



Lyon 1

Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES



**Mémoire présenté**  
**devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances**  
**pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

**le 2 juillet 2012**

Par : Raphaël MARIN

Titre: Garantie de mortalité et couverture du risque de longévité

Confidentialité :  NON     OUI (Durée :  1 an     2 ans)

*Membre du jury de l'Institut des Actuaires*

M. Frédéric PLANCHET

*Entreprise :*

WINTER & Associés

*Membres du jury I.S.F.A.*

M. Jean Claude AUGROS

M. Alexis BIENVENÛE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

*Directeur de mémoire en entreprise :*

Fabrice MAGNIN

*Invité :*

Pierre Alain BOSCHER

***Autorisation de mise en ligne sur  
un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

*Secrétariat*

Mme Marie-Claude MOUCHON

*Bibliothèque :*

Mme Michèle SONNIER

**Mots-Clés :** risque de longévité, risque de modèle, garantie de mortalité, projections d'engagements sociaux, rentes viagères de retraites, modèle stochastique de mortalité, titrisation, table de mortalité abattue.

**Résumé :**

Une rente viagère est un contrat garantissant le versement régulier d'une somme d'argent à un assuré tant que ce dernier est vivant. Pour répondre à ses engagements, l'assureur doit donc évaluer au mieux la durée de versement de ce complément de retraite pour chacun de ses assurés. Ces évaluations dépendent directement de l'espérance de vie des rentiers. Dans cette étude, l'intérêt sera porté sur l'évolution incertaine de l'espérance de vie future, le risque découlant de cette incertitude se nomme le risque de longévité. Les tables de mortalité prospectives utilisées par l'assureur afin d'évaluer ses engagements de passifs ont la capacité de capter ce risque de longévité. Le but de cette étude sera alors de créer des tables de mortalité prospectives à partir de données historiques issues d'un contrat de garantie de mortalité. Des évaluations d'engagements sont simulées avec les tables de mortalité obtenues.

Cette étude permettra d'analyser le comportement des flux d'engagements sociaux en fonction des tables de mortalité utilisées afin de déterminer l'impact sur les comptes techniques d'une compagnie d'assurance, ces derniers devant répondre aux normes Solvabilité 2. Le dispositif Solvabilité 2 se propose d'explicitier l'ensemble des risques supportés par un organisme assureur et d'en déduire un montant d'engagements reflétant plus directement le profil de risque de l'entreprise.

Via les différentes simulations réalisées en fonction des différentes tables de mortalité utilisées, les résultats obtenus démontrent que la présence de la longévité affecte fortement les comptes de l'assureur. Ainsi, il devient très utile et nécessaire pour l'assureur de mettre en œuvre des moyens pertinents permettant de se couvrir du risque de longévité. Le marché actuel offre plusieurs possibilités de couverture, comme la titrisation dont le but sera de transférer le risque sur les marchés financiers via l'émission d'instruments « neutralisateurs » du risque. Autre alternative, la mise en place d'une garantie de mortalité souscrite par un assureur permet au souscripteur d'être auto-assuré contre une dérive potentielle de la mortalité des rentiers. Ces approches seront abordées au cours du présent mémoire.

**Keywords:** longevity risk, model risk, mortality warranty, long term forecast, pension scheme, stochastic mortality model, securitization, determinist mortality model.

**Summary:**

A life annuity is a contract which guarantees to the insured the payment of a periodic income throughout his life. To trust its commitment, the insurer has to evaluate as effectively as possible the duration for each of its insured. The valuations directly depend on annuitant life expectancy.

The focus of this study will be based in the unknown evolution of the future mortality; the risk resulting from that uncertainty is called the longevity risk. The prospective mortality tables used by the insurer to evaluate all commitments of all kinds have the ability to harness this longevity risk. The purpose of this study will be to create prospective mortality tables from historical data derived from a mortality warranty contract. Thus, commitment valuations will be performed thanks to the mortality tables obtained.

This study provides a detailed analysis of the pattern of social commitment cash flows in function of the mortality tables used. This will help to determine the near impact on technical accounts of an insurance company under the Solvency 2 standards. Solvency 2 provides a comprehensive overview of the potential risks for an insurance institution and, as a consequence, offers the best risk profile of the company to determine its commitment amounts.

Results obtained from the simulations in function of the different mortality tables show that longevity strongly impacts the insurer accounts. Thus, it is useful and necessary to implement a relevant and high quality method to cover the insurance company against the longevity risk. Nowadays, the market offers various possibilities of covering such as the securitization activity which transfers the insurance risk to the financial market catching instrument risk. Another alternative would be to put in place a mortality warranty subscribed by an insurer. Indeed, this could allow the subscriber to be self-insured against a stockholder's mortality drift. Such approaches will be discussed in later section of the present report.

**REMERCIEMENTS :**

---

Je remercie tout d'abord Monsieur Julien JACQUEMIN de m'avoir accueilli au sein de son équipe au Cabinet WINTER & Associés et de m'avoir suggéré ce sujet de mémoire passionnant.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Fabrice MAGNIN, mon maître d'apprentissage qui a su être très disponible malgré un emploi du temps chargé, et me faire bénéficier pleinement de sa riche expérience dans le domaine de la retraite.

Je souhaite également remercier Madame Diana DOROBANTU pour sa grande disponibilité et ses conseils tant pratiques que théoriques.

## Sommaire

### INTRODUCTION

## **1. RISQUE DE LONGEVITE : CONTEXTE ET OBJECTIFS..... 9**

1.1	DEFINITION ET TENDANCE .....	9
1.1.1	<i>Définition</i> .....	9
1.1.2	<i>Tendance philosophique sur la longévité</i> .....	10
1.1.3	<i>Allongement de l'espérance de vie</i> .....	13
1.2	QUELQUES NOTIONS ACTUARIELLES.....	17
1.2.1	<i>Rappel de probabilités</i> .....	17
1.2.2	<i>Notion de rente en actuariat</i> .....	21
1.2.3	<i>Diagramme de Lexis</i> .....	23
1.3	RISQUE DE MODELE ET MODELES DE MORTALITE .....	26
1.3.1	<i>Littérature et définition</i> .....	27
1.3.2	<i>Modèle de mortalité</i> .....	28
1.3.3	<i>Construction de la table TGH/TGF 05</i> .....	31

## **2. ANALYSE DE LA MORTALITE ET PROJECTION DE PORTEFEUILLES..... 35**

2.1	ETUDE DETERMINISTE D'UNE GARANTIE DE MORTALITE SUR UN CONTRAT DE RENTES VIAGERES .....	35
2.1.1	<i>Mise en évidence de la problématique</i> .....	36
2.1.2	<i>Description d'une garantie de mortalité</i> .....	37
2.1.3	<i>Description du modèle d'abattement</i> .....	41
2.1.4	<i>Application numérique</i> .....	45

2.2	MODELISATION D'UNE TABLE DE MORTALITE .....	50
2.2.1	<i>Données et modèle utilisés .....</i>	50
2.2.2	<i>Réalisation d'une table de mortalité .....</i>	53
2.2.3	<i>Résultats obtenus suite aux projection de PM.....</i>	60
2.3	COMPARAISON DES RESULTATS.....	61
2.3.1	<i>Analyse de la mortalité.....</i>	61
2.3.2	<i>Au niveau de la longévité.....</i>	64
2.3.3	<i>Au niveau des engagements.....</i>	65
<b>3.</b>	<b>COUVERTURE DU RISQUE DE LONGEVITE.....</b>	<b>67</b>
3.1	LA TITRISATION.....	67
3.1.1	<i>Contexte et historique.....</i>	68
3.1.2	<i>Mécanisme .....</i>	69
3.1.3	<i>Risques et intérêts de la titrisation .....</i>	71
3.2	TARIFICATION DE LA LONGEVITE.....	74
3.2.1	<i>Méthodologie de pricing du risque de longévité.....</i>	74
3.2.2	<i>Swap de longévité .....</i>	76
3.3	ANALYSE DU MARCHE FRANÇAIS .....	81
3.3.1	<i>Les dérives de longévité diffusées de gré a gré par les banques d'affaires .....</i>	81
3.3.2	<i>La garantie de mortalité obtenue par des entreprises auprès de leurs assureurs en France.....</i>	83
3.3.3	<i>Comparaison des solutions.....</i>	87

**CONCLUSION**

**BIBLIOGRAPHIE**

**ANNEXES**

## INTRODUCTION :

---

L'organisation du système de retraite par répartition en France est basée sur le principe de la solidarité intergénérationnelle. Elle est à l'origine de divers débats afin de parvenir à garantir aux retraités de demain un remplacement convenable de leurs revenus d'activités.

Au cours de ces dix dernières années, de nombreuses réformes ont été votées dans le but d'équilibrer ce système de retraite et parmi elles, la réforme Fillon du 21 août 2003 misant sur l'augmentation de la durée de cotisation des actifs pour certains régimes du fait de l'allongement de l'espérance de vie des individus.

Plus récemment, la Loi du 9 novembre 2010 portant réforme des retraites prévoit un relèvement de l'âge légal de départ à la retraite de 60 à 62 ans pour tous les régimes à compter du 1<sup>er</sup> Juillet 2011 ainsi qu'un relèvement de l'âge de la retraite à taux plein de 65 à 67 ans entre 2016 et 2023 ayant pour objectif de rééquilibrer les régimes de retraite en 2018. Suite au plan de rigueur instauré en 2011, l'objectif de rééquilibre a été avancé en 2017.

Ces changements influent sur la durée de versement des rentes et affectent les engagements de l'assureur.

Les entreprises d'assurance vie ou de gestion de rentes sont amenées à provisionner leurs engagements, ainsi elles doivent prévoir de manière exacte la durée de versement de la rente pour chaque retraité.

Selon l'article A.335-1 du Code des Assurances, les calculs des provisions mathématiques de rentes viagères se font à partir de tables réglementaires, ou par des tables d'expérience certifiées par un actuaire indépendant. Ainsi au fil des années, de nombreuses tables prenant en compte l'évolution de la vie humaine ont été créées.

Depuis le premier janvier 2007, les tables sexuées par génération TGH05 et TGF05 sont utilisées dans le but de minimiser le risque lié à la durée de vie des rentiers. Ce risque découlant de l'incertitude sur la durée de vie se nomme le risque de longévité.

De nos jours, les compagnies d'assurance proposent des couvertures d'assurance en cas de vie et utilisent différentes méthodes pour couvrir le risque de longévité telles que l'émission de *swaps* de longévité et les contrats de garantie de mortalité dont les mécanismes seront étudiés dans le présent mémoire.

Afin de cerner le sujet, sur un portefeuille de rentes viagères, le risque de longévité est le résultat d'une amélioration de la mortalité humaine, ce risque naît de deux facteurs distincts :

- ✓ un risque de modèle, provenant de l'inadéquation de la table de mortalité avec la réalité. Il peut y avoir une sous estimation de mortalité de la table réglementaire issue de l'inadéquation de la table avec le risque de référence ou d'événements extrêmes (épidémie, canicules ou autres...);
- ✓ la volatilité, dans la mesure où une valeur réellement constatée peut diverger sensiblement de sa valeur moyenne. Selon la loi des grands nombres, cette volatilité sera d'autant plus faible en proportion que l'effectif du portefeuille considéré est important.

Il est à noter que le risque de longévité est un risque systématique qui ne peut pas être éliminé par la mutualisation car une évolution de la longévité affecte tout le portefeuille de rentes viagères.

De ce fait, quels moyens offre le marché actuel à l'assureur pour qu'il se couvre de ce risque systématique ?

Afin de décrire les différentes méthodes permettant de couvrir le risque de longévité, l'étude est orientée selon 3 axes.

Dans un premier temps, le contexte et l'objectif du mémoire sont abordés. A ce titre, les généralités sur la durée de vie ainsi que des notions actuarielles sont rappelées. De plus, un rappel de la littérature sur les différents modèles utilisés est effectué dans le but d'expliquer la construction des tables générationnelles actuellement en vigueur.

Dans un second temps, la description comptable d'un contrat de garantie de mortalité est effectuée afin de comprendre l'importance des provisions mathématiques sur les comptes techniques d'une compagnie d'assurance. La construction d'une table de mortalité propre à un portefeuille de rentiers sera réalisée grâce aux données passées de cette population. Cette table permettra d'analyser et de quantifier l'impact du risque de longévité au niveau des engagements de l'assureur.

Enfin dans un troisième temps, après avoir mis en évidence l'impact financier dû à l'utilisation de différentes tables de mortalité sur le contrat considéré, une analyse sur les différentes méthodes de couverture offertes sur le marché sera effectuée et détaillée.

## **1. RISQUE DE LONGEVITE : CONTEXTE ET OBJECTIFS**

---

Pour bien cerner le sujet, une analyse de la longévité selon différents points de vue est réalisée. Le terme longévité s'interprète comme la durée de vie d'un groupe ou d'un individu. Dans la vie courante, le terme de mortalité est plus entendu, ce dernier est le contraire de longévité.

Ainsi, dans notre contexte, le risque de longévité décrit directement le risque d'une diminution de la mortalité avec le temps, c'est-à-dire que les individus vont avoir une durée de vie plus longue.

Dans cette partie, les débats et les tendances philosophiques autour du risque de longévité seront cités dans le but de montrer l'intérêt porté sur cette problématique. De plus, afin de décrire le phénomène de l'augmentation de l'espérance de vie, l'évolution de la durée de vie au cours du temps à travers un exemple sera étudiée.

Puis, des notions actuarielles seront énoncées afin de détenir les bases nécessaires permettant de comprendre la réalisation de ce mémoire. Ces dernières sont indispensables pour l'utilisation des différents modèles.

Enfin, la troisième partie se focalisera sur les différents modèles théoriques utilisés permettant de construire les tables de mortalité en vigueur et ainsi d'évaluer le risque de longévité.

### **1.1 DEFINITION ET TENDANCE**

#### **1.1.1 DEFINITION**

Tous les régimes de retraite comportent un risque de longévité et de mortalité.

Dans un régime de retraite, le risque de longévité correspond au risque de vivre plus longtemps que l'espérance de vie calculée selon une table de mortalité pour les retraités ayant une rente en cours de paiement.

Le risque de mortalité s'entend du risque de décéder plus tôt que prévu pour les participants actifs qui sont en période d'acquisition des prestations de retraite ou les participants inactifs qui bénéficient d'une rente différée.

Le risque de longévité est un risque important et conséquent pour la santé des régimes de retraite dont il faut tenir compte, car les projections de la longévité sont très incertaines et le passif exposé au risque de longévité augmente.

Les experts pilotant les régimes de retraite font des projections stochastiques détaillées et perfectionnées des hypothèses économiques dans le but de réaliser des études sur l'actif et le passif d'une entreprise (voir [7]).

Actuellement, l'amélioration de la mortalité est intégrée par l'intermédiaire des tables de mortalité générationnelle. Cependant l'application de la mortalité prévisionnelle permettant la gestion optimale du risque de longévité manque de précision.

Ce manque de précision peut être attribué au fait que le risque de longévité est le risque « silencieux » et « tardif ». Les conséquences de la longévité pour les régimes de retraite se manifestent à long terme tandis que les conséquences des risques liés à l'actif et aux placements sont immédiates et de court à moyen terme. Ainsi, il y a une adéquation temporelle entre l'actif et le passif.

L'espérance de vie des pays développés n'a cessé d'augmenter et c'est en ce sens que le risque de longévité est un critère essentiel. En effet, penser ce risque c'est essayer de penser l'incertitude de l'âge d'une personne en fonction de son appartenance à une composante sociale plus globale. Le vieillissement de la population est une réalité à laquelle tous les pays industrialisés doivent faire face. De ce fait, l'augmentation de la durée de vie des individus affecte de façon importante les engagements des compagnies d'assurance vie, ainsi que les fonds de pension privés ou publics. En garantissant à leurs bénéficiaires un certain niveau de revenu entre le moment de la retraite et celui du décès, ils s'exposent à un risque de longévité<sup>1</sup>. La santé financière des assureurs repose ainsi en partie sur leur capacité à pouvoir estimer l'espérance de vie avec exactitude.

La problématique entraîne le questionnement du risque de longévité : pour penser la pérennité d'une entreprise il est nécessaire de s'appuyer sur une méthode d'analyse de la mortalité pertinente, c'est-à-dire adaptée au contexte de l'évolution actuelle de l'espérance de vie.

La partie suivante présente une analyse philosophique mettant en évidence les notions générationnelles chez l'être humain afin de se focaliser sur la question de la notion de vieillissement de la population et donc d'allongement de l'espérance de vie.

### 1.1.2 TENDANCE PHILOSOPHIQUE SUR LA LONGEVITE

Réfléchir sur le vieillissement et le décès nécessite forcément de penser ces notions autour de paramètres temporels, c'est-à-dire que l'on ne peut pas penser le vieillissement et le décès dans l'absolu, ce qui serait une absurdité et un non-sens total. En effet, c'est une évidence que nous sommes tous amenés à mourir, mais ce que les théoriciens nous apprennent c'est que la durée d'allongement de la vie est plus une question générationnelle qu'individuelle, et ce en fonction des progrès techniques (notamment dans le domaine de la santé) et scientifiques à l'œuvre, ce qui est d'autant plus vrai aujourd'hui dans notre société scientifique. Vouloir penser la question du vieillissement de la population c'est donc devoir penser des rapports intergénérationnels en vue du bien-être de la société. En ce sens il a d'abord fallu donner une définition de la mortalité et du

---

<sup>1</sup> [http://www.cirano.qc.ca/ircirano/public/pdf/20101001\\_longevite\\_fr.pdf](http://www.cirano.qc.ca/ircirano/public/pdf/20101001_longevite_fr.pdf)

vieillesse des individus. De ce fait, les hypothèses se sont succédées par Haldane à Williams<sup>2</sup> et ont conduit à l'élaboration d'une théorie somme toute assez satisfaisante : d'une part, le fait que les individus meurent par accident un jour ou l'autre implique que la sélection en faveur de la survie de l'individu faiblit au fur et à mesure que son âge augmente.

C'est à partir de cette définition unifiée de la mortalité et du vieillissement qu'il a été possible de développer une division des différents moments de la vie, c'est-à-dire définir les éléments qui vont permettre de penser les écarts et coupures générationnels.

Notons que la vie humaine peut être considérée conceptuellement en trois parties :

- ✓ l'enfance, ou la période de l'apprentissage. L'enfance pouvant être liée à l'école ;
- ✓ la vie active, ou la période de production. La vie active étant celle consacrée à l'entreprise ou à l'organisme où s'exerce l'activité, et aussi celle de la prise en charge de l'enfance et de la retraite via le système par répartition de retraite ;
- ✓ la retraite ou le temps du repos.

Au fil des années, la société a évolué suivant deux tendances :

- ✓ l'âge de l'école s'est allongé, les études étant plus longues pour un nombre de plus en plus important de jeunes. Il en découle directement que la vie active s'est vue réduite ;
- ✓ La retraite s'est allongée grâce à l'allongement de la durée de vie.

Il en résulte qu'une vie active plus courte doit financer non seulement une "enfance" plus longue, mais aussi une retraite allongée au point de couvrir quasiment deux générations, au lieu d'une autrefois.

Il en découle que les rôles d'autrefois ne se retrouvent plus : l'identité du mineur non responsable ne peut plus suffire au jeune qui poursuit des études supérieures, et le temps du jeune retraité ne peut plus être celui du repos (source Alain Balu<sup>3</sup>).

En tout cas, sans être aussi tranchant qu'Alain Balu, il est à noter qu'un constat se dessine : avec l'allongement toujours progressif non seulement de la durée de vie mais aussi des tranches générationnelles, la question du bien-être collectif par le système de retraites par répartition sera un des enjeux intergénérationnels que le progrès a apporté dans son sillage.

---

<sup>2</sup> <http://www.academie-sciences.fr/activite/lettre/lettre3.pdf>

<sup>3</sup> [Alain.balu.over-blog.fr/](http://Alain.balu.over-blog.fr/)

Peut-on imaginer que la formidable progression de la durée de vie moyenne observée depuis deux siècles et demi se poursuive encore longtemps, et jusqu'où ira-t-elle ?

Deux thèses s'opposent. La première se base sur l'idée que la transformation historique de nos sociétés, qui a permis l'évolution passée de l'espérance de vie, est peut-être sur le point de s'achever car les limites de la biologie humaine seraient sur le point d'être atteintes. La seconde tend à considérer qu'il est impossible de fixer une limite aux progrès de l'espérance de vie, qui pourraient continuer indéfiniment.

On voit bien que ces deux thèses semblent extrêmes l'une et l'autre. Pousser dans ses retranchements la thèse de l'illimitation de l'augmentation de l'espérance de vie, c'est vouloir penser l'immortalité, cependant il ne semble ni très scientifique ni très utile de s'attacher à une telle conception. D'un autre point de vue, cela permet de nous éclairer sur la thèse plus partagée qui est celle d'une certaine stagnation du progrès, développant l'idée que la transformation historique de nos sociétés est peut-être arrivée à un stade d'achèvement puisque les limites de la biologie humaine seraient sur le point d'être atteintes.

Surestimer le progrès jusqu'à l'immortalité est un rêve d'absolu, mais penser que les sociétés sont arrivées à un niveau ultime de développement ne paraît pas non plus très pertinent, et mener à terme ce raisonnement négatif sur le progrès serait plutôt ne pas accepter le caractère changeant des sociétés et des hommes.

Que nous apporte donc l'analyse des deux conceptions de la mortalité et de l'espérance de vie dont découle le risque de longévité ?

Non pas une certitude quant à une position plutôt qu'une autre mais bien plus le caractère temporel d'un tel calcul. En effet ce n'est pas dans l'absolu que la question de la variation de la longévité doit être envisagée mais bien plus dans un cadre contextuel, ce que nous allons illustrer avec l'étude de l'allongement de l'espérance de vie à l'échelle de la France métropolitaine.

De plus, une étude sur la dérive de mortalité au niveau d'une entreprise sera réalisée dans le but d'introduire la notion du choix d'une table de mortalité représentative d'une population.

### 1.1.3 ALLONGEMENT DE L'ESPERANCE DE VIE

#### 1.1.3.1 Croissance de la durée de vie

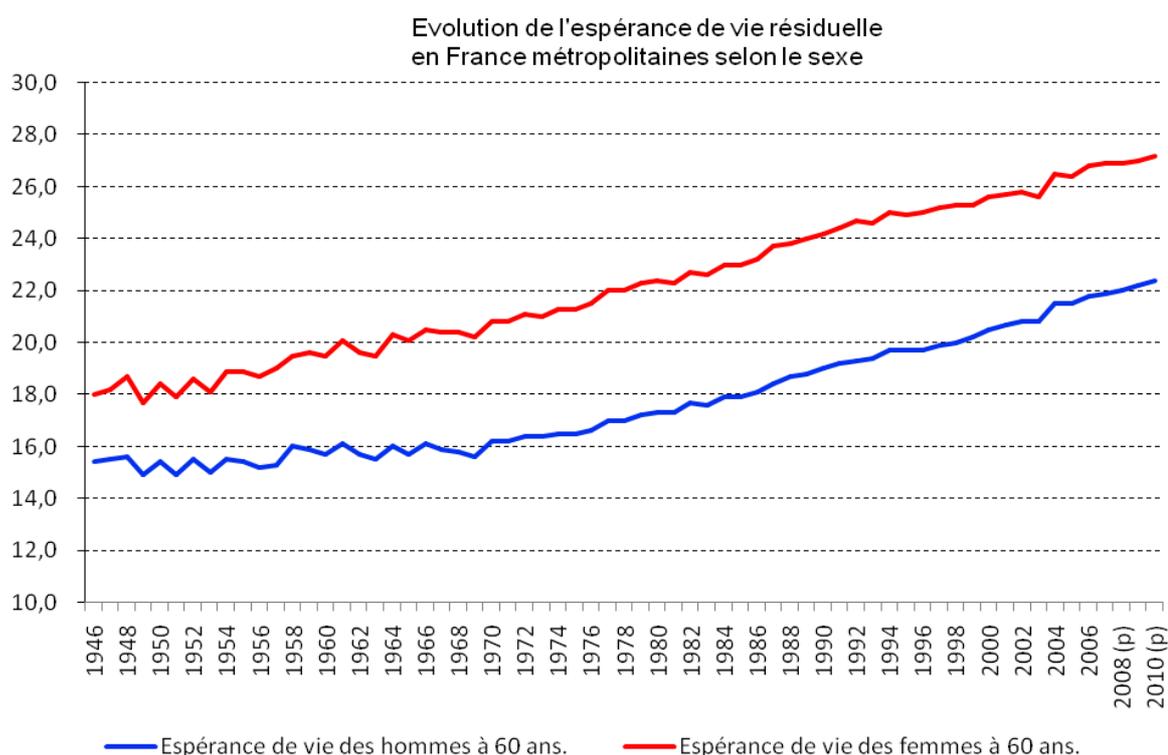
Depuis une quinzaine d'années, les tables de mortalité utilisées pour le provisionnement et la tarification des rentes viagères prennent en compte la dérive tendancielle de la mortalité, qui se traduit par une croissance de l'espérance de vie.

Des études sur l'espérance de vie de la population française valident le fait que la durée de vie augmente avec le temps, suivant le sexe. Ceci n'est pas anodin puisque les progrès de la médecine, la meilleure qualité de vie et le fort potentiel d'aide à la dépendance font partie des avancées des pays développés.

Généralement, un régime de retraite a pour but de verser des rentes à partir d'un certain âge, de ce fait l'espérance de vie résiduelle à partir de 60 ans sera considérée pour montrer que la longévité est présente et doit être prise en compte dans le calcul des provisions.

Après les études effectuées pour la réforme des retraites<sup>4</sup>, l'espérance de vie à 60 ans progresserait « d'un trimestre tous les deux ans ».

La figure ci-dessous nous montre cette évolution selon le sexe et l'année calendaire :



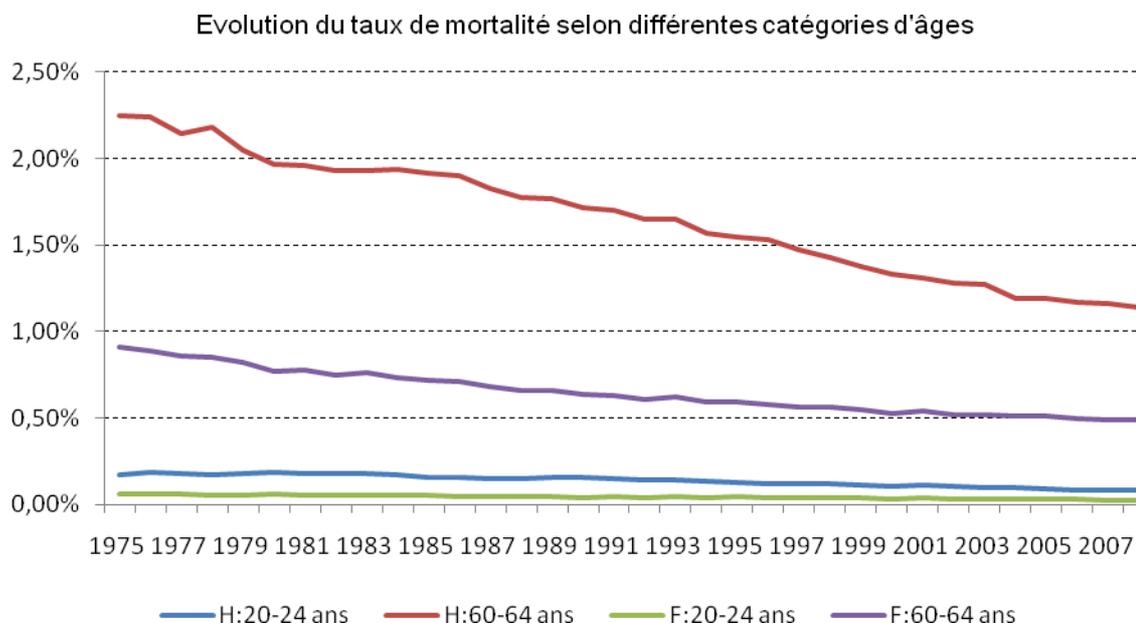
Source INSEE<sup>5</sup>:

<sup>4</sup> <http://www.cor-retraites.fr/IMG/pdf/doc-1315.pdf>

<sup>5</sup> [http://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp?reg\\_id=0&ref\\_id=NATnon02229](http://www.insee.fr/fr/themes/tableau.asp?reg_id=0&ref_id=NATnon02229)

La longévité est bien présente et de plus, elle dépend de l'année calendaire d'où la nécessité de réaliser des tables de mortalité prospectives du type TGH/TGF 05.

En effet depuis la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, les progrès de l'hygiène et de la médecine liés à la révolution pasteurienne sont omniprésents. Pour confirmer l'ampleur de ce phénomène, le schéma suivant montre que le taux de mortalité diminue au cours du temps puisque :



Pour informations, l'espérance de vie d'une femme de 60 ans née en 1950 est passée de 28,2 pour les tables TPG93 à 31,6 ans selon la table TGF05, ce qui correspond à une diminution de mortalité de 33 %. La construction de la table TGH/TGF 05 sera vue dans la partie 1.3.3.

Alors que les projections de l'INSEE et de l'ONU prédisent une évolution vers le haut, certaines études contredisent ce scénario. Elles révèlent principalement la non prise en compte de phénomènes considérés comme des « bombes à retardement » que sont l'obésité, les maladies dues à l'amiante, le tabagisme, les impacts des produits phytosanitaires et de la pollution en général sur la santé (augmentation impressionnante et avérée du nombre de cancers).

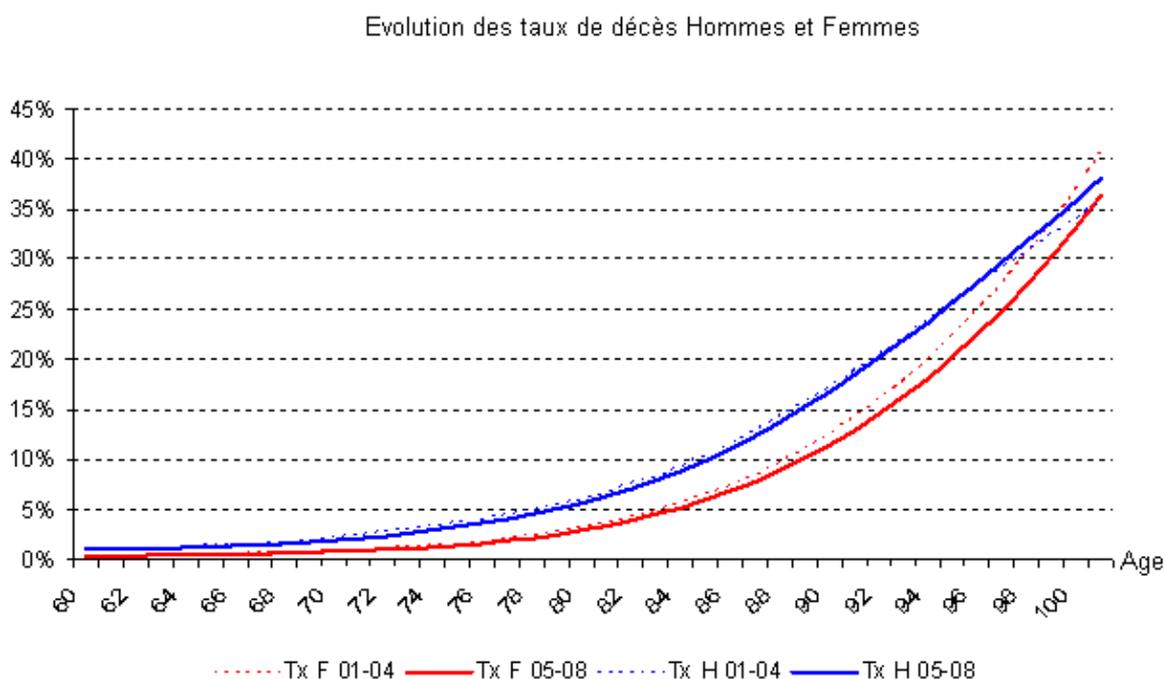
Toutefois, l'augmentation des cas de cancers est due à l'augmentation de l'âge moyen et du diagnostic de cancers de la prostate des dizaines d'années avant qu'ils ne deviennent dangereux. De plus, les progrès en médecine permettent de limiter la mortalité due au cancer.

Après avoir montré l'augmentation de l'espérance de vie sur la population française, le but de la section suivante est de présenter un type d'étude généralement réalisée dans le contexte de la longévité. Ainsi, l'étude suivante présente l'évolution des taux de mortalité pour une population donnée entre 2000 et 2010. Cette analyse des taux de mortalité permet de valider la pertinence des tables de mortalité utilisées dans le contrat d'assurance sur la population couverte.

### 1.1.3.2 Etude de la tendance de la mortalité entre 2001-2004 et 2005-2008

Disposant des taux de mortalité d'expérience (notion définie en 1.2.1) de la population couverte d'un client X (2 000 000 de personnes) sur la période 2001-2008, l'étude est portée sur l'évolution de ces taux entre les périodes 2001-2004 et 2005-2008, déclinés selon le sexe et lissés par des splines cubiques<sup>6</sup>.

L'évolution de la mortalité des populations masculine et féminine est représentée par le graphe suivant :

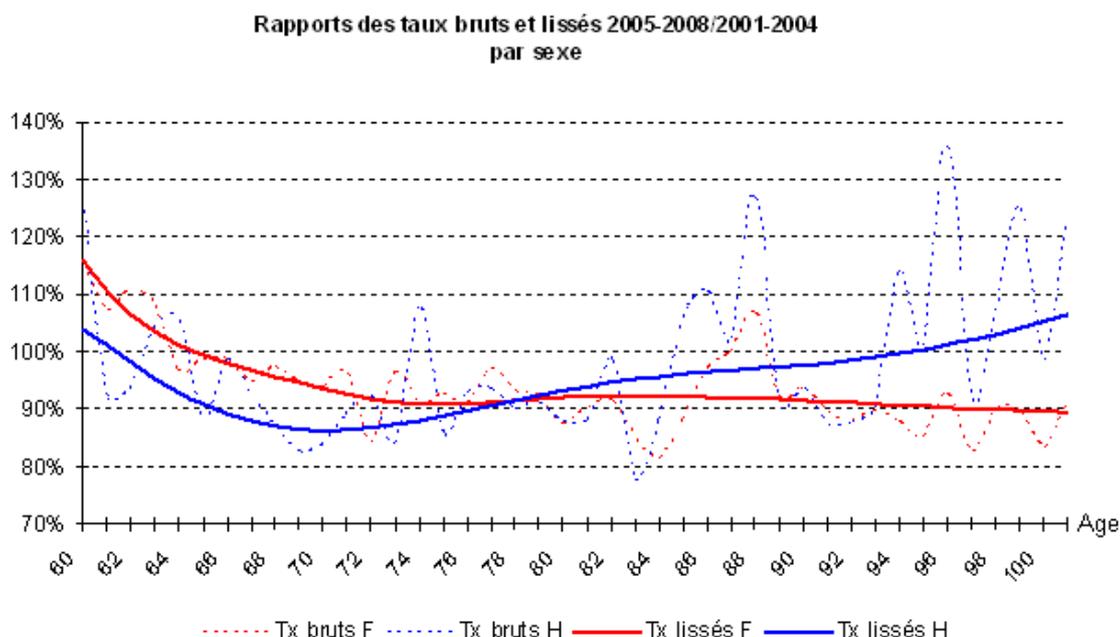


La mortalité des hommes sur la période 2005-2008 apparaît être légèrement inférieure à celle de la période 2001-2004. La mortalité aux âges supérieurs à 95 ans est obtenue par une méthode d'extrapolation des taux de décès, les données brutes après 95 ans n'étant pas prises en comptes. Il s'agit donc de relativiser l'apparente supériorité de la courbe des taux lissés pour la période 2005-2008 après 95 ans.

<sup>6</sup> Cette méthode de lissage est explicitée en Annexe 1

De même, la mortalité des femmes sur la période 2005-2008 apparaît être légèrement inférieure à celle de la période 2001-2004. Les données brutes après 90 ans n'étant pas prises en comptes dans le lissage, la mortalité aux âges supérieurs à 90 ans est obtenue par extrapolation. Il s'agit donc de relativiser l'impression de baisse de la mortalité aux âges élevés.

Le rapport des taux de mortalité entre les périodes 2001-2004 et 2005-2008 par sexe est représenté par le graphe suivant :



La mortalité sur la période 2005-2008 est globalement inférieure à celle de la période 2001-2004 pour les deux sexes.

<b>Rapport des taux de décès 2005-08/2001-04 selon les tranches d'âges</b>				
	<b>Tx bruts F</b>	<b>Tx bruts H</b>	<b>Tx lissés F</b>	<b>Tx lissés H</b>
<b>60 - 69 ans</b>	102,21%	97%	102%	93%
<b>70 - 79 ans</b>	93%	91%	92%	89%
<b>80 - 89 ans</b>	92%	98%	92%	96%
<b>90 - 99 ans</b>	89%	103%	91%	100%
<b>60 - 79 ans</b>	97%	94%	97%	91%
<b>60 - 89 ans</b>	96%	95%	95%	93%
<b>60 - 99 ans</b>	<b>94%</b>	<b>97%</b>	<b>94%</b>	<b>94%</b>
<b>70 - 89 ans</b>	92%	94%	92%	92%
<b>70 - 99 ans</b>	91%	97%	91%	95%
<b>80 - 99 ans</b>	90%	100%	91%	98%

La mortalité de la population féminine sur la période 2005-2008 représente 94 % de celle de la période 2001-2004. Pour les femmes de la tranche 60-69 ans, la mortalité 2005-2008 est légèrement supérieure à celle de la période précédente. Le rapport des taux lissés pour cette tranche d'âge confirme ce point. Néanmoins, compte tenu de la variabilité des taux de mortalité bruts agrégés sur 4 années consécutives (60 à 64 ans), plus grande que celle des taux agrégés sur 8 années consécutives, cette hausse n'est pas significative.

Il est à noter que la faiblesse des taux attendus vers 60-65 ans pour la population féminine explique la volatilité importante observée sur les taux estimés.

La mortalité de la population masculine sur la période 2005-2008 représente 94 % de la mortalité de la période 2001-2004. Pour les hommes de la tranche 90-99 ans, la mortalité 2005-2008 semble légèrement supérieure. Cependant, les effectifs sous risque étant faibles aux âges élevés après 90-95 ans-, cette hausse n'est pas significative.

L'observation des données montre que chaque cas doit être analysé pour tirer les bonnes conclusions, en effet il faut être prudent avec l'interprétation lorsque l'effectif est réduit. Cette étude met en évidence le phénomène de longévité et permet de déterminer la table d'expérience à choisir pour couvrir cette population. En effet, la table qui devra être choisie sera une table présentant des taux de mortalité en adéquation avec ceux de la population considérée. L'étude réalisée au cours de ce mémoire se fait sur un effectif plus réduit, ainsi il faudra être vigilant sur l'interprétation des résultats obtenus.

Dans la partie suivante, des notions actuarielles seront évoquées dans le but d'obtenir les éléments permettant de créer des tables de mortalité spécifiques à une population.

## 1.2 QUELQUES NOTIONS ACTUARIELLES

Cette partie a pour but de rappeler des notions actuarielles permettant de décrire les futurs modèles utilisés tout au long de ce mémoire.

L'explication des modèles permettant la simulation du risque de longévité sera expliquée en 1.3.2, les notions suivantes sont néanmoins utiles pour éviter toute confusion possible.

### 1.2.1 RAPPEL DE PROBABILITES

Soit  $T$  une variable aléatoire absolument continue à valeurs dans  $[0 ; +\infty[$ . La fonction de répartition sera  $F(t) = P(T \leq t)$ . De plus, on note  $f$  sa densité telle que

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t+h)}{h} .$$

**Définition 1 :** La fonction de survie est le complément de la fonction de répartition. Elle est définie par :

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t).$$

**Définition 2 :** Soit  $S_t(u) = P(T > t+u | T > t)$  la fonction de survie conditionnelle, elle représente la survie d'un individu après l'instant  $t+u$ , sachant qu'il est vivant en  $t$ . La propriété suivante est très utile, elle montre que la fonction de survie conditionnelle peut s'exprimer simplement avec la fonction de survie :

$$S_t(u) = P(T > t+u | T > t) = \frac{P(T > t+u)}{P(T > t)} = \frac{S(t+u)}{S(t)}.$$

Ces notions seront essentielles pour définir la probabilité de survie d'un individu selon son âge.

**Définition 3 :**  $T_x(t)$  représente la durée de vie résiduelle au temps  $t$  d'un individu d'âge  $x$ .

**Définition 4 :** Utilisé comme le taux de décès en continu, la fonction de hasard est définie comme suit :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(S(t)).$$

Ainsi, on déduit que la loi de  $S$  est déterminée par la fonction de hasard et que l'on a la relation suivante :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right).$$

Avec la  $S_t(u)$  fonction de survie conditionnelle, on déduit la formule suivante :

$$S_t(u) = \exp\left(-\int_t^{t+u} h(s) ds\right).$$

La plupart du temps, c'est la fonction de hasard qui est utilisée pour spécifier un modèle de durée.

En utilisant la fonction de hasard et la fonction de survie, on déduit que pour tout intervalle de temps  $\Delta t$  petit,  $h(t) \times \Delta t$  est approximativement la probabilité que l'individu décède entre  $t$  et  $t+u$ , sachant qu'il était vivant en  $t$ . Soit :

$$P(t < T < t + \Delta t | T > t) = h(t) \Delta t.$$

**Définition 5 :** Soit  ${}_k p_x(t)$  la probabilité qu'un individu d'âge  $x$  vivant à la date  $t$  puisse vivre  $k$  années supplémentaires. On a :

$${}_k p_x(t) = P(T_x(t) > k | T_x(t) > 0) \quad \forall x, k, t > 0.$$

On déduit la propriété fondamentale suivante basée sur la survie conditionnelle :

$${}_{k+1} p_x(t) = {}_k p_x(t) \times {}_1 p_{x+k}(t+k) \quad \forall x, k, t > 0.$$

**Remarque 1 :** Sur des études de longévité sur un an, la probabilité  ${}_1 p_x(t)$  est utilisée cependant la plupart du temps, on omettra le 1 par simplification d'écriture.

**Définition 6 :** La probabilité de décès, notée  ${}_k q_x(t)$ , par définition est le complémentaire de la probabilité de survie, ainsi il s'agit de la probabilité qu'un individu d'âge  $x$  vivant à la date  $t$  décède dans les  $k$  années suivantes. On a ainsi :

$${}_k q_x(t) = P(T_x(t) \leq k | T_x(t) > 0) \quad \forall x, k, t > 0.$$

**Définition 7 :** Le taux de mortalité annuel est le rapport du nombre de décès de l'année à la population totale moyenne de l'année. Le taux de mortalité pour un âge donné à une année donnée pour une population donnée est défini par :

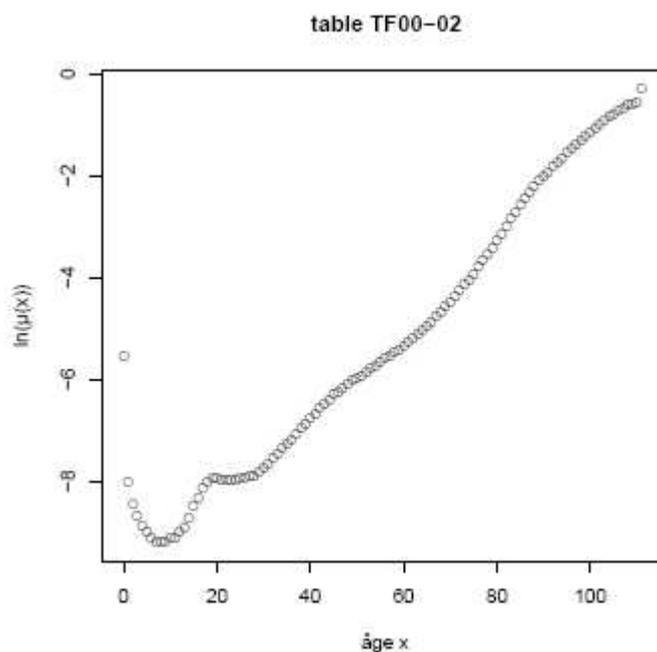
$$m_x(t) = \frac{\text{Nombre de décès à l'âge } x \text{ pendant l'année } t}{\text{Effectif moyen d'âge } x \text{ en } t}.$$

**Remarque 2 :** L'effectif moyen de l'année  $t$  d'âge  $x$  est équivalent à l'exposition au risque noté généralement  $E_{xt}$ .

**Définition 8 :** Le taux instantané de mortalité en  $t$  à l'âge  $x$  est noté  $\mu_{xt}$  et vérifie la relation suivante :

$$\mu_{xt} = -\ln(p_x(t)).$$

L'allure typique de ce taux pour la durée de vie humaine selon la table TF 00-02 est la suivante :



Le taux diminue de 0 à 7-8 ans en raison de la mortalité infantile et juvénile. Aux alentours de 18 ans, la « bosse des accidents » implique une élévation de la mortalité en raison de l'augmentation de la mortalité accidentelle. Ce taux croît ensuite jusqu'à l'âge maximum de la table.

Les taux de mortalité jouent un rôle prépondérant dans le choix du modèle de mortalité (cf partie 1.3.2).

## 1.2.2 NOTION DE RENTE EN ACTUARIAT

L'objectif de ce mémoire étant de quantifier la part de risque systématique de mortalité présente dans un engagement de retraite, les termes de rentes utilisés en actuariat de manière générale doivent être avant tout explicités.

Il faudra ainsi distinguer trois types de rentes : les rentes en cas de vie, en cas de décès et le versement d'un capital décès.

### 1.2.2.1 Rentes viagères

Par définition, une rente viagère est une rente versée jusqu'au décès du bénéficiaire. En termes actuariels, elle correspond au versement d'une unité monétaire, jusqu'au décès du bénéficiaire. Le fractionnement de la rente peut être mensuel, trimestriel, semestriel ou annuel.

**Définition 8 :** La valeur actuelle probable (VAP) d'une rente annuelle à terme d'avance pour un individu d'âge  $x$  à la date  $t$  est définie par :

$$\ddot{a}_x(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{(t,t+i)} p_x(t),$$

avec  $v_{(t,t+i)}$  le facteur d'actualisation entre l'année  $t$  et  $t+i$ , soit  $v_{(t,t+i)} = \frac{1}{(1+tx)^{(t+i-t)}}$ .

L'actualisation consiste à ramener sur une même base des flux financiers non directement comparables qui se produisent à des dates différentes. Actualiser la valeur de flux ou de revenus se produisant à des dates différentes ( $t$  et  $t+i$ ) dans le temps consiste à calculer leur valeur à une date donnée à l'aide d'un facteur d'actualisation noté  $v$ .

**Remarque 3 :** Le terme «  $tx$  » est le taux d'actualisation de la période considérée.

Si la rente est payée en fin de période (ie fin d'année pour des rentes annuelles), on parle d'un versement à terme échu, on a ainsi la notation suivante :

$$a_x(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} v_{(t,t+i)} p_x(t) = \ddot{a}_x(t) - 1.$$

Il existe des rentes viagères différées ce qui implique que la rente n'est servie qu'après une période plus ou moins longue appelée différée. De plus, l'ajout d'un temporaire implique que la rente est versée pendant une période prédéfinie à l'avance.

**Définition 9 :** Dans la formule suivante, on définit, pour un individu d'âge  $x$  à la date  $t$ , la VAP d'une rente annuelle à terme d'avance avec différé  $u$  et temporaire  $s$ .

$${}_{u|s}\ddot{a}_x(t) = \sum_{i=u}^{s+u-1} v_{(t,t+i)} i P_x(t).$$

Pour des rentes viagères, deux risques majeurs encourus sont présents :

- ✓ un risque financier lié directement aux fluctuations périodiques du taux d'actualisation. La rente est directement touchée du fait de la présence du facteur d'actualisation ;
- ✓ un second risque, non financier, correspondant au risque de dérive de la longévité. En effet, ce risque affecte directement le nombre de rentes à verser aux salariés et de ce fait provoque un impact sur l'engagement de l'assureur. Notons que suivant la tendance de ce risque, cela peut engendrer un gain technique pour l'assureur si le taux de mortalité est à la hausse ou à contrario, à une perte technique si la longévité du portefeuille s'accroît.

Il existe des contrats qui prennent en compte la réversion, c'est-à-dire que si le titulaire de la rente décède, une partie de sa rente sera versée à un bénéficiaire prédéfini dans le contrat.

Ainsi la détermination de la valeur actuelle probable fait intervenir deux individus, le titulaire de la rente et son bénéficiaire. La valeur actuelle probable (VAP) d'une rente annuelle avec réversion à terme d'avance pour un individu d'âge  $x$  à la date  $t$  et son bénéficiaire d'âge  $y$  en  $t$  est définie par :

$$\ddot{a}_{xy}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} v_{(t,t+i)} i P_x i P_y(t).$$

Dans le cadre de ce mémoire, la VAP d'une rente annuelle à terme d'avance pour un individu d'âge  $x$  sachant que son bénéficiaire d'âge  $y$  est vivant à la date  $t$  sera utilisée. Cette VAP est obtenue par la formule suivante :

$$\ddot{a}_{x|y}(t) = \ddot{a}_x(t) + tx_{rev} \times (\ddot{a}_{xy}(t) - \ddot{a}_y(t)).$$

**Remarque 4 :** Tous les types de rentes pré cités sur une tête peuvent être définis sur deux têtes. Dans la seconde partie, un cas de réversion sur deux têtes sera explicité.

### 1.2.2.2 Capital décès

En actuariat, il existe plusieurs types de capital décès. Le capital décès en fin d'année du décès et le capital décès avec différé et temporaire à terme échu seront étudiés.

Ce capital décès correspond à la somme d'argent versée en une fois, prévue par une garantie d'assurance décès souscrite par l'assuré au profit d'un ou plusieurs bénéficiaires nommément désignés dans le contrat. Le versement du capital est dû si le décès de l'assuré survient pendant la période de validité du contrat. La notation d'un capital décès en fin d'année du décès est la suivante :

$$A_x(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} v_{(t,t+i)} i p_x(t) q_{x+i}(t+i),$$

avec  $v_{(t,t+i)}$  le facteur d'actualisation entre l'année  $t$  et  $t+i$ , soit  $v_{(t,t+i)} = \frac{1}{(1+tx)^{(t+i-t)}}$ .

Par analogie aux rentes viagères, on note un capital décès temporaire et différé à terme échu de la manière suivante :

$${}_{u|s}A_x(t) = \sum_{i=u+1}^{u+s} v_{(t,t+i)} i p_x(t) q_{x+i}(t+i).$$

Généralement, pour que le versement du capital ait lieu, il faut que l'assuré décédé ait cotisé au moins un certain temps, ce dernier étant défini dans le contrat.

De même que pour les rentes viagères, dans ce type de contrat, le risque lié au taux d'actualisation est présent. De plus, ce contrat est très sensible aux risques externes impliquant une surmortalité non anticipée (exemple : catastrophe naturelle, épidémie ...). Les propriétés précédemment citées concernent tout particulièrement le domaine de l'assurance vie.

Afin d'analyser au plus juste la mortalité, un outil d'analyses des données démographiques est nécessaire, pour cela le diagramme de Lexis est expliqué dans la partie suivante.

### 1.2.3 DIAGRAMME DE LEXIS

La nécessité d'étudier les phénomènes démographiques par âge, période et cohorte s'est imposé comme un passage obligé. La mesure de ce phénomène sera dénommée par la suite « cohortisation ». L'outil permettant de visualiser la cohortisation est le diagramme de Lexis (voir [15]).

Ce diagramme vise simplement à représenter sur une figure en plan les évènements démographiques en fonction du triple critère du moment, de l'âge et du moment de naissance. En fait, il s'agit d'un « diagramme en trajectoires » : la vie de chaque individu s'y matérialise par une trajectoire, ligne oblique inclinée à 45° et représentant l'évolution de son âge en fonction du temps ; cette trajectoire peut servir de support pour localiser les évènements affectant l'individu en cause.

Les données, que les démographes utilisent dans leurs analyses et qui seront à localiser sur le diagramme de Lexis, relèvent de deux catégories principales :

- ✓ des évènements affectant les individus (naissances, décès, migrations, mariages...);
- ✓ des effectifs d'individus ayant des caractéristiques communes en matière d'âge.

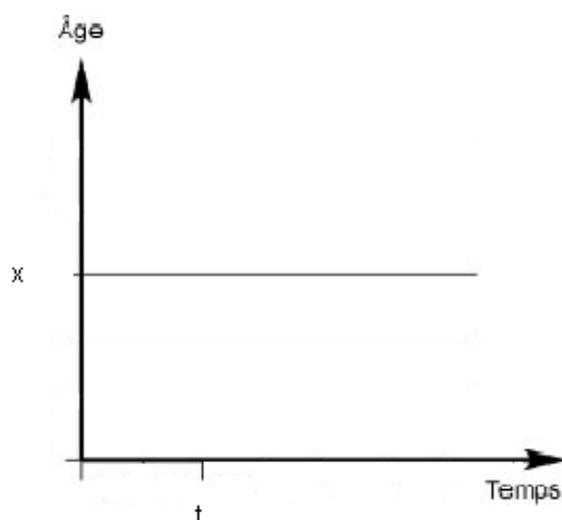
La vocation première du diagramme de Lexis est de visualiser ces données en les localisant sur une figure à deux axes ce qui permet de comprendre les relations qui existent entre elles. En conséquence, on pourra déterminer la nature exacte des indices calculables au départ des données disponibles ou, au contraire, exclure certains types de calculs (cas extrêmes).

Le diagramme de Lexis tire une partie de sa spécificité du fait que, bien qu'il ne comporte que deux axes, il permet le recours à trois coordonnées. Dans sa version la plus habituelle, l'axe des abscisses supporte le temps (calendrier) et celui des ordonnées, l'âge. Ces deux axes dessinent un diagramme cartésien des plus classiques. Toutefois, sur ce diagramme, une troisième coordonnée s'utilise également, à savoir le moment de naissance (et ainsi la génération).

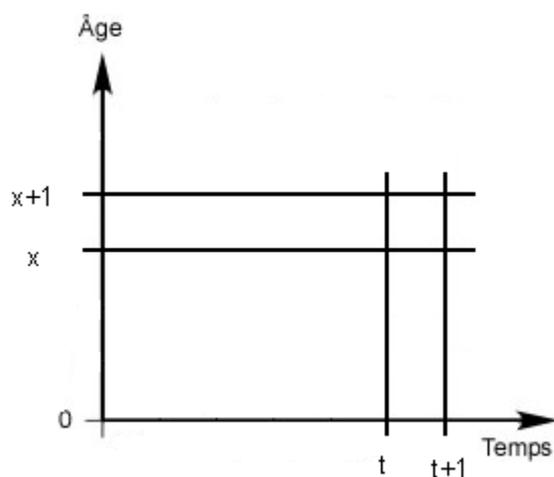
Si les coordonnées en temps (abscisse) et en âge (ordonnée) se traduisent de manière tout à fait habituelle par des perpendiculaires à leurs axes respectifs, la coordonnée du moment de naissance va engendrer des diagonales, chacune étant une ligne de vie qui montre l'évolution de l'âge en fonction du temps pour une date de naissance donnée.

Pour un emploi aisé, le diagramme de Lexis est complété par des réseaux de droites : les horizontales qui délimitent les âges révolus ; les verticales qui délimitent les années et les obliques qui délimitent les générations. Cette façon de le présenter peut se dénommer "diagramme muet" dans le sens où il est prêt à recevoir les données à localiser.

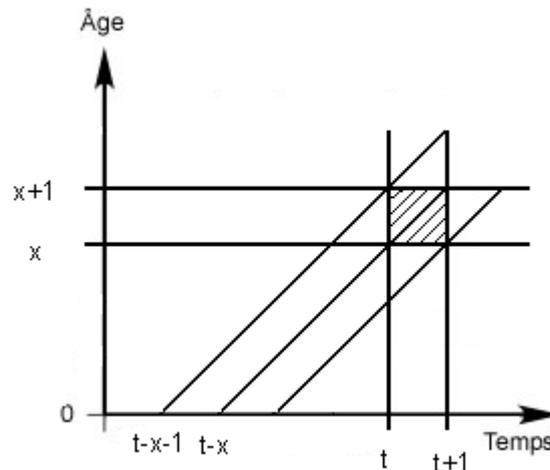
Le graphique suivant représente les horizontales des âges exacts. Les lignes séparent les âges révolus.



Les verticales ajoutées sur la figure suivante traduisent les débuts (1<sup>er</sup> janvier à 0 heure) ou les fins (le 31 décembre à 24 heures) d'années. Ces verticales délimitent les années dans la surface du diagramme.



Finalement, les obliques ajoutées sur la figure suivante délimitent les générations ou cohortes (ensembles d'individus nés la même année). Le diagramme muet est ainsi au complet.



Les différents points mortuaires sont localisés dans le carré hachuré du diagramme de Lexis, c'est-à-dire que les personnes concernées étaient nées en année entière entre le 1<sup>er</sup> janvier de l'année  $t-x-1$  et le 31 décembre de l'année  $t-x$ , soit plus précisément sur deux générations.

Par l'intermédiaire de ce diagramme, le nombre de décès d'individus d'âge  $x$  intervenus dans l'année  $t$  peut être représenté par la notation suivante,  $D_{xt}$ .

Dans la partie 2.2.2, une description sera effectuée afin de repérer le nombre de décès d'individu d'âge  $x$  entre l'année  $[t ; t+1]$  pour une génération seulement.

Grâce à la méthodologie évoquée précédemment, de nombreuses études ont été réalisées dans le but d'obtenir des modèles pouvant décrire le phénomène de mortalité (plus généralement évoqué sous le nom de modèle de Durée).

Après avoir mis en évidence les notions probabilistes et actuarielles permettant d'aborder le risque de longévité, la partie suivante énonce un panel de modèles existants permettant de réaliser des tables prospectives. Cependant, avant toute chose, il est préférable de bien cerner le risque de modèle.

### 1.3 RISQUE DE MODELE ET MODELES DE MORTALITE

Par définition, le risque de modèle correspond exactement aux différences potentielles entre les mesures délivrées par un modèle mathématique et la réalité.

L'efficacité d'un modèle peut être mise en cause pour différentes raisons.

- ✓ le contexte est hors norme s'il se base sur des informations historiques qui ne décrivent pas, ou plus, la réalité du moment ;
- ✓ le modèle est pertinent, mais il est mal utilisé : données historiques insuffisantes (quantité ou qualité).

Dans cette partie, la notion de risque de modèle sera abordée ainsi que sa définition pour ensuite énoncer la théorie de deux modèles de mortalité très connus.

Dans une troisième partie, la construction de la table prospective TGH/TGF 05 en vigueur dans les contrats d'assurance vie sera expliquée.

### 1.3.1 LITTÉRATURE ET DÉFINITION

Tout modèle est juste une représentation du monde réel. En effet, lors de la réalisation d'un modèle quelconque, il y a présence d'une incertitude que ce soit sur les paramètres ou bien sur la spécification du modèle probabiliste.

Ainsi le but sera de définir un modèle de mortalité pertinent prenant en compte l'agrégation de plusieurs risques afin de minimiser le risque de modèle final.

Les modèles de mortalité, pouvant être déterministes ou stochastiques, se basent sur des informations passées afin d'extrapoler les tendances futures.

Une approche stochastique s'avère être une approche plus solide pour comprendre les répercussions financières du risque de longévité, car elle génère une prévision de la distribution des probabilités plutôt qu'une prévision ponctuelle déterministe. L'agrégation de ce risque au moyen d'une approche uniforme permet aux pilotes de régimes de mieux comprendre le risque global du régime en question. Plusieurs modèles stochastiques de mortalité ont été mis à l'essai sur des données du Royaume-Uni et des États-Unis. Ces modèles produisent des projections stochastiques des taux de mortalité en décomposant les améliorations de la mortalité en fonction de l'effet d'au moins un ou plusieurs des éléments suivants : âge, période, cohorte.

De toute évidence, les actuaires des régimes de retraite doivent comprendre les limites de chacun de ces modèles, s'assurer que ces modèles peuvent s'ajuster à l'expérience d'une population donnée, procéder à des vérifications par rétrospection et s'assurer que la mortalité projetée au moyen du modèle utilisé soit statistiquement valide et pertinente aux fins de l'évaluation des régimes de retraite.

Les deux modèles présentés ci-après sont stochastiques et mettent en évidence un taux de mortalité futur aléatoire noté  $\mu_{xt}$ .

La partie suivante énonce un modèle proposé par Lee & Carter (1992) qui permet de générer les tables prospectives du moment.

### 1.3.2 MODELE DE MORTALITE

Plusieurs modèles existent pour décrire le risque de longévité, ainsi il faudra évaluer leur pertinence via le logiciel R. Il est possible de télécharger les Packages LifeMetrics sous R sur le site de la firme JP Morgan <sup>(7)</sup>. Ils permettent d'estimer les paramètres issus des différents modèles proposés par cette société. Grâce à ces packages, la simulation des projections de mortalité pour des horizons inconnus est possible. Dans le présent mémoire, deux modèles sont explicités.

#### 1.3.2.1 Modèle de Lee-Carter

Le modèle de Lee et Carter [11] est le plus utilisé dans le monde de l'actuariat, notamment pour la construction de tables prospectives. Il s'agit d'une étude se basant sur une extrapolation des tendances passées d'une population. Ce modèle propose d'ajuster les taux de décès selon l'équation suivante :

$$\ln(\mu_{xt}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \varepsilon_{xt},$$

avec  $\mu_{xt}$  le taux instantané de mortalité,  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  et  $k_t$  des paramètres dépendant de l'âge  $x$  et du temps  $t$ .  $\varepsilon_{xt}$  sont des variables aléatoires (v.a) centrées, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale correspondant à l'erreur du modèle.

A travers ce modèle, le taux de mortalité est soumis à deux effets : un effet propre à l'âge de l'individu (premier terme) et un effet combinant l'âge et le temps.

Le premier effet est représenté par le paramètre  $\alpha_x$  qui s'interprète comme la valeur moyenne des  $\ln(\mu_{xt})$  au cours du temps. De plus, le second est représenté par le deuxième terme, on a  $\frac{d \ln(\mu_{xt})}{dt} = \beta_x \frac{dk_t}{dt}$  qui implique que  $\beta_x$  se traduit par la sensibilité de la mortalité à l'âge  $x$  par rapport à l'évolution générale  $k_t$ .

Cependant ce modèle présente une contrainte principale qui est la constance au cours du temps de la sensibilité de la mortalité. Cette contrainte d'homoscédasticité des taux montre en pratique que, dû au manque d'observations, le logarithme des taux de mortalité est plus variable à âge élevé qu'à âge faible.

Lee et Carter ont rajouté les contraintes suivantes sur les paramètres afin que leur modèle soit identifiable :

$$\sum_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \beta_x = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} k_t = 0.$$

<sup>7</sup> <http://www.jpmorgan.com/pages/jpmorgan/investbk/solutions/lifemetrics/software>

Ensuite les estimations des paramètres se font par la méthode des moindres carrés ordinaires selon la formule suivante :

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{k}_t) = \arg \min_{\alpha_x, \beta_x, k_t} (\ln(\hat{\mu}_{xt}) - \alpha_x - \beta_x k_t)^2.$$

Où les  $\hat{\mu}_{xt}$  représentent les taux bruts de mortalité estimés à partir des données du client X.

L'estimation des paramètres pour ce modèle se fait par une décomposition en valeurs singulières qui implique directement le problème de fermeture des tables aux âges élevés pour que ces dernières soient complètes. En effet, à partir d'un certain âge, le manque d'information est source de résultats instables. Pour plus d'explications sur ce point, le lecteur pourra consulter l'ouvrage *Modèles de durée – applications actuarielles* par Planchet & Thérond écrit en 2006 (voir [11]).

Ensuite lorsque la surface de mortalité a été ajustée sur les données passées, dans le but d'extrapoler les taux futurs, on effectue une régression linéaire sur les coefficients de la série  $(k_t)$  en supposant une tendance affine du type :

$$k_t^* = at + b + \gamma_t,$$

avec  $(\gamma_t)$  un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma$ . a et b sont les paramètres de la régression linéaire.

Ainsi, l'expression de tous les paramètres sont connus. A ce stade, il reste à effectuer la fermeture des tables par la méthode de Coale et Kisker (voir [5]) si l'échantillonnage n'est pas assez conséquent. Cette méthode consiste à construire des taux de mortalité aux grands âges à partir des taux lissés obtenus par la méthode de Lee Carter.

La question de fermeture de la table est importante dans le cas de la construction de table pour des provisionnements de rentes viagères puisque les rentiers ont des âges élevés. Toutefois il est à noter que ce point doit être relativisé si les rentiers d'âges très élevés ne représentent qu'une petite proportion du portefeuille considéré.

Comme dit précédemment, le modèle Lee Carter est basé sur l'hypothèse d'homoscédasticité des taux de mortalité qui semble contraignante puisqu'en réalité, lorsque l'âge est élevé, les taux de décès augmentent fortement. Toutefois, un autre modèle existe dans le but d'effacer cette hypothèse d'homoscédasticité en prenant en compte le nombre de décès observés à l'âge x dans l'année t, soit  $D_{xt}$ , ce modèle a été réalisé par Brouhns et al. [2002]. Le but sera de modéliser l'espérance de mortalité de la variable aléatoire  $D_{xt}$ .

### 1.3.2.2 Le modèle log Poisson

Le modèle proposé par Brouhns et al en 2002 [3] reprend la structure log-bilinéaire des taux de mortalité proposée par Lee-Carter en intégrant  $D_{xt}$  dans le but de modéliser son espérance soit :

$$E(D_{xt}) = L_{xt} \times \mu_{xt}.$$

Comme dans la section 1.3.2.1, l'idée sera de modéliser le nombre de décès dans l'année  $t$  à l'âge  $x$  par une loi de Poisson en faisant l'hypothèse que  $D_{xt}$  suit une loi de Poisson de paramètre  $L_{xt}\mu_{xt}$  avec un taux instantané de mortalité vérifiant l'égalité suivant :

$$\mu_{xt} = \exp(\alpha_x + \beta_x k_t) \quad (1).$$

L'expression du taux de décès instantané est identique à celle présentée dans le modèle de Lee-Carter ainsi les contraintes à utiliser pour ce modèle sont les mêmes que celles

énoncées dans la section 1.3.1, ie  $\sum_{x=x_{\min}}^{x=x_{\max}} \beta_x = 1$  et  $\sum_{t=t_{\min}}^{t=t_{\max}} k_t = 0$ .

Le fait de passer d'un modèle linéaire à un modèle linéaire généralisé avec le logarithme comme fonction de lien est l'étape qui permet de passer du modèle Lee-Carter au modèle Poissonien.

Puisque  $P(D_{xt} = d) = \frac{(L_{xt} \times \mu_{xt})^d}{d!} \exp(-L_{xt} \times \mu_{xt})$  et en utilisant (1), l'écriture de la log - vraisemblance est définie comme suit :

$$\ln(L(\alpha, \beta, k)) = \sum_{x,t} \{D_{xt} (\alpha_x + \beta_x k_t) - L_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)\}.$$

La résolution numérique de cette équation se fait grâce à l'algorithme de Newton – Raphson qui cherche à construire une bonne approximation d'un zéro de la fonction d'une variable réelle  $f(x)$  en se basant sur son développement de Taylor au premier ordre.

La résolution de cette équation se trouve dans le support de cours de modèle de Durée de Monsieur Planchet sur les tables de mortalité<sup>8</sup>.

Après résolution et vérifications des contraintes d'identifiabilité, les résultats suivants sont obtenus :

<sup>8</sup> <http://www.ressources-actuarielles.net/>

$$k_t^* = \hat{k}_t - \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \hat{k}_t \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \hat{\beta}_x,$$

$$\beta_x^* = \frac{\hat{\beta}_x}{\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \hat{\beta}_x},$$

$$\alpha_x^* = \hat{\alpha}_x + \frac{\hat{\beta}_x}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \hat{k}_t.$$

Ce modèle est un modèle implémenté dans les programmes de LifeMetrics.

D'autres modèles existent (on pourra se référer au site de JP Morgan page 27) mais les deux modèles présentés précédemment sont suffisants dans la suite de ce mémoire puisque la construction de la table de mortalité dans la section 2.2.2 est basée sur un modèle de positionnement du fait du manque de données initiales. Ce modèle reprend les bases de ces deux modèles.

Dans la partie suivante, la construction des tables générationnelles TGH/TGF 05 est expliquée pour comprendre les différentes étapes permettant l'établissement de tables prospectives en vigueur actuellement. Le fait d'utiliser en première approche un exemple concret permettra de faciliter la compréhension de la construction d'une table de mortalité prospective sur un groupe restreint dans la section 2.2.2 de cette étude.

### 1.3.3 CONSTRUCTION DE LA TABLE TGH/TGF 05

La construction d'une table de mortalité prospective nécessite de passer par plusieurs étapes notamment :

- ✓ **La réflexion sur la nature et le nombre de données utilisées** pour avoir une exposition au risque représentative de la population choisie.

Dans le cas de la table TGH/TGF 05, il est nécessaire de posséder des données composées d'observations de rentiers sur 19 portefeuilles. Compte tenu du volume limité au vue des volumes habituellement utilisés pour la construction des tables prospectives, un modèle utilisant une référence externe de mortalité a été choisi pour pallier les difficultés associées à des échantillons de taille réduite. Ce modèle permet de positionner la mortalité du groupe considéré par rapport à une référence externe. La table prospective INSEE sous-jacente a été construite sur la base des tables du moment de 1962 à 2000.

- ✓ **Le choix des informations** sont :
  - Pour l'assuré :
    - ✓ le sexe afin de séparer les hommes des femmes ;
    - ✓ la date de naissance afin de connaître le millésime de naissance ;
    - ✓ la date de liquidation afin de connaître sa date de retraite;
    - ✓ la date d'entrée dans l'entreprise afin de connaître son ancienneté ;
    - ✓ la date de sortie afin de savoir si la personne reçoit une rente ou non ;
    - ✓ le motif de sortie (décès ou autre).
  - Pour le contrat :
    - ✓ l'option de sortie de rente (obligatoire ou facultative) ;
    - ✓ la nature du contrat (individuel ou collectif) ;
    - ✓ le montant annuel de la rente.
  
- ✓ **Le choix de construction des tables INSEE sous-jacente** : La construction de la table TGH/TGF05 de cette dernière se fait par un modèle de logits du type :

$$\lg_x(t) = \ln\left(\frac{q_{xt}}{1 - q_{xt}}\right).$$

De plus, les estimations sont obtenues via un modèle d'analyse de variance covariance standard.

- ✓ **La méthode d'ajustement des taux bruts** : dans ce cas, les taux bruts ont été calculés par Kaplan-Meier <sup>9</sup>.

Différents nœuds pour le spline cubique sont considérés qui représentent deux périodes : une avant 40 ans puisqu' aucune donnée n'est disponible : « il a été retenu sur la plage 0-40 ans les structures INSEE (forme des logits en cloche inversée entre 0 et 20 puis tangente horizontale en 10 (avec minimum) et en 20 (avec inflexion) à peu près stable dans le temps puis structures grosso modo linéaire à partir de 25 ans (ce phénomène étant là encore stable dans le temps). En raccordant aux tables de place à 40 ans avec une condition C1 (continuité de la dérivée) on obtient autant de contraintes que de paramètres et donc une solution analytique » (voir [10]). A partir de 40 ans, le positionnement est effectué via la régression des logits des taux bruts sur les logits de la table de référence, ce qui conduit formellement au modèle suivant :

$$\lg_x(t) = a_x \times \lg_x^{ref}(t) + b_x + \varepsilon_{xt}.$$

<sup>9</sup> Cf cours de Modèles de durée de Monsieur Planchet sur les statistiques des modèles non paramétriques.

L'estimation des paramètres  $a_x$  et  $b_x$  est finalement effectuée dans ce contexte (le modèle étant alors non linéaire), sur la plage d'âge 40-95 ans et pour les années 1994-2004, après avoir posé la contrainte  $a_x = \delta + \eta \times b_x$  due à la corrélation entre les paramètres  $a$  et  $b$ . Les paramètres  $\delta$  et  $\eta$  sont à déterminer par la méthode des moindres carrés.

- ✓ **La projection des taux de mortalité :** après avoir ajusté les tables d'expérience sur la période 1994 – 2004, une extrapolation de la mortalité est effectuée. Après obtention des paramètres  $\delta$ ,  $\eta$  et  $b$ , le prolongement des tables de place sur la dimension temporelle est effectué pour obtenir les taux prospectifs de 2005 à 2100 grâce à la formule :

$$\lg_x (t) = (\delta + \eta \times b_x) \times \lg_x^{ref} (t) + b_x + \varepsilon_{xt}.$$

Toutefois l'application directe de cette formule d'extrapolation conduit à des taux de mortalité de la population d'assurés supérieurs à la population générale à partir de 2015, ce qui apparaît peu vraisemblable.

Après avoir modélisé l'écart entre les logits de la population d'assurés et la population générale, il reste à extrapoler les taux de décès supérieurs à 95 ans pour finaliser les tables.

- ✓ **La fermeture de la table :** il faut assurer une certaine cohérence des différentes tables aux âges supérieurs à 95 ans. Ainsi la méthode retenue n'est pas de fermer la table à  $t$  fixé mais de réaliser un prolongement sur la base d'une expression analytique, en intégrant des contraintes. Pour cela, on impose une forme quadratique aux logits aux grands âges en assurant un raccordement de classe  $C^1$  à 95 ans et en imposant un taux de décès de  $\frac{1}{2}$  pour les âges de 110 ans. Cependant cette méthode présente quelques incohérences (croisement de taux de mortalité) ainsi on applique une contrainte sur l'âge pivot. La construction des tables prospectives TGH/TGF 05 est entièrement détaillée dans la note de Monsieur Planchet au lien en note<sup>10</sup>.

Dans la suite de ce mémoire, les étapes vues précédemment seront utilisées dans le but de créer une table de mortalité spécifique pour une population donnée afin de la comparer à la table de mortalité de référence du moment (TGH/TGF 05).

Cette première partie a permis de mettre en évidence le contexte relatif au risque de longévité. De plus, le rappel des notions théoriques en actuariat permettra de générer des

<sup>10</sup> [http://www.winter-associes.fr/site.nsf/8e73e9fc1e8b24abc1256e2c0035fdc8/0f2e312e3056fe3bc12571ae001d45ec/\\$FILE/1291-03.pdf](http://www.winter-associes.fr/site.nsf/8e73e9fc1e8b24abc1256e2c0035fdc8/0f2e312e3056fe3bc12571ae001d45ec/$FILE/1291-03.pdf)

tables de mortalité selon des modèles présentant un risque à minimiser. Dans la partie suivante, une table de mortalité sera créée à partir des données historiques d'un assureur. Cependant comment et en quoi le risque de longévité est-il si important pour les compagnies d'assurances ?

La partie suivante a pour but de décrire les étapes intervenant lors d'une analyse de la mortalité. Le contrat considéré est un contrat de garantie de mortalité qui permet au souscripteur d'être immunisé contre une dérive de la mortalité. L'objectif sera de constater les impacts d'un changement de tables sur les engagements d'un assureur lié à un contrat de garantie de mortalité.

Après avoir décrit le cadre de l'étude et par l'intermédiaire des méthodes explicitées auparavant, une table de mortalité sera créée à partir des données du portefeuille considéré.

## **2. ANALYSE DE LA MORTALITE ET PROJECTION DE PORTEFEUILLES**

---

Lors de la mise en place d'un régime de retraite, les employeurs et les salariés, ou leurs représentants respectifs, peuvent examiner la possibilité d'inclure, dans ce régime de retraite, des dispositions prévoyant la couverture des risques de longévité.

Pour répondre à ces dispositions, la souscription d'une garantie de mortalité dans un contrat d'assurance collective permet d'immuniser les bénéficiaires de rentes d'une éventuelle dérive de la mortalité dans le temps, ou plus ponctuellement, d'un choc de sous-mortalité au cours d'un exercice.

Dans un premier temps, l'étude d'une garantie de mortalité sur un contrat de rentes viagères est effectuée afin d'assimiler l'importance de la place des provisions mathématiques (PM) dans les comptes techniques d'une compagnie d'assurance. Ensuite, une première projection de PM est réalisée avec des tables de mortalité déterministes abattues afin de mettre en évidence le phénomène de longévité et de quantifier l'impact sur les comptes de l'assureur. Dans un second temps, la construction d'une table de mortalité prospective est détaillée afin de l'utiliser pour réaliser des projections de PM dans le cas du contrat d'assurance considéré. La troisième partie fera l'objet d'une comparaison des résultats trouvés sur différents niveaux. Cette partie mettra en évidence la pertinence de la table ainsi réalisée.

### **2.1 ETUDE DETERMINISTE D'UNE GARANTIE DE MORTALITE SUR UN CONTRAT DE RENTES VIAGERES**

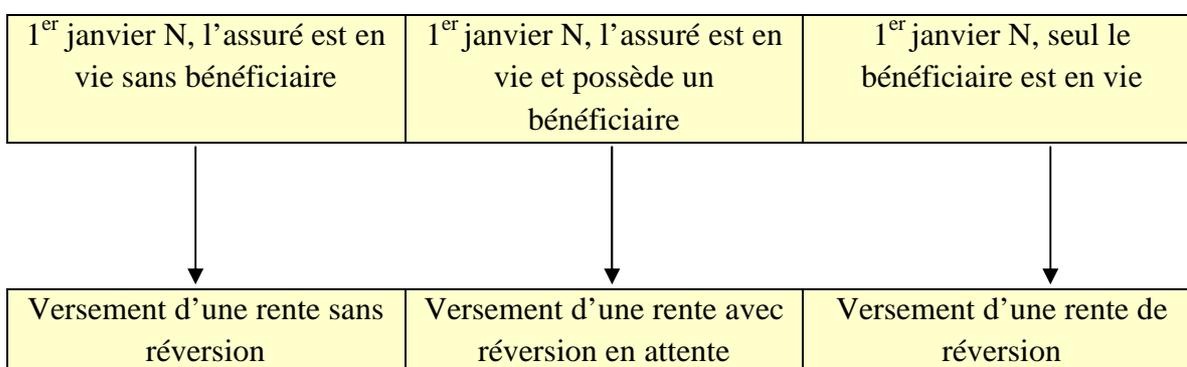
Le but de cette étude sera de calculer l'impact du changement de table de mortalité sur les comptes techniques de l'assureur Y pour un contrat de régime de retraite supplémentaire. Dans certains contrats d'assurance collective, il existe une garantie de mortalité qui permet aux bénéficiaires de se protéger contre une dérive de mortalité dans le temps. En effet, l'assureur s'engage à ne pas imputer le solde de mortalité négatif à la revalorisation des rentes. Bien évidemment, ce transfert de risque se fait contre le paiement d'une prime. Le but dans cette partie sera de cerner dans un premier temps les phénomènes intervenant dans l'analyse de la mortalité. Puis dans un second temps, il conviendra de décrire le fonctionnement et les principes de la garantie de mortalité. De ce fait, une description des comptes intervenant dans ce type de contrat sera réalisée. Dans une troisième partie, une application faisant intervenir une table de mortalité abattue sur un contrat spécifique sera effectuée. L'impact de la longévité sur les comptes d'assurance sera ainsi analysé et quantifié.

### 2.1.1 MISE EN EVIDENCE DE LA PROBLEMATIQUE

Pour observer l'effet de la dérive de la mortalité, le portefeuille de rentiers peut être segmenté en deux sous-portefeuilles distincts :

- ✓ les rentes sans réversion en attente (Célibataires, Veufs, Divorcés), c'est-à-dire les personnes retraitées sans réversataire direct ;
- ✓ les rentes avec réversion en attente (Mariés).

Le schéma suivant récapitule les cas possibles de versements suivant les situations :



La différence entre le nombre de décès attendu (provenant des tables de référence) et celui observé est à l'origine directe d'une perte ou d'un gain technique. Cependant, plusieurs facteurs entrent en compte dans la formation du résultat technique, ces derniers seront énoncés dans la partie 2.1.3.1.

Pour les rentes sans réversion en attente, lorsque le nombre de décès observés est inférieur au nombre de décès attendus, le surplus de provisions constaté induit, en première approche, une perte technique. Au delà, les rentiers du régime n'ont pas le même niveau de rente, ce qui affecte directement le solde technique. En effet, pour certains âges, une perte de mortalité est observée bien que le nombre de décès observé soit supérieur au nombre de décès attendu, ceci lorsque les décès observés concernent des très petits pieds de rente.

Dans l'étude considérée, l'intérêt sera porté sur les rentes avec réversion en attente (en considérant au préalable la possibilité d'un abattement des tables de mortalité, noté «  $\theta$  » exprimé en %, sur les 1<sup>ères</sup> têtes), les décès « 1<sup>ères</sup> têtes » influencent à la fois le résultat technique des rentes principales et des rentes de réversion puisqu'ils conditionnent la transformation des rentes principales en rentes de réversion.

La mortalité des « 1<sup>ères</sup> têtes » contribue à la liquidation d'un nombre de rentes de réversion différent du nombre de rentes de réversion attendu, donc il faudra bien évidemment provisionner ces rentes non prévues.

De plus, l'analyse de la mortalité permet de constater qu'il existe une relation entre le taux de déclaration des décès du conjoint et le solde technique du contrat (lorsque qu'il s'agit de rentes réversibles).

En résumé, il y a trois effets directs qui entrent en jeu dans l'analyse de la mortalité :

- ✓ une perte ou un gain technique au titre des rentes principales. Ce solde provient du nombre de décès et du pied de rente moyen des décès des 1<sup>ères</sup> têtes ;
- ✓ une perte ou un gain technique au titre des nouvelles rentes de réversion dû au taux de mortalité des anciens salariés et à la survie (ou non) du conjoint au moment du décès de l'ancien salarié ;
- ✓ une perte ou gain technique, probablement dû à la sous déclaration des décès des conjoints tant que l'ancien salarié est vivant.

La dérive de mortalité affecte directement les comptes de l'assureur puisque l'engagement final évolue en fonction des variations des provisions mathématiques de l'année en cours. La perte ou le gain technique affecte de manière opposée le solde des comptes de l'assureur. Pour comprendre le mécanisme de fonctionnement de ces derniers, la section suivante présente de manière détaillée la constitution des comptes de l'assureur dans le cas d'une garantie de mortalité.

### 2.1.2 DESCRIPTION D'UNE GARANTIE DE MORTALITE

Dans cette partie, les fondements et les fonctionnements de la garantie de mortalité seront explicités, une description plus approfondie est réalisée dans la partie 3.3.2. Tout d'abord, dans les contrats de régimes de retraite, afin de garantir ses engagements, l'employeur souscrit un contrat d'assurance auprès d'un assureur habilité qui se charge de gérer le « fonds collectif », de servir les rentes aux bénéficiaires, de revaloriser les rentes selon les performances des résultats techniques et financiers et d'affecter au « fonds de revalorisation » les éventuels excédents du fonds collectif.

La revalorisation résulte d'une obligation réglementaire (art. L331-3 et A331-4 du Code des Assurances) et elle représente la différence entre les produits financiers obtenus et le taux technique retenu dans le contrat d'assurance.

Dans la plupart des contrats d'assurance de retraite collective, il est prévu d'imputer au solde technique et financier 100 % des pertes de mortalité de l'exercice. Cela implique directement que les produits financiers nets du taux technique prennent en charge les éventuelles pertes de mortalité sous la forme d'une moindre revalorisation des rentes. Ainsi, dans la limite des rendements financiers nets, le souscripteur est « auto assuré » contre la dérive de mortalité. Il est à noter qu'en cas de pertes de mortalité non

« épongées » par les produits financiers, le déficit est financé par le contrat (appel de cotisations auprès du souscripteur, prélèvement sur le fonds collectif), c'est ainsi que l'intérêt de souscrire un contrat de garantie de mortalité entre en jeu. En effet, la garantie de mortalité consiste à réaliser un montage permettant de ne pas imputer aux résultats techniques et financiers du contrat les éventuelles pertes de mortalité ou le coût d'un changement de tables de mortalité. De plus en cas de gain de mortalité, ceux-ci reviennent pour l'essentiel au contrat.

Ainsi cette garantie prend la forme d'un chargement supplémentaire sur les encours et est assortie d'une Provision pour Aléa Viager (PAV).

En pratique, cette garantie vise à couvrir le risque de longévité pour les bénéficiaires de rente et ainsi, elle immunise le souscripteur contre une éventuelle dérive de la mortalité des retraités.

De ce fait, plusieurs comptes entrent en jeu dans le cas d'un contrat de garantie de mortalité :

- ✓ le compte de résultats techniques ;
- ✓ le compte de résultats financiers ;
- ✓ le compte de Provision pour Aléas Viagers (PAV) ;
- ✓ le compte de revalorisation (détaillé dans la partie 3.3.2.2).

Dans un contrat d'assurance de retraite collective, les comptes de résultats techniques et financiers sont représentés de la manière suivante :

Compte de résultats techniques : Exercice N

Débit	Crédit
Prestations de rentes - Exercice N	PM de rentes au 31/12/N-1
PM de rentes au 31/12/N	Intérêts techniques N Capitaux Constitutifs (CC) de liquidation des rentes -Exercice N
Solde technique créditeur	Solde technique débiteur

En pratique, il s'agit de constater la perte ou le gain technique provenant de la différence entre la mortalité attendue et la mortalité observée (cf. partie 2.1.1).

Il faut remarquer que le solde technique peut être impacté lors d'un changement de tables de mortalité réglementaires pour le provisionnement des rentes.

Compte de résultats financiers : Exercice N

Débit	Crédit
	Produits financiers sur PM de rentes au 31/12/N-1 (nets de chargements)
Intérêts techniques	
Solde financier créditeur	Solde financier débiteur

L'organisme assureur crée un compte financier à chaque exercice sur le périmètre des bénéficiaires de rentes. Les intérêts au taux technique inclus dans le calcul des provisions de rentes sont débités afin d'alimenter le compte technique.

Comme évoqué précédemment, les produits financiers au-delà du taux technique permettent de revaloriser les rentes.

Compte de Provisions Pour Aléa Viager : Exercice N

Dans le cas d'une garantie de mortalité, le solde technique du contrat au titre de l'exercice N est financé en priorité par la PAV. Dans le cadre de ce mémoire où la longévité sera présente dans les tables utilisées, le compte technique sera toujours débiteur (les PM observées seront plus grandes que les PM attendues) et sera implémenté au débit du compte de la PAV.

Débit	Crédit
Solde débiteur 31/12/N-1 (si spécifié contractuellement)	Solde créditeur 31/12/N-1
	Produits financiers N
	Dotations à la PAV (A% et B%)
Solde technique débiteur	Solde technique créditeur
Solde créditeur au 31/12/N	Solde débiteur au 31/12/N

La dotation à la PAV se fait par l'intermédiaire :

- ✓ d'un prélèvement sur la prime au titre des rentes viagères et des futurs capitaux constitutifs de liquidation des rentes (CC de liquidation) ;
- ✓ et / ou d'un prélèvement sur les résultats financiers annuels ;
- ✓ et nécessairement de la totalité du solde technique créditeur le cas échéant.

La PAV est consommée lorsqu'il y a des pertes techniques principalement. Quand ces dernières sont supérieures au montant disponible dans le compte de PAV à la fin de l'exercice, alors la quote-part des pertes non financée par la PAV est prise en charge en intégralité par l'assureur. Cette quote-part se retrouve au débit du compte de résultat de l'assureur.

Compte de résultats de l'assureur : Exercice N

Débit	Crédit
« Avance PAV »	Prime de risque – Exercice N Reprise « Avance PAV »
Résultat créditeur au 31/12/N	Résultat débiteur au 31/12/N

Le poste « Avance PAV » correspond à la quote-part de la perte technique non prise en charge par le compte de la PAV.

Dans le cas d'un report du solde négatif de la PAV prévu dans le contrat, le financement de cette perte peut être une avance qui fera l'objet d'une reprise en cas d'amélioration du résultat technique. Dans le cas contraire, cette perte est prise en charge par l'assureur sans reprise future.

Cependant, en contrepartie de ce financement, rappelons que l'assureur perçoit chaque année une prime de risque égale à  $y\%$  des provisions mathématiques.

Après avoir décrit les comptes d'un contrat d'assurance de garantie de mortalité en soulignant l'impact des provisions mathématiques sur le résultat technique, des projections de provisions mathématiques de rentes des portefeuilles d'assurés seront réalisées en prenant en compte un abattement déterministe sur les tables de mortalité en vigueur sur le contrat. Le but étant de voir l'effet de la longévité (au niveau déterministe dans un premier temps) sur les résultats de l'assureur Y.

### 2.1.3 DESCRIPTION DU MODELE D'ABATTEMENT

Pour montrer l'impact de la dérive de mortalité sur les comptes de résultats futurs, une projection de PM de rente en cours sur la durée de vie du contrat est réalisée avec des tables de mortalité abattues. Dans un premier temps, les informations nécessaires à la réalisation de l'étude sont évoquées. Puis, une description théorique de l'impact de l'abattement de la table sur les comptes de l'assureur est explicitée.

#### 2.1.3.1 Informations nécessaires

Les projections dépendent de plusieurs paramètres, pour réaliser ces dernières il convient d'avoir les informations individuelles suivantes :

- ✓ Le sexe de l'assuré ;
- ✓ La date de naissance de l'assuré ;
- ✓ Le montant de la rente viagère versée lors de l'année N ;
- ✓ La situation familiale de l'assuré caractérisant la réversion de la rente. Si l'assuré est marié, il va être provisionné sur 2 têtes, sinon ce sera un cas sans réversion.

De plus, pour pouvoir réaliser les projections de PM, il faut utiliser deux paramètres de natures différentes :

- ✓ Un paramètre viager qui est la table de mortalité : comme vu dans le premier chapitre, les tables en vigueur sont générationnelles, c'est-à-dire qu'il y en a une par millésime de naissance. Ainsi, pour chaque millésime, le nombre de personnes vivantes à l'âge x sera lu dans la table, il se lira  $l_x$ .
- ✓ Un paramètre financier qui est le taux d'intérêt technique qui permet d'escompter les produits financiers futurs dont les conditions sont fixées par le code des assurances. Par conséquent, le taux d'intérêt technique utilisé dans la projection devient un paramètre individuel qui est égal au taux technique de l'année de liquidation pour les assurés, il est défini entre 2,25 % et 3,25 % par des tranches de 0,25 %.

#### 2.1.3.2 Description de l'effet de l'abattement appliqué sur le solde technique

En ce qui concerne les notations qui suivent dans cette partie, on se référera à la section 1.2.1. Notons  $l_x$ , le nombre de survivants à l'âge x, la probabilité de survie à l'âge x

correspond ainsi au rapport  $\frac{l_{x+1}}{l_x}$  et la probabilité de mortalité à l'âge x est notée

$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ . Par souci de simplification, la notation  $q_x(t)$  est remplacée par  $q_x$  dans ce qui suit.

De plus, un abattement (noté  $\theta$  compris entre 0 et 1) sur les tables de mortalité a été défini dans le but de modifier le taux de décès des tables de référence (dans notre cas les tables TGH/TGF05). Les notations concernant la table de mortalité abattue seront suivies du symbole « ' ». Ainsi le nombre de survivant à l'âge  $x$  selon la table de mortalité abattue sera noté  $l'_x$ .

Pour obtenir les tables de mortalité abattues, les étapes suivantes sont réalisées :

- Passage au taux de mortalité réel :  $q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ ,
- Passage au taux de mortalité abattu :  $q'_x = q_x \times (1 - \theta)$ . On déduit sa probabilité d'être vivant l'année suivante :  $p'_{x+1} | p'_x = p'_x \times (1 - q'_{x+1})$ .
- Création de la nouvelle table :

$l'_{x+1} = l'_x \times (1 - q'_{x+1})$  avec la condition si  $l_x = 100000$  alors  $l'_x = l_x$ . En effet,  $l_x$  représente le nombre de survivant à l'âge  $x$ , généralement les tables de mortalité comptent arbitrairement 100000 individus par génération. De ce fait, la table de mortalité abattue « débute » au même instant que la table de référence. Ces 100000 individus sont ensuite soumis aux conditions de mortalité qui prévalent au moment choisi.

Après avoir énoncé la construction des tables abattues et noté que dans le cas d'une projection, le nombre de décès observé futur provient du résultat de ces nouvelles tables, le but sera de déterminer le solde technique en fonction des probabilités de survie et de montant des rentes.

Comme évoqué dans la section 1.2.2.1, dans les cas où il y a une réversion, les Provisions Mathématiques (PM) sur deux têtes sont calculées avec la VAP  $\ddot{a}_{x|y}$ . Ce terme représente le versement de la rente à la première tête sachant qu'au décès de cette dernière, si la seconde tête est vivante, la seconde tête recevra le versement d'une fraction de la rente jusqu'à son décès.

Cette définition se simplifie mathématiquement par  $\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_x + tx_{rev} \times (\ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy})$  (cf. 1.2.2.1). Cette écriture permet de séparer les cas sans difficultés. D'une part l'intérêt sera porté sur les 1<sup>eres</sup> têtes en considérant les  $\ddot{a}_x$  et d'autre part, les cas de réversion en attente seront considérés par la partie  $tx_{rev} \times (\ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy})$ .

Pour la première étude sur les  $a_x$ , le solde technique se déduit du compte technique ci-dessous :

Débit	Crédit
Prestations de rentes - Exercice N =  $p'_x$  $p'_x \times \text{PM de rentes au 31/12/N}$ (noté $\text{PM}^{\text{IT}}$ )	PM de rentes au 31/12/N-1  Intérêts techniques N =  $t \times \text{PM de rentes au 31/12/N-1}$ (noté $\text{PM}^{\text{IT}}_{n-1}$ )
Solde technique créditeur - Exercice N	Solde technique débiteur - Exercice N

A noter,  $p_x$  est le taux de survie attendu d'après les tables en vigueur et  $p'_x$  le taux de survie réel constaté (dans le cadre de notre modèle, il s'agit du taux de survie issu des tables de mortalité abattues).

Le calcul du solde technique de l'exercice N peut donc se modéliser de la façon suivante :

$$\text{Solde}_n = \text{PM}^{\text{IT}}_{n-1} \times (1+t) - p'_x \times (1 + \text{PM}^{\text{IT}}),$$

où  $\text{PM}^{\text{IT}}$  = Provisions mathématiques sur les 1<sup>ère</sup> têtes, c'est-à-dire celles qui prennent en compte uniquement des  $a_x$ .

Après l'utilisation de la formule suivante  $\text{PM}^{\text{IT}}_{n-1} \times (1+t) = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \times \text{PM}^{\text{IT}}_n$  et après calcul, le solde technique à la fin de l'exercice N est égal à :

$$\text{Solde}_n = \frac{-\theta q_x}{1 - q_x} \times \text{PM}^{\text{IT}}_{n-1} \times (1+t).$$

Dans le cas des réversions en attente, pour chaque individu du portefeuille assuré, la représentation du compte technique se fait de la façon suivante :

Débit	Crédit
Prestations de rentes - Exercice N $q'_x \times p'_y$ $p'_y \times PM_n^{\text{rev}}$ de rentes au 31/12/N	PM de rentes au 31/12/N-1 Intérêts techniques N = $t \times PM_{n-1}^{\text{rev}}$ de rentes au 31/12/N-1
Solde technique créditeur - Exercice N	Solde technique débiteur - Exercice N

Rappelons que  $q'_x$  est défini par :  $p'_x = 1 - q'_x = 1 - q_x \times (1 - \theta)$ .

En notant que  $PM_n^{\text{rev}}$  est la provision mathématique au 31/12/N au titre du conjoint à la fin de l'année N et  $q'_x \times p'_y$ , à la probabilité que la 2<sup>nde</sup> tête soit vivante et que la 1<sup>ère</sup> tête soit décédée en considérant l'abattement (dans le cadre de notre modèle,  $p'_y$  est le taux de survie issu des tables de mortalité abattues), le calcul du solde technique de l'exercice N peut donc se modéliser de la façon suivante :

$$PM_{n-1}^{\text{rev}} \times (1 + t) - (q'_x \times p'_y \times tx_{\text{rev}} \times \text{Rente} + PM_n^{\text{rev}} \times p'_y) = \text{solde technique} \quad (1).$$

Par ailleurs, le calcul des provisions étant réalisé avec les tables de mortalité de référence, la formule théorique suivante en découle :

On utilise la relation  $PM_{n-1}^{\text{rev}} \times (1 + t) - (q_x \times p_y \times tx_{\text{rev}} \times \text{Rente} + PM_n^{\text{rev}} \times p_y) = 0$  pour obtenir

$$PM_n^{\text{rev}} = \frac{PM_{n-1}^{\text{rev}} \times (1 + t) - q_x \times p_y \times tx_{\text{rev}} \times \text{Rente}}{p_y}.$$

On remplace ce résultat dans (1), on obtient :

$$\text{Solde}_n = PM_{n-1}^{\text{rev}} \times (1 + t) \left(1 - \frac{p'_y}{p_y}\right) - p'_y \times (q'_x - q_x) \times tx_{\text{rev}} \times \text{Rente}.$$

**Remarque 5 :** Pour élargir le sujet, les taux de mortalité abattue peuvent être remplacés par les taux de mortalité réels si l'on considère de réaliser cette étude sur l'année N, ainsi les « primes », notée « ' », représenteraient les cas observés, on noterait alors  $1_{\{q'_x=1\}}$  l'indicatrice de  $q'_x$ , c'est-à-dire qu'elle vaut 1 si la première tête est réellement morte et 0 si elle est vivante en N. La formule du solde technique serait pour les cas suivants :

- Cas sans réversion :

$$\text{Solde} = \frac{1_{\{q'_x=1\}} - q_x}{(1 - q_x)} \times PM^1 T_{n-1} (1 + t).$$

- Cas avec réversion :

$$\text{Solde}_n = (PM_{n-1}^{\text{rev}} \times (1 + t) (1 - \frac{1_{\{q'_x=0\}}}{p_y}) - 1_{\{q'_y=0\}} \times (1_{\{q'_x=1\}} - q_x)) \times tx_{\text{rev}} \times \text{Rente}.$$

Dans la partie suivante, nous allons réaliser les projections des PM sur 30 ans avec les tables en vigueur et les tables abattues afin de montrer l'effet de la longévité sur les comptes techniques de l'assureur et calculer les soldes techniques suite aux simulations.

## 2.1.4 APPLICATION NUMERIQUE

Une application numérique sera réalisée avec un outil interne à l'entreprise WINTER&Associés. Cet outil permet de projeter l'engagement de l'assureur sur un horizon de 30 ans. Avant de lancer les simulations, il est important de bien comprendre comment fonctionnent les projections de rente en fonction des hypothèses et des données.

### 2.1.4.1 Projection des rentes viagères dans le futur

Dans cette étape, il s'agit de valoriser les engagements de l'assureur au fil du temps. Pour cela, nous disposons des informations définies en 2.1.3.1. En ne considérant pas l'actualisation, la formule suivante décrit le passage d'une année à l'autre pour l'engagement de l'assureur envers son assuré :

$$\text{Rente}_{i+1} = \text{Rente}_i \times (p_x + 1_{\{\text{rev}\}} \times tx_{\text{rev}} \times q_x \times p_y).$$

$\text{Rente}_i$  est la valeur de la rente à l'année i. Au préalable, le montant de la rente équivaut au montant touché réellement par l'agent. En effet, l'information de ce montant est essentielle puisque l'engagement de l'assureur dépend de la rente. Cette rente joue un rôle

de nominal dont la valeur actuelle probable changera dans les calculs de l'assureur comme le montre la formule ci-dessus. Plusieurs paramètres entrent en jeu, tels que :

- ✓  $q_x$  qui est la probabilité de décès du titulaire de la rente selon la table en vigueur ;
- ✓  $1_{\{rev\}}$  qui est la fonction indicatrice valant 0 si l'agent n'a pas déclaré de réversataire(s) potentiel(s) ;
- ✓  $tx_{rev}$  qui est le taux de réversion, dont la valeur est 60 % pour le contrat considéré ;
- ✓  $p_y$  représentant la probabilité de survie du réversataire selon la table en vigueur.

Par principe de transparence, puisque qu'il y a une discordance entre la date effective du paiement (en fin de période (à terme échu)) et la date de naissance de l'assuré, il est efficient de prendre en considération des taux de mortalité sur deux années d'où l'utilisation de la formule de pondération suivante :

$$q_x(t) = \omega \times q_x(t) + (1 - \omega) \times q_{x+1}(t),$$

où  $\omega \in [0;1]$  correspond au poids donné pour chaque âge.

Afin d'éclaircir nos propos, considérons l'exemple suivant : dans le contrat considéré, le versement des rentes est trimestriel à terme échu. Considérons une personne née le 09/11/1948, la personne a touché sa dernière rente le 30/09/2011. La probabilité de décès utilisée pour le calcul de l'engagement correspondant à la rente du 31/12/2011 est la suivante :

$$q_x = \frac{40}{92} \times q_{62} + \frac{52}{92} \times q_{63}.$$

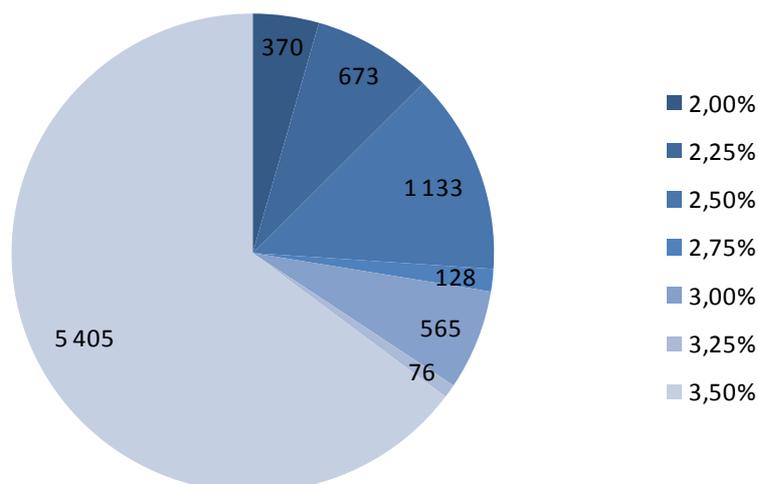
Cette méthode de projection sera utilisée par la suite afin de comparer les engagements de l'assureur suivant les tables de mortalité utilisées.

#### **2.1.4.2 Données et résultats**

Nous disposons de 8350 rentiers dont 4771 mariés, ainsi il faudra séparer les cas de réversion afin de les positionner sur deux têtes.

Le camembert suivant met en évidence la répartition des assurés en fonction de leur taux d'intérêt technique :

Répartition de la population assurée en fonction du taux technique



On remarque un grand nombre d'assurés ayant un taux technique égal à 3,50 %. En effet la note technique du contrat nous informe que le taux technique pour les rentes ayant pris effet avant le 31/12/1997 est égal à 3,5 %. Notons aussi que pour les rentes qui prendront effet après 31/12/1997, le taux technique est le taux technique maximal autorisé par la législation des assurances, en vigueur au moment de la liquidation de la rente.

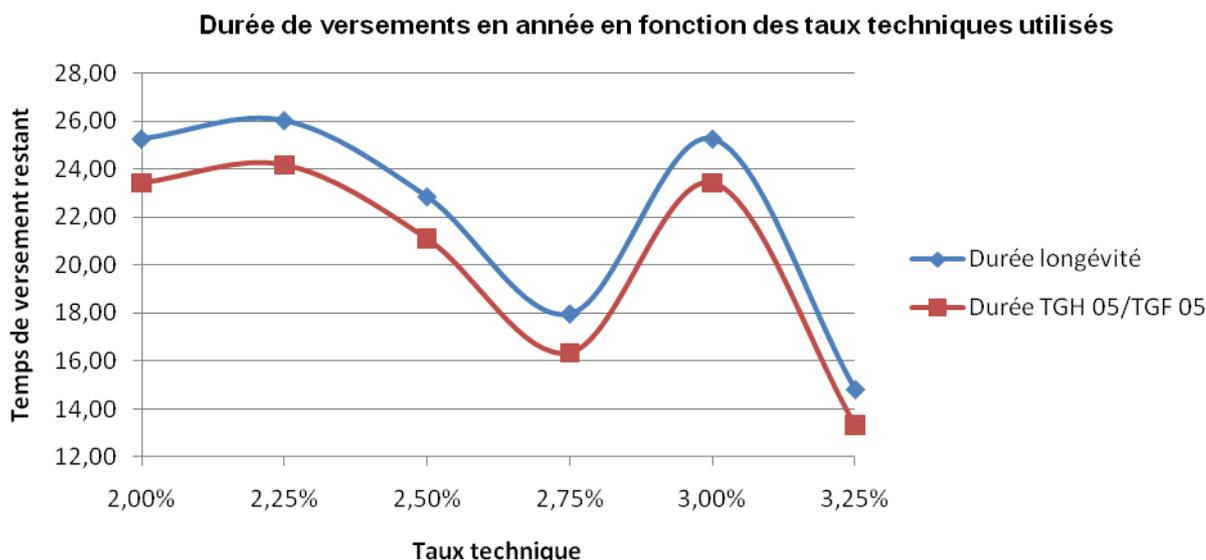
De plus, la note technique nous informe que pour les individus provisionnés au taux technique de 3,5 %, la table de mortalité en vigueur est la TPRV93 ainsi les engagements pour ces individus seront projetés avec la table en vigueur. Pour les autres, deux projections seront réalisées, une avec les tables TGH 05 / TGF 05 et une autre avec les tables abattues avec un taux de 15 % (ie  $\theta=15\%$ ).

Pour chaque taux technique, on réalise des projections qui prennent en compte deux catégories : les salariés célibataires ou veufs et les salariés mariés avec un taux de réversion égal à 60 %.

Les résultats d'engagements et les durées de versement des prestations en fonction de la table de mortalité utilisée sont représentés dans le graphique suivant :

Années	Longévité							TGH 05/TGF 05 et TPRV93						
	Taux technique							Taux technique						
	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%
2011	10 859 868	19 500 711	30 611 220	2 598 634	9 617 413	2 015 787	109 048 998	10 338 219	18 615 832	29 054 883	2 438 582	9 216 440	1 883 048	109 048 998
2012	10 577 780	19 012 613	29 682 486	2 494 442	9 396 813	1 924 406	102 682 770	10 045 699	18 107 824	28 087 240	2 329 988	8 983 811	1 787 354	102 682 770
2013	10 291 571	18 518 040	28 747 878	2 390 217	9 171 144	1 832 990	94 523 446	9 749 227	17 594 018	27 117 080	2 221 948	8 746 139	1 692 216	94 523 446
2014	10 001 304	18 017 191	27 808 051	2 286 145	8 940 405	1 741 726	86 598 255	9 448 906	17 074 667	26 144 985	2 114 662	8 503 458	1 597 841	86 598 255
2015	9 707 066	17 510 308	26 863 710	2 182 406	8 704 614	1 650 798	78 935 773	9 144 863	16 550 064	25 171 599	2 008 317	8 255 826	1 504 420	78 935 773
2016	9 408 974	16 997 633	25 915 560	2 079 184	8 463 820	1 560 388	71 565 661	8 837 263	16 020 492	24 197 563	1 903 097	8 003 340	1 412 136	71 565 661
2017	9 107 158	16 479 437	24 964 330	1 976 641	8 218 085	1 470 684	64 516 560	8 526 290	15 486 262	23 223 560	1 799 153	7 746 111	1 321 172	64 516 560
2018	8 801 773	15 955 979	24 010 766	1 874 946	7 967 493	1 381 874	57 615 375	8 212 152	14 947 663	22 250 294	1 696 639	7 484 281	1 231 709	57 615 375
2019	8 492 982	15 427 538	23 055 642	1 774 251	7 712 139	1 294 156	51 486 103	7 895 072	14 405 005	21 278 515	1 595 690	7 218 002	1 143 937	51 486 103
2020	8 180 962	14 894 373	22 099 783	1 674 724	7 452 128	1 207 729	45 549 041	7 575 283	13 858 567	20 309 041	1 496 453	6 947 439	1 058 045	45 549 041
2021	7 865 913	14 356 751	21 144 022	1 576 523	7 187 591	1 122 783	40 020 347	7 253 050	13 308 640	19 342 708	1 399 068	6 672 789	974 215	40 020 347
2022	7 548 061	13 814 903	20 189 228	1 479 815	6 918 687	1 039 537	34 911 914	6 928 667	12 755 476	18 380 402	1 303 682	6 394 280	892 663	34 911 914
2023	7 227 656	13 269 050	19 236 357	1 384 761	6 645 593	958 194	30 230 190	6 602 456	12 199 323	17 423 128	1 210 441	6 112 165	813 591	30 230 190
2024	6 904 999	12 719 425	18 286 405	1 291 528	6 368 545	878 982	25 976 187	6 274 800	11 640 456	16 471 944	1 119 503	5 826 767	737 230	25 976 187
2025	6 580 451	12 166 316	17 340 447	1 200 277	6 087 837	802 120	22 145 679	5 946 160	11 079 234	15 528 027	1 031 020	5 538 486	663 803	22 145 679
2026	6 254 449	11 610 088	16 399 690	1 111 169	5 803 844	727 857	18 728 512	5 617 083	10 516 123	14 592 725	945 151	5 247 812	593 566	18 728 512
2027	5 927 518	11 051 227	15 465 488	1 024 380	5 517 033	656 429	15 709 356	5 288 225	9 951 753	13 667 580	862 076	4 955 354	526 758	15 709 356
2028	5 600 261	10 490 372	14 539 377	940 070	5 227 952	588 116	13 068 069	4 960 336	9 386 960	12 754 371	781 960	4 661 816	463 660	13 068 069
2029	5 273 365	9 928 333	13 623 081	858 417	4 937 242	523 178	10 780 457	4 634 261	8 822 791	11 855 103	704 992	4 368 010	404 522	10 780 457
2030	4 947 616	9 366 078	12 718 566	779 639	4 645 647	461 906	8 819 249	4 310 963	8 260 501	10 972 070	631 407	4 074 870	349 618	8 819 249
2031	4 623 856	8 804 799	11 828 083	703 983	4 353 975	404 549	7 155 065	3 991 460	7 701 611	10 107 881	561 468	3 783 400	299 152	7 155 065
2032	4 303 045	8 245 803	10 954 095	631 703	4 063 162	351 326	5 757 392	3 676 900	7 147 772	9 265 361	495 436	3 494 741	253 281	5 757 392
2033	3 986 249	7 690 617	10 099 214	563 048	3 774 263	302 406	4 595 563	3 368 538	6 600 886	8 447 449	433 557	3 210 158	212 084	4 595 563
2034	3 674 644	7 140 932	9 266 279	498 268	3 488 449	257 875	3 639 618	3 067 733	6 063 022	7 657 274	376 059	2 931 033	175 536	3 639 618
2035	3 369 467	6 598 619	8 458 304	437 630	3 206 971	217 767	2 861 034	2 775 884	5 536 417	6 898 061	323 170	2 658 801	143 541	2 861 034
2036	3 072 085	6 065 730	7 678 431	381 321	2 931 222	182 032	2 233 193	2 494 495	5 023 470	6 173 061	275 010	2 395 020	115 906	2 233 193
2037	2 783 985	5 544 597	6 929 694	329 494	2 662 730	150 549	1 731 825	2 225 150	4 528 832	5 485 261	231 642	2 141 346	92 368	1 731 825
2038	2 506 759	5 037 716	6 215 065	282 234	2 403 147	123 137	1 335 206	1 969 488	4 049 244	4 837 429	193 039	1 899 507	72 608	1 335 206
2039	2 241 856	4 547 771	5 537 435	239 552	2 153 995	99 560	1 024 277	1 728 900	3 593 557	4 232 094	159 083	1 670 997	56 266	1 024 277
2040	1 990 648	4 077 415	4 899 505	201 406	1 916 736	79 539	782 575	1 504 608	3 162 447	3 671 424	129 598	1 457 156	42 960	782 575
2041	1 754 358	3 629 306	4 303 536	167 673	1 692 695	62 758	596 129	1 297 578	2 758 446	3 156 954	104 322	1 259 076	32 298	596 129
<b>Somme</b>	<b>193 866 679</b>	<b>358 469 671</b>	<b>518 871 728</b>	<b>37 414 481</b>	<b>177 631 370</b>	<b>26 071 138</b>	<b>1 014 823 819</b>	<b>175 689 709</b>	<b>326 745 355</b>	<b>467 755 067</b>	<b>32 876 213</b>	<b>161 858 431</b>	<b>22 547 504</b>	<b>1 014 823 819</b>
Nombre d'agents	370	673	1 133	128	565	76	5 405	370	673	1 133	128	565	76	5 405
Durée de versement des prestations	25,25	26,02	22,85	17,97	25,25	14,82	9,59	23,43	24,18	21,11	16,35	23,43	13,33	9,59

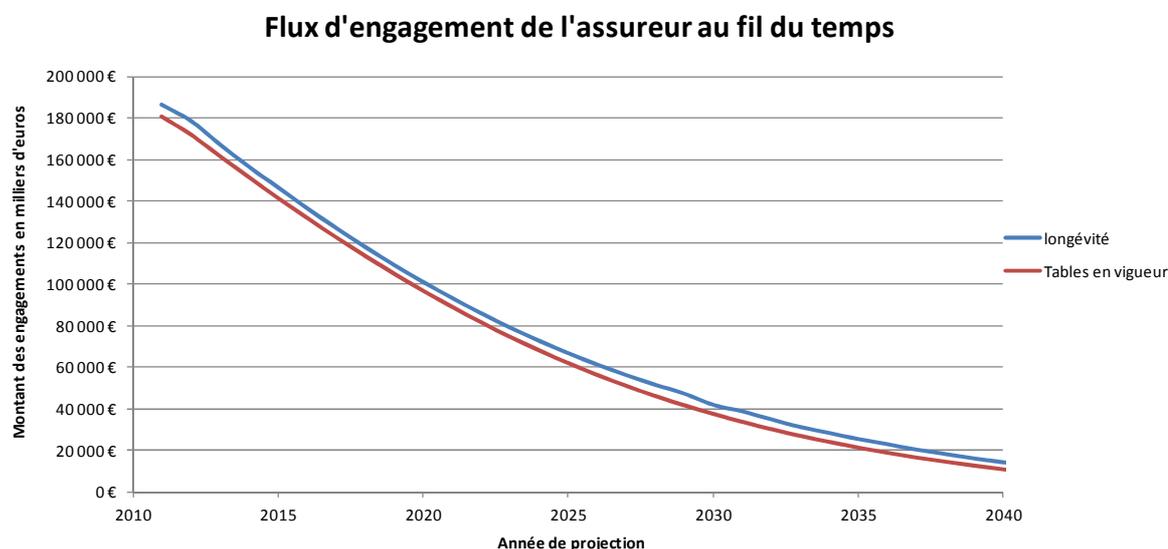
Des comparaisons au niveau des valeurs des engagements seront effectuées en 2.3.3. La différence des durées de versements de prestation est représentée par le graphique suivant :



Pour résumer, la table TGH/TGF 05 abattue a été appliquée pour les individus présentant un taux technique différent de 3,50 %. On observera ainsi des engagements plus

conséquents dans le cas d'un abattement du fait d'une plus longue durée de versement des prestations.

Le graphique suivant résume l'effet de la longévité au niveau du montant des engagements de l'assureur :



Comme attendu, les engagements de l'assureur sont plus conséquents avec l'utilisation des tables abattues puisque la longévité est présente. De plus il est à noter que les écarts constatés chaque année sont compris entre 3 millions et 4,5 millions d'euros, soit un total de 124 millions d'euros sur 30 ans de projection, ce qui représente 5,4 % de l'engagement total sur la période considérée.

En comparaison avec les simulations précédentes, des simulations ont été effectuées avec la table TPRV93 abattue à 15 % pour les personnes étant provisionnées au taux technique de 3,50 %, cela implique que la longévité sur le portefeuille sera plus importante. En effet, les résultats montrent que l'écart d'engagement sur 30 ans s'élève à 258 millions d'euros, soit 11,2 % de l'engagement total.

Dans le cas de la garantie de mortalité, l'augmentation de l'engagement de l'assureur peut limiter la perte technique si l'on observe une augmentation de l'espérance de vie de la population couverte. Cette diminution de perte technique sera favorable pour le compte de PAV. Ces simulations mettent en évidence l'impact du choix de la table de mortalité dans le calcul des provisions mathématiques. En effet, dans le cas d'une garantie de mortalité, la PAV ne pourra pas combler l'accumulation des pertes techniques au fil du temps, le surplus de perte technique est à la charge de l'assureur. C'est pour cela que le choix d'une table de mortalité représentative de la population couverte doit être optimal afin de limiter les pertes techniques dans le temps.

Dans la suite de ce mémoire, une table de mortalité représentative de la population couverte sera créée afin de projeter les engagements de la même manière que précédemment.

Le but étant de mettre en évidence la longévité dans le portefeuille et de comparer les engagements projetés de l'assureur selon les différentes tables ainsi utilisées. De plus, l'objectif de cette étude est de créer une table de mortalité spécifique à la population assurée afin que l'assureur puisse l'utiliser sur cette population par la suite.

## 2.2 MODELISATION D'UNE TABLE DE MORTALITE

Une modélisation sera réalisée sous le logiciel VBA afin de construire une table de mortalité. Toutefois, du fait du manque d'individus dans le portefeuille considéré, la théorie évoquée en 1.3.2 ne sera pas utilisée. Selon la méthode, la cohérence des facteurs et leurs ajustements seront ainsi vérifiés via des tests statistiques.

Après validation des tables de mortalités construites via divers tests, des projections seront effectuées de la même manière que dans la partie 2.1.4.

En partie 2.3, des comparaisons sur les résultats trouvés seront explicités.

En fonction de la longévité constatée, la durée de versement des rentes par l'assureur augmentera, ainsi il y a aura un impact direct sur les comptes de la PAV. Grâce à ces simulations, l'assureur pourra réviser ses montants de prime à la hausse ou à la baisse s'il observe des pertes techniques plus ou moins conséquentes.

### 2.2.1 DONNEES ET MODELE UTILISES

Les données permettant de construire la table de mortalité correspondent aux données du contrat d'assurance vie défini en 2.1. Le but sera d'effectuer dans un premier temps, une analyse de la mortalité sur 9 années pour ainsi obtenir un décompte des décès à des âges entiers et d'effectifs par âge. Sur cette base, la construction des estimateurs des taux conditionnels de décès sera effectuée. Afin de raisonner sur des groupes homogènes, le périmètre de notre étude prend en compte les liquidations survenues dans le courant des années considérées.

N'ayant aucune information sur le sexe des assurés sur 10 ans, la table de référence utilisée par la suite est la table TPG93. Cette table générationnelle a été constituée par l'INSEE en extrapolant les études réalisées sur la mortalité pour les générations en 1887 et 1993. En termes d'espérance de vie, la TPG93 correspond très semblablement à la TPRV 93.

Si la mortalité du portefeuille suivait rigoureusement la table TPRV 93 pour les rentes ayant pris effet avant le 31/12/1997 et la table en vigueur autorisée par la législation des assurances pour les liquidations après le 31/12/1997, le résultat technique serait nul. Ainsi l'approche consiste à se positionner par rapport à la table TPG 93 afin de construire une table de mortalité spécifique à la population considérée. Puis, le but sera de réaliser des tests statistiques permettant de valider la table construite.

Les données prennent en compte tous les individus caractérisant le portefeuille, c'est-à-dire, les rentes sans réversion en attente définies par les Célibataires, Veufs et Divorcés, ainsi que les rentes avec réversions représentées par les individus mariés.

Afin de construire les estimateurs de taux de décès, il convient d'avoir des informations sur les décès observés de l'année t à l'âge x ainsi que sur le nombre d'adhésions lors de l'année t à l'âge x, les données initiales sont représentées comme suit :

- ✓ Les décès observés correspondent aux décès recensés lors de l'année en cours t :

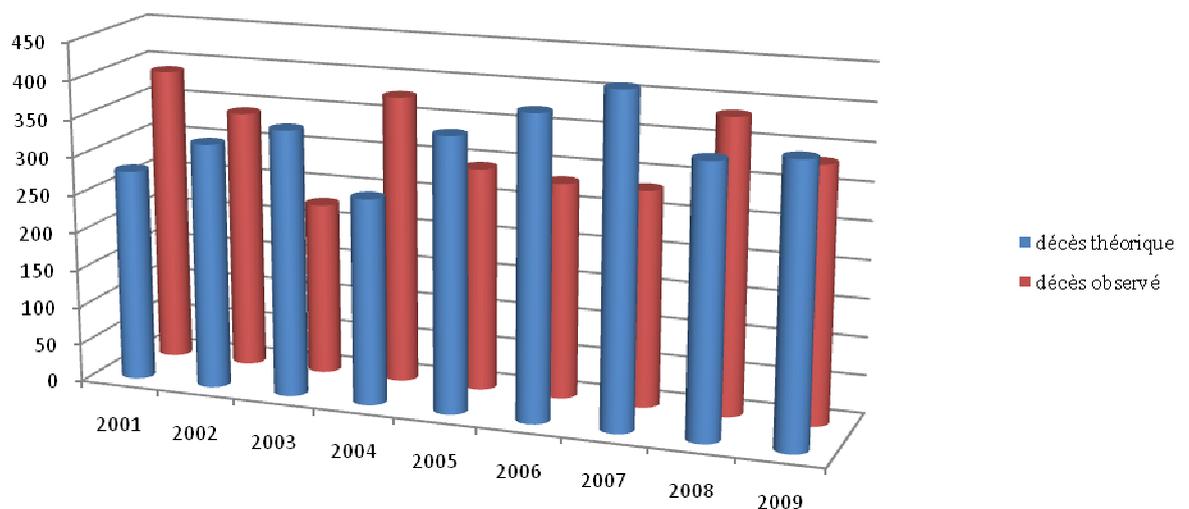
Age x	Décès observés à l'âge x lors de l'année t								
	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
54	0	0	0	0	0	0	0	0	0
55	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	0	0	0	0	0	0
57	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0
61	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	0	2	1	1	2	0	2	1	0
63	2	3	1	1	0	2	0	3	2
64	0	1	1	0	1	1	0	2	1
65	1	1	2	1	0	0	1	1	0
66	0	0	0	1	3	0	2	0	0
67	2	0	2	2	0	0	0	0	1
68	0	5	2	7	4	1	5	1	0
69	6	5	4	4	2	0	1	0	2
70	3	5	3	4	0	2	0	5	5
71	8	2	2	3	2	0	2	1	2
72	12	4	8	6	6	0	1	2	5
73	10	18	11	6	10	2	1	2	2
74	5	17	7	9	7	4	8	6	1
75	17	10	14	15	10	3	7	5	3
76	23	8	7	13	9	11	4	10	6
77	10	21	8	16	16	17	20	17	18
78	20	18	10	16	15	11	19	15	8
79	19	11	10	18	12	8	14	10	8
80	18	19	11	13	8	16	19	16	18
81	19	16	7	25	10	12	6	19	23
82	20	13	13	13	19	20	12	15	12
83	14	17	16	13	14	21	21	28	16
84	14	10	6	27	17	19	9	24	11
85	8	13	4	12	23	13	18	15	22
86	17	4	3	14	11	25	12	24	26
87	15	12	2	9	19	17	16	25	19
88	16	8	6	12	10	5	21	25	30
89	18	20	9	10	6	11	5	20	17
90	17	10	8	13	9	6	9	13	17
91	17	13	9	16	11	5	6	11	13
92	13	20	7	22	17	11	5	13	7
93	10	8	14	4	5	12	6	3	4
94	10	4	1	8	3	6	2	11	4
95	8	2	8	13	1	7	7	8	6
96	2	8	4	7	6	5	3	9	4
97	1	8	4	6	2	2	7	8	10
98	6	4	1	8	2	2	5	6	3
99	5	0	0	3	0	3	4	3	3
100	1	1	1	2	0	1	0	2	2
101	1	0	0	3	0	1	1	1	1
102	1	0	0	0	0	0	0	2	1
103	0	0	0	1	0	1	1	2	0
104	0	0	0	1	0	0	0	0	0
105	0	0	0	0	1	0	0	1	0
106	0	0	0	0	0	0	1	0	1
<b>TOTAL</b>	<b>389</b>	<b>341</b>	<b>227</b>	<b>378</b>	<b>293</b>	<b>283</b>	<b>283</b>	<b>385</b>	<b>334</b>

- ✓ Le nombre d'adhésions représente les individus d'âge x pris en charge dans le contrat lors de l'année t, les données sont représentées comme suit :

Age x	Nombre d'adhésions aux âges x lors de l'année t								
	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
54	n.c.	n.c.	n.c.	n.c.	2	n.c.	3	n.c.	n.c.
55	3	n.c.	n.c.	n.c.	0	1	0	4	n.c.
56	7	3	n.c.	n.c.	0	4	1	0	3
57	4	7	3	n.c.	3	1	3	1	0
58	2	4	9	3	1	7	5	8	6
59	6	2	5	9	6	2	13	5	15
60	2	8	3	6	10	9	7	16	10
61	19	14	15	27	19	30	40	45	35
62	146	83	93	86	116	32	177	255	209
63	145	162	93	107	104	127	170	213	255
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
<b>TOTAL</b>	<b>8496</b>	<b>8226</b>	<b>8254</b>	<b>8253</b>	<b>8311</b>	<b>8072</b>	<b>8377</b>	<b>8504</b>	<b>8396</b>

On utilise comme table de référence la table TPG 93, ainsi nous pouvons établir une comparaison entre les décès observés et les décès théoriques sur la période considérée. Les décès théoriques sont obtenus en sommant les taux bruts de mortalité issus des tables définies dans le contrat par âge de la population couverte l'année N. On obtient le graphe suivant :

### Comparaison entre les décès théoriques et les décès observés

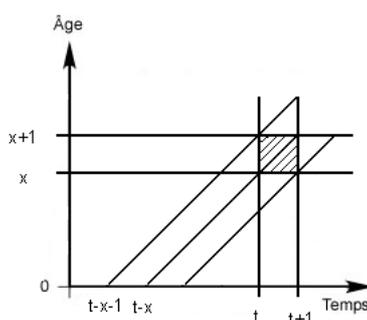


Ce schéma ne permet pas de conclure qu'il y a une tendance de longévité au cours des années mais on remarque toutefois des différences assez conséquentes entre les décès observés et les décès théoriques. Cependant, les années 2003, 2005, 2006, 2007 et 2009 mettent en évidence une sous mortalité observée qui est signe de perte technique pour l'assureur d'où l'importance d'utiliser une table de mortalité propre à la population couverte afin de limiter le risque de longévité sur les engagements de l'assureur.

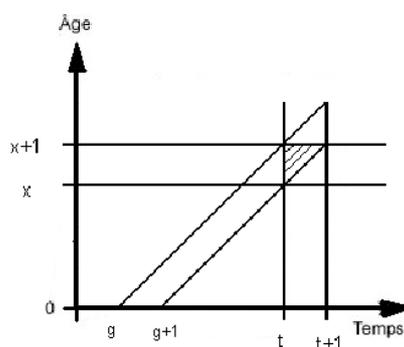
Dans la partie suivante, la construction des estimateurs des taux conditionnels de décès de la nouvelle table sera effectuée.

### 2.2.2 REALISATION D'UNE TABLE DE MORTALITE

Pour bien mettre en évidence la pertinence de nos données, le diagramme de Lexis (présenté dans la partie 1.2.3) permet de visualiser les décès à l'âge  $x$  au cours de l'année  $t$  par l'intermédiaire des points mortuaires suivants :



De même, la représentation de Lexis du nombre de décès à l'âge  $x$  au cours de l'année  $t$  parmi les individus de la génération  $g$  se fait par le diagramme suivant :



Une mesure « naturelle » de la mortalité serait de comptabiliser les décès observés lors de l'année  $t$  et de calculer les taux de décès par âge en rapportant le nombre de décès à l'effectif sous risque.

Les données nous permettent d'estimer des taux de décès pour les individus d'âge  $x$  lors de l'année  $t$  mais ne nous permettent pas d'identifier la génération touchée. Pour cela, la méthode de BROUHNS N., DENUIT M. proposée en 2002 [3] sera utilisée pour estimer ces taux de mortalité. Ainsi, pour ne pas calculer des taux de décès correspondant à des individus de générations différentes, le calcul se fera en deux étapes sur deux générations successives. En effet, le quotient de mortalité à l'âge  $x$  pour l'année  $t$  fait intervenir deux générations, la génération  $t-x$  (correspondant à  $g+1$ ) et la génération  $t-x-1$  (correspondant à  $g$ ). La notation  $D_{xt}(g)$  définie en 1.2.3 caractérisant le nombre de décès à l'âge  $x$  pour la génération  $g$  intervenus dans l'année  $t$  est reprise dans le calcul du taux de décès.

Dans un premier temps, le taux de décès  $\hat{p}_{xt} = (1 - q_{xt}^1)(1 - q_{xt}^2)$  pour la génération  $t-x$  se calcule par les étapes suivantes :

$$q_{xt}^1 = \frac{D_{xt}(t-x)}{l_{x,t+1} + D_{xt}(t-x)}, \text{ où } l_{x,t+1} \text{ désigne le nombre de personnes d'âge } x \text{ au } 01/01/t+1$$

Ce quotient estime la probabilité pour les individus de la génération  $t-x$  de décéder à l'âge  $x$  l'année  $t$ .

Dans un second temps, le taux de décès  $q_{xt}^2$  estimant la probabilité pour les individus de la génération  $t-x-1$  de décéder à l'âge  $x$  l'année  $t$  se calcule par la formule suivante :

$$q_{xt}^2 = \frac{D_{xt}(t-x-1)}{l_{x,t}} .$$

Le quotient cherché répond au fait que pour survivre entre son  $x^{\text{ième}}$  et son  $x+1^{\text{ième}}$  anniversaire, il faut survivre de son  $x^{\text{ième}}$  anniversaire à la fin de l'année civile, puis de la fin de l'année civile à son  $x^{\text{ième}}+1$  anniversaire, ainsi la probabilité de survie est :

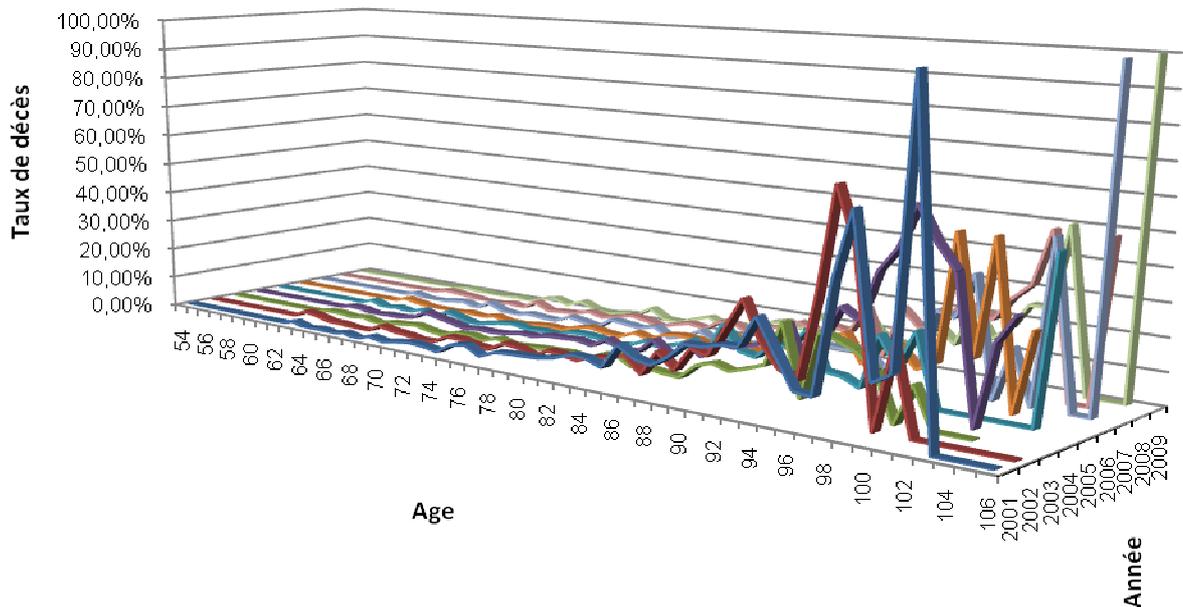
$$\hat{p}_{xt} = (1 - q_{xt}^1)(1 - q_{xt}^2).$$

Soit le taux de mortalité cherché égal à  $\hat{q}_{xt} = 1 - \hat{p}_{xt}$ .

Après avoir calculé les taux de décès pour la population durant la période considérée, il est à noter que les données disponibles sont des données regroupées dans lesquelles l'unité de temps est l'année donc il convient de se donner une règle de répartition des décès dans l'année. On a ainsi  ${}_t q_x = 1 - (1 - q_x)^t$ .

La preuve de cette hypothèse se trouve page 36 de la publication de BROUHNS N., DENUIT M. [3].

Après avoir constitué les taux bruts pour la population considérée, le graphique ci-dessous présente les taux de mortalité bruts de cette population pour la période considérée :



Les irrégularités dans les taux bruts de décès sont directement liées aux fluctuations d'échantillonnage. De plus, les données aux âges élevés ( $> 95$ ) ne sont pas très représentatives du fait du manque de données à ces âges.

Etant donné le manque de données, la construction d'une table de mortalité basée sur le modèle Lee Carter défini en 1.3.2.1 semble compromise. De ce fait, le choix d'une méthode de positionnement va permettre de construire la table d'expérience adéquate.

Le but sera de se positionner par rapport à la table générationnelle TPG 93.

Une première étape sera d'effectuer un ajustement sur les tables du moment reconstituées, c'est-à-dire sur la période 2001 à 2009 pour les âges de 54 à 95 ans. Le modèle utilisé est un modèle alternatif moins paramétré comprenant des expressions analytiques basées sur les âges ou sur les années. Ce modèle fait intervenir les logits, il est défini par ce qui suit :

$$\ln \left( \frac{\hat{q}_{xt}}{1 - \hat{q}_{xt}} \right) = a_t \times \ln \left( \frac{q_{xt}^{ref}}{1 - q_{xt}^{ref}} \right) + b_t + \varepsilon_{xt},$$

où  $\varepsilon_{xt}$  désigne le terme d'erreur, c'est-à-dire le bruit perturbant la relation fonctionnelle entre les taux des tables observés et les taux de référence. Les paramètres  $a_t$  et  $b_t$  dépendent du temps mais pas de l'âge.  $q_{xt}^{ref}$  représente le taux de mortalité de la table de référence à l'âge  $x$  lors de l'année  $t$ .

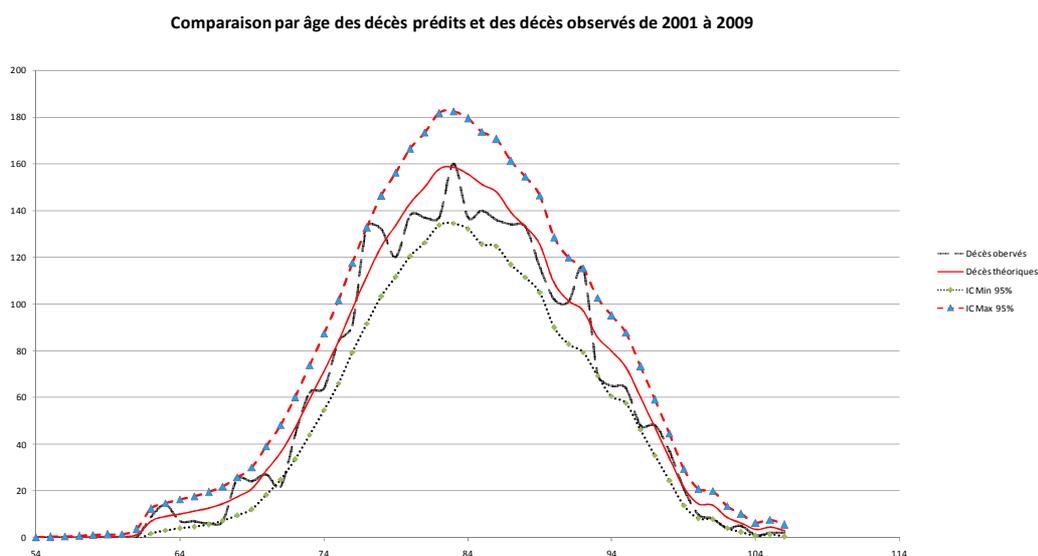
On note aussi :  $\lg_x(t) = \ln \left( \frac{q_{xt}}{1 - q_{xt}} \right)$ .

La régression est effectuée sur la plage 2001-2009, ainsi on obtient 10 valeurs de  $a$  et  $b$  en fonction de  $t$ . Une régression est effectuée pour chaque valeur de  $t$ , les âges disponibles étant de 54 à 96 ans. Notons que les résultats présentent une corrélation importante entre les paramètres  $a$  et  $b$ , ce qui nous peut nous amener à mettre en place le modèle suivant :  $a_t = \alpha + \beta b_t$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . Cependant, avec l'obtention des différentes valeurs de  $a$  et  $b$ , on a des courbes de tendance pour ces paramètres. Ces courbes de tendance seront utilisées pour projeter les taux de mortalité.

A ce stade, on obtient ainsi l'estimation des paramètres sur la plage d'âges 54-96 ans pour les années 2001-2009. On peut segmenter cette étude en 2 périodes :

✓ **Période 2001 – 2009 : ajustement des taux bruts**

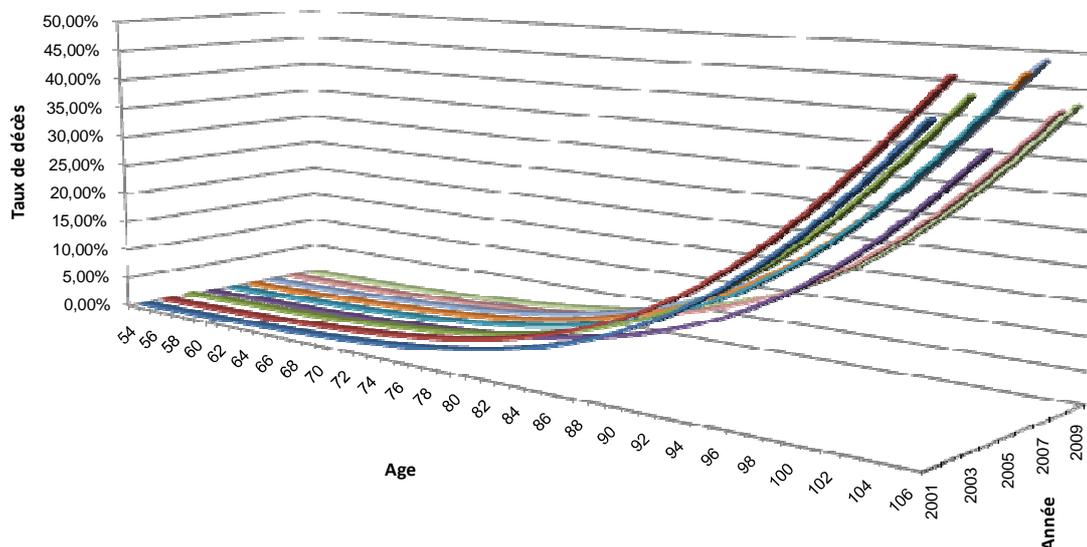
A ce stade, il faut valider la table obtenue en comparant les décès prédits et observés sur la période 2001 à 2009. La validation se fera par l'intermédiaire des intervalles de confiance à 95 %. Le graphe suivant met en évidence les résultats :



Il est à noter que les intervalles de confiance sont représentés par les courbes contenant des marqueurs. Par la lecture de ce graphique, on remarque que les décès observés se situent principalement à l'intérieur des intervalles de confiance ainsi la table d'expérience obtenue reflète à 95 % la réalité.

De plus, en comparant les écarts relatifs entre les décès observés et théoriques avec les tables en vigueur pour la population considérée, l'imprécision est assez importante de l'ordre moyen de 17 %. Cette source d'erreur n'est pas négligeable dans une analyse du risque. Elle provient de différentes sources de risque définies et expliquées dans l'article de PLANCHET F., KAMEGA A. publié en 2011 [14].

Par comparaison au graphe des taux bruts, il est possible d'avoir un graphe plus propre avec les taux obtenus grâce à la méthode du positionnement. Ainsi, on a les taux de mortalité après positionnement par rapport à la table TPG93 suivants :



Sur le graphique ci-dessus, il est à noter que les taux de mortalité n'atteignent pas 100 % puisque que la table s'arrête à 110 ans. Ces taux très élevés ne doivent pas être interprétés car ils ne sont pas représentatifs du fait du manque de données à ces âges élevés. On se limitera aux âges 54-96 ans

A ce stade nous avons les données suivantes :

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
54	$q_{54,2001}$	$q_{54,2002}$	$q_{54,2003}$	$q_{54,2004}$	$q_{54,2005}$	$q_{54,2006}$	$q_{54,2007}$	$q_{54,2008}$	$q_{54,2009}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x	$q_{x,2001}$	$q_{x,2002}$	$q_{x,2003}$	$q_{x,2004}$	$q_{x,2005}$	$q_{x,2006}$	$q_{x,2007}$	$q_{x,2008}$	$q_{x,2009}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
106	$q_{106,2001}$	$q_{106,2002}$	$q_{106,2003}$	$q_{106,2004}$	$q_{106,2005}$	$q_{106,2006}$	$q_{106,2007}$	$q_{106,2008}$	$q_{106,2009}$

Ensuite le but sera de projeter ces taux de décès sur les années futures, plus précisément jusqu'en 2105 puisque l'on considère que les données aux âges élevés de la table de référence TPG 93 sont fiables jusqu'à 112 ans. Focalisons-nous maintenant sur la période suivante.

✓ **Période 2010 – 2105 : Projection des taux de mortalité**

Après avoir validé nos données et grâce aux courbes de tendance obtenues précédemment, nous allons projeter les taux de mortalité futurs afin d’obtenir des taux de mortalité prévisionnels. A ce stade, les paramètres réels  $a$  et  $b$  précédemment cités vont permettre de prolonger les tables sur la dimension temporelle pour obtenir les taux prospectifs de 2010 à 2105 en appliquant la formule suivante :

$$\lg_x(t) = a_t \times \lg_x^{ref}(t) + b_t.$$

A l’issue de cette étape, nous disposons d’un ensemble de tables prospectives de 2010 à 2105 pour les âges 54-96 ans. Ainsi il reste à fermer ces tables, c’est à dire à extrapoler les taux de décès pour les âges extrêmes supérieurs à 96 ans selon la méthode suivante : Nous allons fermer les tables en supposant qu’à partir de 106 ans, les taux de mortalité sont égaux à 1. Ainsi les taux de mortalité correspondant aux âges 97 à 105 ans sont calculés par l’intermédiaire de la formule de récurrence suivante :

$$q_x = a \times e^{b \times x} \text{ avec } a = e^{-106 \times b} \text{ et } b = -\ln\left(\frac{q_{x-1}}{106-96}\right).$$

A ce stade, nous avons les taux de mortalité prévisionnels sur les années 2001 à 2105 pour la tranche d’âges [54 ans ; 106 ans].

Une opération inverse est effectuée afin d’obtenir les taux de mortalité par génération.

Après cela, les  $q_x$  sont transformés en  $l_x$  et on a ainsi une table prospective générationnelle.

Grâce à cette méthode, nous obtenons la table d’expérience de l’assureur. C’est avec cette dernière que nous allons projeter les engagements sur 30 ans afin de comparer les résultats obtenus en 2.1.4

**Remarque 6 :**

A partir des taux de décès lissés obtenus aux âges 54-96 ans pour les années 2001 à 2009, nous pouvons utiliser une méthode alternative pour obtenir nos tables générationnelles : en effet, pour compléter la table suivante :

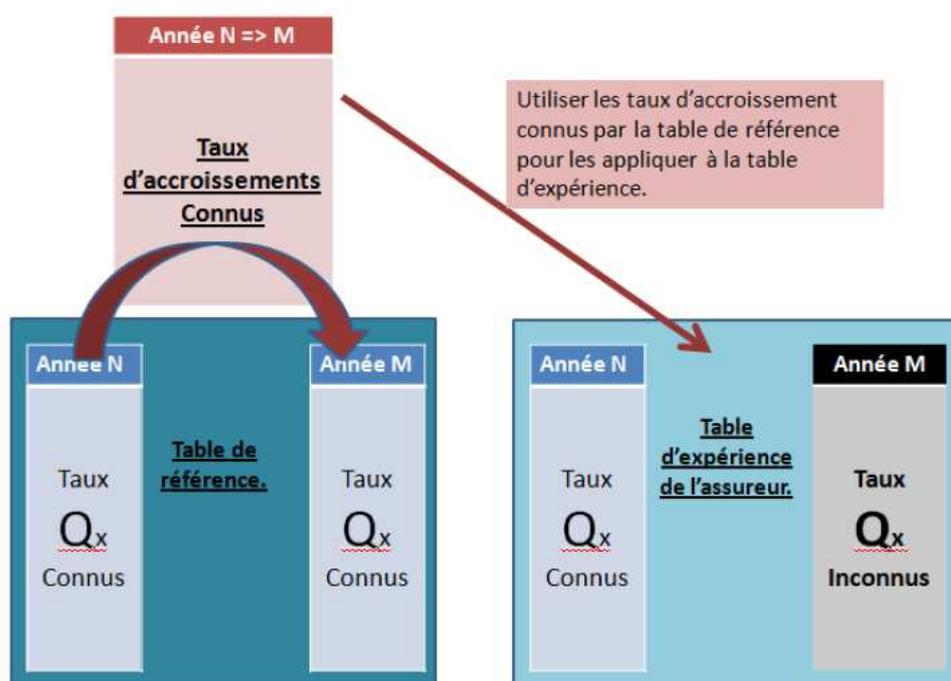
Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
54	$q_{54,2001}$	$q_{54,2002}$	$q_{54,2003}$	$q_{54,2004}$	$q_{54,2005}$	$q_{54,2006}$	$q_{54,2007}$	$q_{54,2008}$	$q_{54,2009}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x	$q_{x,2001}$	$q_{x,2002}$	$q_{x,2003}$	$q_{x,2004}$	$q_{x,2005}$	$q_{x,2006}$	$q_{x,2007}$	$q_{x,2008}$	$q_{x,2009}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
106	$q_{106,2001}$	$q_{106,2002}$	$q_{106,2003}$	$q_{106,2004}$	$q_{106,2005}$	$q_{106,2006}$	$q_{106,2007}$	$q_{106,2008}$	$q_{106,2009}$

Le taux d'accroissement année après année de la table de référence est utilisé. Par exemple on remarque un taux d'accroissement de 2,53 % pour le  $q_{65}^{ref}$  en passant de l'année 1984 à 1985, nous appliquons le même taux pour notre table d'expérience. Ainsi

si  $\frac{q_{65,1985}^{ref} - q_{65,1984}^{ref}}{q_{65,1985}^{ref}} = 2,53\%$ , on recherche un taux de mortalité à 65 ans pour l'année 1984

vérifiant :  $\frac{q_{65,1985} - q_{65,1984}}{q_{65,1985}} = 2,53\%$ .

On réitère cette opération colonne par colonne en utilisant le taux d'accroissement année après année de la table de référence afin compléter notre table d'expérience. Le schéma suivant permet de résumer cette étape :



Il est à noter que pour les années de 1993 à 2001, on ne dispose pas de données de référence puisque la table TPG 93 s'arrête à la génération 1993, ainsi pour cette période, il a été choisi de se référer aux tables de mortalité TGH05/ TGF05 en considérant que la population considérée est constituée de 60 % d'hommes et de 40 % de femmes. Ainsi on obtient les taux de mortalité de référence pour les années 2000 à 1993 afin d'effectuer la méthode des accroissements.

Cependant, les tables utilisées pour les simulations réalisées dans les parties suivantes sont les tables prospectives générationnelles créées par les méthodes de projection des taux de mortalité et de fermeture des tables.

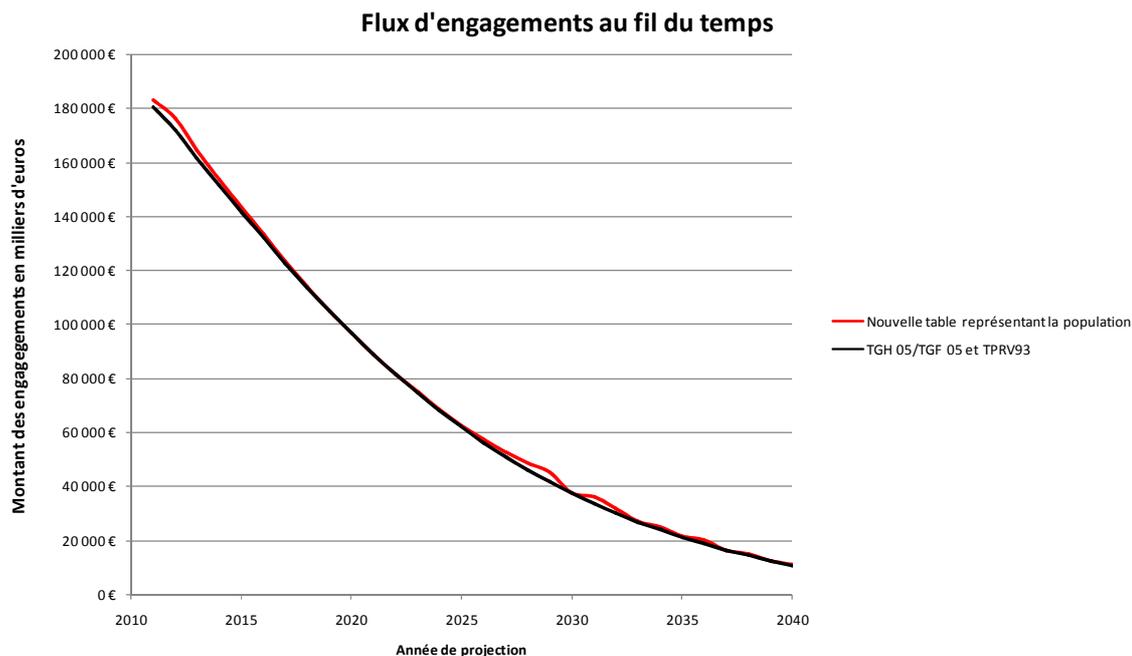
## 2.2.3 RESULTATS OBTENUS SUITE AUX PROJECTION DE PM

La table ainsi obtenue peut être appliquée à la population à fin 2010 afin de comparer les résultats techniques. Les provisions à fin 2010 avec l'utilisation de la table construite s'élève à 182 968 809 euros contre un montant provisionné à 182 868 213 avec les tables en vigueur. Le montant réellement constaté à fin 2010 est de 183 372 363 euros dans les comptes. Ainsi l'utilisation de la table créée nous rapproche de la réalité, au moins pour l'année 2010.

Ensuite, nous avons relancé l'outil de simulation afin de projeter les engagements avec l'utilisation de la nouvelle table ainsi construite. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Années	Nouvelle table représentant la population								TGH 05/TGF 05 et TPRV93							
	Taux technique								Taux technique							
	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%		
2011	10 549 487	18 974 208	29 506 849	2 605 987	9 380 834	1 936 807	109 940 870	10 338 219	18 615 832	29 054 883	2 438 582	9 216 440	1 883 048	109 048 998		
2012	10 318 124	18 571 076	28 904 006	2 414 188	9 195 268	1 857 525	105 164 676	10 045 699	18 107 824	28 087 240	2 329 988	8 983 811	1 787 354	102 682 770		
2013	9 935 251	17 910 958	27 676 444	2 279 664	8 891 916	1 740 501	96 315 857	9 749 227	17 594 018	27 117 080	2 221 948	8 746 139	1 692 216	94 523 446		
2014	9 568 224	17 278 252	26 504 207	2 151 702	8 597 839	1 628 920	87 856 530	9 448 906	17 074 667	26 144 985	2 114 662	8 503 458	1 597 841	86 598 255		
2015	9 266 299	16 757 477	25 537 095	2 045 920	8 352 764	1 536 038	80 082 713	9 144 863	16 550 064	25 171 599	2 008 317	8 255 826	1 504 420	78 935 773		
2016	8 908 727	16 142 635	24 412 313	1 925 108	8 060 900	1 430 668	72 338 396	8 837 263	16 020 492	24 197 563	1 903 097	8 003 340	1 412 136	71 565 661		
2017	8 563 466	15 549 825	23 334 969	1 810 512	7 776 317	1 330 741	65 012 684	8 526 290	15 486 262	23 223 560	1 799 153	7 746 111	1 321 172	64 516 560		
2018	8 228 072	14 974 888	22 297 827	1 701 453	7 497 328	1 235 763	58 112 059	8 212 152	14 947 663	22 250 294	1 696 639	7 484 281	1 231 709	57 815 375		
2019	7 895 670	14 406 028	21 280 292	1 595 869	7 218 496	1 144 087	51 556 227	7 895 072	14 405 005	21 278 515	1 595 690	7 218 002	1 143 937	51 486 103		
2020	7 575 283	13 858 567	20 309 041	1 496 453	6 947 439	1 058 045	45 549 041	7 575 283	13 858 567	20 309 041	1 496 453	6 947 439	1 058 045	45 549 041		
2021	7 253 663	13 309 688	19 344 509	1 399 245	6 673 304	974 364	40 074 855	7 253 050	13 308 640	19 342 708	1 399 068	6 672 789	974 215	40 020 347		
2022	6 933 622	12 763 951	18 394 873	1 305 091	6 398 475	893 838	35 018 305	6 928 667	12 755 476	18 380 402	1 303 682	6 394 280	892 663	34 911 914		
2023	6 619 336	12 228 206	17 472 085	1 215 148	6 126 568	817 495	30 385 318	6 602 456	12 199 323	17 423 128	1 210 441	6 112 165	813 591	30 230 190		
2024	6 315 133	11 709 510	16 588 070	1 130 513	5 861 441	746 302	26 175 941	6 274 800	11 640 456	16 471 944	1 119 503	5 826 767	737 230	25 976 187		
2025	6 025 446	11 215 119	15 754 580	1 052 177	5 607 155	681 093	22 384 798	5 946 160	11 079 234	15 528 027	1 031 020	5 538 486	663 803	22 145 679		
2026	5 754 754	10 752 419	14 983 029	981 011	5 367 915	622 573	19 000 638	5 617 083	10 516 123	14 592 725	945 151	5 247 812	593 566	18 728 512		
2027	5 507 502	10 328 873	14 284 262	917 746	5 148 010	571 235	16 007 246	5 288 225	9 951 753	13 667 580	862 076	4 955 354	526 758	15 709 356		
2028	5 287 978	9 951 907	13 668 294	862 912	4 951 678	527 381	13 383 932	4 960 336	9 386 960	12 754 371	781 960	4 661 816	463 660	13 068 069		
2029	5 100 168	9 628 731	13 143 959	816 839	4 782 980	491 022	11 106 344	4 634 261	8 822 791	11 855 103	704 992	4 368 010	404 522	10 780 457		
2030	4 316 056	8 269 346	10 986 042	632 593	4 079 436	350 516	8 846 125	4 310 963	8 260 501	10 972 070	631 407	4 074 870	349 618	8 819 249		
2031	4 315 247	8 266 443	10 988 624	634 436	4 075 534	353 115	7 328 007	3 991 460	7 701 611	10 107 881	561 468	3 783 400	299 152	7 155 065		
2032	3 891 668	7 524 397	9 844 597	542 176	3 689 709	286 910	5 866 567	3 676 900	7 147 772	9 265 361	495 436	3 494 741	253 281	5 757 392		
2033	3 385 216	6 630 309	8 492 047	437 053	3 225 389	214 523	4 619 146	3 368 538	6 600 886	8 447 449	433 557	3 210 158	212 084	4 595 563		
2034	3 198 826	6 295 851	8 004 819	402 456	3 051 435	193 321	3 692 502	3 067 733	6 063 022	7 657 274	376 059	2 931 033	175 536	3 639 618		
2035	2 813 873	5 604 398	6 997 917	330 495	2 693 884	148 291	2 883 035	2 775 884	5 536 417	6 898 061	323 170	2 658 801	143 541	2 861 034		
2036	2 692 608	5 380 965	6 689 403	311 475	2 578 937	138 587	2 275 540	2 494 495	5 023 470	6 173 061	275 010	2 395 020	115 906	2 233 193		
2037	2 225 709	4 527 850	5 486 705	231 740	2 141 867	92 426	1 734 184	2 225 150	4 526 832	5 485 261	231 642	2 141 346	92 368	1 731 825		
2038	2 036 647	4 172 803	5 009 634	204 188	1 962 462	78 924	1 349 622	1 969 488	4 049 244	4 837 429	193 039	1 899 507	72 608	1 325 206		
2039	1 729 413	3 594 511	4 233 399	159 163	1 671 480	56 309	1 025 672	1 728 900	3 593 557	4 232 094	159 083	1 670 997	56 266	1 024 277		
2040	1 535 715	3 221 005	3 750 021	134 194	1 486 569	45 301	788 592	1 504 608	3 162 447	3 671 424	129 598	1 457 156	42 960	782 575		
2041	1 396 242	2 946 552	3 404 616	118 006	1 352 738	38 877	604 791	1 297 578	2 758 446	3 156 954	104 322	1 259 076	32 298	596 129		
<b>Somme</b>	<b>179 143 425</b>	<b>332 746 745</b>	<b>477 284 527</b>	<b>33 845 514</b>	<b>164 846 067</b>	<b>23 221 501</b>	<b>1 014 823 819</b>	<b>175 689 709</b>	<b>326 745 355</b>	<b>467 755 067</b>	<b>32 876 213</b>	<b>161 858 431</b>	<b>22 547 504</b>	<b>1 014 823 819</b>		
Nombre d'agents	370	673	1 133	128	565	76	5 405	370	673	1 133	128	565	76	5 405		
Durée de versement des prestations	24,20	25,44	21,73	17,32	24,44	14,50	10,87	23,43	24,18	21,11	16,35	23,43	13,33	9,59		

En termes de comparaison graphique, le graphique suivant nous montre le flux d'engagements avec les tables en vigueur et avec la table créée dans la section 2.2.2 :



Nous observons ainsi une tendance de longévité au cours du temps. Toutefois, cette tendance est faible par rapport aux projections réalisées avec une table de mortalité abattue. L'utilisation de cette table pour les années futures semble être une solution adéquate pour la population couverte. Pour confirmer cette hypothèse, dans la partie suivante, une comparaison sera effectuée afin de mettre en évidence l'utilisation de la nouvelle table.

## 2.3 COMPARAISON DES RESULTATS

L'objectif de cette étude est d'apporter des explications au solde technique annoncé dans le compte de résultat du fonds de rente de l'assureur, le but étant d'obtenir un solde nul au fil de l'eau. C'est dans cette optique qu'une table de mortalité propre à la population couverte a été créée.

Dans un premier temps, le solde technique du compte de l'assureur sera explicité grâce à une analyse de la mortalité. Une comparaison de ce solde sera réalisée selon les tables de mortalité utilisées afin de justifier la pertinence de la table créée. Puis, une comparaison quantitative au niveau de la longévité et au niveau des montants de flux d'engagements sera effectuée.

### 2.3.1 ANALYSE DE LA MORTALITE

Afin de raisonner sur des groupes fermés et homogènes, le périmètre de notre étude ne tient pas compte des liquidations survenues dans le courant de l'année. Ainsi sur l'année 2010, le solde du compte technique du fonds de rente au titre des rentiers présents au 31/12/2010 est de **-504 150 €** (hors prestations payées en 2010) avec l'utilisation des tables en vigueur.

Si la mortalité du portefeuille suivait rigoureusement la table TPRV93 (respectivement TGH/TGF 05 pour les rentes liquidées en TGH/TGF 05), le résultat technique serait nul. Aussi, l'approche retenue consiste à recenser les différents écarts de mortalité par rapport à cette table TPRV93 (respectivement TGH/TGF 05), puis à chiffrer l'impact de chacun sur le compte technique, c'est-à-dire sur les PM au 31/12/2010 et sur les prestations payées en 2010. L'essentiel du résultat technique provient normalement de l'écart sur les PM puisque l'écart sur les prestations n'explique en général qu'un faible pourcentage du résultat technique.

Comme énoncé dans la partie 2.1.1, nous avons ainsi segmenté le portefeuille en vigueur au 01/01/2010 en deux sous-portefeuilles distincts :

- ✓ les rentes sans réversion en attente (Célibataires, Veufs, Divorcés)
- ✓ les rentes avec réversion en attente (Mariés)

Pour les rentes sans réversion en attente, le nombre de décès observés (185) est inférieur au nombre de décès attendus (243), ce qui va dans le sens d'une perte technique. Cependant, le pied de rente moyen des décès observés (2500 €) est supérieur à la moyenne du portefeuille (1712 €), ce qui va dans les sens d'un gain technique. Au final, on observe une perte technique de 168 000 €.

Concernant les décès des 1<sup>ères</sup> têtes pour les cas de réversion, le nombre de décès observés (157) est supérieur au nombre de décès attendu (141). L'impact se décompose ainsi en 2 phénomènes :

- ✓ d'une part, la mortalité des assurés « 1<sup>ère</sup> tête » entraîne un gain technique pour les rentes principales : le montant attendu des PM des rentes principales s'élevait à 106 043 045 € contre un montant observé de 105 995 265 €. Cet écart se traduit par un gain technique de 47 780 €.
- ✓ d'autre part, cette même mortalité des « 1<sup>ères</sup> têtes » contribue à la liquidation d'un montant de rentes de réversion supérieur au montant attendu. Le montant attendu des PM des rentes de réversion liquidées en 2010 s'élevait à 2 352 265 € contre un montant observé de 2 496 543 €, soit une perte technique de - 144 278 €.

Ainsi, la mortalité des « 1<sup>ères</sup> têtes » se traduit donc par une perte technique de  $47\,780 - 144\,278 = -96\,498$  €.

De plus, un autre facteur rentre en compte, il s'agit des décès des réversataires potentiels. En effet, sur l'année 2010, nous avons eu connaissance de 11 décès de « réversataires » potentiels, à comparer au nombre de décès « 2<sup>ème</sup> tête » attendu égal à 121. Cet écart conduit à une perte technique de 239 652 €.

Cependant, dans la mesure où cette perte correspond très vraisemblablement à une sous-déclaration des décès de conjoints « réversataires potentiels », il est probable que des réversions en attente soient toujours provisionnées au titre de réversataires potentiels déjà décédés.

Dans cette hypothèse, la perte ne serait pas définitive pour le régime. Au moment de la connaissance du décès (par exemple au moment du décès de la 1<sup>ère</sup> tête), l'excédent de provision pour réversion en attente serait alors repris et la perte technique serait « compensée » par un résultat technique futur.

Comme évoqué précédemment, le solde du compte technique hors prestations payées est de -504 150 € avec l'utilisation des tables en vigueur.

Toutefois, sachant que la mortalité du portefeuille est constatée, il a été décidé de valoriser les engagements avec la nouvelle table créée pour tous les agents en ayant l'espérance d'obtenir un solde technique plus proche de l'équilibre. On obtient ainsi les résultats suivants avec le même périmètre au 31/12/2010 :

Une perte de mortalité totale à hauteur de -403 554 € décomposée comme suit :

- ✓ une perte technique de -98 532 € pour les rentes sur une seule tête (Célibataires, Veufs, Divorcés) du fait des 185 décès observés contre 217 attendus.
- ✓ une perte technique de -305 022 € pour les rentes sur 2 têtes, qui se décompose de la façon suivante :
  - un gain technique de 65 598 € au titre des rentes principales puisque l'on observe 157 décès contre 131 attendus.
  - une perte technique de -178 675 € au titre des nouvelles rentes de réversion liquidées dans l'année
  - une perte technique de -191 945 €, probablement due à une déclaration tardive des décès des conjoints tant que l'ancien salarié est vivant.

Ainsi, sur l'année 2010, l'utilisation de la nouvelle table semble judicieuse car elle permet une diminution de la perte technique globale. Cette même étude a été réalisée sur les années 2007 à 2009 et elle permet de mettre en évidence un solde technique plus proche de l'équilibre avec l'utilisation de la nouvelle table.

Afin de voir les différences entre les tables en vigueur sur le contrat et la nouvelle table créée, une analyse de la longévité est effectuée dans la partie suivante.

### 2.3.2 AU NIVEAU DE LA LONGEVITE

Pour mémoire, le montant de solde technique provient directement des montants de provisions mathématiques, ces derniers sont liés à la durée de versement des rentes viagères.

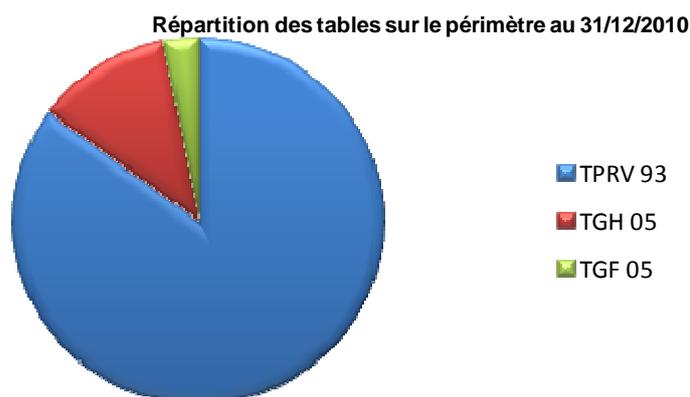
Ainsi, il est nécessaire de s'intéresser à des espérances de vie résiduelle. En effet, dans le contrat considéré, l'âge minimum possible de départ à la retraite est de 55 ans, il s'agit d'un cas d'anticipation s'appliquant sous certaines conditions.

Le tableau suivant résume l'espérance de vie résiduelle à différents âges pour différentes générations selon les différentes tables entrant en jeu dans l'étude :

Age	Génération	TGH 05	TGF 05	TPRV 93	Nouvelle table
55	1950	32,42	36,11	32,70	32,99
60	1945	27,22	30,84	28,21	28,50
65	1940	22,15	25,65	23,75	24,13
70	1935	17,37	20,61	19,35	19,92
80	1925	9,29	11,63	11,47	12,34

On constate que la nouvelle table présente une tendance de longévité par rapport aux tables TPRV 93 et TGH 05. Toutefois, elle n'égale pas la longévité constatée par la table TGF 05 sauf après les âges supérieurs à 79 ans.

La répartition des tables de mortalité selon le périmètre utilisé au 31/12/2010 se répartit de la manière suivante :



En effet, la table TPRV 93 prédomine dans le contrat considéré puisque la plupart des liquidations ont été réalisées avant le 31/12/2007, ainsi la tendance de longévité présente dans la nouvelle table touche une grande partie du portefeuille.

Cependant, cette nouvelle table présente plusieurs limites notamment :

- ✓ si le portefeuille était composé uniquement de femmes, la longévité ne serait pas prise en compte, ainsi le solde technique s'éloignerait fortement de l'équilibre ;
- ✓ lorsque tous les titulaires de rentes provisionnées en TPRV93 seront décédés, le solde technique évoluera selon la répartition homme / femme du portefeuille.

L'idéal serait de refaire cette étude tous les 3 ans afin de voir l'évolution de la mortalité du portefeuille. Cependant, un problème se poserait au niveau des comptes de l'assureur puisque l'assureur a pour obligation de revaloriser les rentes, cette revalorisation se fait en partie par l'intermédiaire du compte de la PAV. En effet, dans le cas d'une garantie de mortalité, le changement de table s'impacte sur la PAV, ainsi si l'on observe des variations techniques assez conséquentes, la PAV pourrait être affectée et les pertes techniques seraient à la charge de l'assureur.

Après avoir mis en évidence la tendance de longévité apportée par cette nouvelle table, intéressons nous maintenant à ses conséquences au niveau des engagements sur un horizon de 30 ans.

### 2.3.3 AU NIVEAU DES ENGAGEMENTS

La table récemment construite présente une tendance de longévité par rapport aux tables en vigueur par le contrat. Nous avons vu que cette tendance reflète la réalité, du moins sur les années 2007 à 2010 puisqu'avec l'utilisation de cette table, le compte technique se rapproche de l'équilibre.

L'impact du changement de tables sur les provisions peut être représenté par le tableau suivant présentant les montants des capitaux constitutifs d'une rente viagère immédiate au 31/12/2011, calculés au taux technique de 2 % :

Age	Génération	Nouvelle table	Femmes	Femmes / Nouvelles tables	Hommes	Hommes / Nouvelles Tables	TPG 1993	TPG / Nouvelles tables
50	1961	26,80	28,41	6,0%	27,23	1,6%	26,82	0,07%
55	1956	24,34	25,96	6,6%	24,58	1,0%	24,26	-0,32%
60	1951	21,96	23,30	6,1%	21,79	-0,8%	21,51	-2,05%
65	1946	19,43	20,40	5,0%	18,76	-3,5%	18,53	-4,62%
70	1941	16,80	17,29	2,9%	15,62	-7,1%	15,39	-8,39%
75	1936	14,14	14,09	-0,3%	12,55	-11,2%	12,26	-13,29%
80	1931	11,51	10,96	-4,8%	9,54	-17,1%	9,35	-18,75%
85	1926	9,02	8,16	-9,6%	6,96	-22,8%	6,88	-23,67%
90	1921	6,72	5,89	-12,3%	4,94	-26,5%	4,93	-26,60%
95	1916	4,58	4,29	-6,2%	3,51	-23,2%	3,47	-24,21%

De plus, en partant des simulations et des résultats vus en partie 2.2.3, en termes d'engagements, nous pouvons résumer les résultats dans le tableau suivant :

	Tables en vigueur	Table créée	Ecart
Engagement total sur 30 ans	2 202 296 098 €	2 225 985 365 €	1,06 %
Engagement en 2011	180 596 002 €	182 968 809 €	1,30%
Nombre d'agents total	8 155	8 155	0,00 %
<b>Durée de versement moyenne</b>	<b>18,77 ans</b>	<b>19,79 ans</b>	<b>9,61 %</b>

Pour rappel, l'outil de simulation a été relancé avec les mêmes caractéristiques qu'en 2.1.4. Le tableau ci dessus met en évidence la tendance de longévité créée par la nouvelle table. En moyenne, sur 30 ans, le versement d'un an supplémentaire de rentes viagères affecte le résultat global de 1,06 %

Dans cette étude, il a été montré que le risque de longévité est omniprésent lors de la modélisation de la mortalité humaine. Ainsi même si le modèle repose sur des données adaptées et efficaces, l'assureur ne pourra éviter le risque de modèle qui relève du décalage entre la mortalité constatée et la mortalité anticipée.

L'utilisation d'une table de mortalité reflétant au mieux la population couverte est essentielle pour obtenir une vision des comptes la plus juste possible. La table créée dans cette étude peut être utilisée par l'assureur puisqu'elle reflète les tendances d'espérance de vie de la population assurée.

L'idéal serait de créer tous les 3 ans des nouvelles tables de mortalité propres aux populations couvertes mais le manque de données ne permet pas de réaliser ce type de projet et l'on a vu précédemment que ce n'est pas toujours bénéfique pour l'équilibre d'un régime de retraite.

Dans la partie suivante, une étude détaillée des différentes techniques actuelles permettant de couvrir ce risque sera effectuée.

### 3. COUVERTURE DU RISQUE DE LONGEVITE

---

L'impact du risque de longévité et du risque de modèle dans les contrats d'assurance vie nécessite la mise en place d'une couverture de ces risques. Auparavant, pour couvrir le risque, les seules sources de transfert de risques utilisées par les entreprises d'assurances étaient les opérations de réassurance. La titrisation vient modifier ce schéma en introduisant un nouvel instrument de transfert des risques.

La situation actuelle du marché français permettant de répondre à la problématique de l'externalisation du risque de longévité repose sur deux types de solutions :

- ✓ d'une part, les dérivés de longévité, principalement portés par les banques d'affaires faisant intervenir le mécanisme de *Swap* de longévité ;
- ✓ d'autre part, les garanties de mortalité souscrites auprès d'assureurs, notamment sur le marché français comme évoquées dans la partie précédente.

Ainsi dans cette partie, le phénomène de la titrisation sera évoqué de manière générale afin de présenter des méthodes de tarification de certains produits permettant de couvrir le risque de longévité. Puis, une comparaison détaillée des deux types de solutions citées précédemment sera mis en œuvre afin de citer les avantages et inconvénients de ces dernières.

#### 3.1 LA TITRISATION

La titrisation a pour but de "trancher" un portefeuille risqué en différentes classes d'actifs puis de les céder aux marchés financiers, les investisseurs bénéficient d'une rémunération corrélée positivement à leur exposition au risque. Ces opérations complexes de transfert de risques sont utilisées depuis une vingtaine d'années par les banques et étaient traditionnellement réservées au risque de crédit. Durant la crise de 2008, ces méthodes étaient très critiquées, toutefois un espoir régnait pour voir la titrisation prendre plus d'importance à l'avenir. En outre, l'émergence récente des titrisations pour céder des risques d'assurance montre une convergence des techniques de gestion des risques entre les secteurs assurantiel et bancaire et dénote en particulier une évolution de la conception de création de valeur de l'assureur.

L'assureur cherche à se protéger contre un évènement exceptionnel comme le risque de longévité qui a un impact significatif défavorable sur le compte de résultat.

Cette partie est destinée à montrer l'originalité de cette technique de plus en plus répandue dans les opérations de transfert de risques en assurance, en particulier pour le risque de longévité.

Dans cette section, les origines de la titrisation seront énoncées. Dans un deuxième temps, le mécanisme général ainsi que les acteurs d'une opération de titrisation seront étudiés afin de bien assimiler ce phénomène. Ensuite un récapitulatif des avantages et des inconvénients de la titrisation sera réalisé.

### 3.1.1 CONTEXTE ET HISTORIQUE

La titrisation est une technique financière consistant à transformer des actifs non liquides en titres négociables et liquides. Elle permet donc à une personne physique ou morale de céder à un organisme les risques liés à des créances en émettant des valeurs mobilières dont la valeur ou le rendement dépendent de ces risques (en d'autres termes, elle permet d'extraire de son patrimoine certains actifs afin de ne plus en supporter le risque).

Comme évoqué par F LEROUX [8], la titrisation est un phénomène trouvant son origine aux Etats-Unis sous le nom de "securitization". Après la seconde Guerre Mondiale, la demande en prêt hypothécaire explosa aux Etats-Unis et les banques recherchèrent alors de nouvelles sources stables pour relancer le financement de l'immobilier résidentiel. Ce besoin fit démarrer le marché de la titrisation dont la première opération fut réalisée pour le compte de Ginnie Mae en 1970. Ainsi, la titrisation naquit dans un premier temps dans le but de résoudre le problème des caisses d'épargne : « savings and loans », qui étaient confrontées à une fuite des déposants. Afin d'obtenir de la part des investisseurs des conditions de financement favorables, les banques et les intermédiaires financiers proposèrent de créer des véhicules de transfert présentant un risque de défaut très faible, ne mettant donc pas en danger les actifs de ces véhicules de transfert, ce qui incitait les investisseurs à ne réclamer qu'une faible marge au-delà du taux sans risque.

Les portefeuilles de risque de crédit hypothécaire étaient isolés dans les véhicules de transfert, en fonction de leur niveau de risque de défaut et les cash-flows attendus de ces portefeuilles étaient structurés.

Ce processus fut favorisé par le soutien apporté par les trois agences du gouvernement fédéral américain (la Federal National Mortgage Association, la Federal Home Loan Mortgage Corporation, la Government National Mortgage Association). La première titrisation sans garantie des agences fut réalisée par Bank of America en 1977.

La titrisation bénéficia ensuite d'un coup d'élan dans les années 80 avec le développement de l'informatique permettant la réduction des frais administratifs et de collecte des informations. Dès 1985 naissent progressivement des titrisations appliquées à des actifs différents des prêts hypothécaires, comme par exemple les prêts automobiles. Puis, à partir de 1988, avec le renforcement des normes prudentielles, la titrisation permit à de nombreuses banques de libérer des fonds propres en cédant des actifs risqués consommateurs de capitaux propres.

Ainsi, progressivement, les mécanismes de titrisation se sont diversifiés en fonction des actifs à gérer et des besoins des banques et des entreprises.

Après avoir vu l'historique de la titrisation, la partie suivante décrit le mécanisme de cette technique financière de plus en plus utilisée.

### 3.1.2 MECANISME

La titrisation consiste à sélectionner des actifs en fonction de la qualité de leurs garanties et à les isoler dans une structure ad hoc qui en fait l'acquisition en se refinançant par l'émission de titres. L'opération est basée sur une estimation des flux financiers prévisionnels de ce portefeuille d'actifs. Après évaluation par une agence de rating, ces titres sont souscrits par des investisseurs. L'entité ainsi créée perçoit les flux d'intérêts et de remboursement sur les créances qu'elle a achetées aux banques et les reverse aux investisseurs via le paiement d'intérêts et le remboursement de leurs titres. Le véhicule de titrisation est appelé Fonds Commun de Créances (FCC) en France et Special Purpose Vehicle (SPV) dans les pays anglo-saxons.

Ainsi, une opération de titrisation se réalise en deux étapes :

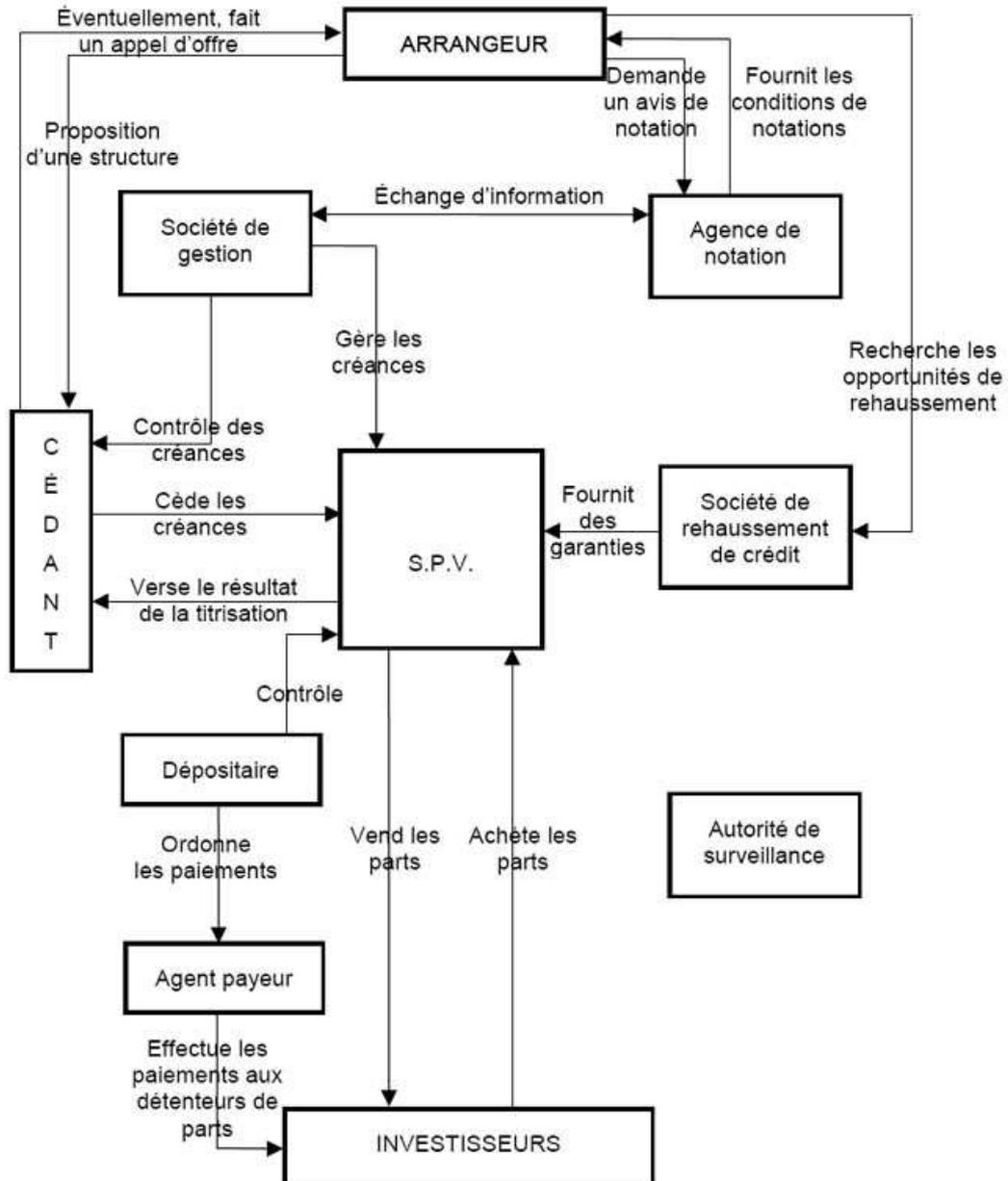
#### **Etape 1** : La cession

Le cédant effectue une cession d'actifs à une entité juridique distincte (FCC ou SPV) ;

#### **Etape 2** : L'émission

Le SPV ou FCC émet des titres négociables représentatifs des créances acquises.

Une opération de titrisation est complexe car elle fait intervenir plusieurs équipes dont les tâches sont réparties. Le schéma ci-dessous décrit les différents acteurs intervenant dans une telle opération avec leurs attributions respectives (voir [1]).



**Le cédant** est l'assureur. Il surveille l'exécution des cessions de créances et il gère les fonds de trésorerie du FCC. Il veille à ce que soient suivies les procédures pour l'obtention de la notation et il fournit les informations requises par les autorités de surveillance.

**L'arrangeur** est typiquement une banque d'affaires ou une maison de titres spécialisée. Il va structurer l'opération de titrisation de manière à répondre aux objectifs du cédant, la rendre attractive en vue d'un placement auprès d'investisseurs et mettre en place des

procédures de rehaussement de crédit ou un surdimensionnement afin d'améliorer la notation moyenne des titres émis.

**Le dépositaire** contrôle les décisions de la société de gestion. Il peut se charger de la gestion du FCC ou bien déléguer ce service à un gestionnaire spécialisé.

**La société de gestion** est une société commerciale qui gère le FCC et défend les intérêts des détenteurs de parts en surveillant l'exécution de cessions de créances.

**Les agences de notation** reçoivent la note de présentation de l'opération et établissent la notation de l'opération et des tranches émises, représentative du niveau de risque de l'opération pour les investisseurs.

**Les rehausseurs de crédit** pourront être appelés par le FCC en fonction de la qualité des titres cédés dans le but d'obtenir une notation adéquate.

**L'agent payeur** s'occupe des paiements à effectuer aux détenteurs de parts.

**Les organismes de tutelle** vérifient que la réglementation des FCC est respectée et que l'information diffusée est conforme.

### 3.1.3 RISQUES ET INTERETS DE LA TITRISATION

Dans cette section, les menaces de différentes natures pesant sur une opération de titrisation seront présentées pour ensuite mettre en évidence ses intérêts.

#### ✓ **Le risque de défaillance des débiteurs**

Les titres cédés dans l'opération de titrisation sont soumis au risque de défaillance, qui dépend de la nature des créances qui sont titrisées, qui est lié aux conditions changeantes du marché et qui peut être aussi un risque systémique en cas de difficultés majeures sur les marchés financiers affectés par des effets de contagion.

#### ✓ **Le risque de perturbation des flux financiers**

Il peut exister un manque de synchronisation entre les flux attendus par les détenteurs de parts et les paiements réellement effectués par le FCC (engendré par des retards de paiements des remboursements anticipés, des difficultés techniques lors des paiements...)

#### ✓ **Le risque de détérioration de la notation**

Au cours de la vie du FCC, il peut arriver que la notation effectuée par les agences spécialisées soit revue à la baisse.

### ✓ **Le risque de défaillance des intervenants**

Plusieurs entités sont parties prenantes à une opération de titrisation. Le risque existe toujours que l'une de ces parties fasse défaut, risque accentué lorsqu'une même entité joue plusieurs rôles dans la structure de titrisation.

### ✓ **Le risque de liquidité**

Comme déjà vu, la titrisation améliore la circulation de la liquidité dans l'économie : son objet même est de transformer des créances en titres négociables. Toutefois dans le cas de la crise récente, l'insolvabilité des emprunteurs a entraîné une méfiance généralisée vis-à-vis des actifs titrisés qui leur étaient adossés. Ces instruments sont donc devenus totalement illiquides. La crise de liquidité s'est étendue au marché interbancaire, dans la mesure où il était difficile d'évaluer le degré d'exposition des établissements de crédit au risque résultant de l'illiquidité de ces actifs. La crise de liquidité peut alors se transformer en crise de solvabilité des intervenants, car elle empêche une gestion normale des positions risquées ou non. Elle a en outre une incidence directe sur les bilans, en raison de la perte de valeur des actifs titrisés.

Cependant malgré la complexité d'une opération de titrisation, des gains importants sont possibles autant pour le cédant que pour les investisseurs :

### ✓ **Avantages pour le cédant**

La titrisation est utilisée par les banques (ou plus généralement par les cédants) essentiellement en vue d'améliorer la liquidité et/ou la rentabilité. Dans le cadre de ce mémoire, le principal avantage est le transfert des risques permettant de diminuer le risque de perte technique.

### ✓ **Avantages pour l'investisseur**

Il existe ainsi de multiples avantages offerts par la titrisation aux établissements de crédit et entreprises quelconques. Mais pour que ceux-ci puissent profiter de ces avantages, encore faut-il que les investisseurs s'engagent financièrement dans ce type d'opérations. Les différents avantages de la titrisation pour les investisseurs sont évoqués dans ce qui suit :

- une large gamme de produits ;
- structures de paiement mieux adaptées à leur besoins ;
- meilleur rendement pour un niveau de notation donné ;
- investissement dans des titres bénéficiant de toute une série de garanties, diminution de l'asymétrie d'information entre le cédant et les investisseurs ;
- réduction de la volatilité des notations.

Après avoir défini la titrisation de manière générale, nous nous intéresserons à la titrisation des risques vie qui est en pleine expansion. Elle a pour but de permettre aux assureurs vie de répondre aux exigences de capital imposées par les normes en vigueur. De plus, c'est un moyen de se couvrir contre le risque de longévité. Une analyse du marché français sur ce sujet sera abordée dans la suite de ce présent mémoire. Avant cela, la méthodologie décrivant la tarification d'un produit permettant de couvrir le risque de longévité sera explicitée.

### 3.2 TARIFICATION DE LA LONGEVITE

Comme évoqué dans la partie précédente, il existe différents traités de réassurance sur le marché, ainsi il semble nécessaire de savoir tarifer ces produits présentant des caractéristiques multiples.

La section suivante a pour objectif d'énoncer une méthode standard de tarification proposée par BLAKE et al en 2009 [2] permettant de transférer le risque de longévité. Cette dernière pourra être utile pour comparer les prix applicables sur le marché pour des produits présentant des caractéristiques similaires même si la transparence de ces montants n'est pas efficiente.

Dans un premier temps, une vue d'ensemble sur la tarification du risque de longévité sera évoquée pour ensuite l'appliquer sur un contrat *swap* couvrant à la fois le risque de modèle et le risque de longévité.

#### 3.2.1 METHODOLOGIE DE PRICING DU RISQUE DE LONGEVITE

La détermination d'un prix pour une exposition au risque, que ce soit un risque financier ou un risque d'assurance, met en relation différents éléments qui peuvent être catégorisés comme ce qui suit :

- ✓ la définition de l'exposition au risque en question ;
- ✓ la présence de différentes variables d'entrées pour l'algorithme de tarification.

Tous ces éléments seront implémentés dans un algorithme qui permettra d'obtenir le prix du produit.

Par exemple, si l'on considère les paramètres intervenant dans la détermination du prix d'une obligation d'état, il faut tout d'abord définir les caractéristiques de l'obligation, c'est à dire la maturité, le *spread*, la valeur du coupon. De plus, il est nécessaire d'avoir des informations sur les taux d'intérêts du marché. Quand tous les paramètres sont déterminés, ils sont implémentés dans la formule de *pricing* d'une obligation.

Après avoir montré que la caractérisation du produit est importante, revenons au contexte du risque de longévité, les cinq points suivants décrivent les paramètres permettant de définir l'exposition au risque de longévité :

- ✓ la structure du produit ;
- ✓ la table de référence ;
- ✓ les taux de mortalité réels ;
- ✓ les taux de mortalité attendus ;
- ✓ la prime de risque.

Ces points sont détaillés dans le tableau ci-dessous :

Paramètres	Description
Structure du produit	Fait référence directement au type de produit, dans cette étude, il s'agit d'un d'un <i>swap</i> de longévité
Table de référence	Fait référence à des tables d'expérience pour une population donnée
Taux de mortalité réels	Fait référence aux dernières données de mortalité observées pour la population en question
Taux de mortalité attendus	Fait référence essentiellement à la mortalité attendue issu des tables de référence permettant d'obtenir la meilleure estimation pour tarifer le risque
Prime de risque	C'est la charge payée par l'entité qui couvre le risque

La formule de tarification est directement liée à ces cinq points et au taux d'escompte utilisé pour actualiser la valeur des cash flows, c'est-à-dire le taux d'actualisation. Une description détaillée de ces notions est effectuée dans les sous parties qui suivent.

### 3.2.1.1 Structure du produit

La structure du produit se réfère directement aux types d'instruments à *pricer*. Par exemple, si l'on veut tarifer une pension de retraite, il faut spécifier les aspects techniques de cette pension, c'est-à-dire le montant de la rente, la fréquence des paiements, le taux technique, le terme de la rente (à terme échu ou à terme à échoir), etc...

En d'autres termes, la structure du produit est l'ensemble des facteurs caractérisant le produit, c'est ainsi qu'il faut avant tout bien lister les éléments pouvant affecter le prix du produit. Dans le cas du *swap* de longévité, il faudra définir le sous jacent et les deux jambes de flux. Une description détaillée de ce *swap* sera réalisée dans la section 3.2.2.

Les produits de longévité sont des produits dérivés permettant de transférer le risque de longévité. Par exemple, il existe des produits incluant le taux de mortalité tels que les « q-forwards » ou des autres prenant en compte les taux de survie, ils sont connus sous le nom de « s-forwards » et « survivor swaps ».

### 3.2.1.2 Données de référence

La tarification de la longévité se base sur des informations concernant la durée de vie d'un groupe sous jacent, la prime de risque dépend directement de ces informations de référence. Dans le cas de la longévité, la population sous jacente doit refléter la population couverte par le contrat, c'est-à-dire que si l'on se base sur la couverture de salarié d'une entreprise américaine, il faudra prendre une table de référence qui représente la population concernée.

Typiquement, les informations intervenant dans la tarification prennent en compte les aspects suivants :

- ✓ les données d'expérience historiques reflétant la population sous jacente lors d'une période donnée, en particulier des tables seront construites avec les décès observés et l'exposition au risque durant la période considérée (comme la table réalisée dans la partie 2.2.2) ;
- ✓ l'âge des personnes de la population considérée ;
- ✓ la table de référence, propre à la population considérée.

### 3.2.1.3 La prime de risque

Après avoir défini la structure du produit avec les données intervenant dans la tarification d'un *swap* de longévité, nous aborderons la prime de risque qui est la pièce finale du puzzle. La prime de risque représente la charge ou le coût que l'assureur doit prendre en compte pour se couvrir du risque de longévité.

Après avoir vu les différents éléments permettant de construire un produit couvrant le risque de longévité, nous allons décrire un produit qui permet de réaliser un transfert de ce risque afin de se protéger contre toute fluctuation de la longévité qui ne correspondrait pas à ce qui était prévu par les tables en vigueur utilisées par l'assureur.

## 3.2.2 SWAP DE LONGEVITE

Il s'agit d'un contrat faisant intervenir deux parties, l'assureur et le réassureur. L'assureur pourra se couvrir du risque de longévité via ce contrat *swap*.

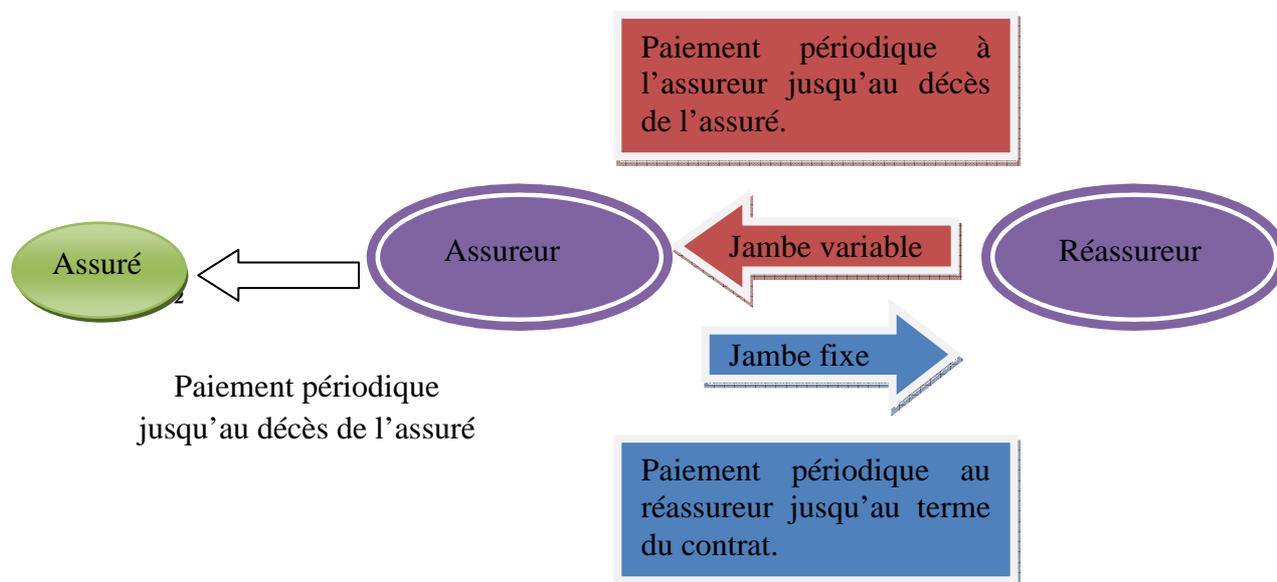
Tout d'abord, nous allons définir le mécanisme d'un *swap*. Un contrat de *swap* correspond à l'échange de deux jambes de flux entre l'assureur et le réassureur. L'assureur paie une jambe fixe définie dans les clauses du contrat et le réassureur paie une jambe variable prenant en compte le risque considéré par le sous jacent.

Dans notre cas le sous-jacent est la mortalité future et l'objectif est de se couvrir contre toute dérive de la longévité.

Ainsi le *Swap* de longévité est le contrat qui semble être le plus répandu sur le marché depuis quelques années.

Dans notre cas, l'assureur souhaite figer ses flux futurs en se basant sur une anticipation de la longévité par l'intermédiaire du réassureur qui lui paie les flux réellement réalisés sur la base de la mortalité constatée.

Le schéma suivant met en évidence ce mécanisme du *Swap* de longévité :

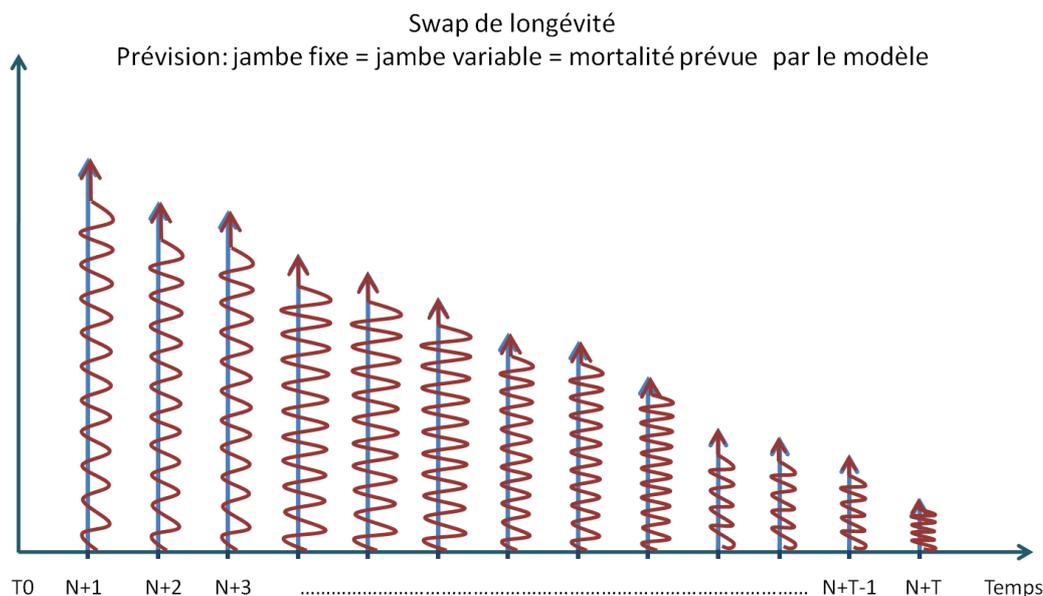


### 3.2.2.1 Spécificités du Swap de longévité

Tout d'abord, il est à noter que le *swap* de longévité est différent des autres contrats *swap* dit « classiques ». Ces derniers possèdent des jambes fixes à flux égaux or dans le cas de longévité, les flux que l'assureur voudrait figer correspondent directement à ses engagements sur les rentes des assurés ainsi les flux ne sont pas égaux entre les années.

Dans ce cas, les deux parties prenantes qui sont l'assureur et le réassureur signent un contrat *swap* : la jambe fixe est connue et fixée dans le contrat, elle sera payée par l'assureur. Le réassureur lui paiera une jambe variable étant inconnue qui correspond au facteur de risque.

Hors frais de gestion et chargement technique, la valeur d'un *swap* est nulle car l'assureur et le réassureur se mettent d'accord sur une même prédiction de la mortalité. On peut représenter les valeurs des flux par le schéma suivant :



Ensuite, au fil du temps, des différences sont constatées entre la mortalité théorique et la mortalité observée. Cette différence va être à l'origine d'un changement sur le montant des jambes de flux ainsi les co-contractants se mettent d'accord sur les montants à s'échanger dus à ces fluctuations de mortalité.

Deux cas se présentent :

- ✓ la mortalité observée est supérieure à la mortalité théorique, ainsi l'engagement sur les rentes diminue au profit du réassureur puisque la jambe variable sera plus faible que la jambe fixe. L'assureur va payer un *spread* au réassureur. Le montant de ce *spread* correspond à la différence entre les deux jambes de flux. Dans ce cas, l'assureur fait un gain technique mais il paie le fait d'être assureur à travers le *spread* ;
- ✓ si l'on observe une sous mortalité ainsi la jambe variable sera plus grande que la jambe fixe. L'engagement de l'assureur va augmenter, donc le réassureur devra verser un *spread* à l'assureur correspondant à la différence entre la jambe variable et la jambe fixe. Ainsi, l'assureur présente une perte technique qui est compensée par le *spread* payé par le réassureur.

L'opération se réitère tous les ans jusqu'à maturité, appelée « première maturité » et notée  $T \in \mathbb{N}^*$ . Cette maturité est définie dans le contrat *swap*, ainsi il existe deux types de contrat selon la maturité choisie :

- ✓ un contrat à maturité T fixe : l'engagement du réassureur finit au même terme que celui du réassureur ;
- ✓ un contrat sur un portefeuille en *Run off* : dans ce cas, l'engagement du réassureur finit lorsque que tous les bénéficiaires de rentes sont décédés.

A titre indicatif, il faut noter les points suivants concernant la couverture de longévité :

- ✓ l'assureur peut sortir à tout moment du contrat à partir du moment où il le considère défavorable tandis que le réassureur ne possède généralement pas cette clause ;
- ✓ la plupart du temps, l'échange de la différence entre flux fixe et flux variable se fait lorsqu'il est favorable à l'assureur. Ainsi, dans le cas d'une sur mortalité où l'engagement de versement de rentes diminue (ainsi le flux variable diminue), le réassureur ne se verra pas accorder cette différence. Généralement, le *pay off* du contrat en faveur du réassureur devient  $\text{Min}(0, \text{Flux}_{\text{fixe}} - \text{Flux}_{\text{variable}})$  au lieu de  $\text{Flux}_{\text{fixe}} - \text{Flux}_{\text{variable}}$ .
- ✓ le portefeuille est en général fermé, c'est-à-dire que toutes les personnes qui rentrent dans le portefeuille au fil du temps ne figurent pas dans le portefeuille objet du contrat *swap*. A contrario, dans le cas d'une garantie de mortalité, les nouveaux entrants suite à une liquidation de retraite sont concernés par le contrat de garantie de mortalité.

Après avoir défini le fonctionnement et les spécificités d'un contrat *Swap* de longévité, nous aborderons dans la partie suivante les méthodes permettant de déterminer le prix du *Swap*.

### 3.2.2.2 Prix du Swap de longévité.

Cette partie aura pour objectif de déterminer le prix d'une couverture de longévité à disposition de l'assureur. Comme évoqué dans la section 3.2.1, la prime de risque provient de plusieurs éléments. Cette dernière correspond au juste prix qui répond aux contraintes de l'assureur et du réassureur.

Il est à noter que la démarche utilisée permettant de déterminer la prime de risque ne tient pas compte des frais purement commerciaux de type frais de gestion, commission, etc...

Suite à la description du fonctionnement d'un contrat *swap*, nous pouvons donner le *pay off* (résultat) d'un contrat *swap* :

$$R = \sum_{i=1}^T \frac{1}{(1+tx)^i} (J_{\text{fixe},i} - J_{\text{var},i}).$$

Avec :

- $i$  l'indice de l'année en question ;
- $T$  la maturité du *Swap*, dans notre cas, on se placera sur 30 ans, ainsi  $T$  sera remplacé par 30 ;
- $tx$  est le taux technique (ou taux d'actualisation) explicité dans la partie 1.2.2. Il s'agit du taux d'intérêt utilisé pour l'actualisation des flux. Dans notre cas, le taux technique utilisé correspond au taux technique en vigueur lors de la liquidation en retraite du salarié ;
- $J_{fixe,i}$  est la jambe de flux fixe. C'est le résultat des simulations de flux en prenant en compte les tables en vigueur, c'est-à-dire les tables TPRV 93 et TGH TGF 05.
- $J_{var,i}$  est la jambe de flux variable. Elle correspondra aux simulations réalisées avec la table construite dans la partie 2.2.2.

A partir de cette formule et de nos résultats trouvés dans la section 2.2.3, le juste prix du *swap* de longévité peut être calculé. Ainsi, dans notre cas, sur un engagement de 30 ans, le prix du *Swap* est de 24 077 039 € pour un engagement de 2 202 296 098 €, soit 1,09 % de l'engagement total.

L'assureur aura donc la possibilité de se couvrir du risque de longévité par l'intermédiaire d'un contrat *Swap* comme décrit précédemment.

### 3.2.2.3 Exemple de contrat swap sur le marché

Le tableau suivant met en évidence le type de contrat créé sur le marché entre 2009 et 2011 :

Date	Assureur	Nominal	Maturité	Type	Intermédiaire/Vendeur de couverture
mars-09	Aviva	GBP 475 m	10	Indemnitare	RBS
juin-09	Babcock International	GBP 750 m	50	Indemnitare	Credit Suisse - Pacific Life Re
juil-09	RSA	GPB 1,9 Bn	Run off	Indemnitare	GS (Rothesay Life)
déc-09	Berkshine Council	GPB 750 m	Run off	Indemnitare	Sw iss Re
févr-10	BMW UK	GPB 3 Bn	Run off	Indemnitare	DB / Paternoster
déc-10	Sw iss Re (Fortis Bond)	US 5 m	8	Indexé	ILS Funds
févr-11	Pall Pension Fond	GPB 70 m	10	Indexé	JPM

Après avoir mis en évidence le mécanisme de titrisation ainsi que le mécanisme de *swap* de longévité, la partie suivante a pour but de comparer les solutions offertes à l'assureur pour se couvrir contre le phénomène de longévité.

### 3.3 ANALYSE DU MARCHÉ FRANÇAIS

Après avoir vu les aspects théoriques d'une couverture de la longévité dans le cas d'un *swap* de longévité, les solutions principales de couverture proposées actuellement par le marché français sont abordées dans la partie suivante.

En effet, si une entreprise souhaite mener une réflexion sur la couverture du risque de longévité de ses fonds de pension, il est nécessaire de disposer de premiers éléments sur la situation actuelle du marché en la matière, ainsi que sur les solutions existantes qui permettraient de répondre à cette problématique particulière de l'externalisation du risque de longévité.

En pratique, cette partie revient sur les deux types de solutions vues au cours de ce présent mémoire, mises en œuvre à ce stade par le marché pour répondre à cette problématique, à savoir :

- ✓ d'une part, les dérivés de longévité, principalement portés par les banques d'affaires faisant intervenir la titrisation, comme cités dans la partie précédente ;
- ✓ d'autre part, les garanties de mortalité souscrites auprès d'assureurs, notamment sur le marché français, comme évoquées dans la partie 2.1.2.

Enfin, une mise en perspective des avantages et inconvénients de l'une et l'autre des deux solutions citées est abordée en conclusion de cette partie.

Il est à noter que celle-ci n'aborde toutefois pas les problématiques d'ordre comptable, qui peuvent se poser dans le cadre de l'externalisation du risque de longévité.

#### 3.3.1 LES DERIVES DE LONGEVITE DIFFUSEES DE GRE A GRE PAR LES BANQUES D'AFFAIRES

Le marché des dérivés de longévité (appelés parfois *Insurance Linked Securities (ILS)* de longévité) a d'abord connu un démarrage avorté en 2004/2005 avec l'échec des opérations lancées alors. Depuis 2008 quelques opérations ont en revanche été réalisées avec succès ; l'année 2010 a vu naître la titrisation d'environ 20 milliards d'euros, dont les deux tiers sous forme de *swaps* de longévité.

L'objet de cette section est, dans ce contexte, de faire un point sur le marché associé au transfert de ce risque de longévité.

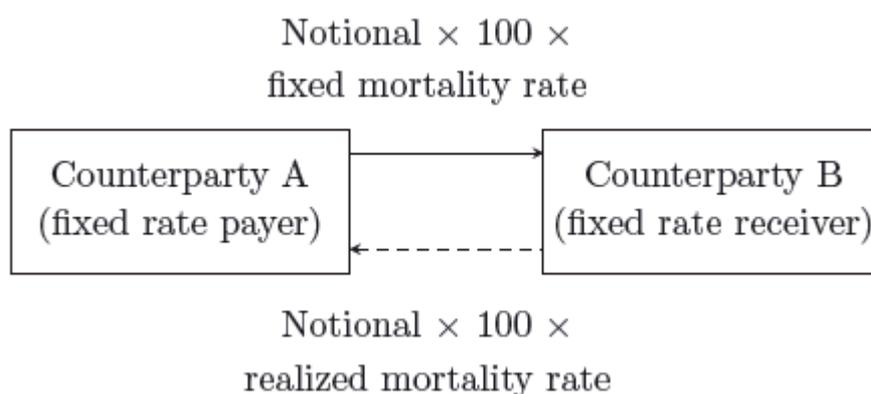
### 3.3.1.1 *Perimètre : une forte influence des fonds de pension anglo-saxons*

Le transfert du risque de longévité pour l'assureur ou le régime de retraite permet de fixer une borne supérieure à la durée de paiement des pensions. L'écrasante majorité des réflexions et des produits relatifs à ce risque sont élaborés dans le contexte de fonds de pensions dont le promoteur (l'entreprise) veut limiter les conséquences de dérives de la longévité. C'est donc à ce jour une problématique exprimée essentiellement dans le contexte d'organisation des régimes de retraite aux UK, aux USA et au Canada. Par ailleurs, les entités qui aujourd'hui transfèrent au marché du risque de longévité peuvent accepter des coûts de transfert élevés qui sont la contrepartie de l'assainissement de leur bilan.

### 3.3.1.2 *Solutions observées : des solutions variées et peu transparentes, en voie de standardisation*

En termes de solutions il existe de nombreux montages qui ont le point commun d'être très onéreux. Ainsi, les assureurs UK peuvent reprendre les engagements d'un fonds de pension pour environ 130 % du montant de la provision IFRS du fonds. Dans cette approche, l'assureur porte évidemment tous les risques, financiers et techniques. Il y a donc des effets sur le taux d'actualisation très lourds, à côté des effets de mortalité.

Comme vu précédemment lors de la partie sur la titrisation, d'un point de vue technique, les réflexions ont d'abord porté sur des produits (obligations) dont la rémunération est modulée en fonction d'un indice de survie. Cette approche s'avère complexe puisque l'indice de survie est dépendant de la génération. Cette démarche comporte pour le fonds des risques de base liés à la différence entre sa mortalité et celle de l'indice. Les produits plus récents se bornent à échanger un taux de décès fixe (mortalité attendue) contre le taux de décès variable (mortalité constatée). JP Morgan propose ainsi un produit standard de *swaps* de taux de mortalité, dont le schéma de fonctionnement est le suivant :



A noter que pour qu'un tel produit soit opérationnel, il faut disposer d'indices de mortalité permettant de refléter le risque, à ce jour, Crédit Suisse, JP Morgan et Deutsche Börse en publient. Goldman Sachs en publiait un aussi, dans un contexte de *life settlement*, qu'il a pour l'instant interrompu.

### 3.3.1.3 Synthèse

Les transactions qui ont eu lieu jusqu'à présent sont confidentielles et ni le prix ni les détails des montages retenus ne sont connus, ce qui n'aide pas au développement de ce marché. Au surplus, il n'existe pas d'acheteurs "naturels" de ce risque (à la différence par exemple des *cat bonds* US qui sont massivement achetés par les entreprises du bâtiment dans une logique de couverture contra-cyclique) ; ces titres peuvent apporter de la diversification dans un portefeuille, c'est d'ailleurs ce qui est mis en avant par les fonds qui gèrent des *life settlements*, dont la problématique est finalement assez proche.

Au global la situation actuelle est ainsi la suivante :

- ✓ des transactions confidentielles se développent dans une logique de gré à gré ; d'un point de vue technique ce sont des échanges de taux de mortalité organisés selon le schéma présenté ci-dessus ;
- ✓ le développement d'un véritable marché d'*ILS* de longévité se heurte toujours aux mêmes obstacles : manque de liquidité, non unicité des prix, absence d'indice fiable et, surtout, incertitude sur la fiabilité des prévisions. A titre d'illustration, un écart d'un an sur l'espérance de vie à 65 ans correspond à 3 % des provisions IFRS des fonds de pensions UK. En comparaison avec les résultats trouvés dans la section 2.3.3 dans le cadre d'une garantie de mortalité, un écart d'un an sur la durée totale des versements correspond à 1,09 % des provisions de l'assureur.

### 3.3.2 LA GARANTIE DE MORTALITE OBTENUE PAR DES ENTREPRISES AUPRES DE LEURS ASSUREURS EN FRANCE

Dans le cadre du marché français de l'assurance vie et en particulier de la retraite collective, la plupart des contrats prévoient que le solde de mortalité d'un exercice soit pris en charge par les produits financiers générés. Dans cette optique, le souscripteur (l'entreprise) est « auto-assuré » contre une dérive potentielle de la mortalité des rentiers. Le solde de mortalité peut en général soit être mutualisé avec l'ensemble des rentiers de l'assureur soit être suivi de manière dédiée sur le portefeuille uniquement.

Au-delà, il est également à noter qu'en cas de pertes de mortalité non apurées par les produits financiers, il y a en général un report de ces pertes sur l'exercice suivant. En outre, en cas de changement de tables de mortalité réglementaires, le contrat peut prévoir le financement du rehaussement des provisions par prélèvement sur le fonds de préfinancement des rentes des actifs.

Cette logique est en fait la déclinaison des dispositions générales du Code des Assurances appliquées cette fois-ci non à l'ensemble de la compagnie mais à un sous-ensemble de contrats.

### ***3.3.2.1 Motivations et expression de la garantie***

Dans ce contexte, lors de l'externalisation d'un régime de retraite de taille et surface démographique et financière importantes, le souscripteur peut demander à l'assureur une tarification incluant un transfert du risque de longévité : la garantie de mortalité.

Pour rappel, le coût de cette garantie correspond au prix à payer par le souscripteur pour que les Provisions Mathématiques du compte de résultat technique soient toujours calculées avec les tables de mortalité retenues à la liquidation des rentes.

Par ailleurs, en cas de pertes de mortalité, celles-ci ne sont pas compensées par les résultats financiers du contrat : il n'y a pas d'interaction entre le compte technique et les résultats financiers nets de l'exercice.

En cas de gains de mortalité, ceux-ci reviennent pour l'essentiel au contrat.

En pratique, l'assureur crée dans les comptes du contrat, une provision visant à couvrir les effets d'une éventuelle dérive de la mortalité (et/ou d'un changement de tables réglementaires). Cette provision est dotée annuellement et constitue ainsi un « matelas » servant à compenser ces éventuelles pertes de mortalité futures.

En outre, le souscripteur verse annuellement à l'assureur une prime de risque, en contrepartie du transfert du risque de longévité.

S'agissant de la réglementation française sur les assurances, et avec l'entrée en vigueur des nouvelles tables de mortalité (TGH 05 / TGF 05), il est à noter que le coût d'une garantie de mortalité a diminué par rapport à des tables plus anciennes (TPG93, ...).

### 3.3.2.2 *Quelques modalités de financement*

Les prélèvements, purement contractuels, au titre de la garantie de mortalité contiennent ainsi en général :

- ✓ une prime de risque ;
- ✓ une dotation à une provision pour aléas viagers.

Il est à noter que cette dotation ainsi que la provision peuvent faire l'objet d'un plafonnement contractuel, principalement pour éviter que la Provision pour Aléas Viagers ne suive pas la décroissance des PM.

Sur ces bases, un certain nombre de modalités différentes de financement d'une garantie de mortalité peuvent être envisagées. En effet, dans le cadre des contrats de retraite collective, ce financement s'analysait au travers de la définition en 3 voire 4 paramètres :

- ✓ la dotation à la PAV, qui se présente traditionnellement en % des Capitaux Constitutifs des rentes liquidées et/ou en % des PM des rentes faisant l'objet de la garantie de mortalité ;
- ✓ la prime de risque versée à l'assureur, en % des encours des PM des rentes faisant l'objet de la garantie de mortalité ;
- ✓ le plafond de la PAV, en % des encours couverts.

Par ailleurs, les dispositions contractuelles peuvent prévoir :

- ✓ le conditionnement du versement de la prime et de la dotation annuelle à l'atteinte ou non du plafond de la PAV à l'ouverture d'un exercice ;
- ✓ le report ou non de l'éventuel solde débiteur de la PAV à l'ouverture de l'exercice suivant.

A titre d'illustration, le plan de compte présenté ci-dessous reprend le mécanisme décrit dans cette section dans le cas d'une dotation à la PAV assise sur les PM et où les éventuels excédents de la PAV sont reversés à un fonds de revalorisation.

Compte technique - Exercice N		Compte financier - Exercice N	
Débit	Crédit	Débit	Crédit
Prestations de rentes en N	PM de rentes au 31/12/N-1 Intérêts techniques N CC de revalorisation N	Intérêts techniques N Frais de gestion financière Prime de risque viager Dotation PAV Frais de gestion sur rentes	Produits financiers Cotisations nettes de taxes et frais
PM de rentes au 31/12/N			
<b>Solde technique créditeur</b>	<b>Solde technique débiteur</b>	<b>Solde technique créditeur</b>	<b>Solde technique débiteur</b>

Fonds de revalorisation - Exercice N		Provision pour Aléas Viager (PAV) - Exercice N	
Débit	Crédit	Débit	Crédit
	Solde fonds de revalorisation au 31/12/N-1 (≥ 0) Versements nets effectués par le souscripteur en N		PAV au 31/12/N-1 (≥ 0) Dotation PAV
Solde financier débiteur	Solde financier créditeur	Solde technique débiteur	Solde technique créditeur
CC de revalorisation N	Excédent PAV (dépassement plafond des PM de rentes)	Excédent PAV (dépassement plafond des PM de rentes)	
Solde Fonds collectif au 31/12/N (≥ 0)		PAV au 31/12/N (≥ 0)	

### 3.3.2.3 Synthèse : une solution intéressante, dont les conditions de diffusion ne sont pas nécessairement reproductibles aisément

En France, le principe de la garantie de mortalité dans les contrats de retraite (et même de préretraite) collective est désormais assez développé ; ainsi l'ensemble des régimes de retraite français à prestations définies externalisés (depuis 1997) fait l'objet d'une couverture du risque de longévité par ce biais.

Plus récemment, la multiplicité des appels d'offres organisés dans le cadre de l'application de l'article 116 de la Loi Fillon sur les retraites de 2003 a permis d'établir un benchmark des tarifications proposées par les différents assureurs de la place en matière de garantie de mortalité.

Il convient cependant de noter que ces montages sont traditionnellement réalisés en même temps que l'externalisation des engagements auprès des assureurs, leur prix diminuant alors nécessairement du fait de la volonté de l'assureur de réaliser l'opération au regard de son importance financière et commerciale.

### 3.3.3 COMPARAISON DES SOLUTIONS

#### 3.3.3.1 Des principes différents

Au regard des éléments cités plus haut, il apparaît qu'en termes de coût pour le régime (et incidemment son promoteur) que la souscription d'une garantie de mortalité montre un avantage par rapport à l'utilisation de dérivés de longévité, principalement car une partie du risque est captée via le mécanisme de Provision pour Aléas Viagers.

En effet dans le cadre des dérivés de longévité, les résultats de mortalité du régime sont « swapés » contre une garantie fixe (mortalité attendue), ce qui implique qu'en cas de gains de mortalité, ceux-ci reviennent à la contrepartie payeuse de la garantie flottante (mortalité réalisée), alors que dans le cadre d'une garantie de mortalité, les éventuels gains techniques reviennent au régime.

Risque de mortalité	Risque de pointe externalisé via une prime de risque	Risque externalisé en totalité via un <i>SWAP</i>
	Risque de base auto-assuré via la provision pour aléa viager	
	Solution Assurance	Solution bancaire

En outre, la mise en place d'un produit de type *ILS* de mortalité se fait via des banques d'affaires (la contrepartie), qui réassurent en partie le risque pris auprès de réassureurs, ce qui ajoute un intermédiaire rémunéré supplémentaire par rapport à la solution assurantielle, dans le cadre de l'externalisation du risque de longévité.

Un montage de type dérivés de longévité comporte également un risque de contrepartie (que l'on peut identifier sur le schéma du *swap* présenté dans la partie 3.2.2), cependant l'histoire récente a montré que les opérateurs bancaires étaient désormais couverts par les Etats si besoin, ce qui relativise le risque. Ce point met en évidence la comparaison avec une garantie de mortalité, mise en œuvre dans le cadre des règles prudentielles de l'assurance, qui sont peut-être plus conservatrices que celles du secteur bancaire.

En revanche et comme évoqué dans la sous section 3.3.2.3, dans le cadre d'une structure de type « fonds de pension », où seul le risque de longévité aurait vocation à être externalisé, la question de la possibilité de réalisation d'une telle opération via la souscription d'une garantie de mortalité auprès d'un assureur se pose. Dans ce contexte, le prix de cette garantie devrait être supérieur à celui correspondant aux garanties octroyées accessoirement à la souscription d'un contrat de retraite collective.

### 3.3.3.2 *Un traitement financier et comptable à mettre en perspective*

Un élément déterminant pourra enfin être la prise en compte comptable de l'une ou l'autre des deux solutions présentées ; en effet, un tel investissement financier doit nécessairement apporter un effet positif dans les comptes du régime tant au bilan (passif) que dans le compte de résultats (flux de trésorerie liés aux rentes). Ce facteur comptable pourrait ainsi aider à trancher entre les deux solutions :

- ✓ le *swap* n'affecte que l'actif du bilan de fonds de pension à la marge via ses effets sur l'actif,
- ✓ le produit assurantiel devrait avoir un impact plus lourd s'il s'accompagne d'une externalisation plus large des engagements.

La combinaison des facteurs financiers et comptables devraient permettre d'arbitrer entre deux solutions aux coûts néanmoins vraisemblablement différents.

## CONCLUSION :

---

Depuis plus d'un demi-siècle, du fait de l'augmentation de l'espérance de vie, il est essentiel de mieux appréhender la longévité. Après la réflexion des courants philosophiques, toutes les pensées ont pris en compte les évolutions de l'espérance de vie. Au fil de l'eau, des théories pertinentes ont été établies, ce qui a permis une amélioration de l'analyse de la mortalité notamment par l'intermédiaire d'un effet démographique, l'effet cohorte. Puis la pensée scientifique a permis de faire naître la modélisation de la mortalité et la mise en place de tables de mortalité fiables et par génération permettant de reproduire l'espérance de vie d'une population donnée. Plusieurs modèles de mortalité sont proposés pour combler cette amélioration de la longévité omniprésente. De ce fait, le risque de longévité est modélisé et des produits de longévité sont valorisés et échangés.

Ainsi pour les entreprises et les compagnies d'assurance, il devient nécessaire de se couvrir contre le risque de longévité par l'intermédiaire de contrats spécifiques tels que la garantie de mortalité ou bien en transférant le risque sur les marchés financiers grâce à la titrisation.

Il est à noter que les compagnies d'assurance sont confrontées à l'évolution des taux de mortalité pour les portefeuilles d'assurés puisque ces derniers sont différents de ceux de la population du fait de l'effet de sélection. L'idéal serait de créer des tables de mortalité pour chaque portefeuille d'assurés mais le manque de données et l'évolution des portefeuilles représentent une limite à ce sujet.

Au niveau de la modélisation de la longévité, lorsque la complétude des données le permet, le cadre du modèle Lee-Carter est la plupart du temps utilisé, de nombreuses variantes ont vu le jour mais la structure de base reste la même. De plus, comme utilisé dans ce mémoire, des méthodes de positionnement sont réalisables, la table de référence joue alors le rôle de Benchmark.

Toutes les étapes permettant de construire une table de longévité jouent un rôle important dans le résultat final. Ainsi, l'exactitude des tables doit être vérifiée par de nombreux outils statistiques. Du fait du risque présent, les compagnies d'assurances veulent transférer ce risque sur les marchés.

Les premières tentatives de *Swap* ont eu lieu en 2004/2005 mais elles ont été un échec. En juillet 2008, le premier *Swap* de longévité a été réalisé entre la banque JP MORGAN et un fonds de pension Anglais et a permis de mettre en avant les *swaps* de longévité sur les marchés financiers.

La confidentialité des caractéristiques de ce type de produit reste une limite considérable handicapant le développement de ce marché. En effet, l'échange de taux de mortalité est la base de ces contrats mais les détails ne sont pas connus.

Une explication détaillée du fonctionnement d'un *Swap* est proposée dans ce mémoire, de plus sa valorisation est réalisée par l'intermédiaire de la table créée et celles en vigueur.

Les limites telles que le manque de liquidités, l'incertitude sur la viabilité des prévisions et l'absence d'indice fiable entraînent un obstacle majeur pour le développement de ce marché. Ainsi comme évoqué dans ce mémoire, pour les entreprises, la possibilité de

souscrire un contrat de garantie de mortalité peut être une solution compromettante à ces limites. En effet, la garantie de mortalité permet à l'entreprise d'être « auto-assurée » contre une dérive potentielle de la mortalité des rentiers et permet d'alimenter le régime en cas de gain technique. De plus, une partie du risque est captée via le mécanisme de Provision pour Aléas Viagers.

Toutefois, face au progrès et à l'amélioration constante des conditions de vie, il y a des phénomènes tels que l'obésité, le tabagisme et les maladies incurables qui font basculer la tendance. Ainsi, les taux de mortalité pourront être vus à la baisse, c'est sur ces différentes pistes que les recherches en termes de mortalité se font. En effet, la problématique de la longévité est vaste et riche en pistes de recherches.

## BIBLIOGRAPHIE :

---

- [1] BAUWENS V., WALHINS JF [2008] « La titrisation du risque d'assurance », *Larcier*.
- [2] BLAKE D., CAIRNS A., COUGHLAN G., DOWD K. [2009] « Longevity hedging: A framework for longevity basis risk analysis and hedge effectiveness ».
- [3] BROUHNS N., DENUIT M., VERMUNT J.K. [2002] « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction », *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, 373-393.
- [4] BROUHNS N., DENUIT M. [2002] « Risque de longévité et rentes viagères – I. Évolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours », *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. 2, No. 1.
- [5] COALE A., KISKER E.E. [1990] « *Defects in data on old age mortality in the united states : New procedures for calculating approximatively accurate mortality schedules and life tables at the highest ages* ». Asian and Pacific Population Forum 4,1-31.
- [6] DELWARDE A., DENUIT M. [2006] « Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives », *Economica*.
- [7] MINAZ H. LANANI [2010] « Gérer le risque de mortalité et de longévité dans les régimes de retraite », document de synthèse Vol 2 numéro 7, Institut Canadien des actuaires.
- [8] LEROUX F. « La Titrisation », Note pédagogique, HEC Montréal.
- [9] PLANCHET F., JUILLARD M., FAUCILLON L. [2006], « Quantification du risque systématique de mortalité pour un régime de rentes en cours de service », *Assurance et gestion des risques*, Vol. 75.
- [10] PLANCHET F. [2006] « Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentes – note de présentation », Document de travail, Institut des Actuaires.
- [11] PLANCHET F., THÉRON P.E. [2006] *Modèles de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.
- [12] PLANCHET F., THÉRON P.E. [2007], *pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.
- [13] PLANCHET F. [2009] « Risque de longévité et détermination du besoin en capital », Document de travail ISFA, laboratoire SAF.

[14] PLANCHET F., KAMEGA A. [2011] « Construction de tables de mortalité prospectives sur un groupe restreint : mesure du risque d'estimation », Document de travail ISFA, laboratoire SAF.

[15] VANDESCHRICK C [1994] « Le temps dans le temps en démographie. Le diagramme de Lexis : bilan et perspectives », *in VILQUIN*.

## ANNEXE 1 :

---

### *Lissage : méthode des splines cubiques*

#### ↳ **Principe :**

La spline est composée de morceaux de polynômes qui se raccordent, ainsi que leurs dérivées premières et secondes. La spline cubique est composée de polynômes de degré 3.

Il n'est pas requis que  $\hat{q}_x = \dot{q}_x$  pour un quelconque âge  $x$ , avec  $\dot{q}_x$  le taux de décès brut et  $\hat{q}_x$  le taux de décès ajusté.

Les paramètres de la spline sont déterminés par la méthode des moindres carrés pondérés.

#### ↳ **Estimation des paramètres de la spline :**

Soit  $[a, b]$  l'intervalle d'âge caractérisé par les âges minimum et maximum pour lesquels nous disposons de taux bruts. Divisons  $[a, b]$  en  $n+1$  sous-intervalles par des « nœuds »  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Soient  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tels que pour chaque  $i$ ,  $h_i$  est la plus grande valeur inférieure ou égale à  $k_i$  pour laquelle une valeur de  $\dot{q}_x$  existe.

La spline exprimant les taux ajustés est définie par :

$$\hat{q}_x = \begin{cases} p_0(x) & \text{pour } a \leq x \leq k_1 \\ \vdots \\ p_i(x) & \text{pour } k_i \leq x \leq k_{i+1} \\ \vdots \\ p_n(x) & \text{pour } k_n \leq x \leq b \end{cases}$$

avec :

$$p_0(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3,$$

$$\text{et } p_i(x) = p_0(x) + c_5(x - k_1)^3 + \dots + c_{i+4}(x - k_i)^3 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

Pour que les polynômes se raccordent, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, il est nécessaire que les  $p_i(x)$  remplissent les conditions suivantes :

$$p_{i-k}(k_i) = p_i(k_i)$$

$$p'_{i-1}(k_i) = p'_i(k_i) \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

$$p_{i-1}''(k_i) = p_i''(k_i)$$

On détermine les polynômes par la méthode des moindres carrés pondérés en minimisant l'expression :

$$SS = \sum_a^{h_1} w_x \left[ \dot{q}_x - c_1 - c_2x - c_3x^2 - c_4x^3 \right]^2$$

$$+ \sum_{h_1+1}^{h_2} w_x \left[ \dot{q}_x - c_1 - c_2x - c_3x^2 - c_4x^3 - c_5(x-k_1)^3 \right]^2 + \dots$$

$$+ \sum_{h_n+1}^b w_x \left[ \dot{q}_x - c_1 - c_2x - c_3x^2 - c_4x^3 - c_5(x-k_1)^3 - \dots - c_{n+4}(x-k_n)^3 \right]^2.$$

Avec les poids  $w_x = \frac{1_x}{\dot{q}_x(1-\dot{q}_x)}$ , la matrice des poids est notée  $W$ .

**Remarque 7 :** Sans informations sur les effectifs de population, on choisit  $w_x = 1$  pour tout  $x$ .

Lorsque l'on considère les dérivées partielles de  $SS$  en fonction des coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+4$ ), en rendant ces dérivées partielles égales à zéro, nous obtenons les équations normales. Ces équations caractérisent le système à résoudre pour déterminer les estimateurs  $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_{n+4}$  des coefficients de la spline.

Sous forme matricielle, ce système est défini par l'expression suivante :

$$X^T W X C = X^T W Q$$

Avec :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & h_1 & h_1^2 & h_1^3 & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & h_1+1 & (h_1+1)^2 & (h_1+1)^3 & (h_1+1-k_1)^3 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & h_2 & h_2^2 & h_2^3 & (h_2-k_1)^2 & 0 & \dots & \vdots \\ 1 & h_2+1 & (h_2+1)^2 & (h_2+1)^3 & (h_2+1-k_1)^3 & (h_2+1-k_2)^3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & h_n & h_n^2 & h_n^3 & (h_n-k_1)^3 & \vdots & \dots & 0 \\ 1 & h_n+1 & (h_n+1)^2 & (h_n+1)^3 & (h_n+1-k_1)^3 & \vdots & \dots & (h_n+1-k_n)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & b & b^2 & b^3 & (b-k_1)^3 & (b-k_2)^3 & \dots & (b-k_n)^3 \end{bmatrix}.$$

Les estimateurs des coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+4$ ) sont donnés par :

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+4} \end{bmatrix}, \quad \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_{a+1} \\ \vdots \\ \dot{q}_b \end{bmatrix}.$$

↪ **Choix des noeuds :**

Il n'y a pas de règles spécifiques pour déterminer le nombre et l'emplacement des noeuds. Cependant, il est important de garder en mémoire le fait que plus le nombre de noeuds est grand, plus l'ajustement s'améliore et le lissage se détériore. Inversement, le choix d'un faible nombre de noeuds implique un bon lissage mais occasionne bien souvent des problèmes d'ajustement.

Par conséquent, pour obtenir un lissage et ajustement satisfaisant, on choisit le nombre de noeuds en fonction du nombre de données brutes à lisser. Puis, on optimise l'ajustement en positionnant les noeuds de manière adéquate.