

Université Claude Bernard - Lyon 1
Institut des Sciences Financière et d'Assurances
2010-2011

ASSURANCE DE PORTEFEUILLE PAR LA METHODE DU COUSSIN

Tham PHAM THI HONG

Responsable de stage: M. John MANH
Directeur de mémoire: D. François QUITTARD-PINON

Résumé

Ce mémoire traite du fonctionnement de la gestion Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI). Il s'organise en deux parties. La première partie présente l'aspect théorique de la gestion dont il y a quatre chapitres, et la deuxième partie, qui se compose de deux derniers chapitres, présentera des applications de la gestion.

Le premier chapitre est consacré à la description de la gestion CPPI.

Le deuxième chapitre analyse les propriétés de la gestion par rapport aux comportements du marché.

Le troisième chapitre analyse les risques qui influencent le Fonds CPPI et les moyens que le gérant peut mettre en place pour maîtriser et contrôler ces risques.

Le quatrième chapitre développe une méthode de pricer le risque de Gap en utilisant le modèle avec sauts (processus de Lévy) pour le prix de l'actif risqué.

Dans le cinquième chapitre, nous voulons estimer la performance du Fonds CPPI par la méthode de Monte - Carlo en simulant les cours des actifs risqués.

Enfin, nous présenterons dans le dernier chapitre une application de la gestion CPPI sur les fonds de fonds LBPAM, en modifiant des paramètres techniques (appelée Time Invariant Portfolio Protection - TIPP).

Mots clés

- Assurance de portefeuille
- Auto-financer
- Coefficient de multiplicateur / multiple
- Coussin
- CPPI - Constant Proportion Portfolio Insurance
- Fonds de fonds
- Garantie
- Modèle de Kou
- Monétarisation
- Perte maximale
- Plancher actuariel
- Processus de Lévy
- Rebalancement
- Risque de Gap
- Sauts-diffusion
- Swap de taux
- Eonia - Euro OverNight Index Average
- TIPP - Time Invariant Portfolio Protection
- Valeur liquidative du fonds
- Value at Risk
- Volatilité

Summary

This thesis deals with the functioning of the Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) strategy. It is organized into two parts. The first part presents the theoretical aspects of the strategy that there are four chapters, and the second part, which consists of the last two chapters present applications of the strategy.

The first chapter is devoted to the description of the CPPI strategy.

The second chapter analyzes the properties of the strategy with respect to market behavior.

The third chapter analyzes the risks that affect the Fund CPPI and means that the manager can put in place to control and monitor these risks.

The fourth chapter develops a method of pricing Gap risk by using the model with jumps (Lévy processes) for the price of the risky asset.

In the fifth chapter, we estimate the performance of the CPPI Fund using the Monte - Carlo method by simulating the course of risky assets.

Finally, we present in the last chapter an application for the management of CPPI funds of funds LBPAM, changing the technical parameters (called Time Invariant Portfolio Protection - TIPP).

Key words

- Capital guarantee / Capital insurance
- CPPI - Constant Proportion Portfolio Insurance
- Cushion
- Eonia - Euro OverNight Index Average
- Floor
- Funds of funds
- Gap risk
- Guarantee
- Jump-diffusion
- Kou model
- Levy process
- Maximum loss
- Monetization
- Multiple
- Portfolio Insurance
- Portfolio (Fund) value
- Rebalance
- Self-financing
- Swap
- TIPP - Time Invariant Portfolio Protection
- Value at Risk
- Volatility

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Dang CO MINH, Directeur Général de La Banque Postale Structured Asset Management (LBPSAM), pour m'avoir accordé sa confiance et donné l'opportunité de faire le stage au sein de LBPSAM.

Je remercie aussi Monsieur John MANH, Responsable de la Structuration et du Développement Technologique de LBPSAM pour m'avoir fait l'honneur de diriger mon stage où je rédige ce mémoire, pour ses conseils avisés et la richesse des réflexions que nous avons pu échanger.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur François QUITTARD-PINON, qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie Ovadia ABRAHAMI, Anne Dominique CHANTHAVONG, Jean-Marc TANGUY, Alexandre COSSON, Cédéric MAO et Serge KOUAO pour leur disponibilité et leurs précieux conseils.

Je remercie chaleureusement tous les membres de LBPSAM pour leur bonne humeur, leur gentillesse, leur accueil et leur confiance.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mon mari, à mes parents et à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Introduction

Pour répondre au besoin de protection du capital de la part des investisseurs, les sociétés de gestion ont développé une gamme de Fonds dont l'objectif est :

- de garantir le capital à un horizon de placement donné ou de manière plus générale une performance minimale.

- d'offrir une participation à la performance d'un marché risqué,

Il existe plusieurs techniques de type assurance de portefeuille :

- la gestion OBPI, Option Based Portfolio Insurance, introduit par Leland et Rubins (1976).

- la gestion CPPI, Constant Proportion Portfolio Insurance, introduit par Perold (1986) puis par Black et Jones (1987).

La Banque Postale Structured Asset Management (LBPSAM), où mon stage a eu lieu, est en train de développer la gestion CPPI dans le cadre fonds de fonds. L'objectif de ce mémoire est d'étudier cette stratégie.

La gestion CPPI est une stratégie d'assurance du portefeuille dont la technique allie tant la croissance que la protection du capital investi via un portefeuille composé d'actifs risqués et non risqués. Le gestionnaire ajuste de façon régulière l'exposition aux actifs risqués et non risqués dans le but de protéger le capital à l'échéance tout en profitant de la hausse potentielle des actifs risqués. Cette stratégie d'allocation d'actifs est relativement simple et aisément applicable.

Cependant, comme pour toute méthode d'assurance du portefeuille, la performance dépend étroitement des dynamiques suivies par le cours de l'actif risqué. Si le cours de l'actif risqué varie de manière continue, la stratégie est parfaite. Au contraire, s'il y a une chute brutale du marché (pendant une journée), le gérant n'arrive pas à rien faire pour éviter la perte. La gestion fait face donc à un risque appelé risque de Gap.

Pour prévenir ce risque de Gap, le gestionnaire du Fonds peut acheter une option dont le prix est la perte potentielle de ce risque de Gap. L'évaluation de ce risque, en

utilisant les processus avec sauts de l'actif risqué, est le résultat principal du mémoire.

La première partie du mémoire est bien consacrée à l'étude théorique de la gestion CPPI. Elle se compose de quatre chapitres dont les contenus sont les suivants : la description de la gestion, les propriétés de la gestion, les risques affectant la gestion ainsi que la couverture de ces risques et la partie principale, pricing l'option risque de Gap.

La deuxième partie du mémoire s'agit de la partie pratique de la gestion dont l'une représente la performance de la gestion par la méthode de simulation de Monte - Carlo et l'autre est une application numérique de la gestion sur les fonds de La Banque Postale Asset Management (LBPAM).

Première partie

THEORIE

Chapitre 1

Description de la gestion CPPI

L'assurance de portefeuille à proportion constante (Constant Proportion Portfolio Insurance ou CPPI), née au milieu des années 80, est une technique de gestion dynamique qui permet d'assurer une garantie minimale à échéance à l'investisseur et à profiter de l'effet de levier du marché.

Nous présentons dans ce chapitre le fonctionnement de la gestion avec l'objectif et le principe, les éléments de structuration, l'exemple numérique et les back-testings sur les données historiques.

1.1 Objectif et principe

La gestion CPPI ou gestion à coussin a pour objectif de se prémunir contre une perte en capital ou en performance.

Le principe est très simple : il consiste à allouer une partie du capital, investie dans des actifs risqués (indices, fonds ou fonds de fonds,...) et l'autre partie dans des des actifs non risqués (obligations, fonds monétaires...) au cours du temps d'investissement de telle sorte que la Valeur Liquidative du fonds soit toujours maintenue au-dessus d'un niveau espéré.

En fonction de l'évolution des actifs risqués, des règles mécaniques d'achat et de vente sont appliquées en fonction de divers paramètres définis au démarrage.

1.2 Éléments de structuration

Les règles d'achat et de vente dépendent des paramètres suivants : La nature de l'assurance recherchée et la nature des actifs risqués à laquelle on recherche une exposition.

1.2.1 La nature de l'assurance recherchée

Il s'agit de la garantie de capital à recevoir à l'échéance, par exemple 100% de la Valeur Liquidative initiale du fonds (c'est le capital investi au départ).

Une fois la nature de l'assurance définie, un premier paramètre appelé "Plancher" est défini. Le Plancher représente la fraction de Valeur Liquidative que le gérant ne peut pas se permettre de perdre. Il est égal à la valeur actualisée du niveau de Valeur Liquidative garantie à l'échéance.

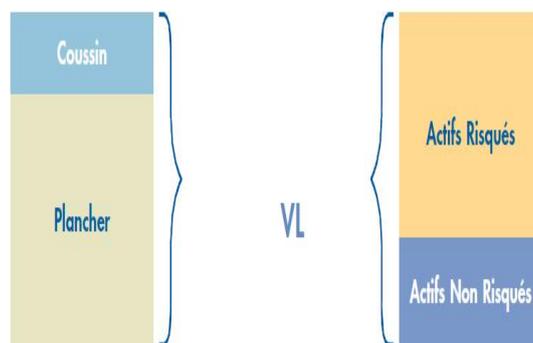
Le "Coussin" est aussi défini comme la différence entre la Valeur Liquidative et le Plancher. Il est donc le montant théorique maximum que l'on peut perdre sur une période sans entamer la garantie du capital.

1.2.2 La nature des actifs risqués à laquelle on recherche une exposition

En fonction de la nature de la classe d'actifs à laquelle on recherche une exposition, on définit un niveau de "coefficient multiplicateur" ou "multiple". La somme placée en actif risqué est déterminée en multipliant ce multiple par le coussin.

A tout moment, la Valeur Liquidative du fonds CPPI peut être appréhendée de deux façons différentes :

- Valeur Liquidative = Coussin + Plancher
- Valeur Liquidative = Actifs Risqués + Actifs Non Risqués



D'où il ressort que :

- Coussin = Valeur Liquidative - Plancher
- Allocation en actifs risqués = Multiple \times Coussin

Notons à la date t , V_t la Valeur Liquidative du Fonds CPPI ; P_t le Plancher ; C_t le Coussin ; E_t la partie investie en actifs risqués ; M_t la partie investie en actifs non risqués et m le Multiple. Nous avons donc les relations suivantes :

$$V_t = E_t + M_t$$

$$C_t = V_t - P_t$$

$$E_t = m \times C_t$$

A chaque variation de l'actif risqué, le multiple effectif (notons m_t), qui est le quotient de l'actif risqué par le coussin, s'écarte de sa valeur cible m . L'acte de gestion consistera donc à rebalancer l'actif risqué et l'actif non risqué de façon à obtenir l'égalité entre le multiple effectif et le multiple cible. Par exemple, si le multiple effectif est inférieur au multiple cible, la gestion CPPI vise à acheter l'actif risqué et vendre l'actif non risqué, et inversement.

Dans le cas où la partie risquée du Fonds diminue rapidement vers 0, le Fonds va se composer que de l'actif non risqué, le phénomène est nommé "Monétarisation".

1.3 Exemple numérique

Supposons qu'à la date initiale $t = 0$, le montant initial du Fonds est $V_0 = 100$ qui est aussi le montant garanti que l'investisseur va recevoir à l'échéance $T = 5$ ans. Supposons aussi que le multiple m est égal à 4 et le taux sans risque r à de 5%. Le plancher initial est :

$$P_0 = 100(1 + 5\%)^{-5} = 78.35$$

Le coussin initial est donc :

$$C_0 = V_0 - P_0 = 100 - 78.35 = 21.45$$

Avec le multiple $m = 4$, le montant initial investis dans l'actif risqué est :

$$E_0 = mC_0 = 4 * 21.45 = 85.8$$

ainsi le montant initial investi dans l'actif non risqué est :

$$M_0 = V_0 - E_0 = 100 - 85.8 = 14.2$$

Après un jour (supposons que la période de re-balancement est quotidienne), si le marché monte de 4%, la valeur de l'investissement dans l'actif risqué sera :

$$E_1 = E_0(1 + 4\%) = 89.23$$

Le montant de la partie non risquée devient :

$$M_1 = M_0(1 + r) = 14.2(1 + 5\%/365) \approx 14.2$$

La valeur du portefeuille après un jour est :

$$V_1 = E_1 + M_1 = 89.23 + 14.20 = 103.43$$

Le plancher :

$$P_1 = 100/(1 + 5\%)^{(5-1/365)} = 78.36$$

Le coussin :

$$C_1 = V_1 - P_1 = 103.43 - 78.36 = 25.07$$

Le multiple effectif m_1 est de

$$m_1 = \frac{E_1}{C_1} = 3.56$$

qui est différent du multiple cible $m = 4$. Il faut donc acheter $m \times C_1 - E_1 = 100.28 - 89.23 = 11.05$ d'actif risqué pour que la partie investie dans l'actif risqué soit toujours un multiple du coussin. Il faut donc vendre 11.05 de l'actif sans risque.

1.4 Le choix du multiple cible

L'objectif de la gestion est de garder la Valeur Liquidative du fonds au-dessus du plancher, c'est à dire le coussin doit rester positif ou nul quelque soit la fluctuation des actifs risqués.

Supposons que la fréquence de la gestion CPPI est quotidienne. Imaginons que le cours du sous-jacent baisse de $x\%$ sur une journée. On a alors

$$E_t = (1 - x\%)E_{t-1}$$

On peut faire l'approximation que $P_t \approx P_{t-1}$ et $M_t \approx M_{t-1}$ car les grandes variations de P n'apparaissent que lorsque le maximum de V est franchi, ce qui ne sera évidemment pas le cas lors d'une baisse de cours. On calcule donc les données avant le moindre rebalancement, en commençant par V_t :

$$V_t = V_{t-1} - x\% \times E_{t-1}$$

d'où

$$P_t + C_t = P_{t-1} + C_{t-1} - x\% \times E_{t-1}$$

alors

$$C_t = C_{t-1} - x\% \times E_{t-1}$$

On veut que le coussin reste positif. L'équation précédente nous dit qu'on évitera cette situation dramatique à condition que le coussin soit à tout instant suffisamment grand pour absorber la chute des cours de la partie risquée entre $t - 1$ et t , d'où le terme de "coussin". Or,

$$C_{t-1} = E_{t-1}/m$$

S'assurer que $C_t \geq 0$ revient donc à vérifier que $1 - x\% \times m \geq 0$ d'où

$$m \leq \frac{1}{x\%}$$

La condition sur m est qu'il soit inférieur ou égal à l'inverse de la perte de l'actif risqué pour ne pas franchir le plancher actuariel qui assure la garantie de la performance minimale à l'échéance T . Pour un m fixé, l'inverse de m présente l'amplitude de perte maximale que l'on peut accepter sur l'actif risqué entre deux rebalancements. Pour une amplitude de perte maximale attendue de l'actif risqué, son inverse est un majorant du multiple.

Le multiple cible est donc choisi comme l'inverse de la perte maximale de l'actif risqué sur une période de rebalancement. Dans le cas où la perte instantanée estimée et acceptée par la gestion sur l'actif risqué est de -25% par exemple, m peut valoir jusqu'à 4.

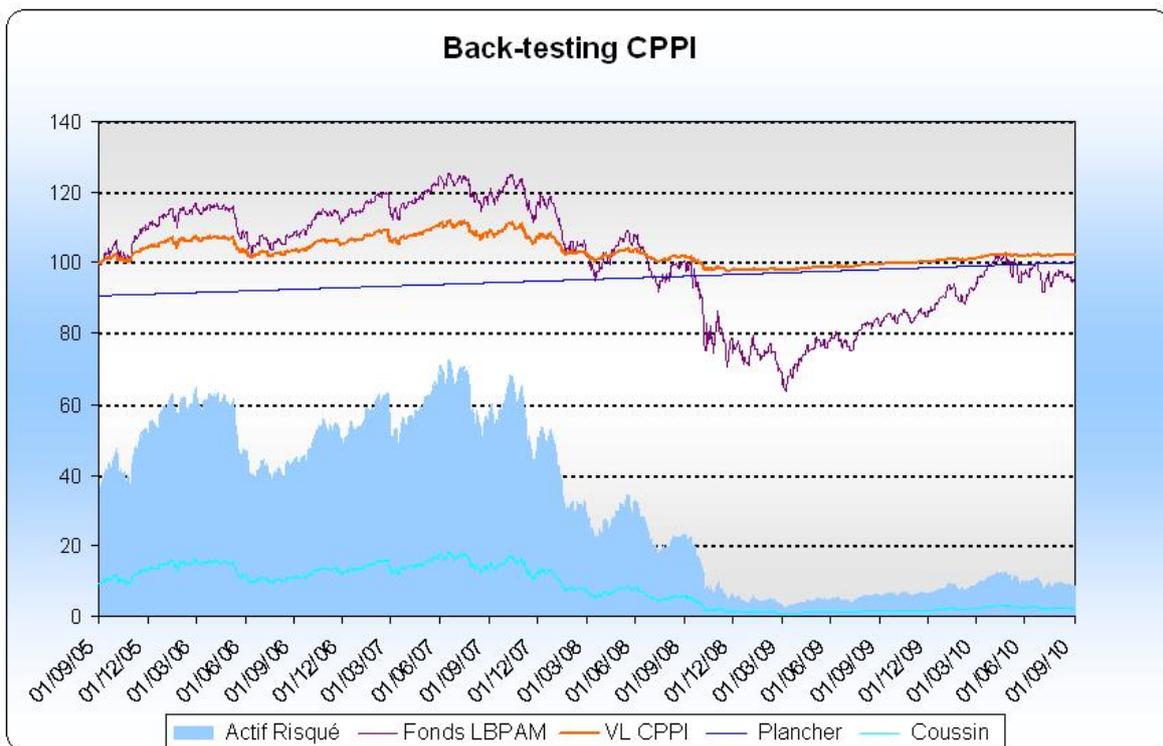
Ainsi, on comprend mieux la dénomination Constant Proportion Portfolio Insurance, car la recherche d'un multiple cible équivaut à choisir une fois pour toute une proportion constante d'exposition au risque.

1.5 Back-testing

Afin d'étudier le comportement d'un fonds CPPI, nous avons réalisé des simulations sur une période de 5 ans, du 1er septembre 2005 au 1er septembre 2010 avec des paramètres suivants :

- Composition de l'actif risqué : fonds LBPAM actions monde.
- L'actif non risqué : Zéro-coupon de taux constant 2%.
- Le multiple cible : $m = 4$.
- La Valeur Liquidative initiale du fonds est de base 100.
- Le capital garanti est 100% de Valeur Liquidative initiale.
- Les re-balancements sont effectués tous les jours.

Le graphique suivant représente l'évolution de l'actif risqué (la partie risquée du fonds), de la Valeur Liquidative du fonds CPPI, de la Valeur Liquidative garantie, du coussin et du fonds sous-jacent de LBPAM.

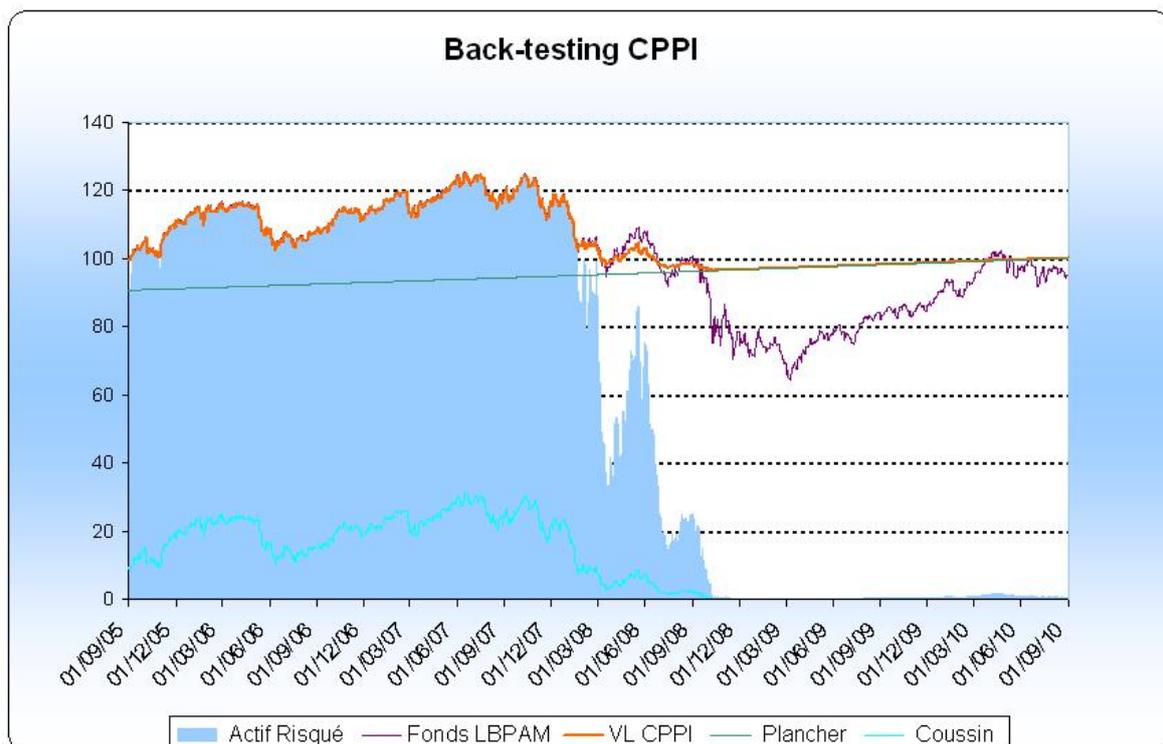


Commentaire :

On constate que la Valeur Liquidative du fonds CPPI est toujours au-dessus du Plancher. De plus, la partie risquée du fonds et la Valeur Liquidative varient dans le

même sens que le marché (le fonds LBPAM actions monde). Sur la période de montée, du début de la période d'investissement (1er septembre 2005) à la fin de l'année 2007, la Valeur Liquidative du fonds augmente continûment, sauf quelques baisses temporaires. La baisse successive du marché (à partir du décembre 2007) diminue la Valeur Liquidative du fonds de telle sorte qu'elle s'approche du Plancher. Elle remonte un peu quand le marché remonte vers la fin de la période.

Nous reprenons maintenant le back-test en changeant la valeur du multiple m de 4 à 10. Nous obtenons le graphique suivant :

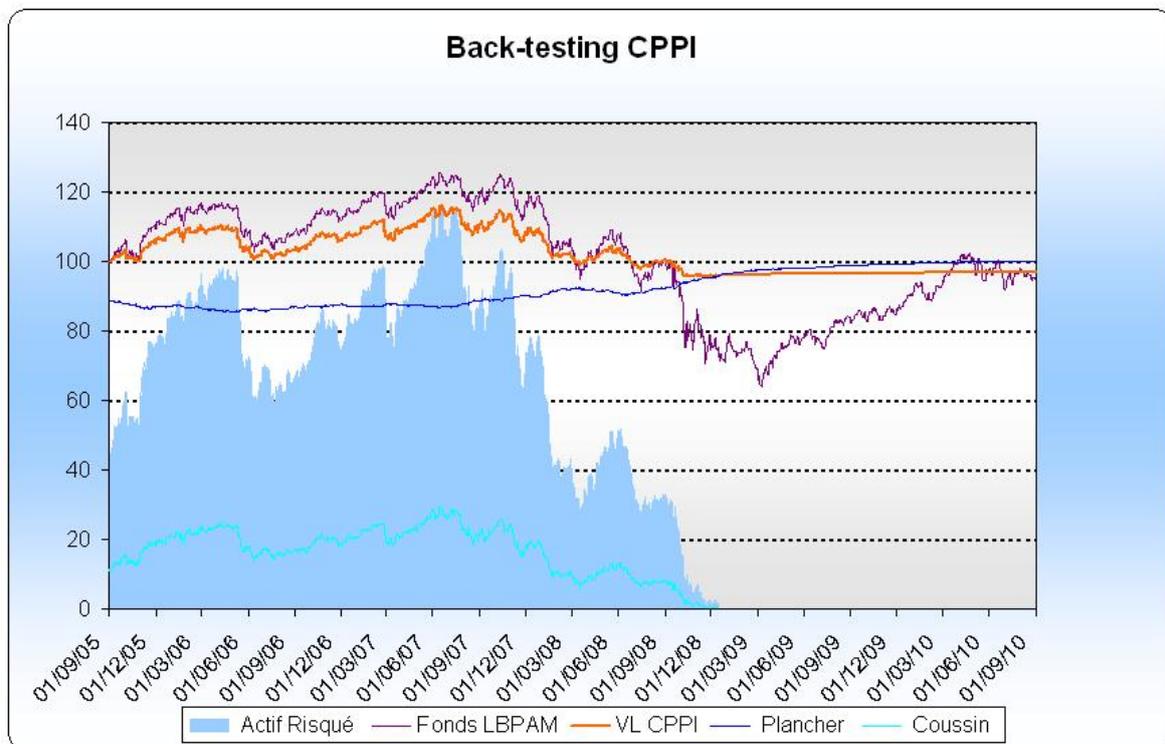


Commentaire :

Plus le multiple augmente, plus la partie risquée du fonds augmente en cas de hausse du marché. On peut le voir clairement sur le graphique. Pendant la première période d'investissement, le fonds est totalement investi en actif risqué, et on profite donc de la performance du marché. Cependant, quand le marché commence à baisser, la partie risquée du fonds diminue de manière plus vite que dans le cas précédente. Le coussin s'approche de 0 en octobre 2008 et la partie risquée du fonds est investie presque totalement en actif non risqué à partir de la fin août 2009. Le fonds voit pas beaucoup de performance à l'échéance.

Le back-test est repris encore une fois où on prend le taux Eonia (Euro OverNight

Index Average) comme le taux non risqué. Nous utilisons dans ce cas la courbe des BTAM des OAT pour calculer le plancher actualisé. La valeur du multiple est de 4. Le fonds subit une monétarisation à partir du 17 décembre 2008 jusqu'à la fin de période et la performance négative à l'échéance. Voici le graphique illustré le résultat.



Le tableau suivant représente la performance du fonds dans ces trois cas :

Fonds	Performance plat sur 5 ans
CPPI, $m = 4$, $r = 2\%$	2.1098%
CPPI, $m = 10$, $r = 2\%$	0.0494%
CPPI, $m = 4$, Eonia	-3.2371%

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la philosophie de la gestion CPPI. Les principes généraux peuvent être résumés comme suivants :

1. La stratégie CPPI vise à conserver une proportion constante d'exposition au risque.
2. Pour cela, le gérant fixe un multiple m , qui correspond à l'hypothèse de perte maximale instantanée de l'actif risqué sur une période.

3. L'allocation d'actif risqué est déterminée en appliquant au coussin le multiple m , qui produit l'effet de levier.

4. Le coussin est calculé à tout instant comme la différence entre la valeur du Fonds et le Plancher, ce dernier représente la valeur actuelle de la garantie minimale à l'échéance du Fonds.

5. La garantie minimale de performance porte non pas explicitement sur l'actif risqué, mais sur la valeur liquidative du Fonds.

Avec le changement des paramètres, le fonds CPPI varie beaucoup. Nous allons étudier les propriétés de cette gestion suivant les paramètres définis au démarrage dans la partie qui suit.

Chapitre 2

Propriétés de gestion CPPI

L'objet de cette partie est d'étudier sur le plan théorique les propriétés de la gestion CPPI, en particulier sa sensibilité par rapport à l'évolution de l'actif risqué et aux taux d'intérêt. Dans ce cadre, nous allons étudier d'abord l'expression du fonds CPPI, et ensuite le comportement du fonds CPPI pour différents scénarios de marché de l'actif risqué, des taux d'intérêt d'une part, et du niveau du multiple m d'autre part.

2.1 Expression théorique de la gestion CPPI

L'investisseur répartit sa richesse entre deux actifs : un actif non risqué noté B et un actif risqué, généralement un portefeuille de titres comme un indice, noté S . Le fonds est autofinçant et défini sur l'intervalle de temps $[0, T]$. La valeur de l'actif non risqué B évolue selon :

$$dB_t = B_t r dt$$

où r présente le taux sans risque, supposé constant.

La dynamique de l'actif risqué S est donnée par un processus de diffusion classique :

$$dS_t = S_t [\mu dt + \sigma dW_t]$$

où W est un mouvement brownien standard.

La méthode du coussin possède une dynamique qui maintient la valeur du fonds au-dessus d'un plancher P_t évoluant selon :

$$dP_t = P_t r dt$$

La valeur du coussin est définie à chaque date t comme la différence entre la valeur du fonds et le placher :

$$C_t = V_t - P_t$$

avec $P_t = e^{-r(T-t)}G$ où G est la capitale garantie à l'échéance T .

L'exposition, c'est-à-dire le montant réellement investi en actif risqué S , est traditionnellement choisie comme multiple du coussin :

$$E_t = mC_t$$

où m est "multiple".

Pour chaque $t < T$, la valeur du portefeuille est donnée par :

$$dV_t = (V_t - E_t)\frac{dB_t}{B_t} + E_t\frac{dS_t}{S_t}$$

La valeur du coussin devient donc :

$$\begin{aligned} dC_t &= d(V_t - P_t) = (V_t - E_t)\frac{dB_t}{B_t} + E_t\frac{dS_t}{S_t} - dP_t \\ &= (C_t + P_t - mC_t)\frac{dB_t}{B_t} + mC_t\frac{dS_t}{S_t} - dP_t \\ &= (C_t - mC_t)\frac{dB_t}{B_t} + mC_t\frac{dS_t}{S_t} \\ &= C_t[(r + m(\mu - r))dt + m\sigma dW_t] \end{aligned}$$

D'où

$$C_t = C_0 \exp \left[\left(r + m(\mu - r) - \frac{m^2\sigma^2}{2} \right) t + m\sigma W_t \right] \quad (2.1)$$

Rappelons l'écriture de l'actif risqué S comme brownien géométrique standard :

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$W_t = \frac{1}{\sigma} \left[\log \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right]$$

En substituant la valeur de W_t dans l'expression du coussin, nous obtenons alors :

$$C_t = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m \exp \left[(1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) t \right] \quad (2.2)$$

Nous pouvons écrire C_t sous la forme :

$$C_t = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m e^{\beta(r,\sigma)t} \quad (2.3)$$

ou

$$C_t = \alpha_t S_t^m \quad (2.4)$$

avec

$$\alpha_t = \frac{C_0}{S_0^m} e^{\beta(r,\sigma)t}; \quad \beta(r,\sigma) = (1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right)$$

La valeur du fonds CPPI à chaque date $t \in [0; T]$, d'après l'équation (2.1), est donnée par :

$$V_t = P_t + C_t = P_t + C_0 \exp \left[\left(r + m(\mu - r) - \frac{m^2\sigma^2}{2} \right) t + m\sigma W_t \right] \quad (2.5)$$

et d'après l'équation (2.2), est donnée par :

$$V_t = P_t + C_t = P_t + C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m \exp \left[(1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) t \right] \quad (2.6)$$

Particulièrement, à la date d'échéance T , la valeur du fonds est de la forme :

$$V_T = P_T + C_T = V_0 + C_0 \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^m \exp \left[(1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) T \right] \quad (2.7)$$

en supposant que la garantie à l'échéance est de 100% de la valeur initiale V_0 . La performance du fonds CPPI à l'échéance dans ce cas est donc :

$$\frac{V_T}{V_0} - 1 = \frac{C_0}{V_0} \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^m \exp \left[(1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) T \right] \quad (2.8)$$

En reprenant l'équation (2.4) et sous l'hypothèse que W_t est un mouvement brownien standard, nous pouvons calculer analytiquement l'expression de l'espérance $\mathbb{E}(V_t)$ et de la variance $\mathbb{V}(V_t)$ de la valeur liquidative du Fonds CPPI :

$$\mathbb{E}(V_t) = P_t + C_0 \exp \{rt + m(\mu - r)t\} \quad (2.9)$$

$$\mathbb{V}(V_t) = C_0^2 e^{2(rt+m(\mu-r)t)} \left[e^{m^2\sigma^2 t} - 1 \right] \quad (2.10)$$

2.2 Influence de l'évolution de l'actif risqué toutes choses égales par ailleurs

2.2.1 Actif risqué et valeur du Fonds CPPI

Sur le plan théorique, quelque soit l'évolution de l'actif risqué, la valeur du Fonds CPPI ne peut descendre en dessous de son plancher. Une telle propriété est vérifiée si le rebalancement est effectué de manière continue (montrée par les équations (2.5) ou (2.6)).

2.2.2 Actif risqué et rebalancement

La stratégie CPPI achète l'actif risqué lorsque le marché monte et le vend lorsqu'il baisse.

Preuve

On considère l'influence de l'actif risqué sur le multiple effectif m_t . Soit M_t le montant investi dans l'actif non risqué à la date $t \in [0, T]$, on a :

$$V_t = E_t + M_t$$

En écrivant

$$E_t = m_t C_t = m_t (V_t - P_t) = m_t (E_t + M_t - P_t)$$

on obtient

$$m_t = \frac{E_t}{E_t + M_t - P_t} = \frac{P_t - M_t}{E_t + M_t - P_t} + 1$$

On en déduit que $m_t > 1 \iff P_t > M_t$.

La dérivée de m_t par rapport à E_t :

$$\frac{\partial m_t}{\partial E_t} = \frac{M_t - P_t}{(E_t + M_t - P_t)^2} < 0$$

Il en résulte que E_t varie dans le sens inverse de m_t . Lorsque E_t baisse alors m_t monte ; la stratégie CPPI vise à maintenir le multiple constant au niveau cible m . Il faut donc vendre l'actif risqué et acheter l'actif sans risque.

Le raisonnement est le même dans le cas inverse.

Remarque : L'opération de vente, lorsque le marché baisse et d'achat lorsqu'il monte, correspond à la cristallisation d'une moins-value.

Calculons l'expression de cette moins-value :

Supposons que le marché baisse de $x\%$ entre t et $t + 1$, on a :

$$S_{t+1} = S_t(1 - x)$$

Si w représente le poids de l'actif risqué à la date t , on a :

$$V_t = wS_t + (1 - w)B_t$$

A la date $t + 1$, due to la baisse de S , et prenant l'approximation que $B_{t+1} \approx B_t$; $P_{t+1} \approx P_t$:

$$V_{t+1} = wS_t(1 - x) + (1 - w)B_t$$

d'où

$$C_{t+1} = V_{t+1} - P_t = wS_t(1 - x) + (1 - w)B_t - P_t$$

Après le rebalancement, pour maintenir m constant, si dw est le poids de l'actif risqué à vendre, alors

$$(w - dw)S_{t+1} = mC_{t+1}$$

d'où

$$dw = w - m \frac{C_{t+1}}{S_{t+1}} = w - m \frac{wS_t(1 - x) + (1 - w)B_t - P_t}{S_t(1 - x)}$$

La moins-value est donnée par :

$$-dwS_t x = - \left[w - m \frac{wS_t(1 - x) + (1 - w)B_t - P_t}{S_t(1 - x)} \right] S_t x$$

Application numérique :

Supposons qu'à la date $t = 0$: $S_0 = B_0 = 100$, $P_0 = 80$, $C_0 = 20$, $m = 4$, $w = 80\%$. On a :

$$V_0 = 80\%S_0 + 20\%B_0 = 100$$

Supposons qu'il y a une chute de 20% de l'actif risqué entre la date $t = 0$ et $t = 1$, alors :

$$S_1 = 100(1 - 20\%) = 80$$

$$V_1 = 80\%S_1 + 20\%B_0 = 64 + 20 = 84$$

$$C_1 = 84 - 80 = 4$$

d'où

$$dw = 80\% - 4 \times \frac{4}{80} = 60\%$$

Il faut rendre donc $(64 - 4 \times 4)$ d'actif risqué, soit 48. La moins-value est : $-60\% \times 20\% \times 100 = -12$.

2.2.3 Actif risqué et coussin

Lorsque S_t baisse, C_t diminue et inversement. De plus, la vitesse de croissance du coussin augmente avec le sous-jacent et inversement.

Preuve

Reprenons l'équation (2.4), on a :

$$\frac{\partial C_t}{\partial S_t} = m\alpha_t S_t^{m-1} > 0$$

avec $m > 1$, et

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = m(m-1)\alpha_t S_t^{m-2} > 0$$

avec $m > 1$.

2.2.4 Actif risqué et la performance du fonds CPPI

La performance du fonds CPPI est une fonction convexe de celle de l'actif risqué. Par conséquent, plus l'actif risqué performe, plus le Fonds CPPI sera exposé en actif risqué et plus sa performance sera dopée par un effet de levier croissant. Une telle propriété confère un caractère convexe au profil de gain du Fonds CPPI à l'échéance.

Preuve

Nous reprenons l'équation (2.8) :

$$\frac{V_T}{V_0} - 1 = \frac{C_0}{V_0} \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^m \exp \left[(1-m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) T \right]$$

Notons J_T et R_T la performance du fonds CPPI et celle de l'actif risqué à l'échéance, nous avons :

$$J_T = \frac{C_0}{V_0} (R_T + 1)^m \exp \left[(1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) T \right]$$

Nous calculons la dérivée du seconde degré de J_T par rapport à R_T :

$$\frac{\partial J_T}{\partial R_T} = m(m - 1) \frac{C_0}{V_0} (R_T + 1)^{m-2} \exp \left[(1 - m) \left(r + \frac{m\sigma^2}{2} \right) T \right] > 0$$

pour $m > 1$, d'où le résultat.

2.2.5 Influence de l'évolution de la volatilité

La volatilité a un effet négatif sur le coussin du Fonds CPPI et donc sur le levier : plus la volatilité augmente, moins le CPPI performe.

Preuve

De l'équation (2.3) on a :

$$\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m \frac{\partial \beta(r, \sigma)}{\partial \sigma} e^{\beta(r, \sigma)t}$$

Or

$$\frac{\partial \beta(r, \sigma)}{\partial \sigma} = m(1 - m)\sigma$$

Donc

$$\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = m(1 - m)\sigma C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m e^{\beta(r, \sigma)t} < 0$$

avec $m > 1$.

2.3 Influence de l'évolution des taux d'intérêt toutes choses égales par ailleurs

Le CPPI achète l'actif risqué quand les taux d'intérêt montent et le vend lorsqu'ils baissent.

Preuve

Reprenons l'équation

$$m_t = \frac{E_t}{E_t + M_t - P_t}$$

$$\frac{\partial m_t}{\partial r(t, T)} = - \frac{E_t(T - t)}{(E_t + M_t - P_t)^2 (1 + r(t, T))^{T-t+1}} < 0$$

car

$$P_t = \frac{G}{(1 + r(t, T))^{T-t}}$$

Le taux d'intérêt et le multiple effectif varient donc dans les sens inverses. Lorsque les taux d'intérêt baissent, m_t monte, il faut donc vendre de l'actif risqué pour retrouver la multiple cible m . Inversement, il faut acheter de l'actif risqué lorsque les taux montent.

Nous retrouvons ce résultat en étudiant la sensibilité du coussin C_t par rapport au taux d'intérêt qui diminue lorsque les les taux montent et inversement. En effet,

$$C_t = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m e^{\beta(r, \sigma)t}$$

alors,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_t}{\partial r} &= C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m \frac{\partial \beta(r, \sigma)}{\partial r} e^{\beta(r, \sigma)t} \\ &= (1 - m)C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m e^{\beta(r, \sigma)t} < 0 \end{aligned}$$

avec $m > 1$.

2.4 Impact du multiple

Lors d'un montage de Fonds CPPI, un choix doit être effectué par le gérant sur la grandeur de m . Un multiple élevé correspond à un effet de levier plus fort, mais le fonds est alors exposé à une monétarisation plus rapide en cas de chute du marché.

L'objet de cette partie est d'étudier plus en détails l'impact du multiple sur la stratégie CPPI.

2.4.1 Convexité et multiple

En reprenant l'équation

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = m(m - 1)\alpha_t S_t^{m-2} > 0$$

avec $m > 1$

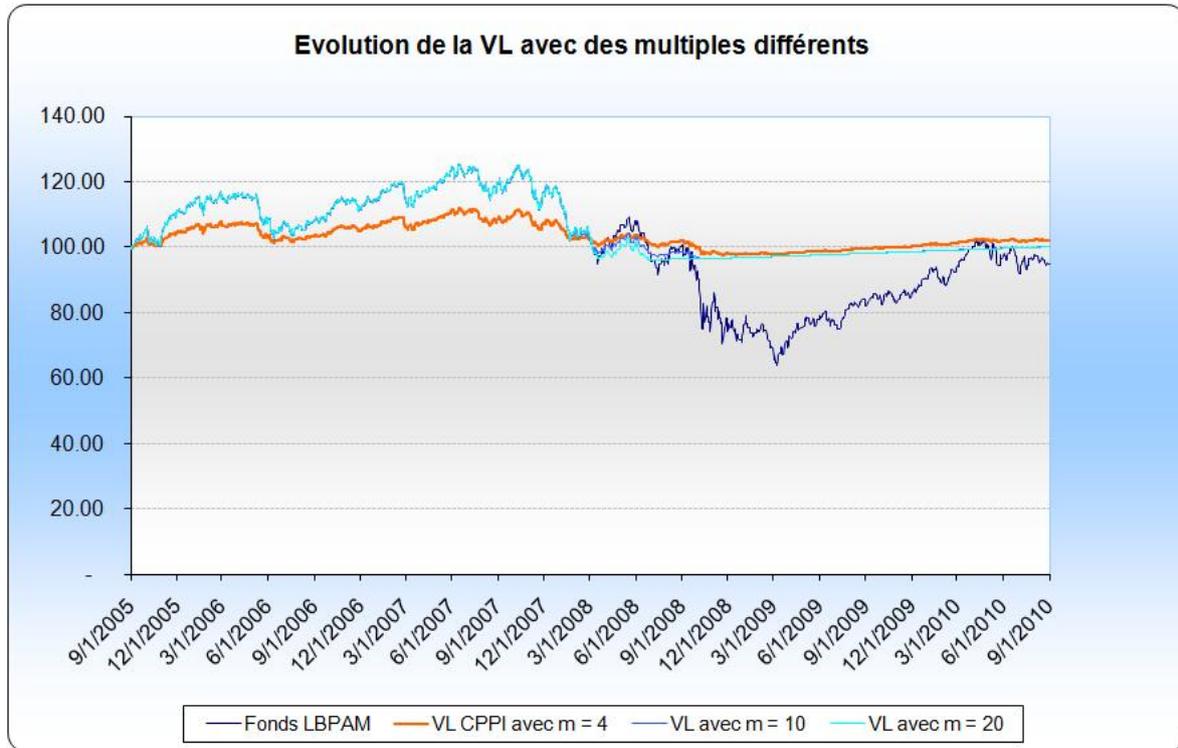
La convexité est une fonction croissante de m .

Par conséquent, plus m est fort plus le profil de rendement du CPPI est convexe.

Reprenons le même exemple du back-testing dans la partie précédente. Le gra-

phique suivant représente l'évolution de l'actif risqué (l'indice du fonds LBPAM action monde), et l'évolution de la valeur liquidative de plusieurs Fonds CPPI se différenciant par le multiple m .

Le graphique suivant représente les VL du fonds CPPI avec $m = 4$, $m = 10$ et $m = 20$.



Il apparaît qu'en phase de hausse continue (période de départ à la fin d'avril 2006), le fonds CPPI à $m = 20$ voit sa performance la plus haute. Par contre, lorsque le marché s'écoule à partir du 14 janvier 2008, l'accélération à la baisse est d'autant plus forte que m est élevé. En janvier 2008, le fonds CPPI à $m = 20$ descend plus vite et voit la monétarisation avant que les fonds CPPI à $m = 6$ et $m = 10$.

Ainsi en phase de hausse, les CPPI à fort multiple ont bénéficié de ce dopage d'effet de levier. Mais inversement, lorsque le marché chute, la monétarisation est plus rapide.

2.4.2 Vitesse et accélération du coussin et multiple

L'objectif est d'étudier en quoi le coefficient multiplicateur peut influencer sur la manière dont le coussin se déforme par rapport à une variation de l'actif risqué, qu'il s'agisse de sa vitesse de déformation, ou de son accélération.

Reprenons l'équation

$$C_t = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m e^{\beta(r,\sigma)t}$$

Alors,

$$\frac{\partial C_t}{\partial S_t} = m \frac{C_0}{S_0^m} S_t^{m-1} e^{\beta(r,\sigma)t} > 0$$

avec $m > 1$, et

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = m(m-1) \frac{C_0}{S_0^m} S_t^{m-2} e^{\beta(r,\sigma)t} > 0$$

avec $m > 1$.

Le profil de la vitesse et de l'accélération de déformation du coussin est fonction de la volatilité de l'actif risqué. Lorsque m devient très élevé, l'impact de la volatilité amène le coussin à se dégrader très rapidement, pour devenir nul. En tendance haussière, plus m est fort, plus la vitesse est forte, de même pour l'accélération.

2.4.3 Volatilité et multiple

Nous avons vu précédemment que la volatilité avait un impact négatif sur le fonds CPPI. En faisant varier m à partir de l'équation

$$\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = m(1-m)\sigma C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m e^{\beta(r,\sigma)t}$$

nous constatons que plus m est fort, plus la sensibilité à la volatilité est forte.

2.4.4 Fréquence de rebalancement et multiple

Reprenons le résultat suivant

$$\frac{\partial m_t}{\partial E_t} = -\frac{P_t - M_t}{(E_t + M_t - P_t)^2} < 0$$

Lorsque E_t baisse alors m_t monte et inversement. Puisque la stratégie CPPI vise à maintenir le multiplicateur m_t à un niveau cible m , il apparaît évident que plus m est petit, plus il est nécessaire de rebalancer rapidement l'actif risqué lorsque que E_t se déforme. Il en résulte que choisir un m petit, nous conduit à augmenter nos fréquences de rebalancement et ce, d'autant plus que l'actif est volatile.

2.4.5 Espérance - Variance de la valeur du Fonds et multiple

En reprenant les équations (2.9) et (2.10) :

$$\mathbb{E}(V_t) = G + (V_0 - Ge^{-rT}) \exp(m(\mu - r)T + rT)$$

$$\mathbb{V}(V_t) = (V_0 - Ge^{-rT})^2 e^{2(m(\mu-r)T+rT)} \left[e^{m^2\sigma^2T} - 1 \right]$$

Nous en déduisons que l'espérance et la variance de la valeur du fonds CPPI croissent avec m , si $\mu > r$, et indépendantes de la volatilité. Le multiple permet donc de choisir la garantie et aussi le profil de risque.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés de la gestion CPPI. Les propriétés principales d'une telle stratégie peuvent être résumés par les règles suivantes :

1. Sur le plan théorique, la valeur liquidative du Fonds CPPI ne peut jamais descendre en dessous du plancher actuariel.
2. La stratégie CPPI s'apparente à une stratégie "trend follower" : achat de l'actif risqué lorsque le marché monte, vente lorsqu'il baisse.
3. La performance du Fonds CPPI est une fonction convexe de celle l'actif risqué et est dépendante du chemin parcouru par l'actif risqué.
4. La baisse des taux, la baisse de l'actif risqué, et la hausse de la volatilité ont un effet négatif sur la performance du fonds CPPI.
5. Lorsqu'un CPPI est amené à toucher son plancher en raison d'une chute brutal de l'actif risqué et cumulée à une forte baisse des taux, le fonds est alors entièrement investi en actif non risqué : on dit qu'il a été monétarisé. Il n'y a plus aucun effet de levier et le coussin est nul quelque soit ensuite la remontée du marché : il y a comme une désactivation de l'effet de levier lorsque la valeur du Fonds atteint le plancher.
6. Plus m est élevé, plus l'effet de levier est important en cas de hausse du marché. Par contre, le CPPI est plus rapidement monétarisé si les marchés chutent, et si la volatilité augmente. La vitesse et l'accélération de déformation du coussin augmente avec m , sauf si ce dernier devient très supérieur à l'inverse de la volatilité, auquel cas le coussin se dégrade tellement, qu'il n'y a plus de déformation.

Inversement plus m est faible, plus la fréquence de rebalancement devient importante.

Chapitre 3

Risques affectant la gestion CPPI

Dans la gestion CPPI, le risque principal est le risque financier qui porte sur le franchissement par le bas du Plancher P_t théorique qui assure à l'échéance la garantie en capital et en performance. On peut dénombrer deux principaux risques financiers dans ce type de gestion : risque de Gap et risque de monétarisation.

Ces deux types de risques financiers sont causés directement par des risques suivants :

- Le risque de marché
- Le risque de modèle
- Le risque de discontinuité
- Le risque opérationnel

Nous aborderons dans la partie qui suit la description des risques et la couverture de ces risques.

3.1 Description des Risques

3.1.1 Risque de Gap

Le risque de Gap (ou le risque de dépassement) est défini comme le fait que la valeur du fonds dépasse le plancher, suite à une chute brutale des cours de l'actif risqué sans que le gérant puisse réagir.

En théorie, dans le cas où l'actif risqué suit un mouvement brownien géométrique standard, les valeurs du coussin et du fonds sont indépendantes de la trajectoire du sous-jacent. Par ailleurs, la valeur du fonds est, à tout instant t , supérieure au plancher :

$V_t \geq P_t$. Le montant investi sur l'actif risqué est proportionnel au coussin et s'annule en cas d'annulation du coussin C_t . Autrement dit, l'assurance est parfaite.

Or en pratique, les cours peuvent changer brutalement d'un moment à l'autre sans que le gérant puisse intervenir, avec pour conséquence un dépassement de la valeur du plancher. Le risque de dépassement est donc associé à des conditions de marché extrêmes, telles qu'une chute des cours supérieure à 20% entre deux rebalancements sur un CPPI avec $m = 5$.

En effet, en cas de baisse continue de l'actif risqué, la valeur du coussin restant toujours par définition supérieure ou égale à zéro, le fonds aura une valeur qui, en théorie, restera supérieure ou égale au plancher. Néanmoins, les transactions ne s'effectuant pas en continu, en cas de chute brutale des cours du sous-jacent, si le gérant n'a pas de temps de réajuster son fonds, le coussin ne permettra pas d'absorber toute cette baisse. Dans ce cas, plus le multiple est élevé, plus la valeur du fonds approchera rapidement au plancher, plus le risque de Gap est important.

3.1.2 Risque de monétarisation

Le risque de monétarisation est associé aux situations dans lesquelles une baisse du marché dès le lancement du fonds oblige le gestionnaire à réduire le niveau d'exposition à l'actif risqué à zéro et à placer la totalité des actifs dans des actifs non risqués afin de protéger la valeur du plancher à l'échéance. Il en résulte un fonds non risqué, dont la performance finale sera inférieure à celle attendue.

Dans un tel cas, bien que des investisseurs reçoivent leur capital, ils risquent de ne pas pouvoir profiter pleinement de la hausse des actifs risqués quand les marchés récupèrent. Plus pire, ces investisseurs seront bloqués dans un placement obligataire pour le reste de leur investissement, payant toujours des honoraires annuels.

Typiquement, une fois qu'un CPPI connaît le risque de monétarisation, les investisseurs peuvent avoir le choix : soit de rester dans l'investissement jusqu'à la maturité, soit de vendre le produit en question sur le marché secondaire. Or, ceux qui prennent le deuxième choix se heurtent souvent à un obstacle majeur - le coût de transaction. Dans la majorité des cas, les coûts de transaction sont si élevés que les investisseurs préfèrent attendre jusqu'à l'échéance et récupérer le principal.

3.1.3 Risque de marché

Le risque de marché est le risque de perte qui peut résulter des fluctuations de prix des instruments financiers qui composent un fonds.

Or la gestion du CPPI consiste principalement à allouer l'actif risqué S_t et l'actif non risqué B_t du fonds et donc à en calculer à chaque fois le rebalancement, c'est à dire la proportion de S_t et de B_t dans l'actif total.

Dans l'exposé de la méthode, le calcul de S_t et de B_t repose essentiellement sur :

- le multiple m qui correspond à la chute maximale admissible par l'actif risqué pour ne pas franchir le plancher P_t .

- le Plancher P_t dont l'estimation est fondamentale pour assurer la garantie. Et le Plancher P_t est calculé en fonction du niveau des taux d'intérêt en vigueur lors de chaque rebalancement.

Le risque de marché dans la gestion CPPI se compose donc du risque de taux, du risque de volatilité de l'actif risqué, du risque de liquidité et du risque de défaut de l'émetteur.

Nous allons présenter dans la partie qui suit la description de chacun de ces risques.

a. Risque de taux

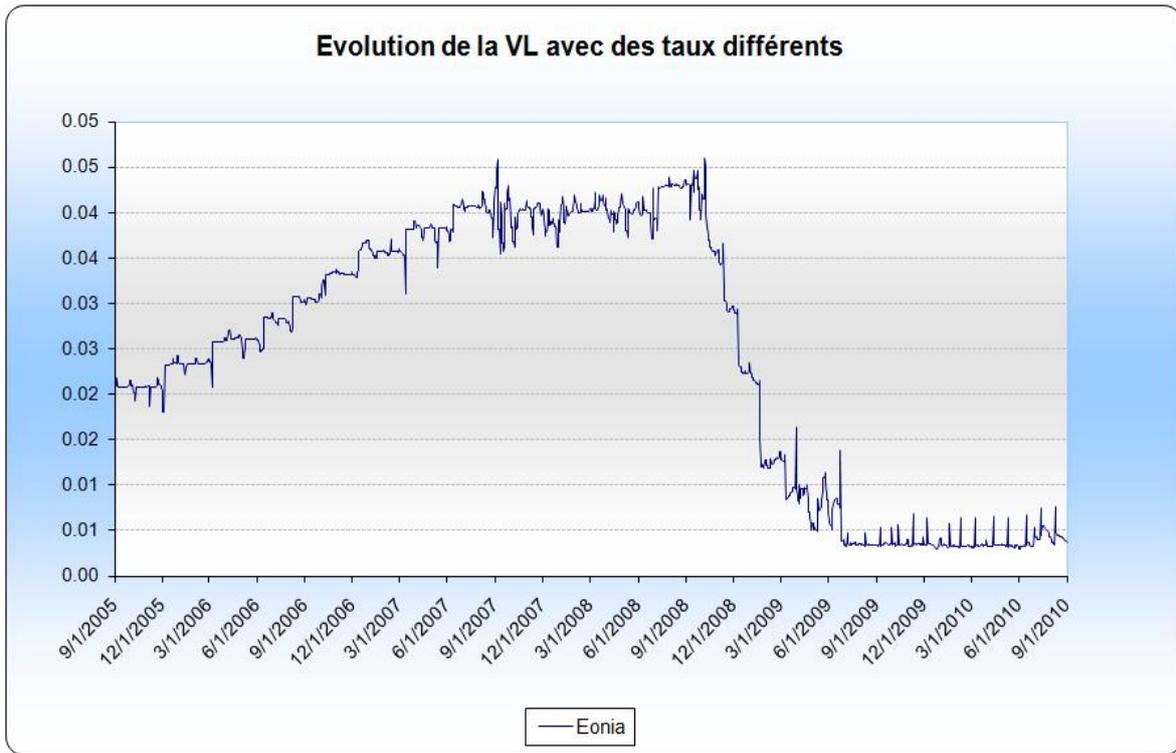
C'est lorsque l'actif risqué chute de manière importante de telle sorte que le fonds doive céder la totalité de l'actif risqué pour :

- soit acheter un actif non risqué
- soit conclure un swap de taux.

Il y a donc un risque de taux à couvrir, car l'actif non risqué B_t doit répliquer au minimum le rendement attendu du plancher P_t , qui doit tenir compte des frais de gestion, et qui équivaut au taux de l'actif non risqué de ce jour. De plus, la méthode du coussin oblige à acheter du taux quand l'actif risqué chute, pouvant accélérer le mouvement de chute des taux d'intérêt et affectant par conséquent le rendement réel du Plancher par rapport au rendement attendu.

Afin d'illustrer ce risque, nous reprenons le backtest en différenciant des taux de l'actif non risqué : taux zéro-coupon 2% et Eonia sur la période étudiée.

Vu de la courbe de l'Eonia suivante, on trouve qu'il y a une grande baisse sur la période du 7 octobre 2008 au 2 juillet 2009, après l'augmentation successive au départ.



Le graphique suivant représente l'évolution du Fonds CPPI dans deux cas de taux non risqué.



Le graphique montre qu'à la hausse de l'Eonia, le Fonds voit plus de performance

que celui avec taux constant. Cependant, en cas de baisse, la Valeur Liquidative du fonds avec Eonia descend en dessous de celle du fonds avec taux constant et entraîne la performance négative à l'échéance.

b. Risque de volatilité de l'actif risqué

Comme on a vu dans le chapitre précédent, la volatilité de l'actif risqué a un effet négatif sur le Fonds CPPI : plus la volatilité augmente, moins le Fonds CPPI performe.

L'actif risqué peut chuter à une amplitude supérieure au niveau admissible $1/m$, cassant ainsi le plancher P_t , tel que $V_t < P_t$, chute qui est d'autant plus accélérée que le Fonds est en mode de vente sur l'actif risqué. Ce risque est lié à une explosion de la volatilité.

c. Risque de liquidité

C'est le risque sur la facilité à acheter ou à revendre un actif. Si un marché n'est pas liquide, nous risquons de ne pas trouver d'acheteur quand nous le voulons ou de ne pas trouver de vendeur quand nous en avons absolument besoin.

C'est un risque lié à la nature du sous-jacent (de la marchandise) mais aussi à la crédibilité de l'acheteur-vendeur. En effet, il est facile d'acheter ou de vendre un produit courant à une contrepartie de confiance, mais plus difficile avec un produit très spécialisé. C'est la liquidité de ce produit. De plus, si l'acheteur/vendeur n'est pas crédible, le risque de contrepartie pour les éventuels fournisseurs/clients, les dissuade de traiter.

La gestion CPPI vise toujours à acheter/vendre l'actif risqué et l'actif non risqué à chaque rebalancement. Le risque de liquidité accélérera et amplifiera les mouvements de chute.

d. Risque de défaut de l'émetteur

Le risque de défaut de l'émetteur représente le risque pour l'investisseur de l'incapacité totale ou partielle de l'émetteur à honorer ses engagements et donc être amené à faire défaut. Cette défaillance affecte négativement la performance du fonds. Ce risque est d'autant plus important que la qualité de l'émetteur est basse.

Comme dans la gestion CPPI, B_t étant investi dans des actifs non risqués (titres obligataires ou monétaires), B_t est soumis au risque de défaut de l'émetteur.

3.1.4 Risque de modèle

Le gérant fixe le paramètre m , qui détermine la proportion d'actif risqué et qui est construite sur l'hypothèse d'une perte maximale admissible de l'actif risqué ($= 1/m$) sur la fréquence de rebalancement de l'actif. Il y a donc un risque de modèle sur m , qui peut sous-évaluer le risque de perte maximale réelle de l'actif risqué.

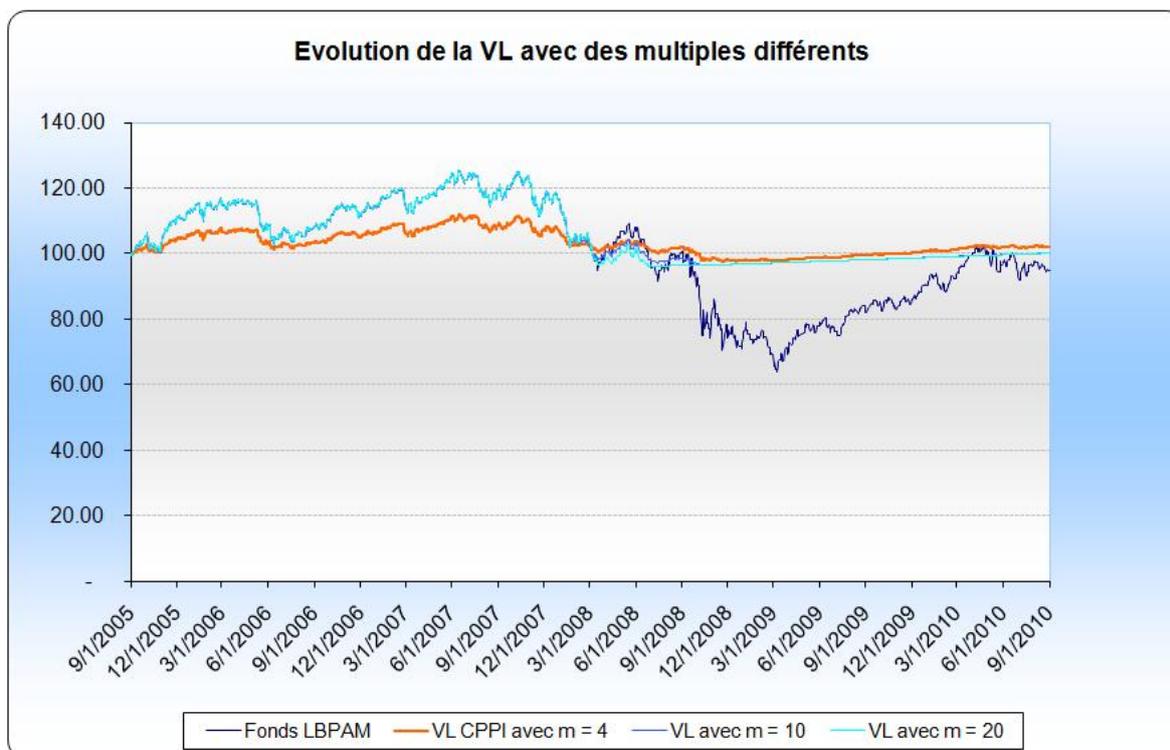
Exemple 3.1.1 Nous avons repris le back-testing sur le Fonds LBPAM actions monde entre le 1er septembre 2005 et le 1er septembre 2010. Avant le 29 septembre 2008, la pire perte constatée sur ce fonds dans le passé était de 4.7%. Si le gérant décide d'adopter cette valeur comme la perte maximale sur un jour de l'actif risqué, il pourrait fixer le multiple jusqu'à un niveau de 20.

Or la perte quotidienne maximale réellement constatée est de 6.05% entre le 14/10/2008 et le 15/10/2008.

$$m = \frac{1}{6.05\%} = 16.51$$

Pour $m = 40$, le plancher de garantie minimale est crevé et le Fonds n'assure pas son engagement de protection du capital à l'échéance.

Le graphique suivant donne une bonne illustration de ce risque de modèle.



La performance sur 5 ans dépendant du multiple m est donnée dans le tableau suivant :

<i>Fonds</i>	<i>Performance plat sur 5 ans</i>
<i>CPPI, $m = 16.5$</i>	<i>0.0171%</i>
<i>CPPI, $m = 40$</i>	<i>-0.3182%</i>

Remarquons que le risque de modèle et le risque de volatilité sont étroitement liés.

3.1.5 Risque de discontinuité

Le risque de discontinuité porte sur la périodicité de cotation de l'actif risqué. Il est à différencier du risque de liquidité, bien que ces deux soient liés, parfois confondus.

D'après la description des modalités opératoires, le rebalancement se construit à partir d'une estimation de la valeur de l'actif risqué qui va déterminer le niveau de coussin et par conséquent la proportion d'actif risqué, de façon à ce que m_t soit proche de m . La souscription-rachat s'effectue à valeur inconnue, et il faut attendre la prochaine date de valorisation qui peut être d'une semaine avant de connaître le montant traité.

Or le prix d'exécution de l'actif risqué sur lequel a été effectué le rebalancement, peut être largement différent du prix utilisé pour le calcul du rebalancement. Ce décalage peut impliquer une sur-pondération de l'actif risqué par rapport à son poids théorique et une prise de risque supérieure.

Ce risque de décalage est d'autant plus grand que la cotation de l'actif risqué est discontinue et espacée dans le temps et que la volatilité du sous-jacent est importante.

Enfin, cette discontinuité induit un risque de liquidité. Supposons que l'on soit le 11 septembre 2001, en toute rigueur, je devrais vendre la totalité de mon actif risqué, ou bien que le ticket de rachat soit fait, il ne sera exécuté que le lendemain au cours d'ouverture qui est inconnu. Il y a donc 24 heures qui s'écoulent sans que le gérant ne puisse intervenir. En même temps, n'ayant pas pu vendre son actif risqué dont il ignore le montant, le gérant n'a pas les moyens de constater que son plancher actuariel a été atteint, et donc de prendre les mesures nécessaires pour traiter son swap de taux. S'il attend le lendemain, il risque de subir une baisse des taux en plus d'une chute supplémentaire de l'actif risqué.

3.1.6 Risque opérationnel

Le risque opérationnel porte essentiellement sur le bon déroulement du rebalancement, et sur le suivi du plancher P_t .

La fréquence de rebalancement est d'autant plus grande que l'actif risqué est volatile et que le multiple m est faible, et le plancher est haut.

Ce type de fonds nécessite un suivi important de la part du gérant qui doit réaliser les rebalancements sur des estimations de cours des actifs risqués de la prochaine date de valorisation (à valeur inconnue). Ce dernier doit donc être présent lors du rebalancement et ne doit pas se tromper dans l'écriture des tickets d'opération, qu'il s'agisse des quantités ou code valeur.

Le gérant doit surveiller de près le Plancher, en particulier dans le cas de scénarios de marché défavorable. Si le plancher est atteint, le gérant devra procéder immédiatement à la vente de la totalité de l'actif risqué afin d'acheter l'actif non risqué. Le risque opérationnel porterait sur une absence de surveillance de ce plancher d'une part et de sa mauvaise estimation d'autre part (exemple si le plancher a été sous-estimé de manière importante par rapport à sa valeur réelle).

3.2 Couverture des risques

Cette partie traite des moyens internes ou externes que peut utiliser le gérant pour couvrir les risques qui ont été décrits précédemment.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse que le gérant applique rigoureusement la mécanique de gestion CPPI.

3.2.1 Couverture du risque de Gap

Un client d'un Fonds CPPI peut être assuré contre le risque de Gap en achetant une option, appelée option du risque de Gap. Lorsque le Fonds descend en dessous du plancher, la troisième partie comme la banque ou les compagnies d'assurance, va rembourser la perte qui est l'écart négatif entre la Valeur Liquidative du Fonds à l'échéance et la Valeur Liquidative garantie.

Le pricing de cette option sera étudié dans le chapitre suivant.

3.2.2 Couverture du risque de taux

Dans la mécanique CPPI, on utilise le coussin pour assurer le risque lié à l'actif risqué, mais rien n'est prévu pour assurer le risque lié au taux de capitalisation de l'actif non risqué. Lorsque la valeur liquidative du fonds approche de son plancher actuariel, le coussin est faible ainsi que l'exposition en actif risqué, et la moindre variation du taux sécurisé peut entraîner un défaut vis-à-vis de la garantie.

Dans l'attente de la conclusion du swap de taux fixe contre Eonia, le gérant peut se couvrir au moyen de produits dérivés de taux :

- soit en vendant des contrats futurs sur taux d'intérêt, comme du Schatz, du Boble, du Bund (FGBL) en fonction de la sensibilité du zéro-coupon théorique dont la maturité est la durée de vie restante du Fonds.
- soit en achetant à la monnaie des Puts sur taux d'intérêt.

3.2.3 Couverture du risque de volatilité de l'actif risqué

Nous avons vu que la volatilité a un effet négatif sur le coussin. Or le seul moyen d'éliminer la volatilité consiste à vendre l'actif risqué. Un tel acte de gestion serait en contradiction avec l'application de la règle de gestion CPPI. Un moyen possible consiste à être long de volatilité en achetant une option, et en particulier un Put sur un indice de marché le plus corrélé à l'actif risqué.

La couverture du risque de volatilité est difficile, malgré l'existence d'instrument de couverture comme les options. En effet, cette stratégie de couverture trouve ses limites lorsque l'on ne trouve pas d'option sur l'actif risqué ou au moins sur un sous-jacent corrélé à l'actif risqué.

Dans ce cas, le gérant ne peut que subir passivement la volatilité. L'obligation de sa part consiste au moins à calculer et suivre dans le temps l'évolution de la volatilité historique des performances quotidiennes à 3 mois, 6 mois et 1 an de l'actif risqué.

Or dans la gestion CPPI, plus le multiple est fort plus la sensibilité à la volatilité est forte. Le gérant du fonds pourrait modifier le multiple m en regardant la volatilité. Cette méthode sera étudiée dans le dernier chapitre.

3.2.4 Couverture du risque de liquidité

Ce risque est difficilement quantifiable, il vaut mieux donc l'éviter en investissant dans des actifs très liquides, comme les OPCVM dont la réglementation oblige les sociétés

de gestion à en assurer la liquidité. Toutefois, rien n'empêche une suspension de cotation sur une action d'habitude liquide mais qu'un évènement exceptionnel de marché affecte. La question se pose en ces termes pour des fonds alternatifs. La seule mesure de sélection et du contrôle de l'impact de ce risque de liquidité est encore la volatilité de l'actif risqué et le volume de transactions.

3.2.5 Couverture du risque de défaut de l'émetteur

Ce risque porte sur l'actif non risqué. Si celui-ci est constitué de titres obligataires, le choix de la signature permettra de limiter le risque de défaut de l'émetteur en ne sélectionnant que les meilleures notations de la catégorie "Investment grade" (AAA, AA, A+).

Si l'actif risqué est constitué de fonds monétaires réguliers, le choix peut se porter sur des fonds noté AAA au dépend de la performance, ou sur des fonds faiblement chargés et gérés par une société de gestion de qualité.

Il n'y a donc pas de couverture du risque, mais minimisation du risque de défaut par sélection de la qualité de notation du fonds ou de l'émetteur.

3.2.6 Couverture du risque de modèle

Le risque de modèle repose sur le choix du coefficient multiplicateur représentatif de la perte maximale attendue sur l'actif risqué. Un des outils de pilotage de ce risque est la "Value at Risk" (VaR) qui permet d'estimer la perte maximale probable de l'actif risqué. Le gérant pourra déterminer le coefficient multiplicateur :

$$m = \frac{1}{VaR}$$

La VaR peut servir de seuil limite à ne pas dépasser pour le paramétrage du multiple m . Ensuite, c'est à l'appréciation du gérant de déterminer la grandeur de m en trouvant un équilibre entre un effet de levier le plus élevé possible, et un risque de monétarisation le plus faible possible.

La VaR doit être calculée sur une période correspondant à la fréquence de rebalancement de l'actif risqué. S'il s'agit d'un jour, nous calculerons la VaR à un jour.

3.2.7 Couverture du risque de discontinuité

Le risque de discontinuité correspond à l'écart entre la valeur estimée pour le rebalancement et la valeur effective sur laquelle a été effectué l'opération de rebalancement. Cet écart peut être étudié selon une approche Value at Risk (VaR). On en déduit alors :

$$|Perte Max attendue| > |VaR_{1jour}| + |VaR_{Cl\^oture/Ouverture}| + |VaR_{Tracking}|$$

$$\text{Le ratio de gestion } \lambda = |Perte Max attendue| = \frac{1}{m}$$

3.2.8 Couverture du risque opérationnel

Ces risques sont difficilement quantifiables car ils sont liés à des facteurs opérationnels comme des erreurs de saisie de ticket d'opérations, d'absence d'actes de gestion, de problèmes informatiques de mise à jour des inputs de marché pour le calcul du rebalancement.

Un tel risque ne peut être couvert en totalité, mais au moins la société de gestion peut-elle se donner les moyens pour limiter ces facteurs de risque : en assurant la permanence d'un gérant et d'un opérateur du middle office. Elle doit aussi se doter d'un système informatique fiable, des outils de suivi de gestion les plus automatisés d'une part et un système de contrôle des risques extrêmes d'autre part.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des risques affectant la gestion CPPI. Les risques principaux sont le risque de Gap et le risque de monétarisation. Ces deux risques sont provoqués de façon directe ou indirecte des risques de marché, de modèle, de discontinuité et opérationnel. Nous avons aussi abordé des méthodes internes ou externes pour couvrir ces risques.

Plus que d'avoir trouvé des techniques de couverture de ces risques, nous avons plutôt évoqué des moyens pour prévenir des risques extrêmes de marché.

Pour cette raison, la plupart des sociétés de gestion décident :

- Soit de se réassurer auprès d'un assureur financier en achetant une option de Gap. Cette option de Gap rembourse tout écart négatif entre la Valeur Liquidative du Fonds à l'échéance et la Valeur Liquidative minimum garantie.

- Soit de s'auto-assurer, en faisant confiance à leur système de prévention des risques extrêmes. Le risque de monétarisation n'est pas évitable, à moins d'intervenir sur la mécanique de gestion CPPI, en modifiant le multiple, le plancher, ou le profil de risque de l'actif risqué.

Dans les chapitres qui suivent, nous aborderons à ces deux solutions. Le chapitre 4 donnera une évaluation quantitative du risque de Gap en introduisant des modèles avec sauts des actifs risqués.

Nous présenterons dans le chapitre 6 des exemples numériques d'une modification de la gestion CPPI, TIPP - Time Invariant Portfolio Protection, appliquant sur les Fonds de Fonds de LBPAM. Dans ces exemples, nous modifierons le multiple en se basant sur la volatilité de l'actif risqué, le plancher (ou la capital garantie) pour adapter le mieux l'effet de levier de l'actif risqué et éviter de la perte en cas de baisse du marché.

Chapitre 4

Evaluation du risque de Gap dans la gestion CPPI

Comme nous avons vu dans le deuxième chapitre, si l'actif risqué est modélisé par un mouvement brownien géométrique (c'est-à-dire de façon continue), la valeur du coussin reste toujours positif. Ceci signifie que la gestion est parfaite. Cependant, dans le marché réel, la gestion a vu des pertes à cause de la chute brutale de l'actif risqué.

Nous allons étudier dans ce chapitre l'expression analytique de la perte potentielle de la gestion CPPI lorsque la valeur du Fonds dépasse le plancher avant la date d'échéance. Ceci permet de donner la mesure du risque de Gap et aussi le critère pour ajuster le multiple basé sur l'aversion de risque de l'investisseur. L'étude sera effectuée sur le modèle avec sauts de l'actif risqué.

Nous reprenons l'analyse des messieurs Rama Cont et Peter Tankov dans l'article : "Constant Proportion Portfolio Insurance in presence of Jumps in Asset Prices", année 2007.

4.1 Modèle

Nous utilisons les mêmes notations que dans le chapitre 2.

Supposons dans cette partie que les processus de prix de l'actif risqué S et de l'actif non risqué B sont données par

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = dZ_t, \quad \frac{dB_t}{B_{t-}} = r dt$$

où Z est un processus de Lévy. Supposons aussi que $\Delta Z_t > -1$ p.s. pour assurer la

positivité du prix de l'actif risqué.

Soit $\tau = \inf\{t : V_t \leq P_t\}$, le premier instant où la valeur liquidative du fonds descend en dessous du plancher.

Puisque la stratégie CPPI est auto-financée, jusqu'à la date τ , la Valeur Liquidative du fonds CPPI vérifie :

$$dV_t = m(V_{t-} - P_t) \frac{dS_t}{S_{t-}} + (V_{t-} - m(V_{t-} - P_t)) \frac{dB_t}{B_t}$$

D'où

$$\frac{dC_t}{C_{t-}} = mdZ_t + (1 - m)rdt$$

où $C_t = V_t - P_t$ est le coussin à la date t . Posons

$$C_t^* = \frac{C_t}{B_t}$$

la valeur actualisée du coussin. En utilisant la formule d'Itô, on obtient :

$$\frac{dC_t^*}{C_{t-}^*} = m(dZ_t - rdt)$$

Notons $L_t \equiv Z_t - rt$ alors

$$\frac{dC_t^*}{C_{t-}^*} = mL_t \tag{4.1}$$

Cette équation peut être écrite sous la forme

$$C_t^* = C_0^* \mathcal{E}(mL)_t,$$

où \mathcal{E} désigne l'exponentielle stochastique de Doléans-Dade du processus $(mL)_t$. Après la date τ , selon la définition de la stratégie CPPI, le processus C^* reste constant. D'où on peut écrire le coussin actualisé sous la forme :

$$C_t^* = C_0^* \mathcal{E}(mL)_{t \wedge \tau} \tag{4.2}$$

4.2 Mesure du risque de Gap dans la stratégie CPPI

L'objectif de cette partie est d'évaluer $\mathbb{E}[-C_T^* \mathbb{1}_{\tau \leq T}]$, la perte potentielle (ou risque de Gap) sur la période d'investissement $[0, T]$.

4.2.1 Formule générale

Supposons que le processus L , qui apparaît dans l'équation (4.1) est un processus de Lévy de mesure ν . On peut toujours écrire $L = L^1 + L^2$ où L^1 un processus avec sauts tels que $\Delta L_t^1 > -1/m$ et L^2 est un processus dont la trajectoire est constante par morceaux et les sauts tels que $\Delta L_t^2 \leq -1/m$. Autrement dit, L^1 a pour mesure de Lévy $\nu(dx)\mathbb{1}_{x > -1/m}$ et L^2 a pour mesure de Lévy $\nu(dx)\mathbb{1}_{x \leq -1/m}$.

Notons $\lambda^* := \nu((-\infty, -1/m])$ l'intensité de saut de L^2 ; τ l'instant du premier saut de L^2 (c'est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ^*); et $\tilde{L}^2 = \Delta L_\tau^2$ la taille du premier saut de L^2 .

Soit ϕ_t la fonction caractéristique du processus de Lévy $\log \mathcal{E}(mL^1)_t$ et $\psi(u) = \frac{1}{t} \log \phi_t(u)$.

Finalement, sans perdre la généralité, on suppose que $C_0^* = 1$.

On calcule maintenant l'espérance de perte.

Proposition 4.2.1 *Supposons que $\int_1^\infty x\nu(dx) < \infty$. Alors, l'espérance de perte, sachant que la perte survient, est*

$$\mathbb{E}[C_T^* | \tau \leq T] = \frac{\lambda^* + m \int_{-1}^{-1/m} x\nu(dx)}{(1 - e^{-\lambda^* T})(\psi(-i) - \lambda^*)} (e^{-\lambda^* T} \phi_T(-i) - 1)$$

et l'espérance de perte non conditionnelle :

$$\mathbb{E}[C_T^* \mathbb{1}_{\tau \leq T}] = \frac{\lambda^* + m \int_{-1}^{-1/m} x\nu(dx)}{\psi(-i) - \lambda^*} (e^{-\lambda^* T} \phi_T(-i) - 1)$$

Preuve

Selon l'équation (4.2), le coussin actualisé est tel que :

$$C_T^* = \mathcal{E}(mL^1)_{\tau \wedge T} (1 + m\tilde{L}^2 \mathbb{1}_{\tau \leq T}) = \mathcal{E}(mL^1)_T \mathbb{1}_{\tau > T} + \mathcal{E}(mL^1)_\tau (1 + m\tilde{L}^2) \mathbb{1}_{\tau \leq T}$$

Par définition, ϕ_t est la fonction caractéristique du processus $\log(\mathcal{E}(mL^1)_t)$, on a alors :

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(mL^1)_t] = \phi_t(-i)$$

Comme L^1, L^2 sont des processus de Lévy, et de plus, τ, \tilde{L}^2 et L^1 sont indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_T^*, \tau \leq T] &= \mathbb{E}[\mathcal{E}(mL^1)_\tau (1 + m\tilde{L}^2) \mathbb{1}_{\tau \leq T}] = \mathbb{E}[1 + m\tilde{L}^2] \mathbb{E}[\mathcal{E}(mL^1)_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T}] \\
&= \left(1 + m \int_{-1}^{-1/m} x \frac{\nu(dx)}{\lambda^*} \right) \int_0^T \lambda^* e^{-\lambda^* t} \mathbb{E}[\mathcal{E}(mL^1)_t] dt \\
&= \left(\lambda^* + m \int_{-1}^{-1/m} x \nu(dx) \right) \int_0^T e^{-\lambda^* t} \phi_t(-i) dt
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-\lambda^* t} \phi_t(-i) dt &= \int_0^T e^{-\lambda^* t} e^{t\psi(-i)} dt = \int_0^T e^{(\psi(-i) - \lambda^*)t} dt \\
&= \frac{e^{(\psi(-i) - \lambda^*)T} - 1}{\psi(-i) - \lambda^*} = \frac{e^{-\lambda^* T} \phi_T(-i) - 1}{\psi(-i) - \lambda^*}
\end{aligned}$$

d'où l'expression de l'espérance de perte non conditionnelle. L'espérance de perte conditionnelle est obtenue en utilisant

$$\mathbb{E}[C_T^* | \tau \leq T] = \frac{\mathbb{E}[C_T^*, \tau \leq T]}{\mathbb{P}(\tau \leq T)} = \frac{\mathbb{E}[C_T^*, \tau \leq T]}{1 - e^{-\lambda^* T}}$$

Remarque

Supposons que $\int_{\mathbb{R}} |x| \nu(dx) < \infty$ et (σ^2, ν, γ) est le triplet caractéristique de L , alors, l'exposant caractéristique de $\log \mathcal{E}(mL)_t$ est de la forme :

$$\psi(u) = -\frac{m^2 \sigma^2 u^2}{2} + iu \left(m\gamma - \frac{\sigma^2 m^2}{2} \right) + \int_{x > -1/m} (e^{iu \log(1+mx)} - 1) \nu(dx)$$

et

$$\psi(-i) = m\gamma + m \int_{x > -1/m} x \nu(dx).$$

4.2.2 Exemple : le cas du modèle de Kou

Supposon que le prix de l'actif risqué actualisé suit le modèle exponentiel de Lévy :

$$S_t^* = S_0^* e^{X_t}$$

où X_t est un processus de Lévy "jump-diffusion" (Modèle de Kou) :

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

avec W_t un mouvement brownien, N_t un processus de Poisson d'intensité λ et les Z_k des variables aléatoires i.i.d. de la loi Double - Exponentielle dont la densité f :

$$f(x) = p\eta_+ e^{-x\eta_+} \mathbb{1}_{x>0} + (1-p)\eta_- e^{x\eta_-} \mathbb{1}_{-1<x<0}$$

X_t est donc le processus de Lévy de dérive γ , de volatilité σ , et de mesure de Lévy ν :

$$\nu(x) = \lambda p \eta_+ e^{-x\eta_+} \mathbb{1}_{x>0} + \lambda(1-p)\eta_- e^{x\eta_-} \mathbb{1}_{-1<x<0}.$$

Ici, λ est le nombre d'intensité total des sauts positifs et négatifs, p est la probabilité qu'un saut soit positif, $1/\eta_+$ et $1/\eta_-$ sont respectivement des tailles moyennes des sauts positifs et négatifs.

La proposition (A.4.3) implique que le prix de l'actif risqué actualisé est l'exponentielle stochastique d'un processus L_t :

$$S_t^* = \mathcal{E}(L)_t$$

où L_t est un processus de Lévy de dérive $\gamma + \sigma^2/2$, de volatilité σ , et de mesure de Lévy ν_L :

$$\nu_L(x) = \lambda p \eta_+ (1+x)^{-1-\eta_+} \mathbb{1}_{x>0} + \lambda(1-p)\eta_- (1+x)^{-1+\eta_-} \mathbb{1}_{-1<x<0}$$

En posant $c_+ = \lambda p$ et $c_- = \lambda(1-p)$, on trouve d'une part que :

$$\lambda^* = c_- \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\eta_-}$$

et

$$1 + \frac{m}{\lambda^*} \int_{-1}^{-1/m} x \nu_L(dx) = -\frac{m-1}{\eta_- + 1}$$

D'autre part, l'exposant caractéristique du processus de Lévy $\log \mathcal{E}(mL^1)_t$ en $-i$ est de :

$$\psi(-i) = m \left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{c_+ m}{\eta_+ - 1} - \frac{c_- m}{\eta_- + 1} - \frac{c_- \eta_- m (1 - 1/m)^{\eta_- + 1}}{\eta_- + 1} + c_- m ((1 - 1/m)^{\eta_-})$$

Finalement, en additionnant les deux termes, on obtient la perte potentielle conditionnelle :

$$\mathbb{E}[C_T^* | \tau \leq T] = -\frac{(m-1)(1 - e^{-\lambda^*T + \psi(-i)T})\lambda^*}{(\eta_- + 1)(1 - e^{-\lambda^*T(\lambda^* - \psi(-i))})}$$

Pour estimer les paramètres du modèle de Kou à partir des données du marché, on pourrait utiliser la méthode généralisée du moment en prenant la fonction caractéristique empirique.

Cependant, dans le cadre de ce mémoire, l'auteur n'a pas encore arriver à obtenir les estimations. L'étude sera effectuée très prochainement.

Deuxième partie

PRATIQUES

Chapitre 5

Analyse de la performance du Fonds CPPI à l'aide des simulations stochastiques

Dans ce chapitre, nous allons étudier la performance du Fonds CPPI en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

La méthode de Monte-Carlo consiste à simuler un grand nombre de scénarios d'évolution d'un actif afin de déterminer les probabilités d'occurrence d'un ou de plusieurs phénomènes. Il est nécessaire d'isoler un certain nombre de variables clés et de leur affecter une distribution de probabilité.

Comme la performance du Fonds CPPI est liée à la performance de l'actif risqué. L'unique variable clé dans nos simulations est donc le sous-jacent. Pour simuler le cours du sous-jacent selon un modèle de diffusion donné, on utilise une méthode par schéma d'Euler qui consiste à discrétiser le processus selon de petits intervalles de temps Δt .

La méthode de Monte-Carlo repose sur la génération d'un échantillon de grande taille et sur la loi forte des grands nombres. Ainsi, si $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ est l'échantillon de taille k généré, alors

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \longrightarrow E(X), k \rightarrow \infty$$

Nous effectuons 10 000 tirages de scénarios aléatoires. Notre démarche consiste dans chacun des cas en :

- L'estimation des paramètres du modèle choisi pour le sous-jacent au vue de données empiriques,

- La simulation de 10 000 scénarios d'évolution du sous-jacent,
- La simulation de 10 000 scénarios d'évolution d'un CPPI indexé sur les scénarios du sous-jacent.

5.1 Simulation du sous-jacent

5.1.1 Le modèle de Black-Scholes

Supposons que le prix du sous-jacent S_t suit le modèle de Black-Scholes de paramètres μ et σ constants :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

avec

- μ est le taux de rendement attendu du sous-jacent (ou "drift")
- σ est la volatilité du sous-jacent
- W_t est un mouvement brownien standard (dW_t suit une loi normale de variance dt)
- dt est la périodicité

A la date t , le prix de sous-jacent est de la forme :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Afin de simuler des trajectoires, il est nécessaire de discrétiser le processus. Pour cela, nous utilisons le schéma d'Euler avec le pas de discrétisation Δt . Nous utilisons donc le processus de discrétisation suivant :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(W_{t+\Delta t} - W_t)\right), t \in [0; T]$$

5.1.2 Calibrage du modèle de Black-Scholes

Notons s_1, s_2, \dots, s_N les cours de l'actif risqué étudié pour chaque période d'observation.

Soient $y_n, n = 1, \dots, N - 1$, les rendements logarithmiques périodiques de l'actif

risqué.

$$\forall n, y_n = \ln \left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right)$$

Les paramètres μ et σ sont estimés par la méthode de maximum de vraisemblance appliquée à l'échantillon $\{y_n, n = 1, \dots, N - 1\}$. D'après le modèle de Black-Scholes, les quantités y_n sont uniformément distribués selon une loi normale $N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt, \sigma^2 dt \right)$. Les estimateurs de $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt$ et de $\sigma^2 dt$ sont respectivement la moyenne et la variance de la série des rendements logarithmiques. Soit :

$$\left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) dt = \bar{y} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} y_n$$

et

$$\hat{\sigma}^2 dt = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} (y_n - \bar{y})^2$$

d'où on obtient les estimateurs $\hat{\mu}$ de μ et $\hat{\sigma}$ de σ .

5.1.3 Paramètres du modèle

Après avoir calibré le modèle de Black-Scholes sur la série des performances quotidiennes du Fonds LBPAM entre septembre 2009 et septembre 2010, nous retenons les paramètres suivants :

- un rendement moyen du sous-jacent de 0.063172107
- une volatilité de 0.125068598

Nous utilisons un pas quotidien soit 1/365.

Nous étudions maintenant la performance à l'échéance du Fonds CPPI face à cette évolution théorique de l'actif risqué.

5.2 Estimation de la performance du Fonds CPPI

Nous effectuons 10 000 simulations de Monte-Carlo d'un CPPI avec un sous-jacent suivant le modèle décrit précédemment. Les paramètres de la gestion CPPI sont donnés comme le suivant :

- Le multiple est de 5.
- L'actif non risqué : le zéro-coupon de taux constant 2%.

- Le re-balancement sont effectués tous les jours.
- Le capital garanti est 100 % de la Valeur initiale du Fonds.

Pour la $i^{\text{ième}}$ simulation du sous-jacent, nous obtenons aussi la $i^{\text{ième}}$ simulation de la valeur du Fonds CPPI. Nous en déduisons la $i^{\text{ième}}$ performance à l'échéance du Fonds :

$$j^i(T) = \ln \left(\frac{V_T^i}{V_0^i} \right)$$

avec V_T^i et V_0^i la valeur finale et initiale du Fonds CPPI pour la $i^{\text{ième}}$ simulation.

Nous représentons ici quelques résultats concernant la performance finale du Fonds CPPI.

5.2.1 Performance du Fonds CPPI en fonction de la date d'échéance T

Pour chaque date d'échéance T et pour la $i^{\text{ième}}$ simulation du sous-jacent nous obtenons la performance du Fonds CPPI $j^i(T)$:

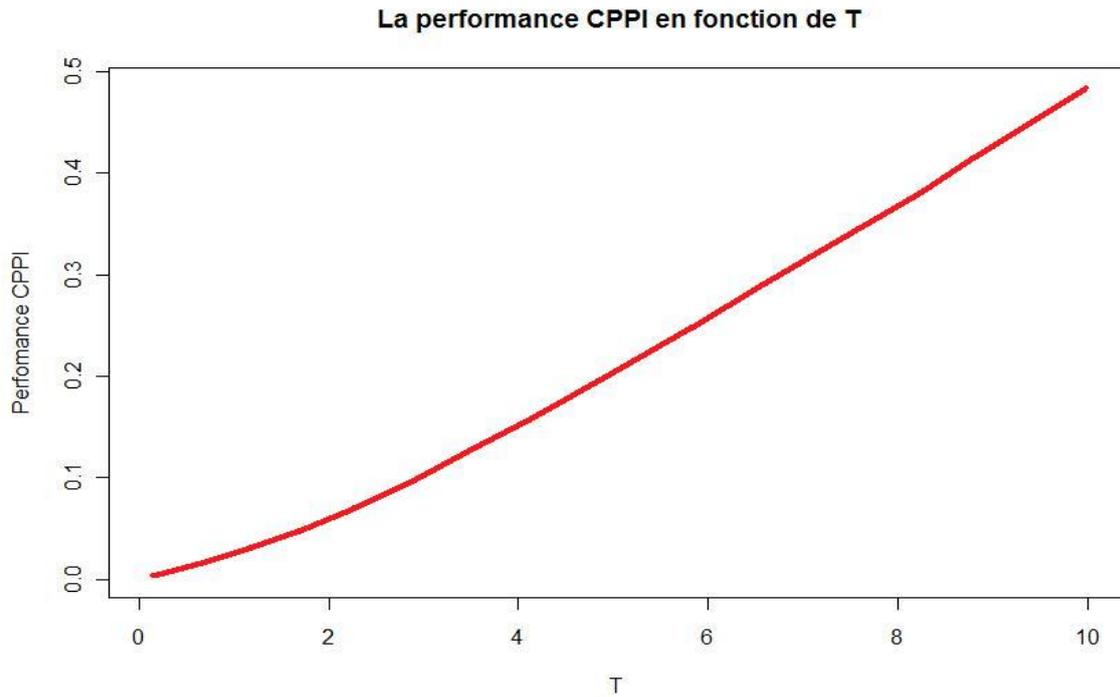
$$j^i(T) = \ln \left(\frac{V_T^i}{V_0^i} \right)$$

La performance du Fonds CPPI est calculée comme la moyenne arithmétique des performances $j^i(T)$:

$$j(T) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} j^i(T)$$

Nous prenons les valeurs de T comme 1 mois, 2 mois, ..., 1 an, 2 ans, ..., 10 ans.

La figure suivante représente la performance du Fonds CPPI en fonction de T :

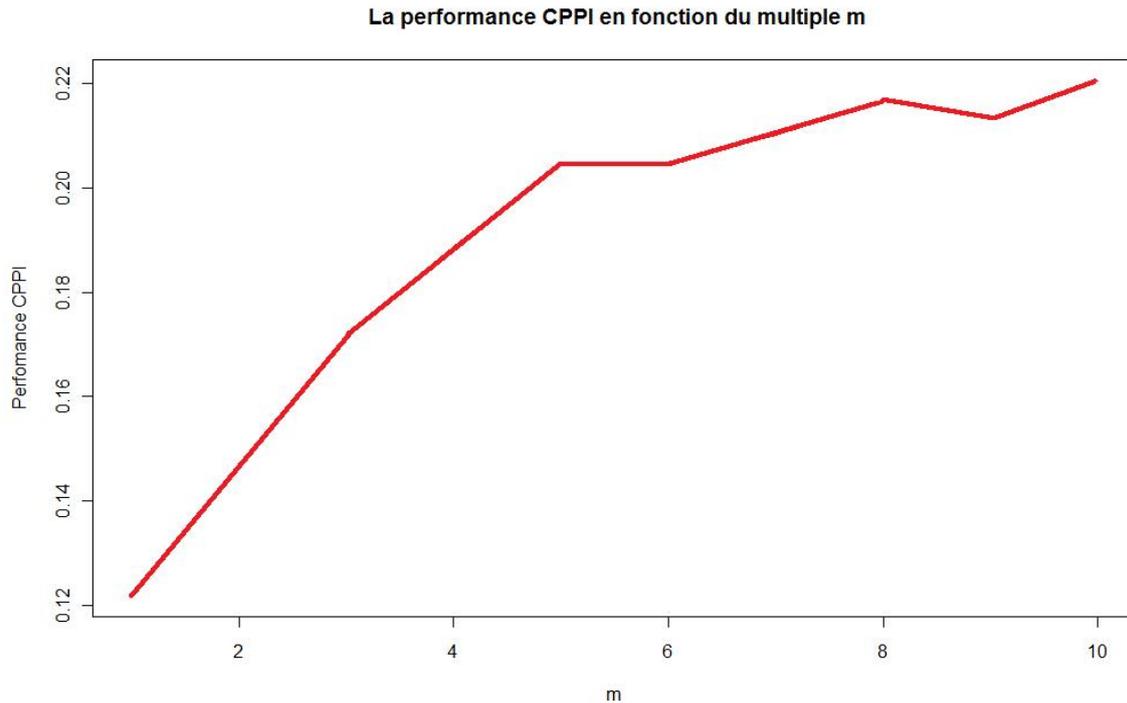


Il parait que la performance du Fonds CPPI croit avec la date d'échéance T .

5.2.2 Performance du Fonds CPPI en fonction du multiple m

Nous effectuons les mêmes schémas comme dans la partie précédente, en fixant la date d'échéance $T = 5$ ans, et en variant le multiple m de 1 à 10.

Le graphique suivant représente l'évolution de la performance du Fonds CPPI en fonction du multiple m :



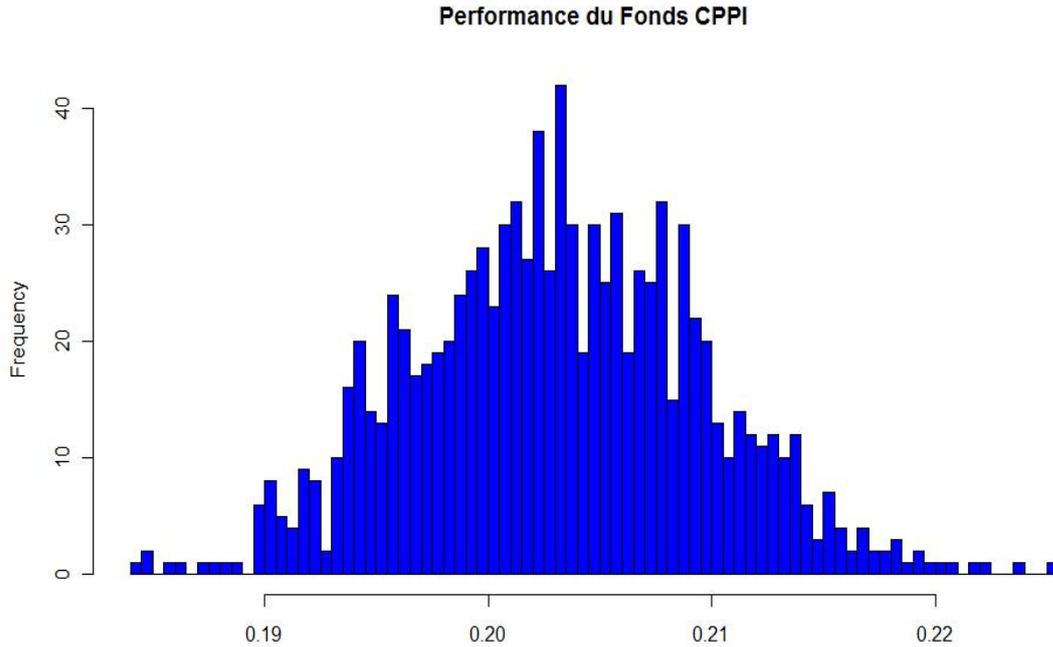
La performance finale est aussi une fonction croissante du multiple m .

5.2.3 Distribution de probabilité de la performance finale du Fonds CPPI

Pour 10 000 simulations du sous-jacent, en prenant $T = 5$ ans et $m = 5$, nous obtenons une performance $j(T)$ du Fonds CPPI, calculée comme la moyenne arithmétique des performances $j^i(T)$:

$$j(T) = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} j^i(T)$$

Nous effectuons 1000 fois ce schémas pour avoir 1000 performances $j(T)$. Le graphique qui suit représente la distribution des performances finales $j(T)$:



Nous calculons la moyenne, l'écart-type, les valeurs minimale et maximale de ces performances :

Moyenne	Ecart-type	Min	Max
20.31%	0.65%	18.43%	22.53%

La distribution de la performance finale du Fonds CPPI est resserée autour de la moyenne 20.31%, qui correspond bien avec les graphiques au-dessus (performance en fonction de T en point $T = 5$ et performance en fonction de m en point $m = 5$).

Un investisseur aura (sous nos hypothèses) de chance d'obtenir plus de 18 euros de gain pour 100 euros investis et aucune perte.

5.3 Conclusion

En simulant l'évolution du sous-jacent suivant le modèle de Black-Scholes, nous obtenons des résultats sur la performance finale du Fonds CPPI.

1. La performance finale du Fonds CPPI croît avec la date d'échéance T et le multiple m .
2. La performance finale du Fonds CPPI reste toujours positive, ceci assure la garantie à l'échéance.

Chapitre 6

Exemple numérique

La gestion CPPI fixe le multiple m et la valeur garantie G à la date initiale d'investissement. Or, plus le multiple m est choisi grand, plus le Fonds CPPI sera exposé en actif risqués en cas de hausse et plus le Fonds voit vite la monétarisation en cas de baisse. De plus, si une fois le Fonds est monétarisé, il devient le Fonds non risqué jusqu'à la date d'échéance même si le marché remonte. Modifier le multiple et la valeur garantie suivant l'évolution tout au long de la vie du Fonds est donc une méthode pour bien gérer le Fonds.

Ce chapitre consistera à des modifications de cette gestion à coussin dans le cadre fonds de fonds de LBPSAM.

La première partie présentera une modification de la gestion CPPI, c'est Time Invariant Portfolio Protection (TIPP). Les dernières parties sont des applications numériques de la gestion TIPP sur les fonds LBPAM en modifiant des paramètres techniques de la gestion : le multiple cible suivant la volatilité de l'actif risqué et la garantie à la date d'échéance.

6.1 Le TIPP, une variante du CPPI

6.1.1 Principes de la gestion TIPP

La gestion TIPP est une technique de couverture de risque. Dans sa version stricte, elle propose une gestion systématique de l'exposition permettant de protéger un plancher d'investissement ajustable à la hausse.

Deux principes président à la mise en oeuvre de la gestion TIPP :

- Principe de finance : l'assurance de portefeuille à proportion constante (CPPI), soit une technique de gestion systématique de l'exposition qui permet de protéger un plancher d'investissement donné.

- Principe de mécanique : une protection graduelle des profits accumulés en cas de hausse. Ce principe est de relever le plancher en fonction de la performance du fonds et d'appliquer le degré de protection à la valeur la plus élevée atteinte par le fonds.

Lorsque la valeur garantie est fixée au départ dans la gestion CPPI, elle est ajustée continûment à la hausse dans la gestion TIPP. Précisément, la valeur garantie est choisie comme un pourcentage de la plus haute Valeur Liquidative du fonds. Elle augmente donc lorsque le marché monte et en cas de chute, elle reste la même valeur qu'avant de chute.

6.1.2 Propriétés de la gestion TIPP

- Gérer systématiquement l'exposition à la baisse et à la hausse.
- Offrir de manière permanente une protection du capital initial et des profits accumulés.
- Tirer parti, autant que possible, de la hausse de l'actif sous-jacent en fonction de l'exposition initiale.
- Contrôler le risque du sous-jacent.
- Contribuer à la croissance du patrimoine à long terme grâce au caractère systématique de la gestion.

6.2 Back-testing : exemple TIPP sur fonds LBPAM

6.2.1 Hypothèses

Paramètres de structure

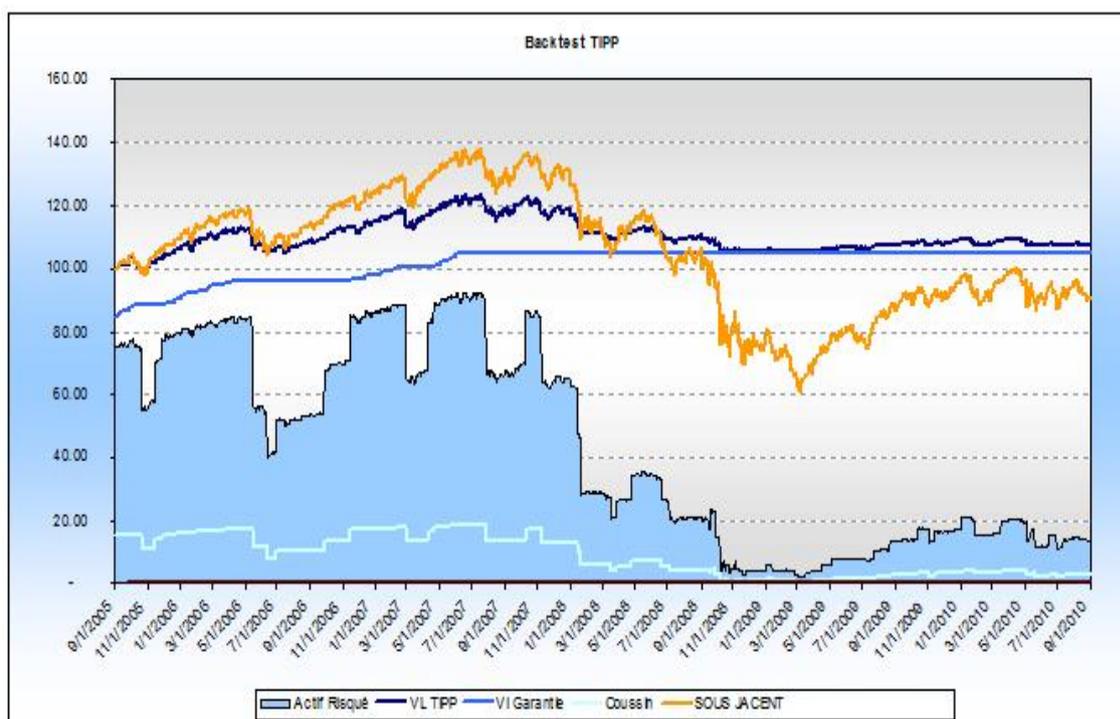
- Historique d'étude de 5ans, du 1er septembre 2005 au 1er septembre 2010.
- Actif risqué : Le fonds se compose de 40% du fonds LBPAM actions Euro, 30% du fonds LBPAM actions monde et 30% du fonds LBPAM actions indice Euro.
- Actif non risqué : Eonia.
- Multiple : $m = 5$

Stratégie

- La valeur garantie : assurer à tout instant 85% de la plus haute Valeur Liquidative du fonds.
- Valeur Liquidative = Plancher + Coussin.
- Plancher = $85\% \times VL \text{ max} \times DF$ (DF = Facteur d'actualisation).
- Actif risqué = $m \times \text{Coussin}$.
- Tolérance au rebalancement est de 5% du multiple. C'est le pourcentage de variation maximum des multiples effectifs tel que, dès que ce pourcentage est atteint, le montant investi en actions est réajusté au multiple fixé du coussin.

6.2.2 Résultats

Voici le graphique représentant la stratégie TIPP :



Le graphique représente les propriétés de la gestion CPPI : La Valeur Liquidative du fonds est au-dessus de la valeur garantie, elle dépend du chemin parcouru du sous-jacent (fonds des fonds LBPAM). Une fois le marché monte, Valeur Liquidative du fonds augmente (le début de la période d'investissement du 1er septembre 2005 au juillet 2007). Dès qu'il y a une baisse successive du marché (la fin juillet 2007), la Valeur Liquidative

du fonds diminue continûment. A cause de la chute brutale du marché (février 2008), la gestion vise à vendre presque tous les actifs risqués pour acheter de l'actif non risqué, la Valeur Liquidative du fonds s'approche de la valeur garantie et le coussin tend vers zéro. La remontée du marché (fin mars 2009) entraîne enfin une augmentation mais très peu de la Valeur Liquidative du fonds.

De plus, la différence de la gestion TIPP avec celle de CPPI est que la valeur garantie n'est jamais décroissante quelques soient les valeurs du sous-jacent. Elle monte quand le marché monte et elle reste constante lorsque le marché baisse.

Le tableau ci-dessous représente les taux de rendements flats, de rendements actuariels, de rendements journaliers maximaux et minimaux, et les volatilités du fonds TIPP, du portefeuille d'actifs risqués (que de fonds actions LBPAM), et avec ceux de l'actif non risqué (Eonia).

	Fonds TIPP	Portefeuille d'actifs risqué	Actif non risqué
Rendement flat	7.30%	-9.52%	12.99%
Taux Rendement Actuariel	1.42%	-1.98%	2.47%
Volatilité	5.15%	17.90%	0.06%
Rendement Max	1.66%	9.46%	0.01%
Rendement Min	-2.24%	-7.03%	0.00%

Le rendement flat est le rendement tout au long de la période d'investissement (5 ans). Celui du fonds TIPP est plus de 7%, alors que celui du portefeuille d'actifs risqués est négatif. La volatilité du fonds TIPP est supérieure que celle de l'actif non risqué (5.15 v.s. 0.06) mais elle est beaucoup plus petite que celle de l'actif risqué (17.90). En comparant avec le rendement de l'Eonia, il vaut mieux investir la totalité en actif non risqué (Eonia) sur cette période pour la meilleure performance.

6.3 Proposition d'amélioration de la gestion TIPP

6.3.1 Contrôle du multiple par la volatilité

Comme on a vu dans les parties précédentes, plus le multiple m est fort, plus la sensibilité à la volatilité est forte. Il faut donc garder le multiple autant plus faible que la volatilité est élevée pour ne pas détériorer le coussin lors des chutes du marché.

La valeur du multiple m varie avec la volatilité du sous-jacent étant donnée dans le tableau suivant :

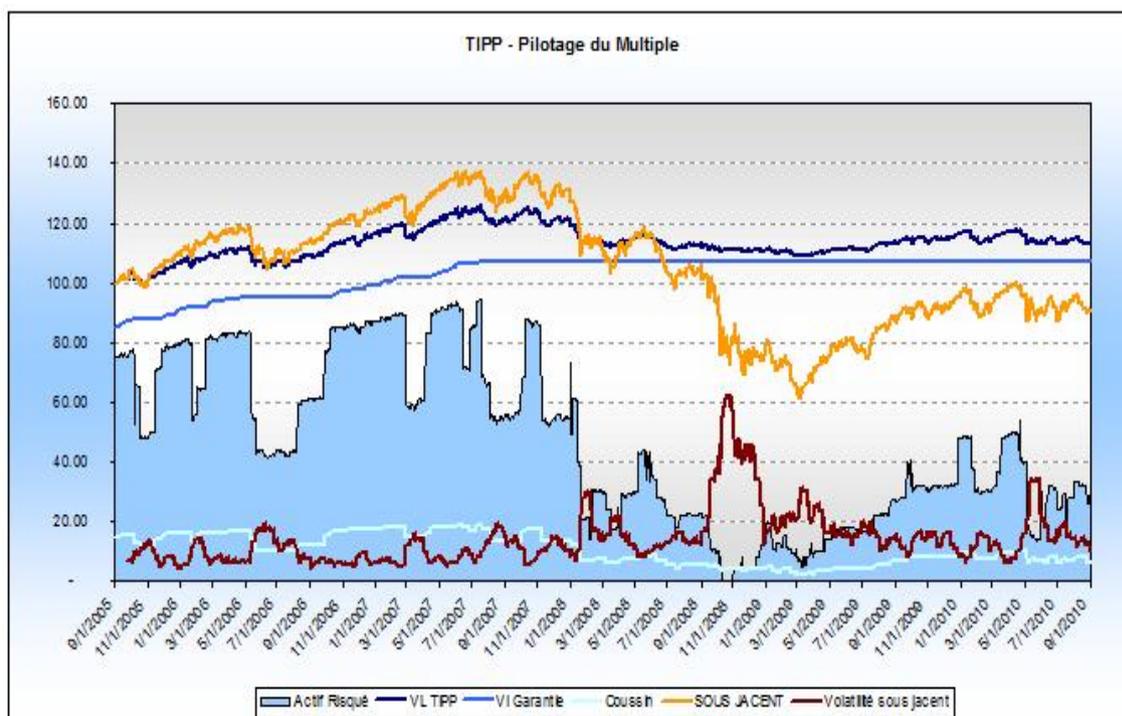
En effet, d'un point de vue historique, la haute volatilité du sous-jacent correspond

Volatilité	Multiple
< 10%	5
10% - 20%	4
20% - 30%	3
30% - 40%	2
40% - 50%	1
> 50%	0

généralement à une baisse du marché. Dans le cas, le multiple doit être petit pour diminuer l'exposition à l'actif risqué et pour éviter la monétarisation du fonds. Quand la volatilité est supérieure à 50%, on doit choisir donc un multiple nul afin de ne pas exposer à la chute brutale du marché.

Inversement, une faible volatilité est signe de la hausse du marché. Il faut donc augmenter le multiple pour profiter de l'effet de levier. On choisit 5 comme multiple quand la volatilité est inférieure à 10%.

Le graphique qui suit représente le pilotage du multiple m en fonction de la volatilité.



Pendant les deux premières années, il n'y a pas trop de changement du marché, le multiple m ne change pas beaucoup. Au moment de la chute du marché en février 2008, la volatilité atteint plus de 60%, le multiple m devient nul. Le fonds est totalement investi en actif non risqué malgré que le coussin reste encore positif. Le multiple m est ajusté

juste après que le marché soit plus stable. L'augmentation de m entraîne celle de la partie risquée du fonds. La Valeur Liquidative du fonds est donc montée grâce à la hausse du marché.

Le tableau suivant représente aussi les rendements de la gestion TIPP en présence du contrôle du multiple.

	Fonds TIPP	Portefeuille d'actifs risqué	Actif non risqué
Rendement flat	13.19%	-9.52%	12.99%
Taux Rendement Actuariel	2.51%	-1.98%	2.47%
Volatilité	5.06%	17.90%	0.06%
Rendement Max	1.25%	9.46%	0.01%
Rendement Min	-2.24%	-7.03%	0.00%

Comparant avec le tableau précédent, le rendement flat du fonds croit significativement (de 7.30% à 13.19%) et le taux de rendement actuariel augmente aussi (de 1.42% à 2.51%). L'investissement dans le fonds TIPP avec le contrôle du multiple par volatilité donne plus de performance que l'Eonia.

6.3.2 Garantie glissante

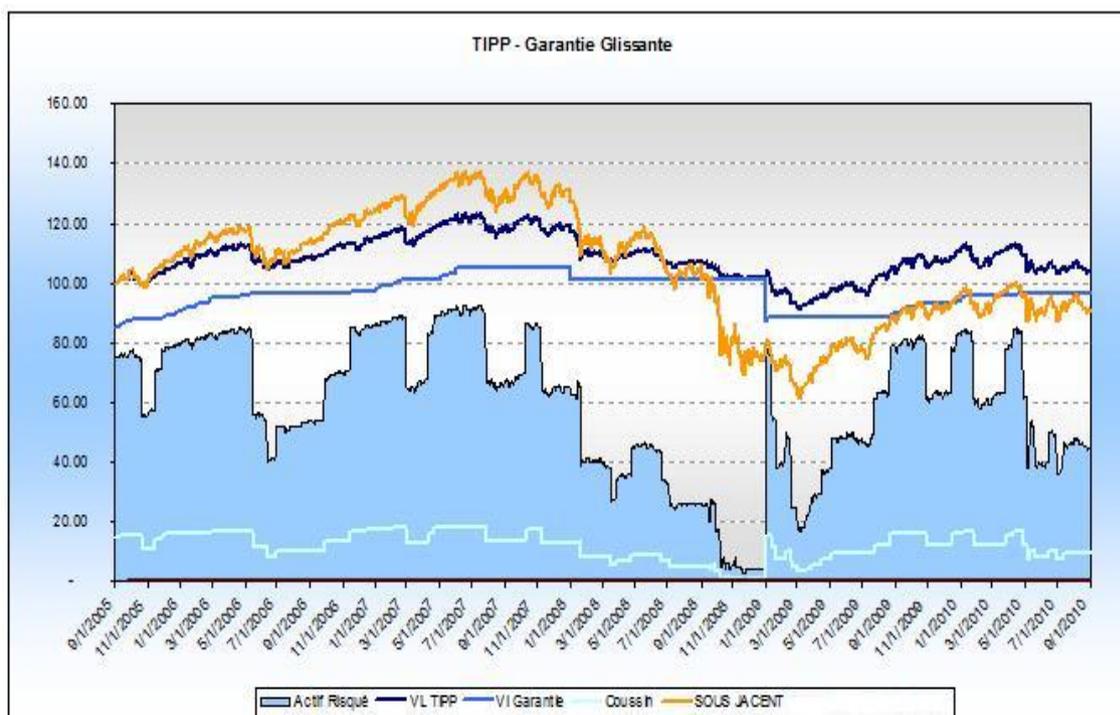
Vue des graphiques précédents, on constate que la valeur garantie reste constante une fois que la Valeur Liquidative du fonds diminue (car la garantie est choisie 85% de la plus haute Valeur Liquidative du fonds) à cause de la chute du marché. Ceci implique que même si le marché remonte, la Valeur Liquidative ne réagit pas aussi vite.

La stratégie de "Garantie glissante" vise à réinitialiser la garantie pour créer un nouveau coussin.

Dans cet exemple, on réinitialise la valeur garantie chaque année, au 1er janvier. A la date de réinitialisation, la valeur garantie est égale à 85% de la VL du fonds.

Si le marché est en voie de hausse, rien n'a changé. Inversement, si la Valeur Liquidative du fonds diminue au moment de la réinitialisation, la valeur garantie va baisser, d'où l'augmentation du coussin. La Valeur Liquidative du fonds devient plus réactive à la hausse de sous-jacent, car sa partie risquée est proportionnelle au coussin.

Le graphique qui suit montre clairement la bonne réaction de la Valeur Liquidative du fonds à la hausse du marché

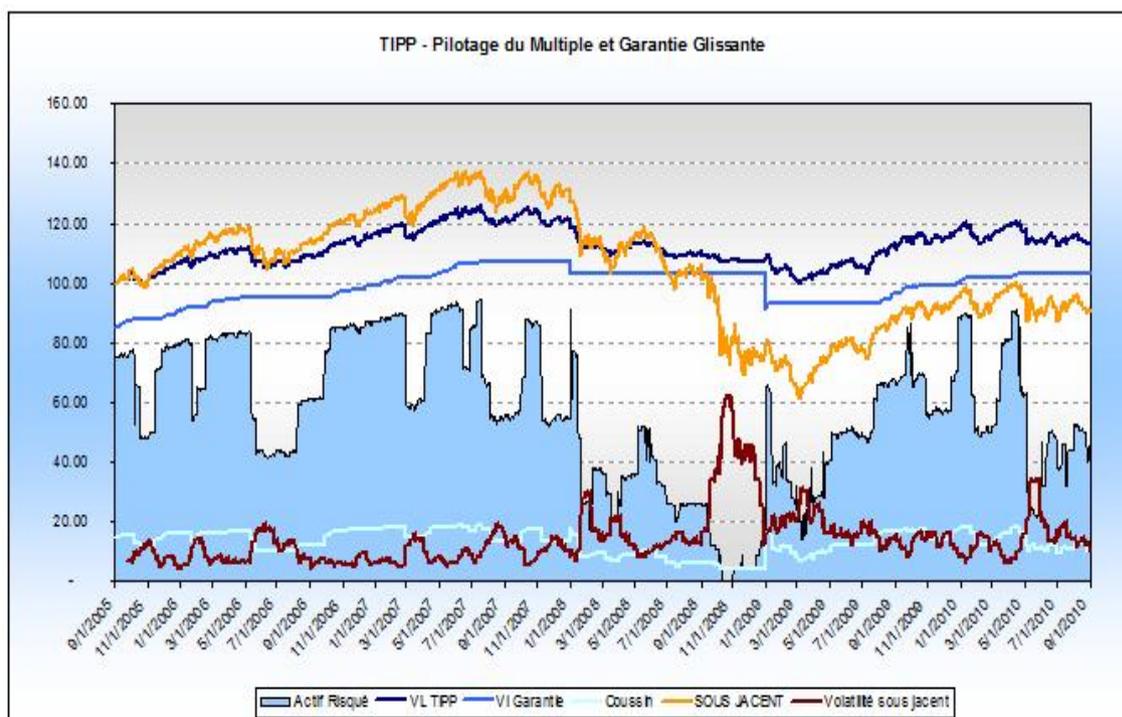


Les résultats de cette stratégie sont donnés dans le tableau suivant :

	Fonds TIPP	Portefeuille d'actifs risqué	Actif non risqué
Rendement flat	3.96%	-9.52%	12.99%
Taux Rendement Actuariel	0.78%	-1.98%	2.47%
Volatilité	7.34%	17.90%	0.06%
Rendement Max	2.71%	9.46%	0.01%
Rendement Min	-3.11%	-7.03%	0.00%

6.3.3 Contrôle du multiple par la volatilité et Garantie glissante

On associe maintenant toutes les deux stratégies : "Contrôle du multiple par la volatilité" et "Garantie glissante". Cette stratégie sert à la fois la contre-monétarisation lors des chutes et la réaction à la hausse du marché.



Les résultats sont donnés dans le tableau suivants :

	Fonds TIPP	Portefeuille d'actifs risqué	Actif non risqué
Rendement flat	13.05%	-9.52%	12.99%
Taux Rendement Actuariel	2.48%	-1.98%	2.47%
Volatilité	6.47%	17.90%	0.06%
Rendement Max	1.94%	9.46%	0.01%
Rendement Min	-2.25%	-7.03%	0.00%

6.4 Conclusion

En modifiant les paramètres de la structuration suivant l'évolution de l'actif risqué, le gérant du Fonds CPPI peut bien gérer son Fonds.

1. Le mécanisme de la gestion TIPP s'agit de relever le plancher suivant la performance du Fonds. La valeur garantie est toujours un pourcentage de la plus haute Valeur du Fonds.

2. La modification du multiple par la volatilité aide à profiter de l'effet de levier du marché et à la fois éviter la monétarisation en cas de baisse.

3. Garantie glissante est une stratégie de réinitialiser la valeur garantie chaque période choisie qui sert à la réaction à la hausse du marché.

Conclusion

La gestion CPPI, ou gestion à coussin, repose sur un principe simple qui vise à maintenir une proportion constante d'exposition au risque, d'où son nom. Les moyens sont :

- le coussin, différence entre la VL du Fonds et le plancher qui permet d'assurer la garantie à l'échéance,
- le coefficient multiplicateur, qui représente la perte maximale tolérée par le gérant sur l'actif risqué.

La chute de l'actif risqué, la baisse des taux et la volatilité ont un effet négatif sur la performance du Fonds CPPI dont le profil de rendement est convexe. Ces effets sont amplifiés si le multiplicateur est élevé, mais le Fonds est alors exposé à un risque de monétarisation et un risque de "Gap" plus important.

La mise en oeuvre d'une telle stratégie se heurte à des risques qui pourrait mettre en danger la garantie de performance à l'échéance. Nous avons identifiés des risques suivants :

1. Risques de marché déclinés en risque de taux, de volatilité, de liquidité, de défaut de l'émetteur,
2. Risques de modèle, sur le choix du multiplicateur,
3. Risques de discontinuité,
4. Risque opérationnel.

Des moyens pour couvrir ces risques sont en réalité très limités, d'où le choix de certaines sociétés de gestion de s'assurer à l'extérieur en achetant à prix élevé une option de "Gap" pour la couverture des risques extrêmes.

Pricing le risque de "Gap" est également mis en place en utilisant les modèle avec sauts de l'actif risqué.

Quelques modifications de la gestions CPPI sont aussi mises en place : contrôle du multiple par la volatilité et garantie glissante.

Bibliographie

- [1] Anil Khuman, Dietmar Maringer et Nick Constantinou (2008), *Constant Proportion Portfolio Insurance : Statistical Properties and Practical Implications*, Working Paper Series, WP023-08, University of Essex.
- [2] Antonis Papapantoleon (2008), *An introduction to Levy processes with applications in Finance*, Lecture notes, TU Vienna. [pdf, arXiv/0804.0482].
- [3] Benjamin HAMIDI, Bertrand MAILLET et Jean-luc PRIGENT (2009), *A Dynamic AutoRegressive Expectile for Time-Invariant Portfolio Protection Strategies*, Working paper, University of Cergy - THEMA.
- [4] Dang CO MINH (2002), *Gestion d'OPCVM garantis selon la technique CPPI*, Mémoire d'Actuaire.
- [5] Jean-luc PRIGENT and Fabrice TAHAR (2005), *CPPI with Cushion Insurance*, THEMA University of Cergy-Pontoise Working Paper.
- [6] Peter Tankov, *Levy process in finance and risk management*, Wilmott Magazine, Sept - Oct 2007.
- [7] Philippe BERTRAND and Jean-luc PRIGENT (2001), *Portfolio Insurance Strategies : OBPI versus CPPI*, University of CERGY Working Paper No. 2001-30.
- [8] Pierre Chaussé (2010), *Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R*, Journal of Statistical Software.
- [9] Rama Cont and Peter Tankov (2004), *Financial modelling with Jump Processes*, CRC Press.
- [10] Rama Cont et Peter Tankov (2007), *Constant Proportion Portfolio Insurance in presence of Jumps in Asset Prices*, Financial Engineering Report No. 2007-10.
- [11] Rhodes Rémi (2010), *Processus de Lévy et calcul stochastique*, Document de travail, Université Paris - Dauphine.
- [12] S. KOU (2002), *A Jump-diffusion model for option pricing*, Management Science, 48, pp. 1086-1101.

- [13] Sueishi, N. and Y. Nishiyama (2005), *Estimation of Levy Processes in Mathematical Finance : A Comparative Study*, Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand, pp. 953-959.
- [14] *Comité structuration LBPSAM* (2010), Pôle Structuration, La Banque Postale Structured Asset Management.

Annexe A

Rappel sur les processus

A.1 Mouvement Brownien

Définition A.1.1 On appelle mouvement brownien standard le processus $W = (W_t)_{t \geq 0}$ vérifiant :

(i) $W_0 = 0$;

(ii) W est à accroissements indépendants : pour tout $t_1 < \dots < t_n$, $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1}$ sont indépendantes ;

(iii) $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Plus généralement, on appelle mouvement brownien standard réel tout processus $W = (W_t)_{t \geq 0}$ vérifiant (i), (ii), (iii)' $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Proposition A.1.1 Soit W_t un mouvement brownien, alors il a pour fonction caractéristique :

$$\mathbb{E} [e^{i(u, W_t)}] = \exp\left(\frac{1}{2}tu^2\right)$$

A.2 Processus de Poisson

Définition A.2.1 (Processus de Poisson) Soient $(\tau_i)_{i \geq 1}$ les variables aléatoires i.i.d. de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$. Le processus $N_t, t \geq 0$ défini par

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

est appelé processus de Poisson d'intensité λ .

Le processus du Poisson est donc un processus du comptage : il compte le nombre des instants aléatoires (T_n) qui surviennent entre 0 et t , où $(T_n - T_{n-1})_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de la loi exponentielle. Les propriétés suivantes sont faciles à obtenir :

Proposition A.2.1 *Soit $N_t, t \geq 0$ un processus de Poisson d'intensité λ .*

1. *Pour tout $t > 0$, N_t est fini p.s.*
2. *Pour tout ω , la trajectoire $t \mapsto N_t(\omega)$ est constante par morceau et augmente par sauts de taille 1.*
3. *Les trajectoires $t \mapsto N_t$ sont continues à droite et ont limite à gauche (càdlàg).*
4. *Pour tout $t > 0$, $N_{t-} = N_t$ avec probabilité 1.*
5. *N_t est continu en probabilité :*

$$\forall t > 0, N_s \xrightarrow{\mathbb{P}_{s \rightarrow t}} N_t$$

6. *Pour tout $t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

7. *La fonction caractéristique de N_t est donnée par :*

$$\mathbb{E}[e^{iuN_t}] = \exp(\lambda t(e^{iu} - 1)), \forall u \in \mathbb{R}.$$

8. *(N_t) a des incréments indépendants : pour tout $t_1 < \dots < t_n$, $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_1}$ sont indépendantes.*
9. *$\forall t \geq s$, la v.a. $N_t - N_s$ a pour la même loi que N_{t-s} .*
10. *$\forall t, s \geq 0$, la v.a. $N_{t+s} - N_t$ est indépendante de la tribu engendrée par les $(N_u, 0 \leq u \leq t)$,*

A.3 Processus de Poisson Composé

Définition A.3.1 (Processus de Poisson Composé) *Un processus de Poisson composé d'intensité $\lambda > 0$ et de loi f est un processus défini par :*

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

où Z_n est une suite des v.a. i.i.d à valeurs dans \mathbb{R}^d de loi f et N_t est un processus de Poisson d'intensité λ indépendant de la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé. Alors X possède des propriétés suivantes :

1. Les trajectoires de X sont des fonctions càdlàg constantes par morceaux.
2. Les instants de sauts $(T_n)_{n \geq 1}$ ont les mêmes lois que celles des temps de sauts du processus de Poisson N_t : c'est la somme des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre λ .
3. Les tailles des sauts $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont i.i.d.
4. Le processus de Poisson est lui-même un processus de Poisson composé dont les sauts $Z_n \equiv 1$.
5. Généralement, on peut écrire :

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n)$$

Proposition A.3.1 (Fonction caractéristique d'un processus de Poisson composé)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson composé. Sa fonction caractéristique est de la forme :

$$\mathbb{E}[e^{i(u, X_t)}] = \exp \left(t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u, x)} - 1) \lambda f(dx) \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

Pour un processus de Poisson composé à valeur dans \mathbb{R} , la fonction caractéristique est donnée sous la forme :

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = \exp \left(t \lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) f(dx) \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Introduisons la nouvelle mesure $\nu(A) = \lambda f(A)$, nous pouvons réécrire la fonction caractéristique du processus de Poisson composé comme suivante :

$$\mathbb{E}[e^{i(u, X_t)}] = \exp \left(t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u, x)} - 1) \nu(dx) \right), \quad \forall u \in \mathbb{R}^d$$

A.4 Processus de Lévy

Définition A.4.1 (Processus de Lévy) Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeur dans \mathbb{R}^d , est un processus de Lévy si :

(i) $X_0 = 0$ p.s.

(ii) Ses incréments sont indépendants : pour toute suite strictement croissante d'instant t_0, \dots, t_n , les v.a. $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

(iii) Ses incréments sont stationnaires : la loi de $X_{t-h} - X_t$ ne dépend pas de t .

(iv) Il vérifie la propriété de continuité stochastique : pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t-h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$.

Exemple A.4.1 Un mouvement brownien, un processus de Poisson composé sont des processus de Lévy ;

Notons $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ où $X_{t-} = \lim_{s \nearrow t} X_s$, nous définissons la mesure de Lévy comme suivante :

Définition A.4.2 (Mesure de Lévy) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeur dans \mathbb{R}^d . La mesure ν sur \mathbb{R}^d définie par :

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#\{t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

est appelée la mesure de Lévy de X . $\nu(A)$ est le nombre espéré, par unité de temps, de sauts dont les taille appartiennent à A .

Théorème A.4.1 (Formule de Lévy-Khintchine) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeur dans \mathbb{R}^d . Alors il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et une mesure de Lévy ν tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}[e^{iuX_t}] = e^{t\psi(u)}$$

où

$$\psi(u) = i(\gamma, u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u,x)} - 1 - i(u,x)\mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}})\nu(dx).$$

On appelle (A, ν, γ) le triplet caractéristique du processus X , et $\psi(u)$ son exposant caractéristique.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeur dans \mathbb{R} . Alors, la formule de Lévy-Khintchine de X s'écrit sous la forme :

$$\mathbb{E}[e^{iuX_t}] = e^{t\psi(u)} = \exp \left\{ t \left[i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)\mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}\nu(dx) \right] \right\}.$$

avec le triplet caractéristique (σ, ν, γ) .

Exemple A.4.2 (Jump-Diffusion) Soit

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

où W_t est un mouvement brownien, N_t un processus de Poisson d'intensité λ et les Z_k sont des variables aléatoires i.i.d. de la loi f . On reconnaît que X_t est la somme d'une dérive, d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson composé. Alors, X_t est un processus de Lévy du triplet $(\sigma, \lambda \times f, \gamma)$.

Proposition A.4.1 (Formule d'Itô d'un processus de Lévy) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeur dans \mathbb{R} et f une fonction de la classe \mathcal{C}^2 dans \mathbb{R} . Alors,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_{s-}) d\langle X^c \rangle_s + \sum_{0 \leq s \leq t} (f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-}) \Delta X_s),$$

$\forall t \geq 0$.

Proposition A.4.2 (Exponentielle stochastique Doléans-Dade) Soit X un processus de Lévy. Alors, l'équation stochastique différentielle

$$\frac{dY_t}{Y_t} = dX_t, \quad Y_0 = 1$$

a pour unique solution appelée l'exponentielle stochastique Doléans-Dade de X , notée par $\mathcal{E}(X)_t$:

$$\mathcal{E}(X)_t = X_0 e^{X_t - \frac{1}{2} [X]_t^c} \prod_{s \leq t, \Delta X_s \neq 0} (1 - \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}$$

Proposition A.4.3 (Exponentielle ordinaire et stochastique) 1. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeur dans \mathbb{R} dont le triplet caractéristique est (σ, ν, γ) et l'exponentielle stochastique Doléans-Dade est $Z = \mathcal{E}(X)$. Si $Z > 0$ p.s. alors, il existe un autre processus de Lévy $(L_t)_{t \geq 0}$ tel que $Z_t = e^{L_t}$ où

$$L_t = \log(Z_t) = X_t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \sum_{0 \leq s \leq t} (\log(1 + \Delta X_s) - \Delta X_s)$$

Son triplet caractéristique $(\sigma_L, \nu_L, \gamma_L)$ est donné par :

$$\sigma_L = \sigma$$

$$\nu_L(A) = \nu(\{x : \log(1+x) \in A\}) = \int \mathbb{1}_A(\log(1+x)) \nu(dx)$$

$$\gamma_L = \gamma - \frac{\sigma^2}{2} + \int \nu(dx) \{ \log(1+x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(\log(1+x)) - x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \}$$

2. Soit $(L_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy à valeur dans \mathbb{R} dont le triplet caractéristique est $(\sigma_L, \nu_L, \gamma_L)$ et $S_t = \exp(L_t)$. Alors, il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que S_t est son exponentielle stochastique Doléans-Dade : $S = \mathcal{E}(X)$ où

$$X_t = L_t + \frac{\sigma^2 t}{2} + \sum_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta L_s - e^{\Delta X_s})$$

Le triplet caractéristique de X est donné par :

$$\sigma = \sigma_L$$

$$\nu(A) = \nu_L(\{x : e^x - 1 \in A\}) = \int \mathbb{1}_A(e^x - 1) \nu_L(dx)$$

$$\gamma = \gamma_L + \frac{\sigma_L^2}{2} + \int \nu_L(dx) \{ (e^x - 1) \mathbb{1}_{[-1,1]}(e^x - 1) - x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \}$$

Annexe B

Simulation

B.1 Simulation d'un Mouvement Brownien

- Choisir la durée T ou l'intervalle $[0, T]$ de simulation.
- Choisir le pas de temps de discrétisation Δ selon $\Delta = T/n$, c'est-à-dire choisir n le nombre d'intervalle de discrétisation ou $n + 1$ le nombre d'instant de discrétisation.
- Initialiser $B_0 = 0$.
- Pour $i = 1$ à n , simuler $B_{i+1} = B_i + \sqrt{\Delta}\varepsilon$ où ε est de loi Normale centré réduite.

B.2 Simulation d'un processus du Poisson composé

Suppose qu'on veut simuler le processus du Poisson composé de la formule :

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

- Simuler une variable N de loi Poisson de paramètre λT . N donne le nombre total de sauts sur l'intervalle $[0, T]$.
- Simuler N variables aléatoires i.i.d. U_i de loi uniforme sur l'intervalle $[0, T]$. Ces variables correspondent aux tailles des sauts.
- Simuler N variables aléatoires i.i.d. Z_i de la loi f .

La trajectoire est donnée par

$$X_t = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{U_i < t\}} Z_i$$

B.3 Simulation d'un processus de Lévy de type jump-diffusion

Suppose qu'on veut simuler le processus de Lévy de la formule :

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

On va simuler une trajectoire discrétisée du processus de Lévy pour les temps fixés $0 = t_0 < \dots < t_n = T$.

- Simuler une trajectoire du Mouvement Brownien W_{t_i} ou plus précisément, simuler n variables aléatoires i.i.d. G_i de la loi normale centrée et de variance $\sigma^2 \Delta t_i$ où $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

- Simuler une trajectoire du processus de Poisson composé (comme dans la partie précédente).

La trajectoire est donnée par

$$X_{t_i} = \gamma t_i + \sum_{k=1}^i G_k + \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{U_j < t_i\}} Z_j$$

Table des matières

I	THEORIE	9
1	Description de la gestion CPPI	11
1.1	Objectif et principe	11
1.2	Éléments de structuration	12
1.2.1	La nature de l'assurance recherchée	12
1.2.2	La nature des actifs risqués à laquelle on recherche une exposition	12
1.3	Exemple numérique	13
1.4	Le choix du multiple cible	14
1.5	Back-testing	16
1.6	Conclusion	18
2	Propriétés de gestion CPPI	20
2.1	Expression théorique de la gestion CPPI	20
2.2	Influence de l'évolution de l'actif risqué toutes choses égales par ailleurs	23
2.2.1	Actif risqué et valeur du Fonds CPPI	23
2.2.2	Actif risqué et rebalancement	23
2.2.3	Actif risqué et coussin	25
2.2.4	Actif risqué et la performance du fonds CPPI	25
2.2.5	Influence de l'évolution de la volatilité	26
2.3	Influence de l'évolution des taux d'intérêt toutes choses égales par ailleurs	26
2.4	Impact du multiple	27
2.4.1	Convexité et multiple	27
2.4.2	Vitesse et accélération du coussin et multiple	28

2.4.3	Volatilité et multiple	29
2.4.4	Fréquence de rebalancement et multiple	29
2.4.5	Espérance - Variance de la valeur du Fonds et multiple	30
2.5	Conclusion	30
3	Risques affectant la gestion CPPI	31
3.1	Description des Risques	31
3.1.1	Risque de Gap	31
3.1.2	Risque de monétarisation	32
3.1.3	Risque de marché	33
3.1.4	Risque de modèle	36
3.1.5	Risque de discontinuité	37
3.1.6	Risque opérationnel	38
3.2	Couverture des risques	38
3.2.1	Couverture du risque de Gap	38
3.2.2	Couverture du risque de taux	39
3.2.3	Couverture du risque de volatilité de l'actif risqué	39
3.2.4	Couverture du risque de liquidité	39
3.2.5	Couverture du risque de défaut de l'émetteur	40
3.2.6	Couverture du risque de modèle	40
3.2.7	Couverture du risque de discontinuité	41
3.2.8	Couverture du risque opérationnel	41
3.3	Conclusion	41
4	Evaluation du risque de Gap dans la gestion CPPI	43
4.1	Modèle	43
4.2	Mesure du risque de Gap dans la stratégie CPPI	44
4.2.1	Formule générale	45
4.2.2	Exemple : le cas du modèle de Kou	46

II	PRATIQUES	49
5	Analyse de la performance du Fonds CPPI à l'aide des simulations stochastiques	51
5.1	Simulation du sous-jacent	52
5.1.1	Le modèle de Black-Scholes	52
5.1.2	Calibrage du modèle de Black-Scholes	52
5.1.3	Paramètres du modèle	53
5.2	Estimation de la performance du Fonds CPPI	53
5.2.1	Performance du Fonds CPPI en fonction de la date d'échéance T	54
5.2.2	Performance du Fonds CPPI en fonction du multiple m	55
5.2.3	Distribution de probabilité de la performance finale du Fonds CPPI	56
5.3	Conclusion	57
6	Exemple numérique	58
6.1	Le TIPP, une variante du CPPI	58
6.1.1	Principes de la gestion TIPP	58
6.1.2	Propriétés de la gestion TIPP	59
6.2	Back-testing : exemple TIPP sur fonds LBPAM	59
6.2.1	Hypothèses	59
6.2.2	Résultats	60
6.3	Proposition d'amélioration de la gestion TIPP	61
6.3.1	Contrôle du multiple par la volatilité	61
6.3.2	Garantie glissante	63
6.3.3	Contrôle du multiple par la volatilité et Garantie glissante	64
6.4	Conclusion	65
A	Rappel sur les processus	69
A.1	Mouvement Brownien	69
A.2	Processus de Poisson	69
A.3	Processus de Poisson Composé	70

A.4	Processus de Lévy	71
B	Simulation	75
B.1	Simulation d'un Mouvement Brownien	75
B.2	Simulation d'un processus du Poisson composé	75
B.3	Simulation d'un processus de Lévy de type jump-diffusion	76