Institut de Statistique de l'Université Pierre et Marie Curie

Mémoire présenté le : 27/02/2013

pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Malheia SALEEM

Titre: Allocation d'actifs pour des contrats obsèques

Confidentialité : ■ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présents du jury de l'Institut des Actuaires signature

Membres présents du jury de la filière

Jean Marie NESSI
Florence PICARD
Olivier LOPEZ
Gérard CROSET

Secrétariat

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : AXA France

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Marie MAEDLER

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

ISUP, 4 place Jussieu 75252, Paris Cedex 05

Résumé

En raison du cycle inversé de production, l'assureur doit toujours être en mesure de faire face à ses engagements envers les assurés. Il doit construire son portefeuille d'actifs de manière à prendre en compte les différents flux au passif tout en maximisant le rendement.

La gestion actif-passif, permet de construire une structure des placements prenant en compte le passif de l'assureur. L'objectif d'une étude ALM est de réaliser un adossement actif-passif pour limiter les risques de marché contingents au règlement des prestations en réalisant une concordance entre les échéanciers au passif et à l'actif. Une telle étude doit prendre en compte les différentes contraintes concernant l'actif et le passif, imposées par les directives Solvabilité 1 et 2. A l'actif, il est imposé à l'assureur de n'investir que dans des placements réglementés (valeurs mobilières et titres assimilés ; actifs immobiliers ; prêts et dépôts). Au passif, les assureurs doivent détenir des fonds propres supérieurs à un niveau minimum appelé «Marge de Solvabilité » pour éviter la ruine.

La gestion actif-passif nécessite une étude approfondie des contrats modélisés et de leur structure au passif. Le produit obsèques a pour objet de garantir le versement d'un capital en cas de décès de l'assuré. Les cashs-flows sont modélisés et projetés sur 60 ans. A l'actif, des scénarios stochastiques sont générés en « Real World » pour divers actifs (actions, obligations, immobilier).

L'objet de ce mémoire est de trouver l'allocation optimale d'actifs. Pour ce faire, plusieurs méthodes sont présentées dans ce mémoire. La première méthode consiste à sélectionner un portefeuille obligataire dont les flux futurs permettront de faire face aux engagements de l'assureur pour coordonner ainsi les flux de l'actif à ceux du passif. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité. Mais l'inconvénient est que l'actif est composé uniquement d'obligations, ce qui donne un rendement faible. La deuxième méthode est basée sur le calcul de la probabilité de ruine sur le long terme. Cette méthode est très sensible à la volatilité de l'actif risqué. La troisième méthode maximise « les Fonds Propres Economiques », définis par F. Planchet et P. Thérond comme la différence entre la valeur de l'actif à l'instant initial et la valeur probable des flux futurs actualisés au taux de rendement du portefeuille financier. Cette méthode est également très sensible à la volatilité de l'actif risqué mais présente un bon adossement entre les actifs et les passifs. La quatrième et dernière méthode permet d'établir le lien entre l'allocation d'actifs et la marge de solvabilité calculée dans le cadre Solvabilité 2.

Quelle que soit la méthode utilisée, chercher l'allocation optimale revient à résoudre un problème d'optimisation. Dans les méthodes proposées précédemment, la solution optimale est obtenue parmi un ensemble d'allocation choisi préalablement de façon arbitraire et testé ensuite avec les différentes méthodes. Les solutions optimales obtenues sont donc des solutions locales et non globales. Il est en fait impossible de trouver la solution optimale globale car l'espace de recherche ici est très grand. Une méthode permet d'approcher la solution globale: ce sont les algorithmes génétiques. Leur application au problème d'optimisation posée avec la méthode de « Maximisation des Fonds Propres Economiques » permet d'approcher la solution optimale globale.

Ce mémoire présente une première application théorique des différentes méthodes avec des hypothèses simplificatrices et propose ainsi des pistes intéressantes pour un modèle plus complexe.

Mots clés : obsèques, gestion actif/passif, allocation d'actifs, simulation, probabilité de ruine, fonds propres économiques, algorithmes génétiques.

Abstract

The insurer must always be able to meet his obligations to policyholders. He has to build his asset portfolio in order to take into account the liabilities while maximizing yield.

Asset Liability Management's aim is to find an allocation by making a match between liabilities and assets. Such a study must take into account the various constraints on the assets and liabilities imposed by Solvency 1 and 2. On the asset side, it is imposed on the insurer to invest only in some specific classes of assets (securities, property, loans and deposits). On the liabilities side, insurers must hold capital above a minimum level imposed by regulation, called "solvency margin", to avoid ruin.

ALM requires a thorough study of liability's structure. The funeral insurance we study here ensures the payment of lump sum in case of death of the insured. This capital is used to finance the funeral. The cash-flows are modeled and projected over 60 years. On the assets side, stochastic scenarios in "Real World" are generated for various assets.

The purpose of this study is to find the optimal Asset Allocation. To do this, several methods are presented in this paper. The first one is to select a portfolio of bonds whose cash flows will coordinate those of liabilities. The advantage of this method lies in its simplicity. But the drawback is that assets are only made of bonds, which gives a low yield. The second method is based on the calculation of the probability of ruin over the long term. This method is very sensitive to the volatility of the risky asset. The third method called "Maximizing Economic Equity " was introduced by F. Planchet and P. Thérond. This method is also very sensitive to the volatility of the risky asset, but gives a good matching between assets and liabilities. The last method establishes the link between Asset Allocation and Solvency Margin calculated under Solvency 2.

Whatever the method, seeking the optimal Asset Allocation is equivalent to solve an optimization problem. In previous methods, the optimal solution is obtained from a set of preselected allocations and then tested with these methods. Solutions obtained are local solutions and non-global. It is not possible to find the global optimal solution because the search space is very large here. Several methods could be used to approach the global optimal solution. Genetic Algorithms are one of them.We apply these algorithms to find the global solution with "Maximizing Economic Equity" method.

This thesis presents the first theoretical application of different methods with simplified assumptions and thus offers interesting ideas for more complex models.

Key words: ALM, asset allocation, simulation, probability of ruin, Economic Equity, genetic algorithms.

Note de synthèse

L'allocation d'actifs définit la façon dont les actifs sont répartis entre les différentes classes dans le but d'optimiser le couple rendement/risque d'un portefeuille. En assurance vie, déterminer une allocation d'actifs dans un cadre actif seul constitue une approche trop simpliste. Les investisseurs doivent prendre en compte les flux du passif afin que l'assureur soit en mesure d'honorer ses engagements envers les assurés. La gestion actif-passif permet de construire une structure des placements à l'actif dans le but de réaliser un adossement actif-passif.

Ce mémoire a pour objet la détermination de l'allocation optimale du portefeuille d'actifs pour des contrats obsèques. Pour ce faire, une étude approfondie du modèle actif-passif est effectuée. Plusieurs stratégies de gestion actif-passif sont ensuite traitées dans le but de déterminer l'allocation optimale. Toutes les stratégies étudiées sont statiques, c'est-à-dire les allocations restent constantes dans le temps.

Modèle actif-passif

Passif

Le produit étudié dans le cadre de ce mémoire est un produit obsèques. Il a pour objet de garantir le versement d'un capital en cas de décès de l'assuré. Ce capital est destiné au financement des obsèques de l'assuré. Trois types de cotisations sont prévus à savoir prime viagère, prime périodique et prime unique.

Le compte de résultat de l'assureur pour ces contrats est projeté sur 60 ans. Les grandes catégories d'hypothèses prises en compte sont les suivantes : hypothèses de tarification (table utilisée, taux technique, chargements de gestion et commerciaux…), hypothèses de dépenses (frais et commissions), hypothèses de rachat, hypothèses de réduction, hypothèses de participation aux bénéfices.

Actif

L'allocation d'actifs nécessite une évaluation de l'ensemble des actifs du portefeuille. Ici, le portefeuille d'actifs est composé de quatre indices boursiers (Nikkei, Eurostoxx, S&P 500 et FTSE), de l'immobilier et de quarante obligations zéro-coupon de maturité 1 à 40 ans.

4000 scénarios stochastiques sont générés en « Real World » pour chacun de ces actifs. En effet, les scénarios Risque Neutre ne permettent pas de faire des études ALM puisque toutes les stratégies d'allocation donnent le même rendement. Les méthodes utilisées pour générer ces scénarios sont les suivantes :

- le modèle de Karasinski à 2 facteurs est utilisé pour générer les scénarii de taux.
- Le modèle de Black & Scholes permet de générer les rendements des scénarios des indices boursiers et de l'immobilier.

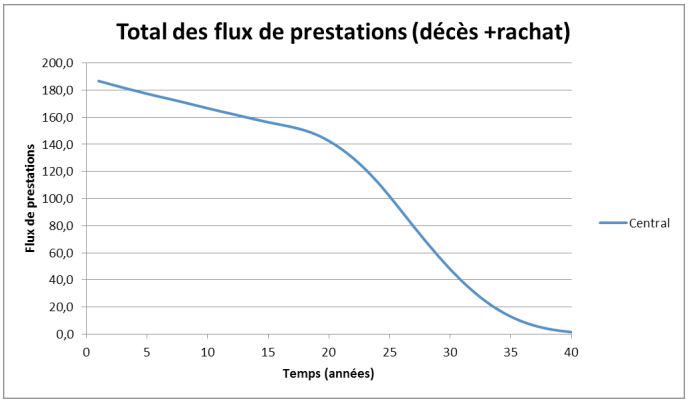
Les différentes méthodes

Nous allons présenter quatre méthodes permettant de déterminer l'allocation d'actifs pour les contrats obsèques. Sauf pour « Maturity Matching » où l'étude est effectuée avec les 40 obligations zéro-coupon, on regroupera les actifs par classes pour les autres méthodes. Ainsi, action désigne la classe formée de l'ensemble des quatre indices (Nikkei, Eurostroxx, S&P 500 et FTSE). La classe obligation désigne l'obligation de duration 10 ans.

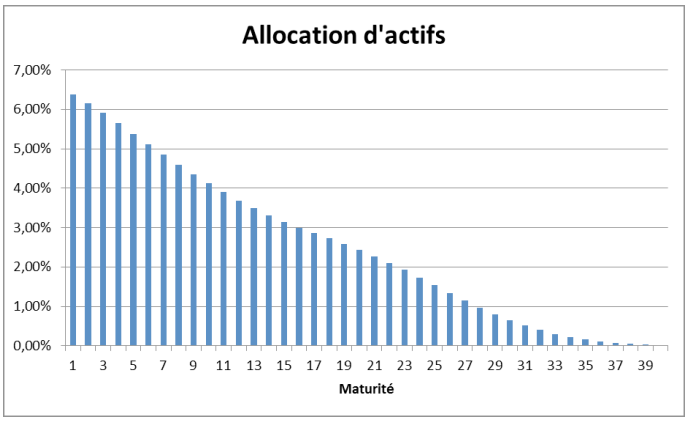
Maturity Matching

On considère que l'actif de l'assureur est uniquement composé d'obligations de maturité 1 à 40 ans. « Maturity Matchning » consiste à sélectionner un portefeuille obligataire dont les flux futurs permettront de faire face aux engagements de l'assureur pour coordonner les flux de l'actif à ceux du passif.

Nous supposons que les flux de prestations sont déterministes et que les projections sont effectuées sur 40 ans.



L'actualisation des flux avec la courbe des taux swaps au 31/12/2011 permet d'obtenir l'allocation suivante :



Grâce au Maturity Matching, les besoins de l'assureur durant une année t sont balancés par les entrées de flux générées par les actifs dans cette même année. Les flux futurs à l'actif sont ainsi sécurisés. Or, l'évolution prévisionnelle des engagements n'est jamais certaine puisque la mortalité effective peut s'écarter de la mortalité prévue par les tables réglementaires. Ce qui rend la méthode de Maturity Matchning aléatoire. Par ailleurs, cette méthode n'est pas optimale du point de vue du

rendement car les obligations donnent une performance moindre que les actions et l'immobilier. Enfin, l'effet de diversification n'est pas pris en compte.

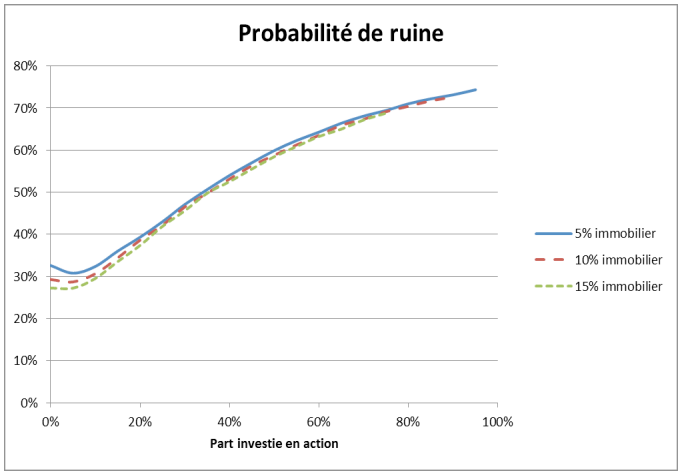
Probabilité de ruine

L'assureur doit à tout moment être en mesure de faire face à ses engagements envers ses assurés c'est-à-dire la différence « actif-passif » doit être positive à tout instant. On note: $E_t = Actif_t - Passif_t$. Il y a ruine de l'assureur lorsque $E_t < 0$. La méthode « Probabilité de ruine » proposée par F. Planchet et P.Thérond consiste à minimiser l'estimateur suivant de la probabilité de ruine :

$$1 - \frac{1}{4000} \sum_{n=1}^{4000} \prod_{k \geq 1} 1_{[0;\infty[}\left(e_k^n(j)\right)$$

4000 désigne le nombre trajectoires simulés d'actifs
j l'allocation d'actif
$e_k^n(j)$ est la réalisation de la variable aléatoire E_t à l'instant t, pour la trajectoire n

Nous nous intéressons à la probabilité de ruine de l'assureur sur un horizon de 60 ans. Les résultats obtenus sont les suivants :



La probabilité de ruine croit avec la part investie en action et plus la part investie en action augmente, moins la probabilité de ruine est sensible à la part investie en immobilier. Cette méthode est très sensible à la volatilité de l'actif risqué (action).

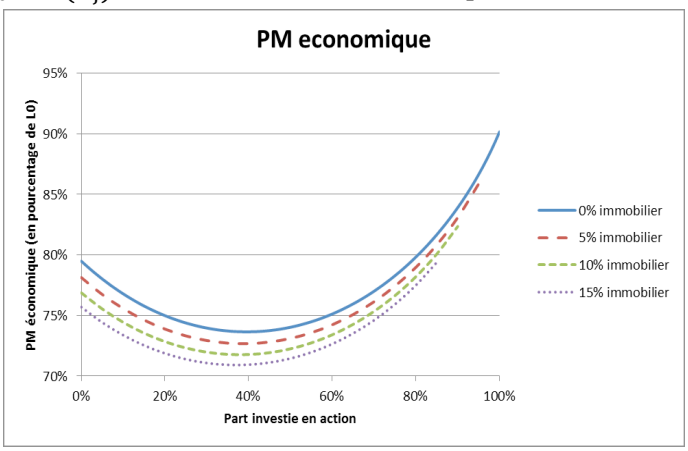
Fonds propres économiques

On note :

$$\Delta_j = \sum_{t=1}^{60} \frac{F_t}{\prod_{s=1}^{t}\left(1 + \tilde{R}_s^j\right)}$$

Planchet F., Thérond P. [2004b] définit $E(\Delta_j)$ comme la provision mathématique économique c'est-à-dire la valeur probable des flux futurs actualisés au taux de rendement du

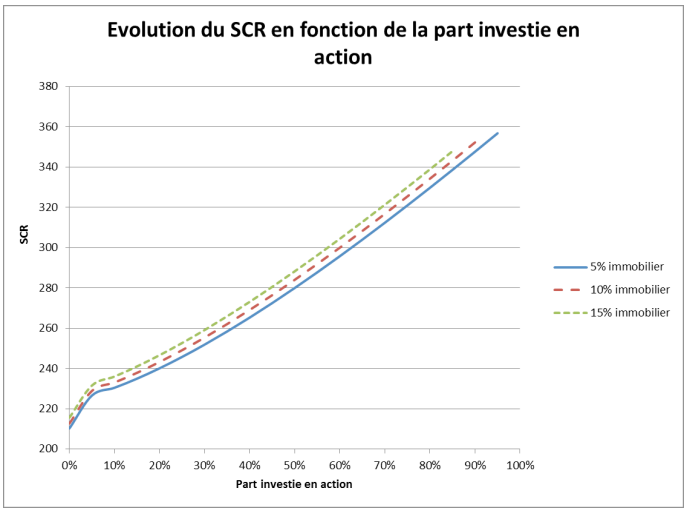
portefeuille financier. Minimiser $E(\Delta_j)$ revient également à maximiser les fonds propres économiques $A_0 - E(\Delta_j) = E_0 + L_0 - E(\Delta_j)$. La méthode de Monte Carlo permet d'obtenir les résultats suivants :



Plus la part investie en immobilier augmente dans le portefeuille d'actifs, plus la provision mathématique devient minimale. L'allocation optimale obtenue avec le critère de maximisation des fonds propres est très sensible à la volatilité des actifs. Elle présente cependant une bonne adéquation des flux d'actif et de passif.

SCR

L'évolution du SCR en fonction de la part investie en action est présentée dans la figure ci-dessous :



La valeur du SCR est d'autant plus élevée que la part investie en action est importante. Cette augmentation est quasi linéaire. Par ailleurs, le SCR augmente également en fonction de la part d'immobilier dans le portefeuille d'actifs. Comme le critère de maximisation des fonds propres, le SCR est très sensible à la variation de la part investie en action et en immobilier.

Les algorithmes génétiques

Les différentes méthodes que nous venons de voir permettent de déterminer l'allocation stratégique optimale. Plus précisément, toutes les méthodes décrites consistent à chercher une solution optimale dans un espace de recherche choisi au préalable. Mais rien ne nous garantit que la solution optimale locale trouvée dans l'espace choisi soit la solution optimale globale. On pourrait alors agrandir l'espace de recherche mais il est alors impossible de pouvoir tester toutes les solutions pour trouver la meilleure. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes de résolution dites approchées.

Les méthodes heuristiques permettent d'obtenir une solution approchée dans un délai de temps raisonnable. Les algorithmes génétiques sont l'une d'elles. Ils sont issus de la théorie de l'évolution de Darwin. Mathématiquement, résoudre un problème d'optimisation grâce aux algorithmes génétiques revient à déterminer les extrêmes d'une fonction $f: X \to R$, où X est l'espace de recherche des solutions plausibles. Ces algorithmes manipulent plusieurs solutions et forment de nouvelles solutions en combinant les anciennes. Le fait d'avoir une population de solutions facilite l'exploration de l'espace de recherche, et les meilleures solutions seront favorisées pour participer à la création de nouvelles solutions dans le but de trouver un optimum global.

Dans les méthodes présentées précédemment, nous retenons les « Fonds Propres Economiques » comme fonction à optimiser avec les algorithmes génétiques. Les allocations trouvées avec cette méthode donnent de meilleures solutions que celles de départ.

Conclusion

Les différentes méthodes proposées pour la détermination de l'allocation d'actifs optimale présentent chacune des avantages et des inconvénients. La première méthode consiste à sélectionner un portefeuille obligataire dont les flux futurs permettront de faire face aux engagements de l'assureur pour coordonner ainsi les flux de l'actif à ceux du passif. L'avantage de cette méthode réside dans sa simplicité. Mais l'inconvénient est que l'actif est composé uniquement d'obligations, ce qui donne un rendement faible. La deuxième méthode est basée sur le calcul de la probabilité de ruine sur le long terme. Cette méthode est très sensible à la volatilité de l'actif risqué. La troisième méthode (Fonds Propres Economiques) est très sensible à la volatilité de l'actif risqué mais présente un bon adossement entre les actifs et les passifs. La quatrième et dernière méthode permet d'établir le lien entre l'allocation d'actifs et la marge de solvabilité calculée dans le cadre Solvabilité 2. Les résultats obtenus avec ces différentes méthodes sont des résultats théoriques et ne représentent pas les allocations telles que choisies par les marchés aujourd'hui.

Mais quel que soit le programme d'optimisation posé, il y a nécessité de partir d'un ensemble de solutions plausibles qui constituent l'espace de recherche. Cependant, l'espace choisi par l'assureur donne une solution locale et non globale. Des méthodes heuristiques comme les algorithmes génétiques permettent alors d'approcher la solution optimale globale.

Ce mémoire présente donc une première application théorique des différentes méthodes avec des hypothèses simplificatrices et propose ainsi des pistes intéressantes pour un modèle plus complexe.

Summary

Asset allocation defines how assets are distributed among different classes in order to optimize the risk / return profile of a portfolio. But in life insurance, investors should take into account liabilities'cash-flows, in order to meet its obligations to policyholders. The Asset Liability Management's goal is to build a structure of investment assets to achieve asset-liability matching.

This thesis aims to determine the optimal allocation for funeral insurance. To do this, a thorough study of asset-liability model is performed. Several ALM strategies are then processed in order to determine the optimal allocation. All strategies studied are static i.e. the allocation remains constant over time.

Asset-Liability Model

Liability

Funeral insurance aims to ensure the payment of a lump sum in case of death of the insured. This capital is used to finance the funeral. The insured get the choice between three kinds of premium: lifetime premium, regular premium and single premium.

The main categories of assumptions taken into account in the model are: pricing assumptions (life tables, management and marketing expenses ...), expenses assumptions (commissions), redemption, assumptions and profit sharing assumptions.

Asset

Asset allocation requires an assessment of all assets in the portfolio. Here, the portfolio is made of four indices (Nikkei, Eurostoxx, S&P 500 and FTSE), property and forty zero-coupon bonds of maturity from 1 to 40 years.

4,000 stochastic scenarios are generated in "Real World" for each asset. Indeed, all allocation strategies give the same performance with Risk Neutral scenarios. The methods used to generate these scenarios are:

- Karasinski model with 2 factors is used to generate rate scenarios
- The Black-Scholes model is used to generate property and indices yields' scenarios

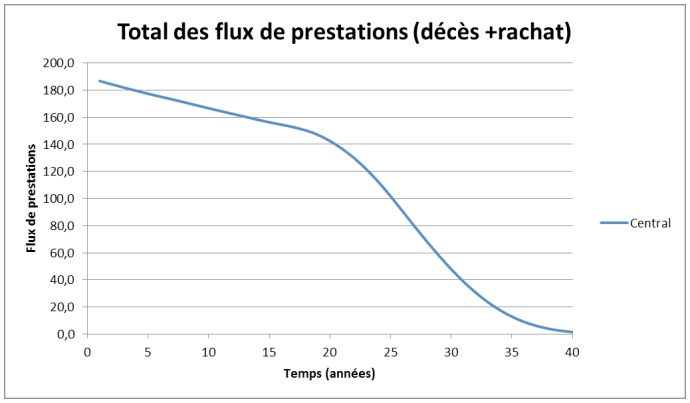
Methods

We are going to present four methods to determine the asset allocation. Except the "Maturity Matching" method where the study is conducted with 40 zero-coupon bonds, assets will be regrouped by classes for the other methods. Thus, « shares » designates the class made of the 4 indices (Nikkei, Eurostroxx, S&P 500 and FTSE). « Obligation » means the obligation of 10 years duration.

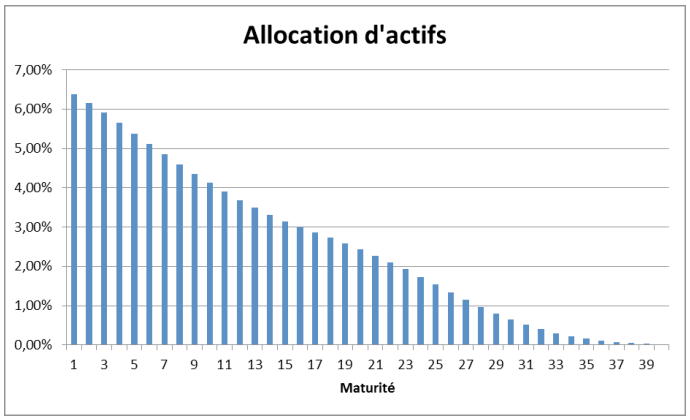
Maturity Matching

We assume that the asset of the insurer is made of zero-coupon bonds only (maturities from 1 to 40 years). "Maturity Matching" consists in selecting a portfolio of bonds whose future cash flows will meet the commitments of the insurer. Thus, the flow of assets will coordinate those of liabilities.

We assume that flows on the liabilities' side are deterministic and are projected over 40 years.



Cash flows are discounted with the swap yield curve as of 31/12/2011, giving the following allocation:



Thanks to Maturity Matching the needs of the insurer during the year t are balanced by flows generated by the assets in the same year. However, commitments of the insurer are never certain, since the actual mortality may deviates from the expected mortality. Furthermore, this method is not optimal in terms of performance as bonds give lower performance than equities and property. Finally, the diversification effect is not taken into account.

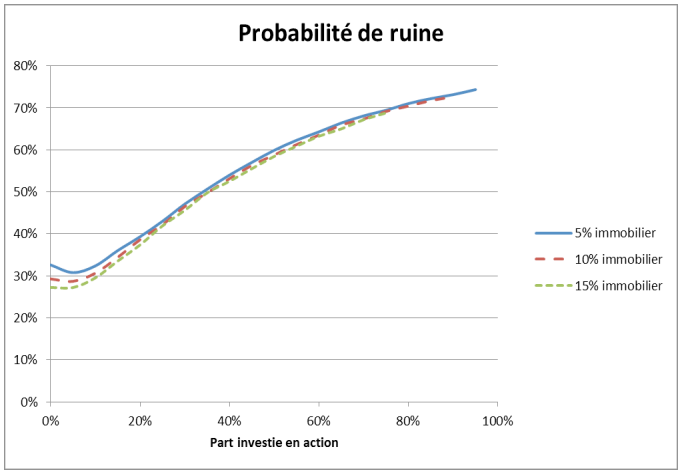
Probability of ruin

The insurer should always be able to meet its commitments i.e. the difference between asset and liabilities should be positive at any time. There is ruin of the insurer when $E_t < 0$, with $E_t = \text{Asset}_t - \text{Liability}_t$. The « Probability of ruin » method suggests by F. Planchet and P. Thérond is to minimize the following estimator of the probability of ruin:

$$1 - \frac{1}{4000} \sum_{n=1}^{4000} \prod_{k \geq 1} 1_{[0;\infty[} \left(e_k^n(j) \right)$$

4000 is the number of trajectories simulated for each asset
j is the asset allocation
$e_k^n(j)$ is the realization of the random variable E_t at time t, for the path n

The probability of ruin of the insurer over 60 years is as follows:

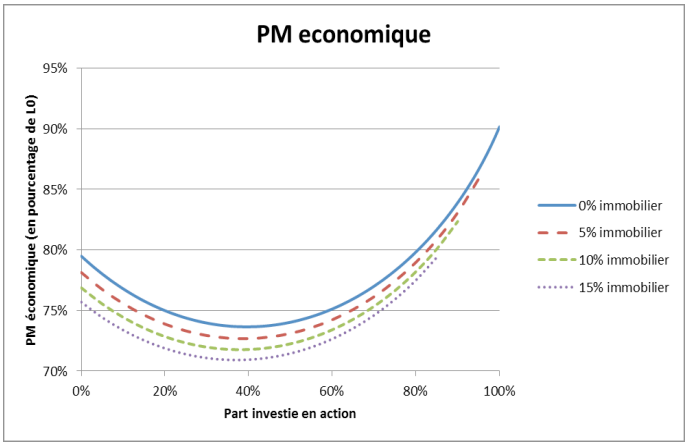


The probability of ruin increases with the proportion invested in shares. And more the proportion invested in shares is important, lower is the sensitivity of the probability of ruin to the proportion invested in property. This method is very sensitive to the volatility of the risky asset (share).

Economic Equity

$$\Delta_j = \sum_{t=1}^{60} \frac{F_t}{\prod_{s=1}^{t}\left(1+\tilde{R}_s^j\right)}$$

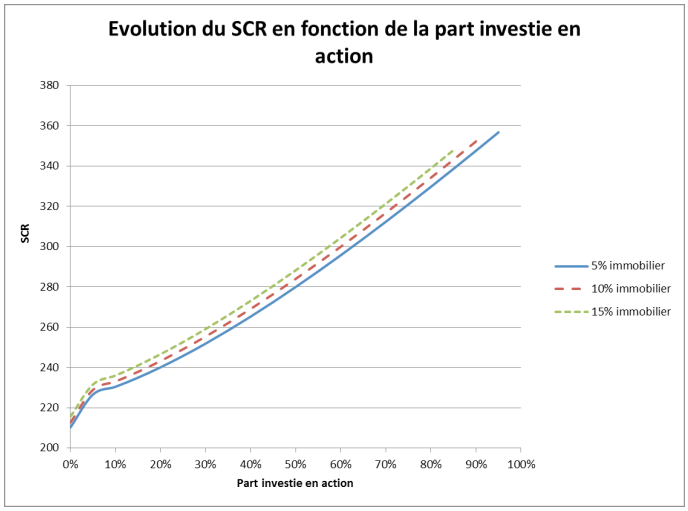
Planchet F., Thérond P. [2004b] defines $E(\Delta_j)$ as the « Economic Actuarial Reserve » i.e. the expected value of future cash flows discounted at the financial performance of the portfolio. Minimizing $E(\Delta_j)$ is equal to maximizing $A_0 - E(\Delta_j) = E_0 + L_0 - E(\Delta_j)$ which is the « Economic Equity ». Monte Carlo method gives the following results:



More important is the part invested in property, minimal is the « Economic Actuarial Reserve ». The optimal allocation obtained with the « Economic Equity » method is very sensitive to the volatility of the assets. However, it gives a good balance between assets and liabilities.

SCR

The evolution of the SCR is presented in the following graph:



More important is the part invested in shares, higher is the value of SCR. This increase is almost linear. The part of property in the portfolio has also an impact on the increase of the SCR. The variation of SCR is very sensitive to the part invested in property.

Genetic Algorithms

The different methods that we have seen are used for the determination of the optimal strategic allocation. More precisely, all the methods described search an optimal solution in a search space chosen beforehand. But there is no guarantee that the local optimal solution found is the global optimal solution. We could then enlarge the search space, but it is impossible to test all solutions to find the best one. We need to use approximate methods to approach the global solution.

The heuristics are used to obtain an approximate solution in a reasonable period of time. Genetic algorithms are one of them. They are derived from the theory of Darwinian evolution. Mathematically, solving an optimization problem using genetic algorithms is to determine the extreme cost of a function f: $X \rightarrow R$, where X is the search space of plausible solutions. These algorithms handle several solutions and form new solutions by combining old. Having a population of solutions facilitates the exploration of the search space, and the best solutions will be encouraged to participate in the creation of new solutions in order to find a global optimum.

Among the methods presented above, we use the "Economic Equity" as a function to be optimized with genetic algorithms. This algorithm gives better solutions than those of departure.

Conclusion

Every method presented in this thesis for the determination of the optimal asset allocation has advantages and disadvantages. The first method is to select a portfolio of bonds whose future cash flows will meet the commitments of the insurer and coordinate the flows of assets to those of liabilities. The advantage of this method lies in its simplicity. But the drawback is that assets only consist of bonds, which gives a low yield. The second method is based on the calculation of the probability of ruin over the long term. This method is very sensitive to the volatility of the risky asset. The third method (Economic Equity) is very sensitive to the volatility of the risky asset, but has a good backing between assets and liabilities. The fourth and final method is used to establish the link between asset allocation and the solvency margin calculated under Solvency 2. The results obtained with these methods are theoretical and don't represent the allocations as chosen by the markets today.

Each method needs to start from a set of plausible solutions that constitute the search space. However, the space chosen by the insurer gives a local solution, not global. Heuristic methods such as genetic algorithms can then approach the global optimal solution.

This thesis presents first theoretical application of different methods with simplified assumptions and offers interesting ideas for more complex models.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Marie MAEDLER, ma responsable de stage chez AXA France, pour sa disponibilité, sa bonne humeur et son implication. Elle a su m'encourager pour arriver à la fin de ce travail. Je la remercie très sincèrement pour la confiance qu'elle m'a accordée et pour toutes les heures qu'elle a consacrées à diriger ce mémoire.

Je remercie également Nicolas PRESTAT et Xavier PIKETTY pour les précieux conseils et remarques pertinentes qui m'ont beaucoup aidé dans l'avancement de mon travail.

Merci aussi à l'ensemble de l'équipe rentabilité pour la bonne ambiance de travail.

Enfin, mes remerciements s'adressent à Olivier LOPEZ, mon tuteur académique, pour m'avoir guidé tout au long de mon stage.

Sommaire

Résumé 2
Abstract 3
Note de synthèse 4
Summary 9
Remerciements 14
Sommaire 15
Introduction 18
Partie I **: Place de l'allocation d'actifs** 19
Chapitre 1 : Place de l'allocation stratégique 20
1. L'ALM (Asset Liability Managment) 20
2. Allocation d'actifs 20
3. Conclusion 22
Chapitre 2 : Application des règles prudentielles aux actifs de l'assureur 23
1. Les engagements réglementés 23
2. Les placements financiers 23
3. La marge de solvabilité 23
4. Conclusion 24
Chapitre 3 : Solvabilité 1 25
1. Trois fondements 25
2. Les placements financiers 25
3. Calcul de la marge de solvabilité 27
4. Les limites 27
Chapitre 4 : Solvabilité 2 28
1. Approche par piliers 28
2. Principe de la personne prudente 29
3. Exigence de capital réglementaire : calcul du SCR par la formule standard 30
4. Les chocs QIS 5 33
5. Conclusion 34
Partie II : Actif - Passif 35
Chapitre 1 : Le produit obsèques 36
1. Présentation du produit 36
2. Options et garanties 37
Chapitre 2 : Modélisation du passif 39
1. Présentation générale 39
2. Tarification 42
3. Le provisionnement : calcul des provisions mathématiques 44

4. Intérêts techniques 46
5. Chargements 46
6. Valeur de rachat et réduction 46
7. Coûts et commissions 47
8. Calcul de la participation aux bénéfices 47
Chapitre 3 : Modélisation des actifs 48
1. « Risque neutre » ou « Real world » ? 48
2. Modèles financiers 49
3. Limites 51
4. Conclusion 51
Chapitre 4 : Caractéristiques du Model 52
1. Caractéristiques principales du Model Point 52
2. Evolution du nombre de contrats 52
3. Rendement et volatilité des actifs 55
Partie III **: Méthodes d'allocation d'actifs** 56
Chapitre 1 : Maturity Matching 57
1. Flux de prestations 57
2. Allocation d'actifs 58
3. Chocs sur les flux de prestations 61
4. Conclusion 62
Chapitre 2 : Probabilité de ruine 63
1. Notations 63
2. Probabilité de ruine 63
3. Conclusion 66
Chapitre 3 : Fonds propres économiques 67
1. Prime unique 67
2. Prime viagère 71
3. Conclusion 72
Chapitre 4: Solvency Capital Requirement (SCR) 73
1. Calcul du SCR 73
2. Conclusion 74
Partie IV : Algorithmes génétiques 75
Chapitre 1 : Algorithme Génétique 76
1. Objectif 76
2. Codage d'une population 76
3. Fonction d'évaluation et fonction fitness 76
4. Création de nouveaux individus 77
5. Réitération 78
Chapitre 2 : Application 79

1. Choix des différents paramètres 79
2. Principe de l'algorithme mis en place 81
3. Conclusion 84
Conclusion générale 85
Bibliographie 86
Annexe 1 : Paramètres et Variables 87
Annexe 2 : Formules de provisionnement 88

Introduction

L'allocation d'actifs définit la façon dont les actifs sont répartis entre les différentes classes dans le but d'optimiser le couple rendement/risque d'un portefeuille. Les premiers modèles d'allocations ont été inspirés de la théorie de Markowitz. Ces modèles ne sont cependant pas très efficaces pour traiter les problèmes d'assurance vie car ils ne prennent pas en compte les caractéristiques et contraintes propres des contrats d'assurance vie, notamment le lien entre l'actif et le passif.

L'Asset Liability Management (ALM), ou gestion actif-Passif, consiste à piloter l'équilibre entre les ressources et les engagements vis-à-vis des assurés grâce à une analyse de l'évolution du bilan sur un horizon de temps, afin d'optimiser les rendements sous contraintes de risque, dans le respect des dispositions réglementaires. Nous allons effectuer dans ce mémoire des études ALM dans le but de déterminer l'allocation d'actifs pour des contrats obsèques avec prise en compte des limitations par catégories en Solvabilité 1.

Dans la première partie de ce mémoire, nous allons montrer la place de l'allocation d'actifs dans une étude ALM ainsi que son lien avec les directives Solvabilité I et II. Nous étudierons ensuite le modèle actif-passif mis en place pour cette étude. Puis, nous analyserons quatre méthodes permettant de déterminer l'allocation d'actifs. Enfin, nous nous intéresserons à la méthode des algorithmes génétiques dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation.

Partie I : Place de l'allocation d'actifs

En assurance vie, déterminer une allocation d'actifs dans un cadre actif seul constitue une approche trop simpliste. En effet, les investissements doivent prendre en compte les flux du passif afin que l'assureur soit en mesure d'honorer ses engagements envers les assurés. Suivant le produit étudié, les engagements de l'assureur au passif peuvent être sur plus ou moins long terme. Ainsi, pour des règlements à court terme (resp. long terme), l'assureur choisira d'investir dans des obligations de maturité courte (resp. longue), par exemple. Les interactions entre l'actif et le passif résultant d'options et garanties (comme la participation aux bénéfices par exemple) doivent également être pris en compte dans la détermination de l'allocation d'actifs.

Dans cette partie nous allons d'abord présenter l'allocation d'actifs et la place qu'elle occupe dans la gestion actif/passif. Nous expliquerons ensuite les fondements et objectifs des réformes Solvabilité I et II ainsi que leur impact sur l'allocation d'actifs.

Chapitre 1 : Place de l'allocation stratégique

1. L'ALM (Asset Liability Managment)

La gestion actif-passif, ou ALM, est un outil de pilotage et d'analyse globale du bilan. La définition proposée par Society of Actuaries est la suivante: « la gestion Actif-Passif désigne un mode de gestion des affaires visant à coordonner les décisions relatives à l'actif et au passif; il s'agit donc d'un processus continu, impliquant la formulation, la mise en œuvre, le contrôle et la révision de stratégies se rapportant à l'actif et au passif dans le but d'atteindre des objectifs financiers, compte tenu d'une certaine tolérance au risque et de certaines contraintes. L'ALM est cruciale pour tout établissement devant placer des capitaux pour faire face à ses engagements et désireux de garantir une gestion financière équilibrée».

L'ALM permet d'une part l'analyse du bilan et de son évolution probable sur un horizon de temps, en fonction de l'évolution des variables auxquelles sont sensibles la valeur des actifs ou des passifs (évolution des taux d'intérêt, comportement des assurés, etc.). Le but étant d'avoir une vue claire sur les nombreux facteurs qui influent sur la situation financière et structurelle d'une compagnie d'assurance. D'autre part, l'ALM permet le pilotage de l'équilibre entre les ressources et les engagements vis-à-vis des assurés, afin d'optimiser les rendements sous contraintes de risque, dans le respect des dispositions réglementaires. Ainsi, la gestion des actifs d'une entreprise d'assurance est un exercice délicat dans la mesure où le gestionnaire d'actifs doit s'assurer à tout moment que les actifs en portefeuille sont les meilleurs, non seulement en terme de couple rentabilité/risque mais également au regard des engagements souscrits par l'entreprise et des contraintes comptables et réglementaires.

Le but de cette étude est de réussir à déterminer l'allocation par classes d'actifs (actions, immobilier, obligation, etc.) qui répond le mieux aux objectifs de la compagnie, notamment en matière de taux de couverture et de performance.

2. Allocation d'actifs

L'allocation d'actifs est une méthode d'investissement qui consiste à construire un portefeuille composé de diverses classes d'actifs (actions, obligations, immobilier, etc.) en fonction des objectifs spécifiques de l'investisseur, de sa tolérance au risque et de son horizon d'investissement.

Il s'agit d'allouer des pourcentages spécifiques à chaque catégorie d'actifs et à répartir le montant des actifs d'un portefeuille entre divers types d'investissements. Le principe sous-jacent est le suivant : en moyenne, un portefeuille composé de diverses classes d'actifs fera encourir un risque moins élevé et génèrera des rendements plus réguliers qu'un investissement dans une seule classe d'actifs. Cette allocation comprend alors deux aspects :

- La création d'un portefeuille diversifié
- L'intégration de la politique d'investissement dans la construction du portefeuille

La qualité de l'allocation d'actifs joue un rôle central dans la performance de la gestion. Le processus d'allocation d'actifs comprend en général deux étapes :

- L'allocation stratégique (ou stratégie d'investissement)
- L'allocation tactique

2.1. L'allocation stratégique

Elle définit la façon dont les actifs sont répartis entre les différentes classes. Cette allocation prend en compte différentes variables économiques, qui ont une incidence sur le couple rendement / risque (taux longs, taux courts, taux rendement des actions et dividendes, taux de change, etc.). La modélisation du passif est utilisée pour définir l'optimisation de l'allocation ajustée au niveau du risque désiré.

L'allocation stratégique d'actifs repose principalement sur les principes de la théorie financière. Parmi eux, deux sont essentiels :

- Il existe une hiérarchie des risques et des rentabilités des différentes classes d'actifs. Les actions sont plus risquées, mais aussi plus rentables que les obligations, par exemple.
- La combinaison des actifs entre eux et des classes d'actifs réduit le risque du portefeuille.

La notion de « stratégie » réside d'une part dans le choix de l'horizon temporel auquel s'appliquent les études d'allocation stratégique et d'autre part dans le nombre de classes d'actifs considérées pour ces études. Cette allocation pourra alors être définie comme une allocation cible à attendre dans le temps à partir de l'allocation réelle de départ ou bien une allocation dynamique.

L'allocation stratégique est une allocation qui se base sur des anticipations sur le long terme des rendements et du risque. Ces anticipations sont formées à partir d'une variété de facteurs, tels que les rendements historiques et les anticipations des indicateurs macro-économiques sur le long terme (voire même les risques politiques associés à certains pays).

2.2. L'allocation tactique

L'allocation tactique commence là où l'allocation stratégique s'arrête. En effet, l'allocation stratégique de référence peut-être adaptée en fonction des circonstances. C´est ce que l´on appelle l´allocation tactique, qui tire parti des évolutions de la conjoncture économique et boursière. Elle a pour objectif de profiter d'opportunités sur les marchés en sur- (ou sous-) pondérant une classe d'actifs en fonction de sa valorisation. Ainsi, lorsqu'un redressement du cycle économique et boursier est anticipé, on renforce la part risquée (actions). Et lorsqu´on estime un retour à la baisse, on réduit la part risquée au profit de la part défensive, principalement constituée de taux. L´allocation tactique identifie ensuite les supports d´investissement les plus prometteurs, parmi les actions, les zones géographiques, les valeurs de croissance ou les valeurs sous cotées, etc.

L'allocation stratégique est déterminée de façon non fréquente (au maximum une fois par an).
En pratique, des marges de poids par rapport à cette allocation stratégique sont souvent définies afin de permettre la mise en place des stratégies tactiques.

L'allocation tactique repositionne le profil de rendement/risque de l'allocation stratégique afin de répondre à des variations intermédiaires, de court terme, sur les marchés (par exemple avec un horizon quotidien ou mensuel de prévision). L'allocation tactique se base essentiellement sur des analyses court-termistes du profil rendement/risque de chacune des classes d'actifs.

<table>
<tr><td colspan="2">Gestion actif-passif</td></tr>
<tr><td colspan="2">Appréhension des risques Actif, Passif et Actif-Passif</td></tr>
<tr><td>Allocation stratégique d’actifs</td><td rowspan="3">Stratégie de pilotage des passifs
(distribution de PB, tarification,…).</td></tr>
<tr><td>Allocation tactique d’actifs</td></tr>
<tr><td>Gestion financière qutidienne</td></tr>
</table>

Schéma général de la gestion actif-passif

3. Conclusion

L’allocation d’actifs est définie comme la répartition optimale d’un portefeuille entre les différentes classes d’actif. L’évolution du bilan et l’équilibre entre engagements et ressources jouent un rôle central dans la détermination de cette allocation. Ces interactions entre actif et passif en assurance vie impliquent la prise en compte d’un certain nombre de contraintes réglementaires pour la détermination de l’allocation optimale.

Chapitre 2 : Application des règles prudentielles aux actifs de l'assureur

En raison du cycle inversé de production, les entreprises d'assurance doivent toujours être en mesure de tenir leurs engagements envers les assurés. Afin de protéger au mieux les intérêts des assurés et de garantir la solvabilité dans le temps des entreprises d'assurance, l'activité des compagnies d'assurances est très réglementée. Le provisionnement des engagements doit être le plus précis et le plus prudent possible, afin que l'allocation stratégique d'actifs permette d'obtenir l'adéquation actif/passif.

1. Les engagements réglementés

L'article R 331-1 du Code des Assurances prévoit que l'assureur doit à tout moment être en mesure de justifier l'évaluation de ses engagements vis-à-vis des assurés. Ces engagements sont les suivants :

- Les provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagements vis-à-vis des assurés ou bénéficiaires de contrats ;
- Les postes du passif correspondant aux autres créances privilégiées ;
- Les dépôts de garantie des agents, des assurés et des tiers, s'il y a lieu ;
- Une réserve d'amortissement des emprunts ;
- Une provision de prévoyance en faveur des employés et agents destinée à faire face aux engagements pris par l'entreprise envers son personnel et ses collaborateurs.

La provision mentionnée au 5° du présent article est calculée dans les conditions fixées par décret.

2. Les placements financiers

Les provisions techniques constituées au passif du bilan doivent être représentées à tout moment par des actifs équivalents. Ces actifs représentant les placements financiers des sociétés d'assurances sont soumis à des règles qui doivent être pris en compte lors du choix de l'allocation d'actifs. Ces règles ne sont pas les même en Solvabilité I et en Solvabilité II et seront précisées dans les deux prochains chapitres.

3. La marge de solvabilité

L'assureur doit toujours être en mesure de couvrir ses engagements vis-à-vis des assurés. Cependant, l'assureur peut ne pas en être en mesure d'honorer ses engagements si des risques trop importants se réalisent à l'actif ou au passif de la compagnie d'assurance. Afin d'éviter la ruine de l'assureur, un niveau minimum des fonds propres doit être déterminée de manière à couvrir l'assureur contre une réalisation défavorable du risque : c'est la marge de solvabilité. Les assureurs doivent détenir des fonds propres supérieurs à la marge de solvabilité.

La marge de solvabilité constitue une contrainte réglementaire pour les assureurs puisqu'elle fait l'objet de l'article R 334-1 du Code des Assurances qui prévoit que les entreprises d'assurances « doivent à tout moment respecter une marge de solvabilité calculée selon des modalités définies par décret en Conseil d'Etat ». Actuellement, le calcul de la marge de solvabilité est imposée par la directive Solvabilité 1 qui prévoit une marge de solvabilité en fonction de pourcentages des primes et les sinistres (en assurance non vie) et des provisions mathématiques (en assurance vie). Ces méthodes jugées très simplistes font objet de nombreuses critiques et nécessitent l'introduction d'une nouvelle directive : Solvabilité 2. Elle impose des règles plus complexes prenant en compte les risques spécifiques à chaque compagnie et propose deux formules de calcul : la formule standard ou le modèle interne.

4. Conclusion

En assurance, les primes sont encaissées avant le règlement des prestations. En raison de cette inversion du cycle de production et dans l'intérêt des assurés, la capacité des sociétés d'assurance à faire face à leurs engagements est très contrôlée. Les entreprises d'assurance doivent évaluer correctement leurs engagements et les représenter par des actifs adéquats. Une marge de solvabilité doit également être constituée dans le but d'éviter la ruine de la compagnie. Le calcul de cette marge de solvabilité est imposé par la réglementation.

Chapitre 3 : Solvabilité 1

Deux directives européennes énoncent les règles de solvabilité imposées aux assureurs : la directive de 1973 pour la branche non-vie et la directive de 1979 pour la branche vie. En 2002, une « mise à jour » est effectuée par le Parlement européen et le Conseil de l'Union européenne à travers la réforme de Solvabilité 1. Des règles fixent les exigences sur la composition des actifs et la couverture des engagements par des actifs adéquats ainsi que la détermination d'un niveau minimum des fonds propres: la marge de solvabilité requise.

Les entreprises d'assurance ont l'obligation de constituer une marge de solvabilité adéquate destinée à protéger les consommateurs. Ainsi, en cas de baisse de l'activité ou du rendement des placements, les entreprises d'assurance disposent d'une réserve de fonds propres protégeant les intérêts des assurés et laissant aux dirigeants et aux autorités de surveillance le temps de remédier aux difficultés rencontrées.

1. Trois fondements

Les règles quantitatives de Solvabilité 1 se présentent sous forme de trois fondements :

- Provisions techniques prudentes

Les provisions techniques doivent être suffisantes pour pouvoir payer les prestations futures probables.

- Règles sur la couverture des engagements

Les engagements réglementés englobent l'ensemble des provisions techniques, les dettes privilégiées, les dépôts de garantie et les réserves pour l'amortissement des emprunts. Tous ces engagements doivent être couverts par des actifs sous règles d'admissibilité, de limitation, de dispersion et de congruence.

- Besoin de capital

Ce dernier volet définit une marge de solvabilité minimale que doit détenir l'assureur afin de pouvoir supporter les pertes futures.

2. Les placements financiers

2.1. Les placements admissibles

Les actifs autorisés par l'article R332-2 du Code des Assurances sont les suivants :

- Valeurs mobilières et titres assimilés : obligations, titres de créances négociables, actions, fonds communs de placement à risque, etc.
- Actifs immobiliers : droits réels immobiliers, parts ou actions des sociétés à objet strictement immobilier.

- Prêts et dépôts : prêts obtenus ou garantis par les Etats membres de l'OCDE, prêts hypothécaires, autres prêts ou créances, dépôts.

2.2. Limitations par catégories

Afin de réduire l'incidence des risques de marché et de liquidité, les placements admis en couverture des engagements sont soumis à certaines limites :

- 65 % pour les actions (et 10% pour le non coté)
- 40 % pour les actifs immobiliers
- 10 % pour les prêts et dépôts

Aucune limite n'est mentionnée pour les obligations.

2.3. Dispersion des risques

Les sociétés d'assurance doivent « disperser » les risques auxquels sont soumis leurs placements. Elles ne peuvent pas placer plus de 5 % de leurs actifs auprès d'un même émetteur ou créancier et 10% pour un immeuble. La limite de 5 % peut être portée à 10 % à condition que la valeur totale des titres émis par l'ensemble des organismes dont les émissions, prêts ou garanties de prêt sont admis au-delà du ratio de 5% n'excède pas 40 % de l'ensemble des placements admis. Pour le non côté, le plafond de 5% par émetteur est ramené à 1%. Seuls les titres des sociétés d'assurance non cotées sont considérés comme côtés (i.e. 5% par émetteur).

2.4. La congruence

Cette règle permet de déterminer la monnaie dans laquelle les engagements de l'assureur sont admis. D'après l'article R332-1 du Code des assurances, *« les engagements pris dans une monnaie doivent être couverts par des actifs congruents, c'est-à-dire libellés ou réalisables dans la même monnaie »*. Des assouplissements à ce principe sont prévus puisqu'il peut être dérogé à hauteur de 20% des engagements (article R332-1-1).

2.5. Risques

L'intérêt de ces règles est de limiter les risques auxquels sont soumis les actifs. Le tableau suivant associe les règles aux différents risques qu'elles permettent de réduire :

Risque considéré	Règle
Risque de signature	Dispersion par émetteur
Risque de marché	Limitations par catégories
Risque de liquidité	Limitations par catégories
Risque de change	Règles de congruence

3. Calcul de la marge de solvabilité

Les provisions représentent les engagements de l'assureur envers les assurés. Elles sont calculées de manière prudente mais rien ne peut garantir absolument qu'elles seront suffisantes pour régler les engagements. Il faut donc prévoir la détention d'un certain montant de ressources supplémentaires, pouvant servir de « matelas » en cas de provisions insuffisantes. Le calcul de cette marge de solvabilité est actuellement imposé par la réforme Solvabilité 1.

En assurance vie, cette marge de solvabilité doit être calculée comme suit :

L'Exigence de Marge de Solvabilité (EMS) :

$$EMS = 4\%(1\%\ pour\ les\ contrats\ en\ unités\ de\ compte) * provisions\ mathématiques\ brutes * taux\ de\ rétention\ en\ matière\ de\ provisions\ mathématiques + 0.3\% * capital\ sous\ risque * taux\ de\ rétention\ en\ matière\ de\ capital\ sous\ risque$$

$$Taux\ rétention\ en\ PM = Max(\frac{PM\ nettes\ de\ réassurance}{PM\ brutes\ de\ réassurance\ ;}; 85\%)$$

$$Taux\ rétention\ en\ capital\ sous\ risque = Max(\frac{Capital\ net\ de\ réassurance}{Capital\ brut\ de\ réassurance\ ;}; 50\%)$$

Capital sous risque est le risque maximal encouru par l'assureur.

4. Les limites

Solvabilité I traite de tout le bilan : elle compte les passifs sans escompte et les actifs en valeur d'acquisition. Elle définit de nombreuses règles pour la gestion d'actifs (dispersion des risques, limitation par catégorie, etc.). Solvabilité 1 utilise une formule proportionnelle pour le calcul de la marge de solvabilité: plus les provisions techniques sont élevées, plus la marge de solvabilité est importante, indépendamment du risque inhérent à la banche.

Une des principales critiques de Solvabilité I est qu'elle utilise une formule proportionnelle pour le calcul de la marge de solvabilité. Ainsi, plus le chiffre d'affaire ou les provisions techniques d'une compagnie sont élevés, plus le capital à mobiliser est important, indépendamment du risque inhérent à la branche. Pour deux entreprises à risques égales, l'exigence de marge sera donc plus élevée pour un assureur prudent ayant des provisions techniques plus élevées qu'un assureur moins prudent.

La corrélation entre les différents risques n'est pas traitée non plus. Les actifs et les passifs sont évalués de manière différente d'une approche cohérente avec le marché puisque les passifs ne sont pas escomptés et les actifs sont comptabilisés en valeur d'acquisition et non en valeur de marché.

Chapitre 4 : Solvabilité 2

Solvabilité II est une directive européenne, lancée en 2001 par la Commission Européenne, qui a pour objectif de réformer en profondeur la réglementation prudentielle européenne des entreprises d'assurance et de réassurance, laquelle vise à garantir le respect des engagements pris envers les assurés.

Son rôle est de garantir la stabilité financière des compagnies d'assurance et de réassurance en introduisant des critères de solvabilité plus sophistiqués et prenant mieux en compte les risques auxquels les compagnies doivent faire face (risques de marché, risques de crédit, risques opérationnels…). Un régime de solvabilité européen basé sur une approche économique harmonisée au sein du marché européen doit également être instauré.

1. Approche par piliers

Solvabilité II offrira un nouveau cadre prudentiel au secteur de l'assurance selon une approche en trois « piliers », comparable à celle de Bâle II pour la banque. Solvabilité II fait la distinction entre les exigences quantitatives (pilier 1), la gouvernance et le processus de contrôle (pilier 2) et les informations communiquées par l'entreprise au superviseur et au public (pilier 3).

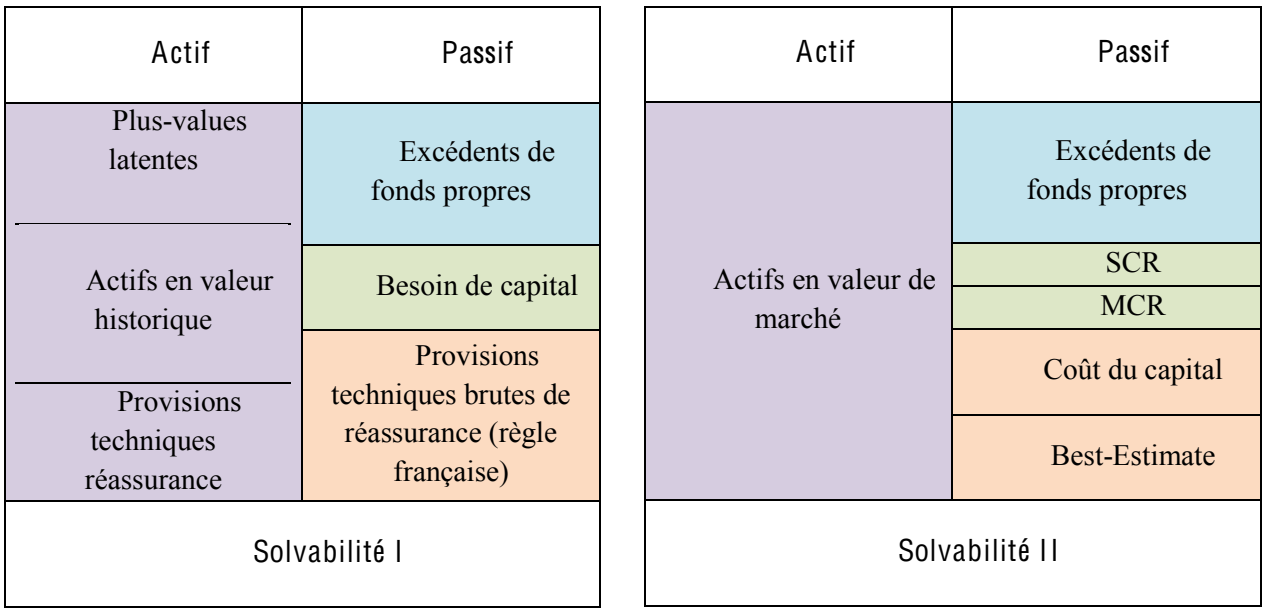
Pilier 1 - Exigences quantitatives

Solvabilité II place la gestion des risques au cœur du système prudentiel applicable aux assurances et se caractérise notamment par des exigences quantitatives visant à mieux refléter les risques supportés par les organismes d'assurance.

Alors qu'en Solvabilité I, la valorisation des éléments du bilan repose sur une évaluation *comptable* qui respecte les principes de coût historique à l'actif, Solvabilité II se base sur une valorisation *économique* des éléments de bilan, et notamment le calcul des provisions techniques.

De nouvelles exigences de capital (Solvency Capital Requirement (SCR) et Minimum Capital Requirement MCR) seront déterminées soit avec une formule standard, soit par un modèle interne validé par l'autorité de contrôle.

Les règles quantitatives sur les placements (répartition et dispersion) seront remplacées par le principe de la « personne prudente ».



Pilier 2 – Activité de contrôle et supervision

Le pilier 2 fixe des règles de gestion des risques : contrôle interne, rapports avec les autorités de tutelle, validation des modèles internes.

Les contrôles internes recouvrent : la gouvernance d'entreprise, la gestion des procédures, la gestion financière, la gestion des risques, les modèles internes.

En ce qui concerne la validation des modèles internes, les superviseurs devront vérifier que ces modèles décrivent bien la réalité de l'entreprise et, cela, au fil des années.

Ces modèles internes étant appelés à être développés, il y aura par conséquent, un dialogue permanent entre les entreprises d'assurance et les organismes superviseurs pour les faire évoluer toujours dans un sens à la fois simple et proche de la réalité.

Pilier 3 – Discipline de marché

Ce troisième pilier concerne l'information publique et le reporting aux superviseurs, aux agences de notation et aux acteurs de marché. L'objectif est d'harmoniser les informations diffusées au niveau européen, à différents niveaux (assurés, marchés, autorités de contrôle).

2. Principe de la personne prudente

Solvabilité II définit de nouvelles règles d'admissibilité des actifs à travers le "Principe de la Personne Prudente" (Pilier I). La notion d'actifs admissibles ainsi que les règles quantitatives de dispersion et de répartition présents en Solvabilité I disparaissent. En Solvabilité II, les assureurs définissent eux même leur politique d'investissement. Ce critère nécessite cependant une meilleure prise en compte par les assureurs des critères de liquidité et de sécurité dans leurs choix d'investissements.

3. Exigence de capital réglementaire : calcul du SCR par la formule standard

En Solvabilité I, la marge de solvabilité ne dépend que des provisions mathématiques et des taux de cession en réassurance. La vision en valeur historique est la règle. La directive Solvabilité II impose un contrôle rigoureux des risques, via une exigence en fonds propres permettant de couvrir les différents risques encourus par les compagnies d'assurance européennes. Cette exigence en fonds propres est appelée SCR (Solvency Capital Requirement). Les calculs doivent être effectués avec un bilan en « valeur économique ». La notion de probabilité de ruine est mise au centre de ces calculs. Sa valeur maximale est fixée par le CEIOPS à 0,5% sur un horizon d'un an c'est-à-dire l'assureur doit être en mesure de faire face à ses engagements dans 99,5% des cas.

Le SCR peut être calculé de deux manières: soit en utilisant une « formule standard », fournie par les autorités de régulation européennes, soit à l'aide d'un modèle interne propre à l'entreprise mais qui doit être validé par les autorités de contrôle (ACP pour la France). Dans le deuxième cas, les compagnies peuvent choisir de mettre en œuvre un modèle interne partiel (c'est-à-dire pour certains facteurs de risque) ou intégral. Le modèle interne pourra se traduire par une moindre consommation en capital et donc un avantage compétitif dans le cas où il satisferait les trois tests de l'autorité de tutelle (adéquation statistique, calibration, utilisation effective).

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement au calcul du SCR par la formule standard.

3.1. Bilan économique

Nous rappelons l'écriture du bilan économique en Solvabilité II :

<table>
<tr><th>Actif</th><th>Passif</th></tr>
<tr><td rowspan="2">A_t</td><td>NAV_t</td></tr>
<tr><td>BE_t</td></tr>
<tr><td colspan="2">Bilan à l'instant t</td></tr>
</table>

$\boldsymbol{A_t}$: actif en valeur de marché. Pour les titres côtés sur le marché, on regarde la cotation. Pour les autres, il faut mettre en place un modèle pour évaluer la valeur future de l'actif.

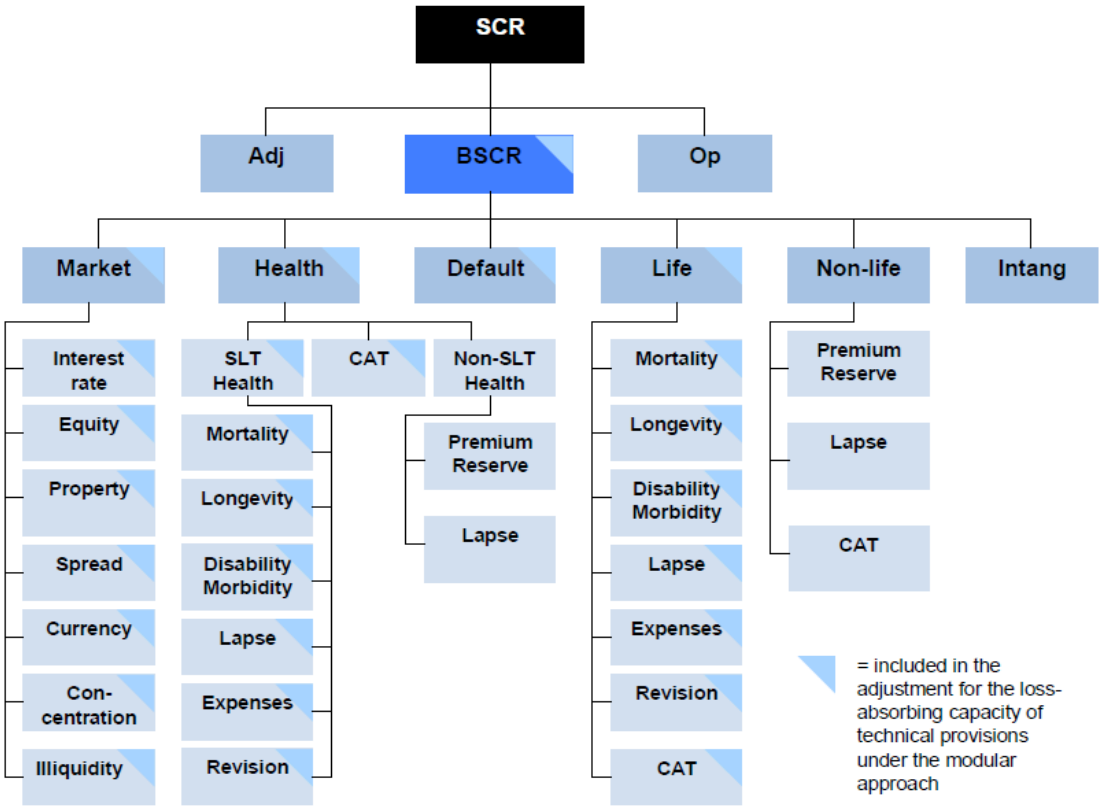
$\boldsymbol{BE_t}$ *:* le Best-Estimate est la somme actualisée et probabilisée des flux futurs de prestations.

$\boldsymbol{NAV_t}$: la Net Asset Value représente les fonds propres économiques de l'assureur.

$$\boldsymbol{NAV_t = A_t - BE_t}$$

3.2. Formule standard

Le calcul du SCR dépend des différentes classes de risques auxquelles sont exposés les assureurs: risque de souscription non-vie, risque de souscription vie, risque de souscription santé, risque de marché, risque de crédit, risque opérationnel. Le calcul du SCR est divisé suivant plusieurs modules :



Structure de la formule standard QIS 5

Le calcul du SCR selon la formule standard est determinée par la formule suivante :

$$\boldsymbol{SCR = BSCR - adj. + SCR_{op}}$$

$\boldsymbol{BSCR}$ est le Basic Solvency Capital Requirement

$\boldsymbol{adj.}$ est l'ajustement pour les effets d'atténuation des risques provenant de la participation aux bénéfices et des impôts différés

$\boldsymbol{SCR_{op}}$ est le capital requis pour le risque opérationnel

Calcul du BSCR :

$$\boldsymbol{BSCR = SCR_{incorporel} + \sqrt{\sum_{i,j} corrSCR_{i,j} * SCR_i * SCR_j}}$$

$\boldsymbol{corrSCR_{i,j}}$ sont les coefficients de corrélation dont la matrice est fournie par le CEIOPS :

	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	1				
Défaut	0.25	1			
Vie	0.25	0.25	1		
Santé	0.25	0.25	0.25	1	
Non-vie	0.25	0,5	0	0	1

$\boldsymbol{SCR_i}$: capital de solvabilité relatif au module de risque i

$\boldsymbol{SCR_{incorporel}}$: le risque d'actifs intangibles concerne les actifs incorporels qui sont exposés à deux types de risques : le risque de marché et le risque interne inhérent à la nature même de ces éléments. Les actifs incorporels représentent les actifs immatériels de l'entreprise : goodwill, brevet, licence, marque, etc.

Pour calculer les SCR des différents modules, i.e. pour calculer SCR_{Market}, $SCR_{Default}$, SCR_{Life}, SCR_{Health} et $SCR_{Non-life}$, on agrège les sous-modules pour chacun de ces risques, à l'aide des matrices de corrélation à l'instar du BSCR. Par exemple :

$$\boldsymbol{SCR_{Life}} = \sqrt{\sum_{r,c} \boldsymbol{corrLife_{r,c} * Life_r * Life_c}}$$

$\boldsymbol{Life_r}$: SCR du sous-module de risque r du module SCR_{Life}

$\boldsymbol{corrLife_{r,c}}$: Coefficient de la matrice de corrélation entre les sous-modules de risque r et c.

corrLife	Mortalité	Longévité	Invalidité	Rachat	Dépenses	Révision	CAT
Mortalité	1						
Longévité	-0.25	1					
Invalidité	0.25	0	1				
Rachat	0	0.25	0.	1			
Dépenses	0.25	0,25	0,5	0,5	1		
Révision	0	0,25	0	0	0,5	1	
CAT	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	1

$\boldsymbol{Life_r}$: sont calculés grâce à la formule suivante :

$$\boldsymbol{Life_r = \Delta NAV = NAV_{avant\ choc} - NAV_{après\ choc}}$$

Les chocs appliqués sont fournis par QIS5.

De même, le $\boldsymbol{SCR_{Market}}$ est définit par :

$$\boldsymbol{SCR_{Market} = MAX\ (0, Mkt_{down}, Mkt_{up})}$$

Soit :

$$SCR_{marché} = MAX\ (0,\ \sqrt{\sum_{r,c} corrMkt_{r,c}^{down} * Mkt_r^{down} * Mkt_c^{down}},\ \sqrt{\sum_{r,c} corrMkt_{r,c}^{up} * Mkt_r^{up} * Mkt_c^{up}})$$

$corrSCR_{r,c}^{down}$ et $corrSCR_{r,c}^{up}$ sont fournis par le CEIOPS :

CorrMktDown	Intérêt	Action	Immobilier	Devise	Prime **d'illiquidité**	Concentration
Intérêt	1					
Action	0,5	1				
Immobilier	0,5	0,75	1			
Devise	0,5	0,75	0,5	1		
Prime **d'illiquidité**	0,25	0,25	0,25	0,25	1	
Concentration	0	0	0	0	0	1

CorrMktUp	Intérêt	Action	Immobilier	Devise	Prime **d'illiquidité**	Concentration
Intérêt	1					
Action	0	1				
Immobilier	0	0,75	1			
Devise	0	0,75	0,5	1		
Prime **d'**illiquidité	0,25	0,25	0,25	0,25	1	
Concentration	0	0	0	0	0	1

Dans la suite de notre étude, on s'intéressera à ces deux seuls modules Life et Market ainsi qu'aux risques mortalité, longévité, rachat, dépense et catastrophe pour le SCR vie et les risques action, immobilier et risque de taux en ce qui concerne le SCR marché.

4. Les chocs QIS 5

Dans cette partie, nous allons présenter les différents chocs intervenant dans le calcul du SCR expliqué précédemment.

Les chocs vie :

- *Risque de mortalité :* augmentation permanente de 15% du taux de mortalité
- *Risque de longévité:* baisse permanente de 20% du taux de mortalité
- *Risque de rachat:* c'est le maximum entre une augmentation permanente de 50% du taux de rachat, une diminution permanente de 50% du taux de rachat et les rachats massif (augmentation en valeur absolue de 30%)
- *Risque de dépense :* augmentation de 10% des dépenses futures ainsi qu'une augmentation permanente de 1% du taux d'inflation des dépenses
- *Risque catastrophe :* un taux de surmortalité additif de 0,15 % la première année

Les chocs de marché :

- *Risque action :* pour les actions cotées OCDE, une baisse de 30% de la valeur de marché est appliquée. Pour les autres actions (hors OCDE): la baisse est de 40%
- *Risque immobilier*: baisse de 25% des rendements
- *Risque de taux* :

Maturité	Relative choc up	Relative choc down
0,25	70%	-75%
0,5	70%	-75%
1	70%	-75%
2	70%	-65%
3	64%	-56%
4	59%	-50%
5	55%	-46%
6	52%	-42%
7	49%	-39%
8	47%	-36%
9	44%	-33%
10	42%	-31%
11	39%	-30%
12	37%	-29%
13	35%	-28%
14	34%	-28%
15	33%	-27%
16	31%	-28%
17	30%	-28%
18	29%	-29%
19	27%	-29%
20	26%	-29%
21	26%	-30%
22	26%	-30%
23	26%	-30%
24	26%	-30%
25	26%	-30%
30	25%	-30%

Pour des maturités supérieures à 30 ans, les chocs de +25% /-30% doivent être appliqués.

5. Conclusion

Solvabilité 2 a pour objectif de mieux protéger les assurés contre l'éventuelle défaillance d'un assureur, éviter le risque de faillites dans le système financier et harmoniser le cadre de surveillance prudentielle du secteur de l'assurance au sein de la Communauté Européenne. Pour ce faire, la directive définit, entre autre, un nouveau calcul des exigences en fonds propres avec un bilan en vision économique ce qui va impacter fortement l'actif de l'assureur et ainsi l'allocation d'actifs.

Partie II : Actif - Passif

Nous avons vu qu'en assurance vie, les investisseurs doivent prendre en compte les flux du passif ainsi que les interactions actif/passif résultant d'options et de garanties pour déterminer l'allocation d'actifs. Une telle étude nécessite l'analyse approfondie des contrats étudiés.

Dans cette partie nous allons présenter les différentes caractéristiques du produit obsèques. Nous expliquerons ensuite le modèle permettant de dérouler le passif sur le long terme. Puis, nous verrons la modélisation des divers actifs. Et enfin, nous présenterons les différentes caractéristiques du model point étudié.

Chapitre 1 : Le produit obsèques

1. Présentation du produit

Le produit obsèques a pour objet de garantir, en cas de décès de l'assuré, le versement d'un capital au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) par l'adhérent.

Ce capital est destiné au financement des obsèques de l'assuré par un versement du capital garanti soit à l'opérateur funéraire qui aura pris en charge les obsèques de l'assuré, soit à la personne physique qui aura réglé la facture des opérations financières, à hauteur du montant du capital garanti, soit enfin à un bénéficiaire nommément désigné. Dans ce dernier cas toutefois, cette personne demeure libre d'utiliser le capital à d'autres fins.

1.1. Age de souscription

L'âge minimum et l'âge maximum de souscription sont déterminés pour limiter le risque sur les personnes âgées : l'âge minimum est de 50 ans et l'âge maximum de 85 ans. En effet, le risque de longévité étant élevé pour les âges faibles, l'assureur réduit ce risque en imposant un âge minimum de 50 ans. A l'inverse, le risque de mortalité augmente avec l'âge ce qui impliquera des primes très élevées.

1.2. Montant garanti

Le contrat ayant un objectif précis, à savoir le financement des frais d'obsèques, le montant de capital garanti sera borné par un capital minimum de 1 000€ et un capital maximum de 10 000€.

1.3. Clause bénéficiaire

Le bénéficiaire pourra être une personne morale ou une personne physique.

Dans le cas d'une personne morale, il faudra prévoir une personne physique comme bénéficiaire de second ordre en cas de capital supérieur au coût des obsèques.

Dans le cas où le règlement intervient après la prestation, le remboursement se fera à la personne justifiant de la facture réglée (et ce même si elle n'est pas stipulée au contrat), selon que le capital soit supérieur ou inférieur aux coûts des obsèques.

1.4. Sélection médicale et délai de carence

Il n'y a pas de sélection médicale.

Un délai de carence sera appliqué en fonction de l'évènement déclencheur du décès. Les différents évènements recensés sont l'accident, le suicide et la maladie. Les délais appliqués seront alors :

- En cas de décès suite à un accident, il n'y a pas de délai d'attente et la garantie est acquise dès la prise d'effet de l'adhésion.
- En cas de décès non accidentel ou par suicide, la garantie est acquise 1 an après la date de prise d'effet de l'adhésion. Toutefois, si le décès non accidentel ou le décès par suicide survient au cours de la première année, l'assureur rembourse à la succession de l'adhérent le montant des cotisations versées nettes de frais.

On entend par accident toute atteinte corporelle non intentionnelle de la part de l'assuré, provenant de l'action soudaine, violente et imprévisible d'une cause extérieure. Les affections de la colonne vertébrale, les pathologies cardiaques associées ou non à des coronaropathies, les chocs émotifs et les états dépressifs sont considérées comme des maladies.

1.5. Primes et contre-assurance des primes

Trois types de cotisations sont prévus à savoir prime viagère, prime périodique limité à un certain nombre d'années et la prime unique.

En cas de décès lié à une maladie pendant le délai de carence, la contre-assurance des primes sera enclenchée. Ce paiement met fin au contrat.

2. Options et garanties

2.1. Valeur de réduction

La réduction signifie la diminution des garanties par suite de l'arrêt ou la diminution du versement des cotisations par l'assuré. Les contrats à prime unique ne sont pas concernés par la réduction car le client acquitte son engagement dès la souscription.

La valeur de réduction I_k au terme de k années sera déterminée à partir de la provision mathématique au 31/12 de l'année considérée et du facteur d'escompte viager et des frais de gestion futurs du contrat.

2.2. Valeur de rachat

En cas de rachat pendant les 10 premières années de l'adhésion, une pénalité sera appliquée sur le montant racheté. Cette pénalité s'élève à 5 % de la valeur de rachat la première année d'adhésion, pour être ensuite diminuée de 0.5 % par année. Elle est nulle au-delà de la dixième année.

2.3. Revalorisation

Pour le produit obsèques, le contrat ne comporte pas de participation aux bénéfices contractuelle mais la participation aux bénéfices dans les conditions prévues par le Code des Assurances. L'article A331-4 précise que*: « […] le montant minimal de la participation aux bénéfices à attribuer au titre d'un exercice est déterminé globalement à partir d'un compte de participation aux résultats […]. Il est*

ajouté en recette du compte de participation aux résultats une part des produits financiers. Cette part est égale à 85 % du solde d'un compte financier comportant les éléments prévus à l'article A. 331-6 ».

Deux mécanismes de revalorisation des garanties sont possibles à partir de l'enveloppe de revalorisation à affecter :

- la Vitesse V1 si la totalité de l'enveloppe est affectée à la revalorisation du capital assuré : les cotisations annuelles appelées demeurent inchangées.
- la vitesse V2 si le taux de revalorisation est appliqué au capital assuré mais également à la cotisation annuelle appelée.

D'un point de vue actuariel, cela consiste à considérer que l'augmentation de la provision mathématique due au passage de la participation aux bénéfices est répercutée :

- pour la vitesse V1, uniquement sur l'engagement de l'assureur (hausse du capital assuré).
- pour la vitesse V2, sur l'engagement de l'assureur et de l'assuré dans la même proportion (hausse du capital assuré et des primes).

Chapitre 2 : Modélisation du passif

Dans cette partie, nous allons modéliser les différents flux du passif liés au produit obsèques. Nous pourrons alors choisir un portefeuille d'actifs adossé à notre passif.

Pour un contrat (ou un ensemble de contrats) donné, nous allons projeter sur 60 ans plusieurs flux (primes, prestations, provisions mathématiques,….). Le modèle de projection assure les principales fonctions suivantes : prise en compte de nombreuses hypothèses (des hypothèses techniques spécifiques au produit et d'autres hypothèses financières ou propres à l'assureur), tarification (calcul des primes), calcul des provisions mathématiques (PM), calcul d'un compte de résultat, prise en compte de différents mécanismes (la participation aux bénéfices (PB), les rachats, l'indexation annuelle du capital décès et la réduction), analyse de marge, etc.

1. Présentation générale

Nous allons projeter le résultat sur 60 ans. Le résultat après impôt est calculé comme suit :

Le compte de résultat
(+) Primes pures (-) Prestations (-) Delta PM pure (+) Intérêts techniques
=Marge technique
(+) Chargements (+) Pénalités de rachat (+) IT frais sinistres (-) Commissions (-) Coûts
=Marge gestion
(+) Produits financiers bruts
(-) Total IT
(-)Participation aux bénéfices
=Marge financière
-Impôts
=Résultat après impôts

Pour le calcul du compte de résultat, le modèle au passif permet de modéliser différents mécanismes liés au produit obsèques. Voici une liste non exhaustive et non détaillée de ces mécanismes :

- Réduction de contrats
- Rachat de contrats
- Indexation annuelle du capital décès
- Participation aux Bénéfices
- Etc.

1.1. Catégories d'hypothèses

Les grandes catégories d'hypothèses prises en compte par la maquette sont les suivantes :

- Hypothèses de tarification : table utilisée, taux technique, chargements de gestion et commerciaux…
- Hypothèses de dépenses : frais et commissions
- Hypothèses de rachat : possibilité, loi de rachat…
- Hypothèses de réduction : possibilité, loi de réduction…
- Hypothèses de participation aux bénéfices : possibilité, mode de distribution…

Dans cette partie seront détaillées toutes les hypothèses que l'utilisateur doit définir et toutes les implications de ces hypothèses.

1.1.1. Hypothèses utilisées dans le cadre de la marge technique

Mortalité : pour le produit obsèques, les tables utilisées pour la tarification et les différentes études sont *les tables réglementaires :* les tables TF 00-02 (pour les femmes) et TH 00-02 (pour les hommes).

Réduction: nous disposons des tables donnant des taux de réduction pour chaque année. Rappelons que les contrats à prime unique ne sont pas concernés par la réduction car le client acquitte son engagement dès la souscription.

Rachat : on distingue généralement deux types de rachat : les *rachats structurels* et les *rachats conjoncturels* :

- Lorsque la décision de rachat est prise indépendamment du niveau des taux du marché, on parle de rachat structurel. C'est un rachat récurrent et permanent qui est généralement modélisé en tenant compte de facteurs exogènes tels que l'âge, la fiscalité, le sexe...
- Si la décision de rachat est motivée par une opportunité du marché, on parle de rachat conjoncturel. C'est le cas notamment lorsque les taux montent brusquement car les clients ont alors tendance à racheter leur contrat pour accéder à des taux plus compétitif. Pour tenir ses engagements, l'assureur doit vendre des actifs. Or, une hausse des taux implique une baisse de la valeur des obligations. Donc en les vendant, l'assureur fera une moins-value.

L'assureur doit donc modéliser le comportement de rachats et le prendre en compte dans son étude ALM. Dans notre étude, on fera l'hypothèse qu'il n'y a pas de rachats conjoncturels mais seulement les rachats structurels. Cette hypothèse semble réaliste puisque, contrairement aux contrats épargne où l'assuré cherchera à obtenir le meilleur taux pour valoriser au mieux le montant épargné, pour le produit obsèques l'objectif principal de l'assuré est de se couvrir contre un risque à savoir le risque décès.

1.1.2. Hypothèses utilisées dans le cadre de la marge de gestion

Chargements : les chargements ont pour finalité de subvenir aux frais de toutes natures auxquels l'assureur est contraint pour commercialiser et gérer un contrat d'assurance. L'ensemble des hypothèses concernant les chargements est précisé dans les conditions générales afférant au contrat. Ces hypothèses sont de plusieurs natures :

- Chargement sur prime commerciale (permet de rémunérer les apporteurs, de payer la taxe sur le chiffre d'affaires …)
- Chargement de gestion des contrats et sinistres (en pourcentage du capital, ce chargement est prélevé sur toute la durée du contrat)
- Chargement de gestion des primes, qui paye les frais d'encaissement (en pourcentage du capital, ce chargement est prélevé sur toute la durée de paiement de prime)

Les coûts et commissions : Les coûts (ou frais généraux) regroupent toutes les dépenses internes à l'entreprise générées par la gestion de la structure et des contrats, étant divisés en coûts fixes et coûts variables. Ils sont composés des coûts d'acquisition, des coûts de gestion des primes, des coûts de gestion de règlements des décès.

Le taux de commission dépend du réseau de distribution et notamment du choix de paiements des primes.

1.1.3. Hypothèses utilisées dans le cadre de la marge financière

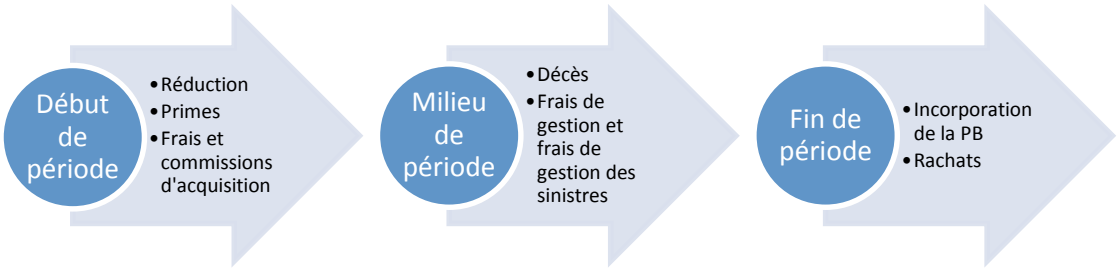
La différence entre le taux de rendement attendu à l'actif (taux de produits financiers bruts) et le taux technique (taux garanti au client dans le tarif) constitue la marge financière (en tenant compte de la clause de participation aux bénéfices, inclus dans le contrat).

1.1.4. Hypothèses utilisées dans le cadre du résultat net

Taux d'imposition : Le résultat de la compagnie est soumis à l'impôt sur les sociétés chaque année, ce qui est tenu en compte dans les calculs.

1.2. *Chronologie des évènements*

Le pas (durée d'une période de projection) de la maquette est annuel.



Chronologie :

- Le mécanisme de réduction a lieu en début d'année avant le paiement des primes.
- Le paiement des primes se fait en début d'année. L'assuré paye sa prime entièrement même s'il sort cette même année.
- Les décès sont supposés avoir lieu en milieu d'année (hypothèse simplificatrice équivalente à celle d'uniforme répartition des décès).
- L'incorporation de la participation aux bénéfices (revalorisation de la provision mathématique, du capital assuré et des primes) est faite en fin d'année.
- Le rachat de contrat est effectué en fin d'année après incorporation de la participation aux bénéfices (les clients qui rachètent leur contrat récupèrent donc la participation aux bénéfices de l'année en cours).

Justification du choix de cette chronologie:

- L'incorporation de la participation aux bénéfices avant le rachat pour ne pas reporter un surplus de participation aux bénéfices sur les contrats restants.
- Rachats et réduction respectivement en fin et début d'année pour la facilité de calcul.

Pour les commissions et frais, la chronologie est la suivante :

- Les frais d'acquisition, les commissions d'acquisition et les commissions d'encaissement sont payés en début d'année.
- Les frais de gestion et les frais de gestion pour sinistres sont payés en milieu d'année.

2. Tarification

Le calcul des primes payées par l'assuré se fait à l'aide des tables de mortalité.

Dans le cadre du produit obsèques, l'assuré a le choix entre trois sortes de primes: prime unique, prime périodique et prime viagère.

Pour chaque type de prime, on calcule la prime pure, la prime d'inventaire et la prime commerciale.

2.1. Notations

CA	Montant de capital décès souscrit	
x_0	Age de l'assuré à la souscription	
k	Ancienneté du contrat (en années)	
p	Durée de paiement des primes (en années) *(uniquement pour les primes temporaires)*	
α_1	Frais de gestion par année de vie du contrat	
α_2	Frais d'encaissement des primes	
φ	Taux de pénalité de rachat 1	5%
ψ	Taux de pénalité de rachat 2	0.5%
$\mu_{PV,x}$ /$\mu_{PP,x}$	Taux de chargement par âge et par formule de paiement	

A_{x_0} : Engagement de l'assureur de payer 1€ au décès de l'assuré d'âge x0 à la souscription

$\ddot{a}_{x_0}$: Espérance de vie de l'assuré d'âge x0

$\ddot{a}_{x_0:p}$: Espérance de vie de l'assuré d'âge x0 tronquée à p années

${}_1IA_{x0}$: Probabilité de verser le cumul des primes versées si l'assuré décède (d'une maladie) la première année *(paramètre de contre-assurance pour la PV ou PP)*

${}_1A_{x0}$: Probabilité de reverser la prime à l'assuré en cas de décès (d'une maladie) la première année *(paramètre de contre-assurance pour la PU).*

Les détails des calculs sont donnés en *annexes 1 et 2*.

2.2. Calcul des primes

Primes pures : La prime pure couvre le risque de décès de l'assuré.

Prime viagère	Prime périodique	Prime unique
$W_{x_0} = \frac{CA \cdot A_{x0}}{(\ddot{a}_{x0} - {}_1IA_{x0})}$	$W_{x_0:p} = \frac{CA \cdot A_{x0}}{(\ddot{a}_{x0:p} - {}_1IA_{x0})}$	$W_{x_0:1} = \frac{CA \cdot A_{x0}}{(1 - {}_1A_{x0})}$

Primes d'inventaire : Dans la prime d'inventaire, les chargements de gestion (ou chargements sur capitaux) sont ajoutés à la prime pure.

Prime viagère	Prime périodique	Prime unique
$W'_{x0} = W_{x0} + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot CA$	$W'_{x0:p} = W_{x0:p} + \alpha_2 \cdot CA + \frac{[\alpha_1 \cdot \ddot{a}_{x0} \cdot CA]}{\ddot{a}_{x0:p}}$	$W'_{x0:1} = W_{x0:1} + \alpha_1 \cdot \ddot{a}_{x0} \cdot CA$

Primes commerciales : La prime commerciale est égale à la prime d'inventaire plus les chargements commerciaux.

Prime viagère	Prime périodique	Prime unique
$W'_{x0} = \frac{W_{x0}}{(1-\mu_{PV,x0})}$	$W'_{x0:p} = \frac{W_{x0:p}}{(1-\mu_{PP,x0})}$	$W'_{x0:1} = \frac{W_{x0:1}}{(1-\mu_{PU,x0})}$

La projection des primes individuelles sert pour le calcul des PM et pour le calcul des primes (reçues) dans le compte de résultat.

2.3. *Calcul des prestations*

Ici, l'assureur est amené à verser deux types de prestations : les prestations en cas de décès et les prestations en cas de rachat.

Décès : le produit obsèques est un produit vie entière. Une prestation est donc versée au décès de l'assuré. Pour l'assureur, les prestations à verser pour l'année t sont :

$$(Prestation\ décès)_t = (Taux\ de\ décès)_t * (montant\ garanti, y\ compris\ réductions) * (1 + taux\ d'indexation)^{t-1}$$

Rachat brut de pénalité :

$$(Prestation\ rachats)_t = (Taux\ de\ rachat)_t * \frac{\left(engagement\ assureur_t - \frac{Nombre\ payeurs\ primes_t}{Nombre\ total\ de\ contrats_t} * engagements\ assuré_t\right)}{(1 + taux\ technique)^{0,5}}$$

3. Le provisionnement : calcul des provisions mathématiques

Les provisions mathématiques sont calculées chaque année par différence des engagements de l'assureur et des engagements de l'assuré. Les engagements de l'assureur sont la somme de l'engagement de capital (la garantie principale) et des frais de gestion. Les engagements de l'assuré sont les primes d'inventaire qu'il s'est « engagé » à payer. Les éléments pris en compte dans ce calcul sont donc la projection des primes et la projection des capitaux décès ainsi que les nombres de commutation issus des tables de mortalité.

La PM individuelle est calculée en fin d'année, mais avant l'incorporation de la participation aux bénéfices (et avant les rachats). Par conséquent la prime payée l'année du calcul n'est « plus » prise en compte, de même que le capital décès assuré cette même année (on considérera uniquement le capital assuré les années suivantes et les primes payées les années suivantes). C'est la provision

mathématique de l'anniversaire qui arrive. La participation aux bénéfices dégagée cette même année n'entrera pas non plus en compte à ce stade du calcul.

3.1. *Engagements de l'assuré*

L'assuré s'engage à verser les primes (d'inventaire), suivant le type de versement choisi lors de la souscription du contrat. L'engagement de l'assuré à l'année $x_0 + k$ est donc :

Prime Viagère	Prime Périodique		Prime Unique
	Si k ≤ p	Si k > p	
$e_{x0+k} = W_{x0} \cdot \ddot{a}_{x0+k}$	$e_{x0+k} = W_{x0:p} \cdot \ddot{a}_{x0+k:p}$	$e_{x0+k} = 0$	$e_{x0+k} = 0$

3.2. *Engagements de l'assureur*

L'assureur s'engage à verser les prestations, c'est-à-dire le capital garanti, au décès de l'assuré. A ceci sont ajoutés les frais de gestion. Dans le cas du produit obsèques, le contrat prévoit également un délai de carence : si le décès non accidentel ou le décès par suicide survient au cours de la première année, l'assureur rembourse à la succession de l'adhérent le montant des cotisations versées nettes de frais. Ces cotisations rentrent donc également dans les engagements de l'assureur.

Option Prime Viagère	Option Prime Périodique		Option Prime Unique
	Si k ≤ p	Si k > p	
$E_{x_0+k} = A_{x0+k} \cdot CA_k + {}_1IA_{x0+k} \cdot w_{x0} + (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot CA_k \cdot \ddot{a}_{x0+k}$	$E_{x_0+k} = A_{x0+k} \cdot CA_k + {}_1IA_{x0+k} \cdot w_{x0:p} + \alpha_1 \cdot CA_k \cdot \ddot{a}_{x0+k} + \alpha_2 \cdot CA \cdot \ddot{a}_{x0+k:p}$	$E_{x_0+k} = A_{x0+k} \cdot CA_k + \alpha_1 \cdot CA_k \cdot \ddot{a}_{x0+k}$	$E_{x_0+k} = A_{x0+k} \cdot CA_k + {}_1A_{x0+k} \cdot w_{x0} + \alpha_1 \cdot \ddot{a}_{x0+k} \cdot CA_k$

Comme le calcul est fait en fin d'année, le capital décès (pour les engagements de l'assureur) pris en compte pour le calcul de la PM de fin d'année k sera le capital de début d'année k multiplié par le taux d'indexation de capital, c'est à dire le capital garanti l'année k+1, hors participation aux bénéfices de l'année k : $CA_k = CA.(1 + T_i)^k$.

3.3. *Provisions mathématiques (PM)*

Les provisions mathématiques d'inventaire sont : $V'_k = E_{x_{0+k}} - e_{x_0+k}$

4. Intérêts techniques

Intérêts techniques : ce sont les intérêts rapportés par la prime pure et la provision mathématique placées au taux technique :

$$IT_t = (prime\ pure_t + PM_{t-1}) * (taux\ technique) - (prestations_t)[(1 + taux\ technique)^{0.5} - 1]$$

Où t est l'année de calcul des intérêts techniques.

Il faut noter que les prestations sont revalorisées sur une demi-année car on suppose que les décès et rachats interviennent en milieu d'année.

Intérêts techniques frais sinistres :

$$IT\ frais\ sinistres_t = \left(chargement\ d'inventaire_t + (PM_{après\ revalo} - PM_{avant\ revalo})_{t-1}\right) * (taux\ technique) - (prestations_t)[(1 + taux\ technique)^{0.5} - 1]$$

$PM_{après\ revalo}$ (resp. $PM_{avant\ revalo}$) désignent les provisions mathématiques après (resp. avant revalorisation).

Total IT :

$$Total\ IT_t = IT_t + IT\ frais\ sinistres_t$$

5. Chargements

Chargements sur prime : ils représentent un pourcentage de la prime commerciale.

Chargements **d'inventaire** :

$$prime\ commerciale\ -\ prime\ pure\ -\ chargements\ sur\ prime.$$

6. Valeur de rachat et réduction

On rappelle qu'en cas de rachat pendant les 10 premières années de l'adhésion, une pénalité de 5 % de la valeur de rachat la première année d'adhésion et de 0.5 % par année sur les autres années sera appliquée. Quel que soit le type de prime, la valeur de rachat est alors:

$$H'_k = V'_k.(1 - \varphi + \psi.\min(10; k))$$

La valeur de réduction est donnée par la formule suivante :

$$I_k = \frac{V'_k}{A_{x+k} + \alpha_1.\ddot{a}_{x+k}}$$

7. Coûts et commissions

Commissions : les commissions sont payées la première année et représentent un pourcentage de la prime commerciale.

Coûts d'acquisition : les coûts sont fixes et sont payés la première année uniquement. Ils représentent un pourcentage de la prime commerciale.

Coûts de gestion des primes : les coûts de gestion des primes à la date t sont égaux à :

$$X\% * prime\ commerciale_t * taux\ inflation_t * \frac{nombre\ de\ contrats_{t-1} + nombre\ de\ contrats_t}{2}$$

La valeur de X% est choisie par l'assureur.

Coûts de gestion des sinistres : les coûts de gestion des sinistres à la date t sont égaux à :

$$X\% * prime\ commerciale_t * taux\ inflation_t * \frac{nombre\ de\ décès_{t-1} + nombre\ de\ décès_t}{2}$$

Où X% est le taux choisi par l'assureur.

8. Calcul de la participation aux bénéfices

Le produit obsèques comporte une participation aux bénéfices dans les conditions prévues par le Code des Assurances dont la part représente 85 % du solde d'un compte financier. Le calcul de la participation aux bénéfices intervient dans la projection des primes (en vitesse V2) et dans la projection du capital décès (en vitesse V1 et en vitesse V2). Il intervient également dans le calcul des provisions mathématiques (à travers le capital et les primes si revalorisation). Il influe enfin sur la valeur de rachat des contrats et permet le calcul de la marge financière.

Le capital à la fin de l'année, revalorisé au taux de PB est :

$$Capital\ décès_{fin\ t} = (1 + taux\ de\ PB_t) * Capital\ décès_{début\ t}$$

On applique chaque année à la prime de l'année k-1 le taux de revalorisation (taux PB fin d'année) calculé à partir de la participation aux bénéfices dégagée l'année k-1 pour obtenir la prime de l'année k. Cela revient aussi à multiplier la prime de première année par un taux de revalorisation cumulatif.

$$Prime_{t+1} = (1 + taux\ de\ PB_t) * Prime_t$$

La formule de revalorisation du capital donnée ci-dessus est identique en V1 et en V2. Mais le taux de participation aux bénéfices n'est pas le même. Ce taux sera plus élevé en V2 qu'en V1.

Chapitre 3 : Modélisation des actifs

L'allocation d'actifs nécessite une évaluation de l'ensemble des actifs du portefeuille. Ici, le portefeuille d'actifs est composé de :

- quatre indices boursiers : Nikkei, Eurostoxx, S&P 500 et FTSE
- l'immobilier
- quarante obligations zéro-coupon de maturité 1 à 40 ans

Nous devons générer des chroniques aléatoires d'actifs de taux, d'actions et d'immobilier mais également de l'inflation. Suivant l'utilisation des scénarii, les simulations peuvent être effectuées en univers « Risque-Neutre » ou « Real World ». Dans cette partie, nous allons expliquer le choix de l'univers « Real World » pour l'étude ALM ainsi que les différents modèles de taux utilisés pour obtenir les scénarii stochastiques Real World.

1. « Risque neutre » ou « Real world » ?

Les investisseurs ont habituellement une certaine aversion au risque. Ils préfèrent un gain relativement sûr à un gain bien plus important, mais aléatoire. Il y a donc une demande moins forte pour les choses risquées que pour les choses non risquées. Ainsi on observe dans la réalité que les actifs les plus risqués (ceux avec une plus grande volatilité de rendement) ont une espérance de rendement (un rendement moyen) historiquement plus élevée que les actifs moins risqués (avec une volatilité moindre).

De ce fait, les investisseurs exigent en général pour investir dans une entreprise (par l'achat d'actions par exemple) que le rendement attendu soit supérieur à celui d'un placement non risqué, c'est-à-dire celui des emprunts d'État. Cette différence de taux, ce revenu supplémentaire espéré exigé, est la prime de risque. Le taux correspondant, qui est la somme du taux non risqué et de la prime de risque est le taux risqué. Ainsi, les scénarii dans lesquels les actifs risqués (ceux dont le résultat est incertain) ont une prime de risque sont appelé scénarii Real World.

Cependant, sous certaines conditions, il est possible de calculer le prix d'un actif (une option est un actif où les cash flows futurs sont incertains…) en supposant l'absence de prime de risque, donc avec des scénarios où tous les actifs ont en moyenne le même rendement (égal au taux sans risque), quel que soit leur volatilité. Ce sont les scénarii Risque Neutre. Dans ces scénarii, tous les actifs actualisés sont des martingales c'est à dire que si nous faisons la moyenne sur les scénarii de chaque actif actualisé (multiplié par le déflateur du scénario) nous retrouvons le montant initial investi sur cet actif. Cet univers est indispensable pour valoriser des options car il empêche toute opportunité d'arbitrage.

Les scénarii Risque Neutre ne permettent pas de faire des études ALM puisque toutes les stratégies d'allocation donnent le même rendement. Nous utiliserons donc des scénarii Real World.

2. Modèles financiers

2.1. *Modèle de diffusion des taux instantanés*

Dans cette partie, nous allons expliquer le modèle de Karasinski à 2 facteurs utilisé pour générer les scénarii de taux. L'utilisation d'un modèle à 2 facteurs permet la reproduction de la majorité des courbes de taux possibles. De plus, le modèle de Karasinski est un modèle en log ce qui interdit des taux négatifs.

L'équation de diffusion en *Risque Neutre* s'écrit :

$$d(\ln(r_t)) = \alpha_1(\ln(m_t) - \ln(r_t))dt + \sigma_1 dW_t^1$$
$$d(\ln(m_t)) = \alpha_2(\mu - \ln(m_t))dt + \sigma_2 dW_t^2$$

En *Real World*, on a:

$$d(\ln(r_t)) = \alpha_1(\ln(m_t) - \ln(r_t))dt + \sigma_1(dW_t^1 + \gamma dt)$$
$$d(\ln(m_t)) = \alpha_2(\mu - \ln(m_t))dt + (\sigma_2 dW_t^2 + \gamma dt)$$

- W^1 et W^2 désignent des mouvements browniens indépendants
- $\alpha_1 et\ \alpha_2$ correspondent à la vitesse de retour à la moyenne.
- $\sigma_1 et\ \sigma_2$ désignent les volatilités du taux instantané et du taux moyen terme m.
- $\ln(r_0)$et $\ln(m_0)$ sont respectivement, le log du taux instantané initial et le log du taux moyen terme initial
- μ est le log du taux infini
- γ est un paramètre qui permet de jouer sur le niveau de la prime de risque. En effet, un gamma permet d'augmenter le taux infini:

En effet, $\ln r \xrightarrow[\infty]{} \ln m + \gamma.\frac{\sigma_1}{\alpha_1}$ et $\ln m \xrightarrow[\infty]{} \mu + \gamma.\frac{\sigma_2}{\alpha_2}$ $\Longrightarrow$ $\ln r \xrightarrow[\infty]{} \mu + \gamma.(\frac{\sigma_1}{\alpha_1} + \frac{\sigma_2}{\alpha_2})$

Processus de calcul des courbes des taux à partir des coefficients de calibration :

A partir des deux élasticités, des deux volatilités, du taux limite et des deux conditions initiales des taux r(0) et m(0), nous pouvons faire diffuser le taux instantané. De ces diffusions, nous pouvons calculer les zéro Coupons pour chaque trajectoire. La moyenne des Zéro Coupons pour chaque maturité nous permet de retrouver la courbe des taux moyenne.

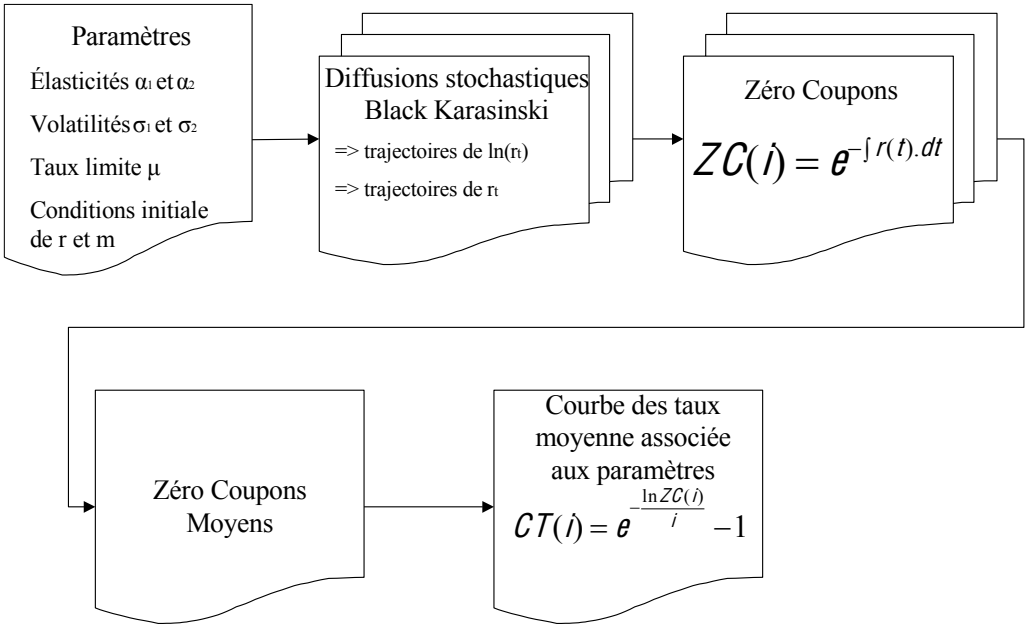


Schéma donnant la courbe des taux issue des paramètres de calibration

Calibration :

La calibration se fait par itération, le but étant d'approcher au mieux la courbe "target" en jouant sur les différents paramètres.

2.2. Modélisation des actions et de l'immobilier

Le modèle utilisé pour générer le rendement des scénarios est celui de Black & Scholes. La dynamique suivie est une loi log normale :

Risque Neutre :

$$dln(S_t) = \left(r_t - \frac{\sigma_s^2}{2}\right).dt + \sigma_s.dW_t^s$$

Real World :

$$dln(S_t) = \left(r_t + p - \frac{\sigma_s^2}{2}\right).dt + \sigma_s.dW_t^s$$

Avec:

- W^s le brownien corrélé à W^1 avec $corr(W^s, W^1) = \rho$
- r_t est le taux nominal instantané
- σ_t étant la volatilité
- p étant la prime de risque qui rémunère l'incertitude du résultat (risk premium).

L'immobilier est modélisé de la même manière que les actions. Seuls les volatilité et le rendement changent.

2.3. *Modélisation de l'inflation*

L'inflation est calculée comme la différence entre le taux instantané nominal (Black Karasinski) et le taux instantané réel (Vasicek). L'équation de diffusion s'écrit:

Risk Neutre :

$$dr_t = \alpha_1(m_t - r_t).dt + \sigma_1 dW_t^1$$
$$dm_t = \alpha_2(\mu - m_t).dt + \sigma_2 dW_t^2$$

Real World :

$$dr_t = \alpha_1(m_t - r_t).dt + \sigma_1(dW_t^1 + \gamma.dt)$$
$$dm_t = \alpha_2(\mu - m_t).dt + \sigma_2(dW_t^2 + \gamma.dt)$$

Les notations sont les même que celles de Black Karasinski.

Calibration :

Les données historiques de l'inflation ainsi que ses anticipations permettent de calibrer le modèle de Vasicek deux facteurs du taux instantané réel.

3. Limites

Pour chaque type de scénarii (Risque Neutre et Real World), on a les limites suivantes :

Scénarii Risque Neutre

- Absence d'opportunité d'arbitrage (il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future) : il existe une probabilité risque neutre sous laquelle les prix actualisés sont des martingales
- Le marché est supposé liquide et complet
- Le temps est discret

Scénarii Real World

- Les volatilités sont constantes
- Le marché est supposé liquide et complet

4. Conclusion

La valorisation d'une compagnie d'assurance vie repose sur une modélisation actif-passif, c'est-à-dire à la projection stochastique des cash flows futurs de l'entreprise. Cette modélisation tient compte des interactions actif-passif.

Ces interactions comprennent l'impact du comportement des actifs sur la provision mathématique, la clause de participation aux bénéfices, le comportement des assurés (option de rachat, longévité,…).

La modélisation actif-passif est effectuée sous Excel. Elle permet de simuler le comportement d'un contrat moyen obsèques face à diverses évolutions des marchés.

Chapitre 4 : Caractéristiques du Model

1. Caractéristiques principales du Model Point

Nous supposons les caractéristiques principales du Model Point (MP) suivantes :

- A la souscription, le MP est composé de 70% d'hommes et de 30% de femmes
- L'âge de souscription moyen du MP est 65 ans
- Le capital garanti est de 4500€
- Le taux d'indexation est égal à 0
- Le taux technique est de 1,75%
- Tables décès : TH00-02 et TF00-02
- Table Rachat : constant 3%
- Chargements sur prime : 20% de la prime commerciale
- Commissions : 10% de la prime commerciale (la première année)
- Coûts d'acquisition : 5% de la prime commerciale

On supposera que les flux de prestations sont déterministes. Il faut noter ici que l'effectif des assurés doit être suffisamment important pour que la loi des grands nombres puisse s'appliquer afin de ne pas avoir une éventuelle sous (sur)-mortalité.

2. Evolution du nombre de contrats

Le décès est le risque principal auquel est soumis le produit obsèques. Nous allons présenter l'évolution du nombre de contrats du MP.

2.1. Cas sans rachat

Au début de l'année de souscription, le model point est composé de 70% d'hommes et de 30% de femmes. De manière général, le nombre total de contrats présents dans le model point va diminuer au cours du temps car le nombre de décès va augmenter. Etant donné que dans la population française les hommes décèdent plus rapidement que les femmes (tables TH00-02 et TF00-02), le nombre d'hommes dans le model point va donc diminuer de manière plus rapide que celui des femmes.

Ainsi, le nombre de contrats « hommes » dans le model point est calculé à la date (âge) t grâce à la formule suivante :

$$(Nombre\ contrats\ H)_t = (Nombre\ contrats\ H)_{t-1} * (1 - (taux\ décès\ H)_t)$$

Où le taux de décès est obtenu avec la table TH00-02 :

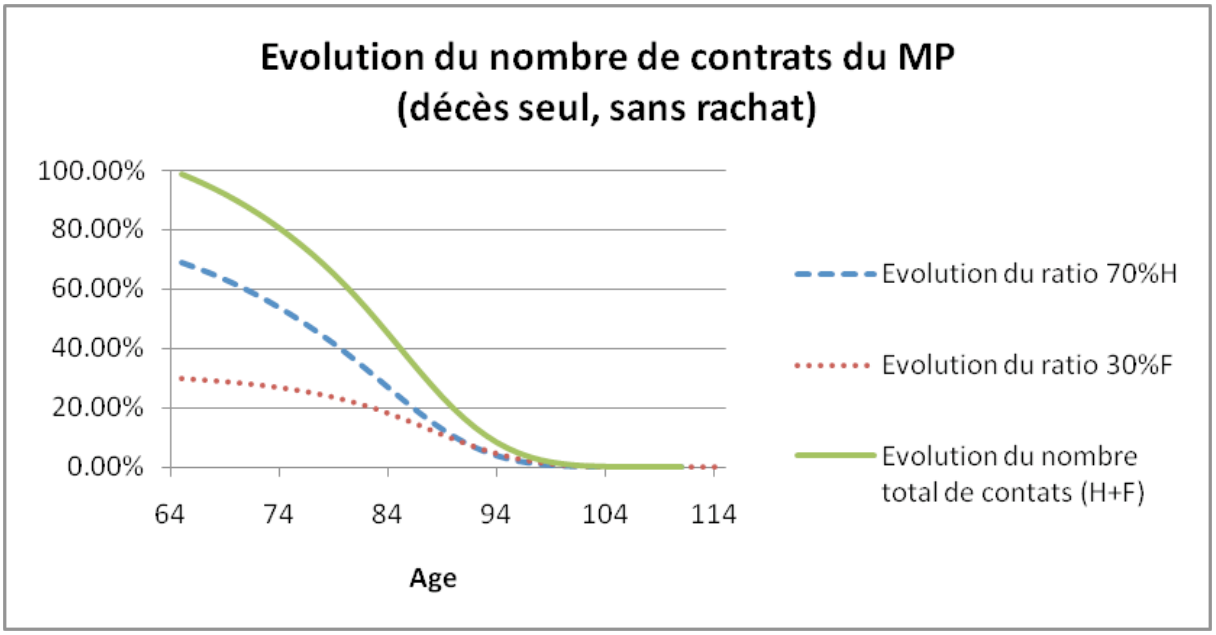
$$(taux\ décès\ H)_t = \frac{l_t - l_{t+1}}{l_t}$$

avec l_t le nombre de survivants à la date t.

Il en est de même pour le nombre de contrats femmes :

$$(Nombre\ contrats\ F)_t = (Nombre\ contrats\ F)_{t-1} * (1 - (taux\ décès\ F)_t)$$

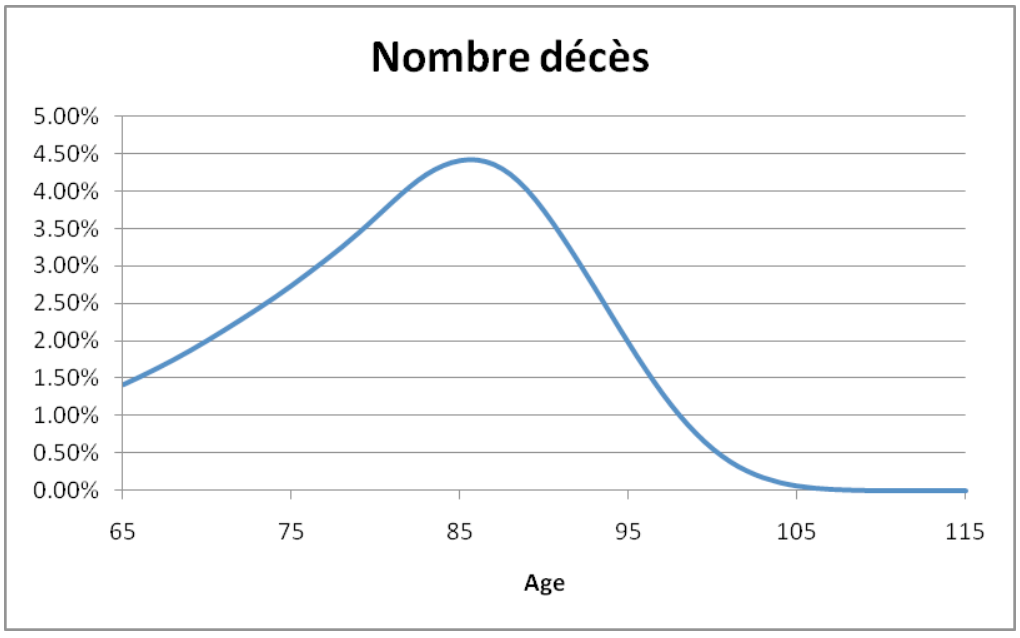
Le graphe suivant permet d'illustrer l'ensemble de ces résultats.



Le nombre total de décès dans le portefeuille étudié est alors donné par la formule suivante:

$$(Nombre\ décès)_t = (Nombre\ contrats\ H)_{t-1} * (taux\ décès\ H)_t + (Nombre\ contrats\ F)_{t-1} * (taux\ décès\ F)_t$$

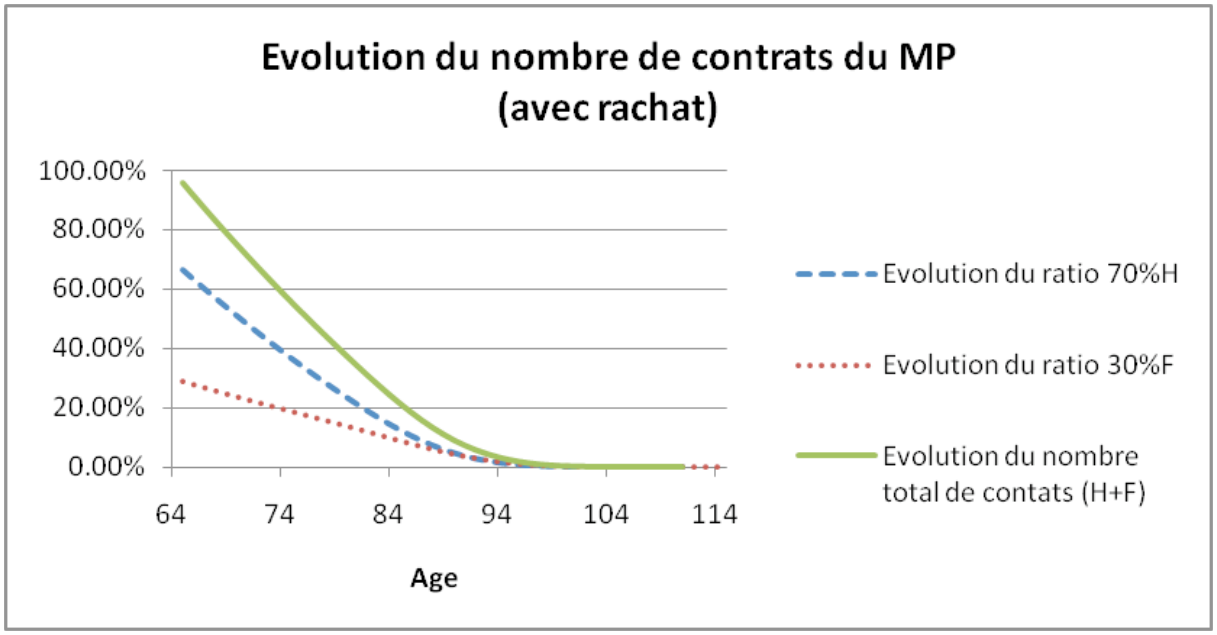
Pour un portefeuille composé d'un contrat, le nombre de décès (ou la répartition des décès) est représenté comme suit :



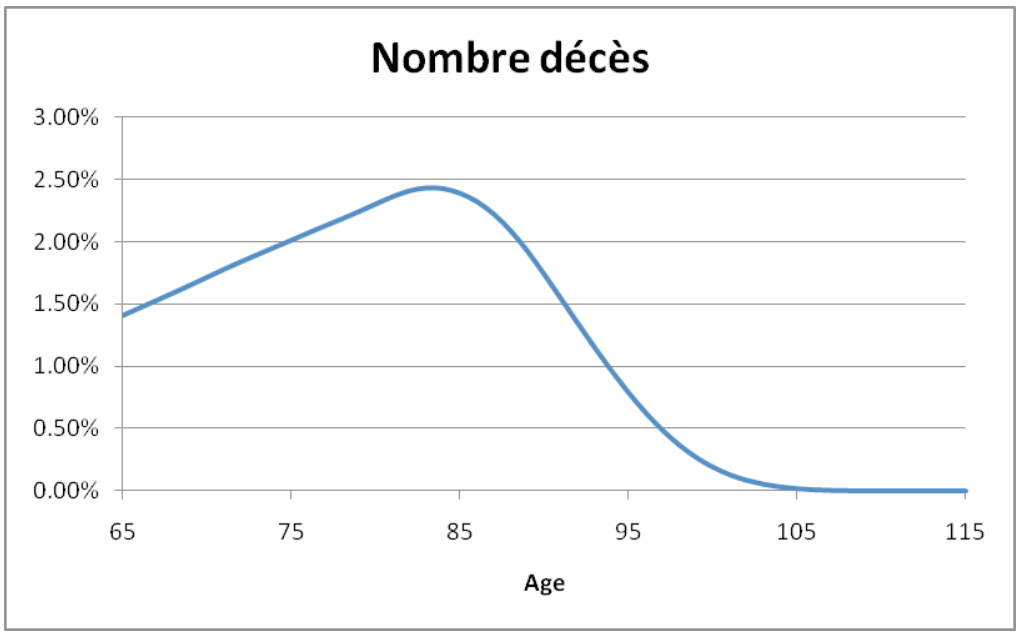
2.2. Cas avec rachat

Dans le cas où il y a des rachats, les assurés sortent du portefeuille de contrats. La formule qui donne le nombre de contrats dans le MP devient alors :

$$(Nombre\ contrats\ H)_t = (Nombre\ contrats\ H)_{t-1} * (1 - (taux\ décès\ H)_t) * (1 - (taux\ rachat\ H)_t)$$

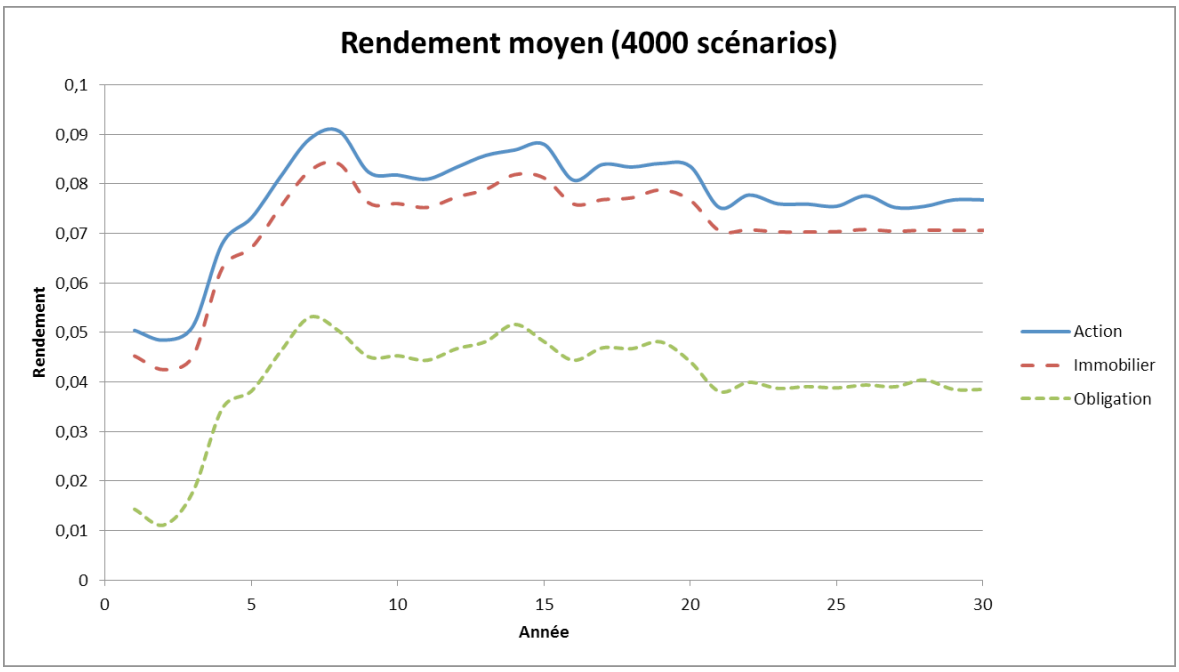


Le nombre de décès du MP est impacté par les rachats et on obtient le graphe suivant pour un portefeuille composé d'un contrat :

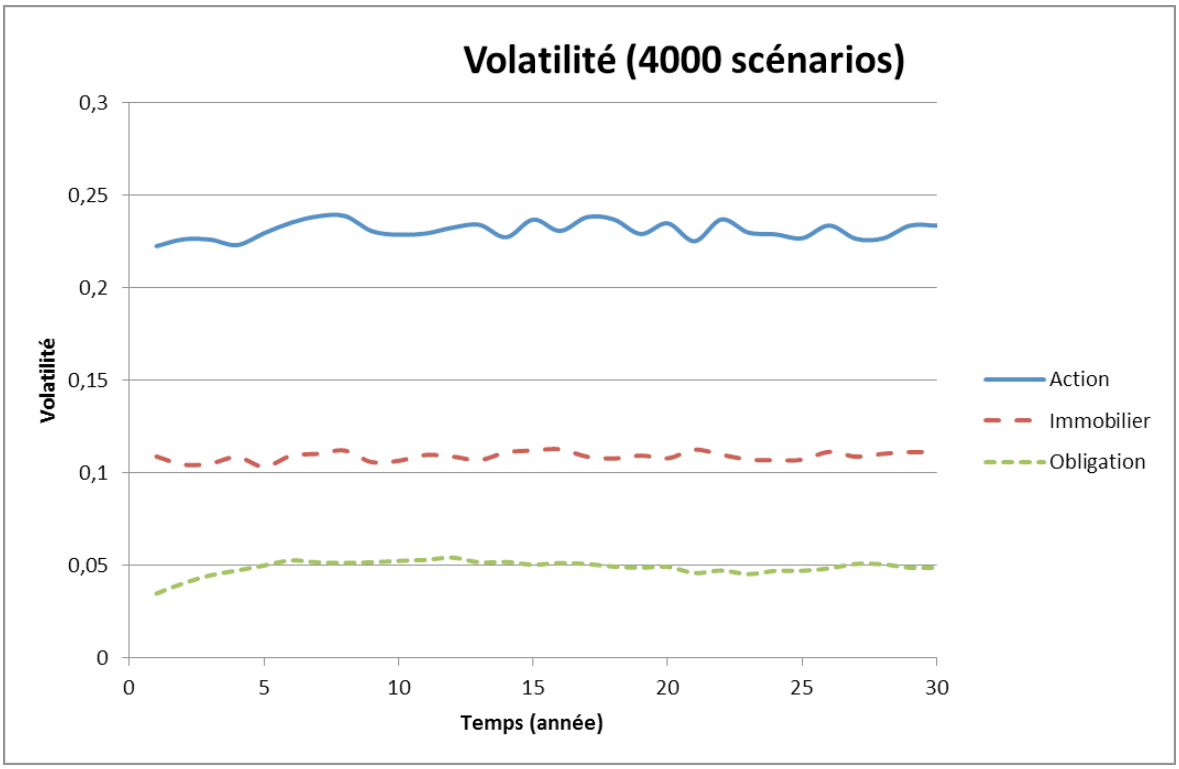


3. Rendement et volatilité des actifs

On calcule le rendement moyen des trois classes d'actifs sur les 4000 scénarios.



De même, on obtient le graphe des volatilités :



La classe action a des rendements très élevés, pour des volatilités élevées. L'immobilier donne des rendements très proches de ceux de la classe action mais pour des volatilités beaucoup plus faibles. La poche « obligation » constituée de l'obligation de duration10 ans donne des rendements faibles, pour des volatilités faibles.

Partie III : Méthodes d'allocation d'actifs

Dans cette partie nous allons nous intéresser à quatre principales méthodes permettant de déterminer l'allocation d'actifs pour le produit obsèques.

Dans un premier temps nous étudierons une méthode qui ne prend en compte que des obligations zéro-coupon : c'est le Maturity Matching. Nous verrons ensuite deux méthodes proposées par F. Planchet et P. Thérond. La première méthode est basée sur le calcul de la probabilité de ruine de l'assureur, observée en projetant les flux sur le long terme. La deuxième méthode consiste à maximiser les fonds propres économiques que nous définirons par la suite. Nous nous intéresserons enfin au calcul du SCR et son lien avec l'allocation d'actifs.

Plusieurs de ces méthodes font appel aux techniques de Monte Carlo. Nous rappelons que les méthodes de Monte Carlo sont des méthodes numériques, qui utilisent des tirages aléatoires pour réaliser le calcul d'une quantité déterministe. Ici, elles vont nous permettre de calculer numériquement des espérances. Ces méthodes sont basées sur le résultat de la loi forte des grands nombres.

Par ailleurs, sauf pour la méthode Maturity Matchning, on considérera trois grandes classes d'actifs : action, immobilier et obligation. L'action désignera la classe formée de l'ensemble des quatre indices : Nikkei, Eurostroxx, S&P 500 et FTSE. La classe obligation désigne l'obligation de duration 10 ans.

Chapitre 1 : Maturity Matching

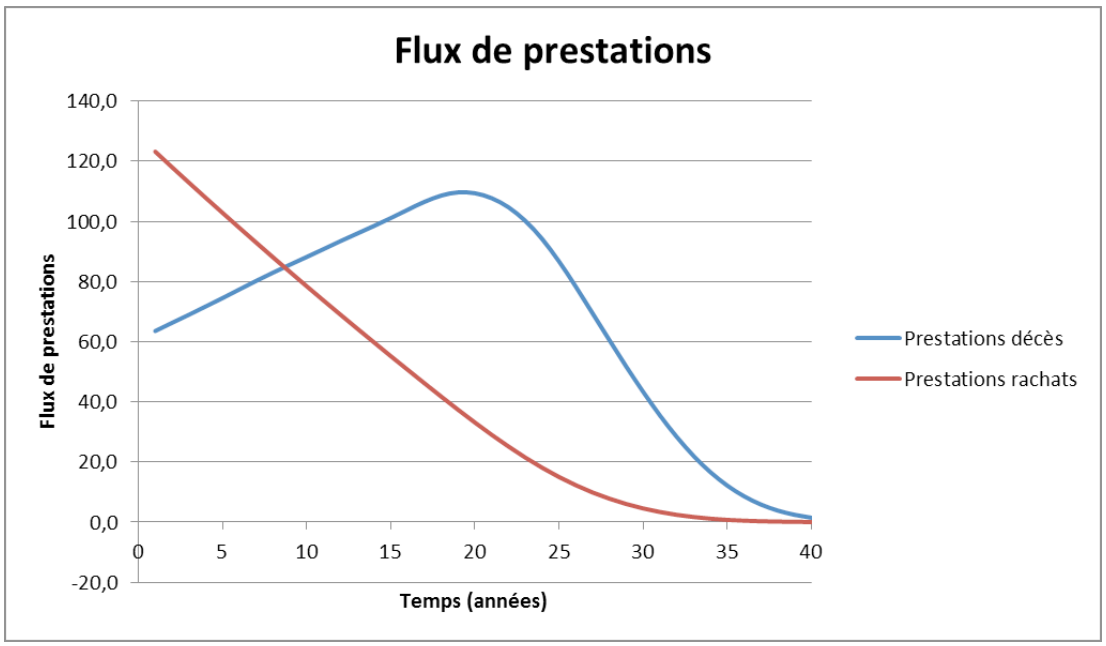
Cette méthode consiste à sélectionner un portefeuille obligataire dont les flux futurs permettront de faire face aux engagements de l'assureur pour coordonner ainsi les flux de l'actif à ceux du passif. Une multitude de portefeuilles permettent en général de produire les flux futurs attendus.

Dans la suite de cette étude, nous nous placerons dans le cas où les assurés paient une prime unique.

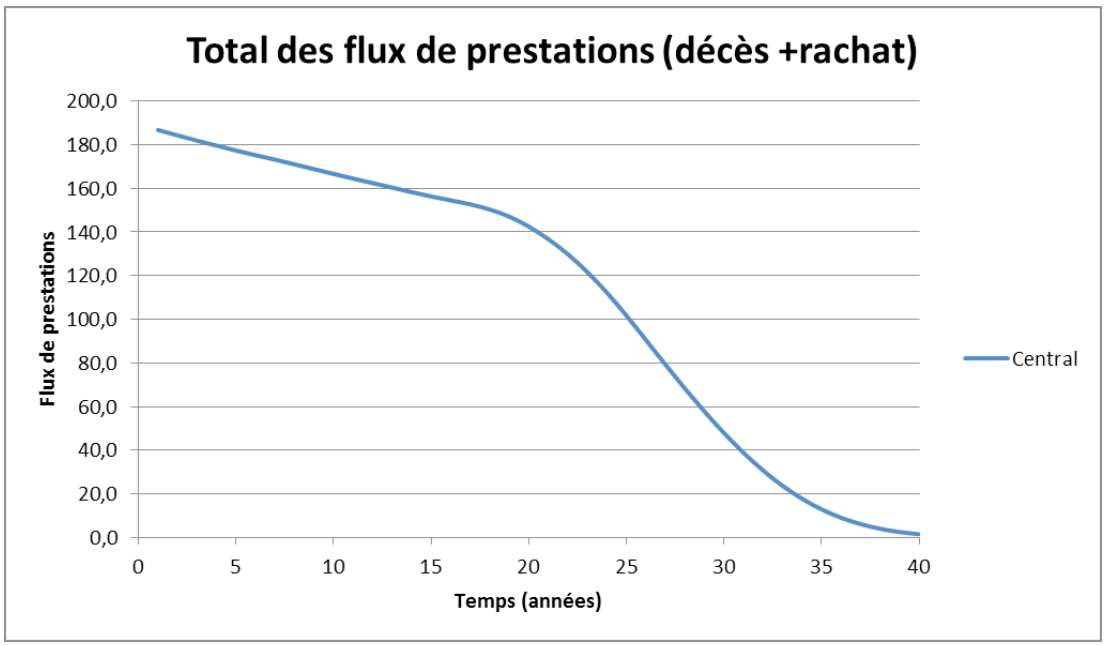
1. Flux de prestations

Pour commencer, nous devons déterminer la structure des flux futurs probables de prestations pour chaque année de projection. Cette structure servira de base pour la construction de notre portefeuille d'actifs.

Nous supposons que les flux de prestations sont déterministes et que les projections sont effectuées sur 40 ans. Avec les hypothèses du model point décrites dans le chapitre 1, on obtient le graphe ci-dessous pour les flux de prestations modélisés au passif.



Dans la suite de l'étude, on désignera par « cas central » le total des flux de prestations représenté dans le graphe ci-dessous :



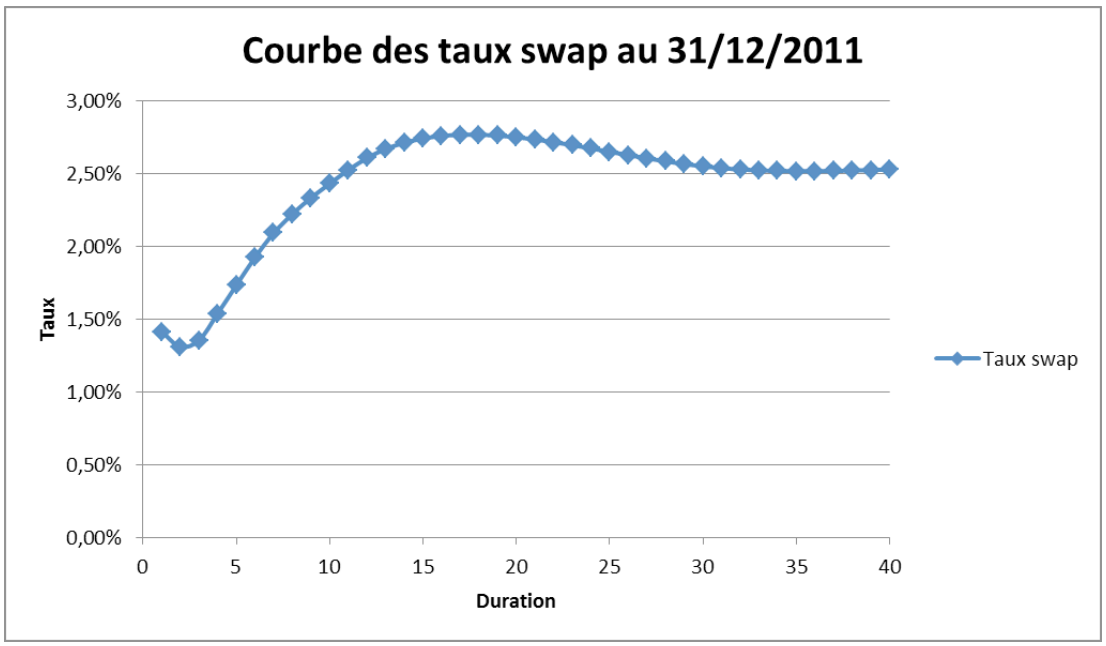
Nous avons obtenu les prestations probables que l'assureur devra verser dans le futur.

2. Allocation d'actifs

A partir des prestations obtenues, il nous est à présent possible de construire un portefeuille d'actifs qui permet de faire face à ces prestations.

Nous disposons de quarante obligations de nominal 1 dont les maturités varient entre 1 et 40 ans. Pour chaque année de projection, nous choisissons l'obligation dont l'échéance se situe au même moment que le versement des flux de prestations probables. A t=0, nous cherchons le montant des primes à placer dans chaque type d'obligation afin que, à chaque instant t, les flux à l'actif puissent couvrir les flux de prestations au passif. Nous aurons ainsi « matché » les flux de l'actif à ceux du passif.

Pour cela, nous allons dans un premier temps actualiser les flux de prestations à la courbe des taux swaps suivante :



Pour pouvoir déterminer l'allocation d'actifs, nous posons les notations suivantes :

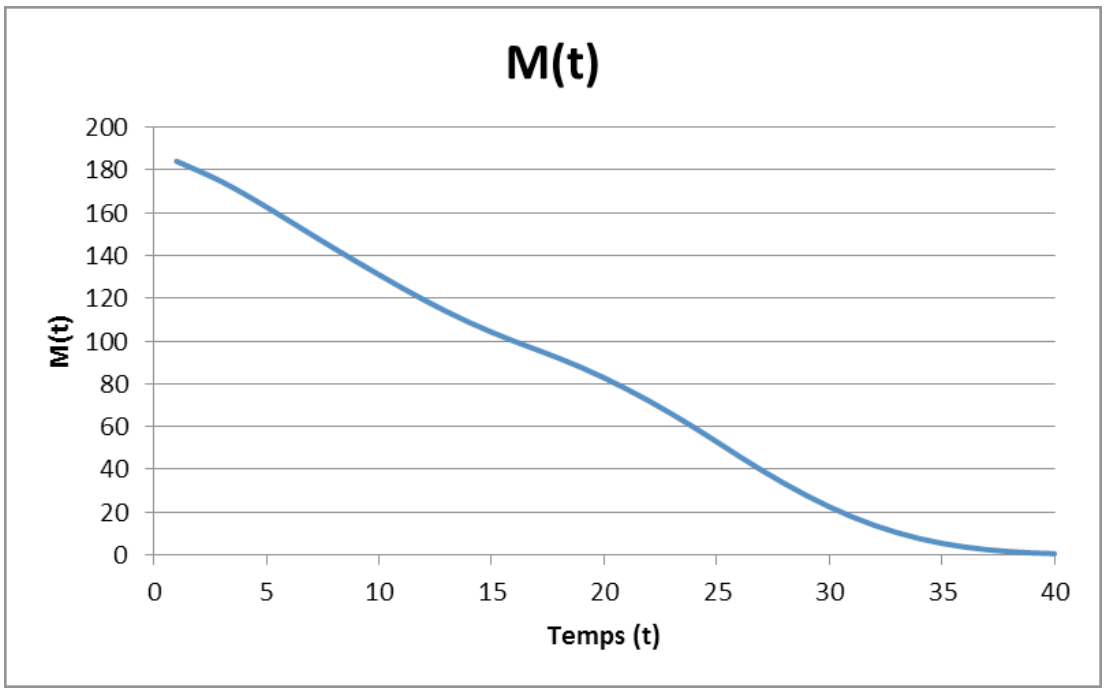
$\boldsymbol{\tau_t}$ le taux donné par la courbe des taux swap, pour la maturité t.
$\boldsymbol{F_t}$ le flux de prestation qui aura lieu à la date t
$\boldsymbol{M_t}$ le montant à placer dans une obligation de maturité t
$\boldsymbol{Q_t}$ poids de l'obligation de maturité t dans le portefeuille

Alors :

$$\boldsymbol{M_t = \frac{F_t}{(1+\tau_t)^t}}$$

$$\boldsymbol{Q_t = \frac{M_t}{\sum_{t=1}^{40} M_t}} \; avec \; \boldsymbol{\sum_{t=1}^{40} Q_t = 1}$$

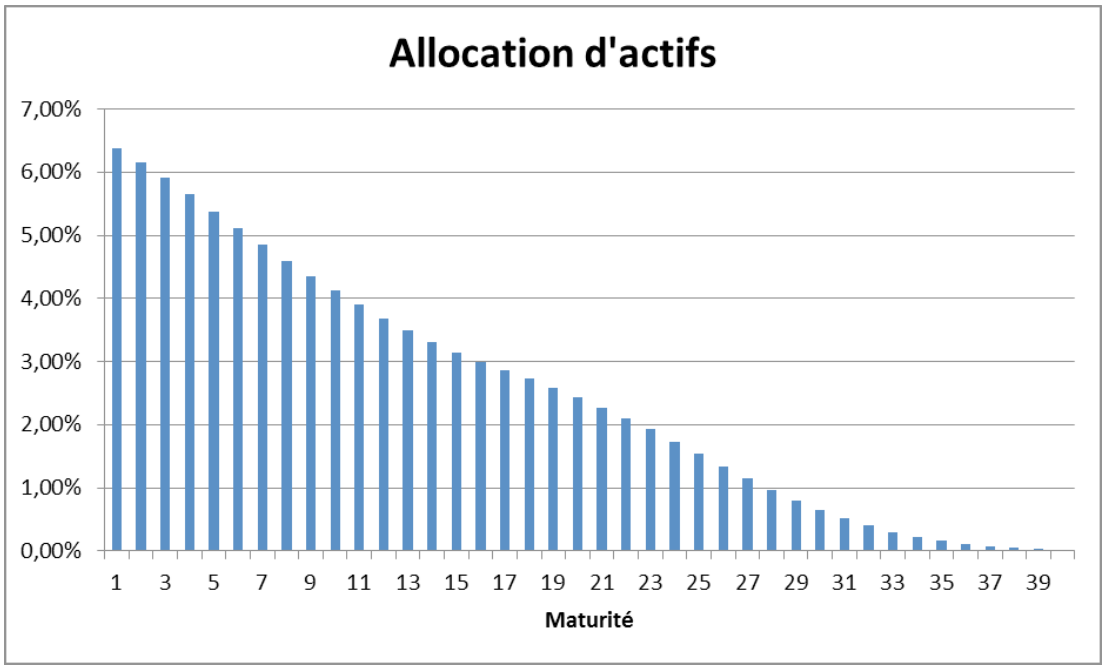
L'actualisation des prestations avec la courbe des taux swaps donne :



L'allocation stratégique obtenue est alors :

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q_t	6,39%	6,15%	5,91%	5,65%	5,38%	5,11%	4,85%	4,60%	4,35%	4,12%
T	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Q_t	3,90%	3,69%	3,49%	3,31%	3,15%	3,00%	2,86%	2,73%	2,59%	2,44%
T	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Q_t	2,27%	2,10%	1,92%	1,73%	1,54%	1,34%	1,15%	0,97%	0,80%	0,65%
T	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Q_t	0,52%	0,40%	0,30%	0,22%	0,16%	0,11%	0,07%	0,05%	0,03%	0,02%

Allocation d'actifs

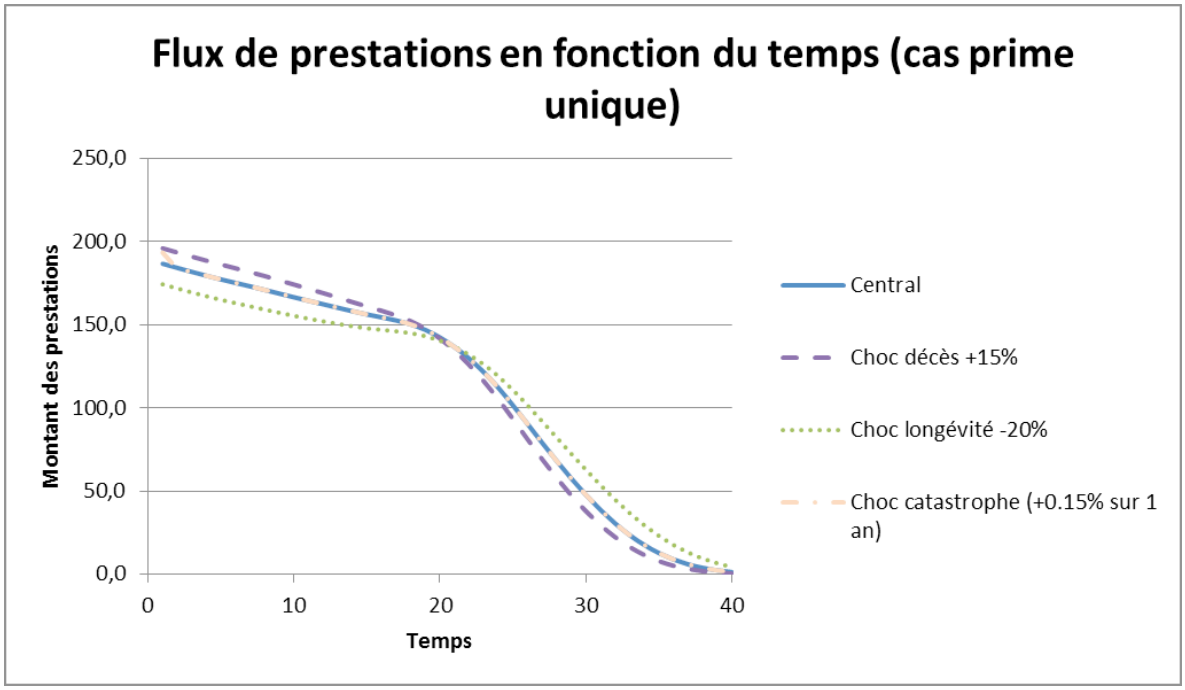


Plus la maturité de l'obligation est élevée, moins l'allocation affectée à l'obligation correspondante est élevée. Ceci s'explique d'une part par le montant des prestations à payer qui diminue dans le temps et d'autre part par l'actualisation des flux de prestations avec des taux qui augmentent au cours du temps.

3. Chocs sur les flux de prestations

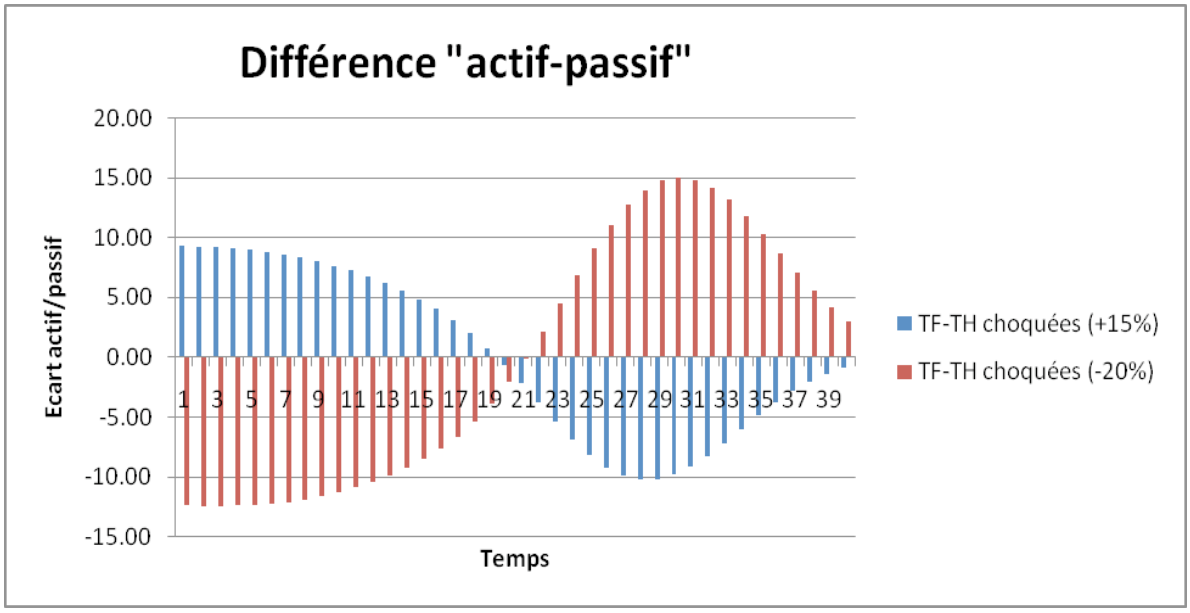
En assurance vie, l'assureur est exposé à un risque : la mortalité effective peut s'écarter de la mortalité prévue par les tables réglementaires. Plus précisément, le produit obsèques est soumis à trois types de risques techniques: risque de mortalité, de longévité et catastrophe. Nous allons étudier l'impact que pourrait avoir un choc sur ces risques.

Pour cela, nous allons appliquer les chocs QIS intervenant dans le calcul du SCR à chacun de ces risques. Les variations des flux de prestations pour les différents chocs sont données dans le graphique ci-dessous :



On remarque que les graphes correspondant au cas central et au « choc catastrophe » sont confondus sauf en année 1. Une très faible différence, due au choc catastrophe sur un an, existe entre les valeurs des prestations la première année. Mais on peut considérer que ce choc n'a pas beaucoup d'impact sur les prestations et le négliger dans la suite de notre étude.

On suppose que l'assureur ne s'aperçoit pas de la dérive des risques (longévité ou mortalité). Le graphique suivant nous donne les écarts entre les flux à l'actif et les flux au passif pour les différents cas. Des écarts positifs signifient que les flux à l'actif sont plus élevés que les flux au passif et des écarts négatifs que les flux au passif sont plus élevés que ceux à l'actif. Dans les deux cas, l'allocation choisie ne permet pas de « matcher » les flux de l'actif à ceux du passif. Le deuxième cas est plus problématique puisque des écarts négatifs signifient que l'assureur n'est pas en mesure de payer le montant total des prestations.



Remarque : les risques de rachats donnent les mêmes conclusions.

4. Conclusion

Ici nous avons fait une première étude de la méthode dans le cas d'un Model Point à prime unique. Une méthode similaire mais plus élaborée pourrait être mise en place dans le cas d'une prime périodique (ou viagère). On devra alors utiliser des taux termes-termes pour déterminer l'allocation d'actifs.

Grâce au Maturity Matching, les besoins de l'assureur durant une année t sont balancés par les entrées de flux générées par les actifs dans cette même année. Les flux futurs à l'actif sont ainsi sécurisés. Or, l'évolution prévisionnelle des engagements n'est jamais certaine, ce qui rend la méthode de Maturity Matchning aléatoire comme nous avons pu le constater avec les différents chocs QIS.

Par ailleurs, l'allocation d'actifs en assurance ne doit non seulement permettre de payer les prestations mais également d'optimiser le rendement. Cette méthode n'est pas optimale du point de vue du rendement car les obligations donnent une performance moindre que les actions et l'immobilier.

Et enfin, l'effet de diversification n'est pas pris en compte avec un tel portefeuille.

Chapitre 2 : Probabilité de ruine

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à une méthode proposée par F. Planchet et P. Thérond qui consiste à contrôler la probabilité de ruine de la société. Il y a ruine de l'assureur lorsque l'actif ne suffit plus à couvrir les provisions de l'assureur.

Nous intéressons à la probabilité de ruine de l'assureur sur un horizon de 60 ans, c'est-à-dire l'horizon sur lequel sont effectuées les projections des flux.

Pour cette méthode, on s'intéressera au seul cas de la prime unique.

1. Notations

On note:

$\boldsymbol{L_t}$ le montant des provisions mathématiques à la date t

$\boldsymbol{F_t}$ le flux de prestation qui aura lieu à la date t

$\boldsymbol{A_t}$ la valeur des placements à la date t

$\boldsymbol{E_t}$ le montant des fonds propres à la date t

$\boldsymbol{i}$ le taux d'intérêt technique

$\boldsymbol{\widetilde{R}_t}$ le rendement aléatoire du portefeuille financier entre les dates t-1 et t

Le bilan simplifié de l'assureur peut alors s'écrire :

Bilan en 0	
A_0	E_0
	L_0

La provision mathématique en t=0 est :

$$\boldsymbol{L_0 = \sum_{t=1}^{60} \frac{F_t}{(1+i)^t}}$$

Le bilan de l'assureur évolue de la manière suivante :

$$\boldsymbol{L_{t+1} = (1+i)L_t - F_{t+1}}$$
$$\boldsymbol{A_{t+1} = \left(1+\widetilde{R}_{t+1}\right)A_t - F_{t+1}}$$
$$\boldsymbol{E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1}}$$

2. Probabilité de ruine

Il y a ruine de l'assureur lorsque les fonds propres sont réduits à 0. Notons $\boldsymbol{\tau}$ l'instant de ruine de l'assureur :

$$\tau = Inf\{t \in \mathbf{N} | E_t < 0\}$$

Soit N le nombre de trajectoires simulées des actifs et j l'allocation du portefeuille d'actifs. Un estimateur empirique de la probabilité de ruine est :

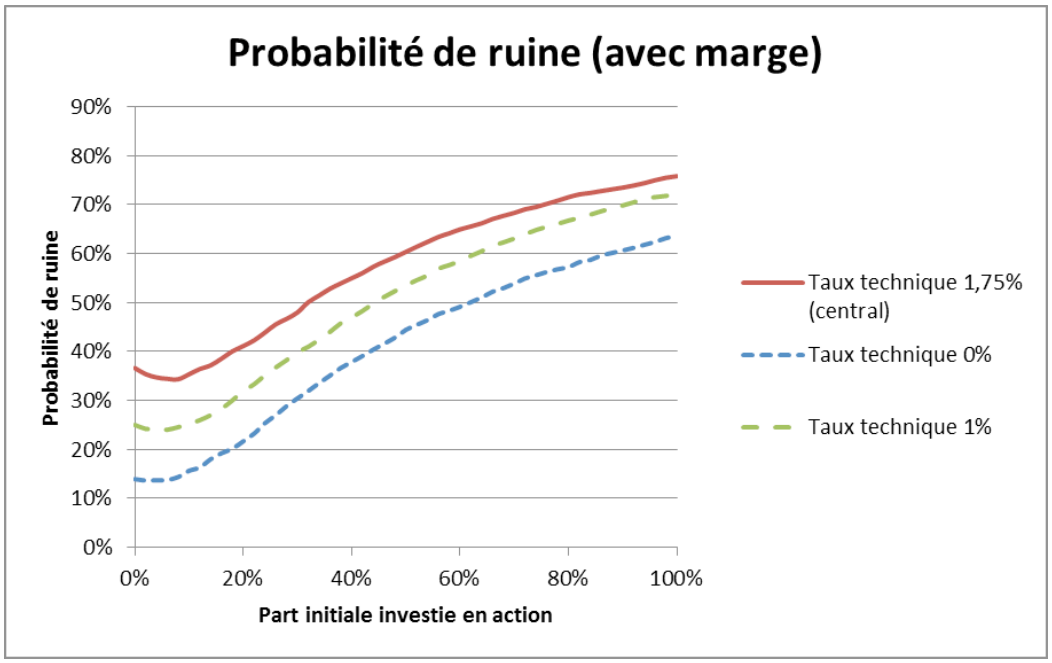
$$1 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\prod_{k\geq 1} 1_{[0;\infty[}\left(e_k^n(j)\right)$$

Où $e_k^n(j)$ est la réalisation de la variable aléatoire E_t à l'instant t, pour la trajectoire n.

Ici, nous disposons de trois actifs (action, immobilier et obligation de duration 10 ans) et de 4000 trajectoires simulées pour chacun de ces actifs. Pour simplifier l'étude et afin de voir l'impact de chaque actif sur la probabilité de ruine, nous allons effectuer l'étude en prenant les actifs deux à deux.

En posant $E_0 = 4\%L_0$ (marge de sovabilité réglementaire en solvabilité 1 (cf. Partie I, chapitre 3)), on obtient les résultats suivants :

- Action et obligation

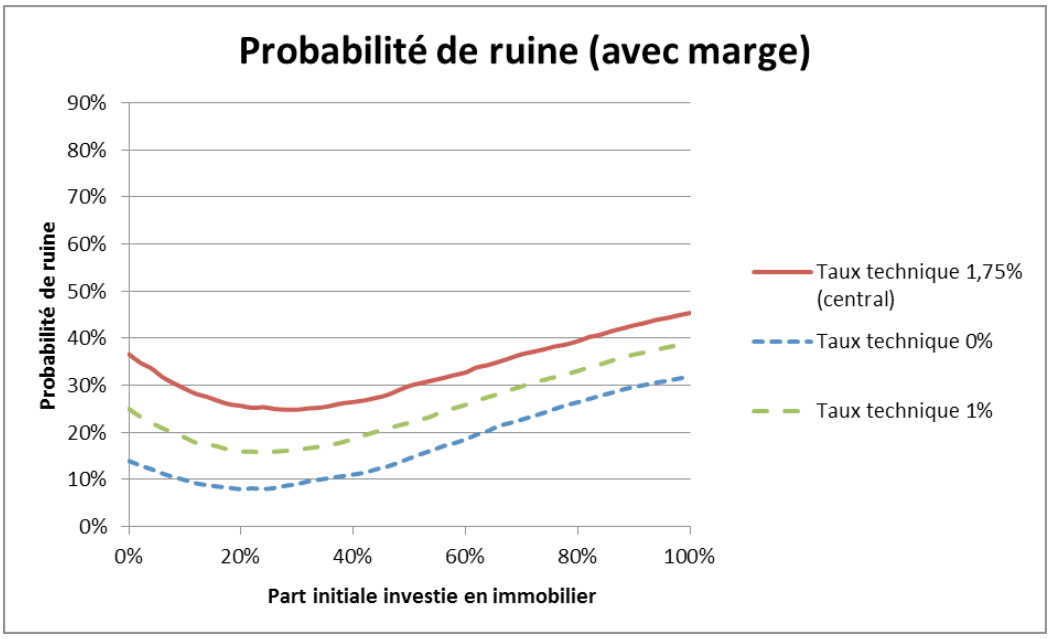


Probabilité de ruine en fonction de la part investie en action et en obligation (0% immobilier)

Nous rappelons que l'estimateur de la probabilité de ruine est calculé grâce à des projections des fonds propres sur 60 ans. Le nombre élevé d'années de projection explique les valeurs élevées des probabilités de ruine.

La probabilité de ruine augmente en fonction de la part investie en action, quel que soit le taux technique. En effet, plus la part en action est élevée, plus le rendement de l'actif est élevé et il en est de même pour la volatilité. Par ailleurs, plus le taux technique est important, plus la probabilité de ruine est élevée. Les provisions mathématiques étant revalorisées au taux techniques, plus ce taux sera élevé, plus les engagements de l'assureur seront élevés et donc la différence $E_t = A_t - L_t$ risque de devenir négative.

- Immobilier et obligation



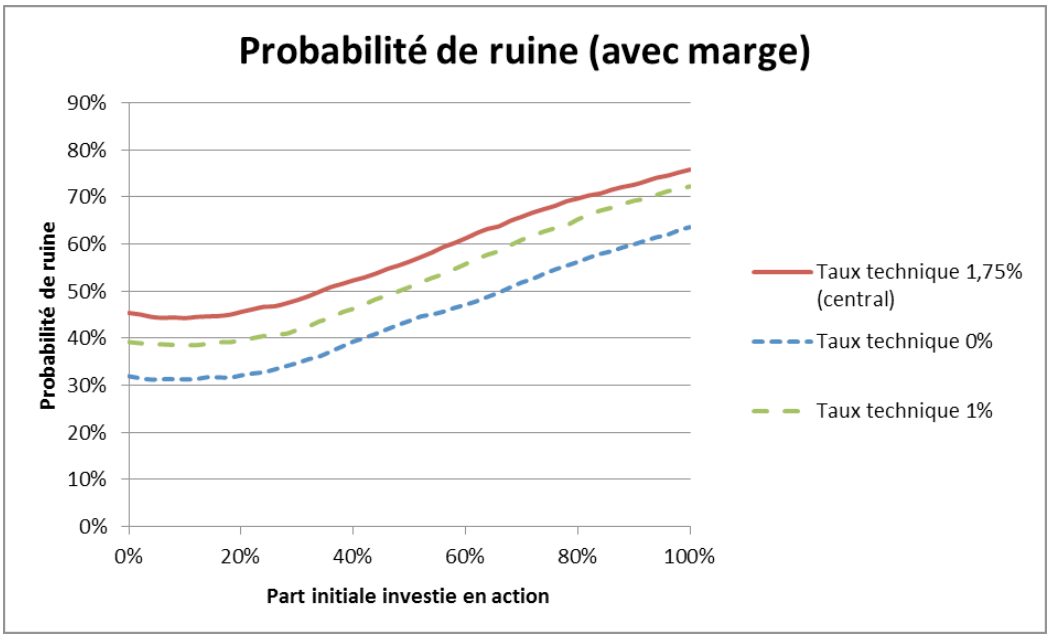
Probabilité de ruine en fonction de la part investie en immobilier et en obligation (0% action)

Plus la part investie en immobilier augmente, plus le rendement de l'actif augmente. Comme la volatilité de l'immobilier est faible, il en est de même pour celle de $\tilde{R}_t$. Donc la différence :

$$E_t = A_t - L_t = (1 + \tilde{R}_t)A_{t-1} - (1 + i)L_t$$

devient de moins en moins négative et la probabilité de ruine diminue dans un premier temps (jusqu'à une part investie en immobilier de 20% environ). Mais, au-delà de 20% d'immobilier, la probabilité de ruine devient de plus en plus sensible à la volatilité de l'actif qui devient importante.

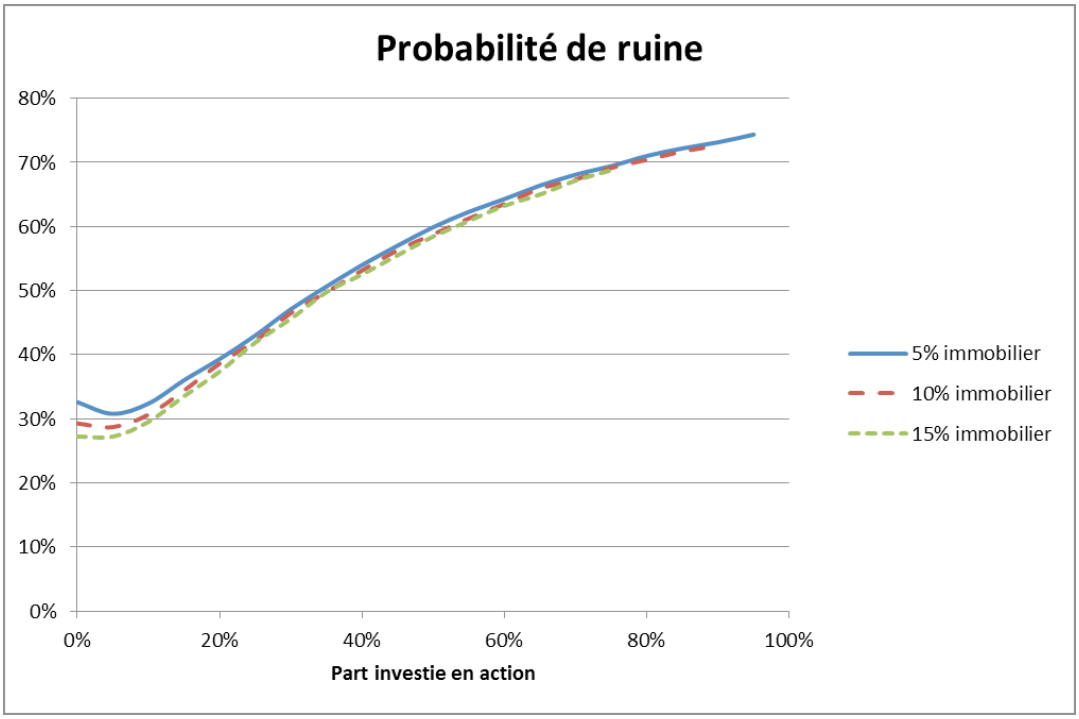
- Immobilier et action



Probabilité de ruine en fonction de la part investie en action et en immobilier (0% action)

Comme pour le premier cas (action et immobilier), ici on a également une probabilité de ruine qui augmente avec la part investie en action.

- Immobilier, action et obligation



L'étude avec les 3 classes d'actifs donne une probabilité de ruine croissante en fonction de la part investie en action. Par ailleurs, plus la part investie en action augmente, moins la probabilité de ruine est sensible à la part de l'immobilier dans le portefeuille.

3. Conclusion

L'allocation optimale qu'on peut retenir avec cette méthode tout en prenant en compte les limitations par catégories en solvabilité 1est : 0% action, 40% immobilier et 60% obligation.

La limite de cette méthode réside dans le fait qu'elle repose sur un paramètre exogène : la probabilité de ruine qui dépend du choix de l'assureur. Cette méthode est également très sensible à la volatilité de l'actif risqué.

Chapitre 3 : Fonds propres économiques

1. Prime unique

On rappelle l'écriture du bilan dans le cas de la prime unique :

$$\boldsymbol{L_{t+1} = (1+i)L_t - F_{t+1}}$$
$$\boldsymbol{A_{t+1} = \left(1+\tilde{R}_{t+1}\right)A_t - F_{t+1}}$$
$$\boldsymbol{E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1}}$$

La deuxième équation donne:

$$A_1 = \left(1+\tilde{R}_1\right)A_0 - F_1$$
$$A_2 = \left(1+\tilde{R}_2\right)A_1 - F_2 = \left(1+\tilde{R}_2\right)\left[\left(1+\tilde{R}_1\right)A_0 - F_1\right] - F_2$$
$$A_2 = \left(1+\tilde{R}_1\right)\left(1+\tilde{R}_2\right)A_0 - \left(1+\tilde{R}_2\right)F_1 - F_2$$

Soit :

$$\frac{A_2}{\left(1+\tilde{R}_1\right)\left(1+\tilde{R}_2\right)} = A_0 - \frac{F_1}{\left(1+\tilde{R}_1\right)} - \frac{F_2}{\left(1+\tilde{R}_1\right)\left(1+\tilde{R}_2\right)}$$

Par récurrence on obtient :

$$\frac{A_t}{\prod_{s=1}^{t}\left(1+\tilde{R}_s\right)} = A_0 - \sum_{k=1}^{t}\frac{F_k}{\prod_{s=1}^{k}\left(1+\tilde{R}_s\right)}$$

On note $\tilde{R}_s^j$ le rendement de l'actif correspondant à l'allocation j. On obtient finalement :

$$\frac{A_t}{\prod_{s=1}^{t}\left(1+\tilde{R}_s^j\right)} = A_0 - \sum_{k=1}^{t}\frac{F_k}{\prod_{s=1}^{k}\left(1+\tilde{R}_s^j\right)}$$

On note :

$$\Delta_j = \sum_{t=1}^{60}\frac{\boldsymbol{F_t}}{\prod_{s=1}^{t}\left(\boldsymbol{1+\tilde{R}_s^j}\right)}$$

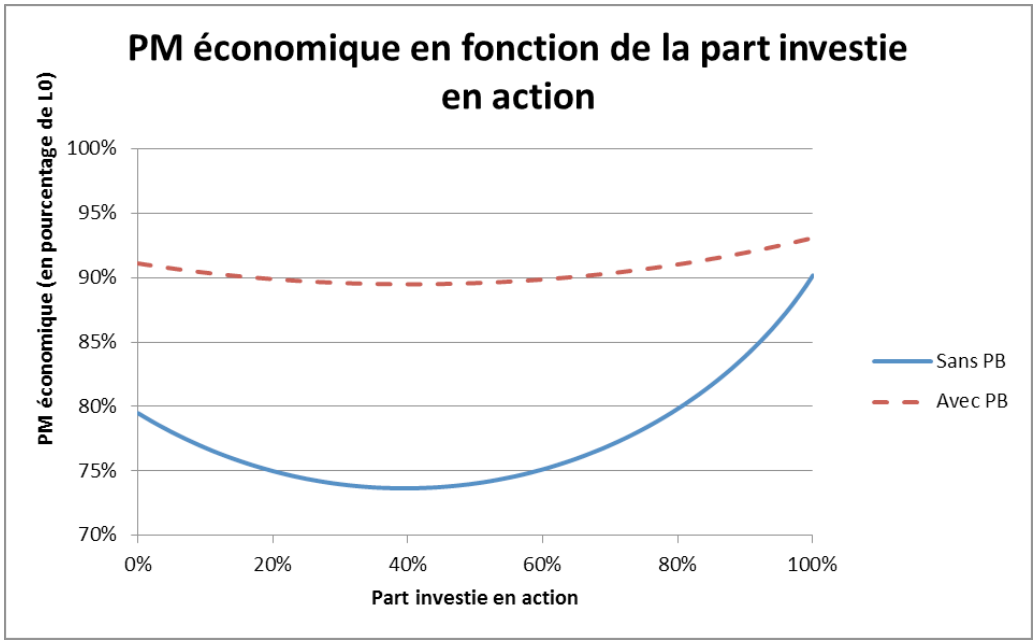
$\boldsymbol{E(\Delta_j)}$ peut s'interpréter comme la provision mathématique économique c'est-à-dire la valeur probable des flux futurs actualisés au taux de rendement du portefeuille financier. Minimiser $\boldsymbol{E\left(\Delta_j\right)}$ revient à choisir l'allocation qui en moyenne « amortira » au mieux les flux de prestations futurs. Notons que minimiser $\boldsymbol{E\left(\Delta_j\right)}$ revient également à maximiser les fonds propres économiques $\boldsymbol{A_0 - E(\Delta_j) = E_0 + L_0 - E\left(\Delta_j\right)}$ *(Planchet F., Thérond P. [2004b]).*

Nous disposons de 4000 scénarios pour chaque classe d'actifs. Comme dans le cas de la « probabilité de ruine », nous allons d'abord effectuer l'étude en prenant les classes deux à deux. Nous appliquerons ensuite la méthode sur des allocations prenant en compte l'ensemble des trois classes.

1.1. *Etude avec deux classes*

- Action et obligation

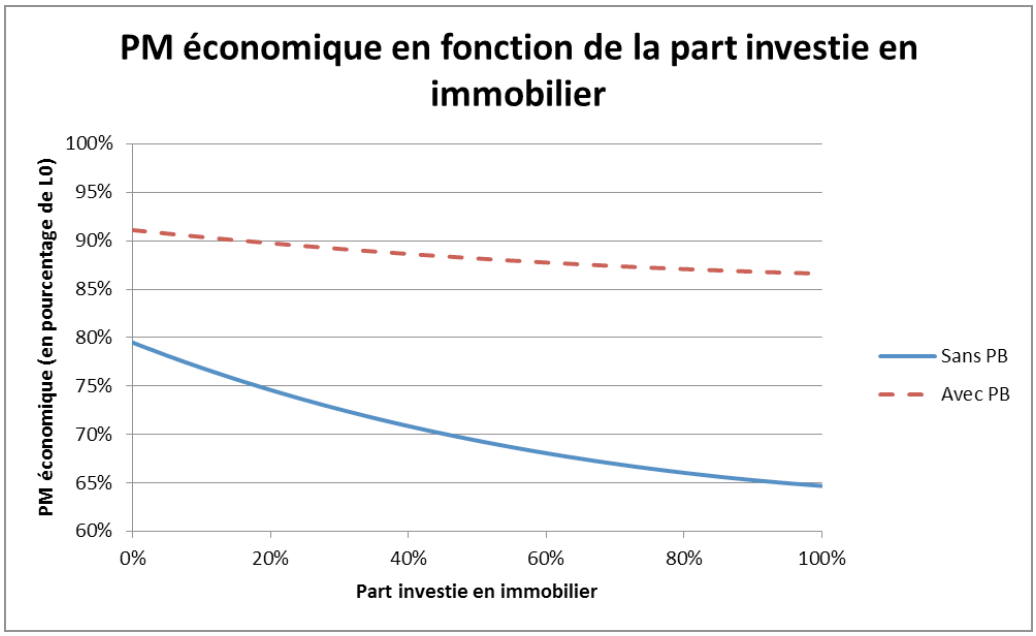
La méthode de Monte Carlo nous donne les résultats suivants :



L'allocation optimale est de 40% action et 60% obligation pour une provision mathématique économique de 74,66%. On remarque que le critère de maximisation des fonds propres économiques est insensible au taux de participation aux bénéfices distribué car l'allocation optimale est la même pour le cas avec participation aux bénéfices et le cas sans participation aux bénéfices.

- Obligation et immobilier

Ici, nous effectuons l'étude avec les classes « immobilier » et « obligation ». On obtient le graphe ci-dessous :

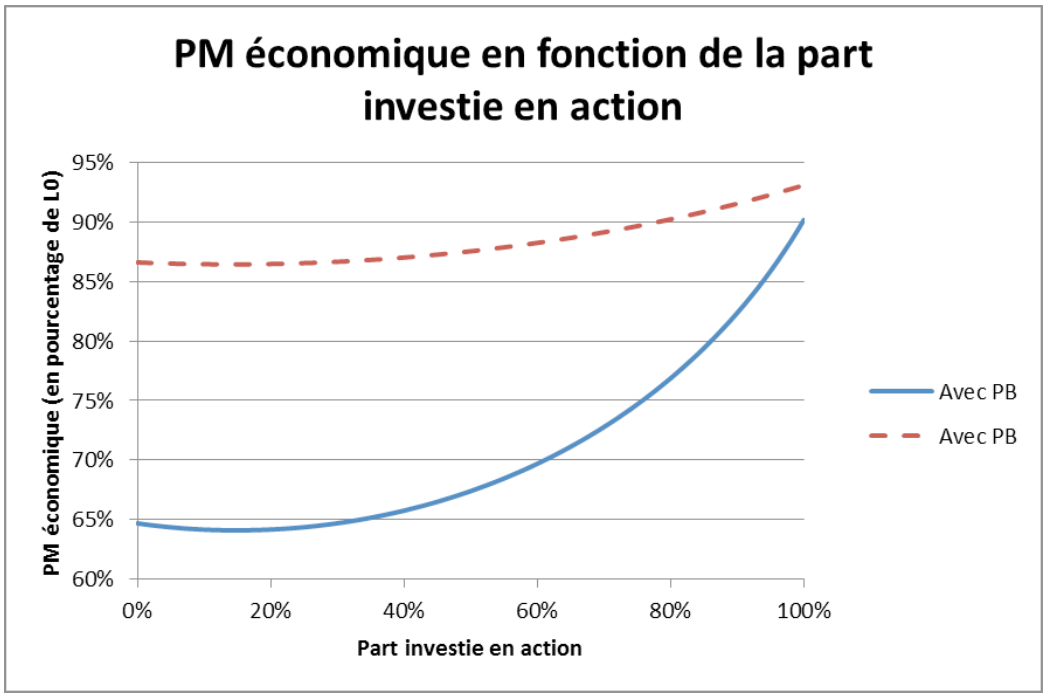


Une allocation optimale de 100% immobilier s'explique par le fait que la classe immobilier est peu volatile et donne un rendement meilleur que celui de l'obligation 10 ans.

L'allocation de 100% immobilier ne peut pas être retenue comme solution éligible parmi les solutions optimales. En effet, en Solvabilité 1 il n'est pas autorisé à l'assureur d'avoir plus de 40% d'immobilier dans son actif (cf. Partie I, chapitre 3, « limitation par catégorie »). On retient l'allocation optimale de 40% immobilier et 60% obligation, pour une provision mathématique économique de 70,87%.

- Immobilier et action :

Avec les classes « immobilier » et « action », on obtient le graphe suivant :



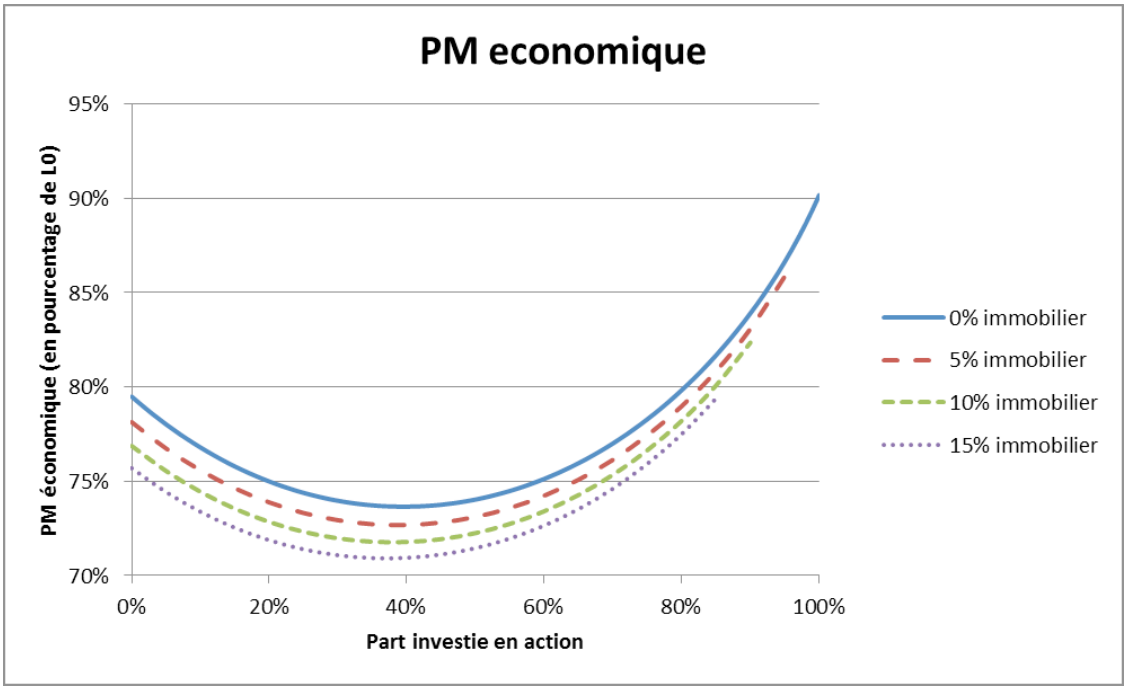
L'allocation optimale est 14% action et 86% immobilier pour une provision mathématique économique de 64,10%. Pour les même raisons que précédemment, cette allocation ne peut être retenue comme solution du problème car le pourcentage d'immobilier est trop élevé.

Cette première étude effectuée en prenant les classes deux-à-deux nous permet de déduire que l'allocation d'actifs est très sensible à la part d'immobilier dans le portefeuille. Nous regroupons les différentes allocations trouvées dans le tableau ci-dessous :

Action	Immobilier	Obligation	PM économique (en % de L0)
40%	0%	60%	74,66%
0%	40%	60%	70,87%

1.2. *Immobilier, action et obligation*

Nous venons d'étudier la méthode des fonds propres économiques en considérant les classes deux à deux. Or l'objectif est de chercher l'allocation optimale en prenant en compte les trois classes d'actifs dans le but d'avoir un rendement maximal mais également pour diversifier le portefeuille d'actifs. Pour cela, nous allons fixer la part d'actifs investie dans une des classes et faire évoluer les autres. Nous choisissons de fixer la part investie en immobilier et de faire varier la part investie en action et en obligation. Les résultats obtenus sont représentés dans la figure ci-dessous.



Les 4 graphes ci-dessus nous donnent les allocations optimales suivantes :

Action	Immobilier	Obligation	PM économique (en % de L0)
40%	0%	100%	75%
40%	5%	55%	73%
40%	10%	50%	72%
40%	15%	45%	71%

Plus la part investie en immobilier augmente dans le portefeuille d'actifs, plus la provision mathématique devient minimale.

Finalement, l'allocation optimale globale retenue est : 40% immobilier (max réglementaire) (cf. Partie I, Chapitre 3), 40% action et 20% obligation avec une provision mathématique économique de 67,58%.

2. Prime viagère

Dans le cas où l'assuré verse une prime viagère, le bilan de l'assureur évolue comme suit :

$$\boldsymbol{L_{t+1} = (1+i)L_t - F_{t+1}}$$
$$\boldsymbol{A_{t+1} = \left(1+\tilde{R}_{t+1}\right)A_t - F_{t+1} + C_{t+1}}$$
$$\boldsymbol{E_{t+1} = A_{t+1} - L_{t+1}}$$

Où est C_{t+1} désigne les cotisations de l'année t+1.

On obtient:

$$\frac{A_t}{\prod_{s=1}^{t}(1+\tilde{R}_s)} = A_0 - \sum_{k=1}^{t} \frac{F_k - C_k}{\prod_{s=1}^{k}(1+\tilde{R}_s)}$$

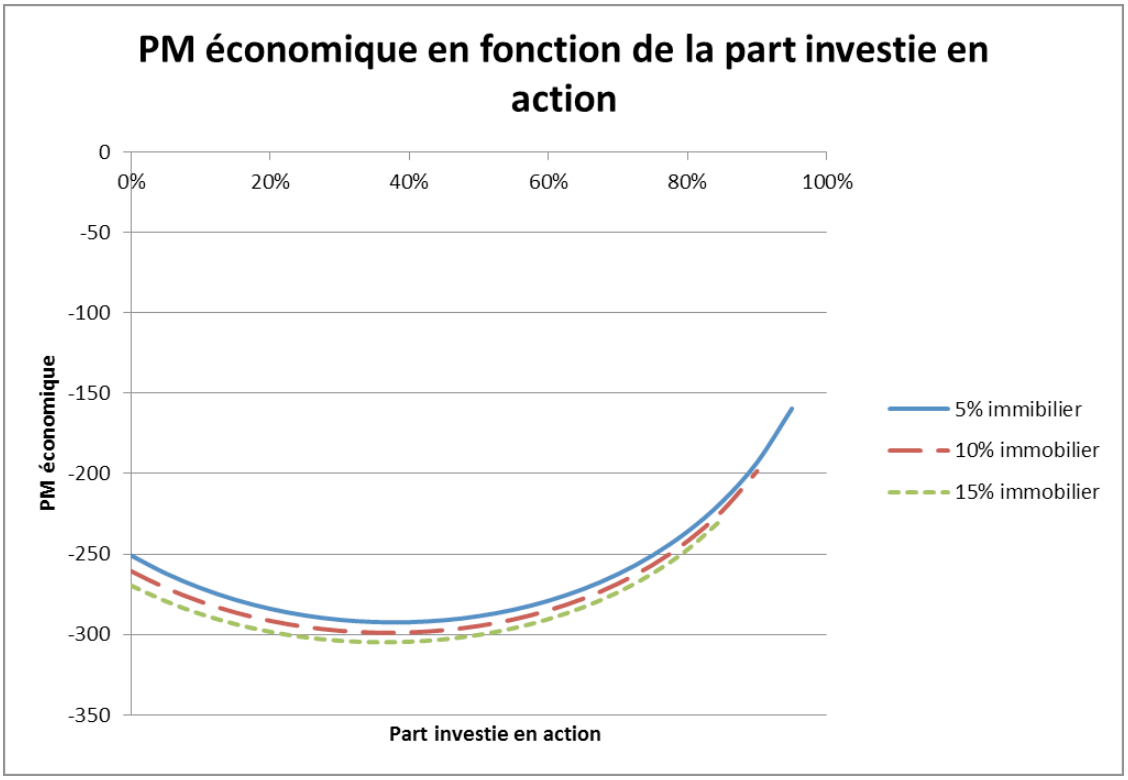
Soit:

$$\frac{A_t}{\prod_{s=1}^{t}(1+\tilde{R}_s^j)} = A_0 - \sum_{k=1}^{t} \frac{F_k - C_k}{\prod_{s=1}^{k}(1+\tilde{R}_s^j)}$$

On note :

$$\Delta_j' = \sum_{t=1}^{60} \frac{\boldsymbol{F_t - C_t}}{\prod_{s=1}^{t}\left(\boldsymbol{1+\tilde{R}_s^j}\right)}$$

Nous allons maximiser les fonds propres économiques $\boldsymbol{A_0 - E(\Delta_j') = E_0 + L_0 - E(\Delta_j')}$ i.e. minimiser $\boldsymbol{E(\Delta_\theta')}$. Le graphe suivant illustre les résultats obtenus:



On remarque que les résultats sont similaires à ceux obtenus dans le cas des primes uniques. En effet, l'allocation obtenue est identique à savoir : 40% action, 15% immobilier et 45% action. Les solutions optimales identiques dans le cas de la prime unique et la prime viagère s'expliquent donc par les volatilités des scénarios à l'actif.

L'allocation optimale globale retenue ici est aussi : 40% immobilier, 40% action et 20% obligation.

3. Conclusion

L'allocation optimale obtenue avec le critère de maximisation des fonds propres est très sensible à la volatilité des actifs. Dans le cadre de notre problème, cette allocation est sensible d'une part à la volatilité des actions et d'autre part de la volatilité de l'immobilier. Elle présente cependant une bonne adéquation des flux d'actif et de passif.

Chapitre 4: Solvency Capital Requirement (SCR)

On souhaite observer l'impact du SCR sur l'allocation d'actifs. Afin de simplifier l'étude, on s'interessera au seul calcul du BSCR net du SCR incorporel. Cette hypothèse nous parait cohérente étant donné que les chocs concernant l'actifs interviennent notamment dans la formule :

$$BSCR - SCR_{incorporel} = \sqrt{\sum_{i,j} corrSCR_{i,j} * SCR_i * SCR_j}$$

Rappelons que le passif du produit obsèques est soumis aux risques suivants : mortalité, longévité, catastrophe, rachat, et risque de dépense. L'actif est soumis aux risques action, immobilier et risque de taux. La NAV quant à elle est définit comme la différence de l'actif et du Best-Estimate :

$$NAV_t = A_t - BE_t$$

Ici nous allons décrire une autre méthode pour le calcul de la NAV :

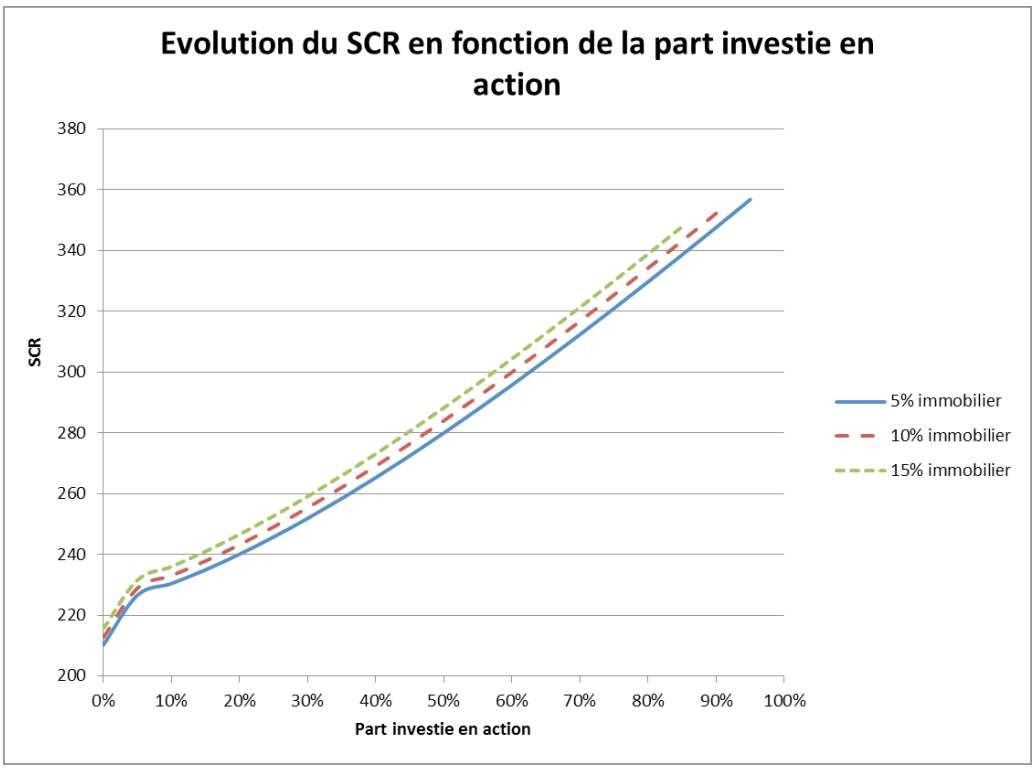
$$\boldsymbol{NAV_t = VIF_t + ANR_t}$$

$\boldsymbol{ANR_t}$**(*Actif Net R*ée*valu*é)** *:* représente la part de richesse de la compagnie qui serait immédiatement distribuable aux actionnaires dans le cas d'une cession d'activité de la compagnie.

$\boldsymbol{VIF_t}$ **(*valeur actuelle In Force business*)** *:* valeur actuelle probable des profits futurs distribuables aux actionnaires générés par le portefeuille de contrats de la société (i.e. en logique de run-off).

1. Calcul du SCR

En calculant le SCR avec la méthode indiquée dans la Partie I et les formules ci-dessus, nous obtenons les résultats suivants :



La valeur du SCR est d'autant plus élevée que la part investie en action est importante. Cette augmentation est quasi linéaire. Par ailleurs, le SCR augmente également en fonction de la part d'immobilier dans le portefeuille d'actifs. Comme le critère de maximisation des fonds propres, le SCR est très sensible à la variation de la part investie en action et en immobilier. Rappelons par ailleurs que contrairement aux méthodes présentées précédemment où on utilisait les scénarios Real World, nous utilisons des scénarios Risque Neutre pour le calcul du SCR.

2. Conclusion

Le SCR est très sensible à la variation de la part d'actif risqué dans le portefeuille. Ce type d'étude ne permet pas à l'assureur de sélectionner une allocation optimale car la notion de rendement n'est pas présente. Mais une telle étude permet de voir l'impact de l'allocation choisie sur le SCR dans le cadre de Solvabilité 2.

Partie IV : Algorithmes génétiques

Dans la partie précédente, nous avons vu les différentes méthodes permettant de déterminer une allocation stratégique optimale. Plus précisément, toutes les méthodes décrites consistent à chercher une solution optimale dans un espace de recherche choisi au préalable. Pour notre étude, nous avions un espace constitué de 200 à 500 allocations mais rien ne nous garantit que la solution optimale locale trouvée dans l'espace choisi soit la solution optimale globale. On pourrait alors agrandir l'espace de recherche mais il est alors impossible de pouvoir tester toutes les solutions pour trouver la meilleure. Dans ce cas, la difficulté ne vient pas de la complexité du problème mais de la taille excessive de l'espace des solutions. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes de résolution dites approchées.

Les méthodes heuristiques permettent de répondre à ce problème. Une heuristique est une stratégie de déplacement dans l'espace des solutions dans le but d'obtenir une solution approchée dans un délai de temps raisonnable. Des heuristiques plus poussées ont été mises au point et ont donné naissance à une nouvelle famille d'algorithmes : les métaheuristiques. Leur but est de trouver un optimum global. Les principales méta-heuristiques utilisées pour résoudre des problèmes à variables discrètes sont :

- le recuit simulé : la méthode explore l'espace de recherche tout en acceptant de dégrader sa solution afin de trouver des optimaux locaux. Tout au long du processus, le recuit va de moins en moins accepter ces dégradations, ce qui va le faire converger vers un optimum (que l'on espère) global.

- la recherche avec tabous : la méthode « tabou » consiste à explorer le voisinage d'une position donnée et à choisir la position dans ce voisinage qui minimise la fonction objectif. Le choix du meilleur voisin d'une solution pousse l'algorithme à trouver les optima locaux ; et comme l'exploration de l'espace de recherche est effectué en limitant le voisinage de la solution en rendant "tabous" certains mouvements, l'algorithme doit théoriquement visiter l'optimum global.

- les algorithmes génétiques : ils sont issus de la théorie de l'évolution de Darwin. Ces algorithmes manipulent plusieurs solutions et forment de nouvelles solutions en combinant les anciennes. Le fait d'avoir une population de solutions facilite l'exploration de l'espace de recherche, et les meilleures solutions seront favorisées pour participer à la création de nouvelles solutions ce qui aura pour effet de favoriser les combinaisons des "bonnes caractéristiques", et donc de trouver un optimum global.

Le problème qui consiste à chercher une allocation optimale nous amène à nous intéresser à la dernière méthode : les algorithmes génétiques.

Chapitre 1 : Algorithme Génétique

1. Objectif

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation qui reprennent la théorie de la sélection naturelle de Darwin : les individus les plus adaptés au milieu (the fittest) tendent à survivre plus longtemps et à se reproduire de manière plus aisée. Ils s'appuyant ainsi sur des techniques dérivées de la génétique. Mathématiquement, résoudre un problème d'optimisation grâce aux algorithmes génétiques revient à déterminer les extrêmes d'une fonction $f: X \to R$, où X est l'espace de recherche des solutions plausibles et f est appelée *fonction fitness*.

2. Codage d'une population

La première étape dans la résolution du problème d'optimisation consiste à créer une *population* d'individus initiaux qui constitue un ensemble des solutions possibles. Les coordonnées d'un individu dans l'espace de recherche sont représentées par des *chromosomes*. Un *gène* est une sous-section d'un chromosome qui code la valeur d'un seul paramètre en cours d'optimisation. L'efficacité de l'algorithme génétique va dépendre du choix du codage d'un chromosome.

Historiquement, les algorithmes génétiques étaient codés grâce à des chaînes de bits contenant toute l'information nécessaire à la description d'un point dans l'espace d'état.

Les codages binaires ont été très utilisés à l'origine mais les codages réels, utilisant des contraintes réelles, sont désormais largement utilisés, notamment dans les domaines applicatifs pour l'optimisation de problèmes à variables réelles.

3. Fonction d'évaluation et fonction fitness

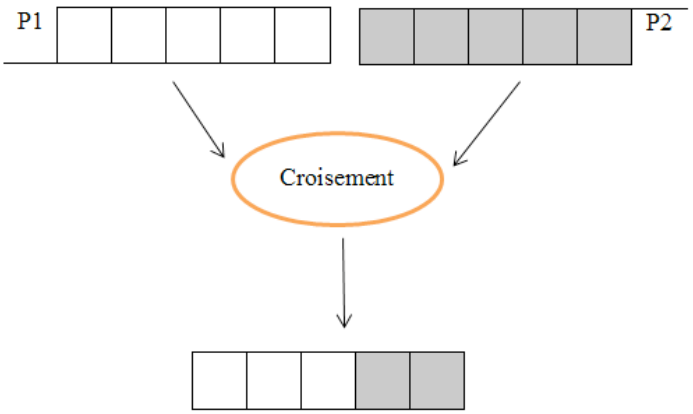
Une fois la population initiale représentant des solutions potentielles du problème donné créée, la seconde étape consiste à évaluer cette population dans le but de déterminer les individus les plus aptes à survivre dans le milieu naturel. Ces individus participeront à l'évolution de la population.

Pour évaluer cette population, on calcule le coût d'un point de l'espace de recherche, à l'aide d'une *fonction d'évaluation*. L'évaluation d'un individu ne dépendant pas de celle des autres individus, le résultat fournit par la fonction d'évaluation va permettre de sélectionner ou de refuser un individu pour ne garder que les individus ayant le meilleur coût en fonction de la population courante : c'est le rôle de la *fonction fitness*. Mais, en général, on ne fait pas la différence entre fonction fitness et fonction d'évaluation.

4. Création de nouveaux individus

4.1. Opérateur de croisement

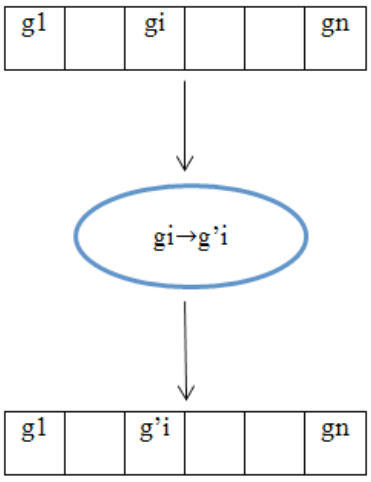
Le croisement permet d'augmenter le périmètre de recherche des solutions. Il consiste à créer de nouveaux individus enfants en croisant des individus parents (généralement deux parents pour obtenir un enfant mais ce nombre peut varier suivant le problème considéré).



Principe de croisement

4.2. Opérateur de mutation

L'opérateur de mutation consiste à tirer aléatoirement un ou plusieurs gènes dans le chromosome et à le remplacer par une valeur aléatoire.



Principe de mutation

4.3. *Opérateur de sélection*

C'est un opérateur clé sur lequel repose en partie la qualité de l'algorithme génétique. Une fois les nouveaux individus créés à l'aide des opérateurs de croisement et/ou de mutation, il faut déterminer les individus à garder pour une future évolution de la population. Cette sélection peut se faire de manière aléatoire ou à l'aide des mécanismes suivants :

- Sélection par rang : la sélection par rang permet de trier la population par fitness. Une fois le tri effectué, chaque chromosome se voit associé un rang en fonction de sa position. Ainsi le meilleur chromosome aura le rang 1, le suivant 2, et ainsi de suite jusqu'au dernier chromosome. L'intérêt de cette méthode de sélection réside dans le fait que tous les chromosomes ont une chance d'être sélectionnés.

- Sélection steady-state : l'idée principale de cette méthode est qu'une grande partie de la population puisse survivre à la prochaine génération. L'algorithme génétique marche de la manière suivante. A chaque génération sont sélectionnés quelques chromosomes (parmi ceux qui ont le meilleur coût) pour créer des chromosomes fils. Ensuite les chromosomes les plus mauvais sont retirés et remplacés par les nouveaux. Le reste de la population survie à la nouvelle génération.

- Elitisme : A la création d'une nouvelle population, il y a de grandes chances que les meilleurs chromosomes soient perdus. Pour éviter cela, on utilise la méthode d'élitisme. Elle consiste à copier un ou plusieurs des meilleurs chromosomes dans la nouvelle génération. Ensuite, on génère le reste de la population selon l'algorithme de reproduction usuel. Cette méthode améliore considérablement les algorithmes génétiques, car elle permet de ne pas perdre les meilleures solutions.

5. Réitération

Le processus qui consiste à évaluer les individus et à créer une nouvelle génération grâce aux opérateurs de mutation et de croisement doit être réitéré dans la perspective de générer plusieurs générations d'individus et de parcourir ainsi un espace de solutions plus large. Le choix de ce paramètre est laissé libre à l'appréciation de l'utilisateur.

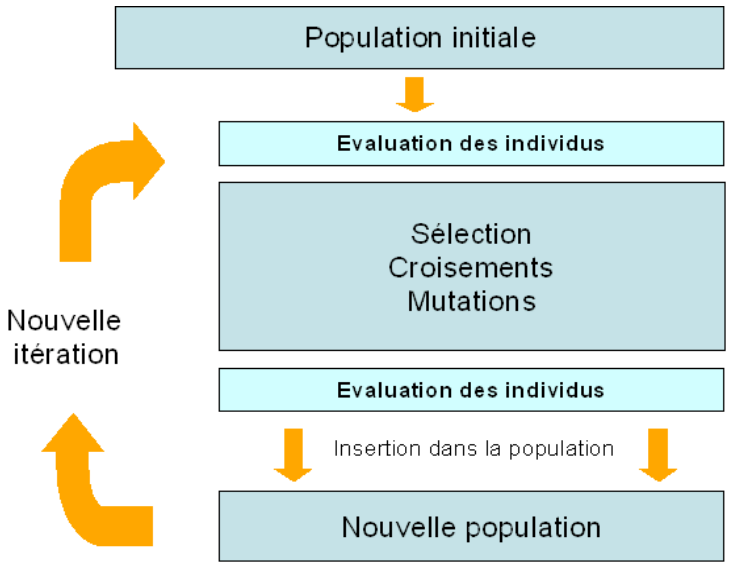


Schéma d'un algorithme génétique

Chapitre 2 : Application

L'objectif de cette partie est d'utiliser les algorithmes génétiques dans le but de déterminer une allocation optimale globale.

1. Choix des différents paramètres

- Codage de la population : dans un premier temps, nous devons choisir une population initiale d'individus qui constitue un espace possible de solutions. Dans le cadre de notre problème, un *individu* désignera une allocation stratégique et la *population initiale* sera un ensemble formé de ces allocations. Nous décidons de sélectionner la population initiale suivante :

Individu	Action	Immobilier	Obligation
Individu 1	0,00%	5,00%	95,00%
Individu 2	5,00%	5,00%	90,00%
Individu 3	10,00%	5,00%	85,00%
Individu 4	15,00%	5,00%	80,00%
Individu 5	20,00%	5,00%	75,00%
Individu 6	25,00%	5,00%	70,00%
Individu 7	30,00%	5,00%	65,00%
Individu 8	35,00%	5,00%	60,00%
Individu 9	40,00%	5,00%	55,00%
Individu 10	45,00%	5,00%	50,00%
Individu 11	50,00%	5,00%	45,00%
Individu 12	55,00%	5,00%	40,00%
Individu 13	60,00%	5,00%	35,00%
Individu 14	65,00%	5,00%	30,00%
Individu 15	70,00%	5,00%	25,00%
Individu 16	75,00%	5,00%	20,00%
Individu 17	80,00%	5,00%	15,00%
Individu 18	85,00%	5,00%	10,00%
Individu 19	90,00%	5,00%	5,00%
Individu 20	95,00%	5,00%	0,00%
Individu 21	0,00%	10,00%	90,00%
Individu 22	5,00%	10,00%	85,00%
Individu 23	10,00%	10,00%	80,00%
Individu 24	15,00%	10,00%	75,00%
Individu 25	20,00%	10,00%	70,00%
Individu 26	25,00%	10,00%	65,00%
Individu 27	30,00%	10,00%	60,00%
Individu 28	35,00%	10,00%	55,00%
Individu 29	40,00%	10,00%	50,00%
Individu 30	45,00%	10,00%	45,00%
Individu 31	50,00%	10,00%	40,00%
Individu 32	55,00%	10,00%	35,00%
Individu 33	60,00%	10,00%	30,00%

Individu 34	65,00%	10,00%	25,00%
Individu 35	70,00%	10,00%	20,00%
Individu 36	75,00%	10,00%	15,00%
Individu 37	80,00%	10,00%	10,00%
Individu 38	85,00%	10,00%	5,00%
Individu 39	90,00%	10,00%	0,00%
Individu 40	0,00%	15,00%	85,00%
Individu 41	5,00%	15,00%	80,00%
Individu 42	10,00%	15,00%	75,00%
Individu 43	15,00%	15,00%	70,00%
Individu 44	20,00%	15,00%	65,00%
Individu 45	25,00%	15,00%	60,00%
Individu 46	30,00%	15,00%	55,00%
Individu 47	35,00%	15,00%	50,00%
Individu 48	40,00%	15,00%	45,00%
Individu 49	45,00%	15,00%	40,00%
Individu 50	50,00%	15,00%	35,00%

Population initiale

Les différentes classes d'actifs (action, immobilier et obligation) forment les *chromosomes* d'un individu. Ainsi, chaque individu de la population est formé de 3 chromosomes. Nous avons un problème simplifié ici puisqu'il n'y a pas de subdivision des chromosomes : les gènes et les chromosomes désignent ici la même chose.

Le choix de cette population est arbitraire. Ici, nous avons décidé de choisir les allocations qui ont été utilisées dans les études effectuées dans la Partie III.

- Fonction fitness : la population de départ sélectionnée, nous devons maintenant choisir une fonction fitness. Plusieurs solutions s'offrent à nous. Nous décidons de choisir la provision mathématique économique comme *fonction fitness*. Le programme d'optimisation revient à chercher le minimum de la fonction fitness.

- Création de nouveaux individus :

  - *Croisement :* nous allons créer de nouveaux individus à partir des individus initiaux. Pour ce faire, nous choisissons aléatoirement deux individus parents parmi les 50 de la population initiale. L'allocation « enfant » sera la moyenne des deux allocations parents. A titre d'exemple, si les individus parents sélectionnés pour le croisement sont les individus 1 et 36, on obtient l'allocation enfant suivante :

	Action	Immobilier	Obligation
Parent 1 (Individu 1)	0,00%	5,00%	95,00%
Parent 2 (Individu 36)	75,00%	10,00%	15,00%
Enfant (Individu 3)	37,50%	7,50%	55,00%

Rappelons que le nombre de parents est un paramètre qui peut varier. Nous décidons ici de fixer ce nombre à 2.

➢ *Mutation :* l'opérateur de mutation que nous décidons d'implémenter ici consiste à sélectionner aléatoirement un certain nombre d'individus dans la population initiale sur lesquels nous allons effectuer des mutations. Les allocations créées grâce à l'opérateur de mutation doivent respecter la contrainte $\sum_{i=1}^{3} \omega_i = 1$ où ω_i désigne le poids de la classe i. Ainsi, après une mutation, l'individu i pourrait par exemple devenir :

	Action	Immobilier	Obligation
Individu i	20,00%	15,00%	65,00%
Individu i après mutation	30,00%	1,00%	69,00%

Ici la mutation touche tous les chromosomes. On aurait pu fixer un des chromosomes (i.e. la part investie en action, en immobilier ou en obligation) et faire varier les deux autres, sous la contrainte$\sum_{i=1}^{3} \omega_i = 1$. Mais le choix qui consiste à faire muter tous les chromosomes permet d'avoir des individus très variés et d'élargir ainsi l'espace de recherche.

➢ *Sélection :* nous décidons de sélectionner les individus suivant une méthode qui est un mélange des trois méthodes : sélection par rang, steady-state et l'élitisme. En effet, l'objectif est de minimiser la fonction fitness qui est la provision mathématique économique. Un classement des individus par rang nous permettra de comparer les individus entre eux et de connaître les meilleurs au sens de la fitness. On éliminera ensuite les individus les moins bons (i.e. ceux ayant une provision mathématique élevée) et ferons évoluer la population en réitérant le processus.

- Réitération : le nombre de réitération est choisi par l'utilisateur.

2. Principe de l'algorithme mis en place

Dans cette partie, nous allons expliquer le fonctionnement de l'algorithme programmé.

1) Pour tous les individus de la population initiale, on calcule la provision mathématique économique.

2) On classe les individus dans l'ordre décroissant, suivant la valeur de leur provision mathématique économique.

3) On élimine 25% des individus ayant les plus grandes provisions mathématiques économiques. Le taux de 25% est choisi arbitrairement et est en paramètre dans le programme mis en place. Il peut être augmenté ou diminué suivant la volonté de l'utilisateur. Ainsi on élimine 25% de 50, soit 12,5 des allocations les moins « pertinentes ». Plus exactement, on prendra la valeur entière de 12,5 soit 12.

Individus	Action	Immobilier	Obligation	PM économique (en % de L0)
Individu 48	40,00%	15,00%	45,00%	70,89%
Individu 47	35,00%	15,00%	50,00%	70,93%
Individu 49	45,00%	15,00%	40,00%	71,01%
Individu 46	30,00%	15,00%	55,00%	71,12%

Individu 50	50,00%	15,00%	35,00%	71,28%
Individu 45	25,00%	15,00%	60,00%	71,46%
Individu 29	40,00%	10,00%	50,00%	71,77%
Individu 28	35,00%	10,00%	55,00%	71,83%
Individu 30	45,00%	10,00%	45,00%	71,87%
Individu 44	20,00%	15,00%	65,00%	71,96%
Individu 27	30,00%	10,00%	60,00%	72,05%
Individu 31	50,00%	10,00%	40,00%	72,12%
Individu 26	25,00%	10,00%	65,00%	72,42%
Individu 32	55,00%	10,00%	35,00%	72,54%
Individu 43	15,00%	15,00%	70,00%	72,63%
Individu 9	40,00%	5,00%	55,00%	72,73%
Individu 10	45,00%	5,00%	50,00%	72,80%
Individu 8	35,00%	5,00%	60,00%	72,81%
Individu 25	20,00%	10,00%	70,00%	72,96%
Individu 11	50,00%	5,00%	45,00%	73,04%
Individu 7	30,00%	5,00%	65,00%	73,05%
Individu 33	60,00%	10,00%	30,00%	73,13%
Individu 12	55,00%	5,00%	40,00%	73,44%
Individu 6	25,00%	5,00%	70,00%	73,45%
Individu 42	10,00%	15,00%	75,00%	73,48%
Individu 24	15,00%	10,00%	75,00%	73,66%
Individu 34	65,00%	10,00%	25,00%	73,89%
Individu 13	60,00%	5,00%	35,00%	74,02%
Individu 5	20,00%	5,00%	75,00%	74,02%
Individu 41	5,00%	15,00%	80,00%	74,51%
Individu 23	10,00%	10,00%	80,00%	74,55%
Individu 4	15,00%	5,00%	80,00%	74,77%
Individu 14	65,00%	5,00%	30,00%	74,77%
Individu 35	70,00%	10,00%	20,00%	74,86%
Individu 22	5,00%	10,00%	85,00%	75,63%
Individu 3	10,00%	5,00%	85,00%	75,70%
Individu 15	70,00%	5,00%	25,00%	75,73%
Individu 40	0,00%	15,00%	85,00%	75,75%
~~Individu 36~~	~~75,00%~~	~~10,00%~~	~~15,00%~~	~~76,04%~~
~~Individu 2~~	~~5,00%~~	~~5,00%~~	~~90,00%~~	~~76,84%~~
~~Individu 16~~	~~75,00%~~	~~5,00%~~	~~20,00%~~	~~76,91%~~
~~Individu 21~~	~~0,00%~~	~~10,00%~~	~~90,00%~~	~~76,92%~~
~~Individu 37~~	~~80,00%~~	~~10,00%~~	~~10,00%~~	~~77,47%~~
~~Individu 1~~	~~0,00%~~	~~5,00%~~	~~95,00%~~	~~78,19%~~
~~Individu 17~~	~~80,00%~~	~~5,00%~~	~~15,00%~~	~~78,34%~~
~~Individu 38~~	~~85,00%~~	~~10,00%~~	~~5,00%~~	~~79,18%~~
~~Individu 18~~	~~85,00%~~	~~5,00%~~	~~10,00%~~	~~80,05%~~
~~Individu 39~~	~~90,00%~~	~~10,00%~~	~~0,00%~~	~~81,24%~~

~~Individu 19~~	~~90,00%~~	~~5,00%~~	~~5,00%~~	~~82,10%~~
~~Individu 20~~	~~95,00%~~	~~5,00%~~	~~0,00%~~	~~84,57%~~

4) Une fois l'évaluation de la population initiale effectuée, nous devons faire évoluer cette population en créant de nouveaux individus. Pour cela, on applique des mutations sur un certain nombre d'individus parmi les 38 individus sélectionnés à l'étape précédente. On fixe ce nombre à 15. En effet, la population de départ qu'on avait sélectionné n'étant pas très diversifiée, un nombre important de mutations permettra de tester des allocations plus diversifiées. Mais ce nombre est également un paramètre du programme, qui peut être modifié. Ainsi, l'algorithme sélectionne aléatoirement 15 individus parmi les 38 de l'étape précédente et applique des mutations sur ces individus.

5) Après les mutations, viennent les croisements. Dans notre programme, le nombre d'individus créés grâce aux croisements est égal au nombre d'individus supprimés à l'étape 3. Ceci permet d'avoir un nombre constant d'individus dans la population. Cette étape a d'abord un intérêt technique puisqu'elle permet de faciliter le processus de réitérations mis en place. Des individus parents seront sélectionnés aléatoirement parmi les 38 individus de l'étape précédente. Un même individu peut donc être parent de plusieurs enfants et un individu muté peut également être sélectionné comme parent. 12 enfants seront donc créés à cette étape, formant à nouveau une population de 50 individus.

6) On évalue ces individus en calculant la provision mathématique économique. On réitère le processus à partir de l'étape 2. Nous avons choisi un nombre d'itérations égal à 10. Le choix de ce nombre est également laissé libre à l'utilisateur. Dans le cadre de notre problème, un nombre de 10 itérations semble convenir dans la mesure où un nombre trop faible ne permettrait pas à la population d'évoluer et un nombre trop important nécessiterait un temps élevé de calcul. En effet, pour un individu donné (i.e. une allocation donnée), la provision mathématique économique est calculée grâce à la méthode de Monte Carlo appliquée à 4000 scénario. Ici, on a donc calculé la provision mathématique économique pour 10*50=500 allocations, ce qui demande un temps important de calculs.

Les résultats obtenus avec cette méthode sont les suivants :

Action	Immobilier	Obligation	PM économique (en % de L0)
18,13%	65,65%	16,22%	65,31%
29,79%	59,55%	10,66%	65,48%
35,19%	60,36%	4,45%	65,51%
22,56%	60,73%	16,71%	65,52%
33,13%	58,76%	8,11%	65,58%
27,00%	55,81%	17,19%	65,84%
33,49%	53,30%	13,22%	66,06%
33,38%	52,20%	14,42%	66,16%
32,43%	50,56%	17,01%	66,31%
24,42%	50,95%	24,62%	66,39%
31,38%	47,82%	20,80%	66,58%
35,92%	48,15%	15,93%	66,60%
23,58%	49,11%	27,31%	66,63%
27,96%	47,20%	24,85%	66,68%
28,15%	46,14%	25,71%	66,79%

16,42%	51,35%	32,24%	66,86%
26,74%	45,78%	27,48%	66,87%
28,22%	45,26%	26,53%	66,89%
43,70%	48,98%	7,32%	66,90%
29,73%	44,48%	25,79%	66,95%
36,98%	44,85%	18,17%	66,96%
17,11%	49,45%	33,44%	67,01%
29,51%	43,69%	26,79%	67,04%
32,73%	43,18%	24,10%	67,07%
8,28%	56,05%	35,67%	67,21%
25,93%	42,86%	31,21%	67,23%
32,86%	41,40%	25,74%	67,27%
31,58%	41,28%	27,14%	67,29%
45,19%	45,67%	9,14%	67,31%
39,66%	42,25%	18,09%	67,32%
28,25%	41,43%	30,32%	67,33%
33,65%	38,86%	27,49%	67,56%
39,51%	39,20%	21,29%	67,65%
30,93%	38,30%	30,76%	67,65%
48,08%	44,07%	7,85%	67,72%
42,23%	36,58%	21,19%	68,06%
38,43%	34,83%	26,75%	68,12%
7,72%	49,11%	43,17%	68,14%
26,13%	34,84%	39,03%	68,23%
38,98%	32,73%	28,30%	68,39%
35,13%	30,82%	34,05%	68,57%
57,26%	38,18%	4,57%	69,42%
2,80%	44,00%	53,20%	69,67%
31,76%	22,89%	45,35%	69,73%
54,80%	30,20%	15,00%	69,93%
52,02%	22,60%	25,38%	70,56%
69,32%	30,68%	0,00%	72,54%
47,29%	6,61%	46,10%	72,64%
36,78%	0,00%	63,22%	73,68%
81,45%	14,25%	4,30%	78,12%

3. Conclusion

Les allocations trouvées avec cette méthode sont meilleures que celles de départ. Les nouveaux individus sont donc bien meilleurs que leurs ancêtres. Le fait de n'avoir mis aucune contrainte a priori sur les catégories d'actifs, comme les contraintes de limitations par catégories, nous a permis de constater que la solution optimale globale semble tendre vers 100% immobilier puisque la part d'immobilier augmente dans le portefeuille lorsque les provisions mathématiques économiques diminuent. Ceci montre bien la puissance des algorithmes génétiques.

En prenant en compte les contraintes de limitations par catégorie, on retient l'allocation suivante comme solution optimale de notre problème:

Action	Immobilier	Obligation	PM économique (en % de L0)
33,65%	38,86%	27,49%	67,56%

Conclusion générale

L'ALM est une méthode globale qui permet à une entreprise d'assurance de gérer la composition et l'adéquation de l'ensemble de ses actifs et passifs. L'étude ALM réalisée dans ce mémoire m'a permis de modéliser et de comparer plusieurs méthodes dans le but de déterminer l'allocation optimale d'actifs.

Nous avons vu que la méthode "Maturity Matching » est une méthode simpliste mais pas réaliste car aucun assureur ne choisit d'investir l'intégralité de son actif dans des obligations. Un bon investisseur doit en effet diversifier son portefeuille pour diminuer le risque et augmenter le rendement à l'actif. Cependant cette méthode permet d'avoir une première vision de la difficulté qu'un assureur peut rencontrer dans son étude ALM, difficulté à adosser l'actif avec le passif. La seconde méthode « Probabilité de ruine » ne permet pas à l'assureur d'avoir une allocation optimale mais constitue une sorte de frontière efficiente lui permettant de choisir une allocation pour une probabilité de ruine fixée a priori. La troisième méthode qui consiste à maximiser les fonds propres économiques semble la plus adaptée à notre problème puisque, bien qu'elle soit sensible à la volatilité des classes action et immobilier, cette méthode présente une bonne adéquation des flux d'actif et de passif. Le lien entre allocation d'actifs et Solvabilité 2 est observé dans la dernière méthode qui fait intervenir le calcul du SCR en fonction de l'allocation choisie. Comme pour la probabilité de ruine, on obtient des frontières efficientes qui indiquent le capital requis pour une allocation donnée. Ce calcul peut constituer une étape a priori permettant à l'assureur d'éliminer des solutions extrêmes, c'est-à-dire celles qui donnent des SCR trop élevés.

Quel que soit le programme d'optimisation posé, il y a nécessité de partir d'un ensemble de solutions plausibles qui constituent l'espace de recherche. Cependant, l'espace choisi par l'assureur donne une solution locale et non globale. Des méthodes heuristiques comme les algorithmes génétiques permettent alors d'approcher la solution optimale globale. La solution optimale obtenue avec la méthode des fonds propres économiques au chapitre 3 (partie III) était de 40% immobilier, 40% action et 20% obligation avec une provision mathématique économique de 67,58%. L'application des algorithmes génétiques à cette méthode donne une allocation optimale de 34% action, 39% immobilier et 27% obligation avec une provision mathématique économique de 67,56%. On remarque que les deux allocations sont très différentes, pour des provisions mathématiques qui sont cependant quasi-égales. Les algorithmes génétiques explorent donc un large espace de solutions en passant par des allocations que l'utilisateur n'aurait pas inclus dans son espace de recherche.

Les résultats obtenus dans ce mémoire sont spécifiques au produit obsèques étudié avec les hypothèses choisies à l'actif et au passif. Ce sont des résultats théoriques et ne représentent pas les allocations telles que choisies par les marchés aujourd'hui. Ces résultats s'expliquent par la prise en compte des hypothèses simples. Le choix d'une unique obligation zéro-coupon de duration 10 ans n'est ainsi pas très réaliste. Les assureurs choisissent en général d'investir dans des obligations de durations variées, qui ne sont pas seulement des obligations zéro-coupon. D'autres améliorations comme la prise en compte du risque de crédit ou de la prime d'illiquidité permettraient d'améliorer le modèle pour des résultats meilleurs.

En prenant en compte l'ensemble des études réalisées dans ce mémoire ainsi que les limitations par catégories, l'allocation « 34% action, 39% immobilier et 27% obligation » peut-être retenue comme solution optimale du problème étudié.

Bibliographie

Ouvrages

CHRISTIAN WALTER *« Nouvelles normes financières: S'organiser face à la crise »*

JOHN Y. CAMBELL & LUIS M. VICEIRA *« Strategic Asset Allocation »*

CHRISTIAN HESS *« Méthodes Actuarielles de l'Assurance Vie »*

LAMBERTON D., LAPEYRE B. *« Introduction au calcul stochastique appliqué à la Finance »*

Articles et notes:

PLANCHET F. & THEROND P. *"Allocation d'actifs pour un régime de rentes en cours de service"*, Congrès AFIR, Boston

LUCA DE DOMINICIS *« Les apports de l'intelligence artificielle dans l'allocation stratégique d'actifs sous contraintes stochastiques de solvabilité »*

EUROPEAN COMMISSION *« QIS5 Technical Specifications »*

Mémoires **d'actuariat**:

GERBER G. (2010) *« Allocation d'actifs sous Solvabilité 2 : cas de l'assurance vie épargne »*

ALLAG L. (2008) *« Modélisation et allocation stratégique d'actifs dans le cadre du référentiel de Solvabilité 2 »*

LUU F. (2012) « *Etude sur la projection du capital requis sous Solvabilité II »*

Annexe 1 : Paramètres et Variables

Formules de commutation

Montant de capital garanti	Lx	Table TH/TF 00-02
Taux technique	Tt	1.75%
Taux d'indexation	Ti	1%
Délai de carence DC maladie		1 an

Dx	$D_x = \frac{L_x}{(1+Tt)^x}$
Nx	$N_x = \sum_{k=x}^{W} D_k$
$Dx^{indexation}$	$D_x^{index} = \frac{L_x \cdot (1+Ti)^x}{(1+Tt)^x}$
$Nx^{indexation}$	$N_x^{index} = \sum_{k=x}^{W} D^{index}{}_k$
$Sx^{indexation}$	$S_x^{index} = \sum_{k=x}^{W} N^{index}{}_k$
$Cx^{indexation}$	$C_x^{index} = \frac{(L_x - L_{x+1}) \cdot (1+Ti)^{x+1/2}}{(1+Tt)^{x+1/2}}$
$Mx^{indexation}$	$M_x^{index} = \sum_{k=x}^{W} C^{index}{}_k$

Formules intervenant dans le calcul de la tarification

$A_{x_0} = \frac{\varepsilon \times C^{index}{}_{x0} + M^{index}{}_{x_0+1}}{D^{index}{}_{x_0}}$
$\ddot{a}_{x0} = \frac{N_{x_0}}{D_{x_0}}$
$\ddot{a}_{x0:\overline{p}} = \frac{\left(N_{x_0} - N_{x_0+p}\right)}{D_{x_0}}$
${}_1IA_{x_0} = (1-\varepsilon) \times \frac{C^{index}{}_{x_0}}{D^{index}{}_{x_0}}$
${}_1A_{x_0} = (1-\varepsilon) \times \frac{C^{index}{}_{x_0}}{D^{index}{}_{x_0}}$

ε désigne la part des décès accident dans les taux décès (accident + maladie) de la table de mortalité.

Annexe 2 : Formules de provisionnement

Ces formules de provisionnement ont pour objectifs d'afficher dans les conditions particulières du contrat les valeurs de rachat et de réduction des n premières années du contrat. Réglementairement (Article L132-5-2 du Code des Assurances), n ≥ 8).

k ancienneté du contrat : $k \geq 1$
x_0 âge de l'assuré à la souscription

Calculs intermédiaires		
A_{x0+k}	Engagement de l'assureur de payer 1€ au décès de l'assuré d'âge x+k à la souscription	$Sik \geq 1 \qquad A_{x0+k} = \frac{M^{index}_{x0+k}}{D^{index}_{x0+k}}$
$\ddot{a}_{x0+k}$	Espérance de vie de l'assuré d'âge x+k	$\ddot{a}_{x0+k} = \frac{N_{x_0+k}}{D_{x_0+k}}$
$\ddot{a}_{x0+k\,:\,p-k}$	Espérance de vie de l'assuré d'âge x+k tronquée à p années	$\ddot{a}_{x0+k\,:\,p-k} = \frac{\left(N_{x_0+k} - N_{x_0+p}\right)}{D_{x_0+k}}$
${}_1IA_{x0+k}$	Paramètre de contre-assurance pour la PV ou PP	${}_1IA_{x0+k} = 0$
${}_1A_{x0+k}$	Paramètre de contre-assurance pour la PU	${}_1A_{x0+k} = 0$
CA_k	Capital Décès Assuré	$CA_k = CA \cdot (1+Ti)^k$