Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES

Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le 22 novembre 2012

Par : M. Janick JEMINET

Titre: Optimisation de la réassurance non proportionnelle en arrêt de travail

Confidentialité : ☑ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

M. Olivier CAYOT

M. Frédéric PLANCHET

Membres du jury I.S.F.A.

Mme Flavia BARSOTTI
M. Alexis BIENVENÜE
M. Areski COUSIN
Mme Diana DOROBANTU
Mme Anne EYRAUD-LOISEL
M. Nicolas LEBOISNE
M. Stéphane LOISEL
Mlle Esterina MASIELLO
Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS
M. Frédéric PLANCHET
Mme Béatrice REY-FOURNIER
M. Pierre RIBEREAU
M. Christian-Yann ROBERT
M. Didier RULLIERE
M. Pierre THEROND

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Entreprise :

ACTUARIS

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Antoine THERON

Invité :

Autorisation de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

50 Avenue Tony Garnier
69366 Lyon Cedex 07

Mots clés : Optimisation de la réassurance, réassurance non proportionnelle, arrêt de travail, Solvabilité 2, formule standard, SCR, simulations, modélisation.

Résumé

La réassurance permet à l'organisme assureur de transférer une partie du risque auquel il est exposé. Le coût de cette couverture entraîne néanmoins un arbitrage pour l'organisme, qui devra sélectionner le traité « optimal » selon des critères à déterminer.

Or, l'impact d'une décision stratégique sur le business plan de l'organisme doit être mesuré non seulement sur une trajectoire standard, mais également selon des scénarios de chocs, afin d'anticiper les aléas futurs. Dans ce contexte, il nous a paru particulièrement intéressant de nous focaliser sur l'optimisation d'un traité de réassurance non proportionnelle.

L'objectif de ce mémoire est de rechercher un traité optimal en excédent de sinistre par tête pour une entreprise d'assurance. L'organisme que nous considérons gère des produits de prévoyance et plus particulièrement des garanties d'arrêt de travail.

Afin de mesurer l'impact de cette décision, nous disposons d'un logiciel de modélisation actuarielle que nous exploitons dans un cadre stochastique. Les étapes de cette optimisation sont les suivantes :

- ✓ Modéliser une garantie arrêt de travail par simulation des charges de sinistralité futures engendrées par les nouvelles entrées en arrêt de travail
- ✓ Mettre en œuvre une méthode de tarification par simulations sur le traité testé
- ✓ Evaluer les provisions cédées en Best Estimate
- ✓ Définir deux indicateurs d'optimalité : le premier est la volatilité du résultat net, qui représente le transfert de risque d'un traité non proportionnel. Le second est quant à lui en lien avec le nouvel environnement réglementaire, Solvabilité II, puisqu'il s'agit du gain en capital de solvabilité, obtenu par la cédante, par rapport au résultat cédé
- ✓ Comparer plusieurs traités XS en faisant varier principalement la portée, la priorité, le nombre et le coût des reconstitutions afin d'obtenir un ensemble de traités non proportionnels optimaux à l'égard de ces indicateurs
- ✓ Effectuer une série de stress tests portant sur nos hypothèses de modélisation dans le but d'extraire, de cet ensemble, des traités optimaux et robustes face à des scénarios défavorables.

Il résulte de cette démarche une courbe d'efficience de traités en excédent de sinistres qui nous permet de conclure sur plusieurs éléments. Nous constatons tout d'abord que l'intérêt des reconstitutions dépend de la position de la priorité par rapport à un certain seuil. En effet, la présence de reconstitutions dans le traité XS s'avère bénéfique ou au contraire néfaste selon que l'on se situe en-dessous ou au-dessus de ce seuil. Par ailleurs, plus que de nous orienter vers des niveaux de portée et priorité optimaux, cette courbe d'efficience nous indique que pour une priorité donnée, il existe un intervalle de portées optimal et inversement.

Ce mémoire présente ainsi un processus d'optimisation de la réassurance non proportionnelle. Toutefois, nous restons conscients que : d'une part, il reste toujours une partie non modélisable (disponibilité du traité sur le marché, pouvoir de négociation des deux parties) ; d'autre part, le choix ultime du traité ou de la stratégie de réassurance optimal requiert l'établissement d'un lien entre cette étude et la politique ERM de l'entreprise.

Keywords: reinsurance optimization strategy, non-proportional reinsurance, income protection, Solvency 2, standard formula, SCR, simulations, modeling.

Abstract

Reinsurance allows insurers to transfer some of the risks they have to face with. Nevertheless the coverage cost creates arbitration for the insurer. The optimal treaty is then selected according to entity specific criteria.

Measuring the impact of a strategic decision on his business plan is though efficient only by taking stress scenarios into account. (so as to reflect non-anticipated contingencies). In this context, it seemed particularly interesting to help the organization optimizing a non-proportional reinsurance treaty.

This paper aims at seeking an optimal excess of loss per head treaty for an insurance company. The considered insurer manages pension products and specifically income protection guarantees.

The actuarial modeling software ERM System™ allows us to measure this impact in a stochastic framework. The optimization steps are:

- ✓ Modeling an income protection product by simulation of future claims costs generated by new entries in the portfolio
- ✓ Implementing a pricing method by simulations on the tested treaty
- ✓ Assessing Best Estimate reserves ceded to reinsurer
- ✓ Identifying two optimality indicators: the first is the net result volatility, which represents the risk transfer of a non-proportional treaty. The second is related to the new regulatory environment, Solvency II, and is the ratio between solvency capital requirement gain on ceded reinsurance result
- ✓ Comparing several XS treated mainly by varying limit of cover, priority, number and cost of reconstructions to obtain a set of non-proportional optimal treaties with respect to these indicators
- ✓ Conducting stress tests on our modeling assumptions in order to extract optimal and robust treaties from this set.

We obtain an efficiency curve of excess of loss treaties. It allows us to conclude on several elements. We find that the reconstructions interest depends on the level of priority compared to a given threshold. Indeed, presence of reconstructions in the treaty XS is beneficial or harmful depending on whether the priority is below this level or not. Additionally this efficiency curve gives indications not only on the extent of cover and retention optimal levels. It also indicates that, for a given retention, there is an optimum interval of cover limits and vice versa.

Thus, this dissertation presents an optimization process of non-proportional reinsurance. However we remain aware that: firstly there is still a non-modeled part (treaty's availability on the market, counterparties bargaining power) and secondly the ultimate choice of the optimal reinsurance strategy requires a link between this study and the enterprise risk management policy.

Remerciements

Je remercie en premier lieu Pierre ARNAL et Céline BLATTNER pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser mon mémoire d'Actuariat au sein du pôle Prévoyance et Santé d'ACTUARIS.

Je tiens à remercier également toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire. Je pense tout particulièrement à Marielle DE LA SALLE et Antoine THERON, pour la confiance qu'ils m'ont témoignée, leur sympathie ainsi que leur expertise technique.

Je remercie spécialement Olivier CABRIGNAC qui m'a permis de partir d'un exemple concret afin d'aller rapidement dans la bonne direction.

Je remercie l'ISFA pour m'avoir permis de suivre une formation de qualité et plus particulièrement Stéphane LOISEL pour l'aide qu'il m'a apporté à la rédaction et la relecture de ce mémoire.

Enfin, une attention toute particulière à ma compagne Aurélie qui m'a soutenu et laissé du temps pour réaliser ce mémoire.

Sommaire

INTRODUCTION 8

1 SOLVABILITE II 9

1.1 PRESENTATION 9
1.1.1 HISTORIQUE 9
1.1.2 OBJECTIFS 10
1.1.3 DESCRIPTION DES 3 PILIERS 11
1.2 IMPACTS DE LA REASSURANCE 11
1.2.1 TRANSFERT DE RISQUE 12
1.2.2 GAIN EN SCR 13
1.2.3 GESTION DES RISQUES – ORSA 13

2 MODELISATION DE L'ARRET DE TRAVAIL 15

2.1 NOMBRE DE COTISANTS 17
2.2 COTISATIONS 18
2.3 NOMBRE D'ENTRANTS EN INCAPACITE 19
2.4 CHARGE DE SINISTRALITE 22
2.5 SCHEMA RECAPITULATIF 23

3 LA REASSURANCE NON PROPORTIONNELLE 24

3.1 TRAITE DE REASSURANCE EN EXCEDENT DE SINISTRES 24
3.1.1 RECONSTITUTION 25
3.1.2 PARTICULARITES DE L'ARRET DE TRAVAIL 26
3.2 MODELISATION 26
3.2.1 TARIFICATION 26
3.2.2 CESSION 28

4 MODELISATION DE L'ACTIF 32

4.1 ESG 32
4.2 LES DIFFERENTES CLASSES D'ACTIF 32
4.3 LA GESTION ACTIF/PASSIF 33
4.4 SCHEMA RECAPITULATIF 33

5 CALCUL DU SCR SELON LA FORMULE STANDARD 34

5.1 LA NECESSITE DU CALCUL DU SCR 34
5.2 LES IMPACTS DE LA REASSURANCE SUR LE SCR 35
5.3 PROVISIONS TECHNIQUES EN BEST ESTIMATE 37
5.3.1 PROVISIONS BRUTES 37
5.3.2 PROVISIONS CEDEES 38
5.3.3 MARGE DE RISQUE 39
5.4 SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENT– SCR 39
5.4.1 SCR MARKET 40
5.4.2 SCR HEALTH 43
5.4.3 SCR DEFAUT 47
5.5 MINIMUM CAPITAL REQUIREMENT– MCR 48

6 STRATEGIE DE REASSURANCE OPTIMALE 49

6.1 ETAPES DE L'OPTIMISATION 49
6.2 CRITERES DE DECISION 50
6.3 NOMBRE DE SIMULATIONS 52

6.4 PRIORITE ET PORTEE 54
6.5 RECONSTITUTIONS 59
6.6 STABILITE DES TRAITES 61
6.6.1 AUGMENTATION DU TAUX D'ENTREES EN INCAPACITE 61
6.6.2 MODIFICATION DES CLASSES D'AGES DU MODEL POINT 62
6.6.3 MODIFICATION DES PARAMETRES DE RENTES DU MODEL POINT 64
6.6.4 AUGMENTATION DU NOMBRE DE PASSAGES EN INVALIDITE 66
6.7 STRATEGIE DE REASSURANCE 69
6.8 NOTATION DU REASSUREUR 72

CONCLUSION 75

BIBLIOGRAPHIE 77

ANNEXE 78

Introduction

La mise en place de Solvabilité II représente une transformation de l'entreprise d'assurance qui a un impact aussi bien sur son modèle d'organisation, son système d'information que sur sa stratégie. En effet, le nouvel environnement réglementaire bouleverse notamment les exigences de capitaux pour les organismes assureurs. C'est pourquoi il est important pour ces acteurs de l'assurance de définir leur posture à adopter face à Solvabilité II afin d'optimiser leur compétitivité.

Une des premières mesures peut être d'adapter sa stratégie de réassurance puisque dans ce contexte, la réassurance devient, plus encore qu'auparavant, un puissant outil de « capital management ».

Sous Solvabilité I, l'impact de la réassurance sur la marge disponible était relativement simple. Les traités proportionnels étaient pris en compte jusqu'à 50 % de taux de cession en non-vie alors que les traités non proportionnels n'avaient pas d'impact significatif. Sous Solvabilité II, la réassurance est particulièrement mise en valeur et contribue directement, sans limite, à l'amélioration de la marge de solvabilité des assureurs.

Nous allons donc centrer notre étude sur la recherche d'une stratégie optimale de réassurance non proportionnelle pour une entreprise d'assurance gérant des contrats de prévoyance et plus particulièrement des produits en arrêt de travail, à la lumière de l'impact de cette décision sur certains indicateurs Solvabilité II.

Afin de réaliser cette évaluation, il est nécessaire d'utiliser un logiciel de modélisation stochastique (nous en exposerons les raisons précises par la suite). Nous utiliserons par conséquent le progiciel de modélisation actuarielle et de gestion des risques édité par ACTUARIS : ERM System™.

Pour mener à bien cette étude, nous commencerons tout d'abord par présenter brièvement la directive européenne Solvabilité II et l'impact de la réassurance sur le capital de solvabilité requis. Ensuite, nous décrirons la méthodologie adoptée pour modéliser l'activité d'une entreprise d'assurance (à la fois le passif et l'actif) et nous détaillerons plus précisément la partie traitant de la réassurance non proportionnelle. Puis, nous effectuerons le calcul du capital de solvabilité requis selon la formule standard du QIS 5 en prenant en compte différents traités de réassurance non proportionnelle.

Enfin, nous analyserons les résultats obtenus afin de définir un programme de réassurance optimal et d'identifier les paramètres du traité les plus sensibles et ayant un impact important sous solvabilité II.

Nous tenons à signaler que les résultats que nous avons obtenus seraient sensiblement différents si nous nous étions fondés sur les implementing measures au lieu des spécifications techniques du QIS5 pour déterminer les capitaux de solvabilité.

1 Solvabilité II

1.1 Présentation

Le 22 avril 2009 a été votée par le Parlement Européen la directive Solvabilité II, dans le but d'améliorer l'efficacité économique et sociale des sociétés d'assurance, qui se substituera à partir du 1er janvier 2014 au dispositif actuel Solvabilité I.

Solvabilité II est une réglementation de l'Union Européenne (UE) qui s'adresse aux assureurs et réassureurs européens. Elle définit de nouvelles exigences en fonds propres afin de mieux couvrir l'ensemble des risques encourus par les acteurs du marché assurantiel. Elle les encourage surtout à adopter une démarche globale de gestion des risques, à travers la mise en place de chantiers couvrant l'ensemble de l'entreprise.

1.1.1 Historique

À l'échelle européenne, les premières exigences de marge de solvabilité remontent aux directives de 1973 pour l'assurance non-vie et de 1979 pour l'assurance vie. Dès 1997, le rapport Müller préconise une révision des règles de solvabilité :

- modifications des règles de marge de solvabilité des directives existantes : c'est le projet Solvabilité I entré en application en 2002
- réflexion plus large sur le régime réglementaire visant à garantir la solvabilité des entreprises d'assurances : c'est le projet Solvabilité II

Solvabilité I portait essentiellement sur :

- l'augmentation du montant absolu du capital minimal exigé
- des seuils de cotisations et de sinistres permettant de mesurer l'activité de l'organisme d'assurance
- le renforcement des pouvoirs d'intervention des autorités de surveillance.

Bien que l'objectif fût de mieux adapter l'exigence de fonds propres réglementaires au profil de risque réel de l'entreprise, des limites ont été identifiées très tôt :

- manque d'harmonisation des bases de calcul des provisions mathématiques
- comptabilisation des actifs soit au coût historique, soit en valeur de marché
- non prise en compte des réassureurs
- etc.

Le projet Solvabilité II a été lancé dans l'UE en 1999 avec une présentation des travaux envisagés dès 2001, avant même l'entrée en application de Solvabilité I (2002). La réglementation des assurances se fonde alors sur des règles plus complexes intégrant mieux le risque propre à chaque entité. Le capital de solvabilité requis peut alors être déterminé de plusieurs manières :

- par la formule standard, qui définit pour chaque classe des facteurs de risques spécifiques et une méthode standard d'évaluation. Elle s'inspire du système de type Risk Based Capital (RBC) américain. En effet, Le principe du RBC est de traduire chacun des *risques* de l'assureur par une exigence de capital, dont la somme aboutit à une exigence unique d'un capital minimum.

- par un modèle interne partiel. C'est-à-dire une combinaison entre un modèle interne pour certains risques ou certaines entités et la formule standard pour d'autres.
- Par un modèle interne total, qui doit satisfaire aux trois tests de l'autorité de tutelle (adéquation statistique, calibration, utilisation effective) et qui permet de mieux cerner ses propres risques afin de les quantifier.

1.1.2 Objectifs

La réforme Solvabilité II vise à un système de solvabilité davantage adapté aux véritables risques d'une entreprise d'assurance. Selon les termes du document de 1999 de la Commission Européenne, les objectifs principaux sont de :

- protéger les preneurs d'assurance
- assurer la comparabilité, la transparence et la cohérence des systèmes au niveau européen
- fixer une marge de solvabilité mieux adaptée aux risques réellement encourus
- éviter une complexité inutile : le test de solvabilité doit servir à repérer les problèmes à un stade suffisamment précoce et non à fournir une garantie infaillible contre la faillite
- prendre en compte les évolutions du marché
- fixer des principes tout en veillant à ne pas être prescriptif
- fonder le système sur des approches comptables communes
- éviter que les coûts en fonds propres ne soient inutilement élevés, au risque de menacer la compétitivité globale de l'assurance européenne.

Ce projet, à la portée ambitieuse, s'inscrit dès l'origine dans un contexte plus large que celui de l'assurance. En effet, un cadre de travail a été défini par la Commission en août 2004. Amendée plusieurs fois, la dernière version de juin 2006 prévoit notamment de :

- reposer sur une approche prospective qui reflète les risques, qui soit à la fois quantitative et qualitative, qui incite à un véritable contrôle des risques, enfin qui soit en phase avec les recommandations de l'IAIS (International Association of Insurance Supervisors)
- harmoniser les standards et les modes de contrôle au sein de l'UE et ainsi éviter aux États membres de définir des normes renforcées
- prendre en compte les groupes d'assurances
- traiter les actifs et les passifs sur une base prospective (« fair value »), cohérente avec les préconisations de l'IASB (International Accounting Standards Boards), notamment la phase 2 du projet de l'IASB sur les contrats d'assurance
- assurer une cohérence au sein du secteur financier (un produit d'assurance devrait être sujet aux mêmes exigences de capital, de solvabilité et de contrôle qu'un produit bancaire qui contiendrait des risques de même nature)
- présenter un coût de mise en place raisonnable pour les plus petites sociétés
- exiger une communication financière cohérente avec celle élaborée par l'IAIS et l'IASB pour réduire la charge administrative
- s'inspirer de la structure à trois piliers du secteur bancaire (Bâle II) : règles quantitatives, processus de contrôle prudentiel et discipline de marché

1.1.3 Description des 3 piliers

Solvabilité II repose sur une structure à 3 piliers.

Le premier pilier a pour objectif de définir les normes quantitatives pour l'évaluation des actifs, des passifs, des besoins de marge de solvabilité, du calcul des provisions techniques et des fonds propres.

Deux niveaux réglementaires sont définis pour les fonds propres dans ce premier pilier, le MCR et le SCR :

- Le MCR (Minimum Capital Requirement) représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique
- le SCR (Solvency Capital Requirement) représente le montant de fonds propres nécessaire afin de couvrir ses engagements à l'horizon d'un an avec un niveau de confiance de 99,5 %.

Le deuxième pilier a pour objectif de fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne et de définir les pouvoirs de l'autorité de contrôle. L'identification des sociétés "les plus risquées" est un objectif et les autorités de contrôle auront en leur pouvoir la possibilité de réclamer à ces sociétés de détenir un capital plus élevé que le montant suggéré par le calcul du SCR (capital add-on) et/ou de réduire leur exposition aux risques. De plus, ce pilier renforce l'harmonisation des standards et méthodes de contrôle et encourage le partage des meilleures pratiques entre organismes de contrôle.

Le troisième pilier a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées accessibles au public mais également aux autorités de contrôle afin notamment que ces dernières puissent exercer leur pourvoir de surveillance.

1.2 Impacts de la réassurance

Comme nous l'avons dit précédemment, la mise en place de Solvabilité II est en train de transformer l'organisation et la stratégie de l'ensemble des acteurs de l'assurance. En priorité, si l'attention est portée sur le respect des exigences de capital de solvabilité, les autres volets de la réforme, comme la gouvernance, devront être anticipés pour intégrer Solvabilité II dans la stratégie globale de l'entreprise. L'impact de Solvabilité II se décline donc dans plusieurs domaines clés de l'entreprise, dont les chantiers doivent avancer en parallèle.

En vue de l'application de la réglementation, les besoins actuels de l'entreprise qui nous préoccupent ici sont de trois types :

- Conception du modèle de calcul. L'entreprise a le choix entre adopter le modèle standard, préparer son modèle interne pour calculer le SCR ou se concentrer sur certains risques et utiliser alors une combinaison entre un modèle interne partiel et la formule standard.
- Identification et quantification des risques de l'entreprise. Ces risques peuvent être financiers, opérationnels, stratégique, de modèle, etc.
- Adoption des stratégies organisationnelles et financières visant à limiter l'impact des risques de l'étape précédente.

Les deux derniers besoins sont les piliers d'une bonne démarche de gestion du risque d'entreprise ou "Enterprise Risk Management". On rappelle que l'ERM est une technique

de gestion intégrée des risques de l'entreprise permettant d'appréhender de façon globale, formelle et dynamique la complexité de l'univers de risques. L'ERM d'apporter des réponses opérationnelles aux exigences des parties prenantes, et d'améliorer la performance en sécurisant les processus clés et en renforçant le dispositif de gouvernance.

De plus, nous pouvons noter l'importance du dernier point puisque certaines entreprises, comme celles déjà en difficulté pour couvrir leur besoin de marge sous Solvabilité I, sont amenées à envisager des politiques de rapprochement, de restructuration ou à définir de nouvelles stratégies de réassurance pour continuer à exercer leurs activités après l'entrée en vigueur de Solvabilité II.

1.2.1 Transfert de risque

Le management des risques, dont l'actualité provoque une prise de conscience de plus en plus forte dans les Présidences et les directions générales des organismes, inclut notamment le transfert du risque par le biais d'une stratégie de réassurance.

Sous Solvabilité I, l'impact de la réassurance sur la marge disponible était relativement simple :

- les traités proportionnels étaient pris en compte jusqu'à 50 % de taux de cession en non-vie
- les traités non proportionnels n'avaient pas d'impact significatif
- la notation des réassureurs, ainsi que leur nombre au sein d'un même pool, n'avaient aucune influence sur le besoin de marge.

Sous Solvabilité II, l'économie en capital apportée par la réassurance constitue un levier important pour améliorer la rentabilité des assureurs. En effet, si certaines conditions d'éligibilité sont respectées, il est possible pour les organismes assureurs de comptabiliser l'intégralité du transfert du risque vers les réassureurs, avec l'économie correspondante sur leurs besoins en fonds propres. Il convient aussi de noter que les règles sont sensiblement différentes sous le nouveau régime. La notation et la diversification des réassureurs ont à présent un impact direct sur le besoin en capital des cédantes. Toutes ces évolutions renforcent l'importance du choix d'une stratégie de réassurance complète et optimisée.

Pour rappel, Solvabilité I n'attachait pas d'importance à la qualité de la contrepartie. Ainsi, qu'un réassureur soit noté AAA ou BBB n'avait pas d'influence sur le calcul de la solvabilité d'une cédante. Alors que dans le nouveau référentiel prudentiel, la solidité de l'ensemble des contreparties et plus particulièrement celle des réassureurs sera prise en compte de manière quantitative et directe dans les capitaux de solvabilité. A noter que l'utilisation dans Solvabilité II de la notation publiée par les agences de notation fait controverse, mais c'est l'idée de risque de défaut de la contrepartie qui est retenue.

1.2.2 Gain en SCR

La réassurance dans Solvabilité II a un impact direct sur le besoin en capital. Au niveau du premier pilier par exemple, la réforme met davantage en valeur l'impact des stratégies de réassurance sur l'exigence de capital cible (SCR). Aussi, les cédantes pourront augmenter significativement leur ratio de solvabilité en faisant uniquement évoluer leur programme de réassurance. Ce gain en SCR est dû à l'effet de levier dont bénéficie la réassurance sous Solvabilité II.

Nous allons donc modéliser l'activité d'un organisme assureur pour mesurer l'efficacité des programmes de réassurance et étudier les différentes possibilités, tester les opportunités de montages proposées par les réassureurs ou les courtiers de réassurance et ainsi justifier la prise de décision.

Toujours dans le cadre du premier pilier, les besoins en capitaux résultent d'une combinaison de risques (souscriptions, opérationnel, marché, contrepartie...). Ces différents risques sont à mesurer finement dans le cadre du calcul du capital requis global.

L'intégration du programme de réassurance dans le calcul du SCR n'est pas souvent aisée puisqu'il est parfois dispersé dans plusieurs services d'une entreprise. Dans certains organismes d'assurance, les quotes-parts sont ainsi encore gérées au niveau de la comptabilité générale tandis que les excédents de sinistres relèvent d'un système dédié et les excédents de plein du système de gestion des polices ou de la production. Nous allons centraliser dans un même modèle la simulation d'un programme complet de réassurance et, plus particulièrement, la réassurance non proportionnelle.

Notons que le SCR pourra également varier en fonction de deux critères annexes : la notation et la diversification des réassureurs. Le choix des cessionnaires doit de ce fait se justifier en connaissance de cause puisque ces critères auront à la fois un impact sur le tarif que propose le réassureur mais aussi sur le gain en SCR que fournira le programme de réassurance à la cédante.

1.2.3 Gestion des risques – ORSA

Nous avons beaucoup évoqué le premier pilier mais les deux autres piliers ne peuvent pas être négligés et les experts se sont rendu compte qu'avec Solvabilité II, la réassurance va progressivement devenir un outil de pilotage stratégique susceptible de dégager d'importantes capacités d'investissement.

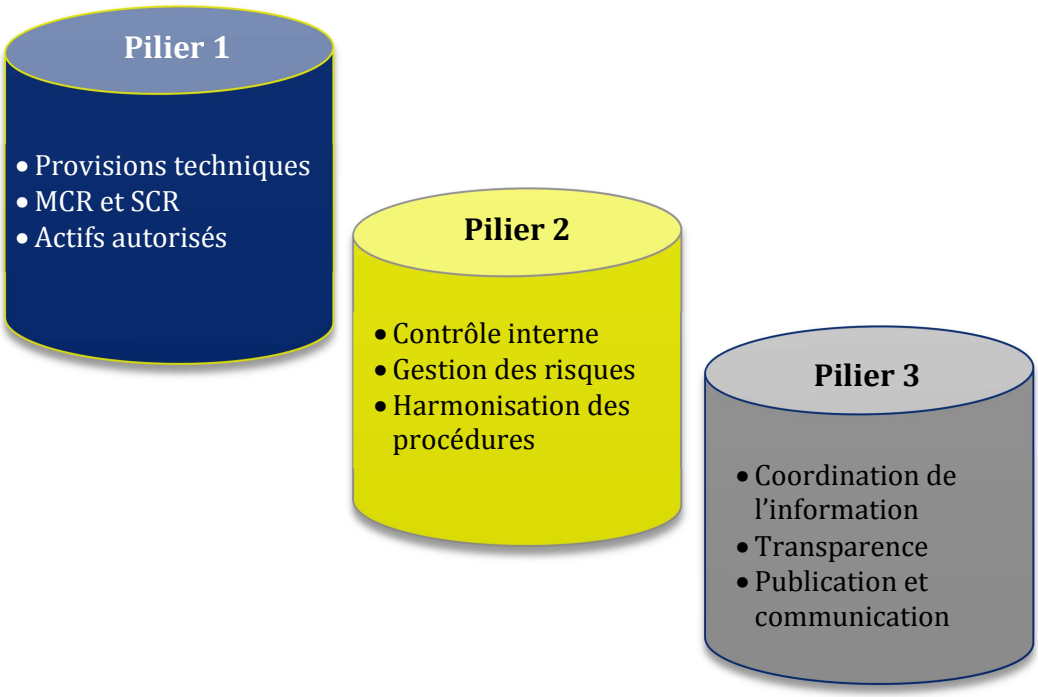

Figure 1.1

Cette considération renvoie à l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment), processus qui fait converger le premier et le second pilier. En effet, si la maîtrise des risques demeure la finalité de la réassurance sous Solvabilité I et sous Solvabilité II, force est de constater que les choix pris en matière de cessions participeront pleinement aux réflexions des organismes d'assurance dans leur plan stratégique.

Dans le cadre de l'ORSA, l'appétence au risque des cédantes, correspondant au niveau de risque prêt à être accepté pour atteindre ses objectifs, ainsi que leurs besoins en capitaux seront en effet étroitement liés aux politiques de réassurance et donc aux efforts déployés pour optimiser les programmes.

Enfin, en ce qui concerne le troisième pilier, il est quasiment acquis que plusieurs nouveaux états seront à produire au niveau de la réassurance, au moins trois contre deux états réclamés sous Solvabilité I (les C8 et C9). Les nouveaux états identifiés sont les J3 (Facultative risks non-life), J4 (Share reinsurers) et J5 (Outgoing Reinsurance Program).

2 Modélisation de l'Arrêt de Travail

Il existe plusieurs sortes d'arrêt de travail, celui pour maladie ou accident de la vie courante ou bien encore celui pour accident du travail ou maladie professionnelle.

Un arrêt de travail permet à l'employé d'être indemnisé pendant la période de sa convalescence. Cette indemnisation peut être effectuée par trois parties : la sécurité sociale, l'employeur et un organisme assureur.

Cette arrêt est délivré lors de la consultation chez le médecin à l'employé qui sera chargé de compléter et de transmettre dans certains délais les informations nécessaires à la sécurité sociale et à son employeur.

Avant de détailler les principes et méthodes de simulations utilisés dans ce mémoire, nous avons fait un schéma récapitulatif (cf. ci-dessous) de l'ensemble des étapes du processus d'optimisation. Ces différentes étapes sont chacune explicitées dans les sections suivantes.

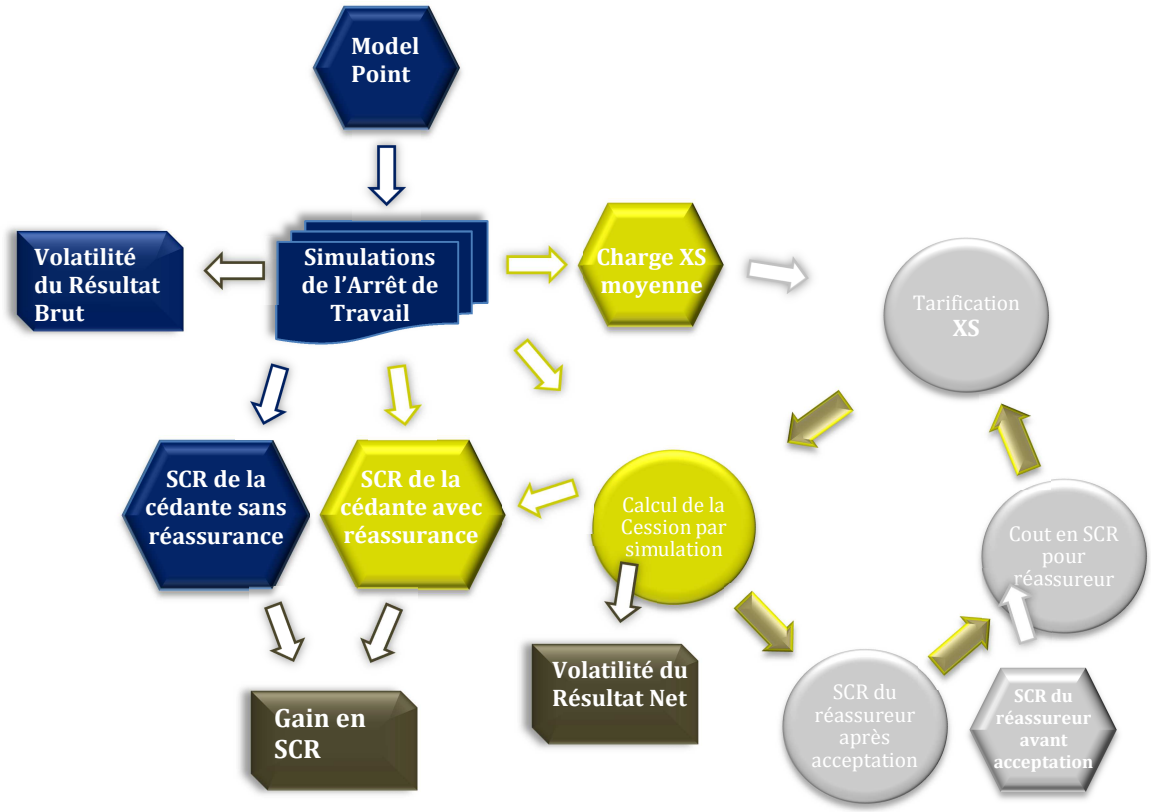

Figure 2.1

Bleu : Calculs bruts de réassurance
Jaune : Calculs nets de réassurance
Gris : Calculs concernant le réassureur
Brun : Critères d'optimalité

A partir de model points, on simule la nouvelle production en arrêt de travail. Ces simulations permettent à la fois de déterminer la volatilité et la moyenne du SCR à 1 an brut de réassurance mais aussi du résultat brut. Une fois les différentes trajectoires simulées, on peut déterminer le montant de prestations à la charge du réassureur XS.
On entre alors dans un cycle de tarification du traité XS. En effet, nous avons supposé que la tarification du traité non proportionnel dépend d'une part des sinistres réassurés et d'autre part du coût en capital engendré par l'acceptation du traité. La première étape de ce cycle est l'estimation des primes cédées avec le montant de charge moyenne cédée. Ensuite, nous calculons les montants cédés tels les provisions et primes pour calculer le SCR du réassureur après acceptation. Puis, on compare ce dernier SCR au SCR avant acceptation pour connaître le coût en SCR pour le réassureur que l'on ajoute à la prime initialement calculée. On a alors un nouveau montant de prime qui pourrait nécessiter un nouveau calcul du SCR du réassureur après acceptation et ainsi de suite. Dans un souci d'optimalité du modèle, nous n'avons effectué qu'un seul cycle pour obtenir les critères d'optimalité à analyser.

Afin de réaliser notre étude, nous supposons que le traité de réassurance analysé est rattaché à une année de survenance (il pourrait sinon être lié à l'année de souscription par exemple). Par conséquent, nous associons à chaque exercice un traité XS, en cours de validité pendant cet exercice. Toutes les primes, prestations et provisions cédées en rapport avec ce traité sont donc celles dont les dates du fait générateur (entrée en incapacité) appartiennent à l'exercice considéré.

Ceci implique que tous les individus étant déjà en cours d'incapacité ou d'invalidité ne sont pas pris en compte dans l'optimisation du choix du traité de réassurance non proportionnelle.

Nous devons alors, dans le cadre de notre étude, simuler de nouveaux entrants en incapacité. Cette simulation est une étape importante car elle repose sur des hypothèses ayant un impact fort dans la suite de notre modélisation.

2.1 Nombre de cotisants

Avant de simuler les nouveaux entrants en incapacité, nous devons connaître l'état du portefeuille assuré. Par conséquent, nous détaillerons dans cette section les modalités afférentes à la simulation du nombre de cotisants.

Schéma :

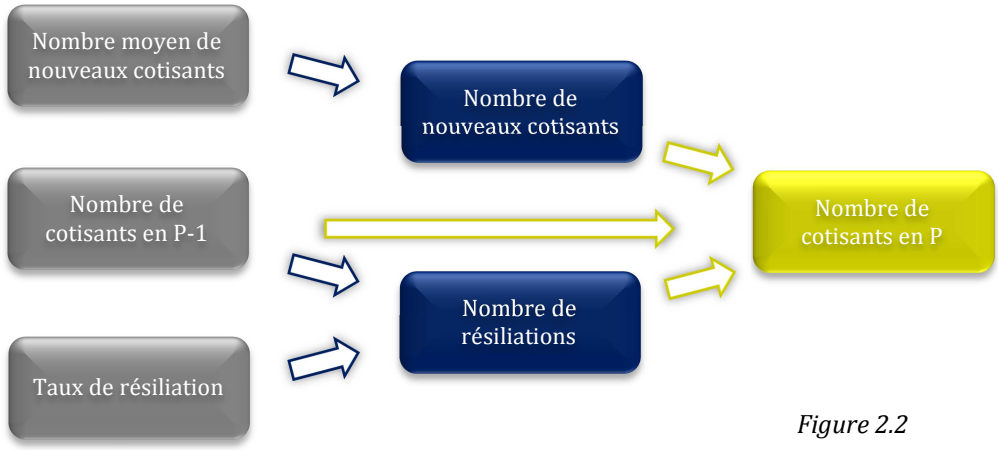

Figure 2.2

Bleu : les modules contenant des simulations
Jaune : les modules de calculs
Gris : hypothèses du modèle

Afin de déterminer le nombre d'individus présents dans le portefeuille assuré pour une année de projection P, nous partons du nombre cotisants de l'année précédente (P-1). Nous simulons ensuite deux éléments : le nombre de résiliations et le nombre de nouveaux cotisants. Dans notre modèle, nous prenons pour hypothèse principale le fait que ces deux éléments suivent des lois normales (bornées inférieurement pour éviter des montants négatifs et arrondies à l'entier près pour bien refléter un nombre entier d'individus). Nous détaillons l'évolution du nombre de cotisants en séparant les nouveaux assurés et les résiliations afin de connaître l'état du portefeuille assuré au cours de chaque année étudiée.

Exemple de distribution du nombre de cotisants après 1 an de projection :
(4 000 simulations et volatilité = 1 %)

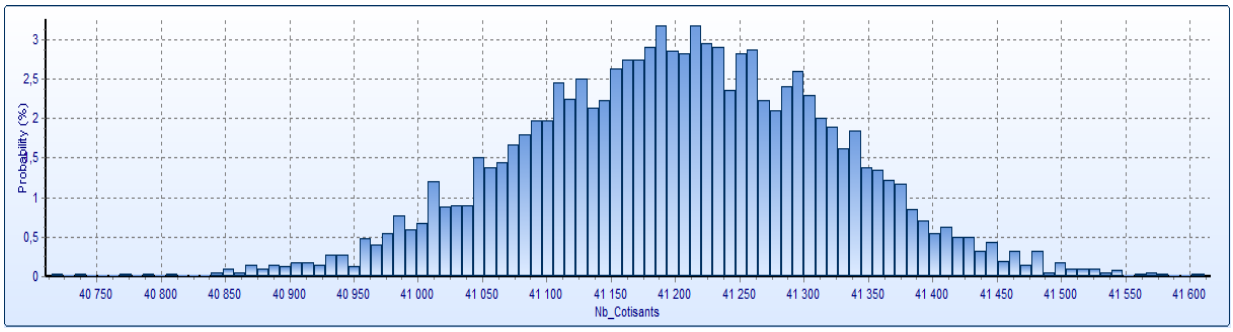

Figure 2.3

2.2 Cotisations

Afin de déterminer le résultat mais aussi le pourcentage de primes cédées au réassureur dans le cas d'un traité XS, il est nécessaire de calculer les différents montants de cotisations des assurés.

Schéma :

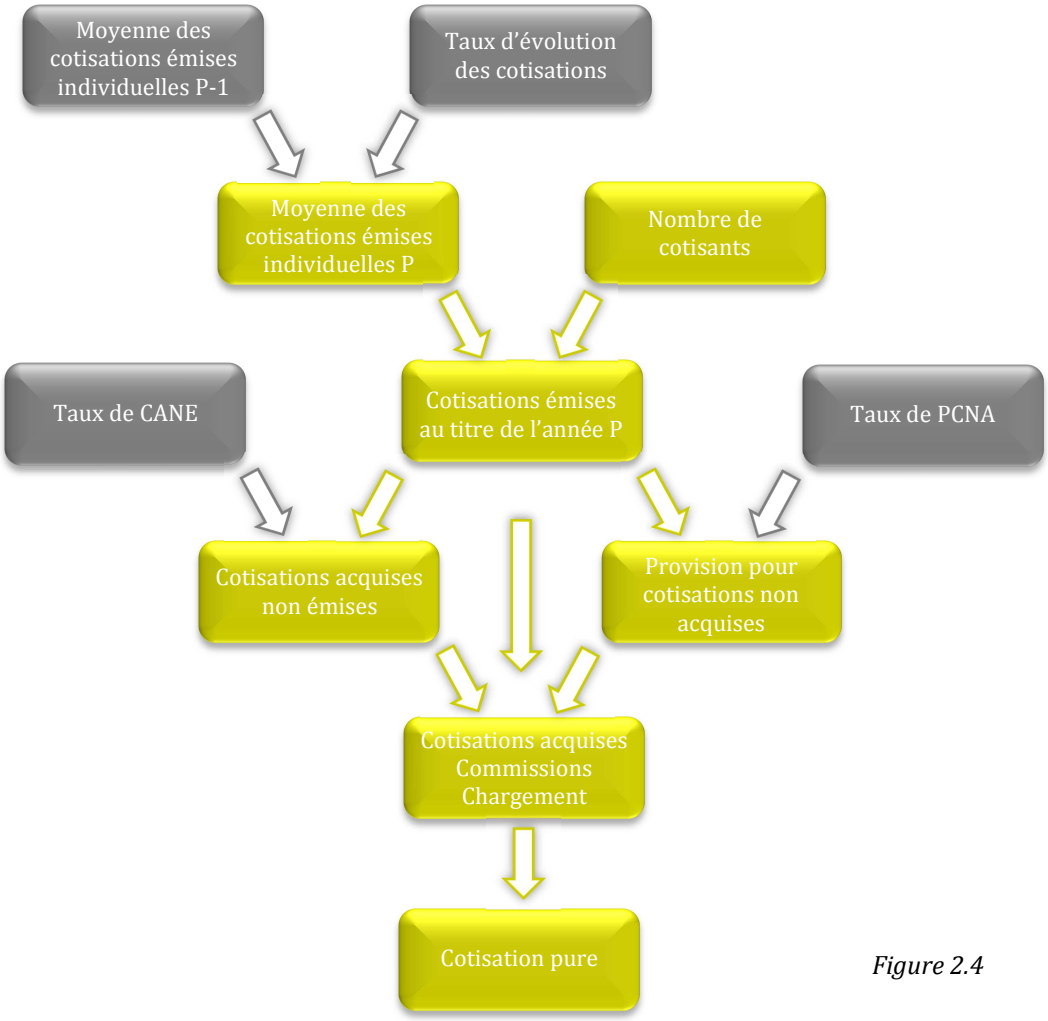

Figure 2.4

Jaune : les modules de calculs
Gris : hypothèses du modèle

Nous commençons par calculer les cotisations que chaque assuré va payer en moyenne par année (via une hypothèse d'évolution annuelle des cotisations individuelles). Cette information ainsi que le nombre de cotisants simulé dans la section précédente vont nous permettre de déterminer le montant total perçu par l'assureur pour chaque année de projection.

Ensuite, il s'agit de déterminer les cotisations acquises non émises et les provisions pour cotisations non acquises pour chaque pas de projection. Ces montants nous permettront par la suite de calculer le montant des cotisations émises et acquises chaque année, ainsi que le montant des commissions et des chargements dans le but d'aboutir au montant total des cotisations pures et d'alimenter le compte de résultat.

Distribution des cotisations acquises lors de la 1re année de projection(4 000 simulations) :

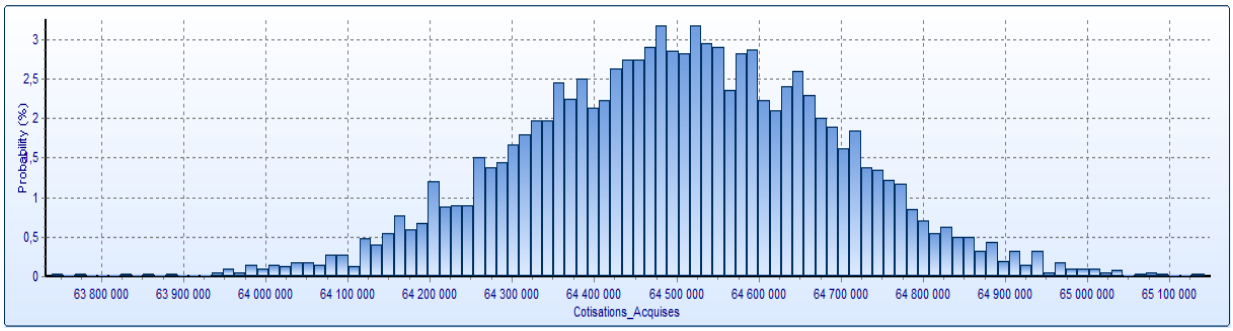

Figure 2.5

2.3 Nombre d'entrants en incapacité

Comme nous l'avons précisé précédemment, la simulation des nouveaux entrants en incapacité est une étape importante dans l'optimisation de la réassurance non proportionnelle car elle repose sur des hypothèses ayant un impact fort.

En effet, dans le cas de produit collectif, l'assureur ne dispose pas d'information précise sur chaque individu. Il ne possède généralement que l'effectif de la population assurée et un montant de primes global. On doit alors, pour simuler les individus entrant en incapacité, recourir à l'utilisation de model points. Un model point est la représentation de plusieurs individus ayant des caractéristiques identiques. Chaque model point constitue alors un sous-portefeuille homogène. Pour obtenir ces sous-portefeuilles, on segmente tout d'abord le portefeuille global en différentes tranches d'âges dont les individus ont des caractéristiques assez proches, en particulier leur montant de rente. Une fois la segmentation effectuée, on peut ensuite déterminer la proportion du nombre d'individus de cette tranche dans le portefeuille global ainsi que le nombre de mois de franchise pour ces individus. Enfin, il suffit de déterminer pour chaque tranche le montant moyen des rentes d'incapacité et l'écart-type de ces rentes.

Exemple de Model Point utilisé :

Tranche	Age	Repartition	Rente_moyenne_incap	sigma_rente	Nb_mois_franchise
1	25	2%	620	433	1
2	30	9%	873	758	1
3	35	10%	1052	871	1
4	40	14%	1097	959	1
5	50	28%	1301	1134	1
6	55	14%	1207	1399	1
7	60	19%	1290	1767	1
8	65	4%	1943	3394	1

Figure 2.6

À noter qu'il est important, pour étudier l'impact de la réassurance non proportionnelle et des traités XS tête, de simuler et projeter un portefeuille d'arrêt de travail tête par tête. En effet, chaque individu aura des caractéristiques propres et plus particulièrement un montant de rente propre qui interviendra dans le calcul des montants cédés au réassureur.

Remarque : nous faisons l'hypothèse dans notre modélisation qu'un individu entrant en arrêt de travail ne peut pas passer directement en invalidité sans passer au préalable dans un état d'incapacité.

Nous procédons maintenant à la simulation du nombre d'individus entrant en incapacité. Il faut pour cela déterminer, en amont du modèle, un taux d'incidence. Ce taux correspond au pourcentage moyen de personnes tombant en arrêt de travail dans la population assurée. A noter que nous ne tenons compte que des arrêts de travail dont la durée est supérieure à la période de franchise. En effet, comme les arrêts, ne dépassant pas la période de franchise, peuvent ne pas être déclarés, l'estimation de leur nombre est difficilement réalisable et n'apporte aucune plus-value.

Le taux d'incidence peut être déterminé par la méthode du maximum de vraisemblance ou par une autre méthode statistique. Mais, comme nous n'avons pas à notre disposition de données permettant d'estimer ce taux, nous avons choisi de le calibrer de sorte à obtenir un ratio prestations sur cotisations moyen de 90 %.

Pour cela, nous commençons par calculer, de manière déterministe, la charge de sinistralité attendue en multipliant le ratio souhaité de 90 % par le montant des cotisations. En parallèle, on détermine, toujours de façon déterministe et à l'aide des model points entrés en hypothèses, la charge de sinistralité moyenne engendrée par l'entrée en arrêt de travail d'un individu. Nous pouvons alors diviser la charge de sinistralité attendue par la charge de sinistralité individuelle pour obtenir le nombre d'entrants en arrêt de travail équivalent à un ratio sinistres sur primes souhaité. Il resta alors à diviser ce nombre d'entrants par le nombre de cotisants afin de calibrer un taux d'incidence équivalent à ce ratio.

Nous supposons ensuite que le nombre d'entrées en incapacité suit une loi de Poisson prenant en paramètre le taux d'incidence détaillé ci-dessus.

Distribution du nombre d'entrées en incapacité lors de la 1re année (4 000 simulations):

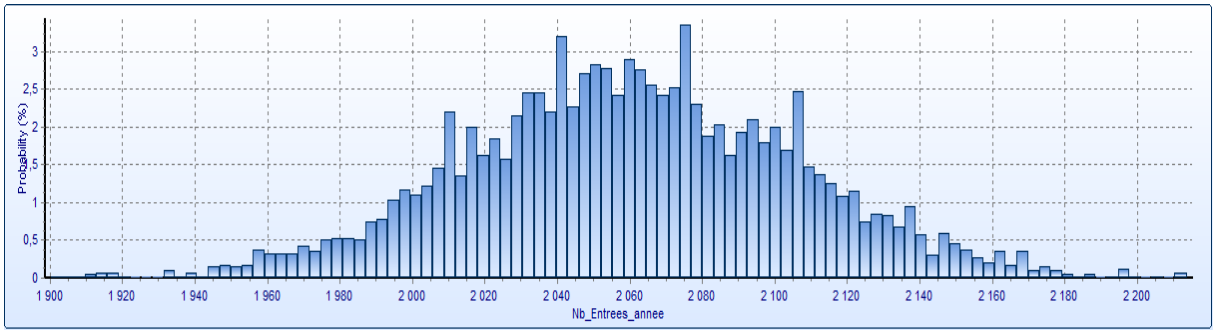

Figure 2.7

Puis, nous définissons les caractéristiques de chaque individu entrant en incapacité à l'aide du model point que nous avons construit. Nous faisons plusieurs hypothèses sur ces caractéristiques :

- Dans chaque tranche, l'âge des individus est uniformément réparti
- Le montant de la rente d'incapacité suit une loi Log Normale
- La rente d'invalidité, annuelle, est égale à douze fois la rente d'incapacité qui est mensuelle

Une fois les caractéristiques des individus déterminées, nous simulons pour chacun d'entre eux leur durée de maintien en incapacité, leur éventuel passage en invalidité et si tel est le cas leur durée de maintien en invalidité.

Nous pouvons alors, pour chaque trajectoire simulée (nombre d'entrées, caractéristiques des individus et durée de maintien), faire évoluer notre portefeuille au fil des années, calculer les prestations payées pour chaque individu et les provisions qui leur sont associées à chaque fin d'exercice.

Techniquement, la simulation du maintien en arrêt de travail ou du changement d'état de chaque individu pourrait être faite à chaque pas de projection, mais il est plus judicieux de la réaliser une fois pour toute pour l'ensemble de la trajectoire, à date d'entrée dans l'état. En effet, ceci nous permet de gagner du temps d'exécution du modèle, mais aussi de connaître le montant total à verser par individu (cf. graphique ci-dessous). Les provisions calculées sont en revanche indépendantes de cette durée car elles sont bien issues d'un barème fixe de provisionnement (dépendant uniquement de l'âge et de l'ancienneté dans l'état de l'individu), permettant ainsi le respect de la réglementation en vigueur.

Nous pouvons alors appliquer un traité de réassurance non proportionnelle à chaque montant simulé et établir la tarification du traité sans pour autant projeter le portefeuille jusqu'à extinction.

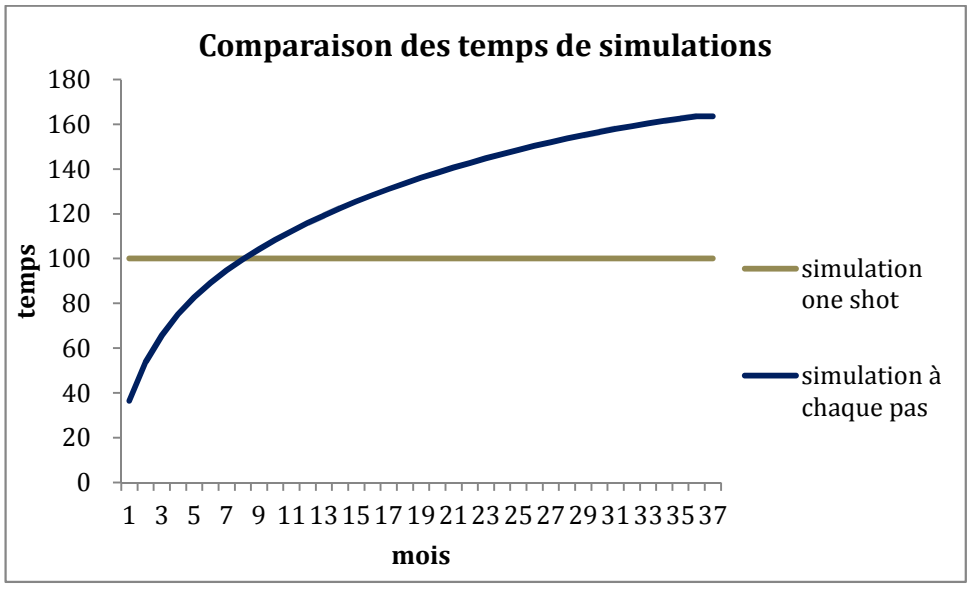

Figure 2.8

Effectivement, nous pouvons remarquer qu'à partir de 8 mois de projection, la simulation de la durée d'arrêt de travail « one shot » est plus efficace que la simulation à chaque pas de projection.

Notons, finalement, que notre étude sera très liée aux hypothèses d'entrée et de maintien en arrêt de travail que nous prendrons dans cette section. Nous ferons par la suite une étude du risque de modèle. Plus particulièrement, nous analyserons les différences qui pourront être engendrées par une modification des hypothèses comme une augmentation des taux de passage en invalidité.

2.4 Charge de sinistralité

À la suite des sections précédentes, nous connaissons désormais notre portefeuille d'individus en arrêt de travail. Nous pouvons alors faire évoluer ce portefeuille avec les paramètres que nous avons simulés dès la connaissance de l'entrée en incapacité de chaque individu. Ces paramètres nécessaires au calcul de la charge de sinistralité relative à chaque individu sont :

- L'âge
- L'état (Incapacité / Invalidité)
- L'ancienneté dans l'état
- Le montant de la rente d'incapacité
- Le montant de la rente d'invalidité

Nous pouvons à présent calculer à chaque date d'inventaire (31/12/N) la Provision Mathématique (PM) d'incapacité, la PM d'invalidité en attente et la PM d'invalidité. Pour calculer ces trois provisions, nous utilisons différents barèmes comprenant pour chaque âge d'entrée en incapacité ou en invalidité et chaque ancienneté dans l'état, un a_x correspondant à la provision à constituer pour une rente unitaire. Ces barèmes sont utilisés pour diminuer les temps de calculs de notre modèle.

La somme de ces différentes provisions nous donne la PM totale brute que doit constituer l'assureur pour honorer ses engagements envers les assurés.

Il faut ensuite, pour calculer le résultat de chaque exercice, déterminer le montant de prestations que verse l'assureur. Pour cela, nous comptons le nombre de flux d'incapacité et le nombre de flux d'invalidité qui sont versés à chaque assuré au cours de l'exercice. Enfin, nous multiplions le nombre de flux par les montants des rentes correspondantes.

Remarque :

Nous ne nous attardons pas dans ce mémoire sur la modélisation des provisions pour sinistres à payer et les IBNR. En effet, nous simplifions cet aspect en supposant que ces deux provisions sont proportionnelles aux provisions mathématiques et que leur liquidation se fait suivant une cadence entrée en hypothèse.

De plus, nous ne focaliserons pas non plus sur la modélisation du maintien de la garantie décès en cas d'arrêt de travail puisque nous avons considéré que cette garantie n'est pas incluse dans l'assiette des sinistres réassurés par le traité XS. Nous avons fait ce choix puisque dans certains contrats, cette garantie ne s'applique que si le décès fait suite à l'accident/maladie ayant engendré l'arrêt de travail. N'ayant pas de données sur ces informations ce point pourrait faire l'objet d'une autre étude.

2.5 Schéma récapitulatif

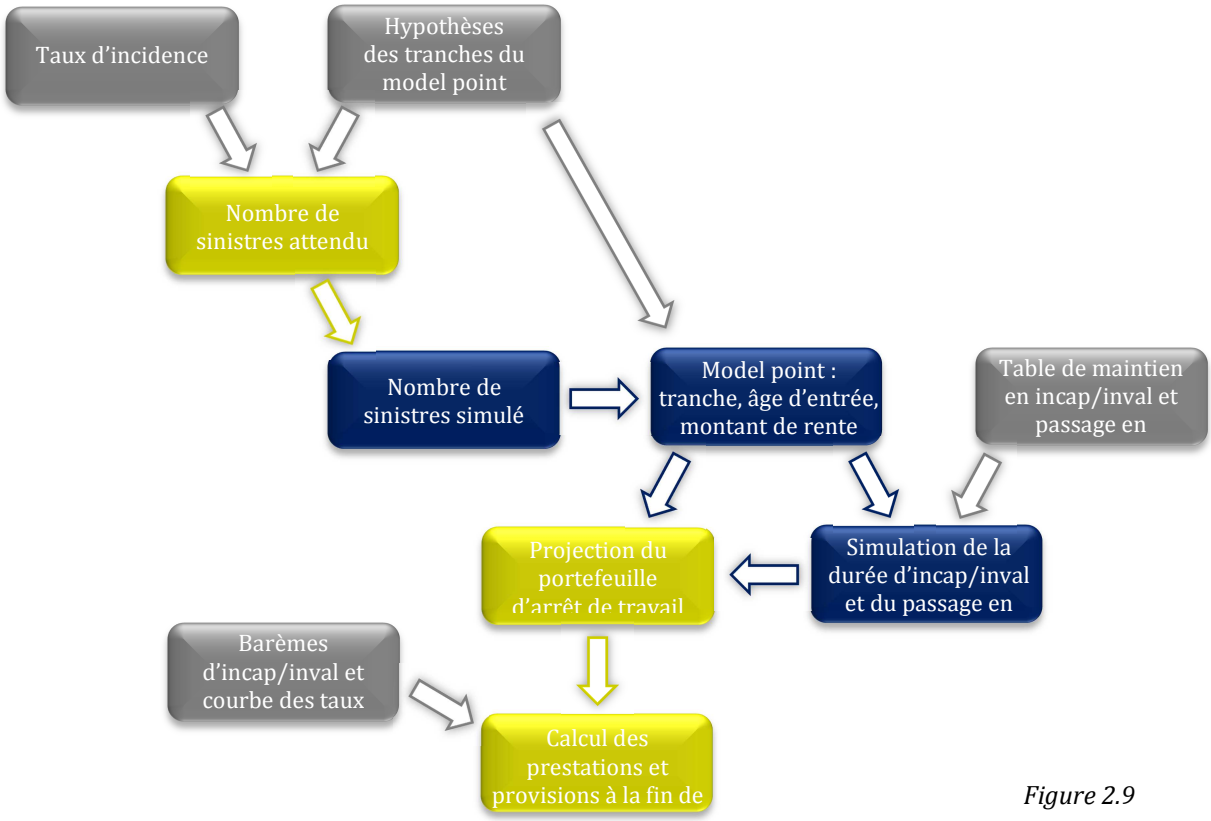

Figure 2.9

Bleu : les modules contenant des simulations
Jaune : les modules de calculs
Gris : hypothèses du modèle

En résumé, pour déterminer la charge de sinistralité en arrêt de travail, il faut tout d'abord déterminer le nombre de sinistres annuel ainsi que les caractéristiques de chaque individu. Pour cela, on utilise le taux d'incidence et des model points. On détermine ensuite la trajectoire en arrêt de travail de chaque individu simulé (durée d'incapacité, passage en invalidité, durée d'invalidité, décès). Ces trajectoires nous permettent alors de calculer pour chaque inventaire le montant des prestations et provisions mathématiques.

3 La réassurance non proportionnelle

Nous nous concentrons dans ce mémoire sur les traités de réassurance non proportionnelle. Comme le nom l'indique, il n'y a pas ici de relation de proportionnalité entre la prime cédée et la participation du réassureur dans les sinistres. Ce type de réassurance a pour objectif de plafonner les montants à charge de la cédante (selon le niveau de priorité fixé, il peut s'agir de montants régulièrement atteints), de la protéger de la survenance d'évènements catastrophiques, de montants inhabituellement élevés ou encore d'une fréquence de sinistres trop importante.

Il existe deux grands types de contrats en réassurance non proportionnelle qui sont l'excédent de sinistres (excess of loss) et l'excédent de perte annuelle (stop loss). Nous nous concentrons dès à présent essentiellement sur le premier type de contrats : l'excédent de sinistres (XS).

3.1 Traité de réassurance en Excédent de Sinistres

Ce contrat fonctionne comme un contrat d'assurance avec franchise déductible. Ici, la franchise est appelée « priorité ». Le réassureur s'engage donc à payer pour tous les sinistres dépassant cette franchise et uniquement pour le montant de ce dépassement. De plus, ces traités font également mention d'une « portée » qui correspond à l'engagement maximum du réassureur sur un sinistre. Le réassureur paie donc au plus le montant de la portée pour chaque sinistre. En sommant la portée et la priorité, nous obtenons une autre valeur importante, appelée le « plafond ».
Ainsi si l'on appelle X le montant d'un sinistre couvert par un traité XS, le montant à la charge du réassureur sera :

$$\begin{cases} 0 & si\ X \leq priorite \\ X - priorite & si\ priorite < X \leq plafond \\ Portee & si\ X > plafond \end{cases}$$

Exemples de rétentions et de cessions sur différents montants de sinistres :

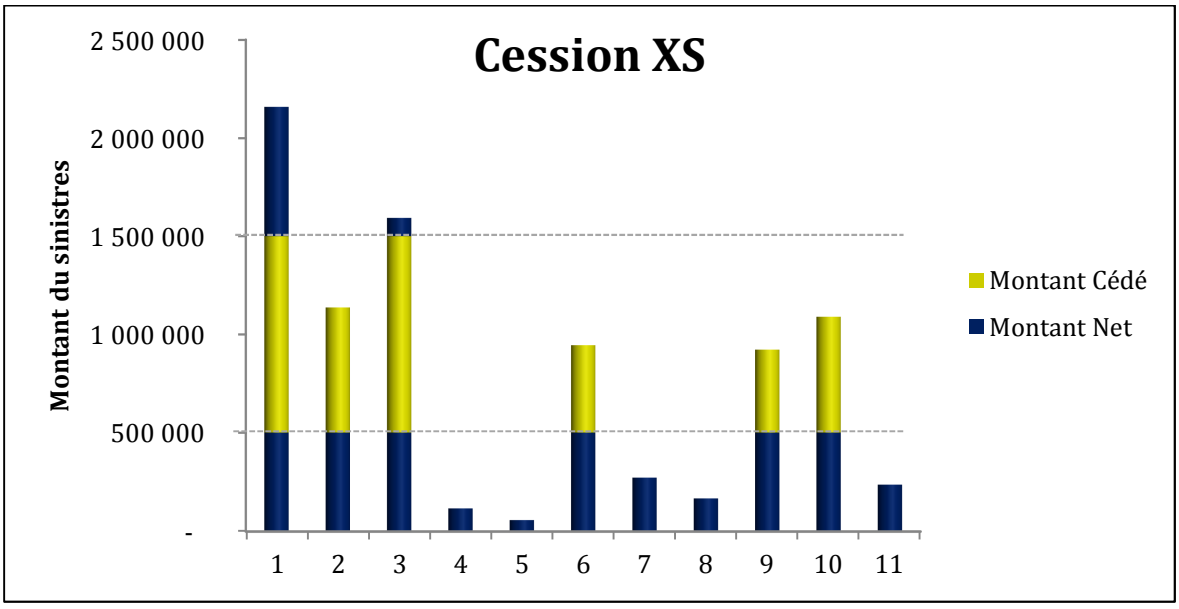

Figure 3.1

Si l'on note S le sinistre à charge du réassureur, on a :
$S = Min(Max(X - priorite, 0), portee)$

En pratique, on présente un XS de la manière suivante : portée XS priorité. Ainsi, 5 XS 10 désigne un traité en excédent de sinistre de priorité 10 et de portée 5.

Il n'y a pas ici de relation entre la proportion de la prime cédée et la part du réassureur dans le règlement des sinistres. La prime d'un XS est en général exprimée en pourcentage de l'encaissement annuel des risques concernés pour la période considérée. Parfois cette prime n'est pas reliée directement à l'encaissement annuel de la cédante et est exprimée en montant, on parle de prime flat.

En pratique, la cédante communique au réassureur une estimation des primes qu'elle sera amenée à encaisser pour la période de couverture (EPI : Estimated Premium Income). Le réassureur va étudier l'XS et estimer une prime de réassurance en pourcentage de cette EPI. Ainsi, si la cédante a un encaissement moins important et donc une exposition moins importante, sa prime de réassurance sera diminuée en proportion ; en revanche, si elle souscrit plus que ce qu'elle avait annoncé à son réassureur, elle devra verser un complément de prime pour l'exposition additionnelle du traité.

3.1.1 Reconstitution

La reconstitution dans les traités de réassurance XS permet de renouveler la garantie, plus précisément elle redonne le droit à la cédante de céder un montant de sinistre qui dépasserait la priorité, dans la limite de la portée.

Un traité en excédent de sinistres prévoit généralement un nombre maximal de reconstitutions de la garantie, celui-ci pouvant aussi être illimité. Par exemple, on peut trouver sur le marché des XS avec reconstitutions gratuites et illimitées ou encore des XS sans reconstitution. Dans ce dernier cas, le réassureur s'engage à payer au maximum une fois la portée de l'XS.

Cela signifie que pour un sinistre ou un risque donné, le réassureur ne paiera pas plus que la portée. De plus, sur l'année de survenance considérée, le réassureur paiera au maximum n+1 portées où n désigne le nombre de reconstitutions. Ce nombre de reconstitutions permet au réassureur de fixer une limite de cession de sinistres pour la cédante.

En cas de survenance d'un sinistre, la garantie supplémentaire accordée au titre de la reconstitution est activée automatiquement. En contrepartie, la cédante doit verser au réassureur une prime dite « de reconstitution ». Le traité prévoit également le taux de prime de ces reconstitutions. Ce taux correspond à un pourcentage par rapport à la prime de réassurance originale. Par exemple, en cas de survenance d'un sinistre traversant totalement la tranche et pour une prime de reconstitution de 50 %, la cédante versera une prime de reconstitution égale à 50 % de la prime de réassurance de départ.

En théorie, ces reconstitutions peuvent être calculées prorata capita (proportionnelle au montant à reconstituer), prorata temporis (proportionnelle au temps restant à couvrir jusqu'à la fin de la période de couverture) ou au double prorata. En pratique, les reconstitutions sont généralement calculées au simple prorata capita, quel que soit le moment de l'année où elles sont payées. C'est pourquoi, nous privilégions cette méthode dans la suite de notre étude.

3.1.2 Particularités de l'arrêt de travail

En arrêt de travail, nous ne pouvons pas connaître le montant total du sinistre avant que l'individu assuré sorte de cet état. En effet, le règlement du sinistre se faisant généralement par des indemnités journalières, une rente mensuelle pour l'incapacité ou une rente trimestrielle pour l'invalidité, il dépend forcément de la durée de l'arrêt de travail. Comme cette durée peut s'étaler sur une quarantaine d'années, nous estimons la charge de sinistralité au moment où nous considérons que l'état de l'individu est consolidé (c'est-à-dire à la fin de l'incapacité ou au moment du passage en invalidité).

Le montant total du sinistre qui est réassuré, et auquel on appliquera le traité XS tête, est alors la somme des prestations payées au titre de l'incapacité et des capitaux constitutifs d'invalidité calculés à la date du passage en invalidité.

Le montant de chaque sinistre (connu) est au plus tard calculé 3 ans après sa survenance, ceci étant la durée maximale d'une rente d'incapacité. Pendant cette période « d'incertitude », le réassureur peut commencer à garantir les prestations qu'il devra payer soit sous forme de dépôts espèces soit sous forme de nantissements. Les règles de ces garanties peuvent dépendre des conditions du traité de réassurance. En effet, certains réassureurs garantissent la totalité des provisions cédées alors que d'autres ne garantissent que le montant des prestations payées au titre de l'incapacité dépassant la priorité du traité XS tête. Nous avons choisi dans ce mémoire d'opter pour la deuxième méthode et nous plaçons dans la situation où le réassureur ne garantit les montants cédés que par le biais de nantissements.

3.2 Modélisation

Nous allons détailler dans la suite de ce mémoire seulement la modélisation de la réassurance non proportionnelle en excédent de sinistres. Toutefois, nous modélisons aussi la réassurance proportionnelle pour pouvoir par la suite optimiser une stratégie de réassurance plus complète.

Il est intéressant de remarquer que nous avons choisi d'appliquer d'abord aux différents montants bruts le traité de réassurance non proportionnelle (XS) puis le traité de réassurance proportionnelle (QP). Cet ordre n'a aucune importance sur le processus d'optimisation des traités puisque les deux stratégies (XS puis QP ou QP puis XS) nous amèneraient aux mêmes résultats. En effet, une fois une stratégie optimale choisie en prenant l'ordre XS puis QP, il suffit d'adapter les paramètres de chaque traité, priorité, portée et taux de quote-part, pour trouver la stratégie « QP puis XS » optimale.

3.2.1 Tarification

Compte tenu des différentes clauses de réassurance, il est très difficile d'obtenir une expression analytique de la prime de réassurance. C'est pourquoi, nous utilisons un modèle stochastique pour déterminer la prime pure de différents traités de réassurance en XS tête.

De plus, il est important d'intégrer la prime dans notre modèle d'optimisation de réassurance non proportionnelle pour plusieurs raisons. Premièrement, le tarif dépend de la structure du portefeuille assuré et des paramètres du traité comme la priorité, la portée ou encore le nombre de reconstitutions. Le pourcentage de primes cédées doit alors être adapté à chaque traité que nous allons tester et comparer. Deuxièmement, comme nous allons le voir, le tarif dépendra du coût en SCR provoqué par l'acceptation

de la réassurance. Et, troisièmement, le montant des cotisations cédées aura un impact important sur les critères d'optimalité d'un traité. En effet, par la suite, nous analyserons entre autres le résultat cédé au réassureur ou encore le gain en SCR de la cédante sur lesquels le pourcentage de primes cédées a directement un impact.

La première étape pour pouvoir déterminer un tarif est de connaître les individus qui seront assurés et par conséquent réassurés. Pour cela, nous utilisons les simulations détaillées dans la partie « Modélisation de l'Arrêt de Travail ». En effet, une fois les différentes trajectoires simulées, nous déterminons, par la méthode de Monte-Carlo, le montant moyen cédé grâce au traité XS. Plus précisément, pour chaque trajectoire, nous avons simulé la durée de maintien en incapacité et le passage en invalidité de chaque individu. Nous connaissons alors le montant total du sinistre (prestations d'incapacité + capitaux constitutifs d'invalidité). Nous appliquons ensuite le traité XS à ce montant et déterminons ainsi le montant cédé pour chaque individu.

Enfin, en contrôlant le nombre de portées autorisées dans le traité avec le nombre de reconstitutions, nous calculons le montant cédé pour tout le portefeuille pour chaque simulation.

Par cette méthode, nous sommes également en mesure d'estimer toutes sortes d'indicateurs pertinents tels que les quantiles de la distribution de la charge XS, la variance et même des intervalles de confiance.

Pour finir, il faut déterminer la prime relative à chaque traité XS. Cette prime de réassurance est exprimée en pourcentage de la prime brute que percevra la cédante et est tel que l'espérance de la prime cédée totale soit égale à l'espérance de la charge cédée.

$$E[Charge\ Totale] = E[Prime\ Cédée\ Totale]$$

$$= E[Prime\ Cédée_{Initiale} + Prime\ Cédée_{Initiale} * Coût\ Rec * Nb\ Rec]$$

$$= Part\ Prime\ Cédée * E[Prime\ Brute * (1 + Coût\ Rec * Nb\ Rec)]$$

On peut supposer à ce stade que le nombre de reconstitutions et la prime brute sont indépendants ce qui donne :

$$E[Charge\ Totale]$$
$$= Part\ Prime\ Cédée * E[Prime\ Brute] * (1 + Coût\ Rec * E[Nb\ Rec])$$

➔ $Part\ Prime\ Cédée = \frac{E[Charge\ Totale]}{E[Prime\ Brute]*(1+Cout\ Rec*E[Nb\ Rec])}$

➔ $Part\ Prime\ Cédée \approx \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Charge\ Totale_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Prime\ Brute_i*\left(1+Coût\ Rec*\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Nb\ Rec_i\right)}$

Où $Coût\ Rec =$ coût des reconstitutions en pourcentage du coût initial

Et $Nb\ Rec =$ nombre de reconstitutions disponibles dans le traité XS

Nous pouvons noter que l'estimateur proposé à la dernière ligne de calcul n'est pas sans biais mais asymptotiquement sans biais. Nous le préférons à un estimateur sans biais

car le dénominateur est souvent proche de zéro. L'estimateur sans biais (celui de Monte-Carlo) est alors trop volatile.

Nous appliquons ensuite au pourcentage de cession de prime un pourcentage de frais de chargement. Nous jouerons par la suite sur ce paramètre pour voir comment chaque assureur peut rester compétitif malgré une différence de notation.

Enfin, nous ajoutons au montant de la prime cédée un pourcentage du coût en SCR que doit supporter le réassureur en acceptant ce traité XS. Nous avons arbitrairement choisi un coût du capital de 6 %. Pour déterminer ce coût en SCR, il est nécessaire de calculer ce capital de solvabilité pour chaque traité à comparer. Nous intégrons donc dans notre modèle à la fois le calcul des capitaux de solvabilité de la cédante mais aussi ceux du réassureur tout en prenant en compte le reste de l'activité de ce dernier. Pour cela, nous supposons connue au préalable la structure du SCR d'un réassureur auquel nous ajoutons l'activité supplémentaire engendré par l'acceptation du traité de réassurance non proportionnelle. Ce coût en SCR sera déterminé par la suite.

3.2.2 Cession

Afin de déterminer le résultat cédé au réassureur pour le traité de réassurance XS qu'il a proposé, il est nécessaire de calculer les cotisations cédées et la charge de sinistralité cédée. Cette dernière étant composée des prestations cédées et des provisions cédées.

3.2.2.1 Cotisations

Les cotisations sont déterminées à la fois par le pourcentage de prime défini lors de la tarification mais aussi par le coût des reconstitutions. Ces coûts de reconstitution sont émis au fur et à mesure que les différentes portées sont consommées et sont calculées prorata capita.

3.2.2.2 Prestations

Pour la garantie arrêt de travail, le montant des prestations cédées est calculé et payé à la fin de la période d'incapacité de chaque individu. En effet, c'est seulement à ce moment-là que l'on connaît le coût total du sinistre qui sera réassuré. Soit l'individu n'est plus en arrêt de travail et le montant du sinistre est égal à la somme des prestations d'incapacité, soit l'individu passe en invalidité et le coût du sinistre est égal à la somme des prestations payées au titre de l'incapacité et des capitaux constitutifs de la rente d'invalidité. Nous appliquons ensuite, pour chaque tête, le traité XS au montant du sinistre afin d'obtenir le montant cédé du sinistre. Ce montant est alors réglé à chaque fin d'incapacité, qu'il y ait un passage ou non en invalidité, dans la limite d'une cession maximale pour tout le portefeuille déterminée par la portée et le nombre de reconstitutions.

Nous pouvons rappeler que tant que la période d'incapacité n'est pas terminée, le montant dépassant la priorité du traité et qui est théoriquement cédé au réassureur est nanti par ce dernier.

3.2.2.3 Provisions

À la fin de chaque exercice, la cédante doit constituer pour chaque individu une provision. Cette provision est obligatoire puisqu'elle représente un engagement de l'assureur envers l'assuré. De plus, comme l'assureur possède un programme de réassurance XS, il doit céder au réassureur une partie de cette provision.

Pour déterminer la provision brute, il faut pour chaque individu calculer classiquement la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur. Ce calcul s'effectue à l'aide des tables de maintien en incapacité et en invalidité fournies par le BCAC (Bureau Commun des Assurances Collectives).

Mais pour ce qui est de la réassurance non proportionnelle, le calcul n'est pas aussi simple puisque l'on ne prend en compte que le surplus du montant dépassant la priorité, tout en majorant ce surplus par la portée. De plus, le montant du sinistre dépend de la consolidation de la rente d'arrêt de travail de l'individu.

Nous considérons alors la formule suivante (1) afin de déterminer la valeur actuelle probable des flux futurs cédés :

$$\sum_{k=anc+1}^{36} \frac{1}{(1+i_{k-anc})^{\frac{k-anc}{12}}} * \left[\min\left(portée, max\left(Rente_{Incap} * k - priorité, 0\right)\right) * \left(\frac{l_{x,k-1}^{INC} - l_{x,k}^{INC}}{l_{x,anc}^{INC}} - \frac{s_{x,k-1}}{l_{x,anc}^{INC}}\right)\right.$$

$$\left. + \min\left(portée, max\left(Rente_{Incap} * k + KC_{Inval}(k) * Rente_{Inval} - priorité, 0\right)\right) * \left(\frac{s_{x,k-1}}{l_{x,anc}^{INC}}\right)\right]$$

Où :

- i_k = le taux d'actualisation à prendre en compte pour le mois k. Ce taux d'actualisation peut être fixe dans le temps pour les provisions en normes actuelles ou peut être déterminé à l'aide d'une courbe de taux
- $Rente_{Incap}$ *et* $Rente_{Inval}$sont les montants de rente respectivement d'incapacité et d'invalidité de l'individu
- $portée$ *et* $priorité$ sont les paramètres du traité de réassurance non proportionnelle
- $KC_{Inval}\ (k)$ représente le capital constitutif d'invalidité pour un individu étant resté k mois en incapacité. À noter que ce capital dépend aussi de l'âge d'entrée en arrêt de travail de l'individu
- $l_{x,k}^{INC}$ se lit dans la table de maintien en incapacité. Cet élément représente le nombre d'individus, sur 10000, entrés en incapacité à l'âge x qui se maintiennent dans cet état pendant au moins k mois
- $s_{x,k}$ se lit dans la table de passage en invalidité. Cet élément représente le nombre d'individus, sur 10000, entrés en incapacité à l'âge x qui passent en invalidité le k^{e} mois
- anc = le nombre de mois d'ancienneté dans l'état d'incapacité

Le premier terme de la somme entre crochets correspond au montant versé dans le cas où l'individu sort du portefeuille à l'issue de sa période d'incapacité. Le second terme correspond au cas où il passe en invalidité.

Enfin, pour tenir compte d'un éventuel nombre limité de reconstitutions au sein d'un traité en excédent de sinistres, le montant des provisions cédées devrait être égal à :

$$E[min(X,S)]$$

Où $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \; et \; X_i = v.a. représentant \; le \; montant \; cédé \; pour \; l'individu \; i$

Et $S = (nb_{rec} + 1) * portée$

Rappel : $E[X_i] = (1)$

Or, ce calcul nécessite d'une part de connaître la dépendance entre les individus et d'autre part d'analyser l'ensemble des combinaisons possibles de sortie d'incapacité des individus en portefeuille (36^n combinaisons si les individus sont indépendants). Comme cette méthode est difficilement réalisable, nous aimerions utiliser l'approximation (fausse) suivante :

$$E[min(X,S)] \approx min(E[X],S)$$

Ce qui serait nettement plus confortable car nous connaissons l'espérance qui correspond au montant de la provision calculée précédemment. Mais cette approximation qui est en fait une inégalité tend à surestimer de façon quasi-obligatoire les provisions. Le calcul ne reflèterait alors pas la meilleur estimation possible de l'engagement de l'assureur.

$$E[min(X,S)] = \min(E[min(X,S)],S) \;\; et \; E[min(X,S)] \leq E[X]$$

$$\Rightarrow E[min(X,S)] \leq min(E[X],S)$$

Toutefois, nous utilisons la formule de calcul de provision ci-dessus exclusivement dans le cas où les reconstitutions sont illimitées ($S = +\infty$) puisque dans cette configuration, l'inégalité devient une égalité.

Pour les autres cas ($S \neq +\infty$), nous utilisons une méthode plus coûteuse en temps de calculs mais plus précise qui consiste à projeter les flux de prestations futures, en tenant compte de la limite de cession, et à les actualiser à l'aide d'une courbe de taux afin de constituer la provision Best Estimate. Le calcul est alors le suivant :

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{(1+r_k)^{k-0,5}} * Flux \; Presta_k$$

Où *k* représente l'année de projection,
r la courbe des taux permettant l'actualisation des flux en incapacité/invalidité,
et *Flux Presta*$_k$ le montant moyen du flux de l'année *k*.

Remarque :

Nous ne modélisons pas dans ce mémoire de compte de participation aux bénéfices (PB) avec le réassureur. Les clauses de PB étant définies différemment dans chaque contrat de réassurance, nous ne prenons pas le risque de venir perturber les résultats que nous voulons interpréter.

Schéma de la partie Arrêt de travail avec la réassurance :

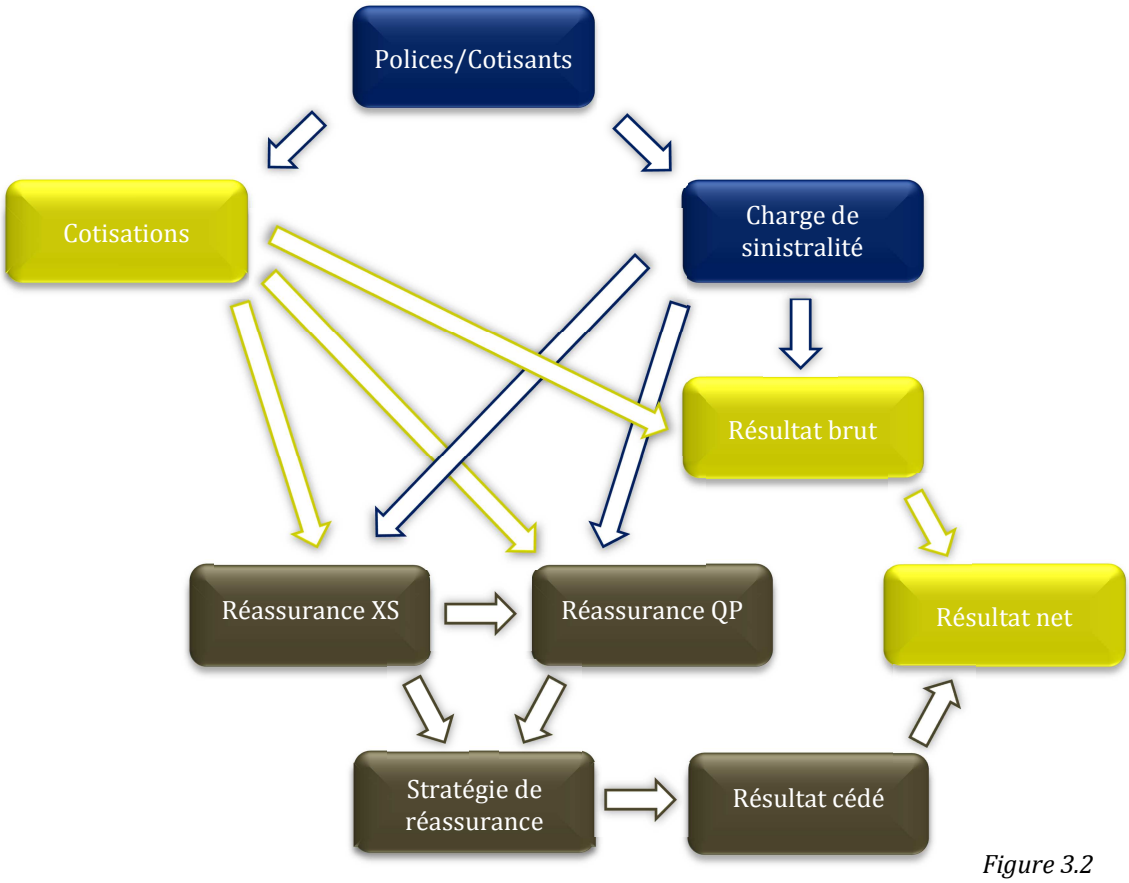

Figure 3.2

Bleu : les modules contenant des simulations
Jaune : les modules de calculs
Gris : hypothèses du modèle
Brun : les modules concernant la réassurance

4 Modélisation de l'Actif

L'évolution et la gestion des actifs sont essentielles à modéliser dans notre modèle afin de déterminer la stratégie de réassurance non proportionnelle optimale. En effet, nous verrons par la suite que le gain en SCR dû au programme de réassurance ne peut être pertinent si l'on conserve un portefeuille d'actifs constant quel que soit le scénario de réassurance considéré.

4.1 ESG

L'évolution des actifs est modélisée ligne par ligne via l'utilisation d'un « ESG » (Economic Scenario Generator). Puis, à chaque fin d'exercice, nous définissons les quantités d'actifs à acheter ou à vendre pour respecter l'allocation cible déterminée par le choix de la stratégie « ALM » (Asset and Liability Management).

Dans notre modèle, les deux parties (cédante et réassureur) ont une stratégie d'allocation et une répartition des actifs qui leur est propre. Elles évoluent cependant dans un environnement économique similaire, ce qui nous conduit à utiliser un unique ESG. Ceci permettra notamment que, en cas d'investissement dans une action identique par exemple, il y aura alors bien une corrélation des SCR marché des deux entités.

Un scénario économique peut être défini comme une projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêt. Les grandeurs de l'économie qui intéressent un assureur sont généralement celles qui ont un impact sur le développement de son activité ou sur son résultat. On peut citer la structure des taux d'intérêts, la performance des actions ou du foncier, l'inflation…

Un ESG permet d'obtenir des projections dans le futur des valeurs de l'actif et du passif :

- Calcul des valeurs de marché des produits financiers : obligations, actions, immobilier,…
- Calcul des cashflows et évaluation des passifs en valeur économique : PB future, rachats dynamiques, provisions Best Estimate,…

4.2 Les différentes classes d'actif

Pour ce mémoire, nous avons modélisé différentes classes d'actifs dans lesquelles chacune des parties peut investir. Afin de déterminer les capitaux de solvabilité, il est important de modéliser les actifs avec un certain niveau de détail. C'est-à-dire en gérant les actifs par type et ligne par ligne ou au moins par émetteur. En effet, sous Solvabilité II, les types de placements ainsi que les contreparties ne sont pas gérés de la même manière puisqu'ils ne représentent pas les mêmes risques pour le détenteur.

C'est pour ces différentes raisons que nous avons choisi de modéliser six types d'actifs :

- Les actions
- Les placements immobiliers
- Les obligations d'Etat (OAT)
- Les obligations « Corporate » (OTF et OTV)
- Le monétaire
- Les OPCVM (mixte des 5 types précédents)

4.3 La gestion actif/passif

Ce module permet de déterminer, pour l'assureur et le réassureur, les montants qu'il faudra investir ou désinvestir dans chaque type d'actif à la fin de chaque exercice en fonction des répartitions souhaitées initialement.

La première stratégie correspond à une allocation dite par flux. Elle consiste à investir les nouveaux flux générés au cours de l'année suivant la répartition décrite au préalable, tout en conservant les stocks initiaux. La deuxième stratégie, dite par stock, consiste à garder toujours la même répartition entre les différents types d'actifs. C'est-à-dire que l'on considère, à chaque pas de projection, l'investissement ou le désinvestissement permettant de conserver une proportion de chaque actif dans le portefeuille fidèle à la répartition définie dans l'allocation cible.

Avant d'appliquer l'une ou l'autre stratégie, nous calculons la valeur de marché de l'ensemble des titres. Puis, nous déterminons le montant total de la valeur de marché avant transactions de l'ensemble des actifs.

Ensuite, nous explicitons la somme des produits et des charges dus à l'activité de l'assureur ou du réassureur. Cela va nous permettre de calculer le cash-flow global engendré par les placements financiers et par les produits d'assurance. Selon que ce cash-flow soit positif ou négatif, nous allons devoir respectivement investir ou désinvestir.

À l'aide de ce cash-flow, nous déterminons les nouvelles valeurs de marché après transactions des portefeuilles des différents types d'actifs selon la stratégie choisie.

4.4 Schéma récapitulatif

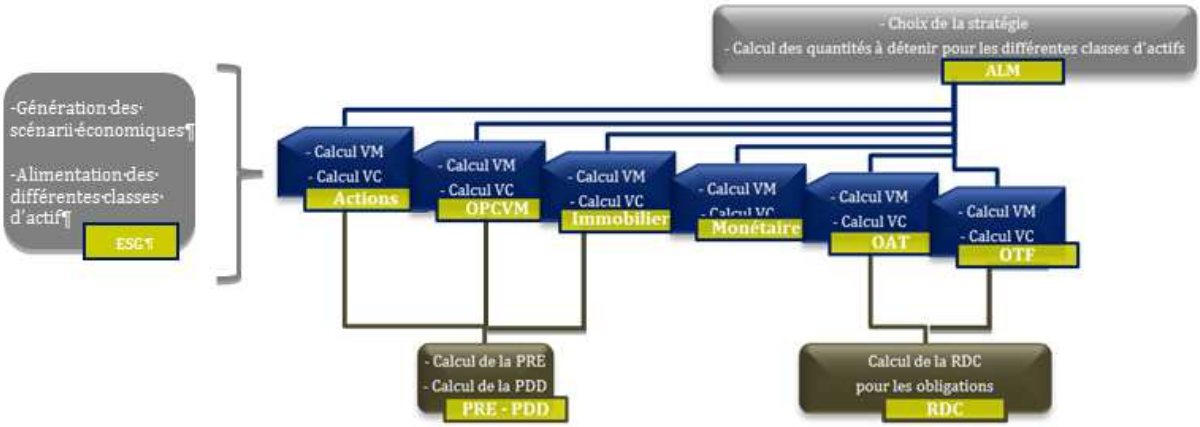

Figure 4.1

En résumé, la gestion des actifs comportent deux points d'entrée. Le premier est le générateur de scénarios économiques qui permet de définir l'évolution des actifs présents en portefeuille. Le deuxième est le choix de la stratégie d'allocation d'actifs qui permet de répartir les cash-flows, provenant à la fois du passif et de l'actif, entre les différents types d'actifs. Nous pouvons alors, à chaque fin d'exercice, déterminer le montant des transactions à effectuer afin de déterminer les valeurs de marché et les valeurs comptables des actifs de chaque classe. Enfin, suivant les plus ou moins-values réalisées et l'évolution des actifs nous calculons les différentes provisions d'actifs à intégrer dans le bilan.

5 Calcul du SCR selon la formule standard

5.1 La nécessité du calcul du SCR

Tout d'abord, nous rappelons qu'il est nécessaire de calculer les capitaux de solvabilité requis pour la cédante et pour le réassureur dans différents cas et cela pour plusieurs raisons.

En effet, le calcul du SCR pour la cédante est effectué à la fois brut de réassurance et net de réassurance afin de déterminer le gain en SCR dû à la stratégie de réassurance adoptée. Ce gain en SCR est l'un des critères principaux qui nous permettra d'analyser l'optimalité des traités.

Ensuite, comme nous l'avons expliqué précédemment, le tarif du traité de réassurance XS comprend une partie correspondant au coût en SCR que doit supporter le réassureur en acceptant le contrat. Il est alors nécessaire de calculer le SCR du réassureur avec et sans prise en compte du traité XS afin d'utiliser le delta entre les deux. De plus, comme nous allons tester différentes stratégies de réassurance, il faudra déterminer ces deux besoins en capitaux autant de fois que nous aurons de traités à évaluer.

Enfin, comme la prime de réassurance a un impact sur le montant du SCR, car elle intervient dans le risque Health Non SLT, il est délicat, d'une part de déterminer le montant exact du coût en SCR supporté par le réassureur et d'autre part de calculer le SCR de la cédante avec le bon montant de cotisations cédées. Nous décidons de ne recalculer les capitaux qu'une seule fois en ajustant le montant des primes car de nouvelles modifications n'auraient qu'un impact négligeable sur les capitaux et la prime cédée. En effet, dans la totalité des traités que nous avons testés, la part de la prime correspondant au coût en SCR ne représente jamais plus de 2,58 % de la prime totale. De plus, pour la cédante, la différence entre le SCR avec et sans le coût en SCR dans la tarification du traité XS ne représente que 0,01 % maximum. Cette partie de la modélisation correspond au cycle ci-dessous, présent dans le schéma global du modèle :

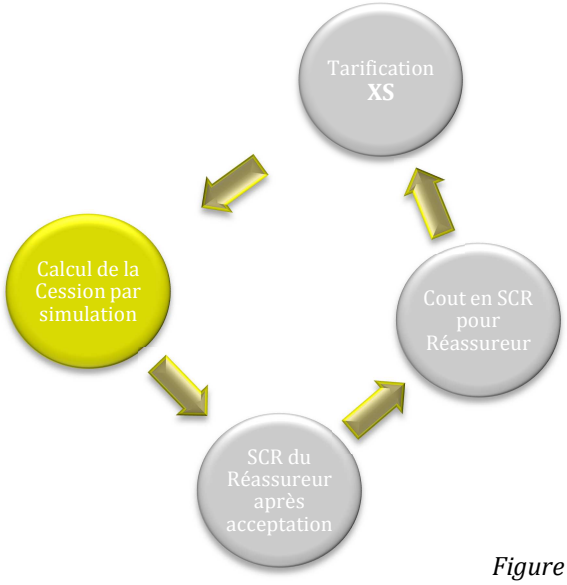

Figure 4.2

5.2 Les impacts de la réassurance sur le SCR

Nous allons décrire brièvement dans cette partie les impacts d'un traité XS tête sur les capitaux de solvabilité.

Tout d'abord, la réassurance a un impact direct sur le SCR et le MCR initial de la cédante. En effet, dans le SCR, et plus particulièrement dans le risque Health Non SLT où est traité l'arrêt de travail, les primes servant de base pour les calculs contiennent les primes émises futures. Ces primes sont nettes de réassurance et a fortiori nettes du nouveau traité XS concernant les années de survenances futures. Toutefois, il faut noter que la nouvelle stratégie de réassurance aura un impact sur le SCR initial si et seulement si le taux d'évolution des cotisations de la cédante évolue positivement. Cette condition est due au volume de primes à prendre en compte dans le risque Health Non SLT qui est le suivant :

$$V_{(prem,lob)} = \max(P_{lob}^{t,written}; P_{lob}^{t,earned}; P_{lob}^{t-1,written}) + P_{lob}^{PP}$$

Où $V_{prem,lob}$= le volume des primes
$P_{lob}^{t,written}$= primes émises de l'année prochaine
$P_{lob}^{t,earned}$= primes acquises de l'année prochaine
$P_{lob}^{t-1,written}$ = primes émises de l'année écoulée
P_{lob}^{PP} = provision pour primes non acquises

Pour avoir un gain en SCR, et plus particulièrement en SCR de souscription, au moment initial, il faut donc que le montant des primes émises futures soit supérieur au montant des primes émises et acquises de l'année passée.

C'est l'unique endroit où les nouveaux traités de réassurance ont un impact dans la formule standard puisque les traités sont par année de survenance. Les provisions cédées initiales ne sont alors pas impactées par un quelconque nouveau traité.

Néanmoins, nous n'analyserons pas l'impact initial sur le SCR puisque nous considérons dans notre modèle seulement la partie « nouvelle production ». La cédante que nous modélisons ne possède alors pas de portefeuille d'encours. Nous avons choisi cette approche principalement parce que notre but est de vouloir optimiser un futur traité de réassurance XS. Nous nous intéressons alors seulement aux sinistres de survenances futures. La modélisation d'un portefeuille d'encours pourrait alors biaiser les résultats en ajoutant un effet de diversification au sein du SCR qui serait difficilement contrôlable.

Nous allons donc nous fonder essentiellement sur la variation et plus précisément sur le gain en SCR de la cédante à horizon d'un an.

Il faut noter que la stratégie de réassurance a un impact direct sur quasiment tous les risques de la formule standard présentée ci-dessous.

Schéma présentant la modélisation du QIS 5 :

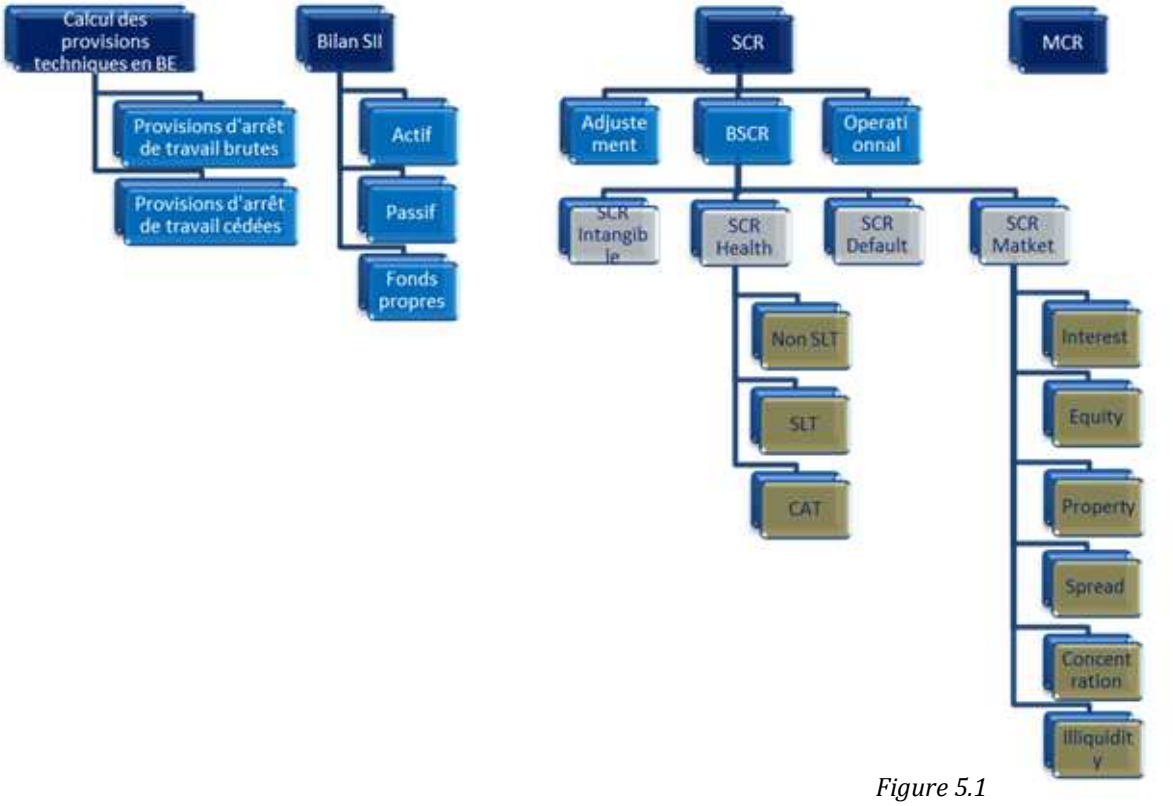

Figure 5.1

En effet, le premier module impacté par une stratégie de réassurance est bien entendu le calcul des provisions cédées en Best Estimate. Ensuite, le bilan économique sera lui aussi influencé par un traité de réassurance à la fois à l'actif par le biais des provisions cédées et dans les fonds propres par le biais du résultat diminué du résultat cédé.

Dans le calcul SCR Health, la réassurance a un impact dans l'ensemble des modules. En effet, tous les montants servant aux calculs du SCR de chaque risque sont nets de réassurance. Un traité de réassurance non proportionnelle vient alors diminuer le capital nécessaire à couvrir chacun des risques.

Le SCR Default est lui aussi impacté par la réassurance mais cette fois-ci de façon positive. En effet, le réassureur du nouveau traité XS représente une contrepartie pour la cédante avec sa part de risque associée.

Ensuite, le SCR Market est impacté à deux niveaux. Au niveau du passif au sein des chocs Interest et Illiquidity puisque les montants sont pris nets de réassurance. Mais aussi au niveau de l'actif puisque nous allons nous concentrer sur le SCR de la cédante à un an et le montant des placements au bout d'un an dépend du résultat net de la cédante.

Enfin, le MCR est lui aussi impacté par la réassurance non proportionnelle puisque les montants de primes et provisions servant à son calcul sont, là aussi, nets de réassurance.

5.3 Provisions Techniques en Best Estimate

Afin de déterminer les capitaux de solvabilité à la fois de la cédante mais aussi du réassureur, il est essentiel d'évaluer la valeur actuelle probable des engagements de chaque partie. De plus, cette évaluation constitue la meilleure estimation de la dépense nécessaire à l'extinction de l'engagement. On parle alors de provisions en Best Estimate.

Au niveau du modèle et dans un souci d'optimisation des temps de calculs, nous déterminons, comme dans la modélisation du passif, des barèmes qui indiquent pour chaque âge d'entrée dans l'état (incapacité ou invalidité) et pour chaque ancienneté, la provision à constituer pour une rente unitaire et la duration de cette rente.

Nous déterminons, pour les besoins du calcul du SCR, six barèmes pour les provisions et autant pour les durations :

- Barèmes Best Estimate
- Barèmes Best Estimate choc taux d'intérêts Down
- Barèmes Best Estimate choc taux d'intérêts Up
- Barèmes Best Estimate choc prime d'illiquidité
- Barèmes Best Estimate choc longévité
- Barèmes Best Estimate choc frais

Pour rappel, une provision Best Estimate est calculée selon la méthode de la meilleure estimation et est définie comme la valeur actuelle probable des futurs flux de trésorerie, actualisés selon la courbe des taux sans risque.

5.3.1 Provisions brutes

Nous ne présentons pas en détail les méthodes de calculs des provisions brutes en Best Estimate puisque nous utilisons des méthodes classiques du marché de l'assurance et car cela pourrait faire l'objet d'une autre étude.

Il est intéressant de noter que pour l'arrêt de travail, on effectue une différenciation entre les risques où les techniques d'analyse du risque sont similaires à celles de l'assurance vie (SLT) et ceux où les techniques ne sont pas similaires à celles de l'assurance vie (Non SLT). Suivant les réponses de l'ACP du 23 août 2010, on traite le risque invalidité dans la partie SLT alors que, dans la partie Non SLT, on considère uniquement l'incapacité et l'invalidité en attente.

Extrait de la FAQ de l'autorité de contrôle prudentiel du 23 août 2010 :

Comment les garanties d'incapacité invalidité doivent elle être traitées ?

Réponse : Pour des contrats annuels, l'incidence est traitée comme une garantie Health non SLT, soumise à un risque de prime. Les rentes temporaires (ex : ITT) ou en attente de consolidation sont traitées en risque de réserve non SLT.
Les rentes consolidées basculent en Health SLT, où elles sont soumises aux risques de longévité et de frais et s'il y a lieu de révision.
Les garanties accessoires à la vie sont traitées dans le module vie. Les personnes valides sont soumises au risque de disability (passage de valide à incapacité ou invalidité), les personnes en incapacité au risque de révision (passage d'incapacité à invalidité) et les invalide au risque de longévité et frais.
Pour les garanties pluriannuelles (par exemple dans un contrat emprunteur tarifé sur la durée de l'emprunt pluriannuel), celles-ci sont à traiter dans le module Health SLT.

On peut remarquer aussi que l'on applique à la courbe des taux sans risque une prime d'illiquidité. Comme le préconise les spécifications techniques du QIS 5 et plus

particulièrement la FAQ de l'ACP, nous utilisons pour les rentes d'invalidité en cours et pour les provisions d'incapacité de travail une prime d'illiquidité de 50 %.

Extrait de la FAQ de l'autorité de contrôle prudentiel du 23 août 2010 :

Pour l'actualisation des cash-flows, quelle prime d'illiquidité doit-on appliquer dans les cas suivants ?

Réponse :

- **Rentes viagères en cours de service => 75%**
- **Rentes viagères différés (droits acquis des contrats collectifs) => 75%**
- **Pour certains contrats à primes périodiques :**
  - **des contrats individuels frais d'obsèques => 75%**
  - **des contrats individuels dépendance => 75% si participation aux bénéfices obligatoire, 50% sinon**
- **Pour les rentes d'invalidité en cours de service => 50%**
- **Pour les provisions d'incapacité de travail (IJ en cours, rentes en attente, sinistres non connus) => 50%**
- **Pour les rentes non-vie => ? consultation du CEIOPS en cours**
- **Pour toutes les autres provisions non-vie => 50%**

5.3.2 Provisions cédées

Le calcul des provisions cédées Best Estimate est identique au calcul des provisions cédées dans les normes actuelles. La seule différence étant l'actualisation à l'aide d'une courbe des taux au lieu d'un taux fixe.

En ce qui concerne la réassurance proportionnelle, il suffit d'appliquer le taux de Quote-part du traité de réassurance aux différents montants de provisions calculés dans la partie « Provisions Brutes ».

Enfin, il est nécessaire de prendre en compte la probabilité de défaut de chaque réassureur en fonction de sa notation. Pour cela, on multiplie le montant des provisions cédées par la probabilité que le réassureur ne fasse pas défaut pendant la durée de l'engagement. Cette durée d'engagement est représentée par sa duration que nous avons déterminée auparavant à l'aide de différents barèmes.

Cet ajustement est à intégrer dans notre processus d'optimisation puisque tout d'abord il permet de tenir compte de la probabilité de défaut du réassureur dans le bilan prudentiel de la cédante. De plus, il varie suivant la notation du réassureur et donc suivant les paramètres du traité XS. Enfin, et c'est ce qui nous concerne dans ce mémoire, comme le montant des provisions nettes de réassurance varie, le gain en SCR sera différent suivant le rating du réassureur.

Il convient tout de même de noter que le montant de cet ajustement est assez faible car pour un réassureur noté A, l'ajustement est inférieur à 1 % des provisions cédées.

Enfin, on peut remarquer que comme le réassureur intervient au plus tard à la consolidation de l'arrêt de travail de chaque individu (passage en invalidité), l'ensemble des provisions techniques cédées relatives à ce risque sera classé dans la partie Health Non SLT.

Schéma :

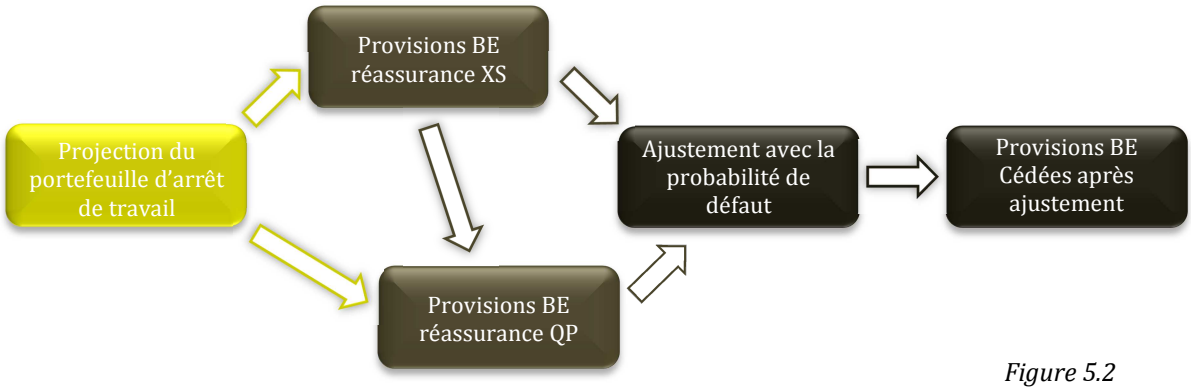

Figure 5.2

5.3.3 Marge de risque

La marge de risque est une composante à ajouter aux provisions techniques afin d'obtenir la valeur de marché. Cette valeur de marché représente alors la valeur d'échange du portefeuille entre assureurs ou réassureurs.

Le traitement de cette partie n'est pas particulièrement impacté par la réassurance non proportionnelle. Nous n'en expliquerons que brièvement la méthode.

La marge de risque est calculée selon la méthode du « Cost of Capital ». Nous utilisons dans ce modèle la simplification qui consiste à multiplier le montant des provisions Best Estimate nettes par un pourcentage défini dans les spécifications techniques du QIS 5.

Nous obtenons alors une marge de risque pour la partie SLT et une pour la partie Non SLT.

5.4 Solvency Capital Requirement– SCR

Cette section a pour objectif de présenter le calcul du SCR qui correspond au capital de solvabilité requis pour une entreprise d'assurance.

Schéma :

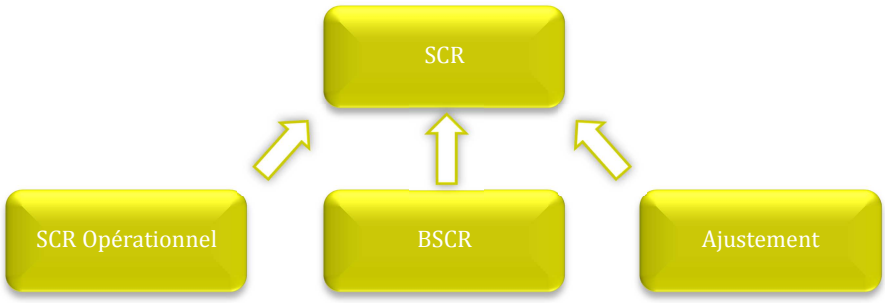

Figure 5.3

Nous ne détaillerons dans cette section que le Basic Solvency Capital Requirement (BSCR) puisque c'est le module principal qui reflète directement l'impact de la réassurance non proportionnelle.

Pour le calcul du BSCR, nous avons besoin de différents SCR pour les risques décrits dans les spécifications techniques du QIS 5 :

- SCR Market
- SCR Health
- SCR Défaut
- SCR Non Life
- SCR Life
- SCR Intangible

Une fois que nous avons calculé ces différents SCR, on en déduit le BSCR en utilisant la matrice de corrélation décrite dans les spécifications.

Dans notre étude, les SCR Non Life, Life et Intangible ne sont pas impactés par notre programme de réassurance XS en arrêt de travail. Nous ne détaillerons donc pas ces différents risques.

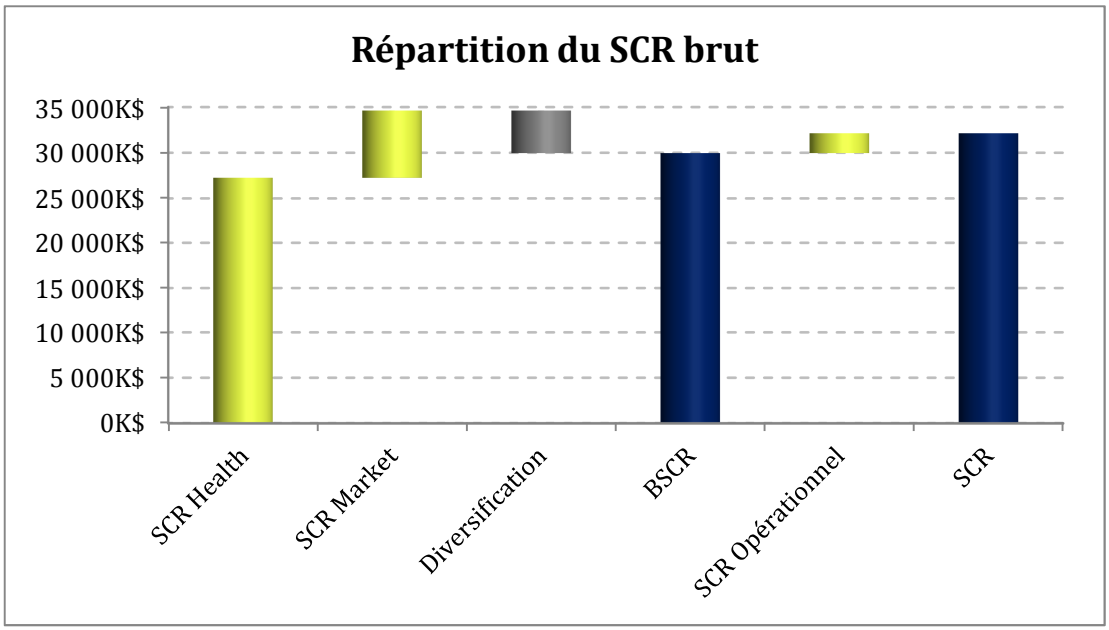

Figure 5.4

5.4.1 SCR Market

Le SCR Market est le capital qui couvre le risque de la volatilité et de la chute de la valeur de marché des instruments financiers.
Afin de pouvoir calculer le SCR market, il faut commencer par déterminer les différents capitaux nécessaires pour couvrir :

- Le risque de taux d'intérêt
- Le risque d'actions
- Le risque de propriété
- Le risque de devise
- Le risque de spread
- Le risque de concentration
- Le risque d'illiquidité

Une fois que nous avons calculés ces différents capitaux, nous utilisons une matrice de corrélation donnée dans les spécifications techniques du QIS5 afin d'obtenir le SCR Market. Cependant, il faut remarquer que nous possédons une matrice de corrélation en cas de hausse des taux d'intérêts et une autre en cas de baisse. Nous allons donc calculer le SCR market dans chacun de ces deux cas et prendre le maximum entre les deux.

Dans notre modélisation, et toujours dans le but d'optimiser un traité de réassurance non proportionnelle, les chocs sont appliqués à la valeur de marché des actifs qui serait en portefeuille s'il n'y avait pas de réassurance. Puis nous appliquons un pourcentage aux différents SCR déterminés (Actions, Immobilier, Spread, Concentration, Devises) en faisant le ratio entre la valeur de marché avec réassurance et sans réassurance. Ce calcul est possible car les différents chocs sont proportionnels aux valeurs de marché des actifs.

Pour le réassureur, nous appliquons aussi un pourcentage aux différents SCR mais cette fois-ci, il est déterminé en faisant le ratio entre la valeur de marché des actifs du réassureur et la valeur de marché des actifs de l'assureur sans réassurance.

5.4.1.1 Risque de taux d'intérêt

Nous allons dans ce module déterminer le capital nécessaire pour couvrir, dans 99,5 % des cas, le risque de baisse des taux d'intérêt (le raisonnement est similaire pour déterminer le capital couvrant le risque de hausse des taux).

Pour la partie passif, on détermine les provisions techniques à l'aide de la courbe des taux choquée à la baisse.

En ce qui concerne l'actif et plus particulièrement les obligations (OAT, OTF et OTV), l'objectif dans notre exemple est de recalculer leur valeur de marché avec des taux d'intérêt choqués à la baisse. Le calcul des valeurs de marché est le même que celui détaillé dans la section modélisant l'actif à l'exception qu'ici, on prend comme courbe des taux, la courbe choquée à la baisse suivant les spécifications technique du QIS5.

On peut désormais calculer la valeur nette des actifs, aussi appelée valeur liquidative, dans le cas où les taux d'intérêt ont baissé. La différence entre la valeur nette des actifs avant la baisse des taux d'intérêt et après cette baisse va constituer le montant nécessaire pour la couverture du risque de baisse de taux d'intérêt.

5.4.1.2 Risque de chute de la valeur de marché des actions

Pour calculer le capital nécessaire pour couvrir une chute de valeur de marché des actions, il est nécessaire de distinguer deux types d'actions : les actions cotées (« global ») sur les marchés et les actions non cotées (« others »). Puis à l'intérieur de ces types d'actions, on distingue encore les actions détenues à des fins stratégiques des autres.

Dans les spécifications techniques du QIS5, différents chocs sont proposés suivant le type d'action. On applique ces chocs aux valeurs de marché de ces actions afin de déterminer le capital nécessaire pour prévenir une éventuelle baisse de leur valeur, que ce soit pour les actions cotées ou pour les actions non cotées.

Enfin, en utilisant le coefficient de corrélation précisé dans le QIS5, on obtient le capital nécessaire pour se prémunir du risque de chute des actions.

5.4.1.3 Risque de baisse de la valeur des biens immobiliers

Pour déterminer le niveau de capital nécessaire pour couvrir dans 99,5 % des cas le risque de baisse de la valeur des biens immobiliers, on prend en compte une baisse instantanée de la valeur de marché totale de notre portefeuille d'actifs immobiliers. Le pourcentage de baisse de la valeur de marché est défini dans les spécifications techniques du QIS 5.

5.4.1.4 Risque de spread

Dans notre modèle, les actifs concernés par le risque de spread sont les obligations à taux fixe (hors obligations d'Etat) et les obligations à taux variable. On calcule alors le capital nécessaire pour couvrir le risque de spread pour les OTF et pour les OTV en multipliant la valeur de marché de ces actifs par leur duration et par un taux fixé dans les spécifications techniques du QIS 5.

La somme de ces deux derniers montants représente le capital nécessaire à la couverture du risque de spread.

5.4.1.5 Risque de concentration

Pour chaque émetteur, on calcule l'excès d'exposition sur l'ensemble des actifs standards (actions, immobilier, OAT, OTV), puis le capital requis pour se protéger du risque de concentration sur cet émetteur.

Enfin, en supposant que les risques de concentration de ces différents émetteurs ne sont pas corrélés, on calcule le capital nécessaire pour couvrir ce risque.

5.4.1.6 Risque d'illiquidité

Pour déterminer le capital nécessaire pour couvrir dans 99,5 % des cas le risque d'illiquidité, on recalcule (de la même manière que ce que nous avons fait dans la partie « *Provisions techniques en Best-Estimate* ») les provisions Best-Estimate nettes en arrêt de travail en prenant comme taux d'actualisation, la courbe des taux dont la prime d'illiquidité est choquée.

Une fois ces calculs réalisés, il reste à faire la différence entre les provisions Best-Estimate avant et après le choc pour avoir le montant souhaité.

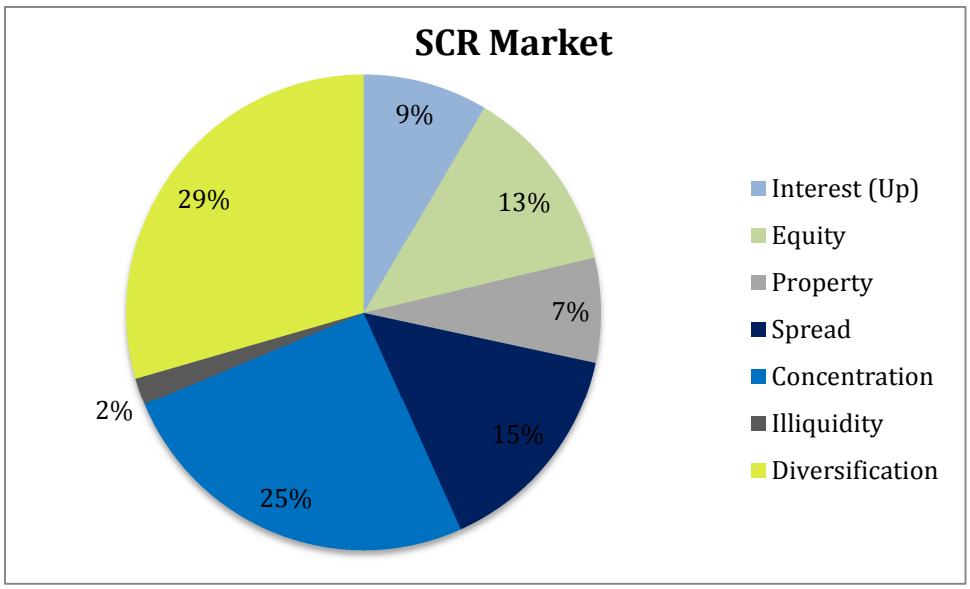

Figure 5.5

5.4.2 SCR Health

Le SCR Health couvre le risque de souscription pour toutes les garanties santé ou accident du travail. Dans ce mémoire, nous ne traitons que la partie arrêt de travail.
Dans cette partie, tous nos calculs seront faits d'une part avec les valeurs brutes et d'autre part avec les valeurs nettes de réassurance. Pour rappel, les valeurs brutes serviront à déterminer le gain en SCR de la cédante mais elles serviront aussi par la suite pour le calcul du SCR défaut.

Dans le but d'obtenir le SCR Health, nous devons déterminer au préalable :

- Le SCR Health non SLT
- Le SCR Health SLT
- Le SCR Health Catastrophe

Une fois que nous possédons ces trois valeurs, il s'agit d'utiliser une matrice de corrélation donnée dans les spécifications techniques du QIS 5 pour aboutir au montant du SCR Health.

5.4.2.1 Health Non SLT

Schéma :

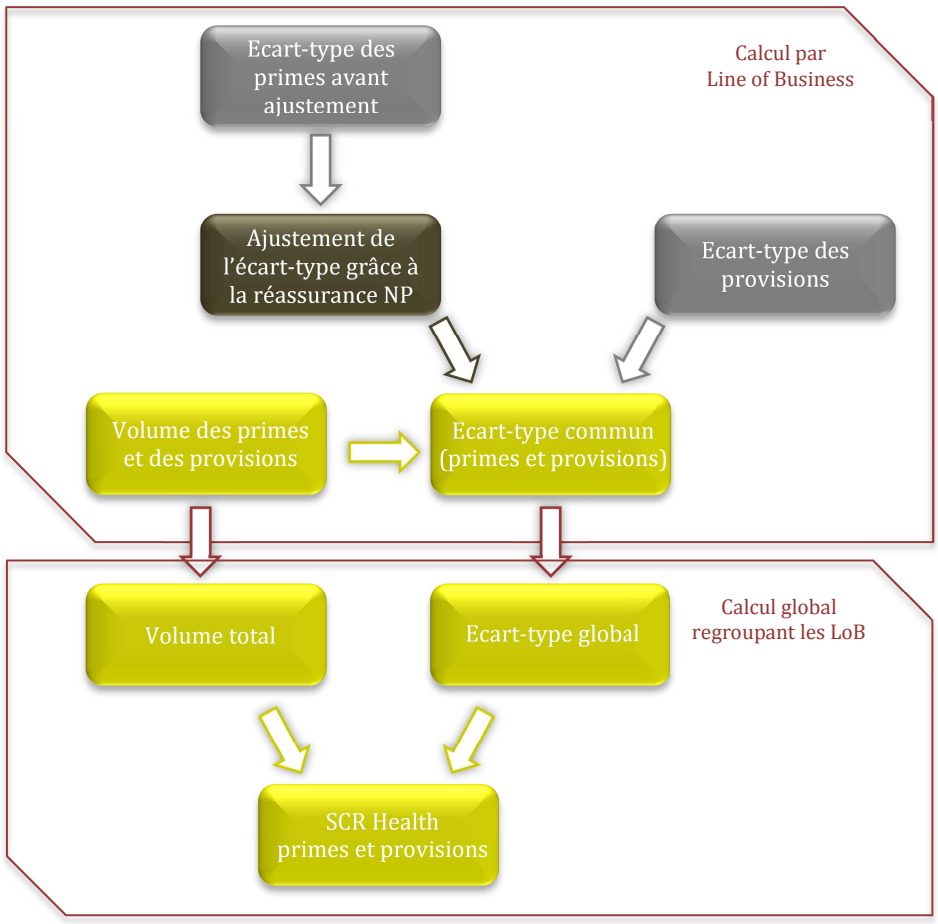

Figure 5.6

Dans ce module, il s'agit de traiter le risque de primes et de provisions. Le risque de rachat n'étant pas modélisé puisqu'il est inexistant pour la garantie que nous considérons.

Nous commençons par répertorier pour la branche arrêt de travail, les primes émises, les primes émises estimées, les primes acquises estimées et les PPNA. Ainsi, on peut obtenir le volume des primes, en sachant que le volume des provisions a été déterminé précédemment.

Ensuite, à l'aide des écarts types fournis par les spécifications techniques du QIS5 (primes et provisions) nous pouvons déterminer la Value-At-Risk à 99,5 % du montant des sinistres en supposant la Log Normalité de cette charge de sinistralité.

Il est important de noter que c'est dans ce calcul de capital à immobiliser que l'intérêt de la réassurance non proportionnelle entre en jeu et aura toute son importance sous Solvabilité II, contrairement à ce qui était préconisé pour calculer la marge de solvabilité sous Solvabilité I. En effet, la réassurance non proportionnelle est prise en compte via un facteur NPlob (Cf. Annexe A). Ce dernier sert à ajuster le coefficient de variation lié au risque de tarification puisque la réassurance non proportionnelle permet notamment d'écrêter certains montants de sinistres. Cependant, on suppose pour faire cet ajustement que le montant total des sinistres suit un modèle poisson composé où chaque montant de sinistre suit une loi Log Normale mais surtout, on fait une hypothèse forte en supposant un nombre de reconstitutions illimité. Comme cette dernière hypothèse ne sera pas vérifiée dans l'ensemble des traités que nous analyserons, nous préfèrerons utiliser des USP (Undertaking specific parameters) pour quantifier ce facteur d'ajustement.

En effet, par le biais de notre modèle stochastique, il est aisé de déterminer la volatilité du risque de prime avec et sans réassurance non proportionnelle.

5.4.2.2 Health SLT

Etant dans la partie « Health SLT », c'est à dire les risques dont les techniques de calcul sont similaires aux techniques utilisées en assurance vie, on ne considère, dans notre modèle, que le risque invalidité.

Extrait de la FAQ de l'autorité de contrôle prudentiel du 23 août 2010 :

> Comment les garanties d'incapacité invalidité doivent elle être traitées ?
>
> **Réponse : Pour des contrats annuels, l'incidence est traitée comme une garantie Health non SLT, soumise à un risque de prime. Les rentes temporaires (ex : ITT) ou en attente de consolidation sont traitées en risque de réserve non SLT.**
> **Les rentes consolidées basculent en Health SLT, où elles sont soumises aux risques de longévité et de frais et s'il y a lieu de révision.**

Pour calculer le SCR Health SLT, on commence par déterminer les SCR permettant de couvrir les risques suivants :

- risque de mortalité
- risque de longévité
- risque de frais
- risque de morbidité
- risque de révision
- risque de rachat

Une fois que l'on aura ces capitaux, on utilisera une matrice de corrélation présente dans les paramètres d'initialisation afin de déterminer le SCR Health SLT.

On note que, comme l'invalidité est le seul risque traité dans notre modèle dans la partie Health SLT, seuls les risques de longévité, de frais et de révision ont un impact sur l'entreprise d'assurance.

De plus, seule la réassurance en Quote-part intervient dans cette partie puisque, comme nous l'avons expliqué précédemment, la réassurance XS n'intervient que dans la partie Health Non SLT.

- Risque de longévité

Afin d'obtenir le capital nécessaire à la couverture du risque de longévité, il faut, de la même façon que ce que l'on avait fait dans la partie « Provisions techniques en Best-Estimate », recalculer les PM Best-Estimate nettes d'invalidité en utilisant des tables de maintien en invalidité et de mortalité en invalidité qui ont subi un choc sur les taux de décès annuels. Ce choc correspond à une diminution de 20 % de ces taux de décès. On détermine alors le capital couvrant le risque de longévité en faisant la différence entre les PM après le choc et les PM avant le choc sur les tables de maintien et de mortalité en invalidité.

Nous rappelons que nous avons aussi besoin de calculer le capital couvrant le risque de longévité s'il n'y avait pas de réassurance. Ce calcul aide à déterminer par la suite le SCR défaut.

- Risque de frais

Afin d'obtenir le capital nécessaire à la couverture du risque de frais, il faut recalculer les PM Best-Estimate nettes d'invalidité en utilisant une courbe de taux de revalorisation augmenter de 1 % en absolu. De plus, les frais de chargement appliqués à ces provisions sont augmentés de 10 %. On détermine alors le capital couvrant le risque de frais en faisant la différence entre les PM après le choc et les PM avant le choc sur les frais.

- Risque de révision

D'après les spécifications techniques du QIS 5, le capital nécessaire pour couvrir dans 99,5 % des cas le risque de révision est égal à un pourcentage des PM Best-Estimate nettes d'invalidité en attente. Ce pourcentage est de 4 %.

Extrait de la FAQ de l'autorité de contrôle prudentiel du 23 août 2010 :

Comment la table de passage d'incapacité en invalidité du BCAC doit-elle être affectée par le choc disability ? Comment doivent être traitées les garanties annuelles d'incapacité invalidité ?

Réponse : Le passage d'incapacité à invalidité est traité dans le module risque de révision, et pas dans le module disability.

Dans le cadre de garanties annuelles, le taux d'incidence de 25% ne s'applique pas.

Extrait des spécifications techniques du QIS 5 – Section SCR.7.7.Life$_{rev}$ revision risk :

revshock	=	Increase of 3% in the annual amount payable for annuities exposed to revision risk. The impact should be assessed considering the remaining run-off period of the annuities.

Extrait des spécifications techniques du QIS 5 – Section SCR.8.44.SLT Health revision risk :

SCR.8.47. The calculation of $Health^{SLT}_{revision}$ and $nHealth^{SLT}_{revision}$ is made in the same way as in the revision risk sub-module of the life underwriting risk module, but with a stress of 4% instead of 3%.

5.4.2.3 Health CAT

Le calcul du SCR Health CAT se fonde sur une approche par scénarios. On considère alors 3 types de catastrophes :

- le risque de catastrophe dans le plus grand stade du pays (risque Arena)
- le risque de catastrophe à l'endroit où il y a la plus grande concentration d'assurés (risque concentration)
- le risque de pandémie

Schéma :

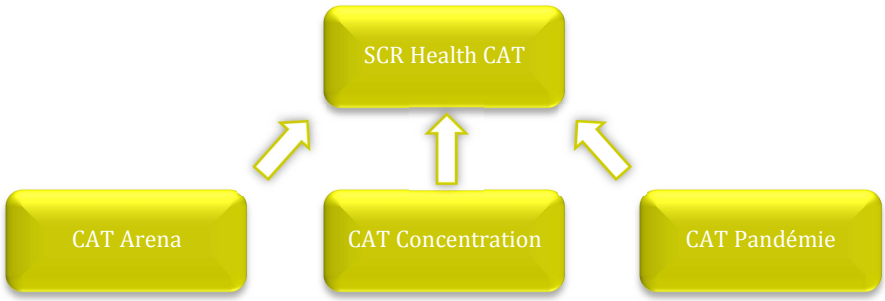

Figure 5.7

Nous allons donc, pour chacun de ces risques, calculer le montant nécessaire afin de pouvoir couvrir le risque en question dans 99,5 % des cas. Il s'agira alors d'utiliser une matrice de corrélation donnée dans les spécifications du QIS5 pour obtenir le SCR Health CAT.

Nous ne détaillerons pas les différents scénarios puisqu'il ne présente pas de traitement particulier quand la cédante dispose de traité de réassurance en excédent de sinistres par tête.

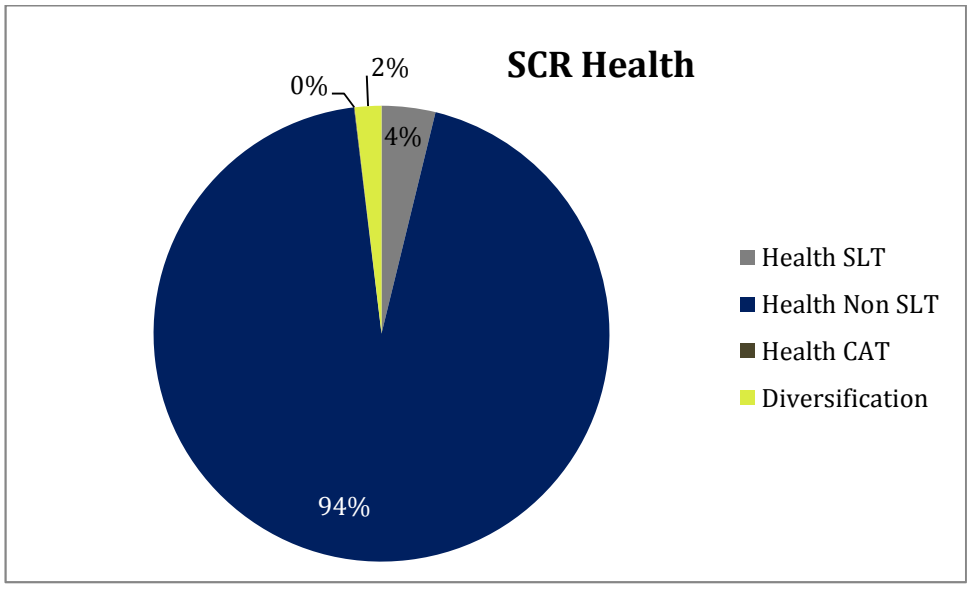

Figure 5.8

5.4.3 SCR Défaut

Dans les spécifications techniques du QIS 5, le calcul du SCR défaut fait intervenir deux types de contrepartie, les contreparties de type 1 (les réassureurs et les banquiers) et celles de type 2 (les autres créanciers). Nous nous pencherons essentiellement sur les contreparties de type 1 et plus particulièrement les réassureurs.

Il faut alors préciser que, pour pouvoir obtenir la perte due au défaut de chaque réassureur (seule la perte due au défaut de la banque a déjà été calculée), nous devons au préalable déterminer le gain de SCR dû à l'ensemble des réassureurs sur le SCR souscription.

Pour déterminer le gain de SCR dû à l'ensemble de la réassurance, on ne raisonne que sur la partie souscription du SCR, autrement dit : SCR Health, SCR Non Life et SCR Life (dans notre étude, seul le SCR Health est pris en compte).

En prenant les 3 valeurs nettes de ces SCR ainsi que la matrice de corrélation précisée dans les spécifications du QIS5, on trouve le SCR souscription net. Ensuite, en raisonnant de la même façon avec les valeurs brutes des SCR, on trouve le SCR souscription brut. Le gain de SCR dû à la réassurance est alors la différence entre les deux valeurs.

Pour déterminer le SCR défaut de type 1, on commence par classer les pertes potentielles dues au défaut des différentes banques (trésorerie) et les pertes dues au défaut des différents réassureurs.

Ces pertes dues au défaut de chaque réassureur sont la résultante de trois facteurs :

- le montant des provisions Best Estimate cédées
- le gain de SCR total dû à la réassurance. Ce gain est représenté par la différence entre le SCR souscription brut et net répartie au prorata des provisions en Best-Estimate
- le montant des nantissements du réassureur. Pour rappel, le réassureur non proportionnel nantit les prestations d'incapacité cédées pour les rentes non encore consolidées

Il s'agit ensuite de calculer la variance de la distribution de perte grâce à deux matrices (U et V) spécifiées dans les spécifications techniques du QIS 5. Cette variance nous permet alors de calculer le SCR défaut type 1.

Cette partie est essentielle dans notre analyse du traité optimal puisqu'elle sera amenée à varier de façon significative suivant la stratégie de réassurance testée. En effet, le montant du SCR défaut est à la fois impacté par le montant des provisions cédées mais aussi par la notation du réassureur.

5.5 Minimum Capital Requirement– MCR

Le MCR représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique. Nous allons expliquer brièvement la démarche pour aboutir à ce montant minimum puisque nous ne nous intéresserons seulement au SCR dans l'optimisation de la réassurance non proportionnelle.

Schéma :

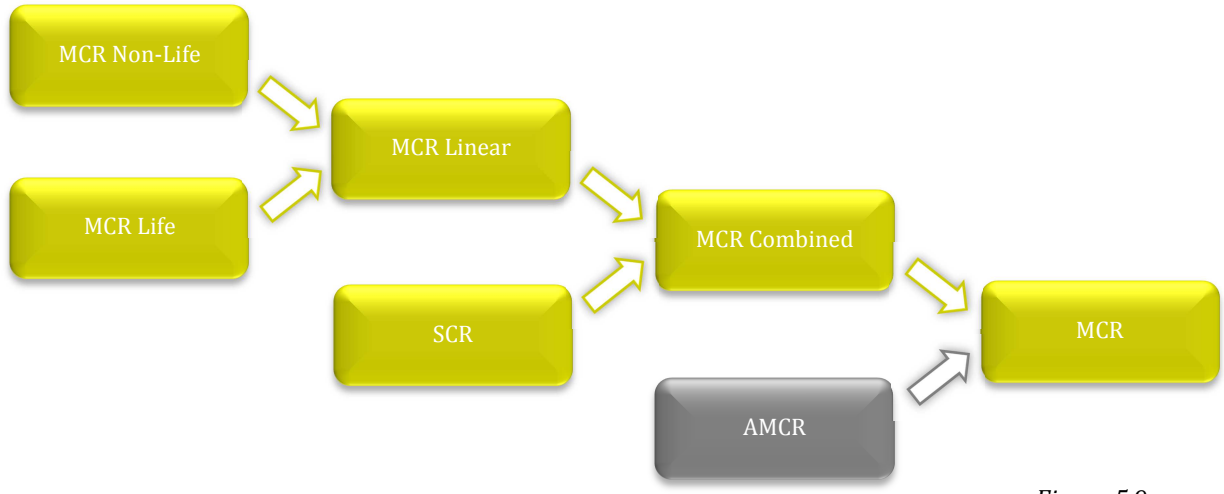

Figure 5.9

Jaune : les modules de calculs
Gris : hypothèses du modèle

Tout d'abord, nous déterminons le MCR Non Life et le MCR Life. Il est alors possible d'obtenir le MCR Linéaire en sommant ces deux MCR. Puis, en appliquant un plancher égal à 25 % du SCR et un plafond égal à 45 % du SCR au MCR Linéaire, on peut déterminer le MCR combiné.

Il s'agit alors de prendre le maximum entre le MCR combiné et le plancher absolu du MCR défini dans le QIS5. Le plancher absolu est de 2200000 € pour les entreprises d'assurance non-vie.

6 Stratégie de réassurance optimale

Les calculs permettant de déterminer le capital de solvabilité requis pour l'assureur ou pour le réassureur sont assez complexes et ne peuvent pas être résumés en une fonction analytique simple. En effet, le capital de solvabilité dépend, entre autres, du montant des provisions cédées mais aussi de l'ajustement de l'écart-type des primes qui nécessitent tous les deux le recours aux simulations afin d'être estimés. Nous n'essayerons donc pas de déterminer le traité de réassurance optimal en optimisant ou en minimisant une fonction objectif à l'aide d'une méthode analytique.

De plus, il est important de tenir compte de la liquidité des traités. C'est à dire que nous ne choisirons pas le traité optimal si celui-ci n'est pas disponible sur le marché de la réassurance. C'est une raison de plus pour ne pas utiliser une méthode analytique puisqu'il faudrait ajouter des contraintes pour représenter la liquidité.

Nous allons donc procéder en plusieurs étapes afin de trouver un traité optimal pour la cédante dont nous avons modélisé l'activité.

6.1 Etapes de l'optimisation

En premier lieu, il est nécessaire de bien définir les paramètres du traité à optimiser. Nous avons choisi les paramètres les plus importants d'un traité de réassurance en excédent de sinistre :

- Priorité
- Portée
- Part de la portée cédée
- Nombre de reconstitutions
- Coût de reconstitution
- Notation du réassureur

Ensuite, nous allons nous focaliser sur les paramètres les plus représentatifs d'un traité de réassurance non proportionnelle qui sont la priorité et la portée. En effet, ces deux éléments du traité sont ceux ayant le plus fort impact sur les montants de prestations et de provisions cédés au réassureur.

La première étape consiste alors à tester de multiples combinaisons (priorité, portée), toutes choses égales par ailleurs, afin de savoir dans quel ordre de grandeur ces deux paramètres se situent. Pour connaître les couples qui font potentiellement partie du traité optimal, nous nous appuyons sur les critères de décision détaillés dans la partie suivante.

Une fois les ordres de grandeurs de la priorité et de la portée établis, nous analyserons d'autres paramètres du traité non proportionnel. Ces paramètres sont ceux permettant de définir la gestion des reconstitutions, c'est-à-dire le nombre et leur coût.

A noter que la notation du réassureur sera traitée à part des autres paramètres. En effet, la méthode de tarification que nous utilisons dans ce mémoire ne fait intervenir que les montants potentiellement cédés et pas la notation du réassureur. Ainsi, un traité de réassurance avec une contrepartie mieux notée sera obligatoirement plus optimal puisque le gain en SCR pour la cédante sera plus important. Nous ferons donc les tests

avec des réassureurs ayant la notation A. Nous avons fait ce choix car c'est la notation de plus de deux tiers des réassureurs pour l'agence Standard & Poor's (cf. Annexe D pour les notations au 1 juillet 2012). De plus, cette notation n'impacte pas de façon trop négative les résultats des calculs des capitaux de solvabilité.

Nous pourrons alors dégager, à la suite de cette nouvelle série de tests un ensemble de traités remplissant au mieux les critères d'optimalité.

Dans un second temps, nous nous efforcerons de tester la robustesse de chaque traité encore susceptible d'être le traité optimal. En effet, la robustesse permettra de prendre en compte à la fois le risque de modèle présent dans les hypothèses d'évolution et dans le calibrage mais aussi le risque de déviance par rapport aux tables utilisées. Pour cela, nous ferons varier les hypothèses du modèle tel le taux d'incidence en arrêt de travail, la loi de probabilité suivie par le montant de la rente d'incapacité de chaque individu, etc. Ces tests de robustesse nous permettrons d'éliminer une partie des traités en excédent de sinistres.

Enfin, pour départager les traités restants, nous allierons à cette réassurance non proportionnelle plusieurs traités de réassurance en Quote-part afin de déterminer la stratégie de réassurance optimale pour la cédante que nous modélisons dans cette étude.

6.2 Critères de décision

Comme nous l'avons cité précédemment, nous allons étudier plusieurs traités de réassurance non proportionnelle afin de comparer leurs impacts sur l'organisme d'assurance que nous modélisons et plus particulièrement sur son capital de solvabilité requis.

Une fois les différents impacts calculés, nous devons choisir lequel des traités est optimal. Pour cela, nous avons choisi d'étudier quatre facteurs importants dans le choix d'un traité qui sont :

a) Coût de la réassurance non proportionnelle
b) Le résultat cédé au réassureur
c) Le gain en SCR dû au traité
d) Le gain en volatilité du résultat net de la cédante

En effet, il est important de connaître et d'optimiser le gain que va faire l'assureur en capital de solvabilité, grâce au programme de réassurance non proportionnelle, par rapport à la prime qu'il est nécessaire de verser en contrepartie. Mais, il est d'autant plus important de regarder ce gain en capital par rapport au résultat cédé au réassureur puisqu'en contrepartie des primes, le réassureur prend aussi en charge une partie des prestations et des provisions à la charge de l'assureur.

De plus, l'apport d'un traité de réassurance non proportionnelle par rapport à un traité en quote-part est de diminuer la volatilité des sinistres à la charge de la cédante et par conséquent la volatilité du résultat net. C'est pourquoi, nous préconisons de prendre en compte ce critère dans le choix du traité optimal.

Pour résumer, les deux indicateurs que nous allons observer sont :

a) La volatilité du résultat net de la cédante
b) Le ratio gain en SCR moyen par rapport au résultat cédé moyen

Le premier est estimé à l'aide de la variance empirique alors que pour déterminer le second, nous utilisons l'estimateur de Monte-Carlo suivant :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Gain_i}{\sum_{i=1}^{n} Résultat\ Cédé_i}$$

Cet estimateur est sans biais et convergeant comme l'illustre le graphique de convergence ci-dessous.

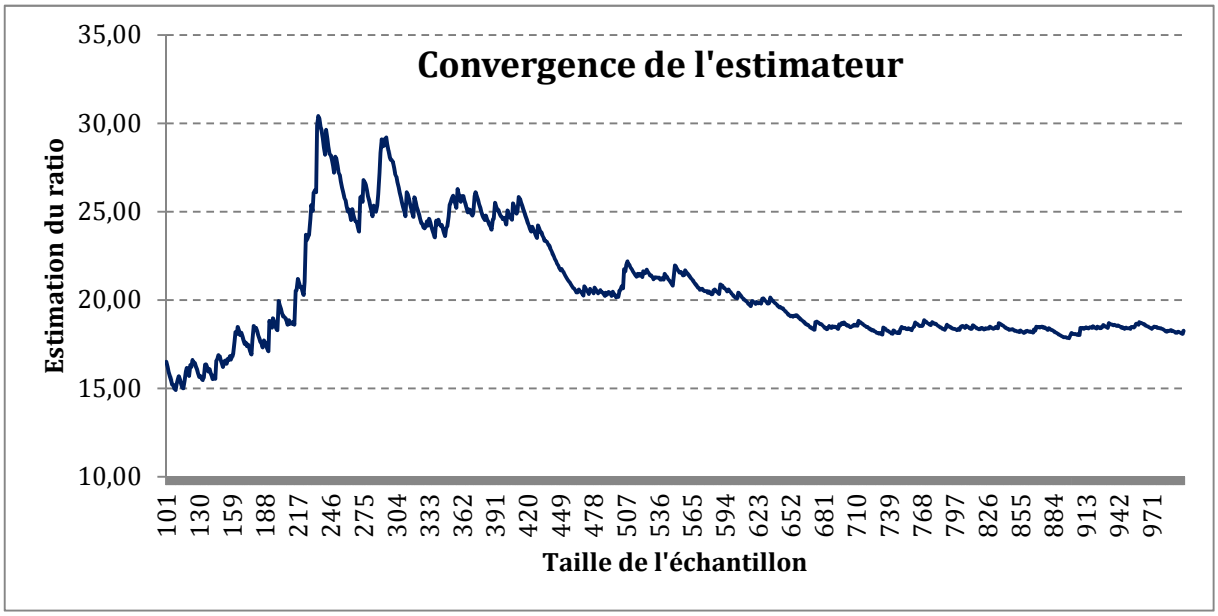

Figure 6.1

Ce graphique représente l'évolution de l'estimateur du ratio en fonction de la taille de l'échantillon observé. Le traité non proportionnel observé est un 2,3 M€ XS 1,5 M€. On remarque qu'à partir de 700 simulations, l'estimateur devient plus stable.

A noter que nous aurions pu utiliser comme critère de décision le ratio gain en SCR sur résultat cédé mais l'estimateur de Monte-Carlo de cet indicateur $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Gain_i}{Résultat\ Cédé_i}\right)$ s'avère beaucoup moins stable que l'estimateur précédent.

En effet, comme le résultat cédé peut être, suivant les simulations positif, négatif ou encore égal à zéro, cet estimateur de ratio est trop volatil pour espérer obtenir un résultat stable, sans multiplier le nombre de simulations nécessaires.

Enfin, il est important de remarquer que nous avons choisi de prendre seulement en compte les critères de décision cités ci-dessus. Toutefois, d'autres éléments peuvent aussi être analysés pour définir l'optimalité d'un traité. Ces éléments sont à définir suivant la politique de gestion du risque de chaque entreprise d'assurance.

6.3 Nombre de simulations

Nous allons étudier l'impact de différents traités de réassurance non proportionnelle sur une entreprise d'assurance et plus particulièrement sur les deux indicateurs que nous avons cités précédemment : le ratio gain en SCR moyen vs Résultat cédé moyen et la volatilité du résultat net.

Pour cela, nous allons suivre les différentes étapes de l'optimisation détaillées précédemment.

Mais, avant d'analyser les résultats provenant du modèle stochastique développé dans le cadre de ce mémoire, nous devons déterminer le nombre de simulations qui permettra d'obtenir des résultats exploitables. Pour cela, nous analysons la variance empirique des éléments qui vont fonder notre jugement sur l'optimalité d'un traité. Puis, nous déterminons le nombre de simulations qui nous permet d'avoir une erreur d'approximation inférieure à 5 % dans 95 % des cas.

Les éléments que nous analysons sont la volatilité du résultat net et le gain en SCR de la cédante par rapport au résultat cédé au réassureur.

En ce qui concerne la volatilité du résultat net, nous savons que si l'on pose :

$X_i = Résultat\ net$ à $la\ simulation\ i$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$\sigma^2 = Variance\ du\ résultat\ net$

Alors $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\propto}{2}}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\propto}{2}}(n-1)}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\propto}{2}}(n-1)}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\propto}{2}}(n-1)}}$$

Pour avoir une erreur d'approximation inférieure à 5 %, il faut que :

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\propto}{2}}(n-1)}} - \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\propto}{2}}(n-1)}} \leq 5\ \% * \sigma$$

En estimant σ^2 par S_x^2 (la réalisation de S^2), on obtient :

$$\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\propto}{2}}(n-1)}} - \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{\propto}{2}}(n-1)}} \leq 5\ \%$$

On utilise enfin l'approximation suivante pour estimer les percentiles de la loi du Khi-deux :

$\chi^2_{\propto}(n) \approx \frac{\left(U_{\propto} + (2n-1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2}$ où $U_{\propto}$ correspond au percentile de la loi Normale.

On a alors :

$$\sqrt{\frac{(n-1)}{\frac{\left(U_{1-\frac{\propto}{2}}+(2n-3)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2}}}-\sqrt{\frac{(n-1)}{\frac{\left(U_{\frac{\propto}{2}}+(2n-3)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2}}}\leq 5\ \%$$

Ainsi, le nombre de simulations nécessaires, avec un niveau de confiance de 95 % ($\propto = 0{,}05$), doit être supérieur ou égal à 3080.

Nous devons alors faire au moins 3080 simulations pour obtenir une volatilité du résultat net exploitable pour chaque traité de réassurance.

En ce qui concerne l'autre élément que nous allons analyser, le ratio gain en SCR moyen sur résultat cédé moyen, nous déterminons le nombre de simulations nécessaires de manière empirique. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, l'estimateur du ratio converge à partir d'un certain nombre de simulations. Nous analysons alors le nombre nécessaire afin que les estimateurs soient stables pour l'ensemble des traités testés. On distingue (cf. annexe F) d'une part que le nombre de simulations nécessaires croît avec le montant du plafond du traité XS. D'autre part, nous remarquons que 2000 simulations suffisent pour obtenir des estimateurs stables et exploitables.

Nous pouvons alors conclure que le nombre de simulations qui permet d'analyser les résultats avec une erreur d'approximation inférieure à 5 % se trouve en dessous de 3200 simulations. C'est ce nombre que nous prenons dans la suite de notre étude.

Parallèlement, nous souhaitons déterminer la variance de l'estimateur du ratio. Nous pourrions utiliser le théorème de la variance conditionnelle afin d'estimer la variance de l'estimateur mais les deux variables (Gain et Résultat Cédé ne sont pas indépendantes). Nous utilisons alors la méthode du bootstrap pour estimer cette variance.

En effet, après une première série de simulations, nous disposons d'un échantillon de 1000 couples ($Gain_i, Résultat\ Cédé_i$) dans lesquels nous allons tirer B échantillons de taille 1000 (B=5000). Dans ces B échantillons, nous calculons le ratio suivant l'estimateur cité ci-dessus puis nous pouvons déterminer la variance de l'estimateur entre ces B échantillons. Cette variance représente alors une estimation de la variance de l'estimateur du ratio.

Comme le nombre de simulations dépend aussi des paramètres du traité non proportionnel et principalement des montants de portée et priorité, il est important d'étudier plusieurs traités en excédent de sinistre. Ainsi, nous portons notre analyse sur plusieurs traités dont le plafond se trouve entre 3,5 M€ et 5,5 M€.

Nous obtenons alors les résultats suivants :

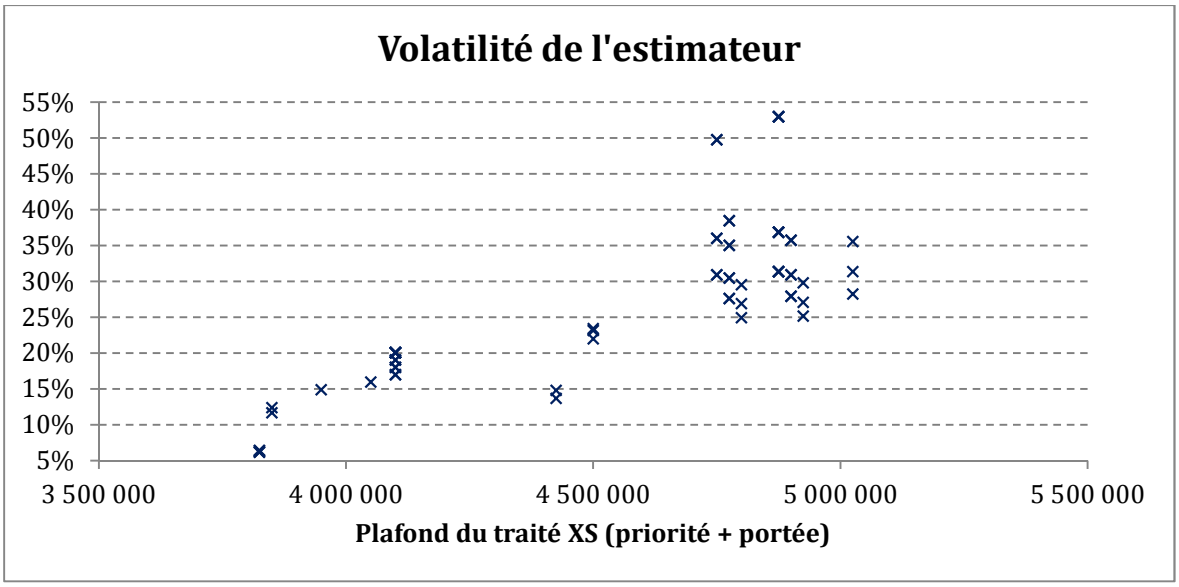

Figure 6.2

Nous constatons que la volatilité de l'estimateur du ratio gain en SCR moyen sur résultat cédé moyen a tendance a augmentée avec le plafond du traité XS. Ceci est cohérent avec l'augmentation du nombre de simulations nécessaires pour des traités de plafond élevé.

6.4 Priorité et Portée

Nous rappelons que la première étape consiste à se focaliser sur les paramètres les plus représentatifs d'un traité de réassurance non proportionnelle qui sont la priorité et la portée. Nous testons alors 1190 combinaisons (priorité, portée), toutes choses égales par ailleurs, afin d'analyser le comportement des deux indicateurs d'optimisation.

Afin de réduire le nombre de couples à tester, nous procédons au préalable à une analyse des montants bruts simulés. Ces montants correspondent aux coûts finaux dus par l'assureur au titre de l'arrêt de travail.

Avec le model point précisé précédemment (cf. §2.3 Nombre d'entrants en incapacité) et les tables de maintien du BCAC nous obtenons la distribution suivante :

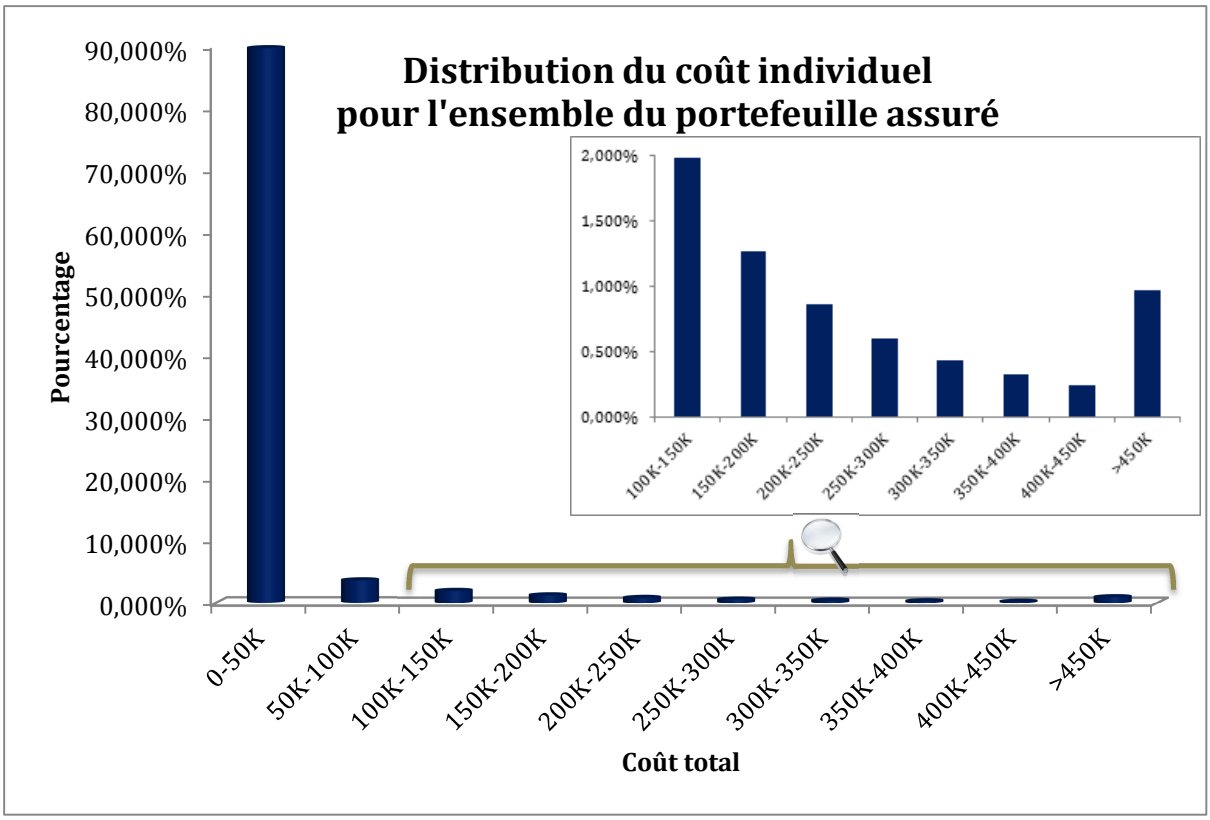

Figure 6.3

Moyenne	25 824
Ecart-type	96 739
Min	1
1er quartile	530
Médiane	1 738
3e quartile	7 625
Max	12 369 298
VaR 90%	52 718
VaR 95%	140 529
VaR 99,5%	614 286
VaR 99,9%	1 135 676
TVaR 95%	341 442
TVaR 99%	736 996
TVaR 99,5%	957 603

Figure 6.4

On peut remarquer sur le graphique ci-dessus que 89,72 % des sinistres sont inférieurs à 50 K€. Ceci s'explique principalement par le fait que la majorité des individus entrant en incapacité ne restent pas longtemps dans cet état et n'engendrent donc pas une charge de sinistralité d'un montant important.

Par contre, comme l'objectif des traités non proportionnels est de gérer les sinistres à caractères exceptionnels nous allons seulement observer les traités dont la priorité dépasse 100 K€. Ce qui comprend entre 5 % et 10 % des sinistres. Parallèlement, il n'est pas aisé de trouver sur le marché des traités ayant une priorité en dessous de ce niveau.

Nous pouvons alors analyser avec un peu plus de précision, sur le deuxième graphique la répartition des sinistres au-delà de 100 K€ puisque l'analyse n'est plus parasitée par les arrêts de courte durée.

Nous décidons alors de comparer des traités dont la priorité varie de 100 K€ à 5,5 M€ et la portée de 100 K€ à 7 M€. Ces deux paramètres nous permettent d'atteindre un plafond maximal de 12,5 M€ pour prendre en compte le montant maximum des sinistres.

Notons avant d'analyser les différents résultats obtenus que les tests sur la portée et la priorité sont effectués avec des traités en excédent de sinistres contenant un nombre illimité de reconstitutions gratuites.

Dans un premier temps nous testons l'ensemble des combinaisons priorité/portée avec un pas de 200 K€ pour la priorité et de 250 K€ pour la portée. Voici les résultats obtenus pour les deux indicateurs représentant l'optimalité :

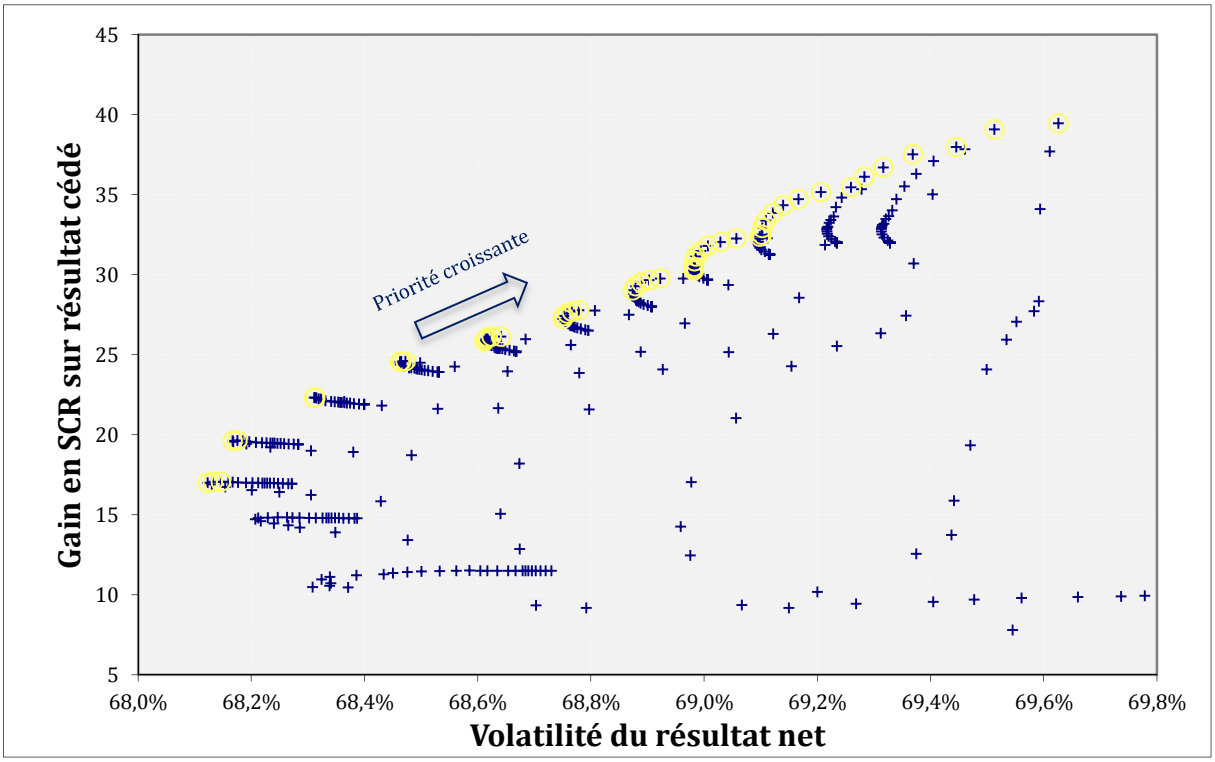

Figure 6.5

Les croix bleues représentent l'ensemble des évaluations, et celles entourées en jaune forment les traités optimaux. Nous remarquons dès à présent un début de courbe d'efficience qu'il convient d'analyser plus en détail.

En effet, nous pouvons remarquer dans le graphique ci-dessus des regroupements de points. Ces regroupements correspondent à des traités de même priorité. Il convient alors de regarder plus précisément l'évolution, de la volatilité du résultat net et du ratio gain en SCR sur résultat cédé, pour une seule priorité. Par exemple, pour des traités non proportionnels de priorité 2,7 M€ et de portée allant de 1,1 M€ à 6,85 M€ nous obtenons les résultats suivants :

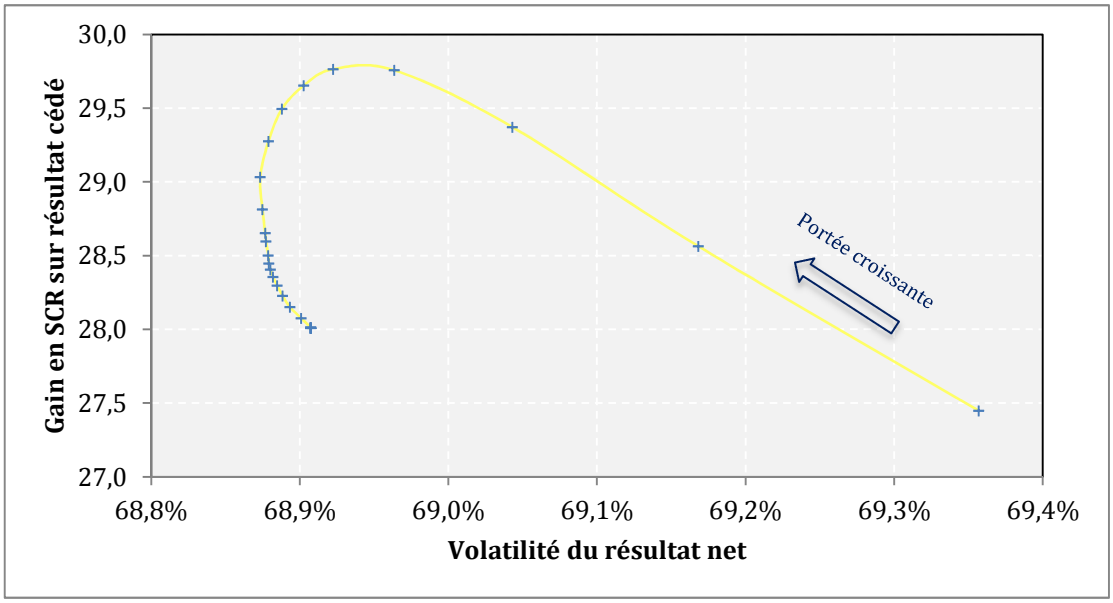

Figure 6.6

De la même manière, nous obtenons les résultats suivants pour des traités non proportionnels de priorité 1,5 M€ :

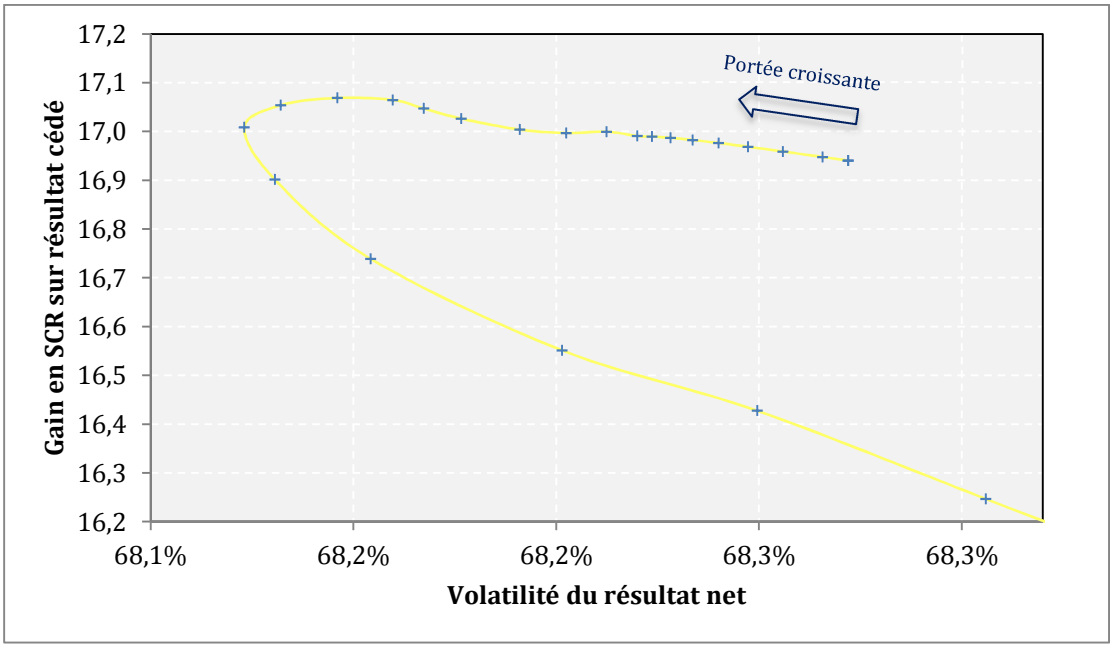

Figure 6.7

Nous remarquons que pour une priorité donnée, plus la portée augmente, plus le traité semble efficace puisqu'il y a une diminution de la volatilité du résultat net et le gain en SCR devient plus important par rapport au résultat cédé au réassureur. Par contre, à partir d'un certain seuil, il n'est plus optimal d'augmenter la portée du traité. En effet, il semble que l'augmentation tarifaire résultant de l'augmentation de la portée ne permet plus de diminuer la volatilité et n'apporte plus de gain dans le calcul du SCR. Ceci est dû au fait que l'augmentation de la portée n'implique pas forcément, à partir d'un certain montant, une cession de sinistre plus importante.

Ce phénomène se retrouvant pour l'ensemble des priorités testées, nous pouvons conclure à ce stade de notre étude qu'il existe sûrement un niveau de portée optimal pour chaque montant de priorité. On rappelle que l'on parle d'optimalité pour la cédante modélisée, c'est-à-dire par rapport à un portefeuille d'assurés particulier, et non d'optimalité générale, sur tout le marché de l'assurance.

Dans la continuité de l'analyse du traité optimal, nous affinons les résultats en prenant un pas plus petit pour tester les différents couples (portée, priorité). Nous testons alors d'autres traités dont les paramètres sont proches de ceux des traités optimaux de l'étape précédente. Nous soutirons ainsi une nouvelle courbe d'efficience plus continue :

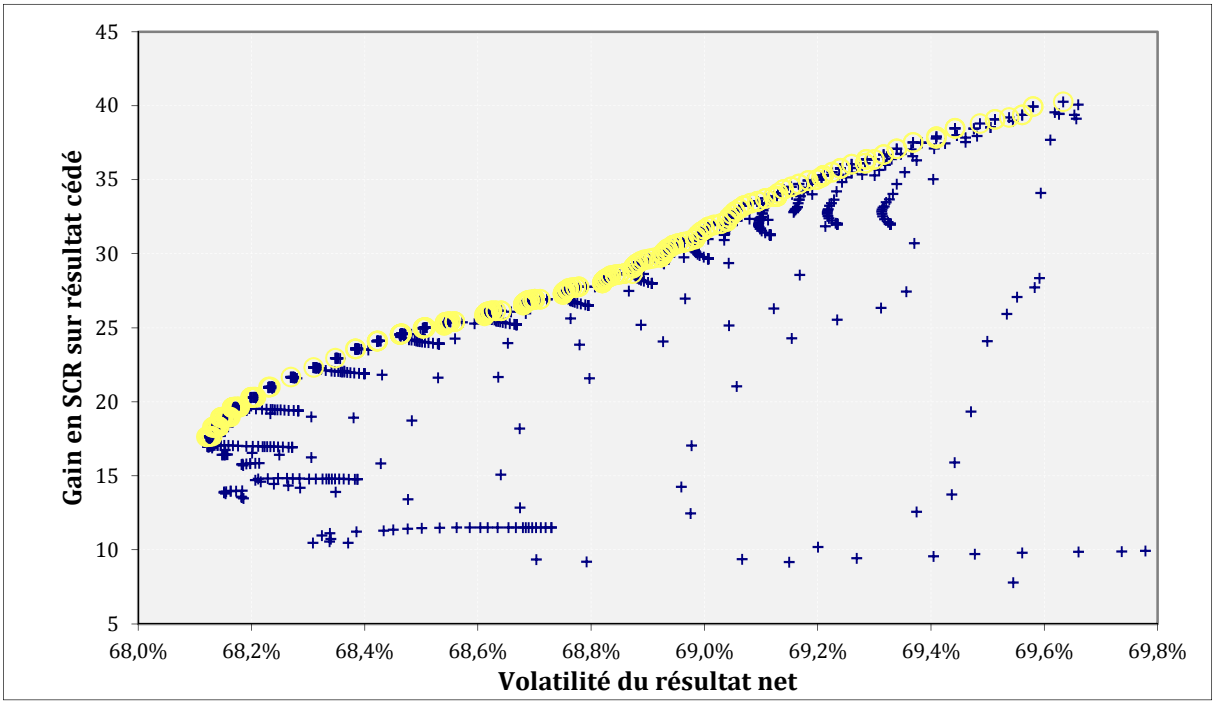

Figure 6.8

Cette courbe d'efficience est donnée par les couples (portée, priorité) suivants (dont la liste exhaustive se trouve en annexe A) :

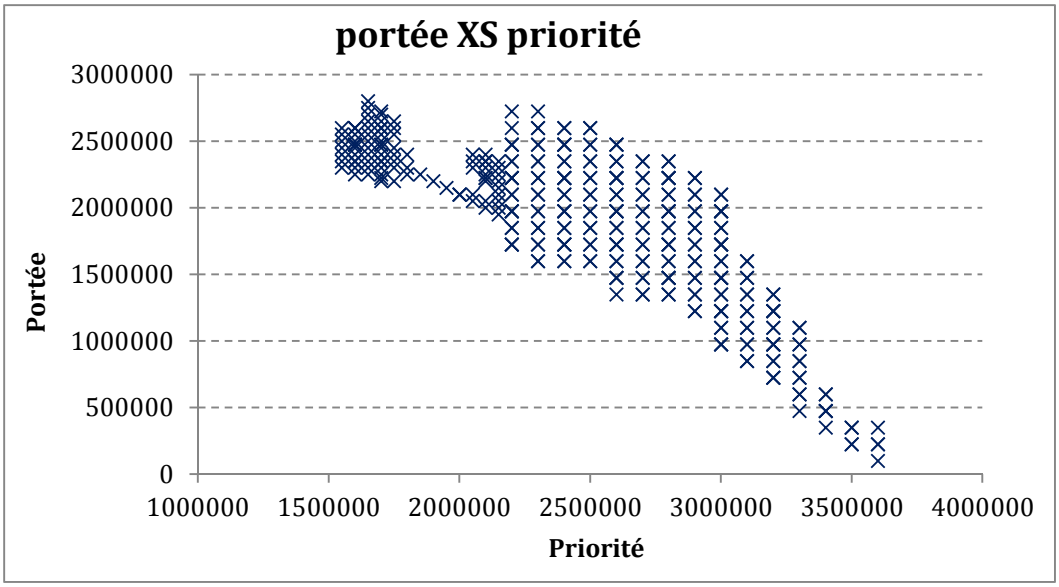

Figure 6.9

Ce graphique confirme que pour une priorité donnée, on peut déterminer quelques montants de portée qui sont optimaux pour la cédante. De plus, ce que nous pouvons déceler dans ce graphique est que le montant du plafond (priorité + portée) optimal est compris entre 3,8 M€ et 5,1 M€. Ceci nous permet de savoir dans quel intervalle se trouve la portée optimale lorsque l'on connaît la priorité ou inversement. De plus, nous pouvons voir su ce dernier graphique que l'intervalle du plafond optimal se resserre quand la priorité est autour de 2 M€. Cette valeur n'est pas anodine puisque nous verrons par la suite qu'elle représente un changement important dans le nombre optimal de reconstitutions que nous allons étudier dans la prochaine partie.

6.5 Reconstitutions

Jusqu'à maintenant, nous nous étions placés dans le cas de reconstitutions gratuites et illimitées pour se focaliser sur l'impact de la portée et de la priorité. Maintenant que ces premiers paramètres ont été analysés, nous concentrons notre étude sur un autre élément important du traité qui est de plus propre à la réassurance non proportionnelle en excédent de sinistres : les reconstitutions. Comme nous l'avons évoqué précédemment, les reconstitutions sont caractérisées par deux paramètres : leur nombre, et leur coût. Dans le graphique ci-dessous, nous pouvons voir les résultats suivants :

- Reconstitutions illimitées et gratuites
- 0 reconstitution
- 1 reconstitution gratuite
- 3 reconstitutions à 50 %
- Reconstitutions illimitées à 100 %

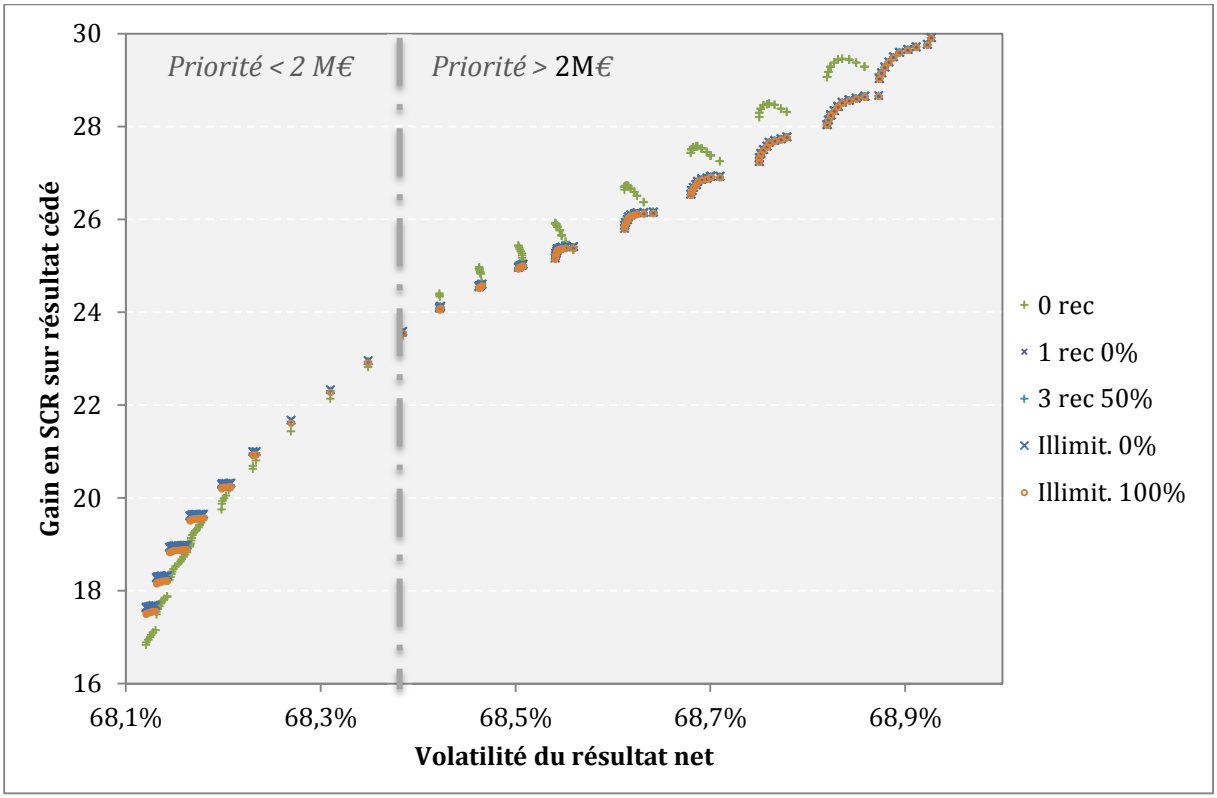

Figure 6.10

Nous observons d'une part qu'un traité sans reconstitution n'a pas les mêmes conséquences qu'un traité avec reconstitutions. En effet, nous pouvons remarquer que

lorsque la priorité est grande (partie droite du graphique), il est plus optimal de ne pas avoir de reconstitution au sein du traité. Par contre, lorsque la priorité est plus faible (partie gauche), il est préférable d'avoir une ou des reconstitutions disponibles. Ce seuil qui permet de séparer les traités en deux classes, avec ou sans reconstitutions, se situe pour la cédante modélisée autour de 2 M€.

Toutefois, nous pouvons noter que la différence d'impact entre une ou plusieurs reconstitutions, tout comme la différence entre plusieurs coûts de reconstitutions, peut être considérée comme négligeable.

A ce niveau de notre étude, nous avons maintenant connaissance que, pour chaque niveau de priorité, nous pouvons associer un niveau de portée optimal. De plus nous avons remarqué, d'après les analyses ci-dessus, qu'il existe un seuil au-delà duquel les reconstitutions ne sont plus nécessaires. En deçà, il est préférable d'avoir des reconstitutions au sein du traité mais leur coût importe peu. En effet, la prime pure du traité XS est dans tous les cas déterminée de sorte que les primes soient égales aux sinistres. Le fait de faire payer les reconstitutions implique juste une différence dans le moment où elles seront encaissées.

En regroupant les données des tests sur les reconstitutions et de ceux sur la priorité et la portée, nous obtenons la courbe d'efficience suivante :

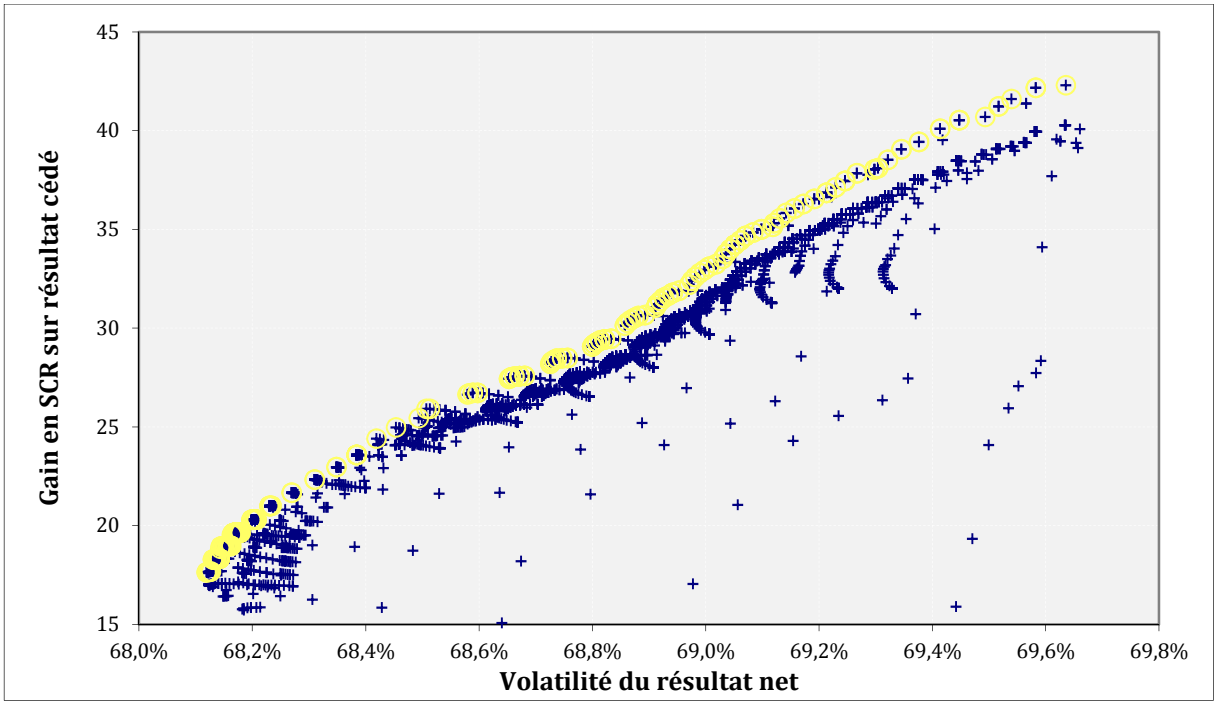

Figure 6.11

Notons que le point d'inflexion, que nous observons sur le graphique ci-dessus, représente le passage entre les traités avec reconstitutions aux traités sans reconstitution. De plus, on note une forte concentration de traités autour de ce point d'inflexion ce qui explique le resserrement de l'intervalle du plafond optimal que nous avions identifié précédemment.

La liste des traités optimaux, à ce stade de l'étude se trouve en annexe B.

6.6 Stabilité des traités

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes concentrés sur les caractéristiques générales d'un traité XS optimal. Nous avons vu qu'il existe, pour une cédante donnée, un intervalle dans lequel le plafond du traité XS doit se trouver pour que ce dernier soit optimal. Ensuite, en ce qui concerne les reconstitutions, nous avons distingué un montant de priorité au-delà duquel elles ne sont plus nécessaires.

Maintenant, Nous allons changer notre méthode d'analyse en nous focalisant plus précisément sur la cédante modélisée. En effet, nous avons en amont du modèle, défini un business plan qu'il a convenu de calibrer. Cette phase de calibrage représente un risque de modèle important, d'autant plus que notre modèle se base uniquement sur des sinistres non connus c'est à dire relatifs aux nouvelles survenances.

Pour tenir compte de ce risque, nous ferons varier quelques hypothèses ayant un fort impact dans les résultats que nous pouvons obtenir. Cette méthode permet aussi de tester la robustesse d'un traité XS vis-à-vis des différentes évolutions possibles de la cédante, ce qui rend ces traités plus optimaux.

Ainsi, nous ferons le choix du traité qui semble le plus robuste aux changements d'hypothèses parmi les traités qui étaient optimaux lors du scénario moyen. Cette remarque est importante puisqu'elle signifie que nous ne tiendrons pas compte des traités qui ne sont pas optimaux pour le scénario moyen et qui deviendront optimaux lors des stress-tests suivants. Les différents changements, dans le business plan de la cédante, que nous allons analyser ont pour effet d'augmenter la sinistralité en arrêt de travail puisqu'il ne nous semble pas judicieux d'appliquer des stress tests à la baisse.

Nous détaillons dans les sections suivantes les variations que nous allons effectuer.

6.6.1 Augmentation du taux d'entrées en incapacité

Nous regardons comment évoluent les critères de décision lorsque l'on applique un choc de 20 % au taux de sinistralité. Le taux de sinistralité passe alors de 5 % à 6 %.

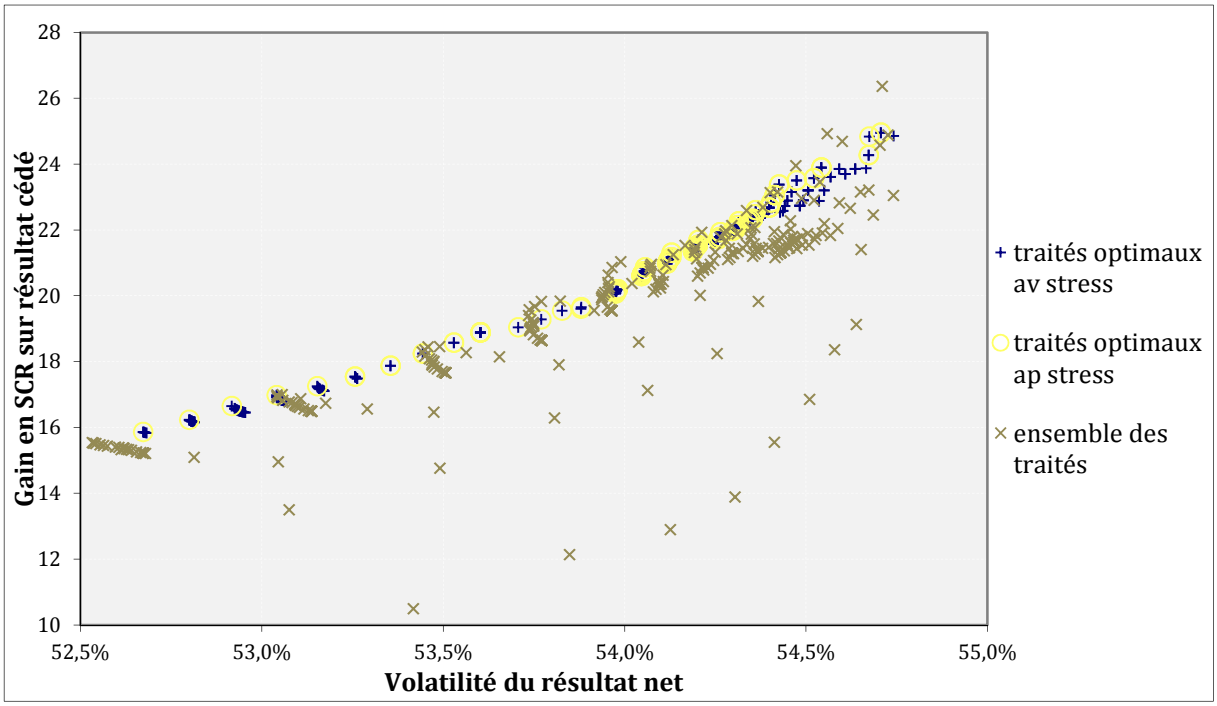

Figure 6.12

L'augmentation du taux de sinistralité implique un nombre d'entrées en incapacité plus important. En effet, on passe d'environ 2000 entrées à 2400 entrées. Nous pouvons tout d'abord remarquer que cette évolution du nombre d'entrants implique une diminution de la volatilité du résultat net puisqu'elle passe de, 68 %-70 % à 52 %-55 %. Ensuite, cette augmentation permet d'avoir plus de données ce qui rend par conséquent l'intervalle du plafond optimal plus restreint comme l'illustre le graphique ci-dessous.

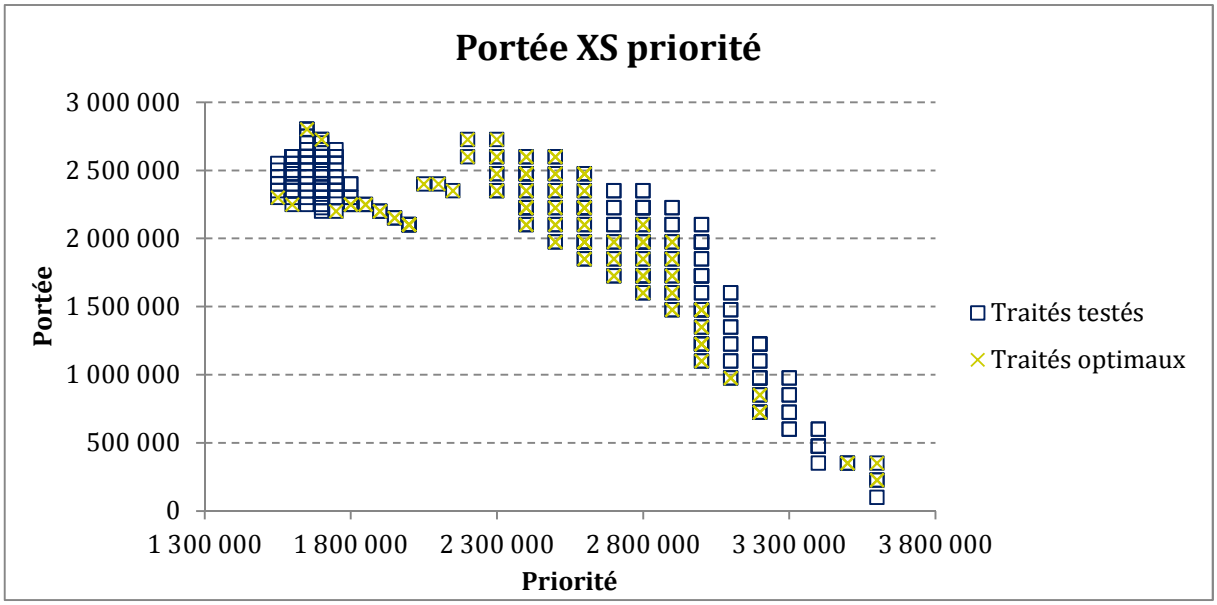

Figure 6.13

En effet, pour une même priorité, le nombre de traités optimaux et par conséquent de portées optimales est diminué par le biais de ce test. Plus précisément, on remarque que quand la priorité est haute, la borne supérieure de l'intervalle de portées optimales diminue.

Ce premier test nous permet d'éliminer une partie des traités XS qui ne supporteraient pas une augmentation du nombre d'entrées en incapacité par rapport aux estimations attendues. Toutefois, ce n'est pas le test le plus important pour la robustesse d'un traité XS puisqu'il permet seulement d'augmenter le nombre d'individus du portefeuille d'arrêt de travail. Cette augmentation ne permet pas de refléter correctement le caractère exceptionnel que couvre un traité non proportionnel en excédent de sinistres. Nous allons alors effectuer d'autres tests plus en lien avec cette optique.

6.6.2 Modification des classes d'âges du model point

Le deuxième stress test se fonde sur l'hypothèse d'un vieillissement de la population entrant en incapacité. En effet, la probabilité de passer en invalidité, et surtout le montant des rentes, augmentent avec l'âge ce qui rend plus probable l'intervention de la réassurance non proportionnelle. Pour représenter ce vieillissement, il suffit de modifier le model point utilisé pour générer les nouveaux individus en répartissant les nouveaux entrants différemment entre les classes d'âges.

Model point de base :

Tranche	Age	Repartition	Rente_moyenne_incap	sigma_rente	Nb_mois_franchise
1	25	2%	620	433	1
2	30	9%	873	758	1
3	35	10%	1052	871	1
4	40	14%	1097	959	1
5	45	12%	1149	1317	1
6	50	16%	1122	1289	1
7	55	14%	1207	1399	1
8	60	19%	1290	1767	1
9	65	4%	1943	3394	1

Figure 6.14

Model point après application d'un vieillissement de la population :

Tranche	Age	Repartition	Rente_moyenne_incap	sigma_rente	Nb_mois_franchise
1	25	2%	620	433	1
2	30	4%	873	758	1
3	35	6%	1052	871	1
4	40	9%	1097	959	1
5	45	13%	1149	1317	1
6	50	17%	1122	1289	1
7	55	20%	1207	1399	1
8	60	25%	1290	1767	1
9	65	4%	1943	3394	1

Figure 6.15

Cette modification de model point, entré dans les inputs du modèle, a l'impact suivant sur les critères d'optimalité des traités :

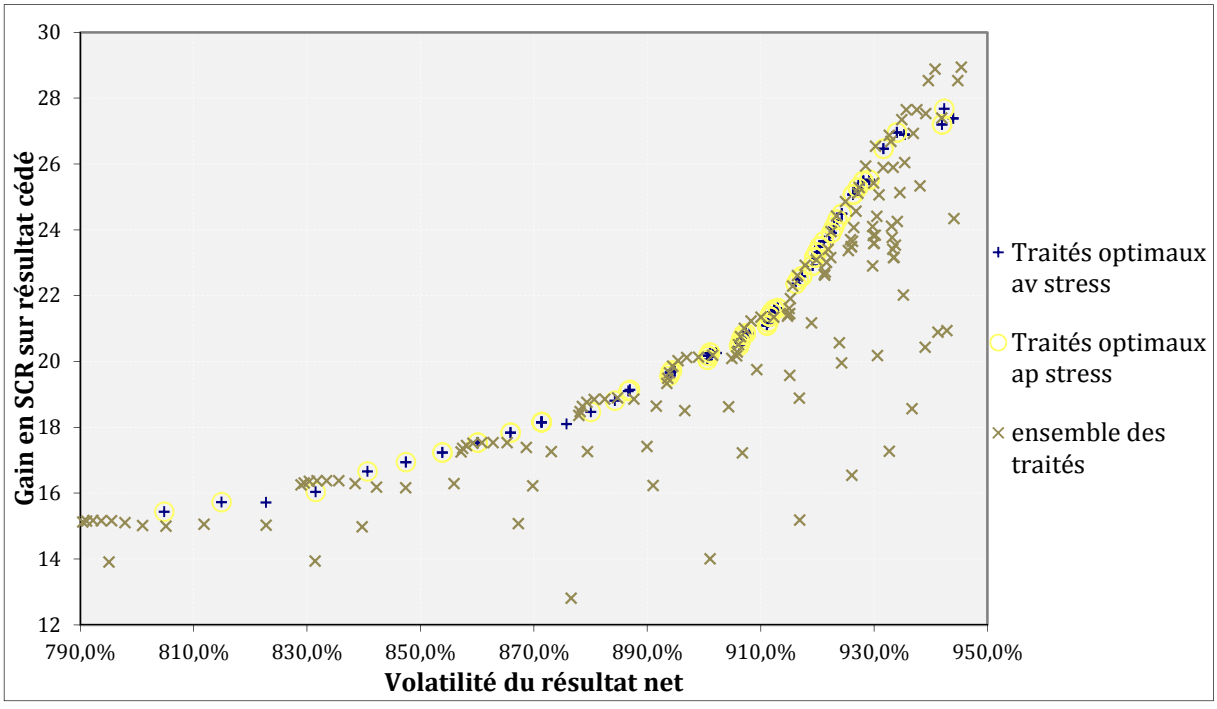

Figure 6.16

La première conclusion que nous pouvons tirer de ce graphique est que la volatilité du résultat net est multipliée par plus de 10. Cela est dû, d'une part, au résultat net qui devient assez faible et proche de zéro, et d'autre part, à l'augmentation de la volatilité des montants de rente consécutivement au vieillissement de la population entrante. Par contre, en ce qui concerne l'optimalité des traités testés, nous ne pouvons distinguer de réel changement puisque, comme nous pouvons le voir dans le graphique ci-dessous, la quasi-totalité des traités optimaux avant le test l'est encore après.

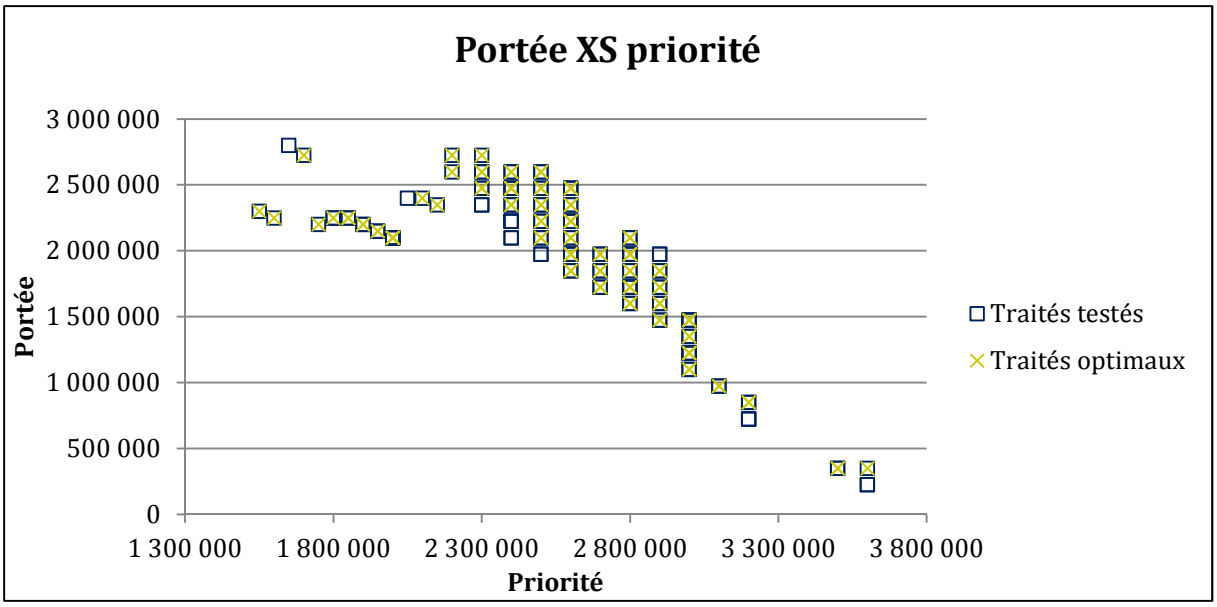

Figure 6.17

Comme le vieillissement de la population entrant en incapacité ne semble pas avoir d'impact majeur dans le choix d'un traité XS optimal, il convient alors de modifier d'autres paramètres dans ces sous-portefeuilles. Nous choisissons de modifier les paramètres qui interviennent directement dans les coûts totaux réassurés, c'est-à-dire les montants des rentes.

6.6.3 Modification des paramètres de rentes du model point

Dans le model point que nous utilisons dans notre modèle, les rentes des individus dépendent de deux paramètres qui sont la rente moyenne ainsi que l'écart-type à l'intérieur de chaque tranche. Pour procéder à ce stress-test, nous allons alors augmenter sensiblement ces deux paramètres afin de refléter une sous-estimation des montants et de la dispersion des rentes des individus entrant en arrêt de travail. Nous effectuons le changement de model point suivant :

Model point de base :

Tranche	Age	Repartition	Rente_moyenne_incap	sigma_rente	Nb_mois_franchise
1	25	2%	620	433	1
2	30	9%	873	758	1
3	35	10%	1052	871	1
4	40	14%	1097	959	1
5	45	12%	1149	1317	1
6	50	16%	1122	1289	1
7	55	14%	1207	1399	1
8	60	19%	1290	1767	1
9	65	4%	1943	3394	1

Figure 6.18

Model point après augmentation de 10 % de la moyenne et de l'écart-type des rentes :

Tranche	Age	Repartition	Rente_moyenne_incap	sigma_rente	Nb_mois_franchise
1	25	2%	683	477	1
2	30	9%	961	834	1
3	35	10%	1157	958	1
4	40	14%	1206	1055	1
5	45	12%	1264	1449	1
6	50	16%	1234	1418	1
7	55	14%	1328	1539	1
8	60	19%	1419	1944	1
9	65	4%	2138	3734	1

Figure 6.19

A la suite de ces modifications, nous obtenons les résultats suivants sur les critères d'optimalité :

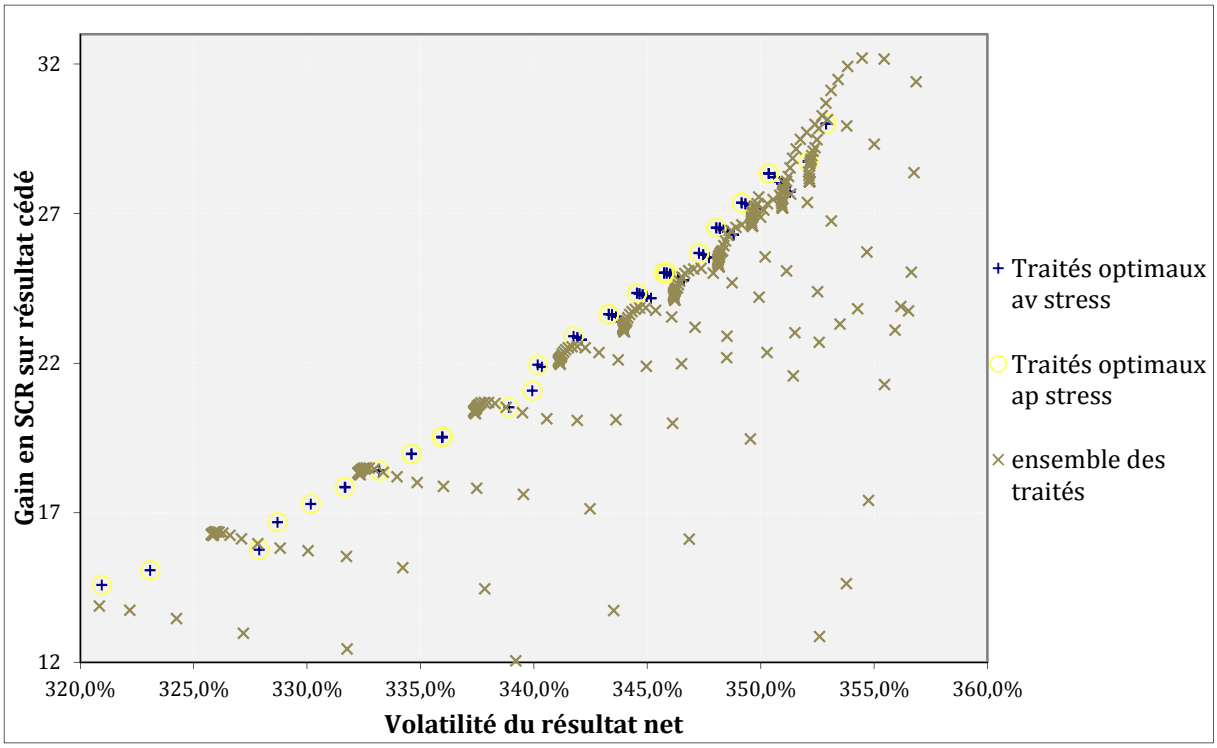

Figure 6.20

Nous remarquons tout de suite que les modifications des paramètres du model point influant directement sur les montants des rentes ont un impact plus important que les modifications sur les âges des individus. En effet, on peut voir dans le graphique ci-dessous que près de la moitié des traités testés ne sont plus optimaux suite à ces modifications.

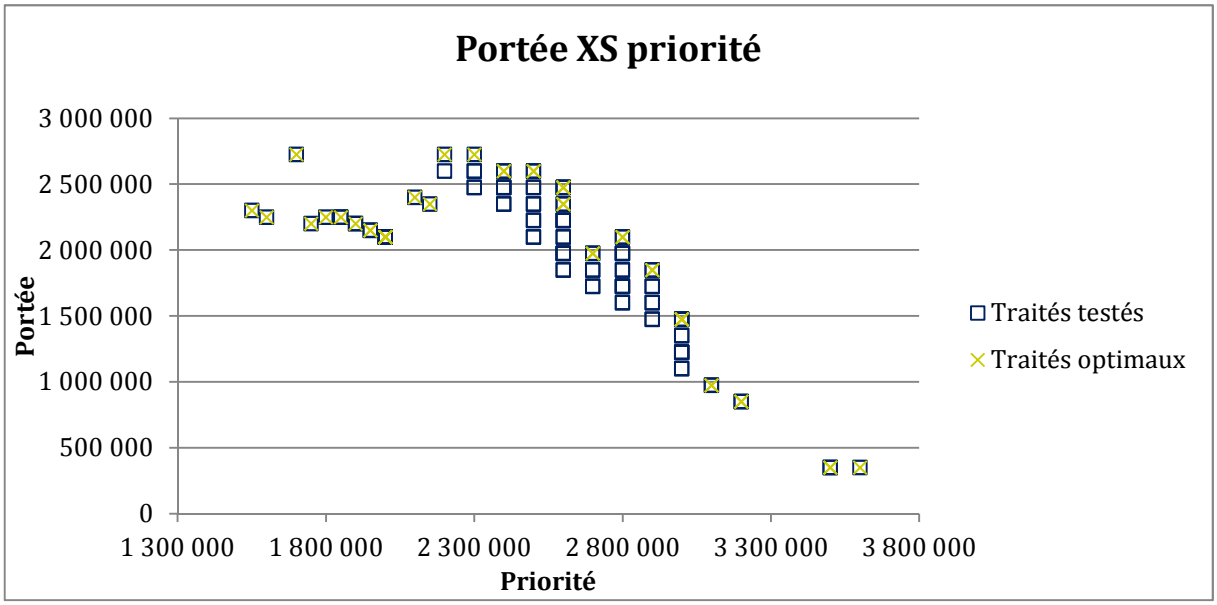

Figure 6.21

Enfin, on peut noter que pour des priorités supérieures à 2 M€, qui représente le nombre au-delà duquel il n'y a plus de reconstitutions, chaque priorité implique un montant de portée optimal. On peut alors conclure à ce niveau de notre étude que pour les priorités inférieures à 2 M€ le niveau de portée est entre 2,1 M€ et 2,3 M€ avec une exception à 2,7 M€. Alors que pour les priorités supérieures à 2 M€, l'optimalité est désigné par le plafond du traité XS qui est compris entre 4,5 M€ et 5 M€, ce qui resserre encore l'intervalle que nous avons évoqué précédemment.

Nous avons vu au cours de ce stress test qu'un nouveau test pourrait être opportun à condition qu'il intervienne directement sur les coûts totaux réassurés par le traité non proportionnel. C'est ce que nous allons alors faire par la suite.

6.6.4 Augmentation du nombre de passages en invalidité

Les montants de sinistres intervenant dans le calcul de la réassurance non proportionnelle sont essentiellement composés des capitaux constitutifs de la rente d'invalidité. En effet, si l'on regarde la charge de sinistralité totale de la cédante, seulement 25 % représentent les rentes d'incapacité et 75 % les rentes d'invalidité. De plus, la volatilité est beaucoup plus importante pour l'invalidité car la durée de la rente n'est pas bornée à 3 ans (10,5 % pour l'invalidité contre 6,5 % pour l'incapacité). On décide alors d'appliquer d'un choc de 35 % au taux de passage en invalidité pour effectuer notre dernier stress-test. Ce taux correspond au choc disability des spécifications techniques du QIS5.

Pour appliquer ce choc, on augmente les nombres de passages en invalidité, présents dans la table de passage, de 35 %. Toutefois, il convient de vérifier que le nombre de passages ne devient pas plus grand que le nombre d'individus présent dans la table de maintien en incapacité. Avec la prise en compte de ce choc, nous obtenons les résultats suivants sur les critères d'optimalité :

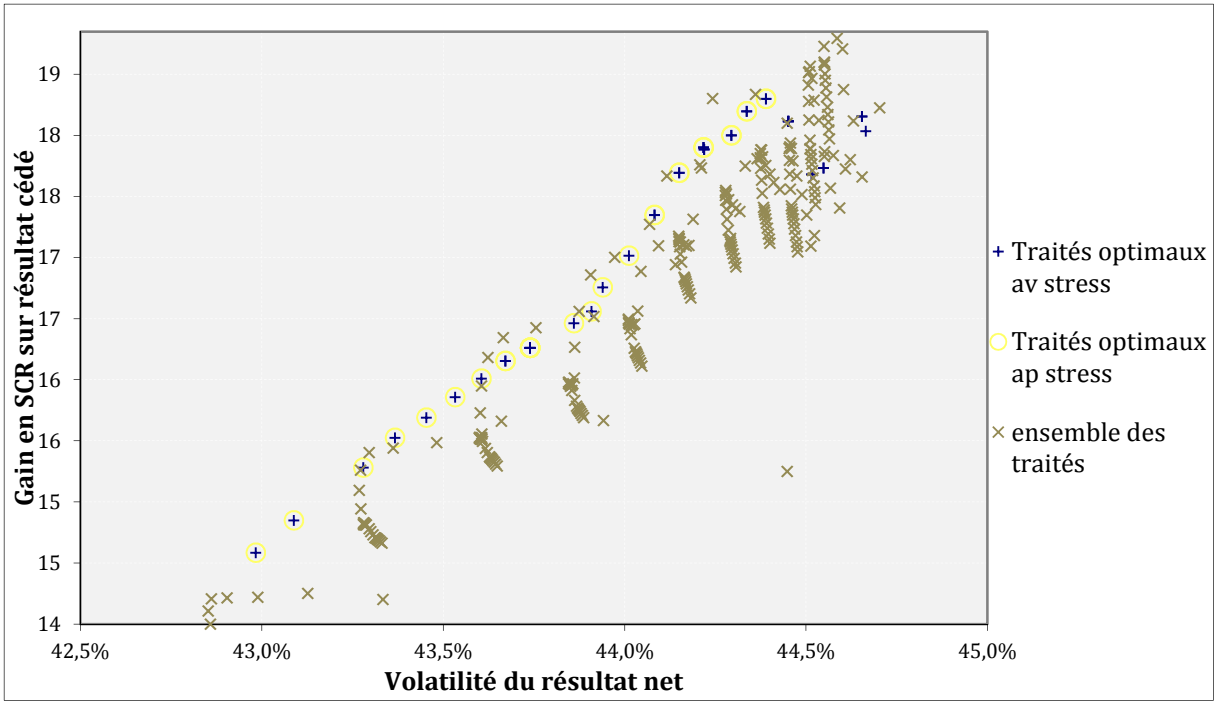

Figure 6.22

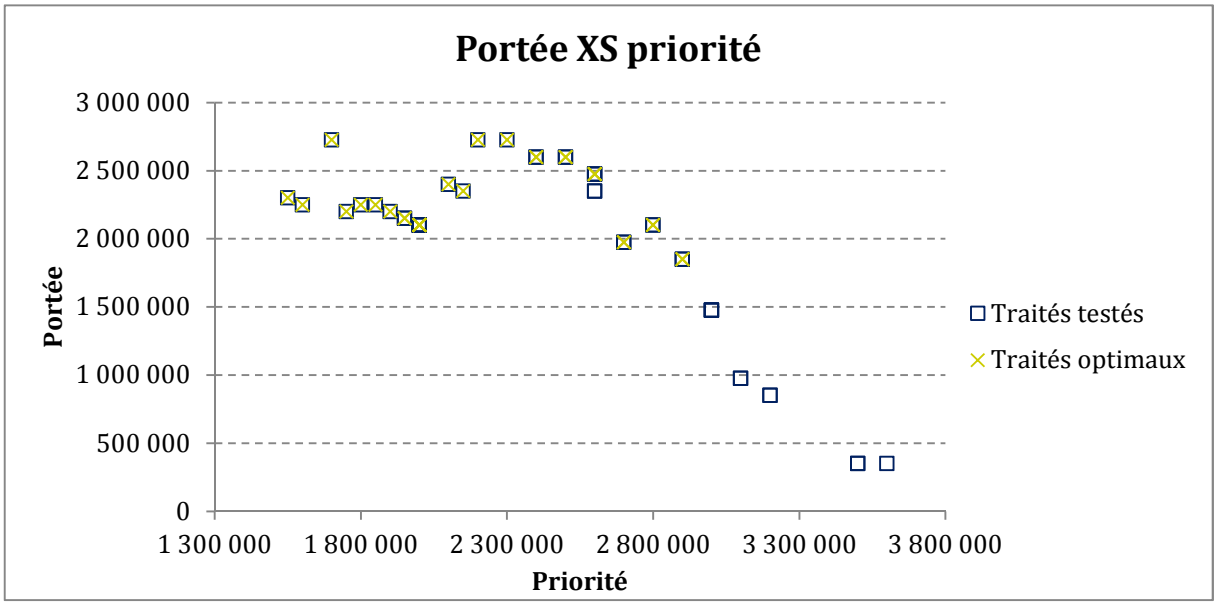

Figure 6.23

Nous constatons que l'augmentation du taux de passage en invalidité ne favorise pas les traités ayant une faible portée. En effet, comme nous l'avons expliqué précédemment, le passage en invalidité est un facteur très influent sur le montant total couvert par le réassureur. Par conséquent, plus le taux de passage en invalidité augmente plus les montants de sinistres sont élevés ce qui augmente l'intervention d'un traité non proportionnel. Les traités de portée inférieure à 1,5M€ ne permettent alors pas d'obtenir un ratio gain en SCR sur résultat cédé optimal.

A la fin de la série de stress-tests que nous avons réalisée, nous pouvons tirer des conclusions sur plusieurs éléments (dont les valeurs dépendent de la cédante modélisée) :

- la portée doit être comprise entre 1,8 M€ et 2,8 M€
- la priorité doit être comprise entre 1,5 M€ et 2,9 M€
- pour les priorités inférieures à 2 M€, le plafond doit être compris entre 3,8 M€ et 4,1 M€
- pour les priorités supérieures à 2 M€, le plafond doit être compris entre 4,5 M€ et 5,1 M€
- pour les priorités inférieures à 2 M€, les reconstitutions doivent être gratuites, soit unique ou soit illimités
- pour les priorités supérieures à 2 M€, il ne doit pas y avoir de reconstitution

On constate alors que les intervalles de portée et priorité sont, pris séparément, assez grand mais, quand on ajoute la contrainte du plafond, leur intervalle se restreint. On peut alors avec un montant de priorité (respectivement portée) cible définir immédiatement la portée (respectivement priorité) du traité XS optimal. Enfin, en ce qui concerne le nombre et le coût des reconstitutions, cela dépend du dépassement ou non d'un seuil de priorité (2 M€ dans notre exemple).

A ce niveau de notre étude, nous avons réussi à définir les paramètres optimaux d'un traité de réassurance non proportionnelle en excédent de sinistres par tête. Ces traités sont les suivants :

Priorité	Portée	Plafond	Nb rec	Cout rec
1 550 000	2 300 000	3 850 000	1	0
1 600 000	2 250 000	3 850 000	1	0
1 700 000	2 725 000	4 425 000	0	0
1 750 000	2 200 000	3 950 000	1	0
1 800 000	2 250 000	4 050 000	illimité	0
1 850 000	2 250 000	4 100 000	illimité	0
1 900 000	2 200 000	4 100 000	illimité	0
1 950 000	2 150 000	4 100 000	1	0
1 950 000	2 150 000	4 100 000	illimité	0
2 000 000	2 100 000	4 100 000	1	0
2 000 000	2 100 000	4 100 000	illimité	0
2 100 000	2 400 000	4 500 000	0	0
2 150 000	2 350 000	4 500 000	0	0
2 200 000	2 725 000	4 925 000	0	0
2 300 000	2 725 000	5 025 000	0	0
2 400 000	2 600 000	5 000 000	0	0
2 500 000	2 600 000	5 100 000	0	0
2 600 000	2 475 000	5 075 000	0	0
2 700 000	1 975 000	4 675 000	0	0
2 800 000	2 100 000	4 900 000	0	0
2 900 000	1 850 000	4 750 000	0	0

Figure 6.24

Dans cette liste de traités optimaux, on peut trouver deux intervalles distincts pour le plafond du traité suivant le nombre de reconstitutions. En effet, dans le cas d'un traité

sans reconstitution, le plafond se trouve dans l'intervalle $[4{,}425\ M€\ ;\ 5{,}1\ M€]$, alors que pour les traités avec reconstitutions, l'intervalle du plafond est $[3{,}85\ M€\ ;\ 4{,}1\ M€]$. On note que l'intervalle avec reconstitutions est inférieur au premier ce qui est tout à fait logique puisqu'il peut être atteint au moins une deuxième fois.

Nous avons alors défini, une liste d'une vingtaine de traités optimaux pour la cédante modélisée. Cependant, la stratégie de réassurance d'une cédante ne se résume rarement qu'à un seul traité non proportionnel. C'est pourquoi, nous allons essayer d'étudier une stratégie plus complète de réassurance. Cette stratégie intègre d'une part une part cédé à l'intérieur de la portée du traité XS et d'autre part un traité en Quote-part qui intervient à la suite du traité non proportionnel.

6.7 Stratégie de réassurance

Afin de rester encore un peu dans l'optimisation des traités non proportionnels, nous allons maintenant introduire une partie de réassurance proportionnelle au sein du traité XS. Pour cela, nous supposons que la portée du traité n'est pas réassurée à 100 %. Nous testons alors, sur les traités optimaux cités ci-dessus, quatre cessions différentes qui sont 90 %, 70 %, 50 % et 30 %. Nous obtenons, sur les mêmes critères d'optimalité que nous avons choisis, les résultats suivants en fonction de la part cédée :

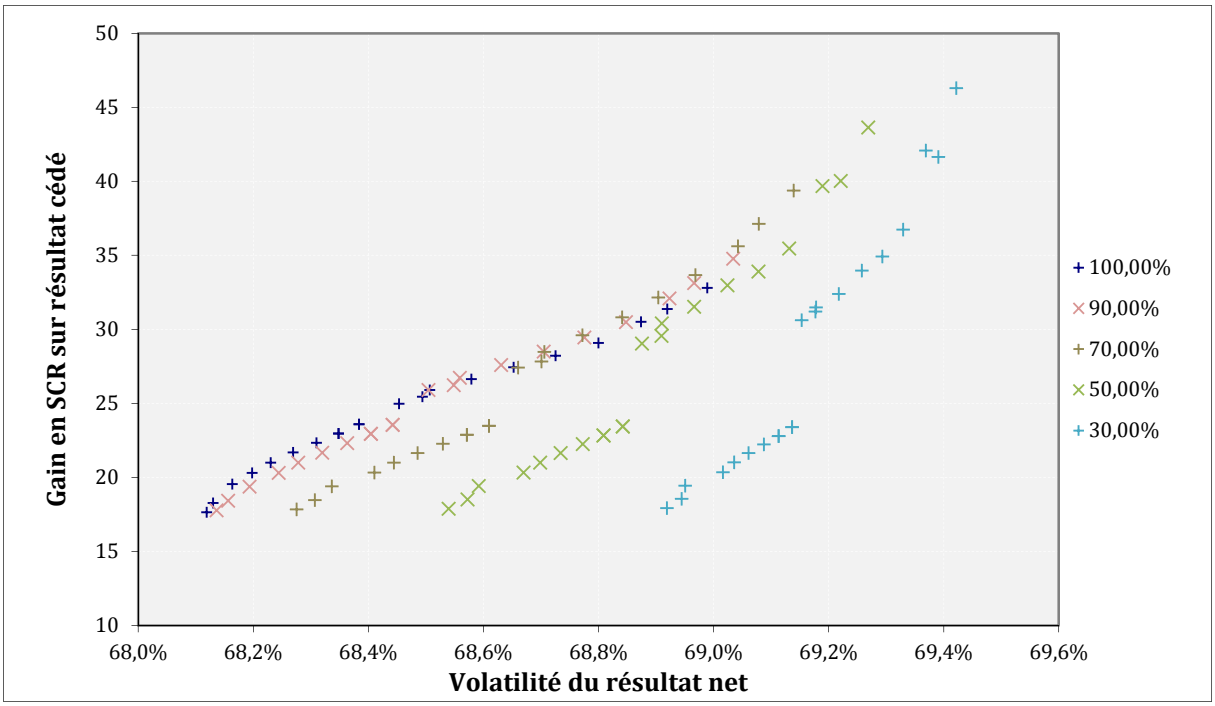

Figure 6.25

Le graphique représentant les traités optimaux est disponible en annexe C

Nous remarquons qu'il existe, quand la cession de la portée n'est pas totale, un saut assez important entre les traités avec et sans reconstitutions. Nous pouvons alors conclure que le seuil de priorité de 2 M€ qui décide du nombre de reconstitutions est dépendant de la part cédée de la portée. Cette dépendance est tout à fait légitime puisque le seuil avait été déterminé de telle sorte qu'à partir d'une certaine priorité, une seule portée pouvait couvrir le risque de façon optimale. Or, si la portée n'est plus cédée totalement, le seuil doit obligatoirement être augmenté.

De plus, Nous constatons que pour les traités dont la priorité est inférieure à 2 M€, seuil de reconstitutions, il est préférable de céder 100 % de la portée. Cependant, plus la priorité est élevée, plus le fait de céder proportionnellement une partie de la portée devient optimal. Ceci s'explique par le fait que l'augmentation du ratio gain en SCR sur résultat cédé est plus importante que l'augmentation de la volatilité du résultat net.

On obtient alors la liste suivante des traités de réassurance non proportionnelle optimaux :

Priorité	Portée	Nb rec	Cout rec	Part Cédée	Priorité	Portée	Nb rec	Cout rec	Part Cédée
1 550 000	2 300 000	1	0	100%	2 200 000	2 725 000	0	0	90%
1 600 000	2 250 000	1	0	100%	2 300 000	2 725 000	0	0	90%
1 700 000	2 725 000	0	0	100%	2 400 000	2 600 000	0	0	90%
1 750 000	2 200 000	1	0	100%	2 800 000	2 100 000	0	0	90%
1 800 000	2 250 000	illimité	0	100%	2 900 000	1 850 000	0	0	90%
1 850 000	2 250 000	illimité	0	100%	2 150 000	2 350 000	0	0	70%
1 900 000	2 200 000	illimité	0	100%	2 300 000	2 725 000	0	0	70%
1 950 000	2 150 000	1	0	100%	2 400 000	2 600 000	0	0	70%
1 950 000	2 150 000	illimité	0	100%	2 500 000	2 600 000	0	0	70%
2 000 000	2 100 000	1	0	100%	2 600 000	2 475 000	0	0	70%
2 000 000	2 100 000	illimité	0	100%	2 700 000	1 975 000	0	0	70%
2 100 000	2 400 000	0	0	100%	2 800 000	2 100 000	0	0	70%
2 150 000	2 350 000	0	0	100%	2 900 000	1 850 000	0	0	70%
2 200 000	2 725 000	0	0	100%	2 700 000	1 975 000	0	0	50%
1 600 000	2 250 000	1	0	90%	2 800 000	2 100 000	0	0	50%
2 100 000	2 400 000	0	0	90%	2 900 000	1 850 000	0	0	50%
2 150 000	2 350 000	0	0	90%	2 900 000	1 850 000	0	0	30%

Figure 6.26

A présent, nous allons ajouter à la stratégie de réassurance un traité proportionnel en quote-part qui intervient à la suite du traité en excédent de sinistres. Pour cela, nous appliquons un taux de cession aux cotisations, prestations et provisions. A noter que ce taux de cession est appliqué sur des montants nets de réassurance XS par la formule suivante :

$$Montant_{Cédé\ QP} = Tx_{QP} * (Montant_{Brut} - Montant_{Cédé\ XS})$$

Nous allons alors analyser l'optimalité de différentes stratégies de réassurance composées d'une part d'un traité XS listé ci-dessus et d'un traité en Quote-part avec des cessions de10 % et 50 %.

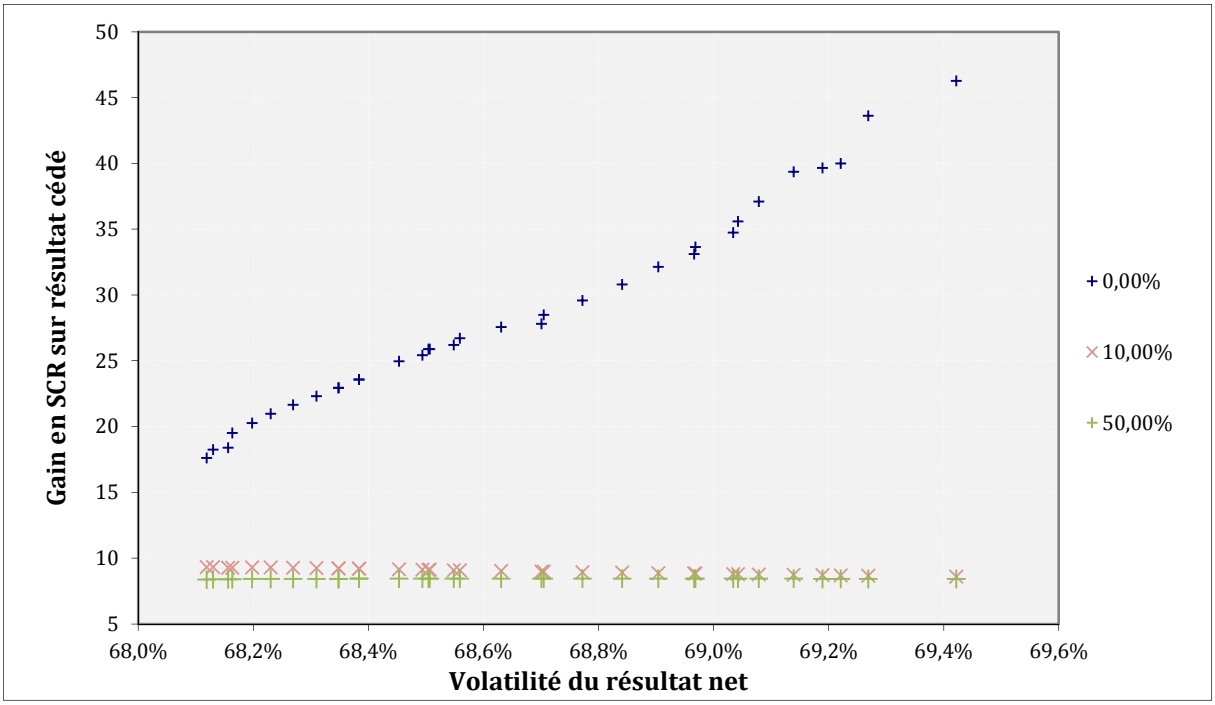

Figure 6.27

On constate à l'aide de ce graphique, d'une part, que le fait d'ajouter à la stratégie de réassurance un traité proportionnel ne fait pas baisser la volatilité du résultat. En effet, les traités en quote-part ont seulement un effet sur le volume mais pas sur la dispersion du résultat. D'autre part, l'ajout de la réassurance proportionnelle n'a pas d'effet positif sur les critères d'optimalité que nous avons choisi. Il pourrait alors être intéressant de se pencher sur d'autres facteurs de solvabilité. En effet, la réassurance proportionnelle joue quand même un rôle important sous Solvabilité II puisqu'elle permet d'optimiser son ratio de solvabilité comme nous pouvons le voir dans le graphique suivant :

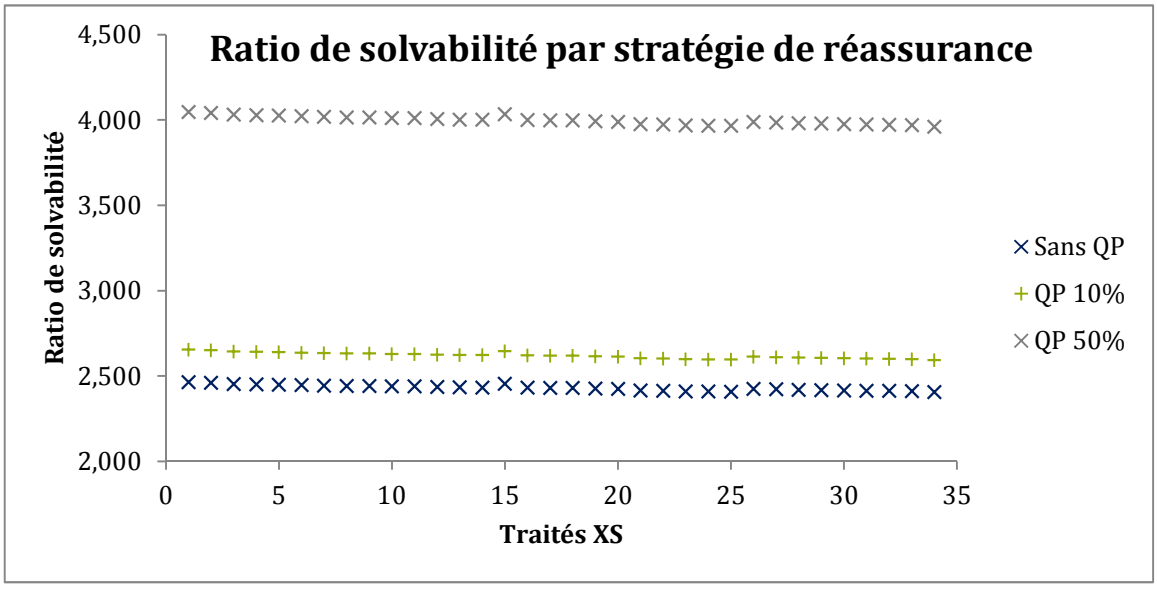

Figure 6.28

Comme indiqué ci-dessus, la réassurance proportionnelle permet notamment d'optimiser son ratio de solvabilité. En effet, dans notre exemple, ce ratio augmente en moyenne de 8 % lorsqu'on ajoute un traité en quote-part de 10 % et de 64 % avec un traité à 50 %.

Nous pouvons déduire de cette partie qu'il est difficile d'optimiser une stratégie complète de réassurance en utilsant les mêmes indicateurs à la fois pour les traités proportionnels que pour les traités non proportionnels. En effet, les deux types de couverture n'ont pas le même objectif, l'un vise a diminué la volatilité du résultat et l'autre a diminué les volumes traités. Elles ne peuvent alors être résumées en un indicateur commun.

6.8 Notation du réassureur

La notation du réassureur prend une grande importance dans la directive Solvabilité II, d'autant plus qu'elle n'était pas prise en compte dans Solvabilité I. Les cédantes ont donc intérêt à regarder la notation de leur réassureur et chaque réassureur doit adapter sa tarification par rapport à sa notation. En effet, l'impact de la notation sur notre ratio gain en SCR moyen sur résultat cédé moyen est illustré par le graphique suivant :

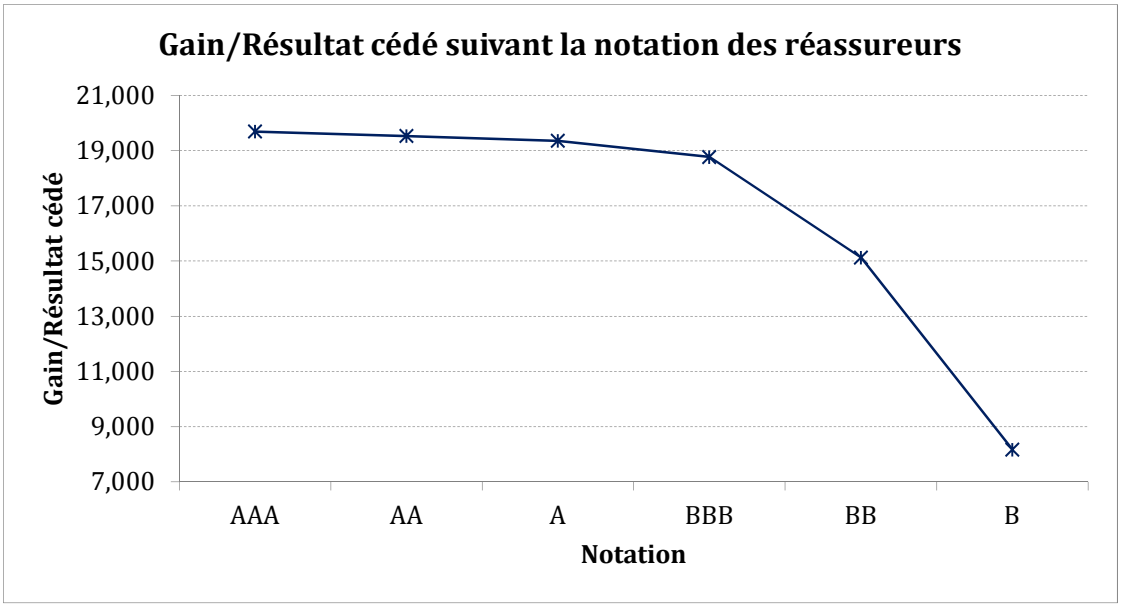

Figure 6.29

Pour un même traité, qui diffère seulement par la notation du réassureur, le ratio gain en SCR sur résultat cédé varie presque du simple au triple. En allant plus loin, on peut dire qu'entre les notations AAA, AA, A et BBB la différence n'est pas significative même si la notation AAA est bien sûr plus optimale. Par contre, la notation BB est assez pénalisante pour un réassureur. Enfin, les notations B et CCC ainsi que les organismes sans notation sont gérées de la même façon dans le QIS 5 et possèdent donc le même ratio qui est assez faible.

Nous pouvons voir ci-dessous la répartition du BSCR entre le SCR Health, le SCR Default et le SCR Market

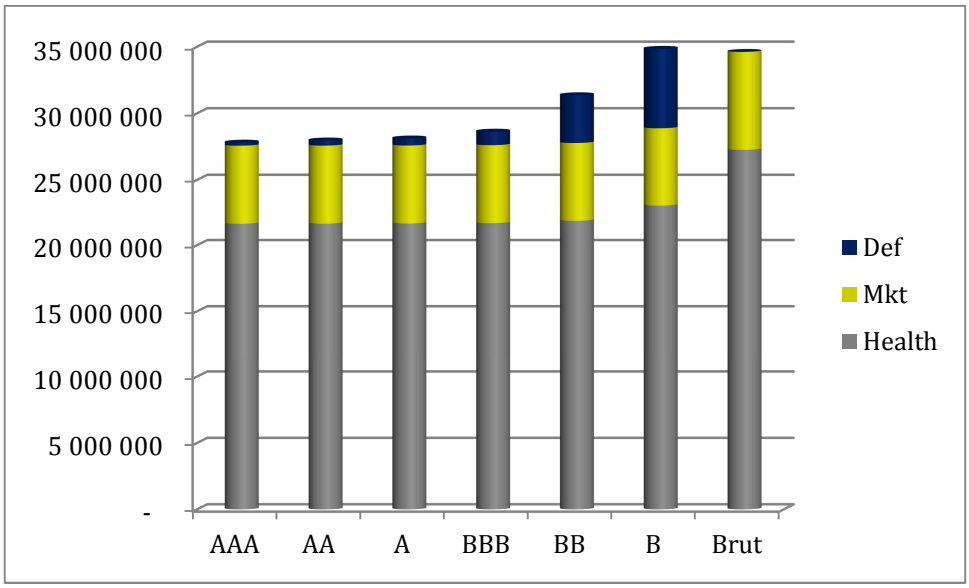

Figure 6.30

Tout d'abord, nous constatons que le SCR Market diffère selon la notation des réassureurs. Pour rappel, le SCR Market est impacté par la réassurance pour deux raisons. D'une part car il dépend des provisions cédées à travers le risque de taux et le risque d'illiquidité. D'autre part car le SCR que nous analysons est un SCR à un an qui dépend des flux de l'année réinvestis dans les différents types d'actif et que ces flux sont différents pour chaque traité de réassurance. Ainsi, la notation du réassureur a un impact sur le SCR Market puisqu'elle modifie l'ajustement des provisions cédées par le biais d'une probabilité de défaut associée. Toutefois, la variation du SCR Market reste inférieure à 1 % entre les différentes notations. En ce qui concerne le SCR default, on remarque un impact beaucoup plus important qui est dû à la plus grande probabilité de défaut d'un réassureur moins bien noté. On constate également un impact plus léger sur le SCR Health car, comme pour le SCR Market, les provisions cédées en normes Best Estimate sont nettes de probabilité de défaut du réassureur.

Les réassureurs ayant une note défavorables se doivent alors d'adapter leur tarif afin de rester compétitif par rapport aux autres réassureurs. Nous allons analyser l'effort que doit fournir chaque réassureur par rapport à sa notation.

Si nous nous plaçons dans le cas d'un même traité de réassurance non proportionnelle en excédent de sinistres, la notation du réassureur n'a aucun impact sur les cotisations, prestations et provisions cédées. Cependant, cette notation a toute son importance dans les critères d'optimalité choisis précédemment et plus particulièrement sur le gain en SCR. En effet, plus la notation est bonne, moins le SCR default est important, ce qui implique un gain en SCR plus important.

Nous cherchons alors l'effort que doit faire les réassureurs en diminuant ses cotisations pour obtenir un ratio gain en SCR sur résultat cédé de même niveau qu'un réassureur noté AAA.

En prenant l'exemple du premier traité XS de la liste optimale : 2,3 M€ XS 1,55 M€ (une reconstitution gratuite et 100 % de portée cédée) nous obtenons les résultats suivants :

Notation	Cotisations C	Resultat C	Gain en SCR	Gain/Resultat	Resultat C Ajusté	Diminution Cotisations C	Effort Cotisations C	Effort Resultat C
AAA	11 055 724	308 387	6 073 202	19,69	308 387	0	0,00%	0,00%
AA	11 055 724	308 387	6 022 376	19,53	305 807	-2 581	-0,02%	-0,84%
A	11 055 724	308 387	5 969 797	19,36	303 137	-5 251	-0,05%	-1,70%
BBB	11 055 724	308 387	5 789 062	18,77	293 959	-14 428	-0,13%	-4,68%
BB	11 055 724	308 387	4 664 981	15,13	236 880	-71 507	-0,65%	-23,19%
B	11 055 724	308 387	2 520 877	8,17	128 006	-180 381	-1,63%	-58,49%

Figure 6.31

Nous constatons alors que les réassureurs notés AA et A ne devront pas fournir d'effort considérable pour être compétitifs par rapport aux réassureurs notés AAA. En effet, leur résultat ne serait diminué que de moins de 2 % et leurs cotisations de moins de 0,05 %. En ce qui concerne les réassureurs notés BBB, l'effort à effectuer pour obtenir un gain en SCR équivalent est plus conséquent mais reste acceptable puisqu'il est inférieur à 5 % du résultat cédé. Par contre, à partir de la notation BB, la probabilité de défaut associée aux notations, dans les spécifications techniques du QIS5, a une grande importance sur la nécessité pour les réassureurs de s'adapter afin de rester compétitif. Comme le montre l'exemple ci-dessus, une contrepartie notée BB doit diminuer son résultat de plus de 20 % et les réassureurs notés B ou moins doivent aller jusqu'à une réduction de plus de 50 % de leur résultat.

Pour conclure, on voit que la notation, non prise en compte sous Solvabilité I, prend tout son sens sous Solvabilité II. En effet, les réassureurs moins bien notés devront consentir à céder du résultat à leurs contreparties afin de rester compétitif lors d'un choix de stratégie de réassurance. L'exemple ci-dessus illustre bien ces propos notamment pour les notations BBB et inférieures.

Le choix final de la cédante doit alors se porter sur la liste des traités non proportionnels optimaux que nous avons discernée, tout en regardant de très près la notation des contreparties de ces programmes de réassurance. La cédante préfèrera ainsi des réassureurs notés au moins BBB à des contreparties dont la stabilité financière est moins bien estimée sur le marché.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons exposé un système d'optimisation d'un programme de réassurance et plus particulièrement d'un traité de réassurance non proportionnelle (XS têtes) en tenant compte de son impact sur les indicateurs Solvabilité II. L'intégration de cette nouvelle réforme dans les critères décisionnels était essentielle puisque la réassurance y est particulièrement mise en valeur et contribue directement à l'amélioration de la marge de solvabilité des assureurs.

Nous avons montré tout d'abord que l'optimisation d'une stratégie de réassurance nécessitait une modélisation « réaliste » des sinistres futurs, de manière à tester nos programmes dans des conditions adéquates. Nous avons choisi dans ce mémoire de générer des nouveaux individus entrant en arrêt de travail à l'aide d'un model point puis de projeter leur évolution grâce aux tables de maintien du BCAC.

Par la suite, nous avons évoqué les particularités de modélisation liées à la réassurance non proportionnelle. C'est pour ces particularités, qui se situent à la fois au niveau des reconstitutions, du calcul des provisions cédées ou encore de la gestion des sinistres tête par tête, que nous nous sommes placés dans un cadre stochastique.

Ensuite, pour l'optimisation du programme de réassurance, nous avons pris en compte le fait que, comme toutes les autres sociétés, une compagnie d'assurance a intérêt à maximiser sa rentabilité et optimiser l'utilisation de son capital. L'assureur doit alors planifier sa stratégie de réassurance en fonction de la réduction du coût du capital associée. C'est pourquoi nous avons choisi d'analyser le gain en capital de solvabilité par rapport au résultat cédé au réassureur. De plus, nous avons considéré dans nos critères d'optimalité la volatilité du résultat net puisque la réassurance non proportionnelle permet, à la différence d'un traité en quote-part, de diminuer cette volatilité (et ce uniquement sur la partie inférieure de la distribution - zone de pertes-, la partie supérieure -zone de bénéfices- n'étant pas restreinte dans ses valeurs extrêmes).

Nous avons alors testé plusieurs traités en excédent de sinistres, tout en surveillant la stabilité de leur optimalité vis-à-vis de déviations sur les hypothèses. Les principales conclusions tirées de notre étude sont les suivantes : premièrement, un niveau de priorité implique un niveau de portée optimal (c'est-à-dire que, toute choses étant égales par ailleurs, le fait de fixer une priorité entraîne un optimum unique pour la portée) et inversement. Deuxièmement, il existe un seuil de priorité décisif pour les autres paramètres du traité. En effet, en deçà de ce seuil, il est optimal d'avoir d'une part des reconstitutions gratuites et d'autre part une cession totale de la portée. Par contre, au-delà de ce seuil, il est préférable de ne pas avoir de reconstitutions et plus la priorité est élevée, plus le fait de céder proportionnellement une partie de la portée devient optimal.

Enfin, nous avons remarqué que la notation devient un critère primordial dans le choix d'un programme de réassurance sous Solvabilité II. En effet, les assureurs préfèreront des réassureurs notés au moins BBB, à moins que des contreparties moins bien estimées adaptent leur tarif pour rester compétitifs.

Pour finir, nous tenons à souligner que nous avons obtenu une courbe d'efficience de traités optimaux. C'est sur cette courbe qu'il convient de choisir le traité de réassurance non proportionnelle, via un arbitrage entre appétence et tolérance au risque de

l'assureur. C'est pourquoi il est essentiel de réaliser un ORSA préalablement à toute décision stratégique afin de s'assurer de la cohérence de cette décision avec l'appétence au risque défini par l'organisme, du calcul correct des provisions techniques, de l'évaluation du SCR « post-décision » et pour évaluer les risques liés à l'orientation stratégique. Ces quatre points sont les principaux objectifs du project-based ORSA.

Bibliographie

Ouvrages

BLONDEAU J., PARTRAT C. (2003) *La réassurance, approche technique.* ECONOMICA.

WALHIN J.-F. (2007) *La réassurance.* Editions LARCIER.

Articles

ARNAL P., DURAND R., MIEHE P. (2008) *Solvabilité II va-t-elle bouleverser les stratégies de réassurance ?* E-Alert N°14 ACTUARIS.
http://www.actuaris.com/site/pdf/48eca26d8e889.pdf

BECACHE E. (2009) *Modèle interne ou modèle standard - comment intégrer la réassurance ?* 8e Congrès Annuel des Actuaires.
http://www.institutdesactuaires.com/docs/2009186231145_EmmanuelBcacheRassurance.pdf

CHARPENTIER A. *(2010) Reinsurance, ruin and solvency issues : some pitfalls.*
http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/46/33/81/PDF/wp2010-06.pdf

KRAVYCH Y. (2001) *On existence of insurer's optimal excess of loss reinsurance strategy.*
http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Washington/Krvavych.pdf

PLANCHET F. (2009) *Provisionnement best estimate et risque arrêt de travail.* La Tribune de l'assurance n°140, pages 57 et 58.

SOLIOZ B. (2009) *L'impact de la réassurance sur la marge de solvabilité et le SST*. Colloque ASA.

Sites internet

FFSA : Le site de la Fédération Française des Sociétés d'Assurance
http://www.ffsa.fr

Standards&Poors : le site de l'agence de notation S&P
http://www.standardandpoors.com/ratings/en/eu/

Autres

ACP (2010) *FAQ - QUESTIONS / REPONSES - Solvabilité 2 – 5ème étude d'impact.*

CEIOPS (2010) *Quantitative Impact Study 5 Questions & Answers.*

EIOPA (2010) *QIS5 Technical Specifications.*

EIOPA (2010) *Annexes to the QIS5 Technical Specifications.*

JAL, P. (2011) *Cours de réassurance.* ISFA 3ème année.

Annexes

Annexe A : Annexe N des spécifications techniques du QIS5

ANNEX N - Adjustment factor for non-proportional reinsurance for the Non-SLT health and non-life premium and reserve risk sub-modules

1. The premium and reserve risk sub-modules allow undertakings to calculate an adjustment factor for non-proportional reinsurance in order to take into account their risk-mitigating effect.

2. The adjustment factor for non-proportional reinsurance should only be calculated in relation to per risk excess of loss reinsurance which complies with the following conditions:

   - it covers all insurance claims that the insurance or reinsurance undertaking may incur in the segment during the following year;
   - it allows for reinstatements;
   - it meets the requirements for risk mitigation techniques set out in subsection SCR.13.

$$NP_{lob} = \sqrt{\frac{1+\left(\Omega_{lob}^{net}/M_{lob}^{net}\right)^2}{1+\left(\Omega_{lob}^{gross}/M_{lob}^{gross}\right)^2}}$$

where

$$M_{lob}^{net} = M_{lob}^{gross} \cdot \left[1 - F_{m+\sigma^2,\sigma}(a+b) + F_{m+\sigma^2,\sigma}(a)\right] + a \cdot \left[F_{m,\sigma}(a+b) - F_{m,\sigma}(a)\right] - b \cdot \left[1 - F_{m,\sigma}(a+b)\right]$$

$$\Omega_{lob}^{net} = \left(\begin{array}{l} \left(\left(\Omega_{lob}^{gross}\right)^2 + \left(M_{lob}^{gross}\right)^2\right) \cdot \left[1 - F_{m+2\sigma^2,\sigma}(a+b) + F_{m+2\sigma^2,\sigma}(a)\right] \\ + a^2 \cdot \left[F_{m,\sigma}(a+b) - F_{m,\sigma}(a)\right] \\ - 2b \cdot M_{lob}^{gross} \cdot \left[1 - F_{m+\sigma^2,\sigma}(a+b)\right] + b^2 \cdot \left[1 - F_{m,\sigma}(a+b)\right] - \left(M_{lob}^{net}\right)^2 \end{array} \right)^{1/2}$$

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(1+\left(\frac{\Omega_{lob}^{gross}}{M_{lob}^{gross}}\right)^2\right)}$$

and

$$m = \ln M_{lob}^{gross} - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$M_{lob}^{gross} = \begin{cases} \widetilde{M}_{lob}^{gross} & \text{if } S \geq 1 \\ S \cdot \widetilde{M}_{lob}^{gross} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Omega_{lob}^{gross} = \begin{cases} \widetilde{\Omega}_{lob}^{gross} & \text{if } S \geq 1 \\ S \cdot \widetilde{\Omega}_{lob}^{gross} & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$S = \sqrt{\frac{n \cdot \sigma^2_{(prem,gross,lob)} \cdot V^2_{(prem,gross,lob)}}{N \cdot \left(\left(\widetilde{\Omega}_{lob}^{gross}\right)^2 + \left(\widetilde{M}_{lob}^{gross}\right)^2\right)}}$$

3. The terms used in these formulas are defined as follows:

$\widetilde{M}_{lob}^{gross}$	=	Average cost per claim gross of reinsurance per LOB, estimated from the claims of the last n years, where $n \geq 1$
$\widetilde{\Omega}_{lob}^{gross}$	=	Standard deviation of the cost per claim gross of reinsurance per LOB, estimated with the standard estimator from the claims of the last n years, where $n \geq 1$
a	=	Retention of non-proportional reinsurance contract
b	=	Limit of the non-proportional reinsurance contract
$F_{m,\sigma}$	=	Distribution function of a Lognormal random variable with parameters (m,σ)
$F_{m+\sigma^2,\sigma}$	=	Distribution function of a Lognormal random variable with parameters $\left(m+\sigma^2,\sigma\right)$
$F_{m+2\sigma^2,\sigma}$	=	Distribution function of a Lognormal random variable with parameters $\left(m+2\sigma^2,\sigma\right)$
n	=	Number of years used in the estimation of $\widetilde{M}_{lob}^{gross}$ and $\widetilde{\Omega}_{lob}^{gross}$
N	=	Number of claims during the last N years
$\sigma_{(prem,gross,lob)}$	=	Standard deviation for premium risk gross of reinsurance, calculated by putting the adjustment factor NP_{lob} to 1
$V_{(prem,gross,lob)}$	=	Volume measure for premium risk gross of reinsurance, calculated in the same way as the usual volume measure but based on gross premiums instead of net premiums

4. Where the excess of loss reinsurance contract has no limit the adjustment factor for non-proportional reinsurance of a line of business shall be calculated in the same way as set out above, but with the following changes:

$$M_{lob}^{net} = M_{lob}^{gross} \cdot F_{m+\sigma^2,\sigma}(a) + a \cdot \left[1 - F_{m,\sigma}(a)\right]$$

$$\Omega_{lob}^{net} = \left(\left(\left(\Omega_{lob}^{gross}\right)^2 + \left(M_{lob}^{gross}\right)^2\right) \cdot F_{m+2\sigma^2,\sigma}(a) + a^2 \cdot \left[1 - F_{m,\sigma}(a)\right] - M_{lob}^{net}\right)^{1/2}$$

Annexe B : Notation des principaux réassureurs au 1er juillet 2012

Réassureur	Notation
Hannover Re	AA-
Munich Re	AA-
ACE Tempest Re	AA-
Alterra	A
Arch Re	A+
Axis Re	A+
Everest Re	A-
Partner Re	A+
Renaissance Re	AA-
Swiss Re	AA-
XL Re	A
Korean Re	A-
Mapfre Re	A-
Berkshire Hathaway	AA+
Odyssey Re	A-
RGA	AA-
Transamerica	A-
Transatlantic Re	A+
SCOR	A+
QBE Re	A+
Mitsui Sumitomo	A+
Sompo	A+
Tokio Marine	A+
Lloyd's	A+
Pacific Life Re	A+

Figure 6.32

Annexe C : Convergence de l'estimateur du gain en SCR moyen sur le résultat cédé moyen

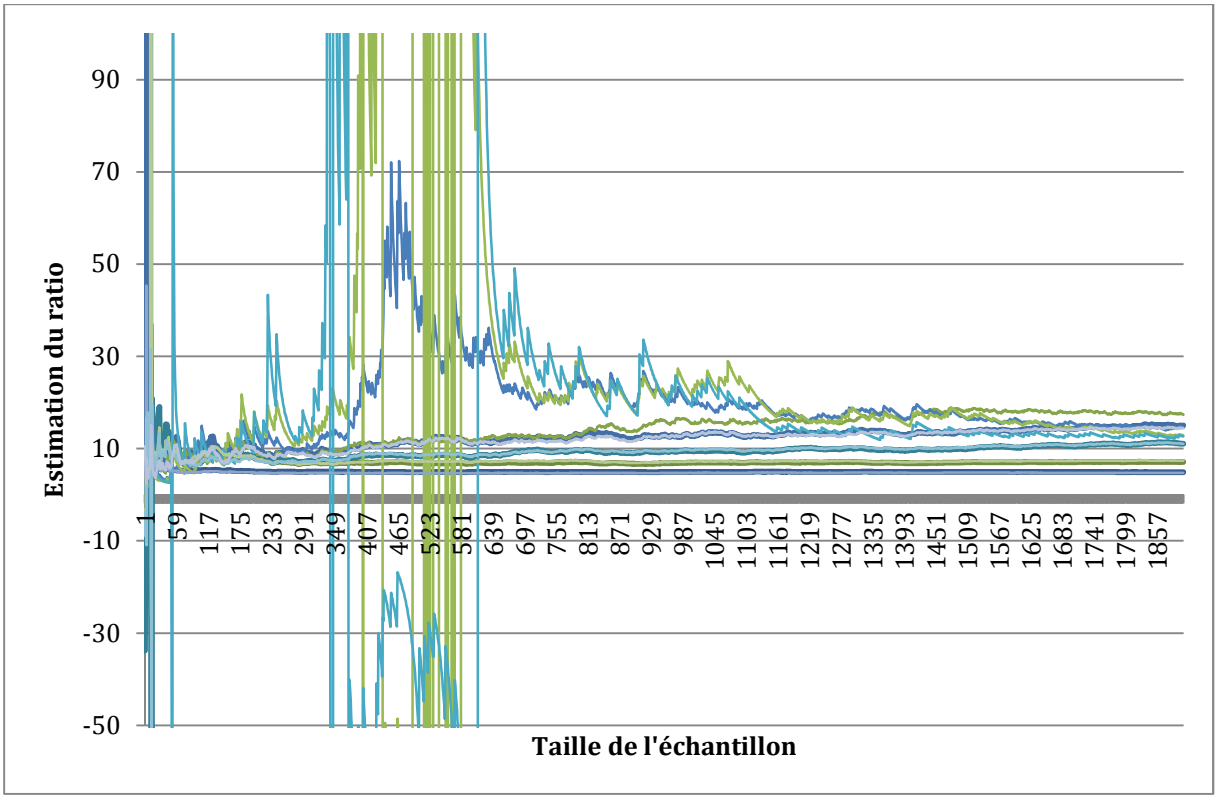

Figure 6.33

Annexe D : liste des traités optimaux après les tests sur la priorité et la portée

priorite	portee	priorite	portee	priorite	portee	priorite	portee	priorite	portee
1 550 000	2 300 000	1 700 000	2 600 000	2 150 000	2 250 000	2 500 000	2 475 000	2 900 000	2 225 000
1 550 000	2 350 000	1 700 000	2 650 000	2 150 000	2 300 000	2 500 000	2 600 000	3 000 000	1 100 000
1 550 000	2 400 000	1 700 000	2 700 000	2 150 000	2 350 000	2 600 000	1 350 000	3 000 000	1 225 000
1 550 000	2 450 000	1 700 000	2 725 000	2 200 000	1 725 000	2 600 000	1 475 000	3 000 000	1 350 000
1 550 000	2 500 000	1 750 000	2 200 000	2 200 000	1 850 000	2 600 000	1 600 000	3 000 000	1 475 000
1 550 000	2 550 000	1 750 000	2 300 000	2 200 000	1 975 000	2 600 000	1 725 000	3 000 000	1 600 000
1 550 000	2 600 000	1 750 000	2 350 000	2 200 000	2 100 000	2 600 000	1 850 000	3 000 000	1 725 000
1 600 000	2 250 000	1 750 000	2 400 000	2 200 000	2 225 000	2 600 000	1 975 000	3 000 000	1 850 000
1 600 000	2 300 000	1 750 000	2 450 000	2 200 000	2 350 000	2 600 000	2 100 000	3 000 000	1 975 000
1 600 000	2 350 000	1 750 000	2 550 000	2 200 000	2 475 000	2 600 000	2 225 000	3 000 000	2 100 000
1 600 000	2 400 000	1 750 000	2 600 000	2 200 000	2 600 000	2 600 000	2 350 000	3 000 000	975 000
1 600 000	2 450 000	1 750 000	2 650 000	2 200 000	2 725 000	2 600 000	2 475 000	3 100 000	1 100 000
1 600 000	2 475 000	1 800 000	2 250 000	2 300 000	1 600 000	2 700 000	1 350 000	3 100 000	1 225 000
1 600 000	2 500 000	1 800 000	2 300 000	2 300 000	1 725 000	2 700 000	1 475 000	3 100 000	1 350 000
1 600 000	2 550 000	1 800 000	2 400 000	2 300 000	1 850 000	2 700 000	1 600 000	3 100 000	1 475 000
1 600 000	2 600 000	1 850 000	2 250 000	2 300 000	1 975 000	2 700 000	1 725 000	3 100 000	1 600 000
1 650 000	2 250 000	1 900 000	2 200 000	2 300 000	2 100 000	2 700 000	1 850 000	3 100 000	850 000
1 650 000	2 300 000	1 950 000	2 150 000	2 300 000	2 225 000	2 700 000	1 975 000	3 100 000	975 000
1 650 000	2 350 000	2 000 000	2 100 000	2 300 000	2 350 000	2 700 000	2 100 000	3 200 000	1 100 000
1 650 000	2 400 000	2 050 000	2 050 000	2 300 000	2 475 000	2 700 000	2 225 000	3 200 000	1 225 000
1 650 000	2 450 000	2 050 000	2 100 000	2 300 000	2 600 000	2 700 000	2 350 000	3 200 000	1 350 000
1 650 000	2 500 000	2 050 000	2 300 000	2 300 000	2 725 000	2 800 000	1 350 000	3 200 000	725 000
1 650 000	2 550 000	2 050 000	2 350 000	2 400 000	1 600 000	2 800 000	1 475 000	3 200 000	850 000
1 650 000	2 600 000	2 050 000	2 400 000	2 400 000	1 725 000	2 800 000	1 600 000	3 200 000	975 000
1 650 000	2 650 000	2 100 000	2 000 000	2 400 000	1 850 000	2 800 000	1 725 000	3 300 000	1 100 000
1 650 000	2 700 000	2 100 000	2 050 000	2 400 000	1 975 000	2 800 000	1 850 000	3 300 000	475 000
1 650 000	2 750 000	2 100 000	2 200 000	2 400 000	2 100 000	2 800 000	1 975 000	3 300 000	600 000
1 650 000	2 800 000	2 100 000	2 225 000	2 400 000	2 225 000	2 800 000	2 100 000	3 300 000	725 000
1 700 000	2 200 000	2 100 000	2 250 000	2 400 000	2 350 000	2 800 000	2 225 000	3 300 000	850 000
1 700 000	2 225 000	2 100 000	2 300 000	2 400 000	2 475 000	2 800 000	2 350 000	3 300 000	975 000
1 700 000	2 250 000	2 100 000	2 350 000	2 400 000	2 600 000	2 900 000	1 225 000	3 400 000	350 000
1 700 000	2 300 000	2 100 000	2 400 000	2 500 000	1 600 000	2 900 000	1 350 000	3 400 000	475 000
1 700 000	2 350 000	2 150 000	1 950 000	2 500 000	1 725 000	2 900 000	1 475 000	3 400 000	600 000
1 700 000	2 400 000	2 150 000	2 000 000	2 500 000	1 850 000	2 900 000	1 600 000	3 500 000	225 000
1 700 000	2 450 000	2 150 000	2 050 000	2 500 000	1 975 000	2 900 000	1 725 000	3 500 000	350 000
1 700 000	2 475 000	2 150 000	2 100 000	2 500 000	2 100 000	2 900 000	1 850 000	3 600 000	100 000
1 700 000	2 500 000	2 150 000	2 150 000	2 500 000	2 225 000	2 900 000	1 975 000	3 600 000	225 000
1 700 000	2 550 000	2 150 000	2 200 000	2 500 000	2 350 000	2 900 000	2 100 000	3 600 000	350 000

Figure 6.34

Annexe E : liste des traités optimaux après les tests sur les reconstitutions

portee	priorite	nb_rec	cout_rec	portee	priorite	nb_rec	cout_rec	portee	priorite	nb_rec	cout_rec
2 300 000	1 550 000	1	0%	2 650 000	1 700 000	illimité	0%	2 225 000	2 600 000	-	0%
2 350 000	1 550 000	1	0%	2 700 000	1 700 000	illimité	0%	2 350 000	2 600 000	-	0%
2 400 000	1 550 000	1	0%	2 725 000	1 700 000	-	0%	2 475 000	2 600 000	-	0%
2 450 000	1 550 000	1	0%	2 725 000	1 700 000	illimité	0%	1 725 000	2 700 000	-	0%
2 500 000	1 550 000	1	0%	2 200 000	1 750 000	1	0%	1 850 000	2 700 000	-	0%
2 550 000	1 550 000	1	0%	2 300 000	1 750 000	1	0%	1 975 000	2 700 000	-	0%
2 250 000	1 600 000	1	0%	2 300 000	1 750 000	illimité	0%	2 100 000	2 700 000	-	0%
2 300 000	1 600 000	1	0%	2 350 000	1 750 000	illimité	0%	2 225 000	2 700 000	-	0%
2 350 000	1 600 000	1	0%	2 400 000	1 750 000	1	0%	2 350 000	2 700 000	-	0%
2 400 000	1 600 000	1	0%	2 400 000	1 750 000	illimité	0%	1 600 000	2 800 000	-	0%
2 450 000	1 600 000	1	0%	2 450 000	1 750 000	1	0%	1 725 000	2 800 000	-	0%
2 475 000	1 600 000	1	0%	2 450 000	1 750 000	illimité	0%	1 850 000	2 800 000	-	0%
2 500 000	1 600 000	1	0%	2 550 000	1 750 000	1	0%	1 975 000	2 800 000	-	0%
2 550 000	1 600 000	1	0%	2 550 000	1 750 000	illimité	0%	2 100 000	2 800 000	-	0%
2 550 000	1 600 000	illimité	0%	2 600 000	1 750 000	1	0%	2 225 000	2 800 000	-	0%
2 600 000	1 600 000	1	0%	2 600 000	1 750 000	illimité	0%	2 350 000	2 800 000	-	0%
2 600 000	1 600 000	illimité	0%	2 650 000	1 750 000	illimité	0%	1 475 000	2 900 000	-	0%
2 250 000	1 650 000	1	0%	2 250 000	1 800 000	1	0%	1 600 000	2 900 000	-	0%
2 300 000	1 650 000	1	0%	2 250 000	1 800 000	illimité	0%	1 725 000	2 900 000	-	0%
2 350 000	1 650 000	1	0%	2 300 000	1 800 000	1	0%	1 850 000	2 900 000	-	0%
2 400 000	1 650 000	1	0%	2 300 000	1 800 000	illimité	0%	1 975 000	2 900 000	-	0%
2 450 000	1 650 000	1	0%	2 400 000	1 800 000	1	0%	2 100 000	2 900 000	-	0%
2 450 000	1 650 000	illimité	0%	2 400 000	1 800 000	illimité	0%	2 225 000	2 900 000	-	0%
2 500 000	1 650 000	illimité	0%	2 250 000	1 850 000	1	0%	1 100 000	3 000 000	-	0%
2 550 000	1 650 000	1	0%	2 250 000	1 850 000	illimité	0%	1 225 000	3 000 000	-	0%
2 550 000	1 650 000	illimité	0%	2 200 000	1 900 000	1	0%	1 350 000	3 000 000	-	0%
2 600 000	1 650 000	1	0%	2 200 000	1 900 000	illimité	0%	1 475 000	3 000 000	-	0%
2 600 000	1 650 000	illimité	0%	2 150 000	1 950 000	1	0%	1 600 000	3 000 000	-	0%
2 650 000	1 650 000	1	0%	2 150 000	1 950 000	illimité	0%	1 725 000	3 000 000	-	0%
2 650 000	1 650 000	illimité	0%	2 100 000	2 000 000	1	0%	1 850 000	3 000 000	-	0%
2 700 000	1 650 000	1	0%	2 100 000	2 000 000	illimité	0%	1 975 000	3 000 000	-	0%
2 700 000	1 650 000	illimité	0%	2 400 000	2 050 000	-	0%	2 100 000	3 000 000	-	0%
2 750 000	1 650 000	1	0%	2 400 000	2 100 000	-	0%	1 100 000	3 100 000	-	0%
2 750 000	1 650 000	illimité	0%	2 350 000	2 150 000	-	0%	1 225 000	3 100 000	-	0%
2 800 000	1 650 000	-	0%	2 600 000	2 200 000	-	0%	1 350 000	3 100 000	-	0%
2 800 000	1 650 000	1	0%	2 725 000	2 200 000	-	0%	1 475 000	3 100 000	-	0%
2 800 000	1 650 000	illimité	0%	2 350 000	2 300 000	-	0%	1 600 000	3 100 000	-	0%
2 200 000	1 700 000	1	0%	2 475 000	2 300 000	-	0%	975 000	3 100 000	-	0%
2 225 000	1 700 000	1	0%	2 600 000	2 300 000	-	0%	1 100 000	3 200 000	-	0%
2 250 000	1 700 000	1	0%	2 725 000	2 300 000	-	0%	1 225 000	3 200 000	-	0%
2 300 000	1 700 000	1	0%	2 100 000	2 400 000	-	0%	725 000	3 200 000	-	0%
2 350 000	1 700 000	1	0%	2 225 000	2 400 000	-	0%	850 000	3 200 000	-	0%
2 350 000	1 700 000	illimité	0%	2 350 000	2 400 000	-	0%	975 000	3 200 000	-	0%
2 400 000	1 700 000	1	0%	2 475 000	2 400 000	-	0%	600 000	3 300 000	-	0%
2 400 000	1 700 000	illimité	0%	2 600 000	2 400 000	-	0%	725 000	3 300 000	-	0%
2 450 000	1 700 000	1	0%	1 975 000	2 500 000	-	0%	850 000	3 300 000	-	0%
2 450 000	1 700 000	illimité	0%	2 100 000	2 500 000	-	0%	975 000	3 300 000	-	0%
2 475 000	1 700 000	1	0%	2 225 000	2 500 000	-	0%	350 000	3 400 000	-	0%
2 475 000	1 700 000	illimité	0%	2 350 000	2 500 000	-	0%	475 000	3 400 000	-	0%
2 500 000	1 700 000	1	0%	2 475 000	2 500 000	-	0%	600 000	3 400 000	-	0%
2 500 000	1 700 000	illimité	0%	2 600 000	2 500 000	-	0%	350 000	3 500 000	-	0%
2 550 000	1 700 000	1	0%	1 850 000	2 600 000	-	0%	100 000	3 600 000	-	0%
2 550 000	1 700 000	illimité	0%	1 975 000	2 600 000	-	0%	225 000	3 600 000	-	0%
2 600 000	1 700 000	1	0%	2 100 000	2 600 000	-	0%	350 000	3 600 000	-	0%
2 600 000	1 700 000	illimité	0%								

Figure 6.35

Annexe F : Graphique représentant les traités optimaux après les tests sur la part cédée de la portée

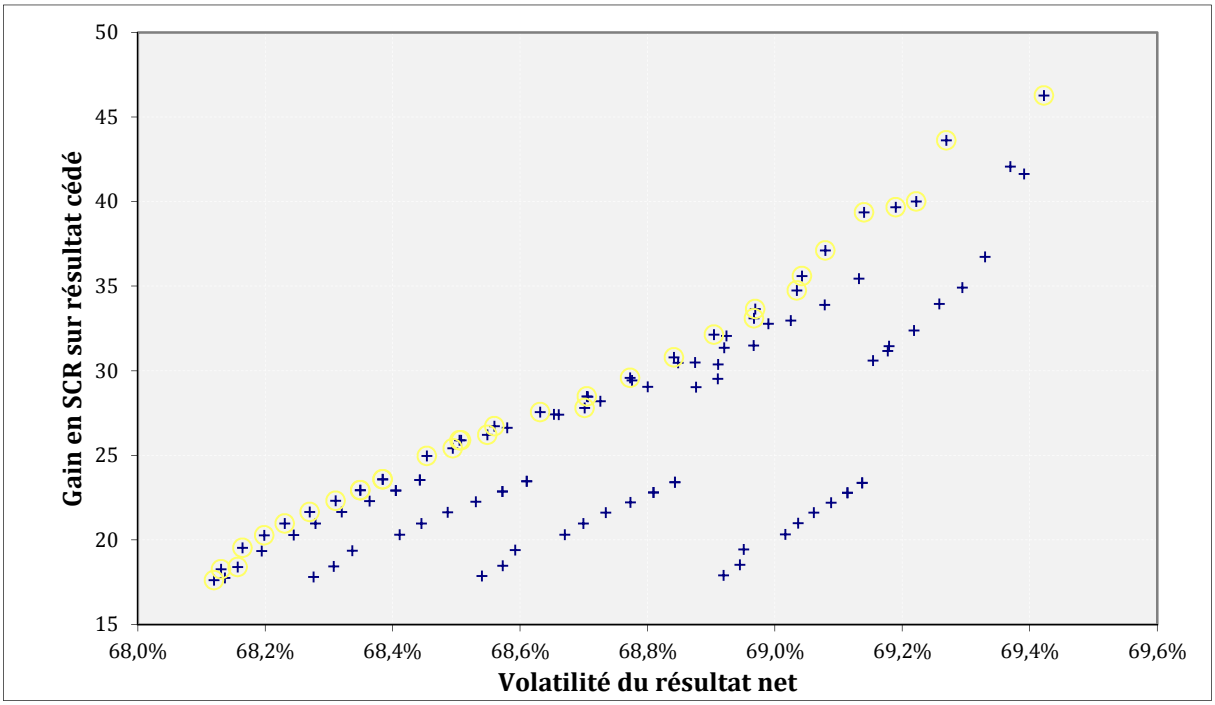

Figure 6.36