



Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaire**

Par : Eric KWADZO

Titre Amélioration d'un modèle ALM et études sur la rentabilité du
Fonds Euro

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de
l'Institut des Actuaire*

signature

Entreprise :

Nom : AXA France

Signature :

*Directeur de mémoire en
entreprise :*

Nom : Marie MAEDLER

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

*Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)*

Signature du responsable
entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Bibliothèque :

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	2
REMERCIEMENTS.....	7
INTRODUCTION	8
RESUME.....	9
ABSTRACT	10
PREMIERE PARTIE	11
PRESENTATION GENERALE DU MODELE.....	11
Chapitre 1 : POINT PRATIQUE SUR L'UTILISATION DU MODELE	13
Chapitre 2 : HYPOTHESES ET VARIATION DE L'ACTIF	14
2.1 Les scénarios stochastiques d'évolution des actifs:	14
2.1.1 Les scénarios d'évolution des obligations :	14
2.1.1.1 Les obligations d'Etat à coupon fixe :	14
2.1.1.2 Les obligations d'Etat à coupon variable :	15
2.1.1.3 Les obligations d'Entreprise :	17
Propriété :	19
Détails sur le calcul de la grandeur ait, E :	20
2.1.2 Les scénarios d'évolution des actifs risqués :	21
2.1.3 Les produits dérivés :	21
2.1.4 Le cash :	22
2.2 L'impact des événements clients :	23
2.3 Impact de l'étape de réallocation sur l'actif:	23
2.3.1 Rééquilibrage des actifs risqués et des obligations à coupon variable:	24
CAS 1 :	24
CAS 2 :	25
2.3.2 Rééquilibrage des obligations :	27
2.3.2.1 Rééquilibrage des obligations d'Entreprise :	27
2.3.2.2 Rééquilibrage des obligations d'Etat à coupon fixe:	29
ETAPE 1 : Vente des obligations d'Etat à coupon fixe	31
2.3.3 Rééquilibrage du cash :	34
2.4 L'impact de l'optimisation sur l'actif:	34
2.4.1 Sur les actifs risqués et les obligations à coupons variables:	34

2.4.2 Sur le cash :	35
Chapitre 3 : HYPOTHESES ET VARIATION DU PASSIF	36
2.1 Les coûts sur le passif :	36
2.1.1 Les coûts relatifs à la prime commerciale :	36
2.1.2 Les coûts liés à l'encours :	36
2.1.2.1 Le coût des commissions commerciales sur l'encours :	36
2.1.2.2 Les coûts unitaires :	37
2.2 Evolution du passif :	37
2.2.1 La provision mathématique :	37
2.2.1.1 La revalorisation par le TMG(A) :	37
2.2.1.2 Les évènements client :	38
2.2.1.2.1 Rachat et décès :	38
Détails sur la loi de rachat	38
La loi ACAM pour le rachat variable:	39
2.2.1.2.2 Les primes :	40
2.2.1.3 L'étape d'optimisation:	41
2.2.2 La réserve de capitalisation :	41
Chapitre 4 : RECAPITULATIF DES DIFFERENTES ETAPES DE LA PROJECTION	42
4.1 L'évolution des investissements:	42
4.2.) Les évènements client:	Erreur ! Signet non défini.
4.3 La réallocation:	42
4.4 L'optimisation:	42
4.4.1 L'optimisation du taux de produits financiers:	42
4.4.1.1 La minimisation de la satisfaction du client:	44
Description du processus de calcul :	45
Rappels sur la méthode de NEWTON RAPHSON :	46
ANALOGIE A NOTRE CAS :	47
4.4.1.2 L'optimisation de la marge pour les produits financiers:	48
4.4.1.3 Point sur la réalisation de plus ou moins values pour l'optimisation du taux de produits financier :	49
4.4.1.3.1 Expression des valeurs de marché et valeur comptables des actifs après cette étape :	50
Cas de la réalisation de moins value (cas où l'optimisation de la marge est effective):	51
4.4.1.3.2 R_{maxit} et R_{minit} :	52

4.4.2L'optimisation du RAN :	52
4.4.2.1L'optimisation du RAN affecté ou provision pour participation aux bénéfices (PPB):	52
4.1.2 L'optimisation du RAN libre :	55
4.4.2.2.1Le financement du coût du TMGA :	55
4.4.2.2.2L'augmentation de la satisfaction du client :	56
4.4.2.2.3L'optimisation de la marge pour le RAN libre :	56
4.4.2.2.3.1La contrainte réglementaire du B26 :	56
DEUXIEME PARTIE	58
PARTICIPATION A L'AMELIORATION DU MODELE	58
Chapitre I : INTERPOLATION DES ZEROS COUPONS	59
1.1L'interpolation linéaire :	59
1.1.1Présentation générale :	59
1.1.2Inconvénient de cette méthode :	59
1.2Le développement de Taylor d'ordre 3 :	60
1.2.1Formalisation des approximations :	60
Définition 1.2.1.1 :	60
Propriété 1.2.1.1 :	61
Définition 1.2.1.2 :	61
Proposition 1.2.1.1 :	61
1.2.1Approximation des nombres b, c et d :	62
Proposition 1.2.2.1 :	62
Proposition 1.2.2.2 :	63
Définition 1.2.2.1 :	63
Proposition 1.2.2.3 :	63
1.2.3Les conséquences de l'intégration de cette technique d'interpolation sur le modèle :	66
1.2.3.1Point sur la régularité des courbes obtenues :	66
1.2.3.2Durée des simulations :	67
1.2.3.3Point sur le rapprochement avec le modèle officiel :	67
1.3Les splines:	69
1.3.1 Présentation générale :	69
1.3.2Quelques méthodes d'approximation des coefficients de la spline cubique:	69
1.3.2.1Approximations avec tangentes connues:	69
1.3.2.2 Approximations avec tangentes inconnues:	70

1.3.3Inconvénients de la méthode :	70
Chapitre 2 : TAUX MAXIMAUX DE PRODUITS FINANCIERS	71
2.1 Points théoriques sur les différents modes de réalisation de plus value :	71
2.1.1Le profil PRUDENT :	71
2.1.2Le profil NORMAL :	71
2.1.3Le profil RISQUE :	72
L'exemple suivant permet de mieux comprendre comment sont calculées les plus values maximales réalisables suivant les valeurs des actifs :	72
2.2 Point sur la modification de la méthode de calcul des plus values dans le modèle:.....	73
2.2.1Marge, coûts et VIF :	73
2.2.2 Les taux maximaux de produits financiers.....	75
2.2.3Durée de projection :	75
Chapitre 3 : DOUBLEMENT DE LA DUREE DE PROJECTION	76
3.1La conversion des fichiers CSV :	76
3.2Le réarrangement des fichiers stochastiques sur les obligations d'Entreprises :	76
TROISIEME PARTIE.....	77
ETUDES SUR LE RISQUE ET LA RENTABILITE DU FONDS EURO.....	77
Chapitre I: CADRE GENERAL	78
1.1 Le compte de résultat, description et principales composantes :	78
1.1.1Marge technique comptable :	78
1.1.2 La marge de gestion :	79
1.1.3 La Marge financière :	79
1.1.4 Un exemple simplifié du compte de résultat :	80
1.1.5 La nécessité de projection du compte de résultats et délimitation du périmètre d'étude :	81
Chapitre II : MISE EN PLACE DES ETUDES	82
2.1Hypothèses générales:.....	82
2.1.1Hypothèses sur le passif :	82
2.1.2Hypothèses sur l'actif :	83
2.2Les stress sur le passif :	84
2.2.1Description des stress :	84
2.2.1.1Stress sur le taux minimal.....	84
2.2.1.2Stress sur le RAN.....	85
2.2.3.Résultats :	85

2.2.3.1 La VIF et la TVOG:.....	85
2.2.3.2 Analyse de la valeur actuelle des marges futures :.....	91
2.3 Les stress sur l'actif :.....	94
2.3.1 Description des stress :.....	94
2.3.1.1 Sans richesse initiale.....	94
2.3.1.2 Augmentation des obligations	94
2.3.1.3 Diminution des obligations	94
2.3.1.4 Augmentation des actions.....	94
2.3.1.5 Diminution des actions	94
2.3.2 Résultats sur la VIF et la TVOG des stress sur l'allocation cible:.....	95
2.3.2.1 Produit à tmg0 sans RAN initial avec différentes allocations cibles:	95
2.3.2.2 Produits à tmg0 et tmg1.5 sans RAN initial avec différentes allocations cibles:.....	96
2.3.3 Analyse de la marge (valeur actuelle des marges financières futures) sur la base des stress sur l'allocation cible:.....	96
2.3.3.1 Produit à tmg0 sans RAN initial avec diverses allocations cibles:	96
2.3.3.2 Produits à tmg0 et tmg1.5 sans RAN initial et pour diverses allocations:	98
2.3.4 Suppression des richesses initiales.....	100
2.3.4.1 VIF et TVOG pour divers taux garantis	100
2.3.4.2 Analyse de la décomposition de la valeur actuelle des marges financières futures	100
2.3.4.2.1 Impact de la suppression de toute richesse initiale sur le produit 1:	100
2.3.4.2.2 Impact de la suppression de toute richesse initiale sur le produit 2:	101
CONCLUSION.....	104
BIBLIOGRAPHIE.....	105
Mémoires d'actuariat.....	105
Ouvrages et Publications.....	105
ANNEXES.....	106

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Madame Marie MAEDLER, mon maître de stage, ainsi que Monsieur Nicolas PRESTAT, responsable de l'équipe Rentabilité de la direction du marché de l'épargne d'AXA FRANCE pour leurs conseils, soutiens, pédagogie et disponibilité. Grâce à eux, j'ai eu l'opportunité de traiter des sujets très intéressants et d'actualité et de mener à terme ma dernière année d'étude.

Je témoigne toute ma sympathie aux autres membres de l'équipe Rentabilité qui, par leur attention et explications diverses, ont favorisé mon adaptation au monde de l'entreprise et contribué à rendre agréable ce stage.

Je tiens également à remercier Monsieur Arnaud COHEN qui, par ses conseils avisés et sa disponibilité, m'a guidé tout au long de la rédaction de ce mémoire.

INTRODUCTION

L'assurance vie a toujours été le placement favori des français. Cette situation s'explique en partie par l'opacité qui règne autour du système de retraite de base, puisque la plupart des futurs bénéficiaires sont assez mal informés sur le niveau exact de leurs droits. Dans ce contexte, les particuliers s'orientent vers ce type de placement pour s'en servir surtout comme un instrument d'épargne longue et donc un complément de retraite. En effet, selon un sondage de la FFSA (Fédération Française des Sociétés d'Assurance), 43% des particuliers détenteurs d'un contrat d'assurance vie placent la motivation retraite en première position, alors que 24% seulement affirment mettre en avant la transmission de patrimoine. En outre, l'assurance vie a toujours joué un rôle primordial dans l'économie car une partie considérable des encours était investie dans les emprunts d'Etat et contribuait ainsi à financer les déficits publics. Voilà pourquoi ce placement a toujours bénéficié d'avantages fiscaux en matière d'impôt sur le revenu et de droits de succession. Tant d'éléments qui ont joué sur son attrait et son succès incontestable.

Aujourd'hui pourtant, force est de constater que les rendements de l'assurance vie sont en baisse et sa fiscalité est devenue moins avantageuse. Cela se traduit par une baisse de la collecte nette depuis quelques années déjà car les particuliers et investisseurs choisissent désormais de diversifier leurs placements, en s'orientant beaucoup plus pour les premiers vers des produits de court terme comme le livret A, et l'immobilier pour les seconds. A titre d'illustration, nous pouvons comparer la collecte nette en France qui est passée de 51 milliards d'Euros en 2010 à 7,6 en 2011, soit une baisse de 85%. Selon Olivier MARIEE, directeur du marché de l'épargne d'AXA France, outre la maturité financière des épargnants suscitée par la crise financière, la baisse de cette collecte peut également s'expliquer par le fait que la plupart des polices souscrites entre 1990 et 2000 arrivent aujourd'hui à échéance.

Dans cette situation particulièrement difficile, il est intéressant de se pencher sur la rentabilité du principal support d'investissement de l'assurance vie: les supports en Euros.

Les supports en Euros sont une forme assez intéressante de placement. Ils assurent non seulement une garantie en capital au 31 décembre de chaque année et un taux minimal garanti mais aussi une participation aux bénéfices générée par la gestion financière du portefeuille. Ils se caractérisent également par une bonne liquidité en raison de la grande majorité des contrats définis par des versements et retraits libres.

RESUME

Le rôle principal de l'ALM (Assets and Liabilities Management) est de réaligner, d'une part, les valeurs nettes comptables, et d'autre part, la durée de l'actif et du passif. En effet, il peut se produire un décalage entre l'actif et le passif de l'assureur lorsque ces deux éléments du bilan subissent des valorisations différentes au cours d'une année. Il faut cependant noter que la problématique de gestion actif/passif est intrinsèquement liée à l'assurance vie. Les outils de pilotage de l'ALM s'appuient sur les interactions naturelles qui peuvent exister entre l'actif et le passif (vague de rachat précoces pouvant pousser à la vente d'obligations par exemple), interactions qui n'existent pas en assurance non vie.

Cette opération de rééquilibrage se fait néanmoins sous certaines contraintes. Entre autres, la société se doit de redistribuer au moins 85% des produits financiers aux assurés, servir des taux de participation aux bénéfices compétitifs et réaliser son objectif de rentabilité. La modélisation de ce pilotage sur plusieurs années permet le calcul du coût des garanties, donc l'appréciation de la rentabilité réelle des affaires et de facto une prise de décision stratégique sur les produits.

C'est dans ce contexte général que s'est inscrit ce stage de fin d'études qui s'est déroulé à la direction du marché de l'épargne d'AXA France au sein de l'équipe Rentabilité dont les missions sont de mesurer, analyser et prévoir la rentabilité des opérations d'assurance vie, à court et moyen terme, et de tarifier les garanties financières des produits d'assurance vie.

La première partie du présent mémoire est consacrée à la description générale du modèle qui, comme tout autre modèle ALM peut se décomposer en quatre principales parties : la mise en place des hypothèses, la projection de l'actif suivant un scénario d'évolution donné pour en déduire un taux de produit financier comptable, la projection du passif et enfin le pilotage actif/passif proprement dit.

Dans la seconde partie sont abordées les améliorations apportées pendant ce stage sur l'outil et les résultats obtenus sur certains indicateurs comme la VIF et la TVOG, dans l'optique du rapprochement avec le modèle officiel de l'entreprise.

Enfin, la troisième partie sera consacrée à une étude de la rentabilité du fonds Euro, en particulier sur la notion de marge technique financière qui sert principalement à rémunérer les actionnaires et dont nous définirons le concept. Les principaux éléments auxquels nous nous intéresserons seront la stratégie d'allocation des actifs, les conditions générales de rémunération et la richesse initiale avant toute projection de flux.

ABSTRACT

The main role of the ALM (Asset and Liability Management) is to realign on the one hand, the net accounting values, and secondly, the duration of the assets and liabilities. Indeed, there may be a mismatch between the assets and liabilities of the insurer when these two balance sheet items are subject to different valuations over a year. It should be noted that the problem of asset/liability management is intrinsically linked to life insurance. ALM management tools rely on natural interactions that may exist between assets and liabilities (early surrender can lead to the sale of bonds for example), interactions that does not exist in non-life insurance.

This rebalancing operation is subject to certain constraints. Among other things, the company must distribute at least 85% of the financial products to the insured, serve competitive turnout on the benefits and achieve its profitability goal. Modeling the control over several years allows the calculation of the guarantees' cost, so the appreciation of the real profitability of the business and strategic decisions on products.

This is the context in which this class end traineeship took place in the direction of the savings market of AXA France in the team "Profitability" whose mission is to measure, analyze and predict the profitability of life insurance business in the short and medium term, and to price financial guarantees of life insurance products.

The first part of the thesis is devoted to the general description of the model of the team "Profitability" that, like any other ALM model, can be divided into four main parts: the introduction of assumptions, the projection of assets following a given evolution scenario to identify the rate of the financial accounting product, projection of the liabilities and finally asset/liability control.

In the second part the improvements introduced during this traineeship on the tool and the results of some indicators such as VIF and TVOG, in the context of reconciliation with the company's official model.

Finally, the third part is devoted to a study of the profitability of Euro funds, in particular the concept of financial technic margin used primarily to reward shareholders with a definition of the concept. The main elements which we focused on are the asset allocation strategy, the general conditions of remuneration and initial wealth before cash flow projection.

PREMIERE PARTIE

PRESENTATION GENERALE DU MODELE.

Comme évoqué plus haut, ce stage a porté en partie sur l'étude et la participation à l'amélioration d'un modèle ALM ; ce modèle n'était cependant pas le modèle officiel utilisé par AXA, il est interne à l'équipe RENTABILITE de la direction du marché de l'épargne.

La direction technique a créé ce modèle sur Excel afin de permettre une prise de décision rapide sur la rentabilité des nouveaux produits ; en effet l'outil Excel offre une souplesse et une facilité d'analyse que le modèle officiel développé sur Moses permet plus difficilement ; cependant, le modèle Excel ne modélise pas les UC puisqu'il présente l'inconvénient d'être plus lent et lourd que le modèle Moses qui permet quant à lui de manipuler plus de données.

Chapitre 1 : POINT PRATIQUE SUR L'UTILISATION DU MODELE

Le modèle comporte environ 600 model points répartis en une dizaine de CANTONS (fonds ou segments financiers). Chaque segment financier possède ses propres caractéristiques aussi bien à l'actif qu'au passif. Ce modèle comporte une cinquantaine d'onglets qui regroupent l'ensemble des hypothèses faites pour la projection. Toutes ces informations sont ensuite rassemblées dans une unique feuille dans laquelle tous les calculs sont effectués : la feuille « cash flow ». Enfin, il existe une feuille nommée « run », faisant office d'interface utilisateur. Cette feuille « run » sert à :

- saisir des inputs supplémentaires
- paramétrer les scénarios sur lesquels on désire recueillir les sorties
- pour chaque scénario, sélectionner les sorties de la feuille « cash flow » que l'on désire faire apparaître dans l'interface « run »
- lancer les simulations

Chapitre 2 : HYPOTHESES ET VARIATION DE L'ACTIF

A la date 0, les primes des assurés sont investies en actifs. Ces actifs vont subir différentes variations au cours de la projection. Les valeurs impactées sont la valeur de marché et la valeur comptable. Les étapes de la projection qui impactent ces valeurs sont l'Evolution des investissements, l'Etape de réallocation qui correspond à des opérations d'achat /vente et l'étape d'optimisation des taux de produits financiers de fin d'année.

2.1 Les scénarios stochastiques d'évolution des actifs:

Les scénarios stochastiques sont ceux correspondant à l'évolution des actifs. Certaines grandeurs décrites ci-dessous porteront en exposant la lettre « i ». Cette lettre désigne le numéro du scénario économique et permet donc d'identifier les variables dont les valeurs sont dépendent du scénario considéré.

2.1.1 Les scénarios d'évolution des obligations :

La modélisation des taux occupe une place primordiale dans le processus de gestion actif/passif des sociétés d'assurance vie. En effet, un scénario de hausse des taux aura pour effet de faire baisser la valeur de marché des obligations, qui correspondent à l'essentiel des actifs du portefeuille. L'assureur peut dans ce cas là connaître des pertes si jamais il est conduit à vendre ses obligations, notamment pour couvrir des rachats prématurés par rapport à ses prédictions. A l'inverse, un scénario de baisse des taux aura pour effet de faire augmenter la valeur de ce genre de contrats, à valeur de remboursement égale. L'assureur peut donc être mis en difficulté au moment de réinvestir dans ce cas si les rachats interviennent plus tard que prévu, car il ne pourra plus trouver sur le marché des taux (coupons) aussi avantageux qu'auparavant. Ceci démontre donc toute l'importance pour une société d'assurance vie de s'adonner à la gestion actif/passif, ne serait ce que pour établir l'équilibre de duration entre son actif et son passif, afin de limiter ces risques de réinvestissement et de liquidation.

2.1.1.1 Les obligations d'Etat à coupon fixe :

L'évolution des obligations d'Etat à coupons fixes est liée à celle du taux sans risque. En effet, à chaque date de projection, nous disposons dans le modèle des taux sans risque pour toutes les maturités annuelles et entières comprises entre 0 et 40. Ces valeurs sont en outre données sur une multitude de scénarios stochastiques. Chaque scénario donne donc une trajectoire différente pour la valorisation des obligations d'état. En effet, nous avons la formule suivante :

$$MV^i(t) = \frac{FV}{(1 + R^i(t, T - \frac{t}{2}))^{T - \frac{t}{2}}}$$

$MV^i(t)$ désigne la valeur de marché de l'obligation à la date t dans le scénario i

Nos obligations à coupons fixes sont donc tout simplement des obligations zéro coupon : il n'y a en fait pas de coupon, le nominal (FV) est tout simplement remboursé à l'échéance.

T représente la date d'échéance(en années) et donc $T - \frac{t}{2}$ est la maturité résiduelle (t est en semestres)

$R^i(t, T - \frac{t}{2})$ est le taux zéro coupon assimilé au taux sans risque de maturité $T - \frac{t}{2}$ à la date t et dans le scénario i

FV est la valeur de remboursement que l'Etat s'engage à payer au détenteur de l'obligation à la date T

Par cette formule, nous pouvons mieux comprendre l'effet de la variation des taux dont nous parlions plus haut.

La valeur comptable, quant à elle est donnée par :

$$BV^i(t) = \frac{FV}{(1 + R^i(0, T))^{T - \frac{t}{2}}}$$

La valeur comptable est calculée à partir du taux sans risque à la signature du contrat, et la valeur de marché est calculée en tenant compte du taux sans risque à la date de calcul.

Ainsi, dans un scénario de hausse des taux, c'est-à-dire lorsqu'on a, pour une même maturité m :

$R^i(0, T) < R^i(t, m)$, la valeur de marché devient plus faible que la book value et on est en situation de moins value latente : le terme latent est lié au fait que cette moins value ne sera pas réalisée tant que l'on n'aura pas vendu l'obligation. La situation inverse (baisse des taux) créera une plus value latente.

2.1.1.2 Les obligations d'Etat à coupon variable :

Les obligations d'Etat à coupon variable ont une évolution un peu plus spécifique :

Soit D la duration moyenne des obligations et T la date d'échéance. La market value est donnée par la formule :

$$MV^i(t) = FV * \left[\sum_{j=1 - \frac{\text{mod}(t, 2)}{2}}^{T - \frac{t}{2}} \frac{(f^i(t, j, D) + \alpha)_+}{(1 + R^i(t, j))^j} + \frac{1}{(1 + R^i(t, T - \frac{t}{2}))^{T - \frac{t}{2}}} \right] \quad (2)$$

$$\text{avec } \text{mod}(t, 2) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ impair} \\ 0 & \text{si } t \text{ pair} \end{cases}$$

Dans la formule ci-dessus, l'évolution est à pas de 1 puisque les coupons tombent une fois par an. Le coupon variable de l'année $\frac{t}{2} + j$ calculé l'année $\frac{t}{2}$ vaut $(f^i(t, j, D) + \alpha)_+$. De plus, ces coupons tombent tous en fin d'année. Ainsi, lorsque nous nous plaçons à la date t , le prochain coupon tombera :

$$\begin{cases} 0.5 \text{ année plus tard si } t \text{ tombe en milieu d'année ie } t \text{ impair} \\ 1 \text{ année plus tard si } t \text{ tombe en fin d'année ie } t \text{ pair} \end{cases}$$

En résumé, à partir de la date t le prochain coupon tombera $1 - \frac{\text{mod}(t,2)}{2}$ année plus tard.

$f^i(t, j, D)$ est l'espérance du taux forward sans risque du scénario i , à la date $2j+t$ (en semestres) pour une maturité D (en années), et calculé à la date t . C'est-à-dire qu'à la date t , on dira de ce taux qu'il est (l'espérance) du taux sans risque « D ans » dans « j ans ».

$f^i(t, i, D)$ se calcule en utilisant l'absence d'opportunité d'arbitrage :

$$(1 + f^i(t, j, D))^D * (1 + R^i(t, j))^j = (1 + R^i(t, j + D))^{j+D}$$

Autrement dit, emprunter au taux sans risque à la date t pour une durée $j+D$ ans est équivalent à faire un premier emprunt à la date t pour une durée j ans puis ensuite faire un deuxième emprunt (pour rembourser le premier par exemple) à la date $t+2j$ pour une durée D ans. Nous parvenons donc, chaque année à calculer le taux forward à partir de la courbe des taux sans risque de la manière suivante :

$$f^i(t, j, D) = \left(\frac{(1 + R^i(t, j + D))^{j+D}}{(1 + R^i(t, j))^j} \right)^{\frac{1}{D}} - 1$$

Le coefficient α se calcule en utilisant la formule (2) avec des conditions initiales où toutes les autres variables sont connues. En effet, à la date 0 nous connaissons $MV^i(0)$. Nous faisons de plus l'hypothèse que $f^i(0, j, D) + \alpha > 0$, de sorte qu'on ait l'égalité $(f^i(t, j, D) + \alpha)_+ = f^i(0, j, D) + \alpha$. Cette dernière égalité va nous permettre de tirer le coefficient α dans la formule (2) à partir des conditions initiales. On a donc la formule suivante :

$$\alpha = \frac{1}{\sum_{j=1}^T \frac{f^i(0, j, D)}{(1 + R^i(0, T))^T}} * \left[\frac{MV^i(0)}{FV} - \frac{1}{(1 + R^i(0, T))^T} - \sum_{j=1}^T \frac{f^i(0, j, D)}{(1 + R^i(0, T))^T} \right]$$

Quant à la valeur comptable, elle se calcule comme suit

$$BV(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } T - \frac{t}{2} = 0 \quad \text{ou } T - \frac{t}{2} = 0.5 \\ FV & \text{si } t \text{ est pair (si fin semestre = fin d'année)} \\ FV * \left(1 + \frac{1}{2} * (F^i(t, 0, D) + \alpha)_+\right) & \text{si fin semestre = milieu d'année} \end{cases}$$

En effet, en milieu d'année, la valeur comptable est égale au nominal plus le coupon couru à cette date : il s'agit de $\frac{FV}{2} * (F^i(t, 0, D) + \alpha)_+$

En fin d'année (juste après la tombée du coupon), la valeur comptable est égale au nominal et, lors de l'arrivée à terme, la valeur comptable est évidemment nulle.

2.1.1.3 Les obligations d'Entreprise :

Ces actifs offrent une meilleure rémunération que les obligations d'Etat car ils portent un risque plus important : ce risque est symbolisé par la note de l'Entreprise.

- Les valeurs comptables et de marché

Le calcul de la valeur comptable est identique à celui des obligations d'Etat à coupon fixe.

La valeur de marché par contre se calcule d'une manière assez particulière. En effet, cette valeur de marché dépend de la situation de l'émetteur de l'obligation. L'émetteur étant une entreprise, nous considérons qu'il peut se produire un défaut de paiement. Ainsi, cette valeur de marché possède deux composantes

-une première composante qui est remboursée quoiqu'il arrive en cas de défaut. et qui dépend de la valeur du déflateur. Le déflateur est calculé à partir du taux sans risque et d'une prime de risque. Il est utilisé pour calculer le prix des actifs en $t=0$ en probabilité historique.

-une deuxième portion qui n'est pas remboursée en cas de défaut et qui se comporte comme une obligation d'Etat à coupon fixe.

La formule donnant la valeur de marché de l'obligation d'Entreprise est la suivante :

$$MV^i(t) = FV * \left[\frac{(1 - t_r) * \delta_{\text{défaut}}(t)}{\left(1 + R^i\left(N, t, T - \frac{t}{2}\right)\right)^{T - \frac{t}{2}}} + t_r * D\left(T - \frac{t}{2}\right) \right]$$

$$\delta_{\text{défaut}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si l'émetteur se retrouve en situation de défaut à la date } t \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, l'année t , la partie de l'obligation qui sera toujours remboursée en cas de défaut vaut $FV * t_r * D\left(T - \frac{t}{2}\right)$.

$D\left(T - \frac{t}{2}\right)$ est la valeur du déflateur correspondant à la maturité $T - \frac{t}{2}$. Elle est calculée à partir du taux sans risque de la maturité correspondante à la date t et d'une prime de risque. Il est utilisé pour la valorisation des actifs en probabilité historique.

A la date t et pour la maturité $T - \frac{t}{2}$, $R^i(N, t, T - \frac{t}{2})$ représente le taux de l'obligation émise par l'entreprise de note N . En effet, les entreprises sont classés suivant un rating qui donne une idée de la probabilité de défaut. Les notes sont, par ordre croissant de risque de défaut : A, AA, AAA, B, BB, BBB, CCC et DEFAULT.

DEFAULT correspond à la note la plus basse. Théoriquement, une fois que l'Entreprise a cette note, il lui est impossible de revenir à une note plus élevée. Les autres notes permettent des transitions entre elles suivant une matrice de passage donnée. Le paragraphe suivant a pour objet de décrire le calcul de cette matrice de transition et le calcul des notes d'un semestre à l'autre.

- Les scénarios stochastiques d'évolution des notes des Entreprises:

Une matrice de crédit est une matrice qui permet, suivant un algorithme bien précis de déterminer chaque semestre la nouvelle note d'une entreprise en fonction de sa note précédente. Dans notre modèle, nous partons d'une unique matrice de crédit A , fournie en input. Cette matrice ne peut pas être utilisée à l'Etat brut, puisque les probabilités d'évolution d'une note à l'autre ne sont pas figées dans le temps. En effet, le processus des notes d'Entreprises sont des chaines de Markov inhomogènes. Afin d'intégrer une composante dynamique dans nos matrices de crédit et donc de transition, nous nous intéressons au modèle de COX INGERSOLL ROSS (CIR). Ce processus est régi par la dynamique suivante :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t \text{ avec } X_0 \text{ déterministe fixé, aussi donné en input.}$$

Ce processus est généralement utilisé pour modéliser les taux instantanés. Son avantage est qu'il permet d'obtenir des taux toujours positifs. Ici, nous nous en servons pour générer de manière stochastique des matrices dynamiques d'évolution des notes des entreprises.

D'autre part, nous procédons à la diagonalisation de la matrice A . Nous obtenons donc sa décomposition de la manière suivante :

$$A = P * D * P^{-1}$$

P est la matrice formée des vecteurs propres de A et $D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_7 \end{pmatrix}$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres correspondantes.

Nous créons ensuite une matrice diagonale dynamique $\tilde{D}_t = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \tilde{d}_7(t) \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

$$\tilde{D}_t = E \left[e^{\left(\int_0^t X_s ds \right) * D} \right] \text{ avec } t \in \{1, \dots, 60\} \text{ désigne le semestre}$$

Plus précisément, $\tilde{d}_i(t) = E \left[e^{d_i * \left(\int_0^t X_s ds \right)} \right]$ où $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $i \in \{1, \dots, 7\}$ correspond aux différentes notes.

La propriété suivante permet de calculer de manière explicite la matrice $\tilde{D}(t)$ à chaque date.

Propriété :

Le processus de CIR vérifie, pour tout α et β :

$$E \left[e^{-\alpha * X_t - \beta * \left(\int_0^t X_s ds \right)} \right] = e^{-\alpha * f(\alpha, \beta, t) - X_0 * g(\alpha, \beta, t)}$$

Avec

$$\begin{cases} f(\alpha, \beta, t) = -\frac{2}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2\gamma e^{\frac{t(\gamma+b)}{2}}}{\sigma^2 * \alpha(e^{\gamma t} - 1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)} \right) \\ g(\alpha, \beta, t) = \frac{\alpha(\gamma + b + e^{\gamma t}(\gamma - b)) + 2\beta(e^{\gamma t} - 1)}{\sigma^2 \alpha(e^{\gamma t} - 1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)} \\ \gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2 \beta} \end{cases}$$

En appliquant cette propriété à l'expression de $\tilde{d}_i(t)$ nous parvenons à

$$\tilde{d}_i(t) = e^{-\alpha * f(0, -d_i, t) - X_0 * g(0, -d_i, t)} \text{ avec } \gamma_i = \sqrt{b^2 - 2d_i \sigma^2}, f \text{ et } g \text{ définies comme ci-dessus.}$$

Soit

$$\begin{cases} f(0, -d_i, t) = -\frac{2}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2\gamma_i e^{\frac{t(\gamma_i+b)}{2}}}{\gamma_i - b + e^{\gamma_i t}(\gamma_i + b)} \right) \\ g(0, -d_i, t) = \frac{-2d_i (e^{\gamma_i t} - 1)}{\gamma_i - b + e^{\gamma_i t}(\gamma_i + b)} \\ \gamma_i = \sqrt{b^2 - 2d_i \sigma^2} \end{cases}$$

Au final, la matrice de crédit dynamique $\tilde{A}$ sera donnée par :

$$\tilde{A}_t = P * \tilde{D}_t * P^{-1}$$

Pour chaque semestre, chaque scénario et chaque entreprise, nous calculons une certaine grandeur notée $a^i(t, E)$.

Afin de pouvoir manipuler plus aisément les indices de la matrice, définissons la fonction f de la manière suivante :

$$f: \{\text{ensemble des notes}\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 7\}$$

$$A \mapsto 1$$

$$AA \mapsto 2$$

$$\vdots$$

$$DEFAULT \mapsto 7$$

En désignant par $\tilde{A}_t[i, j]$ le coefficient de la i ème ligne et j ème colonne de la matrice $\tilde{A}_t$, la note $N^i(t, E)$ de l'entreprise E au semestre t est donnée par la formule de récurrence suivante :

$$N^i(t, E) = f^{-1} \left(\sum_{j=1}^6 j * \mathbb{1}_{\{a^i(t, E) \in [\tilde{A}_t[f(N^{i(t-1, E)}), j]; \tilde{A}_t[f(N^{i(t-1, E)}), j+1] \}} \right)$$

En d'autres termes, disposant de la note $N^i(t-1, E)$ du semestre dernier, la matrice $\tilde{A}_t$ permettra d'appliquer le critère de changement de note chaque semestre t avec l'algorithme suivant :

- 1- Nous calculons la grandeur $a^i(t, E)$ (le détail de ce calcul sera précisé plus bas)
- 2- Nous nous positionnons à la ligne $p = f(N^i(t-1, E))$ de la matrice $\tilde{A}_t$. Nous cherchons l'unique réel m vérifiant $\tilde{A}_t[p, m] = \max\{\tilde{A}_t[p, j] / \tilde{A}_t[p, j] \leq a^i(t, E)\}$
- 3- La note du semestre t pour l'entreprise sera alors $f^{-1}(m)$

Détails sur le calcul de la grandeur $a^i(t, E)$:

$a^i(t, E)$ se calcule avec des données relatives aux obligations d'Entreprise. Il existe deux types d'information : un bruit du marché (bm) commun à toutes les obligations corporate et un bruit spécifique (bs) à chaque obligation.

La formule utilisée est la suivante :

$$a^i(t, E) = \emptyset \left(bm^i(t) * cm^i(t) + bs^i(E, t) * \sqrt{1 - cm^i(t)^2} \right)$$

Pour le scénario i et la date t :

$cm^i(t)$ désigne le coefficient de corrélation avec le marché

$bm^i(t)$ représente le bruit du marché commun à toutes les obligations d'Entreprise

$bs^i(E, t)$ représente le bruit spécifique à l'obligation de l'Entreprise E

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est la densité de la loi normale centrée réduite.

2.1.2 Les scénarios d'évolution des actifs risqués :

Cette classe contient les actions, l'immobilier et les OPCVM. Leur rendement est en moyenne meilleur que celui des obligations mais ils se caractérisent par une volatilité élevée.

Chaque semestre et suivant chaque scénario, nous avons un taux de croissance et un taux de dividende (qui nourrit le cash). Leur valeur de marché se calcule comme suit :

$$MV_j^i(t) = MV_j^i(t-1) * (1 + t_{croiss}^{i,j}(t) - t_{divid}^{i,j}(t))$$

Pour l'actif risqué j, $t_{croiss}^{i,j}(t)$ désigne le taux de croissance et $t_{divid}^{i,j}(t)$ le taux de dividende du scénario i le semestre t.

La valeur comptable des actifs risqués ne varie pas au cours de cette étape d'évolution des investissements.

2.1.3 Les produits dérivés :

Ces actifs permettent de se protéger contre une hausse des taux d'intérêt. Il est convenu à la signature du contrat que l'assureur qui se couvre à la date t contre la hausse du taux de maturité m recevra, si ce taux dépasse un certain seuil S l'année T, une somme proportionnelle à la différence entre ce taux et le seuil suivant la formule :

$$(F(2T, T, m) - S)_+$$

$F(t, T, m)$ désigne le taux forward de maturité m l'année T, calculé au semestre t. Au semestre t, on dira de cette grandeur qu'elle représente le taux " m ans " dans " $T - \frac{t}{2}$ ans " .

Le pay-off de cette option souscrite par l'assureur s'apparente donc à celle d'un call européen de sous-jacent $(F(s, T, m))_{s \leq 2T}$, de prix d'exercice S et d'échéance T (en semestre). En faisant l'hypothèse que ce taux forward suive la dynamique de Black et scholes, nous pouvons calculer² la prime P à payer pour une telle couverture à la date t :

$$P = F(2t, T, m) * \Phi(d_1) - S * e^{-r^i(t, T) * (T - \frac{t}{2})} * \Phi(d_2)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la densité de la loi normale centrée réduite.

$$\text{Avec } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t, 2T, m)}{S}\right) + \left(r^i(t, T) + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - \frac{t}{2}\right)}{\sigma \sqrt{T - \frac{t}{2}}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - \frac{t}{2}}$$

$r^i(t, T)$ est le taux sans risque de maturité T du ième scénario à la date t.

Afin de calculer la valeur du taux forward $F(2t, T, m)$, nous procédons à un ajustement de convexité avec une obligation fictive au pair (coupon = taux d'actualisation) de maturité $-\frac{t}{2}$. Les coupons sont égaux à l'espérance $f(2t, T, m)$ du taux forward. Le calcul de $f(2t, T, m)$ est détaillé dans la partie « obligations d'Etat à coupons variables ». La formule de l'ajustement de convexité est la suivante :

$$F(2t, T, m) = f(2t, T, m) - \frac{1}{2} \left(f(2t, T, m)\right)^2 * \sigma^2 * m * \frac{C(f(2t, T, m), f(2t, T, m), m)}{D(f(2t, T, m), f(2t, T, m), m)}$$

Où $C(\alpha, \beta, m)$ et $D(\alpha, \beta, m)$ sont respectivement les convexités et duration d'une obligation de taux nominal 1, coupon α et taux d'actualisation β .

² Un rappel sur la méthode de calcul de cette prime grâce au modèle de Black -Scholes est exposé en annexe

Nous avons les formules suivantes :

$$C(\alpha, \beta, m) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{i * (i + 1) * \alpha}{(1 + \beta)^{i+2}}}{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha}{(1 + \beta)^i}}$$

$$D(\alpha, \beta, m) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{i * \alpha}{(1 + \beta)^{i+1}}}{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha}{(1 + \beta)^i}}$$

2.1.4 Le cash :

L'évolution des investissements impacte le cash par les éléments suivants :

- les versements de coupon des obligations à coupon variable : $C_o(t)$
- les versements de dividende des actifs risqués : $D(t)$

- le remboursement du nominal des obligations qui arrivent à maturité $N(t)$
- les intérêts générés par le placement au taux sans risque de la valeur de marché du cash du semestre précédent (après l'étape de réallocation ou d'optimisation suivant que le semestre précédent tombe en milieu ou en fin d'année)

En définitive, la valeur de marché du cash se calcule de la manière suivante :

$$MV(t) = MV(t-1, \text{après réalloc ou optim}) * (1 + r^i(t, 1)) + C_o(t) + D(t) + N(t)$$

D'autre part, les valeurs comptables et de marché du cash sont égales :

$$MV(t) = BV(t)$$

2.2 L'impact des évènements clients :

A l'actif, cette étape n'impactera que le cash. Le cash est en effet diminué des montants reversés pour l'ensemble des rachats et décès. Le cash est également augmenté des primes périodiques. Le cash et la provision mathématique subissent exactement la même variation à ce niveau.

2.3 Impact de l'étape de réallocation sur l'actif:

L'étape de réallocation correspond à des opérations d'achat vente en vue d'atteindre l'allocation et la duration cible. En effet, l'assureur se définit une quantité cible de chaque actif et une duration cible pour ses obligations d'Etat. L'allocation et la duration cible sont sensées être constantes sur la durée de projection mais les actifs subissent des variations du fait des étapes d'évolution des investissements et d'optimisation en fin d'année. Cette étape de réallocation a donc pour but de nous permettre de réaligner quantitativement (en valeur de marché) et qualitativement (en duration) chaque actif sur la cible souhaitée. Cette réallocation s'effectue à valeur de marché totale constante. Pour le scénario économique i , $MV_j^i(t)$ (resp $BV_j^i(t)$) désignera la valeur de marché (resp valeur comptable) de l'actif j après l'étape d'évolution des investissements du semestre t et $MV_j^i(t, \text{après réalloc})$ (resp $BV_j^i(t, \text{après réalloc})$) désignera la valeur de marché de l'actif j après réallocation à la fin du semestre t .

Nous calculons tout d'abord la valeur de marché totale suite à l'évolution des investissements du semestre t. En effet, cette valeur de marché totale sera utile pour le calcul de la valeur de marché cible de chaque actif. Plus précisément,

Soit T_j la proportion cible de l'actif j

Pour le scénario i, soit $MV_{tot}^i(t)$ la valeur de marché totale des actifs après l'évolution des investissements du semestre t dans le scénario i. Nous avons :

$$MV_{tot}^i(t) = \sum_{i \in \{\text{ensemble des actifs sauf produits dérivés}\}} MV_j^i(t, \text{après réalloc})$$

$$MV_j^i(t, \text{après réalloc}) = T_j * MV_{tot}^i(t)$$

2.3.1 Rééquilibrage des actifs risqués et des obligations à coupon variable:

Le rééquilibrage se déroule de manière identique pour tous les actifs risqués et obligations à coupons variables.

Deux situations peuvent se produire :

CAS 1 :

$$MV_j^i(t, \text{après réalloc}) > MV_j^i(t)$$

C'est-à-dire que la valeur de marché de l'actif après évolution des investissements est inférieure à la valeur cible. Dans ce cas il faut acheter de cet actif pour atteindre la cible. La quantité achetée vaut

$$MV_j^i(t, \text{à acheter}) = MV_j^i(t, \text{réalloc}) - MV_j^i(t)$$

On aura ainsi atteint la quantité cible souhaitée.

La valeur comptable après l'étape de réallocation vaut :

$$BV_j^i(t, \text{après réalloc}) = BV_j^i(t) + MV_j^i(t, \text{à acheter})$$

Et en ce qui concerne les obligations à coupon variable, la valeur du nominal après cette étape vaut :

$$FV_j^i(t, \text{après réalloc}) = FV_j^i(t) + MV_j^i(t, \text{à acheter})$$

CAS 2 :

$$MV_j^i(t, \text{après réalloc}) \leq MV_j^i(t)$$

Dans ce cas, la valeur de marché cible de l'actif est inférieure à sa valeur après l'évolution des investissements. Il convient donc de vendre une partie de ce type d'actif.

Il faut donc vendre la quantité :

$$MV_j^i(t, \text{à vendre}) = MV_j^i(t) - MV_j^i(t, \text{réalloc})$$

L'opération de vente est plus délicate. Nous procédons à cet effet de la manière suivante :

La « ligne d'actif » représente une date d'achat. Ainsi, pour chaque actif, nous avons différentes « lignes » qui correspondent à différentes dates d'achat. Les lignes présentant un fort écart entre valeur de marché et valeur comptable sont vendues les premières.

Nous classons nos « lignes d'actif » par ordre décroissant de valeur absolue de plus ou moins value latente :

$$|PMVL_j^i(t, \text{ligne } k)| = |MV_j^i(t, \text{ligne } k) - BV_j^i(t, \text{ligne } k)|$$

Nous explicitons la démarche par l'exemple suivant à la date t:

Ligne k de l'actif risqué j	date d'achat	prix d'achat (BV_j^i)	Prix Marché (MV_j^i)	$PMVL_j^i(t, \text{ligne } k)$
1	2009	100	105	5
2	2008	150	120	-30
3	2001	200	220	20
4	2009	250	240	-10
5	2005	50	50	0

Nous réordonnons ensuite les lignes par ordre décroissant en terme de valeur absolue de plus ou moins value latente :

Ligne k de l'actif risqué j	date d'achat	prix d'achat (BV_j^i)	Prix Marché (MV_j^i)	$ PMVL_j^i(t, ligne k) $
1	2008	150	120	30
2	2001	200	220	20
3	2009	250	240	10
4	2009	100	105	5
5	2005	50	50	0

Nous supposons en outre dans cet exemple que :

$$\begin{cases} MV_j^i(t, \text{après réalloc}) = 310 \\ MV_j^i(t) = 680 \end{cases}$$

Nous devons donc vendre un montant de $MV_j^i(t, \text{à vendre}) = 370 = 680 - 310$ en valeur de marché.

La valeur de marché de la première ligne est de $120 < 370$: cette ligne est entièrement vendue.

A ce stade, la valeur de marché à vendre résiduelle est de $250 = 370 - 120$

La valeur de marché de la deuxième ligne est de $220 < 250$: cette ligne est également entièrement vendue.

A ce stade, la valeur de marché à vendre résiduelle est de $30 = 250 - 220$

La valeur de marché de la troisième ligne est de $240 > 30$: cette ligne est donc partiellement vendue au prorata du besoin. On vend 30 en valeur de marché, ce qui représente un pourcentage $\gamma = \frac{30}{240} = 12.5\%$

La valeur comptable de l'actif risqué j après cette étape vaut donc :

$$\begin{aligned} BV_j^i(t, \text{après réalloc}) &= BV_j^i(t, \text{gardé}) + (1 - \gamma) * BV_j^i(t, \text{partiellement vendu}) \\ &= 100 + 50 + 250 * (1 - 0.125) = 368.75 \end{aligned}$$

2.3.2 Rééquilibrage des obligations :

2.3.2.1 Rééquilibrage des obligations d'Entreprise :

Les obligations d'Entreprise se distinguent par une note x (voir 1.1c.)), une classe de maturité M , une valeur de marché et comptable. Pour chaque note x , et chaque classe de maturité M , il existe une quantité cible d'obligation d'Entreprise à détenir en portefeuille. Cette quantité cible $MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})$ se définit grâce à la quantité cible globale des obligations d'Entreprise ($MV_{credit}^i(t, \text{après réalloc})$) et d'un nombre $n_{credit}(x, M)$.

La quantité cible d'obligations d'Entreprise de note x et de classe de maturité M vaut alors :

$$MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc}) = n_{credit}(x, M) * \frac{MV_{credit}^i(t, \text{après réalloc})}{\sum_{x,M} n_{credit}(x, M)} = n_{credit}(x, M) * \frac{MV_{credit}^i(t) * T_{credit}}{\sum_{x,M} n_{credit}(x, M)}$$

$n_{credit}(x, M)$ représente le « nombre d'unités » des obligations d'Entreprise de note x et de classe de maturité. Cette valeur est donnée en input dans le modèle pour chaque x et chaque M . Chaque unité est matérialisée par une valeur de marché dite unitaire $MV_{credit}^i(t, \text{unit})$ définie par la formule suivante :

$$MV_{credit}^i(t, \text{unit}) = \frac{MV_{credit}^i(t, x, M)}{\sum_{x,M} n_{credit}(x, M)}$$

Cette valeur de marché unitaire est commune à toutes les unités quelque soient leur note et classe de maturité.

$\sum_{x,M} n_{credit}(x, M)$ désigne le nombre total d'unités de crédit cible du segment financier.

Soit $MV_{credit}^i(t, x, M)$ la quantité d'obligations d'Entreprise de note x et de classe de maturité M , après l'étape d'évolution des investissements. Plusieurs cas peuvent se produire :

CAS 1:

$$MV_{credit}^i(t, x, M) < MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})$$

C'est-à-dire que pour la quantité d'obligations d'Entreprise de note x et de classe de maturité M est inférieure à la quantité cible souhaitée. Il faut donc racheter des obligations du même type c'est-à-dire de la même note et de la même maturité. La quantité achetée est :

$$MV_{credit}^i(t, x, M, \text{acheté}) = MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc}) - MV_{credit}^i(t, x, M)$$

On aura donc atteint en valeur de marché la quantité $MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})$ souhaitée pour les obligations d'Entreprise de note x et de maturité M .

La valeur de marché correspondante vaut :

$$BV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc}) = BV_{credit}^i(t, x, M) + MV_{credit}^i(t, x, M, \text{acheté})$$

Et le nominal :

$$FV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc}) = FV_{credit}^i(t, x, M) * \frac{MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})}{MV_{credit}^i(t, x, M)}$$

CAS 2:

$$MV_{credit}^i(t, x, M) \geq MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})$$

La quantité cible des crédits de note x et de classe de maturité M est inférieure à la quantité disponible. Il convient donc de vendre cette catégorie d'actifs. Notons que la quantité cible ici peut être nulle (l'Entreprise ne veut peut être pas de crédit de note CCC dans son portefeuille obligataire, elle vendra donc tous les crédits qui sont passés à une note CCC au cours de l'Etape d'évolution des investissements).

La quantité à vendre vaut :

$$MV_{credit}^i(t, x, M, \text{vendu}) = MV_{credit}^i(t, x, M) - MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})$$

La valeur de marché correspondante après cette étape de rééquilibrage:

$$BV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc}) = BV_{credit}^i(t, x, M) * \frac{MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})}{MV_{credit}^i(t, x, M)}$$

$BV_{credit}^i(t, x, M)$ représente la valeur comptable des obligations d'Entreprise de note x et de maturité M après l'étape d'évolution des investissements au semestre t .

Notons par ailleurs que contrairement au cas précédent, la valeur comptable et la valeur de marché ne varient plus du même montant mais plutôt de manière proportionnelle. En effet, lorsqu'on achète un actif, la valeur comptable et de marché de la quantité achetée sont égales, ce qui explique qu'au final la valeur de marché globale de l'actif augmente du même montant que la valeur comptable. Cependant, lorsque nous procédons à la vente d'un actif, cette opération s'effectue souvent au prorata du besoin à un moment où les valeurs comptables et de marché ne coïncident plus. Nous faisons donc varier la valeur comptable de manière proportionnelle à la baisse constatée sur la valeur de marché.

Enfin, le nominal après rééquilibrage pour cette catégorie d'obligations d'Entreprise vaut :

$$FV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc}) = FV_{credit}^i(t, x, M) * \frac{MV_{credit}^i(t, x, M, \text{après réalloc})}{MV_{credit}^i(t, x, M)}$$

$FV_{credit}^i(t, x, M)$ représente le nominal des obligations d'Entreprise de note x et de maturité M après l'étape d'évolution des investissements au semestre t .

2.3.2.2 Rééquilibrage des obligations d'Etat à coupon fixe:

Les obligations d'Etat à coupon fixe subissent un double rééquilibrage : un rééquilibrage en duration et un rééquilibrage en valeur de marché. En principe, le rééquilibrage en duration devrait aussi s'appliquer aux obligations d'Entreprise. Néanmoins, le rééquilibrage en duration des obligations à coupon fixe est fait de manière à compenser celle des obligations d'Entreprise de manière à ce qu'au global du portefeuille, la duration cible soit atteinte.

- Objectif de duration :

Soit d notre duration cible du portefeuille.

Définissons par ailleurs pour le scénario i et la date t les x suivantes :

$M_{credit}^i(t)$: Le montant de duration des obligations d'Entreprise

$d_{credit}^i(t)$: la duration des obligations d'Entreprise

Il est à noter que $d_{credit}^i(t)$ et $M_{credit}^i(t)$ ne sont des valeurs cibles, elles ont été naturellement atteintes après l'étape de rééquilibrage en valeur de marché des obligations d'Entreprise décrit ci-dessus. Ces deux données ne feront pas l'objet de rééquilibrage.

$d_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc})$: La duration cible des obligations d'Etat à coupon fixe

$M_{govies\ fix}^i(t, \text{init réalloc})$: Le montant de duration cible initial des obligations d'Etat à coupon fixe

$M_{govies\ fix}^i(t, \text{init réalloc})$: Le montant de duration réel cible des obligations d'Etat à coupon fixe

Théoriquement, à la suite du rééquilibrage en duration, nous visons, au global du portefeuille le montant cible de duration suivant :

$$M_{coupon\ fixe}^i(t, \text{init réalloc}) = d * (MV_{credit}^i(t, \text{après réalloc}) + MV_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc})) \quad (\text{formule1})$$

Voilà pourquoi, pour atteindre ce montant global cible de duration, nous allons procéder au rééquilibrage en duration des obligations d'Etat à coupon fixe. Il nous faut à cet effet calculer leur montant cible de duration. Nous utilisons pour cela la formule suivante :

$$M_{coupon\ fixe}^i(t, init\ réalloc) = M_{credit}^i(t) + M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc)$$

i.e $M_{coupon\ fixe}^i(t, init\ réalloc) = d_{credit}(t) * MV_{credit}^i(t, après\ réalloc) + M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc)$

Ainsi, le montant de duration cible des obligations d'Etat se déduit par la formule suivante :

$$M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc) = M_{coupon\ fixe}^i(t, init\ réalloc) - d_{credit}(t, après\ réalloc) * MV_{credit}^i(t, après\ réalloc)$$

$M_{coupon\ fixe}^i(t, init\ réalloc)$ se déduit grâce à la formule (1)

Ainsi la formule précédente devient donc :

$$M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc) = (d - d_{credit}(t)) * MV_{credit}^i(t, après\ réalloc) + d * MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)$$

Nous avons donc à cette étape réussi à calculer le montant initial cible de duration des obligations d'Etat à coupon fixe. Ce montant est qualifié d'initial car nous avons une contrainte supplémentaire : la duration cible doit quoiqu'il arrive appartenir au segment $[d_{min}; d_{max}]$.

d_{min} et d_{max} désignent respectivement les valeurs minimales et maximales possibles pour les durations.

Ainsi, la duration cible qui sera atteinte après cette étape pour les obligations d'Etat à coupon fixe sera :

$$d_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc) = \begin{cases} \frac{M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc)}{MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)} & \text{si } \frac{M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc)}{MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)} \in [d_{min}; d_{max}] \\ d_{min} & \text{si } \frac{M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc)}{MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)} < d_{min} \\ d_{max} & \text{si } \frac{M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc)}{MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)} > d_{max} \end{cases}$$

Avec

$$\frac{M_{govies\ fix}^i(t, init\ réalloc)}{MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)} = d + (d - d_{credit}(t)) * \frac{MV_{credit}^i(t, après\ réalloc)}{MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)}$$

Au final, notre montant réel cible de duration des obligations à coupons fixes sera :

$$M_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc) = d_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc) * MV_{govies\ fix}^i(t, après\ réalloc)$$

- Rappel de l'objectif en valeur de marché :

Comme nous l'avons déjà souligné pour un actif j quelconque, la valeur de marché cible des obligations d'Etat est de :

$$MV_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc}) = T_{govies\ fix} * MV_{tot}^i(t)$$

- Déroulement des rééquilibrages :

Cette étape est effective lorsque sont déterminées les valeurs cibles du montant réel de duration $M_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc})$ et de la valeur de marché $MV_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc})$.

ETAPE 1 : *Vente des obligations d'Etat à coupon fixe*

Nous ordonnons chaque « ligne » (pour la notion de ligne voir 2.1 rééquilibrage des actifs risqués) par ordre croissant des valeurs absolues de plus ou moins values latentes (contrairement à ce qui était fait pour les actifs risqués).

Nous calculons le montant de duration de nos obligations d'Etat à coupons fixes avant cette étape. Ce montant $M_{govies\ fix}^i(t)$, atteint suite à l'étape d'évolution des investissements, est calculé comme suit :

$$M_{govies\ fix}^i(t) = \sum_{k \in \{\text{ensemble des lignes d'obligation d'Etat à coupon fixe}\}} d_{govies\ fix}^i(t, k) * MV_{govies\ fix}^i(t, k)$$

Pour le scénario i et la date t :

$d_{govies\ fix}^i(t, k)$ et $MV_{govies\ fix}^i(t, k)$ désignent respectivement la duration et la valeur de marché de l'obligation de la ligne numéro k, après l'étape d'évolution des investissements.

Ensuite, tant que

$$M_{govies\ fix}^i(t) > M_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc}) \text{ ou } MV_{govies\ fix}^i(t) > MV_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc})$$

C'est-à-dire lorsque le montant de duration avant cette étape est supérieur au montant de duration cible ou lorsque la valeur de marché avant cette étape est supérieure à la valeur de marché des cibles, nous vendons complètement nos obligations, en commençant par celles qui présentent un plus faible écart entre valeur de marché et valeur comptable.

L'exemple suivant est beaucoup plus explicite. Nous considérons les données suivantes :

Numéro k de l'obligation	Date d'achat	Duration $d_{govies\ fix}^i(t, k)$	Valeur comptable	Valeur de marché $MV_{govies\ fix}^i(t, k)$	Plus ou moins value latente	Montant de duration
1	2000	10	250	190	-60	1900
2	2001	10	350	400	50	4000
3	2002	15	180	220	40	3300
TOTAL				810		9200
CIBLE				700		8450

Nous avons :

$$\begin{cases} M_{govies\ fix}^i(t) = 9200 \\ M_{govies\ fix}^i(t, après réalloc) = 8450 \\ MV_{govies\ fix}^i(t) = 810 \\ MV_{govies\ fix}^i(t, après réalloc) = 700 \end{cases}$$

Nous sommes au dessus de notre cible dans les deux cas (en montant de duration et en valeur de marché). Nous devons donc procéder à la vente de nos obligations.

Nous commençons par réordonner les obligations par ordre croissant de valeur absolue de plus ou moins value latente :

Numéro k de l'obligation	Date d'achat	Duration $d_{govies\ fix}^i(t, k)$	Valeur comptable	Valeur de marché $MV_{govies\ fix}^i(t, k)$	Plus ou moins value latente	Montant de duration
1	2000	10	250	190	-60	1900
2	2002	15	180	220	40	3300
3	2001	10	350	400	50	4000
TOTAL				810		9200
CIBLE				700		6500

Nous vendons donc la première ligne d'obligation :

A ce stade, la valeur de marché globale résiduelle vaut $620 = 810 - 190$. Nous sommes comme nous le désirions en dessous de la cible en valeur de marché qui est à 700. Par contre, le montant de duration global résiduel est de $7300 = 9200 - 1900$, ce montant est toujours au dessus du montant de duration cible, il nous faut encore vendre des obligations. Nous vendons donc la seconde ligne : cette fois ci le montant de duration global est de $4000 = 7300 - 3300$, qui est bien inférieur au montant de duration cible.

L'étape de la vente est désormais achevée.

Nous procédons donc au rachat d'obligations. Nous allons décrire cette étape en poursuivant sur l'exemple précédent.

Notons par ailleurs que la valeur globale de marché résiduelle est de 400 (correspond à la dernière obligation non vendue).

ETAPE 2 : Achat des obligations d'Etat à coupon fixe

La quantité d'obligation à racheter possède les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} MV_{govies\ fix}^i(t, \text{à acheter}) = 300 = 700 - 400 = MV_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc}) - 400 \\ MV_{govies\ fix}^i(t, \text{à acheter}) = 2500 = 6500 - 4000 = MV_{govies\ fix}^i(t, \text{après réalloc}) - 4000 \end{cases}$$

Nous devons donc acheter des obligations pour 300 en valeur de marché et 2500 en montant de duration. La solution la plus simple serait d'acheter une obligation de valeur de marché 300 et de duration $\frac{2500}{300} = 8.33$.

Cependant, cette solution n'est pas appliquée car l'Entreprise préfère investir dans cinq obligations de durations uniformément réparties autour de la duration moyenne qui vaut dans ce cas 8 (confère

calcul précédent). L'entreprise va alors acheter cinq obligations. Pour tout $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$, l'obligation O_i possède les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \text{sa duration est de } 5 + i \text{ (de manière à ce que 8 soit la médiane des durations)} \\ \text{sa valeur de marché est de } X + (i - 1) * Y \end{cases}$$

Où X et Y sont deux inconnues qui détermineront les caractéristiques (valeur de marché et montant de duration) des cinq obligations que nous allons acheter. Les deux équations qui nous permettront de trouver les valeurs de X et Y sont les suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^5 (5 + i) * [X + (i - 1) * Y] = 2500 = MV_{govies\ fix}^i(t, \text{à acheter}) \\ \sum_{j=1}^5 X + (i - 1) * Y = 300 = MV_{govies\ fix}^i(t, \text{à acheter}) \end{cases}$$

2.3.3 Rééquilibrage du cash :

La quantité cible de cash est nulle. L'argent disponible dans le cash est complètement utilisé pour financer l'achat éventuel des actifs. Au contraire, lorsque le cash est négatif, il est approvisionné avec les plus values éventuelles réalisées suite à la vente des actifs, de manière à ce que sa valeur finale soit nulle.

$$BV_{cash}^i(t, \text{après réalloc}) = MV_{cash}^i(t, \text{après réalloc}) = MV_{tot}^i(t) * T_{cash} = 0 \text{ car } T_{cash} = 0$$

2.4 L'impact de l'optimisation sur l'actif:

Cette étape a lieu uniquement en fin d'année, après l'étape de rééquilibrage(ou réallocation). En conséquence, t est ici forcément pair. Cette étape n'impacte que certains éléments de l'actif : le cash, les actifs risqués et les obligations à coupons variables.

2.4.1 Sur les actifs risqués et les obligations à coupons variables:

L'optimisation impacte la valeur des actifs risqués de par les plus ou moins values latentes qui sont réalisées à cette étape dans l'optique de l'optimisation des produits financiers.

La valeur de marché n'est pas impactée. Seule la valeur comptable est impactée pour chaque actif concerné :

$$BV_{actif\ j}^i(t, \text{après optim}) = BV_{actif\ j}^i(t, \text{après réalloc}) * (1 - t_{pmvl}^i(t)) + MV_{actif\ j}^i(t, \text{après réalloc}) * t_{pmvl}^i(t)$$

Où $t_{pmvl}^i(t)$ désigne le taux de plus ou moins values latentes réalisées après l'étape d'optimisation des produits financiers. Cette étape sera décrite de manière plus explicite dans la partie IV.

2.4.2 Sur le cash :

Le cash est impacté afin d'effectuer le prélèvement de la marge sur encours et donc d'effectuer un ajustement final.

$$MV_{cash}^i(t, \text{après optim}) = MV_{cash}^i(t, \text{après réalloc}) + F_{cash}^i(t)$$

$F_{cash}^i(t)$ représente le flux final de cash

D'autre part, $MV_{cash}^i(t, \text{après réalloc}) = 0$ puisque la quantité cible de cash (la quantité de cash après l'étape d'évolution des investissements) est nulle. Ce qui conduit donc à l'égalité suivante :

$$MV_{actifs risqués}^i(t, \text{après optim}) = F_{cash}^i(t)$$

Par ailleurs, la valeur de marché et la valeur comptable du cash sont toujours égales:

$$MV_{cash}^i(t, \text{après optim}) = BV_{cash}^i(t, \text{après optim})$$

Chapitre 3 : HYPOTHESES ET VARIATION DU PASSIF

Le passif est relatif à l'engagement de l'assureur définit par les différents « model points » ou produits souscrits par les clients et qui sont organisés en cantons. Chaque produit possède ses caractéristiques (provision mathématique, taux de rachat,...). Dans toute cette partie, t désigne un semestre qui tombe en fin d'année, i désigne le scénario économique considéré lors de la projection et j représente le produit.

2.1 Les coûts sur le passif :

2.1.1 Les coûts relatifs à la prime commerciale :

Ce sont les chargements d'acquisition et les commissions des apporteurs d'affaire (les commerciaux).

La prime commerciale de l'année $\frac{t}{2}$ se décompose comme suit :

$$PC[t-1; t] = PP^j[t-1; t] + COM^j[t-1; t] + CA^j[t-1; t] + TAX^j[t-1; t]$$

$COM^j[t-1; t] = t_{comm}^j[t-1; t] * PC[t-1; t]$ est la commission versée au commercial

$CA^j[t-1; t] = t_{charg.acquis}^j[t-1; t] * PC[t-1; t]$ est le chargement d'acquisition prélevé par l'assureur

$TAX^j[t-1; t] = t_{taxe} * PC[t-1; t]$ est le montant de la taxe versée à l'Etat

$PP^j[t-1; t] = PC[t-1; t] - COM^j[t-1; t] - CA^j[t-1; t] - TAX^j[t-1; t]$ est la prime pure

Les taux de chargement d'acquisition et de commission sont donnés en input dans le modèle pour chaque produit j et chaque année $\frac{t}{2}$.

2.1.2 Les coûts liés à l'encours :

2.1.2.1 Le coût des commissions commerciales sur l'encours :

Ce coût est défini en pourcentage de l'assiette (encore appelée encours), le pourcentage est fixe dans le temps et l'assiette est la moyenne entre la provision mathématique, en début et en fin d'année, sans considérer les taux éventuels versés en fin d'année. Nous le noterons $ASSIETTE^i(t)$ pour l'année $\frac{t}{2}$, et le scénario i .

$$ASSIETTE^i(t) = \frac{PM^i(t-1) + \frac{PM^i(t, \text{après evt clients})}{TMG(A)^i_{[t-1; t]}}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } PM^i(t-1) &= \sum_{j \in \text{CANTON}} PM^{i,j}(t-1) \\ PM^i(t-1) &= \sum_{j \in \text{CANTON}} PM^{i,j}(t-1, \text{après evt clients}) \end{aligned}$$

2.1.2.2 Les coûts unitaires :

Ce sont les coûts de gestion de l'épargne et ceux des autres chargements techniques par contrat. Ce dernier coût est considéré pour certains contrats et est susceptible de varier dans le temps. Ces coûts dépendent par ailleurs de la proportion de provision mathématique sur le support EURO.

2.2 Evolution du passif :

Le passif est constitué de la provision mathématique et de la réserve de capitalisation. A la date 0, les primes des assurés coïncident avec leur provision mathématique. La réserve de capitalisation initiale quant à elle est nulle à cette date. Ces deux éléments du passif vont subir des variations au cours de la projection. Les principales étapes de la projection qui les impactent sont les évènements client et l'optimisation de fin d'année (pour la provision mathématique) et l'étape de réallocation (pour la réserve de capitalisation).

2.2.1 La provision mathématique :

2.2.1.1 La revalorisation par le TMG(A) :

En milieu et en fin d'année, la provision mathématique est augmentée du taux minimal garanti.

Soit $TMG(A)^i_{[t-1;t]}$ le taux minimum garanti l'année $\frac{t}{2}$ et pour le scénario économique i.

En fait ce taux ne dépend du scénario i et du temps que dans le cas d'un TMGA, comme nous le verrons dans la suite. Dans le cas d'un TMG le taux est constant sur toute la durée de projection et quelque soit le scénario économique considéré.

Ce taux sera appliqué à la provision mathématique les semestres -1 et t .
(ce sont les deux semestres de l'année $\frac{t}{2}$)

Soit $PM^{i,j}(t-1)$ le montant de la provision mathématique en milieu d'année et au tout début de cette étape, pour le scénario économique i et le produit j.

Alors :

$$PM^{i,j}(t-1, \text{après TMGA}) = PM^{i,j}(t-1) * \left(1 + TMG(A)^i_{[t-1;t]}\right)^{1/2}$$

Juste après cette revalorisation, la provision mathématique est impactée par les évènements clients (étape définie ci-dessous). Ensuite, nous avons une deuxième session de revalorisation de la provision mathématique par le TMG(A) en fin d'année (semestre):

$$PM^{i,j}(t, \text{après TMGA}) = PM^{i,j}(t-1, \text{après evt clients}) * \left(1 + TMG(A)^i_{[t-1,t]}\right)^{1/2}$$

$PM^{i,j}(t-1, \text{après evt clients})$ est le montant de la provision mathématique après survenance des évènements clients (décrits ci-dessous).

2.2.1.2 Les évènements client :

2.2.1.2.1 Rachat et décès :

Soient $X^{i,j}([t-1; t])$ et $d^j([t-1; t])$ les taux de rachat et de décès considérés pour l'année $\frac{t}{2}$, et pour le produit j. Il faut noter que le taux de rachat dépend en plus du scénario économique i, comme nous le verrons par la suite. Les taux sont appliqués à la provision mathématique en milieu d'année (ici semestre $t-1$). Ces évènements se produisent évidemment tout au long de l'année mais nous supposons dans le modèle qu'ils ne surviennent qu'une seule fois.

Nous avons :

$$PM^{i,j}(t-1, \text{après evt clients}) = PM^j(t-1, \text{après TMGA}) * \left(1 - X^{i,j}([t-1; t]) - d^j([t-1; t])\right)$$

Détails sur la loi de rachat

Le taux de décès est donné en input dans le modèle pour chaque date t et produit j. Le taux de rachat par contre fait l'objet d'un calcul bien précis, à l'intérieur du modèle.

Tout d'abord, il est important de souligner que le taux de rachat dont il est fait mention ci-dessus se décompose en un taux de rachat structurel $X_s^j([t-1; t])$ et un taux de rachat variable $X_v^{i,j}([t-1; t])$. Le rachat structurel se décompose lui-même en un rachat total et un rachat partiel, définis respectivement par $X_s^j(\text{total}, [t-1; t])$ et partiel $X_s^j(\text{partiel}, [t-1; t])$.

Plus précisément :

$$X^{i,j}([t-1; t]) = X_s^j([t-1; t]) * \left(1 + X_v^{i,j}([t-1; t])\right)$$

$$X_s^j([t-1; t]) = X_s^j(\text{total}, [t-1; t]) + X_s^j(\text{partiel}, [t-1; t])$$

Les rachats totaux et partiels sont, eux aussi, donnés en input pour chaque produit et chaque date.

Le rachat variable reflète la satisfaction du client par rapport aux taux qui lui sont servis. Les taux servis dépendent du scénario économique, voilà pourquoi le taux de rachat variable dépend non seulement du produit j mais aussi du scénario économique i considéré lors de la projection.

A l'intérieur du modèle, l'utilisateur, au moment de lancer ses simulations, a le choix entre deux méthodes de calcul pour ce taux : La méthode ACAM et une autre méthode basée sur une théorie de la satisfaction, propre à l'Entreprise (et donc à son portefeuille) et dont il ne sera pas fait mention dans le présent document.

La loi ACAM pour le rachat variable:

Dans cette partie, nous nous employons à décrire la loi de rachat de la méthode ACAM, encore appelée loi des ONC. Cette méthode compare le taux 10 ans au taux de participation aux bénéfices servit l'année précédente pour définir un taux de rachat variable. Nous supposons donc ici que l'assuré utilise le taux 10 ans comme référence pour sa prise de décision : on peut parler là d'arbitrage entre le placement de l'épargne au taux 10 ans et dans un produit d'assurance vie. La représentation graphique de ce taux prend forme en une fonction en escalier définie de la manière suivante :

Tout d'abord, nous considérons des rachats variables maximal et minimal x_{max} et x_{min} (donnés en input). Ensuite nous avons :

$$X_v^i([t-1; t]) = \begin{cases} x_{max} & \text{si } x(t) < \alpha \\ x_{max} * \frac{x(t) - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \leq x(t) \leq \beta \\ 0 & \text{si } \beta \leq x(t) \leq \gamma \\ x_{min} * \frac{x(t) - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma \leq x(t) \leq \delta \\ x_{min} & \text{si } x(t) > \delta \end{cases}$$

Avec $x(t) = t_{pb} \left(t_{pfi}^i(t-1) \right) - TME$

$t_{pb} \left(t_{pfi}^i(t-1) \right)$ est le taux de participation aux bénéfices servit le semestre précédent et TME est le taux moyen des emprunts d'Etat, représentatif du taux 10 ans.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes définies en input dans le modèle.

Ce rachat variable est un pourcentage des rachats structurels. Le rachat variable peut être négatif : cette situation traduit une surperformance remarquable des taux servis par rapport au taux benchmark des clients (typiquement lorsque $t_{pb} \left(t_{pfi}^i(t-1) \right) > TME + \delta$)

Le taux de rachat global dans ce cas là est finalement plus faible que le taux de rachat structurel.

2.2.1.2.2 Les primes :

Les primes sont annuelles et sont versées sur la provision mathématique en milieu d'année. Nous supposons par ailleurs qu'elles sont versées avant survenance du décès ou rachat éventuel, mais se rajoutent à la provision mathématique après mort et décès. D'autre part, les primes subissent une variation tous les ans. Le taux d'évolution $T_{evol}[t-1; t]$ de l'année $\frac{t}{2}$ de la prime est donné en input dans le modèle sur toute la durée de projection. Nous avons également pour la même année un taux de chargement d'acquisition $t_{charg.acquis}^j[t-1; t]$ pour chaque produit j , en input. Ces chargements, prélevés sur la prime commerciale, sont des gains pour l'assureur.

Soient $PC[t-1; t]$ le montant de la prime client (ou prime commerciale) versée par le client l'année $\frac{t}{2}$ et $N[t-1; t]$ le nombre de clients de la même année.

Au tout début de la projection, nous avons $N(0)$ clients qui versent chacun une certaine prime $C(0)$.

Alors :

$$PC[t-1; t] = \prod_{k=1}^{\frac{t}{2}} (1 + T_{evol}[2k-1; 2k]) * PC(0)$$

$$N[t-1; t] = N(0) * \prod_{k=1}^{\frac{t}{2}} (1 - d^j[2k-1; 2k] - X_s^j(total, [2k-1; 2k]) - X_s^j[2k-1; 2k] * X_v^{i,j}[2k-1; 2k])$$

Rappelons que pour l'année k :

$d^j([2k-1; 2k])$ est le taux de décès

$X_s^j(total, [2k-1; 2k])$ est le taux de rachat structurel total

$X_s^j[2k-1; 2k] * X_v^{i,j}[2k-1; 2k]$ est le taux de rachat variable

La provision mathématique du semestre $t-1$ après cette étape vaut :

$$PM^{i,j}(t-1, \text{après primes}) = PM^{i,j}(t-1, \text{après evt clients}) + PC[t-1; t] * N[t-3; t-2] * (1 - t_{charg.acquis}^j[t-1; t])$$

2.2.1.3L'étape d'optimisation:

A la fin de l'étape d'optimisation, la provision mathématique est augmentée des participations aux bénéfices $t_{pb} \left(t_{pfi}^i(t) \right)$ dont le détail de calcul sera exposé dans la partie IV :

$$PM^i(t, \text{après réalloc}) = PM^i(t, \text{après evt clients}) + t_{pb} \left(t_{pfi}^i(t) \right) * ASSIETTE^i(t)$$

2.2.2La réserve de capitalisation :

La réserve de capitalisation est alimentée par les plus ou moins values réalisées sur les obligations à coupons fixes au cours de l'étape de réallocation par les opérations de vente. Ces réserves doivent rester positives. Si ce n'est pas le cas les produits financiers sont impactés.

Chapitre 4 : RECAPITULATIF DES DIFFERENTES ETAPES DE LA PROJECTION

Dans cette partie nous présentons de manière chronologique les différents événements qui impactent l'actif et le passif dans notre projection. La plupart de ces étapes seront présentées de manière assez rapide puisqu'elles ont été développées dans les parties II et III, au niveau de la description de l'évolution du passif et de l'actif. Nous insisterons donc surtout sur l'étape d'optimisation qui a lieu en fin d'année et qui incarne véritablement le pilotage actif/passif.

Tout d'abord, nous choisissons une date 0, comme origine des temps. Les primes des assurés sont investies dans les actifs dont nous avons fait mention dans la partie II. Nous choisissons une quantité cible d'allocation de nos actifs puis nous procédons à la projection de l'actif et du passif. Les différentes étapes de cette projection sont, dans l'ordre :

4.1 L'évolution des investissements:

Elle correspond à l'écoulement d'un semestre. Les actifs vont être impactés de par leur valeur de marché et valeur comptable. Le passif va évoluer en termes de provision mathématique et de réserve de capitalisation. Tous ces éléments ont été détaillés dans les parties II et III.

4.2 Les événements clients:

La PM est impactée suivant les décès, rachats et primes périodiques qui surviennent toutes les fins de semestres directement après l'étape d'évolution des investissements.

4.3 La réallocation:

Cette étape a lieu en fin de semestre. Les quantités des différents actifs sont réallouées de manière à atteindre les quantités cibles. Il y a également un réajustement des obligations à coupon fixe pour atteindre la duration cible.

4.4 L'optimisation:

Cette étape ne survient qu'un semestre sur deux, en fin d'année. Elle se subdivise en trois étapes essentielles : l'optimisation du taux de produits financiers et celle du RAN.

4.4.1 L'optimisation du taux de produits financiers:

Nous nous plaçons à une fin d'année notée t . t désigne le numéro de semestre qui est donc pair dans ce cas de figure. Nous considérons en outre un taux de produits financiers $t_{pfi}^i(\text{compt}, t)$ dit comptable. Pour une année donnée, ce taux de produits financiers est relatif d'une part aux plus ou moins values réalisées sur les actifs (à l'exception des obligations à coupons fixes) après les étapes de réallocation et d'autre part aux revenus $R^i(t)$ générés par les actifs (détachement de coupon, dividende des actifs risqués, remboursement du nominal des obligations arrivant à échéance et variation de la valeur comptable totale) suite aux étapes d'évolution des investissements.

Nous avons les formules suivantes :

$$t_{pfi}^i(\text{compt}, t) = \frac{R^i(t) + R^i(t-1) + PMVL^i(t) + PMVL^i(t-1) - C_{deriv}}{ASSIETTE^i(t)}$$

- **$R^i(k)$ représente les revenus générés par les actifs le semestre k .**

$$R^i(k) = C_0^i(k) + D^i(k) + N^i(k) + \Delta BV^i(k)$$

Avec $\Delta BV^i(k) = \sum_{j \in \{\text{ensemble des actifs}\}} BV_j^i(k) - BV_j^i(k-1, \text{après réalloc ou optim})$

Rappels :

$C_0^i(k)$ correspond aux coupons qui arrivent à maturité le semestre k

$D^i(k)$ sont les dividendes versées le semestre k par les actifs risqués

$$D^i(k) = \sum_{j \in \{\text{ensemble des actifs risqués}\}} MV_j^i(k-1) * t_{divid}^{i,j}(k)$$

Où $MV_j^i(k-1)$ est la valeur de marché de l'actif j après l'étape d'évolution des investissements du semestre $k-1$.

$N^i(k)$ représente le remboursement du nominal de l'ensemble des obligations qui arrivent à maturité.

$BV_j^i(k)$ est la valeur comptable de l'actif j après l'étape d'évolution des investissements du semestre k .

- **$PMVR^i(k, \text{après réalloc})$ représente les plus ou moins values réalisées sur la vente des actifs (à l'exception des obligations à coupons fixe) après le rééquilibrage des investissements du semestre j**

$$PMVR^i(k, \text{après réalloc}) = PMVL^i(k, \text{après réalloc}) - PMVL^i(k)$$

$PMVL^i(k)$ est le montant de plus ou moins values latentes disponible après l'étape d'évolution des investissements le semestre k.

- C_{deriv} est le prix à payer pour la couverture par les put (voir 1.3 de la partie II)
- $PASSIF^i(t)$ est le montant du passif utilisé pour le calcul des taux de produits financiers.

$$PASSIF^i(t) = ASSIETTE^i(t) + Réserve de capi^i(t)$$

La réserve de capitalisation est une somme d'argent qui est approvisionnée par les plus ou moins values latentes réalisées sur les obligations à coupon fixe. L'assiette quant à elle est constituée de la moyenne des Provisions mathématiques sur les deux semestres, sans tenir compte d'une revalorisation éventuelle par le TMG(A) en milieu d'année. Contrairement à la réserve de capitalisation, cette valeur ne dépend pas du cours des actifs et donc ne dépend pas du scénario économique considéré.

D'autre part, l'étape d'optimisation se décompose elle-même en deux principales parties : la minimisation de la satisfaction du client et l'optimisation de la marge. Généralement, ces deux étapes ne sont pas toutes les deux effectives la même année.

4.4.1.1 La minimisation de la satisfaction du client:

Nous partons du taux de produits financiers comptable $t_{pfi}^i(compt, t)$ décrit ci-dessus. Nous évaluons par la suite $PB(t_{voulu}(t))$ et $PB\left(t_{pb}\left(t_{pfi}^i(compt, t)\right)\right)$, montants respectifs de participation aux bénéfices calculés d'une part avec le taux voulu et d'autre part avec le taux de participation aux bénéfices découlant du taux de produits financiers comptable. En d'autres termes, pour un semestre pair t (fin d'année) donné, nous désignons par $t_{pb}(x(t))$ le taux de participation aux bénéfices calculé avec un taux de produits financiers $x(t)$ et par $PB(z(t))$ le montant de participation aux bénéfices pour un taux de participation aux bénéfices $z(t)$ quelconque.

Les formules sont les suivantes :

$$PB(t_{voulu}(t)) = ASSIETTE^i(t) * t_{voulu}(t)$$

$$PB\left(t_{pb}\left(t_{pfi}^i(compt, t)\right)\right) = ASSIETTE^i(t) * t_{pb}^i(compt, t)$$

$$\text{Avec } t_{pb}\left(t_{pfi}^i(compt, t)\right) = \max\left\{TMG(A)^i_{[t-1;t]}; tx_redist * t_{pfi}^i(compt, t) - FG\right\}$$

tx_{redist} est la part de produits financiers redistribuée au client et FG sont les frais retenus par l'assureur.

Cette étape n'est effective que lorsque $PB(t_{voulu}(t))$ est inférieur à $PB\left(t_{pb}\left(t_{pfi}^i(compt, t)\right)\right)$. Dans ce cas le montant final de participation aux bénéfices à cette étape sera $PB(t_{voulu}(t))$. L'objectif ici étant évidemment de chercher à ne pas sur satisfaire le client : voilà pourquoi nous parlons de minimisation de la satisfaction du client.

Description du processus de calcul :

Lorsque cette étape est effective, il faut réaliser des moins values afin de réduire le taux de produits financier comptable à une valeur $t_{pfi}^i(minim, t)$ qui fera coïncider le taux voulu et le taux de participation aux bénéfices calculé avec cette valeur. L'équation à résoudre est la suivante :

$$t_{pb}(x(t)) = t_{voulu}(t) \quad \text{où } x(t) \text{ est l'inconnue}$$

Soit

$$\max\left\{TMG(A)_{[t-1;t]}^i ; t_{redist} * x(t) - FG\right\} = t_{voulu}(t)$$

Soit encore :

$$\frac{\left|TMG(A)_{[t-1;t]}^i - t_{redist} * x(t) + FG\right| + TMG(A)_{[t-1;t]}^i + t_{redist} * x(t) - FG}{2} = t_{voulu}(t)$$

Cette équation ne peut pas se résoudre par voie analytique pure. Nous pouvons, pour la résoudre utiliser une méthode indirecte, donc par itérative. Une méthode que nous pouvons aisément mettre en œuvre est la méthode de NEWTON RAPHSON. Nous partons naturellement d'une valeur initiale

$$x_0(t) = t_{pfi}^i(compt, t)$$

Puis nous déroulons l'algorithme de NEWTON qui est décrit ci après :

Rappels sur la méthode de NEWTON RAPHSON :

La méthode de Newton est une méthode itérative de résolution d'équation. Cette méthode est dite itérative car, à défaut de calculer une valeur exacte de la solution d'une équation, on calcule une valeur approchée en procédant à des itérations.

Concrètement, nous partons d'une équation du style $f(x) = 0$

Nous considérons une valeur x_0 initiale. Ensuite, nous définissons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

x_n est le point d'intersection de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_{n-1} .

Ceci donne alors l'équation de récurrence suivante :

$$f'(x_{n-1}) * (x_n - x_{n-1}) + f(x_{n-1}) = 0$$

Et

donc

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (1)$$

Lorsque cette suite converge sa limite l vérifie $f(l) = 0$, à condition que la fonction f soit continue.

En effet, si f est continue et que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, en passant à la limite dans l'équation (1), nous obtenons :

$$l = -\frac{f(l)}{f'(l)} + l$$

i.e

$$-\frac{f(l)}{f'(l)} = 0$$

et

donc

$$f(l) = 0$$

Ainsi, la limite lorsqu'elle existe de la suite définie par (1), est solution du problème (*) dès que la fonction f est continue.

Le seul problème est lié au calcul de la valeur de $f'(x_{n-1})$; généralement la dérivée de la fonction f' n'est pas explicitement calculable. Il faut alors à ce moment là chercher à l'estimer.

On choisit une valeur très petite δ et on estime la dérivée en x_{n-1} par un développement limité d'ordre 1 :

$$f'(x_{n-1}) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-1} - \delta)}{\delta}$$

Il faut noter qu'à ce niveau nous estimons la dérivée à gauche car dans notre cas (voir plus bas point sur l'analogie à notre cas) la solution x est inférieure à x_0 .

Et ainsi l'équation (1) devient :

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) * \delta}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-1} - \delta)}$$

Ainsi le nième itéré peut être calculé. D'autre part, le critère d'arrêt des itérations peut être soit un nombre maximal d'itérations (on arrête après 1 itération par exemple), soit à une distance minimale entre les deux dernières itérations (on peut aussi choisir d'arrêter les itérations lorsque par exemple

$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-7}$). Le choix du critère puis du nombre d'itérations ou de la distance minimale entre deux itérés dépendent de la nature de la fonction puisque le poids en terme de temps de calcul est déterminé par la vitesse de convergence que nous pouvons mesurer à chaque étape en termes de distance entre deux itérés consécutifs:

$$|x_n - x_{n-1}| = \left| \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right| \approx \left| \frac{f(x_{n-1}) * \delta}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-1} - \delta)} \right|$$

ANALOGIE A NOTRE CAS :

Ici, nous avons

$$f(x(t)) = \max \left\{ TMG(A)_{[t-1;t]}^i ; t_{redist} * x(t) - FG \right\} - t_{voulu}(t)$$

Ou encore

$$f(x(t)) = \frac{|TMG(A)_{[t-1;t]}^i - t_{redist} * x(t) + FG| + TMG(A)_{[t-1;t]}^i + t_{redist} * x(t) - FG}{2} - t_{voulu}(t)$$

Nous initialisons la suite à

$$x_0(t) = t_{phi}^i(\text{compt}, t)$$

Il ne reste plus qu'à choisir un critère d'arrêt des itérations (nombre d'itérations ou distance minimale entre deux itérés consécutifs) puis nous appliquons donc l'algorithme qui consiste à calculer l'itéré numéro n avec la formule :

$$x_n(t) = x_{n-1}(t) - \frac{f(x_{n-1}(t)) * \delta}{f(x_{n-1}(t)) - f(x_{n-1}(t) - \delta)}$$

Il faut également décider de la valeur de δ .

Pour rappel cette étape n'est effective que lorsque $t_{pb}(t_{pfi}^i(compt, t)) = t_{pb}(x_0(t)) > t_{voulu}(t)$,

C'est-à-dire que dans ce cas, puisque $x \mapsto t_{pb}(x)$ est croissante (voir la définition de la fonction t_{pb} au début de la section 4.1.1), la solution $x(t)$ de l'équation

$f(x(t)) = t_{pb}(x(t)) - t_{voulu}(t) = 0$ est nécessairement plus petite que $x_0(t)$, ce qui justifie dans notre cas l'usage de l'approximation de la dérivée à gauche de f dans la partie rappels de la méthode de NEWTON.

Nous avons in fine un nouveau taux $t_{pfi}^i(minim, t)$ de produits financiers grâce à l'algorithme de NEWTON. Pour réaliser ce taux de produits financiers, il faudra par la suite réaliser les moins values nécessaires (dans la limite du possible). Le taux de produits financier effectivement réalisé à cette étape vaut :

$$t_{pfi}^i(t, \text{après min. satis. client}) = \max\{t_{pfi}^i \min(t); t_{pfi}^i(minim, t)\}$$

$t_{pfi}^i \min(t)$ est le taux minimal de produits financiers réalisable, il est donc impossible d'avoir un taux de produits financiers en deçà de cette valeur (le calcul de ce taux sera détaillé dans la suite).

Lorsque cette étape n'est pas effective, nous avons tout simplement $t_{pfi}^i(minim, t) = t_{pfi}^i(compt, t)$.

4.4.1.2 L'optimisation de la marge pour les produits financiers:

Nous optimisons le taux de produits financier de manière à ce que la marge à la fin de cette étape soit au moins égale à la marge cible $Ma(t_{cible})$ de l'entreprise. Lorsque la marge initiale calculée avec le taux de produits financiers $Ma(t_{pb}(t_{pfi}^i(minim, t)))$ est au dessus de la valeur cible, nous ne chercherons pas à modifier le taux de produits financiers $t_{pfi}^i(minim, t)$ de l'étape précédente et l'optimisation de la marge n'est pas effective.

Nous avons les formules suivantes :

$$\begin{aligned} Ma(t_{pb}(t_{pfi}^i(minim, t))) &= t_{pfi}^i(minim, t) * ASSIETTE(t) - t_{pb}(t_{pfi}^i(minim, t)) * ASSIETTE^i(t) \\ &= ASSIETTE^i(t) * (t_{pfi}^i(minim, t) - t_{pb}(t_{pfi}^i(minim, t))) \\ &= \min\{t_{pfi}^i(minim, t) - TMG(A)_{[t-1; t]}^i; t_{pfi}^i(minim, t) * (1 - t_{redist}) + FG\} * ASSIETTE^i(t) \end{aligned}$$

Nous avons aussi :

$$Ma(t_{cible}) = ASSIETTE^i(t) * t_{cible}$$

Ici aussi, nous avons recours à l'algorithme de NEWTON lorsque $Ma(t_{cible}) > Ma\left(t_{pb}\left(t_{pfi}^i(minim, t)\right)\right)$

Nous résolvons dans ce cas l'équation d'inconnue $x(t)$: $Ma\left(t_{pb}(x(t))\right) = Ma(t_{cible})$

Soit $\min\left\{x(t) - TMG(A)_{[t-1;t]}^i; x(t) * (1 - t_{redist}) + FG\right\} - t_{cible} = 0$

L'objectif est de trouver un taux de produits financiers qui permette d'atteindre notre marge cible.

La fonction considérée est cette fois ci :

$$f(x(t)) = \min\left\{x(t) - TMG(A)_{[t-1;t]}^i; x(t) * (1 - t_{redist}) + FG\right\} - t_{cible}$$

Nous initialisons ensuite notre suite d'itérés à

$$x_0(t) = t_{pfi}^i(minim, t)$$

Et les termes suivants sont calculés par la formule :

$$x_n(t) = x_{n-1}(t) - \frac{f(x_{n-1}(t)) * \delta}{f(x_{n-1}(t) + \delta) - f(x_{n-1}(t))}$$

Contrairement à l'étape précédente, nous utilisons l'estimation de la dérivée à droite car la solution $x(t)$ de l'équation $f(x(t)) = 0$ est supérieure à la valeur initiale : $x_0(t) = t_{pfi}^i(t, \text{après mini. satis. client})$.

A la fin de l'algorithme, nous avons donc un taux de produits financiers $t_{pfi}^i(maxim, t)$. Il faut, lorsque cette étape est active, réaliser des plus values (toujours dans la limite du possible) pour atteindre le taux de produits financiers optimal dont l'expression est la suivante :

$$t_{pfi}^i(t, opt) = \min\{t_{pfi}^i_{max}(t); t_{pfi}^i(maxim, t)\}$$

$t_{pfi}^i_{max}(t)$ est le taux maximal de produits financiers réalisable, son calcul sera détaillé dans la suite.

Le taux optimal après cette étape est $t_{pfi}^i(\text{après marge}, t)$ que nous noterons par la suite $t_{pfi}^i(t)$ pour simplifier. Ce dernier taux est celui qui sera pris en compte pour l'étape suivante : l'optimisation du RAN.

4.4.1.3 Point sur la réalisation de plus ou moins values pour l'optimisation du taux de produits financier :

Nous calculons tout d'abord un montant de plus ou moins value à réaliser. Ce montant $PMVR^i$ est calculé comme suit, après les deux étapes précédentes (dont l'une seule est effective à la fois d'une manière générale).

$$PMVR^i(t) = ASSIETTE^i(t) * \left(t_{pfi}^i(t) - t_{pfi}^i(compt, t)\right)$$

Soient $R_{max}^i(t)$ et $R_{min}^i(t)$ les montants respectifs de plus value latente et de moins values latentes disponibles auprès des actifs (à l'exception des obligations à coupons fixes) après l'étape de réallocation. Ces grandeurs permettent de calculer le taux de produits financiers maximal et minimal réalisables, dont il est fait mention dans les parties 4.1.1 et 4.1.2. En effet, nous avons :

$$\begin{cases} t_{pfi\ max}^i(t) = t_{pfi}^i(compt, t) + \frac{R_{max}^i(t)}{ASSIETTE^i(t)} \\ t_{pfi\ min}^i(t) = t_{pfi}^i(compt, t) + \frac{R_{min}^i(t)}{ASSIETTE^i(t)} \end{cases}$$

Si $PMVR^i(t) > 0$ alors on réalise des plus values latentes. Nous calculons un taux de plus values latente $t_{pvr}^i(t) = \min\left\{\frac{PMVR^i(t)}{R_{max}^i(t)} ; 1\right\}$ à réaliser, dans la limite des plus values latentes disponibles. Nous réalisons des plus values sur tous les actifs (à l'exception des actifs à taux fixes évidemment) car le montant de plus values latentes disponible est calculé en supposant que tous ces actifs peuvent être mis à contribution, même si l'une ou l'autre de ces classes d'actif est en moins value voir le détail du calcul de $(R_{max}^i(t))$.

La valeur de marché de ces actifs après cette opération n'est pas impactée. Seule la valeur comptable est impactée.

De même, si $PMVR^i(t) \leq 0$ alors nous réalisons des moins values latentes. Contrairement à la démarche précédente, nous ne réalisons de moins values que sur les actifs qui sont en moins values. Ceci est lié à la méthode de calcul des moins values disponibles $R_{min}^i(t)$ (voir calcul du $R_{min}^i(t)$ un peu plus bas). Le taux de moins values réalisées est $t_{pvr}^i(t) = \min\left\{\frac{PMVR^i(t)}{R_{min}^i(t)} ; 1\right\}$,

toujours dans la limite des moins values disponibles.

4.4.1.3.1 Expression des valeurs de marché et valeur comptables des actifs après cette étape :

La valeur de marché n'évolue pas à ce stade : $MV_j^i(k, après\ optim) = MV_j^i(k, après\ réalloc)$

Nous explicitons par la suite la formule de la valeur de marché.

Cas de la réalisation de plus value (cas où l'étape de la minimisation de la satisfaction du client est effective):

Pour chaque actif j concerné par cette étape (l'ensemble des actifs risqués et les obligations à coupons variables, même si une de ces classes est en moins value) :

$$\begin{aligned}
 PMVL_j^i(k, \text{après optim}) &= PMVL_j^i(k, \text{après réalloc}) - PVR_j^i(k) \\
 &= PMVL_j^i(k, \text{après réalloc}) - t_{pvr}^i(t) * PMVL_j^i(k, \text{après réalloc}) \\
 &= (1 - t_{pvr}^i(t)) * PMVL_j^i(k, \text{après réalloc}) \\
 &= (1 - t_{pvr}^i(t)) * MV_j^i(k, \text{après réalloc}) - (1 - t_{pvr}^i(t)) * BV_j^i(k, \text{après réalloc})
 \end{aligned}$$

Et donc

$$PMVL_j^i(k, \text{après optim}) = (1 - t_{pvr}^i(t)) * MV_j^i(k, \text{après réalloc}) - (1 - t_{pvr}^i(t)) * BV_j^i(k, \text{après réalloc})$$

$$\text{Or } PMVL_j^i(k, \text{après optim}) = MV_j^i(k, \text{après optim}) - BV_j^i(k, \text{après optim})$$

Nous avons donc :

$$MV_j^i(k, \text{après optim}) - BV_j^i(k, \text{après optim}) = (1 - t_{pvr}^i(t)) * MV_j^i(k, \text{après réalloc}) - (1 - t_{pvr}^i(t)) * BV_j^i(k, \text{après réalloc})$$

$$\text{D'autre part, puisque } MV_j^i(k, \text{après optim}) = MV_j^i(k, \text{après réalloc})$$

Alors :

$$-BV_j^i(k, \text{après optim}) = -t_{pvr}^i(t) * MV_j^i(k, \text{après réalloc}) - (1 - t_{pvr}^i(t)) * BV_j^i(k, \text{après réalloc})$$

Et enfin :

$$BV_j^i(k, \text{après optim}) = t_{pvr}^i(t) * MV_j^i(k, \text{après réalloc}) + (1 - t_{pvr}^i(t)) * BV_j^i(k, \text{après réalloc})$$

Nous retombons ainsi sur la formule énoncée dans la partie 2.3.1

Cas de la réalisation de moins value (cas où l'optimisation de la marge est effective):

Par analogie, nous aurons la formule suivante

$$BV_j^i(k, \text{après optim}) = t_{mvr}^i(t) * MV_j^i(k, \text{après réalloc}) + (1 - t_{mvr}^i(t)) * BV_j^i(k, \text{après réalloc})$$

Cette formule est cependant uniquement valable pour les actifs j qui, parmi les actifs risqués et les obligations à coupons variables, sont en moins value.

Pour les actifs j en plus value, la valeur comptable n'est pas impactée :

$$BV_j^i(k, \text{après optim}) = BV_j^i(k, \text{après réalloc})$$

4.4.1.3.2 $R_{max}^i(t)$ et $R_{min}^i(t)$:

Il est possible de réaliser des plus values tant qu'on est en plus value au global en considérant tous les actifs risqués et obligations à coupons variables. Voilà pourquoi, pour réaliser nos plus values, nous utiliserons même des actifs qui seront éventuellement en moins values, l'essentiel étant d'être en plus value au global.

$$R_{max}^i(t) = \left(\sum_{j \in \{\text{actifs risqués; obligations à coupons variables}\}} MV_j^i(t, \text{après réalloc}) - BV_j^i(t, \text{après réalloc}) \right)_+$$

Par contre, le montant de moins values réalisables est calculé en estimant qu'il n'est possible de réaliser des moins values que les actifs qui présentent une moins value, même si au global de tous les actifs on est en moins value. La formule est la suivante :

$$R_{min}^i(t) = \sum_{j \in \{\text{actifs risqués; obligations à coupons variables}\}} \left(MV_j^i(t, \text{après réalloc}) - BV_j^i(t, \text{après réalloc}) \right)_-$$

4.4.2L'optimisation du RAN :

4.4.2.1L'optimisation du RAN affecté ou provision pour participation aux bénéfices (PPB):

Nous tentons de détailler dans cette partie le principe de fonctionnement de cette provision. Il est cependant à noter que cette étape n'est pas active dans le modèle, nous ne provisionnons pas de réserve pour participation aux bénéfices.

La provision pour participation aux bénéfices permet à l'assureur de « lisser » les taux servis à ses clients. En effet, l'assureur est tenu par la loi de reverser une partie minimale de son résultat financier à ses clients (voir section 4.3). Cependant, la loi prévoit que l'assureur dispose de huit années pour distribuer ces droits aux clients. Ainsi, nous pouvons nous constituer une réserve au passif avec une partie de cet argent dû aux assurés, argent dont nous arbitrerons la restitution sur les huit années afin d'harmoniser en quelque sorte nos taux servis d'une année sur l'autre (entre une année fructueuse et une année moins favorable par exemple) : cette réserve d'argent est appelée provision pour participation aux bénéfices.

Cette étape vise donc à piloter la restitution de ces droits d'une part en fonction de leur ancienneté, et d'autre part en fonction de la participation aux bénéfices contractuelle définie par le taux de produits financiers optimal $t_{pfi}^i(t)$ (calculé à l'étape précédente).

Pour le scénario économique i , soit $PPB^i(x, t)$ le montant résiduel à la date t de la participation aux bénéfices provisionnée à la date x (donc d'ancienneté $\frac{t-x}{2}$ années car t et x sont des semestres pairs tombant donc en fin d'année).

Avec la convention $PPB^i(x, t) = 0$ si $x < 0$

Nous en déduisons que $PPB^i(t - 16, t)$ est toujours intégralement distribué le semestre t .

Soit aussi $PPB^i(t)$ la provision totale pour participation aux bénéfices à la date t pour le scénario i après cette étape.

Nous avons $PPB^i(t) = \sum_{x=\frac{t-14}{2}}^t PPB^i(x, t) - PPB^i(t, restitué)$

Nous définissons également la variable $r_{add}(t)$ représentant un pourcentage de l'assiette et qui induit une restitution partielle et éventuelle de la provision pour participation aux bénéfices $PPB^i(t)$. Cette grandeur est donnée en input dans le modèle.

En définitive, le montant de participation aux bénéfices à servir réellement à l'assuré vaut :

$$PB_{\text{à servir}}^i = PB(t_{\text{voulu}}(t)) + r_{add}(t) * ASSIETTE^i(t)$$

$$\text{Ie } PB_{\text{à servir}}^i = (t_{\text{voulu}}(t) + r_{add}(t)) * ASSIETTE^i(t)$$

$t_{\text{voulu}}(t)$ représente le taux voulu utilisé à l'étape de minimisation de la satisfaction du client (voir 4.1.1)

Le montant dont nous disposons à la même date pour servir cette participation aux bénéfices est :

$$PB_{\text{disponible}}^i(t) = PB\left(t_{pb}\left(t_{pfi}^i(t)\right)\right) + PPB^i(t - 16, t)$$

En d'autres termes, la participation aux bénéfices disponible est la somme de la provision pour participation aux bénéfices vieille de huit ans et de la participation aux bénéfices contractuelle définie par notre taux optimal de produits financiers.

$$\text{Ie } PB_{\text{disponible}}^i(t) = PB\left(\max\left\{TMG(A)_{[t-1;t]}^i; tx_redist * t_{pfi}^i(compt, t) - FG\right\}\right) + PPB^i(t - 16, t)$$

Ou encore

$$PB_{\text{disponible}}^i(t) = \max\left\{TMG(A)_{[t-1;t]}^i; tx_redist * t_{pfi}^i(compt, t) - FG\right\} * ASSIETTE^i(t) + PPB^i(t - 16, t)$$

Ce montant disponible peut alors être supérieur ou inférieur à la participation aux bénéfices à servir.

CAS 1 : $PB_{à\ servir}(t) < PB_{disponible}(t)$

Dans ce cas le montant disponible est plus que suffisant pour assurer la participation aux bénéfices à servir, il n'y a donc pas de restitution partielle de la provision pour participation aux bénéfices $PPB^i(t)$ constituée des provisions d'anciennetés inférieures à huit années.

Nous avons donc $PPB^i(t, restitué) = 0$ et donc

$$PPB^i(t) = \sum_{x=\frac{t-14}{2}}^t PPB^i(x, t) = PPB^i(t-1) - PPB^i(t-16, t)$$

Nous ne servons jamais plus que $PB_{à\ servir}(t)$. Nous enregistrons donc à cette date une nouvelle provision pour participation aux bénéfices qui est constituée de la différence entre les montants « disponible » et « à servir » :

$$PPB^i(t, t) = PB_{disponible}(t) - PB_{à\ servir}(t)$$

D'autre part, la participation aux bénéfices servie se décompose de la manière suivante :

$$PB_{servie}(t) = PB_{à\ servir}(t) = PB\left(t_{pb}\left(t_{pfi}^i(t)\right)\right) + PPB^i(t-16, t) - PPB^i(t, t)$$

CAS 2 : $PB_{à\ servir}(t) \geq PB_{disponible}(t)$

Dans ce cas le montant disponible n'est plus suffisant pour assurer la participation aux bénéfices à servir, il y a donc une restitution partielle ou totale de la provision pour participation aux bénéfices $PPB^i(t)$ constituée des provisions d'anciennetés inférieures à huit années.

Aucune nouvelle provision pour participation aux bénéfices n'est donc enregistrée à cette date. Nous avons donc $PPB^i(t, restitué) = \min\{PPB^i(t); PB_{à\ servir}(t) - PB_{disponible}(t)\}$ et donc

$$PPB^i(t) = PPB^i(t-1) - PPB^i(t-16, t) - \min\{PPB^i(t); PB_{à\ servir}(t) - PB_{disponible}(t)\}$$

Pour ce cas, la restitution se fait en commençant prioritairement par les participations aux bénéfices d'anciennetés plus élevées. C'est-à-dire qu'on commence par restituer $PPB^i(t-14, t)$, puis $PPB^i(t-12, t)$ etc jusqu'à atteindre le montant $PPB^i(t, consommé)$.

4.4.2.2 L'optimisation du RAN libre:

Le RAN libre est alimenté par les plus values réalisées sur les actifs risqués. Il est également alimenté par la croissance des réserves de capital relatives aux produits financiers et au renoncement d'une partie de la marge réalisée par l'entreprise. Ce RAN peut être utilisé d'une part pour financer le TMGA lorsque celui-ci est trop important, d'autre part afin d'augmenter la satisfaction du client lorsque cela s'avère nécessaire.

4.4.2.2.1 Le financement du coût du TMGA :

Cette étape est active lorsque le TMGA est supérieur au taux prévu par les conditions générales.

Soient $t_{cg}^i(t)$ le taux des conditions générales et $TMGA^i([t-1; t])$ le taux du TMGA calculés au semestre t et pour le scénario i.

$$t_{cg}^i(t) = tx_{redist} * t_{pfi}^i(compt, t) - FG$$

$$TMGA^i([t-1; t]) = X * \frac{t_{pb}(t_{pfi}^i(t-4)) + t_{pb}(t_{pfi}^i(t-2))}{2}$$

avec $X \in [0; 1]$ donné en input

Ainsi, le coût éventuel du TMGA $C_{TMGA}^i(t)$ est défini par :

$$C_{TMGA}^i(t) = ASSIETTE^i(t) * (C_{TMGA}^i(t) - t_{cg}^i(t))_+$$

Le RAN libre est donc consommé dans la limite du montant disponible, de manière à assurer ce coût

$$RAN_{libre}^i(t, consommé pour TMGA) = \min\{C_{TMGA}^i(t); RAN_{libre}^i(t)\}$$

Où $RAN_{libre}^i(t)$ est le RAN disponible à la date t au début de cette étape

Et donc $RAN_{libre}^i(t, après TMGA) = RAN_{libre}^i(t) - RAN_{libre}^i(t, consommé pour TMGA)$

4.4.2.2.2L'augmentation de la satisfaction du client :

Ceci concerne le cas où le taux voulu est supérieur au taux de participation aux bénéfices prévu par le taux de produits financiers optimal.

L'écart généré en termes de montant de participation aux bénéfices est le suivant :

$$C_{satis.client}^i(t) = ASSIETTE^i(t) * \left(t_{voulu}(t) - t_{pb} \left(t_{pfi}^i(t) \right) \right)_+$$

Avec
$$t_{pb} \left(t_{pfi}^i(t) \right) = \max \left\{ TMG(A)^i_{[t-1;t]} ; tx_{redist} * t_{pfi}^i(compt, t) - FG \right\}$$

Cet écart est comblé par le RAN disponible après TMGA, dans la limite du possible :

$$RAN_{libre}^i(t, consommé pour satis. client) = \min \{ C_{satis.client}^i(t); RAN_{libre}^i(t, après TMGA) \}$$

Où $RAN_{libre}^i(t, après TMGA)$ est le RAN disponible à la date t au début de cette étape

Et donc
$$RAN_{libre}^i(t, après satis. client) = RAN_{libre}^i(t, après TMGA) - RAN_{libre}^i(t, consommé pour satis. client)$$

4.4.2.2.3L'optimisation de la marge pour le RAN libre :

4.4.2.2.3.1La contrainte réglementaire du B26 :

Cette partie vise à respecter une contrainte réglementaire qui prévoit que la marge de l'assureur ne peut pas excéder un certain montant.

Article 331-4 :

« [...] Le compte de participation comporte également en dépenses la participation de l'assureur aux bénéfices de la gestion technique, qui est constituée par le montant le plus élevé entre 10% du solde créditeur des éléments précédents et 4,5% des primes annuelles correspondant aux opérations [...] Il est ajouté en recette de ce compte de participation aux résultats une part des produits financiers. Cette part est égale à 85% du solde d'un compte financier [...] »

En effet, ce montant part du principe que l'assureur doit reverser au moins 85 % des produits financiers optimaux. Cette contrainte prévoit cependant que l'assureur puisse se prélever des frais dans une certaine limite. La marge maximale ainsi définie est la suivante :

$$Ma_{max}^i(t) = ASSIETTE^i(t) * (15\% * t_{pfi}^i(t) + r)$$

r est donné en input dans le modèle.

Cette contrainte est définie par produit et lorsque la marge avant cette étape (la marge atteinte après optimisation des produits financiers) est supérieure à ce plafond, l'excédent est mis dans le RAN. Cet excédent $E^i(t)$ vaut donc :

$$E^i(t) = \left[Ma_{max}^i(t) - Ma\left(t_{pb}\left(t_{pfi}^i(t)\right)\right) \right]_+$$

$$RAN_{libre}^i(t, \text{après B26}) = RAN_{libre}^i(t, \text{après satis. client}) + E^i(t)$$

Et la marge finale :

$$Ma(t, \text{après B26}) = Ma_{max}^i(t)$$

4.2.2.3.2 Le renoncement final de marge:

Une fois cette marge atteinte, l'entreprise peut encore renoncer à une partie de sa marge lorsque celle-ci est supérieure à un certain seuil S en pourcentage de l'assiette, et dépendant de du segment financier. Nous avons ainsi :

$$RAN_{libre}^i(t, final) = RAN_{libre}^i(t, \text{après B26}) + \left(Ma(t, \text{après B26}) - S * ASSIETTE(t) \right)_+$$

$$Ma(t, final) = S * ASSIETTE^i(t)$$

DEUXIEME PARTIE

PARTICIPATION A L'AMELIORATION DU MODELE.

Chapitre I : INTERPOLATION DES ZEROS COUPONS

L'une des premières personnes à s'être intéressée à la problématique d'interpolation fut LAGRANGE au XVIIIe siècle. Pendant une certaine période, les études étaient motivées par un but purement scientifique. Pour observer les applications de ces techniques dans un contexte moins théorique, il a fallu attendre la révolution industrielle du XIXe siècle. En effet, à cette époque, les pièces des machines étaient dessinées à la main. Ces méthodes manuelles reposaient sur la déformation des lames de métal et des ressorts. Plus tard, avec l'apparition des machines à commandes numériques, il est apparu nécessaire de pouvoir exprimer mathématiquement ces courbes de manière à ce qu'elles puissent être utilisées par les logiciels depuis la phase de conception jusqu'à la réalisation.

Aujourd'hui, les techniques d'interpolation ont énormément évolué. Elles permettent d'ajuster les mesures d'une manière beaucoup plus fine qu'auparavant et présentent des applications dans de nombreux domaines. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons à l'application de certaines de ces méthodes pour l'estimation à mi année du prix des zéros coupons, instruments financiers indispensables à la gestion actif passif, car ils permettent entre autre l'actualisation des échéanciers de flux futurs, notamment la valorisation des actifs en probabilité risque neutre.

1.1 L'interpolation linéaire :

1.1.1 Présentation générale :

L'interpolation linéaire est une méthode assez simple à mettre en place. La valeur interpolée est une moyenne des ses deux valeurs voisines. Cette méthode est utilisée dans le modèle pour calculer les zéros-coupons de milieu d'année selon la formule suivante :

$$ZC(x, n + 0.5) = \frac{ZC(x, n+1) + ZC(x, n)}{2}$$

Où $ZC(x, y)$ représente le prix du zéro coupon acheté à la date x et ayant pour maturité y années.

1.1.2 Inconvénient de cette méthode :

Cette méthode présente cependant un inconvénient : elle n'est pas assez régulière et peut donc engendrer des erreurs sur la valorisation des actifs de notre portefeuille lors de la projection.

En effet, cette méthode ne peut présenter des résultats acceptables que dans le cas où nos points de référence (les entiers n) sont très proches les uns des autres : ce qui n'est pas le cas.

Dès lors, il paraît nécessaire de réfléchir à la mise en place d'une autre méthode d'interpolation.

1.2 Le développement de Taylor d'ordre 3 :

Dans cette partie nous nous employons à trouver une méthode d'interpolation qui soit plus régulière que la précédente. Nous optons pour un développement de Taylor d'ordre 3 qui est d'ailleurs une généralisation de l'interpolation linéaire puisque cette dernière résulte d'une double utilisation du développement de Taylor d'ordre 1. Cette méthode s'apparente à celles des B-splines et des polynômes de BEZIER mais présente des différences (qui ne seront pas abordées dans ce document) notamment en ce qui concerne les techniques d'approximation des dérivées.

1.2.1 Formalisation des approximations :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

Une fonction telle que $y \mapsto f(x, y)$ soit au moins C^3 sur $\mathbb{R}$. En appliquant le développement de Taylor¹ d'ordre 3 à $y \mapsto f(x, y)$ au voisinage de n avec $h=0.5$ on obtient :

$$f(x, n + 0.5) = f(x, n) + \frac{0.5}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{0.5^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{0.5^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) + o(0.5^3)$$

Définition 1.2.1.1 :

Soit $\equiv$ la relation définie par $x \equiv y$ si $x = y + o(0.5^3)$

La formule de Taylor ci-dessus peut alors se réécrire :

$$f(x, n + 0.5) \equiv f(x, n) + \frac{0.5}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{0.5^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{0.5^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) \quad (1)$$

¹Les formules générales du développement de TAYLOR sont présentées en annexes

Propriété 1.2.1.1 :

Le symbole $\equiv$ est une égalité modulo $o(0.5^3)$; comme l'égalité classique, cette relation est une relation d'équivalence compatible avec la multiplication et la division par un réel, l'addition et la soustraction.

Plus précisément :

$x \equiv x$ réflexivité

$x \equiv y \Leftrightarrow y \equiv x$ symétrie

$x \equiv y$ et $y \equiv z$ implique $x \equiv z$ transitivité

$y \equiv z \Leftrightarrow ky \equiv kz$ pour tout k non nul (l'équivalence devient une implication lorsque k est un réel pas forcément non nul)

D'autre part, $x = y$ implique $x \equiv y$

Cette congruence modulo $o(0.5^3)$ que nous noterons toujours « $\equiv$ » va nous permettre, grâce aux propriétés ci-dessus, de formaliser l'approximation des dérivées partielles.

Définition 1.2.1.2 :

$$\text{Posons } \begin{cases} b(x, n) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, n) \\ c(x, n) = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, n) \\ d(x, n) = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, n) \end{cases}$$

Proposition 1.2.1.1 :

$$f(x, n + 0.5) \equiv f(x, n) + 0.5 * b(x, n) + 0.5^2 * c(x, n) + 0.5^3 * d(x, n)$$

Preuve :

Il suffit de remplacer dans (1) les dérivées partielles par leurs expressions en fonctions de b, c et d ; on obtient alors directement la formule voulue soit :

$$f(x, n + 0.5) \equiv f(x, n) + 0.5 * b(x, n) + 0.5^2 * c(x, n) + 0.5^3 * d(x, n) \quad \text{formule(i)}$$

1.2.1 Approximation des nombres b, c et d :

Réappliquons la formule de Taylor à une fonction générique $y \mapsto f(x, y)$ au moins 3 fois différentiable sur $\mathbb{R}$, au voisinage de n avec $h = 1$:

$$f(x, n + 1) = f(x, n) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) + o(1)$$

Mais $o(1) = o(0.5^3)$

$$\text{et donc } f(x, n + 1) \equiv f(x, n) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) \quad (2)$$

D'une manière analogue, en appliquant la formule de Taylor d'ordre 1 à $y \mapsto f(x, y)$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) \quad (3)$$

Proposition 1.2.2.1 :

$$b(x, n) \equiv f(x, n + 1) - f(x, n) - \frac{1}{3} * [c(x, n + 1) + 2 * c(x, n)]$$

Preuve :

En remplaçant (3) dans (2), nous obtenons :

$$f(x, n + 1) \equiv f(x, n) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1^3}{3!} * \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \right)$$

$$\text{Soit } \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) \equiv f(x, n + 1) - f(x, n) - \frac{1}{6} * \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \right]$$

D'où :

$$b(x, n) \equiv f(x, n + 1) - f(x, n) - \frac{1}{3} * [c(x, n + 1) + 2 * c(x, n)] \quad \text{formule(ii)}$$

Proposition 1.2.2.2 :

$$d(x, n) \equiv c(x, n + 1) - c(x, n)$$

Preuve :

L'égalité (3) donne $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \equiv \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n)$ i.e

$$\frac{1}{6} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \right] \equiv \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n)$$

Et donc :

formule(iii) $d(x, n) \equiv c(x, n + 1) - c(x, n)$

Définition 1.2.2.1 :

Considérons les variables z, μ et α définies comme suit :

$$\begin{cases} z(x, n) = \frac{\alpha(x, n) - z(x, n - 1)}{l(x, n)} \text{ avec } z(x, n) = 0 \\ \mu(x, n) = \frac{1}{l(x, n)} = \frac{1}{4 - \mu(x, n - 1)} \text{ pour } n > 0 \text{ et } \mu(x, 0) = 0 \\ \alpha(x, n) = 3 * [f(x, n + 1) - 2 * f(x, n) + f(x, n - 1)] \text{ pour } n > 1 \end{cases}$$

Proposition 1.2.2.3 :

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) \equiv 0$ alors $c(x, n) \equiv z(x, n) - \mu(x, n) * c(x, n + 1)$ pour tout n entier naturel.

Preuve :

Etape 1 : Démontrons que $\frac{\alpha(x, n)}{l(x, n)} \equiv \frac{1}{l(x, n)} \left[\frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n - 1) \right]$

En effet, d'après la proposition 1,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, n) \equiv f(x, n+1) - f(x, n) - \frac{1}{6} * \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \right]$$

$$\text{C'est-à-dire, } f(x, n+1) - f(x, n) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{1}{6} * \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \right] \quad (4)$$

D'autre part, en appliquant la formule de Taylor d'ordre 1 à $y \mapsto f(x, y)$ au voisinage de n avec $h = -1$ on obtient :

$$f(x, n-1) - f(x, n) \equiv -\frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) - \frac{1^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) \quad (5)$$

On applique cette fois ci la formule de Taylor à la fonction $y \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ toujours au voisinage de n en prenant $h = -1$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) \quad \text{ie} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \quad (6)$$

On remplace (6) dans (5) :

$$f(x, n-1) - f(x, n) \equiv -\frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{1^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) - \frac{1^3}{3!} * \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right]$$

$$f(x, n-1) - f(x, n) \equiv -\frac{\partial f}{\partial y}(x, n) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{6} * \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n-1) \quad (7)$$

En « additionnant » membre à membre (7) à (4) on a

$$f(x, n+1) - 2 * f(x, n) + f(x, n-1) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + \frac{2}{3} * \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) + \frac{1}{6} * \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n-1)$$

$$3 * [f(x, n+1) - 2 * f(x, n) + f(x, n-1)] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, n-1)$$

$$\text{Soit } \alpha(x, n) \equiv \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1)$$

$$\text{Et donc } \frac{\alpha(x, n)}{l(x, n)} \equiv \frac{1}{l(x, n)} \left[\frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right].$$

Etape 2 : Démontrons maintenant par récurrence que :

$$c(x, n) \equiv z(x, n) - \mu(x, n) * c(x, n+1)$$

$$\text{Pour } n=0 : z(x, 0) - \mu(x, 0) * c(x, 1) = 0 - 0 * c(x, 1) = 0 \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) \text{ par hypothèse.}$$

La formule est donc vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'il existe $n > 0$ tel que la formule :

$$c(x, n-1) \equiv z(x, n-1) - \mu(x, n-1) * c(x, n) \text{ soit vérifiée.}$$

En rajoutant à chaque membre le nombre $2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n)$ et en remplaçant c par son expression en fonction de la dérivée seconde on a :

$$2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \equiv z(x, n-1) - \mu(x, n-1) * \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n)$$

$$2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \equiv z(x, n-1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) [4 - \mu(x, n-1)]$$

$$\text{I.e } \frac{1}{4 - \mu(x, n-1)} * \left[-z(x, n-1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right] \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n)$$

On « additionne » membre à membre cette équation et celle démontrée à l'étape 1 pour obtenir :

$$\frac{\alpha(x, n)}{l(x, n)} + \frac{1}{4 - \mu(x, n-1)} * \left[-z(x, n-1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right]$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{l(x, n)} \left[\frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right]$$

$$\left[\frac{\alpha(x, n)}{l(x, n)} - \frac{z(x, n-1)}{4 - \mu(x, n-1)} \right] + \frac{1}{4 - \mu(x, n-1)} * \left[2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right]$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{l(x, n)} \left[\frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right]$$

Or par définition, $\mu(x, n) = \frac{1}{l(x, n)} = \frac{1}{4 - \mu(x, n-1)}$ donc :

$$\left[\frac{\alpha(x, n) - z(x, n-1)}{l(x, n)} \right] + \mu(x, n) * \left[2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right]$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \mu(x, n) \left[\frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1) + 2 * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n-1) \right]$$

$$\left[\frac{\alpha(x, n) - z(x, n-1)}{l(x, n)} \right] \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \mu(x, n) * \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n+1)$$

et puisque l'on a, toujours par définition $z(x, n) = \frac{\alpha(x, n) - z(x, n-1)}{l(x, n)}$ on en déduit

$$z(x, n) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) + \mu(x, n) * \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1)$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n) \equiv z(x, n) - \mu(x, n) * \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, n + 1)$$

Ce qui achève la récurrence et prouve pour tout entier naturel que :

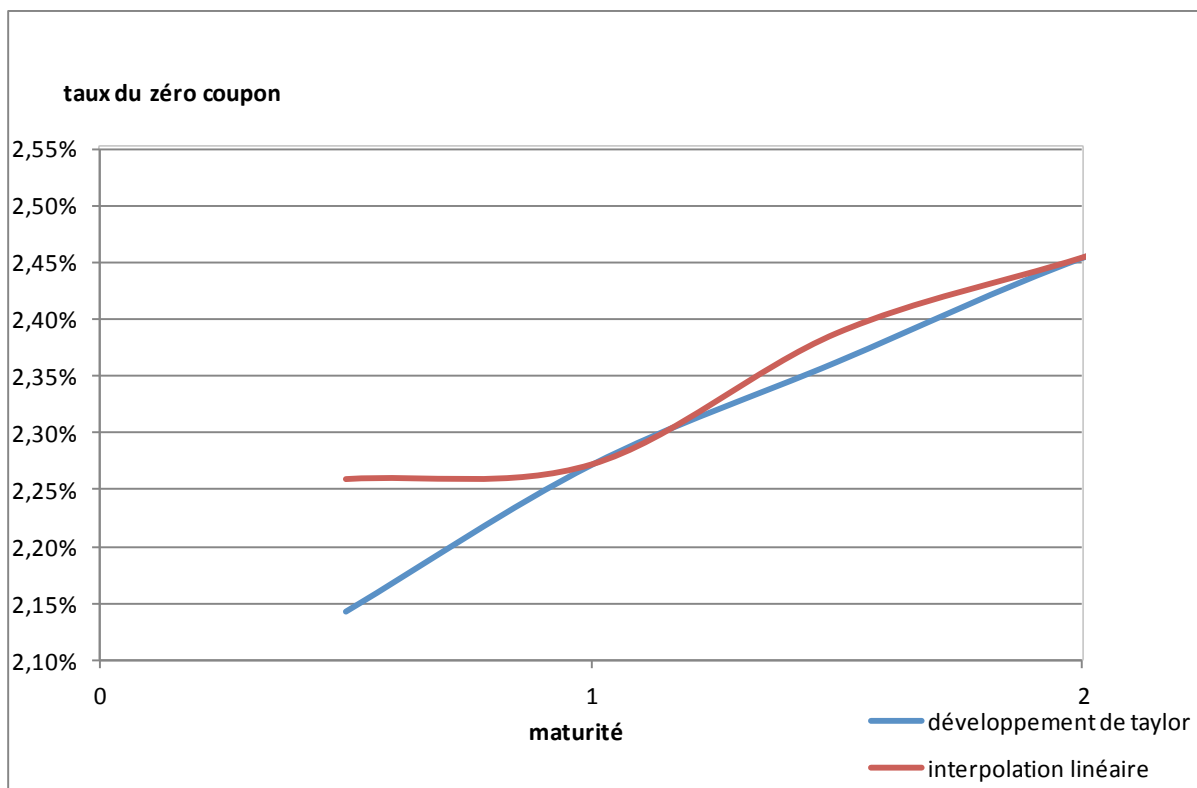
$$\text{formule(iv)} \quad \boxed{c(x, n) \equiv z(x, n) - \mu(x, n) * c(x, n + 1)}$$

1.2.3 Les conséquences de l'intégration de cette technique d'interpolation sur le modèle :

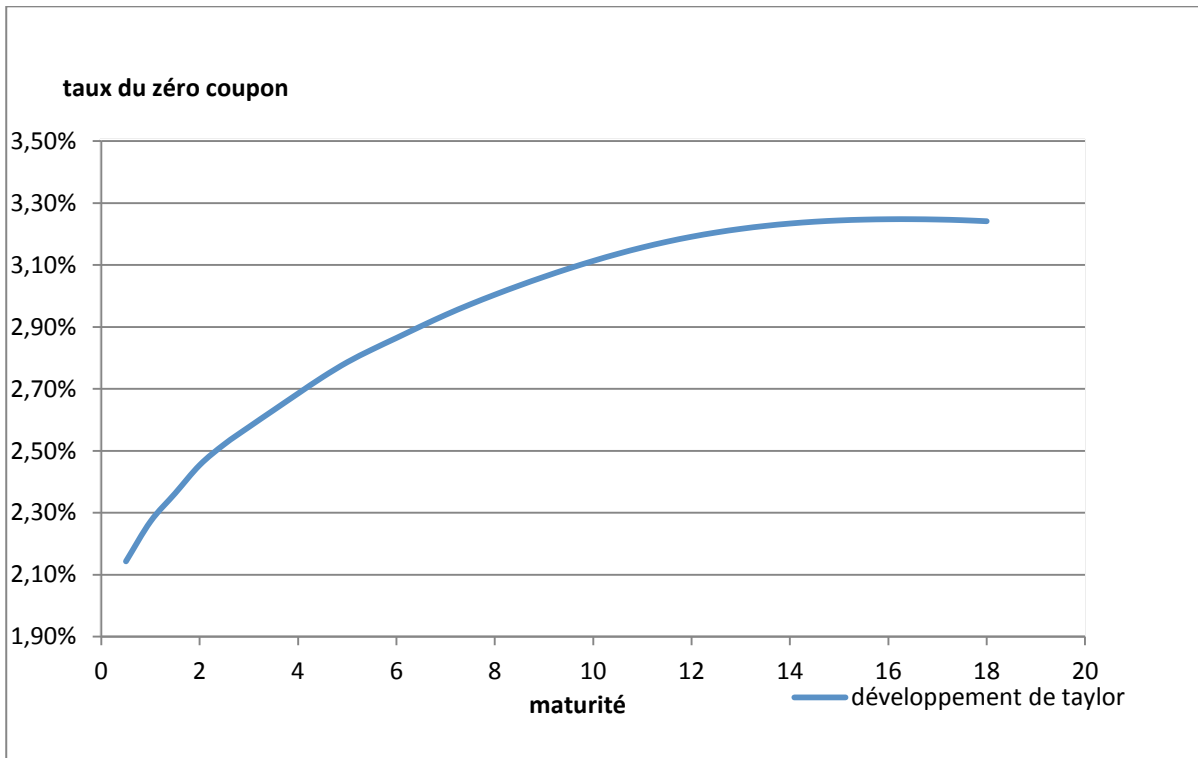
1.2.3.1 Point sur la régularité des courbes obtenues :

Dans le graphique ci-dessous, nous avons effectué un gros plan sur les courbes des taux zéros coupons obtenues suivant les deux méthodes : interpolation linéaire et développement de TAYLOR.

Il apparaît clairement que le développement de TAYLOR donne une allure beaucoup plus correcte et harmonieuse que celle de la « ligne brisée » de l'interpolation linéaire. Entre autres, la courbe obtenue par interpolation linéaire présente une partie constante entre les maturités résiduelles 0.5 et 1 année, alors que les taux sont théoriquement sensés être croissants en fonction de la maturité résiduelle.



Comparaison des courbes zéro coupon obtenues par interpolation linéaire et développement de TAYLOR



Représentation de la courbe zéro coupon obtenue par le développement de TAYLOR sur 18 années

1.2.3.2Durée des simulations :

Cette méthode rend évidemment le modèle légèrement plus lourd. En effet, l'intégration de cette méthode s'est opérée à travers le rajout de huit feuilles de calcul à la cinquantaine qui existait déjà dans le modèle. Les simulations prennent beaucoup plus de temps : à titre d'illustration, le modèle tournait à l'origine pendant 15 heures, en moyenne. Après intégration de cette méthode, la durée moyenne de simulation est passée à 16h20.

1. 2.3.3Point sur le rapprochement avec le modèle officiel :

Côté résultat, l'analyse de certains indicateurs (Marge, VIF et TVOG) a montré une amélioration sur les scénarios sensibles, c'est-à-dire ceux qui présentaient un écart significatif par rapport aux résultats du modèle officiel.

En effet, il y a un rapprochement d'un peu plus de 1% des scénarios stochastiques puisque la classe des meilleurs scénarios (ceux qui, sur les indicateurs précités présentent un écart inférieur à 5% par rapport au modèle officiel) voit son effectif augmenter au détriment de la classe[10%; 20%]. Les tableaux suivants illustrent parfaitement la situation.

Situation du modèle avant la mise en place de la nouvelle méthode d'interpolation

	Nombre de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur			Pourcentage de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur		
Classe des écarts relatifs entre le modèle Excel et le modèle officiel	Marge	Coûts	VIF	Marge	Coûts	VIF
[0%; 5%]	285	345	148	71.25%	86.25%	37%
]5%; 10%[	71	51	71	17.75%	12.75%	17.75%
[10%; 20%[	33	4	65	8.25%	1%	16.25%
[20%; +∞[	11	0	116	2.75%	0%	29%

Situation du modèle après la mise en place de la nouvelle méthode d'interpolation

	Nombre de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur			Pourcentage de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur		
Classe des écarts relatifs entre le modèle Excel et le modèle officiel	Marge	Coûts	VIF	Marge	Coûts	VIF
[0%; 5%]	289	343	153	72.25%	85.75%	38.25%
]5%; 10%[	71	50	65	17.75%	12.5%	16.25%
[10%; 20%[	28	6	74	7%	1.5%	18.5%
[20%; +∞[	11	0	107	2.75%	0%	26.75%

1.3 Les splines:

Cette méthode n'a pas été mise en place dans le modèle mais elle mérite d'être abordée puisqu'elle est très répandue dans la littérature. Les splines ont de très nombreuses applications pour l'interpolation de courbes et de surfaces, notamment dans la conception d'images de synthèses, la création de polices de caractères et dans le design des formes des automobiles.

1.3.1 Présentation générale :

Le principe général est le suivant :

On dispose de p points $x_1, \dots, x_p$ (dans notre cas les années, p représente la durée de projection du modèle) et de leurs images $y_1, \dots, y_p$ par la fonction que l'on désire interpoler (ici les prix des zéro coupons). C'est-à-dire que pour tout i :

$$f_i(x_i) = y_i$$

On définit $p-1$ fonctions polynômes par morceaux sur chacun des intervalles $[x_1; x_2], \dots, [x_{p-1}; x_p]$

En d'autres termes, sur le segment $[x_i; x_{i+1}]$ la fonction est approchée par un polynôme f_i :

$$f_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1} * x + \dots + a_{i,n_i} * x^{n_i}$$

La spline est donc la courbe définie par l'ensemble de ces polynômes qui se raccordent les uns aux autres. Comme le montre cette expression, le degré du polynôme dépend de l'intervalle sur lequel nous nous trouvons. Le degré de la spline est le plus grand des degrés des $p-1$ polynômes. La spline est dite uniforme lorsque tous les degrés (c'est-à-dire les n_i) de tous les polynômes sont égaux. Le cas le plus répandu des splines uniformes est la spline cubique que nous étudions par la suite.

1.3.2 Quelques méthodes d'approximation des coefficients de la spline cubique:

Nous sommes donc dans le cas où les f_i s'écrivent :

$$f_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1} * x + a_{i,2} * x^2 + a_{i,3} * x^3$$

Nous présenterons des méthodes qui rendent la spline de classe C^1 . C'est-à-dire une fois dérivable et de dérivées sont continues.

1.3.2.1 Approximations avec tangentes connues:

Cette méthode utilise les valeurs supposées connues des tangentes a_i en chacun des points x_i .

Les coefficients vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} f_i(x_i) = y_i \\ f_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ f'_i(x_i) = a_i \\ f'_i(x_{i+1}) = a_{i+1} \end{cases}$$

En d'autres termes :

$$\begin{cases} a_{i,0} + a_{i,1} * x_i + a_{i,2} * x_i^2 + a_{i,3} * x_i^3 = y_i \\ a_{i,0} + a_{i,1} * x_{i+1} + a_{i,2} * x_{i+1}^2 + a_{i,3} * x_{i+1}^3 = y_{i+1} \\ a_{i,1} + a_{i,2} * x_i + a_{i,3} * x_i^2 = a_i \\ a_{i,1} + a_{i,2} * x_{i+1} + a_{i,3} * x_{i+1}^2 = a_{i+1} \end{cases}$$

Lorsqu'une solution existe, la résolution de ce système donne les paramètres $a_{i,0}$, $b_{i,0}$ et $c_{i,0}$.

1.3.2.2 Approximations avec tangentes inconnues:

Dans ce cas, nous ne connaissons pas les valeurs des a_i . Nous imposons donc l'égalité entre le coefficient directeur a_i des tangentes aux points intérieurs (x_i, y_i) (*i.e pour* $2 \leq i \leq p-1$) et le coefficient directeur de la droite qui relie les points x_i et x_{i+1} . Cela revient donc à l'équation suivante :

$$a_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \text{ pour } 2 \leq i \leq p-1$$

Les pentes a_1 et a_p des points extrêmes quant à eux ne peuvent être définies de cette manière. Généralement, leurs valeurs sont arbitrairement fixées suivant l'orientation et la forme désirée pour la spline cubique.

Une fois tous les coefficients a_i connus, nous reprenons la méthode de l'étape précédente.

1.3.3 Inconvénients de la méthode :

Cette méthode n'est pas toujours applicable car la résolution des différents systèmes ne donne pas toujours une solution. Même lorsqu'il existe une solution, cette solution n'est pas forcément unique, il se pose alors la question du critère du choix de la solution à retenir, puisque chacune de ces solutions donnera une courbe différente. De même, la technique de l'approximation avec tangentes inconnues n'est pas bien définie puisque le choix arbitraire des dérivées aux points extrêmes détermine la nature de la courbe.

Chapitre 2 : TAUX MAXIMAUX DE PRODUITS FINANCIERS

L'étape préalable à la détermination du taux de produits financiers est le calcul d'un taux maximal et minimal de produits financiers. En effet, ces taux correspondent aux possibilités de réalisation de plus values et de moins values de la société suivant l'évolution des actifs sur une année. La méthode utilisée dans la version officielle du modèle diffère quelque peu de celle du modèle Excel. La différence provient essentiellement de la méthode de réalisation des plus values latentes.

2.1 Points théoriques sur les différents modes de réalisation de plus value :

Il existe trois méthodes de réalisation de plus values sur les actifs risqués constituant le portefeuille d'assurance. L'entreprise choisira, pour une simulation donnée, la méthode représentant au mieux son profil de risque. Dans la suite, pour chaque actif i et chaque ligne j de cet actif, nous désignerons par le mot « gain » la plus ou moins value générée sur cette ligne. Ce gain pourra alors être positif ou négatif.

2.1.1 Le profil PRUDENT :

Celui-ci correspond à une prise minimale de risque. Les plus values sont réalisées uniquement lorsque les actifs sont globalement en plus value. En d'autres termes, lorsque la somme des valeurs de marché de toutes les poches d'actifs risqués est supérieure à la somme des valeurs comptables de ces mêmes actifs. Cette méthode est prudente dans la mesure où, même si, à l'intérieur de chaque poche d'actif, certaines lignes présentent des gains positifs (plus values), l'assureur ne servira que sur le surplus réalisé par rapport aux gains négatifs de l'ensemble des lignes et sur l'ensemble des poches.

Nous voyons bien que l'assureur ne s'autorise à prélever que les gains réels sur ses actifs risqués, c'est-à-dire la différence entre les gains positifs et la valeur absolue des gains négatifs.

La formule qui en découle est la suivante :

$$\left(\sum_{i \in \{\text{actifs risqués; obligations à coupons variables}\}} \sum_{j \in \{\text{lignes de l'actif } i\}} MV_j^i - BV_j^i \right)_+$$

2.1.2 Le profil NORMAL :

Cette méthode est plus risquée que la précédente. L'assureur s'autorise à réaliser des plus values au niveau de toutes les poches d'actifs risqués qui le permettent. C'est-à-dire qu'il est possible de réaliser cette fois-ci au sein de chaque poche, tous les surplus dûs aux gains positifs par rapport aux gains négatifs de l'ensemble des lignes. Contrairement à la condition requise par le profil PRUDENT où l'assureur ne pouvait exploiter qu'un seul surplus : celui des gains positifs par rapport aux gains négatifs au niveau de la maille globale (ensemble des lignes et poches d'actifs risqués). La condition de

réalisation de moins values du profil normal est moins forte (donc plus risquée) que celle du profil PRUDENT.

Ci-dessous la formule correspondant aux plus values réalisables suivant le profil normal :

$$\sum_{i \in \{\text{actifs risqués; obligations à coupons variables}\}} \left(\sum_{j \in \{\text{lignes de l'actif } i\}} MV_j^i - BV_j^i \right)_+$$

2.1.3Le profil RISQUE :

Dans ce cas, l'assureur réalise tous les gains positifs, même si ceux-ci ne compensent pas les gains négatifs existant. La formule est la suivante:

$$\sum_{i \in \{\text{actifs risqués; obligations à coupons variables}\}} \sum_{j \in \{\text{lignes de l'actif } i\}} (MV_j^i - BV_j^i)_+$$

L'exemple suivant permet de mieux comprendre comment sont calculées les plus values maximales réalisables suivant les valeurs des actifs :

	Actif1			Actif2			Actif3			
Lignes d'actif	Ligne1	Ligne2	Ligne3	Ligne1	Ligne2	Ligne3	Ligne1	Ligne2	Ligne3	
Valeur de marché	60	105	75	874	526	450	523	689	102	
Valeur comptable	80	98	254	125	410	782	597	854	780	
Gain	-20	7	-179	749	116	-332	-74	-165	-678	<i>Plus values réalisables</i>
Profil prudent	-20+7-179=-192			749+116-332=633			-74-165-678=-917			$\max(-192+533-917; 0)=0$
Profil normal	0			633			0			633
Profil risqué	7			749+116=865			0			865+7=872

2.2 Point sur la modification de la méthode de calcul des plus values dans le modèle:

La méthode du profil PRUDENT est celle qui a été intégrée dans le modèle au cours de ce stage d'une part car elle représentait au mieux le profil de risque de l'entreprise, et d'autre part dans la perspective de la réconciliation avec le modèle officiel, en particulier le rapprochement des taux de produits financiers.

2.2.1 Marge, coûts et VIF :

Les tableaux ci-dessous répartissent les 400 scénarios suivant l'écart des valeurs de ces indicateurs entre le modèle Excel et le modèle officiel, avant et après l'intégration de la nouvelle méthode.

Situation du modèle avant la mise en place de la nouvelle méthode de calcul du maximum de plus values réalisables

Classe des écarts relatifs entre le modèle Excel et le modèle officiel	Nombre de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur			Pourcentage de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur		
	Marge	Coûts	VIF	Marge	Coûts	VIF
[0%; 5%]	285	345	148	71.25%	86.25%	37%
]5%; 10%[	71	51	71	17.75%	12.75%	17.75%
[10%; 20%[	33	4	65	8.25%	1%	16.25%
[20%; +∞[	11	0	116	2.75%	0%	29%

Situation du modèle après la mise en place de la nouvelle méthode de calcul de plus values réalisables

Classe des écarts relatifs entre le modèle Excel et le modèle officiel	Nombre de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur			Pourcentage de scénarios dans chaque classe et chaque indicateur		
	Marge	Coûts	VIF	Marge	Coûts	VIF
[0%; 5%]	285	347	152	71.25%	86.75%	38%
]5%; 10%[	82	47	66	20.50%	11.75%	16.50%
[10%; 20%[	22	6	67	5.50%	1.50%	16.75%
[20%; +∞[	11	0	115	2.75%	0%	28.75%

Par rapport à la dernière version, des changements assez mineurs sont observés, mais positifs dans l'ensemble :

En effet, en ce qui concerne la marge, nous observons une baisse du tiers de la proportion des scénarios présentant un écart compris entre 10% et 20% en faveur d'une augmentation de la classe des [5%; 10%]. Les classes extrêmes([0%; 5%] et [20%; +∞[ne subissent quant à elles aucun mouvement de leurs effectifs.

Sur la VIF, les résultats positifs sont l'augmentation des effectifs de la classe [0%; 5%] et la baisse de ceux de la classe [20%; +∞[. Le résultat le moins satisfaisant est surtout la baisse des effectifs de la classe]5%; 10%[qui passe de 17.75% à 16.50%.

A propos des coûts, les résultats restent assez mitigés car, même si la classe [0%; 5%] gagne en effectif, la classe]5%; 10%[en perd, entre autre, au profit de la classe [10%; 20%[.

2.2.2 Les taux maximaux de produits financiers :

Nous avons également comparé les taux maximaux de produits financiers avant et après cette opération, c'est-à-dire les taux maximaux atteignables après la réalisation éventuelle de plus values en fin d'année. L'analyse révèle que sur 30 années de projection, il y'a un rapprochement des valeurs de ces produits financiers maximaux entre le modèle Excel et le modèle officiel, sur 17 années, soit un pourcentage d'environ 57% du nombre d'années de projection. Les pourcentages de ces rapprochements sont assez satisfaisants, ils varient entre 0.43% et 86% .

2.2.3Durée de projection :

La comparaison des durées de projection, avant et après la modification de la méthode de calcul du maximum de plus values révèle que cette méthode n'augmente que très sensiblement le temps nécessaire aux simulations.

Chapitre 3 : DOUBLEMENT DE LA DUREE DE PROJECTION

Le doublement de la durée de projection a entraîné le changement de la structure des données. Ces nouvelles données étaient incompatibles avec le modèle. En effet, la version Excel 2003 ne comporte qu'au maximum 65 000 lignes environ. Avec la nouvelle de la durée de projection, il aurait fallu 120 000 lignes. La solution adoptée a été de transposer ces données. Ainsi, avec la transposition, il ne fallait que 40 000 lignes. Cependant, le nouveau format des fichiers était dorénavant incompatible avec le modèle : Les formules des feuilles de calcul ne feraient plus référence aux cellules correctes. Mis à part la transposition, d'autres données aussi avaient changé de par leur agencement. Tous ces éléments rendaient inutilisables les nouveaux fichiers. Il a donc fallu créer une macro permettant de charger les nouvelles données dans le modèle. Certaines formules des feuilles de calcul ont aussi dû être modifiées afin de pouvoir s'adapter à ces données. La macro traite les tâches suivantes :

3.1 La conversion des fichiers CSV :

Tous les fichiers stochastiques sont en format CSV et ne peuvent donc être directement introduits dans le modèle pour y être utilisés. La macro convertit l'ensemble de ces fichiers CSV en format Excel : cette opération peut être faite à la main mais l'automatisation de cette tâche permet un gain de temps non négligeable en raison de la taille importante des fichiers stochastiques.

3.2 Le réarrangement des fichiers stochastiques sur les obligations d'Entreprises :

Après avoir été converties en format Excel, certaines données stochastiques ont besoin d'être réarrangées : c'est le cas de certains fichiers stochastiques relatifs aux obligations d'Entreprises. En effet, comme cela est exposé dans la partie 1, le prix de ces obligations dépend de leur note. La note reflète la capacité de remboursement d'un emprunt. Cette capacité, propre à chaque émetteur est définie entre autres par une corrélation avec le marché. Cette corrélation avec le marché sert à définir la variation éventuelle de la note d'un émetteur, et ce sont ces données qui sont réarrangées puisque leur format brut ne permettrait pas un fonctionnement correct à l'intérieur du modèle.

TROISIEME PARTIE

ETUDES SUR LE RISQUE ET LA RENTABILITE DU FONDS EURO.

Chapitre I: CADRE GENERAL

1.1 Le compte de résultat, description et principales composantes :

Le compte de résultat est le moyen de déterminer les gains ou les pertes d'une compagnie au cours d'une année, et donc le dividende distribuable aux actionnaires. Sa structure permet d'isoler plusieurs indicateurs essentiels pour la compréhension de l'entreprise. Il convient donc d'avoir une connaissance minimale de ce compte, et les conséquences des provisionnements effectués. Le compte de résultat se décompose en trois principales parties, qui permettent de calculer le résultat brut avant impôt :

1.1.1 Marge technique comptable :

Elle est liée à la construction actuarielle de la provision mathématique. En effet, d'une manière générale nous avons l'équation ci-dessous :

$$MTC = PM_{ouv} + IT + PB + \Delta ACAV - PREST + Primes - PM_{clô}$$

MTC représente la marge technique comptable

PM_{ouv} et $PM_{clô}$ désignent respectivement les provisions mathématiques d'ouverture (01/01/N) et de clôture (31/12/N+1).

$\Delta ACAV$ est nulle dans notre cas car elle correspond aux ajustements liés à la valorisation des parts en unité de compte qui sont absentes du modèle.

IT et PB correspondent aux intérêts techniques et à la charge de participation aux bénéfices.

La marge technique comptable est donc la rémunération technique de l'assureur, voilà pourquoi ce poste est un produit pour le compte de résultat.

1.1.2 La marge de gestion :

La marge de gestion regroupe tous les frais liés au fonctionnement de la compagnie : frais d'acquisition des contrats, frais d'administration, frais de gestion des sinistres, frais de gestion financière, commissions aux apporteurs.

C'est donc une charge dans le compte de résultat. En théorie, cette charge est complètement financée par la marge technique comptable. Un écart peut cependant s'observer entre les deux marges. La répartition des frais par produit peut alors devenir un outil de pilotage des gains ou pertes techniques liées à cette différence éventuelle de marge.

1.1.3 La Marge financière :

Elle a pour objet de déterminer le résultat de l'assureur en termes de produits financiers : une partie de ces produits financiers sert à financer l'augmentation structurelle des provisions mathématiques liée aux intérêts techniques. Une autre partie sert à financer la participation aux bénéfices, qui est indirectement incorporée dans les PM (charge de PB).

Les produits financiers intégrés dans la marge financière sont les suivants:

- obligations en portefeuille vendues avant terme
- variation des réserves de capital compensant tout ou partie des plus ou moins values obligataires.
- cession d'autres actifs (actions, produits dérivés, immobiliers) et plus ou moins values correspondantes.
- variation des provisions pour dépréciation à caractère durable.

1.1.4 Un exemple simplifié du compte de résultat :

Postes	Produit(+) ou charge(-)	Montant
Primes acquises	+	1 500
Prestations	-	1 300
Intérêts techniques	+	2 500
PB	+	1 000
Variation de PM	-	2 500
<i>Marge technique comptable</i>	<i>+</i>	<i>1500-1300+2500+1000-3000= 700</i>
Produits financiers	+	8 000
Intérêts techniques	-	2 500
Charge de PB	-	1 000
<i>Marge financière</i>	<i>+</i>	<i>8000-2500-1000= 4 500</i>
Frais d'acquisition	-	50
Frais d'administration	-	440
Frais de gestion des sinistres	-	80
Frais de gestion financière	-	90
Commissions	-	50
<i>Marge de gestion</i>	<i>-</i>	<i>710</i>
<i>Résultat brut avant impôt</i>	<i>+</i>	<i>-710+4500+700= 4490</i>

1.1.5 La nécessité de projection du compte de résultats et délimitation du périmètre d'étude :

Les études effectuées dans le cadre de ce mémoire visent à étudier la rentabilité du fonds euro. Il s'avère donc nécessaire de procéder à une estimation des gains futurs susceptibles d'être générés par nos produits. Ces gains ne sont autres que les revenus futurs distribuables aux actionnaires, donc le revenu final net d'impôts calculé à l'issue de la réalisation du compte de résultat. Il convient donc de procéder à une projection du compte de résultat sur un certain horizon. L'ensemble des revenus finaux obtenus pour chacun de ces exercices permettront de mesurer la rentabilité de nos produits. C'est le principe de la VIF qui est un indicateur que nous définirons et étudierons de manière plus précise dans la suite de ce document. Nous procéderons aussi systématiquement à une analyse de la TVOG dont la définition et le mode de calcul, découlant directement de celui de la VIF, sera aussi présenté dans la suite.

L'étude s'orientera à cet effet sur un poste particulier du compte de résultat lors de chacune des projections : la marge financière de l'entreprise. En effet, la marge financière coïncide avec le résultat annuel brut, étant donné que la marge de gestion et la marge technique comptable se compensent en théorie. En outre, celle-ci est le lieu de concentration pour l'assureur des principaux risques techniques et financiers, en particulier ceux liés aux options et garanties. Enfin, cette marge est une bonne mesure de la rentabilité des produits, puisque ce sont les gains qu'elle génère qui permettent de rémunérer les actionnaires.

Chapitre II : MISE EN PLACE DES ETUDES

Cette étude a porté sur trois produits d'assurance vie sur lesquels ont été appliqués divers stress portant sur les garanties offertes au client et la stratégie financière de gestion des sommes versées par le client. L'objectif de cette démarche étant de quantifier les options proposées aux clients afin d'en déduire leur impact sur la rentabilité de nos produits.

2.1Hypothèses générales:

2.1.1Hypothèses sur le passif :

Tout d'abord, il est important de souligner que les produits diffèrent uniquement de par les conditions générales de participation aux bénéfices. En effet, la rémunération de l'assuré est d'une part définie par un taux que nous noterons t_{pb_cg} et qui dépend des produits financiers de l'entreprise. Au final la rémunération réelle de l'assuré est le maximum entre ce taux et le taux minimum garanti (ou garanti annuel)

D'une manière générale :

$$t_{pb_cg} = tx_redist * t_{pfi} - FG \quad \text{avec}$$

t_{pb_cg} désignant le taux de participation aux bénéfices nette de frais de gestion

tx_redist compris entre 0 et 1 représentant la part de produits financiers redistribués aux assurés

FG désigne les frais de gestion prélevés par l'assureur.

Ci-après résumées les valeurs de tx_redist et FG pour chacun des produits :

	tx_redist	FG
<i>Tx-redist100%_FG0,96%</i>	1	0.0096
<i>Tx-redist90%_FG0,96%</i>	0.9	0.0096
<i>Tx-redist90%_FG0,8%</i>	0.9	0.008

Nous considérons un contrat investi à 100% sur le fonds EURO. Pour les besoins de l'étude, un nouveau canton a été créé contenant un seul model point. Les hypothèses des autres coûts liés à notre canton (frais de souscription, frais de gestion sur encours, commissionnement et acquisition) sont une moyenne des coûts des différents produits déjà existant sur un fonds spécifique AXA. Notre nouveau model point est donc une agrégation de model points préexistants.

D'autre part, le TMGA est défini comme étant la moyenne des deux derniers taux servis, il convient donc, à $t=0$, de disposer d'un historique sur un minimum de deux années afin de pouvoir calculer le TMGA de la première année. Nous considérons que les deux derniers taux servis avant le début de la simulation sont de 3.43%. Il en sera donc de même pour le TMGA de la toute première année de la projection.

2.1.2Hypothèses sur l'actif :

En face de ces engagements, les primes des assurés sont investies en actifs risqués (actions, immobilier, OPCVM) et non risqués (obligations d'Etat et d'Entreprise). Nous considérons une répartition à 75% d'actifs risqués et 25% d'actifs non risqués.

La provision mathématique initiale est de 480000 M€. Cette somme est totalement investie dans

les actifs précités. Au début de la projection, la somme des valeurs de marchés de tous les actifs achetés est donc égale à la provision mathématique initiale. Le pourcentage initial de plus ou moins values vaut :

$$\frac{MV_{totale}}{BV_{totale}}=106.64\%$$

D'autre part, les scénarios d'évolution des actifs sont fournis par des services qui disposent d'un générateur interne de scénarios financiers développé par la compagnie. Pour différents états du monde, les paramètres restitués en input pour le modèle sont la courbe des taux sans risque, la courbe des taux utilisée pour les obligations d'Entreprise et les prévisions des taux de rendement de dividende des actifs risqués.

2.2 Les stress sur le passif :

2.2.1 Description des stress :

2.2.1.1 Stress sur le taux minimal

Nous considérons 4 cas selon lesquels l'assureur propose au client les garanties suivantes:

- un taux minimal garanti annuel. Ce taux est égal à 65 % de la moyenne des deux derniers taux de Participation aux bénéfices.
- un TMG à zéro.
- un TMG de 1.5%.
- un TMG de 2%.

Ce dernier taux est purement théorique car l'assureur ne peut offrir plus de 1.75% en termes de TMG, selon l'article A 132 1 du code des assurances:

« Pour l'application de l'article A. 132-1, le taux moyen des emprunts d'Etat sur base semestrielle est déterminé en effectuant la moyenne arithmétique sur les six derniers mois des taux observés sur les marchés primaire et secondaire. Le résultat de la multiplication par 60 % ou 75 % de cette moyenne est dénommé "taux de référence mensuel". Le taux d'intérêt technique maximal applicable aux tarifs est fixé sur une échelle de taux d'origine 0 et de pas de 0,25 point. Il évolue selon la position du taux de référence mensuel par rapport au dernier taux technique maximal en vigueur :- tant que le taux de référence mensuel n'a pas diminué d'au moins 0,1 point ou augmenté d'au moins 0,35 point par rapport au dernier taux technique maximal en vigueur, ce dernier demeure inchangé ;- si le taux de référence mensuel sort des limites précédemment définies, le nouveau taux technique maximal devient le taux immédiatement inférieur au taux de référence mensuel sur l'échelle de pas de 0,25 point. Lorsqu'un nouveau taux d'intérêt technique maximal est applicable, les entreprises disposent de trois mois pour opérer cette modification »

En effet, à fin juin 2012, le TME était de 2,69 %.

Les taux dérivés du TME calculés à partir de l'article A132-1-1 sont les suivants :

- taux d'intérêt par référence à 60 % du TME = 1.75%
- taux d'intérêt par référence à 75% du TME = 2.25%

Le TMG limité à 1.75% et garanti sur toute la durée du contrat, n'est cependant pas à confondre avec le taux maximum promotionnel de l'année 2012 proposé en 2012 qui est de 3.375%.

La méthode annuelle de calcul de ce dernier plafond a été définie par la loi du 1^{er} août 2010 dans l'article A-132-3 du code des assurances :

« Le taux fixe ne peut pas excéder le minimum entre 150% du taux d'intérêt technique maximal défini aux articles A.132-1 et A.132-1-1 du code des assurances par référence à 75% du taux moyen des emprunts d'Etat (TME) à la date d'effet de la garantie, et le plus élevé des deux taux suivants : 120% de ce même taux d'intérêt technique maximal et 110% de la moyenne des taux moyens servis aux assurés lors des deux derniers exercices précédant immédiatement la date d'effet de la garantie ».

Ainsi, $150\% * 2.25\% = 3.375\%$ et nous retrouvons bien le seuil maximal annoncé pour le taux promotionnel.

2.2.1.2 Stress sur le RAN

Le RAN représente une réserve au passif qui sert à rémunérer le TMGA lorsque celui-ci est supérieur aux conditions générales de PB. Il est également utilisé pour augmenter la satisfaction du client. Il est nourri par les plus values réalisées sur les actifs risqués et le renoncement d'AXA à une partie de sa marge.

Pour chaque cas, le RAN est soit fixé à 0 en début de projection, soit nous considérons un RAN initial non nul.

2.2.3. Résultats :

2.2.3.1 La VIF et la TVOG:

La VIF est une mesure de la rentabilité de l'assureur. En effet, ce montant représente la valeur actuelle des gains futurs de l'assureur, déduction faite des coûts nécessaires à son activité et des impôts. Comme précisé plus haut, nous identifierons ces gains futurs à la marge financière. Le terme « marge finale » que nous emploierons assez souvent dans la suite désigne en réalité les marges financières futures (donc les gains futurs) actualisées. Cette grandeur est plus connue sous le nom de PVFP (Present Value Of Future Profits).

La VIF représente donc la richesse future de l'assureur, sur la base des contrats en cours au sein de son portefeuille.

$$VIF = (Marge\ finale - Coûts) * (1 - t_{taxe}) \quad \text{ou encore}$$

$$VIF = (PVFP - Coûts) * (1 - t_{taxe})$$

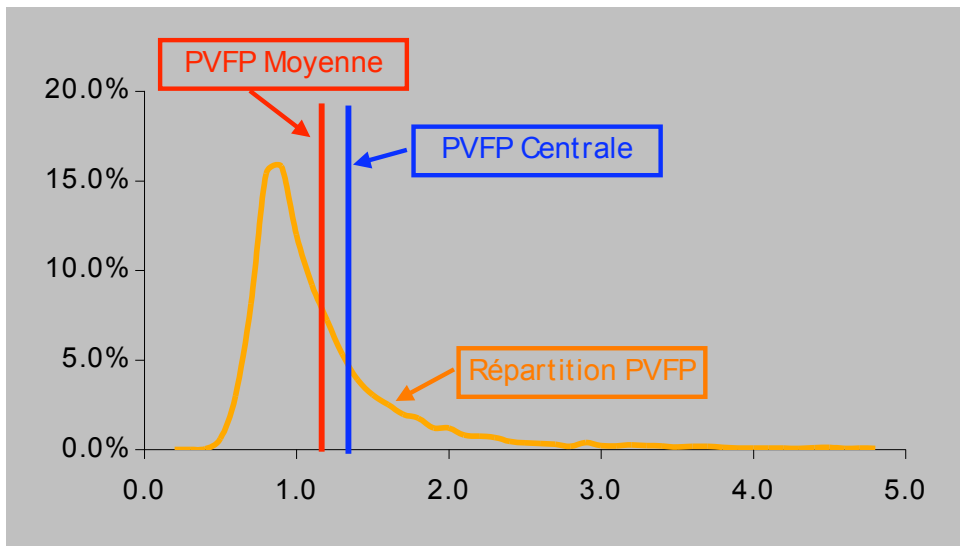
t_{taxe} représente les impôts reversés à l'Etat.

D'autre part, pour chacun des produits et stress précités, les calculs sont effectués sur 401 scénarios économiques correspondant à des différents états financiers du monde. Ainsi, le terme « CENTRAL » se réfère au scénario déterministe et le terme « MOYEN » correspond à une moyenne calculée sur les 400 scénarios stochastiques.

La TVOG (time value of options and guarantees) représente le coût des options et garanties.

En effet, l'existence d'options et garanties non symétriques dans le compte de résultat se traduit par une dissymétrie par rapport à la courbe de distribution de la PVFP. Cette dissymétrie permet de quantifier le coût des options et garanties : la PVFP moyenne (scénario central ou déterministe) est

supérieure à la moyenne (espérance mathématique) de la PVFP. La différence de ces deux grandeurs définit la TVOG.



Le seul problème qui subsiste est la détermination de l'espérance mathématique pour laquelle il serait primordial de connaître la fonction de densité de la PVFP, ce qui n'est malheureusement pas le cas. Pour pallier à cette insuffisance, nous faisons appel à la loi des grands nombres. Nous estimons l'espérance de la PVFP avec la moyenne empirique de nos observations sur plusieurs scénarios (ici 400). Ainsi, la TVOG est finalement estimée par la différence entre la PVFP moyenne du scénario déterministe et la moyenne de la PVFP sur les scénarios stochastiques suivant la formule :

$$TVOG = PVFP_{scenario\ det} - \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} PVFP_{scénario\ sto\ i}$$

D'autre part, la dissymétrie induite par les options et garanties n'affecte pas les coûts qui définissent la VIF (voir formule de la VIF ci-dessus). Au final la TVOG peut donc être calculée comme suit :

$$TVOG = VIF_{scenario\ det} - \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} VIF_{scénario\ sto\ i}$$

Il existe cependant une méthode beaucoup plus fine pour l'estimation de la TVOG, cette méthode est décrite ci après :

La méthode du flexing pour une estimation plus fine de la TVOG :

Le calcul de la TVOG rencontre un problème de temps de calcul et de puissance des processeurs en raison du grand nombre de scénarios nécessaires à une bonne estimation de l'espérance mathématique de la PVFP.

La méthode qui est souvent utilisée est celle du flexing. Elle consiste à sélectionner un groupe de p scénarios représentatifs de la loi de la variable étudiée, ici le résultat futur que nous noterons R_t pour l'année t . Chacun de ces scénarios est extrait de p classes de scénarios préalablement agrégés de manière à ce que chaque classe de scénarios ait la même probabilité de réalisation.

Plus concrètement, supposons que nous disposons de N scénarios d'actifs, c'est-à-dire un ensemble $\Omega = (\omega_l)_{1 \leq l \leq N}$ de N événements élémentaires donc N trajectoires possibles des actifs. Nous procédons tout d'abord à l'agrégation de ces scénarios en p classes. Il existe plusieurs méthodes d'agrégation de scénarios. Une des principales méthodes consiste à les agréger suivant la valeur finale A_T d'un actif à l'issue de la période de projection. Cette agrégation est donc relative au choix d'un actif donné. En effet :

Soit $([r_i; r_{i+1}[)_{1 \leq i \leq p}$ une partition de $\mathbb{R}_+$ en p sous ensembles ($r_1 = 0$ et $r_{p+1} = +\infty$). Les p classes d'agrégation sont identifiées aux ensembles $\Omega_i = \{\omega_l \in \Omega / A_T(\omega_l) \in [r_i; r_{i+1}[)\}$.

Les r_i sont choisis de manière à ce que $P(\Omega_i) = (A_T \in [r_i; r_{i+1}[) = \frac{1}{p} \forall i$. C'est-à-dire que chaque r_i vérifie $\text{Card}(\{l \in \mathbb{N} / A_T(\omega_l) \in [r_i; r_{i+1}[)\}) = \frac{N}{p}$.

Une fois les p classes de scénarios constituées, il faut alors choisir le scénario qui sera extrait pour représenter chaque classe. Il existe, là encore, plusieurs critères de choix de ces scénarios.

On choisit assez souvent d'extraire le scénario qui correspond à la moyenne de chaque classe du point de vue de la valeur de l'actif A . Autrement dit, pour chaque classe i , le scénario retenu valorisera l'actif A de la manière suivante :

$$A_t(\omega_i^*) = E(A_t / A_T \in [r_i; r_{i+1}[)$$

L'unicité de l'espérance conditionnelle garantit l'unicité de ce scénario pour chaque classe Ω_i de scénarios agrégés.

Cette grandeur sera approximée par $\frac{p}{N} \sum_{i=1}^{N/p} A_t(\omega_l) * 1_{\{A_T \in [r_i; r_{i+1}[)\}}$.

Comparaison suivant le taux de produits financiers et le taux de frais :

La PM moyenne figurant dans le tableau suivant est donnée à titre indicatif ; en effet, il s'agit d'une moyenne sur les 400 scénarios, dont l'unique but est de donner une idée du poids de la VIF et de la TVOG par rapport à la provision mathématique du client.

Pour un encours total de 480 000 M€ à la date t=0, les premiers résultats de notre étude sur la VIF et la TVOG sont les suivants :

Produit 1 : 100% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	VIF moyenne	VIF central	TVOG	PM moyenne
NO_RAN_TMGA	865 M€	1035 M€	171 M€	531789 M€
NO_RAN_TMGA_0	1139 M€	1214 M€	74 M€	522674 M€
NO_RAN_TMGA_1,5	650 M€	1213 M€	563 M€	531683 M€
NO_RAN_TMGA_2	1 M€	1114 M€	1113 M€	590389 M€

Produit 2 : 90% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	VIF moyenne	VIF CENTRAL	TVOG	PM moyenne
NO_RAN_TMGA	1893 M€	2073 M€	180 M€	514975 M€
NO_RAN_TMGA_0	2288 M€	2365 M€	76 M€	502021 M€
NO_RAN_TMGA_1,5	1616 M€	2351 M€	734 M€	514940 M€
NO_RAN_TMGA_2	781 M€	1922 M€	1141 M€	529269 M€

Produit 3 : 90% de Pfi redistribué 0,8% de frais				
	VIF moyenne	VIF CENTRAL	TVOG	PM moyenne
NO_RAN_TMGA	1458 M€	1578 M€	120 M€	522157 M€
NO_RAN_TMGA_0	1775 M€	1813 M€	38 M€	512015 M€
NO_RAN_TMGA_1,5	1260 M€	1813 M€	553 M€	521792 M€
NO_RAN_TMGA_2	536 M€	1595 M€	1059 M€	533874 M€

Nous remarquons dans un premier temps que le produit avec TMGA est moins coûteux qu'un TMG fixé à 1.5%. D'autre part, un TMG à 2% fait exploser la TVOG : pour un TMG à 2% et quelque soit le produit, la TVOG représente plus de la moitié de la VIF déterministe et atteint presque les 100% sur le produit 1, réduisant notre moyenne des VIF à un niveau quasiment nul dans ce cas là.

Dans le premier produit, nous distribuons la totalité des produits financiers, ce produit est donc intuitivement plus coûteux que le deuxième sur lequel on réduit (à frais constants) les produits financiers distribués. Cette intuition se justifie par le fait que sa VIF est plus faible. D'un autre côté pourtant, le coût des options et garanties y est assez faible. Cette situation s'explique par le fait que le

risque porté par la volatilité des produits financiers ne se retrouve pas dans le résultat de l'assureur, puisqu'il redistribue entièrement à ce niveau ses produits financiers : voilà pourquoi la TVOG est faible sur le produit 1. D'autre part, au niveau du produit 1, notre marge est fixe alors que dans le deuxième, il y a une partie aléatoire qui dépend des produits financiers. Entre les produits 2 et 3 : le taux servi sur le fonds euro est, en moyenne meilleur sur le produit 3 puisque nous retenons moins de frais, à taux de produits financiers distribués constants. Le produit 3 génère donc moins de rachats conjoncturels et sa TVOG est naturellement plus faible.

Nous constatons en outre que, pour chaque stress, la TVOG du produit 1 est bien plus élevée que celle du produit 3. Ce résultat est moins intuitif : en effet, sur le produit 1 nous redistribuons plus de produits financiers mais retenons plus de frais. Tous ces résultats traduisent le fait que la part de produits financiers redistribuée a un impact moins fort sur le coût des garanties -et à fortiori sur notre rentabilité que nos frais. En effet, la modification des frais, à taux de produits financiers redistribués constants fait beaucoup plus varier notre TVOG que la modification de la part de produits financiers distribués, à frais constants.

A ce stade, nous pouvons donc tirer les conclusions suivantes :

- La TVOG est d'autant plus forte que la part des taux de produits financiers redistribuée est faible.
- Les frais retenus par la société ont un impact beaucoup plus important sur la TVOG que la part de produits financiers distribués, dans le cas de nos stress.
- Le produit 2 (90% de produits financiers redistribués et 0.96% de frais) est plus rentable pour l'assureur que les deux autres du point de vue VIF, mais il faut dans ce cas là être prêt à accepter une volatilité du résultat.
- Avec la comparaison effectuée entre les produits 2 et 3, nous pouvons d'une manière générale, constater qu'un taux de participation aux bénéfices trop élevé peut avoir un impact négatif sur le coût des garanties. A l'inverse, un taux servit trop faible pourra déclencher d'importants rachats conjoncturels. Il faut donc parvenir à arbitrer entre la satisfaction des clients et celle des investisseurs qui diversifient désormais de plus en plus leurs placements au détriment d'un fonds Euro aujourd'hui fragilisé (baisse des rendements, dégradation de la fiscalité...).

En ce qui concerne les stress avec un RAN initial non nul à l'origine les commentaires sont les mêmes car les chiffres varient dans le même sens. Ci-dessous les résultats obtenus :

Produit 1 : 100% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	VIF moyenne	VIF central	TVOG	PM moyenne
RAN_TMGA	1085 M€	1252 M€	166 M€	533871 M€
RAN_TMGA_0	1169 M€	1216 M€	47 M€	529468 M€
RAN_TMGA_1,5	677 M€	1216 M€	539 M€	537021 M€
RAN_TMGA_2	23 M€	1114 M€	1091 M€	546766 M€

Produit 2 : 90% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	VIF moyenne	VIF CENTRAL	TVOG	tx de marge final central
RAN_TMGA	2065 M€	2306 M€	241 M€	515279 M€
RAN_TMGA_0	2348 M€	2420 M€	72 M€	510596 M€
RAN_TMGA_1,5	1665 M€	2401 M€	736 M€	521472 M€
RAN_TMGA_2	815 M€	1951 M€	1136 M€	534400 M€

Produit 1 : 90% de Pfi redistribué 0,08% de frais				
	VIF moyenne	VIF CENTRAL	TVOG	tx de marge final central
RAN_TMGA	1721 M€	1875 M€	154 M€	523704 M€
RAN_TMGA_0	1819 M€	1826 M€	7 M€	519391 M€
RAN_TMGA_1,5	1296 M€	1827 M€	531 M€	527591 M€
RAN_TMGA_2	562 M€	1611 M€	1049 M€	538676 M€

Comparaison selon la richesse initiale : nouveau segment sans RAN ou segment avec RAN

Nous allons maintenant tenter de comparer sur nos produits l'impact de la prise en compte d'un RAN initial. Les observations dans ce cas étant assez similaires d'un produit à l'autre, nous choisissons de nous positionner sur le produit 1 afin d'effectuer cette analyse. D'autre part, les résultats sont cette fois ci présentés sous forme graphique.

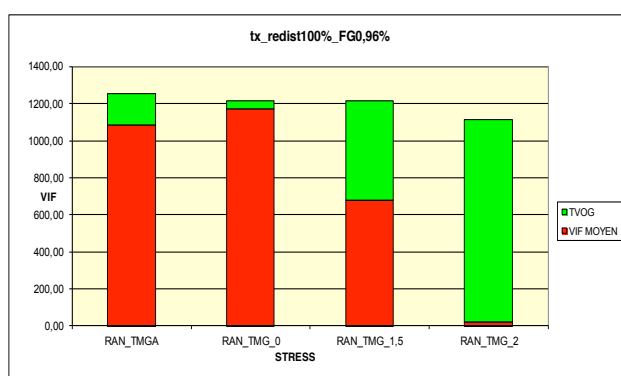
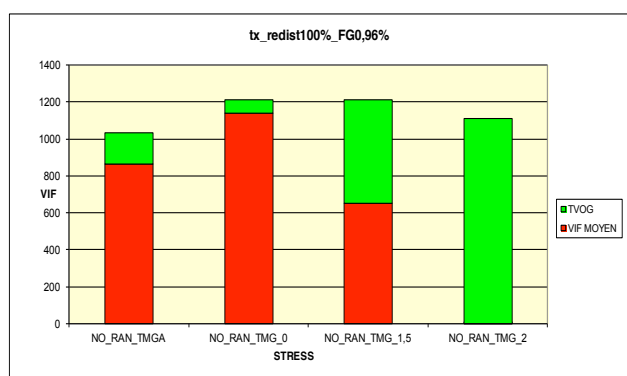


Fig1 et 2. Part de la TVOG sur la VIF déterministe

La figure de droite représente une situation où nous avons du RAN à l'origine, contrairement à la figure de gauche. La tendance générale de la TVOG est la même, avec ou sans RAN initial. Nous remarquons cependant que notre TVOG est sensiblement plus faible sur la figure de droite, stress par stress.

En outre, une autre conséquence qu'a le RAN initial sur notre produit est l'augmentation de la VIF centrale, sur le produit à TMGA. En effet, le RAN couvre en partie le coût du TMGA, ce qui a donc pour effet d'améliorer la marge finale centrale, et donc la VIF correspondante.

Cependant, la VIF des produits à TMG reste constante, ce qui est normal car le RAN ne peut être consommé pour couvrir le coût du TMG.

Enfin, nous pouvons également dire que la tendance observée sur la TVOG est essentiellement dirigée par notre facteur TMG(TMGA) ; ceci se voit bien sur les deux graphiques précédents où le niveau de TVOG le plus faible est lié au produit à TMG 0, cette TVOG est quasiment proportionnelle à la valeur du TMG.

2.2.3.2 Analyse de la valeur actuelle des marges futures :

Maintenant, nous nous intéressons au coût du TMG(TMGA) et au coût du RAN.

Chaque année, la marge initiale est constituée des produits financiers réduits de la participation aux bénéfices sans tenir compte du TMG(A) éventuel dans un premier temps :

$$\text{taux de marge initiale} = \text{taux_pfi_opt} - \max\{0; \text{tx_redist} * \text{taux_pfi_opt} - \text{FG}\}$$

taux_pfi_opt désigne les taux de produits financiers optimums, suite aux opérations d'optimisation de fin d'année.

Cette marge est ensuite réduite du coût du TMG(A) pour rejoindre la marge finale. Le RAN permet quant à lui d'amortir ce coût du TMG(A).

Pour chacun de ces indicateurs, nous calculons une moyenne sur les 400 scénarios économiques considérés. Les résultats sont les suivants :

Tableau 1 : décomposition des marges pour chacun des produits sans RAN initial :

Produit 1 : 100% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	tx de marge initial moyen	coût du tmg(tmga) moyen	ran moyen	tx de marge final moyen
NO_RAN_TMGA	0,95%	0,09%	0,01%	0,87%
NO_RAN_TMGA_0	0,95%	0,00%	0,00%	0,95%
NO_RAN_TMGA_1,5	0,94%	0,12%	0,00%	0,83%
NO_RAN_TMGA_2	0,94%	0,27%	0,00%	0,67%

Produit 2 : 90% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	tx de marge initial moyen	coût du tmg(tmga) moyen	ran moyen	tx de marge final moyen
NO_RAN_TMGA	1,30%	0,14%	0,01%	1,17%
NO_RAN_TMGA_0	1,30%	0,00%	0,00%	1,30%
NO_RAN_TMGA_1,5	1,29%	0,17%	0,00%	1,12%
NO_RAN_TMGA_2	1,29%	0,39%	0,00%	0,90%

Produit 3 : 90% de Pfi redistribué 0,8% de frais				
	tx de marge initial moyen	coût du tmg(tmga) moyen	ran moyen	tx de marge final moyen
NO_RAN_TMGA	1,14%	0,11%	0,01%	1,04%
NO_RAN_TMGA_0	1,15%	0,00%	0,00%	1,15%
NO_RAN_TMGA_1,5	1,14%	0,13%	0,00%	1,01%
NO_RAN_TMGA_2	1,14%	0,31%	0,00%	0,83%

Taux de marge initial :

Dans le cas du produit 1, le taux de marge initial est proche du taux de frais de 0.96% (seulement quelques scénarios ne permettent pas de prendre la totalité des frais).

Dans le cas du produit 2, le taux de marge initial vaut environ 1.30%, que l'on peut décomposer comme 0.96% de frais et 10% des produits financiers, qui se situent en moyenne à 3.5%.

Dans le cas du produit 3, le taux de marge initial vaut bien environ 0.8% de frais plus 10% de 3.5% de produits financiers, soit 1.15%

Le coût du TMG(A) et le RAN consommé nous permettent à chaque fois de reconstituer la marge finale en fonction de la marge initiale.

Nous remarquons qu'un TMGA est toujours moins coûteux qu'un TMG fixé à 1.5% ; cette fois ci le coût ne désigne plus la TVOG de manière générale mais précisément celui du TMG(TMGA), déduction faite du RAN qui sert à le couvrir, totalement ou partiellement.

Tableau 2 : décomposition des marges pour chacun des produits avec RAN initial :

Produit 1 : 100% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	tx de marge initial moyen	coût du tmg(tmga) moyen	ran moyen	tx de marge final moyen
RAN_TMGA	0,95%	0,09%	0,07%	0,92%
Produit 2 : 90% de Pfi redistribué 0,96% de frais				
	tx de marge initial moyen	coût du tmg(tmga) moyen	ran moyen	tx de marge final moyen
RAN_TMGA	1,28%	0,165%	0,10%	1,22%
Produit 3 : 90% de Pfi redistribué 0,8% de frais				
	tx de marge initial moyen	coût du tmg(tmga) moyen	ran moyen	tx de marge final moyen
RAN_TMGA	1,14%	0,11%	0,08%	1,11%

Pour les produits à TMG, le RAN ne peut être utilisé (résultats avec RAN identiques aux résultats sans RAN)

Ce coût se réduit nettement sur nos produits avec TMGA alors qu'il reste inchangé sur les produits avec TMG lorsque l'on dispose d'un RAN à l'origine de la projection. Cette situation est normale puisque, pour nourrir nos besoins en taux minimums, le RAN structurel ne peut être consommé que dans le cadre d'un TMGA. Considérer un RAN initial ou pas n'aura donc pas d'effet sur notre garantie TMG, ce qui explique les résultats observés. Pour avoir une meilleure vision de l'analyse effectuée précédemment, nous pouvons nous référer au tableau ci-dessous, qui expose mieux les coûts nets du TMG(A), avec et sans RAN initial, les résultats sont fournis uniquement pour le produit 1 :

	sans RAN initial	avec RAN initial
coût net du tmga	0,08%	0,03%
coût net du tmg0	0,00%	0,00%
coût net du tmg1,5	0,12%	0,12%

Le coût net du TMG(A) se calcule de la manière suivante :

$$\text{coût net du TMG(A)} = \text{coût du TMG(A)} - \text{RAN consommé}$$

Nous voyons bien que le coût net du TMGA est réduit alors qu'il est exactement le même pour un TMG.

2.3 Les stress sur l'actif :

2.3.1 Description des stress :

Les stress suivants sont liés à la modification des proportions d'actifs de notre portefeuille. Cette répartition est constante sur toute la durée de la projection. Les variations éventuelles de cette composition, essentiellement liées aux scénarios d'évolution de nos actifs, sont recorrigées en fin de chaque semestre pour rejoindre l'allocation cible. Pour les stress suivants, nous choisissons une classe d'actifs donnée, parmi les obligations d'Etat à coupon fixe et actions. Nous augmentons ou diminuons la quantité de cet actif au sein du portefeuille, puis nous répartissons ou soustrayons de manière uniforme sur les autres actifs, la différence ainsi créée.

Ci-dessous un descriptif de ces stress, avec à chaque fois un tableau récapitulatif des proportions cible des actifs.

D'autre part, tous ces stress ne portent que sur le produit 1, c'est-à-dire celui qui redistribue 100% de produits financiers aux assurés avec des frais fixés à 0.96%.

2.3.1.1 Sans richesse initiale

Ce stress consiste à éliminer toute richesse initiale: A $t=0$, nous n'avons donc aucun actif et toute la PM initiale est mise dans le cash. Les actifs sont tous achetés donc en milieu de la première année au cours de l'étape de rééquilibrage des investissements pour atteindre la quantité cible pour chaque actif.

2.3.1.2 Augmentation des obligations

Nous augmentons de 25% en relatif la proportion des obligations d'Etat à coupon variable.

2.3.1.3 Diminution des obligations

De même, nous diminuons de 25% en relatif la proportion des obligations d'Etat à coupon variable.

2.3.1.4 Augmentation des actions

Nous augmentons la proportion des actions des actions qui passe de 4% à 20%.

2.3.1.5 Diminution des actions

Cette fois ci, la proportion cible des actions est revue à la baisse. Nous la diminuons de 98%.

2.3.2 Résultats sur la VIF et la TVOG des stress sur l'allocation cible:

2.3.2.1 Produit à tmg0 sans RAN initial avec différentes allocations cibles:

Ci-dessous la représentation des VIF moyennes et TVOG correspondantes, sur un produit à tmg0 suivant nos stress.

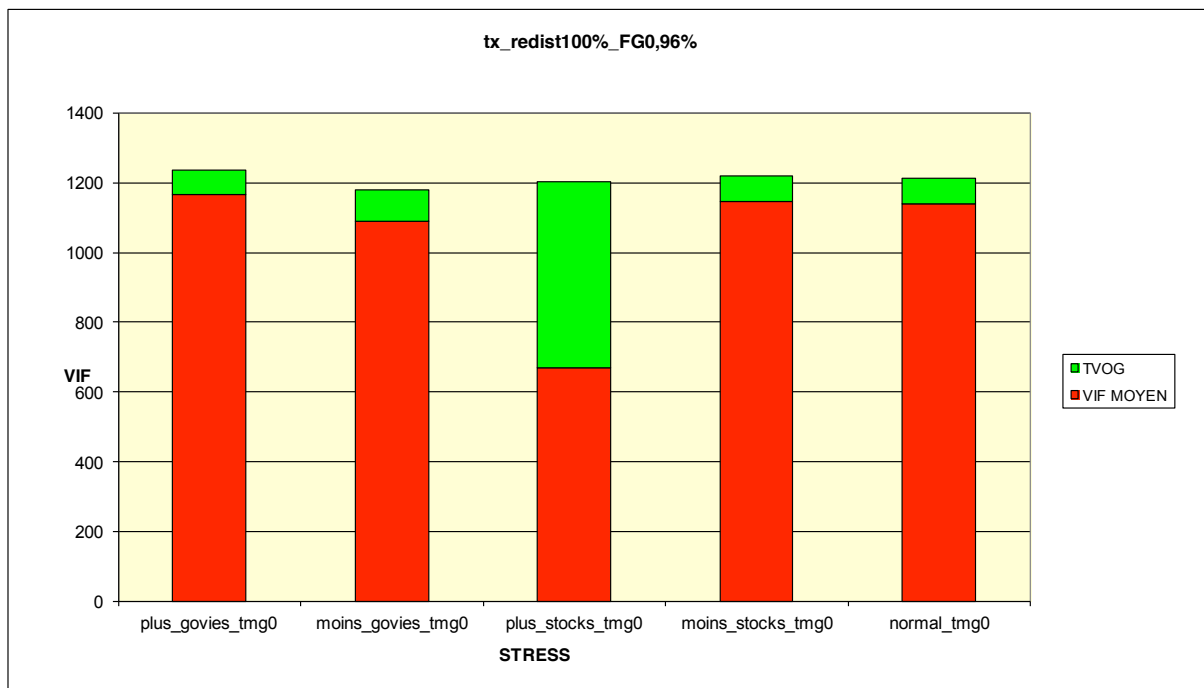


Fig5.

Part de la TVOG sur la VIF déterministe suivant différentes allocations sur un produit à tmg0

Les TVOG les plus faibles correspondent aux cas où nous augmentons notre proportion d'obligations et diminuons celle des actions. Ceci paraît plutôt normal, puisque les actions présentent un caractère beaucoup plus risqué que les obligations. Ces deux stress ont donc logiquement un effet positif en moyenne sur nos marges futures et le coût des garanties. Nous remarquons en outre que la TVOG augmente énormément lorsque nous augmentons notre quantité cible d'actions : ceci traduit la volatilité des taux servis et donc celle des rachats dans ce cas spécifique ; En effet, les produits financiers subissent, en moyenne, beaucoup plus de fluctuations, lorsqu'on augmente la quantité cible d'actions, qu'au niveau des autres stress.

D'autre part, le fait de diminuer la quantité cible des obligations nous conduit à en vendre en tout début d'année pour atteindre cette proportion cible, les plus values éventuelles réalisées iront nourrir la réserve de capitalisation et ne pourront pas être utilisées pour augmenter nos produits financiers. Dans ce cas là, les produits financiers sont légèrement plus bas que sur les autres stress. Le fait de

diminuer la composition en actions dans notre portefeuille ne change quasiment pas le profil des produits financiers par rapport à l'allocation normale. En effet, cette proportion était déjà assez faible au départ, notre résultat financier n'est donc pas très impacté.

2.3.2.2 Produits à tmga et tmg1.5 sans RAN initial avec différentes allocations cibles:

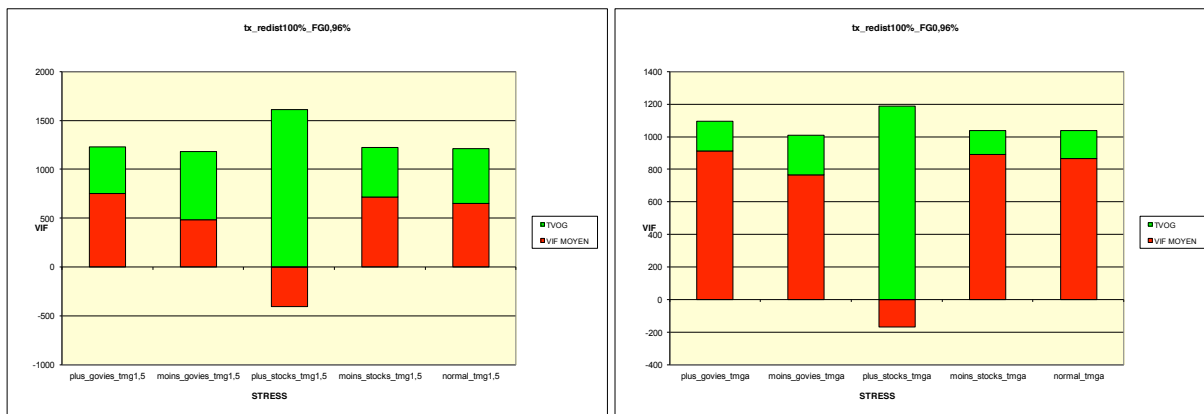


Fig7. Décomposition de la VIF centrale en TVOG et VIF moyenne pour diverses allocations

Sur ces figures nous retrouvons l'un des résultats précédemment mis en évidence : le fait qu'un TMGA soit moins coûteux qu'un TMG 1.5. En effet, mis à part le stress où la quantité cible d'actions est revue à la hausse, la TVOG représente près de la moitié de la VIF centrale sur le produit à TMG 1.5. Cette TVOG atteint à peine le tiers de la VIF centrale sur le produit à TMGA. En ce qui concerne le stress où nous augmentons la quantité cible d'actions, nous observons un phénomène particulier : la VIF moyenne est négative. Comme précédemment, ceci s'explique par la volatilité des produits financiers dans le cas où nous augmentons notre proportion en actions. La VIF moyenne restait cependant positive dans ce cas là sur le produit à TMG 0 car à ce niveau la garantie offerte était évidemment moins importante qu'avec un TMGA ou un TMG à 1.5.

2.3.3 Analyse de la marge (valeur actuelle des marges financières futures) sur la base des stress sur l'allocation cible:

2.3.3.1 Produit à tmg0 sans RAN initial avec diverses allocations cibles:

Ici nous nous intéressons aux stress où les quantités cibles d'actions et d'obligations sont respectivement revues à la baisse et à la hausse. Le RAN n'est pas utilisé. Notre marge finale est égale à la marge initiale car le TMG est à 0. Le taux de marge est optimal pour l'allocation normale, et la valeur la plus faible de ce taux correspond au stress à la hausse de la quantité cible d'actions. Ce

résultat est, encore une fois lié à la baisse évoquée dans le paragraphe précédent, des taux de produits financiers lorsque nous augmentons la quantité cible d'actions au détriment de celle des obligations.

Rappelons la formule du taux de marge initiale:

$$\text{taux de marge initiale} = \text{taux_pfi_opt} - \max\{0; \text{tx_redist} * \text{taux_pfi_opt} - \text{FG}\}$$

$$\text{Ici } \begin{cases} \text{FG} = 0.96\% \\ \text{tx_redist} = 100\% \end{cases}$$

donc

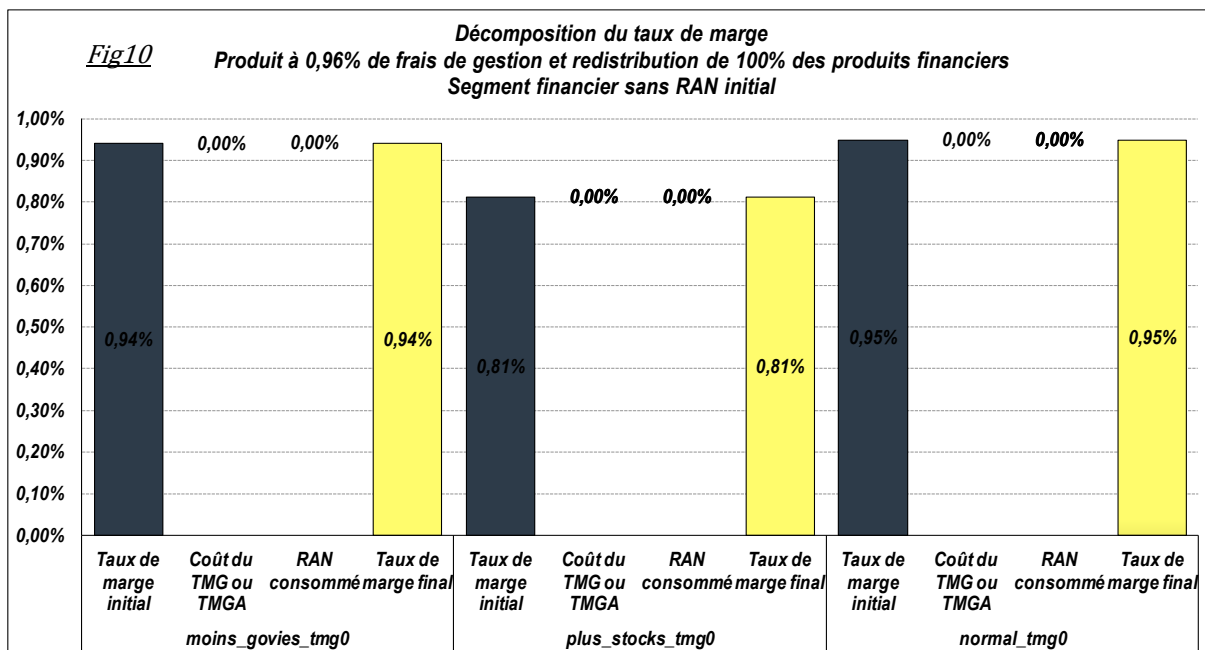
$$\text{taux de marge initiale} = \text{taux_pfi_opt} - \max\{0; \text{taux_pfi_opt} - 0.96\%\}$$

D'autre part, en regardant la figure ci-dessous, nous en déduisons que nos taux de marge initiaux sont, en moyenne, inférieurs à nos frais ; cette situation n'est possible que lorsque $\text{taux_pfi_opt} - 0.96\% < 0$.
Et ainsi :

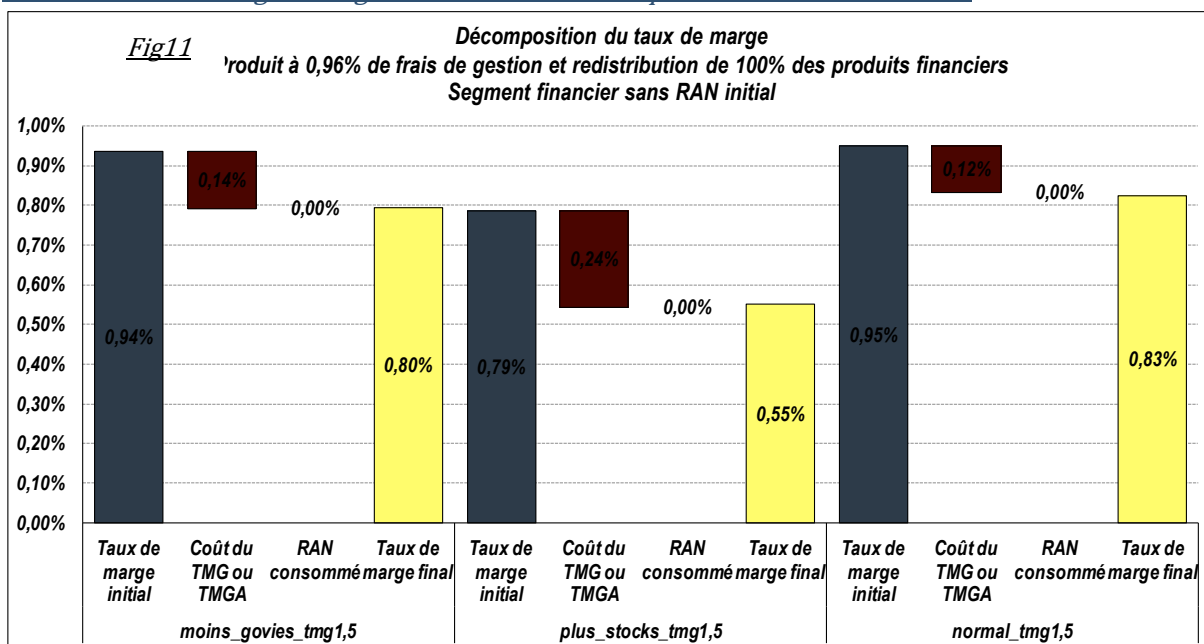
$$\text{taux de marge initiale} = \text{taux_pfi_opt}$$

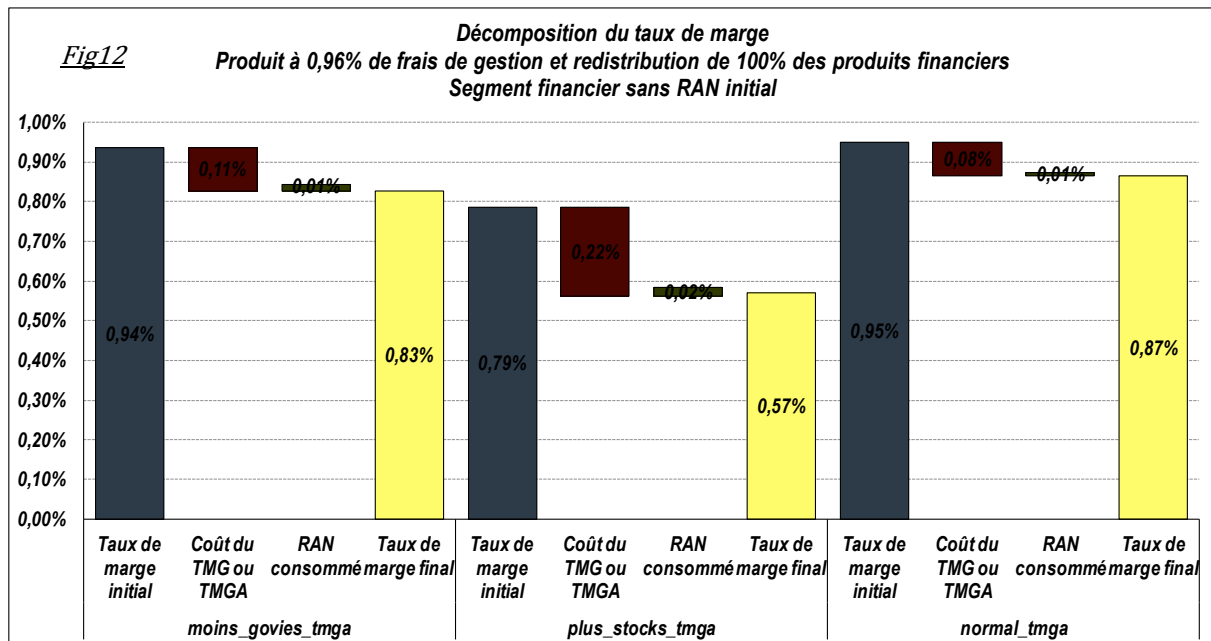
Si les taux de produits financiers n'atteignent pas le taux de frais de 0.96%, la marge initiale est égale à nos taux de produit financiers. Voilà pourquoi une baisse des taux de produits financiers se traduira par une baisse de la marge initiale. La tendance de notre marge initiale suivant les stress est donc celle des produits financiers que nous avons analysés plus haut.

Ci-dessous la décomposition de la marge suivant les stratégies d'allocation avec un tmg0, nous y retrouvons l'essentiel des résultats précités :



2.3.3.2 Produits à tmg1.5 sans RAN initial et pour diverses allocations:





Nous remarquons encore qu'en moyenne, l'assureur n'arrive toujours pas à récupérer les 0.96% de frais. En effet, suivant les scénarios stochastiques d'évolution des actifs, les produits financiers sont plus ou moins bons, et en moyenne, ils sont inférieurs à la marge cible de 0.96%. La situation la moins bonne est, comme dans le cas précédent, liée au stress à la hausse des actions, où la marge initiale est de 0.79% alors que dans les autres cas (resp. situation normale et baisse de la quantité cible d'obligations), la marge initiale est assez proche de la marge cible (resp 0.95% et 0.94%).

En résumé, l'allocation des actifs joue un rôle capital sur le niveau de produits financiers et donc sur la participation aux bénéfices. En effet, comme mentionné plus haut, l'augmentation de la quantité cible d'obligations peut faire baisser les produits financiers puisque les plus values éventuelles réalisées en fin d'année pour rejoindre cette nouvelle quantité cible alimentent la réserve de capitalisation et ne peuvent donc pas être utilisées pour nourrir les produits financiers. Ce phénomène, rajouté aux taux bas aujourd'hui proposés par les Etats affaiblis par la crise des dettes souveraines, poussent les assureurs à s'orienter majoritairement vers les actions et obligations d'Entreprise, qui représentent en moyenne 55% des placements selon la FFSA. D'autre part, la directive SOLVABILITE 2 a profondément modifié la stratégie d'allocation des assureurs en raison de l'importance accordée au risque de marché. En effet, sous la nouvelle régulation prudentielle, la sélection des actifs devient plus que jamais un enjeu crucial car les assureurs se doivent désormais d'intégrer le coût en fonds propres dans leur stratégie d'allocation. Les assureurs ont bien compris que pour minimiser ces besoins en fonds propres ils ne peuvent plus aujourd'hui s'appuyer sur les titres de bonne notation et obligations souveraines. Dès lors, la diversification géographique et entre classe d'actifs se révèle être un élément de pilotage du couple rendement/risque et donc une bonne stratégie d'optimisation des besoins en fonds propres. A cet effet, l'immobilier s'impose comme un bon actif de diversification. Ce dernier offre une bonne protection contre l'inflation et est moins pénalisé que les actions par SOLVABILITE 2. Cependant, cet actif souffre d'une mauvaise liquidité. Cette situation a conduit à la naissance de nouveaux actifs de type immobilier comme les Organismes de Placement Collectif Immobilier (OPCI). Ces fonds d'investissement immobiliers sont assez intéressants dans la

mesure où ils sont diversifiés non seulement entre classe mais aussi géographiquement. En effet, les investissements peuvent s'effectuer dans tous les pays de l'OCDE et l'allocation doit contenir 60% d'immobilier, un minimum de 10% d'actifs liquides monétaires ou obligataires, et un maximum de 30% d'actions.

2.3.4 Suppression des richesses initiales

2.3.4.1 VIF et TVOG pour divers taux garantis



Fig8 et 9. Décomposition de la VIF centrale en TVOG et VIF moyenne pour divers taux minimums garantis

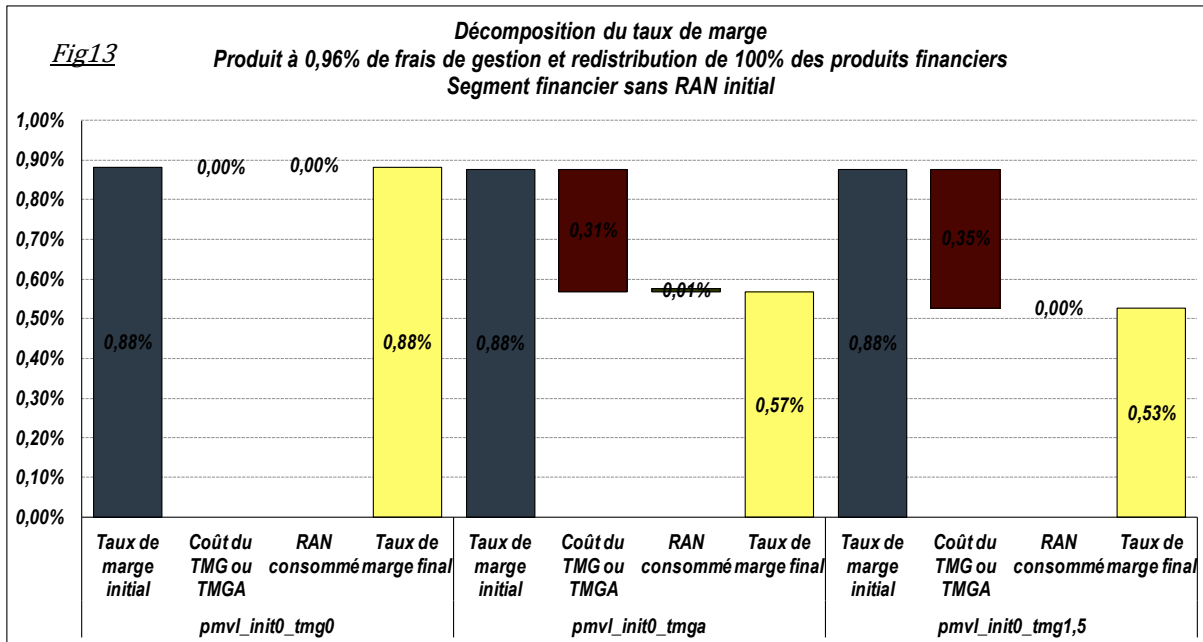
La suppression de la richesse initiale a pour effet de faire augmenter la TVOG, comme nous pouvons nous en rendre compte en comparant la figure 8 aux figures 1 et 2. En effet, ce stress revient à annuler les plus values éventuelles à $t=0$. Cette situation réduit donc notre capacité à faire face à nos engagements : les VIF centrales et moyennes baissent, et l'écart entre ces deux montants se creuse. De plus, lorsque nous redistribuons 100% de produits financiers, la VIF moyenne est négative pour un TMGA et un TMG à 1.5. Dans tous les cas, la VIF la plus élevée se trouve sur le produit à TMG 0 car cette situation correspond au niveau d'engagement le moins élevé de l'assureur.

2.3.4.2 Analyse de la décomposition de la valeur actuelle des marges financières futures

2.3.4.2.1 Impact de la suppression de toute richesse initiale sur le produit 1:

Nous pouvons mesurer l'impact de la suppression de toute richesse initiale sur le produit 1 (100% de produits financiers distribués et 0.96% de frais). En effet, le taux de marge initiale baisse de manière significative : elle passe de 0.95% à 0.88% sans richesse initiale. En effet, grâce à la richesse passée, l'assureur avait des taux de produits financiers plus élevés, en réalisant des plus values. Sans richesse initiale, la marge baisse sur notre produit.

D'autre part, le coût du TMG(A) est accru, il passe de 0.08 % à 0.31% pour le TMGA et de 0.12% à 0.35% pour le TMG à 1.5%, comme nous pouvons nous en rendre compte sur le schéma suivant :



Le fait de ne pas disposer de plus value latente entraîne une difficulté à réaliser un taux de produit financier net de frais supérieur au TMG(A), ceci permet d'expliquer l'augmentation du coût du TMG(A) lorsque les richesses initiales sont supprimées.

Ainsi, la marge finale est très faible après déduction du coût du TMG(A), ce qui explique pourquoi la VIF observée (la VIF représente la différence entre cette marge et nos coûts) est négative sur les produits à TMGA et TMG 1.5% (confère figure 8).

2.3.4.2 Impact de la suppression de toute richesse initiale sur le produit 2:

Nous nous intéressons maintenant au produit 2(90% de produits financiers redistribués et 0.96% de frais).

$$\text{taux de marge initiale} = \text{taux_pfi_opt} - \max\{0; \text{tx_redist} * \text{taux_pfi_opt} - \text{FG}\}$$

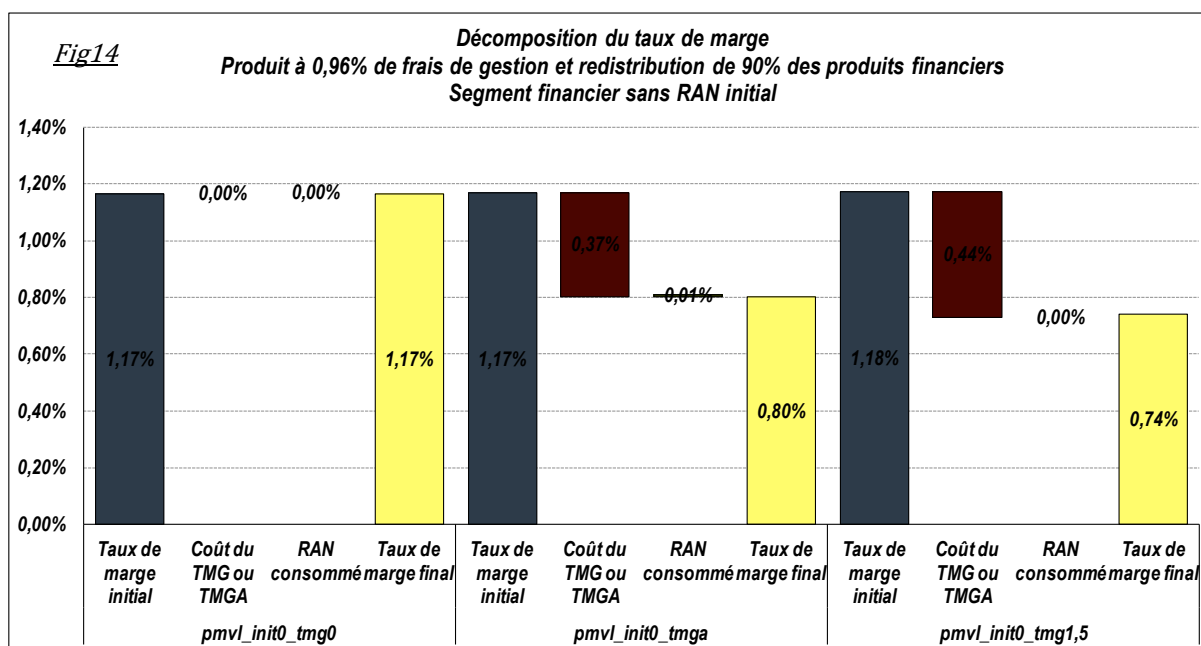
$$\text{taux de marge initiale} = 0.1 * \text{taux_pfi_opt} + 0.96\%$$

Nous avons comme précédemment une baisse du taux de marge initial qui passe en moyenne de 1.30% à 1.17%. Cette baisse est évidemment due à celle des produits financiers lorsque nous supprimons toute richesse initiale comme nous l'avons expliqué plus haut.

D'autre part, la baisse de cette marge initiale est plus importante sur le produit 2 (baisse de relative de 10%) que sur le produit 1 (baisse relative de 7%). En effet, comme cette marge est constituée entre autre de 10% des produits financiers dans le cas du produit 2, si les produits financiers baissent, la marge baisse d'autant plus.

En outre, pour les mêmes raisons que précédemment, le coût du TMG(A) est toujours accru, il passe de 0.14% à 0.37% (TMGA) et de 0.17% à 0.45% (TMG à 1.5%).

Ci-après le graphique représentant la décomposition de la marge initiale pour divers TMG(A) avec suppression de la richesse initiale.



Le taux de marge initial est moins bas que dans le cas du produit 1 et permet de mieux faire face aux coûts, c'est la raison pour laquelle notre VIF moyenne est toujours positive sur le produit 2, en particulier pour le TMGA et le TMG à 1.5% (confère figure 9).

Aujourd'hui, avec la pression concurrentielle sur les taux des fonds euro, les assureurs peuvent être amenés à puiser dans leurs richesses initiales afin de servir des taux satisfaisants puisque les produits financiers comptables sont insuffisants. En l'absence de cette richesse, les produits financiers distribuables sont réduits, ce qui impacte négativement la marge financière de l'assureur chaque année. Voilà pourquoi la suppression de toute richesse initiale fait baisser la valeur actuelle des gains futurs. La répartition initiale des richesses en termes de plus ou moins values doit donc être particulièrement étudiée afin d'optimiser le résultat financier de l'entreprise. Cependant, si la situation de baisse actuelle des rendements perdure sur le fonds Euro, les assureurs pourraient se retrouver dans un scénario d'absence de richesse initiale et devront alors faire face à la situation décrite dans le cadre de ce stress. Il convient donc d'intégrer cette réalité et commencer à réfléchir à des stratégies afin d'anticiper cette situation.

Une évolution du fonds Euro s'impose donc et il faut noter que des efforts ont déjà été effectués dans ce sens, surtout avec l'apparition de nouvelles générations de supports Euro comme l'Euro diversifié.

CONCLUSION

En définitive, cette étude révèle qu'un TMGA est en moyenne, du point de vue actionnaire, préférable à un TMG à partir d'un certain seuil (1.5% dans le cadre de notre étude), surtout lorsque l'on se réfère à la TVOG. D'autre part, un taux de participation aux bénéfices trop élevé aura un impact négatif sur le coût des garanties. A l'inverse, un taux servit trop faible pourra déclencher une vague de rachats conjoncturels. Il convient donc, surtout dans ce contexte tendu du marché de l'assurance vie, de réussir à arbitrer entre la satisfaction des clients et celle des investisseurs qui diversifient désormais de plus en plus leurs placements au détriment du fonds Euro de l'assurance vie.

Un autre facteur susceptible de jouer sur la participation aux bénéfices est l'allocation des actifs. En effet, l'augmentation de la quantité cible d'obligations peut faire baisser les produits financiers puisque les plus values éventuelles réalisées en fin d'année pour rejoindre cette nouvelle quantité cible alimentent la réserve de capitalisation et ne peuvent donc pas être utilisées pour nourrir les produits financiers. Ce phénomène, rajouté aux taux bas aujourd'hui proposés par les Etats affaiblis par la crise des dettes souveraines, poussent les assureurs à s'orienter majoritairement vers les actions et obligations d'Entreprise, qui représentent en moyenne 55% des placements selon la FFSA. D'autre part, la directive SOLVABILITE 2 a profondément modifié la stratégie d'allocation des assureurs en raison de l'importance accordée au risque de marché. En effet, sous la nouvelle régulation prudentielle, la sélection des actifs devient un enjeu crucial car les assureurs se doivent d'intégrer le coût en fonds propres dans leur stratégie d'allocation. Les assureurs ont bien compris que pour minimiser ces besoins en fonds propres ils ne peuvent plus aujourd'hui s'appuyer sur les titres de bonne notation et obligations souveraines. Dès lors, la diversification géographique et entre classe d'actifs se révèle être un élément de pilotage du couple rendement/risque et donc une bonne stratégie d'optimisation des besoins en fonds propres.

D'un autre côté, avec la pression concurrentielle sur les taux des fonds euro, l'assureur se doit de servir des taux satisfaisants mais les taux de produits financiers étant très bas, les assureurs peuvent être amenés à puiser dans leurs richesses initiales. Voilà pourquoi la suppression de toute richesse initiale fait baisser la valeur actuelle des gains futurs. La répartition initiale des richesses en termes de plus ou moins values doit être particulièrement étudiée afin d'optimiser le résultat financier de l'entreprise. Cependant, les résultats de cette étude sur la valeur actuelle des gains futurs sont assez inquiétants car ils mettent en évidence ce qui pourrait se passer si la situation actuelle de baisse des rendements perdurait.

Ainsi, avec des rendements toujours en baisse, une augmentation de la fiscalité et un investissement en actions désormais limité par des contraintes prudentielles, il devient absolument nécessaire de faire évoluer le fonds euro. Dès lors, les actifs en euro diversifiés apparaissent alors comme un compromis, définit par un actif en euro classique et une provision technique de diversification. Ces derniers s'affranchissent en effet de la garantie en capital annuelle au profit d'une garantie en capital au terme, permettant une gestion beaucoup plus souple de la provision technique de diversification.

BIBLIOGRAPHIE

Mémoires d'actuariat

B.M CANTAU	Simulations actif/passif de la valeur d'un portefeuille de Contrats d'épargne.
Astrid DUBOIS Sylvain MOLLET	Pilotage de la participation aux bénéfices sur la durée de vie d'un produit
Kamel ASSAM	Discrétisation de la distribution des trajectoires de l'actif – Application au calcul du <i>Best Estimate</i> d'un contrat d'épargne
Marylène DE CUBBER	Rentabilité et tarification sous Solvabilité II: vers une évolution de l'offre produit ?

Ouvrages et Publications

John HULL	Options, futures et autres actifs dérivés.
D. LAMBERTON B. LAPEYRE	Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance
Frédéric PLANCHET	Modéliser l'actif d'un organisme assureur : quelques Réflexions.
Moez MRAD	Produits de taux d'intérêt : Pricing et couverture de produits de taux
Thomas GUILLOD	Interpolation, courbes de BEZIER et B-SPLINES
Charles Descure Cristiano Borean	Gestion Actif Passif et Solvabilité
AXA FRANCE	Gestion Actif/Passif
AXA FRANCE	Tarification de garantie financière : Probabilité risque neutre et probabilité historique

Profession CGP	Le fonds en Euros en question
----------------	-------------------------------

ANNEXES

I- RAPPELS SUR LES FORMULES DE TAYLOR

La formule de TAYLOR fut établie par le mathématicien du même nom, Brook TAYLOR en 1712. L'énoncé est le suivant :

Notations. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n .

Théorème: (Taylor-Young). Supposons que f soit de classe C^n sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + h * f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} * f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} * f^{(n)}(x_0) + h^n * \varepsilon(h) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} * f^{(k)}(x_0) + h^n * \varepsilon(h) \end{aligned}$$

Où $\varepsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Définition. La somme $\sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} * f^{(k)}(x_0)$

s'appelle le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0 . Par convention, $0! = 1! = 1$. Taylor ne s'est pas vraiment préoccupé de la forme du reste, il faut attendre ses successeur pour voir se développer une maîtrise du reste dans certaines conditions plus précises.

Théorème (Taylor-Lagrange). Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I , il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que l'on ait

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} * f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} * f^{(n+1)}(x_0 + \theta * h)$$

(notons ici que θ dépend de h).

Théorème (Taylor avec reste intégral). Supposons que f soit de classe C^{n+1} sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on a :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} * f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} * \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t * h) dt$$

Remarque. Le reste intégral admet une autre expression. Plus précisément, on a l'égalité :

$$\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t * h) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

qui découle tout simplement d'un changement de variable $t = x_0 + t * h$.

Si le reste est exprimé sous la seconde forme, appelée forme de Lagrange, le théorème de Taylor représente une généralisation du théorème des accroissements finis (qui peut être utilisé pour démontrer cette version), tandis que la troisième expression du reste montre que le théorème est une généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Pour certaines fonctions f , nous pouvons montrer que le reste tend vers zéro quand n tend vers l'infini ; ces fonctions peuvent être développées en série de Taylor dans un voisinage du point x_0 et sont appelées des fonctions analytiques.

II- RAPPEL DE LA METHODE DE CALCUL DU CALL EUROPEEN AVEC LE MODELE DE BLACK ET SCHOLES POUR LE CALCUL DU TARIF DES PRODUITS DERIVES UTILISES DANS LE MODELE

Notations. Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un actif suivant la dynamique de Black et Scholes c'est-à-dire :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma dW_t$$

Où $(W_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien standard sous la probabilité historique, μ et σ deux Paramètres constants.

Soit $(F_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle issue de $(W_t)_{t \geq 0}$. C'est-à-dire que $\forall t$, F_t est la tribu Engendrée par $\{W_s/s \leq t\}$

Le processus $(S_t)_{t \geq 0}$ peut s'écrire de la manière suivante, en fonction de la valeur de l'actif à une date t_0 quelconque :

$$S_t = S_{t_0} e^{(\mu - \sigma^2/2) * (t - t_0) + \sigma * (W_t - W_{t_0})}$$

Grâce au théorème de Girsanov, le processus S_t s'écrit encore de la manière suivante :

$$S_t = S_{t_0} e^{(r - \sigma^2/2) * (t - t_0) + \sigma * (\widehat{W}_t - \widehat{W}_{t_0})} \quad (1)$$

où r est le taux sans risque et $(\widehat{W}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre P^* induite par le taux sans risque de la manière suivante :

$$dP^* = \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) * dP$$

dP et dP^* sont les dérivées de Radon Nycodim des probabilités P et P^* . De plus, $(\widehat{W}_t)_{t \geq 0}$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ ont la même filtration $(F_t)_{t \geq 0}$.

L'objectif de ce rappel est d'exposer la méthode de calcul de du pay-off d'un call européen de strike K et d'échéance T sur l'actif $(S_t)_{t \geq 0}$.

Avec ces notations, le pay-off du call européen se définit donc par la formule $(S_T - K)_+$

Grâce à la propriété de martingale sous la probabilité risque neutre de la valeur actualisée du portefeuille simulant cette option, la valeur de cette dernière est à tout temps $t \leq T$ définie par la formule :

$$V_t = E_{P^*} [e^{-r(T-t)} * (S_T - K)_+ / F_t]$$

Qui devient en utilisant la formule (1) :

$$V_t = E_{P^*} \left[e^{-r(T-t)} * \left(S_t e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)} - K \right)_+ / F_t \right]$$

Puisque $(\widehat{W}_t)_{t \geq 0}$ est un brownien standard sur P^* dont une filtration est $(F_t)_{t \geq 0}$:

i . La variable aléatoire $(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t)$ est Indépendante de F_t

ii. La variable aléatoire S_t est F_t mesurable.

Il découle de tout ceci qu'il existe une fonction f vérifiant

$f(t, S_t) = V_t$. De plus,

$$f(t, x) = E_{P^*} \left[e^{-r(T-t)} * \left(x e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*(\widehat{W}_T-\widehat{W}_t)} - K \right)_+ \right]$$

$$f(t, x) = E_{P^*} \left[e^{-r(T-t)} * \left(x e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*Y_t*\sqrt{T-t}} - K \right)_+ \right]$$

Où $Y_t = \frac{\widehat{W}_T - \widehat{W}_t}{\sqrt{T-t}}$. $(Y_t)_{t \geq 0}$ suit donc une loi normale centrée réduite sous P^* . Dès lors :

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r(T-t)-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} * \left(x e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*y*\sqrt{T-t}} - K \right) * 1_{\left\{ x e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*y*\sqrt{T-t}} - K \geq 0 \right\}} dy$$

$$f(t, x) = A - B$$

Avec

$$\begin{cases} A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r(T-t)-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} * x e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*y*\sqrt{T-t}} * 1_{\left\{ x e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*y*\sqrt{T-t}} - K \geq 0 \right\}} dy \\ B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r(T-t)-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} * K * 1_{\left\{ x e^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*y*\sqrt{T-t}} - K \geq 0 \right\}} dy \end{cases}$$

Calcul de B :

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r(T-t) - \frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} * K * 1_{\left\{xe^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*y*\sqrt{T-t}} - K \geq 0\right\}} dy$$

$$B = e^{-r(T-t)} * K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} * 1_{\left\{xe^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*y*\sqrt{T-t}} - K \geq 0\right\}} dt$$

$$B = Ke^{-r(T-t)} * E_{P^*} \left[1_{\left\{xe^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*Y_t*\sqrt{T-t}} - K \geq 0\right\}} \right]$$

$$B = Ke^{-r(T-t)} * P^* \left[xe^{(r-\sigma^2/2)*(T-t)+\sigma*Y_t*\sqrt{T-t}} - K \geq 0 \right]$$

$$B = Ke^{-r(T-t)} * P^* \left[Y_t \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right) - (r - \sigma^2/2) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

$$B = Ke^{-r(T-t)} * P^* \left[Y_t \leq \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + (r - \sigma^2/2) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

En posant $d_2(x) = \frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right) + (r - \sigma^2/2) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

On

obtient

$$B = Ke^{-r(T-t)} * P^*[Y_t \leq d_2(x)]$$

Ou

encore

$$B = Ke^{-r(T-t)} * \Phi(d_2(x)) \quad (2)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Calcul de A :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r(T-t) - \frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} * x e^{(r - \sigma^2/2)*(T-t) + \sigma*y*\sqrt{T-t}} * 1_{\left\{ x e^{(r - \sigma^2/2)*(T-t) + \sigma*y*\sqrt{T-t}} - K \geq 0 \right\}} dy$$

Soit encore

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-r(T-t) - \frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} * x e^{(r - \sigma^2/2)*(T-t) + \sigma*y*\sqrt{T-t}} * 1_{\{y \leq d_2(x)\}} dy$$

En procédant au changement de variable $z = y + \sigma * \sqrt{T-t}$

On a
$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} * x * 1_{\{z \leq d_2(x) + \sigma*\sqrt{T-t}\}} dz$$

$$A = x * \int_{-\infty}^{d_2(x) + \sigma*\sqrt{T-t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$A = x * \int_{-\infty}^{d_2(x) + \sigma*\sqrt{T-t}} \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$A = x * \Phi(d_1(x)) \quad (3)$$

Avec $d_1(x) = d_2(x) + \sigma * \sqrt{T-t}$

En reprenant (3) et (4), nous en déduisons que :

$$f(t, x) = x * \Phi(d_1(x)) - K e^{-r(T-t)} * \Phi(d_2(x))$$

Et donc la valeur du call européen sur le processus $(S_t)_{t \geq 0}$ est, à la date t :

$$V_t = S_t * \Phi(d_1(S_t)) - K e^{-r(T-t)} * \Phi(d_2(S_t))$$