

Mémoire présenté le :
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Timothée FABRE

Titre : Extension du Longstaff-Mithal-Neis : Application à la diffusion des prix en univers monde réel dans un cadre *arbitrage-free*

Confidentialité : ☒ NON ☐ (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de Signature
l'Institut des Actuaires*

Entreprise :

Nom : Malakoff Humanis

Signature :

*Directeur de mémoire en entre-
prise :*

Nom : Emmanuel KIZILIAN

Signature :

*Membres présents du jury de
l'ISFA*

Invité :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et
de mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actua-
riels (après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé

Mots clés : Intensité de défaut, rendement d'opportunité, CDS, LMN, crédit, volatilité implicite, GSE, modèle ALM, cadre de valorisation dynamique, structure par terme de coupons.

L'étude de la distribution de probabilité, en monde réel, d'indicateurs financiers à horizon moyen et long terme impose la mise en place d'un cadre de valorisation prospective des produits financiers. Classiquement, un cadre de valorisation fondé sur l'absence d'opportunité d'arbitrage se construit sur l'information implicite *spot* induite par les marchés financiers. Or, en considérant seulement l'information *spot*, une source de risque future est omise : la volatilité des paramètres implicites. Pour pallier cette carence en la matière, le recours à des modèles de *pricing* dynamiques (dont certains paramètres sont dépendants du temps) prend tout son sens.

Au sein du portefeuille des compagnies d'assurance et des institutions de prévoyance, le poids que représente la poche obligataire impose une réponse théorique satisfaisante sur le sujet de la projection de sa valeur. Ainsi, la présente étude propose un cadre de valorisation dynamique relatif aux produits de taux par extension du modèle de Longstaff-Mithal-Neis : une extension théorique d'une part et un calibrage innovant pour rendre le modèle initial dynamique d'autre part. L'extension théorique du modèle LMN porte sur la valorisation des obligations à taux variable et des indexées inflation : pour les titres à taux variable, la dépendance théorique du facteur d'actualisation et du coupon conduit à spécifier un modèle de taux court (hors cadre LMN) cohérent en monde réel et pouvant être rendu dynamique. Diebold et Li [2005] ont introduit le modèle Nelson-Siegel dynamique en montrant qu'il était possible d'ajuster un modèle de série temporelle sur les régresseurs. En s'inspirant de cet article, le modèle retenu a naturellement été sa version AOA : le modèle AFNS (Arbitrage-Free Nelson-Siegel) pour lequel la présente étude propose une version dynamique. Pour les obligations indexées inflation, le cadre de valorisation dynamique s'est inspiré de l'article de Jarrow et Yildirim [2003] en utilisant la version dynamique du modèle AFNS cité précédemment et en ajustant une structure paramétrique sur la volatilité implicite des *cap* inflation.

Le passage à un modèle AOA dynamique repose sur trois principes : fixer des paramètres implicites indépendants du temps, ajuster une structure paramétrique par moindres carrés, ajuster un modèle de série temporelle sur les régresseurs. Ainsi, la version du modèle LMN de la présente étude s'est inspirée de l'approche de calibration de Planchet et Laïdi [2015], avec une nuance originale sur le caractère dynamique : un ajustement paramétrique de type Nelson-Siegel sur des structures par terme de paramètres implicites (en l'occurrence, les paramètres λ_0 et γ_0).

Ce contexte de valorisation dans un cadre dynamique est donc régi par un modèle de séries temporelles multivarié permettant de diffuser les régresseurs des ajustements linéaires effectués sur les paramètres implicites déduits des inversions de prix. Cette approche s'inscrit dans la mise en place d'un générateur de scénarios économiques monde réel par lequel les facteurs de risques projetés sont des paramètres de *pricing*, assurant la cohérence avec la valorisation par l'approche martingale. Cette hybridation permet notamment d'exploiter les avantages des approches risque neutre et monde réel, en modélisant des processus réels inobservables pour leur appliquer les formules de valorisation obtenues en amont.

Les présents travaux proposent donc une approche innovante de modélisation et de projection des structures par terme de rendements obligataires, ainsi que des facteurs de risque de crédit. Dans une première partie, on présente les bases théoriques du cadre, le contexte de l'étude ainsi qu'une introduction à la modélisation du risque de crédit par l'approche à intensité. Dans un second temps, la construction du cadre de valorisation dynamique est développée. La procédure de calibration est détaillée pour chaque classe d'obligation et la technique de reproduction des historiques de prix et de nappes de volatilité implicite montre des résultats de qualité. La dernière partie vise à étudier des applications du cadre à l'écrtage de flux obligataires risqués ainsi qu'à la modélisation de courbes de rendement obligataire. Malgré une calibration portée intégralement sur des prix, la robustesse de la démarche proposée s'apprécie par la réplication « mark-to-model » de la courbe de rendement générique OAT qui émane du *provider* de données Bloomberg.

Abstract

Key words: Default intensity, convenience yield, CDS, LMN, credit, implied volatility, ESG, ALM model, dynamic pricing framework, term structure of yields.

Studying financial indicator's probability distribution, in a real world framework, requires the implementation of a general model for prospective pricing of financial products. Formally, a no-free-lunch pricing framework is built upon implied information extracted from the spot data observed on financial markets. Yet, by considering only spot information, another source of future risk is omitted: the volatility of implied parameters. In order to remedy this issue, the use of dynamic pricing models (with some time-dependent parameters) makes a lot of sense.

Within portfolios of insurance companies and pension institutions, the high proportion of bonds requires a satisfying theoretical answer to matters such as portfolio's value forecasting. Thus, this study proposes a dynamic pricing framework related to defaultable interest rates products by an add-in of Longstaff-Mithal-Neis: a theoretical extension in one hand and, in the other, an innovative calibration procedure to make it dynamic. The theoretical extension of LMN is focused on floating-rate-notes and inflation-linked bonds pricing: concerning FRN, the relation between discount factor and coupon leads to specifying a short-rate model (not specified in LMN), which is consistent in a real world framework and that may be made dynamic. Diebold and Li [2005] have introduced the Dynamic Nelson-Siegel model by showing that a time series model can be adjusted on regressors. Inspired by this article, the adopted model is its "no free lunch" version: the AFNS model (Arbitrage-Free Nelson-Siegel) for which this study proposes a dynamic version. Regarding inflation-linked bonds, the model is based on Jarrow and Yildirim's framework [2011], by using a dynamic version of the aforementioned AFNS model and by adjusting a parametric structure on inflation-linked cap implied volatility.

The changeover to a dynamic arbitrage-free model is based on three principles: setting time-independent some of the implied parameters, fitting a parametric function by a least squares method, calibrating a time series model on regressors. Thus, the version of LMN introduced in this study builds on the calibration method of Planchet and Laïdi [2015], with a creative change on the dynamic aspect: a Nelson-Siegel parametric adjustment on the term structures of some implied parameters (in this case, the parameters λ_0 and γ_0) is made.

This valuation pattern in a dynamic framework is therefore governed by a multivariate time series model that allows a diffusion of regressors obtained by the linear adjustments done on implied parameters, which are deduced by price inversions. This approach falls within the implementation of a real-world economic scenario generator in which projected risk factors are pricing parameters, ensuring a consistency with the risk-neutral perspective. This hybridisation enables the exploitation of the benefits of both risk-neutral and real-world approaches, by modelling unobservable historical processes in order to apply the pricing formulas to them.

In the present research, we propose an innovative approach for the modelling of bond yield term structure as well as credit risk factors and their forecasting. The first part is dedicated to some theoretical foundations, to the context of the study and to an overview of credit risk modelling and reduced-form approach. Secondly, we develop the implementation of the valuation framework. The calibration procedure is described for each bond class and the replication technique applied to historical prices and implied volatility surfaces show high quality, consistent results. The final part is aimed at studying practical usages of the framework in the correction of defaultable cash-flows and in yield curve modelling. Despite a fully price-oriented calibration procedure, the reliability of our approach is assessed by the mark-to-model replication of historical OAT yield curves observed on Bloomberg's data provider.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon maître d'apprentissage et binôme Emmanuel KIZILIAN, responsable ALM de Malakoff Humanis. Tu m'as fait découvrir bien des facettes de la finance quantitative. Ta compréhension des modèles, ta créativité sur les problématiques de calibration ainsi que ton implication sans égale m'ont éclairé et guidé tant sur mes objectifs que sur mon intérêt pour ce milieu. Tu m'as appris à déceler les forces et faiblesses des modèles que je suis amené à étudier, ainsi qu'à les remettre profondément en question. Je te remercie pour ta disponibilité et ta patience, pour toute la confiance que tu m'as accordée tout au long de mon apprentissage. Tu as été d'un grand soutien dans l'élaboration de ce mémoire.

J'adresse aussi mes remerciements à tous les professeurs et intervenants du master Actuariat de l'ISFA pour leur enseignement de qualité qui m'a permis de développer des modèles et d'étudier les articles sur lesquels se fonde cette étude.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Nicole EL KAROUI, qui par son master Probabilités et Finance de Paris Sorbonne et ses enseignants a représenté une profonde satisfaction intellectuelle. Elle m'a notamment aidé à y voir plus clair sur le sujet de la valorisation des *Floating Rate Note*.

Enfin, je remercie mes très chers parents, mon frère et mes amis pour leur soutien sans faille et leurs encouragements. Mathis, Nicef, c'est promis, j'arrête les études et je commence à travailler !

Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xix
Introduction	xxi
I Fondements théoriques du cadre	1
1 Théorie financière	3
1.1 Mesures de probabilité et cohérence du cadre de valorisation	4
1.1.1 Théorème de changement de mesure et valorisation de produits dérivés . . .	4
1.1.2 Quelques mots sur ce qui lie les mesures de probabilité au sein du cadre de valorisation	6
1.2 Eléments de calcul stochastique	9
1.2.1 Lemme d'Itô multidimensionnel	9
1.2.2 Théorème de Feynman-Kac	9
1.3 Taux d'intérêt et produits dérivés de taux	10
1.3.1 Obligation zéro-coupon, taux d'intérêt <i>spot</i> et taux <i>forward</i>	10
1.3.2 <i>Swap</i> de taux et <i>stripping</i>	13
1.3.3 <i>Cap</i> , <i>floor</i> et <i>swaption</i>	14
2 Risque de crédit	17
2.1 Introduction et mise en contexte	18
2.2 Modélisation du risque de crédit	20
2.2.1 L'approche structurelle	20
2.2.2 L'approche à intensité	21
II Construction du cadre de valorisation dynamique	27
3 Modélisation de la structure par terme de taux d'intérêt	29
3.1 Modèles de lissage de la structure par terme de taux d'intérêt	30
3.1.1 Nelson-Siegel et extensions	30
3.1.2 Nelson-Siegel dynamique	30
3.2 Modèle AOA de taux d'intérêt	31
3.2.1 Spécification du modèle <i>arbitrage-free</i> Nelson-Siegel	32
3.2.2 Expressions du prix du zéro-coupon et du taux <i>spot</i>	33
3.2.3 Autour du prix du zéro-coupon dans le modèle retenu	35
3.3 Calibration du modèle AFNS	37
3.3.1 Présentation des données	37
3.3.2 Description de l'approche	38
3.3.3 Introduction de poids	39
3.3.4 Autour de la matrice de volatilité : contraintes d'optimisation	41
3.3.5 Calibration et résultats	42

4	Modélisation des obligations à taux fixe	47
4.1	Le modèle de Longstaff, Mithal et Neis	48
4.1.1	Cadre de l'étude et spécification	48
4.1.2	Formule de valorisation des contrats <i>Credit Default Swap</i>	49
4.1.3	Valorisation des obligations à taux fixe	50
4.1.4	Formules fermées	51
4.2	Calibration du modèle	52
4.2.1	Présentation des données	53
4.2.2	Méthode "classique" de calibration : tour d'horizon sur les pratiques	54
4.2.3	Vers une reproduction plus complète des prix du marché : nouvelle méthode de calibration	57
4.2.4	Estimation de primes CDS asymptotiques, calibration du modèle de crédit	60
4.2.5	Lissage des structures par terme d'intensité de défaut et calibration du modèle de liquidité	64
4.2.6	Lissage des structures par terme de rendement d'opportunité	72
4.3	Une modélisation des probabilités de défaut embarquée	78
4.3.1	Probabilité de défaut risque neutre et probabilité de défaut historique	78
4.3.2	Spécification du modèle de probabilités historiques	79
4.3.3	Calibration du "paramètre d'échelle"	80
5	Modélisation des obligations à taux variable	85
5.1	Spécification du modèle d'évaluation	86
5.1.1	Tour d'horizon sur l'obligation à taux variable	86
5.1.2	Notations et dynamiques des processus	86
5.1.3	Valorisation des obligations à taux variable	88
5.2	Calibration du modèle de liquidité	91
5.2.1	Présentation des données	92
5.2.2	Calibration du modèle de liquidité de la FRN	92
5.2.3	Lissage des structures par terme de paramètres implicites	95
6	Modélisation des obligations indexées sur l'inflation	103
6.1	Contexte et cadre de l'étude	104
6.2	Spécification du modèle d'inflation	105
6.2.1	Processus d'inflation	106
6.2.2	Processus de prix zéro-coupon nominal et réel	106
6.3	Spécification du modèle d'évaluation	108
6.3.1	Définition et spécification	108
6.3.2	Valorisation de l'obligation indexée	109
6.4	Calibration du modèle d'inflation	113
6.4.1	Présentation des données	113
6.4.2	Extraction des données implicites	114
6.4.3	Calibration du modèle de taux court réel AFNS	119
6.4.4	Calibration paramétrique de la volatilité implicite des <i>cap inflation</i>	124
6.5	Calibration du modèle de liquidité	136
6.5.1	Présentation des données	136
6.5.2	Calibration des paramètres de liquidité de l'OATi	137
6.5.3	Lissage des structures par terme de paramètres implicites	140
III	Projection de flux et courbes de taux obligataires	147
7	Représentation des flux obligataires futurs	149
7.1	Construction des échéanciers de flux	150
7.1.1	Calcul des <i>cash-flow</i> bruts	150
7.1.2	Fonctionnement général du modèle multivarié de projection	151
7.1.3	Le lien entre le cadre et le GSE	152
7.2	Transformation du flux brut en flux risqué	153
7.2.1	L'utilisation d'une structure par terme de probabilités de défaut : une erreur de raisonnement ?	154
7.2.2	Exploitation des primes CDS	155

8	Extraction de courbes de rendement	157
8.1	Taux de coupon implicite	158
8.2	Reconstruction de l'historique	159
	Conclusion	163
	Bibliographie	165
IV	Annexes	167
A	Calibration paramétrique : volatilité implicite <i>cap</i> inflation	169
B	Risque de crédit : Résultats théoriques	173
C	Modèle AFNS	175
D	Modèle LMN	177
E	Evaluation des OATi	185
F	Outils et formules en vrac	191

Table des figures

2.1	Remboursement d'un titre obligataire : flux entre le vendeur de CDS, l'acheteur et l'entité émettrice d'obligation dans le cas sans défaut et dans le cas d'un défaut . .	19
3.1	Historique de séries chronologiques de taux <i>swap</i> Euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019	37
3.2	Structures par terme de taux <i>swap</i> euro (marché) et de taux zéro-coupon <i>spot</i> au 15 juillet 2011	38
3.3	Structures par terme de taux <i>swap</i> euro (marché) et de taux zéro-coupon <i>spot</i> au 5 janvier 2015	38
3.4	Surface de pondérations historique	40
3.5	Série chronologique du régresseur X^0	42
3.6	Série chronologique du régresseur X^1	42
3.7	Série chronologique du régresseur X^2	43
3.8	Série chronologique du taux court	43
3.9	Historique de prix zéro-coupon reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)	44
3.10	Historique de taux <i>spot</i> reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)	44
3.11	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon au 25 octobre 2010	44
3.12	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon au 25 octobre 2010	44
3.13	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon au 26 décembre 2014	45
3.14	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon au 26 décembre 2014	45
3.15	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon au 1er août 2016	45
3.16	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon au 1er août 2016	45
3.17	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon au 18 avril 2018	46
3.18	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon au 18 avril 2018	46
4.1	Historique de séries chronologiques de primes CDS 5 ans	53
4.2	<i>Fitting</i> du modèle calibré sur la prime CDS de maturité 5 ans au 20 septembre 2016	55
4.3	<i>Fitting</i> du modèle calibré sur la prime CDS de maturité 5 ans au 21 août 2018 . .	55
4.4	Historique de la série (α_t)	56
4.5	Historique de la série (β_t)	56
4.6	Historique de la série $(\lambda_{0,t})$	56
4.7	Historique de la série (σ_t^2)	56
4.8	Historique de prime du CDS France 50 ans estimé	61
4.9	Historique de prime du CDS Espagne 50 ans estimé	61
4.10	Paramètres extérieurs et moyenne long-terme $(\frac{\alpha}{\beta})$	62
4.11	<i>Fitting</i> des primes CDS France au 4 janvier 2012	62
4.12	<i>Fitting</i> des primes CDS France au 31 octobre 2018	62
4.13	<i>Fitting</i> des primes CDS Espagne au 1er mars 2013	63
4.14	<i>Fitting</i> des primes CDS Espagne au 9 août 2018	63
4.15	Structure par terme de λ_0 France au 4 janvier 2012	63
4.16	Structure par terme de λ_0 France au 31 octobre 2018	63
4.17	Structure par terme de λ_0 Espagne au 27 août 2012	63
4.18	Structure par terme de λ_0 Espagne au 9 août 2018	63
4.19	Historique de pondérations du lissage de λ_0 , France	65
4.20	Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de crédit, France	67
4.21	Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de crédit, Espagne	67
4.22	Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de crédit, France	67

4.23	Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de crédit, Espagne	67
4.24	Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de crédit, France	67
4.25	Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de crédit, Espagne	67
4.26	Historique de λ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), France	68
4.27	Historique de prix CDS reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), France	68
4.28	Historique de λ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), Espagne	68
4.29	Historique de prix CDS reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), Espagne	68
4.30	Structure par terme de λ_0 lissée et <i>fitting</i> au 14 novembre 2014, France	69
4.31	Structure par terme de prix CDS lissée et <i>fitting</i> au 14 novembre 2014, France	69
4.32	Structure par terme de λ_0 lissée et <i>fitting</i> au 8 décembre 2017, France	69
4.33	Structure par terme de prix CDS lissée et <i>fitting</i> au 8 décembre 2017, France	69
4.34	Structure par terme de λ_0 lissée et <i>fitting</i> au 25 septembre 2013, Espagne	69
4.35	Structure par terme de prix CDS lissée et <i>fitting</i> au 25 septembre 2013, Espagne	69
4.36	Structure par terme de λ_0 lissée et <i>fitting</i> au 20 février 2018, Espagne	70
4.37	Structure par terme de prix CDS lissée et <i>fitting</i> au 20 février 2018, Espagne	70
4.38	Structure par terme de γ_0 au 29 mars 2013, France	70
4.39	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe au 19 juillet 2013, France	70
4.40	Structure par terme de γ_0 au 18 mai 2018, France	71
4.41	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe au 1er octobre 2018, France	71
4.42	Structure par terme de γ_0 au 2 mai 2012, Espagne	71
4.43	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe au 31 mai 2012, Espagne	71
4.44	Structure par terme de γ_0 au 18 mai 2018, Espagne	71
4.45	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe au 2 novembre 2018, Espagne	71
4.46	Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité taux fixe, France	73
4.47	Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité taux fixe, Espagne	73
4.48	Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité taux fixe, France	74
4.49	Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité taux fixe, Espagne	74
4.50	Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité taux fixe, France	74
4.51	Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité taux fixe, Espagne	74
4.52	Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe taux fixe, France	74
4.53	Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe taux fixe, Espagne	74
4.54	Historique de γ_0 taux fixe reproduit et lissé par le modèle à structure stochastique (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), France	75
4.55	Historique de γ_0 taux fixe reproduit et lissé par le modèle à structure stochastique (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), Espagne	75
4.56	Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et <i>fitting</i> au 19 juin 2012, France	75
4.57	Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et <i>fitting</i> au 5 septembre 2011, Espagne	75
4.58	Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et <i>fitting</i> au 1er octobre 2018, France	75
4.59	Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et <i>fitting</i> au 2 novembre 2018, Espagne	75
4.60	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 4 mars 2010, France	76
4.61	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 28 janvier 2015, France	76
4.62	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 5 septembre 2011, Espagne	76
4.63	<i>Fitting</i> des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 2 novembre 2018, Espagne	76
4.64	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OAT EC395400 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	77
4.65	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OAT ED103035 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	77
4.66	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OAT EH287862 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	77
4.67	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OAT EJ003689 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	77

4.68	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EC561895 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	78
4.69	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EH984269 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	78
4.70	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EJ366011 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	78
4.71	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EK361187 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	78
4.72	Séries chronologiques de la probabilité de défaut historique à 3 ans de pays européens	81
4.73	Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut risque neutre, France	82
4.74	Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut monde réel, France	82
4.75	Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut risque neutre, Espagne	82
4.76	Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut monde réel, Espagne	82
5.1	Cas où la date de valorisation se situe entre une date de révision et une date de paiement	87
5.2	Cas où la date de valorisation se situe entre une date de paiement et une date de révision	87
5.3	Structure par terme de γ_0 au 8 novembre 2016, FRN	94
5.4	<i>Fitting</i> des prix au 8 novembre 2016, FRN	94
5.5	Structure par terme de γ_0 au 8 mars 2017, FRN	94
5.6	<i>Fitting</i> des prix au 1er février 2017, FRN	94
5.7	Structure par terme de γ_0 au 18 juin 2018, FRN	95
5.8	<i>Fitting</i> des prix au 19 décembre 2018, FRN	95
5.9	Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité FRN	97
5.10	Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité FRN	97
5.11	Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité FRN	97
5.12	(Vue 1) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), FRN	98
5.13	(Vue 2) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), FRN	98
5.14	Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe, FRN	98
5.15	Structure par terme de γ_0 lissée et <i>fitting</i> au 8 novembre 2016, FRN	98
5.16	Structure par terme de γ_0 lissée et <i>fitting</i> au 1er février 2017, FRN	99
5.17	Structure par terme de γ_0 lissée et <i>fitting</i> au 31 mai 2018, FRN	99
5.18	<i>Fitting</i> des prix de FRN après lissage déterministe/stochastique au 13 décembre 2016	99
5.19	<i>Fitting</i> des prix de FRN après lissage déterministe/stochastique au 31 mai 2018 . .	99
5.20	<i>Fitting</i> des prix de FRN après lissage déterministe/stochastique au 15 janvier 2019	100
5.21	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de la FRN UV430306 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	100
5.22	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de la FRN EJ466660 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	100
5.23	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de la FRN EG175665 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	100
5.24	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de la FRN EF863008 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	100
6.1	Historique de séries chronologiques de taux <i>swap</i> inflation Euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019	113
6.2	Historique de séries chronologiques de prime <i>cap</i> inflation Euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019	114
6.3	Historique de prix zéro-coupon réel extrait par <i>stripping</i> des taux <i>swap</i> inflation euro	116
6.4	Historique de taux <i>spot</i> zéro-coupon réel (en composition continue) extrait par <i>stripping</i> des taux <i>swap</i> inflation euro	116
6.5	Historique de séries chronologiques de volatilité implicite <i>cap</i> inflation euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019	117
6.6	Surface historique de primes des <i>cap</i> inflation au 12 octobre 2018	119

6.7	Surface historique de volatilités implicites des <i>cap</i> inflation extraite au 12 octobre 2018	119
6.8	Surface des pondérations historiques, AFNS taux réel	120
6.9	Série chronologique du régresseur X^0 réel	120
6.10	Série chronologique du régresseur X^1 réel	120
6.11	Série chronologique du régresseur X^2 réel	121
6.12	Série chronologique du taux court réel	121
6.13	Historique de prix zéro-coupon réel reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)	122
6.14	Historique de taux <i>spot</i> zéro-coupon réel reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)	122
6.15	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 6 juillet 2010	122
6.16	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 6 juillet 2010	122
6.17	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 25 avril 2012	123
6.18	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 25 avril 2012	123
6.19	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 15 mai 2014	123
6.20	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 15 mai 2014	123
6.21	<i>Fitting</i> de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 3 mars 2017	124
6.22	<i>Fitting</i> de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 3 mars 2017	124
6.23	Surface de pondérations des <i>cap</i> inflation au 22 juin 2016	129
6.24	Série chronologique du régresseur β_0	133
6.25	Série chronologique du régresseur β_1	133
6.26	Série chronologique du régresseur β_2	133
6.27	Série chronologique du régresseur β_3	133
6.28	Série chronologique du régresseur β_4	133
6.29	Série chronologique du régresseur β_5	133
6.30	<i>Fitting</i> de la nappe de volatilité implicite des <i>cap</i> inflation au 9 février 2010	134
6.31	<i>Fitting</i> de la nappe de prix des <i>cap</i> inflation au 9 février 2010	134
6.32	<i>Fitting</i> de la nappe de volatilité implicite des <i>cap</i> inflation au 14 janvier 2013	134
6.33	<i>Fitting</i> de la nappe de prix des <i>cap</i> inflation au 14 janvier 2013	134
6.34	<i>Fitting</i> de la nappe de volatilité implicite des <i>cap</i> inflation au 29 janvier 2018	135
6.35	<i>Fitting</i> de la nappe de prix des <i>cap</i> inflation au 29 janvier 2018	135
6.36	<i>Fitting</i> de la nappe de volatilité implicite des <i>cap</i> inflation au 25 mars 2016	135
6.37	<i>Fitting</i> de la nappe de prix des <i>cap</i> inflation au 25 mars 2016	135
6.38	Historique de la série chronologique de l'indice d'inflation européenne CPTFEMU, du 01/01/2010 au 23/01/2019	137
6.39	Structure par terme de γ_0 au 27 mai 2011, OATi	139
6.40	<i>Fitting</i> des prix au 27 mai 2011, OATi	139
6.41	Structure par terme de γ_0 au 7 avril 2015, OATi	139
6.42	<i>Fitting</i> des prix au 16 septembre 2015, OATi	139
6.43	Structure par terme de γ_0 au 1er août 2017, OATi	140
6.44	<i>Fitting</i> des prix au 1er août 2017, OATi	140
6.45	Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité OATi	142
6.46	Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité OATi	142
6.47	Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité OATi	142
6.48	(Vue 1) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), OATi	142
6.49	(Vue 2) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), OATi	142
6.50	Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe, OATi	143
6.51	Structure par terme de γ_0 lissée et <i>fitting</i> au 4 juillet 2013, OATi	143
6.52	Structure par terme de γ_0 lissée et <i>fitting</i> au 22 octobre 2015, OATi	143
6.53	Structure par terme de γ_0 lissée et <i>fitting</i> au 4 décembre 2018, OATi	143
6.54	<i>Fitting</i> des prix d'OATi après lissage déterministe/stochastique au 4 juillet 2013	143
6.55	<i>Fitting</i> des prix d'OATi après lissage déterministe/stochastique au 21 avril 2016	143
6.56	<i>Fitting</i> des prix d'OATi après lissage déterministe/stochastique au 26 octobre 2018	144
6.57	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OATi AP8659363 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	144

6.58	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OATi EC7356149 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	144
6.59	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OATi EK3265163 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	144
6.60	<i>Fitting</i> de l'historique de prix de l'OATi EK7554323 par les modèles de lissage déterministe et stochastique	144
7.1	Technique de décote des flux obligataires par stratégie d'achat/vente itérative . . .	156
8.1	(Vue 1) Historique de taux OAT reproduit par le cadre (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus)	159
8.2	(Vue 2) Historique de taux OAT reproduit par le cadre (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus)	159
8.3	Réplication du taux OAT 1 an	159
8.4	Réplication du taux OAT 2 ans	159
8.5	Réplication du taux OAT 5 ans	160
8.6	Réplication du taux OAT 7 ans	160
8.7	Réplication du taux OAT 10 ans	160
8.8	Réplication du taux OAT 20 ans	160
8.9	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 26 avril 2010	160
8.10	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 19 mai 2011	160
8.11	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 1er décembre 2012	161
8.12	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 6 novembre 2013	161
8.13	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 15 octobre 2014	161
8.14	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 26 juin 2015	161
8.15	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 20 décembre 2016	161
8.16	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 2 février 2017	161
8.17	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 19 janvier 2018	162
8.18	Réplication de la structure par terme de taux OAT au 15 janvier 2019	162

Liste des tableaux

3.1	Paramètre d'échelle et paramètres de la matrice de volatilité AFNS	42
4.1	Paramètres d'échelle du lissage λ_0	66
4.2	Paramètre extérieur (volatilité) du processus de <i>convenience yield</i>	70
4.3	Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du <i>convenience yield</i> taux fixe, France	73
4.4	Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du <i>convenience yield</i> taux fixe, Espagne	73
4.5	Paramètre extérieur du modèle de probabilités de défaut historiques	82
5.1	Paramètre extérieur (volatilité) du processus de <i>convenience yield</i> FRN	94
5.2	Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du <i>convenience yield</i> , FRN	96
6.1	Paramètre d'échelle et paramètres de la matrice de volatilité	120
6.2	Paramètre extérieur (volatilité) du processus de <i>convenience yield</i> de l'OATi	139
6.3	Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du <i>convenience yield</i> , OATi	141
7.1	Tableau récapitulatif des modèles du cadre de valorisation dynamique d'obligations structurées, des paramètres en <i>output</i> ainsi que des séries chronologiques qui caracté- risent les facteurs de risque du cadre	153
A.1	Résultats du processus de sélection de modèle économétrique - Nappe de volatilité implicite des <i>cap</i> inflation (1)	170
A.2	Résultats du processus de sélection de modèle économétrique - Nappe de volatilité implicite des <i>cap</i> inflation (2)	171

Introduction

Dans un contexte économique et financier qui a généré d'importantes liquidités pilotables dans les portefeuilles de performance, les assureurs se tournent naturellement vers des stratégies de portefeuille plus sophistiquées, nécessitant d'évaluer leur pérennité sur longue période. La maîtrise du risque de telles stratégies est un sujet ouvert très difficile à cadrer par la pluralité des facteurs de risque à projeter, la cohérence du cadre voire même la cohabitation entre les deux univers de projection (monde réel pour la diffusion de la filtration financière et risque neutre pour le *pricing*), l'hétéroscédasticité des séries financières à modéliser, les problématiques statistiques de multicollinéarité et d'*overfitting* puis enfin la réplcation des prix de marché historiques.

L'objet des travaux réalisés est la construction d'un cadre de valorisation dynamique permettant l'évaluation de stratégies financières complexes. Cette approche multicritère repose sur la reproduction dans le temps des prix de marché et la capacité à les prédire, la cohérence imbriquée des modèles AOA utilisés pour le *pricing*, l'évolution de la filtration financière par des processus adaptés aux séries financières, un calibrage innovant fixant des paramètres dans le temps et laissant un degré de liberté aux modèles AOA pour suivre l'évolution des prix historiques. La présente étude, malgré un cadre plus global, se focalise sur la partie crédit en revisitant le modèle de Longstaff-Mithal-Neis [2004].

La littérature propose des idées intéressantes mais incomplètes sur la construction d'un cadre de valorisation dynamique. A titre illustratif, la modélisation dynamique de la structure par terme des taux d'intérêt par l'approche «*Dynamic Nelson-Siegel*» de Diebold, Li et Yue [2008] pose plusieurs questions. Tout d'abord, comment intégrer cette représentation *state-space* dans une approche multivariée ? Ensuite, comment utiliser des techniques de filtrage robustes et intelligentes (filtrage de Kalman et son algorithme *Expectation-Maximization* associé) si l'équation de mesure n'est pas linéaire ? Comment conserver un cadre AOA lorsque l'on souhaite effectuer une diffusion des prix en monde réel ?

Dans leur article fondateur de l'approche *Dynamic Nelson-Siegel*, Diebold et Li [2006] proposent de «*casser*» la représentation espace-état pour une estimation en plusieurs étapes. En effet, leur idée est d'abord d'estimer par méthode des moindres carrés ordinaire à chaque pas de temps, les facteurs de déformation de la structure par terme, à paramètre d'échelle fixé. Ensuite, ils considèrent les séries chronologiques qui en découlent et traitent la notion de «*dynamique*» en leur appliquant un modèle de séries temporelles monovarié. Cette idée est une solution souple permettant de sortir des hypothèses de linéarité des équations de mesures et d'homoscédasticité des résidus, hypothèses inadéquates aux séries financières. Ceci étant, le problème majeur de cette approche est l'absence de cadre de valorisation AOA permettant d'extraire l'information implicite du marché. En d'autres termes, cette modélisation permet de reproduire dynamiquement des structures par terme de taux d'intérêt et *a fortiori* des taux zéro-coupon *spot*, mais il est théoriquement incohérent de repartir en formule ouverte pour un calcul de «*Best Estimate of Liabilities*» ou de valoriser des produits de taux de type *Floating-Rate-Note* pour lesquels l'hypothèse d'indépendance entre les variables ne suffit plus pour leur évaluation, l'hypothèse d'AOA étant nécessaire pour utiliser l'approche martingale (garantissant l'existence d'une mesure de probabilité risque neutre).

La construction d'un cadre de valorisation dynamique ne devient alors pertinente qu'à travers la cohabitation entre la diffusion monde réel d'un modèle de séries temporelles et la valorisation par approche risque neutre. Cette hybridation permet d'obtenir, à chaque pas de temps monde réel, une nouvelle filtration financière et l'ensemble des paramètres implicites nécessaires à une évaluation par l'approche martingale. Pour reprendre l'exemple précédent, le modèle qui dans le même esprit,

reprend les propriétés attendues, est la version AOA du modèle de *Nelson-Siegel* (*Arbitrage-Free Nelson-Siegel*) de Christensen [2010]. En effet, il intègre des paramètres implicites supplémentaires inhérents à l’approche risque neutre mais conditionnellement à ceux-ci, l’expression des taux zéro-coupon est toujours linéaire en les paramètres de déformation et l’estimation en plusieurs étapes est toujours possible dans un cadre de moindres carrés. Le recours à un tel critère d’optimisation est un luxe parfois primordial puisqu’il garantit une consistance des optimums (en l’occurrence globaux) dans le temps. Une autre technique d’estimation pourrait générer des impuretés (sauts et forte volatilité) dans les séries chronologiques à cause des problèmes d’identification et de minimums locaux.

L’état de l’art en la matière fait apparaître que la littérature est assez peu développée sur les problématiques de valorisation dynamique. Quand bien même des modèles théoriques flexibles existent, leur procédure de calibration issue d’un cadre complexe d’hybridation entre la probabilité historique et la probabilité risque neutre est inexplorée. En effet, la valorisation prospective induite par le ou les changements de probabilité doit théoriquement être en cohérence avec la probabilité historique. Autrement dit, les paramètres implicites des modèles de *pricing* dont les formules fermées émanent de changements de mesures de probabilité successifs doivent être corrélés avec les scénarios financiers. Typiquement, les volatilités implicites issues de la valorisation des dérivés actions sont d’une part dépendantes du temps, et d’autre part fortement corrélées avec les différents stress de marché. Malgré ce constat, les études financières se basent souvent sur une hypothèse de « cristallisation » des paramètres implicites. Par exemple, les modèles ALM classiques prennent généralement en entrée une unique structure de volatilité implicite pour valoriser les dérivés vanilles dans le futur. Le principe phare de nos travaux consiste alors à extraire des prix de marché, la structure des paramètres implicites de façon à considérer ces derniers comme des variables aléatoires dont les réalisations sont observables dans le passé.

Le périmètre de l’étude est la modélisation du risque de crédit des produits de taux (obligations à taux fixe, à taux variable, indexées). Le modèle original de Longstaff-Mithal-Neis est défini à paramètres cristallisés pour reproduire une structure par terme des primes CDS ainsi que des prix de produits obligataires à taux fixe. Le constat d’une telle spécification est que quels que soient les paramètres, le modèle réplique une structure par terme théorique de primes CDS qui ne reproduit pas celle du marché. De cette manière, le modèle n’est pas véritablement construit de sorte à répliquer des prix de marché et extraire les facteurs de risque de crédit contenus dans l’information de marché des dérivés de crédit. Notre première innovation a été de définir autant de modèles qu’il y a de maturités de marché disponibles. Ensuite, comme énoncé brièvement en début d’introduction, nos recherches nous ont conduit à cristalliser des paramètres (extérieurs) et à rendre *time-dependent* tous les autres (intérieurs) dans la calibration. Typiquement, dans le modèle LMN, les paramètres qui caractérisent les conditions initiales (intensité de défaut λ_0 et *convenience yield* γ_0) sont rendus dépendants du temps et de la maturité lors de la calibration. Ceci permet de reproduire les structures par terme de prix CDS ainsi que les prix de paniers d’obligations, atout fondamental d’un cadre de valorisation dynamique de qualité.

Par ailleurs, le modèle LMN est développé dans son article original en supposant un taux de coupon constant et donc indépendant du taux court instantané. Or, cela n’est pas toujours le cas. Notamment, lorsque l’on souhaite modéliser les obligations à taux variable ou les obligations indexées, il s’avère que le taux de coupon est directement lié à la structure par terme des taux d’intérêt ou à l’indice des prix à la consommation. Notre approche vise en partie à combler ce manque d’exhaustivité en étendant la spécification du modèle. La réintégration de notre modèle de taux d’intérêt *arbitrage-free* dans le cadre LMN fait partie de, ce que l’on appelait précédemment, la cohérence imbriquée des modèles AOA. L’erreur typique, dans un autre exemple, pourrait être de spécifier un cadre simple de valorisation des obligations indexées tel que le cadre de Jarrow et Yildirim [2011], spécifiant les taux courts nominaux et réels comme des processus stochastiques monofactoriels (de type Ornstein-Uhlenbeck). Dans ce cas, il ne serait plus possible de modéliser la structure par terme des taux d’intérêt par un modèle à plusieurs facteurs stochastiques sans mettre en péril la cohérence au sein du cadre.

La présente étude s’intéresse particulièrement à la mise en place du cadre de valorisation dynamique, en développant sa construction de manière chronologique. La spécification, la calibration et les éléments techniques de modélisation sont détaillés au fur et à mesure de l’exposé, auxquels

s'ajoutent ponctuellement des éléments d'analyse et des critiques éventuelles sur les choix et les résultats obtenus. Le socle théorique du cadre est développé en première partie, amenant peu à peu les éléments fondateurs du sujet ainsi que les principaux résultats théoriques et mathématiques qui sont utilisés tout le long de l'étude. Dans un second temps, la phase entière de spécification, de modélisation et de calibration de chaque élément du cadre est abordée. Les résultats sont présentés au fil du développement, et des formules fermées et semi-fermées caractérisant les prix d'obligations structurées ainsi que le prix du caplet indexé sur l'inflation sont obtenues, éventuellement démontrées. Pour finir, deux exemples d'utilisation concrète du cadre de valorisation dynamique sont présentés en application : la quantification du risque de crédit lors de l'élaboration des échéanciers de flux du modèle ALM, ainsi que la réplication de structures par terme de rendements obligataires, dont l'importance pratique en ALM n'est plus à démontrer. La qualité de réplication des courbes de taux risqués nous amène à valider l'approche, étape nécessaire avant l'utilisation du cadre pour la diffusion de prix en monde réel.

Première partie

Fondements théoriques du cadre

Chapitre 1

Théorie financière

Sommaire

1.1 Mesures de probabilité et cohérence du cadre de valorisation	4
1.1.1 Théorème de changement de mesure et valorisation de produits dérivés .	4
1.1.2 Quelques mots sur ce qui lie les mesures de probabilité au sein du cadre de valorisation	6
1.2 Eléments de calcul stochastique	9
1.2.1 Lemme d'Itô multidimensionnel	9
1.2.2 Théorème de Feynman-Kac	9
1.3 Taux d'intérêt et produits dérivés de taux	10
1.3.1 Obligation zéro-coupon, taux d'intérêt <i>spot</i> et taux <i>forward</i>	10
1.3.2 <i>Swap</i> de taux et <i>stripping</i>	13
1.3.3 <i>Cap</i> , <i>floor</i> et <i>swaption</i>	14

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principaux résultats du calcul stochastique et de la finance quantitative ainsi que la base théorique du calcul sur les taux d'intérêts et les produits dérivés de taux, qui serviront dans toute la suite de ce mémoire. Des développements critiques et objectifs sont faits sur le sujet de la cohérence d'un cadre de valorisation dynamique et des rappels sont effectués à propos du changement de mesure de probabilité.

1.1 Mesures de probabilité et cohérence du cadre de valorisation

1.1.1 Théorème de changement de mesure et valorisation de produits dérivés

Dans cette partie, on énonce les résultats de la théorie des probabilités et du calcul stochastique qui permettent d'effectuer des changements de mesure de probabilité dans le cadre construit dans ce mémoire. La mesure de probabilité risque neutre est introduite, ainsi que le théorème de valorisation des produits dérivés.

Précisons que le but n'est ni de détailler le raisonnement qui amène à la construction de la mesure de probabilité risque neutre, ni de démontrer les résultats. Des explications détaillées concernant la mesure de probabilité risque neutre sont faites dans la Section 1.1.2. De plus, le lecteur pourra se référer à [8], [7] et [21] pour des développements exhaustifs.

On se place dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Théorème de changement de mesure de probabilité

On rappelle tout d'abord ce qu'est une martingale :

Définition 1.1.1. *Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est une **martingale** si $\forall t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable, intégrable, et si il satisfait l'identité caractéristique :*

$$\forall s \geq 0, \forall t \geq s, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s. \quad (1.1)$$

Soit $T > 0$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ un $\mathbb{F}$ -mouvement brownien sous la mesure $\mathbb{P}$. Sachant une nouvelle mesure dont la forme est spécifiée, le théorème de Girsanov permet de caractériser un nouveau mouvement brownien sous cette mesure, construit à partir de $(W_t)_{t \geq 0}$. Soit $(\theta_t)_{t \geq 0}$ un processus vérifiant des conditions de régularité "convenables" de sorte que les quantités écrites ci-dessous aient un sens, et satisfaisant la condition de Novikov :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt \right) \right] < +\infty. \quad (1.2)$$

Théorème 1.1.1 (Théorème de Girsanov). *Soit le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique :*

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = \theta_t dW_t, \quad (1.3)$$

avec la condition initiale $Z_0 = 1$. Ce processus est appelé **exponentielle de Dauléans-Dade**, ou **exponentielle stochastique** du processus $\left(\int_0^t \theta_s ds \right)_{t \geq 0}$. La condition de Novikov est une condition suffisante pour assurer que le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ est une martingale (en particulier uniformément intégrable), en assurant :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_{\infty}] = 1. \quad (1.4)$$

De plus, on a :

$$Z_T = \exp \left(\int_0^T \theta_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt \right). \quad (1.5)$$

Soit $\hat{\mathbb{P}}$ la mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{F}_T$ par :

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

La variable aléatoire Z_t est, à une constante de normalisation près, la densité de Radon-Nikodym associée à ce changement de mesure. Pour tout $\mathbb{F}$ -mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ sous $\mathbb{P}$, le théorème de Girsanov assure alors que le processus $(\hat{B}_t)_{t \geq 0}$ défini par :

$$d\hat{B}_t = dB_t - \frac{d\langle Z, B \rangle_t}{Z_t} \quad (1.7)$$

est un $\mathbb{F}$ -mouvement brownien sous la mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$.

On a donc, en particulier, que le processus $(\hat{W}_t)_{t \geq 0}$ défini par :

$$d\hat{W}_t = dW_t - \theta_t dt \quad (1.8)$$

est un $\mathbb{F}$ -mouvement brownien sous la mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$.

Le théorème de Girsanov va permettre, entre autres, de construire des mesures de probabilités qui rendent martingales des processus, sous la condition de choisir judicieusement le processus de l'exponentielle stochastique. Il est une alternative à la technique de changement de numéraire : les deux méthodes sont en fait équivalentes dans un cadre dont la filtration est celle engendrée par les mouvements browniens, mais l'on préférera celle du changement de numéraire pour gagner en efficacité dans les calculs. Cette utilisation s'avère extrêmement pratique dans l'évaluation des produits dérivés, notamment pour exhiber des équations aux dérivées partielles dont sont solutions les prix à calculer, ou simplement pour déterminer la forme des dynamiques après changement de numéraire. De plus, il est important de noter que le changement de mesure induit par le théorème de Girsanov ne change que le *drift* de la semi-martingale lors du changement de brownien. Cela signifie que la volatilité est inchangée, et donc que l'on se place sous l'une des deux mesures ou sous l'autre, la volatilité reste la même et le *drift* est translaté du produit de la volatilité et du processus qui caractérise le changement de mesure. Cela permet, par exemple, d'annuler la partie à variation finie de la dynamique pour construire des martingales locales.

Le théorème suivant permet d'appliquer le changement de mesure conditionnellement à de l'information :

Théorème 1.1.2 (Formule de Bayes généralisée). *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus $\mathbb{F}$ -adapté. Alors, $\forall t \leq T$,*

$$\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[X_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_T}{Z_t} X_T | \mathcal{F}_t\right]. \quad (1.9)$$

On utilise généralement cette formule pour manipuler des changements de mesure de probabilité dans les calculs de prix de produits dérivés.

Mesure martingale et lien avec les hypothèses du marché

On définit une mesure de probabilité risque-neutre comme suit :

Définition 1.1.2. Une *mesure de probabilité risque-neutre*, ou *mesure martingale*, est une mesure de probabilité équivalente à la mesure de probabilité historique $\mathbb{P}$ telle que tout processus de prix actualisé est une martingale (locale) sous cette nouvelle mesure.

Cette mesure est construite en tant qu'outil mathématique et non pas en tant que concept économique ou financier. En effet, elle ne génère pas des probabilités réellement interprétables, mais elle permet d'évaluer les actifs financiers et notamment, dans notre cadre, de construire des raisonnements fondés sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage pour exhiber des équations d'évolution aux dérivées partielles ou écrire les prix d'actifs sous la forme d'une espérance

de flux actualisés. Un aspect remarquable de cet outil est sa compatibilité au sein des principaux piliers de la théorie financière : on retrouve par exemple des résultats analogues ou même identiques en adoptant des hypothèses similaires en microéconomie, mais en se fondant sur un raisonnement d'équilibres. Dans la théorie de la finance quantitative, sous l'hypothèse d'AOA, l'apparition de la mesure de probabilité risque-neutre émane de l'étude de stratégies de portefeuille autofinçant admissibles qui répliquent les prix de produits dérivés (options européennes en particulier). On pourra se référer à [8] pour une exploration exhaustive de ces fondamentaux.

Il est possible de démontrer que l'absence d'opportunité d'arbitrage équivaut à l'existence d'une mesure martingale. L'unicité est garantie si le marché dans lequel on se place est **complet**, c'est-à-dire dans le cas, pour T fixé, où toutes les variables aléatoires $\mathcal{F}_T$ -mesurables sont répliquables par une stratégie de portefeuille autofinçant admissible. Lorsque le marché est incomplet, il peut exister plusieurs mesures de probabilité risque-neutre et donc plusieurs prix pour un même actif (généralement une infinité). Dans ce cas, le prix du produit dérivé est borné par deux espérances sous des mesures martingales distinctes, et c'est le niveau d'aversion au risque qui dirige le choix de la mesure sous laquelle la valorisation est effectuée.

Evaluation des produits dérivés

On suppose à présent que le marché est complet, il existe donc une unique mesure de probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$.

Théorème 1.1.3 (Théorème financier de valorisation). *Soit un produit dérivé de pay-off H_T en T , variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable. On note $(\delta(t, T))_{t \geq 0}$ le processus de facteur d'actualisation. Alors, en toute date $t \leq T$, le prix de ce produit dérivé, que l'on note P_t , s'écrit :*

$$P_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\delta(t, T) H_T \mid \mathcal{F}_t]. \quad (1.10)$$

Ce résultat est démontré en utilisant la propriété de martingalité du processus de prix actualisé $(\delta(0, t) P_t)_{t \geq 0}$ sous la mesure martingale $\mathbb{Q}$, et en utilisant le fait que *p.s.*, $\delta(0, t) \delta(t, T) = \delta(0, T)$. Pour apporter une preuve rigoureuse, on devrait considérer un portefeuille autofinçant qui réplique le *pay-off* en T , et utiliser l'équation différentielle caractéristique des portefeuilles autofinçants. Il faut ainsi garder à l'esprit que le prix d'un produit dérivé, c'est le prix de sa couverture.

La proposition suivante expose une formule ouverte d'évaluation pour les obligations sans risque en temps continu. En pratique, les obligations sans risque sont valorisées en temps discret, aux justes dates de paiement, en considérant des conventions de calcul des taux d'intérêt (composition simple, annuelle ou continue), des conventions de calendrier pour le calcul des différentiels de dates, le calcul du coupon couru, ... Mais cette formule est un moyen de mettre un pied à l'étrier avant d'aborder l'évaluation de l'obligation risquée dans le chapitre suivant.

Proposition 1.1.1 (Valorisation d'une obligation en temps continu). *Soit une obligation non-riqué de coupon variable $(c_t)_{t \geq 0}$ qui est un processus $\mathbb{F}$ -adapté, de maturité T et de nominal 1. On suppose que le coupon est versé en continu sur toute la durée de vie de l'obligation. Alors, en toute date $t \leq T$, le prix de l'obligation, que l'on note B_t , s'écrit :*

$$B_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T c_u \delta(t, u) du + \delta(t, T) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (1.11)$$

1.1.2 Quelques mots sur ce qui lie les mesures de probabilité au sein du cadre de valorisation

La construction et l'utilisation de plusieurs modèles financiers stochastiques fondés sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage nécessitent la spécification d'un cadre mathématique où

cohabitent la mesure de probabilité monde réel, la mesure de probabilité risque neutre et souvent d'autres mesures qui servent d'outils mathématiques pour la valorisation de produits financiers variés (mesure *forward* neutre associée au numéraire prix zéro-coupon, mesure level associée au numéraire taux *swap forward*,...). Ces mesures sont indissociables et toute ambiguïté dans la spécification des densités de Radon-Nikodym qui caractérisent les changements de mesure peut peser sur la qualité du modèle et amener les praticiens à faire des confusions. La quête principale de l'ingénieur quantitatif est alors de garantir une certaine cohérence entre les modèles qui composent son cadre de valorisation prospective, et cela passe par une spécification théorique rigoureuse et peaufinée. Malgré ce constat, peu de travaux ont réellement tenté d'apporter une solution au problème de la cohabitation des mesures au sein d'un ensemble de modèles utilisés à des fins de projection comme les modèles internes des compagnies d'assurance. De plus, les différences structurelles entre les univers constituent un obstacle majeur qui a souvent conduit les praticiens à faire des hypothèses ou des approximations fort réductrices.

Pour contourner le problème, l'une des pratiques les plus répandues dans les modèles de *pricing* est de s'affranchir de la spécification du changement de mesure, en prenant comme point de départ une dynamique écrite sous la mesure de probabilité qui "arrange" le technicien. Par exemple, pour valoriser un produit dérivé de taux (en supposant le taux d'intérêt stochastique), on utilise fréquemment la mesure de probabilité *forward* neutre ce qui amène certains praticiens à directement spécifier le modèle sous cette mesure, et non pas sous la mesure de probabilité monde réel ou risque neutre. De plus, le choix de la densité de Radon-Nikodym associée au changement du monde réel au monde risque neutre est souvent fait de manière à obtenir une nouvelle dynamique dont la seule différence est une simple translation d'un paramètre du *drift* (par exemple, le modèle de Cox-Ingersoll-Ross dans leur article fondateur [16]). Cette translation implique naturellement que calibrer simultanément tous les paramètres du modèle avec pour point de départ une dynamique monde réel revient à calibrer simultanément les paramètres avec pour point de départ une dynamique risque neutre. Cela justifie les usages de la finance quantitative concernant la mesure de probabilité sous laquelle les modèles sont spécifiés en pratique, d'autant plus que ces modèles sont presque toujours utilisés à des fins de *pricing* et donc la dynamique utilisée lors du calcul des prix de produits financiers est dirigée par une mesure abstraite.

En gestion des risques, il est commun de travailler dans un cadre où des grandeurs économiques et financières évoluent dynamiquement et où les risques à quantifier ne peuvent être étudiés isolément. Même sous l'hypothèse d'indépendance des processus, l'outil de projection doit "faire vivre" ces derniers de manière cohérente. Cela implique par exemple que la densité de Radon-Nikodym associée à chaque changement de mesure de probabilité est unique. Il ne doit pas être possible d'utiliser un changement de mesure différent d'une modélisation à une autre. Par exemple, lors de la construction d'un cadre de valorisation dynamique, l'erreur typique est de considérer un modèle de taux d'intérêt nominal en vue d'évaluer un produit dérivé de taux, puis d'en considérer un autre lors de la spécification d'un modèle d'inflation. Pour réaliser un cadre de valorisation valable, il faut donc veiller à spécifier des modèles de base (modèle de taux d'intérêt, de sous-jacent,...) et à les conserver pour le *pricing* de tous les produits dérivés du portefeuille.

Univers monde réel

Dans cet univers, les projections sont faites de manière à reproduire les indicateurs économiques et financiers le plus précisément possible. Les modèles sont calibrés sur des historiques de données. L'une des différences fondamentales avec le travail sous la mesure risque neutre est qu'en monde réel l'étude des quantiles des distributions est privilégiée à l'étude de la moyenne. C'est notamment dans l'univers monde réel que sont utilisés les modèles de séries temporelles multivariés à volatilité stochastique et parfois à changement d'états. Ces séries temporelles sont calibrées sur un historique de données conséquent et permettent notamment de projeter les indices économiques et financiers dans un cadre à structure de corrélation embarquée (séries temporelles vectorielles). Ces modèles sont bien plus étoffés que les modèles classiques de corrélation comme les copules. Globalement, ils permettent de spécifier directement une corrélation évolutive entre les indices, plutôt que de tout d'abord émettre une hypothèse de corrélation bivariée pour chaque couple de variables par la spécification de copules par exemple. Un tel cadre permet ainsi de faire évoluer

des processus stochastiques hétéroscédastiques plus ou moins interdépendants, dont les projections sont notamment utilisées pour l'élaboration d'une stratégie d'allocation d'actifs ou d'un processus d'allocation dynamique en ALM.

Mesure risque neutre

Initialement, la mesure de probabilité risque neutre est utilisée en tant qu'outil mathématique d'évaluation de produits financiers. Elle permet, entre autres, de déterminer les équations aux dérivées partielles dont les processus de prix de produits dérivés sont solutions. Certaines de ces équations (notamment l'EDP de Black-Scholes) peuvent toutefois être déduites de l'application de formules de Taylor-Young après différenciation du *Profit & Loss* : le lecteur pourra se référer au livre de Bergomi L. [17] pour une étude approfondie de modèles financiers AOA sans aucune considération de mesure risque neutre. De plus, le praticien peut être amené à utiliser les dynamiques risque neutre des processus stochastiques en vue de simuler les processus (dont les réalisations, précisons-le, n'existent pas) et d'estimer des espérances mathématiques par Monte-Carlo. Par exemple, l'évaluation d'un *Best Estimate of Liabilities* requiert (pas seulement) le calcul d'une espérance sous la mesure risque neutre qui n'est généralement pas calculable analytiquement. Dans ce cas, il peut être nécessaire d'effectuer des simulations à partir de dynamiques abstraites.

Dans l'univers risque neutre, les agents économiques sont considérés comme neutres à l'égard du risque ce qui implique la nullité des primes de risque. De cette manière, évaluer un produit dérivé revient à estimer la perte moyenne pour le vendeur de l'option, le gain moyen pour l'acheteur. La masse induite par la mesure de probabilité risque neutre est répartie de sorte que l'espérance du flux actualisé respecte cette hypothèse de neutralité vis-à-vis du risque dans l'évaluation du prix. Sa propriété d'équivalence avec la mesure de probabilité monde réel implique que tout événement non négligeable pour l'une des deux mesures l'est également pour l'autre. Cependant, il faut garder à l'esprit que les valeurs prises par les deux mesures en un même événement peuvent être radicalement différentes. Par exemple, nous verrons lors de la modélisation du risque de défaut et de la calibration du modèle que les structures par terme de probabilités de défaut prennent des valeurs sensiblement différentes suivant si l'on se place sous la mesure historique ou sous la mesure risque neutre. Ces différences de répartition de masse de probabilité peuvent alors poser problème si l'on souhaite évaluer des probabilités "réellement" interprétables à partir d'un modèle spécifié en risque neutre. Il faut dans ce cas effectuer un changement de mesure et pour cela, émettre une nouvelle hypothèse quant à la forme du processus qui caractérise la densité de Radon-Nikodym associée au changement de mesure. Cette hypothèse se révèle généralement arbitraire et peut engendrer des erreurs de calibration...

Lorsque l'on travaille dans un cadre risque neutre, les modèles doivent être calibrés par rapport à des prix de marché fiables. Le critère de fiabilité est souvent assimilé à un critère de liquidité des points choisis. Par exemple, dans un modèle de taux, on choisira généralement de calibrer le modèle sur des maturités pour lesquelles les échanges se font en volume important sur le marché plutôt que celles sur lesquelles peu d'achats et de ventes sont effectués. En ALM, les scénarios générés par la diffusion des processus en risque neutre sont utilisés principalement à des fins de valorisation de garanties assurantielles et d'options financières exotiques.

Approche hybride : cohabitation des deux mesures dans le cadre

Il est possible de faire cohabiter ces deux univers au sein d'un même cadre, notamment lorsque l'on souhaite développer un générateur de scénarios économiques en ALM. Le cadre construit dans ce mémoire propose une méthode d'extraction, à partir d'un historique conséquent d'information de marché (prix, volatilités,...), de séries chronologiques de paramètres implicites réels inobservables, dans le but de diffuser leur structure au moyen d'un modèle de série temporelle multivarié. A partir des régresseurs projetés, les structures de paramètres implicites sont alors reconstruites et entrent en *input* dans les formules de valorisation obtenues par l'approche probabiliste (formules fermées et semi-fermées). De cette manière, les prix sont reconstruits et on assure une imbriquantion cohérente

des modèles financiers, en projetant des séries en monde réel pour reproduire des prix en risque neutre. Cette modélisation permet d'adapter la théorie du *pricing* par l'approche martingale tout en exploitant la puissance statistique et la flexibilité des modèles de séries temporelles inhérents aux générateurs de scénarios économiques monde réel. En d'autres termes, cela permet de projeter des prix par une pseudo-approche monde réel en conservant un cadre AOA.

1.2 Éléments de calcul stochastique

1.2.1 Lemme d'Itô multidimensionnel

Le lemme d'Itô est un résultat central du calcul stochastique. L'énoncé de sa version multidimensionnelle est le suivant :

Théorème 1.2.1 (Lemme d'Itô multidimensionnel). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une semi-martingale continue n -multidimensionnelle. On note $\nabla_X f$ le gradient de f par rapport à la seconde variable X et $\mathcal{H}_X f$ la matrice hessienne de f par rapport à la seconde variable X . Alors :*

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + (\nabla_X f(t, X_t))' dX_t + \frac{1}{2} (dX_t)' \mathcal{H}_X f(t, X_t) dX_t.$$

Théorème 1.2.2 (Lemme d'Itô multidimensionnel pour un processus d'Itô). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô de dimension n de dynamique :*

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \Sigma(t, X_t) dW_t,$$

où $(t, x) \mapsto \mu(t, x)$ définit un vecteur de drift de dimension n , $(t, x) \mapsto \Sigma(t, x)$ définit une matrice de volatilité de dimension $n \times d$ et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathbb{P}$ -mouvement brownien d -multidimensionnel. Alors, l'application du lemme d'Itô à f mène à :

$$df(t, X_t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + (\nabla_X f(t, X_t))' \mu(t, X_t) dt + \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\Sigma(t, X_t))' \mathcal{H}_X f(t, X_t) \Sigma(t, X_t) \right\} dt \right. \\ \left. + (\nabla_X f(t, X_t))' \Sigma(t, X_t) dW_t \right]$$

Cette écriture matricielle du lemme d'Itô s'avère relativement pratique dans l'étude de modèles à plusieurs facteurs stochastiques. Elle sera notamment utile dans ce mémoire lors de la modélisation du prix du zéro-coupon.

Remarque 1.2.3. *Le terme en trace qui apparaît dans cette expression est issu de l'indépendance mutuelle des mouvements browniens unidimensionnels qui composent $(W_t)_{t \geq 0}$. Ainsi, comme le produit matriciel issu d'Itô fait intervenir une forme quadratique en X , les seuls termes non nuls de ce produit sont les crochets stochastiques de chaque mouvement brownien unidimensionnel et donc le produit aboutit à la somme de la diagonale de la matrice issue du produit matriciel. Ceci mène à l'expression voulue.*

1.2.2 Théorème de Feynman-Kac

Théorème 1.2.4 (Théorème de Feynman-Kac financier multidimensionnel). *Soit $(f(t, X_t))_{t \geq 0}$ le processus de prix d'un actif contingent de maturité T et de fonction pay-off g :*

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*, f(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} g(X_T) \mid X_t = x \right], \quad (1.12)$$

où $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô de dimension n de dynamique :

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \Sigma(t, X_t) dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où $(t, x) \mapsto \mu(t, x)$ définit un vecteur de drift de dimension n , $(t, x) \mapsto \Sigma(t, x)$ définit une matrice de volatilité de dimension $n \times d$ et $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ est un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien multidimensionnel de dimension d .

Si f de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, μ et Σ sont des fonctions lipschitziennes en x uniformément en t satisfaisant des conditions d'intégrabilité convenables, r est uniformément borné et f est à croissance quadratique en x uniformément en t , alors le processus de prix est l'unique solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes (existence et unicité) :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + (\nabla_X f(t, x))' \mu(t, x) dt + \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\Sigma(t, x))' \mathcal{H}_X f(t, x) \Sigma(t, x) \right\} = r_t f(t, x).$$

Le théorème de Feynman-Kac sera utilisé plus tard dans ce mémoire, notamment dans la construction théorique de notre modèle de taux.

Remarque 1.2.5. Il existe plusieurs versions du théorème de Feynman-Kac. Celle présentée ci-dessus n'est pas celle du théorème général qui apporte une réponse par une spécification stochastique au problème déterministe de Cauchy. Pour des développements plus exhaustifs et une démonstration du résultat général (par technique de localisation), on pourra se référer à [23].

1.3 Taux d'intérêt et produits dérivés de taux

1.3.1 Obligation zéro-coupon, taux d'intérêt *spot* et taux *forward*

Définition 1.3.1 (Obligation zéro-coupon). Une **obligation zéro-coupon** de maturité T est un contrat qui garantit à son possesseur le paiement d'une unité monétaire à la maturité, sans aucun versement intermédiaire. On note, pour toute date positive $t < T$, le prix d'un tel zéro-coupon : $P(t, T)$. Par absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur d'un zéro-coupon à sa maturité est donnée par : $P(T, T) = 1$.

Le prix d'un tel contrat dépend essentiellement de l'anticipation que l'on a de l'évolution des taux d'intérêts, et de la maturité résiduelle, c'est-à-dire de la différence entre la maturité du contrat et la date de *pricing*. Cet écart de temps doit être évalué correctement et conformément à des règles spécifiques. Ces règles peuvent être différentes d'un marché à un autre. Par exemple, chaque marché supprime du calendrier des jours fériés spécifiques. Pour garantir la justesse des calculs sur les taux, il faut donc se référer aux normes sous-jacentes.

Les prix zéro-coupon historiques ne sont généralement pas directement observables sur les marchés financiers. Le praticien peut être amené à les extraire des prix de produits financiers liquides (*stripping*). Une méthode d'extraction classique des prix des zéro-coupons (*bootstrapping*, de proche en proche) sera détaillée plus loin.

On note la maturité de deux façons : pour les taux d'intérêt, en terme de durée séparant la date d'évaluation de la maturité ; pour le prix zéro-coupon, en terme de date d'échéance.

Définition 1.3.2 (Taux d'intérêt *spot* en composition simple). On appelle **taux d'intérêt spot en composition simple** le taux constant auquel évolue un investissement de manière linéaire. On le notera L et il vérifie donc :

$$\forall t \in [0, T], \quad P(t, T) = \frac{1}{1 + (T - t) L(t, T - t)}. \quad (1.13)$$

Les taux LIBOR sont des taux d'intérêt *spot* en composition simple, ce qui justifie le choix d'une telle notation. Le taux s'écrit :

$$\forall t \in [0, T[, \quad L(t, T - t) = \frac{1 - P(t, T)}{(T - t) P(t, T)}. \quad (1.14)$$

Définition 1.3.3 (Taux d'intérêt *spot* en composition annuelle). *On appelle **taux d'intérêt spot en composition annuelle** le taux constant auquel un investissement produit une unité de monnaie à la maturité, en étant réinvesti une fois par an. On le notera Y (Yield) et il vérifie donc :*

$$\forall t \in [0, T], \quad P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T - t))^{T-t}}. \quad (1.15)$$

Le taux d'intérêt *spot* en composition annuelle est aussi fréquemment appelé **taux actuariel**, la plupart des actualisations de flux, dans les mathématiques actuarielles, étant effectuées avec ce taux. Le taux s'écrit :

$$\forall t \in [0, T[, \quad Y(t, T - t) = \left[\frac{1}{P(t, T)} \right]^{\frac{1}{T-t}} - 1. \quad (1.16)$$

Définition 1.3.4 (Taux d'intérêt *spot* en composition continue). *On appelle **taux d'intérêt spot en composition continue** le taux constant auquel un investissement croît continûment pour produire une unité de monnaie à la maturité. On le notera R et il vérifie donc :*

$$\forall t \in [0, T] \quad P(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T-t)}. \quad (1.17)$$

Pour aboutir à cette écriture, il suffit de remarquer que le taux d'intérêt *spot* en composition périodique, de période $\frac{1}{m}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, noté i^m est tel que :

$$\forall t \in [0, T], \quad P(t, T) = \frac{1}{\left(1 + \frac{i^m(t, T)}{m}\right)^{m(T-t)}}. \quad (1.18)$$

En faisant tendre m vers l'infini, i^m tend vers R et on obtient le résultat voulu. Le taux s'écrit :

$$\forall t \in [0, T[, \quad R(t, T - t) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T). \quad (1.19)$$

L'introduction aux généralités sur les taux d'intérêt amène nécessairement au concept de **taux sans risque**. On le définit de la manière suivante.

Définition 1.3.5 (Compte bancaire et taux sans risque). *On appelle **compte bancaire** le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ de valeur initiale $B_0 = 1$ qui évolue continûment à un taux dépendant du temps $(r_t)_{t \geq 0}$, de sorte que sa dynamique vérifie :*

$$\forall t \geq 0, \quad dB_t = r_t B_t dt. \quad (1.20)$$

*Le processus stochastique $(r_t)_{t \geq 0}$ est appelé **taux sans risque** et correspond au taux auquel un investissement non risqué doit continûment croître en absence d'opportunité d'arbitrage. Il vient directement :*

$$\forall t \geq 0, \quad B_t = e^{\int_0^t r_u du}. \quad (1.21)$$

Le taux sans risque est par construction un processus stochastique, bien qu'il soit supposé déterministe voire constant dans certains modèles financiers populaires. Les raisons pour lesquelles le caractère aléatoire de ce taux est parfois éliminé sont multiples, la principale étant la simplification évidente des calculs et du modèle lui-même. Par exemple, Black et Scholes supposent le taux sans risque constant dans leur modèle d'évaluation des options européennes. Le raisonnement qui cache cette hypothèse irréaliste est le suivant : les fluctuations du prix de l'option sont essentiellement expliquées par celles du cours du sous-jacent et l'influence des variations du taux sans risque sur le prix de l'option peut être supposée négligeable. Cependant, l'évaluation de produits dérivés de taux nécessite la modélisation du taux sans risque en tant que processus stochastique car dans ce cas, les variations de prix sont principalement expliquées par celles des taux.

Définition 1.3.6 (Facteur d'actualisation). *Le **facteur d'actualisation** de t à T est le montant en une date t qui est financièrement équivalent à une unité monétaire en une date ultérieure T . On le notera $\delta(t, T)$ et il s'écrit :*

$$\forall t \in [0, T], \quad \delta(t, T) = \frac{B_t}{B_T} = e^{-\int_t^T r_u du}. \quad (1.22)$$

Le facteur d'actualisation est donc stochastique tel qu'il est défini. Lorsque le taux sans risque est déterministe, on a de manière évidente :

$$\forall t \in [0, T], \quad P(t, T) = \delta(t, T).$$

Notons que le taux sans risque est également nommé **taux court** car sa valeur en t est l'équivalent des taux d'intérêt *spot* pour une maturité située au voisinage de t^+ . En ce sens, il n'est pas observable sur le marché et doit être modélisé..

Définition 1.3.7 (Obligation zéro-coupon *forward*). *Une **obligation zéro-coupon forward** de date d'exercice T_1 et de maturité $T_2 > T_1$ est un contrat, dont le prix est payé en T_1 , qui fournit à son possesseur en T_1 une obligation zéro-coupon de maturité T_2 . On note, pour toute date positive $t < T_1$, le prix d'un tel contrat : $P(t, T_1, T_2)$. Par absence d'opportunité d'arbitrage, on écrit son prix en fonction de prix d'obligations zéro-coupon :*

$$P(t, T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}. \quad (1.23)$$

Définition 1.3.8 (Taux d'intérêt *forward* en composition simple). *On appelle **taux d'intérêt forward en composition simple** évalué en t , effectif en T_1 de maturité T_2 le taux constant convenu en t pour un prêt effectif en T_1 et remboursé en T_2 . On le notera F et il vérifie donc :*

$$\forall t \in [0, T_1], \quad P(t, T_1, T_2) = \frac{1}{1 + (T_2 - T_1) F(t, T_1, T_2 - T_1)}. \quad (1.24)$$

On peut écrire l'expression du taux :

$$\forall t \in [0, T_1], \quad F(t, T_1, T_2 - T_1) = \frac{P(t, T_1) - P(t, T_2)}{(T_2 - T_1)P(t, T_2)}. \quad (1.25)$$

Les taux *forward* sont les taux implicites que le marché évalue en tant qu'anticipations des taux *spot* futurs. Initialement, ils sont construits à partir des *Forward Rate Agreements* (FRA) : c'est le taux fixe contractuel qui égalise les deux jambes du contrat. Les définitions du taux d'intérêt *forward* en composition annuelle et du taux d'intérêt *forward* en composition continue sont obtenues par analogie avec celles des taux d'intérêt *spot* en la même composition. Tout comme dans le cas du taux court, on définit le taux *forward* instantané f comme la limite du taux *forward* implicite lorsque sa maturité tend vers sa date d'exercice :

$$\forall t, T, t < T, \quad f(t, T) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} F(t, T, \theta) \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{P(t, T) - P(t, T + \theta)}{\theta P(t, T + \theta)} \\ &= - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{P(t, T) - P(t, T + \theta)}{\theta} \frac{1}{P(t, T)} \\ &= - \frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T). \end{aligned} \quad (1.27)$$

On en déduit une formule liant le prix zéro-coupon non risqué et le taux *forward* instantané. Par intégration directe, on obtient une nouvelle expression du prix zéro-coupon :

$$\forall (t, T), \quad t < T, \quad P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right). \quad (1.28)$$

1.3.2 Swap de taux et stripping

Depuis les années 80, les contrats *swap* ont été de plus en plus populaires sur les marchés financiers, jusqu'à devenir les produits les plus échangés sur les marchés. L'opération est, de base, effectuée sur des taux d'intérêt, mais est généralisée sur tout type d'indice tel que la devise ou l'inflation. On définit ci-après le contrat *swap* de taux d'intérêt, avant de se concentrer sur la méthode de *stripping* qui permet d'extraire implicitement les taux zéro-coupon des taux *swap*.

Définition 1.3.9. *Un swap de taux d'intérêt est un contrat OTC, de maturité pré-fixée, au terme duquel deux parties s'engagent à échanger pendant un nombre de périodes et pour un nominal contractuellement pré-définis des flux d'intérêts périodiques calculés pour une partie sur la base d'un taux variable constaté (pay-off nommé "jambe variable") et pour l'autre partie sur la base d'un taux fixe contractuel (pay-off nommé "jambe fixe"). La partie qui règle le taux fixe est appelée "swap payeur", celle qui paye le taux variable est appelée "swap receveur".*

On considère un contrat *swap* de taux d'intérêt d'échéance T , avec pour taux variable d'indexation le taux *LIBOR* L , de dates de paiement $\{T_i\}_{i \in [0, n]}$ de sorte que $T_0 = 0$, $T_n = T$ et de nominal N . Le *pricing* d'un tel contrat doit être effectué en considérant un taux fixe qui découle de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Un tel taux doit ainsi garantir, à l'instant de formation du contrat $t = 0$, l'égalité des deux jambes du *swap*. On a d'une part la valeur de la jambe fixe en 0, avec pour taux fixe K :

$$JF_0 = \sum_{i=1}^n P(0, T_i) (T_i - T_{i-1}) K, \quad (1.29)$$

et d'autre part, le *pay-off* de la jambe variable est :

$$\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) L(T_{i-1}, T_i - T_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right). \quad (1.30)$$

Sa valeur en 0 est donc, par un raisonnement d'AOA sur les prix zéro-coupon :

$$JV_0 = \sum_{i=1}^n (P(0, T_{i-1}) - P(0, T_i)) = 1 - P(0, T). \quad (1.31)$$

On appelle **taux swap** le taux de la jambe fixe $R_{\text{swap}, T}$ qui égalise les deux jambes pour garantir, au moment du *pricing* du contrat, un équilibre des engagements (par AOA). En égalisant les deux quantités, on obtient l'expression du taux *swap* de maturité T :

$$R_{\text{swap}, T} = \frac{1 - P(0, T)}{\sum_{i=1}^n P(0, T_i) (T_i - T_{i-1})}. \quad (1.32)$$

Le numérateur de cette expression est généralement appelé "Level". Il constitue un numéraire sous lequel il est pratique de se placer pour évaluer des produits dérivés de taux *swap*. Le raisonnement s'adapte facilement au précédent pour le cas du *swap forward*.

En pratique, le marché fournit plusieurs courbes de taux, notamment celles des taux *swap*. Cependant, certaines structures par terme sont "cachées" derrière des données financières ou d'autres structures par terme. On dit que ces courbes de taux sont **implicites**, car elles ne sont pas directement observables sur le marché et sont donc extraites implicitement de courbes de taux qui, elles, sont directement observables. Ainsi, l'extraction des taux zéro-coupon de la courbe des taux *swap* constitue une pratique relativement répandue. Cette méthode d'obtention de la structure par terme des taux zéro-coupon, communément appelée **stripping** ou **bootstrapping** de courbe, est rendue simple par l'Equation 1.32 liant les taux zéro-coupon au taux *swap* pour chaque maturité dont le niveau de taux est fourni par le marché.

Soit un jeu de maturités $\{T_i\}_{i \in [0, n]}$ tel que $T_0 = 0$, dont les taux *swap* associés sont directement observables sur le marché. On reconstitue la courbe des prix zéro-coupon de proche en proche de la manière suivante :

- Pour initialiser la procédure, on inverse la formule précédente pour la première maturité non-nulle T_1 :

$$P(0, T_1) = \frac{1}{1 + T_1 R_{swap, T_1}}. \quad (1.33)$$

On obtient le premier prix zéro-coupon.

- On reconstruit de proche en proche, à chaque $i \in [2, n]$, les prix zéro-coupon par inversion de la formule du taux *swap* :

$$P(0, T_i) = \frac{1 - R_{swap, T_i} \sum_{j=1}^{i-1} P(0, T_j) (T_j - T_{j-1})}{1 + (T_i - T_{i-1}) R_{swap, T_i}}. \quad (1.34)$$

Une fois les prix des obligations zéro-coupon obtenus, il suffit d'utiliser les formules liant les prix aux taux *spot* pour obtenir les courbes de taux. Notons que les taux sont obtenus aux mêmes maturités que les taux *swap* fournis par le marché. Les courbes de taux zéro-coupon extraites par *stripping* et celles des taux *swap* sont généralement quasi-confondues à chaque date jusqu'à une maturité de 10 ans, puis leurs différences sont plus marquées aux maturités supérieures.

Pour obtenir les taux aux maturités non disponibles sur le marché, il faut interpoler entre chaque point. Pour cela, des méthodes de lissage sont utilisées, telles que les modèles de structure par terme type Nelson-Siegel. Ces modèles seront introduits plus tard dans cette étude.

1.3.3 Cap, floor et swaption

Parmi les produits dérivés de taux les plus échangés sur le marché se trouvent les *cap*, les *floor* et les *swaption*. Ces produits sont généralement indexés sur les taux, mais on en trouve également des analogues dans le marché de l'inflation. Ces produits à caractère optionnel sont prédominants dans les stratégies de couverture contre le risque de taux ou d'inflation. De plus, leur utilisation par les techniciens et praticiens de la finance quantitative est importante car ces produits permettent de calibrer nombre de modèles. Par exemple, on peut les utiliser pour calibrer des modèles de taux, des modèles d'inflation (sur les *cap* inflation par exemple), des modèles de reproduction et de projection de nappes de volatilité implicite, de cubes de volatilité implicite, ... Nous reviendrons sur leur utilisation pratique dans la Partie 6.1 sur la modélisation des obligations indexées.

Définition 1.3.10. Un **caplet** est un contrat OTC qui s'apparente à une option d'achat sur taux d'intérêt. Ainsi, pour un caplet sur taux LIBOR L de maturité T et de strike K sur un montant nominal N , le pay-off à la maturité pour le détenteur du caplet s'écrit :

$$\Psi_T^{Caplet} = N T (L(0, T) - K)_+. \quad (1.35)$$

On définit de manière identique le contrat **floorlet** qui est la version option de vente du caplet.

Définition 1.3.11. Un **cap** est un contrat OTC constitué d'une succession de caplet sur l'ensemble de sa période de vie, sur un taux sous-jacent, un même taux garanti pour des maturités distinctes. Le détenteur du cap va percevoir de manière successive, souvent périodiquement, le pay-off de chaque caplet à chaque échéance. Ainsi, le pay-off d'un cap sur taux LIBOR L de strike K sur un montant nominal N avec pour dates d'exercice $\{T_i\}_{i \in [1, n]}$, en posant $T_0 = 0$, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n N (T_i - T_{i-1}) (L(T_{i-1}, T_i - T_{i-1}) - K)_+. \quad (1.36)$$

Ce contrat équivaut donc à prendre position sur un contrat swap payeur, où chaque échange de flux a lieu seulement s'il est positif pour le swap payeur.

Par analogie avec la relation caplet-floorlet, le contrat **floor** est défini de la même manière que le cap mais pour une succession de floorlet. Il s'interprète donc comme un contrat swap receveur où chaque échange de flux a lieu seulement s'il est positif pour le swap receveur.

Définition 1.3.12. Le **collar** est une stratégie d'achat et de vente simultanés de cap et de floor. Il peut par exemple permettre de diminuer les coûts de la couverture contre le risque de taux.

Définition 1.3.13. Une **swaption** est une option sur un contrat swap. Lorsque le détenteur de la swaption exerce l'option, il entre dans un contrat swap en tant que payeur ou en tant que receveur suivant la nature de la swaption (contrat swaption payeur ou receveur). Formellement, une **swaption payeur européenne** est un contrat qui donne le droit et non l'obligation d'entrer dans un swap payeur à une maturité fixée contractuellement.

Soit une swaption payeur européenne de maturité T sur un swap de taux de dates de paiement $\{T_i\}_{i \in [1, n]}$, en posant la convention $T_0 = T$, sur le taux LIBOR L , de taux swap K pour un nominal N . Alors, le pay-off de la swaption s'écrit :

$$N \left(\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) (L(T_{i-1}, T_i - T_{i-1}) - K) \right)_+ \quad (1.37)$$

Il arrive souvent que l'entrée dans un *swap* ne soit pas effective à la maturité, mais qu'un flux soit directement payé à la place (ce qu'on appelle *cash-settlement*). Cela permet notamment de simplifier le calcul du prix d'un tel produit.

Pour des explications plus détaillées et une étude approfondie des produits dérivés de taux d'intérêt, le lecteur pourra se référer à [6] et [11].

Chapitre 2

Risque de crédit

Sommaire

2.1	Introduction et mise en contexte	18
2.2	Modélisation du risque de crédit	20
2.2.1	L'approche structurelle	20
2.2.2	L'approche à intensité	21

Dans ce chapitre, nous introduisons le risque de crédit et érigeons les principaux résultats de l'approche à forme réduite qui constituent les fondements de la plupart des calculs que nous effectuerons dans ce mémoire, notamment en matière de modélisation des obligations structurées.

2.1 Introduction et mise en contexte

Le risque de crédit est le risque de non-respect des obligations de paiement d'un débiteur envers son créancier, entraînant une perte financière pour ce dernier. Lorsque l'emprunteur ne peut honorer son engagement de paiement, que ce soit un paiement d'intérêts ou un remboursement, on dit qu'il y a défaut. En pratique, deux issues sont envisageables : soit le débiteur parvient à renégocier les conditions du contrat de créance, soit il ne peut pas faire face à ses engagements et, si c'est une entreprise, elle est déclarée en faillite. Dans ce dernier cas, le créancier récupère une partie du capital prêté, calculée sur la base d'un taux de recouvrement (*recovery rate*).

En règle générale, lorsqu'une entreprise fait défaut, les ayants droit prioritaires sur le capital sont l'Etat puis les salariés. Ceci laisse peu de place pour le remboursement des créanciers qui détiennent les obligations de l'entreprise défaillante. De ce fait, les obligations qui garantissent le remboursement d'une partie du capital profitent d'une meilleure liquidité et d'un prix plus élevé. Il existe deux catégories de dette en terme de priorité sur le capital : la dette *senior*, dont les créanciers sont prioritaires par rapport à ceux qui détiennent l'autre catégorie, la dette subordonnée (*junior*). Chaque émetteur de titres de dette étant susceptible de faire défaut pendant la période de vie de la créance, il convient pour les investisseurs de se procurer un indicateur leur permettant d'évaluer au moins qualitativement le risque auquel ils sont exposés. C'est en ce sens que les agences de notation interviennent. Ces organismes indépendants attribuent une note à chaque titre de créance, allant en pratique du CCC pour l'ultra spéculatif au AAA pour la haute qualité. Cette note est à peu près représentative du risque de crédit associé à chaque titre et influence grandement les marchés. En effet, un changement de notation d'une entreprise ou d'un état entraîne une variation du prix des titres de dette associés et du niveau des spreads de taux d'obligations nouvellement émises. Il faut cependant observer les *rating* avec recul et prendre en compte d'autres caractéristiques associées à l'émetteur (comme le secteur d'activité par exemple) dans l'appréciation de la qualité de crédit.

Les crises financières majeures (telles que celle des *subprime*) ont drastiquement influencé la manière dont les investisseurs et les institutions se financent, en particulier en terme de dette. La crise systémique de 2008, qui atteint son paroxysme en Europe en 2010, a démontré aux acteurs du marché que les obligations souveraines ne sont pas sans risque et qu'il n'est plus crédible d'utiliser une courbe de taux d'obligations d'Etat en tant que courbe de taux sans risque. Le marché du crédit a connu de grands changements, notamment en terme d'effectifs en recherche quantitative et en ingénierie financière. Le risque de crédit n'a jamais été autant surveillé que maintenant : une protection contre ce risque ainsi que sa quantification sont devenues nécessaires afin de couvrir les potentielles pertes qui lui seraient liées. Pour cela, on observe un développement du marché des produits dérivés dont le *pay-off* est fonction de composantes du risque de crédit. Le marché des dérivés de crédit s'étant développé depuis les années 1990, l'évolution des pratiques et l'intérêt que l'on porte à ces produits font que les encours atteignent aujourd'hui des dizaines de milliards de dollars.

Le principal produit négocié sur le marché des dérivés de crédit est le *Credit Default Swap*, communément appelé CDS. Un CDS est un contrat de protection (assurance) contre le risque de crédit. Son principe de fonctionnement est le suivant : un investisseur veut s'assurer contre le risque de crédit lié à un titre de dette émis par une entité de référence, il achète un contrat CDS auprès d'un vendeur de protection. Jusqu'à maturité du contrat, l'acheteur de protection est protégé contre le risque de défaut. A tout moment, si l'entité de référence ne peut honorer ses engagements vis-à-vis de l'investisseur, le vendeur de protection verse la totalité de la valeur faciale due par l'entité au créancier et perçoit le recouvrement de la part de l'entité. En échange de cette assurance, le vendeur de protection perçoit de la part de l'acheteur une prime périodique. Typiquement, cette prime est exprimée en points de base appliqués à la valeur faciale de la créance assurée. Contractuellement, le défaut occure lorsque l'entité de référence dépose le bilan (banqueroute), si sa dette subit une restructuration ou encore si l'entité de référence ne remplit pas une obligation contractuelle. Les deux schémas suivants illustrent les flux perçus dans le cas du remboursement du nominal (à gauche) et dans le cas du défaut de l'entité de référence (à droite).

La réglementation Bâle II prévoit la construction de trois indicateurs de risque de crédit, largement répandus, dans l'optique de la gestion de ce risque. Ils sont les suivants :

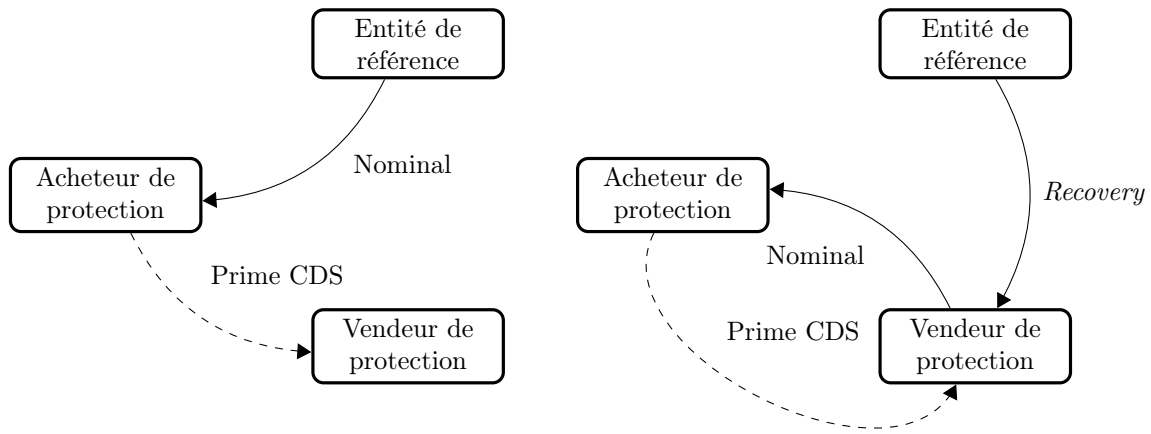


FIGURE 2.1 – Remboursement d’un titre obligataire : flux entre le vendeur de CDS, l’acheteur et l’entité émettrice d’obligation dans le cas sans défaut et dans le cas d’un défaut

- Loss Given Default : montant de la perte financière encaissée par le créancier en cas de défaut de l’emprunteur ;
- Exposure At Default : montant exposé au risque de défaut (au moment du défaut) ;
- Probability of Default : probabilité d’occurrence du défaut. On parle ici de probabilité historique.

L’un des principaux enjeux pour l’investisseur est la quantification du risque de crédit. Lorsqu’il souhaite investir en titres obligataires, il doit étudier son exposition au risque de ne pas retrouver son capital ainsi que le poids de ce risque dans le prix de l’obligation. En effet, chaque obligation évaluée sur le marché financier comporte une composante censée refléter le risque de défaut de l’émetteur. Cette composante est estimée par des modèles de crédit sophistiqués. Différents acteurs, dont les agences de notation, jouent un rôle important dans les ajustements de cette composante, et personne ne peut parfaitement prédire les probabilités de défaut associées au titre émis ou, plus particulièrement, associées à l’émetteur. L’investisseur peut donc s’interroger si l’obligation émise par la société/l’Etat est évaluée au juste prix et si l’investissement en vaut la peine. A l’instar d’un *trader* sur un marché de produits dérivés, il peut comparer les valeurs fournies par différents modèles de crédit avec celle du marché pour une quantité donnée et conclure sur la justesse de l’estimation fournie par le marché. L’enjeu du calcul obligataire est notamment important pour les assureurs compte tenu du poids du portefeuille obligataire dans leur portefeuille d’actifs (généralement compris entre 60 et 80 %). C’est pourquoi ces derniers doivent modéliser correctement le risque de crédit pour pouvoir piloter efficacement les allocations du portefeuille et avoir une meilleure appréciation des risques dans leur processus de gestion.

De nombreux modèles de risque de crédit ont été développés dans la littérature, comme dans le livre de Schönbucher [15] [2003], leur but étant généralement l’un des suivants : l’évaluation de produits dérivés de crédit, le calcul des probabilités de défaut historiques, l’étude des changements de notation de crédit d’entreprises ou de pays souverains. La complexité est d’autant plus grande lorsque l’on cherche à répondre à plusieurs objectifs, par exemple, lorsque l’on souhaite évaluer à la fois des produits dérivés de crédit et les structures par terme de probabilités de défaut historiques. Généralement, un modèle d’évaluation de dérivés de crédit permet par construction de récupérer les probabilités de défaut risque neutre (étant donné qu’elles apparaissent en principe dans les formules de *pricing*), mais le passage de ces probabilités aux probabilités historiques est presque toujours évité, le praticien optant généralement soit pour une modélisation des probabilités de défaut historiques, soit pour une modélisation des prix. Les deux approches les plus populaires en modélisation du risque de crédit sont les modèles structurels et les modèles à intensité. Dans ce

mémoire, nous nous focaliserons sur la seconde approche. Nous tenons à préciser que les modèles de matrices à changement de *rating* ne sont pas abordés. Dans la suite de ce chapitre, nous introduisons les fondements des modèles structurels sans apporter de démonstrations aux résultats avant d'étudier plus en détail l'approche à intensité. Pour une étude plus approfondie des modèles structurels, le lecteur pourra commencer par se référer à l'article fondateur de Merton [5] [1974].

2.2 Modélisation du risque de crédit

Dans toute cette section, on se place dans un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ avec la filtration associée $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité risque neutre.

2.2.1 L'approche structurelle

L'approche structurelle propose de concilier théorie des options et théorie de la firme, au sens où elle repose sur la modélisation de la valeur économique d'une entreprise et de la caractérisation de la valeur de sa dette risquée en terme de portefeuille d'options. Le premier modèle fondateur de l'approche structurelle est le modèle de Merton. L'hypothèse principale du modèle est la représentation simplifiée du passif de l'entreprise, somme d'une dette uniquement obligataire et des fonds propres. Il convient de préciser qu'il ne s'agit pas de valeurs comptables mais de valeurs de marché, y compris pour les actifs de l'entreprise. Merton suppose également que la dette est composée d'un unique zéro-coupon d'échéance $T > 0$ de nominal L , et que l'évènement "Défaut de l'entreprise" ne peut survenir qu'à l'échéance T de sa dette obligataire : aucun défaut n'est possible entre l'instant initial et cette date. Les actifs de l'entreprise sont des titres négociables sur un marché supposé sans frictions et complet et où l'absence d'opportunité d'arbitrage est vérifiée. Il s'échange également un actif sans risque de rendement égal au taux sans risque r . L'évolution de la valeur des actifs de l'entreprise suit un processus log-normal $(V_t)_{t \geq 0}$ de dynamique, sous la mesure de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$,

$$\frac{dV_t}{V_t} = r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

$W^{\mathbb{Q}}$ étant un $\mathbb{F}$ -mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$.

Comme expliqué précédemment, il est supposé que le défaut ne peut survenir qu'à la date T . L'entreprise fait défaut lorsque la valeur de marché de ses actifs à l'échéance est inférieure à la valeur faciale L de sa dette : l'évènement "Défaut de l'entreprise" est en fait l'évènement $\{V_T < L\}$. Merton suppose de plus qu'en cas de défaut la valeur des fonds propres est nulle et l'entreprise rembourse une partie de sa dette, V_T . Le taux de recouvrement de ce zéro-coupon est donc la fraction $\frac{V_T}{L}$.

La dette et les fonds propres de l'entreprise peuvent être évalués de la même manière qu'une option européenne dans le modèle de Black-Scholes : en effet, les *pay-off* à l'échéance T sont respectivement $\min(V_T, L)$ et $\max(V_T - L, 0) = (V_T - L)_+$. Les capitaux propres sont donc assimilables à une option d'achat européenne de strike le nominal de la dette L , et de sous-jacent la valeur des actifs de l'entreprise.

On peut également calculer la probabilité de défaut risque neutre q_T de l'entreprise, qui s'écrit :

$$q_T = \mathbb{Q}(V_T < L), \quad \text{avec} \quad V_T = V_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}}.$$

Nous menant à

$$q_T = \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{L}{V_0} \right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \right),$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Les limites de ce modèle sont nombreuses et le rendent peu pertinent en pratique, dans une optique de modélisation des obligations risquées. La vision mécanique du défaut qui consiste à fixer une date où le défaut pourrait occurrer (ici, l'échéance) ainsi que sa modélisation par un unique évènement (franchissement d'une barrière) sont des hypothèses qui ne tiennent pas. En pratique, le défaut peut occurrer avant le franchissement de cette barrière, comme après. En plus de reposer sur des hypothèses irréalistes, le modèle amène des difficultés de calibration. En effet, pour estimer les probabilités de défaut (en risque neutre), la volatilité de la valeur de la firme est essentielle et difficile à obtenir d'un point de vue optimisation. Les comptes de résultat étant fournis en pratique une fois par an aux investisseurs, une calibration sur des pas de temps hebdomadaires voire journaliers semble compromise. La dynamique de la valeur des actifs de la firme peut donc être considérée comme inobservable. En supposant que l'on puisse aisément calibrer les paramètres, il reste le problème du calcul des probabilités de défaut en monde réel... La simplicité de ce modèle et l'interprétabilité des résultats en font toutefois un modèle de crédit classique auquel on trouve de nombreuses extensions dans la littérature. On peut se référer à l'article original [5] pour un développement détaillé. Cependant, malgré les extensions du modèle de Merton, l'impossibilité d'observer en continu la valeur de marché des actifs de l'entreprise demeure, ce qui en fait la principale limite des modèles structurels.

Le modèle de crédit utilisé dans ce mémoire repose sur une approche dite "à intensité". Dans la section suivante, nous étudions ses fondements théoriques plus en détail. Une étude exhaustive peut être trouvée dans le livre de Schönbucher [15]. Les principaux résultats seront utilisés dans toute la suite de ce mémoire.

2.2.2 L'approche à intensité

Introduction à la théorie

La présente partie introduit la théorie relative à la modélisation par intensité. Aussi appelés "modèles à forme réduite", les modèles à intensité font l'hypothèse suivante : le défaut est un évènement qui peut se réaliser plus spontanément, à tout instant pendant la détention de l'actif risqué. Le temps de défaut est alors modélisé par un temps d'arrêt τ par rapport à une filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$ qui contient l'information de défaut. On suppose alors que l'information contenue dans cette filtration est une information supplémentaire par rapport à l'information standard du marché fournie par la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. L'objet de cette approche est d'intégrer l'asymétrie d'information dans la modélisation, en supposant par exemple que l'on a accès à l'information de défaut avec un retard. On note alors :

$$\widetilde{\mathbb{F}} = (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0} = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}, \quad (2.1)$$

l'information complète sur le marché.

L'information sur la date exacte de défaut peut être complètement déterminée en étudiant l'évolution du processus $(\tau \wedge t)_{t \geq 0}$. De plus, on constate que le processus $(\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}})_{t \geq 0}$ est d'une part $(\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$ -adapté et d'autre part un processus qui caractérise entièrement l'information de défaut : en toute date, sa valeur nous indique si le défaut a eu lieu ou non et si l'on remonte jusqu'à l'instant de son premier saut, on a la date exacte de réalisation du défaut. Ceci nous permet de modéliser la filtration $\mathbb{D}$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{D}_t = \sigma(\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}, s \leq t) = \sigma(\tau \wedge s, s \leq t). \quad (2.2)$$

La filtration $\mathbb{F}$ étant l'information généralement engendrée par les sources d'aléa des processus stochastiques du modèle, c'est-à-dire par les mouvements browniens, on suppose qu'elle est connue. Comme nous allons évaluer les produits dérivés de crédit en calculant des espérances conditionnelles par rapport à l'information globale $\widetilde{\mathbb{F}}$ observable par tous les investisseurs, l'idée est d'établir un lien

mathématique entre ces deux filtrations. Ceci constitue la principale application en mathématiques financières de la théorie du grossissement de filtration dont les fondateurs sont Chaleyat-Maurel M., Yoeurp C., Jacod J., Yor M. et Jeulin T.. On énonce ci-dessous le théorème qui permet de faire le lien entre le calcul d'une espérance conditionnelle à la filtration $\widetilde{\mathbb{F}}$ et celui d'une espérance conditionnelle à la filtration $\mathbb{F}$.

Théorème 2.2.1 (Jeulin-Yor). *Soit H une variable aléatoire $\widetilde{\mathcal{F}}_T$ -mesurable (qui représente une fonction pay-off), pour $T > 0$. Alors, pour toute date $t \leq T$, on a l'égalité :*

$$\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left[H \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E} \left[H \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}. \quad (2.3)$$

Démonstration. Soit $t \geq 0$, on se place sur l'ensemble $\{\tau > t\}$. Alors, $\mathcal{D}_t = \sigma(t) = \{\emptyset, \Omega\}$ et donc les deux filtrations $\mathbb{F}$ et $\widetilde{\mathbb{F}}$ coïncident. Par conséquent, comme $\mathbb{E} \left[H \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right]$ est $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ -mesurable, il existe une variable aléatoire Z_t qui quant à elle est $\mathcal{F}_t$ -mesurable et telle que les deux variables aléatoires coïncident sur l'ensemble $\{\tau > t\}$:

$$\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left[H \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Z_t.$$

Il reste à calculer Z_t . Pour cela, prenons l'espérance conditionnelle à l'information standard des deux côtés de l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left[H \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right] \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Z_t \mid \mathcal{F}_t \right] \\ \iff \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} H \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right] \mid \mathcal{F}_t \right] &= Z_t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}_t \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}_t$, on obtient le résultat voulu. $\square$

Ce théorème est fondamental pour évaluer les produits dérivés de crédit ainsi que les titres financiers risqués. Nous allons notamment l'utiliser dans la suite afin d'obtenir des formules ouvertes exploitables dans notre cadre de valorisation dynamique. On pose pour la suite :

$$\left(Q_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \right)_{t \geq 0}, \quad (2.4)$$

le processus $\mathbb{Q}$ -surmartingale pour la filtration $\mathbb{F}$ (simple à démontrer) communément appelé "surmartingale d'Azéma".

Evaluation des dérivés de crédit

On se propose de calculer le prix d'un actif dont les flux sont généralisés par les processus décrits ci-après. Les résultats obtenus vont permettre d'évaluer des obligations risquées et constituent donc le socle théorique de ce mémoire pour toute la partie valorisation. On rappelle que l'actif est évalué en temps continu.

- Le versement de flux continu sur la durée de vie de l'actif est déterminé par le processus $(C_t)_{t \geq 0}$ qui est $\mathbb{F}$ -adapté;
- Le versement du flux terminal en T est déterminé par la variable aléatoire Ψ_T qui est $\mathcal{F}_T$ -mesurable;
- Le versement de flux en cas de défaut est déterminé par la variable aléatoire Z_τ qui est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable.

On rappelle la signification de la notation $\mathcal{F}_\tau$:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}. \quad (2.5)$$

Par le théorème de valorisation financière, le prix de l'actif V_t évalué à la date $t < T$ s'écrit :

$$V_t = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{-\int_t^s r_u du} dC_s + \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_t^T r_u du} \Psi_T + \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} e^{-\int_t^\tau r_u du} Z_\tau \middle| \widetilde{\mathcal{F}}_t \right]. \quad (2.6)$$

En utilisant le théorème de Jeulin-Yor, un calcul mène à :

$$V_t = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \frac{Q_s}{Q_t} e^{-\int_t^s r_u du} dC_s + \frac{Q_T}{Q_t} e^{-\int_t^T r_u du} \Psi_T - \int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} Z_s \frac{dQ_s}{Q_t} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.7)$$

La démonstration de ce résultat est développée en annexe. On voit à présent qu'il faut spécifier un modèle de crédit pour avoir une expression de la surmartingale d'Azéma suffisamment exploitable pour nous permettre de calculer cette espérance.

Processus de Poisson et modèle de Cox

Avant de se focaliser sur le modèle de crédit utilisé, nous nous proposons d'introduire un pseudo-exemple afin d'illustrer l'idée cachée derrière la modélisation de Cox.

Considérons les événements de défaut qui surviennent pendant la durée de vie de l'entreprise à partir de l'instant initial (en supposant que l'entreprise peut faire défaut plusieurs fois). On suppose que le temps qui sépare chaque événement de défaut du suivant forme une suite de variables aléatoires $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Formellement, le temps qui sépare la date du i -ème défaut de la date du $(i+1)$ -ème défaut est la variable aléatoire T_{i+1} , la variable aléatoire T_1 étant la durée séparant la date de survenance du premier défaut de l'instant initial 0. Avec la convention : $\sum_{i=1}^0 T_i = 0$, il est naturel de poser le processus de sauts suivant :

$$\forall t \geq 0, \quad N_t = \sup \left\{ n \geq 0, \sum_{i=1}^n T_i \leq t \right\}.$$

Par construction, $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ . Ce processus représente le nombre de sauts avant l'instant t , c'est-à-dire le nombre d'occurrences du défaut de l'entreprise sur la période $[0, t]$.

L'évènement qui nous intéresse ici est "L'entreprise a fait défaut" et on pose donc naturellement :

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0, N_t \geq 1 \right\}$$

le temps d'arrêt égal à la date du premier saut du processus de Poisson. En développant son expression :

$$\begin{aligned} \tau &= \inf \left\{ t \geq 0, \sup \left\{ n \geq 0, \sum_{i=1}^n T_i \leq t \right\} \geq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0, T_1 \leq t \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0, \lambda T_1 \leq \lambda t \right\}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0, \int_0^t \lambda du > E \right\}, \quad (2.8)$$

où E suit une loi exponentielle de paramètre 1. La variable aléatoire E est le produit de l'intensité λ par la variable aléatoire T_1 .

Notons que dans ce cadre, on peut écrire pour tout $t \geq 0$:

$$\mathcal{D}_t = \sigma(N_s, s \leq t). \quad (2.9)$$

Ce résultat nous pousse naturellement à généraliser le modèle à un processus de Poisson inhomogène d'intensité stochastique. C'est l'objet de la modélisation de Cox.

On se place maintenant dans le cadre de Cox, où le processus ponctuel $(N_t)_{t \geq 0}$ introduit précédemment est cette fois inhomogène d'intensité $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ conditionnellement à l'information standard $\mathbb{F}$. Cette définition fait de $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique, qui est supposé $\mathbb{F}$ -adapté et intégrable. Ce processus est appelé "intensité de défaut". Il possède notamment des propriétés théoriques remarquables (comme par exemple la notion de compensateur de défaut) que nous ne développerons pas dans ce mémoire, ces propriétés étant peu nécessaires pour la construction du cadre.

On définit alors le temps de défaut τ par :

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0, \int_0^t \lambda_u du > E \right\}, \quad (2.10)$$

où E est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de la filtration $\mathbb{F}$. L'exemple à intensité constante décrit précédemment nous fournit une explication quant à la spécification du modèle.

Il est alors possible de développer l'expression de la surmartingale d'Azéma, c'est-à-dire la probabilité de survie conditionnelle à l'information standard. Ainsi, en toute date t :

$$\begin{aligned} Q_t &= \mathbb{Q}[\tau > t \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{Q} \left[\int_0^t \lambda_u du \leq E \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Par $\mathcal{F}_t$ -mesurabilité de $\int_0^t \lambda_u du$ et propriété d'indépendance de E ,

$$Q_t = e^{-\int_0^t \lambda_u du}. \quad (2.11)$$

On peut écrire l'expression du prix de l'actif risqué, en injectant cette égalité dans l'Equation 2.7 :

$$V_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s r_u + \lambda_u du} dC_s + e^{-\int_t^T r_u + \lambda_u du} \Psi_T + \int_t^T \lambda_s e^{-\int_t^s r_u + \lambda_u du} Z_s ds \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.12)$$

Dans le cadre, les obligations structurées risquées seront évaluées *spot* à chaque pas de temps. On gardera donc la forme générale suivante :

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} dC_t + e^{-\int_0^T r_t + \lambda_t dt} \Psi_T + \int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} Z_t dt \right], \quad (2.13)$$

avec l'expression de la probabilité de défaut risque neutre "implicite" :

$$\begin{aligned} q(T) &= \mathbb{Q}[\tau \leq T] \\ &= 1 - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T \lambda_t dt} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nous verrons plus tard, lors de la spécification du modèle de valorisation des obligations risquées, comment dériver les probabilités de défaut historiques à partir des probabilités de défaut risque neutre.

Le risque de crédit sous-jacent au produit financier risqué fait apparaître un taux d'actualisation instantané ajusté $r + \lambda$. L'intensité de défaut agit alors comme un écart de taux d'actualisation, également appelé "spread de crédit". Il faut cependant faire attention à l'utilisation de ce terme : certains financiers appellent "spread de crédit" l'écart de coupon demandé par les investisseurs pour accepter le risque de défaut sous-jacent à une obligation, d'autres attribuent cette expression à l'écart constant de taux à appliquer à la courbe des taux pour égaliser la Valeur Actuelle Nette (VAN) d'une obligation avec son prix de marché (extension du Taux de Rendement Interne). Le

spread est aussi le nom donné à la valeur de la prime CDS. On parle également de "risque de spread" dans le milieu de l'actuariat, en référence à une branche de risques à quantifier dans le calcul du SCR de marché. Les significations sont donc multiples. Ainsi, ce terme a malheureusement tendance à être utilisé sans aucune contextualisation et il doit donc être employé avec réserve pour éviter toute confusion.

Il est également intéressant de constater que l'intensité de défaut est la probabilité de défaut instantanée : on lui associe de cette manière des propriétés asymptotiques analogues à celles du taux de mortalité dans la théorie des mathématiques actuarielles de l'assurance-vie.

Deuxième partie

Construction du cadre de valorisation dynamique

Chapitre 3

Modélisation de la structure par terme de taux d'intérêt

Sommaire

3.1	Modèles de lissage de la structure par terme de taux d'intérêt . . .	30
3.1.1	Nelson-Siegel et extensions	30
3.1.2	Nelson-Siegel dynamique	30
3.2	Modèle AOA de taux d'intérêt	31
3.2.1	Spécification du modèle <i>arbitrage-free</i> Nelson-Siegel	32
3.2.2	Expressions du prix du zéro-coupon et du taux <i>spot</i>	33
3.2.3	Autour du prix du zéro-coupon dans le modèle retenu	35
3.3	Calibration du modèle AFNS	37
3.3.1	Présentation des données	37
3.3.2	Description de l'approche	38
3.3.3	Introduction de poids	39
3.3.4	Autour de la matrice de volatilité : contraintes d'optimisation	41
3.3.5	Calibration et résultats	42

Dans ce chapitre, nous portons notre attention sur la modélisation des taux zéro-coupon, en particulier la modélisation des prix zéro-coupon dont la structure par terme est utilisée dans toute procédure de *pricing*. Nous faisons un bref tour d'horizon sur les modèles de lissage par fonctionnelles exponentielles avant d'étudier un modèle basé sur l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, qui permet en outre de conserver les propriétés de reproduction de courbe induites par les trois facteurs d'un Nelson-Siegel. Nous clôturons le chapitre par sa calibration.

3.1 Modèles de lissage de la structure par terme de taux d'intérêt

3.1.1 Nelson-Siegel et extensions

La modélisation et la prédiction de structures par terme de taux est un sujet phare de la finance, nombre de modèles ayant été proposés. Parmi les études présentes dans la littérature, le modèle de Nelson-Siegel [1987] et ses extensions sont parmi les plus populaires tant par leur simplicité de mise en oeuvre que par leur efficacité dans les résultats empiriques qu'ils fournissent. Ce modèle introduit une fonction à polynômes exponentiels qui permet de répliquer convenablement la plupart des courbes de taux observées sur le marché et, de cette manière, il permet d'interpoler aux maturités non observées sur le marché.

Plus formellement, en notant $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un ensemble de maturités, $(y(T))_{T \in \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}}$ une série de taux d'intérêt *spot* en composition continue, Nelson et Siegel supposent que la structure par terme des taux d'intérêts est décrite par la fonction suivante :

$$\forall T \in \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad y(T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} - e^{-\lambda T} \right). \quad (3.1)$$

Le modèle se calibre simplement par régression linéaire, après optimisation du paramètre λ (qui s'estime lui-même par régressions successives). Les paramètres à estimer sont au nombre de 4 :

- λ est le paramètre d'échelle du temps et a un rôle de distorsion de celui-ci ;
- β_0 est le taux d'intérêt long-terme et définit le niveau de l'asymptote de la structure par terme de taux d'intérêt (facteur de translation) ;
- β_1 est le facteur de pente ;
- β_2 est le facteur de courbure.

Plusieurs extensions de cette fonctionnelle ont été proposées par la suite dans le but de reproduire des courbes de taux aux formes particulières. Ces courbes peuvent notamment être observées en cas de stress de marché sur les taux d'intérêt (inversion de la courbe de taux par exemple). On peut citer le modèle de Björk et Christensen [1999] ainsi que le modèle de Nelson, Siegel et Svensson [1997], plus populaire que celui de Christensen, et dont la fonctionnelle est la suivante :

$$\begin{aligned} \forall T \in \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad y(T) = & \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1 T} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1 T} - e^{-\lambda_1 T} \right) \\ & + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_2 T} - e^{-\lambda_2 T} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Svensson introduit un quatrième facteur β_3 et un deuxième paramètre d'échelle λ_2 afin de répliquer des formes plus complexes.

3.1.2 Nelson-Siegel dynamique

Afin d'effectuer des projections de la structure par terme de taux modélisée, on rend dépendant du temps chaque facteur et chaque paramètre d'échelle qui compose la fonctionnelle du modèle. C'est en ce sens que Diebold et Li proposent, dans leur article [29] [2006], une approche dynamique du modèle de Nelson-Siegel, adaptable à toute extension du modèle (Nelson-Siegel-Svensson par exemple). L'idée est étudiée plus en détail avec la contribution de Yue dans [3] [2008]. Ainsi,

en notant $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un ensemble de maturités, pour une date t , $(y_t(\tau))_{(t,\tau) \in \mathbb{R}_+ \times \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}}$ une série temporelle de taux d'intérêt spot en composition continue, la fonctionnelle s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \quad y_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right). \quad (3.3)$$

Dans ce modèle, l'historique de la structure par terme de taux et ses déformations sont expliqués par les séries temporelles des facteurs Nelson-Siegel (régresseurs). Pour effectuer des prédictions sur la courbe des taux d'intérêt, il suffit alors de projeter ces séries temporelles et d'utiliser la fonctionnelle sur les projections obtenues. Il est d'usage d'optimiser le paramètre d'échelle λ en tant que paramètre extérieur (constant, non dépendant du temps), pour éviter une potentielle "explosion" dans les projections à cause de l'exponentielle. Diebold et Li utilisent un processus auto-régressif d'ordre 1 pour décrire la dynamique de chaque facteur $\beta_{i,t}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Outre le fait qu'il fournisse des résultats empiriques très satisfaisants, l'un des points les plus notables de ce modèle est qu'il peut être utilisé à des fins de couverture de portefeuille. Ainsi, dans [25], Litterman et Scheinkman [1991] ont montré que 3 facteurs (en l'occurrence, ici $(\beta_{0,t}, \beta_{1,t}, \beta_{2,t})$) expliquent environ 96% des fluctuations de la structure par terme de taux et la couverture d'un portefeuille contre le risque de taux peut être effectuée en garantissant une insensibilité du portefeuille à ces trois facteurs.

Une attention toute particulière est à porter aux éléments suivants :

- Les expressions analytiques du prix du zéro-coupon sans risque et des divers taux d'intérêt découlent de la fonctionnelle caractérisant le taux spot en composition continue.
- Les modèles de lissage type Nelson-Siegel ne sont pas construits dans un cadre théorique classique qui incorpore l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Ils ne possèdent donc pas la propriété *arbitrage-free* et ceci constitue un inconvénient non négligeable, conséquence des lacunes théoriques que présentent ces modèles.
- Les taux d'intérêt ne sont pas les seuls éléments de la finance qui possèdent une structure par terme. D'autres indices tels que les prix des CDS ou les probabilités de défaut associées ont également une structure par terme qui leur est propre. Les approches par lissage de ce type sont également applicables dans ces cadres.

Le jeu de modèles de type Nelson-Siegel permet de répliquer de manière efficiente un bon nombre de courbes de taux, et de les projeter en dynamique. Cependant, comme énoncé plus haut, il possède l'inconvénient de ne pas garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans le but de construire un cadre théorique rigoureux, nous nous intéressons à un modèle plus sophistiqué, basé sur l'hypothèse d'AOA et qui permet de conserver la forme factorielle de la fonction de Nelson-Siegel ainsi que la paramétrisation des déformations par 3 facteurs comme défendue par Litterman et Scheinkman. On peut dans ce cas garder de bonnes propriétés de *fitting* et d'interprétabilité des paramètres. C'est l'objet de la partie suivante.

3.2 Modèle AOA de taux d'intérêt

Avant de procéder à l'évaluation de produits dérivés de taux par l'approche martingale, il est nécessaire de proposer un modèle de taux court (ou de taux *forward*). Le cadre proposé doit être solide et assez robuste pour garantir l'efficacité des projections de structure par terme de taux d'intérêt. Parmi les modèles les plus répandus, les modèles à deux facteurs type G2++ ainsi que les modèles du cadre Heath-Jarrow-Morton se révèlent être efficaces tant dans par leur flexibilité, leurs formules fermées et semi-fermées et leur processus de calibration. Cependant, dans ce cadre de valorisation dynamique, nous cherchons à effectuer des projections de prix zéro-coupon évalués *spot* après diffusion de séries temporelles de paramètres implicites inobservables. Pour cela, le modèle de Nelson-Siegel est tout à fait adapté. Sa spécification nous permet par ailleurs de rentrer

dans un cadre de régression par méthode des moindres carrés, et ainsi d'assurer l'extraction optimale (les MCO garantissent des optimums globaux pour un critère d'erreur quadratique) des séries temporelles de régresseurs en vue de la projection des structures par terme de prix zéro-coupon. Le cadre Heath-Jarrow-Morton ainsi que le modèle G2++ ne permettent pas de procéder ainsi car ils prennent en entrée une structure par terme de prix zéro-coupon initiale pour la déformer dans le temps. Ils ne sont donc pas adaptés à ce cadre. Cependant, le modèle Nelson-Siegel s'avère lacunaire, en ayant l'inconvénient de ne pas garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. Ceci nous amène à nous poser la question suivante : quel modèle de taux AOA choisir de sorte à combler ce manque de qualité théorique tout en conservant les bons résultats empiriques du modèle de Nelson-Siegel ?

Pour cela, Christensen J., Diebold F. et Rudebusch G. [2008] ont construit un modèle *arbitrage-free* qui conserve les propriétés empiriques du modèle *Dynamic* Nelson-Siegel tout en garantissant l'absence d'opportunité d'arbitrage. C'est le modèle *arbitrage-free* Nelson-Siegel. Nous utilisons ce modèle de taux pour valoriser la structure par terme de zéro-coupon en toute date et ainsi évaluer les obligations structurées. La méthode de calibration que nous proposerons diffère fortement de celle proposée dans l'article fondateur. En effet, on se basera sur une méthode des moindres carrés pour extraire les séries temporelles de régresseurs, ce qui n'est pas le cas de Christensen, Diebold et Rudebusch qui utilisent une méthode de filtrage de Kalman.

Le modèle AFNS fait partie de la classe affine des modèles de taux court. Cette classe de modèles est certainement la plus populaire en modélisation de structure par terme de taux tant sur le plan théorique que pratique. Un grand nombre de modèles affines ont été proposés et étudiés dans la littérature tels que le modèle de Vasicek, celui de Cox-Ingersoll-Ross (garantissant la positivité du processus sous la condition de Feller), de Hull-White ou encore le modèle de Longstaff-Schwartz. Leur popularité est justifiée par leur flexibilité, leurs multiples extensions possibles ainsi que la forme exponentielle du prix du zéro-coupon sans-risque, permettant au praticien d'obtenir des formules fermées pour de nombreux produits dérivés "vanille". On adopte l'approche *arbitrage-free* Nelson-Siegel à facteurs corrélés présentée dans la partie qui suit. Il existe une extension, par analogie avec celle de Svensson, présentée et étudiée par Christensen J., Diebold F. et Rudebusch dans [28] [2008]. Cette dernière version est une généralisation à 5 facteurs. Dans la suite, nous spécifions le modèle AFNS à trois facteurs, puis des formules fermées sont obtenues avant d'étudier la dynamique des prix zéro-coupon par une approche de type Heath-Jarrow-Morton. La méthode de construction des dynamiques de taux est similaire à celle présentée dans [21].

3.2.1 Spécification du modèle *arbitrage-free* Nelson-Siegel

Sous la mesure de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, le processus de taux d'intérêt instantané $(r_t)_{t \geq 0}$ est supposé être un processus de classe affine à trois facteurs, de sorte que :

$$r_t = X_t' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

où les variables d'état suivent la dynamique suivante :

$$dX_t = -\Lambda X_t dt + \Sigma dW_t, \quad (3.5)$$

et :

$$\bullet X_t = \begin{bmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{bmatrix} \text{ est le vecteur des facteurs stochastiques en } t;$$

- $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ est la matrice de vitesse de retour à la moyenne, pour $\lambda > 0$;
- $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ est la matrice de volatilité;
- $\left(W_t = \begin{bmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ W_t^3 \end{bmatrix} \right)_{t \geq 0}$ est un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien multidimensionnel.

Le matrice de volatilité Σ est la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de la matrice de variance-covariance. Les coefficients de sa diagonale sont positifs, et les autres peuvent prendre des valeurs positives ou négatives.

Les facteurs $(X_t^1)_{t \geq 0}$, $(X_t^2)_{t \geq 0}$ et $(X_t^3)_{t \geq 0}$ sont solutions du système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dX_t^1 &= \sigma_{11} dW_t^1, \\ dX_t^2 &= -\lambda(X_t^2 - X_t^3) dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2, \\ dX_t^3 &= -\lambda X_t^3 dt + \sigma_{31} dW_t^1 + \sigma_{32} dW_t^2 + \sigma_{33} dW_t^3, \end{cases} \quad (X_0^1, X_0^2, X_0^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Notons que ces facteurs permettent au taux court de prendre des valeurs positives comme négatives, et ainsi de reproduire une caractéristique fondamentale des marchés financiers d'aujourd'hui.

3.2.2 Expressions du prix du zéro-coupon et du taux *spot*

Comme dans tout modèle de taux de la classe affine, le prix du zéro-coupon de maturité $T > 0$ s'écrit sous la forme :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t, T) = \exp(B(t, T)' X_t + C(t, T)), \quad (3.6)$$

$$\text{où } B(t, T) = \begin{bmatrix} B_1(t, T) \\ B_2(t, T) \\ B_3(t, T) \end{bmatrix} \text{ et } B_1, B_2, B_3, C \text{ sont des fonctions déterministes.}$$

Le calcul de ces fonctions se fait par résolution des deux équations différentielles matricielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dB}{dt}(t, T) - \Lambda' B(t, T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\frac{dC}{dt}(t, T) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma \}. \quad (3.8)$$

La résolution de ces deux équations mène aux expressions des fonctions B et C :

$$B(t, T) = \begin{bmatrix} -(T-t) \\ -\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \\ (T-t)e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{C(t, T)}{T-t} = & c_1 \frac{(T-t)^2}{6} + c_2 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} + \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{4\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_3 \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{T-t}{4\lambda} e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{3}{4\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - 2 \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right. \\ & \left. + 5 \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{8\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_4 \left(\frac{T-t}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_5 \left(\frac{3}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} + \frac{T-t}{2\lambda} + \frac{T-t}{\lambda} e^{-\lambda(T-t)} - 3 \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_6 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1}{2\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - 3 \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} + 3 \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{4\lambda^3(T-t)} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \sigma_{11}^2, & c_2 &= \sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2, & c_3 &= \sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2 + \sigma_{33}^2, \\ c_4 &= \sigma_{11}\sigma_{21}, & c_5 &= \sigma_{11}\sigma_{31}, & c_6 &= \sigma_{21}\sigma_{31} + \sigma_{22}\sigma_{32}. \end{aligned}$$

La démonstration de l'établissement des Equations différentielles ordinaires 3.7 et 3.8 ainsi que le calcul de leurs solutions sont développés en annexe.

Le modèle nous fournit également une expression du taux *spot* en composition continue :

$$\forall t \leq T, \quad R(t, T-t) = -\frac{B(t, T)' X_t}{T-t} - \frac{C(t, T)}{T-t}. \quad (3.11)$$

En utilisant l'expression obtenue pour le vecteur B , il vient :

$$\forall t \leq T, \quad R(t, T-t) = X_t^1 + X_t^2 \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} + X_t^3 \left(\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} - e^{-\lambda(T-t)} \right) - \frac{C(t, T)}{T-t}. \quad (3.12)$$

On reconnaît les facteurs de la fonctionnelle du modèle de Nelson-Siegel dynamique, où les processus X_t^1 , X_t^2 et X_t^3 sont respectivement assimilables au taux d'intérêt long-terme (facteur de translation), au facteur de pente et au facteur de courbure de la structure par terme de taux. En fait, le modèle AFNS introduit une cale déterministe C homogène : elle dépend de la maturité résiduelle

du taux. C'est cette fonction qui, soustraite à l'expression du taux dans le modèle de Nelson-Siegel, assure l'absence d'opportunité d'arbitrage. Si l'on souhaite construire un cadre théorique rigoureux qui reprend les hypothèses classiques des modèles financiers basés sur l'AOA, c'est cette expression du taux qui doit être envisagée dans l'approche Nelson-Siegel.

3.2.3 Autour du prix du zéro-coupon dans le modèle retenu

Dans le modèle *arbitrage-free* Nelson-Siegel, le prix d'un zéro-coupon d'échéance T s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t, T) = f_T(t, X_t),$$

où $f_T : (t, X) \mapsto \exp(B(t, T)'X + C(t, T))$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur son ensemble de définition, on peut lui appliquer le lemme d'Itô multidimensionnel. On obtient l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = & \underbrace{\left[\left[\frac{dB}{dt}(t, T) \right]' X_t + \frac{dC}{dt}(t, T) - B(t, T)' \Lambda X_t + \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma \right\} \right]}_{(a)} dt \\ & + B(t, T)' \Sigma dW_t. \end{aligned}$$

Par définition de la mesure de probabilité risque neutre, la quantité (a) est égale au processus de taux sans risque évalué en $t : r_t$. On obtient la dynamique risque neutre du prix du zéro-coupon sans risque, avec sa fonction de volatilité associée :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T)' dW_t, \quad (3.13)$$

où on note $\forall t \leq T$:

$$\Gamma(t, T) = \begin{bmatrix} \Gamma_1(t, T) \\ \Gamma_2(t, T) \\ \Gamma_3(t, T) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

le vecteur de volatilité du processus de prix zéro-coupon, avec :

$$\begin{cases} \Gamma_1(t, T) &= \sigma_{11} B_1(t, T) + \sigma_{21} B_2(t, T) + \sigma_{31} B_3(t, T), \\ \Gamma_2(t, T) &= \sigma_{22} B_2(t, T) + \sigma_{32} B_3(t, T), \\ \Gamma_3(t, T) &= \sigma_{33} B_3(t, T). \end{cases}$$

La fonction de volatilité Γ caractérise la structure de volatilité du prix zéro-coupon. La solution de cette équation est un mouvement brownien géométrique, qui s'écrit :

$$\forall t \leq T, \quad P(t, T) = P(0, T) \exp \left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T)' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Gamma(s, T)\|^2 ds \right). \quad (3.15)$$

où on a noté $\| \cdot \|$ la norme euclidienne.

Comme par AOA, $\forall t \geq 0, P(t, t) = 1$, on peut obtenir une nouvelle expression qui ne dépend plus directement du taux court :

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \frac{P(t, T)}{P(t, t)} \\ &= \frac{P(0, T) \exp \left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T)' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Gamma(s, T)\|^2 ds \right)}{P(0, t) \exp \left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, t)' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Gamma(s, t)\|^2 ds \right)} \end{aligned}$$

Posons, afin d'alléger les écritures qui vont suivre, pour tout triplet (s, t, T) tel que $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\Delta_s \Gamma(t, T) = \Gamma(s, T) - \Gamma(s, t), \quad (3.16)$$

le vecteur de *spread* de volatilité entre les maturités t et T à la date s . On obtient :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(\int_0^t \Delta_s \Gamma(t, T)' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\|\Gamma(s, T)\|^2 - \|\Gamma(s, t)\|^2) ds \right). \quad (3.17)$$

Cette expression illustre l'un des points forts de ce type de modèle : le *pricing* d'un zéro-coupon à toute date t nécessite seulement de connaître la structure par terme des taux zéro-coupon en 0 ainsi que la structure de volatilité du prix (ici déterministe).

L'un des principaux objectifs de ce chapitre est, dans le cadre de notre étude, d'établir un modèle qui permette de valoriser des produits dérivés de taux et des obligations structurées. Des changements de mesure de probabilité issus du théorème de Radon-Nikodym ainsi que du théorème de Girsanov peuvent être des étapes essentielles pour développer des expressions qui s'écrivent sous forme d'espérance (ceci équivaut à la technique de changement de numéraire). En ce sens, nous introduisons la mesure de probabilité *T-forward-neutre*, notée $\mathbb{Q}_T$, associée au numéraire $P(\cdot, T)$:

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T)}{P(0, T)}, \quad (3.18)$$

Par l'Equation 3.15, il vient :

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \Gamma(s, T)' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Gamma(s, T)\|^2 ds \right). \quad (3.19)$$

Par le théorème de Girsanov multidimensionnel, le processus défini par la dynamique ci-dessous est un mouvement brownien multidimensionnel sous $\mathbb{Q}_T$:

$$dW_s^T = dW_s - \Gamma(s, T) ds. \quad (3.20)$$

Le prix à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T s'écrit donc, sous cette nouvelle mesure de probabilité :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(\int_0^t \Delta_s \Gamma(t, T)' dW_s^T + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta_s \Gamma(t, T)\|^2 ds \right). \quad (3.21)$$

On a également, par un raisonnement analogue, l'expression de ce prix zéro-coupon sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_t$:

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(\int_0^t \Delta_s \Gamma(t, T)' dW_s^t - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta_s \Gamma(t, T)\|^2 ds \right), \quad (3.22)$$

où le processus défini par la dynamique suivante est un mouvement brownien multidimensionnel sous $\mathbb{Q}_t$:

$$dW_s^t = dW_s - \Gamma(s, t) ds. \quad (3.23)$$

Finalement, on peut aussi définir la mesure $\mathbb{Q}_s$ pour toute date $s \in [t, T]$ associée au numéraire $P(\cdot, s)$. Ce changement de numéraire nous sera notamment fort utile lors du calcul du prix de l'obligation à taux variable risquée. On a, de même :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(\int_0^t \Delta_u \Gamma(t, T)' dW_u^s - \frac{1}{2} \int_0^t (\|\Delta_u \Gamma(s, T)\|^2 - \|\Delta_u \Gamma(t, s)\|^2) du \right), \quad (3.24)$$

où le processus défini par :

$$dW_u^s = dW_u - \Gamma(u, s) du. \quad (3.25)$$

est un mouvement brownien multidimensionnel sous $\mathbb{Q}_s$.

On retrouve naturellement les formules établies précédemment pour $s = t$ et pour $s = T$.

Dans toute la suite, nous noterons $P(X, t)$ le prix *spot* du zéro-coupon de maturité t , dont le paramètre X est le vecteur de facteurs AFNS au pas de temps d'évaluation (en *spot*, c'est-à-dire à la date initiale 0).

3.3 Calibration du modèle AFNS

Notre intérêt se porte à présent sur l'estimation des paramètres du modèle AFNS. Notons que l'objectif d'un tel modèle est avant tout d'avoir un historique de facteurs de risque (en l'occurrence, ici, les régresseurs) qui caractérisent entièrement la structure par terme de prix zéro-coupon pour pouvoir, d'une part, les projeter au moyen d'un modèle de série temporelle et, d'autre part, calculer des prix d'obligations structurées. Nous avons à disposition une formule du taux *spot* en composition continue à la date 0 ($R(0, T)_{T>0}$) s'exprimant en fonction de tous les paramètres du modèle, c'est-à-dire le facteur d'échelle λ , les trois valeurs initiales prises par les facteurs AFNS : X_0^1, X_0^2, X_0^3 et les 6 coefficients de la matrice de volatilité du modèle. Le jeu de paramètres à estimer est donc composé des mêmes paramètres que ceux du modèle Nelson-Siegel, à savoir les 3 régresseurs (dynamiques) et le facteur d'échelle, auxquels on ajoute les 6 paramètres de la matrice de volatilité présents dans le terme de "cale". L'idée principale est d'optimiser les paramètres par régressions linéaires itératives effectuées sur la somme du taux *spot* et de la cale associée. Une fois les paramètres optimisés, il est alors aisé de reconstruire les courbes de prix de zéro-coupon par la formule liant ces derniers aux taux *spot*.

3.3.1 Présentation des données

Le modèle est calibré sur un historique de taux zéro-coupon *spot* extrait, par la technique de *stripping* (qui est développée dans la Partie 1.32) des taux *swap* Euro fournis par le marché. Les données, extraites de Bloomberg, sont journalières et l'historique s'étend du 01/01/2010 au 23/01/2019. Les maturités disponibles sont 1 jour, 1 mois, 2 mois, 3 mois, 6 mois, 9 mois, 1 an, 18 mois, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 6 ans, 7 ans, 8 ans, 9 ans, 10 ans, 11 ans, 12 ans, 15 ans, 20 ans, 25 ans, 30 ans, 35 ans, 40 ans, 45 ans et 50 ans.

Les séries chronologiques de taux *swap* de maturités 1 jour, 1 mois, 1 an, 5 ans, 10 ans, 20 ans et 35 ans, ainsi que des structures par terme, sont représentées ci-après :

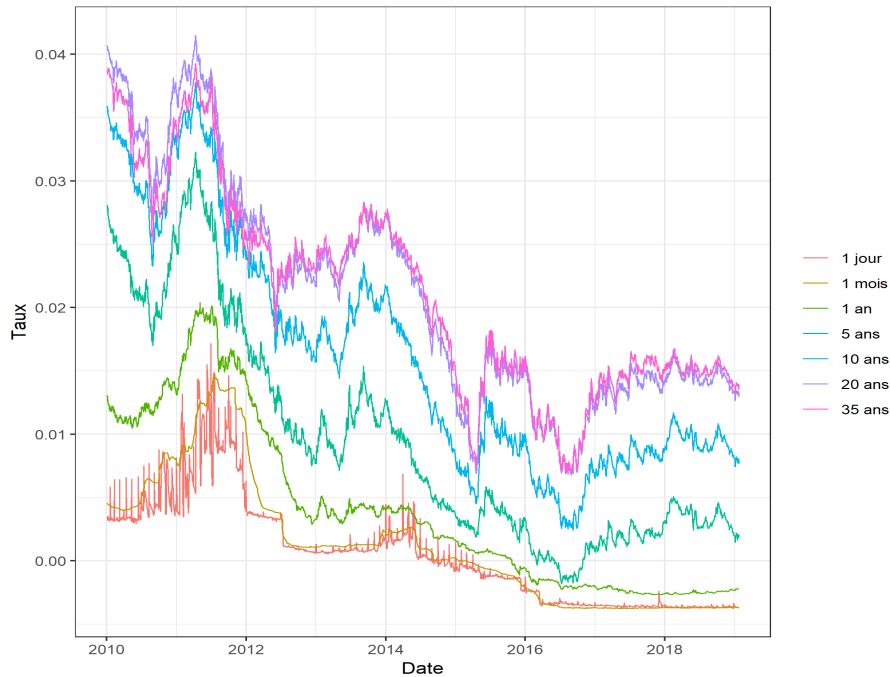


FIGURE 3.1 – Historique de séries chronologiques de taux *swap* Euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019

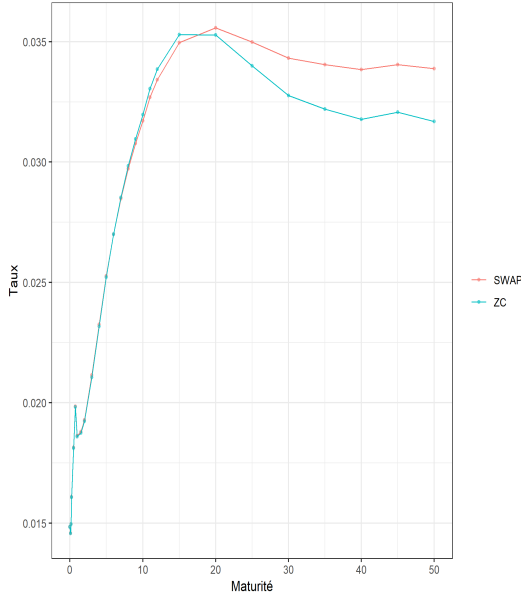


FIGURE 3.2 – Structures par terme de taux *swap* euro (marché) et de taux zéro-coupon *spot* au 15 juillet 2011

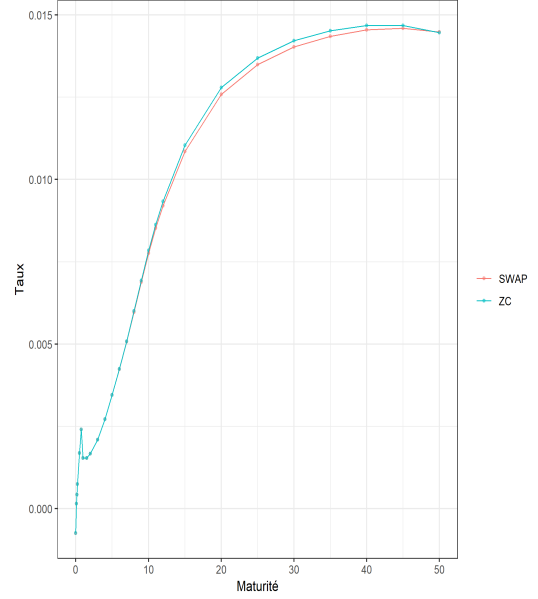


FIGURE 3.3 – Structures par terme de taux *swap* euro (marché) et de taux zéro-coupon *spot* au 5 janvier 2015

3.3.2 Description de l'approche

On rappelle la relation entre le taux *spot* en composition continue à la date 0, et les fonctions du modèle AFNS :

$$\forall T > 0, \quad R(0, T) + \frac{C(0, T)}{T} = -\frac{B(0, T)'}{T} X_0, \quad (3.26)$$

où les expressions analytiques des fonctions vectorielles B et C sont données dans la partie précédente.

Il est alors possible, à partir des autres paramètres du modèle (paramètres d'échelle et de volatilités), d'obtenir le vecteur X_0 par régression linéaire sur le terme de gauche, où le taux *spot* est la donnée en entrée. On décide d'introduire une dépendance temporelle des paramètres du vecteur X_0 , par analogie avec le cadre Nelson-Siegel dynamique de Diebold et Li. On va régresser sur un historique de taux *spot* de manière à calibrer les paramètres et obtenir un historique de facteurs dynamiques X_0^i , $i \in \{1, 2, 3\}$. L'historique de facteurs est alors utilisé en temps qu'historique de séries chronologiques pour être intégré au générateur de scénarios économiques lors de sa calibration. La calibration s'effectue donc en considérant le paramètre X_0 en intérieur, et les autres paramètres en extérieurs (constants sur l'ensemble des pas de temps). L'estimation des paramètres extérieurs se fait par régressions itératives sur des points sélectionnés par l'algorithme d'optimisation.

Plus formellement, notons $(T_1, T_2, \dots, T_m)$ les maturités disponibles, $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de l'historique de données ($n > 1$, $m > 1$), et $(y_{t_i}(T_j))_{(i,j) \in [1,n] \times [1,m]}$ le jeu de données des taux *spot*, en notant $y_u(T)$ le taux *spot* en composition continue au pas de temps u de l'historique et de maturité T . On note également $(X_{0,t_i}^r)_{(i,r) \in [1,n] \times [1,3]}$ le jeu de régresseurs sur tout l'historique. On pose :

$$Y = \begin{bmatrix} y_{t_1}(T_1) & y_{t_1}(T_2) & \dots & y_{t_1}(T_m) \\ y_{t_2}(T_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{t_n}(T_1) & \dots & \dots & y_{t_n}(T_m) \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{C(0,T_1)}{T_1} & \frac{C(0,T_2)}{T_2} & \dots & \frac{C(0,T_m)}{T_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{C(0,T_1)}{T_1} & \dots & \dots & \frac{C(0,T_m)}{T_m} \end{bmatrix}_{n \times m},$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{B_1(0,T_1)}{T_1} & -\frac{B_2(0,T_1)}{T_1} & -\frac{B_3(0,T_1)}{T_1} \\ -\frac{B_1(0,T_2)}{T_2} & -\frac{B_2(0,T_2)}{T_2} & -\frac{B_3(0,T_2)}{T_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{B_1(0,T_m)}{T_m} & -\frac{B_2(0,T_m)}{T_m} & -\frac{B_3(0,T_m)}{T_m} \end{bmatrix}_{m \times 3}, \quad \beta = \begin{bmatrix} X_{0,t_1}^1 & X_{0,t_1}^2 & X_{0,t_1}^3 \\ X_{0,t_2}^1 & X_{0,t_2}^2 & X_{0,t_2}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{0,t_n}^1 & X_{0,t_n}^2 & X_{0,t_n}^3 \end{bmatrix}_{n \times 3}. \quad (3.27)$$

Pour un jeu de paramètres $\theta = (\lambda, \sigma)$ donné (en notant σ le vecteur des 6 paramètres de la matrice de volatilité Σ), le matrice d'erreurs $E_\theta = (e_{i,j}^\theta)_{(i,j) \in [1,n] \times [1,m]}$ de notre problème s'écrit :

$$E_\theta = Y + C_\theta - \beta_\theta B'_\theta, \quad \text{où par MCO : } \beta_\theta = (Y + C_\theta) B_\theta (B'_\theta B_\theta)^{-1}. \quad (3.28)$$

On estime les paramètres selon le critère de minimisation des erreurs quadratiques. En notant $\theta^* = (\lambda^*, \sigma^*)$ le vecteur de paramètres optimal, le problème d'optimisation mono-objectif s'écrit :

$$\theta^* = \underset{\theta}{\text{Argmin}} \quad \|E_\theta\|_2^2, \quad (3.29)$$

la notation $\|\cdot\|_2$ indiquant la norme matricielle d'ordre 2, soit : $\|E_\theta\|_2 = \sqrt{\text{Tr}\{E_\theta E_\theta'\}}$.

Une fois les paramètres extérieurs estimés, il suffit d'appliquer l'Equation 3.28 conditionnellement à ces paramètres pour avoir une estimation des régresseurs et donc de l'historique des facteurs X_0^i , $i = 1, 2, 3$.

3.3.3 Introduction de poids

Notre objectif est avant tout de reproduire au mieux les prix du marché des titres zéro-coupon, étant donné que ces prix apparaissent dans la quasi-totalité des formules de prix des produits financiers que l'on déterminera par la suite. Il convient donc de calibrer le modèle en privilégiant la réplication de la structure par terme de prix zéro-coupon à celui de la structure par terme de taux. Pour cela, on introduit des poids de manière à donner plus d'importance aux points pour lesquels le prix zéro-coupon est sensible aux variations de taux et donc à l'erreur commise sur le point lors de la calibration. On choisit alors d'utiliser, en tant que poids, les dérivées partielles normalisées du prix zéro-coupon par rapport au taux *spot*.

On conserve les notations précédentes et on introduit les poids :

$$w_{ij} = \frac{\frac{\partial P_{t_i}}{\partial R}(0, T_j)}{\sum_{l=1}^m \frac{\partial P_{t_i}}{\partial R}(0, T_l)}, \quad (3.30)$$

où : $P_u(0, T) = \exp(-T y_u(T))$ pour un pas de temps u de l'historique et une maturité T , d'où :

$$\frac{\partial P_u}{\partial R}(0, T) = -T P_u(0, T). \quad (3.31)$$

La surface de pondérations est représentée ci-après.

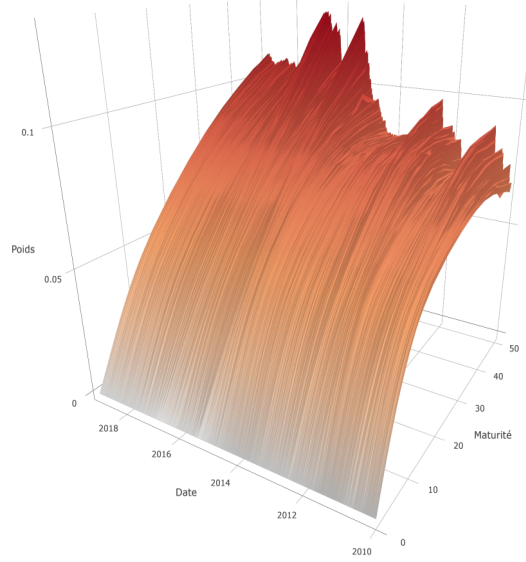


FIGURE 3.4 – Surface de pondérations historique

Les poids sont généralement croissants suivant la maturité. De ce fait, on va apporter plus de poids aux maturités les plus élevées, ce qui est pertinent (même si ce sont des points pour lesquels les produits sont peu liquides) car ce sont généralement des maturités auxquelles les prix zéro-coupon sont difficiles à reproduire.

On note $W = (w_{i,j})$ la matrice de poids. Les notations qui vont suivre peuvent être lourdes mais sont nécessaires pour poser le problème matriciellement. De plus, les étapes décrites ci-dessous respectent l'ordre chronologique du procédé réel d'implémentation de l'algorithme de calibration.

Posons, $\forall i \in [1, n]$,

$$D_i^W = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_{im} \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad Y_i = \begin{bmatrix} y_{t_i}(T_1) \\ y_{t_i}(T_2) \\ \vdots \\ y_{t_i}(T_m) \end{bmatrix}_m, \quad \beta_i = \begin{bmatrix} X_{0,t_i}^1 \\ X_{0,t_i}^2 \\ \vdots \\ X_{0,t_i}^3 \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{bmatrix} C(0, T_1) \\ C(0, T_2) \\ \vdots \\ C(0, T_m) \end{bmatrix}_m. \quad (3.32)$$

Soit un jeu de paramètres θ (hors régresseurs). Alors le régresseur des moindres carrés pondérés, en régressant sur le pas de temps t_i , s'écrit :

$$\beta_i^\theta = (B_\theta' D_i^W B_\theta)^{-1} B_\theta' D_i^W (Y_i + C_m^\theta). \quad (3.33)$$

Soit $E_{i.}^\theta$ le vecteur d'erreur au pas de temps t_i pour le jeu de paramètres θ :

$$E_{i.}^\theta = \begin{bmatrix} e_{i1}^\theta \\ e_{i2}^\theta \\ \vdots \\ e_{im}^\theta \end{bmatrix}_m. \quad (3.34)$$

En utilisant les notations introduites pour la méthode des moindres carrés ordinaire, on a les égalités suivantes :

$$E_\theta = \begin{bmatrix} (E_{1.}^\theta)' \\ (E_{2.}^\theta)' \\ \vdots \\ (E_{n.}^\theta)' \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad \beta_\theta = \begin{bmatrix} (\beta_{1.}^\theta)' \\ (\beta_{2.}^\theta)' \\ \vdots \\ (\beta_{n.}^\theta)' \end{bmatrix}_{n \times 3}. \quad (3.35)$$

Alors, si $\theta^* = (\lambda^*, \sigma^*)$ est le jeu de paramètres optimal, le problème d'optimisation mono-objectif s'écrit de la même manière que précédemment :

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \|E_{i.}^\theta\|_2^2 = \underset{\theta}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n (Y_{i.} + C_m^\theta - B_\theta \beta_{i.}^\theta)' D_i^W (Y_{i.} + C_m^\theta - B_\theta \beta_{i.}^\theta). \quad (3.36)$$

Ainsi, dans la pratique, si l'on applique des poids à chaque erreur, on va effectuer une régression linéaire à chaque pas de temps. Dans notre cas, le calcul de la somme des erreurs quadratiques nécessite donc n régressions linéaires sur des vecteurs à m éléments.

3.3.4 Autour de la matrice de volatilité : contraintes d'optimisation

L'optimisation d'une fonction objective en vue de la calibration d'un modèle financier nécessite dans un premier temps une sélection de contraintes (linéaires dans notre cas) judicieusement choisies. Lorsque l'on spécifie un modèle stochastique, la forme prise par les équations qui en découlent ainsi que les formules obtenues *in fine* (si elles existent) peuvent être très différentes de celles du même modèle mais spécifié différemment. Les paramètres à optimiser ainsi que les contraintes associées sont alors distincts du modèle de référence. Si un modèle est bien spécifié, il doit toujours être possible de trouver une méthode pour assurer l'identifiabilité des paramètres ainsi qu'une sélection de contraintes d'optimisation qui permettront une calibration efficace sur les données du marché.

La principale difficulté dans la calibration du modèle AFNS est due à la spécification de la volatilité des facteurs stochastiques : dans notre cas et tel qu'il a été spécifié par Diebold, Christensen et Rudebusch, les paramètres de volatilité à calibrer sont les coefficients d'une matrice triangulaire inférieure, ce qui assure une structure de corrélation entre les facteurs et une spécification à mouvements browniens indépendants. Cette matrice est la décomposition de Cholesky de la matrice de variance-covariance associée au modèle et ses paramètres ne sont pas interprétables. Il paraît donc ambiguë de définir des contraintes d'optimisation sur des paramètres dont on n'a aucune interprétation financière. Concrètement, on pourrait fixer des contraintes sur les termes de la diagonale de cette matrice (par propriété de la décomposition de Cholesky) mais ce n'est pas satisfaisant. C'est la raison pour laquelle nous proposons de transformer le problème en optimisant des paramètres interprétables et identifiables. Pour cela, on va passer par la matrice de corrélation des facteurs stochastiques.

On note $V = (v_{ij})$ la matrice de variance-covariance du modèle (de dimension 3×3), $R = (\rho_{ij})$ la matrice de corrélation associée (également de dimension 3×3) et on pose :

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{v_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{v_{33}} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

On rappelle que la matrice de la décomposition de Cholesky qui caractérise la volatilité et la structure de corrélation du modèle AFNS est :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Alors on a les relations suivantes :

$$V = \Sigma \Sigma', \quad (3.39)$$

$$V = D_\sigma R D_\sigma. \quad (3.40)$$

Après calcul, on obtient les expressions suivantes pour les coefficients c_i , $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, du terme de la cale AFNS :

$$\begin{aligned} c_1 &= v_{11}, & c_2 &= v_{22}, & c_3 &= v_{33}, & c_4 &= \rho_{21} \sqrt{v_{11} v_{22}}, \\ c_5 &= \rho_{31} \sqrt{v_{11} v_{33}} + \rho_{21} \sqrt{v_{11} v_{22}}, & c_6 &= \rho_{32} \sqrt{v_{22} v_{33}}. \end{aligned}$$

Les coefficients c_i sont les seuls termes qui contiennent les coefficients de la matrice de volatilité dans la formule du taux *spot* en composition continue. Pour calibrer le modèle, il suffit donc de calibrer ces coefficients. Ils sont uniquement fonctions des 3 coefficients de corrélations linéaires ainsi que des 3 coefficients de la diagonale de la matrice de variance-covariance du modèle, donc de la variance du modèle. Ces 6 paramètres sont financièrement interprétables et identifiables, on leur fixe les contraintes suivantes :

$$(\rho_{21}, \rho_{31}, \rho_{32}) \in]-1, 1[^3, \quad (v_{11}, v_{22}, v_{33}) \in]0, 1[^3. \quad (3.41)$$

Après calcul, on revient aux paramètres de départ suivant le système d'équations :

$$\begin{cases} \sigma_{11} &= \sqrt{v_{11}} \\ \sigma_{21} &= \rho_{21} \sqrt{v_{22}} \\ \sigma_{31} &= \rho_{31} \sqrt{v_{33}} \\ \sigma_{22} &= \sqrt{v_{22}} \sqrt{1 - \rho_{21}^2} \\ \sigma_{32} &= \sqrt{\frac{v_{33}}{1 - \rho_{21}^2}} (\rho_{32} - \rho_{21} \rho_{31}) \\ \sigma_{33} &= \sqrt{\frac{v_{33}}{1 - \rho_{21}^2}} \sqrt{1 + 2\rho_{21}\rho_{31}\rho_{32} - (\rho_{21}^2 + \rho_{31}^2 + \rho_{32}^2)}. \end{cases}$$

3.3.5 Calibration et résultats

On obtient les paramètres extérieurs suivants (ici arrondis au millième près). Les séries chronologiques de paramètres intérieurs (facteurs AFNS) sont reconstruites à partir de ces paramètres. Elles sont représentées ci-dessous.

λ	0,308
σ_{11}	0,004
σ_{21}	0,027
σ_{31}	0,058
σ_{22}	0,053
σ_{32}	-0,012
σ_{33}	0,082

TABLE 3.1 – Paramètre d'échelle et paramètres de la matrice de volatilité AFNS



FIGURE 3.5 – Série chronologique du régresseur X^0

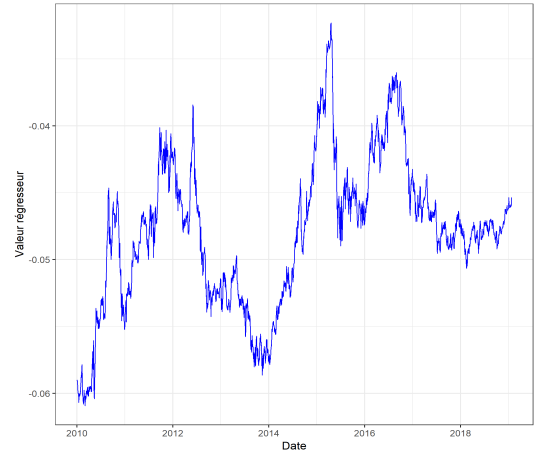


FIGURE 3.6 – Série chronologique du régresseur X^1

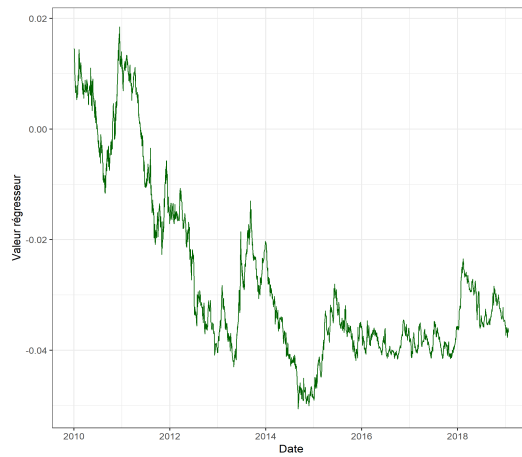


FIGURE 3.7 – Série chronologique du régresseur X^2

Les séries temporelles obtenues sont globalement de qualité : leur comportement n'est pas chaotique et les rares points qui semblent faire apparaître des sauts correspondent très certainement à des dates pour lesquelles la donnée est de mauvaise qualité. On peut donc, sous réserve d'effectuer les transformations nécessaires, intégrer ces séries au générateur de scénarios économiques en vue de projeter des structures par terme de taux d'intérêt. Les régresseurs sont diffusés puis utilisés en *input* de la fonction de prix pour reconstruire les structures par terme.

On observe la série chronologique de taux court à partir des régresseurs X^0 et X^1 :

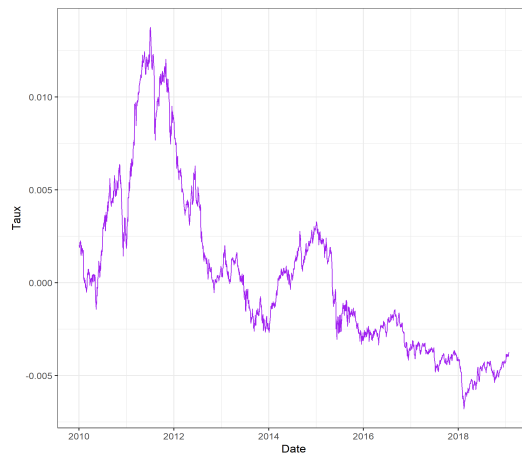


FIGURE 3.8 – Série chronologique du taux court

Pour juger de la capacité du modèle à reproduire l'historique de structures par terme, les surfaces historiques produites par le modèle sont représentées ci-dessous, accompagnées de quelques observations du *fitting* à des dates fixées. On observe d'une part la réplique des prix zéro-coupon et, d'autre part, celle des taux *spot*. Les surfaces sont comparées à un échantillon de 800 points sélectionnés aléatoirement sur le jeu de données complet. Nous reprendrons ce schéma de présentation des résultats dans toute la suite.

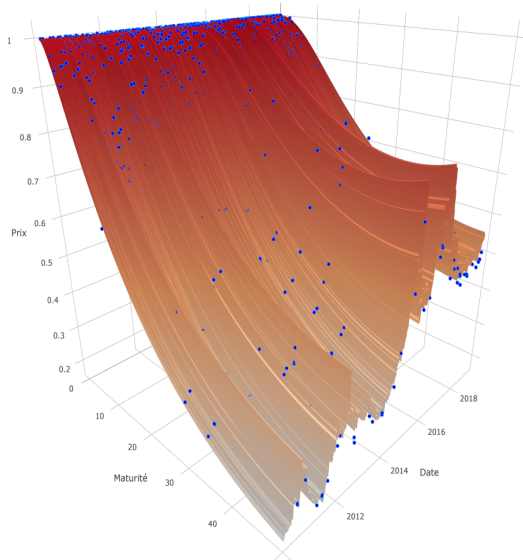


FIGURE 3.9 – Historique de prix zéro-coupon reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)

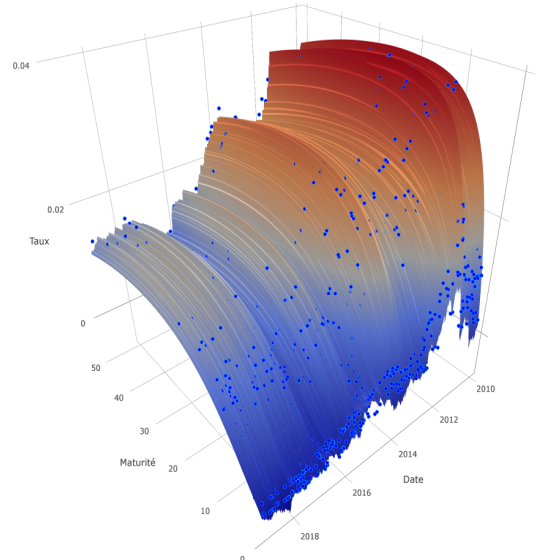


FIGURE 3.10 – Historique de taux *spot* reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)

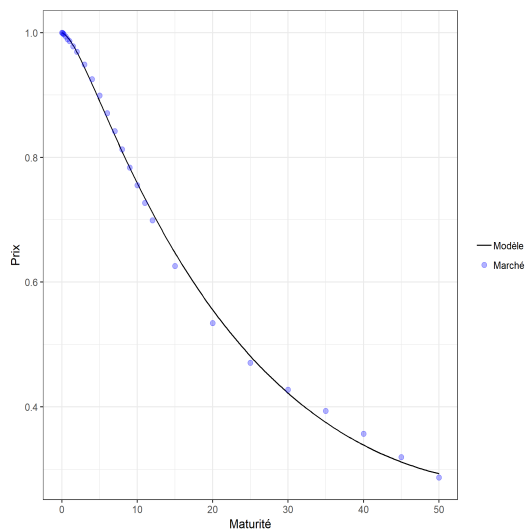


FIGURE 3.11 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon au 25 octobre 2010

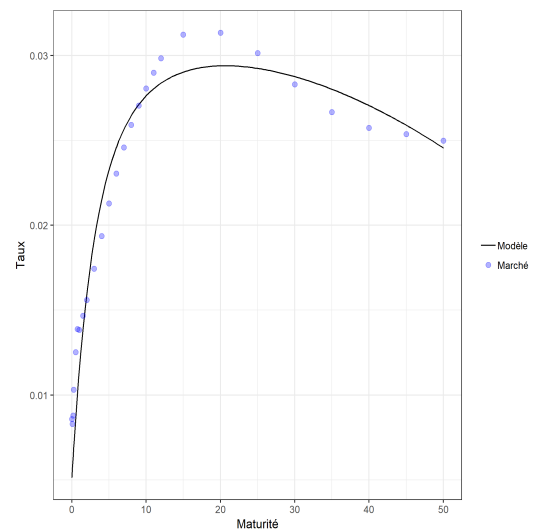


FIGURE 3.12 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon au 25 octobre 2010

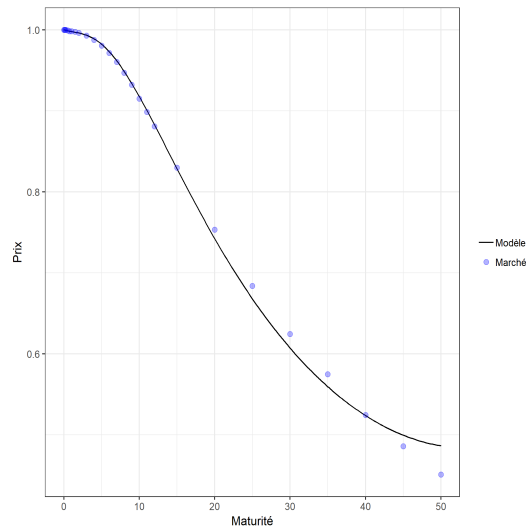


FIGURE 3.13 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon au 26 décembre 2014

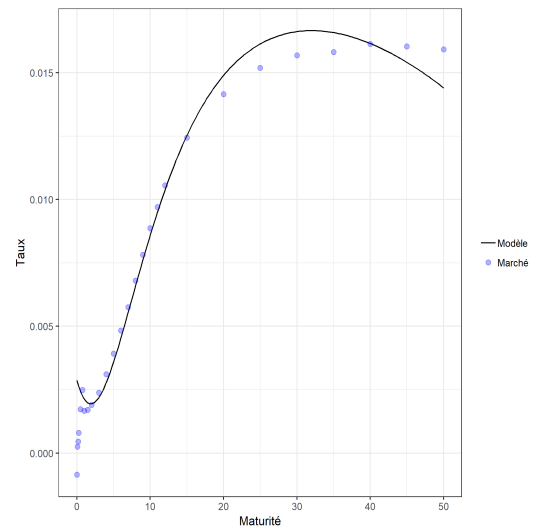


FIGURE 3.14 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon au 26 décembre 2014

On observe un fitting des prix zéro-coupon d'excellente qualité sur les pas de temps. La forme générale de la courbe est reproduite. Concernant les taux zéro-coupon *spot*, le modèle parvient globalement à reproduire la pente et l'inversion de la structure par terme pour les maturités élevées (en général supérieures à 30 ans) sur certains pas de temps, qui a pu être observée pendant les années qui ont suivi la crise de 2008. De plus, le modèle tente de reproduire la "virgule" que l'on observe généralement pour les maturités faibles (inférieures à 1 an), bien que cela aboutisse en contrepartie à une surestimation du taux à certaines maturités (notamment 1 jour, 1 semaine et 1 mois). Malgré cela, la reproduction des prix zéro-coupon est de bonne qualité et c'est ce que nous recherchons en premier lieu. La qualité de réplcation à des dates plus récentes est également excellente et on la représente ci-après.

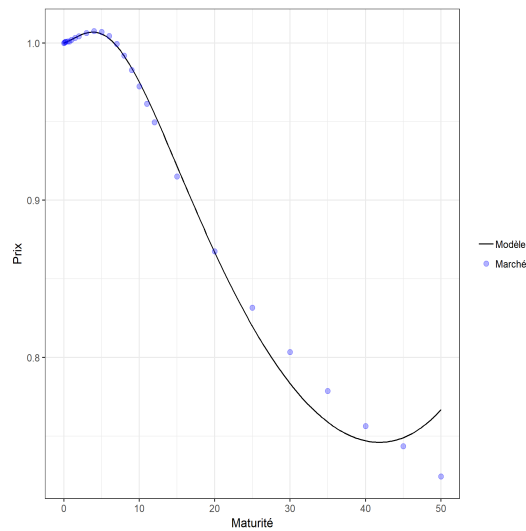


FIGURE 3.15 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon au 1er août 2016

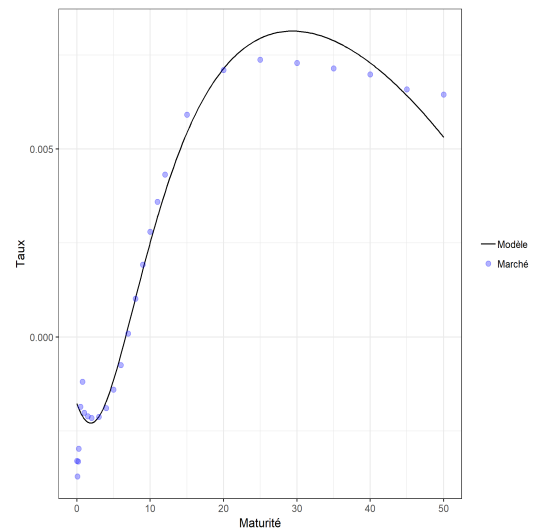


FIGURE 3.16 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon au 1er août 2016

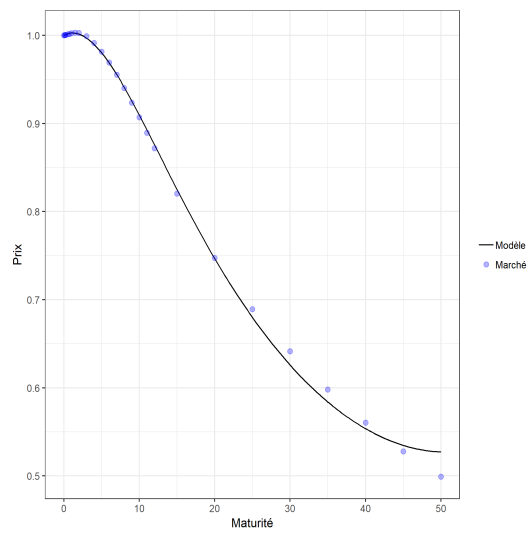


FIGURE 3.17 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon au 18 avril 2018

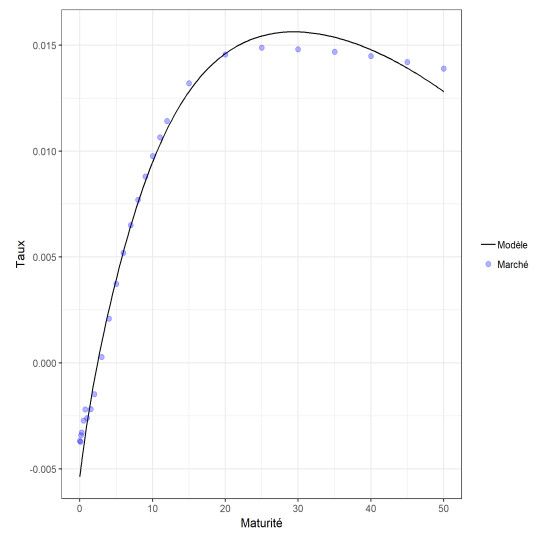


FIGURE 3.18 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon au 18 avril 2018

Chapitre 4

Modélisation des obligations à taux fixe

Sommaire

4.1	Le modèle de Longstaff, Mithal et Neis	48
4.1.1	Cadre de l'étude et spécification	48
4.1.2	Formule de valorisation des contrats <i>Credit Default Swap</i>	49
4.1.3	Valorisation des obligations à taux fixe	50
4.1.4	Formules fermées	51
4.2	Calibration du modèle	52
4.2.1	Présentation des données	53
4.2.2	Méthode "classique" de calibration : tour d'horizon sur les pratiques	54
4.2.3	Vers une reproduction plus complète des prix du marché : nouvelle méthode de calibration	57
4.2.4	Estimation de primes CDS asymptotiques, calibration du modèle de crédit	60
4.2.5	Lissage des structures par terme d'intensité de défaut et calibration du modèle de liquidité	64
4.2.6	Lissage des structures par terme de rendement d'opportunité	72
4.3	Une modélisation des probabilités de défaut embarquée	78
4.3.1	Probabilité de défaut risque neutre et probabilité de défaut historique	78
4.3.2	Spécification du modèle de probabilités historiques	79
4.3.3	Calibration du "paramètre d'échelle"	80

Dans ce chapitre, nous spécifions et calibrons un modèle d'évaluation des obligations (risquées) à taux fixe. Les évolutions des facteurs de risque associés au risque de crédit et à la liquidité du titre sont régies par des processus stochastiques. Leur dynamique est spécifiée selon le modèle de Longstaff-Mithal-Neis, initialement prévu pour la valorisation des obligations *corporate* à taux fixe, à présent étendu aux souveraines et, aux chapitres suivants, à des classes d'obligations structurées (taux variable et indexée). Nous proposons et détaillons une nouvelle approche de calibration qui permet, en rendant intérieurs des paramètres implicites du modèle et en cristallisant d'autres paramètres (extérieurs), de reproduire remarquablement les structures par terme de primes des CDS puis un historique de prix d'un panier d'obligations.

4.1 Le modèle de Longstaff, Mithal et Neis

4.1.1 Cadre de l'étude et spécification

Pour évaluer correctement les titres de dette financière, il est nécessaire d'intégrer deux risques financiers majeurs dans la valorisation : le risque de crédit et le risque de liquidité. Ces risques représentent une part non-négligeable des risques financiers d'un cadre de valorisation de titres de crédit et doivent être modélisés avec soin. Le principal enjeu de la modélisation de ces titres est qu'ils constituent une part importante des portefeuilles des assureurs et institutions financières d'aujourd'hui. Les portefeuilles d'actifs des compagnies d'assurance sont composés généralement de plus de 60 % d'obligations variées. Leur évaluation doit donc être faite de la manière la plus rigoureuse qui soit et doit pouvoir fournir des indicateurs de risque de crédit avec précision. Le modèle de crédit que nous développons est issu du modèle de Longstaff-Mithal-Neis, ou "LMN", et permet d'intégrer le risque de crédit ainsi que le risque de liquidité dans le *pricing* des obligations. Dans notre cadre, nous appliquons également le modèle aux obligations souveraines et nous l'étendons par la suite aux obligations à taux variable (*Floating Rate Note*) et aux OATi (Obligations Assimilables du Trésor indexées).

Dans leur article [27] [2004], Longstaff, Mithal et Neis utilisent une approche à intensité pour modéliser le risque de crédit des obligations *corporate* à taux fixe. Pour d'éventuelles précisions et développements sur cette approche, le lecteur pourra se référer à la Section 2.2.2.

Dans cette étude, nous étendons le modèle aux obligations souveraines à taux fixe et nous proposons une nouvelle méthode de calibration qui fournit des résultats remarquables en terme de réplcation de primes CDS et de prix d'obligations.

On note $(r_t)_{t \geq 0}$ le processus de taux court ou taux sans risque, $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ le processus d'intensité de défaut et on introduit le processus de liquidité $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ qui sera utilisé pour capter le rendement supplémentaire demandé par le marché en réponse au risque de liquidité associé au titre. On suppose ces trois processus mutuellement indépendants et on se place dans un cadre où les obligations sont remboursées en totalité à l'échéance (de type "*in fine*"). De plus, on suppose qu'en cas de défaut de l'entreprise émettrice, le possesseur de l'obligation perçoit une portion $(1 - \omega)$ du nominal, où on a noté ω le *Loss Given Default* de l'obligation.

Notons que ce modèle n'impose pas de dynamique particulière pour le taux sans risque étant donnée la structure de dépendance des processus. Il peut donc être adapté à tout modèle de taux AOA.

Les processus d'intensité et de liquidité ont quant à eux les dynamiques suivantes :

- Le processus d'intensité de défaut est un processus de type Cox-Ingersoll-Ross tel que sa dynamique sous la mesure de probabilité risque neutre s'écrit :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t^\lambda, \quad \lambda_0 = \lambda \in]0, 1] \text{ p.s.}, \quad (4.1)$$

où α , β et σ sont des paramètres strictement positifs et $(W_t^\lambda)_{t \geq 0}$ est un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien.

Nous démontrons en annexe que pour assurer la stricte positivité du processus $(\lambda_t)_{t \geq 0}$, la contrainte : $2\alpha > \sigma^2$ doit être posée. C'est la condition de Feller (voir l'article de Cox J., Ingersoll J. et Ross S. [16] [1985] pour des développements).

- Le processus de liquidité est défini de la manière suivante :

$$d\gamma_t = \eta dW_t^\gamma, \quad \gamma_0 = \gamma \in [-1, 1] \text{ p.s.}, \quad (4.2)$$

où η est un paramètre strictement positif et $(W_t^\gamma)_{t \geq 0}$ est un $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien.

Les mouvements browniens W^λ et W^γ sont indépendants. Les processus $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ et $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ sont des taux, leurs paramètres doivent donc respecter certaines contraintes (qui serviront plus tard de contraintes d'optimisation) :

- Le terme $\frac{\alpha}{\beta}$ est la moyenne long-terme du processus d'intensité. C'est donc un taux et on peut le poser borné par 0 et 1. On doit donc avoir $\alpha < \beta$;
- La condition de Feller assure que le processus $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ est presque-sûrement strictement positif si : $2\alpha > \sigma^2$.

En pratique, les obligations sont toujours exposées à un risque de défaut, il est donc naturel que l'intensité de défaut soit un processus strictement positif.

L'objet de la suite de cette section est d'exposer des formules d'évaluation des contrats CDS et des obligations *corporate* ou souveraines.

4.1.2 Formule de valorisation des contrats *Credit Default Swap*

Parmi les produits dérivés de crédit les plus échangés sur le marché du crédit, on trouve le *Credit Default Swap*, ce qui en fait un produit liquide. La protection qu'il fournit contre l'éventuel défaut d'un émetteur lui donne une place importante dans les stratégies de couverture de portefeuilles contre le risque de crédit. Pour évaluer un tel produit, il convient d'établir rigoureusement son *pay-off* ainsi que le risque financier auquel il est soumis. Du fait que le CDS soit un contrat négocié et non pas un titre financier, son exposition au risque diffère particulièrement du cas des obligations. Ainsi, ce produit est bien moins exposé au risque de liquidité que l'obligation. Parmi les raisons principales de cette différence (qui sont décrites exhaustivement dans l'article d'origine), on peut citer :

- Si le possesseur du contrat souhaite le revendre, il peut être bien moins coûteux pour lui de prendre une position "inverse" dans son portefeuille en achetant ou vendant un autre contrat *swap* qui permute les flux du précédent contrat.
- Le CDS est un contrat tradé *Over-The-Counter* : c'est donc un produit à caractère fortement spéculatif. Vendre des contrats est généralement aussi simple que d'en acheter sur le marché, ce qui est différent pour les titres financiers et en particulier les obligations.

Pour d'éventuelles précisions, le lecteur pourra se référer à l'article de Longstaff, Mithal et Neis [27].

Cette particularité des contrats CDS nous mène à conclure que le risque de liquidité peut être négligé dans leur valorisation : le processus $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ n'intervient pas dans les *cash flow* du CDS. Nous notons s la prime du CDS payée périodiquement par l'acheteur de protection au vendeur. En pratique, la prime est versée trimestriellement mais ici, nous supposons la prime versée en continu de l'instant initial à la maturité du CDS. On se place dans le cas d'un CDS de maturité $T > 0$ sur une obligation de nominal 1 et de *Loss Given Default* ω . Avec les résultats obtenus dans la Section 2.2.2 sur le modèle de Cox, on peut écrire les engagements respectifs de l'acheteur et du vendeur de protection.

- L'engagement de l'acheteur de protection est de verser la prime CDS en continu tant que l'entreprise de référence n'a pas fait défaut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T s e^{-\int_0^t r_u du} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} dt \right] &= s \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_u du} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \right] dt \\ &= s \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} \right] dt.\end{aligned}$$

- L'engagement du vendeur de protection est de verser le *Loss Given Default* à l'acheteur de protection en cas de défaut de l'entreprise de référence (en pratique, nous avons vu que le véritable échange est différent, mais le flux effectif reste le même) :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\omega e^{-\int_0^T r_u du} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] = \omega \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lambda_t e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} \right] dt.$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, il y a équilibre des engagements à l'émission du contrat :

$$s \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} \right] dt = \omega \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lambda_t e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} \right] dt.$$

On obtient une formule ouverte pour la prime CDS :

$$s(\omega, T) = \omega \frac{\int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lambda_t e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} \right] dt}{\int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u du} \right] dt}. \quad (4.3)$$

Notons que nous aurions pu directement adapter l'Equation 2.7 pour obtenir le même résultat.

4.1.3 Valorisation des obligations à taux fixe

Longstaff, Mithal et Neis considèrent dans leur article que le risque de liquidité associé aux obligations *corporate* n'est pas comparable à celui des obligations souveraines. Ils appliquent donc leur approche aux *corporate* seulement. Il faut remarquer que leur étude est parue en 2004, avant la crise des *subprime*, ce qui justifie leur raisonnement étant donné que les obligations souveraines étaient, à cette période, perçues comme très peu risquées (voire même sans risque). Dans notre approche, nous appliquons le modèle aux obligations *corporate* ainsi qu'aux obligations souveraines.

Soit une obligation de maturité $T > 0$ remboursée *in fine*, de nominal 1 versant un taux de coupon c de manière continue. On modélise le risque de liquidité sous la forme d'une majoration γ du taux d'actualisation qui entraîne une décote sur le prix de l'obligation. Ceci illustre le fait que moins l'actif est liquide, moins il sera simple de le vendre ponctuellement en cas de besoin et plus la décote appliquée doit être importante pour qu'il soit vendu. En fait, ce processus peut également être vu comme le rendement d'opportunité de l'obligation. C'est d'ailleurs pour cela qu'il est qualifié de "*convenience yield*" (rendement d'opportunité) dans l'article d'origine du modèle : il correspond au *spread* de taux demandé pour combler les risques qui ne sont pas captés par les autres processus dans le *pricing*. On actualise donc tous les flux perçus au taux ajusté $r + \gamma$. Ce terme signifie aussi que ce taux est associé au rendement supplémentaire attendu par les investisseurs pour couvrir le coût de la détention de cet actif plutôt que d'un autre. Il n'est donc pas exclusivement lié à l'illiquidité du titre, mais nous faisons l'hypothèse que c'est en majeure partie le cas. Le bilan des flux est le suivant : le détenteur du titre de dette reçoit un coupon en continu tant que le défaut n'a pas occurred, le nominal est remboursé à la maturité s'il n'y a pas eu défaut avant et en cas de défaut, il perçoit le taux de recouvrement $(1 - \omega)$ appliqué au nominal. Notons B (*fixed Income Bond*) le prix de l'obligation. On a :

$$\begin{aligned}
 B(c, \omega, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T c e^{-\int_0^t r_u + \gamma_u \, du} \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t + \gamma_t \, dt} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right] \\
 &\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(1 - \omega) e^{-\int_0^T r_u + \gamma_u \, du} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] \\
 &= c \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u + \gamma_u \, du} \, dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t \, dt} \right] \\
 &\quad + (1 - \omega) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u + \gamma_u \, du} \, dt \right].
 \end{aligned}$$

On a finalement une formule ouverte exploitable :

$$\begin{aligned}
 B(c, \omega, T) &= c \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u + \gamma_u \, du} \right] \, dt + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t \, dt} \right] \\
 &\quad + (1 - \omega) \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lambda_t e^{-\int_0^t r_u + \lambda_u + \gamma_u \, du} \right] \, dt.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.1.4 Formules fermées

Dans cette partie, nous exhibons des formules fermées pour le prix du CDS et de l'obligation à taux fixe dans le cadre, développées à partir des résultats obtenus dans cette section. Les notations sont les mêmes que celles de l'article de Longstaff, Mithal et Neis et les démonstrations, très peu développées dans l'article, sont détaillées en annexe.

On peut écrire par indépendance des processus :

$$s(\omega, T) = \omega \frac{\int_0^T P(X, t) W(\lambda, t) \, dt}{\int_0^T P(X, t) F(\lambda, t) \, dt}, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 B(c, \omega, T) &= c \int_0^T P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) \, dt + P(X, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \\
 &\quad + (1 - \omega) \int_0^T P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) \, dt,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

où :

$$P(X, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t r_u \, du} \right], \tag{4.7}$$

$$F(\lambda, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t \lambda_u \, du} \right] = A(t) e^{\lambda B(t)}, \tag{4.8}$$

$$W(\lambda, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lambda_t e^{-\int_0^t \lambda_u \, du} \right] = (G(t) + \lambda H(t)) e^{\lambda B(t)}, \tag{4.9}$$

$$V(\gamma, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^t \gamma_u \, du} \right] = C(t) e^{-\gamma t}, \tag{4.10}$$

et :

$$A(t) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2}t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}, \quad (4.11)$$

$$B(t) = \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi t})}, \quad (4.12)$$

$$C(t) = \exp\left(\frac{\eta^2}{6}t^3\right), \quad (4.13)$$

$$G(t) = \frac{\alpha(e^{\phi t} - 1)}{\phi} \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2}t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+1}, \quad (4.14)$$

$$H(t) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi) + \phi\sigma^2}{\sigma^2}t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+2}, \quad (4.15)$$

$$\phi = \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2}, \quad (4.16)$$

$$\kappa = \frac{\beta + \phi}{\beta - \phi}. \quad (4.17)$$

4.2 Calibration du modèle

Le modèle LMN peut paraître simple tant dans sa spécification et ses hypothèses d'indépendance des sources d'aléa que dans sa construction, mais sa calibration s'avère délicate lorsque l'on cherche à reproduire des prix de marché d'obligations sur de larges palettes de caractéristiques (maturités, coupons,...). L'enjeu majeur dans la procédure d'estimation des paramètres est de s'assurer une bonne réplcation des prix en réplcant les prix des CDS et des obligations à taux fixe sur plusieurs maturités, permettant alors d'extraire l'information implicite du marché. Cette information, contenue dans les séries de facteurs de risque (paramètres implicites extérieurs et intérieurs des modèles de *pricing*), est utilisée pour la calibration du générateur de scénarios économiques et permet ainsi d'effectuer des projections du portefeuille obligataire cohérentes avec les prix du marché. De manière globale, la calibration du modèle s'effectue selon le schéma suivant :

- Première étape : Calibration du processus d'intensité de défaut $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ par minimisation de l'erreur de réplcation des primes d'un panier de CDS du marché avec l'Expression 4.5 ;
- Seconde étape : Calibration du processus *convenience yield* $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ par minimisation de l'erreur de réplcation des prix d'un panier d'obligations à taux fixe avec la Formule 4.6, en utilisant les paramètres de crédit obtenus lors de la première étape.

La première constatation qui doit être faite est que le modèle se calibre de manière imbriquée : pour obtenir les paramètres du processus de *convenience yield*, il faut d'abord calibrer les paramètres du processus d'intensité de défaut. Ce détail peut sembler anodin, mais c'est pourtant ce qui va diriger la calibration. Si les paramètres de l'intensité de défaut sont mal estimés, il en sera certainement de même pour les paramètres du processus d'illiquidité.

L'autre élément important est que le modèle de crédit est entièrement déterminé par la calibration de la prime CDS sur les données du marché. De cette manière, il est assuré que les paramètres du modèle de crédit décrivent exclusivement l'état du marché des dérivés de crédit (ici en l'occurrence, le marché des CDS). Ceci apporte une certaine crédibilité à ces paramètres : plus la prime

CDS sera grande, plus les paramètres calibrés refléteront une situation de crédit dégradée. On s'assure de cette façon que les probabilités de défaut et que la composante "crédit" du prix de l'obligation sont fortement liées au marché des dérivés de crédit. Ceci est à distinguer avec les modèles qui se calibrent par réplcation des probabilités de défaut monde réel : dans notre cadre, en calibrant sur des prix, on extrait l'information implicite associée à l'anticipation qu'a le marché sur le défaut (de manière analogue, la volatilité implicite dans la formule de Black-Scholes reprend le même schéma de fonctionnement). Lorsque le modèle est calibré sur des probabilités de défaut monde réel, c'est l'information sur un historique qui est extraite. En effet, les modèles de structure par terme de probabilité de défaut monde réel qui nourrissent les bases de données des agences de notation se basent souvent sur une approche historique. Pour reprendre l'analogie avec la volatilité, les approches volatilité historique / volatilité implicite diffèrent dans le même sens que ces deux approches de calibration.

Dans la suite, nous présentons tout d'abord le jeu de données qui a été utilisé pour mener à bien l'estimation des paramètres. Ensuite, nous effectuons une analyse critique de la calibration traditionnellement réalisée par les utilisateurs du LMN et dans la littérature scientifique, avant de proposer une nouvelle approche qui permet de répliquer efficacement la structure par terme des CDS tout en échappant aux problématiques d'*overfitting*.

4.2.1 Présentation des données

Nous disposons d'un historique de prix CDS en euro de 9 pays européens : la France, le Portugal, la Grande-Bretagne, l'Irlande, l'Espagne, l'Autriche, la Belgique, l'Allemagne et l'Italie ; ainsi que d'un historique de prix CDS en euro de 5 *corporate*, sélectionnées sur jugement d'expert, pour représenter le risque de crédit de 5 *rating* : BB, BBB, A, AA et AAA. L'historique s'étend du 01/01/2010 au 23/01/2019 et les prix sont disponibles pour 8 maturités : 6 mois, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 7 ans et 10 ans. Les données sont fournies par Bloomberg via le panier de CDS de l'iTraxx.

A titre illustratif, les séries chronologiques des primes CDS de maturité 5 ans de la France, de l'Allemagne, de la Grande-Bretagne, de l'Espagne et de l'Italie sont représentées ci-après :

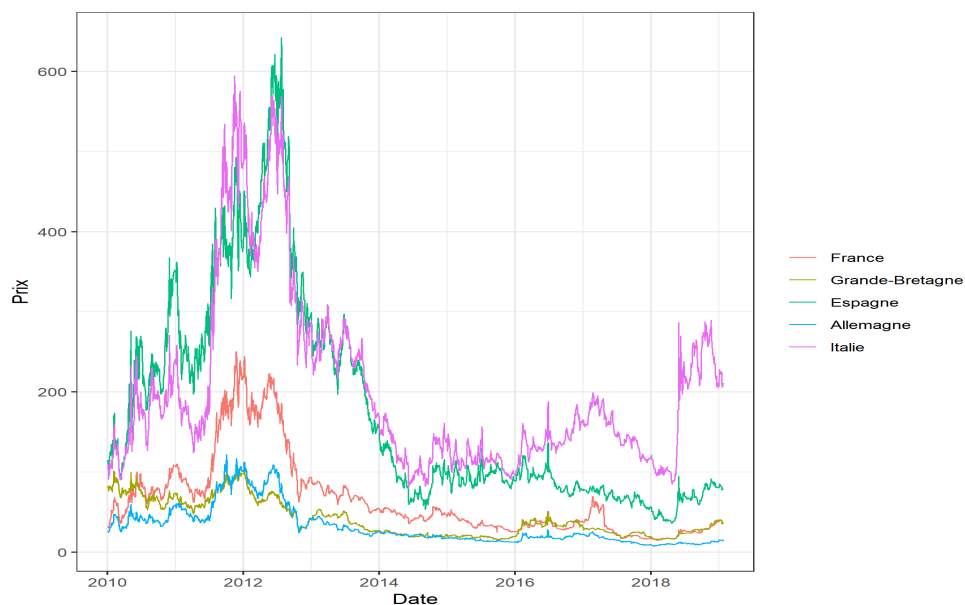


FIGURE 4.1 – Historique de séries chronologiques de primes CDS 5 ans

Nous disposons également d'historiques de prix d'obligations à taux fixe. A chaque pays et à

chaque rating correspond un panier d'obligations à coupons et maturités (et dates d'émission) variés, avec un historique journalier compris entre le 01/01/2010 et le 23/01/2019 suivant l'existence de prix ou non sur les dates. La convention choisie lors de l'extraction des prix est celle du *clean price*, c'est-à-dire le prix hors coupon couru. Le *Loss Given Default* est à chaque fois considéré égal à 0,4. Une correction peut être effectuée en considérant par exemple un taux de *recovery* croissant en la qualité du *rating*, ou un taux stochastique. Dans ce cas, les principes d'évaluation et de calibration restent inchangés.

Dans la suite, les résultats sont exposés pour la France et l'Espagne, l'approche restant la même pour tous les pays et *rating*.

4.2.2 Méthode "classique" de calibration : tour d'horizon sur les pratiques

Quelques récents travaux ont tenté d'apporter une méthode d'estimation des paramètres du LMN, en vue de l'incorporer à un cadre plus évolué de type générateur de scénarios économiques ou à un outil d'estimation de capital réglementaire. Cependant, on constate que la méthode de calibration ne permet pas de reproduire les structures par terme de primes CDS observées sur le marché (cet inconvénient étant inhérent à la structure du modèle LMN). Par conséquent, le risque de crédit se retrouve mal évalué, et la valeur de marché d'un panier d'obligations aux caractéristiques variées ne peut pas être correctement répliquée sans émettre d'hypothèses grossières et fort réductrices. La présente partie vise à illustrer ce point. Dans un premier temps, on montre la limite inhérente à la structure du LMN qui peut poser des problèmes de réplication des structures par terme de primes CDS. Puis, on s'intéresse brièvement à l'étude de Planchet F. et Laïdi Y. [10], [2014], qui proposent une calibration en rendant le modèle dynamique. Cette idée intéressante est étendue par l'approche de calibration développée dans ce mémoire.

Les primes CDS générées par le modèle LMN sont calibrées sur une maturité $T > 0$ judicieusement choisie. Par exemple, la maturité sélectionnée peut être celle pour laquelle le nombre de données disponibles est le plus important, ou encore la maturité la plus liquide (*liquidity points*). Pour le crédit, le jeu de paramètres à estimer est $(\lambda_0, \alpha, \beta, \sigma)$. Par construction du modèle LMN, les paramètres sont cristallisés et estimés sur plusieurs pas de temps. On se place dans un cadre où la métrique utilisée pour l'erreur entre les prix du modèle et les prix du marché est le critère de minimisation de la somme des erreurs quadratiques.

On note $(\lambda_0^*, \alpha^*, \beta^*, \sigma^*)$ le jeu de paramètres optimal, $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de calibration, ω le *Loss Given Default* et $(s_{t_1}, s_{t_2}, \dots, s_{t_n})$ les primes CDS de maturité T sur lesquelles la formule explicite du *spread* théorique est calibrée. Le problème d'optimisation mono-objectif est le suivant :

$$(\lambda_0^*, \alpha^*, \beta^*, \sigma^*) = \underset{\lambda_0, \alpha, \beta, \sigma}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n (s_{t_i} - s_{\text{théorique}}(\lambda_0, \alpha, \beta, \sigma, \omega, T))^2. \quad (4.18)$$

L'obtention des paramètres de l'intensité de défaut mène à la calibration du *convenience yield* (qui n'est pas illustrée ici). On calibre le prix théorique de l'obligation à taux fixe sur des prix d'obligations extraits du marché, de manière à reproduire les prix d'obligations à taux fixe sur une palette de maturités suffisamment large.

On note (γ_0^*, η^*) le jeu de paramètres optimal, $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ le panier de prix d'obligations sur lequel est calibré le modèle, $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ les taux de coupon annuel associés et $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ le jeu de maturités résiduelles. Plusieurs prix du jeu de données peuvent être ceux d'une même obligation mais à des dates différentes, le coupon est alors le même et la maturité résiduelle est ajustée. Le problème d'optimisation mono-objectif est le suivant :

$$(\gamma_0^*, \eta^*) = \underset{\gamma_0, \eta}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n (P_i - B_{\text{théorique}}(\lambda_0^*, \alpha^*, \beta^*, \sigma^*, \gamma, \eta, \omega, c_i, \tau_i))^2. \quad (4.19)$$

Nous effectuons la calibration des paramètres de l'intensité de défaut sur le jeu de données CDS à notre disposition, avec pour méthode de calibration celle présentée ci-dessus. La maturité choisie pour les primes CDS est $T = 5$ ans. Pour la méthode exposée ci-dessus, on obtient typiquement des structures par terme du type exposé ci-après.

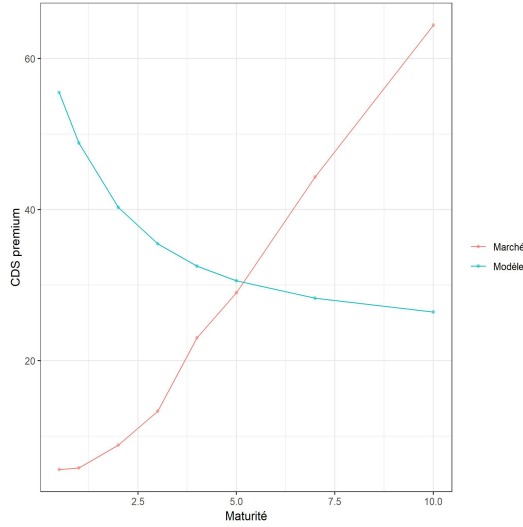


FIGURE 4.2 – *Fitting* du modèle calibré sur la prime CDS de maturité 5 ans au 20 septembre 2016

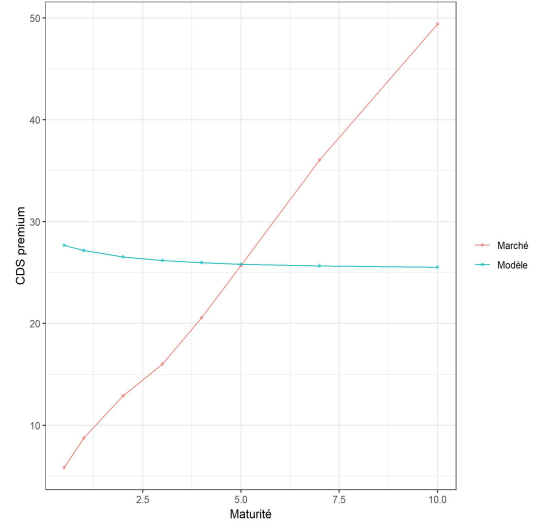
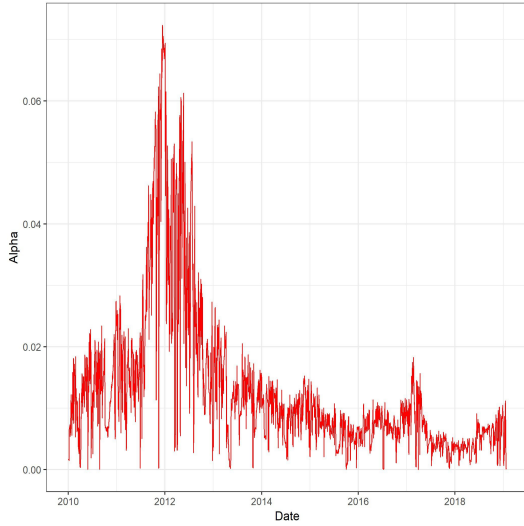
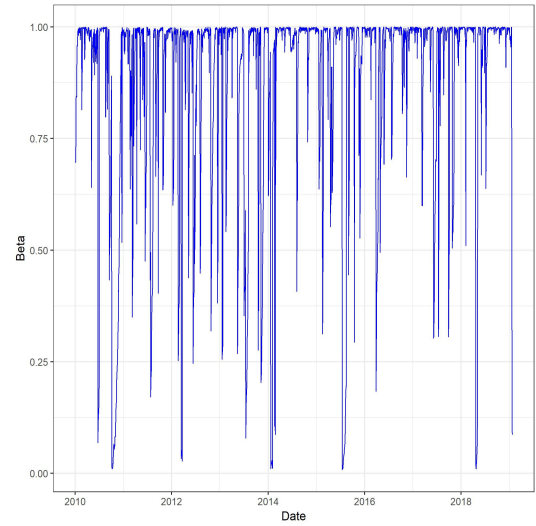
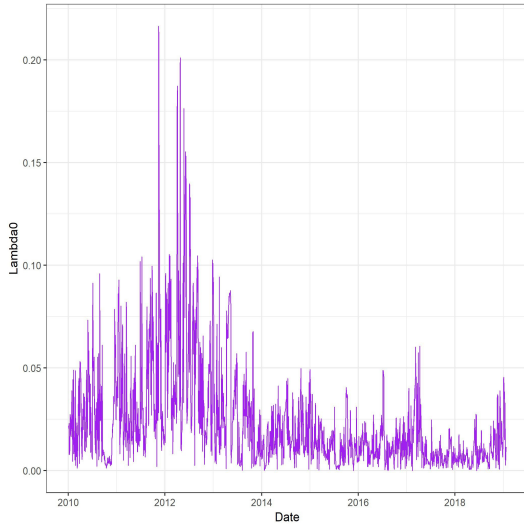
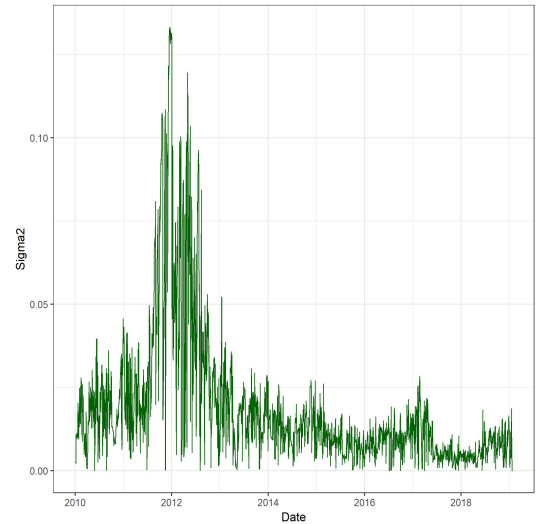


FIGURE 4.3 – *Fitting* du modèle calibré sur la prime CDS de maturité 5 ans au 21 août 2018

Le résultat obtenu illustre un problème de calibration, qui peut être dû à la présence d'un grand nombre de minimums locaux. D'une part, on anticipe aisément une non-réplication des primes CDS de maturités éloignées de celle sur laquelle le modèle est calibré. D'autre part, et c'est le point le plus important de notre constat, la structure par terme de primes reproduite par le modèle LMN et celle du marché sont anti-monotones sur une partie importante des pas de temps de l'historique. En effet, alors que la courbe de prime devrait être croissante (excepté sur des périodes de récession où l'on peut observer des inversions de courbes), le modèle, tel qu'il est calibré, reconstruit des structures par terme décroissantes induisant des erreurs particulièrement élevées aux maturités éloignées de celle du point répliqué. Ceci est notamment dû à une négligence de certaines propriétés de la fonction de prime CDS dans la spécification théorique du modèle. Il aurait par exemple été intéressant de chercher à paramétrer le modèle de telle sorte à ce que l'il soit possible d'avoir un contrôle direct sur le signe de la dérivée de la prime CDS par rapport à la maturité... Un certain paramétrage aurait ainsi implicite une contrainte linéaire voire non-linéaire sur les paramètres du modèle pour contrôler la monotonie de la fonction de prime CDS.

Un autre point à souligner est qu'ajouter la propriété *time-dependent* aux 4 paramètres dans la calibration n'améliore guère les résultats (même si la réplication de la structure par terme peut s'avérer être d'une meilleure qualité sur certains pas de temps). Quand bien-même le problème précédent serait plus ou moins corrigé en calibrant le modèle sur des maturités supplémentaires, les séries temporelles de paramètres qui sont obtenues *in fine* ne sont absolument pas exploitables dans un modèle de série temporelle. Les graphiques suivants illustrent ce point.

FIGURE 4.4 – Historique de la série (α_t) FIGURE 4.5 – Historique de la série (β_t) FIGURE 4.6 – Historique de la série $(\lambda_{0,t})$ FIGURE 4.7 – Historique de la série (σ_t^2)

La dynamique temporelle de ces séries est bien trop chaotique pour être exploitée par un générateur de diffusions. Ceci est notamment dû à l'instabilité du modèle au cours du temps lorsque les 4 paramètres varient d'un pas à un autre. De plus, ces facteurs de risque ne sont pas utilisables en tant que tels : leur évolution n'est pas suffisamment interprétable pour construire des indicateurs de risque de crédit pertinents.

La structure instable du modèle LMN, due à une paramétrisation et une spécification établies sans prise en compte de certaines propriétés du marché, implique qu'un procédé de calibration efficace sur d'autres modèles peut mener à des difficultés non négligeables concernant l'estimation rigoureuse du risque de crédit auquel le portefeuille obligataire est exposé. Une étude plus approfondie et l'élaboration d'une méthode de calibration sophistiquée sont requises pour assurer une réplification correcte des primes CDS par le modèle LMN. C'est précisément l'objet de l'approche développée dans cette étude.

Planchet et Laïdi [2014] proposent une autre méthode de calibration en cristallisant les paramètres α , β , σ , η et en rendant *time-dependent* les paramètres implicites λ_0 et γ_0 . L'erreur

quadratique à minimiser est calculée sur la base de la somme des erreurs quadratiques réalisées sur les deux jeux de données (primes CDS et obligations) : l'optimisation ne se fait plus en deux étapes mais en une seule. Les résultats qu'ils obtiennent sont de meilleure qualité (bien que leur calibration du modèle de crédit ne repose que sur une maturité de prime CDS), mais quelques détails sont omis : d'une part, la réplication des structures par terme complètes des CDS et d'autre part, la réplication d'obligations aux maturités résiduelles très variables. Nous proposons alors de calibrer un modèle par maturité de prime CDS, puis un modèle par maturité résiduelle par pas de temps avec une approche similaire de cristallisation d'une partie des paramètres implicites. Les modèles obtenus sont ensuite "lissés" au moyen de fonctionnelles de reproduction de structures par terme. Les structures de paramètres implicites, expliquées par des historiques de régresseurs "à la Diebold et Li", sont finalement diffusées par modèle de série temporelle pour être utilisées en *input* des formules de *pricing*.

4.2.3 Vers une reproduction plus complète des prix du marché : nouvelle méthode de calibration

L'objectif de la méthode de calibration proposée est de retrouver les prix de marché des CDS en toute maturité, de telle sorte que les paramètres du modèle de crédit soient en accord avec les données du marché des dérivés de crédit. En reproduisant correctement les primes CDS, la composante relative au risque de défaut dans le prix d'une obligation sera expliquée par l'information extraite du marché des dérivés de crédit. Notre approche propose de se focaliser sur la reproduction des prix de marché en rendant dépendant du temps un paramètre implicite et en cristallisant les autres. L'utilisation du modèle est ensuite rendue flexible au moyen d'une vision en "structures par terme de paramètres".

Dans le but de reproduire les primes CDS du marché, il est nécessaire de faire varier un paramètre du modèle d'une maturité à une autre. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, les seules fonctions du modèle LMN à paramètres constants ne peuvent, par construction, répliquer correctement les prix en faisant uniquement varier le paramètre de maturité. De plus, en rendant les 4 paramètres dépendants du temps, les séries temporelles ainsi dégagées présentent des variations très chaotiques et ne peuvent donc pas être intégrées à un générateur de scénarios économiques de type modèle de série temporelle multivarié. Pour assurer une réplication optimale, il faut calibrer un paramètre en intérieur (sur le temps et les maturités), de manière à avoir un paramètre pour chaque maturité et chaque pas de temps. Le lissage des structures par terme de paramètres au moyen de fonctionnelles (peu gourmandes en paramètres) permet ensuite d'éviter les problématiques d'*overfitting*.

Vient alors le choix du paramètre à calibrer en intérieur. Pour cela, raisonnons par élimination. La condition de Feller sous-jacente au processus de Cox-Ingersoll-Ross qui modélise l'intensité de défaut nous donne une inégalité en α et σ à respecter de manière à garantir la stricte positivité du processus. Cette inégalité nous impose de ne pas faire varier en intérieur l'un des deux paramètres pour assurer leur stabilité lors de l'optimisation. De plus, l'inégalité $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, qui traduit le fait que la moyenne long-terme du processus soit elle-même une intensité nous pousse à opter pour le même raisonnement et donc à conserver le paramètre β en extérieur dans l'optimisation. Ces éléments nous mènent à conclure : on choisit de calibrer le paramètre λ_0 en intérieur, c'est-à-dire que l'on va chercher à obtenir un paramètre pour chaque maturité (des structures par terme de primes disponibles) à chaque pas de temps. Ceci va nous permettre de dégager un historique de paramètres pour chaque maturité de calibration, et ainsi, un historique de structures par terme de paramètres implicites λ_0 . Chaque structure par terme permettra alors de faire coïncider les prix théoriques, évalués en chaque point de la courbe, avec les prix du marché et ainsi d'assurer une réplication efficiente du marché.

Plus formellement, soit $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de calibration et $\bar{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ les maturités des CDS disponibles. Notons $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*, \sigma^*)$ le jeu de paramètres extérieurs optimal et :

$$\Lambda_{\bar{t}, \bar{T}}^* = \begin{bmatrix} \lambda_{0,t_1,T_1}^* & \cdots & \lambda_{0,t_1,T_m}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{0,t_n,T_1}^* & \cdots & \lambda_{0,t_n,T_m}^* \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad S_{\bar{t}, \bar{T}} = \begin{bmatrix} s_{t_1,T_1} & \cdots & s_{t_1,T_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{t_n,T_1} & \cdots & s_{t_n,T_m} \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (4.20)$$

respectivement les paramètres intérieurs optimaux et le jeu de données de primes CDS sur l'ensemble des pas de temps et maturités. Pour un prix $s_{t,T}$ correspond donc un paramètre intérieur $\lambda_{0,t,T}^*$.

Tout d'abord, nous déterminons les paramètres extérieurs. Le problème d'optimisation mono-objectif est le suivant :

$$\theta^* = \underset{(\alpha, \beta, \sigma)}{\text{Argmin}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\lambda} \left(s_{t_i, T_j} - s(\omega, T_j; \alpha, \beta, \sigma, \lambda) \right)^2. \quad (4.21)$$

Ce problème d'optimisation nécessite la minimisation de $n \times m + 1$ fonctions :

- Pour un vecteur de paramètres extérieurs $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ donné et pour chaque élément (t_i, T_j) de $\bar{t} \times \bar{T}$, on minimise la fonction :

$$f_{i,j}^{\theta} : \lambda \mapsto \left(s_{t_i, T_j} - \omega \frac{\int_0^{T_j} P(X_{t_i}, t) W_{\theta}(\lambda, t) dt}{\int_0^{T_j} P(X_{t_i}, t) F_{\theta}(\lambda, t) dt} \right)^2, \quad (4.22)$$

ce qui amène à minimiser $n \times m$ fonctions objectifs ;

- On minimise finalement la fonction d'agrégation :

$$f : \theta \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\lambda} f_{i,j}^{\theta}(\lambda), \quad (4.23)$$

nous fournissant de cette manière le vecteur des paramètres extérieurs optimisés θ^* .

Une fois le vecteur θ^* estimé, on minimise à nouveau $n \times m$ fonctions objectives pour avoir la matrice de paramètres intérieurs $\Lambda_{\bar{t}, \bar{T}}^*$, pour laquelle chaque coefficient λ_{0,t_i,T_j}^* s'écrit :

$$\lambda_{0,t_i,T_j}^* = \underset{\lambda}{\text{Argmin}} f_{i,j}^{\theta^*}(\lambda). \quad (4.24)$$

L'idée derrière la calibration des paramètres implicites en intérieurs est de faire apparaître un historique de structures par terme de paramètres, permettant la reproduction d'un historique de prix. Ensuite, on peut alors diminuer le nombre de dimensions et éviter l'*overfitting* en calibrant une fonctionnelle paramétrique sur les structures par terme. On obtient des paramètres λ_0 sur toutes les maturités jusqu'à la plus haute disponible dans le jeu de données. On peut ensuite les utiliser pour construire des structures par terme complètes de probabilités de défaut ou encore évaluer les obligations en chaque point de la structure par terme, à chaque pas de temps. L'idée est identique pour les paramètres implicites du modèle de liquidité des obligations.

Comme précédemment, on note $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de calibration,

$$P_{\bar{t}, \bar{\tau}} = \begin{bmatrix} P_{t_1, \tau_{1,1}} & \cdots & P_{t_1, \tau_{1,m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{t_n, \tau_{n,1}} & \cdots & P_{t_n, \tau_{n,m}} \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (4.25)$$

la matrice des historiques de prix d'obligations à taux fixe disponibles, où $\tau_{i,j}$ est la maturité résiduelle de l'obligation j au pas de temps t_i . On fait également correspondre aux m obligations un vecteur de m coupons, notés c_j pour $j \in [1, m]$.

On reprend alors le principe de calibration du modèle de crédit. On calibre le paramètre de volatilité du processus d'illiquidité η en extérieur et le paramètre d'illiquidité initial γ_0 en intérieur : η est donc constant sur tout l'historique et pour toute maturité, et γ_0 est calibré par pas de temps et par maturité résiduelle. Cela va permettre, tout comme dans le modèle de crédit, de créer un historique de structures par terme de paramètres implicites sur lesquelles une procédure de lissage paramétrique sera réalisée. On note :

$$\Gamma_{\bar{t}, \bar{\tau}}^* = \begin{bmatrix} \gamma_{0, t_1, \tau_{1,1}}^* & \cdots & \gamma_{0, t_1, \tau_{1,m}}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{0, t_n, \tau_{n,1}}^* & \cdots & \gamma_{0, t_n, \tau_{n,m}}^* \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (4.26)$$

la matrice de paramètres intérieurs. A chaque prix d'obligation va être calibré un paramètre γ_0 .

On suppose par ailleurs que les structures par terme de paramètre λ_0 ont été lissées, permettant l'évaluation du prix de l'obligation associée en toute maturité.

Pour déterminer le paramètre extérieur optimal η^* , on résoud le problème d'optimisation mono-objectif suivant :

$$\eta^* = \underset{\eta}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\gamma} \left(P_{t_i, \tau_{i,j}} - B(c_j, \omega, \tau_{i,j}; \eta, \gamma) \right)^2. \quad (4.27)$$

Comme pour les CDS, le problème d'optimisation nécessite la minimisation de $n \times m + 1$ fonctions :

- Pour un paramètre extérieur η donné et pour tout $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$, on minimise la fonction :

$$g_{i,j}^{\eta} : \gamma \mapsto \left(P_{t_i, \tau_{i,j}} - c_j \int_0^{\tau_{i,j}} P(X_{t_i}, t) F_{\theta^*}(\lambda_{0, t_i, \tau_{i,j}}^*, t) V_{\eta}(\gamma, t) dt \right. \\ \left. - P(X_{t_i}, \tau_{i,j}) F_{\theta^*}(\lambda_{0, t_i, \tau_{i,j}}^*, \tau_{i,j}) V_{\eta}(\gamma, \tau_{i,j}) \right. \\ \left. - (1 - \omega) \int_0^{\tau_{i,j}} P(X_{t_i}, t) W_{\theta^*}(\lambda_{0, t_i, \tau_{i,j}}^*, t) V_{\eta}(\gamma, t) dt \right)^2, \quad (4.28)$$

ce qui amène à minimiser $n \times m$ fonctions objectifs ;

- Puis, on minimise la fonction d'agrégation :

$$g : \eta \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\gamma} g_{i,j}^{\eta}(\gamma), \quad (4.29)$$

et on obtient le paramètre extérieur optimisé η^* .

Une fois le paramètre η^* estimé, on minimise à nouveau $n \times m$ fonctions objectives pour avoir la matrice de paramètres intérieurs $\Gamma_{\bar{t}, \bar{\tau}}^*$, pour laquelle chaque coefficient $\gamma_{0, t_i, \tau_{i,j}}^*$ s'écrit :

$$\gamma_{0, t_i, \tau_{i,j}}^* = \underset{\gamma}{\operatorname{Argmin}} g_{i,j}^{\eta^*}(\gamma). \quad (4.30)$$

De même que pour le modèle de crédit, on effectue un lissage paramétrique des structures par terme de γ_0 obtenues. Ceci permet d'évaluer une obligation à taux fixe à n'importe quelle

maturité avec des paramètres calibrés de telle sorte que les prix des CDS ainsi que les prix des obligations du jeu de données soient répliqués. La procédure de lissage sera décrite un peu plus loin.

En procédant au lissage des structures par terme de paramètre λ_0 du modèle de crédit, on se heurte inévitablement à un problème : on ne dispose pas de prime CDS de maturité assez longue pour pouvoir obtenir une structure par terme suffisamment "étendue" sur les maturités. Dans notre cas, on ne peut avoir de paramètres λ_0 que jusqu'à 10 ans. Lisser la structure par terme ainsi obtenue impliquerait d'extrapoler sur les maturités supérieures à 10 ans, sans aucun point asymptotique de référence. De plus, la forme des fonctionnelles de lissage paramétrique étant entièrement déterminée par les points sur lesquels elles sont calibrées, les prolonger telles quelles serait une erreur de raisonnement aussi grave que celle de lisser un *trend* de série temporelle par un polynôme et le prolonger naïvement pour effectuer des projections à horizon élevé.

Pour contourner ce problème, nous élaborons une technique de calcul de prime CDS asymptotique. La calibration des modèles de crédit et de liquidité se fera ainsi sur les primes CDS disponibles sur le marché (*mark-to-market*) et sur les primes CDS asymptotiques estimées (*mark-to-model*). Les procédures d'estimation des primes CDS asymptotiques et de lissage des structures par terme de paramètres sont décrites dans la suite de cette section.

4.2.4 Estimation de primes CDS asymptotiques, calibration du modèle de crédit

L'extrapolation des structures par terme de paramètres à des maturités élevées, dans le but d'évaluer des obligations dont la maturité résiduelle est grande (de l'ordre de 20 à 50 ans), nécessite au préalable d'estimer un prix asymptotique. Comme expliqué précédemment, la calibration de la fonctionnelle paramétrique de lissage doit permettre d'estimer le paramètre implicite lissé pour les maturités non disponibles.

Le principe d'estimation des primes CDS asymptotiques est le suivant : on choisit tout d'abord une maturité élevée associée au prix limite. Ensuite, on calibre un modèle de crédit à paramètres *time-dependent* (et donc constants par pas de temps, indépendants de la maturité), puis on calcule le prix correspondant à la maturité limite avec les paramètres estimés et ce, à chaque pas de l'historique. On obtient ainsi un historique de prix asymptotiques qu'il suffit d'ajouter à l'historique de prix du marché.

Les paramètres sont calibrés en extérieur sur les maturités, en intérieur sur les pas de temps, c'est-à-dire qu'*in fine* on obtient un jeu de paramètres $(\alpha, \beta, \sigma, \lambda_0)$ par pas de temps. On note $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de l'historique de prix CDS et $\bar{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ les maturités disponibles. Soit $\theta_{t_i}^* = (\alpha_{t_i}^*, \beta_{t_i}^*, \sigma_{t_i}^*, \lambda_{0,t_i}^*)$ le vecteur de paramètres optimal au pas de temps t_i . Le problème d'optimisation est le suivant, pour tout pas de temps t_i :

$$\theta_{t_i}^* = \underset{\alpha, \beta, \sigma, \lambda}{\operatorname{Argmin}} \sum_{j=1}^m \left(s_{t_i, T_j} - s(\omega, T_j; \alpha, \beta, \sigma, \lambda) \right)^2. \quad (4.31)$$

L'algorithme de calibration doit donc effectuer n minimisations (une par pas de temps) de fonction objectif dont l'expression est la suivante, à chaque pas de temps t_i :

$$h_i : (\alpha, \beta, \sigma, \lambda) \mapsto \sum_{j=1}^m \left(s_{t_i, T_j} - \omega \frac{\int_0^{T_j} P(X_{t_i}, t) W_{\alpha, \beta, \sigma}(\lambda, t) dt}{\int_0^{T_j} P(X_{t_i}, t) F_{\alpha, \beta, \sigma}(\lambda, t) dt} \right)^2. \quad (4.32)$$

On obtient alors un historique de paramètres $(\theta_{t_1}^*, \theta_{t_2}^*, \dots, \theta_{t_n}^*)$. On utilise ces paramètres pour établir l'historique de prix asymptotiques. En notant T_∞ la maturité limite choisie et $s_{t_i}^\infty$ la prime CDS limite au pas de temps t_i , on a :

$$\forall i \in [1, n], \quad s_{t_i}^\infty = s(\omega, T_\infty; \theta_{t_i}^*). \quad (4.33)$$

De cette manière, on agrandit l'historique de primes CDS qui est à notre disposition via l'ajout d'un vecteur de prix à une maturité élevée. Il est à noter que les paramètres obtenus pour le calcul des prix asymptotiques sont simplement des paramètres *ad hoc* et ne sont en aucun cas utilisés pour l'évaluation des CDS ou des obligations dans notre cadre de valorisation dynamique. Après l'estimation de ces paramètres "limites" et le calcul des prix asymptotiques, nous revenons au problème de départ qui est l'estimation des paramètres du modèle de crédit en vue de l'évaluation des obligations. La méthode de calibration est alors celle développée dans la sous-section précédente.

Se pose alors la question du choix de la maturité limite. L'idée est de pouvoir évaluer toute obligation (excepté obligation perpétuelle) ou toute probabilité de défaut de maturité supérieure à 10 ans (maturité maximale dont nous disposons pour les CDS). Il faut par ailleurs que la maturité limite soit assez grande pour qu'à ce niveau, les variations de prix engendrées par des variations de maturité soient faibles (concavité de la courbe et apparition d'une asymptote). Cependant, une maturité trop grande n'aurait pas d'intérêt étant donné que les maturités utilisées sont généralement inférieures à 40 ans. Les calculs pourraient également être plus longs, et lors de l'estimation finale des paramètres, calibrer sur des prix à maturités trop élevées pourrait engendrer des erreurs numériques du fait que d'une part, la calibration soit effectuée *mark-to-model* et d'autre part, à cause du nombre important de calculs d'intégrales (méthodes numériques) que doit faire l'ordinateur.

Après avoir procédé à de nombreux tests, nous avons retenu une maturité limite de 50 ans :

$$T_{\infty} = 50. \quad (4.34)$$

Cette maturité est suffisamment élevée pour avoir (après lissage) les paramètres nécessaires à l'évaluation des obligations non perpétuelles du portefeuille.

Nous obtenons un historique de primes CDS de maturité 50 ans estimé par le modèle LMN, dont la série chronologique est représentée ci-dessous.

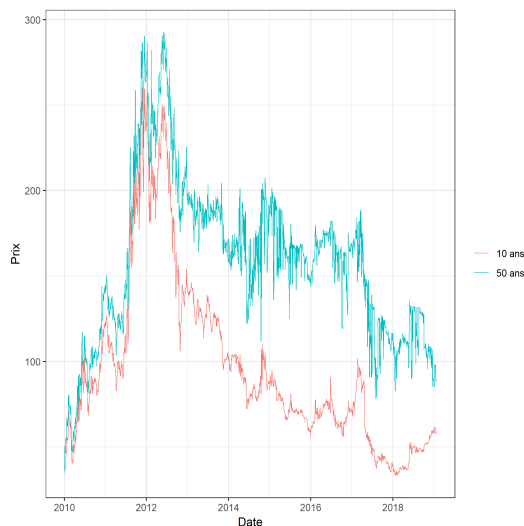


FIGURE 4.8 – Historique de prime du CDS France 50 ans estimé

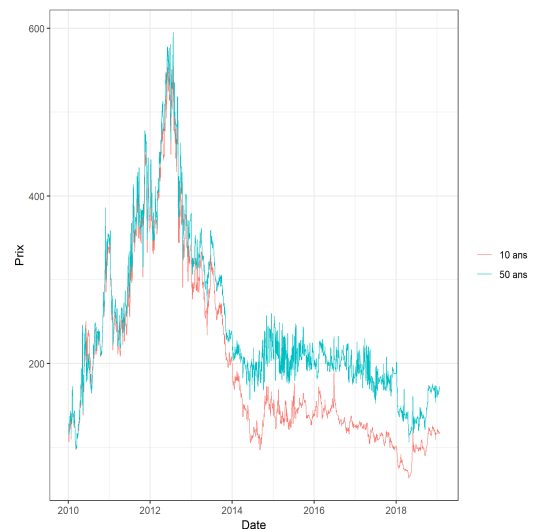


FIGURE 4.9 – Historique de prime du CDS Espagne 50 ans estimé

Ces primes sont estimées par un modèle qui reproduit globalement la forme des structures par terme. C'est principalement la finalité recherchée, car on ne souhaite pas, à travers ce modèle, reproduire précisément les prix mais simplement estimer un prix "asymptotique" à partir d'un modèle dont les structures par terme de primes CDS s'apparentent à celles du marché. Remarquons que lors de la crise économique de l'Espagne qui a suivi la crise financière européenne de 2009-2010, les structures par terme de primes CDS atteignaient presque l'asymptote, estimée par le modèle, à la maturité 10 ans.

On calibre ensuite le modèle de crédit suivant la procédure décrite dans la Section 4.2.3, sur l'historique de primes CDS auquel on a greffé la nouvelle série chronologique de prix. On calibre les paramètres extérieurs (α , β et σ) sur les quantiles extrêmes (minimum et maximum) des primes de maturités 1 an, 5 ans, 10 ans et 50 ans, soit 8 primes. On obtient le jeu de paramètres suivant, arrondi à 10^{-4} :

	France	Espagne
α	0,0006	0,0011
β	0,0517	0,0257
σ	0,0140	0,0334
$\frac{\alpha}{\beta}$	0,0117	0,0414

FIGURE 4.10 – Paramètres extérieurs et moyenne long-terme ($\frac{\alpha}{\beta}$)

Les prix des CDS sont reproduits pour les 9 maturités à chaque pas de temps, et on obtient des structures par terme de paramètres intérieurs λ_0 de qualité, qui peuvent être modélisées simplement par des fonctionnelles de type Nelson-Siegel. Compte tenu de la forme simple des structures par terme dégagées, nous pourrions même envisager de les modéliser par une fonctionnelle paramétrique à 2 régresseurs plutôt que 3.

De par la précision de la réplcation, on s'assure de deux choses :

- L'approche est efficace en terme de reproduction des prix du marché ;
- La base de données a été retraitée et ne présente pas de données aberrantes (du moins, aucune donnée suspecte n'a été détectée lors du processus de *data quality*, après retraitement). Nous ne rencontrons donc pas de problème d'*overfitting* sur des données de mauvaise qualité, et la reproduction exacte des prix permet de représenter précisément, à travers des paramètres inobservables rendus observables (séries temporelles de paramètres implicites), le risque de crédit dégagé par les primes CDS. Cette information est une anticipation qu'a le marché sur l'évolution de la situation de crédit (par analogie avec la volatilité implicite).

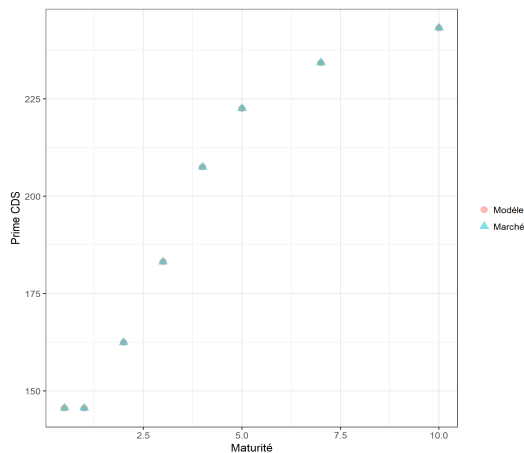


FIGURE 4.11 – *Fitting* des primes CDS France au 4 janvier 2012

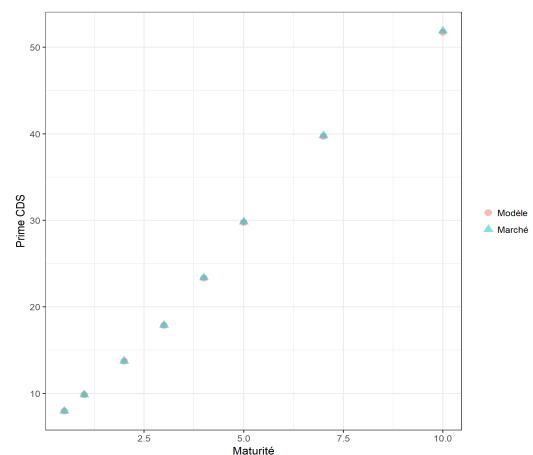


FIGURE 4.12 – *Fitting* des primes CDS France au 31 octobre 2018

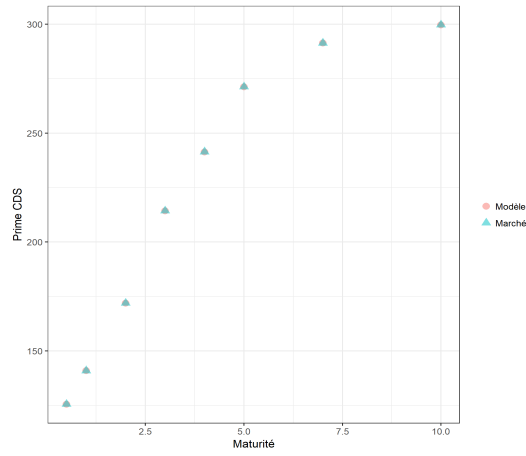


FIGURE 4.13 – *Fitting* des primes CDS Espagne au 1er mars 2013

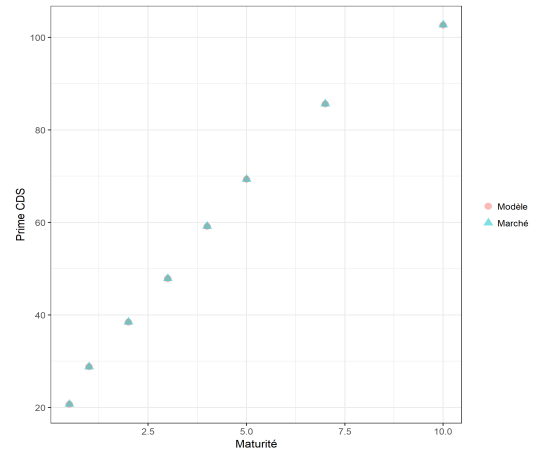


FIGURE 4.14 – *Fitting* des primes CDS Espagne au 9 août 2018

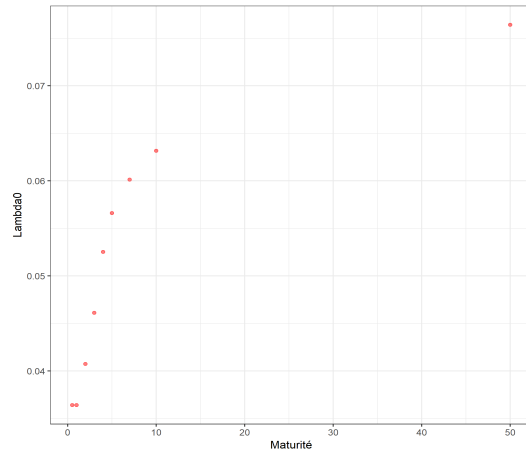


FIGURE 4.15 – Structure par terme de λ_0 France au 4 janvier 2012

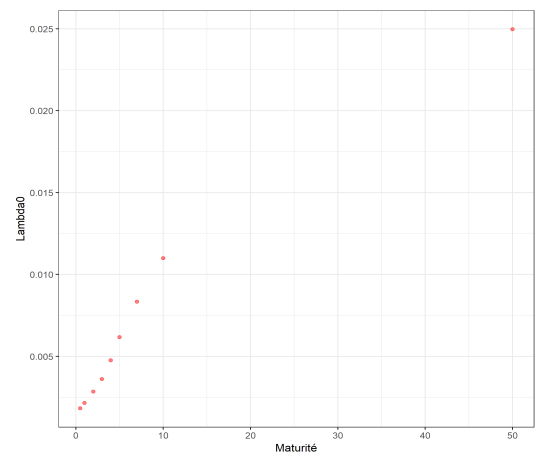


FIGURE 4.16 – Structure par terme de λ_0 France au 31 octobre 2018

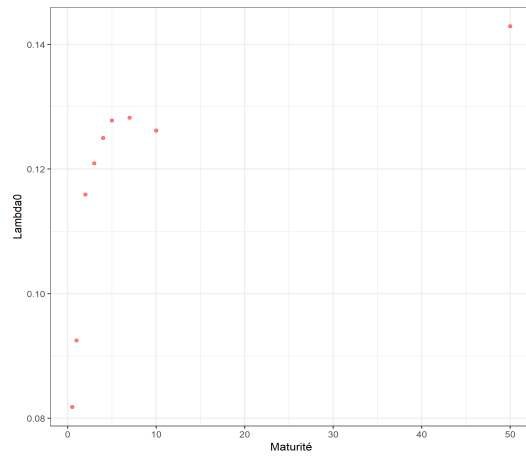


FIGURE 4.17 – Structure par terme de λ_0 Espagne au 27 août 2012

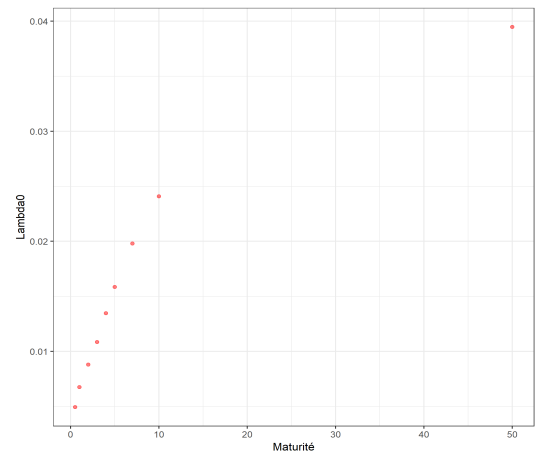


FIGURE 4.18 – Structure par terme de λ_0 Espagne au 9 août 2018

4.2.5 Lissage des structures par terme d'intensité de défaut et calibration du modèle de liquidité

Pour effectuer le lissage des structures par terme de λ_0 , il nous faut spécifier une fonctionnelle de lissage paramétrique de telle sorte qu'une fois calibrée, le *fitting* de la fonctionnelle sur les points λ_0 soit bon. Cependant, il faut éviter l'*overfitting* et veiller à obtenir des structures par terme lissées qui s'applatissent une fois passé la maturité limite T_∞ . Les structures par terme obtenues ressemblent fortement à des structures par terme de taux d'intérêt (hors période de récession). Nous proposons donc d'utiliser le modèle Nelson-Siegel dynamique : à chaque pas de temps, un Nelson-Siegel est calibré sur la structure par terme de paramètres correspondante. Pour plus de détails sur le modèle Nelson-Siegel dynamique, se référer à la partie sur le modèle de taux d'intérêt 3.1.2.

Dans le cadre dynamique, les régresseurs de la fonctionnelle sont rendus dépendants du temps. Ainsi, à chaque pas de temps de l'historique va correspondre un vecteur de régresseurs qui reproduit la structure par terme de paramètres (après reconstruction). Ces historiques de régresseurs vont constituer des séries temporelles qui seront intégrées au générateur de scénarios économiques.

Comme l'intensité de défaut est un taux strictement positif, il va de soit que la fonctionnelle de lissage doit respecter cette propriété fondamentale : il faut s'assurer qu'elle n'atteint jamais zéro, et *a fortiori* qu'elle ne prend pas valeur dans $\mathbb{R}_-$. Pour cela, nous utilisons la fonction *logit*, dont l'expression est la suivante :

$$\forall \lambda \in]0, 1[, \quad \text{logit}(\lambda) = \ln \left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} \right). \quad (4.35)$$

En utilisant cette transformation, on risque de causer une erreur informatique car si l'algorithme d'optimisation fait saturer la contrainte $\lambda \leq 1$, la fonction *logit* n'est plus définie. On pose ainsi p_{max} comme un paramètre qui appartient au voisinage de 1^+ et on utilise la fonction *logit* corrigée :

$$\forall \lambda \in]0, 1[, \quad \overline{\text{logit}}(\lambda) = \ln \left(\frac{\lambda}{p_{max} - \lambda} \right). \quad (4.36)$$

Soit $\mu > 0$ le paramètre d'échelle de la fonctionnelle Nelson-Siegel. L'équation de régression s'écrit, à chaque pas de temps t_i :

$$\forall j \in [1, m], \quad \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_i,T_j}) = \beta_{0,t_i} + \beta_{1,t_i} B_1(T_j) + \beta_{2,t_i} B_2(T_j), \quad (4.37)$$

où :

$$B_1(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T}, \quad B_2(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T} - e^{-\mu T}. \quad (4.38)$$

Plus formellement, l'équation matricielle de régression est la suivante :

$$\Lambda_{\vec{t}, \vec{T}}^{\text{logit}} = \beta B'_\mu + \varepsilon, \quad (4.39)$$

où ε est un bruit blanc gaussien et :

$$\Lambda_{\vec{t}, \vec{T}}^{\text{logit}} = \begin{bmatrix} \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_1,T_1}) & \dots & \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_1,T_m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_n,T_1}) & \dots & \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_n,T_m}) \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_{0,t_1} & \beta_{1,t_1} & \beta_{2,t_1} \\ \beta_{0,t_2} & \beta_{1,t_2} & \beta_{0,t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{0,t_n} & \beta_{0,t_n} & \beta_{0,t_n} \end{bmatrix}_{n \times 3},$$

$$B_\mu = \begin{bmatrix} 1 & B_1(T_1) & B_2(T_1) \\ 1 & B_1(T_2) & B_2(T_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & B_1(T_m) & B_2(T_m) \end{bmatrix}_{m \times 3}. \quad (4.40)$$

Selon le critère des moindres carrés ordinaire, la matrice de régresseurs solution a l'expression suivante, pour un paramètre μ :

$$\beta_\mu = \Lambda_{\bar{t}, \bar{T}}^{\text{logit}} B_\mu (B'_\mu B_\mu)^{-1}. \quad (4.41)$$

Pour plus de détails concernant la régression, se référer à la section sur la calibration du modèle AFNS 3.28.

Notre but premier est la reproduction des prix des CDS. La calibration de la fonctionnelle de lissage sur l'historique des λ_0 doit donc être faite de manière à répliquer au mieux les prix. Comme dans la section 3.28, on utilise pour cela la régression linéaire pondérée. Les poids doivent être choisis de telle façon que les erreurs sur les λ_0 "logités" qui engendrent la plus grande variation de prix du CDS soient majorées. Nous décidons alors d'introduire les poids :

$$w_{i,j} = \frac{\frac{\partial(s \circ f)}{\partial x}(x_{i,j}, \omega, T_j)}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial(s \circ f)}{\partial x}(x_{i,k}, \omega, T_k)}, \quad (4.42)$$

où $x_{i,j} = \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_i,T_j})$ et $f : (x, \omega, T) \mapsto (\overline{\text{logit}}^{-1}(x), \omega, T)$.

Après calcul, nous obtenons :

$$\frac{\partial(s \circ f)}{\partial x}(x_{i,j}, \omega, T_j) = p_{\max} \frac{e^{-x_{i,j}}}{(1 + e^{-x_{i,j}})^2} \frac{\partial s}{\partial x}(\overline{\text{logit}}^{-1}(x_{i,j}), \omega, T), \quad (4.43)$$

qui se réécrit :

$$\frac{\partial(s \circ f)}{\partial x}(x_{i,j}, \omega, T_j) = \frac{p_{\max}}{2(1 + \cosh x_{i,j})} \frac{\partial s}{\partial x}(\overline{\text{logit}}^{-1}(x_{i,j}), \omega, T). \quad (4.44)$$

Une surface historique de pondérations est représentée ci-dessous. Les poids les plus élevés sont appliqués aux maturités les plus grandes : ceci nous permet d'être plus précis sur la queue supérieure de la structure par terme et donc de mieux récupérer l'information sur le risque de crédit à long-terme.

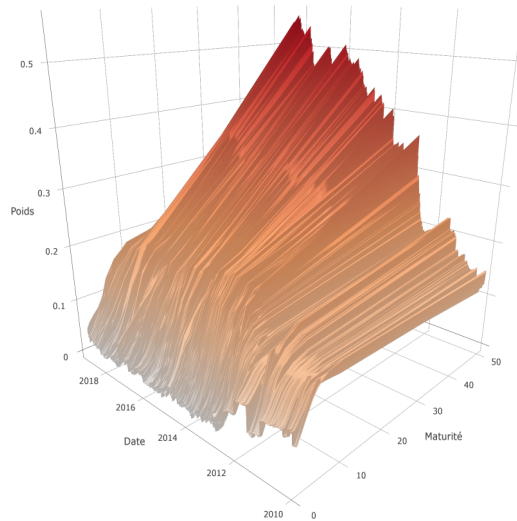


FIGURE 4.19 – Historique de pondérations du lissage de λ_0 , France

Posons $\forall i \in [1, n]$,

$$D_i^W = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_{im} \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \Lambda_{i.}^{logit} = \begin{bmatrix} \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_i,T_1}) \\ \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_i,T_2}) \\ \vdots \\ \overline{\text{logit}}(\lambda_{0,t_i,T_m}) \end{bmatrix}_m, \quad \beta_{i.} = \begin{bmatrix} \beta_{0,t_i} \\ \beta_{1,t_i} \\ \vdots \\ \beta_{2,t_i} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Le régresseur des moindres carrés pondérés, en régressant sur le pas de temps t_i pour un paramètre d'échelle μ , s'écrit :

$$\beta_{i.}^\mu = (B_\mu' D_i^W B_\mu)^{-1} B_\mu' D_i^W \Lambda_{i.}^{logit}. \quad (4.46)$$

Soit $E_{i.}^\mu$ le vecteur d'erreur au pas de temps t_i pour un paramètre μ :

$$E_{i.}^\mu = \begin{bmatrix} e_{i1}^\mu \\ e_{i2}^\mu \\ \vdots \\ e_{im}^\mu \end{bmatrix}_m. \quad (4.47)$$

En utilisant les notations introduites pour la méthode des moindres carrés ordinaire, on a les égalités suivantes :

$$E_\mu = \begin{bmatrix} (E_{1.}^\mu)' \\ (E_{2.}^\mu)' \\ \vdots \\ (E_{n.}^\mu)' \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad \beta_\mu = \begin{bmatrix} (\beta_{1.}^\mu)' \\ (\beta_{2.}^\mu)' \\ \vdots \\ (\beta_{n.}^\mu)' \end{bmatrix}_{n \times 3}. \quad (4.48)$$

Alors, si μ^* est le paramètre optimal, le problème d'optimisation mono-objectif s'écrit :

$$\mu^* = \underset{\mu}{\text{Argmin}} \sum_{i=1}^n \|E_{i.}^\mu\|_2^2 = \underset{\mu}{\text{Argmin}} \sum_{i=1}^n (\Lambda_{i.}^{logit} - B_\mu \beta_{i.}^\mu)' D_i^W (\Lambda_{i.}^{logit} - B_\mu \beta_{i.}^\mu). \quad (4.49)$$

Comme expliqué dans la Section 3.28, après avoir calibré le paramètre μ^* il suffit de faire une régression par pas de temps pour obtenir les séries temporelles de régresseurs et, *in fine*, la matrice β_{μ^*} .

Nous avons déjà fait remarquer que les structures par terme de paramètres sont suffisamment régulières pour envisager de régresser une fonctionnelle à 2 dimensions plutôt que la fonctionnelle de Nelson-Siegel à 3 dimensions. Il faut également garder à l'esprit que la fonction logit peut générer des séries chronologiques de régresseurs à forte volatilité sur certaines périodes. Cette volatilité peut induire des difficultés lorsque nous souhaitons projeter ces séries par un générateur de scénarios économiques. Il se peut que certains scénarios présentent des variations complexes à projeter. Cependant, ces séries temporelles sont à observer avec un certain recul : ce n'est qu'après reconstruction par application de l'inverse de la fonction *logit* que l'on obtient le paramètre inobservable d'intérêt, soit λ_0 . Si l'on obtient des scénarios pour lesquels après reconstruction, les variations de paramètres λ_0 ne sont pas chaotiques, alors la volatilité des séries de régresseurs ainsi que les sauts que l'on peut observer sur leur historique n'ont que peu d'importance.

Les paramètres d'échelle obtenus ainsi que les séries temporelles de régresseurs sont représentés ci-après.

	France	Espagne
μ	0,3318	0,4588

TABLE 4.1 – Paramètres d'échelle du lissage λ_0

4.2 Calibration du modèle

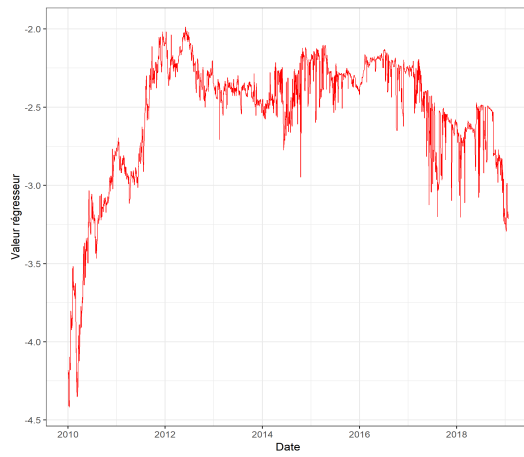


FIGURE 4.20 – Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de crédit, France

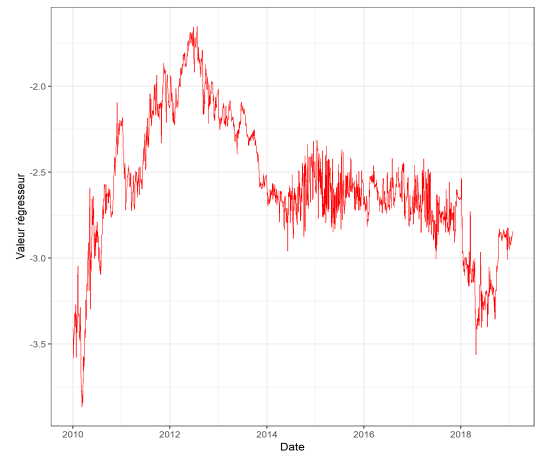


FIGURE 4.21 – Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de crédit, Espagne

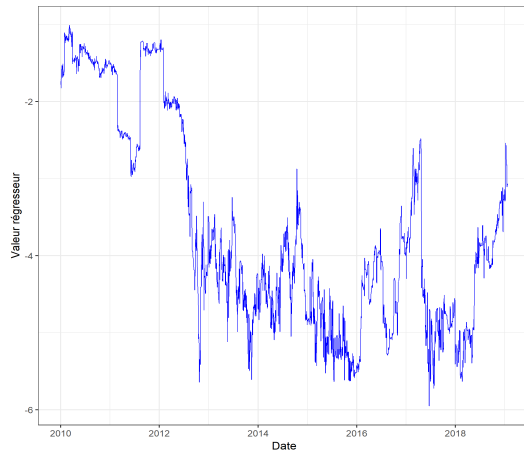


FIGURE 4.22 – Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de crédit, France

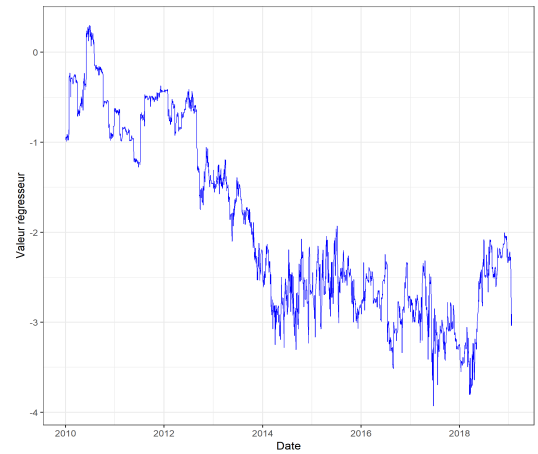


FIGURE 4.23 – Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de crédit, Espagne

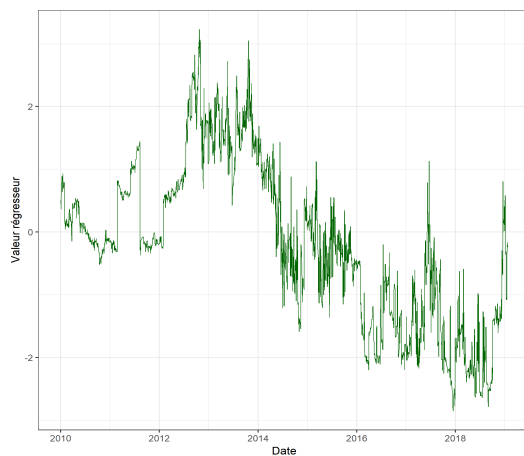


FIGURE 4.24 – Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de crédit, France

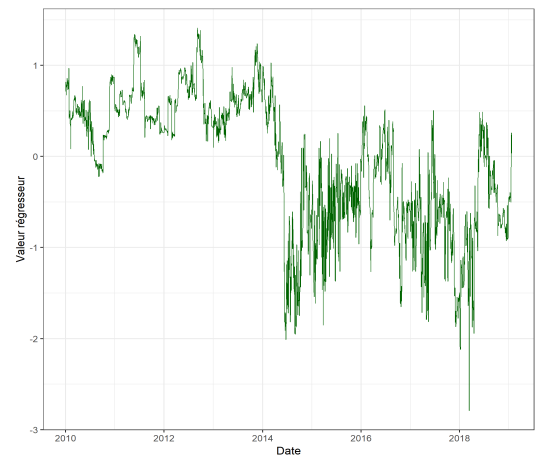


FIGURE 4.25 – Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de crédit, Espagne

Le *fitting* des structures par terme est de qualité, que ce soit au niveau des paramètres λ_0 intérieurs que des prix des CDS. Il pourrait cependant être meilleur en changeant le processus de *data quality* par la suppression directe, dans la base de données, des prix pour lesquels une inversion de la structure par terme est observée. Les graphiques ci-dessous illustrent l'allure que prend le lissage dynamique ainsi que son adéquation avec les paramètres à lisser et les prix du marché.

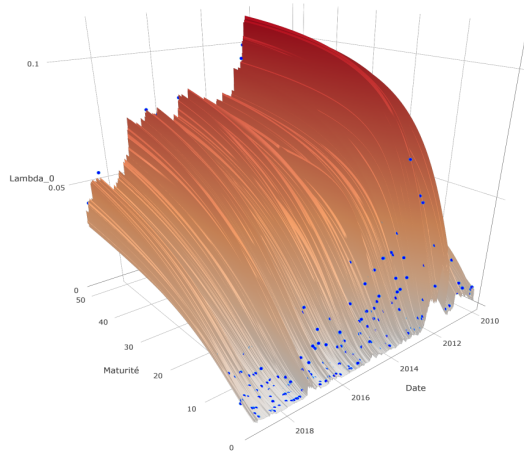


FIGURE 4.26 – Historique de λ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), France

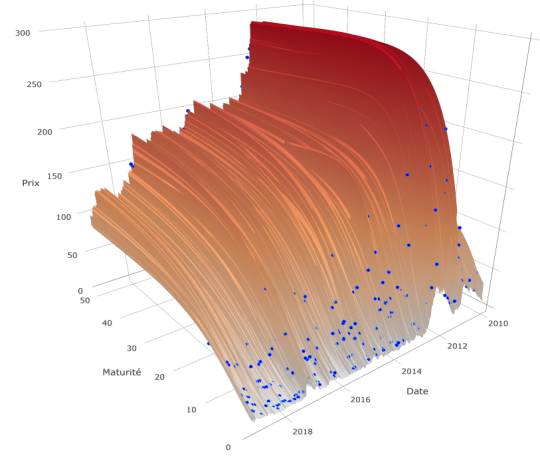


FIGURE 4.27 – Historique de prix CDS reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), France

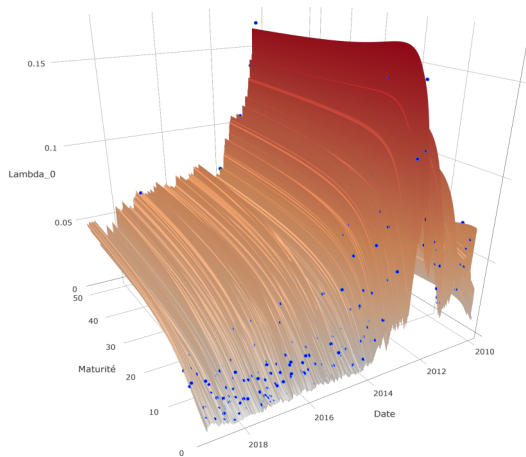


FIGURE 4.28 – Historique de λ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), Espagne

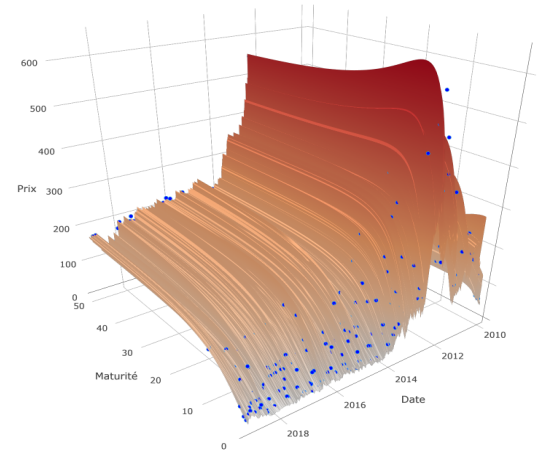


FIGURE 4.29 – Historique de prix CDS reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), Espagne

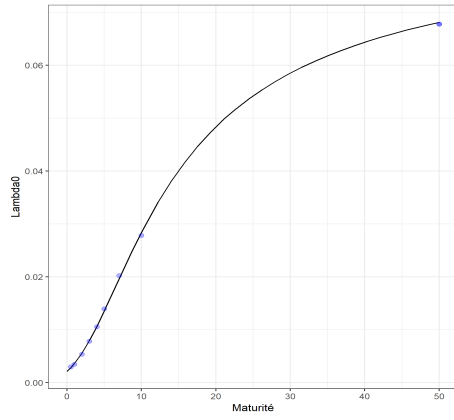


FIGURE 4.30 – Structure par terme de λ_0 lissée et *fitting* au 14 novembre 2014, France

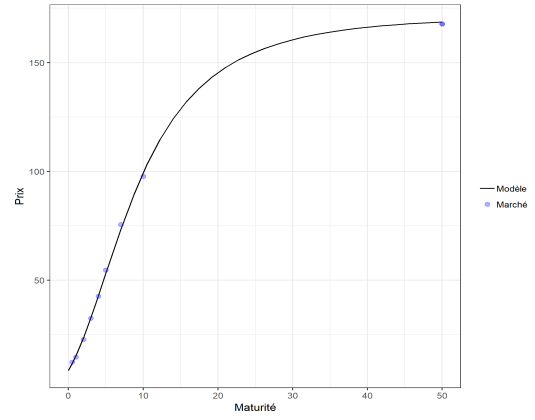


FIGURE 4.31 – Structure par terme de prix CDS lissée et *fitting* au 14 novembre 2014, France

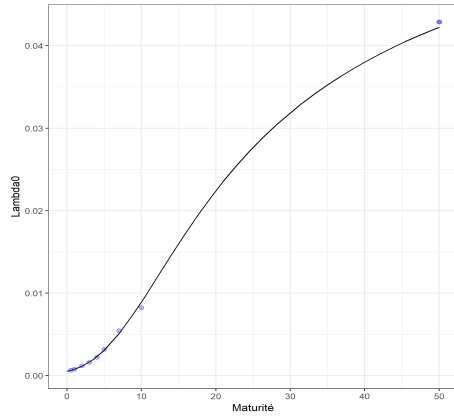


FIGURE 4.32 – Structure par terme de λ_0 lissée et *fitting* au 8 décembre 2017, France

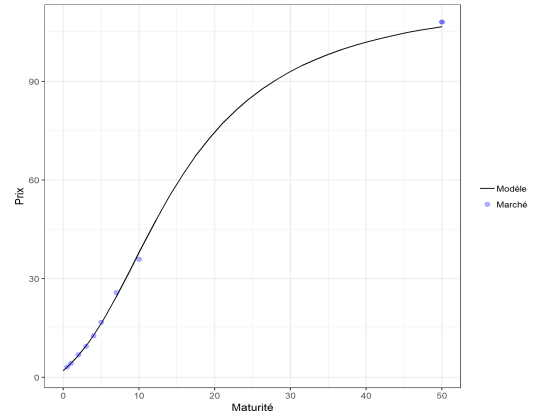


FIGURE 4.33 – Structure par terme de prix CDS lissée et *fitting* au 8 décembre 2017, France

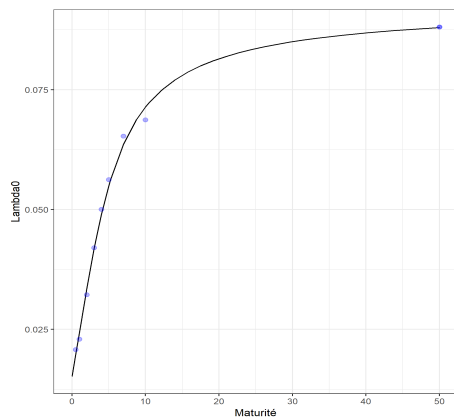


FIGURE 4.34 – Structure par terme de λ_0 lissée et *fitting* au 25 septembre 2013, Espagne

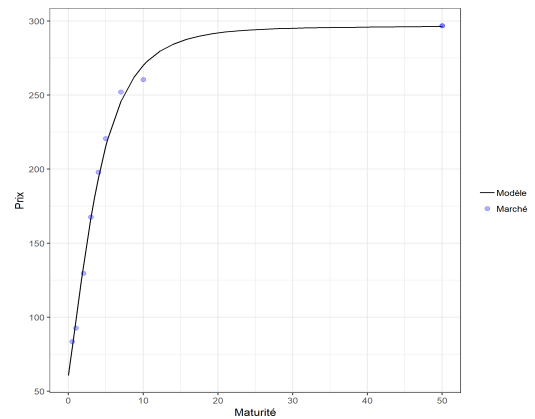
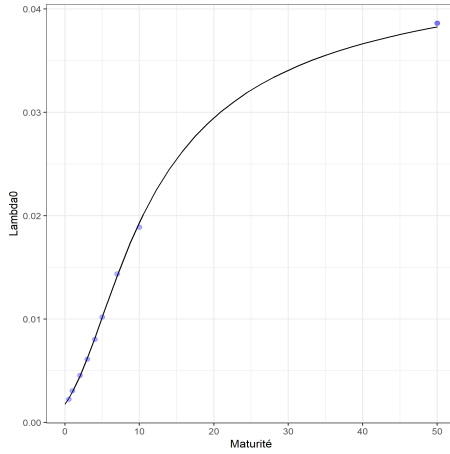
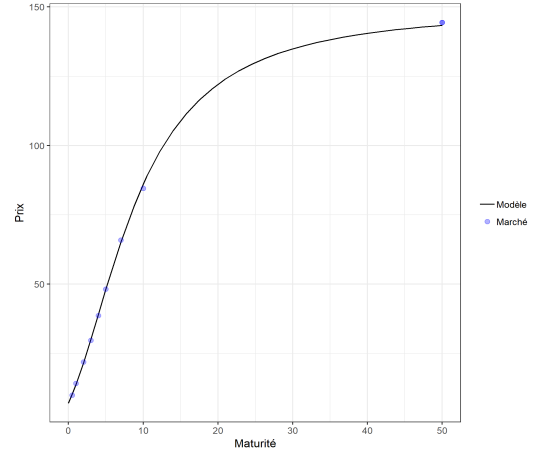


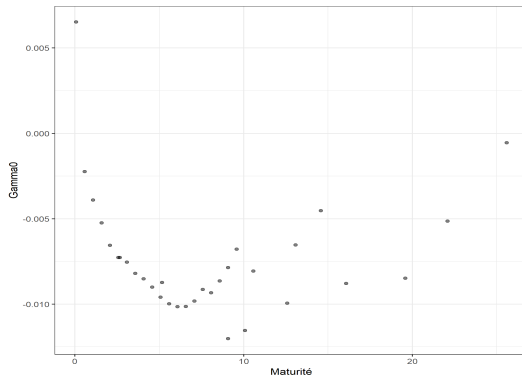
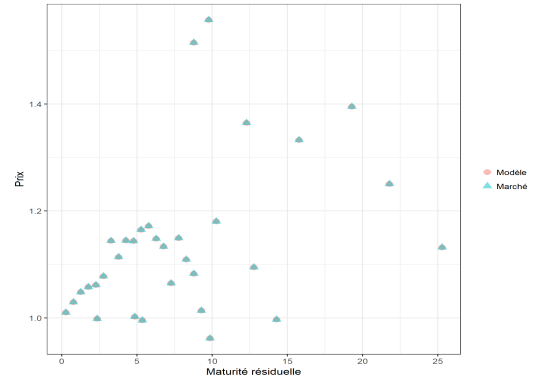
FIGURE 4.35 – Structure par terme de prix CDS lissée et *fitting* au 25 septembre 2013, Espagne


 FIGURE 4.36 – Structure par terme de λ_0 lissée et *fitting* au 20 février 2018, Espagne

 FIGURE 4.37 – Structure par terme de prix CDS lissée et *fitting* au 20 février 2018, Espagne

Le lissage a permis d'interpoler la structure par terme de paramètres implicites entre chaque point. En premier lieu, on peut maintenant calculer le prix d'une obligation dont la maturité résiduelle est différente des maturités des primes CDS du jeu de données. De plus, on obtient une estimation des primes CDS en tout point ainsi qu'une estimation de la structure par terme de probabilités de défaut (d'abord risque neutre) lissée. Ce dernier point sera abordé à la fin de cette section.

On peut à présent calibrer le modèle de liquidité et extraire un historique de structures par terme de *convenience yield*. On anticipe une certaine translation dynamique des structures par terme dans le temps, compte tenu de la variation des maturités résiduelles d'un pas de temps à un autre. Les prix des obligations sont très bien reproduits d'une maturité à une autre comme le montrent les graphiques ci-dessous. Le paramètre extérieur affiché est arrondi à 10^{-4} près.

	France	Espagne
η	0,0003	0,0173

 TABLE 4.2 – Paramètre extérieur (volatilité) du processus de *convenience yield*

 FIGURE 4.38 – Structure par terme de γ_0 au 29 mars 2013, France

 FIGURE 4.39 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe au 19 juillet 2013, France

4.2 Calibration du modèle

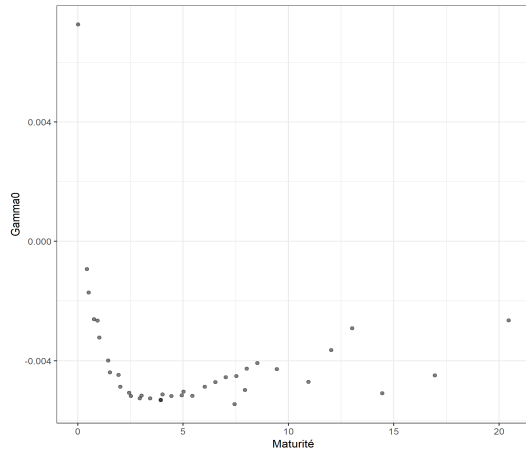


FIGURE 4.40 – Structure par terme de γ_0 au 18 mai 2018, France

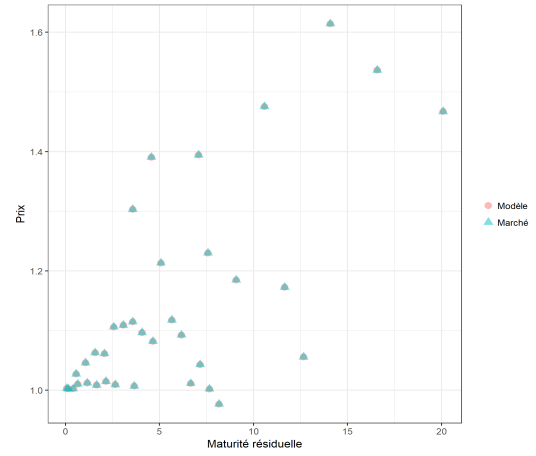


FIGURE 4.41 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe au 1er octobre 2018, France

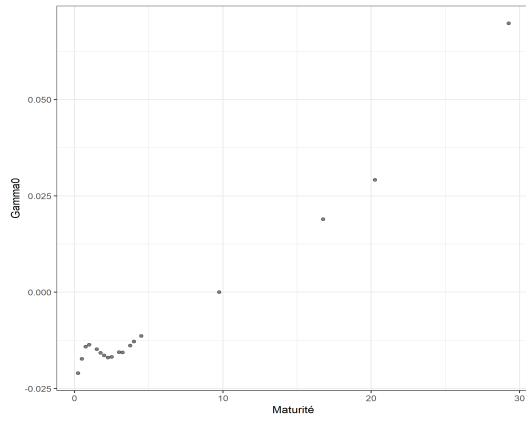


FIGURE 4.42 – Structure par terme de γ_0 au 2 mai 2012, Espagne

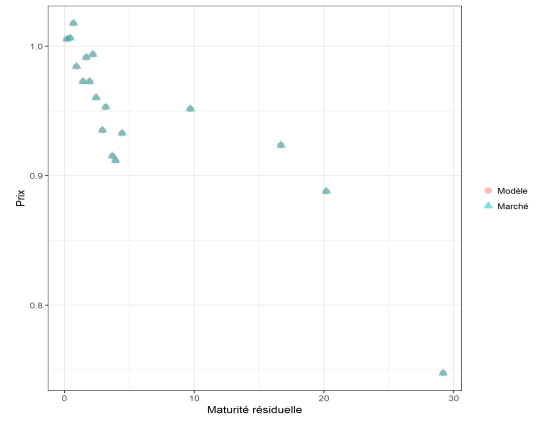


FIGURE 4.43 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe au 31 mai 2012, Espagne

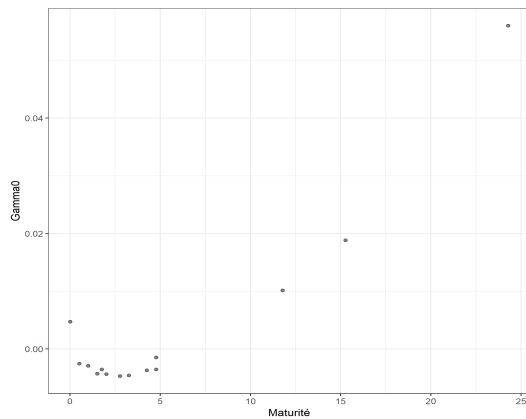


FIGURE 4.44 – Structure par terme de γ_0 au 18 mai 2018, Espagne

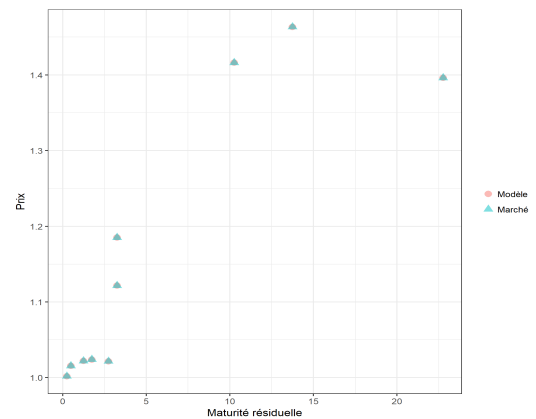


FIGURE 4.45 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe au 2 novembre 2018, Espagne

4.2.6 Lissage des structures par terme de rendement d'opportunité

On s'intéresse au lissage des structures par terme de γ_0 . L'idée est la même que celle exposée précédemment : les structures par terme de paramètre sont lissées par une fonctionnelle de type Nelson-Siegel. A nouveau, à chaque pas de temps est calibré un Nelson-Siegel sur la structure par terme de paramètres correspondante.

Dans le cas du *convenience yield*, aucune contrainte de signe n'est imposée contrairement à l'intensité de défaut : il a été défini dans la Section 4.1 que le processus d'illiquidité est un taux pouvant prendre des valeurs négatives ou positives.

Soit $\mu > 0$ le paramètre d'échelle de la fonctionnelle Nelson-Siegel. En reprenant les notations précédentes, l'équation de régression s'écrit, à chaque pas de temps t_i :

$$\forall j \in [1, m], \quad \gamma_{0,t_i,\tau_{i,j}} = \beta_{0,t_i} + \beta_{1,t_i} B_1(\tau_{i,j}) + \beta_{2,t_i} B_2(\tau_{i,j}), \quad (4.50)$$

où :

$$B_1(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T}, \quad B_2(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T} - e^{-\mu T}. \quad (4.51)$$

Comme pour l'intensité de défaut, la calibration de la fonctionnelle de lissage sur l'historique des γ_0 doit être effectuée de manière à reproduire au mieux les prix des obligations. On utilise à nouveau la régression linéaire calibrée selon le critère des moindres carrés pondérés. Les poids doivent être choisis de telle façon que les erreurs sur les γ_0 qui engendrent la plus grande variation de prix de l'obligation associée soient majorées. Nous décidons naturellement d'introduire les poids :

$$w_{i,j} = \frac{\frac{\partial B}{\partial \gamma}(\gamma_{0,t_i,\tau_{i,j}}, c_j, \omega, \tau_{i,j})}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial B}{\partial \gamma}(\gamma_{0,t_i,\tau_{i,k}}, c_k, \omega, \tau_{i,k})}, \quad (4.52)$$

Posons $\forall i \in [1, n]$,

$$D_i^W = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_{im} \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \Gamma_i = \begin{bmatrix} \gamma_{0,t_i,\tau_{i,1}} \\ \gamma_{0,t_i,\tau_{i,2}} \\ \vdots \\ \gamma_{0,t_i,\tau_{i,m}} \end{bmatrix}_m, \quad (4.53)$$

$$B_i(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & B_1(\tau_{i,1}) & B_2(\tau_{i,1}) \\ 1 & B_1(\tau_{i,2}) & B_2(\tau_{i,2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & B_1(\tau_{i,m}) & B_2(\tau_{i,m}) \end{bmatrix}_{m \times 3}, \quad \beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{0,t_i} \\ \beta_{1,t_i} \\ \beta_{2,t_i} \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Le régresseur des moindres carrés pondérés, en régressant sur le pas de temps t_i pour un paramètre d'échelle μ , s'écrit :

$$\beta_i^\mu = (B_i(\mu)' D_i^W B_i(\mu))^{-1} B_i(\mu)' D_i^W \Gamma_i. \quad (4.55)$$

Soit $E_{i.}^\mu$ le vecteur d'erreur au pas de temps t_i pour un paramètre μ :

$$E_{i.}^\mu = \begin{bmatrix} e_{i1}^\mu \\ e_{i2}^\mu \\ \vdots \\ e_{im}^\mu \end{bmatrix}_m. \quad (4.56)$$

Alors, si μ^* est le paramètre optimal, le problème d'optimisation mono-objectif s'écrit :

$$\mu^* = \underset{\mu}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \|E_{i,\cdot}^\mu\|_2^2 = \underset{\mu}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i,\cdot} - B_i(\mu)\beta_{i,\cdot}^\mu)' D_i^W (\Gamma_{i,\cdot} - B_i(\mu)\beta_{i,\cdot}^\mu). \quad (4.57)$$

Comme expliqué dans la Section 3.28, après avoir calibré le paramètre μ^* il suffit de faire une régression par pas de temps pour obtenir les séries temporelles de régresseurs et, *in fine*, la matrice β_{μ^*} .

En outre, nous calibrons aussi une fonctionnelle de Nelson-Siegel sur l'ensemble des paramètres γ_0 obtenus. Ceci permet d'obtenir une unique fonction de lissage, censée assurer un *fitting* des structures par terme de paramètres sur l'ensemble des pas de temps de l'historique. Si on utilise cette fonctionnelle de lissage dans le cadre de valorisation, on s'affranchit des 3 dimensions nécessaires à la projection des 3 régresseurs du Nelson-Siegel dynamique. Ce choix de tester la calibration d'une unique fonctionnelle sur l'historique de paramètres est justifié par le fait que les paramètres γ_0 prennent des valeurs très faibles (en valeur absolue) et très peu réparties. On compare ce modèle à structure "déterministe" avec le modèle usuel à 3 régresseurs dynamiques dit à structure "stochastique". Les résultats sont présentés ci-dessous et comparés entre eux pour chacun des deux pays, les paramètres extérieurs du lissage sont arrondis à 10^{-4} .

	Déterministe	Stochastique
μ	0,6672	0,1139
β_0	-0,0117	-
β_1	0,0106	-
β_2	0,0002	-

TABLE 4.3 – Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du *convenience yield* taux fixe, France

	Déterministe	Stochastique
μ	0,0526	0,0001
β_0	0,2038	-
β_1	-0,2073	-
β_2	-0,2462	-

TABLE 4.4 – Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du *convenience yield* taux fixe, Espagne

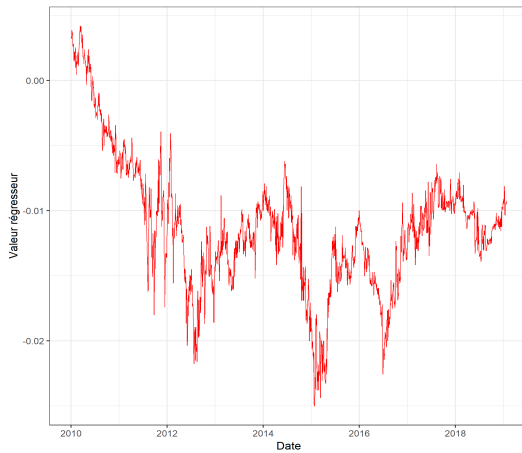


FIGURE 4.46 – Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité taux fixe, France



FIGURE 4.47 – Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité taux fixe, Espagne

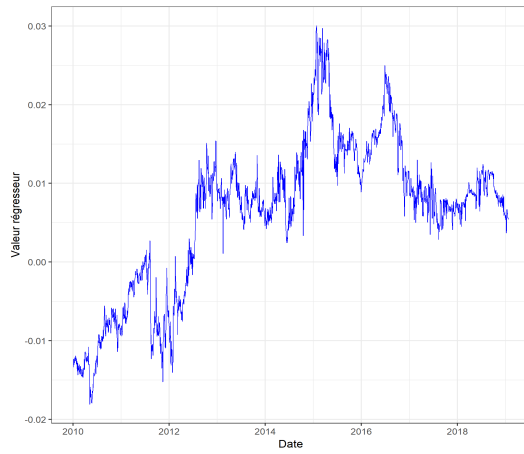


FIGURE 4.48 – Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité taux fixe, France

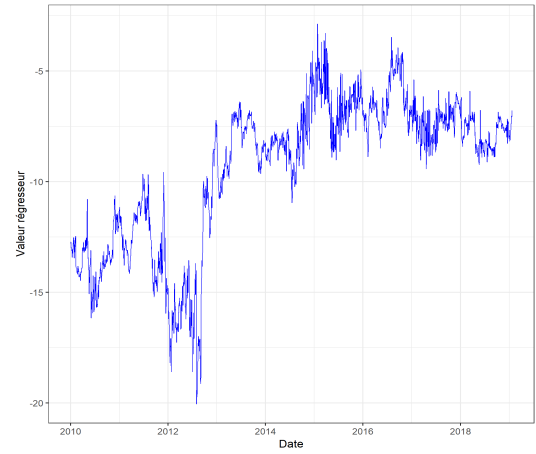


FIGURE 4.49 – Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité taux fixe, Espagne

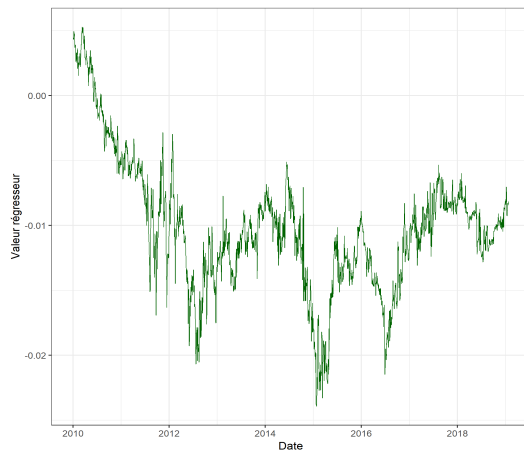


FIGURE 4.50 – Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité taux fixe, France

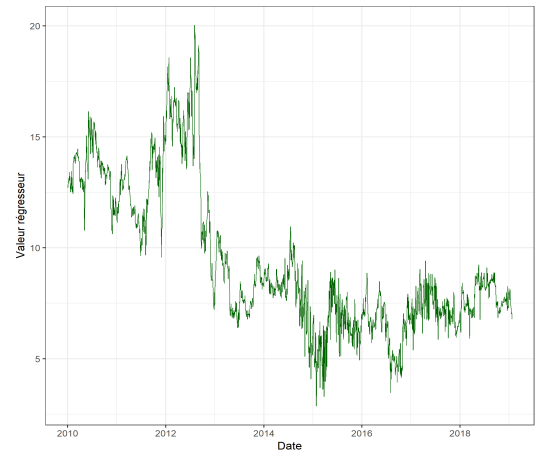


FIGURE 4.51 – Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité taux fixe, Espagne

On représente ci-dessous les structures par terme du modèle déterministe (à unique jeu de régresseurs), avant d'observer les résultats du modèle à structure stochastique.

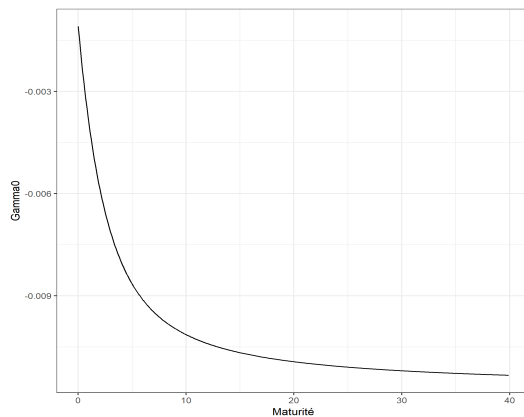


FIGURE 4.52 – Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe taux fixe, France

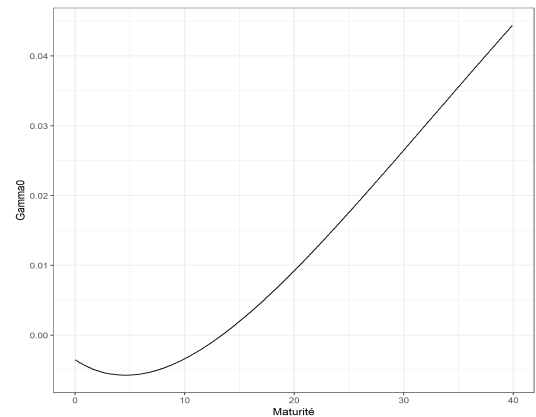


FIGURE 4.53 – Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe taux fixe, Espagne

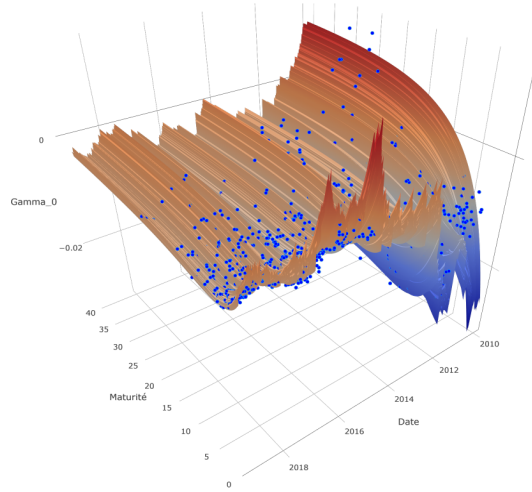


FIGURE 4.54 – Historique de γ_0 taux fixe reproduit et lissé par le modèle à structure stochastique (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), France

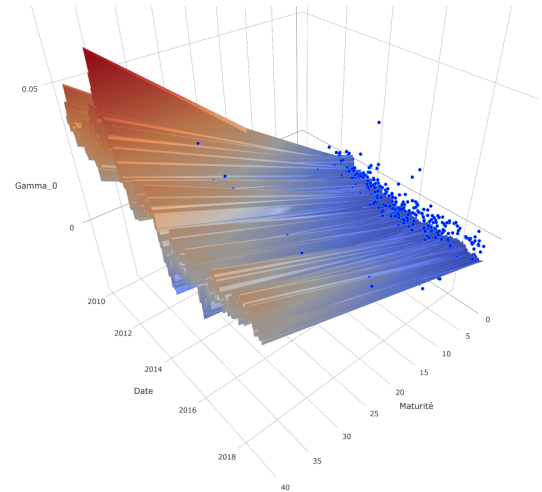


FIGURE 4.55 – Historique de γ_0 taux fixe reproduit et lissé par le modèle à structure stochastique (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), Espagne

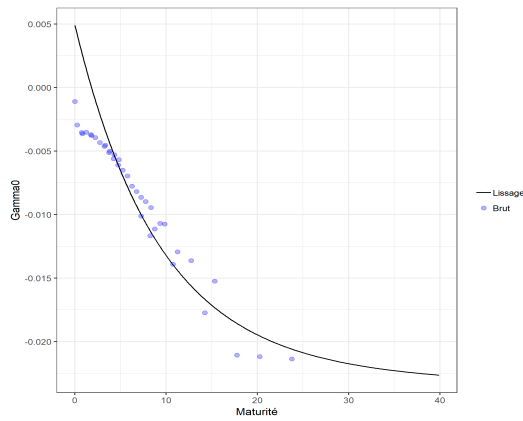


FIGURE 4.56 – Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et *fitting* au 19 juin 2012, France

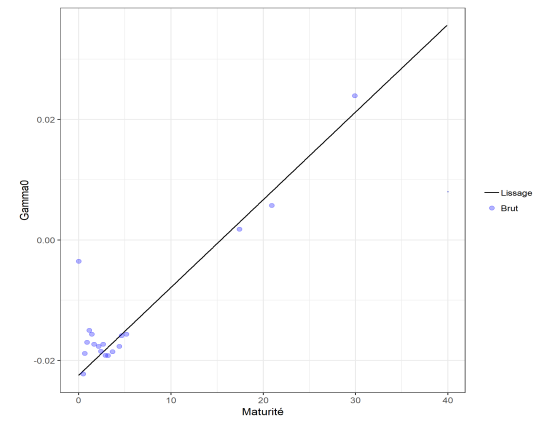


FIGURE 4.57 – Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et *fitting* au 5 septembre 2011, Espagne

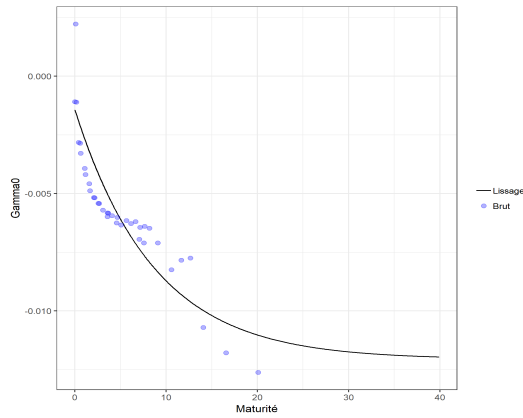


FIGURE 4.58 – Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et *fitting* au 1er octobre 2018, France

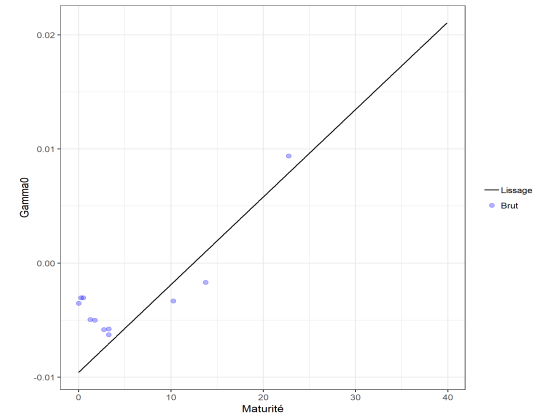


FIGURE 4.59 – Structure par terme de γ_0 taux fixe lissée et *fitting* au 2 novembre 2018, Espagne

Le *fitting* est de qualité convenable mais il faut prendre en compte, dans l'observation, le fait que les points à lisser sont à une échelle très petite. L'élément le plus important reste la reproduction des prix des obligations à taux fixe, plus que la reproduction de paramètres intérieurs : on représente ci-dessous le pouvoir de réplication des prix à certaines dates ainsi que sur les historiques de prix, pour le modèle à structure déterministe ainsi que pour celui à structure stochastique.

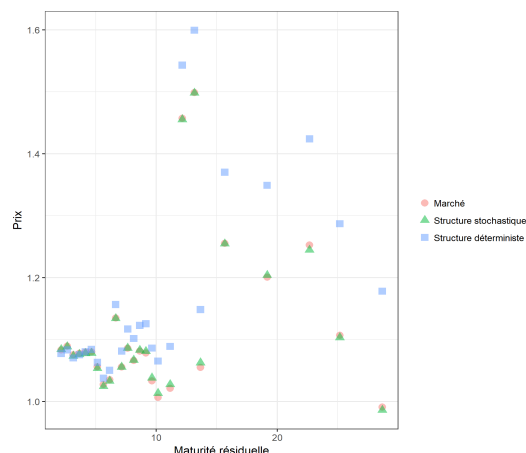


FIGURE 4.60 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 4 mars 2010, France

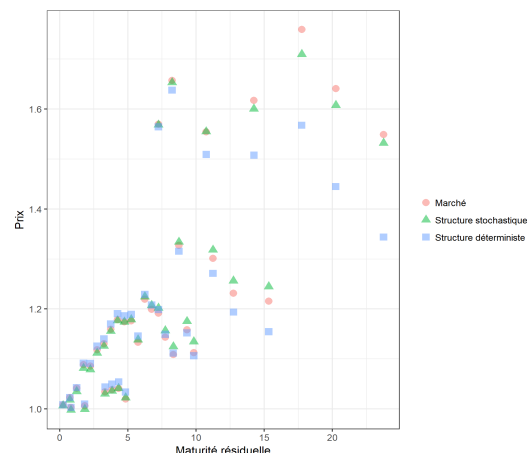


FIGURE 4.61 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 28 janvier 2015, France

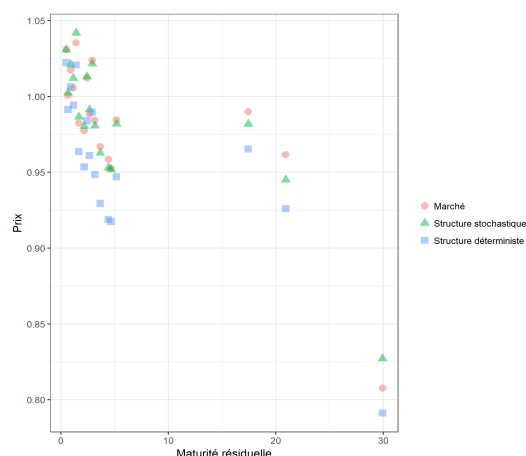


FIGURE 4.62 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 5 septembre 2011, Espagne

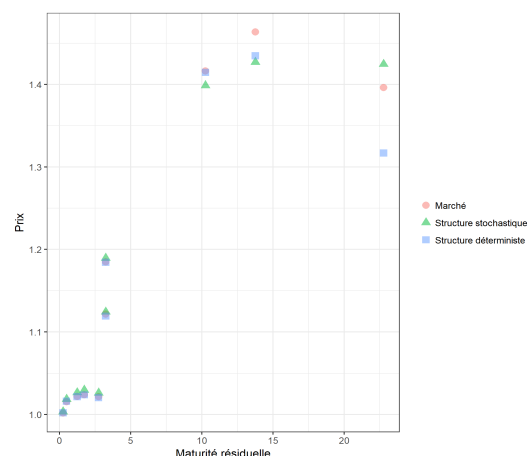


FIGURE 4.63 – *Fitting* des prix d'obligations à taux fixe après lissage déterministe/stochastique au 2 novembre 2018, Espagne

La qualité de reproduction des prix est excellente pour le modèle à structure stochastique. On observe également les historiques de prix reproduits par le modèle.



FIGURE 4.64 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OAT EC395400 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

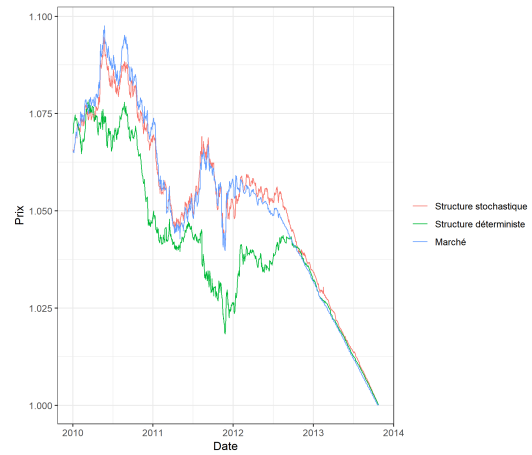


FIGURE 4.65 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OAT ED103035 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

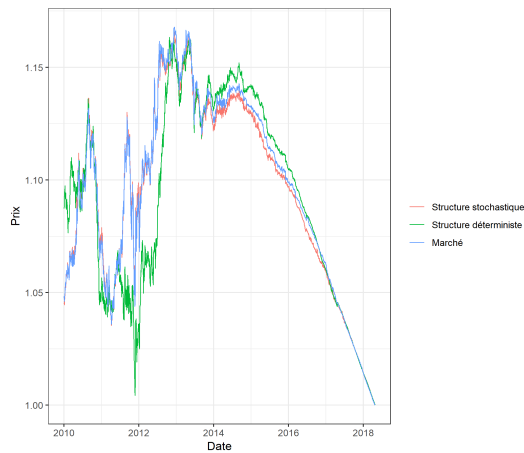


FIGURE 4.66 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OAT EH287862 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

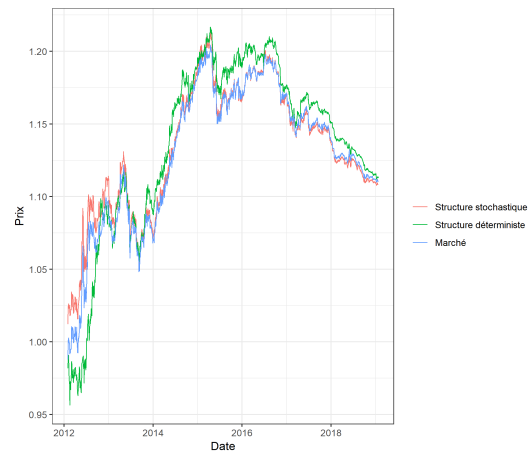


FIGURE 4.67 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OAT EJ003689 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

La fonctionnelle de lissage stochastique (à régresseurs dynamiques) fait un excellent travail pour ce qui est de la réplique des prix d'obligations à taux fixe de la France. Tant sur le *fitting* des prix que sur la reproduction des variations de prix au cours du temps, la fonctionnelle à structure déterministe est moins performante et ce n'est d'ailleurs pas surprenant compte tenu des 3 dimensions qui sont économisées en l'utilisant. Elle remplit toutefois le cahier des charges en fournissant une reproduction des prix et de ses variations plutôt satisfaisante. Il paraît judicieux de laisser de côté ce modèle pour celui à structure stochastique et d'intégrer les 3 séries chronologiques de régresseurs au générateur de scénarios économiques. Cependant, on pourra toutefois nuancer cette observation en considérant d'autres fonctionnelles de lissage, qui peuvent s'avérer plus efficaces que la fonctionnelle de Nelson-Siegel dans ce cas et ainsi mettre à mal le constat fait dans ce paragraphe. De plus, le problème de multicollinéarité posé par les régresseurs est certainement dû à un nombre de paramètres trop important dans la fonctionnelle de lissage. Il peut donc être pertinent de tester d'autres fonctionnelles à moins de paramètres.

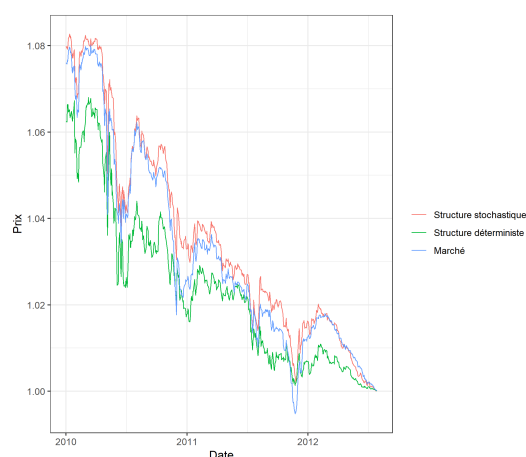


FIGURE 4.68 – *Fitting* de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EC561895 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

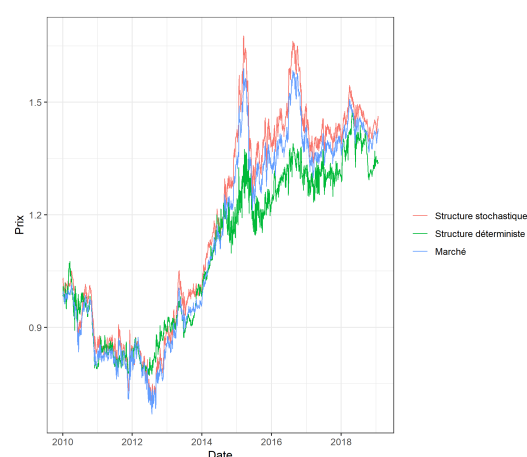


FIGURE 4.69 – *Fitting* de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EH984269 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

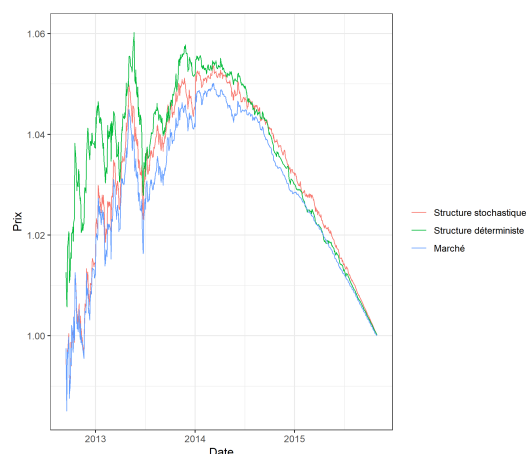


FIGURE 4.70 – *Fitting* de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EJ366011 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

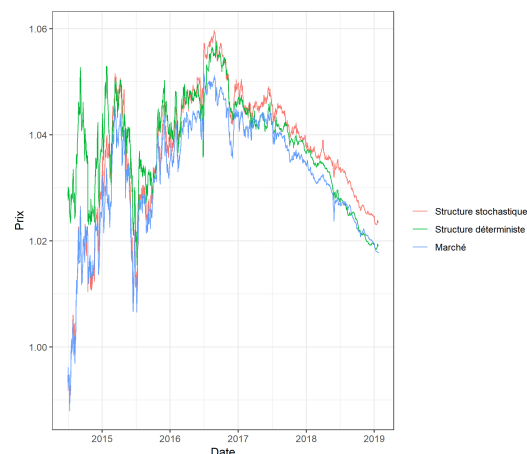


FIGURE 4.71 – *Fitting* de l'historique de prix de l'obligation d'état espagnole EK361187 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

Le constat pour les obligations d'état espagnoles est le même que celui fait précédemment pour les OAT. La reproduction des prix et de ses variations au cours du temps est même plus remarquable pour le modèle à structure déterministe lorsqu'il s'agit de certains *ticker*. En ce qui concerne le modèle stochastique, il est clair qu'une fonctionnelle dynamique linéaire en la maturité fournirait des résultats similaires pour le modèle de liquidité des obligations espagnoles.

4.3 Une modélisation des probabilités de défaut embarquée

4.3.1 Probabilité de défaut risque neutre et probabilité de défaut historique

L'objectif d'un modèle de crédit à forme réduite est généralement réduit à l'évaluation de produits dérivés risqués. Cependant, il peut être intéressant d'avoir à disposition un historique de structures par terme de probabilités de défaut monde réel et de les projeter en utilisant le modèle de crédit. Par exemple, lorsque l'on raisonne dans le paradigme comptable (notamment dans les

modèles ALM) et que l'on procède à une projection de flux financiers, il est primordial d'appliquer une décote aux flux générés par les obligations risquées de manière à prendre en compte quantitativement le risque de crédit dans les projections de flux obligataires. Nous verrons ultérieurement que cette décote peut être calculée sur la base de probabilités de défaut monde réel.

Il peut être envisagé de mettre de côté le modèle de crédit et de projeter les probabilités de défaut historiques directement par un modèle de séries temporelles multivarié. Cependant, procéder ainsi implique la construction d'un nouveau modèle de crédit (le modèle de projection de probabilités de défaut) absolument déconnecté de celui déjà utilisé pour l'évaluation des obligations et dérivés de crédit. L'atout principal de notre cadre de valorisation étant le maintien d'une certaine cohérence entre les modèles de valorisation, il n'est pas envisageable d'avoir recours à une telle approche et il faut donc exhiber une formule de la probabilité de défaut à partir du modèle de Longstaff-Mithal-Neis.

Le principal inconvénient de ce raisonnement est qu'il est délicat de caractériser et calibrer un modèle de probabilités de défaut historiques à partir du LMN calibré. En effet, l'approche par intensité nous fournit des probabilités de défaut risque neutre par le fait que les processus stochastiques sont spécifiés sous la mesure risque neutre et non pas sous la mesure monde réel, et donc le calibrage ne permet d'obtenir que les paramètres associés à la dynamique risque neutre. Pour obtenir les probabilités historiques, il faut effectuer un changement de mesure de probabilité (en utilisant la densité de Radon-Nikodym associée au changement de mesure donné par le théorème de Girsanov) et faire apparaître un paramètre qui caractérise la forme des probabilités de défaut en monde réel. On spécifie alors ce que l'on appelle communément une "prime de risque" qui permet de faire le lien entre les deux mesures dans le modèle.

4.3.2 Spécification du modèle de probabilités historiques

On rappelle la dynamique sous la mesure de probabilité risque neutre du processus d'intensité de défaut :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t) dt + \sigma\sqrt{\lambda_t} dW_t^\lambda. \quad (4.58)$$

Posons :

$$W_t^\lambda = B_t^\lambda - \int_0^t \pi_s ds, \quad (4.59)$$

où $(B_t^\lambda)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité historique $\mathbb{P}$ et $(\pi_t)_{t \geq 0}$ est le processus stochastique de prime de risque dont on suppose qu'il partage les mêmes propriétés mathématiques (propriétés de mesurabilité et d'intégrabilité) que $(\lambda_t)_{t \geq 0}$.

Par le théorème de Girsanov, la densité de Radon-Nikodym associée au changement de mesure de probabilité de $\mathbb{P}$ à $\mathbb{Q}$ s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \pi_s dB_s^\lambda - \frac{1}{2} \int_0^t \pi_s^2 ds \right). \quad (4.60)$$

Etant dans un cadre où de multiples modèles sont amenés à interagir, la filtration financière $\mathbb{F}$ est engendrée par de nombreux mouvements browniens et le changement de mesure doit être unique dans tout le cadre. La densité de Radon-Nikodym devrait donc s'exprimer en fonction de ces mouvements browniens et non d'un seul (par le théorème de Girsanov abstrait multidimensionnel). Dans ce cas, par indépendance mutuelle des browniens spécifiés, la formule s'écrit simplement en effectuant le produit des densités associées à chaque brownien. On omet ici l'écriture complète du changement de mesure pour simplifier le raisonnement qui suit et éviter d'alourdir l'expression. Cela ne change cependant pas les résultats obtenus dans cette sous-section.

Il est d'usage de supposer que la prime de risque associée au processus CIR est proportionnelle à la racine carrée du processus lui-même. Cette spécification n'est pas dûment justifiée, bien que Cox, Ingersoll et Ross aient tenté d'en apporter une explication économique. En fait, elle arrange

le praticien en permettant de changer de dynamique en n'effectuant qu'une simple translation de la vitesse de retour à la moyenne du processus. De cette manière, la calibration est équivalente que l'on se place dans le monde réel ou dans l'univers risque neutre. On spécifie la prime de risque de la manière suivante :

$$\pi_t = p \frac{\sqrt{\lambda_t}}{\sigma}, \quad (4.61)$$

où p est le paramètre de proportionnalité.

Sous la mesure de probabilité historique, l'intensité de défaut possède donc la dynamique suivante :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta^{\mathbb{P}} \lambda_t) dt + \sigma \sqrt{\lambda_t} dB_t^{\lambda}, \quad (4.62)$$

où on a noté la vitesse de convergence translatée : $\beta^{\mathbb{P}} = \beta + p$.

Comme on a calibré les paramètres (associés à la dynamique risque neutre) précédemment sur les primes CDS, il reste à estimer le paramètre de proportionnalité p qui permettra de caractériser entièrement la prime de risque du processus et de calculer les probabilités de défaut historiques via l'expression établie en annexe :

$$\forall T > 0, \quad \mathbb{P}[\tau \leq T] = 1 - F^{\mathbb{P}}(\lambda, T), \quad (4.63)$$

où :

$$F^{\mathbb{P}}(\lambda, T) = A^{\mathbb{P}}(T) e^{B^{\mathbb{P}}(T)\lambda}, \quad (4.64)$$

$$A^{\mathbb{P}}(t) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta^{\mathbb{P}} + \phi^{\mathbb{P}})}{\sigma^2} t\right) \left(\frac{1 - \kappa^{\mathbb{P}}}{1 - \kappa^{\mathbb{P}} e^{\phi^{\mathbb{P}} t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}, \quad (4.65)$$

$$B^{\mathbb{P}}(t) = \frac{\beta^{\mathbb{P}} - \phi^{\mathbb{P}}}{\sigma^2} + \frac{2\phi^{\mathbb{P}}}{\sigma^2(1 - \kappa^{\mathbb{P}} e^{\phi^{\mathbb{P}} t})}, \quad (4.66)$$

$$\phi^{\mathbb{P}} = \sqrt{2\sigma^2 + (\beta^{\mathbb{P}})^2}, \quad (4.67)$$

$$\kappa^{\mathbb{P}} = \frac{\beta^{\mathbb{P}} + \phi^{\mathbb{P}}}{\beta^{\mathbb{P}} - \phi^{\mathbb{P}}}. \quad (4.68)$$

4.3.3 Calibration du "paramètre d'échelle"

Présentation des données

L'historique de probabilités de défaut monde réel dont nous disposons est fourni par la plateforme Bloomberg et nous disposons des données enregistrées du 01/01/2010 au 23/01/2019. La majeure partie de l'historique est dépourvu de données pour les pays, tandis qu'il est convenablement rempli pour les *corporate*. Les maturités disponibles sont les suivantes : 3M, 6M, 9M, 1A, 2A, 3A, 4A et 5A. Généralement, l'historique de probabilités de défaut de maturité 3 mois est presque totalement dépourvu de données.

Les séries chronologiques de probabilités de défaut historiques à 3 ans de la France, de la Grande-Bretagne, de l'Espagne, de l'Allemagne et de l'Italie sont représentées ci-après.

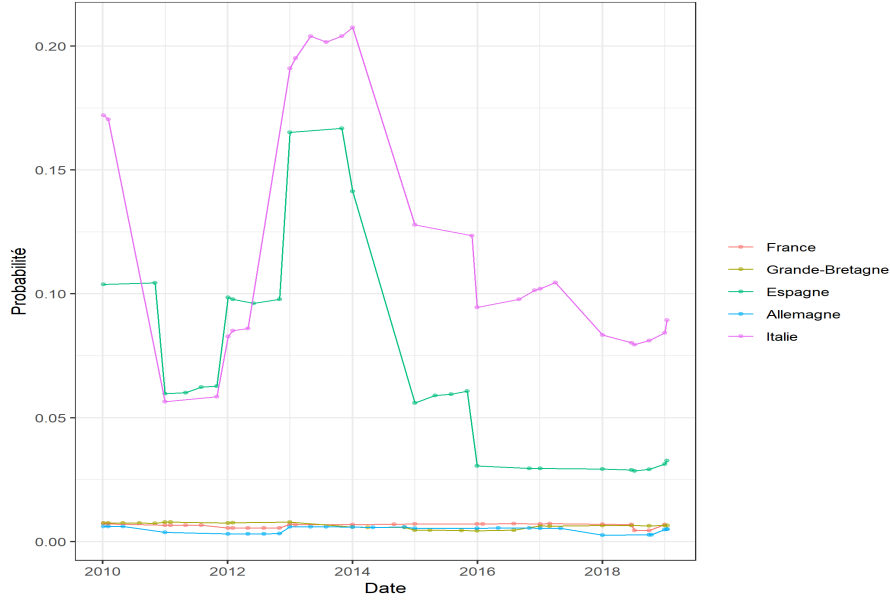


FIGURE 4.72 – Séries chronologiques de la probabilité de défaut historique à 3 ans de pays européens

Optimisation

Le paramètre doit être calibré de manière à reproduire la forme des structures par terme de probabilités de défaut. Le modèle permet d'extrapoler les valeurs au delà de la maturité 5 ans, jusqu'à 50 ans. Il serait logique, en suivant la dynamique de calibration décrite le long de ce chapitre, de calibrer le paramètre d'échelle p en intérieur, suivant les dates et les maturités. Cela permettrait de répliquer précisément les probabilités de défaut historiques du marché, bien que celles-ci soient elles-même issues d'un modèle de crédit dont nous ne connaissons pas la nature. Une fois l'historique de structures par terme de paramètres de proportionnalité obtenu, une fonctionnelle de lissage paramétrique dynamique peut être calibrée comme décrit précédemment. On obtiendrait un nouveau jeu de séries chronologiques de régresseurs à projeter. Toutefois, cette procédure n'est plus valable ici compte tenu de la faible quantité de données à notre disposition. Nous n'avons d'autre choix que de reprendre la pratique répandue dans la littérature, et donc de calibrer le paramètre en extérieur, constant sur tout l'historique et sur toutes les maturités.

Plus formellement, soit $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de calibration et $\bar{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ les maturités des probabilités de défaut disponibles. Notons p^* le paramètre extérieur calibré et $(\mathbb{P}_{t_i, T_j})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,m]}$ les probabilités de défaut historiques du jeu de données.

Le problème d'optimisation mono-objectif est le suivant :

$$p^* = \underset{p}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\mathbb{P}_{t_i, T_j} - (1 - F^{\mathbb{P}}(\lambda_{t_i, T_j}, T_j; p)) \right)^2. \quad (4.69)$$

Le *fitting* est nettement moins bon que si l'on avait calibré p en *time-dependent* ou intérieur sur les maturités, mais l'essentiel est de ramener les structures par terme de probabilités de défaut risque neutre à une échelle réelle interprétable (monde réel). Les historiques de structures par terme lissées (risque neutre et monde réel) sont exposées ci-dessous, et visent principalement à montrer la variabilité du domaine d'appartenance des valeurs prises par les probabilités d'une mesure à une autre. Ceci illustre l'impossibilité d'interpréter les valeurs des probabilités de défaut risque neutre. Le *fitting* n'est pas notre objectif principal : en effet, d'une part, les probabilités de défaut fournies par Bloomberg sont elles-même issues d'un modèle de crédit et l'on ne souhaite pas reproduire les résultats d'un modèle, mais plutôt ramener les probabilités de défaut en *output* de notre modèle de crédit à un niveau qui reflète au mieux la réalité. De plus, les probabilités de défaut sont différentes d'une agence de notation à une autre et une seule dynamique de structure par terme de probabilités

ne peut représenter un *rating*, les probabilités de défaut étant très variables d'un secteur d'activité à un autre. Ces constats nous confortent dans l'idée de construire nos propres structures par terme de probabilité de défaut. Pour finir, la quantité de données est relativement faible, il serait donc incohérent de chercher à reproduire "une poignée" de structures par terme historiques de probabilités de défaut monde réel alors que notre modèle est construit sur une calibration qui vise à reproduire des historiques complets de prix.

	France	Espagne
p	4,135207	0,420173

TABLE 4.5 – Paramètre extérieur du modèle de probabilités de défaut historiques

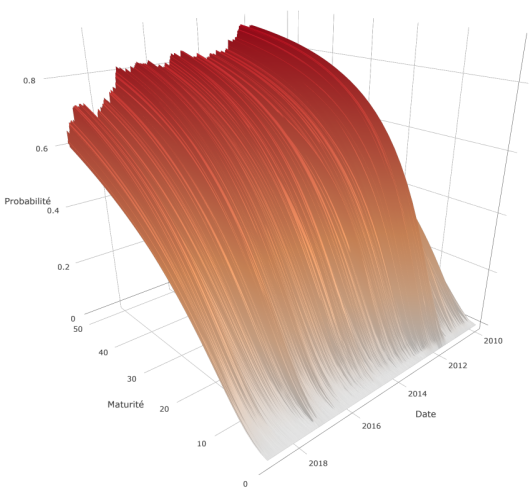


FIGURE 4.73 – Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut risque neutre, France

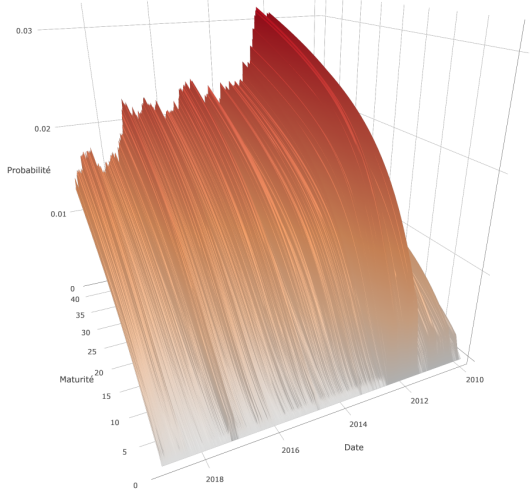


FIGURE 4.74 – Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut monde réel, France

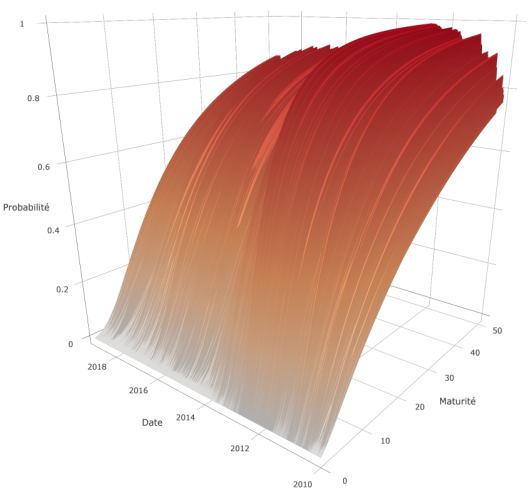


FIGURE 4.75 – Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut risque neutre, Espagne

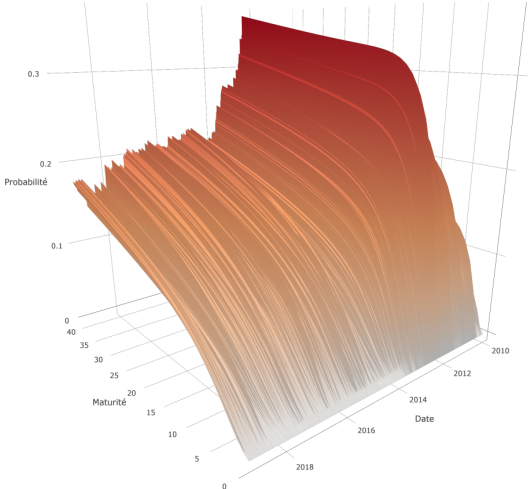


FIGURE 4.76 – Historique de structures par terme lissées de probabilités de défaut monde réel, Espagne

L'extraction des probabilités de défaut par spécification de prime de risque présente des limites claires. En effet, les probabilités de défaut historiques fournies par les agences de notation ou les plateformes comme Bloomberg sont issues de modèles (généralement économétriques avec nombre de variables explicatives) qui ne permettent pas une juste réplcation en utilisant un modèle risque neutre. Le modèle de probabilités de défaut obtenu fournit des structures par terme expliquées par l'information implicite contenue dans les CDS (anticipation du marché sur la qualité future du crédit), tandis que les modèles de régression économétriques utilisent une approche par extraction de l'information historique. Cette méthode revient donc à calibrer un modèle de volatilité implicite à un modèle de volatilité historique, les probabilités de défaut du LMN étant des probabilités de défaut implicites. La prime de risque n'est de surcroît pas interprétable en tant que telle compte tenu de sa spécification usuelle. Utiliser une approche par prime de risque impose d'émettre une hypothèse quant à sa forme, et d'effectuer une calibration qui peut engendrer des erreurs supplémentaires. De plus, nous verrons dans la Section 7.2.1 qu'il est loin d'être trivial et optimal d'utiliser les probabilités de défaut à des fins de quantification du risque de crédit dans un modèle ALM.

Chapitre 5

Modélisation des obligations à taux variable

Sommaire

5.1	Spécification du modèle d'évaluation	86
5.1.1	Tour d'horizon sur l'obligation à taux variable	86
5.1.2	Notations et dynamiques des processus	86
5.1.3	Valorisation des obligations à taux variable	88
5.2	Calibration du modèle de liquidité	91
5.2.1	Présentation des données	92
5.2.2	Calibration du modèle de liquidité de la FRN	92
5.2.3	Lissage des structures par terme de paramètres implicites	95

Dans ce chapitre, nous spécifions le modèle d'évaluation des obligations à taux variable à partir du modèle de taux d'intérêt AFNS. Nous étendons ainsi le champ d'application du modèle de Longstaff-Mithal-Neis et appliquons la technique de calibration des paramètres implicites intérieurs de sorte à reproduire les prix des obligations à taux variable de l'historique.

5.1 Spécification du modèle d'évaluation

5.1.1 Tour d'horizon sur l'obligation à taux variable

Les obligations à taux variable (*Floating Rate Note*) sont des titres de dette obligataire dont le coupon est indexé sur la courbe des taux d'intérêt. Le coupon possède une composante fixe prédéfinie contractuellement (*spread*) et une composante variable indexée sur un taux de marché, qui en pratique est un taux à court terme (Euribor 3 mois par exemple). Les obligations à taux variable sont généralement émises par les Etats et les institutions financières et sont particulièrement populaires sur le marché américain, rendant nécessaire d'effectuer leur modélisation ainsi que leur valorisation de manière cohérente et rigoureuse pour l'évaluation prospective d'un portefeuille obligataire varié. Ces produits permettent en outre de se couvrir contre une hausse des taux d'intérêts, ce qui constitue la différence majeure avec les obligations à taux fixe. C'est pourquoi elles sont achetées en grande quantité lorsqu'une hausse des taux du marché est attendue, malgré leur rendement généralement inférieur à celui d'obligations classiques de même maturité. Un détail fondamental qui doit être pris en compte dans la modélisation de ces titres est la révision périodique du taux d'indexation. Plus précisément, le taux d'indexation est révisé à des dates de révision prédéfinies et la partie variable d'un versement de coupon est calculée sur la base de la dernière révision effectuée. C'est en général une des caractéristiques associées aux obligations dont le taux est indexé sur une quantité variable au cours du temps. De plus, comme tout titre de dette, les obligations à taux variable sont soumises au risque de crédit ainsi qu'au risque de liquidité. Nous étendons le modèle de Longstaff-Mithal-Neis au *pricing* des FRN dans le but de quantifier et d'intégrer ces risques dans la projection du prix de ces obligations.

Dans la littérature, plusieurs travaux fondateurs ont exploré l'évaluation de ces titres en prenant notamment en compte la présence de dates de révision (El Karoui N. et Geman H. dans [22], 1994). Les travaux de Brigo D. et Mercurio F. dans leur livre [6] [2005] proposent également une méthode d'évaluation relativement générale et flexible. Néanmoins, la quantification du risque de crédit et de liquidité ainsi que la calibration d'un tel modèle imbriqué ne sont pas explorées, c'est pourquoi l'extension du modèle LMN peut constituer un élément de réponse.

Il existe de nombreuses variantes des FRN, parmi lesquelles on peut citer les FRN perpétuelles, les FRN à maturités modifiables, convertibles et même indexées sur l'inflation (relevant plus de l'opération de structuration que de la dette à taux variable classique). Dans notre étude, nous nous intéressons aux obligations à taux variables dont le taux de coupon est soumis à des conditions de bornes (*corridor*), pratique généralement observée sur le marché américain.

5.1.2 Notations et dynamiques des processus

On considère que les paiements périodiques futurs associés à l'obligation sont faits de telle sorte que les dates de paiement forment une subdivision régulière $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$. La date t_0 est la date de paiement associée à la dernière date de révision passée avant l'instant de *pricing* (instant initial), la première date de révision rencontrée à partir de l'instant initial est donc la date de révision associée à la date t_1 . La quantité n est l'entier naturel strictement positif tel que la date t_n coïncide avec l'échéance T de l'obligation. En fait, afin d'apporter une spécification rigoureuse et de justifier les notations choisies, il est important de comprendre le raisonnement suivant : les coupons associés aux taux révisés sont perçus continuellement entre les dates de révision, et non pas entre les dates de paiement. En effet, les formules de valorisation obtenues sont issues de calculs effectués en temps continu (approche à forme réduite), elles seraient donc sensiblement différentes du point de vue de la spécification si les calculs avaient été faits en temps discret. En temps discret, les paiements seraient effectués ponctuellement aux dates de paiement, donc la valorisation se référerait presque essentiellement à ces dates. Dans notre cas, le taux est révisé à une date comprise entre deux dates de paiement, le paiement continu se fait donc par rapport à ce taux révisé depuis une date de révision jusqu'à la date de révision suivante. De cette manière, ce ne sont pas les dates de paiement qui sont utilisées directement pour l'évaluation de la valeur du coupon variable en toute date, mais

5.1 Spécification du modèle d'évaluation

les dates de révision.

Compte tenu de ce raisonnement "en dates de révision", la date t_1 représente en fait la date de paiement associée à la première date de révision rencontrée à partir de l'instant de valorisation. La date t_0 correspond à la date de paiement associée à la dernière date de révision passée avant l'instant 0. Cette date peut aussi bien se situer avant comme après la date de *pricing*. Les deux schémas ci-dessous illustrent ces deux possibilités.

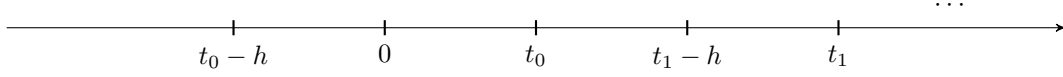


FIGURE 5.1 – Cas où la date de valorisation se situe entre une date de révision et une date de paiement

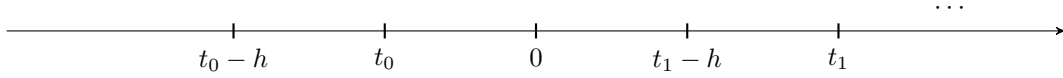


FIGURE 5.2 – Cas où la date de valorisation se situe entre une date de paiement et une date de révision

La distinction de ces deux cas est rendue inutile dans la valorisation par le raisonnement "en dates de révision".

Les dates de paiement sont séparées par des périodes d'iso-durées τ et la FRN est indexée sur un taux *spot* en composition simple d'échéance $\theta > 0$.

On identifie un décalage temporel entre la date de révision et la date de paiement associée, quantifié par une durée $h \geq 0$ avec $h \leq \tau$, de telle manière que la date de révision associée au versement du i -ème coupon est $t_i - h$. On fixe $t \in [t_i, t_{i+1}[$.

Ainsi, entre $t_i - h$ et $t_{i+1} - h$, sous réserve qu'il n'y ait pas défaut du créancier, le possesseur de l'obligation perçoit un versement continu indexé sur $L(t_i - h, \theta)$, dont l'expression, $\forall i \in [[1, n]]$, est la suivante :

$$L(t_i - h, \theta) = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{P(t_i - h, t_i - h + \theta)} - 1 \right). \quad (5.1)$$

Le taux d'intérêt d'indexation est ici considéré en composition simple : ce choix est justifié par le fait que la maturité θ soit inférieure à 1 an. Il est à noter que cela n'engendre absolument aucun changement sur la manière d'actualiser les flux qui, dans le cadre, est choisie suivant la composition continue.

Nous spécifions le processus stochastique d'intensité de défaut ainsi que le processus de rendement d'opportunité de la même manière que dans le modèle de Longstaff-Mithal-Neis. Ces processus sont indépendants du processus de taux court $(r_t)_{t \geq 0}$. On rappelle :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t) dt + \sigma\sqrt{\lambda_t} dW_t^\lambda, \quad \lambda_0 = \lambda > 0 \text{ p.s.}, \quad (5.2)$$

et :

$$d\gamma_t = \eta dW_t^\gamma, \quad \gamma_0 = \gamma \text{ p.s.} \quad (5.3)$$

Les processus $(W_t^\lambda)_{t \geq 0}$ et $(W_t^\gamma)_{t \geq 0}$ sont des mouvements browniens standards sous la mesure de probabilité risque neutre, supposés indépendants. On rappelle également que, $\forall t \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t dt} \right] = P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t), \quad (5.4)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lambda_t e^{-\int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t dt} \right] = P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) \quad (5.5)$$

où les quantités $P(X, t)$, $F(\lambda, t)$ et $V(\gamma, t)$ sont fournies dans la Section 4.1.

5.1.3 Valorisation des obligations à taux variable

Nous notons, pour toute date $t \geq 0$, c_t le taux de coupon variable, le possesseur de la FRN de nominal 1 recevant le montant $c_t dt$ sur l'intervalle $[t, t + dt]$. Ce taux de coupon se décompose en deux parties : une partie variable notée ν_t qui est le taux d'indexation, et une constante usuellement nommée "*spread*" fixée préalablement dans le contrat obligataire, que l'on notera c . De plus, selon les usages du marché, le coupon variable est souvent "*capé*" (il ne peut être supérieur à un seuil défini contractuellement) ou "*flooré*" (à l'inverse, il ne peut être inférieur à un seuil minimal) et il arrive même qu'il soit à la fois "*capé*" et "*flooré*" (par exemple, un contrat d'obligation à taux variable peut avoir une clause selon laquelle le coupon variable doit toujours être compris entre 0 et 4 %).

On note K_- la borne inférieure et K_+ la borne supérieure, avec : $K_+ > K_-$. Chaque borne peut prendre une valeur positive ou négative et on fixe la convention suivante : lorsque la FRN n'est pas "*floorée*", on pose $K_- = -\infty$ et lorsqu'elle n'est pas "*capée*", on pose $K_+ = +\infty$. Etant donné que pour tout $i \in [1, n]$, le possesseur de la FRN perçoit sur l'intervalle $[t_i - h, t_{i+1} - h[$ une partie variable égale au taux de rendement à échéance révisé en $t_i - h$, $L(t_i - h, \theta)$, majoré du *spread* c , on écrit :

$$\begin{aligned} c_t = & \mathbb{1}_{[0, t_1 - h[}(t) \phi(c + L(t_0 - h, \theta), K_-, K_+) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[t_i - h, t_{i+1} - h[}(t) \phi(c + L(t_i - h, \theta), K_-, K_+) \\ & + \mathbb{1}_{[T - h, T[}(t) \phi(c + L(T - h, \theta), K_-, K_+), \end{aligned} \quad (5.6)$$

où on a posé :

$$\forall (x, k, q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}), \quad \phi(x, k, q) = \min(\max(x, k), q). \quad (5.7)$$

Le rendement associé à la première période $L(t_0 - h, \theta)$ est connu à la date de *pricing* donc le coupon variable perçu entre 0 et $t_1 - h$ est déterministe. En réutilisant les résultats de la Partie théorique sur les modèles de crédit à intensité 2.7, le prix de la FRN s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{FRN}(c, \omega, T) = & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T c_t e^{-\int_0^t r_s + \gamma_s ds} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} dt + e^{-\int_0^T r_t + \gamma_t dt} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \right. \\ & \left. + (1 - \omega) \int_0^T e^{-\int_0^t r_s + \gamma_s ds} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} dt \right] \\ = & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T c_t e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t + \lambda_t + \gamma_t dt} \right] \\ & + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(1 - \omega) \int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] \\ = & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T c_t e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] + P(X, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \\ & + (1 - \omega) \int_0^T P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt. \end{aligned}$$

Il reste à calculer la partie à coupon variable. En injectant l'Equation 5.6, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T c_t e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] = & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^{t_1 - h} \phi(c + L(t_0 - h, \theta), K_-, K_+) e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right. \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i - h}^{t_{i+1} - h} \phi(c + L(t_i - h, \theta), K_-, K_+) e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \\ & \left. + \int_{T - h}^T \phi(c + L(T - h, \theta), K_-, K_+) e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right]. \end{aligned}$$

L'intervention espérance-intégrale est permise par Fubini-Lebesgue, et nous obtenons par indépendance mutuelle des processus r , λ et γ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T c_t e^{-\int_0^t r_s + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] &= \int_0^{t_1-h} \phi(c + L(t_0 - h, \theta), K_-, K_+) P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i-h}^{t_{i+1}-h} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\phi(c + L(t_i - h, \theta), K_-, K_+) e^{-\int_0^t r_s ds} \right] \\ &\quad \times F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ &\quad + \int_{T-h}^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\phi(c + L(T - h, \theta), K_-, K_+) e^{-\int_0^t r_s ds} \right] F(\lambda, t) \\ &\quad \times V(\gamma, t) dt. \end{aligned}$$

Or, $\forall i \in [1, n-1]$ et $\forall t \in [t_i - h, t_{i+1} - h[$, en passant de la mesure risque neutre à la mesure t -forward neutre,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\phi(c + L(t_i - h, \theta), K_-, K_+) e^{-\int_0^t r_s ds} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t} \left[\phi(c + L(t_i - h, \theta), K_-, K_+) \right] P(X, t). \quad (5.8)$$

Nous sommes amenés à calculer :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t} \left[\phi(c + L(t_i - h, \theta), K_-, K_+) \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t} \left[K_- \mathbf{1}_{\{c + L(t_i - h, \theta) \leq K_-\}} \right. \\ &\quad + (c + L(t_i - h, \theta)) \mathbf{1}_{\{K_- < c + L(t_i - h, \theta) \leq K_+\}} \\ &\quad \left. + K_+ \mathbf{1}_{\{c + L(t_i - h, \theta) > K_+\}} \right] \\ &= K_- \mathbb{Q}_t \left[c + L(t_i - h, \theta) \leq K_- \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t} \left[(c + L(t_i - h, \theta)) \mathbf{1}_{\{K_- < c + L(t_i - h, \theta) \leq K_+\}} \right] \\ &\quad + K_+ \mathbb{Q}_t \left[c + L(t_i - h, \theta) > K_+ \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les termes à calculer sont les suivants :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mathbb{Q}_t \left[c + L(t_i - h, \theta) \leq K_- \right], \\ Q_2 &= \mathbb{Q}_t \left[c + L(t_i - h, \theta) > K_+ \right], \\ m_{i,c}(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t} \left[(c + L(t_i - h, \theta)) \mathbf{1}_{\{K_- < c + L(t_i - h, \theta) \leq K_+\}} \right]. \end{aligned}$$

Remarquons que la variable aléatoire $P(t_i - h, t_i - h + \theta)$ est de loi log-normale sous $\mathbb{Q}$ (voir la Partie théorique du modèle de taux 3.2.3 sur le prix zéro-coupon). En conséquence, $P(t_i - h, t_i - h + \theta)^{-1}$ est aussi une variable aléatoire de loi log-normale sous $\mathbb{Q}$. En changeant de mesure de probabilité, sa loi est inchangée, il en est donc de même sous $\mathbb{Q}_t$. Par un calcul intégral simple, on établit que pour toute variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et pour tout couple de réels $a \leq b$,

$$\mathbb{E} \left[e^X \mathbf{1}_{\{a \leq e^X \leq b\}} \right] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(\Phi \left(\frac{\ln b - \mu}{\sigma} - \sigma \right) - \Phi \left(\frac{\ln a - \mu}{\sigma} - \sigma \right) \right), \quad (5.10)$$

et, $\forall x > 0$:

$$\mathbb{P} \left[e^X \leq x \right] = \Phi \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right), \quad (5.11)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Il nous reste donc à déterminer les paramètres de la loi de $P(t_i - h, t_i - h + \theta)^{-1}$ sous la mesure $\mathbb{Q}_t$. En utilisant les résultats du modèle de taux établis dans la Section 3.2.3, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P(t_i - h, t_i - h + \theta)^{-1} &= \exp \left(- \int_0^{t_i-h} \Delta_s \Gamma(t_i - h, t_i - h + \theta)' dW_s^t + \ln \frac{P(0, t_i - h)}{P(0, t_i - h + \theta)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^{t_i-h} (\|\Delta_s \Gamma(t, t_i - h + \theta)\|^2 - \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t)\|^2) ds \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

où on rappelle que $(W_s^t)_{s \geq 0}$ est un $\mathbb{Q}_t$ -mouvement brownien multidimensionnel.

Les propriétés de l'intégrale stochastique mènent à :

$$\begin{aligned} \ln(P(t_i - h, t_i - h + \theta)^{-1}) &\sim \mathcal{N}\left(\ln \frac{P(0, t_i - h)}{P(0, t_i - h + \theta)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^{t_i - h} (\|\Delta_s \Gamma(t, t_i - h + \theta)\|^2 - \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t)\|^2) ds; \right. \\ &\quad \left. \int_0^{t_i - h} \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t_i - h + \theta)\|^2 ds\right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

et ce, toujours sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_t$.

Ainsi, en utilisant les Equations 5.10 et 5.11, on obtient :

$$\bullet \quad Q_1 = \Phi(d_{i,c}^-(t, K_-)); \quad (5.14)$$

$$\bullet \quad Q_2 = \Phi(d_{i,c}^+(t, K_+)); \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad m_{i,c}(t) &= \frac{1}{\theta} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t} \left[P(t_i - h, t_i - h + \theta)^{-1} \mathbf{1}_{\{K_- < c + L(t_i - h, \theta) \leq K_+\}} \right] \\ &\quad + \left(c - \frac{1}{\theta} \right) \mathbb{Q}_t[K_- < c + L(t_i - h, \theta) \leq K_+] \\ &= \frac{1}{\theta} \frac{P(0, t_i - h)}{P(0, t_i - h + \theta)} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{t_i - h} (\|\Delta_s \Gamma(t, t_i - h + \theta)\|^2 - \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t_i - h + \theta)\|^2) ds \right) \\ &\quad \times \left[\Phi \left(d_{i,c}^-(t, K_+) - \sqrt{\int_0^{t_i - h} \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t_i - h + \theta)\|^2 du} \right) \right. \\ &\quad \left. - \Phi \left(d_{i,c}^-(t, K_-) - \sqrt{\int_0^{t_i - h} \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t_i - h + \theta)\|^2 ds} \right) \right] \\ &\quad + \left(c - \frac{1}{\theta} \right) \left(\Phi(d_{i,c}^-(t, K_+)) - \Phi(d_{i,c}^-(t, K_-)) \right); \end{aligned} \quad (5.16)$$

où on a posé :

$$d_{i,c}^+(t, x) = \frac{\ln \left(\frac{P(0, t_i - h + \theta)}{P(0, t_i - h)(1 + \theta(x - c))} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{t_i - h} (\|\Delta_s \Gamma(t, t_i - h + \theta)\|^2 - \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t)\|^2) ds}{\sqrt{\int_0^{t_i - h} \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t_i - h + \theta)\|^2 ds}}, \quad (5.17)$$

$$d_{i,c}^-(t, x) = \frac{\ln \left(\frac{P(0, t_i - h)(1 + \theta(x - c))}{P(0, t_i - h + \theta)} \right) - \frac{1}{2} \int_0^{t_i - h} (\|\Delta_s \Gamma(t, t_i - h + \theta)\|^2 - \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t)\|^2) ds}{\sqrt{\int_0^{t_i - h} \|\Delta_s \Gamma(t_i - h, t_i - h + \theta)\|^2 ds}}. \quad (5.18)$$

Finalement, on pose :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t} \left[\phi(c + L(t_i - h, \theta), K_-, K_+) \right] = \Psi_{i,t}^{K_-, K_+, c}, \quad (5.19)$$

où on a obtenu :

$$\Psi_{i,t}^{K_-, K_+, c} = K_- \Phi(d_{i,c}^-(t, K_-)) + m_{i,c}(t) + K_+ \Phi(d_{i,c}^+(t, K_+)), \quad (5.20)$$

les fonctions $d_{i,c}^-$, $d_{i,c}^+$ et $m_{i,c}$ ayant été définies respectivement dans les Expressions 5.18, 5.17 et 5.16.

Typiquement, l'utilisation des mesures de probabilité *forward* neutre est naturelle lorsque l'on souhaite se débarrasser du facteur d'actualisation (stochastique) lors du *pricing* d'un produit financier dont le *pay-off* est dépendant de la dynamique des taux d'intérêt. Il existe en ce sens une infinité de mesures *forward* neutres, toutes indicées par une maturité fixée. La subtilité de cette approche réside dans le fait que cette espérance est intégrée, et le paramètre associé à l'intégrande est celui du changement de mesure : le passage à l'espérance sous la mesure *forward* neutre fait apparaître le prix du zéro-coupon sans risque et l'espérance d'un taux de rendement à échéance sous cette mesure. Comme le taux de rendement à échéance ne dépend que de sa date de révision et de sa maturité, la variable d'intégration t n'est présente que dans la mesure de probabilité sous laquelle l'espérance est appliquée. En balayant l'intervalle d'intégration, une infinité de mesures *forward* neutres est utilisée.

Les Equations 5.19 et 5.20 mènent finalement à une formule fermée du prix de l'obligation à taux variable :

$$\begin{aligned} \text{FRN}(c, K_-, K_+, \omega, T) = & \phi(c + L(t_0 - h, \theta), K_-, K_+) \int_0^{t_1 - h} P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i - h}^{t_{i+1} - h} \Psi_{i,t}^{K_-, K_+, c} P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ & + \int_{T-h}^T \Psi_{n,t}^{K_-, K_+, c} P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ & + P(X, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) + (1 - \omega) \int_0^T P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt, \end{aligned} \quad (5.21)$$

où les quantités $F(\lambda, t)$ et $V(\gamma, t)$ sont fournies dans la Section 4.1.

Le prix de la FRN est ici caractérisé par de multiples facteurs de risque tels que la structure de volatilité des prix zéro-coupon, les facteurs de déformation de la structure par terme de taux d'intérêt, ainsi que ses composantes d'illiquidité et de défaut.

5.2 Calibration du modèle de liquidité

Le cadre construit permet d'évaluer à présent les obligations à taux variable avec une certaine flexibilité. On s'intéresse maintenant à l'estimation des paramètres du modèle de liquidité de la FRN. Les séries temporelles de paramètres implicites ainsi dégagées sont jointes aux autres séries du cadre pour être utilisées dans le générateur de scénarios économiques. Dans un premier temps, nous présentons les données sur lesquelles la calibration est effectuée, puis, nous détaillons la procédure de calibration des paramètres du modèle de liquidité des FRN. Finalement, les résultats sont présentés et analysés.

5.2.1 Présentation des données

Les paramètres de liquidité sont calibrés sur un historique de prix d'obligations à taux variable d'un panier de *corporate* de *rating* A. La démarche qui va suivre est naturellement reproductible pour tout *rating*. L'historique s'étend du 23 septembre 2015 au 23 janvier 2019. Il est à noter que l'historique de données à notre disposition est moins étendu que dans toutes les autres étapes de calibration détaillées dans cette étude. L'approche reste toutefois valable sur un historique plus grand. Lors de la mise en commun de tous les facteurs de risque du cadre en vue d'effectuer la calibration du modèle de série temporelle multivarié, il faudra veiller à posséder un historique de séries chronologiques de paramètres aussi conséquent que ceux des autres parties du cadre. Des historiques de plus grande taille sont certainement disponibles, notamment sur *Bloomberg*, mais leur extraction nécessite un travail de tri préalable plus conséquent, suivant les caractéristiques des obligations à extraire (nous sommes ici dans un cas où la FRN n'est pas *callable* par exemple). De plus, les prix utilisés ici correspondent à des obligations de faible maturité (les FRN étant souvent échangées pour des maturités de moins de 10 ans), ce qui est généralement le cas des FRN détenues en portefeuille. Néanmoins, un historique de meilleure qualité mènerait à des résultats bien plus satisfaisants que ceux présentés dans cette section.

5.2.2 Calibration du modèle de liquidité de la FRN

La procédure de calibration reprend celle du modèle de liquidité des obligations à taux fixe (voir la Section 4.1). Rappelons que les paramètres de crédit qui sont utilisés sont ceux extraits du CDS correspondant au *rating* de la FRN. Soit $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de calibration,

$$P_{\bar{t}, \bar{\tau}} = \begin{bmatrix} P_{t_1, \tau_{1,1}} & \cdots & P_{t_1, \tau_{1,m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{t_n, \tau_{n,1}} & \cdots & P_{t_n, \tau_{n,m}} \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (5.22)$$

la matrice des historiques de prix d'obligations à taux variable disponibles, où $\tau_{i,j}$ est la maturité résiduelle de l'obligation j au pas de temps t_i . On fait également correspondre à chaque obligation un vecteur de paramètres : pour $j \in [1, m]$, on fait correspondre à l'obligation j le coupon fixe c_j , les bornes de cap et de floor K_+^j et K_-^j du coupon variable, la maturité du taux variable θ_j , les dates de paiement $(t_{l,j})_{l \in [0, N]}$ (ou durées résiduelles avant paiement de coupon, variant d'un pas de temps à un autre) et la durée séparant la date de paiement de sa date de révision associée h_j .

On reprend alors le principe de calibration énoncé dans la Section 4.2.3. On calibre le paramètre de volatilité du processus d'illiquidité η en extérieur et le paramètre d'illiquidité γ_0 en intérieur. Une procédure de lissage paramétrique sera ensuite réalisée sur les paramètres intérieurs. On note :

$$\Gamma_{\bar{t}, \bar{\tau}}^* = \begin{bmatrix} \gamma_{0, t_1, \tau_{1,1}}^* & \cdots & \gamma_{0, t_1, \tau_{1,m}}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{0, t_n, \tau_{n,1}}^* & \cdots & \gamma_{0, t_n, \tau_{n,m}}^* \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (5.23)$$

la matrice de paramètres intérieurs. A chaque prix de FRN est calibré un paramètre γ_0 .

On suppose par ailleurs que les structures par terme de paramètre λ_0 ont été lissées, permettant l'évaluation du prix de l'obligation en toute maturité. Les structures par terme utilisées sont celles extraites des prix des CDS lors de la calibration du modèle de crédit.

Pour déterminer le paramètre extérieur optimal η^* , on résoud le problème d'optimisation mono-objectif suivant :

$$\eta^* = \underset{\eta}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\gamma} \left(P_{t_i, \tau_{i,j}} - \operatorname{FRN}(c_j, K_-^j, K_+^j, h_j, \theta_j, \omega, \tau_{i,j}; \eta, \gamma) \right)^2. \quad (5.24)$$

Notons cette fois N le nombre de dates de paiement (pour éviter de faire la confusion avec n le nombre de pas de temps de calibration) et $t_{k,j}$ les dates de paiement, k étant l'indice de position de la date dans la subdivision et j la FRN associée. Une attention particulière est portée sur la distinction entre la notation $t_{k,j}$ pour les dates de paiement et la notation t_i qui quant à elle réfère au i -ème pas de temps de calibration. Comme pour les CDS, le problème d'optimisation nécessite la minimisation de $n \times m + 1$ fonctions :

- Pour un paramètre extérieur η donné et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$, on minimise la fonction :

$$\begin{aligned} g_{i,j}^{\eta} : \gamma \mapsto & \left(P_{t_i, \tau_{i,j}} - \phi \left(c_j + L(t_{0,j} - h_j, \theta_j), K_-^j, K_+^j \right) \int_0^{t_{1,j} - h_j} P(X_{t_i}, t) F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V(\gamma, t) dt \right. \\ & - \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_{k,j} - h_j}^{t_{k+1,j} - h_j} \Psi_{k,t}^{K_-^j, K_+^j, c_j} P(X_{t_i}, t) F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V(\gamma, t) dt \\ & - \int_{T-h}^T \Psi_{N,t}^{K_-^j, K_+^j, c_j} P(X_{t_i}, t) F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V(\gamma, t) dt \\ & - P(X_{t_i}, \tau_{i,j}) F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, \tau_{i,j}) V(\gamma, \tau_{i,j}) \\ & \left. - (1 - \omega) \int_0^{\tau_{i,j}} P(X_{t_i}, t) W(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V(\gamma, t) dt \right)^2, \end{aligned} \quad (5.25)$$

où le paramètre de crédit $\lambda_{t_i, \tau}$ est lu sur la structure par terme lissée au pas de temps t_i pour une maturité τ . Pour une description du fonctionnement du modèle de crédit, se référer à la Section 4.2.3. On rappelle également, $\forall (k, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$:

$$\Psi_{k,t}^{K_-^j, K_+^j, c_j} = K_-^j \Phi(d_{k,c_j}^-(t, K_-^j)) + m_{k,c_j}(t) + K_+^j \Phi(d_{k,c_j}^+(t, K_+^j)), \quad (5.26)$$

soit la fonction définie dans l'Equation 5.20, où les quantités calculées sont établies dans la section précédente.

Ceci amène à minimiser $n \times m$ fonctions objectif ;

- Puis, on minimise la fonction d'agrégation :

$$g : \eta \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\gamma} g_{i,j}^{\eta}(\gamma), \quad (5.27)$$

et on obtient le paramètre extérieur optimisé η^* .

Une fois le paramètre η^* estimé, on minimise à nouveau $n \times m$ fonctions objectif pour avoir la matrice de paramètres intérieurs $\Gamma_{t,\tau}^*$, pour laquelle chaque coefficient $\gamma_{0,t_i, \tau_{i,j}}^*$ se calcule par :

$$\gamma_{0,t_i, \tau_{i,j}}^* = \underset{\gamma}{\operatorname{Argmin}} g_{i,j}^{\eta^*}(\gamma). \quad (5.28)$$

On calibre à présent le modèle de liquidité des FRN suivant la procédure développée dans cette section. Les prix sont très bien répliqués d'une maturité à une autre. Le paramètre extérieur affiché est arrondi à 10^{-5} près.

	A
η	0.00098

TABLE 5.1 – Paramètre extérieur (volatilité) du processus de *convenience yield* FRN

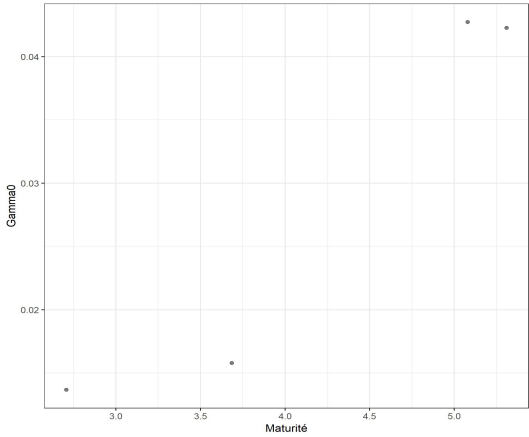


FIGURE 5.3 – Structure par terme de γ_0 au 8 novembre 2016, FRN

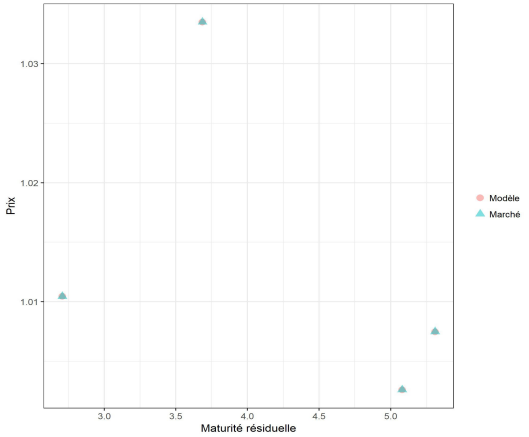


FIGURE 5.4 – *Fitting* des prix au 8 novembre 2016, FRN

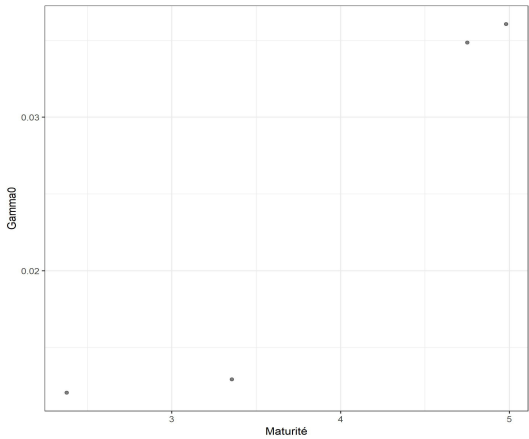


FIGURE 5.5 – Structure par terme de γ_0 au 8 mars 2017, FRN

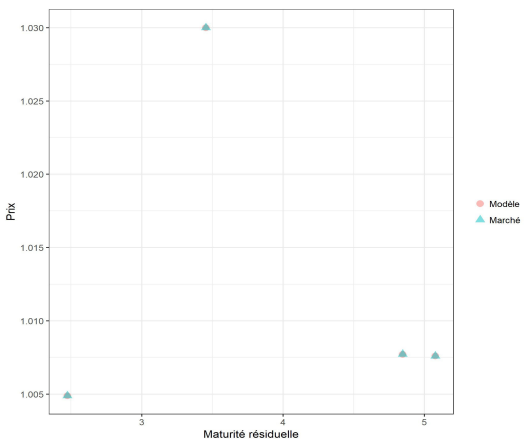


FIGURE 5.6 – *Fitting* des prix au 1er février 2017, FRN

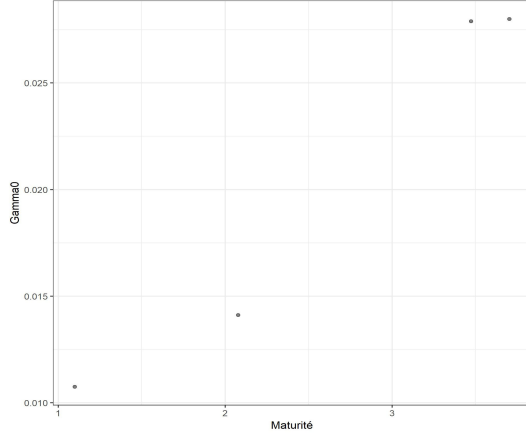


FIGURE 5.7 – Structure par terme de γ_0 au 18 juin 2018, FRN

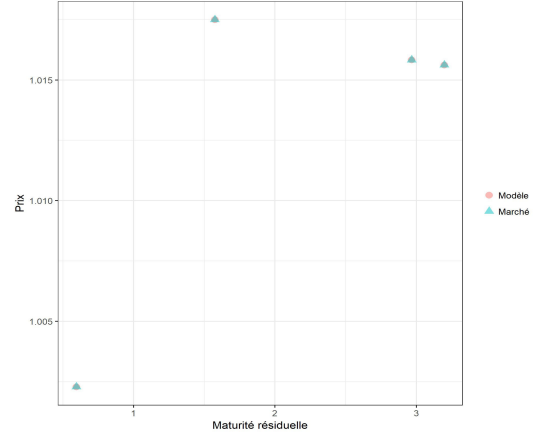


FIGURE 5.8 – *Fitting* des prix au 19 décembre 2018, FRN

De même que pour le modèle de crédit, on effectue un lissage paramétrique des structures par terme de γ_0 obtenues. Le lissage est également fait par calibration d'une fonctionnelle de type Nelson-Siegel. On peut alors évaluer les obligations à taux variable en toute maturité (résiduelle).

5.2.3 Lissage des structures par terme de paramètres implicites

On s'intéresse au lissage des structures par terme de γ_0 . A chaque pas de temps est calibré une fonctionnelle Nelson-Siegel sur la structure par terme de paramètres correspondante.

Soit $\mu > 0$ le paramètre d'échelle de la fonctionnelle Nelson-Siegel. L'équation de régression s'écrit, à chaque pas de temps t_i :

$$\forall j \in [1, m], \quad \gamma_{0,t_i,T_j} = \beta_{0,t_i} + \beta_{1,t_i} B_1(\tau_{i,j}) + \beta_{2,t_i} B_2(\tau_{i,j}), \quad (5.29)$$

où :

$$B_1(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T}, \quad B_2(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T} - e^{-\mu T}. \quad (5.30)$$

Nous cherchons à reproduire au mieux, après lissage, les prix des obligations à taux variable. On utilise à nouveau la régression linéaire pondérée. Les poids sont choisis de manière à minimiser l'erreur réalisée sur les points pour lesquels les variations de prix sont les plus importantes :

$$w_{i,j} = \frac{\frac{\partial \text{FRN}}{\partial \gamma}(\gamma_{0,t_i,\tau_{i,j}}, c_j, K_-^j, K_+^j, h_j, \theta_j, \omega, \tau_{i,j})}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial \text{FRN}}{\partial \gamma}(\gamma_{0,t_i,\tau_{i,k}}, c_k, K_-^k, K_+^k, h_k, \theta_k, \omega, \tau_{i,k})}, \quad (5.31)$$

où l'expression de la dérivée est donnée en annexe.

Posons $\forall i \in [1, n]$,

$$D_i^W = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_{im} \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \Gamma_{i.} = \begin{bmatrix} \gamma_{0,t_i,\tau_{i,1}} \\ \gamma_{0,t_i,\tau_{i,2}} \\ \vdots \\ \gamma_{0,t_i,\tau_{i,m}} \end{bmatrix}_m, \quad (5.32)$$

$$B_i(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & B_1(\tau_{i,1}) & B_2(\tau_{i,1}) \\ 1 & B_1(\tau_{i,2}) & B_2(\tau_{i,2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & B_1(\tau_{i,m}) & B_2(\tau_{i,m}) \end{bmatrix}_{m \times 3}, \quad \beta_{i.} = \begin{bmatrix} \beta_{0,t_i} \\ \beta_{1,t_i} \\ \beta_{2,t_i} \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Le régresseur des moindres carrés pondérés, en régressant sur le pas de temps t_i pour un paramètre d'échelle μ , s'écrit :

$$\beta_{i.}^\mu = (B_i(\mu)' D_i^W B_i(\mu))^{-1} B_i(\mu)' D_i^W \Gamma_{i.}. \quad (5.34)$$

Soit $E_{i.}^\mu$ le vecteur d'erreur au pas de temps t_i pour un paramètre μ :

$$E_{i.}^\mu = \begin{bmatrix} e_{i1}^\mu \\ e_{i2}^\mu \\ \vdots \\ e_{im}^\mu \end{bmatrix}_m. \quad (5.35)$$

Alors, si μ^* est le paramètre optimal, le problème d'optimisation mono-objectif s'écrit :

$$\mu^* = \underset{\mu}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \|E_{i.}^\mu\|_2^2 = \underset{\mu}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i.} - B_i(\mu)\beta_{i.}^\mu)' D_i^W (\Gamma_{i.} - B_i(\mu)\beta_{i.}^\mu). \quad (5.36)$$

Comme expliqué dans la Section 3.28, après avoir calibré le paramètre μ^* il suffit de faire une régression par pas de temps pour obtenir les séries temporelles de régresseurs et, *in fine*, la matrice β_{μ^*} .

Les résultats de la calibration sont exposés ci-après. On effectue, comme dans la Section 4.2.3, une régression sur l'historique complet de paramètres γ_0 de façon à évaluer si une unique fonctionnelle peut permettre de reproduire efficacement l'historique de prix des FRN, ce qui permettrait une réduction de dimension conséquente. Les résultats obtenus avec cette structure déterministe sont également comparés avec ceux obtenus par lissage avec structure stochastique. Les paramètres fournis dans le tableau ci-dessous sont arrondis à 10^{-4} près.

	Déterministe	Stochastique
μ	0,1021	0,1004
β_0	1,2195	-
β_1	-1,2073	-
β_2	-1,2831	-

TABLE 5.2 – Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du *convenience yield*, FRN

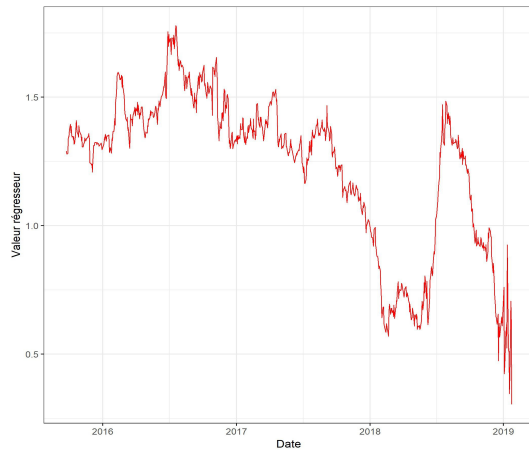


FIGURE 5.9 – Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité FRN

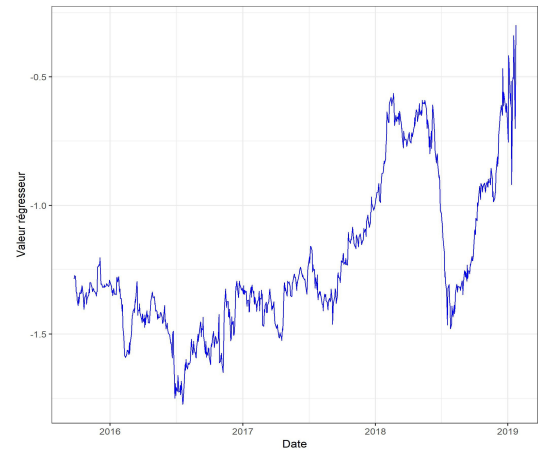


FIGURE 5.10 – Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité FRN

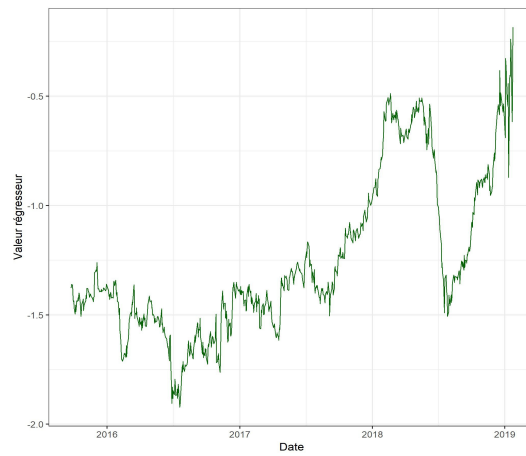


FIGURE 5.11 – Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité FRN

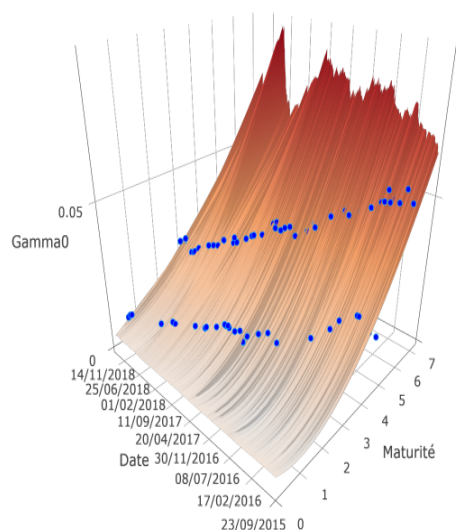


FIGURE 5.12 – (Vue 1) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), FRN

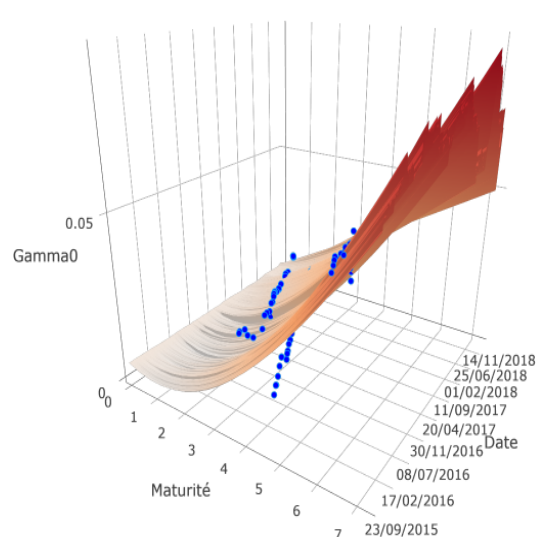


FIGURE 5.13 – (Vue 2) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), FRN

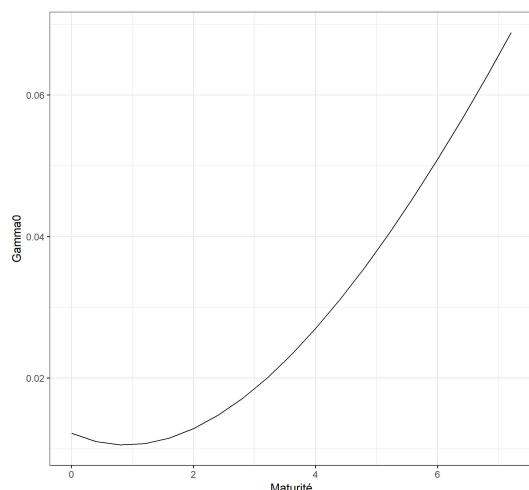


FIGURE 5.14 – Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe, FRN

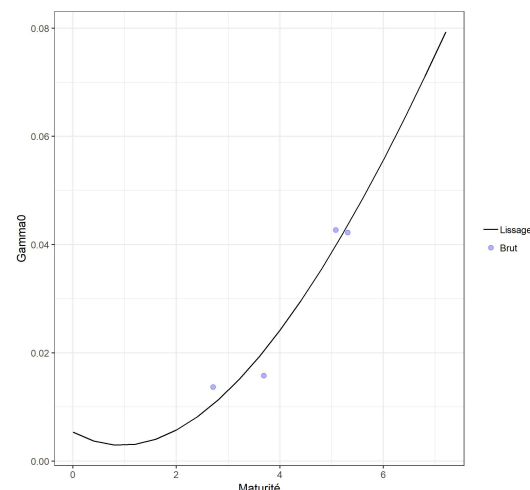


FIGURE 5.15 – Structure par terme de γ_0 lissée et *fitting* au 8 novembre 2016, FRN

Le *fitting* est de bonne qualité. Cependant, notre principal intérêt n'est pas la reproduction des paramètres implicites en particulier, mais celle des prix des obligations à taux variable : on représente ci-dessous le pouvoir de reproduction des prix à des dates fixées ainsi que sur les historiques complets, pour le modèle à structure déterministe ainsi que pour celui à structure stochastique. La qualité de réplication des deux modèles peut ainsi être observée.

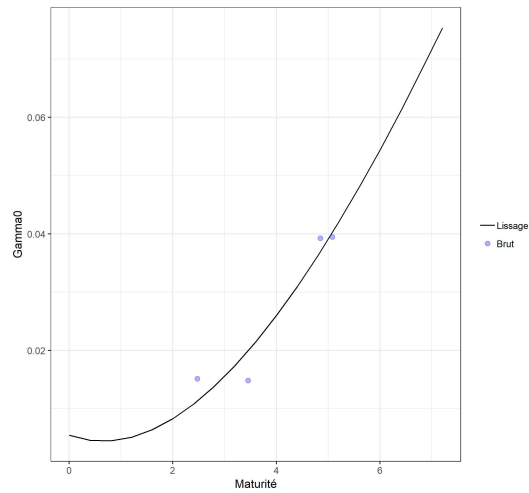


FIGURE 5.16 – Structure par terme de γ_0 lissée et *fitting* au 1er février 2017, FRN

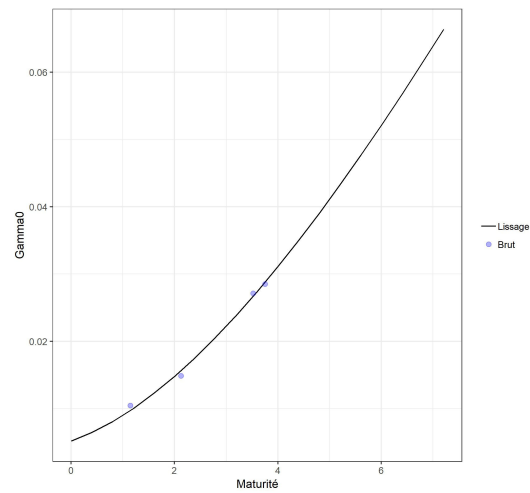


FIGURE 5.17 – Structure par terme de γ_0 lissée et *fitting* au 31 mai 2018, FRN

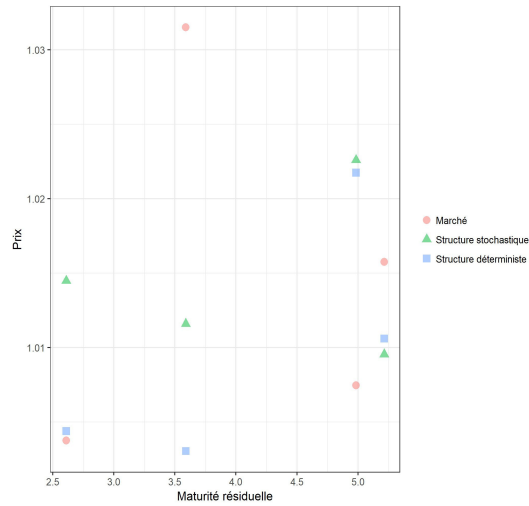


FIGURE 5.18 – *Fitting* des prix de FRN après lissage déterministe/stochastique au 13 décembre 2016

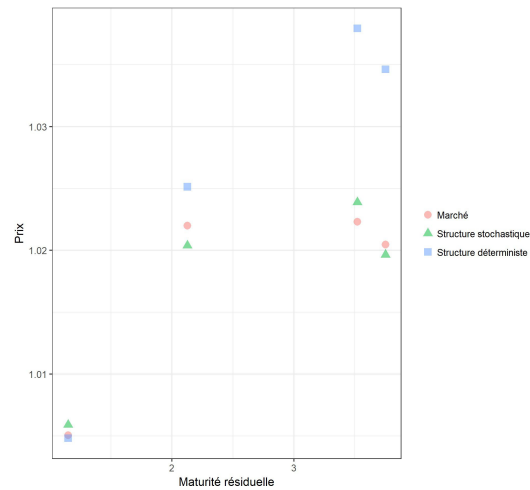


FIGURE 5.19 – *Fitting* des prix de FRN après lissage déterministe/stochastique au 31 mai 2018

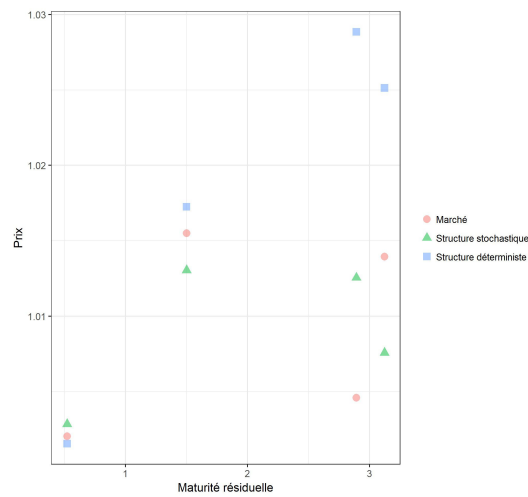


FIGURE 5.20 – *Fitting* des prix de FRN après lissage déterministe/stochastique au 15 janvier 2019

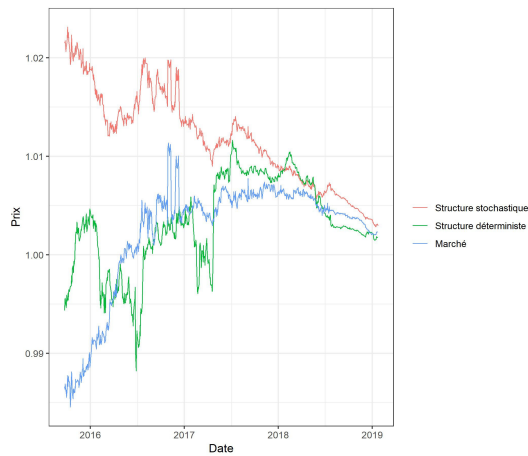


FIGURE 5.21 – *Fitting* de l'historique de prix de la FRN UV430306 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

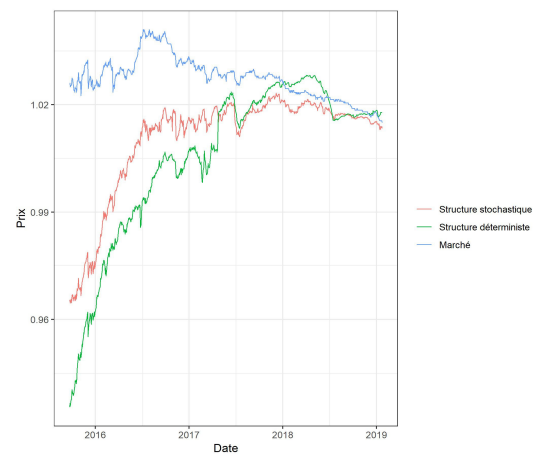


FIGURE 5.22 – *Fitting* de l'historique de prix de la FRN EJ466660 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

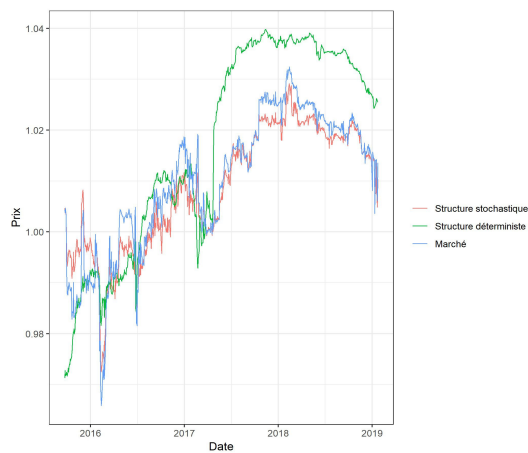


FIGURE 5.23 – *Fitting* de l'historique de prix de la FRN EG175665 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

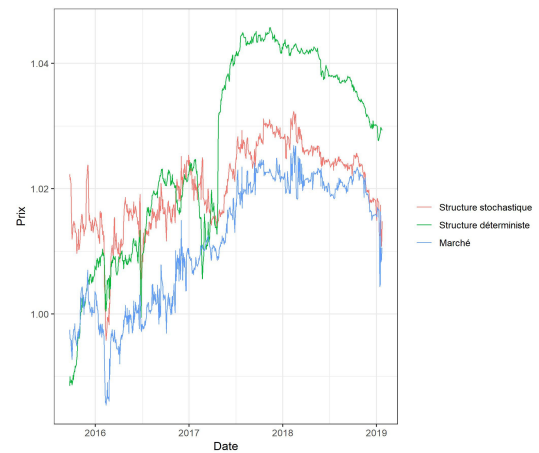


FIGURE 5.24 – *Fitting* de l'historique de prix de la FRN EF863008 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

L'utilisation de la fonction de lissage dynamique permet de répliquer correctement les prix en valeurs, plus qu'en variations. La complexité de l'évolution du principal facteur de risque de la FRN (les fluctuations de la structure par terme des taux d'intérêt) induit une certaine difficulté à reproduire précisément les variations de prix. Toutefois, le modèle de lissage stochastique, tel qu'il est calibré, se montre robuste en général, principalement pour ce qui est de la reproduction brute des prix. La fonctionnelle à structure déterministe est moins efficace compte tenu du fait qu'elle n'induit pas une dépendance temporelle du facteur de risque de liquidité dans le *pricing* de la FRN. Elle permet cependant une reproduction correcte des prix sur certaines périodes, et suivant l'ISIN, elle peut se montrer presque aussi performante que la structure stochastique.

On utilise donc le modèle à structure *time-dependent* en intégrant les 3 séries chronologiques de régresseurs au générateur de scénarios économiques. A nouveau, les problématiques de validation du choix de fonctionnelle (il faudrait calibrer d'autres fonctions sûrement plus pertinentes) et de la multicolinéarité des régresseurs se posent. Ces sujets ont vocation à être étudiés plus finement lors de la calibration d'un modèle de séries temporelles multivarié.

Chapitre 6

Modélisation des obligations indexées sur l'inflation

Sommaire

6.1	Contexte et cadre de l'étude	104
6.2	Spécification du modèle d'inflation	105
6.2.1	Processus d'inflation	106
6.2.2	Processus de prix zéro-coupon nominal et réel	106
6.3	Spécification du modèle d'évaluation	108
6.3.1	Définition et spécification	108
6.3.2	Valorisation de l'obligation indexée	109
6.4	Calibration du modèle d'inflation	113
6.4.1	Présentation des données	113
6.4.2	Extraction des données implicites	114
6.4.3	Calibration du modèle de taux court réel AFNS	119
6.4.4	Calibration paramétrique de la volatilité implicite des <i>cap</i> inflation	124
6.5	Calibration du modèle de liquidité	136
6.5.1	Présentation des données	136
6.5.2	Calibration des paramètres de liquidité de l'OATi	137
6.5.3	Lissage des structures par terme de paramètres implicites	140

Dans ce chapitre, nous spécifions le modèle d'évaluation des obligations indexées sur l'inflation. On présente en premier lieu le modèle d'inflation : il convient alors d'introduire les notions de taux d'intérêt nominal et de taux d'intérêt réel, puis de spécifier un modèle pour ces deux processus. Le modèle AFNS est utilisé pour modéliser le taux court réel, le modèle de taux nominal ayant été spécifié et calibré précédemment dans la Section 3.2.1. Nous parvenons à obtenir une formule semi-fermée pour le prix de l'obligation indexée, puis nous procédons à la calibration du modèle d'inflation ainsi qu'à celle du modèle de liquidité. Nous faisons le choix de modéliser la surface de volatilité implicite de produits dérivés vanille (*cap*) sur inflation afin de capter les déformations de la volatilité du marché de l'inflation dans le prix de l'obligation indexée. Une partie de ce chapitre est donc réservée à la modélisation de la surface de volatilité implicite ainsi qu'à la calibration d'un modèle paramétrique de surface de volatilité.

6.1 Contexte et cadre de l'étude

L'évolution récente des marchés des actions et des obligations à taux fixe a montré que ni les actions, ni les obligations n'héritent d'une protection efficace contre la perte de pouvoir d'achat. En effet, l'augmentation des prix n'est pas captée par le rendement d'opportunité de ces actifs, ce qui génère une perte financière quantifiable pour l'investisseur. De plus, il n'est pas rare que l'assureur cherche à se couvrir contre l'inflation des prestations versées aux assurés. Ces éléments expliquent l'intérêt croissant qui est porté pour les produits dérivés d'inflation au sein des compagnies d'assurance et des institutions financières. Malgré une relative constance du taux d'inflation d'une majorité des pays européens, la crise financière de 2008 a fait peser un certain risque d'instabilité des prix en Europe. D'une part, le risque de déflation a amené les banques centrales ainsi que la *Federal Reserve* à injecter des quantités astronomiques de liquidités dans les marchés. D'autre part, le risque d'une augmentation substantielle du taux d'inflation s'est développé après la mise en place progressive de politiques budgétaires et monétaires expansionnistes, adoptées en réponse à la crise des *subprime*.

Le taux d'inflation globale, exprimé comme une variation en pourcentage de l'IPC (Indice des Prix à la Consommation, mesuré par l'institut national de la statistique et des études économiques), constitue l'un des indicateurs de la hausse des prix. Ses effets sur les portefeuilles des compagnies d'assurance peuvent être importants. Par exemple, la hausse des prix de détail induit un coût de fabrication supplémentaire pour la création et l'amélioration des produits d'assurance. Lors de la mesure de l'inflation, l'IPC publié exclut les coûts supplémentaires intégrés dans les nouveaux produits qui tiennent compte des améliorations de ces derniers. Ainsi, il ne tient pas compte de l'évolution technologique du produit sur la période considérée. Un véhicule aujourd'hui coûte bien plus cher qu'il y a 20 ans, et pour autant, l'inflation n'est pas l'unique facteur de cette augmentation : la voiture d'aujourd'hui embarque une technologie bien plus pointue que celle d'auparavant. Pour obtenir une mesure d'un vrai panier fixe de biens de consommation, il faudrait tenir compte du fait que les voitures produites cette année ne sont pas les mêmes que celles fabriquées il y a deux décennies. Or, les indemnités des assureurs ne tiennent pas compte de ces corrections hédoniques. Les assureurs automobiles ne réduisent pas toujours le montant des indemnités de sinistres pour tenir compte des différences de qualité. Un autre exemple est le coût des remboursements des frais médicaux par les assureurs : particulièrement sujets aux progrès technologiques, les coûts croissants des assureurs s'expliquent en partie par l'amélioration continue des technologies médicales de pointe. Si une nouvelle génération de prothèses offre d'importants avantages par rapport aux anciens appareils, la hausse des coûts, le cas échéant, serait sans doute entièrement prise en compte dans les indemnités d'assurance, alors que seulement une fraction de la hausse serait expliquée par l'IPC. De plus, il est probable que les assureurs ne soient exposés qu'à certaines composantes de l'IPC plutôt qu'aux variations générales des prix.

Enfin, l'inflation n'a pas un impact unique sur la performance des assureurs. Tandis que l'inflation élevée peut, à elle seule, provoquer une augmentation significative des coûts, son interaction avec d'autres variables économiques ou financières peut compliquer l'évaluation des risques. Par exemple, selon la courbe de Phillips [1958], l'inflation par la demande peut s'accompagner d'un faible taux de chômage. De cette manière, certains effets de l'inflation pourraient être compensés par la baisse du taux de chômage qui est susceptible d'influer sur les sinistres de type invalidité et accident de travail. Le faible taux de chômage peut aussi améliorer les ventes des assureurs et le taux de conservation de la clientèle. Il peut aussi avoir des effets positifs sur le marché boursier, offrant aux assureurs une protection supplémentaire contre le risque de hausse des coûts sous-jacent à l'inflation.

Lorsque l'on modélise l'inflation, par analogie avec un modèle multi-devises, on doit considérer plusieurs univers d'évaluation : le réel et le nominal. Lorsqu'un investisseur calcule le taux de rendement associé à un produit financier, il peut d'une part l'exprimer en brut, ou d'autre part prendre en considération l'évolution des prix à la consommation et ainsi obtenir un taux de rendement réel. Cette distinction entre taux d'intérêt nominal et taux d'intérêt réel doit être faite dans tout modèle d'inflation. Il faut ainsi pouvoir passer d'un univers à un autre, et les dynamiques des taux réels et des taux nominaux doivent être spécifiées pour assurer une cohérence économique et financière dans la modélisation.

Plusieurs modélisations des produits dérivés d'inflation ont été proposées et étudiées dans la littérature. On cite notamment les travaux de Jarrow et Yildirim dans [24] [2003] qui utilisent un cadre de type Heath-Jarrow-Morton pour établir une formule fermée pour le prix d'un *call* sur indice d'inflation. Ils supposent que les taux *forward* nominaux et réels suivent des processus stochastiques gaussiens (corrélés) à un facteur et ils supposent que l'indice d'inflation IPC est un mouvement brownien géométrique. C'est certes un modèle largement répandu, qui fournit des expressions analytiques pour les options sur inflation, mais l'intégrer à un cadre plus général peut s'avérer gênant en pratique, notamment dans le cadre de la construction d'un générateur de scénarios économiques. En effet, le cadre Jarrow-Yildirim est un système fermé modélisant les taux réels et nominaux. Les formules qui découlent du modèle ne sont donc pas forcément adaptables lorsque l'on modélise des processus à multiples facteurs stochastiques. C'est notamment notre cas, où le taux court nominal est modélisé par un *arbitrage-free* Nelson-Siegel. L'idée de modéliser les taux courts par des processus stochastiques est conservée, et on s'inspire également des calculs du papier de Mercurio F. [9] [2005].

6.2 Spécification du modèle d'inflation

Afin de conserver la cohérence financière que nous nous sommes imposée dans ce cadre, nous utilisons le modèle AFNS pour modéliser le taux court nominal ainsi que le taux court réel. Le taux court nominal est en fait, par comparaison avec les précédentes parties, le taux court que l'on utilise dans les autres modèles. Par construction, le prix zéro-coupon nominal est le prix zéro-coupon que l'on utilise d'usage lorsque l'on n'introduit pas le risque d'inflation.

Il est à noter que les modèles d'inflation sont semblables aux modèles à deux devises. En effet, par analogie, le taux d'intérêt nominal peut être comparé au taux d'intérêt domestique, le taux court réel au taux court étranger, et l'indice d'inflation au taux de change. Il n'est pas rare de rencontrer des travaux qui traitent de l'inflation et qui démontrent des résultats en utilisant ce rapprochement. Ainsi, tout comme dans les modèles de devise, on définit deux mesures de probabilité risque neutre (une unique par marché) : la mesure martingale nominale $\mathbb{Q}^n$ et la mesure martingale réelle $\mathbb{Q}_r$. Les prix réels d'actifs sont exprimés en unité d'IPC, tandis que les prix nominaux sont en unité de devise. La mesure martingale réelle est définie de la même manière que la nominale : c'est la mesure de probabilité sous laquelle les prix réels actualisés au taux court réel sont martingales.

Notre approche s'inspire de celle de Jarrow et Yildirim en démarrant avec un modèle générique puis en spécifiant pas à pas chaque variable du modèle sous la mesure de probabilité risque neutre nominale $\mathbb{Q}^n$.

Soit $T > 0$. On introduit les notations suivantes :

- $(r_t^n)_{t \geq 0}$ le processus de taux court nominal ;
- $(r_t^r)_{t \geq 0}$ le processus de taux court réel ;
- $(P_n(t, T))_{t \geq 0}$ le processus de prix zéro-coupon nominal ;
- $(P_r(t, T))_{t \geq 0}$ le processus de prix zéro-coupon réel ;
- $(I_t)_{t \geq 0}$ le processus d'indice d'inflation.

6.2.1 Processus d'inflation

On suppose que l'indice d'inflation suit un mouvement brownien géométrique de dynamique, sous la mesure martingale $\mathbb{Q}^n$:

$$\frac{dI_t}{I_t} = \mu_t^I dt + \sigma_I dW_t^I, \quad I_0 = I > 0 \quad p.s., \quad (6.1)$$

où $\sigma_I > 0$ est la volatilité implicite associée à l'indice, $(\mu_t^I)_{t \geq 0}$ le processus de tendance et $(W_t^I)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^n$.

Le processus de compte bancaire réel $\left(e^{\int_0^t r_s^r ds}\right)_{t \geq 0}$ est un prix d'actif en unités IPC, donc le processus $\left(I_t e^{\int_0^t r_s^r ds}\right)_{t \geq 0}$ est un prix d'actif nominal et son processus actualisé (au taux nominal) associé est donc une $\mathbb{Q}^n$ -martingale.

En appliquant le lemme d'Itô au processus $\left(I_t e^{\int_0^t (r_s^r - r_s^n) ds}\right)_{t \geq 0}$, il vient :

$$d\left(I_t e^{\int_0^t (r_s^r - r_s^n) ds}\right) = I_t e^{\int_0^t (r_s^r - r_s^n) ds} \left((r_t^r - r_t^n + \mu_t^I)dt + \sigma_I dW_t^I\right).$$

Ce processus est une $\mathbb{Q}^n$ -martingale lorsque son processus de tendance est nul. Ceci nous mène à la condition nécessaire et suffisante suivante, pour tout $t \geq 0$:

$$\mu_t^I = r_t^n - r_t^r,$$

menant à la dynamique suivante pour l'indice d'inflation :

$$\frac{dI_t}{I_t} = (r_t^n - r_t^r) dt + \sigma_I dW_t^I, \quad I_0 = I \quad p.s.. \quad (6.2)$$

Par résolution de cette équation différentielle stochastique, il vient, $\forall t \geq 0$,

$$I_t = I \exp\left(\int_0^t \left(r_s^n - r_s^r - \frac{\sigma_I^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_I dW_s^I\right). \quad (6.3)$$

6.2.2 Processus de prix zéro-coupon nominal et réel

On fixe une maturité T . On modélise le processus de prix zéro-coupon nominal $(P_n(t, T))_{t \geq 0}$ par un AFNS (spécifié et calibré précédemment). On fait de même pour le processus de prix zéro-coupon réel $(P_r(t, T))_{t \geq 0}$. Le lecteur pourra se référer à la Section 3.2.1 pour la théorie autour de ce modèle, ses principaux résultats, leurs démonstrations ainsi que la calibration. On suppose que les deux processus de prix zéro-coupon et le processus d'inflation sont mutuellement indépendants. Cette hypothèse peut paraître forte, mais elle possède un atout pratique non-négligeable. En effet, le modèle AFNS spécifie trois facteurs, le modèle ainsi spécifié en contient six et spécifier une corrélation entre chaque couple de facteurs augmenterait considérablement la taille des formules et donc le temps de calcul. De plus, introduire des corrélations entre les facteurs qui caractérisent les dynamiques des deux marchés (réel et nominal) imposerait leur calibration. Compte tenu du nombre de paramètres du modèle, il n'a pas été jugé intéressant d'ajouter des degrés de liberté car le gain en qualité de réplcation serait faible. Nous verrons que les formules obtenues dans le cadre sont exprimées en fonction de nombreux paramètres. Il est alors possible de reproduire efficacement les prix du marché. De plus, en utilisant un modèle de série temporelle multivarié, on introduit une structure de corrélation entre les séries chronologiques de régresseurs à projeter, ce qui résout le problème d'indépendance des mouvements browniens dans les hypothèses de modélisation. L'objet de ce mémoire étant l'évaluation des grandes classes d'obligations structurées et la projection de leurs prix de marché, l'étude de l'extension de ce modèle par introduction d'une corrélation entre prix zéro-coupon réel et prix zéro-coupon nominal est laissée à l'initiative du lecteur.

Les deux processus suivent les dynamiques suivantes :

$$\frac{dP_n(t, T)}{P_n(t, T)} = r_t^n dt + \Gamma^n(t, T)' dW_t^n, \quad (6.4)$$

$$\frac{dP_r(t, T)}{P_r(t, T)} = \mu_t^r dt + \Gamma^r(t, T)' dW_t^r, \quad (6.5)$$

où $(\mu_t^r)_{t \geq 0}$ est un processus de tendance, $\Gamma^n(t, T)$ et $\Gamma^r(t, T)$ sont les vecteurs de volatilité dont les expressions sont fournies dans la Section 3.2.1 en fonction des paramètres du modèle AFNS associé à chaque processus. Les $(W_t^n)_{t \geq 0}$ et $(W_t^r)_{t \geq 0}$ sont des $\mathbb{Q}^n$ -mouvements browniens multidimensionnels (dimension 3) indépendants. Par ailleurs, on suppose que ces mouvements browniens et $(W_t^I)_{t \geq 0}$ sont mutuellement indépendants.

On cherche à exprimer le processus de tendance en fonction d'un processus connu. Pour cela, on considère le prix nominal du zéro-coupon réel, c'est-à-dire la valeur du zéro-coupon réel en unité de devise, et non en unité d'IPC. La valeur d'un tel actif s'écrit donc, à toute date t , comme le produit du prix zéro-coupon réel en unités IPC $P_r(t, T)$ par l'indice IPC I_t . Ce prix constitue alors un prix nominal et son processus actualisé au taux court nominal est une $\mathbb{Q}^n$ -martingale. Par le lemme d'Itô, on écrit :

$$\begin{aligned} d \left(e^{-\int_0^t r_u^n du} I_t P_r(t, T) \right) &= e^{-\int_0^t r_u^n du} I_t P_r(t, T) \left(-r_t^n dt + (r_t^n - r_t^r) dt + \sigma_I dW_t^I \right. \\ &\quad \left. + \mu_t^r dt + \Gamma^r(t, T)' dW_t^r \right) \\ &= e^{-\int_0^t r_u^n du} I_t P_r(t, T) \left((\mu_t^r - r_t^r) dt + \sigma_I dW_t^I + \Gamma^r(t, T)' dW_t^r \right). \end{aligned}$$

Cette dynamique étant celle d'une $\mathbb{Q}^n$ -martingale, on a nécessairement, en toute date $t \geq 0$:

$$\mu_t^r = r_t^r \quad \mathbb{Q}^n \text{ p.s..}$$

De plus, comme exprimé dans la Section 3.2.1, le processus de *drift* du prix zéro-coupon nominal doit être, sous la mesure martingale $\mathbb{Q}^n$, égal au processus de taux court nominal. On a donc finalement les deux dynamiques suivantes, sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^n$:

$$\frac{dP_n(t, T)}{P_n(t, T)} = r_t^n dt + \Gamma^n(t, T)' dW_t^n, \quad (6.6)$$

$$\frac{dP_r(t, T)}{P_r(t, T)} = r_t^r dt + \Gamma^r(t, T)' dW_t^r. \quad (6.7)$$

On va maintenant établir l'expression de la densité de Radon-Nikodym qui dirige le changement de mesure de probabilité entre $\mathbb{Q}^n$ et $\mathbb{Q}_r$. Pour cela, on poursuit l'analogie avec le marché du change. Par le théorème de valorisation financière, le prix dans le marché réel d'un produit dérivé qui fournit le *pay-off* X_T (aussi en unité d'IPC) en T s'écrit, en une date $t \leq T$:

$$X_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_r} \left[e^{-\int_t^T r_s^r ds} X_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.8)$$

La valeur de cet actif en unité du monde nominal est, par $\mathcal{F}_t$ -mesurabilité de I_t :

$$I_t X_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_r} \left[e^{-\int_t^T r_s^r ds} I_T X_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.9)$$

Or, si cet actif est directement évalué dans le monde nominal, il doit avoir le prix suivant (par définition de la mesure martingale $\mathbb{Q}^n$ et théorème de valorisation financière) :

$$I_t X_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_t^T r_s^n ds} I_T X_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.10)$$

En injectant l'Expression 6.9, il vient alors, toujours par $\mathcal{F}_t$ -mesurabilité de I_t :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_r} \left[e^{-\int_t^T r_s^r ds} X_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_t^T r_s^n ds} \frac{I_T}{I_t} X_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.11)$$

On obtient l'expression de la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{Q}_r}{d\mathbb{Q}^n} \Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{\int_0^t (r_s^r - r_s^n) ds} \frac{I_t}{I_0}. \quad (6.12)$$

Dans notre modèle d'inflation,

$$\frac{d\mathbb{Q}_r}{d\mathbb{Q}^n} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \sigma_I dW_s^I - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_I^2 ds \right). \quad (6.13)$$

Dans la suite, on notera cette $\mathbb{Q}^n$ -martingale : $(L_t^{n \rightarrow r})_{t \geq 0}$.

6.3 Spécification du modèle d'évaluation

6.3.1 Définition et spécification

Les obligations indexées (ou obligations indexées sur l'inflation) sont, comme leur nom l'indique, des obligations dont les flux perçus par le détenteur du titre sont indexés sur un indice d'inflation. L'indice généralement utilisé est l'indice des prix à la consommation du pays émetteur, s'il existe, et sinon, un indice représentatif (comme l'indice de la zone euro par exemple). Le marché des obligations indexées s'est développé depuis les premières émissions dans les années 80 par le Royaume-Uni. L'OATi est une Obligation Assimilable du Trésor indexée, obligation indexée sur l'inflation et émise par la France. Le succès de tels produits dérivés d'inflation provient d'une part de la nécessité, pour de nombreuses institutions financières, de se couvrir contre la perte de pouvoir d'achat et, d'autre part, de la quête de diversification du portefeuille. Elles sont caractérisées par :

- Un coupon ajusté sur l'évolution de l'indice d'inflation par rapport à sa valeur à l'émission du titre ;
- Un nominal dont le remboursement à maturité est ajusté de l'évolution de l'indice d'inflation par rapport à sa valeur à l'émission du titre. Le nominal est généralement garanti en cas d'inflation terminale inférieure à l'inflation initiale ;
- Des dates de révision de l'indice d'inflation, spécifiées contractuellement, parfois décalées par rapport aux dates de paiement.

Ainsi, tout comme l'obligation à taux variable, l'OATi est soumise à des révisions du taux d'indexation, dont les dates sont parfois différentes des dates de paiement. On identifie donc, de la même manière que pour la FRN, une subdivision régulière de dates de paiement dont les dates de révisions sont décalées d'une durée $h \geq 0$ de leur date de paiement associée. Les notations sont les mêmes que celles utilisées pour la modélisation de l'obligation à taux variable et le lecteur pourra se référer à la Section 5.1 pour un rappel des notations utilisées.

Nous spécifions le processus stochastique d'intensité de défaut ainsi que le processus de rendement d'opportunité de la même manière que dans le modèle de Longstaff-Mithal-Neis. On rappelle :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta \lambda_t) dt + \sigma \sqrt{\lambda_t} dW_t^\lambda, \quad \lambda_0 = \lambda \text{ p.s.}, \quad (6.14)$$

et :

$$d\gamma_t = \eta dW_t^\gamma, \quad \gamma_0 = \gamma \text{ p.s.} \quad (6.15)$$

Les processus $(W_t^\lambda)_{t \geq 0}$ et $(W_t^\gamma)_{t \geq 0}$ sont des mouvements browniens standards sous la mesure de probabilité risque neutre nominale, supposés indépendants. On suppose par ailleurs les processus $(I_t)_{t \geq 0}$, $(r_t^n)_{t \geq 0}$, $(r_t^r)_{t \geq 0}$, $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ et $(\gamma_t)_{t \geq 0}$ mutuellement indépendants. On rappelle que, $\forall t \geq 0$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_0^T r_t^n + \lambda_t + \gamma_t dt} \right] = P_n(X^n, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T), \quad (6.16)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\lambda_t e^{-\int_0^T r_t^n + \lambda_t + \gamma_t dt} \right] = P_n(X^n, T) W(\lambda, T) V(\gamma, T) \quad (6.17)$$

où les expressions des quantités $F(\lambda, t)$ et $V(\gamma, t)$ sont fournies dans la Section 4.1 et celle de $P_n(X^n, t)$ dans 3.2.1. Rappelons que la notation avec le paramètre X^n signifie que le prix zéro-coupon est évalué en 0 sur le vecteur de facteurs AFNS nominaux X^n .

6.3.2 Valorisation de l'obligation indexée

Soit une OATi risquée de nominal 1, de maturité T et de taux de coupon continu fixe c , remboursée *in fine*. On note son prix ILB pour *Inflation Linked Bond*. On se place dans le cas général où le nominal est garanti en cas d'inflation terminale inférieure à l'inflation à l'émission. On suppose également que la part du nominal perçue en cas de défaut de l'emprunteur n'est pas indexée sur l'inflation. On note la valeur de l'indice d'inflation à l'émission I_E . En notant comme précédemment τ le temps d'arrêt associé à l'instant de défaut de l'émetteur et ω le *Loss Given Default* perçu par le détenteur en cas de défaut, on peut écrire le *pay-off* terminal (remboursement effectif) actualisé $\tilde{\Psi}_T$ perçu par le détenteur du titre :

$$\tilde{\Psi}_{Terminal} = \max\left(1, \frac{I_T}{I_E}\right) e^{-\int_0^T r_t^n + \gamma_t dt} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + (1 - \omega) e^{-\int_0^\tau r_t^n + \gamma_t dt} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}. \quad (6.18)$$

En intégrant le versement continu du coupon indexé, noté $(c_t)_{t \geq 0}$, on obtient par le théorème de valorisation financière :

$$ILB(c, \omega, I_E, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_0^T c_t \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_0^t r_s^n + \gamma_s ds} dt + \tilde{\Psi}_{Terminal} \right]. \quad (6.19)$$

Calculons tout d'abord l'espérance du *pay-off* terminal actualisé. Par les résultats sur le modèle de Cox, en utilisant l'indépendance mutuelle des processus et Fubini-Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} [\tilde{\Psi}_{Terminal}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\max\left(1, \frac{I_T}{I_E}\right) e^{-\int_0^T r_t^n + \lambda_t + \gamma_t dt} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[(1 - \omega) \int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t r_s^n + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\frac{1}{I_E} (I_E + (I_T - I_E)_+) e^{-\int_0^T r_t^n + \lambda_t + \gamma_t dt} \right] \\ &\quad + (1 - \omega) \int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\lambda_t e^{-\int_0^t r_s^n + \lambda_s + \gamma_s ds} \right] dt \\ &= (C(I_E, T) + P_n(X^n, T)) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \\ &\quad + (1 - \omega) \int_0^T P_n(X^n, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt, \end{aligned} \quad (6.20)$$

où $C(I_E, T)$ est le prix, en $t = 0$, d'un *call* européen sur le sous-jacent $(\frac{I_t - I_E}{I_E})_{t \geq 0}$, de strike 0 et de maturité T . Etablissons une formule de type Merton (Black-Scholes dans un marché à taux d'intérêt stochastique) pour ce prix.

On a :

$$\begin{aligned} C(I_E, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\left(\frac{I_T}{I_E} - 1 \right)_+ e^{-\int_0^T r_u^n du} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T^n} \left[\left(\frac{I_T}{I_E} - 1 \right)_+ \right] P_n(X^n, T), \end{aligned} \quad (6.21)$$

où on désigne par $\mathbb{Q}_T^n$ la mesure de probabilité *T-forward* neutre nominale.

Pour continuer le calcul, on a besoin de l'expression de la variable aléatoire I_T sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_T^n$. Pour cela, on va passer par la dynamique du processus de prix *forward* nominal du zéro-coupon réel de maturité T afin de procéder à un changement de numéraire. Le processus

$(I_t P_r(t, T))_{t \geq 0}$ est un processus de prix nominal et $(\frac{I_t P_r(t, T)}{P_n(t, T)})_{t \geq 0}$ son processus de prix *forward* nominal associé, noté $(F_n(t, T))_{t \geq 0}$. Ce processus est une martingale sous la mesure de probabilité T -*forward* neutre nominale. Les mouvements browniens W^I et W^r sont indépendants de la martingale suivante :

$$\left(\frac{d\mathbb{Q}_T^n}{d\mathbb{Q}^n} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(\int_0^t \Gamma^n(s, T)' dW_s^n - \frac{1}{2} \int_0^t \|\Gamma^n(s, T)\|^2 ds \right) \right)_{t \geq 0}. \quad (6.22)$$

Ceci implique que la dynamique du processus de prix *forward* sous $\mathbb{Q}_T^n$ s'écrit :

$$\frac{dF_n(t, T)}{F_n(t, T)} = \sigma_I dW_t^I + \Gamma^r(t, T)' dW_t^r - \Gamma^n(t, T)' dW_t^{T, n}, \quad (6.23)$$

où : $dW_t^{T, n} = dW_t^n - \Gamma^n(t, T) dt$ est un $\mathbb{Q}_T^n$ -mouvement brownien multidimensionnel. Par une technique de normalisation, la dynamique se réécrit :

$$\frac{dF_n(t, T)}{F_n(t, T)} = \sigma_F(t, T) dB_t^T, \quad (6.24)$$

où on pose :

$$\sigma_F(t, T) = \sqrt{\sigma_I^2 + \|\Gamma^r(t, T)\|^2 + \|\Gamma^n(t, T)\|^2}, \quad (6.25)$$

$$B_t^T = \int_0^t \frac{\sigma_I dW_s^I + \Gamma^r(s, T)' dW_s^r - \Gamma^n(s, T)' dW_s^{T, n}}{\sigma_F(s, T)}. \quad (6.26)$$

Le processus $(B_t^T)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la mesure $\mathbb{Q}_T^n$. On obtient :

$$F_n(t, T) = F_n(0, T) \exp \left(\int_0^t \sigma_F(s, T) dB_s^T - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_F(s, T)^2 ds \right). \quad (6.27)$$

Par conséquent, l'Equation 6.27 nous permet d'écrire :

$$I_T = F_n(0, T) \exp \left(\int_0^T \sigma_F(t, T) dB_t^T - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_F(t, T)^2 dt \right). \quad (6.28)$$

On peut alors calculer le prix du *call* européen sur le taux d'inflation. On obtient une formule de type Merton :

$$\begin{aligned} C(I_E, T) = P_n(X, T) & \left[\frac{F_n(0, T)}{I_E} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{F_n(0, T)}{I_E} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_F(0, T)^2}{\Sigma_F(0, T)} \right) \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{F_n(0, T)}{I_E} \right) - \frac{1}{2} \Sigma_F(0, T)^2}{\Sigma_F(0, T)} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.29)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où on a posé :

$$\Sigma_F(0, T)^2 = \int_0^T \sigma_F(s, T)^2 ds, \quad (6.30)$$

soit la variance totale de 0 à T . On note :

$$F_n(0, T) = \frac{I P_r(X^r, T)}{P_n(X^n, T)}. \quad (6.31)$$

Spécifions à présent l'expression du coupon indexé. Comme pour les FRN dans la Section 5.1, on note (t_i) les dates contractuelles de paiement des coupons (avec $t_n = T$), l'indice d'inflation est révisé à chaque date $t_i - h$, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, I_{t_0-h} est connu à l'instant du *pricing* (c'est le dernier indice d'inflation révisé avant cette date). Le détenteur perçoit en continu sur chaque intervalle $[t_i - h, t_{i+1} - h[$ le coupon fixe c augmenté de la variation relative d'indice d'inflation entre l'instant d'émission et la date $t_i - h$. Rappelons que l'instant initial 0 est la date

6.3 Spécification du modèle d'évaluation

de valorisation, et la date d'émission peut-être strictement antérieure à celle-ci. Aucune confusion ne doit être faite quant à la différence entre ces deux dates (et donc entre l'indice révisé *spot* et l'indice d'émission). On peut donc écrire l'expression du coupon indexé :

$$c_t = c \frac{\left(\mathbb{1}_{[0, t_1-h]}(t) I_{t_0-h} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[t_i-h, t_{i+1}-h]}(t) I_{t_i-h} + \mathbb{1}_{[T-h, T]}(t) I_{T-h} \right)}{I_E}. \quad (6.32)$$

On développe la partie du prix associée au versement du coupon. Ainsi, par indépendance mutuelle des processus, et par les résultats théoriques de la Section 2.2.2, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_0^T c_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} e^{-\int_0^t r_s^n + \gamma_s ds} dt \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_0^T c_t e^{-\int_0^t r_s^n + \lambda_s + \gamma_s ds} dt \right] \\ &= \frac{c}{I_E} \left(\int_0^{t_1-h} I_{t_0-h} P_n(X^n, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i-h}^{t_{i+1}-h} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[I_{t_i-h} e^{-\int_0^t r_s^n ds} \right] F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ &\quad \left. + \int_{T-h}^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[I_{T-h} e^{-\int_0^t r_s^n ds} \right] F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right). \quad (6.33) \end{aligned}$$

Or, en utilisant les Equations 6.3 et 6.13, ainsi que la propriété d'indépendance des mouvements browniens du cadre, on a pour tout $i \in [1, n]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[I_{t_i-h} e^{-\int_0^t r_s^n ds} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[I e^{-\int_{t_i-h}^t r_s^n ds} e^{-\int_0^{t_i-h} r_s^n ds} L_{t_i-h}^{n \rightarrow r} \right] \\ &= I \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_{t_i-h}^t r_s^n ds} e^{-\int_0^{t_i-h} r_s^n ds} L_{t_i-h}^{n \rightarrow r} \mid \mathcal{F}_{t_i-h} \right] \right] \\ &= I \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_0^{t_i-h} r_s^n ds} L_{t_i-h}^{n \rightarrow r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_{t_i-h}^t r_s^n ds} \mid \mathcal{F}_{t_i-h} \right] \right] \\ &= I \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_0^{t_i-h} r_s^n ds} L_{t_i-h}^{n \rightarrow r} P_n(t_i-h, t) \right] \\ &= I \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_0^{t_i-h} r_s^n ds} L_{t_i-h}^{n \rightarrow r} \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} [P_n(t_i-h, t)] \\ &= I \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^r} \left[e^{-\int_0^{t_i-h} r_s^n ds} \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} [P_n(t_i-h, t)] \\ &= I P_r(0, t_i-h) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} [P_n(t_i-h, t)] \end{aligned}$$

Il reste à calculer l'espérance du prix du zéro-coupon nominal. Pour cela, on utilise l'Equation 3.17 :

$$\begin{aligned} P_n(t_i-h, t) &= \frac{P_n(0, t)}{P_n(0, t_i-h)} \exp \left(\int_0^{t_i-h} \Delta_s \Gamma^n(t_i-h, t)' dW_s^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^{t_i-h} (\|\Gamma^n(s, t)\|^2 - \|\Gamma^n(s, t_i-h)\|^2) ds \right). \end{aligned}$$

Ainsi, sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^n$,

$$\begin{aligned} \ln P_n(t_i-h, t) &\sim \mathcal{N} \left(\ln \frac{P_n(0, t)}{P_n(0, t_i-h)} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{t_i-h} (\|\Gamma^n(s, t)\|^2 - \|\Gamma^n(s, t_i-h)\|^2) ds ; \\ &\quad \left. \int_0^{t_i-h} \|\Delta_s \Gamma^n(t_i-h, t)\|^2 ds \right). \quad (6.34) \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'utiliser l'expression analytique de la transformée de Laplace d'une loi gaussienne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} [P_n(t_i - h, t)] &= \frac{P_n(0, t)}{P_n(0, t_i - h)} \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^{t_i - h} \left(\|\Delta_s \Gamma^n(t_i - h, t)\|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\|\Gamma^n(s, t)\|^2 - \|\Gamma^n(s, t_i - h)\|^2) \right) ds \right) \\ &= \frac{P_n(0, t)}{P_n(0, t_i - h)} \exp \left(- \int_0^{t_i - h} \Gamma^n(s, t_i - h)' \Delta_s \Gamma^n(t_i - h, t) ds \right).\end{aligned}$$

On pose alors, pour tout $i \in [1, n]$ et pour tout $u \leq v$:

$$\xi_n(u, v) = \exp \left(- \int_0^u \Gamma^n(s, u)' \Delta_s \Gamma^n(u, v) ds \right). \quad (6.35)$$

Par conséquent, en injectant les derniers résultats dans l'Equation 6.33,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_0^T c_t e^{-\int_0^t r_s^n + \lambda_s + \gamma_s} ds dt \right] &= \frac{c}{I_E} \left(I_{t_0-h} \int_0^{t_1-h} P_n(X^n, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right. \\ &\quad + I \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_r(X^r, t_i - h)}{P_n(X^n, t_i - h)} \int_{t_i-h}^{t_{i+1}-h} \xi_n(t_i - h, t) P_n(X^n, t) \\ &\quad \times F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ &\quad \left. + I \frac{P_r(X^r, T - h)}{P_n(X^n, T - h)} \int_{T-h}^T \xi_n(T - h, t) P_n(X^n, t) F(\lambda, t) \right. \\ &\quad \left. \times V(\gamma, t) dt \right). \quad (6.36)\end{aligned}$$

Finalement, en injectant les Equations 6.20, 6.29 et 6.36 dans l'Equation 6.19, on obtient une formule (semi) fermée pour le prix de l'OATi considérée :

$$\begin{aligned}\text{ILB}(c, \omega, I_E, T) &= \frac{c I}{I_E} \left(\frac{I_{t_0-h}}{I} \int_0^{t_1-h} P_n(X^n, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_r(X^r, t_i - h)}{P_n(X^n, t_i - h)} \int_{t_i-h}^{t_{i+1}-h} \xi_n(t_i - h, t) P_n(X^n, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\ &\quad \left. + \frac{P_r(X^r, T - h)}{P_n(X^n, T - h)} \int_{T-h}^T \xi_n(T - h, t) P_n(X^n, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right) \\ &\quad + \left[\frac{I P_r(X^r, T)}{I_E P_n(X^n, T)} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{I P_r(X^r, T)}{I_E P_n(X^n, T)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_F(0, T)^2}{\Sigma_F(0, T)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{I P_r(X^r, T)}{I_E P_n(X^n, T)} \right) - \frac{1}{2} \Sigma_F(0, T)^2}{\Sigma_F(0, T)} \right) \right) \right] P_n(X^n, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \\ &\quad + (1 - \omega) \int_0^T P_n(X^n, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt, \quad (6.37)\end{aligned}$$

où les quantités $F(\lambda, t)$, $V(\gamma, t)$ et $W(\lambda, t)$ sont fournies dans la Section 4.1.

De toute évidence, cette expression est lourde à écrire et d'autant plus longue à implémenter. Mais elle permet de caractériser l'OATi par de multiples facteurs de risques : la structure de volatilité du prix zéro-coupon nominal, les prix zéro-coupon nominaux et réels, l'indice d'inflation, la volatilité implicite des dérivés vanilles sur inflation rendue stochastique par la méthode de reproduction des nappes de volatilité que l'on présentera plus loin. Tous ces facteurs de risque sont projetés par le générateur de scénarios économiques et sont donc stochastiques. De cette manière, on tente d'apporter une certaine exhaustivité dans la caractérisation des facteurs de risque liés à l'obligation indexée.

6.4 Calibration du modèle d'inflation

On se focalise à présent sur l'estimation des paramètres du modèle d'inflation ainsi que ceux du modèle de liquidité associé aux OATi. Les séries temporelles de paramètres implicites ainsi dégagées seront ensuite intégrées au générateur de scénarios économiques et serviront de base de projection des flux indexés sur l'inflation. Dans un premier temps, nous présentons les données sur lesquelles la calibration est effectuée, puis, nous détaillons le processus d'extraction des données implicites telles que les structures par terme de prix zéro-coupon réel et les nappes de volatilité implicite. On utilise ces données extraites pour calibrer l'AFNS réel ainsi que le modèle de réplcation des surfaces de volatilité implicite. La procédure de calibration des paramètres de lissage de la nappe de volatilité *cap* inflation est détaillée, avant de passer à la procédure de calibration des paramètres du modèle de liquidité des OATi.

6.4.1 Présentation des données

Taux *swap* inflation

Le modèle de taux court réel est calibré sur un historique de taux zéro-coupon réel *spot* extrait par *stripping* à partir des taux *swap* inflation euro et des prix zéro-coupon nominaux euro. La procédure de *stripping* est décrite dans la suite. Les taux *swap* inflation euro sont fournis par la plateforme Bloomberg, les données sont journalières et l'historique s'étend du 01/01/2010 au 23/01/2019. Les maturités disponibles sont 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 6 ans, 7 ans, 8 ans, 9 ans, 10 ans, 12 ans, 15 ans, 20 ans, 25 ans, 30 ans, 40 ans et 50 ans.

Les séries chronologiques de taux *swap* inflation euro de maturités 1 an, 3 ans, 10 ans, 30 ans et 50 ans sont représentées ci-après :



FIGURE 6.1 – Historique de séries chronologiques de taux *swap* inflation Euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019

Cap inflation

Le modèle de volatilité implicite, pour lequel la spécification et la procédure de calibration seront décrites un peu plus loin, est calibré sur un historique journalier de nappes de primes *cap* inflation euro, qui s'étend du 01/01/2010 au 23/01/2019. Les maturités disponibles sont 1 an, 2 ans, 3 ans, 5 ans, 7 ans, 10 ans, 12 ans, 15 ans, 20 ans, 30 ans et les *strike* disponibles sont 1 %, 1,5 %, 2 %, 2,5 %, 3 %, 3,5 %, 4 %, 4,5 %, 5 % et 6 %. Les données sont également obtenues sur la plateforme Bloomberg. Les primes sont en *bps*.

On observe ci-dessous la série chronologique de la prime du *cap* inflation de maturité 12 ans et de prix d'exercice 4 %, ainsi que celle du *cap* inflation de maturité 15 ans et de prix d'exercice 6 %.

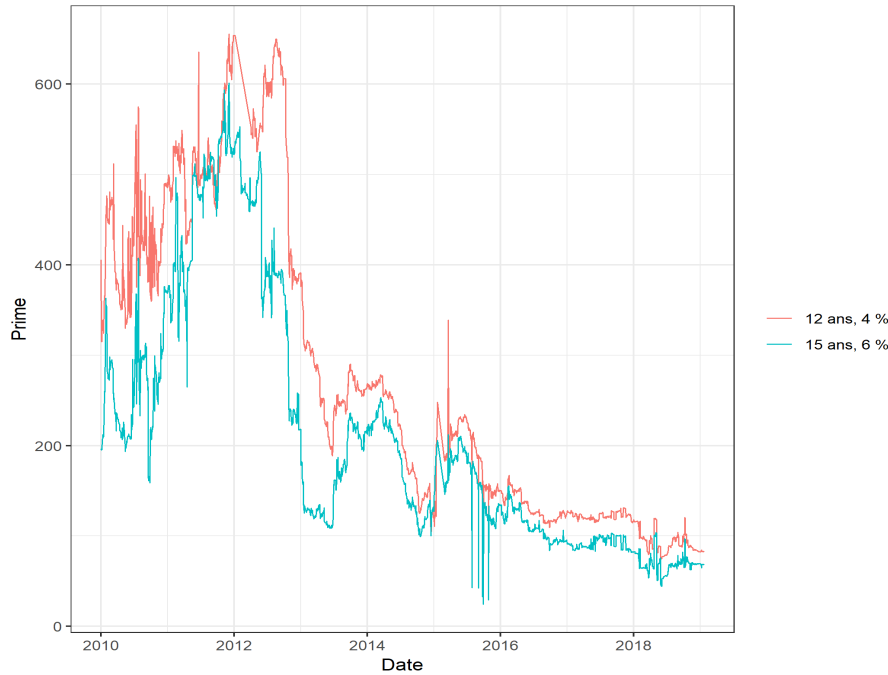


FIGURE 6.2 – Historique de séries chronologiques de prime *cap* inflation Euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019

6.4.2 Extraction des données implicites

Extraction des prix zéro-coupon réels

Le taux court réel est modélisé par un AFNS (voir la Section 3.2.1) et nous reprenons la procédure de calibration de l'AFNS nominal. On a donc besoin d'un historique de prix zéro-coupon réels, ou d'un historique de taux *spot* réels. Cependant, à l'instar des prix zéro-coupon nominaux, l'historique des prix zéro-coupon réels n'est pas disponible sur le marché financier. On a recours à des méthodes d'extraction à partir de courbes de référence qui, elles, sont disponibles. On procède ici à l'extraction des prix zéro-coupon réels à partir des taux *swap* zéro-coupon inflation.

Définition 6.4.1 (*Swap zéro-coupon inflation*). Un **contrat swap zéro-coupon inflation** est un contrat entre deux parties dans lequel l'une des parties accepte de payer, à la maturité, à l'autre partie le taux d'inflation de référence constaté sur le marché en échange d'un taux fixe contractuel.

Ce contrat s'interprète de manière analogue comme un contrat FRA (*Forward Rate Agreement*) sur taux d'inflation. De plus, les maturités des contrats échangés sur le marché sont supérieures à

1 an, il est donc d'usage de considérer un taux fixe en composition annuelle. On s'intéresse à un contrat *swap* zéro-coupon inflation de maturité T , de taux fixe contractuel K et de nominal N , émis et valorisé en 0. La valeur de la jambe fixe du contrat en T s'écrit :

$$N \left((1 + K)^T - 1 \right), \quad (6.38)$$

et la valeur de la jambe variable en T s'écrit :

$$N \left(\frac{I_T}{I} - 1 \right). \quad (6.39)$$

On rappelle l'égalité :

$$I_t P_r(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_t^T r_s^n ds} I_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (6.40)$$

On peut alors écrire la valeur de la jambe variable en 0, en la notant $ZCHS_v(0, T, I)$:

$$\begin{aligned} ZCHS_v(0, T, I) &= N \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_0^T r_s^n ds} \left(\frac{I_T}{I} - 1 \right) \right] \\ &= N (P_r(0, T) - P_n(0, T)). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Le flux de la jambe fixe étant constant, on a :

$$ZCHS_f(0, T, K) = N P_n(0, T) ((1 + K)^T - 1). \quad (6.42)$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, les deux jambes évaluées en 0 doivent être égales et on a la relation suivante :

$$(P_r(0, T) - P_n(0, T)) = P_n(0, T) ((1 + K)^T - 1). \quad (6.43)$$

Ceci nous mène à une expression d'équilibre du taux *swap* zéro-coupon inflation de maturité T :

$$K_{eq}(0, T) = \left(\frac{P_r(0, T)}{P_n(0, T)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1. \quad (6.44)$$

On a obtenu une relation entre le taux *swap* zéro-coupon inflation, le prix zéro-coupon réel et le prix zéro-coupon nominal évalués pour une maturité T . En notant $T \mapsto R_{swap}^I(0, T)$ la structure par terme de taux *swap* zéro-coupon inflation, il est alors possible d'extraire un historique de structures par terme de prix zéro-coupon réel par la formule suivante, sous réserve d'avoir préalablement extrait (par *stripping* par exemple) un historique de structures par terme de prix zéro-coupon nominal :

$$\forall T > 0, \quad P_r(0, T) = P_n(0, T) (1 + R_{swap}^I(0, T))^T. \quad (6.45)$$

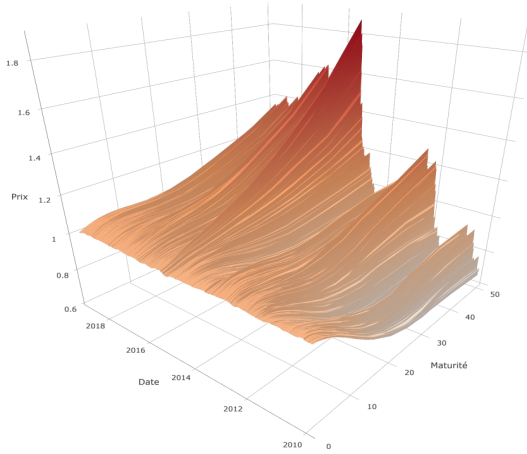
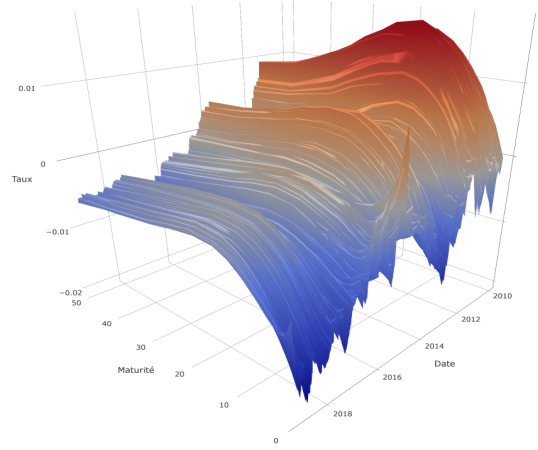
Remarquons que l'on retrouve une formule analogue à l'équation de Fisher :

$$\forall T > 0, \quad P_r(0, T) P_I(0, T) = P_n(0, T), \quad (6.46)$$

où :

$$\forall T > 0, \quad P_I(0, T) = \frac{1}{(1 + R_{swap}^I(0, T))^T}. \quad (6.47)$$

Après avoir réalisé cette procédure, on obtient l'historique des prix zéro-coupon réels et des taux zéro-coupon réels dont les surfaces sont représentées ci-dessous.


 FIGURE 6.3 – Historique de prix zéro-coupon réel extrait par *stripping* des taux *swap* inflation euro

 FIGURE 6.4 – Historique de taux *spot* zéro-coupon réel (en composition continue) extrait par *stripping* des taux *swap* inflation euro

Il est à présent possible de calibrer un modèle de taux d'intérêt réel sur les taux zéro-coupon extraits.

Extraction des volatilités implicites *cap* inflation

L'approche doit intégrer une modélisation de la volatilité σ_I spécifiée dans le modèle d'inflation car cette dernière est un paramètre du prix de produits dérivés inflation et notamment du prix de l'OATi. Nous décrirons et effectuerons la calibration du modèle de volatilité implicite ultérieurement dans cette partie. Tout d'abord, il est nécessaire de posséder un historique de volatilités de produits dérivés inflation : ici, on choisit la volatilité implicite des *cap* par analogie avec la volatilité implicite des *call* européens sur action. C'est sur cet historique de données extraites implicitement des données du marché que l'on va calibrer le modèle économétrique de reproduction de la volatilité implicite. Nous utilisons un historique de prix de *cap*, plutôt que de directement calibrer le modèle sur un historique de volatilité implicites extraites du marché. En effet, notre but est de reproduire les prix des *cap* avec un modèle sur-mesure (et non pas un Black-Scholes classique), il est donc plus judicieux de travailler directement à partir des prix des *cap* échangés sur le marché. A chaque date, la nappe de volatilité implicite est déduite de la nappe de prix par un algorithme d'estimation des zéros d'une fonction tel que l'algorithme de Newton-Raphson. Le principe de fonctionnement de cet algorithme est décrit en annexe.

Comme défini dans la Section 1.3, un *cap* est composé d'une succession de *caplet* de même *strike* émis sur un taux à différentes maturités. Dans le cas du *caplet* inflation, le taux est une variation de l'IPC sur une période donnée. Soit $\bar{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ le jeu de maturités et $\bar{K} = (K_1, K_2, \dots, K_r)$ les prix d'exercice des *cap* dont les prix sont disponibles sur le marché. On suppose que les durées qui séparent, pour tout $j \in \{2, \dots, m\}$, la maturité T_{j-1} de la maturité T_j sont constantes égales à τ . On note $V^{Cap}(T_j, K_i)$ le prix du *cap* inflation de *strike* K_i et de maturité T_j donné par le marché, composé d'une succession de *caplet* inflation de maturités T_l démarrant à T_{l-1} et de *strike* K_i , de prix $V^{Caplet}(T_{l-1}, T_l, K_i)$ pour $l \in [1, j]$ avec la convention $T_0 = 0$.

On extrait les volatilités implicites des *cap* à partir de la formule de valorisation qui découle du modèle d'évaluation, où on note le prix "modèle" du *cap* de prix d'exercice K_i et de maturité T_j : $\text{IICap}(T_j, K_i, \sigma_I(T_j, K_i))$, où $\sigma_I(T_j, K_i)$ est la volatilité implicite du *cap* inflation (IIC pour *Inflation-Indexed Cap*). Nous appliquons l'algorithme de Newton-Raphson détaillé en annexe pour trouver, $\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, m]$, le zéro de la fonction :

$$\sigma_I(T_j, K_i) \mapsto \text{IICap}(T_j, K_i, \sigma_I(T_j, K_i)) - V^{Cap}(T_j, K_i). \quad (6.48)$$

En effet, la volatilité implicite du *cap* est définie comme étant le paramètre qui, en *input* de la fonction de prix "à la Black-Scholes", permet de retrouver le prix du marché. Elle est donc à

distinguer de la volatilité implicite des *caplet* qui varie d'un *caplet* à un autre au sein d'un même *cap*, tandis que la volatilité implicite du *cap* est constante sur tous les *caplet* qui le composent.

La surface de volatilité des *cap* inflation est ainsi obtenue de manière implicite, à partir des prix des *cap* à chaque pas de temps de l'historique. On représente ci-dessous l'historique de volatilité implicite extrait des prix du marché, au point de maturité 12 ans, de *strike* 4 % et au point de maturité 15 ans, de *strike* 6 %.



FIGURE 6.5 – Historique de séries chronologiques de volatilité implicite *cap* inflation euro, du 01/01/2010 au 23/01/2019

Dans le cadre de valorisation, le prix en 0 du *caplet* inflation (que l'on notera $IICplt$) de *strike* K , de maturité T_i , démarrant en T_{i-1} pour une volatilité implicite σ_I s'écrit :

$$\begin{aligned}
 IICplt(T_{i-1}, T_i, K, \sigma_I) &= \frac{P_n(0, T_{i-1})P_r(0, T_i)}{P_n(0, T_i)P_r(0, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \\
 &\times \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{P_n(0, T_{i-1})P_r(0, T_i)}{(1+K)P_n(0, T_i)P_r(0, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right) + \frac{V(T_{i-1}, T_i)^2}{2}}{V(T_{i-1}, T_i)} \right) \\
 &- (1+K) \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{P_n(0, T_{i-1})P_r(0, T_i)}{(1+K)P_n(0, T_i)P_r(0, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right) - \frac{V(T_{i-1}, T_i)^2}{2}}{V(T_{i-1}, T_i)} \right), \tag{6.49}
 \end{aligned}$$

où :

$$\xi_r(T_{i-1}, T_i) = \exp \left(- \int_0^{T_{i-1}} \Gamma^r(s, T_{i-1})' \Delta_s \Gamma^r(T_{i-1}, T_i) ds \right), \tag{6.50}$$

et :

$$V(T_{i-1}, T_i)^2 = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I^2 ds + \sum_{x \in \{n, r\}} I_x(T_{i-1}, T_i), \tag{6.51}$$

où $\forall x \in \{n, r\}$:

$$\begin{aligned}
 I_x(T_{i-1}, T_i) = & (\sigma_{11}^x)^2 \left[T_{i-1} B_x^1(T_{i-1}, T_i)^2 - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)^3}{3} \right] \\
 & + ((\sigma_{21}^x)^2 + (\sigma_{22}^x)^2) \left[\Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)^2 \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{2\lambda_x} - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^3} + 2 \frac{B_x^2(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right] \\
 & + ((\sigma_{31}^x)^2 + (\sigma_{32}^x)^2 + (\sigma_{33}^x)^2) \left[(\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i))^2 \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}}}{2\lambda_x} \right. \\
 & \quad - \frac{\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{2\lambda_x} (1 + \Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)) + \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{4\lambda_x} \\
 & \quad + \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) (\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}}}{2\lambda_x} \\
 & \quad - B_x^1(T_{i-1}, T_i)^2 \frac{e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x} + \frac{3}{2} B_x^1(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{\lambda_x^2} \\
 & \quad + 3 \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{4\lambda_x^2} + 2 \frac{B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \\
 & \quad \left. + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^3} + \frac{2}{\lambda_x^2} B_x^2(T_{i-1}, T_i) \right] \\
 & + 2\sigma_{11}^x \sigma_{21}^x \left[B_x^1(T_{i-1}, T_i) \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{\lambda_x} + \frac{\Delta_0 B_x^1(T_{i-1}, T_i)^2}{2\lambda_x} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{B_x^2(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right] \\
 & + 2\sigma_{11}^x \sigma_{31}^x \left[B_x^1(T_{i-1}, T_i) \left((\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)) \frac{e^{\lambda_x T_{i-1}}}{\lambda_x} \right. \right. \\
 & \quad - \frac{\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x} + \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{\lambda_x T_{i-1}} - 1}{\lambda_x} + B_x^1(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{-\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{\lambda_x} \\
 & \quad \left. \left. + \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{2\lambda_x} \right) + 3 \frac{B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right] \\
 & + (2\sigma_{21}^x \sigma_{31}^x + 2\sigma_{22}^x \sigma_{32}^x) \left[\Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \left(\Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{4\lambda_x} \right. \right. \\
 & \quad + (\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}}}{2\lambda_x} - \frac{\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{2\lambda_x} \\
 & \quad - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^3} + 2 \frac{B_x^2(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \\
 & \quad \left. \left. + B_x^1(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^2} + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{4\lambda_x^3} + \frac{B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right) \right], \quad (6.52)
 \end{aligned}$$

avec, $\forall (s, t, T) \in \mathbb{R}^3, s \leq t \leq T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{1, 2, 3\}, \Delta_s B_x^j(t, T) = B_x^j(s, T) - B_x^j(s, t) \\ B_x^1(s, t) = -(t - s) \\ B_x^2(s, t) = -\frac{1 - e^{-\lambda_x(t-s)}}{\lambda_x} \\ B_x^3(s, t) = (t - s)e^{-\lambda_x(t-s)} - \frac{1 - e^{-\lambda_x(t-s)}}{\lambda_x}. \end{array} \right.$$

La démonstration de ce résultat est fournie en annexe.

On obtient le prix en 0 du *cap* inflation de strike K , de maturité $T_n = T$ pour une volatilité implicite σ_I :

$$\text{IICap}(T, K, \sigma_I) = \sum_{i=1}^n \text{IICplt}(T_{i-1}, T_i, K, \sigma_I), \quad (6.53)$$

où les quantités $T_i - T_{i-1}$ sont constantes et égales à un an pour le jeu de données dont nous disposons.

On illustre les volatilités implicites obtenues dans cette sous-partie *via* les nappes représentées ci-dessous.

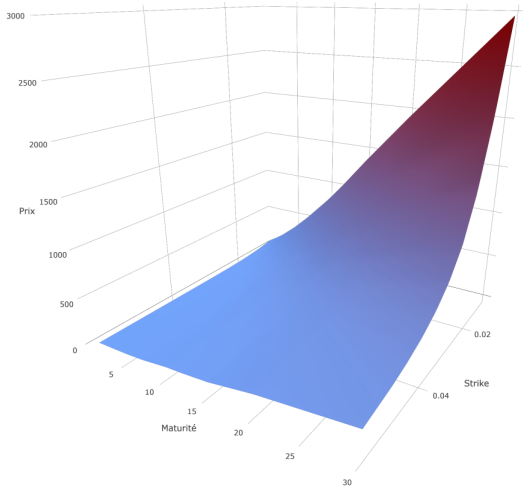


FIGURE 6.6 – Surface historique de primes des *cap* inflation au 12 octobre 2018

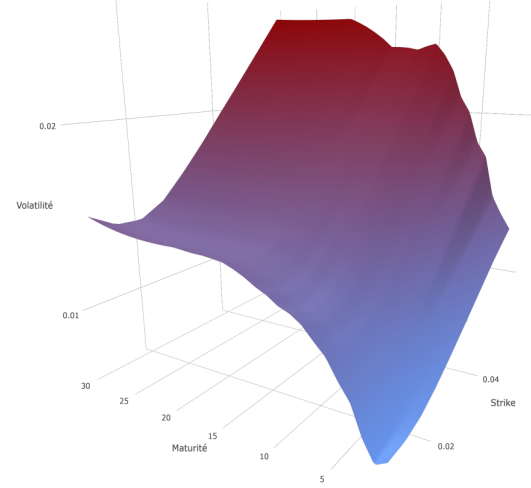


FIGURE 6.7 – Surface historique de volatilités implicites des *cap* inflation extraite au 12 octobre 2018

Une fois les volatilités implicites extraites, un modèle de reproduction des nappes est calibré et il est alors possible de l'utiliser dans la formule d'évaluation des obligations indexées obtenue dans le cadre. Par la suite, nous proposons une méthode qui permet de lisser et projeter la surface de volatilité implicite. Cette méthode de lissage paramétrique par une forme économétrique linéaire est décrite dans la partie qui suit la présentation des résultats de la calibration du modèle de taux court réel.

6.4.3 Calibration du modèle de taux court réel AFNS

La calibration des paramètres du modèle AFNS pour le taux court réel reprend exactement la procédure de calibration décrite dans la Section 3.2.1, dans la section dédiée au sujet. On calibre les paramètres de la matrice de volatilité du modèle de taux court réel $\sigma_{11}^r, \sigma_{21}^r, \sigma_{22}^r, \sigma_{31}^r, \sigma_{32}^r, \sigma_{33}^r$ et le paramètre d'échelle λ^r en extérieurs, en optimisant par régressions linéaires successives, puis on obtient les 3 séries chronologiques du vecteur de facteurs AFNS X^r par régression linéaire sachant les paramètres extérieurs optimisés. De plus, on pondère de la même manière les erreurs par les dérivées du prix zéro-coupon (réel cette fois) par rapport au taux zéro-coupon *spot*. La surface de pondérations est représentée ci-dessous.

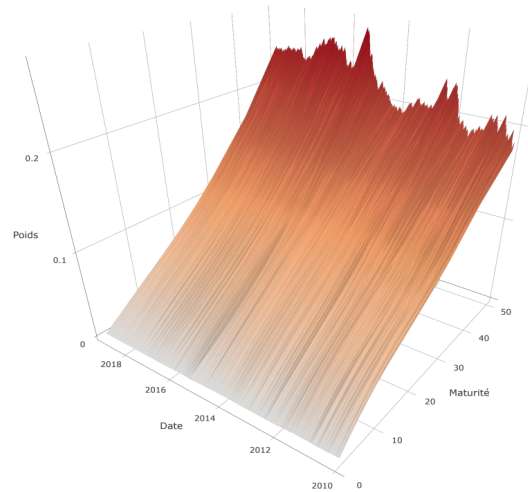


FIGURE 6.8 – Surface des pondérations historiques, AFNS taux réel

Tout comme pour le modèle nominal, les poids associés au prix zéro-coupon de maturités élevées sont les plus importants. On cherche à nouveau à être précis sur la réplcation des prix et en particulier sur les plus complexes à reproduire, ce qui valide encore le choix de telles pondérations. Nous obtenons le jeu de paramètres extérieurs (arrondis à 10^{-6} près) et les séries chronologiques de régresseurs exposés ci-après.

λ^r	0,113663
σ_{11}^r	0,000003
σ_{21}^r	-0,000012
σ_{31}^r	0,098728
σ_{22}^r	0,000060
σ_{32}^r	0.027680
σ_{33}^r	0,059358

TABLE 6.1 – Paramètre d'échelle et paramètres de la matrice de volatilité

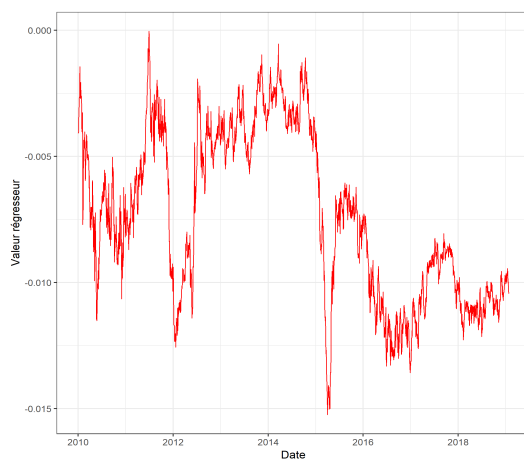
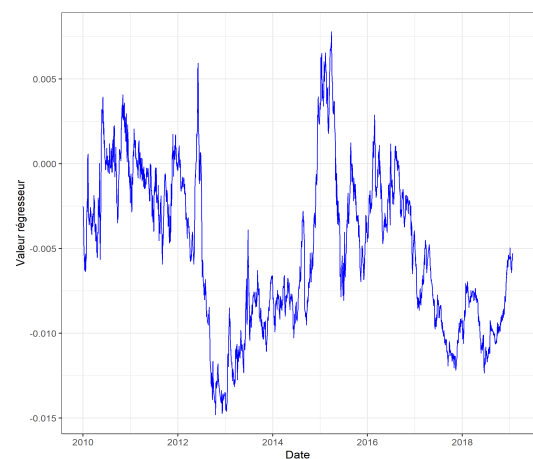

FIGURE 6.9 – Série chronologique du régresseur X^0 réel

FIGURE 6.10 – Série chronologique du régresseur X^1 réel



FIGURE 6.11 – Série chronologique du régresseur X^2 réel

On obtient 3 séries temporelles de qualité satisfaisante. Elles ne possèdent pas d'irrégularité particulière et peuvent être intégrées à un générateur de scénarios économiques. Cependant, on constate une potentielle multicollinéarité entre les séries qui pourrait être à traiter. La multicollinéarité peut poser problème dans le cadre d'un modèle de série temporelle multivarié (comme un Vecteur Auto-Régressif) : lors de la calibration des paramètres du modèle (via maximum de vraisemblance par exemple), l'inversion de matrices de paramètres peut être impossible en raison de la famille liée que constituent les séries temporelles sur lesquelles est calibré le modèle. C'est pourquoi des techniques doivent être employées en vue de faire disparaître cette multicollinéarité, comme la recherche d'une relation mathématique déterministe entre les séries liées.

On peut reconstruire la série chronologique de taux court réel à partir des régresseurs X^0 et X^1 :

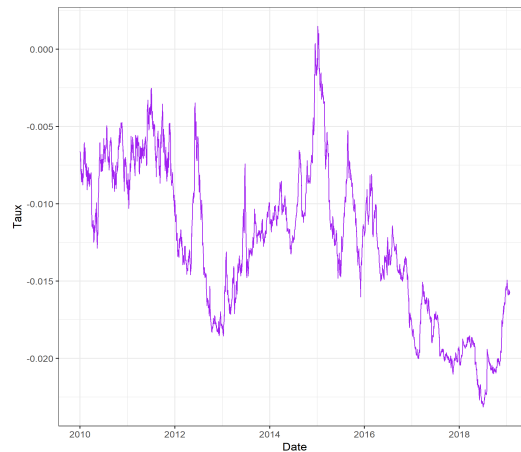


FIGURE 6.12 – Série chronologique du taux court réel

Pour juger de la capacité du modèle à reproduire l'historique de structures par terme de taux et de prix, les surfaces historiques produites par le modèle sont représentées ci-dessous, accompagnées de quelques observations du *fitting* à des dates figées. On observe d'une part la réplique des prix zéro-coupon et, d'autre part, celle des taux *spot*. Tout comme pour l'AFNS nominal, les surfaces sont comparées à un échantillon de 800 points sélectionnés aléatoirement sur le jeu de données complet. Compte tenu de la forme peu commune des structures par terme de taux d'intérêt et de prix zéro-coupon réels sur certaines périodes, on s'attend à une qualité de reproduction nettement moins bonne ici que dans le cas des taux nominaux.

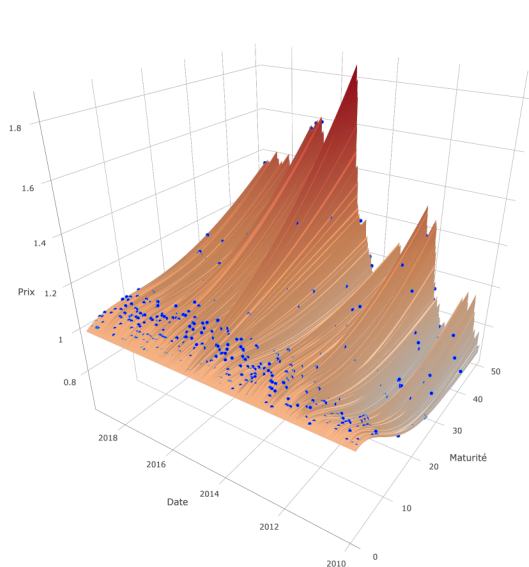


FIGURE 6.13 – Historique de prix zéro-coupon réel reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)

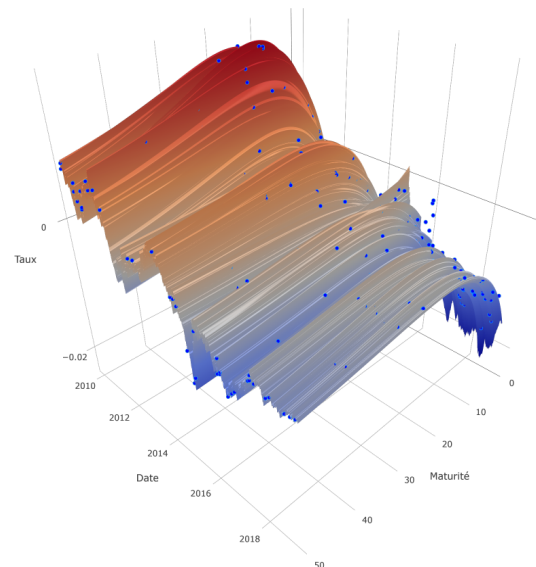


FIGURE 6.14 – Historique de taux *spot* zéro-coupon réel reproduit par le modèle (surface), comparé à l'échantillon de données historiques (points bleus)

Comme attendu, la qualité de réplcation du modèle sur les données est nettement meilleure pour le prix zéro-coupon. Le modèle rencontre quelques difficultés pour reproduire les inversions de structures par terme de taux *spot* réel aux faibles maturités, notamment pour les structures par terme observées autour de 2015. Les graphiques représentés ci-dessous valident toutefois la capacité du modèle à reproduire de manière générale la forme des courbes de taux ainsi que la forme des courbes de prix zéro-coupon.

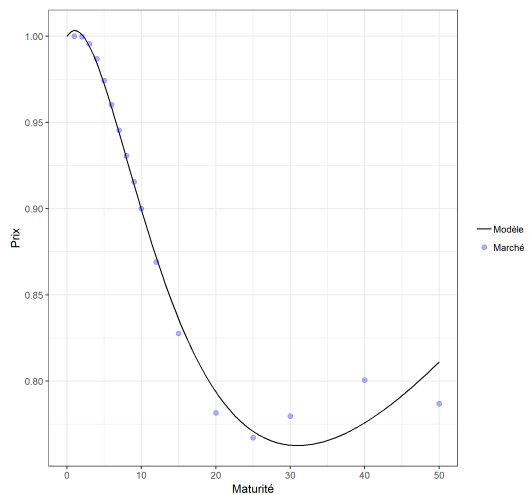


FIGURE 6.15 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 6 juillet 2010

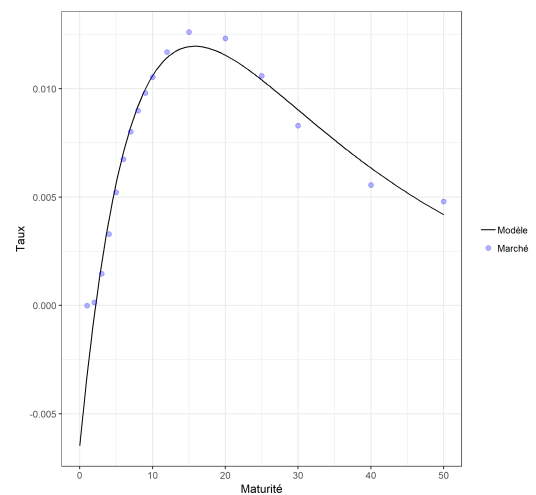


FIGURE 6.16 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 6 juillet 2010

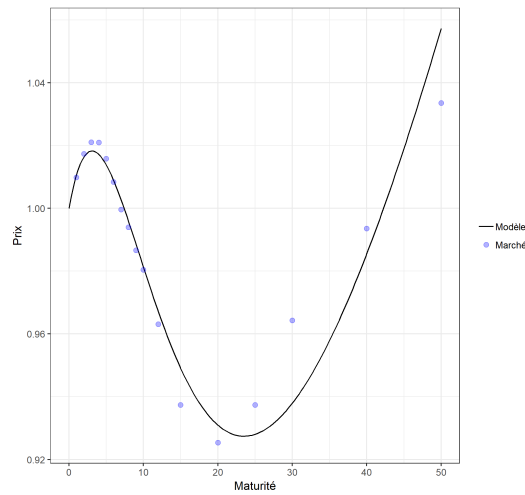


FIGURE 6.17 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 25 avril 2012

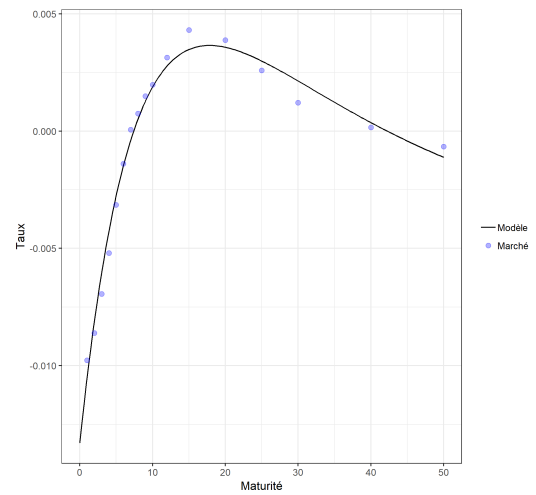


FIGURE 6.18 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 25 avril 2012

On observe une réplique des prix zéro-coupon de bonne qualité sur les pas de temps. La forme générale de la courbe est reproduite. Concernant les taux zéro-coupon *spot*, le modèle parvient globalement à reproduire la forme, notamment l'inversion de la structure par terme pour les maturités élevées (en général supérieures à 30 ans) qui a pu être observée pendant les années qui ont suivi la crise de 2008. En outre, ce qui est remarquable, c'est la capacité du modèle à construire des courbes aux formes irrégulières comme celle des prix zéro-coupon du 15 mai 2014 représentée ci-dessous. Le *fitting* n'est pas parfait, mais c'est cette abilité à déformer les structures par terme au cours du temps que nous recherchons. Les taux d'intérêt à faibles maturités sont difficiles à reproduire, d'une part à cause de leur tendance décroissante suivant la maturité (formant de cette façon une "virgule"), d'autre part parce que la procédure de calibration se concentre plus sur la reproduction des prix que sur celle des taux.

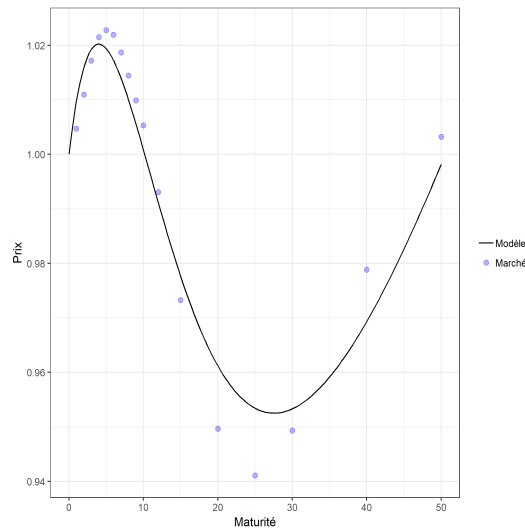


FIGURE 6.19 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 15 mai 2014

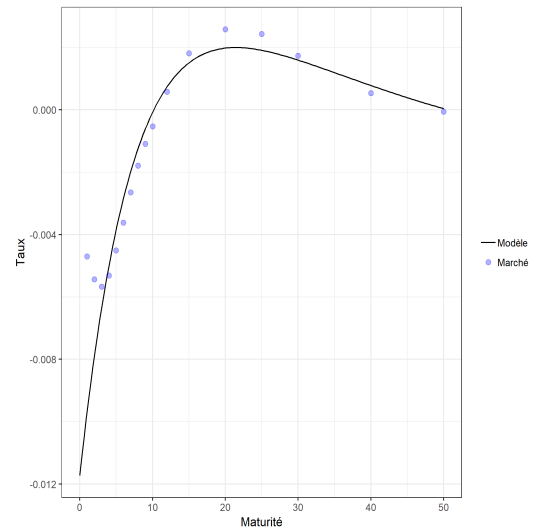
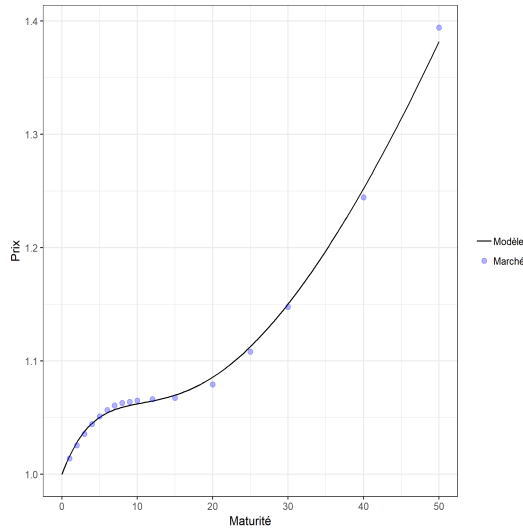
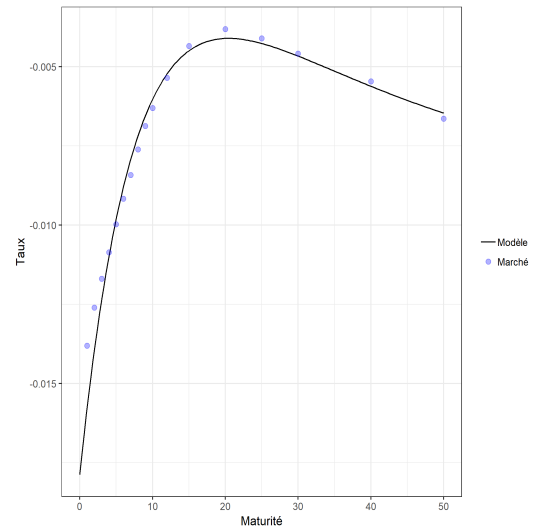


FIGURE 6.20 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 15 mai 2014


 FIGURE 6.21 – *Fitting* de la structure par terme de prix zéro-coupon réel au 3 mars 2017

 FIGURE 6.22 – *Fitting* de la structure par terme de taux zéro-coupon réel au 3 mars 2017

Une fois le modèle de taux court réel calibré, on s'intéresse à la modélisation de la surface de volatilité implicite de produits dérivés indexés sur l'inflation (*cap*).

6.4.4 Calibration paramétrique de la volatilité implicite des *cap* inflation

Quelques éléments à prendre en considération

Dans cette partie, on se focalise sur la modélisation de la volatilité implicite σ_I du modèle d'inflation spécifié dans la Section 6.2. Notre approche vise à construire une forme économétrique linéaire reproduisant les déformations de la nappe de volatilité implicite, puis à utiliser le modèle pour calibrer des historiques de paramètres qui une fois injectés dans la fonctionnelle de volatilité, permettent de répliquer les surfaces historiques de volatilité implicite. Les facteurs de risque inobservables sont alors rendus observables par construction de séries temporelles de paramètres implicites issus des modèles de *pricing*.

La volatilité implicite des *cap* est définie de manière analogue à celle des options européennes sur *equity*. La différence majeure réside dans l'expression du prix, qui pour le *cap* est une somme de formules "à la Black-Scholes".

Les séries temporelles obtenues à partir du modèle peuvent être intégrées au générateur de scénarios économiques en vue de les projeter et d'avoir *in fine* un modèle de volatilité implicite stochastique à structure hétéroscédastique qui reproduit avec efficacité les déformations des nappes de volatilité implicite que l'on peut observer sur le marché. Une étude parcimonieuse ainsi qu'une extension à la modélisation du cube de volatilité des *swaption* de taux d'intérêt est présente dans le mémoire de Léo Schenk [18] [2018].

On rappelle la dynamique du processus d'IPC dans le modèle :

$$\frac{dI_t}{I_t} = (r_t^n - r_t^r) dt + \sigma_I dW_t^I. \quad (6.54)$$

La volatilité ainsi spécifiée est implicite, c'est-à-dire qu'elle est déterminée par les prix des produits dérivés sur le marché. Par inversion de formules de valorisation, on obtient des valeurs de la volatilité (valeurs qui peuvent bien évidemment différer d'un modèle de *pricing* à un autre, c'est pourquoi on peut trouver sur Bloomberg des nappes de volatilité Heston, Black-Scholes ou Bachelier). Ainsi, les intervenants du marché se mettent d'accord sur la volatilité future attendue pour

le sous-jacent sur la durée de vie résiduelle du produit dérivé. La volatilité implicite de l'option caractérise donc la valeur de la volatilité anticipée par les intervenants. Cette approche est ainsi à opposer à l'étude de la volatilité historique.

Typiquement, on observe sur le marché une volatilité implicite dont la valeur peut fortement varier d'un *strike* à un autre, d'une maturité à une autre. La volatilité implicite possède donc une triple dépendance (dans le cadre des options) :

- Elle dépend du *strike* de l'option,...
- ... de la maturité de l'option...
- ... et du temps.

A un instant donné, la dynamique de la volatilité est bidimensionnelle : on observe des structures par terme ainsi que des structures "par *strike*". Ces dépendances font apparaître des courbures appelées "*smile*" (lorsque la courbure ressemble à un sourire) ou "*skew*" (lorsque la courbure fait apparaître une asymétrie). La bidimensionnalité de la volatilité implicite donne une représentation, à une date fixée, de la volatilité en surface (ou nappe). Notons que dans le cas des *swaption*, la dimension supplémentaire due à la dépendance suivant le ténor du *swap* implique que l'on n'observe plus une surface, mais un cube de volatilité.

Il est également connu des praticiens que la volatilité elle-même possède une volatilité, la rendant de ce fait stochastique. Le modèle, tel qu'il est spécifié *supra*, ne respecte pas cette propriété fondamentale de la volatilité. En réalité, dans ce modèle, le processus $(I_t)_{t \geq 0}$ n'est qu'un outil de valorisation des produits dérivés d'inflation (en particulier les OATi) et il n'est en aucun cas utilisé à des fins de diffusion de l'IPC (le diffusion se faisant, comme pour tous les autres modèles du cadre, sur la quantité I_0 en monde réel). L'indice d'inflation est notamment projeté par un modèle de série temporelle multivarié à partir de sa série chronologique historique. Ainsi, faire dépendre la volatilité implicite de paramètres qui ne possèdent *a priori* aucun lien avec l'indice (ici le *strike* et la maturité de l'option) ne pose aucun problème de diffusion dans ce cadre. Il est d'ailleurs complètement à proscrire de penser à diffuser un indice en monde réel par un modèle de *pricing* tel que le modèle de Black-Scholes ou le modèle de Heston : les trend des dynamiques historiques sous-jacentes à ces modèles ne peuvent être calibrés par construction. Ils sont précisément construits pour donner une méthode mathématique de couverture de l'option (Black-Scholes) ou pour éliminer le terme en volatilité historique dans la formule du P & L et fournir une dynamique de la volatilité implicite (Heston).

Le modèle de série temporelle multivarié utilisé pour la projection des facteurs de risques peut être à changement de régimes, donc à volatilité stochastique : les facteurs de risques qui caractérisent la volatilité implicite sont donc projetés avec une composante aléatoire tant dans leurs valeurs que dans leur variance (hétéroscédasticité). En conclusion, cette modélisation de la volatilité implicite est censée respecter ses propriétés générales de dimension et de stochasticité.

L'étude de la volatilité implicite est souvent opposée à celle de la volatilité historique. Certains praticiens préfèrent utiliser la volatilité historique dans le cadre de la dualité du couple rendement-risque. Plusieurs raisons nous poussent à étudier la volatilité σ_I par un modèle de reproduction de surface de volatilité implicite.

- L'utilisation de la volatilité historique est caractéristique d'une vision "*backward*", c'est-à-dire une constatation de la volatilité passée sur le marché. En ce qui concerne la volatilité implicite, c'est plutôt une vision "*forward*", une anticipation de la volatilité du sous-jacent de l'option sur le reste de sa durée de vie. Nous privilégions ce point de vue au précédent ;
- Le fait que la volatilité implicite soit prospective, et donc contenue directement dans l'information que nous donnent les prix du marché, implique que si l'on est capable de reproduire les surfaces de volatilité implicite des options, on peut alors reproduire les prix du marché en utilisant le modèle de *pricing* approprié. C'est précisément l'objet de ce cadre ;
- La surface de volatilité implicite peut être utilisée pour gérer des portefeuilles de couverture composés de produits dérivés plus ou moins sophistiqués tels que des options exotiques. Cela

constitue un élément important de gestion des risques ;

- Les chercheurs B.J. Christensen et N.R. Prabhala ont montré, dans [12] [1998], que la volatilité implicite surperforme la volatilité historique dans la prédiction de la volatilité future d'un sous-jacent. La projection de facteurs de risque associés à un modèle de reproduction de surface implicite nous permettrait alors, non seulement d'évaluer des produits dérivés d'inflation dans le futur, mais également de faire des prédictions de la volatilité de l'indice.

La modélisation proposée comprend un lissage de la nappe de volatilité, permettant d'avoir en toute maturité et en tout *strike* (sur des intervalles pré-définis) la volatilité implicite de l'option correspondante. Cet élément est fondamental étant donné que sur le marché, un nombre limité d'options sont négociées quotidiennement et donc on n'a généralement pas accès à la surface complète. Ceci peut poser problème lorsque l'on souhaite évaluer le prix d'une option vanille à un *strike* et une maturité dont la volatilité correspondante n'est pas disponible sur le marché (même si des méthodes d'interpolation simples peuvent être utilisées).

L'approche proposée s'inspire de l'étude de Dumas, Fleming et Whaley [13] [1998] : on propose un cadre de reproduction et de lissage de surfaces de volatilité implicite des *cap* inflation au moyen d'une fonctionnelle paramétrique à régresseurs dynamiques. Sa structure diffère de celles que l'on peut trouver dans l'étude de Dumas, Fleming et Whaley, par deux points principaux : d'une part, des pondérations judicieusement choisies sont utilisées pour les erreurs d'estimation afin de reproduire au mieux les prix des *cap* ; d'autre part, un prix d'exercice modifié (*log-moneyness forward*) est introduit pour étudier les surfaces, plutôt que le prix d'exercice des options.

Nous notons par la suite $\sigma_{I,t}(T, K)$ la volatilité implicite d'un *cap* inflation de *strike* K et de maturité T à la date t . On s'intéresse à présent à la spécification théorique du modèle économétrique linéaire et à sa calibration sur les données du marché.

Spécification du modèle paramétrique de lissage

Le cadre de projection de surfaces de volatilité implicite construit s'appuie sur plusieurs études qui portent sur la modélisation de la dynamique des surfaces de volatilité. Les points innovants de ce cadre sont d'une part la sélection de modèles optimaux parmi un lot de modèles calibrés et, d'autre part, l'utilisation d'une telle spécification dans un cadre de valorisation dynamique à facteurs de risque stochastiques dont les évolutions sont interdépendantes et régies par des modèles financiers AOA (modèle d'inflation, modèles de taux AFNS, LMN, ...).

Nous allons travailler avec une transformation du prix d'exercice : la **moneyness**. Elle permet notamment d'étudier plus finement la position du sous-jacent par rapport au prix d'exercice à un instant donné en prenant en compte (ou pas) son évolution future par l'utilisation de la volatilité implicite et d'autres paramètres. Plus particulièrement, dans ce cadre, son intérêt est double : d'une part, elle permet de normaliser le prix d'exercice d'une certaine façon, dans le but de pouvoir déterminer immédiatement, à partir des valeurs qu'elle prend, si l'option est ITM, ATM ou OTM. D'autre part, elle permet, par analogie avec l'échelle logarithmique en physique, d'obtenir des surfaces lissées plus *smooth*. De plus, ce choix est motivé par le fait que les *smile* de volatilité implicite exprimés selon la *moneyness* sont moins volatiles au cours du temps que lorsqu'ils sont exprimés selon le *strike*. Cette propriété est expliquée, par exemple, dans [1] [2004].

On note M_t la fonction valeur de la *moneyness* à la date t . En notant F_t^T la valeur en t du contrat *forward* de maturité T sur un sous-jacent S et K le prix d'exercice d'un *call* sur ce sous-jacent, un exemple de transformation du prix d'exercice est donné par la formule :

$$M_t(K, F_t^T) = \frac{K}{F_t^T}. \quad (6.55)$$

La *moneyness* comme spécifiée ci-dessus se lit de la manière suivante :

- Lorsque $M_t > 1$, le call est OTM-Forward ;

- Lorsque $M_t < 1$, le call est *ITM-Forward* ;
- Lorsque $M_t = 1$, le call est *ATM-Forward*.

Dans le modèle de volatilité implicite des *cap* inflation, la *moneyness* aura une forme qui sera décrite plus loin.

Dans un premier temps, Dumas, Fleming et Whaley ont proposé 4 modèles économétriques de lissage de surface de volatilité implicite d'options sur action. A un instant fixé, les modèles sont spécifiés de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sigma_1(T, M) = \max(0.01, \beta_{0,1}) + \varepsilon_1, \\ \sigma_2(T, M) = \max(0.01, \beta_{0,2} + \beta_{1,2}M + \beta_{2,2}M^2) + \varepsilon_2, \\ \sigma_3(T, M) = \max(0.01, \beta_{0,3} + \beta_{1,3}M + \beta_{2,3}M^2 + \beta_{3,3}T + \beta_{4,3}MT) + \varepsilon_3, \\ \sigma_4(T, M) = \max(0.01, \beta_{0,4} + \beta_{1,4}M + \beta_{2,4}M^2 + \beta_{3,4}T + \beta_{4,4}T^2 + \beta_{5,4}MT) + \varepsilon_4, \end{cases}$$

où les ε_i sont des bruits blancs gaussiens et les $\beta_{i,j}$ les régresseurs à estimer.

L'objectif de Dumas et al. était de tester la stabilité des fonctions de lissage paramétrique de la nappe, plus que de la reproduire avec précision. Chaque modèle est donc une version améliorée du précédent, et a pour but de capturer, de manière additionnelle par rapport au modèle précédent, les effets de la *moneyness* ou de la maturité sur la courbure du *smile/skew* de volatilité implicite. Toutefois, l'inconvénient majeur de cette spécification est que l'on ne peut pas appliquer directement une méthode d'estimation par moindres carrés à cause de la fonction max, utilisée ici pour maintenir la volatilité positive. On préférera la spécification de Gonçalves, Bernalles et Guidolin, étudiée dans [26] [2006] et dans [2] [2014], qui utilisent la fonction logarithme népérien pour garantir la positivité de la volatilité implicite estimée. La fonctionnelle qu'ils utilisent est une fonction polynômiale en M et en T de degré 3 et possède suffisamment de variété dans les facteurs explicatifs pour reproduire correctement les surfaces historiques. En particulier, ils utilisent le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma(T, M)) &= \beta_0 + \beta_1M + \beta_2T + \beta_3M^2 + \beta_4T^2 + \beta_5M^3 \\ &\quad + \beta_6T^3 + \beta_7MT + \beta_8M^2T + \beta_9T^2M + \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.56)$$

où ε est un bruit blanc gaussien et les β_i les régresseurs qui peuvent être estimés par méthode des moindres carrés sur le logarithme de la volatilité.

Un problème majeur peut être rencontré en spécifiant le modèle économétrique de cette façon : nous nous sommes aperçus que durant les périodes à forte volatilité, les valeurs de la volatilité obtenues après re-transformation du logarithme pouvaient prendre des valeurs considérablement élevées, dépassant les 100 % et même parfois les 150 %. Aussi, en observant l'historique de données à notre disposition, nous remarquons que même en temps de crise, les volatilités implicites observées ne dépassent jamais les 100 %. Nous proposons donc une nouvelle spécification du modèle en faisant cette fois intervenir la fonction logit modifiée, comme dans la Section calibration du 4.1, *via* la volatilité maximale de l'historique σ_{max} pour éviter les projections "explosives" qui génèreraient une volatilité trop élevée par rapport à ses valeurs antérieures :

$$\begin{aligned} \overline{\text{logit}}(\sigma(T, M)) &= \beta_0 + \beta_1M + \beta_2T + \beta_3M^2 + \beta_4T^2 + \beta_5M^3 \\ &\quad + \beta_6T^3 + \beta_7MT + \beta_8M^2T + \beta_9T^2M + \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.57)$$

où ε est un bruit blanc gaussien et :

$$\overline{\text{logit}}(\sigma(T, M)) = \ln\left(\frac{\sigma(T, M)}{\sigma_{max} - \sigma(T, M)}\right), \quad (6.58)$$

que l'on notera par la suite $\bar{\sigma}(T, M)$ pour alléger les écritures matricielles.

Nous assurons de cette manière l'appartenance de la volatilité à l'intervalle $[0, \sigma_{max}]$ et l'estimation des paramètres se fait encore par méthode des moindres carrés.

On choisit de poser, pour tout *strike* K et toute maturité T , l'expression de la *log-moneyness-forward* :

$$M(T, K) = \ln \left(\frac{(1 + K) P_n(X^n, T)}{P_r(X^r, T)} \right). \quad (6.59)$$

Cette forme correspond à :

$$M(T, K) = \ln \left(\frac{(1 + K)}{F_0^T} \right), \quad (6.60)$$

où :

$$\forall t \geq 0, \quad F_t^T = \frac{I_t P_r(t, T)}{I_0 P_n(t, T)}, \quad (6.61)$$

soit un *forward* nominal sur le sous-jacent $\left(\frac{I_t}{I_0} \right)_{t \geq 0}$.

L'approche consiste, comme dans les lissages précédemment effectués, à calibrer une régression à chaque pas de temps de l'historique. On obtient de même des séries chronologiques de régresseurs qu'il suffira d'intégrer au générateur de scénarios économiques pour les projeter et reconstruire, par le modèle de lissage, les surfaces de volatilité implicite futures estimées. On se place en t_i , un pas de temps de l'historique de surfaces disponible. Le procédé de régression que l'on va présenter ci-après pour le pas de temps t_i est effectué sur l'ensemble $\bar{t}$ des pas de temps de l'historique.

L'équation matricielle de régression est la suivante :

$$\bar{\Sigma}_{t_i, \bar{T}, \bar{M}} = X_i \beta_i + \varepsilon_i, \quad (6.62)$$

où ε_i est un bruit blanc gaussien et :

$$\bar{\Sigma}_{t_i, \bar{T}, \bar{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{t_i}(M_{1,t_i}, T_1) \\ \bar{\sigma}_{t_i}(M_{2,t_i}, T_1) \\ \vdots \\ \bar{\sigma}_{t_i}(M_{r,t_i}, T_1) \\ \bar{\sigma}_{t_i}(M_{1,t_i}, T_2) \\ \vdots \\ \bar{\sigma}_{t_i}(M_{r,t_i}, T_m) \end{bmatrix}_{mr} \quad \beta_i = \begin{bmatrix} \beta_{0,t_i} \\ \beta_{1,t_i} \\ \vdots \\ \beta_{9,t_i} \end{bmatrix}_{10}, \quad (6.63)$$

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & M_{1,t_i} & T_1 & M_{1,t_i}^2 & T_1^2 & M_{1,t_i}^3 & T_1^3 & M_{1,t_i} T_1 & M_{1,t_i}^2 T_1 & M_{1,t_i} T_1^2 \\ 1 & M_{2,t_i} & T_1 & M_{2,t_i}^2 & T_1^2 & M_{2,t_i}^3 & T_1^3 & M_{2,t_i} T_1 & M_{2,t_i}^2 T_1 & M_{2,t_i} T_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & M_{r,t_i} & T_1 & M_{r,t_i}^2 & T_1^2 & M_{r,t_i}^3 & T_1^3 & M_{r,t_i} T_1 & M_{r,t_i}^2 T_1 & M_{r,t_i} T_1^2 \\ 1 & M_{1,t_i} & T_2 & M_{1,t_i}^2 & T_2^2 & M_{1,t_i}^3 & T_2^3 & M_{1,t_i} T_2 & M_{1,t_i}^2 T_2 & M_{1,t_i} T_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & M_{r,t_i} & T_m & M_{r,t_i}^2 & T_m^2 & M_{r,t_i}^3 & T_m^3 & M_{r,t_i} T_m & M_{r,t_i}^2 T_m & M_{r,t_i} T_m^2 \end{bmatrix}_{mr \times 10}.$$

Selon le critère des moindres carrés ordinaire, le vecteur de régresseurs β_i^* solution a l'expression suivante :

$$\beta_i^* = (X_i' X_i)^{-1} X_i' \bar{\Sigma}_{t_i, \bar{T}, \bar{M}}. \quad (6.64)$$

Pour plus de détails concernant la régression, le lecteur peut se référer à la Section 3.28.

Notre but premier est la reproduction des prix des *cap* donc la calibration doit être effectuée en prenant en considération les erreurs sur les prix engendrées par l'estimation de la surface de

volatilité implicite dans le modèle. Comme dans la Section 3.28, on utilise pour cela la régression linéaire pondérée. On choisit naturellement d'utiliser le *vega* pour pondérer les erreurs, défini comme la dérivée partielle du prix par rapport au paramètre de volatilité implicite. On portera une attention particulière sur la transformation logit qui modifie la forme du poids : il faut prendre en compte le fait que nous voulons minimiser les variations du logit de la volatilité qui engendrent le plus d'erreur sur les prix, et non pas simplement les variations de la volatilité. Par analogie avec le travail réalisé sur la calibration de la fonction de lissage Nelson-Siegel sur les paramètres implicites du défaut (dans la Section calibration de 4.1), les poids que nous utilisons s'écrivent, pour tout $(i, j, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$w_{i,j,l} = \frac{\frac{\partial(\Pi\text{Cap} \circ f)}{\partial x}(T_j, K_l, x_{i,j,l})}{\sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^m \frac{\partial(\Pi\text{Cap} \circ f)}{\partial x}(T_q, K_p, x_{i,q,p})}, \quad (6.65)$$

où $x_{i,j,l} = \bar{\sigma}_{t_i}(M_{l,t_i}, T_j)$ et $f : (T, K, x) \mapsto (T, K, \overline{\text{logit}}^{-1}(x))$.

Après calcul, nous obtenons :

$$\frac{\partial(\Pi\text{Cap} \circ f)}{\partial x}(T_j, K_l, x_{i,j,l}) = \sigma_{\max} \frac{e^{-x_{i,j,l}}}{(1 + e^{-x_{i,j,l}})^2} \frac{\partial \Pi\text{Cap}}{\partial \sigma}(T_j, K_l, \overline{\text{logit}}^{-1}(x_{i,j,l})), \quad (6.66)$$

qui se réécrit :

$$\frac{\partial(\Pi\text{Cap} \circ f)}{\partial x}(T_j, K_l, x_{i,j,l}) = \frac{\sigma_{\max}}{2(1 + \cosh x_{i,j,l})} \frac{\partial \Pi\text{Cap}}{\partial \sigma}(T_j, K_l, \overline{\text{logit}}^{-1}(x_{i,j,l})). \quad (6.67)$$

La formule fermée du *vega* du cap : $(K, T, \sigma) \mapsto \frac{\partial \Pi\text{Cap}}{\partial \sigma}(K, T, \sigma)$ est fournie en annexe.

On représente ci-dessous l'allure de la nappe de pondérations "*vega ajusté*". Les poids sont croissants avec le prix d'exercice et la maturité du *cap*.

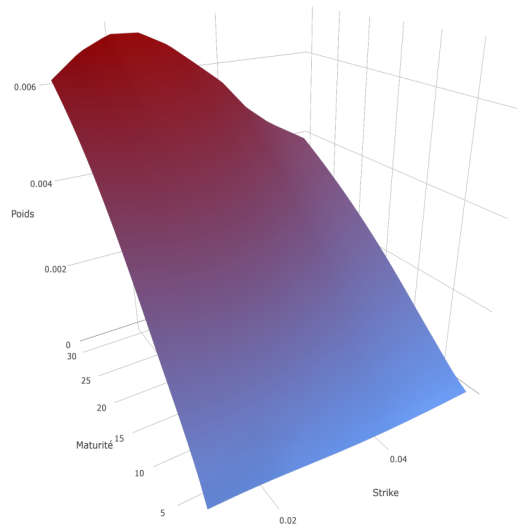


FIGURE 6.23 – Surface de pondérations des *cap* inflation au 22 juin 2016

Posons $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$D_i^W = \begin{bmatrix} w_{i,1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & w_{i,1,2} & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & w_{i,1,r} & \ddots \\ & & & w_{i,2,1} & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & w_{i,2,2} & \ddots \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & w_{i,m,r} \end{bmatrix}_{mr \times mr} \quad (6.68)$$

Le régresseur des moindres carrés pondérés s'écrit :

$$\beta_i^* = (X_i' D_i^W X_i)^{-1} X_i' D_i^W \bar{\Sigma}_{t_i, \bar{T}, \bar{M}}. \quad (6.69)$$

Pour obtenir l'historique des régresseurs $\{\beta_i^*, i \in [1, n]\}$, on effectue cette régression pour chaque surface de l'historique, donc une régression par pas de temps.

Sélection d'une paramétrisation optimale

On se propose de ne pas s'arrêter à la spécification de la forme économétrique linéaire présentée *supra* et utilisée dans les articles de référence, en procédant à une sélection de modèles suivant des critères de sélection quantitatifs. L'intérêt d'un tel procédé est double :

- Il permet, d'une part, de vérifier si la forme du modèle est optimale pour la reproduction des surfaces sous-jacentes ou s'il existe une forme "réduite" de ce modèle qui surpasse la précédente dans l'explication des données ;
- Il permet, d'autre part, d'établir un modèle robuste et stable par la calibration des modèles sur différentes bases d'apprentissage.

Nous allons tester l'ensemble des paramétrisations possibles à partir de la forme paramétrique générale de l'Equation 6.57. La forme linéaire est composée de 10 régresseurs et on exclue de manière évidente le modèle à 0 paramètres, ce qui donne $2^{10} - 1 = 1023$ spécifications possibles. A chaque pas de temps, les 1023 modèles sont calibrés sur la surface de volatilité implicite correspondante. En utilisant les notations introduites précédemment, on écrit la forme de la fonctionnelle de lissage du modèle numéro p au pas de temps t_i de la manière suivante :

$$\bar{\Sigma}_{t_i, \bar{T}, \bar{M}} = X_i \beta_i^p + \varepsilon_i, \quad (6.70)$$

où ε_i est un bruit blanc gaussien et β_i^p est le vecteur de régresseurs du modèle p composé de 1 à 10 régresseurs non-nuls.

Dans le but de choisir un modèle performant et robuste, nous effectuons une validation croisée : les modèles sont calibrés sur des échantillons d'apprentissage, puis testés sur des échantillons de test. Les modèles sélectionnés *in fine* sont retenus selon des indicateurs de qualité des pouvoirs explicatif et prédictif. On effectue des ré-échantillonnages pour tester les modèles sur différentes bases d'apprentissage.

Il est clair que le choix des points à prédire doit être porté selon les maturités et les prix d'exercice sur lesquels on souhaite être performant. De plus, comme expliqué précédemment, nous cherchons à minimiser les erreurs sur les volatilités implicites pour lesquelles les variations engendrées sur les prix sont maximales, c'est-à-dire les points où le *vega* est grand (ici en l'occurrence, le *vega* ajusté de la fonction logit). On sélectionne les points à prédire selon un tirage aléatoire dans lequel la masse de probabilité est plus grande pour les points dont le *vega* est élevé. De ce

fait, les volatilités implicites à *vega* ajusté élevé auront une probabilité importante de se trouver dans les bases d'apprentissage et de test. La surface de pondération nous sert donc non pas à régresser suivant une méthode des moindres carrés pondérée, mais à sélectionner les points des bases d'apprentissage par une approche multi-critère. Etant donné que le *vega* est grand pour les options proches de l'ATM, ceci nous permet de tendre à entraîner les modèles sur les points les plus liquides de l'historique, tout en prenant en considération les autres points mais dans une moindre mesure.

On procède de la manière suivante : à chaque date de l'historique, la base de données contenant les volatilités implicites est séparée en deux bases. L'une constitue la base d'apprentissage et se compose de 72 % des volatilités de la surface, tandis que l'autre constitue la base de test, contenant les 28 % de points restants. Comme la surface de *vega* ajusté possède la même allure d'un pas de temps à un autre, le critère de sélection des points par le tirage aléatoire est en principe le même d'une date à une autre, ceci permettant de comparer les modèles entre chaque base d'apprentissage en s'affranchissant du biais de sélection. Les bases d'apprentissages sont ré-échantillonnées un nombre K fois, où K est fixé préalablement. De cette manière, on assure au modèle final une robustesse et une stabilité plus grandes que pour le modèle général.

Pour l'échantillon numéro k sélectionné parmi les K échantillons générés, nous notons E_{k,t_i} l'ensemble des points du pas de temps t_i sélectionnés pour la calibration (échantillon d'apprentissage) et E_{k,t_i}^C l'ensemble des points du pas de temps t_i privé de E_{k,t_i} (échantillon de test), de sorte que :

$$\sum_{i=1}^n \text{Card}(E_{k,t_i}) = N_{App}, \quad \sum_{i=1}^n \text{Card}(E_{k,t_i}^C) = N_{Test}, \quad (6.71)$$

$$\sum_{i=1}^n \text{Card}(E_{k,t_i} \cup E_{k,t_i}^C) = N_{Total} = N_{App} + N_{Test}, \quad (6.72)$$

sont, en lisant de gauche à droite, le nombre de points de l'échantillon d'apprentissage, le nombre de points de l'échantillon de test et le nombre de points total. Soit V_p l'ensemble caractérisant la paramétrisation du modèle p , dont le cardinal est égal au nombre de régresseurs. On choisit d'utiliser, en tant qu'éléments de la fonction multi-objectif du problème de sélection de modèles, la moyenne des erreurs quadratiques réalisées sur tous les pas de temps lors de l'estimation des points par le modèle (MSE), la *Tail Value at Risk* à 95 % empirique (notée $\widehat{\text{TVaR}}$) du vecteur $\bar{\Sigma}_{E_k}$ des sommes d'erreurs quadratiques par pas de temps et le nombre de variables du modèle. On note :

$$f_1^k(V_p) = \frac{1}{N_{App}} \sum_{i=1}^n \left(\bar{\Sigma}_{E_{k,t_i}} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_{k,t_i}} \beta_{E_{k,t_i}}^p) \right)' \left(\bar{\Sigma}_{E_{k,t_i}} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_{k,t_i}} \beta_{E_{k,t_i}}^p) \right), \quad (6.73)$$

$$f_2^k(V_p) = \widehat{\text{TVaR}}_{0,95} \left[\left(\left(\bar{\Sigma}_{E_k} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_k} \beta_{E_k}^p) \right)' \left(\bar{\Sigma}_{E_k} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_k} \beta_{E_k}^p) \right) \right)_{i \in [1,n]} \right], \quad (6.74)$$

$$f_3^k(V_p) = \frac{1}{N_{Test}} \sum_{i=1}^n \left(\bar{\Sigma}_{E_{k,t_i}^C} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_{k,t_i}^C} \beta_{E_{k,t_i}^C}^p) \right)' \left(\bar{\Sigma}_{E_{k,t_i}^C} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_{k,t_i}^C} \beta_{E_{k,t_i}^C}^p) \right), \quad (6.75)$$

$$f_4^k(V_p) = \widehat{\text{TVaR}}_{0,95} \left[\left(\left(\bar{\Sigma}_{E_k^C} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_k^C} \beta_{E_k^C}^p) \right)' \left(\bar{\Sigma}_{E_k^C} - \overline{\text{logit}}^{-1}(X_{E_k^C} \beta_{E_k^C}^p) \right) \right)_{i \in [1,n]} \right], \quad (6.76)$$

$$f_5(V_p) = \text{Card}(V_p). \quad (6.77)$$

où on note $\overline{\text{logit}}^{-1}(u)$ pour un vecteur u le vecteur dont le i -ème élément est la fonction $\overline{\text{logit}}^{-1}$ appliquée au i -ème élément du vecteur u .

Chaque objet de la régression (vecteur ou matrice) est construit sur la base des ensembles de points E_{k,t_i} de chaque échantillon k . On rappelle la définition de la *Tail Value at Risk* de niveau α d'une variable aléatoire X de fonction de répartition F :

$$\text{TVaR}_\alpha[X] = \mathbb{E}[X | X > \text{VaR}_\alpha[X]], \quad (6.78)$$

où l'expression de la *Value at Risk* de niveau α est : $\text{VaR}_\alpha[X] = \inf\{x, F(x) > \alpha\}$.

La fonction f_1^k (respectivement f_3^k) est la moyenne de la somme des erreurs quadratiques commises sur les points de la base d'apprentissage (respectivement de la base de test) à partir des régresseurs estimés sur la base d'apprentissage. La fonction f_2^k (respectivement f_4^k) est la mesure de risque estimant l'erreur quadratique moyenne commise lors de l'estimation d'une surface de volatilité de la base d'apprentissage (respectivement de la base de test) par le modèle construit sur la base d'apprentissage, en sachant que l'erreur est plus grande que le quantile à 95 % du vecteur des sommes d'erreurs quadratiques par pas de temps.

Le choix de la Tail VaR au lieu de la VaR provient du fait que l'on souhaite obtenir un modèle globalement bon sur tous les pas de temps, plutôt que très bon sur la majorité mais mauvais sur certains. On possède alors un indicateur de niveau d'erreur extrême, tenant compte de la queue de distribution des sommes d'erreurs sur l'historique.

La fonction objectif f_5^k renvoie le nombre de variables du modèle en paramètre. Il a été choisi dans le but de minimiser le nombre de dimensions du modèle. Un trop grand nombre de dimensions pourrait rendre complexe la calibration d'un modèle de série temporelle multivarié à changements d'états.

Les valeurs prises par les 5 fonctions objectif sont à minimiser. Les 4 premières permettront de créer un front optimal, et la fonction objectif du nombre de variables par modèle sera ensuite utilisée en tant qu'aide à la décision pour le choix final. Les fonctions forment ainsi une fonction multi-objectif et le problème d'optimisation est le suivant, au tirage aléatoire k :

$$p^* = \underset{p \in [1, 1023]}{\text{Argmin}} (f_1^k(V_p), f_2^k(V_p), f_3^k(V_p), f_4^k(V_p), f_5^k(V_p)). \quad (6.79)$$

On effectue $K = 10$ tirages aléatoires. La construction de la frontière Pareto-optimale (c'est-à-dire, l'ensemble des modèles solutions tels que l'on ne peut plus diminuer la valeur d'une des 5 fonctions objectif sans augmenter celle d'une autre) permet d'établir un front de solutions. Alors, le jugement d'expert permet de décider quelle solution garder parmi l'ensemble des solutions Pareto-optimales. L'idéal est un modèle à peu de paramètres, de sorte que le nombre de dimensions à ajouter au générateur de scénarios économiques soit le plus faible possible. De plus, un modèle à peu de paramètres décrivant une surface complète s'avère plus robuste en pratique, car la projection des facteurs de risque explicatifs peut générer des valeurs chaotiques après reconstruction de la surface si le nombre de facteurs est élevé.

Les tableaux qui répertorient les résultats de la calibration sont présentés en annexe. Le modèle qui ressort pour chacun des 10 échantillonnages est le modèle à 6 variables (identifiants 12, 26, 33, 39, 50, 64, 74, 89, 96 et 104), pour tout strike K et toute maturité T , au pas de temps t :

$$\begin{aligned} \overline{\text{logit}}(\sigma_t(T, M_t(T, K))) &= \beta_{0,t} + \beta_{1,t}T + \beta_{2,t}T^2 + \beta_{3,t}T^3 + \beta_{4,t}M_t(T, K)^2T \\ &+ \beta_{5,t}M_t(T, K)T^2 + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (6.80)$$

où ε_t est un bruit blanc gaussien.

Résultats de la calibration

Les résultats sont illustrés par les graphiques ci-dessous, où l'on peut observer les séries chronologiques de régresseurs du modèle paramétrique, ainsi que le *fitting* des surfaces de prix des *cap* inflation et celui des surfaces de volatilité implicite à des dates fixées.

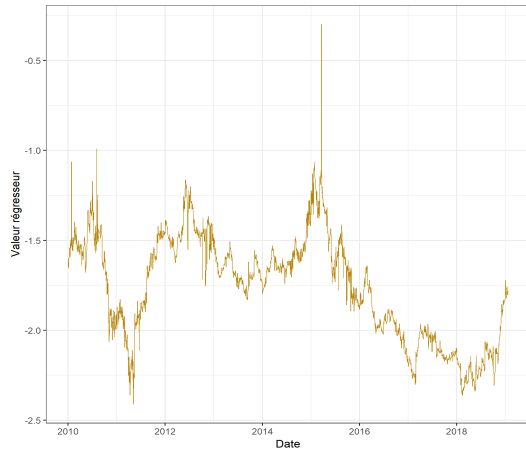


FIGURE 6.24 – Série chronologique du régresseur β_0

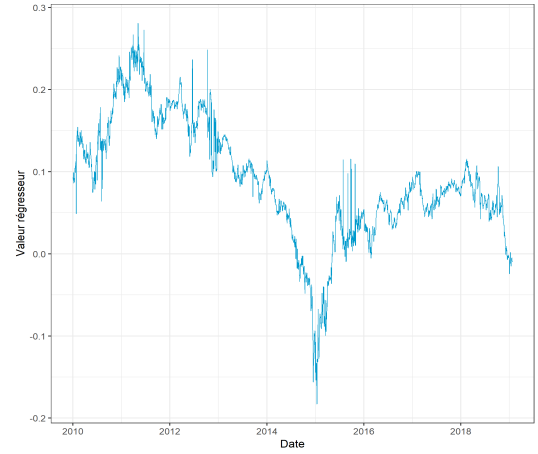


FIGURE 6.25 – Série chronologique du régresseur β_1

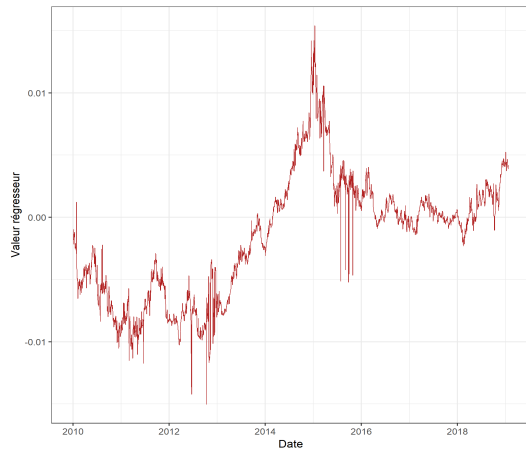


FIGURE 6.26 – Série chronologique du régresseur β_2

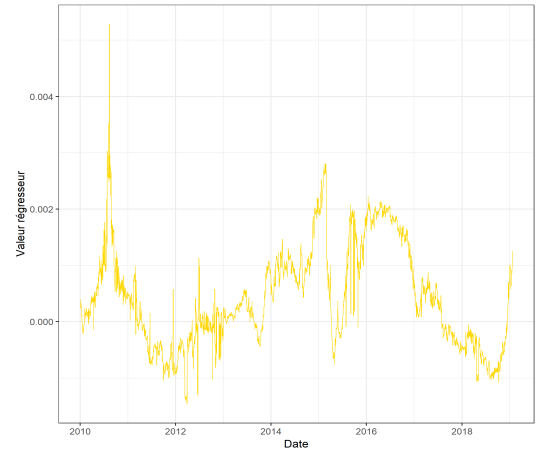


FIGURE 6.27 – Série chronologique du régresseur β_3

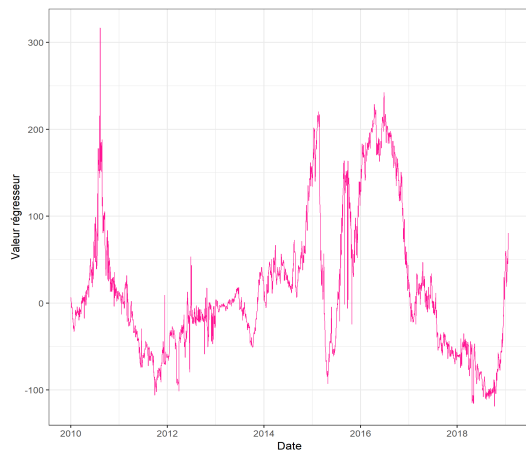


FIGURE 6.28 – Série chronologique du régresseur β_4

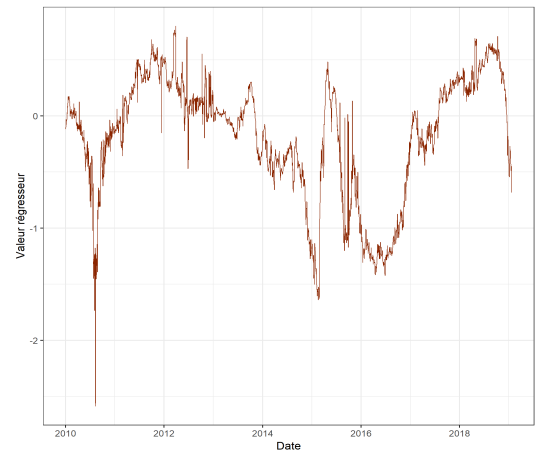


FIGURE 6.29 – Série chronologique du régresseur β_5

On observe quelques sauts caractéristiques de prix aberrants, notamment en 2010 ainsi qu'en 2014. Ces points sont à investiguer. Ce détail réglé, les séries temporelles de régresseurs sont globalement de qualité suffisante pour être intégrées au générateur de scénarios économiques. Le problème de multicollinéarité peut également se poser pour certaines séries.

La qualité de réplcation des volatilités implicites, ainsi que celle des prix, est illustrée ci-après. On représente en bleu la surface reproduite par le modèle, en rouge orangé la surface historique (extraite du marché pour les prix, extraite implicitement des prix du marché pour la volatilité par un algorithme de recherche de zéros).

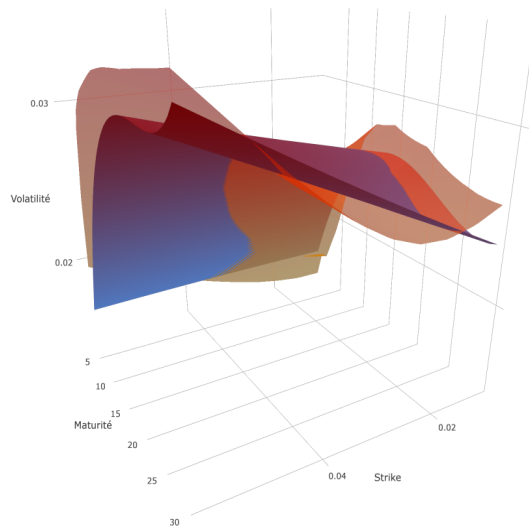


FIGURE 6.30 – *Fitting* de la nappe de volatilité implicite des *cap* inflation au 9 février 2010

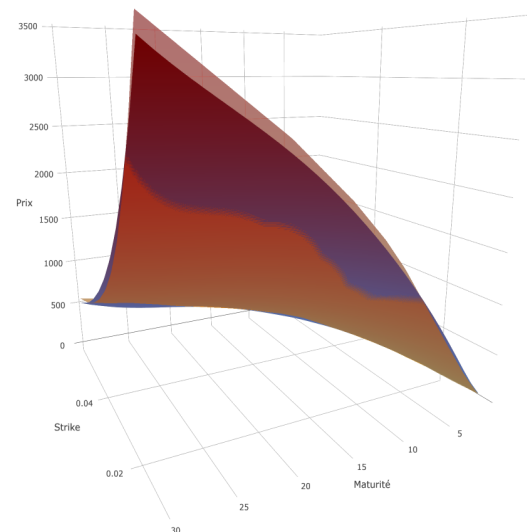


FIGURE 6.31 – *Fitting* de la nappe de prix des *cap* inflation au 9 février 2010

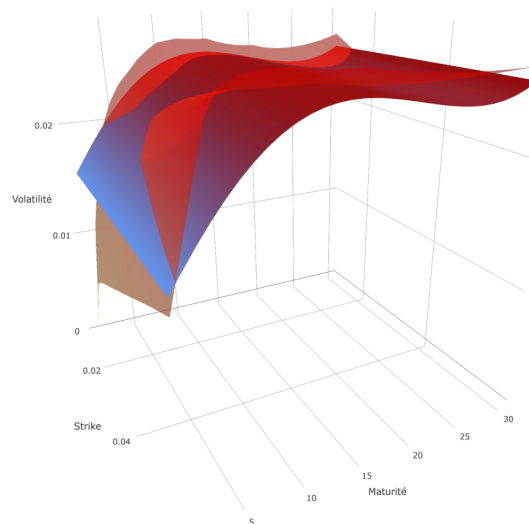


FIGURE 6.32 – *Fitting* de la nappe de volatilité implicite des *cap* inflation au 14 janvier 2013

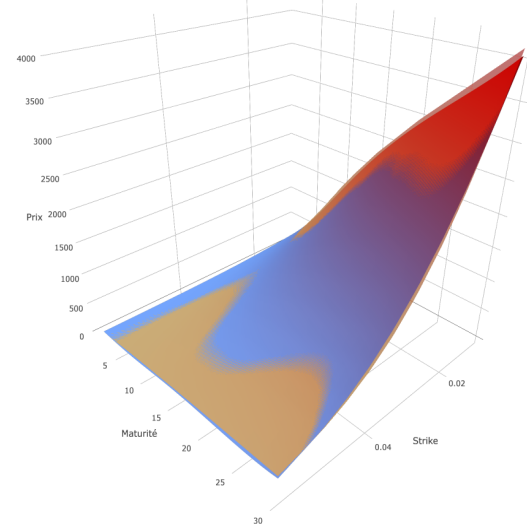


FIGURE 6.33 – *Fitting* de la nappe de prix des *cap* inflation au 14 janvier 2013

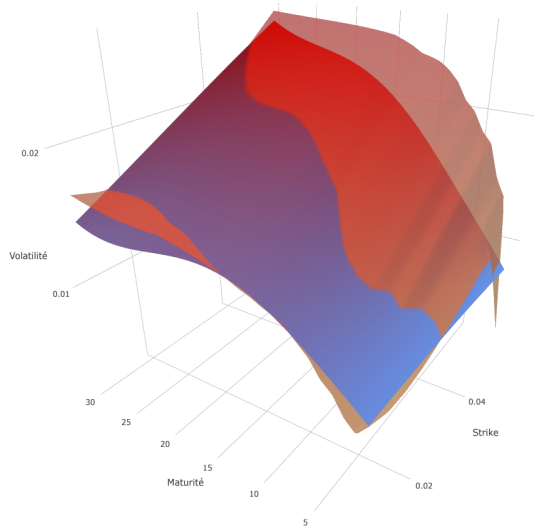


FIGURE 6.34 – *Fitting* de la nappe de volatilité implicite des *cap* inflation au 29 janvier 2018

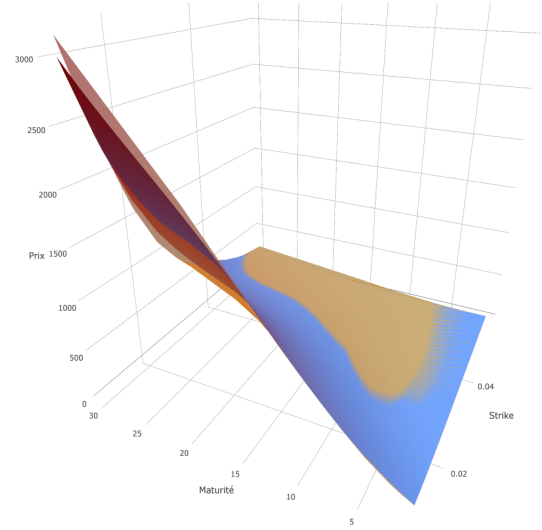


FIGURE 6.35 – *Fitting* de la nappe de prix des *cap* inflation au 29 janvier 2018

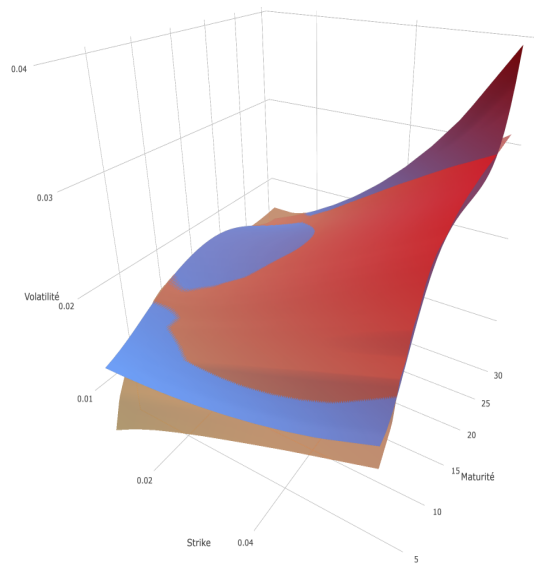


FIGURE 6.36 – *Fitting* de la nappe de volatilité implicite des *cap* inflation au 25 mars 2016

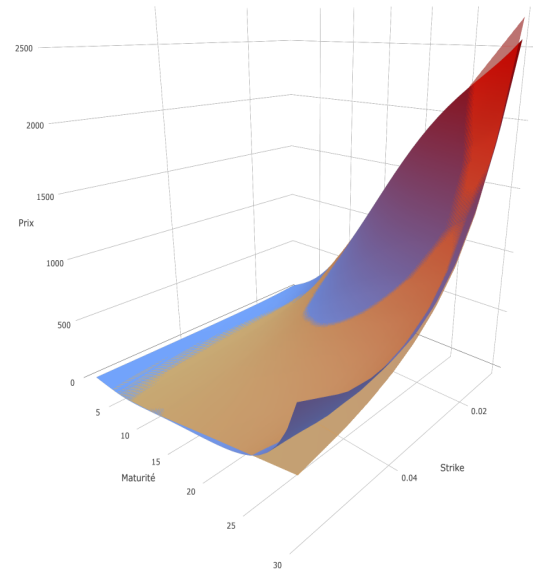


FIGURE 6.37 – *Fitting* de la nappe de prix des *cap* inflation au 25 mars 2016

La réplcation des prix est d'excellente qualité. Cette modélisation, ajoutée aux précédentes (AFNS réel et nominal), apporte un élément de caractérisation du prix d'un produit dérivé inflation par de multiples facteurs de risque, tout en s'assurant une reproduction de l'historique. On peut à présent calibrer le modèle de liquidité.

Pour calculer la valeur de la partie optionnelle de l'OATi, on utilise la volatilité implicite du *cap* de *strike* 0 et de même maturité que celle de l'OATi évaluée. Ce choix est justifié par la forme du *pay-off* de la partie optionnelle, formant un *call* européen de *strike* nul sur le taux $\left(\frac{I_T - I_E}{I_E}\right)_{t \geq 0}$.

Une remarque sur le respect de l'hypothèse d'AOA

Le modèle de nappe de volatilité, tel qu'il est spécifié et calibré, peut générer des points et des déformations qui n'assurent pas un respect de l'hypothèse d'AOA. En effet, une fonctionnelle économétrique linéaire génère, sans contraintes inhérentes aux propriétés AOA des prix, des surfaces pour lesquelles des arbitrages statiques peuvent être effectués. Cet élément est à prendre sérieusement en considération dans l'élaboration d'un cadre de valorisation dynamique AOA. Ce paragraphe vise à apporter des éléments de réponse à cette problématique.

Plusieurs travaux ont étudié les propriétés de convexité et de courbure des nappes de volatilité implicite. Il existe notamment des résultats qui fournissent des conditions nécessaires et suffisantes (telles que la condition de Durrleman) pour garantir le respect de l'hypothèse d'AOA. Les démonstrations des théorèmes sont fondées sur la propriété de convexité du *call* ainsi que les inégalités classiques entre le prix d'option, le prix du zéro-coupon et le prix du contrat *forward* sur le sous-jacent. Ces inégalités sont issues de simples raisonnements par AOA. Ces études ont été menées sur les surfaces de volatilité implicite *equity*, on peut donc imaginer qu'elles peuvent être étendues aux produits dérivés de taux d'intérêt et d'inflation, en particulier aux *caplet* inflation et *cap* inflation.

En reprenant l'idée générale de ces études, il est possible d'établir des conditions nécessaires et suffisantes sur les régresseurs du modèle pour garantir la génération de surfaces sans arbitrage. Ce travail nécessiterait une étude approfondie que nous ne développons pas ici. Des travaux fondateurs qui pourraient amener à cette extension et à une amélioration du modèle sont ceux de Roper M. dans [20] [2010] ainsi que ceux de Gatheral J. et Jacquier A. dans [14] [2013] sur la calibration AOA d'une paramétrisation SVI (*Stochastic Volatility Inspired*).

6.5 Calibration du modèle de liquidité

6.5.1 Présentation des données

Nous disposons, d'une part, de l'historique de prix d'un panier d'obligations souveraines indexées sur l'inflation (France et Italie), l'historique s'étendant du 1er janvier 2010 au 23 janvier 2019, et d'autre part, de la série chronologique de l'indice CPTFEMU (indice d'inflation européenne). Les prix des obligations sont fournis par Bloomberg en base journalière, tandis que l'indice d'inflation est en base mensuelle. Une interpolation linéaire est effectuée sur l'historique de l'indice, entre chaque couple de mois successifs de manière à rendre la base exploitable pour évaluer les obligations de manière journalière.

Il a été choisi d'intégrer un indice global suffisamment représentatif des indices locaux des pays modélisés. Ce choix est justifié par une volonté de réduire au maximum le nombre de dimensions du générateur de scénarios économiques. On peut tout à fait imaginer reproduire la même procédure de calibration en considérant l'indice approprié pour chaque obligation.

La série temporelle de l'indice CPTFEMU est représentée ci-après.

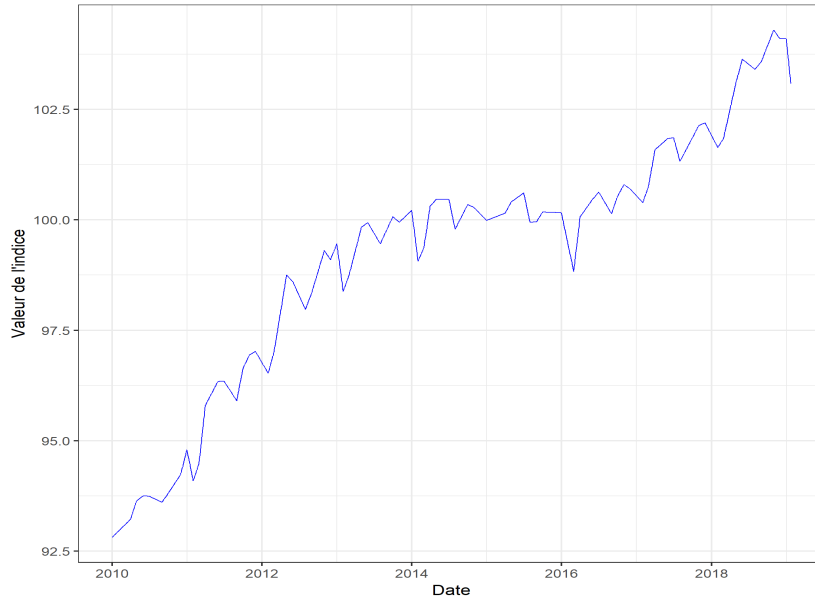


FIGURE 6.38 – Historique de la série chronologique de l'indice d'inflation européenne CPTFEMU, du 01/01/2010 au 23/01/2019

6.5.2 Calibration des paramètres de liquidité de l'OATi

La procédure de calibration reprend celle du modèle de liquidité des obligations à taux fixe (se référer à la Section 4.1). Soit $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ les pas de temps de calibration,

$$P_{\bar{t}, \bar{\tau}} = \begin{bmatrix} P_{t_1, \tau_{1,1}} & \cdots & P_{t_1, \tau_{1,m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{t_n, \tau_{n,1}} & \cdots & P_{t_n, \tau_{n,m}} \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (6.81)$$

la matrice des prix d'OATi disponibles, où $\tau_{i,j}$ est la maturité résiduelle de l'OATi j au pas de temps t_i . On fait également correspondre aux m obligations les paramètres qui leur sont associés : pour $j \in [1, m]$, on fait correspondre à l'obligation j le coupon fixe c_j , la valeur de l'indice IPC d'indexation à son émission I_E^j , les dates de paiement $(t_{l,j})_{l \in [0, N]}$ et la durée séparant la date de paiement de sa date de révision associée h_j .

On reprend alors le principe de calibration énoncé dans la partie sur les obligations à taux fixe. On calibre le paramètre de volatilité du processus d'illiquidité η en extérieur et le paramètre d'illiquidité initial γ_0 en intérieur. Une procédure de lissage paramétrique sera ensuite réalisée sur les paramètres intérieurs. On note :

$$\Gamma_{\bar{t}, \bar{\tau}}^* = \begin{bmatrix} \gamma_{0, t_1, \tau_{1,1}}^* & \cdots & \gamma_{0, t_1, \tau_{1,m}}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{0, t_n, \tau_{n,1}}^* & \cdots & \gamma_{0, t_n, \tau_{n,m}}^* \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (6.82)$$

la matrice de paramètres intérieurs.

A chaque prix de FRN va être calibré un paramètre γ_0 . On suppose par ailleurs que les structures par terme de paramètre λ_0 ont été lissées, permettant l'évaluation du prix de l'OATi en

toute maturité. Les structures par terme utilisées sont celles extraites des prix des CDS lors de la calibration du modèle de valorisation des obligations à taux fixe.

Pour déterminer le paramètre extérieur optimal η^* , on résoud le problème d'optimisation mono-objectif suivant :

$$\eta^* = \underset{\eta}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\gamma} \left(P_{t_i, \tau_{i,j}} - \text{ILB}(c_j, I_{0,t_i}, I_E^j, I_{t_{0,j}-h_j}, h_j, \omega, \tau_{i,j}; \eta, \gamma) \right)^2. \quad (6.83)$$

On note cette fois N le nombre de dates de paiement (pour éviter la confusion avec n le nombre de pas de temps de calibration) et les dates de paiement sont notées $t_{k,j}$, k étant l'indice de position de la date dans la subdivision et j l'OATi associée. Une attention particulière est portée sur la distinction entre la notation $t_{k,j}$ pour les dates de paiement et la notation t_i qui quant à elle réfère au i -ème pas de temps de calibration. Les I_{0,t_i} constituent la série chronologique de l'indice IPC sur les pas de temps d'intérêt. Comme pour les CDS, le problème d'optimisation nécessite la minimisation de $n \times m + 1$ fonctions :

- Pour un paramètre extérieur η donné et pour tout $(i, j) \in [1, n] \times [1, m]$, on minimise la fonction :

$$\begin{aligned} g_{i,j}^{\eta} : \gamma \mapsto & \left(P_{t_i, \tau_{i,j}} - \frac{c_j I_{0,t_i}}{I_E^j} \left(\frac{I_{t_{0,j}-h_j}}{I_{0,t_i}} \int_0^{t_{1,j}-h_j} P_n(X_{t_i}^n, t) F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V_{\eta}(\gamma, t) dt \right. \right. \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{P_r(X_{t_i}^r, t_{k,j} - h_j)}{P_n(X_{t_i}^n, t_{k,j} - h_j)} \int_{t_{k,j}-h_j}^{t_{k+1,j}-h_j} \xi_n(t_{k,j} - h_j, t) P_n(X_{t_i}^n, t) \\ & \quad \times F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V_{\eta}(\gamma, t) dt \\ & + \left. \frac{P_r(X_{t_i}^r, \tau_{i,j} - h_j)}{P_n(X_{t_i}^n, \tau_{i,j} - h_j)} \int_{\tau_{i,j}-h_j}^{\tau_{i,j}} \xi_n(\tau_{i,j} - h_j, t) P_n(X_{t_i}^n, t) F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V_{\eta}(\gamma, t) dt \right) \\ & - \left[\frac{I_{0,t_i} P_r(X_{t_i}^r, \tau_{i,j})}{I_E^j P_n(X_{t_i}^n, \tau_{i,j})} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{I_{0,t_i} P_r(X_{t_i}^r, \tau_{i,j})}{I_E^j P_n(X_{t_i}^n, \tau_{i,j})} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_F(0, \sigma_{t_i, \tau_{i,j}, 0}^I, \tau_{i,j})^2}{\Sigma_F(0, \sigma_{t_i, \tau_{i,j}, 0}^I, \tau_{i,j})} \right) \right. \\ & + \left. \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{I_{0,t_i} P_r(X_{t_i}^r, \tau_{i,j})}{I_E^j P_n(X_{t_i}^n, \tau_{i,j})} \right) - \frac{1}{2} \Sigma_F(0, \sigma_{t_i, \tau_{i,j}, 0}^I, \tau_{i,j})^2}{\Sigma_F(0, \sigma_{t_i, \tau_{i,j}, 0}^I, \tau_{i,j})} \right) \right) \right] \\ & \times P_n(X_{t_i}^n, \tau_{i,j}) F(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V_{\eta}(\gamma, \tau_{i,j}) \\ & - (1 - \omega) \int_0^{\tau_{i,j}} P_n(X_{t_i}^n, t) W(\lambda_{t_i, \tau_{i,j}}, t) V_{\eta}(\gamma, t) dt \Big)^2, \end{aligned} \quad (6.84)$$

où, $\forall (k, j) \in [1, N] \times [1, m]$, $\forall t \geq t_{k,j} - h_j$:

$$\xi_n(t_{k,j} - h_j, t) = \exp \left(- \int_0^{t_{k,j}-h_j} \Gamma^n(u, t_{k,j} - h_j)' \Delta_u \Gamma^n(t_{k,j} - h_j, t) du \right), \quad (6.86)$$

ce qui amène à minimiser $n \times m$ fonctions objectif;

- Puis, on minimise la fonction d'agrégation :

$$g : \eta \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \min_{\gamma} g_{i,j}^{\eta}(\gamma), \quad (6.87)$$

et on obtient le paramètre extérieur optimisé η^* .

Une fois le paramètre η^* estimé, on minimise à nouveau $n \times m$ fonctions objectives pour avoir la matrice de paramètres intérieurs $\Gamma_{t_i, \tau}^*$, pour laquelle chaque coefficient $\gamma_{0,t_i, \tau_{i,j}}^*$ s'écrit :

$$\gamma_{0,t_i,\tau_{i,j}}^* = \underset{\gamma}{\operatorname{Argmin}} g_{i,j}^{\eta^*}(\gamma). \tag{6.88}$$

On calibre à présent le modèle de liquidité des OATi suivant la procédure développée dans cette partie. Les prix sont répliqués d’une maturité à une autre comme le montrent les graphiques ci-dessous. Le paramètre extérieur affiché est arrondi à 10^{-5} près.

	France
η	0,00444

TABLE 6.2 – Paramètre extérieur (volatilité) du processus de *convenience yield* de l’OATi

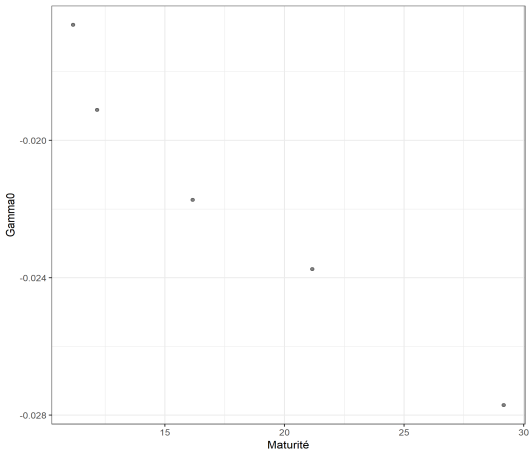


FIGURE 6.39 – Structure par terme de γ_0 au 27 mai 2011, OATi

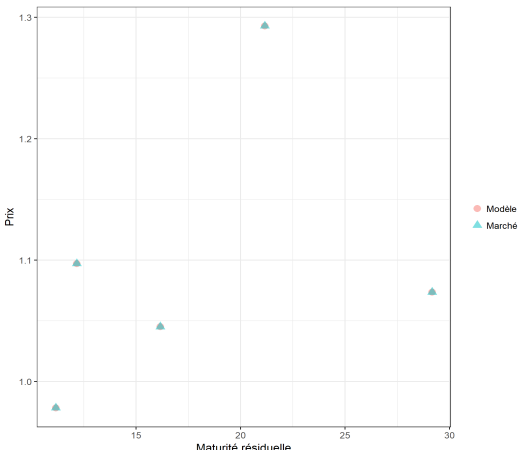


FIGURE 6.40 – *Fitting* des prix au 27 mai 2011, OATi

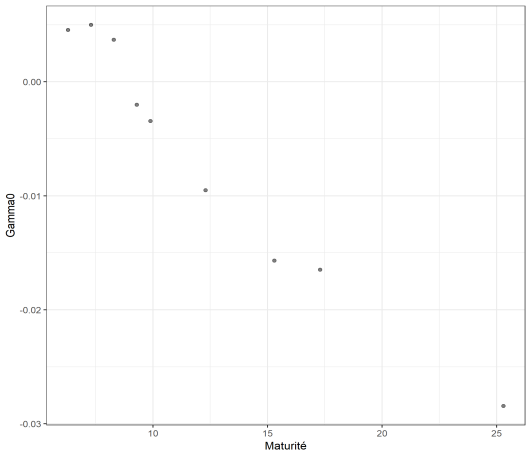


FIGURE 6.41 – Structure par terme de γ_0 au 7 avril 2015, OATi

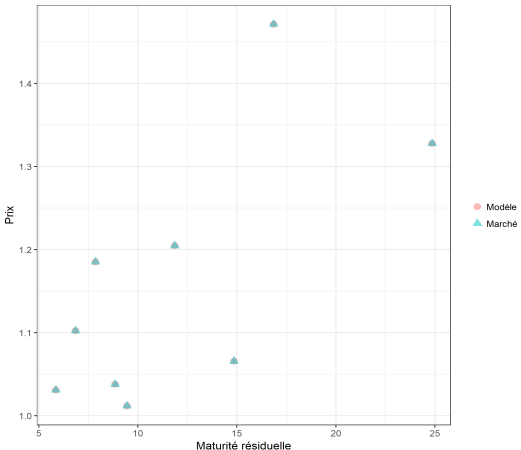
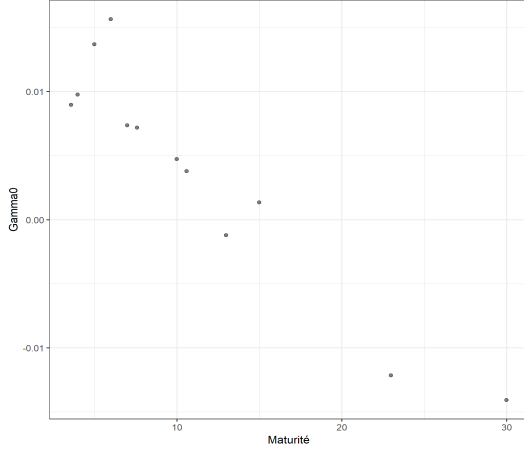
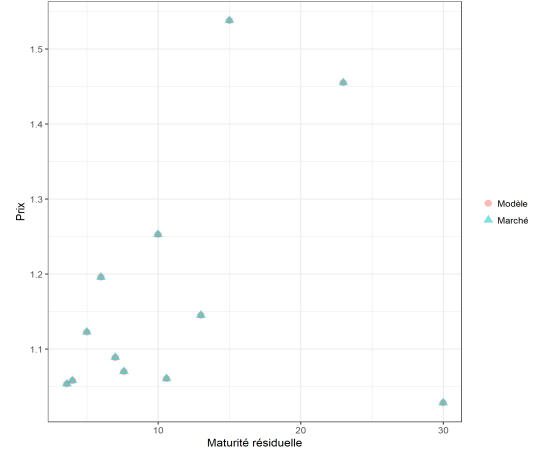


FIGURE 6.42 – *Fitting* des prix au 16 septembre 2015, OATi


 FIGURE 6.43 – Structure par terme de γ_0 au 1er août 2017, OATi

 FIGURE 6.44 – *Fitting* des prix au 1er août 2017, OATi

De même que pour le modèle de crédit, on effectue un lissage paramétrique des structures par terme de γ_0 obtenues. Le lissage est également fait par calibration d'une fonctionnelle de type Nelson-Siegel. On peut alors évaluer les obligations indexées en toute maturité.

6.5.3 Lissage des structures par terme de paramètres implicites

On s'intéresse au lissage des structures par terme de γ_0 . Comme pour les obligations précédemment modélisées, à chaque pas de temps est calibrée une fonctionnelle Nelson-Siegel sur la structure par terme de paramètres correspondante.

Soit $\mu > 0$ le paramètre d'échelle de la fonctionnelle Nelson-Siegel. L'équation de régression s'écrit, à chaque pas de temps t_i :

$$\forall j \in [1, m], \quad \gamma_{0,t_i,T_j} = \beta_{0,t_i} + \beta_{1,t_i} B_1(\tau_{i,j}) + \beta_{2,t_i} B_2(\tau_{i,j}), \quad (6.89)$$

où :

$$B_1(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T}, \quad B_2(T) = \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu T} - e^{-\mu T}. \quad (6.90)$$

Après lissage, la reproduction des prix des obligations indexées sur l'inflation est primordiales, donc nous avons à nouveau recours à la régression linéaire pondérée. Les poids sont choisis de manière à minimiser l'erreur réalisée sur les points pour lesquels les variations de prix sont les plus importantes :

$$w_{i,j} = \frac{\frac{\partial \text{ILB}}{\partial \gamma}(\gamma_{0,t_i,\tau_{i,j}}, c_j, I_{0,t_i}, I_E^j, h_j, \omega, \tau_{i,j})}{\sum_{k=1}^m \frac{\partial \text{ILB}}{\partial \gamma}(\gamma_{0,t_i,\tau_{i,k}}, c_k, I_{0,t_i}, I_E^k, h_k, \omega, \tau_{i,k})}. \quad (6.91)$$

L'expression de la dérivée par rapport au paramètre d'illiquidité est donnée en annexe.

Posons $\forall i \in [1, n]$,

$$D_i^W = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_{im} \end{bmatrix}_{m \times m}, \quad \Gamma_{i.} = \begin{bmatrix} \gamma_{0,t_i,\tau_{i,1}} \\ \gamma_{0,t_i,\tau_{i,2}} \\ \vdots \\ \gamma_{0,t_i,\tau_{i,m}} \end{bmatrix}_m, \quad (6.92)$$

$$B_i(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & B_1(\tau_{i,1}) & B_2(\tau_{i,1}) \\ 1 & B_1(\tau_{i,2}) & B_2(\tau_{i,2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & B_1(\tau_{i,m}) & B_2(\tau_{i,m}) \end{bmatrix}_{m \times 3}, \quad \beta_{i.} = \begin{bmatrix} \beta_{0,t_i} \\ \beta_{1,t_i} \\ \beta_{2,t_i} \end{bmatrix}. \quad (6.93)$$

Le régresseur des moindres carrés pondérés, en régressant sur le pas de temps t_i pour un paramètre d'échelle μ , s'écrit :

$$\beta_{i.}^\mu = (B_i(\mu)' D_i^W B_i(\mu))^{-1} B_i(\mu)' D_i^W \Gamma_{i.}. \quad (6.94)$$

Soit $E_{i.}^\mu$ le vecteur d'erreur au pas de temps t_i pour un paramètre μ :

$$E_{i.}^\mu = \begin{bmatrix} e_{i1}^\mu \\ e_{i2}^\mu \\ \vdots \\ e_{im}^\mu \end{bmatrix}_m. \quad (6.95)$$

Alors, si μ^* est le paramètre optimal, le problème d'optimisation mono-objectif s'écrit :

$$\mu^* = \underset{\mu}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n \|E_{i.}^\mu\|_2^2 = \underset{\mu}{\operatorname{Argmin}} \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i.} - B_i(\mu)\beta_{i.}^\mu)' D_i^W (\Gamma_{i.} - B_i(\mu)\beta_{i.}^\mu). \quad (6.96)$$

Comme expliqué dans la Section 3.28, après avoir calibré le paramètre μ^* il suffit de faire une régression par pas de temps pour obtenir les séries temporelles de régresseurs et, *in fine*, la matrice β_{μ^*} .

Les résultats de la calibration sont exposés ci-après. On effectue, comme dans la section sur la calibration du modèle de liquidité des obligations à taux fixe (voir la Section 4.2.3), une régression sur l'historique complet de paramètres γ_0 de façon à déduire si une unique fonctionnelle peut permettre de reproduire efficacement l'historique de prix des OATi. Les résultats obtenus avec cette structure déterministe sont également comparés avec ceux obtenus avec la structure stochastique. Les paramètres fournis dans le tableau ci-dessous sont arrondis à 10^{-4} près.

	Déterministe	Stochastique
μ	0,4176	0,0882
β_0	-0,0374	-
β_1	0,0240	-
β_2	0,1295	-

TABLE 6.3 – Paramètres d'échelle et régresseurs de la fonction de lissage du *convenience yield*, OATi

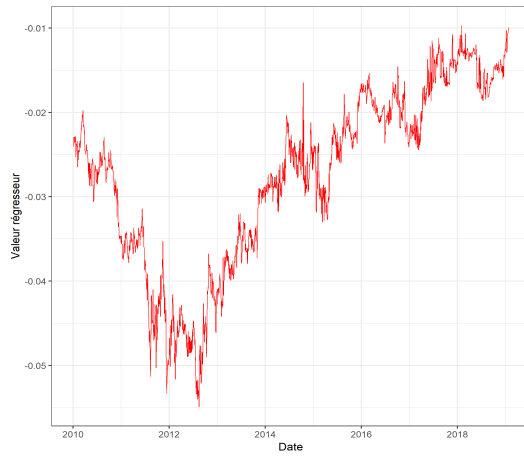


FIGURE 6.45 – Série chronologique du régresseur β_0 du modèle de liquidité OATi



FIGURE 6.46 – Série chronologique du régresseur β_1 du modèle de liquidité OATi

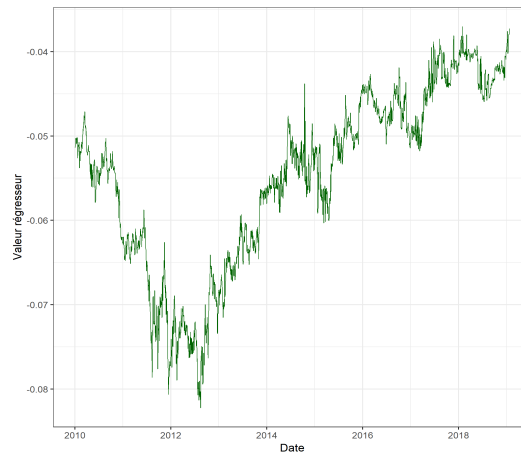


FIGURE 6.47 – Série chronologique du régresseur β_2 du modèle de liquidité OATi

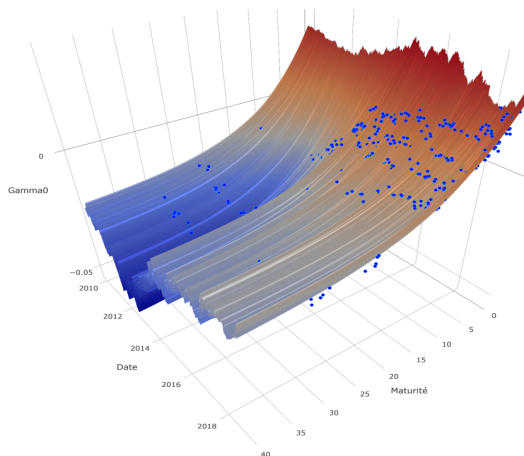


FIGURE 6.48 – (Vue 1) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), OATi

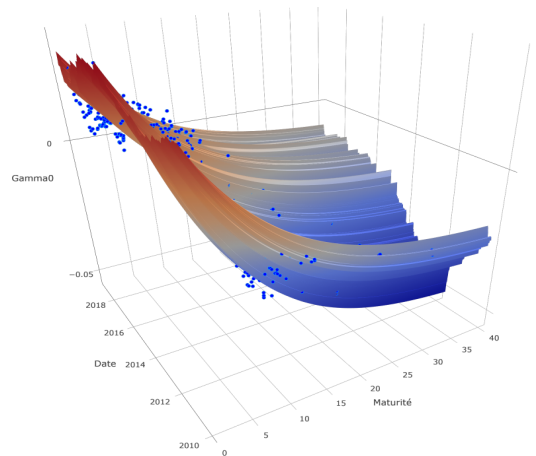


FIGURE 6.49 – (Vue 2) Historique de γ_0 reproduit et lissé par le modèle (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus), OATi

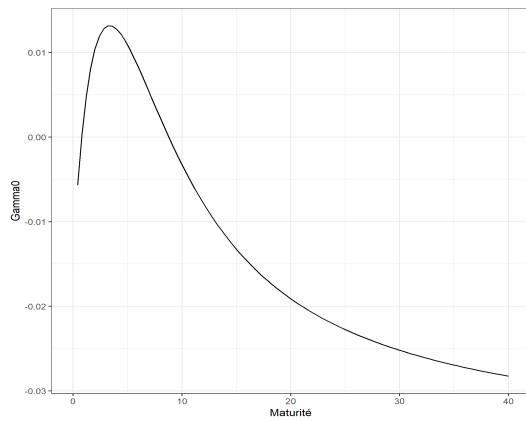


FIGURE 6.50 – Structure par terme de γ_0 lissée par le modèle déterministe, OATi

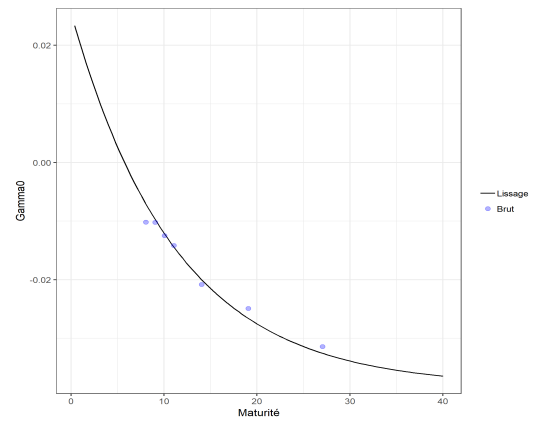


FIGURE 6.51 – Structure par terme de γ_0 lissée et *fitting* au 4 juillet 2013, OATi

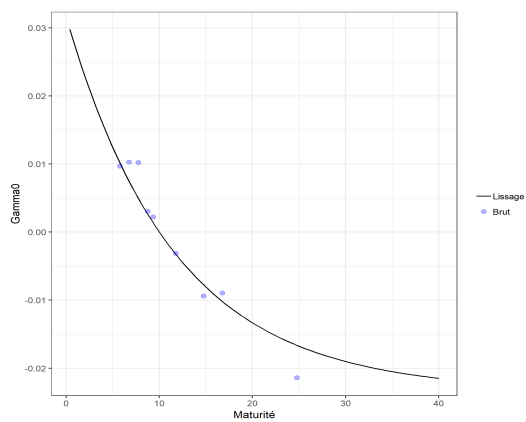


FIGURE 6.52 – Structure par terme de γ_0 lissée et *fitting* au 22 octobre 2015, OATi

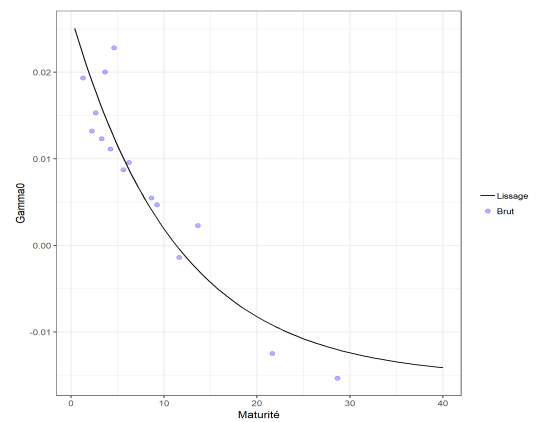


FIGURE 6.53 – Structure par terme de γ_0 lissée et *fitting* au 4 décembre 2018, OATi

Le *fitting* est de qualité convenable. L'élément le plus important reste la reproduction des prix des obligations indexées, plus que la reproduction de paramètres calibrés en intérieur : on représente ci-dessous le pouvoir de reproduction des prix à des dates fixées ainsi que sur les historiques de prix, pour le modèle à structure déterministe ainsi que pour celui à structure stochastique.

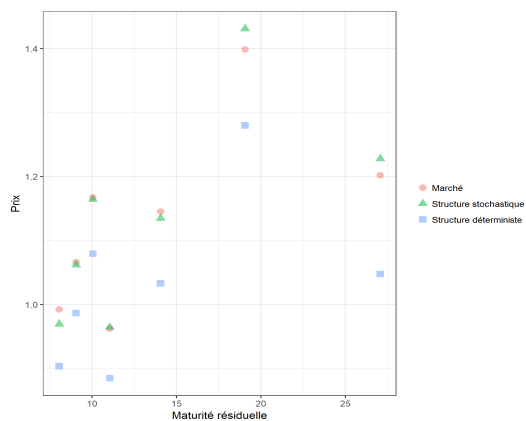


FIGURE 6.54 – *Fitting* des prix d'OATi après lissage déterministe/stochastique au 4 juillet 2013

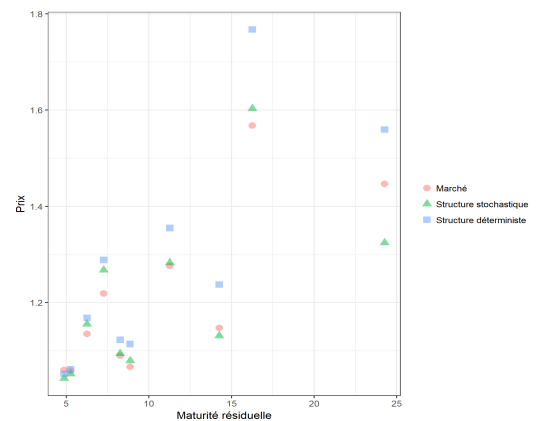


FIGURE 6.55 – *Fitting* des prix d'OATi après lissage déterministe/stochastique au 21 avril 2016

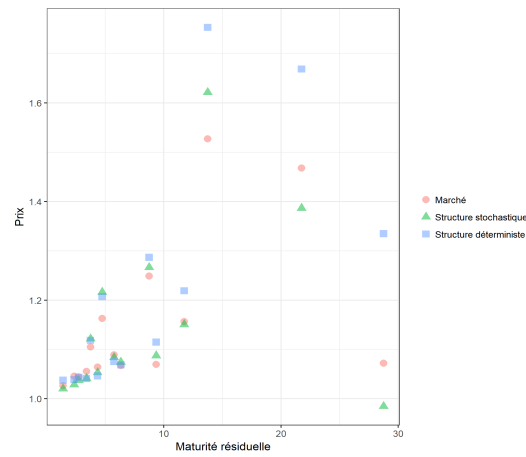


FIGURE 6.56 – *Fitting* des prix d'OATi après lissage déterministe/stochastique au 26 octobre 2018

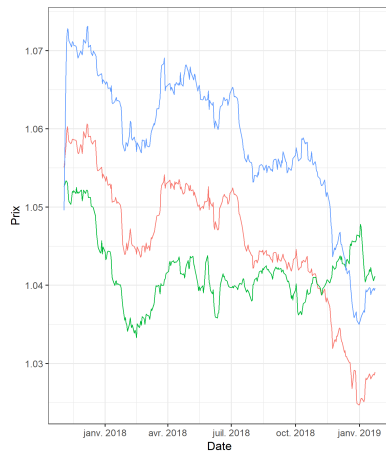


FIGURE 6.57 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OATi AP8659363 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

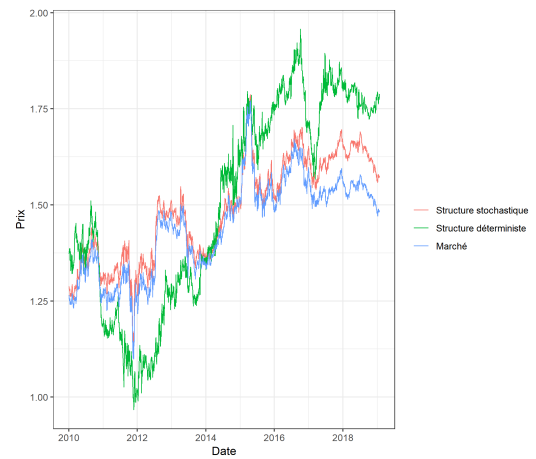


FIGURE 6.58 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OATi EC7356149 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

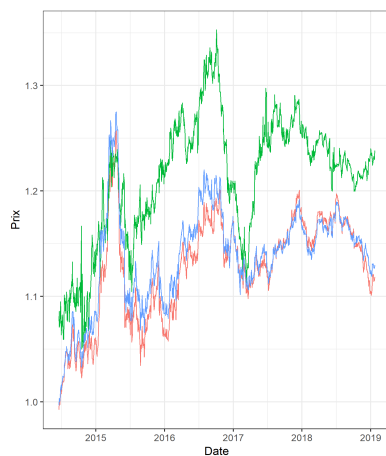


FIGURE 6.59 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OATi EK3265163 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

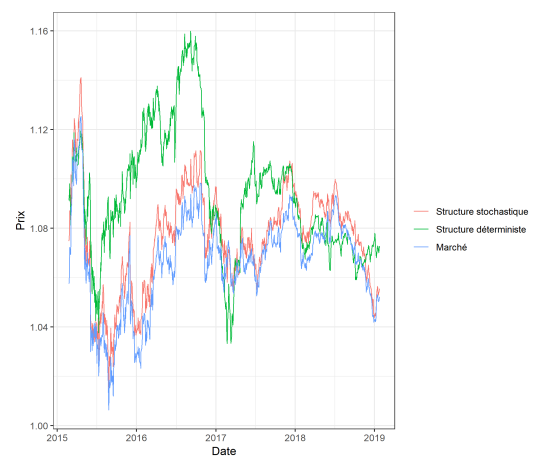


FIGURE 6.60 – *Fitting* de l'historique de prix de l'OATi EK7554323 par les modèles de lissage déterministe et stochastique

La fonctionnelle de lissage stochastique (à régresseurs dynamiques) apporte une qualité de réplication très précise pour les OATi, en particulier au niveau des variations de prix. Comme pour les autres obligations précédemment modélisées, la fonctionnelle à structure déterministe est moins efficace compte tenu du fait qu'il lui manque la dimension temporelle. On utilise donc le modèle à structure *time-dependent* en intégrant les 3 séries chronologiques de régresseurs au générateur de scénarios économiques. A nouveau, les problématiques de validation du choix de la fonctionnelle (il faudrait calibrer d'autres fonctions sûrement plus pertinentes pour la présente tâche) et de la multicollinéarité des régresseurs se posent. Ces sujets ont vocation à être étudiés plus finement lors de la calibration d'un modèle de séries temporelles multivarié.

Troisième partie

Projection de flux et courbes de taux obligataires

Chapitre 7

Représentation des flux obligataires futurs

Sommaire

7.1 Construction des échéanciers de flux	150
7.1.1 Calcul des <i>cash-flow</i> bruts	150
7.1.2 Fonctionnement général du modèle multivarié de projection	151
7.1.3 Le lien entre le cadre et le GSE	152
7.2 Transformation du flux brut en flux risqué	153
7.2.1 L'utilisation d'une structure par terme de probabilités de défaut : une erreur de raisonnement ?	154
7.2.2 Exploitation des primes CDS	155

L'implémentation du modèle ALM et son efficacité reposent en grande partie sur le dressage des échéanciers de flux obligataires auxquels le portefeuille d'actifs est soumis. Etant donné le poids de la poche obligataire dans le portefeuille, il est nécessaire de projeter correctement les flux en intégrant le risque de crédit de chaque entité émettrice. Dans un premier temps, nous décrivons la procédure de dressage des échéanciers de flux. Puis, dans un second temps, la question de l'écrêtage des flux est étudiée via l'utilisation du modèle de crédit développé dans ce cadre. Plusieurs techniques de prise en compte du risque de crédit "futur", projeté par le générateur de scénarios économiques, sont exposées. Des éléments d'analyse sont développés au fil du chapitre. Les points évoqués dans ce chapitre sont purement qualitatifs. Ils sont abordés car certaines interrogations doivent être soulevées en ce qui concerne l'intégration du modèle de crédit à un modèle ALM. La diffusion des séries temporelles par le GSE ne faisant pas partie du sujet de ce mémoire, on s'abstient de développer l'étude sur les résultats des projections des facteurs de risque. L'aspect calibration et le fonctionnement général du modèle de série temporelle multivarié sont cependant résumés, présentant ainsi un exemple de GSE adapté au cadre de valorisation de ce mémoire. Il a en effet été jugé important d'éclairer le lecteur en lui présentant un exemple d'application du cadre de valorisation dynamique à la construction d'un GSE.

7.1 Construction des échéanciers de flux

L'élaboration d'un échéancier de flux obligataires est un exercice simple pour des obligations à maturité fixée et à taux fixe, mais qui peut vite s'avérer complexe et fastidieux lorsque le portefeuille obligataire est diversifié. En outre, une multitude de variétés d'obligations sont disponibles à l'achat sur les marchés financiers. Elles peuvent posséder des caractéristiques contractuelles des plus simples aux plus élaborées, ce qui doit contraindre l'investisseur et le gestionnaire de portefeuille à avoir une vision claire des flux bruts futurs ainsi que des potentielles options sous-jacentes à chaque obligation qui constitue le portefeuille. De plus, il est d'usage de rencontrer des obligations dont les flux futurs sont indexés sur un taux ou un indice, rendant le dressage des échéanciers d'autant plus complexe. Dans cette section, nous traitons le calcul de ces flux ainsi que leur liaison avec les *output* du générateur de scénarios économiques.

7.1.1 Calcul des *cash-flow* bruts

Les *cash-flow* bruts représentent les flux financiers générés par les obligations du portefeuille, sans aucune modification, tels qu'ils sont contractuellement spécifiés. Ils peuvent être déterministes, c'est-à-dire prédéterminés dans les clauses du titre financier (comme c'est le cas pour l'obligation à taux fixe) ou stochastiques donc aléatoires (obligation à taux variable, indexée ou *callable*). Dans ce dernier cas, seul le mode de calcul du flux est présent parmi les clauses. Si l'on souhaite apprécier l'évolution de la valeur de ce flux dans le futur, il faut recourir à l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques pour projeter le ou les indices et grandeurs économiques nécessaires au calcul du flux futur.

Les flux générés par le portefeuille obligataire peuvent être de plusieurs natures :

- Fixes : Le taux de coupon fixé contractuellement est l'unique facteur qui s'applique au nominal et qui génère le flux. En notant c le taux de coupon annuel, f la fréquence de paiement et N le nominal de l'obligation, le flux perçu à chaque date de versement est : $f c N$.
- Variables : Le flux perçu dépend d'un taux de coupon fixe, d'une borne supérieure (*cap*) et d'une borne inférieure (*floor*) fixés contractuellement (les bornes peuvent être infinies lorsqu'elles ne sont pas spécifiées). Il dépend également d'un taux d'intérêt flottant, qui évolue au fil de la vie de l'obligation et qui sert de taux d'indexation. La maturité de ce taux est spécifiée dans le contrat. Le taux variable et le taux de coupon annuel s'ajoutent, de sorte qu'à chaque date de paiement, en notant L_v le taux d'indexation retenu à la révision pour le paiement et (K_-, K_+) le couple de bornes, le créancier perçoit périodiquement : $f \min \left(\max (c + L_v, K_-), K_+ \right) N$.
- Indexés inflation : Dans ce cas, le nominal est indexé sur l'inflation, c'est-à-dire qu'à chaque date de paiement, le flux perçu est ajusté de la variation d'inflation depuis l'émission de l'obligation. Le ratio de l'indice d'inflation à la date de paiement sur l'indice à l'émission constitue ce que l'on appelle "le coefficient d'indexation". Le nominal à la maturité est généralement garanti en cas de déflation par rapport à l'indice d'émission. De plus, tout comme dans le cas du coupon variable, l'indice d'inflation est révisé périodiquement. A une date de paiement fixée, en notant I_r la valeur de l'indice révisé et I_E la valeur de l'indice à l'émission de l'obligation indexée, le détenteur de l'obligation perçoit : $f c \frac{I_r}{I_E} N$. A la maturité, le nominal est remboursé *a minima* et le créancier perçoit : $\max \left(\frac{I_r}{I_E}, 1 \right) N$ en plus du coupon, où T est la date de maturité. En fait, dans la pratique, l'indice d'inflation est publié mensuellement et au moment du paiement, l'indice correspondant n'est généralement pas encore connu. Celui qui est effectivement utilisé est dans ce cas une moyenne des indices publiés sur les 2 à 3 derniers mois (suivant la convention du contrat).

7.1.2 Fonctionnement général du modèle multivarié de projection

Nous proposons ici un moyen d'appliquer ce cadre à la création d'un générateur de scénarios économiques monde réel cohérent avec l'approche martingale. Cette hybridation garantit globalement la subsistance de l'hypothèse d'AOA tout en permettant une projection de facteurs de risque interprétables.

Le cadre de valorisation dynamique érigé dans la présente étude s'inscrit dans l'élaboration du modèle ALM (modèle interne) de l'entreprise Malakoff Humanis. Le fonctionnement d'un tel modèle repose sur un outil de projection de grandeurs économiques et de facteurs de risque : le générateur de scénarios économiques. Les séries temporelles extraites des variables inobservables des modèles ainsi que les indices à projeter sont utilisés pour calibrer un ou plusieurs modèles de série temporelle, dans le but de pouvoir effectuer de la prédiction. Les résultats des prédictions, en particulier la moyenne ainsi que des quantiles judicieusement choisis, sont intégrés au modèle et peuvent notamment servir d'aide à la décision. De part la multitude de variables inobservables rendues observables par les séries extraites, ainsi que la variété des séries à projeter, il est nécessaire de penser le modèle de telle sorte qu'il intègre une interdépendance entre les variables dans ses projections. Ainsi, pour tenir compte de la corrélation des facteurs de risque et autres séries chronologiques à prédire, le générateur de scénarios économiques utilisé dans le modèle ALM développé est un modèle de série temporelle multivarié.

Lors du choix de la spécification du cadre et des modèles financiers, plusieurs options s'offrent au praticien concernant la construction de la structure de corrélation entre les facteurs de risque. Ici, le choix s'est porté vers une structure de corrélation "embarquée", résultat du caractère non-diagonal des matrices de coefficients d'un modèle de série temporelle multivarié. En effet, ces matrices d'autorégression régissent les relations d'interdépendance entre les séries projetées, et sont un moyen économique et robuste de corréler des séries sans passer par l'étape de spécification des corrélations "couple de variables par couple de variables" (comme dans le cas des copules par exemple). Ce modèle de série temporelle sophistiqué, connu sous l'acronyme MS-VAR (*Markov-Switching Vector AutoRegressions*), contient non seulement une structure de corrélation non spécifiable par les outils classiques tels que les copules, mais également une propriété de changement de régime permettant d'adapter un modèle autorégressif multivarié à chaque état probable de la nature. Ce modèle est donc à volatilité stochastique, rapprochant un peu plus le cadre de projection de la réalité des marchés. De plus, bien que la plupart des mouvements browniens spécifiés dans le cadre de valorisation soient supposés indépendants, les facteurs de risque projetés sont *in fine* rendus corrélés entre eux par le modèle de projection. En fait, ici, les mouvements browniens ne sont que des outils de valorisation des produits financiers : ils ne servent pas à la diffusion des processus en monde réel. La corrélation qui découle d'un tel modèle de série temporelle est structurellement différente de celle induite par la spécification d'une matrice de corrélation en facteur d'un brownien multidimensionnel (que l'on observe d'ailleurs souvent dans les spécifications de modèles et cadres financiers AOA à plusieurs facteurs).

Plus précisément, le modèle MS-VAR contient un vecteur de paramètres dépendant du temps mais, conditionnellement à un régime inobservable, les paramètres sont indépendants du temps. Ainsi, conditionnellement à l'état, c'est un modèle autorégressif vectoriel qui est utilisé. La fonction de génération des états du modèle est une chaîne de Markov irréductible et ergodique. Les probabilités de transition d'un état à un autre sont calibrées et le nombre d'états est choisi sur avis d'expert après une succession de tests. Les matrices d'autorégression ainsi que les matrices de volatilité dépendent de chaque état. Les bruits sont supposés de loi normale, mais la représentation *state* du modèle est quant à elle non gaussienne, conséquence des changements d'état qui ne sont pas lisses mais plutôt de type impulsion de Dirac. Ce type de changement de régime induit un processus stochastique de volatilité "en escaliers", assurant l'hétéroscédasticité des séries projetées. De plus, les transitions de régime engendrent des variations discontinues des paramètres du modèle, ce qui implique une impossibilité d'évaluation de la vraisemblance par filtrage de Kalman.

La calibration d'un tel modèle repose en premier lieu sur des méthodes de filtrage de type BLHK (Baum-Lindgren-Hamilton-Kim), pour combler l'impossibilité d'utilisation du filtre de Kalman dans ce cas d'étude. Le filtre permet d'exprimer la vraisemblance par une estimation de la partie de la vraisemblance associée aux variables inobservables. Une fois cette étape franchie, l'al-

gorithme *Expectation-Maximization* maximise la vraisemblance par itérations successives à partir du point d'initialisation, puis des algorithmes de programmation dynamique tels que l'algorithme de Viterbi sont exploités dans la recherche de la succession d'états la plus probable sur l'historique conjoint des séries et, par le même travail, pour l'estimation de la matrice de transition.

La construction de l'outil de projection, sa calibration et l'ensemble des méthodes de filtrage et des méthodes de calibration brièvement décrites dans cette partie ne sont pas développés dans ce mémoire. Une étude de qualité est réalisée sur ce modèle dans la thèse de Droumaguet M. [19] [2012] et une exploration parcimonieuse des modèles de série temporelle à *regime-switching* et de leurs applications à la finance est effectuée dans l'ouvrage de Kim C. et Nelson C. R. [4] [1999]. On poursuivra ce chapitre en admettant la disponibilité du générateur de scénarios économiques MS-VAR proprement calibré et opérationnel.

7.1.3 Le lien entre le cadre et le GSE

L'objectif d'un tel outil, dans le cadre de valorisation dynamique, est d'effectuer des prédictions sur les prix d'obligations structurées dans un portefeuille diversifié, ainsi que des prédictions sur les flux qui découlent directement du portefeuille obligataire. Comme expliqué précédemment, ces flux peuvent être fixes, variables ou indexés sur l'inflation : il faut donc utiliser les projections du GSE lorsque l'on souhaite dresser les échéanciers de flux. Lorsque le coupon est variable, c'est la déformation de la structure par terme de taux d'intérêt, induite par les facteurs de risque du modèle de taux, qui va être déterminante dans l'évolution de la valeur brute de ce coupon. Lorsqu'il est indexé sur l'inflation, ce sont les projections de l'indice d'inflation qui sont utilisées. Pour chaque scénario est dressé un unique échéancier de flux bruts. Par ailleurs, lorsqu'il s'agit de la projection de la valeur de marché des obligations, les projections de multiples facteurs de risque sont amenées à être exploitées.

- Obligation à taux fixe : Paramètres du modèle AFNS nominal pour le prix du zéro-coupon P , paramètres du modèle de crédit à intensité pour les fonctions de décote F et W associées au risque de crédit ainsi que ceux du modèle de liquidité pour la fonction de décote V associée au risque de liquidité ;
- Obligation à taux variable : Paramètres du modèle AFNS nominal pour le prix du zéro-coupon ainsi que la fonction vectorielle de volatilité déterministe Γ qui apparaît dans l'EDS dont le prix du zéro-coupon est solution, paramètres du modèle de crédit à intensité et ceux du modèle de liquidité.
- Obligation indexée sur l'inflation : Paramètres des modèles AFNS nominal et réel pour le prix du zéro-coupon nominal et celui du zéro-coupon réel, ainsi que pour le calcul des fonctions de volatilité déterministe des prix de zéro-coupon. Les régresseurs du modèle de réplcation et de lissage de la surface de volatilité implicite des *cap* inflation sont également en *input* de la formule de prix de l'option qui apparaît dans l'évaluation de l'obligation, ainsi que les paramètres du modèle de crédit et ceux du modèle de liquidité puis, pour finir, la série chronologique de l'IPC d'indexation.

L'ensemble des paramètres et séries chronologiques qui découlent de la calibration du cadre de valorisation est utilisé dans la projection des prix. Un résumé du jeu complet de paramètres ainsi que de l'objectif de chaque modèle est présenté dans le tableau ci-dessous.

7.2 Transformation du flux brut en flux risqué

Modèle	Paramètres extérieurs	Paramètres intérieurs	Séries temporelles	Fonction du modèle
AFNS Nominal	Σ_n, λ_n	-	$X_0^{n,0}, X_0^{n,1}, X_0^{n,2}$	Modéliser le taux court nominal en vue de diffuser la structure par terme des prix du zéro-coupon nominal.
AFNS Réel	Σ_r, λ_r	-	$X_0^{r,0}, X_0^{r,1}, X_0^{r,2}$	Modéliser le taux court réel en vue de diffuser la structure par terme des prix du zéro-coupon réel.
Lissage de surface	-	-	$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$	Modéliser la surface de volatilité implicite, reproduire ses variations au cours du temps ainsi que le <i>smile</i> et le <i>skew</i> , dans le but d'évaluer l'option qui apparaît dans le prix de l'OATi.
Crédit	$\alpha, \beta, \sigma, p, \lambda_{\text{lissage}}$	λ_0	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$	Evaluer les CDS en toute maturité de 0 à 50 ans, intégrer le risque de crédit dans l'évaluation des obligations (par des paramètres qui permettent la reproduction des prix des CDS) et construire des indicateurs de risque de crédit à partir de l'information extraite du marché.
Liquidité	$\eta \lambda_{\text{lissage}}$	γ_0	$\beta_0, \beta_1, \beta_2$	Evaluer l'obligation structurée à partir de paramètres calibrés puis lissés, intégrer le risque de liquidité dans sa valorisation et pouvoir valoriser dans le temps un portefeuille obligataire diversifié.

TABLE 7.1 – Tableau récapitulatif des modèles du cadre de valorisation dynamique d'obligations structurées, des paramètres en *output* ainsi que des séries chronologiques qui caractérisent les facteurs de risque du cadre

Il est possible de procéder à une réduction de dimension du générateur de scénarios économiques par :

- Un changement de segmentation des entités de crédit (par exemple, plutôt que de travailler sur les notations pour les *corporate*, on peut envisager de différencier uniquement deux émetteurs par leur caractère financier ou non ; il est aussi envisageable de regrouper des pays selon une caractéristique commune).
- L'utilisation de fonctionnelles de lissage moins gourmandes en terme de régresseurs (et donc en dimensions). Ce point a été évoqué lors de la calibration des fonctionnelles de Nelson-Siegel sur les structures par terme de paramètres implicites.
- La recherche de fonctions déterministes qui caractériseraient des relations entre les paramètres du modèle. Par exemple, il peut être intéressant de construire des relations affines (notamment au moyen d'une régression linéaire) entre les séries temporelles de régresseurs β obtenues lors du lissage.

7.2 Transformation du flux brut en flux risqué

Dans le but de rendre d'autant plus exploitable le modèle de crédit, on cherche à spécifier une méthode de référence pour intégrer le risque de défaut aux échéanciers de flux obligataires. Ce processus de quantification du risque passe principalement par l'application de décotes aux flux futurs (tombées de coupon et remboursement du nominal). Cette section vise à apporter des

éléments de réponse à la question suivante : comment impacter les flux risqués futurs de manière pertinente ?

7.2.1 L'utilisation d'une structure par terme de probabilités de défaut : une erreur de raisonnement ?

Afin de rendre compte du risque de crédit de chaque poche obligataire du portefeuille dans sa projection, il peut être envisagé de diminuer les flux perçus. La simulation des processus de Poisson qui caractérisent les temps de défaut de chaque obligation est à proscrire dans un tel cadre. En effet, d'une part parce que les processus sont inhomogènes donc leur simulation nécessite une méthode de type *acceptance-rejection* (méthode de rejet de John von Neumann), ce qui peut engendrer des temps de calcul non négligeables lorsqu'il s'agit d'en simuler un nombre important. Ici, en l'occurrence, il est impossible de simuler un temps de défaut par *rating* ou par pays, étant donné que la réalisation d'un défaut reviendrait au défaut d'un groupe complet, ce qui pourrait entraîner des pertes colossales dans le portefeuille et ce, même en *bull market*. Il faudrait alors simuler un processus par sous-groupe voire par titre, ce qui est opérationnellement impossible. D'autre part, étant donné que lors de la projection des séries temporelles par le GSE, une simulation des régresseurs du processus d'intensité de défaut correspond à un scénario, l'idée serait de simuler de façon cohérente les temps de défaut pour chaque scénario ce qui serait absolument illusoire. Pour illustrer ce propos, cette idée équivaut à des raisonnements de simulations au sein même des scénarios et donc à des raisonnements incohérents.

On se concentre donc sur la recherche d'une méthode permettant d'appliquer une décote sur chaque flux. Cette décote doit dépendre essentiellement des facteurs de risque de crédit. On imagine sans difficulté que plus le flux est éloigné de la date *spot* dans le futur, plus la décote est susceptible d'être importante. De plus, il faut considérer que la série chronologique projetée doit avoir son importance à chaque pas de projection : il est impensable de ne pas prendre en compte l'état et les fluctuations des facteurs de risque de crédit à l'instant même où l'on évalue la décote. Par exemple, si l'on cherche à appliquer la quantification du risque de crédit à un flux perçu dans dix ans, il est fondamental de prendre en compte la santé économique de l'entité émettrice de dette à cette période. L'erreur consisterait à ne calculer la décote que sur la base de dates antérieures ou, comme nous verrons dans la suite, sur la base des paramètres *spot* (et donc sans utiliser les projections des facteurs de risque).

On note dans la suite $D^\downarrow(T, \Theta)$ la fonction de décote appliquée à un flux obligataire perçu $T > 0$ année(s) après la date *spot* de projection 0, où la variable Θ est le vecteur des paramètres et facteurs de risque projetés, calibrés dans le cadre de valorisation dynamique (paramètres du LMN et régresseurs de l'intensité de défaut λ_0).

Comme évoqué précédemment, on cherche une fonction de décote telle que, $\forall \Theta, T \mapsto D^\downarrow(T, \Theta)$ soit décroissante. L'une des pratiques les plus répandues est d'appliquer les probabilités de défaut *spot*, déterministes et connues à l'instant initial. Dans ce cas, on utilise une unique structure par terme de probabilités de défaut et on applique à chaque flux la probabilité de survie associée. Typiquement, le flux risqué perçu à $0 + 20$ ans est décoté via la fonction de survie à 20 ans. On aurait dans ce cas, pour un flux de valeur F_{20} , à soustraire au flux brut la décote suivante :

$$D^\downarrow(20, \Theta) = (1 - F^\mathbb{P}(\lambda, 20)) F_{20}, \quad (7.1)$$

et donc à simplement calculer une fois la fonction F du modèle LMN.

Cette méthode présente deux principales limites :

- Les probabilités de défaut issues des modèles de crédit sont généralement risque neutre, notamment dans les modèles à intensité et les modèles structurels. Pour obtenir des structures par terme de probabilités monde réel, il faut dans ce cas spécifier un changement de mesure souvent arbitraire (voir la Section calibration du modèle de probabilités de défaut monde réel 4.2.3). Mais cette procédure impose une calibration de la "prime de risque" sur un jeu

de données de probabilités monde réel. D'une part, l'échelle des valeurs à reproduire est très faible ce qui rend les petites erreurs de calibration plus dangereuses pour l'efficacité et la robustesse du modèle. D'autre part, cette spécification de "prime de risque" repose sur une hypothèse de modélisation supplémentaire dont la validité est fortement discutable (on suppose la prime de risque proportionnelle à la racine carrée de l'intensité de défaut, de manière à n'effectuer qu'une translation du paramètre de vitesse de convergence dans la dynamique).

- Utiliser systématiquement la structure par terme initiale de probabilités de défaut revient à ne pas prendre en compte l'évolution et les fluctuations des facteurs de risque de crédit entre la date initiale de projection et la date de perception du flux risqué. Typiquement, le générateur de scénarios économiques diffuse les facteurs de risque dans le temps et par conséquent, il projette les régresseurs de reconstruction des structures par terme de paramètre d'intensité λ_0 et donc de probabilités de défaut lissées. Cela signifie qu'appliquer exclusivement les probabilités de défaut vues de la date *spot* revient à oublier l'utilité des projections du GSE. Pour autant, il serait inacceptable d'imaginer, dans un scénario tel qu'un flux risqué "probablement" perçu est transféré dans un contexte de crise financière, que le risque croissant soit complètement balayé en ne considérant que le risque vu de la date *spot*. C'est pourquoi il est fondamental de s'intéresser à ce sujet, bien que très peu et même jamais exploré, et de procéder à la recherche d'une fonction de décote appropriée au cadre ALM. Quand bien même la fonction ne serait ni une probabilité, ni une quantité rigoureusement définie mathématiquement, elle constituerait une "méthode" sur laquelle le praticien pourrait se référer pour construire des indicateurs de risque de crédit pertinents.

7.2.2 Exploitation des primes CDS

Nos recherches sur la construction d'une fonction de décote de crédit nous ont amené à considérer plusieurs techniques potentiellement applicables dans le modèle ALM. Ces procédures se basent sur le calcul des primes CDS futures à partir des séries projetées par le GSE. Ainsi, ces méthodes quantifient des pertes potentielles en prenant en considération l'évolution du risque de crédit, et ce sur tout l'horizon de projection des scénarios.

Le point fondamental est l'interprétabilité directe en monde réel des primes CDS : contrairement aux probabilités de défaut issues du modèle de crédit LMN (d'abord spécifiées sous la mesure risque neutre), les primes CDS ne nécessitent aucun changement de mesure pour être utilisables en tant que telles dans un échéancier de flux. Ce n'est pas le cas des probabilités de défaut qui reposent sur un modèle de changement de mesure de probabilité (prime de risque), imposant d'ajouter une procédure de calibration au cadre, ce qui a pour conséquence une augmentation des erreurs commises sur l'extraction de l'information du marché. Remarquons par ailleurs que l'utilisation de la fonction de prime CDS du LMN, plutôt que des probabilités de défaut, permet d'intégrer directement le paramètre de *recovery rate* dans la décote. C'est un avantage considérable, compte tenu du fait que l'intégration de la *recovery* dans la méthode par probabilités de défaut n'est en aucun cas trivial.

Considérons deux méthodes en guise d'exemples.

- En partant du constat qu'il suffit de s'assurer contre le défaut de l'entité émettrice de l'obligation détenue en portefeuille, il est envisageable de simplement acheter un contrat CDS à la date *spot* de projection, couvrant jusqu'à maturité de l'obligation. Dans le cadre de valorisation dynamique, le modèle de lissage et d'extrapolation des primes CDS sur les maturités élevées (supérieures à 10 ans) permet de couvrir les obligations long terme du portefeuille.

Néanmoins, cette idée sous-entend le paiement périodique d'une prime CDS calculée *spot*, donc déterministe. Dans ce cas, les scénarios du GSE ne sont pas exploités, et c'est précisément ce que l'on souhaite éviter.

Il vient naturellement l'idée d'effectuer une stratégie d'achat/vente de contrats CDS au cours du temps jusqu'à remboursement du capital. Cette stratégie permet d'utiliser les prix calculés sur les scénarios à partir des paramètres projetés, et donc de prendre en compte l'information sur les fluctuations à venir dans le marché du crédit.

Formellement, il s'agit de considérer une subdivision régulière de dates $(t_i)_{i \in [0, n]}$, $t_0 = 0$ et $t_n = T$ où T est la maturité d'une obligation de nominal 1 dont le flux terminal est noté Ψ_T . Cette subdivision peut être par exemple celle des pas de temps de diffusion du GSE (journalier, hebdomadaire, mensuel,...). L'idée est d'acheter un contrat CDS à la date *spot*, couvrant jusqu'à la maturité de l'obligation, puis de procéder à une opération d'achat/vente à chaque pas de temps. A la fin de la période $[0, t_1]$, on revend le contrat CDS acheté en 0 puis on achète en t_1 un contrat CDS couvrant jusqu'à la maturité, donc de maturité $\tau_1 = T - t_1$. En suivant ce raisonnement, pour tout $i \in [1, n]$, on achète un contrat CDS de maturité $\tau_i = T - t_i$ évalué en t_i au début de la période $[t_i, t_{i+1}]$, que l'on revend à la fin de cette période (dont la valeur est celle en t_i , mais cette fois de maturité $\tau_{i+1} = T - t_{i+1}$).

Le schéma ci-dessous résume les flux à chaque pas de temps de projection. Pour conserver de la cohérence dans les notations de cette partie avec celles introduites dans les autres parties, on note $s_t(\Theta; T)$ la prime CDS évaluée à la date de projection t , de maturité T , calculée à partir du jeu de paramètres de crédit Θ .

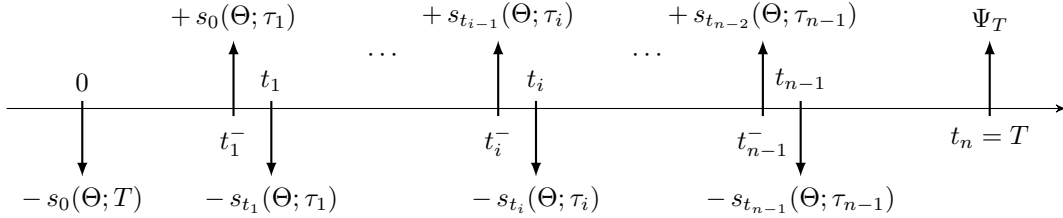


FIGURE 7.1 – Technique de décote des flux obligataires par stratégie d'achat/vente itérative

La coût total sur la durée de vie résiduelle de l'obligation s'écrit :

$$D^\downarrow(T, \Theta) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(s_{t_{i-1}}(\Theta; \tau_i) - s_{t_i}(\Theta; \tau_i) \right) - s_0(\Theta; T). \quad (7.2)$$

En utilisant cette méthode dans les projections du bilan, il apparaîtrait un flux sortant à la date *spot*, puis des flux périodiques qui prennent des valeurs tantôt négatives (dans le cas d'une détérioration de la qualité du crédit), tantôt positives (dans le cas, *a contrario*, d'une appréciation de la qualité du crédit). Cette méthode permet donc de prendre en compte l'évolution du risque de crédit obtenue sur l'ensemble des scénarios.

- A partir de cette méthode, il est alors aisé de construire d'autres méthodes d'intégration du risque de crédit dans la construction des échéanciers de flux. Il peut être envisagé, par exemple, de cumuler les flux d'achat/vente et de les inscrire dans l'échéancier uniquement aux dates de paiement des coupons. Pour illustrer ce procédé, si les coupons sont payés annuellement et que le pas de projection du GSE est mensuel, cela reviendrait alors à considérer uniquement à chaque date de paiement une somme de 12 différences de primes CDS, consécutive aux 12 opérations d'achat/vente opérées mensuellement sur l'année (en achetant et vendant de la même manière que dans la stratégie précédente).

Le choix d'une technique d'application de décote doit dans tous les cas reposer sur une étude concrète de son impact sur les indicateurs financiers. Le développement d'une procédure d'intégration du risque de crédit sur les échéanciers de flux dépend *in fine* des choix de modélisation du praticien ainsi que de son niveau de prudence, après comparaison des impacts financiers de chaque méthode.

Chapitre 8

Extraction de courbes de rendement

Sommaire

8.1 Taux de coupon implicite	158
8.2 Reconstruction de l'historique	159

La projection du bilan de l'entreprise, dans un cadre ALM, doit inclure la mise en place de stratégies de réinvestissement du *cash* en dynamique, de sorte à refléter plus précisément l'évolution du portefeuille de l'entreprise. L'intérêt de ces stratégies étant de permettre, d'une part, de faire évoluer le portefeuille sur la base de décisions humaines, elles-mêmes fonctions du niveau d'adversité du scénario économique, et d'autre part, de corriger l'aspect cristallisé de l'allocation statique pour laisser place à un processus d'allocation dynamique. Ces stratégies de réinvestissement concernent en particulier les coupons et nominaux versés par la partie crédit qui est un morceau important du portefeuille des assureurs. La problématique qui se pose est alors de déterminer quelles sont les caractéristiques des obligations (structurées ou à taux fixe) qui seront disponibles sur le marché sur l'horizon de projection. Plus précisément, la projection de structures par terme de taux de coupon est rendue nécessaire. Nous proposons dans ce chapitre d'appliquer le cadre de valorisation dynamique à la reconstruction de ces structures par terme et à leur projection dans le temps. On développe dans un premier temps la méthode d'extraction implicite de ces taux de rendement avant d'exposer l'efficacité du cadre par l'indissociabilité qu'il induit entre les paramètres de crédit, de liquidité, de taux d'intérêt et les courbes de taux de coupon. Plus précisément, les courbes de rendement sont contruites et projetées de manière cohérente avec l'ensemble des facteurs de risque.

8.1 Taux de coupon implicite

Dans le cadre d'un modèle ALM, les projections du bilan sur horizon long-terme nécessitent d'envisager des stratégies de réinvestissement du *cash* perçu dans le futur. Plus précisément, les réglementations qui encadrent l'allocation ainsi que l'aversion au risque de l'assureur contraignent ce dernier à réinvestir une partie importante des flux perçus sur la période en titres obligataires peu risqués. La modélisation de l'investissement dans une telle classe d'actif a besoin des paramètres inhérents au *pricing* des titres qui seront potentiellement achetés dans le futur. L'ensemble de ces paramètres sont projetés par l'intermédiaire d'un cadre de valorisation dynamique tel que celui présenté dans ce mémoire, mais également d'un modèle de structure par terme de taux de coupon. Par exemple, si l'algorithme de réinvestissement est amené à décider de l'investissement de 1 million d'euros en obligation à taux fixe de maturité 10 ans (souveraine ou *corporate*), la question est de savoir quel sera le taux de coupon de marché associé à un tel titre dans le futur.

La difficulté d'une telle modélisation se trouve dans la conservation de la cohérence entre les facteurs de risque du cadre. En effet, dans l'idéal, on souhaite que des perturbations du niveau général des taux d'intérêt, du risque de crédit ainsi que du risque de liquidité engendrent de manière certaine des déformations de la structure des taux de coupon. Ainsi, dans un scénario adverse (par exemple un scénario de crise), il est fondamental que le coupon des obligations proposées par le marché soit fortement impacté par l'évolution brusque du risque de crédit. L'interdépendance entre les facteurs de risque, inhérente à leur projection par un modèle de séries temporelles multivarié, induit de cette manière des corrélations complexes entre ces facteurs et la courbe de taux de coupon.

Dans le cadre de valorisation dynamique, la relation, induite par la modélisation, entre les différents facteurs de risque et la courbe de rendements obligataires assure la propriété de dépendance entre le taux de coupon projeté et les risques de marché évoqués. Les structures par terme de coupon sont projetées au moyen de leur reconstruction à partir des paramètres des modèles qui servent à valoriser les obligations dans le futur. Elles sont, de cette manière, expliquées par l'ensemble des facteurs de risque inhérents à l'obligation. L'avantage d'une telle construction est de casser avec les usages actuariels qui sont de modéliser la structure par terme de *bond yield* par une équation d'état pour laquelle la variable à expliquer n'est finalement expliquée que par elle-même.

Lors de la projection du bilan, les réinvestissements dans la classe crédit sont effectués sur des obligations émises au pair, c'est-à-dire dont le prix est égal au nominal. Les coupons sont donc reconstruits de manière implicite à partir d'obligations émises au pair, par les formules d'évaluation qui leur sont associées dans le cadre de valorisation.

Pour une obligation à taux fixe de maturité résiduelle T et de LGD ω , le coupon implicite c , fonction du vecteur des facteurs AFNS X , des paramètres lissés de crédit λ et de liquidité γ , s'écrit :

$$c(X, \lambda, \gamma, T, \omega) = \frac{1 - P(X, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) - (1 - \omega) \int_0^T P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt}{\int_0^T P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt}. \quad (8.1)$$

Les stratégies de réinvestissement peuvent également être construites de manière à permettre à l'algorithme d'investir le *cash* en obligations structurées telles que des obligations indexées ou à taux flottant. Dans ce cas, le schéma reste le même pour ce qui est de l'extraction du taux de coupon implicite. Il faudra cependant veiller à discuter de la gestion des bornes *cap* et *floor* qui encadrent le *spread* contractuel majoré du taux variable qui constituent le taux de coupon de la FRN. Il est à noter que dans ce cas, la courbe de taux implicite que l'on extrait est celle du *spread*.

L'Expression 8.1 du coupon implicite rend compte de l'impact des fluctuations des facteurs de risque sur les déformations de la structure par terme de rendements obligataires. Le cadre de valorisation apporte un élément de réponse à la question de cohérence entre l'ensemble des facteurs de risque en vue de projeter des courbes de coupons.

8.2 Reconstruction de l'historique

On s'intéresse à la validité du modèle de courbe de rendements obligataires. En particulier, on s'interroge sur la qualité de l'historique de coupons (des obligations à taux fixe) ainsi obtenu avec le modèle calibré. Cela consiste à vérifier que les courbes de rendement observées dans le passé en *mark-to-model* ont la même allure que celles effectivement observées sur le marché, tant en terme de valeurs qu'en terme de fluctuations.

Pour cela, on extrait implicitement les coupons sur l'historique à partir des paramètres du cadre (facteurs de risque de crédit, taux, liquidité, etc...) en suivant la méthode présentée précédemment. Les structures par terme historiques ainsi extraites sont comparées aux séries chronologiques de l'indice de référence des rendements obligataires français (OAT). Cet historique est observé sur Bloomberg, en journalier du 01/01/2010 au 23/01/2019, aux maturités suivantes : 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 6 ans, 7 ans, 8 ans, 9 ans, 10 ans, 15 ans, 20 ans, 25 ans et 30 ans.

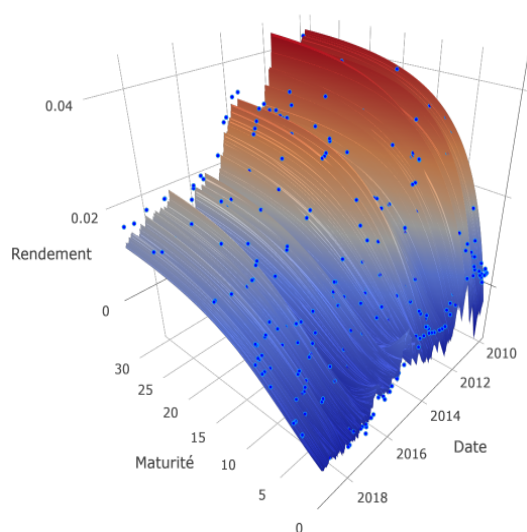


FIGURE 8.1 – (Vue 1) Historique de taux OAT reproduit par le cadre (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus)

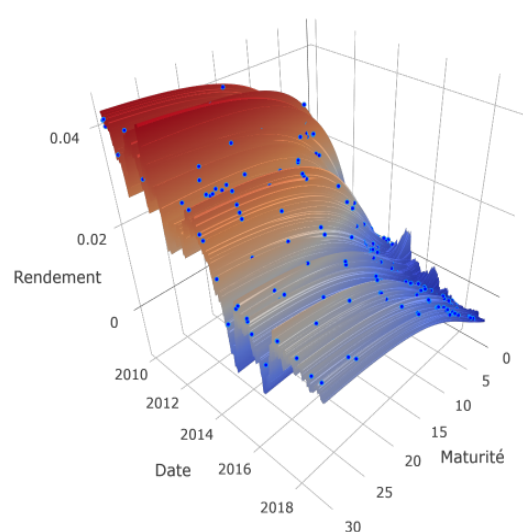


FIGURE 8.2 – (Vue 2) Historique de taux OAT reproduit par le cadre (surface), comparé à un échantillon de données historiques (points bleus)

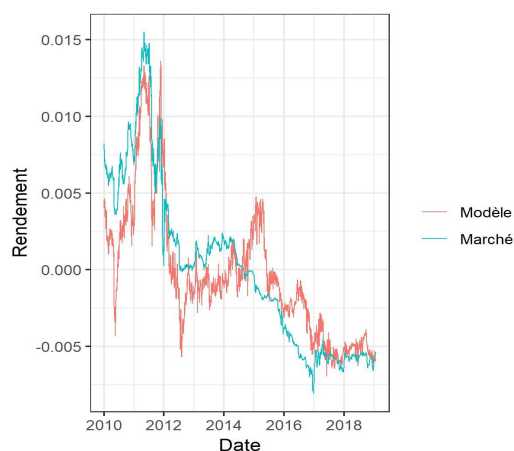


FIGURE 8.3 – Réplication du taux OAT 1 an

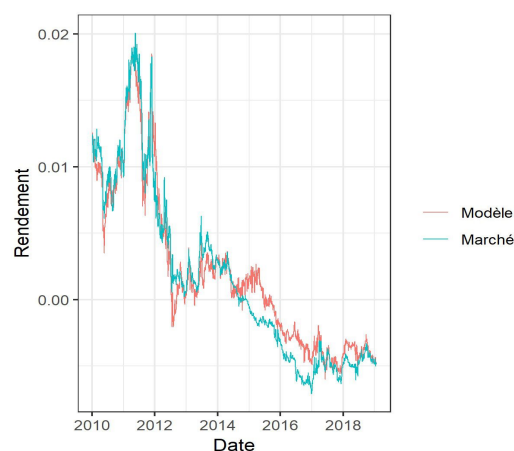


FIGURE 8.4 – Réplication du taux OAT 2 ans

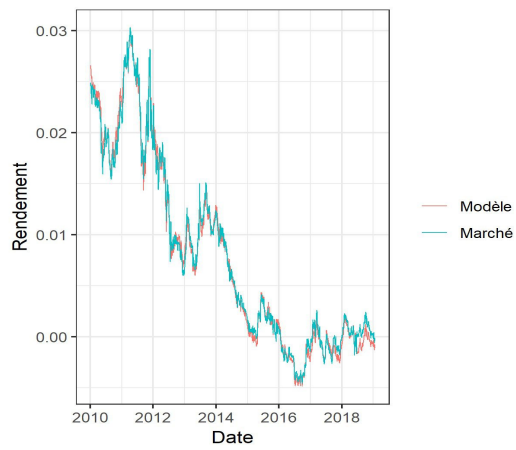


FIGURE 8.5 – Réplication du taux OAT 5 ans

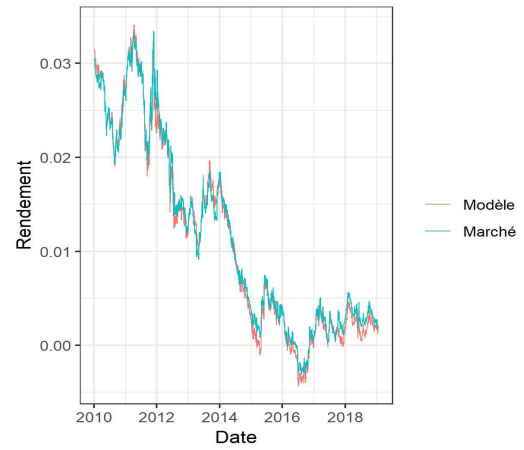


FIGURE 8.6 – Réplication du taux OAT 7 ans

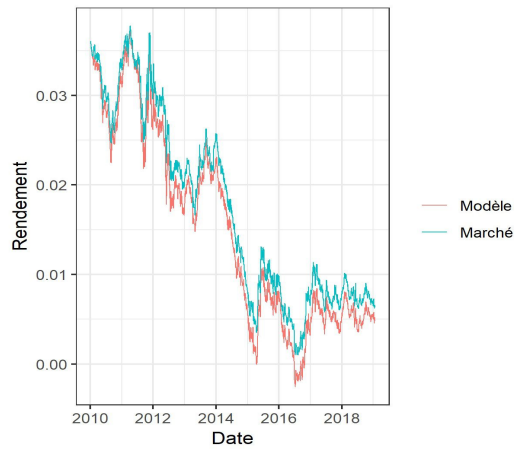


FIGURE 8.7 – Réplication du taux OAT 10 ans

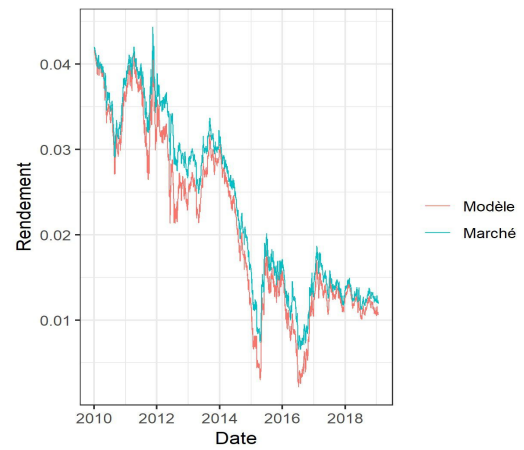


FIGURE 8.8 – Réplication du taux OAT 20 ans

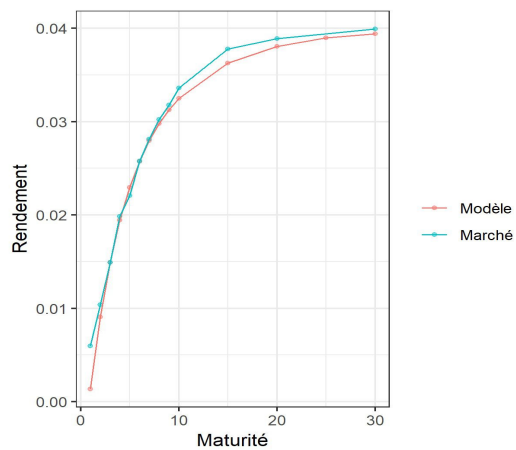


FIGURE 8.9 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 26 avril 2010

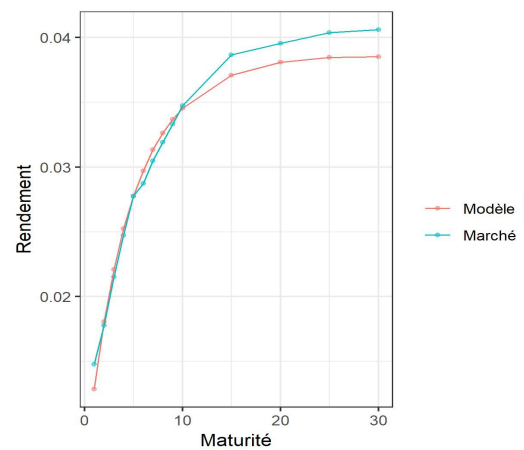


FIGURE 8.10 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 19 mai 2011

8.2 Reconstruction de l'historique

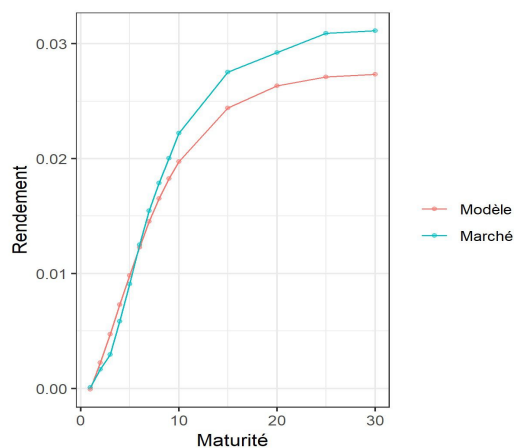


FIGURE 8.11 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 1er décembre 2012

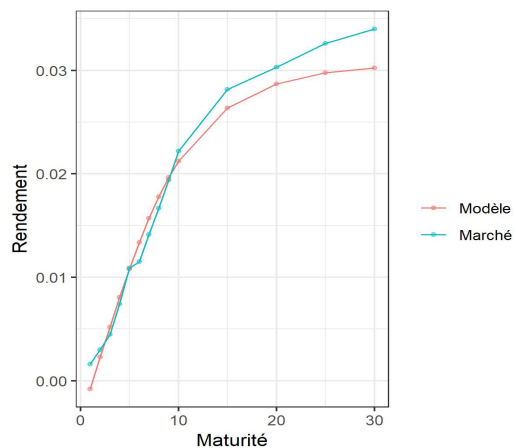


FIGURE 8.12 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 6 novembre 2013

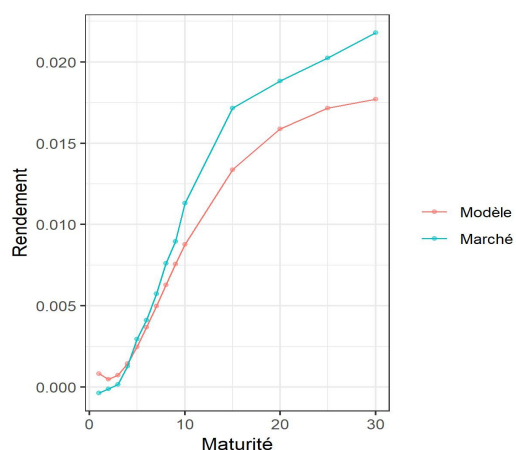


FIGURE 8.13 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 15 octobre 2014

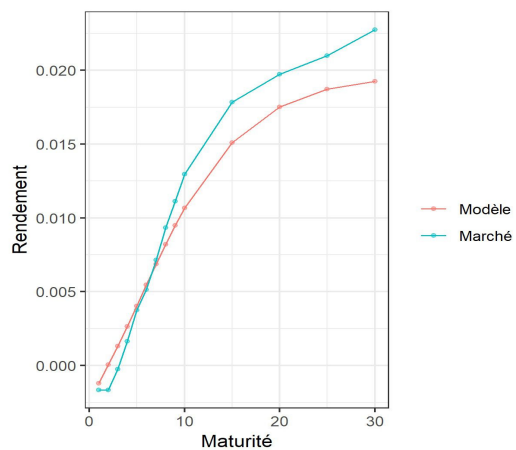


FIGURE 8.14 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 26 juin 2015

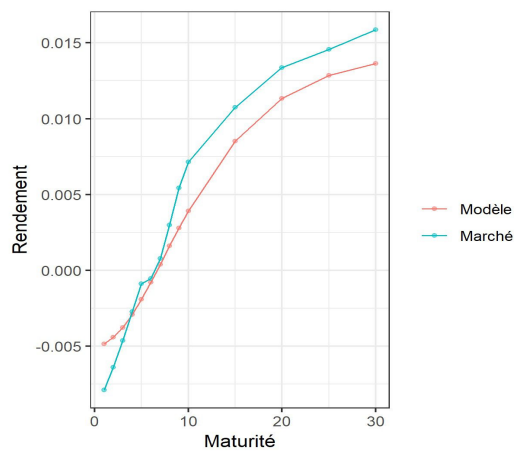


FIGURE 8.15 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 20 décembre 2016

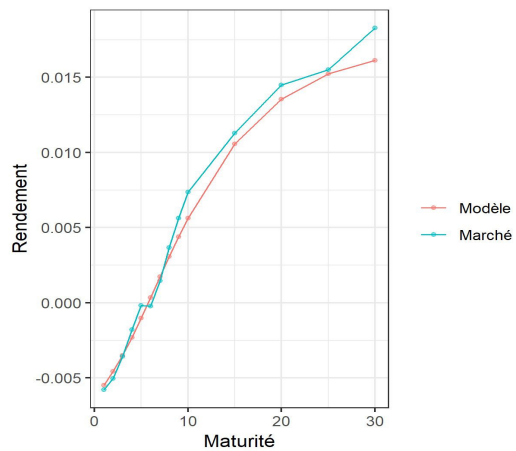


FIGURE 8.16 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 2 février 2017

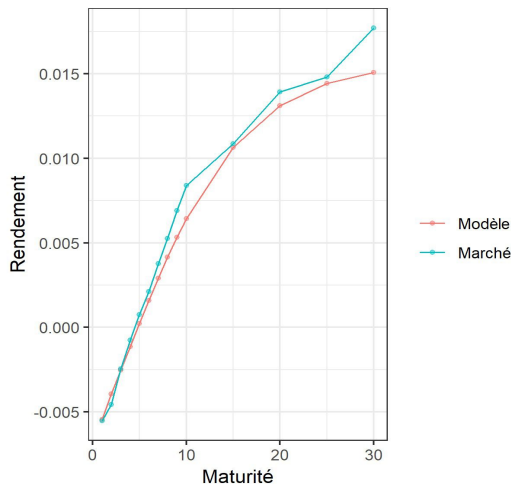


FIGURE 8.17 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 19 janvier 2018

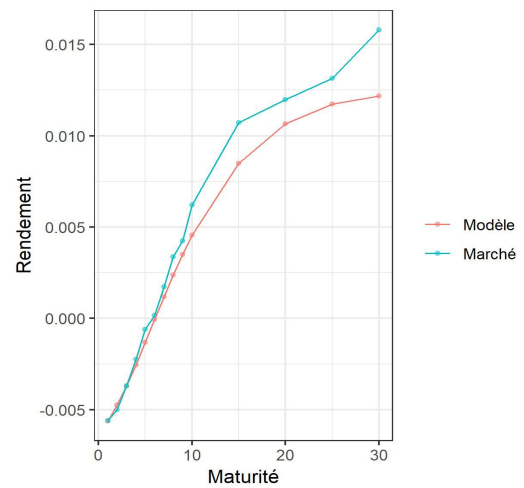


FIGURE 8.18 – Réplication de la structure par terme de taux OAT au 15 janvier 2019

On observe une réplication de très bonne qualité sur l'historique, en particulier pour les maturités moyen-terme et long-terme jusqu'à 20 ans. Généralement, le modèle est légèrement moins efficace dans la reproduction du taux 1 an et du taux 30 ans. Les rendements à maturités élevées (à partir de 20 ans) sont sous-évalués d'une trentaine de *bps* en moyenne, de 2012 à 2019.

Pour corriger cela, deux éléments du cadre peuvent être étudiés :

- Les prix asymptotiques des CDS, estimés dans la Section 4.2.3, sont potentiellement sous-évalués. L'aplatissement des structures par terme de CDS est trop marqué : il faut envisager de calibrer à nouveau un modèle de prix limite qui fournit des prix asymptotiques plus élevés que le précédent. On peut également envisager de calibrer un modèle paramétrique qui permette d'extrapoler les primes CDS aux maturités souhaitées, plutôt que de s'attacher à l'extraction de tels prix par une calibration spécifique du modèle LMN. Cette approche devrait cependant être l'objet d'une étude approfondie pour construire des contraintes potentiellement non-linéaires sur les paramètres afin de rendre la fonctionnelle d'extrapolation cohérente avec l'absence d'opportunité d'arbitrage.
- Une autre technique à envisager, sûrement évidente au premier abord, est de calibrer le modèle de liquidité *ab initio* sur les structures par terme de rendement obligataires. De cette manière, on s'assure de répliquer les taux souverains et ce, même après lissage des paramètres implicites γ_0 . Cette approche est attractive pour plusieurs raisons. D'une part, si l'objectif n'est plus, à l'instar de celui du cadre de valorisation, de reproduire les valeurs de marché mais plus particulièrement de reproduire les courbes de rendement, alors il paraît raisonnable d'effectuer la calibration directement sur l'objet d'intérêt. D'autre part, le coût opérationnel en terme de récupération de données est absolument négligeable en comparaison avec la méthode de calibration sur les prix, car il suffit simplement d'avoir l'historique de structures par terme, les maturités étant inchangées au cours du temps. Cette remarque illustre l'importance de penser le processus de calibration en amont, et de le développer sur les bases d'objectifs stratégiques de réplication.

Conclusion

Le modèle de Longstaff-Mithal-Neis à paramètres cristallisés s'avère insuffisant pour reproduire précisément les formes des structures par terme de primes CDS et ainsi permettre d'en extraire l'information de crédit implicite. Une modélisation du risque de crédit flexible, calibrée sur des historiques de prix de sorte à transférer l'information implicite vers des séries chronologiques de paramètres inobservables (intensités de défaut par exemple), est fondamentale pour la gestion des risques, le *pricing* des obligations de tout type, la projection des flux risqués dans un modèle ALM et l'élaboration des politiques financières des compagnies et institutions. Cependant, les modèles de crédit usuels sont généralement calibrés à paramètres constants, engendrant des difficultés dans la reproduction d'historiques de prix. De plus, la valorisation des obligations pose un nouveau problème car les hypothèses de cristallisation des paramètres rendent impossible la réplcation de la composante "crédit" des obligations, cette dernière s'avérant en pratique stochastique. En effet, de telles hypothèses sont mises en défaut dans le monde réel et l'on ne peut donc s'affranchir d'une calibration de paramètres implicites en "intérieur".

La procédure innovante de calibration que nous développons permet de reproduire des historiques de prix avec une précision remarquable, en construisant des séries chronologiques de facteurs de déformation. Les grandeurs implicites engendrées sont extraites "en brut" par un algorithme d'optimisation puis lissées par un modèle de régression linéaire dynamique. Ces facteurs inobservables, rendus observables par la procédure de lissage, forment un ensemble de séries temporelles propice à la construction d'un modèle linéaire dynamique multivarié. Ces processus stochastiques modélisent différents facteurs de risque inhérents à la modélisation financière multivariée (risque de taux, risque de crédit, risque de liquidité et risque d'inflation), permettant de diffuser des séries de paramètres en monde réel dans le but de projeter des prix, calculés sur la base de formules fermées obtenues par l'approche martingale "risque neutre".

De par la cohabitation imbriquée des différents modèles du cadre ainsi que son caractère hybride, les déformations des facteurs de risque dans le futur sont dès lors cohérentes avec les filtrations financières prospectives et permettent de reconstruire les prix de marché avec les formules de *pricing* obtenues au fil des développements mathématiques, en accord avec la mesure de probabilité historique. Comme évoqué dans la procédure de calibrage complète orientée et détaillée, notre principal objectif est la reproduction des prix la plus fidèle possible, parfois même au détriment du *fitting* de la structure des paramètres implicites. De plus, le cadre est suffisamment flexible pour étendre la modélisation à des produits structurés ou à des obligations structurées plus complexes (obligation à taux variable indexée sur l'inflation par exemple). En l'occurrence, il est possible de calibrer des modèles de nappe de volatilité implicite de la même manière que dans l'étude sur la nappe de volatilité des *cap* inflation. Ce modèle peut être adapté à une nappe de volatilité implicite *equity* tel que pour les options européennes sur indice action, sous réserve d'apporter des modifications à la spécification de la forme de la *moneyness* (notamment avec intégration d'un taux de dividende).

Le cadre d'application de ces travaux de modélisation porte sur l'évaluation dynamique de stratégies de couverture hybride d'un portefeuille financier par la prise en compte du risque de crédit des obligations souveraines et *corporate* ainsi que des déformations des structures par terme de leur *convenience yield*. De fait, il peut être utilisé dans un large périmètre pour des études ALM diverses et variées appliquées à l'assurance et à la finance. Bien qu'il s'agisse généralement de l'étude des obligations en valeur nette comptable, la reproduction des valeurs de marché des obligations représente un enjeu majeur lorsqu'il s'agit de calcul de réserves de capitalisation, de construction de stratégies de couverture hybride ou encore du calcul du taux de coupon d'un réinvestissement futur lors du rebalancement du portefeuille, à un scénario donné. Par ailleurs, le cadre

ainsi construit fournit un modèle de structure par terme de rendements obligataires. Ces courbes de taux construites à partir des facteurs de risque du cadre sont cohérentes avec celles observées sur le marché. On obtient de fait des courbes de rendements modélisées, éléments nécessaires dans le développement du modèle ALM, dont les déformations sont expliquées par l'ensemble des facteurs de risque qui ont permis leur extraction (risque de crédit, de taux et de liquidité). Leur similitude avec les courbes effectivement observées sur le marché ainsi que la corrélation induite entre les facteurs de risque et les rendements modélisés, démontrent le caractère harmonieux du cadre de projection.

Comment ce cadre peut-il vivre au sein d'un modèle ALM ? L'implémentation et le développement de ce modèle multifactoriel nécessitent de penser la structure et la coexistence des modèles financiers au préalable, de façon à minorer le nombre de dimensions à intégrer au générateur de scénarios économiques *in fine* : par exemple, il n'est pas optimal de représenter une structure par terme de taux d'intérêt par plusieurs de ses points, et pas seulement par rapport au risque d'*overfitting*. Il est fondamental de la modéliser par des régresseurs (dynamiques, en l'occurrence) pour lesquels la fonctionnelle associée suffit pour reproduire la structure par terme. De la même façon, le choix des paramètres calibrés en "intérieur" doit faire l'objet d'une réflexion poussée et d'une schématisation globale préalable de l'arborescence du modèle et des interactions entre les différents jeux de paramètres. Ces travaux donnent lieu à la construction d'un modèle de crédit adapté aux besoins et aux objectifs du modèle interne, réalisé dans le but d'accueillir et d'interpréter l'ensemble des facteurs de risques considérés.

Les réponses à certaines interrogations soulèvent de nouvelles zones d'ombre qui doivent être investiguées avant l'utilisation du cadre pour des études majeures de type allocation dynamique. Le problème de multicollinéarité des séries chronologiques de régresseurs peut être évité en appliquant une méthode de moindres carrés sous contraintes linéaires, ce qui aurait pour conséquence une diminution du nombre de dimensions. L'application de transformations de l'*input* autres que la fonction logit est notamment une piste à explorer : on peut aisément imaginer appliquer une fonction racine carrée au paramètre de crédit λ_0 avant lissage, ce qui garantirait sa positivité après reconstruction tout comme ce qui a été fait avec la fonction logit dans cette étude. L'utilisation de fonctionnelles de transformation différentes génère des dynamiques de régresseurs qui peuvent s'avérer plus exploitables par un modèle de séries temporelles multivarié. Un autre problème, non étudié ici mais qui ne doit pas être négligé par le praticien, est la question du respect de l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage dans la modélisation paramétrique de la surface de volatilité implicite (calibration des OATi). Dans une certaine mesure, il faudrait exhiber des relations entre les paramètres qui garantiraient la subsistance d'égalités et d'inégalités valables hors-modèle (telles que, par exemple, la convexité du *call* selon le strike, les relations de parité ainsi que la croissance du prix du *call forward*-normalisé suivant la maturité). D'autre part, comment s'assurer de l'efficacité de la métrique de décote choisie pour l'écrtage des flux soumis au risque de crédit ? Ce point doit particulièrement attirer l'attention d'un lecteur avisé dans le sens où il régit tout le travail de la quantification du risque de crédit lors de la projection du bilan de l'entreprise.

Bibliographie

- [1] Alentorn A. *Modelling the implied volatility surface : an empirical study for FTSE options*. PhD thesis, 2004.
- [2] Bernales A. and Guidolin M. Can we forecast the implied volatility surface dynamics of equity options? predictability and economic value tests. *Journal of Banking and Finance*, 46 :326–342, 2014.
- [3] Diebold F. X., Li C. and Yue V. Z. Global yield curve dynamics and interactions : A dynamic nelson–siegel approach. *Journal of Econometrics*, pages 351–363, 2008.
- [4] Kim C. and Nelson C. R. *State-Space Models with Regime Switching : Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*. 1999.
- [5] Merton R. C. On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates. *J. Finance*, 29 :449–470, 1974.
- [6] Brigo D. and Mercurio F. *Interest Rate Models - Theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit*. 2005.
- [7] Lamberton D. and Lapeyre B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. 1991.
- [8] Gobet E. and El Karoui N. *Les outils stochastiques des marchés financiers : Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes*. 2011.
- [9] Mercurio F. Pricing inflation-indexed derivatives. *Quantitative Finance*, 5 :3 :289–302, 2005.
- [10] Planchet F. and Laïdi Y. Calibrating lmn model to compute best estimates in life insurance. *Cahier de recherche de l'ISFA 2014.13, Bulletin français de l'actuariat* 29, 2014.
- [11] Quittard-Pinon F. Evaluation de produits dérivés de taux d'intérêt par arbitrage dans l'approche martingale. 2007.
- [12] Christensen B. J. and Prabhala N. R. The relation between implied and realized volatility. *Journal of Financial Economics*, 50(2) :125–150, 1998.
- [13] Dumas B., Fleming J. and Whaley R. E. Implied volatility functions : Empirical tests. *The Journal of Finance*, 53(6) :2059–2106, dec 1998.
- [14] Gatheral J. and Jacquier A. Arbitrage-free svi volatility surfaces. *Quantitative Finance*, 14, 1 :59–71, 2013.
- [15] Schönbucher P. J. *Credit Derivatives Pricing Models : Models, Pricing and Implementation*. 2003.
- [16] Cox J. C., Ingersoll J. E. Jr. and Ross S. A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2) :385–407, 1985.
- [17] Bergomi L. *Stochastic Volatility Modeling*. 2015.
- [18] Schenk L. *Construction d'un cadre de valorisation dynamique : Application à l'évaluation et la prévision de dérivés vanilles*. 2018.
- [19] Droumagnet M. *Markov-Switching Vector Autoregressive Models : Monte Carlo Experiment, Impulse Response Analysis, and Granger-Causal Analysis*. PhD thesis, 2012.
- [20] Roper M. Arbitrage free implied volatility surfaces. *School of Mathematics and Statistics, The University of Sydney*, 2010.
- [21] El Karoui N. *Couverture des risques dans les marchés financiers*. 2003.
- [22] El Karoui N. and Geman H. A probabilistic approach to the valuation of general floating-rate-notes with an application to interest rate swaps. *Advances in Futures and Options Research*, 7 :47–64, 1994.
- [23] Touzi N. *Stochastic Control, and Application to Finance*. 2018.

- [24] Jarrow R. and Yildirim Y. Pricing treasury inflation protected securities and related derivatives using an hjm model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 38(2) :337–359, 2003.
- [25] Litterman R. and Scheinkman J. Common factors affecting bond returns. *Goldman Sachs*, 1991.
- [26] Gonçalves S. and Guidolin M. Predictable dynamics in the s&p 500 index options implied volatility surface. *The Journal of Business*, 79(3) :1591–1635, may 2006.
- [27] Longstaff F. A., Mithal S. and Neis E. Corporate yield spreads : Default risk or liquidity ? new evidence from the credit default swap market. *National Bureau of Economic Research*, 2004.
- [28] Christensen J. H. E., Diebold F. X. and Rudebusch G. D. An arbitrage-free generalized nelson-siegel term structure model. *Econometrics Journal, Royal Economic Society*, 12(3) :C33–C64, 2008.
- [29] Diebold F. X. and Li C. Forecasting the term structure of government bond yield. *Journal of Econometrics*, pages 337–364, 2006.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Calibration paramétrique : volatilité implicite *cap* inflation

ID	Card (V_{id})	MSE _{app}	TVaR _{0,95} (MSE _{app})	MSE _{test}	TVaR _{0,95} (MSE _{test})	1	M	T	MT	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² T	T ² M
60	5	26,26319854	104,9311148	31,9575133	129,8153364	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
31	5	26,29216344	104,8587651	32,36203647	131,2394002	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
97	7	23,7353702	93,32156188	32,53970241	132,1168304	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
101	5	26,8311592	107,1897775	32,66160526	132,890291	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
55	2	27,74218549	95,0737954	32,67247328	128,486577	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
56	2	26,85632463	89,69090902	32,92942934	128,6872865	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
104	6	24,55123136	95,96300295	33,09088051	133,2478385	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
99	2	27,62866974	95,16274238	33,17612394	128,9785729	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
29	2	27,4859751	93,59947782	33,35244104	131,1011315	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
96	6	24,40900663	95,27622339	33,38740634	135,1334221	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
100	2	26,74646473	90,15025714	33,43032198	128,4476409	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
45	5	26,58642048	106,2345312	33,47969395	136,0156158	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
30	2	26,70168251	88,77686546	33,48528798	130,1270977	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
94	5	26,64717177	106,1520244	33,49316228	137,8729457	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
64	6	23,87754646	93,2088122	33,55543092	135,4853987	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
93	2	26,64020994	88,72419909	33,76518893	130,8513166	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
42	2	27,408602	93,76475046	34,0399578	132,2194973	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
32	5	26,19820992	104,4301847	34,09038184	138,4354418	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
21	2	27,08284212	93,21988037	34,10529896	131,5170927	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	2	26,9907302	92,84366582	34,1117487	131,897158	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
33	6	23,92085998	93,24892056	34,19870583	138,112104	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
34	7	23,37669238	91,91754802	34,22052778	139,2207583	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
36	2	26,16336539	87,42598984	34,22389433	130,8111733	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	2	26,11012561	88,11159223	34,25810579	130,1840297	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
22	2	26,2520852	88,65608134	34,26113182	129,9385162	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
43	2	26,53156935	88,8359985	34,30201996	131,30338	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
69	2	26,20850375	88,12441429	34,30919032	130,5778679	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
80	2	27,31173117	94,051379	34,32376766	132,5319199	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
84	5	26,86984333	107,7360767	34,38773825	139,5925763	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
50	6	24,3278987	95,28007667	34,43861897	138,1641959	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
81	2	26,359177	88,84425604	34,53843456	131,1656077	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
91	7	23,48071207	92,34460042	34,5466508	140,2349844	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
106	7	24,22936723	95,79700345	34,56702661	142,0151566	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
51	7	23,51872132	92,30067109	34,76167631	141,8671799	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
66	7	23,27907779	91,71506036	35,02922707	143,6145365	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
89	6	24,14303693	94,45285956	35,10349999	140,8375736	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
12	6	23,86912934	93,81511824	35,14921838	139,9883558	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
39	6	23,95635471	94,13813106	35,29094649	140,5886715	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
74	6	24,33940106	95,71717035	35,98960386	144,288393	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
26	6	24,00011195	94,27623643	36,1583256	144,4659371	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
46	5	26,50031859	105,8052666	36,6373318	150,0649053	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
54	1	33,20817347	116,7323717	36,91203879	135,3374216	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	1	33,09322614	116,211118	37,05186932	136,0427471	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	5	25,97431113	103,8837179	37,12101842	151,1304246	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
76	7	23,80597211	94,21834985	37,15622388	151,246208	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
92	1	32,89763786	116,303768	37,67914004	136,3669971	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	6	24,1615137	94,40749485	38,17655212	155,5524732	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
102	6	24,56057331	95,92394476	38,59465493	159,483565	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
98	1	32,59104032	115,1934671	38,59530283	138,2756551	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	1	32,32327244	114,5974399	39,14747447	139,4638111	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	6	23,89623135	93,81102038	39,20199841	159,6044907	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
35	1	32,11237371	112,9393015	39,34773975	141,2627695	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
79	1	32,15773476	114,7280661	39,4223164	138,6595925	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	31,96397273	113,1539334	39,58046015	140,7341198	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE A.1 – Résultats du processus de sélection de modèle économétrique - Nappe de volatilité implicite des *cap* inflation (1)

ID	Card (V_{id})	MSE _{app}	TVaR _{0.95} (MSE _{app})	MSE _{rest}	TVaR _{0.95} (MSE _{rest})	1	M	T	MT	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² T	T ² M
1	1	31,93154226	113,713724	39,60913578	139,6084115	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
68	1	31,9580886	114,0155054	39,82002277	139,9414981	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	6	24,00535982	93,35781424	41,00864418	169,4446247	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
49	6	24,26978799	94,73539522	41,18601672	171,3198662	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
58	5	26,11202129	99,92610055	41,48736196	172,3096503	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
10	6	23,65588634	92,78216527	41,84839039	172,978731	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
73	6	24,24703346	95,34321535	42,60376945	177,3157874	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
83	5	25,91410558	99,07816685	42,83788906	177,3694985	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
27	7	23,54895894	93,07958472	43,01087632	179,9799283	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
17	7	23,31617305	91,6583992	43,07615164	179,6418257	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
24	6	24,00294666	94,20283759	43,493347	179,9943806	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
108	7	24,21018191	94,9332463	45,37517312	192,2114483	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
71	6	24,26940286	95,05805013	45,52700808	190,6167529	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
6	5	25,78349105	99,06850363	46,17822207	192,8476564	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
82	5	25,85128983	98,63411123	46,25898814	193,4169111	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
40	7	23,58244103	93,35344745	46,9859838	199,2814446	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
85	6	23,81617537	92,83489375	47,12587583	198,7562668	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
8	6	23,69361919	92,47551732	47,17742856	197,9394163	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
57	5	26,0499658	103,2367023	48,33829229	204,9717118	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
16	7	22,99345166	90,56735707	48,65985332	207,1635653	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
61	6	23,84068763	92,87854389	49,09878897	208,4694271	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
5	5	25,7808318	98,91016902	49,9709361	210,6770592	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
37	5	26,12160374	103,4333032	50,8215606	211,1559999	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
59	5	26,04977892	98,65953973	51,29115958	218,2487486	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
44	5	26,30961852	104,4771618	51,67022548	219,8008682	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
70	6	24,15926112	94,80972004	51,9792603	221,2235018	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
7	6	23,43593328	91,60792619	52,65344521	223,8166368	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
4	5	25,39582002	100,8127659	56,09872274	239,5979394	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
47	6	24,21775643	94,52846343	57,84856874	249,182765	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
87	6	23,75641717	92,4775602	62,21954686	269,1915572	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
72	6	24,11416088	94,47928665	66,17509088	287,1661253	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
62	6	23,79188739	92,58252095	66,87131266	290,916398	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
9	6	23,34698733	91,10407432	67,71622622	293,7852678	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
48	6	24,19995802	94,37025304	70,76436171	308,7224188	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
23	6	24,16945636	93,83925514	79,44215187	344,9972577	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
13	7	23,09208519	90,46219362	80,45823014	352,5149488	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
63	6	23,79912124	92,46040976	83,18803359	365,8388133	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
95	6	24,31686273	94,37187104	84,84244865	373,3561729	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
103	6	24,49735824	95,37389456	88,67744307	390,5575625	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
14	7	22,97749066	89,87582009	92,50891309	407,3654924	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
25	6	23,8609005	93,18174737	92,67312478	407,3689593	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
15	7	22,60056765	87,77418427	98,23581986	433,3829981	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
67	7	23,26909955	91,11548845	98,42332677	435,227144	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
52	7	23,47732072	91,77910818	98,6562515	436,0515527	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
105	7	24,19723562	95,69578817	100,1543882	443,095294	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
77	7	23,69650246	93,34738056	100,7989868	444,961307	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
107	7	24,05279464	94,374036	101,7539986	450,3884326	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
78	7	23,8937473	93,30148533	129,7874799	575,5575266	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
90	7	23,31601439	90,4406887	149,345454	663,8125521	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
53	7	23,33712387	90,96430711	156,6521873	697,2220654	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
75	7	23,45036347	91,33702974	158,9385308	706,8160599	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
65	7	23,39742162	90,81367411	169,2504398	753,2701806	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
18	8	22,50970046	88,00163715	184,6300295	822,0294871	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
19	8	22,17127288	86,10902455	306,612418	1368,772966	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1

TABLE A.2 – Résultats du processus de sélection de modèle économétrique - Nappe de volatilité implicite des *cap* inflation (2)

Annexe B

Risque de crédit : Résultats théoriques

Démonstration de l'expression du prix d'un actif risqué suivant l'information standard :

Calculons les trois termes séparément en utilisant le théorème de Jeulin-Yor et les propriétés de mesurabilité des processus :

•

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{-\int_t^s r_u du} dC_s \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right] &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \int_t^T \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{-\int_t^s r_u du} dC_s \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{-\int_t^s r_u du} dC_s \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > s\}} e^{-\int_t^s r_u du} \mid \mathcal{F}_s \right] dC_s \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \frac{Q_s}{Q_t} e^{-\int_t^s r_u du} dC_s \mid \mathcal{F}_t \right]; \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \Psi_T \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right] &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \Psi_T \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \Psi_T \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \Psi_T \mid \mathcal{F}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{Q_T}{Q_t} e^{-\int_t^T r_s ds} \Psi_T \mid \mathcal{F}_t \right]; \end{aligned}$$

- Le troisième terme constitue la partie délicate à calculer. On va passer par une discrétisation du processus, utiliser le théorème de convergence dominée et la propriété de croissance de la filtration (au sens de l'inclusion).

Soit $(t_0 = t < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de subdivisions régulières, dont le pas tend vers 0.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} e^{-\int_t^\tau r_s ds} Z_\tau \mid \widetilde{\mathcal{F}}_t \right] &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} e^{-\int_t^\tau r_s ds} Z_\tau \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\
 &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} e^{-\int_t^\tau r_s ds} Z_\tau \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\
 &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{t_i < \tau \leq t_{i+1}\}} e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} Z_{t_i} \mid \mathcal{F}_t \right]}{Q_t} \\
 &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{1}{Q_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} - \mathbb{1}_{\{\tau > t_{i+1}\}}) \right. \\
 &\quad \left. \times e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} Z_{t_i} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{1}{Q_t} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(\mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} - \mathbb{1}_{\{\tau > t_{i+1}\}}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} Z_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}} \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{1}{Q_t} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t_i\}} \mid \mathcal{F}_{t_{i+1}} \right] \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - Q_{t_{i+1}} \right) e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} Z_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{1}{Q_t} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[(Q_{t_i} - Q_{t_{i+1}}) e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} \right. \\
 &\quad \left. \times Z_{t_i} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= -\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{1}{Q_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (Q_{t_{i+1}} - Q_{t_i}) e^{-\int_t^{t_i} r_s ds} \right. \\
 &\quad \left. \times Z_{t_i} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= -\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} Z_s \frac{dQ_s}{Q_t} \mid \mathcal{F}_t \right].
 \end{aligned}$$

Annexe C

Modèle AFNS

Démonstration de l'obtention des Equations différentielles 3.7 et 3.8 et calcul de leurs solutions :

Posons, pour tout $T > 0$, $f_T : (t, X) \mapsto \exp(B(t, T)'X + C(t, T))$, où B et C sont les quantités à calculer. On rappelle que B est un vecteur de dimension 3, C est un réel et f_T est l'expression du prix de l'obligation zéro-coupon $P(., T)$. De plus, on a les conditions terminales suivantes : $B(T, T) = 0$, $C(T, T) = 0$, de manière à vérifier : $P(T, T) = 1$. Par le théorème de Feynman-Kac multidimensionnel, f_T est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante, en toute date t et pour toute condition initiale (X_0^1, X_0^2, X_0^3) :

$$\frac{\partial f_T}{\partial t}(t, X_t) - [\nabla_X f_T(t, X_t)]' \Lambda X_t + \frac{1}{2} \text{Tr}\left\{\Sigma' \mathcal{H}_X f_T(t, X_t) \Sigma\right\} = r_t f_T(t, X_t).$$

Par un simple calcul de dérivées, il vient :

$$\frac{\partial f_T}{\partial t}(t, X_t) = \left(X_t' \frac{dB}{dt}(t, T) + \frac{dC}{dt}(t, T)\right) f_T(t, X_t),$$

$$\nabla_X f_T(t, X_t) = B(t, T) f_T(t, X_t),$$

$$\mathcal{H}_X f_T(t, X_t) = B(t, T)B(t, T)' f_T(t, X_t).$$

En injectant l'expression de r_t en fonction des facteurs stochastiques, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(X_t' \frac{dB}{dt}(t, T) + \frac{dC}{dt}(t, T)\right) f_T(t, X_t) - B(t, T)' f_T(t, X_t) \Lambda X_t \\ + \frac{1}{2} \text{Tr}\left\{\Sigma' B(t, T)B(t, T)' \Sigma\right\} f_T(t, X_t) = X_t' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} f_T(t, X_t). \end{aligned}$$

Comme $f_T(t, X_t)$ est presque-sûrement non-nul,

$$\left(X_t' \frac{dB}{dt}(t, T) + \frac{dC}{dt}(t, T)\right) - X_t' \Lambda' B(t, T) + \frac{1}{2} \text{Tr}\left\{\Sigma' B(t, T)B(t, T)' \Sigma\right\} = X_t' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, à une date t fixée, pour tout triplet (X_0^1, X_0^2, X_0^3) donc pour tout X_t , l'équation précédente est vérifiée. Le polynôme en X_t suivant est le polynôme nul :

$$\left(\frac{dC}{dt}(t, T) + \frac{1}{2} \text{Tr}\left\{\Sigma' B(t, T)B(t, T)' \Sigma\right\}\right) + X_t' \left(\frac{dB}{dt}(t, T) - \Lambda' B(t, T) - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Ceci mène au système d'équations différentielles matricielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt}(t, T) - \Lambda' B(t, T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \frac{dC}{dt}(t, T) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma \right\}. \end{cases}$$

On résout dans un premier temps l'équation différentielle matricielle vérifiée par B . L'équation se réécrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{dB_1}{dt}(t, T) \\ \frac{dB_2}{dt}(t, T) \\ \frac{dB_3}{dt}(t, T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda B_2(t, T) + 1 \\ \lambda(B_3(t, T) - B_2(t, T)) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Ces trois équations différentielles ordinaires du premier ordre se résolvent aisément par méthode de variation des constantes, en prenant en considération les conditions terminales posées précédemment. Après résolution, on a :

$$B_1(t, T) = -(T-t), \quad B_2(t, T) = -\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}, \quad B_3(t, T) = (T-t)e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}.$$

Il reste à déterminer l'expression de la fonction "cale" C , pour tout $t \leq T$. En intégrant de t à T l'équation différentielle ordinaire qu'elle vérifie et en utilisant la condition terminale $C(T, T) = 0$, on obtient :

$$C(t, T) = \frac{1}{2} \int_t^T \text{Tr} \left\{ \Sigma' B(u, T) B(u, T)' \Sigma \right\} du. \quad (\text{C.2})$$

Le terme en trace s'intègre aisément après développement de son expression. Les calculs sont simples mais fastidieux. On obtient finalement l'Expression 3.10 :

$$\begin{aligned} \frac{C(t, T)}{T-t} = & c_1 \frac{(T-t)^2}{6} + c_2 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} + \frac{1 - e^{-2\lambda(T-t)}}{4\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_3 \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{T-t}{4\lambda} e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{3}{4\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - 2 \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right. \\ & \left. + 5 \frac{1 - e^{-2\lambda(T-t)}}{8\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_4 \left(\frac{T-t}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_5 \left(\frac{3}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} + \frac{T-t}{2\lambda} + \frac{T-t}{\lambda} e^{-\lambda(T-t)} - 3 \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right) \\ & + c_6 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1}{2\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - 3 \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} + 3 \frac{1 - e^{-2\lambda(T-t)}}{4\lambda^3(T-t)} \right). \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

Annexe D

Modèle LMN

Démonstration de la condition de Feller :

Nous reprenons les notations du modèle de Longstaff-Mithal-Neis introduites dans la Section 4.1. Soit le processus de Cox-Ingersoll-Ross défini sous la mesure de probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ par :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t, \quad \lambda_0 > 0 \text{ p.s..}$$

Montrons que si $2\alpha > \sigma^2$ alors $\forall t \geq 0, \lambda_t > 0$ p.s (les mesures risque neutre et historique sont par définition équivalentes, donc l'évènement est de probabilité 1 sous les deux mesures).

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\tau_\varepsilon = \inf \{s \geq 0, \lambda_s \leq \varepsilon\}$ le premier temps de passage du processus $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ sous le seuil ε . On fixe $t \geq 0$. Pour démontrer le résultat, nous prouvons que τ_ε est presque-sûrement supérieur à t lorsque ε est infiniment petit. L'objectif est de borner la probabilité de l'évènement complémentaire par une quantité qui tend vers 0 lorsque ε est infiniment petit. Pour tout entier positif m , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[\tau_\varepsilon < t] &= \mathbb{Q}[\tau_\varepsilon \wedge t = \tau_\varepsilon] \\ &= \mathbb{Q}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t} < \varepsilon] \\ &= \mathbb{Q}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^m < \varepsilon^m] \\ &= \mathbb{Q}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m} \geq \varepsilon^{-m}]. \end{aligned}$$

La variable aléatoire $\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m}$ est strictement positive p.s., on peut donc appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{Q}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m} \geq \varepsilon^{-m}] \leq \varepsilon^m \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m}].$$

L'idée est de choisir une quantité m fonction des paramètres du processus et exploitant l'hypothèse de départ sur α et σ , puis d'appliquer Ito pour le calcul de l'espérance. On pose :

$$m = \frac{2\alpha - \sigma^2}{\sigma^2} > 0.$$

La fonction $x \mapsto x^{-m}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc appliquer Ito :

$$\begin{aligned} d(\lambda_s^{-m}) &= -m\lambda_s^{-(m+1)}d\lambda_s + \frac{1}{2}m(m+1)\lambda_s^{-(m+2)}d\langle \lambda \rangle_s \\ &= -m\lambda_s^{-(m+1)}((\alpha - \beta\lambda_s)ds + \sigma\sqrt{\lambda_s}dW_s) + \frac{1}{2}m(m+1)\lambda_s^{-(m+2)}\sigma^2\lambda_s ds \\ &= \frac{m(m+1)\sigma^2 - 2m(\alpha - \beta\lambda_s)}{2\lambda_s^{m+1}}ds - \frac{m\sigma}{\lambda_s^{m+\frac{1}{2}}}dW_s \\ &= m\beta\lambda_s^{-m}ds - m\sigma\lambda_s^{-(m+\frac{1}{2})}dW_s. \end{aligned}$$

En intégrant de 0 à $\tau_\varepsilon \wedge t$, on obtient :

$$\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m} = \lambda_0^{-m} + m\beta \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge t} \lambda_s^{-m} ds - m\sigma \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge t} \lambda_s^{-(m+\frac{1}{2})} dW_s \quad (D.1)$$

$$\leq \lambda_0^{-m} + m\beta \int_0^t \lambda_{\tau_\varepsilon \wedge s}^{-m} ds - m\sigma \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge t} \lambda_s^{-(m+\frac{1}{2})} dW_s. \quad (D.2)$$

La dernière inégalité est obtenue en écrivant :

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda_{\tau_\varepsilon \wedge s}^{-m} ds &= \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge t} \lambda_s^{-m} ds + \underbrace{\int_{\tau_\varepsilon \wedge t}^t \lambda_{\tau_\varepsilon \wedge s}^{-m} ds}_{\geq 0} \\ &\geq \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge t} \lambda_s^{-m} ds. \end{aligned}$$

Le processus $\left(N_t := \int_0^t \lambda_s^{-(m+\frac{1}{2})} dW_s\right)_{t \geq 0}$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale locale continue nulle en 0, il en est de même pour N^{τ_ε} où l'exposant est la notation universelle pour le processus N arrêté en τ_ε .

On a, de plus :

$$\langle N^{\tau_\varepsilon} \rangle_t = \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge t} \lambda_s^{-(2m+1)} ds \leq t \varepsilon^{-(2m+1)},$$

ceci entraînant :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle N^{\tau_\varepsilon} \rangle_t] \leq t \varepsilon^{-(2m+1)} < \infty,$$

et ce, pour tout t . Par conséquent, N^{τ_ε} est une (vraie) $\mathbb{Q}$ -martingale de carré intégrable. De plus, on obtient, en passant à l'espérance dans l'Equation D.1 :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m}] \leq \lambda_0^{-m} + m\beta \int_0^t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge s}^{-m}] ds.$$

On peut maintenant appliquer le lemme de Grönwall, nous menant à

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m}] \leq \lambda_0^{-m} e^{m\beta t}. \quad (D.3)$$

On obtient finalement :

$$\mathbb{Q}[\tau_\varepsilon < t] = \mathbb{Q}[\lambda_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{-m} \geq \varepsilon^{-m}] \leq \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_0}\right)^m e^{m\beta t}, \quad (D.4)$$

et par le théorème de comparaison, en faisant tendre ε vers 0, on a le résultat voulu.

Démonstration de résultats du modèle LMN : Nous nous proposons dans cette annexe de démontrer les résultats utilisés dans les formules de prix du LMN pour le CDS et l'obligation risquée à taux fixe.

Il nous faut calculer les quantités suivantes, $\forall T > 0$,

$$V(\gamma, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T \gamma_t dt} \middle| \gamma_0 = \gamma \right], \quad F(\lambda, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T \lambda_t dt} \middle| \lambda_0 = \lambda \right],$$

$$W(\lambda, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\lambda_T e^{-\int_0^T \lambda_t dt} \middle| \lambda_0 = \lambda \right].$$

- Calcul de V :

En intégrant de 0 à t , on a une expression de γ_t pour tout t :

$$\gamma_t = \gamma + \eta W_t^\gamma.$$

En utilisant la formule d'intégration par parties stochastique, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \gamma_t dt &= \gamma T + \eta \int_0^T W_t^\gamma dt \\ &= \gamma T + \eta \left(T W_T^\gamma - \int_0^T t dW_t^\gamma \right) \\ &= \gamma T + \eta \int_0^T (T-t) dW_t^\gamma \sim \mathcal{N} \left(\gamma T, \eta^2 \underbrace{\int_0^T (T-t)^2 dt}_{= \frac{T^3}{3}} \right). \end{aligned}$$

On applique la formule de la transformée de Laplace d'une variable aléatoire gaussienne et on obtient finalement :

$$V(\gamma, t) = \exp \left(-\gamma T + \frac{T^3}{6} \eta^2 \right).$$

- Calcul de F :

Soit $T > 0$. Posons, pour tout $t \in [0, T]$,

$$g_T(\lambda, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

et

$$X_t = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}.$$

Comme $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration (qui satisfait les conditions habituelles, c'est-à-dire qu'elle est continue à droite et qu'elle contient les ensembles négligeables sous la mesure de probabilité historique), le processus $\left(X_t g_T(\lambda, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T \middle| \mathcal{F}_t \right] \right)_{t \geq 0}$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale.

D'autre part, en utilisant la formule d'intégration par parties stochastique, on a :

$$d(X_t g_T(\lambda, t)) = X_t dg_T(\lambda, t) + g_T(\lambda, t) dX_t + d\langle X_\cdot, g_T(\lambda, \cdot) \rangle_t.$$

En appliquant Ito à la fonction $(x \mapsto e^{-x})$, on a :

$$\begin{aligned} dX_t &= -X_t d \left(\int_0^t \lambda_u du \right) + \frac{1}{2} X_t d \underbrace{\left\langle \int_0^\cdot \lambda_u du \right\rangle_t}_{=0} \\ &= -\lambda_t X_t dt, \end{aligned}$$

le crochet stochastique étant nul car le processus $\left(\int_0^t \lambda_u du \right)_{t \geq 0}$ est à variations finies.

Puis, en appliquant Ito à g_T , on obtient :

$$\begin{aligned} d(X_t g_T(\lambda, t)) &= X_t \left(\frac{\partial g_T}{\partial t}(\lambda, t) dt + \frac{\partial g_T}{\partial \lambda}(\lambda, t) d\lambda_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_T}{\partial \lambda^2}(\lambda, t) d\langle \lambda_\cdot \rangle_t \right) \\ &\quad - g_T(\lambda, t) \lambda_t X_t dt + d\langle X_\cdot, g_T(\lambda, \cdot) \rangle_t. \end{aligned}$$

Le crochet stochastique se calcule aisément en intégrant de 0 à t le résultat précédent :

$$X_t = 1 - \int_0^t \lambda_u X_u du. \quad (\text{D.5})$$

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est donc un processus à variations finies, on en déduit que le crochet de X et $g_T(\lambda, \cdot)$ est nul en tout point.

On a donc :

$$d(X_t g_T(\lambda, t)) = X_t \left[\left(\frac{\partial g_T}{\partial t}(\lambda, t) + (\alpha - \beta \lambda_t) \frac{\partial g_T}{\partial \lambda}(\lambda, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda_t \frac{\partial^2 g_T}{\partial \lambda^2}(\lambda, t) - \lambda_t g_T(\lambda, t) \right) dt + \sigma \sqrt{\lambda_t} \frac{\partial g_T}{\partial \lambda}(\lambda, t) dW_t^\lambda \right].$$

Or, le processus $(X_t g_T(\lambda, t))_{t \geq 0}$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale, ce qui contraint la partie déterministe de l'équation à être nulle. On obtient l'EDP suivante, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\frac{\partial g_T}{\partial t} + (\alpha - \beta \lambda_t) \frac{\partial g_T}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda_t \frac{\partial^2 g_T}{\partial \lambda^2} - \lambda_t g_T = 0.$$

On procède ensuite au changement de variable $\tau = T - t$, menant à, $\forall t \in [0, T]$:

$$-\frac{\partial g_T}{\partial \tau} + (\alpha - \beta \lambda_t) \frac{\partial g_T}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda_t \frac{\partial^2 g_T}{\partial \lambda^2} - \lambda_t g_T = 0.$$

Par passage à la limite, $\tau \rightarrow T$, on obtient l'EDP suivante $\forall T > 0$:

$$-\frac{\partial F}{\partial T} + (\alpha - \beta \lambda) \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \lambda F = 0. \quad (\text{D.6})$$

Il reste à résoudre cette EDP avec la condition initiale $F(\lambda, 0) = 0$. Cherchons une solution de la forme :

$$F(\lambda, T) = A(T) e^{\lambda B(T)},$$

où A et B sont des fonctions telles que $A(0) = 1$ et $B(0) = 0$, de sorte que la condition aux limites de F soit respectée.

En injectant cette expression dans l'Equation D.6, il vient, pour tout $\lambda > 0$ et tout $T > 0$,

$$\begin{aligned} & -(A'(T) e^{\lambda B(T)} + \lambda A(T) B'(T) e^{\lambda B(T)}) + (\alpha - \beta \lambda) A(T) B(T) e^{\lambda B(T)} \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda A(T) B^2(T) e^{\lambda B(T)} - \lambda A(T) e^{\lambda B(T)} = 0. \end{aligned}$$

En divisant l'équation par $F(\lambda, T)$, nous obtenons, $\forall (\lambda, T) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\left(\alpha B - \frac{A'}{A} \right) + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 B^2 - B' - \beta B - 1 \right) \lambda = 0.$$

Ce polynôme en λ est le polynôme nul donc ses coefficients sont nuls, ce qui nous permet d'en déduire les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$A' = \alpha B A, \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 B^2 - B' - \beta B = 1. \quad (\text{D.8})$$

La première équation se résoud de manière classique, avec $A(0) = 0$:

$$A(T) = \exp \left(\alpha \int_0^T B(t) dt \right).$$

On en déduit

$$F(\lambda, T) = \exp \left(\alpha \int_0^T B(t) dt + \lambda B(T) \right). \quad (\text{D.9})$$

Il reste à déterminer une expression explicite de B . Pour cela, on résout l'Equation différentielle ordinaire D.8. On reconnaît une équation de Riccati pour laquelle une méthode de résolution est proposée ici.

On recherche tout d'abord une solution particulière de l'équation, de la forme $B_p = a \in \mathbb{R}$. La quantité B_p est solution de l'Equation D.8 si et seulement si elle est racine du polynôme d'ordre deux suivant :

$$\frac{\sigma^2}{2} X^2 - \beta X - 1.$$

On pose : $\phi = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$ la racine carrée du delta de ce polynôme. Afin d'empêcher A d'atteindre des valeurs élevées, on choisit la solution négative : $B_p = \frac{\beta - \phi}{\sigma^2}$.

On effectue à présent le changement de variable $Z = B - B_p$, menant rapidement à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} Z^2 - Z' - \phi Z = 0.$$

On effectue un nouveau changement de variable en posant $U = \frac{1}{Z}$ et nous obtenons une équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$U' - \phi U = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

La solution de cette équation s'écrit

$$U(T) = U_p + (U(0) - U_p) e^{\phi T},$$

où $U_p = \frac{\sigma^2}{2\phi}$ est solution particulière de l'équation. Compte tenu de la condition initiale $B(0) = 0$, on en déduit :

$$U(T) = \frac{\sigma^2}{2\phi} \left(1 - \frac{\beta + \phi}{\beta - \phi} e^{\phi T} \right).$$

On pose alors $\kappa = \frac{\beta + \phi}{\beta - \phi}$.

Finalement,

$$\begin{aligned} B(T) &= B_p + \frac{1}{U(T)} \\ &= \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi T})}. \end{aligned}$$

Il reste à calculer A , donc à calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^T B(t) dt &= \int_0^T \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi t})} dt \\ &= \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} T + \frac{2\phi}{\sigma^2} \int_0^T \frac{1}{1 - \kappa e^{\phi t}} dt. \end{aligned}$$

Par un changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ $u = e^{\phi t}$ et une technique de décomposition en éléments simples, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{1 - \kappa e^{\phi t}} dt &= \frac{1}{\phi} \int_0^{e^{\phi T}} \frac{\kappa}{1 - \kappa u} + \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{\phi} \ln \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi T}} \right) + T. \end{aligned}$$

Finalement, en injectant dans l'expression de A ,

$$A(T) = \exp \left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} T \right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi T}} \right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}.$$

• Calcul de W :

Soit $T > 0$. Nous reprenons les notations de la démonstration précédente et l'Equation D.5 :

$$X_T = 1 - \int_0^T \lambda_t X_t dt.$$

En passant à l'espérance des deux côtés de l'égalité, on obtient une relation entre F et W pour tout $(\lambda, T) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$F(\lambda, T) = 1 - \int_0^T W(\lambda, t) dt. \quad (\text{D.10})$$

En injectant cette expression dans l'Equation D.6, il vient, $\forall (\lambda, T) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\begin{aligned} W(\lambda, T) - (\alpha - \beta \lambda) \int_0^T \frac{\partial W}{\partial \lambda}(\lambda, t) dt - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda \int_0^T \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2}(\lambda, t) dt \\ - \lambda \left(1 - \int_0^T W(\lambda, t) dt \right) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la condition initiale $W(\lambda, 0) = \lambda$, l'EDP devient :

$$\int_0^T \left(-\frac{\partial W}{\partial T}(\lambda, t) + (\alpha - \beta \lambda) \frac{\partial W}{\partial \lambda}(\lambda, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2}(\lambda, t) - \lambda W(\lambda, t) \right) dt = 0.$$

L'équation étant vraie $\forall (\lambda, T) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on en déduit que l'intégrande est nulle sur cet ensemble de définition et il vient finalement :

$$-\frac{\partial W}{\partial T}(\lambda, T) + (\alpha - \beta \lambda) \frac{\partial W}{\partial \lambda}(\lambda, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2}(\lambda, T) - \lambda W(\lambda, T) = 0. \quad (\text{D.11})$$

Par conséquent, la fonction W est solution de la même EDP que F pour une condition initiale différente : $W(\lambda, 0) = \lambda$. Cherchons une solution de la forme :

$$W(\lambda, T) = (G(T) + H(T)\lambda) e^{\lambda L(T)},$$

où G , H et L sont des fonctions telles que $G(0) = 0$, $H(0) = 1$ et $L(0) = 0$, de sorte que la condition aux limites de W soit respectée.

En injectant cette expression dans l'Equation D.11, il vient, pour tout (λ, T) :

$$\begin{aligned} \left(-G' + \alpha(H + GL) \right) + \left(-(H'GL') + \alpha HL - \beta(H + GL) \right) \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 (2HL + GL^2) - G \lambda \\ + \left(-(HL' + \beta HL) + \frac{1}{2} \sigma^2 HL^2 - H \right) \lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

C'est donc le polynôme nul et ses coefficients sont identiquement nuls. En développant les équations obtenues, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sigma^2 L^2 - L' - \beta L &= 1, \\ (\alpha + \sigma^2)HL - \beta H + G \underbrace{\left(\frac{1}{2}\sigma^2 L^2 - L' - \beta L - 1\right)}_{=0} &= H', \\ \alpha(H + GL) &= G'.\end{aligned}$$

Ce qui mène aux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 L^2 - L' - \beta L = 1, \quad (\text{D.12})$$

$$((\alpha + \sigma^2)L - \beta)H = H', \quad (\text{D.13})$$

$$\alpha(H + GL) = G'. \quad (\text{D.14})$$

La fonction L est donc solution de la même équation différentielle que B pour une même condition initiale. Par unicité de la solution,

$$\forall T > 0, \quad L(T) = \frac{\beta - \phi}{\sigma^2} + \frac{2\phi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\phi T})}.$$

Par intégration directe, on obtient :

$$H(T) = \exp\left((\alpha + \sigma^2) \int_0^T L(t) dt - \beta T\right).$$

En injectant l'expression de l'intégrale calculée dans la démonstration du résultat précédent, on obtient après calcul :

$$H(T) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi) + \phi\sigma^2}{\sigma^2} T\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi T}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 2}.$$

Il reste à déterminer une expression de G . Pour cela, on utilise les expressions de H et L pour résoudre l'Equation différentielle ordinaire du premier ordre [D.14](#). De manière classique, par méthode de variation des constantes, un calcul mène à :

$$G(t) = \frac{\alpha(e^{\phi t} - 1)}{\phi} \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \phi)}{\sigma^2} t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1}.$$

Annexe E

Evaluation des OATi

Démonstration de la formule d'évaluation du *caplet* indexé sur l'inflation : On rappelle tout d'abord le cadre de valorisation dans lequel on se place :

- Le processus de taux court réel $(r_t^r)_{t \geq 0}$ est un processus AFNS :

$$\forall t \geq 0, \quad r_t^r = (X_t^r)' \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_t^r = \begin{bmatrix} X_t^{r,1} \\ X_t^{r,2} \\ X_t^{r,3} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{cases} dX_t^{r,1} &= \sigma_{11}^r dW_t^{r,1}, \\ dX_t^{r,2} &= -\lambda_r (X_t^{r,2} - X_t^{r,3}) + \sigma_{21}^r dW_t^{r,1} + \sigma_{22}^r dW_t^{r,2}, \\ dX_t^{r,3} &= -\lambda_r X_t^{r,3} + \sigma_{31}^r dW_t^{r,1} + \sigma_{32}^r dW_t^{r,2} + \sigma_{33}^r dW_t^{r,3}, \quad X_0^{r,1}, X_0^{r,2}, X_0^{r,3}, \end{cases}$$

où $W^{r,1}$, $W^{r,2}$ et $W^{r,3}$ sont des $\mathbb{Q}$ -mouvements browniens standards mutuellement indépendants.

- Le processus de taux court nominal $(r_t^n)_{t \geq 0}$ est celui modélisé et calibré dans la Section 3.2.1. On annotera d'un "n" les paramètres et les facteurs associés à ce processus afin de distinguer plus clairement le processus de taux court nominal du processus de taux court réel. On suppose indépendance mutuelle entre les sources d'aléa (mouvements browniens).
- Le processus d'inflation $(I_t)_{t \geq 0}$ est un processus de type Black-Scholes à taux d'intérêt stochastiques :

$$\forall (t, T) \in \mathbb{R}_+, t \leq T, \quad I_T = I_t \exp \left(\int_t^T \left(r_s^n - r_s^r - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma_I dW_s^I \right), \quad (\text{E.2})$$

où W^I est un mouvement brownien standard indépendant des autres sources d'aléa du cadre.

Un prérequis pour aller au bout des calculs qui vont suivre est d'avoir une expression analytique du taux court réel et du taux nominal, ainsi que de leur primitive. Soit $x \in \{n, r\}$. Pour tout $t \geq 0$, en appliquant le lemme d'Itô à la fonction $(t, z) \mapsto e^{\lambda_x t} z$, on obtient l'expression analytique des facteurs stochastiques du modèle et ainsi, après un simple calcul intégral :

$$r_t^x = X_0^{1,x} + X_0^{2,x} e^{-\lambda_x t} + X_0^{3,x} \lambda_x t e^{-\lambda_x t} + \sum_{j=1}^3 \int_0^t b_x^j(s, t) dW_s^{j,x}, \quad (\text{E.3})$$

où on pose :

$$\begin{cases} b_x^1(s, t) &= \sigma_{11}^x + \sigma_{21}^x e^{-\lambda_x(t-s)} + \sigma_{31}^x \lambda_x(t-s) e^{-\lambda_x(t-s)}, \\ b_x^2(s, t) &= \sigma_{22}^x e^{-\lambda_x(t-s)} + \sigma_{32}^x \lambda_x(t-s) e^{-\lambda_x(t-s)}, \\ b_x^3(s, t) &= \sigma_{33}^x \lambda_x(t-s) e^{-\lambda_x(t-s)}. \end{cases}$$

Puis, en intégrant de t à $T \geq t$:

$$\begin{aligned} \int_t^T r_s^x ds &= X_0^{1,x}(T-t) + X_0^{2,x} \left(\frac{1-e^{-\lambda_x T}}{\lambda_x} - \frac{1-e^{-\lambda_x t}}{\lambda_x} \right) \\ &\quad + X_0^{3,x} \left(-T e^{-\lambda_x T} + \frac{1-e^{-\lambda_x T}}{\lambda_x} + t e^{-\lambda_x t} - \frac{1-e^{-\lambda_x t}}{\lambda_x} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \int_t^T \int_0^s b_x^j(u, s) dW_u^{j,x} ds \\ &= -[B_x(0, T) - B_x(0, t)]' X_0^x + \sum_{j=1}^3 \int_t^T \int_0^T b_x^j(u, s) \mathbb{1}_{[0,s]}(u) dW_u^{j,x} ds \\ &= -\Delta_0 B_x(t, T)' X_0^x + \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_t^T b_x^j(u, s) \mathbb{1}_{[u,T]}(s) ds dW_u^{j,x} \\ &= -\Delta_0 B_x(t, T)' X_0^x + \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_{s \vee t}^T b_x^j(s, u) du dW_s^{j,x}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

A présent, on se propose d'évaluer en 0 un *caplet* inflation de maturité T_i démarrant en T_{i-1} , de *strike* K . Soit τ_i la durée séparant la date T_{i-1} de la date T_i . Le *pay-off* du *caplet* en T_i est :

$$\tau_i \left(\frac{I_{T_i} - I_{T_{i-1}}}{I_{T_{i-1}}} - K \right)_+. \quad (\text{E.5})$$

En notant IICplt la valeur du *caplet* correspondant, on a :

$$\begin{aligned} \text{IICplt}(T_{i-1}, T_i, K) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{-\int_0^{T_i} r_s^n ds} \tau_i \left(\frac{I_{T_i} - I_{T_{i-1}}}{I_{T_{i-1}}} - K \right)_+ \right] \\ &= \tau_i P_n(0, T_i) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}^n} \left[\left(\frac{I_{T_i} - I_{T_{i-1}}}{I_{T_{i-1}}} - K \right)_+ \right] \\ &= \tau_i P_n(0, T_i) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}^n} \left[\left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} - (1 + K) \right)_+ \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Les processus r^n et r^r sont gaussiens, donc par indépendance mutuelle des processus, la variable aléatoire $\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}}$ est de loi log-normale sous $\mathbb{Q}_\times$ et il en est de même sous $\mathbb{Q}_{T_i}^n$. Un résultat fortement utilisé lors de l'évaluation d'options européennes permet alors d'exprimer le prix du *caplet* comme une somme de quantités probabilisées. En effet, pour toute constante a et toute variable aléatoire X de loi log-normale, de sorte que : $\mathbb{E}[X] = m$ et $\mathbb{V}[\ln X] = \sigma^2$,

$$\mathbb{E}[(X - a)_+] = m \Phi \left(\frac{\ln \frac{m}{a} + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) - a \Phi \left(\frac{\ln \frac{m}{a} - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right). \quad (\text{E.7})$$

Il nous faut donc calculer les paramètres de la loi de $\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}}$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}_{T_i}^n$. En ce qui concerne le terme en variance, on peut s'affranchir du changement de mesure étant donné que la volatilité des processus est invariante par changement de mesure de probabilité.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}^n} \left[\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}^n} \left[\exp \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \left(r_s^n - r_s^r - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) ds + \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I dW_s^I \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\frac{\exp \left(- \int_0^{T_i} r_s^n ds \right)}{P_n(0, T_i)} \exp \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \left(r_s^n - r_s^r - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) ds + \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I dW_s^I \right) \right] \\
&= \frac{1}{P_n(0, T_i)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{- \int_0^{T_{i-1}} r_s^n ds} e^{- \int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^r ds} \frac{L_{T_i}^{n \rightarrow r}}{L_{T_{i-1}}^{n \rightarrow r}} \right] \\
&= \frac{P_n(0, T_{i-1})}{P_n(0, T_i)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[e^{- \int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^r ds} \frac{L_{T_i}^{n \rightarrow r}}{L_{T_{i-1}}^{n \rightarrow r}} \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}} \right] \right] \\
&= \frac{P_n(0, T_{i-1})}{P_n(0, T_i)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_r} \left[e^{- \int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^r ds} \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}} \right] \right] \\
&= \frac{P_n(0, T_{i-1})}{P_n(0, T_i)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} [P_r(T_{i-1}, T_i)]. \tag{E.8}
\end{aligned}$$

Dans le modèle AFNS, le prix du zéro-coupon réel s'écrit en fonction de sa structure de volatilité :

$$\begin{aligned}
P_r(T_{i-1}, T_i) &= \frac{P_r(0, T_i)}{P_r(0, T_{i-1})} \exp \left(\int_0^{T_{i-1}} \Delta_s \Gamma^r(T_{i-1}, T_i)' dW_s^r \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^{T_{i-1}} (\|\Gamma^r(s, T_i)\|^2 - \|\Gamma^r(s, T_{i-1})\|^2) ds \right), \tag{E.9}
\end{aligned}$$

où les W^r est un $\mathbb{Q}^n$ -mouvement brownien multidimensionnel.

Après calcul, on obtient finalement :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_i}^n} \left[\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right] = \frac{P_n(0, T_{i-1}) P_r(0, T_i)}{P_n(0, T_i) P_r(0, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i), \tag{E.10}$$

où on a posé, $\forall (t, T) \in (\mathbb{R}_+)^2, t \leq T$:

$$\xi_r(t, T) = \exp \left(- \int_0^t \Gamma^r(s, t)' \Delta_s \Gamma^r(t, T) ds \right). \tag{E.11}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\ln \left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right) \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} \left(r_s^n - r_s^r - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) ds + \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I dW_s^I \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^n ds \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^r ds \right] - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{\sigma_I^2}{2} ds.
\end{aligned}$$

Par l'Equation E.4, on obtient :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\ln \left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right) \right] = \Delta_0 B_r(T_{i-1}, T_i)' X_0^r - \Delta_0 B_n(T_{i-1}, T_i)' X_0^n - \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{\sigma_I^2}{2} ds. \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\ln \left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right)^2 \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^n ds \right)^2 \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^r ds \right)^2 \right] \\
 &\quad - 2 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^n ds \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^r ds \right] \\
 &\quad - \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^n ds \right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_s^r ds \right] \right) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I^2 ds \\
 &\quad + \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I^2 ds + \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{\sigma_I^2}{2} ds \right)^2.
 \end{aligned}$$

Après calcul, à partir de l'Equation E.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n} \left[\ln \left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right)^2 \right] &= (\Delta_0 B_n(T_{i-1}, T_i)' X_0^n)^2 - 2 \Delta_0 B_n(T_{i-1}, T_i)' X_0^n \Delta_0 B_r(T_{i-1}, T_i)' X_0^r \\
 &\quad + (\Delta_0 B_r(T_{i-1}, T_i)' X_0^r)^2 + \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I^2 ds + \left(\int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{\sigma_I^2}{2} ds \right)^2 \\
 &\quad - (\Delta_0 B_r(T_{i-1}, T_i)' X_0^r - \Delta_0 B_n(T_{i-1}, T_i)' X_0^n) \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I^2 ds \\
 &\quad + \sum_{x \in \{n, r\}} \sum_{j=1}^3 \int_0^{T_i} \left(\int_{s \vee T_{i-1}}^{T_i} b_x^j(s, u) du \right)^2 ds. \tag{E.13}
 \end{aligned}$$

En utilisant les Equations E.12 et E.13, on obtient l'expression de la variance suivante :

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}^n} \left[\ln \left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right) \right] = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I^2 ds + \sum_{x \in \{n, r\}} \sum_{j=1}^3 \int_0^{T_i} \left(\int_{s \vee T_{i-1}}^{T_i} b_x^j(s, u) du \right)^2 ds. \tag{E.14}$$

Il nous reste à calculer les intégrales suivantes, pour $(x, j) \in \{n, r\} \times \{1, 2, 3\}$:

$$\int_0^{T_i} \left(\int_{s \vee T_{i-1}}^{T_i} b_x^j(s, u) du \right)^2 ds.$$

Le calcul intégral est élémentaire, long et fastidieux. De simples règles d'intégration mènent *in fine* à :

$$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}^n} \left[\ln \left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right) \right] = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I^2 ds + \sum_{x \in \{n, r\}} I_x(T_{i-1}, T_i), \tag{E.15}$$

où $\forall x \in \{n, r\}$:

$$\begin{aligned}
I_x(T_{i-1}, T_i) = & (\sigma_{11}^x)^2 \left[T_{i-1} B_x^1(T_{i-1}, T_i)^2 - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)^3}{3} \right] \\
& + ((\sigma_{21}^x)^2 + (\sigma_{22}^x)^2) \left[\Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)^2 \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{2\lambda_x} - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^3} + 2 \frac{B_x^2(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right] \\
& + ((\sigma_{31}^x)^2 + (\sigma_{32}^x)^2 + (\sigma_{33}^x)^2) \left[(\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i))^2 \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}}}{2\lambda_x} \right. \\
& \quad - \frac{\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{2\lambda_x} (1 + \Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)) + \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{4\lambda_x} \\
& \quad + \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) (\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}}}{2\lambda_x} \\
& \quad - B_x^1(T_{i-1}, T_i)^2 \frac{e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x} + \frac{3}{2} B_x^1(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{\lambda_x^2} \\
& \quad + 3 \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{4\lambda_x^2} + 2 \frac{B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \\
& \quad \left. + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^3} + \frac{2}{\lambda_x^2} B_x^2(T_{i-1}, T_i) \right] \\
& + 2\sigma_{11}^x \sigma_{21}^x \left[B_x^1(T_{i-1}, T_i) \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{\lambda_x} + \frac{\Delta_0 B_x^1(T_{i-1}, T_i)^2}{2\lambda_x} \right. \\
& \quad \left. + \frac{B_x^2(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right] \\
& + 2\sigma_{11}^x \sigma_{31}^x \left[B_x^1(T_{i-1}, T_i) \left((\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)) \frac{e^{\lambda_x T_{i-1}}}{\lambda_x} \right. \right. \\
& \quad - \frac{\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x} + \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{\lambda_x T_{i-1}} - 1}{\lambda_x} + B_x^1(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{-\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{\lambda_x} \\
& \quad \left. \left. + \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{2\lambda_x} \right) + 3 \frac{B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right] \\
& + (2\sigma_{21}^x \sigma_{31}^x + 2\sigma_{22}^x \sigma_{32}^x) \left[\Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \left(\Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}} - 1}{4\lambda_x} \right. \right. \\
& \quad + (\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i) - \lambda_x T_{i-1} \Delta_0 B_x^2(T_{i-1}, T_i)) \frac{e^{2\lambda_x T_{i-1}}}{2\lambda_x} - \frac{\Delta_0 B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{2\lambda_x} \\
& \quad - \frac{B_x^1(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^3} + 2 \frac{B_x^2(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \\
& \quad \left. \left. + B_x^1(T_{i-1}, T_i) \frac{e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{2\lambda_x^2} + \frac{1 - e^{-2\lambda_x(T_i - T_{i-1})}}{4\lambda_x^3} + \frac{B_x^3(T_{i-1}, T_i)}{\lambda_x^2} \right) \right], \quad (E.16)
\end{aligned}$$

avec, $\forall (s, t, T) \in \mathbb{R}^3$, $s \leq t \leq T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j \in \{1, 2, 3\}, \Delta_s B_x^j(t, T) = B_x^j(s, T) - B_x^j(s, t) \\ B_x^1(s, t) = -(t - s) \\ B_x^2(s, t) = -\frac{1 - e^{-\lambda_x(t-s)}}{\lambda_x} \\ B_x^3(s, t) = (t - s)e^{-\lambda_x(t-s)} - \frac{1 - e^{-\lambda_x(t-s)}}{\lambda_x}. \end{array} \right.$$

On pose alors :

$$V(T_{i-1}, T_i)^2 = \mathbb{V}_{\mathbb{Q}^n} \left[\ln \left(\frac{I_{T_i}}{I_{T_{i-1}}} \right) \right]. \quad (E.17)$$

On obtient finalement une formule fermée du prix du *caplet* inflation :

$$\begin{aligned}
 \text{HCplt}(T_{i-1}, T_i, K, \sigma_I) &= \frac{P_n(0, T_{i-1})P_r(0, T_i)}{P_n(0, T_i)P_r(0, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \\
 &\quad \times \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{P_n(0, T_{i-1})P_r(0, T_i)}{(1+K)P_n(0, T_i)P_r(0, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right) + \frac{V(T_{i-1}, T_i)^2}{2}}{V(T_{i-1}, T_i)} \right) \\
 &\quad - (1+K) \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{P_n(0, T_{i-1})P_r(0, T_i)}{(1+K)P_n(0, T_i)P_r(0, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right) - \frac{V(T_{i-1}, T_i)^2}{2}}{V(T_{i-1}, T_i)} \right).
 \end{aligned} \tag{E.18}$$

Annexe F

Outils et formules en vrac

Algorithme de Newton-Raphson :

Soit f une fonction définie sur un compact I de $\mathbb{R}^d$, dérivable par rapport à sa j -ième coordonnée en tout point. On recherche le point x^* de I qui annule f , où seul le j -ième élément du vecteur x^* est changé, le reste des éléments demeurant constant au cours de la procédure. On choisit un point $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_{j,0}, \dots, x_d)$ qui initialise l'algorithme, où x_0 est censé être suffisamment proche du point $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_j^*, \dots, x_d)$ pour le faire converger vers la solution souhaitée. Le point recherché est donc, partant d'un point généré x_n , le point x_{n+1} de sorte que $f(x_{n+1}) = 0$. Par un développement de Taylor à l'ordre 1, on pose donc la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_n)}. \quad (\text{F.1})$$

On fixe un seuil $\varepsilon > 0$ et l'algorithme s'arrête une fois la condition d'arrêt réalisée :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \quad (\text{F.2})$$

Formulaire des dérivées utilisées dans les pondérations WLS :

Toutes les quantités et fonctionnelles ci-dessous sont formulées dans les sections dédiées.

- Lissage des intensités de défaut :

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda}(\lambda, \omega, T) = \left(\omega \frac{\int_0^T B(t)P(X, t)W(\lambda, t) dt}{\int_0^T B(t)P(X, t)F(\lambda, t) dt} - s(\lambda, \omega, T) \right) \frac{\int_0^T B(t)P(X, t)F(\lambda, t) dt}{\int_0^T P(X, t)F(\lambda, t) dt}. \quad (\text{F.3})$$

- Lissage des rendements d'opportunité des obligations à taux fixe :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \gamma}(\gamma, c, \omega, T) = & - \left(c \int_0^T t P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt + T P(X, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \right. \\ & \left. + (1 - \omega) \int_0^T t P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right). \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

- Lissage des rendements d'opportunité des obligations à taux variable :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{FRN}}{\partial \gamma}(\gamma, c, K_-, K_+, \omega, T) = & - \left(\phi(c + L(t_0 - h, \theta), K_-, K_+) \right. \\
& \times \int_0^{t_1-h} t P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i-h}^{t_{i+1}-h} t \Psi_{i,t}^{K_-, K_+, c} P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\
& + \int_{T-h}^T t \Psi_{n,t}^{K_-, K_+, c} P(X, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\
& + T P(X, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \\
& \left. + (1 - \omega) \int_0^T t P(X, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right). \quad (\text{F.5})
\end{aligned}$$

- Lissage des rendements d'opportunité des obligations indexées sur l'inflation :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{ILB}}{\partial \gamma}(\gamma, c, I_E, \omega, T) = & - \left(\frac{c I}{I_E} \left(\frac{I_{t_0-h}}{I} \int_0^{t_1-h} t P_n(X^n, t) F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \right. \right. \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_r(X^r, t_i - h)}{P_n(X^n, t_i - h)} \int_{t_i-h}^{t_{i+1}-h} t \xi_n(t_i - h, t) P_n(X^n, t) \\
& \times F(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \\
& + \frac{P_r(X^r, T - h)}{P_n(X^n, T - h)} \int_{T-h}^T \xi_n(T - h, t) P_n(X^n, t) t F(\lambda, t) \\
& \times V(\gamma, t) dt \left. \right) \\
& + \left[\frac{I P_r(X^r, T)}{I_E P_n(X^n, T)} \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{I P_r(X^r, T)}{I_E P_n(X^n, T)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_F(0, T)^2}{\Sigma_F(0, T)} \right) \right. \\
& + \left. \left(1 - \Phi \left(\frac{\ln \left(\frac{I P_r(X^r, T)}{I_E P_n(X^n, T)} \right) - \frac{1}{2} \Sigma_F(0, T)^2}{\Sigma_F(0, T)} \right) \right) \right] \\
& \times T P_n(X^n, T) F(\lambda, T) V(\gamma, T) \\
& + (1 - \omega) \int_0^T t P_n(X^n, t) W(\lambda, t) V(\gamma, t) dt \left. \right). \quad (\text{F.6})
\end{aligned}$$

- Régression sur la nappe de volatilité implicite des *cap* inflation :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi \text{Cplt}}{\partial \sigma}(T_{i-1}, T_i, K, \sigma_I) = & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \left(\frac{\ln \left(\frac{P_n(X^n, T_{i-1}) P_r(X^r, T_i)}{(1+K) P_n(X^n, T_i) P_r(X^r, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right)}{V(T_{i-1}, T_i)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{V(T_{i-1}, T_i)}{2} \right)^2 \right) \frac{P_n(X^n, T_{i-1}) P_r(X^r, T_i)}{P_n(X^n, T_i) P_r(X^r, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \\
& \times \left[1 - \frac{\ln \left(\frac{P_n(X^n, T_{i-1}) P_r(X^r, T_i)}{(1+K) P_n(X^n, T_i) P_r(X^r, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right)}{\frac{V(T_{i-1}, T_i)^2}{2}} \right] \\
& + (1+K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \left(\frac{\ln \left(\frac{P_n(X^n, T_{i-1}) P_r(X^r, T_i)}{(1+K) P_n(X^n, T_i) P_r(X^r, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right)}{V(T_{i-1}, T_i)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{V(T_{i-1}, T_i)}{2} \right)^2 \right) \\
& \left. \times \left[1 + \frac{\ln \left(\frac{P_n(X^n, T_{i-1}) P_r(X^r, T_i)}{(1+K) P_n(X^n, T_i) P_r(X^r, T_{i-1})} \xi_r(T_{i-1}, T_i) \right)}{\frac{V(T_{i-1}, T_i)^2}{2}} \right] \right\} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma_I \, ds, \\
& \text{(F.7)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi \text{Cap}}{\partial \sigma}(T, K, \sigma_I) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi \text{Cplt}}{\partial \sigma}(T_{i-1}, T_i, K, \sigma_I). \quad \text{(F.8)}$$