

**Mémoire présenté devant l'Université Paris Dauphine  
pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaraires**

le 29/01/2017

Par : Maxence Pierrat

Titre: Allocation stratégique optimale d'actifs : une approche multi-objectifs et  
interactive

Confidentialité :  NON     OUI (Durée :  1 an     2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

Membre présent du jury de l'Institut  
des Actuaraires :

Signature :

Entreprise :

Nom : Mazars Actuariat

Signature :

Membres présents du jury du Master  
Actuariat de Dauphine :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Nicolas Wesner

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise :

Secrétariat :



Bibliothèque :

Signature du candidat :



---

## Résumé

---

De nombreuses sources d'incertitude sur les marchés financiers empêchent d'évaluer la capacité prédictive d'une modélisation actif-passif sur le long terme. De plus pour le problème de l'allocation stratégique optimale d'actifs il existe plusieurs critères de décision corrélés et potentiellement contradictoires parmi lesquels il n'est pas trivial de trouver un compromis « idéal ». Ces limitations rendent la prise de décisions en partie subjective.

Afin de tenir compte de ces particularités le mémoire suggère une approche multi-objectifs interactive. Les méthodes d'optimisation multi-objectifs sont basées sur la recherche d'une frontière efficiente. Elles sont adaptées à la problématique car elles ne nécessitent pas de définir une fonction d'utilité : le compromis recherché entre les différents critères de décision ne doit pas être spécifié dès le départ. L'interactivité quant à elle permet d'intégrer la subjectivité à l'optimisation et de placer le décideur au coeur du processus. Ce dernier peut alors apprendre du problème au fur et à mesure et mettre en place sa stratégie en évaluant mieux les apports et les risques associés à chacun de ses choix.

Afin de montrer la faisabilité de l'approche proposée, celle-ci est appliquée à un fonds de pension fictif. Un algorithme génétique est utilisé pour rechercher la frontière efficiente. En cours d'optimisation il est possible d'ajuster les contraintes et objectifs du problème en fonction des résultats visualisés. Le décideur est donc guidé tout au long du processus pour faire des compromis en connaissance de cause entre ses différents critères de décision et aboutir à un ensemble de solutions cohérentes avec sa stratégie. L'approche suggérée ne se limite alors plus à la mise en oeuvre d'un modèle, elle se présente comme un véritable outil d'aide à la décision.

**Mots-clés** : gestion actif-passif, allocation stratégique d'actifs, optimisation multi-critères, risk management, interactivité, méta-heuristique, algorithme génétique.

---

## Abstract

---

Numerous sources of uncertainty on financial markets prevent one from assessing the predictive power of a model on the long run. Besides for the optimal strategic assets allocation issue there are many correlated and possibly conflicting decision criteria among which it can be difficult to choose an ideal trade-off. These limitations make the decision-making process partly subjective.

In order to take these particularities into account this paper suggests a multi-objective and interactive approach. Multi-objective optimization methods are well suited for the problem because they involve an efficient frontier which enables to avoid defining a utility function: the trade-off between the different decision criteria does not need to be immediately specified. On the other hand interactivity integrates subjectivity to optimization and places the decision-maker at the heart of the process so he can design his strategy by understanding the pros and cons associated to his choices.

In order to illustrate the feasibility of such an approach it is applied to a theoretical pension fund. A genetic algorithm is used to search for the efficient frontier. During optimization it is possible to adjust the problem objectives and constraints depending on the results visualized. The decision-maker is then guided all the way to find a trade-off between his different criteria and to get a set of relevant solutions in regards to his strategy. Therefore the suggested approach is no longer a simple model: it becomes an actual decision-making tool.

**Keywords** : asset-liability management, strategic assets allocation, multi-criteria optimization, risk management, interactivity, metaheuristic, genetic algorithm.

---

## Note de synthèse

---

# Allocation stratégique optimale d'actifs : une approche multi-objectifs et interactive

NOTE DE SYNTHÈSE - MAXENCE PIERRAT

**Mots-clés** : gestion actif-passif, allocation stratégique d'actifs, optimisation multi-critères, risk management, interactivité, méta-heuristique, algorithme génétique.

---

## Résumé

Le problème de l'allocation stratégique d'actifs est complexe et implique de nombreux enjeux. Afin de prendre en compte cet aspect il est possible de mettre en oeuvre une méthode d'optimisation multi-objectifs et de déterminer une frontière efficiente. La recherche et la visualisation de cette frontière peuvent s'avérer complexes lorsque le nombre d'objectifs est important. Par ailleurs le problème est de nature stratégique, la sélection d'une allocation est donc subjective et peut nécessiter une meilleure connaissance du problème sur certaines régions spécifiques de la frontière. C'est la raison pour laquelle cet article propose une approche d'optimisation multi-objectifs et interactive : en cours d'optimisation l'utilisateur a la possibilité de modifier les contraintes du problème afin d'intégrer ses préférences et l'impact de décisions stratégiques. Pour cela un algorithme génétique est utilisé. L'approche ne se limite alors plus à la simple mise en oeuvre d'un modèle, elle se présente comme un véritable outil d'aide à la décision.

---

## Introduction

Dès les années 1950 Markowitz [11][12] a montré l'intérêt des méthodes d'optimisation multi-objectifs pour répondre à la problématique de l'allocation stratégique optimale d'actifs. Ces méthodes s'appuient sur la détermination d'une frontière efficiente (un ensemble de solutions), qui peut s'interpréter comme une généralisation du concept d'optimalité en présence de plusieurs critères d'optimisation.

La définition mathématique de cette frontière repose sur la notion de domination. Notons  $C_1, \dots, C_M$  les critères de l'optimisation et supposons, sans perte de généralité, que l'objectif est de les maximiser. Soit  $x$  et  $y$  deux allocations candidates, alors :  
 $x$  domine  $y \iff \forall m \in [1, M], C_m(x) \geq C_m(y)$  et l'inégalité est stricte pour au moins un  $m$   
La frontière efficiente est l'ensemble des allocations non dominées.

La modélisation des interactions actifs-passifs et des portefeuilles complexes d'une institution financière impose souvent de déterminer la frontière efficiente numériquement (sur la base de scénarios stochastiques). Cela se fait classiquement par l'utilisation de méta-heuristiques telles que les algorithmes NSGA-II et NSGA-III (Deb. et al [4][3][9]).

Néanmoins lorsque le nombre de critères de l'optimisation devient supérieur à 2 ou 3 la dimension de la frontière efficiente augmente et sa détermination devient plus complexe. Il n'est alors pas évident de la visualiser et de l'analyser en grande dimension. La définition de la frontière efficiente est en fait trop peu discriminante : elle consiste à exclure uniquement les allocations « évidemment inintéressantes » pour lesquelles il est possible de faire mieux vis-à-vis de tous les critères simultanément.

Par ailleurs il faut noter que la problématique a une dimension stratégique importante. De ce fait la subjectivité fait partie intégrante du problème et il est important que le décideur en ait une bonne compréhension. C'est pourquoi le présent article suggère de rendre l'approche interactive. Pour cela l'idée est d'autoriser le décideur à modifier les contraintes du problème en cours d'optimisation afin de lui permettre d'intégrer l'impact de décisions stratégiques au fur et à mesure.

Une telle approche présente l'intérêt de placer le décideur au coeur du processus et d'améliorer significativement sa compréhension du problème en rendant le processus itératif : il peut concentrer son attention sur certaines « portions » de la frontière efficiente et/ou revenir en arrière si nécessaire. Cela permet également d'accélérer la convergence de l'algorithme en restreignant l'espace de recherche au fur et à mesure que les nouvelles contraintes du décideur sont prises en compte.

Pour illustrer l'approche suggérée nous considérons l'exemple d'un fonds de pension fictif et nous utilisons un algorithme génétique. Comme toute méta-heuristique, les algorithmes génétiques peuvent intégrer des intuitions sur le problème pour améliorer leurs performances : c'est pourquoi nous proposons d'utiliser de nouveaux opérateurs génétiques, spécifiquement adaptés pour traiter la problématique et qui intègrent l'aspect interactif souhaité. Les résultats obtenus et les apports de l'approche sont alors présentés et commentés.

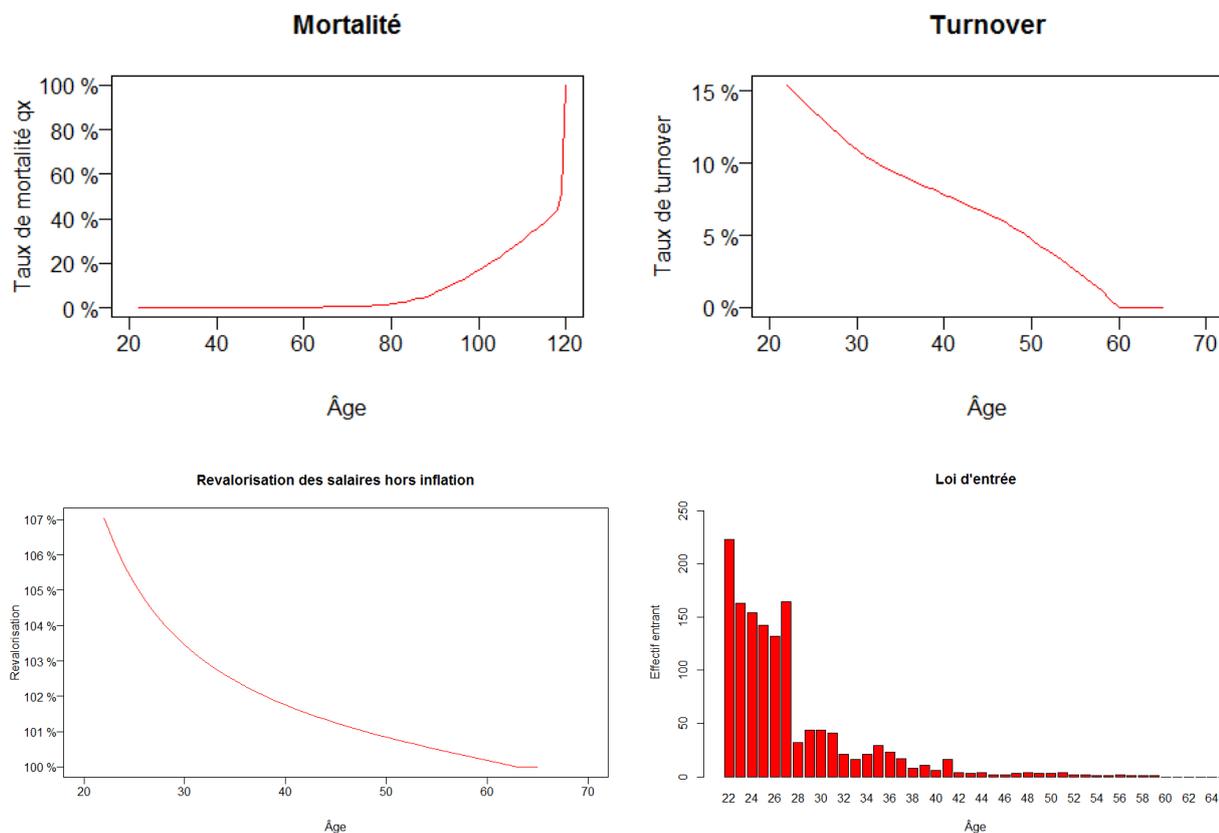
# Le fonds de pension fictif étudié

## Contexte et passif

Nous nous proposons d'étudier un fonds de pension fictif basé au Royaume-Uni et offrant des prestations de retraite indexées sur l'inflation aux salariés et anciens salariés d'une entreprise. Ce fonds est supposé avoir 80 années d'activité. Il délivre à partir de la retraite une rente proportionnelle au salaire final et au nombre d'années d'ancienneté dans l'entreprise. Il y a donc trois catégories d'assurés :

- Les actifs, actuels salariés de l'entreprise ;
- Les différés, anciens salariés de l'entreprise n'ayant pas encore liquidé leur retraite ;
- Les retraités.

Afin de pouvoir modéliser et projeter simplement l'engagement de ce fonds à partir d'un générateur de scénarios économiques, nous faisons l'hypothèse d'une indexation parfaite du passif sur l'inflation (même en cas d'inflation négative) et utilisons des lois de projection déterministes :



## Modélisation de l'actif

Toujours dans l'idée de simplifier la modélisation et de concentrer l'étude sur l'approche suggérée, nous faisons le choix d'utiliser le modèle d'Ahlgrim et al. [1] pour diffuser les différentes classes d'actifs. Planchet et al. [14] en proposent une implémentation sur le langage *R*, ce qui permet d'obtenir des scénarios stochastiques rapidement.

Notons  $q$  l'inflation,  $r$  les taux réels,  $x$  la prime de risque action et  $z$  les rendement immobiliers. En utilisant des notations usuelles pour les modèles de Vasicek, de Hull et White, et de Black et Scholes, nous retenons les paramètres suivants :

Inflation Vasicek			Taux réels Hull-White					Prime action Black-Scholes		Immobilier Vasicek		
$\kappa_q$	$\mu_q$	$\sigma_q$	$\kappa_r$	$\sigma_r$	$\kappa_l$	$\mu_l$	$\sigma_l$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\kappa_z$	$\mu_z$	$\sigma_z$
0,120	1,5%	0,45%	0,397	0,3%	0,351	0,7%	0,2%	1,4%	9,8%	0,062	3,4%	1,6%

Nous reprenons la matrice de corrélations de Planchet et al. [14] et fixons les valeurs initiales suivantes :

$l_0$	$r_0$	$q_0$	$z_0$
0,6%	0,3%	0,8%	3,0%

Tous ces paramètres ont été déterminés à partir des valeurs données par Planchet et al. [14] ajustées pour mieux refléter les conditions de marchés actuelles et les spécificités du marché anglais. Dans tous les cas le générateur de scénarios économiques retenu est sans incidence sur la généralité de l'approche présentée : celle-ci reste valable dès lors que les critères de l'optimisation peuvent être mesurés à partir d'un moteur ALM et de scénarios stochastiques.

## Un nouvel algorithme génétique

Les algorithmes génétiques sont un cas particulier de méta-heuristiques capables de rechercher une frontière efficiente. En raison de leur popularité, et parce qu'ils ont déjà été appliqués à la problématique (voir par exemple Monin [13] ou di Tollo et al. [6]) c'est ce type d'algorithmes que nous retenons pour appliquer l'approche d'optimisation interactive suggérée dans cet article.

La littérature sur les algorithmes génétiques est abondante. De ce fait et pour ne pas alourdir l'exposé nous ne donnons pas de description détaillée de leur principe de fonctionnement. Ce qu'il est important de noter est que leur conception est assez souple et peut intégrer les intuitions du modélisateur sur le problème. De plus les implémentations usuelles (*open source*) de ces algorithmes ne permettent pas le fonctionnement interactif souhaité. C'est pourquoi nous en proposons une adaptation à notre cas particulier, décrite ci-dessous et implémentée sur le langage C++.

### Les contraintes du problème

Dans toute la suite nous représentons une allocation par un vecteur (souvent noté  $x$ ) de dimension  $n$  dont les composantes ( $x_i, i \in [1, n]$ ) désignent la part de l'actif allouée à chacune des  $n$  classes d'actifs du problème. Nous distinguons alors deux types de contraintes :

→ (a) : les contraintes immédiatement vérifiables i.e. qui ne nécessitent pas un appel au moteur ALM. Dans la suite nous utilisons des contraintes de type  $a_i \leq x_i \leq b_i$  où  $x_i$  représente l'allocation relative à la classe d'actifs  $i$  ; et bien sûr la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  inhérente à la problématique.

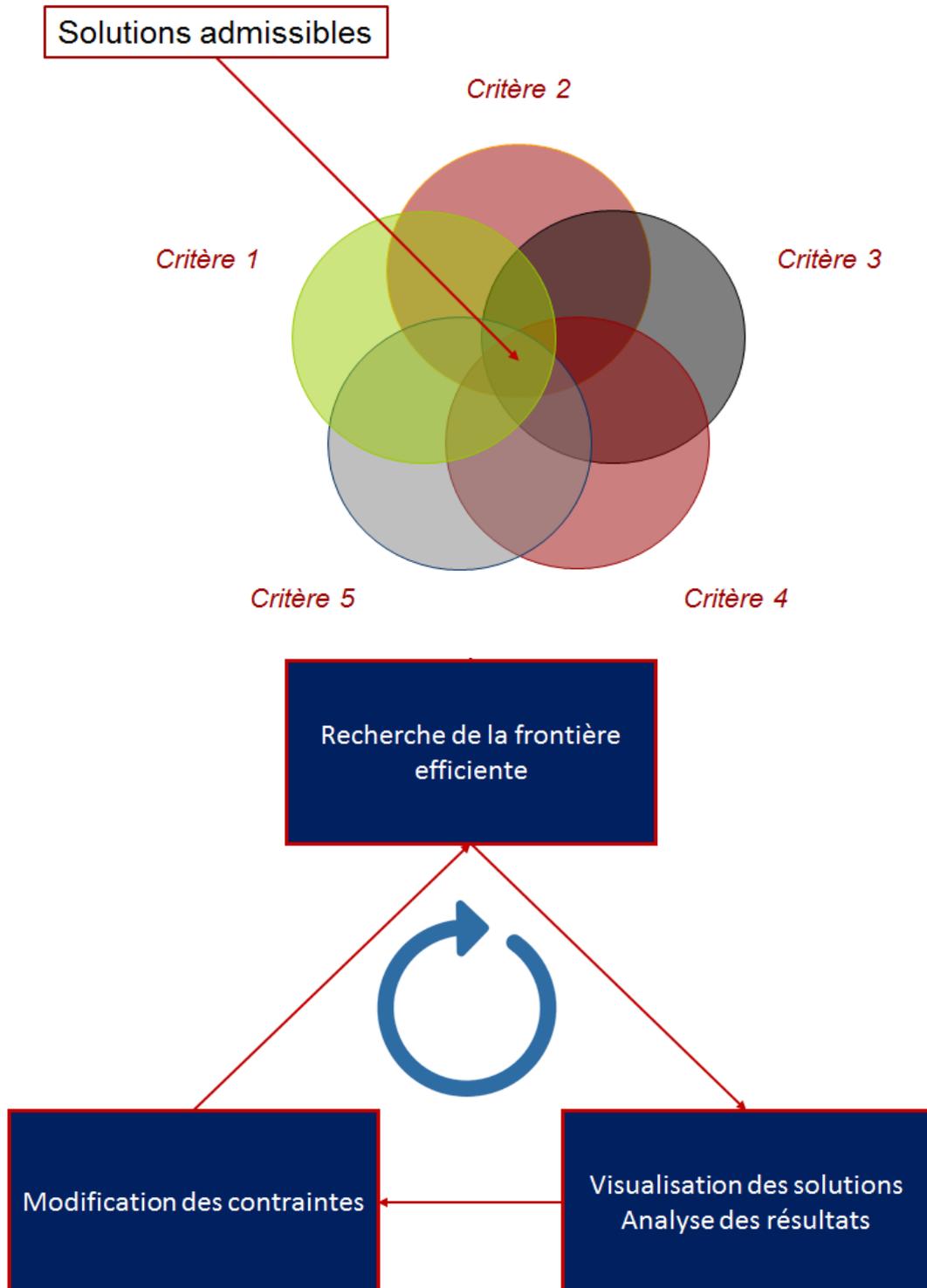
→ (b) : les contraintes qui nécessitent de passer par le moteur ALM pour savoir si elles sont vérifiées. Dans la suite nous supposons que seuls les critères de l'optimisation sont mesurés par le moteur ALM et nous utilisons des contraintes de type  $u_m \leq C_m \leq v_m$  (où les  $C_m$  représentent les critères).

Cette distinction est importante car elle permet de ne pas introduire « inutilement » des solutions non admissibles dans la population que l'algorithme fait évoluer (vers la frontière efficiente). Il est en effet toujours possible de s'assurer que les contraintes (a) sont bien vérifiées.

## Principe de l'optimisation interactive

L'idée derrière l'algorithme proposé est d'autoriser l'utilisateur à modifier les contraintes (b) en cours d'optimisation. Cela revient en fait à lui donner l'opportunité de se restreindre à une partie de la frontière efficiente pour y améliorer la précision des résultats ; et dans le même temps à exclure les solutions qui ne l'intéressent pas.

Un cercle représente les valeurs que le décideur autorise pour un critère



## Génération d'un individu aléatoire

La génération d'un individu aléatoire est utile pour créer la population initiale et mettre en application le concept de nouveauté (Lehman et Stanley [10]). Nous donnons ci-dessous une méthode de génération uniforme et rapide dans l'ensemble  $\mathcal{P} = \{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ et } \forall i, a_i \leq x_i \leq b_i\}$ .

Une telle méthode revient à être capable de simuler la loi de Dirichlet  $\mathcal{D}(1, \dots, 1)$  tronquée à gauche et à droite par les  $a_i$  et  $b_i$  respectivement. En notant  $g$  la densité de cette loi et  $g_i$  celle de la loi marginale  $i$ , la méthode s'appuie sur l'identité :

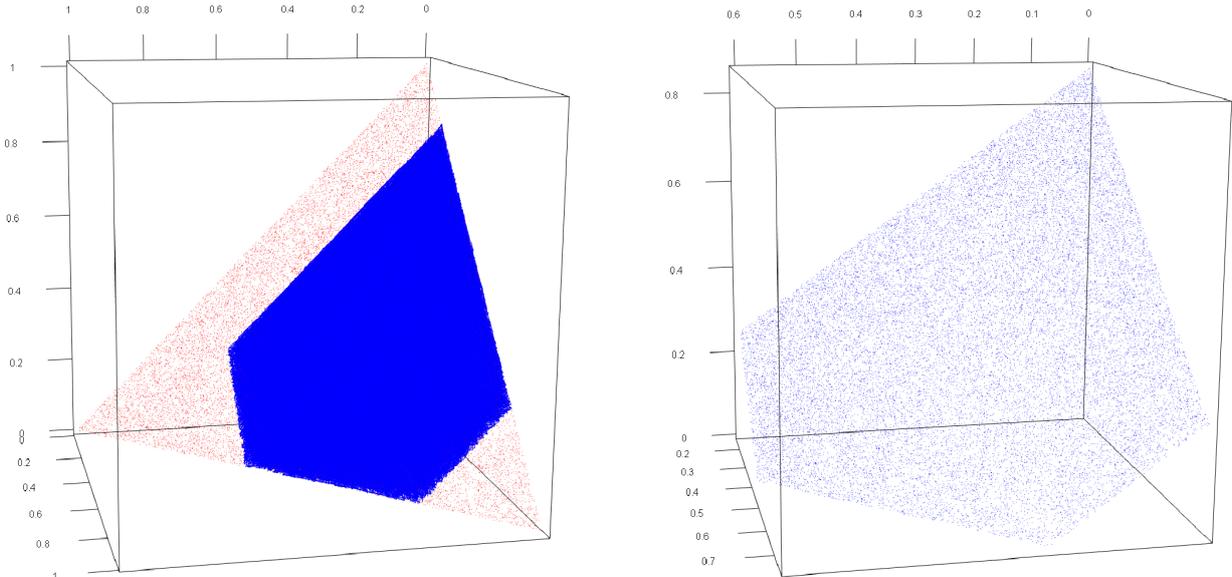
$$g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2|x_1)\dots g_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$

Devroye [5] (*theorem 4.2* page 595) démontre que ces lois conditionnelles peuvent être exprimées à partir de la loi beta  $\beta$  tronquée, ce qui conduit à la méthode de génération suivante :

1. Poser  $\forall i, a_i^* = \max(a_i, b_i + 1 - \sum_{i=1}^n b_i)$  et  $b_i^* = \min(b_i, a_i + 1 - \sum_{i=1}^n a_i)$ .
2. Simuler  $x_1$  par une loi beta  $\beta(1, n - 1)$  tronquée à gauche et à droite par  $a_1^*$  et  $b_1^*$ .
3. Pour chaque  $i$  entre 2 et  $n - 1$  :
  - 3.1. Poser  $D = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} x_j$ .
  - 3.2. Simuler  $x_i$  par une loi beta  $\beta(1, n - i)$  tronquée à gauche et à droite par  $\frac{a_i^*}{D}$  et  $\frac{b_i^*}{D}$ .
  - 3.3 Multiplier  $x_i$  par  $D$  :  $x_i = Dx_i$ .
4.  $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ .

Générer des allocations dans l'ensemble  $\mathcal{P}$  (en bleu ci-dessous) plutôt que simplement dans l'ensemble  $\{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$  (en rouge ci-dessous) permet de toujours vérifier les contraintes (a). Il s'agit donc d'un gain par rapport aux méthodes usuelles.

Génération dans  $\mathcal{P}$  en dimension 3 avec  $a_1 = 0, a_2 = 0.15, a_3 = 0.23, b_1 = 0.6, b_2 = 1$  et  $b_3 = 0.74$



## Comparaison des individus

Nous comparons les différents individus entre eux à l'aide d'un opérateur  $\prec$  identique à celui utilisé par Deb. et al [4] pour l'algorithme NSGA-II. De ce fait et pour ne pas alourdir l'exposé nous renvoyons le lecteur intéressé à la bibliographie pour plus de détails.

## Opérateurs génétiques : sélection, croisement, mutation

Nous retenons des opérateurs génétiques relativement classiques mais en y intégrant des ajustements notamment pour respecter les contraintes (a). Leur description est donnée ci-dessous. Nous ajoutons également un aspect « nouveauté » (Lehman et Stanley [10]) à l'opérateur de sélection.

→ Sélection (par tournoi) de paramètres  $(p, q)$  :

1. Tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R < q$ , générer aléatoirement un nouvel individu et le sélectionner.
3. Sinon effectuer une sélection par tournoi de paramètre  $p$  :
  - 3.1. Tirer aléatoirement  $p$  individus  $x^i$ ,  $i = 1..p$  dans la population.
  - 3.2. Trier les  $x^i$  en trouvant les  $i_j$  tels que  $x^{i_1} \prec \dots \prec x^{i_p}$ .
  - 3.3. Sélectionner  $x^{i_p}$  (le meilleur des  $x^i$ ).

★ Le paramètre  $p$  permet de réaliser un compromis entre exploitation des informations contenues dans la population ( $p$  grand) et prévention des convergences prématurées ( $p$  faible).

★ Le paramètre  $q$  permet de donner plus ou moins de poids à la nouveauté.

→ Croisement de paramètres  $(T_C, \eta_c)$  inspiré de l'opérateur SBX (Deb et al. [2]) :

1. Tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R > T_C$ , ne rien faire.
3. Sinon, appliquer l'opérateur de croisement aux parents  $x^1$  et  $x^2$  :
  - 3.1. Simuler une nouvelle variable uniforme  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
  - 3.2. Si  $u < 0.5$ ,  $\beta = (2u)^{\frac{1}{\eta_c+1}}$ .
  - 3.3. Si  $u \geq 0.5$ ,  $\beta = \frac{1}{2(1-u)^{\frac{1}{\eta_c+1}}}$ .
  - 3.4. Initialisation :  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .
  - 3.5. Création du premier enfant  $y^1$ . Faire :
    - 3.5.1.  $y^1 = 0.5(x^1(1 - \beta_1) + x^2(1 + \beta_1))$ .
    - 3.5.2.  $\beta_1 = \beta_1/2$ .Tant que  $y^1$  ne respecte pas les contraintes (a).
  - 3.6. Création du second enfant  $y^2$ . Faire :
    - 3.6.1.  $y^2 = 0.5(x^1(1 + \beta_2) + x^2(1 - \beta_2))$ .
    - 3.6.2.  $\beta_2 = \beta_2/2$ .Tant que  $y^2$  ne respecte pas les contraintes (a).

★ Le paramètre  $T_C$  permet de donner plus ou moins de poids aux croisements.

★ Le paramètre  $\eta_c$  permet de donner plus ou moins de chance aux enfants de s'éloigner de leurs parents.

Remarque : la condition  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$  est toujours vérifiée du premier coup.

→ Mutation (gaussienne) de paramètres  $(T_M, r)$  :

1. S'il y a eu croisement, tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R > T_M$ , ne rien faire et arrêter le processus de mutation.
3. Si  $R < T_M$  ou s'il n'y a pas eu de croisement, soit  $x$  l'individu à muter :
  - 3.1. Calculer  $\sigma = \frac{1}{r} \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \min(x_i - a_i, b_i - x_i)$ .
  - 3.2. Simuler  $n$  réalisations indépendantes  $\epsilon_i$  suivant la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ .
  - 3.3. Calculer  $S = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$ .
  - 3.4.  $\forall i, \epsilon_i = \epsilon_i - \frac{S}{n}$ .
  - 3.5. Tant que  $x + \epsilon$  ne vérifie pas les contraintes (a), diminuer la perturbation via  $\epsilon = \epsilon/2$ .
  - 3.6. Retourner  $x + \epsilon$ .

★ Le paramètre  $T_M$  permet de donner plus ou moins de poids aux mutations.

★ Le paramètre  $r$  permet de régler la variance pour que les contraintes (a) ne soient pas trop souvent violées et/ou pour que la perturbation soit plus ou moins importante.

Remarque : si  $n$  est grand alors d'après la loi des grands nombres  $\frac{S}{n} \simeq 0$ . Cela assure que l'ajustement ne soit pas trop significatif.

## Élitisme

Pour finir nous appliquons le processus « d'élitisme » utilisé par Deb et al. [4] :

- Une population combinée contenant les anciens et les nouveaux individus est créée ;
- Les individus sont triés selon  $\prec$  ;
- La meilleure moitié des individus est retenue pour former la population de l'itération suivante.

## Interactivité

L'optimisation étant interactive la condition d'arrêt n'est pas utile : l'utilisateur choisit lorsqu'il souhaite arrêter le processus. En revanche comme il est autorisé à modifier les contraintes (b) en cours de processus (entre chaque itération), il convient de préciser comment l'algorithme réagit à une telle modification. Pour cela nous proposons un ajustement automatique des contraintes (a) dans le but de restreindre l'espace de recherche :

1. Séparer la population en deux groupes :
  - Population des allocations non admissibles vis-à-vis des nouvelles contraintes (b) ;
  - Population des allocations encore admissibles pour ces nouvelles contraintes.
2. Au sein de cette seconde population, pour chaque coordonnée  $i$  :
  - 2.1. Calculer la valeur minimale  $a'_i$  et la valeur maximale  $b'_i$  que prend cette coordonnée dans la population.
  - 2.2. Fixer les nouvelles contraintes  $a_i$  et  $b_i$  via :  $a_i = \frac{1}{2}(a_i + a'_i)$  et  $b_i = \frac{1}{2}(b_i + b'_i)$ .

Cette procédure revient à calculer la contrainte (a) « empirique » optimale puis, afin de rester prudent, à retenir la moyenne avec l'ancienne contrainte. Il est alors possible de considérer que les individus ne respectant pas ces nouvelles contraintes (a) sont « suffisamment non admissibles » : ils sont donc supprimés et remplacés par des individus générés aléatoirement. Ainsi à tout moment la population vérifie les contraintes (a), ce qui était souhaité.

## Application au fonds de pension fictif

### Classes d'actifs et moteur ALM

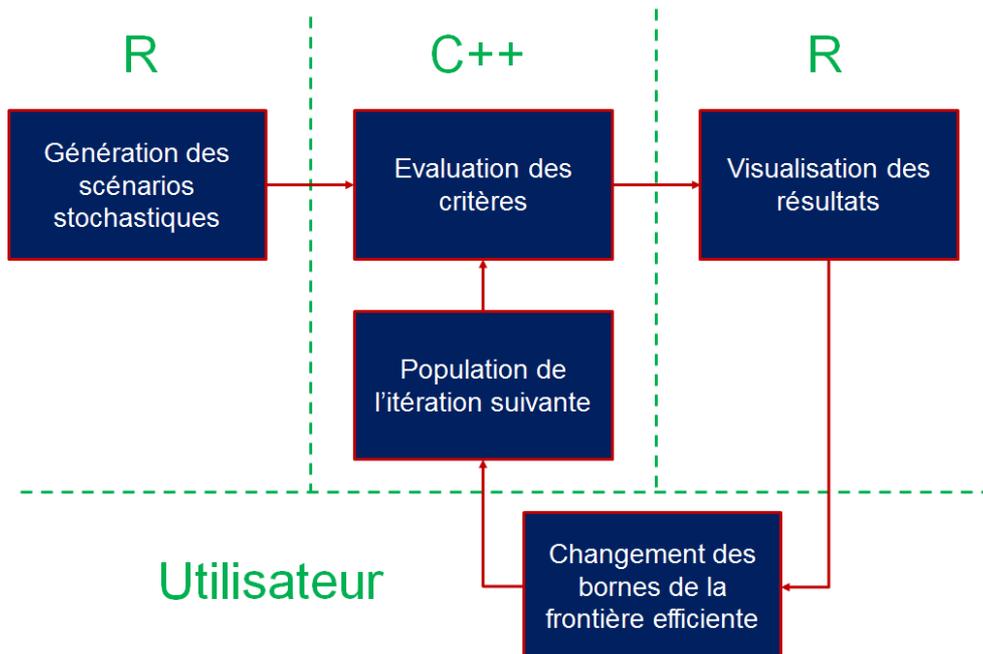
Afin de prendre en compte les différents risques auxquels est soumis le fonds nous retenons les classes d'actifs suivantes :

- O10 : Obligations d'état de maturité 10 ans ( $x_1$ );
- O20 : Obligations d'état de maturité 20 ans ( $x_2$ );
- O30 : Obligations d'état de maturité 30 ans ( $x_3$ );
- M : Classe de placements monétaires ( $x_4$ );
- A : Classe de placements en actions ( $x_5$ );
- I : Classe de placements en immobilier ( $x_6$ );
- Prop : Répartition entre obligations indexées et obligations classiques ( $x_7$ ).

Pour simplifier nous considérons que la classe monétaire a un rendement nul. Cette classe reste utile pour s'assurer que diverses contraintes sont vérifiées, par exemple des contraintes de liquidité. Le modèle d'Ahlgrim décrit précédemment permet alors de générer des scénarios stochastiques et de diffuser toutes les autres classes d'actifs.

Notons que la variable  $x_7$  suppose que la proportion d'obligations indexées est la même pour chaque maturité. Il s'agit d'une hypothèse de modélisation visant à réduire le nombre de composantes du contrôle  $x$ . Nous avons donc  $\sum_{i=1}^6 x_i = 1$  mais les opérateurs génétiques présentés précédemment s'adaptent sans problème à l'ajout de  $x_7$  (sauf l'opérateur mutation pour lequel nous retenons une perturbation gaussienne d'écart-type 1%).

Pour mettre en oeuvre notre approche nous commençons par extraire un ensemble de scénarios stochastiques de  $R$ . Nous chargeons alors ces scénarios sur C++ où sont implémentés l'algorithme et l'évaluation des critères de l'optimisation. Une extraction de différents fichiers de résultats est réalisée entre chaque itération afin que l'utilisateur puissent les visualiser sur  $R$  pendant que l'optimisation suit son cours.



Sauf mention contraire, les paramètres utilisés pour l'algorithme génétique dans toute la suite sont les suivants :

- Taille de la population : 180 ;
- Nombre d'individus tirés dans la sélection par tournoi :  $p = 4$  ;
- Proportion de nouveauté pour l'opérateur de sélection :  $q = 5\%$  ;
- Paramètre de l'opérateur de croisement (SBX) :  $\eta_c = 5$  ;
- Probabilité de croisement :  $T_C = 80\%$  ;
- Paramètre de la mutation gaussienne :  $r = 10$  ;
- Probabilité de mutation (si croisement) :  $T_M = 50\%$ .

Enfin et afin d'aider à l'interprétation des résultats présentés ci-dessous nous précisons qu'aucun calcul n'est parallélisé et que les caractéristiques de notre machine sont les suivantes :

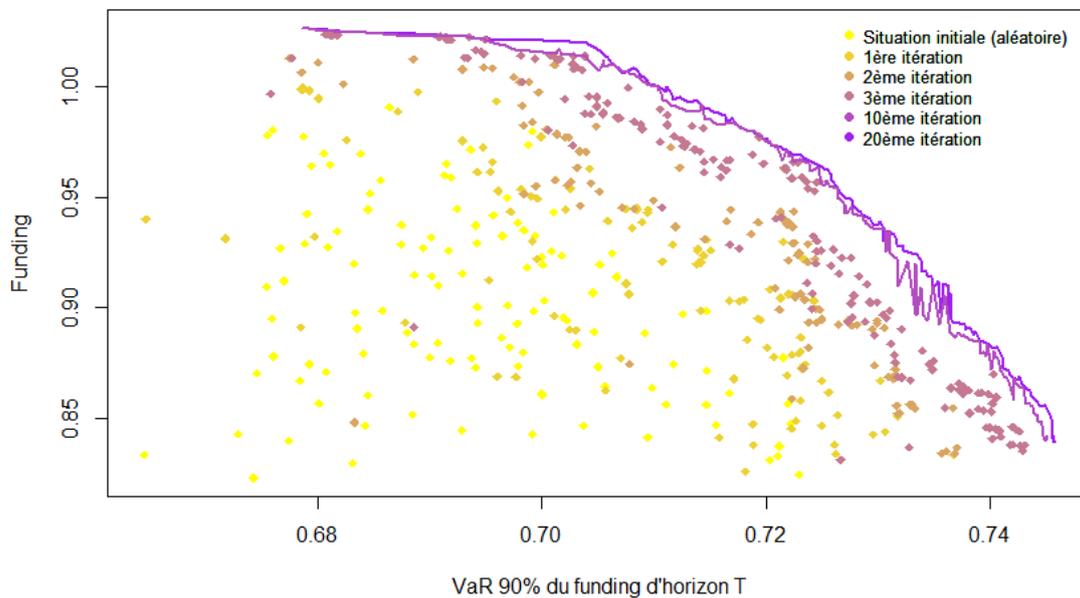
- Ordinateur Lenovo Thinkpad T470s ;
- Système d'exploitation Windows 10 Entreprise 2016 LTSC 64 bits ;
- Processeur Intel Core i5-6300U CPU @ 2.40GHz 2.50 GHz vPro inside ;
- Mémoire (RAM) 8 Go DDR4-2133 ;
- Carte graphique Intel HD Graphics 650.

## Un cas classique à deux critères

Dans un premier temps nous testons notre algorithme sur un cas classique d'optimisation à deux critères en retenant :

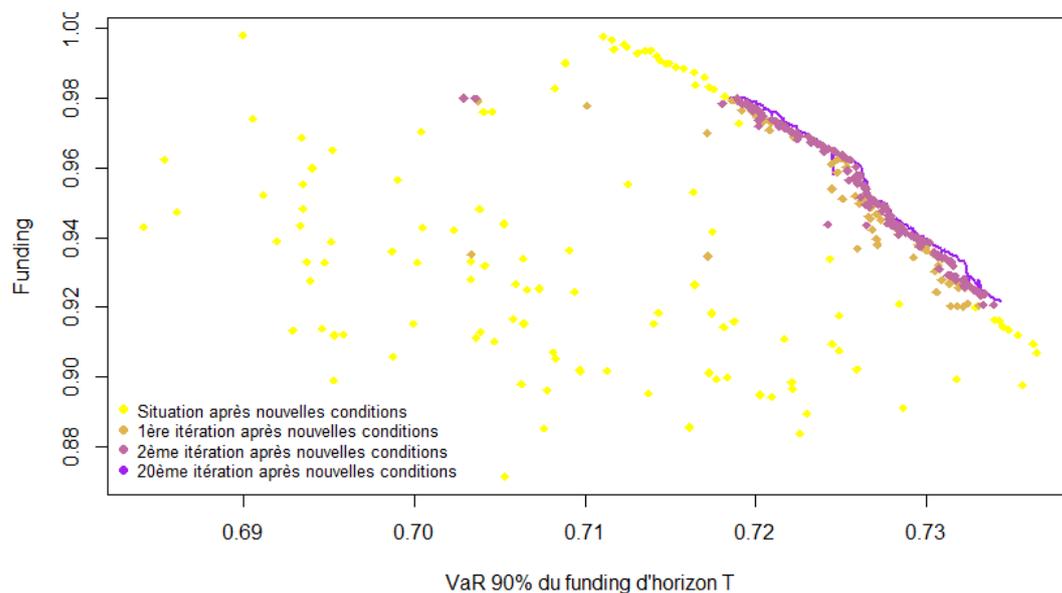
- le rapport de l'actif sur le passif en valeur économique à  $T = 30$  ans comme critère de rendement (noté *funding* dans la suite) ;
- le quantile à 10% (i.e. la VaR d'horizon  $T$ ) de ce *funding* comme critère de risque.

Nous obtenons le résultat suivant :



Ce graphe illustre la rapide convergence qui est observée (temps de calcul : 1 minutes et 20 secondes par itération). Ainsi dans le cas classique à deux critères l'algorithme est capable de déterminer la frontière efficiente numériquement sur la base de scénarios stochastiques. En ce sens l'approche peut être vue comme une généralisation de celle de Markowitz.

Nous testons ensuite l'aspect interactif de l'algorithme en modifiant les contraintes (b). Pour cela nous imposons que les niveaux de funding se situent entre 92% et 98%. Comme expliqué précédemment l'algorithme ajuste alors les contraintes (a) automatiquement et remplace plusieurs individus dans la population par des individus aléatoires.



Les points jaunes sur ce graphe représentent la population après remplacement des individus ne respectant pas les nouvelles contraintes (a) : c'est la raison pour laquelle certains sont éloignés de la frontière efficiente. Nous remarquons que la convergence est quasi-instantanée, ce qui était attendu puisque l'algorithme ne repart pas de zéro et utilise les informations des itérations précédentes. En revanche la connaissance de la frontière efficiente est affinée car l'algorithme n'a plus à rechercher de solutions en dehors de la fourchette 92-98%.

Pour finir, donnons une rapide description des allocations qui mènent à cette portion de frontière efficiente. Ces dernières sont comprises entre les bornes données ci-dessous :

	O10	O20	O30	M	A	I	Prop
Valeur minimale	10,5%	22,6%	16,9%	1,0%	17,6%	8,6%	59%
Valeur maximale	13,7%	33,5%	30,8%	1,2%	25,4%	11,5%	65%

Ainsi dans cette application atteindre le niveau de *funding* visé à horizon 30 ans nécessite de réaliser des investissements assez conséquents en actions et immobilier (environ 30% des placements) mais de se couvrir contre les variations d'inflation avec environ 60% de l'actif obligataire indexé sur l'inflation. De plus la remontée des taux prévue par le modèle semble conduire à adopter une politique de durée moyenne et à ne pas investir massivement dans les obligations de maturité 30 ans.

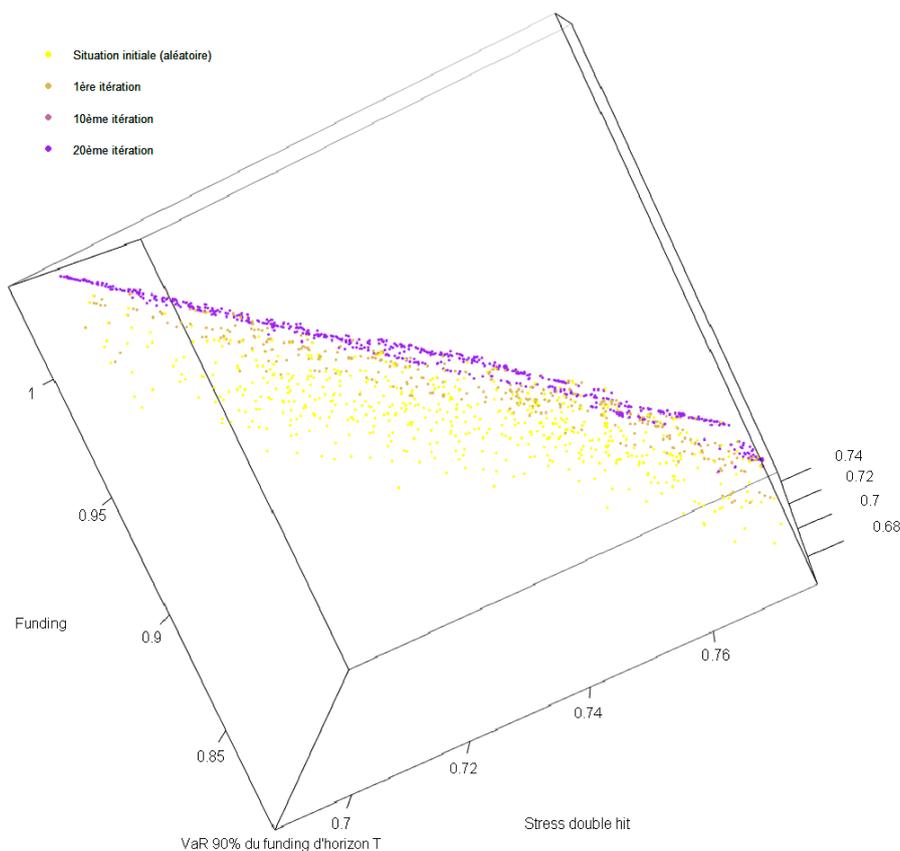
### Ajout de critères

Dans l'application précédente nous avons vu que le modèle conduit à ne pas adopter une politique de durée trop longue et à investir environ 30% de l'actif en actions et immobilier. Or toute modélisation des marchés financiers est discutable et reste subjective, tandis qu'adopter une politique de durée moyenne est un élément important de la stratégie du fonds. De ce fait il est intéressant de chercher à nuancer le résultat obtenu pour que les décideurs puissent prendre une décision réfléchie en comprenant bien les enjeux et les risques associés.

Dans ce but nous ajoutons un troisième critère représentant la mesure du *funding* dans un scénario stressé des marchés financiers. Le critère évalue ainsi la robustesse des allocations dans un scénario défavorable et redouté par les décideurs. Pour déterminer les chocs à appliquer nous nous sommes inspirés des travaux de l'EIOPA [7][8] et notamment du scénario *double hit*. Nous retenons le scénario stressé « simplifié » suivant :

- Les courbes des taux sans risque (nominaux et réels) baissent subitement de 1% sur toutes les maturités ;
- Les actions baissent subitement de 35% ;
- L'immobilier baisse subitement de 20%.

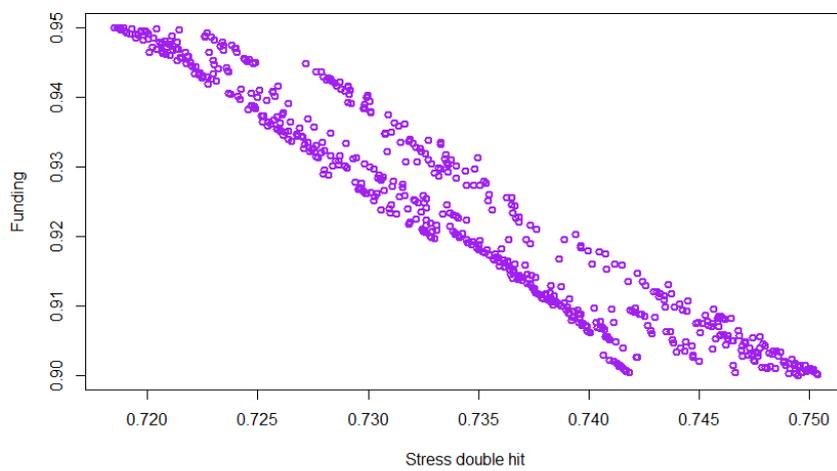
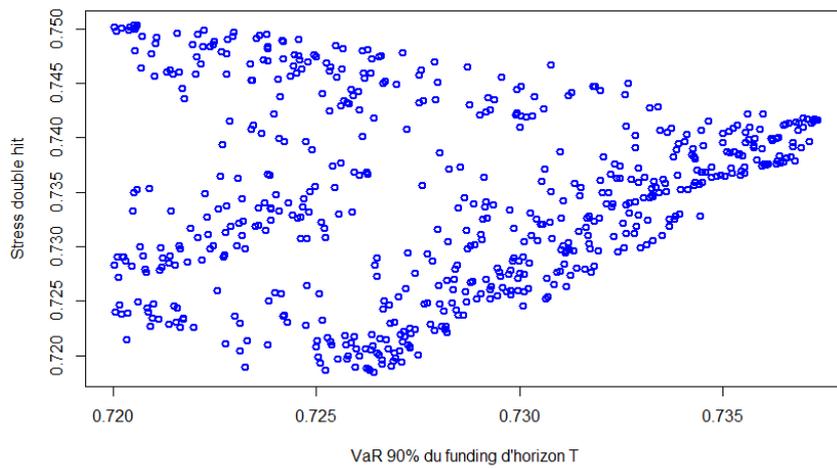
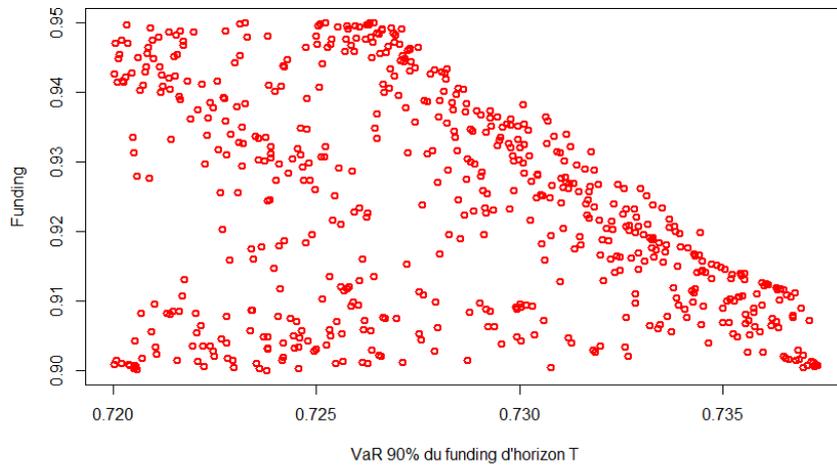
Afin de prendre en compte l'augmentation de la dimension de la frontière efficiente nous augmentons la taille de la population en la fixant à 600. Nous obtenons alors le résultat suivant :



Sur ce graphe nous voyons qu'effectivement la frontière efficiente est plus difficile à visualiser en grande dimension. Avec le plan de coupe choisi il est tout de même possible de remarquer que les points violets dominent les autres points, donc que la convergence a bien lieu. Nous observons également que les points (même non optimaux) ne se répartissent que dans certaines régions de l'espace en raison de la corrélation des critères. Notons enfin que la convergence est un peu plus lente (temps de calcul : 4 minutes et 20 secondes par itération) car la taille de la population est plus importante.

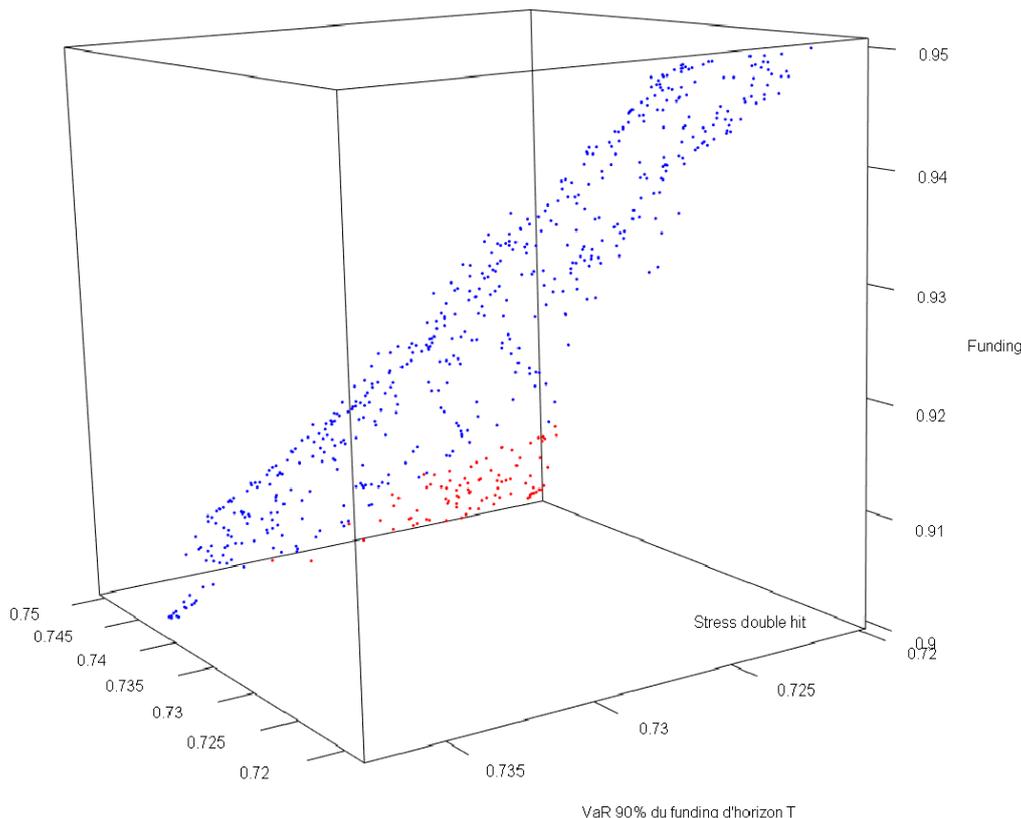
C'est pour répondre à ces différentes limitations que l'interactivité de l'approche prend tout son sens : elle permet d'accélérer la convergence et de « restreindre » la frontière à visualiser. Le décideur peut également apprendre du problème au fur et à mesure et, si besoin, procéder par tâtonnements pour l'analyse des résultats. Compte tenu de la complexité du problème il s'agit d'un apport non négligeable.

Afin d'analyser la frontière efficiente et de la visualiser de manière plus parlante, une possibilité est de représenter la population optimale sur des graphes bi-critères :



Ces représentations permettent de vérifier que les frontières efficientes 2D sont bien incluses dans la frontière efficiente 3D au sens suivant :  $\mathcal{F}_{2D}$  est incluse dans  $\mathcal{F}_{3D}$  si :  
 Pour tout  $x^{2D} = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2D}$  il existe  $x_3$  tel que  $x^{3D} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{F}_{3D}$ .  
 La démonstration de ce résultat est immédiate par l'absurde. Sur les graphes précédents les frontières efficientes 2D sont bien identifiables : elles sont dessinées sur chaque graphe par les « points supérieurs » (ceux qui sont au-dessus des autres points).

En se plaçant par exemple dans la peau d'un décideur très averse au risque, nous pouvons imaginer que ce dernier va choisir (après visualisation et analyse des résultats) de ne s'intéresser qu'aux allocations très « résistantes » ( $stress \geq 74,5\%$ ) en rouge sur le graphe suivant :



Ces allocations correspondent à des niveaux de *funding* un peu plus faibles que ceux retenus dans le cas à deux critères, mais en contrepartie les valeurs de la VaR et du *funding* stressé sont plus prudentes. Les contrôles optimaux deviennent :

	O10	O20	O30	M	A	I	Prop
Valeur minimale	5,4%	25,2%	25,9%	1,0%	7,9%	10,8%	56,1%
Valeur maximale	16,8%	35,1%	45,5%	1,1%	11,3%	13,7%	64,7%

Nous observons sans surprise que ce sont les investissements qui semblent peu risqués qui permettent d'obtenir de tels résultats. Par rapport au cas à deux critères nous observons également que les investissements en actions et en immobilier ont diminué (20% contre 30% auparavant) pour obtenir une meilleure résistance au risque et au stress. En revanche les investissements obligataires ont augmenté et les résultats semblent plutôt mener à une politique de duration longue. Cela est cohérent car dans le scénario stressé la remontée des taux est moins importante.

## Conclusion

Dans cet article nous proposons une approche d'optimisation multi-objectifs et interactive pour répondre à la problématique de l'allocation stratégique d'actifs. Cette approche consiste à autoriser le décideur à modifier les contraintes du problème en cours d'optimisation pour concentrer la recherche sur certaines portions de la frontière efficiente. De cette façon il peut inclure l'impact de décisions stratégiques et subjectives au fur et à mesure.

Une telle approche permet également de généraliser plus facilement les méthodes d'optimisation multi-objectifs à un grand nombre de critères, et donc d'ajouter des critères de décision supplémentaires tels que des stress ou des chocs pour nuancer les résultats obtenus par un modèle seul. En contrepartie la visualisation de la frontière efficiente peut s'avérer plus difficile, c'est pourquoi il est envisageable d'utiliser des techniques de *data visualization* pour analyser les résultats.

La rapidité est un prérequis pour donner du sens à l'interactivité car dans le cas contraire il n'est pas possible d'interagir avec l'algorithme « en temps réel ». Nous avons considéré le cas d'un fonds de pension fictif dont le portefeuille est peu optionnel (uniquement une revalorisation par l'inflation) mais la rapidité des calculs peut sembler plus délicate à obtenir dans d'autres cas plus complexes. Néanmoins notre conviction personnelle est que les outils actuellement utilisés par les institutions financières se perfectionneront dans un futur proche, en profitant notamment des progrès en matière de parallélisation des calculs et de la popularisation des services de *cloud computing* (comme le service de calcul haute performance proposé par *Amazon Web Services*).

## Bibliographie

- [1] K. C. AHLGRIM, S. P. D'ARCY et R. W. GORVETT : Modeling financial scenarios : a framework for the actuarial profession. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, p. 177–238, Novembre 2005.
- [2] K. DEB et R. AGRAWAL : Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems Vol. 9*, p. 115–148, 1995.
- [3] K. DEB et H. JAIN : An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part I : Solving problems with box constraints. *Evolutionary Computation Vol. 18 No. 4*, p. 577–601, 2014.
- [4] K. DEB, A. PRATAP, S. AGARWAL et T. MEYARIVAN : A fast elitist multiobjective genetic algorithm : NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation Vol. 6 No. 2*, p. 182–197, Avril 2002.
- [5] L. DEVROYE : *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag, 1986.
- [6] G. di TOLLO, T. STÜTZLE et M. BIRATTARI : A metaheuristic multi-criteria optimisation approach to portfolio selection. *Journal of Applied Operational Research Vol. 6 No. 4*, p. 222–242, Janvier 2014.
- [7] EUROPEAN INSURANCE AND OCCUPATIONAL PENSIONS AUTHORITY : 2016 EIOPA insurance stress test report, Décembre 2016. Référence EIOPA 16/302.
- [8] EUROPEAN INSURANCE AND OCCUPATIONAL PENSIONS AUTHORITY : IORP stress test 2017 specifications, Mai 2017. Référence EIOPA-BoS-17/075v2.
- [9] H. JAIN et K. DEB : An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part II : Handling constraints and extending to and adaptive approach. *Evolutionary Computation Vol. 18 No. 4*, p. 602–222, 2014.
- [10] J. LEHMAN et K. O. STANLEY : Abandoning objectives : Evolution through the search for novelty alone. *Evolutionary Computation Vol. 19 No. 2*, p. 189–223, 2011.
- [11] H. MARKOWITZ : Porfolio selection. *The Journal of Finance Vol. 7 No. 1*, p. 77–91, Mars 1952.
- [12] H. MARKOWITZ : *Portfolio selection : efficient diversification of investments*. Cowles foundation for research in economics at Yale University, Monograph 16, 1959.
- [13] C. MONIN : Optimisation multiobjectif de l'allocation stratégique par un algorithme génétique, Janvier 2014. Mémoire de fin d'études (ISFA).
- [14] F. PLANCHET, P. THÉRON et A. KAMEGA : *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*. Economica, 2009.



---

## Executive Summary

---

# Optimal strategic assets allocations: a multi-objective and interactive approach

EXECUTIVE SUMMARY - MAXENCE PIERRAT

**Keywords:** asset-liability management, strategic assets allocation, multi-criteria optimization, risk management, interactivity, metaheuristic, genetic algorithm.

---

## Abstract

The optimal strategic assets allocation issue is complex and involves numerous stakes. In order to take this aspect into account it is possible to use a multi-objective optimization method and to determine an efficient frontier. Searching for this frontier and visualizing it can be quite difficult with a high number of criteria. Besides, the issue is strategic and selecting an allocation can require a better understanding of the problem on specific regions of the frontier. That's why this paper suggests an interactive multi-objective optimization approach: during optimization the user is allowed to change the problem constraints in order to incorporate the impact of strategic decisions. For this a genetic algorithm is used. Therefore the suggested approach is no longer a simple model, it becomes an actual decision-making tool.

---

## Introduction

As early as in the 50's Markowitz [11][12] showed the interest of multi-objective optimization methods for the strategic assets allocations issue. These methods rely on the determination of an *efficient frontier* (a set of solutions) which can be interpreted as a generalization of the optimality concept with multiple optimization criteria.

The mathematical definition of this frontier is based on the notion of domination. Let  $C_1, \dots, C_M$  be the different optimization criteria and assume, without loss of generality, that we aim to maximize them. Let  $x$  and  $y$  be two allocations, then:

$$x \text{ dominates } y \iff \forall m \in [1, M], C_m(x) \geq C_m(y) \text{ and } C_m(x) > C_m(y) \text{ for at least one } m$$

The efficient frontier is the set of the non-dominated solutions.

Modeling complex portfolios with interactions between assets and liabilities often requires to determine the efficient frontier numerically (by using stochastic scenarios). This can be achieved by metaheuristics such as NSGA-II and NSGA-III (Deb. et al [4][3][9]).

However when the number of optimization criteria is greater than 2 or 3, the efficient frontier's dimension becomes higher. Then it is uneasy to visualize it and analyze it in high dimension. This is because the definition of the efficient frontier is not selective enough: it only consists in excluding "obviously uninteresting" allocations for which it is possible to find a better one in regards to every criterion simultaneously.

Besides, the issue is highly strategic. Therefore subjectivity is a part of it and it is important for the decision-maker to have a full understanding of the problem and the trade-off he might realize between the different criteria. That's why this paper suggests an interactive approach by allowing the decision-maker to change the problem constraints during optimization. This way he has the opportunity to progressively incorporate the impact of strategic decisions.

Such an approach places the decision-maker at the heart of the process and significantly improves its understanding of the problem: progressively he can focus on certain regions of the research space and/or reconsider his choices and go back if necessary. It also allows for a higher convergence rate since the research space is narrowed by the decision-maker's new constraints.

In what follows we illustrate the approach on the example of a theoretical pension fund and we use a genetic algorithm. Like every metaheuristic, genetic algorithms can integrate insights on the issue to improve their efficiency: that's why we present new genetic operators specifically adapted to treat the issue and which can deal with interactivity. The results obtained are then described and commented.

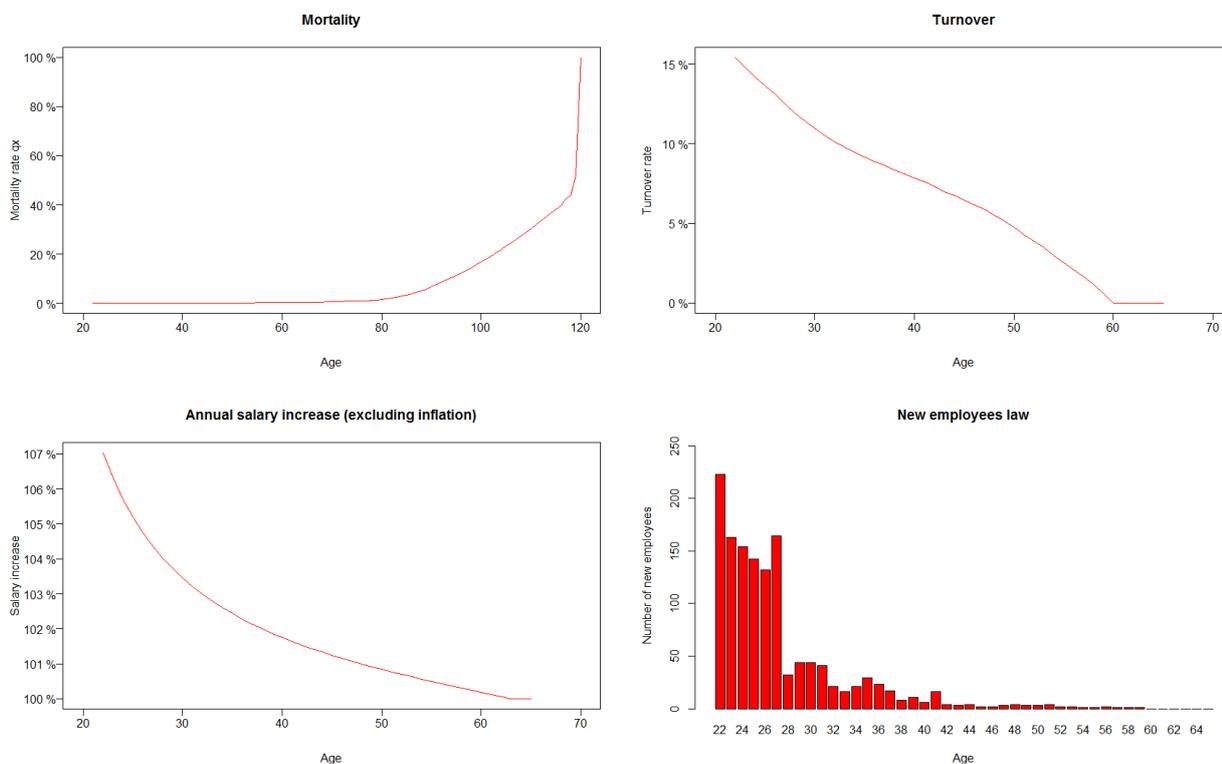
## The theoretical pension fund studied

### Context and liabilities

We study a theoretical pension fund based in the UK and offering inflation-linked annuities at retirement for employees and former employees of a company. This fund is assumed to have 80 years of activity in the past. The annuity is proportional to the final salary and the number of years of service in the company. Therefore there are three categories of people:

- Active members i.e. today's employees;
- Deferred members i.e. former employees;
- Retired members.

In order to be able to model the evolution of the fund commitment with an economic scenario generator, we assume perfect indexation to inflation (even in the case of negative inflation) and use deterministic projection laws:



### Assets modeling

For the sake of simplicity again and in order to focus on the suggested approach, we use the Ahlgrim et al. [1] model as the economic scenario generator. In particular we exploit its implementation on  $R$  by Planchet et al. [14] to get stochastic scenarios.

Let  $q$ ,  $r$ ,  $x$  and  $z$  denote inflation, real rates, equity risk premium and real estate returns. By using classical notations for Vasicek, Hull and White, and Black and Scholes models, we use the following parameters:

Inflation Vasicek			Real rates Hull-White					Equity Black-Scholes		Real estate Vasicek		
$\kappa_q$	$\mu_q$	$\sigma_q$	$\kappa_r$	$\sigma_r$	$\kappa_l$	$\mu_l$	$\sigma_l$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\kappa_z$	$\mu_z$	$\sigma_z$
0,120	1,5%	0,45%	0,397	0,3%	0,351	0,7%	0,2%	1,4%	9,8%	0,062	3,4%	1,6%

We also use the same correlation matrix than Planchet et al. [14] and the following initialization:

$l_0$	$r_0$	$q_0$	$z_0$
0,6%	0,3%	0,8%	3,0%

All these parameters were determined from the values given by Planchet et al. [14] which have been adjusted in order to reflect the current situation on financial markets and the specificities of the UK market. Notice that the economic scenario generator chosen does not affect the generality of the approach, which remains valid as long as optimization criteria can be measured by using stochastic scenarios.

## A new genetic algorithm

Genetic algorithms are a special case of metaheuristics able to search for an efficient frontier. Because of their popularity, and since they have already been used on the issue (see Monin [13] or di Tollo et al. [6]) we decide to use them in our study.

Scientific literature about genetic algorithms is very rich. Therefore we do not describe them exhaustively in this paper, but it is important to notice that such an algorithm is very flexible. When designing one it is possible to incorporate insights about the issue. Besides, classical open source implementations do not allow for an interactive approach. That's why we suggest a new algorithm adapted to our particular case, described below and implemented on C++.

### The problem constraints

In what follows we represent mathematically an allocation by a vector (often denoted by  $x$ ) of dimension  $n$  which coordinates  $(x_i, i \in [1, n])$  refer to the allocations in each assets class. Then we distinguish two types of constraints:

→ (a) constraints immediately measurable i.e. which do not require to call the model. In our study

we use the constraints  $a_i \leq x_i \leq b_i$ ; and of course the natural constraint  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ .

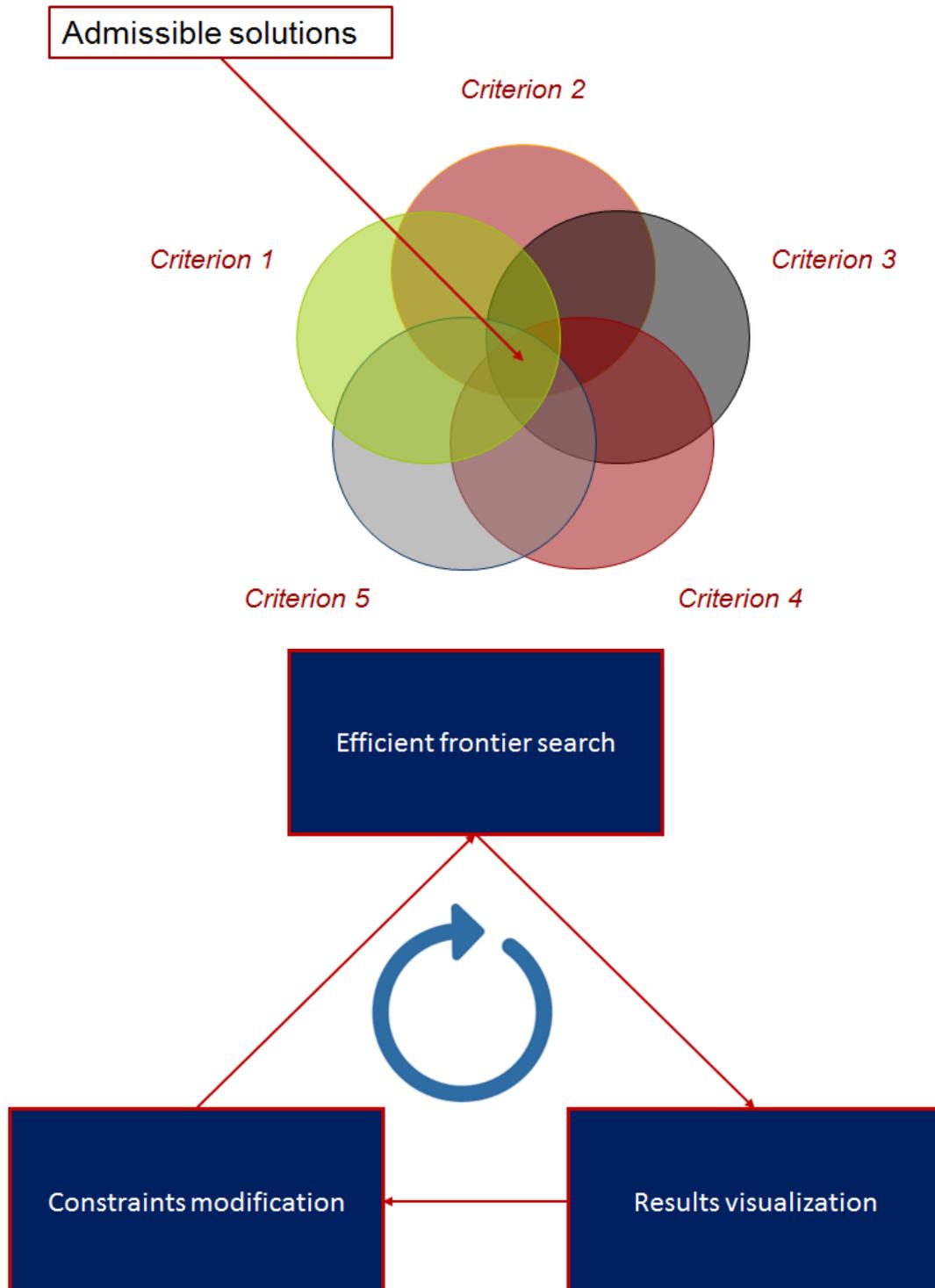
→ (b) constraints which require to call the model. In this study we assume only optimization criteria are measured by the model and we use constraints  $u_m \leq C_m \leq v_m$  (where  $C_m$  represents an optimization criterion).

This distinction is important because it allows one to avoid including some "non-admissible" solutions in the algorithm's population. Indeed it is always possible to make sure that type (a) constraints are verified.

## Interactive optimization

The main idea behind the proposed algorithm is to allow the user to change type (b) constraints during optimization. This means the user has the opportunity to narrow the search to a part of the efficient frontier in order to improve the results accuracy on this part and to exclude uninteresting solutions outside this part.

A circle represents the values allowed by the user for a given criterion



## Random individual sampling

Random individual sampling is useful to create the initial population and to apply the novelty concept (Lehman and Stanley [10]). Below we give a uniform and fast sampling method on the set  $\mathcal{P} = \{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ and } \forall i, a_i \leq x_i \leq b_i\}$ .

Such a method is equivalent to being able to simulate a Dirichlet distribution  $\mathcal{D}(1, \dots, 1)$  truncated by  $a_i$  and  $b_i$  on each coordinate. Let  $g$  be the density of this law and  $g_i$  be the  $i^{\text{th}}$  marginal density. The method relies on the formula:

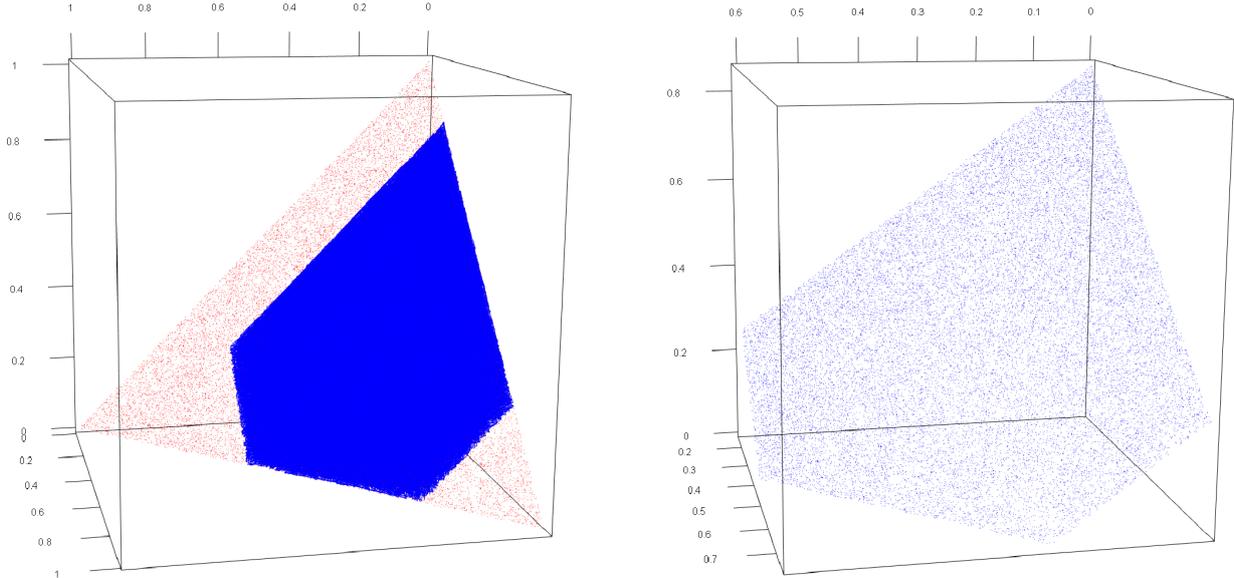
$$g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2|x_1)\dots g_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$

Devroye [5] (*theorem 4.2* p.595) demonstrates that these conditional laws can be expressed using the truncated beta  $\beta$  distribution, which leads to the following sampling method:

1.  $\forall i, a_i^* = \max(a_i, b_i + 1 - \sum_{i=1}^n b_i)$  and  $b_i^* = \min(b_i, a_i + 1 - \sum_{i=1}^n a_i)$ .
2. Simulate  $x_1$  by a  $\beta(1, n-1)$  distribution left and right truncated by  $a_1^*$  et  $b_1^*$ .
3. For each  $i$  from 2 to  $n-1$ :
  - 3.1.  $D = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} x_j$ .
  - 3.2. Simulate  $x_i$  by a beta  $\beta(1, n-i)$  distribution left and right truncated by  $\frac{a_i^*}{D}$  et  $\frac{b_i^*}{D}$ .
  - 3.3.  $x_i = Dx_i$ .
4.  $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ .

Generating allocations in the set  $\mathcal{P}$  (in blue below) rather than the set  $\{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$  (in red below) allows one to be sure that type (a) constraints are always verified. Therefore it is an improvement compared to standard methods.

Generation in  $\mathcal{P}$  in dimension 3 with  $a_1 = 0, a_2 = 0.15, a_3 = 0.23, b_1 = 0.6, b_2 = 1$  and  $b_3 = 0.74$



## Inviduals comparison

We compare individuals to each other by using the same  $\prec$  operator than Deb. et al [4] in the NSGA-II algorithm, so the reader may refer to the bibliography for further information.

## Genetic operators: selection, crossover, mutation

We use standard but adapted genetic operators, mainly to respect type (a) constraints. These are described below. We also add novelty (Lehman and Stanley [10]) in the selection operator.

→ Tournament selection of parameters  $(p, q)$ :

1. Sample a uniform variable  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. If  $R < q$ , generate a random individual and select it.
3. Else do a tournament selection of parameter  $p$ :
  - 3.1. Sample  $p$  individuals  $x^i$ ,  $i = 1..p$  from the population.
  - 3.2. Order the  $x^i$  by finding the  $i_j$  such that  $x^{i_1} \prec \dots \prec x^{i_p}$ .
  - 3.3. Select  $x^{i_p}$  (the best  $x^i$ ).

★  $p$  allows one to choose a trade-off between exploitation of available information (high  $p$ ) and prevention of premature convergences (low  $p$ ).

★  $q$  represents the weight of novelty.

→ Crossover of parameters  $(T_C, \eta_c)$  inspired from SBX operator (Deb et al. [2]):

1. Sample a uniform variable  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. If  $R > T_C$ , do not do anything.
3. Else apply the following crossover operator to parents  $x^1$  and  $x^2$ :
  - 3.1. Sample a new uniform variable  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
  - 3.2. If  $u < 0.5$ ,  $\beta = (2u)^{\frac{1}{\eta_c+1}}$ .
  - 3.3. Else if  $u \geq 0.5$ ,  $\beta = \frac{1}{2(1-u)^{\frac{1}{\eta_c+1}}}$ .
  - 3.4. Initialization:  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .
  - 3.5. First offspring ( $y^1$ ). Do:
    - 3.5.1.  $y^1 = 0.5(x^1(1 - \beta_1) + x^2(1 + \beta_1))$ .
    - 3.5.2.  $\beta_1 = \beta_1/2$ .While  $y^1$  does not respect type (a) constraints.
  - 3.6. Second offspring ( $y^2$ ). Do:
    - 3.6.1.  $y^2 = 0.5(x^1(1 + \beta_2) + x^2(1 - \beta_2))$ .
    - 3.6.2.  $\beta_2 = \beta_2/2$ .While  $y^2$  does not respect type (a) constraints.

★  $T_C$  represents the weight of crossovers in the algorithm.

★  $\eta_c$  regulates how far children may move away from their parents.

Notice that  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$  is always verified on the first try.

→ (Gaussian) mutation of parameters  $(T_M, r)$ :

1. If there was a crossover, sample a uniform variable  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. If  $R > T_M$ , do not do anything.
3. Else if  $R < T_M$  or if there wasn't a crossover, mutate individual  $x$  with the following operations:
  - 3.1. Define  $\sigma = \frac{1}{r} \min_{i \in [1, n]} \min(x_i - a_i, b_i - x_i)$ .
  - 3.2. Sample  $n$   $\epsilon_i$  from the normal distribution  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ .
  - 3.3. Compute  $S = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$ .
  - 3.4. Adjust  $\epsilon$ :  $\forall i, \epsilon_i = \epsilon_i - \frac{S}{n}$ .
  - 3.5. Do  $\epsilon = \epsilon/2$  while  $x + \epsilon$  does not respect type (a) constraints.
  - 3.6. Return  $x + \epsilon$ .

★  $T_M$  represents the weight of mutations in the algorithm.

★  $r$  allows one to adjust the variance to avoid type (a) constraints violation and/or adjust the range of the perturbation.

Notice that for a high  $n$  and according to the law of large numbers  $\frac{S}{n} \simeq 0$  so the adjustment will most likely not be meaningful.

## Elitism

Finally we apply the same "elitism procedure" than Deb et al. [4] in the NSGA-II algorithm:

- A combined population gathering parents and offspring is created
- Individuals are sorted according to  $\prec$
- The best half of the individuals is used to form the population of the next iteration

## Interactivity

With interactivity there is no need for a termination criterion: the user choses when to stop. However since the user is allowed to change type (b) constraints during the process (between each iteration) it is necessary to explain how the algorithm reacts to such a modification. For this we choose an automated procedure adjusting type (a) constraints in order to narrow the research space:

1. Split the population into two groups:
  - Non-admissible allocations in regards to the new type (b) constraints
  - Admissible allocations for these new constraints
2. Beyond this second population, for each assets class  $i$ :
  - 2.1. Compute the minimal value  $a'_i$  and the maximal value  $b'_i$  taken by the allocations in assets class  $i$
  - 2.2. Set the new constraints  $a_i$  and  $b_i$  to:  $a_i = \frac{1}{2}(a_i + a'_i)$  and  $b_i = \frac{1}{2}(b_i + b'_i)$ .

This procedure consists in determining the "empirical" optimal type (a) constraints and, in order to be conservative, averaging them with the old constraints. Then it is possible to consider that individuals not verifying the new type (a) constraints are "enough non-admissible": that's why we replace them by new random individuals. This way as was intended the population always verify type (a) constraints.

## Application to the theoretical pension fund

### Assets classes and model

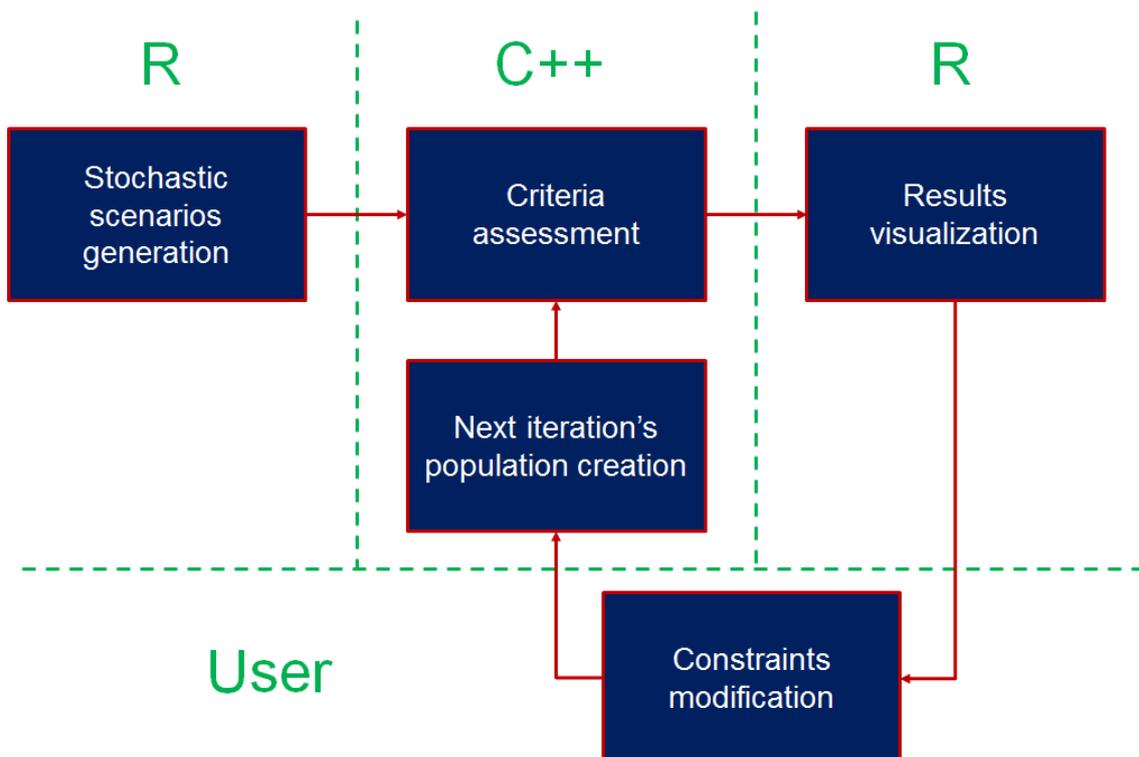
In order to take into account the different risks the fund is subject to we choose the following assets classes:

- B10: 10 years government bonds ( $x_1$ )
- B20: 20 years government bonds ( $x_2$ )
- B30: 30 years government bonds ( $x_3$ )
- C: Cash investments ( $x_4$ )
- E: Equity ( $x_5$ )
- R: Real estate ( $x_6$ )
- B: balance between inflation-linked bonds and classical bonds ( $x_7$ )

For the sake of simplicity we consider that cash investments have zero return. This class remains useful in order to consider constraints such as liquidity constraints. Then the Ahlgrim model described above can generate stochastic scenarios for each assets class.

Notice that  $x_7$  assumes that the balance between inflation-linked and classical bonds is the same for each maturity. This is a simple way to reduce the dimension of  $x$ . Then  $\sum_{i=1}^6 x_i = 1$  but genetic operators previously introduced perfectly adapt to  $x_7$  (excepted for the mutation operator for which we use a gaussian perturbation of standard deviation 1%).

In order to test our approach we first extract a set of stochastic scenarios from  $R$ . Then we load them as inputs on C++ where are implemented the algorithm and the criteria assessment. At each iteration different results are extracted from C++ in order to allow the user to visualize them on  $R$  while the optimization process still goes on.



Unless otherwise specified, the parameters used are given below:

- Population size: 180
- Number of individuals in tournament selection:  $p = 4$
- Novelty in the selection operator:  $q = 5\%$
- Crossover operator parameter:  $\eta_c = 5$
- Crossover probability:  $T_C = 80\%$
- Gaussian mutation parameter:  $r = 10$
- Mutation probability (if crossover):  $T_M = 50\%$

Finally we indicate that we do not make use of parallel processing and that our machine characteristics are:

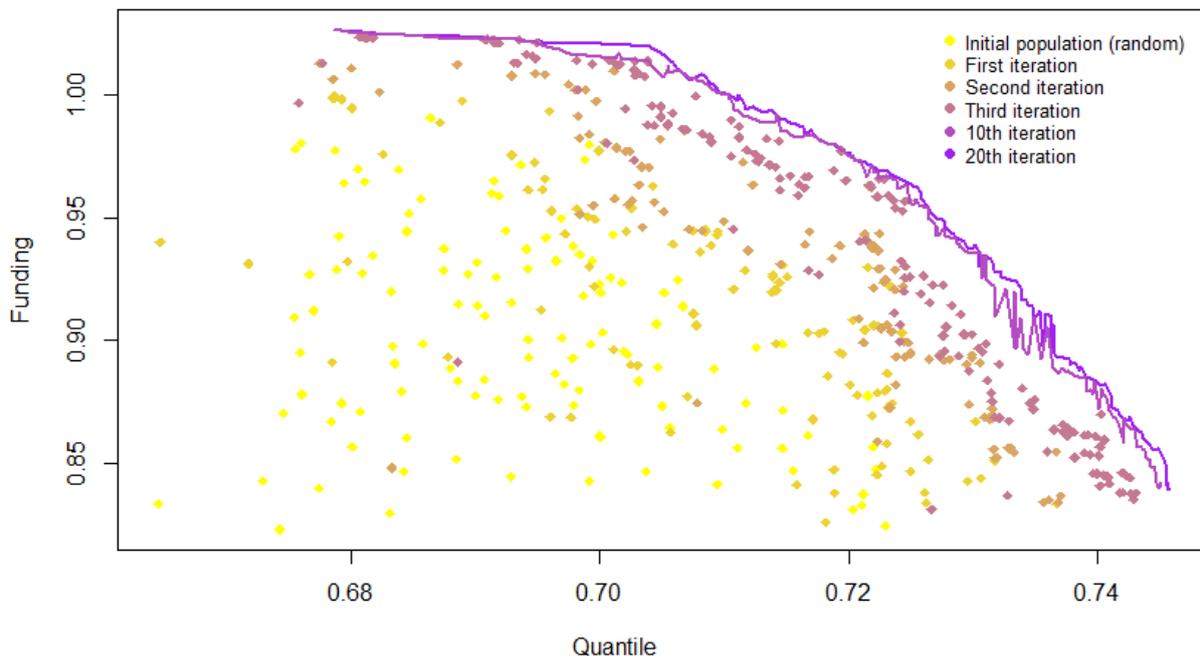
- Lenovo Thinkpad T470s computer
- Operating system Windows 10 Enterprise 2016 LTSC 64 bits
- Processor Intel Core i5-6300U CPU @ 2.40GHz 2.50 GHz vPro inside
- Memory (RAM) 8 Go DDR4-2133
- Graphic card Intel HD Graphics 650

### A classical two-criteria optimization problem

We start with a two-criteria optimization problem and with:

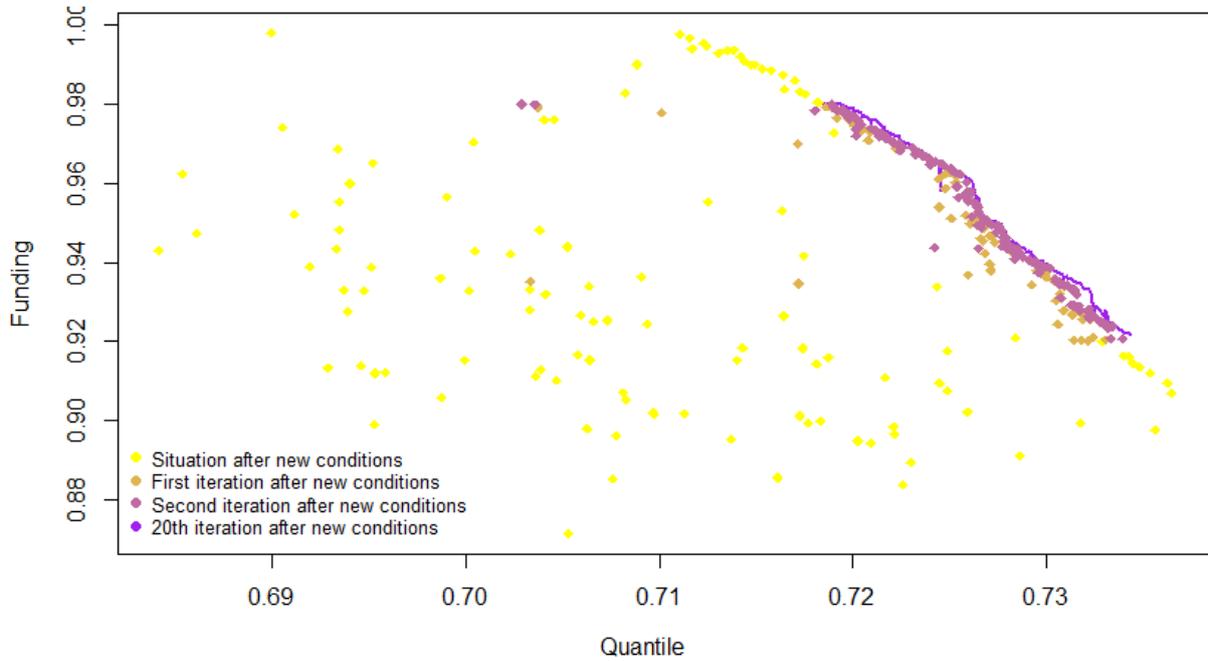
- the ratio of assets over liabilities in economic values at  $T = 30$  years as a return criterion (denoted by funding)
- Its 10% quantile (i.e. the horizon  $T$  Value-at-Risk) as a risk criterion

We obtain the following result:



This graph shows a quick convergence (computation time: 1 minute and 20 seconds per iteration): in a classical two-criteria optimization problem the algorithm is able to characterize the whole efficient frontier, so the approach can be viewed as a generalization of Markowitz’s approach.

We then test the interactivity by changing the type (b) constraints and narrowing the search to funding levels between 92% and 98%. Then, as explained before, the algorithm automatically adjusts the type (a) constraints and replaces several individuals in the population by random individuals.



The yellow points on this graph represent the population after replacement of the individuals not respecting the type (a) constraints: that's why these points are sometimes far from the efficient frontier. Notice that the convergence is almost instantaneous because the algorithm uses the information from the previous iterations. Besides, the knowledge of the efficient frontier is better because the algorithm no longer need to search for solutions outside the range 92-98%.

Let us give now a short description of the allocations leading to this part of the efficient frontier. They are between the following bounds:

	B10	B20	B30	C	E	R	B
Minimum value	10,5%	22,6%	16,9%	1,0%	17,6%	8,6%	59%
Maximum value	13,7%	33,5%	30,8%	1,2%	25,4%	11,5%	65%

In this application reaching the targeted funding levels requires to realize relatively important risky investments in equity and real estate (about 30% of assets) but to hedge against inflation risk with a portfolio highly indexed to inflation (about 60% of the bonds portfolio). Moreover the increase in interest rates projected by the model does not lead to allocate massively in 30 years maturity bonds.

### Adding criteria

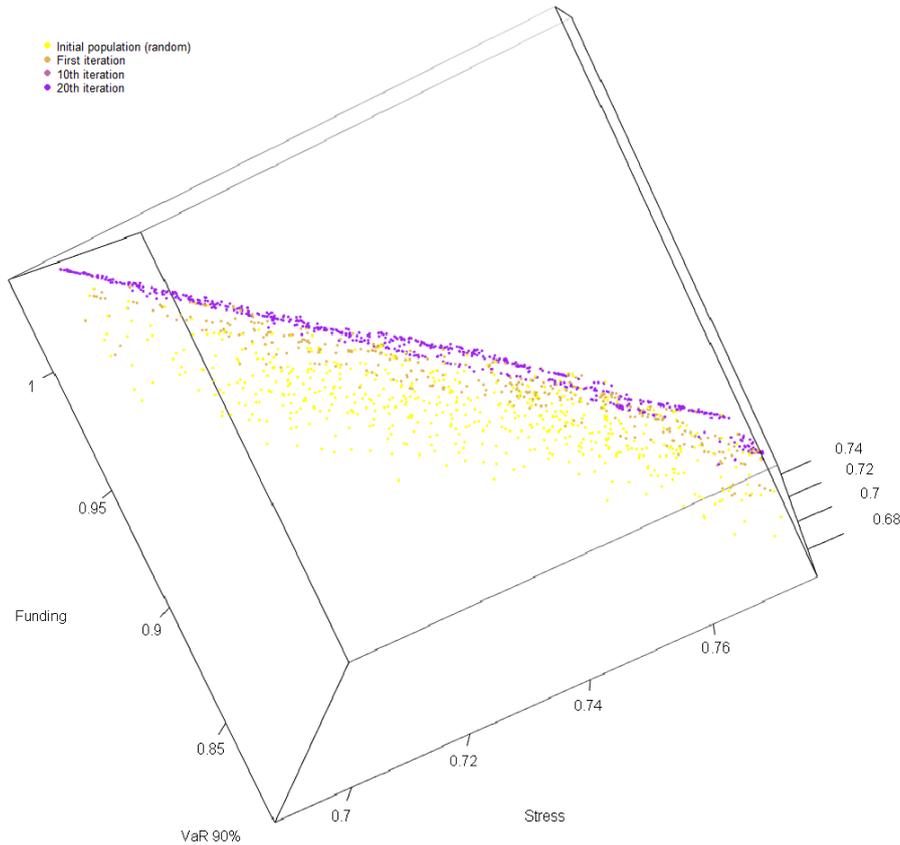
In the previous application we showed that the model leads to relatively important investments in equity and real estate but does not lead to allocate massively in 30 years maturity bonds. However, modeling financial markets is necessarily partly subjective while the duration policy is a very important component of the fund strategy. Therefore it is interesting to qualify the result obtained so that decision-makers can make a thoughtful and fully understood decision.

To this end we add a third optimization criterion representing the funding on a stressed scenario of financial markets. This criterion assesses the robustness of the allocation in an adverse scenario (for example about which the decision-makers may have expressed concerns). In order to determine this

scenario we reviewed EIOPA’s work [7][8] on stress tests (double-hit stress) and chose the following simplified stressed scenario:

- Interest rates curves (real and nominal) suddenly drop by 1% on every maturity
- Equity suddenly drops by 35%
- Real estate suddenly drops by 20%

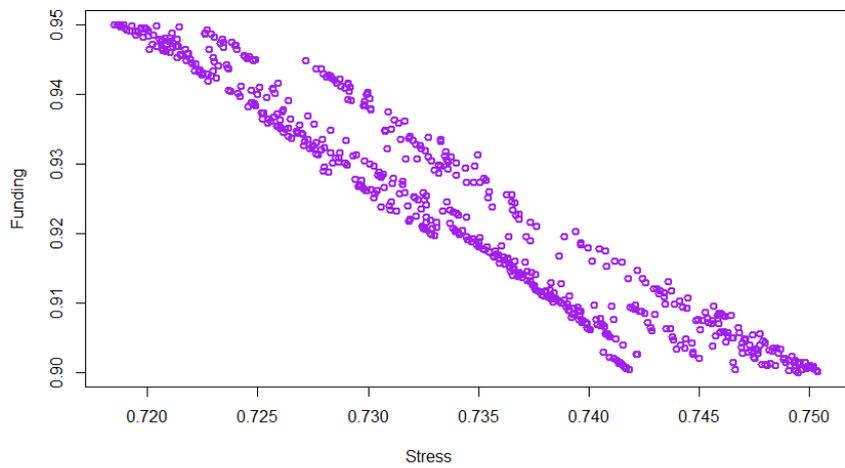
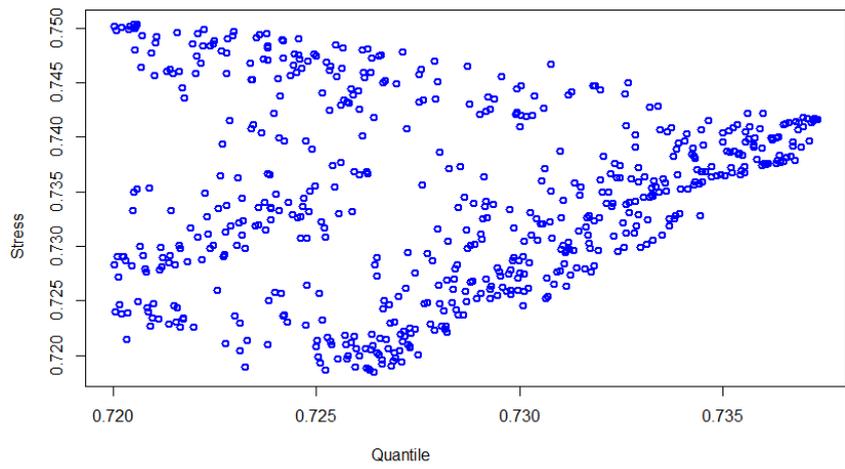
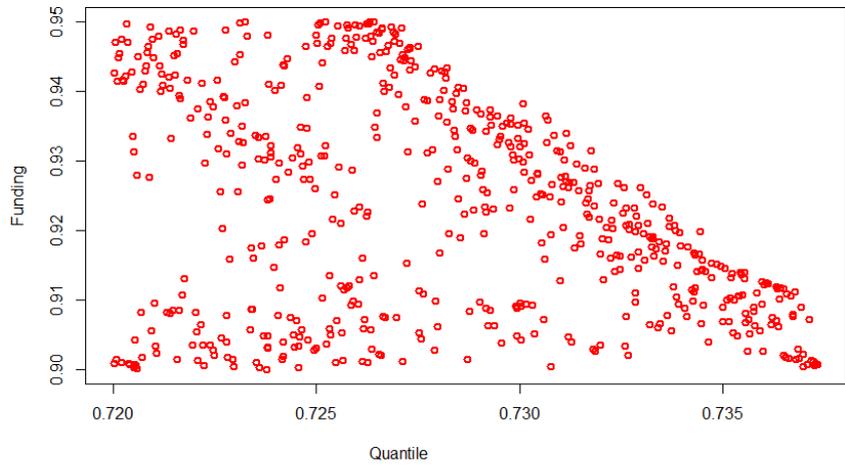
In order to take into account the higher dimension of the efficient frontier we adjust the population size to 600. We then obtain the following result:



On this graph we observe that it is clearly much more difficult to visualize the efficient frontier in high dimension. With the specific view chosen we can still see that purple points dominate the other points: the algorithm actually converges. We also see that even non-optimal points do not spread in the entire space because of the correlations between criteria. Finally we notice that the convergence is slower (computation time: 4 minutes and 20 seconds by iteration) because of the higher population size.

Interactivity addresses all these limitations and makes more sense in high dimension: it allows to speed up the convergence and to narrow the efficient frontier which has to be visualized. Also the decision-maker can learn progressively from the results and, if necessary, go back until he gets a full understanding of the problem. Considering the complexity of the issue it is a significant improvement of the approach.

In order to ease the interpretation of the results it is possible to visualize the efficient frontier in bi-criteria representations:

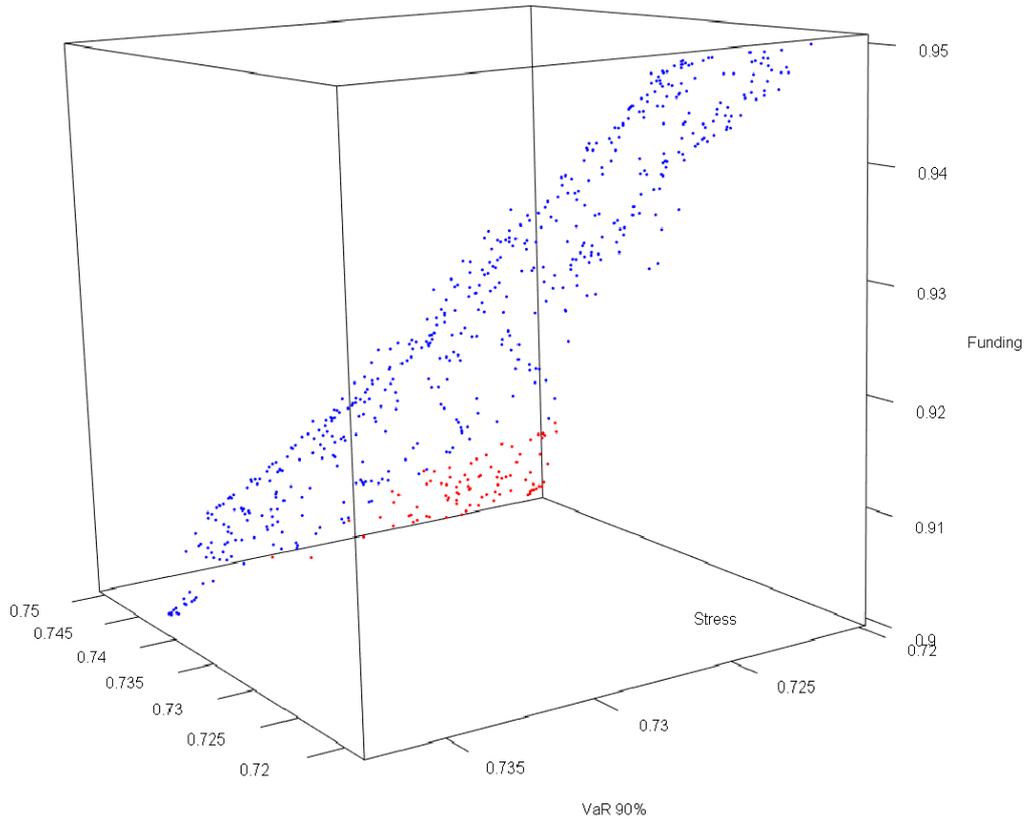


These representations allow one to make sure that the two-criteria efficient frontiers are actually included in the three-criteria efficient frontier (according to the following definition of inclusion):  $\mathcal{F}_{2D}$  is included in  $\mathcal{F}_{3D}$  if:

For all  $x^{2D} = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2D}$  there exists  $x_3$  such that  $x^{3D} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{F}_{3D}$ .

Proof of this result is trivial (assume the result does not hold and find a contradiction). On the previous graphs the two-criteria efficient frontiers are drawn by the top points of each graph.

Considering the example of a very risk-averse decision-maker, we can imagine that he may choose (after visualizing the results) very robust allocations ( $stress \geq 74,5\%$ ) in red on the following graph:



These allocations correspond to smaller funding levels than in the previous two-criteria case but lead to safer Value-at-Risk and stressed level of funding. Optimal allocations become:

	B10	B20	B30	C	E	R	B
Minimum value	5,4%	25,2%	25,9%	1,0%	7,9%	10,8%	56,1%
Maximum value	16,8%	35,1%	45,5%	1,1%	11,3%	13,7%	64,7%

As expected we observe that stress-robustness tends to lead to less risky investments. Compared to the two-criteria case we see that investments in equity and real estate decreased (20% against 30% before) while investments in bonds increased. Moreover a long duration policy now seems indicated, which was expected since the stressed scenario mitigates the increase in interest rates.

## Conclusion

In this paper we suggest an interactive multi-objective optimization approach to tackle the strategic assets allocation issue. This approach consists of allowing the decision-maker to adjust the problem constraints during optimization in order to focus on relevant parts of the efficient frontier. This way he can progressively include the impact of strategic and subjective decisions.

Such an approach also allows to generalize multi-objective approaches more easily to a great number of criteria, which can lead to add other criteria such as stresses or shocks in order to qualify the results from a single model. However visualizing the efficient frontier may be more difficult, therefore using data visualization techniques in order to analyze the results could be a great idea.

Computation speed is a prerequisite of the approach in order to allow "real time" interactions with the algorithm. We considered a theoretical pension fund without optionality in its portfolio (only inflation dependence). We are conscious that computation speed can be more difficult to reach in more complex cases. For this purpose our conviction is that the tools currently used by financial institutions will develop and become more efficient, mainly by benefitting from progresses made in calculations distribution and from an improved access to cloud computing services (such as HTC by *Amazon Web Services*).

## References

- [1] K. C. Ahlgrim, S. P. d'Arcy, and R. W. Gortett. Modeling financial scenarios: a framework for the actuarial profession. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, pages 177–238, November 2005.
- [2] K. Deb and R. Agrawal. Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems Vol. 9*, pages 115–148, 1995.
- [3] K. Deb and H. Jain. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints. *Evolutionary Computation Vol. 18 No. 4*, pages 577–601, 2014.
- [4] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan. A fast elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation Vol. 6 No. 2*, pages 182–197, April 2002.
- [5] L. Devroye. *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag, 1986.
- [6] G. di Tollo, T. Stützle, and M. Birattari. A metaheuristic multi-criteria optimisation approach to portfolio selection. *Journal of Applied Operational Research Vol. 6 No. 4*, pages 222–242, January 2014.
- [7] European Insurance and Occupational Pensions Authority. 2016 EIOPA insurance stress test report, December 2016. EIOPA ref. 16/302.
- [8] European Insurance and Occupational Pensions Authority. IORP stress test 2017 specifications, May 2017. ref. EIOPA-BoS-17/075v2.
- [9] H. Jain and K. Deb. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part II: Handling constraints and extending to and adaptive approach. *Evolutionary Computation Vol. 18 No. 4*, pages 602–222, 2014.
- [10] J. Lehman and K. O. Stanley. Abandoning objectives: Evolution through the search for novelty alone. *Evolutionary Computation Vol. 19 No. 2*, pages 189–223, 2011.
- [11] H. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance Vol. 7 No. 1*, pages 77–91, March 1952.
- [12] H. Markowitz. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Cowles foundation for research in economics at Yale University, Monograph 16, 1959.
- [13] C. Monin. Optimisation multiobjectif de l'allocation stratégique par un algorithme génétique, January 2014. Mémoire de fin d'études (ISFA).
- [14] F. Planchet, P. Thérond, and A. Kamega. *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*. Economica, 2009.



---

## Remerciements

---

Je tiens à remercier chaleureusement toutes les personnes qui m'ont soutenu et qui ont pris part à la conduite de ce mémoire.

En premier lieu je remercie vivement mon tuteur de stage Nicolas Wesner, Senior Manager chez Mazars Actuariat, pour son soutien et la qualité de son encadrement. Ses conseils m'ont permis de prendre du recul sur le sujet et d'en comprendre les enjeux.

Je remercie également Clothilde Davesne et Alexandre Poser, Seniors chez Mazars Actuariat, pour les relectures attentives et le vif intérêt qu'ils ont montré pour le sujet traité. Plus généralement je souhaite remercier toute la formidable équipe de Mazars Actuariat pour son accueil et sa bonne humeur permanente.

Pour finir je remercie Paul Gassiat, Maître de conférences à l'Université Paris-Dauphine, pour son implication et son encadrement.

---

## Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>43</b>
<b>I Allocation stratégique optimale d'actifs : les modélisations usuelles</b>	<b>46</b>
I.1 Les modèles de <i>matching</i> . . . . .	48
I.1.1 <i>Duration matching</i> . . . . .	48
I.1.2 <i>Cash-flow matching</i> . . . . .	50
I.1.3 Les insuffisances des modèles de <i>matching</i> . . . . .	52
I.2 Les modèles à solution analytique . . . . .	53
I.2.1 La théorie moderne du portefeuille . . . . .	53
I.2.2 L'extension classique du modèle de Markowitz en présence d'un actif sans risque	55
I.2.3 Insuffisances du modèle de Markowitz . . . . .	56
I.2.4 Les modèles d'optimisation de (l'espérance de) l'utilité . . . . .	57
I.2.5 Contraintes et limites . . . . .	59
I.3 Les modèles stochastiques et la recherche numérique de la solution . . . . .	60
I.3.1 La notion de scénario . . . . .	60
I.3.2 Univers monde réel VS Univers risque neutre . . . . .	61
I.3.3 La programmation dynamique . . . . .	63
I.3.4 Les algorithmes génétiques . . . . .	64
I.4 Synthèse sur les modélisations usuelles . . . . .	68
<b>II Le fonds de pension fictif étudié</b>	<b>69</b>
II.1 Le fonds étudié . . . . .	71
II.1.1 Contexte général . . . . .	71
II.1.2 Population initiale (actifs) . . . . .	73
II.1.3 Lois de projection . . . . .	75
II.1.4 Retraités et différés (droits déjà acquis par le passé) . . . . .	78
II.1.5 Hypothèses supplémentaires . . . . .	79
II.2 Le moteur ALM . . . . .	80
II.2.1 Préambule – choix des classes d'actifs . . . . .	80
II.2.2 Modèles de diffusion . . . . .	82
II.2.3 Calibrage . . . . .	84
II.2.4 Discrétisation . . . . .	86
II.2.5 Coûts de transaction . . . . .	87
II.2.6 Mécanique de projection globale . . . . .	88

<b>III</b>	<b>Mise en place d'une approche interactive et multi-objectifs</b>	<b>89</b>
III.1	Inspiration de la démarche . . . . .	91
III.2	MCDM et méta-heuristiques . . . . .	92
III.3	Application à la problématique . . . . .	95
III.3.1	Approche multi-objectifs . . . . .	95
III.3.2	Approche interactive . . . . .	96
III.4	Conception de l'algorithme d'optimisation . . . . .	99
III.4.1	Classification des contraintes . . . . .	99
III.4.2	Encodage : réel ou binaire? . . . . .	100
III.4.3	Génération d'un individu aléatoire . . . . .	101
III.4.4	Comparaison des individus : évaluation de leur qualité . . . . .	104
III.4.5	L'opérateur de sélection . . . . .	108
III.4.6	L'opérateur de croisement . . . . .	110
III.4.7	L'opérateur de mutation . . . . .	114
III.4.8	Fin d'une itération . . . . .	118
<b>IV</b>	<b>Application à des questions économiques concrètes</b>	<b>120</b>
IV.1	Préliminaire : choix du contrôle et des contraintes . . . . .	121
IV.2	Un cas classique : optimisation rendement/risque . . . . .	123
IV.3	Ajout d'un troisième critère . . . . .	129
IV.4	<i>Rebalancing strategy</i> . . . . .	139
IV.5	Vers quelle allocation tendre? . . . . .	140
IV.6	Apports de la méthode, prolongements possibles . . . . .	142
	<b>Conclusion</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>148</b>
	<b>Annexes</b>	<b>149</b>
	Annexe A : primes de risque, valorisation <i>market-consistent</i> . . . . .	150
	Annexe B : moteur ALM – quelques résultats des projections . . . . .	152
	Annexe C : uniformité de la méthode de génération . . . . .	166

---

## Introduction

---

Dans le cadre du pilotage de son activité une institution financière doit développer une réflexion sur la gestion de ses actifs. Cela est d'autant plus vrai pour les organismes ayant au passif des engagements de duration longue, pour lesquels la viabilité de l'activité sur le long terme dépend grandement de la robustesse et de la performance des actifs.

Malgré les outils et la puissance de calcul disponibles aujourd'hui le problème ne semble pas avoir de solution évidente. En effet tout modèle anticipant les évolutions futures des marchés et de l'économie est nécessairement incomplet et subjectif. De plus et du fait de la complexité des enjeux il peut s'avérer délicat de trouver un compromis « idéal » entre différents objectifs corrélés et potentiellement contradictoires. Cela est caractéristique d'un choix stratégique : il est subjectif et n'a pas de solution unique.

Pourtant un choix d'une telle importance ne saurait être réalisé à l'aveugle. C'est pourquoi des modèles sont utilisés pour fournir des éléments quantitatifs (mesures de rendement et de risque) permettant de guider la prise de décisions. C'est l'actuaire qui fait la liaison entre les modèles et les décideurs. Il lui est demandé d'être non seulement un excellent technicien mais également d'être capable de prendre du recul par rapport aux modèles afin de pouvoir en expliquer le sens et la portée, et de s'assurer de leur bon usage.

Il est également important d'analyser les enjeux et éléments qualitatifs susceptibles d'avoir un impact sur l'activité long terme de l'institution. Chaque modèle étant subjectif il est en particulier impératif de s'intéresser aux conséquences probables d'un scénario défavorable ou d'une crise financière. Il faut que l'allocation soit à la fois performante selon la vision stratégique des décideurs et robuste pour protéger l'institution en cas d'occurrence d'un événement imprévu ou exceptionnel.

La référence fondatrice pour les choix d'investissements optimaux est la théorie moderne du portefeuille développée par Harry Markowitz en 1952 [42] puis détaillée dans son livre en 1959 [43]. L'idée de Markowitz est de mesurer le risque par la volatilité et de déterminer les portefeuilles maximisant le rendement pour chaque niveau de risque. Sous plusieurs hypothèses (notamment celle de rendements gaussiens), il est possible de démontrer que ces portefeuilles correspondent à une hyperbole dans le repère variance/espérance de rendement : c'est la *frontière efficiente*, sur laquelle il faut choisir le meilleur compromis entre rendement et risque.

Markowitz a été le premier à poser un cadre mathématique rigoureux pour la détermination d'une allocation cible. Néanmoins de nombreux auteurs comme Tobin [66] ont critiqué les hypothèses et la méthode dès la fin des années 1950 (inadéquation de la volatilité en tant que mesure de risque, modèle gaussien non-fidèle aux caractéristiques des marchés...).

De manière générale Markowitz fournit une « vision investisseur » incomplète et/ou inadaptée en présence d'un passif. L'environnement spécifique d'une institution financière telle qu'une compagnie d'assurance ou un fonds impose de prendre en compte des critères supplémentaires et de modéliser les interactions actif-passif. Pour cela il est possible de distinguer trois types de modèles :

- Les modèles de *matching* ou d'immunisation dont le principe est d'aligner les flux ou la duration de l'actif avec ceux ou celle du passif. Avec ce type de modèles la couverture du risque de taux est le point central de la prise de décisions, au détriment des autres aspects ;
- Les modèles capables de fournir une solution analytique (dont celui de Markowitz fait partie), souvent par l'optimisation d'un couple rendement/risque ou d'une fonction d'utilité. Ces derniers sont en général enfermés dans un cadre de modélisation simplifié et dans lequel la prise en compte du passif est imparfaite ;
- Les modèles dont la solution est recherchée numériquement à partir de scénarios stochastiques. Ils sont souvent plus précis que les précédents mais sont également très complexes tandis que les contraintes numériques limitent considérablement leur applicabilité opérationnelle.

La plupart de ces modèles constituent des méthodes dites *a priori*, c'est-à-dire qui nécessitent de définir une fonction objectif ou d'utilité qui « résume » les différents critères de décision. En réalité il est laborieux de définir une telle fonction car cela requiert du décideur de réaliser des compromis entre ses différents critères sans savoir comment ils agissent les uns sur les autres et sur le résultat final.

C'est la raison pour laquelle les méthodes d'optimisation multi-objectifs *a posteriori* sont de plus en plus souvent proposées dans la littérature. Basées sur la détermination d'une frontière efficiente, elles permettent au décideur de visualiser les compromis qu'il réalise afin de mieux comprendre l'impact de ses choix. Néanmoins ces méthodes sont souvent appliquées avec uniquement deux critères : un critère de rendement et un critère de risque. Avec davantage de critères la frontière efficiente est de plus grande dimension : la visualisation des résultats est délicate et potentiellement insuffisante pour prendre des décisions, tandis que la convergence d'un algorithme est difficile à obtenir.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la possibilité d'appliquer une méthode d'optimisation multi-objectifs adaptée à la présence d'un grand nombre de critères et à la subjectivité de la prise de décisions. Pour cela l'interactivité est introduite : le décideur est autorisé à intervenir pendant le processus d'optimisation pour restreindre la recherche au fur et à mesure vers certaines portions de la frontière efficiente. Il est alors placé au coeur du processus de prise de décisions et peut apprendre du problème au fur et à mesure. La détermination de la frontière efficiente est quant à elle facilitée car sa recherche peut être concentrée sur les allocations les plus pertinentes au regard de la stratégie du décideur.

Le mémoire est composé de quatre parties.

La première partie se constitue d'une revue synthétique et orientée de la littérature qui apporte des critiques ainsi qu'un regard opérationnel pour chaque type de modèle. Son objet est de mettre en évidence les avantages et défauts de chacun d'entre eux afin de comprendre ce qui a motivé la recherche d'une nouvelle approche.

La seconde partie présente le fonds fictif sur lequel est testée la méthode proposée dans le mémoire. Elle détaille en particulier la modélisation sous-jacente au moteur ALM qui est utilisé pour mesurer les différents critères de l'optimisation. L'objet de ce mémoire n'étant pas de traiter des sujets spécifiques liés à la mise en place d'un tel moteur ALM, des choix simplificateurs sont parfois effectués en veillant à ce qu'ils ne remettent pas en cause la généralité de l'approche.

En s'inspirant des méthodes de prise de décisions multi-critères (*Multi-Criteria Decision-Making* ou MCDM), la troisième partie expose le cheminement intellectuel qui a mené à l'approche multi-objectifs et interactive suggérée. Un nouvel algorithme génétique est proposé et implémenté sur le langage C++. Une attention particulière est apportée à la conception de nouveaux opérateurs génétiques adaptés à la problématique. Ces derniers sont décrits exhaustivement afin de permettre au lecteur intéressé de les ré-implémenter sur le langage de son choix.

Finalement dans la quatrième partie l'approche est testée dans plusieurs situations économiques différentes. Ces applications permettent de montrer que l'interactivité et la nature de l'algorithme utilisé en font un outil d'aide à la décision flexible, efficace et adaptable au contexte de chacun. Les apports et les limites de l'approche sont alors mis en lumière, et plusieurs prolongements sont suggérés.

---

## Première partie

# Allocation stratégique optimale d'actifs : les modélisations usuelles

---

Cette partie passe en revue les principaux types de modèles rencontrés dans la littérature. Elle les classe en trois groupes :

- Les modèles de *matching* ou d'immunisation ;
- Les modèles permettant d'obtenir une solution analytiquement ;
- Les modèles stochastiques à base de scénarios dont la solution est recherchée numériquement.

Cette rapide description permettra de mettre en évidence les avantages et les insuffisances de chacun d'entre eux et fera naturellement apparaître les motivations qui ont poussé à proposer une approche légèrement différente.

## I.1 Les modèles de *matching*

Les institutions financières ayant des engagements de duration longue tels que les engagements de retraite ou de rente sont particulièrement exposées au risque de taux. C'est ce qui a motivé le développement des modèles de *matching* qui permettent de s'en prémunir : le terme « immunisation » de portefeuille est souvent utilisé.

Il est fréquent de distinguer *duration matching* et *cash-flow matching*. Le *duration matching* consiste à adosser les durations de l'actif et du passif. Il est alors possible de démontrer que, sous certaines hypothèses, une variation de la courbe des taux a exactement le même impact (en pourcentage) sur l'actif que sur le passif. Dans le cas du *cash-flow matching* ce sont directement les flux futurs de trésorerie de l'actif et du passif qui sont adossés. De cette façon, les flux futurs nets sont nuls et le risque de taux disparaît (du moins en vision nette actif-passif).

### I.1.1 *Duration matching*

Pour comprendre l'intérêt de cette méthode, il convient d'expliquer le lien (qui est par exemple rappelé par Faleh dans sa thèse [25]) entre la duration et la sensibilité aux taux d'intérêt. Pour cela, considérons une obligation générant les flux  $F_t$  aux différentes dates  $t$ . Soit  $r$  le taux actuariel de cette obligation. Alors le prix  $P$  de cette obligation vérifie :

$$P = \sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Par définition, la duration de cette obligation est :

$$D = \frac{1}{P} \sum_t \frac{tF_t}{(1+r)^t} = \frac{\sum_t \frac{tF_t}{(1+r)^t}}{\sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}} = \frac{\sum_t t\tilde{F}_t}{\sum_t \tilde{F}_t} \text{ où } \tilde{F}_t \text{ est le flux à la date } t \text{ actualisé au taux } r.$$

La duration peut donc être vue comme un temps moyen restant pondéré par les flux actualisés. Or :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = - \sum_t \frac{tF_t}{(1+r)^{t+1}} = - \frac{PD}{1+r} = -P\tilde{D} \text{ où } \tilde{D} = \frac{D}{1+r} \text{ est la duration modifiée.}$$

Et en effectuant un développement limité à l'ordre 1 :

$$P(r+dr) = P(r) + \frac{\partial P}{\partial r} dr + o(dr) = P(r)(1 - \tilde{D}dr) + o(dr)$$

Ainsi la duration (modifiée) représente la **sensibilité** du prix de l'obligation par rapport au taux actuariel  $r$ . Plus précisément, si  $r$  augmente de 1% alors le prix de l'obligation diminue de  $-\tilde{D}\%$  (au premier ordre).

En réalité le taux actuariel  $r$  dépend lui-même du marché, ce qui est souvent modélisé par le biais de la courbe des taux sans risque et le *spread* (prime de risque). Si l'on note  $\tau_t$  le taux sans risque augmenté du spread pour la date  $t$  :

$$P = \sum_t \frac{F_t}{(1+\tau_t)^t}$$

Avec un raisonnement similaire au précédent, si tous les  $\tau_t$  varient de  $dr$  la duration est également la sensibilité par rapport à un déplacement « parallèle » de la courbe des  $\tau_t$  (ou de la courbe des taux sans risque à *spread* constant).

La duration du passif se définit de la même manière. De ce fait en supposant que l'actif et le passif sont de même valeur et de même duration, l'impact d'un déplacement parallèle de la courbe des taux est le même à l'actif et au passif : le *matching* de duration permet donc bien de se protéger contre le risque de taux.

### I.1.2 Cash-flow matching

Les modèles de *cash-flow matching* ont pour objectif d'adosser directement les flux d'actif et de passif afin qu'ils se compensent. Bedoui en explique très succinctement le principe dans son mémoire [9]. Pour simplifier que cela revient principalement à faire en sorte que les coupons des obligations « tombent » au moment où les prestations devront être versées.

Cette technique présente l'avantage de permettre « d'ignorer » le risque de taux et le risque de liquidité : en effet, le gérant d'un portefeuille dont les *cash-flows* sont parfaitement adossés peut théoriquement considérer qu'il n'est plus vraiment exposé<sup>1</sup> puisque, peu importe l'évolution des taux, il sera en mesure d'honorer ses engagements.

La méthode classique pour déterminer le portefeuille de « couverture » est de considérer un ensemble de classes d'obligations dont la maturité et le taux de coupon sont connus, puis de déterminer les obligations à acquérir par maturité décroissante.

Supposons par exemple connaître les flux futurs de passif et les obligations disponibles :

t	Flux de passif
1	40.00
2	40.00
3	40.00
4	40.00
5	40.00

Maturité	Taux de coupon
1	0.50%
2	0.62%
3	0.85%
4	1.02%
5	1.34%

Seule l'obligation de maturité 5 peut couvrir le flux de passif en  $t = 5$ . Le montant à investir pour qu'il y ait un flux de 40€ en  $t = 5$  est :  $40 / (1 + 1,34\%) = 39,47\text{€}$ . Cependant, un tel investissement génère également des flux aux instants  $t < 5$  (les coupons de  $39,47 \times 1,34\% = 0,53 \text{€}/\text{an}$ ), autant de flux qu'il ne faut plus couvrir avec les autres obligations :

t	Flux de passif	Flux d'actif
1	40.00	0.53
2	40.00	0.53
3	40.00	0.53
4	40.00	0.53
5	40.00	40.00

1. En réalité il est toujours exposé à d'autres risques, notamment le risque de crédit. Nous abordons ce point dans la partie suivante (I.1.3).

L'opération peut alors être reconduite en  $t = 4$ . Afin de couvrir les 39,47€ manquants en  $t = 4$ , il faut acquérir pour  $39,47/(1 + 1,02\%) = 39,07€$  de l'obligation de maturité 4. Cela donne :

t	Flux de passif	Flux d'actif
1	40.00	0.93
2	40.00	0.93
3	40.00	0.93
4	40.00	40.00
5	40.00	40.00

Ainsi de suite, il vient :

Maturité	Taux de coupon	Quantité à acquérir
1	0.50%	38.31
2	0.62%	38.50
3	0.85%	38.74
4	1.02%	39.07
5	1.34%	39.47

Un tel portefeuille permet bien d'honorer les engagements peu importe la variation de la courbe des taux puisque, même si les prix évoluent en fonction des taux, il suffit de conserver les obligations jusqu'à maturité pour qu'elles produisent tous les flux nécessaires.

### I.1.3 Les insuffisances des modèles de *matching*

Les modèles de *matching* présentés ci-dessus sont simples, mais beaucoup d'auteurs comme Bedoui [9] ou Faleh [25] ont mis en évidence leurs limites.

D'abord, ces modèles se concentrent principalement sur le risque de taux. Ils s'appliquent à des portefeuilles intégralement obligataires, sans autre classe d'actifs ; et la prise en compte de la multiplicité des obligations disponibles sur le marché (classiques, indexées, convertibles, de différents ratings et rendements, etc.) n'est pas permise simplement. De nombreux aspects du problème – mentionnés notamment en introduction – sont donc négligés.

L'hypothèse de déplacement parallèle de la courbe des taux peut sembler assez forte et en pratique les flux de passif ne sont pas toujours connus de manière déterministe (notamment en présence d'optionnalité i.e. si les flux futurs dépendent de facteurs inconnus à l'avance, par exemple s'il y a des rachats ou à cause de l'aléa lié à la sinistralité, à la mortalité, etc.).

Dans tous les cas le risque de crédit est négligé et il est supposé que tous les fonds nécessaires (pour acquérir le portefeuille de couverture) sont disponibles dès l'instant initial alors qu'en réalité ils sont souvent acquis au fur et à mesure via des cotisations.

D'autres contraintes peuvent être un obstacle à la mise en oeuvre de ces méthodes :

- Des contraintes internes (besoin d'un actif suffisamment liquide, besoin de stabilité pour faciliter la communication financière, etc.) ;
- Des contraintes externes (absence d'obligations de maturité suffisamment élevées sur les marchés, « rareté » des obligations indexées, etc.).

Notons également que les modèles présentés n'intègrent pas de dimension prospective des taux. L'optimisation réalisée en  $t = 0$  peut conduire à investir dans un portefeuille de couverture qui, plus tard, pourra se révéler avoir été beaucoup plus cher que s'il avait été acquis en  $t = 1$  (en raison d'une hausse des taux par exemple).

Autrement dit la vision stratégique de la compagnie n'est pas prise en compte. Or en environnement de taux bas il est possible de souhaiter privilégier les obligations de faible maturité en prévision d'une remontée des taux – ou au contraire d'anticiper des taux durablement bas et de se tourner vers des portefeuilles de duration longue. Il est donc important d'inclure l'impact des décisions stratégiques dans le modèle.

En réponse à toutes ces critiques plusieurs extensions ont été proposées. En effet les modèles de *matching* ont le mérite de prendre en compte le passif et d'être bien adaptés pour calibrer des portefeuilles très sécuritaires (par exemple pour des cas de *run-off*). Cela justifie de continuer à leur accorder un certain intérêt : le risque de taux reste l'un des risques majeurs sur les engagements de duration longue.

Parmi ces extensions mentionnons par exemple Craighead et Navin [12] qui proposent de mesurer plusieurs durations partielles afin de pouvoir relaxer l'hypothèse de variation parallèle de la courbe des taux ; les méthodes de *matching* de propriétés statistiques (souvent de moments et sensibilités) évoquées par Faleh [25] ; ou encore Iyengar et Ma [34], Kocherlakota, Rosenbloom et Shiu [38][39], Shang, Kuzmenko et Uryasev [58] qui démontrent que la programmation linéaire permet de rendre les modèles de *matching* dynamiques, prospectifs et applicables à plusieurs scénarios stochastiques (mais ils perdent alors leur simplicité et s'inscrivent davantage dans le cadre de la partie I.3.1).

## I.2 Les modèles à solution analytique

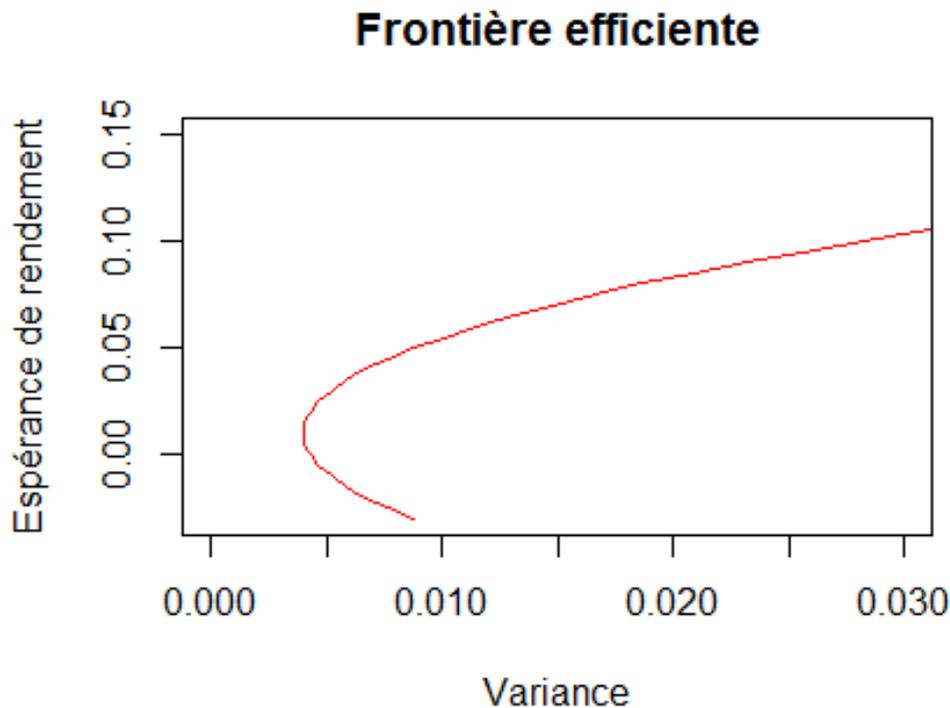
### I.2.1 La théorie moderne du portefeuille

En 1952 Harry Markowitz publie un article fondateur [42] en proposant un formalisme nouveau pour aborder la problématique de l'allocation stratégique d'actifs. La théorie qu'il développe part du postulat suivant : un investisseur rationnel souhaite rémunérer les risques qu'il prend. De ce fait, sont à exclure les portefeuilles offrant :

- un rendement identique à d'autres portefeuilles pour un niveau de risque plus important ;
- un rendement inférieur à d'autres portefeuilles pour un même niveau de risque.

Ces deux conditions le conduisent à la notion de frontière efficiente (ou frontière Pareto-optimale) : seuls les portefeuilles dont le couple rendement/risque est (Pareto-)optimal sont « éligibles » i.e. les portefeuilles pour lesquels il n'est pas possible d'augmenter le rendement sans prendre plus de risque, ou bien de manière équivalente ceux pour lesquels il n'est pas possible de prendre moins de risque sans diminuer le rendement.

Markowitz propose de mesurer le risque par la volatilité. Il démontre alors dans son livre [43] que dans le cas de rendements gaussiens la frontière efficiente est représentée dans le repère variance/espérance de rendement par une branche d'hyperbole (la partie inférieure de l'hyperbole n'étant pas optimale par rapport à la partie supérieure).



Les grandes lignes de la théorie de Markowitz sont exposées ci-dessous. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer à Moquist [48] et Bedoui [9].

Considérons un univers à  $n$  actifs risqués corrélés. Nous supposons les rendements gaussiens de moyenne  $M = (\mu_i)_{i \in [1, n]}$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i, j \in [1, n]}$  avec  $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$  (où  $\rho_{ij}$  est le coefficient de corrélation et  $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$ ). L'objectif est de déterminer les proportions  $x = (x_i)_{i \in [1, n]}$  à investir dans chaque classe d'actifs avec  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Nous avons les écritures matricielles suivantes :

- (i) Le rendement moyen du portefeuille global (pour un  $x$  donné) est  $R = x^T M$ .
- (ii) La volatilité  $\sigma$  du portefeuille vérifie  $\sigma^2 = x^T \Sigma x$ .
- (iii) La condition sur les  $x_i$  s'écrit :  $x^T U = 1$  où  $U$  est le vecteur ne contenant que des 1.

La détermination de la frontière efficiente revient alors à déterminer, pour chaque rendement  $R$ , la volatilité minimale (et si possible le  $x$  correspondant). Formulé mathématiquement, il s'agit du problème d'optimisation (s.c. signifiant « sous contraintes ») :

$$\begin{cases} \min_x x^T \Sigma x \\ \text{s.c. } x^T U = 1 \text{ et } R = x^T M \end{cases}$$

La résolution la plus élégante de ce problème fait appel aux lagrangiens et est donnée par Merton [45]. L'allocation optimale est

$$x^* = \frac{1}{U^T \Sigma^{-1} M} \cdot \Sigma^{-1} M$$

ce qui donne :

$$\sigma^2 = \frac{aR^2 - 2bR + c}{ac - b^2}$$

avec :

$$\begin{cases} a = U^T \Sigma^{-1} U \\ b = M^T \Sigma^{-1} U \\ c = M^T \Sigma^{-1} M \end{cases}$$

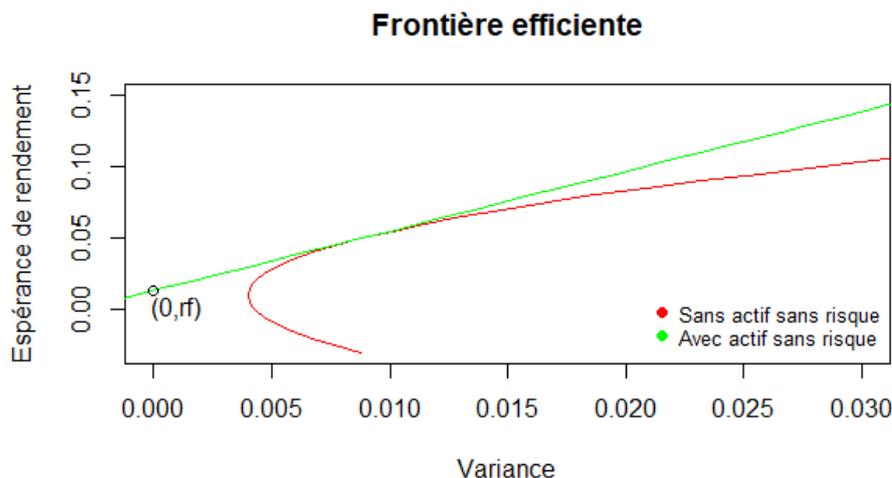
Cela correspond bien à une hyperbole dans le repère  $\sigma^2$ - $R$ .

Ainsi si un investisseur se fixe un objectif de rendement  $R_0$  il peut déterminer le risque associé  $\sigma$  et la composition du portefeuille optimal. Inversement il peut se fixer un risque maximal  $\sigma_0$  et déduire le rendement associé  $R$ .

## I.2.2 L'extension classique du modèle de Markowitz en présence d'un actif sans risque

Faisant suite à l'article de Markowitz, Tobin propose en 1954 [66] une discussion sur le modèle et une extension en présence d'un actif sans risque de rendement  $r_f$ .

Dans son article il démontre que la frontière efficiente en présence d'un actif sans risque devient une demi-droite dans le repère  $\sigma^2$ - $R$ . Celle-ci part du point  $(0, r_f)$  (correspondant à un portefeuille composé uniquement de l'actif sans risque) et est tangente à l'hyperbole de Markowitz (en l'absence d'actif risqué) :



La démonstration de ce résultat est sensiblement proche de celle en l'absence d'actif sans risque. La solution est donnée par Moquist [48], avec les mêmes notations que précédemment :

$$x^* = \frac{1}{U^T \Sigma^{-1} (M - r_f U)} \cdot \Sigma^{-1} (M - r_f U)$$

Remarque 1 : Dans la littérature le ratio de Sharpe [60] est souvent mentionné :  $\frac{R - r_f}{\sigma}$  où  $R$  est le rendement,  $r_f$  le taux sans risque et  $\sigma$  la volatilité. Maximiser ce ratio à rendement  $R$  fixé revient à minimiser la volatilité : cela conduit donc à la même frontière efficiente.

Remarque 2 : Sharpe est l'un des fondateurs du modèle CAPM (*Capital Asset Pricing Model*, décrit par exemple par French [27] ou Sharpe [59]), conséquence du modèle de Markowitz (étendu par Tobin). Ce modèle permet d'exprimer l'espérance de rendement d'un actif individuel  $i$  en fonction de celle du marché par :

$$\mathbb{E}[\mu_i] - r_f = \beta_i (\mathbb{E}[\mu_M] - r_f) \text{ avec } \beta_i = \frac{\text{Cov}(\mu_i, \mu_M)}{\sigma^2(\mu_M)}$$

Aujourd'hui, le modèle CAPM est critiqué (voir Fama et French [26]), au profit par exemple des modèles à facteurs (voir Poncet et al. [51][52]). Dans ce mémoire les méthodes de type *smart  $\beta$* , *factor-investing*, *smart  $\alpha$* , etc. ne sont pas abordées car elles ne sont pas essentielles pour appliquer la théorie de Markowitz et ne sont pas adaptées à notre niveau d'étude très « global ». Notons toutefois que ces modèles pourraient servir pour des problèmes d'allocation tactique ou de choix des classes d'actifs – thème que ce mémoire n'aborde que partiellement.

### I.2.3 Insuffisances du modèle de Markowitz

Dès 1958 Tobin [66] remet en cause les hypothèses de Markowitz et donc la validité de son modèle. Il rappelle que la frontière efficiente de Markowitz suppose que les investisseurs font des choix uniquement en fonction de deux paramètres et que, même dans ce cas, le rendement et la volatilité ne sont pas forcément les plus pertinents.

Par la suite de nombreux auteurs (par exemple Artzner et al. [4]) ont effectivement mis en évidence l'insuffisance de la volatilité pour mesurer le risque. A la place il semble plus adapté d'utiliser des métriques faisant intervenir les queues des distributions (afin de prendre en compte les risques extrêmes, rares).

Le modèle de Markowitz se place dans un cadre gaussien, et de nombreuses études empiriques (voir par exemple Mandelbrot [41]) ont montré que les prix observés sur les marchés ont des comportements très éloignés de cette hypothèse. En particulier les variations de grande amplitude sont sous-estimées par un modèle gaussien, ce dernier ne peut donc pas être utilisé pour mesurer des grandeurs faisant intervenir les queues des distributions.

Plus généralement le modèle de Markowitz s'adresse davantage à un public de type « investisseur » et se transpose assez mal tel quel à une institution financière comme une compagnie d'assurance ou un fonds, notamment parce que :

- Les problématiques comptables, réglementaires et fiscales sont négligées ;
- Le passif n'est pas pris en compte ;
- Le modèle ne s'inscrit pas dans une politique de gestion actif-passif et ne prend pas en compte les interactions actif-passif ;
- Le modèle n'est pas prospectif et ne prend pas en compte la stratégie de l'institution ;
- Certains paramètres tels que les coûts de transaction ne sont pas modélisés ;
- Les critères de décision (rendement/volatilité) ne sont pas nécessairement adaptés, et sont limités à 2.

Plusieurs auteurs ont alors essayé d'étendre ce modèle pour le rendre applicable en présence d'un passif pour une institution financière. Parmi ces extensions, il est possible de mentionner :

- Le modèle de Roy dans lequel le risque est mesuré par la probabilité de déficit (et non pas la volatilité) ;
- Les modèles de Kim et Santomero [37], ou de Sharpe et Tint [61], qui adaptent les travaux de Markowitz pour les appliquer au « surplus »  $S = A - P$  de l'actif sur le passif. Ils démontrent que, sous certaines hypothèses, la frontière efficiente reste une hyperbole.

La connaissance de ces modèles n'est pas essentielle pour la suite du mémoire. Le lecteur est donc renvoyé à la bibliographie (Faleh [25], Bedoui [9]) pour plus de précisions.

Toutes ces approches sont généralisées par les modèles d'optimisation de l'espérance de l'utilité, qui se sont beaucoup développés avec la recherche sur les processus stochastiques.

## I.2.4 Les modèles d'optimisation de (l'espérance de) l'utilité

### Qu'est-ce que l'utilité ?

L'idée de la fonction d'utilité est de synthétiser les aspects du problème dans une seule et unique fonction. L'intérêt est de pouvoir comparer deux allocations différentes en observant leurs utilités : le problème revient alors à maximiser l'utilité. Ainsi une augmentation du rendement pourrait par exemple avoir un impact positif sur l'utilité tandis qu'une augmentation de la volatilité aurait un impact négatif. L'utilité fournit en quelque sorte un *scoring* des allocations.

Notons  $w_T$  la richesse terminale. Remarquons qu'optimiser le rendement sous une contrainte de volatilité revient à optimiser  $\mathbb{E}[w_T]$  avec une contrainte sur  $\mathbb{E}[w_T^2] - \mathbb{E}[w_T]^2$ . Cela est équivalent à l'optimisation de  $\mathbb{E}[w_T] - \lambda \mathbb{E}[w_T^2]$  pour un  $\lambda \geq 0$ . En ce sens, les fonctions d'utilité de la forme  $U(w) = w - \lambda w^2$  (où  $w$  est le processus de richesse) généralisent les approches vues précédemment. Le problème devient :

$$\max_x \mathbb{E}[U(w_T^x)] \text{ où } x \text{ désigne l'allocation}$$

Comme le mentionne Moquist [48], plusieurs auteurs dont notamment Pratt [53] et Arrow [3] se sont posés la question de la forme de la fonction d'utilité et ont identifié plusieurs « bonnes propriétés ». Les plus classiques sont les suivantes :

- $U'(w) > 0$  ( $U$  croissante), traduisant le fait que l'utilité est croissante avec la richesse ;
- $U''(w) < 0$  ( $U$  concave), traduisant le fait qu'un investisseur est averse au risque : entre deux paris de même espérance de gain, l'investisseur préfère celui qui est le plus « certain » (moins risqué).

Dans ses essais Arrow [3] note en particulier que la fonction d'utilité ne sert qu'à comparer deux allocations entre elles : sa valeur « seule » n'a donc pas d'intérêt (c'est la différence entre deux valeurs qui a du sens). De plus, il remarque que puisqu'une augmentation de la richesse génère toujours un gain d'utilité et que l'utilité en valeur absolue n'a pas de signification, les préférences de l'investisseur sont traduites par la dérivée seconde de l'utilité (la courbure de la courbe).

En conséquence Arrow et Pratt proposent de mesurer l'aversion au risque à l'aide de deux mesures invariantes par transformation affine :

- La mesure d'aversion absolue au risque :  $A(w) = \frac{-U''(w)}{U'(w)}$
- La mesure d'aversion relative au risque :  $R(w) = \frac{-wU''(w)}{U'(w)}$

L'aversion absolue quantifie l'aversion au risque pour un risque moyen nul (autour de  $w$ ). L'aversion relative quantifie combien un investisseur est prêt à payer pour éviter le risque (autour de  $w$ ). Pour mieux comprendre ces concepts présentons les 3 types de fonctions d'utilité les plus répandus dans la littérature.

### La fonction d'utilité quadratique

$$U(w) = -\gamma w^2 + bw + c \text{ avec } b, \gamma > 0 \text{ et } w \leq \frac{b}{2\gamma}.$$

Ici l'aversion au risque aussi bien absolue que relative est croissante avec la richesse i.e. plus la richesse augmente plus l'investisseur est averse au risque.

## La fonction d'utilité exponentielle

$$U(w) = -e^{-\gamma w} \text{ avec } \gamma > 0.$$

Cette forme est intéressante car elle caractérise les fonctions d'utilité pour lesquelles l'aversion absolue au risque est constante : il s'agit des fonctions d'utilité CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*). L'aversion relative au risque est quant à elle croissante. Avec une fonction CARA l'investisseur ne cherche pas à investir davantage au fur et à mesure que sa richesse croît.

## La fonction d'utilité puissance

$$U(w) = \frac{w^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \text{ si } \gamma \neq 1 \text{ et } U(w) = \ln(w) \text{ si } \gamma = 1.$$

Il s'agit des fonctions caractérisées par une aversion relative au risque constante : CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*). L'aversion absolue au risque est, elle, décroissante. Avec une fonction CRRA l'investisseur a tendance à investir plus au fur et à mesure que sa richesse augmente.

Le comportement d'un investisseur semble être en général mieux résumé par ce dernier type de fonction d'utilité. Cela explique sa popularité dans la littérature. Toutefois comme l'expliquent Barnes et al. [8] il faut garder en tête que cette forme de fonction d'utilité reste très générique. En particulier un investisseur institutionnel a ses objectifs propres et une fonction d'utilité peut s'avérer bien plus difficile à déterminer.

## Résolution du problème

Une fois la fonction d'utilité choisie, la résolution du problème fait intervenir les mathématiques financières. Des hypothèses de modélisation de l'actif sont réalisées (sous la forme de processus de diffusion, souvent markoviens) et les résultats de la théorie du contrôle optimal (avec  $x$  le contrôle) peuvent s'appliquer : équations de Kolmogorov backward et forward, équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, etc.

Dans certains cas il est possible de déduire une expression analytique de la solution à partir de ces résultats mathématiques théoriques. Malheureusement cela est surtout possible dans les cas relativement simples (modèles gaussiens, fonctions d'utilités « classiques », absence d'interactions actif-passif...) et ne représentant pas assez fidèlement la réalité.

### I.2.5 Contraintes et limites

Finalement, malgré les progrès et la recherche dans le domaine, tous les modèles capables de fournir une solution analytique se heurtent principalement à la même limitation : ils sont enfermés dans un cadre restreint et/ou simplifié qui peut limiter leur portée. Ils peuvent néanmoins être indiqués dans des situations particulières, ou même pour calculer des ordres de grandeur (obtenus rapidement et par formule fermée).

Afin de prendre en compte de manière plus exhaustive les facteurs influençant la décision (coûts de transaction, impact des décisions stratégiques, résistance aux crises, etc.) il faut se tourner vers l'utilisation de scénarios stochastiques et d'un moteur ALM. Un avantage important de ces outils est la prise en compte de l'optionnalité et des interactions entre l'actif et le passif. Ils permettent également d'estimer des grandeurs liées aux queues des distributions, ce qui est souvent souhaité pour les métriques de risque (voir Artzner et al. [4]).

Dans ce cas l'estimation des grandeurs d'intérêt se fait par simulation et l'optimisation est numérique via un algorithme.

## I.3 Les modèles stochastiques et la recherche numérique de la solution

### I.3.1 La notion de scénario

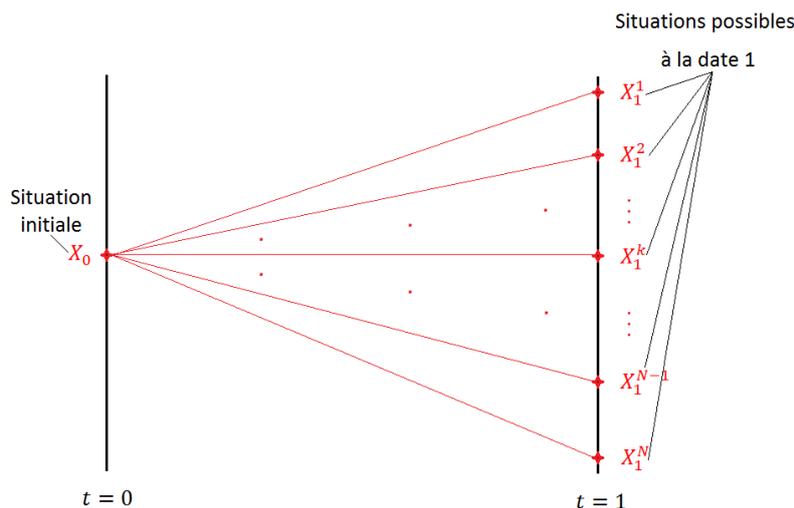
Aujourd'hui compte tenu des nombreux enjeux de la problématique, les institutions cherchent à mettre en oeuvre des modèles de plus en plus précis et capables de prendre en compte un grand nombre de facteurs susceptibles d'influencer la prise de décisions : les coûts de transaction, les contraintes de liquidité, l'indexation à l'inflation, les rachats, les coûts de réinvestissement...

Or la dynamique de la plupart de ces phénomènes dépend de l'évolution de grandeurs (souvent financières) dans le temps. L'exemple classique est celui des rachats « conjoncturels » qui, typiquement, se déclenchent uniquement lors d'une hausse des taux. Ce type de phénomène, non-linéaire, est dit **optionnel**. La prise en compte de l'optionnalité et des interactions actif-passif est permise par l'utilisation de scénarios (dans lesquels chaque option est activée ou non au cas par cas).

Ces scénarios sont en fait des réalisations de modélisations stochastiques. Les outils permettant de les générer, les ESG (*Economic Scenario Generator*), sont très complexes comme le montre par exemple la *Society of Actuaries* [64]. Ainsi l'expression des grandeurs d'intérêt n'est souvent plus possible de manière analytique (ou alors sous des formes inexploitable, par exemple faisant intervenir des intégrales). Pour pallier cela leur estimation est directement réalisée à partir des différents scénarios.

Cette approche est justifiée théoriquement par la méthode Monte-Carlo qui consiste, pour simplifier, à considérer que la distribution empirique construite à partir de plusieurs simulations (scénarios) est une approximation satisfaisante de la distribution réelle dès lors que le nombre de simulations est assez grand. Ainsi les quantiles, moments, espérances... sont estimés par leur valeur empirique.

A titre d'exemple, supposons que le nombre de scénarios nécessaires à une estimation fiable soit  $N$ . Il est classique d'utiliser une représentation sous forme d'arbre :



Sur ce schéma, chaque branche correspond à une « diffusion » possible du processus  $X_t$  de  $t = 0$  jusqu'à  $t = 1$ . Les  $(X_1^k)_{1 \leq k \leq N}$  représentent la distribution empirique de  $X_1$  vue de  $t = 0$ . Ainsi par exemple l'estimation en  $t = 0$  de  $\mathbb{E}[X_1]$  est  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_1^k$ .

### I.3.2 Univers monde réel VS Univers risque neutre

Ce paragraphe s'inspire de la courte synthèse sur les ESG réalisée par Ramanampisoa [55].

Une diffusion « classique » est régie par l'EDS (Equation Différentielle Stochastique) :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \text{ où } W_t \text{ est un mouvement brownien}$$

$\mu_t$  est souvent appelé le *drift* et  $\sigma_t$  la volatilité (log-normale). À des fins de modélisation un actif sans risque  $B_t$  est supposé exister et vérifier :

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt \text{ où } r_t \text{ est le « taux sans risque »}$$

Ces processus sont définis sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .  $\mathbb{P}$  est appelée la **probabilité historique**.

A présent cherchons à savoir s'il existe une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle tous les actifs auraient le même drift  $r_t$  (plutôt que  $\mu_t$ ). Une telle probabilité présente un intérêt en mathématiques financières car, sous cette probabilité, les processus ont de meilleures propriétés pour effectuer du *pricing* (valorisations *market consistent* de produits financiers) grâce à l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Posons  $\lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$  et introduisons un nouveau processus  $\widetilde{W}_t$  tel que  $d\widetilde{W}_t = dW_t + \lambda_t dt$ . Le théorème de Girsanov stipule justement qu'il existe bien une probabilité  $\mathbb{Q}$  équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle  $\widetilde{W}_t$  est un mouvement brownien : c'est la **probabilité risque neutre**. Nous avons alors sous  $\mathbb{Q}$  :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t d\widetilde{W}_t \text{ où } \widetilde{W}_t \text{ est toujours un mouvement brownien}$$

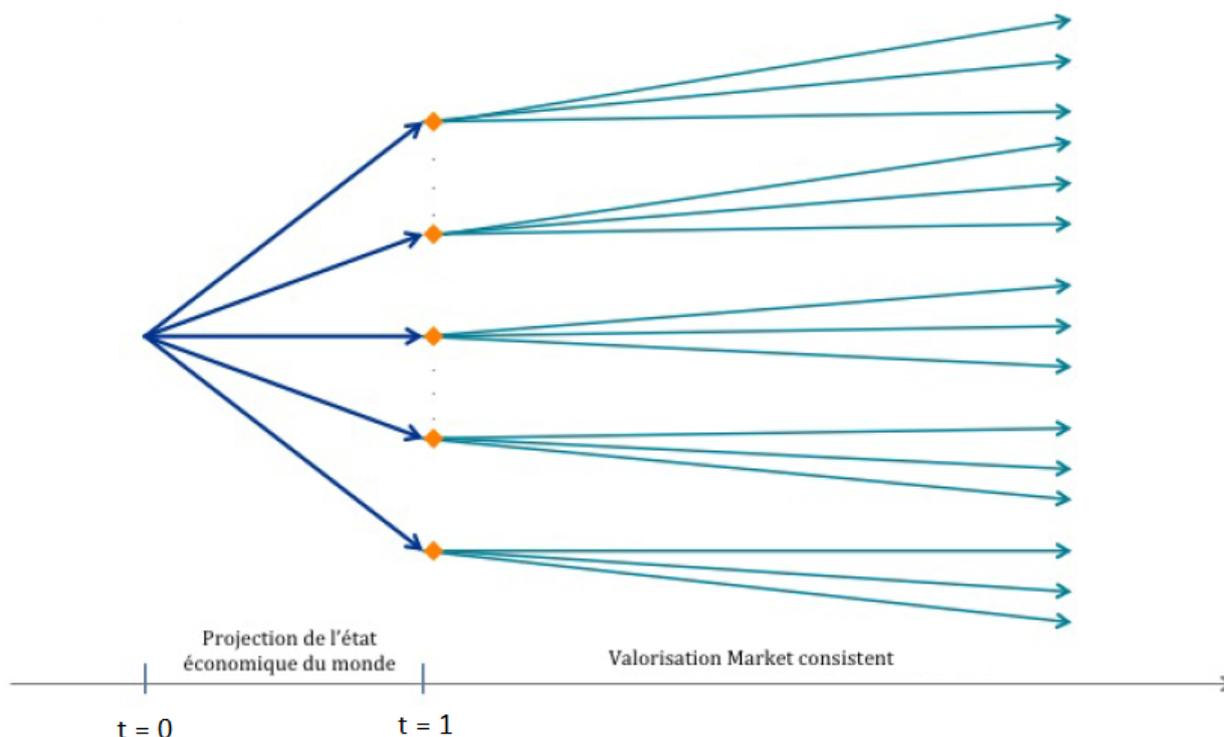
Les développements théoriques concernant l'univers de modélisation ne sont pas détaillés davantage dans ce mémoire. Pour simplifier il faut retenir que l'univers monde réel (probabilité  $\mathbb{P}$ ) retranscrit l'évolution « réelle » des actifs : il a un but prospectif (prévision du futur). L'univers risque neutre (probabilité  $\mathbb{Q}$ ), lui, est un univers totalement fictif dans lequel tous les instruments financiers sont neutres vis-à-vis du risque (disparition de la prime de risque  $\lambda_t$ ) : il est un artifice de modélisation pour effectuer des valorisations.

Il est important de comprendre les différences entre ces 2 univers car leur « cohabitation » peut avoir des conséquences importantes sur la complexité numérique. En effet, obtenir une estimation du bilan économique futur (par exemple en  $t = 1$ ) nécessite de mélanger les 2 univers :

Prévision  $\equiv$  but prospectif  $\equiv \mathbb{P}$

Bilan économique  $\equiv$  valorisation market-consistent  $\equiv \mathbb{Q}$

En théorie il faudrait donc diffuser jusqu'en  $t = 1$  la situation d'aujourd'hui dans l'univers monde réel, puis valoriser les différents postes du bilan en diffusant après  $t = 1$  dans l'univers risque neutre : il y aurait alors des « simulations dans les simulations », ce qui est très coûteux numériquement :



Source : Ramanampisoa [55]

La problématique de l'allocation stratégique optimale d'actifs s'inscrit dans ce cadre puisque le but est en quelque sorte d'anticiper l'impact des décisions d'allocation sur la situation financière future.

De ce fait et afin d'éviter une complexité numérique trop importante, des solutions permettant d'éviter d'avoir recours aux simulations imbriquées sont en général adoptées. Le plus souvent cela consiste :

- soit à être capable de diffuser les classes d'actifs directement dans le monde réel (i.e. leur dynamique doit être directement connue sous la probabilité  $\mathbb{P}$ ) ;
- soit à être capable d'en donner une valorisation sans passer par des simulations dans l'univers risque neutre (i.e. leur dynamique est inconnue sous  $\mathbb{P}$  mais leur valorisation sous  $\mathbb{Q}$  est possible via une formule fermée simple à chaque pas de temps). Il pourrait par exemple s'agir d'une option dont le prix est connu grâce à la formule de Black et Scholes.

Il existe d'autres méthodes (*curve fitting*, *Least Square Monte-Carlo*, portefeuille répliquant, etc.) permettant de diminuer la complexité numérique liée aux simulations dans les simulations (voir Ramanampisoa [55]). Ce mémoire ne les détaille pas davantage.

### I.3.3 La programmation dynamique

Pour les problèmes de contrôle (comme celui énoncé en I.2.4) la programmation dynamique<sup>2</sup> est classiquement utilisée (si le modèle sous-jacent est markovien). Elle permet de rechercher une solution en raisonnant itérativement, de manière *backward*, sur  $V(w, t) = \max_x \mathbb{E}_t[U(w_T)|w_t = w]$ . Plus précisément elle s'écrit (avec par exemple un pas de temps égal à 1) :

$$\begin{cases} V(w, T) &= U(w) \\ V(w, t) &= \max_x \mathbb{E}_t[V(w_{t+1}, t+1)|w_t = w] \end{cases}$$

Dans les cas simples Jarvis [36] montre que la programmation dynamique fournit parfois une solution analytique. Sinon lorsque l'espace de recherche de  $x$  n'est pas trop grand<sup>3</sup> ( $\dim \leq 2$  ou  $3$ ), son formalisme peut parfois être exploité numériquement pour converger vers une solution. Malheureusement, il est souvent admis (Planchet et al. [50]) qu'un problème avec moins de 4 classes d'actifs (typiquement immobilier, obligations, actions et monétaire) n'est pas assez réaliste pour fournir des résultats intéressants.

Rappelons également que compte tenu de la complexité de la modélisation (I.3.1) il est probable que la fonction d'utilité n'ait pas de forme analytique exploitable (en raison de l'optionnalité et des lois conditionnelles). Dans ce cas nous savons uniquement la mesurer dans une simulation et son espérance doit forcément être estimée par la méthode Monte-Carlo : cela est coûteux en temps de calcul...

Pour cette raison dès lors que la précision souhaitée devient grande le problème n'a plus assez de « bonnes propriétés mathématiques » et Ghosh et Mahanti [30] montrent que les méthodes d'optimisation classiques ne sont plus valables (ou trop lentes à converger). De ce fait la recherche numérique de la solution via la programmation dynamique n'est pas envisageable.

Ce type de problèmes complexes explique l'intérêt grandissant de la littérature scientifique pour les méta-heuristiques, qui sont capables de les aborder. Les algorithmes génétiques sont probablement les méta-heuristiques les plus populaires, et ont été utilisés plusieurs fois pour traiter le problème de l'allocation stratégique optimale d'actifs (par exemple Monin [47] ou di Tollo et al. [21]).

---

2. ou « commande optimale stochastique » si le contrôle est un processus

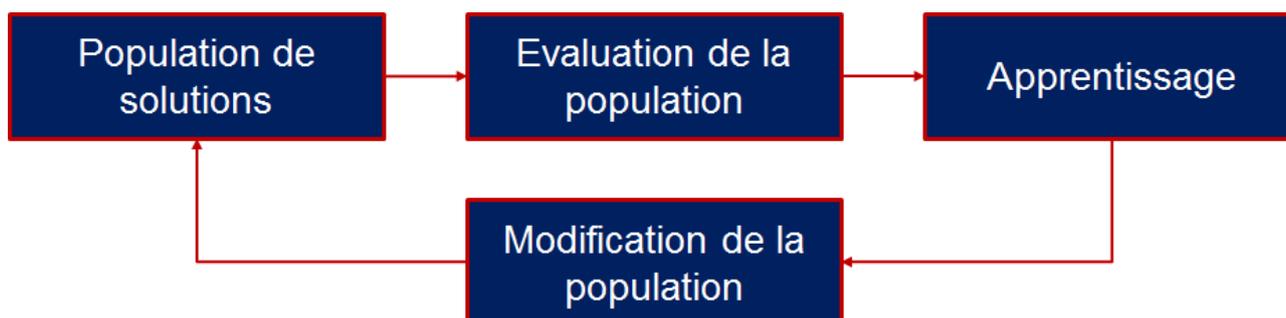
3. Rappelons que  $x$  est le vecteur des allocations en chaque classe d'actifs, de dimension  $n$  !

### I.3.4 Les algorithmes génétiques

#### Principe général

Les algorithmes génétiques s'inspirent de la biologie et de la théorie de l'évolution de Darwin [13]. Ils reprennent en particulier le principe de sélection naturelle qui énonce que les espèces qui s'adaptent le mieux à leur environnement et résistent le mieux aux contraintes extérieures ont de meilleures chances de survie.

Un algorithme génétique fonctionne donc avec une **population** (un ensemble de solutions) dont il simule l'évolution en espérant que les meilleurs **individus** (solutions) survivront mieux et plus longtemps, comme dans la nature. Pour cela, des **opérateurs génétiques** sont utilisés.



#### Modification de la population

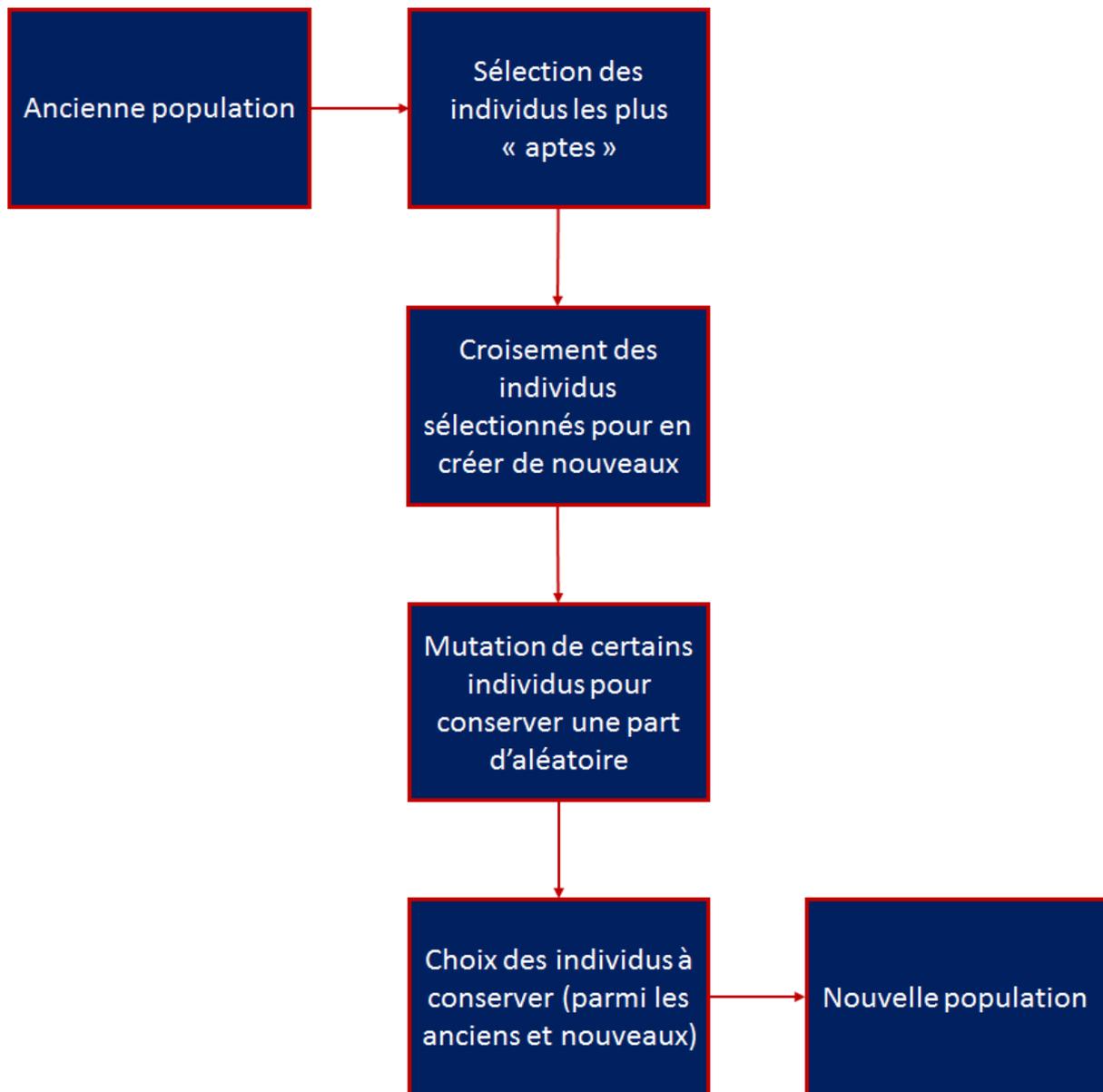
L'étape de modification de la population est très importante car c'est elle qui détermine comment les individus évoluent dans le temps : les performances et la vitesse de convergence de l'algorithme en dépendent fortement. Elle est classiquement le résultat de trois opérateurs génétiques appliqués l'un après l'autre : les opérateurs de sélection, croisement et mutation.



L'opérateur de **sélection** permet de sélectionner les individus de la population courante à partir desquels de nouveaux individus seront ensuite créés. Les individus sélectionnés joueront en quelque sorte le rôle de « parents ». L'idée sous-jacente est d'utiliser les individus déjà connus pour en créer d'autres potentiellement meilleurs. De ce fait les « bons » individus ont souvent plus de chance d'être sélectionnés par cet opérateur (mais pas trop, pour continuer à explorer de nouvelles zones).

L'opérateur de **croisement** a pour but de créer un ou plusieurs nouveaux individus à partir d'individus déjà existants. Son rôle est de reproduire le mécanisme de la reproduction. Pour cela il cherche à repérer les « bonnes » parties du *génome* de chaque parent afin de garder le meilleur de chacun.

Pour finir l'opérateur de **mutation** a pour objet de modifier/perturber des individus afin de créer de la *diversité génétique*, ce qui permet à la fois de ne pas rester « coincé » dans un optimum local et de continuer à chercher des parties de génome inconnues mais potentiellement intéressantes.



De nombreuses formes ont été proposées pour ces trois opérateurs génétiques dans la littérature. Les auteurs ont étudié d'autres points de fonctionnement des algorithmes génétiques qui méritent d'être évoqués :

### Nouveauté

Il a été démontré (Lehman et al. [40]) que la recherche de solutions sans utiliser les informations déjà acquises du problème peut permettre de découvrir plus rapidement de nouvelles zones intéressantes voire d'éviter d'être « bloqué » au niveau d'un optimum local. Cela peut sembler contre-intuitif et provient du fait que lorsque l'espace de recherche est grand, il n'est pas rare que l'apprentissage se concentre uniquement sur des zones déjà explorées et cause une convergence prématurée vers des optima locaux. De ce fait il est souvent recommandé de maintenir une (faible) proportion d'individus créés totalement aléatoirement dans la population.

## Elitisme

L'élitisme consiste à conserver en mémoire certaines données des itérations précédentes afin de pouvoir améliorer et mieux juger la population courante. En général cela revient à maintenir la taille  $T$  de la population constante et à déterminer les individus à conserver pour l'itération suivante en choisissant les  $T$  meilleurs individus parmi les anciens et les nouveaux créés par les opérateurs génétiques (au lieu de simplement remplacer les anciens par les nouveaux). Il est maintenant couramment admis (Deb et al. [18]) que l'élitisme permet d'améliorer les performances des algorithmes génétiques.

## Gestion des contraintes

Il n'est pas rare de ne pas savoir dès le départ si une solution vérifie les contraintes du problème (pour cela il faut évaluer les contraintes, ce qui peut être coûteux en temps de calcul). Dans ce cas il faut inclure des individus « non admissibles » dans la population et trouver un moyen de les gérer (faire disparaître progressivement). Si ces individus sont systématiquement supprimés la taille de la population risque de baisser et certains individus « quasi-admissibles » risquent d'être négligés alors qu'ils auraient pu aider à créer de bons individus. A l'inverse si ces individus perdurent trop au fil des générations l'algorithme risque de ne pas converger en concentrant la recherche sur des zones non admissibles. Un compromis est donc à trouver.

## Choix des paramètres

Un algorithme génétique a plusieurs paramètres (ceux des opérateurs génétiques ou encore la taille de la population) et il n'existe pas de méthode universelle pour les choisir/calibrer. Pourtant ces derniers sont susceptibles d'influencer significativement les performances. Il faut donc chercher de « bonnes valeurs », souvent itérativement et en utilisant l'intuition et les informations déjà connues sur le problème.

## Conception d'un algorithme génétique

La conception d'un algorithme génétique est assez libre, il est même important qu'il soit suffisamment spécifique au problème à traiter. En effet le *no free lunch theorem*<sup>4</sup> (Wolpert et Macready [70]) stipule qu'il n'est pas possible de concevoir un algorithme plus performant que les autres sur tous les types de problèmes. C'est donc la flexibilité des algorithmes génétiques qui fait leur force et il est important que le modélisateur utilise toutes les intuitions qu'il a sur le problème.

## Les algorithmes génétiques pour la problématique de l'allocation stratégique optimale d'actifs

Finalement les algorithmes génétiques ont plusieurs propriétés qui semblent en faire des outils adaptés à la problématique de l'allocation stratégique optimale d'actifs :

- La recherche d'une solution est possible dans un espace très grand ;
- La convergence est potentiellement accélérée ;
- Les chances de rester bloquer dans des optima locaux sont plus faibles ;
- Aucune hypothèse sur le problème n'est nécessaire ;
- Ils sont intuitifs et flexibles dans leur conception.

---

4. "Any two optimization algorithms are equivalent when their performance is averaged across all possible problems"

Plusieurs publications récentes semblent également le confirmer (Monin [47], Dominicis [22], Zhang [71], Senel et al. [57], Skolpadunket et al. [63], Chan et al. [10]).

En revanche il n'y a pas de preuve de leur convergence, le succès de ces algorithmes n'est donc pas assuré. Pour la problématique de l'allocation stratégique d'actifs peu d'auteurs détaillent explicitement l'implémentation retenue. En particulier l'adaptation d'opérateurs génétiques classiques à ce problème fait encore l'objet de discussions et plusieurs questions peuvent donc se poser lors de la conception de l'algorithme.

## I.4 Synthèse sur les modélisations usuelles

Chaque modèle a ses avantages et ses inconvénients :

- Les modèles de *matching* sont très portés sur le risque de taux d'intérêt. Ils sont donc pertinents pour calibrer des portefeuilles de couverture, principalement obligataires. Certains modèles récents parviennent à prendre en compte d'autres facteurs mais ils perdent alors le bénéfice de leur simplicité ;
- Les modèles fournissant des solutions analytiques sont souvent un peu réducteurs mais permettent de réaliser des applications numériques et de comprendre les phénomènes. Ils sont simples à interpréter et à implémenter ;
- Les modèles à base de scénarios stochastiques sont les plus précis et les seuls qui prennent correctement en compte les phénomènes « optionnels ». Il sont néanmoins très complexes et les algorithmes capables de trouver une solution en temps fini (numériquement) sont encore très récents et font toujours l'objet de nombreuses recherches.

Pour la problématique de l'allocation stratégique d'actifs il y a un donc un nécessaire compromis à réaliser entre la complexité du modèle et le temps de calcul (afin que l'algorithme d'optimisation converge en temps fini). La puissance informatique disponible aujourd'hui pousse de plus en plus les institutions financières à adopter des moteurs ALM très précis pour faire de la gestion actif-passif. Une possibilité est alors d'avoir recours aux algorithmes génétiques, qui font encore l'objet de nombreuses recherches.

Quoi qu'il en soit le modèle sera toujours basé sur des anticipations du futur des marchés financiers. Or les modèles prédictifs issus des mathématiques financières sont de plus en plus critiqués : il leur est notamment reproché de ne pas être (ou avoir été) capables de prédire les crises économiques ou les chocs de marché. La problématique est donc avant tout matière de stratégie : le choix final sera toujours subjectif, relatif à une vision ou à des croyances. C'est également la raison pour laquelle il est indispensable que le modèle intègre les partis pris des décideurs, et qu'il leur permette d'évaluer les conséquences probables d'un choc ou scénario adverse.

Dans la partie qui suit nous nous plaçons dans le cas concret d'un fonds de pension ayant une stratégie et des objectifs propres. Nous évoquons alors en partie III la méthode de résolution proposée pour prendre en compte les différents éléments mentionnés ci-dessus.

---

## Deuxième partie

# Le fonds de pension fictif étudié

---

Dans cette seconde partie le fonds de pension sujet de l'étude est présenté. Afin d'être en mesure de tester l'algorithme qui sera proposé en partie III, un moteur ALM (servant à mesurer les critères d'optimisation) est mis en place. La mécanique globale de projection ainsi que les hypothèses de modélisation sous-jacentes sont décrites ci-après.

Comme expliqué en introduction la mise en place d'un moteur ALM dépasse le cadre de ce mémoire et fait déjà l'objet de nombreux développements dans la littérature. Plusieurs simplifications sont donc réalisées afin de concentrer l'étude sur la méthode d'optimisation. Ces simplifications ne sont pas utilisées dans la suite pour simplifier l'optimisation : la méthode proposée en partie III conserve donc toute sa généralité.

## II.1 Le fonds étudié

### II.1.1 Contexte général

Nous considérons une entreprise proposant des prestations retraite à ses salariés par l'intermédiaire d'un fonds de pension. L'entreprise et le fonds sont basés au Royaume-Uni et liés par un *covenant* qui engage l'entreprise à démontrer sa volonté de faire le nécessaire pour garantir la solvabilité et la viabilité du régime. En particulier, l'entreprise doit participer à son financement.

#### Régime

Le régime est à prestations définies revalorisées par l'inflation (mesurée par l'indice des prix de détail RPI). Le taux de cotisation des salariés est de 4% de leur salaire. L'entreprise s'engage à cotiser d'au moins la même somme, puis au delà si nécessaire pour garantir la solvabilité du régime.

Lorsqu'un collaborateur de l'entreprise liquide sa retraite, la pension annuelle initiale  $P$  acquise au titre du régime est déterminée selon  $P = S_f * a * 0,5\%$  où :

- $S_f$  est la somme des 12 derniers salaires mensuels ;
- $a$  est l'ancienneté (en années) dans l'entreprise au moment du départ en retraite.

Si un collaborateur quitte l'entreprise avant son départ en retraite, il conserve des droits en contrepartie des cotisations qu'il a versées durant sa période de présence. Le calcul de la pension initiale est alors similaire :

- $S_f$  est pris égal à la somme des 12 derniers salaires mensuels touchés par le collaborateur **dans l'entreprise**. Pour les autres années d'activité,  $S_f$  est de plus revalorisé par l'inflation jusqu'à l'année du départ en retraite ;
- $a$  est pris égal à l'ancienneté accumulée par l'ancien collaborateur au moment de son départ de l'entreprise.

Il y a donc trois catégories de bénéficiaires du régime :

- Les actifs : individus actuellement salariés de l'entreprise et n'ayant pas encore liquidé leur retraite ;
- Les différés : individus n'ayant pas encore liquidé leur retraite et conservant des droits après avoir quitté l'entreprise ;
- Les retraités : individus actuellement bénéficiaires d'une pension de retraite au titre du régime.

Dans tous les cas et à compter de la date d'ouverture des droits la pension servie est revalorisée par l'inflation chaque année.

## Objectifs du management

→ Stratégie de l'entreprise :

Les collaborateurs sont quasi-exclusivement des cadres supérieurs. De ce fait et malgré la fermeture de nombreux régimes à prestations définies, l'entreprise considère que ce régime de retraite est une particularité importante qui contribue à son rayonnement et à son image. Elle décide donc de le maintenir ouvert en contrepartie d'une gestion rigoureuse.

→ Coût pour l'entreprise :

Dans ce contexte l'objectif de l'entreprise est de limiter les apports « additionnels » au delà des 4% de la masse salariale qu'elle est déjà engagée à verser chaque année. Pour cela elle souhaite qu'une partie des cotisations soit investie dans des placements bien notés, mais dont le rendement est supérieur à celui des obligations d'état : principalement les actions, l'immobilier, et les obligations d'entreprise.

→ Solvabilité et appétence au risque :

Bien sûr l'entreprise souhaite aussi à tout prix protéger sa propre solvabilité en limitant tout risque de perte importante liée au régime. Elle veut donc que des contraintes strictes (fixées par la politique de gestion des risques) soient respectées pour éviter que ses contributions puissent atteindre des montants déraisonnables en cas de crise, ce qui affecterait sa solidité financière.

→ Stabilité :

Enfin, l'entreprise cherche une certaine stabilité car celle-ci lui semble nécessaire à une communication financière saine. Le niveau de financement *funding* du régime doit donc rester dans sa fourchette cible (85-100%), et ne pas trop chuter en cas de crise sur les marchés.

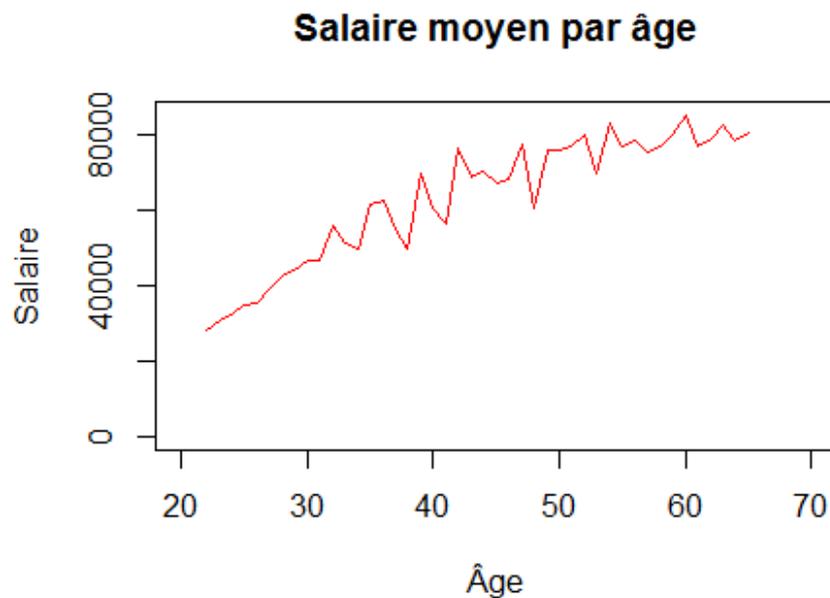
Dans la suite nous présentons les hypothèses retenues concernant la situation initiale du fonds (population à l'instant 0, droits déjà acquis) et les lois de projection du passif (mortalité, turnover, etc.).

## II.1.2 Population initiale (actifs)

L'entreprise est composée de 13 220 collaborateurs, de 22 à 65 ans. La répartition des effectifs en fonction de l'âge est décrite par le graphe suivant :

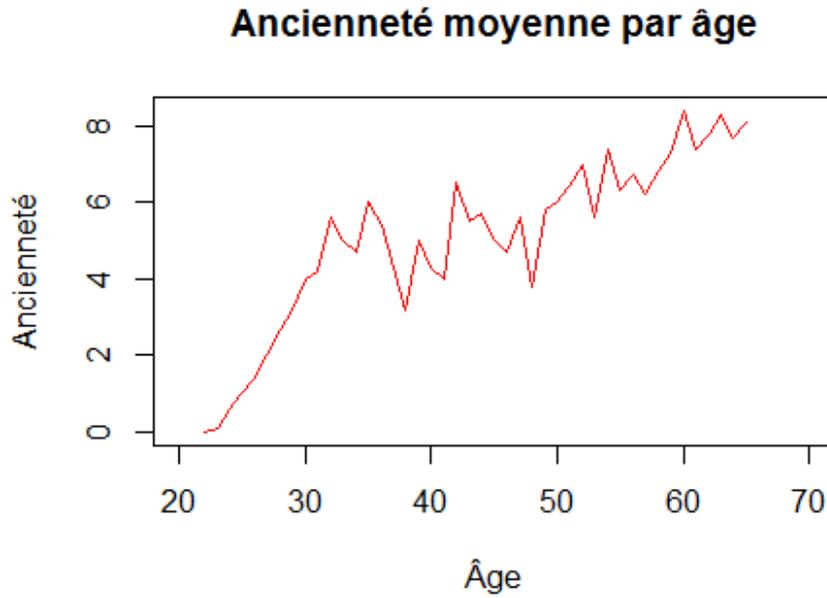


Ce graphe illustre la relative jeunesse de la population active qui est très représentée sur la tranche [25 ans, 35 ans] (plus de la moitié de la population). Concernant les salaires, voici la répartition du salaire moyen en fonction de l'âge :



Une tendance naturellement croissante est observée, avec un salaire de départ assez constant puis une volatilité un peu plus marquée au delà de 35 ans.

Enfin, la répartition des anciennetés en fonction de l'âge est représentée ci-dessous :



Sans surprise là encore une croissance très rapide est observée jusqu'à environ 30 ans, ce qui est cohérent avec le fait que la plupart des jeunes employés soient nouveaux sur le marché du travail et restent quelques années dans l'entreprise. Au delà de 30 ans le profil des collaborateurs est plus hétérogène : la tendance à la hausse est moins marquée et un peu plus volatile.

### II.1.3 Lois de projection

Afin de pouvoir projeter le passif dans le temps, nous avons besoin de plusieurs lois reflétant l'évolution attendue de la population :

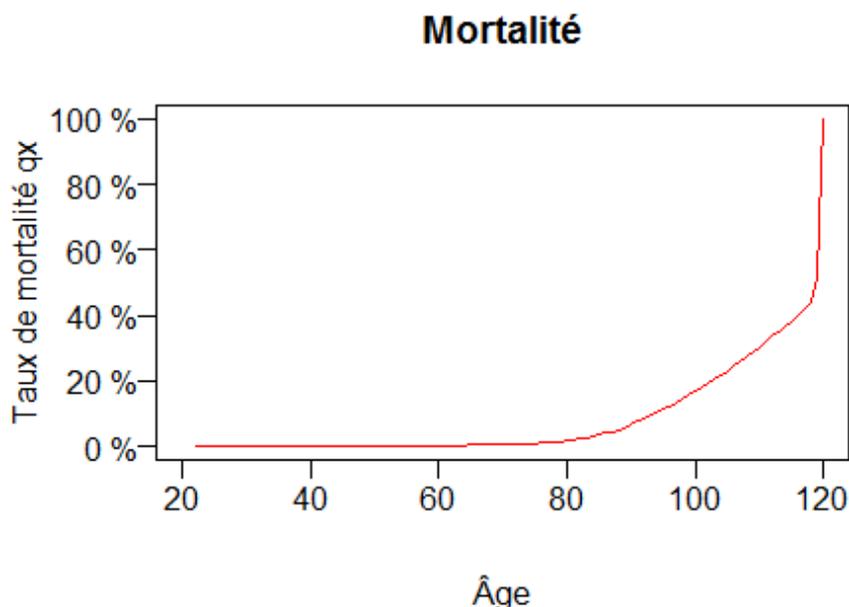
- Une loi d'entrée (recrutements de l'entreprise) ;
- Une loi de turnover (salariés quittant l'entreprise) ;
- Une loi de mortalité ;
- Une loi de revalorisation des salaires.

Nous avons vu précédemment que la plupart des incertitudes du problème se situent au niveau de la modélisation des marchés financiers et des grandeurs financières. A l'inverse la taille de la population étudiée et l'absence de rachat permettent d'espérer de faibles incertitudes sur les lois biométriques et les autres grandeurs (plus précisément, ces incertitudes sont négligeables devant celles liées à la modélisation des grandeurs financières).

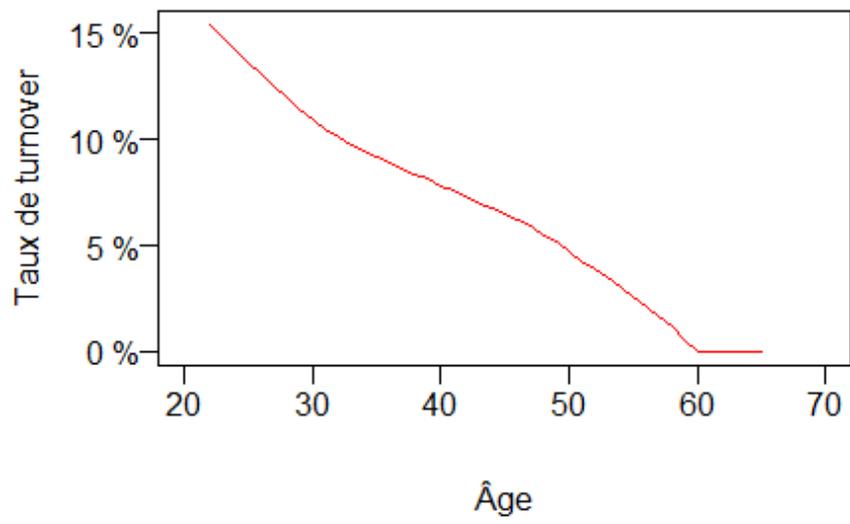
De ce fait nous supposons pour simplifier que le passif varie d'un scénario à un autre uniquement en fonction de l'inflation et des taux. Nous retenons alors des lois de projection déterministes pour obtenir les flux de passif **avant revalorisation par l'inflation**. Ainsi la composante aléatoire de ces flux sera uniquement liée à l'inflation (leur valorisation *market-consistent* variant bien sûr également avec les taux).

Cette simplification permet de modéliser simplement le passif tout en espérant un impact mineur sur les résultats. La généralité de la démarche n'est pas affectée par ce choix puisque celle-ci reste applicable à tout modèle ALM produisant des scénarios stochastiques.

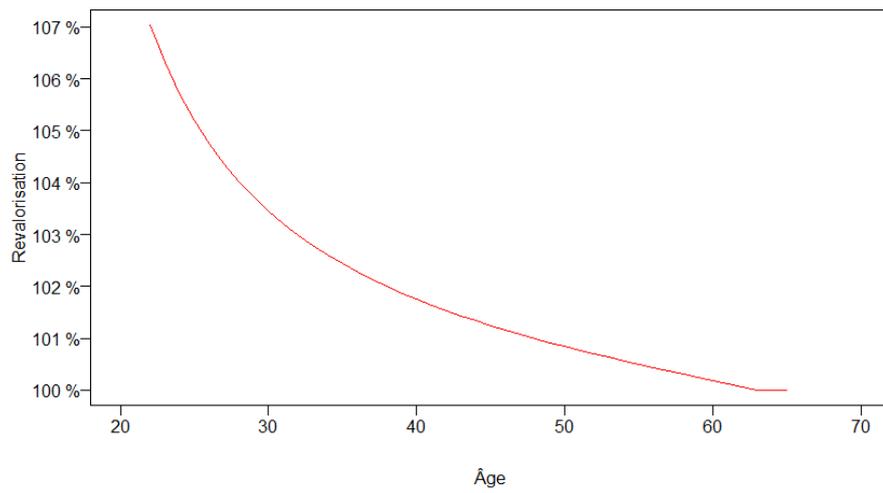
Nous imaginons donc que l'entreprise, qui connaît bien son profil de risque, a calibré les lois de projection suivantes :



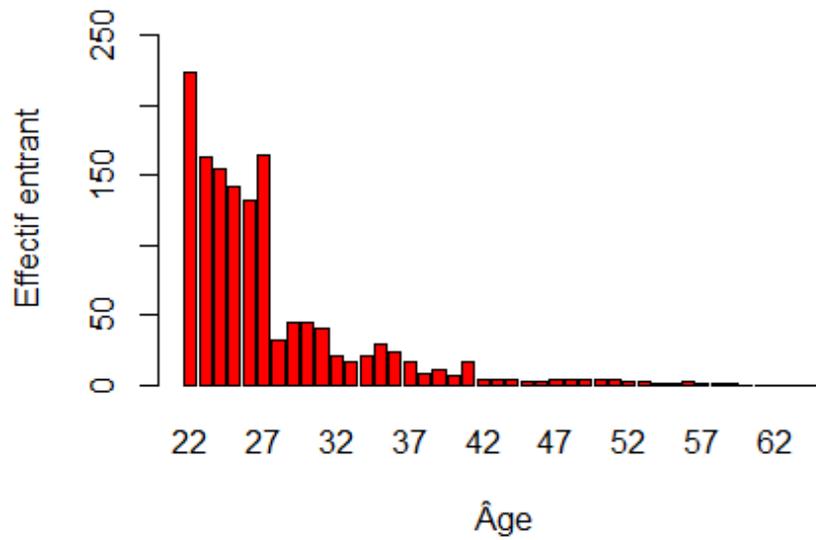
## Turnover



## Revalorisation des salaires hors inflation



## Loi d'entrée



Nous observons sur ces graphes que l'entreprise propose des augmentations importantes en début de carrière mais qui stagnent avec l'âge. Le turnover est surtout présent chez les jeunes, que l'entreprise cherche à recruter en priorité. Deux pics de recrutement sont observables :

- Le premier représente les recrutements massifs de l'entreprise au niveau « junior » juste à la fin de leurs études ;
- Le second correspond à des recrutements de collaborateurs plus expérimentés, vers des niveaux proches de celui de « manager ».

La mortalité, elle, croît naturellement avec l'âge.

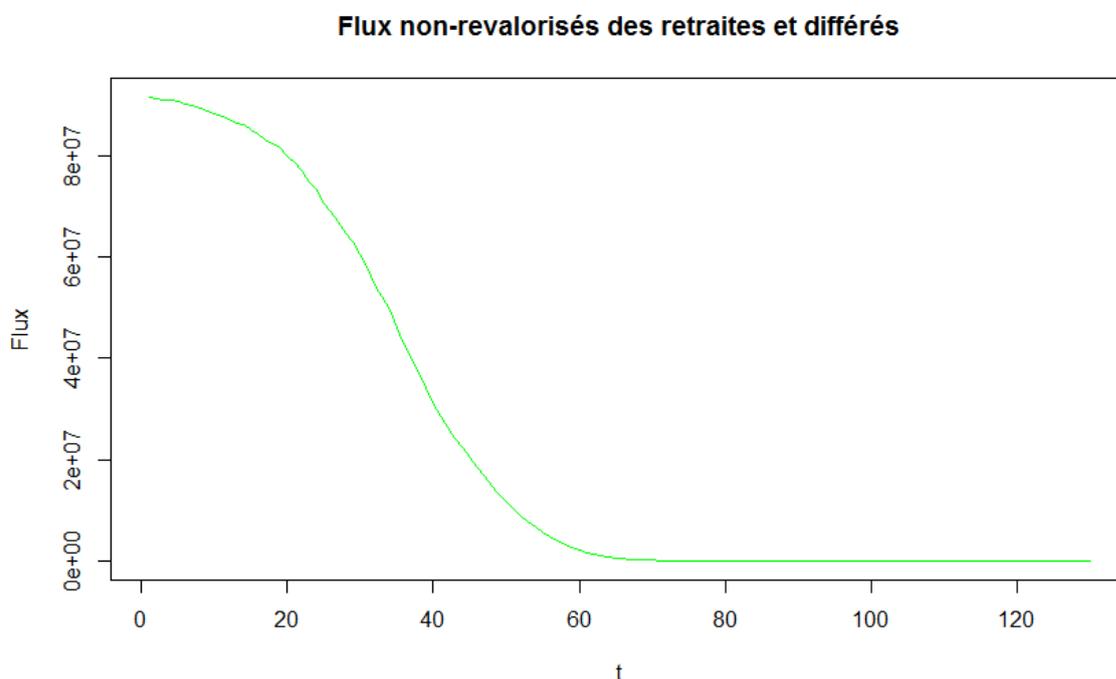
### II.1.4 Retraités et différés (droits déjà acquis par le passé)

Les retraités et différés ont également un impact sur les engagements du fonds (voir II.1.1). Afin d'estimer cet impact nous avons supposé que le fonds est en activité depuis 80 ans. Nous avons alors simulé 80 années d'évolution de la population active actuelle (avec les lois décrites précédemment) pour identifier les flux (non revalorisés par l'inflation) aux dates  $t \geq 80$  ans. En retranchant la part de ces flux correspondant aux individus encore présents dans l'entreprise à la fin des 80 ans, cette opération a permis d'obtenir une estimation des flux futurs liés aux individus retraités et différés (hors impact de l'inflation).

Effectuer cette identification des flux réalise bien sûr l'hypothèse forte que les individus avaient les mêmes lois d'évolution dans le passé et la même situation initiale. Pour simplifier nous avons considéré que l'erreur induite est majoritairement liée :

- à la mortalité (qui a beaucoup diminué avec le temps) ;
- à la loi d'entrée (les recrutements étaient plus importants pendant la « phase de développement » de l'entreprise) ;
- à la situation initiale (il y avait moins de collaborateurs il y a 80 ans qu'aujourd'hui).

En remarquant que tous ces éléments jouent dans le même sens, nous avons décidé d'adopter un ajustement consistant à diminuer les flux. Plus précisément les flux sont abaissés de manière d'autant plus importante qu'il est probable qu'ils aient été générés par des individus âgés et moins nombreux. Pour cela un ajustement linéaire en  $t$  est retenu : de 2% jusqu'à 0%. Par ailleurs et afin de gagner en réalisme les flux ont été bruités en leur ajoutant une réalisation de loi normale centrée. Ainsi le flux  $F_t$  est changé en  $F_t + \epsilon_t$  où  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{300F_t})$ . Le résultat obtenu est donné ci-dessous :



Le fonds étant fictif nous avons jugé le passif ainsi produit assez réaliste pour les besoins de l'étude.

### II.1.5 Hypothèses supplémentaires

Afin de simplifier la modélisation nous supposons les revalorisations négatives possibles (en cas de baisse de l'indice RPI i.e. d'inflation négative). Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée dans la réalité mais n'est pas gênante car une inflation négative est rare. Nous montrons alors en II.2.5 que le passif peut être valorisé en utilisant les prix zéros-coupons réels et donc qu'il n'est pas utile d'utiliser des méthodes plus complexes telles que le *Least Square Monte-Carlo* ou le *curve fitting* (voir I.3.2).

Par ailleurs et afin de disposer d'un indicateur de suivi pour le pilotage du fonds, nous définissons le niveau de financement *funding* comme le rapport de l'actif sur le passif. Pour valoriser l'actif et le passif nous faisons le choix de ne pas nous placer dans un référentiel comptable mais d'utiliser des valeurs économiques (actualisation des flux futurs de passif au taux sans risque et valorisation *market-consistent* des actifs). L'idée derrière ce choix est de supposer que les décideurs trouvent un tel indicateur plus pertinent pour évaluer la solvabilité du régime sur le long terme. Nous supposons enfin que le *funding* est initialement égal à 89%.

## II.2 Le moteur ALM

### II.2.1 Préambule – choix des classes d’actifs

Afin de choisir des classes d’actifs pertinentes commençons par passer en revue les principaux risques auxquels est exposé le fonds :

- Risque de longévité : les engagements de retraite sont par nature soumis au risque d’une baisse des taux de mortalité ;
- Risque inflation : en raison de l’indexation du passif, le fonds est soumis au risque d’une hausse imprévue et/ou durable de l’inflation ;
- Risque de taux : enfin, le fonds est soumis au risque de taux (forte composante obligataire de l’actif et actualisation des flux de passif).

Bien sûr, le fonds est également soumis à d’autres risques dont :

- Risque de spread ;
- Risque actions ;
- Risque immobilier ;
- Risque réglementaire (changement de l’âge de départ à la retraite, etc.) ;
- Risque de liquidité ;
- Etc.

Afin de pouvoir atteindre les différents objectifs des décideurs et de prendre en compte les principaux risques supportés par le fonds, les classes d’actifs devraient contenir au moins :

- Un indice actions ;
- Un indice immobilier ;
- Des obligations d’état classiques (ou un portefeuille obligataire) ;
- Des obligations d’état indexées (ou un portefeuille d’obligations indexées) ;
- Des obligations d’entreprise (ou un portefeuille d’obligations d’entreprise) ;
- Une classe de placements monétaires.

Pour cela il est nécessaire de disposer d’un ESG monde réel (en probabilité historique  $\mathbb{P}$ ) qui diffuse : l’indice actions, l’immobilier, les taux réels et nominaux, l’inflation, et les spreads.

Remarquons que pour que la modélisation des spreads ait un impact sur le modèle, il faut être capable de modéliser les défauts<sup>5</sup> (prise en compte du risque de crédit) en monde réel (pour les prévisions stratégiques) et en monde risque neutre (pour la valorisation des obligations d’entreprise). Une telle modélisation peut s’avérer assez complexe (A. Cousin [11], J.P. Médecin et L. Devineau [44]) alors qu’elle n’est pas directement le sujet du mémoire.

Ainsi nous avons choisi de ne pas prendre en compte les spreads (ce qui exclut la possibilité d’inclure des obligations d’entreprise dans les différentes classes d’actifs). Bien sûr cette hypothèse aurait été très restrictive sur une application réelle. En revanche vu le but illustratif ici cela aurait ajouté une complexité significative et non nécessaire pour démontrer l’intérêt de l’approche proposée dans la suite. En effet l’algorithme utilisé ne fait aucune hypothèse sur le nombre de classes d’actifs à retenir et la méthode pourrait donc être étendue.

---

5. voire même les dégradations de notation

Finalement nous avons retenu les classes d'actifs suivantes :

- Actions ;
- Immobilier ;
- Monétaire ;
- Obligations classiques d'état de maturité 10 ans ;
- Obligations classiques d'état de maturité 20 ans ;
- Obligations classiques d'état de maturité 30 ans ;
- Obligations indexées d'état de maturité 10 ans ;
- Obligations indexées d'état de maturité 20 ans ;
- Obligations indexées d'état de maturité 30 ans.

Le choix de ces différentes classes obligataires permet de prendre en compte le risque inflation, la non-disponibilité des obligations de duration très longue sur les marchés, les effets de couverture (via la ventilation des maturités 10/20/30) et les différentes stratégies possibles (comme par exemple l'application d'une politique de duration courte).

Par ailleurs le calibrage et l'implémentation d'un ESG représentant à eux seuls un travail théoriquement colossal qu'il n'était ni envisageable ni indispensable de fournir pour cet exposé, nous avons repris et adapté des implémentations déjà existantes qui suffiront pour démontrer les capacités de l'algorithme.

Nous nous sommes notamment inspirés du modèle d'Ahlgrim et al. [1] (qui ne diffuse pas de spread). Ce dernier a été développé à la demande de la Society Of Actuaries (SOA) et de la Casualty Actuarial Society (CAS) afin de servir de référence et de standard de place en matière d'ESG. Plusieurs ouvrages proposent des travaux sur ce modèle. En particulier dans leur livre Planchet, Thérond et Kamega [50] en proposent une implémentation et un calibrage sur le logiciel *R*. Nos travaux en sont inspirés.

Ce choix reste sans conséquence sur la portée de notre étude. En effet le calibrage d'un ESG représente une vision possible du marché. En pratique il ne s'appuie donc pas toujours sur les mathématiques et fait également appel aux jugements d'expert. De ce fait nous allons considérer que l'ESG retenu représente la vision stratégique des décideurs afin de concentrer l'étude sur la mise en place de l'algorithme d'optimisation et sur la démarche de résolution plutôt que sur le moteur ALM.

## II.2.2 Modèles de diffusion

Dans toute la suite la notation  $W$  est utilisée pour désigner un mouvement brownien standard.

### Monétaire

Nous allons considérer que la classe monétaire est déterministe à rendement nul. Cette classe sera utile pour s'assurer que diverses contraintes sont vérifiées, par exemple des contraintes de liquidité.

### Inflation

L'inflation  $q$  est modélisée par un modèle de Vasicek [67] simple (i.e. un processus d'Ornstein-Uhlenbeck) :

$$dq_t = \kappa_q(\mu_q - q_t)dt + \sigma_q dW_{q,t}$$

où :

- $\mu_q$  représente la moyenne de long terme de l'inflation ;
- $\kappa_q$  s'interprète comme une vitesse de retour à la moyenne ;
- $\sigma_q$  est le paramètre de volatilité.

### Taux réels puis nominaux

Les taux réels  $r$  sont modélisés par un modèle de Hull-White à 2 facteurs [31] :

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dW_{r,t} \\ dl_t &= \kappa_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dW_{l,t} \end{aligned}$$

où :

- $r_t$  est le taux court terme ;
- $l_t$  est le taux long terme vers lequel tend le taux court ;
- les autres paramètres s'interprètent de la même manière que dans un modèle de Vasicek.

Les taux nominaux  $i$  se déduisent alors des taux réels et de l'inflation par la relation de Fisher :

$$(1 + i_t) = (1 + r_t)(1 + q_t) \Rightarrow i_t \simeq r_t + q_t$$

et les prix des zéro-coupons sont donnés par :

$$ZC_{nom}(t, T) = ZC_{reel}(t, T) \cdot ZC_{inf}(t, T)$$

### Actions

Le rendement  $s$  d'une action est modélisé par le biais d'une prime de risque  $x$  définie par :

$$s_t = q_t + r_t + x_t$$

La dynamique de  $x$  est telle qu'elle soit identique à celle du rendement d'un actif  $X$  qui suit un modèle de Black et Scholes [46] (sans dividende) :

$$dX_t = X_t(\mu_x dt + \sigma_x dW_{x,t})$$

où :

- $\mu_x$  est la prime de risque moyenne ;
- $\sigma_x$  est la volatilité.

Ainsi,  $x$  a la dynamique :

$$dx_t = \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2}\right)dt + \sigma_x dW_{x,t}$$

## Immobilier

Enfin les rendements immobiliers  $z$  sont également modélisés par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dz_t = \kappa_z(\mu_z - z_t)dt + \sigma_z dW_{z,t}$$

Les paramètres s'interprètent de la même manière que pour l'inflation.

## II.2.3 Calibrage

### Préliminaires

Il existe de nombreuses manières de calibrer un ESG. Pour un ESG monde réel la méthode la plus classique est d'utiliser la procédure des moindres carrés (ou une forme étendue) sur les données historiques. Pour choisir les données à utiliser et compte tenu de notre contexte nous pourrions par exemple souhaiter que :

- Le taux sans risque soit le taux des obligations souveraines du Royaume-Uni ;
- L'inflation soit celle observée au Royaume-Uni via l'indice RPI ;
- Le rendement des actions représente celui de la « cible actions » du fonds (par exemple equity UK AA) ;
- L'immobilier corresponde au marché de l'immobilier au Royaume-Uni.

En pratique, l'extraction de telles données et le calibrage du modèle ne rentrent pas spécifiquement dans le sujet de ce mémoire : même si les résultats sont sensibles à la modélisation et à son paramétrage, l'approche proposée reste valable dans tous les cas.

Par ailleurs l'ESG est supposé représenter la vision stratégique du fonds et ses anticipations du marché. Nous imaginons que dans la réalité le fonds aurait recours à plusieurs jugements d'expert afin d'ajuster le paramétrage et de compléter la vision mathématique.

Pour ces deux raisons nous avons choisi de reprendre le paramétrage proposé par Planchet, Théron et Kamega [50] (PTK dans la suite) (même si en réalité nous savons qu'il ne concerne pas le marché du Royaume-Uni). En revanche nous avons ajusté plusieurs paramètres afin de prendre en compte la vision que pourrait avoir le fonds et d'avoir une situation initiale des marchés proche de la situation actuelle.

### Initialisation

Les valeurs initiales proposées par PTK [50] sont :

$l_0$	$r_0$	$q_0$	$z_0$
3,1%	1,5%	1,5%	8,1%

Afin de prendre en compte l'environnement de taux bas actuel, nous avons simplement abaissé ces valeurs :

$l_0$	$r_0$	$q_0$	$z_0$
0,6%	0,3%	0,8%	3,0%

### Corrélations

PTK [50] proposent une matrice de corrélations constante pour  $(W_q, W_z, W_l, W_r, W_x)$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,20 & -0,86 & -0,65 & -0,32 \\ 0,20 & 1 & -0,32 & -0,27 & 0,10 \\ -0,86 & -0,32 & 1 & 0,80 & 0,18 \\ -0,65 & -0,27 & 0,80 & 1 & 0,11 \\ -0,32 & 0,10 & 0,18 & 0,11 & 1 \end{pmatrix}$$

La structure de corrélations nous a semblé difficile à ajuster par jugements d'expert. Nous ne l'avons donc pas modifiée. Pour approfondir le sujet, le lecteur pourra trouver des éléments sur les structures de dépendance et les insuffisances liées à l'utilisation de corrélations gaussiennes dans le mémoire de fin d'étude d'Armel [2].

## Paramètres des modèles de diffusion

PTK [50] proposent les paramètres suivants :

$\kappa_q$	$\mu_q$	$\sigma_q$	$\kappa_r$	$\sigma_r$	$\kappa_l$	$\mu_l$	$\sigma_l$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\kappa_z$	$\mu_z$	$\sigma_z$
0,261	5,1%	2,6%	0,397	2,4%	0,451	2,9%	2,3%	3,3%	17,5%	0,152	9,4%	3,7%

En réalité ces paramètres semblent optimistes compte tenu de la conjoncture actuelle. Nous les avons ajustés afin d'observer une remontée modérée des taux et d'augmenter le poids du risque immobilier (qui est important au Royaume-Uni) :

$\kappa_q$	$\mu_q$	$\sigma_q$	$\kappa_r$	$\sigma_r$	$\kappa_l$	$\mu_l$	$\sigma_l$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\kappa_z$	$\mu_z$	$\sigma_z$
0,120	1,5%	0,45%	0,397	0,3%	0,351	0,7%	0,2%	1,4%	9,8%	0,062	3,4%	1,6%

## Primes de risque

Afin d'évaluer l'actif et le passif en valeur économique il convient de faire des hypothèses de primes de risque entre les diffusions risque-neutre et monde réel. Le pricing est en effet réalisé sous  $\mathbb{Q}$  tandis que les paramètres précédents sont donnés sous  $\mathbb{P}$ . En particulier pour notre application il est nécessaire de connaître les primes de risque sur les modèles de taux et d'inflation afin de déterminer les prix des obligations classiques et indexées. Nous posons :

$$\lambda_q = -0,10\% \cdot \frac{\kappa_q}{\sigma_q} \text{ tel que } dq_t = \kappa_q(\mu_q^{\mathbb{Q}} - q_t)dt + \sigma_q dW_{q,t}^{\mathbb{Q}} \text{ et } \mu_q^{\mathbb{Q}} = \mu_q - \frac{\lambda_q \sigma_q}{\kappa_q} = \mu_q + 0,10\%$$

$$\lambda_l = +0,05\% \cdot \frac{\kappa_l}{\sigma_l} \text{ tel que } dl_t = \kappa_l(\mu_l^{\mathbb{Q}} - l_t)dt + \sigma_l dW_{l,t}^{\mathbb{Q}} \text{ et } \mu_l^{\mathbb{Q}} = \mu_l - \frac{\lambda_l \sigma_l}{\kappa_l} = \mu_l - 0,05\%$$

Cette modélisation peut s'interpréter comme l'ajout d'une « prime de rareté » (voir Wesner [68]) sur les obligations d'état indexées sur l'inflation afin de prendre en compte la forte demande dont elles font l'objet. Le lecteur trouvera la justification théorique de ces paramètres ainsi que les formules fermées permettant d'en déduire les prix des obligations dans l'Annexe A.

Remarque : en théorie la prime de rareté, les spreads, etc. pourraient être modélisés séparément des primes de risque. Les deux paramètres choisis sont utilisés uniquement dans le but de trouver des prix d'obligations (classiques et indexées) cohérents avec l'intuition. Nous les utilisons donc également afin de simplifier la modélisation, ils ne sont pas interprétables dans un autre contexte.

## Autres paramètres

Pour finir nous fixons :

- Nombre de scénarios  $N = 2000$  : nous observons en effet qu'au delà de cette valeur la précision des mesures n'évolue que très peu (pas d'optionnalité dans le portefeuille mais un impact inflation) ;
- Pas de temps  $d = 1$  an : valeur classique qui permet déjà d'obtenir des résultats interprétables ;
- Horizon temporel  $T = 30$  ans : valeur qui semble suffisante pour l'étude.

## II.2.4 Discrétisation

Pour obtenir des scénarios il faut être capable de simuler les processus à chaque pas de temps. Pour une diffusion « classique » de type  $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$  la discrétisation temporelle « naturelle » serait la suivante :

$$X_{t+d} - X_t = \mu(X_t, t)d + \sigma(X_t, t)(W_{t+d} - W_t)$$

avec  $d \rightarrow 0$  et  $\epsilon_{X,t} = W_{t+d} - W_t \sim \sqrt{d}\mathcal{N}(0, 1)$ .

Malheureusement dans notre cas  $d$  vaut 1 an et n'est pas suffisamment petit pour appliquer cette formule. En revanche nous connaissons les solutions explicites des dynamiques modélisées. Nous pouvons donc les utiliser et obtenir des formules de discrétisation exacte qui sont appelées par PTK [50] :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{t+1} = q_t e^{-\kappa_q} + \mu_q(1 - e^{-\kappa_q}) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \epsilon_{q,t} \\ l_{t+1} = l_t e^{-\kappa_l} + \mu_l(1 - e^{-\kappa_l}) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_l}}{2\kappa_l}} \epsilon_{l,t} \\ r_{t+1} = r_t e^{-\kappa_r} + \mu_r(1 - e^{-\kappa_r}) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_r}}{2\kappa_r}} \epsilon_{r,t} \\ z_{t+1} = z_t e^{-\kappa_z} + \mu_z(1 - e^{-\kappa_z}) + \sigma_z \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_z}}{2\kappa_z}} \epsilon_{z,t} \\ x_{t+1} = x_t + \left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2}\right) + \sigma_x \epsilon_{x,t} \end{array} \right.$$

où les  $\epsilon_t$  suivent une loi normale de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance celle des  $W_t$  (donnée en II.2.3). Pour simuler les  $\epsilon$  la méthode classique consiste à simuler des lois normales indépendantes (par exemple avec la méthode de Box-Muller) puis à appliquer une décomposition de Cholesky afin de les corrélérer.

Nous avons également besoin de savoir estimer les intégrales de type  $\int_0^{ld} q_u d_u$  (sous  $\mathbb{P}$ ). Nous réalisons l'estimation de ces intégrales en utilisant leur forme discrète :

$$\int_0^{ld} q_u d_u \simeq \sum_{u=0}^{(l-1)d} q_u$$

## II.2.5 Coûts de transaction

Nous modélisons des coûts de transaction différents à l'achat et à la vente afin de prendre en compte la liquidité et la disponibilité de chaque actif. Nous utilisons pour cela des taux de frais représentant le rapport du montant des coûts de transaction sur la valeur des actifs achetés/vendus.

A l'achat :

- Obligations classiques : 0,1% ;
- Obligations indexées : 0,1% ;
- Monétaire : 0% ;
- Immobilier : 0,08% ;
- Actions : 0,05%.

A la vente :

- Obligations classiques : 0,1% ;
- Obligations indexées : 0,1% ;
- Monétaire : 0% ;
- Immobilier : 0,15% ;
- Actions : 0,05%.

## II.2.6 Mécanique de projection globale

Au global la mécanique de projection globale (passage de  $t$  à  $t + 1$ ) est la suivante :

- Simulation de mouvements browniens indépendants.
- Introduction des corrélations via la matrice de Cholesky pour obtenir les  $\epsilon_{b,t}$ ,  $b \in \{q, r, l, x, z\}$ .
- Simulation des grandeurs de l'ESG via les formules de discrétisation exacte.
- Projection des classes d'actifs de  $t$  à  $t + 1$  à partir des réalisations de l'ESG.
- Calcul des valeurs économiques en  $t + 1$  par formules fermées.
- Ajout des cotisations et prise en compte des flux de passif (sur la classe monétaire).
- Détermination du nouvel état de l'allocation en  $t + 1$  et comparaison à la cible du modèle.
- Réalisation des achats/ventes nécessaires pour se ramener à cette cible (avec coûts de transaction).

Quelques résultats des projections sont donnés dans l'Annexe B.

---

## Troisième partie

# Mise en place d'une approche interactive et multi-objectifs

---

Nous disposons à présent de tous les prérequis nécessaires à la mise en place d'un algorithme d'optimisation. Dans cette partie nous exposons dans un premier temps l'approche suggérée : une méthode d'optimisation interactive et multi-objectifs qui se présente davantage comme un outil d'aide à la décision qu'un modèle donnant une solution unique, figée.

Dans un second temps la conception de l'algorithme génétique retenu pour l'optimisation est détaillée. Cet algorithme a fait l'objet d'un important travail de réflexion afin de l'adapter à l'interactivité et aux besoins spécifiques de la problématique. Pour cette raison nous n'avons pas repris d'implémentation existante et avons proposé de nouveaux opérateurs génétiques, implémentés sur C++. Une méthode de génération d'allocations, uniforme et intégrant les contraintes du problème, est également présentée.

### III.1 Inspiration de la démarche

Il est possible de formuler la problématique de la manière suivante :

Comment répartir les actifs, en accord avec la stratégie de l'institution financière, en trouvant le meilleur compromis entre les différents critères des décideurs ?

Plusieurs réflexions ont été soulevées dans la partie I, mettant en évidence les enjeux et les principaux défauts des méthodes classiques :

→ Stratégie : l'aspect « choix stratégique » de la problématique n'est que très peu évoqué dans la littérature. De nombreux modèles sont décrits mais très peu d'auteurs proposent de prendre du recul et d'expliquer en quoi leur modélisation permet d'intégrer l'impact de décisions stratégiques et d'aider à prendre des décisions en fonction des critères qui sont propres à chaque décideur.

→ Compromis : la notion de « meilleur compromis » est assez floue car le décideur ne sait pas forcément comment ses différents critères agissent les uns sur les autres : ils sont corrélés et potentiellement contradictoires. Il ne peut donc pas savoir exactement quel compromis il souhaite adopter et cela peut poser problème pour définir une fonction d'utilité.

→ Subjectivité : calibrer un modèle revient à se placer dans une vision donnée (i.e. à supposer notamment que le modèle et l'ESG sont corrects). Or le choix d'une allocation stratégique d'actifs correspond potentiellement à un compromis entre plusieurs visions (car elles sont subjectives, il est important de prendre en compte plusieurs possibilités). La probabilité d'occurrence d'un évènement adverse ou imprévu n'est pas nulle et les conséquences éventuelles ne peuvent pas être négligées. Dans ce cas, comment calibrer un modèle tout en s'assurant de ne pas négliger la probabilité de s'éloigner de la vision qu'il donne ?

→ Erreur de modélisation : les critères d'un décideur ne sont pas toujours simples à traduire mathématiquement. De plus toute méthode d'optimisation est nécessairement basée sur des hypothèses de modélisation et sur une série d'approximations permettant de simplifier le problème afin d'être capable de l'optimiser en temps fini. Il faut par conséquent prendre en compte l'éventualité qu'un phénomène soit négligé ou mal mesuré par le modèle.

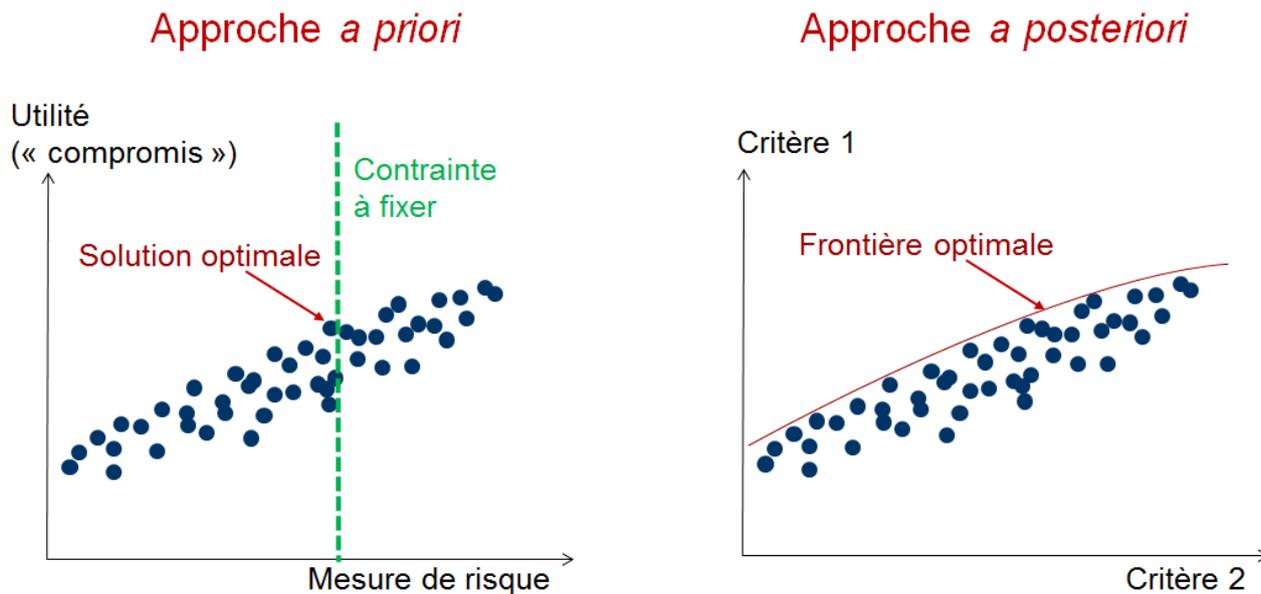
Afin de répondre à toutes ces questions il a semblé naturel de s'intéresser aux techniques usuellement utilisées dans les métiers de la stratégie pour traiter les problèmes complexes. Un domaine de recherche très actif a notamment retenu notre attention : la prise de décisions multi-critères (MCDM dans la suite : *Multiple Criteria Decision Making*).

## III.2 MCDM et méta-heuristiques

Les développements qui suivent sont inspirés de la revue de Purshouse et al. [54].

La MCDM propose des méthodes de prise de décisions *a posteriori* dont l'intérêt est de remédier au besoin de connaître le compromis entre les différents critères dès le départ (à l'inverse des méthodes dites *a priori*). Ainsi il n'est plus nécessaire de définir une fonction d'utilité et de se fixer « arbitrairement » des contraintes dès le départ.

Comparaison des approches *a priori* et *a posteriori* en dimension 2



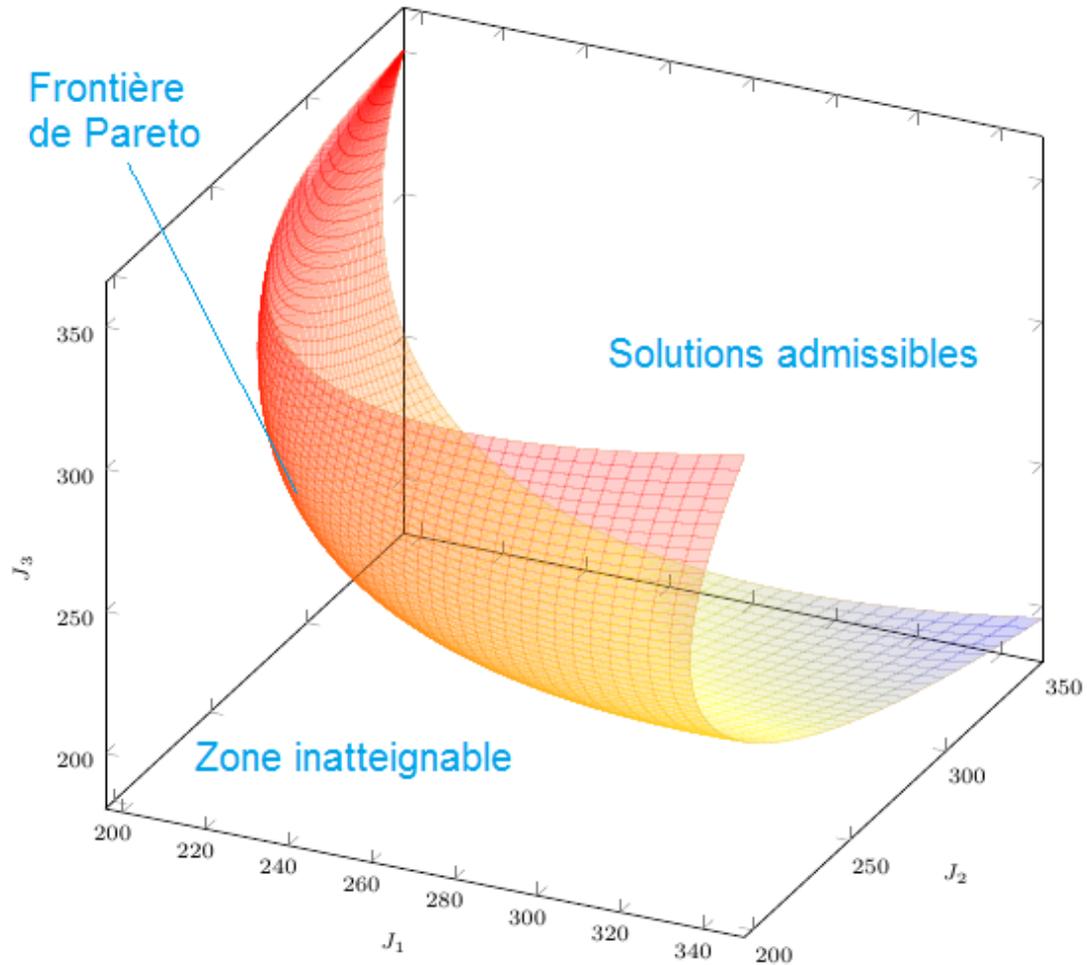
Dans le cadre d'une approche *a posteriori*, la MCDM s'appuie souvent sur les **méta-heuristiques** (dont les algorithmes génétiques sont un cas particulier) pour rechercher un ensemble de solutions optimales au sens de Pareto (une « frontière » optimale, dont la frontière efficiente de Markowitz est d'ailleurs un cas particulier). L'utilisateur a alors la possibilité de visualiser sur cette frontière les différents compromis possibles entre les critères d'optimisation avant de faire son choix final.

Les méta-heuristiques sont des algorithmes d'optimisation qui n'ont qu'une justification théorique partielle et qui se basent également sur l'intuition pour rechercher une solution. Elles s'inspirent généralement de systèmes naturels : la physique, la biologie, l'éthologie<sup>6</sup>... Cela leur donne une grande souplesse mais en contrepartie il n'y a aucune garantie de leur succès.

Plus formellement la **frontière de Pareto** ou **frontière efficiente** désigne l'ensemble des solutions pour lesquelles il n'est pas possible d'améliorer l'un des critères sans en dégrader un autre : il s'agit en fait d'une généralisation possible de la notion d'optimalité à un nombre quelconque de critères d'optimisation.

6. Etude du comportement des espèces animales

Exemple de frontière efficace avec 3 critères ( $J_1, J_2, J_3$ ) à minimiser



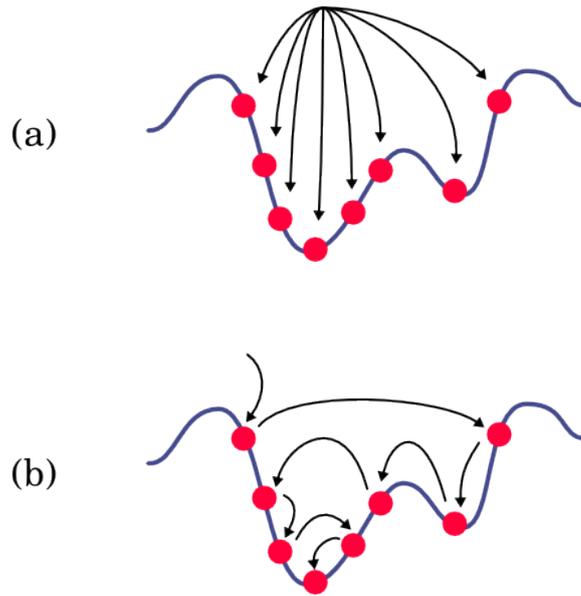
Un autre avantage des méta-heuristiques est qu'elles ne requièrent pas que le problème vérifie certaines propriétés pour être appliquées : aucune hypothèse de convexité, linéarité, continuité... n'est nécessaire. De plus les intuitions sur le problème peuvent être intégrées dans leur conception, qui est assez libre puisqu'elle ne s'appuie pas sur un cadre mathématique précis.

Pour cette raison les méta-heuristiques sont particulièrement adaptées lorsque les algorithmes mathématiques usuels échouent, sont longs à converger, ou aboutissent à un optimum local. Le seul prérequis est de savoir mesurer les différents critères à optimiser, ou bien de savoir évaluer directement la qualité d'une solution candidate par une *fitness function* ( $\sim$  fonction objectif).

Il est fréquent de distinguer deux types de méta-heuristiques :

- (a) Les méta-heuristiques à population (algorithme génétique, optimisation par essaims particulaires, algorithme colonies de fourmis, etc.) ;
- (b) Les méta-heuristiques à parcours (recuit simulé, recherche avec tabous, GRASP, etc.).

Les premières font évoluer un ensemble de solutions en parallèle à chaque itération, tandis que les secondes font évoluer une seule solution dans l'espace de recherche.



Source : <https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9taheuristique>

Ce sont les méta-heuristiques à population qui sont typiquement utilisées pour rechercher une frontière de Pareto (le but étant alors de répartir la population de solutions sur la frontière optimale).

Des **hybridations** sont maintenant suggérées dans la littérature : les méta-heuristiques sont combinées entre elles (Ibrahim et al. [33]), aux méthodes modernes de *machine learning* (Bandaru et al. [6][7]), et plus généralement à des techniques issues de différents domaines (par exemple la *data visualization*, Ibrahim et al. [32]) pour créer des algorithmes très performants et prometteurs pour l'avenir.

Pour conclure, dans le cadre d'une méthode de prise de décisions *a posteriori* la frontière de Pareto est d'abord déterminée. L'utilisateur peut alors visualiser les compromis possibles entre les différents critères d'optimisation afin de choisir la solution qui correspond le mieux à ses préférences. Ce processus lui permet notamment de mieux comprendre le problème et comment les différents critères interagissent entre eux.

## III.3 Application à la problématique

### III.3.1 Approche multi-objectifs

Les méthodes *a posteriori* semblent donc bien adaptées au problème de l'allocation stratégique d'actifs qu'il est possible de formuler sous la forme d'un « problème de contrôle multi-objectifs » :

$$\begin{cases} \max_x (C_1(x), C_2(x), \dots, C_M(x)) \\ \text{s.c. } Cont \end{cases}$$

avec  $M \in \mathbb{N}^*$  critères  $(C_m)_{m \in \llbracket 1, M \rrbracket}$  à optimiser (au sens de Pareto) sous les contraintes notées  $Cont$ , et  $x$  un vecteur de dimension  $n$  où  $x_i$  représente l'allocation dans la classe d'actifs  $i$ .

Remarque : dans le cas le plus général  $x$  peut être recherché dans un ensemble de processus aléatoires  $\mathcal{F}$ -mesurables où  $\mathcal{F}$  est une filtration qui dépend des données du problème. Dans la suite nous nous limitons au cas où  $x$  est un vecteur déterministe. En effet nous avons vu en I.3.3 que sinon, même dans le cas où il n'y a qu'un seul critère d'optimisation, le problème est trop complexe à optimiser numériquement (temps de convergence infini).

Cette formulation multi-objectifs permet de répondre à la plupart des critiques évoquées en III.1 au début de cette partie. En effet la recherche d'une frontière efficiente permet de s'affranchir de la définition d'une fonction d'utilité : il n'est plus essentiel de connaître dès le départ le compromis souhaité entre les différents critères.

De plus la présence de plusieurs critères de décision offre la possibilité de définir des critères prenant en compte plusieurs visions (i.e. mesurés avec différents modèles) ou destinés à mesurer les conséquences potentielles d'une erreur de modélisation. A cet effet certains critères peuvent par exemple correspondre à une sensibilité sur un paramètre ou bien au résultat d'un choc ou d'un scénario adverse. Il y a donc un réel gain pour le décideur qui peut évaluer et contrôler plus facilement les risques auxquels il est exposé.

### III.3.2 Approche interactive

Les études (par exemple la revue de Deb et al. [17]) semblent montrer que les méta-heuristiques sont performantes pour rechercher des solutions dans des espaces très grands mais qu'elles peuvent échouer lorsque le nombre de critères d'optimisation devient supérieur à 3 ou 4. En effet la dimension de la frontière efficiente augmente avec le nombre de critères : la convergence devient alors plus longue et le nombre de solutions requises pour se répartir sur un maillage de la frontière efficiente peut devenir très important.

L'augmentation de la dimension de la frontière efficiente met également en évidence que la définition de cette frontière est trop peu « discriminante » en présence de plusieurs critères : elle correspond simplement à éliminer les solutions qui sont trivialement inintéressantes (puisqu'il en existe d'autres plus performantes sur tous les critères simultanément). Cette définition générale est intéressante pour ne pas avoir à déterminer trop rapidement le compromis recherché entre les différents critères, mais elle peut s'avérer problématique en rendant la visualisation et l'interprétation des résultats trop complexes pour que la prise de décisions soit efficace.

Les méta-heuristiques sont encore un domaine de recherche très actif et plusieurs auteurs commencent à proposer des algorithmes capables de déterminer la frontière efficiente en présence de nombreux critères. Deb et al. ont par exemple mis au point le NSGA-III [17][35] qui se base sur des *reference points* pour guider la convergence. D'autres méthodes ont été proposées, notamment en présence de critères corrélés entre eux car cela réduit la « taille » de la frontière efficiente (Deb et al. [19]).

Ainsi il est possible d'imaginer que certains algorithmes permettent ou permettront de déterminer la totalité de la frontière efficiente du problème évoqué en III.3.1 ; d'autant plus que les critères de décision sont en général fortement corrélés pour ce problème (voir de Tollo et al. [21]). En revanche les techniques nécessaires à l'obtention d'un tel résultat n'ont quasiment jamais été testées sur des cas réels pour le moment, tandis que l'obtention de la frontière totale ne résout pas le problème de l'interprétation des résultats et ne facilite pas forcément la prise de décisions.

C'est la raison pour laquelle nous proposons une solution alternative dans ce mémoire, consistant à rendre l'optimisation interactive. Nous justifions ce choix par plusieurs arguments :

→ Complémentarité : l'interactivité n'est pas incompatible avec l'utilisation de techniques permettant de déterminer des frontières efficiente de grande dimension. De ce fait il sera envisageable d'étendre la méthode à des algorithmes plus complexes que celui qui est utilisé dans la suite du mémoire.

→ Analyse des résultats : nous verrons dans la suite (en IV.3) que visualiser une frontière efficiente de grande dimension est délicat. L'interactivité permet au décideur de concentrer la recherche sur certaines zones de cette frontière et de raisonner par tâtonnements, en revenant en arrière s'il en ressent le besoin. Il peut ainsi simplifier l'interprétation des résultats, gagner en compréhension du problème et guider l'algorithme au fur et à mesure vers les solutions qui l'intéressent.

→ Complexité : en restreignant au fur et à mesure les portions de la frontière efficiente à déterminer, l'interactivité permet d'accélérer la convergence de l'algorithme.

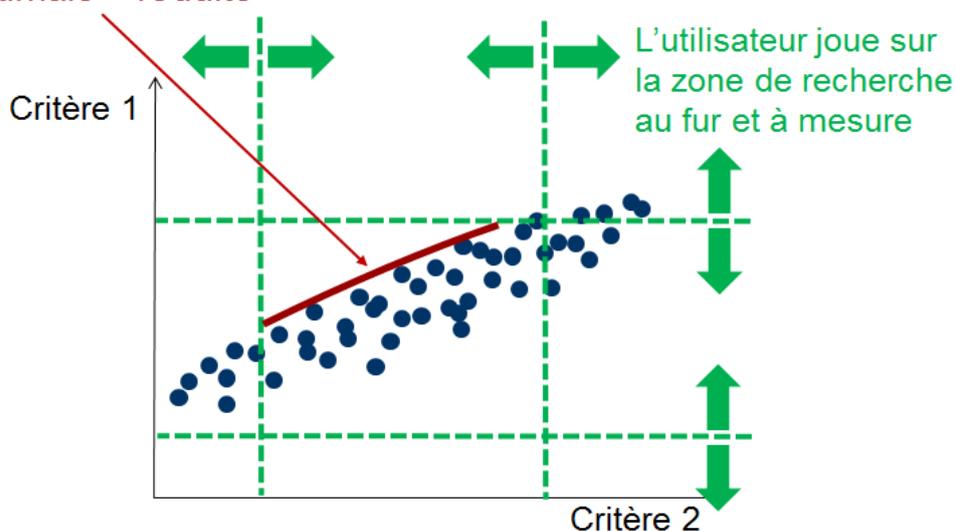
→ Stratégie : l'interactivité permet de répondre à la première critique mentionnée en III.1. Elle place le décideur au coeur du processus et lui donne l'opportunité d'intégrer l'impact de décisions stratégiques et subjectives au fur et à mesure de l'optimisation.

Plus formellement, le principe de l'approche suggérée est de déterminer une méta-heuristique (à population) capable de rechercher une frontière efficiente et de s'adapter à des changements sur les contraintes du problème. Avec un tel algorithme l'utilisateur peut en permanence consulter les résultats obtenus par la population de l'algorithme et ajuster les contraintes du problème en fonction de ses préférences et de ce qu'il observe.

L'idée de cette approche est de constater qu'au départ le décideur n'a qu'un faible *a priori* sur les fourchettes de valeurs dans lesquelles il souhaite que les critères de l'optimisation se situent. En revanche en apprenant du problème il sera capable de les affiner au fur et à mesure en fonction de ses attentes et besoins.

## Approche interactive

Frontière optimale « réduite »



Un cercle représente les valeurs que le décideur autorise pour un critère

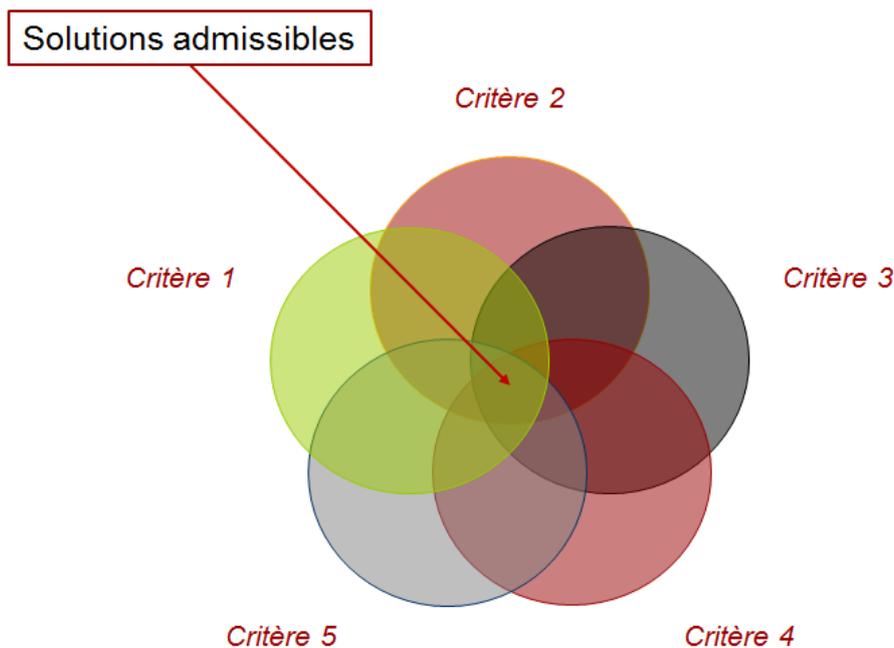
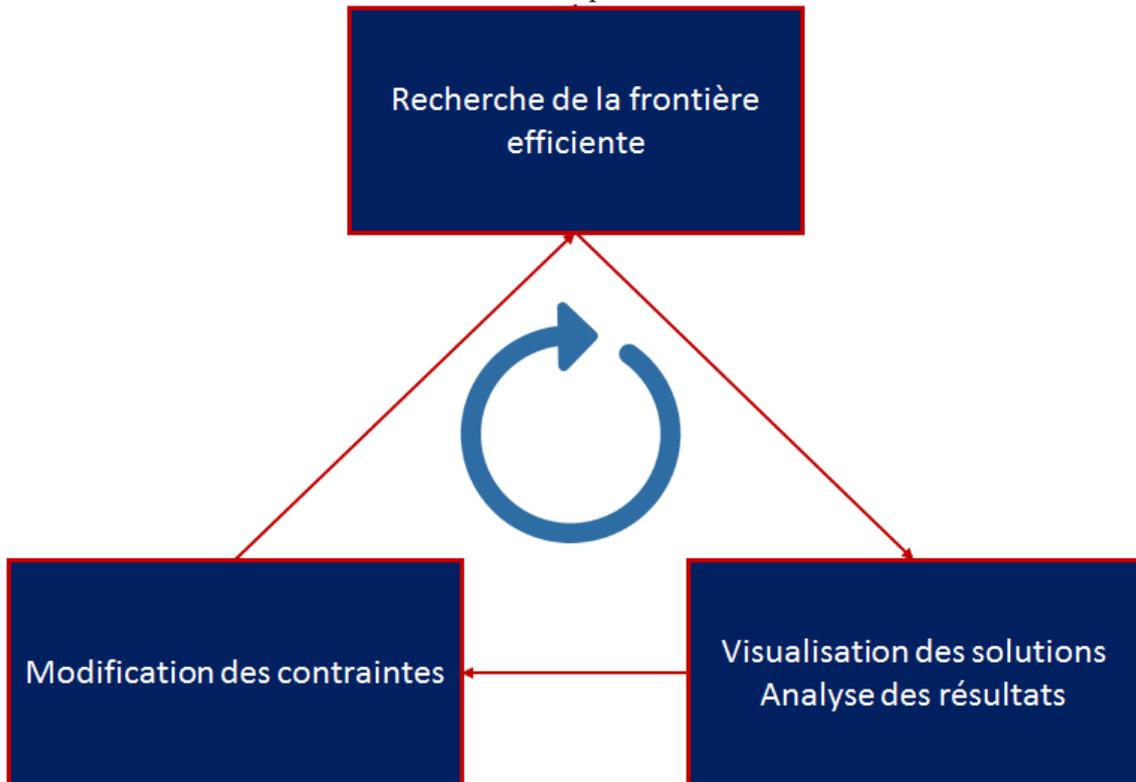


Schéma de l'optimisation



## III.4 Conception de l'algorithme d'optimisation

Dans ce qui suit nous nous intéressons à la conception d'un algorithme génétique capable de mettre en oeuvre l'approche suggérée ci-dessus. Nous avons retenu cette méta-heuristique en raison de sa popularité et de ses applications déjà existantes et prometteuses à la problématique.

### III.4.1 Classification des contraintes

Pour commencer nous proposons de classer les contraintes en 2 catégories :

→ Les contraintes de type (a) qui ne nécessitent pas de passer par le moteur ALM i.e. qui sont immédiatement vérifiables. Il s'agit principalement des contraintes de type  $a_i \leq x_i \leq b_i$  où  $x_i$  représente l'allocation relative à la classe d'actifs  $i$  ( $a_i, b_i \in [0, 1], a_i < b_i$ ). Elles incluent également la contrainte  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  inhérente à la problématique. Les contraintes de type (a) existent toujours dès le départ (pour des raisons réglementaires ou à cause de la politique de gestion des risques par exemple).

→ Les contraintes de type (b) qui nécessitent de passer par le moteur ALM pour savoir si elles sont vérifiées. Il s'agit principalement des contraintes « fourchettes » mentionnées en III.3.2, de type  $u_m \leq C_m \leq v_m$  où  $C_m$  est un critère que l'utilisateur souhaite maintenir entre les 2 valeurs  $u_m, v_m \in \mathbb{R}, u_m < v_m$ . En général les critères de décision sont en effet mesurés à l'aide du moteur ALM. Ces contraintes sont à manipuler avec précaution car elles peuvent :

- Restreindre le problème à certaines valeurs des critères sans que l'utilisateur ait eu le temps d'apprendre du problème pour savoir s'il s'agit bien des valeurs qu'il préfère ;
- Éliminer toute solution en étant trop restrictif et fixant des fourchettes qui ne sont pas atteignables simultanément.

La distinction de ces deux types de contraintes est importante car il est toujours possible de savoir à l'avance si une solution est admissible vis-à-vis des contraintes de type (a). De ce fait il sera important que l'algorithme n'inclue jamais de solutions non admissibles vis-à-vis de ces contraintes dans la population.

A l'inverse il n'est pas possible d'éviter les solutions non admissibles vis-à-vis des contraintes de type (b). Il sera donc nécessaire d'inclure ce type de solutions dans la population en espérant les éliminer au fur et à mesure (par « sélection naturelle ») pour converger vers les portions admissibles de la frontière efficiente.

### III.4.2 Encodage : réel ou binaire ?

L'une des premières questions à se poser pour concevoir un algorithme génétique est celle de l'encodage : l'optimisation doit-elle être réalisée dans un espace discret ou continu ? Au départ l'inspiration biologique des algorithmes génétiques les prédispose plutôt à l'encodage binaire. Pourtant il existe maintenant de nombreuses applications de ces algorithmes avec un encodage réel qui ont montré qu'il peut également s'agir d'un choix pertinent.

Gaffney et al. [28] se sont donc interrogés pour savoir s'il faut privilégier un encodage donné en fonction du type de problème rencontré. Malheureusement il ne semble pas y avoir de réponse générale à cette question. En revanche plusieurs remarques peuvent être formulées :

- Sur un très grand nombre de problèmes les deux choix d'encodage mènent à des performances très similaires ;
- Le choix d'un encodage binaire pour un problème initialement continu nécessite une discrétisation : il y a donc un compromis à effectuer entre la précision et la complexité (quelle finesse pour la discrétisation ?) ;
- Les performances de l'algorithme génétique semblent majoritairement liées à d'autres facteurs : qualité des opérateurs génétiques choisis, incorporation des intuitions sur le problème, calibrage des paramètres...

En conclusion le choix de l'encodage n'est pas pas souvent déterminant. Le problème que nous traitons étant initialement continu (recherche d'une allocation dans  $[0, 1]^n$  avec plusieurs contraintes), il nous a semblé intuitif de retenir un encodage réel. Ce choix permet de ne pas avoir à se poser la question de la finesse de la discrétisation. De plus cet encodage a été retenu dans plusieurs applications d'algorithme génétique aux problèmes d'allocation dans la littérature.

### III.4.3 Génération d'un individu aléatoire

La génération d'un individu aléatoire est utile pour créer la population initiale et mettre en application le concept de nouveauté (voir I.3.4). Il est donc intéressant d'étudier les différentes manières de générer une allocation i.e. un vecteur  $x$  de dimension  $n$  vérifiant les contraintes de type (a)  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  et  $\forall i, a_i \leq x_i \leq b_i$ . Nous décrivons ci-dessous les principales méthodes existantes.

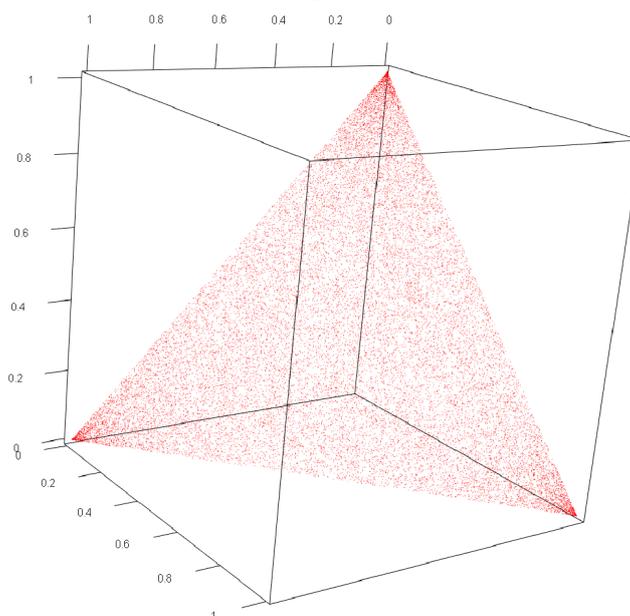
La méthode la plus simple ne fonctionne que si  $\forall i a_i = 0$  et  $b_i = 1$ . Elle consiste à tirer  $n$  réalisations uniformes  $\mathcal{U}(0, 1)$  puis à les diviser par leur somme. Malheureusement pour d'autres valeurs des  $a_i$  et  $b_i$  cette méthode échoue (ou oblige à inclure des solutions non admissibles vis-à-vis des contraintes de type (a) dans la population, ce qui n'est pas souhaitable comme expliqué en III.4.1).

Dans son mémoire Monin [47] étend cette méthode en essayant d'incorporer les contraintes au fur et à mesure que les composantes de l'allocation sont générées :

1. Mélanger aléatoirement les index  $\{1, \dots, n\}$  et les stocker dans un tableau  $T = [i_1, \dots, i_n]$ .
2. Simuler  $x_{i_1}$  par une loi uniforme  $\mathcal{U}(a_{i_1}, b_{i_1})$ .
3. Pour chaque  $j$  entre 2 et  $n - 1$  :
  - 3.1. Si  $\min(1 - \sum_{k=1}^{j-1} x_{i_k}, b_{i_j}) < a_{i_j}$ , recommencer le processus.
  - 3.2. Sinon simuler  $x_{i_j}$  par une loi uniforme  $\mathcal{U}(a_{i_j}, \min(1 - \sum_{k=1}^{j-1} x_{i_k}, b_{i_j}))$ .
4. Poser  $x_{i_n} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_{i_j}$ .
5. Si  $a_{i_n} \leq x_{i_n} \leq b_{i_n}$ , la génération validée. Sinon recommencer le processus.

Cette extension s'avère relativement performante pour des  $a_i$  et  $b_i$  « peu contraignants ». En revanche lorsque les  $a_i$  et  $b_i$  s'éloignent trop de 0 et 1 respectivement il y a un fort risque que le processus de génération soit recommencé extrêmement souvent. De plus et même en l'absence de contraintes la génération obtenue par cette méthode n'est pas uniforme, comme le montre le graphe suivant (les « coins » sont privilégiés) :

Génération du simplexe  $S(n) = \{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$  pour  $n = 3$  avec la méthode précédente



L'uniformité de la génération est importante pour notre application car elle permet de s'assurer qu'aucune région de l'espace de recherche n'est privilégiée. La littérature propose alors d'autres méthodes en remarquant que la génération uniforme dans le simplexe  $S(n)$  est équivalente au tirage de la loi multi-dimensionnelle de Dirichlet  $\mathcal{D}(1, \dots, 1)$ , notée  $\mathcal{D}_0(n)$  dans la suite. Générer uniformément dans la « portion » de simplexe  $\mathcal{P}(n) = \{x \in S(n) | \forall i, a_i \leq x_i \leq b_i\}$  revient donc à simuler une loi de Dirichlet  $\mathcal{D}_0(n)$  « tronquée » par les  $a_i$  et  $b_i$ . Nous notons cette loi tronquée  $\mathcal{L}_0(n)$  dans la suite.

Pour cela Simpson [62] propose d'utiliser l'échantillonnage de Gibbs (Gelfand et Smith [29]) et la technique MCMC (Monte-Carlo Markov Chain) avec  $\mathcal{L}_0(n)$  pour loi stationnaire. Malheureusement cette méthode est simulateur : elle n'est pas assez rapide pour les besoins spécifiques du problème. En effet l'interactivité nécessite que l'algorithme soit capable de converger rapidement pour que l'utilisateur puisse interagir efficacement avec lui « en temps réel ». Le processus de génération ne peut donc pas être trop long.

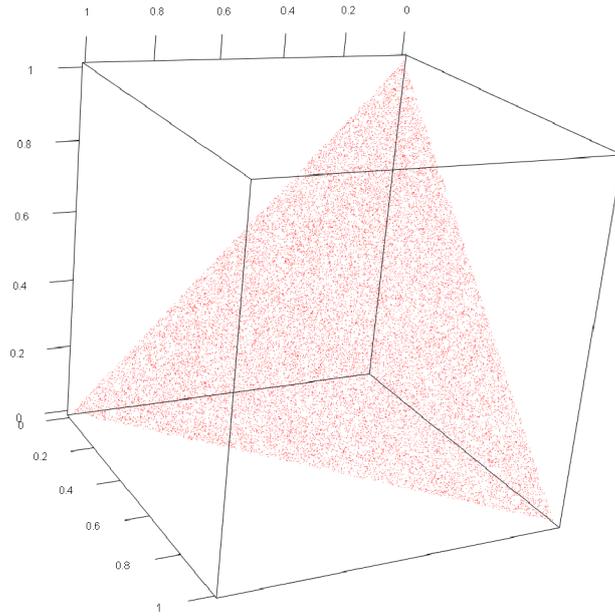
Pour remédier à cette limitation nous proposons ci-dessous une nouvelle méthode de génération s'appuyant sur les propriétés de  $\mathcal{D}_0$  (qui est une loi de Dirichlet particulière). En effet la méthode MCMC reste valable pour une loi de Dirichlet (tronquée) quelconque mais n'exploite pas le fait que tous les paramètres de  $\mathcal{D}_0$  soient égaux à 1.

Or plusieurs auteurs comme Devroye [20] ont mis en évidence que  $\mathcal{D}_0(n)$  vérifie plusieurs propriétés remarquables. Ce dernier donne notamment deux méthodes de génération uniformes (et rapides!) de la loi  $\mathcal{D}_0(n)$  mais qui ne sont pas directement exploitables pour générer sa forme tronquée  $\mathcal{L}_0(n)$  car la symétrie est rompue (les lois marginales de chaque  $x_i$  ne sont plus identiques).

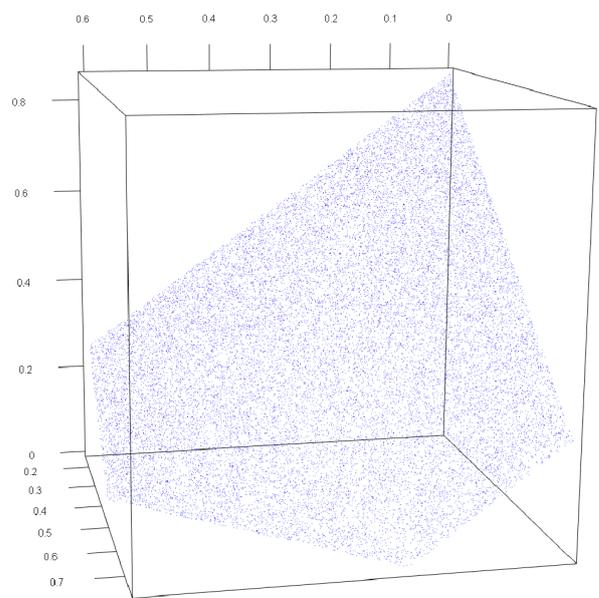
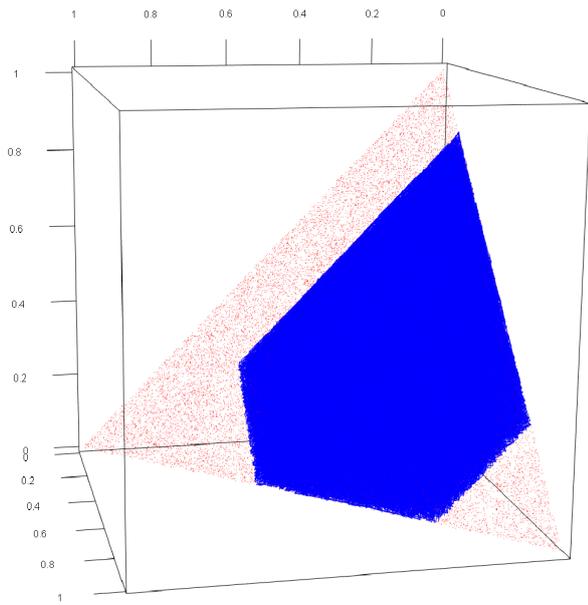
L'idée de la méthode proposée est de reprendre ces travaux en les adaptant à la loi tronquée  $\mathcal{L}_0(n)$ . Pour cela la perte de la symétrie est compensée par l'utilisation de lois conditionnelles qui permettent de générer les  $x_i$  les uns après les autres. Afin d'alléger l'exposé nous donnons une description de la méthode ci-dessous et invitons le lecteur intéressé à trouver la démonstration rigoureuse de son uniformité dans l'Annexe C.

1. Poser  $\forall i, a_i^* = \max(a_i, b_i + 1 - \sum_{i=1}^n b_i)$  et  $b_i^* = \min(b_i, a_i + 1 - \sum_{i=1}^n a_i)$ .
2. Simuler  $x_1$  par une loi beta  $\beta(1, n - 1)$  tronquée à gauche et à droite par  $a_1^*$  et  $b_1^*$ .
3. Pour chaque  $i$  entre 2 et  $n - 1$  :
  - 3.1. Poser  $D = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} x_j$ .
  - 3.2. Simuler  $x_i$  par une loi beta  $\beta(1, n - i)$  tronquée à gauche et à droite par  $\frac{a_i^*}{D}$  et  $\frac{b_i^*}{D}$ .
  - 3.3. Multiplier  $x_i$  par  $D$  :  $x_i = Dx_i$ .
4.  $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ .

Génération du simplexe  $S(n)$  pour  $n = 3$  avec la méthode proposée



Génération de la portion  $\mathcal{P}(n)$  avec  $n = 3$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0.15$ ,  $a_3 = 0.23$ ,  $b_1 = 0.6$ ,  $b_2 = 1$  et  $b_3 = 0.74$



### III.4.4 Comparaison des individus : évaluation de leur qualité

#### Notion de rang dans les problèmes multi-objectifs

L'un des algorithmes génétiques les plus populaires pour déterminer des frontières efficaces est le NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*), décrit par Deb et ses étudiants [18] en 2002 (version améliorée du NSGA simple [65]). Les travaux qui suivent en sont inspirés. Afin de tendre vers la frontière efficace cet algorithme évalue la qualité d'un individu en faisant appel à la procédure dite de *non-dominated sorting*. Pour expliquer cette procédure nous avons besoin de définir la notion de domination. Sans perte de généralité, supposons vouloir maximiser les critères  $C_m$  d'optimisation. Alors :

Un individu  $x$  est dit dominé par un individu  $y$  si  $\forall m \in [1, M] : C_m(x) \leq C_m(y)$  et s'il existe un  $m$  tel que l'inégalité soit stricte.

Remarque : un individu non dominé est optimal au sens de Pareto, il appartient à la frontière efficace.

Le principe de la procédure de *non-dominated sorting* est de départager les individus en fonction de leurs performances relatives. Pour cela, une classification en *fronts*  $F_i$  est réalisée de la manière suivante :

Les individus du front  $F_0$  ne sont dominés par aucun autre individu de la population ;

Les individus du front  $F_1$  ne sont dominés que par des individus du front  $F_0$  (et au moins par un) ;

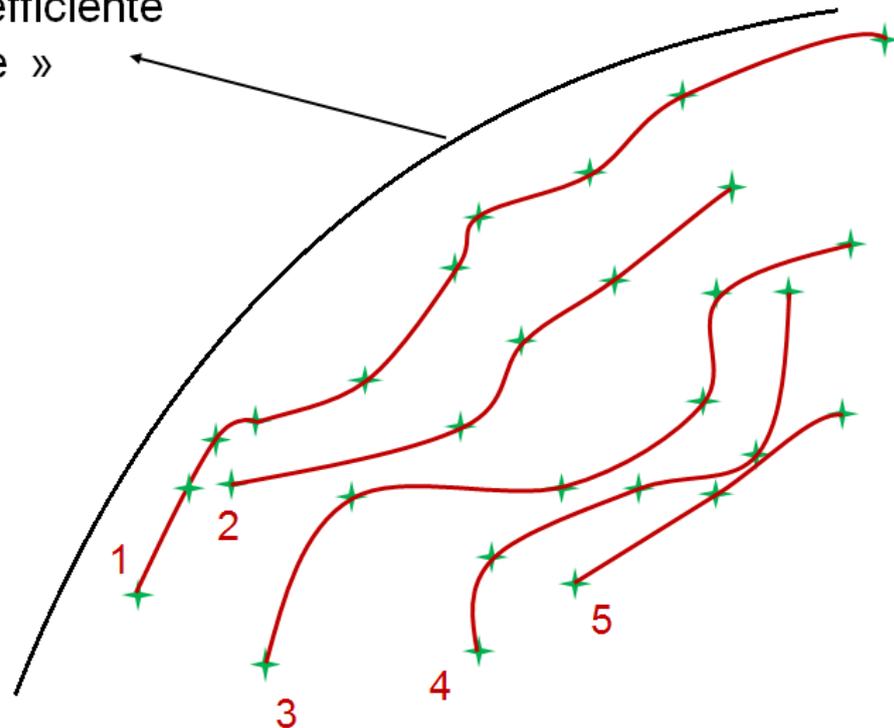
...

Autrement dit cela revient à attribuer des « rangs de domination » à tous les individus de la population. Ainsi il est possible de comparer des individus en jugeant qu'un individu  $x$  est de meilleure qualité qu'un individu  $y$  s'il a un meilleur rang. L'algorithme proposé par Deb et al. [18] pour réaliser cette opération est le suivant :

Soit  $P$  l'ensemble des individus (la population).

1. Pour tous les individus  $p$  dans  $P$  :
  - 1.1. Initialiser un ensemble  $S_p = \emptyset$  (contiendra les individus que  $p$  domine).
  - 1.2. Initialiser un entier  $n_p = 0$  (contiendra le nombre d'individus qui dominent  $p$ ).
  - 1.3. Pour chaque individu  $q \neq p$  :
    - 1.3.1. Si  $p$  domine  $q$ , ajouter  $q$  à  $S_p$ .
    - 1.3.2. Si  $q$  domine  $p$ , incrémenter  $n_p$ .
  - 1.4. Si  $n_p = 0$  ajouter  $p$  à  $F_0$ .
2. Initialiser le compteur des fronts  $r = 0$ .
3. Tant que  $F_r \neq \emptyset$  :
  - 3.1. Initialiser  $F_{r+1} = \emptyset$ .
  - 3.2. Pour chaque individu  $p$  dans  $F_r$  :
    - 3.2.1. Pour chaque individu  $q$  dans  $S_p$  :
      - 3.2.1.1. Décrémenter  $n_q$ .
      - 3.2.1.2. Si  $n_q = 0$  ajouter  $q$  à  $F_{r+1}$ .
    - 3.2.2. Incrémenter  $r$ .

Frontière efficiente  
« théorique »



### Répartition de la population sur la frontière efficiente

Est-ce possible de « départager » 2 individus de même rang ? Dans l'absolu au sein d'un même front il n'y a pas de raison de préférer un individu à un autre. Néanmoins il faut se rappeler que le but final de l'algorithme est de déterminer toute la frontière efficiente (ou plutôt toutes les portions admissibles). De ce fait il est souhaitable que la population soit bien diversifiée i.e. qu'elle se répartisse assez uniformément sur toute la frontière. C'est ce qui a poussé Deb et al. [18] à définir ce qu'ils ont appelé la *crowding distance* qui mesure en quelque sorte la taille du vide au voisinage d'un individu (et vis-à-vis des différents critères). Son calcul a lieu de la manière suivante :

Soit  $P$  l'ensemble des individus (i.e. la population).

1. Initialiser la *crowding distance* de chaque individu de  $P$  à 0.

2. Pour chaque  $m \in [1, M]$  :

2.1. Trier les individus de  $P$  par ordre croissant de critère  $m$ .

2.2. Déterminer  $f_{max}$  et  $f_{min}$  les valeurs minimales et maximales du critère  $m$  dans  $P$ .

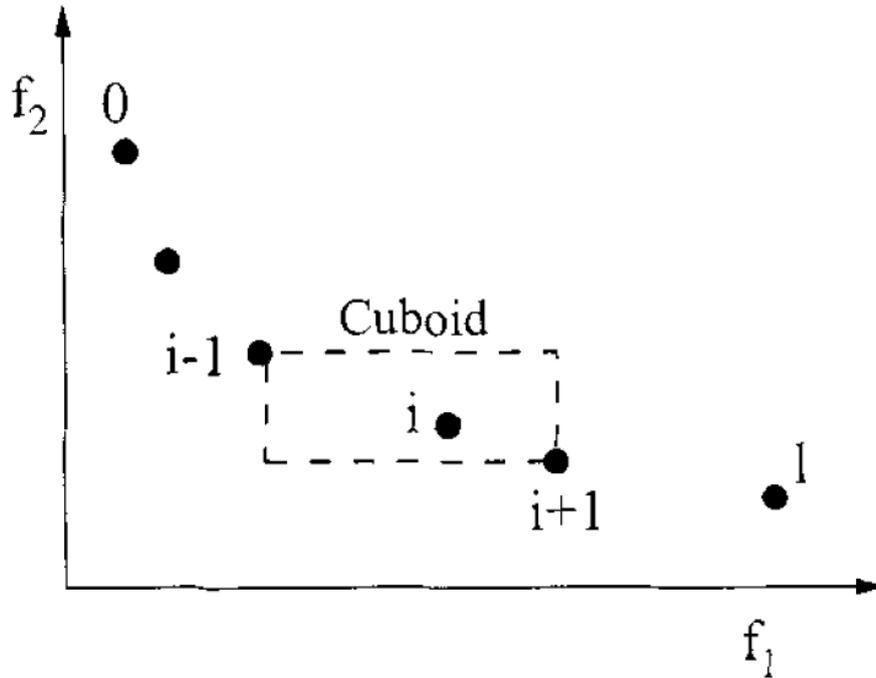
2.3. Affecter une *crowding distance* infinie au premier et au dernier individu.

2.4. Pour tous les autres individus  $i$  dans  $P$  trié :

2.4.1. Ajouter à la *crowding distance* de  $i$  la « distance normalisée » par rapport à ses 2 plus proches voisins (vis-à-vis du critère  $m$ ) :  $\frac{C_m(i+1) - C_m(i-1)}{f_{max} - f_{min}}$ .

Remarque : ci-dessus la *crowding distance* est calculée avec des distances en norme 1. Il serait possible d'envisager d'autres normes, comme par exemple la norme 2 (distance euclidienne usuelle).

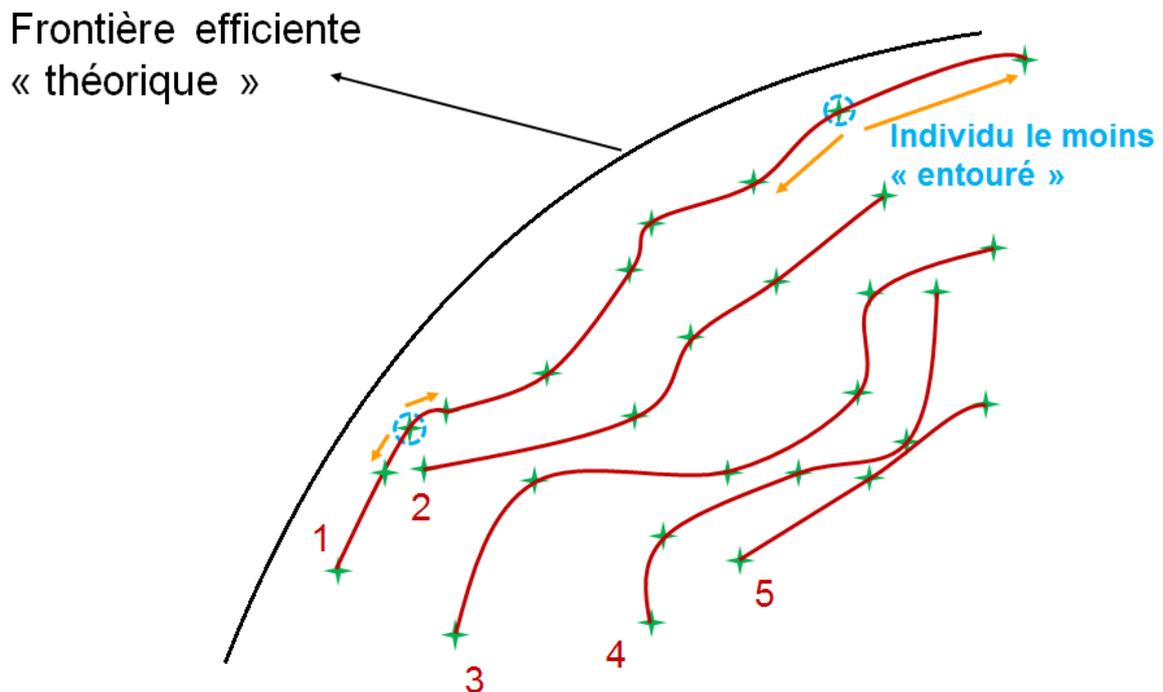
Illustration de la *crowding distance* avec 2 critères  $f_1$  et  $f_2$



Source : Deb et al. [18]

Ainsi au sein d'un même front il est possible de départager 2 individus en préférant celui qui a la plus grande *crowding distance*. Il existe d'autres méthodes pour s'assurer de la bonne répartition de la population sur la frontière mais celle-ci est très répandue car elle est efficace et ne fait appel à aucun paramétrage.

Exemple du choix d'un individu parmi deux sur le même front



## Gestion des solutions non admissibles

Jusqu'à présent nous n'avons pas abordé le problème des contraintes. Or nous savons que nous risquons de générer des allocations ne respectant pas les contraintes de type (b) : dans ce cas comment ajuster la mesure de la qualité des individus ?

Pour le NSGA-II Deb et al. [18] proposent de distinguer 2 cas :

- Comparaison d'une solution admissible avec une solution non admissible : la solution admissible est systématiquement préférée ;
- Comparaison de 2 solutions non admissibles : la solution « violant » moins les contraintes que l'autre est préférée.

Cette solution est parfois critiquée dans la littérature car elle est assez « radicale » : elle néglige systématiquement les solutions non admissibles alors qu'elles peuvent être potentiellement proches de la frontière efficiente et/ou pourraient permettre de générer des individus de bonne qualité.

Néanmoins et pour notre application il est possible de supposer que les fourchettes de valeurs définies par les contraintes de type (b) seront déjà « trop » larges (car affinées au fur et à mesure). De ce fait, la solution de Deb et al. nous est apparue au contraire très adaptée à notre cas et nous l'avons retenue.

Nous avons alors besoin de définir ce que signifie « violer moins » les contraintes. Pour cela nous avons utilisé comme critère la somme des « violations normalisées » de chaque contrainte de type (b). Pour la normalisation nous nous sommes inspirés des techniques de *features engineering* en *machine learning* et avons décidé de diviser chaque « violation » (écart d'un critère au-delà de l'une de ses bornes  $u_m$  ou  $v_m$ ) par l'écart-type du critère correspondant dans la population de l'algorithme. En effet l'écart-type peut s'interpréter comme une mesure « d'à quel point il est probable, sur la frontière efficiente, de faire varier ce critère d'un individu à un autre ».

Remarque : là encore il serait possible d'utiliser une autre norme et d'additionner, par exemple, les carrés des violations normalisées...

## Synthèse – comparaison de 2 individus

Notons  $x \prec y$  pour indiquer que  $y$  est préféré à  $x$ . Alors pour 2 individus  $x$  et  $y$  :

- Si  $x$  et  $y$  sont admissibles :
  - > Si le rang de  $x$  est meilleur que celui de  $y$  :  $y \prec x$
  - > Si le rang de  $y$  est meilleur que celui de  $x$  :  $x \prec y$
  - > Si le rang de  $x$  est le même que celui de  $y$  :
    - Si la *crowding distance* de  $x$  est meilleure que celle de  $y$  :  $y \prec x$
    - Sinon  $x \prec y$
- Si  $x$  est admissible et  $y$  non admissible :  $y \prec x$
- Si  $x$  est non admissible et  $y$  admissible :  $x \prec y$
- Si  $x$  et  $y$  sont non admissibles :
  - > Si  $x$  viole moins les contraintes que  $y$  :  $y \prec x$
  - > Sinon  $x \prec y$

Cet opérateur de préférence ( $\prec$ ) a la propriété intéressante de pouvoir ordonner tous les individus de la population les uns par rapport aux autres i.e. pour une population de taille  $p$  il existe des indices  $i_1, \dots, i_p$  tels que :  $x_{i_1} \prec x_{i_2} \prec \dots \prec x_{i_p}$  (il s'agit en fait d'un préordre).

### III.4.5 L'opérateur de sélection

#### Enjeux de l'opérateur de sélection

L'opérateur de sélection est important car il détermine à partir de quels individus déjà existants les nouveaux individus seront créés. Il réalise un compromis entre exploration de l'espace de recherche et exploitation des informations connues. Il faut en effet se concentrer sur les meilleurs individus afin d'augmenter les chances de créer des individus encore meilleurs mais en ne délaissant pas trop les moins bons individus, qui contribuent à la diversité génétique et peuvent aussi mener à de nouveaux individus de bonne qualité.

Il existe plusieurs opérateurs de sélection classiques mais beaucoup font appel à une mesure de la qualité d'un individu. Or l'opérateur  $\prec$  défini précédemment ne permet que de comparer deux individus entre eux. Pour remédier à cela il est possible de définir la *fitness* (mesure de la qualité) d'un individu  $x$  comme étant le nombre d'individus  $y$  tels que  $y \prec x$ , éventuellement normalisé (en divisant par exemple par la somme des *fitness* non-normalisées de tous les individus).

#### Les opérateurs classiques

Les principaux opérateurs de sélection existants sont les suivants :

Sélection aléatoire (uniforme) – Cet opérateur consiste simplement à tirer aléatoirement un individu dans la population. Il donne donc la même chance d'être tiré à chaque individu, et ne prend pas en compte ce qui a déjà été appris du problème.

Sélection par troncature – Cet opérateur est une amélioration du précédent. Il consiste d'abord à déterminer une sous-population composée des  $T\%$  meilleurs individus, puis à appliquer l'opérateur de sélection aléatoire à cette sous-population. Cela permet de ne piocher que des individus « assez bons ». En revanche cette méthode nécessite de bien choisir le paramètre  $T$  et donne toujours la même chance d'être pioché à 2 individus de la sous-population. De plus les individus les moins bons n'ont alors plus aucune chance d'être piochés.

Sélection par roulette – Avec cet opérateur les individus sont triés par ordre décroissant de *fitness*. Les *fitness* cumulées sont calculées (la *fitness* cumulée d'un individu est la somme de sa *fitness* et de celles de ses prédécesseurs). Enfin, une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$  est tirée et l'individu sélectionné est le dernier ayant une *fitness* cumulée inférieure à  $R$ .

Cet opérateur donne une meilleure chance d'être pioché aux individus de meilleure qualité sans pour autant éliminer complètement les individus les plus faibles, mais il reçoit tout de même deux critiques principales :

- La part d'aléatoire se résumé au tirage de  $R$ , cela ne favorise pas beaucoup la diversité génétique et l'exploration ;
- Il est coûteux en temps de calcul, surtout pour des grandes populations.

Pour y remédier les auteurs ont développé des extensions efficaces telles que la *Stochastic Acceptance* ou le *Stochastic Universal Sampling (SUS)* [5].

Sélection par tournoi – Ce dernier mode de sélection consiste à piocher aléatoirement un nombre  $p \geq 2$  d’individus dans la population puis à ne conserver que le meilleur d’entre eux (selon  $\prec$ ). Lorsque  $p$  augmente, l’aspect exploration perd de l’importance (car la probabilité de piocher au moins un très bon individu et de le conserver augmente) mais l’aspect exploitation devient plus efficace. Il faut donc trouver un « juste milieu » pour ne pas compromettre la diversité génétique ni causer de convergence prématurée (voir I.3.4).

La sélection par tournoi est très répandue dans la littérature car elle est utilisée par des algorithmes connus (comme le NSGA-II [18]) et n’est pas du tout coûteuse en temps de calcul. Souvent  $p$  est pris égal à 2 (sélection binaire ou *binary tournament selection*), ce qui correspond au choix de la prudence quitte à ralentir la convergence.

### L’opérateur de sélection retenu

Nous avons retenu la sélection par tournoi dont le principe semblait adapté à notre étude : peu coûteux, efficace et bien réputé. En revanche la sélection binaire classique a été écartée : potentiellement excessivement prudente, elle est susceptible de ralentir la convergence inutilement et donc de nuire à l’aspect interactif de l’algorithme (voir III.4.3 : l’interactivité nécessite une certaine rapidité). Ainsi au lieu de choisir naïvement  $p = 2$  nous avons envisagé la possibilité de calibrer  $p$  plus finement afin de trouver un compromis plus satisfaisant.

Par ailleurs nous avons remarqué que les opérateurs de sélection classiques favorisent le maintien de la diversité génétique en donnant à tous les individus une chance non nulle d’être pioché, même s’ils sont de moins bonne qualité. Néanmoins dans le cas de grands espaces de recherche cela paraît insuffisant : il est très probable que certaines zones ne soient jamais explorées par la population.

Afin de résoudre ce problème nous avons remarqué que l’objet de la nouveauté (I.3.4) est précisément d’explorer de nouvelles zones de l’espace (en ignorant la population actuelle). Afin d’intégrer ce concept dans notre opérateur de sélection, nous avons introduit un second paramètre  $q$  représentant la proportion de la nouveauté. L’opérateur de sélection retenue, à deux paramètres  $(p, q)$ , est alors décrit ci-dessous :

1. Tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R < q$ , générer aléatoirement un nouvel individu (III.4.3) et le sélectionner.
3. Sinon effectuer une sélection par tournoi de paramètre  $p$  :
  - 3.1. Tirer aléatoirement  $p$  individus  $x^i$ ,  $i = 1..p$  dans la population.
  - 3.2. Trier les  $x^i$  en trouvant les  $i_j$  tels que  $x^{i_1} \prec \dots \prec x^{i_p}$ .
  - 3.3. Sélectionner  $x^{i_p}$  (le meilleur des  $x^i$ ).

### III.4.6 L'opérateur de croisement

#### Les opérateurs classiques

Nous avons vu en I.3.4 que l'opérateur de croisement consiste à choisir et mélanger certaines parties (les *gènes*) des individus (sélectionnés par l'opérateur précédent) afin d'espérer créer des individus différents et de meilleure qualité (tirant le meilleur parti de chacun des *parents*). A cet effet la littérature propose un certain nombre d'opérateurs classiques que nous détaillons ci-dessous. Dans la suite nous notons  $x^1$  et  $x^2$  les deux parents.

Croisement linéaire – trois individus sont créés :  $x^3 = 0.5x^1 + 0.5x^2$ ,  $x^4 = 1.5x^1 - 0.5x^2$ ,  $x^5 = 1.5x^2 - 0.5x^1$ . Parmi les  $(x^i)_{1 \leq i \leq 5}$ , les deux meilleurs (selon  $\prec$ ) sont conservés. Cet opérateur est très simplifié mais intéressant car il applique le concept de l'élitisme (voir I.3.4).

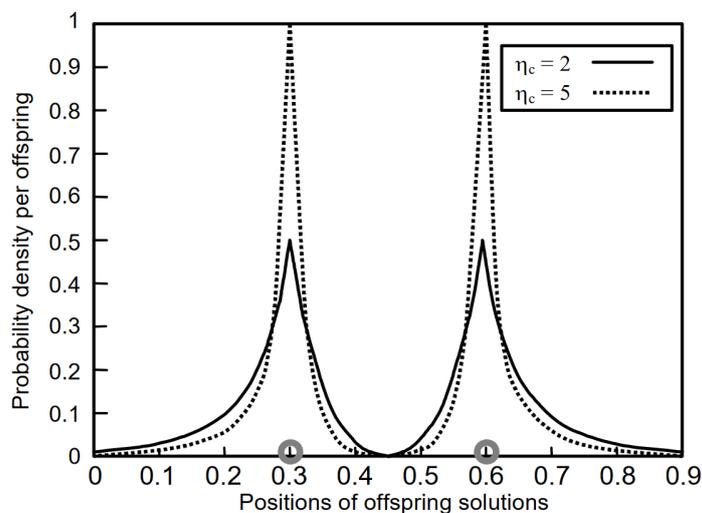
Croisement par moyenne pondérée uniforme – L'idée est de réaliser une moyenne pondérée aléatoire des deux parents. Pour cela, deux variables uniformes  $\gamma_1, \gamma_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$  sont tirées. Les enfants sont alors donnés par  $y^1 = \gamma_1 x^1 + (1 - \gamma_1)x^2$  et  $y^2 = \gamma_2 x^1 + (1 - \gamma_2)x^2$ . Il s'agit d'une méthode répandue mais dont l'aspect « contractant » peut s'avérer problématique (recherche uniquement entre  $x^1$  et  $x^2$ ).

*Blend crossover* – Il s'agit simplement de la généralisation de la méthode précédente : les 2 enfants ne sont pas nécessairement tirés sur le segment  $[x^1, x^2]$ , ils sont tirés sur un segment bien choisi inclus dans la droite  $(x^1, x^2)$ . Pour cela les  $\gamma_i$  sont tirés suivant une loi  $\mathcal{U}(1 - a, a)$  avec  $a \geq 1$ .

*Simulated Binary Crossover (SBX-over)* – L'idée de cet opérateur est de tirer les enfants sur toute la droite  $(x^1, x^2)$  (sans se restreindre à un segment). En contrepartie le tirage n'est plus uniforme sur cette droite : certains points sont privilégiés, et il est plus probable de tirer un enfant près des parents qu'un enfant éloigné d'eux. Pour cela, les enfants sont donnés par  $y^i = 0.5[(x^1 + x^2) \pm \beta(x^2 - x^1)]$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , et  $\beta$  est tiré suivant une distribution de densité :

$$f(\beta) = \begin{cases} 0.5(\eta_c + 1)\beta^{\eta_c} & \text{si } \beta < 1 ; \\ 0.5(\eta_c + 1)\frac{1}{\beta^{\eta_c+2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus  $\eta_c$  est grand, plus il est probable de choisir des enfants proches des parents. Deb et al. [14] recommandent une valeur de  $\eta_c$  entre 2 et 5.



Source : <https://engineering.purdue.edu/sudhoff/ee630/Lecture04.pdf>

Remarque : il est possible et très classique d'introduire un taux de croisement  $T_C$  de la manière suivante :

1. Tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R < T_C$ , appliquer l'opérateur de croisement.
3. Sinon ne rien faire (l'opérateur de mutation sera ensuite appliqué sur les 2 parents sans les croiser).

## L'opérateur retenu

Les différents opérateurs décrits ci-dessus peuvent se heurter à 2 problèmes :

- La gestion des contraintes (les enfants sont-ils admissibles ?) ;
- La généralisation aux espaces de recherche multi-dimensionnels.

Concernant la gestion des contraintes, rappelons que nous avons distingué deux catégories de contraintes (a) et (b) (III.4.1) afin d'isoler celles qui peuvent être prises en compte en amont (sans évaluer l'allocation avec le moteur ALM). L'intérêt de cette manoeuvre était d'essayer de n'avoir à gérer que les contraintes de type (b). Il serait donc souhaitable que l'opérateur de croisement continue à créer des individus respectant les contraintes de type (a).

Concernant la généralisation aux espaces de recherche multi-dimensionnels, deux solutions semblent envisageables :

- Croiser toutes les coordonnées simultanément (en appliquant l'opérateur de croisement vectoriellement lorsque cela est possible) ;
- Croiser les coordonnées les unes à la suite des autres (en appliquant l'opérateur de croisement successivement sur chacune d'entre elles ou sur certaines bien choisies, avec une certaine probabilité) comme suggéré par Deb et al. [14].

La seconde solution (avec l'opérateur SBX) est très répandue en raison de la popularité de l'algorithme NSGA-II [18] qui est basé sur celle-ci. De plus cette solution permet une gestion simplifiée des contraintes de type (a) car il est plus simple de contrôler ces contraintes coordonnée par coordonnée (chaque coordonnée ayant une influence sur l'espace dans lequel vivent les autres).

Néanmoins et pour le problème de l'allocation stratégique d'actifs il semble clair que ce qui fait la « qualité » d'une solution est le compromis qu'elle réalise entre les différentes classes d'actifs et le niveau de diversification qu'elle arrive à obtenir. De ce point de vue un croisement coordonnée par coordonnée déforme totalement le compromis réalisé par chaque allocation et ne semble pas du tout adapté à la problématique.

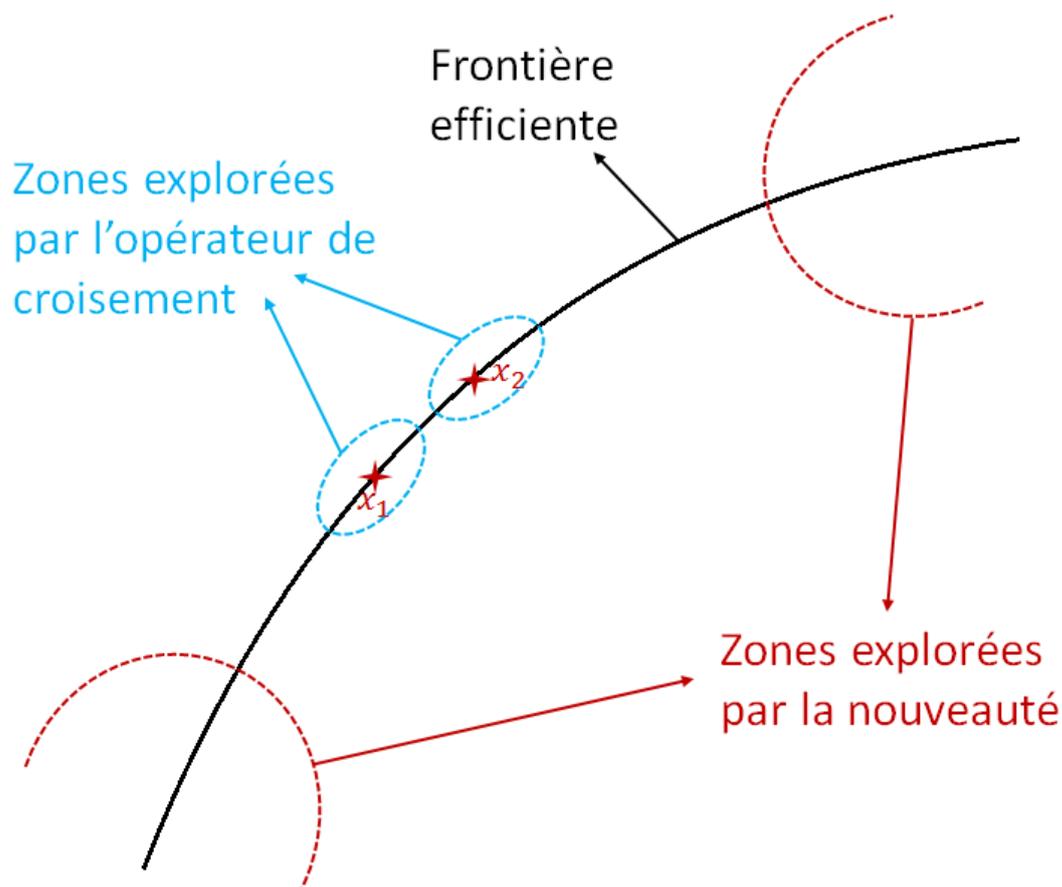
Nous avons donc essayé de mettre au point un opérateur de croisement ayant les trois propriétés suivantes :

- Application vectorielle sur toutes les coordonnées simultanément afin de mélanger les compromis réalisés par les deux parents sans les déformer ;
- Enfants respectant les contraintes de type (a) ;
- Vitesse d'exécution (préoccupation permanente pour notre algorithme).

Pour cela l'idée que nous avons retenue est de réaliser une recherche de la frontière efficiente de proche en proche. Le concept de nouveauté (intégré au sein de l'opérateur de sélection, voir III.4.5) a en effet pour but d'explorer de nouvelles zones de l'espace. Avec l'opérateur de croisement nous avons donc plutôt cherché à explorer les zones proches de celles déjà connues (en supposant que rechercher

des enfants éloignés de leurs parents auraient probablement assez peu de chance d'être plus efficace qu'une recherche purement aléatoire).

Plus précisément nous avons cherché un opérateur créant des enfants en général plus proches de l'un des parents que de l'autre i.e. prenant « beaucoup » du compromis de l'un et « peu » du compromis de l'autre.



Dans la pratique le croisement SBX appliqué vectoriellement (i.e. avec le même  $\beta$  pour toutes les coordonnées) semble ressembler à l'opérateur souhaité. En revanche il ne fournit aucune garantie concernant le respect des contraintes de type (a). Afin de remédier à ce problème nous utilisons le fait que ces contraintes soient facilement vérifiables pour se permettre de les évaluer plusieurs fois. Ainsi pour chaque enfant nous réalisons la boucle suivante :

- Évaluer les contraintes de type (a).
- Si elles ne sont pas vérifiées diviser  $\beta$  par 2 et recommencer le processus.
- Sinon arrêter le processus et valider le croisement.

Pour finir notons qu'il serait possible d'essayer d'ajouter un aspect « élitisme » (voir I.3.4), comme dans l'opérateur de croisement linéaire. Nous écartons cette possibilité pour deux raisons :

- Cela nécessite d'évaluer les enfants avec le moteur ALM et augmente donc significativement le temps de calcul ;
- Il semble plus logique d'utiliser l'élitisme à la fin du processus de création des nouveaux individus, lorsque ces derniers ont le plus de chance d'être de bonne qualité.

Finalement l'opérateur de croisement implémenté est décrit ci-dessous. Nous avons utilisé la méthode de Deb et al. [18] afin de simuler la variable  $\beta$  :

1. Tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R > T_C$ , ne rien faire.
3. Sinon, appliquer l'opérateur de croisement :
  - 3.1. Simuler une nouvelle variable uniforme  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
  - 3.2. Si  $u < 0.5$ ,  $\beta = (2u)^{\frac{1}{nc+1}}$ .
  - 3.3. Si  $u \geq 0.5$ ,  $\beta = \frac{1}{2(1-u)^{\frac{1}{nc+1}}}$ .
  - 3.4. Initialisation :  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .
  - 3.5. Création du premier enfant. Faire :
    - 3.5.1.  $y^1 = 0.5(x^1(1 - \beta_1) + x^2(1 + \beta_1))$ .
    - 3.5.2.  $\beta_1 = \beta_1/2$ .
 Tant que  $y^1$  ne respecte pas les contraintes de type (a).
  - 3.6. Création du second enfant. Faire :
    - 3.6.1.  $y^2 = 0.5(x^1(1 + \beta_2) + x^2(1 - \beta_2))$ .
    - 3.6.2.  $\beta_2 = \beta_2/2$ .
 Tant que  $y^2$  ne respecte pas les contraintes de type (a).

Remarque : avec cette méthode de croisement la condition  $\sum_{j=1}^n y_j^i = 1$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , est automatiquement vérifiée.

### III.4.7 L'opérateur de mutation

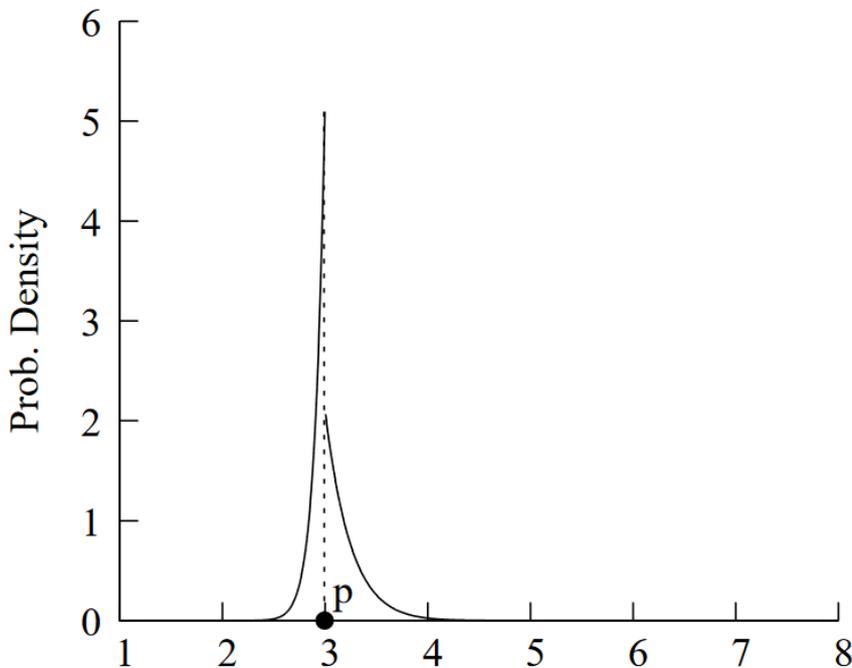
#### Les opérateurs classiques

Le dernier opérateur à déterminer est l'opérateur de mutation. Là encore plusieurs solutions existent et reprennent à peu près toutes le même principe : ajouter une « perturbation » à l'individu. Classiquement cette perturbation est une réalisation de loi normale ou polynomiale [15]. Dans toute la suite nous notons  $x$  l'individu à muter.

Mutation normale – Elle consiste simplement à ajouter la réalisation d'une loi normale centrée  $\mathcal{N}(0, \sigma)$  à  $x$ . Cette mutation est justifiée par son utilisation fréquente et par la place particulière de la loi normale en statistiques.

Mutation polynomiale – Ici les bornes de  $x$  sont prises en compte (i.e. par construction l'individu muté ne peut les dépasser). Plus  $x$  est éloigné de la borne vers laquelle il se rapproche, plus la mutation a de chance d'avoir une forte amplitude. De plus, plus le paramètre de la distribution polynomiale  $\eta_m$  est grand, plus la perturbation a de chance d'être faible. Deb et al. [16] recommandent des valeurs  $\eta_m \in [20, 100]$ .

Exemple de mutation polynomiale (en dimension 1) avec  $x = 3$ ,  $\eta_m = 20$  et les bornes  $[1, 8]$



Source : Deb et al. [16]

L'intérêt de la mutation polynomiale est qu'il n'est pas rare que les solutions optimales se situent sur les frontières de l'espace de recherche, donc au niveau des bornes. De ce fait favoriser un rapprochement vers les bornes lorsque  $x$  en est éloigné prend sens.

Remarque : comme pour les croisements il est possible de définir une probabilité d'appliquer l'opérateur de mutation  $T_M$  telle que la procédure devienne :

1. Tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R < T_M$ , appliquer l'opérateur de mutation.
3. Sinon ne rien faire.

Comme pour l'opérateur de croisement (III.4.6) nous avons besoin d'un opérateur mutation multi-dimensionnel et respectant les contraintes de type (a). Pour cela nous avons d'abord remarqué qu'il n'est plus nécessaire de conserver le « compromis » de l'individu à muter (le but étant justement de le perturber) et donc qu'appliquer cet opérateur coordonnée par coordonnée est moins dérangeant.

Aucune des deux mutations décrites ci-dessus ne se démarquait vraiment pour être adaptée à la problématique. De plus les études montrent qu'elles fournissent toutes deux des performances similaires sur de nombreux problèmes (Deb et Deb [16]). Pour cette raison nous avons implémenté deux opérateurs mutation différents afin de pouvoir les comparer et sélectionner le plus pertinent.

### Opérateur inspiré de la mutation polynomiale

Les mutations polynomiales sont pratiques pour gérer les contraintes de type (a) grâce à la prise en compte des bornes sup et inf. Seule la contrainte de somme unité n'est pas prise en compte : afin d'y remédier, nous proposons de réaliser des mutations par couple de coordonnées (i.e. si une coordonnée augmente de  $\epsilon$ , l'autre diminue de  $\epsilon$ ).

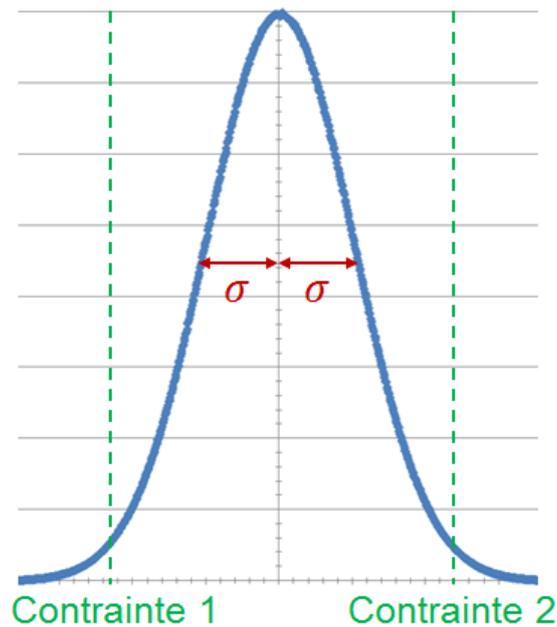
Dans le cas où il n'y a pas eu de croisement il semble nécessaire d'appliquer l'opérateur mutation (sinon certains individus ne seront pas du tout modifiés). Dans le cas contraire l'opérateur mutation peut permettre de s'éloigner légèrement de la droite des parents  $(x_1, x_2)$  à laquelle se restreint l'opérateur de croisement ; et il n'est pas possible de savoir si cela sera bénéfique. De ce fait nous incluons une probabilité d'être muté  $T_M$  qui ne joue qu'en cas de croisement. Cela permet d'obtenir l'opérateur mutation suivant :

1. S'il y a eu croisement, tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R > T_M$ , ne rien faire et arrêter le processus de mutation.
3. S'il n'y a pas eu de croisement, ou si  $R \leq T_M$ , réaliser les opérations suivantes :
  - 3.1. Mélanger les index  $\{1, \dots, n\}$  et les stocker dans un tableau  $T = [i_1, \dots, i_n]$ .
  - 3.2. Pour chaque  $j$  muter les coordonnées  $i_j$  et  $i_{n+1-j}$  symétriquement :
    - 3.2.1. Calculer les bornes de la mutation :
      - 3.2.1.1.  $sup = \min(b_{i_1}, x_{i_1} + x_{i_{n+1-j}} - a_{i_{n+1-j}})$ .
      - 3.2.1.2.  $inf = \max(a_{i_1}, x_{i_1} - x_{i_{n+1-j}} + b_{i_{n+1-j}})$ .
    - 3.2.2. Appliquer la mutation :
      - 3.2.2.1. Tirer une réalisation uniforme  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
      - 3.2.2.2. Si  $u < 0.5$  :
        - 3.2.2.2.1. Calculer  $\delta = (2u)^{\frac{1}{\eta_m+1}} - 1$ .
        - 3.2.2.2.2.  $x_{i_j} = x_{i_j} + \delta(x_{i_j} - inf)$ .
        - 3.2.2.2.3.  $x_{i_{n+1-j}} = x_{i_{n+1-j}} - \delta(x_{i_j} - inf)$ .
      - 3.2.2.3. Sinon :
        - 3.2.2.3.1. Calculer  $\delta = 1 - (2(1-u))^{\frac{1}{\eta_m+1}}$ .
        - 3.2.2.3.2.  $x_{i_j} = x_{i_j} + \delta(sup - x_{i_j})$ .
        - 3.2.2.3.3.  $x_{i_{n+1-j}} = x_{i_{n+1-j}} - \delta(sup - x_{i_j})$ .

## Opérateur inspiré de la mutation gaussienne

Pour cet opérateur la gestion des contraintes de type (a) est plus complexe, mais l'opérateur reste intéressant car il ne privilégie aucune direction et dans notre cas il n'y a aucune raison de vouloir se rapprocher des bornes de l'espace de recherche.

Ainsi supposons vouloir muter  $x$  en  $x + \epsilon$ . Afin de ne pas violer trop souvent les contraintes de type (a) nous proposons de simuler chaque  $\epsilon_i$  (perturbation de la classe d'actif  $i$ ) par une loi normale dont la volatilité est donnée par  $\sigma = \frac{1}{r} \min_{i \in [1, n]} \min(x_i - a_i, b_i - x_i)$  avec  $r > 0$  (et probablement  $r \geq 1$ ). De cette manière plus  $x$  est proche de la frontière de l'espace de recherche et plus l'amplitude de la perturbation a de chance d'être faible (ce qui limite les violations de contraintes) :



Dans un second temps et afin d'être certain de vérifier les contraintes de type (a) nous proposons de réaliser deux opérations :

- S'assurer que  $S = \sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0$  afin de maintenir la contrainte de somme unité. Pour cela nous calculons cette somme  $S$  et ajustons chaque  $\epsilon_i$  de  $\frac{-S}{n}$  ;
- S'assurer que les autres contraintes de type (a) sont vérifiées en divisant  $\epsilon$  par 2 autant de fois que nécessaire (*a priori* assez peu souvent puisque la volatilité est calibrée pour éviter cette situation).

Remarque : si  $n$  est grand alors la loi des grands nombres assure que  $\frac{S}{n} \simeq 0$  et donc que le premier de ces ajustements ne soit pas trop significatif.

Nous obtenons l'opérateur de mutation suivant :

1. S'il y a eu croisement, tirer une réalisation uniforme  $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
2. Si  $R > T_M$ , ne rien faire et arrêter le processus de mutation.
3. Si  $R < T_M$  ou s'il n'y a pas eu de croisement, réaliser les opérations suivantes :
  - 3.1. Calculer  $\sigma = \frac{1}{r} \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \min(x_i - a_i, b_i - x_i)$ .
  - 3.2. Simuler tous les  $\epsilon_i$  suivant la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ .
  - 3.3. Calculer  $S = \sum_{i=1}^n \epsilon_i$ .
  - 3.4.  $\forall i, \epsilon_i = \epsilon_i - \frac{S}{n}$ .
  - 3.5. Tant que  $x + \epsilon$  ne vérifie pas les contraintes (a), diminuer la perturbation via  $\epsilon = \epsilon/2$ .
  - 3.6. Retourner  $x + \epsilon$ .

### III.4.8 Fin d'une itération

Après avoir appliqué l'ensemble des opérateurs génétiques nous choisissons finalement d'intégrer l'élitisme (voir I.3.4) en nous inspirant de l'algorithme NSGA-II [18] :

- Une population combinée contenant les anciens et les nouveaux individus est créée ;
- La procédure de *non-dominated sorting* est appliquée et les individus sont triés selon  $\prec$  ;
- La meilleure moitié des individus est retenue pour former la population de l'itération suivante.

Effectuer cette opération à la toute fin est avantageux car les critères évalués lors de la procédure de *non-dominated sorting* peuvent être stockés et conservés : cela permet de connaître à l'avance la qualité des individus de la population de l'itération à venir, et donc de ne pas réaliser de calculs inutilement.

Pour finir, un algorithme génétique requiert en général un critère d'arrêt. Plusieurs solutions classiques sont envisageables :

- S'assurer qu'il n'y a plus qu'un seul front/rang dans la population ;
- S'assurer que les individus sont assez uniformément répartis sur la frontière efficiente ;
- S'assurer qu'il y a eu un nombre suffisant d'itérations ;
- S'assurer que peu voire aucune contrainte de type (b) n'est violée ;
- Etc.

Notre cas est légèrement particulier car l'optimisation est conçue pour être interactive : la condition d'arrêt n'est pas utile car c'est l'utilisateur qui choisit lorsqu'il souhaite arrêter le processus. Pour prendre en compte cette particularité nous choisissons d'arrêter l'optimisation :

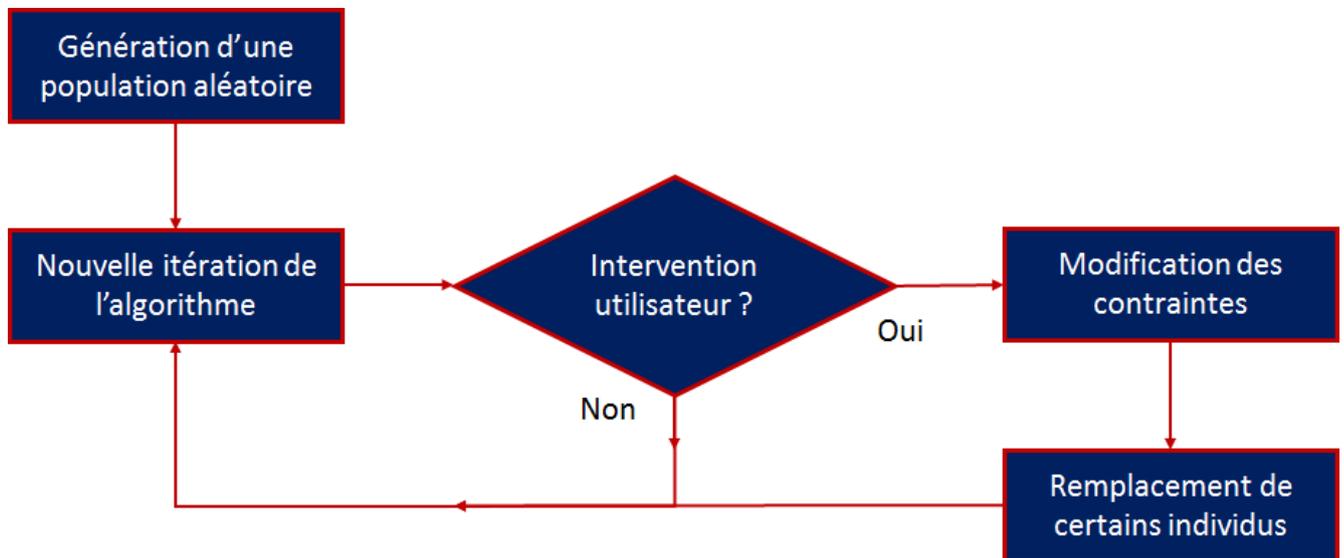
- Si l'algorithme semble avoir commencé à converger i.e. lorsque les conditions suivantes sont réunies :
  - Il ne reste plus qu'un front dans la population ;
  - Plus aucune contrainte de type (b) n'est violée ;
  - Il y a eu au moins 20 itérations (cela permet d'éviter une convergence prématurée et d'améliorer la dispersion des solutions sur la frontière efficiente)
- Si l'algorithme semble ne pas réussir à bien converger. Pour cela l'utilisateur est invité à intervenir au bout de 50 itérations sans réunir les conditions ci-dessus ;
- A tout moment si l'utilisateur en fait la demande.

Entre chaque itération et sans interrompre l'optimisation l'utilisateur peut alors visionner les résultats en traçant des graphes, observant la frontière efficiente, analysant les allocations présentes dans la population... Lorsqu'il intervient il est libre d'affiner les contraintes de type (a) et (b) afin de restreindre l'espace de recherche et de chercher à améliorer la précision des résultats sur les zones qui l'intéressent.

Ajuster les contraintes de type (b) est intuitif pour l'utilisateur car il lui « suffit » d'observer la frontière efficiente et de décider quelles sont les zones intéressantes sur cette frontière. En revanche ajuster les contraintes de type (a) peut s'avérer plus délicat car cela risque de supprimer des allocations intéressantes... C'est pourquoi nous proposons une méthode automatisée qui prend en compte les nouvelles contraintes de type (b) renseignées par l'utilisateur :

1. Séparer la population en 2 groupes :
  - 1.1. Population des allocations non admissibles vis-à-vis des nouvelles contraintes de type (b) ;
  - 1.2. Population des allocations encore admissibles pour ces nouvelles contraintes.
2. Au sein de cette seconde population des individus encore admissibles, pour chaque coordonnée  $i$  :
  - 2.1. Calculer la valeur minimale  $a'_i$  et la valeur maximale  $b'_i$  que prend cette coordonnée dans la population ;
  - 2.2. Fixer les nouvelles contraintes  $a_i$  et  $b_i$  via :  $a_i = \frac{1}{2}(a_i + a'_i)$  et  $b_i = \frac{1}{2}(b_i + b'_i)$ .

Cette procédure revient en fait à chercher, pour chaque contrainte de type (a), quelle serait la contrainte « empirique » selon la population actuelle de l'algorithme. Puis, afin de maintenir une marge de prudence, la moyenne entre l'ancienne contrainte et cette contrainte empirique est retenue. Cette approche étant relativement prudente il est possible de considérer que les individus ne respectant pas les nouvelles contraintes (a) sont « suffisamment non admissibles » pour être écartés de l'étude. Ils sont donc supprimés et remplacés par de nouveaux individus aléatoires ; l'optimisation est alors redémarrée.



---

## Quatrième partie

# Application à des questions économiques concrètes

---

## IV.1 Préliminaire : choix du contrôle et des contraintes

Dans les applications qui suivent nous allons souvent utiliser les mêmes contraintes initiales, les mêmes paramètres et le même contrôle. C'est pourquoi nous en donnons au préalable une description détaillée ici.

Concernant le choix du contrôle  $x$  nous supposons que l'allocation est constante sur tout l'horizon temporel et nous fixons les composantes de  $x$  de la manière suivante :

- $x_1$  : allocation en obligations de maturité 10 ans (O10) ;
- $x_2$  : allocation en obligations de maturité 20 ans (O20) ;
- $x_3$  : allocation en obligations de maturité 30 ans (O30) ;
- $x_4$  : allocation en monétaire (M) ;
- $x_5$  : allocation en actions (A) ;
- $x_6$  : allocation en immobilier (I) ;
- $x_7$  : répartition entre obligations classiques et indexées sur l'inflation (Prop).

Nous avons en effet remarqué que sans l'introduction de ce  $x_7$  les investissements en obligations seraient représentés par 6 composantes du contrôle, ce qui semblait excessif par rapport aux autres classes d'actifs. Afin de réduire ce nombre à 4 nous avons supposé la répartition entre obligations classiques et indexées identique pour chaque maturité.

Au départ, nous fixons les contraintes de type (a) suivantes :

- $3\% \leq x_1 \leq 20\%$  (O10) ;
- $5\% \leq x_2 \leq 40\%$  (O20) ;
- $15\% \leq x_3 \leq 70\%$  (O30) ;
- $1\% \leq x_4 \leq 5\%$  (M) ;
- $5\% \leq x_5 \leq 30\%$  (A) ;
- $2\% \leq x_6 \leq 15\%$  (I) ;
- $5\% \leq x_7 \leq 65\%$  (Prop).

Ces contraintes sont peu contraignantes et peuvent s'interpréter, par exemple, comme les contraintes du *risk management* du fonds (incluant les contraintes réglementaires).

Remarquons qu'avec le contrôle  $x$  choisi nous avons  $\sum_{i=1}^6 x_i = 1$  et il convient d'adapter les opérateurs génétiques à l'ajout de  $x_7$ . Si les opérateurs de sélection et de croisement sont immédiatement généralisables, l'opérateur de mutation doit lui être étendu. Pour cela nous avons simplement choisi de muter  $x_7$  par une loi normale centrée d'écart-type 1%.

Enfin et concernant le calibrage des paramètres de l'algorithme génétique nous avons d'abord choisi un jeu de paramètres qui nous semblait intuitivement correct puis nous avons cherché, par tâtonnement, à les améliorer. Cette procédure ayant été manuelle et progressive pendant l'implémentation de l'algorithme, elle n'est pas détaillée dans le mémoire. Il est donc possible que certains des paramètres retenus ne soient pas optimaux.

Les paramètres utilisées sont les suivants :

- Taille de la population : 180 ;
- Nombre d'individus tirés dans la sélection par tournoi :  $p = 4$  ;
- Proportion de nouveauté pour l'opérateur de sélection :  $q = 5\%$  ;
- Paramètre de l'opérateur de croisement (SBX) :  $\eta_c = 5$  ;
- Probabilité de croisement :  $T_C = 80\%$  ;
- Paramètre de mutation polynomiale :  $\eta_m = 90$  ;
- Paramètre de la mutation gaussienne :  $r = 10$  ;
- Probabilité de mutation (si croisement) :  $T_M = 50\%$ .

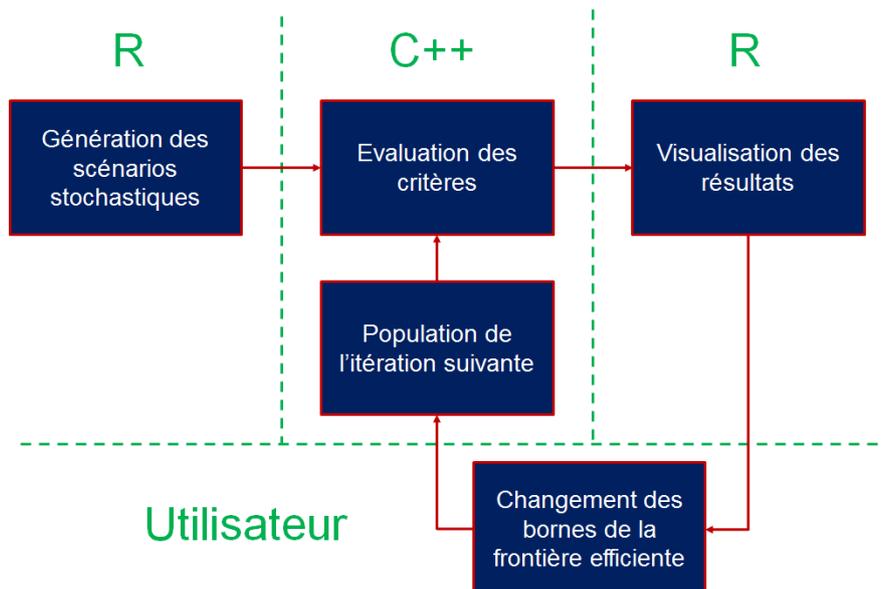
Dans les applications qui suivent nous donnons parfois des informations sur le temps de calcul. Afin de pouvoir les interpréter nous précisons qu'aucun calcul n'a été parallélisé et que les caractéristiques de notre machine sont les suivantes :

- Ordinateur Lenovo Thinkpad T470s ;
- Système d'exploitation Windows 10 Entreprise 2016 LTSB 64 bits ;
- Processeur Intel Core i5-6300U CPU @ 2.40GHz 2.50 GHz vPro inside ;
- Mémoire (RAM) 8 Go DDR4-2133 ;
- Carte graphique Intel HD Graphics 650.

Afin de reprendre partiellement les travaux de PTK [50] nous avons implémenté l'ESG sur le langage de programmation *R*. Ce langage permet de simuler simplement des réalisations de lois statistiques usuelles (fonctions *rnorm*, *runif*...) et est capable de réaliser rapidement des calculs matriciels (utiles pour calculer les différents scénarios en même temps).

En revanche pour l'optimisation nous avons anticipé le besoin d'une puissance de calcul accrue et l'appel au moteur ALM un grand nombre de fois (pour évaluer les allocations candidates). De ce fait nous avons implémenté l'évaluation des critères et le module d'optimisation en langage *C++*.

Plus précisément *R* a été utilisé pour générer un set de  $N$  scénarios qui comprennent les grandeurs de l'ESG (taux, inflation, immobilier, etc.) et ce qui ne dépend pas de l'allocation choisie, notamment les prix *ZC* et les flux futurs (avant revalorisation) de passif. Ces  $N$  scénarios ont ensuite été extraits et chargés sur *C++* qui a été utilisé pour évaluer les allocations et servir de support à l'optimisation. *R* a également été utilisé pour la visualisation des résultats pendant l'optimisation.



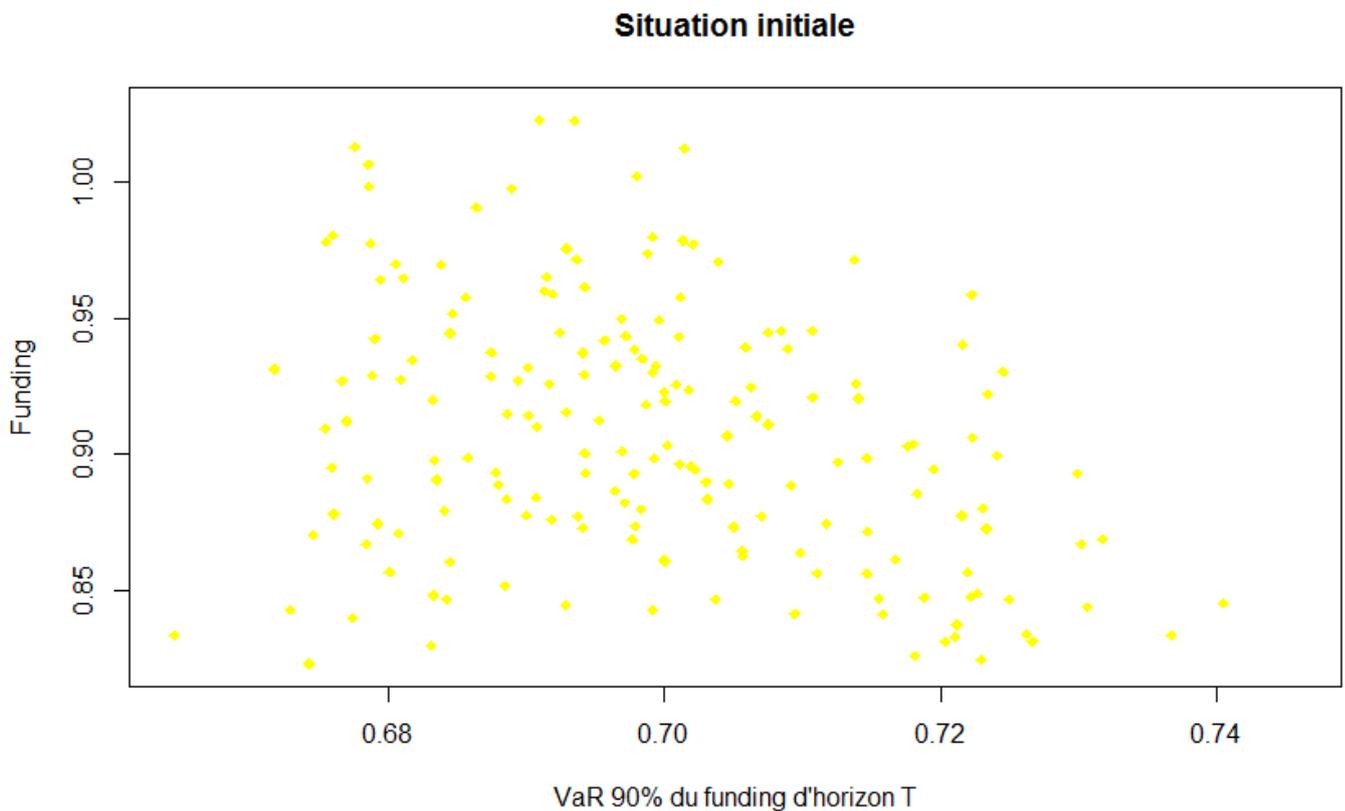
## IV.2 Un cas classique : optimisation rendement/risque

Pour commencer nous avons testé l'approche sur un cas classique d'optimisation à deux critères. Nous avons choisi de mesurer le rendement par le *funding* moyen du fonds en  $T = 30$ . Pour rappel le *funding* n'est pas mesuré dans un référentiel comptable mais en valeur économique (voir II.1.5).

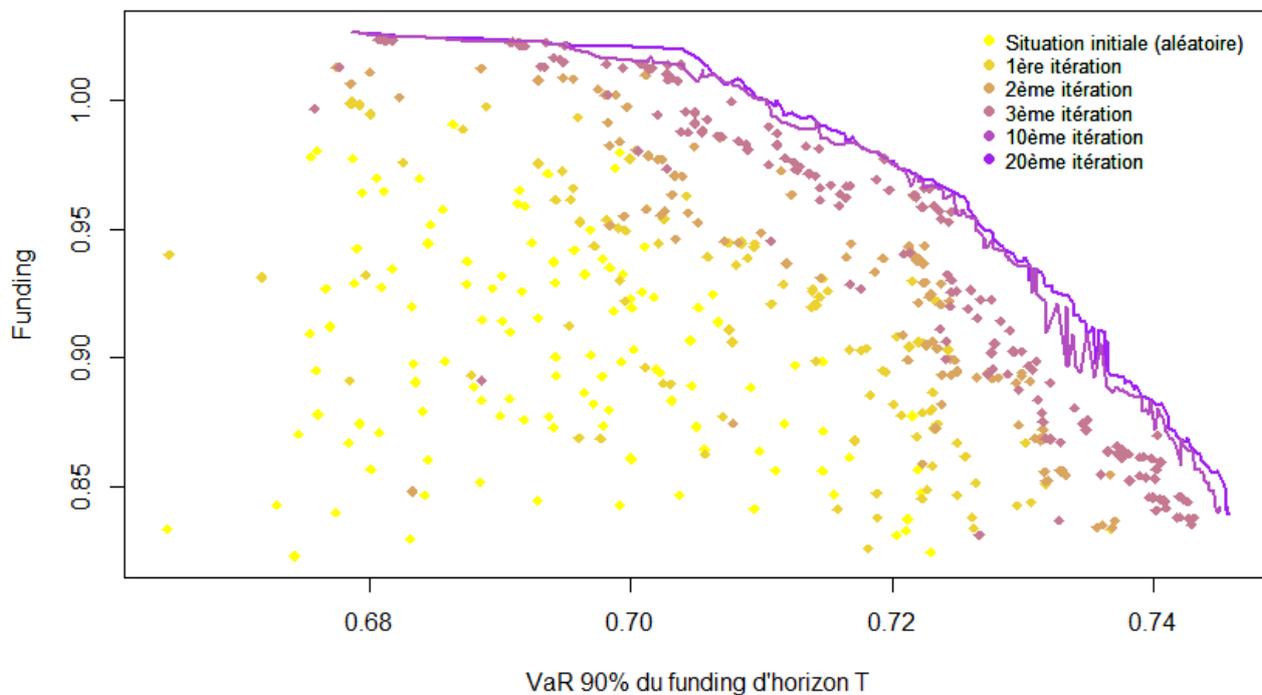
De plus et afin de généraliser les travaux de Markowitz nous avons remplacé la volatilité par une autre métrique de risque : la VaR de niveau de confiance 90% et d'horizon  $T$  du *funding*. Pour les contraintes de type (b) nous sommes restés très prudents et avons fixé :

- $70\% \leq \textit{funding} \leq 110\%$  ;
- $50\% \leq \textit{VaR} \leq 95\%$ .

Pour cette application aucun des deux opérateurs de mutation implémentés n'a semblé se démarquer. C'est pourquoi dans la suite nous présentons uniquement les résultats obtenus avec l'opérateur gaussien. Montrons d'abord les performances atteintes par la population initiale générée aléatoirement :



Puis montrons comment ces performances évoluent au fil des générations (itérations) jusqu'à converger vers une frontière efficiente :



Sur ce graphe nous observons une bonne convergence dès la 3<sup>ème</sup> génération, qui commence à être très proche de la frontière efficiente. Au bout de 10 générations la frontière est déjà quasiment atteinte mais continuer jusqu'à la 20<sup>ème</sup> génération permet d'affiner les résultats et de diminuer le « bruitage » de la frontière efficiente.

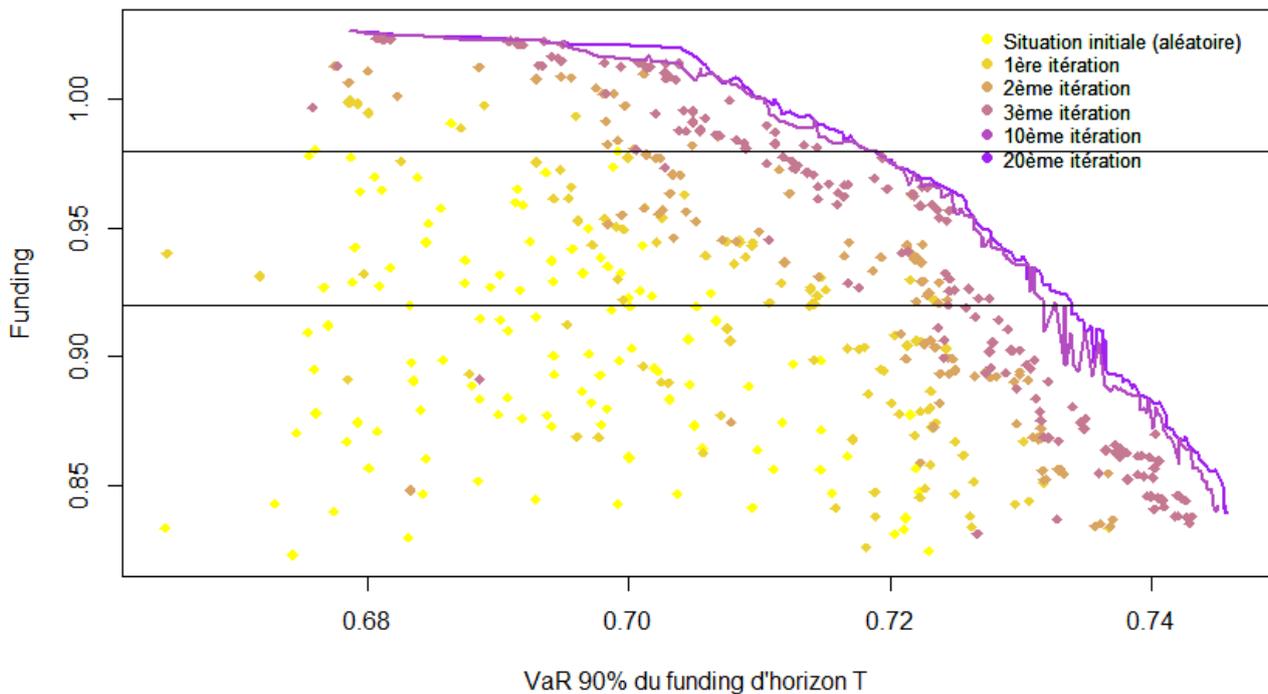
Remarque 1 : contrairement à la frontière efficiente « classique » de Markowitz, ici le risque est représenté par un quantile (et non pas la volatilité). Diminuer le risque revient à augmenter la valeur de ce quantile (ce qui signifie que le *funding* chute moins bas), pas à le diminuer (comme la volatilité) : la frontière efficiente est donc « inversée ».

Remarque 2 : dans cet exemple nous avons réussi à converger très rapidement vers une frontière efficiente (temps de calcul : environ 1 minute et 20 secondes par itération). Remarquons toutefois que la 3<sup>ème</sup> génération fournit déjà suffisamment d'informations sur le problème pour qu'un décideur puisse choisir sur quelles fourchettes de valeurs des critères il souhaite se concentrer. C'est l'un des avantages de l'interactivité du module : l'utilisateur peut intervenir au milieu du processus pour concentrer la recherche sur les zones d'intérêt et accélérer la convergence.

N'ayant pas demandé à intervenir le module d'optimisation s'est arrêté automatiquement après 20 itérations (voir III.4.8) pour demander s'il faut réaliser des itérations supplémentaires :

```
"d:\Users\maxence.pierrat\Desktop\Backup memoire 24-09-17\NEW MEMOIRE\Pareto Front\bin\Debug\Pareto Front.exe"
Demarrage de la 21eme iteration...
Nombre de front(s) dans la population : 1
Nombre d'individu(s) (sur 180) violant les contraintes (b) : 0
Continuer la recherche ou bien affiner les contraintes ?
Tapez le nombre d'iterations supplementaires que vous souhaitez realiser
```

La convergence observée semblant convenable nous lui avons indiqué de ne pas réaliser d'itération supplémentaire. Il a alors proposé d'ajuster les contraintes. Pour cela nous avons observé les résultats obtenus et choisi de concentrer l'étude sur les *funding* entre 92% et 98%. Puis, comme nous ignorions comment ajuster les contraintes de type (a), nous avons demandé au module de le faire lui-même par la méthode automatisée (voir III.4.8) :



```
"d:\Users\maxence.pierrat\Desktop\Backup memoire 24-09-17\NEW MEMOIRE\Pareto Front\bin\Debug\Pareto Front.exe"
Demarrage de la 21eme iteration...
Nombre de front(s) dans la population : 1
Nombre d'individu(s) (sur 180) violant les contraintes (b) : 0
Continuer la recherche ou bien affiner les contraintes ?
Tapez le nombre d'iterations supplementaires que vous souhaitez realiser
0

Vous pouvez maintenant visualiser les resultats
Souhaitez-vous affiner les contraintes ou arreter le processus ?
affiner/arreter ?
affiner
Veuillez renseigner les nouvelles contraintes (b)
Borne inf du funding (actuelle 0.7)
0.92
Borne sup du funding (actuelle 1.1)
0.98
Borne inf du quantile 0.95 funding (actuelle 0.5)
0.7
Borne sup du quantile 0.95 funding (actuelle 0.95)
0.8

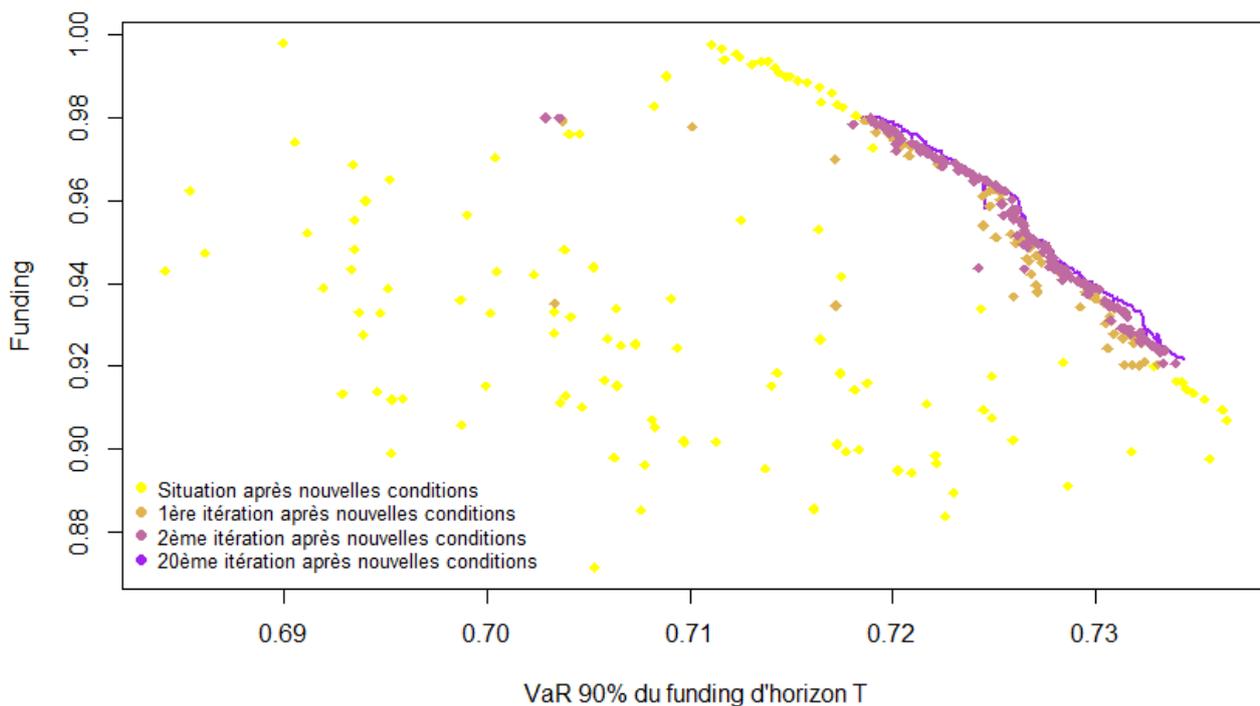
Voulez-vous egalement changer manuellement les contraintes (a) ? (oui/non)
non
```

Dès lors l'algorithme a supprimé les allocations ne respectant pas les nouvelles contraintes de type (a) et recommencé le processus d'optimisation :

```
"d:\Users\maxence.pierrat\Desktop\Backup memoire 24-09-17\NEW MEMOIRE\Pareto Front\bin\Debug\Pareto Front.exe"
Demarrage de la 21eme iteration...
Nombre de front(s) dans la population : 1
Nombre d'individu(s) (sur 180) violant les contraintes (b) : 0
Continuer la recherche ou bien affiner les contraintes ?
Tapez le nombre d'iterations supplementaires que vous souhaitez realiser
0

Vous pouvez maintenant visualiser les resultats
Souhaitez-vous affiner les contraintes ou arreter le processus ?
affiner/arreter ?
affiner
Veuillez renseigner les nouvelles contraintes (b)
Borne inf du funding (actuelle 0.7)
0.92
Borne sup du funding (actuelle 1.1)
0.98
Borne inf du quantile 0.95 funding (actuelle 0.5)
0.7
Borne sup du quantile 0.95 funding (actuelle 0.95)
0.8

Voulez-vous egalement changer manuellement les contraintes (a) ? (oui/non)
non
Il y a 7 fronts dans la nouvelle population de depart (suppression des allocs violant les contraintes (a)) !
Dans cette nouvelle population les conditions (b) sont violees 94 fois
Demarrage de la 23eme iteration...
Nombre de front(s) dans la population : 4
Nombre d'individu(s) (sur 180) violant les contraintes (b) : 0
Demarrage de la 24eme iteration...
```



Sur ce dernier graphe les points jaunes représentent la population de l'étape précédente lorsque l'algorithme s'était arrêté mais après remplacement des individus ne respectant pas les nouvelles contraintes de type (a). C'est ce qui explique l'apparition de points jaunes éloignés de la frontière efficiente.

Ce graphe permet d'observer une convergence très rapide : au bout de deux itérations la portion de frontière efficiente correspondant aux nouvelles contraintes semble déjà quasiment déterminée. Cela s'explique par le fait que l'algorithme ne reparte pas d'une population totalement aléatoire : il réutilise les informations contenues dans la population. De plus l'algorithme a été capable d'écarter par « sélection naturelle » les individus ne respectant pas les nouvelles contraintes de type (b) : une seule itération a suffi pour que tous les individus soient dans la fourchette fixée par l'utilisateur.

A ce stade il devenait intéressant de commencer à observer les allocations optimales. Donnons par exemple les bornes de chaque composante du contrôle au sein de la population :

	O10	O20	O30	M	A	I	Prop
Valeur minimale	10,5%	22,6%	16,9%	1,0%	17,6%	8,6%	59%
Valeur maximale	13,7%	33,5%	30,8%	1,2%	25,4%	11,5%	65%

Ainsi dans cette application atteindre le niveau de *funding* visé à horizon 30 ans nécessite de réaliser des investissements assez conséquents en actions et immobilier (environ 30% des placements) mais de se couvrir contre les variations d'inflation avec environ 60% de l'actif obligataire indexé sur l'inflation. De plus la remontée des taux prévue par l'ESG (voir l'Annexe B) semble conduire à adopter une politique de durée moyenne et à ne pas investir massivement dans les obligations de maturité 30 ans.

Remarque : nous avons utilisé la console *Windows* afin de rendre le module d'optimisation interactif. Bien évidemment, pour une application réelle il est possible d'imaginer avoir recours à une interface plus ergonomique et plus esthétique...

### IV.3 Ajout d'un troisième critère

Nous venons de voir que l'ESG conduit à ne pas adopter une politique de duration trop longue et à investir environ 30% de l'actif en actions et immobilier. Or nous avons vu que toute modélisation des marchés financiers est subjective, et adopter une politique de duration moyenne est un élément important de la stratégie du fonds. Nous nous sommes donc posé la question supplémentaire suivante : comment nuancer ce résultat pour que les décideurs puissent prendre une décision éclairée en comprenant bien les risques associés ?

Afin de répondre à cette question nous avons ajouté un troisième critère représentant un stress des marchés financiers. Ce critère permet d'évaluer, en supplément, la résistance des allocations à ce stress. Pour déterminer ce stress nous nous sommes inspirés des travaux réalisés par l'EIOPA [23][24] et notamment du stress *double hit*. Nous avons retenu les chocs suivants :

- Les courbes des taux sans risque (nominaux et réels) baissent subitement de 1% sur toutes les maturités ;
- Les actions baissent subitement de 35% ;
- L'immobilier baisse subitement de 20%.

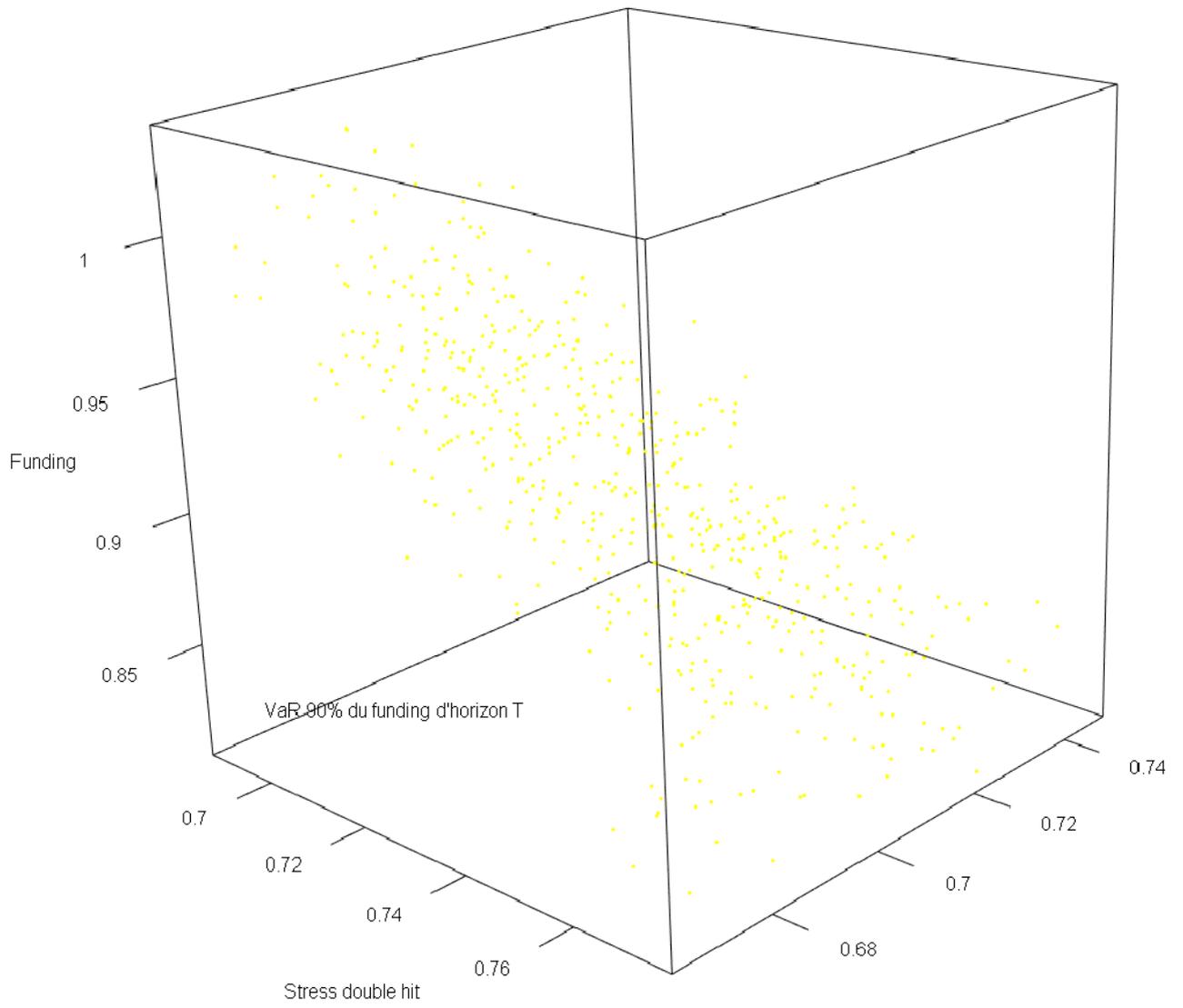
Remarque : un autre stress aurait pu être, par exemple, d'évaluer le *fundng* dans le cas où la moyenne de long terme des taux est modifiée de +/-100 bps, ce qui correspond à un réel risque car cette moyenne de long terme est difficile à calibrer et avant tout subjective.

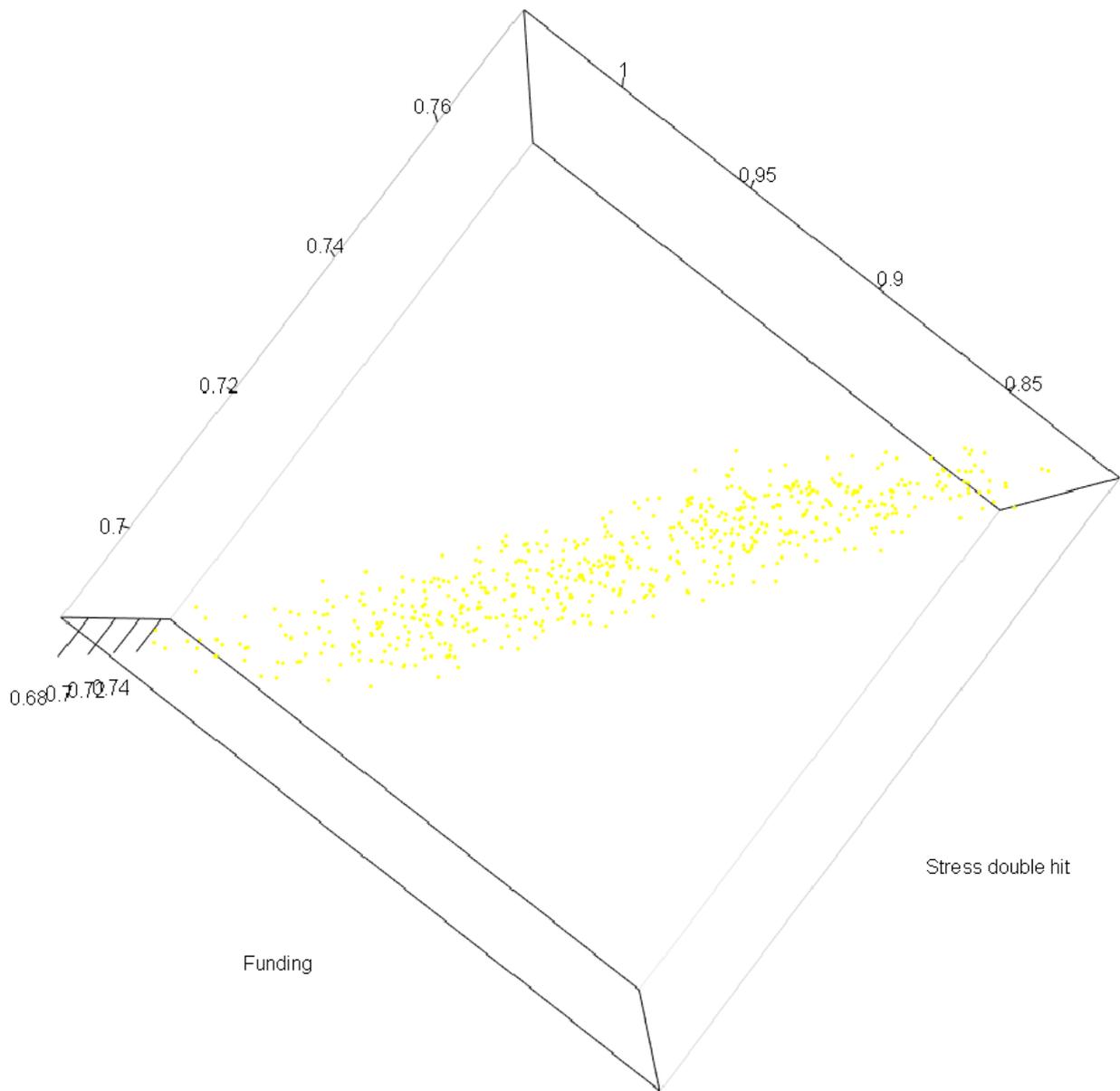
Nous avons ajouté des contraintes de type (b) sur ce stress :  $50\% \leq \text{stress} \leq 95\%$ .

Enfin et afin de prendre en compte que la frontière efficiente est une surface (et non une courbe), nous avons augmenté la taille de la population en la fixant à 600. Pour cette raison le temps de calcul est passé à environ 4 minutes et 20 secondes par itération (contre 1 minute et 20 secondes auparavant).

Sur cette application la mutation polynomiale a fourni de bons résultats mais semblait favoriser légèrement les solutions sur certaines portions de la surface efficiente. Cela peut s'expliquer par le fait qu'elle donne une plus grande probabilité de se rapprocher des bornes des contraintes de type (a) alors que la mutation gaussienne perturbe avec la même amplitude dans toutes les directions. Nous avons donc exclu la mutation polynomiale de l'étude et présentons ci-dessous les résultats obtenus avec la mutation gaussienne.

Voici les résultats obtenus par la population aléatoire initialement générée. Nous en montrons deux vues différentes :

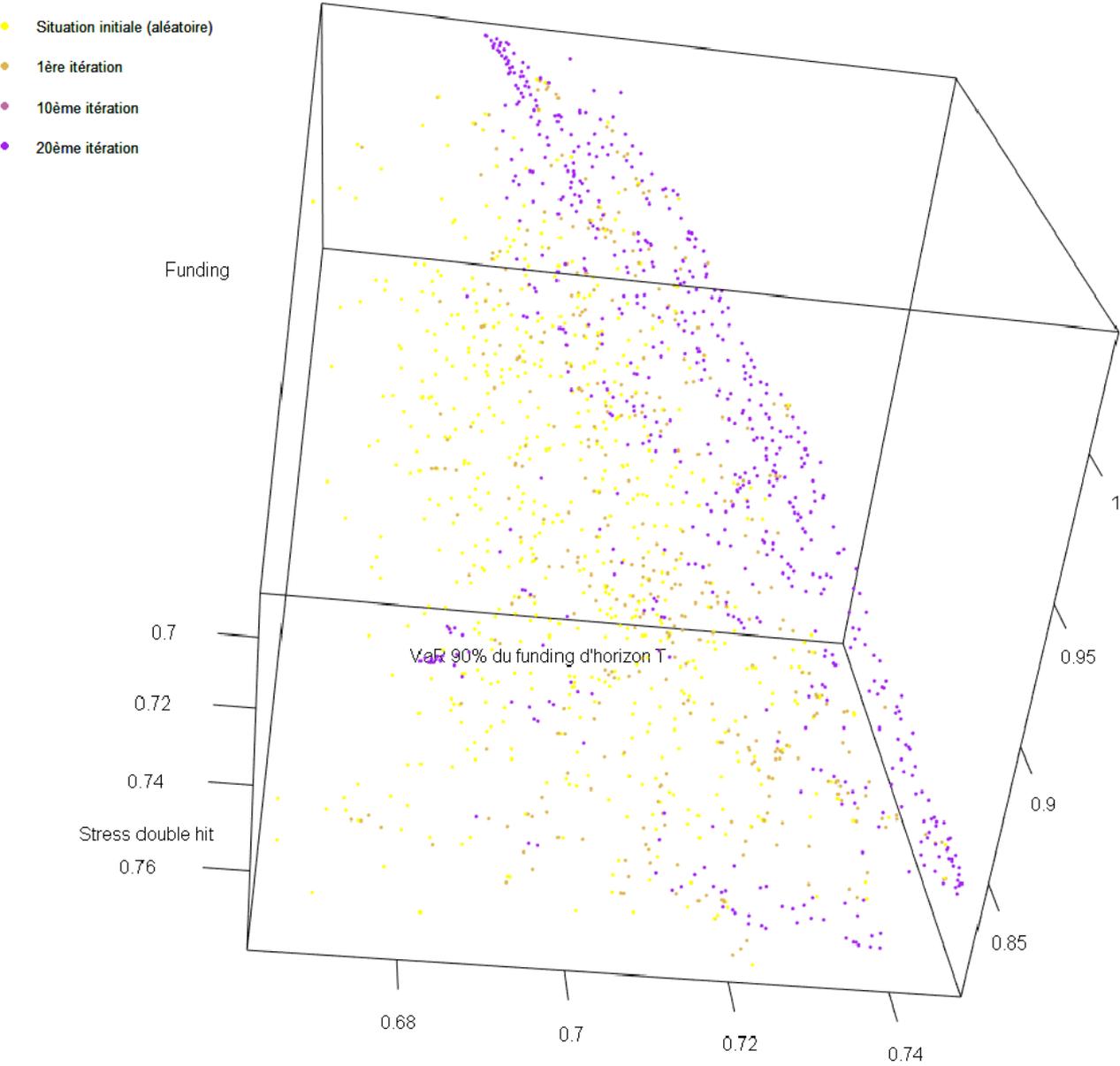


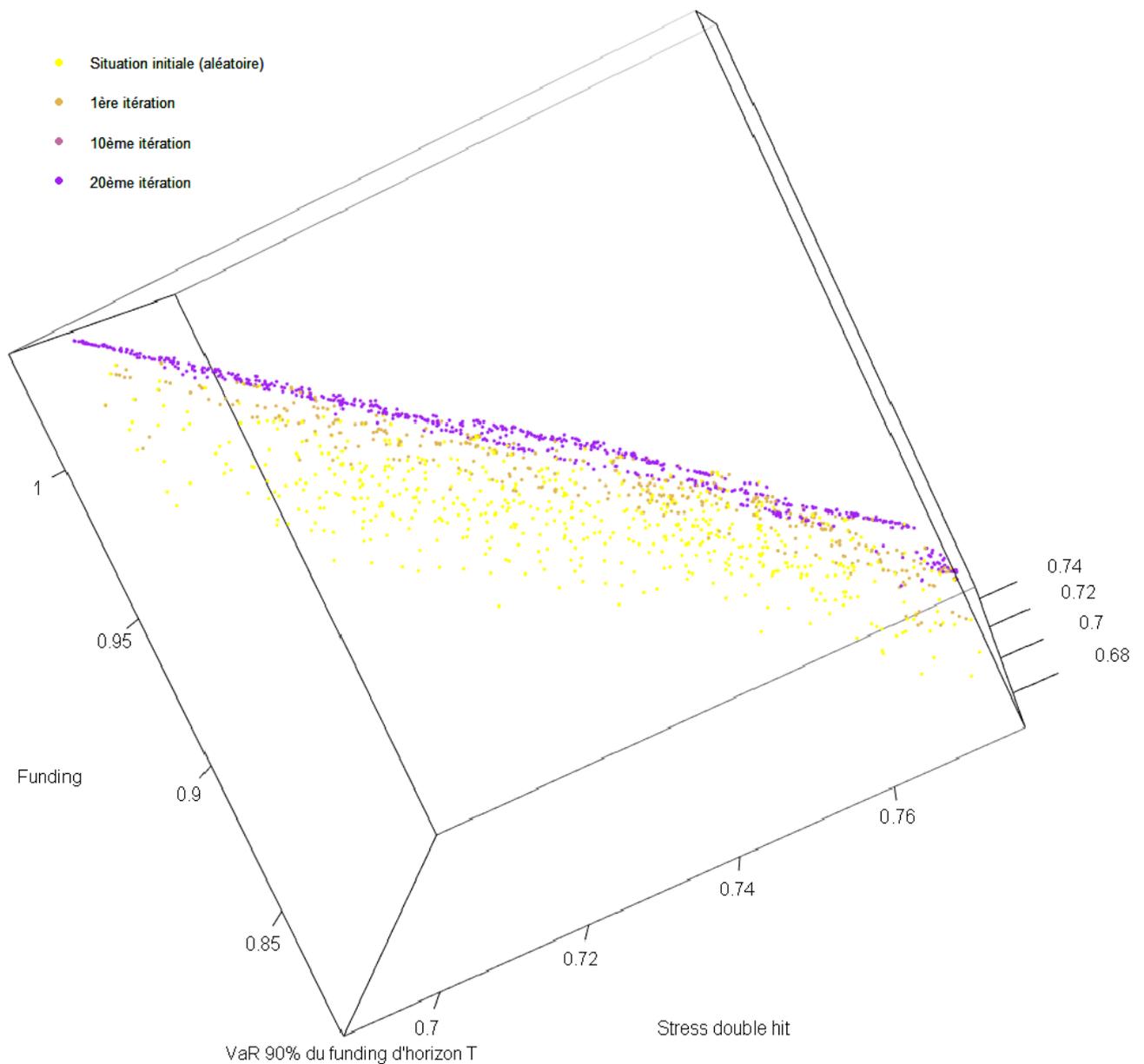


VaR 90% du funding d'horizon T

Sur ces graphes 3D nous observons que la population reste contenue dans un petit volume dans le repère des trois critères. Cela s'explique par le fait que les critères soient corrélés entre-eux et donc que certaines valeurs des critères ne soient pas accessibles simultanément. Ainsi sur le second graphe il est possible d'observer un plan de coupe dans lequel toutes les allocations semblent se regrouper autour d'un même axe.

Observons à présent l'évolution de la population au fil des générations :



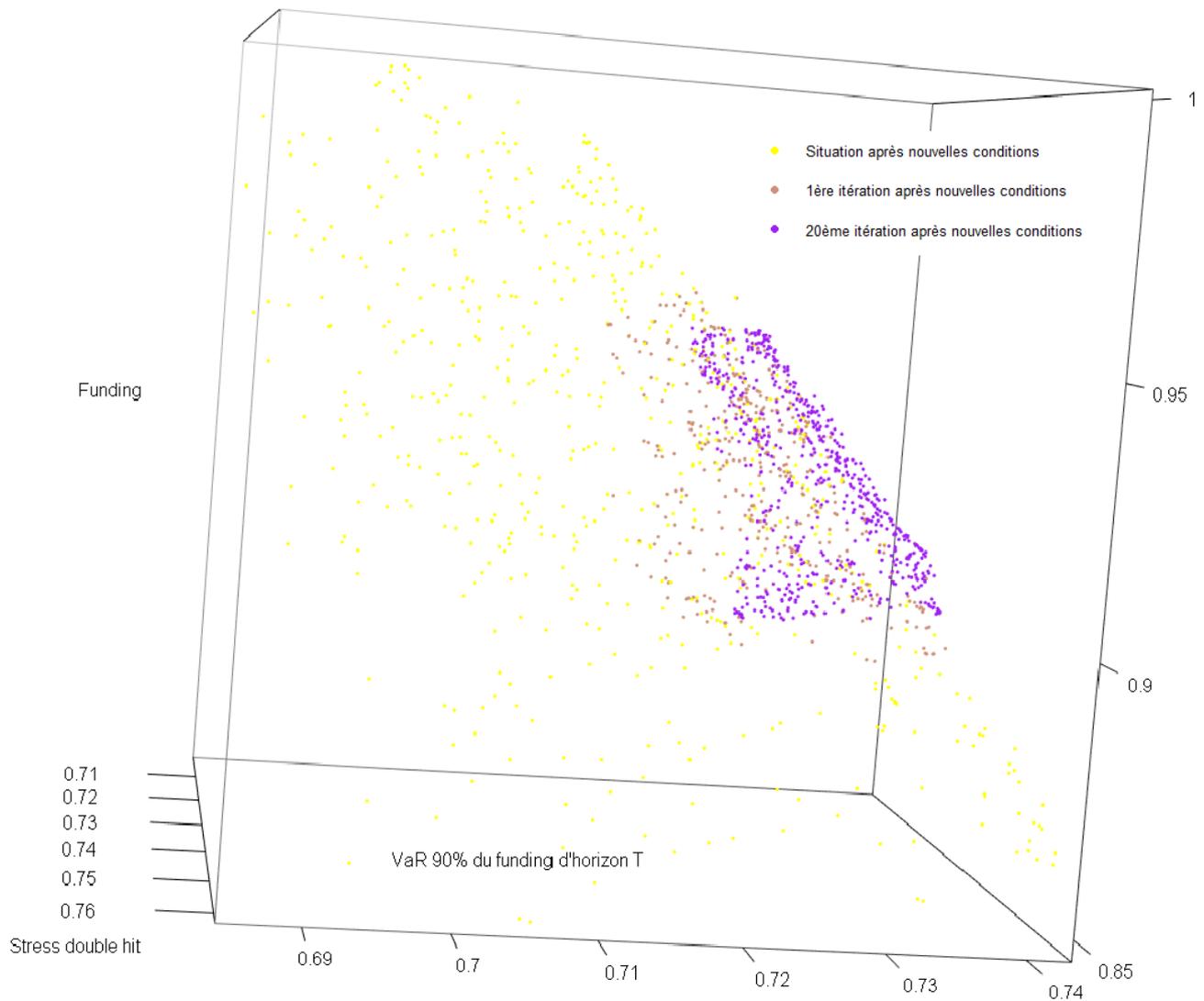


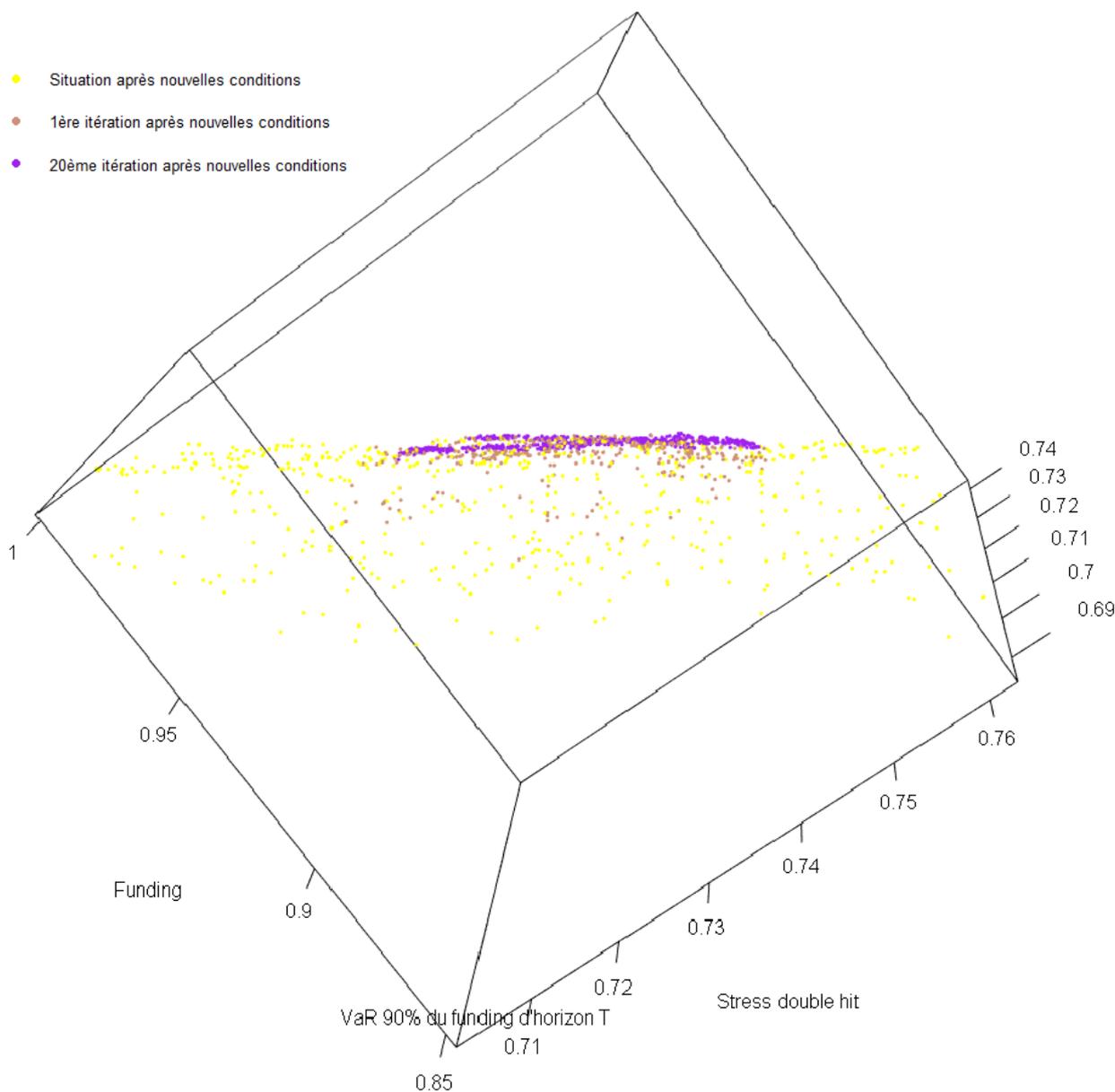
Sur le premier graphe il est difficile de voir que les points violets dominent les autres points. En revanche le second point de vue est plus parlant : les points jaunes qui se répartissaient avec une certaine « épaisseur » sur l'axe sont maintenant tous sous les points violets pour lesquels il n'y a plus d'« épaisseur » car ils sont Pareto-optimaux.

A nouveau nous avons ajusté les contraintes (b) pour tester les capacités d'adaptation de l'algorithme en présence de trois critères :

- $90\% \leq \text{funding} \leq 95\%$  ;
- $72\% \leq \text{VaR} \leq 76\%$  ;
- $72\% \leq \text{stress} \leq 76\%$ .

Nous avons encore laissé les contraintes de type (a) s'ajuster automatiquement (et prudemment). Malgré la suppression des allocations ne respectant pas ces nouvelles contraintes, en raison de la prudence de l'ajustement automatique (voir III.4.8) la population de départ du second appel à l'algorithme violait les nouvelles contraintes de type (b) dans 487 cas (sur 600). En revanche au bout de deux itérations plus aucune contrainte (b) n'était violée et à nouveau l'algorithme a donc convergé très rapidement. C'est ce que nous observons sur les graphes suivants :

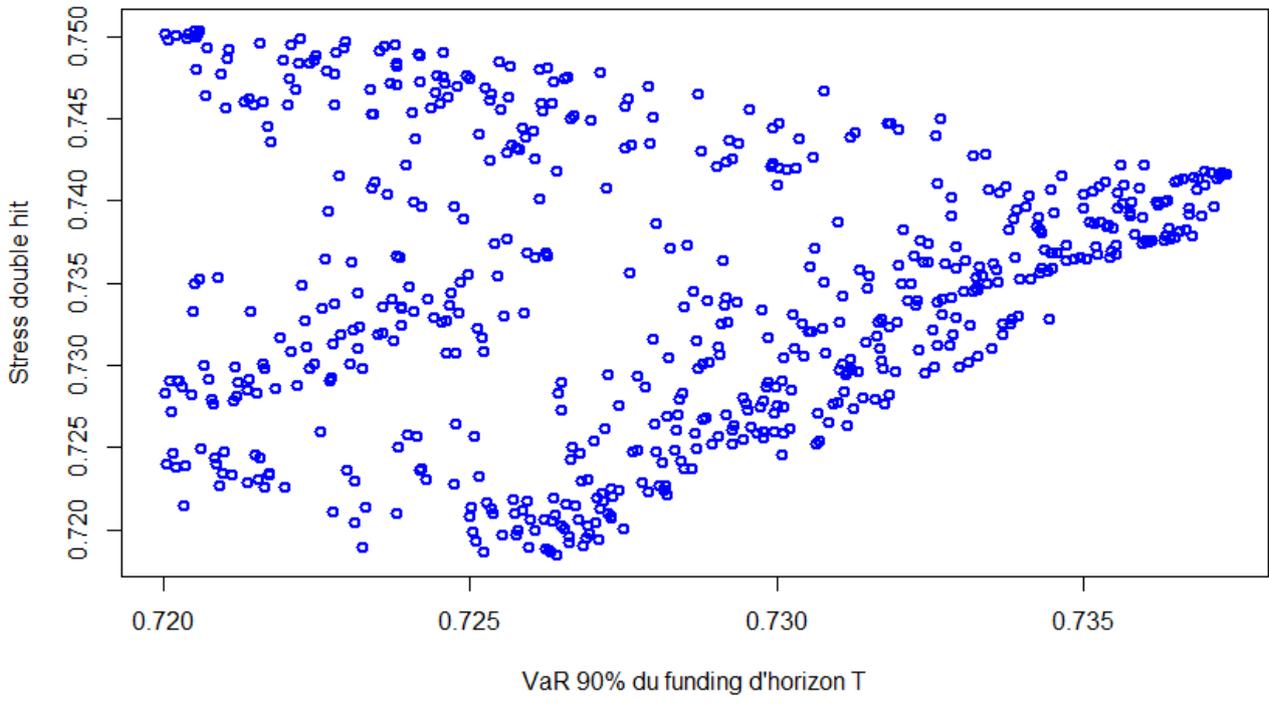
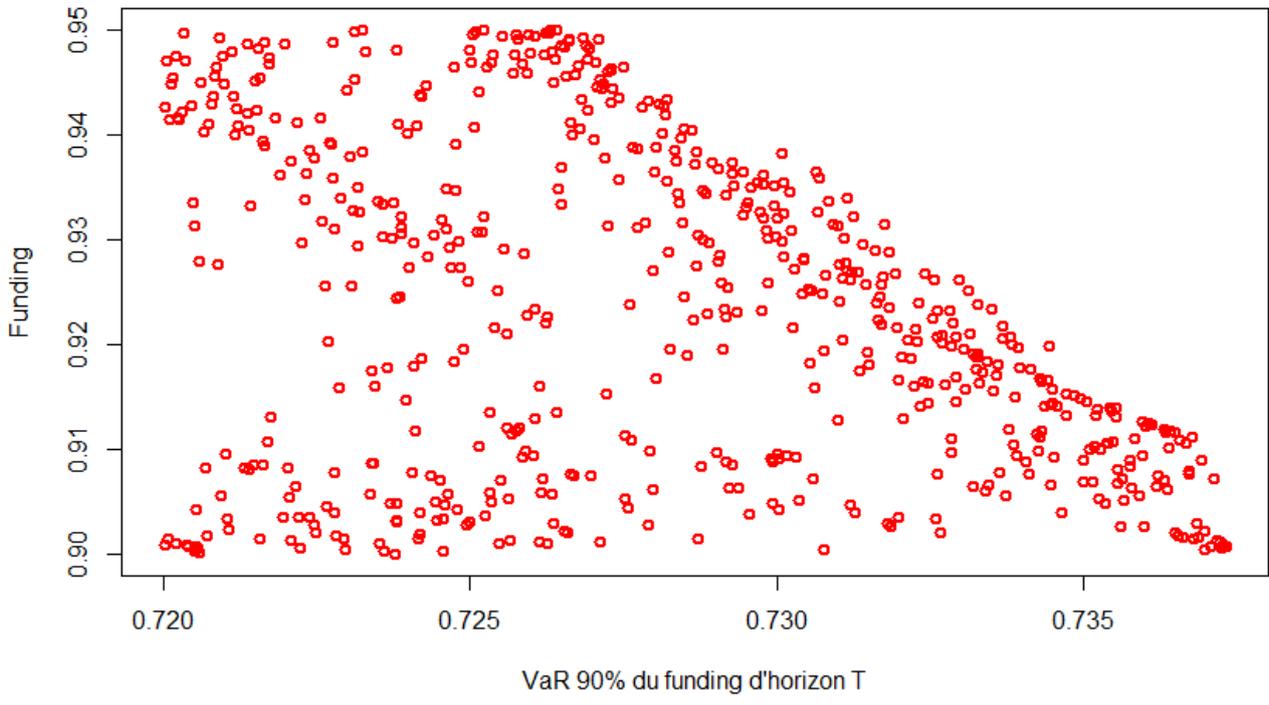


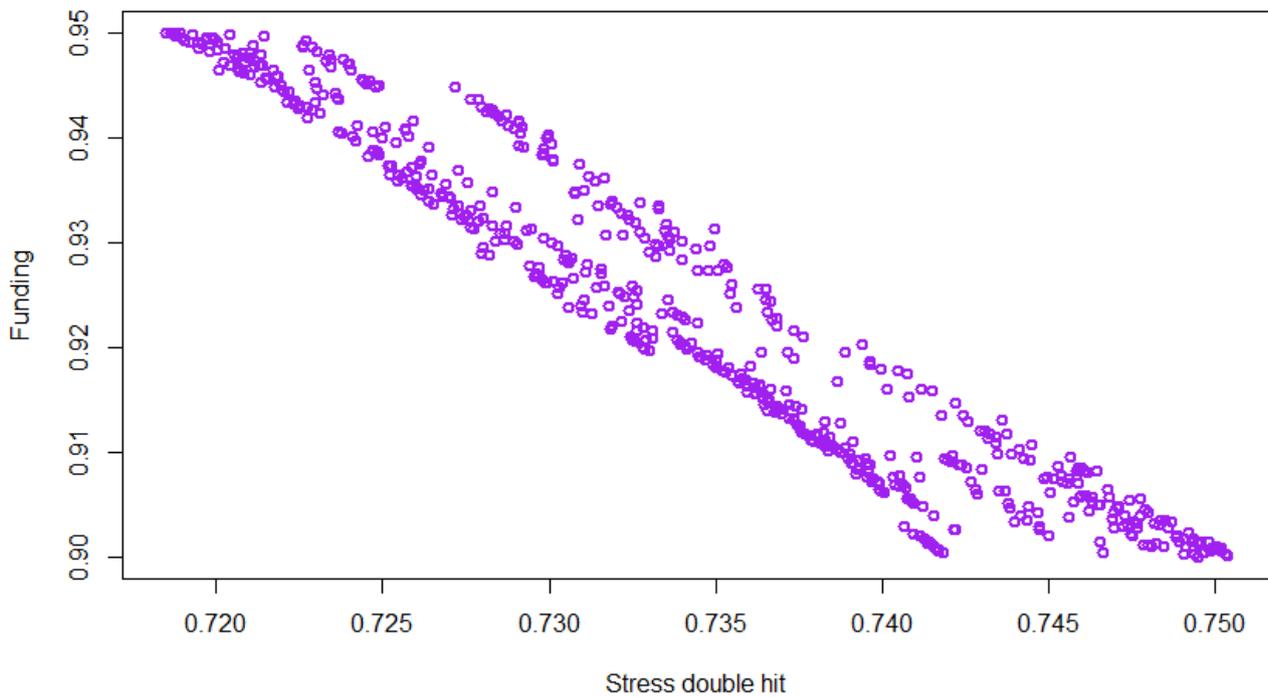


Constatant que la visualisation de la frontière efficiente n'est pas aisée en dimension strictement supérieure à 2, nous avons également représenté la population optimale sur des graphes bi-critères. En plus du gain en clarté cette représentation permet de vérifier que les frontières efficientes 2D sont incluses dans la frontière efficiente 3D au sens suivant :  $\mathcal{F}_{2D}$  est incluse dans  $\mathcal{F}_{3D}$  si : Pour tout  $x^{2D} = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2D}$  il existe  $x_3$  tel que  $x^{3D} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{F}_{3D}$ .

La démonstration de ce résultat peut se faire par l'absurde. Soit  $x^{2D} = (x_1, x_2) \in \mathcal{F}_{2D}$ . Supposons que pour tout  $x_3$ ,  $x^{3D} = (x_1, x_2, x_3) \notin \mathcal{F}_{3D}$ . Autrement dit il existe  $y^{3D} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{F}_{3D}$  tel que  $y_1 \geq x_1$  et  $y_2 \geq x_2$  et que l'une des inégalités soit stricte. Mais alors  $y^{2D} = (y_1, y_2)$  domine  $x^{2D}$ , ce qui est impossible car  $x^{2D} \in \mathcal{F}_{2D}$ .

Cette inclusion est bien vérifiée sur les graphes suivants sur lesquels la frontière efficiente 2D correspond à la « partie supérieure » des points :



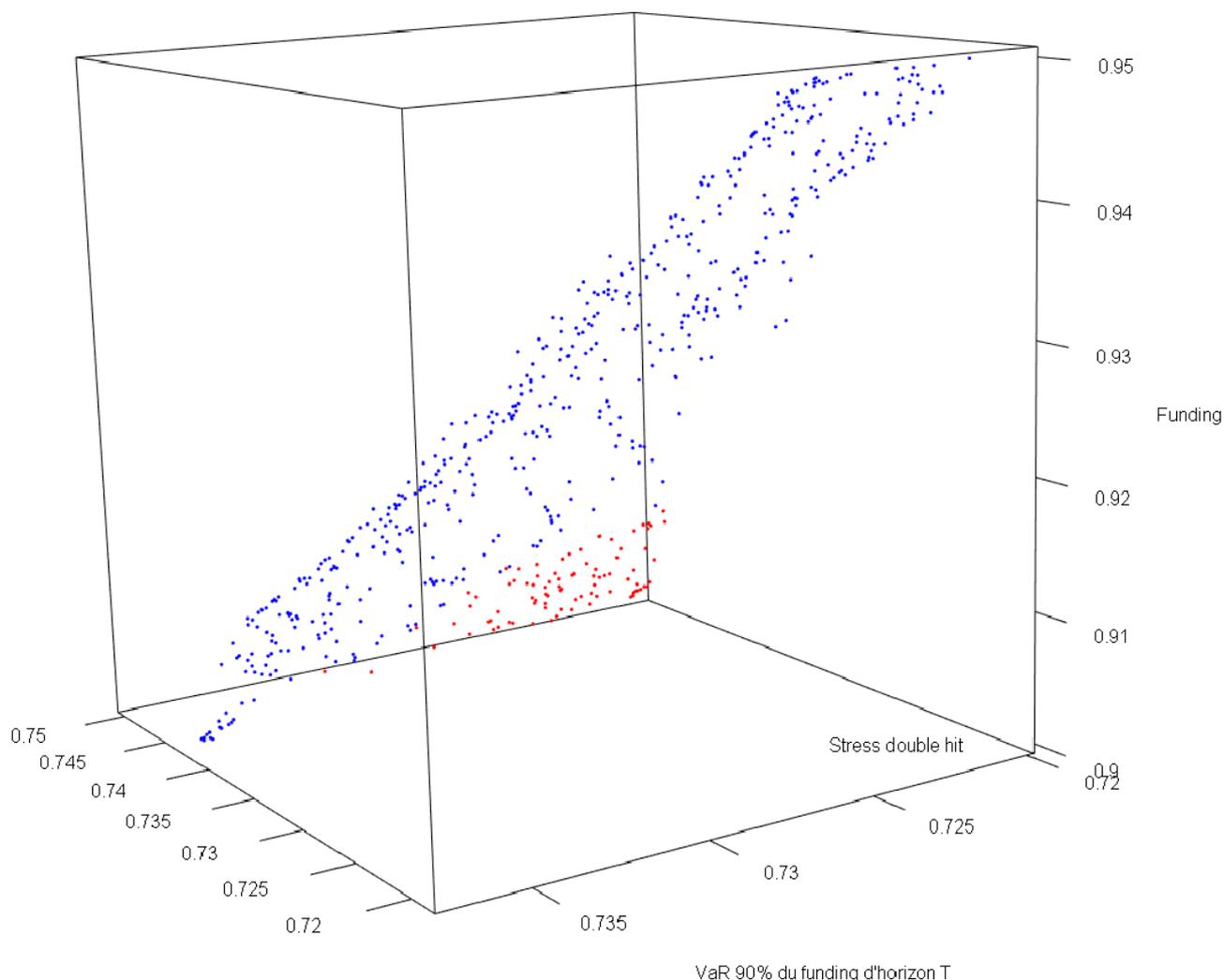


A ce stade les contrôles optimaux sont décrits par le tableau ci-dessous :

	O10	O20	O30	M	A	I	Prop
Valeur minimale	3,2%	7,7%	16,0%	1,0%	7,9%	7,7%	50,9%
Valeur maximale	19,1%	35,1%	52,5%	1,2%	21,6%	14,3%	65%

Ces fourchettes de valeurs sont plus larges que celles qui ont été obtenues dans le cas bi-critères (voir IV.2) en raison du degré de liberté supplémentaire apporté par l'apparition du troisième critère. Il faut donc que l'utilisateur affine davantage ses préférences.

Sur la base des graphes 2D nous pouvons par exemple imaginer que le décideur est très averse au risque représenté par le stress mis en place et qu'il souhaite donc se couvrir en ne s'intéressant qu'aux allocations en rouge sur le graphe suivant ( $stress \geq 74,5\%$ ) :



Ces allocations correspondent à des niveaux de *funding* un peu plus faibles mais à des valeurs prudentes concernant la VaR et le stress. Les contrôles optimaux d'intérêt sont alors :

	O10	O20	O30	M	A	I	Prop
Valeur minimale	5,4%	25,2%	25,9%	1,0%	7,9%	10,8%	56,1%
Valeur maximale	16,8%	35,1%	45,5%	1,1%	11,3%	13,7%	64,7%

Sans surprise nous observons que ce sont les investissements les moins risqués qui sont conservés. Par rapport au cas bi-critères nous observons également que les investissements en actions et en immobilier ont diminué (20% contre 30% auparavant) pour obtenir une meilleure résistance au risque et au stress. En revanche les investissements obligataires ont augmenté et les résultats semblent plutôt mener à une politique de durée longue (moyenne auparavant). Cela est cohérent car dans le scénario stressé la remontée des taux est moins importante.

## IV.4 *Rebalancing strategy*

Une question intéressante à se poser dans le problème de l'allocation stratégique optimale est celle de la *rebalancing strategy* (stratégie de rebalancement). Le moteur ALM fonctionne de la manière suivante (voir II.2.6) : si l'allocation cible est  $x$  alors en arrivant en  $t$  des achats/ventes sont systématiquement effectués afin de s'y ramener. Or cela est susceptible de générer des frais de transaction supplémentaires. Il est donc possible de considérer d'autres options :

- Ne se ramener à la cible qu'une fois tous les  $h \in \mathbb{N}^*$  ans ;
- Ne se ramener à la cible que si un certain seuil  $s > 0$  au delà de celle-ci est dépassé ;
- Procéder différemment en fonction des classes d'actifs ;
- Etc.

A titre d'exemple nous avons étudié la première de ces options et cherché le meilleur  $h$  via l'algorithme génétique (au lieu de simplement le prendre égal à 1). Pour cela nous nous sommes ramenés au cas bi-critères (avec une taille de population 180) et avons ajouté une variable de contrôle  $x_8$  (correspondant à  $h$ ) pouvant prendre 5 valeurs possibles  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Nous avons alors adapté les opérateurs de croisement et mutation pour que l'opérateur de croisement attribue le  $x_8$  du parent le plus proche à chaque enfant, et que l'opérateur de mutation perturbe  $x_8$  de la manière suivante :

- Probabilité de ne pas changer : 0,5 ;
- Probabilité d'être incrémenté (de 1) : 0,25 ;
- Probabilité d'être décrémenté : 0,25.

Si  $x_8$  vaut 5 (resp. 1), il ne peut pas être incrémenté (resp. décrémenté) et il a alors une probabilité 0.75 de ne pas être modifié.

En utilisant les mêmes contraintes de type (a) et (b) que précédemment, au bout de la 20<sup>ème</sup> itération nous avons observé que pour tous les individus  $x_8 = h = 5$ . L'algorithme semble donc échouer lorsqu'il s'agit de déterminer une stratégie de rebalancement. Nous attribuons cet échec à plusieurs facteurs.

D'abord le modèle ne pénalise pas l'absence de rebalancement. En effet, il n'existe aucune pénalisation qui découragerait que l'allocation s'éloigne de sa cible et devienne de plus en plus « risquée » dans le temps. A l'inverse, les rebalancements sont eux pénalisés par les coûts de transaction qui les rendent moins intéressants.

Ensuite les critères du modèle ne sont pas non plus adaptés au problème. En effet ne pas rebalancer en  $t$  pourrait avoir un impact sur la VaR d'horizon  $t + T$  sans avoir un impact conséquent sur la VaR d'horizon  $T$ . Il conviendrait donc de choisir un critère plus adapté pénalisant les risques liés à une allocation s'éloignant de sa cible.

Ce résultat est intéressant car il démontre que le modèle et les critères doivent toujours être choisis en fonction de l'utilisation qui en sera faite. L'algorithme utilisé semble capable de converger et de déterminer les solutions optimales mais il convient d'avoir entamé, en amont, une réflexion sur le problème pour déterminer la bonne modélisation et les bons critères qui permettront au module d'optimisation d'être efficace en tant qu'outil d'aide à la décision.

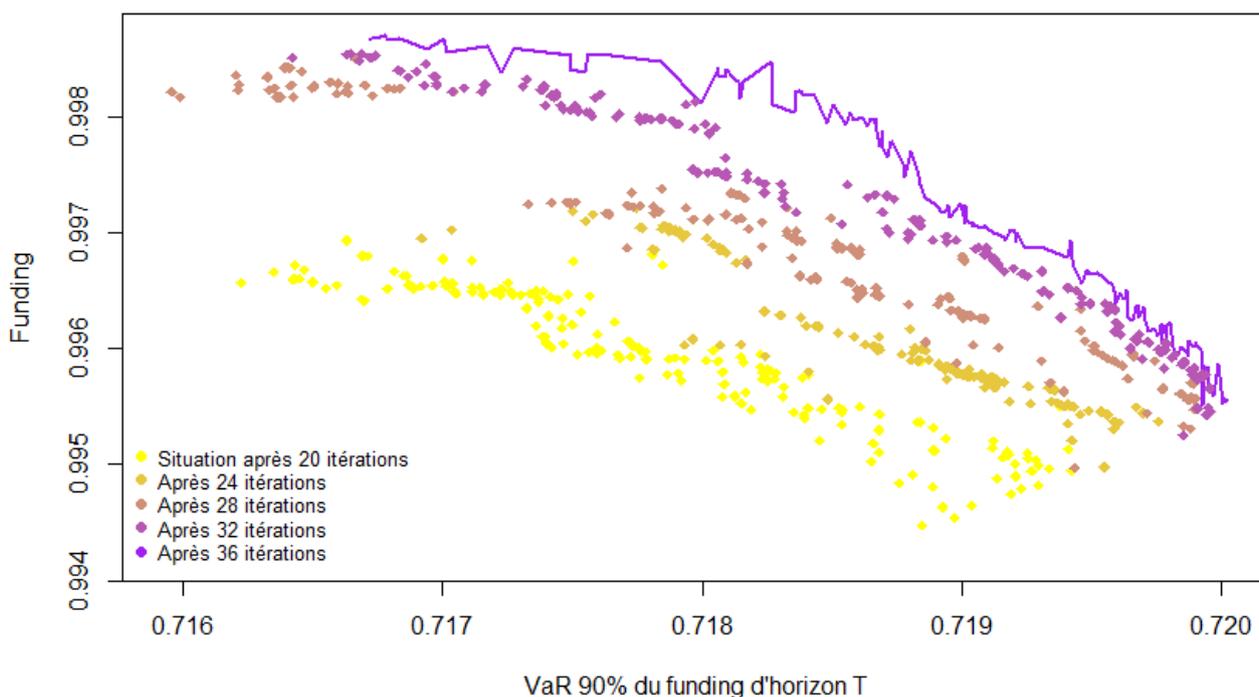
## IV.5 Vers quelle allocation tendre ?

Pour cette application nous nous sommes ramené à un contrôle à 7 composantes mais nous avons supposé l'allocation initiale  $x(t = 0)$  figée. Nous avons alors cherché l'allocation vers laquelle il serait souhaitable de se diriger à horizon 30 ans. Ainsi le contrôle est devenu  $x(t = T)$  et nous avons défini une cible différente à chaque instant :  $x(t) = (1 - \frac{t}{T})x(0) + \frac{t}{T}x(T)$ .

Nous avons choisi l'allocation initiale du fonds  $x(0)$  suivante :

	O10	O20	O30	M	A	I	Prop
$x(0)$	16%	30%	18%	1%	23%	12%	38%

Nous avons retenu les mêmes contraintes de type (a) qu'en IV.2 mais avons décidé de fixer des contraintes de type (b) très restrictives pour tester les capacités de l'algorithme. Pour cela nous avons supposé que l'objectif du fonds est d'atteindre un niveau de *funding* entre 99% et 100% à horizon  $T$ . Nous avons alors obtenu le résultat suivant :



Nous avons obtenu une convergence un peu plus lente et qui apparaît seulement à partir d'une vingtaine de générations. Cela met en évidence l'aspect « progressif » de l'algorithme : il vaut mieux fixer des contraintes larges au départ pour que l'algorithme élimine au fur et à mesure les allocations non admissibles (c'est l'intérêt de l'interactivité). Dans le cas contraire l'algorithme aura des difficultés pour trouver les premières allocations admissibles lui permettant de converger.

Remarque 1 : des modifications pourraient être envisagées pour corriger ce défaut de l'algorithme.

Remarque 2 : à ce niveau de précision il y a du bruit lié au nombre de scénarios retenu.

Pour cette application nous avons également remarqué que pour certains niveaux de *funding* il était possible d'augmenter le *funding* sans diminuer la VaR. Ce phénomène s'explique comme dans la partie IV.4 précédente : les critères d'optimisation, le *funding* en  $T$ , et sa VaR, sont impactés différemment à chaque instant  $t$  par l'allocation  $x(t)$  : plus  $t$  est grand et moins l'allocation a le temps « d'influencer les résultats » avant d'arriver en  $T$ . Or le modèle ne prend pas en compte ce qu'il se passe après  $T$ . Les métriques choisies ne sont donc pas adaptées pour l'étude.

## IV.6 Apports de la méthode, prolongements possibles

Au travers de ces quatre applications nous avons montré l'intérêt et la faisabilité de l'approche suggérée. La possibilité de définir plusieurs critères apporte une réelle souplesse et permet de mesurer différentes métriques (avec plusieurs modèles ou dans différents scénarios). L'interactivité permet d'impliquer le décideur et d'intégrer l'impact de décisions stratégiques ou subjectives. Elle permet également d'accélérer la convergence et d'améliorer la précision des résultats sur les portions intéressantes de la frontière efficiente. La nature de l'algorithme (et plus généralement d'une méta-heuristique) en fait un outil d'aide à la décision très flexible pour répondre aux différentes questions d'un décideur.

Nous avons toutefois observé que l'algorithme d'optimisation est performant et ne donne des résultats interprétables que si le modèle et les critères d'optimisation sont « compatibles ». Il est donc important de réaliser une réflexion, en amont de l'optimisation, pour choisir des indicateurs pertinents et une modélisation adaptée au contexte envisagé.

De plus en présence de plusieurs critères (dès  $M \geq 3$ ) la frontière efficiente est de grande dimension et devient plus difficile à analyser (comme vu en IV.3). Un prolongement possible de nos travaux pourrait donc être l'application de techniques de *data visualization* afin de faciliter l'interprétation des résultats. A cet effet nous avons utilisé la méthode de Wesner [69] qui propose de visualiser la frontière efficiente dans des plans de coupe i.e. sur des graphes bi-critères.

Il est également clair qu'il serait possible de chercher à améliorer l'algorithme proposé. La recherche sur les méta-heuristiques est encore très active et propose régulièrement de nouvelles méthodes. Le mémoire expose déjà un certain nombre de travaux et propose de nouveaux opérateurs génétiques relativement efficaces et immédiatement utilisables. La méthode de génération uniforme utilisée est également bien adaptée à la problématique.

Pour finir nous avons vu que la vitesse de convergence est importante pour mettre en place l'approche interactive suggérée. Nous avons réussi à obtenir des performances satisfaisantes en considérant un portefeuille contenant uniquement une indexation sur l'inflation. Dans la pratique les compagnies d'assurance ont parfois besoin de modéliser des portefeuilles plus complexes et les mécanismes optionnels (comme la participation aux bénéfices). Actuellement les outils utilisés pour cela (Moses, Prophet) offrent une vitesse de calcul pouvant s'avérer incompatible avec l'approche suggérée.

Notre conviction est que ce type d'outils devrait continuer à se développer et devenir de plus en plus performant. En effet l'utilisation de techniques telles que le *curve fitting* ou le *Least Square Monte-Carlo* couplée à la parallélisation des calculs permet théoriquement de réduire le temps de calcul de manière considérable.

---

## Conclusion

---

La problématique de l'allocation stratégique optimale d'actifs est complexe et implique de nombreux enjeux. Il y a donc plusieurs critères de décision, ce qui justifie de la formuler sous la forme d'un problème d'optimisation multi-objectifs.

Dès les années 1950 Markowitz [42] a démontré l'intérêt des approches d'optimisation multi-objectifs pour la problématique en utilisant une méthode basée sur la détermination d'une frontière efficiente. La connaissance de cette frontière permet de s'affranchir de la définition d'une fonction d'utilité : le décideur peut visualiser l'ensemble des compromis possibles entre les différents critères de l'optimisation et sélectionner celui qui semble le plus adapté à sa vision et sa stratégie propres.

Néanmoins le modèle de Markowitz n'est pas adapté pour prendre en compte les interactions actif-passif et l'ensemble des critères de décision d'une institution financière. Plusieurs auteurs (Dominicis [22], Zhang [71], Senel et al. [57], Skolpadunket et al. [63], Chan et al. [10]) ont donc proposé d'utiliser les méta-heuristiques afin de rechercher la frontière efficiente numériquement sur des scénarios stochastiques. Ces outils ont démontré leur efficacité en présence de deux critères mais peuvent rencontrer des difficultés lorsque le nombre de critères augmente (en raison de la grande dimension de la frontière efficiente).

Par ailleurs la problématique relève du domaine de la stratégie, la prise de décisions est donc nécessairement subjective et relative à des croyances ou partis pris. Afin de prendre cela en compte nous avons proposé dans ce mémoire une approche d'optimisation multi-objectifs qui est, de plus, interactive. L'interactivité consiste à autoriser le décideur à modifier les contraintes du problème en cours d'optimisation afin que les solutions obtenues soient cohérentes avec ses critères propres.

Une telle approche présente l'intérêt de placer le décideur au coeur du processus d'optimisation et d'intégrer au fur et à mesure l'impact de décisions stratégiques et subjectives. Le décideur peut alors restreindre la recherche à certaines portions de frontière efficiente et donc améliorer la vitesse de convergence. De plus cette démarche simplifie l'interprétation des résultats en la rendant progressive. En effet dans le cas général une frontière efficiente de grande dimension peut s'avérer difficile à visualiser.

Afin de mettre en oeuvre cette approche le mémoire propose d'utiliser un algorithme génétique. Comme toute méta-heuristique, les algorithmes génétiques peuvent intégrer les intuitions sur le problème pour améliorer leurs performances. Le fonctionnement de l'algorithme retenu est donc détaillé et de nouveaux opérateurs génétiques sont proposés. Ces opérateurs se veulent spécifiquement adaptés à la problématique de l'allocation stratégique d'actifs, et intègrent la dimension interactive souhaitée. L'implémentation de l'algorithme d'optimisation est alors réalisée sur le langage de programmation C++.

Afin de tester l'approche suggérée nous avons considéré l'exemple d'un fonds de pension fictif. Les différentes applications présentées dans le mémoire ont alors mis en évidence les apports de l'approche. Au lieu d'un modèle donnant une solution unique ou figée nous avons obtenu un outil d'aide à la décision flexible et capable d'intégrer l'impact de décisions stratégiques.

Par ailleurs l'approche permet l'utilisation de nombreux critères pour l'optimisation et notamment de mesurer certains critères à l'aide de différents modèles ou dans des scénarios stressés. Cela est très utile pour prendre du recul et nuancer les résultats d'un (seul) modèle, ce qui est indispensable dans le cadre d'une prise de décisions subjective et stratégique. Il y a donc une meilleure compréhension du risque auquel l'institution financière s'expose.

Plusieurs prolongements de nos travaux seraient envisageables, le temps de calcul étant probablement la principale limitation. En effet l'interactivité nécessite que l'outil soit suffisamment rapide pour avoir un sens : dans le cas contraire l'utilisateur ne peut pas interagir en temps réel avec l'algorithme et l'approche perd de son intérêt. Les résultats présentés dans le mémoire ont été obtenus sur le cas « simple » d'un fonds de pension dont le portefeuille est peu optionnel.

En pratique les outils utilisés par les compagnies d'assurance proposent un temps de calcul qui peut, dans certains cas, s'avérer limitant pour appliquer l'approche suggérée. Notre conviction est que ces outils se perfectionneront dans le futur, en profitant notamment des progrès en matière de parallélisation des calculs et de la popularisation des services de *cloud computing* (comme le service de calcul haute performance proposé par *Amazon Web Services*).

---

## Bibliographie

---

- [1] K. C. AHLGRIM, S. P. D'ARCY et R. W. GORVETT : Modeling financial scenarios: a framework for the actuarial profession. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, p. 177–238, Novembre 2005.
- [2] K. ARMEL : Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques, Juin 2010. Mémoire de fin d'études (ISFA).
- [3] K. J. ARROW : *Essays in the theory of risk-bearing*. North-Holland, 1971.
- [4] P. ARTZNER, F. DELBAEN, J.-M. EBER et D. HEATH : Coherent measures of risk. *Mathematical finance Vol. 9 No. 3*, p. 203–228, 1999.
- [5] J. E. BAKER : Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm. *Proceeding of the Second International Conference on the Genetic Algorithms and their Application*, p. 14–21, 1987.
- [6] S. BANDARU, A. NG et K. DEB : Data mining methods for knowledge discovery in multi-objective optimization: Part A - survey. *Expert Systems with Applications Vol. 70*, p. 139–159, 2017.
- [7] S. BANDARU, A. NG et K. DEB : Data mining methods for knowledge discovery in multi-objective optimization: Part B - new developments and applications. *Expert Systems with Applications Vol. 70*, p. 119–138, 2017.
- [8] M. BARNES, A. CHAMBERS, A. EARNSHAW, S. JARVIS, R. MCMAHON et P. RIDGES : Controlling the growth of your hedge, 2008. Draft report of a Working Party on Dynamic Investment Strategies.
- [9] R. BEDOUI : Recherche d'une allocation stratégique optimale dans le cadre de la gestion actif-passif : application sur un fonds de retraite, 2007. Mémoire de fin d'études (ISFA).
- [10] M.-C. CHAN, C.-C. WONG, B. K.-S. CHEUNG et G. Y.-N. TANG : Genetic algorithms in multi-stage portfolio optimization system. *Proceedings of the eighth international conference of the Society for Computational Economics, Computing in Economics and Finance*, 2002.
- [11] A. COUSIN : Le risque de défaut et l'utilisation des CDS, Juin 2012. Formation Sépia.
- [12] S. L. CRAIGHEAD et S. E. NAVIN : Stochastic immunization, Juin 2000. San Diego Spring Meeting: RECORD Vol. 26 No. 1.
- [13] C. DARWIN et W. F. BYNUM : *The origin of species by means of natural selection: or, the preservation of favored races in the struggle for life*. AL Burt, 1859.
- [14] K. DEB et R. AGRAWAL : Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems Vol. 9*, p. 115–148, 1995.
- [15] K. DEB et S. AGRAWAL : A niched-penalty approach for constraint handling in genetic algorithms. *Proceedings of the international conference on artificial neural networks and genetic algorithms (ICANNGA-99)*, p. 235–243, Juillet 1999.
- [16] K. DEB et D. DEB : Analyzing mutation schemes for real-parameter genetic algorithms. *International Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing Vol. 4 No. 1*, p. 1–28, 2014.

- [17] K. DEB et H. JAIN : An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints. *Evolutionary Computation Vol. 18 No. 4*, p. 577–601, 2014.
- [18] K. DEB, A. PRATAP, S. AGARWAL et T. MEYARIVAN : A fast elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation Vol. 6 No. 2*, p. 182–197, Avril 2002.
- [19] K. DEB et D. SAXENA : Searching for pareto-optimal solutions through dimensionality reduction for certain large-dimensional multi-objective optimization problems. *Proceedings of the World Congress on Computational Intelligence (WCCI-2006)*, p. 3352–3360, Juillet 2006.
- [20] L. DEVROYE : *Non-uniform random variate generation*. Springer-Verlag, 1986.
- [21] G. di TOLLO, T. STÜTZLE et M. BIRATTARI : A metaheuristic multi-criteria optimisation approach to portfolio selection. *Journal of Applied Operational Research Vol. 6 No. 4*, p. 222–242, Janvier 2014.
- [22] L. D. DOMINICIS : Les apports de l’intelligence artificielle dans l’allocation stratégique d’actifs sous contraintes stochastiques de solvabilité. *Publié en ligne sur <http://papers.ica2006.com>*, p. 1–29, 2006.
- [23] EUROPEAN INSURANCE AND OCCUPATIONAL PENSIONS AUTHORITY : 2016 EIOPA insurance stress test report, Décembre 2016. Référence EIOPA 16/302.
- [24] EUROPEAN INSURANCE AND OCCUPATIONAL PENSIONS AUTHORITY : IORP stress test 2017 specifications, Mai 2017. Référence EIOPA-BoS-17/075v2.
- [25] A. FALEH : *Allocation stratégique d’actifs et ALM pour les régimes de retraite*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon 1, 2011.
- [26] E. F. FAMA et K. R. FRENCH : The capital asset pricing model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives Vol. 18 No. 3*, p. 25–46, Été 2004.
- [27] C. W. FRENCH : The treynor capital asset pricing model. *Journal of Investment Management Vol. 1 No. 2*, p. 60–72, Octobre 2003.
- [28] J. GAFFNEY, C. PEARCE et D. GREEN : Binary versus real coding for genetic algorithms: a false dichotomy? *ANZIAM Journal Vol. 51*, p. 347–359, Juin 2010.
- [29] A. E. GELFAND et A. F. M. SMITH : Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association, Vol. 85, No. 410*, p. 398–409, Juin 1990.
- [30] A. GHOSH et A. MAHANTI : Investment portfolio management: a review from 2009 to 2014. *Proceedings of 10th Global Business and Social Science Research Conference*, Juin 2014.
- [31] J. C. HULL : *Options, futures, and other derivatives*. Upper Saddle River, N.J. : Pearson/Prentice Hall, 2006.
- [32] A. IBRAHIM, S. RAHNAMAYAN, M. V. MARTIN et K. DEB : 3D-RadVis: Visualization of pareto front in many-objective optimization. *2016 IEEE Evolutionary Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, p. 736–745, Juillet 2016.
- [33] A. IBRAHIM, S. RAHNAMAYAN, M. V. MARTIN et K. DEB : Fusion-based hybrid many-objective optimization algorithm. *2017 IEEE Evolutionary Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, p. 2372–2381, Juin 2017.
- [34] G. IYENGAR et A. K. C. MA : Cash flow matching: a risk management approach. *North American Actuarial Journal*, p. 370–384, Janvier 2009.
- [35] H. JAIN et K. DEB : An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, part II: Handling constraints and extending to and adaptive approach. *Evolutionary Computation Vol. 18 No. 4*, p. 602–222, 2014.

- [36] S. JARVIS, A. LAWRENCE et S. MIAO : Dynamic asset allocation techniques. *British Actuarial Journal Vol. 15 No.3*, p. 573–655, 2009.
- [37] D. KIM et A. SANTOMERO : Risk in banking and capital regulation. *Journal of Finance Vol. 43 No. 5*, p. 1219–1233, Décembre 1988.
- [38] R. KOCHERLAKOTA, E. S. ROSENBLOOM et E. S. W. SHIU : Algorithms for cash-flow matching. *Transactions of Society of Actuaries Vol. 40*, p. 477–484, 1988.
- [39] R. KOCHERLAKOTA, E. S. ROSENBLOOM et E. S. W. SHIU : Cash-flow matching and linear programming duality. *Transactions of Society of Actuaries Vol. 42*, p. 281–293, 1990.
- [40] J. LEHMAN et K. O. STANLEY : Abandoning objectives: Evolution through the search for novelty alone. *Evolutionary Computation Vol. 19 No. 2*, p. 189–223, 2011.
- [41] B. B. MANDELBROT : *Une approche fractale des marchés : risquer, perdre et gagner*. Odile Jacob, 2005.
- [42] H. MARKOWITZ : Portfolio selection. *The Journal of Finance Vol. 7 No. 1*, p. 77–91, Mars 1952.
- [43] H. MARKOWITZ : *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Cowles foundation for research in economics at Yale University, Monograph 16, 1959.
- [44] J.-P. MÉDECIN et L. DEVINEAU : Modélisation du risque de crédit pour la valorisation du bilan économique, Juin 2015. Atelier 2 Institut des Actuaire.
- [45] R. C. MERTON : An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol. 7 No. 4*, p. 1851–1872, Septembre 1972.
- [46] R. C. MERTON : Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science Vol. 4 No. 1*, p. 141–183, Été 1973.
- [47] C. MONIN : Optimisation multiobjectif de l’allocation stratégique par un algorithme génétique, Janvier 2014. Mémoire de fin d’études (ISFA).
- [48] V. A. MOQUIST : Dynamic asset allocation and algorithmic trading, Novembre 2014. Master thesis (Copenhagen Business School).
- [49] F. PLANCHET : Construire un générateur de scénarios économiques en assurance, Septembre 2011. Présentation à l’ISFA.
- [50] F. PLANCHET, P. THÉRON et A. KAMEGA : *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*. Economica, 2009.
- [51] P. PONCET : Choix de portefeuille et mesures de performance. *Gestion de patrimoine : clés et outils (ESSEC Publishing)*, p. 146–192, 2012.
- [52] P. PONCET et R. PORTAIT : La théorie moderne du portefeuille : théorie et applications. *STDI Frame Maker 4986*, p. 795–828, 2009.
- [53] J. W. PRATT : Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica Vol. 32 No. 1/2*, p. 122–136, Janvier/Avril 1964.
- [54] R. C. PURSHOUSE, K. DEB, M. MANSOR, S. MOSTAGHIM et R. WANG : A review of hybrid evolutionary multiple criteria decision making methods. *2014 IEEE Evolutionary Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, p. 1147–1154, 2014.
- [55] T. RAMANAMPISOA : Application de la méthode least-square monte-carlo pour la mise en place de l’orsa en assurance-vie, 2012. Mémoire de fin d’études (ISUP).
- [56] B. ROSSPOPOFF : Modèles historique et risque neutre de taux et d’inflation pour l’assurance, Juin 2013. Mémoire de fin d’études (ISFA).
- [57] K. SENEL, A. B. PAMUKCU et S. YANIK : Using genetic algorithms for optimal investment allocation decision in defined contribution pension schemes. *Insurance Mathematics and Economics Vol. 39 No. 3*, Décembre 2006.

- [58] D. SHANG, V. KUZMENKO et S. URYASEV : Cash flow matching with risks controlled by buffered probability of exceedance and conditional value-at-risk. *Annals of Operations Research*, p. 1–14, Novembre 2016.
- [59] W. F. SHARPE : Capital asset prices with and without negative holdings, Décembre 1990. Nobel Lecture.
- [60] W. F. SHARPE : Mutual fund performance. *Journal of Business Vol. 39 No.1*, p. 119–138, Janvier 1996.
- [61] W. F. SHARPE et L. G. TINT : Liabilities - a new approach. *Journal of Portfolio Management Vol. 16 No. 2*, p. 5–10, Hiver 1990.
- [62] M. SIMPSON : Sampling from a truncated dirichlet distribution, Mai 2015. [www.themattsimpson.com/2015/05/06/sampling-from-a-truncated-dirichlet-distribution/](http://www.themattsimpson.com/2015/05/06/sampling-from-a-truncated-dirichlet-distribution/).
- [63] P. SKOLPADUNKET, K. DAHAL et N. HARNPORNCHAI : Portfolio optimization using multi-objective genetic algorithms. *Evolutionary Computation (IEEE Congress)*, p. 516–523, Septembre 2007.
- [64] Society of Actuaries. *Economic Scenario Generators - A practical guide*, Juillet 2016.
- [65] N. SRINIVAS et K. DEB : Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation Vol. 2 No.3*, p. 221–248, 1994.
- [66] J. TOBIN : Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies Vol. 25 No. 2*, p. 65–86, Février 1958.
- [67] O. VASICEK : An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics Vol. 5 No. 2*, p. 177–188, Août 1977.
- [68] N. WESNER : La refonte de la directive IORP : problématiques quantitatives, Juin 2013. Colloquium of the International Actuarial Association.
- [69] N. WESNER : Multi-objective optimization via visualization. *Economics Bulletin Vol. 37 No.2*, p. 1226–1233, 2017.
- [70] D. H. WOLPERT et W. G. MACREADY : No free lunch theorems for optimization. *IEEE transactions on evolutionary computation Vol.1 No. 1*, p. 66–82, Avril 1997.
- [71] F. ZHANG : Use of genetic algorithms for optimal investment strategies, Été 2013. Mémoire de fin d'études (Simon Fraser University).

---

## Annexes

---

### Table des annexes

---

Annexe A : primes de risque, valorisation <i>market-consistent</i> . . . . .	150
Annexe B : moteur ALM – quelques résultats des projections . . . . .	152
Annexe C : uniformité de la méthode de génération . . . . .	166

---

## Annexe A : primes de risque, valorisation *market-consistent*

Les rendements de l'immobilier et des actions sont directement diffusés par l'ESG utilisé dans le mémoire mais il convient d'expliquer comment sont obtenus les différents prix d'obligations (indexées ou non). Afin d'éviter d'avoir recours à des simulations dans le monde risque neutre (et au phénomène des simulations dans les simulations) des formules fermées sont utilisées.

Rappelons qu'un zéro-coupon nominal de maturité  $T$  est un produit qui délivre 1€ en  $T$ . Son prix en  $t$  est donné par une espérance sous la probabilité **risque-neutre**  $\mathbb{Q}$  :

$$ZC_{nom}(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T i_u du} | \mathcal{F}_t]$$

Dans un premier temps relier le prix d'une obligation aux prix zéro-coupons (ZC). Considérons une obligation classique de nominal  $N$ , de maturité  $T$  et de taux de coupon  $\tau$ . Le coupon annuel est donc  $C = \tau N$ . Les flux générés par cette obligation sont résumés dans le tableau suivant :

$t = 1$	...	$t = k$	...	$t = T - 1$	$t = T$
$C$	...	$C$	...	$C$	$N + C$

L'obligation peut donc être exprimée comme une combinaison linéaire de ZC nominaux. Par absence d'opportunité d'arbitrage il est possible de déduire son prix en  $t = 0$  :

$$P_{\text{oblig classique}}(0, T) = N[\tau \sum_{t=1}^T ZC(0, t) + ZC(0, T)]$$

Le prix à une date  $t > 0$  est obtenu de la même manière :

$$P_{\text{oblig classique}}(t, T) = N[\tau \sum_{u=t+1}^T ZC_{nom}(t, u) + ZC_{nom}(t, T)]$$

Considérons à présent une obligation indexée sur l'inflation et reprenons les notations ci-dessus. Les flux sont maintenant donnés par :

$t = 1$	...	$t = k$	...	$t = T - 1$	$t = T$
$Ce^{\int_0^1 q_u du}$	...	$Ce^{\int_0^k q_u du}$	...	$Ce^{\int_0^{T-1} q_u du}$	$(N + C)e^{\int_0^T q_u du}$

En raisonnant comme ci-dessus avec des ZC réels le prix est donné par :

$$P_{\text{oblig index}}(t, T) = N[\tau \sum_{u=t+1}^T ZC_{reel}(t, u) + ZC_{reel}(t, T)]$$

Grâce à la propriété d'indexation parfaite du passif (voir II.1.5) ce dernier peut également être valorisé via les ZC réels (même raisonnement). Il suffit donc de déterminer une formule fermée donnant les prix ZC pour être en mesure de déduire toutes les grandeurs d'intérêt du problème. Armel [2] donne les prix ZC dans les modèles de Vasicek et Hull-White :

$$ZC_{nom}(t, T) = ZC_{reel}(t, T) \cdot ZC_{inf}(t, T)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} ZC_{inf}(t, T) = A_q(t, T)e^{-B_q(t, T)r_t} \\ B_q(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa_q(T-t)}}{\kappa_q} \\ A_q(t, T) = \exp\left(\frac{(B_q(t, T) - T + t)(\kappa_q^2 \mu_q - \frac{\sigma_q^2}{2})}{\kappa_q^2} - \frac{\sigma_q^2 B_q^2(t, T)}{4\kappa_q}\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ZC_{reel}(t, T) = e^{A_r(t, T) - B_r(t, T)r_t - B_l(t, T)l_t} \\ B_r(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa_r(T-t)}}{\kappa_r} \\ B_l(t, T) = \frac{\kappa_r}{\kappa_r - \kappa_l} \left[ \frac{1 - e^{-\kappa_l(T-t)}}{\kappa_l} - \frac{1 - e^{-\kappa_r(T-t)}}{\kappa_r} \right] \\ A_r(t, T) = (B_r(t, T) - T + t)(\mu_l - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa_r^2}) + B_l(t, T)\mu_l - \frac{\sigma_r^2 B_r^2(t, T)}{4\kappa_r} \\ + \frac{\sigma_l^2}{2} \left[ \frac{T-t}{\kappa_l} - 2 \frac{B_l(t, T) + B_r(t, T)}{\kappa_l^2} + \frac{1 - e^{-2\kappa_r(T-t)}}{2\kappa_r(\kappa_r - \kappa_l)^2} \right. \\ \left. - \frac{2\kappa_r(1 - e^{-(\kappa_r + \kappa_l)(T-t)})}{\kappa_l(\kappa_r - \kappa_l)^2(\kappa_r + \kappa_l)} + \frac{\kappa_r^2(1 - e^{-2\kappa_l(T-t)})}{2\kappa_l^3(\kappa_r - \kappa_l)^2} \right] \end{array} \right.$$

Ces formules sont valables lorsque les modèles et leurs paramètres sont spécifiés sous  $\mathbb{Q}$ . Les paramètres de l'ESG étant donnés sous  $\mathbb{P}$  dans le mémoire, il convient de déduire les dynamiques sous  $\mathbb{Q}$  à partir de celles connues sous  $\mathbb{P}$ . Pour cela nous avons retenu la méthode simple décrite par Planchet [49] et détaillée ci-dessous :

Intéressons nous par exemple à un modèle de Vasicek pour les taux nominaux :

$$di_t = \kappa(\mu - i_t)dt + \sigma dW_t \text{ (sous } \mathbb{P} \text{)}$$

Le changement de probabilité pour passer à une dynamique sous  $\mathbb{Q}$  revient à supposer l'existence d'une prime de risque  $\lambda(t)$  telle que la dynamique devienne sous  $\mathbb{Q}$  (par application du théorème de Girsanov) :

$$di_t = [\kappa(\mu - i_t) - \lambda(t)\sigma]dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$\lambda$  peut s'interpréter comme le « coût d'une unité de risque » (voir Planchet [49] et Rossopoff [56] pour plus d'éléments sur ce sujet). La méthode consiste à faire l'hypothèse (forte)  $\lambda(t) = \lambda = \text{constante}$ .

Dans ce cas, en posant  $\mu^{\mathbb{Q}} = \mu - \frac{\lambda\sigma}{\kappa}$  la dynamique sous  $\mathbb{Q}$  est simplement :

$$di_t = \kappa(\mu^{\mathbb{Q}} - i_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

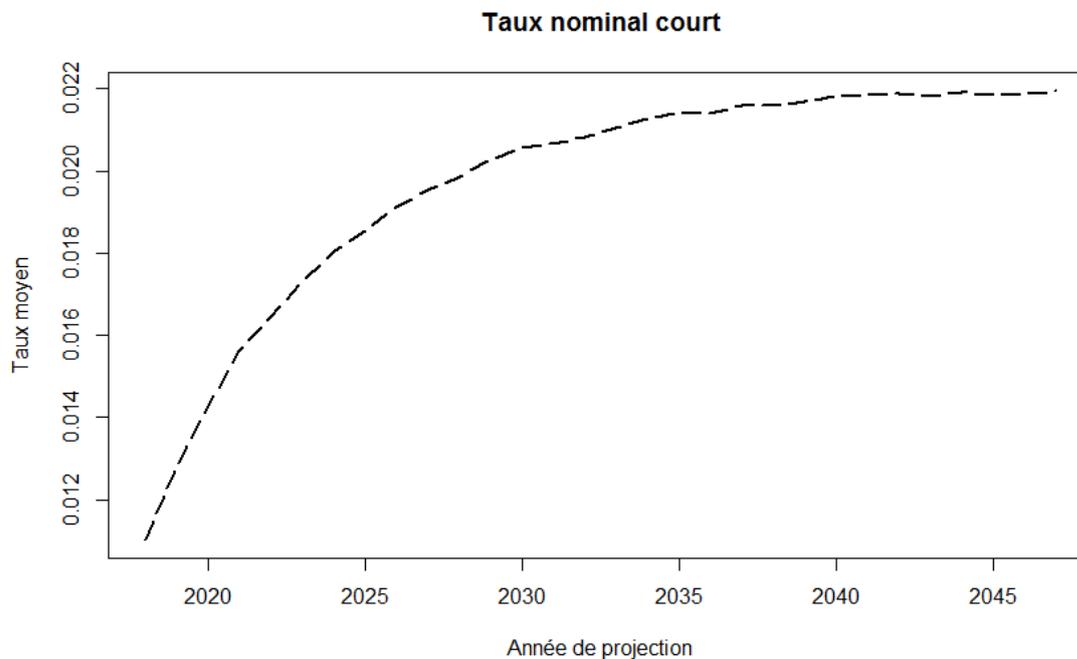
i.e. seule la moyenne de long terme est modifiée sous  $\mathbb{Q}$ .

Remarque : dans la pratique, il n'est pas rare de calibrer les dynamiques monde réel (sous  $\mathbb{P}$ ) à partir d'un historique et de calibrer les dynamiques risque-neutre (sous  $\mathbb{Q}$ ) de manière à retrouver les prix observés sur le marché. Les paramètres obtenus sont alors différents de ceux obtenus par application du théorème de Girsanov (et  $\kappa^{\mathbb{P}} \neq \kappa^{\mathbb{Q}}$ ). Pour comprendre pourquoi les deux méthodes donnent des résultats différents, il faut être conscient que tout modèle est une approximation (i.e. la théorie n'est pas vérifiée dans la réalité). Pour éviter le biais que cela engendre, les modèles sont souvent calibrés dans un but précis : il n'y a pas de « calibrage unique » (et c'est d'ailleurs ce qui donne du sens aux jugements d'expert). Sous  $\mathbb{P}$  le calibrage est réalisé dans un but prédictif alors que sous  $\mathbb{Q}$  il est destiné à permettre le pricing. Pour prendre en compte ces éléments des méthodes beaucoup plus complexes pourraient être envisagées pour déterminer les dynamiques risque neutre.

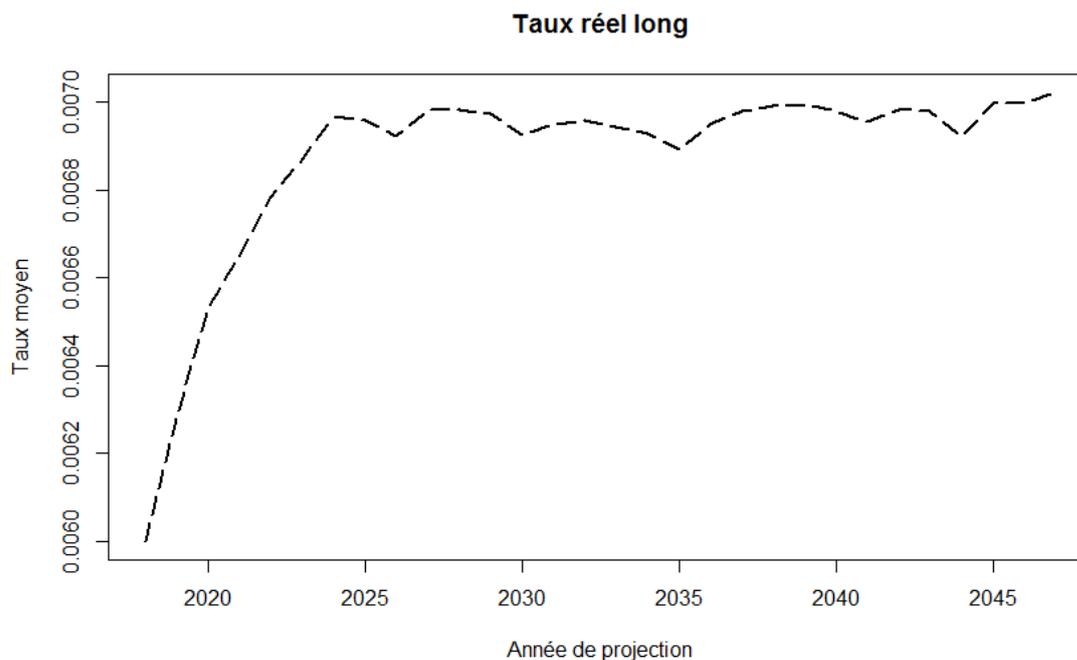
## Annexe B : moteur ALM – quelques résultats des projections

Nous donnons ci-dessous quelques graphes illustrant les scénarios extraits de *R*.

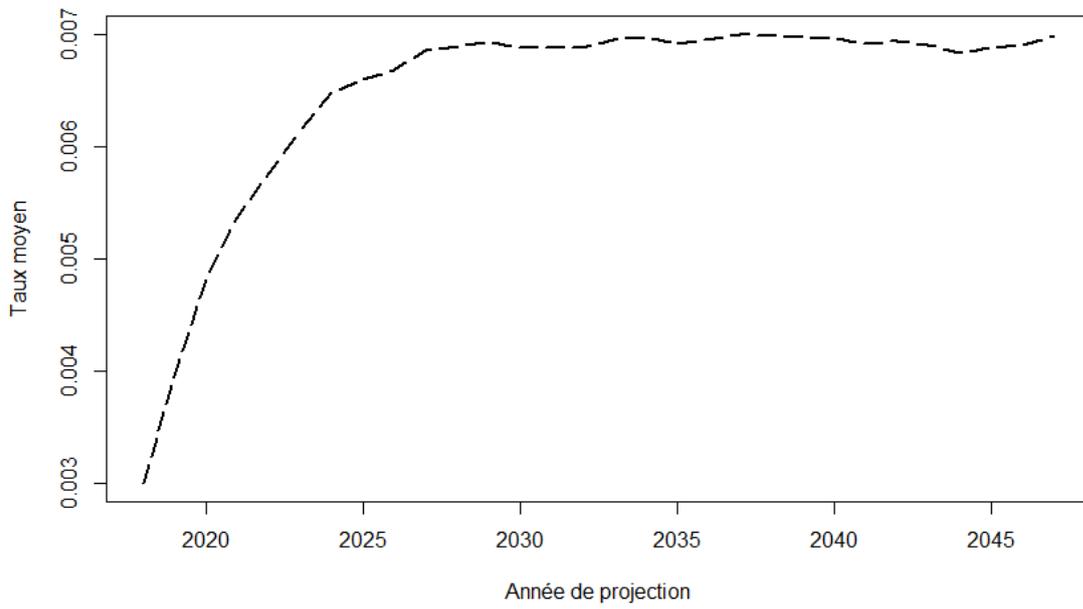
### Rendements et taux



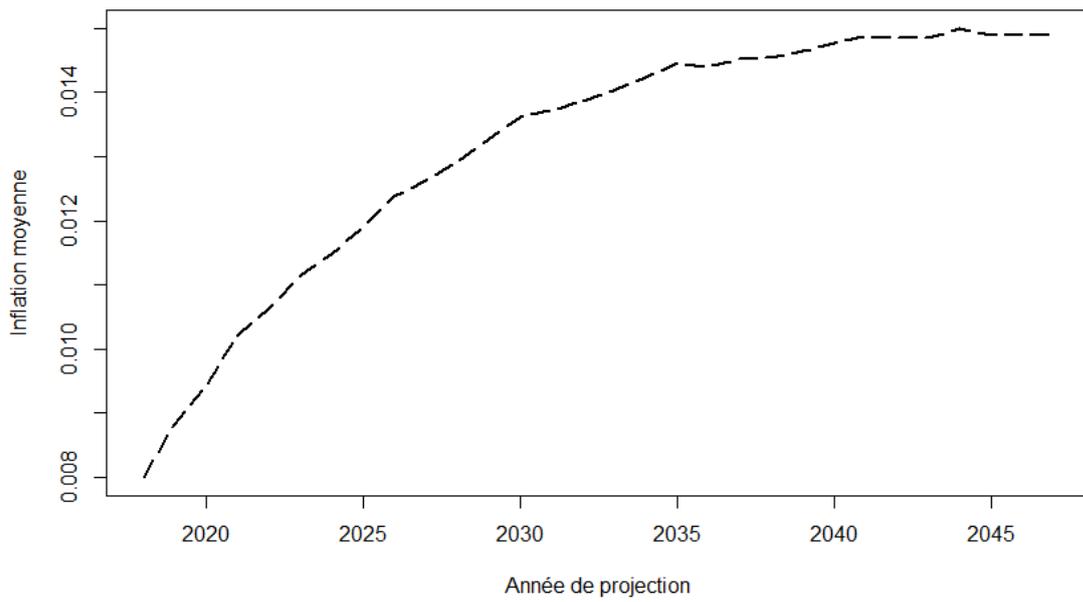
Ce graphe retranscrit bien la remontée progressive (mais très modérée) des taux, qui pourrait conduire à une politique de durée moyenne. La même tendance est observée sur les taux réels et l'inflation :



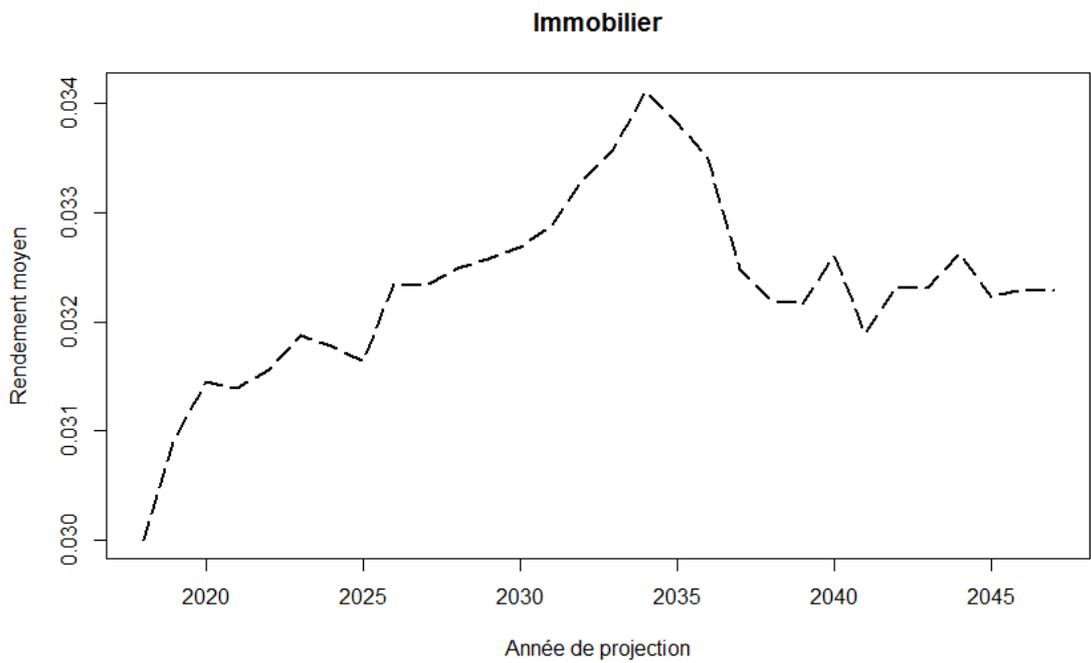
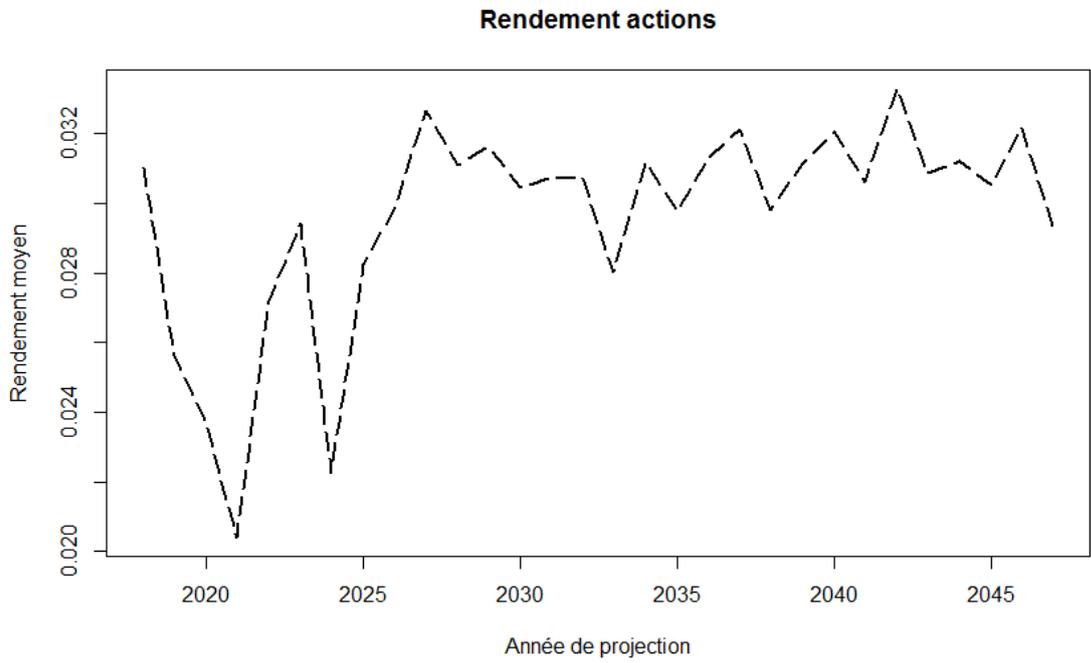
### Taux réel court



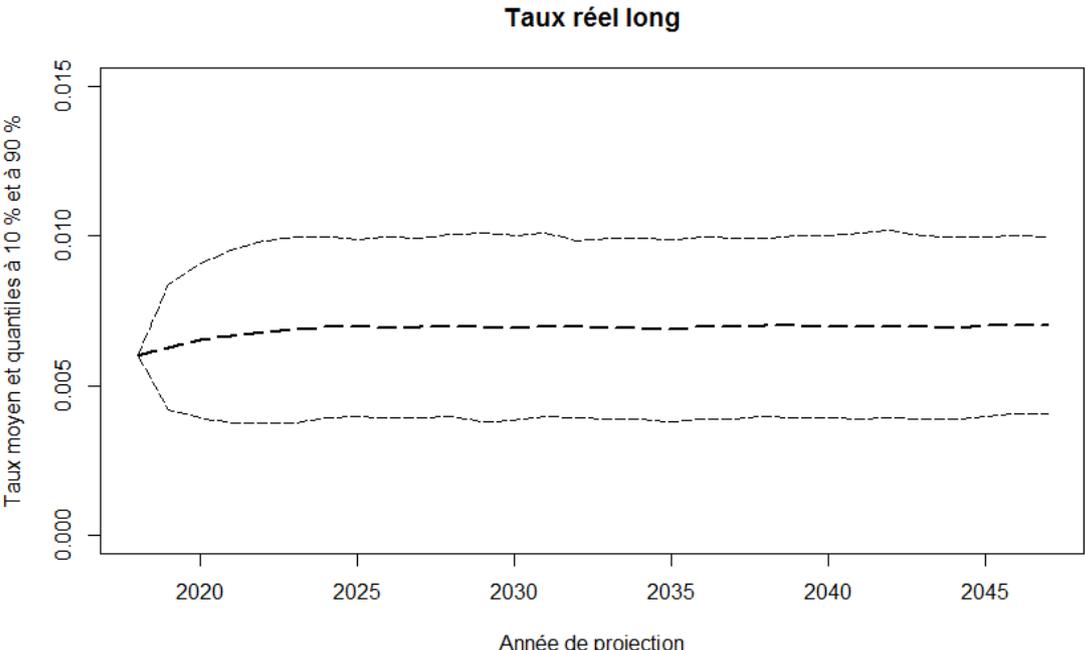
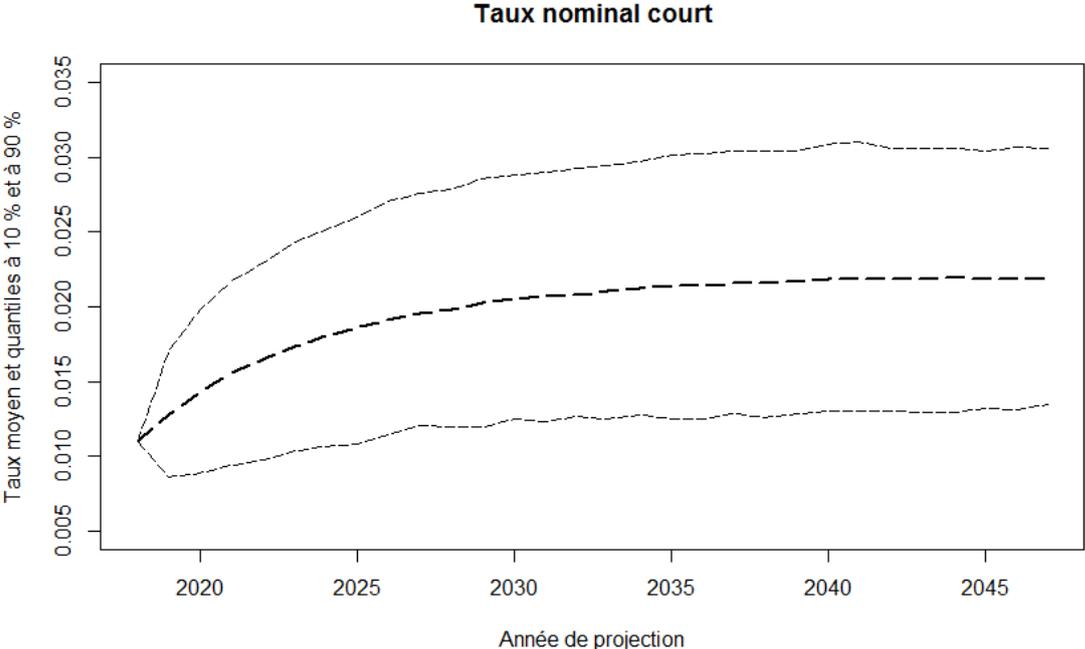
### Inflation



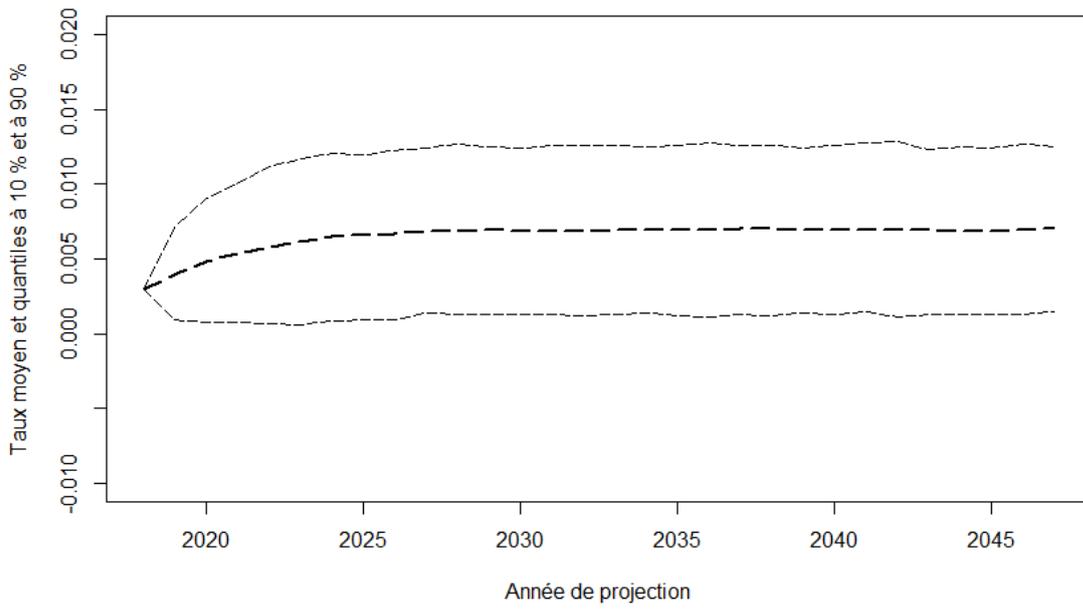
Les rendements des actions et de l'immobilier sont quant à eux beaucoup plus erratiques (mais plus importants) :



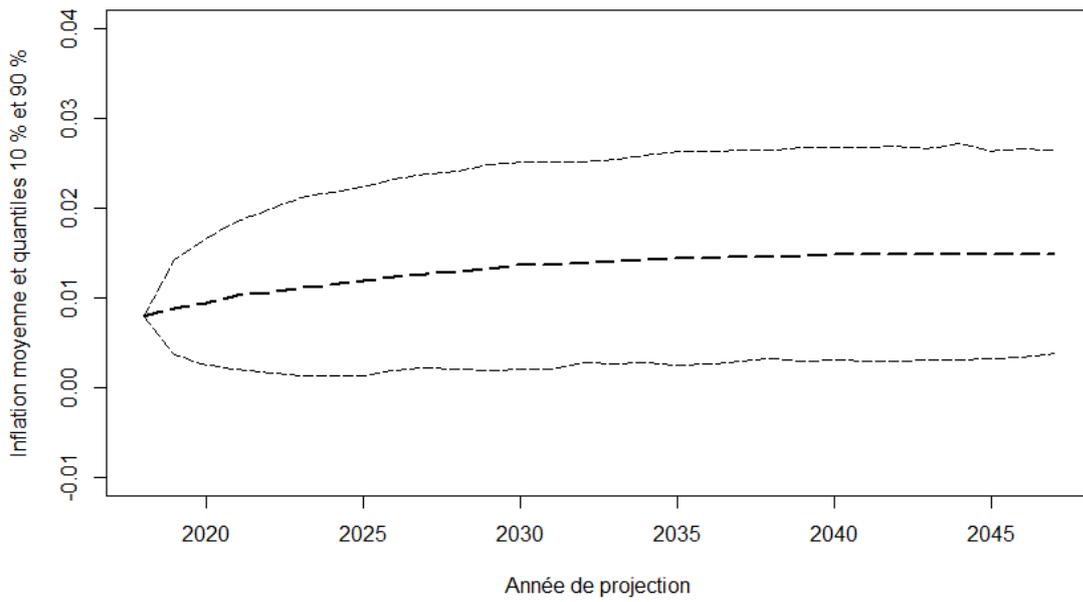
Observons maintenant ces tendances avec les quantiles à 10% et 90% des rendement annuels :



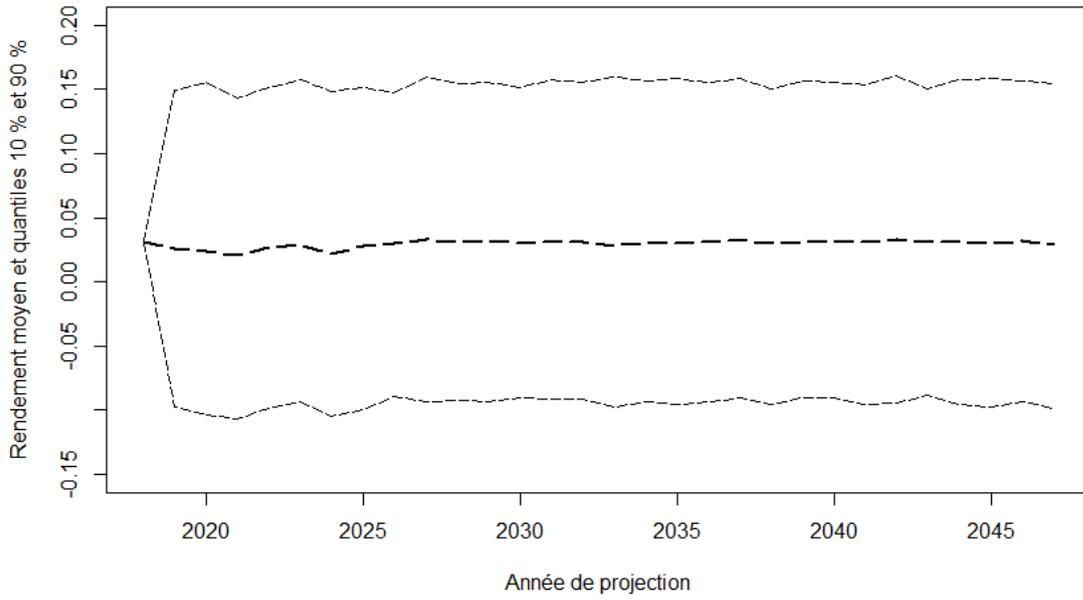
### Taux réel court



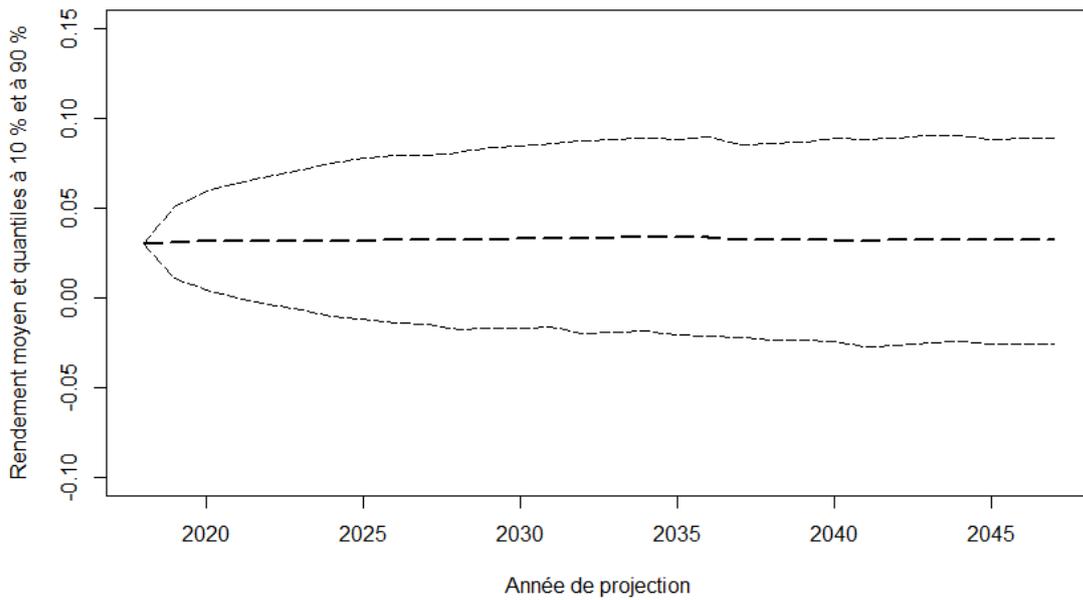
### Inflation



### Rendement actions



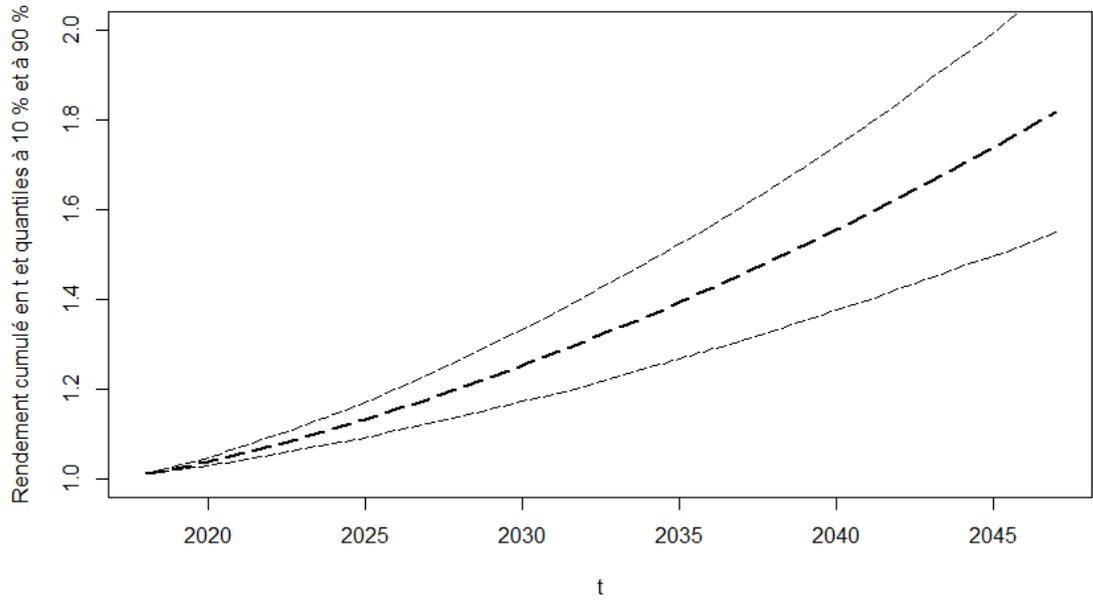
### Immobilier



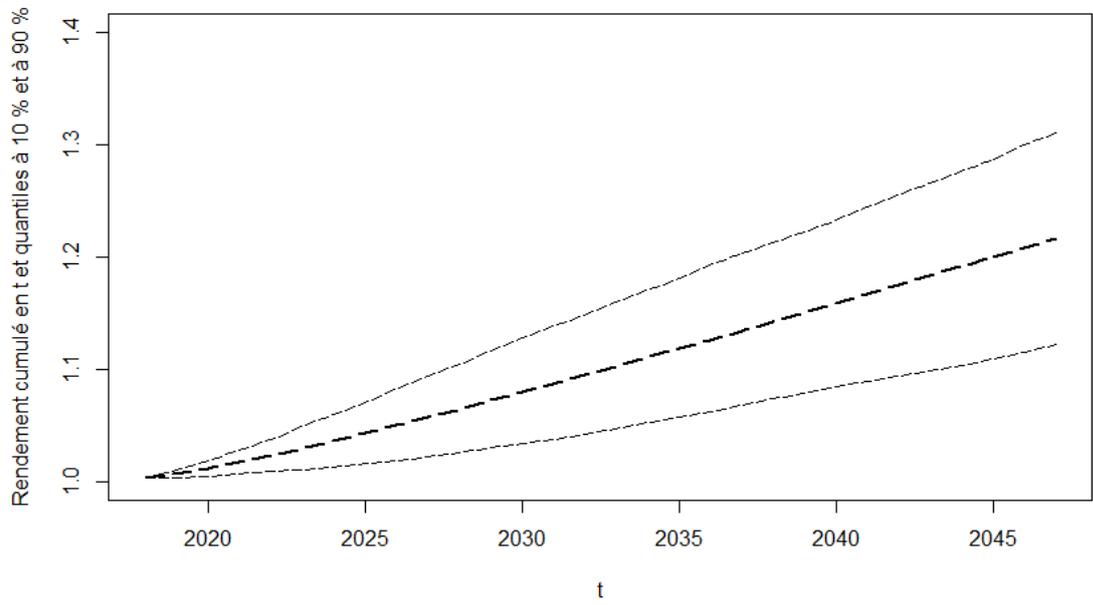
Ces résultats sont cohérents avec les modèles (relative symétrie des quantiles 10% et 90% autour de la moyenne).

Afin d'aller plus loin et de mettre en évidence que les investissements en immobilier et en actions sont plus risqués même sur le long terme, traçons les mêmes graphes pour les rendements cumulés (sur  $t$  années,  $t \leq T$ ) et leurs quantiles :

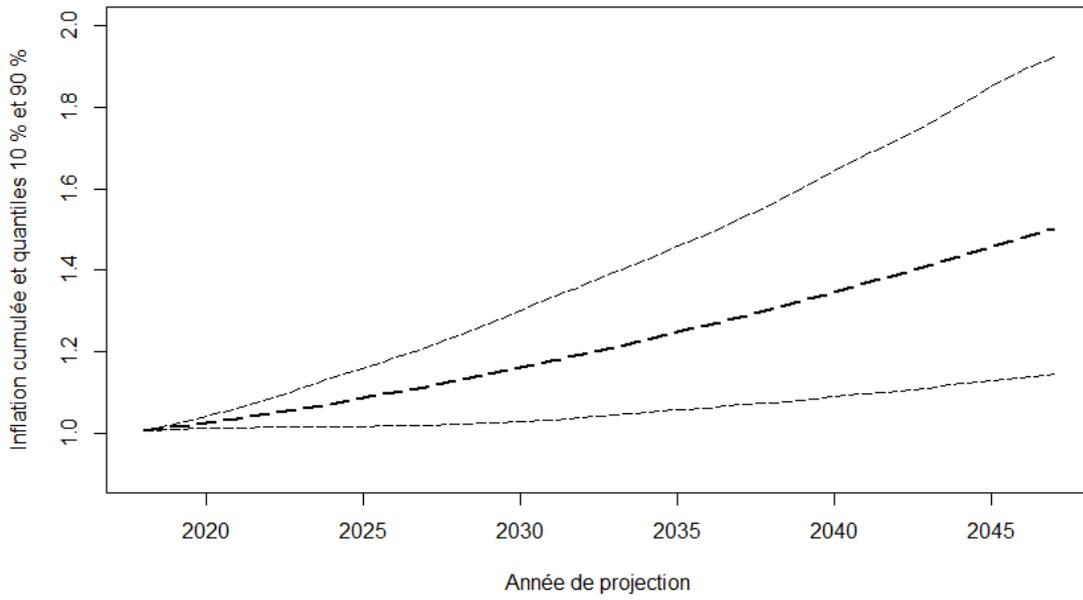
**Rendement nominal cumulé**



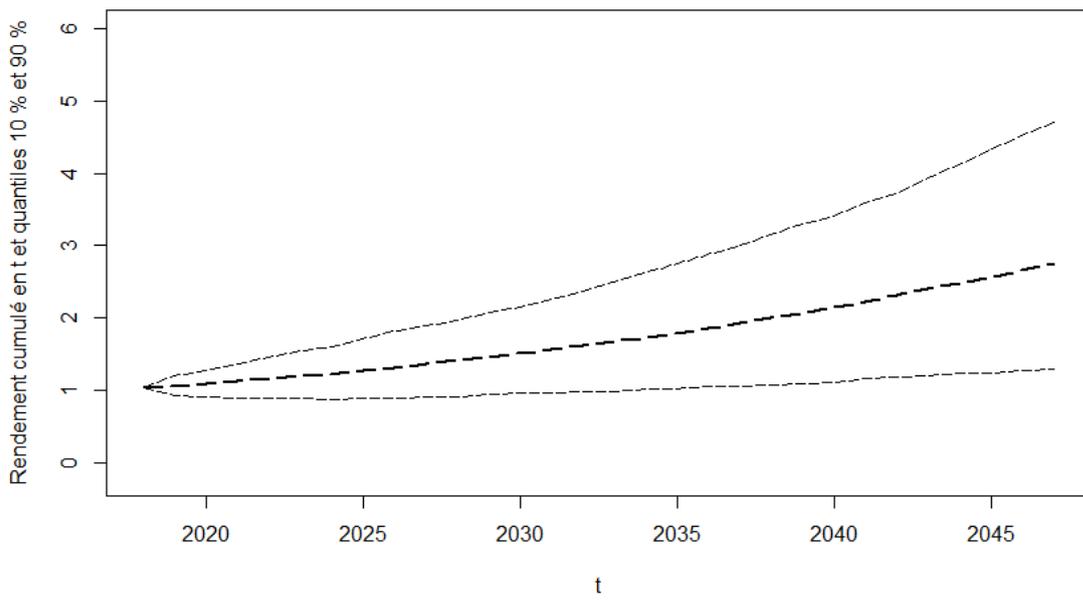
**Rendement reel cumulé**



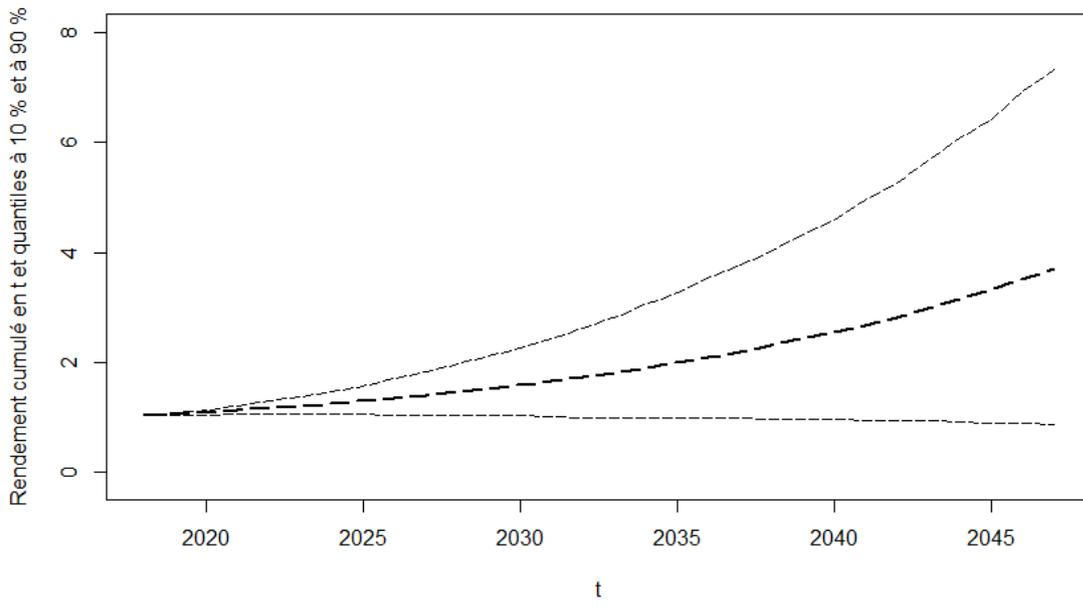
### Inflation cumulée



### Rendement cumulé des actions

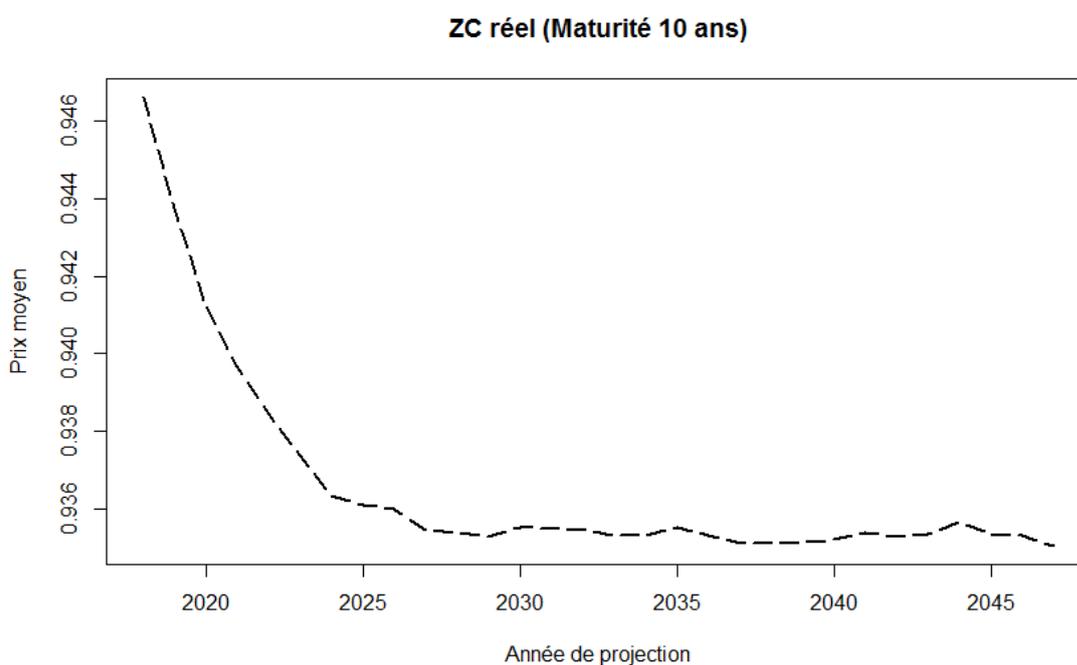
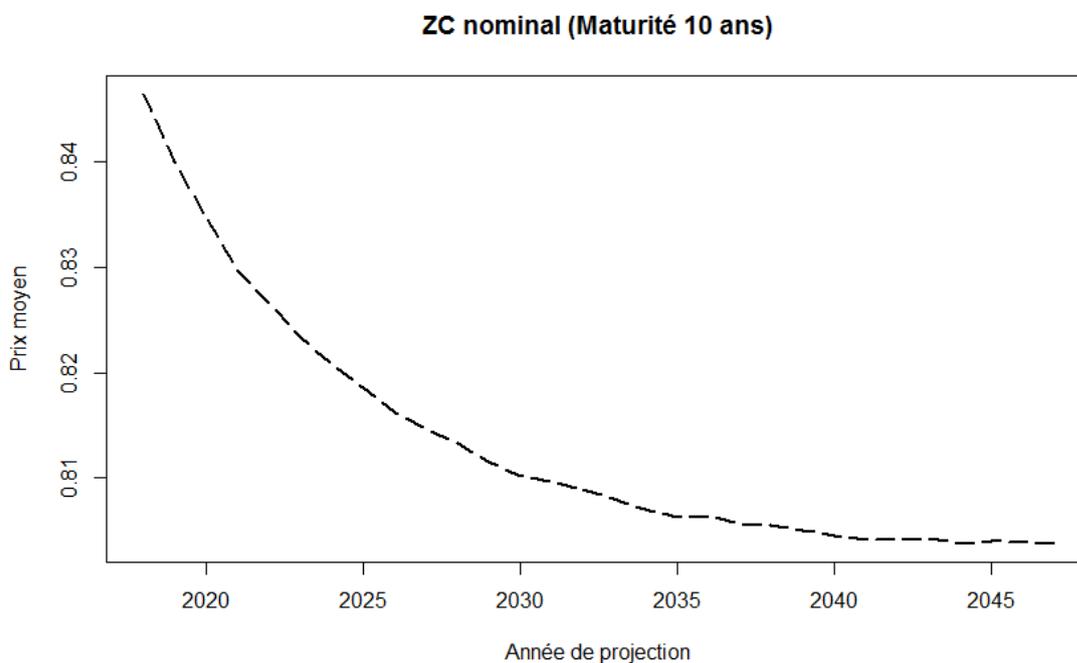


### Rendement cumulé de l'immobilier



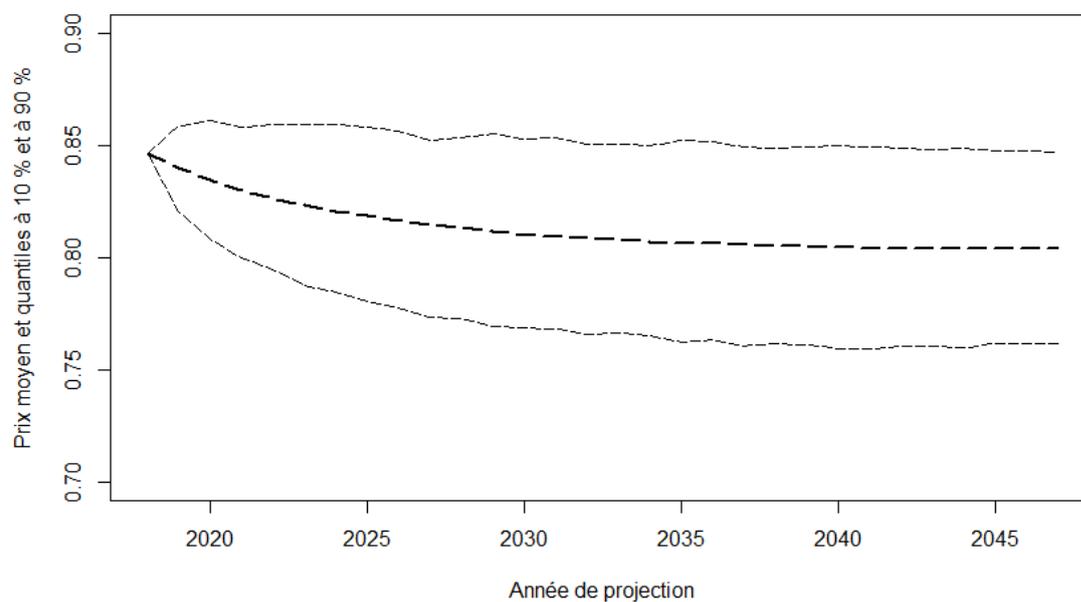
## Prix zéro-coupons

Visualisons à présent l'évolution avec le temps des prix zéro-coupons nominaux et réels (pour l'exemple nous avons choisi de tracer les prix pour les zéro-coupons de maturité 10) :

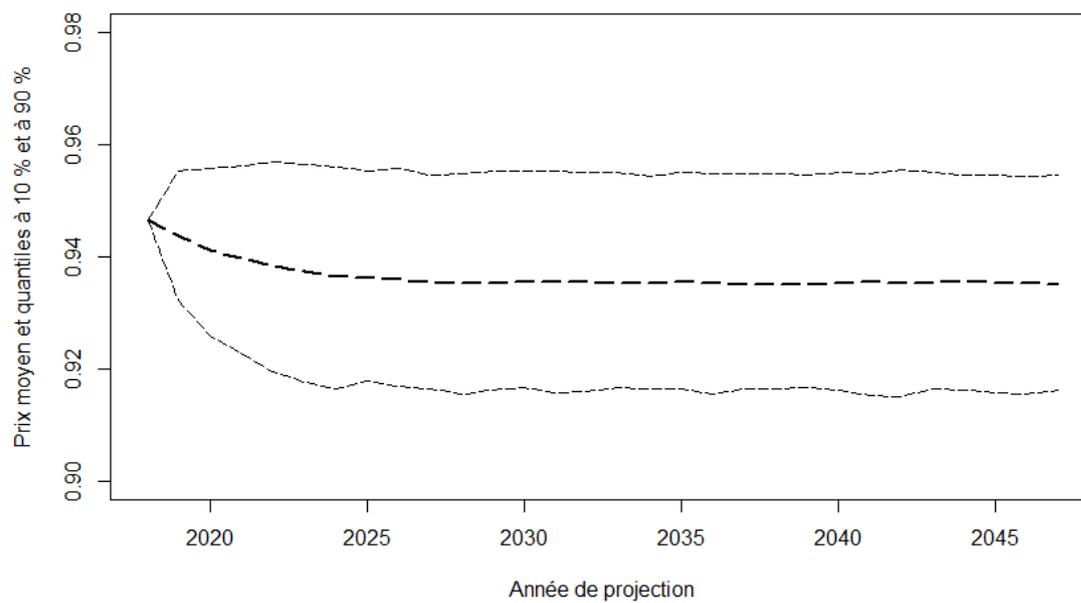


Et à nouveau avec les quantiles à 10% et 90% :

### ZC nominal (Maturité 10 ans)



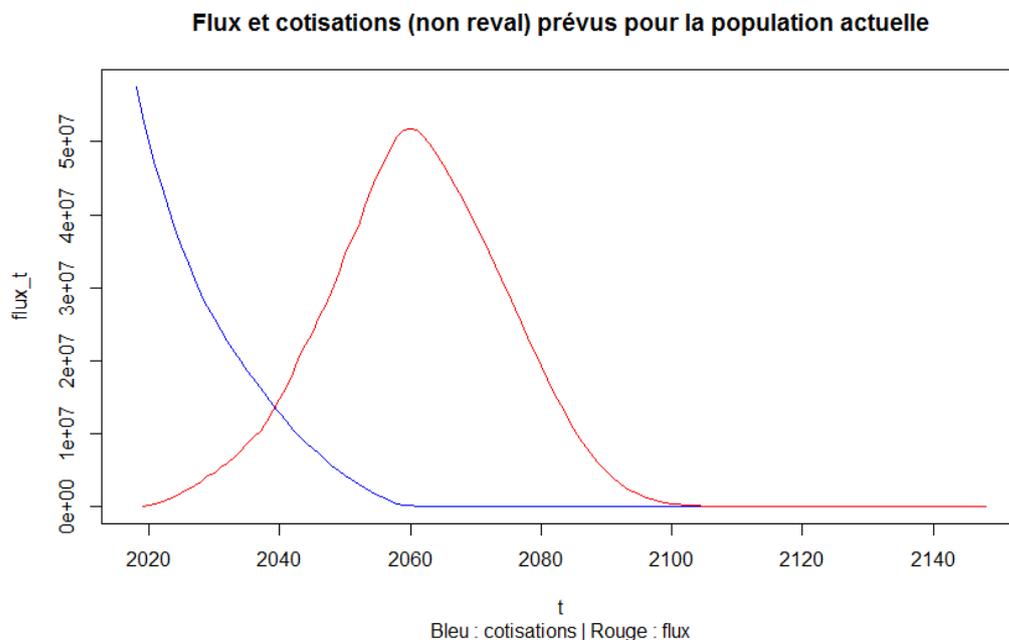
### ZC réel (Maturité 10 ans)



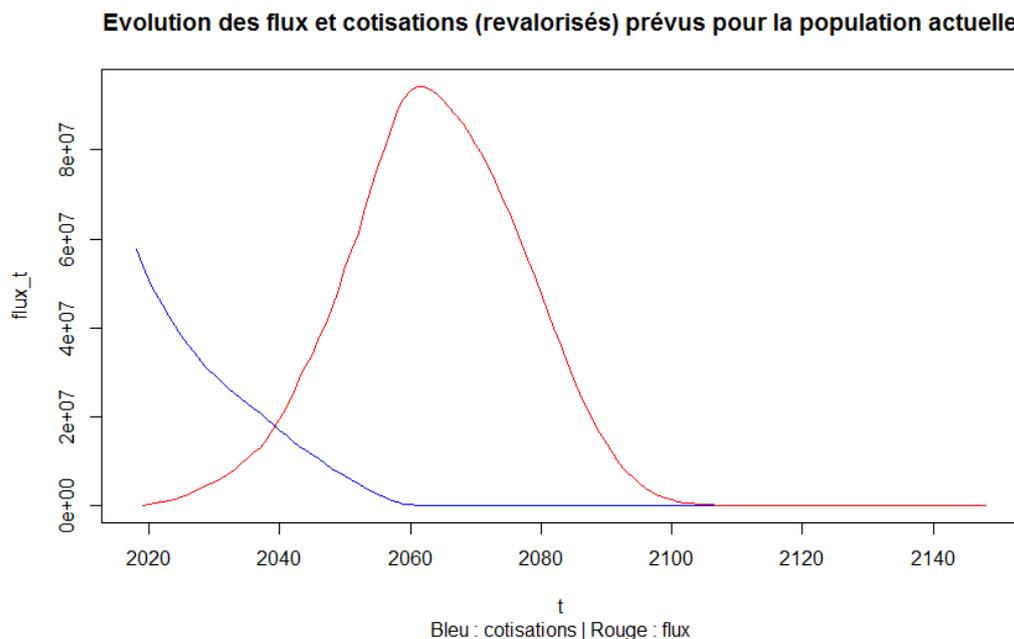
## Projections au passif

### Collaborateurs actuels de l'entreprise

Nous présentons d'abord les flux de prestations (rouge) et de cotisations (bleu) non-revalorisés par l'inflation et prévus par le modèle pour la population actuelle (i.e. les collaborateurs actuels de l'entreprise). Par hypothèse (voir II.1.5), ces flux sont les mêmes dans chaque scénario :



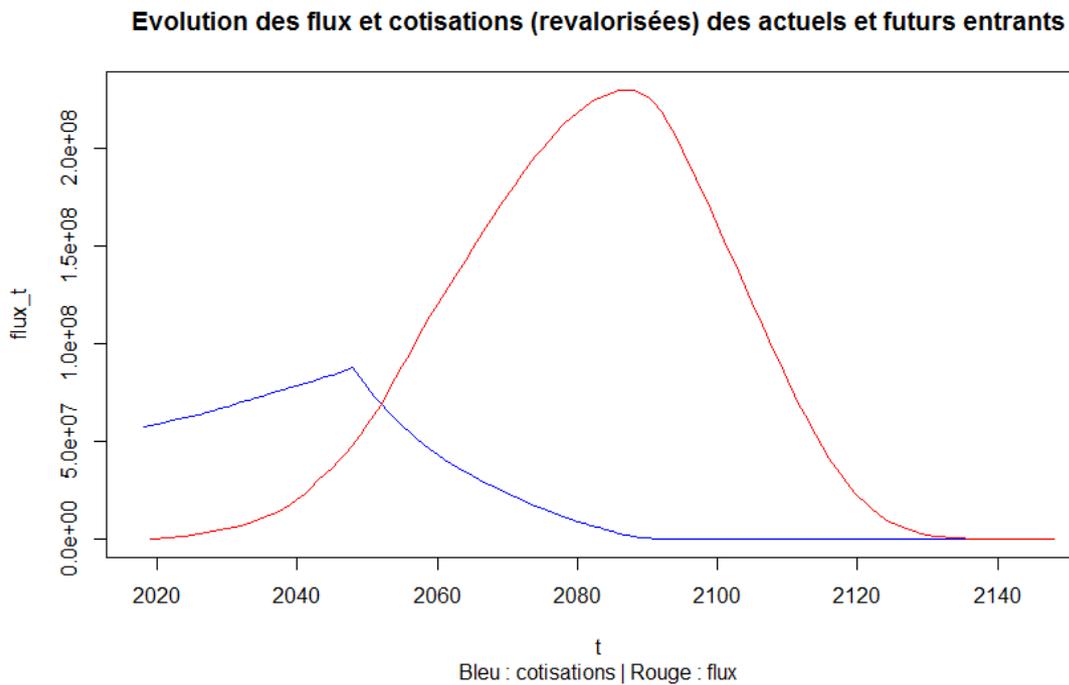
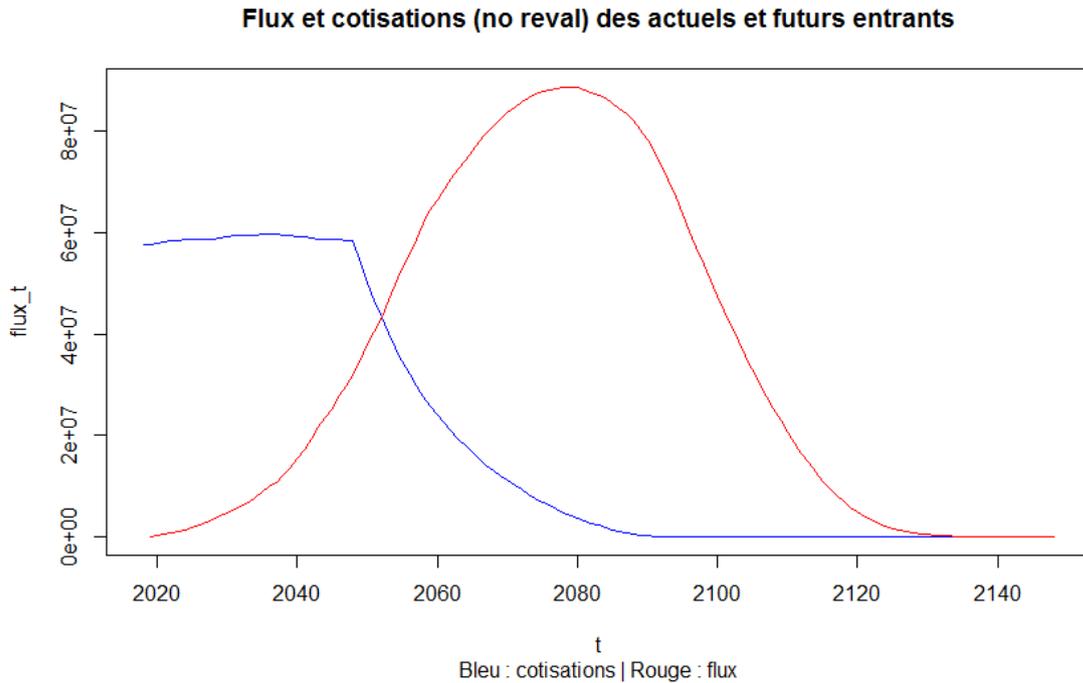
Observons comment les revalorisations par l'inflation impactent ces flux et cotisations (en les moyennant sur chaque scénario cette fois-ci) :



La comparaison avec l'ancien graphe illustre que le fonds est soumis au risque inflation car l'inflation impacte davantage les flux de prestations que de cotisations (qui ont lieu moins tard dans le temps).

## Collaborateurs actuels et futurs collaborateurs

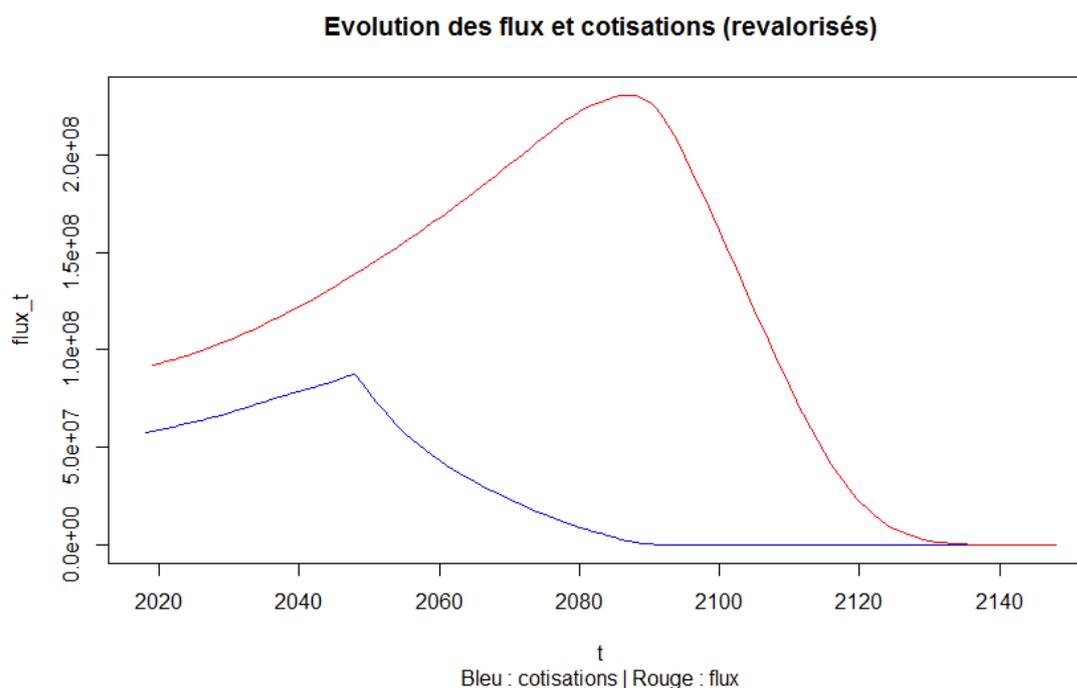
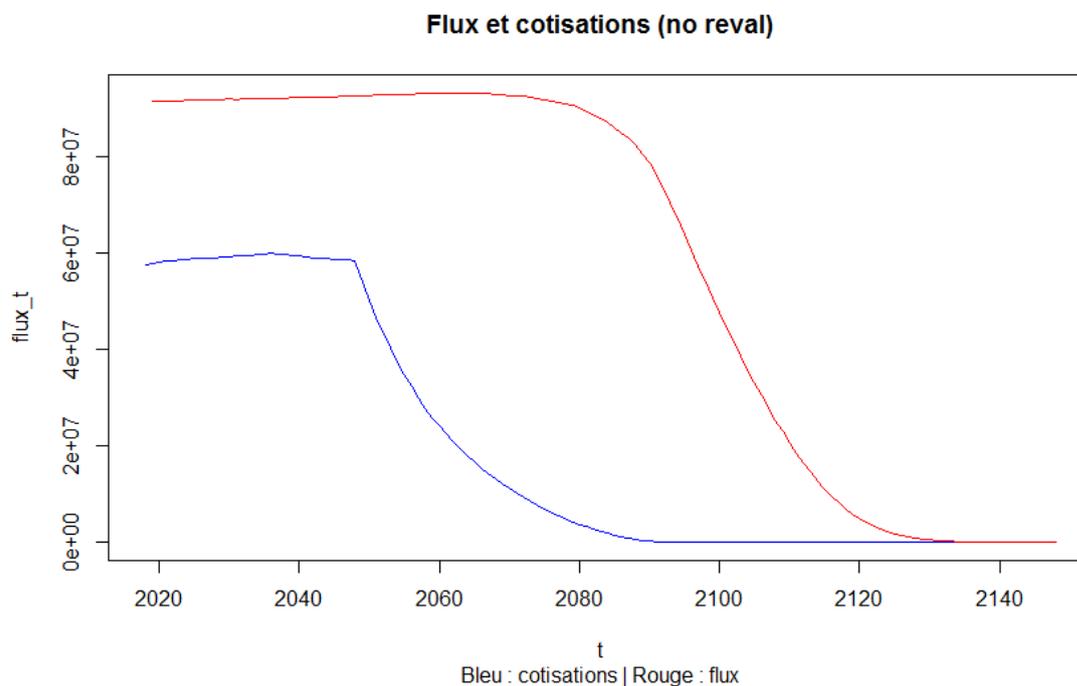
Nous proposons à présent d'ajouter l'impact des futurs entrants aux graphes précédents (les retraités et différés sont donc toujours exclus) :



Nous observons une relative stabilité des cotisations sur les 30 années de projection (elles augmentent principalement avec l'inflation), puis une décroissance après  $T$  (car après cette date nous ne projetons plus les nouveaux entrants et calculons uniquement les flux futurs jusqu'à extinction). Le pic des flux de prestations est quant à lui décalé environ 20 ans plus tard.

## Total du passif

Pour finir, ajoutons l'impact des retraités et différés :



Le fonds étant en activité depuis 80 ans, un « régime permanent » a quasiment déjà été atteint : les flux de prestations et les cotisations n'évoluent donc quasiment plus qu'avec l'inflation. L'insuffisance des cotisations est également mise en évidence : il convient de générer du rendement à l'aide des investissements pour pouvoir servir les retraites.

## Annexe C : uniformité de la méthode de génération

Démontrons l'uniformité de la méthode de génération proposée en III.4.3.

### Préliminaires

Nous adoptons les notations suivantes :

- $S(n) = \{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$  est le simplexe standard en dimension  $n$  ;
- $\mathcal{P}(n) = \{x \in S(n) \mid \forall i, a_i \leq x_i \leq b_i\}$  est la portion de simplexe dans laquelle nous cherchons à générer uniformément des allocations ;
- $\mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est la loi multi-dimensionnelle de Dirichlet de paramètres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ;
- $\mathcal{D}_0(n) = \mathcal{D}(1, \dots, 1)$  correspond au cas particulier où les  $n$  paramètres sont égaux à 1 ;
- $\mathcal{L}_0(n)$  est la loi  $\mathcal{D}_0(n)$  restreinte à  $\mathcal{P}(n)$  (i.e. « tronquée » par les  $a_i$  et  $b_i$ ).

Nous rappelons également que la loi de Dirichlet  $\mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est de support  $S(n) \cap ]0, 1[^n$  et a pour densité  $f$  avec :

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i - 1} \quad \text{où } B(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)}$$

### Réduction du problème

→ Il est possible de se restreindre au cas où  $\forall i, a_i \leq b_i$  et  $\sum_{i=1}^n a_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^n b_i$ . En effet si ces conditions ne sont pas vérifiées alors  $\mathcal{P}(n) = \emptyset$ .

→ Il est possible de se ramener au cas  $a = a^*$  et  $b = b^*$  avec :

$$\forall i, a_i^* = \max(a_i, b_i + 1 - \sum_{i=1}^n b_i) \quad \text{et} \quad b_i^* = \min(b_i, a_i + 1 - \sum_{i=1}^n a_i)$$

En effet  $\mathcal{P}(n) = \{x \in S(n) \mid \forall i, a_i \leq x_i \leq b_i\} = \{x \in S(n) \mid \forall i, a_i^* \leq x_i \leq b_i^*\} = \mathcal{P}^*(n)$ . Cette égalité correspond simplement à l'exclusion des cas « impossibles » : sachant que  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$  et que  $\forall j \neq i, a_j \leq x_j \leq b_j$ , il est clair que  $1 - \sum_{j \neq i} b_j \leq x_i = 1 - \sum_{j \neq i} x_j \leq 1 - \sum_{j \neq i} a_j$ .

Dans toute la suite nous nous restreignons au problème réduit où ces points sont vérifiés.

### Propriétés et méthodes de génération de la loi non-tronquée $\mathcal{D}_0(n)$

→ Générer aléatoirement et uniformément dans  $S(n)$  revient à tirer la loi  $\mathcal{D}_0(n)$ . De plus générer  $n - 1$  réalisations uniformes  $U_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $i \in [1, n - 1]$ , les trier selon :

$$V_0 = 0 \leq V_1 = U_{(1)} \leq \dots \leq V_{n-1} = U_{(n-1)} \leq 1 = V_n \quad \text{où } U_{(\cdot)} \text{ désigne la statistique d'ordre de } U$$

et poser  $X_i = V_i - V_{i-1}$  permet d'obtenir une réalisation  $X \sim \mathcal{D}_0(n)$ . La preuve est immédiate en combinant les deux résultats de Devroye [20] donnés en page 568 (*theorem 2.1*) et en page 593 (*definitions and properties 4.1*).

→ Générer  $n$  réalisations exponentielles  $E_i \sim \mathcal{E}(1)$ ,  $i \in [1, n]$  et poser  $X_i = E_i / (\sum_i E_i)$  produit un tirage aléatoire  $X \sim \mathcal{D}_0(n)$ . Ce résultat est une conséquence du *theorem 4.1* en page 594 de Devroye [20] où l'on remarque que la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma.

## Génération dans $\mathcal{P}(n)$

Les deux résultats précédents fournissent deux méthodes simples pour générer uniformément dans  $S(n)$ . Une méthode de génération uniforme dans  $\mathcal{P}(n)$  pourrait donc être de générer dans  $S(n)$  et de ne conserver le tirage que s'il est également dans  $\mathcal{P}(n)$ . Malheureusement cela peut s'avérer relativement long pour certaines valeurs de  $a_i$  et  $b_i$ . A la place nous exploitons une propriété supplémentaire de  $\mathcal{D}_0(n)$  :

→ Si  $X \sim \mathcal{D}_0(n)$  alors la loi marginale de chaque  $X_i$  est la loi beta  $\beta(1, n-1)$ . Il s'agit d'une conséquence immédiate du lien classique entre les lois beta et gamma, qui est rappelée par le *theorem 4.2* en page 595 de Devroye [20].

Ce dernier résultat est intéressant car il permet également de déterminer des lois conditionnelles. En effet si  $2 \leq k < n$  alors les deux assertions suivantes sont clairement équivalentes :

- (i)  $(x_1, \dots, x_n) \in S(n)$  et  $\forall i < k, x_i = y_i$ .
- (ii)  $\forall i < k, x_i = y_i$  et  $(\frac{x_k}{D}, \dots, \frac{x_n}{D}) \in S(n-k+1)$  où  $D = \frac{1}{1 - y_1 - \dots - y_{k-1}}$ .

Ainsi si  $X \sim \mathcal{D}_0(n)$  et  $2 \leq k < n$  alors par application du résultat de Devroye la loi conditionnelle de  $\frac{X_k}{1 - X_1 - \dots - X_{k-1}}$  sachant  $X_1, \dots, X_{k-1}$  est la loi beta  $\beta(1, n-k)$ . Par ailleurs (pour  $k = n$ ) la loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $X_1, \dots, X_{n-1}$  est clairement la loi constante  $1 - \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ .

Remarquons finalement que si  $X \sim \mathcal{L}_0(n)$  alors la loi conditionnelle précédente devient la loi beta tronquée par  $a_k$  et  $b_k$  (supposés égaux à  $a_k^*$  et  $b_k^*$ ). Pour achever la démonstration il suffit alors de rappeler l'identité vérifiée par la densité  $g$  de  $\mathcal{L}_0(n)$  et les lois marginales  $g_i$  :

$$g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2|x_1)\dots g_n(x_n|x_1, \dots, x_{n-1})$$