

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Anaïs BELABED

Modélisation de la sinistralité atypique en RC automobile avec prise en compte des spécificités d'un versement en rente

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaires*

signature

Entreprise :

Nom : AXA France

Signature :

Directeur de mémoire en
entreprise :

Nom : Anne SUCHEL

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable
entreprise

Signature du candidat

*Membres présents du jury de la
filière*

Remerciements

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidée dans la réalisation de ce mémoire. En premier lieu je remercie ma tutrice ANNE SUCHEL, pour son encadrement et sa disponibilité. Son écoute et son suivi au quotidien m'auront permis de réaliser ce mémoire dans les meilleures conditions.

Je voudrai également remercier mes managers SAÏD CHAFNI et MARIE MEIGNIÉ pour m'avoir permis de passer une année très enrichissante dans leur équipe ainsi que mon tuteur académique CHRISTOPHE DUTANG pour ses précieux conseils.

Enfin je remercie sincèrement ma famille et mes amis pour leur soutien pendant toute cette année.

Résumé

La responsabilité civile automobile est une assurance obligatoire couvrant les dommages causés à un tiers en cas d'accident de la route. Sa principale particularité réside dans le fait que le versement des indemnités aux victimes peut se faire sous forme de rente, suite de versements périodiques payables en cas de survie, ou de capital. Ainsi, les accidents automobiles dans lesquels des victimes sont gravement blessés coûtent très chers aux assureurs. Dans ce mémoire, nous proposerons une toute nouvelle modélisation des sinistres futurs atypiques de la branche RC auto qui distingue les sinistres rentes des autres sinistres. Nous utiliserons une approche classique fréquence x sévérité afin d'estimer le nombre et le coût de ces sinistres atypiques à partir des données historiques.

L'utilisation des données historiques repose sur l'hypothèse que le passé est représentatif du futur. Une étape essentielle va donc être de mettre ces données en « as-if », c'est-à-dire d'estimer le coût des sinistres passés comme s'ils survenaient aujourd'hui. En plus de l'inflation classique, les sinistres subissent une inflation hors monétaire propre aux sinistres corporels comme par exemple l'augmentation du prix des prothèses suite aux avancées technologiques ou du coût horaire de l'assistance-tierce personne. Nous proposerons un nouveau vecteur d'inflation permettant de capter l'évolution de ces sinistres. Une fois ces données retraitées nous pourrions répondre à la question : qu'est-ce qu'un sinistre atypique ? Nous déterminerons alors un niveau de seuil à partir duquel un sinistre est atypique en se basant sur des méthodes statistiques de théorie des valeurs extrêmes. Nous pourrions ensuite proposer une estimation du nombre et du coût des sinistres atypiques rentes et hors rentes qui impacteront AXA France. Cependant, nous verrons rapidement que nous serons confrontés au problème des rentes potentielles : certains sinistres ne sont pas identifiés comme rentes mais peuvent le devenir par la suite. Le nombre de sinistres atypiques sera modélisé par la méthode de Schnieper et nous proposerons alors une adaptation du modèle afin de prendre en compte cette problématique. Enfin, nous modéliserons le coût des sinistres atypiques rentes à partir de l'âge de la victime, de l'arrérage et du taux d'actualisation de la rente.

Grâce à cette nouvelle modélisation nous pourrions déterminer le montant de capital requis pour les pertes futures atypiques, c'est-à-dire le montant que devra déboursier l'assureur en cas de pire perte bicentenaire. La modélisation des rentes nous permettra également de coter un traité de réassurance. AXA France est protégé par une couverture signifiant que si un sinistre dépasse 15M€, l'excédent est pris en charge par la réassurance. Ce traité couvre l'ensemble des sinistres RC auto mais lorsqu'il s'agit d'une rente, le capital constitutif de la rente est calculé avec un taux d'actualisation de 3.5%. Le problème est que ce taux est très élevé puisque nous nous trouvons actuellement dans un contexte de taux bas, ce qui entraînerait une augmentation de la charge si le taux d'actualisation du traité était en cohérence avec la conjoncture actuelle. La nouvelle modélisation nous permettra de répondre à cette problématique en cotant un traité de réassurance qui prend compte du différentiel de taux. Enfin, nous verrons que notre modélisation présente quelques limites et nous proposerons des améliorations pour les prochaines années.

Mots clés : RC auto, pertes futures, atypiques, rentes, rentes potentielles, théorie des valeurs extrêmes, mise en as-if, inflation, Schnieper, bootstrap, réassurance, cotation, taux d'actualisation, SCR, blending.

Abstract

Motor Third Party Liability Insurance (MTPL) ensures that damage to third party caused by an accident for which driver were responsible is covered. The feature of this insurance is that either annuities or capital can be paid as a compensation to victims. The purpose of the study is to suggest a new atypical model for MTPL claims where annuities and capital will be separated. It will be estimated using a detailed model based on a frequency x severity approach with the historical method.

The historical method assumes that the past is representative of the future. Thus, since a loss of €1 which occurred in 1990 is no worth €1 today, it must be revalued as if it occurred today by taking into account claims inflation. We will propose new inflation rates to take into account the growth of bodily injury. Afterwards, we will try to answer the question : what is an atypical claim ? We will determine the atypical threshold based on the extreme value theory. Then, we could estimate the number and the cost of an atypical claim. However, we will face a new problem : some claims are not identified as annuities yet but may become so in the future. We will assess the frequency with the Schnieper model and will propose an adaptation of the model to take into account this problem. Finally, we will try to model the cost of atypical claims annuities taking into account the age of the victim, the backlog and the discount rate.

This new model will allow us to determine the capital required for the atypical future losses to ensure that the insurer will be able to meet its obligations over the 12 months with a probability of at least 99.5%. Modelling annuities also allow us to price a reinsurance treaty. AXA France is protected by a reinsurance cover meaning that if a claim exceeds €15 million, the excess is covered by reinsurance. This treaty covers all motor liability claims. More precisely, it covers annuities calculated with a discount rate of 3.5%. The problem is that this rate is very high since we are currently in a low rate environment. The new model will allow us to answer this problem by pricing a new reinsurance treaty. Finally, we will talk about the limits of our model and we will propose some improvements.

Key words : MTPL, future losses, atypical, annuities, probable annuities, extreme value theory, as-if, inflation, Schnieper, bootstrap, reinsurance, quotation, discount rate, SCR, blending.

Sommaire

Remerciements	i
Résumé	i
Abstract	ii
Sommaire	iii
Introduction	v
 A Présentation générale	 1
I Périmètre d'étude et problématisation	3
1. Présentation générale de la branche RC auto	3
2. Solvabilité 2 et gestion des risques	5
3. Réassurance	9
4. Enjeux et problématisation	13
 B Modélisation de la sinistralité atypique	 15
II Mise en <i>as-if</i> des données	17
1. Analyse des bases RC auto	17
2. Etude de l'hypothèse d'inflation	20
3. Retraitement des données : mise en <i>as-if</i>	25
III Détermination d'un seuil atypique	29
1. Théorie des Valeurs Extrêmes	29
2. Détermination du domaine d'attraction	31
3. Méthodes de détermination d'un seuil	34
4. Choix d'un seuil atypique	38
IV Nombre de sinistres atypiques	41
1. Modèle de Schnieper	42
2. Adaptation du modèle de Schnieper	46
V Coût des sinistres atypiques	55
1. Présentation de la modélisation	55
2. Méthode standard	56
3. Tests d'adéquation	58
4. Applications	59
 C Applications	 75
VI Cotation d'un traité de réassurance	77
1. Prise en compte de la clause de stabilité	77
2. Simulation de la charge des rentes atypiques selon différents taux d'actualisation	78
3. Calcul de la charge cédée aux réassureurs	79

VII	Calcul du SCR des pertes futures atypiques	81
1.	Simulation des sinistres rentes et hors rentes atypiques	82
2.	Cadences de paiement et actualisation des charges	82
3.	Approximation du SCR atypiques	87
VIII	Améliorations possibles et analyses des paramètres	89
1.	Améliorations possibles	89
2.	Analyses des paramètres	95
	Conclusion	103
	Bibliographie	105
	Annexes	105
	Lois de probabilités	107
	Moments et quantiles	107
	Estimateurs MME et MLE	108
	Méthode Chain Ladder	109
	Sorties graphiques de la branche Entreprises	109

Introduction

Il y a un an, en octobre 2015 sur une route de Gironde, une collision entre un car de tourisme et un camion a fait 43 morts et de nombreux blessés graves. Chaque année, en France métropolitaine, de nombreuses personnes sont victimes d'un accident de la route. En 2015, par exemple 3461 personnes ont perdu la vie et 56 603 personnes ont été gravement blessées [7] : on parle alors d'accidents corporels. Pour les assureurs, ces sinistres corporels ne représentent que 3% du nombre total de sinistres automobiles mais sont très coûteux puisqu'ils représentent près de 30% du coût total des sinistres automobiles. Par exemple, en 2010, les assureurs français ont versé plus de 4 milliards d'euros aux victimes de dommages corporels [7]. En effet, l'assurance responsabilité civile automobile permet de replacer la victime dans la situation financière aussi proche que possible de celle qui aurait été la sienne si l'accident n'était pas survenu. Deux types d'indemnisation aux victimes sont alors possibles : une rente ou un capital. Tous deux présentent des caractéristiques et des avantages qui leur sont propres.

Une question subsiste : comment les assureurs peuvent-ils estimer le coût total de ces sinistres automobiles qui les impacteront en 2017 ? La question semble simple mais la réponse est beaucoup plus compliquée. L'objectif de ce mémoire sera alors de proposer un nouveau modèle hybride permettant d'estimer au mieux la sinistralité annuelle future de l'assureur selon que l'indemnisation se fait sous forme de rente ou sous forme de capital. Notre intérêt se portera exclusivement sur les sinistres atypiques, caractérisés par une fréquence faible et un coût important. Ces sinistres atypiques représentent un enjeu important pour les assureurs. En effet, la réforme solvabilité 2 préconise aux assureurs de disposer d'un capital requis de solvabilité (SCR) qui a vocation de couvrir un choc bicentenaire c'est-à-dire une perte que subirait la société avec une probabilité de 0,5% tous les ans. Selon le modèle interne d'AXA France, ce SCR global est composé, entre autres, du SCR des pertes futures atypiques que nous allons déterminer.

Cette modélisation nous permettra également de nous intéresser à une nouvelle problématique. Actuellement, l'ensemble des sinistres automobiles est couvert par un traité de réassurance. Cependant, le montant de la rente est calculé à partir d'un taux d'actualisation de 3,5% défini contractuellement. Ce taux est très élevé puisque nous nous trouvons actuellement dans un contexte de taux bas. Cela engendrerait une augmentation du montant d'indemnité à verser si le traité de réassurance prenait en compte un taux d'actualisation en cohérence avec la situation actuelle. L'enjeu sera alors de coter un traité de réassurance qui permettra de compenser cette différence de taux.

Notre modélisation se basera sur l'approche classique fréquence coût et à partir des données historiques. Ainsi, une attention toute particulière sera accordée au retraitement de ces données et la mise en *as-if*, c'est-à-dire déterminer le coût de ces sinistres comme s'ils survenaient aujourd'hui. Nous pourrions ensuite définir un niveau de seuil à partir duquel nos sinistres seront considérés comme atypiques. Ce seuil sera déterminé à partir d'études statistiques basées sur la théorie des valeurs extrêmes. Une fois ce seuil validé, nous adapterons le modèle de R. Schnieper (1991) afin de modéliser le nombre de sinistres atypiques rentes et hors rentes. Le coût individuel d'un sinistre atypique pourra ensuite être estimé, toujours en distinguant les sinistres rentes des autres sinistres. La modélisation des rentes nécessitera de prendre en compte tous les éléments qui lui sont propres notamment l'âge, l'arrérage et le taux d'actualisation. Nous pourrions alors coter le traité sur le différentiel de taux et également calculer le montant de capital requis des pertes futures atypiques.

Première partie

Présentation générale

Chapitre I

Périmètre d'étude et problématisation

1. Présentation générale de la branche RC auto

a. Qu'est-ce que la RC auto ?

En cas d'accident de la route, une Responsabilité Civile auto (notée RC auto) couvre les dommages causés à des tiers lorsque la responsabilité est engagée. Si un assuré provoque un accident avec son véhicule, son assureur indemniser la partie adverse. Cette assurance est obligatoire et sans assurance RC auto il n'est pas autorisé de circuler sur la voie publique. La RC auto couvre les dommages causés aux personnes victimes de l'accident ainsi qu'à leurs biens, notamment les pertes de revenus (pertes de revenus du travail, de chiffre d'affaire, dues par exemple à une incapacité totale ou partielle). Il y a ainsi deux types de sinistres : les sinistres **corporels** et les sinistres **matériels**. Pour les dommages matériels, une compagnie d'assurance peut fixer un montant maximal. Pour ce qui concerne les lésions corporelles, il n'y a jamais de limite d'indemnisation.

Voici quelques exemples de sinistres graves corporels et matériels ayant impacté AXA France. Ces sinistres sont évalués à plusieurs millions d'euros.

- Un poids lourd roulant en sens inverse est entré en collision avec un autocar. Cet accident a fait de nombreuses victimes.
- Un cycliste heurte la camionnette d'un assuré d'AXA France. Le cycliste est gravement blessé et devient tétraplégique.
- Un assuré glisse sur une plaque de verglas, se met en travers sur la chaussée autoroutière et se fait percuter par un tiers.
- Un ensemble routier (tracteur et remorque citerne) se renverse au niveau de l'échangeur Sud d'un pont et heurte un camion frigorifique qui survient en sens inverse. La citerne s'éventre et déverse son chargement de gazole et essence qui s'enflamme. L'essence en feu coule sous le pont et enflamme 6 véhicules qui stationnaient sur cette berge. L'incendie endommage gravement la structure métallique du pont.

b. Particularité de la RC auto : rente ou capital ?

La particularité de la branche « responsabilité civile », qu'elle soit automobile ou générale, est que l'indemnisation des victimes d'un sinistre corporel peut se faire sous forme de rente ou de capital.

b.1 Définition des rentes

Une rente est une suite de versements périodiques payables en cas de survie de la victime [12]. On définit la probabilité de vie ${}_t p_x$ comme :

$${}_t p_x = P(T > x + t / T > x)$$

où T est une variable aléatoire représentant la durée de vie à la naissance.

Dans notre cas, nous allons utiliser la notion d'annuité comportant des termes égaux à 1€. L'annuité à terme échu est noté :

$${}_{m|n}a_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} {}_kp_x \nu^k$$

avec $\nu^k = (\frac{1}{1+i})$ et i le taux d'actualisation. Les versements s'effectuent entre l'époque m et $m+n$.

Enfin, l'arrérage arr correspond à une somme d'argent qui sera versée périodiquement par la compagnie d'assurance à la victime au titre de rente. Le capital constitutif CC de la rente est ensuite déterminé comme le produit de l'annuité et de l'arrérage :

$$CC = {}_{m|n}a_x \times arr$$

b..2 Quelle forme d'indemnisation ?

Les victimes de dommages corporels disposent d'un droit de réparation intégrale à l'encontre du responsable ou de l'assureur de ce dernier [1]. Les indemnités peuvent alors être versées sous forme de rente ou de capital et ce dernier constitue la modalité d'indemnisation la plus répandue en pratique. En effet, le versement en capital présente de nombreux avantages à la fois pour la victime que pour l'assureur :

- La victime perçoit son indemnisation en une seule fois. Elle peut ainsi placer et gérer son argent comme elle l'entend et également le transmettre à ses proches au moment de la succession. Cela suppose par ailleurs une bonne gestion du capital par la victime de façon à ce qu'elle dispose des moyens financiers qui lui permettront de satisfaire à ses besoins tout au long de sa vie.
- L'assureur RC automobile peut clore le dossier de la victime.

La conversion d'une rente en capital est possible et repose sur deux éléments majeurs, une table de mortalité et un taux d'intérêt. Grâce à ces deux éléments, il est possible de fixer le prix de la conversion d'une rente annuel de 1 €. Cependant une question subsiste : quels éléments considérés ? Des barèmes ont été proposés par les professionnels de l'indemnisation du dommage corporel : par exemple, en 2004, la FFSA a préconisé l'utilisation de la table de mortalité TD 88-90 et de la moyenne du TEC 10. La même année, l'Association nationale des avocats de victimes de dommages corporels a conseillé un barème de capitalisation se basant sur la table de mortalité sexué 2000-2002 et sur un taux d'intérêt de 3,20%. L'Association française de l'assurance a demandé la création d' « un barème de capitalisation officiel, commun et révisable périodiquement, dont les composantes correspondent au mieux à la réalité économique ». Actuellement, AXA France retient la table de mortalité TD 88-90 et un taux d'actualisation de 3,5%.

Pour la victime, les avantages et inconvénients d'une rente versus un capital sont :

- Avantage de la rente : la victime bénéficie d'une revalorisation de sa rente et il est possible de mettre à disposition une rente qui répond aux besoins de la victime avec le temps.
- Avantage du capital : la victime a une liberté de gestion et de placement. De plus, le capital n'est pas soumis à l'impôt sur le revenu et est transmissible à la succession.
- Inconvénient de la rente : la rente est soumise à l'imposition. Les rentes à échoir ne sont pas intégrées dans le patrimoine et donc non transmissibles à la succession.
- Inconvénient du capital : la victime n'a pas de certitude sur le barème de capitalisation applicable. De plus, l'indemnisation en capital nécessite une bonne gestion/placement afin de satisfaire à ses besoins tout au long de sa vie.

Pour l'assureur :

- Avantage de la rente : l'assureur propose un meilleur accompagnement de la victime dans son projet de vie. L'assureur arrête de verser une rente au décès de la victime. Enfin, la revalorisation de la rente est prise en charge par le Fonds de Garantie des Assurances Obligatoires (FGAO) pour les accidents survenus avant le 1er janvier 2013.
- Avantage du capital : le dossier de la victime est clos en gestion et en comptabilité.
- Inconvénient de la rente : le dossier n'est pas clos et donc le provisionnement est maintenu. La revalorisation de la rente n'est pas prise en compte par le FGAO pour les accidents survenus à compter du 1er janvier 2013.

- Inconvénient du capital : incertitude sur le barème de capitalisation applicable. Aucune possibilité de récupération en cas de décès de la victime.

Chacune de ces deux possibilités de versement est censée respecter le principe de la réparation intégrale, c'est-à-dire replacer la victime dans la situation qui aurait été la sienne si l'accident n'était pas survenu. En revanche l'indemnisation sous forme de capital ne répond pas à ce critère puisque la victime n'aurait jamais perçu ses salaires en une seule fois. Dans ce contexte, la rente semble donc être la forme d'indemnisation la plus appropriée.

2. Solvabilité 2 et gestion des risques

a. Qu'est-ce que la solvabilité ?

La solvabilité est la capacité pour un assureur de faire face à ses engagements. Pour y faire face les compagnies d'assurance doivent constituer en plus des provisions couvrant déjà leurs engagements, des fonds propres suffisants pouvant couvrir des événements imprévus et/ou exceptionnels : **les capitaux requis réglementaires**.

La solvabilité d'une compagnie d'assurance est mesurée par le ratio de solvabilité défini comme le rapport entre les fonds propres et les capitaux requis réglementaires. Ce ratio doit être supérieur à 100% afin de garantir la solvabilité de la compagnie.

Depuis le 1er janvier 2016, les compagnies d'assurance et de réassurance sont soumises à la norme **Solvabilité 2** pour le calcul des capitaux requis réglementaires et des fonds propres. La directive Solvabilité 2 est une réforme prudentielle pour toutes les compagnies d'assurance et de réassurance européennes régissant les nouvelles règles de solvabilité à adopter.

b. Solvabilité 2 : nouvelle norme pour le calcul du capital requis

La nouvelle réforme a pour objectif d'adapter le niveau des capitaux requis en fonction des **risques réels** pris par les compagnies d'assurance et de réassurance : plus l'entreprise est exposée à des risques plus le capital requis sera important.

Elle est organisée en **3 piliers** distincts, représentant les besoins quantitatifs, qualitatifs ainsi que l'harmonisation et la communication entre les différents acteurs :

Le 1er pilier concerne les exigences quantitatives en capital. Les provisions servent à couvrir les prestations futures des assurés et sont estimées de manière à ce qu'elles soient le plus juste possible. Cependant, nous ne pouvons pas garantir qu'elles seront suffisantes et il est ainsi nécessaire de détenir un certain montant de ressources supplémentaires servant à amortir des chocs exceptionnels. Ainsi, le 1er pilier permet de vérifier que la compagnie d'assurance puisse faire face à ses engagements sur un horizon 1 an en imposant deux exigences de capital, le SCR et le MCR.

- Le SCR (*Solvency Capital Requirement*) correspond à un niveau de capital fictif que la compagnie d'assurance devrait déboursier en plus des engagements provisionnés en cas de pertes bicentennaires, c'est-à-dire une perte arrivant avec une probabilité de 0,5%.
- Le MCR (*Minimum Capital Requirement*) est le niveau minimum de fonds propres qu'une entreprise doit posséder sous peine d'une intervention de l'Autorité de Contrôle Prudentielle. Il correspond à une perte arrivant avec une probabilité de 20%.
- Le BEL (*Best Estimate Liabilities*) représente la valorisation économique des provisions techniques. C'est l'espérance mathématiques des *cash flows* futurs actualisés à partir de la courbe des taux de référence. Les *cash flows* correspondent aux prestations, coûts et primes futures.
- La marge pour risque correspond à un montant de provisions à ajouter aux provisions *Best Estimate*. Elle représente le coût du capital que devrait lever le cessionnaire pour couvrir son exigence de capital jusqu'à l'extinction du portefeuille.

A la différence de l'ancienne réforme Solvabilité 1, les actifs sont valorisés en valeur de marché et les passifs en juste valeur : c'est la valorisation économique du bilan.

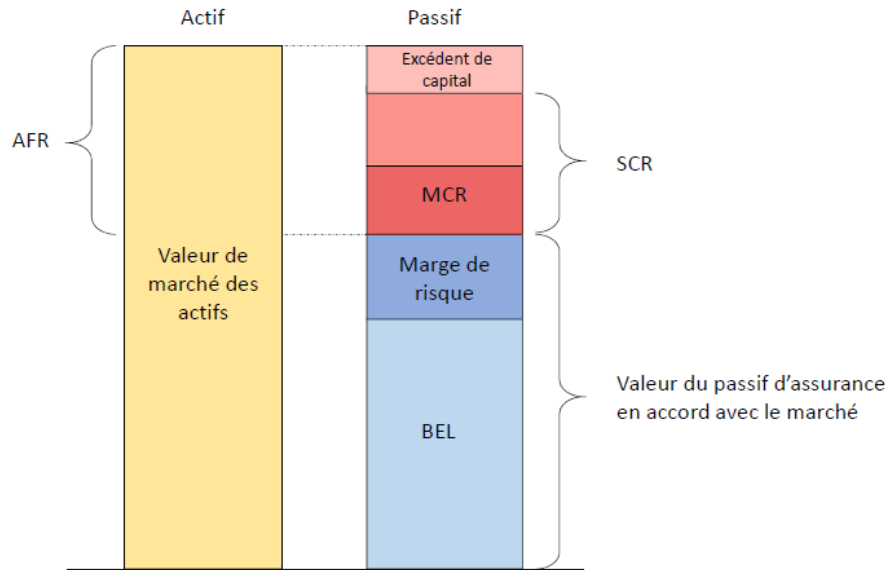


FIGURE I.1 – Le bilan prudentiel Solvabilité 2

Le deuxième pilier fixe les normes qualitatives de contrôle des risques en interne. Dans le cadre de son système de gestion des risques, les compagnies d'assurance procèdent à une évaluation interne des risques et de la solvabilité avec la création d'un processus ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*). A la différence du pilier 1, l'ORSA a pour objectif de s'assurer la solvabilité pluriannuelle de l'assureur en prenant en compte la stratégie de l'entreprise et ses spécificités dans les calculs. L'autorité de contrôle aura la possibilité de demander à l'entreprise de posséder un capital plus important que celui calculé dans le pilier 1 (capital *add-on*), et aussi de diminuer son exposition à certains risques.

Le pilier 3 vise à améliorer la communication aux régulateurs et au public et à harmoniser l'information. Pour cela, l'assureur doit produire 3 supports :

- Le SFCR (Solvency and Financial Conditions Report), qui est un rapport annuel ayant pour objectif de présenter la situation financière des entreprises au public.
- Le RSR (Regular Supervisory Reporting), autre support annuel servant de base à l'autorité de contrôle prudentiel dans le cadre d'un contrôle.
- Le QRT (Quantitative Reporting Templates) rapport des états quantitatifs annuels et trimestriels.

c. Le modèle interne d'AXA France

Sous Solvabilité 2, le besoin en capital requis (SCR) dépend du profil de risque de l'assureur. Cela signifie que plus l'exposition aux risques sera importante, plus le montant de capital requis sera conséquent. Ainsi, il est primordial pour une compagnie d'assurance de connaître les risques auxquels elle s'expose.

c.1 Les différents risques

En assurance non vie il existe trois principaux risques : le risque de réserve, le risque catastrophe, et le risque de primes. Nous porterons une attention toute particulière à ce dernier.

- Le risque de réserve provient d'une évaluation défavorable des provisions constituées les années passées au titre des sinistres survenus, qu'ils aient déjà été déclarés ou non.
- Le risque catastrophe se définit comme le risque de perte lié à l'importante incertitude dans les hypothèses de tarification et de provisionnement en cas de survenance de phénomènes extrêmes et exceptionnels.
- Le risque de prime provient de l'inadéquation entre le tarif et la sinistralité future. Elle se subdivise en deux sous-risques, le risque de portefeuille et le risque de pertes futures.

Dans le cadre de ce mémoire, nous allons nous intéresser exclusivement au risque de prime.

Le métier d'assurance repose sur le cycle de production inversé. Cela signifie que l'assureur proposera un montant de prime aux assurés avant même de connaître les prestations à verser en cas de réalisation du risque. Cette prime devra être suffisante pour couvrir la sinistralité future du portefeuille mais ne devra pas non plus être trop élevée pour rester compétitive face à la concurrence.

L'assurance IARD (Incendie, Accidents et Risques Divers) repose sur le principe de mutualisation : les primes des uns servent à payer les sinistres des autres. La difficulté repose sur l'évaluation du volume de souscriptions sur lequel est adossé le calcul de la prime. Ceci engendre le risque de portefeuille correspondant au mauvais ajustement entre le montant de la prime et le nombre de contrats souscrits.

Une autre difficulté provient de l'évaluation de la sinistralité future. Les actuaires devront mettre en place des modèles statistiques pour prédire le nombre et le coût des sinistres futurs. On parle de **risque de pertes futures**.

Il existe deux types de pertes : les pertes atypiques et les pertes attritionnelles. Les pertes atypiques concernent des sinistres plus rares et ayant un coût bien plus important. La figure I.2 illustre cette notion.

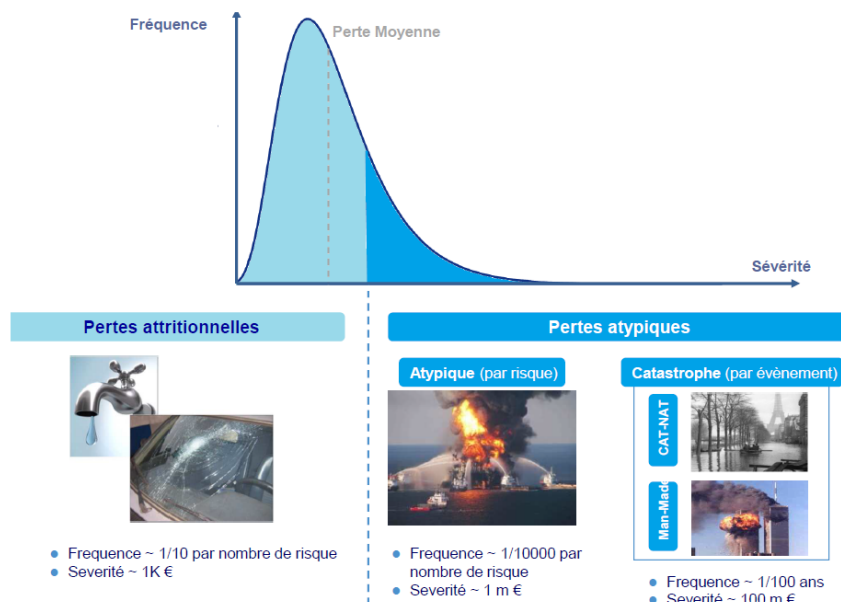


FIGURE I.2 – Illustration des pertes atypiques

c..2 Modèle interne et détermination du capital requis

Le calcul du SCR peut se faire selon deux principales méthodes : **la formule standard** ou **le modèle interne**. La formule standard est une approche modulaire dans le sens où un besoin en capital élémentaire est calculé pour chaque facteur de risque appartenant à un module de risque. La formule standard agrège les différents SCR obtenus à l'aide de matrice de coefficients de corrélation linéaires. Une première agrégation des risques est effectuée au sein de chaque module de risque, puis une deuxième est appliquée entre les différents modules.

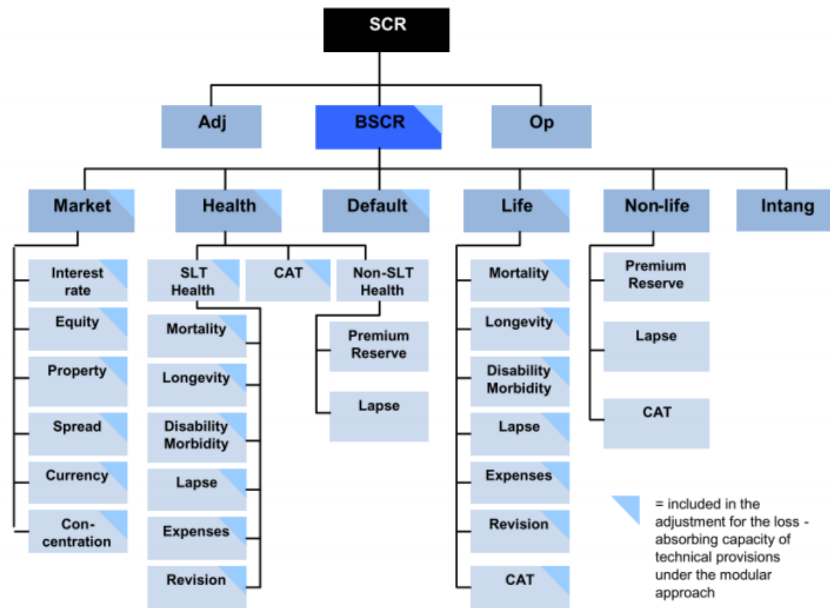


FIGURE I.3 – La formule standard

La formule standard est assez simple d'utilisation et d'implémentation. En effet, elle a été calibrée pour une application à toutes les compagnies d'assurance. Néanmoins, elle ne prend pas en compte certains facteurs de risques auxquels la compagnie est sensible. Le modèle interne est plus fin en termes de typologie des risques. AXA France a choisi de mettre en place son propre modèle interne. Nous allons présenter, de manière globale, la segmentation des risques afin de mieux comprendre comment AXA calcule son SCR via le modèle interne. Celui-ci est appelé STEC (*Short Term Economic Capital*).

Les véhicules motorisés sont regroupés en une première catégorie :

- **Auto_PP_DOM** et **Auto_EN_DOM** couvrent les dommages de tous types de véhicules, pour des particuliers et des professionnels (PP) ou des entreprises (EN).
- **Auto_PP_RC** et **Auto_EN_RC** couvrent les sinistres automobiles, tous types de véhicules, pour lesquels la responsabilité civile de l'assuré est engagée. Cette assurance est obligatoire.

Les garanties dommages aux biens sont segmentées en 2 branches.

- **DAB_PP** et **DAB_EN** couvrent les dommages aux biens (habitation, exploitations agricoles, industriel, ...) des particuliers et des professionnels ou des entreprises.

Les branches responsabilité civile sont :

- **RC_PP** couvre la responsabilité des professionnels comme par exemple les artisans et commerçants.
- **RC_EN** couvre la responsabilité civile des professions médicales, professions réglementées,...

Enfin, l'assurance construction :

- **DO** : la garantie Dommage Ouvrage est une décennale souscrite par le maître d'ouvrage. Elle permet de couvrir les dommages de la construction survenant dans les 10 ans qui suivent la réception du chantier.
- **RCD** : la Responsabilité Civile Décennale couvre la responsabilité civile des intervenants pendant 10 ans et est obligatoire.

Nous nous intéresserons à la modélisation des pertes atypiques futures de la branche RC Auto. Tout au long de ce mémoire, nous essayerons de répondre à plusieurs questions telles que :

- A partir de quel montant un sinistre peut-il être considéré comme atypique ?
- Combien de sinistres atypiques impacteront AXA France en 2017 ?
- Combien devrons-nous déboursier pour ces sinistres atypiques ?
- Comment prendre en compte le versement en rente ou en capital dans la modélisation ?

- Quel sera le montant de capital requis pour les pertes futures atypiques de la branche RCA ?
- Combien coûtera notre traité de réassurance ?

Les sinistres atypiques sont susceptibles d'atteindre des montants à partir desquels la réassurance entre en jeu. Nous allons faire un rappel rapide sur les grands principes de la réassurance.

3. Réassurance

a. Grands principes de la réassurance

La réassurance est aussi appelée l'assurance des assureurs : les sociétés d'assurance vont payer une prime pour se protéger contre les risques extrêmes. Elle permet ainsi aux cédantes de faire face aux pics de sinistralité exceptionnels de type tempête Lothar (1999) ou attentats et aide à empêcher la faillite d'un assureur qui n'a pas les fonds disponibles en cas de très grande catastrophe.

La réassurance a différents rôles : elle permet de diminuer les risques techniques et opérationnels auxquels l'assureur est soumis parmi lesquels :

- Les risques catastrophes ou extrêmes : ils correspondent aux sinistres liés à une forte déviation du coût et/ou de la fréquence à partir d'un seul fait générateur. Ces risques se classent en deux grandes catégories : les risques catastrophes naturelles ou *Cat Nat* (Ouragans, tremblements de terre, ...) et les risques *Man Made* (Attentats, crash d'avion, ...).

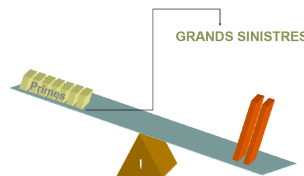


FIGURE I.4 – L'intensité et la fréquence de grands sinistres

- Les risques de déviation fréquence : ils correspondent aux sinistres liés à une série d'événements plus ou moins indépendants augmentant fortement la fréquence dans le temps ou dans l'espace : augmentation du nombre d'accidents de la route, rachats massifs, série de mini tempêtes...

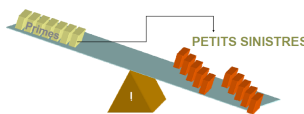


FIGURE I.5 – Le dérapage de la fréquence

- Les risques d'évolution de l'exposition : ils correspondent aux sinistres liés à un changement de politique de souscription, de politique d'indemnisation (jurisprudence), un changement de produit.

La réassurance permet également un apport de capital sous forme directe ou indirecte, par un prêt de fonds propres ou par un financement lors du lancement d'un nouveau produit. Enfin la réassurance a un rôle d'information, de formation et de conseil en permettant de renseigner le client sur ce que fait la concurrence ainsi qu'en transposant les garanties d'un marché à un autre. Des formations sont offertes par les réassureurs pour les souscripteurs (nouvelles méthodes par exemple).

Différents types de réassurance existent :

1. **La réassurance obligatoire** : engagement entre les deux parties qui se matérialise par un traité de réassurance.
2. **La réassurance facultative** : liberté réciproque pour l'assureur de proposer un risque et pour le réassureur de refuser. Elle se matérialise par une note de couverte et concerne les risques "au cas le cas" (par exemple les risques de pointes).
3. **La réassurance "facob"** : facultatif pour l'assureur et obligatoire pour le réassureur.

Enfin la réassurance peut se trouver sous différentes formes : la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle. Pour la première forme, une proportionnalité est fixée à priori au niveau d'un portefeuille ou d'un risque que l'on veut céder. Les traités en Quote-Part et en Excédent de Plein font partie de la réassurance proportionnelle.

1. **Quote-Part (QP)** : on prédéfinit un ratio de cession qui s'applique uniformément sur tous les risques et à la fois sur les primes, les sinistres et le capital assuré. C'est le principe de partage du sort.
2. **Excédent de Plein (EP)** : on prédéfinit un montant de capital assuré (le plein de rétention) que l'assureur conserve. On définit un taux de cession proportionnel propre à chaque risque.

La figure I.6 est une représentation imagée des traités de réassurance proportionnelle. A gauche le traité en Quote-Part, à droite celui en Excédent de Plein.

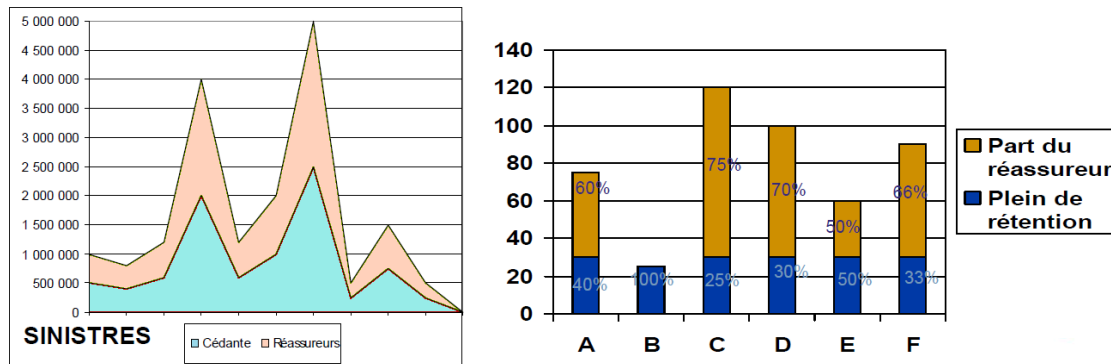


FIGURE I.6 – Les traités de réassurance proportionnelle

Pour la réassurance non proportionnelle, la répartition assureur/réassureur est fixée en fonction de la sinistralité uniquement. Cela concerne les traités en Excédent de sinistre et les Stop-Loss.

1. **Excédent de Sinistres (XS)** : l'assureur conserve une rétention (ou priorité). Au-delà, le réassureur va prendre en charge l'excédent de sinistralité jusqu'à un montant maximum : la portée (ou capacité).
2. **Stop-Loss (SL)** : sur la charge annuelle de sinistres, le réassureur prendra en charge l'excédent de sinistralité au-delà de la priorité et à concurrence d'une portée.

La figure I.7 illustre les traités de réassurance non proportionnelle.

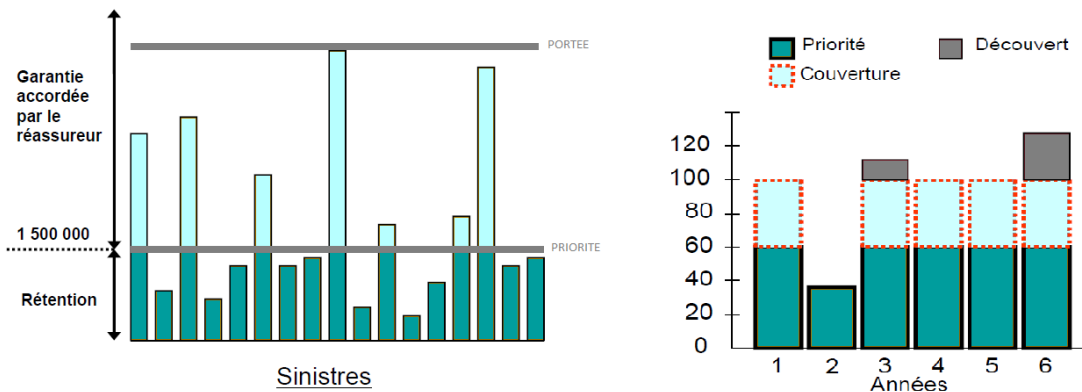


FIGURE I.7 – Les traités de réassurance non proportionnelle

b. Cotation d'un traité de réassurance en XS

La tarification technique d'un traité en excédent de sinistre consiste à déterminer la prime pure de la tranche, c'est-à-dire le coût moyen de la sinistralité qui impactera la tranche. Il existe trois différentes méthodes :

1. La méthode du *Burning Cost*
2. Les méthodes probabilistes
3. La méthode par simulation

Dans le cadre de notre mémoire nous procéderons de la manière suivante : pour chaque simulation correspondant à une année nous simulerons un nombre de sinistres ainsi qu'un coût individuel. Nous pourrons alors déterminer la charge annuelle définie comme :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Avec X_i le coût du i -ème sinistre et N le nombre de sinistres.

Nous pourrons ensuite en déduire la sinistralité à charge de l'assureur, puis celle du réassureur pour un traité *ill XS d* où d correspond à la rétention :

$$S_{net} = \sum_{i=1}^N \min(X_i, d)$$

$$S_{cédée} = \sum_{i=1}^N (X_i - d)^+$$

La difficulté reposera sur le choix des lois pour le coût et le nombre. Ensuite, en calculant la moyenne de la charge cédée sur n années nous pourrons calculer la prime pure afin d'avoir une estimation de la cotation.

$$P = E(S_{cédée})$$

Le traité de réassurance en XS que nous devons coter concernera les sinistres atypiques dont le versement se fait sous forme de rente.

Nous aurons également besoin des notions suivantes :

- Une période de retour, exprimée en années, correspond au temps moyen à attendre avant de voir revenir une année présentant des pertes au moins équivalentes.
- Une Courbe OEP (*Occurence Exceedence Probability*), associe une période de retour (en année) au coût maximal d'un événement sur une année.
- Une Courbe AEP (*Aggregate Exceedence Probability*), associe une période de retour (en année) au coût total des événements sur une année.

c. Focus sur le traité XS de la branche RC auto

Les sinistres RC auto sont couverts par un traité de réassurance en excédent de sinistre. La rétention est de 15M€ et la portée est illimitée : *ill XS 15M€*. De même les reconstitutions sont gratuites et illimitées.

Les risques réassurés sont :

- les sinistres corporels et matériels ;
- la garantie individuelle des personnes transportées ;
- la garantie personnelle du conducteur et les rentes indemnitaires qui s'y rapportent.

c..1 Clause de stabilisation

Nous aurons également besoin de comprendre la notion de clause de stabilisation. La définition est la suivante : « Si à la date ou aux dates successives de paiement d'un sinistre l'indice accuse une variation de plus de 10 % par rapport à l'indice en vigueur à la date de prise d'effet du traité de réassurance, le montant de la franchise à appliquer est augmenté ou diminué proportionnellement et l'engagement du réassureur est modifié dans les mêmes proportions ».

Afin de mieux comprendre cette définition nous allons prendre un exemple :

- Priorité : 100000 ;
- Portée : 500000 ;
- Indice : 100 ;
- Charge totale cumulée du sinistre : 400000.

Répartition du sinistre	Indice à retenir	Charge rapportée à la base 100
110000	105	$110000 \times \frac{100}{100} = 110000$
200000	115	$200000 \times \frac{100}{115} = 173913$
90000	130	$90000 \times \frac{100}{130} = 69231$

TABLE I.1 – Prise en compte de la clause de stabilisation

La première année l'assureur paye 110000 avec un indice à 105. La variation par rapport à la valeur initial de l'indice n'est pas supérieure à 10 %, on ne corrige pas la charge. En revanche pour les deuxième et troisième années la variation de l'indice est supérieure à 10%. Nous calculons donc le montant de la nouvelle charge.

L'actualisation de la portée et de la rétention se fait à partir d'un indice moyen de paiement, noté *IMP* :

$$IMP = \frac{400\,000}{353\,144} \simeq 1,13$$

Finalement, nous pouvons recalculer les nouvelles limites du traité de Réassurance après application de la clause de stabilité.

Priorité : $100\,000 \times 1,13 = 113\,268$

Portée : $500\,000 \times 1,13 = 566\,341$

Remarque : l'indice de référence est défini contractuellement et correspond à l'indice INSEE des salaires horaires des ouvriers relevant de la nomenclature des activités pour la santé humaine.

c..2 Les rentes indemnitaires

Lorsqu'un sinistre donne lieu au versement d'une rente, le réassureur participera à l'indemnisation par le versement de sa part dans le capital constitutif de la rente. Il est défini contractuellement que le capital constitutif de la rente sera calculé à partir de la table de mortalité TD 88-90 et avec **un taux technique de 3,5%**. Les réassureurs ne prennent pas en compte la revalorisation de la rente suite à la réforme du FGAO.

4. Enjeux et problématisation

a. Présentation et limites du modèle atypique actuel

La modélisation de la charge atypique annuelle S^{Atyp} se fait à partir d'un modèle fréquence x coût [4].

$$S^{Atyp} = \sum_{i=1}^{N^{Atyp}} X_i^{Atyp}$$

où :

- N^{Atyp} représente le nombre de sinistres atypiques.
- X_i^{Atyp} représente le coût individuel d'un sinistre atypique, où $(X_1^{Atyp}, X_2^{Atyp}, \dots, X_{N^{Atyp}}^{Atyp})$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Ce modèle présente plusieurs avantages :

- La précision de la modélisation est améliorée grâce à la disponibilité de données détaillées.
- Ce modèle permet également de travailler sur des problématiques de réassurance.
- Ce modèle est flexible puisqu'il est possible de le calibrer selon 4 méthodes différentes :
 1. La méthode historique : le calibrage du modèle se fait à partir des pertes historiques.
 2. La méthode par exposition : les pertes sont simulées à partir de courbes d'exposition et de la composition du portefeuille. Cependant, cette méthode n'est pas applicable pour toutes les branches notamment en RC auto où les garanties sont illimitées.
 3. La méthode par scénarios : le modèle est calibré à partir d'avis d'expert et de scénarios marché.
 4. La méthode du *Blending* : Cette méthode permet de calibrer le modèle en combinant 2 des 3 méthodes expliquées ci-dessus.

La modélisation des sinistres atypiques en RC auto se fait à partir de la méthode historique.

Le modèle actuel présente cependant plusieurs limites que nous allons essayer de prendre en compte dans la nouvelle modélisation :

- Le modèle considère la charge atypique d'un sinistre automobile sans se soucier du type d'indemnisation qui peut se faire sous forme de rente ou de capital.
- Le seuil atypique est fixé à la moitié de la rétention du traité de réassurance et ne se base pas sur des études statistiques précises. Ce seuil est beaucoup trop haut et ne permet de modéliser que des sinistres exceptionnels et non atypiques.
- Les réformes du FGAO et du Recueil Méthodologique commun ne sont pas prises en compte dans la mise en *as-if*.
- Le vecteur d'inflation utilisé date de 2010 et ne se base pas non plus sur des études statistiques. Pourtant, la mise en « as-if » est une étape très importante lorsque l'on travaille à partir de la méthode historique.
- La branche, à savoir sinistre de type Particuliers/Professionnels ou Entreprises, n'est pas prise en compte dans la modélisation.

b. Enjeux du nouveau modèle

b..1 Distinction entre les sinistres rentes et hors rentes

La mise en *as-if* est une étape fondamentale de la méthode historique. Le nouveau modèle hybride que nous allons proposer permettra d'améliorer la qualité de cette mise en *as-if* :

- Nous allons déterminer un nouveau vecteur d'inflation qui captera en plus de l'inflation monétaire l'inflation « hors monétaire » propre aux sinistres corporels comme par exemple l'augmentation du coût horaire de l'assistance tierce personne.
- La séparation des rentes et hors rentes nous permettra de retraiter les données de la réforme du FGAO qui ne concerne que les rentes.

Le seuil des sinistres atypiques sera plus proche des données du portefeuille puisqu'il reposera sur des méthodes statistiques.

La grande nouveauté de cette année reste **la distinction entre les sinistres rentes et hors rentes**, c'est-à-dire la prise en compte du type d'indemnité versée pouvant se faire sous forme de rente ou de capital. La charge totale d'un sinistre rente survenu en i et vu l'année j peut s'écrire comme :

$$ch_i^j = CC(i', TdM) + F_i^j$$

Avec :

- i' le taux d'actualisation ;
- TdM la table de mortalité retenue ;
- i l'année de survenance du sinistre ;
- j l'année de vision du sinistre.

Ainsi, à la différence d'un versement en capital, la rente prend en compte non seulement le caractère viager de la victime mais aussi le taux d'actualisation du capital constitutif. Nous allons essayer de prendre en compte tous ces éléments afin d'apporter une modélisation plus fine des rentes. A partir de cette modélisation il nous sera possible de déterminer un montant de **capital requis pour les pertes futures atypiques**.

Enfin, la dernière modification apportée est la **séparation entre les sinistres Particuliers/Professionnels et les sinistres Entreprises**. La branche RCA Particuliers/Professionnels regroupe les véhicules des particuliers ou des professionnels. A l'inverse, la branche Entreprises assure tous les véhicules ayant un lien avec l'entreprise :

- Les flottes automobiles regroupent plusieurs véhicules pour un seul contrat. Les véhicules assurés dans un contrat de flottes auto peuvent être divers : voitures, motos, utilitaires, poids lourds, . . . , et avoir des usages différents : transport de personnes ou de marchandises.
- Les véhicules de fonction où un seul véhicule est assuré par contrat.

Ainsi en plus de séparer les sinistres rentes et hors rentes, une segmentation sera prise en compte entre les branches PP et EN.

b..2 Cotation d'un traité de réassurance

Actuellement, les sinistres RC auto sont couverts par un traité ill XS 15M€[5]. Celui-ci couvre donc tous les sinistres dont la charge totale est supérieure à 15M€. Or, nous avons vu que pour un sinistre automobile corporel, deux types d'indemnisation sont possibles : le versement d'une rente ou d'un capital. La charge totale d'un sinistre rente est composée du capital constitutif ainsi que de toutes les dépenses annexes. Le capital constitutif est calculé à partir d'un taux d'actualisation de 3,5%, défini contractuellement dans la note de couverture du traité de réassurance RC auto. Finalement, le traité en XS couvre l'ensemble des sinistres RC auto mais lorsqu'il s'agit d'une rente le capital constitutif de la rente doit être calculé à partir d'un taux de 3,5%.

Cependant, ce taux est très élevé et ne correspond pas à la réalité économique actuelle. En effet, on se trouve aujourd'hui dans un contexte de taux bas qui engendrerait une augmentation de la charge rente si le traité de réassurance prenait un taux d'actualisation en cohérence avec la conjoncture actuelle.

L'objectif va donc être de coter un traité de réassurance qui permettra de compenser de cette différence de taux.

La cotation du traité de réassurance sur le différentiel de taux d'actualisation ne concerne que les sinistres rentes. En plus de la précision de la modélisation que cela apporte, la nouvelle modélisation permettra de s'intéresser à des problématiques de cotation, ce qui n'était pas possible les années précédentes.

Deuxième partie

Modélisation de la sinistralité atypique

Chapitre II

Mise en *as-if* des données

Notre modélisation est basée sur la **méthode historique**. Ainsi, la qualité des données et un retraitement adéquat sont fondamentaux.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les bases de données que nous utiliserons dans toute la suite puis analyser quelques statistiques descriptives. Nous prendrons soin d'effectuer un retraitement propre de nos données : pour cela, nous déterminerons un nouveau vecteur d'inflation qui prendra en compte l'inflation monétaire mais aussi l'inflation "hors monétaire" propre aux sinistres corporels. Dans notre retraitement, il faudra également considérer la réforme du FGAO qui ne concerne que les sinistres rentes ainsi que le recueil méthodologique commun correspondant à un changement de barème jurisprudentiel.

1. Analyse des bases RC auto

a. Présentation des bases de données

Dans le cadre de notre étude sur la modélisation de la sinistralité atypique nous avons créé notre propre base de données.

Les tables que nous utilisons regroupent toutes les informations sur les sinistres. Par exemple, pour chaque sinistre nous connaissons son identifiant, le numéro de contrat associé, le nom de l'assuré, le type de garantie touchée, la date de survenance du sinistre, la date d'ouverture du sinistre, l'entité concernée, la date de clôture si le sinistre est clos ... De plus, ces tables sont mises à jour tous les mois, et ce depuis 1999. Ainsi, dans chacune des tables et donc pour chacune des visions, nous connaissons le règlement, la réserve estimée, la charge, les recours reçus ainsi que les évaluations de recours. Pour les branches longues comme la RC auto, le montant de sinistres peut être connu un grand nombre d'années après. Prenons le cas par exemple d'un enfant victime d'un traumatisme crânien lors d'un accident de la route : la justice ne pourra se prononcer qu'à sa majorité et donc le montant du sinistre ne sera connu qu'au bout de plusieurs années après la survenance. Les tables étant mises à jour tous les mois, nous avons connaissance de l'évaluation du montant des sinistres. Bien sûr plus le développement est long, plus l'estimation est fiable. Pour la création de notre table, nous récupérons les visions à fin décembre pour les survenances comprises entre 1992 et 2015 et à fin mai pour l'année 2016 qui n'est pas terminée.

Enfin, notre étude porte uniquement sur les sinistres graves c'est-à-dire les sinistres dont le coût a dépassé au moins une fois 150k€ au cours de leur développement.

a.1 La base de données sinistres

Notre base de données contient les informations sur 10585 sinistres survenus entre 1992 et 2016. L'année de vision s'étend entre 1999 et 2016. Ainsi, pour un sinistre survenu en 1992, nous connaissons son montant pour toutes les années de 1999 à 2016. Ci-après les variables qui nous intéressent :

- Le numéro de sinistre ;
- Le numéro de contrat ;
- L'état du sinistre : 0 = en cours, 1= clos sans suite, 3=clos ;
- L'année de survenance : de 1992 jusqu'à 2016 ;
- La vision : de 1999 à 2016 ;

- Le vieillissement du sinistre : de 0 (sinistre survenu l'année i , vu l'année i) et pouvant aller jusqu'à 24 ans pour un sinistre survenu en 1992 ;
- Le règlement y compris frais et net de recours ;
- La réserve ;
- La charge nette d'évaluation de recours : charge = règlement + réserve - évaluations de recours ;
- Les évaluations de recours ;
- La nature : corporelle ou matérielle. La nature du sinistre est corporelle à partir du moment où une garantie corporelle est touchée. Très souvent, elle contient donc aussi du corporel ;
- L'entité : Particuliers/Professionnels (PP) ou Entreprises (EN).

a..2 La base de données rentes

Lorsqu'un assuré est victime d'un accident corporel, deux types d'indemnisations sont possibles :

- Le versement d'un capital à la victime ;
- Le versement d'une rente.

Dans toute la suite, nous parlerons de **sinistres hors rentes** et de **sinistres rentes**.

Grâce à l'équipe Actuariat Compte, nous avons en notre possession une table de correspondance entre le numéro de sinistre et le numéro de rente. Nous disposons également de la base des rentes contenant les informations suivantes :

- Le numéro de rente ;
- La date de survenance (idem que dans la base sinistre) ;
- L'âge de la victime ;
- Le type de rente : viagère ou temporaire ;
- La date d'entrée en rente, c'est-à-dire la date de premier versement ;
- La date de fin de versement ;
- L'arrérage.

A partir de ces données, de la table de mortalité TD 88-90 et d'un taux d'actualisation à 3,5 % nous sommes capables de calculer le capital constitutif de rente.

$$CC = {}_{m|n}a_x \times arr$$

Avec a_x , l'annuité à terme échu.

$${}_{m|n}a_x = \sum_{k=m+1}^{m+n} {}_k p_x \nu^k$$

- $\nu^k = (\frac{1}{1+i})$ où i est le taux d'actualisation.
- Les versements s'effectuent entre l'époque m et $m+n$.
- arr correspond à l'arrérage c'est-à-dire la somme d'argent qui sera versée périodiquement par la compagnie d'assurance à la victime au titre de rente.

Finalement, nous pouvons assez simplement rapprocher l'information présente dans nos bases, de la manière suivante : par exemple, pour un sinistre rente survenu en i et vu j :

$$Ch_i^j = CC(i', TD\ 88-90) + F_i^j$$

Avec :

- Ch_i^j : Donnée de la charge totale du sinistre survenu en i vu en j présent dans la base sinistre ;
- CC : Montant du capital constitutif de la victime recalculé à partir de la base des rentes pour un taux d'actualisation i' et une table de mortalité TD 88-90 ;
- F_i^j : Montant de la partie fixe du sinistre rente *i.e.* correspondants aux dépenses autres que le capital constitutif de la rente ;

b. Analyse du jeu de données

Afin de nous familiariser avec notre jeu de données, nous avons regardé quelques statistiques descriptives sur la répartition de nos sinistres. Tout d'abord, nous avons cherché à identifier la part des sinistres rentes dans notre jeu de données. A partir de la figure II.1, nous concluons que 12% des sinistres ont été identifiés comme rentes et représentent 40% de la charge totale vue en 2016.

Remarque : nous ne disposons pas d'information sur les rentes potentielles, c'est-à-dire que certains sinistres ne sont pas encore identifiés comme rentes mais peuvent le devenir. Il sera très important de prendre en compte ce point dans la modélisation.

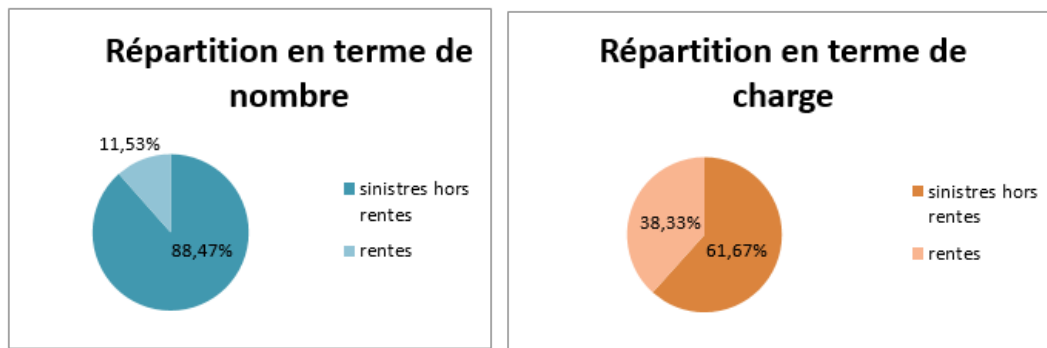


FIGURE II.1 – Répartition des sinistres rentes/ hors rentes

La figure II.2 illustre le caractère prépondérant des sinistres corporels dans notre base de données : ils représentent environ 98% du nombre et de la charge des sinistres vus en 2016.

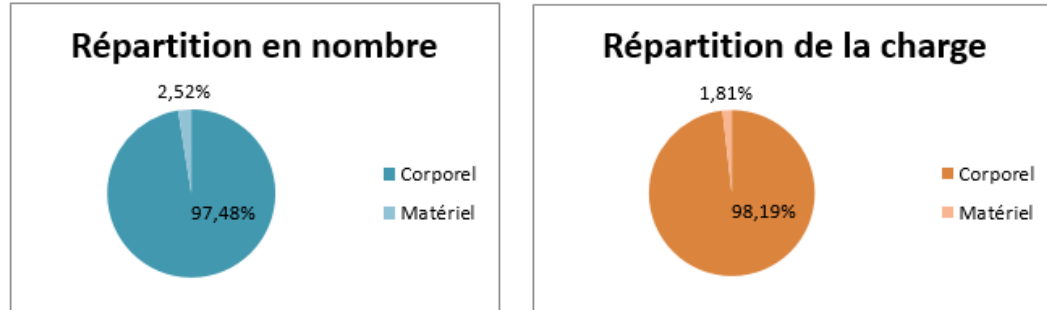


FIGURE II.2 – Répartition de la nature des sinistres

Les sinistres Particuliers/Professionnels représentent 75% du nombre de sinistres et de la charge totale, comme indiqué sur la figure II.3.

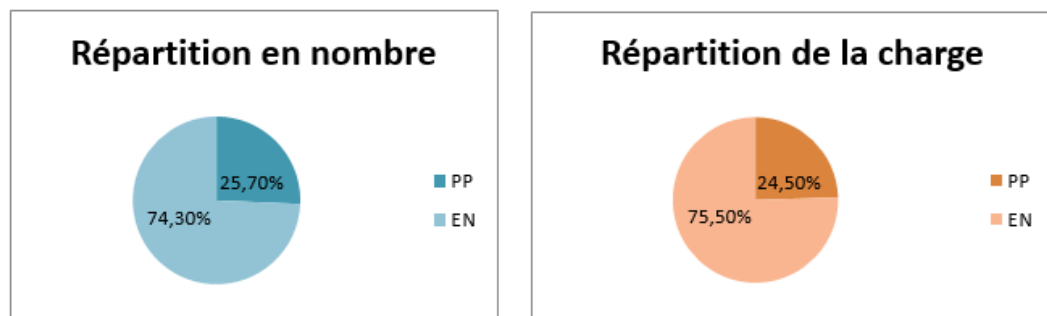


FIGURE II.3 – Répartition des sinistres selon l'entité

Enfin, nous nous sommes également intéressés au développement moyen des sinistres. Sur la figure II.4, la courbe verte représente le développement moyen d'un sinistre rente et la courbe bleue celui d'un sinistre hors rente. Les sinistres rentes concernent les plus gros sinistres, il est donc logique d'observer un tel écart de montant. De plus, nous pouvons remarquer une très forte évolution des sinistres rentes sur les quatre premières années. Cela s'explique par le fait qu'il est très difficile de connaître rapidement l'état de la victime et donc la rente à verser.

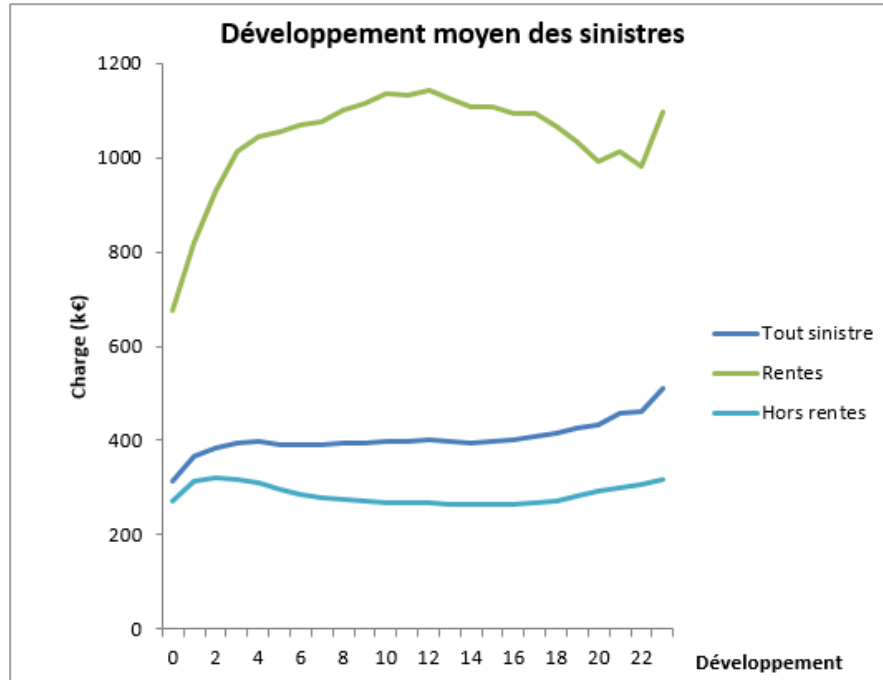


FIGURE II.4 – Développement moyen de la charge

2. Etude de l'hypothèse d'inflation

Cette étape est très importante. Par exemple, si un sinistre identique à un sinistre datant de 1992 surviendrait aujourd'hui il n'aurait probablement pas le même coût et la fréquence des sinistres peut elle aussi être modifiée. C'est ce qu'on appelle la mise en *as-if*.

Pour mieux retraiter nos données, nous devons considérer les aspects suivants :

- L'actualisation de la Statistique consiste à prendre en compte l'inflation. Un sinistre qui surviendrait aujourd'hui dans les mêmes conditions qu'il y a quelques années coûterait bien plus cher.
- La revalorisation de la Statistique consiste à prendre en compte l'évolution de la jurisprudence. Le coût d'un sinistre estimé par les tribunaux peut lui aussi varier du fait du changement des barèmes.
- Le redressement de la Statistique consiste à reconstituer un portefeuille homogène et cohérent avec celui à réassurer en supprimant des sinistres, en prenant en compte les lancements de nouvelles garanties... Nous prendrons en compte l'exposition qui correspond aux nombre de contrats : cela ne permet pas de prendre en compte les nouvelles garanties mais nous ne disposons d'aucun autre moyen simple pour cette problématique.

L'actualisation de la statistique nécessite d'avoir en notre possession un vecteur d'inflation cohérent. En plus de l'inflation "standard" nous devons également considérer une inflation "hors monétaire" propre au coût des sinistres corporels. En effet, indirectement, les sinistres corporels subissent une inflation par :

- l'augmentation du coût horaire de la tierce personne, et ce pour une personne ayant le même âge et la même pathologie ;
- l'augmentation du prix du matériel médical : par exemple le coût des prothèses dépend de la technologie et donc une amélioration technologique entraîne un bond financier ;

- l'augmentation des frais médicaux hospitaliers.

L'objectif de la partie suivante est de capter directement cette inflation à partir de nos données.

a. Approche quantitative à partir du coût moyen des sinistres

Pour essayer de capter au mieux l'inflation implicite des sinistres corporels nous avons calculé le coût moyen des sinistres par année de survenance.

Cette méthode présente le problème suivant : si une année un sinistre très coûteux survient il aura tendance à faire augmenter le coût moyen pour cette année-là, et donc par conséquent l'inflation. Afin de réduire ce biais nous avons considéré des tranches de sinistres. Nous avons alors calculé les coûts moyens par survenance pour des sinistres dont le coût est compris entre 150k€ et 1M€ et pour des sinistres supérieurs à 1M€. Ensuite, l'évolution de l'inflation a été captée par une courbe de tendance linéaire. Le graphique II.5 représente l'évolution de l'inflation pour chacune des tranches, avec les courbes de tendance.

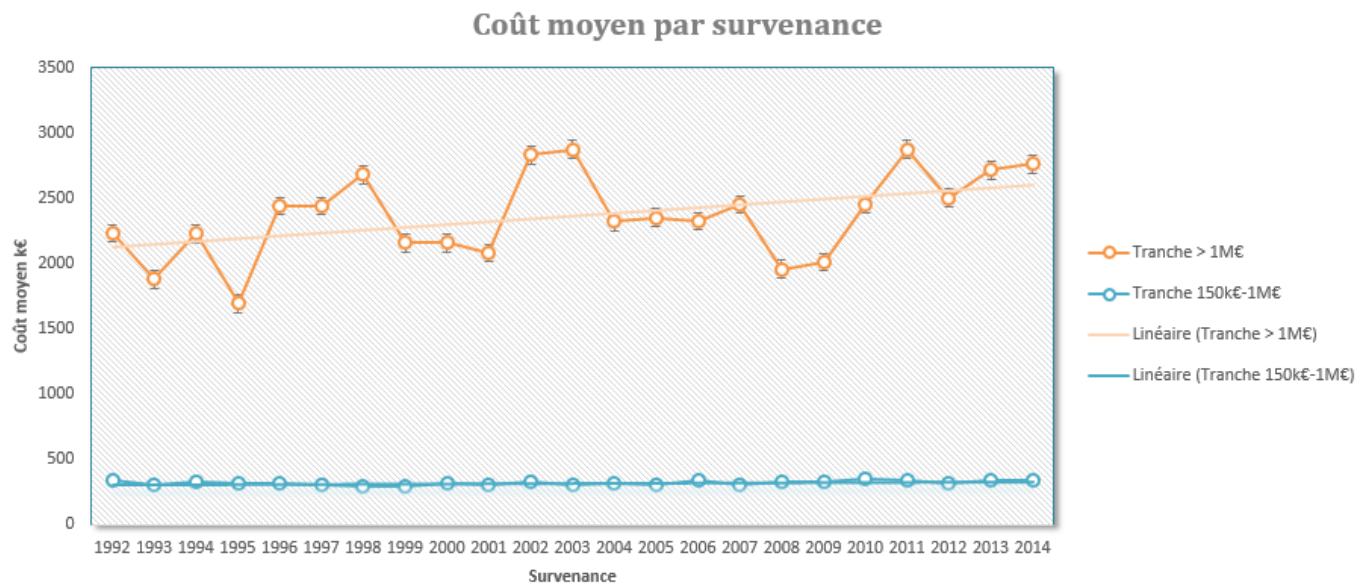


FIGURE II.5 – Etude des coûts moyens par survenance

Nous soulevons trois points :

- L'inflation très faible par rapport à ce qu'observe le marché : de l'ordre de 1% pour les sinistres supérieurs à 1M€ et autour de 0.4 % pour les sinistres compris entre 150k€ et 1M€.
- L'inflation est très volatile d'une année sur l'autre.
- Il existe un biais : tous les sinistres ne sont pas développés de la même manière. Les sinistres survenus en 1992 ont eu 25 ans pour se développer tandis que les sinistres survenus plus récemment peuvent encore évoluer et leur coût peut potentiellement augmenter.

Cette étude présente un certain nombre de limites et ne nous semble pas assez prudente. Nous avons, en collaboration avec les gestionnaires sinistres, décidé de considérer une approche qualitative.

b. Approche qualitative par poste de préjudice

b.1 Les différents postes de préjudices et indices d'inflation

Un préjudice est le dommage qui est causé à autrui d'une manière volontaire ou involontaire.

Les préjudices patrimoniaux affectent le patrimoine d'une victime. Le dommage corporel entraîne un préjudice patrimonial lorsqu'il cause à la victime une perte pécuniaire.

Les autres préjudices sont qualifiés d'extrapatrimoniaux. Il s'agit de préjudices non économiques qui peuvent être synonyme de "dommage moral", dès lors qu'ils visent toutes les atteintes à l'intégrité physique et/ou psychiques qui n'ont pas de répercussion sur le patrimoine d'une victime.

Grâce aux questionnaires, nous avons pu récupérer l'information concernant les différents postes de préjudices.

- 12% des préjudices concernent les dépenses de santé actuelles (DSA) ainsi que les frais d'hospitalisation.
- 14 % des préjudices sont les pertes de gains professionnels futurs et actuels (PGPF et PGPA).
- 54 % des préjudices patrimoniaux concernent l'assistance tierce personne (ATP).
- Le déficit fonctionnel permanent (DFP) représente 9 % des préjudices. C'est un préjudice extrapatrimonial : la victime voit sa capacité à profiter des joies usuelles de la vie courante limitée.

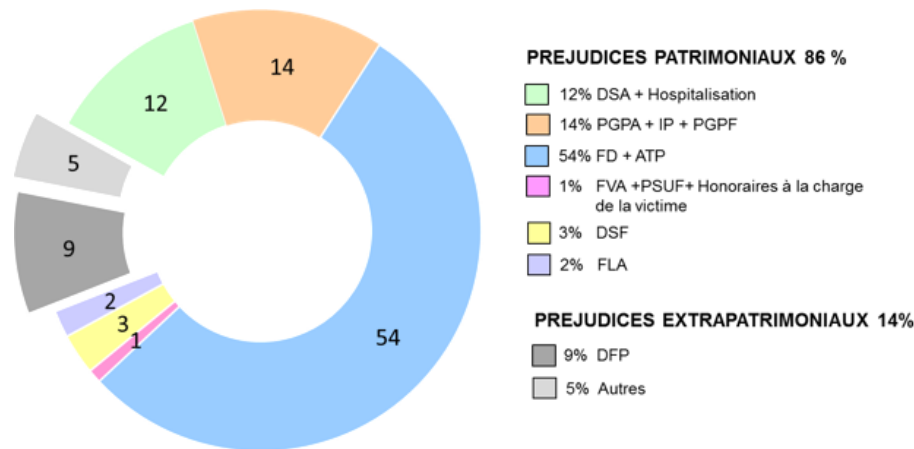


FIGURE II.6 – Ventilation par postes de préjudices

Ensuite, nous avons affecté à chacun des postes de préjudice un indice d'inflation. Pour les postes de préjudices liés aux **dépenses** à savoir les dépenses de santé actuelles, les frais de véhicule et de logement adaptés, ainsi que pour le déficit fonctionnel permanent nous avons associé l'**indice des prix à la consommation**. Nous avons associé l'**indice des salaires** aux préjudices patrimoniaux concernant les pertes de gains professionnels actuels et futurs ainsi qu'à l'incidence professionnelle.

Enfin, les questionnaires ont remarqué une augmentation d'1€ par an pour le coût horaire de la tierce personne, de 13€ à 14€, soit une inflation de l'ordre de 7,7 %. Nous avons décidé de conserver une hypothèse de 7,7% pour les années à venir pour ce poste de préjudice et cela est une hypothèse très prudente.

		Ventilation	Inflation
Préjudices patrimoniaux			
DSA	Dépenses de santé actuelles	12%	CPI
Hospitalisation			
PGPA	Perte de gains professionnels actuels	14%	Indice des salaires
IP	Incidence professionnelle		
PGPF	Perte de gains professionnels futurs		
ATP	Assistance tierce personne	54%	7,7%
FVA	Frais de véhicule adapté	1%	CPI
Honoraires à la charge de la victime			
DSF	Dépenses de santé futures	3%	CPI + 2% pour les prothèses
FLA	Frais de logement adaptés	2%	CPI
Préjudices extrapatrimoniaux			
DFP	Déficit fonctionnel permanent	9%	CPI
Autres		5%	

FIGURE II.7 – Indice d'inflation de l'INSEE pour chaque poste

b..2 Prise en compte de l'inflation future

Les différents indices d'inflation sont des données de l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques). Nous disposons les informations jusqu'à 2015, l'année 2016 n'étant pas encore terminée. Afin de prendre en compte l'inflation future, nous allons projeter les indices. Avant cela, nous allons faire quelques rappels fondamentaux.

- **Stationnarité au sens faible :**

Un processus $(X_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ du second ordre est faiblement stationnaire si son espérance $E(X_t)$ et ses autocovariances $Cov(X_t, X_s)$ sont invariantes par translation dans le temps, soit mathématiquement :

- $\forall t \in \mathbb{Z} : E(X_t) = \mu$
- $\forall (s, t) \in \mathbb{Z}^2, \forall h / (s + h, t + h) \in \mathbb{Z}^2 : Cov(X_s, X_t) = Cov(X_{s+h}, X_{t+h})$

- **Bruit Blanc faible :**

$(\epsilon_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ est un bruit blanc faible si :

- $(\epsilon_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans L^2
- $\forall (t, t') \in \mathbb{Z}^2 / t \neq t', Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t'}) = 0$
- $\forall t \in \mathbb{Z} : E(\epsilon_t) = 0$ et $E(\epsilon_t^2) = \sigma^2$

- **Processus Autorégressif :**

Soit $(\epsilon_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ un bruit blanc faible de variance σ^2 . On dit qu'un processus $(X_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ est un processus autorégressif ou encore processus *AR* d'ordre p , noté $AR(p)$, si :

- $(X_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ est stationnaire
- $\forall t \in \mathbb{Z} : X_t = \sum_{i=1}^p \Phi_i X_{t-i} + \epsilon_t$ où $(\Phi_1, \dots, \Phi_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\Phi_p \neq 0$

- **Processus Moyenne Mobile :** Soit $(\epsilon_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ un bruit blanc faible de variance σ^2 . On dit qu'un processus $(X_t)_{(t \in \mathbb{Z})}$ est un processus moyenne mobile ou encore processus *MA* d'ordre q , noté $MA(q)$, si :

- $\forall t \in \mathbb{Z} : X_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i}$ où $(\theta_1, \dots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$ et $\theta_q \neq 0$

Concernant l'indice des prix à la consommation, des hypothèses d'inflation futures sont faites au niveau du groupe. Pour l'indice des salaires, plusieurs modèles simples ont été testé : $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$ et $MA(2)$.

1. Différenciation de la série chronologique pour qu'elle soit stationnaire.
2. Estimation des paramètres Φ_i et θ_i des différents modèles à partir des données de 1951 à 2015.
3. Analyse à posteriori : on calcule les indices de 1951 à 2015 grâce à notre modèle. Cette méthode nous permet d'obtenir des résidus.
4. Prévision : on estime les indices de 2015 à 2045 à partir des paramètres du modèle.

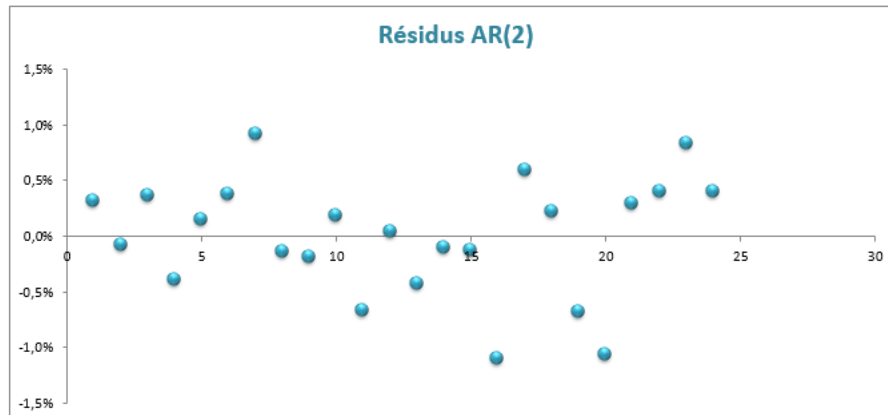


FIGURE II.8 – Estimation des résidus

La figure ci-dessous représente la projection de l'indice des salaires selon les différentes méthodes.

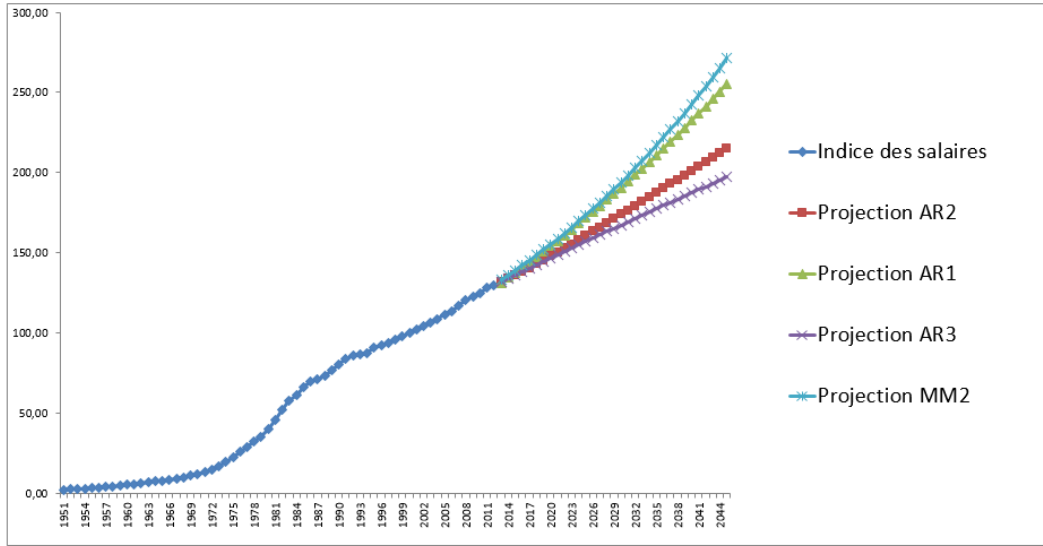


FIGURE II.9 – Indice des salaires projeté selon plusieurs modèles

Finalement, c'est un **processus autorégressif d'ordre 2** qui a été retenu. Pour l'augmentation du coût horaire de la tierce personne on retient une inflation constante de 7,7%.

Remarque : L'inconvénient principal de l'AR(2) est qu'il réplique le passé. Cependant, il est très difficile d'estimer une inflation future et nous disposons de peu de moyens. Une autre possibilité aurait été de faire une régression linéaire sur l'indice des prix à la consommation projeté.

Le vecteur d'inflation finale I_t s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 I_t = IPC_t \times [& DSA + Hosp + FVA + Hon + FLA + DFP + Autres] \\
 & + (IPC_t + 2\%) \times DSF \\
 & + SAL_t \times (PGPA + IP + PGPF) \\
 & + ATP \times 7,7\%
 \end{aligned}$$

Avec :

- IPC : Indice des prix à la consommation
- SAL : Indice des salaires
- DSA : Dépenses de santé actuelles
- $Hosp$: Hospitalisation
- Hon : Honoraires à la charge de la victime
- FVA : Frais de véhicule adapté
- FLA : Frais de logement adapté
- DFP : Déficit fonctionnel permanent
- DSF : Dépenses de santé futures
- $PGPA$: Perte de gains professionnels actuels
- IP : Incidence professionnelle
- $PGPF$: Perte de gains professionnels futurs
- ATP : Assistance tierce personne

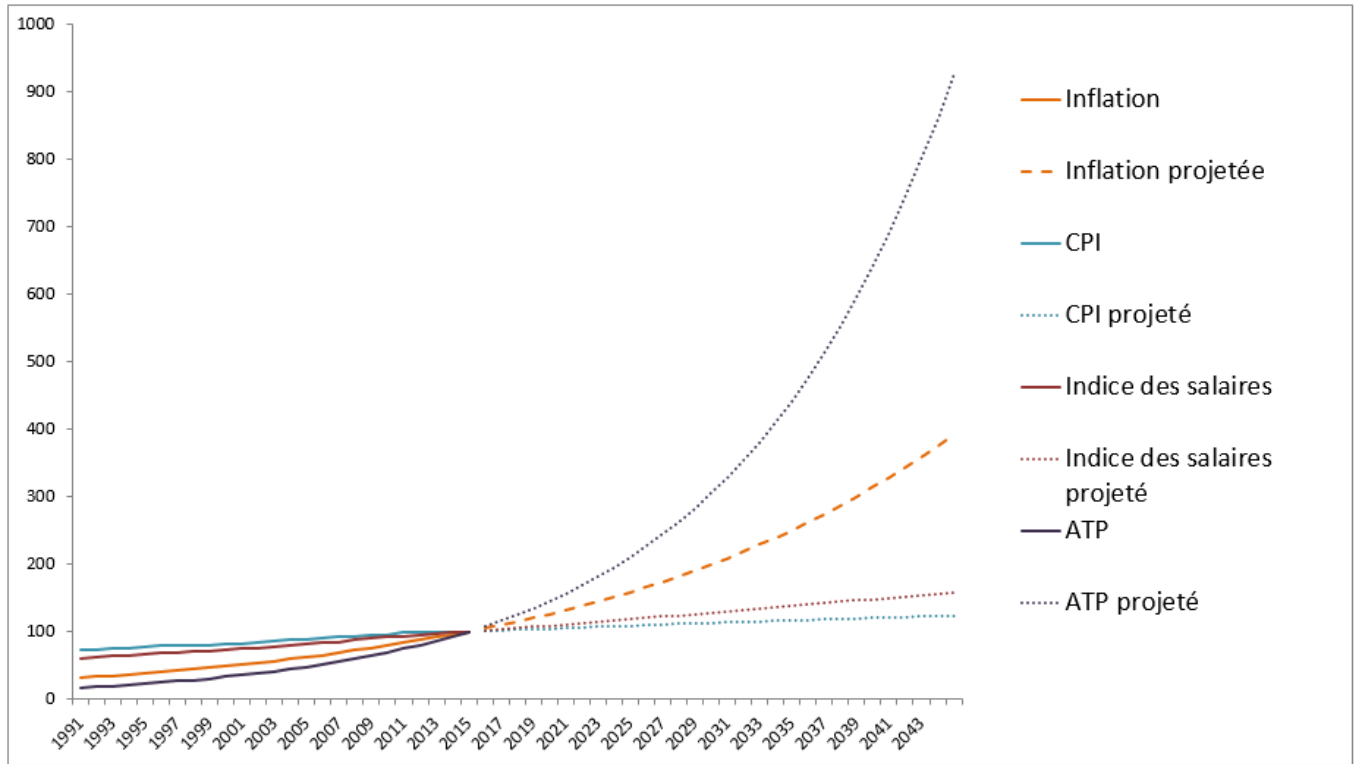


FIGURE II.10 – Projection des indices d'inflation et inflation finale

3. Retraitement des données : mise en *as-if*

Maintenant que nous avons déterminé le vecteur d'inflation à appliquer à nos données, nous pouvons effectuer notre mise en *as-if* en euro courant pour tenir compte de l'inflation, de la réforme du FGAO ainsi que de l'harmonisation du barème jurisprudentiel.

a. Prise en compte de l'inflation

La mise en *As-if* s'effectue dossier par dossier en procédant de la manière suivante :

$$\hat{x}_{ij}^k = \hat{x}_{ij-1}^k + (x_{ij}^k - x_{ij-1}^k) \times \frac{I_{2017+j}}{I_{i+j}}$$

Avec :

- $\hat{x}_{ij}^k$: montant cumulé mis en *as-if* du sinistre k survenu l'année i et vu en j ;
- x_{ij}^k : montant cumulé du sinistre k survenu l'année i et vu en j ;
- I_i : indice d'inflation de l'année i .

Remarque : cette méthode consiste donc à appliquer une inflation aux incréments de charges et non aux règlements. Les réserves sont donc également inflatées. Cela produit un biais mais nous permet de rester prudent.

b. La réforme du Fonds de Garantie des Assurances Obligatoires

En décembre 2012, une réforme a été mise en place pour le Fonds de Garantie des Assurances Obligatoires (FGAO). La revalorisation automatique des rentes qui seront servies aux victimes suite à un accident de la circulation survenu depuis le 01/01/2013 sera à la charge de l'assureur de la personne responsable. Cette réforme concerne donc directement les sinistres corporels graves dont la sortie en rente est probable.

Le code des assurances (art. A331-10) impose de provisionner en utilisant une hypothèse fixe d'inflation égale à 2,25%, introduit par l'arrêté ministériel du 27/12/2013 et qui fait suite à la réforme du FGAO.

Concrètement, comment faire pour revaloriser les sinistres du FGAO ?

b..1 Calcul de l'annuité revalorisée à 2,25% pour chaque individu

Pour chaque dossier où la rente est connue, nous avons à notre disposition l'âge de la victime, le type de rente (viagère ou temporaire), la date d'entrée en rente ainsi que la date de fin de versement de la rente (dans le cas d'une rente temporaire). Nous calculons :

- $a_x(A = 3,5\%, I = 2,25\%)$: annuité actualisée à 3,5% et revalorisée à 2,25% d'après la réforme du FGAO ;
- $a_x(A = 3,5\%, I = 0\%)$: annuité actualisée à 3,5% et non revalorisée.

Pourquoi une revalorisation à 2,25% ?

Un arrêté du 27 décembre 2013 fixe les règles de provisionnement des rentes revalorisées annuellement. On le trouve dans l'article A.331-10 du code des Assurances :

« Dans le cas des rentes allouées au titre des accidents survenus à compter du 1er janvier 2013 et dont le montant est revalorisé [...] d'un taux d'inflation égal à 2,25%. » [2]

b..2 Calcul de la partie fixe de la charge rente

Pour chaque sinistre rente survenu en i nous connaissons le montant de la charge totale vue en j et nous pouvons recalculer le capital constitutif. Ainsi, le montant de la partie fixe du sinistre survenu en i et vu en j est obtenu par :

$$F_i^j = ch_i^j - CC(A = 3,5\%, I = 0\%)$$

b..3 Calcul de la charge totale revalorisée du FGAO

Nous pouvons ensuite déterminer la nouvelle charge totale en sommant la partie fixe au capital constitutif revalorisé :

$$ch_i^j(2,25\%) = CC(A = 3,5\%, I = 2,25\%) + F_i^j$$

Grâce à cette méthode, nous disposons à présent de la charge rente revalorisée de la réforme du FGAO. La revalorisation du FGAO ne concerne que les sinistres automobiles dont l'indemnisation se fait sous forme de rente.

c. Recueil méthodologique commun

Le recueil méthodologique assure la réparation intégrale d'un préjudice corporel : « la victime doit être replacée dans une situation aussi proche que possible de celle qui aurait été la sienne si le fait dommageable ne s'était pas produit ». L'objectif est de favoriser l'harmonisation de la jurisprudence par la mise en place de barèmes communs pour l'ensemble du territoire national. [3]

La prise en compte du recueil méthodologique commun permet donc une revalorisation de la statistique puisqu'elle capte les évolutions de la jurisprudence.

Comment prendre en compte le recueil Méthodologique Commun ?

La valeur du point du DFP (Deficit Fonctionnel Permanent) a augmenté d'environ 46% pour une victime âgée entre 20 et 30 ans en comparant le référentiel de 2011 utilisé par les cours d'appel du Grand Ouest et celui du recueil méthodologique commun de 2013. Or, nous connaissons maintenant la ventilation des postes de préjudice et savons que le DFP représente 9% de notre portefeuille. Finalement, nous appliquons la valorisation suivante pour tous les sinistres automobiles corporels survenus avant le 1er janvier 2014.

$$RMC = 9\% \times 43\% \simeq 4\%$$

Cette revalorisation est prudente. En effet, les victimes âgées entre 20 et 30 ans sont celles pour lesquelles le changement de barème est le plus impactant.

Conclusion

La mise en *as-if* est une étape fondamentale puisque nous travaillons à partir de la méthode historique. Les années précédentes, une inflation de l'ordre de 6% était appliquée. De plus la réforme du FGAO ne faisait pas l'objet d'une analyse approfondie puisque le même coefficient était appliqué à tous les sinistres. Enfin, le changement de barème méthodologique n'était pas pris en compte.

Dans ce chapitre toutes les hypothèses ont été revues afin de proposer la meilleure mise en *as-if* possible. Ainsi, la chronique d'inflation proposée a fait l'objet d'un long travail de recherche. Tout d'abord, une étude des coûts moyens des sinistres par année de survenance a été réalisée. Cependant, cette méthode présentait de nombreux biais et surtout aboutissait à un vecteur d'inflation beaucoup trop faible. Cela nous a conduits à interroger les gestionnaires et à s'orienter vers une nouvelle approche plutôt qualitative. Nous avons décidé de considérer les différents postes de préjudices et de leur associer un indice de l'INSEE. Finalement, cela nous permet d'obtenir une chronique d'inflation de l'ordre de 4%. Ensuite, la nouvelle modélisation séparant les sinistres rentes nous permet d'appliquer un retraitement FGAO précis à chaque dossier rente en considérant l'âge de la victime et le type de rente. Enfin, cette année, nous décidons de tenir compte du changement de barème méthodologique en appliquant un coefficient prudent à tous les sinistres corporels.

Chapitre III

Détermination d'un seuil atypique

1. Théorie des Valeurs Extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes est une branche de la Statistique qui traite des écarts extrêmes par rapport à la médiane des distributions de probabilités. Cette théorie est donc importante pour **évaluer le risque des événements inhabituels** et a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite de variables aléatoires lorsque la loi du phénomène n'est pas connue [8][9].

En théorie des valeurs extrêmes, il existe deux approches : l'approche par maximum et l'approche par excès au-delà d'un seuil :

- L'approche basique décrite dans l'ouvrage de Burry (1975). Elle est conforme au premier théorème de la théorie des valeurs extrêmes (Fisher and Tippet, 1928).
- L'approche plus utilisée aujourd'hui est l'approche d'adéquation des queues de distribution basée sur le second théorème (Pickands, 1975 ; Balkema and de Haan, 1974).

Pour la deuxième approche, nous considérons uniquement les données dépassant un certain seuil. C'est l'approche *Peak-Over-Threshold* (POT) et c'est cette deuxième approche qui nous permettra de déterminer le seuil atypique.

a. Théorème de Fisher-Tippett

Définition de la loi GEV :

La distribution standard GEV est la fonction H_ξ où ξ est le paramètre de forme définie, pour tout x vérifiant $1 + \xi x > 0$, par :

- Pour $\xi \neq 0$: $H_\xi(x) = e^{-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}}$;
- Pour $\xi = 0$: $H_\xi(x) = e^{-e^{-x}}$;

Théorème de Pickands Fisher et Tippet (1928) :

Ce théorème permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes : c'est le "théorème des trois types".

Supposons n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi de distribution F (iid). S'il existe des constantes $a_n > 0$ et b_n et une distribution limite non dégénérée H_ξ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{\max_i X_i - b_n}{a_n} \leq x\right] = H_\xi(x)$$

alors H_ξ appartient à l'un des trois types suivants de distribution : Fréchet ($\xi > 0$), Gumbel ($\xi = 0$) ou Weibull ($\xi < 0$).

Le théorème de Fisher-Tippett fournit, en quelque sorte, la contrepartie du Théorème Central Limite (TCL) dans le cas d'événements extrêmes. Cependant, contrairement au TCL où la loi normale est la seule loi limite possible, dans le cas des extrêmes 3 types de lois limites sont possibles. Depuis, les trois types de distribution ont été combinées en une seule famille à 3 paramètres : la *Generalized Extreme Value Distribution* (GEV)[10].

Ce théorème permet de souligner le fait que même si l'ensemble des distributions possibles est grand, celui des valeurs extrêmes est très petit : la loi limite des extrêmes a toujours la même forme. Cette forme est caractérisée par le paramètre ξ qui contrôle la lourdeur de la queue. Si la donnée de ξ suffit pour juger de la lourdeur de la queue de la distribution, il est habituel de parler de domaine d'attraction par rapport à l'une des trois lois suivantes :

- Loi de Gumbel : Si $\xi = 0$

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad \forall x$$

- Loi de Fréchet : Si $\xi > 0$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}} & \text{si } x > 0 \text{ et } \alpha = \frac{1}{\xi} > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Loi de Weibull : Si $\xi < 0$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & \text{si } x < 0 \text{ et } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le comportement des valeurs extrêmes est caractérisé par l'un de ces trois domaines d'attraction : Weibull, Gumbel, Fréchet.

Domaine d'attraction	Poids de la queue	Exemples	Signe de
Weibull	Queue finie	Uniforme, bêta	< 0
Gumbel	Queue fine ou moyenne	Normale, exponentielle, gamma, lognormale	0
Fréchet	Queue épaisse	Cauchy, pareto, student	> 0

TABLE III.1 – Les trois domaines d'attractions des valeurs extrêmes

b. Théorie de Pickands, Balkema, de Haan

L'étude du maximum s'est imposée comme la première méthode pour étudier les phénomènes extrêmes. Cette approche des extrêmes basée sur la loi limite du maximum d'un échantillon de variables aléatoires iid a été très fortement critiquée. En effet, elle ne tient compte que d'une seule observation : la plus grande. On perd donc de l'information, celle contenue dans les autres grandes valeurs de l'échantillon. Une alternative a donc été proposée et fait suite aux travaux de Balkema et de Haan, ainsi qu'à ceux de Pickands. Elle repose sur la loi des excès au-delà d'un seuil fixe et est communément appelée l'approche "pics au-delà d'un seuil", (approche POT). On s'intéresse à la loi des excès, *i.e.* la loi de $X - u$ sachant $X > u$ pour un seuil u suffisamment grand.

Définition de la distribution conditionnelle des excès :

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F . La fonction des excès associé au-delà de u est la fonction de répartition de $X - u/X > u$ et on la note F_u . On a :

$$F_u(x) = P(X - u < x/X > u) = \frac{F(u + x - F(u))}{1 - F(u)}$$

Pickands fournit alors le résultat que sous certaines conditions, la loi des excès peut être approchée par une loi de Pareto généralisée.

Définition de la loi de Pareto généralisée :

La loi de Pareto généralisée, notée $GPD(\xi)$ est définie par sa fonction de répartition G_ξ :

- Cas $\xi \neq 0$: $G_\xi(x) = 1 - (1 + \xi x)^{(-\frac{1}{\xi})}$;
- Cas $\xi = 0$: $G_\xi(x) = 1 - e^{-x}$;

La loi de $GPD(\xi, \mu, \sigma)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, est définie par sa fonction de répartition

$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x) = G_\xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Théorème de Pickands :

Si F appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes, alors il existe une fonction $\sigma(\cdot)$ strictement positive et un réel ξ tels que :

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup [F_u(y) - G_{\xi, \sigma(u)}] = 0$$

Où $G_{\xi, \sigma(u)}$ est la fonction de répartition de la loi de Pareto Généralisée et F_u est la fonction de répartition des excès au-delà du seuil u .

En assurance non-vie, ce théorème est le plus important dans la pratique pour modéliser les valeurs extrêmes. Cependant, si le seuil u n'est pas suffisamment élevé, l'approximation de F_u par une GPD ne sera pas acceptable.

En résumé, si pour une distribution F inconnue, l'échantillon des maxima normalisés converge en loi vers une distribution non dégénérée, alors il est équivalent de dire que F est dans le max domaine d'attraction de la GEV $H(\xi)$ (Théorème de Fisher-Tippett). Dans ce cas il s'en déduit que la distribution des excès au-dessus d'un seuil élevé converge vers une GPD $G_{\xi, \sigma(u)}$ lorsque le seuil tend vers la limite supérieure du support de F . L'indice de queue intervenant dans la GEV étant le même que celui de la loi de GPD , ce paramètre fait le lien entre le max domaine d'attraction et le comportement des excès de seuil.

2. Détermination du domaine d'attraction

Dans le cadre de notre modélisation nous devons distinguer les branches Particuliers/Professionnels et Entreprises et avons donc cherché à déterminer un seuil atypique propre à chaque branche. Cependant, nous nous considérons un seul atypique commun entre les sinistres rentes et hors rentes. La branche Particuliers/Professionnels comporte 6659 sinistres et la branche Entreprises 2306.

Nous travaillons à partir des sinistres vus à fin mai 2016, retraités du FGAO, du Recueil Méthodologique Commun inflatés et projetés à l'ultime via la méthode de Chain Ladder classique.

Les graphiques III.1 et III.2 ci-dessous nous permettent d'avoir une première représentation visuelle de nos sinistres. Nous pouvons observer qu'un petit nombre de sinistres représente une charge importante.

De plus, la structure en coude des montants est typique d'une distribution à queue lourde. Nous pouvons donc supposer que nos sinistres appartiendront au domaine d'attraction de Fréchet.

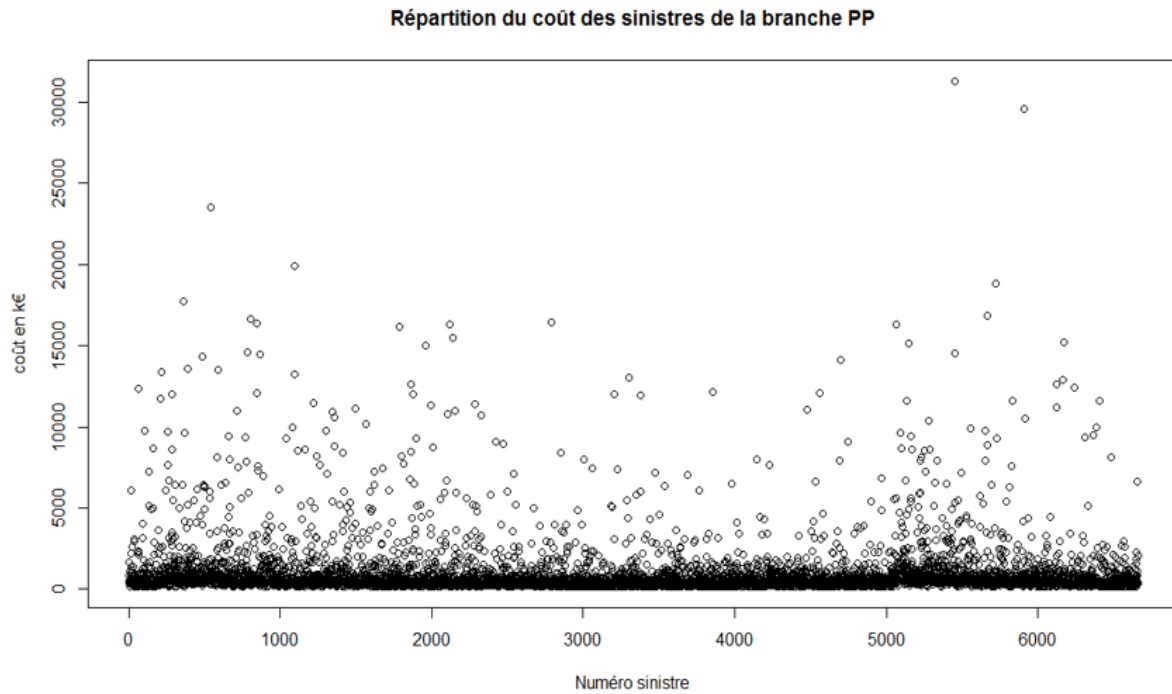


FIGURE III.1 – Répartition de la charge sinistre

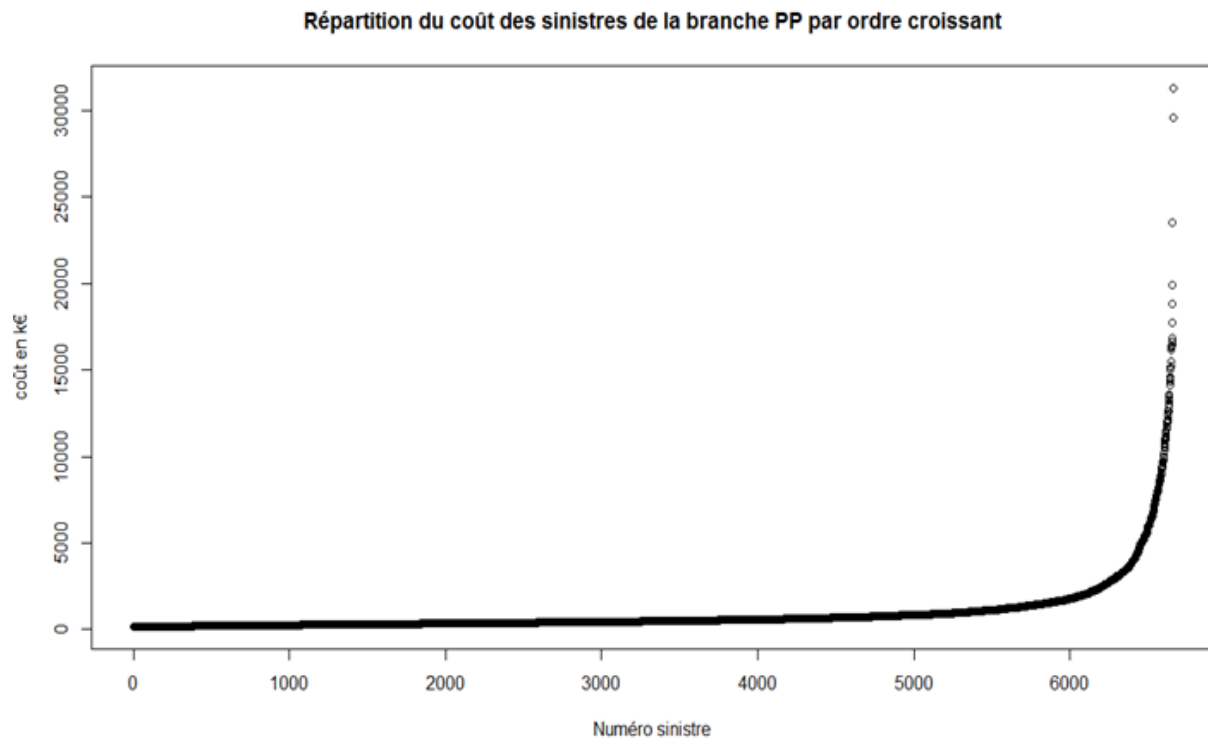


FIGURE III.2 – Répartition de la charge sinistre triée par ordre croissant

Nous présentons deux méthodes qui permettent de justifier le comportement à queue lourde des extrêmes (domaine d'attraction de Fréchet)[6].

- Procéder à un Quantile-Quantile Plot (QQ Plot) permet de se faire une première idée du domaine d'attraction de la distribution. C'est un graphique qui compare les quantiles de la distribution empirique aux quantiles de la distribution théorique envisagée. Si l'échantillon provient bien de cette distribution théorique, alors le QQ plot sera linéaire. Faire le QQ Plot avec pour distribution théorique celle de la loi exponentielle permet d'émettre un premier jugement sur le domaine d'attraction, et dans ce cas le QQ Plot prend la forme suivante :

$$(F^{-1}(\frac{i}{n+1}), x_{(i)}) = (-\ln(1 - \frac{i}{n+1}), x_{(i)})$$

où $x_{(i)}$ est la i ème valeur de l'échantillon ordonné.

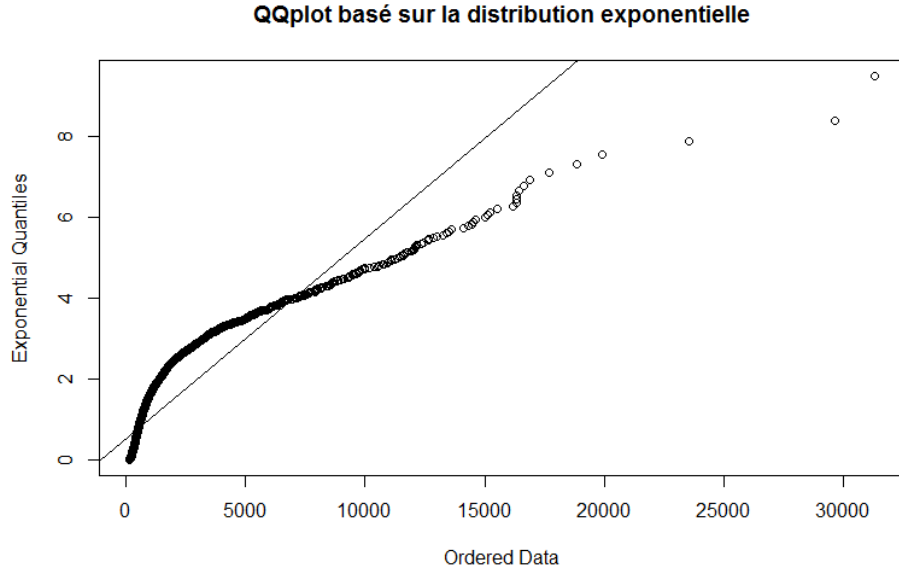


FIGURE III.3 – QQ plot basé sur la distribution exponentielle

Nous observons très clairement sur la figure III.3 une structure concave qui se détache de la ligne droite, ce qui s'interprète comme le signe d'un comportement à queue lourde (domaine d'attraction de Fréchet).

- Le deuxième méthode que nous allons utiliser est basée sur la comparaison des fonctions de répartition théoriques des distributions limites et la fonction de distribution empirique de notre jeu de données.
 - Cas $\xi = 0$: La fonction de répartition de la loi de type Gumbel est $H(x) = \exp(\exp -x)$. Cela revient à dire que la fonction $x \mapsto \ln(\ln(\frac{1}{H(x)}))$ doit être une fonction linéaire en x .
 - Cas $\xi > 0$: La fonction de répartition de la loi de type Fréchet est $H(x) = \exp(-x^{-\alpha})$ avec $\alpha = \frac{1}{\xi} > 0$. Autrement dit $x \mapsto \ln(\ln(\frac{1}{H(x)}))$ doit être une fonction linéaire en $\ln(x)$.

Les résultats obtenus sur nos données sont cohérents. En effet, nous observons sur la figure III.4 une linéarité en $\ln(x)$ qui justifie le comportement à queue lourde de nos données.

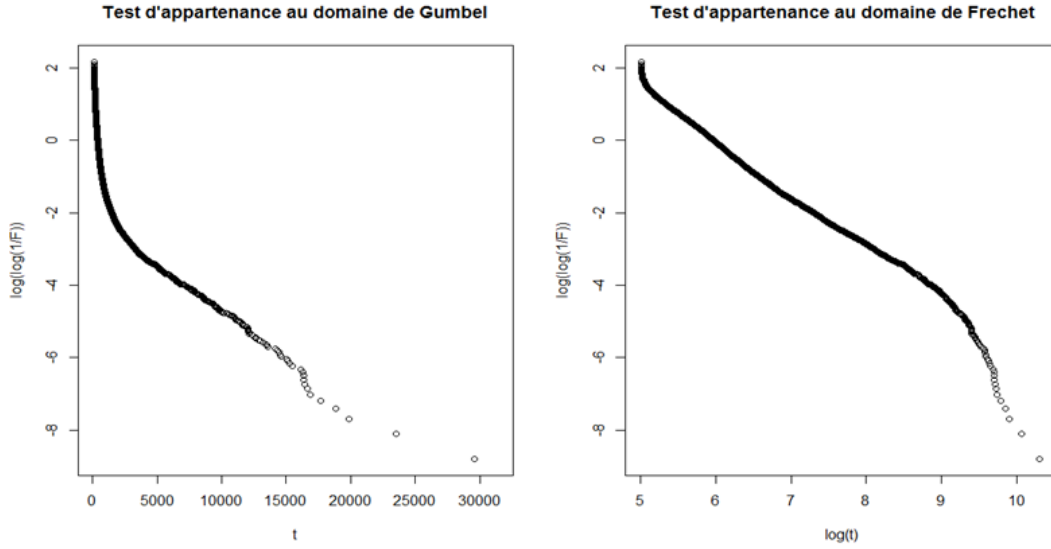


FIGURE III.4 – Comparaison des fonctions de répartition empirique et théorique

Nous conservons donc l'hypothèse émise lors de l'observation de la distribution des données d'un domaine d'attraction de Fréchet. Ceci va avoir un impact sur la suite car cette hypothèse permet en particulier d'utiliser des estimateurs qui ne sont valides qu'avec un domaine d'attraction de Fréchet.

3. Méthodes de détermination d'un seuil

Dans cette partie nous allons présenter les estimateurs utilisés pour sélectionner un seuil atypique ainsi que les sorties obtenus pour la branche Particuliers/Professionnels. Les estimateurs obtenus pour la branche Entreprises se trouvent en annexe.

a. Estimateur empirique de la fonction des excès

La *sample mean excess function* $e_n(u)$ est l'estimateur empirique de la *mean excess function* $e(u) = E(Z - u | Z > u)$.

Elle est définie par :

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i - u)^+}{\sum_{i=1}^n 1_{Z_i \geq u}}$$

Comment interpréter le graphique du ME-plot ? Il faut savoir tout d'abord que la mean excess function de la GPD est :

$$e_n(u) = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}$$

où $\sigma + \xi u \geq 0$. Ainsi, si le ME-plot semble avoir un comportement linéaire au-dessus d'une certaine valeur de u , cela signifie que les excès au-dessus de ce seuil suivent une GPD.

Le seuil u est très difficile à choisir à cause du comportement très erratique du ME-plot. En revanche, la nette et rapide croissance de la courbe observée pour les premiers seuils permet de confirmer la conclusion d'une queue lourde.

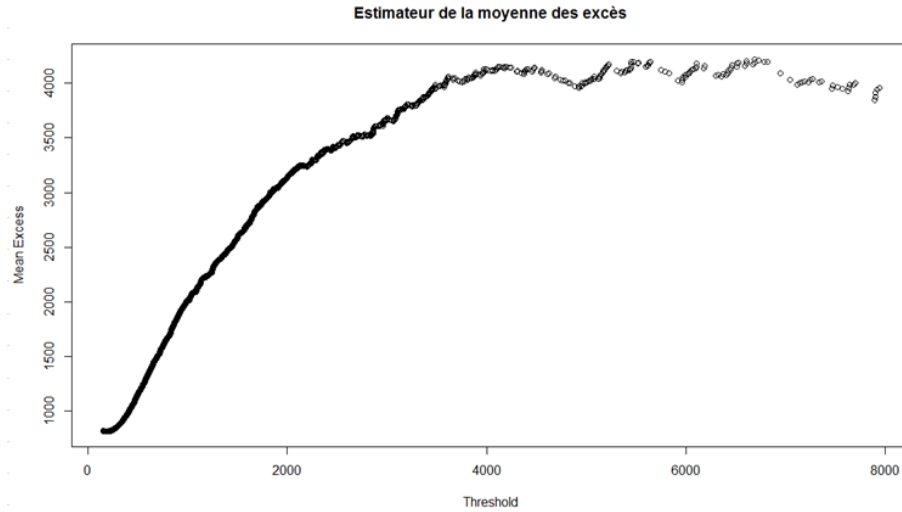


FIGURE III.5 – Mean Excess Plot

b. Estimateur de Hill

L'estimateur de Hill est le plus utilisé. Les points $(\ln(X_{n-i+1:n} - \ln(X_{n-m:m})))$ pour $k = 1, \dots, m$ doivent être approximativement alignés sur une droite de pente ξ dont l'estimateur est :

$$\hat{\xi} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(X_{n-i+1:n} - \ln(X_{n-m:m}))}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(\frac{i}{n+1}) - \ln(\frac{m}{n+1})}$$

Pour m suffisamment grand, le dénominateur est approximativement égal à 1 et on a l'estimateur de Hill :

$$\hat{\xi}_{n,m}^{Hill} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(X_{n-i+1:n}) - \ln(X_{n-m:n})$$

Avec m le nombre de points dépassant le seuil .

Un aspect très attrayant de l'estimateur de Hill est qu'il est possible de l'interpréter graphiquement. Plus précisément, si l'on considère le graphe de coordonnées :

$$(\ln \frac{n+1}{i}, \ln(X_{n-i+1:n}))$$

appelé communément "Pareto quantile plot", dans le cas de distributions de type Pareto, ce graphe sera approximativement linéaire, dans les points extrêmes, avec une pente ξ . L'estimateur de Hill n'est rien d'autre qu'un estimateur de cette pente, et donc de ξ .

Le principal inconvénient de cet estimateur est qu'il n'est valable que dans le cas d'un indice positif. Différentes généralisations ont été proposées.

Sur la figure III.6, l'estimateur de Hill semble se stabiliser autour d'un seuil à 2M€.

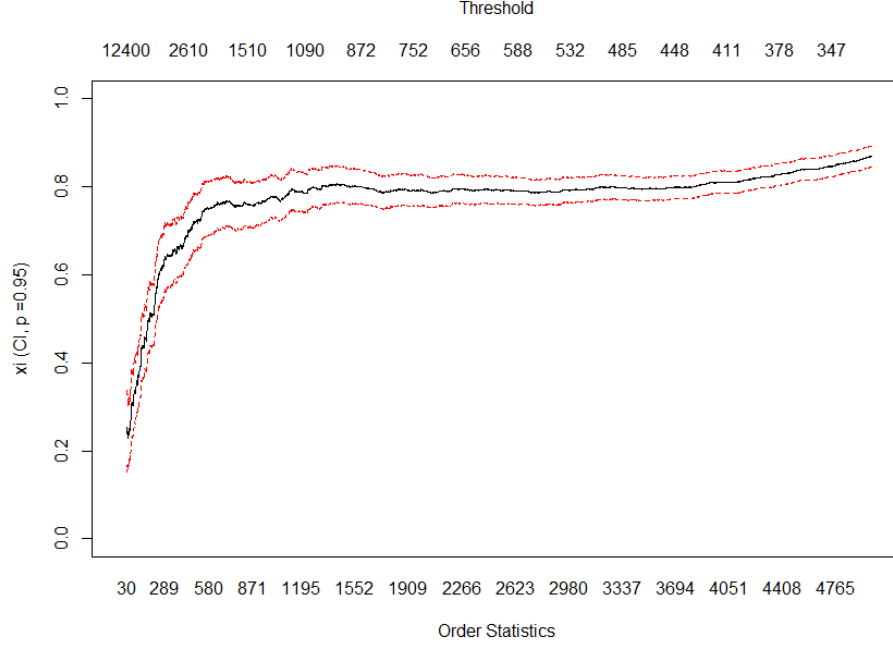


FIGURE III.6 – Estimateur de Hill

c. Estimateur de Pickands

L'estimateur de Pickands est également fréquemment utilisé et est valable quelque soit le signe de ξ .

$$\hat{\xi}_{n,m}^{Pickands} = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{X_{n-m:n} - X_{n-2m:n}}{X_{n-2m:n} - X_{n-4m:n}}\right)$$

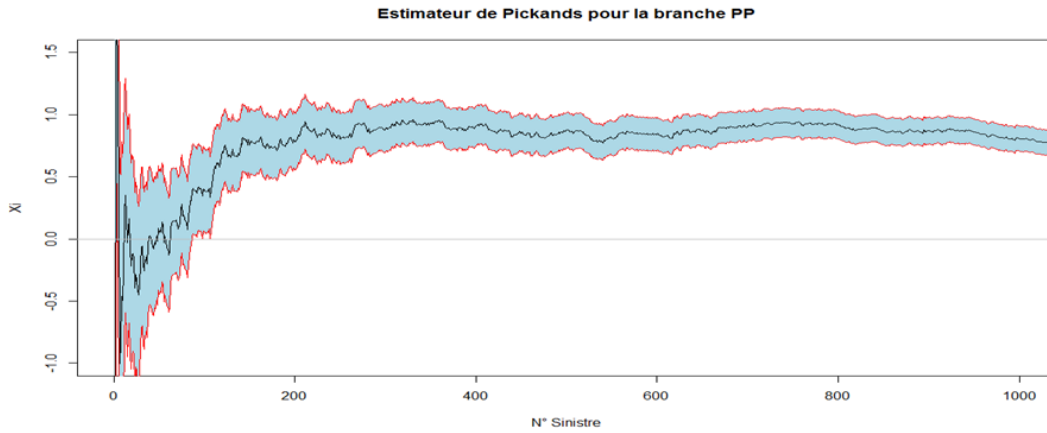


FIGURE III.7 – Estimateur de Pickands

L'objectif est de détecter un seuil à partir duquel il est possible d'accepter une relative stabilité de l'estimateur.

L'estimateur de Pickands semble se stabiliser à partir de la 300ème statistique d'ordre, soit un seuil de 2M€.

d. Estimateur de Dekkers-Einmalh-de Haan

L'estimateur de Dekkers-Einmalh-de Haan (ou DEdH) est également utilisable quelque soit le signe de ξ .

$$\hat{\xi}_{n,m}^{DEdH} = \hat{\xi}_{n,m}^{H(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\hat{\xi}_{n,m}^{H(1)})^2}{\hat{\xi}_{n,m}^{H(2)}} \right)^{-1}$$

avec $\hat{\xi}_{n,m}^{H(r)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} (\ln(X_{n-i:n}) - \ln(X_{n-m:n}))^r$ et $r = 1, 2, \dots$

A chaque fois la difficulté principale est le choix de m : si m est trop grand on sort de la queue de distribution, et si m est trop petit l'estimateur devient instable.

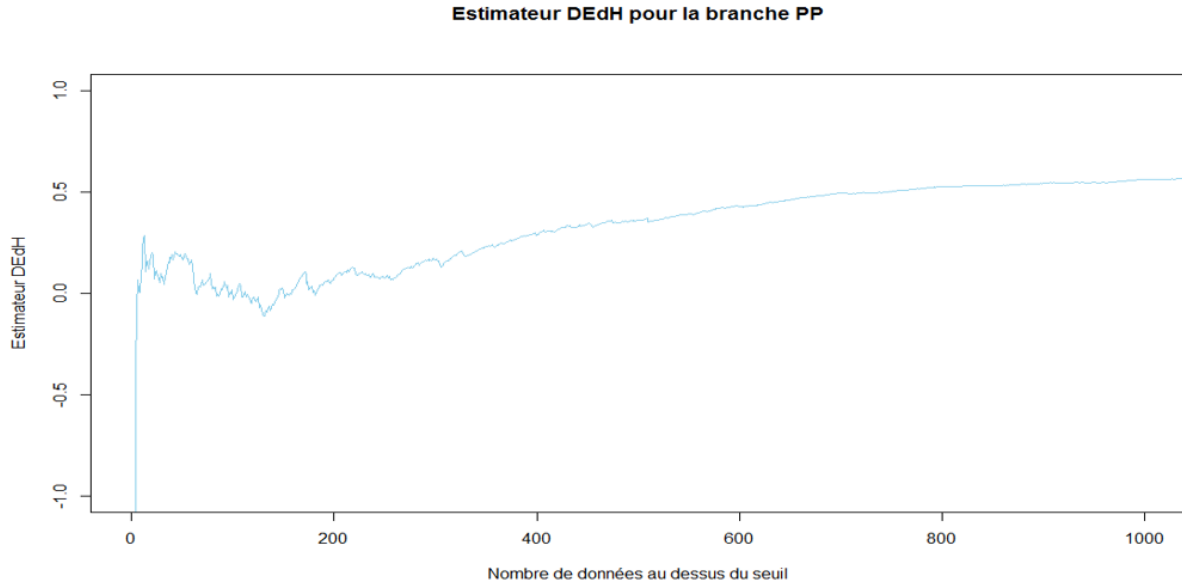


FIGURE III.8 – Estimateur de DEdH

L'estimateur de DEdH se stabilise à partir de la 400ème statistique d'ordre, soit un seuil de 2,5M€.

e. Estimateur de Gerstengarbe

Cette méthode est issue des travaux de Gerstengarbe et Werner et permet de déterminer le point de départ de la région extrême en donnant une estimation du seuil optimal. L'idée est qu'à partir de la zone de sinistres extrêmes on aura sans doute une modification du comportement des écarts Δ_i (différence de coût entre deux sinistres). Nous cherchons donc à identifier un changement dans une série. Soit $x_1, \dots, x_n$ l'échantillon de charge de sinistres. On considère la série des écarts Δ_i de l'échantillon ordonné $x_{[1]}, \dots, x_{[n]}$ et donc $\Delta_i = x_{[i]} - x_{[i-1]}$ pour $i = 2, \dots, n$. Pour chaque Δ_k on calcule le nombre d'éléments précédents qui lui sont inférieurs, soit n_k . On calcule ensuite $U_i^* = \sum_{k=2}^i n_k$. La statistique de test est donnée par l'écart U_i , entre U_i^* et $E(U_i^*)$, soit :

$$U_i = \frac{U_i^* - E(U_i^*)}{\sqrt{\text{Var}(U_i^*)}} = \frac{U_i^* - \frac{i(i-1)}{4}}{\sqrt{\frac{i(i-1)(2i+5)}{72}}}$$

Avec $i = 1, \dots, n-1$

De la même manière, nous calculons une autre série décroissante des différences $\Delta_k, \dots, \Delta_2$. Le point d'intersection de ces deux séries nous permet de déterminer le seuil atypique.

La méthode Gerstengarbe peut être effectuée de manière récursive. La première étape permet de déterminer un seuil atypique sur l'ensemble de nos données. Ensuite, pour la seconde étape, nous ne gardons que les sinistres supérieurs au seuil déterminé à l'étape 1 et nous réitérons l'opération.

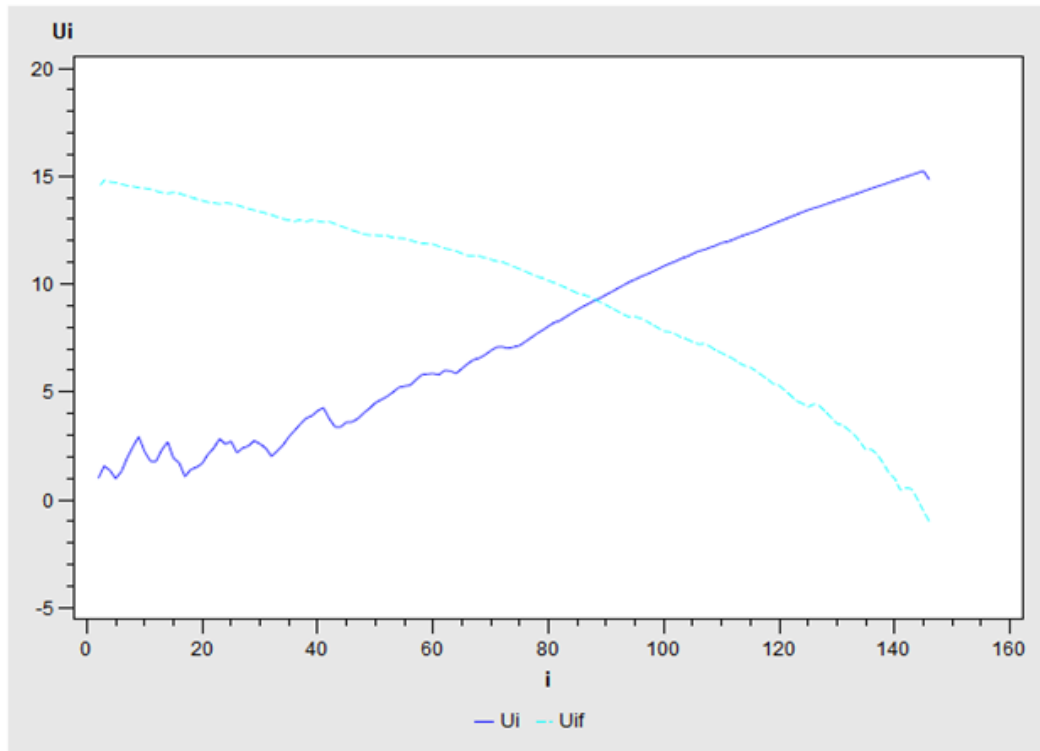


FIGURE III.9 – Estimateur de Gerstengarbe

Ci-après, le tableau associant pour chaque étape le montant de seuil atypique trouvé. Les étapes 4 et 5 sont peu fiables car seulement un petit nombre de sinistres est supérieur à 3,6M€.

Voici les différents seuils que nous obtenons à partir de cette méthode, pour chaque itération.

Etapes	Seuil (M€)
1	0,927
2	1,987
3	3,6
4	6,7
5	9,2

TABLE III.2 – Seuils obtenus selon la méthode de Gerstengarbe pour 5 itérations

Nous pouvons remarquer que l'étape 2 nous permet de retrouver un seuil à 2M€, résultat cohérent avec les estimateurs de Hill, Pickands et DEdH.

4. Choix d'un seuil atypique

Nous allons maintenant déterminer un seuil atypique pour chacune de nos branches. Afin de rendre le processus de validation plus simple, nous avons regroupé dans un tableau les informations suivantes :

- Le nom de l'estimateur ;
- Le seuil atypique pour cet estimateur ;
- Le pourcentage de sinistres graves (>150k€) dépassant ce seuil (en nombre) ;
- La pourcentage de sinistres graves (>150k€) dépassant ce seuil (en charge).

Les estimateurs de Hill et Gerstengarbe proposent tous les deux un seuil atypique à 2M€. Les estimateurs de Pickands et DeDH convergent vers un seuil à 2,5M€. Les sinistres supérieurs à 2M€ représentent 8% du nombre total de sinistres graves, *i.e.* supérieurs à 150k€, et 43% de la charge totale des sinistres graves. Ainsi, conserver une hypothèse de 2M€ pour la suite nous paraît cohérent.

Estimateurs	Seuil (M€)	Nombre %	Charge %
Test 1	1,5	12%	49%
Gerstengarbe	2	8%	43 %
Hill	2	8%	43 %
Pickands	2,5	6%	39 %
DeDH	2,5	6%	39 %
Test 2	3	5 %	35 %

TABLE III.3 – Seuils atypiques obtenus pour la branche PP

Le même travail a été effectué pour la branche Entreprises. Nous avons également décidé de retenir un seuil à 2M€, comportant 8% des sinistres pour 40 % de la charge totale. De plus, il est cohérent de garder le même seuil entre les branches Particuliers/Professionnels et Entreprises.

Estimateurs	Seuil (M€)	Nombre %	Charge %
Test 1	1	20%	59%
DeDH	1,5	12%	47 %
Gerstengarbe	1,5	12%	47 %
Pickands	1,75	10%	44 %
Hill	2	8%	40%
Test 2	2,5	6 %	35 %

TABLE III.4 – Seuils atypiques obtenus pour la branche EN

Conclusion

Le seuil atypique de l'année dernière était défini comme la moitié de la rétention du traité de réassurance de la branche RCA ill XS 15M€, soit 8M€. Ce seuil était bien trop haut : en effet seuls des sinistres supérieurs à 8M€ étaient modélisés correspondant à des sinistres exceptionnels et non atypiques. Pour la nouvelle modélisation du seuil nous avons utilisé des résultats de la théorie des valeurs extrêmes. Cette étude nous permet désormais de fixer un seuil atypique à 2M€ pour chacune des deux branches PP et EN. La très forte baisse du seuil aura certainement un impact sur le calcul du SCR des pertes futures. En effet, le coût moyen et la volatilité vont diminuer car il y aura plus de sinistres. De plus, il faut bien garder en tête qu'un changement de seuil impactera également la modélisation des sinistres attritionnels. Dans la dernière partie, nous nous intéresserons à quelques impacts et étudierons notamment l'influence du seuil sur la modélisation du nombre.

Chapitre IV

Nombre de sinistres atypiques

Dans le chapitre précédent nous avons donné un sens au mot « atypique ». C'est un sinistre dont le coût dépasse 2M€. Nous allons maintenant proposer un modèle permettant d'obtenir une distribution du nombre de sinistres atypiques. Pour cela, nous développerons une méthode proposée par SCHNIEPER en 1991 et apporterons quelques améliorations stochastiques.

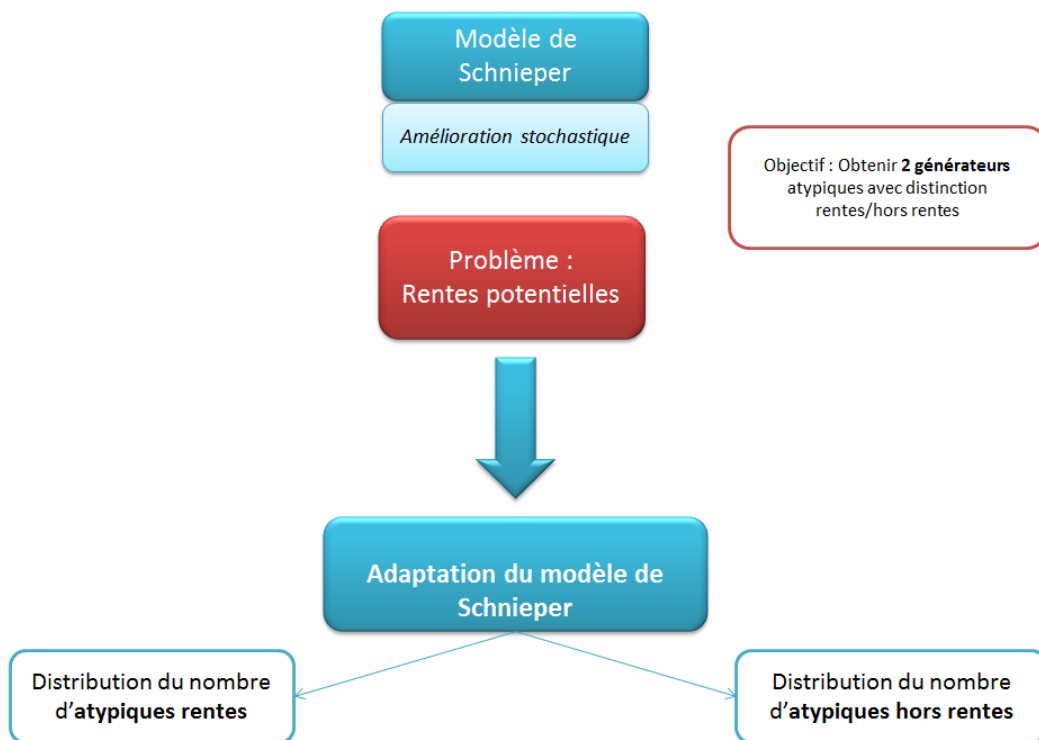


FIGURE IV.1 – Problématisation du nombre

La nouveauté de notre modélisation est de séparer les sinistres RC auto dont le versement se fait sous forme rente de ceux dont l'indemnisation est un montant de capital. Notre objectif est alors de déterminer quatre lois de fréquence : rentes Particuliers/Professionnels, rentes Entreprises, hors rentes Particuliers/Professionnels et hors rentes Entreprises. Cependant, nous verrons que la distinction des sinistres rentes et hors rentes nous obligera à faire face à la problématique des rentes potentielles, c'est-à-dire des sinistres qui ne sont pas encore identifiés comme rentes mais qui peuvent le devenir dans les années à venir. Nous allons alors adapter le modèle SCHNIEPER afin de capter les rentes potentielles et obtenir les quatre distributions souhaitées.

1. Modèle de Schnieper

Cette méthode a été développée par R.SCHNIEPER [13] en 1991 dans un cadre de réassurance. Elle n'a pas reçu d'attention jusqu'en 2009 avec la publication de H.LIU et R.VERRALL [11], qui a permis de proposer des méthodes d'améliorations stochastiques .

a. Présentation du modèle

La méthode de SCHNIEPER repose sur la mise en place de deux triangles. On note :

- i : Année de survenance du sinistre.
- j : Année de développement, ou vision, du sinistre.

Le triangle $N_{i,j}$ permettra de capter le nombre de nouveaux sinistres atypiques et $D_{i,j}$ le nombre de sinistres dont le coût "tombe" sous le seuil.

Cela se traduit mathématiquement de la manière suivante :

1. N_{ij} représente le nombre de sinistres survenus l'année i sous le seuil en $j - 1$ et devenant atypiques en j .
2. D_{ij} correspond au nombre de sinistres survenus l'année i atypiques en $j - 1$ et passant sous le seuil en j .
3. X_{ij} , égal au nombre de sinistres atypiques pour l'année de survenance i et l'année de développement j , est obtenu de la manière suivante :

$$\forall i = 1, \dots, n \text{ et } \forall j = 2, \dots, n \text{ tel que } i + j \leq n + 1$$

$$X_{i1} = N_{i1}$$

$$X_{ij} = X_{ij-1} - D_{ij} + N_{ij}$$

Le nombre de sinistres atypiques survenus l'année i observé en j est exactement égal au nombre d'atypiques en $j - 1$ auquel on ajoute les sinistres qui deviennent atypiques en j . A ces sinistres atypiques, on retire les sinistres qui tombent sous le seuil en j .

a.1 Les hypothèses du modèle

Soit H_k les données des triangles N et D observées jusqu'à l'année calendaire k .

$$H_k = \{N_{ij}, D_{ij} | i + j \leq k + 1\}$$

$$H_0 = \{0, \Omega\}$$

Nous retenons les hypothèses suivantes :

$$(H1) : E[N_{ij} | H_{i+j-2}] = E_i \lambda_j, \forall i, j \geq 1$$

Avec E_i : l'exposition de l'année i .

Cette hypothèse signifie que le nombre de nouveaux sinistres atypiques ne dépend pas de l'historique de la sinistralité mais uniquement de l'exposition et d'un facteur propre à l'année de développement.

Remarque : l'exposition correspond au nombre de contrats. Nous considérons deux vecteurs d'exposition, le premier pour la branche Particuliers/Professionnels et le second pour la branche Entreprises.

$$(H2) : E[D_{ij} | H_{i+j-2}] = X_{ij-1} \delta_j, \forall i \geq 1 \text{ et } \forall j \geq 2$$

Le nombre de sinistres tombant sous le seuil en j dépend de l'historique de sinistralité ainsi que d'un facteur de développement.

(H3) : $\forall i$, les ensembles $\{N_{ij}, D_{ij} | j = 1, \dots, n\} \dots \{N_{nj}, D_{nj} | j = 1, 2, \dots, n\}$ sont indépendants, c'est à dire que les variables relatives à différentes années de survénance sont indépendantes.

a..2 Détermination du nombre de sinistres à l'ultime

A partir des hypothèses précédentes, nous pouvons en déduire $\hat{\lambda}_j$ et $\hat{\delta}_j$, estimateurs de λ_j et δ_j :

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} N_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} E_i} \quad \forall j \geq 1$$

et

$$\hat{\delta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} X_{i,j-1}} \quad \forall j \geq 2$$

Les définitions de X , N , D et les hypothèses (H1), (H2), (H3) nous permettent d'estimer la partie inférieure du triangle X , notée $\hat{X}$.

$$\hat{X}_{i,j} = (1 - \hat{\delta}_j) \hat{X}_{i,j-1} + \hat{\lambda}_j E_i$$

Cette formule itérative nous permet d'obtenir $\hat{X}_{i,n}$ représentant le nombre de sinistres à l'ultime par année de survénance. Le nombre de sinistres atypiques moyen est donné par repondération de l'exposition, soit :

$$\hat{X}_{atyp} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{X}_{i,n}}{\sum_{i=1}^n E_i} \times E_{n+1}$$

De même, nous pouvons obtenir un estimateur de la variance de la manière suivante :

$$Var(\hat{X}_{atyp}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{X}_{i,n} - \hat{X}_{atyp})^2$$

Une fois que la moyenne du nombre de sinistres atypiques et la variance sont estimées, nous pouvons choisir la loi de fréquence. Le choix se fait entre la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative dont les définitions se trouvent en annexe.

- Si la moyenne est égale ou supérieure à la variance, une loi de Poisson $P(\lambda)$ est choisie. Le paramètre de la loi est obtenu par la méthode des moments et est alors égal au nombre moyen d'atypiques soit :

$$\lambda = \hat{X}_{atyp}$$

- Dans le cas inverse c'est une loi Binomiale Négative $BN(r, p)$ qui est préférée. Les paramètres de la loi sont également déterminés par la méthode des moments :

$$p = \frac{\hat{X}_{atyp}}{Var}$$

$$r = \frac{p \times \hat{X}_{atyp}}{1 - p}$$

b. Améliorations par la méthode de *Bootstrap*

Dans cette partie, nous proposons des méthodes de *Bootstrap* à partir des travaux de HUIJUAN LIU et RICHARD VERRALL [11] publiés en 2009. Ces chercheurs ont proposé des améliorations dans leur article « Predictive Distributions for Reserves which Separate True IBNR and IBNER Claims » dans le cadre de l'estimation des réserves. Nous allons nous en inspirer pour obtenir une distribution du nombre de sinistres à l'ultime.

Ci-dessous, les deux nouvelles hypothèses que nous retenons dans la suite. On suppose que $N_{i,j}$ et $D_{i,j}$ sont des réalisations de loi de Poisson et Binomiale dont les paramètres dépendent de i et j .

$$(H1') : N_{i,j}|H \sim P(\lambda_j E_i)$$

$$(H2') : D_{i,j}|H \sim B(X_{i,j-1}, \delta_j)$$

On a bien $(H1') \Rightarrow (H1)$ et $(H2') \Rightarrow (H2)$.

Nous travaillons désormais à partir des ratios $\frac{N_{i,j}}{E_i}$ et $\frac{D_{i,j}}{X_{i,j-1}}$.

Les hypothèses $(H1')$ et $(H2')$ impliquent :

$$\begin{aligned} E \left[\frac{N_{ij}}{E_i} | X_{ij-1} \right] &= \lambda_j \\ E \left[\frac{D_{ij}}{X_{ij-1}} | X_{ij-1} \right] &= \delta_j \\ Var \left[\frac{N_{ij}}{E_i} | X_{ij-1} \right] &= \frac{\lambda_j}{E_i} \\ Var \left[\frac{D_{ij}}{X_{ij-1}} | X_{ij-1} \right] &= \frac{\delta_j(1 - \delta_j)}{X_{ij-1}} \end{aligned}$$

L'idée de base du *Bootstrap* est le rééchantillonnage, c'est-à-dire que de nouveaux triangles de données sont générés. On définit :

$$f_{ij} = \frac{N_{ij}}{E_i} \text{ et } g_{ij} = \frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}}$$

Les résidus de Pearson sont :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{\sqrt{E_i}(f_{ij} - \hat{\lambda}_j)}{\sqrt{\hat{\lambda}_j}} \\ s_{ij} &= \frac{\sqrt{X_{i,j-1}}(g_{ij} - \hat{\delta}_j)}{\sqrt{\hat{\delta}_j(1 - \hat{\delta}_j)}} \end{aligned}$$

A chaque étape du *Bootstrap*, ces résidus sont rééchantillonnés avec remise nous permettant d'obtenir de nouveaux triangles de résidus r_{ij}^B et s_{ij}^B , pour $i \geq 1$ et $j = 1, 2, \dots, n - i + 1$. Puis à partir de la définition des résidus, les triangles des données sont calculés :

$$\begin{aligned} f_{ij}^B &= r_{ij}^B \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_j}}{\sqrt{E_i}} + \hat{\lambda}_j \\ g_{ij}^B &= s_{ij}^B \frac{\sqrt{\hat{\delta}_j(1 - \hat{\delta}_j)}}{\sqrt{X_{i,j-1}}} + \hat{\delta}_j \end{aligned}$$

Pour chaque nouvel échantillon B , les estimateurs $\hat{\lambda}_j^B$ et $\hat{\delta}_j^B$ sont estimés :

$$\hat{\lambda}_j^B = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} f_{ij}^B N_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E_i}$$

$$\hat{\delta}_j^B = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} g_{ij}^B D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{ij-1}}$$

L'étape finale est de simuler, après chaque échantillonnage, les parties inférieures des triangles N et D selon les distributions suivantes :

$$N_{ij}|X_{i,j-1} \sim P(\hat{\lambda}_j^B E_i)$$

$$D_{ij}|X_{i,j-1} \sim B(X_{i,j-1}, \hat{\delta}_j^B)$$

Les étapes sont résumées dans le graphique IV.2.

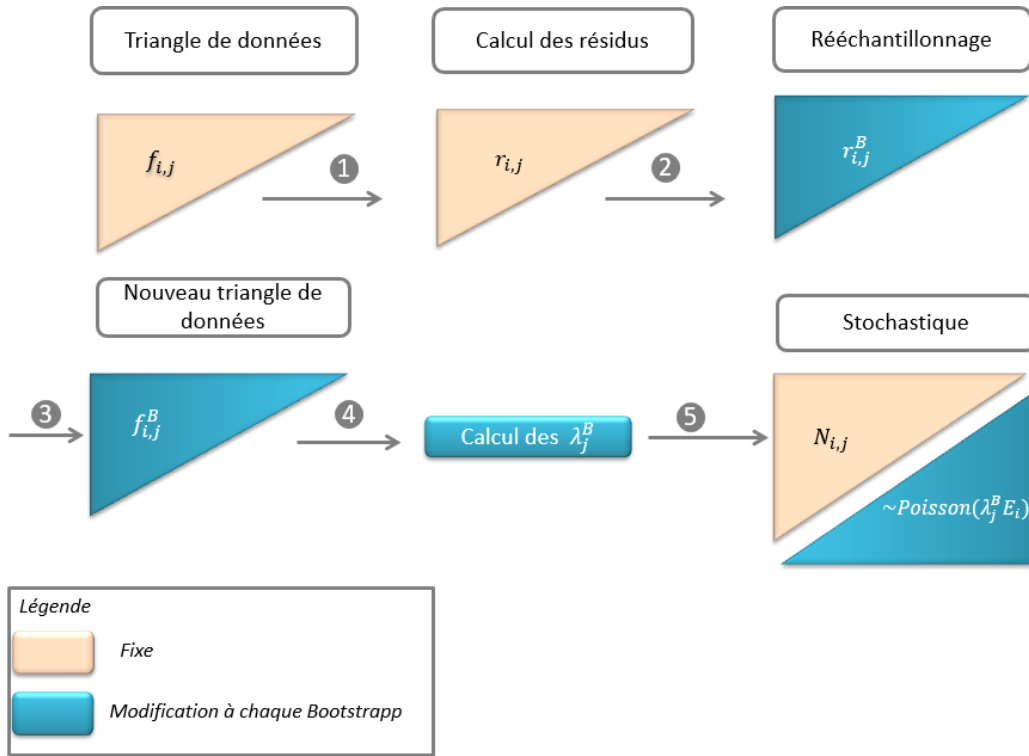


FIGURE IV.2 – Mise en place de la méthode de Schnieper avec rééchantillonnage et simulations

Le même processus est effectué **simultanément** pour les triangles N et D et celui-ci est répété 1000 fois. Finalement, à chaque itération du *Bootstrap* nous en déduisons le triangle $\hat{X}$ à partir duquel le nombre moyen d'atypiques à l'ultime ainsi que la variance sont estimés. Nous obtenons alors 1000 simulations du nombre moyen d'atypiques à l'ultime ainsi que 1000 simulations de la variance.

2. Adaptation du modèle de Schnieper

La nouveauté de notre modélisation est de séparer les sinistres RC auto dont le versement se fait sous forme rente de ceux dont l'indemnisation est un montant de capital.

Notre objectif est alors de déterminer quatre lois de fréquence : rentes Particuliers/Professionnels, rentes Entreprises, hors rentes Particuliers/Professionnels et hors rentes Entreprises.

Il est possible d'identifier les **rentes connues** dans la base des sinistres, c'est-à-dire celles pour lesquelles la décision de verser une rente à la victime a été prise (que ce soit à l'amiable ou devant les tribunaux). La table de correspondance nous donne le numéro de rente associé à un numéro de sinistre. Si celui-ci n'est pas renseigné, le sinistre est alors classifié en tant que sinistre hors rentes. Nous obtenons ainsi une table de sinistres hors rentes et une table de sinistres rentes.

Cependant, nous ne disposons pas de l'information concernant les **rentes potentielles** dans nos bases. Cela implique que notre base de sinistres hors rentes contient probablement des rentes :

- Certains sinistres sont des rentes mais la correspondance n'est pas assurée : consolidation ultérieure à la mise à jour de la table, changement de numéro de sinistre, ... **Ce sont les rentes non identifiées.**
- Certains sinistres ne sont pas encore consolidés. **Ce sont les rentes futures.**

L'existence de rentes potentielles dans la base des sinistres hors rentes biaisera notre modélisation. En effet, ces sinistres sont potentiellement plus importants et donc ils augmenteront le nombre moyen de sinistres atypiques hors rentes attendu. A l'inverse, le nombre moyen de sinistres atypiques rentes sera sous-estimé. Ces sinistres doivent donc être pris en compte en tant que rentes.

Cette nouvelle modélisation nous oblige alors à faire face à la problématique des rentes potentielles et nous allons essayer de trouver la meilleure solution possible pour la contourner.

a. Proposition d'un nouveau modèle

Afin de contourner la problématique des rentes potentielles, nous allons combiner la donnée « date de consolidation » au modèle de SCHNIEPER. L'hypothèse suivante va être retenue :

« Un sinistre consolidé en j' est considéré comme sinistre rente pour toute vision $j \geq j'$. Avant cette date, il sera classifié comme sinistre hors rente ». Nous calculerons j et j' de la manière suivante :

$$\begin{aligned} j &= An_{vis} - An_{surv} \\ j' &= An_{conso} - An_{surv} \end{aligned}$$

Avec :

- An_{vis} : Année de vision
- An_{surv} : Année de survénance
- An_{conso} : Année de consolidation

Le modèle de SCHNIEPER utilise deux triangles : $N_{i,j}$, le triangle des nouveaux atypiques et $D_{i,j}$ représentant la décroissance des atypiques.

La prise en compte de la date de consolidation de la rente nous permettra d'obtenir *in fine* quatre triangles :

- $N_{i,j}^{HR}$: le triangle des nouveaux atypiques hors rentes. Il correspond au nombre de sinistres survenus en i , sous le seuil en $j - 1$ et atypiques en j avec $j < j'$ et j' correspondant à la consolidation.
- $N_{i,j}^R$: le triangle des nouveaux atypiques rentes. Il correspond au nombre de sinistres survenus en i , sous le seuil en $j - 1$ et atypiques en j avec $j \geq j'$ et j' correspondant à la consolidation.
- Idem pour $D_{i,j}$.

Modèle de Schnieper	Adaptation
N_{ij} : Nombre de sinistres survenus en i , sous le seuil en $j - 1$ et atypiques en j .	N_{ij}^{HR} : $N_{i,j}$ + non consolidés en j
	N_{ij}^R : $N_{i,j}$ + consolidés en j
D_{ij} : Nombre de sinistres survenus en i , atypiques en $j - 1$ et passant sous le seuil en j .	D_{ij}^{HR} : $D_{i,j}$ + non consolidés en j
	D_{ij}^R : $D_{i,j}$ + consolidés en j

FIGURE IV.3 – Adaptation de la méthode de Schnieper

Les triangles marchent par « paire ». Par exemple le triangle N^{HR} va contenir tous les nouveaux atypiques non consolidés. Dès qu'un sinistre est consolidé, il disparaît de ce triangle et apparaît dans N^R . De cette manière, dans le triangle N^{HR} les sinistres vont disparaître au fur et à mesure et cette décroissance sera prise en compte dans les coefficients. A l'ultime, nous aurons uniquement les sinistres qui n'ont jamais été consolidés.

De même, dans le deuxième triangle, les sinistres vont apparaître au fur et à mesure et nous obtiendrons alors un nombre de rentes atypiques à l'ultime.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1992	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1993	0	0	0	0	0	0	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
1994	0	0	0	0	0	2	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1995	0	0	0	0	1	0	3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1996	0	0	0	2	1	1	0	0	2	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1997	0	0	1	2	4	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1998	0	0	0	1	0	4	0	0	0	1	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1999	1	0	0	2	0	0	2	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	0	0	0	1	1	1	1	2	0	2	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2001	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2002	0	0	0	0	3	2	0	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2003	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2004	0	0	0	3	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2005	0	0	0	1	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2006	0	0	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2007	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2008	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2009	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2012	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2013	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURE IV.4 – Nombre d'atypiques hors rentes

Finalement, l'idée repose sur la prise en compte de l'effet de « disparition » et d' « apparition » comme l'illustrent les figures IV.3 et IV.4.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1992	0	0	0	0	0	0	0	22	2	2	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1993	0	0	0	0	0	0	17	1	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1994	0	0	0	0	0	15	0	2	2	0	2	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
1995	0	0	0	0	6	2	2	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0
1996	0	0	0	7	0	3	4	0	2	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
1997	0	0	1	2	2	3	2	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1998	0	0	1	0	3	1	2	0	2	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1999	0	0	0	3	1	2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	0	0	0	0	5	3	2	3	1	1	3	2	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2001	0	0	0	1	5	0	1	5	3	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
2002	0	0	0	2	2	3	2	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2003	0	0	1	1	3	0	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2004	0	0	0	1	3	1	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2005	0	0	0	0	1	0	2	3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2006	0	0	0	0	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2007	0	0	0	2	2	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2008	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2009	0	0	0	2	2	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2010	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2011	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2012	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2013	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2014	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURE IV.5 – Nombre d'atypiques rentes

Nous avons ainsi adapté la méthode de SCHNIEPER qui permet à l'origine d'obtenir un nombre de sinistres atypiques à l'ultime pour finalement obtenir aussi une distribution du nombre de sinistres rentes atypiques à l'ultime.

b. Applications

b..1 Lois de fréquence par le modèle déterministe

Nous avons déterminé les triangles $N_{i,j}^{HR}$ et $D_{i,j}^{HR}$ pour les sinistres hors rentes ainsi que $N_{i,j}^R$ et $D_{i,j}^R$ pour les sinistres rentes, à partir de nos données retraitées et pour un seuil atypique de 2M€. Nous calculons les coefficients $\hat{\lambda}_j^{HR}$ et $\hat{\delta}_j^{HR}$ ainsi que $\hat{\lambda}_j^R$ et $\hat{\delta}_j^R$. Nous pouvons ainsi estimer $\hat{X}^{HR}$ et $\hat{X}^R$ correspondant aux parties inférieures des triangles atypiques X^R et X^{HR} . Sur ces triangles nous calculons le nombre moyen de sinistres atypiques à l'ultime ainsi que la variance.

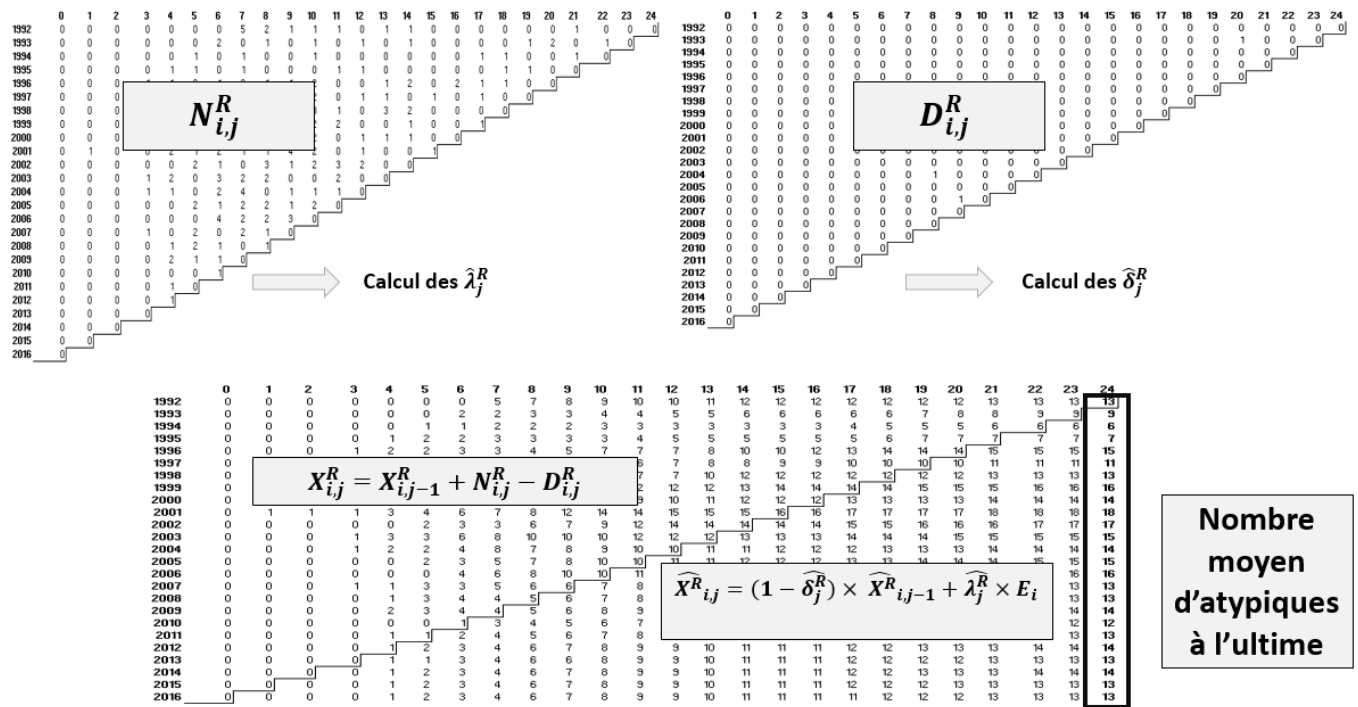


FIGURE IV.6 – Processus d'application du nombre moyen d'atypiques

Le tableau ci-dessous synthétise les résultats trouvés à savoir la moyenne et la variance pour chacune des branches Particuliers/Professionnels et Entreprises et pour les deux générateurs rentes et hors rentes. En fonction de ces résultats, la loi de fréquence est choisie.

Estimateurs	Rentes PP	Rentes EN	Hors rentes PP	Hors rentes EN
Moyenne	16,56	4,52	7,51	1,99
Variance	35,15	2,79	5,11	2,23
Loi	Binomiale Négative	Poisson	Poisson	Binomiale Négative

TABLE IV.1 – Loïs de fréquence retenues selon la méthode déterministe

Nous pouvons remarquer que les sinistres atypiques sont principalement des rentes. En effet, le versement d'un arrérage tout au long de la vie de la victime augmente considérablement les coûts, en particulier pour les jeunes victimes.

Les sinistres rentes de la branche Particuliers/Professionnels seront modélisés par une loi Binomiale Négative. Les paramètres seront estimés par la méthode des moments, comme vu dans la première partie de ce chapitre. Le nombre moyen de sinistres rentes Entreprises et de hors rentes Particuliers/Professionnels sera approximé par une loi de Poisson. Enfin, la loi de fréquence retenue pour les sinistres hors rentes de la branche Entreprises est une loi Binomiale Négative.

Remarque : les sinistres hors rentes de la branche Entreprises sont modélisés par une loi Binomiale Négative car nous comparons une moyenne de 2 avec une variance de 2,23. Cependant, même si la variance est plus élevée que la moyenne elle reste très proche de la moyenne et une loi de Poisson peut être envisagée. Afin d'avoir plus d'arguments pour le choix final des lois de fréquence, nous allons explorer la méthode *Bootstrap*.

b..2 Lois de fréquence par le modèle *Bootstrap*

Dans cette partie, nous avons mis en place la méthode de SCHNIEPER stochastique avec rééchantillonnage.

Nous procédons à 1000 rééchantillonnages. Chaque rééchantillonnage B nous permet de calculer des coefficients $\hat{\lambda}_j^B$ et $\hat{\delta}_j^B$. Les parties inférieures des triangles N et D sont estimées respectivement par une loi de Poisson $P(\hat{\lambda}_j^B E_i)$ et une loi Binomiale $B(X_{i,j-1}, \hat{\delta}_j^B)$. Pour ce même rééchantillonnage nous en déduisons la partie inférieure du triangle des atypiques $\hat{X}^B$. Enfin, nous calculons le nombre moyen de sinistres atypiques $\hat{X}_{atyp}^B$ ainsi que sa variance $Var(\hat{X}_{atyp}^B)$.

Nous obtenons 1000 nombres moyens atypiques et 1000 variances associées.

Moyenne des atypiques

A partir des 1000 simulations, nous obtenons une distribution du nombre moyen de sinistres atypiques. Le graphique IV.7 représente la distribution du nombre moyen de sinistres atypiques rentes de la branche Particuliers/Professionnels.

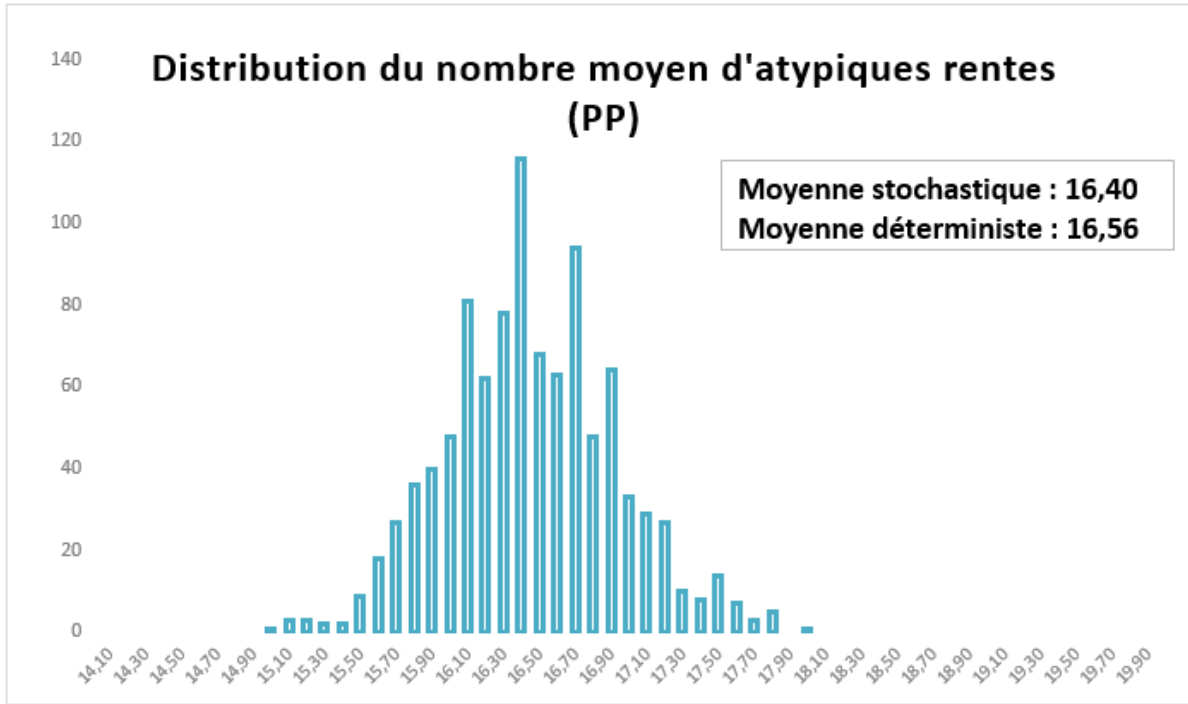


FIGURE IV.7 – Distribution du nombre moyen d'atypiques rentes (PP)

Dans le tableau IV.2, nous comparons le nombre moyen de sinistres atypiques obtenu pour chacune des branches avec la méthode déterministe et avec la méthode stochastique.

Les deux méthodes donnent des résultats très similaires.

Estimateurs	Rentes PP	Rentes EN	Hors rentes PP	Hors rentes EN
Moyenne déterministe	16,56	4,52	7,51	1,99
Moyenne stochastique	16,40	4,35	6,97	1,89

TABLE IV.2 – Comparaison des moyennes déterministes et stochastiques

Variance des atypiques

La variance a un rôle très important dans la détermination du choix de la loi de fréquence.

Pour le choix de la loi deux approches sont possibles :

1. Une possibilité est de travailler directement à partir des deux distributions obtenues en comparant la moyenne de la distribution du nombre moyen d'atypiques avec la moyenne de la distribution de variance.

Avantage : nous obtenons une valeur de la variance ce qui est nécessaire pour le calcul des paramètres de loi.

Inconvénient : la distribution de la variance peut être très volatile et donc pas forcément fiable dans le choix de la loi.

2. L'autre alternative est de travailler directement à partir des données brutes. Pour chacune des lignes nous comparons la moyenne et la variance simulées. Nous affectons 1 si la variance est supérieure ou égale à la moyenne et 0 sinon. Le nombre total de 1 nous permet d'obtenir une répartition entre la loi de Poisson et la loi Binomiale Négative.

Remarque : Nous supposons que la variance est supérieure à la moyenne si l'écart est d'au moins 1.

Avantage : cette méthode capte exactement le nombre de fois où la variance dépasse la moyenne.

Inconvénient : elle ne nous permet pas de retenir une valeur de variance.

Choix d'une loi par la première méthode :

Dans le tableau IV.3 nous comparons :

- La moyenne stochastique correspondant à la moyenne de la distribution du nombre d'atypiques ;
- La variance déterministe obtenue sans rééchantillonnage ;
- La variance stochastique correspondant à la moyenne de la distribution de variance, obtenue après rééchantillonnage ;
- La loi déterministe obtenue en comparant la moyenne et la variance déterministes ;
- La loi stochastique obtenue en comparant la moyenne et la variance stochastiques.

Estimateurs	Rentes PP	Rentes EN	Hors rentes PP	Hors rentes EN
Moyenne stochastique	16,40	4,35	6,97	1,89
Variance déterministe	35,56	2,79	5,11	2,23
Variance stochastique	36,99	3,45	8,56	2,90
Loi déterministe	Binomiale Négative	Poisson	Poisson	Binomiale Négative
Loi stochastique	Binomiale Négative	Poisson	Binomiale Négative	Binomiale Négative

TABLE IV.3 – Choix d'une loi de fréquence par la méthode stochastique

Les résultats que l'on obtient avec la méthode stochastique sont assez proches de ceux obtenus par la méthode déterministe. Cependant, concernant les sinistres hors rentes de la branche Particuliers/Professionnels, la méthode stochastique nous amène plutôt à retenir une loi Binomiale Négative. Nous allons comparer ce résultat avec celui obtenu par la deuxième méthode.

Choix d'une loi par la deuxième méthode :

Cette méthode consiste à comparer ligne à ligne le nombre moyen d'atypiques simulés ainsi que sa variance. Si la moyenne est inférieure ou égale à la variance nous retenons une loi de Poisson. Dans le cas inverse, nous retenons une loi Binomiale Négative.

Concernant les sinistres rentes PP et rentes EN, les résultats coordonnent avec la première méthode. Une loi binomiale négative et une loi de Poisson sont choisies. Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux sinistres hors rentes. La méthode déterministe nous incitait à conserver une loi de Poisson tandis que la méthode stochastique concluait sur une loi Binomiale Négative.

Concernant les sinistres hors rentes EN, nous retenons une loi Binomiale Négative. Cependant, la moyenne était très proche de la variance et retenir une loi de Poisson ne serait pas absurde.

Nous utilisons donc cette deuxième méthode afin de conforter nos choix.

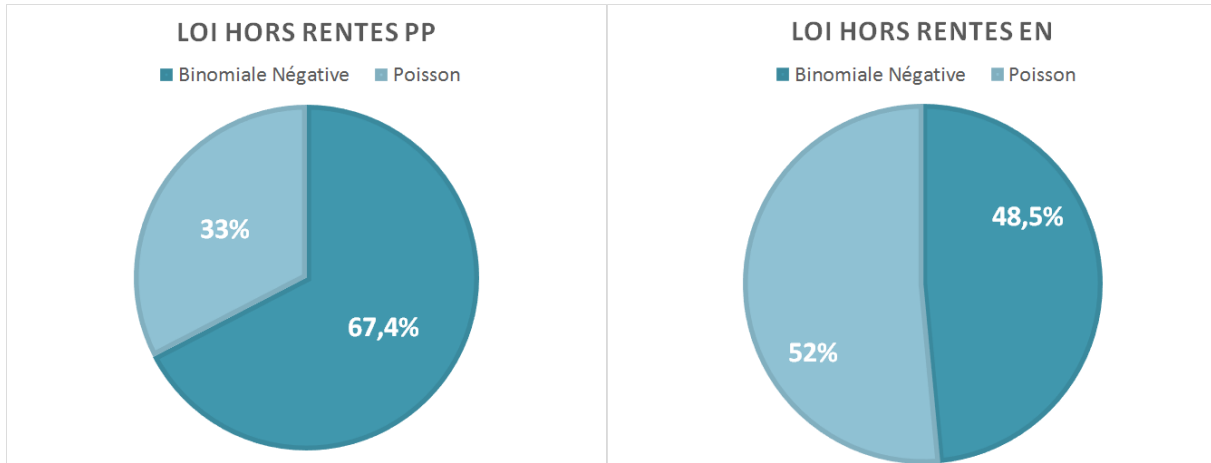


FIGURE IV.8 – Choix d’une loi pour les sinistres hors rentes

Avec la deuxième méthode, nous observons que 67,4% des sinistres hors rentes de la branche Particuliers/Professionnels ont une variance supérieure à la moyenne. Nous retenons alors une loi Binomiale négative. Concernant les sinistres hors rentes de la branche Entreprise, 52% ont une moyenne inférieure ou égale à la variance : nous choisissons une loi de Poisson.

Synthèse :

La méthode de rééchantillonnage nous a permis d’y voir plus clair dans le choix de nos lois de fréquence.

- Rentes PP : la méthode déterministe ainsi que les deux méthodes stochastiques convergent vers un même choix de loi.

Nous retenons une loi Binomiale Négative de moyenne 16,40 et de variance 36,99. Les paramètres de la loi sont déterminés par la méthode des moments :

$$p = \frac{moy}{var} \simeq 0,44$$

$$r = \frac{moy \times p}{(1 - p)} \simeq 13,07$$

- Rentes EN : nous retenons une loi de Poisson. Le paramètre est calculé à partir de la méthode des moments :

$$\lambda = moy \simeq 4,35$$

- Hors Rentes PP : avec la méthode déterministe nous retenons une loi de Poisson. A l’inverse, l’analyse des résultats de la première méthode stochastique nous permettait de conclure à la une loi Binomiale Négative. C’est grâce à la comparaison entre la moyenne et la variance ligne à ligne que nous avons finalement décidé de retenir une loi Binomiale négative de moyenne 6,97 et de variance 8,56. Les paramètres de la loi sont déterminés par la méthode des moments :

$$p = \frac{moy}{var} \simeq 0,81$$

$$r = \frac{moy \times p}{(1 - p)} \simeq 30,51$$

- Hors Rentes EN : les méthodes déterministes et stochastiques convergeaient vers une loi Binomiale Négative. Cependant même si la variance était plus élevée que la moyenne cette différence était très faible et la troisième méthode nous a conforté dans notre intuition de conserver une loi de Poisson. Le paramètre est estimé par la méthode des moments :

$$\lambda = moy \simeq 1,89$$

Nous avons ainsi obtenu une loi de fréquence pour modéliser le nombre de sinistres atypiques rentes et hors rentes et pour chacune des branches Particuliers/Professionnels et Entreprises.

Conclusion

La méthode de SCHNIEPER permet de modéliser le nombre de sinistres atypiques. Distinguer les sinistres rentes des autres sinistres nous a confrontés à la problématique des rentes potentielles. Certaines rentes ne sont pas identifiées ou pas encore consolidées et nous ne disposons d'aucune information à leur sujet. Cela est problématique puisque sans la prise en compte de ces rentes probables le nombre de rentes à l'ultime serait sous-estimé. Nous avons alors utilisé la date de consolidation et proposé une adaptation du modèle de SCHNIEPER afin de contourner ce problème. De plus, afin d'améliorer le modèle déterministe de base nous avons mis en place des méthode de *bootstrap*. Cela nous a permis d'obtenir les quatre générateurs de fréquence souhaités.

Chapitre V

Coût des sinistres atypiques

1. Présentation de la modélisation

L'objectif de ce chapitre est de déterminer une loi de sévérité pour chacun de nos quatre générateurs :

- Sinistres rentes de la branche Particuliers/Professionnels ;
- Sinistres rentes de la branche Entreprises ;
- Sinistres hors rentes Particuliers/Professionnels ;
- Sinistres hors rentes Entreprises.

La distinction entre les sinistres Particuliers/Professionnels et Entreprises est une information dont nous disposons dans nos bases. Concernant la classification d'un sinistre en rente, nous utilisons la définition suivante : « un sinistre consolidé en j' est considéré comme sinistre rente pour toute vision $j \geq j'$. Avant cette date, il sera classifié comme sinistre hors rente ». En effet, comme évoqué précédemment, cette méthode permet de contourner la problématique des rentes potentielles.

Le coût d'un sinistre rente survenu en i et vu en j , noté ch_i^j , peut s'écrire comme la somme du capital constitutif CC et d'une partie fixe F_i^j , *i.e.* toutes les dépenses autres que le capital constitutif et donc ne dépendant pas de l'état de la victime :

$$ch_i^j = CC + F_i^j$$

Le capital constitutif de la rente dépend lui-même de l'annuité ${}_m|_n a_x$ et de l'arrérage Arr .

$$CC = {}_m|_n a_x \times Arr$$

De plus, ${}_m|_n a_x$ est fonction de l'âge de la victime, du taux d'actualisation i' et de la table de mortalité TdM .

Finalement le coût d'un sinistre rente vu en j peut se décomposer de la manière suivante :

$$ch_i^j = f(\text{âge}, i', TdM) \times Arr + F_i^j$$

- La partie fixe sera modélisée à partir de la méthode standard présentée dans la première partie de ce chapitre.
- Ensuite nous calibrerons des lois pour l'âge et l'arrérage à partir de leur distribution empirique.

Pourquoi calibrer une loi sur l'âge de la victime plutôt que le ${}_m|_n a_x$?

A partir d'un âge, nous pourrions déterminer le ${}_m|_n a_x$ correspondant selon différents taux d'actualisation. En effet, comme nous souhaitons mettre en place une couverture de réassurance sur le différentiel de taux, il est important de pouvoir déterminer un montant de capital constitutif selon différents taux d'actualisation. C'est pour cette raison que nous préférons modéliser l'âge de la victime.

- Les sinistres hors rentes seront également modélisés à partir de la méthode standard.

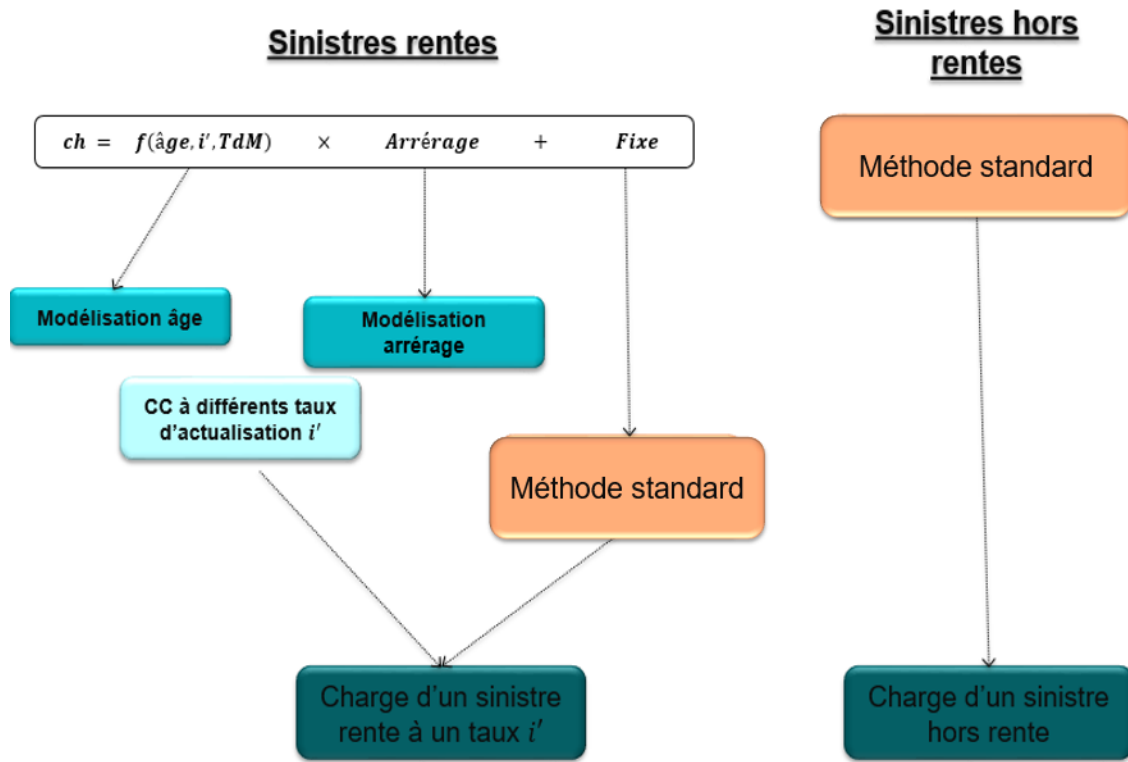


FIGURE V.1 – Modélisation du coût

Remarque : séparer les sinistres rentes des sinistres hors rentes nécessite de proposer une nouvelle modélisation. L'ancienne modélisation du coût des atypiques se basait exclusivement sur la méthode standard et les charges étaient considérées dans leur ensemble. Aucun intérêt n'était porté au capital constitutif de la rente.

2. Méthode standard

La méthode standard s'appliquera uniquement à la partie fixe des sinistres rentes et aux sinistres hors rentes. Avant de détailler cette méthode, nous allons justifier le choix d'un second seuil retenu dans la suite de l'étude. Il est nécessaire de déterminer un second seuil plus faible que le seuil atypique afin de filtrer les sinistres qui, développement après développement, vont être pris en compte dans les coefficients de développement. Ce seuil est nécessaire pour ne pas trop surestimer les coefficients de développements et éviter les *gap*.

a. Choix du seuil

L'objectif étant de déterminer le coût des sinistres atypiques, nous pourrions définir ce seuil à 2M€. Cependant, certains sinistres ne sont pas atypiques durant les premières années de développement mais peuvent dépasser le seuil ensuite. Fixer un seuil à 2M€ nous obligerait à ne garder que les sinistres atypiques au moment de leur survenance. Nous actualisons le seuil de la manière suivante, afin de prendre en compte les sinistres qui passent au-dessus du seuil sans autre effet que celui de l'inflation :

$$T = \frac{S_{atyp}}{(Infl_{moy})^h}$$

Avec :

- S_{act} : le nouveau seuil actualisé de l'inflation
- T : le seuil atypique défini à 2M€
- $Infl_{moy}$: inflation moyenne
- h : longueur de l'historique

Nous retiendrons ce seuil dans toute la suite de notre étude. Nous gardons $T = 1M\text{€}$.

Remarque : la partie fixe ne correspond qu'à une partie de la charge totale d'un sinistre rente. La contrainte du seuil ne s'appliquera pas à la partie fixe mais à la charge totale. Autrement dit, pour un sinistre survenu en i et vu en j nous ne garderons que la partie fixe F_i^j telle que $ch_i^j = CC + F_i^j > T$ et non $F_i^j > T$.

b. Hypothèses du modèle

Soit H_k les données du triangle X observées jusqu'à l'année calendaire k .

$$H_k = \{X_{ij} | i + j \leq k + 1\}$$

$$H_0 = \{0, \Omega\}$$

(H1) : Nous supposons que le coût d'un sinistre k survenu en i vu l'année j dépend du coût de ce même sinistre vu en $j - 1$ et d'un facteur de développement j .

(H2) : De plus, nous supposons que le coût du sinistre k est supérieur au seuil T pour les deux années de développement j et $j - 1$.

Finalement, ces deux hypothèses se traduisent mathématiquement par :

$$E[X_{i,j}^k / H] = \delta_j X_{i,j-1}^k$$

Avec

$$X_{i,j}^k \text{ et } X_{i,j-1}^k > T$$

c. Projection du coût à l'ultime

A partir des hypothèses, nous pouvons en déduire un estimateur de δ_j .

$$\forall j \quad \hat{\delta}_j = \frac{\sum_{i,k} x_{i,j}^k}{\sum_{i,k} x_{i,j-1}^k} \quad \forall i \quad \forall k \mid x_{i,j}^k > T \text{ et } x_{i,j-1}^k > T$$

$x_{i,j}^k$ correspond au coût de la partie fixe d'un sinistre rente $PF_{i,j}^k$ ou au coût d'un sinistre hors rente.

Ensuite, les coûts retraités et supérieurs au seuil T pour leur dernière année de vision sont projetées à l'ultime à partir des coefficients $\hat{\delta}_j$. Concernant la partie fixe des sinistres rentes, on projette les coûts retraités dont la charge totale vue en 2016 est supérieure à T .

Le coût à l'ultime d'un sinistre survenu en i sera :

$$C_i^{ult} = \hat{\delta}_{2016-i+1} \times \hat{\delta}_{2016-i+2} \times \cdots \times \hat{\delta}_{2016-i+25} \times C_i^{2016}$$

Avec :

- C_i^{ult} : coût projeté d'un sinistre survenu en i
- C_i^{2016} : coût d'un sinistre survenu en i et vu en 2016

De plus, on suppose qu'au bout de 25 ans, un sinistre a fini de se développer. Cela se traduit par :

$$\hat{\delta}_{25} = 1$$

De cette manière, nous obtenons les montants des coûts projetés à l'ultime. A partir de ces coûts, nous obtenons une distribution empirique. C'est à partir de cette distribution empirique que nous allons essayer de *fitter* une loi de sévérité au coût des sinistres hors rentes et à la partie fixe des rentes.

3. Tests d'adéquation

Les tests d'adéquation que nous allons réaliser pour le choix de la loi de sévérité sont les tests de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises et Anderson-Darling.

Tout d'abord, rappelons les définitions des fonctions de répartition théorique et empirique.

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires *iid* de fonction de répartition F . On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = P(X_i \leq x)$$

On appelle fonction de répartition empirique associée au n -échantillon $X_1, \dots, X_n$ la fonction :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq x}$$

a. Kolmogorov-Smirnov

Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov permet de tester l'hypothèse H_0 selon laquelle les données suivent une loi de probabilité théorique. Dans ce test, les calculs sur les lois de probabilité se font sur les fonctions de répartition : on mesure l'écart entre la fonction de répartition théorique et la fonction de répartition observée. On considère ainsi une variable aléatoire X de fonction de répartition F , que l'on veut comparer à une fonction de répartition théorique F_0 continue. On souhaite tester :

$$H_0 : F = F_0$$

contre

$$H_1 : F \neq F_0$$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de X de fonction répartition $F_n(x)$. L'écart entre les valeurs observées et les valeurs théoriques du modèle déduites de la fonction de répartition F_0 peut donc être mesurée par la variable aléatoire :

$$\Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)|$$

Δ_n est la **variable de décision du test**.

En posant $U_n = \sqrt{n}\Delta_n$, on démontre que lorsque H_0 n'est pas vraie U_n tend vers $+\infty$ et lorsque H_0 est vraie U_n suit asymptotiquement une loi sur $\mathbb{R}^+$ définie par sa fonction de répartition

$$K(y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-2n^2 y^2}$$

.

La région critique du test est donc constitué des grandes valeurs de Δ_n . Le niveau α étant donnée, on peut définir la valeur critique de deux façons : la loi de Δ_n étant tabulée, le quantile $c_n(1-\alpha)$ d'ordre $1-\alpha$ de cette loi fournit un test exact de niveau α en rejetant l'hypothèse H_0 si la valeur observée δ_n de Δ_n dépasse $c_n(1-\alpha)$ et en l'acceptant dans le cas contraire. Ce test est donc valable pour toute taille n de l'échantillon.

La loi limite étant tabulée, le quantile $c(1-\alpha)$ d'ordre $1-\alpha$ de cette loi fournit un test asymptotique de niveau α en rejetant l'hypothèse H_0 si la valeur observée δ_n de Δ_n dépasse $c_n(1-\alpha)$ et en l'acceptant dans le cas contraire. La convergence vers la loi limite étant assez rapide, ce test est largement acceptable pour $n > 100$.

b. Cramer-von Mises

Ce test est également utilisé pour comparer une distribution observée à une distribution théorique. Il considère l'ensemble des différences entre distributions cumulées théoriques et observées à chaque observation, alors que le test de Kolmogorov-Smirnov ne considère que la plus grande de ces différences : le test de Cramer-von Mises prend donc en compte plus d'information et est réputé être plus puissant. L'écart est mesuré par la variable aléatoire :

$$w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - F_0(x)|^2 dF_0(x)$$

Et la statistique du test est :

$$T = nw^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{2i-1}{2n} - F_0(x) \right]$$

La difficulté vient du fait que la distribution du test statistique noté W^2 , n'est pas déterminée et on doit se reporter à des tables qui dépendent de la situation.

c. Anderson-Darling

Ce test est une modification de celui de Cramer-von Mises qui le rend plus sensible à la valeur extrême de la distribution. La statistique du test est la suivante :

$$Q_n = n \int_0^{+\infty} [F_n(x) - F_0(x)]^2 w dF_0(x)$$

où

$$w(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

La distribution du test statistique, noté A^2 , n'est également pas déterminée et on doit se reporter à des tables qui dépendent de la situation, tout comme le test de Cramer-von Mises.

4. Applications

a. Résultats de la modélisation

a.1 Vérification des hypothèses

La méthode standard s'applique aux sinistres hors rentes ainsi qu'à la partie fixe des sinistres rentes. Les hypothèses à vérifier concernent donc uniquement ces sinistres. Nous supposons bien évidemment que les sinistres ont été retraités de la mise en *as-if*.

Remarque importante : les sinistres ne sont pas retraités du FGAO puisque cette réforme ne concerne que le capital constitutif des rentes.

Pour j fixé, nous supposons l'existence d'un coefficient δ_j tel que $E[X_{i,j}^k/H] = \delta_j X_{i,j-1}^k$.

Les couples $(X_{i,j}^k, X_{i,j-1}^k)_{i=0,\dots,n-j-1}$ avec $X_{i,j}^k$ et $X_{i,j-1}^k > T$ doivent être sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

Le coefficient de détermination (R^2) permet de tester l'adéquation du modèle de régression aux données. Si le R^2 est nul, cela signifie que l'équation de la droite de régression détermine 0% de la distribution des points. A l'inverse, si le R^2 vaut 1, cela signifie que l'équation de la droite de régression est capable de déterminer 100 % de la distribution des points. Graphiquement, plus le coefficient est proche de 1, plus le nuage de points se rapproche de la droite de régression.

Le coefficient de détermination est défini comme le ratio entre la somme des carrés des écarts à la moyenne des valeurs prédites et la somme des carrés des écarts à la moyenne des valeurs expliqués :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Pour chaque j , nous allons tracer le nuage de point $(X_{i,j}, X_{i,j-1})_{i=0,\dots,n-j-1}$. Encore une fois il faut faire attention et considérer uniquement les points supérieurs au seuil T pour les années de développement j et $j-1$. Enfin, pour chaque nuage de points nous déterminons le R^2 associé. Les résultats sont présentés dans le tableau V.1.

Année de développement	Partie fixe rentes PP	Partie fixe rentes EN
1-2	0.83	1
2-3	0.94	0.86
3-4	0.96	0.97
4-5	0.98	0.99
5-6	0.98	0.99
6-7	0.98	0.99
7-8 et +	> 0.98	> 0.99

TABLE V.1 – Vérification des hypothèses pour la partie fixe des rentes

Pour la partie fixe des rentes, le R^2 est très proche de 1 pour toutes les années de développement. Ainsi l'adéquation d'une droite de régression linéaire aux données est bonne et nous pouvons retenir les hypothèses.

Année de développement	Hors rentes PP	Hors rentes EN
0-1	0.99	1
1-2	0.47	0.42
2-3	0.88	0.96
3-4	0.75	0.87
4-5	0.78	0.91
5-6	0.84	0.87
6-7	0.72	0.88
7-8 et +	> 0.95	> 0.95

TABLE V.2 – Vérification des hypothèses pour les sinistres hors rentes

Concernant les sinistres hors rentes, nous observons une mauvaise adéquation de la droite de régression aux données pour le coefficient de passage 1 – 2. Cependant, à partir de l'année 3 l'adéquation est également de bonne qualité. Ainsi, nous validons l'hypothèse d'une relation linéaire entre les coûts $X_{i,j}^k$ et $X_{i,j-1}^k$.

a..2 Les coefficients de projection

Le graphique V.2 représente les coefficients de projection obtenus par la méthode standard.

Nous avons calculé les coefficients de projection afin d'obtenir le coût à l'ultime des sinistres hors rentes et de la partie fixe des sinistres rentes. Nous vérifions la convergence de ces coefficients de projection vers 1, signifiant que le coût des montants se stabilise au fil des années de développement. Dans le cas où les coefficients ne convergeraient pas vers 1, il faudrait utiliser un *tail factor*, afin de forcer cette convergence.

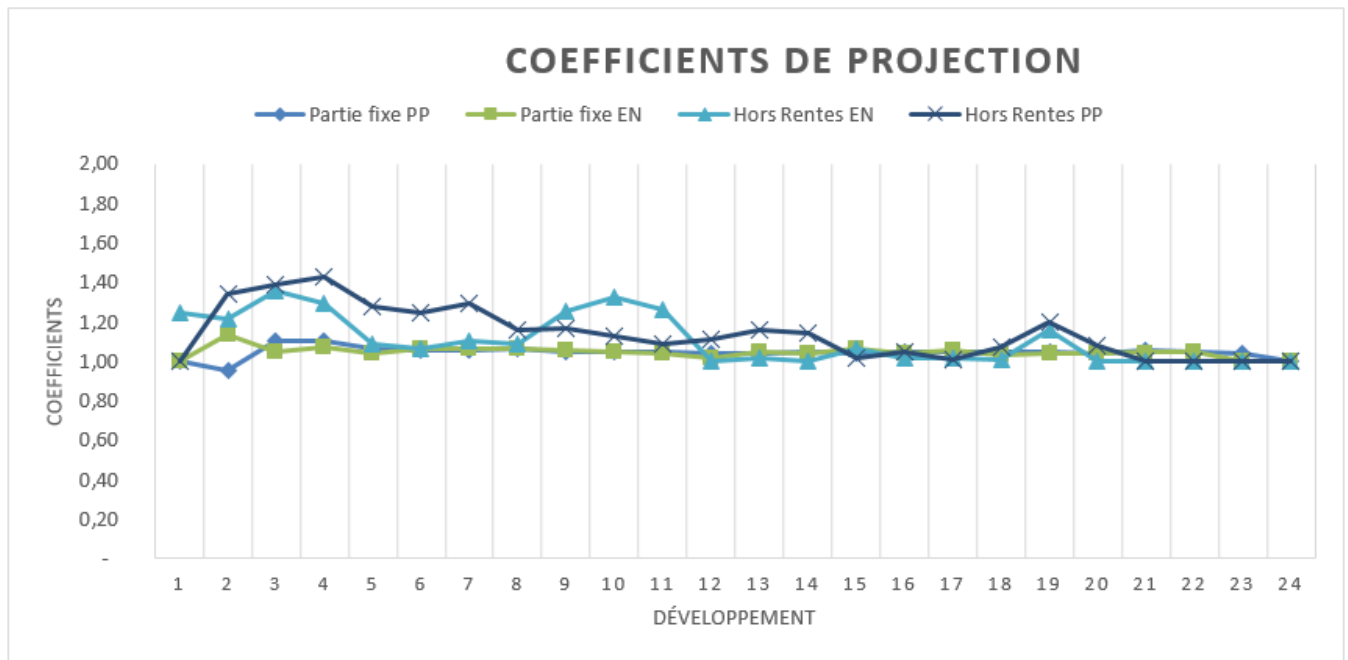


FIGURE V.2 – Coefficients de passage

a..3 Etude des corrélations

Notre objectif étant de calculer un capital constitutif à partir de l'âge et de l'arrérage, nous nous sommes demandés si une relation existait entre ces deux variables.

Nous avons représenté graphiquement le nuage de points entre l'âge à la date de consolidation et l'arrérage. L'analyse graphique est une bonne manière de voir s'il existe une relation entre les deux variables. Cependant, aucune corrélation n'est observée sur la figure V.3.

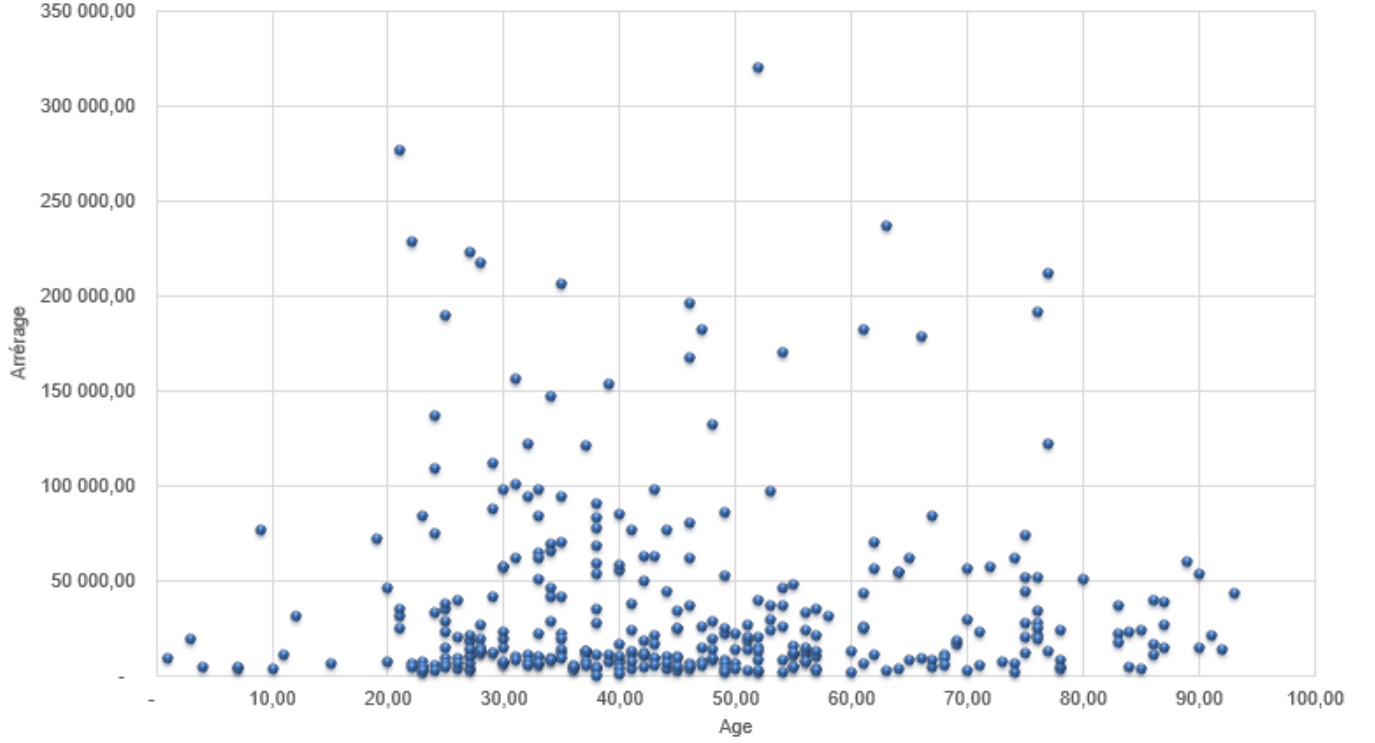


FIGURE V.3 – Corrélation entre l'âge et l'arrérage

Nous allons calculer différents coefficients de corrélations afin de confirmer cette hypothèse.

1. Le coefficient de corrélation de **Pearson** de deux variables X et Y , dit coefficient de corrélation linéaire simple, est une normalisation de la covariance par le produit des écarts-types des variables :

$$r(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Avec

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

Et

$$\sigma_X = \sqrt{Cov(X, X)}$$

Ce coefficient de corrélation constitue une mesure de **l'intensité de liaison linéaire** entre 2 variables. Il peut être égal à 0 alors qu'il existe une relation fonctionnelle entre les deux variables. C'est le cas lorsque la liaison est non monotone.

Finalement, lorsque le couple de variables (X, Y) suit une loi normale bivariée, et uniquement dans ce cas, nous avons l'équivalence $r = 0 \iff X$ et Y sont indépendantes.

2. Le coefficient de **Spearman** est un cas particulier du coefficient de Pearson en présentant l'avantage d'être non paramétrique : on ne se base plus sur l'hypothèse de normalité. L'idée est de substituer aux valeurs observées leurs rangs. Deux nouvelles variables sont créées : $R_i = Rang(x_i)$ et $S_i = Rang(y_i)$. Le ρ de Spearman n'est ni plus ni moins le coefficient de Pearson calculé sur les rangs :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}}$$

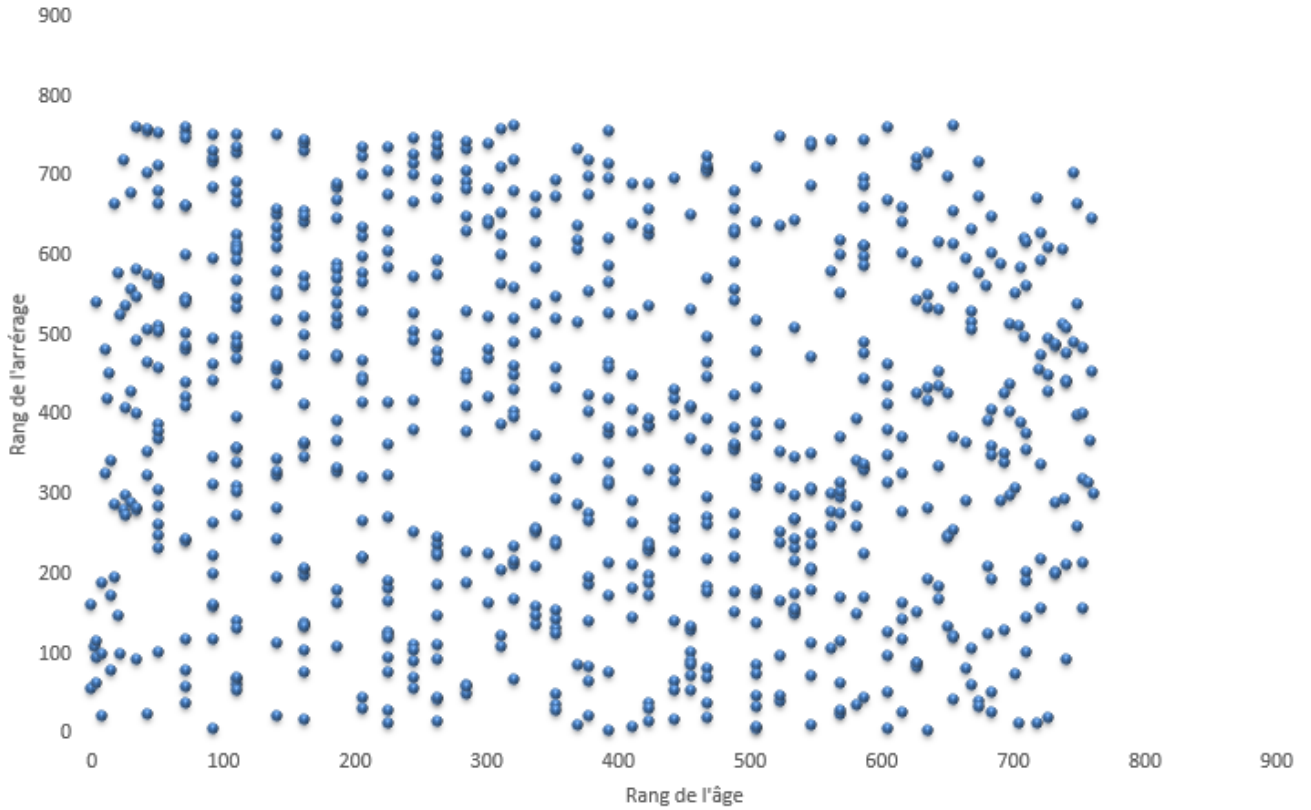


FIGURE V.4 – Corrélation entre l'âge et l'arrérage sur les rangs

3. Le tau de **Kendall** est défini pour mesurer l'association entre variables ordinales. Il repose sur la notion de paires discordantes et concordantes :

- On dit que les paires d'observations i et j sont concordantes si et seulement si $(x_i > x_j)$ alors $(y_i > y_j)$ ou $(x_i < x_j)$ alors $(y_i < y_j)$. Nous pouvons simplifier l'écriture avec $(x_i - x_j) \times (y_i - y_j) > 0$
- On dit que les paires d'observations i et j sont discordantes lorsque $(x_i > x_j)$ alors $(y_i < y_j)$ ou $(x_i < x_j)$ alors $(y_i > y_j)$, en d'autres termes $(x_i - x_j) \times (y_i - y_j) < 0$

Pour un échantillon de taille n on note P le nombre de paires concordantes et Q le nombre de paires discordantes. Le τ de Kendall est défini de la manière suivante :

$$\tau = \frac{P - Q}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

Résultat des trois mesures de dépendance

Nous avons calculé les coefficients de corrélations entre nos deux variables « âge » et « arrérage » pour chacune des deux branches Particuliers/Professionnels et Entreprises. Les résultats sont synthétisés dans le tableau V.3.

Branche	Pearson	Spearman	Kendall
PP	-0,0954	-0,0618	- 0,0950
EN	-0,0542	0,00215	0,00313

TABLE V.3 – Résultat des trois mesures de corrélation

Conclusion : nous supposons une hypothèse d'indépendance entre l'âge et l'arrérage. Cela signifie que lorsqu'un accident survient, qu'elle soit âgée ou jeune, la victime aura besoin de la même aide.

a..4 Choix des lois

La méthode standard nous a permis d'obtenir une distribution du coût de la partie fixe des rentes ainsi qu'une distribution des sinistres hors rentes. De plus, à partir des données historiques et après retraitement de l'arrérage, nous obtenons une distribution de l'âge et de l'arrérage.

Nous allons calibrer une loi pour chacune des distributions obtenues et la méthodologie utilisée pour le calibrage sera présentée. Les définitions des lois paramétriques se trouvent en annexe.

Graphique de Cullen et Frey :

Le graphique de Cullen et Frey permet de comparer la distribution empirique aux distributions théoriques en termes de Skewness et Kurtosis. Ce graphique nous permettra ainsi de choisir un nombre restreint de distributions paramétriques candidates.

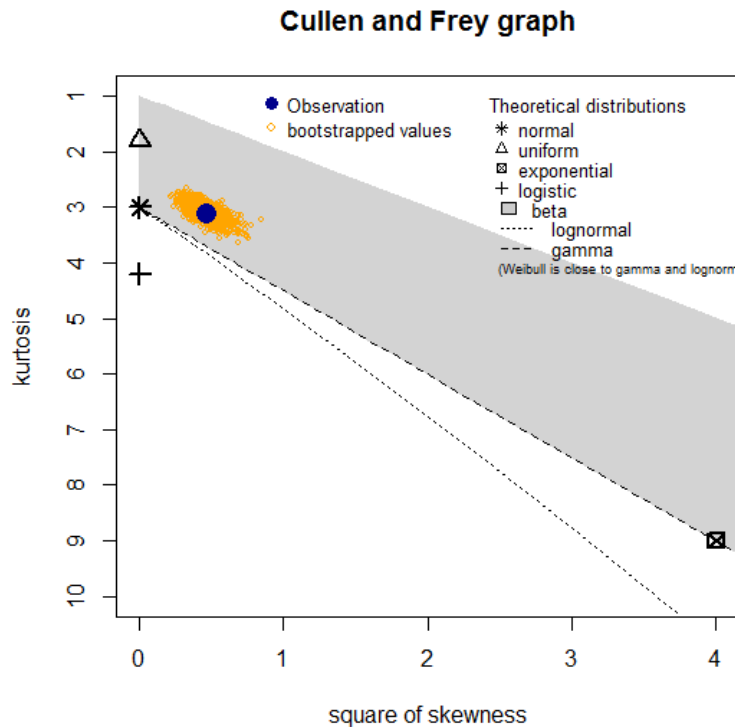


FIGURE V.5 – graphique de Cullen-frey pour l'âge PP

La figure V.5 de nos observations est assez proche des lois Normale, Lognormale, Gamma et Weibull. En utilisant ce même graphique pour les autres variables, nous décidons de tester les lois Lognormale et Weibull pour l'arrérage, la partie fixe des rentes ainsi que les hors rentes.

Nous pouvons alors calculer les logvraisemblances associées aux ajustements des distributions paramétriques choisies. Le maximum de vraisemblance est :

$$\theta_{MLE} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \left(\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \right)$$

Par exemple, la figure V.6 illustre l'ajustement des distributions candidates choisies par la méthode du maximum de vraisemblance sur la distribution de l'âge.

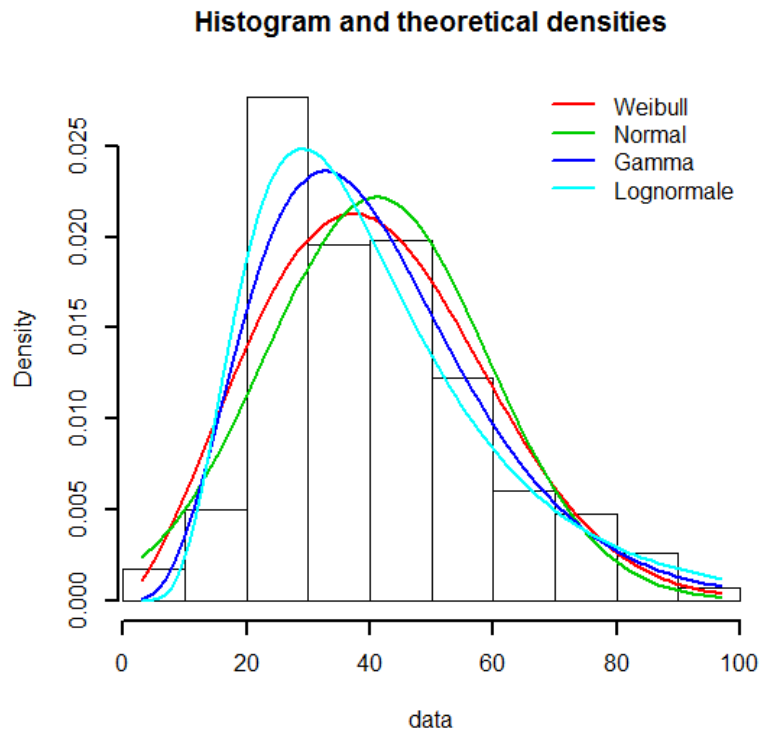


FIGURE V.6 – Estimation des lois paramétriques par MLE

Minimisation des distances :

Nous pouvons désormais calculer la distance entre la distribution empirique et les distributions théoriques estimées. Nous calculons la distance de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-Von Mises et Anderson-Darling.

Distance	Weibull	Normale	Gamma	Lognormale
Kolmogorov-Smirnov	0,070	0,087	0,053	0,058
Cramer-von Mises	0,66	1,40	0,24	0,45
Anderson-Darling	4,92	9,38	2,21	4,24

TABLE V.4 – Distance des tests pour la variable âge PP

Distance	Weibull	Lognormale
Kolmogorov-Smirnov	0,081	0,050
Cramer-von Mises	2,023	0,46
Anderson-Darling	12,87	3,036

TABLE V.5 – Distance des tests pour la variable arrérage PP

Distance	Weibull	Lognormale
Kolmogorov-Smirnov	0,12	0,034
Cramer-von Mises	2,14	0,15
Anderson-Darling	11,62	1,00

TABLE V.6 – Distance des tests pour la partie fixe PP

Distance	Weibull	Lognormale
Kolmogorov-Smirnov	0,16	0,085
Cramer-von Mises	1,39	0,31
Anderson-Darling	7,66	2,21

TABLE V.7 – Distance des tests pour la variable hors rentes PP

La loi qui minimise les distances des tests est la loi gamma. Pour les variables arrérage PP, partie fixe PP et hors rentes PP, c'est la loi lognormale qui minimise les distances.

Comparaison des quantiles théoriques et empiriques :

Les deux étapes précédentes nous ont permis de déterminer la distribution paramétrique la plus proche de chacune des distributions empiriques. La dernière étape consiste à comparer les quantiles théoriques et les quantiles empiriques en traçant un QQ plot. Cela nous permet d'évaluer la pertinence de l'ajustement d'une distribution donnée à un modèle théorique. En abscisse se trouvent les quantiles théoriques et en ordonnée les quantiles observés. Si la distribution théorique choisie est pertinente, les points doivent se placer le long de la diagonale.

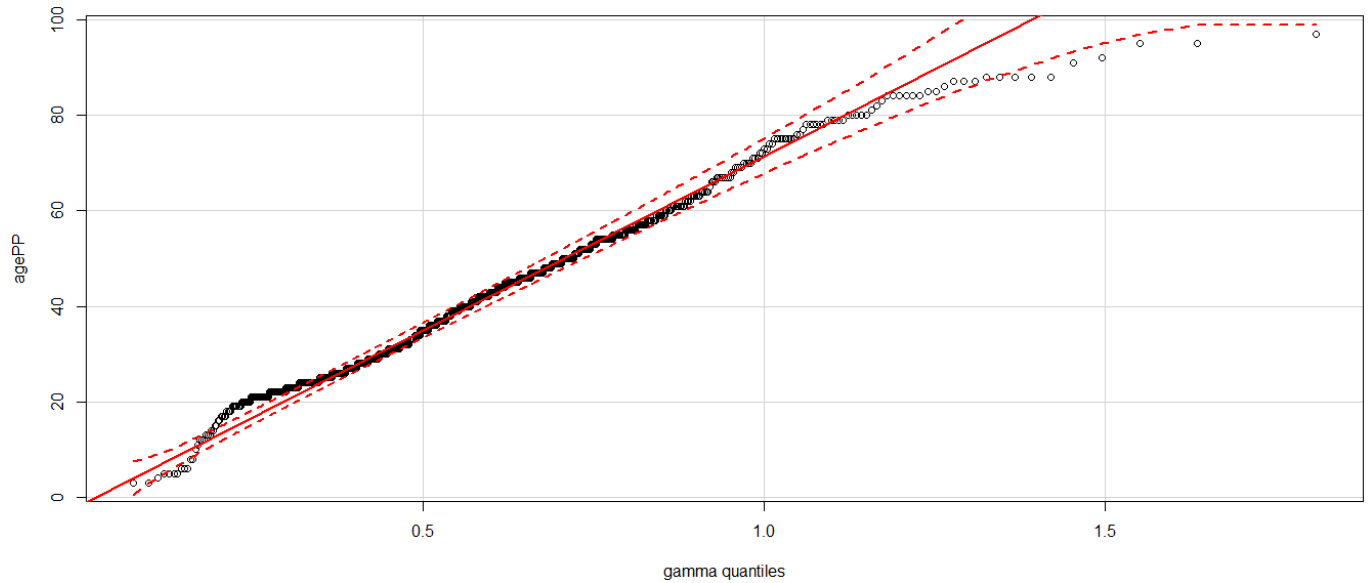


FIGURE V.7 – QQ plot loi gamma - âge PP

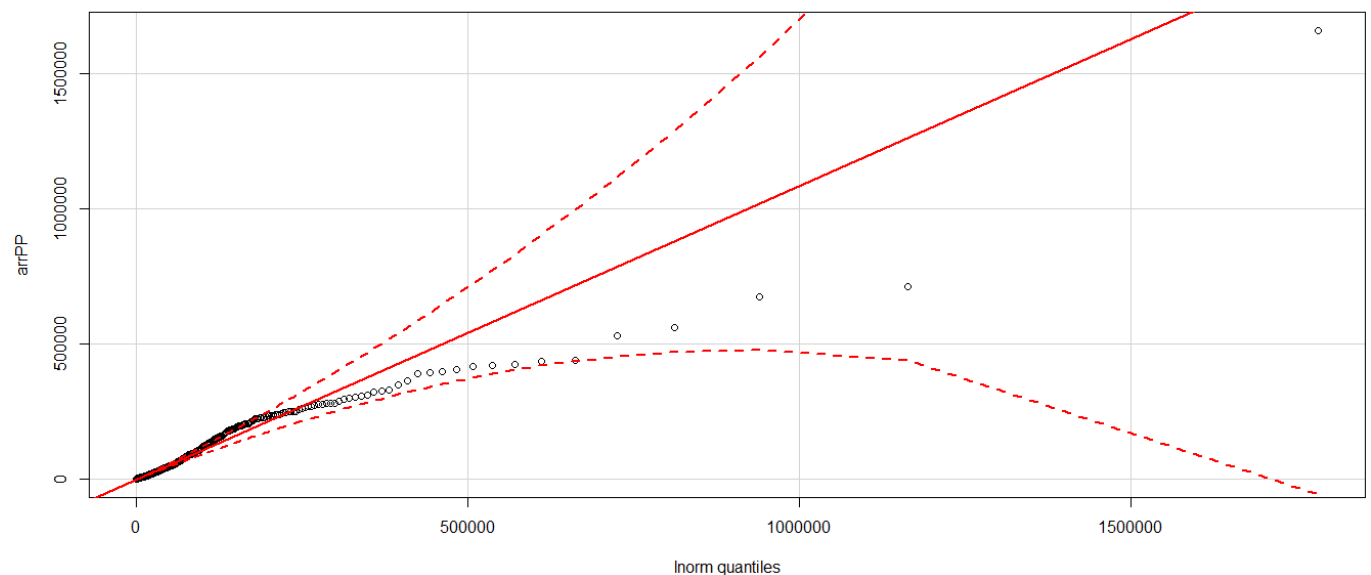


FIGURE V.8 – QQ plot loi lognormale - arrérage PP

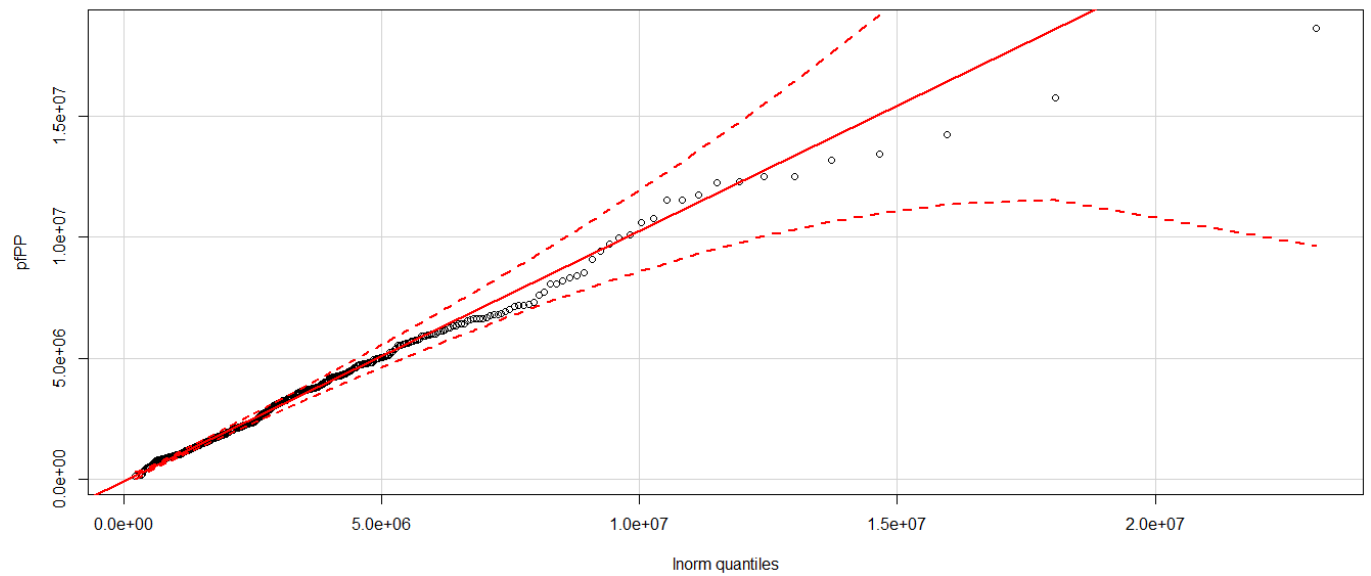


FIGURE V.9 – QQ plot loi lognormale - partie fixe PP

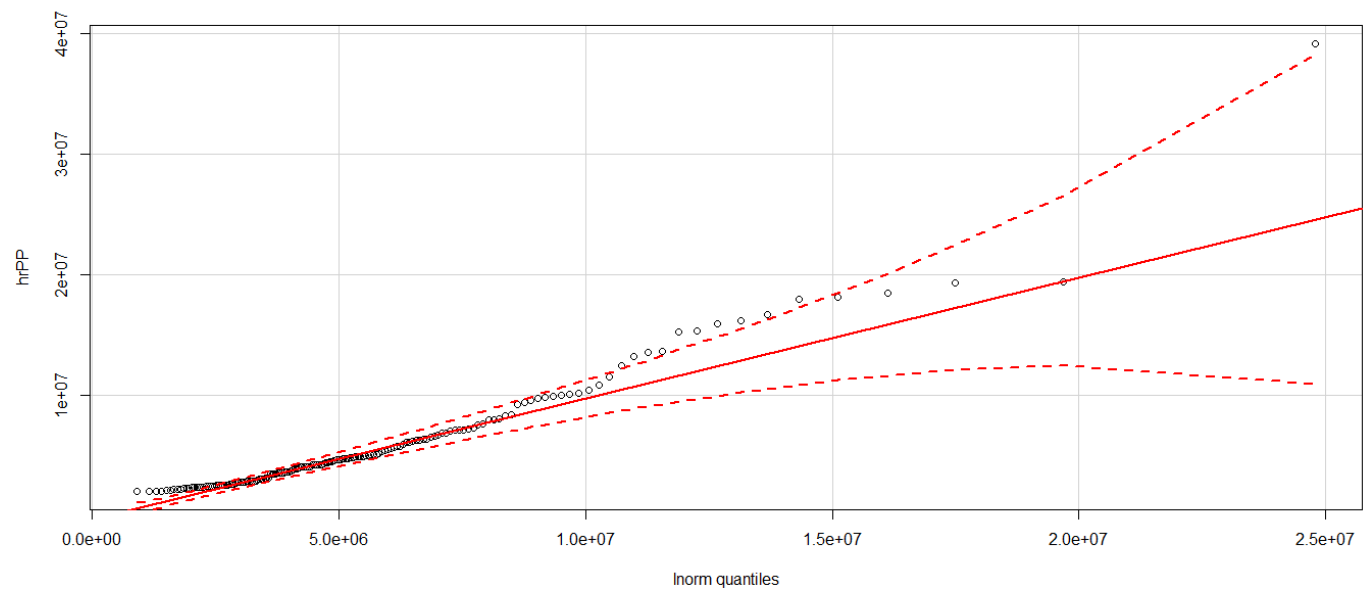


FIGURE V.10 – QQ plot loi lognormale - hors rentes PP

Nous pouvons remarquer que les quantiles extrêmes sont surestimés pour l'âge alors que les faibles quantiles sont sous-estimés. Cela est problématique puisque les quantiles faibles correspondent à des jeunes victimes qui peuvent potentiellement avoir un capital constitutif plus important. Nous faisons le même constat pour l'arrérage : une légère sous-évaluation des petits quantiles et une surévaluation des quantiles importants. Enfin les quantiles centraux des distributions empiriques de la partie fixe ainsi que des sinistres hors rentes sont sous-estimés par la loi lognormale.

Conclusion : Pour éviter la complexité, nous testons un nombre limité de lois paramétriques. Cependant, il se trouve que la calibration est très moyenne. Finalement, après des débats animés entre différents collaborateurs, nous décidons de retenir les distributions empiriques. En effet, aucune des lois paramétriques ne convient : au vue des problématiques il ne serait pas prudent de conserver des distributions qui sous-estiment les coûts.

De plus, cette année nous proposons un nouveau modèle. De ce fait, il ne nous semble pas absurde de ne plus approximer les coûts par une distribution paramétrique connue mais de rester au plus juste en conservant la distribution empirique. Les tableaux suivants regroupent les quantiles de la distribution empirique. Nous présentons les résultats avec un pas de 5% pour les quantiles compris entre 5% et 95% et un pas de 0,1% entre 99% et 100%. Dans la modélisation, afin d'avoir des distributions empiriques précises, nous calculons les valeurs associées aux quantiles avec un pas de 0,1%.

quantiles	Age PP	Arrérage PP	Partie Fixe PP	Hors Rentes PP
5%	19,00	3 798	804 639	2 194 294
10%	22,00	5 579	935 223	2 397 584
15%	24,00	7 039	1 028 788	2 500 410
25%	27,00	10 350	1 354 439	2 843 762
50%	38,00	25 445	2 184 359	4 391 501
50%	38,46	25 499	2 185 606	4 399 233
75%	51,00	69 817	3 797 187	6 791 856
90%	66,00	181 099	5 891 923	10 448 015
95%	76,15	244 831	6 933 271	15 374 779
99%	88,00	421 338	12 485 624	19 373 477
99,5%	91,20	535 211	13 436 610	23 147 016
99,6%	91,96	558 832	13 905 013	26 359 339
99,7%	94,15	642 487	14 520 614	29 571 661
99,8%	95,00	693 216	15 436 044	32 783 984
99,9%	95,48	939 304	16 892 883	35 996 307
100%	97,00	1 659 413	18 630 655	39 208 629

Quantiles des distributions empiriques PP

quantiles	Age EN	Arrérage EN	Partie Fixe EN	Hors Rentes EN
5%	21,00	4 161	804 923	2 057 291
10%	24,00	5 187	911 018	2 423 812
15%	27,00	6 480	985 012	2 512 464
25%	30,44	9 923	1 132 274	2 839 859
50%	41,00	22 056	1 855 915	3 564 657
75%	54,94	59 043	3 484 508	6 255 373
90%	74,00	126 313	5 205 315	9 044 497
95%	77,00	213 054	6 495 123	11 003 401
99%	89,37	318 179	11 221 060	14 188 224
99,5%	90,69	336 239	16 765 181	14 348 856
99,6%	90,95	342 570	18 009 138	14 380 983
99,7%	91,42	353 042	19 253 094	14 413 109
99,8%	91,95	364 535	20 497 051	14 445 235
99,9%	92,47	376 028	21 741 007	14 477 362
100%	93,00	387 520	22 984 964	14 509 488

FIGURE V.11 – Quantiles des distributions empiriques EN

b. Lois de sévérité

b..1 Simulation des charges

Nous avons maintenant tous les éléments pour simuler la charge d'un sinistre rente et la charge d'un sinistre hors rente.

- Simulation de la charge d'un sinistre hors rente : nous pouvons simuler un montant de charge atypique hors rente directement à partir de quantiles empiriques.
Remarque : pour simuler selon la distribution empirique nous construisons une fonction quantile affine par morceaux à partir des données et nous utilisons la méthode inverse.
- Simulation de la charge d'un sinistre rente :
 - A partir des quantiles de la distribution empirique, nous pouvons simuler un âge. Il est possible de calculer un a_x au taux d'actualisation de notre choix.
 - De la même manière, à partir des quantiles de la distribution empirique nous pouvons simuler un arrérage.
 - Comme nous avons supposé l'indépendance entre l'âge et l'arrérage, nous obtenons le capital constitutif par multiplication des deux.
 - Nous simulons un montant de frais fixe de la rente toujours à partir des quantiles de la distribution empirique.
 - En ajoutant la partie fixe au capital constitutif nous obtenons un montant de charge rente. Nous procédons à une méthode par rejet signifiant que tant que la charge totale n'est pas supérieure à 2M€, nous simulons un nouveau montant de frais fixe.
 - On obtient ainsi notre charge totale atypique rente.

b..2 Sinistres hors rentes

Dans la tableau V.8, nous présentons les quantiles des simulations obtenues pour les sinistres atypiques hors rentes des branches Particuliers/Professionnels et Entreprises.

Nous pouvons remarquer que sur les faibles quantiles, il y a très peu de distinction entre les sinistres PP et les sinistres EN. En revanche, à partir du quantile à 95%, les montants de la branche PP sont beaucoup plus importants.

Quantiles	Coût hors rentes atypiques PP (M€)	Coût hors rentes atypiques EN (M€)
5%	2,247	2,066
10%	2,399	2,425
25%	2,853	2,862
50%	4,442	3,573
75%	6,844	6,278
90%	11,028	9,141
95%	15,839	11,155
99%	19,271	14,156
99,5%	19,376	14,316
99,9%	29,573	14,445

TABLE V.8 – Quantiles des atypiques hors rentes après simulations

Le sinistre hors rentes maximal simulable pour la branche PP est de 39M€. Il est de 15M€ pour la branche EN.

b..3 Sinistres rentes

Concernant le coût des sinistres rentes atypiques, nous remarquons que l'écart est moins élevé entre les deux branches. De même, les montants individuels sont similaires à ceux des sinistres hors rentes. La différence principale entre les deux modélisations repose donc principalement sur le nombre d'atypiques que l'on estime : on s'attend dans le futur à avoir beaucoup plus de sinistres rentes atypiques que de sinistres hors rentes atypiques.

Quantiles	Coût rentes atypiques PP (M€)	Coût rentes atypiques EN (M€)
5%	2,158	2,121
10%	2,324	2,294
25%	2,890	2,742
50%	4,222	3,843
75%	6,428	5,565
90%	9,541	8,632
95%	12,290	10,648
99%	17,176	17,624
99,5%	19,275	19,729
99,9%	28,290	22,585

TABLE V.9 – Quantiles des rentes atypiques après simulations

La valeur rente maximale simulable pour la branche PP est de 35M€. Pour la branche EN, il est de 28M€ pour la branche EN.

c. Synthèse : courbes AEP et OEP

Nous sommes maintenant capable de déterminer un nombre et un coût atypique individuel pour chacun de nos générateurs (rentes PP, rentes EN, hors rentes PP et hors rentes EN). Nous pouvons alors estimer la charge totale annuelle de sinistralité atypique qui impactera notre portefeuille. Nous procédons de la manière suivante :

1. Nous simulons $n = 1000$ années.
2. Pour chaque année $i = 1, \dots, n$, nous simulons un nombre de sinistres rentes N_i^R et un nombre de sinistres hors rentes N_i^{HR} .
3. Pour chaque rente $k = 1, \dots, N_i^R$, nous simulons un âge et un arrérage. Nous pouvons calculer le capital constitutif à un taux d'actualisation 3,5% à partir de l'âge et de l'arrérage. On simule un montant de partie fixe PF_k jusqu'à ce que la charge totale soit supérieure à 2M€. Nous obtenons la charge totale du sinistre rente atypique k de l'année i notée $ch_{i,k}^R$.
4. Pour chaque sinistre hors rente $k = 1, \dots, N_i^{HR}$, nous simulons le coût d'un sinistre hors rente atypique, $ch_{i,k}^{HR}$.

Pour chaque année i nous pouvons calculer la charge totale annuelle :

$$ch_i^T = \sum_{k=1}^{N_i^R} ch_{i,k}^R + \sum_{k=1}^{N_i^{HR}} ch_{i,k}^{HR}$$

De la même manière, nous pouvons calculer le sinistre maximal survenu pour chaque année i .

$$ch_i^{max} = \max(\max_{k=1, \dots, N_i^R} ch_{i,k}^R; \max_{k=1, \dots, N_i^{HR}} ch_{i,k}^{HR})$$

La charge totale annuelle correspond à l'AEP (Aggregate Exceedence Probability) qui associe une période de retour à la charge totale des sinistres sur une année. La charge annuelle maximale correspond à l'OEP (Occurrence Exceedence Probability) qui associe une période de retour à la charge maximale des sinistres sur une année. Finalement, nous obtenons les courbes AEP et OEP suivantes :

Quantiles	AEP EN (€)	OEP EN (€)	AEP PP (€)	OEP PP (€)
5%	26 173 539, 76	5 655 551,02	67 716 215,97	8 778 653,57
10%	31 386 720,15	6 610 431,75	78 900 842,69	10 058 131,06
15%	35 143 702,65	7 000 759,34	88 902 122,47	11 013 723,56
25%	40 626 362,62	8 281 661,54	103 785 301,75	12 647 222,82
50%	53 434 482,79	10 516 074,05	129 148 485,85	15 330 712,48
75%	67 903 131,26	13 243 714,84	157 488 968,39	18 142 125,81
90%	80 882 501,03	14 348 856,27	182 128 873,31	19 913 209,00
95%	89 425 440,14	16 232 896,61	199 591 650,57	23 730 190,21
99%	100 664 191,75	21 778 514,18	199 591 650,57	23 730 190,21
99,5%	112 845 772,94	22 490 380,71	240 071 245,78	32 783 984,08
100%	133 867 487,64	28 339 756,85	300 970 601,06	36 862 662,36

TABLE V.10 – Courbes AEP et OEP

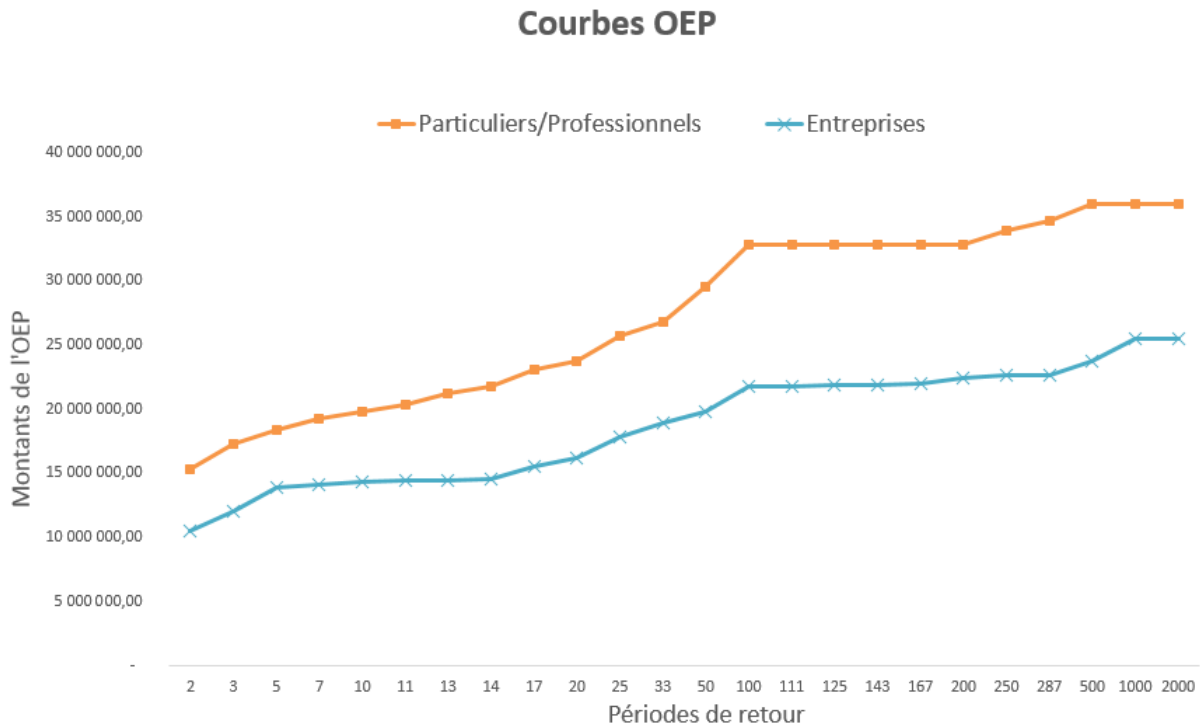


FIGURE V.12 – Courbes OEP

Quelques commentaires :

- Nous pouvons remarquer que les montants de la courbe AEP de la branche PP sont bien plus importants que ceux de la branche EN. Cela s'explique principalement par le nombre de sinistres atypiques modélisés. En effet, nous avons en moyenne 16,40 sinistres atypiques rentes et 7 sinistres atypiques hors rentes soit environ 24 sinistres atypiques pour la branche PP. Pour la branche EN, nous étions à une moyenne de 4,35 pour les rentes et de 1,89 pour les hors rentes soit 7 sinistres par année en moyenne. Nous observons que la courbe AEP PP est en moyenne deux fois et demie plus importante ce qui coïncide avec cette observation.
- La courbe OEP de la branche PP est également plus importante que celle de la branche EN. Le nombre de sinistre influe aussi sur cette courbe. En effet, on considère le montant maximal annuel et donc plus il y a de sinistres et plus il a de chances d'atteindre un montant plus important.

- Cet écart peut également provenir de la modélisation du coût. Pour les sinistres rentes, les distributions entre les deux branches sont assez similaires puisque les quantiles sont très proches. En revanche concernant les sinistres hors rentes l'écart se creuse à partir du quantile à 90% et les montants de la branche PP deviennent beaucoup plus importants. Cela influe donc directement les courbes OEP et AEP et permet également de justifier les écarts observés.

Conclusion

La modélisation du coût des années précédentes se basait exclusivement sur la méthode standard puisqu'aucune distinction n'était faite entre les sinistres rentes et les sinistres hors rentes. La distinction entre les sinistres rentes et hors rentes nous a permis de proposer une modélisation plus fine. En effet, le coût d'une rente est désormais modélisé à partir de l'âge de la victime, de l'arrérage, d'un taux d'actualisation et d'une table de mortalité. Cela nous permet d'avoir un contrôle direct sur les paramètres, notamment sur taux d'actualisation et la table de mortalité qui sont des données essentielles au calcul du capital constitutif. Nous pouvons désormais répondre à des problématiques qui étaient hors de portée les années précédentes. C'est ce que nous allons voir dans la partie suivante.

Troisième partie

Applications

Chapitre VI

Cotation d'un traité de réassurance

Actuellement, les sinistres RC auto sont couverts par un traité en excédent de sinistre ill XS 15M€[5]. Cela signifie que si le coût d'un sinistre auto est évalué à plus de 15M€, l'assureur conservera la rétention de 15M€ et le réassureur prendra en charge la totalité de l'excédent de sinistralité.

Nous avons vu que pour un sinistre automobile corporel deux types d'indemnisation sont possibles : le versement d'une rente ou d'un capital. La charge totale d'un sinistre rente est composée du capital constitutif ainsi que de toutes les dépenses annexes. De plus, ce capital constitutif est calculé à partir d'un taux d'actualisation de 3,5%, défini contractuellement dans la note de couverture du traité de réassurance RC auto. Finalement, le traité en XS couvre l'ensemble des sinistres RC auto mais lorsqu'il s'agit d'une rente le capital constitutif de la rente doit être calculé à partir d'un taux de 3,5%.

Cependant, ce taux est très élevé et ne correspond pas à la réalité économique actuelle. En effet, on se trouve aujourd'hui dans un contexte de taux bas qui engendrerait une augmentation de la charge rente si le traité de réassurance prenait un taux d'actualisation en cohérence avec la conjoncture actuelle.

L'objectif va donc être de coter un traité de réassurance qui aurait pour objectif de couvrir ce différentiel de taux. Pour cela nous allons calculer une nouvelle charge à partir de deux taux d'actualisation à 2,5% et 2%. Cela nous permettra de comparer le surplus de charge cédée et de proposer une cotation pour le traité sur ce différentiel de taux. Nous prendrons en compte une limite annuelle de 20M€.

1. Prise en compte de la clause de stabilité

Nous avons vu, dans le premier chapitre de ce mémoire, la définition de la clause de stabilité : « si à la date ou aux dates successives de paiement d'un sinistre l'indice accuse une variation de plus de 10 % par rapport à l'indice en vigueur à la date de prise d'effet du traité de réassurance, le montant de la franchise à appliquer est augmenté ou diminué proportionnellement et l'engagement du réassureur est modifié dans les mêmes proportions ». Concrètement, cela signifie qu'au fur et à mesure de son développement le coût d'un sinistre est susceptible d'augmenter à cause de l'inflation. Par conséquent, la rétention de 15M€ devrait être ajustée dans les mêmes proportions. C'est justement l'indice moyen de paiement, noté *IMP*, qui nous permettra d'ajuster le traité de réassurance.

Nous procédons de la manière suivante : nous supposons que la totalité du sinistre est réglé au bout de 25 ans. Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{25} p_i = 1$$

p correspond au *Payment Pattern*, soit la part du sinistre qui est réglé chaque année. Ce nombre est strictement inférieur à 1.

Comme la somme des *Payment Pattern* vaut 1, nous pouvons réexprimer la charge Ch .

$$Ch = \sum_{i=1}^{25} Ch \times p_i$$

De plus nous pouvons calculer la nouvelle charge ajustée de la variation de l'indice, notée Ch_{aj} .

$$Ch_{aj} = \sum_{i=1}^{25} Ch \times p_i \times I_i^{stab}$$

Avec

$$I_i^{stab} = \begin{cases} \frac{I_{2017}}{I_i} & \text{si } I_i > I_{2017} \times (1 + 10\%) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où :

- I_{2017} est l'indice de référence de l'année 2017
- I_i est l'indice de référence de l'année i , postérieure à 2017, déterminé à partir d'une régression linéaire sur les indices passés.

Nous pouvons maintenant calculer l'indice moyen de paiement défini par :

$$IMP = \frac{Ch}{Ch_{aj}}$$

On a alors

$$IMP = \frac{\sum_{i=1}^{25} Ch \times p_i}{\sum_{i=1}^{25} Ch \times p_i \times I_i^{stab}}$$

Et en simplifiant,

$$IMP = \frac{1}{\sum_{i=1}^{25} p_i \times I_i^{stab}}$$

Ainsi, l'indice moyen de paiement est supérieur à 1 et permet d'augmenter la rétention du traité de réassurance pour prendre en compte l'inflation.

Cependant, l'indice de référence est susceptible de varier selon les années. Alors, plutôt que de considérer un indice déterministe, nous allons capter cette volatilité en simulant un indice stochastique. Les indices sont simulés stochastiquement et de manière itérative :

$$\ln(I_i) = m \times \ln(I_{2017}) + \sqrt{\epsilon} \times \mathcal{N}(0, 1)$$

Avec m et $\sqrt{\epsilon}$ les paramètres de la régression.

Ainsi un indice de référence puis un indice moyen de paiement sont obtenus pour chaque année.

2. Simulation de la charge des rentes atypiques selon différents taux d'actualisation

Grâce à notre modèle hybride nous sommes désormais capable de simuler une charge atypique rente au taux d'actualisation de notre choix. Nous procédons de la manière suivante :

1. Nous simulons $n = 1000$ années.
2. Pour chaque année $i = 1, \dots, n$, nous simulons un nombre de sinistres rentes N_i .
3. Pour chaque rente $k = 1, \dots, N_i$, nous simulons un âge, un arrérage ainsi qu'un montant de dépenses annexes.
4. Pour chaque rente nous pouvons calculer le capital constitutif à un taux d'actualisation i' à partir de l'âge et de l'arrérage.
5. En ajoutant la partie fixe, nous obtenons la charge totale du sinistre rente k de l'année i à un taux d'actualisation i' .

$$ch_k^i(i') = CC(i') + PF_k^i$$

6. Enfin, pour chacune des 1000 années, un indice moyen de paiement est simulé.

Concrètement nous calculons la charge avec trois taux d'actualisation : le taux à 3,5%, un taux à 2,5% et un taux à 2% tout deux correspondant à une baisse du taux d'actualisation.

3. Calcul de la charge cédée aux réassureurs

Pour chaque sinistre k de l'année i nous calculons la charge cédée au réassureur :

$$ch_{k,i}^{reass}(i') = ch_k^i(i') - \min(\text{rétention} \times IMP_i; ch_k^i(i'))$$

Nous pouvons ensuite calculer, pour chaque année i , la charge totale annuelle cédée aux réassureurs :

$$ch_i^{reass}(i') = \sum_{k=1}^{N_i} ch_{k,i}^{reass}(i')$$

Ensuite, nous déterminons le différentiel de la charge annuelle cédée. Une limite annuelle de 20M€ est fixée.

$$ch_i^{diff}(2, 5\%) = \min(ch_i^{reass}(2, 5\%) - ch_i^{reass}(3, 5\%); 20M)$$

$$ch_i^{diff}(2, 5\%) = \min(ch_i^{reass}(2\%) - ch_i^{reass}(3, 5\%); 20M)$$

Résultat de la cotation

Nous pouvons ensuite tarifier le traité de réassurance sur le différentiel de taux en calculant la prime pure P :

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ch_i^{diff}(i')$$

taux de rachat	2,5%	2%
P	182 542	346 010

TABLE VI.1 – Résultat de la cotation

Nous pouvons remarquer que ces montants sont assez faibles. En effet la rétention est très élevée (15M€ ajustée de l'IMP) et de ce fait très peu de sinistres atteignent la réassurance avec un taux de 3,5%. Par exemple, le nombre de cessions maximal que nous avons pour une année est de 3 et sur un total de 17 rentes atypiques simulées. Le nombre moyen de cessions par an pour un taux de 3,5% est de 0,26%. Il monte à 0,45% et 0,65% pour des taux de 2,5% et de 2%.

Afin de compléter l'étude, nous avons cherché à mesurer l'impact du taux d'actualisation sur la cotation du traité de réassurance. Nous avons calculé le différentiel de charge cédée entre des taux allant de 2,5% à 0% avec un pas de 0,5% et le taux actuel de 3,5%. Nous observons que le différentiel de taux et le taux d'actualisation évoluent en sens inverse : une augmentation du différentiel correspond à une baisse des taux. En effet, une baisse du taux d'actualisation implique une augmentation du capital constitutif. La fonction n'évolue pas de manière linéaire mais est plutôt convexe.

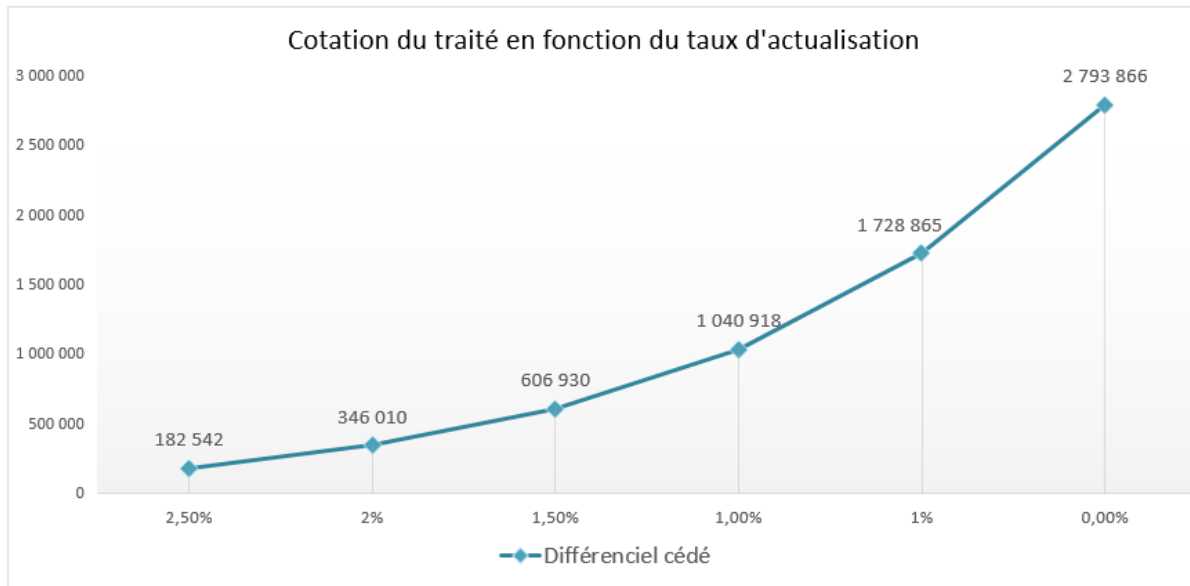


FIGURE VI.1 – Calcul du différentiel cédé en fonction des taux d'actualisation

Conclusion

Avant, la distinction entre les sinistres rentes et les sinistres hors rentes n'était pas prise en compte et une charge était simulée de manière globale. Cette année, nous simulons une rente à partir de plusieurs paramètres qui sont l'âge, l'arrérage et le taux d'actualisation. Il est désormais possible pour une personne d'un âge x et touchant un arrérage arr de calculer son capital constitutif avec un taux à 3,5% et un taux à 2,5% ou 2%. En ajoutant la partie fixe identique pour les trois taux nous connaissons la charge totale. Enfin, si cette charge est cédée à la réassurance, c'est-à-dire si elle est supérieure à la rétention ajustée de l'indice moyen de paiement, nous sommes capables de déterminer le montant exact de la cession selon les différents taux. Cette nouvelle modélisation nous permet alors de coter le traité de réassurance sur le différentiel de taux d'actualisation des rentes.

Chapitre VII

Calcul du SCR des pertes futures atypiques

Le SCR (*Solvency Capital Requirement*) correspond à un niveau de capital fictif que la compagnie d'assurance devrait déboursier en plus des engagements provisionnés en cas de pertes bicentennaires, c'est-à-dire une perte arrivant avec une probabilité 0,5%. Sous la nouvelle réforme solvabilité 2, ce besoin en capital dépend du profil de risque de l'assureur. L'assureur non vie s'expose à trois principaux risques : le risque de réserve, le risque de catastrophe et le risque de prime, ce dernier provenant de l'inadéquation entre le tarif et la sinistralité future. Selon le modèle interne d'AXA France, le SCR primes est composé, entre autres, du SCR des pertes futures atypiques.

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons proposé un nouveau modèle, séparant les sinistres rentes des autres sinistres dont l'objectif a été d'estimer le nombre et le coût des pertes futures atypiques. A partir de ce modèle nous allons estimer le SCR des pertes atypiques de la branche RC auto.

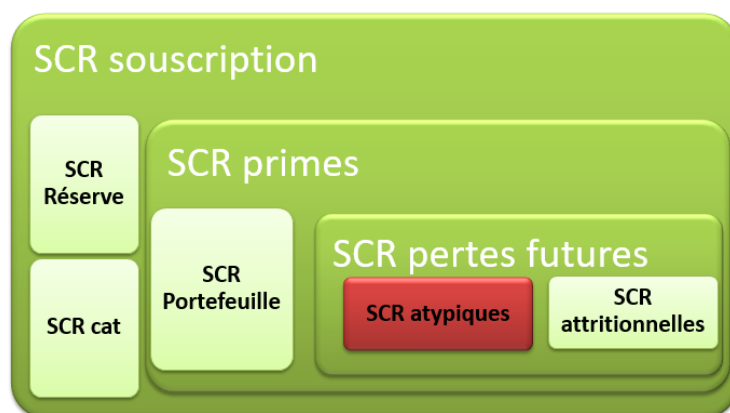


FIGURE VII.1 – Objectif : calcul du SCR atypiques

Grâce à ces imbrications successives nous pouvons voir que le changement de modélisation impacte directement le SCR souscription. Cependant, il est encore trop tôt pour mesurer l'effet sur le SCR total puisque la totalité des hypothèses a été revue. Par exemple, le seuil des atypiques a été changé et cela influe directement la modélisation des attritionnels. L'impact sur le SCR souscription pourra être mesuré une fois que la modélisation attritionnelle sera également terminée.

Pour calculer le SCR des pertes atypiques nous respecterons les étapes suivantes : nous simulerons des pertes atypiques rentes et des pertes atypiques hors rentes sur 1000 années. Cependant, les pertes ne vont pas être payées en une seule fois dès la survenance mais vont s'écouler sur plusieurs années : nous allons pour cela déterminer des cadences de paiement qui nous permettront de connaître la part du sinistre déboursé chaque année. Les montants de charge devront être actualisés afin de connaître leur valeur à aujourd'hui. Enfin, nous pourrions calculer un SCR atypiques brut et net de réassurance à partir des charges actualisées de la manière suivante :

$$SCR_{atyp} = VaR_{99,5\%}(1000 \text{ pertes atyp}) - \text{moyenne}(1000 \text{ pertes atyp})$$

1. Simulation des sinistres rentes et hors rentes atypiques

Nous avons désormais tous les éléments de la modélisation pour simuler 1000 montants de pertes atypiques.

1. Nous simulons $n = 1000$ années.
2. Pour chaque année $i = 1, \dots, n$, nous simulons un nombre de sinistres rentes N_i^R et un nombre de sinistres hors rentes N_i^{HR} .
Pour rappel, les sinistres rentes PP (resp. hors rentes PP) sont simulés par une loi Binomiale Négative de moyenne 16 et de variance 37 (resp. 7 et 9). Les sinistres rentes EN (resp. hors rentes EN) sont simulés par une loi de Poisson de moyenne 4 (resp. 2).
3. Pour chaque rente $k = 1, \dots, N_i^R$, nous simulons un âge et un arrérage. Nous pouvons calculer le capital constitutif à un taux d'actualisation i' à partir de l'âge et de l'arrérage.
Attention : dans le cadre du calcul du SCR il est nécessaire de ne pas actualiser le capital constitutif. La prise en compte de l'actualisation se fera a posteriori et nous retenons alors $i' = 0\%$.
On simule ensuite un montant de partie fixe PF_k en utilisant une méthode par rejet. Cela signifie que nous simulons un montant de partie fixe jusqu'à ce que la charge totale soit supérieure à 2M€. Nous obtenons la charge totale du sinistre rente atypique k de l'année i notée $ch_{i,k}^R$.
4. Pour chaque sinistre hors rente $k = 1, \dots, N_i^{HR}$, nous simulons le coût d'un sinistre hors rente atypique, $ch_{i,k}^{HR}$.
Pour rappel, à cause de la mauvaise adéquation des lois paramétriques entraînant une sous-estimation de certains quantiles, nous avons retenu les distributions empiriques pour chaque variable.

Nous obtenons ainsi 1000 montants de pertes atypiques rentes ainsi que 1000 montants de pertes atypiques hors rentes, pour chacune des branches PP et EN.

2. Cadences de paiement et actualisation des charges

Qu'il s'agisse d'un sinistre rente ou hors rente, la charge ne sera pas payée en une fois dès la survenance mais sera amortie sur plusieurs années. Afin d'estimer ce coût de la manière la plus juste possible, nous allons déterminer des *payment pattern* ou cadences de paiement.

Ces cadences de paiement nous permettront de déterminer la **part du sinistre qui sera payée chaque année**, pour toutes les années qui suivent la survenance. Bien évidemment, il ne faudra pas oublier d'**actualiser** chaque année la part du sinistre qui est payée, ce qui nous permettra de connaître la valeur à aujourd'hui d'une somme qui sera déboursée dans plusieurs années.

a. Cadences de paiement

L'objectif de cette section est de déterminer les cadences de paiement, c'est-à-dire connaître la part de la charge qui sera réglée chaque année.

Nous essayerons de répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la proportion du sinistre que nous allons payer chaque année ? Cette proportion est-elle constante dans le temps ou plus importante pour les premières années de développement ?
2. Combien de temps le règlement total du sinistre va-t-il prendre ?

Nous pouvons également supposer que la cadence de développement va être différente selon que l'on considère un sinistre rente ou un sinistre hors rente. Les rentes peuvent prendre plusieurs années avant d'être consolidées et énormément d'années à être payées. Elles concernent la plupart du temps les accidents corporels les plus graves.

Ainsi, la longueur de la cadence de paiement va dépendre très fortement de l'âge, paramètre que nous avons, heureusement, pris en compte dans la modélisation.

a.1 Sinistres rentes

Intuitivement, nous sentons que la cadence de paiement d'un sinistre rente va dépendre de l'âge de la victime. En effet, dans le cas d'une victime jeune, l'assureur disposera de plusieurs années pour amortir la charge. En revanche, si la victime est âgée, les règlements se feront dans les premières années de développement avant que celle-ci ne décède.

Nous allons donc déterminer une cadence de paiement propre à chaque âge.

Afin de simplifier les calculs, nous retenons plusieurs hypothèses :

- (H1) : Les rentes sont viagères, c'est-à-dire que le versement de l'arrérage se fera jusqu'au décès de la victime.
- (H2) : Nous utilisons la table de mortalité TD88-90.
- (H3) : L'arrérage est versé une seule fois dans l'année : le fractionnement est annuel.

Calcul de la cadence de paiement :

Nous considérons une victime d'âge x à la consolidation du sinistre et à qui une rente sera versée.

Au bout de n années, sa probabilité de rester en vie entre les années $n+x$ et $n+x+1$ est ${}_1p_{n+x}$. De plus, chaque année, la revalorisation de l'euro de rente s'applique. Finalement nous obtenons le coefficient suivant :

$$c_{x+n} = {}_1p_{n+x} \times (1 + 2,25\%)^n$$

Pour chaque variable y tel que $x \leq y \leq x + n_{max}$ on calcule un coefficient c_y . La variable y correspond en fait à l'évolution de l'âge de la victime dans le temps. Le nombre d'années de versement n_{max} est déterminé de telle sorte que $n_{max} = 106 - x$.

Enfin, nous déterminons la part du sinistre rente à payer au bout de $y - x$ années à une victime qui avait un âge x lorsque le sinistre a été consolidé :

$$C_{y-x} = \frac{c_y}{\sum_{y=1}^{n_{max}} c_y}$$

Nous venons de voir que la cadence de paiement est directement liée à la probabilité de survie et donc une cadence est déterminée pour chaque âge. Nous pouvons donc avoir des cadences de règlement très longue.

Quelques commentaires sur la cadence de paiement :

Les figures VII.2 et VII.3 illustrent la part du sinistre à payer en fonction de l'âge (à la consolidation) et de l'année de développement.

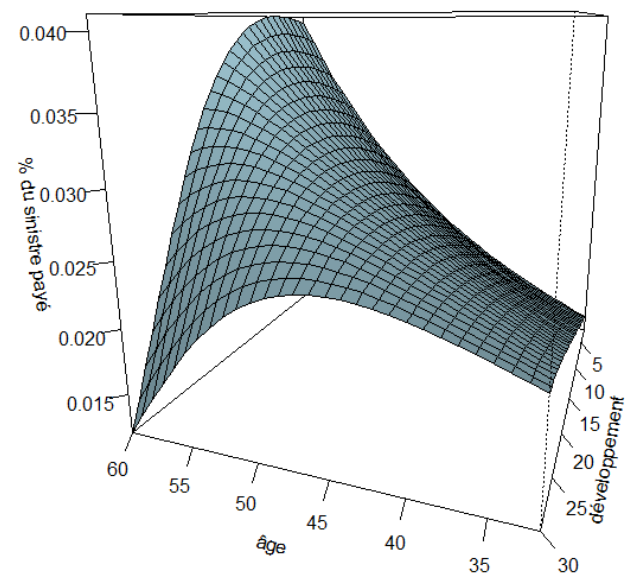
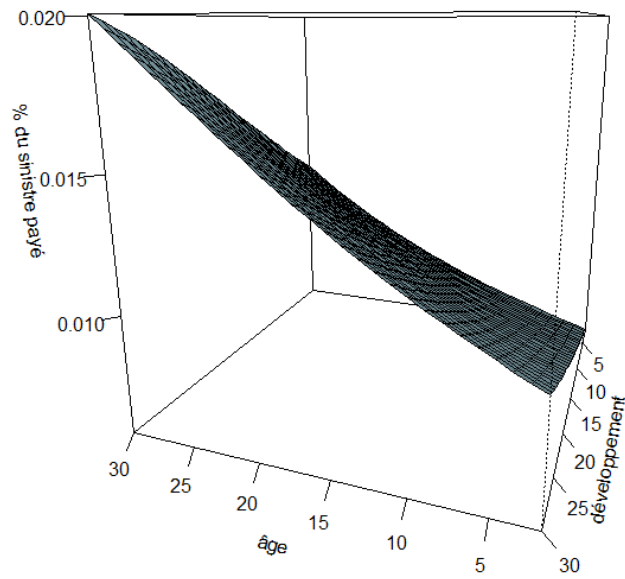


FIGURE VII.2 – Cadence des paiements

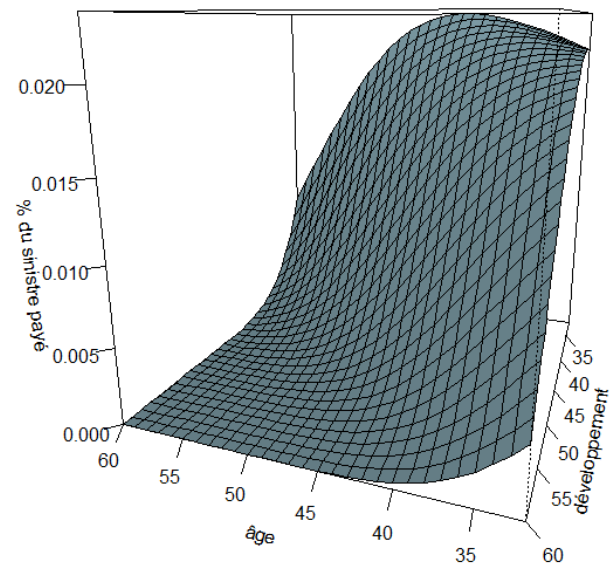
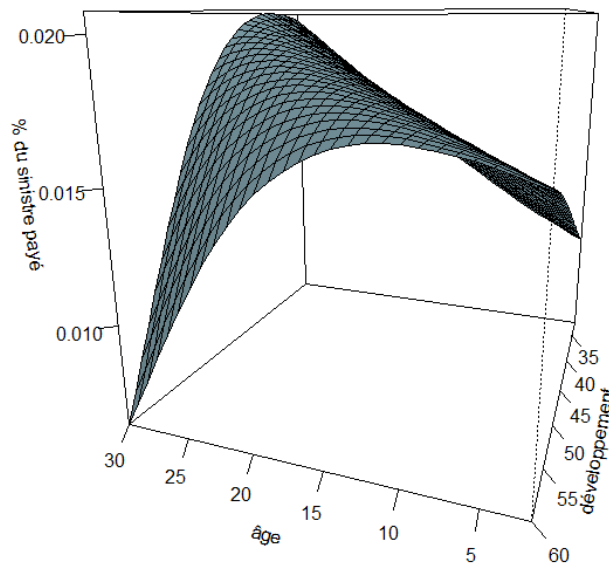


FIGURE VII.3 – Cadence des paiements

- Le premier graphique situé en haut à gauche représente la part du sinistre payé en fonction de l'âge d'une jeune victime et des premières années de paiement. Les victimes sont âgées de 1 à 30 ans et les années de paiement s'étendent également de 1 à 30 ans. Pour une victime âgée de 30 ans, 2% de la charge totale du sinistre sera réglé au bout de 30 ans. Pour une victime de 1 an, à peine 1% de la charge totale sera réglée au bout de 30 ans. La part payée augmente linéairement en fonction de l'âge et des années de paiements. Deux phénomènes sont à prendre en compte : d'une part la probabilité de survie décroît et d'autre part la revalorisation est de plus en plus importante. Sur les premières années, l'augmentation de la revalorisation est plus importante que la baisse des probabilités de survie et c'est pour cela que la part payée augmente.
- Sur le deuxième graphique (en haut à droite), nous nous intéressons toujours aux premières années de développement mais cette fois pour des victimes plus matures, entre 32 et 60 ans. Nous pouvons le voir comme une continuité du premier graphique selon l'axe des âges. Nous pouvons remarquer que pour des personnes âgées entre 30 et 40 ans la part du sinistre payée augmente selon les années de développement, tout comme le premier graphique. Ensuite nous observons une cassure : plus la personne a un âge important et plus la part payée recule dans les années de développement.
- Le premier graphique de la figure VII.3 illustre la part des sinistres payés pour des jeunes victimes et sur les dernières années de développement. C'est la suite du premier graphique selon l'axe de développement. Nous remarquons que le phénomène observé sur le premier graphique est toujours valable jusqu'à 40/50 années de développement. Ensuite la part diminue puisque la probabilité de vie à partir d'un certain âge diminue fortement.
- Enfin le dernier graphique vient compléter toutes les informations précédentes : pour des victimes plus âgées, la part du sinistre décroît avec les années de développement et va jusqu'à s'annuler : cela est logique puisque les probabilités de vie à partir d'un certain âge sont nulles.

a..2 Sinistres hors rentes

Pour les sinistres hors rentes, nous avons calculé une cadence de règlement moyenne. A partir de la base de sinistres hors rentes retraités de l'inflation et du recueil méthodologique commun, nous calculons somme totale payée par année de développement. Ce montant total obtenu par année de développement est ensuite normalisé par la somme de tous les règlements afin d'obtenir la part payée chaque année.

Le tableau VII.1 regroupe les cadences de paiement que nous retenons pour chacune des deux branches PP et EN. Nous remarquons que les sinistres hors rentes de la branche entreprise s'écoulent plus vite que ceux de la branche particuliers/professionnels.

Développement	Particuliers/Professionnels	Entreprises
1	1%	1%
2	7%	17%
3	13%	27%
4	23%	37%
5	30 %	44%
6	38%	54%
7	46%	54%
8	51%	65%
9	56%	67%
10	57%	69%
11	59%	71%
12	62%	75%
13	64%	74%
14	67%	77%
15	68%	74%
16	69%	78%
17	67%	78%
18	69%	80%
19	71%	83%
20	76%	83%
21	75%	82%
22	77%	87%
23	81%	91%
24	86%	94%
25	91%	97%
26	96%	98%
27	99%	100%
28	100%	100%

TABLE VII.1 – cadences de paiement

Nous pouvons alors tenter d’apporter quelques éléments de réponse aux questions que nous nous sommes posées :

- Quelle est la proportion du sinistre que nous allons payer chaque année ? Cette proportion est-elle constante dans le temps ou plus important dans les premières années de développement ?

Nous avons réussi à déterminer la proportion à payer chaque année. Dans le cas des sinistres rentes, cette proportion dépend du développement mais surtout de l’âge. Dans le cas des sinistres hors rentes elle dépend du développement uniquement.

- Combien de temps le règlement total du sinistre va-t-il prendre ?

Un sinistre hors rente est réglé au bout de 28 ans. Concernant les sinistres rentes il n’y a pas de réponse unique puisque le paramètre de l’âge de la victime entre en jeu.

b. Actualisation

Nous sommes désormais capables, pour chaque sinistre, de déterminer la part qui sera payée pendant les années suivant la survenance. La dernière étape est donc d’**actualiser** ces montants afin de connaître sa valeur à aujourd’hui. Nous utilisons pour cela la **courbe des zéro-coupons** qui permet de calculer des coefficients d’actualisation cohérents.

Considérons la charge d'un sinistre noté ch . Au bout de n années, la part payée du sinistre, notée ch_n sera :

$$ch_n = ch \times \%cad_n$$

Avec $\%cad_n$ la proportion du sinistre à payer l'année n .

Enfin, la charge actualisée ch_n^{act} sera :

$$ch_n^{act} = \frac{ch_n}{(1 + r(0, n))^n}$$

où $r(0, n)$ correspond au taux zéro-coupon dans n années.

Enfin, après écoulement et actualisation nous obtenons pour chaque simulation la nouvelle charge ch_{fin} :

$$ch_{fin} = \sum_{d=1}^N ch_d^{act}$$

Nous disposons maintenant de 1000 montants de sinistres hors rentes et 1000 montants de sinistres rentes **actualisés** pour chacune des deux branches PP et EN.

3. Approximation du SCR atypiques

Pour rappel, le SCR atypique se calcul de la manière suivante.

$$SCR_{atyp} = VaR_{99,5\%}(1000 \text{ pertes atyp}) - \text{moyenne}(1000 \text{ pertes atyp})$$

La Value-at-risk, notée VaR, est définie par :

$$VaR_\alpha = \inf\{y \in \mathbb{R} : P[L > y] \leq 1 - \alpha\}$$

C'est le quantile d'ordre α de la distribution de perte L .

A partir des pertes actualisées, nous pouvons calculer la charge totale annuelle pour chaque année i et pour chaque branche :

$$ch_i^T = \sum_{k=1}^{N_i^R} ch_{i,k}^R + \sum_{k=1}^{N_i^{HR}} ch_{i,k}^{HR}$$

Avec :

- $ch_{i,k}^R$: charge actualisée du sinistre rente k de l'année i .
- $ch_{i,k}^{HR}$: charge actualisée du sinistre hors rente k de l'année i .

Calcul d'un SCR par branche brut de réassurance :

- Calcul d'un SCR atypiques sans actualisation et sans réassurance :

$$SCR_1^{PP} = 165,976\text{M€} \text{ et } SCR_1^{EN} = 70,939\text{M€}$$

- Calcul d'un SCR atypiques avec actualisation et sans réassurance :

$$SCR_2^{PP} = 108,338\text{M€} \text{ et } SCR_2^{EN} = 43,366\text{M€}$$

La prise en compte des cadences de paiement et de l'actualisation permet une diminution du SCR de :

$$\Delta_{act} = \frac{SCR_1 - SCR_2}{SCR_2}$$

$$\Delta_{act}^{PP} \simeq 53\% \text{ et } \Delta_{act}^{EN} \simeq 64\%$$

Calcul d'un SCR par branche net de réassurance :

Le calcul du SCR atypique se fait **net de réassurance**. Le traité de réassurance couvre l'ensemble des sinistres RC auto mais lorsqu'il s'agit d'une rente, le capital constitutif de la rente est calculé avec un taux de 3,5%. Ainsi, pour chaque sinistre simulé nous calculons son montant de capital constitutif avec un taux d'actualisation de 0% **mais également un montant de capital constitutif avec un taux d'actualisation à 3,5%**. De telle manière, nous pouvons déterminer ligne à ligne la charge cédée, à partir des charges calculées à un taux de 3,5%. Bien évidemment, nous appliquons la clause de stabilité de la même manière que cela a été expliqué en détails dans le chapitre précédent. Nous retirons le montant de part cédée à la charge non actualisée puis appliquons la cadence de paiement ainsi que l'actualisation aux charges nettes de réassurance.

- Calcul d'un SCR atypiques net de réassurance et sans actualisation :

$$SCR_3^{PP} = 162,385\text{M€} \text{ et } SCR_3^{EN} = 71,049\text{M€}$$

- Calcul d'un SCR atypiques net de réassurance et avec actualisation :

$$SCR_4^{PP} = 107,379\text{M€} \text{ et } SCR_4^{EN} = 42,852\text{M€}$$

La prise en compte de la réassurance permet une diminution du SCR de :

$$\Delta_{reass} = \frac{SCR_2 - SCR_4}{SCR_4}$$

$$\Delta_{reass}^{PP} \simeq 0,89\% \text{ et } \Delta_{reass}^{EN} \simeq 1,20\%$$

Calcul d'un SCR global :

Le calcul du SCR des pertes futures atypiques pour la branche RC auto se fait de la manière suivante :

$$SCR = \sqrt{SCR_{PP}^2 + SCR_{EN}^2 + 2 \times 0,75 \times SCR_{PP} SCR_{EN}}$$

On suppose ainsi l'existence d'une corrélation de 75% entre les branches PP et EN. L'application numérique donne :

$$SCR \simeq 142,369\text{M€}$$

Nous pouvons également calculer l'impact de l'actualisation et de la réassurance en calculant un premier SCR global net de réassurance mais non actualisé et un deuxième brut de réassurance mais actualisé. Nous trouvons :

$$SCR_{\text{sans act}} \simeq 220,731\text{M€}$$

$$SCR_{\text{sans reass}} \simeq 143,753\text{M€}$$

Finalement, l'actualisation permet une diminution de 47%. La réassurance permet de diminuer le SCR de 1%.

Conclusion

Il est possible de déterminer le montant de capital requis des pertes futures atypiques de la branche RC auto, c'est-à-dire le montant que devra déboursier l'assureur en cas de pire perte bicentenaire. Ce capital requis, appelé SCR, doit être actualisé et net de réassurance pour chacune des branches PP et EN. Grâce à la nouvelle modélisation, nous pouvons déterminer une cadence de paiement propre aux rentes en tenant compte de l'âge et de ce fait, les cadences de paiements peuvent être très longues surtout pour les jeunes victimes. Ces cadences de paiement permettent de déterminer la part du sinistre qui sera payée chaque année et précède l'actualisation. Le SCR global est ensuite calculé par agrégation des SCR des deux branches.

L'année dernière une cadence de paiement moyenne de 30 ans était retenue pour tous les sinistres et cela présentait une limite du modèle.

Chapitre VIII

Améliorations possibles et analyses des paramètres

1. Améliorations possibles

Même si la précision de la nouvelle modélisation permet de corriger certaines incohérences et de s'intéresser à de nouvelles problématiques, elle présente toutefois un certain nombre de limites. Le premier point que nous soulevons concerne la loi des coûts : afin d'éviter une sous-estimation de la distribution en sélectionnant des lois connues nous avons gardé les lois empiriques. Cependant, notre historique ne s'étend que sur 25 années et de fait, nous pouvons supposer que les événements associés à des grandes périodes de retour ne sont pas présents dans notre historique. Une possibilité est donc d'alourdir les queues de distribution en considérant une méthode de *Blending*.

a. La méthode de *Blending*

a.1 Principe du *Blending*

La méthode du *Blending* combine les courbes OEP obtenues par la méthode historique avec celles obtenues à partir de scénarios de crédibilisation [4].

La figure VIII.1 illustre cette méthode. En abscisse se trouvent les différentes périodes de retour. La courbe bleue foncée correspond à la courbe OEP obtenue à partir de la méthode historique. La courbe bleue claire correspond à celle obtenue à partir de scénarios de crédibilisation. La courbe rouge correspond à la courbe OEP après *Blending*.

$OEP(x) \in [0, 1]$ et correspond à la probabilité que le sinistre maximal de l'année dépasse une perte x . Nous pouvons alors écrire la fonction *OEP* comme :

$$OEP(x) = P(\max_i X_i \geq x)$$

Cela revient à dire que

$$OEP(x) = 1 - P(\max_i X_i \leq x)$$

Or, si le coût maximal est inférieur à x alors tous les coûts sont inférieurs. On peut écrire :

$$OEP(x) = 1 - P(X_1, X_2, \dots, X_N \leq x)$$

Enfin, comme les X_i sont indépendants et identiquement distribués on a :

$$OEP(x) = 1 - P(X \leq x)^N$$

Finalement :

$$OEP(x) = 1 - M_N(F_X(x))$$

La période de retour est définie comme l'inverse de cette probabilité :

$$T(x) = \frac{1}{OEP(x)}$$

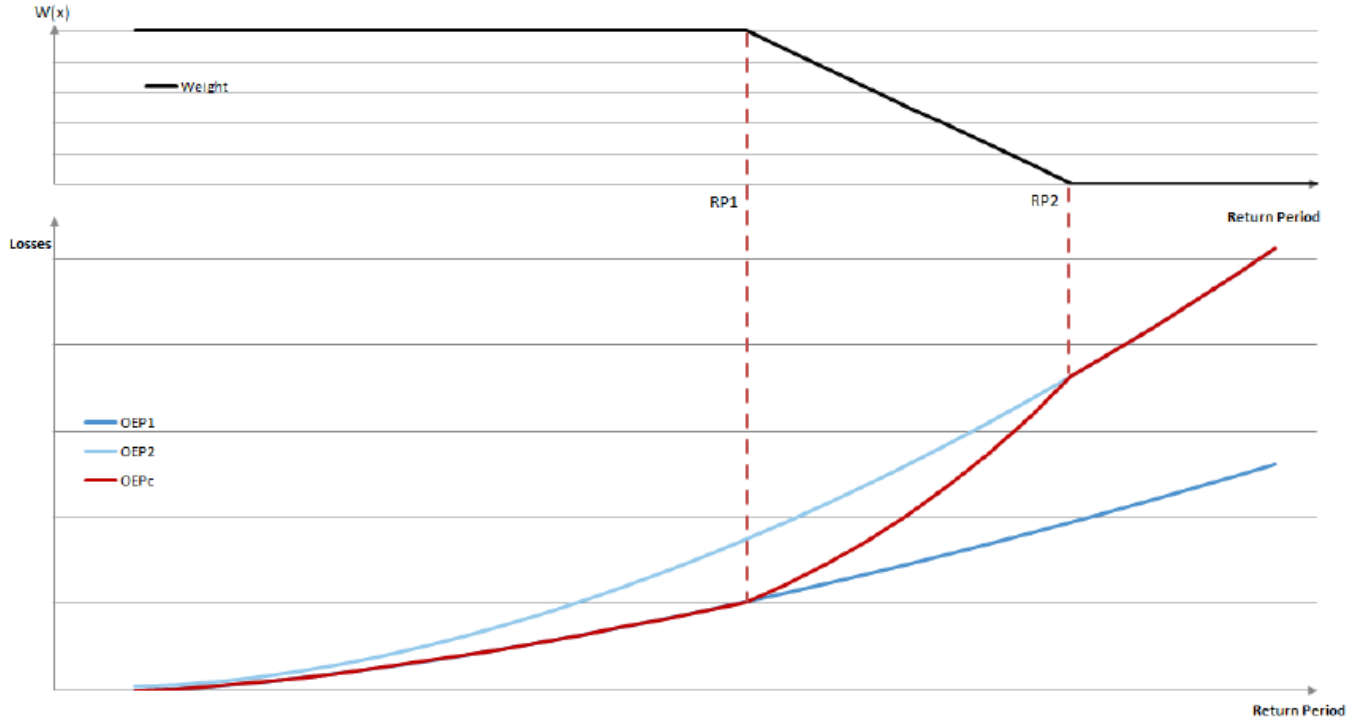


FIGURE VIII.1 – Illustration de la méthode de Blending

La courbe OEP est alors définie comme :

$$OEP : T \mapsto OEP^{-1}\left(\frac{1}{T}\right)$$

i.e pour chaque période de retour T , on associe un montant x tel que $T = \frac{1}{OEP(x)}$.

La courbe OEP crédibilisée se construit de la manière suivante :

$$L_B = \alpha L_{emp} + (1 - \alpha) L_{scen}$$

Avec :

- L_B : OEP après application de la méthode de *Blending* ;
- L_{emp} : OEP issus des données historiques ;
- L_{scen} : OEP issus des scénarios de crédibilisation.

Et

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si } x < RT_1 \\ \alpha_1 + \left(\frac{x - RT_1}{RT_2 - RT_1}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} (\alpha_2 - \alpha_1) & \text{si } RT_1 \leq x < RT_2 \\ \alpha_2 = 1 - \alpha_1 & \text{si } x > RT_2 \end{cases}$$

Avec :

- α_1 : poids à accorder à l' OEP_1
- α_2 : poids à accorder à l' OEP_2
- RT_1 : période de retour la plus basse
- RT_2 : période de retour la plus haute
- β : courbure de l'interpolation. $\beta = 0,5$ correspond à une interpolation linéaire.

De cette manière si $\alpha_1 = 1$, l'OEP après *Blending* correspondra à la courbe OEP historique jusqu'à une période de retour RT_1 . De même, $\alpha_1 = 1 \implies \alpha_2 = 0$ et donc l'OEP finale calera parfaitement avec la courbe OEP issue des scénarios, pour une période de retour supérieure à RT_2 .

La difficulté repose donc principalement sur l'OEP déterminé à partir de scénarios de crédibilisation. Nous allons tout d'abord nous intéresser à ces scénarios.

a.2 Scénarios de crédibilisation

Chaque entité doit choisir les scénarios qui sont le plus en adéquation avec le portefeuille et avec le calibrage. Pour AXA France, les choix des scénarios de crédibilisation doivent être validés par AGPC ainsi que le groupe.

Voici quelques exemples de scénarios retenus pour le modèle RC auto 2015. Pour rappel en 2015 aucune distinction n'était faite entre les sinistres rentes et les sinistres hors rentes.

- **Le tunnel du Mont Blanc.** Le 24 mars 1999, un camion pris feu à l'intérieur du tunnel. Cet incendie a causé la mort de 39 personnes et énormément de blessés. De plus, les dommages causés aux infrastructures ont nécessité 3 ans de travaux.
Le sinistre du tunnel du Mont Blanc est donc un sinistre automobile aussi bien corporel que matériel.
- **Le tunnel sous la Manche.** Le 11 septembre 2008, un incendie s'est déclaré causant d'importants dégâts d'ordre matériels. Le tunnel a été fermé pendant plusieurs jours. Ce sinistre automobile est exclusivement matériel.

Pour la nouvelle modélisation nous avons cherché à mettre en place une méthode de crédibilisation. Cependant après avoir enquêté auprès des différentes entités du groupe, aucune n'était en mesure de nous apporter des informations sur des potentiels scénarios de crédibilisation que nous pourrions appliquer à notre modèle. L'idée serait de trouver des scénarios de crédibilisation à appliquer aux sinistres rentes, comme par exemple l'arrérage le plus important versé au cours des 50 dernières années, mais malheureusement nous disposons uniquement de ces deux scénarios catastrophes.

a.3 Application à notre modélisation

A défaut d'avoir à notre disposition des scénarios de crédibilisation propre à la nouvelle modélisation, nous allons alourdir la queue de distribution de notre loi de coût en utilisant le scénario du tunnel du Mont Blanc. Ce sinistre automobile est corporel, à la différence de tunnel sous la Manche, nous pouvons donc l'utiliser dans notre modélisation.

Calcul de la période de retour du scénario « Tunnel du Mont Blanc » :

Les experts ont estimé qu'un sinistre de type tunnel du Mont Blanc pouvait survenir 1 fois tous les 5 ans. De plus, la part de la circulation française en Europe est de 15,27% et la part de marché d'Axa France est de 11,42%. Ainsi, la période de retour du tunnel du Mont Blanc pour Axa noté T_{MB} est :

$$T_{MB} = \frac{5}{15,27\% \times 11,42\%}$$

et

$$T_{MB} \simeq 287 \text{ ans}$$

Le montant *as-if* 2016 était estimé à environ 98M€. Le montant *as-if* 2017 est retraité du nouveau vecteur d'inflation et vaut 102M€.

Méthodologie du *Blending*

Nous avons à notre disposition les OEP sur données historiques pour les branches Particuliers/Professionnels et Entreprises. Nous devons maintenant déterminer la courbe OEP à partir des scénarios de crédibilisation. Nous allons nous intéresser à la méthodologie utilisée.

Nous ajoutons deux scénarios de crédibilisation basés sur l'historique : le sinistre maximal correspondant à une période de retour de 2 ans (quantile à 50%), et le sinistre le plus important de l'historique correspondant à une période de retour de 25 ans. Cela nous permet de caler la partie inférieure de la courbe des scénarios.

A partir de ces OEP notés OEP_{T_s} et de leur période de retour associée T_s nous pouvons déterminer une moyenne m .

$$m = \sum_{s=1}^3 \frac{OEP_{T_s}}{T_s} \times \frac{1}{\sum_{s=1}^3 \frac{1}{T_s}}$$

On trouve

$$m_{PP} \simeq 17M\text{€}$$

$$m_{EN} \simeq 12M\text{€}$$

De même nous calculons l'écart-type σ :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{s=1}^3 \frac{(OEP_{T_s})^2}{T_s} \times \frac{1}{\sum_{s=1}^3 \frac{1}{T_s}} - m^2}$$

$$\sigma_{PP} \simeq 8,8M\text{€}$$

$$\sigma_{EN} \simeq 8,6M\text{€}$$

A partir de la moyenne m et de l'écart type σ , nous pouvons déterminer les paramètres de la loi Lognormale de la manière suivante :

$$p_1 = \ln(m) - \frac{1}{2} \times \ln\left(1 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right)$$

$$p_2 = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right)}$$

Nous pouvons alors simuler des OEP à partir de la loi lognormale dont les paramètres dépendent des trois scénarios de crédibilisation.

Crédibilisation de la loi des coûts

Finalement, nous calculons l'OEP *Blending* de la manière suivante :

$$L_B = \alpha L_{emp} + (1 - \alpha) L_{scen}$$

Avec :

- L_B : OEP après application de la méthode de *Blending*
- L_{emp} : OEP issus des données historiques
- L_{sce} : OEP issus des scénarios de crédibilisation

Et :

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 25 \\ 1 + \left(\frac{x-25}{287-25}\right)^{\frac{0.5}{1-0.5}} (0 - 1) & \text{si } 25 \leq x < 287 \\ 0 & \text{si } x > 287 \end{cases}$$

Ainsi, pour des périodes de retour comprises entre 0 et 25 ans, nous faisons confiance à notre historique. Pour des périodes de retour plus grandes que 287 ans, nous collons exactement à nos scénarios. Entre les deux c'est un mélange qui est appliqué.

Le graphique VIII.2 illustre cette méthode pour la branche PP. La courbe verte correspond à la courbe OEP obtenue à partir des données historiques. La courbe violette correspond à la courbe OEP obtenue à partir des scénarios de crédibilisation. C'est l'OEP d'une loi lognormale estimée sur 3 points. Enfin la courbe bleue correspond à la courbe OEP après *Blending*, soit la pire perte annuelle maximale en fonction des périodes de retour. Nous vérifions qu'une période de retour de 287 ans correspond à un montant de 102M€. Nous remarquons que l'OEP par scénario est gigantesque : cela provient du fait que le scénario tunnel du Mont Blanc est un scénario exceptionnel et non atypique. Malheureusement, nous n'avons aucun autre scénario pour réaliser ce *Blending*.

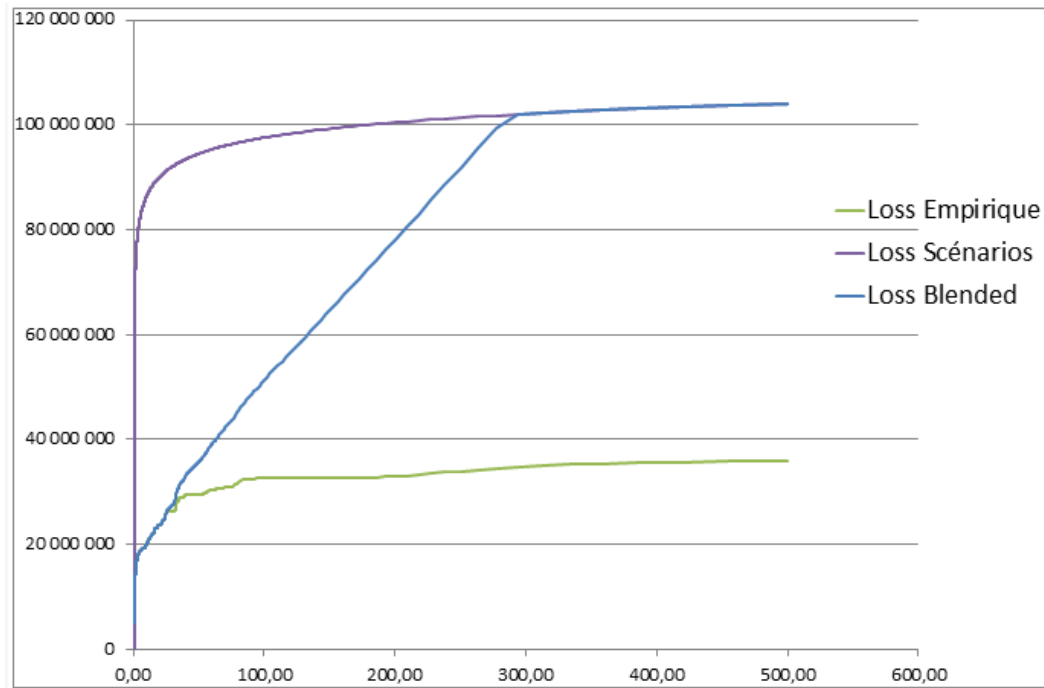


FIGURE VIII.2 – Crédibilisation de loi des coûts (PP)

Nous avons regroupé les résultats dans le tableau VIII.3. Les courbes OEP crédibilisées coïncident parfaitement avec l'historique pour des périodes de retour comprises entre 2 et 25 ans. De même pour une période de retour de 287 ans nous retombons bien sur une perte de 102M€. La crédibilisation permet d'alourdir considérablement la queue de distribution : les pertes maximales bicentenaires estimées à 35M€ pour la branche PP et 22M€ pour EN sont désormais estimées à 106M€ après crédibilisation.

Remarque : la loi Lognormale est une loi classique pour modéliser les coûts en assurance non vie. De plus, nous remarquons que la crédibilisation obtenue est très sévère pour les paramètres choisis. Une possibilité serait de voir ce que donnerait une crédibilisation basée sur une loi de type Pareto.

T	OEP historique PP	OEP Blended PP	OEP historique EN	OEP Blended EN
2	15 330 712,48	15 330 712,48	10 516 074,05	10 516 074,05
3	17 240 807,56	17 240 807,56	12 024 698,54	12 024 698,54
5	18 426 452,67	18 426 452,67	13 866 960,61	13 866 960,61
7	19 271 672,87	19 271 672,87	14 123 971,63	14 123 971,63
10	19 785 943,09	19 785 943,09	14 348 856,27	14 348 856,27
11	20 347 033,09	20 347 033,09	14 413 109,03	14 413 109,03
13	21 193 813,22	21 193 813,22	14 445 235,41	14 445 235,41
14	21 826 954,62	21 826 954,62	14 567 988,65	14 567 988,65
17	23 147 016,32	23 147 016,32	15 581 268,58	15 581 268,58
20	23 730 190,21	23 730 190,21	16 232 896,61	16 232 896,61
25	25 732 977,61	25 732 977,61	17 872 622,83	17 872 622,83
33	26 822 110,53	28 639 408,26	18 900 961,39	20 947 626,16
50	29 571 661,50	35 765 038,46	19 783 707,33	26 938 203,99
100	32 783 984,08	51 323 764,69	21 778 514,18	43 517 669,47
111	32 783 984,08	51 323 764,69	21 778 514,18	43 517 669,47
125	32 783 984,08	57 866 226,80	21 853 273,84	51 159 125,51
143	32 783 984,08	62 597 319,32	21 925 590,54	56 674 626,45
167	32 784 557,34	68 966 573,63	21 956 641,63	64 041 741,60
200	32 884 869,44	78 012 876,55	22 490 380,71	74 601 674,59
250	33 952 902,55	91 832 708,90	22 623 157,79	90 254 531,69
287	34 693 991,81	102 000 000,00	22 624 230,79	102 000 000,00
500	35 996 306,67	104 075 909,16	23 704 881,49	103 993 613,42
1000	35 997 173,02	106 698 655,36	25 492 280,63	106 510 157,92
2000	35 997 173,02	106 698 655,36	25 492 280,63	106 510 157,92

FIGURE VIII.3 – Comparaison des OEP historiques et crédibilisés

b. Autres améliorations

En plus de la méthode du *Blending*, il est possible de proposer quelques améliorations.

La première concerne le vecteur d'exposition. En effet, le nombre moyen de sinistres par la méthode de SCHNIEPER s'obtenait par repondération du vecteur d'exposition. Or, nous avons vu que l'exposition par année correspondait en fait au nombre de contrats. Cette information pourrait être plus juste si nous prenions en compte le nombre de risques plutôt que le nombre de contrats. Certains contrats sont en fait associés à plusieurs risques, c'est le cas par exemple des flottes automobiles de la branche Entreprises.

Dans la mise en *as-if*, le changement de barème jurisprudentiel est pris en compte avec l'application d'un coefficient moyen. Ce coefficient a été déterminé directement à partir de l'augmentation du point du DFP (Deficit Fonctionnel Permanent) observé entre les référentiels 2011 et 2013. Cependant, le DFP est directement lié au taux d'invalidité de la victime ainsi qu'à l'âge et donc plutôt que d'appliquer un retraitement moyen nous pourrions appliquer un retraitement propre à chaque individu comme nous l'avons fait pour la réforme du FGAO à partir de ces informations.

Nous pourrions également modéliser plus finement les rentes. Notre modèle actuel prend en compte l'âge, l'arrérage et le taux d'actualisation. Nous supposons que toutes les rentes sont viagères et que l'arrérage est versé jusqu'au décès de la victime. Nous pourrions modéliser également des rentes temporaires et prendre en compte le taux d'invalidité. De même le décès pourrait être modélisé stochastiquement. La table de mortalité utilisée est la TD 88-90. Cette table est assez prudente puisque nous pouvons supposer qu'une victime voit son espérance de vie diminuer. En revanche, une possibilité serait de prendre en compte une table de mortalité prospective ou générationnelle.

Concernant la modélisation du coût, il serait intéressant de comparer les résultats obtenus avec des lois paramétriques connus plutôt que les lois de distributions. Malheureusement cette étape est très longue et nous n'avons pas eu le temps de mesurer les impacts d'un changement de loi.

Enfin, une amélioration très importante serait de mettre une place la méthode de *Blending* avec des scénarios de crédibilisation propres aux rentes. En effet, le scénario du tunnel du Mont Blanc serait plus approprié pour calculer des pertes catastrophes plutôt qu'atypiques ...

2. Analyses des paramètres

a. Impact de la mise en *As-if*

Dans cette section nous nous intéressons à l'impact des différents retraitements. Pour chacun des retraitements nous calculons le coefficient de majoration par survénance i et vision j :

$$\forall k = 1, \dots, 4 \text{ Impact} = \frac{\sum_{i,j} ch_i^j \times ret_k}{\sum_{i,j} ch_i^j}$$

Avec

- ret_1 : retraitement du FGAO
- ret_2 : retraitement du RMC
- ret_3 : retraitement de l'inflation
- ret_4 : retraitement globale

a.1 La réforme du FGAO

Nous pouvons constater sur la figure VIII.4 que pour les premières années de développement, et ce quelque soit l'année de survénance, le coefficient de majoration du FGAO est de 1. Cela signifie qu'il n'a pas de retraitement FGAO.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1992	-	-	-	-	-	-	-	1,18	1,15	1,15	1,16	1,16	1,16	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,24	1,26	1,25
1993	-	-	-	-	-	-	1,18	1,17	1,13	1,16	1,16	1,15	1,15	1,15	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,21	1,21	1,21	
1994	-	-	-	-	-	1,17	1,18	1,17	1,16	1,16	1,23	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,20	1,22	1,21	1,21	1,22		
1995	-	-	-	-	1,12	1,12	1,11	1,11	1,11	1,10	1,12	1,14	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,16	1,19	1,18	1,18			
1996	-	-	-	1,17	1,16	1,16	1,24	1,22	1,23	1,21	1,21	1,21	1,21	1,20	1,21	1,20	1,23	1,26	1,25	1,26				
1997	-	-	1,17	1,07	1,06	1,16	1,15	1,15	1,14	1,16	1,17	1,17	1,17	1,18	1,18	1,20	1,19	1,22	1,21					
1998	-	1,03	1,03	1,07	1,08	1,08	1,14	1,12	1,23	1,22	1,21	1,20	1,22	1,24	1,26	1,26	1,26	1,26						
1999	1,00	1,00	1,02	1,07	1,12	1,14	1,16	1,18	1,17	1,16	1,17	1,19	1,19	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21						
2000	1,00	1,01	1,02	1,02	1,17	1,19	1,19	1,16	1,16	1,14	1,16	1,16	1,16	1,17	1,18	1,18								
2001	1,00	1,01	1,03	1,03	1,10	1,11	1,11	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,15	1,16	1,16									
2002	1,03	1,01	1,01	1,10	1,11	1,14	1,15	1,14	1,17	1,17	1,17	1,17	1,20	1,20										
2003	1,00	1,03	1,15	1,05	1,19	1,18	1,16	1,18	1,19	1,19	1,18	1,21	1,20											
2004	1,00	1,02	1,06	1,03	1,07	1,07	1,10	1,15	1,15	1,15	1,16	1,15												
2005	1,00	1,00	1,00	1,08	1,07	1,07	1,10	1,12	1,17	1,17	1,17													
2006	1,06	1,01	1,02	1,01	1,06	1,09	1,08	1,09	1,16	1,15														
2007	1,00	1,00	1,01	1,06	1,11	1,18	1,16	1,21	1,21															
2008	1,02	1,00	1,02	1,06	1,10	1,13	1,12	1,13																
2009	1,01	1,03	1,01	1,07	1,10	1,10	1,11																	
2010	1,00	1,06	1,05	1,25	1,17	1,15																		
2011	1,00	1,00	1,01	1,03	1,10																			
2012	1,00	1,00	1,02	1,04																				
2013	1,00	1,00	1,00																					
2014	-	1,00																						
2015	-																							

FIGURE VIII.4 – Impact du retraitement FGAO

Explication : il faut plusieurs années après la survenance d'un sinistre avant qu'il soit statué en rente. De manière générale, plus un sinistre est important et plus il faudra des années avant que celui-ci ne soit consolidé.

Nous remarquons que plus les années se développent, plus le coefficient de majoration augmente.

a.2 Le Recueil méthodologique commun

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1992	-	-	-	-	-	-	-	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
1993	-	-	-	-	-	-	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
1994	-	-	-	-	-	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
1995	-	-	-	-	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
1996	-	-	-	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
1997	-	-	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
1998	-	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
1999	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
2000	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
2001	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
2002	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
2003	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	
2004	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04		

FIGURE VIII.5 – Impact du retraitement du recueil méthodologique commun

Ce triangle nous permet de vérifier que la majoration de 4% est bien appliquée à tous les sinistres. Le triangle complet nous permet également de vérifier qu'aucun retraitement n'est fait à partir des années 2014 puisque le coefficient de majoration est de 1.

a.3 Retraitement de l'inflation

La figure VIII.6 représente l'impact du retraitement de l'inflation sur la charge des sinistres par année de survenance et par année de développement. Ce retraitement est important : en effet, on voit que plus le sinistre s'écoule et plus le retraitement à appliquer augmente le montant de charge.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1992	-	-	-	-	-	-	-	3,28	3,28	3,28	3,28	3,28	3,27	3,27	3,27	3,27	3,27	3,27	3,26	3,26	3,25	3,25	3,25	3,25
1993	-	-	-	-	-	-	3,14	3,13	3,13	3,13	3,13	3,13	3,13	3,12	3,12	3,12	3,12	3,11	3,11	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10
1994	-	-	-	-	-	2,99	2,99	2,99	2,99	2,98	2,98	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,96	2,96	2,96	2,95	2,95	2,95	2,95
1995	-	-	-	-	2,86	2,86	2,86	2,85	2,85	2,85	2,84	2,83	2,83	2,83	2,83	2,83	2,83	2,82	2,81	2,81	2,81	2,81	2,81	2,81
1996	-	-	-	2,73	2,73	2,73	2,72	2,72	2,71	2,71	2,71	2,71	2,70	2,70	2,70	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69	2,69
1997	-	-	2,61	2,61	2,60	2,60	2,59	2,59	2,59	2,58	2,58	2,58	2,58	2,57	2,57	2,57	2,57	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56
1998	-	2,49	2,49	2,48	2,48	2,47	2,47	2,46	2,45	2,45	2,45	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44	2,44
1999	2,38	2,37	2,37	2,36	2,36	2,35	2,35	2,34	2,34	2,34	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33
2000	2,26	2,26	2,26	2,25	2,24	2,24	2,24	2,23	2,23	2,22	2,22	2,22	2,22	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21
2001	2,16	2,15	2,15	2,14	2,13	2,13	2,13	2,12	2,12	2,12	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11	2,11
2002	2,05	2,05	2,04	2,04	2,03	2,03	2,02	2,02	2,02	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01	2,01
2003	1,95	1,95	1,94	1,94	1,93	1,93	1,93	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92
2004	1,86	1,85	1,85	1,84	1,84	1,84	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83	1,83
2005	1,77	1,75	1,75	1,75	1,75	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74
2006	1,68	1,67	1,67	1,67	1,67	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66	1,66
2007	1,60	1,59	1,59	1,59	1,59	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58
2008	1,52	1,52	1,52	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51
2009	1,45	1,45	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44	1,44
2010	1,38	1,38	1,37	1,37	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38
2011	1,31	1,31	1,31	1,31	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32
2012	1,25	1,25	1,25	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26
2013	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20
2014	-	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15
2015	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE VIII.6 – Impact du retraitement de l'inflation

a.4 Impact de la mise en *as-if* globale

Les trois retraitements combinés vont jusqu'à tripler la charge totale. Ainsi, le retraitement des données n'est pas une étape à prendre à la légère puisqu'il conditionnera directement le choix du seuil des sinistres atypiques ainsi que la modélisation à l'ultime (en termes de nombre et de coût).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1992	-	-	-	-	-	-	-	4,02	3,94	3,94	3,97	3,98	3,96	3,97	4,00	3,99	3,99	3,98	3,98	3,97	3,97	4,22	4,27	4,22
1993	-	-	-	-	-	-	3,84	3,81	3,68	3,78	3,78	3,75	3,74	3,73	3,87	3,86	3,86	3,86	3,86	3,86	3,89	3,89	3,89	3,89
1994	-	-	-	-	-	3,64	3,67	3,64	3,62	3,61	3,81	3,76	3,75	3,76	3,75	3,74	3,73	3,71	3,74	3,74	3,74	3,76	3,76	3,76
1995	-	-	-	-	3,34	3,34	3,32	3,29	3,30	3,28	3,31	3,37	3,41	3,42	3,42	3,42	3,42	3,41	3,50	3,46	3,46	3,46	3,46	3,46
1996	-	-	-	3,32	3,29	3,30	3,51	3,45	3,48	3,43	3,42	3,40	3,40	3,38	3,39	3,38	3,45	3,52	3,51	3,51	3,51	3,51	3,51	3,51
1997	-	-	3,17	2,91	2,87	3,13	3,10	3,10	3,07	3,12	3,14	3,14	3,15	3,15	3,15	3,15	3,20	3,19	3,26	3,23	3,23	3,23	3,23	3,23
1998	-	2,68	2,67	2,77	2,80	2,78	2,93	2,87	3,14	3,10	3,10	3,06	3,10	3,14	3,20	3,19	3,19	3,19	3,19	3,19	3,19	3,19	3,19	3,19
1999	2,48	2,48	2,50	2,62	2,74	2,78	2,84	2,88	2,86	2,83	2,86	2,90	2,90	2,90	2,92	2,92	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93	2,93
2000	2,36	2,37	2,40	2,39	2,74	2,78	2,77	2,69	2,68	2,65	2,68	2,67	2,68	2,70	2,71	2,72	2,72	2,72	2,72	2,72	2,72	2,72	2,72	2,72
2001	2,25	2,25	2,30	2,29	2,44	2,47	2,45	2,51	2,53	2,54	2,53	2,55	2,53	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54
2002	2,20	2,14	2,15	2,34	2,36	2,41	2,42	2,40	2,46	2,44	2,45	2,45	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50	2,50
2003	2,03	2,09	2,33	2,11	2,40	2,37	2,33	2,36	2,39	2,38	2,37	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41	2,41
2004	1,93	1,96	2,04	1,98	2,05	2,04	2,09	2,20	2,19	2,19	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20
2005	1,84	1,78	1,83	1,96	1,96	1,95	1,99	2,04	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12	2,12
2006	1,85	1,76	1,78	1,76	1,84	1,89	1,88	1,88	2,01	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99
2007	1,66	1,66	1,68	1,75	1,83	1,95	1,91	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
2008	1,62	1,58	1,61	1,68	1,74	1,78	1,76	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77
2009	1,53	1,55	1,52	1,61	1,65	1,65	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67	1,67
2010	1,44	1,52	1,51	1,79	1,67	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65
2011	1,37	1,36	1,39	1,41	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
2012	1,30	1,30	1,33	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36
2013	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
2014	-	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15
2015	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

FIGURE VIII.7 – Impact du retraitement globale

b. Impact du choix du seuil sur la modélisation du nombre d'atypiques

Dans tout le mémoire, notre modélisation est basée sur un seuil atypique de 2M€. Nous nous sommes alors demandé quel serait l'impact d'un changement de seuil sur la modélisation du nombre de sinistres atypiques.

1. Quelle serait l'évolution de ce nombre ?
2. Quel serait le comportement de la moyenne et de la variance ? Le choix de la loi de fréquence serait-il impacté ?

Afin de répondre à cette problématique nous avons calculé pour chaque seuil compris entre 1M€ et 8M€, avec un pas de 500k€, le nombre moyen de sinistres d'atypiques ainsi que la variance en utilisant la méthode de SCHNIEPER.

Les graphiques VIII.8 et VIII.9 représentent l'évolution du nombre moyen d'atypiques ainsi que la variance en fonction du seuil.

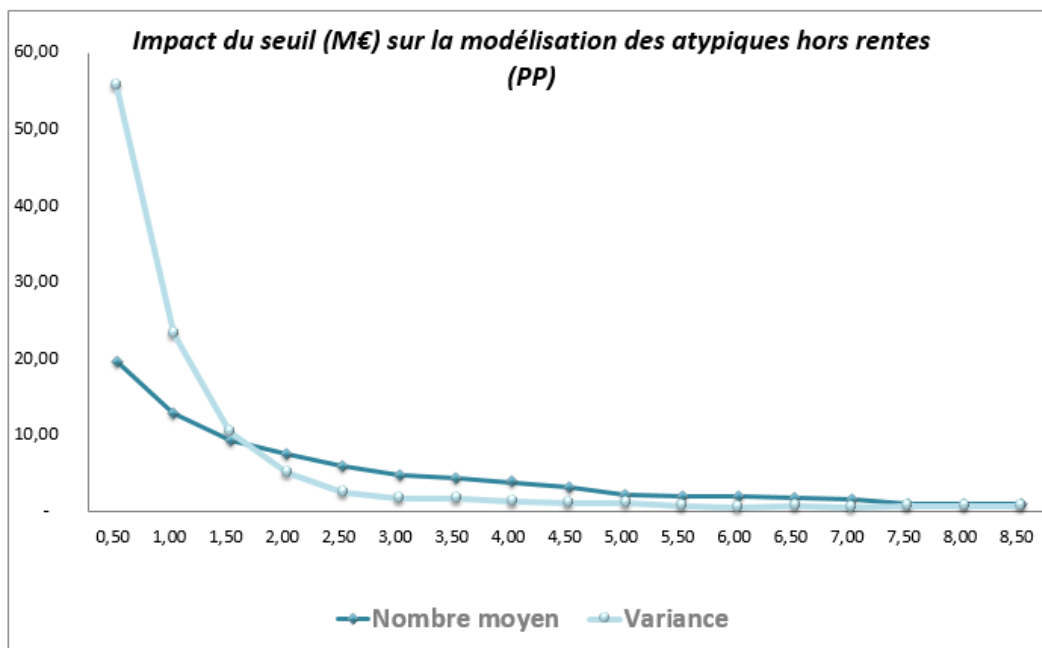


FIGURE VIII.8 – Impact du seuil sur la modélisation des hors rentes PP

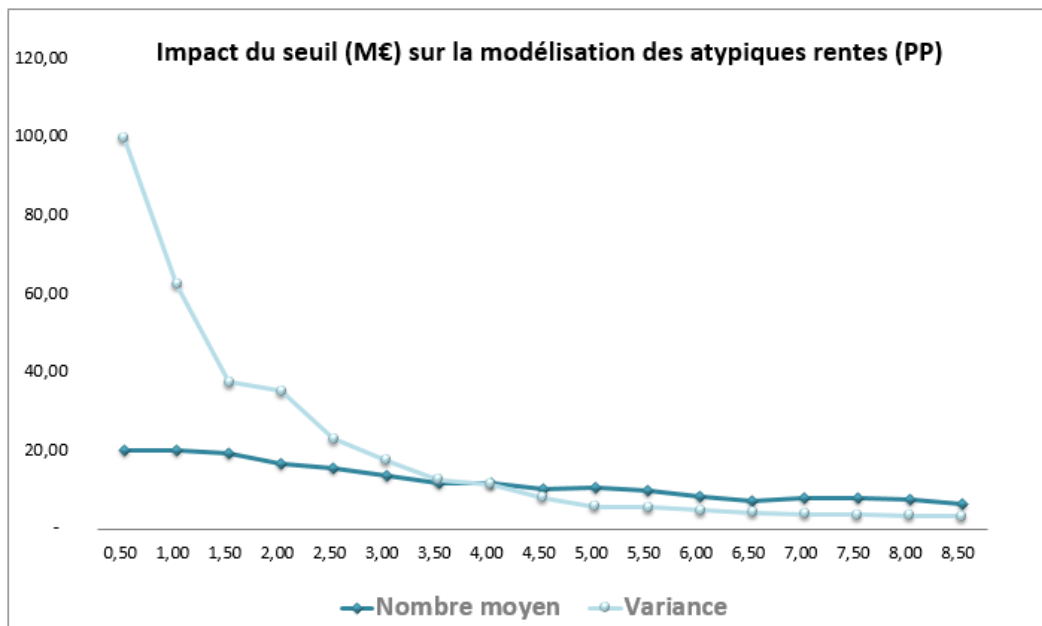


FIGURE VIII.9 – Impact du seuil sur la modélisation des rentes PP

Nous avons, pour plus de lisibilité, regroupé les résultats dans les tableaux VIII.1 et VIII.2 . Le premier tableau concerne les sinistres rentes de la branche PP, le second les sinistres hors rentes de la branche PP.

Seuil (M€)	Moyenne Rentes PP	Variance Rentes PP	choix de la loi
1	20,13	62,31	BN
1,5	19,26	37,38	BN
2	16,56	35,15	BN
2,5	15,27	22,86	BN
3	13,47	17,46	BN
3,5	11,74	12,49	BN
4	11,53	11,30	P
4,5	10,50	7,96	P
5	10,10	5,67	P
5,5	9,70	5,35	P
6	8,20	4,76	P
6,5	7,20	4,05	P
7	7,63	3,69	P
7,5	7,89	3,48	P
8	7,33	3,28	P

TABLE VIII.1 – Impact du seuil sur les rentes

Seuil (M€)	Moyenne Hors rentes PP	Variance Hors rentes PP	choix de la loi
1	12,87	23,16	BN
1,5	9,33	10,43	BN
2	7,51	5,11	P
2,5	5,96	2,45	P
3	4,77	1,64	P
3,5	4,35	1,66	P
4	3,85	1,21	P
4,5	3,24	0,99	P
5	2,26	1,01	P
5,5	2,02	0,79	P
6	1,91	0,56	P
6,5	1,70	0,7	P
7	1,53	0,58	P
7,5	1	0,66	P
8	0,98	0,65	P

TABLE VIII.2 – Impact du seuil sur les hors rentes

Réponse à la première question :

Le nombre de sinistres atypiques est une fonction décroissante du seuil. Ce résultat était prévisible. En effet, plus le seuil atypique est élevé, plus le nombre de sinistres le dépassant diminue.

Réponse à la deuxième question :

Le choix de la loi s'effectue en comparant l'estimation des paramètres obtenue par la méthode des moments. Nous observons d'ailleurs que la variance décroît exponentiellement. Dans le cas des sinistres rentes nous retenons une loi Binomiale Négative pour un seuil compris entre 1M€ et 3,5M€. A partir de 4M€, c'est une loi de Poisson qui est choisie. De même, pour les sinistres hors rentes nous retenons une loi de Poisson à partir de 2M€ et une loi Binomiale Négative pour un seuil inférieur.

Ainsi, grâce à cet exemple nous pouvons conclure que le choix du seuil impacte directement la modélisation. Les mêmes constats ont été observés pour la branche Entreprises.

Remarque : les sinistres attritionnels seront directement impactés par le choix du seuil.

c. Impact du retraitement FGAO sur la modélisation du nombre d'atypiques

Nos données ont été retraitées de l'inflation, du recueil méthodologique commun ainsi que de la réforme du FGAO. En revanche, nous avons vu dans le premier chapitre de ce mémoire que cette réforme du FGAO n'est pas prise en compte par les réassureurs. Ainsi, pour la cotation, ce retraitement n'a pas été effectué.

Nous allons alors quantifier l'impact de ce retraitement sur le nombre de sinistres rentes atypiques.

Pour chaque seuil compris entre 1M€ et 8M€, nous avons calculé la moyenne ainsi que la variance sur des données retraitées et non retraitées du FGAO.

Nous calculons ensuite pour chaque seuil s l'écart Δ^s défini comme suit :

$$\Delta^s = \hat{X}_{FGAO}^s - \hat{X}_{sansFGAO}^s$$

Avec :

- $\hat{X}_{FGAO}^s$: nombre moyen de sinistre rentes atypiques, calculé sur des données retraitées du FGAO
- $\hat{X}_{sansFGAO}^s$: nombre moyen de sinistre rentes atypiques, calculé sur des données non retraitées du FGAO

Seuil (M€)	Moyenne R PP (avec FGAO)	Moyenne R PP(sans FGAO)	Ecart absolu
1	20,13	19,58	0,55
1,5	19,26	17,98	1,28
2	16,56	14,96	1,60
2,5	15,27	12,97	2,92
3	13,47	10,54	2,30
3,5	11,74	9,08	2,66
4	11,53	8,49	3,04
4,5	10,50	7,55	2,54
5	10,10	8,33	2,17
5,5	9,70	7,28	2,43
6	8,20	7,46	0,74
6,5	7,20	6,81	0,40
7	7,63	5,53	2,10
7,5	7,89	4,96	2,93
8	7,33	4,18	3,16

TABLE VIII.3 – Impact du retraitement FGAO

Pour un seuil à 2M€, le nombre de sinistres atypiques rentes de la branche PP estimé par la méthode de SCHNIEPER déterministe est de 16,56. Sans retraitement FGAO, il passe à 14,96, soit un écart de 1,60.

En moyenne, la prise en compte de la réforme du FGAO fait augmenter le résultat de + 2 pour la branche PP (+ 0,6 pour la branche EN).

Nous pouvons également constater sur la figure VIII.10 que la variance calculée sur des sinistres non retraités du FGAO est inférieure ou égale à la moyenne à partir d'un seuil à 3M€. En revanche, nous avons vu que lorsque le retraitement est pris en compte, la variance devient inférieure à partir d'un seuil à 4M€. Le retraitement du FGAO impacte donc également le choix de la loi de fréquence.

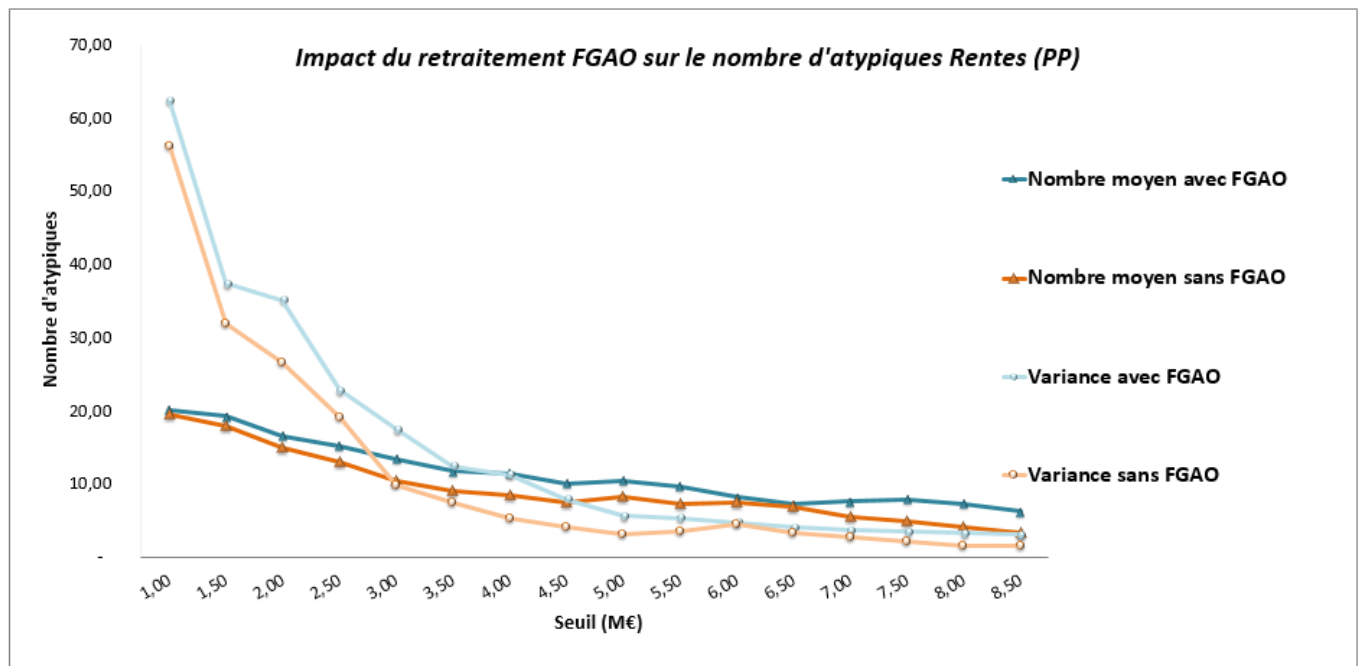


FIGURE VIII.10 – Impact du retraitement FGAO sur les rentes PP

Conclusion

De nombreuses améliorations peuvent être mises en place. Par exemple, il serait possible d'alourdir les queues de distributions à partir de scénarios de crédibilisation et d'une méthode de *blending*. Dans ce chapitre nous avons présenté l'aspect méthodologique. En effet, le scénario du tunnel du Mont Blanc est un scénario catastrophe et non atypique et de ce fait, le résultat n'est pas exploitable en tant que tel. Une possibilité serait alors de trouver des scénarios marché comme par exemple l'arrérage le plus cher versé, afin de crédibiliser nos distributions.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la sinistralité atypique future en RC auto en adoptant une approche fréquence x coût qui se base sur la sinistralité historique. La première étape essentielle concerne alors la mise en *as-if* des sinistres, étape fondamentale puisque nous travaillons à partir de la méthode historique. Toutes les hypothèses ont été revues dans le but de proposer le retraitement le plus précis possible. Tout d'abord nous avons essayé de capter l'inflation des sinistres corporels en calculant les coûts moyens par année de survenance. Cette méthode présentait cependant de nombreux biais et le vecteur d'inflation retenu était trop faible. Cette première étude nous a permis d'échanger avec les gestionnaires sinistres et de considérer une nouvelle approche par poste de préjudices. L'idée a donc été d'associer à chaque poste de préjudice patrimonial et extrapatrimonial un indice d'inflation de l'INSEE. Le vecteur d'inflation retenu est de l'ordre de 4% et nous paraît désormais assez prudent. Proposer une nouvelle modélisation qui sépare les sinistres rentes des autres sinistres nous permet de prendre en compte la réforme du FGAO. Nous calculons alors un coefficient de retraitement précis à appliquer à chaque dossier rente en considérant l'âge de la victime et le type de rente. Enfin, cette année, un coefficient calculé à partir de l'évolution du point du déficit fonctionnel permanent a été appliqué à tous les sinistres corporels afin de tenir compte du changement de barème jurisprudentiel. Finalement, la nouvelle modélisation nous permet d'appliquer un retraitement plus rigoureux en revoyant l'ensemble des hypothèses d'inflation et en appliquant un retraitement détaillé et propre à chaque individu.

Une fois les retraitements effectués, nous avons cherché à répondre à la question : que signifie, pour un sinistre, le fait d'être atypique ? Le seuil atypique de l'année dernière était défini comme la moitié de la rétention du traité de réassurance soit 8M€. Ce seuil était bien trop haut et ne permettait pas de modéliser des sinistres atypiques mais plutôt des sinistres exceptionnels. Pour la nouvelle modélisation du seuil nous nous sommes basés sur des études statistiques en s'appuyant sur des résultats de la théorie des valeurs extrêmes. Cette étude nous permet désormais de fixer un nouveau seuil atypique à 2M€, soit quatre fois moins haut que le seuil des années précédentes.

La modélisation du nombre de sinistres atypiques repose sur la méthode de Schnieper développée en 1991. Dans le cadre de la nouvelle modélisation mise en place cette année, nous nous sommes confrontés à la problématique des rentes potentielles. Certaines rentes ne sont pas identifiées ou pas encore consolidées et nous ne disposons d'aucune information à leur sujet. Nous avons alors combiné la donnée de la date de consolidation afin d'adapter la méthode de Schnieper et répondre à notre problématique. Cette méthode nous permet alors d'obtenir à l'ultime le nombre moyen de sinistres atypiques rentes, un nombre moyen de sinistres atypiques hors rentes et une variance à partir desquels nous pouvons calibrer une loi de fréquence. Cependant, il est difficile de justifier le choix de la loi juste à partir de deux paramètres. Nous avons alors mis en place des méthodes de *Bootstrap* afin de challenger les lois retenues par la méthode déterministe. Nous remarquons que les sinistres atypiques sont principalement des rentes : en effet, le versement d'un arrérage tout au long de la vie de la victime, en particulier pour des jeunes victimes, augmente considérablement le coût.

La distinction entre les sinistres rentes et hors rentes nous a permis de proposer une modélisation plus fine. Le coût d'un sinistre rente dépend d'un âge, d'un arrérage d'un taux d'actualisation et d'une partie fixe i.e. toutes les dépenses autres que le capital constitutif de la rente. A partir des données historiques retraités nous avons cherché à calibrer une loi sur l'âge et l'arrérage. Le graphique de Cullen and Frey nous a permis de ne sélectionner que quelques distributions puis grâce au calcul de la distance des tests de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises et Anderson-Darling nous avons retenu les lois minimisant

ces distances. Finalement, après comparaison des quantiles théoriques et empiriques, nous nous sommes rendu compte qu'aucune des lois paramétriques testées n'avait une bonne adéquation aux données et que les quantiles pouvaient être sous-estimés. Nous retenons alors les distributions empiriques pour l'âge et pour l'arrérage. Le calcul des coefficients de corrélation nous a permis de conclure à une hypothèse d'indépendance entre l'âge et l'arrérage signifiant que lorsqu'un accident survient, que l'on soit jeune ou âgée, on aura besoin de la même aide. Enfin, à partir des distributions du coût des sinistres atypiques hors rentes et de la partie fixe des sinistres rentes, nous avons cherché à calibrer des lois avec les mêmes méthodologies que pour l'âge et l'arrérage. Encore une fois, aucune des lois ne convient et nous gardons les distributions empiriques. A partir de ces distributions empiriques nous pouvons simuler le coût d'un sinistre hors rente atypique. Le coût d'une rente atypique est obtenu après simulation de l'âge, de l'arrérage et du montant de dépense fixe. Finalement, nous obtenons une distribution du nombre et du coût des sinistres atypiques rentes et hors rentes et pouvons estimer la charge annuelle des sinistres automobiles qui impacteront AXA France à horizon 2017.

Avant, la distinction entre les sinistres rentes et hors rentes n'était pas prise en compte : la charge était considérée dans son ensemble et il n'était pas possible pour un même sinistre rente simulé de calculer un capital constitutif avec un taux à 3,5% et un taux à 2,5% ou 2%. Grâce à la nouvelle modélisation nous avons la main sur les paramètres qui sont l'âge, l'arrérage et le taux d'actualisation et nous avons pu recalculer des montants de charge rente au taux d'actualisation de notre choix. Après étude de la charge cédée selon les différents taux, nous pouvons coter le traité de réassurance sur ce différentiel de taux. Nous remarquons que la cotation est faible : en effet la rétention du traité est assez élevée et de ce fait très peu de sinistres la dépassent : en moyenne 0,26% des sinistres sont cédés par année.

Enfin, nous avons pu déterminer une nouvelle cadence de paiement propre aux rentes en tenant compte de l'âge : celle-ci peut être très longue en particulier pour les jeunes victimes. L'année dernière, une cadence de paiement moyenne était appliquée à tous les sinistres avec une longueur de 30 ans. L'actualisation était donc biaisée impactant directement le montant de SCR. Nous avons ainsi pu déterminer le montant de capital requis des pertes futures atypiques avec une actualisation plus appropriée.

Ce nouveau modèle est une avancée par rapport à celui de l'année dernière : il permet une modélisation au plus près des rentes et propose une justification précise de toutes les hypothèses utilisées. Malgré tout, il présente tout de même des points bloquants : considérer une distribution empirique pour la loi des coûts suppose que le bicentenaire est contenu dans l'historique. Cependant, nous disposons d'un historique de 25 ans et il est peu probable que des événements avec des grandes périodes de retour soient déjà survenus. Une possibilité est donc de mettre en place une méthode de *Blending* dont le principe est d'ajouter des scénarios de crédibilisation afin d'alourdir les queues de distributions. Malheureusement, ces scénarios reposent sur des avis d'experts et nous ne disposons pas actuellement de scénarios propres à la modélisation des atypiques. La modélisation, quant à elle, peut être affinée en considérant par exemple un retraitement du barème jurisprudentiel fonction de l'âge et du taux d'invalidité.

Finalement, ce modèle hybride permet de contourner certains problèmes et de s'intéresser à de nouvelles problématiques mais de nombreuses améliorations sont encore à prendre en compte pour proposer la meilleure modélisation des atypiques en RC auto possible.

Bibliographie

- [1] [http ://www.argusdelassurance.com](http://www.argusdelassurance.com).
- [2] *Journal Officiel de la République Française*.
- [3] *Indemnisation des dommages corporels. Recueil Méthodologique Commun*. Mars 2013.
- [4] AXA France. *Estimation of Losses Parameters - Atypical Losses*, 2014.
- [5] AXA France. *Livre de Réassurance - Hors Dommages*, 2016.
- [6] Riad Bessioud. *Modélisation de la partie attritionnelle de la provision RC médicale*. 2015.
- [7] Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière. *Accidentalité routière 2015 - Résultats définitifs*. 2012.
- [8] Charpentier Denuit. *Mathématiques de l'Assurance non Vie*. Economica, 2005.
- [9] Mikosch Embrechts, Kluppelberg. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 2005.
- [10] Gumbel. *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, 1958.
- [11] H.Liu and R.Verrall. Predictive distributions for reserves which separate true IBNR and IBNER claims. *ASTIN Colloquium*, 2009.
- [12] Pierre Petauton. *Théorie et pratique de l'assurance vie*. Dunod, 2015.
- [13] R.Schnieper. Separating true and IBNER claims. *ASTIN Colloquium*, 1991.

Annexes

Lois de probabilités

- **Loi de Poisson :**

On dit que la variable aléatoire discrète X suit une loi de Poisson de paramètre λ , notée $P(\lambda)$ si

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

On a alors : $E(X) = Var(X) = \lambda$

- **Loi Binomiale Négative :**

On dit que la variable aléatoire discrète X suit une loi Binomiale Négative de paramètres r et p notée $BN(r, p)$ si

$$P(X = k) = C_{k+r-1}^k p^r (1-p)^k$$

On a alors : $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ et $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

- X suit une loi **Gamma** de paramètres p (shape) et θ (scale), notée $\gamma(p, \theta)$, si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta x} x^{p-1} 1_{x \geq 0}, p > 0, \theta > 0$$

où $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$

- X suit une loi de **Weibull** de paramètres α et θ si sa densité est :

$$f(x) = \alpha \theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} 1_{x \geq 0}, \alpha > 0, \theta > 0$$

- X suit une loi **Normale** d'espérance m et de variance σ^2 si sa densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- Soit Y une variable aléatoire suivant une loi Normale $N(m, \sigma^2)$. La v.a. X définie par $X = e^Y$ suit une loi **Lognormale**.

Sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right) 1_{x \geq 0}$$

- X suit une loi de **Pareto** si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\alpha - 1}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right) 1_{x \geq x_0} \alpha > 1, x_0 > 0$$

Moments et quantiles

L'espérance d'une variable aléatoire X est définie par :

$$E(X) = \begin{cases} \int x f(x) dx & \text{si } X \text{ continue de densité } f \\ \sum_i X_i P(X_i = i) & \text{si } X \text{ discrète} \end{cases}$$

C'est le nombre de fois que l'on s'attend à avoir en moyenne lorsqu'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.

La variance d'une variable aléatoire X est :

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

L'écart-type se définit ensuite comme la racine de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Le moment d'ordre p centré est :

$$\mu_p = E[(X - E(X))^p]$$

Le coefficient d'asymétrie ou Skewness est :

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma_3}$$

Il s'interprète de la manière suivante :

- Lorsque la distribution est symétrique le coefficient de Skewness est nul ;
- Lorsque la distribution possède une forte queue à droite il est positif ;
- Lorsque la distribution possède une forte queue à gauche il est négatif.

Le coefficient d'aplatissement ou Kurtosis est :

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma_4}$$

Il s'interprète de la manière suivante :

- Lorsque la distribution est gaussienne le Kurtosis est égal à 3 ;
- Lorsque la distribution est légère le coefficient est inférieur à 3 ;
- Lorsque la distribution est plus lourde que la loi normale le coefficient est supérieur à 3.

Le quantile théorique d'ordre α est le réel q_α tel que $P(X \leq q_\alpha) = \alpha$

Le quantile empirique d'ordre α est le réel $\bar{q}_\alpha$ telle qu'une proportion des individus égale au moins à α ait une modalité inférieure à $\bar{q}_\alpha$. Si $n\alpha$ n'est pas entier nous avons $\bar{q}_\alpha = x_{[n\alpha]+1}$. Sinon nous prenons $\bar{q}_\alpha = \alpha x_{(n\alpha)} + (1 - \alpha)x_{(n\alpha+1)}$

Estimateurs

Un estimateur d'un paramètre θ est une statistique T_n , i.e une fonction des variables $X_1, \dots, X_n$, à valeur dans l'ensemble des valeurs possibles de θ .

Soit T_n un estimateur de θ . Le biais de T_n est défini comme

$$Biais(T_n, \theta) = E(T_n) - \theta$$

Si $Biais(T_n, \theta) = 0$ on dit que T_n est un estimateur sans biais de θ .

La méthode des moments

Il est possible d'estimer les moments par leur version empirique.

L'espérance $E(X)$ correspond à une moyenne théorique et peut être estimée par la moyenne observée

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

De même la variance théorique peut être estimée par la variance observée :

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$$

Lorsque l'on souhaite estimer un paramètre θ , on essaye de l'exprimer en fonction de $E(X)$ et de $Var(X)$:

$$\theta = g(E(X), Var(X))$$

On sait ensuite que $E(X)$ et $Var(X)$ peuvent être estimés par $\overline{X_n}$ et S_n^2 . On propose donc d'estimer θ par :

$$\hat{\theta}_n = g(\overline{X_n}, S_n^2)$$

La méthode du maximum de vraisemblance

La vraisemblance d'un modèle et d'un échantillon correspond à la probabilité d'avoir obtenu cet échantillon lorsqu'on a ce modèle. Ainsi, on suppose que le modèle est F_θ , la vraisemblance des observations $x_1, \dots, x_n$, s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}(\theta, \{x_1, \dots, x_n\}) = \begin{cases} P_\theta(x_1) \dots P_\theta(x_n) & \text{si } X \text{ discrète} \\ f_\theta(x_1) \dots f_\theta(x_n) & \text{si } X \text{ continue} \end{cases}$$

avec P_θ et f_θ respectivement fonction de masse et densité associées à F_{θ} . La forme de produit est justifiée par l'hypothèse d'indépendance des observations.

Le principe de l'estimation par maximum de vraisemblance est de se dire que plus la probabilité d'avoir obtenu les observations est forte, plus le modèle est proche de la réalité. Ainsi, on retient le modèle pour lequel la vraisemblance de notre échantillon est la plus élevée :

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}(\theta, \{x_1, \dots, x_n\})$$

Méthode Chain Ladder

La méthode Chain Ladder est une méthode déterministe fréquemment utilisée car elle est simple d'utilisation. Elle s'applique à des triangles de paiements cumulés ou des triangles de charges.

Soit le facteur de développement individuel $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$.

La méthode Chain Ladder repose sur l'hypothèse suivante :

(H1) : Pour $j = 1, \dots, n$, les facteurs de développement $f_{i,j}$ sont indépendants de l'année de survenance i .

Nous pouvons alors calculer un estimateur des coefficients de passage :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}} \text{ pour } j = 1, \dots, n$$

Grâce à ces facteurs nous pouvons estimer les charges ultimes par exercice de survenance

$$\hat{C}_{i,n} = C_{i,n-i} \prod_{j=n-i}^{n-1} \hat{f}_j$$

Sorties graphiques de la branche Entreprises

Estimateurs du seuil atypique

Estimateur du Mean Excess Plot

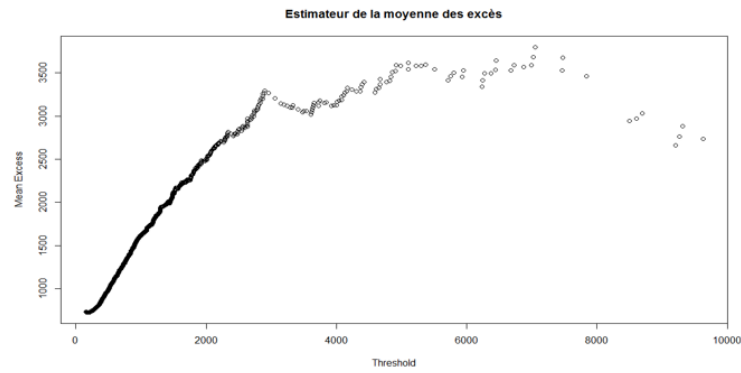


FIGURE .11 – Estimateur Mean Excess Plot

Estimateur de Hill

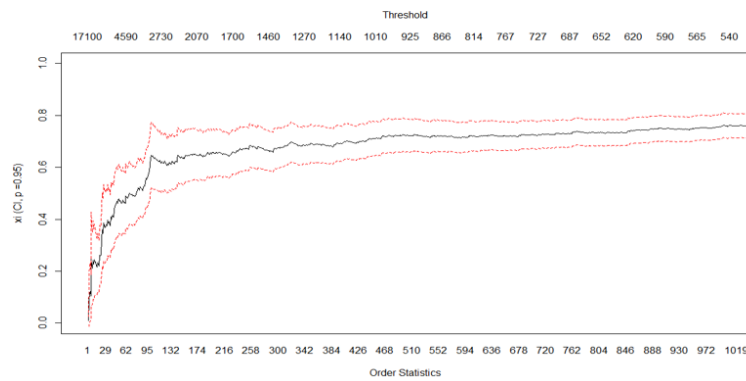


FIGURE .12 – Estimateur de Hill

Estimateur de Pickands

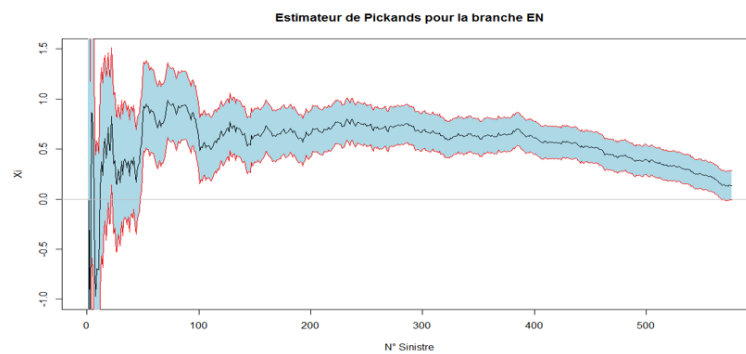


FIGURE .13 – Estimateur de Pickands

Estimateur de Dekkers-Einmalh-de Haan

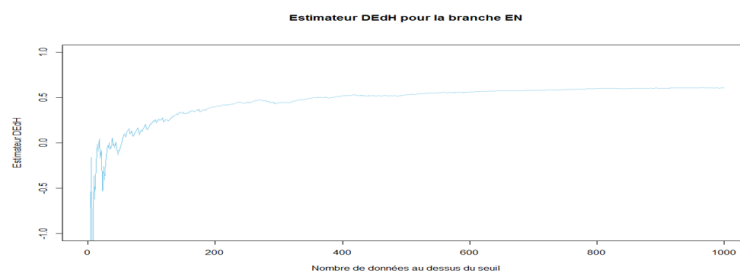


FIGURE .14 – Estimateur de DEdH

Impact du seuil

Impact du seuil sur le nombre de sinistres rentes et hors rentes de la branche Entreprises.

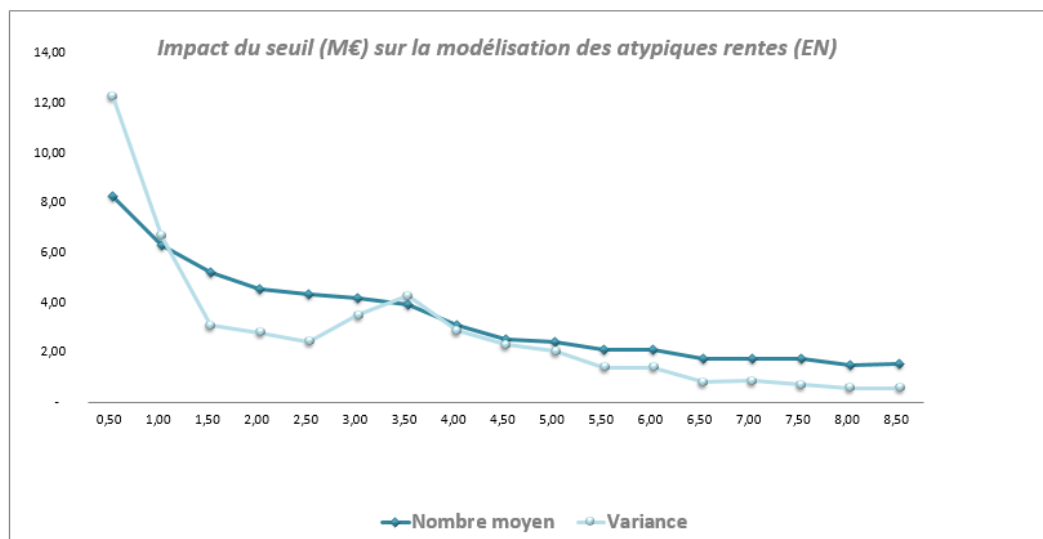


FIGURE .15 – Impact du seuil sur la modélisation des rentes EN

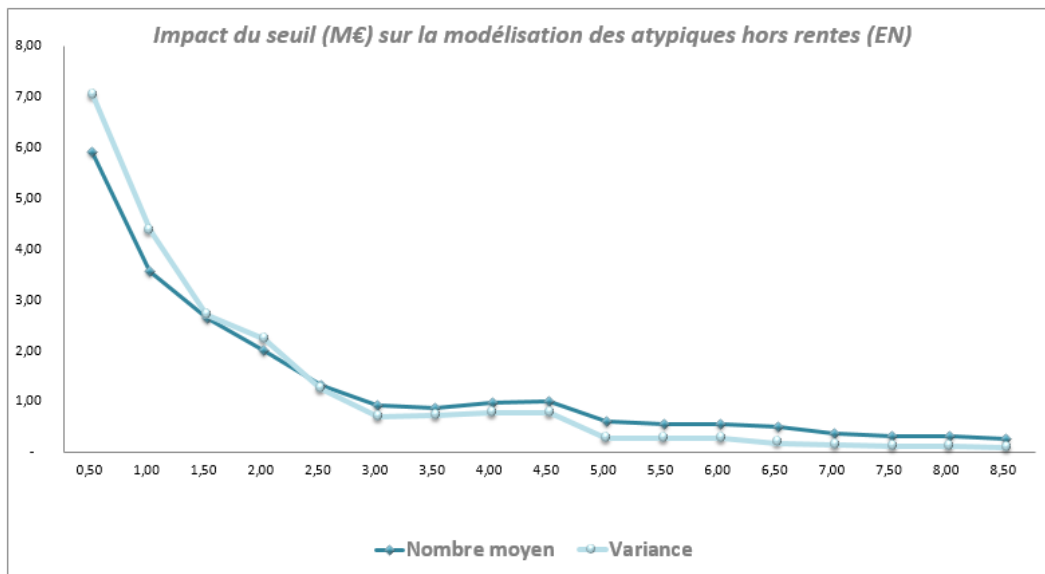


FIGURE .16 – Impact du seuil sur la modélisation des hors rentes EN

Impact du retraitement FGAO

Impact du retraitement FGAO sur la branche Entreprises.

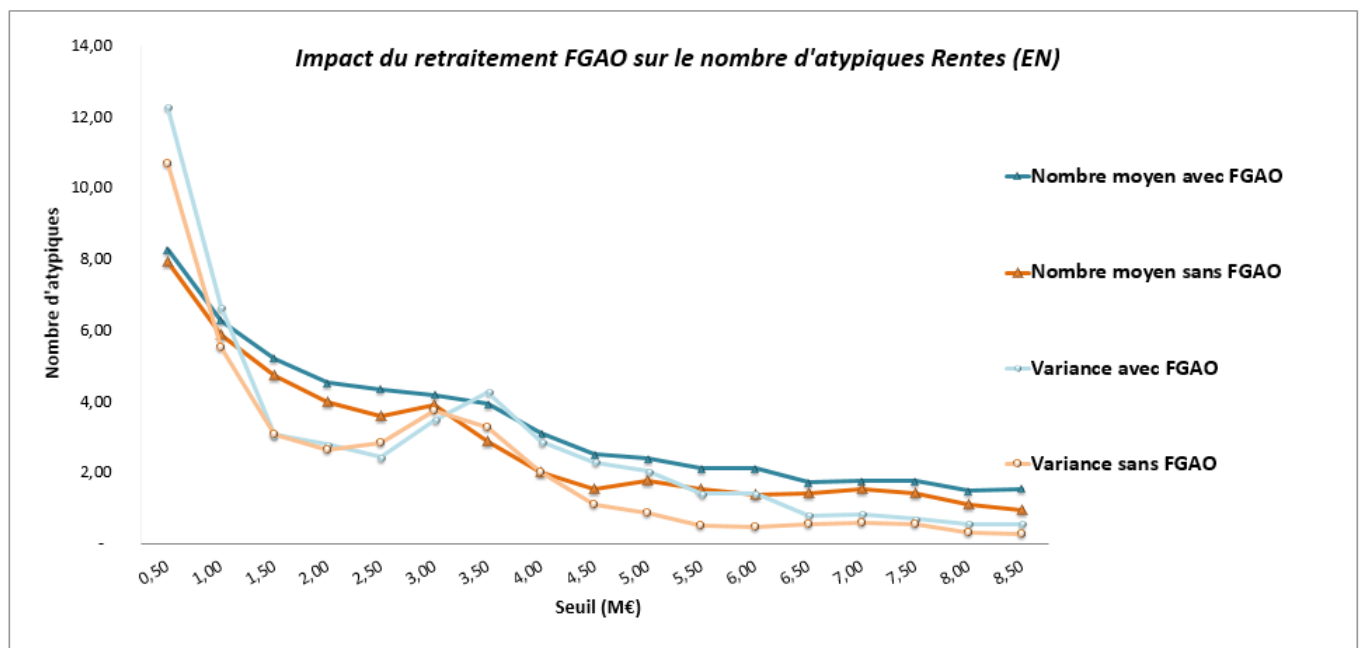


FIGURE .17 – Impact du retraitement FGAO sur les rentes EN