = \max\left(0; \frac{A - DE_i}{365,25}\right)$$

✓ Nous vérifions que : $a_i < x + 1$

⁷⁴ Nous divisons l'écart de dates par 365,25 afin d'obtenir une ancienneté annuelle, si nous adoptons un pas annuel.

- b_i est l'**ancienneté finale**, c'est-à-dire l'âge du contrat courant à la date de fin d'observation, en DF_i . Elle est exprimée en année :

$$b_i = \frac{DF_i - DE_i}{365,25} = X_i$$

- ✓ Nous vérifions que : $b_i \geq x$

Conditions nécessaires d'appartenance à l'effectif sous risque

Condition 1 :

Avant toute chose, seule la population globale des individus potentiellement observables \mathcal{P} , qui interviendra dans les calculs, est conservée. Quelle que soit sa date de souscription, si un contrat est sorti avant le début de la fenêtre d'observation, pour quelque raison que ce soit, nous l'excluons purement et simplement de l'estimation. Il s'agit en l'occurrence d'exclure tous les contrats qui entrent tels que :

$$DF_i < A$$

Condition 2 :

Il faut ensuite déterminer, pour chaque contrat de \mathcal{P} potentiellement observable sur la fenêtre d'observation calendaire, s'il appartient, oui ou non, à l'effectif sous risque de chaque intervalle d'âge $[x; x + 1[$ considéré, désigné par P_x . Pour se faire, l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$a_i \leq x \leq b_i$$

Sous-intervalles de présence et types d'observation envisageables

Si le contrat appartient à P_x , il faut préciser la période sur l'année x durant laquelle il intègre effectivement l'effectif sous risque. Un contrat n'est en effet pas nécessairement pris en compte sur tout l'intervalle d'âge $[x, x + 1]$. Il peut être tronqué, censuré, voire les deux à la fois. Pour cela, nous définissons une série de sous-intervalles de présence.

Pour chaque classe d'âge $[x; x + 1[$ et pour chaque individu $i \in P_x$, nous définissons les sous-intervalles de présence t_i et u_i de la façon suivante :

- $t_i \in [0; \tau[$ est la **partie de troncature** pour le contrat i , c'est-à-dire la durée non observée au début de l'âge x (si le contrat est entré sous observation à un âge égal à l'âge considéré $\lfloor a_i \rfloor = x$), telle que nous ayons :

$a_i = x + t_i$, équivalent à l'ancienneté du contrat au début d'observation de l'individu i sur l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$;

- $u_i \in [0; \tau]$ est la **durée potentiellement observée** pour le contrat i , telle que nous ayons :

$b_i = x + u_i$, équivalent à l'ancienneté qu'aurait le contrat i en fin d'observation, s'il ne sortait pas de l'étude, pour quelque raison que ce soit.

Formellement, s_i est la réalisation de $x + S_i$, la variable aléatoire représentant l'ancienneté du contrat i à sa sortie de l'observation⁷⁵ sur la plage $[x; x + 1]$.

✓ Nous vérifions que : $0 \leq t_i \leq u_i \leq 1$

Nous pouvons généraliser les sous-intervalles de présence selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x + t_i = \sup(a_i; x) \\ x + u_i = \inf(b_i; x + 1) \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} t_i = \sup(a_i - x; 0) < \tau \\ u_i = \inf(b_i - x; \tau) \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} t_i = \sup(a_i - x; 0) < 1 \\ u_i = \inf(b_i - x; 1) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dans l'éventualité où le contrat ne soit pas censuré, c'est-à-dire qu'il sorte de l'observation sur la plage d'âge $[x; x + 1]$ à un âge strictement inférieur à u_i , nous associons à cet événement la cause de sortie comme variable à deux modalités :

- La sortie pour rachat ;
- Les autres causes de sorties (décès, terme, transfert Fourgous, ...).

Nous définissons la variable indicatrice de rachat pour chaque contrat i , telle que :

- $R_i = 0$ si $s_i = u_i$ ou si $s_i \leq u_i$ et la cause de sortie est autre que le rachat ;
- $R_i = 1$ sinon.

Le nombre de rachats dans la population P_x est ainsi obtenu comme suivant :

$$R_x = \sum_{i \in P_x} R_i$$

⁷⁵ Un contrat qui atteint l'âge $x + 1$ est considéré comme sortant de l'observation.

Selon les valeurs prises par t_i , u_i et s_i , différents cas de figures, dont la liste est dressée ci-dessous, sont susceptibles d'intervenir :

t_i	u_i	s_i	Cause de sortie	R_i	Type d'observation	Configuration
0	1	1	✗	0	Observation complète, sans rachat	(1)
0	1	<1	rachat	1	Observation complète, avec rachat	(1)
>0	1	1	✗	0	Troncature à gauche, sans rachat	(2)
>0	1	<1	rachat	1	Troncature à gauche, avec rachat	(2)
0	<1	$s_i = u_i$	✗/autre	0	Censure à droite	(3)
>0	<1	$s_i = u_i$	✗/autre	0	Troncature à gauche et censure à droite	(4)

✗ signifie que le contrat est toujours en cours.

Fig. 28 : Différents types d'observations possibles selon la valeur des sous-intervalles de présence

Indications de lecture relatives aux configurations ci-dessous :

- La durée d'observation effective du contrat i sur l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$ est représentée en rouge ;
- La portion de troncature est représentée en vert.
- La partie bleutée correspond à la portion de censure, complémentaire de u_i .

Configuration (1) : Observation complète

Le contrat est observé sur l'intégralité de sa $x + 1^{\text{ème}}$ année.



Valeurs des sous-intervalles de présence :

- ✓ $t_i = \sup(a_i - x; 0) = 0$
- ✓ $u_i = \inf(b_i - x; 1) = 1$

Configuration (2) : Observation tronquée à gauche

Le contrat est entré dans sa $x^{\text{ème}}$ année avant le début de la période d'observation et intègre donc l'effectif sous risque entre les âges x et $x + 1$.



Valeurs des sous-intervalles de présence :

- ✓ $t_i = \sup(a_i - x; 0) = a_i - x < 1$
- ✓ $u_i = \inf(b_i - x; 1) = 1$

Configuration (3) : Observation censurée à droite

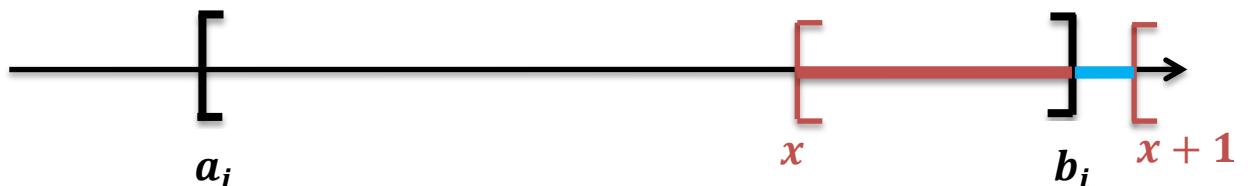
Quelle que soit la situation du contrat, sinistré ou en cours, la date de son $x + 1^{\text{ème}}$ anniversaire est ultérieure à celle de la fin d'observation.



Valeurs des sous-intervalles de présence :

- ✓ $t_i = 0$
- ✓ $u_i = \inf(b_i - x; 1) = b_i - x < 1$

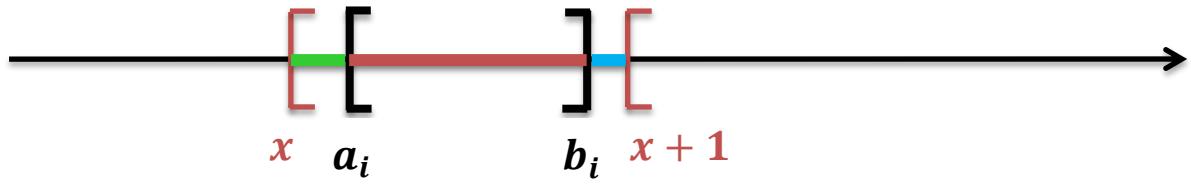
Pour les deux configurations précédentes (2) et (3), les âges au début et à la fin d'observation sont connus *ex ante*. En revanche, l'événement « rachat » est aléatoire.



Valeurs des sous-intervalles de présence :

- ✓ $t_i = 0$
- ✓ $u_i = \inf(b_i - x; 1) = b_i - x < 1$

Configuration (4) : Observation tronquée à gauche et censurée à droite



Valeurs des sous-intervalles de présence :

- ✓ $t_i = \sup(a_i - x; 0) = a_i - x < 1$
- ✓ $u_i = \inf(b_i - x; 1) = b_i - x < 1$

Configuration (5) : Donnée non observée

Ce cas de figure survient lorsqu'au moins une des conditions suivantes est réalisée :

- La date de fin d'observation du contrat est antérieure à la date calendaire de début d'observation A ;
- Le contrat n'intègre pas l'effectif sous risque de l'ancienneté x soit parce qu'il entre sous observation après son $x + 1^{\text{ème}}$ anniversaire, soit parce qu'il sort de l'observation avant la date de son $x^{\text{ème}}$ anniversaire. En bref, l'inégalité suivante n'est pas vérifiée :

$$a_i \leq x \leq b_i$$

Un même contrat peut ainsi appartenir à l'effectif sous risque pour plusieurs intervalles d'âge $[x; x + 1[$ et intervenir dans l'estimation de plusieurs taux annuels bruts de rachat. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant.



Le contrat i intègre l'effectif sous risque pour trois âges au sein de la fenêtre d'observation $[A; B]$:

- Observation tronquée pour l'intervalle d'âge $[x; x + 1[\Leftrightarrow \text{configuration (2)} ;$
- Observation complète pour l'intervalle d'âge $[x + 1; x + 2[\Leftrightarrow \text{configuration (1)} ;$
- Observation censurée pour l'intervalle d'âge $[x + 2; x + 3[\Leftrightarrow \text{configuration (3)}.$

3) Algorithme de calcul

En présence de données incomplètes, l'estimateur non-paramétrique de Kaplan-Meier offre l'avantage d'estimer les taux bruts de rachat sans hypothèse préalable sur la distribution des rachats sur l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$, par la simple utilisation de la fonction de survie empirique.

Si nous nous référons à l'algorithme de calcul issu des « Lignes directrices de mortalité de la Commission d'Agrément », dans sa version approuvée et recommandée par l'Institut des Actuaires en 2006, la fonction de survie de Kaplan-Meier est obtenue selon deux grandes étapes.

Étape 1 : Calcul de l'exposition au risque :

La fonction d'exposition au risque constitue la base de l'estimateur de Kaplan-Meier.

Chaque ancienneté x est divisée en sous-intervalles de temps de largeur $t \in]0; 1]$ (fixé à un douzième si l'on souhaite une précision mensuelle). Il s'agit alors de dénombrer les individus répondant aux deux critères suivants :

- ✓ Contrat sous-observation ;
- ✓ Contrat intégrant l'effectif sous risque de rachat à l'âge $x + t$.

Pour chaque sous-intervalle t , l'exposition au risque est alors la différence entre le nombre de contrats dont la partie de troncature n'excède pas t et le nombre de contrats dont la durée observée est inférieure (strictement) à t :

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{i=1}^{N_x} \mathbb{I}_{\{t_i \leq t\}} - \sum_{i=1}^{N_x} \mathbb{I}_{\{s_i < t\}}$$

Étape 2 : Détermination par récurrence de la fonction de survie de Kaplan-Meier

- ✓ Initialisation : $\hat{S}_{KM}(0) = 1$;
- ✓ Sur tout intervalle $]a, b[$ tel qu'entre les âges $x + a$ et $x + b$, il n'y ait pas d'âge observé au rachat, la fonction de survie reste constante ;
- ✓ Pour tout âge de rachat $x + t$, on a par récurrence :

$$\hat{S}_{KM}(t) = \hat{S}_{KM}(t-1) * \left(1 - \frac{R_{x+t}}{\mathcal{E}(t)}\right)$$

Où R_{x+t} représente le nombre de rachats observés à l'âge $x + t$.

Une fois la fonction de survie de Kaplan-Meier estimée, l'estimateur des taux annuels bruts de rachat s'obtient à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{q}_{KM}(t) = 1 - \hat{S}_{KM}(t)$$

Contrôles de cohérence

- ✓ La somme des rachats à chaque période doit correspondre au total des rachats renseignés dans le fichier initial ;
- ✓ Une récurrence dans le calcul de l'effectif sous risque peut être vérifiée, telle que :

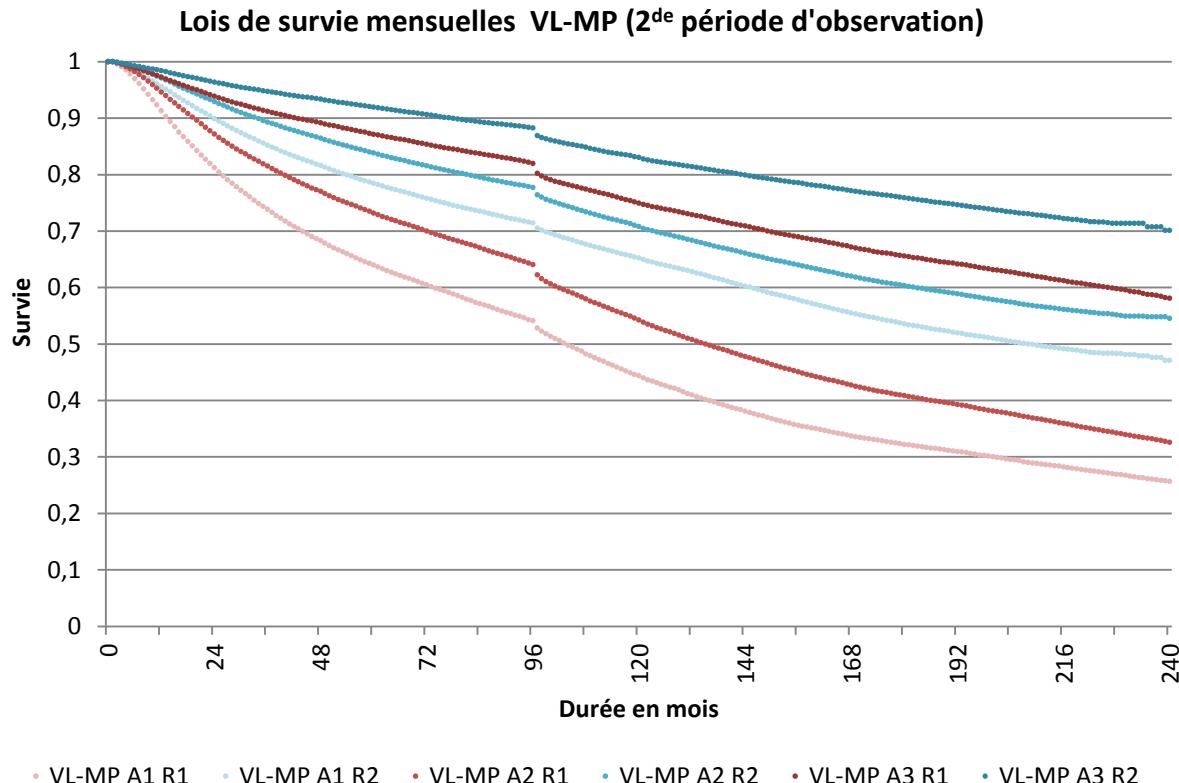
$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t-1) - R_{x+t-1} - C_{x+t-1} + \left\{ \sum_{i=1}^{N_x} \mathbb{I}_{\{t_i \leq t\}} - \sum_{i=1}^{N_x} \mathbb{I}_{\{t_i \leq t-1\}} \right\}$$

Où C_{x+t-1} représente le nombre de censures observées à l'âge $x + t - 1$.

L'effectif sous risque en t correspond ainsi à l'effectif sous risque à la période précédente, duquel ont été retranchées les sorties et ajoutés les contrats tronqués avant t et entrés sous observation en t .

4) Résultats

Les lois de rachat présentées ci-dessous sont celles des branches VL-MP et PU, respectivement sur vingt années (soient deux cent quarante mois) et treize années (soient cent cinquante-six mois) :



Lois de survie mensuelles PU (2^{de} période d'observation)

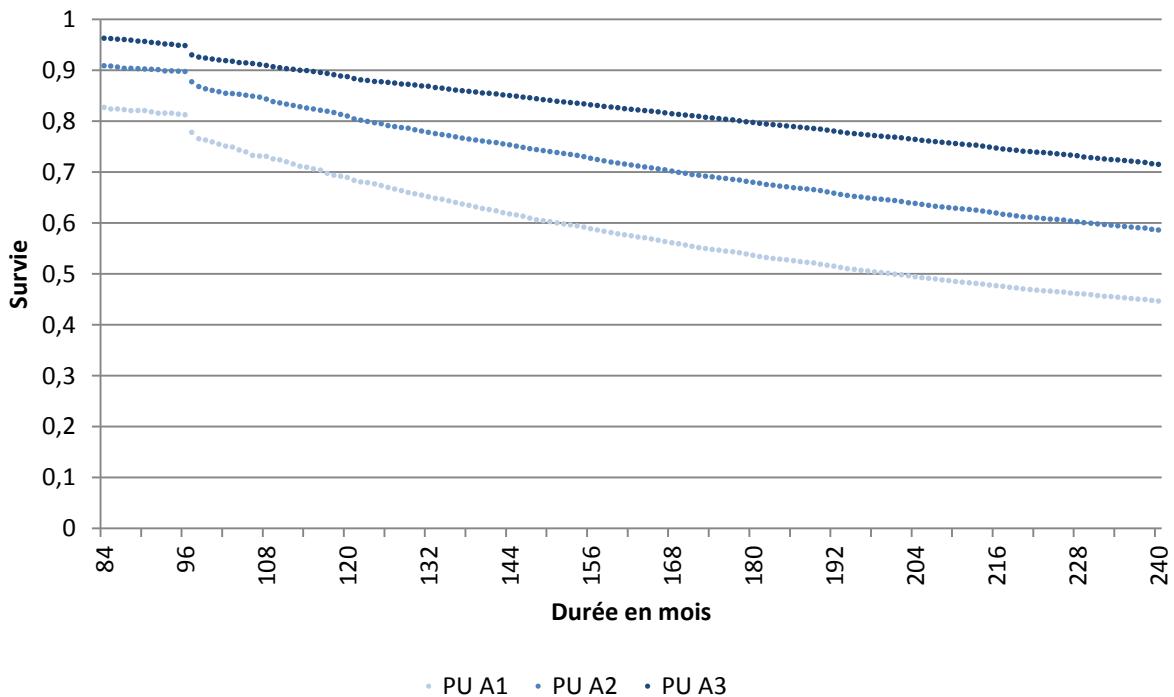


Fig. 29 : Lois de survie mensuelles brutes VL-MP et PU – seconde période d'observation

- ✓ Plus les contrats sont souscrits à un âge jeune, plus la tendance au rachat est importante et vice versa ;
- ✓ A âge de souscription égal, les contrats du réseau CIC (R1) ont tendance à être moins rachetés que ceux du réseau CM (R2) ;
- ✓ Le saut fiscal est marqué au bout de quatre-vingt-seize mois d'ancienneté ;
- ✗ Les trois premières années de projection des lois PU obtenues par la méthode de Kaplan-Meier sur la période 2007 - 2012 sont marquées par l'absence de données relatives à ces anciennetés. Rappelons en effet que les contrats PU sont en *run off* et que le dernier contrat a été souscrit à effet 2004, alors que la fenêtre d'observation a été ouverte en date du 1^{er} janvier 2007.
 - ⇒ Pour les PU, nous nous intéressons davantage à la queue de distribution, à partir de sept années ou 84 mois d'ancienneté (i.e. l'âge des contrats PU les plus jeunes pour la réalisation du *back testing* sur la base des données de l'exercice 2011).
- ⇒ Les conclusions sont sensiblement les mêmes, quelle que soit la période d'observation retenue. Les ordres de grandeur sont en revanche quelque peu modifiés.

5.1.5 Variance de l'estimateur de Kaplan-Meier et intervalles de confiance

a) Estimateur de Greenwood

La variance de l'estimateur de Kaplan-Meier est la suivante⁷⁶ :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\hat{S}_{KM}(x)] &= \mathbb{V}\left[\prod_{x_i \leq x} \left(1 - \frac{r_i}{n_i}\right)\right] \\ &= \mathbb{V}\left[\prod_{x_i \leq x} (1 - \hat{q}_i)\right]\end{aligned}$$

Afin de faciliter le calcul, nous utilisons le logarithme de l'estimateur de Kaplan-Meier, en émettant l'hypothèse que les sorties surviennent de façon indépendante au sein de la population :

$$\begin{aligned}\log \hat{S}_{KM}(x) &= \log \prod_{x_i \leq x} \left(1 - \frac{r_i}{n_i}\right) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \log \left(1 - \frac{r_i}{n_i}\right) \\ &= \sum_{x_i \leq x} \log(1 - \hat{q}_i) \\ \Rightarrow \quad \mathbb{V}[\log \hat{S}_{KM}(x)] &= \mathbb{V}\left[\sum_{x_i \leq x} \log(1 - \hat{q}_i)\right]\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse d'indépendance des variables $\log(1 - \hat{q}_i)$:

$$\mathbb{E} = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{V}[\log(1 - \hat{q}_i)]$$

La Δ -method nous permet d'obtenir la variance d'une fonction de variable aléatoire, en l'approximant à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1, au voisinage de la moyenne :

- Nous cherchons à calculer $\mathbb{V}[g(x)]$, où $g(\cdot)$ est une fonction continue dérivable ;
- Un développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de x_0 donne :

$$g(x) \approx g(x_0) + (x - x_0) * g'(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{V}[g(x)] \approx g'^2(x_0) \mathbb{V}[x]$$

Dans notre cas, nous avons :

- ✓ $x_0 = \mathbb{E}[X]$
- ✓ $g(x) = \log x$ et $g'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

⁷⁶ Les notations sont les mêmes qu'en page 35.

Nous obtenons ainsi :

$$\mathbb{V}[\log(1 - \hat{q}_i)] \approx \frac{\mathbb{V}[(1 - \hat{q}_i)]}{\mathbb{E}[(1 - \hat{q}_i)]^2}$$

Les sorties r_i survenant de façon indépendante avec la probabilité q_i , elles suivent une Binomiale de paramètres n_i et q_i . Or, $1 - \hat{q}_i = 1 - \frac{r_i}{n_i}$. En conséquence :

$$\mathbb{E}[1 - \hat{q}_i] = 1 - \frac{n_i * q_i}{n_i} = 1 - q_i$$

Et :

$$\mathbb{V}[(1 - \hat{q}_i)] = \mathbb{V}\left[\frac{r_i}{n_i}\right] = \frac{n_i * q_i * (1 - q_i)}{n_i^2} = \frac{q_i * (1 - q_i)}{n_i}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[\log(1 - \hat{q}_i)] \approx \frac{q_i}{n_i * (1 - q_i)}$$

D'où :

$$\hat{\mathbb{V}}[\log(1 - \hat{q}_i)] = \frac{\hat{q}_i}{n_i * (1 - \hat{q}_i)} = \frac{\frac{r_i}{n_i}}{n_i * \left(1 - \frac{r_i}{n_i}\right)} = \frac{r_i}{n_i * (n_i - r_i)}$$

Et :

$$\mathbb{V}[\log \hat{S}_{KM}(x)] \approx \sum_{x_i \leq x} \frac{r_i}{n_i * (n_i - r_i)}$$

Grâce à la *Δ-method*, nous pouvons enfin obtenir un estimateur de la variance de l'estimateur de Kaplan-Meier :

$$\mathbb{V}[\hat{S}_{KM}(x)] = \mathbb{V}[e^{\log \hat{S}_{KM}(x)}] \approx e^{2\mathbb{E}[\log \hat{S}_{KM}(x)]} * \mathbb{V}[\log \hat{S}_{KM}(x)]$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathbb{V}}[\hat{S}_{KM}(x)] = \hat{S}_{KM}^2(x) * \mathbb{V}[\log \hat{S}_{KM}(x)]$$

Il s'agit de l'**estimateur de Greenwood**, qui estime la variance de Kaplan-Meier :

$$\hat{\mathbb{V}}[\hat{S}_{KM}(x)] = \hat{S}_{KM}^2(x) \sum_{x_i < x} \frac{r_i}{n_i * (n_i - r_i)}$$

□

N.B. : En cas de données complètes, l'estimateur de Greenwood devient :

$$\hat{\mathbb{V}}[\hat{S}_{KM}(x)] = \frac{\hat{S}_{KM}(x) * (1 - \hat{S}_{KM}(x))}{n_0} = \frac{\hat{S}_{KM}(x) * (1 - \hat{S}_{KM}(x))}{N}$$

b) Intervalles de confiance asymptotiques

De la propriété de normalité asymptotique, nous pouvons déduire des tests et des intervalles de confiance pour la fonction de survie asymptotiquement au seuil $1 - \alpha$:

$$IC_{1-\alpha}(S(t)) = \left[\hat{S}_{KM}(t) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\mathbb{V}[\hat{S}_{KM}(x)]} \right]$$

Où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ représente le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ au seuil $1 - \alpha$.

Il s'agit d'intervalles ponctuels, pour chaque âge.

La variance peut être remplacée par l'estimateur de Greenwood, de sorte que l'intervalle de confiance devienne :

$$IC_{1-\alpha}(S(t)) = \left[\hat{S}_{KM}(t) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \hat{S}_{KM}(x) * \sqrt{\sum_{x_i < x} \frac{r_i}{n_i * (n_i - r_i)}} \right]$$

5.2 Lissage des taux bruts de rachat

5.2.1 Méthodes de lissage

Étape préalable à la construction d'une loi de rachat (resp. mortalité) l'estimation des taux bruts de rachat (resp. mortalité) ne fournit pas des résultats tout à fait réguliers. Cette irrégularité des taux bruts ne résulte pas forcément des comportements réels de rachat (resp. mortalité), mais plutôt des fluctuations d'échantillonnage. Les estimations initiales de taux bruts doivent alors faire l'objet d'un lissage⁷⁷, afin de représenter le plus fidèlement possible la loi à estimer.

Différentes méthodes permettent la révision des taux bruts, classées en quatre catégories, notamment selon qu'elles soient paramétriques ou non.

a) *Les modélisations paramétriques (↔ Ajustements)*

Hypothèse : La fonction de hasard peut être représentée par une fonction mathématique à paramètre(s).

La construction de ce genre de modèles présente les avantages et inconvénients suivants :

⁷⁷ On parle généralement de « lissage » dans le cadre non paramétrique et d' « ajustement » dans le cadre paramétrique.

- ✓ Possibilité de prolonger les taux estimés à des âges hors de la plage d'observation ;
- ✗ Ajustement pas toujours très fidèle aux données brutes et plus adapté aux petits portefeuilles ;
- ✗ Toute la difficulté de ce genre de méthode réside dans le choix du modèle paramétrique et du nombre de ses paramètres : un équilibre doit être trouvé entre l'augmentation du nombre de paramètres et la robustesse du modèle. La première permet en effet un meilleur ajustement aux taux bruts, mais aux dépens de la seconde. Or, un modèle peu robuste fournit de bons estimateurs s'il est adapté aux données, il peut sinon donner de très mauvais estimateurs...

En bref, les modélisations paramétriques se révèlent complémentaires à d'autres méthodes, pour extrapoler les rachats (resp. la mortalité) à des âges non observés.

Exemples d'ajustement à une loi continue : En ce qui concerne l'étude de la mortalité, différents modèles sont traditionnellement utilisés, parmi lesquels la loi de Gompertz, la loi de Makeham, la loi de Weibull⁷⁸, la fonction logistique, etc.

N.B. : La construction d'un modèle paramétrique *ad hoc* peut également être envisagée.

b) Les lissages paramétriques

Contrairement aux modélisations paramétriques, les lissages paramétriques reviennent à identifier, parmi une famille de fonctions mathématiques une courbe paramétrique qui représente bien l'évolution des taux bruts de hasard en fonction de l'âge.

Aucune hypothèse n'est faite a priori sur une forme de courbe de survie. On recourt alors aux techniques de régression adaptées aux modèles linéaires généralisés.

Exemples : Méthode des splines, lois de la famille de Gompertz-Makeham, modèles linéaires généralisés, etc.

c) Les lissages non paramétriques

Nous ne pourvons pas fixer une loi connue a priori et aucun paramètre n'est à estimer. Il faut seulement définir un certain nombre de traitements à appliquer aux données brutes initiales, pour les lisser.

Lors de l'estimation du taux brut q_t via son estimateur empirique \hat{q}_t , une erreur d'estimation survient : $e_t = \hat{q}_t - q_t$. Le lissage consiste à minimiser cette erreur et construire une courbe des taux de hasard en fonction de l'ancienneté t , qui soit plus lisse que celle des taux bruts estimés précédemment.

⁷⁸ La loi de Weibull fait l'objet d'une présentation à la page 54.

Exemples : Moyennes mobiles pondérées, Whittaker-Henderson⁷⁹, etc.

d) Les modèles relationnels

Hypothèse : Il existe un lien mathématique simple entre la mortalité de la population étudiée et celle d'une population de référence.

Selon ces modèles, le taux de mortalité n'est pas uniquement fonction de l'âge, mais également du taux de mortalité d'une table de référence ou de l'âge. Leur principe consiste alors à « déformer » cette table afin de tendre vers les données brutes.

- ✓ De tels modèles ont un intérêt dans le cas où le volume de données est plutôt faible et parce qu'ils permettent des extrapolations en dehors des plages d'âge d'expérience.

Exemples : Modèle de Cox⁸⁰, modèle de Brass, etc.

5.2.2 Choix de la méthode

a) « *Ex ante* » : Critères d'adéquation

La sélection d'une procédure de lissage qui soit adaptée aux données brutes nécessite l'analyse simultanée des deux critères d'adéquation suivants.

1) Critère de fidélité

Le critère de fidélité mesure l'écart entre les taux bruts et les taux lissés, tel que :

$$CF = \sum_{x \in p} (\hat{q}_x - q_x)^2$$

Où p représente la plage de lissage.

N.B. : Des taux proches (i.e. un écart faible) suggèrent une fidélité élevée.

2) Critère de régularité

Le critère de régularité évalue la distance entre deux taux lissés successifs, tel que :

$$CR = \sum_{x \in p} (q_x - q_{x+1})^2$$

⁷⁹ Le lissage de Whittaker-Henderson fait l'objet d'une présentation à la page 78.

⁸⁰ COX D. R. [1972], « *Regression models and life tables* » *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 34, N°2, pp. 187-220.

Où p représente la plage de lissage.

b) « *Ex post* » : Tests statistiques

La procédure sélectionnée doit en outre être validée à l'aide de tests statistiques évaluant sa pertinence.

1) Test d'ajustement du Khi-deux

Principe :

Pour chaque âge, le nombre de rachats (resp. décès) théorique ou lissé est comparé au nombre de rachats (resp. décès) observé ou brut.

Hypothèses :

$[H_0]$: La distribution observée n'est pas significativement différente de la distribution théorique ;

Contre

$[H_1]$: La distribution est significativement différente de la distribution théorique.

Statistique de test :

$$T = \sum_{x \in p} \frac{(N_x * \hat{q}_x - N_x * q_x)^2}{N_x * q_x}$$

$$T \xrightarrow{\text{sous } H_0} \chi^2_{(n-r-1)}$$

Où :

- p représente la plage de lissage.
- n est le nombre d'observations sur p ;
- N_x est le nombre de personnes d'âge x exposées au risque ;
- \hat{q}_x est le taux de rachat (resp. décès) brut à l'âge x ;
- q_x est le taux de rachat (resp. décès) lissé à l'âge x ;
- r est le nombre de paramètres estimés.

Seuil critique :

La statistique de test doit être comparée au seuil critique κ de la loi du Khi-deux à $(n - r - 1)$ degrés de liberté, déterminé pour un niveau de confiance fixé à $\alpha = 5\%$, tel que :

$$\alpha = \mathbb{P}(\chi^2_{(n-r-1)} > \kappa)$$

Règle de décision :

- ✓ Si $T > \kappa$: nous rejetons H_0 au seuil α ;
- ✓ Si $T < \kappa$: nous « acceptons » H_0 au seuil α .

2) *Test des changements de signe*

Principe :

Dans les conditions d'application de l'approximation normale, le signe de la différence $\Delta_x = q_x - \hat{q}_x$ a une probabilité d'un demi d'être positif.

Si les âges x sont indépendants, la probabilité que Δ_x et Δ_{x+1} soient de signes distincts est également d'un demi.

Le nombre de changements de signe dans la série des différences Δ_x suit une loi Binomiale de paramètres $n - 1$ et $1/2$, où n désigne le nombre de valeurs de la plage d'âge retenue p .

Statistique de test :

$$T = \frac{2 * m - (n - 1)}{\sqrt{n - 1}}$$

Où m correspond au nombre de changements de signe.

Seuil critique :

m est suffisamment grand pour affirmer que la statistique de test suit approximativement une loi Normale.

La statistique de test doit alors être comparée au seuil critique κ de la loi d'une v.a. Normale centrée réduite pour un seuil donné α , tel que, sous H_0 :

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(-\kappa < T < \kappa)$$

Lorsque $\alpha = 5\%$, $\kappa = 1,96$.

Règle de décision :

- ✓ Si $T \in]-\kappa; \kappa[$: nous « acceptons » H_0 au seuil α ;
- ✓ Sinon nous rejetons H_0 au seuil α .

5.2.3 Ajustement paramétrique par une loi de Weibull

Le lissage des lois de mortalité est une opération pleinement justifiée, du fait de la continuité du taux de mortalité en fonction de l'âge. Nous pouvons en revanche nous interroger sur la pertinence d'un lissage des lois de rachat.

Certaines aspérités des lois de rachat sont en effet dues à des phénomènes naturels de sauts fiscaux, qu'il serait malvenu de gommer par lissage.

Nous partons néanmoins du principe qu'il est nécessaire de lisser les éventuels phénomènes exceptionnels (par exemple conjoncturels), dont les impacts pourraient s'avérer particulièrement dangereux sur les montants estimés et provisionnés.

Nous cherchons par ailleurs à prolonger les lois de rachat au-delà des anciennetés les plus élevées, pour lesquelles nous ne disposons pas encore d'observations, sinon un nombre insuffisant pour assurer la fiabilité des estimations. Or, le choix d'une méthode d'ajustement paramétrique offre précisément cet avantage.

⇒ Nous trouvons finalement ce qu'il nous semble être un bon compromis, en adoptant un ajustement paramétrique de Weibull à quatre paramètres, qui satisfasse les trois conditions exposées précédemment, à savoir :

- ✓ Le lissage des irrégularités des taux bruts dues aux fluctuations d'échantillonnage ;
- ✓ La prise en compte des irrégularités naturelles dues au saut fiscal au quatre-vingt-dix septième mois d'ancienneté ;
- ✓ Le prolongement des lois au-delà des anciennetés supérieures.

a) Distribution de Weibull à deux paramètres

La loi de Weibull est couramment utilisée dans le cadre des modèles de durée, notamment pour les études de mortalité. Sa version classique repose sur deux paramètres positifs, l'un de forme λ et l'autre d'échelle de temps γ (ou plutôt son inverse) : $\mathcal{W}(\lambda, \gamma)$. La fonction de survie est la suivante :

$$S(t) = \exp(-\lambda * t^\gamma)$$

Lorsque le paramètre de forme λ est égal à l'unité, c'est-à-dire que la fonction est « sans vieillissement », on retombe sur la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

b) Distribution de Weibull à quatre paramètres

En ce qui concerne nos lois de rachat, nous adoptons une version modifiée de la fonction de Weibull, qui tienne compte du saut fiscal marqué à huit ans (ou quatre-vingt-seize mois) d'ancienneté. Ce modèle *ad hoc* est ainsi constitué de quatre paramètres, $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2)$, prenant en compte les deux parties de la courbe de survie, avant et après le saut fiscal. La fonction de survie est alors la suivante :

$$S(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda_1 * t^{\gamma_1}) & \text{si } t \leq \Sigma \\ \rho * \exp(-\lambda_1 * \Sigma^{\gamma_1} - \lambda_2 * (t - \Sigma)^{\gamma_2}) & \text{si } t > \Sigma \end{cases}$$

Où :

- Σ représente le saut fiscal (fixé à 8 ans ou 96 mois d'ancienneté) ;
- ρ correspond à la probabilité de prorogation au terme fiscal ;
- t est la durée écoulée en année ou en mois ($t \in \mathbb{R}_+^*$) ;
- λ_1 est le paramètre de forme relatif à la première partie de la courbe ;
- λ_2 est le paramètre de forme relatif à la seconde partie de la courbe ;
- γ_1 est le paramètre d'échelle relatif à la première partie de la courbe ;
- γ_2 est le paramètre d'échelle relatif à la seconde partie de la courbe.

L'ajustement est réalisé sur la fonction de survie à l'aide de la « PROC NLIN » du logiciel SAS®, qui permet d'estimer les paramètres de la loi de Weibull, ainsi que la probabilité de prorogation au terme fiscal.

1) Résultats

L'ajustement paramétrique de Weibull permet à la fois de tenir compte du saut fiscal à quatre-vingt-seize mois (huit ans) d'ancienneté et de prolonger l'estimation de la survie de vingt aux quarante années de projection des lois de rachat.

Les résultats de cet ajustement sont présentés successivement pour chaque ^période d'observation.

Période d'observation 01/01/1990 – 31/12/2012

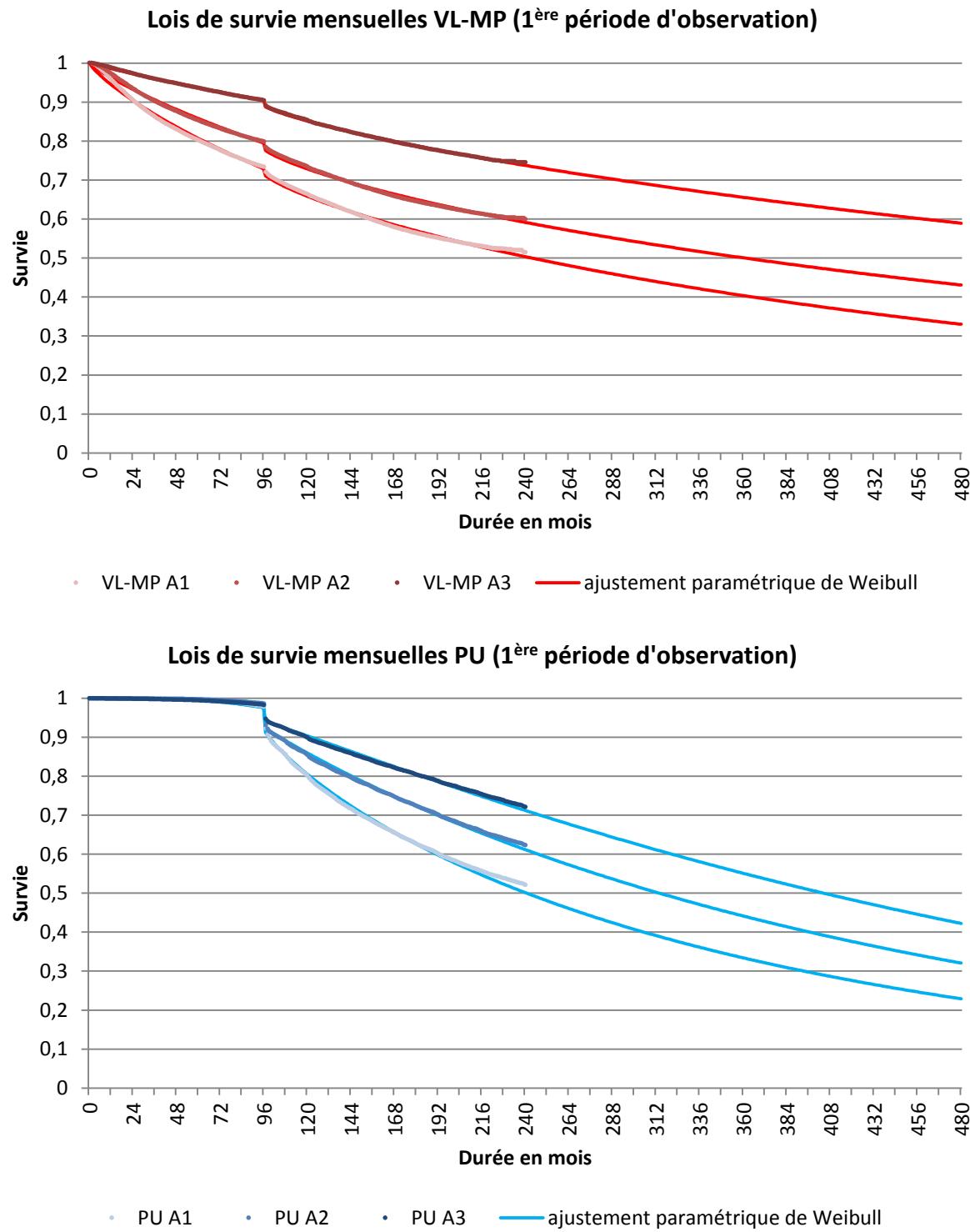


Fig. 30 : Lois de survie mensuelles VL-MP et PU ajustées – première période d'observation

Graphiquement, l'ajustement de Weibull semble adapté aux données brutes. Le test d'ajustement du Khi-deux pourra confirmer cette impression.

Période d'observation 01/01/2007 – 31/12/2012

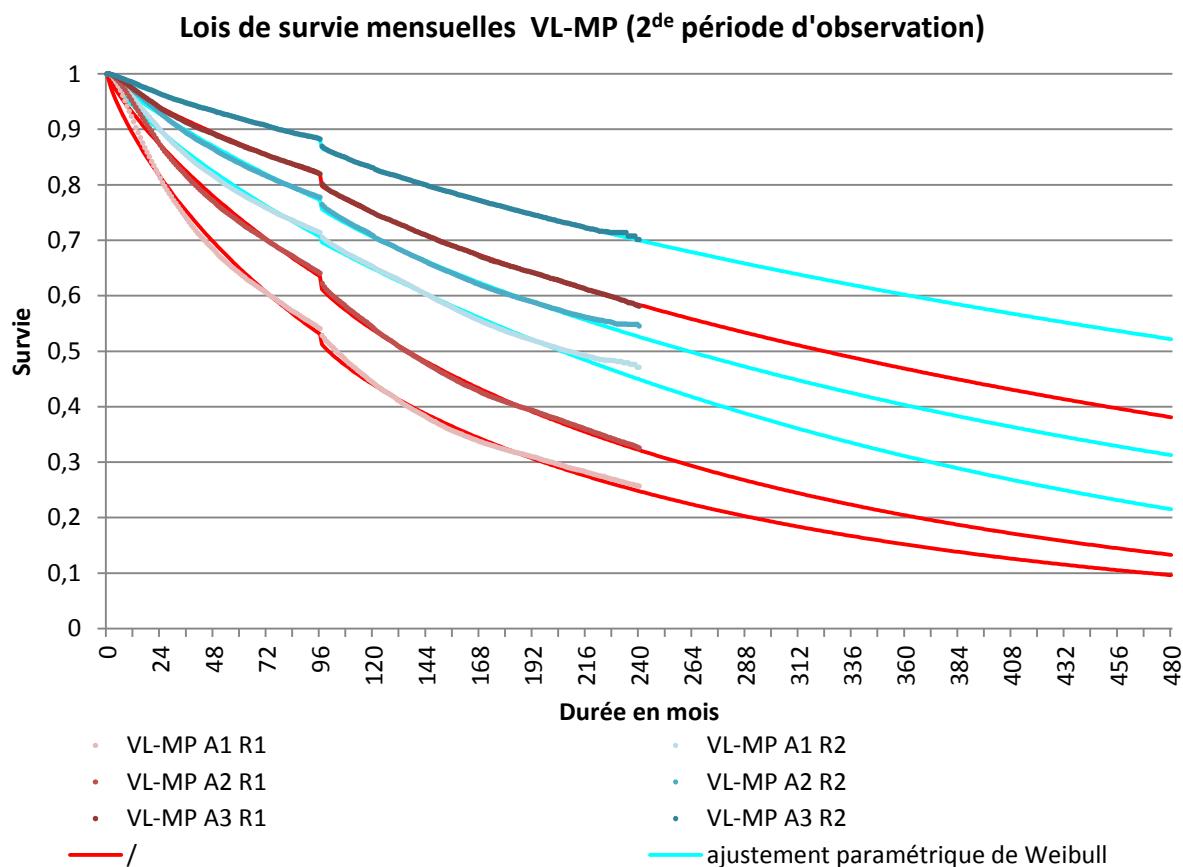
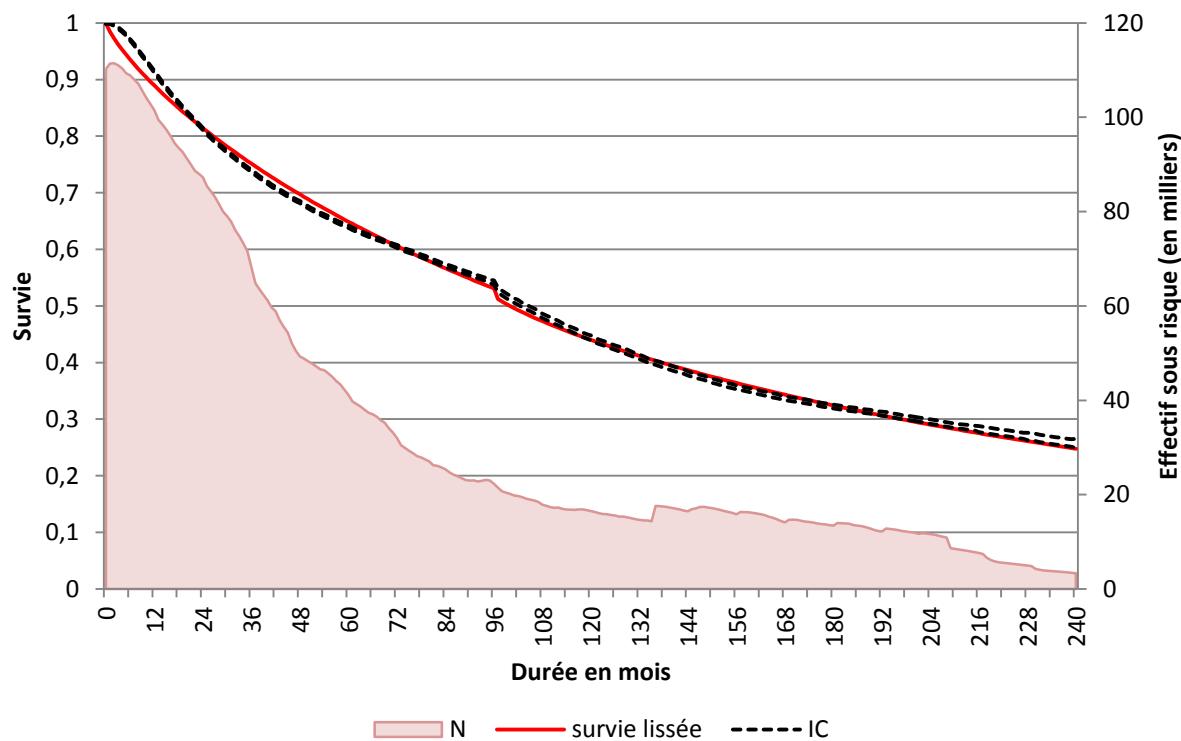


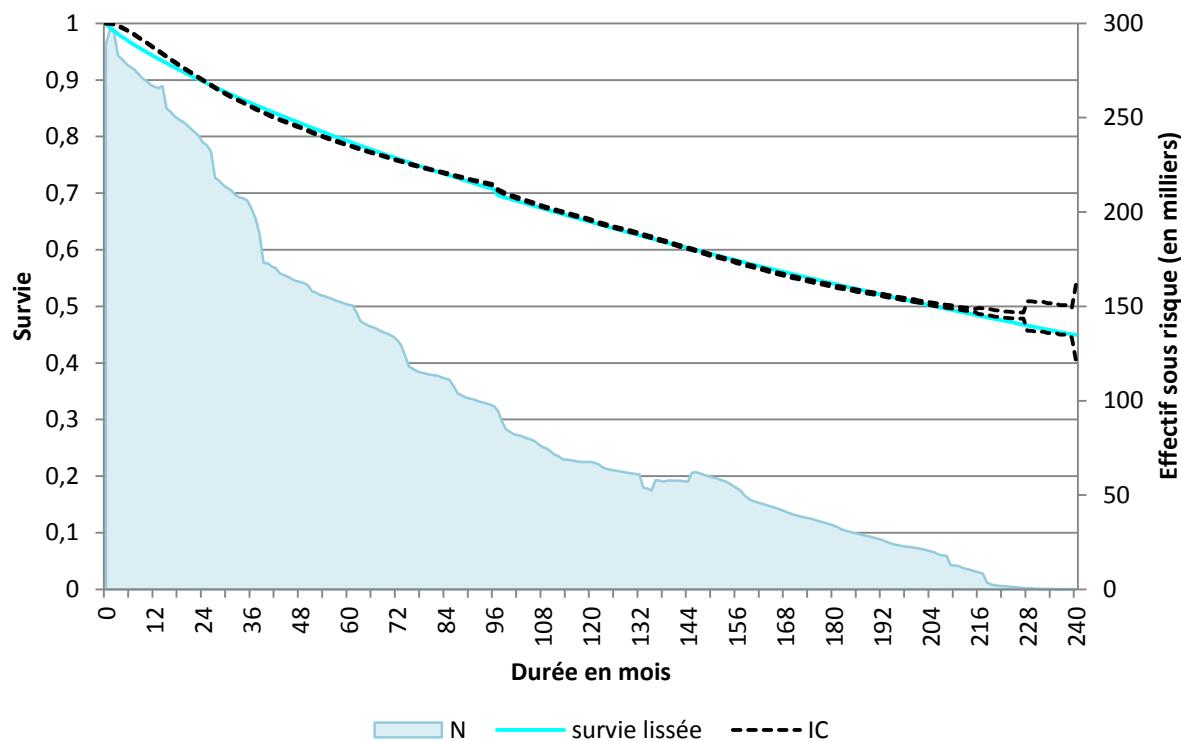
Fig. 31 : Lois de survie mensuelles VL-MP et PU ajustées – seconde période d'observation

Nous considérons successivement chaque loi de survie VL-MP accompagnée de ses intervalles de confiance :

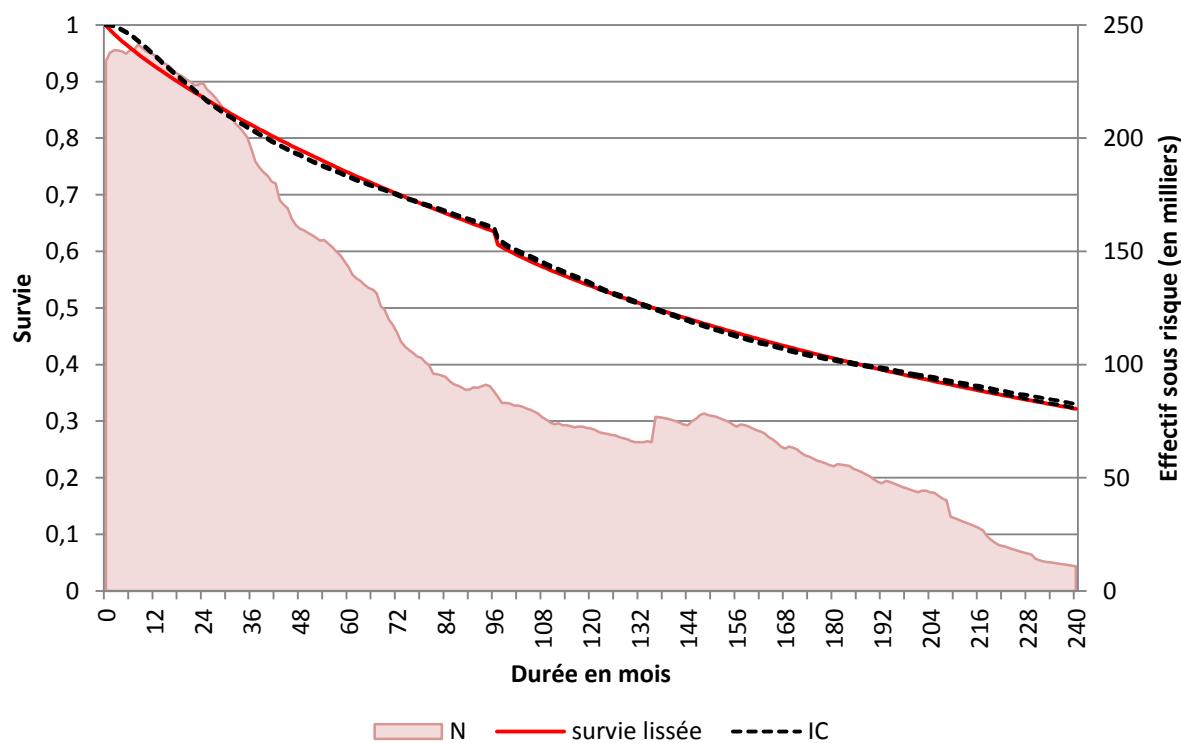
Loi de survie VL-MP A1 R1 (2^{de} période d'observation)



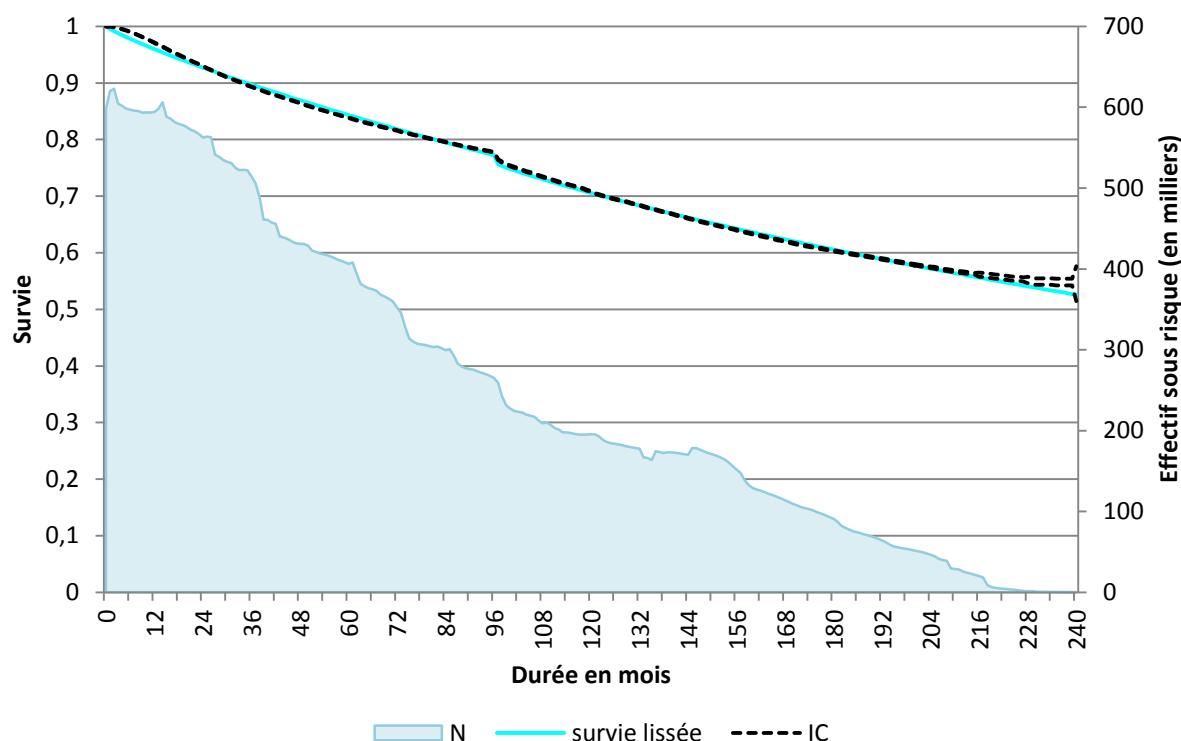
Loi de survie VL-MP A1 R2 (2^{de} période d'observation)



Loi de survie VL-MP A2 R1 (2^{de} période d'observation)



Loi de survie VL-MP A2 R2 (2^{de} période d'observation)



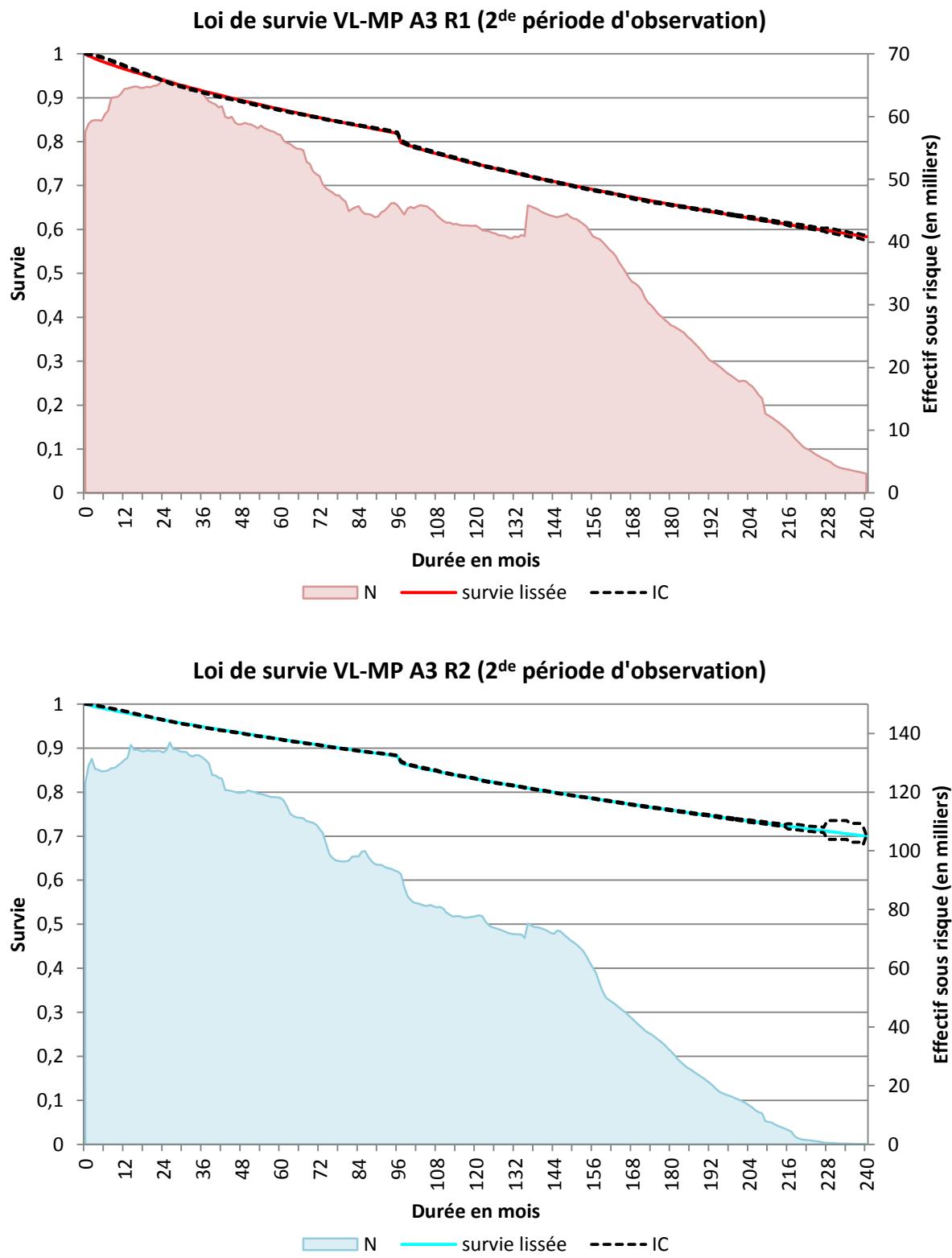


Fig. 32 : Lois de survie mensuelles VL-MP PU ajustées avec IC à 95 % – seconde période d'observation

- ✖ Au-delà de 216 mois (i.e. 18 ans) d'ancienneté, les effectifs sous risque des lois VL-MP sont trop faibles pour que l'ajustement soit jugé fiable. Nous décidons donc de réaliser les ajustements et les tests d'adéquations sur une plage cette fois-ci limitée à 216 mois.

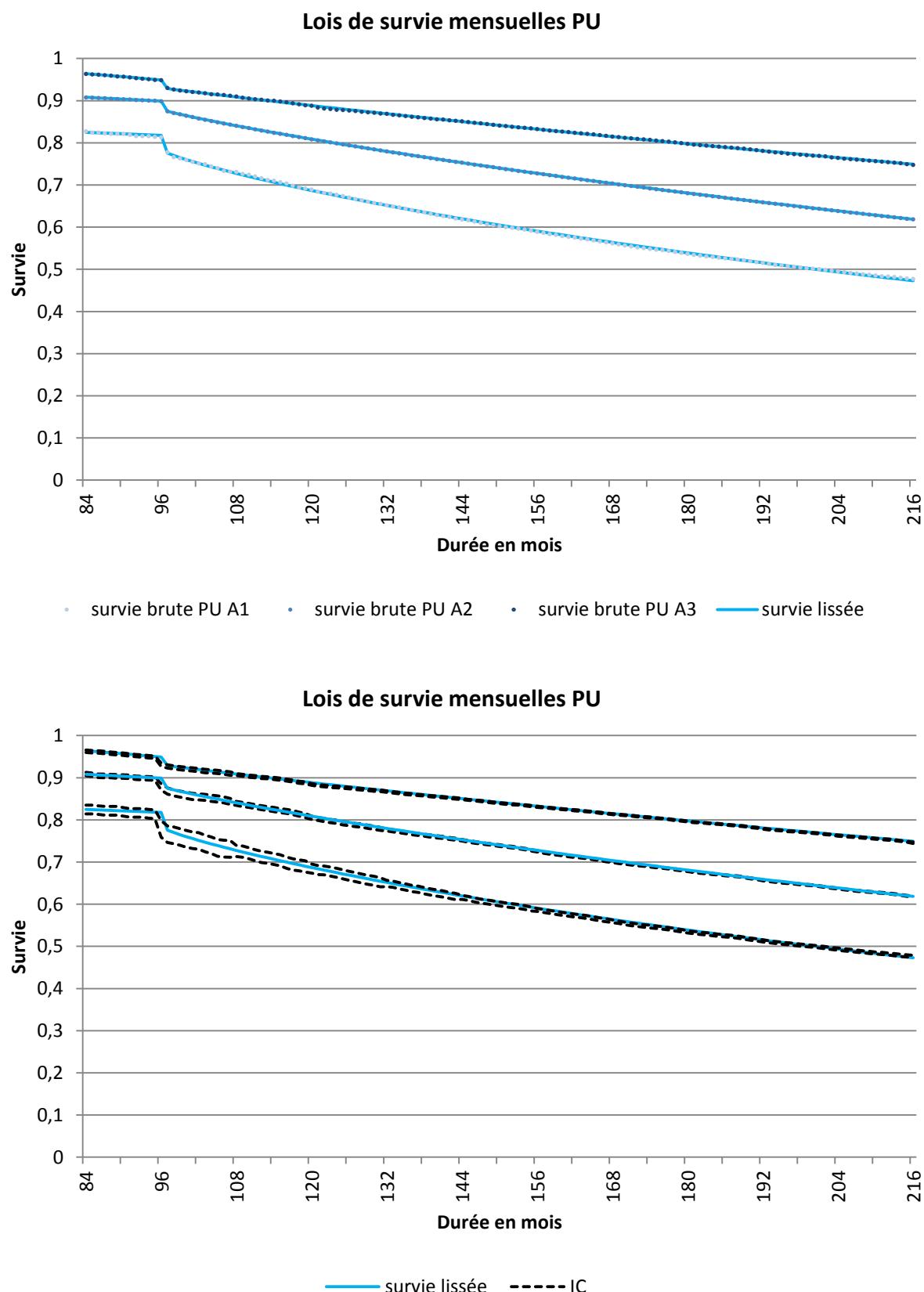


Fig. 33 : Lois de survie mensuelles PU ajustées avec IC à 95 % – seconde période d'observation

2) Tests d'ajustement et critères d'adéquation

Nous décidons de mettre en œuvre des tests d'ajustement du Khi-deux pour un niveau de confiance fixé à $\alpha = 5\%$. Nous déterminons également les critères de fidélité et de régularité des données lissées.

Période d'observation 01/01/1990 – 31/12/2012

La qualité de l'ajustement paramétrique de Weibull aux vingt années de données brutes estimées sur la première période, déjà entrevue graphiquement, ressort également dans les tests et critères d'adéquation. Les deux tableaux suivants présentent les résultats dans le détail :

KM 1		Nombre ddl	T	Seuil critique κ	Décision
Weibull [0 ; 240]	PU A1	236	6,22	272,79	H_0 acceptée ✓
	PU A2		8,28		H_0 acceptée ✓
	PU A3		5,99		H_0 acceptée ✓
	VL-MP A1		43,13		H_0 acceptée ✓
	VL-MP A2		57,16		H_0 acceptée ✓
	VL-MP A3		1,17		H_0 acceptée ✓

KM 1		CF	CR	Commentaires
Weibull [0 ; 240]	PU A1	6,812 ^E - 04	2,566 ^E - 01	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Mêmes ordres de grandeur pour chaque critère ✓ La fidélité aux données brutes est favorisée aux dépens de la régularité des données lissées
	PU A2	7,311 ^E - 04	3,781 ^E - 01	
	PU A3	6,895 ^E - 04	5,087 ^E - 01	
	VL-MP A1	4,889 ^E - 03	2,550 ^E - 01	
	VL-MP A2	3,089 ^E - 03	3,509 ^E - 01	
	VL-MP A3	2,123 ^E - 04	5,444 ^E - 01	

Fig. 34 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 1^{ère} période d'observation

Période d'observation 01/01/2007 – 31/12/2012

La réalisation de l'ajustement paramétrique de Weibull aux vingt années de données brutes estimées sur la seconde période fournit des résultats peu concluants. Sa fiabilité est doublement remise en question par :

- ✗ Les tests d'ajustements du Khi-deux, qui conduisent au rejet de la représentativité des lois lissées aux données brutes pour les âges jeunes et intermédiaires ;
- ✗ Les critères de fidélité dont les valeurs sont assez faibles.

Les deux tableaux suivants présentent les résultats dans le détail :

KM 2	Nombre ddl	T	Seuil critique κ	Décision
Weibull [0 ; 240]	236	PU A1	720,02	H_0 rejetée ✗
		PU A2	287,33	H_0 rejetée ✗
		PU A3	142,94	H_0 acceptée ✓
		VL-MP A1 R1	2096,10	H_0 rejetée ✗
		VL-MP A1 R2	2120,01	H_0 rejetée ✗
		VL-MP A2 R1	2862,85	H_0 rejetée ✗
		VL-MP A2 R2	2722,54	H_0 rejetée ✗
		VL-MP A3 R1	259,71	H_0 acceptée ✓
		VL-MP A3 R2	125,60	H_0 acceptée ✓

KM 2	CF	CR	Commentaires
Weibull [0 ; 240]	PU A1	1,052 ^E - 01	1,713 ^E - 01
	PU A2	1,012 ^E - 02	3,289 ^E - 01
	PU A3	1,904 ^E - 02	4,974 ^E - 01
	VL-MP A1 R1	2,681 ^E - 02	6,353 ^E - 02
	VL-MP A1 R2	1,201 ^E - 02	2,194 ^E - 01
	VL-MP A2 R1	1,809 ^E - 02	9,983 ^E - 02
	VL-MP A2 R2	7,170 ^E - 03	2,935 ^E - 01
	VL-MP A3 R1	7,867 ^E - 03	3,252 ^E - 01
	VL-MP A3 R2	2,568 ^E - 03	5,051 ^E - 01

Fig. 35 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 2de période d'observation/
lissage 1

Les plages d'ajustements sont réduites pour chaque découpage aux intervalles : 0 - 216 mois (et PU : 84 - 216) :

- ✓ [0 ; 216] mois pour les VL-MP ;
- ✓ [84 ; 216] mois pour les PU.

La réalisation de l'ajustement paramétrique sur des plages plus fiables en termes d'effectifs améliore considérablement la qualité des résultats, exceptée pour les lois VL-MP, dont l'ajustement sur les premiers mois d'ancienneté n'est toujours pas très bon.

Les deux tableaux suivants présentent les résultats dans le détail :

KM 2		Nombre ddl	T	Seuil critique κ	Décision
Weibull [84 ; 216]	PU A1	133	9,18	160,90	H_0 acceptée ✓
	PU A2		8,87		H_0 acceptée ✓
	PU A3		3,51		H_0 acceptée ✓
Weibull [0 ; 216]	VL-MP A1 R1	212	2069,47	246,93	H_0 rejetée ✗
	VL-MP A1 R2		1663,40		H_0 rejetée ✗
	VL-MP A2 R1		2470,57		H_0 rejetée ✗
	VL-MP A2 R2		1955,93		H_0 rejetée ✗
	VL-MP A3 R1		93,01		H_0 acceptée ✓
	VL-MP A3 R2		38,61		H_0 acceptée ✓

KM 2		CF	CR	Commentaires
Weibull [84 ; 216]	PU A1	5,472 ^E - 04	2,262 ^E - 01	Apports du changement des plages d'ajustement : ✓ La fidélité aux données brutes est favorisée aux dépens de la régularité des données lissées pour les PU
	PU A2	1,733 ^E - 03	3,838 - 01	
	PU A3	1,592 ^E - 04	5,155 ^E - 01	
Weibull [0 ; 216]	VL-MP A1 R1	2,359 ^E - 02	3,583 ^E - 03	✓ La fidélité est améliorée pour les lois « validées » par le test du Khi-deux ✓ Les lois VL-MP sont plus régulières
	VL-MP A1 R2	7,847 ^E - 03	1,469 ^E - 03	
	VL-MP A2 R1	1,148 ^E - 02	2,645 ^E - 03	
	VL-MP A2 R2	4,093 ^E - 02	1,178 ^E - 03	
	VL-MP A3 R1	1,496 ^E - 03	1,110 ^E - 03	
	VL-MP A3 R2	3,135 ^E - 04	5,796 ^E - 04	

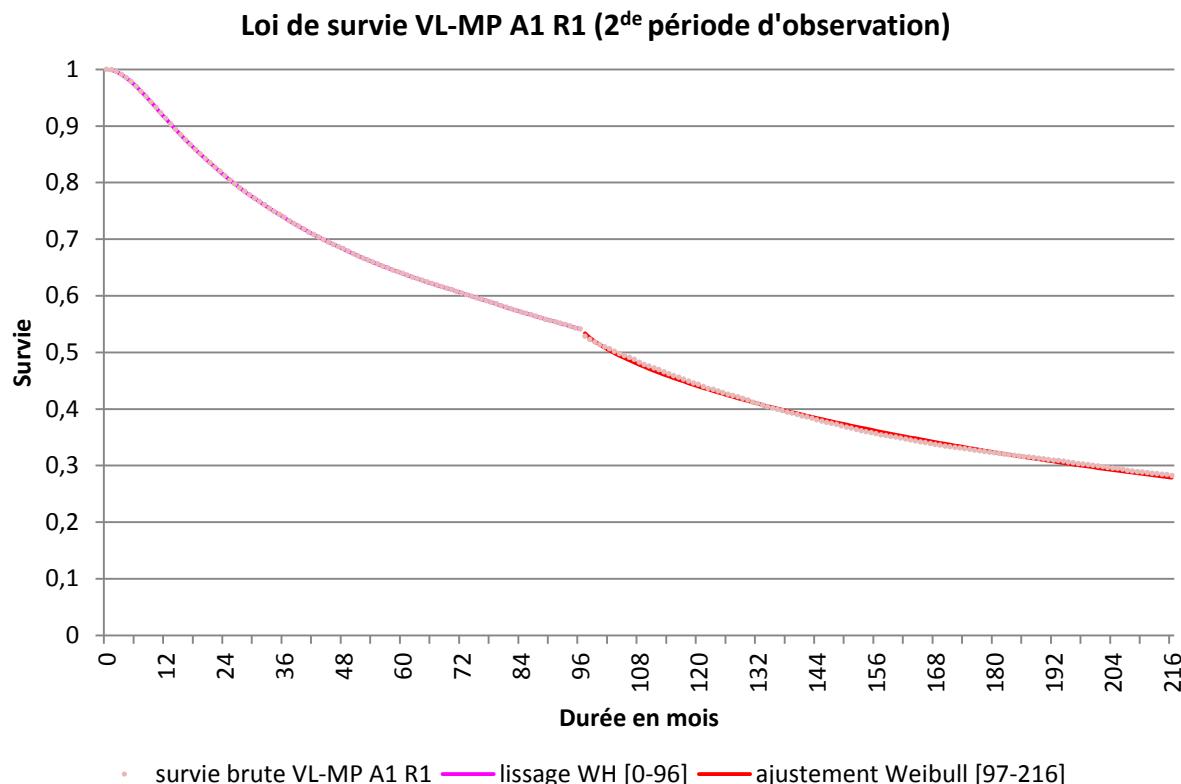
Fig. 36 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 2^{de} période d'observation/ lissage2

c) Combinaison de deux méthodes lissages

Nous envisageons une troisième approche pour le lissage des lois rejetées lors des tests d'ajustement précédents sur la période d'observation 01/01/2007 – 31/12/2012 (VL-MP A1 R1, VL-MP A1 R2, VL-MP A2 R1 et VL-MP A2 R2), qui consiste à lisser les taux bruts de survie en deux étapes :

- ✓ **Étape 1** : Employer la méthode de Whittaker-Henderson⁸¹ sur la première partie de la courbe de survie, jusqu'au saut fiscal qui constitue une rupture (i.e. de zéro à quatre-vingt-seize mois d'ancienneté) ;
- ✓ **Étape 2** : Procéder à un ajustement de Weibull sur la seconde partie de la courbe de survie (i.e. de quatre-vingt-dix-sept à deux-cents seize mois d'ancienneté), qui puisse être prolongé au-delà.

Les graphiques suivants semblent conforter l'adéquation de ce lissage en deux temps.



⁸¹ Toute la procédure de Whittaker-Henderson est détaillée à partir de la page 101.

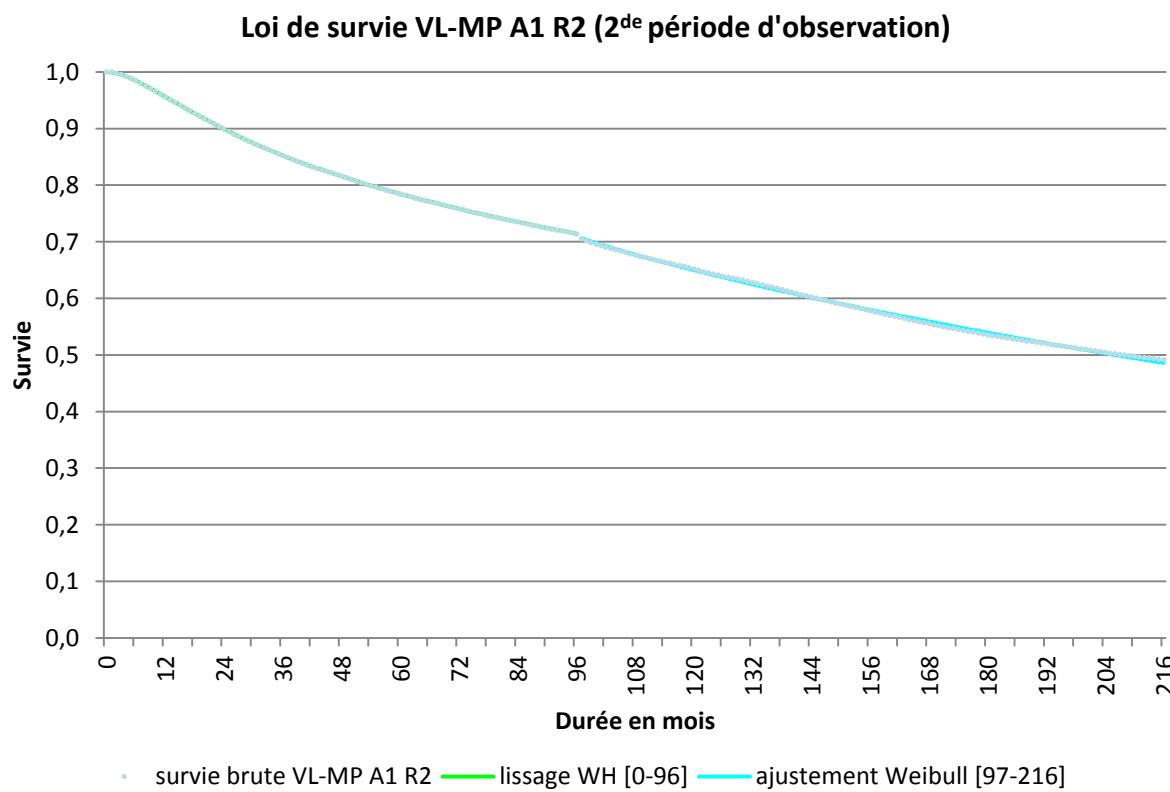
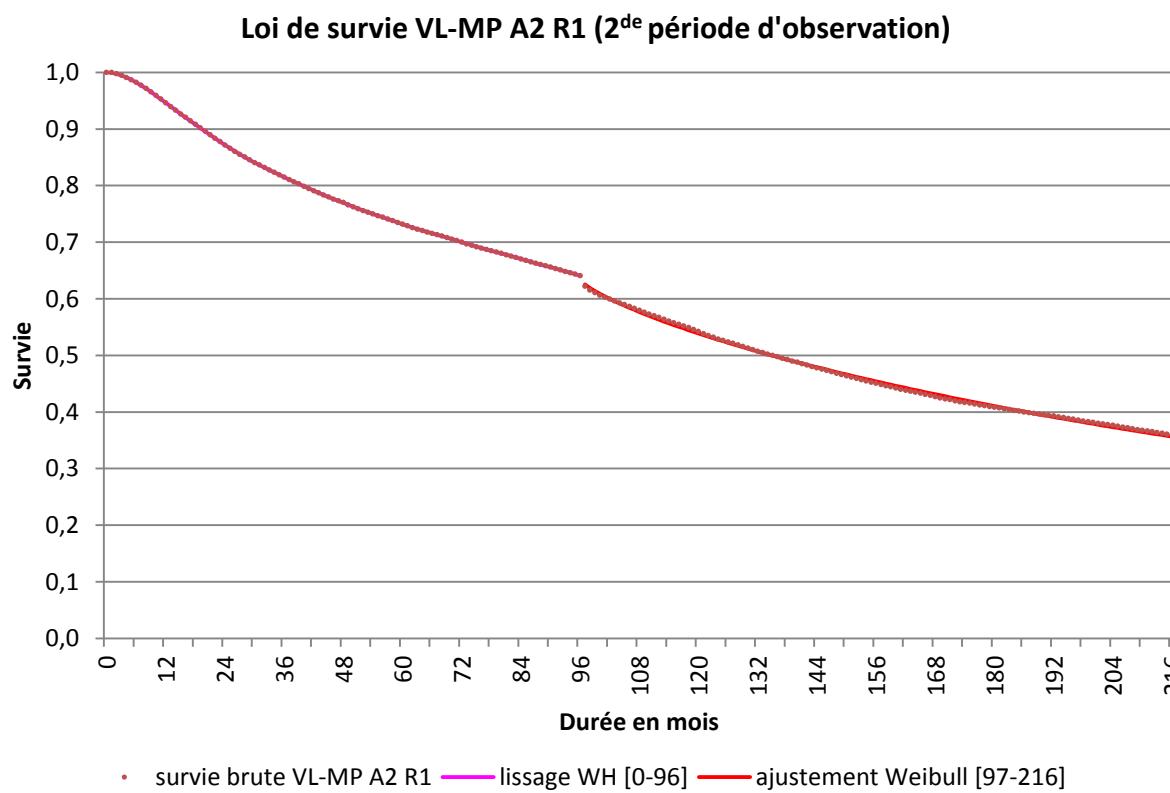


Fig. 37 : Lois de survie mensuelles VL-MP A1 R1 et VL-MP A1 R2 – 2^{de} période d'observation/ lissage 3



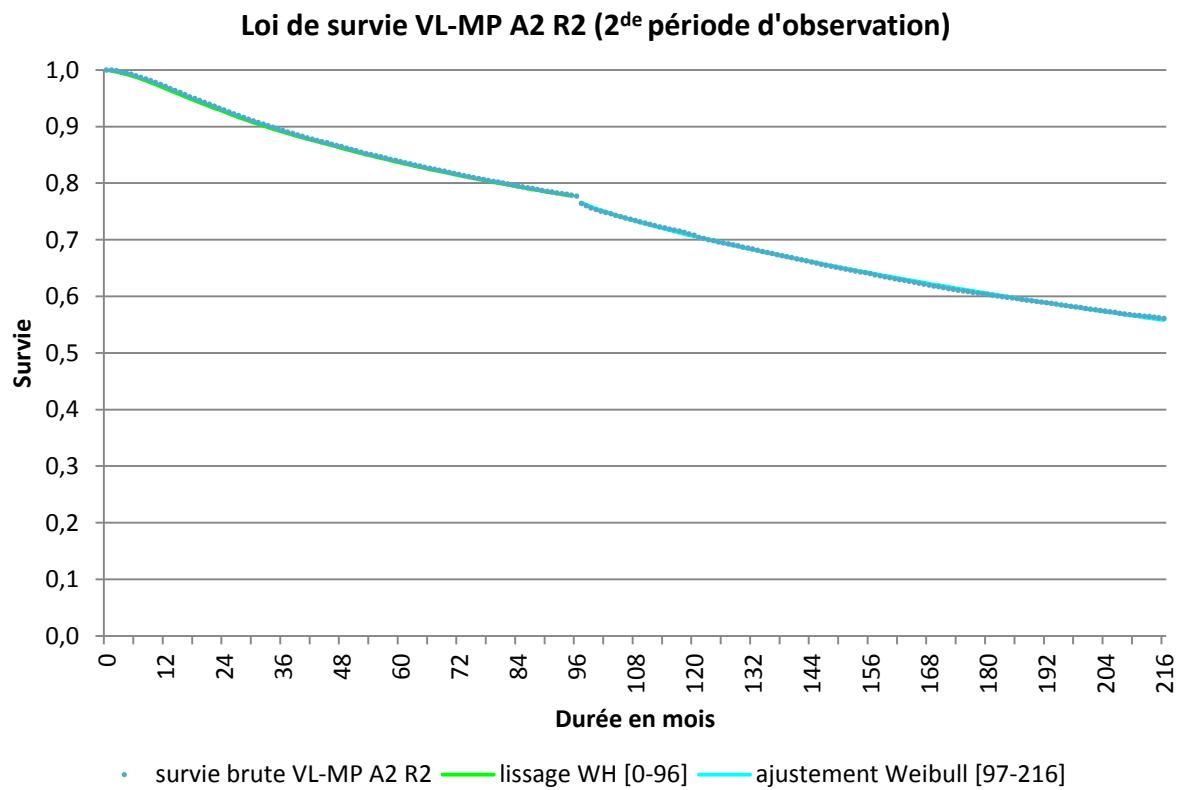


Fig. 38 : Lois de survie mensuelles VL-MP A2 R1 et VL-MP A2 R2 – 2^{de} période d'observation/ lissage 3

Les résultats des tests d'ajustement du Khi-deux ci-dessous confirment la conformité des lois lissées aux données brutes.

KM 2		ddl	<i>T</i>	Seuil critique κ	Décision
WH [0 ; 96]	VL-MP A1 R1	96	0,65	119,86	H_0 acceptée ✓
Weibull [97 ; 216]		115	53,45	141,01	H_0 acceptée ✓
WH [0 ; 96]	VL-MP A1 R2	96	0,46	119,86	H_0 acceptée ✓
Weibull [97 ; 216]		115	48,46	141,01	H_0 acceptée ✓
WH [0 ; 96]	VL-MP A2 R1	96	0,70	119,86	H_0 acceptée ✓
Weibull [97 ; 216]		115	122,14	141,01	H_0 acceptée ✓
WH [0 ; 96]	VL-MP A2 R2	96	0,73	119,86	H_0 acceptée ✓
Weibull [97 ; 216]		115	52,00	141,01	H_0 acceptée ✓

Fig. 39 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 2^{de} période d'observation/ lissage 3

3) Choix des méthodes lissages

Période d'observation 01/01/1990 – 31/12/2012

- ✓ L'ajustement paramétrique de Weibull à quatre paramètres est retenu pour l'ensemble des lois estimées sur la première période d'observation.

Période d'observation 01/01/2007 – 31/12/2012

- ✓ L'ensemble des lois PU sont ajustées par une loi de Weibull à quatre paramètres sur la plage [84 ; 216] mois ;
- ✓ Les lois VL-MP des contrats souscrits à un âge avancé (VL-MP A3 R1 et VL-MP A3 R2) sont ajustées par une loi de Weibull à quatre paramètres sur la plage [0 ; 216] mois ;
- ✓ Les lois VL-MP des contrats souscrits avant l'âge de 65 ans (VL-MP A1 R1, VL-MP A1 R2, VL-MP A2 R1 et VL-MP A2 R2) sont lissées en deux étapes :
 - Lissage de Whittaker-Henderson sur la plage [0 ; 96] mois ;
 - Ajustement de Weibull sur la plage [97 ; 216] mois.

6 Détermination des taux de rachat partiel

Nous déterminons des taux de rachats partiels à appliquer aux rachats totaux lors de la projection, pour chaque découpage et selon l'ancienneté, afin de reconstituer un taux de rachat global.

Nous avons initialement envisagé de réaliser une estimation « en montants » sous la forme d'une étude de proche en proche.

Par cette expression, nous entendons la réalisation d'un calcul de taux de rachat correspondant au rapport entre le montant de sinistres et celui de la provision mathématique à l'ouverture, réalisés pour chaque année à l'aide des données historiques récentes.

La procédure est la suivante :

- ✓ Les montants de rachats partiels bruts de prélèvements sociaux, qui ont été réalisés au cours des années 2010, 2011 et 2012 par exemple sont sommés pour chaque année, selon le découpage par produit et l'ancienneté du contrat en année ;
- ✓ Les PM d'ouverture après incorporation de la PB sont également agrégées selon le même découpage et sur la même période ;
- ✓ Le rapport des deux agrégats précédents fournit des taux de rachats partiels pour chaque découpage par produit et ancienneté, sur les trois années de calcul ;
- ✓ La moyenne des trois années correspond finalement au taux de rachats partiels.

N.B. : Les anciennetés sont ensuite regroupées en intervalles représentatifs de comportements homogènes.

$$Taux_{RP}^N = \frac{\sum_N \sum_{portefeuille} Rachats partiels bruts de PS avec PB incorporée}{\sum_N \sum_{portefeuille} PM ouverture}$$

Où :

- N est l'année d'étude ;
- PS correspond au montant des prélèvements sociaux.

Cependant, le montant de la PM d'ouverture n'est pas directement disponible dans nos fichiers de données. Seul le montant de PM de clôture peut être exploité, tel que la PM de clôture de l'année $N-1$ devienne la PM d'ouverture de l'année N . Cette astuce comptable ne nous permet toutefois pas de disposer du montant de PM avec PB incorporée.

N.B. : Afin de disposer du montant de la PM d'ouverture avec incorporation de la PB, deux alternatives d'offriront à nous :

- ✓ Méthode 1 : la PM d'ouverture pourra être reconstituée à l'aide de grilles de taux de PB historiques, de façon indirecte. Ceci constitue une solution à court terme, qui ne retient pas notre préférence ;
- ✓ Méthode 2 : la PM d'ouverture avec PB incorporée pourra être directement restituée dans nos fichiers de travail, comme variable supplémentaire. Cela nécessitera un retraitement des données un peu plus conséquent, mais constituera une solution pérenne.

En attendant, nous ne souhaitons pas biaiser notre estimation des taux de rachats partiels en montants, c'est pourquoi nous préférons mettre en œuvre une deuxième approche, certes non actuarielle, mais provisoire.

La moyenne des montants de rachats partiels rapportée à celle des montants de rachats globaux sur la période allant de 2007 à 2012 révèle des tendances par classe d'ancienneté, telles qu'indiquées sur le graphique suivant :

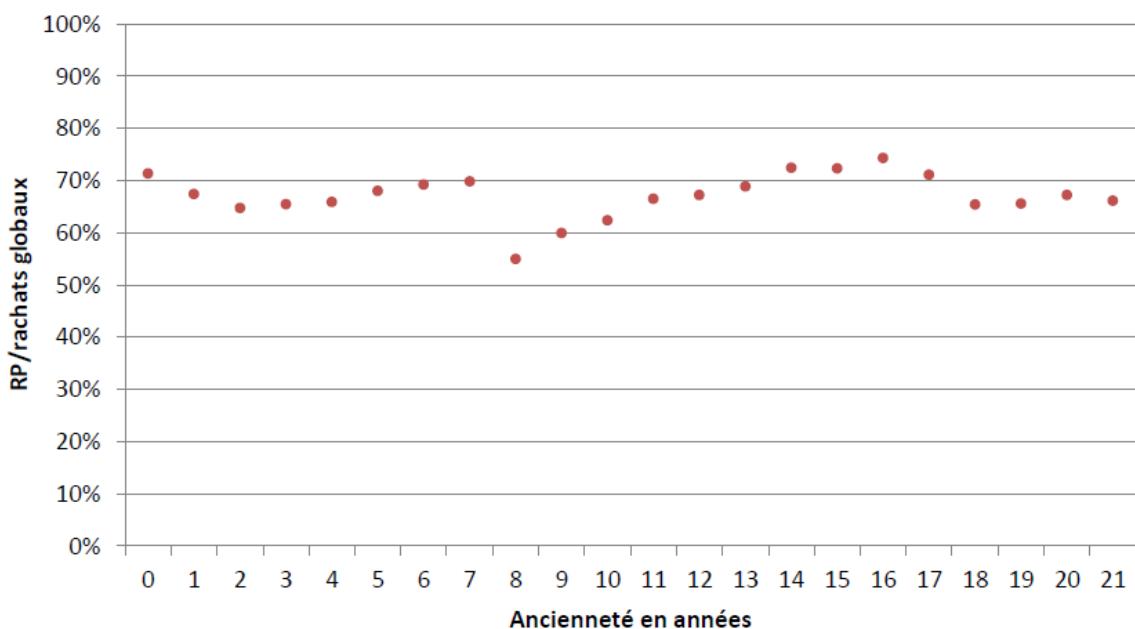


Fig. 40 : Rapport des moyennes de RP et rachats globaux pour les contrats VL-MP entre 2007 et 2012

- ✓ Jusqu'à sept années d'ancienneté incluses, les rachats partiels correspondent environ à 65 – 70 % des rachats ;
- ✓ Au moment du saut fiscal, à huit ans d'ancienneté, les rachats partiels ne représentent « plus que » 55 % des rachats ;
- ✓ S'en suit une croissance du rapport quasi exponentielle jusqu'à seize ans ;
- ✓ Au-delà, le rapport se stabilise aux alentours de 58 %.

Les différents taux de rachats partiels obtenus sont intégrés, de manière provisoire, au module de projection.

Cette étude ne tient compte ni des arbitrages, ni des avances, qui ont une incidence certaine sur les comportements de rachats partiels, mais dont l'information est absente de nos fichiers de travail.

III. Mise à jour des lois de mortalité

La construction d'une table de mortalité d'expérience complète la mise à jour des lois de chute.

Mise en lumière par le *back testing* initial, cette estimation trouve une justification à travers les statistiques descriptives sur l'évolution du portefeuille, qui portent à constater que :

- ✓ Le portefeuille d'assurés vieillit ;
- ✓ Les décès ont augmenté ces dernières années, à la fois en volume et en montant.

	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Δ Nombre	-	14,8 %	6,75 %	2,44 %	7,90 %	4,92 %
Δ Montant	-	7,29 %	5,19 %	-7,48 %	2,55 %	1,23 %

Fig. 41 : Variation annuelle du nombre et du montant de décès par année entre 2007 et 2012

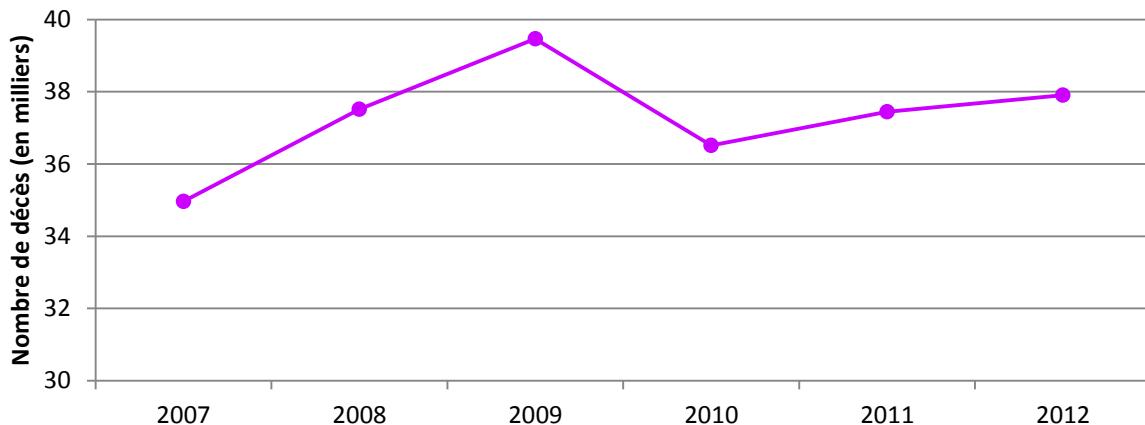


Fig. 42 : Évolution du volume des décès de 2007 à 2012

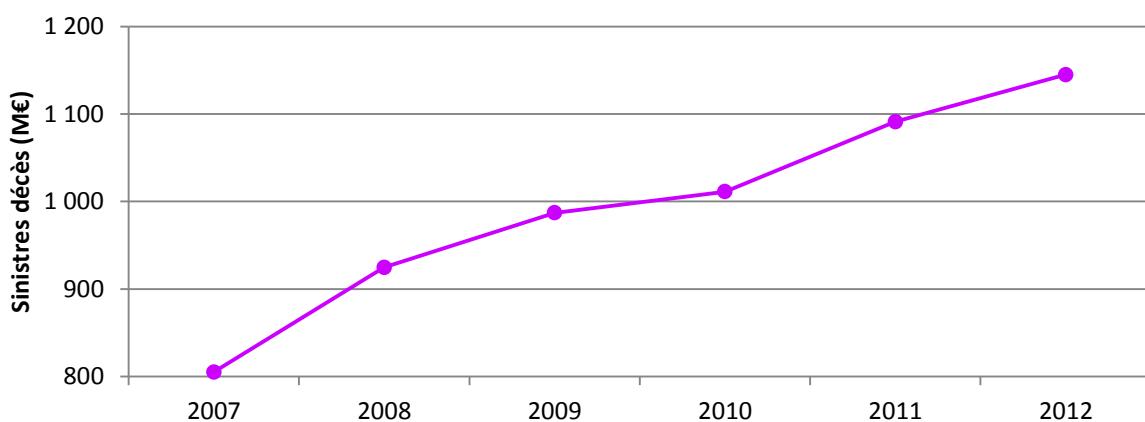


Fig. 43 : Évolution du montant des sinistres décès (€) de 2007 à 2012

1 Découpage des lois de mortalité

Les lois de mortalité actuellement utilisées intègrent pour seul critère explicatif l'âge de l'assuré. Afin de définir un découpage à la fois explicatif et homogène du phénomène de mortalité, nous procédons à une régression logistique binaire.

1.1 Modèle de la régression logistique binaire

Cette étude vise à exprimer la probabilité de décéder pour un assuré (i.e. notre variable réponse, qui possède deux modalités), en fonction de différentes variables catégorielles propres à l'individu lui-même ou à son contrat d'épargne et qui sont *a priori* susceptibles d'avoir une influence sur la mortalité de notre portefeuille, telles que :

- ✓ L'âge de l'assuré ;
- ✓ Le sexe de l'assuré ;
- ✓ Le montant investi dans le contrat ;
- ✓ La branche du contrat ;
- ✓ Le réseau de distribution du contrat.

N.B. : Lors de l'étude portant sur les rachats, nous avons immédiatement écarté du découpage les variables relatives à la catégorie socio-professionnelle et à la situation familiale du souscripteur, sans en évaluer la significativité, pour des raisons ayant trait à leur évolutivité. Bien que ces variables justifient la réalisation d'une étude plus poussée dans le cadre de la mortalité, nous les excluons cependant par incertitude des données. La mise à jour irrégulière de ces informations évolutives (notamment du fait de la relation client) en limite en effet l'exhaustivité et nous avons rencontré des difficultés à réconcilier l'intégralité de ces données avec le fichier source.

Formellement, le modèle est le suivant :

$$\pi(x_i) = \mathbb{P}(Y = \text{décès} | X = x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}$$

Où :

- Y est la variable binaire de réponse du modèle (décès ou survie) ;
- Les X sont les variables explicatives, dont les β sont les paramètres.

L'utilisation de la fonction de lien logit, telle que $g(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$, nous permet d'écrire :

$$\log\left(\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Pour chaque variable, le rapport de cotes (« *odds ratio* ») correspond finalement à l'exponentielle de son paramètre estimé.

Modélisée à l'aide de la « PROC LOGISTIC » de SAS®, la régression logistique permet également de prendre en compte l'exposition au risque via une variable de fréquence. Cette procédure utilise la méthode du maximum de vraisemblance et l'algorithme de résolution numérique de Newton-Raphson pour maximiser la log-vraisemblance. La légitimité du modèle est alors assurée par les résultats asymptotiques, qui indiquent la convergence de notre modèle et différents tests statistiques de spécification sont réalisés sur les paramètres estimés. Leur analyse encourage la sélection des variables explicatives du découpage final.

1.2 Sélection des variables explicatives

Les résultats de la procédure précédente indiquent que toutes les variables étudiées sont significatives au seuil de 5 %. Elles entrent par conséquent en considération dans le modèle. Leurs importances s'avèrent néanmoins être d'ordres différents. Aux vues de la faiblesse des montants des statistiques du Khi-deux de Wald des variables « montant investi », « branche » et « réseau de distribution », relativement à celles de l'âge et dans une moindre mesure du sexe, nous tirons la conclusion que les critères qui influent le plus sur la probabilité de décès des assurés du portefeuille d'épargne sont de loin la variable « âge » puis la variable « sexe ».

N.B. : Les estimations des rapports de cotes confirment par ailleurs la croissance des décès en fonction de l'âge ainsi qu'une surmortalité des hommes relativement aux femmes (ce rapport s'élève à 1,6). L'éloignement de leurs rapports de cotes par rapport à l'unité, pour chacune de leurs modalités, témoigne enfin de la dépendance de ces variables.

En définitive, le découpage arrêté des lois de mortalité se résume aux critères sociodémographiques traditionnels que sont l'âge et le sexe de l'assuré. Nous obtenons ainsi trois lois de mortalité différentes :

- ✓ Loi de mortalité dite « mixte » (sans distinction de sexe) ;
- ✓ Loi de mortalité féminine ;
- ✓ Loi de mortalité masculine.

1.3 Choix de la méthode d'estimation

En ce qui concerne la méthode d'estimation à proprement parler, deux approches sont tour à tour envisagées :

- ✓ La première méthode, inspirée de l'estimateur des moments de Hoem⁸², consiste à estimer les taux de mortalité comme le nombre de décès rapporté à l'effectif sous risque de mortalité ;
 - ✓ La seconde méthode est celle de Kaplan-Meier. Comparée à la première méthode, elle permet de valider sa pertinence.
- ⇒ Opérationnelle, plus rapide à mettre en œuvre et facilement renouvelable, c'est la première approche qui devrait finalement être conservée au niveau interne.

⁸²L'estimateur de Hoem est obtenu en considérant qu'un assuré d'âge x n'est exposé au risque de décès dans l'intervalle d'âge $[x; x + 1[$ considéré, qu'entre les dates de début et de fin de son observation, par censure ou à défaut par passage à l'âge supérieur. En bref, on ne considère que les périodes durant lesquelles l'assuré intègre l'effectif sous risque. La variable aléatoire de décès suit une loi de Bernoulli dont le paramètre est alors la probabilité de décéder sur la période d'exposition au risque, sachant que l'assuré était en vie au début de son observation. Par hypothèse, on suppose enfin que la probabilité pour un assuré d'âge x , de décéder entre les âges x et $x + t$ est une fonction linéaire du temps.

2 Estimation des taux bruts de décès

2.1 Méthode 1 : nombre de décès rapporté à l'effectif sous risque

2.1.1 Période d'observation

Nous procédons à l'estimation des taux bruts de mortalité d'expérience pour chaque âge et pour chaque année sur la période d'observation allant du 1^{er} janvier 2009 au 31 décembre 2012, soit quatre années d'études au total.

2.1.2 Notations et définitions

- A est la date calendaire de début d'observation, fixée au 01/01/2009 ;
- B est la date calendaire de fin d'observation, fixée au 31/12/2012 ;
⇒ A et B constituent donc les deux bornes de la fenêtre d'observation.

Populations et contrats

- P_x représente la population des individus d'âge x ;
- i est l'indice de l'assuré appartenant à la population P_x , tel que $i \in \{1, 2, \dots, N_x\}$;
- x_i correspond à l'âge (arrondi à une demi-année près) de l'assuré i lors de l'année de calcul.

Dates

Pour chaque individu i , on définit les dates et les anciennetés suivantes :

- DN_i est la **date d'entrée en état**, c'est-à-dire la date de naissance de l'assuré, telle que $x_i = 0$;
- DF_i est la **date de fin d'observation** du contrat de l'assuré i , qui correspond, selon que le contrat est sinistré ou non, à la date de survenance du sinistre DS_i ou à B :

$$DF_i = B * \mathbb{I}_{\{\text{contrat en cours}\}} + DS_i * \mathbb{I}_{\{\text{contrat sinistré}\}}$$

- DE_i est la **date de souscription** du contrat de l'assuré i .

Les taux bruts de mortalité sont estimés successivement pour chaque année de calcul au sein de la période d'observation $[A; B]$:

- N correspond à l'année de calcul ;
- A' est la date calendaire de début de calcul, fixée au 01/01/ N ;
- B' est la date calendaire de fin d'observation, fixée au 31/12/ N ;

⇒ A' et B' constituent donc les deux bornes de la fenêtre de calcul.

Pour chaque année de calcul, on supprime à la fois :

- * Les contrats souscrits après l'année de calcul, tels que $DE_i > B'$;
- * Les contrats pour lesquels la date de fin d'observation a eu lieu avant l'année de calcul, tels que $DF_i < A'$;

Afin de calculer l'effectif sous risque de chaque année, nous définissons les dates de début et de fin d'observation pour chaque individu au sein de l'année de calcul en question. Ces deux dates permettent en effet d'intégrer les phénomènes de censure et troncature déjà abordés à l'occasion de la mise en œuvre de la méthode de Kaplan-Meier.

- DO_i est la **date de début d'observation** de l'individu **sur l'année de calcul N** , soit :

$$DO_i = \max(A'; DE_i)$$

- FO_i est la **date de fin d'observation** de l'individu **sur l'année de calcul N** , soit :

$$FO_i = \min(B'; DF_i)$$

- N_i est l'**exposition** calculée au prorata de l'année de calcul, c'est-à-dire l'effectif sous risque de l'année de calcul. Il s'agit en l'occurrence du **temps d'observation** de l'individu **sur l'année de calcul N** , soit :

$$N_i = \frac{FO_i - DO_i + 1}{365,25}$$

On définit la variable indicatrice de décès pour chaque individu i , telle que :

- $D_i = 1$ si $DF_i \in [A'; B']$ et la cause de sortie est le décès ;
- $D_i = 0$ sinon.

Si $D_i = 1$, alors $N_i = 1$, l'individu est considéré comme présent tout au long de l'année de calcul.

Pour chaque âge x , on obtient l'effectif sous risque N_x et le nombre de décès D_x dans la population P_x , tels que :

$$D_x = \sum_{i \in P_x} D_i$$

Et

$$N_x = \sum_{i \in P_x} N_i$$

Le taux brut de mortalité à l'âge x résulte alors directement du quotient de ces deux agrégats :

$$\hat{q}_x = \frac{D_x}{N_x}$$

N.B. : Les résultats sont présentés un peu plus loin, à la suite du lissage des taux bruts de mortalité.

2.2 Méthode 2 : Kaplan-Meier

La seconde approche menée doit conforter l'approche initiale. Déjà introduite lors de l'estimation des taux bruts de rachat, la méthode de Kaplan-Meier nous permet à présent d'estimer les taux bruts de mortalité, en considérant comme sortie l'événement « décès ».

La méthode de Kaplan-Meier fournit des estimations de taux supérieures et donc plus prudentes que la méthode « opérationnelle ».

2.3 Intervalles de confiance

Nous déterminons un intervalle de confiance des taux bruts de mortalité q_x au seuil $1 - \alpha$.

Les effectifs sous risques sont suffisants pour construire un intervalle de confiance asymptotique, tel que pour q_x et au niveau α :

$$IC_{1-\alpha}(q_x) = \left[\hat{q}_x \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{q_x * (1 - q_x)}{N_x}} \right]$$

En remplaçant la variance inconnue par son estimation, nous obtenons finalement l'intervalle de confiance asymptotique et approximé suivant :

$$IC_{1-\alpha}(q_x) = \left[\hat{q}_x \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{q}_x * (1 - \hat{q}_x)}{N_x}} \right]$$

3 Lissage des taux bruts de décès

3.1 Choix de la plage de lissage

La plage de lissage choisie $\mathcal{P} = [20; 95]$ est telle que les effectifs d'assurés soient suffisants. Cette plage ramène le nombre d'observations à $n = 76$ dans le lissage et les tests qui suivent.

3.2 Lissage de Whittaker-Henderson

3.2.1 Théorie

La méthode de Whittaker Henderson (\mathcal{WH}) appartient à la catégorie des lissages non paramétriques.

a) *Principe*

Le lissage de Whittaker Henderson résulte de la minimisation de la combinaison linéaire entre les critères de fidélité et de régularité, sous contrainte de deux paramètres entiers positifs, qui selon leur grandeur, rendent le lissage plus ou moins fort :

- h : mesure de la précision entre les valeurs brutes et les valeurs lissées ;
- k : mesure de la force du lissage.

b) *Notations et formules*

- n est le nombre de valeurs à lisser sur la plage d'étude ;
- $\bar{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est le vecteur des âges ;
- $\bar{\hat{q}} = (\hat{q}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est le vecteur des probabilités de décès à lisser ;
- $\bar{q} = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ est le vecteur solution du problème ;
- N_x est l'effectif sous risque de décès pour les individus d'âge x ;
- \cdot^{tr} indique la transposée d'une matrice.

Pour h et k fixés, l'équation à minimiser est la suivante :

$$\mathcal{WH} = F + h * R = \sum_{x=1}^n w_x (q_x - \hat{q}_x)^2 + h \sum_{x=1}^{n-k} (\Delta^{(k)} q_x)^2$$

Ce problème de minimisation repose sur les conditions $\frac{\partial \mathcal{W}^H}{\partial q_i} = 0$, $1 \leq i \leq n$, dont la solution est de la forme suivante :

$$\bar{q}^* = (W + hD^{(k)tr}D^{(k)})^{-1}W\bar{q}$$

Où $W = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$ est la matrice de poids associée au critère de fidélité

Critère de fidélité dans le cadre du lissage de Whittaker-Henderson

La fidélité aux données brutes mesure la distance euclidienne, pondérée par un poids w_x entre la mortalité lissée q_x et la mortalité estimée \hat{q}_x , formalisée comme suit :

$$F = \sum_{x=1}^n w_x (q_x - \hat{q}_x)^2$$

Sous forme matricielle, cela revient à écrire :

$$F = (\bar{q} - \hat{q})^tr W (\bar{q} - \hat{q})$$

- La distance permet tout simplement de mesurer l'écart aux valeurs estimées ;
- Les poids sont déterminés *a priori* ou *a posteriori* :
 - o *A priori*, en cas d'absence de données ou d'estimations aberrantes, particulièrement aux âges extrêmes de la vie, on peut définir une variable indicatrice de poids :

$$\begin{cases} w_x = 0 & \text{si } \hat{q}_x = 0 \\ w_x = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- o *A posteriori*, si le lissage effectué accorde trop d'importance à certaines valeurs estimées par rapport à l'effectif sous risque de l'âge en question, principalement aux âges avancés, on peut définir la variable de poids de la sorte :

$$w_x = \frac{N_x}{\sum_{i=20}^{95} N_i} \quad \forall x \in [20; 95]$$

N.B. : Ces deux définitions de la variable de poids peuvent être combinées, mais cela compromet la mise en place de critères de sélection comme le test d'ajustement du Khi-deux. Sur notre plage sélectionnée de 76 âges, tous les poids fixés *a priori* sont unitaires.

Critère de régularité dans le cadre du lissage de Whittaker-Henderson

La régularité des données lissées mesure la distance, dépendante de k , entre les valeurs préalablement lissées par différences :

$$R = \sum_{x=1}^{n-k} (\Delta^{(k)} q_x)^2$$

Sous forme matricielle, cela revient à écrire :

$$R_k = \bar{q}^{tr} (D^{(k)tr} D^{(k)}) \bar{q}$$

Où $D^{(k)} \bar{q} = \left((\Delta^{(k)} q)(x_i) \right)_{i=1, \dots, n-k}$

Avec $(\Delta^{(k)} q)(x_i)$ la différence d'ordre k définie, pour un intervalle unitaire, comme suit :

$$\begin{cases} (\Delta^{(k)} q)(x_i) = \frac{(\Delta^{(k-1)} q)(x_{i+1}) - (\Delta^{(k-1)} q)(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ (\Delta^{(0)} q)(x_i) = q(x_i) \end{cases}$$

Choix du paramètre k

Le paramètre k fixe le degré du polynôme intervenant dans la définition du critère de régularité. La pratique a conduit les développeurs de cette méthode à fixer le paramètre k à une valeur de 3, indépendamment de la courbe à liser. Cette valeur résulte en fait de différents tests exposés dans le tableau ci-dessous :

Valeur testée de k	Observation	Choix
1	Lissage des irrégularités insuffisant	✗
2	Lissage des irrégularités insuffisant	✗
3	Lissage permettant de tenir compte d'un nombre suffisant d'informations consécutives (cf. différence d'ordre 3)	✓
4	Représentation tendant vers une droite	✗

Fig. 44 : Choix du paramètre k (force de lissage) – lissage WH

Choix du paramètre h

Le paramètre h permet de régler l'intensité du lissage souhaitée. Plus h est élevé, plus le lissage est favorisé, au détriment de la fidélité aux données brutes.

Ce paramètre est généralement compris dans un intervalle variant de 1 à 100, ce qui permet de comparer les écarts de lissage, dont les différences sont minimes. Une valeur de 30 représente un bon compromis si l'on souhaite obtenir un lissage qualifié d'intermédiaire, d'autant que les courbes résultant d'un lissage avec $h=20$ ou $h=100$ sont très proches.

Valeur testée de h	Observation	Choix
0	Aucun lissage	✗
30 à 100	Lissage « habituel »	✓
> 100	Lissage plus marqué	✗

Fig. 45 : Choix du paramètre h (mesure de précision) – lissage WH

3.2.2 Résultats

Dans tous les graphiques suivants, les taux bruts de mortalité sont indiqués en légende par « Q_x », les taux lissés par « q_x » et les effectifs sous risque de mortalité par « N ».

a) *Loi de mortalité « mixte »*

1) *Méthode 1*

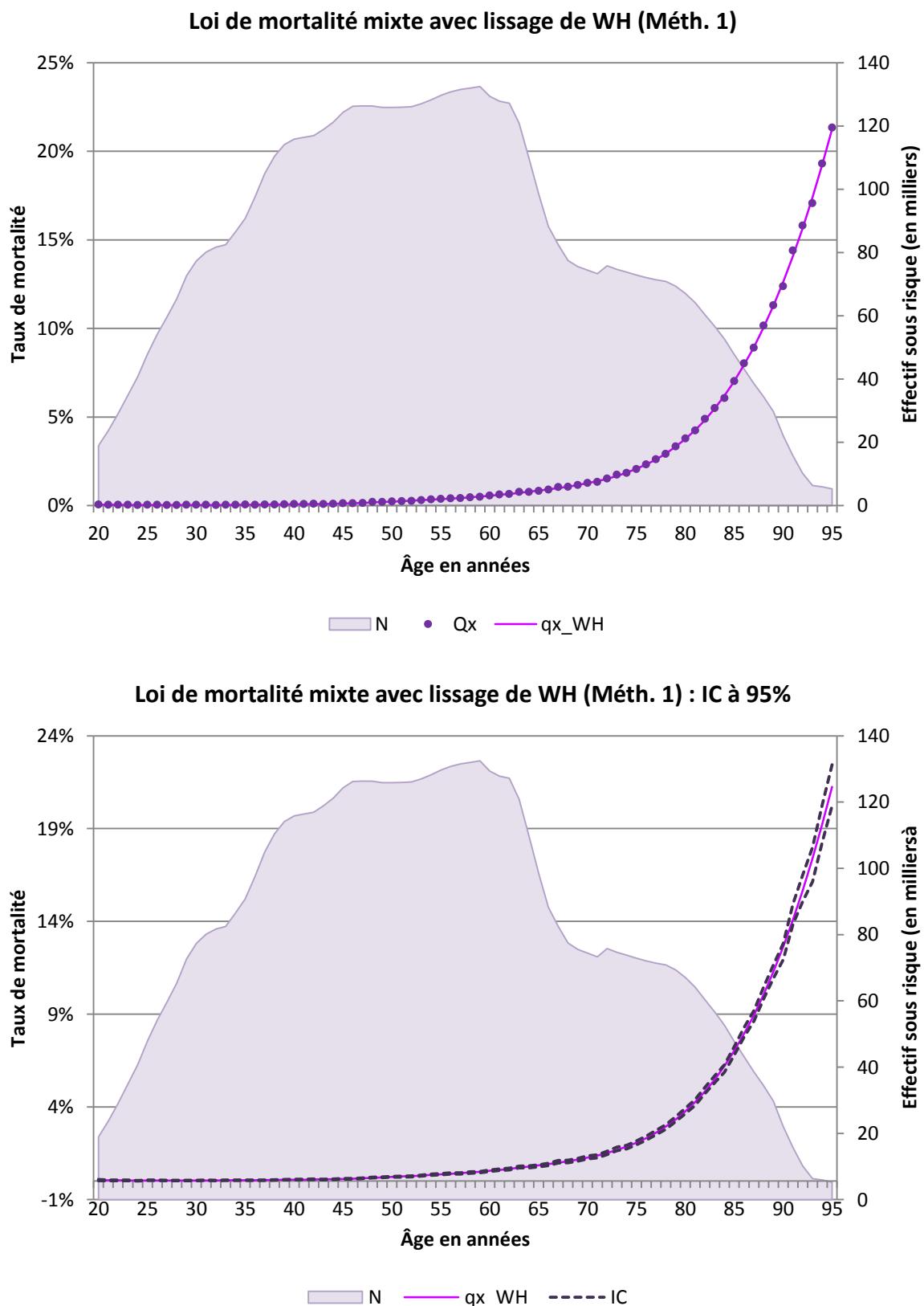


Fig. 46 : Taux de mortalité mixte – Méthode 1/ lissage WH

2) Méthode 2 (KM)

Loi de mortalité mixte avec lissage de WH (Méth. 2)



Loi de mortalité mixte avec lissage de WH (Méth. 2): IC à 95 %

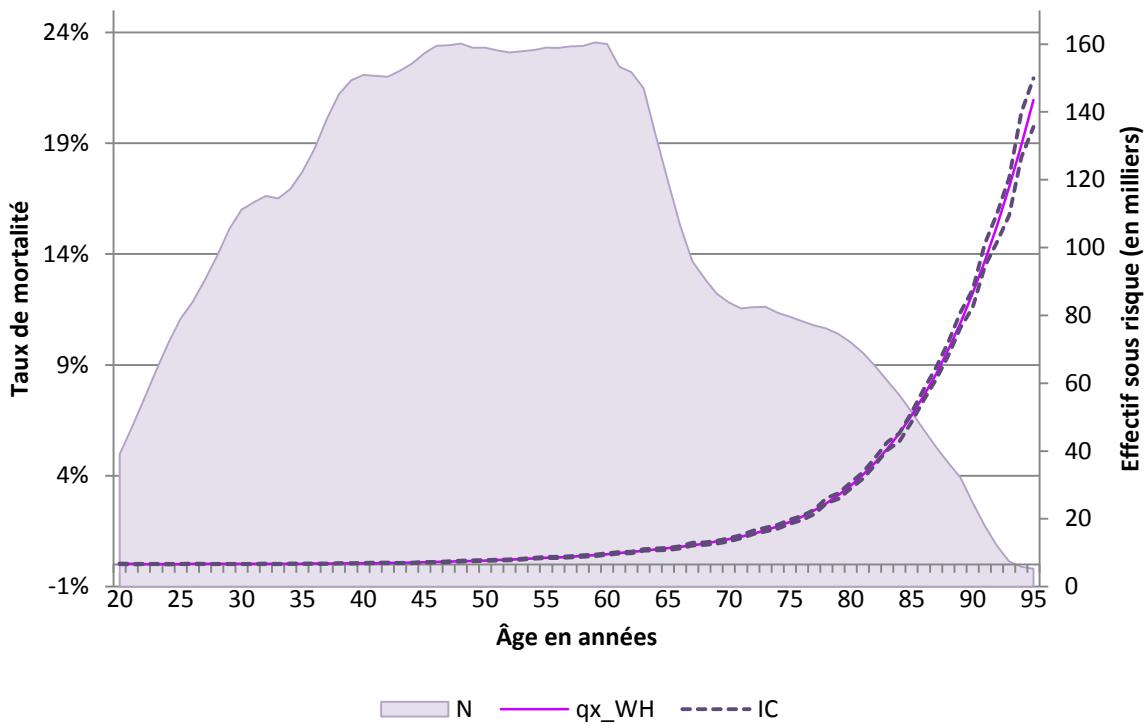


Fig. 47 : Taux de mortalité mixte – Méthode 2/ lissage WH

b) Lois de mortalité par sexe

1) Méthode 1

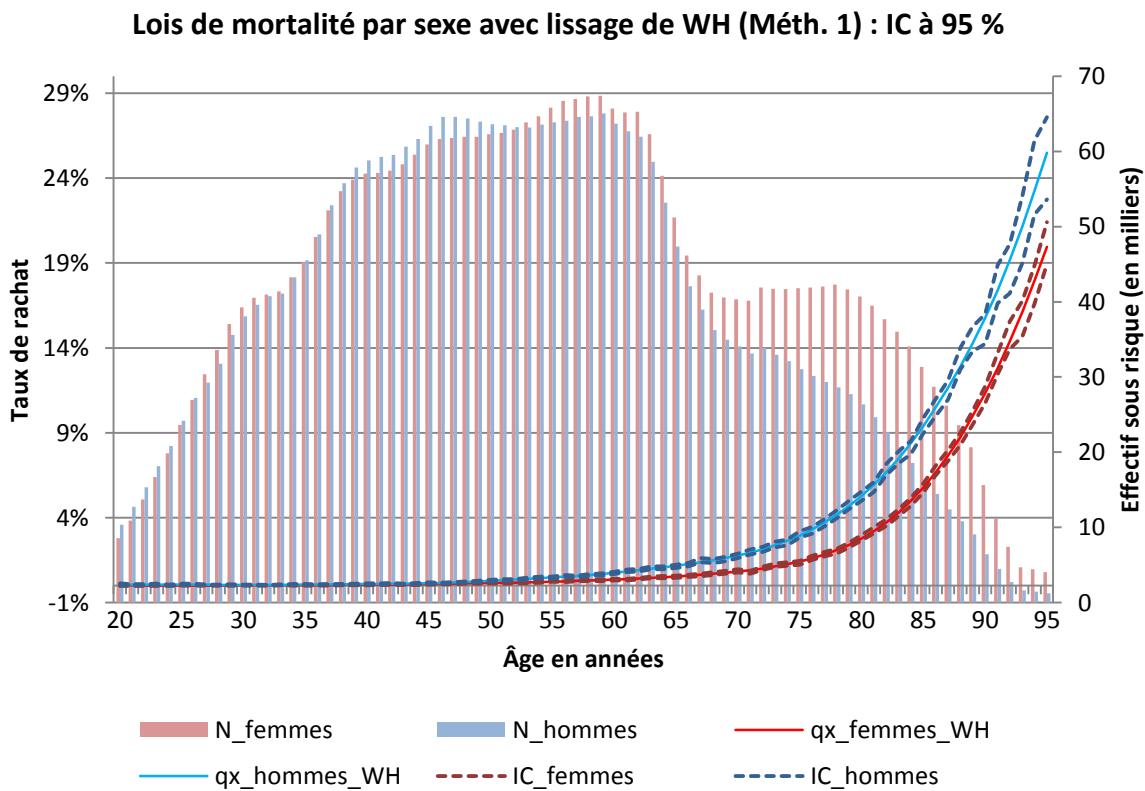
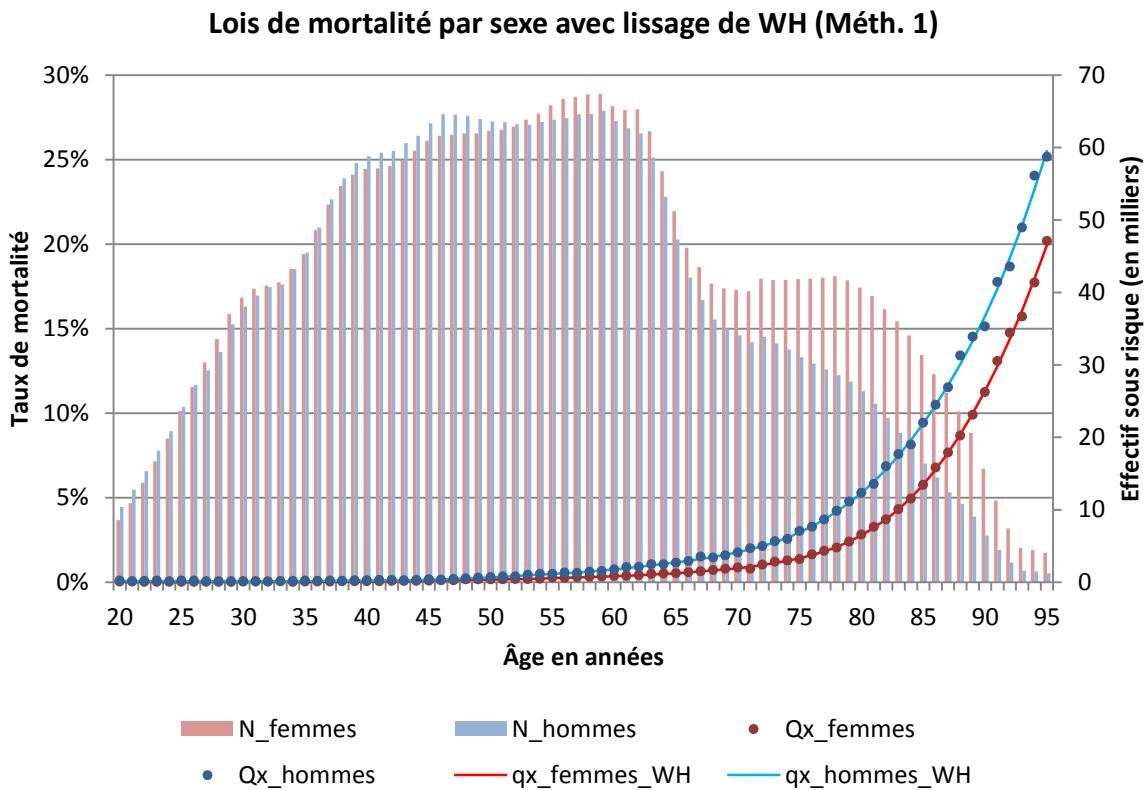
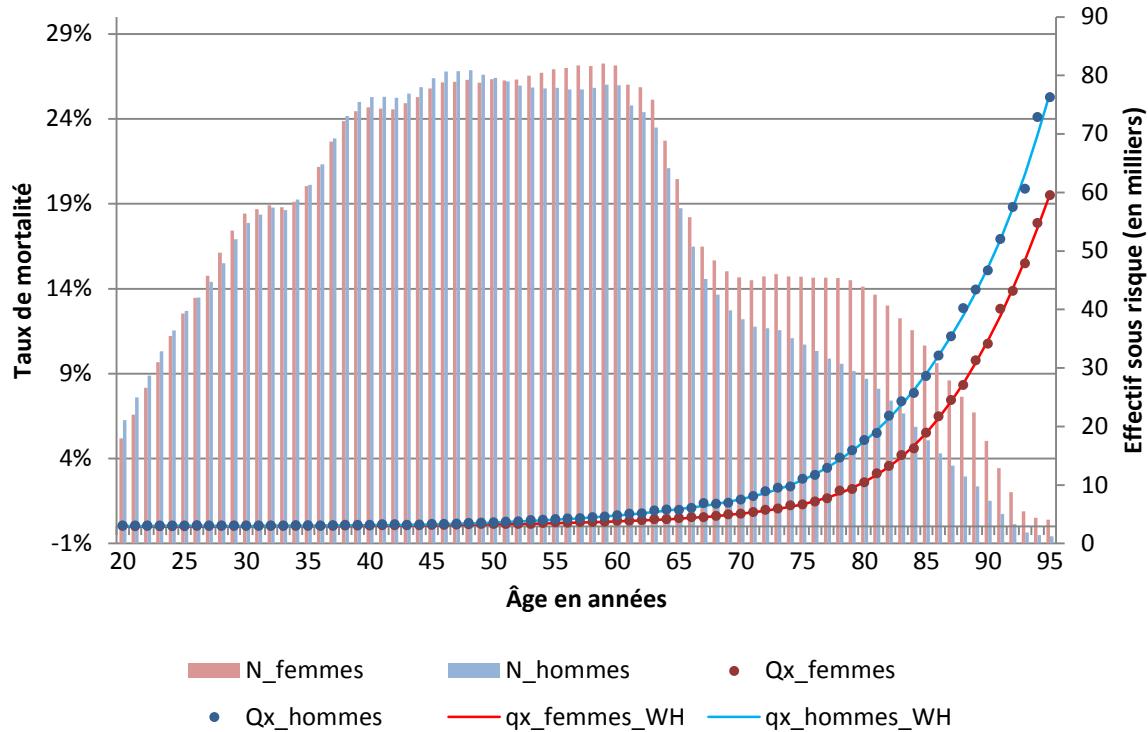


Fig. 48 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 1/ lissage WH

2) Méthode 2 (KM)

Lois de mortalité par sexe avec lissage de WH (Méth. 2)



Lois de mortalité par sexe avec lissage de WH (Méth. 2) : IC à 95 %

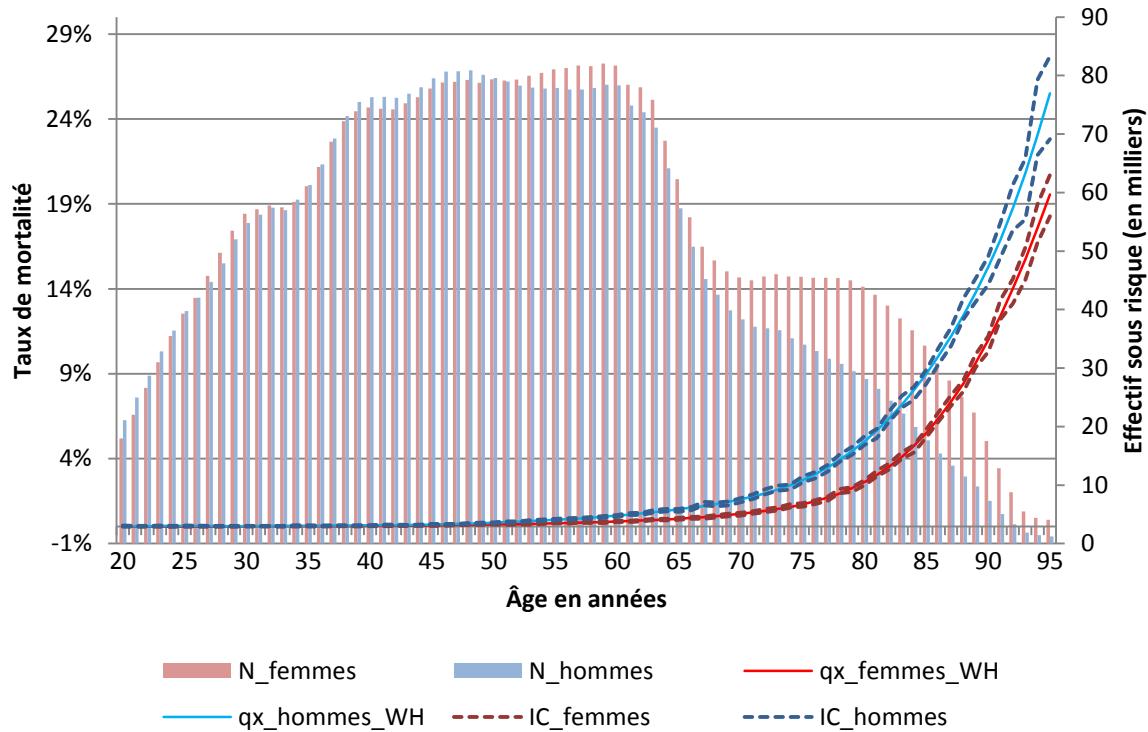


Fig. 49 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 2/ lissage WH

3.3 Régression de Poisson

Le modèle de Poisson (\mathcal{P}) fait partie des modèles linéaires généralisés, dans la catégorie des lissages paramétriques.

3.3.1 Principe

Les modèles linéaires généralisés consistent à étudier la liaison entre une variable dépendante (la variable réponse) et des variables explicatives (les prédicteurs).

Ils comprennent plus précisément les trois composantes suivantes :

- ✓ La **composante aléatoire** : c'est la variable de réponse Y à laquelle est associée une loi de probabilité appartenant à la famille des lois exponentielles.
 (Y_1, \dots, Y_n) est un échantillon aléatoire de taille n de la variable de réponse Y , les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n étant supposées indépendantes.
- ✓ La **composante déterministe** : ce sont les prédicteurs exprimés sous la forme d'une combinaison linéaire $\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_K X_K$.
Où les X sont les covariables dont les β sont les paramètres.
- ✓ La **fonction de lien** décrit enfin la relation fonctionnelle entre les deux composantes précédentes, telle que :

$$g(\mu) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_K X_K$$

N.B. : Nous souhaitons modéliser le nombre de décès par âge dans notre portefeuille d'étude. Il s'agit en l'occurrence d'une variable discrète positive : le comptage d'un événement plutôt rare.

Chaque variable de réponse correspond ainsi au nombre de décès distribué selon une loi de Poisson de paramètre λ , telle que :

$$f(y; \lambda) = \exp(-\lambda) * \frac{\lambda^y}{y!}$$

Avec $\lambda = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{E}(Y) = \mu$

Nous cherchons donc à estimer le paramètre μ qui permette à la distribution théorique d'être ajustée à celle de nos données brutes.

Le modèle de Poisson utilise la fonction de lien \log , telle que :

$$g(\mu) = \log(\mu)$$

En outre, les variables explicatives correspondent à l'âge x élevé aux cinq premières puissances, telles que le modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$\log(\mu) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 = \beta_0 + \sum_{i=1}^5 \beta_i x^i$$

Finalement, le nombre de décès devient :

$$D_x = \exp\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^5 \beta_i x^i\right)$$

L'ajustement peut être réalisé à l'aide d'une variable *offset*, qui traduit la proportionnalité entre la variable de comptage et une variable explicative. L'exposition au risque de décès est corrélée positivement avec le nombre de décès observés à chaque âge.

Le logarithme du nombre d'assurés présents à l'âge x est donc introduit dans le modèle comme variable *offset*.

Le modèle devient ainsi le suivant, pour tout âge x :

$$q_x^* = \frac{D_x}{N_x} = \frac{\exp(\beta_0 + \sum_{i=1}^5 \beta_i x^i)}{N_x} = \exp\left(\beta_0 + \sum_{i=1}^5 \beta_i x^i - \log(N_x)\right)$$

Les paramètres du modèle sont estimés par maximum de vraisemblance dont les équations, non linéaires, sont résolues à l'aide d'un algorithme d'approximation itératif, typiquement celui de Newton-Raphson dans le cas du modèle log-linéaire de Poisson.

La mise en œuvre d'un modèle linéaire généralisé est réalisable du logiciel SAS© dédiée : « PROC GENMOD ».

3.3.2 Résultats

Dans tous les graphiques suivants, les taux bruts de mortalité sont indiqués en légende par « Qx ».

a) *Loi de mortalité « mixte »*

1) *Méthode 1*

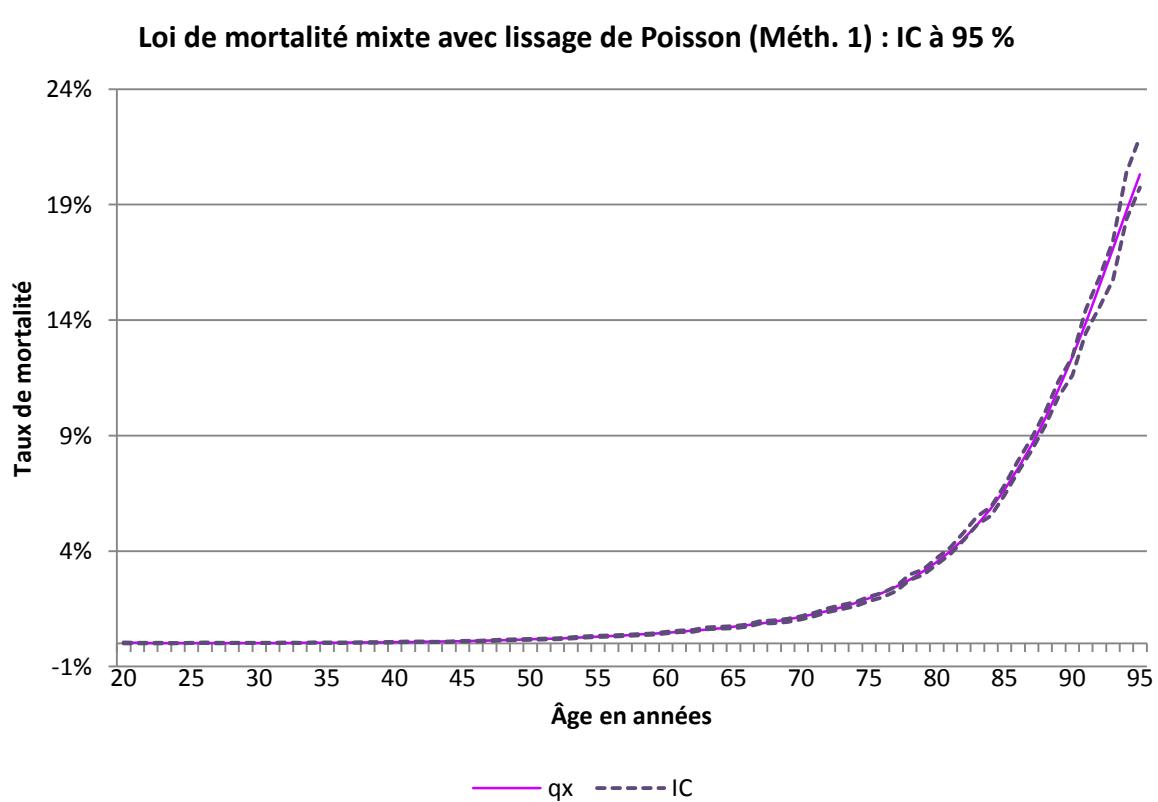
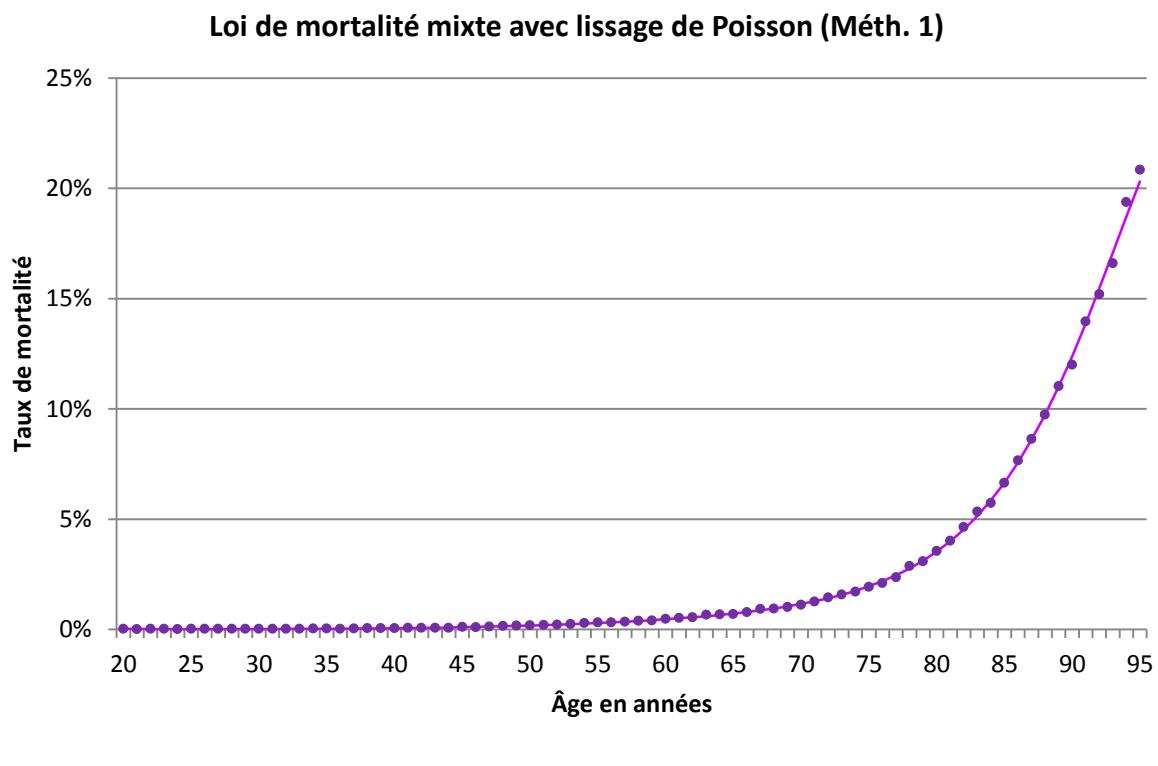
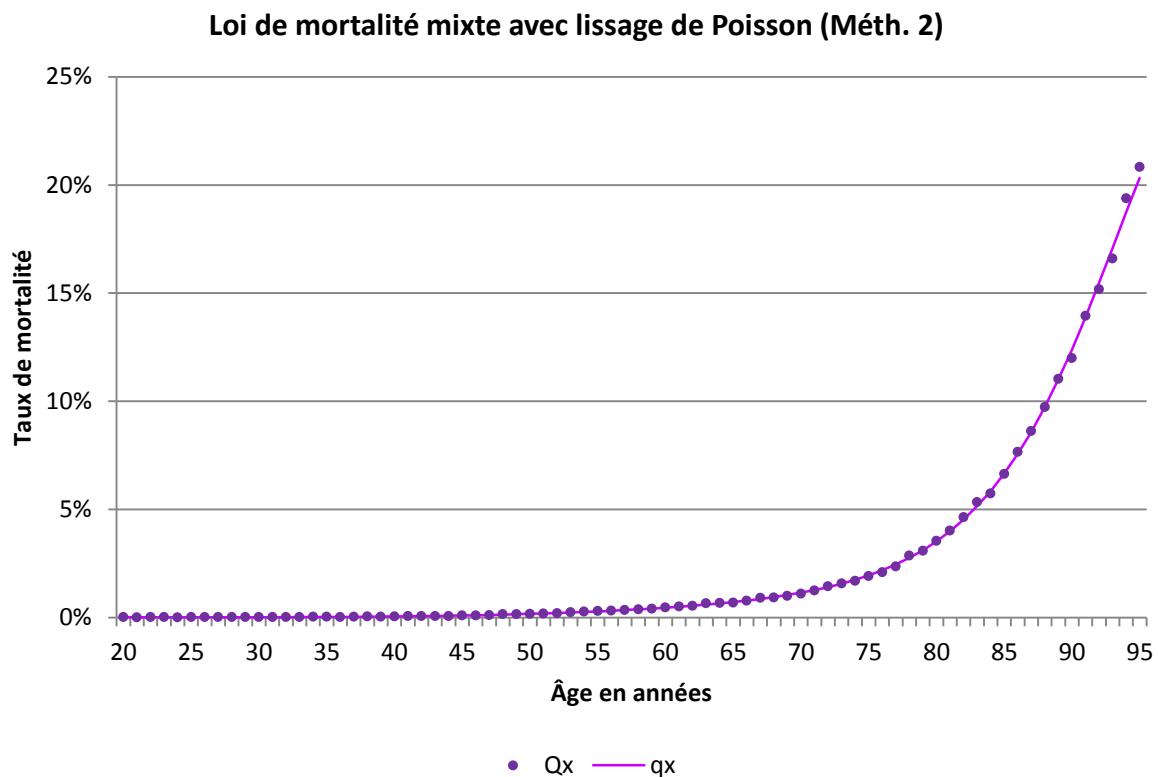


Fig. 50 : Taux de mortalité mixte – Méthode 1/ lissage Poisson

2) Méthode 2 (KM)



b) Lois de mortalité par sexe

1) Méthode 1

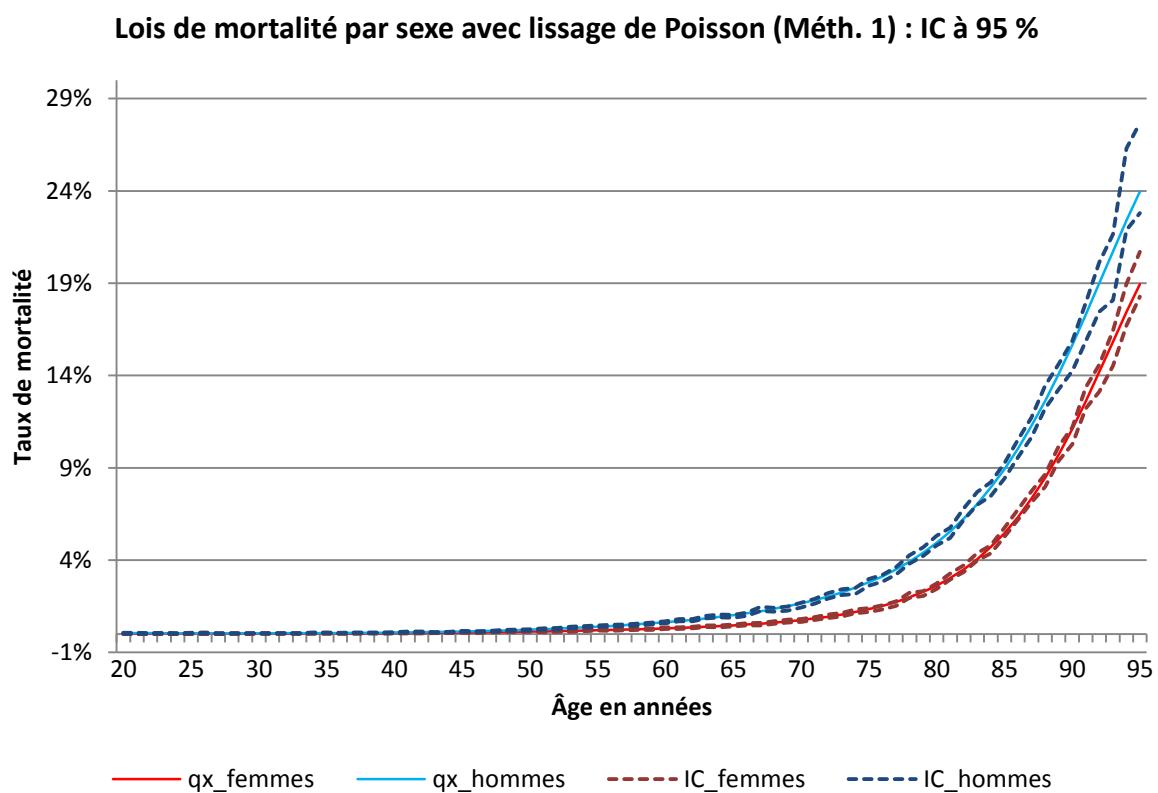
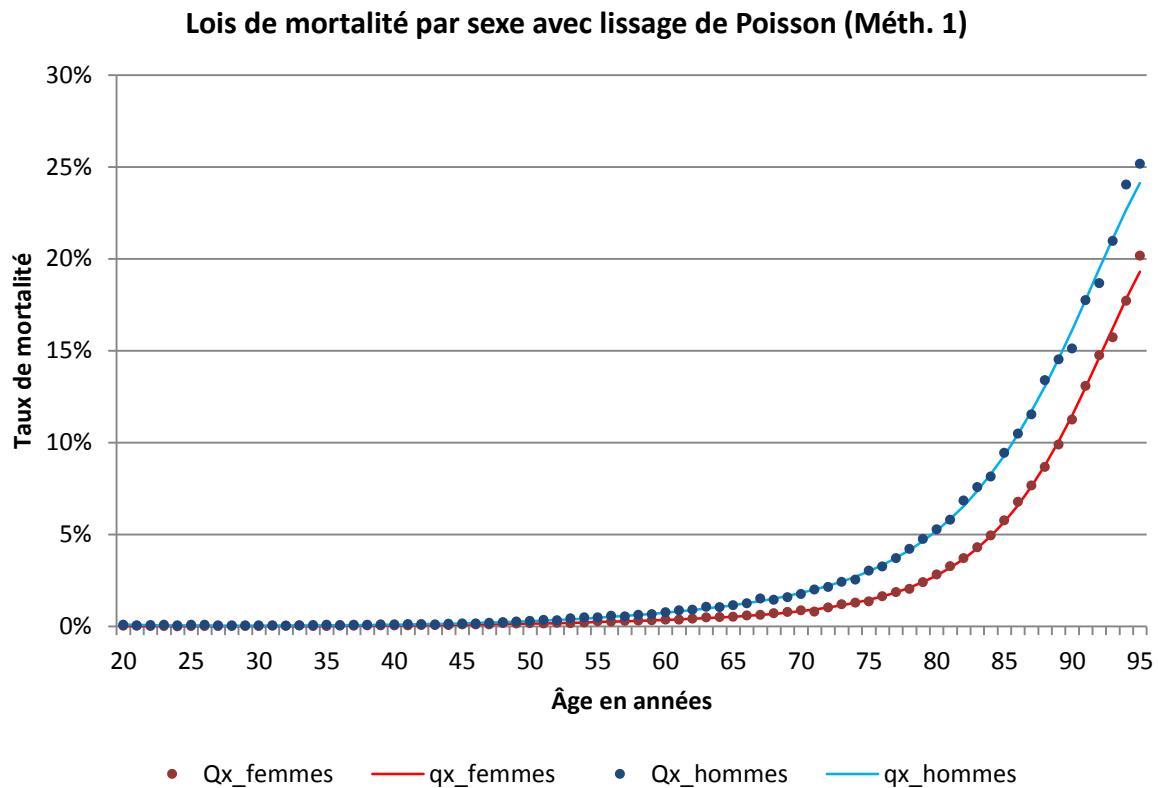


Fig. 52 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 1/ lissage Poisson

2) Méthode 2 (KM)

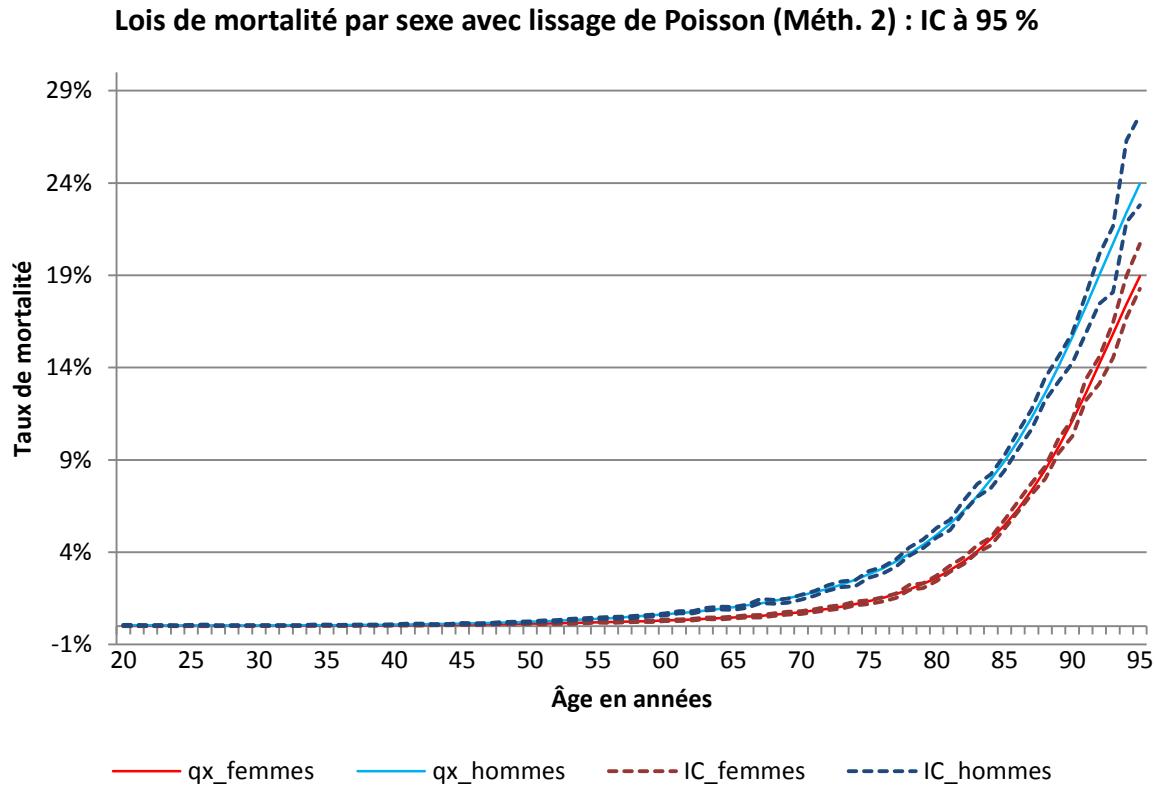
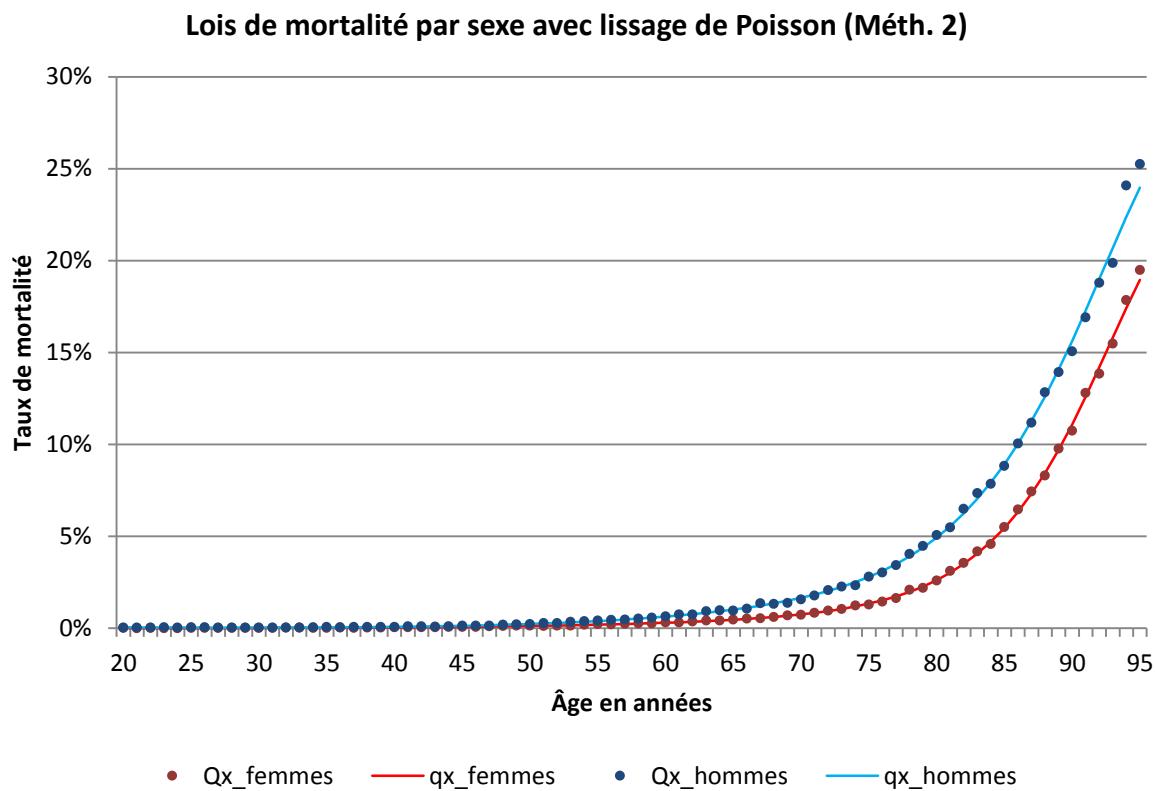


Fig. 53 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 2/ lissage Poisson

3.4 Critères d'adéquation et tests statistiques

Il existe deux critères d'adéquation des modèles linéaires généralisés aux données brutes : la déviance normalisée et la statistique du Khi-deux de Pearson. Notre objectif étant la comparaison et la sélection d'une méthode d'ajustement parmi celles de Whittaker-Henderson et de Poisson, nous privilégions les critères d'adéquation et tests statistiques présentés en pages 96 et 97, qui sont communes aux deux lissages réalisés.

3.4.1 Critères de fidélité et de régularité

Nous appliquons les définitions suivantes :

$$CF = \sum_{x=20}^{95} (\hat{q}_x - q_x)^2$$

$$CR = \sum_{x=20}^{95} (q_x - q_{x+1})^2$$

			CF	CR	Commentaires
Whittaker-Henderson	Méth. 1	Mortalité « mixte »	3,461 ^E - 05	2,445 ^E - 03	Quelle que soit la méthode :
		Mortalité féminine	5,329 ^E - 05	2,369 ^E - 03	
		Mortalité masculine	2,054 ^E - 04	3,241 ^E - 03	
	Méth. 2 (KM)	Mortalité « mixte »	6,560 ^E - 05	2,443 ^E - 03	✓ Les ordres de grandeur sont sensiblement les mêmes au sein d'un même lissage
		Mortalité féminine	4,745 ^E - 05	2,321 ^E - 03	
		Mortalité masculine	2,447 ^E - 04	3,408 ^E - 03	
Régression de Poisson	Méth. 1	Mortalité « mixte »	1,086 ^E - 04	2,204 ^E - 03	✓ La fidélité est moindre pour les données lissées à l'aide de la régression de Poisson
		Mortalité féminine	4,988 ^E - 04	2,137 ^E - 03	
		Mortalité masculine	1,279 ^E - 04	2,713 ^E - 03	
	Méth. 2 (KM)	Mortalité « mixte »	1,290 ^E - 04	2,202 ^E - 03	
		Mortalité féminine	1,005 ^E - 04	2,101 ^E - 03	
		Mortalité masculine	6,173 ^E - 04	2,763 ^E - 03	

Fig. 54 : Valeurs des critères de fidélité pour chaque méthode et par lissage

3.4.2 Test d'ajustement du Khi-deux

La **statistique de test** est la suivante :

$$T = \sum_{x=20}^{95} \frac{(N_x * \hat{q}_x - N_x * q_x)^2}{N_x * q_x}$$

$$T_{WH} \xrightarrow{\text{sous } H_0} \chi^2_{75} \text{ et } T_P \xrightarrow{\text{sous } H_0} \chi^2_{69}$$

Où :

- $N_x * \hat{q}_x$ est le nombre des décès estimés à l'âge x ;
- $N_x * q_x$ est le nombre des décès estimés et lissés à l'âge x ;
- $r = 0$ (resp. 5) paramètre estimé dans le cadre du lissage de Whittaker-Henderson (resp. Poisson).

Le **seuil critique** κ de la loi du Khi-deux à 75 degrés de liberté (resp. 69 ddl) est égal à 96,21 (resp. 89,39) pour un niveau de confiance fixé à 5 %.

			ddl	T	Seuil critique κ	Décision
Whittaker-Henderson	Méth. 1	Mortalité « mixte »	75	42,94	96,21	H_0 acceptée ✓
		Mortalité féminine		45,59		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		49,42		H_0 acceptée ✓
	Méth. 2 (KM)	Mortalité « mixte »	75	59,12	96,21	H_0 acceptée ✓
		Mortalité féminine		49,90		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		61,68		H_0 acceptée ✓
Régression de Poisson	Méth. 1	Mortalité « mixte »	69	66,60	89,39	H_0 acceptée ✓
		Mortalité féminine		65,82		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		85,73		H_0 acceptée ✓
	Méth. 2 (KM)	Mortalité « mixte »	69	80,49	89,39	H_0 acceptée ✓
		Mortalité féminine		67,25		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		93,31		H_0 rejetée ✗

Fig. 55 : Résultats du test d'ajustement du Khi-deux pour chaque méthode et par lissage

D'après le tableau ci-dessus, les statistiques de test obtenues de la confrontation des effectifs estimés bruts et lissés s'éloignent un peu plus du seuil critique pour la première méthode que pour la seconde. Ceci signifie que la prise de risque est moindre dans l'acceptation de l'hypothèse nulle. La pertinence de cette méthode est donc confirmée.

En ce qui concerne la méthode de lissage employée, celle de Whittaker-Henderson semble plus fidèle et fournit des statistiques de tests inférieures, pour des seuils critiques plus élevés.

3.4.3 Test des changements de signe

Le test des changements de signe peut conforter les conclusions précédentes.

- ✓ Les conditions d'application de l'approximation normale sont vérifiées et les âges x sont indépendants.
- ✓ Le nombre de changement de signe dans la série des différences $\Delta_x = q_x - \hat{q}_x$ suit une loi Binomiale de paramètres $(n - 1)$ et $1/2$, soit $\mathcal{B}(75; 1/2)$.

La **statistique de test** est la suivante :

$$T = \frac{2 * m - 75}{\sqrt{75}}$$

Où m correspond au nombre de changements de signe.

- ✓ m est suffisamment grand pour affirmer que la statistique de test suit approximativement une loi Normale.

Le **seuil critique** κ est égal à 1,96 pour un seuil de 5% sous H_0 .

			n	m	T	Seuil critique	Décision
Whittaker-Henderson	Méth. 1	Mortalité « mixte »	76	44	1,501	1,96	H_0 acceptée ✓
		Mortalité féminine		34	- 0,808		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		45	1,732		H_0 acceptée ✓
	Méth. 2 (KM)	Mortalité « mixte »	76	39	0,346	1,96	H_0 acceptée ✓
		Mortalité féminine		46	1,952		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		43	1,270		H_0 acceptée ✓
Régression de Poisson	Méth. 1	Mortalité « mixte »	76	29	-1,962	1,96	H_0 rejetée ✗
		Mortalité féminine		36	-0,346		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		31	-1,501		H_0 acceptée ✓
	Méth. 2 (KM)	Mortalité « mixte »	76	35	- 0,577	1,96	H_0 acceptée ✓
		Mortalité féminine		40	0,577		H_0 acceptée ✓
		Mortalité masculine		36	- 0,346		H_0 acceptée ✓

Fig. 56 : Résultats du test des changements de signe pour chaque méthode et par lissage

Ce deuxième test confirme globalement les conclusions tirées du test d'ajustement du Khi-deux. La première méthode fournit des résultats tout à fait satisfaisants et le lissage de Whittaker-Henderson obtient notre préférence.

4 Comparaison des taux de mortalité d'expérience et réglementaires

Nous souhaitons comparer les taux de mortalité d'expérience lissés (à l'aide de la méthode de Whittaker-Henderson) aux taux de mortalité des tables réglementaires **TH00-02** et **TF00-02** (représentées en pointillés sur les graphiques ci-dessous).

Les tables TH00-02 et TF00-02 se substituent respectivement aux tables TD88-90 et TV88-90, depuis le 1er janvier 2006, pour tous les contrats autres que ceux en rentes viagères, qui nécessitent l'utilisation de tables par génération.

Ces tables sont élaborées d'après les données de l'INSEE⁸³ de la population française globale. Elles sont qualifiées d'instantanées, dans la mesure où l'on ignore la génération de l'assuré dans son attribution d'une probabilité de décès.

N.B. : Depuis fin 2012, la tarification interdit toute discrimination relative au sexe de l'assuré. Le provisionnement selon le sexe reste en revanche concevable.

L'utilisation d'une table commune aux deux sexes est envisageable tant qu'elle respecte le principe de prudence. En ce qui concerne le risque de décès, qui caractérise les contrats en portefeuille, la table réglementaire « prudente » de référence est la TH00-02.

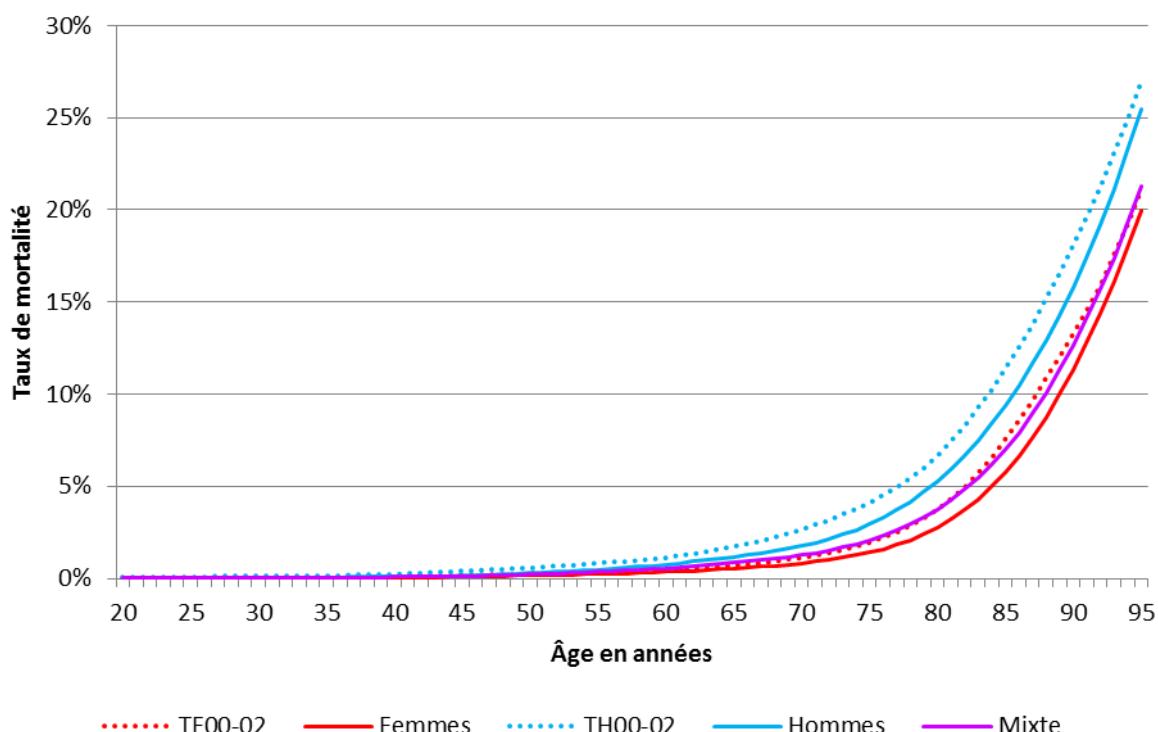


Fig. 57 : Lois de mortalité réglementaire et d'expérience – Méthode 1

⁸³ Institut national de la statistique et des études économiques.

Nous constatons que la mortalité d'expérience est inférieure à la mortalité issue des lois réglementaires, ce qui est assez logique puisque les tables réglementaires sont censées prendre en compte un certain degré de prudence.

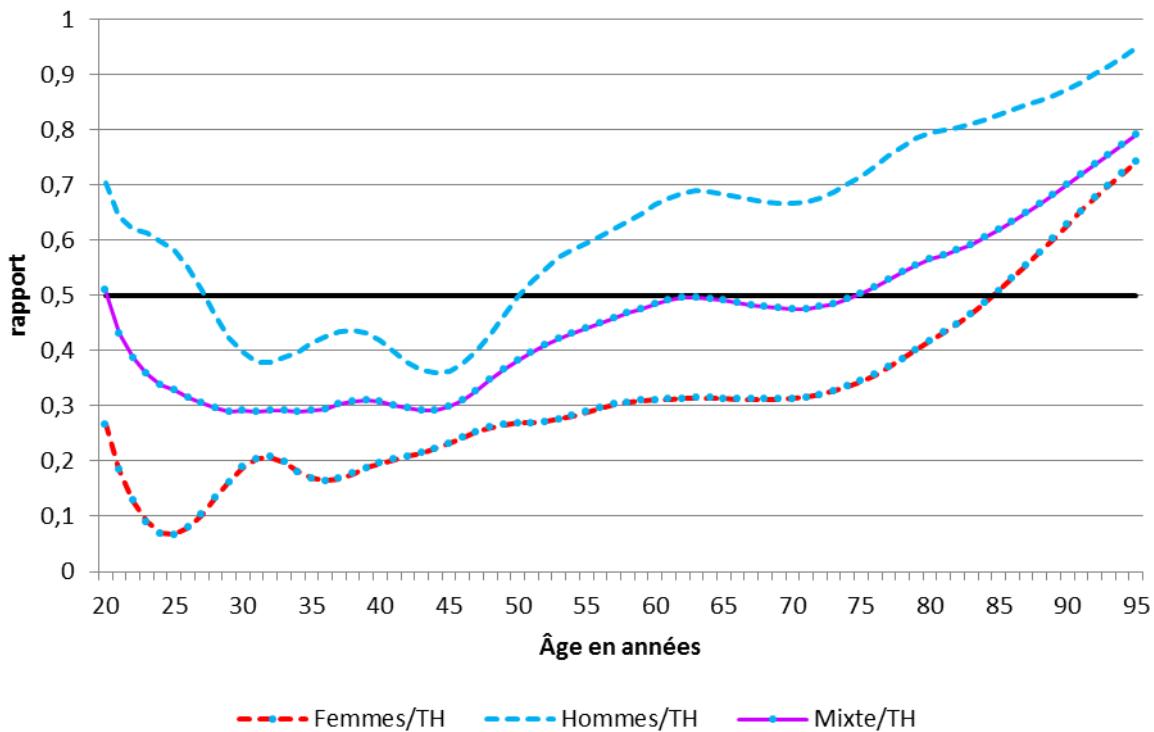


Fig. 58 : Rapport qx d'expérience (Méthode 1) et qx réglementaire (TH00-02)

La TH00-02 est logiquement plus prudente. La mortalité « mixte » d'expérience n'atteint en effet la moitié de la TH00-02 qu'à partir de l'âge de 75 ans.

N.B. : La mortalité d'expérience « mixte » semble suivre globalement la même allure que la table TF00-02, principalement aux âges supérieurs.

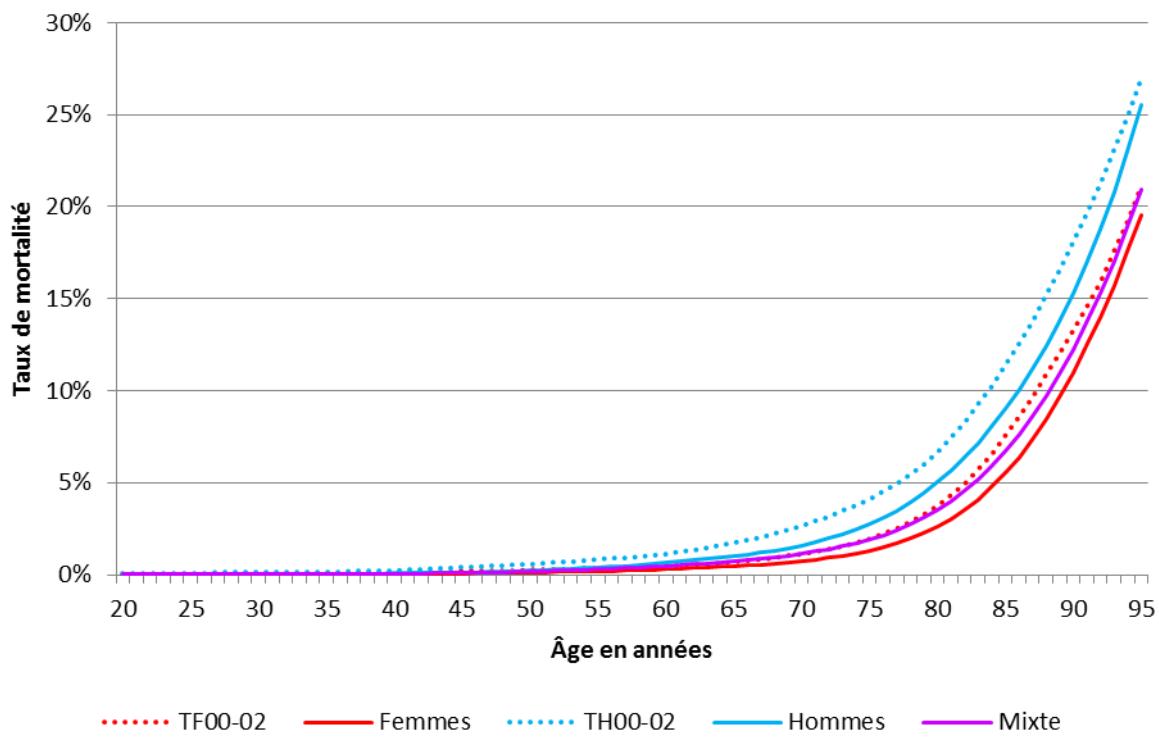


Fig. 59 : Lois de mortalité réglementaire et d'expérience – Méthode 2

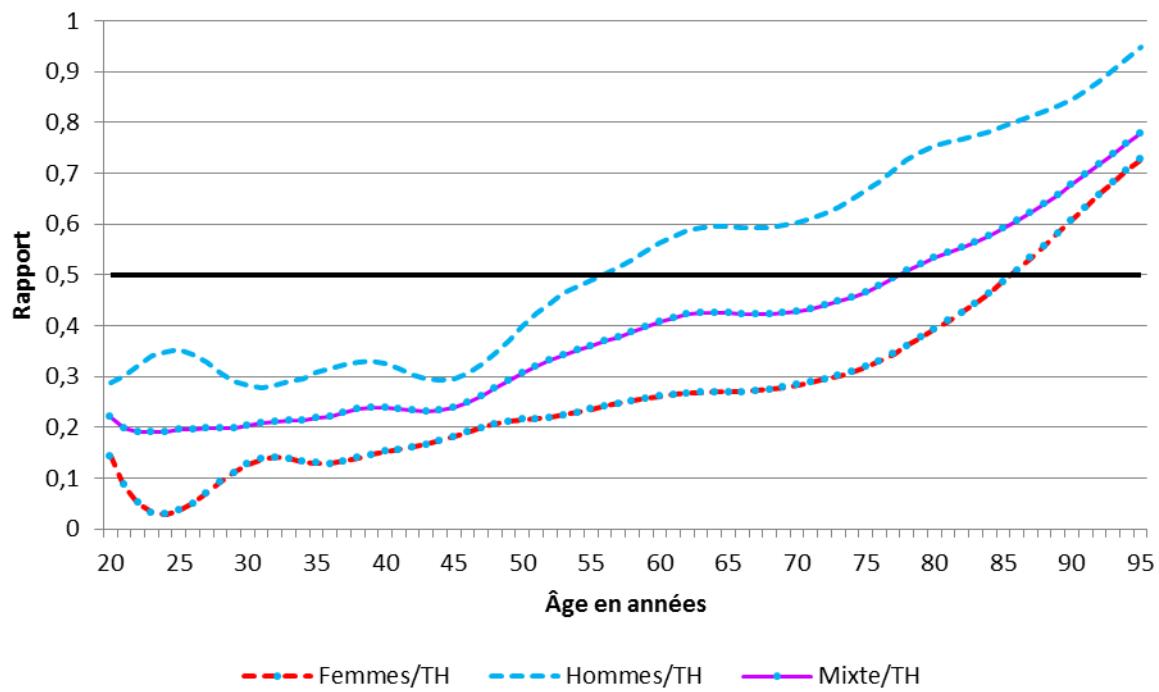


Fig. 60 : Rapport qx d'expérience (Méthode 2) et qx réglementaire (TH00-02)

La mortalité estimée à l'aide de la méthode de Kaplan-Meier est un peu plus prudente, principalement pour les premiers âges.

5 Extrapolation des taux de mortalité aux âges extrêmes

5.1 Procédure

Nous complétons la table *ex post*, pour les âges extrêmes, c'est-à-dire avant 20 ans et au-delà de 95 ans, pour lesquels les effectifs sont insuffisants pour garantir la fiabilité des estimations.

5.1.1 Ouverture de la table

Les premiers âges de la vie (de 0 à 19 ans inclus) font l'objet d'une réconciliation avec la table réglementaire TH00-02.

N.B. : La TH00-02 est une table réglementaire et comporte de ce fait un niveau de prudence implicite, par opposition aux tables d'expérience qui respectent le principe du *best estimate*. Néanmoins, par manque d'expérience et de référence, nous raccrochons nos taux de mortalité à ceux de la table réglementaire. L'analyse graphique de ce prolongement apparaît plutôt cohérente (on n'observe aucun saut) et la plage d'informations retenue *ex ante* aux âges supérieurs à vingt ans nous semble être déjà assez fiable.

5.1.2 Fermeture de la table

Les taux de mortalité sont prolongés au-delà de 95 ans jusqu'à $\omega = 110$ ans (âge limite de la table TH00-02), à l'aide de la méthode de Coale & Kisker (C&K).

La méthode d'extrapolation des taux de mortalité instantanés μ_x mise au point par Coale et Kisker en 1990 est basée sur le taux moyen de croissance de μ_x , g_x entre 65 et x ans, soit :

$$g_x = \frac{\ln\left(\frac{\hat{\mu}_x}{\hat{\mu}_{65}}\right)}{x - 65}$$

Suite à leurs observations révélant un pic vers 80 ans puis une décroissance linéaire, les auteurs ont proposé l'équation suivante, pour tout $x \geq 80$:

$$g_x = g_{80} + s * (x - 80)$$

Avec : $g_{80} = \frac{1}{15} * \log\left(\frac{\hat{\mu}_{80}}{\hat{\mu}_{65}}\right)$ et $s = -\frac{\log(\hat{\mu}_{79} + 31 * g_{80})}{465}$

L'extrapolation des taux instantanés de mortalité à partir de 80 ans peut finalement être réalisée à partir de la formule suivante, pour tout $x \geq 80$:

$$\hat{\mu}_x = \hat{\mu}_{x-1} * \exp(g_{80} + s * (x - 80))$$

En particulier, nous prolongeons les taux de mortalité à partir de l'âge de 96 ans inclus et $\hat{\mu}_{95} = -\log p_{95}$.

5.2 Résultats

5.2.1 Loi de mortalité mixte

a) *Méthode 1*

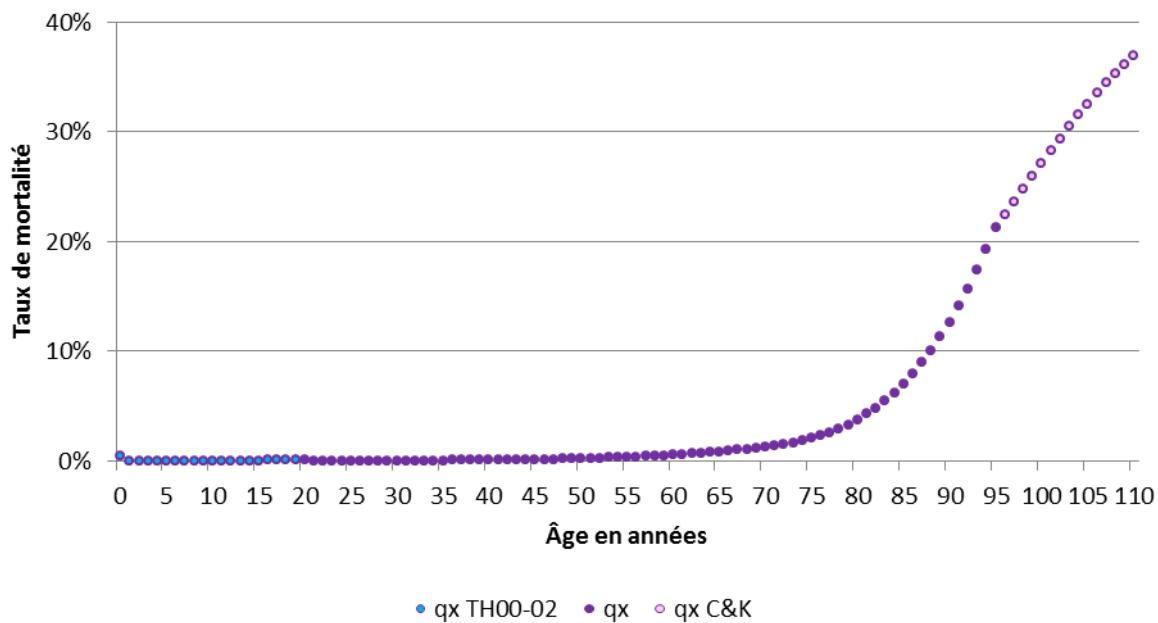


Fig. 61 : Extrapolation des taux de mortalité mixte aux âges extrêmes : C&K – Méthode 1

b) *Méthode 2 (KM)*

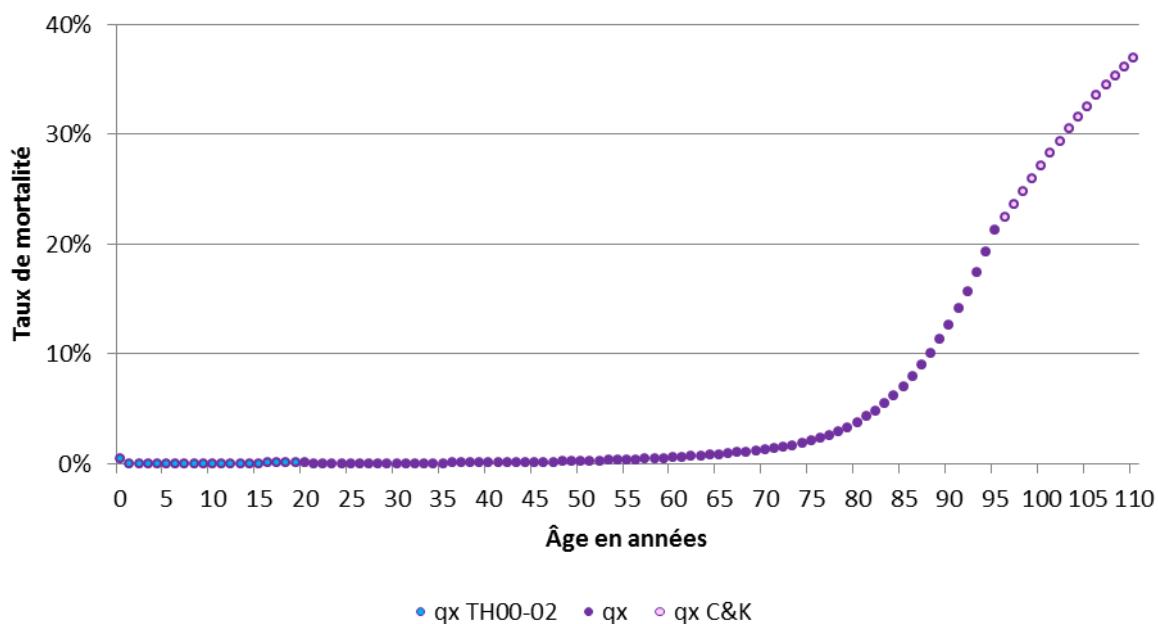


Fig. 62 : Extrapolation des taux de mortalité mixte aux âges extrêmes : C&K – Méthode 2

5.2.2 Lois de mortalité par sexe

a) Méthode 1

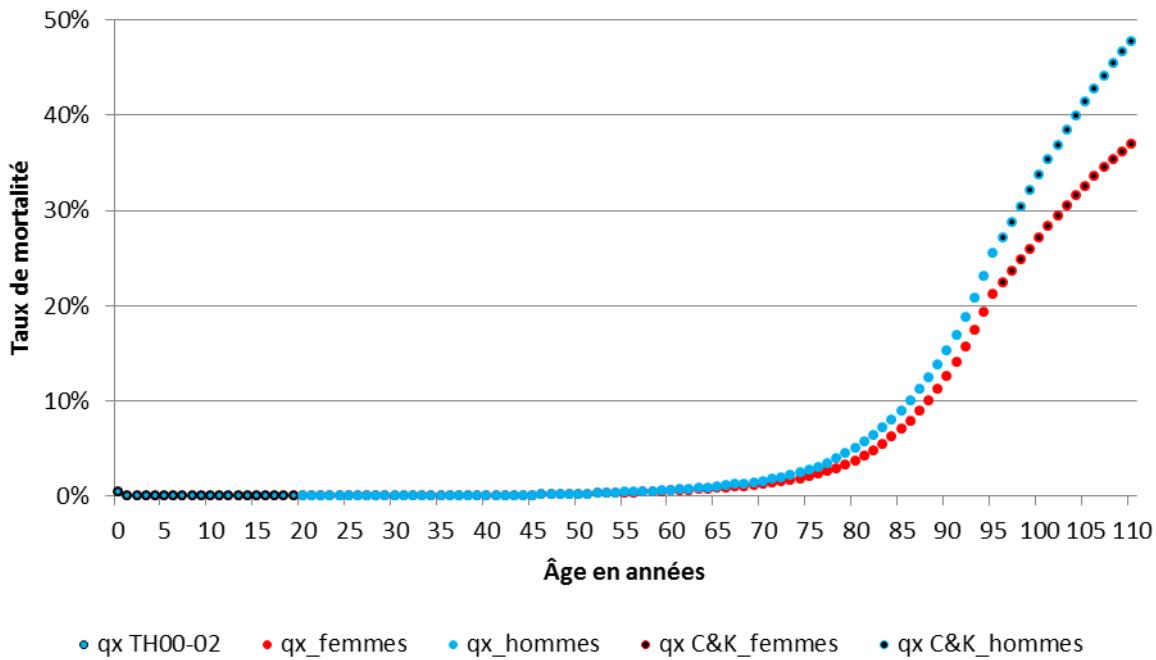


Fig. 63 : Extrapolation des taux de mortalité par sexe aux âges extrêmes : C&K – Méthode 1

b) Méthode 2 (KM)

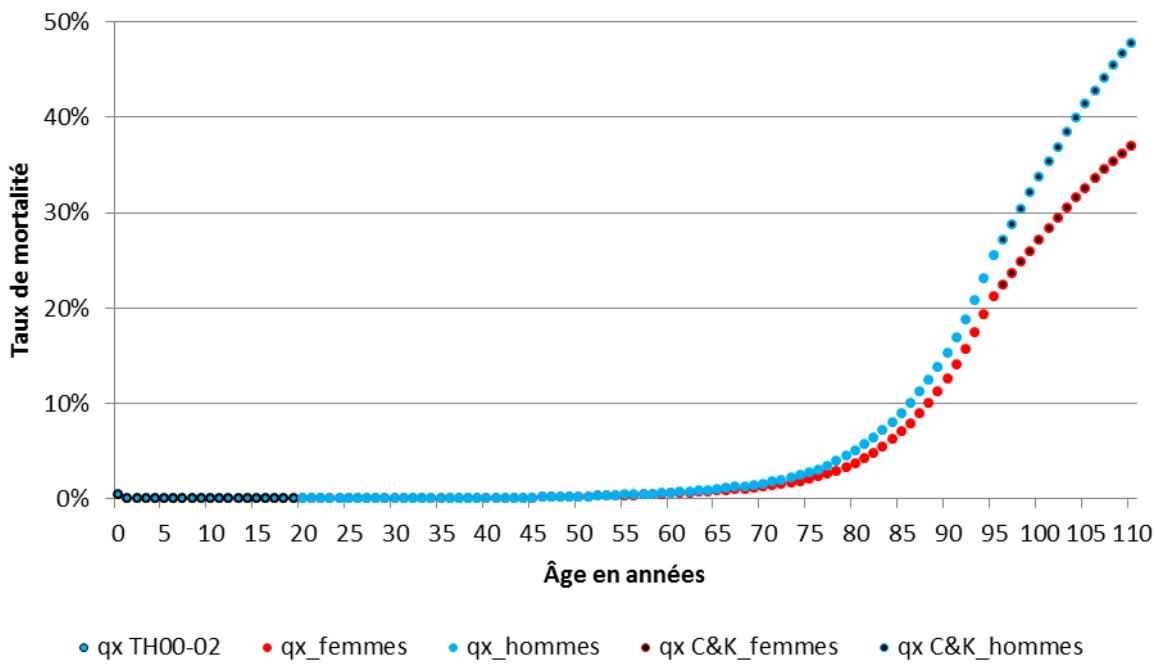


Fig. 64 : Extrapolation des taux de mortalité par sexe aux âges extrêmes : C&K – Méthode 2

CONCLUSION

L'établissement de lois de chute *best estimate* sur la base de l'historique du portefeuille de contrats d'épargne et la connaissance du passif qui en résulte est un passage obligé sur bien des sujets, de la politique d'investissement aux *best estimate* S II, en passant par toutes les problématiques de valorisation des sociétés.

① Dans un premier temps, l'estimation de nouvelles **lois de rachats totaux d'expérience** constitue un premier pas vers cette connaissance, en se basant notamment sur la référence que constitue la méthode de Kaplan-Meier. En particulier, la seconde période d'observation, qui introduit le phénomène de troncature à gauche dans les estimations, présente *a priori* un double intérêt à travers :

- ✓ L'augmentation des effectifs sous risques et l'affinement du découpage (cf. apport du réseau de distribution), grâce à l'intégration dans notre estimation de tous les contrats de la société Vie Socapi ;
- ✓ L'établissement de lois de rachat sur la base d'un historique de comportements récents (cf. fenêtre d'observation réduite aux six dernières années).

Cet intérêt semble conforté *a posteriori* par la réalisation d'un *back-testing*.

⇒ Cette seconde étude apparaît donc propice à la fiabilité des estimations de rachats totaux et en garantit le caractère *best estimate*.

② Dans un second temps, le phénomène de **rachats partiels** est pris en compte. La proportionnalité constatée selon l'ancienneté du contrat entre les montants de rachats totaux et de rachats partiels sur l'historique récent, nous amène à appliquer des taux de rachats partiels aux montants projetés de rachats totaux, afin d'obtenir un taux de rachat global.

⇒ Cette méthode n'est certes pas la plus conventionnelle, mais elle est provisoire et reste perfectible.

⇒ L'estimation en « montant », que nous avons initialement envisagée a été reportée devant les délais de mise en place d'une structure de données sécurisée incompatibles avec ceux de remise de ce mémoire. Celle-ci sera donc menée ultérieurement.

→ Le montant de PM est une variable incontestablement explicative du comportement de rachat, qui n'a toutefois pas été prise en compte dans l'estimation fréquentiste des lois de rachat total afin d'éviter l'introduction de biais. La PM dépend en effet de l'ancienneté du contrat (plus un assuré conserve longtemps son contrat, plus le montant de sa PM est élevé), or les estimations ont été réalisées en fonction de l'ancienneté du contrat. De plus, cette variable est fortement corrélée à l'âge à la souscription et est donc de ce fait indirectement prise en compte dans le découpage retenu.

De ce fait, une estimation des lois de rachats qui tienne compte du montant de PM exclut l'utilisation de la méthode de Kaplan-Meier et nécessite de se pencher vers d'autres méthodes d'estimation. Une nouvelle piste d'amélioration envisagée à la fin du stage consiste à modéliser des **taux de rachats globaux** (rachats totaux et partiels) pour chaque profil issu du croisement des modalités de différentes variables explicatives et discriminantes (tranche de PM, réseau, âge de l'assuré, ancienneté du contrat etc.) au moyen des modèles linéaires généralisés. Cette méthode requiert les mêmes données que l'étude propre aux rachats partiels et sera donc mise en œuvre prochainement de manière effective.

- ③ Enfin, l'estimation de **lois de mortalité d'expérience** permet d'affiner les lois projetées jusqu'à présent, notamment par l'apport du sexe dans le découpage de la mortalité et la prise en compte de comportements récents.
- ⇒ Cette étude renforce le caractère *best estimate* des lois de mortalité et conduit donc à la fois à une meilleure gestion des risques et l'amélioration du suivi de la rentabilité de la rentabilité prévisionnelle de ces produits.

Afin d'évaluer la pertinence des lois nouvellement estimées, des *back testing* sont en cours de réalisation selon la même procédure que lors du *back testing* initial. D'autres années seront également testées pour corroborer les résultats obtenus.

- ⇒ Tous les tests n'ont pas encore été menés à la date de remise du mémoire, mais les premiers résultats confortent une nette amélioration.

Il est difficile d'en rendre compte dans ce mémoire, qui à certains égards s'apparente à la « face émergée de l'iceberg », mais un pan important du travail a finalement porté sur l'optimisation d'un *process* et par un travail de développement informatique adapté.

La possibilité de mettre à jour facilement le découpage des lois de rachat trouve tout son intérêt dans l'évolution de paramètres tels que la fiscalité des contrats d'assurance vie.

- ⇒ Des perspectives de mise à jour dans ce domaine se dessinent d'ailleurs déjà via les préconisations du rapport Berger-Lefebvre, qui pourraient notamment allonger la durée nécessaire pour bénéficier d'un avantage fiscal, de huit à dix ou douze ans.

Du reste, la récente recommandation⁸⁴ de l'ACP, datée du 8 janvier 2013, qui porte sur le « recueil des informations relatives à la connaissance du client dans le cadre du devoir de conseil en assurance vie », vise à déterminer de façon objective un profil financier de l'assuré au regard du rendement attendu et de son aversion au risque. Tout au long de la vie du contrat d'assurance (de sa souscription à sa clôture, à l'occasion d'un versement, d'un rachat partiel ou d'un arbitrage entre supports pour les contrats multi-profil), l'organisme d'assurance est ainsi tenu de constituer et d'actualiser toutes sortes d'informations propres aux :

- ✓ Situations familiale, patrimoniale et professionnelle ;
- ✓ Connaissances et expériences financières ;
- ✓ Objectifs de souscription ;
- ✓ Horizon d'investissement envisagé par l'assuré.

- ⇒ Une bonne application de cette recommandation pourrait, à terme, permettre un découpage des lois qui soit davantage adapté aux comportements de rachat et/ou de mortalité du portefeuille.

Le socle de départ qui a été mis en œuvre ici saura clairement être réutilisé pour s'adapter à un contexte réglementaire et fiscal en mutation perpétuelle.

⁸⁴ Cette recommandation est relative aux contrats d'assurance vie comportant des valeurs de rachat et aux contrats de capitalisation.

Annexe 1 : Liste des abréviations

Dans l'ordre alphabétique :

(G)ACM	(Groupe des) Assurances du Crédit Mutuel
ACP	Autorité de contrôle prudentiel
BFCM	Banque Fédérative du Crédit Mutuel
CAPI	Capitalisation
CM	Crédit Mutuel
ESM	Épargne sur mesure
IFRS	<i>International Financial Reporting Standards</i>
(MC)EV	<i>(Market Consistent) Embedded Value</i>
MP	Multi-profil
PAF	Provision pour aléas financiers
PGG	Provision globale de gestion
PM	Provisions mathématiques
PT	Provisions techniques
PU	Prime unique
RP	Rachat partiel
RT	Rachat total
SCR	<i>Solvency Capital Requirement</i>
UC	Unité de compte
VL	Versement libre

Annexe 2 : Découpage des lois de rachat

Ancien découpage :

- | | |
|--------------------|---------------------|
| 1. EparColl | 26. VL_MP_F3_A1_MU |
| 2. PU_F1_A1_M1 | 27. VL_MP_F3_A2_MU |
| 3. PU_F2_A1_M1 | 28. VL_MP_F3_A3_MU |
| 4. PU_F2_A1_M2 | 29. Viager_F2_A1_MU |
| 5. PU_F2_A1_M3 | 30. Viager_F2_A2_MU |
| 6. PU_F2_A2_M1 | 31. Viager_F2_A3_MU |
| 7. PU_F2_A2_M2 | 32. Viager_F3_A1_MU |
| 8. PU_F2_A2_M3 | 33. Viager_F3_A2_MU |
| 9. PU_F2_A3_M1 | 34. Viager_F3_A3_MU |
| 10. PU_F2_A3_M2 | 35. EparColl_F3 |
| 11. PU_F2_A3_M3 | 36. PU_F1 |
| 12. PU_F3_A1_M1 | 37. PU_F2 |
| 13. PU_F3_A1_M2 | 38. PU_F3 |
| 14. PU_F3_A1_M1 | 39. RetrColl_F3 |
| 15. PU_F2_A3_M1 | 40. VL_MP_F1 |
| 16. PU_F2_A3_M2 | 41. VL_MP_F2 |
| 17. PU_F2_A3_M3 | 42. VL_MP_F3 |
| 18. PU_F3_A3_M1 | 43. Viager_F2 |
| 19. PU_F3_A3_M2 | 44. Viager_F3 |
| 20. PU_F3_A3_M3 | 45. CAPI_Saut96 |
| 21. RetrColl | 46. CAPI_Saut120 |
| 22. VL_MP_F1_A1_MU | 47. CAPI_Saut144 |
| 23. VL_MP_F2_A1_MU | 48. CAPI_Saut168 |
| 24. VL_MP_F2_A2_MU | 49. CAPI_Saut288 |
| 25. VL_MP_F2_A3_MU | 50. CAPI_Saut360 |

Bibliographie

- [2006] Lignes directrices mortalité de la Commission d'Agrément (Version approuvée)
- OPTIMIND [2007], « Les tables de mortalité – Dossier Technique »
- PLANCHET F., THÉROND P. [2006], Modèles de durée – Applications actuarielles, Economica
- DROESBEKE J-J., LEJEUNE M., SAPORTA G. [2005], Modèles statistiques pour données qualitatives, SFdS
- CASES C., LOLLIVIER S. [1993], « L'économétrie des modèles de durée avec SAS : présentation et mise en œuvre », Actes des journées de méthodologie statistique – Complément, INSEE MÉTHODES
- FICHTER P. [2001], « Loi d'écoulement des passifs épargne d'une compagnie d'assurance-vie »
- CLEMENT O. [2003], « Élaboration d'une table d'expérience : comparaison de méthodes de lissage analytique et d'ajustement statistique »
- PRINGAULT M. [2008], « Modélisation du comportement des assurés d'un portefeuille épargne et application au travers d'un calcul de coût d'une garantie plancher »
- SURU A. [2011], « Modélisation du rachat et parallèle avec la Physique »
- Rapport d'Activité 2012 du GACM
- SAS/STAT® 9.2 User's Guide, Second Edition
- <http://www.acp.banque-france.fr>
- www.ffsa.fr
- www.institutdesactuaires.com
- www.legifrance.gouv.fr
- www.ressources-actuarielles.net
- <http://support.sas.com>

Table des figures

<i>Fig. 1 : Organigramme du Groupe des Assurances du Crédit Mutuel au 31/12/2012</i>	16
<i>Fig. 2 : Répartition des contrats au 31/12 et du chiffre d'affaires par branche pour 2012</i>	17
<i>Fig. 3 : Principales caractéristiques des filiales Vie du GACM</i>	18
<i>Fig. 4 : Détail de la fiscalité de l'assurance vie</i>	22
<i>Fig. 5 : Détail des prélèvements et contributions sociales en assurance vie</i>	23
<i>Fig. 6 : Fiscalité du droit successoral en assurance vie</i>	24
<i>Fig. 7 : Présentation de la provision pour aléas financiers et de la provision globale de gestion</i>	28
<i>Fig. 8 : Présentation des états réglementaires T3 et C6 bis</i>	30
<i>Fig 9 : Distribution du portefeuille étudié en pourcentage de PM par tranche de PM</i>	37
<i>Fig. 10 : Répartition du nombre de contrats par réseau et société</i>	308
<i>Fig. 11 : Répartition du montant de PM par réseau et société</i>	38
<i>Fig. 12 : Population des contrats appartenant au périmètre d'étude et en cours au 31/12/2012</i>	40
<i>Fig. 13 : Population des contrats appartenant au périmètre d'étude et rachetés entre 2007 et 2012 (inclus)</i>	41
<i>Fig 14 : Répartition des effectifs, PM moyenne et totale en fonction de l'âge atteint, pour chaque réseau de la société ACM Vie SA.....</i>	42
<i>Fig. 15 : Évolution du volume des rachats (en milliers) par type de 2007 à 2012</i>	45
<i>Fig 16 : Évolution du montant des rachats (€) par type de 2007 à 2012.....</i>	46
<i>Fig. 17 : Variation annuelle du nombre et du montant de rachats par année entre 2007 et 2012.....</i>	46
<i>Fig. 18 : Taux de rachat (estimateur actuariel) par ancienneté de 2007 à 2012</i>	48
<i>Fig. 19 : Taux de rachat moyen par ancienneté de 2007 à 2012, avec et sans l'année 2008</i>	49
<i>Fig. 20 : Montant investi moyen par ancienneté puis par âge à la souscription, pour les contrats VL-MP</i>	51
<i>Fig. 20 bis : PM moyenne par ancienneté, pour les contrats VL-MP</i>	52
<i>Fig. 21 : Sélection des variables explicatives par type de produit</i>	52
<i>Fig. 22 : Résultats et conclusions du test de Wald 1 – produits PU et VL-MP</i>	54
<i>Fig. 23 : Résultats et conclusions du test de Wald 2 – produits PU et VL-MP</i>	56
<i>Fig. 24 : Répartition des différentes causes de sortie entre 2007 et 2012</i>	58
<i>Fig. 25 : Variation du volume de contrats après chaque traitement dans la construction du fichier initial.....</i>	65
<i>Fig. 26 : Données incomplètes et différentes configurations possibles en termes d'observation des individus....</i>	72
<i>Fig. 27 : Lois de survie mensuelles brutes VL-MP et PU – première période d'observation</i>	81
<i>Fig. 28 : Différents types d'observations possibles selon la valeur des sous-intervalles de présence</i>	86
<i>Fig. 29 : Lois de survie mensuelles brutes VL-MP et PU – seconde période d'observation.....</i>	91
<i>Fig. 30 : Lois de survie mensuelles VL-MP et PU ajustées – première période d'observation</i>	101
<i>Fig. 31 : Lois de survie mensuelles VL-MP et PU ajustées – seconde période d'observation.....</i>	102
<i>Fig. 32 : Lois de survie mensuelles VL-MP PU ajustées avec IC à 95 % – seconde période d'observation</i>	105
<i>Fig. 33 : Lois de survie mensuelles PU ajustées avec IC à 95 % – seconde période d'observation</i>	1066
<i>Fig. 34 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 1^{ère} période d'observation....</i>	107
<i>Fig. 35 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 2de période d'observation/ lissage 1.....</i>	108
<i>Fig. 36 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 2^{de} période d'observation/ lissage2.....</i>	109
<i>Fig. 37 : Lois de survie mensuelles VL-MP A1 R1 et VL-MP A1 R2 – 2^{de} période d'observation/ lissage 3.....</i>	111
<i>Fig. 38 : Lois de survie mensuelles VL-MP A2 R1 et VL-MP A2 R2 – 2^{de} période d'observation/ lissage 3.....</i>	112

<i>Fig. 39 : Résultats des tests d'ajustement et valeurs des critères d'adéquation – 2^{de} période d'observation/ lissage 3.....</i>	112
<i>Fig. 40 : Rapport des moyennes de RP et rachats globaux pour les contrats VL-MP entre 2007 et 2012.....</i>	115
<i>Fig. 41 : Variation annuelle du nombre et du montant de décès par année entre 2007 et 2012.....</i>	117
<i>Fig. 42 : Évolution du volume des décès de 2007 à 2012</i>	117
<i>Fig. 43 : Évolution du montant des sinistres décès(€) de 2007 à 2012</i>	117
<i>Fig. 44 : Choix du paramètre k (force de lissage) – lissage WH.....</i>	126
<i>Fig. 45 : Choix du paramètre h (mesure de précision) – lissage WH</i>	127
<i>Fig. 46 : Taux de mortalité mixte – Méthode 1/lissage WH.....</i>	127
<i>Fig. 47 : Taux de mortalité mixte – Méthode 2/ lissage WH</i>	129
<i>Fig. 48 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 1/ lissage WH.....</i>	129
<i>Fig. 49 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 2/ lissage WH.....</i>	129
<i>Fig. 50 : Taux de mortalité mixte – Méthode 1/ lissage Poisson</i>	129
<i>Fig. 51 : Taux de mortalité mixte – Méthode 2/ lissage Poisson</i>	135
<i>Fig. 52 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 1/ lissage Poisson.....</i>	129
<i>Fig. 53 : Taux de mortalité par sexe – Méthode 2/ lissage Poisson.....</i>	137
<i>Fig. 54 : Valeurs des critères de fidélité pour chaque méthode et par lissage</i>	138
<i>Fig. 55 : Résultats du test d'ajustement du Khi-deux pour chaque méthode et par lissage.....</i>	139
<i>Fig. 56 : Résultats du test des changements de signe pour chaque méthode et par lissage.....</i>	140
<i>Fig. 57 : Lois de mortalité réglementaire et d'expérience – Méthode 1</i>	143
<i>Fig. 58 : Rapport qx d'expérience (Méthode 1) et qx réglementaire (TH00-02).....</i>	142
<i>Fig. 59 : Lois de mortalité réglementaire et d'expérience – Méthode 2</i>	143
<i>Fig. 60 : Rapport qx d'expérience (Méthode 2) et qx réglementaire (TH00-02).....</i>	143
<i>Fig. 61 : Extrapolation des taux de mortalité mixte aux âges extrêmes : C&K – Méthode 1</i>	146
<i>Fig. 62 : Extrapolation des taux de mortalité mixte aux âges extrêmes : C&K – Méthode 2</i>	147
<i>Fig. 63 : Extrapolation des taux de mortalité par sexe aux âges extrêmes : C&K – Méthode 1</i>	147
<i>Fig. 64 : Extrapolation des taux de mortalité par sexe aux âges extrêmes : C&K – Méthode 2</i>	147