

ENSAE PARISTECH  
3<sup>eme</sup> ANNÉE - VOIE ACTUARIAT

# Provisionnement non-vie sur la branche Responsabilité Civile Professionnelle

LAGIER RAPHAËL

5 juin 2013

---

## Résumé

La principale contrainte d'une compagnie d'assurance est de respecter ses engagements vis-à-vis des assurés.

Pour cela, les assureurs doivent constituer des provisions afin de faire face aux sinistres à venir.

Ce mémoire a pour but d'illustrer et de comparer les différentes méthodes de provisionnement dont dispose un assureur sur la branche Responsabilité Civile Professionnelle.

De plus, nous ferons intervenir la réassurance afin d'en étudier son impact en terme de provisionnement mais aussi son efficacité.

Enfin, la future mise en place des dispositifs de provisionnement Solvabilité 2 impose de définir la notion d'incertitude à un an ce que nous ferons à travers l'étude du modèle officiel de M. Merz et M. V. Wüthrich.

**Mots clés** : provisionnement, Responsabilité Civile Professionnelle, Chain-Ladder, tail factor, réassurance, Bootstrap, incertitude, Solvabilité 2

## Abstract

The main constraint of an insurance company is to respect its commitments towards the policy holders. To do so, insurers have to establish reserves in order to be able to pay future claims.

The purpose of this report is to illustrate and to compare the available reserving methods in the professional liability insurance line.

Moreover, we will discuss the impact and the efficiency of reinsurance.

Finally, the future implementation of Solvency 2 directive framework imposes to define the notion of risk reserve at one year which we will do by studying the official method of M. Merz et M. V. Wüthrich.

**Keywords** : reserving, Professional Liability Insurance, Chain-Ladder, tail factor, reinsurance, Bootstrap, uncertainty, Solvency 2

# Remerciements

*Je tiens en premier lieu à remercier ma responsable de stage Isabelle Joulin pour m'avoir permis d'aborder ce sujet mais aussi pour son aide et sa bonne humeur.*

*Je souhaite également remercier Xavier Milhaud et Arthur Charpentier qui m'ont apporté leur aide à de nombreuses reprises.*

*Enfin, je remercie particulièrement ma famille pour son soutien.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Le contexte</b>	<b>6</b>
1.1 La Médicale de France	6
1.1.1 Les résultats de La Médicale en France à fin 2012	6
1.1.2 Le produit étudié	6
1.1.2.1 La garantie Responsabilité Civile Professionnelle (RCP)	7
1.1.2.2 La garantie Protection Juridique	7
1.2 La Responsabilité Civile Professionnelle des médecins	7
1.2.1 Les obligations des médecins	7
1.2.1.1 L'obligation de moyen du médecin	7
1.2.1.2 L'obligation de sécurité résultat	7
1.2.1.3 L'obligation d'information	8
1.2.1.4 La Responsabilité Pénale	8
1.2.2 Vers une Responsabilité sans faute	8
<b>2 La réassurance</b>	<b>10</b>
2.1 Principe et utilité de la Réassurance	10
2.2 Types de réassurance	11
<b>3 Les données</b>	<b>16</b>
3.1 Données historiques liées à la sinistralité	16
3.2 Traités de Réassurance	18
3.3 Traitement des données	19
3.3.1 Analyse des valeurs incohérentes	19
3.3.1.1 Années d'origines des sinistres (Ann_Or)	19
3.3.1.2 Montant des paiements (MT_RGL)	20
3.3.2 Application des traités de réassurance	21
3.3.2.1 La clause de stabilisation	21
3.3.2.2 Application des priorités et des portées	22
3.3.2.3 Charge du Réassureur : AAD et AAL	23
<b>4 Les méthodes déterministes</b>	<b>25</b>
4.1 Les méthodes de Chain-Ladder	26
4.1.1 La méthode de Chain-Ladder Standard	26
4.1.1.1 Extrapolation des facteurs de développement	32
4.1.2 La méthode de London-Chain	35
4.2 Méthodes basées sur des ratios	40
4.2.1 La méthode du Loss ratio simple	41
4.2.2 La méthode Loss ratio complémentaire	42
4.2.3 La méthode Cape Cod (Bühlmann-Stanard)	44
4.2.3.1 Choix des groupes d'années d'origine	44

4.2.3.2	Extrapolation des facteurs de développement . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Les méthodes stochastiques</b>	<b>51</b>
5.1	Le modèle de Mack . . . . .	51
5.2	Modèle Linéaire Généralisé (GLM) . . . . .	60
5.2.1	Un modèle GLM . . . . .	60
5.2.1.1	La composante aléatoire . . . . .	60
5.2.1.2	La composante systématique . . . . .	61
5.2.1.3	La fonction lien . . . . .	61
5.3	La modèle Poissonnien . . . . .	61
5.3.1	Estimation des paramètres . . . . .	61
5.3.2	Extrapolation des $\beta_j$ . . . . .	63
5.4	Le modèle Bootstrap . . . . .	65
5.4.1	Ajout d'un tail factor dans la méthode du Bootstrap . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Mesure de l'incertitude</b>	<b>73</b>
6.1	Mesure de l'incertitude à l'ultime : Le modèle de Mack . . . . .	73
6.1.1	Formule récursive pour l'erreur standard prenant en compte un facteur de queue de développement . . . . .	76
6.2	Mesure de l'incertitude à un an : Le modèle de Merz et Wüthrich . . . . .	78
6.2.1	Un point de vue prospectif . . . . .	79
6.2.2	Un point de vue rétrospectif . . . . .	80
6.2.3	Agrégation sur les années d'origine . . . . .	81
6.2.4	Application du modèle de Merz et Wüthrich . . . . .	81
6.2.4.1	Construction d'une diagonale supplémentaire par Bootstrap . . . . .	82
	<b>Conclusion</b>	<b>86</b>
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>87</b>
	<b>Annexe 1 : Triangle RCP brut de réassurance</b>	<b>89</b>
	<b>Annexe 2 : Traités de réassurance de 1990 à 2012</b>	<b>90</b>
	<b>Annexe 3 : Triangle RCP net de réassurance</b>	<b>91</b>
	<b>Annexe 4 : Régression linéaire des points <math>(C_{i,j+1}, C_{i,j})</math> pour le triangle brut de réassurance</b>	<b>92</b>
	<b>Annexe 5 : Régression linéaire des points <math>(C_{i,j+1}, C_{i,j})</math> pour le triangle net de réassurance</b>	<b>93</b>
	<b>Annexe 6 : Résidus normalisés du modèle de Mack pour le triangle brut de réassurance</b>	<b>94</b>
	<b>Annexe 9 : Résidus normalisés du modèle de Mack pour le triangle net de réassurance</b>	<b>95</b>

# Introduction

La principale contrainte d'une compagnie d'assurance est de respecter ses engagements vis-à-vis des assurés. Cependant, l'assurance est un domaine dans lequel le cycle de production est inversé, autrement dit, l'assureur reçoit de la part des assurés des primes avant de fournir un service.

Étant en possession des primes, l'assureur doit constituer des provisions afin de pouvoir respecter ses engagements ; il doit être en mesure de payer les sinistres à venir.

Le provisionnement occupe donc une place cruciale dans la vie d'une société d'assurance. Ce mémoire traitera d'une branche particulière de l'assurance : la branche Responsabilité Civile Professionnelle qui se caractérise notamment par le fait que les sinistres ont une durée de vie en moyenne plus élevée que dans les autres secteurs de l'assurance non vie ce qui aura un effet sur le provisionnement comme nous aurons l'occasion de le voir.

Nous distinguerons dans le provisionnement deux types de provisions : les provisions pour sinistre à payer ou PSAP qui résultent d'une grille forfaitaire ou d'une expertise pour la branche Responsabilité Civile Professionnelle auxquelles doivent être ajoutées des provisions pour sinistres survenus mais qui n'ont pas encore été déclarées que l'on appelle tardifs ou IBNR.

D'autre part, la future mise en place des dispositifs de provisionnement Solvabilité 2 impose aux sociétés d'assurance d'ajuster voire de changer leurs méthodes de provisionnement de manière à ce que celles-ci soient en cohérence avec les nouvelles exigences de ce dispositif.

De plus, comme nous l'avons évoqué la principale contrainte d'une société d'assurance est de respecter ses engagements vis-à-vis des assurés, cela passe par un provisionnement efficace mais l'assureur peut aussi avoir recours à la réassurance afin de céder du risque.

Nous verrons notamment quel est l'impact de celle-ci sur l'engagement de l'assureur mais aussi si cette réassurance peut être qualifiée d'efficace en fonction de son coût.

# 1

## Le contexte

### 1.1 La Médicale de France

La Médicale, filiale de Predica (Crédit Agricole Assurance) est un organisme dédié aux professions médicales libérales depuis plus de soixante ans. Elle représente un acteur majeur sur le marché de la santé, elle comptabilise 230 000 clients dont 165 000 sont des praticiens libéraux. Plus d'un praticien libéral sur trois détient au moins un contrat à la Médicale.

#### 1.1.1 Les résultats de La Médicale en France à fin 2012

La Médicale comptabilise 429 millions d'euros de chiffre d'affaires répartis de la manière suivante :

- 208 millions d'euros en assurance de personnes (Emprunteurs et Prévoyance)
- 157 millions d'euros en assurance dommages (Responsabilité Civile Professionnelle (RCP), Automobile, Dommages aux Biens et Frais de Santé)
- 64 millions d'euros en épargne

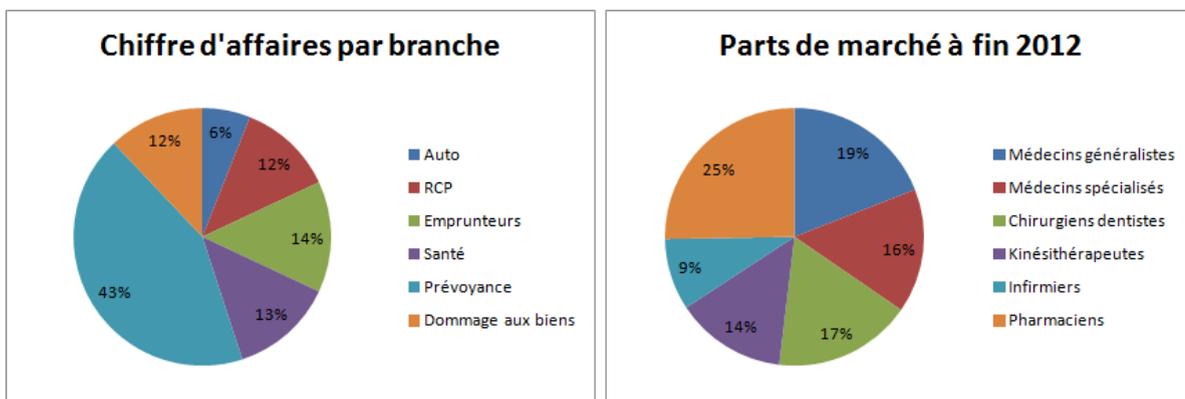


FIGURE 1.1 – Ventilation du chiffre d'affaires de la Médicale par branche et parts de marché à fin 2012

#### 1.1.2 Le produit étudié

Il s'agit d'un contrat d'assurance professionnelle qui a pour objectif de garantir les conséquences pécuniaires des responsabilités que peut encourir un médecin vis-à-vis d'autrui et le remboursement des dom-

mages dont il peut être victime dans l'exercice de son métier.

Les garanties proposées par ce contrat sont : "la Responsabilité Civile Professionnelle" et "la Protection Juridique".

#### **1.1.2.1 La garantie Responsabilité Civile Professionnelle (RCP)**

La Responsabilité Civile Professionnelle est l'obligation de réparer le préjudice causé à un patient, **du fait d'un acte professionnel fautif**, ou à toute personne (patient ou tiers) du fait de **l'exploitation du cabinet**.

Celle-ci peut aussi se déclencher en dehors du cabinet à l'occasion de soins.

#### **1.1.2.2 La garantie Protection Juridique**

La garantie Protection Juridique propose aux professionnels de santé un ensemble de services comprenant le conseil et le règlement de litiges.

Celle-ci constitue un service d'assistance et entre en action par exemple lors de conflits avec la sécurité sociale (nomenclature, traitement...) et les caisses de retraite.

## **1.2 La Responsabilité Civile Professionnelle des médecins**

Les médecins représentent la grande majorité des assurés de la Médicale de France sur la branche RCP.

### **1.2.1 Les obligations des médecins**

Un médecin, en tant que citoyen répond de ses actes devant la société, par contre, en tant que praticien il en répond devant ses pairs et ses patients.

La responsabilité médicale est engagée dès lors que la preuve d'une faute du praticien est donnée.

En matière de contrat de soins, l'article 1147 du Code Civil stipule qu'il incombe aux médecins une obligation contractuelle de réparation "*toutes les fois ou il ne justifie pas que l'inexécution provient d'une cause étrangère qui ne peut lui être imputée*". La responsabilité des médecins ainsi que des établissements de soins connaît une évolution rapide au fil du temps (arrêts de la cour de cassation du 29 juin 1999) qui transforme l'obligation de moyens relative aux médecins en une obligation dite de sécurité-résultat, celle-ci concerne tous les professionnels de santé. De plus, la jurisprudence place aussi à la charge des praticiens une obligation d'information qui, si elle n'est pas respectée, renforcera le droit du patient à prétendre à une indemnisation. Enfin, les praticiens peuvent encourir des poursuites pénales en cas de blessures ou homicides involontaires ou encore en cas d'erreur ou de négligence.

#### **1.2.1.1 L'obligation de moyen du médecin**

Le médecin est tenu de fournir à son patient des soins consciencieux, attentifs et en conformité avec les avancées de la science. En revanche, il n'est pas tenu de garantir la guérison de son malade, ni l'absence d'aggravation de son état.

Cependant, la jurisprudence a fait en sorte que les obligations d'un chirurgien ne doivent pas se limiter uniquement à l'acte chirurgical en effet la jurisprudence a instauré un devoir de surveillance générale de la part des chirurgiens. Par exemple : "*Le chirurgien se doit d'aviser l'anesthésiste des risques d'une anesthésie locale par injection rétrobulbaire, du fait de conformation anormale de l'œil du patient.*"

#### **1.2.1.2 L'obligation de sécurité résultat**

Un médecin, dont la spécialité est aux contours incertains a droit à l'erreur, il ne peut donc pas forcément s'engager sur un résultat déterminé et de ce fait son obligation reste de moyen.

Cependant, dans le cadre de l'obligation de sécurité-résultat il est tenu de réparer le dommage causé à son patient à l'occasion d'un acte médical nécessaire à son traitement chaque fois que ce dommage est en

relation directe avec l'intervention pratiquée. Par exemple "*Un geste maladroit de chirurgien qui provoque une déchirure de l'aorte*"

De plus, la jurisprudence a évolué vers une obligation de résultat pour les dentistes et les radiothérapeutes du fait qu'il n'est pas censé y avoir d'aléa particulier dans l'utilisation d'un matériel de bonne qualité. Par exemple : "*Un chirurgien dentiste qui lèse un nerf lors de l'extraction d'une dent alors que la position de celui-ci ne présentait pas d'anomalie particulière*"

### 1.2.1.3 L'obligation d'information

Mis à part dans les cas d'urgence où le temps devient une variable primordiale vis-à-vis de la sécurité du patient, un praticien a l'obligation d'énoncer de manière claire et loyale les risques relatifs aux soins qu'il se propose de lui procurer quelque que soit la gravité et la probabilité d'occurrence de ceux-ci. De manière égale, il se doit d'énoncer clairement et loyalement la patient sur l'évolution prévisible de son état si rien n'est fait.

### 1.2.1.4 La Responsabilité Pénale

Comme nous l'avions évoqué, un médecin n'est pas à l'abri de poursuites pénales , il suffit que sa faute soit constitutive d'une infraction dont la répression est prévue dans le code pénale pour que sa responsabilité soit mise en cause. Par exemple "*interruption illégale de grossesse, violation du secret médical...*"

## 1.2.2 Vers une Responsabilité sans faute

La jurisprudence sur cette branche d'assurance tend de plus en plus vers une responsabilité sans faute afin d'indemniser les patients en sachant que les médecins sont couverts par des assurances.

- Concernant les hôpitaux publics, la cour Administrative (arrêt Gomez 1990) a admis l'indemnisation d'un patient en cas de thérapeutique nouvelle et à condition que le dommage soit anormalement grave.

- Le 26 Mai 1995 , l'assemblée du Conseil d'état prononce un régime de responsabilité sans faute des centres publics de transfusions sanguines.

- Le 29 Juin 1999 la Cour de cassation impose une obligation de sécurité-résultat aux établissements de soins et aux médecins.

- L'arrêt Perruche du 17 novembre 2000 est un arrêt de la Cour de cassation qui a donné lieu au "préjudice d'être né" ; Nicolas Perruche, né gravement handicapé, sa mère ayant contracté une rubéole non diagnostiquée et n'ayant pu de ce fait recourir à une interruption volontaire de grossesse . Cet arrêt aura de graves conséquences car il a mené à une vision de l'handicap comme un accident anormal pour lequel on peut demander une indemnisation.

- A cela vient s'ajouter l'obligation d'information et d'autres réformes telle que la loi du 4 Mars 2002 qui crée un nouveau droit : celui, pour une victime d'accident médical pour lequel aucune faute n'a été identifiée, d'être indemnisée sous certaines conditions.

Ce type d'accident est souvent désigné par les termes : "aléa médical" ou "aléa thérapeutique".

Finalement, l'évolution de la jurisprudence au fil des années tend vers une responsabilité de plus en plus engagée des médecins, cela impacte directement la problématique de provisionnement sur cette branche. En effet, cette responsabilité sans faute des médecins a pour conséquence une fréquence de plus en plus élevée des sinistres touchant la RCP mais aussi une augmentation de la sévérité de ces sinistres du fait du nombre de procédures en hausse.

## 2

# La réassurance

## 2.1 Principe et utilité de la Réassurance

Comme nous l'avons vu, l'évolution de la jurisprudence au fil des ans tend vers une responsabilité sans faute en matière de soins.

Autrement dit, cela provoque une indemnisation plus fréquente et plus élevée (en terme de cout) de la part des assureurs du fait d'un nombre plus importants de sinistres à dédommager et d'une augmentation du nombre de procédures.

Afin de pouvoir faire face à ses responsabilités, une société d'assurance peut recourir à la réassurance.

Les fonctions essentielles de la réassurance sont de trois ordres :

- Permettre d'accroître les possibilités de souscription des entreprises d'assurance.
- Protéger l'assureur contre les écarts de survenance dans le temps
- Protéger l'assureur contre les sinistres les plus importants

La réassurance comprend trois modes : la réassurance obligatoire, la réassurance facultative et la réassurance facultative obligatoire. Ces différents modes se distinguent à travers les dispositions du "traité de réassurance" (contrat entre assureur et réassureur) : nature du risque couvert, part des polices concernés, spécificité des obligations liés au traité.

### *La réassurance obligatoire*

La réassurance obligatoire représente le mode de réassurance le plus important en terme de volume traité. Elle se matérialise à travers un "traité de réassurance" qui définit une classe de risques ainsi que des conditions ou des limites de souscription.

A travers ce traité , l'assureur dit "Cédante" s'engage à céder tout risque correspondant aux conditions définies précédemment sans effectuer aucune sélection, de son côté, le réassureur s'engage à accepter tous ces risques sans effectuer aucune sélection.

### *La réassurance facultative*

Ce mode de réassurance est historiquement le plus ancien. Ici l'accord s'établit pour chaque risque, police par police.

Ainsi la Cédante est libre de proposer les risques qu'elle souhaite au réassureur, libre à lui de les accepter ou non.

### *La réassurance facultative-obligatoire*

Pour ce mode de réassurance la symétrie n'est pas respectée entre la cédante et le réassureur. Comme pour la réassurance facultative, l'assureur est libre de céder ou non les risques de son portefeuille, en revanche, le réassureur est ici obligé d'accepter les risques qui lui sont proposés.

Pour chaque risque déclaré par la cédante, une prime est versée au réassureur (en général un pourcentage de la prime d'assurance directe).

L'inconvénient majeur de ce mode de réassurance est qu'il peut entraîner un risque d'antisélection dans son portefeuille de la part du cessionnaire, en effet la cédante peut être tentée de ne conserver que les bons risques et de ne céder que les mauvais.

## 2.2 Types de réassurance

Ces différents modes de réassurance peuvent exister soit sous la forme de réassurance dite proportionnelle, soit sous la forme de réassurance dite non proportionnelle.

### *La réassurance proportionnelle*

Elle est nommée de cette manière car la prime cédée et l'indemnisation des sinistres par le réassureur se calculeront selon le même pourcentage. Ainsi, si par exemple le réassureur reçoit 30 % de la prime d'un risque il s'engage en contrepartie à couvrir les mêmes 30% des sinistres relatifs à ce risque. Les résultats du cessionnaire dépendent donc directement de la qualité de souscription de la cédante, le réassureur partagera le bénéfice de l'assureur mais aussi ses pertes éventuelles.

Les frais de gestion et d'acquisition du portefeuille étant entièrement pris en charge par la Cédante, le contrat de réassurance proportionnelle prévoit la participation du réassureur via une "commission de réassurance" visant à couvrir sa part dans ces différents frais.

Les deux formes les plus classiques de traités de Réassurance proportionnelle sont le Quote Part et l'Excédent de plein :

#### – Traité en Quote Part :

Dans un traité en Quote Part, un taux de cession de  $x\%$  est défini. La cédante s'engage donc à céder  $x\%$  de la prime perçue pour le portefeuille considérée et le réassureur s'engage à verser à la cédante  $x\%$  des sinistres qu'elle devra régler au titre de ce même portefeuille. Le taux de cession est identique pour tous les risques en portefeuille, quelle que soit la somme assurée.

Par ce type de traité, le réassureur est impliqué dans tous les sinistres, même les plus petits. La cédante ne fera pas appel à son réassureur à chaque déclaration de sinistres afin que ce dernier règle la part qui lui revient ; en général le traité prévoit un calendrier comptable stipulant les dates auxquelles les comptes seront effectuées. En diminuant les primes et les sinistres de la cédante, un traité en Quote Part permet d'améliorer la marge de solvabilité de cette dernière, pour un quote part de 50 % la cédante peut souscrire deux fois plus de prime pour le même niveau de capital en maintenant sa marge de solvabilité.

Ce type de réassurance est en conséquence principalement utilisé par les petites sociétés ne disposant que de peu de capital mais souhaitant se développer.

Il est cependant important de noter que le Quote Part ne permet pas de lissage dans le temps des résultats, en effet le ratio  $\frac{S}{P}$  qui représente le rapport entre les sinistres et les primes reste le même avec ou sans Quote Part.

Risques	Somme assurée	Cession	Rétention
R1	100	30	70
R2	75	22,5	52,5
R3	195	58,5	136,5
R4	45	13,5	31,5
R5	60	18	42
R6	55	16,5	38,5

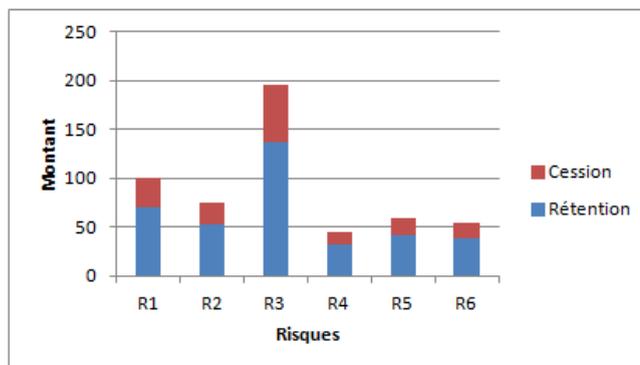


FIGURE 2.1 – Exemple d'un traité en quote part pour un taux de cession de 30 % (Les montants sont en millions d'euros)

### – Traité en Excédent de Plein :

On appelle "Plein de Rétention" le montant maximal que la Cédante souhaite payer par risque. Nous introduisons les variables suivantes :

- $K_i$  : capital assuré pour le risque  $i$
- $C$  : capacité de l'excédent de plein (exprimé en général comme un multiple du plein de rétention)
- $R$  : plein de rétention de la cédante
- $P_i$  : prime originale du risque  $i$
- $x_i$  : taux de cession pour le risque  $i$

Le fonctionnement est le même que pour un traité en Quote Part mis à part que le taux de cession est différent pour chaque risque, celui-ci se calcule selon la formule suivante :

$$x_i = \text{Min} \left( \text{Max} \left( \frac{K_i - R}{K_i}, 0 \right), \frac{C}{K_i} \right)$$

Ainsi, si  $K_i < R$ , le taux de cession est nul et la cédante conserve les risques dont le capital assuré est inférieur au plein de rétention.

Ces risques représentent en général le plus grand nombre des polices du portefeuille et surtout la majeure partie de la prime ; ainsi, le traité en Excédent de Plein permet de conserver la plus grande partie de sa prime tout en disposant d'une protection proportionnelle pour ses risques les plus importants.

Reprenons l'exemple précédent avec un plein de rétention de 50 M € et d'une capacité de l'excédent de plein de 2 (soit  $2 * 50 = 100M€$ ).

Risques	Somme assurée	Cession	Rétention	Taux de cession
R1	100	50	50	0,50
R2	75	25	50	0,33
R3	195	100	50	0,51
R4	45	0	45	0,00
R5	60	10	50	0,17
R6	55	5	50	0,09

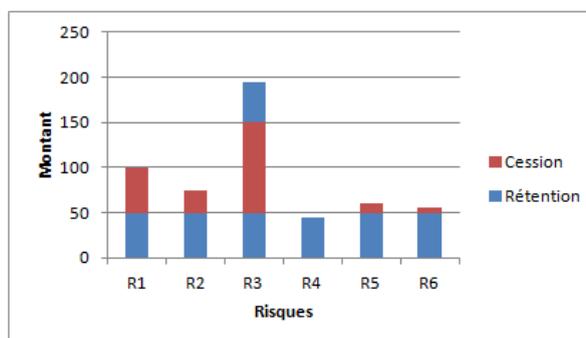


FIGURE 2.2 – Exemple d'un traité en excédent de plein avec un plein de rétention de 50 M € et d'une capacité de l'excédent de plein de 2 (les données sont en millions d'euros)

Contrairement au traité en Quote Part, l'excédent de plein change le profil de portefeuille de la Cédante. En effet, nous pouvons remarquer sur le graphique ci-dessus que l'engagement maximal de la cédante se limite au plein de rétention (dans notre cas 50M€) mis à part sur le risque 3 où la capacité de plein est dépassée et la charge au delà revient à la cédante. Lors de la survenance d'un sinistre, la part revenant au réassureur est calculée sur la base du taux de cession pour le risque sinistré, ainsi, si un sinistre de 30 M touche le risque 2, la part du réassureur sera de  $30 * 0,33 = 9,9Me$  tandis que si le sinistre avait touché le risque 4 la part du réassureur aurait été de 0€.

### La réassurance non proportionnelle

Dans ce cadre, il n'y a pas de relation de proportionnalité entre la prime cédée et la participation du réassureur aux règlements des sinistres. Ce type de réassurance est souvent utilisé pour protéger la cédante contre la survenance d'événements catastrophiques. Il existe deux grands types de réassurance non proportionnelle : l'excédent de sinistre et l'excédent de perte annuelle .

#### – Excédent de sinistre (XS) :

Ce contrat fonctionne comme un contrat d'assurance avec une franchise déductible. Dans le cas d'un XS, la franchise correspond à la "priorité" ; le réassureur s'engage à payer pour tous les sinistres dépassant cette franchise. De plus, ce type de traité fait également intervenir la notion de "portée" qui correspond à l'engagement maximum du réassureur sur un sinistre. Le réassureur paiera donc au plus le montant de la portée pour chaque sinistre survenu. Nous appellerons "plafond", la somme de la priorité et de la portée.

Ainsi, si on nomme X le montant d'un sinistre couvert par un traité de XS, le montant à la charge du réassureur sera :

- 0 si  $X \leq \text{priorité}$
- $X - \text{priorité}$  si  $\text{priorité} \leq X \leq \text{priorité} + \text{portée}$
- Portée si  $\text{priorité} + \text{portée} \leq X$

Si on note S la part du sinistre à la charge du réassureur on obtient :

$$S = \text{Min}(\text{Max}(X - \text{priorité}, 0), \text{portée})$$

Dans ce type de traité il n'y a pas de relation entre la proportion de la prime cédée et la part du réassureur dans le règlement des sinistres. La prime d'un XS est généralement exprimée en pourcentage

de l'encaissement annuel des risques concernés pour une période considérée. Parfois cette prime n'est pas directement reliée à l'encaissement annuel de la cédante et est exprimée en montant, nous parlons alors de prime flat.

Un XS est généralement découpé en plusieurs tranches indépendantes et cotées séparément. Un même programme peut avoir des réassureurs différents sur chacune de ces tranches. Un traité en XS peut fonctionner "par risque", "par événement" ou encore "par risque et par événement" :

- Par risque : le traité s'applique aux sinistres touchant une seule et même police. Cela permet de se protéger contre la survenance de très gros sinistres.

- Par événement : le traité s'applique au montant cumulé de tous les sinistres résultant du même événement. En prenant l'exemple des tempêtes survenus en 1999 en France, le coût individuel des sinistres n'atteignaient "que" quelques centaines de milliers d'euros pour la plupart des polices cependant un très grand nombre de polices ont été touchées. Une protection par risque n'aurait été que très peu touchée, par contre en agrégeant l'ensemble des sinistres résultant de la même tempête les dégâts se chiffraient en millions d'euros.

La définition de l'événement doit être clairement stipulée dans le contrat afin d'éviter tout litige en cas de sinistres.

- Par risque et par événement : Le traité peut être touché aussi bien par un événement tel qu'une tempête ou un sinistre conflagration (exemple usine AZF à Toulouse) que par un sinistre touchant une seule et même police.

Prenons l'exemple d'un programme 10 XS 2 par risque décomposé en deux tranches :

-1ère tranche : 5 XS 2 Le Réassureur A couvre à 100% cette tranche

-2ème tranche : 5 XS 7 Le Réassureur B couvre à 100% cette tranche

Sinistres	Somme assurée	Rétention	Réassureur A	Réassureur B
S1	1,5	1,5	0	0
S2	4	2	2	0
S3	11	2	5	4
S4	13	2	5	5
S5	3	2	1	0
S6	8	2	5	1

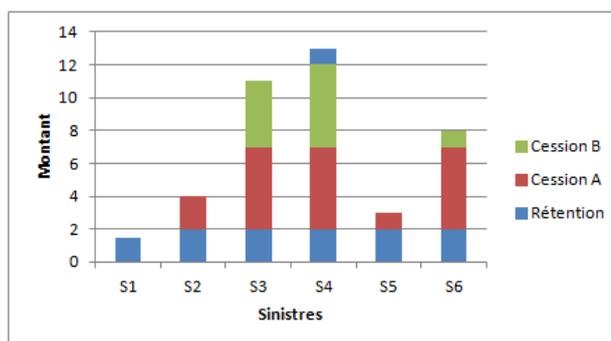


FIGURE 2.3 – Exemple d'un traité en excédent de sinistre par risque avec une priorité de 2M€ et une portée de 10M€ (10 XS 2) (les données sont en millions d'euros)

– **Excédent de perte annuelle (Stop Loss) :**

Le principe du Stop Loss est le même que celui de l'XS cependant celui-ci permet de protéger le ratio  $\frac{S}{P}$  de l'année. Dans ce type de contrat, la priorité et la portée sont généralement exprimées en pourcentage de la prime directe.

Ainsi en notant  $\{X_i\}_{i=1..n}$  les sinistres de la cédante durant la période de couverture , la charge du réassureur sera :

- 0 si  $\frac{\sum X_i}{P} \leq \text{priorité}$
- $\frac{\sum X_i}{P} - \text{priorité}$  si  $\text{priorité} \leq \frac{\sum X_i}{P} \leq \text{priorité} + \text{portée}$
- $\text{Portée} * P$  si  $\text{priorité} + \text{portée} \leq \frac{\sum X_i}{P}$

Si on note S la part du sinistre à la charge du réassureur on obtient :

$$S = \text{Min} \left( \text{Max} \left( \frac{\sum X_i}{P} - \text{priorité}, 0 \right), \text{portée} \right) * P$$

Ce genre de protection est classique pour la grêle, les dégâts des eaux ou encore le gel. En effet, ces événements sont le plus souvent très localisés géographiquement et la survenance d'un seul et même événement n'a que peu de chances de compromettre le résultat d'une année. En contrepartie, une fréquence élevée de ces événements pourraient s'avérer problématique, le Stop Loss permet de se couvrir contre ce type de survenances.

# 3

## Les données

### 3.1 Données historiques liées à la sinistralité

Nous avons accès au système de gestion des sinistres de la Médicale : AS400.

Dans le cadre de notre étude, nous cherchons à extraire de cette base de données l'ensemble des sinistres ayant touché la branche Responsabilité Civile Professionnelle à la Médicale de France. En interrogeant le système de gestion nous récupérons une table SAS contenant les données historiques relatives à la sinistralité sur la branche Responsabilité Civile Professionnelle (RCP) de la Médicale de France de 1979 à 2012, 1979 étant la première année où la Médicale a archivé numériquement ses données.

Cette table contient les **paiements non cumulés** en euros relatifs aux sinistres survenus de 1979 à 2012. Ceux-ci sont constitués des frais judiciaires, des frais d'enquête, d'autres frais provoqués par le règlement des sinistres à l'exclusion des salaires payés par la Médicale et de ses frais généraux.

Notons que ces paiements ne contiennent pas les recours car nous ne disposons pas de ces informations sur de nombreuses années.

De plus, nous identifions les quatre variables de cette table dont nous allons avoir besoin pour notre étude :

– **NOSN** est le numéro du sinistre

– **MT\_RGL** est le montant du paiement

– **Ann\_Or** est l'année d'origine du sinistre, dans notre cas l'année d'origine du sinistre correspond à l'année de rattachement du sinistre à la réassurance

– **Ann\_DEV** est l'année de développement correspondante à MT\_RGL en fonction de l'année d'origine du sinistre (Ann\_Or)

	 <b>NOSN</b>	 <b>MT_RGL</b>	 <b>ANN_DEV</b>	 <b>Ann_Or</b>
<b>10</b>	0100002685	722.15	22	1985
<b>11</b>	0100002685	4341.16	22	1985
<b>12</b>	0100002685	160.48	23	1985
<b>13</b>	0100002685	80.23	23	1985

FIGURE 3.1 – Extrait de la table des paiements non cumulés pour les sinistres survenus sur la branche RCP depuis 1979

Comme nous l'avons évoqué plus haut, nous définissons l'année d'origine d'un sinistre comme l'année à laquelle ce sinistre est rattaché en réassurance, cette notion a varié au fil des années en fonction de la législation, nous en précisons donc la définition.

– **Base de rattachement en Réassurance :**

Depuis la loi About de Décembre 2002, les sinistres sont traités sur la base de la réclamation, ainsi les contrats de la branche RCP peuvent être réparties en 2 groupes :

- La base survenance relative aux contrats clôturés avant la réforme (pour un autre motif que le changement d'assureur) et pour lesquels des sinistres ont été réclamés avant et après l'entrée en vigueur de la réforme

- La base réclamation relative aux contrats renouvelés ou souscrits après la réforme ou aux contrats clôturés avant la réforme lorsque le motif est un changement d'assureur.

Le portefeuille de contrat de la branche RCP de la Médicale de France se décompose en trois sous populations de sinistres :

<b>Etat du Contrat</b>	<b>Date de réclamation</b>	<b>Base de Rattachement</b>
Clos avant le 01/01/03	A toute date	Survenance
Renouvelé ou souscrit après le 01/01/03	Avant la réforme	Réclamation
Renouvelé ou souscrit après le 01/01/03	Après la réforme	Réclamation

## 3.2 Traités de Réassurance

Les traités de réassurance de 1979 à 2012 portant sur la branche RCP de la Médiale de France sont des traités en excédent de sinistres par risque sur plusieurs tranches ( XS par risque). Autrement dit, la réassurance s'applique sinistre par sinistre, sur le paiement relatif à ce sinistre. Pour chacun des traités nous récupérerons donc :

- **Priorité** : Montant à partir duquel un sinistre passe en réassurance.
- **Plafond par tranche** : Somme de la priorité et de la portée de chaque tranche.
- **Taux de cession par tranche** : Pourcentage du sinistre par tranche de réassurance à la charge du réassureur.
- **Annual Aggregate Deductible (AAD)** : L'assureur conserve à sa charge la partie des sinistres dont le montant cumulé n'a pas dépassé la franchise annuelle appelée Annual Aggregate Deductible (AAD), le réassureur quant à lui prend à sa charge la partie des sinistres diminués de la franchise annuelle.
- **Annual Aggregate Limit (AAL)** : L'assureur conserve à charge la partie des sinistres dont le montant cumulé dépasse une limite annuelle appelée Annual Aggregate Limit (AAL).

-**La clause de stabilisation** : La clause de stabilisation a pour effet de répartir entre l'assureur et le réassureur la charge supplémentaire générée par l'inflation. Comme nous l'avons évoqué, la branche RCP a pour caractéristique un déroulement plus long que dans les autres branches d'assurance non-vie ainsi, un sinistre survenu sur la branche RCP peut ne passer en réassurance que de nombreuses années après sa date de rattachement en réassurance, années pendant lesquelles le sinistre a subi les effets de l'inflation.

Ainsi, afin de se protéger de cet effet, le réassureur met en place une clause de stabilisation. Les paiements liés à la sinistralité sont stabilisés avec un indice de référence (GIMRP) qui est dans notre cas l'indice du salaire moyen annuel brut de l'ensemble des ouvriers de l'industrie métallurgique publié au Bulletin du groupe des Industries Métallurgiques de la Région Parisienne (G.I.M). Il s'agit de l'indice historique de référence sur la branche RCP.

La clause se déclenche lorsque l'inflation dépasse la marge fixée contractuellement qui est de 10% sur l'ensemble de nos traités.

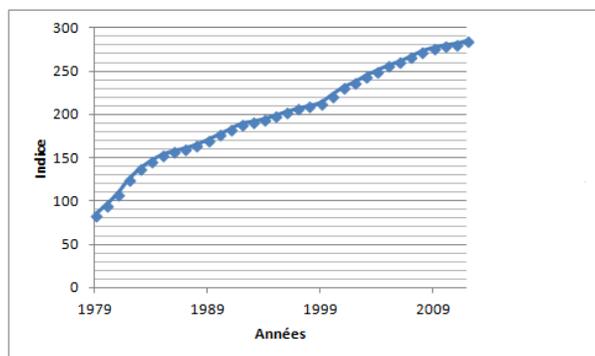


FIGURE 3.2 – Indice du salaire moyen annuel brut de l'ensemble des ouvriers de l'industrie métallurgique

### 3.3 Traitement des données

Comme nous l'avons évoqué, les données utilisées proviennent du système de gestion de la Médicale de France. Dans un souci de qualité de nos données nous décidons d'analyser de manière détaillée celles-ci.

#### 3.3.1 Analyse des valeurs incohérentes

##### 3.3.1.1 Années d'origines des sinistres (Ann\_Or)

Avant toute manipulation des données de notre table SAS, nous vérifions que celle-ci ne contient pas de valeurs incohérentes. Pour cela nous utilisons la procédure univariate de SAS qui permet de décrire les différentes variables d'une table SAS. Tout d'abord nous vérifions que notre table ne contient pas de dates absurdes, ci-dessous le résultat de la procédure univariate sur la variable Ann\_Or de la table des paiements :

Quantiles (Definition 5)	
Quantile	Estimate
100% Max	2015
99%	2012
95%	2011
90%	2010
75% Q3	2007
50% Median	2001
25% Q1	1994
10%	1989
5%	1986
1%	1981
0% Min	1979

Extreme Observations			
Lowest		Highest	
Value	Obs	Value	Obs
1979	90718	2015	88221
1979	90717	2015	88222
1979	90716	2015	88668
1979	90715	2015	88669
1979	90713	2015	88670

FIGURE 3.3 – Procédure UNIVARIATE sur la variable Ann\_Or de la table des paiements non cumulés

	NOSN	MT_RGL	Ann_DEV	Ann_Or
90687	0199090988	23767.11	24	2014
90688	0199090988	23767.11	24	2014
90689	0199090988	23767.11	24	2014
90690	0100069812	248.90	0	2015
90691	0100069812	310.10	0	2015
90692	0102241000	364.66	1	2015
90693	0102241000	544.18	1	2015
90694	0102241000	1200.00	1	2015

FIGURE 3.4 – Extrait de la table des paiements non cumulés

Nous remarquons des années d'origines absurdes. Nous remplaçons donc ces valeurs qui correspondent probablement à des erreurs de saisies par leurs valeurs réelles en nous basant sur des informations complémentaires détenues dans le système de gestion de sinistre de la Médicale de France.

### 3.3.1.2 Montant des paiements (MT\_RGL)

Nous nous intéressons aux montants des paiements, nous utilisons une fois de plus la procédure univariate sur la variable MT\_RGL de notre table. Il est évident que cette procédure ne puisse pas réellement mettre en lumière certaines incohérences contenues dans notre table, en effet il est difficile de juger la pertinence d'un montant de paiement relatif à un sinistre.

Nous remarquons cependant des valeurs négatives ce qui semble contradictoire (les recours n'étant pas comptabilisés dans les paiements) :

Quantiles (Definition 5)			
Quantile		Estimate	
100% Max		1626855.98	
99%		25240.51	
95%		4193.75	
90%		2392.00	
75% Q3		1219.59	
50% Median		544.00	
25% Q1		137.20	
10%		60.98	
5%		45.00	
1%		9.15	
0% Min		-58800.52	

Extreme Observations			
Lowest		Highest	
Value	Obs	Value	Obs
-58800.5	1	910283	90577
-52368.3	2	938262	90578
-38376.5	3	977006	90579
-38112.3	4	1193611	90580
-32361.5	6	1626856	90581

FIGURE 3.5 – Procédure UNIVARIATE sur la variable MT\_RGL de la table des paiements

En approfondissant , il s'agit en réalité d'annulation de paiements qui peuvent arriver pour diverses raisons :

- erreur de saisies
- erreur dans le destinataire (exemple de 50000 euros ci-après)
- erreur dans l'émetteur

NOSN	MT_RGL	Ann_DEV	Ann_Or
0101556396	30.49	3	1996
0101556396	60.98	3	1996
0101556396	228.67	3	1996
0101556396	367.71	3	1996
0101556396	60.98	4	1996
0101556396	1808.05	4	1996
0101556396	1435.20	6	1996
0101556396	-52368.30	8	1996
0101556396	598.00	8	1996
0101556396	1435.20	8	1996
0101556396	1500.00	8	1996
0101556396	52368.30	8	1996

FIGURE 3.6 – Extrait de la table des paiements

Finalement, nous prenons connaissance du fait que certaines "purgés" de données ont été réalisées vers la fin des années 80 au niveau de la base de données de la Médicale de France car l'espace mémoire dont il disposait ne suffisait plus.

Nous décidons donc de nous restreindre aux données à partir de l'année 1990, nous possédons donc 23 années de développement et d'origine.

### 3.3.2 Application des traités de réassurance

A ce stade nous disposons de la table des paiements non cumulés pour les sinistres dont l'année d'origine est comprise entre 1990 et 2012. Introduisons la variable  $((X_{i,j,l}))_{i,j=0..22}$  correspondant au paiement non cumulé pour le sinistre dont le numéro de sinistre (NOSN) est  $l$  d'année d'origine  $i$  à l'année de développement  $j$ . Nous agrégeons nos données par sinistre et par années de développement (car nous avons plusieurs règlements par années de développement pour le même sinistre) et obtenons une base de donnée que nous nommerons  $T_{brut}$  de la forme suivante :

	Ann_Or \ Ann_DEV	0	1	...	n-1	n
<i>Sinistre<sub>a</sub></i>	0	$X_{0,0,a}$	$X_{0,1,a}$		$X_{0,n-1,a}$	$X_{0,n,a}$
<i>Sinistre<sub>b</sub></i>	0	$X_{0,0,b}$	$X_{0,1,b}$		$X_{0,n-1,b}$	$X_{0,n,b}$
<i>Sinistre<sub>c</sub></i>	1	$X_{1,0,c}$	$X_{1,1,c}$		$X_{1,n-1,c}$	
<i>Sinistre<sub>d</sub></i>	1	$X_{1,0,d}$	$X_{1,1,d}$		$X_{1,n-1,d}$	
...						
<i>Sinistre<sub>f</sub></i>	n-1	$X_{n-1,0,f}$	$X_{n-1,1,f}$			
<i>Sinistre<sub>g</sub></i>	n	$X_{n,0,g}$				

Nous pouvons dès lors appliquer nos traités de réassurance :

#### 3.3.2.1 La clause de stabilisation

Dans un premier temps nous appliquons la clause de stabilisation, sur ce point les traités de réassurance sont tous identiques.

Notons  $(I_i)_{i=0..22}$  la valeur de l'indice du salaire moyen annuel brut de l'ensemble des ouvriers de l'industrie métallurgique entre 1990 et 2012. Nous appliquons la formule suivante :

$$X_{i,j,l} = \begin{cases} X_{i,j,l} * \frac{I_i}{I_j} & \text{si } \frac{I_j}{I_i} - 1 \geq 10\% \\ X_{i,j,l} & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette formule stipule que si la variation de l'indice d'inflation :  $\tau_{i,j} = \frac{I_j}{I_i} - 1$  entre l'année d'origine  $i$  du sinistre et l'année de développement  $j$  relative à ce sinistre est supérieure à 10% alors le paiement à cette

date est actualisé au taux  $(1 + \tau_{i,j})$  dans notre base  $T_{brut}$ . Autrement dit, la clause de stabilisation est une condition qui permet de répartir l'inflation entre assureur et réassureur.

En effet, le réassureur considère que le surplus entraîné par l'inflation ne doit pas être entièrement à sa charge, et dès lors que ce surplus entre l'année de développement considérée et l'année d'origine est supérieur à 10% il revient à l'assureur de le prendre en charge. Prenons l'exemple d'un sinistre quelconque survenu en 2002, ci-dessous les variations de l'indice entre 2002 et 2012 par rapport à la valeur de l'indice en 2002 ainsi que la variation du paiement relatif à ce sinistre :

Années de développement	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
variation de l'indice	0,0%	3,2%	5,7%	8,2%	10,1%	12,5%	15,2%	16,8%	18,1%	18,9%	20,2%
paiements	3483,7	0,0	2943,7	0,0	0,0	1753,5	0,0	0,0	0,0	4975,3	3145,2
paiements stabilisés	3483,7	0,0	2943,7	0,0	0,0	1558,6	0,0	0,0	0,0	4184,4	2616,6

FIGURE 3.7 – Application de la clause de stabilisation aux paiements non cumulés (en euros) d'un sinistre rattaché en réassurance en 2002

### 3.3.2.2 Application des priorités et des portées

Après stabilisation nous obtenons une nouvelle base que nous nommerons  $T_{brut,stab}$ . Par la suite nous cumulons nos paiements par années de développement pour chaque sinistre et obtenons la base  $T_{brut,stab}^{cum\sinistre}$ .

Dans cette base la variable  $C_{i,j,l} = \sum_{k=0}^j X_{i,k,l}^{stabilisé}$

	Ann Or \ Ann Dev	0	1	...	n-1	n
<i>Sinistre<sub>a</sub></i>	0	$C_{0,0,a}$	$C_{0,1,a}$		$C_{0,n-1,a}$	$C_{0,n,a}$
<i>Sinistre<sub>b</sub></i>	0	$C_{0,0,b}$	$C_{0,1,b}$		$C_{0,n-1,b}$	$C_{0,n,b}$
<i>Sinistre<sub>c</sub></i>	1	$C_{1,0,c}$	$C_{1,1,c}$		$C_{1,n-1,c}$	
<i>Sinistre<sub>d</sub></i>	1	$C_{1,0,d}$	$C_{1,1,d}$		$C_{1,n-1,d}$	
...						
<i>Sinistre<sub>f</sub></i>	n-1	$C_{n-1,0,f}$	$C_{n-1,1,f}$			
<i>Sinistre<sub>g</sub></i>	n	$C_{n,0,g}$				

Ensuite, nous appliquons aux sinistres les priorités et les portées des traités de réassurance de 1990 à 2012 en ne tenant pour l'instant compte ni de l'AAD ni de l'AAL.

Considérons le sinistre A d'année d'origine  $i$  dont le traité correspondant est un XS sur trois tranches ; nous introduisons les variables :

- $Prio_i$  : La priorité du traité de réassurance en vigueur pour les sinistres d'année d'origine  $i$
- $T_{1,i}$  : Le plafond de la première tranche du traité de réassurance en vigueur pour les sinistres d'année d'origine  $i$
- $T_{2,i}$  : Le plafond de la seconde tranche du traité de réassurance en vigueur pour les sinistres d'année d'origine  $i$
- $T_{3,i}$  : Le plafond de la troisième tranche du traité de réassurance en vigueur pour les sinistres d'année d'origine  $i$
- $Tx_{1,i}$  : Le taux de cession de la première tranche du traité de réassurance en vigueur pour les sinistres d'année d'origine  $i$
- $Tx_{2,i}$  : Le taux de cession de la seconde tranche du traité de réassurance en vigueur pour les sinistres d'année d'origine  $i$
- $Tx_{3,i}$  : Le taux de cession de la troisième tranche du traité de réassurance en vigueur pour les sinistres d'année d'origine  $i$

Alors pour tout  $i, j$  tels que  $i + j \leq n$  l'application de la réassurance se fait par la formule suivante :

$$C_{i,j,A} = \begin{cases} Prio_i + (T_{1,i} - Prio_i) * ((100 - Tx_{1,i})/100) + ((100 - Tx_{2,i})/100) * (T_{2,i} - T_{1,i}) + \\ ((100 - Tx_{3,i})/100) * (T_{3,i} - T_{2,i}) + C_{i,j,A} - T_{3,i} & \text{si } C_{i,j,A} \geq T_{3,i} \\ Prio_i + (T_{1,i} - Prio_i) * ((100 - Tx_{1,i})/100) + ((100 - Tx_{2,i})/100) * (T_{2,i} - T_{1,i}) + \\ ((100 - Tx_{3,i})/100) * (C_{i,j,A} - T_{2,i}) & \text{si } T_{2,i} \leq C_{i,j,A} < T_{3,i} \\ Prio_i + (T_{1,i} - Prio_i) * ((100 - Tx_{1,i})/100) + ((100 - Tx_{2,i})/100) * (C_{i,j,A} - T_{1,i}) & \text{si } T_{1,i} \leq C_{i,j,A} < T_{2,i} \\ Prio_i + (T_{1,i} - Prio_i) * ((100 - Tx_{1,i})/100) * (C_{i,j,A} - Prio_i) & \text{si } Prio_i \leq C_{i,j,A} < T_{1,i} \\ C_{i,j,A} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous agrégeons ensuite les données recueillies nettes de priorités et de portées par années d'origines et obtenons le triangle  $T_{net,stab}^{cum \setminus année}$ .

En notant  $N_k = \{\text{Ensemble des sinistres d'origine } k\}$  et  $C_{i,j,l}^R$  correspondante à la variable  $C_{i,j,l}$  après application de la priorité et des portées du traité de réassurance en vigueur l'année  $i$ .

Le triangle  $T_{net,stab}^{cum \setminus année}$  est de la forme :

	0	1	...	n-1	n
0	$\sum_k^{N_0} C_{0,0,k}^R$	$\sum_k^{N_0} C_{0,1,k}^R$		$\sum_k^{N_0} C_{0,n-1,k}^R$	$\sum_k^{N_0} C_{0,n,k}^R$
1	$\sum_k^{N_1} C_{1,0,k}^R$	$\sum_k^{N_1} C_{1,1,k}^R$		$\sum_k^{N_1} C_{1,n-1,k}^R$	
...					
n-1	$\sum_k^{N_{n-1}} C_{n-1,0,k}^R$	$\sum_k^{N_{n-1}} C_{n-1,1,k}^R$			
n	$\sum_k^{N_n} C_{n,0,k}^R$				

### 3.3.2.3 Charge du Réassureur : AAD et AAL

En agrégeant par année d'origine les données de  $T_{brut,stab}^{cum \setminus sinistre}$  nous avons obtenu le triangle  $T_{brut,stab}^{cum \setminus année}$ , puis, en faisant la différence entre  $T_{brut,stab}^{cum \setminus année}$  et  $T_{net,stab}^{cum \setminus année}$  nous obtenons la charge du réassureur noté  $R$  pour les sinistres dont l'année d'origine se situe entre 1990 et 2012 où :  $R_{i,j} = \sum_k^{N_i} C_{i,j,k} - \sum_k^{N_i} C_{i,j,k}^R$

	0	1	...	j	...	n-1	n
0	$R_{0,0}$	$R_{0,1}$		$R_{0,j}$		$R_{0,n-1}$	$R_{0,n}$
1	$R_{1,0}$	$R_{1,1}$		$R_{1,j}$		$R_{1,n-1}$	
i	$R_{i,0}$	$R_{i,1}$		$R_{i,j}$	$R_{i,n-i}$		
n-1	$R_{n-1,0}$	$R_{n-1,1}$					
n	$R_{n,0}$						

Nous appliquons alors l'AAD selon la formule suivante pour tout  $\{i, j : i + j \leq n\}$  :

$$R_{i,j} = \begin{cases} R_{i,j} - AAD_i & \text{si } R_{i,n-i} \geq AAD_i \text{ et } R_{i,j} - AAD_i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Formellement cela signifie que si le dernier paiement cumulé connu de l'année d'origine  $i$  dépasse la franchise AAD alors pour chacun des  $R_{i,j}$  tels que  $i + j \leq n$  nous retirons la franchise de la charge du réassureur , si

par contre ce dernier montant connu ne dépasse pas l'AAD alors l'ensemble de la charge du réassureur pour l'année d'origine considérée est nulle.

Nous voulons ensuite appliquer l'AAL.

Une première remarque est que l'AAL est défini par tranche or nous ne disposons plus à ce stade du détail de la charge du réassureur par tranche. Cependant en étudiant la charge du réassureur nous remarquons qu'aucune des dernières charges connues de celui-ci  $((R_{i,n-i})_{i=0,\dots,n})$  n'est supérieur au  $\min_{(i,j)} AAL_{i,j}$  et prenons donc le parti de ne pas appliquer la clause relative à l'AAL.

Nous avons donc terminé d'appliquer les programmes de réassurance, appelons  $R_{AAD,AAL}$  le triangle obtenu correspondant à la charge réelle revenant au réassureur ; en agrégeant par année d'origine la base de départ  $T_{brut}$  nous obtenons  $T_{brut}^{cum\backslashannée}$  et en faisant la différence :  $T_{brut}^{cum\backslashannée} - R_{AAD,AAL}$  nous obtenons le triangle correspondant aux paiements réels finals de l'assureur nets de réassurance . Nous considérerons dans la suite de ce mémoire deux triangles : le triangle que nous venons d'obtenir net de réassurance et le triangle brut de réassurance (pour lequel nous conservons la même définition d'années d'origine).

## 4

# Les méthodes déterministes

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les principales méthodes de provisionnement déterministes en nous basant sur l'étude des deux triangles que nous avons obtenu grâce à la partie précédente. Notre objectif est de déterminer le montant des réserves défini par la différence entre d'une part la charge à l'ultime (nous considérerons dans un premier temps la charge ultime comme la charge en 2012) et la dernière charge connue. Nous introduisons un triangle de développement dont les lignes représentent les années d'origine des sinistres entre 0 et  $n$ , et les colonnes celles des années de développement entre 0 et  $n$  également.

### Les Variables

La variable  $X_{i,j}$  correspond au paiement non cumulé de l'assureur pour les sinistres d'origine  $i$  au semestre de développement  $j$ .

La variable  $C_{i,j}$  correspond au montant paiement cumulé de l'assureur pour les sinistres d'origine  $i$  jusqu'au semestre de développement  $j$  soit donc :

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}$$

La variable  $R_i$  correspond au montant de réserves nécessaires pour financer la charge future de l'assureur pour les sinistres d'origine  $i$  soit donc :

$$R_i = C_{i,n} - C_{i,n-i}$$

La variable  $R$  correspond au montant de réserve globale sur l'ensemble des années d'origine  $i$  soit donc :

$$R = \sum_{i=0}^n R_i$$

## 4.1 Les méthodes de Chain-Ladder

Ces méthodes sont simples d'utilisation et présentent l'avantage de s'appliquer à des triangles de toute nature, en particulier ceux de paiements ou de charges cumulées ce qui explique leur grande popularité. Nous considérons le triangle de paiements cumulés suivant :

	0	1	...	j	...	n-1	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$		$C_{0,j}$		$C_{0,n-1}$	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$		$C_{1,j}$		$C_{1,n-1}$	
i	$C_{i,0}$	$C_{i,1}$		$C_{i,j}$	...		
n-1	$C_{n-1,0}$	$C_{n-1,1}$					
n	$C_{n,0}$						

### 4.1.1 La méthode de Chain-Ladder Standard

Cette méthode se base sur l'utilisation de facteurs de développements (ou de manière équivalente de cadences de règlements) supposés constants pour toutes les années d'origine considérées. La méthode de Chain-Ladder s'appuie donc sur les hypothèses suivantes :

#### Hypothèses Chain-Ladder :

Pour  $j = 0, \dots, n-1$ , les ratios des facteurs  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  sont indépendants de l'année d'origine  $i$ . Nous en déduisons pour  $j = 0, \dots, n-1$  :

$$\frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \dots = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \dots = \frac{C_{n-j-1,j+1}}{C_{n-j-1,j}} \quad (4.1.1)$$

La valeur commune de ces ratios est aussi donnée par :

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

Remarquons que dans la pratique l'égalité (3.1.1) n'est que partiellement voire pas vérifiée, il est donc naturel d'estimer à partir des données historiques les coefficients de passage par :

$$\forall 0 \leq j \leq n-1 \quad \hat{f}_j^{CL} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}}$$

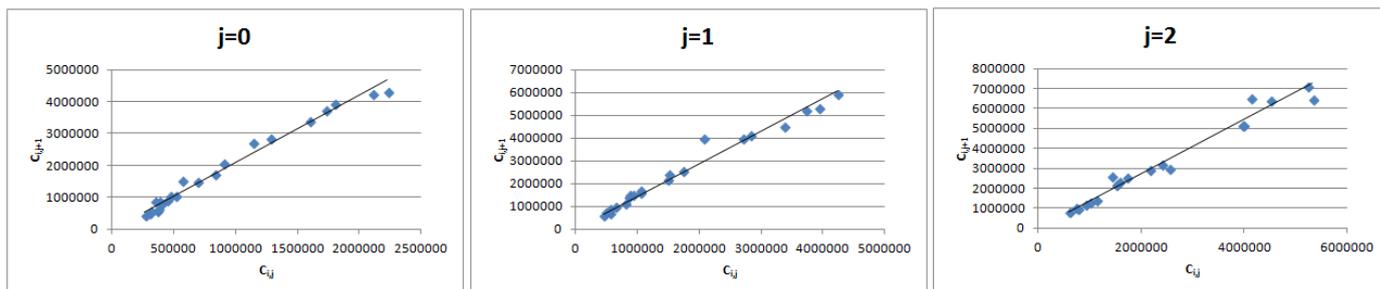
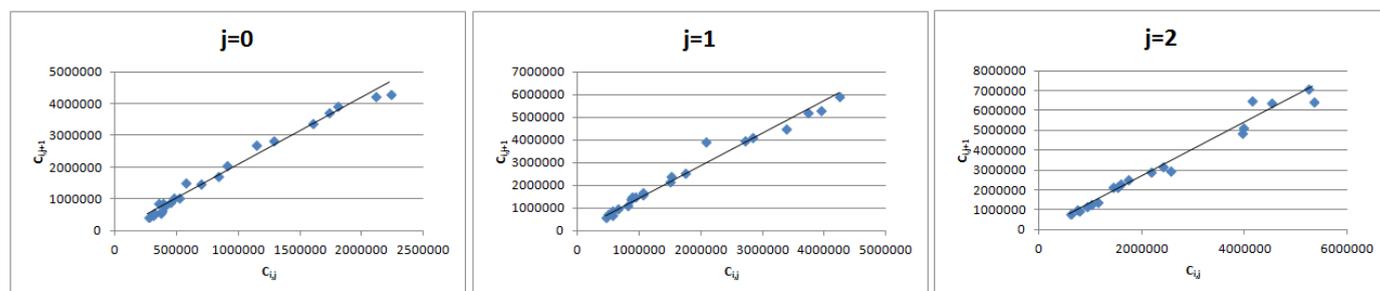
Nous en déduisons les évaluations de charges ultimes :

$$\forall 0 \leq i \leq n-1 \quad \hat{C}_{i,n}^{CL} = C_{i,n-i} \hat{f}_{n-i}^{CL} \dots \hat{f}_{n-1}^{CL} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{f}_k^{CL}$$

Celles-ci nous permettent d'en déduire les provisions  $\forall 1 \leq i \leq n \quad \hat{R}_i^{CL} = \hat{C}_{i,n}^{CL} - C_{i,n-i}$  et la provision globale  $\hat{R}^{CL} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i^{CL}$

**Validation du modèle :**

Pour que cette méthode soit satisfaisante il faut dans un premier temps valider l'hypothèse du modèle ainsi, si pour  $j$  fixé, il existe un paramètre  $f_j$  tel que  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$  pour  $i = 0, \dots, n - j - 1$ , les  $(n - j)$  couples  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=0 \dots n-j-1}$  doivent être alignés sur une droite passant par l'origine.


 FIGURE 4.1 – Régression linéaire des points  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})_{j=0,1,2}$  pour le triangle brut de réassurance

 FIGURE 4.2 – Régression linéaire des points  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})_{j=0,1,2}$  pour le triangle net de réassurance

Remarque :

Chaque année d'origine  $i$  du triangle net de réassurance a été obtenue après application du programme de réassurance en vigueur pour les sinistres rattachés en réassurance l'année  $i$ , il s'agit de réassurance non proportionnelle avec des priorités, des portées et des taux de cessions différents par tranche.

Ainsi, nous nous attendions à ce que, principalement sur les années de développements correspondantes à l'entrée en réassurance des sinistres l'hypothèse ne soit que partiellement vérifiée sur le triangle net de réassurance.

Or, nous apercevons sur la figure 4.4 que la réassurance entre en action dès le second semestre de développement et pourtant les points sont sensiblement alignés pour nos deux triangles sur toutes les années de développements. De plus, après avoir tester la significativité des coefficients correspondant à l'ordonnée à l'origine nous remarquons que seuls trois d'entre eux sont significatifs à un niveau de 95% (cf London-Chain) La seconde hypothèse que nous devons vérifier est que ce coefficient de linéarité est constant sur les années de survenance :  $f_{i,j} = f_j \forall i = 0, \dots, n - j - 1, \forall j = 0, \dots, n - 1$ . Pour cela, nous calculons pour chaque année de développement  $j$  les  $(f_{i,j})_{i=0, \dots, n-j-1}$  et les comparons à leur moyenne.

Nous introduisons donc les variables :

$m_j = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} f_{i,j} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  et  $\sigma_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - m_j \right)^2$  correspondantes respectivement à la moyenne et la variance des coefficients ligne à ligne  $f_{i,j}$ .

Dans un premier temps , nous calculons nos coefficients de Chain-Ladder :

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_j^{cl}$	2,123	1,471	1,377	1,239	1,196	1,152	1,115	1,104	1,093	1,061	1,031
$m_j$	2,100	1,500	1,395	1,282	1,235	1,170	1,129	1,124	1,114	1,062	1,038
$\sigma_j^2$	0,074	0,022	0,021	0,015	0,033	0,009	0,006	0,010	0,027	0,005	0,001

j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f_j^{cl}$	1,011	1,029	1,018	1,023	1,034	1,056	1,015	1,009	1,005	1,004	1,014
$m_j$	1,013	1,033	1,022	1,022	1,032	1,077	1,019	1,009	1,006	1,004	1,014
$\sigma_j^2$	0,000	0,000	0,001	0,000	0,001	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

FIGURE 4.3 – Résultats numériques pour la méthode de Chain-Ladder pour le triangle brut de réassurance

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_j^{cl}$	2,123	1,470	1,362	1,234	1,183	1,143	1,103	1,097	1,086	1,055	1,030
$m_j$	2,100	1,499	1,376	1,280	1,220	1,161	1,117	1,107	1,100	1,057	1,039
$\sigma_j^2$	0,074	0,021	0,012	0,016	0,020	0,007	0,004	0,004	0,011	0,003	0,001

j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f_j^{cl}$	1,012	1,032	1,015	1,019	1,037	1,052	1,012	1,008	1,006	1,004	1,016
$m_j$	1,014	1,035	1,018	1,019	1,036	1,063	1,014	1,008	1,007	1,004	1,016
$\sigma_j^2$	0,000	0,001	0,000	0,000	0,001	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

FIGURE 4.4 – Résultats numériques pour la méthode de Chain-Ladder pour le triangle net de réassurance

Nous remarquons que les coefficients de Chain-Ladder sont proches des moyennes des coefficients ligne à ligne dans les deux cas , ces facteurs s’interprètent de la manière suivante : le passage d’un paiement cumulé de l’année de développement 0 à l’année de développement 1 se fait par la biais d’un facteur de 2,123 dans le cas net de réassurance.

Une seconde remarque est de noter que les coefficients de Chain-Ladder dans le cas net et brut de réassurance sont très proches autrement dit, la réassurance ne s’active que très peu.

En effet, celle-ci n’agit pas sur la masse des sinistres mais uniquement sur les plus importants d’entre eux ce qui se traduit pas un faible impact sur nos données comme nous l’avions remarqué lors de la vérification de la première hypothèse du modèle.

Nous comparons alors les  $(f_{i,j})_{i=0,\dots,n-j-1}$  et les comparons à leur moyenne.

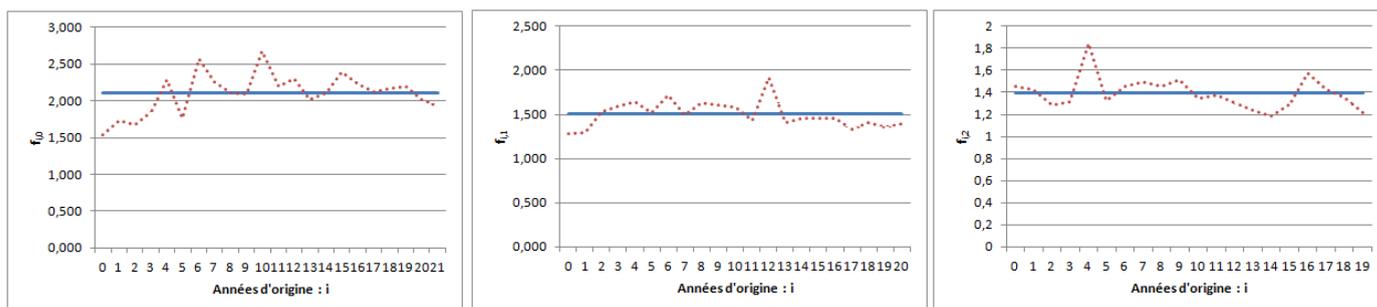


FIGURE 4.5 – Comparaison des  $f_{i,j}$  avec leur moyenne  $m_j$  pour  $j = 0, 1, 2$  pour le triangle brut de réassurance

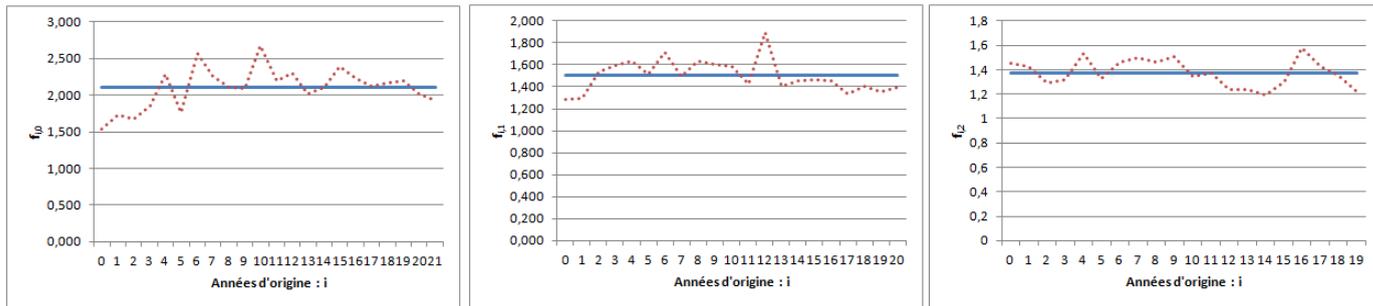


FIGURE 4.6 – Comparaison des  $f_{i,j}$  avec leur moyenne  $m_j$  pour  $j = 0, 1, 2$  pour le triangle net de réassurance

L'hypothèse de stabilité des coefficients ligne à ligne n'est pas entièrement vérifiée sur les premières années de développement .

En s'attardant sur la variance  $\sigma_j^2$  nous remarquons que celle-ci est, de manière cohérente avec l'assertion précédente, plus élevée sur les premières années de développement mais reste tout de même relativement faible sur l'ensemble.

Nous décidons donc d'appliquer le modèle de Chain-Ladder ce qui nous permet d'estimer les  $(\hat{C}_{i,j})_{n < i+j \leq 2n}$  par  $\forall 0 \leq i \leq n - 1 \hat{C}_{i,n}^{CL} = C_{i,n-i} \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{f}_k^{CL}$  :

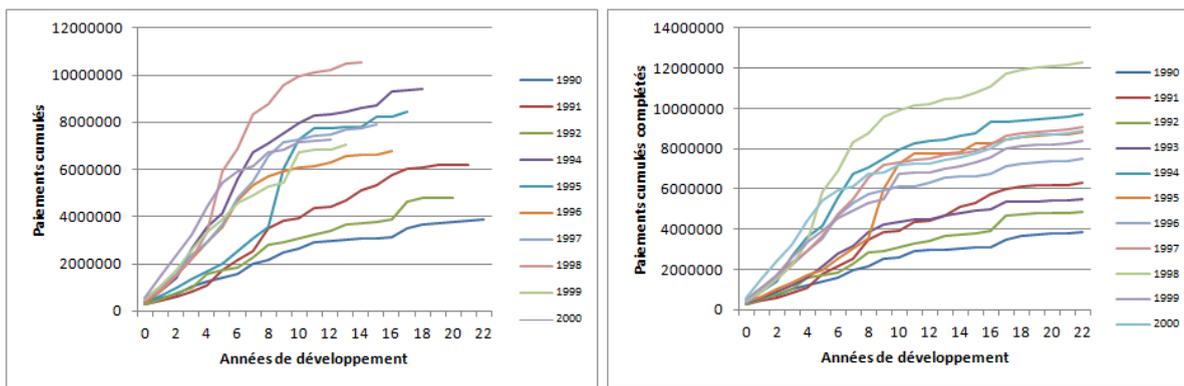


FIGURE 4.7 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d'origine de 1990 à 2000 pour le triangle brut de réassurance

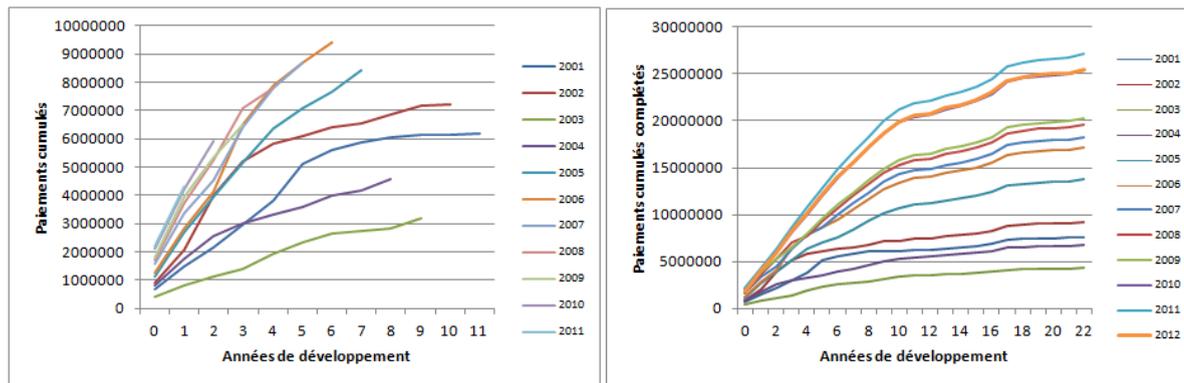


FIGURE 4.8 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d'origine de 2001 à 2012 pour le triangle brut de réassurance

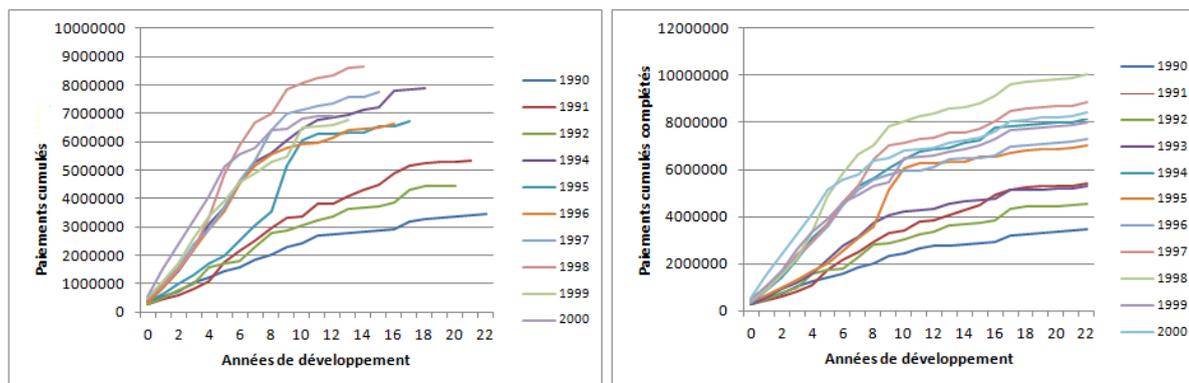


FIGURE 4.9 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d’origine de 1990 à 2000 pour le triangle net de réassurance

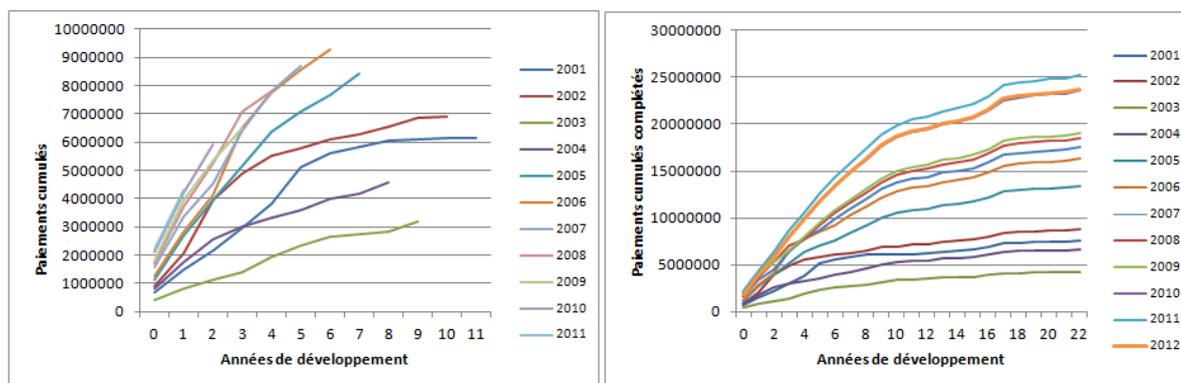


FIGURE 4.10 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d’origine de 2001 à 2012 pour le triangle net de réassurance

De ces calculs nous déduisons les réserves par années d’origine et la réserve totale par  $\forall 1 \leq i \leq n \hat{R}_i^{CL} = \hat{C}_{i,n}^{CL} - C_{i,n-i}$  et la provision globale  $\hat{R}^{CL} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i^{CL}$

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	2 007 725
1991	88 936	2003	1 136 323
1992	86 999	2004	2 206 673
1993	126 003	2005	5 341 658
1994	307 723	2006	7 764 908
1995	403 487	2007	9 572 062
1996	724 868	2008	11 789 709
1997	1 140 156	2009	13 729 919
1998	1 796 771	2010	19 422 601
1999	1 345 982	2011	22 799 326
2000	1 637 637	2012	23 549 307
2001	1 478 562	TOTAL	128 457 335

FIGURE 4.11 – Réserves relatives à la méthode de Chain Ladder pour le triangle brut de réassurance

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	1 876 566
1991	85 297	2003	1 088 284
1992	90 141	2004	2 088 692
1993	134 897	2005	5 013 925
1994	267 089	2006	7 047 776
1995	313 333	2007	8 809 571
1996	668 611	2008	10 766 528
1997	1 102 541	2009	12 594 994
1998	1 418 076	2010	17 748 614
1999	1 230 168	2011	20 991 194
2000	1 510 299	2012	21 851 029
2001	1 439 475	TOTAL	118 137 102

FIGURE 4.12 – Réserves relatives à la méthode de Chain Ladder pour le triangle net de réassurance

Notons que, de manière cohérente, les réserves sur le triangle net de réassurance sont inférieures à celles obtenues sur le triangle brut de réassurance (de l'ordre de 8,74%).

### Critiques du modèle de Chain-Ladder standard :

Cette méthode présente l'avantage d'être relativement facile à implémenter, cependant clairement les hypothèses sous-jacentes ne peuvent être que partiellement vérifiées dans la pratique.

En effet, l'hypothèse selon laquelle le cumul d'une année de développement est proportionnel à celui de l'année précédente et ce, quelque soit l'année d'origine est fortement discutable. Dans le cadre général celle-ci ne prend pas en compte l'évolution de la jurisprudence sur la branche considérée ou encore le changement de la politique relative à la gestion des sinistres qui peut accélérer ou ralentir le processus de dédommagement.

Dans notre cas en particulier, celle-ci ne prend pas non plus en compte l'évolution des programmes de réassurance, en effet, les programmes ont fortement évolués au cours des années ainsi, un sinistre ne sera pas traité de la même façon si son année de rattachement en réassurance est 1990 ou 2005. Il pourra par exemple passer en réassurance si le traité considéré est celui de 1990 et rester totalement à la charge de l'assureur si le traité est celui de 2005 (les priorités ayant fortement évoluées sur la période considérée). Ainsi, nous voyons que l'hypothèse forte de stabilité des facteurs de développements ne peut être que partiellement vérifiée. Nous remarquons cependant que l'effet de la réassurance que nous venons de décrire ne perturbe que peu nos données, cela relève de la nature de nos traités de réassurance qui est une protection qui n'agit que sur les sinistres très coûteux et qui donc, n'affecte pas la majorité de nos sinistres.

D'autre part, l'estimation des charges ultimes pour les années les plus récentes souffre d'une forte imprécision, en effet celle calculée pour la  $n$  ième année d'origine de notre triangle est le produit de  $n$  estimations de facteurs de développements  $(\hat{f}_j^{CL})_{j=0..n-1}$ . Ainsi, l'unique valeur connue pour la dernière année origine joue un rôle primordial dans l'estimation de la charge finale de cette année.

De plus, bien que ce ne soit pas notre cas, nous remarquons que si la dernière valeur connue quelque soit l'année d'origine est nulle alors la charge finale estimée le sera aussi. Nous soulignons ce point car, si nous travaillions sur des triangles contenant les paiements cumulés du réassureur il y aurait forcément des 0 sur les premières années de développement et donc la réserve estimée serait de 0 € pour ces années.

Malgré cela, les hypothèses de Chain-Ladder standard sont en majorité vérifiées sur notre triangle, elle servira donc de référence dans la suite du mémoire.

#### 4.1.1.1 Extrapolation des facteurs de développement

Nous supposons dans notre méthode que 23 années de développement suffisent pour qu'un sinistre soit entièrement réglé.

Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée, en effet la branche Responsabilité Civile Professionnelle a la particularité de connaître des déroulements de sinistres très longs, nous remarquons d'ailleurs que les paiements cumulés de de la première année d'origine continuent de croître sur nos dernières années de développement alors qu'ils devraient se stabiliser si l'horizon ultime était véritablement la 23 ème année de développement. Ainsi, considérer que la charge de la dernière année de développement connue correspond à la charge ultime peut conduire à sous-estimer celle-ci.

Il peut donc être nécessaire de rajouter un facteur de développement (tail factor) à notre triangle en nous basant sur les facteurs de développements que nous avons calculés précédemment par la méthode de Chain-Ladder. Une des méthodes la plus souvent utilisée consiste à extrapoler nos facteurs de développement à l'aide d'une fonction exponentielle inverse, autrement dit nous cherchons les paramètres  $a$  et  $b$  tels que

$$\ln(\hat{f}_j^{CL} - 1) = a - bj \text{ soit } \hat{f}_j^{CL} = e^{a-bj} + 1 \text{ pour } j = 0, \dots, n - 1$$

Le facteur de développement à l'ultime :  $\hat{f}_{ultime}^{CL}$  est ensuite obtenu par

$$\hat{f}_{ultime}^{CL} = \prod_{j=n}^{\infty} \hat{f}_j^{CL} \text{ on en déduit : } \hat{C}_{i,ultime}^{CL} = \hat{f}_{ultime}^{CL} \hat{C}_{i,n}^{CL}$$

Il faut cependant que ce facteur de développement soit plausible et en concordance avec l'expérience acquise sur le développement des sinistres. Nous choisissons de manière arbitraire comme horizon ultime l'année pour laquelle l'un des coefficients extrapolés est inférieur ou égal à 1,0001.

Nous trouvons  $a = -0,7182$  ,  $b = 0,2163$  pour le triangle brut ,  $a = -0,07783$  ,  $b = 0,214$  pour le triangle net et la nécessité de considérer 42 années de développements .

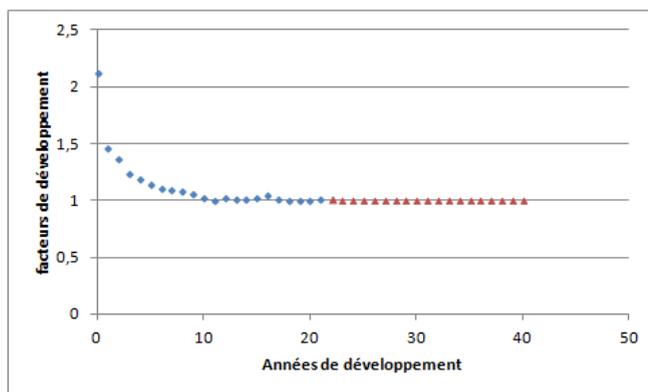


FIGURE 4.13 – Facteurs de développement  $(\hat{f}_j^{CL})_{j=0,\dots,21}$  (en bleu) et leur extrapolation (rouge) pour  $j = 22, \dots, 40$  pour le triangle brut de réassurance

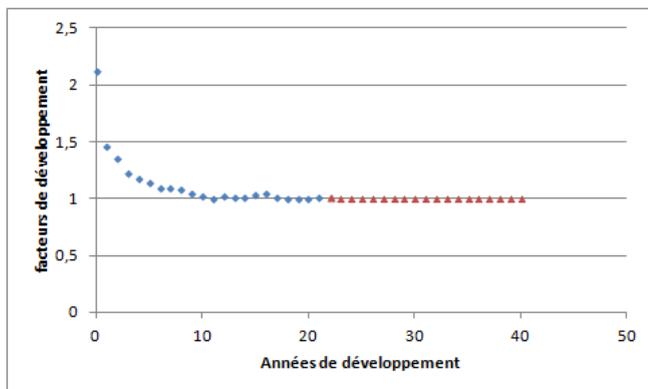


FIGURE 4.14 – Facteurs de développement  $(\hat{f}_j^{CL})_{j=0,\dots,21}$  (en bleu) et leur extrapolation (rouge) pour  $j = 22, \dots, 40$  pour le triangle net de réassurance

Remarquons une fois de plus que l’extrapolation des facteurs de développement donne le même horizon ultime dans le cas brut et net de réassurance, cela souligne une fois de plus la faible activation de la réassurance à travers des facteurs de développement extrêmement proches dans les deux cas..

Nous pouvons ainsi reconstituer nos courbes des paiements jusqu’au nouvel horizon ultime :

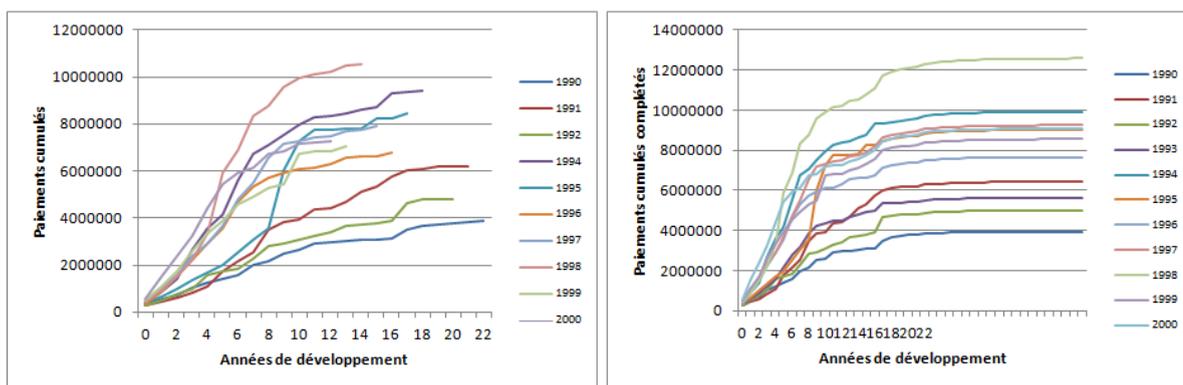


FIGURE 4.15 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d’origine de 1990 à 2000 en présence d’un facteur queue de développement pour le triangle brut de réassurance

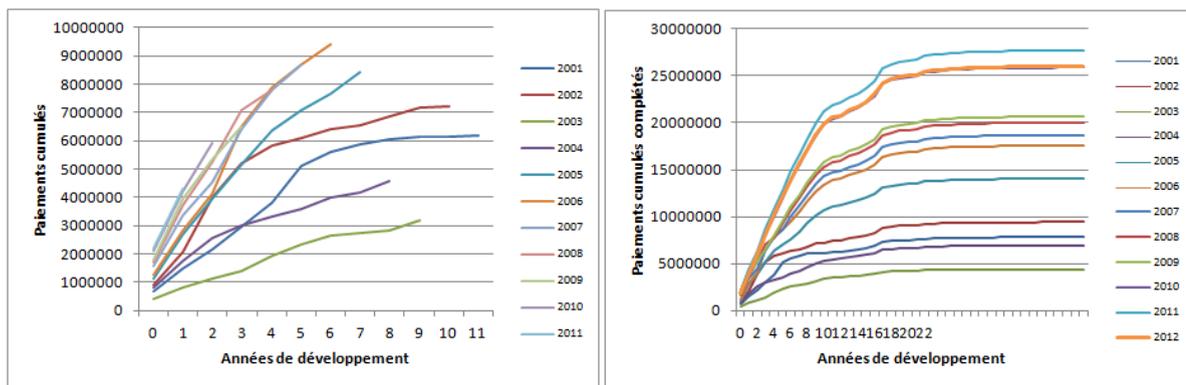


FIGURE 4.16 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d’origine de 2001 à 2012 en présence d’un facteur de queue de développement pour le triangle brut de réassurance

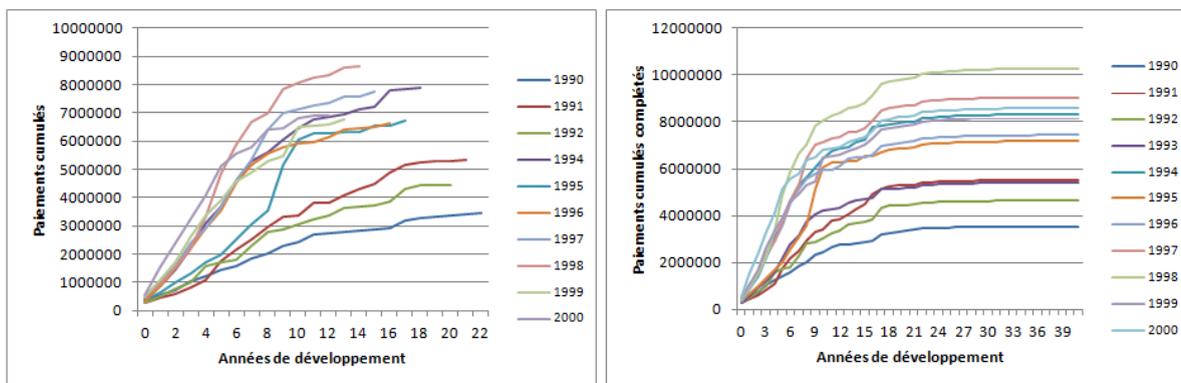


FIGURE 4.17 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d’origine de 1990 à 2000 en présence d’un facteur de queue de développement pour le triangle net de réassurance

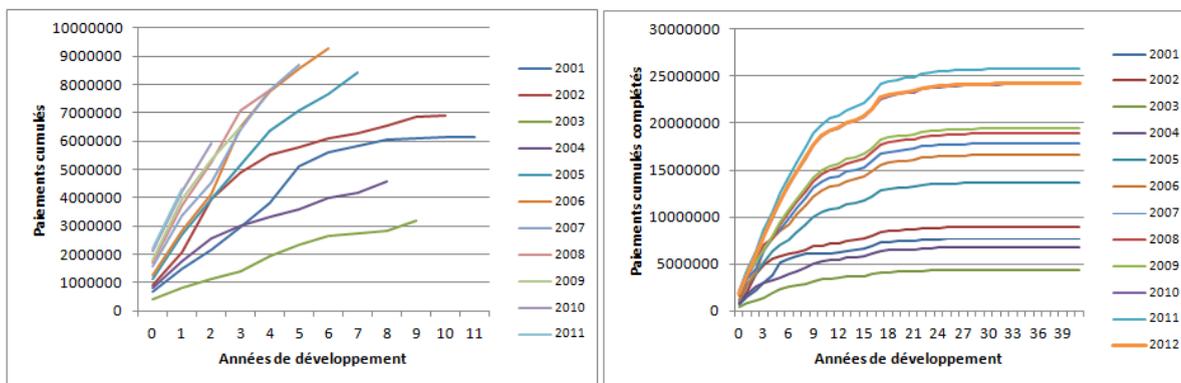


FIGURE 4.18 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de Chain-Ladder (droite) pour les années d’origine de 2001 à 2012 en présence d’un facteur de queue de développement pour le triangle net de réassurance

Ci-dessous les réserves obtenues :

	Réserve		Réserve
1990	82 418	2002	2 204 695
1991	223 345	2003	1 228 762
1992	490 601	2004	2 351 638
1993	243 754	2005	5 635 211
1994	514 925	2006	8 131 956
1995	592 103	2007	9 962 213
1996	885 073	2008	12 207 846
1997	1 333 420	2009	14 161 774
1998	2 059 623	2010	19 963 469
1999	1 524 789	2011	23 377 870
2000	1 827 364	2012	24 092 701
2001	1 642 086	TOTAL	134 737 638

FIGURE 4.19 – Réserves relatives à la méthode de Chain Ladder en présence d’un facteur de queue de développement pour le triangle brut de réassurance

Réserve		Réserve	
1990	73 701	2002	2 064 337
1991	200 573	2003	1 179 637
1992	187 101	2004	2 231 044
1993	247 922	2005	5 300 293
1994	440 887	2006	7 396 013
1995	463 356	2007	9 183 195
1996	824 016	2008	11 162 558
1997	1 291 500	2009	13 002 349
1998	1 632 547	2010	18 253 407
1999	1 401 076	2011	21 530 776
2000	1 689 625	2012	22 357 828
2001	1 601 677	TOTAL	123 715 418

FIGURE 4.20 – Réserves relatives à la méthode de Chain Ladder en présence d'un facteur de queue de développement pour le triangle net de réassurance

Nous obtenons alors une réserve à l'ultime de 134,74 millions d'euros pour le triangle brut de réassurance (soit une variation de 4,66 % par rapport au cas sans tail factor), et de 123,72 millions d'euros pour le triangle net de réassurance, (soit une variation de 4,72 % par rapport au cas sans tail factor).

Remarquons qu'il est parfois possible de substituer aux coefficients de Chain-Ladder leur extrapolation afin par exemple de lisser ceux-ci quand certains présentent des valeurs extrêmes.

#### 4.1.2 La méthode de London-Chain

Introduite par Benjamin et Eagles en 1986 pour le calcul des réserves au Lloyd's of London (marché de l'assurance Britannique créée en 1688).

##### Hypothèses London-Chain :

Cette méthode repose sur les hypothèses de Chain-Ladder mais suppose une relation moins contraignante entre les différents états  $C_{i,j}$  et  $C_{i,j+1}$  selon laquelle  $C_{i,j+1}$  est une fonction affine de  $C_{i,j}$ .

Autrement dit, cette méthode suppose l'existence, pour  $j$  fixé, de paramètres  $f_j$  et  $a_j$  tels que :

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j} + a_j \quad i = 0, \dots, n - j - 1$$

Si cette relation est vérifiée, les points  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=0, \dots, n-j-1}$  doivent être sensiblement alignés ; le couple de paramètres  $(f_j, a_j)$  est déterminé par la méthode des moindres carrés, soit donc en minimisant :

$$\Delta_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} (C_{i,j+1} - a_j - f_j C_{i,j})^2$$

En annulant simultanément les dérivées partielles  $\frac{\partial \Delta_j}{\partial f_j}$  et  $\frac{\partial \Delta_j}{\partial a_j}$  nous obtenons les estimateurs suivants :

$$\hat{f}_j^{LC} = \frac{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} C_{i,j+1} - \bar{C}_j \bar{C}_{j+1}}{\frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}^2 - \bar{C}_j^2} \quad \text{et} \quad \hat{a}_j^{LC} = \bar{C}_{j+1} - \hat{f}_j^{LC} \bar{C}_j$$

où

$$\bar{C}_j = \frac{1}{n-j} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j} \quad \text{et} \quad \bar{C}_{j+1} = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}$$

*Remarque :*

Notons que :

$$\hat{f}_j^{LC} = \frac{\text{covariance}(\text{colonne}_j, \text{colonne}_{j+1})}{\text{variance}(\text{colonne}_j)}$$

### London-Chain vs Chain-Ladder

Contrairement à la méthode de Chain-Ladder, la méthode de London-Chain introduit en plus un facteur additif entre les états  $C_{i,j+1}$  et  $C_{i,j}$ .

Ainsi celle-ci ne nécessite qu'un alignement de ces points à  $j$  fixé sur une droite mais relâche l'hypothèse d'alignement à l'origine. En posant ce coefficient additif à 0 nous retombons, à  $j$  fixé, sur la relation de Chain-Ladder  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$   $i = 0, \dots, n - j - 1$

Dès lors, nous pouvons remarquer que le problème de la nullité du dernier paiement connu qui menait obligatoirement à une charge finale nulle est résolu par cette méthode.

Les hypothèses du modèle ont toutes été vérifiées avec l'exemple de la méthode de Chain-Ladder, il reste à vérifier la significativité des paramètres additifs  $(a_j)_{j=0, \dots, n-1}$  par la mise en application d'un test statistique.

En guide d'aperçu, nous commençons par superposer les droites de régression pour les années de développements considérées dans la méthode de Chain-Ladder non contrainte (pour London-Chain de la forme  $y = ax + b$ ) et contrainte (pour Chain-Ladder de la forme  $y=ax$ ), nous obtenons les graphiques suivants :

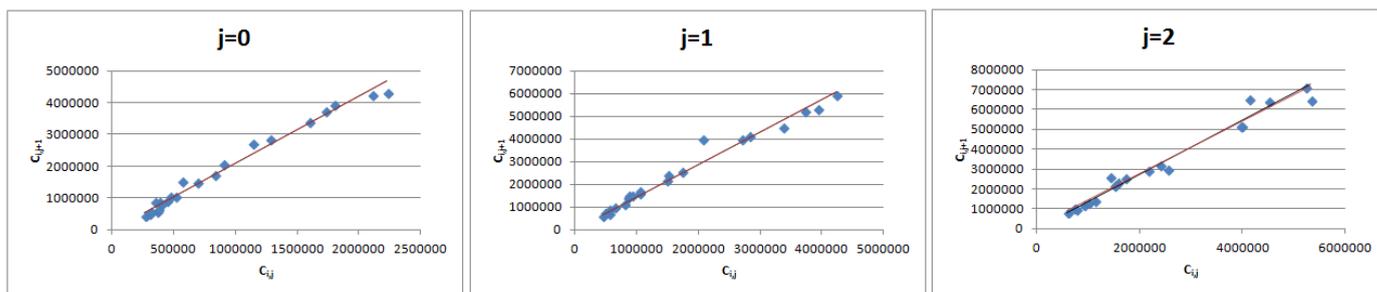


FIGURE 4.21 – Régression linéaire et affine des points  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})_{j=0,1,2}$  pour le triangle brut de réassurance

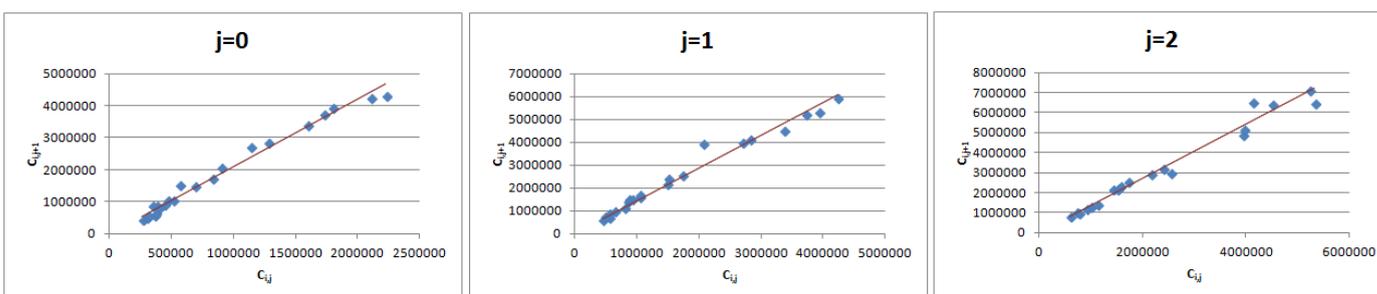


FIGURE 4.22 – Régression linéaire et affine des points  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})_{j=0,1,2}$  pour le triangle net de réassurance

Nous remarquons que les pentes sont quasiment les mêmes, de ce fait nous ne pouvons pas déduire par ces graphes quelle est l'hypothèse la plus semblable entre l'alignement sur une droite passant par l'origine et l'alignement sur une droite dont l'ordonnée à l'origine n'est pas forcément nulle .

Nous proposons alors le test suivant pour déterminer la significativité des paramètres additifs :

$$\begin{cases} H_0 : a_j = 0 \\ H_1 : a_j \neq 0 \end{cases}$$

Nous supposons la normalité des résidus  $\epsilon_j$  relatifs à la régression linéaire sans contraintes des  $(C_{i,j+1})_{i=0, \dots, n-j-1}$  sur  $(C_{i,j})_{i=0, \dots, n-j-1} \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$  nous pouvons alors montrer que l'estimateur  $\hat{a}_j^{LC}$  suit une loi normale

$\mathcal{N}\left(a_j, \frac{\sigma_j^2}{n-j} + \frac{\sigma_j^2 \bar{C}_j^2}{(n-j-1)S_{C_j}^2}\right)$  où  $\sigma_j^2$  est la variance de  $\epsilon_j$  et  $S_{C_j}^2$  est un estimateur sans biais de  $C_j$ .

Définissons la statistique de test :

$$T_j = \frac{\hat{a}_j^{LC} - a_j}{S_{\epsilon_j} \sqrt{\frac{1}{n-j} + \frac{\bar{C}_j^2}{(n-j-1)S_{C_j}^2}}}$$

où  $S_{\epsilon_j}$  est un estimateur sans biais de  $\sigma_j^2$ .

Sous les hypothèses précédentes  $T_j \sim t_{n-j-2}$ , ce qui nous permet de construire une zone de rejet de l'hypothèse nulle  $H_0$  pour un niveau de confiance que nous choisissons à 95 %. Nous pourrions alors valider la significativité de nos coefficients additifs si les p-valeurs associées aux test sont inférieures à 5 %. Nous obtenons donc les estimateurs suivant par la méthode de London-Chain :

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_j^{LC}$	2,074	1,364	1,318	1,122	1,056	1,049	1,077	0,992	0,973	1,026	0,997
$a_j$	2,074	1,364	1,318	1,122	1,056	1,049	1,077	0,992	0,973	1,026	0,997

j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f_j^{LC}$	0,997	0,999	0,984	1,032	1,042	0,921	0,983	1,004	0,979	1,001	1,014
$a_j$	0,997	0,999	0,984	1,032	1,042	0,921	0,983	1,004	0,979	1,001	1,014

FIGURE 4.23 – Estimation des paramètres par la méthode de London-Chain pour le triangle brut de réassurance

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_j^{LC}$	2,074	1,364	1,318	1,115	1,061	1,045	1,041	1,023	0,988	1,015	0,975
$a_j^{LC}$	42841,927	182110,241	103843,295	361938,239	431521,860	385945,833	254123,987	319979,560	468017,686	212416,629	302821,648

j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f_j^{LC}$	0,997	1,007	0,989	1,016	1,051	0,935	0,991	0,988	0,971	1,001	1,016
$a_j^{LC}$	82570,416	141403,933	145896,363	16374,827	-70504,792	602284,762	111276,173	88974,819	152398,539	11573,795	0,000

FIGURE 4.24 – Estimation des paramètres par la méthode de London-Chain pour le triangle net de réassurance

Cependant, la mise en application de notre test statistique au seuil de 95% que nous nous étions fixé indique que seuls trois coefficients s'avèrent être significatifs pour les triangles brut et net.

Le modèle de London-Chain ne semble donc pas être le plus adapté à nos données.

	$\hat{a}_0^{LC}$	$\hat{a}_1^{LC}$	$\hat{a}_2^{LC}$	$\hat{a}_3^{LC}$	$\hat{a}_4^{LC}$	$\hat{a}_5^{LC}$	$\hat{a}_6^{LC}$	$\hat{a}_7^{LC}$	$\hat{a}_8^{LC}$	$\hat{a}_9^{LC}$	$\hat{a}_{10}^{LC}$
significativité	non	non	non	oui	non	non	non	oui	non	non	non

	$\hat{a}_{12}^{LC}$	$\hat{a}_{13}^{LC}$	$\hat{a}_{14}^{LC}$	$\hat{a}_{15}^{LC}$	$\hat{a}_{16}^{LC}$	$\hat{a}_{17}^{LC}$	$\hat{a}_{18}^{LC}$	$\hat{a}_{19}^{LC}$	$\hat{a}_{20}^{LC}$	$\hat{a}_{21}^{LC}$
significativité	non	non	non	oui	non	non	non	oui	non	non

Ce résultat nous indique que les paiements cumulés bruts et nets de réassurance d'une année de développement à l'autre ont une relation plutôt linéaire qu'affine. Nous décidons néanmoins d'appliquer ce modèle à notre triangle à titre de comparaison avec la méthode de Chain-Ladder qui semblait plus adaptée.

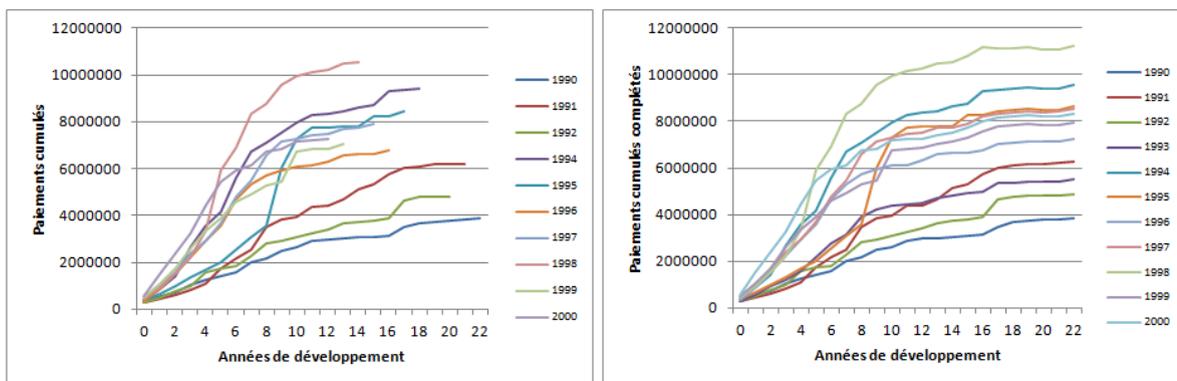


FIGURE 4.25 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de London-Chain (droite) pour les années d’origine de 1990 à 2000 pour le triangle brut de réassurance

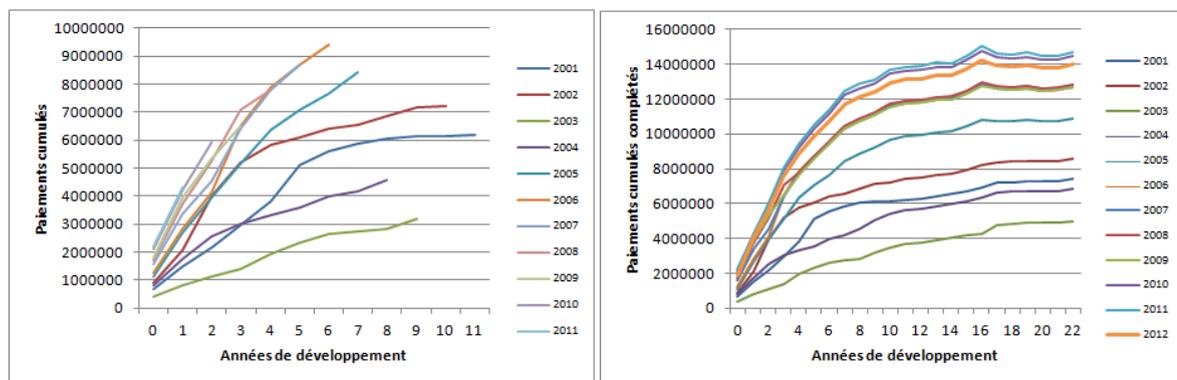


FIGURE 4.26 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de London-Chain(droite) pour les années d’origine de 2001 à 2012 pour le triangle brut de réassurance

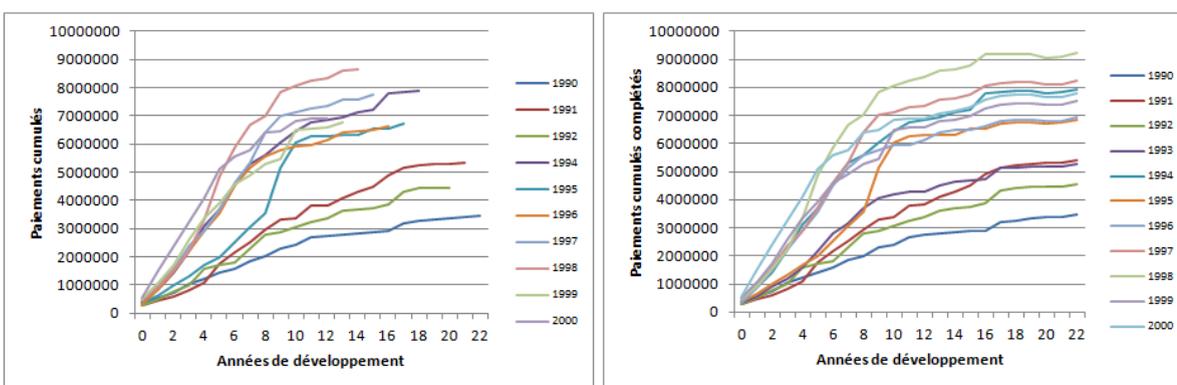


FIGURE 4.27 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de London-Chain (droite) pour les années d’origine de 1990 à 2000 pour le triangle net de réassurance

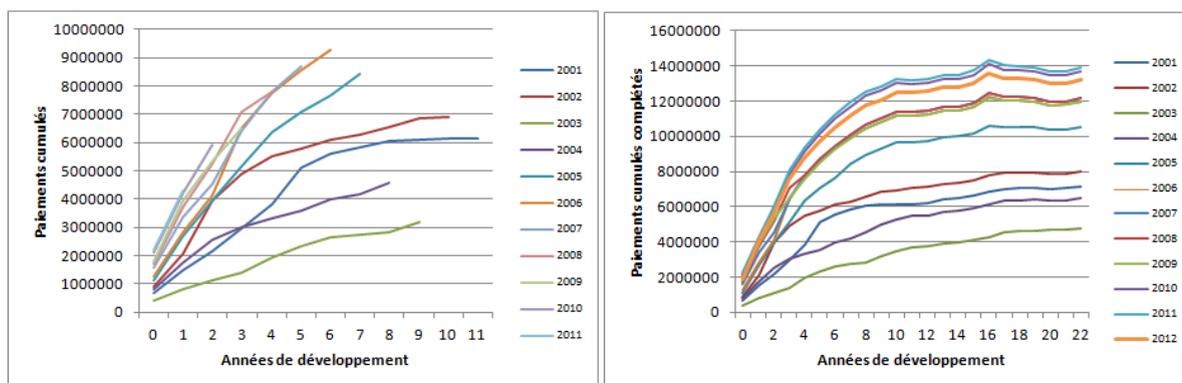


FIGURE 4.28 – Courbes des cumuls de paiements pour le triangle de départ (gauche) puis complété par la méthode de London-Chain(droite) pour les années d’origine de 2001 à 2012 pour le triangle net de réassurance

Nous en déduisons les réserves suivantes :

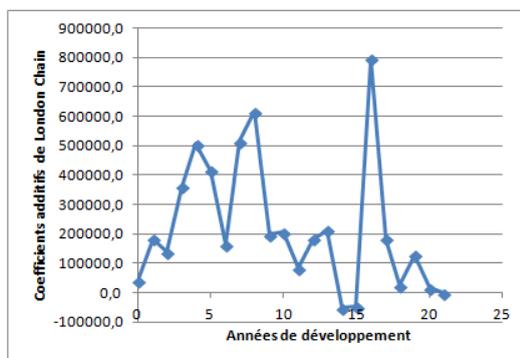
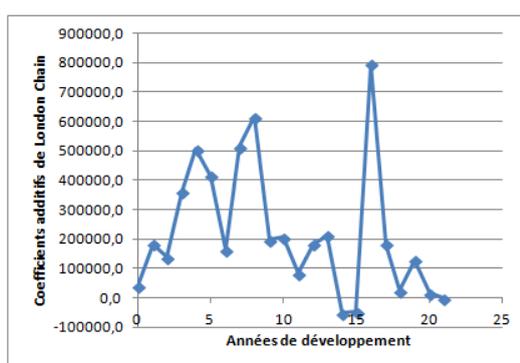
	Reserve		Reserve
1990	-	2002	1 342 706
1991	88 936	2003	1 811 948
1992	87 583	2004	2 256 227
1993	111 691	2005	2 488 457
1994	149 202	2006	3 270 800
1995	190 776	2007	4 111 055
1996	479 418	2008	5 051 967
1997	625 557	2009	6 186 141
1998	741 852	2010	8 574 113
1999	938 913	2011	10 413 481
2000	1 100 774	2012	12 102 196
2001	1 213 312	<b>TOTAL</b>	<b>63 337 106</b>

FIGURE 4.29 – Réserves relatives à la méthode de London-Chain pour le triangle brut de réassurance

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	1 087 869
1991	85 297	2003	1 576 153
1992	89 833	2004	1 894 193
1993	103 773	2005	2 130 973
1994	64 268	2006	2 706 484
1995	139 481	2007	3 479 871
1996	306 615	2008	4 385 817
1997	490 472	2009	5 474 481
1998	594 855	2010	7 784 076
1999	728 251	2011	9 614 024
2000	900 869	2012	11 317 804
2001	992 863	<b>TOTAL</b>	<b>55 948 323</b>

FIGURE 4.30 – Réserves relatives à la méthode de London-Chain pour le triangle net de réassurance

Nous constatons que les réserves diminuent fortement par rapport aux résultats obtenus par la méthode de Chain-Ladder (50,7 % pour le triangle brut et 52,6% pour le triangle net), il est cependant assez difficile d’interpréter ce résultat en effet, les paramètres additifs n’étant, pour la plupart pas significatifs. D’autre part, ici aussi nous pourrions envisager de rajouter un facteur de queue de développement cependant, la projection des futurs facteurs multiplicatifs supposerait aussi le besoin de projeter dans le futur les coefficients additifs or, comme nous pouvons le voir ci-après, ceux-ci ne présentent aucune évolution logique apparente.


 FIGURE 4.31 – Facteurs de développement additifs  $(\hat{a}_j^{LC})_{j=0,\dots,21}$  pour le triangle brut de réassurance

 FIGURE 4.32 – Facteurs de développement additifs  $(\hat{a}_j^{LC})_{j=0,\dots,21}$  pour le triangle net de réassurance

## 4.2 Méthodes basées sur des ratios

Il s'agit de méthodes utilisables lorsque nous détenons en plus du triangle des paiements cumulés de l'assureur une information complémentaire sous la forme d'un indicateur d'exposition au risque ou de sinistralité pour toute année d'origine  $i = 0, \dots, n$  sur la branche considérée que nous noterons  $P_i$  par la suite. Cet indicateur peut être de différentes natures :

- un montant de primes, émises ou acquises
- un nombre de sinistres, déclarés ou réglés, dès lors que la définition d'un sinistre est constante sur toutes les années d'origines
- un nombre de contrats, ...

Dans notre cas l'indicateur pris en compte sera la prime perçue par année d'origine par l'assureur avant et après cession de sa part au réassureur.

*Remarque :*

Nous ne disposons pas du détail concernant le développement des primes reçues par l'assureur, autrement dit dans le montant des primes considérées pour l'année 1990 par exemple il y a aussi bien les primes perçues par l'assureur lors de l'année 1990, que celle reçues les années suivantes correspondantes à des contrats souscrits en cours d'année ou encore pour des remises des paiements ( en général l'ensemble des primes sont perçues après au maximum quatre années de développements).

De plus, la majorité de la prime est souvent perçue la première année.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$$L_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{P_i} \quad i, j = 0, \dots, n$$

$$L_i = \frac{C_{i,n}}{P_i} \quad i = 0, \dots, n \quad \text{pour le loss ratio à l'ultime.}$$

Remarque :

$L_{i,n-i} = \frac{C_{i,n-i}}{P_i}$  s'interprète comme la part de primes perçues par l'assureur pour l'année d'origine  $i$  consommée au 31/12/ $n$ .

$L_i$  est le loss ratio ou ratio sinistres à primes de l'année  $i$ , ratio qui est largement utilisé en assurance non vie.

Ci-dessous le tableau des primes perçues de 1990 à 2012 nettes de réassurance :

	primes reçues	primes cédées	primes nettes
1990	5 552 860	1 241 064	4 311 796
1991	6 004 095	651 444	5 352 651
1992	6 722 680	744 995	5 977 685
1993	7 623 275	625 501	6 997 774
1994	8 471 869	1 546 116	6 925 753
1995	8 737 665	1 603 077	7 134 588
1996	9 810 037	1 466 600	8 343 437
1997	10 722 927	1 306 280	9 416 647
1998	11 555 264	1 346 188	10 209 076
1999	12 469 262	1 335 458	11 133 804
2000	13 299 300	1 305 991	11 993 309
2001	14 249 769	1 410 663	12 839 106

	primes reçues	primes cédées	primes nettes
2002	15 649 301	2 190 902	13 458 399
2003	18 272 698	2 787 585	15 485 113
2004	20 200 000	3 939 000	16 261 000
2005	27 666 000	5 311 872	22 354 128
2006	27 500 000	6 626 250	20 873 750
2007	29 100 000	5 063 400	24 036 600
2008	31 408 000	5 841 888	25 566 112
2009	32 168 132	6 185 200	25 982 932
2010	34 257 500	6 046 449	28 211 051
2011	37 309 193	3 917 465	33 391 728
2012	40 255 000	3 944 990	36 310 010

FIGURE 4.33 – Primes acquises nettes de réassurances de 1990 à 2012

Comme précisé précédemment, les primes acquises se présentent généralement sous forme de triangles avec le détail par année d'origine et année de développement et leur valeur à l'ultime sont estimées à partir de méthodes telles que la méthode Chain-Ladder standard.

Ne disposant pas de ce détail nous considérerons que le montant des primes est constant pour toutes les années de développements par années d'origines autrement dit pour  $i = 0, \dots, n$  on a  $P_{i,j} = P_i \quad \forall j = 0, \dots, n$ . De plus, comme nous l'avons dit il faut en général au maximum quatre années de développements pour que l'ensemble des primes pour une année d'origine soient perçues par l'assureur et admettons donc une erreur faible mais probable pour les primes perçues pour les années 2010, 2011 et 2012.

#### 4.2.1 La méthode du Loss ratio simple

Cette méthode parmi les plus rudimentaires repose sur l'hypothèse que les loss ratios ultimes sont constants sur toutes les années d'origines.

$L_0$  étant le seul connu, nous écrivons donc :

$$\hat{L}_i = L_0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

De ce résultat nous déduisons  $\hat{C}_{i,n} = P_i * L_0$  puis que  $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$

##### Validation du modèle :

Cette méthode présente l'avantage d'être d'une grande simplicité à mettre en œuvre mais cependant il est évident que celle-ci ne peut-être opérationnelle que sur des branches totalement stable.

Avant même de présenter les résultats de cette méthode nous voulons tester l'hypothèse  $\hat{L}_i = L_0$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Pour cela nous estimons nos  $\hat{C}_{i,n}$  pour  $i = 1, \dots, n$  à l'aide de la méthode de Chain-Ladder Standard que nous considérons comme relativement "fiable" sur nos données.

Ci-dessous l'évolution des  $\hat{L}_i$  en fonction de  $L_0$  pour  $i = 1, \dots, n$  (dans le cas brut les primes utilisées sont celles brutes de réassurance, dans le cas net ce sont les primes après cession de sa part au réassureur) :

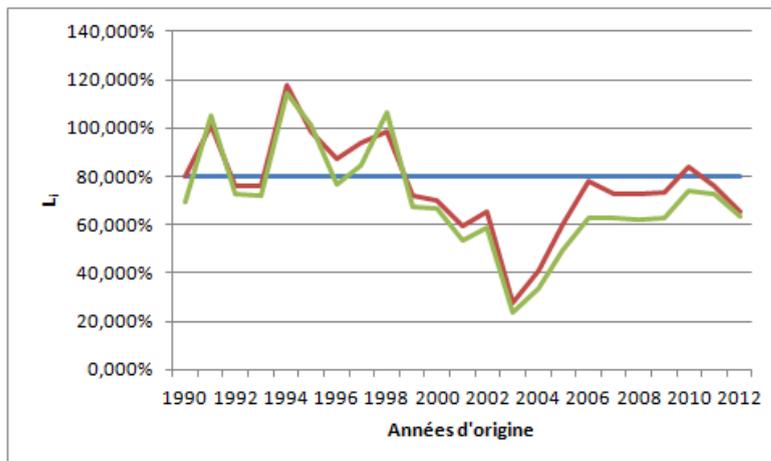


FIGURE 4.34 – Loss Ratios Ultimes des années 1990 à 2012 estimés par Chain-Ladder pour le triangle brut (vert) et le triangle net (rouge)

Clairement l'hypothèse de stabilité des loss ratios n'est pas respectée, nous décidons de ne pas appliquer ce modèle à nos données car les résultats n'auraient aucune fiabilité.

#### 4.2.2 La méthode Loss ratio complémentaire

Dans cette méthode, nous supposons que les loss ratios  $(L_i)_{i=0, \dots, n}$  sont sensiblement constants soit donc  $L_i = L$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

Cette valeur commune  $L$  est un paramètre que nous devons estimer. Sous cette hypothèse on a  $\frac{C_{i,n}}{P_i} \sim L$  pour tout  $i$  d'où

$$\frac{\sum_{i=0}^n C_{i,n}}{\sum_{i=0}^n P_i} \sim L$$

Afin de déterminer  $L$ , nous commençons par déterminer un loss ratio partiel à la fin de chaque délai de règlement :

$$L^{(j)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j} P_i}$$

L'analyse de la suite des  $L^{(j)}$  nous conduit, par extrapolation à une estimation du loss ratio final commun  $L$ .

#### Validation du modèle :

Bien que plus sophistiquée que la méthode du Loss ratio simple, cette méthode s'appuie fondamentalement sur la stabilité des loss ratios qui n'est pas vérifiée dans notre cas. Nous décidons tout de même d'appliquer cette méthode à titre de comparaison avec la méthode de Chain Ladder; nous calculons donc les composantes de la suite  $L_{j=0, \dots, n}^{(j)}$ .

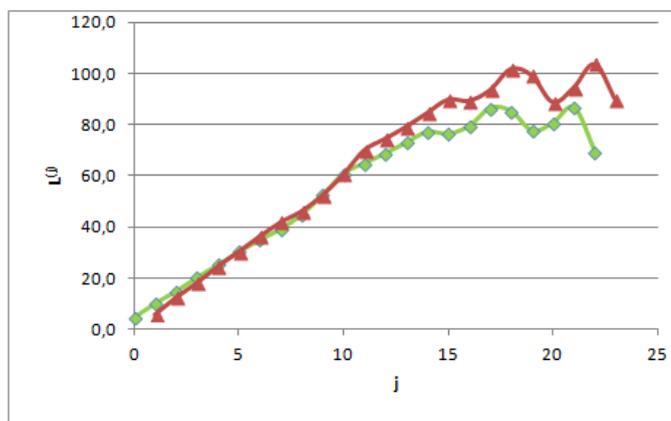


FIGURE 4.35 – Courbe des composantes de la suite  $(L^{(j)})_{j=0,\dots,22}$  pour le triangle brut (vert) et le triangle net (rouge)

L'absence de convergence de cette suite remet en cause l'hypothèse de stabilité des  $L_i$  ce que nous attendions, nous décidons cependant d'appliquer cette méthode pour illustrer à quel point le choix du modèle peut s'avérer crucial.

Nous mettons en place une régression linéaire sur  $(j, L^{(j)})_{j=0,\dots,22}$

Nous en déduisons la valeur prévue en  $j=22$  :  $\hat{L}^{(22)}$  égale à  $\hat{L} = 113,62\%$  pour le triangle brut et  $\hat{L} = 109,17\%$  pour le triangle net, de cette valeur nous déduisons les charges ultimes :  $\hat{C}_{i,n} = \hat{L} * P_i$  et les provisions  $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}$  pour  $i = 1, \dots, n$

Ci-dessous les réserves que nous obtenons par cette méthode :

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	7 850 538
1991	-425 159	2003	14 400 892
1992	1 669 930	2004	14 866 847
1993	1 951 149	2005	18 231 251
1994	-1 239 573	2006	17 052 506
1995	-17 403	2007	19 318 191
1996	2 667 187	2008	22 447 351
1997	2 413 156	2009	24 476 945
1998	611 942	2010	27 075 690
1999	4 977 499	2011	31 626 176
2000	5 556 903	2012	36 858 824
2001	7 540 264	TOTAL	259 911 105

FIGURE 4.36 – Réserves relatives à la méthode du Loss ratio complémentaire pour le triangle brut

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	7 474 393
1991	-363 009	2003	13 711 259
1992	1 722 506	2004	13 168 493
1993	2 250 164	2005	15 995 784
1994	-1 836 257	2006	13 360 810
1995	-642 036	2007	17 538 664
1996	2 329 658	2008	20 115 244
1997	2 368 218	2009	21 867 961
1998	630 639	2010	24 887 277
1999	5 125 629	2011	32 154 926
2000	5 844 106	2012	37 736 935
2001	7 835 618	TOTAL	243 276 985

FIGURE 4.37 – Réserves relatives à la méthode du Loss ratio complémentaire pour le triangle net

Nous observons donc que par rapport à la méthode de référence Chain-Ladder les réserves ont doublé avec de plus, l'apparition de provisions négatives. Nous n'accorderons donc pas beaucoup d'importance à cette

méthode , cependant elle illustre à quelle point le choix de la méthode est important en provisionnement.

### 4.2.3 La méthode Cape Cod (Bühlmann-Stanard)

Cette méthode fut imaginée lors d'un colloque actuariel se tenant près du cap célèbre des Etats-Unis. Elle demande une segmentation à priori de l'ensemble des années d'origine en groupe d'années "semblables" auxquelles nous attribuerons le même loss ratio ainsi qu'un vecteur de cadences de règlements, celle-ci peut-être considérée comme une évolution de la méthode de Chain-Ladder et des méthodes de ratios présentées précédemment.

A l'aide de la cadence cumulée en  $(n - i + 1)$  ième année  $cr_{n-i} = \frac{C_{i,n-i}}{\hat{C}_{i,n}}$ , on écrit :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i} + (1 - cr_{n-i})\hat{C}_{i,n}$$

Du loss ratio de la  $i^{\text{ième}}$  année d'origine  $L_i = \frac{\hat{C}_{i,n}}{P_i}$ , on déduit l'égalité suivante :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i} + (1 - cr_{n-i})L_i P_i$$

Soit alors  $cr = (cr_0, cr_1, \dots, cr_{n-1})$  un vecteur de cadences cumulées provenant de la méthode de Chain-Ladder avec pour l'exercice  $k$  :  $cr_{n-k} = \frac{C_{k,n-k}}{C_{k,n}}$  et loss ratio  $L_k = \frac{C_{k,n-k}}{cr_{n-k}P_k}$ .

Nous définissons le loss ratio  $L_A$  comme le loss ratio associé à un groupe  $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$  d'années d'origine "semblables" par :

$$L_A = \frac{\sum_{k \in A} C_{k,n-k}}{\sum_{k \in A} cr_{n-k} P_k}$$

Soit donc pour  $i$  fixé dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $A_i$  le groupe d'appartenance de l'année d'origine  $i$  et  $L_{A_i}$  le coefficient associé. On en déduit la provision associée pour l'année  $i$  :

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} = (1 - rc_{n-i})L_{A_i} P_i$$

#### Validation du modèle

Cette méthode peut être considérée comme une extension des méthodes de Chain-Ladder et des méthodes de ratios dans le sens où , bien que se basant sur les cadences de règlements elle nécessite aussi une information exogène au triangle (dans notre cas les primes perçues  $P_i$  par l'assureur avant et après cession). Par construction, elle est évidemment sensible au choix des groupes d'années d'origine *semblables* comme nous le verrons par la suite.

Ce choix peut être motivé par l'expérience de l'actuaire ou encore à l'aide du graphique des loss ratios ultimes du triangle considéré.

Il est à noter également que contrairement aux méthodes présentées jusqu'ici celle-ci ne peut donner que des provisions positives.

#### 4.2.3.1 Choix des groupes d'années d'origine

Remarque :

Dans un premier temps si nous prenons  $A_i = \{i\}$  pour  $i = (0, \dots, n)$  nous avons le coefficient associé

$$L_{A_i} = \frac{C_{i,n-i}}{rc_{n-i}P_i} = \frac{C_{i,n-i} \cdot \hat{C}_{i,n}}{C_{i,n-i} \cdot P_i} = \frac{\hat{C}_{i,n}}{P_i}$$

De cela nous en déduisons les provisions  $\hat{R}_i = (1 - cr_{n-i})L_{A_i} P_i = \left(\frac{\hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i}}{\hat{C}_{i,n}}\right) \frac{\hat{C}_{i,n}}{P_i} P_i = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i} = \hat{R}_i^{CL}$  donc nous retombons exactement sur la méthode de Chain-Ladder.

Dans un second temps temps, en se basant uniquement sur le graphique 4.34 des loss ratios ultimes obtenus par la méthode de Chain-Ladder il est difficile de dégager clairement différentes catégories d'années d'origine. Nous décidons alors de tracer le histogramme de nos loss ratios en faisant apparaître différents quantiles de manière à avoir une idée plus claire de la répartition de ceux-ci.

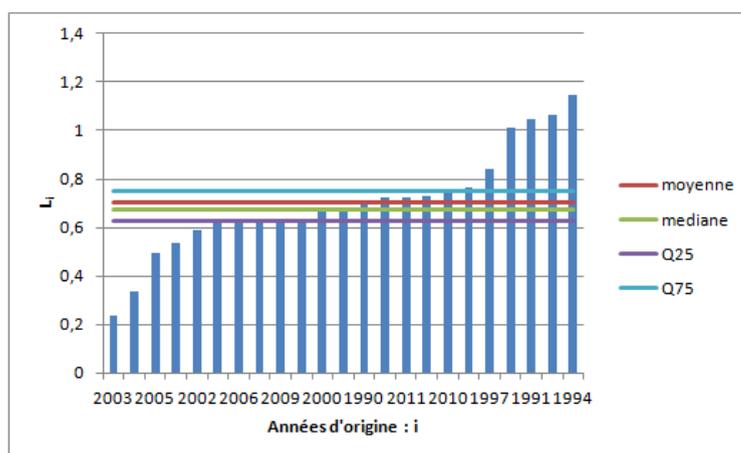


FIGURE 4.38 – Répartition des Loss ratios en fonction des années d’origine pour le triangle brut

Une première segmentation serait de considérer 2 classes homogènes, en notant  $Q_x$  le quantile à  $x\%$  des loss ratios ultimes obtenus par la méthode de Chain-Ladder de 1990 à 2012, nous obtenons 2 catégories d’années d’origine "semblables"  $(A_k)_{k=1,\dots,2}$  définies par :

Pour le triangle brut :

- $A_1 = [Q_0; Q_{50}] = [0, 237; 0, 671]$  et  $L_{A_1} = 0, 543$
- $A_2 = ]Q_{50}; Q_{100}] = ]0, 671; 1, 145]$  et  $L_{A_2} = 0, 874$

Ainsi, à  $i$  et  $k$  fixés, une année d’origine  $i$  appartiendra à la classe  $A_k$  si  $\frac{\hat{C}_{i,n}}{P_i} \in A_k$ .

Une "bonne" segmentation se caractérise par une faible variance intra-classe et une forte variance inter-classes.

Introduisons alors les variables  $V_{A_k}$  et  $V$  correspondantes respectivement à la variance de la classe  $A_k$  et la variance inter-classes.

Pour cette segmentation nous obtenons :

- $V_{A_1} = 0, 019$
- $V_{A_2} = 0, 029$
- $V = 0, 047$

Nous comparons ensuite les résultats obtenus avec ceux de la méthode de Chain-Ladder :

	Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain-Ladder)		Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain-Ladder)
1990	-	-	2002	1 850 814	2 007 725
1991	74 148	88 936	2003	2 606 223	1 136 323
1992	104 551	86 999	2004	3 567 699	2 206 673
1993	152 252	126 003	2005	5 841 140	5 341 658
1994	234 829	307 723	2006	6 750 087	7 764 908
1995	348 860	403 487	2007	8 283 792	9 572 062
1996	828 436	724 868	2008	10 275 142	11 789 709
1997	1 180 686	1 140 156	2009	11 866 386	13 729 919
1998	1 474 238	1 796 771	2010	22 960 317	19 422 601
1999	1 089 072	1 345 982	2011	27 441 484	22 799 326
2000	1 331 920	1 637 637	2012	20 241 654	23 549 307
2001	1 494 953	1 478 562	<b>TOTAL</b>	<b>129 998 682</b>	<b>128 457 335</b>

FIGURE 4.39 – Réserves relatives à la méthode de Cape Cod comparées à celle de Chain-Ladder pour le triangle brut de réassurance

Nous remarquons que nos réserves sont extrêmement proches de celles calculées grâce à la méthode de Chain-Ladder (+1,7%). Nous décidons ensuite d'affiner nos classes et prenons comme bornes de nos différentes catégories les quantiles à 0% (min), à 25%, à 50% (médiane), à 75% et à 100% (max), nous obtenons donc 4 catégories de classes "semblables" :

- $A_1 = [Q_0, Q_{25}] = [0, 237, 0, 624]$
- $A_2 = ]Q_{25}; Q_{50}] = ]0, 624, 0, 703]$
- $A_3 = ]Q_{50}; Q_{75}] = ]0, 703, 0, 752]$
- $A_4 = ]Q_{75}; Q_{100}] = ]0, 752, 1, 145]$

Pour cette discrétisation nous obtenons :

- $V_{A_1} = 0,023$
- $V_{A_2} = 0$
- $V_{A_3} = 0$
- $V_{A_4} = 0,021$
- $V = 0,046$

Les variances intra-classes sont inférieures pour la plupart à celles obtenues précédemment et la variance inter-classes reste quasi constante.

Nous obtenons les résultats suivants que nous comparons à ceux de Chain-Ladder standard :

	Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain-Ladder)
1990	-	-
1991	82 598	88 936
1992	86 576	86 999
1993	126 075	126 003
1994	261 589	307 723
1995	388 614	403 487
1996	922 840	724 868
1997	1 315 231	1 140 156
1998	1 642 234	1 796 771
1999	1 285 941	1 345 982
2000	1 572 687	1 637 637
2001	1 280 882	1 478 562

	Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain-Ladder)
2002	1 585 785	2 007 725
2003	2 233 022	1 136 323
2004	3 056 818	2 206 673
2005	5 004 710	5 341 658
2006	7 970 280	7 764 908
2007	9 781 228	9 572 062
2008	8 803 780	11 789 709
2009	14 011 436	13 729 919
2010	19 012 718	19 422 601
2011	22 723 432	22 799 326
2012	23 900 675	23 549 307
<b>TOTAL</b>	<b>127 049 147</b>	<b>128 457 335</b>

FIGURE 4.40 – Réserves relatives à la méthode de Cape Cod comparées à celle de Chain-Ladder pour le triangle brut de réassurance

Nous remarquons que les réserves obtenues sont, une fois de plus extrêmement proches de celles obtenues par Chain-Ladder (-1,1%), nous la considérons ainsi comme fiable, la méthode de Chain-Ladder étant retenue jusqu'à maintenant comme la méthode de référence. Nous constatons que l'estimation des réserves est légèrement plus proche de celle de la méthode de Chain-Ladder dans le cas où nous considérons quatre classes ce qui est cohérent avec notre choix de méthode de référence .

Nous suivons exactement le même protocole pour le triangle net de réassurance.

Nous considérons d'abord deux classes :

- $A_1 = [Q_0, Q_{50}] = [0, 276, 0, 757]$  et  $L_{A_1} = 0,717$
- $A_2 = ]Q_{50}; Q_{100}] = ]0, 757; 1, 118]$  et  $L_{A_2} = 0,900$

Pour cette segmentation nous obtenons :

- $V_{A_1} = 0,021$
- $V_{A_2} = 0,017$
- $V = 0,037$

Nous obtenons les résultats suivants que nous comparons à ceux de Chain-Ladder standard :

	Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain- Ladder)		Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain- Ladder)
1990	-	-	2002	1 771 967	1 876 566
1991	76 047	85 297	2003	2 430 304	1 088 284
1992	106 701	90 141	2004	3 143 291	2 088 692
1993	110 032	134 897	2005	5 156 317	5 013 925
1994	204 358	267 089	2006	8 111 297	7 047 776
1995	286 110	313 333	2007	7 466 562	8 809 571
1996	689 236	668 611	2008	9 156 731	10 766 528
1997	1 054 962	1 102 541	2009	10 583 788	12 594 994
1998	1 296 073	1 418 076	2010	19 045 080	17 748 614
1999	1 055 780	1 230 168	2011	24 941 991	20 991 194
2000	1 330 717	1 510 299	2012	20 624 798	21 851 029
2001	1 501 108	1 439 475	<b>TOTAL</b>	<b>120 143 250</b>	<b>118 137 102</b>

FIGURE 4.41 – Réserves relatives à la méthode de Cape Cod comparées à celle de Chain-Ladder pour le triangle net de réassurance

De même que dans le cas brut de réassurance nous obtenons des réserves estimées très proches de celles de Chain-Ladder (+1,7%).

Nous considérons ensuite quatre classes :

- $A_1 = [Q_0; Q_{25}] = [0, 276, 0, 677]$
- $A_2 = ]Q_{25}; Q_{50}] = ]0, 677, 0, 757]$
- $A_3 = ]Q_{50}; Q_{75}] = ]0, 757, 0, 856]$
- $A_4 = ]Q_{75}; Q_{100}] = ]0, 856, 1, 118]$

Pour cette segmentation nous obtenons :

- $V_{A_1} = 0,023$
- $V_{A_2} = 0$
- $V_{A_3} = 0,001$
- $V_{A_4} = 0,010$
- $V = 0,036$

Les variances intra-classes sont inférieures pour la plupart à celles obtenues précédemment et la variance reste quasi constante.

Nous obtenons les résultats suivants que nous comparons à ceux de Chain-Ladder standard :

	Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain- Ladder)		Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain- Ladder)
1990	-	-	2002	1 475 554	1 876 566
1991	83 614	85 297	2003	2 430 304	1 088 284
1992	93 449	90 141	2004	2 617 485	2 088 692
1993	129 403	134 897	2005	4 293 774	5 013 925
1994	224 694	267 089	2006	7 103 866	7 047 776
1995	314 581	313 333	2007	8 781 088	8 809 571
1996	757 823	668 611	2008	10 768 820	10 766 528
1997	1 159 943	1 102 541	2009	12 447 117	12 594 994
1998	1 425 047	1 418 076	2010	16 679 663	17 748 614
1999	1 241 655	1 230 168	2011	24 941 991	20 991 194
2000	1 564 997	1 510 299	2012	17 174 704	21 851 029
2001	1 250 004	1 439 475	<b>TOTAL</b>	<b>116 959 578</b>	<b>118 137 102</b>

FIGURE 4.42 – Réserves relatives à la méthode de Cape Cod comparées à celle de Chain-Ladder pour le triangle net de réassurance

Nous remarquons que les réserves obtenues sont, une fois de plus extrêmement proches de celles obtenues par Chain-Ladder (-0,99%).

Nous constatons de la même manière que précédemment que l'estimation des réserves est légèrement plus proche de celle de la méthode de Chain-Ladder dans le cas où l'on considère quatre classes ce qui est cohérent si l'on prend comme méthode à priori stable la méthode de Chain-Ladder vu que la variance intra-classe diminue et la variance inter-classe reste quasi-constante.

#### 4.2.3.2 Extrapolation des facteurs de développement

Comme nous l'avons vu, la méthode de Cape Cod se base à la fois sur la méthode de Chain-Ladder et sur des informations exogènes dans notre cas les primes perçues avant et après cession au réassureur.

Or, dans le section sur la méthode de Chain-Ladder standard , nous avons montré que ne considérer que 23 années de développement comme horizon ultime n'était pas suffisant et nous avons donc extrapoler nos facteurs de développement ce qui nous a conduit à considérer finalement 42 années de développement.

Les résultats de la méthode de Cape Cod étant proches de ceux de Chain-Ladder standard (méthode de référence) nous aimerions prolonger notre analyse afin d'ajouter un facteur de queue de développement à cette méthode.

Nous commençons par récupérer les extrapolations des facteurs de développement de la méthode de Chain-Ladder standard afin de compléter nos triangles et d'avoir une nouvelle distribution de loss ratios  $L_i^{ultime} = \frac{\hat{C}_{i,ultime}}{P_i}$  :

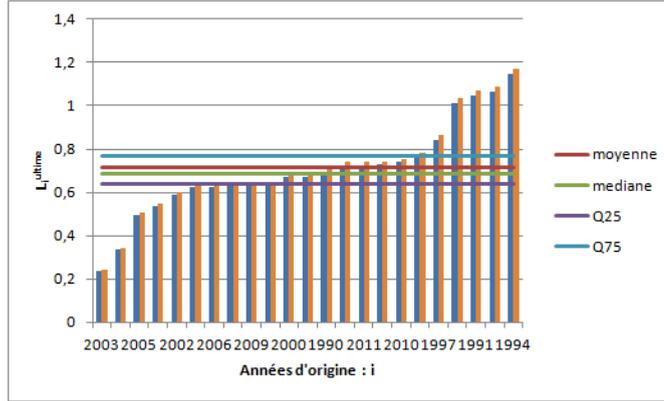


FIGURE 4.43 – Répartition des Loss ratios extrapolés (en orange) avec les Loss ratios de départ (en bleu) en fonction des années d'origine pour le triangle brut

Nous reprenons l'idée générale de la méthode de Cape Cod mais en y intégrant un facteur de queue de développement :

A l'aide de la cadence cumulée en  $(n - i + 1)$  ième année  $cr_{ultime,n-i} = \frac{C_{i,n-i}}{\hat{C}_{i,ultime}}$ , on écrit :

$$\hat{C}_{i,ultime} = C_{i,n-i} + (1 - cr_{ultime,n-i})\hat{C}_{i,ultime}$$

Du loss ratio ultime de la  $i$  ième année d'origine  $L_i^{ultime} = \frac{\hat{C}_{i,ultime}}{P_i}$ , nous déduisons l'égalité suivante :

$$\hat{C}_{i,ultime} = C_{i,n-i} + (1 - cr_{ultime,n-i})L_i^{ultime}P_i$$

Soit alors  $cr = (cr_{ultime,0}, cr_{ultime,1}, \dots, cr_{ultime,n-1})$  un vecteur de cadences cumulées provenant de la méthode de Chain-Ladder extrapolée avec pour l'exercice  $k$ ,  $cr_{ultime,n-k} = \frac{C_{k,n-k}}{\hat{C}_{k,ultime}}$  et loss ratio  $L_k = \frac{C_{k,n-k}}{cr_{ultime,n-k}P_k}$ .

Nous définissons le loss ratio  $L_A$  comme le loss ratio associé à un groupe  $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$  d'années d'origine "semblables" par :

$$L_A = \frac{\sum_{k \in A} C_{k,n-k}}{\sum_{k \in A} cr_{ultime,n-k}P_k}$$

Soit donc pour  $i$  fixé dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $A_i$  le groupe d'appartenance de l'année d'origine  $i$  et  $L_{A_i}$  le coefficient associé. On en déduit la provision associée pour l'année  $i$  :

$$\hat{R}_{ultime,i} = \hat{C}_{i,ultime} - C_{i,n-i} = (1 - cr_{ultime,n-i})L_{A_i}P_i$$

Nous nous plaçons directement dans le cadre de 4 classes *semblables* définies pour le triangle brut de réassurance par :

- $A_1 = [Q_0; Q_{25}] = [0, 242, 0, 638]$
- $A_2 = ]Q_{25}; Q_{50}] = ]0, 638, 0, 686]$
- $A_3 = ]Q_{50}; Q_{75}] = ]0, 686, 0, 768]$
- $A_4 = ]Q_{75}; Q_{100}] = ]0, 768, 1, 17]$

Pour ces classes nous obtenons :

- $V_{A_1} = 0,023$
- $V_{A_2} = 0$
- $V_{A_3} = 0$
- $V_{A_4} = 0,021$
- $V = 0,045$

Nous comparons ensuite les réserves obtenues avec la méthode de Cape Cod extrapolée et celles obtenues par la méthode de Chain-Ladder extrapolée

	Réserve (Cape Cod)	Réserve (Chain Ladder)		Réserve (Cape Cod)	Réserve (Chain Ladder)
1990	85 820	82 418	2002	1 741 359	2 204 695
1991	207 428	223 345	2003	2 414 676	1 228 762
1992	190 475	490 601	2004	3 257 632	2 351 638
1993	243 893	243 754	2005	5 279 747	5 635 211
1994	437 726	514 925	2006	8 347 036	8 131 956
1995	570 278	592 103	2007	10 179 904	9 962 213
1996	1 126 800	885 073	2008	9 116 017	12 207 846
1997	1 538 170	1 333 420	2009	14 452 146	14 161 774
1998	1 882 478	2 059 623	2010	19 542 172	19 963 469
1999	1 456 722	1 524 789	2011	23 300 050	23 377 870
2000	1 754 890	1 827 364	2012	24 452 177	24 092 701
2001	1 422 543	1 642 086	<b>TOTAL</b>	<b>133 000 139</b>	<b>134 737 638</b>

FIGURE 4.44 – Réserves relatives à la méthode de Cape Cod extrapolée comparées à celle de Chain-Ladder extrapolée pour le triangle brut de réassurance

Comme nous le constatons, une fois de plus les réserves données par la méthode de Cape Cod sont très proches de celles obtenues par la méthode de Chain-Ladder standard (-1,07%), et nous remarquons donc que cette méthode permet aussi de prendre en compte les sinistres appartenant à des branches à déroulements longs comme c'est notre cas ici. Nous suivons la même démarche sur le triangle net de réassurance et obtenons les réserves suivantes (-3,8%) :

	Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain-Ladder)		Reserve (Cape Cod)	Reserve (Chain-Ladder)
1990	72506	73701	2002	1 623 200	2 064 337
1991	196 615	200 573	2003	2 193 646	1 179 637
1992	193 968	187 101	2004	2 795 876	2 231 044
1993	237 825	247 922	2005	4 539 011	5 300 293
1994	370 904	440 887	2006	7 454 875	7 396 013
1995	465 200	463 356	2007	9 153 504	9 183 195
1996	933 963	824 016	2008	11 164 934	11 162 558
1997	1 358 740	1 291 500	2009	12 849 689	13 002 349
1998	1 640 573	1 632 547	2010	17 154 054	18 253 407
1999	1 414 159	1 401 076	2011	22 405 680	21 530 776
2000	1 750 818	1 689 625	2012	17 573 044	22 357 828
2001	1 390 856	1 601 677	<b>TOTAL</b>	<b>118 933 640</b>	<b>123 715 418</b>

FIGURE 4.45 – Réserves relatives à la méthode de Cape Cod extrapolée comparées à celle de Chain-Ladder extrapolée pour le triangle net de réassurance

# 5

## Les méthodes stochastiques

Ces méthodes permettent de quantifier l'incertitude présente dans les triangles et les réserves issues des méthodes déterministes.

Elles reposent sur une modélisation stochastique du rectangle de charge, les paramètres du modèle sont quant à eux estimés à partir des données du triangle de paiements cumulés supérieur.

Dans cette partie nous supposons donc que l'ensemble des constituants de notre rectangle de paiements cumulés sont des variables aléatoires réelles. Ces méthodes tiennent compte des résultats obtenus par les méthodes déterministes et permettent notamment :

- d'explicitier les hypothèses utilisées dans le modèle,
- de valider ou d'invalider celles-ci par une analyse des résidus,
- de mettre en lumière des irrégularités du triangle considéré,
- d'évaluer la variabilité des estimations prévues par le modèle,
- de construire des intervalles de confiance pour les paramètres estimés.

### 5.1 Le modèle de Mack

Nous considérons le triangle de paiements cumulés de l'assureur suivant (les années d'origine et de développement commencent ici à 1 :

	1	2	...	j	...	n-1	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$		$C_{1,j}$		$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$		$C_{2,j}$		$C_{2,n-1}$	
i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$		$C_{i,j}$	...		
n-1	$C_{n-1,1}$	$C_{n-1,2}$					
n	$C_{n,1}$						

Ce modèle apporte un cadre stochastique à la méthode de Chain-Ladder standard présentée dans le chapitre précédent. Il y ajoute des indicateurs de risque de prédiction déduit d'une hypothèse de volatilité au sein du triangle, il est non paramétrique au sens où aucune hypothèse de distribution n'est faite sur les constituants du triangle mais est considéré comme conditionnel au sens où les espérances sont prises en connaissance des réalisations du triangle supérieur.

### Hypothèses du modèle de Mack

**H1** : (Indépendance des années d'origine) Les variables aléatoires  $(C_{i_1,j})_{j=1,\dots,n}$  et  $(C_{i_2,j})_{j=1,\dots,n}$  sont, pour tout  $i_1 \neq i_2$  indépendantes.

**H2** : Pour  $j = 1, \dots, n - 1$  il existe un paramètre  $f_j$  tel que, pour  $i = 1, \dots, n$  on ait conditionnellement :

$$\mathbb{E}(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$$

Nous pouvons noter que si l'on considère les facteurs individuels que nous avons définis dans le modèle de Chain-Ladder standard  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  cette seconde hypothèse peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(f_{i,j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j$$

Remarque :

Notons que l'hypothèse d'indépendance n'est plus vérifiée dès lors qu'un changement important dans la gestion des sinistres survient, ou du taux d'inflation de la branche considérée, ces changements affectant par années calendaires plusieurs années d'origine .

Sous ces deux hypothèses et conditionnellement à l'information contenue dans le triangle supérieur  $T = \{C_{i,j} : i + j \leq n + 1\}$  nous obtenons les résultats suivants :

**Proposition.** Sous les hypothèses ci-dessus et pour  $i \geq 2$  :

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|T) = f_{n-1} * \dots * f_{n-i} C_{i,n-i}$$

**Démonstration.** Par hypothèse d'indépendance **H1** on a

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|T) = \mathbb{E}(C_{i,n}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1})$$

puis par double conditionnement nous obtenons :

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|T) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(C_{i,n}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-1})|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1}]$$

car :  $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1}\} \subseteq \{C_{i,1}, \dots, C_{i,n-1}\}$  avec :

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-1}) = f_{n-1} C_{i,n-1}$$

Nous en déduisons

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|T) = f_{n-1} \mathbb{E}(C_{i,n-1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1})$$

puis de proche en proche :

$$\mathbb{E}(C_{i,n}|T) = f_{n-1} * \dots * f_{n-i+1} \mathbb{E}(C_{i,n-i+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1}) = f_{n-1} * \dots * f_{n-i+1} * C_{i,n-i+1}.$$

**Théorème.** Pour  $j = 0, \dots, n - 1$  les estimateurs de Chain-Ladder  $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}$  sont des estimateurs sans biais (a) des paramètres  $f_j$  et non corrélés (b) bien que dépendants du même triangle de données.

**Démonstration.** Définissons pour  $j = 1, \dots, n$  les ensembles d'information  $T_j = \{C_{i,k} : k \leq j, i + j \leq n + 1\}$  soit donc la partie supérieur du triangle limitée à l'année de développement  $j$ .

(a) Nous avons :

$$\mathbb{E}(C_{i,j+1}|T_j) = \mathbb{E}(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$$

puis :

$$\mathbb{E}(\hat{f}_j|T_j) = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}|T_j}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \mathbb{E}(C_{i,j+1}|T_j)}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} = f_j$$

car  $\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}$  est  $T_j$  mesurable. Nous obtenons par conditionnement :

$$\mathbb{E}(\hat{f}_j) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\hat{f}_j|T_j)] = f_j.$$

Les  $\hat{f}_j$  sont donc des estimateurs sans biais des paramètres  $f_j$ .

(b) Pour  $j < k$

$$\mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k|T_k)] = \mathbb{E}[f_j \mathbb{E}(\hat{f}_k|T_k)]$$

car  $\hat{f}_j$  est  $T_k$  mesurable puisque  $j < k$ .

Par l'égalité  $\mathbb{E}(\hat{f}_k|T_k) = f_k$  nous obtenons :

$$\mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k) = f_j f_k$$

Nous en déduisons ainsi :

$$Cov(\hat{f}_j \hat{f}_k) = \mathbb{E}(\hat{f}_j \hat{f}_k) - \mathbb{E}(\hat{f}_j) \mathbb{E}(\hat{f}_k) = 0$$

d'où la non-corrélation des  $\hat{f}_j$

Cette absence de biais est également vérifiée par les valeurs calculées via les facteurs de Chain-Ladder standard, en effet :

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+1} * \dots * \hat{f}_{n-1} \quad \text{pour} \quad \mathbb{E}(C_{i,n}|T) = C_{i,n-i+1} * f_{n-i+1} * \dots * f_{n-1}$$

et plus généralement :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} \hat{f}_{n-i} * \dots * \hat{f}_{j-1} \quad \text{pour} \quad \mathbb{E}(C_{i,n}|T) = C_{i,n-i+1} * f_{n-i+1} * \dots * f_{j-1}$$

De même pour les réserves :

$$\hat{R}_i^M = \hat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1} \quad \text{pour} \quad \mathbb{E}(R_i|T) = \mathbb{E}(C_{i,n}|T) - C_{i,n-i+1} \quad \text{et} \quad \hat{R}^M = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^M \quad \text{pour} \quad \mathbb{E}(R|T)$$

**H3** : Pour  $j = 1, \dots, n-1$  il existe un paramètre  $\sigma_j^2$  tel que :  $\mathbb{V}(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$  pour  $i = 1, \dots, n$

En termes de facteurs individuelles cette égalité s'écrit :  $\mathbb{V}(f_{i,j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}$

Sous les trois hypothèses énoncées ci-dessus , nous pouvons montrer, de la même manière que pour les résultats sur les  $\hat{f}_j$  que, pour  $j \leq n-2$  :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

est un estimateur sans biais de  $\sigma_j^2$ . Cet estimateur compare les facteurs individuels  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  aux facteurs estimés par la méthode de Chain-Ladder  $\hat{f}_j$

*Remarque :*

Le cas  $j = n - 1$  pose problème, parmi différentes possibilités T.Mack propose :

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left( \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-2}^2, \hat{\sigma}_{n-3}^2 \right)$$

**Validation du modèle**

L'hypothèse **H2** est une hypothèse de relation linéaire, à  $j$  fixé les points  $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=1, \dots, n-j-1}$  doivent être sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

Nous avons déjà vérifié cette hypothèse lors de la mise en application de la méthode de Chain-Ladder standard et avons conclu que celle-ci était vérifiée.

L'hypothèse **H3** :  $\mathbb{V}(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \mathbb{E} [(C_{i,j+1} - f_j C_{i,j})^2 | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}]$  implique pour tout  $j$  fixé, le graphe des résidus normalisés  $\frac{C_{i,j+1} - f_j C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$  ( $i = 1, \dots, n - j$ ) ne doit faire apparaître aucune structure non aléatoire, en particulier il ne doit pas faire apparaître de tendance.

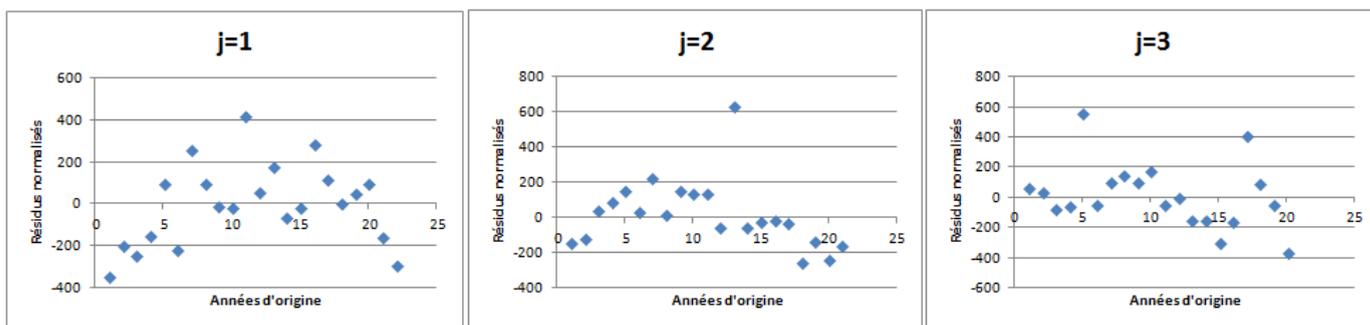


FIGURE 5.1 – Résidus normalisés du modèle de Mack  $j = 1, 2, 3$  pour le triangle brut de réassurance

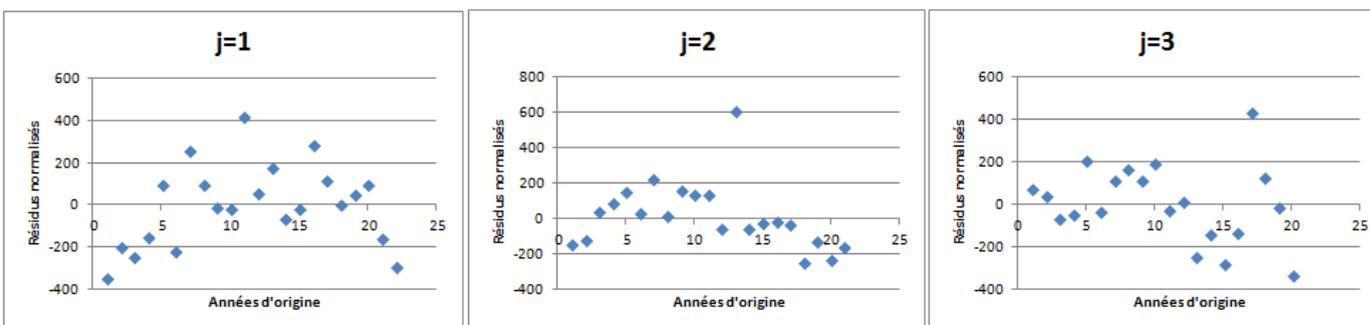


FIGURE 5.2 – Résidus normalisés du modèle de Mack  $j = 1, 2, 3$  pour le triangle net de réassurance

Aucune structure non aléatoire ne se détache clairement pour ces années de développement, il en est de même pour les années suivantes ainsi nous supposons que l'hypothèse **H3** est vérifiée.

De plus, nous avons vu que l'hypothèse **H2** pouvait se réécrire  $\mathbb{E}(f_{i,j}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j$ , cette hypothèse implique notamment que les facteurs de développement individuel  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$   $i = 1, \dots, n - j - 1$   $j = 1, \dots, n - 1$  sont non corrélés, autrement dit la valeur attendue du facteur  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  est la même, que le facteur  $\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}$  soit plus grand ou plus petit que généralement.

Pour vérifier cette hypothèse nous étudions le test de corrélation de Spearman.

Pour chaque colonne  $j$ , nous trions les facteurs  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  par ordre croissant et notons  $r_{i,j}$  le rang de  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ , nous avons donc  $1 \leq r_{i,j} \leq n - j$ .

Nous retirons ensuite le dernier coefficient de la colonne, soit  $\frac{C_{n-j+1,j+1}}{C_{n-j,j}}$ , nous recommençons ensuite le tri et notons  $s_{i,j+1}$  le rang de  $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  on a alors  $1 \leq s_{i,j+1} \leq n - (j + 1)$ .

Nous définissons alors :

$$T_j = 1 - 6 \sum_{i=1}^{n-j} \frac{(r_{i,j} - s_{i,j})^2}{(n-j)^3 - (n-j)} \quad 2 \leq j \leq n - 2$$

Il est possible de montrer que  $-1 \leq T_j \leq 1$ , et que sous l'hypothèse nulle de non corrélation :

$$\mathbb{E}(T_j) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_j) = \frac{1}{n-j-1}$$

**Exemple** : Considérons un sous-triangle de notre triangle de facteurs individuels pour le triangle brut de réassurance :

$$\begin{pmatrix} j=1 & j=2 & j=3 & j=4 \\ 1,54 & 1,29 & 1,45 & 1,17 \\ 1,73 & 1,3 & 1,3 & \\ 1,67 & 1,54 & & \\ 1,85 & & & \end{pmatrix}$$

Nous obtenons les rangs suivants :

$$\begin{pmatrix} r_{i,1} & s_{i,2} & r_{i,2} & s_{i,3} & r_{i,3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & & \\ 4 & & & & \end{pmatrix}$$

Nous calculons sur notre triangle brut l'ensemble des rangs  $r_{i,j}$  et  $s_{i,j+1}$  et trouvons les grandeurs  $T_j$  suivantes :

T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11
0,421	0,194	0,016	0,521	0,520	0,329	0,400	0,130	0,093	0,252

T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	T19	T20	T21
0,155	0,321	0,700	-0,119	-0,321	-0,086	0,600	0,800	1,000	1,000

FIGURE 5.3 – Calcul des  $(T_j)_{j=2,\dots,21}$  de la méthode de Spearman pour le triangle brut de réassurance

T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11
0,421	0,153	0,112	0,521	0,591	0,350	0,525	0,073	0,093	0,224

T12	T13	T14	T15	T16	T17	T18	T19	T20	T21
0,436	0,358	0,517	0,071	0,179	-0,086	0,700	0,400	1,000	1,000

FIGURE 5.4 – Calcul des  $(T_j)_{j=2,\dots,21}$  de la méthode de Spearman net de réassurance

Nous désirons tester les triangles dans leur ensemble et non pas par paires de colonnes. Nous allons donc utiliser une statistique de test  $T$  globale, qui va être une moyenne pondérée par  $n - k - 1$  (poids inversement proportionnels à  $\mathbb{V}(T_j)$ ) :

$$T = \sum_{j=2}^{n-2} \frac{n-j-1}{\sum_{j=2}^{n-2} n-j-1} T_j = \sum_{j=2}^{n-2} \frac{n-j-1}{(n-2)(n-3)/2} T_j$$

avec

$$\mathbb{E}(T) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T) = \frac{1}{(n-2)(n-3)/2}$$

Nous obtenons  $T = 0,2872$  pour le triangle brut et  $T = 0,3269$  pour le triangle net de réassurance. Si  $n - j \geq 10$ , la distribution de  $T_j$  peut-être approchée par une loi normale, et comme  $T$  est la somme de plusieurs  $T_j$  non corrélés (sous l'hypothèse nulle de non corrélation des coefficients de développement successifs, les  $T_j$  sont non corrélés), nous pouvons supposer que  $T$  a approximativement une distribution normale. (Pour les différentes affirmations concernant la distribution des  $T_k$  et de  $T$  voir Dodge et Rousson)

En admettant que la distribution de  $T$  soit normale ; nous ne rejetterons pas l'hypothèse de non corrélation pour un niveau de confiance à 95% si  $\frac{-1,96}{(n-2)(n-3)/2} \leq T \leq \frac{1,96}{(n-2)(n-3)/2}$ .

Ce test reste très approximatif (le fait que la distribution de  $T_j$  soit normale si  $n - j \geq 10$  est sujet à de nombreuses critiques), et ne s'avère pas concluant dans notre cas, nous admettrons donc la présence de corrélations entre nos coefficients de développements individuels du moins sur la base des résultats de ce test. En effet un intervalle de confiance à 95 % donne  $[-0,135, 0,135]$  auquel  $T$  n'appartient pas dans les cas brut et net.

Il reste à vérifier l'hypothèse **H1** de non effet d'une année calendrier, autrement dit cela suppose l'indépendance des différentes années d'origine entre elles.

En effet, certains triangles de données sont sujets à des effets calendrier (comme par exemple des changements dans la gestion des sinistres, dans l'inflation) qui peuvent affecter plusieurs années d'origine de la même façon et donc perturber l'indépendance supposée par T.Mack.

Définissons les éléments d'une diagonale de notre triangle par :

$$D_j = \{C_{j,1}, C_{j-1,2}, \dots, C_{2,j-1}, C_{1,j} \quad 1 \leq j \leq n\}$$

De même définissons les coefficients de développement qui dépendent des éléments de  $D_j$ . Ce sont les éléments qui font intervenir un élément de  $D_j$  au dénominateur :

$$A_j = \left\{ \frac{C_{j,2}}{C_{j,1}}, \dots, \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} \right\}$$

où les éléments qui font intervenir un élément de  $D_j$  au numérateur :

$$A_{j-1} = \left\{ \frac{C_{j-1,2}}{C_{j-1,1}}, \dots, \frac{C_{1,j}}{C_{1,j-1}} \right\}$$

Ainsi, si les éléments de  $D_j$  sont plus grands que généralement, les éléments de  $A_j$  seront plus petits et les éléments de  $A_{j-1}$  seront plus grands que généralement. Pour chaque colonne  $j$ , nous marquons les coefficients de développements individuels par un G si ils sont supérieurs à la médiane de la colonne et par un P sinon. Notons que si le nombre d'éléments est impair, un élément de la colonne est égal à la médiane et ne sera pas marqué. Pour chaque diagonale  $A_j$  de coefficients de développement ( $2 \leq j \leq n - 1$ ) on compte alors le nombre d'éléments marqué d'un G soit  $G_j$  et le nombre d'éléments marqué d'un P soit  $P_j$ . Si il n'y a pas de changement d'une année calendrier à une autre, alors  $G_j$  et  $P_j$  doivent être proches l'un de l'autre (chaque

coefficient de développement ayant 50 % de chances d'être G ou P) ou, pour l'exprimer d'une manière différente il faut que  $Z_j = \min(G_j, P_j)$  soit proche de  $\frac{G_j+P_j}{2}$ .

Reprenons le sous triangle utilisé pour le test de Spearmann :

$$\begin{pmatrix} j = 1 & j = 2 & j = 3 & j = 4 \\ 1,54 & 1,29 & 1,45 & 1,17 \\ 1,73 & 1,3 & 1,3 & \\ 1,67 & 1,54 & & \\ 1,85 & & & \end{pmatrix}$$

Nous obtenons pour ce test :

$$\begin{pmatrix} j = 1 & j = 2 & j = 3 & j = 4 \\ P & P & G & * \\ G & * & P & \\ P & G & & \\ G & & & \end{pmatrix}$$

Nous obtenons les résultats suivants sur le triangle complet :

$D_j$	$n_j$	$P_j$	$G_j$	$Z_j$
2	2	2	0	0
3	3	2	1	1
4	4	2	2	2
5	5	2	3	2
6	6	3	3	3
7	7	1	6	1
8	7	2	5	2
9	9	3	6	3
10	10	2	8	2
11	11	3	8	3
12	12	1	11	1

$D_j$	$n_j$	$P_j$	$G_j$	$Z_j$
13	12	5	7	5
14	13	4	9	4
15	14	7	7	7
16	15	8	7	7
17	16	10	6	6
18	18	10	8	8
19	18	10	8	8
20	19	8	11	8
21	20	19	1	1
22	21	18	3	3
TOTAL				77

FIGURE 5.5 – Grandeurs nécessaires pour le test de non effet d'une année calendrier pour le triangle brut de réassurance

$D_j$	$n_j$	$P_j$	$G_j$	$Z_j$
2	2	2	0	0
3	3	2	1	1
4	4	2	2	2
5	5	2	3	2
6	6	3	3	3
7	7	1	6	1
8	7	2	5	2
9	8	1	7	1
10	10	3	7	3
11	11	3	8	3
12	12	1	11	1

$D_j$	$n_j$	$P_j$	$G_j$	$Z_j$
13	11	4	7	4
14	13	5	8	5
15	15	6	9	6
16	16	8	8	8
17	16	10	6	6
18	18	11	7	7
19	18	10	8	8
20	19	9	10	9
21	20	18	2	2
22	20	17	3	3
TOTAL				77

FIGURE 5.6 – Grandeurs nécessaires pour le test de non effet d'une année calendrier pour le triangle net de réassurance

Afin de pouvoir mettre en place un test, il faut tout d'abord déterminer quels sont les deux premiers moments de  $Z_j$ . Dans le cadre de l'hypothèse d'indépendance des différentes années d'origine,  $P_j$  suit une loi binomiale de paramètres  $n_j = G_j + P_j$  et  $p = 1/2$ . Il est alors possible de montrer que

$$\mathbb{E}(Z_j) = \frac{n_j}{2} - \left( \frac{(n_j - 1)!}{(m_j)!(n_j - 1 - m_j)!} \right) \frac{n_j}{2^{n_j}}$$

de même

$$\mathbb{V}(Z_j) = \frac{n_j(n_j - 1)}{4} - \left( \frac{(n_j - 1)!}{(m_j)!(n_j - 1 - m_j)!} \right) \frac{n_j(n_j - 1)}{2^{n_j}} + \mathbb{E}(Z_j) - (\mathbb{E}(Z_j))^2$$

où  $m_j = \lfloor \frac{n_j - 1}{2} \rfloor$

Nous ne testons pas les  $Z_j$  de manière séparée, nous considérons alors une variable globale  $Z = Z_2 + \dots + Z_{n-1}$ , avec  $\mathbb{E}(Z) = \sum \mathbb{E}(Z_j)$  et  $\mathbb{V}(Z) = \sum \mathbb{V}(Z_j)$ . Nous supposons  $n$  assez grand tel que que  $Z$  suit une distribution normale et ne rejetterons donc pas l'hypothèse de non effet d'une année calendrier à un niveau de confiance 95% si :

$$\mathbb{E}(Z) - 1,96\sqrt{\mathbb{V}(Z)} \leq Z \leq \mathbb{E}(Z) + 1,96\sqrt{\mathbb{V}(Z)}$$

Nous obtenons  $Z = 77$  pour les deux triangles ainsi que les résultats suivants :

$m_j$	$\mathbb{E}(Z_j)$	$\mathbb{V}(Z_j)$	$m_j$	$\mathbb{E}(Z_j)$	$\mathbb{V}(Z_j)$
0	0,500	0,250	5	4,646	1,168
1	0,750	0,188	6	5,034	1,100
1	1,250	0,438	6	5,534	1,350
2	1,563	0,371	7	5,929	1,282
2	2,063	0,621	7	6,429	1,532
3	2,406	0,554	8	7,331	1,714
3	2,406	0,554	8	7,331	1,714
3	2,906	0,804	9	7,738	1,645
4	3,770	0,986	9	8,238	1,895
5	4,146	0,918	10	8,650	1,827
5	4,646	1,168	TOTAL	93,629	22,009

FIGURE 5.7 – Calcul des  $\mathbb{E}(Z_j)$  et  $\mathbb{V}(Z_j)$  pour  $j = 2 \dots n - 1$  pour le triangle brut de réassurance

$m_j$	$\mathbb{E}(Z_j)$	$\mathbb{V}(Z_j)$	$m_j$	$\mathbb{E}(Z_j)$	$\mathbb{V}(Z_j)$
0	0,500	0,250	5	4,146	0,918
1	0,750	0,188	6	5,034	1,100
1	1,250	0,438	7	5,929	1,282
2	1,563	0,371	7	6,429	1,532
2	2,063	0,621	7	6,429	1,532
3	2,406	0,554	8	7,331	1,714
3	2,406	0,554	8	7,331	1,714
3	2,906	0,804	9	7,738	1,645
4	3,770	0,986	9	8,238	1,895
5	4,146	0,918	9	8,238	1,895
5	4,646	1,168	TOTAL	93,249	22,077

FIGURE 5.8 – Calcul des  $\mathbb{E}(Z_j)$  et  $\mathbb{V}(Z_j)$  pour  $j = 2 \dots n - 1$  pour le triangle net de réassurance

Ainsi, si nous nous plaçons à un niveau de confiance de 95% l'intervalle de confiance pour le triangle brut de réassurance est  $[84,434; 102,824]$ , et pour le triangle net de réassurance est  $[84,04; 102,46]$  et donc nous rejetterons l'hypothèse d'indépendance des années d'origine. Ces deux tests illustrent le fait que lorsque les

données utilisées sont des données "vie réelle", l'ensemble des hypothèses ne peuvent être vérifiées. Nous quantifierons par la suite le risque que cela entraîne sur nos provisions cependant, dans un premier temps nous décidons d'appliquer le modèle de Mack à nos deux triangles et obtenons :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_j^M$	2,12	1,47	1,38	1,24	1,20	1,15	1,12	1,10	1,09	1,06	1,03
$\sigma_j^2$	38 725,4	38 002,3	46 274,8	40 310,3	106 412,1	38 607,6	24 121,5	34 172,9	110 512,3	31 725,3	6 038,3

j	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$f_j^M$	1,01	1,03	1,02	1,02	1,03	1,06	1,01	1,01	1,01	1,00	1,01
$\sigma_j^2$	711,7	2 584,5	4 713,8	2 219,0	5 784,4	24 209,1	1 622,7	201,1	384,4	6,0	0,1

FIGURE 5.9 – Estimation des paramètres  $(\hat{f}_j)_{j=0,\dots,n-1}$  et  $(\hat{\sigma}_j^2)_{j=0,\dots,n-1}$  par la méthode de Mack pour le triangle brut de réassurance

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_j^M$	2,12	1,47	1,36	1,23	1,18	1,14	1,10	1,10	1,09	1,05	1,03
$\sigma_j^2$	38 725,4	36 409,3	33 849,6	39 512,7	54 130,4	25 342,7	15 427,6	16 648,3	46 688,3	18 981,4	5 881,1

j	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$f_j^M$	1,01	1,03	1,01	1,02	1,04	1,05	1,01	1,01	1,01	1,00	1,02
$\sigma_j^2$	678,1	2 457,0	1 339,4	1 020,5	6 772,1	9 604,9	544,7	204,7	424,8	3,2	0,0

FIGURE 5.10 – Estimation des paramètres  $(\hat{f}_j)_{j=0,\dots,n-1}$  et  $(\hat{\sigma}_j^2)_{j=0,\dots,n-1}$  par la méthode de Mack pour le triangle brut de réassurance

Nous en déduisons les réserves relatives à la méthode de Mack qui sont totalement identiques à celles estimées par la méthode de Chain-Ladder :

	Reserve
1990	-
1991	88 936
1992	86 999
1993	126 003
1994	307 723
1995	403 487
1996	724 868
1997	1 140 156
1998	1 796 771
1999	1 345 982
2000	1 637 637
2001	1 478 562

	Reserve
2002	2 007 725
2003	1 136 323
2004	2 206 673
2005	5 341 658
2006	7 764 908
2007	9 572 062
2008	11 789 709
2009	13 729 919
2010	19 422 601
2011	22 799 326
2012	23 549 307
<b>TOTAL</b>	<b>128 457 335</b>

FIGURE 5.11 – Réserves relatives à la méthode de Mack pour le triangle brut de réassurance

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	1 876 566
1991	85 297	2003	1 088 284
1992	90 141	2004	2 088 692
1993	134 897	2005	5 013 925
1994	267 089	2006	7 047 776
1995	313 333	2007	8 809 571
1996	668 611	2008	10 766 528
1997	1 102 541	2009	12 594 994
1998	1 418 076	2010	17 748 614
1999	1 230 168	2011	20 991 194
2000	1 510 299	2012	21 851 029
2001	1 439 475	<b>TOTAL</b>	<b>118 137 102</b>

FIGURE 5.12 – Réserves relatives à la méthode de Mack pour le triangle net de réassurance

## 5.2 Modèle Linéaire Généralisé (GLM)

En 1998, A.E.Renshaw et R.J. Verall ont mis au point un modèle GLM qui permet de répliquer les résultats obtenus par la méthode de Chain-Ladder standard.

Dans un premier temps, nous présenterons les modèles linéaires généralisés introduits par J.Nelder et R.Wedderburn en 1972, puis détaillerons le modèle proposé par Renshaw et Verall.

### 5.2.1 Un modèle GLM

Un modèle linéaire généralisé est caractérisé par trois composantes : la composante aléatoire, la composante systématique, et la fonction de lien.

#### 5.2.1.1 La composante aléatoire

Notre objectif est d'expliquer les variables aléatoires réelles  $(X_{i,j})_{i,j=0,\dots,n}$  indépendantes et dont la distribution est de type exponentiel. Ainsi, le cadre de cette étude est :

**H1** : Les paiements non cumulés  $(X_{i,j})$  sont supposés indépendants.

**H2** : La densité des paiements non cumulés  $(X_{i,j})$  est supposée appartenir à la famille exponentielle dont la densité est donnée par :

$$f(x_{i,j}; \theta_{i,j}, \phi) = \exp \left( \frac{\theta_{i,j} x_{i,j} - b(\theta_{i,j})}{\frac{\phi}{\omega_{i,j}}} + c(x_{i,j}, \phi) \right)$$

Ici :

- $\theta_{i,j}$  est un paramètre réel appelé paramètre naturel,
- $\phi > 0$  (éventuellement connu) est un paramètre de dispersion indépendant de  $i$  et  $j$
- $\omega_{i,j}$  est une pondération que nous poserons à 1 dans la suite ( la prise en compte de cette pondération conduirait à remplacer  $\phi$  par  $\frac{\phi}{\omega_{i,j}}$  dans les équations suivantes ,
- $b$  et  $c$  dépendant directement de la distribution exponentielle choisie •  $b$  est deux fois dérivable à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $c$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$

Il est alors possible de montrer que :

$$\begin{cases} \mu_{i,j} = \mathbb{E}(X_{i,j}) = b'(\theta_{i,j}) \text{ soit } \theta_{i,j} = b'^{-1}(\mu_{i,j}) & \text{si } b \text{ est inversible} \\ \mathbb{V}(X_{i,j}) = \phi b''(\theta_{i,j}) = \phi b'' [b'^{-1}(\mu_{i,j})] = \phi V(\mu_{i,j}) \end{cases}$$

La fonction  $V$  est appelée fonction variance de la distribution et joue un rôle essentiel dans la modélisation GLM.

### 5.2.1.2 La composante systématique

Soit  $M$  la matrice de régression et  $\xi$  le vecteur des paramètres. La composante systématique se note  $\eta$  et est définie par  $\eta = M\xi$ .

### 5.2.1.3 La fonction lien

Il s'agit de la fonction qui établit un pont entre les composantes aléatoire et systématique sous la forme d'une fonction réelle  $g$  strictement monotone et dérivable telle que :

$$\eta_{i,j} = g(\mu_{i,j}) \text{ ou } \mu_{i,j} = g^{-1}(\eta_{i,j})$$

## 5.3 La modèle Poissonien

Comme évoqué précédemment ce modèle est un cas particulier des modèles GLM présentés ci-dessus. Il s'agit d'un modèle dans lequel les incréments aléatoires suivent une loi de poisson, autrement dit  $\forall i, j, X_{i,j} \sim \mathcal{P}(\mu_{i,j})$  et dans lequel la fonction de lien est de type logarithmique  $g() = \ln()$ . Notre modèle est donc défini par :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_{i,j}) = \mu_{i,j}, \phi = 1, V(\mu_{i,j}) = \mu_{i,j} \\ \ln(\mu_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j \end{cases}$$

Renshaw et Verall ont démontré que les provisions estimées par ce modèle coïncidaient exactement avec celles obtenues par la méthode de Chain-Ladder standard lorsque le triangle est à incréments positifs ( ce qui est notre cas).

Les paramètres  $\alpha_i$  ont pour rôle de capter la tendance des paiements par rapport aux années d'origine, de même les  $\beta_j$  ont pour rôle de capter la tendance des paiements par rapport aux années de développement alors que  $\mu$  permet un contrôle global.

Notons que l'hypothèse  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  est nécessaire afin de résoudre le problème de surparamétrisation du modèle.

### 5.3.1 Estimation des paramètres

Nous devons à présent estimer les paramètres  $\mu, \alpha_i$  et  $\beta_j$ . Il est possible de les obtenir par maximisation de la fonction de vraisemblance que nous noterons  $L(\Delta, \xi, \phi)$  qui est associée aux observations du triangle supérieur et aux paramètres  $\xi = (\mu, (\alpha_i), (\beta_j))$  et  $\Delta = (x_{i,j})_{i+j \leq n+1}$ . Nous avons supposé que nos incréments suivaient une loi de Poisson de paramètre  $\mu_{i,j}$ , nous avons donc

$$\forall i, j \quad \mathbb{P}(X_{i,j} = x_{i,j}) = \exp(-\mu_{i,j}) \frac{\mu_{i,j}^{x_{i,j}}}{x_{i,j}!}$$

Nous en déduisons la fonction vraisemblance :

$$L(\Delta, \xi, \phi) = L(\Delta, \xi) = \prod_{i+j \leq n+1} \mathbb{P}(X_{i,j} = x_{i,j}) = \prod_{i+j \leq n+1} \exp(-\mu_{i,j}) \frac{\mu_{i,j}^{x_{i,j}}}{x_{i,j}!}$$

Nous prenons ensuite la log-vraisemblance :

$$l(\Delta, \xi) = \ln(L(\Delta, \xi)) = \ln \left( \prod_{i+j \leq n+1} \exp(-\mu_{i,j}) \frac{\mu_{i,j}^{x_{i,j}}}{x_{i,j}!} \right)$$

d'où

$$l(\Delta, \xi) = \sum_{i+j \leq n+1} (x_{i,j} \ln(\mu_{i,j}) - \mu_{i,j} - f(x_{i,j})) = \sum_{i+j \leq n+1} (x_{i,j}(\mu + \alpha_i + \beta_j) - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j) - f(x_{i,j}))$$

où  $f(x_{i,j})$  regroupe les éléments qui ne dépendent que de  $x_{i,j}$  et ne rentrent donc pas en compte lors de la maximisation par rapport à  $\xi$ .

Les conditions du premier ordre sont obtenue en dérivant respectivement par rapport à  $\mu, \alpha_i, \beta_j$

$$\begin{aligned} \sum_{i+j \leq n+1} (x_{i,j} - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)) &= 0 \\ \sum_{j \leq n-i+1} (x_{i,j} - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)) &= 0 \\ \sum_{i \leq n-j+1} (x_{i,j} - \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j)) &= 0 \end{aligned}$$

De plus, par invariance fonctionnelle du maximum de vraisemblance, l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mu_{i,j}$  est  $\hat{\mu}_{i,j} = g^{-1}(\hat{\eta}_{i,j})$  avec  $\hat{\eta}_{i,j} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$

Une fois que nous disposons de ces estimateurs nous pouvons en déduire une estimation de la charge finale :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \hat{C}_{i,n}^{GLM} = C_{i,n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^n \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$$

Nous obtenons les estimateurs suivants :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\mu$
$\alpha_j$	0,000	0,489	0,237	0,357	0,922	0,828	0,665	0,852	1,160	0,775	0,834	12,572
$\beta_j$	0,000	0,116	0,000	0,163	0,028	0,046	-0,035	-0,168	-0,162	-0,178	-0,511	

j	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\alpha_j$	0,685	0,871	0,115	0,565	1,270	1,494	1,555	1,624	1,656	1,881	1,949	1,886
$\beta_j$	-1,112	-2,143	-1,153	-1,621	-1,318	-0,934	-0,383	-1,677	-2,132	-2,693	-3,015	-1,665

FIGURE 5.13 – Estimation des paramètres  $\mu, (\alpha_i)_{i=1, \dots, 23}$  et  $(\beta_j)_{j=1, \dots, 23}$  par le modèle GLM pour le triangle brut de réassurance

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\mu$
$\alpha_j$	0,000	0,447	0,274	0,428	0,858	0,711	0,746	0,942	1,068	0,841	0,889	12,530
$\beta_j$	0,000	0,116	-0,002	0,123	-0,005	-0,039	-0,116	-0,318	-0,280	-0,307	-0,670	

j	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\alpha_j$	0,789	0,935	0,215	0,658	1,357	1,553	1,623	1,681	1,710	1,924	1,991	1,928
$\beta_j$	-1,209	-2,115	-1,120	-1,857	-1,574	-0,895	-0,527	-1,917	-2,391	-2,654	-2,984	-1,623

FIGURE 5.14 – Estimation des paramètres  $\mu, (\alpha_i)_{i=1, \dots, 23}$  et  $(\beta_j)_{j=1, \dots, 23}$  par le modèle GLM pour le triangle net de réassurance

Nous en déduisons les réserves :

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	2 007 725
1991	88 936	2003	1 136 323
1992	86 999	2004	2 206 673
1993	126 003	2005	5 341 658
1994	307 723	2006	7 764 909
1995	403 487	2007	9 572 062
1996	724 868	2008	11 789 709
1997	1 140 156	2009	13 729 919
1998	1 796 771	2010	19 422 601
1999	1 345 982	2011	22 799 326
2000	1 637 637	2012	23 549 309
2001	1 478 562	<b>TOTAL</b>	<b>128 457 338</b>

FIGURE 5.15 – Réserves relatives à la méthode GLM pour le triangle brut de réassurance

	Reserve		Reserve
1990	-	2002	1 876 566
1991	85 297	2003	1 088 284
1992	90 141	2004	2 088 692
1993	134 897	2005	5 013 925
1994	267 089	2006	7 047 776
1995	313 333	2007	8 809 571
1996	668 611	2008	10 766 528
1997	1 102 541	2009	12 594 994
1998	1 418 076	2010	17 748 613
1999	1 230 168	2011	20 991 194
2000	1 510 299	2012	21 851 028
2001	1 439 475	<b>TOTAL</b>	<b>118 137 101</b>

FIGURE 5.16 – Réserves relatives à la méthode de GLM pour le triangle net de réassurance

Nous remarquons que comme nous l'avons évoqué au début de cette partie les réserves obtenues par la méthode GLM avec une distribution choisie de Poisson sont identiques à celles obtenues par la méthode de Chain-Ladder avec un écart de moins 0,00001 % dans les deux cas.

### 5.3.2 Extrapolation des $\beta_j$

Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, incorporer un facteur de queue de développement permet de déterminer les réserves pour le véritable horizon ultime.

Dans le cas des modèles GLM, ce sont les  $\beta_j$  qui ont pour rôle de capter la tendance relative aux années de développement ainsi, notre extrapolation portera sur ces paramètres.

Comme nous le remarquons, les derniers incréments estimés par le modèle Poissonien ne sont pas nuls au bout de 23 années de développements, cela dit, les  $(C_{i,j})_{i+j>n+1}$  sont le résultats d'une exponentielle et ne peuvent donc pas être nuls.

Nous décidons d'effectuer une régression linéaire simple de la forme  $y = ax + b$  afin de déterminer les  $(\beta_j)_{j>n}$  et, afin de comparer nos résultats avec ceux obtenus par la méthode de Chain-Ladder extrapolée, nous nous limiterons à 42 années de développement.

Nous obtenons  $a = -0,1282$  et  $b = 0,6684$  pour le triangle brut de réassurance et  $a = -0,1295$  et  $b = 0,6024$  pour le triangle net, nous en déduisons ainsi les  $(\beta_j)_{j=24,\dots,42}$

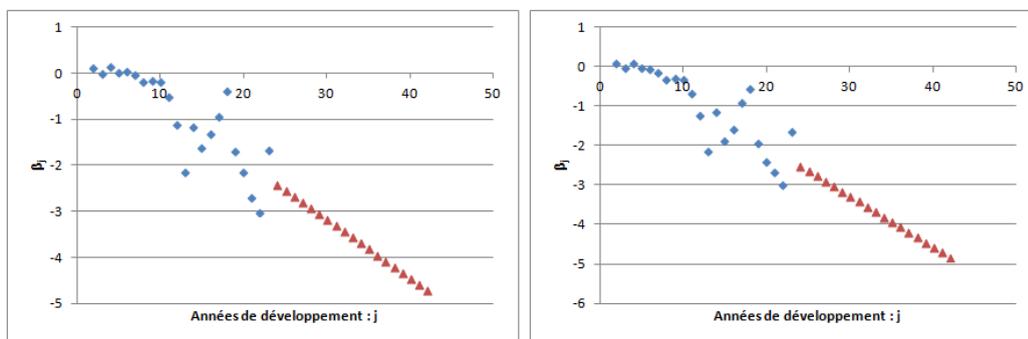


FIGURE 5.17 – Coefficients  $(\beta_j)_{j=2,\dots,23}$  (en bleu) et leur extrapolation (rouge) pour  $j = 24, \dots, 42$  pour le triangle brut de réassurance (gauche) et net de réassurance (droite)

Remarquons que prendre 42 années de développement dans le cas du modèle GLM sous-entend que l'extrapolation faite dans le cas du modèle de Chain-Ladder standard est "bonne", la raison pour laquelle nous nous sommes limités à 42 années de développements est que même si l'on considère dans la cadre du modèle Poissonien l'horizon ultime comme l'année de développement où la moyenne des incréments est inférieure ou égale à 500 € il nous faudrait considérer 64 années de développement.

Nous prenons donc le parti de ne considérer que 42 années de développement dans le sens où cet écart d'horizon ultime avec la méthode de Chain-Ladder semble surtout provenir de l'erreur de la régression appliquée sur les  $\beta_j$ .

Nous obtenons les réserves suivantes par le modèle Poissonien extrapolé que nous comparons à celles obtenues par la méthode de Chain-Ladder extrapolée :

	Reserve (GLM)	Reserve (Chain-Ladder)		Reserve (GLM)	Reserve (Chain-Ladder)
1990	196713	82418	2002	2 477 845	2 204 695
1991	409 739	223 345	2003	1 356 953	1 228 762
1992	336 197	191 408	2004	2 552 671	2 351 638
1993	407 047	243 754	2005	6 042 301	5 635 211
1994	802 265	514 925	2006	8 640 964	8 131 956
1995	853 669	592 103	2007	10 503 259	9 962 213
1996	1 107 240	885 073	2008	12 787 702	12 207 846
1997	1 601 429	1 333 420	2009	14 760 655	14 161 774
1998	2 424 136	2 059 623	2010	20 713 523	19 963 469
1999	1 772 753	1 524 789	2011	24 180 171	23 377 870
2000	2 090 472	1 827 364	2012	24 846 261	24 092 701
2001	1 868 855	1 642 086	<b>TOTAL</b>	<b>142 732 818</b>	<b>134 438 445</b>

FIGURE 5.18 – Réserves relatives à la méthode de GLM en présence d'un facteur queue de développement pour le triangle brut de réassurance

	Reserve (GLM)	Reserve (Chain-Ladder)		Reserve (GLM)	Reserve (Chain-Ladder)
1990	169924	73701	2002	2 309 492	2 064 337
1991	351 076	200 573	2003	1 298 908	1 179 637
1992	313 694	187 101	2004	2 416 899	2 231 044
1993	395 487	247 922	2005	5 674 173	5 300 293
1994	667 797	440 887	2006	7 850 671	7 396 013
1995	659 224	463 356	2007	9 670 998	9 183 195
1996	1 026 912	824 016	2008	11 679 613	11 162 558
1997	1 538 204	1 291 500	2009	13 534 191	13 002 349
1998	1 912 561	1 632 547	2010	18 912 464	18 235 407
1999	1 624 214	1 401 076	2011	22 235 254	21 530 776
2000	1 923 753	1 689 625	2012	23 019 505	22 537 828
2001	1 813 447	1 601 677	<b>TOTAL</b>	<b>130 998 463</b>	<b>123 715 418</b>

FIGURE 5.19 – Réserves relatives à la méthode de GLM en présence d'un facteur queue de développement pour le triangle net de réassurance

## 5.4 Le modèle Bootstrap

Cette méthode fut introduite par Efron en 1979, elle a l'avantage contrairement à la méthode de Mack de pouvoir estimer la distribution des réserves.

En provisionnement, celle-ci est souvent associée aux modèles GLM comme celui du modèle Poissonien que nous avons vu précédemment. Nous avons montré que ce modèle Poissonien produit les mêmes réserves que celles obtenues par la méthode de Chain-Ladder, il en est de même du modèle quasi-Poissonien que nous allons utiliser.

Le modèle quasi-Poissonien suppose que les incréments du triangle des paiements cumulés  $X_{i,j}$  suivent une loi de Poisson sur-dispersé de paramètres  $\phi$  et  $\mu_{i,j}$  tel que :  $\frac{X_{i,j}}{\phi} \sim \mathcal{P}(\frac{\mu_{i,j}}{\phi})$  soit donc :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_{i,j}) = \mu_{i,j}, \quad \mathbb{V}(X_{i,j}) = \phi\mu_{i,j} \\ \ln(\mu_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\} \text{ avec } \alpha_0 = \beta_0 = 0 \end{cases}$$

Afin d'appliquer la méthode du Bootstrap nous suivons la méthodologie suivante :

- Nous appliquons notre modèle de Poisson sur-dispersé ce qui nous permet d'obtenir une estimation de nos paramètres  $\mu$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  pour  $i, j = 2, \dots, n$  avec  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$
- De l'étape précédente nous reconstruisons notre triangle supérieur en utilisant :  $\hat{\mu}_{i,j} = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$  et obtenons un nouveau triangle supérieur des incréments  $(\hat{\mu}_{i,j})_{i+j \leq n}$  ajusté par le modèle GLM
- La méthode du Bootstrap impose que les variables utilisées soient indépendantes et identiquement distribuées, pour satisfaire cette contrainte nous utiliserons les résidus de Pearson définis par  $r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\mu}_{i,j})}}$  qui vérifient cette hypothèse.

Nous obtenons donc un triangle supérieur de résidus de Pearson  $(r_{i,j})_{i+j \leq n}$ . Notons que afin d'éviter d'éviter un biais relatif à la méthode de Bootstrap, il nous faut travailler sur des résidus de Pearson "normalisés" définis par  $(r_{i,j}^{norm})_{i+j \leq n} = (r_{i,j})_{i+j \leq n} \sqrt{\frac{k}{k-p}}$  où  $k$  est le nombre de données du triangle supérieur soit  $k = n(n+1)/2$  et  $p$  le nombre de paramètres du modèle  $p = 2n + 1$

• Nous répétons ensuite 50000 fois les étapes suivantes :

1) Nous tirons avec remise parmi le triangle des résidus de Pearson normalisés, nous obtenons alors un nouveau triangle supérieur de résidus de Pearson  $(r_{i,j}^*)_{i+j \leq n+1}$

2) Nous inversons la formule du triangle des résidus de Pearson et obtenons un nouveau triangle supérieur défini par : pour  $i + j \leq n$   $X_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{\nabla(\hat{\mu}_{i,j})} + \hat{\mu}_{i,j}$

3) Nous reconstituons le triangle des paiements cumulés défini par  $C_{i,j}^* = \sum_{j=0}^n X_{i,j}^*$  et estimons les coefficients de Chain-Ladder  $(\hat{f}_j)_{j=1, \dots, n-1}$  sur ce nouveau triangle ce qui nous permet de le compléter pour  $n + 1 < i + j \leq 2n$

4) En notant  $\hat{R}_i^k$  l'estimation de la réserve pour l'année d'origine  $i$  à l'étape  $k$  du Bootstrap (avec  $k \in \{1 \dots 50000\}$ ) nous stockons les réserves totales  $\hat{R}^k = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^k$  obtenues par Bootstrap ce qui nous permet d'approcher la distribution de la réserve totale  $R$

En nous basant sur cet échantillon de taille 50000 nous traçons l'histogramme de la densité estimée des réserves :

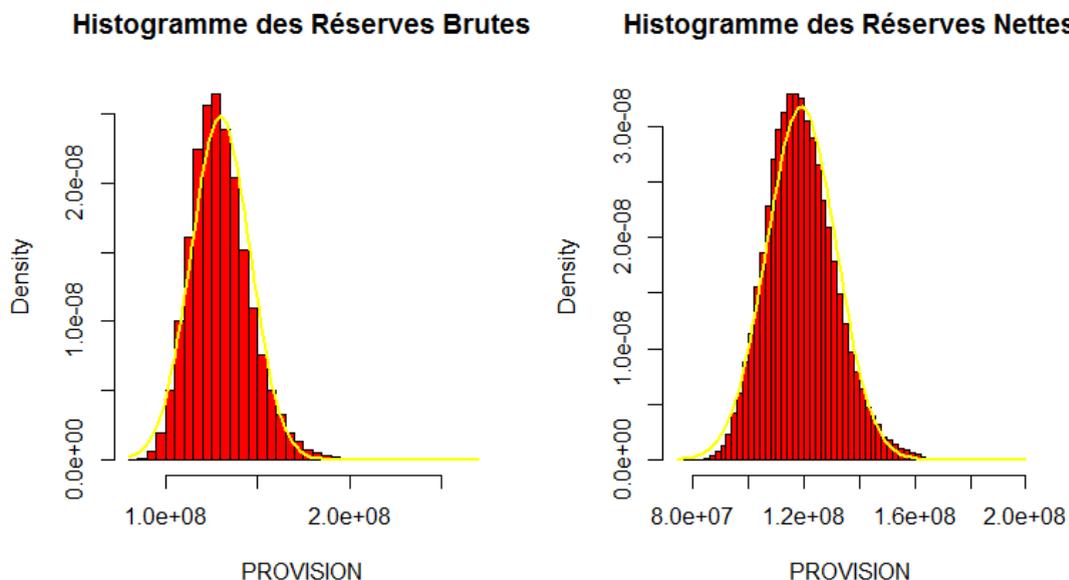


FIGURE 5.20 – Histogrammes des réserves brutes et nettes de réassurance pour deux échantillons de taille 50000

Nous avons superposés des densités gaussiennes de moyenne et variance les estimateurs de la moyenne empirique et de la variance empirique de la réserve totale dans le cas brut et net.

Nous remarquons que nos réserves ne sont pas totalement symétriques, nous décidons de tracer leur Q-Q plot qui est un test graphique de normalité :

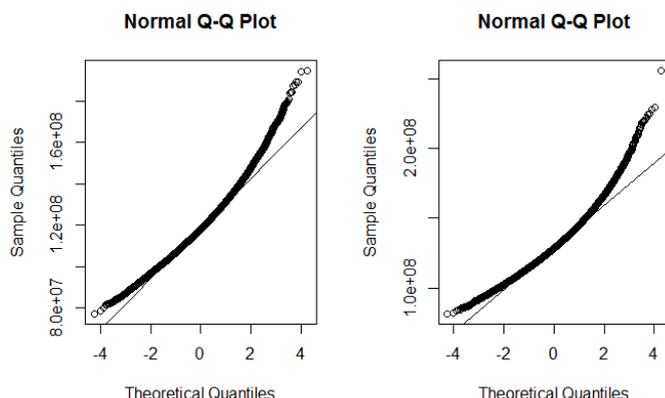


FIGURE 5.21 – Q-Q plot des réserves dans le cas brut de réassurance (gauche) et dans le cas net (droit)

Nous remarquons que nos points ne sont pas alignés dans les deux cas, nous rejetons l'hypothèse de normalité des réserves. Nous pensons alors à la loi log-normale, il nous faut donc démontrer que nos log-réserves sont Gaussiennes. Nous transformons donc nos réserves en log-réserves, traçons l'histogramme des log-réserves, superposons la densité Gaussienne avec les estimateurs naturels de l'espérance et de la variance et effectuons de nouveau un Q-Q plot.

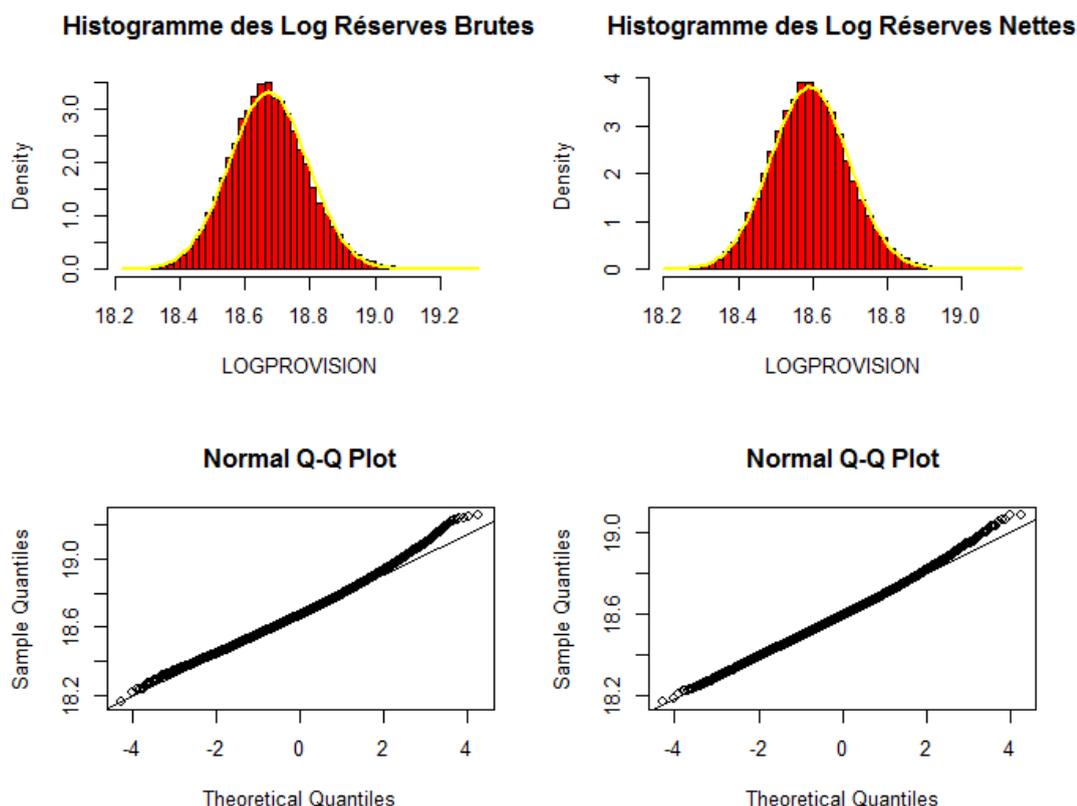


FIGURE 5.22 – Histogrammes et QQ-plots des log-réserves brutes et nettes de réassurance pour deux échantillons de taille 50000

Comme nous pouvons le constater l'hypothèse de log-normalité semble être plus cohérente. L'avantage de cette méthode est qu'elle nous permet d'obtenir les distribution des réserves totales nettes et brutes et nous permet notamment d'en extraire des informations importantes dans le cadre de Solvabilité 2 telles que les

quantiles à 99,5% de la distribution (181 893 062 € dans le cas brut et 159 485 304 € dans le cas net). Notons qu'en moyenne, la réserve totale obtenue pour ce 50000 échantillon est de 129 926 327 € dans le cas brut et de 119 213 152 € dans le cas net.

### 5.4.1 Ajout d'un tail factor dans la méthode du Bootstrap

Comme nous l'avons montré, la méthode du Bootstrap présente l'avantage de donner la distribution de la réserve totale et nous avons remarqué qu'en moyenne, celle-ci est très proche des résultats obtenus par la méthode de référence (+1,1% dans le cas brut) et (+0,9% dans le cas net).

Nous souhaitons donc prolonger l'analyse de cette méthode en y intégrant un tail factor.

La méthodologie est rigoureusement la même que dans le cas précédent jusqu'à l'étape 3).

Une fois les coefficients de Chain-Ladder obtenus nous extrapolons ceux-ci de la même manière que dans la méthode de Chain-Ladder.

Remarque :

Nous fixons l'horizon ultime à 42 années de développement et non plus à l'année de développement à partir de laquelle le coefficient de Chain-Ladder standard estimé est inférieur à 1,0001 en effet, nous obtenons à chaque nouvelle étape du bootstrap un nouveau triangle supérieur et donc des coefficients de Chain-Ladder différents à chaque fois.

Ainsi, rien n'assure d'avoir le même horizon ultime pour chacun des tirages. D'autre part, nous rappelons que l'estimateur des coefficients de développements futurs s'appuie sur une régression faisant intervenir  $\ln(\hat{f}_j^{CL} - 1)_{j=1, \dots, n-1}$ . Une condition nécessaire est alors :  $\hat{f}_j^{CL} > 1 \quad \forall j \in 1, \dots, n-1$ , cette condition est forcément vérifiée sur un triangle de paiements cumulés sans recours mais pas sur un triangle obtenu par Bootstrap.

Nous posons donc  $\hat{f}_j^{CL} = 1,0001$  dès que  $\hat{f}_j^{CL} < 1$ .

En nous basant de nouveau sur un échantillon de taille 50000 nous traçons l'histogramme de la densité estimée des réserves avec l'ajout d'un tail factor :

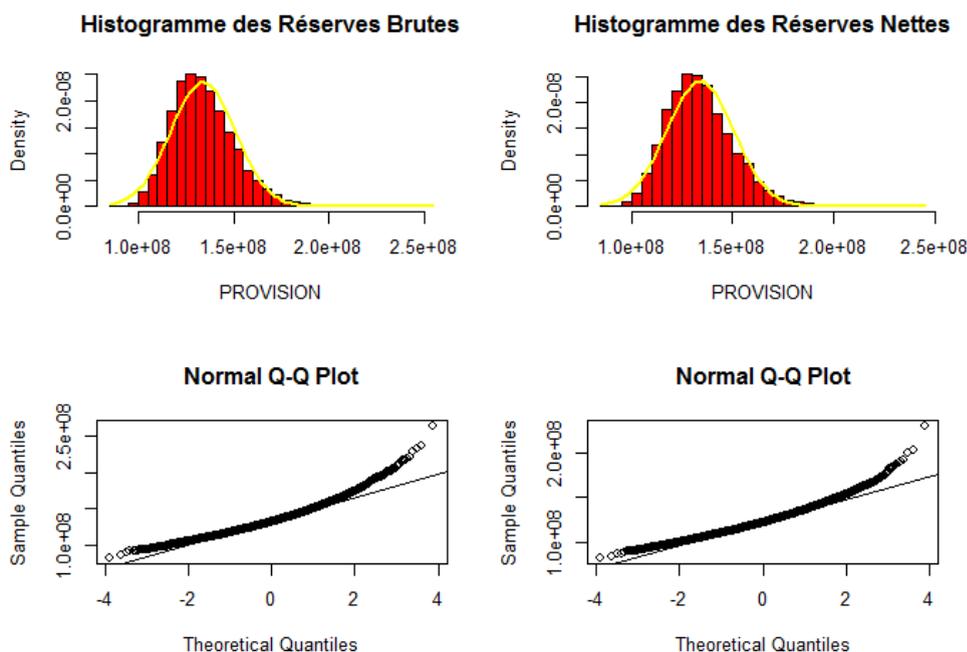


FIGURE 5.23 – Histogrammes et QQ-plots des réserves brutes et nettes de réassurance pour deux échantillons de taille 50000 avec un tail factor

Comme dans le cas précédent, nous remarquons que les distributions ne sont pas tout à fait symétriques ce qui est appuyé par les QQ-plots où les points ne sont pas parfaitement alignés. Nous considérons une fois de plus les log-reserves :

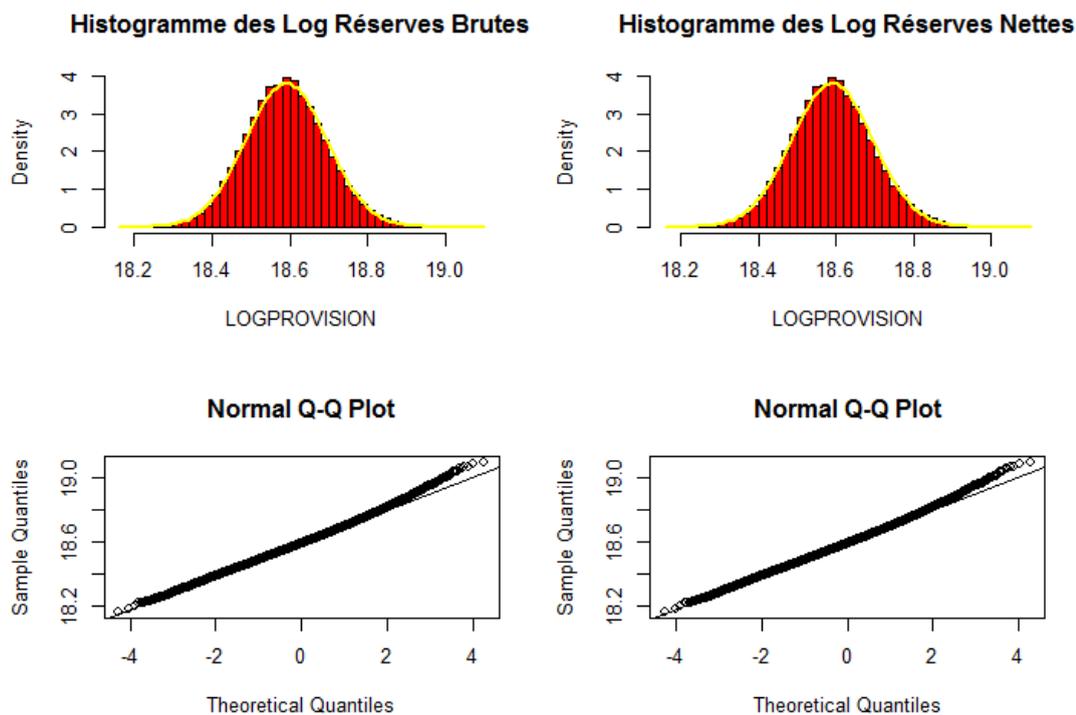


FIGURE 5.24 – Histogrammes et QQ-plots des log réserves brutes et nettes de réassurance pour deux échantillons de taille 50000 avec un tail factor

La propriété de log normalité des réserves est préservée avec l'ajout d'un tail factor. Nous obtenons en moyenne des réserves de 134 179 352 € ( $\approx -0,4\%$  que Chain-Ladder avec tail factor) pour le triangle brut de réassurance et 123 069 919 € ( $\approx -0,5\%$  que dans le cas net de réassurance).

Ainsi, nous en concluons que la méthode du Bootstrap permet de manière cohérente l'ajout de tail factor.

Afin de conclure ce chapitre, nous allons passer en revue les différents avantages et inconvénients des méthodes utilisées, les niveaux de réserves brutes et nettes de réassurance relatifs à ces méthodes en les comparant à notre méthode de référence Chain-Ladder et nous en déduisons ainsi l'impact de la réassurance sur le provisionnement ainsi que son coût en nous basant sur un indicateur largement utilisé en assurance : le ratio sinistres à primes  $\frac{S}{P}$

Méthodes	Avantages	Inconvénients
<b>Chain-Ladder standard</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Simple à implémenter</li> <li>• Méthode de référence</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses contraignantes</li> <li>• Forte sensibilité des estimations</li> <li>• Pas de mesure d'incertitude</li> </ul>
<b>London Chain</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Simple à implémenter</li> <li>• Hypothèses moins contraignantes que CL</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Forte sensibilité des estimations</li> <li>• Pas de mesure d'incertitude</li> </ul>
<b>Ratios</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Simple à implémenter</li> <li>• Utilise des informations exogènes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèse de stabilité des ratios <math>\frac{S}{P}</math></li> <li>• Pas de mesure d'incertitude</li> </ul>
<b>Cape Cod</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Évolution de Chain-Ladder</li> <li>• Utilise des informations exogènes</li> <li>• Permet de regrouper les années d'origine <i>semblables</i></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sensibilité des estimations</li> <li>• Pas de mesure d'incertitude</li> </ul>
<b>Mack</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Résultats identiques à CL</li> <li>• Mesure de l'incertitude</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses contraignantes</li> <li>• Forte sensibilité des estimations</li> </ul>
<b>GLM</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Choix de la distribution des incréments</li> <li>• Résultats identiques à CL (Possonnien)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses de distribution</li> <li>• Estimation lourde des paramètres</li> </ul>
<b>Bootstrap (GLM)</b> Poisson sur-dispersé	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Choix de la distribution des incréments</li> <li>• Résultats similaires à CL</li> <li>• Obtention de la distribution des réserves</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hypothèses de distribution</li> <li>• Estimation lourde des paramètres</li> </ul>

Méthodes	Réserves Brutes	Réserves nettes
<b>Chain-Ladder standard</b>	• 128 457 335 €	• 118 137 102 €
<b>London Chain</b>	• 63 337 106 € ( $\approx -50,7\%$ )	• 55 948 323 € ( $\approx -52,6\%$ )
<b>Ratios</b>	• 259 911 105 € ( $\approx +102,3\%$ )	• 243 276 985 € ( $\approx +105,9\%$ )
<b>Cape Cod</b>	• 127 049 147 € ( $\approx -1,1\%$ )	• 120 143 250 € ( $\approx +1,7\%$ )
<b>Mack</b>	• 128 457 335 € (0%)	• 118 137 102 € (0%)
<b>GLM</b>	• 128 457 338 € ( $\approx 0\%$ )	• 118 137 101 € ( $\approx 0\%$ )
<b>Bootstrap (GLM)</b>	• 129 866 650 € ( $\approx +1,1\%$ )	• 119 376 118 € ( $\approx +1\%$ )

De même, nous comparons les niveaux de réserves obtenues avec l'ajout d'un tail factor par rapport à la méthode de Chain-Ladder standard sans ajout de tail factor.

Méthodes	Réserves Brutes (tail factor)	Réserves nettes (tail factor)
<b>Chain-Ladder standard / Mack</b>	• 134 737 638 ( $\approx +4,9\%$ )	• 123 715 418 ( $\approx +4,7\%$ )
<b>London Chain</b>	•	•
<b>Ratios</b>	•	•
<b>Cape Cod</b>	• 133 000 139 € ( $\approx +3,5\%$ )	• 118 933 640 € ( $\approx +0,8\%$ )
<b>GLM</b>	• 142 732 818 € ( $\approx +11,12\%$ )	• 130 998 463 € ( $\approx 10,9\%$ )
<b>Bootstrap (GLM)</b>	• 134 179 352 € ( $\approx +4,4\%$ )	• 123 069 919 € ( $\approx +4,2\%$ )

Ainsi, mis à part les méthodes de ratios et la méthode de London-Chain pour lesquelles nous avons vu que les hypothèses du modèle n'étaient pas vérifiées nous remarquons que toutes les autres méthodes donnent des résultats extrêmement proche à la fois dans le cas brut et net de réassurance de la méthode de Chain-Ladder standard (sans tail factor).

Certaines méthodes présentent l'avantage d'être simple à implémenter (Cape Cod), d'autres sont plus lourdes en termes d'estimations et de temps de calcul (Bootstrap) mais permettent d'obtenir d'avantage d'information telle que la distribution de la réserve totale.

Nous remarquons qu' en moyenne, la réassurance (sans tail factor) entraîne une baisse d'environ 8% de la réserve totale par rapport au cas brut de réassurance.

Ce résultat paraît faible mais est cohérent avec la nature de nos traités de réassurance, en effet, il s'agit de réassurance non proportionnelle de type XS, sa principale utilité est donc de "caper" (mettre une barrière supérieure) les coûts les plus importants en ne s'activant que sur les gros sinistres (priorités élevées).

Cependant, il serait logique qu'une telle politique se retrouve au niveau de la cession des primes de réassurance.

Nous prenons le ratio :

$$\frac{\sum_{i=1}^n P_i^{nettes} - \sum_{i=1}^n P_i^{brutes}}{\sum_{i=1}^n P_i^{brutes}}$$

nous trouvons que la prime nette nette totale correspond à une baisse d'environ 15,5% de la prime brute. Autrement dit, l'impact de 8% de la réassurance sur le provisionnement se traduit par un taux de cession de 15,5% des primes brutes ce qui nous semble déséquilibré.

De plus, nous voulons étudier les loss ratios brut et net de réassurance en nous basant sur les résultats obtenus par la méthode de Chain-Ladder.

Nous décidons donc de tracer les loss ratios brut ( $\frac{\hat{C}_{i,n}^{CL}}{P_i^{brutes}}$ ) $_{i=0,\dots,n}$  sur lesquels nous superposons les loss ratios net ( $\frac{\hat{C}_{i,n}^{CL}}{P_i^{nettes}}$ ) $_{i=0,\dots,n}$ , notons que par abus de notation nous avons noté au numérateur dans les deux cas  $\hat{C}_{i,n}^{CL}$  mais nous précisons que dans le cas brut il s'agit des estimateurs de la charge ultime sur le triangle brut de réassurance et dans l'autre cas sur le triangle net.

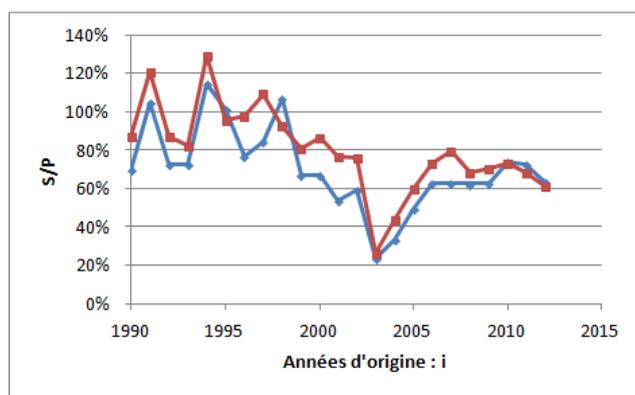


FIGURE 5.25 – Courbe des loss ratios bruts (en bleu) et nets (en rouge) de réassurance

Ainsi, dans la majorité des cas nous remarquons que le loss ratio net est supérieur au loss ratio brut, autrement dit le loss ratio se dégrade avec la réassurance prouvant une fois de plus que les traités de réassurance semblent sur-tarifés.

Enfin, nous avons été capable d'ajouter un tail factor sur la quasi-totalité de nos méthodes.

Nous rappelons ici que le déroulement long des sinistres est l'une des caractéristiques de la branche RCP et que ne pas prendre ce fait en compte peut mener à un sous-provisionnement.

En effet, nous remarquons que dans le cas brut de réassurance en moyenne l'ajout d'un tail factor provoque un provisionnement supplémentaire d'environ 5,9%, et dans le cas net d'environ 5,2%. Si nous enlevons les résultats obtenus dans le cadre des GLM qui biaisent cette moyenne du fait de la mauvaise qualité de la régression linéaire des  $\beta_j$  nous trouvons que l'ajout d'un tail factor entraîne un provisionnement supplémentaire d'environ 4,2 % dans le cas brut de réassurance et de 3,3% dans le cas net.

De manière équivalente que précédemment la réassurance a un impact d'environ 8,8 % et nous pouvons de nouveau superposer les loss ratios ultimes dans le cas brut et net avec un tail factor :

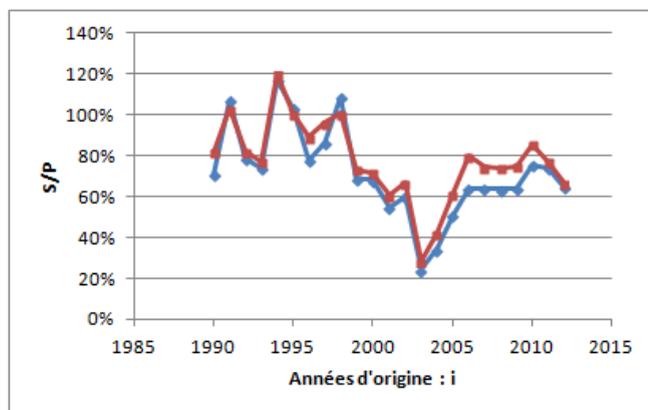


FIGURE 5.26 – Courbe des loss ratios bruts (en bleu) et nets (en rouge) de réassurance avec ajout d'un tail factor

Nous retrouvons ici la même conclusion selon laquelle la réassurance dégrade le loss ratio et parait donc sur-tarifée.

## 6

# Mesure de l'incertitude

Dans ce chapitre, nous baserons uniquement notre étude sur la mesure de l'incertitude liée au provisionnement sur le triangle brut de réassurance.

Comme nous l'avons vu jusqu'à présent le calcul du provisionnement se base sur un horizon ultime qui correspond à l'année à laquelle l'ensemble des sinistres considérés sont clos.

Il est donc naturel dans un premier temps de calculer le risque associé à cet horizon ce qui a été fait par T. Mack. Cette approche consiste à prédire la variabilité de la charge en se basant uniquement sur sa valeur à l'ultime.

Dans un second temps, nous présenterons la notion de mesure d'incertitude à 1 an (introduite par le référentiel Solvabilité 2) qui nécessite le calcul de la charge ultime en date  $t$  et  $t+1$  et nous définirons la variation de la charge ultime à 1 an comme la différence de ces deux quantités.

### 6.1 Mesure de l'incertitude à l'ultime : Le modèle de Mack

L'avantage de ce modèle est qu'il permet notamment de construire des intervalles de confiance pour la valeur de la charge à l'ultime et ainsi de déterminer des provisions pour incertitude en fonction de cet intervalle.

Définissons de nouveau l'ensemble  $T = \{C_{i,j} : i + j \leq n + 1\}$

L'incertitude relative à la prédiction de  $C_{i,n}$  par  $\hat{C}_{i,n}$  est classiquement mesurée par l'écart quadratique moyen conditionnel soit :

$$MSEP(\hat{C}_{i,n}) = \mathbb{E}[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 | T]$$

Nous remarquons que seule  $C_{i,n}$  est aléatoire dans cette espérance, nous en déduisons donc :

$$MSEP(\hat{C}_{i,n}) = \mathbb{V}(C_{i,n} | T) + [\mathbb{E}(C_{i,n} | T) - \hat{C}_{i,n}]^2$$

De plus,  $R_i - \hat{R}_i = C_{i,n} - \hat{C}_{i,n}$  conduit à  $MSEP(\hat{R}_i) = MSEP(\hat{C}_{i,n})$  et à l'erreur standard  $sep(\hat{R}_i) = \sqrt{MSEP(\hat{R}_i)}$  considérée comme une mesure alternative d'incertitude.

Ainsi, comme nous pouvons le voir dans l'expression de  $MSEP(\hat{C}_{i,n})$ , la quantité  $MSEP(\hat{R}_i)$  se décompose en deux éléments, d'une part l'erreur de modélisation  $\mathbb{V}(C_{i,n} | T)$  qui mesure l'écart à la moyenne de la variable  $C_{i,n}$  et d'autre part une erreur d'estimation  $[\mathbb{E}(C_{i,n} | T) - \hat{C}_{i,n}]^2$  provenant du fait que les facteurs utilisés ne sont pas ceux de Chain-Ladder mais leurs estimations.

**Théorème.** Si on pose  $\hat{C}_{i,n-i} = C_{i,n-i}$ , sous les hypothèse **H1** à **H3**,  $MSEP(\hat{R}_i)$  peut être estimé, pour  $i = 1, \dots, n$  par :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left[ \frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}} \right]$$

**Démonstration.** Le détail complet de cette démonstration est donné dans l'article original de T.Mack [1993].

Définissons pour  $i > 0$  l'ensemble des données observables de l'année d'origine  $i$  soit  $L_i = \{C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}\}$ .  
 Considérons dans un premier temps le terme  $\mathbb{V}(C_{i,n}|T) = \mathbb{V}(C_{i,n}|L_i)$  de  $MSEP(\hat{C}_{i,n})$  soit par la formule de décomposition de la variance :

$$\mathbb{E}^{L_i}[\mathbb{V}(C_{i,n}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-1})] + \mathbb{V}^{L_i}[\mathbb{E}(C_{i,n}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-1})]$$

Les hypothèses **H2** et **H3** conduisent à :

$$\mathbb{V}(C_{i,n}|L_i) = \sigma_{n-1}^2 \mathbb{E}(C_{i,n-1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}) + f_{n-1}^2 \mathbb{V}(C_{i,n-1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i})$$

or  $\mathbb{E}(C_{i,n-1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}) = f_{n-2} \mathbb{E}(C_{i,n-2}|L_i)$  et  $\mathbb{V}(C_{i,n-1}|C_{i,0}, \dots, C_{i,n-i}) = \sigma_{n-2}^2 \mathbb{E}(C_{i,n-2}|L_i) + f_{n-2}^2 \mathbb{V}(C_{i,n-2}|L_i)$   
 on en déduit de proche en proche :

$$\mathbb{V}(C_{i,n}|T) = C_{i,n-i} \sum_{j=n-i}^{n-1} f_{n-i} \dots f_{j-1} \sigma_j^2 f_{j+1}^2 \dots f_{n-1}^2 \quad \text{car} \quad \mathbb{V}(C_{i,n-i}|L_i) = 0$$

Pour le second terme de  $MSEP(\hat{C}_{i,n})$ , les résultats qui précèdent donnent directement :

$$[\mathbb{E}(C_{i,n}|T) - \hat{C}_{i,n}]^2 = C_{i,n-i}^2 (f_{n-i} \dots f_{n-1} - \hat{f}_{n-i} \dots \hat{f}_{n-1})^2$$

Il nous reste à déduire une estimation des deux termes de  $MSEP(\hat{C}_{i,n})$  que nous venons d'expliciter.

Pour  $\mathbb{V}(C_{i,n}|T)$ , nous substituons les facteurs  $f_j$  par leur estimateur  $\hat{f}_j$  de même pour  $\sigma_j^2$  et  $\hat{\sigma}_j^2$  :

$$\hat{\mathbb{V}}(\hat{C}_{i,n}) = C_{i,n-i} \sum_{j=n-i}^{n-1} \hat{f}_{n-i} \dots \hat{f}_{j-1} \hat{\sigma}_j^2 \hat{f}_{j+1}^2 \dots \hat{f}_{n-1}^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \hat{C}_{i,j}^2}$$

en considérant  $\hat{C}_{i,j} = C_{i,n-i} \hat{f}_{n-i} \dots \hat{f}_j$

Le terme suivant,  $[\mathbb{E}(C_{i,n}|T) - \hat{C}_{i,n}]^2$  nécessite un traitement plus compliqué, T.Mack utilise une expression alternative de  $F = f_{n-i} \dots f_{n-1} - \hat{f}_{n-i} \dots \hat{f}_{n-1}$  lui permettant de substituer aux paramètres  $f_j, \sigma_j^2$  leur estimateur sans biais  $\hat{f}_j, \hat{\sigma}_j^2$ .

Cela lui permet d'estimer  $F^2$  par :

$$\hat{f}_{n-i}^2 \dots \hat{f}_{n-1}^2 \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}}$$

Le résultat de ce théorème s'obtient en sommant les deux estimations précédentes de  $MSEP(\hat{C}_{i,n})$ .

**Corollaire.** L'estimation de  $MSEP(\hat{R})$  est donnée par :

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \widehat{MSEP}(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,n} \left( \sum_{k=i+1}^n \hat{C}_{k,n} \right) \sum_{j=n-i}^{n-1} \frac{2\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2 \sum_{h=0}^{n-j-1} C_{h,j}} \right\}$$

Nous décidons d'appliquer le modèle de Mack en utilisant la fonction MackChainLadder de la librairie ChainLadder du logiciel R en notifiant au préalable que  $\hat{\sigma}_{n-1}^2$  soit calculée comme le propose T.Mack soit :

$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-2}^2, \hat{\sigma}_{n-3}^2\right)$ , et obtenons les résultats suivants :

	$R_i^M$	SEP( $R_i^M$ )	MSEP( $R_i^M$ )		$R_i^M$	SEP( $R_i^M$ )	MSEP( $R_i^M$ )
1990	-	-	-	2002	2 007 725	753 415	567 634 162 225
1991	88 936	1 233	1 520 289	2003	1 136 323	644 835	415 812 177 225
1992	86 999	6 695	44 823 025	2004	2 206 673	1 291 128	1 667 011 512 384
1993	126 003	54 651	2 986 731 801	2005	5 341 658	2 084 757	4 346 211 749 049
1994	307 723	96 155	9 245 784 025	2006	7 764 908	2 512 289	6 311 596 019 521
1995	403 487	164 276	26 986 604 176	2007	9 572 062	2 834 740	8 035 750 867 600
1996	724 868	486 597	236 776 640 409	2008	11 789 709	3 579 143	12 810 264 614 449
1997	1 140 156	602 066	362 483 468 356	2009	13 729 919	3 890 074	15 132 675 725 476
1998	1 796 771	750 951	563 927 404 401	2010	19 422 601	4 758 308	22 641 495 022 864
1999	1 345 982	63 682	4 055 397 124	2011	22 799 326	5 278 508	27 862 646 706 064
2000	1 637 637	68 145	4 643 741 025	2012	23 549 307	5 396 166	29 118 607 499 556
2001	1 478 562	630 895	398 028 501 025				

$R^M$	MSEP( $R^M$ )	SEP( $R^M$ )
128 457 335	270 569 950 029 748	16 449 011

FIGURE 6.1 – Réserves et grandeurs relatives à la méthode de Mack pour le triangle brut de réassurance

Nous possédons donc maintenant des estimations pour la moyenne et la variance des réserves par années d'origine  $R_i^M$ . Il nous reste cependant à faire une hypothèse paramétrique sur la distribution de  $R_i^M$  afin de pouvoir construire des intervalles de confiance sur les réserves estimées. Si on suppose que la distribution est normale, de moyenne la valeur estimée  $\hat{R}_i^M$  et d'écart type donné par l'erreur standard  $\widehat{sep}(\hat{R}_i^M)$ .

Un intervalle pour un niveau de confiance à 95% est donné par :  $[\hat{R}_i^M - 1,96\widehat{sep}(\hat{R}_i^M), \hat{R}_i^M + 1,96\widehat{sep}(\hat{R}_i^M)]$ . Cependant la distribution normale n'est pas forcément une bonne approximation si il s'avère que la vraie distribution de  $R_i$  n'est pas symétrique, de plus, l'hypothèse de la distribution normale de  $R_i$  peut conduire à une borne inférieure négative ce qui, à priori, n'est pas censé être cohérent pour une réserve. Ainsi, une alternative est de faire l'hypothèse d'une distribution lognormale pour les  $R_i$ , nous approximons donc la distribution de la réserve  $\hat{R}_i^M$  par une distribution lognormale de paramètres  $\mu_i$  et  $\sigma_i^2$  tels que la moyenne et la variance des deux distributions soient égales, c'est à dire tels que :

$$\begin{aligned} \exp(\mu_i + \sigma_i^2) &= \hat{R}_i^M \\ \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)(\exp(\sigma_i^2) - 1) &= (\widehat{sep}(\hat{R}_i^M))^2 \end{aligned}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \ln(\hat{R}_i^M) - \frac{\sigma_i^2}{2} \\ \sigma_i^2 &= \ln\left(1 + \left(\frac{\widehat{sep}(\hat{R}_i^M)}{\hat{R}_i^M}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Les bornes d'un intervalle de confiance à 95% sont alors données par :

$$\left[\exp\left(\mu_i - 1,96\sigma_i\right), \exp\left(\mu_i + 1,96\sigma_i\right)\right] = \left[\hat{R}_i^M \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} - 1,96\sigma_i\right), \hat{R}_i^M \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} + 1,96\sigma_i\right)\right]$$

Nous obtenons les résultats suivants :

	$R_i^M$	IC NORMAL		IC LOGNORMAL	
		borne inf	borne sup	borne inf	borne sup
1990	-	-	-	-	-
1991	88 936	86 519	91 352	86 543	91 377
1992	86 999	73 877	100 121	74 615	100 842
1993	126 003	18 887	233 119	51 232	260 829
1994	307 723	119 260	496 187	161 480	534 247
1995	403 487	81 506	725 468	173 444	805 172
1996	724 868	-228 862	1 678 598	182 100	1 989 080
1997	1 140 156	-39 893	2 320 206	381 420	2 665 064
1998	1 796 771	324 907	3 268 635	755 076	3 639 788
1999	1 345 982	1 221 165	1 470 798	1 225 470	1 475 042
2000	1 637 637	1 504 072	1 771 201	1 508 122	1 775 200
2001	1 478 562	242 007	2 715 116	610 079	3 031 450

	$R_i^M$	IC NORMAL		IC LOGNORMAL	
		borne inf	borne sup	borne inf	borne sup
2002	2 007 725	531 032	3 484 419	922 850	3 828 785
2003	1 136 323	-127 553	2 400 200	350 857	2 783 766
2004	2 206 673	-323 938	4 737 284	657 557	5 516 689
2005	5 341 658	1 255 534	9 427 781	2 378 905	10 408 823
2006	7 764 908	2 840 822	12 688 995	3 980 497	13 711 932
2007	9 572 062	4 015 972	15 128 153	5 199 287	16 201 558
2008	11 789 709	4 774 589	18 804 830	6 304 046	20 188 299
2009	13 729 919	6 105 374	21 354 464	7 662 443	22 773 741
2010	19 422 601	10 096 318	28 748 885	11 752 862	30 280 107
2011	22 799 326	12 453 451	33 145 202	14 193 077	34 760 901
2012	23 549 307	12 972 822	34 125 792	14 733 469	35 762 379
<b>TOTAL</b>	<b>128 457 335</b>	<b>96 217 274</b>	<b>160 697 396</b>	<b>99 236 501</b>	<b>163 599 903</b>

FIGURE 6.2 – Intervalles de confiance pour les variables  $(\hat{R}_i^M)_{i=1,\dots,n}$  et  $\hat{R}^M$  pour le triangle brut de réassurance

### 6.1.1 Formule récursive pour l'erreur standard prenant en compte un facteur de queue de développement

Les erreurs standards  $sep()$  que nous avons calculés précédemment peuvent l'être de manière récursive. Nous avons montré que

$$(\widehat{sep}(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left[ \frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}} \right]$$

. Cette formule peut se réécrire de la manière suivante :

$$(\widehat{sep}(\hat{R}_i))^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( (se(F_{i,k}))^2 + (se(\hat{f}_k))^2 \right) / \hat{f}_k^2$$

où :

- $F_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$ ,
- $(se(F_{i,k}))^2 = \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{C}_{i,k}}$  représente un estimateur de  $\mathbb{V}(F_{i,k} | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \mathbb{E}[(F_{i,k} - f_k)^2 | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}]$  qui mesure la variation entre un coefficient individuel  $F_{i,k}$  et la vraie valeur  $f_k$ ,
- $(se(\hat{f}_k))^2 = \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}}$  représente un estimateur de  $\mathbb{V}(\hat{f}_k | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \mathbb{E}[(\hat{f}_k - f_k)^2 | C_{i,1}, \dots, C_{i,k}]$  qui mesure la variation entre la moyenne estimée  $\hat{f}_k$  et la vraie valeur  $f_k$ .

Sous cette forme, le calcul de l'erreur standard conduit au programme récursif suivant :

$$\begin{cases} sep(\hat{C}_{i,n+1-i}) = 0 \\ sep(\hat{C}_{i,k+1})^2 = \hat{C}_{i,k}^2 \left( (se(F_{i,k}))^2 + (se(\hat{f}_k))^2 \right) + (sep(\hat{C}_{i,k}))^2 \hat{f}_k^2 \end{cases}$$

*Remarque :*

L'application de ce programme à nos données donnent exactement les mêmes résultats que ceux obtenus par la formule de Mack.

Pour la réserve totale , la formule récursive est la suivante (commence à  $k = 1$ ) :

$$\left( sep \left( \sum_{i=n+1-k}^n \hat{C}_{i,k+1} \right) \right)^2 = \left( sep \left( \sum_{i=n+2-k}^n \hat{C}_{i,k} \right) \right)^2 \hat{f}_k^2 + \sum_{i=n+1-k}^n \hat{C}_{i,k}^2 (se(F_{i,k}))^2 + \left( \sum_{i=n+1-k}^n \hat{C}_{i,k} \right)^2 (se(\hat{f}_k))^2$$

Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, le développement des sinistres d'années d'origine  $i$  n'est pas forcément terminé après  $n$  ( $n=23$  dans notre cas) années de développement et nous avons donc utilisé un facteur de queue de développement  $\hat{f}_{ultime} > 1$  pour estimer le paiement à l'horizon ultime  $\hat{C}_{i,ultime}$  que nous obtenons par :

$$\hat{C}_{i,ultime} = \hat{C}_{i,n} * \hat{f}_{ultime}$$

où  $\hat{f}_{ultime} = \prod_{j=n}^A \hat{f}_j$  avec  $A = \{inf k : \hat{f}_k < 1,0001\}$

Il est alors possible d'étendre la formule récursive pour y inclure le facteur de queue de développement ;

$$sep(\hat{C}_{i,ultime})^2 = \hat{C}_{i,n}^2 \left( (se(F_{i,ultime}))^2 + (se(\hat{f}_{ultime}))^2 \right) + (sep(\hat{C}_{i,n}))^2 \hat{f}_{ultime}^2$$

Pour déterminer cette quantité nous avons donc besoin de  $\hat{f}_{ultime}$  ,  $se(\hat{f}_{ultime})$  et  $se(F_{i,ultime}) \forall i$ .

Nous fixons  $\hat{f}_{ultime}$  de la même manière que dans la section Chain-Ladder standard puis nous cherchons  $j$  tel que

$$\hat{f}_{j-1} < \hat{f}_{ultime} < \hat{f}_j$$

Il reste ensuite à estimer les quantités  $se(\hat{f}_{ultime})$  et  $se(F_{i,ultime})$ , nous prenons des valeurs qui vérifient

$$se(\hat{f}_{j-1}) < se(\hat{f}_{ultime}) < se(\hat{f}_j)$$

et

$$se(F_{i,j-1}) < se(F_{i,ultime}) < se(F_{i,j})$$

Une fois ces trois valeurs fixées, nous pouvons en déduire  $\hat{\sigma}_{ultime} = se(F_{i,ultime})\sqrt{\hat{C}_{i,n}}$  ce qui permet de déterminer  $se(F_{i,ultime})$  pour toutes les années d'origine  $i$ .

Nous trouvons  $\hat{f}_{ultime} = 1,021$  et nous avons  $\hat{f}_{11} = 1,031 > \hat{f}_{ultime} = 1,021 > \hat{f}_{12} = 1,011$ .

Nous choisissons alors

$$se(\hat{f}_{11}) < se(\hat{f}_{ultime}) < se(\hat{f}_{12})$$

et

$$se(F_{i,11}) < se(F_{i,ultime}) < se(F_{i,12})$$

Par la formule récursive nous en déduisons les  $(sep(\hat{C}_{i,ultime}))_{i=2,\dots,n}$

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sep(C <sub>i,ultime</sub> )	250 897	219 862	240 589	331 054	344 181	568 175	686 174	847 282	299 173	309 397	701 933
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
sep(C <sub>i,ultime</sub> )	828 709	690 145	1 344 300	2 163 397	2 602 380	2 929 940	3 685 359	4 001 604	4 890 237	5 420 860	5 538 296

FIGURE 6.3 – Estimation des  $(sep(\hat{C}_{i,ultime}))_{i=2,\dots,n}$  pour le triangle brut de réassurance

Ainsi, comme nous le voyons il est donc possible d'intégrer un facteur de queue de développement dans le calcul de l'erreur standard, ainsi, si l'on reprend l'hypothèse de normalité ou de log normalité des des réserves relatives aux années d'origine, nous sommes alors capable de recréer des intervalles de confiance tenant compte d'un tail factor comme précédemment.

	$R_i^M$	IC NORMAL		IC logNORMAL	
		borne inf	borne sup	borne inf	borne sup
1990	82 418	0	0	0	0
1991	223 345	-268 590	742 922	25 260	872 710
1992	490 601	59 671	650 792	193 566	1 035 483
1993	243 754	-227 800	712 143	34 454	873 518
1994	514 925	-133 940	979 920	136 758	1 371 799
1995	592 103	-82 492	1 018 776	177 798	1 473 827
1996	885 073	-228 550	1 681 798	235 511	2 355 488
1997	1 333 420	-11 482	2 031 075	458 543	3 065 693
1998	2 059 623	398 950	2 507 955	877 527	4 134 419
1999	1 524 789	938 410	885 552	1 022 275	2 190 012
2000	1 827 364	1 220 946	915 815	1 295 933	2 504 915
2001	1 642 086	266 297	2 077 722	676 463	3 370 264

	$R_i^M$	IC NORMAL		IC logNORMAL	
		borne inf	borne sup	borne inf	borne sup
2002	2 204 695	580 425	2 452 979	1 012 053	4 208 219
2003	1 228 762	-123 922	2 042 829	383 891	2 989 858
2004	2 351 638	-283 190	3 979 128	720 015	5 788 979
2005	5 635 211	1 394 953	6 403 655	2 543 508	10 881 239
2006	8 131 956	3 031 291	7 703 045	4 199 811	14 282 899
2007	9 962 213	4 219 530	8 672 622	5 434 601	16 807 960
2008	12 207 846	4 984 543	10 908 663	6 551 081	20 849 082
2009	14 161 774	6 318 630	11 844 748	7 916 227	23 461 552
2010	19 963 469	10 378 605	14 475 102	12 080 884	31 121 847
2011	23 377 870	12 752 984	16 045 746	14 542 222	35 664 322
2012	24 092 701	13 237 641	16 393 356	15 050 269	36 632 235

FIGURE 6.4 – Intervalles de confiance pour les variables  $(\hat{R}_i^M)_{i=1,\dots,n}$  pour le triangle brut de réassurance avec ajout d'un tail factor

De même, nous trouvons  $\hat{R}=134\ 737\ 638\ \text{€}$  et  $sep(\hat{R})=17\ 864\ 354\ \text{€}$  d'où nous en déduisons l'intervalle de confiance normal à 95% [99 723 504, 169 751 772] et le log normal [103 118 479, 173 010 787].

Notons que de manière cohérente l'incertitude à l'ultime avec l'ajout d'un tail factor est strictement supérieur à celle calculée par le modèle de Mack, nous venons donc de montrer qu'il est possible de mesurer l'incertitude présentée par le modèle de Mack avec un tail factor.

## 6.2 Mesure de l'incertitude à un an : Le modèle de Merz et Wüthrich

En premier lieu nous définissons les ensembles  $T^n = \{C_{i,j} : i \leq n, i + j \leq n\}$  et  $T^{n+1} = \{C_{i,j} : i \leq n, i + j \leq n + 1\}$  correspondant respectivement à l'information détenue dans notre triangle supérieur (à la date n) et celle contenue avec l'ajout d'une diagonale supplémentaire (à la date n+1).

Dans cette partie, notre objectif n'est plus de mesurer la variabilité de la charge totale en se basant sur sa valeur à l'ultime mais sur celle l'année calendaire suivante.

La nouvelle réglementation imposée par Solvabilité 2 implique que l'horizon temporel considéré n'est plus la clôture de l'ensemble des sinistres mais la situation comptable l'année calendaire suivante.

Afin de pouvoir mesurer cette incertitude, la méthode préconisée dans le QIS 5 (Quantitative Impact Study 5) est celle de Merz et Wüthrich que nous nous proposons d'étudier, elle se base sur l'étude des boni (respectivement mali) qui correspondent à une estimation revue à la baisse (respectivement à la hausse) de la charge ultime.

Nous définirons la variation de la charge ultime à un an comme la différence entre sa valeur calculée à la date n et celle calculée en n+1, cette différence est appelée Claims Development Result et nous la noterons CDR dans la suite. Cette différence est donnée par :

$$CDR_i(n + 1) = \mathbb{E}[C_{i,n}|T^n] - \mathbb{E}[C_{i,n}|T^{n+1}]$$

nous définirons cette quantité comme étant la CDR "réelle", celle-ci est estimée par la CDR dite "observable" :

$$\widehat{CDR}_i(n + 1) = \hat{C}_{i,n}^n - \hat{C}_{i,n}^{n+1}$$

où  $\hat{C}_{i,n}^n$  et  $\hat{C}_{i,n}^{n+1}$  sont les estimations du paiement cumulé final effectué en fin d'année calendaire n et en fin d'année calendaire n+1 ; autrement dit :

$$\hat{C}_{i,n}^n = C_{i,n-i} \hat{J}_{n-i}^n \cdots \hat{J}_{n-1}^n$$

$$\hat{C}_{i,n}^{n+1} = C_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+1}^{n+1} \dots \hat{f}_{n-1}^{n+1}$$

où

$$\hat{f}_j^n = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{i,j}} \quad \text{et} \quad \hat{f}_j^{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j} C_{i,j}}$$

Merz et Wüthrich se placent dans le cadre des hypothèses du modèle de Chain-Ladder et proposent deux points de vue afin de quantifier et d'estimer cette mesure d'incertitude : un point de vue prospectif et un point de vue retrospectif.

### 6.2.1 Un point de vue prospectif

Par définition de  $CDR_i(n+1)$  et du fait de la propriété martingale de  $C_t = (\mathbb{E}C_{i,n}|T^t)$  nous pouvons en déduire que , conditionnellement à l'information  $T^n$  le  $CDR_i(n+1)$  est centré c'est à dire :

$$\mathbb{E}[CDR_i(n+1)|T^n] = 0$$

Ainsi, avec l'information dont nous disposons à la date  $t = n$ , la meilleure estimation du  $CDR_i(n+1)$  est 0. Nous désirons alors déterminer de combien la réalisation des  $CDR$  aura dévié de 0 à la fin de l'année calendaire.

Nous rappelons ici que Solvabilité 2 impose une marge de solvabilité qui doit contenir suffisamment de capital pour absorber des déviations possibles du  $CDR$  autour de 0, plus concrètement, les fonds propres doivent couvrir les réalisations du CDR dans 99,5% des cas.

Cette déviation des CDR peut être mesurée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} MSEPCDR_i(n+1)|T^n(0) &= \mathbb{E}[(CDR_i(n+1) - 0)^2|T^n] \\ &= \mathbb{V}[(CDR_i(n+1) - 0)^2|T^n] \\ &= \mathbb{V}[\mathbb{E}[C_{i,n}|T^n] - \mathbb{E}[C_{i,n}|T^{n+1}|T^n]] \\ &= \mathbb{V}[\mathbb{E}[C_{i,n}|T^{n+1}|T^n]] \\ &= \mathbb{V}[C_{i,n-i+1} f_{n-i+1} \dots f_{n-1} | T^n] \\ &= \mathbb{V}[C_{i,n-i+1} | T^n] \prod_{j=n-i+1}^{n-1} f_j^2 \\ &= C_{i,n-i} \sigma_{i,n-i}^2 \prod_{j=n-i+1}^{n-1} f_j^2 \\ &= \mathbb{E}(C_{i,n} | T^n)^2 \frac{\sigma_{i,n-i}^2 / f_{n-i}^2}{C_{i,n-i}} \end{aligned}$$

Du fait que le  $CDR$  soit centré conditionnellement à l'information  $T^n$  cette quantité s'avère être sa variance, celle-ci peut-être estimée par :

$$\widehat{\mathbb{V}}(CDR_i(n+1)|T^n) = \hat{C}_{i,n} \frac{\hat{\sigma}_{i,n-i}^2 / \hat{f}_{n-i}^2}{C_{i,n-i}}$$

Nous définissons une version observable de cette quantité en se basant sur le CDR dit "observable"  $\widehat{CDR}_i(n+1)$  :

$$\mathbb{V}[\widehat{CDR}_i(n+1)|T^n] = MSEPCDR_i(n+1)|T^n(0) = \mathbb{E}[(\widehat{CDR}_i(n+1) - 0)^2|T^n]$$

Cette formule nous donne une vision prospective de l'incertitude à un an, elle mesure la précision de la prédiction de  $\widehat{CDR}_i(n+1)$  par 0, nous l'estimons par :

$$MSEPCDR_i(n+1)|T^n(0) = \hat{C}_{i,n}^2 (\hat{\Gamma}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n)$$

où

$$\hat{\Delta}_{i,n}^n = \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / \hat{f}_{n-i}^2}{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,n-i}} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{k=0}^{n-j} n-j-1 C_{k,j}}$$

$$\hat{\Gamma}_{i,n}^n = \left[ 1 + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / \hat{f}_{n-i}^2}{C_{i,n-i}} \right] \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \left( 1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{(\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j})^2} C_{n-j,j} \right) - 1$$

Notons qu'il est possible de simplifier les calculs en donnant une approximation de  $\hat{\Gamma}_{i,n}^n$ , en effet nous avons la propriété suivante :

$$\prod_i (1 + k_i) \approx 1 + \sum_i k_i \quad \text{si } k_i \ll 1$$

Ainsi, il faut que :

$$\frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{(\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j})^2} C_{n-j,j} \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{C_{n-j,j}} \left( \frac{C_{n-j,j}}{\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j}} \right)^2 \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{C_{n-j,j}} \ll 1$$

car  $\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j} > C_{n-j,j}$

Nous pouvons donc en déduire une approximation pour  $\hat{\Gamma}_{i,n}^n$  :

$$\hat{\Gamma}_{i,n}^n \approx \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / \hat{f}_{n-i}^2}{C_{i,n-i}} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{C_{n-j,j}}$$

### 6.2.2 Un point de vue rétrospectif

Ce second point de vue consiste à se positionner en l'année calendaire  $n+1$ .

Il est donc possible d'avoir une observation pour les CDR et de vérifier si celle-ci se trouve dans un intervalle cohérent autour du CDR réel.

Nous rappelons la formule du CDR observable :

$$\widehat{CDR}_i(n+1) = \hat{C}_{i,n}^n - \hat{C}_{i,n}^{n+1}$$

où  $\hat{C}_{i,n}^n$  est l'estimation de  $\mathbb{E}[C_{i,n}|T^n]$  faite en  $n$  et  $\hat{C}_{i,n}^{n+1}$  est l'estimation de  $\mathbb{E}[C_{i,n}|T^{n+1}]$  faite en  $n+1$ .

Il est alors possible de définir une mesure de la variation entre le CDR observable et le CDR réel :

$$MSEP_{CDR_i(n+1)|T^n}(\widehat{CDR}_i(n+1)) = \mathbb{E} \left[ \left( CDR_i(n+1) - \widehat{CDR}_i(n+1) \right)^2 \right]$$

Merz et Wüthrich montrent alors que cette quantité peut être estimée par :

$$\widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|T^n}(\widehat{CDR}_i(n+1)) = \hat{C}_{i,n}^2 (\hat{\phi}_{i,n}^n + \hat{\Delta}_{i,n}^n)$$

où

$$\hat{\phi}_{i,n}^n = \left[ 1 + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / \hat{f}_{n-i}^2}{C_{i,n-i}} \right] \left( \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \left( 1 + \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{(\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j})^2} C_{n-j,j} \right) - 1 \right)$$

$$\approx \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{C_{n-j,j}}$$

(même hypothèse que pour  $\hat{\Gamma}_{i,n}^n$ )

### 6.2.3 Agrégation sur les années d'origine

Lorsque nous voulons sommer les  $CDR_i(n+1)$  sur l'ensemble de nos années d'origine il nous faut prendre en compte les corrélations entre ces années. Ce sont les mêmes observations qui sont utilisées pour calculer les coefficients de Chain-Ladder et ceux-ci sont ensuite appliqués à différentes années d'origine d'où cette notion de corrélation.

En prenant en compte cet effet, Merz et Wüthrich en déduisent l'estimateur pour la  $MSEP$  des  $CDR$  réels agrégés :

$$\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n CDR_i(n+1)|T^n} \left( \sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(n+1) \right) = \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|T^n} (\widehat{CDR}_i(n+1)) + 2 \sum_{0 < i < k} \hat{C}_{i,n} \hat{C}_{k,j} (\hat{\phi}_{i,n}^n + \hat{\gamma}_{i,n}^n)$$

où

$$\hat{\gamma}_{i,n}^n = \frac{C_{i,n-i}}{\sum_{k=0}^i C_{k,n-i}} \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 / \hat{f}_{n-i}^2}{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,n-i}} + \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left( \frac{C_{n-j,j}}{\sum_{k=0}^{n-j} C_{k,j}} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{\sum_{k=0}^{n-j-1} C_{k,j}}$$

De la même manière ils en déduisent un estimateur pour la  $msep$  des des  $CDR$  observables agrégés :

$$\widehat{MSEP}_{\sum_{i=1}^n CDR_i(n+1)|T^n}(0) = \sum_{i=1}^n \widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|T^n}(0) + 2 \sum_{0 < i < k} \hat{C}_{i,n} \hat{C}_{k,j} (\hat{\mu}_{i,n}^n + \hat{\gamma}_{i,n}^n)$$

Avec :

$$\hat{\mu}_{i,n}^n = \hat{\phi}_{i,n}^n + \frac{\hat{\sigma}_{n-i}^2 \hat{f}_{n-i}^2}{\sum_{k=0}^i C_{k,n-i}}$$

Finalement, étant donné que les sinistres sont indépendants suivant les différentes années d'origine, l'estimation de la variance des  $CDR$  réels agrégés correspond à la somme des estimations des variance des  $CDR$  réels :

$$\mathbb{V} \left( \sum_{i=1}^n CDR_i(n+1) | T^n \right) = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbb{V}}(CDR_i(n+1) | T^n)$$

### 6.2.4 Application du modèle de Merz et Wüthrich

Dans un premier temps, comme nous donnerons les résultats des mesures d'incertitude précédentes en valeur exacte et en valeur approchée, nous tenons à vérifier l'hypothèse qui nous permet ces approximations :

$$\hat{A}_j = \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \hat{f}_j^2}{C_{n-j,j}} \ll 1$$

Nous obtenons :

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_j$	0,0045	0,0041	0,0041	0,0040	0,0095	0,0033	0,0021	0,0033	0,0202	0,0088	0,0008
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$A_j$	0,0001	0,0003	0,0006	0,0002	0,0007	0,0032	0,0002	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000

FIGURE 6.5 – Estimation des  $((\hat{A}_j)_{i=0,\dots,n-1})$  pour le triangle brut de réassurance

Comme nous pouvons le constater les quantités sont inférieures à 1 pour tout  $j = 0, \dots, n - 1$  dans les deux triangles, nous pouvons donc utiliser les valeurs approchées définies précédemment pour calculer les mesures d'incertitude.

De plus, nous voulons obtenir des réalisations des CDR dit observables, pour cela nous devons disposer de l'information contenue dans  $T^{n+1} = \{C_{i,j} : i \leq n, i+j \leq n+1\}$ .

Or, dans le cadre de notre étude nous nous sommes intéressés aux sinistres dont les années d'origine vont de 1979 à 2012 et ne possédons pas encore l'information sur le déroulement de ces sinistres sur 2013.

Ainsi, nous décidons de rajouter une diagonale à notre triangle que nous obtenons par une méthode de Bootstrap.

#### 6.2.4.1 Construction d'une diagonale supplémentaire par Bootstrap

Nous nous replaçons dans le cadre du modèle quasi-Poissonien, on rappelle que les incréments du triangle des paiements cumulés  $X_{i,j}$  suivent une loi de Poisson sur-dispersé de paramètres  $\phi$  et  $\mu_{i,j}$  tel que :  $\frac{X_{i,j}}{\phi} \sim \mathcal{P}(\frac{\mu_{i,j}}{\phi})$  soit donc :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_{i,j}) = \mu_{i,j}, \mathbb{V}(X_{i,j}) = \phi\mu_{i,j} \\ \ln(\mu_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\} \text{ avec } \alpha_0 = \beta_0 = 0 \end{cases}$$

Pour appliquer la méthode du Bootstrap pour construire notre diagonale nous suivons la méthodologie suivante :

- Nous appliquons notre modèle de Poisson sur-dispersé ce qui nous permet d'obtenir une estimation de nos paramètres  $\mu, \alpha_i$  et  $\beta_j$  pour  $i, j = 1, \dots, n$  avec  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$

- De l'étape précédente nous reconstruisons notre triangle supérieur en utilisant :  $\hat{\mu}_{i,j} = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$  et obtenons un nouveau triangle supérieur des incréments  $(\hat{\mu}_{i,j})_{i+j \leq n}$  ajusté par le modèle GLM

- La méthode du Bootstrap impose que les variables utilisées soient indépendantes et identiquement distribuées, pour satisfaire cette contrainte nous utiliserons les résidus de Pearson définis par  $r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\mathbb{V}(\hat{\mu}_{i,j})}}$  qui vérifient cette hypothèse. Nous obtenons donc un triangle supérieur de résidus de Pearson  $(r_{i,j})_{i+j \leq n}$ . Notons que afin d'éviter d'éviter un biais relatif à la méthode de Bootstrap, il nous faut travailler sur des résidus de Pearson "normalisés" définis par  $(r_{i,j}^{norm})_{i+j \leq n} = (r_{i,j})_{i+j \leq n} \sqrt{\frac{k}{k-p}}$  où  $k$  est le nombre de données du triangle supérieur soit  $k = n(n+1)/2$  et  $p$  le nombre de paramètres du modèle  $p = 2n + 1$

- Nous répétons ensuite 50000 fois les étapes suivantes :

- 1) Nous tirons avec remise parmi le triangle des résidus de Pearson normalisés, nous obtenons alors un nouveau triangle supérieur de résidus de Pearson  $(r_{i,j}^*)_{i+j \leq n}$

- 2) Nous inversons la formule du triangle des résidus de Pearson et obtenons un nouveau triangle supérieur défini par : pour  $i+j \leq n$   $X_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{\mathbb{V}(\hat{\mu}_{i,j})} + \hat{\mu}_{i,j}$

- 3) Nous reconstituons le triangle des paiements cumulés défini par  $C_{i,j}^* = \sum_{j=0}^n X_{i,j}^*$  et estimons les coefficients de Chain-Ladder  $(\hat{f}_j)_{j=0, \dots, n-1}$  sur ce nouveau ce qui nous permet de le compléter pour  $n < i+j \leq 2n$

- 4) En notant  $X_{i,j}^{*,k}$  l'incrément obtenu à l'étape  $k$  du Bootstrap (avec  $k \in \{1 \dots 50000\}$ ) nous stockons les  $(X_{i,j}^{*,k})_{i+j=n+1}$  ce qui correspond à la diagonale que nous voulons rajouter

Après avoir répété 50000 fois les étapes suivantes, nous prenons la moyenne des diagonales que nous avons "tiré" et obtenons la diagonale supplémentaire que nous cherchions :

$$(X_{i,j}^D)_{i+j=n+1} = \frac{1}{50000} \sum_{k=1}^{50000} (X_{i,j}^{*,k})_{i+j=n+1}$$

Nous avons donc la possibilité d'obtenir des réalisations du CDR observable en nous basant sur l'information contenue dans la diagonale que nous venons de simuler.

Pour cela, nous complétons notre triangle supérieur en se basant respectivement sur l'information contenue dans  $T^n$  et  $T^{n+1}$  grâce aux facteurs de développement de la méthode de Chain-Ladder :

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_j^n$	2,123	1,471	1,377	1,239	1,196	1,152	1,115	1,104	1,093	1,061	1,031
$f_j^{n+1}$	2,124	1,472	1,377	1,240	1,197	1,152	1,116	1,104	1,093	1,061	1,032

j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f_j^n$	1,011	1,029	1,018	1,023	1,034	1,056	1,015	1,009	1,005	1,004	1,014
$f_j^{n+1}$	1,011	1,029	1,018	1,024	1,034	1,057	1,016	1,011	1,007	1,006	1,016

FIGURE 6.6 – Estimation facteurs de développement de la méthode de Chain-Ladder ( $(\hat{f}_j^n)_{j=0,\dots,n-1}$  et  $(\hat{f}_j^{n+1})_{j=0,\dots,n-1}$  pour le triangle brut de réassurance

Nous en déduisons les réserves correspondantes ainsi que les réalisations du CDR observable pour le triangle brut de réassurance :

i	$C_{i,n}^n$	$C_{i,n}^{n+1}$	$R_i^n$	$R_i^{n+1}$	$R_i^{n+1} + X_{i,n+1}^D$	$CDR_{i,n+1}^{obs}(n+1)$
1990	3 860 142	3 860 142	0	0	0	0
1991	6 295 198	6 315 298	88 936	0	109 036	-20 100
1992	4 890 069	4 926 792	86 999	79 198	123 723	-36 724
1993	5 515 001	5 573 024	126 003	119 746	184 026	-58 023
1994	9 704 520	9 799 564	307 723	277 084	402 767	-95 044
1995	8 834 038	8 930 558	403 487	342 739	500 007	-96 520
1996	7 503 373	7 590 466	724 868	403 014	811 961	-87 093
1997	9 051 677	9 129 275	1 140 156	950 996	1 217 754	-77 598
1998	12 310 931	12 436 122	1 796 771	1 657 701	1 921 962	-125 191
1999	8 374 637	8 477 668	1 345 982	1 300 280	1 449 013	-103 032
2000	8 886 098	8 983 151	1 637 637	1 512 222	1 734 689	-97 053
2001	7 658 831	7 746 393	1 478 562	1 486 096	1 566 125	-87 563
2002	9 225 274	9 356 187	2 007 725	2 138 638	2 152 901	-130 913
2003	4 329 481	4 395 656	1 136 323	1 202 498	1 212 112	-66 175
2004	6 789 598	6 874 522	2 206 673	2 291 597	2 321 895	-84 924
2005	13 748 891	13 918 483	5 341 658	5 511 249	5 528 286	-169 591
2006	17 191 053	17 459 658	7 764 908	8 033 514	8 007 602	-268 605
2007	18 273 097	18 505 188	9 572 062	9 804 153	9 841 584	-232 090
2008	19 583 865	19 836 568	11 789 709	12 042 412	12 143 571	-252 703
2009	20 226 381	20 556 045	13 729 919	14 059 583	14 095 480	-329 664
2010	25 332 088	25 664 508	19 422 601	19 755 021	19 876 785	-332 420
2011	27 096 680	27 568 075	22 799 326	23 270 721	23 272 529	-471 395
2012	25 450 412	25 856 692	23 549 307	23 955 587	24 063 971	-406 280
<b>TOTAL</b>	<b>280 131 334</b>	<b>283 760 035</b>	<b>128 457 335</b>	<b>130 194 050</b>	<b>132 859 985</b>	<b>-3 628 701</b>

FIGURE 6.7 – Calcul des CDR observables  $\widehat{CDR}_i(n+1)$   $i = 0, \dots, n$  pour le triangle brut de réassurance

Nous obtenons donc pour le triangle brut de réassurance un CDR total observable de  $-3,63M\text{€}$ , dès lors, nous tenons à évaluer l'incertitude qui résulte de ces estimations.

D'un point de vue prospectif, nous souhaitons analyser si cette observation est dans un intervalle raisonnable autour de 0 (qui est la valeur prévue du CDR en  $t=n$ ) ou si il s'agit d'une observation aberrante.

D'un point de vue rétrospectif nous voulons évaluer la distance entre le CDR observable et le CDR réel que nous aurions obtenu si nous connaissions les vrais coefficients de Chain-Ladder en  $t=n$ .

Nous calculons donc les quantités nécessaires à cette analyse dans le cadre du modèle de Merz et Wüthrich :

i	v(MSEP) <sub>Mack</sub>	v(Var(CDR <sub>(n+1) T<sup>n</sup>))</sub>	v(MSEP <sub>CDRobst(0)</sub> )		v(MSEP <sub>CDR(CDR<sup>obs</sup>)</sub> )	
			Approchée	Réelle	Approchée	Réelle
1990	0	0	0	0	0	0
1991	1 233	760	1 233	1 333	971	971
1992	6 695	5 437	6 645	6 645	3 820	3 820
1993	54 651	46 336	54 226	54 226	28 167	28 167
1994	96 155	44 485	59 885	59 885	40 091	40 091
1995	164 276	120 794	140 201	140 201	71 170	71 170
1996	486 597	424 482	464 800	464 804	189 353	189 361
1997	602 066	236 801	277 353	277 364	144 396	144 416
1998	750 951	174 756	242 886	242 894	168 683	168 695
1999	636 820	213 126	248 248	248 260	127 296	127 319
2000	681 450	163 083	205 732	205 742	125 418	125 434
2001	630 895	81 307	129 729	129 734	101 089	101 095
2002	753 415					
2003	644 835					
2004	1 291 128					
2005	2 084 757					
2006	2 512 289					
2007	2 834 740					
2008	3 579 143					
2009	3 890 074					
2010	4 758 308					
2011	5 278 508					
2012	5 396 166					
<b>TOTAL</b>	<b>16 449 011</b>		<b>4 215 891</b>		<b>7 455 160</b>	<b>7 456 096</b>
					<b>4 455 615</b>	<b>4 452 510</b>

FIGURE 6.8 – Calcul des quantités  $(\sqrt{\mathbb{V}[\widehat{CDR}_i(n+1)|T^n]}, \sqrt{\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|T^n}(0)}, \sqrt{\widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|T^n}(\widehat{CDR}_i(n+1))})$  et des valeurs agrégées

En premier lieu nous remarquons que l'incertitude relative à la prédiction du CDR observable par 0 :

$(\sqrt{\widehat{MSEP}_{\widehat{CDR}_i(n+1)|T^n}(0)})$  est égale à 7,46M€ ainsi il n'est pas contradictoire d'avoir obtenu grâce à la méthode de Bootstrap une réalisation du CDR observable de  $-3,63M€$ .

La marge de solvabilité devant faire face à de probables déviations du CDR vis à vis de 0 elle doit tenir compte de la valeur 7,46M€.

De plus, nous pouvons constater que l'estimation de l'écart type du CDR réel vaut 4,22M€, cet écart type correspond à la variation du CDR réel par rapport à sa moyenne qui, conditionnellement à l'information  $T^n$  est 0.

Autrement dit, d'après nos estimations le CDR réel devrait se trouver entre  $-4,22M€$  et  $4,22M€$ . Ainsi, cela n'est une fois de plus pas contradictoire avec notre valeur du CDR observable de  $-3,63M€$  en effet il est possible que le CDR réel soit compris entre  $[-3,63M€, 3,63M€] \subset [-4,22M€, 4,22M€]$ .

D'autre part, l'incertitude relative à la prédiction du CDR réel par le CDR observable

$(\sqrt{\widehat{MSEP}_{CDR_i(n+1)|T^n}(\widehat{CDR}_i(n+1))})$  est de 4,45M€  $>$  3,63M€ autrement dit, l'incertitude relative à la prédiction du CDR réel par le CDR observable est strictement plus grande que la valeur du CDR observable ce qui signifie qu'il n'est pas improbable que si nous avions connu les vrais coefficients de Chain-Ladder nous aurions pu avoir un boni au lieu d'un mali.

Finalement, nous remarquons que l'incertitude à un an obtenu par la méthode de Merz et Wüthrich représente 45% de l'incertitude à l'ultime que nous avons calculé par la méthode de Mack, autrement dit l'information contenue dans la diagonale obtenue par la méthode de Bootstrap contribue à hauteur de 45% dans l'incertitude à l'ultime.

Il est cependant assez difficile d'interpréter si cette contribution est élevée ou pas, néanmoins nous pouvons remarquer que la branche Responsabilité Civile Professionnelle étant une branche à déroulement de sinistre long, l'incertitude relative à l'ajout de l'année suivante (diagonale supplémentaire) devrait en théorie être moins importante que dans le cas d'une branche d'assurance à déroulement de sinistre court, ces dernières étant soumises à des variations de réserves moins progressives que dans le cas d'une branche à déroulement long.

### **Critiques du modèle de Merz et Wütricht**

Ce modèle présente comme avantage de ne faire aucune hypothèse paramétrique et est relativement simple à mettre en application ce qui explique que ce soit la méthode retenue dans le QIS 5.

Il présente néanmoins certaines limites puisqu'il ne permet pas :

- d'appliquer un facteur de queue de développement
- d'utiliser une autre méthode que la méthode de Mack pour le provisionnement.

Le modèle de Merz et Wütrich est souvent décrit comme insuffisant du fait qu'il n'estime que les deux premiers moments des réserves, toutefois il est possible de faire des hypothèses sur la distribution des réserves et d'ajuster celle-ci en fonction des deux premiers moments.

# Conclusion

Ce mémoire nous a permis d'étudier de nombreuses méthodes de provisionnement ainsi que les hypothèses sous-jacentes à celles-ci.

Nous avons démontré l'importance du choix de la méthode de provisionnement en comparant les réserves obtenues pour chacune de ces méthodes. De plus, nous avons estimé à travers l'étude de méthodes stochastiques de provisionnement l'incertitude à l'ultime relative à ce provisionnement, en particulier nous avons été capable de créer des intervalles de confiance pour le niveau de la réserve à l'ultime.

D'autre part, nous avons mis en lumière l'une des caractéristiques de la branche RCP : il s'agit d'une branche d'assurance dans laquelle les sinistres ont des déroulements de sinistres plus longs que dans les autres secteurs de l'assurance non vie.

D'après nos calculs, un sinistre sur la branche RCP nécessite 42 années de développement pour arriver à clôture ; nous avons montré comment intégrer ce facteur de queue de développement dans la mesure de l'incertitude à l'ultime.

A travers l'étude comparative menée sur les triangles brut et net de réassurance, nous avons montré que la réassurance en action sur la branche RCP ne s'activait que très peu, uniquement sur les sinistres les plus importants.

De plus, en nous basant sur les résultats de la méthode de Chain-Ladder qui a été la méthode de référence de ce mémoire nous avons remarqué que les loss ratios estimés se dégradent avec l'application des traités de réassurance suggérant une sur-tarification de la part des réassureurs.

Enfin, après avoir présenté la notion d'incertitude à l'ultime nous avons introduit la notion d'incertitude à un an nécessaire dans le cadre de la future application de la directive Solvabilité 2. Pour cela nous avons détaillé et appliqué le modèle de Merz et Wüthrich et en avons déduit que l'incertitude à un an sur la branche Responsabilité Civile Professionnelle représente 45% de l'incertitude à l'ultime calculée par le modèle de Mack.

# 7

## Bibliographie

- CHARPENTIER A.** [2010] Statistiques de l'assurance, partie 1 - assurance non vie tarification et provisionnement.
- CHARPENTIER A. , DUTANG C.** [2012] L'Actuariat avec R.
- CHAU G., AN DINH N.** [2012] Mesures de provision cohérentes et méthodes ligne à ligne pour des risques non-vie, Mémoire d'actuariat, ENSAE.
- DENUIT M., CHARPENTIER A.** [2005] Mathématiques de l'assurance non-vie - Tome 2, Tarification et provisionnement, Economica.
- DODGE Y., ROUSSON V.** [2004] Analyse de régression appliquée.
- ENGLAND P.D., VERALL R.J.** [2002] Stochastic claims reserving in general insurance
- HABIB I., RIBAN S.** [2012] Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ?, Mémoire d'actuariat, ENSAE .
- JAZIRI S.** [2011] Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an, Mémoire d'Actuariat, ISFA.
- MACK T.** [1993] Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates.
- NESSI J.M, LECOEUR E., NISIPASU E., REIZ O., PARTRAT C.** [2007] Provisionnement technique en assurance non-vie - Perspectives actuarielles modernes.
- PINHEIRO P.J.R., ANDRADE E SILVA J.M., CENTENO M.DL.** [2003] Bootstrap Methodology in Claim Reserving.
- PITREBOIS S., DE LONGUEVILLE P., DENUIT M. , WALHIN JF.** [2002] Etude de techniques IBNR modernes, ACTU-L, 2, 29-62.
- RENSHAW A.E, VERALL R.J** [1998] A stochastic method underlying the chain ladder technique, B.A.J. 4, IV, 903-923.
- SCHMIDT K.D.** [2003] Modèles et méthodes de réservation, Cours de l'université de strasbourg.
- THABAULT N.** [2002] La Responsabilité Civile professionnelle des médecins libéraux, Mémoire d'ac-

tuariat C.N.A.M.

**WUTHRICH M.V., MERZ M., LYZENKO N.** [2008] Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method, Scandinavian Actuarial Journal

# Annexe 1 : Triangle RCP brut de réassurance

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	365 666	563 955	725 458	1 055 342	1 236 960	1 429 869	1 596 172	1 998 973	2 162 306	2 512 364	2 622 005	2 891 340	2 971 195
1	262 929	455 190	591 003	840 050	1 093 410	1 754 859	2 181 194	2 520 614	3 493 826	3 853 340	3 936 536	4 365 908	4 400 339
2	301 086	503 801	773 752	996 400	1 583 670	1 729 307	1 820 911	2 284 983	2 833 681	2 914 265	3 090 248	3 264 857	3 398 537
3	309 921	572 354	912 832	1 200 826	1 586 355	2 168 469	2 791 569	3 144 006	3 886 833	4 234 861	4 386 726	4 456 772	4 489 021
4	382 349	872 664	1 429 087	2 637 977	3 576 996	4 146 376	5 584 390	6 724 871	7 086 882	7 535 130	7 946 736	8 289 793	8 360 090
5	375 039	661 901	1 002 873	1 333 234	1 696 056	1 998 076	2 528 087	3 065 272	3 557 016	6 006 456	7 283 952	7 742 551	7 764 645
6	343 321	881 049	1 512 316	2 206 147	2 904 336	3 553 121	4 677 647	5 315 512	5 734 048	5 943 400	6 095 354	6 130 692	6 300 473
7	469 661	1 062 755	1 583 754	2 371 646	2 903 164	3 688 766	4 770 348	5 474 247	6 576 356	7 162 421	7 288 241	7 440 928	7 504 583
8	443 593	931 747	1 524 472	2 221 781	3 336 655	5 900 363	6 907 203	8 330 774	8 753 933	9 583 972	9 926 056	10 137 208	10 237 396
9	510 020	1 068 471	1 713 394	2 588 245	3 354 821	3 906 306	4 576 079	4 901 194	5 279 582	5 465 362	6 754 946	6 814 993	6 844 533
10	565 448	1 514 557	2 402 492	3 238 886	4 413 463	5 455 551	5 924 468	6 114 686	6 749 742	6 821 148	7 178 004	7 237 552	7 248 461
11	688 524	1 509 595	2 154 847	2 962 178	3 810 468	5 132 279	5 589 429	5 857 186	6 074 173	6 126 766	6 160 962	6 180 269	
12	902 925	2 083 426	3 983 970	5 186 409	5 810 995	6 077 951	6 397 661	6 554 415	6 844 009	7 150 389	7 217 548		
13	400 520	807 574	1 137 452	1 402 786	1 946 694	2 354 825	2 633 201	2 763 060	2 813 277	3 193 158			
14	831 616	1 748 342	2 545 472	3 026 606	3 318 551	3 573 216	4 003 085	4 187 901	4 582 925				
15	1 136 928	2 717 328	3 970 578	5 148 157	6 386 235	7 088 100	7 642 606	8 407 234					
16	1 278 043	2 843 395	4 133 231	6 518 917	7 881 650	8 690 910	9 426 144						
17	1 594 339	3 384 258	4 518 674	6 424 898	7 809 554	8 701 035							
18	1 726 626	3 729 683	5 235 449	7 103 933	7 794 156								
19	1 797 873	3 940 549	5 330 416	6 496 463									
20	2 108 850	4 240 758	5 909 487										
21	2 228 979	4 297 354											
22	1 901 105												

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	3 001 950	3 050 777	3 090 784	3 126 224	3 494 220	3 664 906	3 722 470	3 787 731	3 805 608	3 860 142
1	4 664 280	5 124 400	5 325 449	5 758 267	6 019 747	6 094 013	6 176 324	6 186 935	6 206 262	
2	3 649 842	3 730 255	3 768 059	3 903 699	4 648 047	4 768 902	4 802 868	4 803 069		
3	4 704 223	4 820 441	4 920 752	4 973 539	5 374 163	5 380 632	5 388 998			
4	8 448 670	8 629 307	8 736 927	9 305 203	9 346 429	9 396 797				
5	7 790 088	7 795 458	8 244 372	8 254 854	8 430 551					
6	6 574 253	6 633 093	6 645 931	6 778 505						
7	7 720 627	7 747 625	7 911 521							
8	10 487 609	10 514 160								
9	7 028 655									
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										

FIGURE 7.1 – Triangle des paiements cumulés  $(C_{i,j})_{j=0,\dots,22}$  brut de réassurance

## Annexe 2 : Traités de réassurance

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Priorité	152 449	228 674	228 674	266 786	304 989	457 347	457 347	457 347	457 347	457 347	457 347	458 000
Plafond T1	381 123	100 000 000	1 143 368	1 143 368	1 143 459	1 143 368	1 143 368	1 143 368	1 143 368	1 143 368	1 143 368	1 144 000
Plafond T2	914 695	-	100 000 000	3 048 981	3 049 071	3 048 980	3 048 980	3 048 980	3 048 980	3 048 980	3 048 980	3 050 000
Plafond T3	100 000 000	-	-	100 000 000	100 000 000	7 622 451	7 622 451	7 622 451	7 622 451	100 000 000	7 622 451	7 624 000
Taux Cession T1 (%)	100	100	100	100	100	90	90	90	90	85	90	90
Taux Cession T2 (%)	100	-	100	100	100	90	90	90	90	90	90	90
Taux Cession T3 (%)	100	-	-	100	100	90	90	90	90	90	90	90
AAL T1	-	-	-	-	-	10 290 309	10 290 309	10 290 309	10 290 309	10 290 309	15 244 902	15 244 000
AAL T2	-	-	-	-	-	11 433 676	11 433 676	11 433 676	11 433 676	11 433 676	11 433 676	11 433 000
AAL T3	-	-	-	-	-	15 244 902	15 244 902	15 244 902	15 244 902	15 244 902	15 244 902	15 244 000
AAD	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Priorité	458 000	458 000	458 000	458 000	500 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	2 000 000	2 000 000
Plafond T1	1 144 000	1 144 000	1 144 000	1 144 000	1 200 000	3 200 000	3 200 000	3 200 000	3 200 000	3 000 000	3 000 000
Plafond T2	3 050 000	3 050 000	3 050 000	3 050 000	3 200 000	7 700 000	7 700 000	7 700 000	7 700 000	7 700 000	8 000 000
Plafond T3	7 624 000	7 624 000	7 624 000	7 624 000	7 700 000	-	-	-	-	-	-
Taux Cession T1 (%)	92	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Taux Cession T2 (%)	92	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Taux Cession T3 (%)	92	100	100	100	100	-	-	-	-	-	-
AAL T1	10 976 000	10 976 000	10 976 000	10 976 000	11 200 000	17 000 000	17 000 000	17 000 000	17 000 000	10 000 000	10 000 000
AAL T2	7 624 000	7 624 000	7 624 000	7 624 000	10 000 000	12 000 000	12 000 000	12 000 000	12 000 000	10 000 000	15 000 000
AAL T3	13 722 000	13 722 000	13 722 000	13 722 000	18 000 000	-	-	-	-	-	-
AAD	-	-	-	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	1 000 000	-	-

FIGURE 7.2 – Traités de réassurance de 1990 à 2012 ( $T_i$ )<sub>i=1,3</sub> est la tranche i de l'XS et 100 000 000 est une convention pour définir "illimité"

# Annexe 3 : Triangle RCP net de réassurance

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	365 666	563 955	725 458	1 055 342	1 233 244	1 426 018	1 591 039	1 852 707	2 014 179	2 310 872	2 417 608	2 686 751	2 764 820
1	262 929	455 190	591 003	840 050	1 093 410	1 754 859	2 181 194	2 520 614	2 946 942	3 306 456	3 389 652	3 796 926	3 831 357
2	301 086	503 801	773 752	996 400	1 583 670	1 729 307	1 820 911	2 284 983	2 806 011	2 886 594	3 062 577	3 236 647	3 366 983
3	309 921	572 354	912 832	1 200 826	1 586 355	2 168 469	2 791 569	3 144 006	3 717 563	4 053 318	4 205 183	4 275 229	4 306 193
4	382 349	872 664	1 429 087	2 195 501	3 114 568	3 681 191	4 588 971	5 309 253	5 606 030	6 054 277	6 435 393	6 776 538	6 845 088
5	375 039	661 901	1 002 873	1 333 234	1 696 056	1 998 076	2 528 087	3 065 272	3 557 016	5 147 218	6 047 863	6 269 998	6 292 093
6	343 321	881 049	1 512 316	2 206 147	2 904 336	3 553 121	4 517 846	5 153 028	5 570 255	5 779 607	5 931 562	5 966 899	6 136 680
7	469 661	1 062 755	1 583 754	2 371 646	2 903 164	3 688 766	4 614 152	5 318 051	6 418 202	7 004 268	7 130 088	7 282 774	7 346 429
8	443 593	931 747	1 524 472	2 221 781	3 336 655	4 866 806	5 856 851	6 669 058	7 013 330	7 832 341	8 059 281	8 256 579	8 356 767
9	510 020	1 068 471	1 713 394	2 588 245	3 354 821	3 906 306	4 576 079	4 901 194	5 279 582	5 465 362	6 506 100	6 566 147	6 595 640
10	565 448	1 514 557	2 402 492	3 238 886	4 105 117	5 113 910	5 582 827	5 773 045	6 395 449	6 466 855	6 823 711	6 883 259	6 894 168
11	688 524	1 509 595	2 154 847	2 962 178	3 810 468	5 132 279	5 589 429	5 841 204	6 056 313	6 108 907	6 143 102	6 162 409	
12	902 925	2 083 426	3 947 178	4 892 561	5 517 147	5 784 103	6 103 813	6 260 567	6 550 161	6 856 541	6 923 700		
13	400 520	807 574	1 137 452	1 402 786	1 946 694	2 354 825	2 633 201	2 763 060	2 813 277	3 193 158			
14	831 616	1 748 342	2 545 472	3 026 606	3 318 551	3 573 216	4 003 085	4 187 901	4 582 925				
15	1 136 928	2 717 328	3 970 578	5 148 157	6 386 235	7 088 100	7 642 606	8 407 234					
16	1 278 043	2 843 395	4 133 231	6 518 917	7 745 887	8 555 147	9 273 017						
17	1 594 339	3 384 258	4 518 674	6 424 898	7 809 554	8 701 035							
18	1 726 626	3 729 683	5 235 449	7 103 933	7 794 156								
19	1 797 873	3 940 549	5 330 416	6 496 463									
20	2 108 850	4 240 758	5 909 487										
21	2 228 979	4 297 354											
22	1 901 105												

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	2 786 053	2 832 009	2 872 016	2 907 456	3 182 915	3 260 731	3 318 295	3 383 064	3 399 589	3 454 123
1	4 083 667	4 294 633	4 495 682	4 906 242	5 159 183	5 233 449	5 287 368	5 297 979	5 317 306	
2	3 618 288	3 698 702	3 736 506	3 872 145	4 326 718	4 436 952	4 454 051	4 454 118		
3	4 521 395	4 636 534	4 693 974	4 746 762	5 147 386	5 153 855	5 162 221			
4	6 933 669	7 114 305	7 221 926	7 790 201	7 831 014	7 878 278				
5	6 317 536	6 322 905	6 531 564	6 542 046	6 717 744					
6	6 410 460	6 469 300	6 482 138	6 614 712						
7	7 562 474	7 589 472	7 753 368							
8	8 606 980	8 633 531								
9	6 779 762									
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										

FIGURE 7.3 – Triangle des paiements cumulés  $(C_{i,j})_{j=0,\dots,22}$  net de réassurance

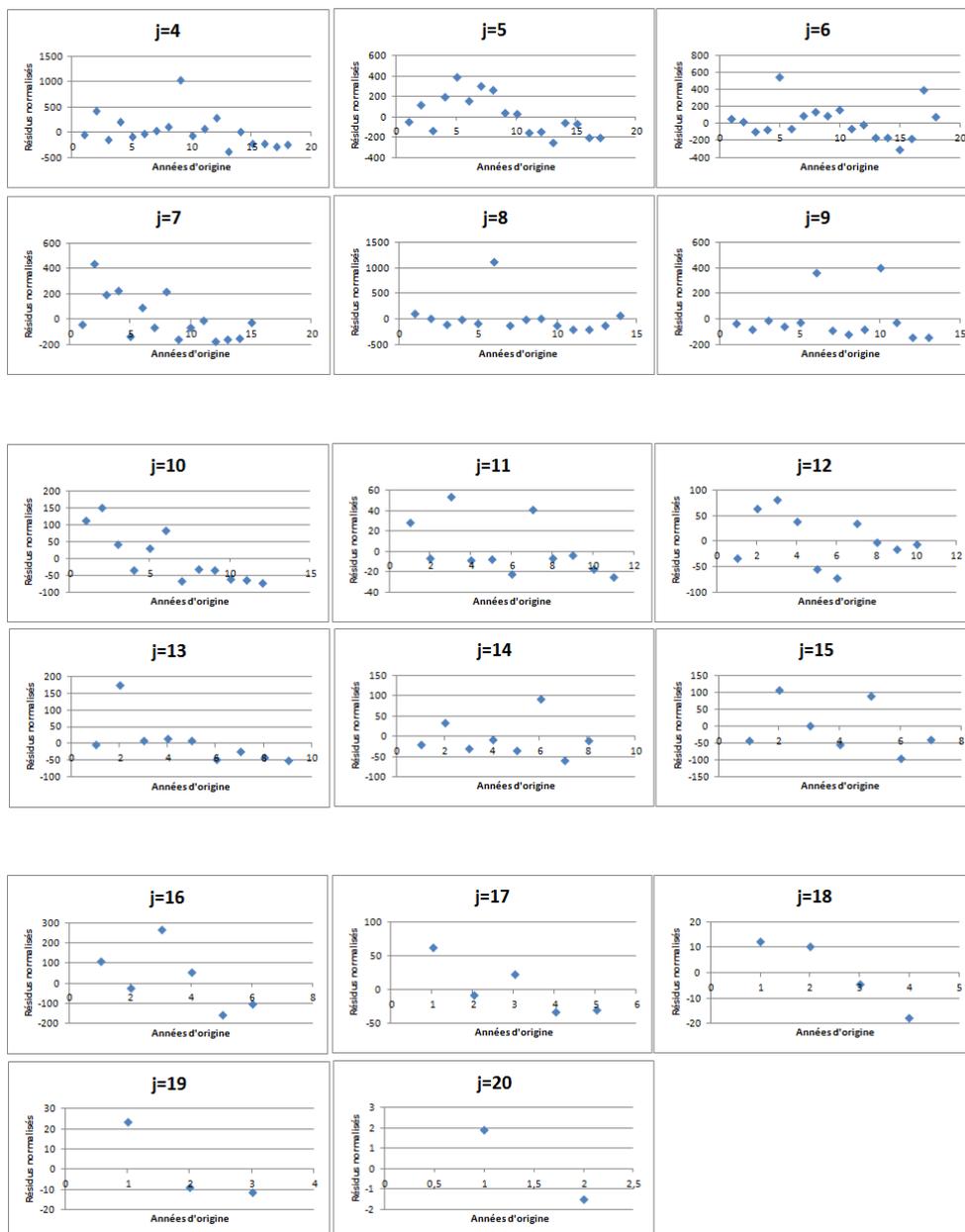
# Annexe 4 : Régression linéaire des points $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$ pour le triangle brut de réassurance



# Annexe 5 : Régression linéaire des points $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$ pour le triangle net de réassurance



# Annexe 6 : Résidus normalisés du modèle de Mack pour le triangle brut de réassurance



# Annexe 8 : Résidus normalisés du modèle de Mack pour le triangle net de réassurance

