

MODÉLISATION ET ALLOCATION
STRATÉGIQUE D'ACTIFS DANS LE
CADRE DU RÉFÉRENTIEL DE
SOLVABILITÉ 2

RESUME

MOTS CLÉS :

Modélisation d'actif, taux d'intérêt, modèle de MERTON, modèle à sauts boursiers, test d'adéquation, décomposition de CHOLESKY, allocation stratégique, solvabilité 2, optimisation, contraintes de risque, algorithme génétique.

Depuis quelques temps maintenant, le monde de l'assurance se mobilise autour du projet *Solvabilité 2*. En effet la commission européenne a récemment lancé une directive visant à définir un nouveau référentiel prudentiel pour les compagnies d'assurance. Cette réforme à venir a pour but d'harmoniser, au niveau européen, les règles de solvabilité et surtout de renforcer la protection des assurés en incitant les assureurs à améliorer leur gestion des risques.

Dans l'actuel référentiel, la solvabilité d'un assureur se mesure de façon déterministe sur la base de coefficients forfaitaires à partir des éléments constitutifs du bilan et du compte de résultats. La réforme *Solvabilité 2* est une approche basée sur les risques réels de l'assureur et évalue les exigences de capitaux sur la base d'un ensemble de modules de risques et en intégrant des éléments exogènes à son activité propre, comme le risque de marché.

L'objet de ce mémoire est de déterminer l'impact des nouvelles normes de solvabilité dans la stratégie financière d'une compagnie d'assurance, et particulièrement dans l'élaboration de son allocation d'actifs. Et réciproquement, nous chercherons à mesurer le rôle de cette allocation dans l'analyse du risque d'une compagnie d'assurance.

Afin d'étudier ces impacts, nous commencerons par établir au préalable une modélisation de l'actif financier représentant les fonds propre de la société puis nous chercherons à déterminer l'allocation optimale sous les contraintes de risques actuelles et à venir, en définissant un programme d'optimisation.

La troisième partie de ce mémoire propose un outil d'optimisation pour la résolution de notre programme : les algorithmes génétiques. Très utilisés dans de nombreux domaines mais relativement nouveaux dans le secteur actuariel, les algorithmes génétiques montrent leur efficacité pour la résolution de programmes d'optimisations complexes notamment sous contraintes non linéaires.

ABSTRACT

KEY WORDS :

Asset modeling, interest rates, jump diffusion processes, MERTON model, adequacy tests, CHOLESKY factorization, asset allocation, requirement capital, equity capital, solvency 2, optimization, constraints of risks, genetic algorithm.

For some times now, the world of the insurance focuses on the project *Solvency 2*. Indeed the European Commission recently passed a directive to define new prudent frame of reference. This reform aims to harmonize, at the European level, the rules of solvency and especially to reinforce the protection of the insureds and to incite the companies to improve their management of risks.

In the current repository, the solvency of an insurer is determined by a determinist way with fixed coefficients from the constituent elements of the accounting balance sheet and the profit and loss account. The reform *Solvency 2* is an approach based on the real risks of the insurer and estimates the requirements of capital with a set of modules of risks and with integrating exogenous elements from its activity, as the risk of market.

The purpose of this report is to determine the impact of the new solvency standards in the financial strategy of an insurance company, and particularly in the determination of its asset allocation. On the other hand, we will try to measure the role of this strategically allocation in the analysis of the risk of an insurance company.

To study these impacts, we will begin by establishing a modelling of the financial asset representing capital of the company. Then we will try to determine the optimal allocation under the current and to come constraints of risks, by defining a program of optimization

The third part of this report proposes an optimization program. The genetic algorithms, very used in several domains but new in the actuarial sector, show their efficiency for the resolution of complex optimization programs as those with non linear constraints.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu Marie MEIGNIE, Actuaire SHAM et directeur de ce mémoire, pour tous ses conseils, sa disponibilité et sa pertinence sans faille. Merci de m'avoir guidée et permis de réaliser ce mémoire.

Je remercie tous les collaborateurs SHAM avec qui j'ai passé d'agréables moments, en particulier le service actuariat, Sabri BOUDRAMA, Sylvain CARACO, Céline DUVEAU, Leila ELIJALAT, Bruno FEUILLOY, Séverine PLANCHON, et notamment merci à Sébastien HASLE et Philippe POBEL pour m'avoir accueillie au sein de ce service. Merci également au service financier pour leurs conseils, le service comptabilité pour leur bonne humeur et la secrétaire Agnès EXPOSITO.

Je remercie l'ISFA pour ces trois années de riches enseignements et le professeur Didier RULLIÈRE, tuteur de ce mémoire, pour son suivi, sa relecture attentive et ses justes conseils.

Et pour terminer, j'aimerais adresser un remerciement spécial à Gildas ROBERT, actuaire consultant OPTIMIND, pour avoir pris du temps pour m'éclairer sur les problématiques *Solvabilité 2* et pour m'aider à finaliser ce mémoire.

SOMMAIRE

RESUME	2
ABSTRACT	3
REMERCIEMENTS	4
SOMMAIRE	5
INTRODUCTION	7
PARTIE 1 : MODÉLISATION D'ACTIFS	9
CHAPITRE 1 : Modélisation des taux d'intérêt	11
1.1 Choix du modèle	12
1.1.1 Des modèles classiques	13
1.1.1.1 Le modèle de VASICEK	13
1.1.1.2 Le modèle Cox, Ingersoll, Ross (CIR).....	14
1.1.1.3 Paramètres de courbes et modèle de NELSON-SIEGEL.....	15
1.1.2 Deux modèles alternatifs	17
1.1.2.1 Le modèle HEATH, JARROW, MORTON (HJM).....	17
1.1.2.2 Modèles multifactoriels	20
1.2 Paramétrisation	21
CHAPITRE 2 : Modélisation des actions	25
2.1 Présentation des modèles	25
2.1.1 Le modèle de BLACK et SCHOLLES.....	25
2.1.2 Le modèle de MERTON	26
2.1.3 Présentation d'un autre modèle : le modèle de KOU.....	28
2.2 Paramétrisation	31
2.3 Tests d'adéquation	38
2.3.1 Test d'adéquation du χ^2	38
2.3.2 Test de Kolmogorov-Smirnov	42
CHAPITRE 3 : Modélisation du cours de l'immobilier	45
3.1 Historique et données.....	45
3.2 Choix du modèle et des paramètres	46
3.3 Bulle immobilière	47
CHAPITRE 4 : Modélisation des Hedges Funds	49
CHAPITRE 5 : Corrélation entre actifs	50
PARTIE 2 : DÉTERMINATION DE L'ALLOCATION STRATÉGIQUE D'ACTIFS	53
CHAPITRE 1 : Vers un nouveau référentiel	55
1.1 Marge de solvabilité en assurance.....	55
1.2 Solvabilité 1	56
1.3.1 Présentation	56
1.3.2 En assurance Vie	56
1.3.3 En assurance Non Vie	57
1.3 Une réforme en cours	57
1.3.1 Critique de Solvabilité 1	57
1.3.2 Les objectifs	58
1.3.3 Un référentiel en trois piliers.....	58
1.3.4 Calendrier	60
1.4 Etudes quantitatives d'impact	60

CHAPITRE 2 : Exigence de marge sous Solvabilité 2	62
2.1 Capital Requis.....	62
2.2 Les modules de risques.....	65
2.3 Le risque de marché.....	67
2.4 Le modèle interne.....	68
CHAPITRE 3 : Un programme d'optimisation	70
PARTIE 3 : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES DE RISQUES	73
CHAPITRE 1 : Les algorithmes génétiques	75
1.1. Présentation.....	75
1.1.1. Origine.....	75
1.1.2. Domaines d'application.....	75
1.1.3. Vocabulaire.....	76
1.2. L'algorithme.....	76
1.2.1. Population initiale.....	77
1.2.2. Evaluation.....	77
1.2.3. Nouvelle génération.....	78
1.2.4. réitération.....	79
1.3. Limites.....	79
CHAPITRE 2 : Application à l'allocation stratégique	81
CONCLUSION	84
BIBLIOGRAPHIE	85
ANNEXES	87
Annexe 1 : La courbe des taux zéro-coupon	88
1. Les différentes formes de la courbe des taux.....	88
2. Paramètres de NELSON-SIEGEL.....	89
Annexe 2 : Du modèle de taux d'intérêt au prix zéro-coupon	92
1. Prix d'un zéro-coupon.....	92
2. Discrétisation du processus.....	95
Annexe 3 : Détails des calculs du modèle de MERTON	97
Annexe 4 : Détails des calculs du modèle de KOU	100
1. Rappel sur la loi double exponentiel.....	100
2. Application au modèle de KOU.....	101
Annexe 5 : Synthèse des résultats de la modélisation d'actifs	104

INTRODUCTION

Fondée en 1928 par les hospitaliers du sud-est, SHAM (Société Hospitalière d'Assurances Mutuelles) est une société d'assurance mutuelle spécialisée dans l'assurance des établissements de santé et d'hébergement. SHAM propose aujourd'hui une large gamme de contrats à ces sociétaires : Responsabilité Civile, Risques du personnel, Protections juridique, Dommages aux biens, Assurances automobile, Assurances de la construction, Assurances incendie. Mais sa principale activité est la Responsabilité Civile¹.

Comme plus de 1 000 organismes assureurs à travers l'Europe, SHAM participe cette année à la troisième étude quantitative d'impact (QIS3) proposé par le CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) pour la détermination des formules standards de la marge de solvabilité sous le nouveau référentiel en cours de construction.

En effet, la Commission européenne a lancé un grand projet de réforme mobilisant le secteur de l'assurance afin d'élaborer de nouvelles normes européennes de solvabilité. Elle a donc chargé le CEIOPS d'établir une étude à grande échelle faisant intervenir les différents acteurs du marché européen des assurances (autorités de contrôle nationales, cabinets d'audit, compagnies d'assurance telles que SHAM...). Ces intervenants ont pour rôle de délivrer un avis aussi bien technique que qualitatif sur l'adéquation du modèle de solvabilité à leurs applications locales et leurs problématiques.

Alors que dans l'actuel référentiel français, *Solvabilité 1*, la détermination du niveau de solvabilité d'une entreprise d'assurance porte sur l'établissement de provisions prudentes au passif et indépendamment sur des règles de détention et d'investissement à l'actif, il en va autrement dans le référentiel européen à venir *Solvabilité 2*. La réforme doit permettre une meilleure définition du niveau des fonds propres nécessaire de l'entreprise d'assurance en fonction de son véritable profil de risques par le biais d'une valorisation conjointes des différents postes du bilan, aussi bien au passif (provisions...) qu'à l'actif (placements financiers...).

La marge de solvabilité, sous le nouveau référentiel, est constituée de manière à ce que la compagnie ait une probabilité de faillite très faible sur un horizon fixé, en considérant son niveau de risque au global. Ainsi, la détermination de l'allocation stratégique d'actifs se trouve de fait intégré dans la détermination du niveau de fonds propres.

Selon l'état d'avancement de la réforme (basée sur la proposition du QIS3) la détermination du capital de solvabilité requis (SCR) est fixée de manière à couvrir une probabilité de non ruine à 99,5% sur un horizon de un an selon une notion de VaR (Value at Risk).

¹ La Responsabilité Civile représente 70 % de l'activité SHAM. Il peut s'agir d'un contrat de Responsabilité Civile Médicale, Professionnelle ou des Dirigeants. Ce contrat garantit contre les conséquences pécuniaires de la responsabilité que le sociétaire peut encourir à l'égard des tiers à l'occasion de l'exercice de son activité d'Etablissement de santé.

En complément des règles qualitatives de surveillance et de contrôle, le projet propose plusieurs méthodes parallèles pour la détermination quantitative du capital requis. Cette détermination pourra se faire à l'aide des formules standards en cours d'élaborations par le CEIOPS, ou par des modèles internes créés par la compagnie d'assurance pour caler au mieux au risques réels qu'elle encourt. Pour cela, ce modèle pourra utiliser une modélisation de l'ensemble des variables et risques impactant sa solvabilité mais toujours dans l'optique d'éviter la ruine avec une probabilité élevée à horizon donné

Parmi les risques impactant la solvabilité d'une compagnie d'assurance se trouve le risque de marché, et donc, parmi les variables influant le calcul du capital requis se trouve l'allocation stratégique d'actifs.

L'objet de ce mémoire est de déterminer l'allocation d'actif optimale afin de répondre au besoin de capital qu'imposerait cette réforme selon les données QIS3 (non ruine à 99,5% à horizon 1 an avec une notion de VaR).

La première partie de ce mémoire propose une modélisation stochastique du portefeuille financier SHAM en cinq classes d'actifs. Après une présentation plus complète de la réforme *Solvabilité 2* ainsi que de ses enjeux, nous proposerons dans la deuxième partie un modèle de détermination de l'allocation stratégique qui permettra de définir quelle est la meilleure projection sur 1 an du portefeuille SHAM modélisé. Ce modèle se présentant sous forme de programme d'optimisation sous contraintes non linéaires et dont la solution ne peut s'écrire explicitement, la troisième partie de ce mémoire propose un algorithme permettant de résoudre ce programme : les algorithmes génétiques

PARTIE 1 :

MODÉLISATION D'ACTIFS

La particularité comptable d'une compagnie d'assurance, par rapport à toute autre compagnie, est son cycle inversé de production. Cette particularité nécessite la constitution de provisions réglementaire, afin d'honorer les engagements de la compagnie, et réciproquement elle nécessite la gestion d'un actif lourd.

Le tableau ci dessous montre le bilan simplifié de SHAM, assureur non vie spécialisé dans le risque hospitalier, et permet la visualisation de la répartition de l'actif et du passif d'une compagnie d'assurance.

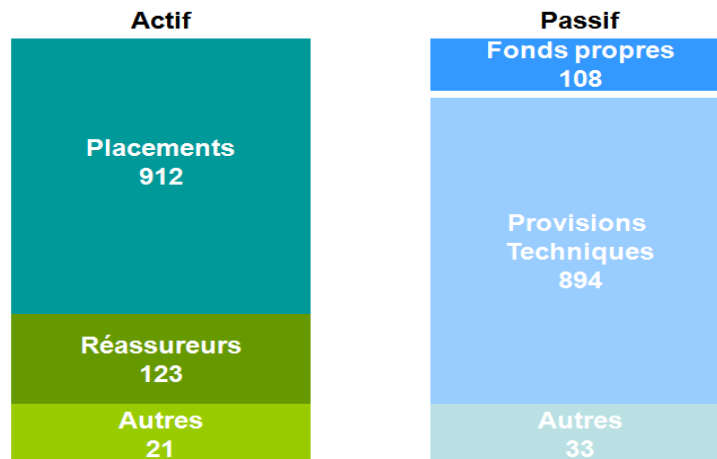


Figure 1 : bilan simplifié de SHAM (en million d'euros au 31/12/2006)

Dans une compagnie d'assurance non vie, les placements constituent la part la plus importante de l'actif (70% à 80%), notamment pour couvrir l'ensemble de ses provisions. Pour cela, Il existe un nombre important de placements financiers. Voici une liste (non exhaustive) des produits les plus classiques : les actions, les options sur taux ou sur autre actifs, les fonds de gestion alternatifs, l'immobilier, les obligations, les obligations convertibles, le monétaire (prêt à taux fixe, variable, option sur taux comme le swap...), etc.

Dans ce mémoire, par souci de simplification nous avons décomposé notre portefeuille en 5 classes d'actifs :

- Les obligations
- Les actions
- L'immobilier
- Les Hedge-Funds
- Le monétaire

L'étude que nous avons menée consiste à projeter le portefeuille d'actifs dans le temps afin de déterminer l'allocation optimale d'actifs entre ces 5 classes. L'évaluation de ces différents actifs dans le temps nécessite l'utilisation de modèles paramétriques adaptés à leurs comportements.

Dans cette partie nous nous attachons donc à décrire les modèles utilisables : classiques et alternatifs. Une étude de chacun de ces modèles est nécessaire afin de déterminer le plus adapté en fonction de notre portefeuille. Nous abordons également la partie d'estimation des paramètres de ces modèles.

Commençons par la modélisation de la classe obligation et la classe monétaire, toutes deux nécessitant une modélisation des taux d'intérêt.

CHAPITRE 1 : Modélisation des taux d'intérêt

Le modèle de taux idéal² doit avoir, d'après les critères de ROGERS (1995), les caractéristiques suivantes :

1. réaliste en ce sens qu'il permet de prendre en compte les propriétés empiriques de la courbe des taux.

L'étude historique des mouvements de la courbe des taux met en relief les points suivants³ :

- a. les taux d'intérêt ne sont pas négatifs.
- b. les taux d'intérêt sont affectés par des effets de retour à la moyenne.
- c. les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélée.
- d. les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme.
- e. 3 facteurs : niveau, pente et courbure, sont à l'origine de plus de 95% des mouvements de la courbe des taux.

2. bien construit en ce sens que les paramètres du modèle sont observables sur le marché, facilement estimables, et en outre fréquemment réajustables.

3. compatible avec les prix de marché de produits (obligations à taux fixe ou variable, swaps standards, swaptions, caplets...).

4. suffisamment simple pour permettre des calculs rapides et intuitifs

5. un modèle qui n'oublie pas un facteur de risque.

6. cohérent d'un point de vue théorique, c'est-à-dire satisfaisant l'absence d'opportunité d'arbitrage.

7. offrant une méthode de couverture du produit de taux qui permette au vendeur de dupliquer aisément le produit, et par conséquent de sécuriser tout au long de la vie du produit la marge dégagée initialement lors de la vente.

Ce modèle idéal n'existant pas, une multitude de modèles se sont donc développés. Ils peuvent être déterministes (pendant longtemps le taux à été modélisé de façon simpliste par une constante) ou stochastiques, à discrétisation exacte ou approximative, mono- ou multi-factoriels, reposant sur la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage ou sur l'équilibre du marché offre/demande.

Cette section présente quelques modèles de taux les plus étudiés ainsi que leurs mises en application.

² Ce modèle de taux idéal est expliqué dans le cours *Modèles de la courbe des taux d'intérêt* de PRIAULET P. et MRAD M. (ENSAE) : <http://www.ensae.fr/ParisTech/FA304/FA304.htm>

³ L'annexe 1.1 présente les différentes formes de la courbe des taux

1.1 Choix du modèle

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il existe une multitude de modèles de taux d'intérêt. Dans la pratique nous pouvons distinguer deux familles de modèles stochastiques.

Ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'équilibre :

En effet on parle d'équilibre général quand il s'applique à l'ensemble de l'économie (consommation/production, offre/demande). Mais une telle approche implique de poser des hypothèses restrictives qui peuvent entraîner un biais dans la modélisation. Le modèle de COX, INGERSOLL, ROSS (1985), que nous étudierons dans la suite de cette section, est un modèle répondant à une telle approche.

Et ceux reposant sur une approche dite d'évaluation d'arbitrage :

Comme le modèle de VASICEK (1977). Cette approche est moins restrictive, mais il faut noter que si l'approche précédente basée sur une économie globale en équilibre implique toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage, la réciproque n'est pas toujours vérifiée.

Les modèles de taux que nous étudierons par la suite, modélisent de façon général le taux court instantané (où plus précisément le taux forward instantané) à l'aide de l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$$

Sous les hypothèses de marché parfait (absence de coût de transaction, titre parfaitement divisible, agents rationnels et disposant du même niveau d'information, marché efficient, taux d'emprunt et de prêt identique), nous présenterons quelques modèles classiques :

- VASICEK
- COX, INGERSOLL, ROSS, (CIR)
- NELSON-SIEGEL

Et nous étudierons également d'autres modèles plus en adéquation avec les observations empiriques :

- HEATH, JARROW, MORTON (HJM)
- Modèles multi factoriels

L'annexe 2 de se mémoire présente toutes les démonstrations liées à la modélisation des taux d'intérêt. Elle présente notamment les méthodes de discrétisation du taux court instantané selon les différents modèles ainsi que les calculs des expressions analytiques des prix et taux zéro-coupons.

L'annexe 1 est plus axée sur les différentes formes de la courbe des taux, et donc également les effets des paramètres du modèle de NELSON-SIEGEL sur cette courbe.

1.1.1. Des modèles classiques

1.1.1.1. Le modèle de VASICEK

Présentation du modèle :

Le modèle de VASICEK (1977) est l'un des premiers modèles stochastiques de taux d'intérêt. Il s'agit d'un processus gaussien se référant au processus d'ORNSTEIN UHLENBECK pour expliquer l'effet de retour à la moyenne empiriquement observé sur les courbes de taux (caractéristique 1.b du modèle de taux idéal présenté à l'introduction de ce chapitre).

$$\text{Il s'écrit :} \quad dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

r_t : taux d'intérêt instantané

a : vitesse de retour à la moyenne

b : moyenne long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané

σ : volatilité

W_t : processus de WIENER

Cette équation différentielle stochastique dispose d'une solution explicite, il existe donc une discrétisation exacte de ce processus.

Avantages et inconvénients :

Cette modélisation a l'avantage d'être simple de compréhension et intuitive du fait de l'interprétation de ses paramètres, conformément à la caractéristique 2. du modèle de taux idéal.

De plus elle admet une solution explicite et donc une discrétisation⁴ exacte :

$$\tilde{r}_{t+\delta t} = \tilde{r}_t \exp(-a\delta t) + b(1 - \exp(-a\delta t)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a\delta t)}{2a}} \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Elle est donc simple d'utilisation et d'implémentation d'un point de vue informatique. Elle dispose également d'expressions analytiques pour les produits de taux standards comme les zéro-coupons et les obligations (caractéristique 3. du modèle de taux idéal).

Elle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt, ce qui correspond aux observations empiriques. En effet, des valeurs élevées des taux ont tendance à être suivies plus fréquemment par des baisses que par des hausses. L'effet inverse est également constaté pour des niveaux de taux inhabituellement bas.

⁴ L'annexe 2.2 montre les étapes de la discrétisation.

Mais ce modèle simple d'utilisation possède plusieurs inconvénients.

Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants. Tout se passe comme si un seul facteur (le taux instantané) était à l'origine des déformations de la courbe des taux ; ce qui suppose que les taux soient parfaitement corrélés.

Le modèle est dit non compatible avec la courbe des taux. En effet, bien qu'il soit possible d'obtenir la plupart des formes de la courbes des taux (croissante, décroissante, "bosselée"), on ne peut obtenir une forme de courbe en "creux" : décroissante sur le court terme puis croissante sur le long terme (annexe 1.1. les différents modèles de la courbe des taux).

De plus cette modélisation du taux suit un processus gaussien, donc est négatif avec une probabilité non nulle. Ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, un agent économique rationnel préférera toujours garder son argent plutôt que de le prêter à un taux négatif. L'AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage) est vérifiée si les agents ne peuvent pas investir dans le compte d'épargne court terme, bien que cette hypothèse ne soit pas réaliste.

1.1.1.2. Le modèle Cox, Ingersoll, Ross (CIR)

Présentation du modèle :

Un autre modèle, COX, INGERSOLL, ROSS (1985) a ensuite été proposé. Il possède toujours cette propriété de retour à la moyenne des taux mais n'a pas l'inconvénient de modéliser des taux négatifs. Il est ainsi plus souvent employé par les professionnels que le modèle de VASICEK.

Il s'écrit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

r_t : taux d'intérêt instantané

a : vitesse de retour à la moyenne

b : moyenne sur le long terme du taux instantané

σ : volatilité

W_t : processus de WIENER

Il n'existe pas de solution fermée à cet EDS, La discrétisation ne peut se faire que par approximation. Plusieurs méthodes sont là aussi envisageables, comme les schémas d'EULER ou de MILSTEIN qui sont des développements de TAYLOR à des ordres plus ou moins importants de l'EDS.

Discrétisation de premier ordre : $\tilde{r}_{t+\delta t} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta t + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\delta t \times \varepsilon$

Discrétisation de second ordre : $\tilde{r}_{t+\delta t} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta t + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\delta t \times \varepsilon + \frac{\sigma^2}{4}\delta t(\varepsilon^2 - 1)$

Où $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$. (Les étapes de la discrétisations sont démontrées à l'annexe 2.2)

Ce modèle repose sur le principe d'équilibre du marché entre l'offre et la demande.

Avantages et inconvénients :

Cette modélisation est simple d'implémentation et intuitive du fait de l'interprétation de ses paramètres. Elle est également simple d'utilisation et de calcul d'un point de vue informatique, et dispose aussi d'expressions analytiques pour les produits de taux standards comme les zéro-coupons et les obligations.

Elle permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt, qui correspond aux observations empiriques.

Et à l'instar du modèle de VASICEK, les taux ne peuvent devenir négatifs. En effet, Ce modèle de taux n'a plus le caractère gaussien.

Mais ce modèle simple d'utilisation possède plusieurs inconvénients.

Les différents paramètres du processus de diffusion sont constants. Tout se passe comme si un seul facteur (le taux instantané) était à l'origine des déformations de la courbe des taux. Ce qui suppose que les taux sont parfaitement corrélés.

Le modèle est non compatible avec la courbe des taux. En effet, bien qu'il soit possible d'obtenir la plupart des formes de la courbe des taux (croissante, décroissante), on ne peut obtenir toutes les formes de courbe : "bosselée" (croissante sur le court terme puis décroissante sur le long terme) et en "creux" (décroissante sur le court terme puis croissante sur le long terme, comme montrée à l'annexe 1.1.).

1.1.1.3. Paramètres de courbes et modèle de NELSON-SIEGEL

Dans ce mémoire, nous ne ferons pas une étude détaillée du modèle de NELSON-SIEGEL. Il est tout de même intéressant de le mentionner car il permet de mieux apprécier *a priori* la forme de la courbe des taux.

Voici un rappel sur le modèle de taux idéal⁵ :

« 1. il doit être réaliste au sens où il permet de prendre en compte les propriétés empiriques de la courbe des taux.

L'étude historique des mouvements de la courbe des taux met notamment en relief le point suivant :

e. 3 facteurs : niveau, pente et courbure, sont à l'origine de plus de 95% des mouvements de la courbe des taux. »

Le modèle originel de NELSON-SIEGEL (1987) propose :

$$f(0, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right) + \beta_2 \left(\frac{\tau}{\theta}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right)$$

⁵ cours *Modèles de la courbe des taux d'intérêt* de PRIAULET P. et MRAD M. (ENSAE) : <http://www.ensae.fr/ParisTech/FA304/FA304.htm>

Où $f(0, \tau)$ est le taux forward instantané déterminé à la date $t = 0$ et commençant à la date $t = \tau$ et $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \theta$ sont quatre paramètres⁶ à estimer

On détermine le taux zéro-coupon en utilisant la relation : $R(0, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(0, s) ds$

$$R(0, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right)}{\frac{\tau}{\theta}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right)}{\frac{\tau}{\theta}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right) \right]$$

β_0 = facteur de niveau ; il s'agit du taux long, en effet : $R(0, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \beta_0$

β_1 = facteur de rotation ; il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux long

β_2 = facteur de courbure

θ = paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps.

Cette méthode de NELSON-SIEGEL permet d'obtenir les quatre formes classiques de la courbe des taux : ascendante, descendante, plate, inversée. Mais les formes particulières non monotones de la courbe des taux, telles que les formes à un creux et à une bosse ne peuvent être représentées par ce modèle.

Reprenons l'expression du taux zéro-coupon dans le modèle de VASICEK :

$$\begin{aligned} R(0, \tau) &= R_\infty - \frac{1 - \exp(-a\tau)}{a\tau} (R_\infty - r_0) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (1 - \exp(-a\tau)) \\ &= R_\infty - (R_\infty - r_0) \left[\frac{1 - \exp(-a\tau)}{a\tau} \right] + \frac{\sigma^2}{a^2} \left[\frac{(1 - \exp(-a\tau))^2}{4a\tau} \right] \end{aligned}$$

Donc VASICEK est une forme approchée de NIELSON-SIEGEL. On peut exprimer les paramètres de VASICEK en fonction des 3 facteurs dominants (pente, niveau, courbure) de la courbe des taux :

$$R_\infty = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} = \beta_0 \text{ facteur de niveau} = \text{taux long terme}$$

$$a = \frac{1}{\theta} \text{ paramètre d'échelle assimilable à la vitesse de retour à la moyenne}$$

$$R_\infty - r_0 = \beta_1 \text{ facteur de rotation} = \text{spread taux long} - \text{taux court}$$

$$\frac{\sigma^2}{a^2} = \beta_2 \text{ facteur de courbure}$$

EL KAROUI, CHERIF et al. (1994) propose d'exprimer le taux zéro-coupon du modèle de VASICEK comme une fonction de ces paramètres :

$$R(0, \tau) = G(0, \tau; u) \quad \text{où } u = (L_0, S_0, \gamma_0, a)$$

⁶ Voir annexe 1.2 : Les effets des paramètres sur la courbe des taux

$$G(0, \tau; u) = L_0 - S_0 \left[\frac{1 - \exp(-a\tau)}{a\tau} \right] + \gamma_0 \left[\frac{(1 - \exp(-a\tau))^2}{4a\tau} \right]$$

Afin de mieux rendre compte de toutes les formes de la courbe des taux on peut remplacer $\frac{\sigma^2}{a^2}$ par $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ pour permettre la représentation des courbes décroissantes sur le court terme et croissante sur le long terme.

De façon générale, afin de résoudre l'inconvénient du modèle de NELSON-SIEGEL, SVENSSON (1994) en propose une méthode étendue :

$$R(0, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right)}{\frac{\tau}{\theta_1}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right)}{\frac{\tau}{\theta_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right) \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_2}\right)}{\frac{\tau}{\theta_2}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_2}\right) \right]$$

β_3 est un paramètre de courbure supplémentaire qui influence la partie courte de la courbe

θ_2 est un autre paramètre d'échelle

Cette méthode, appelé « NELSON-SIEGEL augmenté », est utilisée par la Banque de France depuis 1995 pour la publication de la courbe des taux zéro-coupon.

De même on peut écrire le modèle de « VASICEK modifié » qui donne plus de flexibilité à la courbe sur le secteur court terme :

$$G(0, \tau; \tilde{u}) = L_0 - S_0 \left[\frac{1 - \exp(-a\tau)}{a\tau} \right] + \gamma_0 \left[\frac{(1 - \exp(-a\tau))^2}{4a\tau} \right] - T_0 \left[\frac{1 - \exp(-b\tau)}{b\tau} \right] + K_0 \left[\frac{(1 - \exp(-b\tau))^2}{4b\tau} \right]$$

Il est à noter que le modèle de NELSON-SIEGEL possède également un biais important. En effet les taux de maturités supérieures à 7 ans sont moins ajustables, ce qui implique que les obligations de telles maturités soient parfois mal valorisées par le modèle. En effet les taux zéro-coupon montrent une concavité systématique à partir de la maturité 7 ans.

1.1.2. Deux modèles alternatifs

1.1.2.1. Le modèle HEATH, JARROW, MORTON (HJM)

Présentation du modèle :

Le modèle de HEATH, JARROW, MORTON (1990) est en fait une généralisation du modèle de HO et LEE (1986). Il englobe toute une classe de modèles de taux forward.

Le modèle HJM ne repose alors plus sur la diffusion du taux instantané r_t mais sur la diffusion de l'ensemble des taux instantané forward $f(t, T)$. C'est un modèle plus général puisqu'il y a équivalence entre la connaissance des taux instantané forward $f(t, \cdot)$ et celle des prix zéro-coupon $P(t, \cdot)$.

Ce modèle repose aussi sur la diffusion de toute la gamme des prix zéro-coupons. De plus il est à remarquer que $f(t, t) = r_t$. C'est donc toute la courbe des taux qui est représentée, et non plus le seul taux instantané.

Dans cette classe de modèles que représente HJM, intéressons-nous à deux modèles, celui de HO et LEE (1986) et celui de HULL et WHITE (1996).

L'équation générale d'un modèle HJM s'écrit donc :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

Cette classe de modèles fait référence à une structure initiale de taux forward, et utilise des paramètres dépendants du temps et de la maturité. Cela permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt au point de vue de la théorie d'arbitrage.

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage impose alors une condition sur la prime de risque du marché, $\lambda(t, T)$ est indépendante de la maturité T : $\lambda(t, T) = \lambda(t)$.

Elle impose également la condition suivante, reliant le drift au terme de diffusion du processus : $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds - \lambda(t) \right)$.

En se plaçant dans l'univers risque neutre nous retrouvons la même dynamique du taux instantané forward.

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t$$

Où \tilde{W}_t est un processus de WIENER dans l'univers risque neutre.

La condition reliant le drift et le terme de diffusion devient :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$$

Cette relation sera utile pour définir les modèles.

Modèle de HO et LEE :

L'hypothèse de base est de considérer le coefficient de diffusion constant :

$$\sigma(t, T) = \sigma$$

Par la relation $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$, vérifiant l'absence d'opportunité d'arbitrage dans l'univers risque neutre, on obtient :

$$\mu(t, T) = \sigma^2(T - t)$$

L'EDS du modèle de HO et LEE s'écrit donc dans l'univers risque neutre :

$$df(t, T) = \sigma^2(T - t)dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

Modèle de HULL et WHITE ou modèle de VASICEK généralisé :

L'hypothèse de base est de considérer le coefficient de diffusion comme une fonction exponentielle de la maturité :

$$\sigma(t, T) = \sigma \exp(-k(T - t))$$

Par la relation $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$, vérifiant l'absence d'opportunité d'arbitrage dans l'univers risque neutre, on obtient :

$$\mu(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} (\exp(-k(T - t)) - \exp(-2k(T - t)))$$

L'EDS du modèle de HULL et WHITE s'écrit donc dans l'univers risque neutre :

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} [\exp(-k(T - t)) - \exp(-2k(T - t))]dt + \sigma \exp(-k(T - t))d\tilde{W}_t$$

Avantages et inconvénients :

Ces modèles sont compatibles avec la courbe des taux du marché. En effet toutes les formes de courbes sont atteignables. Le modèle de HULL et WHITE a bien une volatilité décroissante avec la maturité.

Les deux modèles présentés gardent un caractère gaussien, les taux ont donc une probabilité non nulle d'être négatifs. Mais il existe d'autres modèles appartenant à la famille HJM qui n'ont pas cet inconvénient, comme par exemple le modèle de CIR augmenté :

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t)r_t) + \sigma(t)\sqrt{r_t}dW_t$$

Le codage informatique et la paramétrisation sont assez compliqués du fait des paramètres temporels⁷. De plus ces modèles dépendent de toute une courbe de valeur à

⁷ Le projet d'étude du groupe de travail ISFA 2007 : DUVEAU, IONESCU, JACOB, SIMONIN, « *Modèle de capital économique pour les sociétés d'assurance élaboré par l'agence de notation Fitch : PRISM* » propose de considérer ces paramètres constants par morceau afin de les discrétiser puis de les caler au mieux à la courbe des taux.

l'origine : la courbe des taux instantanés forward difficilement observable sur le marché, alors que les modèles classiques de VASICEK et CIR nécessitent seulement de connaître le taux instantané.

Les modèles de HO et LEE et de HULL et WHITE sont les modèles les plus utilisés dans la classe d'HJM car ils sont les plus simples d'implémentation. Il existe d'autres modèles, dans cette classe, qui sont plus proches du modèle de taux idéal. Certains sont des modèles multifactoriels afin de mieux rendre compte des problématiques de corrélation entre les taux selon différentes maturités.

En effet, la banque de France publie en 1998 la matrice de corrélation suivante entre les taux de différentes maturités :

	1M	3M	6M	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8A	9A	10A
1M	1												
3M	0.992	1											
6M	0.775	0.775	1										
1A	0.354	0.300	0.637	1									
2A	0.214	0.165	0.420	0.901	1								
3A	0.278	0.246	0.184	0.790	0.946	1							
4A	0.26	0.225	0.444	0.754	0.913	0.983	1						
5A	0.224	0.179	0.381	0.737	0.879	0.935	0.981	1					
6A	0.216	0.168	0.352	0.704	0.837	0.892	0.953	0.991	1				
7A	0.228	0.182	0.350	0.661	0.792	0.859	0.924	0.969	0.991	1			
8A	0.241	0.199	0.351	0.614	0.745	0.826	0.892	0.936	0.968	0.992	1		
9A	0.238	0.198	0.339	0.580	0.715	0.798	0.866	0.913	0.950	0.981	0.996	1	
10A	0.202	0.158	0.296	0.576	0.705	0.779	0.856	0.915	0.952	0.976	0.985	0.990	1

Figure 2 : matrice de corrélation des taux selon leur maturité publiée par la banque de France

On constate que les taux, selon différentes maturités, sont tous positivement corrélés, mais cette corrélation décroît avec l'écart de maturité. On peut remarquer également des zones de très fortes corrélations, notamment entre taux courts et entre taux longs.

1.1.2.2. Modèles multifactoriels

Présentation du modèle de LONGSTAFF & SCHWARTZ :

Le modèle de LONGSTAFF et SCHWARTZ est un modèle multifactoriel dans le sens où il modélise le taux long et le taux court selon deux équations corrélées. Ces équations sont dérivées du modèle de Cox, Ingersoll Ross.

$$dx_t = a(b - x_t)dt + s\sqrt{x_t}dW_t^1$$

$$dy_t = \alpha(\beta - y_t)dt + \sigma\sqrt{y_t}dW_t^2$$

Avec W_t^1 et W_t^2 corrélés

1.2 Paramétrisation

L'estimation des paramètres peut s'avérer délicate car elle peut être à l'origine d'un biais. Plusieurs problèmes peuvent conduire à privilégier une méthode de paramétrisation à une autre :

- Le processus n'admet pas de discrétisation exacte. Il est alors impossible d'estimer les paramètres du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance.
- La variable modélisée n'est pas toujours directement observable. Il est alors plus difficile de caler le modèle. C'est notamment le cas pour les différents modèles présentés dans le paragraphe précédent : en effet si à partir de la courbe des taux spots, plusieurs produits de taux standards sont facilement calculables (comme le taux zéro-coupon), le taux instantané et la courbe des taux instantanés forward ne sont pas directement observables sur le marché.

Plusieurs méthodes peuvent donc être utilisées pour l'estimation des paramètres, parmi lesquelles on trouve :

- La méthode d'estimation par maximum de vraisemblance : mais la plupart du temps cette estimation entraîne un biais qui peut être fort gênant lorsque, comme pour nos modèles, les paramètres ont une interprétation. De plus, elle ne peut être utilisée lorsque le processus ne dispose pas de discrétisation exacte car alors bien souvent la densité n'est exprimée que de façon approximative, ce qui entraînerait là encore un biais dans l'estimation. C'est pour cela que nous ne développerons pas cette méthode.
- La méthode d'estimation par ACP qui étudie quels facteurs expliquent le plus la courbe des taux. C'est la plus courante et la plus naturelle pour l'estimation des paramètres de NELSON-SIEGEL. Nous ne développerons pas non plus cette méthode dans l'estimation des paramètres des modèles de VASICEK et CIR étudiés par la suite.
- La méthode d'estimation par régression lorsque le processus modélisé, ou son approximation, peut être associée à une série temporelle. Bien que cette méthode soit évoquée dans la suite, elle ne sera pas retenue pour notre modélisation.
- La méthode d'estimation par « adéquation », celle que nous utiliserons par la suite. L'idée est de caler les paramètres de notre modèle à une courbe ou des données facilement observables sur le marché et dont l'expression analytique peut être déterminée à partir du modèle. Nous nous baserons sur les cours des obligations de notre portefeuille.

Dans ce mémoire nous nous sommes contentés d'étudier les paramétrisations des modèles de VASICEK et CIR.

Méthode d'estimation par régression :

Commençons par le modèle de VASICEK, sa discrétisation⁸ exacte s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{t+\delta} &= \tilde{r}_t \exp(-a\delta) + b(1 - \exp(-a\delta)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a\delta)}{2a}} \varepsilon \\ \Rightarrow \tilde{r}_{t+1} &= \beta_2 \tilde{r}_t + \beta_1 + \beta_0 \varepsilon_t\end{aligned}$$

⁸ L'annexe 2.2 montre les étapes de la discrétisation.

Où ε_t représente un bruit blanc.

$$\beta_2 = \exp(-a)$$

$$\beta_1 = b(1 - \exp(-a))$$

$$\beta_0 = \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a)}{2a}}$$

On reconnaît donc un processus autorégressif d'ordre 1, AR(1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a} = -\ln(\hat{\beta}_2) \\ \hat{b} = \frac{\hat{\beta}_1}{1 - \hat{\beta}_2} \\ \hat{\sigma} = \hat{\beta}_0 \sqrt{\frac{2 \ln(\hat{\beta}_2)}{\hat{\beta}_2^2 - 1}} \end{array} \right.$$

Dans le cas du modèle de VASICEK, les estimateurs obtenus à l'aide de la régression coïncident avec les estimateurs du maximum de vraisemblance et les estimateurs des moindres carrés.

Pour le modèle de CIR, la discrétisation approximative du modèle est :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta t + \sigma \sqrt{\tilde{r}_t} \delta t \times \varepsilon$$

En divisant par $\sqrt{r_t}$ on remarque :

$$\frac{r_{t+1}}{\sqrt{r_t}} = ab \frac{1}{\sqrt{r_t}} + (1-a) \frac{r_t}{\sqrt{r_t}} + \sigma \times \varepsilon$$

Donc l'estimation peut se faire également par régression linéaire.

Méthode d'estimation par adéquation :

C'est la méthode la plus utilisée par les praticiens. Elle consiste à ajuster les formules analytiques des prix des obligations exprimées à partir de la dynamique du taux instantané, sur les cours des obligations du marché, le plus souvent à l'aide de la méthode des moindres carrés.

En effet, à partir de nos modèles, nous pouvons calculer les prix et taux zéro-coupons⁹ :

Notons $P(t, \tau, r_t)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon de maturité résiduelle $\tau = T - t$. De même nous noterons $R(t, \tau, r_t)$ le taux zéro-coupon correspondant.

⁹ Tous les calculs relatifs à la modélisation des taux d'intérêt sont démontrés dans l'annexe 2.

Pour le modèle de VASICEK :

$$P(t, \tau, r_t) = \exp \left[\frac{1 - \exp(-a\tau)}{a} (R_\infty - r_t) - \tau R_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - \exp(-a\tau))^2 \right]$$

$$R(t, \tau, r_t) = R_\infty - \frac{1 - \exp(-a\tau)}{a\tau} (R_\infty - r_t) + \frac{\sigma^2}{4a^3\tau} (1 - \exp(-a\tau))^2$$

$$\text{Où } R_\infty = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Pour le modèle de CIR :

$$P(t, \tau, r_t) = \left[\frac{2g \exp\left(\frac{(a + \lambda\sigma + g)\tau}{2}\right)}{(a + \lambda\sigma + g)(\exp(g\tau) - 1) + 2g} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \exp \left[\frac{-2(\exp(g\tau) - 1)}{(a + \lambda\sigma + g)(\exp(g\tau) - 1) + 2g} r_t \right]$$

$$R(t, \tau, r_t) = \frac{2(\exp(g\tau) - 1) \times r_t}{(a + \lambda\sigma + g)(\exp(g\tau) - 1) + 2g} - \frac{2ab}{\sigma^2\tau} \ln \left(\frac{2g \exp\left(\frac{(a + \lambda\sigma + g)\tau}{2}\right)}{(a + \lambda\sigma + g)(\exp(g\tau) - 1) + 2g} \right)$$

$$\text{Où } g = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

Le prix estimé, en $t = 0$, d'une obligation quelconque i (de nominal N_i de coupon C_i et de maturité T_i) est la somme des prix d'obligations zéro-coupons d'échéances successives

$$\text{jusqu'à } T_i : \hat{B}_i(N_i, C_i, T_i) = \sum_{\tau} C_i P(0, \tau, r_0) + N_i P(0, T_i, r_0)$$

Application pratique :

Nous cherchons dans la suite de ce paragraphe à paramétrer le modèle de CIR sur la base d'une paramétrisation par adéquation au portefeuille d'obligations SHAM.

Pour la paramétrisation nous chercherons donc à caler les prix des obligations estimés, grâce aux formules analytiques précédentes, aux prix du marché des 58 obligations¹⁰ composant notre portefeuille. Par une méthode des moindres carrés, on cherche donc à

$$\text{minimiser } h(a, b, \lambda, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{58} (P_i - \hat{P}_i)^2$$

¹⁰ Cette paramétrisation n'est faite que sur les obligations à taux fixes du portefeuille SHAM bien que la modélisation s'appliquera à l'ensemble du portefeuille d'obligations à l'aide de ces paramètres (les coupons à taux variables sont cristallisés au jour du calcul et donc considérés comme fixes).

Voici les résultats obtenus pour le modèle de CIR à l'aide du solveur d'Excel :

$$\begin{cases} \hat{a} = 7.18 \\ \hat{b} = 0.90 \\ \hat{\lambda} = 0.51 \\ \sigma^2 = 8.16 \\ h(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}, \hat{\sigma}^2) = 394.68 \end{cases}$$

Compte tenu de l'incohérence et de la volatilité des résultats donnés par l'application immédiate du solveur d'Excel, nous avons décidé de renforcer notre paramétrisation en ne fixant initialement certains paramètres à partir de la connaissance que l'on a de notre portefeuille : par exemple, la volatilité σ peut être prise égale à l'écart-type empirique des taux de notre portefeuille ; soit $\sigma^2 = 0,0051$. La paramétrisation à l'aide du solveur Excel donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} \hat{a} = 1.5422 \\ \hat{b} = 0.0580 \\ \hat{\lambda} = 1.4123 \\ \hat{\sigma}^2 = 0.0051 \\ h(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}, \hat{\sigma}^2) = 404.26 \end{cases}$$

Ces résultats sont donc plus cohérents notamment pour \hat{b} , qui est le paramètre le plus intuitivement appréciable puisque qu'il correspond à la moyenne au long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané.

L'étude de la courbe des taux d'intérêt nous permettra de modéliser deux classes d'actifs.

- Les obligations : nous modéliserons la classe obligation par le prix et le taux long zéro-coupon 10 ans. En effet, la duration moyenne de notre portefeuille d'obligation est proche de 10 ans.
- Le monétaire : cette classe d'actif représente notre trésorerie placée au taux court, nous utiliserons le taux zéro-coupon 1 mois

Choix du modèle :

Le modèle retenu pour la représentation de nos deux classes d'actifs, classe obligation et classe monétaire, est le modèle de CIR pour sa simplicité d'implémentation et sa cohérence dans les résultats de la paramétrisation (lorsque la volatilité est fixée *a priori*) et les résultats de la simulation¹¹. Les paramètres retenus étant ceux présentés ci-dessus. De plus nous considérons que des coupons à taux fixe tombent en milieu d'année et sont réinvestis dans la classe obligations. Ce taux correspond à la moyenne des taux des obligations SHAM, il est appliqué à la valeur de cette obligation en début de période.

¹¹ L'annexe 5 présente une synthèse des résultats de l'application des modèles choisis pour les cinq classes d'actifs à la réalisation de 1 000 simulations. Ces résultats ont été validés par le service financier de SHAM.

CHAPITRE 2 : Modélisation des actions

Aujourd'hui le modèle de référence pour la modélisation du cours d'une action reste le modèle de BLACK et SCHOLES (1973). Il a l'avantage d'être un modèle simple, facile à calibrer et à estimer en considérant que la trajectoire des rendements des prix des actifs financiers décrit un mouvement brownien.

Mais l'utilisation de ce modèle implique des hypothèses assez restrictives, contredites par les observations empiriques et qui sont surtout de plus en plus critiquées.

En effet, la réalité montre que bien souvent les queues de distribution des rendements empiriques sont plus épaisses que celles d'une loi log-normale. Cet écart est notamment lié aux éléments suivants non pris en compte par ce modèle :

- Le cours d'une action n'est pas forcément continu : les cours des actions peuvent présenter des discontinuités.
- La volatilité n'est pas réellement constante

Plusieurs autres modèles ont été développés pour mieux rendre compte de la réalité du marché :

- Des modèles à sauts qui permettent d'intégrer des éventuelles discontinuités des cours et donnent une queue de distribution plus lourde que le modèle de BLACK et SCHOLES, (par exemple le modèle de MERTON (1976) ou le modèle de KOU (2002) qui introduisent un processus de POISSON).

- D'autres modèles utilisent une volatilité stochastique (le modèle de HULL et WHITE (1987))

Malgré tout, le modèle de BLACK et SCHOLES reste le modèle le plus utilisé et le plus étudié.

2.1 Présentation des modèles

Dans cette section, nous comparerons deux modèles : le modèle de référence de BLACK et SCHOLES et le modèle à sauts de MERTON, avant d'ouvrir la voie à un troisième modèle : le modèle de KOU.

2.1.1. Le modèle de BLACK et SCHOLES

Ce modèle repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS), en supposant que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique (ou processus de WIENER généralisé)

Cette équation (EDS) s'écrit pour tout instant $t > 0$:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

Où $S(t)$ est le prix de l'action à la date t ,
 μ et σ sont des constantes,
 W est un processus de WIENER généralisé.

En utilisant le lemme d'ITÔ et la condition à l'origine $S(0) = S_0$, la solution de cette équation s'écrit :

$$S(t) = S_0 \times \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right]$$

Puisque le processus de WIENER suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{t})$ dans ce modèle le cours d'une action suit une loi log-normale $\mathcal{LN}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\sqrt{t}\right)$.

Pour calibrer les paramètres μ et σ nous utilisons l'historique du cours d'une action. En effet, d'après ce modèle, le rendement « logarithmique » journalier (en considérant le jour comme l'unité de temps) a pour moyenne $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et pour variance σ^2 :

$$R(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W(1)$$

Ce modèle est donc simple d'utilisation car ces paramètres se calculent très facilement à partir de l'historique du cours d'une action.

La paramétrisation par la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance donnent le même résultat :

$$\begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} = \bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T R(t) & \text{Moyenne empirique de l'historique} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^2 & \text{Variance empirique de l'historique} \end{cases}$$

Enfin ce modèle est simple à simuler car il suffit de simuler une loi normale (ou log-normale).

2.1.2. Le modèle de MERTON

Comme nous l'avons expliqué au début de ce paragraphe, le modèle de BLACK et SCHOLLES a l'inconvénient de ne pas représenter une queue de distribution assez lourde par rapport à la réalité et de ne pas tenir compte de la possibilité de sauts d'un cours boursier:

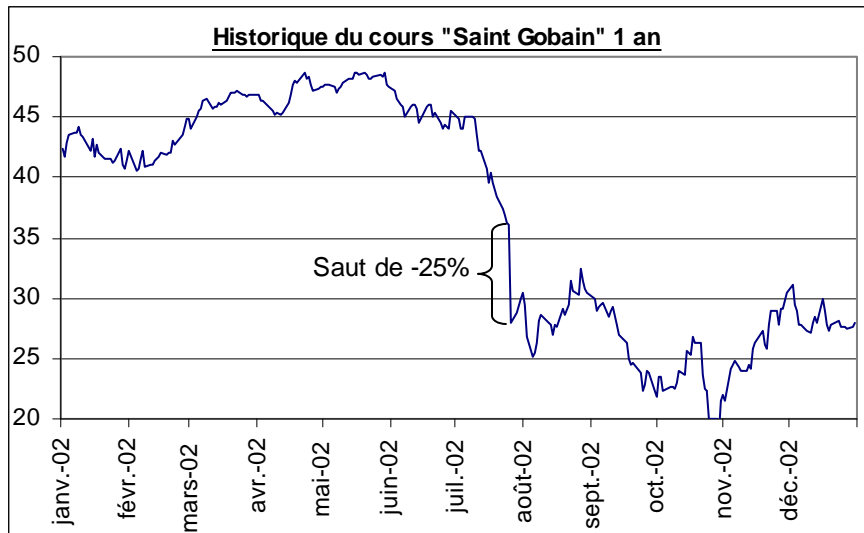


Figure 3 : Exemple de discontinuité dans le cours d'une action.

Le modèle de MERTON introduit un saut via un processus de POISSON, dans la solution du modèle de BLACK et SCHOLLES :

$$S(t) = S_0 \times \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} U(k) \right]$$

Où : N est un processus de POISSON d'intensité λ .

U est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, \Omega)$.

Les processus W , N et U sont mutuellement indépendants,

Par convention on aura $\sum_{k=1}^{N(t)} U(k) = 0$ si $N(t) = 0$.

Le rendement du cours s'écrit alors :

$$R(t) = \ln \left(\frac{S(t)}{S(t-1)} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma W(1) + \sum_{k=1}^{N(1)} U(k)$$

Dans ce modèle, le nombre de sauts suit un processus de POISSON homogène d'intensité λ , et les discontinuités sont ici modélisées par des lois normales centrées de variance Ω^2 . C'est à dire que les sauts sont représentés symétriques et de moyenne nulle (le cours de l'action peut donc avoir aussi bien une soudaine hausse qu'une soudaine baisse avec même probabilité et même intensité).

Bien que le nombre de paramètres soit plus important que pour le modèle de BLACK et SCHOLLES (quatre paramètres $(\mu, \sigma, \lambda, \Omega)$ au lieu de deux), la paramétrisation reste assez simple du fait que notre modèle est une somme de lois normales indépendantes.

Deux méthodes sont généralement retenues pour cette paramétrisation: la méthode du maximum de vraisemblance¹² et la méthode des moments (avec une approximation si nécessaire par la méthode des moindres carrés).

L'expression de la densité¹³ du rendement de ce modèle s'écrit :

$$f(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 + n\Omega^2}} \exp \left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)} \right) \right]$$

De cette densité, on peut déduire les moments centrés. Le modèle étant symétrique, les moments centrés d'ordre impair sont nuls, et les moments centrés d'ordre pair s'écrivent :

$$E[(R - E(R))^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^k$$

Pour paramétrer le modèle on utilise donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T R(t) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^2 = E[(R - E(R))^{2 \times 1}] = \sigma^2 + \lambda \Omega^2 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^4 = E[(R - E(R))^{2 \times 2}] = 3e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^2 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T (R(t) - \bar{R})^6 = E[(R - E(R))^{2 \times 3}] = 15e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^3 \end{cases}$$

Où T est le nombre de données observées (si on note t=0 la date de la première données alors t=T représente la date d'aujourd'hui).

2.1.3. Présentation d'un autre modèle : le modèle de KOU

En introduisant des discontinuités dans la modélisation du cours de l'action, le modèle de MERTON correspond mieux à la réalité de marché que le modèle de BLACK et SHOLES. Mais il utilise encore des hypothèses assez restrictives notamment en considérant que les soudains sauts du cours sont symétriques de moyenne nulle. On peut donc pour améliorer ce

¹² Cette méthode utilise un programme d'optimisation du fait que la fonction de vraisemblance s'exprime comme un somme infinie.

¹³ Tous les détails des calculs sont donnés dans l'annexe 3

modèle en ajoutant une moyenne η non nulle à la modélisation des sauts $\mathcal{N}(\eta, \Omega)$, ou encore utiliser une autre loi dissymétrique.

Il existe d'autres modèles plus proches des observations empiriques, comme par exemple le modèle de RAMEZANI et ZENG (1998), mais l'implémentation est plus difficile.

Un modèle assez semblable de celui de MERTON est le modèle de KOU. Il utilise des lois doubles exponentielles¹⁴ pour la modélisation de la discontinuité des sauts.

Reprenons l'équation du rendement logarithmique du cours :

$$R(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W(1) + \sum_{k=1}^{N(1)} U(k)$$

Où : $W(1)$ suit une loi normale centrée réduite.

$N(1)$ suit une loi de POISSON de paramètre λ .

$U(k) \forall k \in \mathbb{N}$ sont indépendantes et identiquement distribuées et suivent une loi double exponentielle de paramètres (α_1, α_2, p) .

Les processus W , N et U sont mutuellement indépendants.

C'est la même équation que pour le modèle de MERTON : somme d'un processus de WIENER avec un processus de POISSON composé mais avec une loi double exponentielle.

Ce modèle permet d'avoir des queues de distributions plus épaisses et d'introduire une dissymétrie dans le processus à saut.

Mais le nombre de paramètres est bien plus important (6 paramètres $\mu, \sigma^2, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, p$) et même si comme l'étude du modèle de MERTON nous posons des hypothèses simplificatrices, telles que des sauts centrés et symétriques ($\alpha_1 = \alpha_2$ et $p = 1 - p = \frac{1}{2}$) ou la fixation d'un paramètre au préalable (comme la variance des discontinuités), il faut calculer les moments centrés d'ordre 6 d'une somme de variables aléatoires n'ayant pas la même loi.

Une méthode serait de calculer les dérivées successives de la fonction génératrice des moments. En effet, Le rendement de notre modèle de KOU est la somme de variables aléatoires indépendantes d'une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$ et d'une loi POISSON d'intensité λ , composée avec une loi double exponentielle. Donc :

$$M_{Kou}(t) = M_N(t) \times G_P(M_{DE}(t))$$

¹⁴ L'annexe 5 rappelle la définition et les propriétés de la loi double exponentielle, ainsi que le début de l'étude de ce modèle.

Où $M_{Kou}(t)$ est la fonction génératrice des moments de notre modèle,
 $M_N(t)$ est la fonction génératrice des moments de la loi normale,
 $M_{DE}(t)$ est la fonction génératrice des moments d'un double exponentielle,
 $G_p(t)$ est la fonction génératrice des probabilités d'une loi de POISSON.

Choix du modèle :

Nous ne mènerons pas l'étude de ce modèle plus loin. En effet, nous démontrerons que le modèle de MERTON est une assez bonne approximation de notre portefeuille d'actions. De plus l'utilisation d'un modèle nécessitant une plus importante paramétrisation afin de mieux décrire les observations empiriques entraîne une plus forte approximation de la réalité¹⁵.

La modélisation des dividendes des actions :

Nous avons modélisé les dividendes comme un paramètre du cours modélisé de la classe action. En effet, nous ferons l'hypothèse que les revenus dividendes sont versés en moyenne en milieu d'année et correspondent à un certains pourcentage $x\%$ de la valeur marché de notre portefeuille d'action. Ce pourcentage est fixé à l'aide de l'historique (moyenne de la part que les dividendes représentent par rapport à la valeur marché des actions), il est perçu en milieu d'année et est directement réinvesti dans cette classe d'actif.

¹⁵Pour la paramétrisation de ce modèle, nous conseillons de lire TUZOV N. (2006)

2.2 Paramétrisation

Testons d'abord nos deux modèles sur des actions.

Application au cours Adidas Groupe :

Les graphiques suivants montrent le cours du prix de l'action et les rendements « logarithmiques » journaliers de la compagnie *Adidas AG* (un des leaders mondiaux de la conception, fabrication et commercialisation d'équipements de sport).

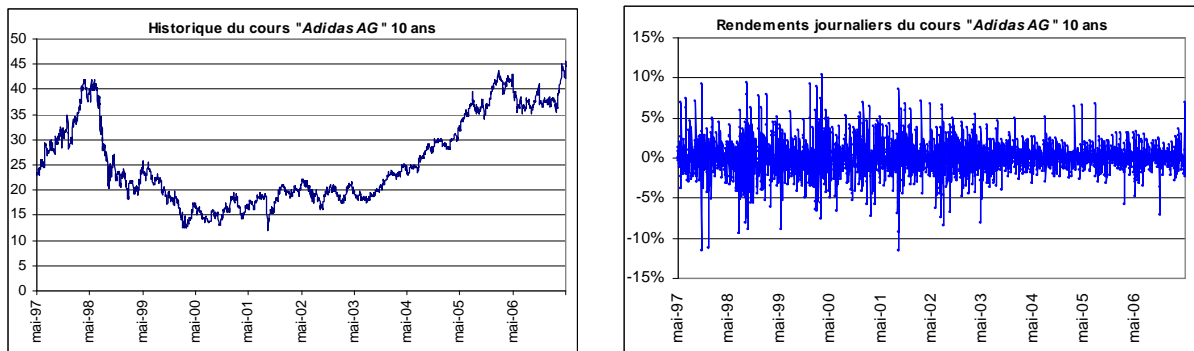


Figure 4 : Cours du prix et rendement « logarithmique » journalier de l'action Adidas AG et

La moyenne des rendements journaliers est $\bar{R} = 0.025\%$ (soit un rendement réel¹⁶ annuel d'environ 6.8% en considérant qu'il y a 260 jours ouvrés dans l'année). Et la variance est $\bar{S} = 0.0427\%$.

- La paramétrisation selon le modèle de BLACK et SHOLES donne les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \sigma^2 = 0.0427\% \\ \mu = 0.0468\% \end{cases}$$

- Une première paramétrisation selon le modèle de MERTON, résolvant selon la méthode des moments le système d'équations précédent, donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} \sigma^2 = 0.0013\% \\ \mu = 0.0261\% \\ \Omega^2 = 0.0541\% \\ \lambda = 76.500\% \end{cases}$$

¹⁶ Ici on calcule le rendement réel : $\tilde{R}(t+1) = \frac{S(t+1) - S(t)}{S(t)}$ donc le rendement réel annuel moyen

$\tilde{R} = \exp(260 \times \bar{R}) - 1$. Mais l'espérance logarithmique entraîne un biais sous-estimant le rendement réel.

$\tilde{R} = 12.9\%$ si on le calcule directement à partir de l'historique du cours

On peut interpréter alors ces résultats : la tendance continue du rendement du cours de cette action a une très faible volatilité (σ^2 faible) autour de sa moyenne mais ce cours est très fortement perturbé par des discontinuités fréquentes (λ élevé¹⁷) à faible volatilité (Ω^2 faible). Donc cette première paramétrisation interprète toutes les trajectoires brutes du cours comme des sauts.

Pourtant l'ajout du processus à sauts a pour but initial de traduire les fortes discontinuités à probabilité faible.

Une solution serait alors, comme pour la paramétrisation des modèles de taux, de fixer la volatilité des sauts et de recalibrer les autres paramètres en fonction de cette variable. Cette solution a aussi l'avantage de simplifier le système car le moment centré d'ordre six du rendement n'est plus nécessaire.

Regardons les conséquences sur les autres paramètres d'un recalibrage en fixant Ω^2 selon plusieurs valeurs, notamment sur les paramètres σ^2 et λ qui représente la volatilité de la tendance continue du cours et la probabilité de survenance d'un saut.

Plus on fixe Ω^2 grand, plus les paramètres de la tendance continue du cours (μ, σ) sont proches des paramètres du modèle de BLACK et SCHOLÉS.

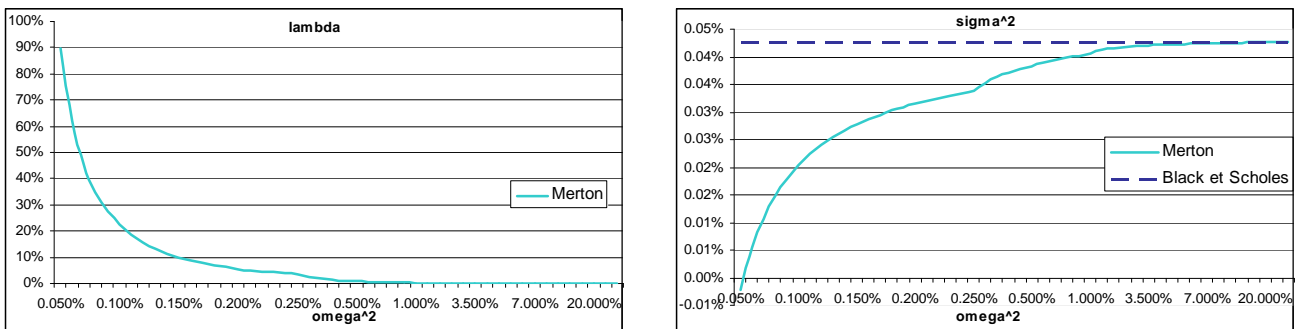


Figure 5 : paramétrisation de σ^2 et λ en fonction de Ω^2 fixé¹⁸

On peut remarquer que plus on fixe Ω^2 grand, plus les sauts ont une faible probabilité de survenance et plus le modèle de MERTON est assimilable au modèle de BLACK et SCHOLÉS. La question se pose alors de quelle volatilité choisir pour ces discontinuités éventuelles.

¹⁷ λ représente l'intensité du nombre de sauts. Donc pour une période dt , la probabilité d'avoir au moins un saut durant cette période est $P(N(dt) \geq 1) = \lambda dt + o(dt)$. Donc pendant une période de 1 unité de temps, le paramètre λ peut s'interpréter comme la probabilité de saut durant cette période dans le cours de l'action.

¹⁸ Remarque : l'axe des abscisses n'est pas à l'échelle

Application au cours de la compagnie Saint Gobain :

Nous avons effectué la même étude sur le cours du prix de l'action de la compagnie *Saint Gobain* (fabrication et commercialisation de matériaux de construction) a connu une forte chute du prix de l'action après l'annonce de la vente d'une grande partie de ses stocks.

Voici les graphiques du cours du prix de l'action et des rendements journaliers :

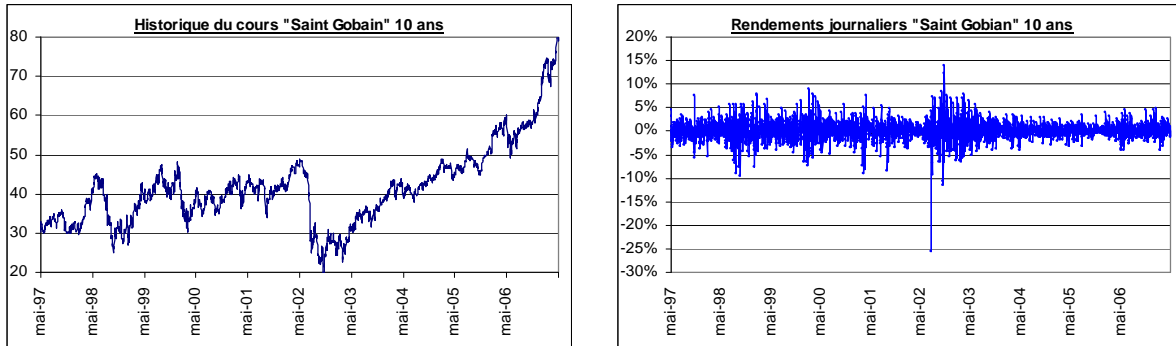


Figure 6 : Cours et rendements « logarithmiques » journaliers de l'action de la compagnie Saint Gobain

La moyenne des rendements journaliers est $\bar{R} = 0.0371\%$ (soit un rendement annuel de plus de 10% en considérant qu'il y a 252 jours ouvrés dans l'année). Et la variance est $\bar{S} = 0.0451\%$.

- La paramétrisation selon le modèle de BLACK et SCHOLES donne les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \sigma^2 = 0.0451\% \\ \mu = 0.0597\% \end{cases}$$

- La paramétrisation selon le modèle de MERTON donne :

$$\begin{cases} \sigma^2 = 0.0272\% \\ \mu = 0.0507\% \\ \Omega^2 = 0.4222\% \\ \lambda = 4.2509\% \end{cases}$$

Regardons la paramétrisation selon Ω^2 fixé :

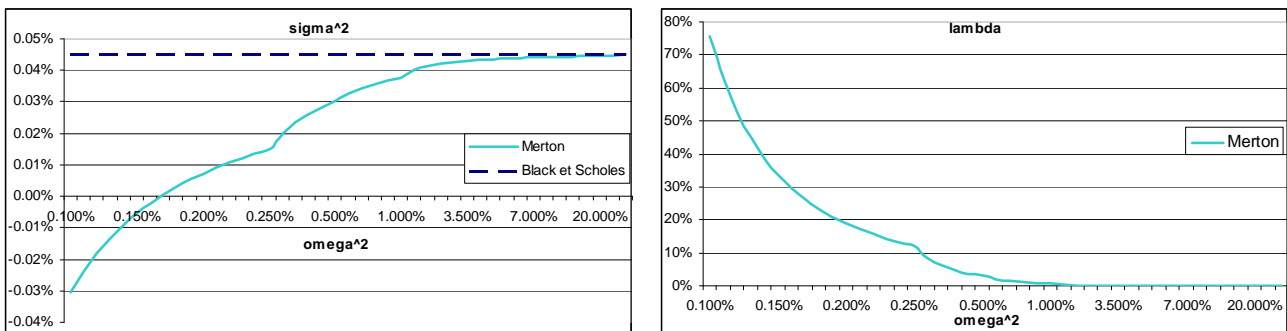


Figure 7 : paramétrisation de σ^2 et λ en fonction de Ω^2 fixé

On peut remarquer que certaines valeurs de Ω^2 donnent des résultats aberrants comme $\sigma^2 \leq 0$ pour $\Omega^2 \leq 0.16\%$. Mais aussi que l'intervention de la discontinuité dans notre historique de cours implique une probabilité estimée (λ) de survenance de saut dix fois supérieure à celle du cours de *Adidas Groupe* dans l'estimation des paramètres.

Application au portefeuille d'actions SHAM :

Pour modéliser l'ensemble de la classe d'actif "actions", le portefeuille SHAM est assimilé à une seule action. Le cours de cette action fictive est donc une fonction du cours de toutes les actions qui composent notre portefeuille à une date donnée (jour de l'inventaire), pondéré du prix à chaque date et du nombre de chaque action.

Se pose alors le problème d'actions qui composent notre portefeuille et qui ont été nouvellement créées ; celles qui ont donc moins de 10 ans, durée de notre historique.

Plusieurs méthodes ont été testées pour intégrer cette action nouvelle à notre action fictive : calculer le cours moyen, ramener les cours à leurs valeurs initiales ou à leurs valeurs à la date de calcul... Nous exploitons celles qui ne dénaturent pas les calculs des rendements à la date de création de cette nouvelle action. Ces méthodes donnent des résultats assez différents :

- Méthode M_1

Le cours de notre action fictive est la somme des cours de toutes les actions (pondérés par leur nombre dans le portefeuille). Les rendements journaliers de ce cours sont ensuite calculés de la manière suivante :

$$\text{A la date } t \text{ de création de la nouvelle action } j : \quad R(t) = \ln \left(\frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N n_k S_k(t)}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N n_k S_k(t-1)} \right)$$

Où : N est le nombre total d'actions qui composent notre portefeuille

$S_k(t)$ est prix du cours de l'action k à l'instant t

et n_k est le nombre d'actions k dans notre portefeuille.

$$\text{A la date } t+1 \text{ le rendement devient :} \quad R(t+1) = \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^N n_k S_k(t+1)}{\sum_{k=1}^N n_k S_k(t)} \right)$$

Ainsi l'ajout de cette action nouvelle ne dénature pas le calcul des rendements.

- Méthode M_2

La pondération (prix du cours à la date t et nombre d'actions) est appliquée directement sur les rendements de chaque action.

Le rendement de l'action fictive à la date t et $t + 1$ de création de la nouvelle action j est donc :

$$R(t) = \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N n_k S_k(t) R_k(t)}{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N n_k S_k(t)} \quad R(t+1) = \frac{\sum_{k=1}^N n_k S_k(t+1) R_k(t+1)}{\sum_{k=1}^N n_k S_k(t+1)}$$

Où : N est le nombre total d'actions qui composent notre portefeuille

$S_k(t)$ est prix du cours de l'action k à l'instant t

n_k est le nombre d'actions k dans notre portefeuille

et $R_k(t)$ est le rendement de l'action k à l'instant t .

- Méthode M_3

La méthode utilisée ici est celle du calcul des indices d'actions (CAC40, SBF120,...) :

$$I(t) = 1000 \times \frac{CB(t)}{CBA(t)} = 1000 \times \frac{\sum_{k=1}^N n_k S_k(t)}{K(t) \times CBA(t-1)}$$

On a toujours :

N , le nombre total d'actions qui composent notre portefeuille

$S_k(t)$, le prix du cours de l'action k à l'instant t

n_k , le nombre d'actions k dans notre portefeuille.

Et : $CB(t)$ est la capitalisation boursière de notre portefeuille, c'est à dire sa valeur à la date t (en fixant sa composition à aujourd'hui).

$CBA(t)$ est la capitalisation boursière de base ajustée, c'est à dire la valeur à l'origine (première date de notre historique de cours) de notre portefeuille d'action de telle sorte que $CBA(0) = CB(0)$ mais ajustée par le coefficient $K(t)$ à chaque création d'action nouvelle.

$K(t) = 1$ si pas de création d'action nouvelle entre $t-1$ et t

$K(t) = \left(1 + \frac{n_w S_w(t)}{CB(t-1)}\right)$ si création de la nouvelle action w en t

Le rendement logarithmique est ensuite calculé sur cet indice.

Cette méthode équivaut la première, M_1 . Ses résultats ne seront donc pas redétaillés.

– Méthode M_4

Nous allons reconstituer l'historique du portefeuille en simulant le passé des actions n'ayant pas un historique complet.

Nous créons ainsi 1000 portefeuilles de façon indépendante. La paramétrisation se fera sur la moyenne des moments.

Nous paramétrons ensuite selon la moyenne des moments obtenus.

L'inconvénient de cette méthode est qu'il n'y a pas alors de jeu de données pour tester notre modèle.

– **Les résultats de ces quatre méthodes sont les suivants :**

Moyenne des rendements journaliers « logarithmiques » :

$$M_1 \{\bar{R} = 0.0367\% \quad M_2 \{\bar{R} = 0.048\% \quad M_4 \{\bar{R} = 0.0157\%$$

Nous avons également calculé la moyenne annuelle des rendements réels à environ 12.46% pour la première méthode, 16.68% pour la deuxième et 8.53% pour la quatrième.

$$\text{Variance : } M_1 \{\bar{S} = 0.0169\% \quad M_2 \{\bar{S} = 0.0169\% \quad M_4 \{\bar{S} = 0.0173\%$$

Des essais sur d'autres portefeuilles d'action donnent toujours la même variance avec les deux méthodes.

Paramétrisation dans le modèle de BLACK et SCHOLLES :

$$M_1 \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = 0.0169\% \\ \mu = 0.0452\% \end{array} \right. \quad M_2 \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = 0.0210\% \\ \mu = 0.0275\% \end{array} \right. \quad M_4 \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = 0.0200\% \\ \mu = 0.0186\% \end{array} \right.$$

Paramétrisation dans le modèle de MERTON :

$$M_1 \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = -0.0015\% \\ \mu = 0.0063\% \\ \Omega^2 = 0.0231\% \\ \lambda = 97.0873\% \end{array} \right. \quad M_2 \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = -0.0014\% \\ \mu = 0.0163\% \\ \Omega^2 = 0.0233\% \\ \lambda = 95.9016\% \end{array} \right. \quad M_4 \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = -0.0014\% \\ \mu = 0.0079\% \\ \Omega^2 = 0.0214\% \\ \lambda = 99.8352\% \end{array} \right.$$

Ici la première paramétrisation donne des résultats aberrants avec une volatilité de la tendance continue négative, ce qui incite à fixer arbitrairement Ω^2 au préalable.

Pour le reste de nos calculs, nous garderons la méthode M_1

Regardons la paramétrisation en fonction de Ω^2 fixé pour la première méthode :

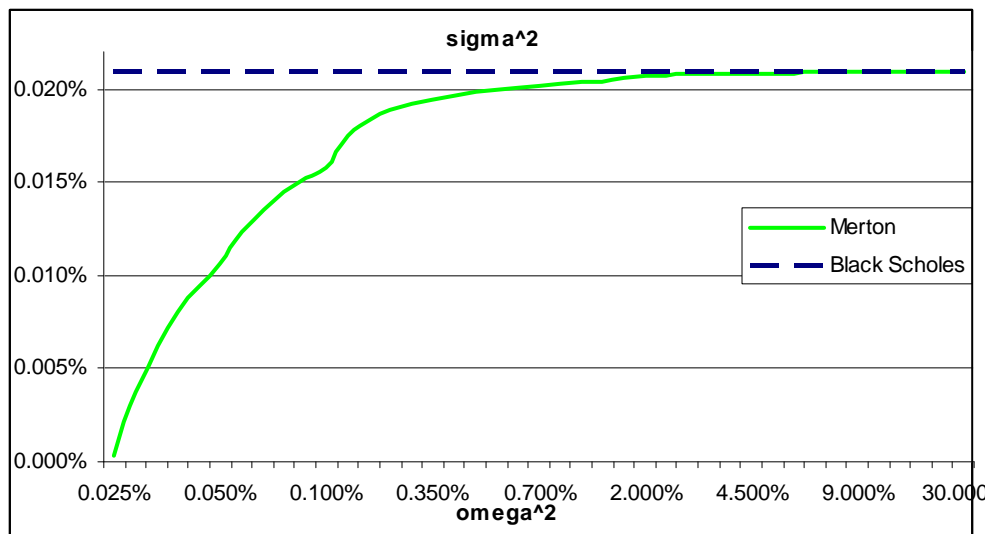


Figure 8 : paramétrisation de σ^2 en fonction de Ω^2 fixé

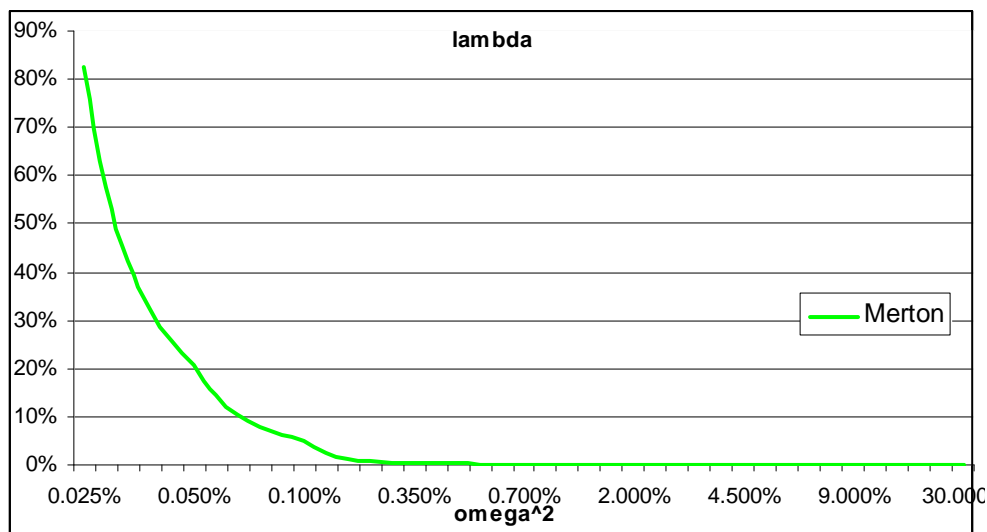


Figure 9 : paramétrisation de λ en fonction de Ω^2 fixé

Nous remarquons la même tendance que pour l'étude des deux précédentes actions ; plus nous fixons Ω^2 petit, plus la probabilité de survenance du saut est grande et plus la tendance continue du cours est à variation faible. Par contre, plus nous fixons Ω^2 grand, plus nous nous rapprochons du modèle de BLACK et SCHOLLES.

Il convient maintenant de déterminer quel est le modèle le mieux adapté à notre portefeuille et de choisir les bons paramètres pour le modèle de MERTON. Pour cela nous réalisons des tests d'adéquation des modèles à notre portefeuille.

2.3 Tests d'adéquation

Il s'agit de vérifier l'adéquation de nos modèles à nos données empiriques. Nous comparerons les données théoriques des deux modèles présentés au paragraphe précédent aux données empiriques représentées par le cours de notre action fictive, à l'aide des fonctions de densité et de répartition.

2.3.1. Test d'adéquation du χ^2

Présentation du test :

Pour effectuer ce test, il convient de diviser nos rendements empiriques en K classes. Notons n_i le nombre de données appartenant à la classe i ($i=1, \dots, K$). Alors $\sum_{i=1}^K n_i = N$ nombre total de données.

Sous l'hypothèse H_0 , notre modèle est en adéquation avec nos données, n_i suit une loi binomiale de $\mathcal{B}(N, p_i)$ où p_i est la probabilité qu'un événement aléatoire suivant notre modèle appartienne à la classe i .

D'après le théorème central limite, $\forall i = 1, \dots, K$, sous H_0 : $\frac{(n_i - Np_i)}{\sqrt{Np_i}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \sqrt{1 - p_i})$

Donc sous H_0 , la statistique $T_N = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$ suit asymptotiquement une loi du χ^2

à $K - r - 1$ degrés de liberté, (où r est le nombre de paramètre dans notre modèle, $r = 2$ dans le modèle de BLACK et SCHOLLES et $r = 4$ dans le modèle de MERTON)

Critère de COCHRAN :

Le critère de COCHRAN(1954) permet d'admettre que si aucune classe n'est vide en espérance ($E[n_i] = N \times p_i \geq 1 \quad \forall i = 1, \dots, K$) et au moins 80% des classes on plus de 5 observations en espérance ($E[n_i] = N \times p_i \geq 5$) alors on accepte l'hypothèse H_0 si on a :

$$T_N \leq \chi_{K-r-1}^2(\alpha).$$

Où $\chi_{K-r-1}^2(\alpha)$ est le quantile à l'ordre α du χ^2 à $K - r - 1$ degrés de liberté α est l'erreur de première espèce du test.

Application à notre action fictive :

Classons d'abord nos rendements en classes à peu près homogènes de telle sorte que la relation du critère de COCHRAN soit toujours vérifiée.

Trions nos rendements en 14 classes :

$$\begin{aligned} &]-\infty, -2\%[\quad]-2\%, -1.2\%[\quad]-1.2\%, -0.8\%[\quad]-0.8\%, -0.6\%[\quad]-0.6\%, -0.4\%[\quad]-0.4\%, -0.2\%[\\ &]-0.2\%, 0\%[\quad]0\%, 0.2\%[\quad]0.2\%, 0.4\%[\quad]0.4\%, 0.6\%[\quad]0.6\%, 0.8\%[\quad]0.8\%, 1.2\%[\quad]1.2\%, 2\%[\quad]2\%, \infty[\end{aligned}$$

Ces classes ont toutes une espérance d'observation supérieure à 5

Nous comparons donc les statistiques T_{BS} et T_M de BLACK et SCHOLES et MERTON au quantile du χ^2 à 11 (14 - 2 - 1) et 9 (14 - 4 - 1) degrés de liberté.

	Selon la méthode M_1 de représentation du portefeuille	Selon la méthode M_2 de représentation du portefeuille	Valeur du quantile du χ^2 correspondant avec $\alpha = 0.95$	Valeur du quantile du χ^2 correspondant avec $\alpha = 0.99$
BLACK et SCHOLES	190.19	191.40	19.68	24.73
MERTON avec $\Omega^2 = 20\%$	189.46	190.67	16.42	21.67
MERTON avec $\Omega^2 = 0,032\%$	18.75	20.00		

Le test appliqué sur plusieurs valeurs de Ω^2 donne les graphiques ci-dessus. On voit que le modèle de MERTON correspond bien mieux aux historiques de cours que le modèle de BLACK et SCHOLES. Et pour $0.0300\% \leq \Omega^2 \leq 0.0350\%$ on accepte l'hypothèse H_0 : le modèle est bien en adéquation avec nos données (à 1% d'erreur de première espèce).

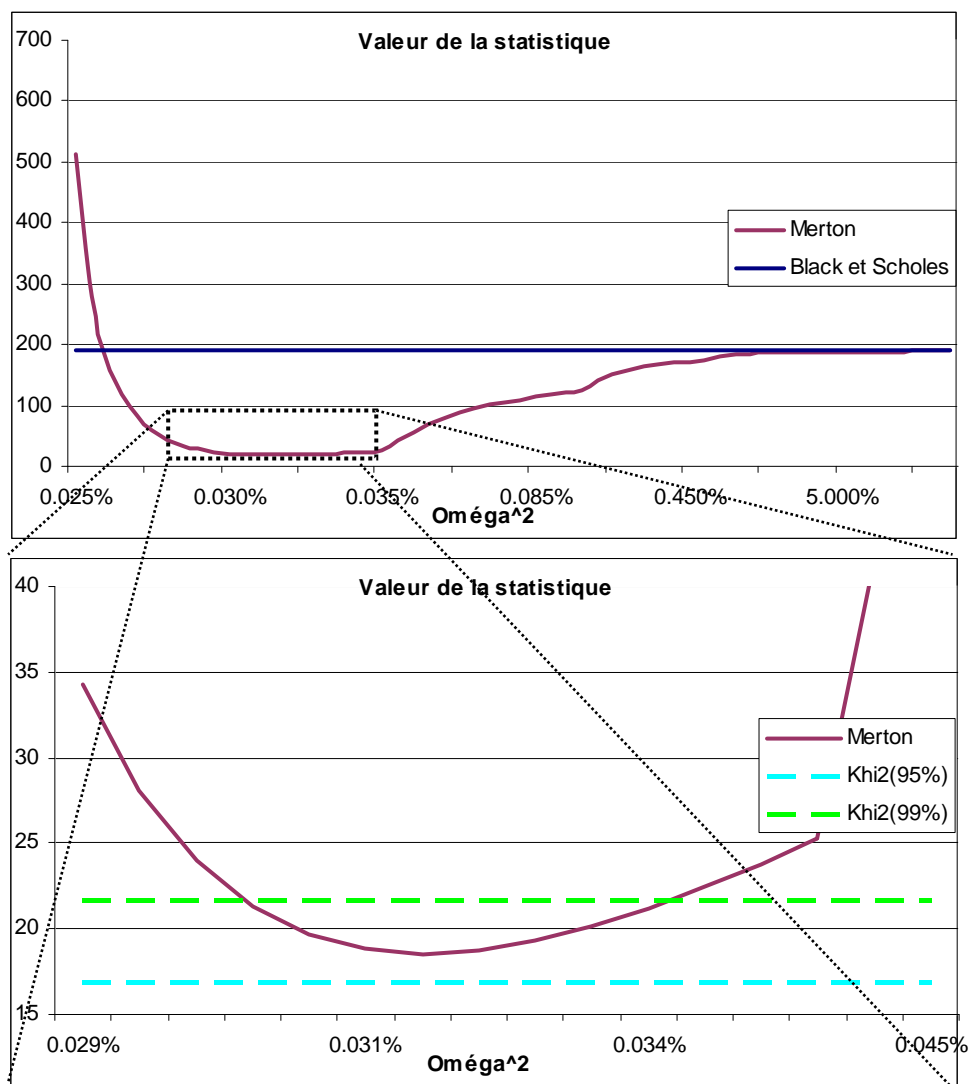


Figure 10 : Statistiques du test d'adéquation du χ^2 selon les deux méthodes de modélisation d'actions

La statistique atteint son minimum en $\Omega^2 = 0.032\%$.

Les tests ont été réalisés de telle sorte que les classes soient à peu près homogènes et que le critère de COCHRAN soit toujours vérifié. Mais alors on peut remarquer que ces tests se concentrent plus sur les données « centrales » que sur les queues de distribution.

En modifiant les classes de telle sorte que les queues de distribution soient mieux prises en compte, on trouve une valeur de la statistique pour le modèle de MERTON plus élevée que la valeur seuil, mais toujours bien inférieure à celle du modèle de BLACK et SCHOLES.

On peut donc conclure de cette étude du test du χ^2 que le modèle de MERTON modélise mieux notre portefeuille que le modèle de BLACK et SCHOLES, mais pas encore assez bien les queues de distributions.

Cette étude de la statistique de test nous permet également de fixer *a priori* notre paramètre de volatilité des sauts. En effet, on choisira par la suite Ω^2 tel qu'on ait la meilleure adéquation possible du modèle à notre portefeuille, c'est à dire telle que la statistique de test soit minimum.

Les graphes suivants montrent la fonction de répartition empirique de notre échantillon ainsi que les fonctions de répartition théoriques du modèle de BLACK et SCHOLES et du modèle de MERTON (avec $\Omega^2 = 0.032\%$) pour la méthode M_1 de constitution de portefeuille :

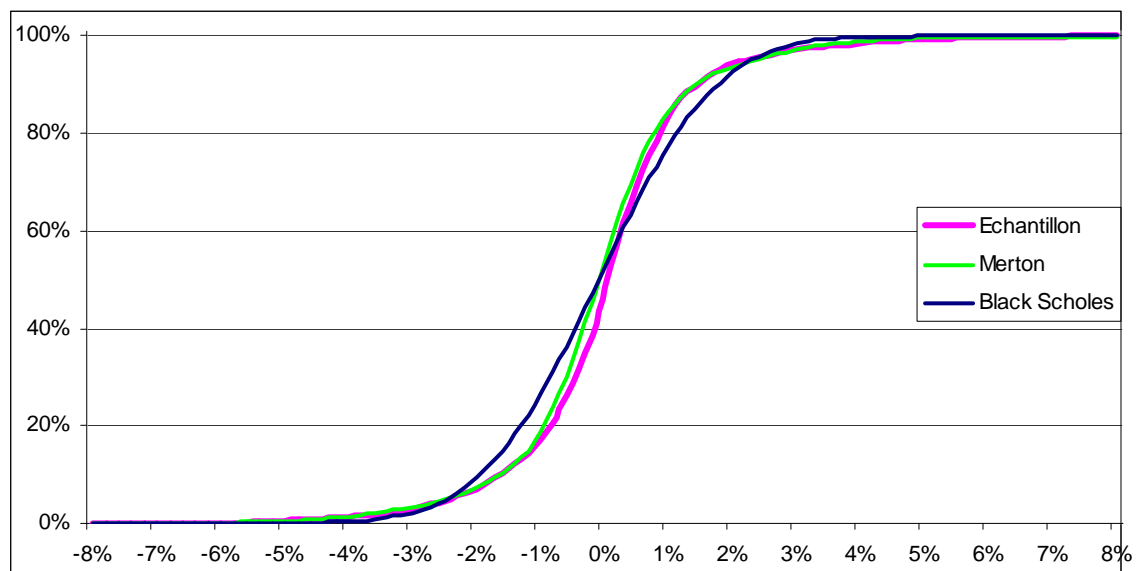


Figure 11 : Fonction de répartition empirique et modélisée du rendement d'action.

Regardons de plus près les queues de distribution :

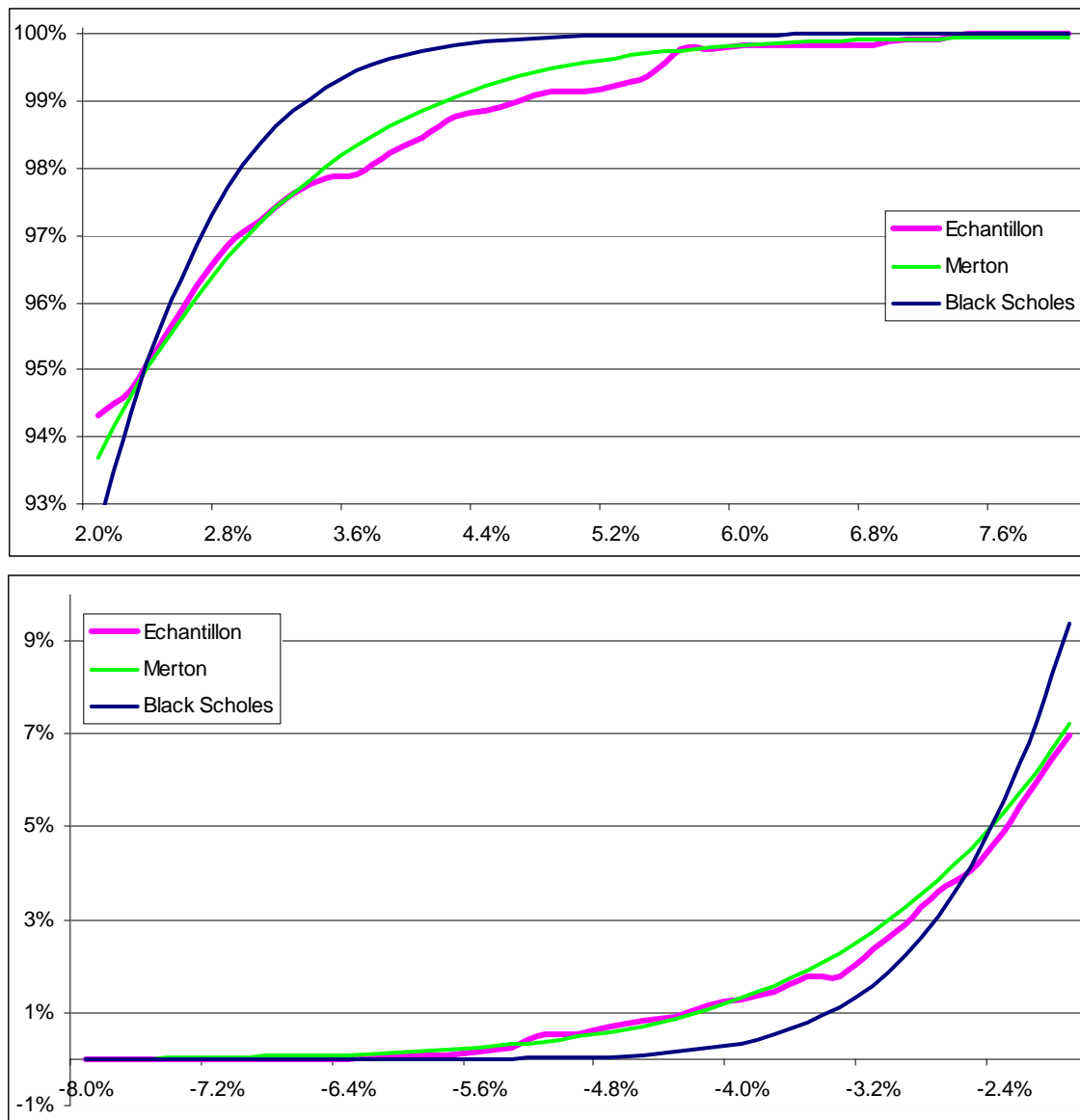


Figure 12 : queues de distribution des fonctions de répartition empirique et modélisés.

On voit que le modèle de MERTON correspond mieux à notre échantillon de données. Surtout au niveau des queues de distributions, bien que celles de notre échantillon empirique soient encore plus lourdes que celles du modèle.

Voici le graphe représentant les densités estimées (la densité de l'échantillon est estimée avec un pas de rendement de 0.2%), toujours pour la méthode M_1 .

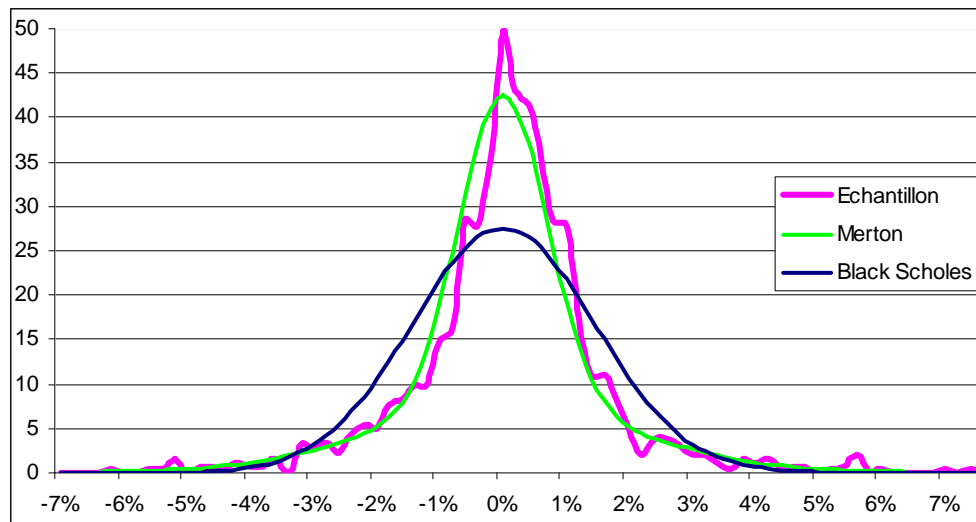


Figure 13 : densité approchée et modélisée du rendement de l'action fictive.

2.3.2. Test de Kolmogorov-Smirnov :

Le test d'adéquation du χ^2 est considéré comme puissant mais peut être inapproprié lorsqu'on teste une loi continue. Il lui est alors souvent préféré le test de Kolmogorov-Smirnov.

Présentation du test :

Sous l'hypothèse d'adéquation des lois, on cherche à tester l'égalité entre la fonction de répartition théorique $F(\cdot)$ de notre loi à tester et la fonction de répartition empirique $F_n(\cdot)$ de notre échantillon observé :

$$H_0 : F = F_n .$$

Le test de Kolmogorov Smirnov consiste à mesurer l'écart entre les deux fonctions de répartition. On pose la statistique :

$$K_n = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

Cette statistique est indépendante de la loi testée, $F(\cdot)$, et converge en loi :

$$P(K_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 x^2)$$

On rejette donc l'hypothèse nulle H_0 lorsque : $K_n > H^{-1}(1-\alpha)$ où α est l'erreur de première espèce de notre test.

En utilisant l'approximation $H(x) \approx 1 - \exp(-2x^2)$, on rejette l'hypothèse H_0 lorsque

$$K_n > \sqrt{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)} > H^{-1}(1-\alpha)$$

Application à notre action fictive :

Nous comparons donc les statistiques K_{BS} et K_M de BLACK et SCHOLES et de MERTON à la valeur seuil $K_{seuil} = \sqrt{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{5\%}\right)}$.

	Selon la méthode M_1 de représentation du portefeuille	Selon la méthode M_2 de représentation du portefeuille	Valeur seuil de la statistique correspondant avec $\alpha = 0.95$
BLACK et SCHOLES	3.141	3.143	1.224
MERTON avec $\Omega^2 = 20\%$	3.133	3.135	
MERTON avec $\Omega^2 = 0,32\%$	1.176	1.116	

Le test appliqué sur plusieurs valeurs de Ω^2 (pour la méthode de M_1 de constitution de l'action fictive) donne les graphiques ci-dessus. Nous pouvons voir que le modèle de MERTON correspond bien mieux aux historiques de cours que le modèle de BLACK et SCHOLES. Et pour $0.0300\% \leq \Omega^2 \leq 0.0350\%$ on accepte l'hypothèse H_0 : le modèle est bien en adéquation avec nos données (à 5% d'erreur de première espèce).

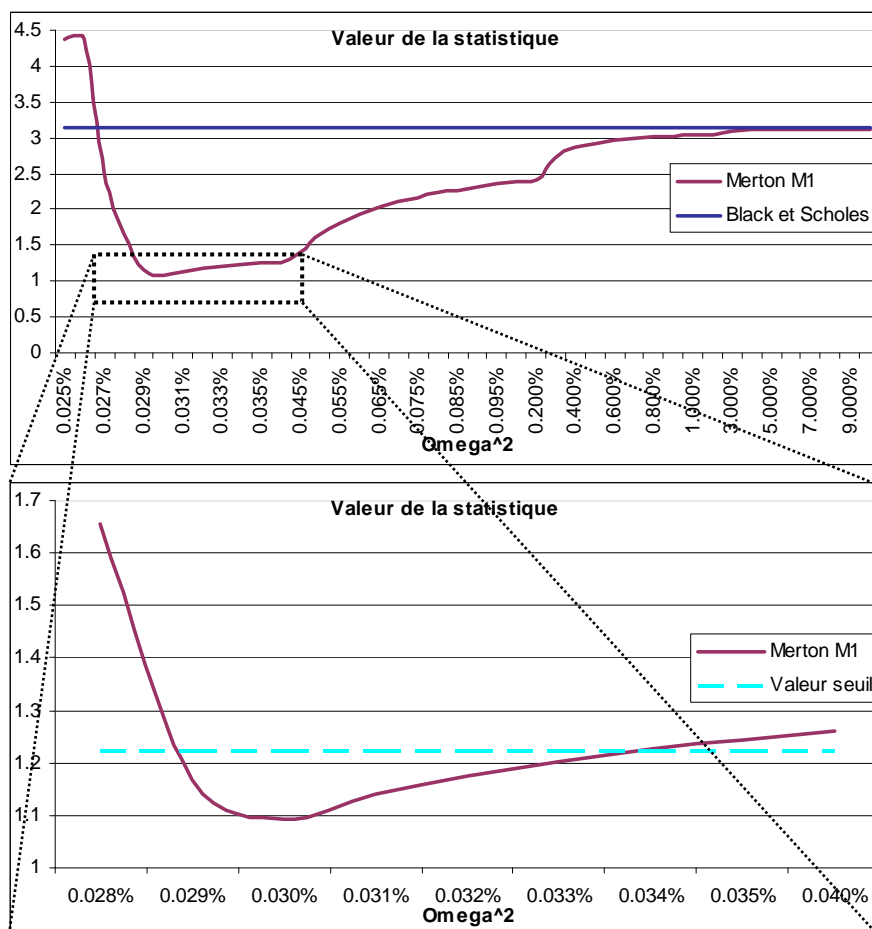


Figure 14 : Statistiques du test de Kolmogorov-Smirnov selon Ω^2

La statistique atteint son minimum en $\Omega^2 = 0.032\%$.

Remarque sur la corrélation entre actions : Les calculs de l'action fictive représentant notre portefeuille ont été faits sans se soucier des corrélations entre actions. Il est naturel de penser que deux sociétés cotées en bourse sont plus fortement corrélées si elles sont du même secteur d'activité, notamment dans les cas de sauts boursiers.

1					
0.348	1				
0.348	0.557	1			
0.447	0.619	0.567	1		
0.411	0.733	0.671	0.687	1	
0.169	0.282	0.287	0.234	0.302	1

Figure 15 : Extrait de la matrice des corrélations empiriques des actions (6) composant notre portefeuille.

La plus forte corrélation (0,7333) correspond à la corrélation entre AGF Generali assurance et AXA. Mais cette relation, "forte corrélation entre deux sociétés du même secteur" ne se généralise pas.

Choix du modèle :

Le modèle retenu dans notre application est donc le modèle de MERTON, pour sa bonne adéquation à notre portefeuille d'action. Les paramètres utilisés pour cette modélisation sont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = 0.0073\% \\ \mu = 0.0404\% \\ \Omega^2 = 0.032\% \\ \lambda = 10.0253\% \end{array} \right.$$

CHAPITRE 3 : Modélisation du cours de l'immobilier

3.1 Historique et données

Si l'historique des cotations d'actions est facilement accessible avec des données financières continuellement mises à jour (on peut disposer d'une cotation à la minute sur plusieurs décennies si on le souhaite), il est plus difficile de se constituer une base de donnée sur le cours d'un actif immobilier.

En effet il n'existe pas, comme pour les actions, de marché d'échanges pour les actifs immobiliers. De ce fait les immeubles sont des actifs beaucoup moins « liquides » que les titres cotés en bourse. Cela implique également la difficulté à définir une valeur de marché pour un bien immobilier et la nécessité de faire appel à des experts immobiliers pour des évaluations

Plusieurs instituts, comme l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Études Économiques), la FNAIM (Fédération Nationale de l'Immobilier) ou les notaires de France, fournissent un historique des cours mais au format annuel, en contrepartie, cet historique peut remonter assez loin : 1840 pour les prix des logements à Paris ; 1936 pour l'indice des prix en Province (voir au format trimestriel à partir de 1996 pour l'indice des prix par région).

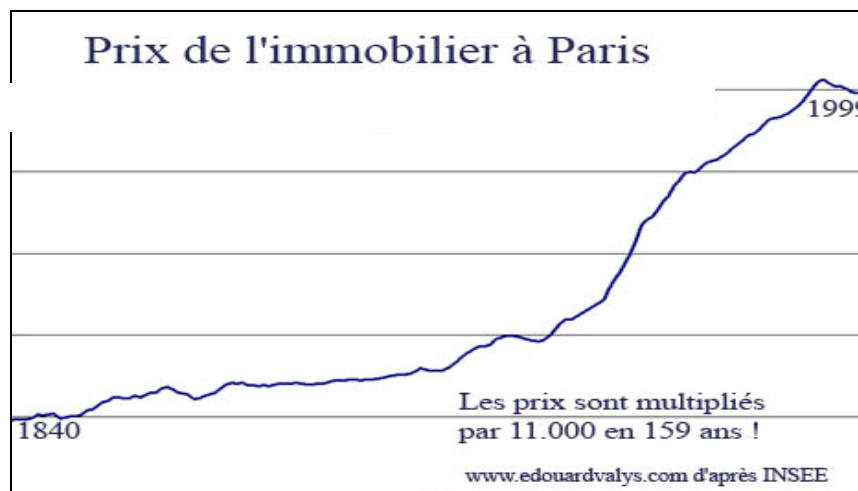


Figure 16 : Allure du cours de l'immobilier de Paris depuis 1840

Pourtant, il est assez facile de trouver un historique du cours de l'immobilier coté. Il s'agit en fait de titres de sociétés foncières qui émettent des actions en échange d'une part d'un patrimoine immobilier.

Voici par exemple le cours mensuel sur 15 ans de l'indice « IEIF immobilier de France » obtenu en libre accès sur www.ieif.fr :

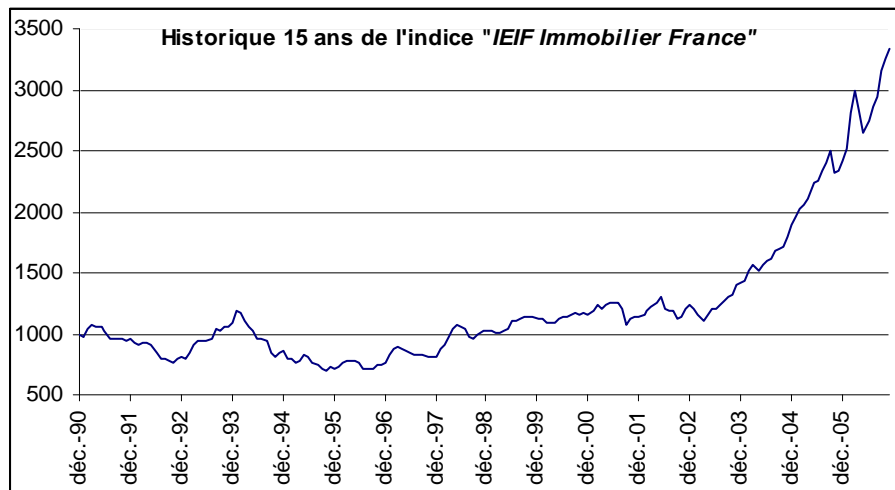


Figure 17 : Cours mensuel sur 15 ans de l'indice immobilier

On trouve une moyenne réelle annuelle de $\tilde{R} = 9,13\%$ en utilisant l'historique 15 ans mensuel (depuis 1992). Et une moyenne annuelle réelle de $\tilde{R} = 30\%$ en utilisant l'historique 5 ans journalier (2002). En effet ces dernières années, le cours de l'immobilier est affecté par une bulle spéculative.

Donc le cours de l'immobilier coté n'est pas réellement représentatif du cours de l'immobilier physique. De plus ce dernier peut être très différent et non parfaitement corrélé selon qu'il s'agit d'immeubles de bureaux ou d'immeubles de particuliers ou selon que nous considérons la région Parisienne ou la Province.

L'idéal serait de posséder sa propre base de données interne du cours non coté des immeubles de la compagnie.

3.2 Choix du modèle et des paramètres

Pour modéliser le cours de l'immobilier, nous utiliserons le modèle assez répandu de BLACK et SCHOLES. La paramétrisation se fait à partir d'indicateurs fournis par le service financier :

- Rendement du cours de l'immobilier : 3.5% ¹⁹
- Variance du cours de l'immobilier : 6%

Le modèle de BLACK et SCHOLES : $\frac{S(t)}{S(0)} = \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon\right]$ suit une loi log-normale

On connaît les équations donnant la moyenne et la variance d'une loi log-normale à partir de ces paramètres :

¹⁹ On peut voir ce rendement comme étant somme entre l'indice moyen de l'inflation : 1.5% et l'indice moyen de la croissance économique en France : 2%

$$\begin{cases} E\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] = 1.035 = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \\ \text{Var}\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] = 0.06 = E\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] \times (\exp(\sigma^2 t) - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0.0137\% \\ \sigma^2 = 0.022\% \end{cases} \text{ en considérant } t = 260 = 1 \text{ an}$$

3.3 Bulle immobilière

La phrase du prix Nobel d'Economie Joseph STIGLITZ, est souvent reprise pour expliquer le phénomène de bulle financière : "Une bulle est un état du marché dans lequel la seule raison pour laquelle le prix est élevé aujourd'hui est que les investisseurs pensent que le prix de vente sera encore plus élevé demain, alors que les facteurs fondamentaux ne semblent pas justifier un tel prix."

En fait, une bulle se caractérise par une montée vertigineuse des prix, indépendamment des fondamentaux économiques (pour l'immobilier ce sont par exemple les taux d'emprunt, le revenu moyen des ménages,...). Il s'agit d'un phénomène purement spéculatif qui se crée lorsqu'une majorité d'acteurs achètent, persuadés que le lendemain le prix sera plus élevé pendant que les vendeurs reportent leur vente pour bénéficier du prix maximum. A l'inverse, une bulle explose pour les mêmes raisons : les acheteurs diffèrent leurs achats, anticipant une baisse du prix le lendemain, et les vendeurs mettent massivement leurs biens sur le marché, de peur de perdre tout leur capital. Ils sont ainsi directement responsables de la formation ou de l'explosion d'une bulle spéculative.

En complément de cette théorie, l'économiste J. FRIGGIT a démontré que les prix des logements été reliés à la croissance des revenus des ménages de telle sorte qu'ils oscillent avec une marge de 10% autour d'une tendance longue appelée tunnel de FRIGGIT. Pendant 37 ans les prix moyen des logements français semblaient correspondre à ce modèle mais en 2002 est apparue une soudaine hausse qui continue encore aujourd'hui. Certains économistes décrivent ce phénomène comme une bulle immobilière.

La France n'est pas le seul pays qui connaît cette explosion des prix de l'immobilier, on parle de la plus grande bulle immobilière mondiale. Une bulle peut donc être aussi bien mondiale, nationale ou locale. On parlait déjà de spéculation immobilière à Paris en 1988 qui fut corrigée par le « Krach immobilier de 1991 ».

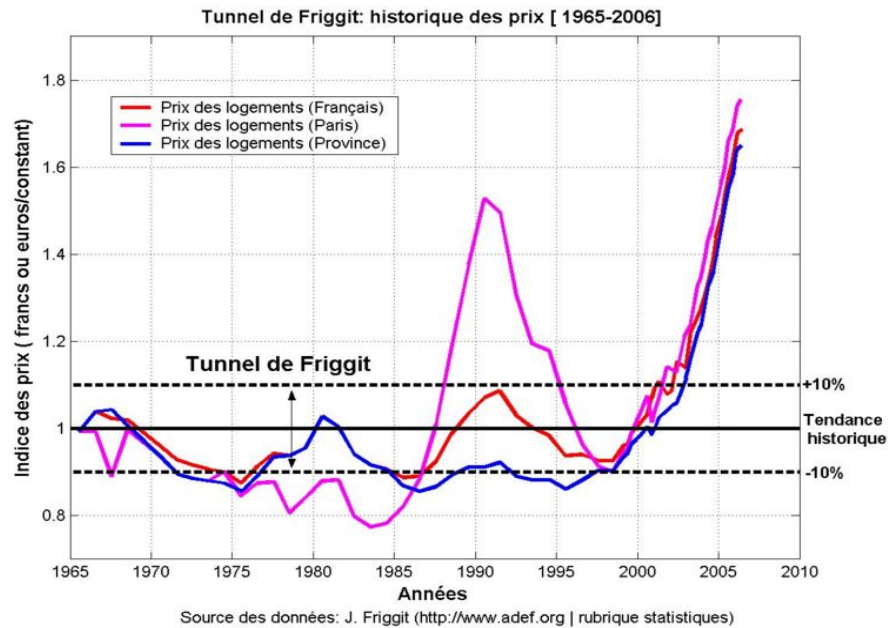


Figure 18 : Illustration du tunnel de FRIGGIT, Indice des prix des logements en fonction des revenus des ménages au cours du temps

Ce phénomène représente la peur de tous les investisseurs, une bulle est toujours rééquilibrée par une baisse plus ou moins violente. Reste à savoir également quand elle aura lieu, car en effet cela fait plusieurs années que les experts prédisent une baisse imminente.

Modélisation du loyer :

Comme pour les dividendes, nous avons modélisé les revenus récurrents dus à l'immobilier comme un paramètre de la valeur de notre classe d'actif. Mais ce paramètre sera toujours calculé à partir de la valeur d'achat, car en effet, un loyer n'est pas aussi variable que la valeur des dividendes. De plus, ce paramètre est également perçu en milieu d'année, mais il est réinvesti dans la classe monétaire. En effet, nous considérons que la classe immobilier est moins liquide que les autres classes et qu'il est plus difficile de faire un réinvestissement pour un montant plus ou moins élevé.

CHAPITRE 4 : Modélisation des Hedge Funds

La demande des investisseurs pour ses fonds de gestion alternative est sans cesse croissante, développant considérablement cette classe d'actif (le nombre de Hedge Funds a augmenté de 300% depuis 1996. plus de 8 000 hedge funds étaient opérationnels en 2005). Ceci s'explique par le bon rapport performance risque : dans l'ensemble, les hedge funds ont enregistré un rendement moyen supérieur à celui des marchés boursiers, tout en présentant une volatilité deux fois moins importante que l'indice *S&P500*.

Initiés en 1949, les Hedge funds correspondent à des organismes de gestion collective, fonctionnant sur le même principe que les OPCVM. Ils se basent sur différents types d'actifs notamment des actions, des actifs dérivés et des placements financiers autres que les actions (devises, matières premières, ...). L'investissement diffère selon que le marché est baissier ou haussier. La stratégie de la gestion alternative est assez technique et spécialisée, pratiquée généralement par des gérants expérimentés et indépendants qui se concentrent sur des niches de marché bien précises.

Le but de ce type d'investissement est d'atteindre un niveau de performance absolue, de préférence stable et, bien que les actifs sous jacents soient des actifs financiers traditionnels, la gestion alternative cherche à être décorrélée ou peu corrélée de la tendance globale du marché.

Mais les hedge funds sont aussi très peu réglementés, apprécier leur risque est difficile pour un investisseur particulier. Certains fonds sont très opaques et les gérants peuvent librement changer l'orientation de leurs stratégies au cours du temps et même modifier la structure de risque des fonds, sans forcément avertir les investisseurs. De plus les meilleurs hedge funds sont souvent fermés, moins liquides que d'autre, et le montant d'une part d'actif peut s'avérer assez élevé pour un investisseur privé.

Certains investisseurs commencent à craindre un risque important dû à la forte croissance en fonds alternatifs : de plus en plus de gérants sont à la recherche des mêmes opportunités d'investissements avec beaucoup plus d'argent que par le passé. Les performances des fonds alternatifs auraient tendance à diminuer et ainsi encourageraient leurs gérants à prendre de plus en plus de risques.

Choix du modèle :

De la même façon que l'immobilier, le modèle pour cette classe d'actif est le modèle de BLACK et SHOLES exprimé à l'aide d'indicateurs fournis par le service financier.

Il est à savoir tout de même que les études sur la modélisation des hedge funds se multiplient et qu'il existe aujourd'hui des modèles bien plus performants que le modèle de BLACK et SHOLES.

Pour la paramétrisation, le rendement et la volatilité sont estimés à partir d'un portefeuille de hedge funds diversifiés qui sert de sous jacent au projet de BNTM SHAM Alternative.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 0.0137\% \\ \sigma^2 = 0.022\% \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right) \approx 1.106 \\ Var\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] = 0.06 = E\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] \times (\exp(\sigma^2 t) - 1) \approx 0.29\% \end{array} \right.$$

CHAPITRE 5 : Corrélacion entre actifs

Une étude, qui ferait sûrement intervenir les copules, serait nécessaire pour déterminer la structure de dépendance entre chaque classe d'actifs. Dans ce mémoire, nous nous sommes contentés d'une approche linéaire. En effet, puisque que toutes nos classes d'actifs sont modélisées à partir d'une ou plusieurs lois normales²⁰, nous avons décidé d'utiliser la décomposition de CHOLESKY.

Décomposition de CHOLESKY :

La décomposition de CHOLESKY est un algorithme permettant de trouver la solution du théorème suivant :

Théorème : Soit A une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que :

$$A = L {}^tL \quad {}^{21}$$

On peut imposer que tous les éléments de la diagonale soient positifs, alors la solution est unique.

En notant $A = [a_{i,j}]_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ on cherche à trouver $L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$ telle que $A = L {}^tL$

$$A = L {}^tL \Leftrightarrow a_{i,j} = \sum_{k=1}^n l_{i,k} \cdot l_{k,j} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Or, puisque L est triangulaire inférieure ($l_{i,j} = 0 \quad \forall j \geq i$) et A symétrique ($a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i, j$), il suffit de satisfaire le système d'équations suivant :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^i l_{i,k} \cdot l_{j,k} \quad 1 \leq i \leq j \leq n \quad (*)$$

L'algorithme de CHOLESKY consiste à déterminer les coefficients de la matrice L colonne par colonne. En effet, pour $i = 1$ on peut déterminer première colonne de L :

$$(j=1) \quad a_{11} = l_{11} \cdot l_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$(j=2) \quad a_{12} = l_{11} \cdot l_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}$$

...

$$(j=n) \quad a_{1n} = l_{11} \cdot l_{n1} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{1n}}{l_{11}} = \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}}}$$

²⁰ En supposant que les sauts boursiers du cours des actions dans le modèle de Merton sont indépendants de la tendance continue du cours mais aussi des autres actifs

²¹ tL représente la transposée de la matrice L

Par récurrence, on peut déterminer la i^e colonne de L après avoir déterminé les $(i-1)^e$ précédentes :

$$\begin{aligned}
 (j < i) \quad l_{ji} &= 0 \\
 (j = i) \quad a_{ii} &= l_{i1} \cdot l_{i1} + \dots + l_{ii} \cdot l_{ii} \Rightarrow l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\
 (j = i+1) \quad a_{i,i+1} &= l_{i,1} \cdot l_{i+1,1} + \dots + l_{i,i} \cdot l_{i+1,i} \Rightarrow l_{i+1,i} = \frac{a_{i,i+1} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot l_{i+1,k}}{l_{i,i}} \\
 (j = n) \quad a_{i,n} &= l_{i,1} \cdot l_{n,1} + \dots + l_{i,i} \cdot l_{n,i} \Rightarrow l_{n,i} = \frac{a_{i,n} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot l_{n,k}}{l_{i,i}}
 \end{aligned}$$

nous avons donc construit la solution unique telle que $A = L^t L$ et telle que tous les éléments de la diagonale de L soient positifs.

Application à notre portefeuille :

Nous rappelons que nos actifs sont tous modélisés à partir de lois normales. Nous nous servons alors de la matrice de corrélation entre les différents actifs (le choix des paramètres de cette matrice de corrélation est justifiée plus loin dans ce paragraphe) à partir de laquelle nous calculons la matrice de variance-covariance $\Sigma = [\rho_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,5ou4 \\ j=1,\dots,5ou4}}$. Et plus précisément :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} & \sigma_{1,5} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} & \sigma_{2,5} \\ \sigma_{1,3} & \sigma_{2,3} & \sigma_{3,3} & \sigma_{3,4} & \sigma_{3,5} \\ \sigma_{1,4} & \sigma_{2,4} & \sigma_{3,4} & \sigma_{4,4} & \sigma_{4,5} \\ \sigma_{1,5} & \sigma_{2,5} & \sigma_{3,5} & \sigma_{4,5} & \sigma_{5,5} \end{bmatrix}$$

On note également ${}^t \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$ la moyenne et de notre vecteur gaussien représentant nos actifs.

Une matrice de variance covariance est toujours symétrique définie positive, donc d'après le théorème, il existe une matrice $L = [l_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,5ou4 \\ j=1,\dots,5ou4}}$ triangulaire inférieure et telle que

$$\Sigma = L^t L.$$

On démontre que si ${}^t \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5)$ est un vecteur gaussien i.i.d. centré réduit alors le vecteur $X = L \cdot \varepsilon + \mu$ est gaussien de moyenne μ et corrélé selon la matrice de variance-covariance Σ .

$$\text{En effet } X = L \cdot \varepsilon + \mu \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = l_{11} \cdot \varepsilon_1 + \mu_1 \\ X_2 = l_{21} \cdot \varepsilon_1 + l_{22} \cdot \varepsilon_2 + \mu_2 \\ X_3 = l_{31} \cdot \varepsilon_1 + l_{32} \cdot \varepsilon_2 + l_{33} \cdot \varepsilon_3 + \mu_3 \\ X_4 = l_{41} \cdot \varepsilon_1 + l_{42} \cdot \varepsilon_2 + l_{43} \cdot \varepsilon_3 + l_{44} \cdot \varepsilon_4 + \mu_4 \\ X_5 = l_{51} \cdot \varepsilon_1 + l_{52} \cdot \varepsilon_2 + l_{53} \cdot \varepsilon_3 + l_{54} \cdot \varepsilon_4 + l_{55} \cdot \varepsilon_5 + \mu_5 \end{cases}$$

$$E[X_i] = \mu_i \text{ car } \varepsilon \text{ est centré}$$

$$Var[X_i] = \sum_{k=1}^i l_{i,k}^2 = \sigma_{i,i} \text{ d'après l'équation (*)}$$

$$\text{Et } CoVar[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^i l_{i,k} \cdot l_{j,k} = \sigma_{i,j} \quad 1 \leq i \leq j \leq n \text{ d'après l'équation (*), car } \varepsilon \text{ est i.i.d.}$$

On utilise alors la décomposition de CHOLESKY pour déterminer les coefficients $l_{i,j} \Big|_{\substack{j=1, \dots, 5ou4 \\ j=1, \dots, 5ou4}}$.

Choix des paramètres de la matrice de corrélation entre les classes d'actifs :

Dans ce mémoire, nous n'avons pas réellement étudié la paramétrisation de la corrélation, par approximation linéaire, entre les différentes classes d'actifs. Pour cette paramétrisation, nous avons utilisé les données fournies par le CEIOPS²² à l'occasion du QIS3 – troisième Etude Quantitatives d'Impact de la mise en place de formules standards pour le calcul des exigences de marge de solvabilité dans le cadre de la réforme *Solvabilité 2*.

Ces données fournissent des paramètres de corrélation entre les 3 classes d'actifs actions, immobilier, et taux. Or dans notre mémoire, nous modélisons l'actifs à l'aide de cinq classes, les actions, l'immobiliers, les obligations (taux long), le monétaire (taux court) et les Hedge Funds. Aux données fournies par le CEIOPS nous avons du choisir des paramètres de corrélation supplémentaires pour la classe Hedge Funds et les deux classes de taux.

Les Hedge Funds sont généralement gérés de manière à ce qu'ils soient décorrélés ou peu corrélés de la tendance globale du marché. En effet, c'est l'investisseur qui gère la corrélation de son fond de gestion par rapport aux autres classes d'actifs. Nous avons donc décidé de considérer cette classe indépendante des autres.

Pour les deux de taux, nous avons considéré que les corrélations entre chacune de ces deux classes et les autres classes d'actifs sont identiques et égaux aux paramètres de corrélations fournies par le CEIOPS. Par contre, pour la corrélation entre ces deux classes de taux, nous avons choisis le paramètre empirique fourni par la Banque de France (indiquée sur la *figure 2* du chapitre 1), sachant que la classe obligation est modélisée dans ce mémoire par un taux long 10 ans (arrondi de la durée restante moyenne des obligations du portefeuille SHAM) et la classe monétaire est modélisée par le taux court 1 mois.

	Taux court	Taux long	Action	Immobilier	Hedge Funds
Taux court	1	0,202	-0,3	-0,3	0
Taux long		1	-0,3	-0,3	0
Action			1	0,6	0
Immobilier				1	0
Hedge Funds					1

Figure 19 : Matrice de corrélation entre les différentes classes d'actifs

²² CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors) est le comité des superviseurs des assurances et des pensions professionnelles

PARTIE 2 :

DÉTERMINATION DE L'ALLOCATION STRATÉGIQUE D'ACTIFS

L'allocation stratégique d'actif se définit comme « la répartition optimum d'un portefeuille entre plusieurs supports d'investissement (actions, obligations, placements monétaires) pour un profil de risque donné. » L'allocation stratégique permet d'accroître le rendement d'un portefeuille tout en diminuant son risque global.

L'enjeu de cette étude pour les compagnies d'assurance est double. En effet :

- Elle a pour but d'évaluer le besoin en capital de la compagnie afin de couvrir son activité et d'éviter la ruine
- Elle a pour moyen de déterminer la répartition de ce capital entre les différentes classes d'actifs.

L'allocation stratégique d'actifs d'une compagnie d'assurance dépend donc d'une étude en deux temps : la détermination du besoin en capital représenté par les provisions et la marge de solvabilité ainsi que la détermination de la répartition optimale du portefeuille optimale du portefeuille financier afin de couvrir ce besoin et de se constituer une marge financière.

Si dans l'actuel référentiel prudentiel *Solvabilité 1* ces deux étapes peuvent être considérées indépendantes – en effet le besoin en capital d'un assureur se mesure de façon déterministe en fonction des éléments constitutifs du bilan et du compte de résultats – la réforme en cours *Solvabilité 2* est une approche basée sur les risques réels de l'assureur, y compris les risques exogènes à son activité propre, tel que le risque de marché directement impacté par l'allocation stratégique d'actifs.

L'allocation stratégique d'actif sous *Solvabilité 2* correspond donc toujours à un programme d'optimisation de la répartition du portefeuille financier entre les différentes classes d'actifs. Mais les contraintes sous *Solvabilité 2*, que nous nommons par la suite « Contraintes de risques »²³, sont directement dépendantes de cette allocation.

Reste alors à définir les outils pour la mise en œuvre de cette étude d'optimisation à deux variables, rendement et risque, sous contraintes non linéaire.

Dans cette partie, Nous présenterons dans un premier temps l'objet de la réforme *Solvabilité 2*. Puis nous déterminerons chacune des deux étapes de l'allocation d'actif. Nous présenterons donc les méthodes de détermination du besoin en capital que semble proposer cette réforme²⁴ et nous finirons cette partie en proposant un programme d'optimisation sous contraintes de risques, faisant intervenir une méthode stochastique et la modélisation d'actifs réalisée dans la première partie de ce mémoire.

²³ Bien que le projet *Solvabilité 2* n'est pas encore aboutit, la réforme semble tendre vers une étude de risque telle que le risque de ruine de la compagnie soit inférieure à 0.5% à horizon 1 an.

²⁴ Pour ce développement nous nous sommes basés sur les états d'avancement du projet lors du QIS3.

CHAPITRE 1 : Vers un nouveau référentiel

La particularité principale d'une compagnie d'assurance est la gestion du risque. L'assureur contracte des engagements sur des montants financiers importants dans un domaine où la notion d'aléa est à la source de toute son activité.

La gestion des risques en assurance est de ce fait très réglementée et contrôlée. Toutefois aujourd'hui, la réglementation en vigueur qui a fait ses preuves durant de nombreuses années, est remise en cause sur ses nombreuses limites et son caractère obsolète.

En effet, suite à un rapport datant de 1997, la Commission Européenne a engagé une réflexion sur une réforme du système de solvabilité en assurance des différents pays européens afin de mettre en place un régime harmonisé et plus en adéquation avec les risques réels auxquels font face les assureurs. Cette réforme qui sera applicable à partir de 2010 (en pratique 2012 suivant le délai de transposition en droit local) va s'appliquer de fait à l'ensemble des assureurs de l'Union Européenne.

Afin de préparer la réforme, les acteurs du marché sont parties prenantes de la construction du projet. En 2007, c'est plus de 3 000 sociétés d'assurances de 23 pays qui participent à l'étude pour une prochaine application de cette réforme.

1.1. Marge de solvabilité en assurance

En assurance, l'activité de tarification et de provisionnement permet à l'assureur de couvrir ses engagements vis-à-vis des assurés. Toutefois en fonction de la réalisation du risque, dans l'hypothèse d'un scénario défavorable, l'assureur pourrait ne pas être en mesure d'honorer ses engagements. La marge de solvabilité doit être déterminée de manière à couvrir l'assureur contre une réalisation défavorable du risque, elle est donc constituée dans l'optique d'éviter la ruine et de permettre la pérennité de l'activité.

La marge de solvabilité est un critère de sûreté situé au-delà des provisions, elle est notamment constituée par les fonds propres supplémentaires. Ce critère de sûreté fait l'objet d'une surveillance régulière par les autorités de contrôle, par l'intermédiaire des bilans comptables et des états réglementaires. En effet, la marge de solvabilité est une contrainte réglementaire pour les organismes assureurs. Elle est directement visée par le Code des Assurances : Art R334-1 « toutes entreprises » d'assurances françaises « doit justifier de l'existence d'une marge de solvabilité suffisante relative à ses activités sur le territoire ». De plus le code précise les éléments qui constituent cette marge (Art R334-3 et R334-4) ainsi que les méthodes de calcul (Art R334-5)

La réglementation impose ainsi à tout moment, aux entreprises d'assurance, une marge de solvabilité destinée à sécuriser ses engagements vis-à-vis des assurés. Cette marge constitue un élément important du système de surveillance prudentiel visant à protéger les intérêts des assurés et la pérennité des assureurs.

Par conséquent, nous pouvons définir la solvabilité d'une compagnie d'assurance comme sa capacité à respecter à tout instant ses engagements envers des tiers, ses créanciers et particulièrement ses assurés, en cas de difficulté financière.

Chaque compagnie d'assurance doit, pour exercer la profession, détenir une marge de solvabilité supérieure à une exigence définie réglementairement. Actuellement, cette exigence de marge de solvabilités est définie selon le référentiel *Solvabilité 1*, qui aujourd'hui est remis en cause pour privilégier un référentiel plus représentatif du risque et donc du besoin de sureté des assurances.

1.2. Solvabilité 1

1.3.1. Présentation

Les règles de mesure de la solvabilité réglementaire appliquées aujourd'hui par les compagnies d'assurance des différents pays européens découlent de plusieurs directives européennes. Ces règles sont donc assez proches dans tous les pays de l'union européenne, mais possèdent néanmoins quelques différences, notamment au niveau de la comptabilisation des provisions. Ces règles découlent de la directive européenne de 1973 pour la branche Non Vie et de la directive européenne de 1979 pour la branche Vie, mises à jour le 5 mars 2002. Ces deux directives délimitent le référentiel prudentiel de marge appelé aujourd'hui *Solvabilité 1*.

Solvabilité 1 impose donc à chaque compagnie exerçant une activité d'assurance un niveau minimum de fonds propres appelé exigence de marge de solvabilité ou exigence de capital afin de couvrir ses engagements vis-à-vis des tiers. Ce niveau minimum de fonds propres doit être représenté par des actifs adéquats pour la couverture des engagements. De plus un contrôle régulier de cette marge est imposé. Il passe par la réalisation trimestrielle de simulations de l'adéquation actif-passif ainsi que par la production annuelle d'un rapport de solvabilité.

La réglementation définit également la méthode de détermination de cette marge. Elle est mesurée sur la base de l'historique des souscriptions et des provisions. Son calcul diffère néanmoins selon que l'activité d'assurance se situe dans la branche Vie ou dans la branche Non Vie.

1.3.2. En assurance Vie

Son calcul découle de la directive européenne de 1979, mise à jour en 2002, et concerne les produits :

- Décès,
- Rentes de conjoint,
- Rentes d'éducation,
- Frais d'obsèques,
- Epargne,
- Retraite.

La marge de solvabilité doit au moins couvrir une certaine exigence définie comme la somme des deux montants suivant :

- 4 % des provisions mathématiques avec possibilité de déduire partiellement la part réassurée ;
- Un pourcentage variant de 0,1% à 0,3 % des capitaux sous risques en fonction de la durée de l'engagement.

1.3.3. En assurance Non Vie

Le calcul de l'exigence de marge de solvabilité découle de la directive européenne de 1973 et concerne les produits :

- Incendie Accident Risque Divers (IARD),
- Incapacité, Invalidité,
- Frais de santé, Décès accidentel,
- Dépendance.

Cette exigence est le maximum de deux montants portant l'un sur les primes encaissées et l'autre sur les sinistres :

- par rapport aux primes de l'année en cours, 18% pour la première tranche de 50 millions d'euros de primes encaissées et 16% au-delà
- par rapport à la moyenne des sinistres des trois dernières années, 26% pour la première tranche de 35 millions et 23% au delà.

SHAM couvre aujourd'hui quatre fois l'exigence de marge qu'impose la réglementation sous Solvabilité 1

1.3. Une réforme en cours

1.3.1. Critique de Solvabilité 1

Bien que les limites de *Solvabilité 1* n'aient pu être observées que très rarement (peu de cas de ruine d'assurances sont recensées), de nombreuses critiques ont amené à la mise en place d'une réforme de ce référentiel prudentiel.

Une des critiques principales de *Solvabilité 1* repose sur le fait que seul le risque de souscription est pris en compte, sans considération notamment des risques exogènes à son activité propre. De plus, les exigences de marge de solvabilité, sous les règles de *Solvabilité 1*, sont déterminées de manière simpliste (selon un historique à court terme) et forfaitaire par rapport à un ratio combinant les provisions, les primes et les sinistres.

Solvabilité 1 ne mesure donc que succinctement le risque réellement encouru par l'assureur. Par exemple, deux entreprises peuvent avoir une même exigence de marge de solvabilité et pourtant ne pas subir des risques très différents

De plus *Solvabilité 1* se base sur une vision uniquement rétrospective sur des indicateurs comptables annuels en ne prenant comme seule et unique référence le passé et par conséquent suppose que le passé seul est un bon guide pour estimer le futur, ce qui ne se vérifie pas dans les faits.

D'autres critiques sont également faites à ce référentiel, comme la non distinction entre assureur et réassureur, où encore le fait que l'exigence de marge soit plus élevée pour les assureurs ayant un comportement plus prudent en sur-provisionnement, et inversement pour les entreprises sous-tarifant leurs risques ; ce qui est l'inverse de l'objectif de cette marge.

Des critiques plus qualitatives sont également faites sur ce référentiel :

- Les modes de calcul des provisions diffèrent fondamentalement d'un pays européen à l'autre et aboutissent à des niveaux de prudence sensiblement différents et une inégalité pour les assureurs des différents pays.
- Le manque de surveillance exercée sur le contrôle interne (piste d'audit, méthode de gestion ...).

D'autre part *Solvabilité 1* est moins complet que d'autres systèmes de surveillance de solvabilité internationaux tels que le « Swiss Solvency Test » en Suisse ou le modèle de solvabilité américain « Risk Based Capital » ce qui pousse les pays de l'Union européenne à développer leur propre modèle, *Solvabilité 2*, et remet en cause l'harmonisation des normes.

1.3.2. Les objectifs

La réforme en cours pour la mise en place du projet *Solvabilité 2* est pilotée par la Commission Européenne sous l'étude du Comité européen des contrôleurs des assurances et des pensions professionnelles nommé le CEIOPS.

L'objectif est de créer un système plus harmonisé, notamment au niveau européen, avec une meilleure prise en compte des différents risques assumés par les organismes d'assurance. Cette réforme est faite selon le modèle du récent changement de référentiel dans le milieu bancaire nommé *Bâle 2*.

Prévue pour entrer en vigueur à l'horizon 2010 et une application en 2012, cette mise à jour du cadre dans lequel s'inscrit l'activité des assureurs européens, doit actualiser un ensemble de règles élaborées au cours du temps. Ainsi, l'ensemble des directives existantes est remplacé par une directive unique adoptée en fin 2007.

1.3.3. Un référentiel en trois piliers

En prenant exemple sur la réforme homologuée *Bâle 2* dans le milieu bancaire, la réforme *Solvabilité 2* est basée sur une approche en trois piliers. En avril 2003, la Commission

européenne a défini ces trois piliers : exigences quantitatives, activités de surveillance, information et publication.

Pilier I : les règles quantitatives

Le pilier I vise à définir les règles quantitatives qui permettront de mesurer l'exigence de marge imposée aux compagnies d'assurance. Ces règles de calcul devront se rapporter aux provisions techniques avec un objectif d'harmonisation de leur valorisation, à l'exigence de capital avec deux niveaux de capital ainsi que la définition des règles d'éligibilité des éléments de ce capital.

Ce premier pilier s'attache donc à établir des outils de mesure de la « suffisance » des provisions techniques mais aussi à formuler une harmonisation des principes de calcul entre les différentes compagnies européennes.

Pilier II : le processus de contrôle prudentiel

L'objectif poursuivi par le pilier II est de définir et d'harmoniser les activités de surveillance aussi bien au niveau des entreprises d'assurance elles-mêmes qu'à l'échelon des superviseurs c'est-à-dire par les autorités de contrôle telle que l'ACAM ou le CEIOPS.

Ces étapes de surveillance doivent passer dans un premier temps par des mécanismes de contrôle interne et d'organisation qui sont visés ainsi que les principes applicables en matière de gestion des risques. Il est nécessaire que les compagnies puissent se contrôler elles-mêmes et régulièrement à travers des procédures écrites ou encore par le biais des systèmes de contrôle et d'audit interne.

Dans un deuxième temps, les instances européennes souhaiteraient donner aux autorités de contrôle les moyens d'identifier les compagnies représentant un risque financier ou organisationnel important. Dans de tels cas, elles doivent avoir la possibilité d'augmenter l'exigence de capital ou d'appliquer des mesures ciblées pour réduire les risques.

Cette étape donnerait aux autorités de contrôle un droit de regard sur l'ensemble de la gestion et du fonctionnement d'un organisme assureur, examinant l'ensemble des risques encourus par la compagnie d'assurance

Pilier III : information et discipline de marché

Ce pilier concerne les éléments d'information qui doivent être publiés par les entreprises d'assurance ; information publique dans le cadre de la discipline de marché, information à l'usage des superviseurs sous forme de dossier annuel, ainsi que les règles d'information des assurés.

Mais la mise en place de façon plus spécifique du pilier III est subordonnée à l'avancement des deux premiers piliers. Néanmoins, deux grands principes ont, déjà, été posés par le CEIOPS :

- un principe de cohérence maximum avec les exigences comptables de publication d'information ;
- un principe d'harmonisation des états réglementaires de reporting aux superviseurs, avec comme objectif un dossier annuel européen.

Toutefois, cette étude a permis de mesurer l'impact d'une harmonisation des provisions au niveau européen et la capacité des entreprises d'implémenter efficacement certaines méthodes de calcul. Les réponses qualitatives apportées ont donc été jugées satisfaisantes pour cette première étude, les résultats obtenus se sont avérés assez homogènes et acceptables par la majorité des autorités de contrôle.

L'étude suivante, le QIS2, visait à tester la faisabilité des principes de valorisation et d'évaluer les nouvelles règles de calcul de solvabilité, notamment le niveau minimum de fonds propres exigés. Cette étude permettait également, dans un second temps, de recueillir des informations quantitatives sur la pertinence des formules standards proposées, le calibrage effectif étant l'objectif du QIS3.

Un plus faible nombre d'entreprises a participé à cette étude (574 dont 76 française), mais elles étaient représentées par un groupe plus hétérogène d'organismes assureurs de 23 pays.

Bien que la plupart des entreprises demeurent solvables selon les critères du QIS2, cette étude a montré une diminution des provisions à constituer mais une augmentation du besoin de fonds propres. Ainsi l'exigence de marge de solvabilité de SHAM est multipliée par dix par rapport au besoin sous *Solvabilité 1*.

Dans une autre mesure, plusieurs critiques ont commencé à émaner sur ce nouveau référentiel. Les organismes assureurs testeurs de cette étude ont également émis plusieurs critiques, comme le fait de la prise en compte insuffisante de la réassurance proportionnelle, et la non équivalence des approches simple ou complexe.

La troisième étude, QIS3 avait pour but de préciser la faisabilité des calculs demandés par une plus large gamme d'organismes assureurs. Elle visait également à collecter les informations nécessaires pour le calibrage de la formule standard et de mesurer l'impact sur le bilan et le besoin de marge de ce nouveau référentiel.

28 pays sur 30 ont pris part à cette troisième étude, ainsi 1 027 entreprises (dont 154 françaises). Lors de cette étude, plusieurs « régulateurs » ont montré que l'impact de ce QIS3 n'était pas homogène et que la structure des firmes pouvait influencer les résultats. Plusieurs critiques ont été réalisées sur le calcul du SCR comme la non prise en compte de l'inflation, ayant un impact important dans les risques long, ou la limite de la méthode VaR pour le calcul de la solvabilité.

Bien que la plupart des entreprises restent solvables pour le calcul du SCR, cette troisième étude montre qu'environ 15% des entreprises françaises ont dû augmenter leur capital. Ainsi SHAM voit son besoin de marge multiplié par 10 lors de cette étude.

CHAPITRE 2 : Exigence de marge sous Solvabilité 2

La marge de solvabilité est constituée de manière à ce que la compagnie ait une probabilité de faillite très faible à un horizon fixé. Elle est représentée par les fonds propres supplémentaires et les entreprises doivent régulièrement justifier un niveau de marge pour pouvoir continuer leur activité.

La grande réforme qu'apporte le référentiel *Solvabilité 2* se situe notamment au niveau de la détermination de cette exigence de marge. Bien que le modèle ne soit pas encore totalement établi, plusieurs pistes sont aujourd'hui précisées. L'exigence de marge de *Solvabilité 2* passera soit par le calcul de la formule standard proposé par le CEIOPS, soit par la mise en place d'un modèle interne propre à l'entreprise.

Ce chapitre explique l'enjeu et la méthode de la détermination du besoin en capital selon les différentes méthodes que semble proposer *Solvabilité 2*. Pour ces explications, nous nous sommes basés sur l'état d'avancement du projet lors du QIS3.

2.1 Capital Requis

L'exigence en capital d'une compagnie d'assurance se rapporte aux montants des provisions techniques exigée en normes Solvabilité 2 augmenter d'un niveau de besoin en capital supplémentaire qui permet d'apporter un niveau de prudence au fonctionnement des activités d'assurance. Le pilier 1 de *Solvabilité 2* pose donc les règles quantitatives d'exigence en capital d'une compagnie d'assurance. Cette exigence en capital peut se représenter à l'aide du schéma ci-dessous :

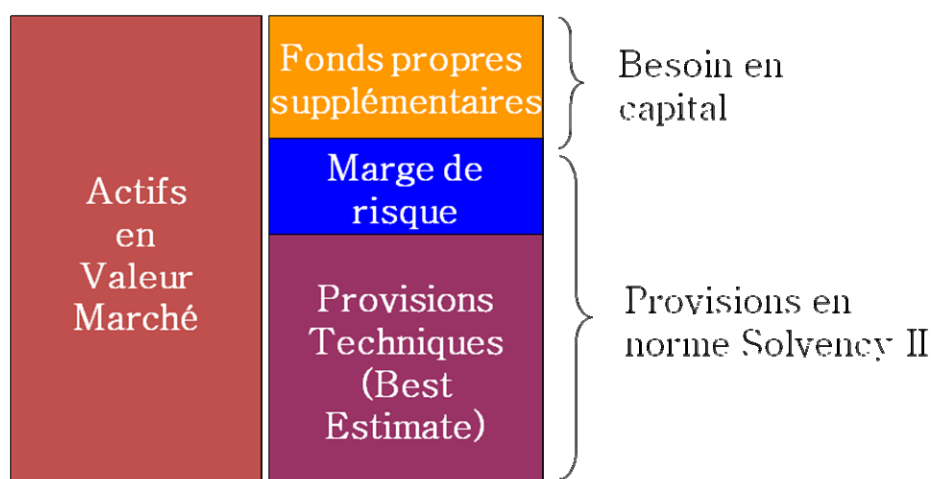


Figure 20 : Schéma simplifié du bilan en norme Solvabilité 2 d'une compagnie d'assurance

- Actifs en Valeur Marché :

Le projet *Solvabilité 2*, contrairement à l'approche comptable, impose aux assureurs une évaluation de leurs actifs et de leurs passifs à la valeur de marché afin d'appliquer une approche conforme aux réglementations fondées sur la réalité économique et financière des compagnies d'assurance.

Concernant l'actif, cette « juste valeur » ou « fair value » est facilement appréciable du fait que les éléments constitutifs de l'actifs (obligations, actions, hedge funds...) sont quotidiennement négociables sur les marchés financiers. Il n'est donc pas difficile *a priori* de calculer cette valeur marché.

A contrario pour le passif, une évaluation à leur « juste valeur » est plus problématique étant donné qu'il n'existe pas de marché reconnu suffisamment liquide et transparent comme il en existe pour les actifs financiers. De ce fait cette « juste valeur » est approchée par différents éléments qui justifient également d'un certain niveau de prudence.

- Provisions techniques (Best Estimate) :

La valorisation des provisions en norme *Solvabilité 2* s'effectue selon une approche de calcul des provisions dites en « Best Estimate » auquel s'ajoute une marge de risque déterminée selon la méthode du « Cost of Capital » (CoC, coût du capital).

Une provision Best Estimate correspond à la valeur actuelle espérée des flux (primes, prestations...) futurs jusqu'à extinction des engagements de l'assureur. Cette valeur actuelle probable peut s'exprimer à l'aide de la formule générale suivante :

$$\sum_{flux} \sum_{temps} \text{actualisation} \times \text{probabilité de survenance} \times \text{Montant du Flux}$$

Afin d'harmoniser cette méthode de calcul des provisions entre les compagnies d'assurance européennes, le CEIOPS impose (notamment lors des QIS) différentes hypothèses de travail ainsi qu'une segmentation des provisions par branche d'activité ou type de contrat. Pour l'activité Non Vie, cette segmentation est effectuée par groupe de risque homogène (HGR, homogeneous risk group). La responsabilité aux tiers, l'assurance automobile, l'assurance incendies et autres dommages aux biens ou l'assurance pour les dépenses juridiques sont des exemples de groupes homogènes impactant SHAM.

Les hypothèses de calculs et la méthode générale de détermination des provisions sont imposées par la norme *Solvabilité 2*, mais les méthodes effectives de détermination sont libres et généralement effectués par des modèles actuariels standards comme les triangles de liquidation en assurance Non Vie.

- Marge de risque :

Nous pouvons définir la marge de risque comme une couverture des risques liés à l'écoulement des passifs sur la totalité de leur durée. Cette approche a pour but de protéger les droits des assurés en tenant compte de l'incertitude liée à l'évaluation des provisions en Best Estimate. Il s'agit d'un coût additionnel relatif aux exigences futures en capital de solvabilité.

La méthode de calcul de cette marge de risque a fait l'objet de nombreux débats au cours des différents QIS. Lors de la précédente étude d'impacts (QIS2), les participants avaient la liberté de calculer la marge de risque par une approche des quantiles à 75% (VaR_{75%}, Value at Risk) proposée par le CEIOPS ou par une approche du coût capital (CoC, Cost of Capital). C'est cette seconde approche qui a été largement retenue par les participants et a été mise en œuvre dans le QIS3.

Cette approche CoC vise à projeter les composantes de risque sous l'hypothèse de run off du portefeuille (prise en compte uniquement des risques aujourd'hui et donc pas d'hypothèses de nouvelles survenances de primes ou de sinistres) et de déterminer le besoin en capital correspondant.

- Besoin en capital :

Le besoin en capital sous *Solvabilité 2*, représenté par les fonds propres supplémentaires, a pour objectif une mesure en deux paliers : un niveau de capital souhaitable, SCR (Solvency Capital Requirement) et un niveau minimal de capital, MCR (Minimum Capital Requirement).

Le capital cible SCR devra correspondre au niveau des fonds propres nécessaires pour réduire la probabilité de ruine de l'entreprise d'assurance à un niveau fixé sur un niveau de temps donné ; soit à ce stade d'avancement de la réforme une probabilité de non ruine à 99,5% à un an, c'est-à-dire une suffisance d'actifs par rapports aux provisions en norme *Solvabilité 2* sur 200 ans. Ce niveau devra être déterminé à l'aide des formules standards élaborées par le CEIOPS selon différents modules de risque, mais pourra alternativement être déterminé de façon interne et propre à la compagnie d'assurance à l'aide de « modèles internes » validés par les autorités de contrôle. Une autre solution possible est également de ne déterminer que quelques modules de risques à l'aide des formules standard et de déterminer les autres modules de risque à l'aide d'un modèle propre à l'entreprise, cette méthode s'appelle le « modèle mixte »

Si ce niveau cible n'est pas atteint, un niveau minimum MCR devra être respecté et surveillé. Il s'agit d'un second seuil d'alerte de la solvabilité représentant le niveau en dessous duquel les fonds propres ne doivent pas descendre sous peine d'une intervention des autorités de contrôle puisqu'elles considèrent qu'au niveau de ce seuil l'entreprise d'assurance ne peut plus fonctionner normalement ; une augmentation rapide de capital est alors exigée et à défaut un retrait d'agrément est effectué. Du fait de l'objectif de ce niveau minimum, le calcul de ce seuil devra être simple, rapide et permettre une mesure fréquente tout en étant fiable et robuste.

2.2 Les modules de risques

Le calcul SCR qui permet de déterminer le niveau d'exigence de marge est effectué de sorte de prendre en compte les risques réels d'une compagnie d'assurance, y compris des risques exogènes à son activité d'assurance.

Pour cela les formules standards proposées par le CEIOPS divisent ces risques en plusieurs modules corrélés. Le schéma ci-dessous présente les différents modules de risques à calculer lors des QIS pour la détermination du capital cible requis :

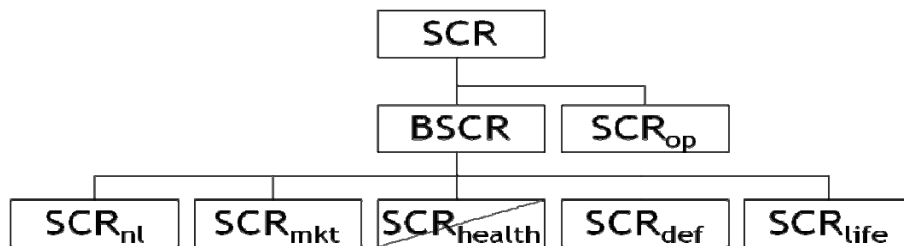


Figure 21 : modules de risques pour le calcul du SCR

Selon le schéma ci-dessus, nous pouvons voir que le SCR dépend dans un premier temps de deux éléments : la charge de capital pour le risque opérationnel notée SCR_{op} et le capital de solvabilité requis de base noté BSCR (Base Solvency Capital Requirement) lui-même constitué de plusieurs modules.

Le SCR est alors la somme de ces deux éléments considérés indépendants :

$$SCR = BSCR + SCR_{op}$$

Le BSCR est lui aussi constitué de plusieurs éléments de risques : le risque de souscription Non Vie SCR_{nl} , le risque de marché SCR_{mkt} , le risque de souscription santé SCR_{health} , le risque de défaut de contrepartie SCR_{def} , et le risque de souscription Vie SCR_{life} . Mais ces éléments de risques ne sont pas considérés indépendants. En effet, le CEIOPS fournit une matrice de corrélation $[Corr_{i,j}]_{i,j}$, dont la paramétrisation est à l'objectif du QIS3, pour le calcul de ce BSCR :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

Evaluons de plus près chacun de ces modules de risque :

Le risque opérationnel SCR_{op} représente le risque de perte dû aux procédures internes, personnes, systèmes de gestion et d'exploitation insuffisants, inadéquats ou défaillants pour l'entreprise. Ce module de risque inclut également des éléments externes comme le risque juridique. Il est conçu pour traiter tous les risques opérationnels dans la mesure où ils n'ont pas été explicitement couverts par d'autres modules. Notamment, le risque de réputation ou le risque de décisions stratégiques ne sont pas inclus dans ce module.

Le risque de souscription Non Vie SCR_{nl} est le risque d'assurance spécifique résultant des contrats d'assurance. Il fait référence à l'incertitude concernant les résultats de la souscription

de l'assureur. Ces incertitudes se trouvent au niveau du montant et des délais de règlement des prestations en relation avec le passif réellement existant et du volume de l'activité potentielle future et des taux de primes s'y rapportant. La charge de charge du capital pour ce risque de souscription est déterminée en fonction des charges de capital pour le risque de prime et de réserves pour le risque catastrophe.

Le risque de souscription santé SCR_{health} ne rentre pas en compte dans l'étude du QIS3 en France étant donné que l'assurance santé est obligatoire en France et rattachée au risque de souscription Non Vie.

Le risque de souscription Vie SCR_{life} regroupe l'ensemble des risques liés à une tarification insuffisamment prudente lors de la souscription ou le rachat du contrat. Ce module inclut les risques de mortalité, de longévité et de morbidité ainsi que les risques de dépenses et de catastrophe.

Le risque de défaut de contrepartie SCR_{def} est le risque qu'un débiteur ne respecte pas ses engagements dans les conditions initialement prévues. Notamment le défaut de la compagnie de réassurance est inclus dans ce module.

Le risque de marché SCR_{mkt} résulte du niveau et de la volatilité des cours de marché des actifs financiers. Cette exposition au risque est mesurée par l'impact des mouvements dans le niveau des variables financières telles que le cours des actions, de l'immobilier, du taux de change...

Le SCR est donc calculé à l'aide de l'interaction de chacun de ces modules de risque, la détermination de la méthode de calcul de chacun de ces modules de risque étant l'objectif des QIS mis en œuvre par le CEIOPS.

De même que pour le SCR, le MCR dépend de plusieurs modules de risque corrélés :

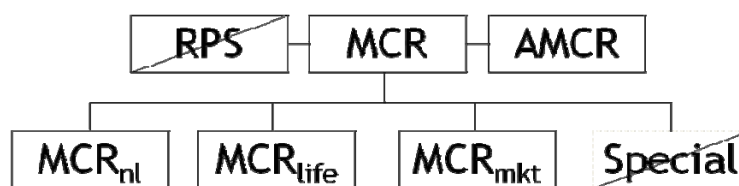


Figure 22 : modules de risques pour le calcul du MCR

Les risques à prendre en compte dans le calcul du MCR sont plus restreints que les risques utilisés dans la détermination du SCR. En effet seul le risque de marché, risque de souscription Vie et risques de souscription Non Vie seront à prendre en compte dans le calcul de ce second seuil d'exigence de capital. Cependant, l'évaluation de ces charges de capital n'est pas la même que celle envisagée pour le calcul du SCR. En effet, elles sont déduites à un calcul plus simple permettant un suivi régulier et périodique de ce seuil.

La détermination du MCR dépend également de deux autres éléments parallèles, l'ajustement du MCR pour la réduction du partage des bénéfices (AMCR) reflète la perte potentielle des futurs bonus non garantis sur les produits d'assurance vie.

Le minimum de capital requis absolu (AMCR) représente également un plancher minimum pour le SCR. La commission européenne n'ayant pas encore de position définitive sur le sujet, le QIS3 définit trois hypothèses de montant minimum respectivement égales à 1, 2 et 3 millions d'euros.

2.3 Le risque de marché

Chacun des modules de risques présentés ci-dessus dépend eux-mêmes de sous-modules de risque. L'objectif de ce paragraphe est de détailler les sous-modules, selon la version du QIS3, du risque de marché, risque que nous chercherons par la suite de ce mémoire à déterminer par une méthode alternative.

Le risque de taux d'intérêt MKT_{int} existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations de la structure de la courbe de taux d'intérêt et qui ne sont pas affectés aux polices dans lesquelles les souscripteurs supportent le risque d'investissement. Il est obtenu en effectuant des variations à la baisse ou à la hausse de la structure des courbes des taux fournie par le CEIOPS.

Le risque action MKT_{eq} résulte du niveau ou de la volatilité des cours des actions. L'exposition au risque action fait référence à tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours des actions. La charge de capital pour couvrir ce risque est déterminée comme l'effet immédiat sur la valeur nette des actifs et passifs espérée dans le cas d'un scénario de choc sur action.

Le risque immobilier MKT_{prop} résulte du niveau ou de la volatilité des cours de l'immobilier. La charge de capital pour le risque immobilier est déterminée en effectuant une chute de 20% des benchmark immobiliers sur la valeur nette des actifs et des passifs.

Le risque de devise MKT_{fx} résulte du niveau ou de la volatilité des taux de change. La charge de capital pour le risque de devise est déterminée en effectuant une variation de 20% sur la valeur nette des actifs et des passifs.

Le risque de spread MKT_{sp} est la part de risque issue des instruments financiers et qui est expliqué par la volatilité des spreads de crédit sur la structure de courbe de taux d'intérêt sans risque. Il reflète la variation de valeur due à un mouvement de la courbe de crédit relative à la structure de courbe sans risque

Les concentrations du risque de marché MKT_{conc} présentent un risque supplémentaire pour un assureur en raison de la volatilité supplémentaire qui existe dans les portefeuilles d'actifs concentrés ainsi que du risque supplémentaire de perte de valeur partielle ou totale définitive en raison de la défaillance d'un émetteur.

La charge de capital pour le «risque de marché» est également déterminée à l'aide d'une matrice de corrélation entre ces différents sous-modules fournie par le CEIOPS.

2.4 Le modèle interne

Un modèle interne est une méthode alternative aux formules standards proposées dans le cadre de *Solvabilité 2*. Ce modèle peut être à fois déterministe ou stochastique, permettant de déterminer le besoin en capital d'une compagnie en fonction d'une probabilité de ruine jugée acceptable basée sur le profil de risque de celle-ci. Autrement dit, il s'agit d'une traduction littérale et quantitative de la réalité des risques assurés. Ce modèle peut être également « partiel » dit modèle mixte ; dans ce cas, la compagnie applique bien les formules standards proposées par le CEIOPS, mais remplace le calcul d'un ou plusieurs modules de risque par un modèle alternatif.

Le choix d'un modèle stochastique est à privilégier car il permet de tester la robustesse financière d'une société suivant un grand nombre de scénarios pouvant correspondre à des situations réelles. Ce scénarios prendraient en compte différents facteurs tels que, par exemple, une sinistralité exceptionnelle impactant l'ensemble du portefeuille, une volatilité importante des marchés boursiers ou la défaillance des réassureurs.

Ce modèle interne est par conséquent un outil de simulation destiné à fournir des projections de l'activité et des résultats de l'entreprise, respectant certaines propriétés tel que la cohérence des exigences de solvabilité par rapport aux résultats obtenus par une formule standard ou encore la transparence et le réalisme du modèle.

L'objectif premier du développement d'un modèle interne est de calculer son exigence de fonds propres au plus juste des risques qu'elle encourt afin d'éviter une immobilisation de capital exigée par les formules standards qui ne serait nécessaire à sa couverture de risque. Afin d'avoir un modèle interne fonctionnel à tous niveaux, celui-ci devra également être capable de fournir des renseignements interprétables et exploitables comme des reporting de la situation financière de l'entreprise de manière régulière au moyen d'indicateurs clairs.

Le modèle interne permet également aux assureurs, en tenant compte de risques inhérents à leurs activités, de retracer une image fidèle et réaliste du profil de risque et de fournir ainsi des indicateurs cohérents sur sa santé financière. Il est alors possible de déterminer des niveaux de besoin en capitaux appropriés et de prendre de bonnes décisions de gestion, telle que la détermination de l'allocation stratégique d'actifs. Il n'est donc pas construit uniquement en fonction des exigences réglementaires : sa vocation est aussi de servir au contrôle des risques et à l'aide à la décision technique et financière.

La mise en œuvre du modèle interne est un processus long et relativement coûteux, de telle sorte que toutes les entreprises d'assurance (notamment les petites entreprises) ne pourront pas élaborer un tel projet. Cette mise en œuvre doit se faire en plusieurs étapes et selon plusieurs facteurs.

Un modèle interne doit être contrôlé régulièrement à la fois au sein de la compagnie afin de tenir compte de l'évolution des paramètres de modélisation mais aussi par les autorités de contrôle qui valide le modèle interne pour son utilisation. Les autorités de contrôle

pourront refuser l'utilisation d'un modèle interne si celui-ci ne retrace pas convenablement les risques de la société mais pourra également imposé à une compagnie de calculer ses exigences de solvabilité au moyen d'un modèle interne si la formule standard ne reflète pas les risques réels de l'entreprise. La mise en place d'un tel modèle sera également irréversible pour les compagnies, c'est-à-dire qu'elles ne pourront plus utiliser la formule standard les années à venir si celle-ci fournit des exigences en capital moins coûteuses qu'un modèle interne.

Le besoin en capital calculer à l'aide des formules standards est déterminé à partir des différents risques de l'entreprise (synthétisés en modules de risque).pour faire face aux engagements de l'assureurs et en intégrant les corrélations qui existent entre ces risques.

Pour le modèle interne ce besoin en capital devra être également déterminé en fonction des différents risques de l'entreprise. Selon le QIS3, ce montant est déterminé de sorte que la probabilité de ruine de la société soit inférieure à 0.5% à horizon 1 an.

Nous pouvons définir la ruine d'une entreprise lorsque ses fonds propres sont négatifs à un horizon de temps donné. Dans la mesure où cela est possible, les estimations tirées des modèles internes doivent être compatibles avec les objectifs de calibrage pour la formule standard, à savoir une **VaR standard de 99,5% sur un horizon à un an**, afin de permettre la comparaison des résultats du calcul de la formule standard. Cependant il sera possible a un assureur de se référer un horizon temporelle différent ou d'utiliser une autre mesure de risque que le calibrage utilisé par la formule standard si le SCR garanti aux assuré un niveau de protection au moins équivalent à celui calculé avec une VaR de 99.5% sur un horizon d'un an.

Dans la pratique, pour calculer une probabilité de ruine de 99,5% à un an, il est nécessaire de modéliser le bilan de la compagnie d'assurance afin de projeter et confronter dans le temps passif et actif.

CHAPITRE 3 : Un programme d'optimisation

Jusqu'alors dans le dispositif prudentiel français *Solvabilité 1*, la solvabilité des compagnies d'assurance est évaluée par une série de provisions au passif et des **contraintes réglementaires** sur la détention et sur l'allocation des placements financiers à l'actif ; ces deux aspects étant donc traités de façon distincte et indépendante.

En intégrant une notion de risque global encouru par la compagnie d'assurance pour la détermination du besoin en capital, *Solvabilité 2* modifie ces règles de calcul. Ainsi, le risque de marché influant l'évaluation du capital requis (SCR), l'allocation d'actifs est donc directement liée au niveau de fonds propres nécessaires.

Selon le QIS3, l'objectif quantitatif du référentiel *Solvabilité 2* est de détenir un niveau de capital suffisant afin d'éviter la ruine avec une probabilité de 99,5% sur un horizon de 1 an. Nous pouvons définir la ruine d'une compagnie d'assurance comme étant son incapacité à couvrir tous ses engagements vis-à-vis des tiers. Et selon une schématisation simplifiée de l'activité d'assurance, nous pouvons modéliser la ruine d'une entreprise comme étant l'insuffisance des actifs financiers de l'entreprise face aux prestations qu'elle doit fournir au passif.

Sous *Solvabilité 2*, l'allocation d'actif aura donc pour contrainte supplémentaire de permettre de couvrir les prestations dues de l'assureur selon un niveau de probabilité élevée (99,5% avec une notion de Value at Risk selon le QIS3) à un horizon de temps donné (1 an toujours selon le QIS3). Nous nommerons cette contrainte par la suite « **contrainte de risque** ».

Contraintes réglementaires :

Les articles R332-3 et R332-3-1 du Code des Assurances, se référant à l'article R332-1 du même code pour la définition des différents types d'actifs financiers, réglementent la part du portefeuille investie dans ces différents types d'actifs.

Par rapport à notre représentation en cinq classes d'actifs réalisée dans la première partie de ce mémoire, nous pouvons interpréter les contraintes réglementaires de la manière suivante :

- La part des placements financiers de la compagnie, investie dans la classe d'actif **Action**, ne doit pas excéder 65%
- La part des placements financiers de la compagnie, investie dans la classe d'actif **Hedge Funds**, ne doit pas excéder 10%
- De plus, les parts des placements financiers de la compagnie, investies conjointement dans la classe d'actif **Action** et dans la classe d'actif **Hedge Funds** ne doivent pas excéder 65%
- La part des placements financiers de la compagnie, investie dans la classe d'actif **Monétaire** ne doit pas excéder 10%

- La part des placements financiers de la compagnie, investie dans la classe d'actif **Immobilier** ne doit pas excéder 40%
- Et la part des placements financiers de la compagnie, investie dans la classe d'actif **Obligation** n'est pas limitée réglementairement

Contrainte de risques :

Selon l'état d'avancement de la réforme *Solvabilité 2* lors du QIS3, nous définissons la contrainte de risques comme étant la règle suivante :

La probabilité de non ruine de l'assureur à horizon 1 an est supérieure à 99,5% suivant une notion de Value at Risk ; c'est-à-dire que les actifs de la compagnie permettent de couvrir ses prestations dues tout au long d'une année.

Rappelons la définition de la Value at Risk (Var) :

La Value at Risk au seuil α d'une distribution X , notée $VaR_\alpha(X)$ est le quantile d'ordre α de cette distribution X :

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

Où $F_X(\cdot)$ représente la fonction de répartition de la distribution X

De cette définition rapportée à notre problématique, nous pouvons redéfinir la contrainte de risques imposée par le nouveau référentiel prudentiel :

Le quantile au seuil 99,5% du résultat technique projeté à horizon 1 an de notre compagnie d'assurance est positif ; le résultat technique étant représenté par le montant des actifs financiers retraités des prestations dues.

La mesure de cette contrainte de risques nécessite donc la projection sur un an du portefeuille financier de la compagnie ainsi que des engagements au passif. La première partie de ce mémoire permet une modélisation et donc une projection de des actifs financiers SHAM. Nous disposons également d'un jeu de 1 000 simulations, réalisé en parallèle par le service actuariat, des prestations dues SHAM. Ainsi en simulant la réalisation de 1 000 cours des différentes classes d'actifs, nous obtenons $1\ 000 \times 1\ 000 = 1\ 000\ 000$ de réalisations de résultats techniques projetés.

Afin de vérifier notre contrainte de risque, l'allocation d'actifs doit vérifier le fait que moins de 0,5% des réalisations de résultats projetés soient négatives (soit moins de 5 000 réalisations sur les 1 000 000 de possibilités testées)

Un programme d'optimisation :

L'objectif principal de l'allocation stratégique d'une compagnie est de maximiser son rendement financier espéré tout en maintenant un certain niveau de contrôle du risque. Il s'agit par exemple de maximiser le rendement espéré pour un niveau de risque accepté donné ou réciproquement, de minimiser le risque pour un niveau de rendement attendu.

L'allocation stratégique d'actif correspond donc à un programme d'optimisation à deux variables : rendement et risque. Dans l'application aux compagnies d'assurances françaises et dans le référentiel *Solvabilité 2* viennent s'ajouter au problème deux niveaux de contraintes : les contraintes réglementaires et la contrainte de risque.

Si les contraintes réglementaires, étant déterministes, sont facilement vérifiables et modélisables, la contrainte de risques nécessitant une approche stochastique et plus difficilement mesurable puisqu'il s'agit de vérifier la valeur d'un quantile aux extrêmes d'une loi multifactorielle (dans notre modèle : cinq classes à l'actif et une classe au passif)

Nous pouvons tout de même définir un programme d'optimisation pour la détermination de l'allocation stratégique d'actifs :

- **Fonction objective à optimiser** : rendement moyen sur un an des 1 000 projections d'actifs suivant l'allocation initiale
- **Contrainte 1** : sachant que cette allocation initiale vérifie les contraintes réglementaires
- **Contrainte 2** : et sachant que la projection sur un an de cette allocation initiale, appliquée à 1 000 réalisations de cours des différentes classes d'actifs et confrontée à 1 000 réalisations de sinistralités au passif, implique qu'il y ait moins de 5 000 résultats techniques négatifs.

Du fait de la particularité de la contrainte 2, on ne peut trouver de solution explicite à ce programme. La partie suivante propose donc une solution alternative de résolution : Les algorithmes génétiques. Bien que cette méthode ne garantisse pas de trouver le réel optimum à notre programme, il permet de déterminer une allocation cible acceptable sous le référentiel *Solvabilité 2*.

PARTIE 3 :

**OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES
DE RISQUES**

L'optimisation est l'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées modernes, et de nombreuses recherches, à la fois pratiques et théoriques, lui sont consacrées.

Un problème d'optimisation se présente généralement sous la forme d'un programme :

- fonction objective $f : A \rightarrow \mathfrak{R}$ que l'on cherche à maximiser ou à minimiser
- contraintes que doivent respecter l'ensemble des variables des solutions

La solution de ce programme d'optimisation est la variable $X \in A$ qui maximise la fonction et vérifie les contraintes.

Au fil du temps, les mathématiciens ont cherchés à résoudre des programmes d'optimisation de plus en plus complexes à l'aide d'algorithmes. L'optimisation est alors divisée en branche d'étude : elle peut être déterministe ou stochastique, linéaire ou complexe, discrète ou multicritère, locale ou globale...

Les métaheuristiques forment une famille d'algorithmes d'optimisation visant à résoudre des programmes d'optimisation difficiles pour lesquelles on ne connaît pas de méthodes classiques efficaces (fermées ou discrètes). Cette famille se compose principalement d'algorithmes stochastiques itératifs qui progressent vers un optimum global de la fonction objective par échantillonnage.

Les algorithmes génétiques, que nous présenterons et appliquerons dans cette partie à notre programme d'optimisation sous contraintes de risques, sont un exemple de métaheuristiques.

En effet, il s'agit d'un algorithme stochastique itératif de recherche des meilleures solutions possibles. Puisque dans ce genre de programme à contraintes non linéaires, l'optimum est rarement une solution unique. Mais en contrepartie de son efficacité, cette méthode de recherche itérative et stochastique ne peut garantir que la solution finale de l'algorithme est bien l'optimum réel de la fonction objective.

Bien que l'exactitude de la solution finale ne soit pas garantie, cette méthode porte un grand intérêt dans la détermination de notre allocation stratégique d'actifs. En comparaison des méthodes classiques, elle simplifie la résolution du programme. De plus elle permet une maîtrise du temps de calcul et aboutit toujours à une solution. Cette solution est considérée efficace dans le sens où elle respecte les contraintes du problème et est plus optimale à un grand nombre de solutions testées.

CHAPITRE 1 : Les algorithmes génétiques

1.1. Présentation

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation stochastiques basés sur la théorie de l'évolution de C. DARWIN. Ils s'inspirent des mécanismes de sélection naturelle et des phénomènes génétiques. Le principe de base consiste à simuler le processus d'évolution naturelle dans un environnement hostile (les contraintes). Ces algorithmes utilisent un vocabulaire similaire à celui de la génétique.

1.1.1. Origine

En 1860, dans son livre intitulé *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou la lutte pour l'existence dans la nature*, C. DARWIN expose sa théorie de l'existence des espèces selon laquelle au travers du processus de reproduction, les êtres vivants se sont graduellement adaptés/optimisés à leur milieu naturel sous l'influence des contraintes extérieures. Il évoque quatre lois pour définir l'évolution des espèces :

- la loi de croissance et de reproduction,
- la loi d'hérédité qu'implique quasiment la loi de reproduction,
- la loi de variabilité et de mutation, résultant des conditions d'existence,
- la loi de multiplication des espèces qui amène la lutte pour l'existence et qui a pour conséquence la sélection naturelle.

Les algorithmes génétiques ont déjà une histoire relativement ancienne puisque c'est en 1960 que John HOLLAND a l'idée d'utiliser cette théorie sur le processus de sélection naturelle des espèces dans les mathématiques, en étudiant des systèmes évolutifs de solutions.

En 1975 John LANGTON introduit le premier modèle formel et lui donne le nom d'algorithme génétique. Ce modèle servira ensuite de base aux études ultérieures et sera notamment repris dans l'ouvrage de GOLDBERG, début de la popularisation de cette méthode d'optimisation.

Depuis les années 90, les études sur cette résolution stochastique se multiplient, dans le même sens que les avancées informatiques. Elle est notamment une base reconnue de l'étude de l'intelligence artificielle.

1.1.2. Domaines d'application

Les premiers travaux sur les algorithmes génétiques avaient pour but de simuler les structures biologiques sur ordinateur. L'ouvrage de John LANGTON généralise ce modèle à l'application mathématique pour la résolution de programmes d'optimisation.

Depuis ses origines, l'étude des algorithmes génétiques s'est très répandue dans le développement de l'intelligence artificielle où cette méthode de résolution y est devenue incontournable.

Cette méthode de résolution s'est développée proportionnellement à l'accroissement des outils informatiques. Aujourd'hui son application touche des domaines très divers, et se généralise de plus en plus pour sa facilité d'utilisation

1.1.3. Vocabulaire

Toujours en suivant l'analogie avec la théorie des espèces et la sélection naturelle, les algorithmes génétiques utilisent le même vocabulaire que la biologie, ainsi :

- Un individu désignera une solution (valide ou non) à notre problème d'optimisation,
- Un gène est une des variables qui composent l'individu,
- Le génotype est ainsi l'ensemble des variables (X de A) qui le caractérise,
- Le milieu naturel est l'espace de définition d'un individu borné des contraintes,
- Une population est un ensemble d'individu solution ou non du problème,
- Une génération sera une itération de l'algorithme

On peut également aller plus loin dans cette analogie en nommant chromosome et phénotype la décomposition binaire de chaque gène. Dans la suite de cette partie, nous nommerons également fitness d'un individu, la valeur de la fonction objective pour cet individu.

Le principe de cet algorithme est donc de faire évoluer une population sur plusieurs générations dans un milieu naturel donné. Une génération étant issue de la précédente selon le principe du processus de sélection naturelle.

1.2. L'algorithme

L'algorithme peut se représenter à l'aide du schéma ci-dessous.

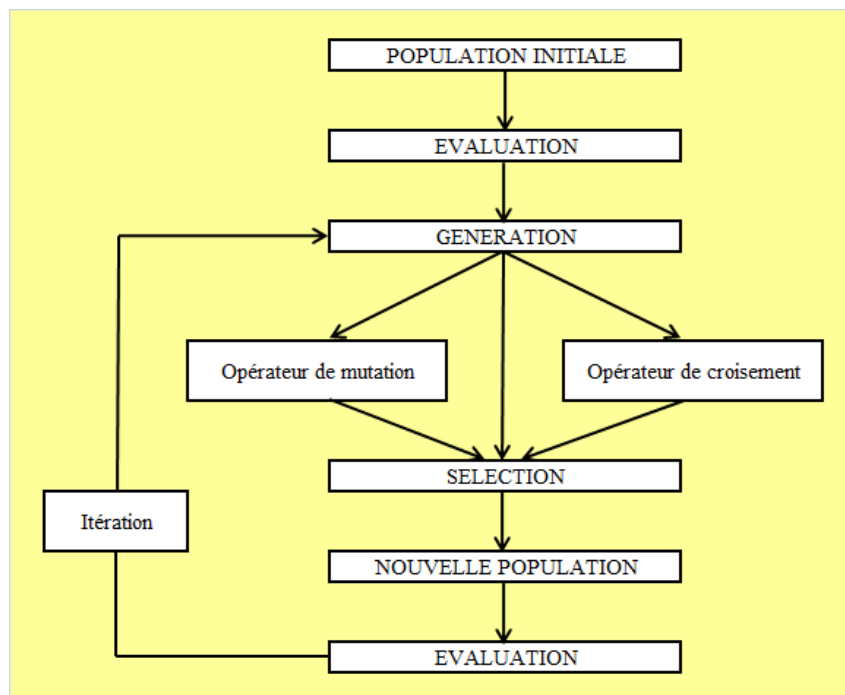


Figure 23 : Schéma général de des algorithmes génétiques

Il s'agit de simuler l'évolution d'une population à travers des mutations « génétiques » et des croisements/reproductions. Chaque nouvelle génération est une sélection des meilleurs individus issus de l'évolution naturelle de la précédente.

Selon cette méthode, plusieurs individus sont créés selon un modèle aléatoire puis sont soumis à un procédé d'évaluation (selon le milieu naturel) et notés selon leur fitness. Les plus « adaptés », c'est-à-dire les solutions les plus optimales, ont plus de chance de survivre. Et la population évolue par générations successives en croisant et en mutant les meilleures solutions. Sur plusieurs générations nous obtenons donc une population d'individus, non forcément optimaux, mais satisfaisant au mieux le programme en un temps de calcul maîtrisé.

1.2.1. Population initiale

Pour démarrer un algorithme génétique, il faut créer une population à faire évoluer. La manière dont le programme va créer chacun des individus de cette population initiale est entièrement libre ; un individu ne respectant pas forcément les contraintes. Il suffit que tous les individus créés soient de la forme d'une solution potentielle, sans forcément créer de bons individus.

Il est recommandé de créer chaque individu de façon aléatoire pour obtenir une diversité des solutions. Plus la population de départ est diversifiée, plus le périmètre de recherche est vaste.

La première étape de l'algorithme est le codage, au mieux aléatoire, des paramètres/chromosomes constituant un individu. Trois types de codage sont fréquemment utilisés :

- Le codage binaire : il s'agit du codage le plus utilisé. Chaque gène dispose d'un alphabet binaire $\{0,1\}$ et un chromosome est constitué d'un ensemble de gènes.
- Le codage réel : utilisé lorsque que le programme est facilement représenté par une fonction et des contraintes réelles. Dans ce cas nous modélisons directement les chromosomes de l'individu.
- Le codage de Gray : c'est un codage se rapprochant du codage binaire. Mais il permet une meilleure interprétation des individus car en effet selon le paramétrage il permet que deux individus proches ne diffèrent que de quelques bits. Mais le paramétrage peut être long.

Le choix de la taille de la population est également libre. Il s'agit de faire un arbitrage entre la diversité de la population initiale et le temps de calcul.

1.2.2. Evaluation

Une fois la population initiale créée, la seconde étape consiste à évaluer cette population afin de déterminer les individus les plus aptes à survivre dans le milieu naturel ; ceux qui participeront à l'évolution de la population.

Il peut s'agir de classer les individus selon leur fitness et de ne sélectionner que ceux atteignant un niveau donné. Il peut également ne s'agir que de la sélection d'individus

respectant les contraintes du problème sans forcément être une « bonne » solution. Une fois encore le(s) critère(s) de jugement est(sont) laissé(s) libre(s) au programmeur.

1.2.3. Nouvelle génération

Le principe même des algorithmes génétiques se trouve dans cette étape : la création de nouveaux individus issus de la population initiale à l'aide des opérateurs (selon le schéma précédent) et la sélection des meilleurs au sens de la fitness.

Dans cette étape également, le choix du procéder est laissé libre au programmeur, mais elle nécessite toujours 3 phases :

1) La sélection des individus sources :

Il s'agit de choisir quel sera le ou les individus sources pour la création du ou des nouveaux individus. Dans cette étape, il est préférable que cette sélection se fasse de manière aléatoire afin de traiter toute la diversité de solutions possibles issues de notre population initiale.

Mais, si comme par analogie avec la théorie des espèces les meilleurs individus ont une plus forte probabilité d'être issus des meilleurs initiaux, cet aléa peut être biaisé. En effet, il est possible de donner plus de chance aux individus ayant une meilleure fitness et un meilleur rang dans la population, si cette hiérarchisation a été faite lors de l'étape précédente. La probabilité de sélection peut être proportionnelle aux fitness des individus ou inversement proportionnelle aux rangs des individus dans la population source.

2) La création de nouveaux individus :

Il s'agit d'appliquer les opérateurs de création aux individus sources sélectionnés à l'aide de la phase précédente. Toujours par analogie avec la théorie des espèces, il existe deux types d'opérateur :

- L'opérateur de croisement : à partir de plusieurs individus sources (généralement deux parents) le croisement des gènes de ces individus permet de créer un ou plusieurs autres individus (enfants)
- L'opérateur de mutation : il s'agit de modifier un ou plusieurs paramètres d'un individu source afin de créer un nouvel individu, généralement en changeant un ou plusieurs gènes.

Chaque individu créé à l'aide de ces deux opérateurs peut ou non respecter les contraintes du programme. Il convient alors de les évaluer et de calculer leur fitness afin de connaître leur rang dans la population.

3) Le remplacement et intégration dans la nouvelle population

Une fois que nous avons créé de nouveaux individus que ce soit par croisement ou par mutation, il nous faut sélectionner ceux qui vont continuer à participer à l'amélioration de notre population.

Cette phase peut se faire après la création de chaque individu ce qui implique que le prochain individu créé peut être issu du nouveau inséré, ou après avoir créé tous les nouveaux individus, le principe de l'algorithme génétique étant de garder les meilleurs au sens de la

fitness. De même qu'il est possible de conserver tous les nouveaux individus en plus de notre population, ce qui augmenterait également le temps de traitement. Toutefois, il n'est pas recommandé de remplacer toute la population initiale par la nouvelle, car cela permet de garder la diversité initial et de plus ces nouveaux individus ne sont pas forcément meilleurs que leur parents.

La taille de la nouvelle génération est au choix du programmeur, généralement la taille de la population initiale est conservée.

1.2.4. réitération

Le nombre de génération est aussi un élément à déterminer lors de la programmation de l'algorithme. Un nombre de réitérations trop faible et le brassage des meilleurs individus n'est pas suffisant. Un nombre de réitérations trop élevé et la population n'évolue plus (garde les mêmes individus) pour un temps de traitement trop long.

Certains ouvrages conseillent un nombre d'itérations au moins égale au nombre répétitions nécessaire pour que chaque individu issu de la population initiale ait la probabilité d'être sélectionné au moins une fois lors de l'opérateur de croisement ; soit un nombre d'itérations au moins égal à la moitié de la taille de la population d'origine.

1.3. Limites

Les algorithmes génétiques sont présentés comme très efficaces, mais ils présentent tout de même plusieurs limites d'implémentation ou de résolution.

La méthode générale des algorithmes génétiques laisse une grande liberté dans le paramétrage et dans l'implémentation des différents traitements. Et pour une plus grande efficacité, ces paramètres et les méthodes de traitements doivent être implémentés en fonction du problème traité. Mais ce choix n'est pas souvent évident et nécessite bien souvent des arbitrages plus que de la logique. Mais libre par la suite de tester tel ou tel paramétrage pour améliorer l'algorithme appliquer à un programme donné.

De plus rien ne certifie que la solution finale de l'algorithme correspond à la solution théorique optimale du programme. Cette méthode de résolution n'est pas une méthode exacte.

Pour une plus grande efficacité de résolution, il est possible d'augmenter la taille de la population initiale ou d'augmenter le nombre d'itérations du processus. Mais le temps de calcul peut s'avérer non négligeable dans le choix de ces paramètres.

Un autre problème important est celui des optima locaux. En effet, lorsqu'une population évolue, il se peut que certains individus qui à un instant occupent une place importante au sein de cette population deviennent majoritaires. À ce moment, il se peut que la population converge vers cet individu et s'écarte ainsi d'individus plus intéressants mais trop éloignés de l'individu vers lequel on converge. Pour vaincre ce problème, il existe différentes alternatives comme l'ajout de quelques individus générés aléatoirement à chaque génération.

Mais les algorithmes génétiques ont l'énorme avantage de pouvoir être appliqués dans un grand nombre de domaines de recherche de solution, lorsqu'il n'est pas nécessaire d'avoir la solution optimale, qui prendrait par exemple trop de temps et de ressources pour être calculée (ou tout simplement si personne n'est capable de la trouver de manière théorique). Ils ont également l'avantage de trouver de manière certaine une solution au problème (non forcément optimale) quand d'autres méthodes ne sont pas réalisables.

Les algorithmes génétiques sont aussi particulièrement adaptés à l'évaluation de problèmes multicritères et à la réalisation de recherches de valeurs optimales selon plusieurs objectifs et contraintes simultanés, où la solution optimale n'est pas forcément unique.

CHAPITRE 2 : Application à l'allocation stratégique

Rappelons le programme que nous cherchons à optimiser à l'aide des algorithmes génétiques :

- **Fonction objective à optimiser** : rendement moyen sur un an des 1 000 projections d'actifs suivant l'allocation initiale
- **Contrainte 1** : sachant que cette allocation initiale vérifie les contraintes réglementaires
- **Contrainte 2** : et sachant que la projection sur un an de cette allocation initiale, appliquée à 1 000 réalisations de cours des différentes classes d'actifs et confrontée à 1 000 réalisations de sinistralités au passif, implique qu'il y ait moins de 5 000 résultats techniques négatifs.

2.1. Population initiale

Nous devons donc créer une population initiale d'allocation possible respectant ou non les contraintes du problème.

Chaque individu/allocation est donc composé(e) cinq gènes/variables :

- la répartition du portefeuille dans la classe actions
- la répartition du portefeuille dans la classe immobilier
- la répartition du portefeuille dans la classe Hedge Funds
- la répartition du portefeuille dans la classe obligations
- la répartition du portefeuille dans la classe monétaire

Nous avons décidé de créer cette population de manière aléatoire et suivant les contraintes réglementaires. Nous créons ainsi 10 000 individus où chacune des variables de cet individu suit une loi uniforme bornée par les contraintes réglementaires l'affectant.

Exemple : la répartition du portefeuille dans la classe action suit une loi uniforme $\mathcal{U}([0, \text{lim}])$ où lim est la valeur minimum entre la contrainte affectant la classe action, le reste de la contrainte affectant conjointement la classe action et hedge funds si la répartition de celle-ci a déjà été simulée et le reste de répartition disponible (100% retraité des répartitions des autres classes déjà simulées)

Afin d'éviter tout biais et afin d'obtenir une plus grande diversité dans la population initiale, l'ordre de simulation de ces différentes variables est également réalisé de manière aléatoire.

2.2. Evaluation

Dans cette étape nous écrêtons la population initiale. En effet, nous ne gardons que les individus répondant à la contrainte de risques. Soit sur les 1 000 000 de résultats obtenus par cette allocation, les individus pour lesquels moins de 5 000 résultats sont négatifs.

Nous calculons également le rendement moyen obtenu par chaque allocation. Ce montant représente sa fitness. L'allocation optimale correspondra à l'individu ayant la fitness la plus élevée sachant qu'il respecte chacune des contraintes.

Remarque : Le nombre d'individus composant notre population est presque divisée de moitié

2.3. Nouvelle génération

Dans cette étape, nous créons de nouveaux individus selon deux opérateurs :

- Opérateur de croisement
 - Deux individus sont choisis au hasard dans notre population.
 - De ces deux individus nous en créons un troisième. Les gènes/variables/répartitions d'actifs sont les moyennes des gènes des parents. Cette méthode permet de créer des individus respectant forcément « la contrainte 1 »
 - Ce nouvel individu est évalué et comparé à ses deux parents.
 - Si cet individu respecte la « contrainte 2 » et est supérieur à l'un de ses parents, alors il le remplace dans la population.

Ainsi plusieurs individus sont croisés. Chaque nouveau arrivant remplace un plus faible, le nombre initial d'individu est conservé

- Opérateur de mutation

La méthode de croisement précédemment décrite possède un biais. En effet, en utilisant la moyenne des variables composant notre allocation, nous perdons en terme de diversité de la population (nous nous éloignons des allocations frontières). L'opérateur de croisement permet de palier ce biais.

Il s'agit de créer un nouvel individu de façon aléatoire selon la méthode décrite pour la création de la population initiale. Si cette nouvelle allocation respecte la « contrainte 2 » et afin de conserver la taille de la population initiale, deux individus sont tirés au sort dans la population. Le nouvel individu créé remplacera celui ayant la plus faible fitness

2.4. Réitération

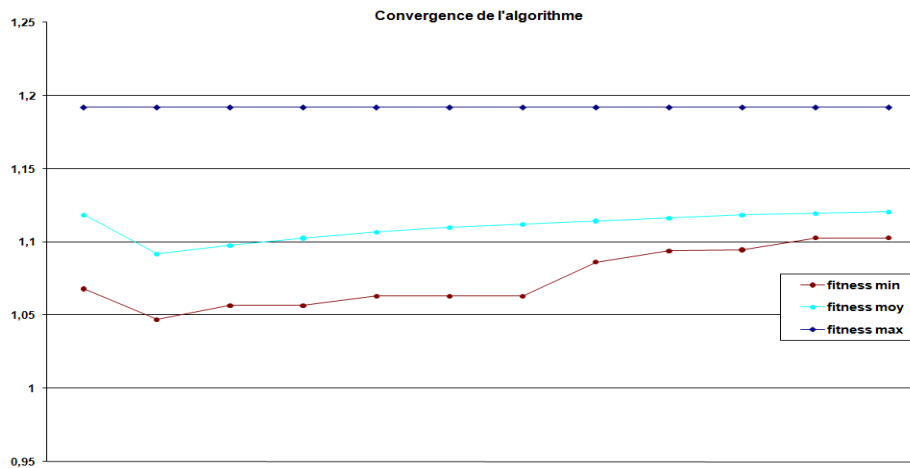
Pour chaque génération, un nombre N d'opérateurs de croisement et de mutation est réalisé. Ce nombre N est au moins égal à la moitié de la taille de la population initiale évaluée.

Ainsi nous créons 10 générations d'allocations possibles.

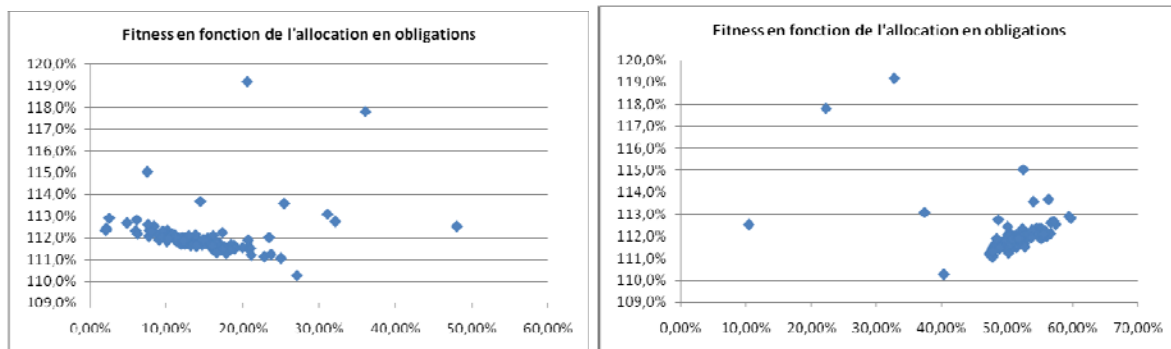
2.5. Résultat et Convergence

A chaque génération, nous avons mesuré parmi la population obtenue, l'allocation ayant la plus petite fitness, la moyenne des fitness de toutes les allocations solutions ainsi que l'allocation ayant la plus grande fitness.

Le graphe suivant montre la convergence de l'algorithme



Voici deux graphes en nuage de points représentant, pour la dernière génération, l'allocation dans la classe d'actifs actions et dans la classe d'actifs obligations :



Nous pouvons remarquer que les résultats obtenus sont très volatiles. En effet l'allocation ayant la meilleure fitness (fitness = 119,2% : 20,56% d'obligations ; 22,25% d'actions ; 27,30% d'immobilier ; 5,47% d'hedge funds et 8,92% en monétaire) est bien différentes de l'allocation ayant la deuxième meilleure fitness (fitness = 117,8% : 36,06% d'obligations ; 32,70% d'actions ; 38,10% d'immobilier ; 4,88% d'hedge funds et 3,76% en monétaire).

Toutefois, nous pouvons remarquer une tendance dans les résultats : fitness \approx 112% : 50% d'obligations, 20% d'actions ; 20% d'immobilier ; 5% d'hedge funds et 5% de monétaire.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons modélisé l'actif d'une compagnie d'assurance, et plus spécifiquement l'actif de SHAM représentant 912 millions d'euros au 31/12/2006. Cette modélisation d'actifs nous a permis de réaliser des simulations testant diverses allocations possibles et testant la robustesse de la solvabilité de cette compagnie.

L'objectif étant d'anticiper les besoins méthodologiques dans la justification du niveau de solvabilité qu'entraînerait la nouvelle réglementation. En effet, si aujourd'hui la solvabilité SHAM est quatre fois supérieure à l'exigence de marge sous l'actuel référentiel, du fait que la durée de son passif Non Vie est très long, les résultats du QIS2 ont montré un besoin de marge multiplié par dix.

L'étude d'un modèle interne mesurant au plus juste le risque réel encouru par la société est donc un enjeu primordial pour SHAM. Ce mémoire a ainsi permis d'être un premier axe de réflexion dans cette problématique.

Il a également permis d'élaborer une stratégie d'allocation au plus juste pour la compagnie, du fait que la modélisation de l'actif et du passif est était réalisée aux données réelles de la compagnie. De plus cette étude a permis de justifier un niveau élevé de solvabilité.

Mais la réforme Solvabilité 2 ainsi que l'étude de la création d'un modèle interne sont loin d'être aboutis ; les pistes pour continuer ces études sont nombreuses et variées.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES :

- BRIGO D., MERCURIO F. (2006) *Interest rate models – Theory and practice*. 2nd Ed. Springer
- LAMBERTON D., LAPEYRE B. (2007) *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses
- MARTELLINI L., PRIAULET P. (2004) *Produits de taux d'intérêt*. Economica
- PLANCHET F., THÉRON P., JACQUEMIN J. (2006) *Modèles financiers en assurance*. Economica
- QUITTARD-PINON F., ROLLANDO T. (2000) *La Gestion du risque de taux d'intérêt*. Economica
- QUITTARD-PINON F. (2001) *Mathématiques financières*. Management et Société (EMS)

ARTICLES :

- BLACK F., SCHOLES M. (1973) *The pricing of option and corporate liabilities*. Journal of Political Economy 81, 637-654
- BONNASSIEUX M., BRUNEL V. (1993) *Un modèle de Ho & Lee généralisé*, Colloque AFIR Rome, 57-74.
- COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A. (1985) *A theory of the term structure of interest rates*. Econometrica 53, 385-407
- EL KOURI N., CHERIF T., DICOUM J.A., SAVIDAN K. (1994) *Modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt : tests et applications*. Cahiers de la Caisse Autonome de Refinancement 6.
- GIET L. (2003) *Estimation par inférence indirecte des équations de diffusion : l'impact du choix du procédé de discrétisation*. Working paper
- HEATH D., JARRROW R., MORTON A. (1990) *Bond pricing and the term structure of interest rates*. Journal of Financial Quantitative Analysis 25, 419-440
- HO T., LEE S.B. (1986) *Term structure movement and the pricing of interest contingent claims*. The Journal of Finance 41, 1011-1029
- HULL J., WHITE A. (1993) *One factor interest rate models and the valuation on interest rate derivative securities*. Journal of Financial Quantitative Analysis 28,235-254
- BERG JENSEN M. (2000) *Efficient method of moments estimation of the Longstaff and Schwartz interest rate model*. Working paper. lien : <http://www.cls.dk/caf/wp/wp-52.pdf>
- KOU S. (2002) *A jump-diffusion model for option pricing*. Management Science 13, 1086-1101
- LONGSTAFF F., SCHWARTZ E. (1992) *Interest rate volatility and the term structure : a two factor general equilibrium model*. The Journal of Finance 47, 1259-1282
- MERTON M. (1976) *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*. Journal of Financial Economics 3, 125-144

PLANCHET F., THÉRON P. (2005a) *Simulation de trajectoires de processus continus*. Belgian Actuarial Bulletin 5, 1-13

PLANCHET F., THÉRON P. (2005b) *Allocation d'actifs selon le critère de maximisation des fonds propres économiques en assurance non-vie*. Proceedings of the 36th ASTIN Colloquium

PLANCHET F., THÉRON P. (2007) *Provisions techniques et capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance : méthodologie d'utilisation de Value-at-Risk*. Assurances et gestion des risques 74

RAMEZANI C., ZENG Y. (1998) *Maximum likelihood Estimation of asymmetric jump diffusion processes : application to Securities prices*. Working paper

TUZOV N. (2006) *GMM parameter estimation for the double exponential jump diffusion process*. Working paper MGMT 616

VASICEK O. (1977) *An equilibrium characterization of the term Structure*. Journal of Financial Economics 5, 177-188

THÈSES, MÉMOIRES ET PROJETS D'ÉTUDE :

BONI A., GENOT B., MOMEINA A. (2005) *Modélisation de cours boursier avec des processus à sauts*. Projet d'étude ISFA

DAMAS V. (2003) *Modélisation dynamique du bilan d'une compagnie d'assurance non vie*. Mémoire ENSAE

DE DOMINICIS L. (2005) *Les algorithmes génétiques dans l'allocation stratégique d'actifs en assurance vie*. Mémoire CEA

DUVEAU C., IONESCU R., JACOB B., SIMONIN F. (2007) *Modèle de capital économique pour les sociétés d'assurance élaboré par l'agence de notation Fitch : PRISM*. Mémoire ISFA

HAMI S. (2004) *Les modèles DFA : présentation, utilité et application*. Mémoire ISFA

MEISTER V. (2007) *Solvabilité II : contexte, valorisation et impacts sur l'exigence en capital*. Mémoire ULPSAUVET C. (2006) *Solvency II –Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non-vie*. Mémoire ISFA

SITES INTERNET :

Modélisation de la courbe des taux. Support de cours ENSAE de PRIAULET P., MRAD M
<http://www.ensae.fr/ParisTech/FA304/FA304.htm>

Les indices de la bourse de Tunis – Méthodologies, calculs et ajustements.
<http://www.bvmt.com.tn/Fonctionnement/indices.html>

Factorisation de CHOLESKY http://fr.wikipedia.org/wiki/Factorisation_de_Cholsky

Edouard Valys Edition- L'esprit du trading www.edouardvalys.com

La bulle immobilière http://fr.wikipedia.org/wiki/Bulle_immobili%C3%A8re

Les algorithmes génétiques <http://khayyam.developpez.com/articles/algo/genetic/>

ANNEXES

Annexe 1 : La courbe des taux zéro-coupon

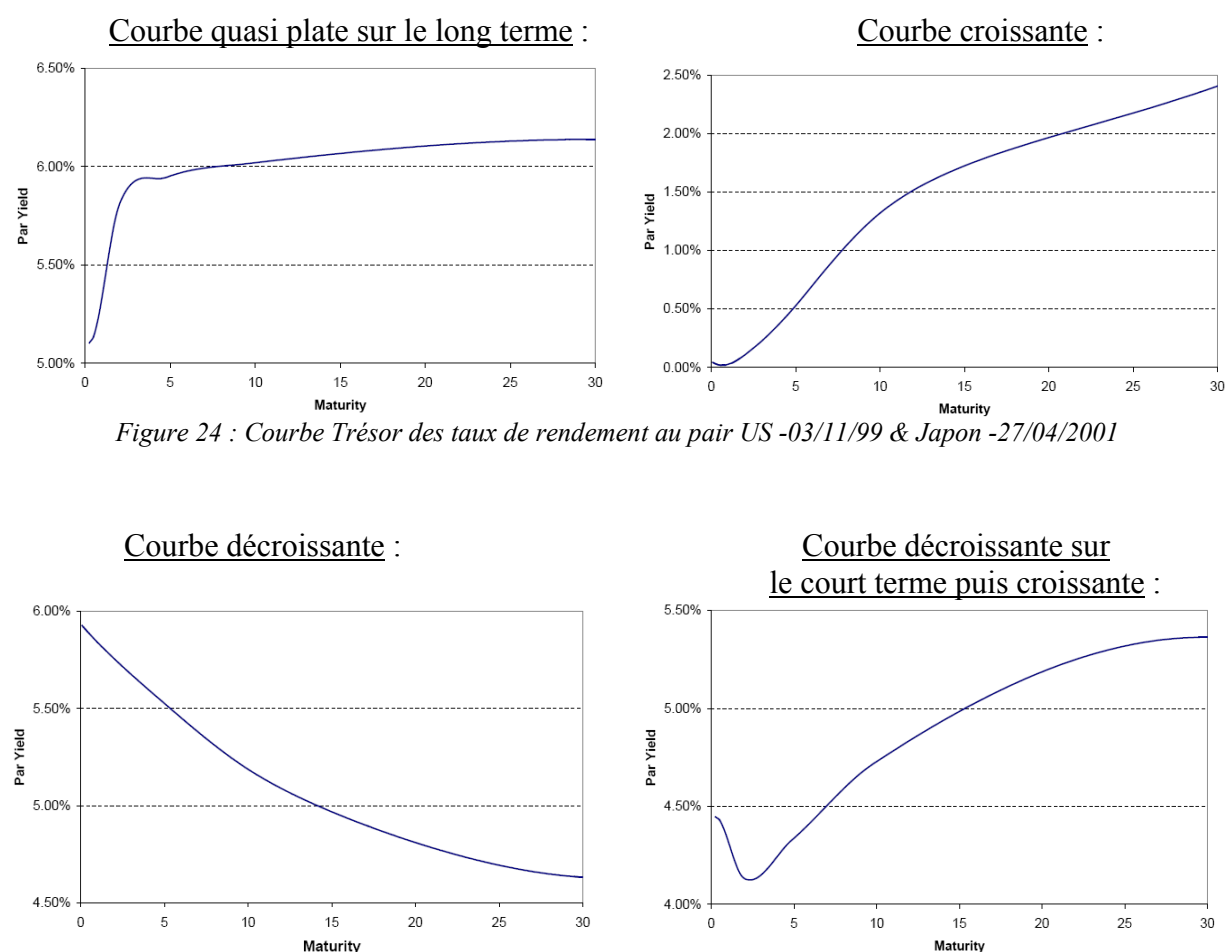
1. Les différentes formes de la courbe des taux

La courbe des taux peut prendre plusieurs formes différentes en fonction des évènements de marché :

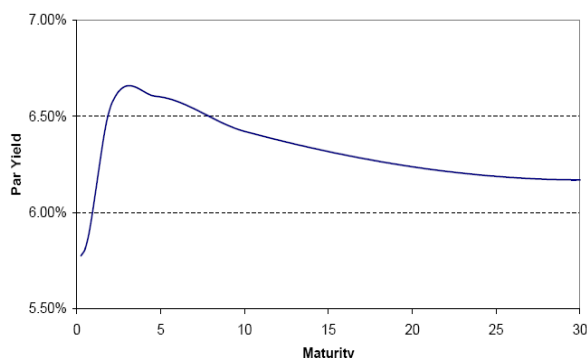
- quasi-plate
- croissante
- décroissante
- décroissante sur le court terme, puis croissante
- croissante sur le court terme, puis décroissante

La forme croissante est la plus couramment obtenue. Une forme particulière de la courbe peut être obtenue, celle « à un creux et une bosse »

Voici quelques exemples historiques :



Courbe croissante sur le court terme puis décroissante :



Courbe à un creux et une bosse :

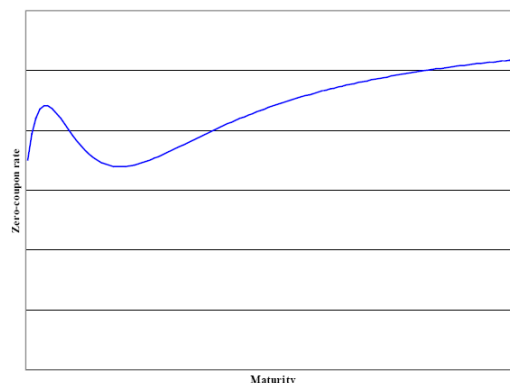


Figure 26 : Autres formes de la courbe des taux

2. Paramètres de NELSON-SIEGEL

Cette section a pour but de visualiser l'impact des paramètres du modèle de NELSON-SIEGEL²⁵.

Rappelons l'expression du taux zéro-coupon dans ce modèle :

$$R(0, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right)}{\frac{\tau}{\theta}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right)}{\frac{\tau}{\theta}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta}\right) \right]$$

β_0 = facteur de niveau ; il s'agit du taux long.

β_1 = facteur de rotation ; il s'agit de l'écart entre le taux court et le taux long

β_2 = facteur de courbure

θ = paramètre d'échelle destiné à rester fixe au cours du temps.

L'effet du facteur de niveau est évident et intuitif. Concentrons-nous alors sur l'effet des facteurs de « rotation » et de « courbure ».

Fixons d'abord des paramètres de références. On choisit :

$$\begin{cases} \beta_0 = 7\% \\ \beta_1 = -2\% \\ \beta_2 = 1\% \\ \theta = 3.33 \end{cases} \quad \text{Ces paramètres donnent la forme de courbe la plus courante}$$

²⁵ Pour plus de détails, se reporter au cours de P.PRIAULET "Modèle de la courbe des taux d'intérêt"

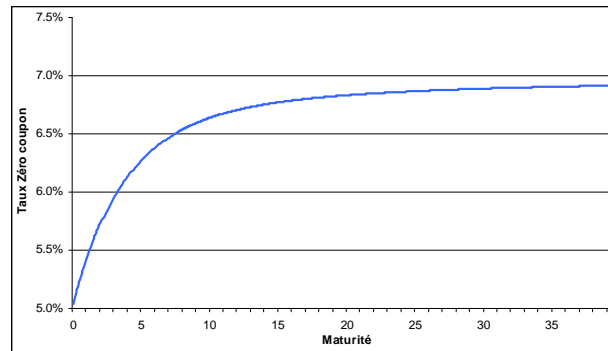


Figure 27 : Courbe des taux selon les paramètres de référence

Faisons varier le facteur de rotation β_1 de -6% à 6% :

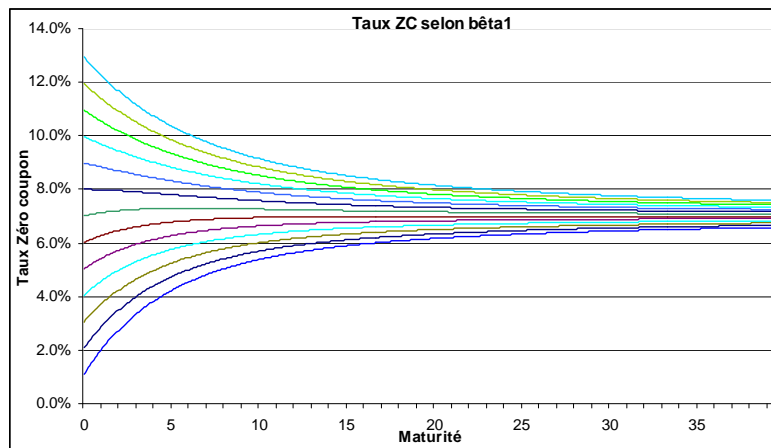


Figure 28 : Courbe des taux selon le facteur de rotation

Reprenons nos paramètres de références, notamment $\beta_1 = -2\%$ et faisons varier le facteur de courbure β_2 de -6% à 6%

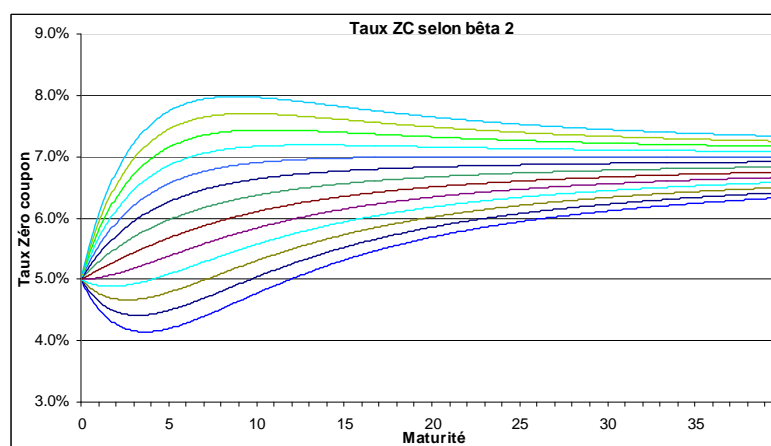


Figure 29 : Courbe des taux selon le facteur de courbure

Le cours ENSAE *Modélisation de la courbe des taux* de PRIAULET P. et MRAD M.²⁶ trace la sensibilité des taux aux paramètres du modèle selon les différentes maturités :

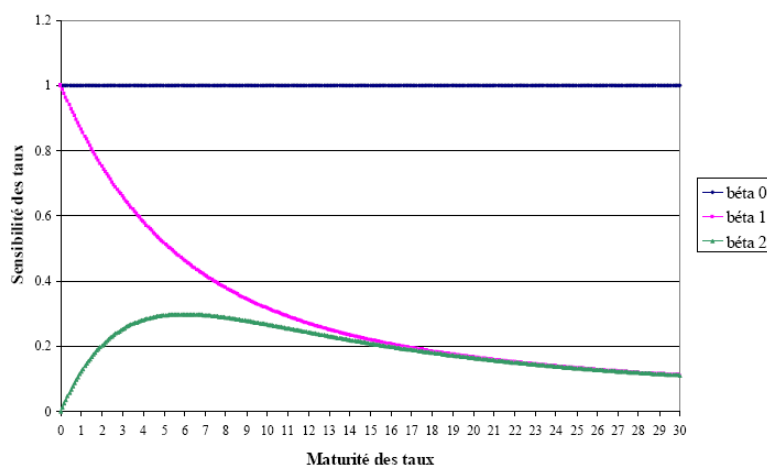


Figure 30 : Sensibilité des taux aux paramètres de NELSON-SIEGEL

Regardons maintenant l'effet de l'ajout d'un facteur de courbure supplémentaire β_3 qui agit surtout sur la partie court terme (on fait varier ce paramètre de -6% à 6% en reprenant les autres paramètres de références).

$$R(0, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right)}{\frac{\tau}{\theta_1}} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right)}{\frac{\tau}{\theta_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_1}\right) \right] + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_2}\right)}{\frac{\tau}{\theta_2}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\theta_2}\right) \right]$$

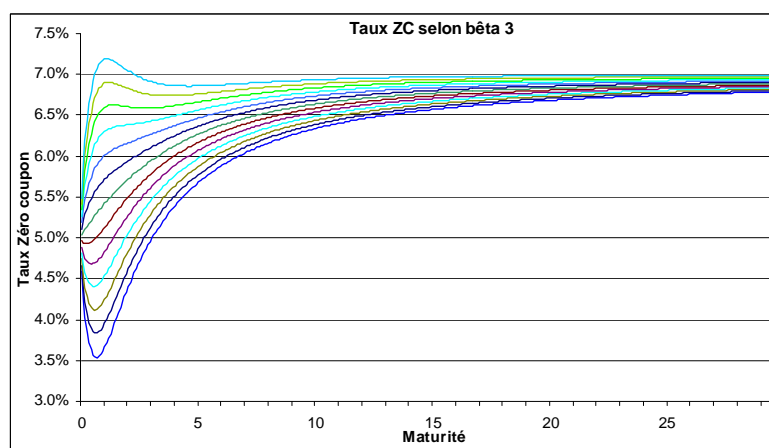


Figure 31 : Courbe de taux selon le deuxième facteur de courbure

La forme de courbe à un creux et une bosse est maintenant observable.

Plus le paramètre d'échelle supplémentaire θ_2 est petit, plus l'effet courbure à court terme est important (ici on a choisi $\theta_2 = 0.5$).

²⁶ <http://www.ensae.fr/ParisTech/FA304/FA304.htm>

Annexe 2 : Du modèle de taux d'intérêt au prix zéro-coupon

1. Prix d'un zéro-coupon

Rappelons la formule de la dynamique du taux court :

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$$

Appliquons le lemme d'Itô au prix à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T $P(t, T, r_t)$, sa dynamique s'écrit alors :

$$dP(r_t, t) = \left[P_t + \mu(r_t, t)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)P_{rr} \right] dt + \sigma(r_t, t)P_r dW_t$$

Où P_t , P_r et P_{rr} représentent respectivement les dérivées partielles première par rapport à t , première par rapport à r_t et seconde par rapport à r_t .

On applique ensuite le théorème de GIRSANOV avec $d\tilde{W}_t = dW_t + \lambda(r_t, t)dt$.
Où \tilde{W}_t est un processus de WIENER dans l'univers risque neutre,

$$\lambda(r_t, t) = \frac{\mu(r_t, t) - r_t}{\sigma(r_t, t)}$$
 est le prix du marché du risque

L'EDS précédente peut donc être écrite :

$$dP(r_t, t) = \left[P_t + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t))P_r + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)P_{rr} \right] dt + \sigma(r_t, t)P_r d\tilde{W}_t$$

Or dans l'univers risque neutre, $dP(r_t, t) = r_t P(r_t, t)dt$, ce qui impose nécessairement :

$$P_t + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t))P_r + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)P_{rr} = r_t P(r_t, t)$$

De plus nous avons la condition aux limites : $P(T, T, r_T) = 1$

Pour résoudre cette équation dans les différents modèles, la méthode classique est de proposer une forme particulière de la solution pour transformer l'équation aux dérivées partielles en équations différentielles simples, puis de conclure par propriété d'unicité de la solution.

a. Application au modèle de VASICEK

Rappelons la dynamique du modèle de VASICEK :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Le prix du marché du risque est supposé constant : $\lambda(r_t, t) = \lambda$

Reprenons la même forme particulière de la solution que pour le modèle de VASICEK :

$$P(t, T, r_t) = \exp(A(T-t) + B(T-t)r_t)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} A'(x) = (ab - \lambda\sigma)B(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(x) \\ B'(x) + aB(x) + 1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A(0) = 0 \\ B(0) = 0 \end{cases}$$

Il reste alors à résoudre ce système d'équation différentielle.

$$\text{On peut démontrer que } \begin{cases} A(x) = \frac{R_\infty}{a}(1 - \exp(-ax)) - R_\infty x - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - \exp(-ax))^2 \\ B(x) = \frac{\exp(-ax) - 1}{a} \end{cases}$$

Où $R_\infty = b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$ valeur limite du taux zéro-coupon

En effet, on peut également écrire le taux zéro-coupon dans le modèle de VASICEK :

$$\begin{aligned} R(t, T, r_t) &= -\frac{1}{(T-t)} \ln(P(t, T, r_t)) \\ &= R_\infty - \frac{1}{a(T-t)}(R_\infty - r_t)(1 - \exp(-a(T-t))) + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)}(1 - \exp(-a(T-t)))^2 \end{aligned}$$

On a donc bien $\lim_{T \rightarrow t} R(t, T, r_t) = r_t$ et $\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T, r_t) = R_\infty$

b. Application au modèle de COX, INGERSOLL, ROSS

Rappelons la dynamique du modèle de CIR :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Le prix du marché du risque est supposé constant : $\lambda(r_t, t) = \lambda$

On propose la forme particulière de la solution :

$$P(t, T, r_t) = \exp(A(T-t) + B(T-t)r_t)$$

$$\text{Mais avec : } \begin{cases} A'(x) = abB(x) \\ B'(x) + (a + \lambda\sigma)B(x) - \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(x) + 1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A(0) = 0 \\ B(0) = 0 \end{cases}$$

Il reste alors à résoudre ce système d'équation différentielle.

$$\text{On peut démontrer que } \begin{cases} A(x) = \frac{ab}{\sigma^2} \left(2 \ln \left(\frac{2g}{h(x)} \right) + (a + \lambda\sigma + g)x \right) \\ B(x) = \frac{2}{h(x)} (1 - \exp(gx)) \end{cases}$$

$$\text{Où } \begin{cases} g = \sqrt{(a + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2} \\ h(x) = (a + \lambda\sigma + g)(\exp(gx) - 1) + 2g \end{cases}$$

En effet, on peut également écrire le taux zéro-coupon dans le modèle de CIR :

$$\begin{aligned} R(t, T, r_t) &= -\frac{1}{(T-t)} \ln(P(t, T, r_t)) \\ &= \frac{2(\exp(g(T-t)) - 1) \times r_t}{(a + \lambda\sigma + g)(\exp(g(T-t)) - 1) + 2g} - \frac{2ab}{\sigma^2(T-t)} \ln \left(\frac{2g \exp\left(\frac{(a + \lambda\sigma + g)}{2}(T-t)\right)}{(a + \lambda\sigma + g)(\exp(g(T-t)) - 1) + 2g} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a donc bien } \lim_{T \rightarrow t} R(t, T, r_t) = r_t, \text{ et } \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T, r_t) = \frac{2ab}{a + \lambda\sigma + g}$$

c. Cas du modèle HULL et WHITE

L'EDS du modèle de HULL et WHITE s'écrit donc dans l'univers risque neutre :

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} (\exp(-k(T-t)) - \exp(-2k(T-t))) dt + \sigma \exp(-k(T-t)) d\tilde{W}_t$$

On intègre de 0 à t :

$$f(t, T) = f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2k^2} [1 - \exp(-kT)]^2 - \frac{\sigma^2}{2k^2} [1 - \exp(-k(T-t))]^2 + \int_0^t \sigma \exp(-k(T-s)) d\tilde{W}_s$$

On reconnaît une intégrale de WIENER pour le dernier terme de cette équation. $\int_0^t \sigma \exp(-k(T-s)) d\tilde{W}_s$ suit une loi normale centrée de variance $\int_0^t \sigma^2 \exp(-2k(T-s)) ds = \frac{\sigma^2}{2k} [\exp(-2k(T-t)) - \exp(-2kT)]$.

Donc $r_t = f(t, t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} [1 - \exp(-kt)]^2 + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2kt)}{2k}} \varepsilon$ où $\varepsilon \sim \mathbf{N}(0,1)$

Et la relation $P(t, T) = \exp\left[-\int_t^T f(t, s) ds\right]$ permet d'obtenir le valeur d'un zéro-coupon :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{4k^3} (e^{-2k(T-t)} - e^{-2T}) (1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T-t)}) (f(0, t) - r_t)\right]^{27}$$

2. Discrétisation du processus²⁸

Rappelons la définition d'une discrétisation exacte :

Un processus $(\tilde{X}_{k\delta})_{k \in \left[1; \frac{T}{\delta}\right]}$ est une discrétisation exacte du processus X si $\forall dt > 0, \forall k \in \left[1; \frac{T}{\delta}\right], \tilde{X}_{kdt} \stackrel{d}{=} X_{k\delta}$

$\stackrel{d}{=}$ signifie « égal en distribution », c'est à dire que la discrétisation et le processus ont même loi.

Lorsque l'équation différentielle stochastique (EDS) du processus étudié possède une solution explicite, alors il admet une discrétisation exacte, et la discrétisation s'impose à l'utilisateur.

Par contre lorsque la discrétisation exacte n'existe pas, il convient de se tourner vers des approximations discrètes du processus. Parmi les procédés de discrétisation les plus répandus, nous pouvons citer les Schémas d'Euler et de Milstein, développements d'Itô-Taylor respectivement d'ordre 1 et d'ordre 2. L'approximation sera d'autant plus satisfaisante, au sens du critère de convergence forte, que l'ordre du développement est élevé.

d. Modèle de VASICEK

La dynamique du modèle de VASICEK est : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$.
En appliquant le lemme d'Itô à $x_t = \exp(at)r_t$ on peut écrire :

$$r_t = r_0 \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \exp(-at) \int_0^t \exp(as) dW_s$$

²⁷ Expression reprise du bouquin de Planchet, le calcul n'a pas été refait

²⁸ Voir « Simulation de trajectoires de processus continus » Article de F. PLANCHET, et P. THÉRON.
Pour plus de détails, on pourra se référer à l'ouvrage de P. KLOEGEN, et E. PLATEN « Numerical Solution of Stochastic Differential Equations »

$\int_0^t \exp(as) dW_s$ est une intégrale de WIENER donc suit une loi normale de moyenne nulle et de variance $\int_0^t (\exp(as))^2 ds = \frac{\exp(2at) - 1}{2a}$. Nous pouvons donc réécrire l'équation du modèle de VASICEK :

$$r_t = r_0 \exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2at)}{2a}} \varepsilon$$

Où $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$, normale centrée réduite.

De même on peut écrire :

$$r_t = r_s \exp(-a(t-s)) + b(1 - \exp(-a(t-s))) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a(t-s))}{2a}} \varepsilon$$

Le modèle de VASICEK a donc bien d'une solution explicite. Ce processus dispose donc d'une discrétisation exacte :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t \exp(-a\delta) + b(1 - \exp(-a\delta)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2a\delta)}{2a}} \varepsilon$$

e. Modèle de COX, INGERSOLL, ROSS

La dynamique du modèle de COX, INGERSOLL, ROSS est : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$.

Ce processus n'admet ni une solution explicite, ni une discrétisation exacte. Il convient alors d'utiliser une méthode d'approximation, les plus connues étant les développements d'Itô-Taylor.

Le Schéma d'Euler reprend le développement d'Itô-Taylor à l'ordre 1. On peut alors écrire l'approximation discrète du taux court :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\delta \times \varepsilon$$

Pour une meilleure approximation, au sens de la convergence forte, on peut préférer le schéma de Milstein qui un développement d'Itô-Taylor à l'ordre 2. L'approximation du taux court dans le modèle de CIR s'écrit alors :

$$\tilde{r}_{t+\delta} = \tilde{r}_t + a(b - \tilde{r}_t)\delta + \sigma\sqrt{\tilde{r}_t}\delta \times \varepsilon + \frac{\sigma^2}{4}\delta(\varepsilon^2 - 1)$$

Annexe 3 : Détails des calculs du modèle de MERTON

L'expression du rendement du prix d'une action s'écrit dans la modèle de MERTON :

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \ln(S(t)) - \ln(S(t-1)) = \\
 &\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} U(k) - \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-1) + \sigma W(t-1) + \sum_{k=1}^{N(t-1)} U(k)\right] = \\
 &\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma(W(t) - W(t-1)) + \sum_{k=N(t-1)}^{N(t)} U(k) = \\
 &\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W(1) + \sum_{k=1}^{N(1)} U(k)
 \end{aligned}$$

En effet, puisque W est un processus de WIENER généralisé, $\forall s < t$, $W(t) - W(s)$ a même loi que $W(t-s)$.

Puisque N est un processus de POISSON, le nombre de sauts entre l'instant s et l'instant t : $N(t) - N(s)$ a la même loi que $N(t-s)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(R \leq x | N(1) = n) P(N(1) = n)$$

Il faut distinguer le cas $N(1) = 0$, c'est à dire le cas où il n'y a pas de saut et donc le modèle est équivalent à celui de BLACK et SCHOLLES (densité d'une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$)

$$P(R \leq x) = P(R \leq x | N(1) = 0) P(N(1) = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(R \leq x | N(1) = n) P(N(1) = n)$$

N est un processus de POISSON homogène d'intensité λ donc $\forall n \geq 0$, $P(N(1) = n) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!}$.

$$\text{Et } \frac{\partial}{\partial x} P(R \leq x | N(1) = 0) = f_{BS}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P(R \leq x | N(1) = n) = P\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W(1) + \sum_{k=1}^n U(k) \leq x\right)$$

C'est donc la fonction de répartition de la somme de $n+1$ lois normales indépendantes. Or si $N_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $N_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ indépendantes alors $N_1 + N_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

$$\text{Donc } \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W(1) + \sum_{k=1}^n U(k) \sim \mathcal{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sqrt{\sigma^2 + n\Omega^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} P(R \leq x | N(1) = n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right)$$

Ainsi la densité du rendement du modèle

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right) \times e^{-\lambda} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right) \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + n\Omega^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right) \times \frac{\lambda^n}{n!} \right] \end{aligned}$$

De cette densité on peut déduire les moments centrés

D'abord l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(R) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \\
&= \mu - \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

On remarque que l'espérance du modèle de MERTON à la même expression que celle du modèle de BLACK et SHOLES.

Les moments centrés :

$$E\left[(R - E(R))^k\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^k}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + n\Omega^2)}} \exp\left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\Omega^2)}\right) dx$$

*

L'intégrale impropre * est le moment centré d'ordre k d'une loi normale $N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sqrt{\sigma^2 + n\Omega^2}\right)$, elle est nulle pour k impair, et pour k pair :

$$E\left[(R - E(R))^{2k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \frac{(2k)!}{2^k k!} (\sigma^2 + n\Omega^2)^k$$

Pour la paramétrisation on a besoin de quatre équations

- La moyenne (1) $E(R) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$

- La variance (2) $E\left[(R - E(R))^2\right] = \sigma^2 + \lambda\Omega^2$

- moment d'ordre quatre (3) $E\left[(R - E(R))^4\right] = 3\left((\sigma^2 + \lambda\Omega^2)^2 + \lambda\Omega^4\right)$

- moment d'ordre six (4) $E\left[(R - E(R))^6\right] = 15\left((\sigma^2 + \lambda\Omega^2)^3 + 3\lambda\Omega^4(\sigma^2 + \lambda\Omega^2 + \Omega^2)\right)$

Annexe 4 : Détails des calculs du modèle de KOU

1. Rappel sur la loi double exponentiel

Considérons la variable aléatoire X qui suit une loi double exponentielle de paramètres (α_1, α_2, p) , c'est à dire que X suit une loi exponentielle de paramètre α_1 avec une probabilité p et X suit l'opposé d'une loi exponentielle de paramètre α_2 avec une probabilité $q = 1 - p$

$$\begin{cases} X \sim \mathcal{E}(\alpha_1) & \text{avec une probabilité } p \\ -X \sim \mathcal{E}(\alpha_2) & \text{avec une probabilité } q = 1 - p \end{cases}$$

La fonction de répartition est l'espérance des fonctions de répartition de chaque loi exponentielle :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= p \times F_{\alpha_1}(x) + q \times (1 - F_{\alpha_2}(x)) \\ &= p \times (1 - \exp(-\alpha_1 x)) \times 1(x \in \mathbb{R}^+) + q \times \exp(\alpha_2 x) \times 1(x \in \mathbb{R}^-) \end{aligned}$$

La fonction génératrice des moments d'une loi double exponentielle s'écrit :

$$M_{DE}(t) = \frac{p\alpha_1}{\alpha_1 - t} + \frac{q\alpha_2}{\alpha_2 + t}$$

La fonction génératrice des moments nous permet, comme son nom l'indique, de calculer les moments, en effet :

$$E[X^k] = \left. \frac{\partial^k M(t)}{\partial t^k} \right|_{t=0}$$

Ainsi la moyenne et la variance d'une loi double exponentielle :

$$\begin{cases} E[X] = \frac{p}{\alpha_1} - \frac{q}{\alpha_2} \\ Var[X] = p \times q \times \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{p}{\alpha_1^2} + \frac{q}{\alpha_2^2} \right) \end{cases}$$

On peut démontrer que les moments (non centrés) d'une loi double exponentielle vérifient la relation suivante :

$$E[X^k] = k! \left(p \left(\frac{1}{\alpha_1} \right)^k + q \left(\frac{-1}{\alpha_2} \right)^k \right)$$

2. Application au modèle de KOU

Dans le cas de notre modèle de KOU, nous étudions une loi POISSON composée d'une loi double exponentielle.

La fonction génératrice des moments d'une POISSON composée peut s'écrire :

$$M(t) = G_p(\phi_{DE}(t)) = \exp\left(\lambda\left(\frac{p\alpha_1}{\alpha_1 - t} + \frac{q\alpha_2}{\alpha_2 + t} - 1\right)\right)$$

Où : $M(t)$ est la fonction caractéristique de la loi POISSON composée

$G_p(t) = \exp(-\lambda(t-1))$ est la fonction génératrice des probabilités de la loi de POISSON de paramètre λ

$M_{DE}(t)$ est la fonction caractéristique de la loi double exponentielle

Rappelons l'expression du rendement aléatoire dans le modèle de KOU :

$$R(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W(1) + \sum_{k=1}^{N(1)} U(k)$$

C'est la somme de deux variables aléatoire indépendantes, une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma\right)$ et une loi POISSON composée d'une double exponentielle.

La fonction génératrice des moments de la somme de deux variables indépendantes est le produit des fonctions génératrices de chaque variable. Donc pour notre modèle :

$$M_{Kou}(t) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\sigma^2}{2}t^2\right) \times \exp\left(\lambda\left(\frac{p\alpha_1}{\alpha_1 - t} + \frac{q\alpha_2}{\alpha_2 + t} - 1\right)\right)$$

La moyenne de ce modèle est : $\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{p}{\alpha_1} - \frac{q}{\alpha_2}$.

En centrant notre modèle, (on a donc une somme d'une loi normale de moyenne $\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{p}{\alpha_1} - \frac{q}{\alpha_2}\right) = -\frac{p}{\alpha_1} + \frac{q}{\alpha_2}$ de même écart-type avec la même loi POISSON composée), on peut calculer les moments centrés (jusqu'à l'ordre 6) en dérivant successivement la fonction suivante :

$$\tilde{M}(t) = \exp\left(\left(-\frac{p}{\alpha_1} + \frac{q}{\alpha_2}\right)t + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \frac{\lambda p \alpha_1}{\alpha_1 - t} + \frac{\lambda q \alpha_2}{\alpha_2 + t} - \lambda\right)$$

Appelons m_k le moment centré d'ordre k de notre modèle. La paramétrisation du modèle de KOU revient donc à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[Kou] = \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \lambda \left(\frac{p}{\alpha_1} - \frac{q}{\alpha_2} \right) \\ Var[Kou] = m_2 = \sigma^2 + 2\lambda \left(\frac{p}{\alpha_1^2} + \frac{q}{\alpha_2^2} \right) \\ m_3 = 6\lambda \left(\frac{p}{\alpha_1^3} - \frac{q}{\alpha_2^3} \right) \\ m_4 = 24\lambda \left(\frac{p}{\alpha_1^4} + \frac{q}{\alpha_2^4} \right) + 3(m_2)^2 \\ m_5 = 120\lambda \left(\frac{p}{\alpha_1^5} - \frac{q}{\alpha_2^5} \right) + 10m_3m_2 \\ m_6 = 720\lambda \left(\frac{p}{\alpha_1^6} + \frac{q}{\alpha_2^6} \right) + 10m_4m_2 + 10(m_3)^2 - 15(m_2)^3 \end{array} \right.$$

Si les moments sont facilement calculables à partir de la fonction génératrice des moments, il est plus difficile de trouver l'expression analytique de la densité.

Dans l'article original « *A Jump-Diffusion Model For Option Pricing* » de KOU, on peut trouver l'approximation :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S(t)}{S(t)} &= \frac{S(t+\Delta t)}{S(t)} - 1 = \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma W(\Delta t) + \sum_{k=1}^{N(\Delta t)} U(k) \right] - 1 \\ \Rightarrow \frac{\Delta S(t)}{S(t)} &\approx \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z + B.U \end{aligned}$$

En utilisant le développement limité $\exp(x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Où Z suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$B \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}(\lambda \Delta t) \text{ i.e. } \begin{cases} P(B=1) = \lambda \Delta t \\ P(B=0) = 1 - \lambda \Delta t \end{cases}$$

On peut alors calculer la densité de cette approximation :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1 - \lambda \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \varphi \left(\frac{x - \mu \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) \\ &+ \lambda \Delta t p \alpha_1 \exp \left(\frac{\sigma^2 \alpha_1^2 \Delta t}{2} - (x - \mu \Delta t) \alpha_1 \right) \Phi \left(\frac{x - \mu \Delta t - \sigma^2 \alpha_1 \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) \\ &+ \lambda \Delta t q \alpha_2 \exp \left(\frac{\sigma^2 \alpha_2^2 \Delta t}{2} + (x - \mu \Delta t) \alpha_2 \right) \Phi \left(-\frac{x - \mu \Delta t + \sigma^2 \alpha_2 \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right) \end{aligned}$$

Où $\varphi(\cdot)$ est la densité d'une loi normale centrée réduite

$\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

$$\Rightarrow \begin{cases} E_g[G] = \mu\Delta t + \lambda \left(\frac{p}{\alpha_1} - \frac{q}{\alpha_2} \right) \Delta t \\ Var_g[G] = \sigma^2 \Delta t + \left(pq \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{p}{\alpha_1^2} + \frac{q}{\alpha_2^2} \right) \right) \lambda \Delta t + \left(\frac{p}{\alpha_1} - \frac{q}{\alpha_2} \right)^2 \lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t) \end{cases}$$

$$g_R(x) = \frac{1-\lambda}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \lambda p \alpha_1 \exp\left(\frac{\sigma^2 \alpha_1^2}{2} - (x-\mu)\alpha_1\right) \Phi\left(\frac{x-\mu-\sigma^2 \alpha_1}{\sigma}\right) + \lambda q \alpha_2 \exp\left(\frac{\sigma^2 \alpha_2^2}{2} + (x-\mu)\alpha_2\right) \Phi\left(-\frac{x-\mu-\sigma^2 \alpha_2}{\sigma}\right)$$

Annexe 5 : Synthèse des résultats de la modélisation d'actifs

Dans ce mémoire, cinq classes d'actifs corrélées ont été modélisées.

La classe des obligations et la classe monétaire ont été déterminées à l'aide du même modèle de taux : le modèle de COX, INGERSOLL, ROSS avec les paramètres suivant :

$$\begin{cases} \hat{a} = 1.5422 \\ \hat{b} = 0.0580 \\ \hat{\lambda} = 1.4123 \\ \hat{\sigma}^2 = 0.0051\% \end{cases}$$

Ces deux classes ont été représentées par les taux zéro-coupons associés avec une maturité de 10 ans pour la classe des obligations et une maturité de 1 mois pour la classe monétaire.

La classe des actions a été déterminée avec un modèle de MERTON avec comme paramètre :

$$\begin{cases} \sigma^2 = 0.0073\% \\ \mu = 0.0404\% \\ \Omega^2 = 0.032\% \\ \lambda = 10.0253\% \end{cases}$$

La classe de l'immobilier a été déterminée par un modèle de BLACK et SCHOLES :

$$\begin{cases} \mu = 0.0137\% \\ \sigma^2 = 0.022\% \end{cases}$$

La classe des hedge funds a également été déterminée par un modèle de BLACK et SCHOLES.

$$\begin{cases} \mu = 0.0137\% \\ \sigma^2 = 0.022\% \end{cases}$$

Pour la modélisation de l'ensemble de l'actif, nous avons considéré une corrélation linéaire avec pour matrice de variance covariance :

	Taux court	Taux long	Action	Immobilier	Hedge Funds
Taux court	1	0,202	-0,3	-0,3	0
Taux long		1	-0,3	-0,3	0
Action			1	0,6	0
Immobilier				1	0
Hedge Funds					1

Nous avons ainsi réalisé mille simulations des cours de ces classes d'actifs en fonction de données initiales et de la méthode de décomposition de CHOLESKI.

Le tableau suivant synthétise les résultats obtenus de cette modélisation hors redistribution de coupons, dividendes ou loyers :

		31/12/2006	31/12/2007	31/12/2008	31/12/2009	31/12/2010
Taux monétaire	Moyenne	3.3%	3.6%	3.7%	3.9%	4.0%
	Écart-type	1.1%	1.4%	1.5%	1.5%	1.6%
	IDC à 99.5%	[1.22%;6.86%]	[1.13%;8.48%]	[1.17%;8.35%]	[1.07%;9%]	[1.18%;8.99%]
Taux 10 ans	Moyenne	4.9%	5.0%	5.1%	5.2%	5.3%
	Écart-type	0.4%	0.5%	0.5%	0.6%	0.6%
	IDC à 99.5%	[4.15%;5.83%]	[4.14%;6.59%]	[4.18%;6.87%]	[4.19%;7.01%]	[4.27%;7.32%]
Rendement annuel des actions	Moyenne	12.1%	12.0%	12.4%	12.2%	11.3%
	Écart-type	21.1%	19.8%	20.1%	21.2%	19.4%
	IDC à 99.5%	[-33.29%;77.06%]	[-28.48%;67.6%]	[-28.81%;72.46%]	[-29.91%;79.03%]	[-30.28%;69.39%]
Rendement annuel de l'immobilier	Moyenne	3.7%	3.7%	3.8%	4.1%	3.7%
	Écart-type	6.9%	7.0%	7.1%	7.1%	7.0%
	IDC à 99.5%	[-12.74%;24.28%]	[-14.14%;23.22%]	[-12.94%;21.95%]	[-12.7%;23.03%]	[-12.45%;21.55%]
Rendement annuel des hedge funds	Moyenne	10.6%	11.3%	10.8%	10.9%	11.0%
	Écart-type	5.5%	5.7%	5.8%	5.8%	5.8%
	IDC à 99.5%	[-2.36%;26.63%]	[-4.01%;28.01%]	[-2.85%;25.78%]	[-2.71%;26.28%]	[-3.2%;24.81%]