

ESSEC

ISUP

Promotion 2011

Mémoire présenté devant

**l'Institut de statistique
de l'Université Pierre et Marie Curie**

et

**l'Ecole Supérieure des Sciences Economiques et
Commerciales**

pour l'obtention du

Diplôme de l'Institut des Actuaire

Assurance ☒ Finance ☐

Par M. Luc DELAGE

*Sujet : Évaluation du risque de marché d'un contrat d'épargne en euros sous
Solvabilité II : formule standard et portefeuille répliquant*

Lieu du stage : Autorité de Contrôle Prudentiel (Banque de France)

Responsable du stage : M. Régis WEISSLINGER

Invité(s) :

CONFIDENTIEL ☐

Ce mémoire a été rédigé dans le cadre d'un stage effectué au sein de l'ACP, indépendamment de toute mission de contrôle de l'Autorité. Il n'engage que le stagiaire et en aucun cas l'Autorité, et ne constitue pas une communication de l'ACP. Les méthodologies retenues ont été choisies par le stagiaire et ne sont pas à considérer comme une recommandation de l'ACP.

RÉSUMÉ

Du fait des spécificités de l'activité d'assurance, les entreprises exerçant dans ce secteur sont soumises à une réglementation ad hoc. Elles doivent notamment détenir des fonds propres supérieurs à un minimum réglementaire pour faire face aux aléas qu'elles doivent gérer. La réglementation actuelle évalue ce plancher comme un pourcentage du chiffre d'affaires ou des engagements d'assurance selon les cas. Avec l'entrée en vigueur de Solvabilité II, ce mode de calcul forfaitaire va être remplacé par une évaluation basée sur le profil de risque spécifique de chaque entreprise d'assurance.

Le capital de solvabilité requis devra correspondre à la Value-at-Risk (VaR) à 99,5% des fonds propres économiques à horizon un an. Pour l'évaluer, deux options seront envisageables. La première, baptisée « formule standard », consiste à appliquer une série de chocs prédéfinis puis à les agréger grâce à une matrice de corrélation donnée. Lorsque leur profil de risque diffère significativement de celui décrit par la formule standard, les entreprises pourront être contraintes à développer une méthode d'évaluation plus fine des risques auxquels elles sont exposées. Cette deuxième approche est qualifiée de « modèle interne ».

La mise en œuvre opérationnelle de la deuxième alternative peut s'avérer extrêmement complexe à réaliser. La détermination du capital de solvabilité requis repose sur une mesure, la VaR, qui nécessite une distribution des fonds propres à horizon un an. Cette dernière est le plus souvent obtenue empiriquement par simulation Monte Carlo. Il faut en particulier être capable d'évaluer la valeur économique de l'actif net pour chaque trajectoire simulée. Dans le cas de passifs d'assurance vie, obtenir une valorisation correcte peut nécessiter un nouveau jeu de simulations de Monte Carlo. On se trouve alors face à une complexité multiplicative des « simulations dans les simulations » dont le temps de calcul peut être rédhibitoire. Aussi, des méthodes alternatives ont été développées pour résoudre cette difficulté opérationnelle. La méthode des « portefeuilles répliquants » est l'une d'entre elles. Elle consiste à approcher le comportement du passif d'assurance par celui d'un portefeuille d'actifs pertinemment choisis. Si tous les deux produisent les mêmes flux, ils doivent avoir la même valeur. Or, de nombreux actifs sont valorisables par formule fermée. On peut alors remplacer le deuxième jeu de simulations par une valorisation analytique.

L'objet de ce mémoire est de dérouler sur un exemple, un portefeuille de contrats d'épargne en euros, l'enchaînement de calcul permettant d'aboutir au capital de solvabilité requis pour le risque de marché dans le cadre d'un modèle interne utilisant la méthodologie des portefeuilles répliquants. La première étape consiste à produire, à l'aide d'un générateur de scénarios économiques et d'un modèle ALM, un jeu de passifs qui est utilisé à la fois pour la valorisation du passif initial (best estimate) et pour les travaux de calibrage du portefeuille répliquant. Nous nous appuyons sur l'outil développé pour

réaliser quelques études de sensibilité du best estimate et évaluer le capital réglementaire selon la formule standard. Nous pouvons ensuite calibrer le portefeuille répliquant puis l'utiliser pour évaluer le capital de solvabilité requis. Cette présentation verticale de la composante marché d'un modèle interne en assurance vie permet de balayer un grand nombre de problématiques. Cette vue d'ensemble est en particulier l'occasion d'identifier les problèmes d'interface qui peuvent se poser dans ce cadre.

Mots clés : *Solvabilité II, QIS 5, contrats d'épargne en euros, capital de solvabilité requis, SCR, formule standard, modèle interne, risque de marché, risque de souscription, générateur de scénarios économiques, probabilité risque neutre, provision best estimate, marge de risque, modèle actif-passif, portefeuille répliquant.*

ABSTRACT

Because of the particularities of the insurance business, undertakings in that sector are submitted to specific regulation. In particular, they have to hold an amount of own funds higher than a regulatory minimum to cope with the uncertainty they are faced with. The current regulation sets the threshold as a fixed percentage of their premium income or insurance liabilities. With Solvency II coming into force, this minimum will now be specific to each undertaking depending on its own risk profile.

The solvency capital requirement will correspond to a 99.5% Value-at-Risk of the undertaking own funds on a one-year time horizon. Two options will be available to calculate it. The first one, named “standard formula”, consists in applying a set of predefined shocks and aggregating them thanks to a given correlation matrix. When their risk profile significantly departs from the one of the standard formula, undertakings may have to develop a sharper evaluation method in accordance with their own risk exposure. This second approach is dubbed “internal model”.

The second alternative can be extremely complex to implement. The determination of the solvency capital requirement is based on a risk measure, the VaR, which requires a distribution of the one-year own funds. Most often, the distribution is obtained empirically through Monte Carlo simulation. One needs to be able to correctly assess the net asset value for each simulated path. In the case of life insurance liabilities, one might have to run a second full set of Monte Carlo simulation to get a proper valuation. The squared complexity of the “nested simulations” can be out of reach for today’s computing capabilities. Therefore, alternative methodologies have been imagined to cope with this operational challenge. The “replicating portfolio” is one of them. It consists in using a portfolio of relevant assets as a proxy of the value of insurance liabilities. If both of them deliver the same pay-off, they need to be valued accordingly. Now, for many assets, it can be done with a closed formula. The second set of Monte Carlo can then be replaced by an analytical valuation method.

The aim of this paper is to work out on an example, a portfolio of euro life insurance with profit, the complete series of calculations that leads to the determination of the internal model solvency capital requirement for market risk, using the replicating portfolio methodology. The first step consists in simulating a set of liabilities, thanks to an economic scenario generator and an asset-liability model, that will be used both for the initial valuation of insurance liabilities (best estimate) and as a benchmark for the calibration of the replicating portfolio. We then leverage the tool created to run some sensitivity analysis on the best estimate and to calculate the solvency capital requirement according to the standard formula. The next step is the calibration of the replicating portfolio, followed by its use to determine the solvency capital requirement. This vertical

presentation of the market component of an internal model is an opportunity to tackle a wide range of topics. In particular, seeing the big picture allows us to identify interface issues that can arise in this context.

Key words: *Solvency II, QIS 5, life insurance with profit participation, solvency capital requirement, SCR, standard formula, internal model, market risk, underwriting risk, economic scenario generator, risk neutral probability, best estimate, risk margin, asset-liability management (ALM) model, replicating portfolio.*

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier Régis Weisslinger, chef de la cellule modèle interne à l'Autorité de Contrôle Prudentiel. Il a su se rendre disponible à toutes les étapes clés de ce travail, malgré une actualité particulièrement chargée. Son expérience sectorielle, sa maîtrise technique et sa vivacité d'esprit m'ont aidé à surmonter nombre de difficultés.

Je remercie également mes collègues de l'ACP, et en particulier les membres de la cellule modèle interne, avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger pendant ces quelques mois. Ils ont nourri ma réflexion tout au long de ce travail.

Je remercie enfin Arnaud Cohen, mon tuteur académique, pour ses conseils avisés.

SOMMAIRE

PARTIE 1 : ÉLÉMENTS DE CONTEXTE	8
1.1. L'ÉVOLUTION DU CADRE RÉGLEMENTAIRE AVEC SOLVABILITÉ II	8
1.1.1. Vers une approche par les risques de la solvabilité d'une compagnie d'assurance	8
1.1.2. L'évaluation des provisions techniques sous Solvabilité II	9
1.1.3. Le calcul du capital prudentiel sous Solvabilité II : formule standard et modèles internes	10
1.1.4. Le cas particulier des contrats d'épargne en euros	11
1.2. PRINCIPALES MÉTHODES D'ÉVALUATION DES RISQUES D'UN PORTEFEUILLE DE CONTRATS D'ÉPARGNE EN EUROS ...	12
1.2.1. Les simulations dans les simulations	12
1.2.2. Simulations dans les simulations accélérées	13
1.2.3. Ajustement de courbes	14
1.2.4. Portefeuilles répliquants	14
1.3. PRÉSENTATION GÉNÉRALE DE LA DÉMARCHE DES PORTEFEUILLES RÉPLIQUANTS	15
1.3.1. Calibrage du portefeuille répliquant	15
1.3.2. Utilisation du portefeuille répliquant pour déterminer le SCR	16
PARTIE 2 : MODÉLISATION ACTIF-PASSIF	17
2.1. MODÉLISATION RISQUE NEUTRE DES ACTIFS	17
2.1.1. Modélisation du taux court et des obligations	18
2.1.2. Modélisation risque neutre des actions et de l'immobilier	23
2.1.3. Générateur de nombres aléatoires	25
2.2. SCHÉMAS COMPTABLES ET MODÉLISATION	25
2.2.1. Caractéristiques du portefeuille de contrats	25
2.2.2. Traitement comptable des obligations	26
2.2.3. Traitement comptable des autres actifs	28
2.2.4. Les provisions techniques	29
2.2.5. Modélisation des frais	30
2.3. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DE L'ASSUREUR	31
2.3.1. Gestion de la trésorerie et stratégie d'allocation d'actifs	31
2.3.2. Mise en œuvre de la réallocation d'actifs et duration	33
2.3.3. Politique de participation des assurés aux résultats	35
2.4. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DE L'ASSURÉ	39
2.4.1. Modélisation des rachats	39
2.4.2. Traitement spécifique de la dernière année de modélisation	43
PARTIE 3 : SENSIBILITÉ DU BEST ESTIMATE ET CALCUL DU SCR PAR LA FORMULE STANDARD	44
3.1. VALORISATION DU BILAN SOLVABILITÉ II	44
3.1.1. Quelques éléments sur des postes spécifiques au bilan Solvabilité II	44
3.1.2. Synthèse des résultats	45
3.1.3. Stabilité des résultats en fonction du nombre de simulations	46
3.2. SENSIBILITÉ DE LA PROVISION TECHNIQUE AUX PRINCIPAUX PARAMÈTRES	47
3.2.1. Sensibilité aux engagements contractuels	47
3.2.2. Sensibilité aux choix de modélisation	50
3.3. CALCUL DU SCR PAR LA FORMULE STANDARD	51
3.3.1. Risque de marché	52
3.3.2. Risque de souscription	54
3.3.3. SCR global	54
PARTIE 4 : CONSTRUCTION DU PORTEFEUILLE RÉPLIQUANT	56
4.1. CHOIX DES ACTIFS CANDIDATS À LA RÉPLICATION	56
4.1.1. Exemple introductif	56
4.1.2. Choix et paramétrage des actifs candidats	58
4.2. CALIBRAGE DES PONDÉRATIONS	59

4.2.1.	<i>Formulation du programme d'optimisation</i>	59
4.2.2.	<i>Résolution du programme d'optimisation</i>	61
4.3.	APPLICATION À DIFFÉRENTS PASSIFS D'ASSURANCE VIE	62
4.3.1.	<i>Contrat d'épargne en euros, actif investi à 100% en obligation</i>	63
4.3.2.	<i>Contrat d'épargne en euros, actif « réel »</i>	66
PARTIE 5 : ESTIMATION DU SCR PAR UTILISATION DU PORTEFEUILLE RÉPLICANT		69
5.1.	MODÉLISATION RISQUE HISTORIQUE DES ACTIFS	69
5.1.1.	<i>Taux d'intérêt</i>	70
5.1.1.	<i>Autres variables</i>	75
5.1.1.	<i>Calibrage</i>	76
5.1.2.	<i>Corrélation entre les variables</i>	77
5.2.	DÉTERMINATION DU SCR À L'AIDE DU PORTEFEUILLE RÉPLICANT	78
5.2.1.	<i>Contrat d'épargne en euros, actif investi à 100% en obligation</i>	78
5.2.2.	<i>Contrat d'épargne en euros, actif réel</i>	80
CONCLUSION		81
BIBLIOGRAPHIE		83
ANNEXES		86
ANNEXE 1 : TABLE DES ILLUSTRATIONS		87
ANNEXE 2 : ACTIFS CANDIDATS À LA RÉPLICATION		88
ANNEXE 3 : LA RÉGRESSION PLS		94

Partie 1 : ÉLÉMENTS DE CONTEXTE

1.1. L'évolution du cadre réglementaire avec Solvabilité II

1.1.1. Vers une approche par les risques de la solvabilité d'une compagnie d'assurance

L'activité d'assurance vie se caractérise par des engagements sur longue période alors que les actifs sont soumis à la volatilité des marchés. Une réglementation spécifique est donc nécessaire pour protéger les assurés contre la défaillance de leur assureur. Sous le régime prudentiel actuel, trois éléments principaux visent à assurer la solvabilité d'un assureur :

- Un provisionnement suffisant des engagements d'assurance (basé sur des hypothèses prudentes) pour éviter que l'assureur ne constate trop de résultat et en externalise une partie ;
- Des exigences en matière de politique de placement (qualité, sécurité, dispersion, congruence, etc.) pour limiter la prise de risque ex ante ;
- La détention d'un niveau minimum de fonds propres pour faire face aux aléas ex post, appelé « marge de solvabilité », et calculé de manière forfaitaire en fonction du volume d'activité.

Ce régime prudentiel a fait l'objet de nombreuses critiques, notamment en raison de son caractère simpliste, mécanique et insuffisamment prospectif. A titre d'exemple, en l'état actuel de la réglementation, l'exigence de marge de solvabilité d'un assureur vie commercialisant des produits d'épargne en euros est la même, qu'il garantisse un taux technique de 0% ou de 5%. La directive Solvabilité II, dont l'entrée en vigueur est officiellement prévue au 31 octobre 2012¹, vise à améliorer ce dispositif prudentiel. Outre les aspects gouvernance et reporting, Solvabilité II modifie en profondeur les exigences quantitatives en matière de solvabilité. L'approche dite prudente qui prévalait jusqu'alors pour le calcul des provisions est remplacée par une évaluation économique réaliste. Les contraintes qui pesaient sur la gestion d'actifs sont assouplies. Le principe dit de « la personne prudente » se substitue aux limitations quantitatives par devise, par catégorie d'actif et par émetteur. Logiquement, la contrepartie est une évaluation du minimum de fonds propres à détenir qui reflète le profil de risque spécifique à chaque entreprise. Cette cible de fonds propres à détenir est appelé capital de solvabilité requis (SCR) sous Solvabilité II.

¹ La directive Omnibus II, actuellement en cours de discussion, prévoit le report de l'entrée en vigueur au 1^{er} janvier 2014.

1.1.2. L'évaluation des provisions techniques sous Solvabilité II

D'après l'article 77 de la directive Solvabilité II, « *la valeur des provisions techniques est égale à la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque* ». Le mode d'évaluation des provisions techniques par défaut consiste donc en un calcul séparé de ces deux composantes. Un calcul global est possible lorsque les flux induits par les engagements d'assurance peuvent être correctement répliqués par des instruments financiers. Ce cas particulier se limite principalement aux produits libellés en unités de compte sans garantie plancher.

1.1.2.1. La provision best estimate

L'article 77 de la directive Solvabilité II définit la composante best estimate des provisions techniques comme « *la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents* ». Par analogie avec les techniques de valorisation financière classique, cela revient à dire que le best estimate correspond à l'espérance sous la probabilité risque neutre des flux de passif actualisés. Formellement, on a :

$$BE = E^Q \left[\sum_{j \geq 1} \delta_j \cdot CF_j \right]$$

Avec :

- Q = la probabilité risque neutre
- δ_j = le facteur d'actualisation définit par $\delta_j = \exp \left(- \int_{t_0}^j r_t \cdot dt \right)$
- CF_j = les flux de passif (rachats, prestations, frais) sur la période

La méthode de Monte Carlo nous permet d'estimer numériquement le best estimate en utilisant l'approximation suivante, pour N simulations :

$$BE = E^Q \left[\sum_{j \geq 1} \delta_j \cdot CF_j \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 1} \delta_j^i \cdot CF_j^i$$

1.1.2.2. La marge de risque

Les paragraphes suivants de l'article 77 définissent la marge de risque comme le montant destiné « *à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.* » Il s'agit donc d'un

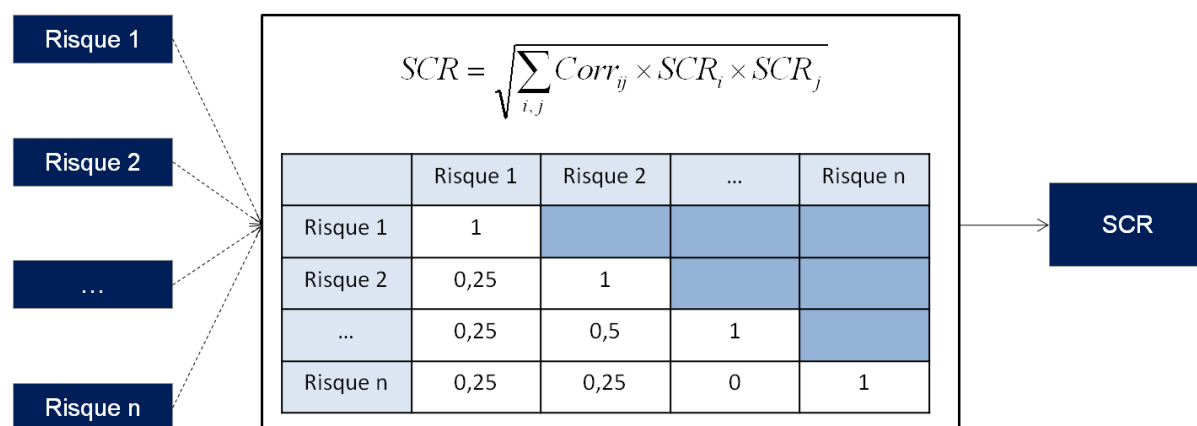
complément au best estimate destiné à assurer la transférabilité des engagements. La marge de risque est calculée en « *déterminant le coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci. Le taux utilisé pour déterminer le coût que représente la mobilisation de ce montant de fonds propres éligibles (taux du coût du capital) est le même pour toutes les entreprises d'assurance et de réassurance et il est révisé périodiquement. Le taux du coût du capital utilisé est égal au taux supplémentaire, s'ajoutant au taux d'intérêt sans risque pertinent, que supporterait une entreprise d'assurance ou de réassurance détenant un montant de fonds propres éligibles, conformément à la section 3, égal au capital de solvabilité requis qui est nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci.* » En d'autres termes le marge de risque correspond au coût (en excès du taux sans risque) du capital immobilisé pour respecter les contraintes en matière de capital réglementaire pendant toute la durée des engagements. Il est pour l'instant fixé à 6%.

1.1.3. Le calcul du capital prudentiel sous Solvabilité II : formule standard et modèles internes

L'article 101 de la directive définit le SCR comme « *la valeur en risque (Value-at-Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an.* » Dans cette nouvelle approche, les fonds propres sont donc considérés comme une variable aléatoire dont la loi de probabilité sera différente d'une compagnie d'assurance à une autre. La détermination du capital de solvabilité requis suppose désormais la connaissance d'un quantile de cette loi de probabilité.

La méthode retenue pour le calcul du SCR par défaut (formule standard) est l'approche modulaire. Elle consiste à décomposer le risque en différents facteurs comme le risque de marché, le risque de souscription en assurance vie ou le risque de contrepartie. Le SCR est calculé module par module puis agrégé (en une ou plusieurs étapes) à l'aide de matrices de corrélation (Figure 1). Pour chaque facteur de risque, le SCR correspond à la différence entre l'actif net dans une situation de référence et ce même actif net dans une situation où le facteur de risque est « choqué ». L'ampleur du choc est donnée, mais a le plus souvent été calibrée à l'aide d'une loi de probabilité postulée et du quantile 99,5%.

FIGURE 1 : CALCUL DU SCR DANS LA FORMULE STANDARD



Cette méthode présente l'avantage d'être peu calculatoire puisque le scénario correspondant au quantile est supposé connu dès le départ. En revanche, elle repose sur des hypothèses très fortes en matière de loi du facteur de risque et de structure de dépendance qui peuvent ne pas être adaptées au profil de risque de société d'assurance donnée. Dans ce cas, cette dernière a la possibilité d'opter pour un modèle interne, plus complexe à mettre en œuvre mais reflétant plus fidèlement son profil de risque spécifique.

L'entreprise a la possibilité de développer un modèle interne couvrant l'ensemble du périmètre de la formule standard. On parle alors de modèle interne intégral. Elle peut également s'écarter de la formule standard sur un ou plusieurs modules ou sous-modules, ce qui est qualifié de modèle interne partiel. Dans la suite de ce mémoire, nous nous limiterons à la seule composante risque de marché du SCR.

1.1.4. Le cas particulier des contrats d'épargne en euros

Nous nous intéresserons par la suite plus spécifiquement aux risques afférents à un portefeuille de contrats d'épargne en euros. En 2009, les contrats d'épargne en euros et la poche euros des contrats multi-supports représentaient 83% des 1233Mds€ de provisions mathématiques de l'assurance vie en France², ce qui peut justifier que les compagnies d'assurance s'attachent à évaluer au plus juste le capital réglementaire correspondant.

Un contrat d'épargne en euros est un placement financier, proposé par une société d'assurance, qui bénéficie d'un traitement fiscal avantageux destiné à orienter l'épargne vers ce support long terme. Il permet en particulier de transmettre un capital en franchise d'impôt en cas de succession et les intérêts qu'il produit sont taxés à un taux dégressif fonction de la durée de détention du contrat. L'assureur s'engage à capitaliser les

² Source : FFSA, *Les assurances de personnes, données clés 2009*.

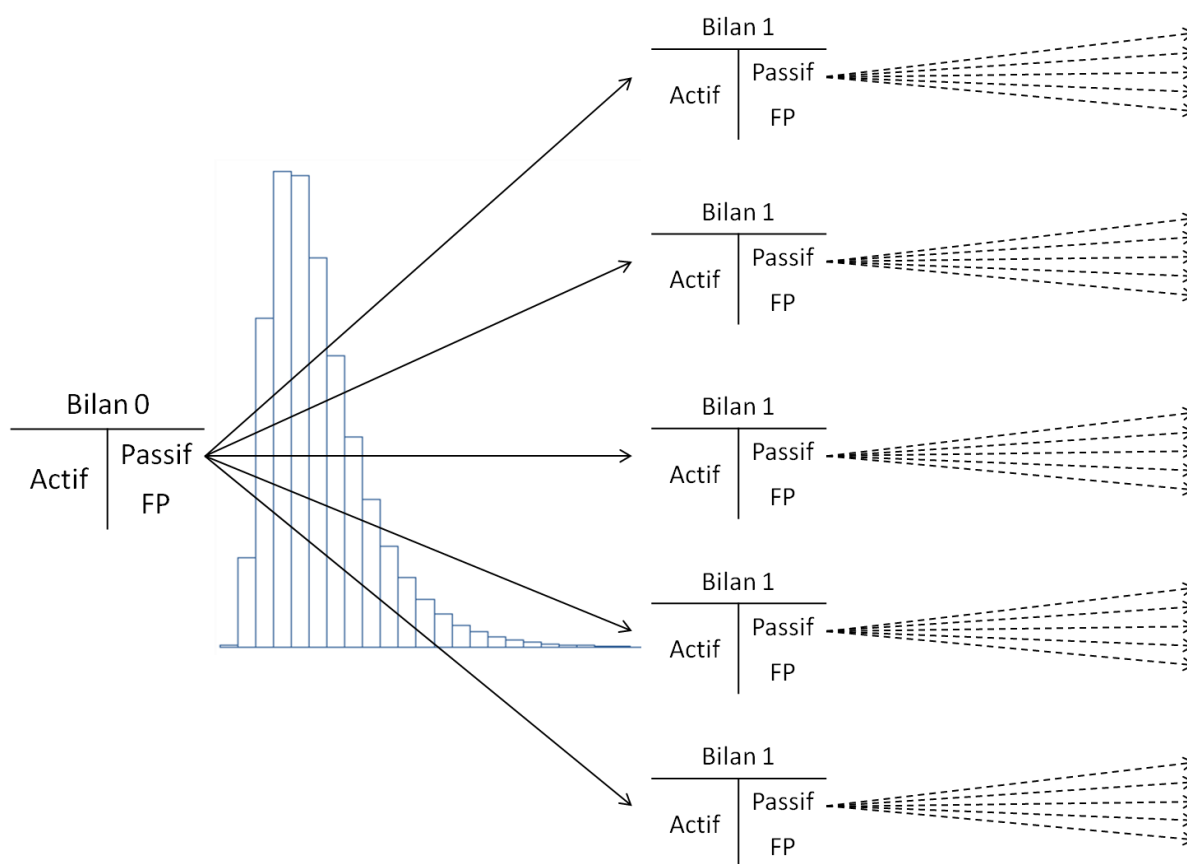
cotisations versées à un taux au moins égal au « taux technique ». Il s'engage également à faire participer les assurés aux bénéfices réalisés au-delà du taux technique le cas échéant selon les mécanismes décrits à la partie 2.2. Les assurés conservent la possibilité de récupérer leurs cotisations capitalisées à tout moment, moyennant d'éventuelles pénalités selon les contrats. Le mécanisme de participation aux bénéfices et la faculté de rachat confère à ce contrat un caractère fortement optionnel, ce qui complique son évaluation en valeur de marché. Pour évaluer les risques relatifs à un contrat d'épargne en euros, une société d'assurance peut alors avoir recours à l'une des méthodes présentées dans la partie 1.2.

1.2. Principales méthodes d'évaluation des risques d'un portefeuille de contrats d'épargne en euros

1.2.1. Les simulations dans les simulations

La méthode des simulations dans les simulations (ou « nested simulations ») est celle qui correspond le plus fidèlement à l'esprit de la directive. Il s'agit d'une approche globale où l'évolution de l'ensemble des facteurs de risque est modélisée conjointement sur un an pour donner un jeu de scénarios économiques. Pour chaque scénario à horizon un an, le bilan économique est déterminé. Avec suffisamment de scénarios (de l'ordre de 10 000), on obtient ainsi une distribution d'actif net dont on peut sélectionner le quantile à 99,5%. En le comparant à la situation nette initiale (après actualisation en général), on obtient le SCR.

FIGURE 2 : LA MÉTHODE DES SIMULATIONS DANS LES SIMULATIONS



La principale difficulté est de déterminer la valeur de marché des différents éléments de bilan dans chaque scénario. Si la valorisation de l'actif (hors produits dérivés complexes) ne pose le plus souvent pas de problèmes, la valorisation des passifs est plus délicate. Il faut calculer l'espérance des flux futurs actualisés sous la probabilité risque neutre. Il est donc nécessaire de réaliser pour chaque scénario primaire plus d'un millier de simulations secondaires (Figure 2). On se trouve alors avec une complexité multiplicative (nombre des simulations primaires par nombre de simulations secondaires) qui peut rendre la méthode trop coûteuse en temps de calcul pour être mise en œuvre.

Face à cette difficulté, des méthodes alternatives ont été développées : simulation dans les simulations accélérée, ajustement de courbe et portefeuille de réplcation.

1.2.2. Simulations dans les simulations accélérées

Cette solution est une variante de la méthode des simulations dans les simulations. Elle s'appuie sur la même logique mais cherche à réduire le nombre de simulations de manière à réduire le temps de calcul. Cela peut prendre principalement deux formes :

- Réduire le nombre de simulations primaires en identifiant a priori les scénarios proches du quantile (par exemple à l'aide d'une méthode d'extraction de facteurs de risques) ;
- Réduire le nombre de simulations secondaires en ne réalisant le jeu complet de simulations secondaires qu'au voisinage du quantile.

Cette solution est intéressante dans la mesure où elle respecte la logique des simulations dans les simulations, tout en accélérant sa mise en œuvre numérique. Cependant, elle conduit mécaniquement à des approximations. On risque par exemple de ne pas identifier certains scénarios extrêmes, ce qui peut réduire artificiellement le SCR. La méthode des simulations dans les simulations accélérée implique par conséquent un arbitrage entre le degré de précision (relativement aux simulations dans les simulations) et le temps de calcul.

1.2.3. Ajustement de courbes

L'ajustement de courbes, aussi appelé « forme paramétrique », consiste à exprimer les fonds propres dans un an comme une fonction (un polynôme de degré deux par exemple) de variables explicatives.

Cette méthode est très efficace en termes de temps de calcul et peut fournir une approximation de bonne qualité du SCR calculé par la méthode des simulations dans les simulations. En revanche, les variables explicatives peuvent parfois présenter un caractère abstrait et l'estimation des paramètres peut manquer de robustesse.

1.2.4. Portefeuilles répliquants

La méthode des portefeuilles répliquants est celle sur laquelle se focalisera la suite de ce mémoire. Elle obéit à une logique similaire à l'ajustement de courbes au sens où elle résout le problème de complexité des simulations dans les simulations par une formule fermée de valorisation à horizon un an. L'objet de cette méthode est d'exprimer la variable d'intérêt (les passifs ou les fonds propres selon les cas) comme un portefeuille d'actifs financiers pertinemment choisis. Elle s'appuiera ensuite sur les formules de valorisation d'actifs pour évaluer la variable d'intérêt. Cette approche est séduisante dans la mesure où elle rappelle l'asset liability management. Elle permet une bonne lisibilité des passifs d'assurance et donne une intuition de l'exposition aux risques financiers.

1.3. Présentation générale de la démarche des portefeuilles répliquants

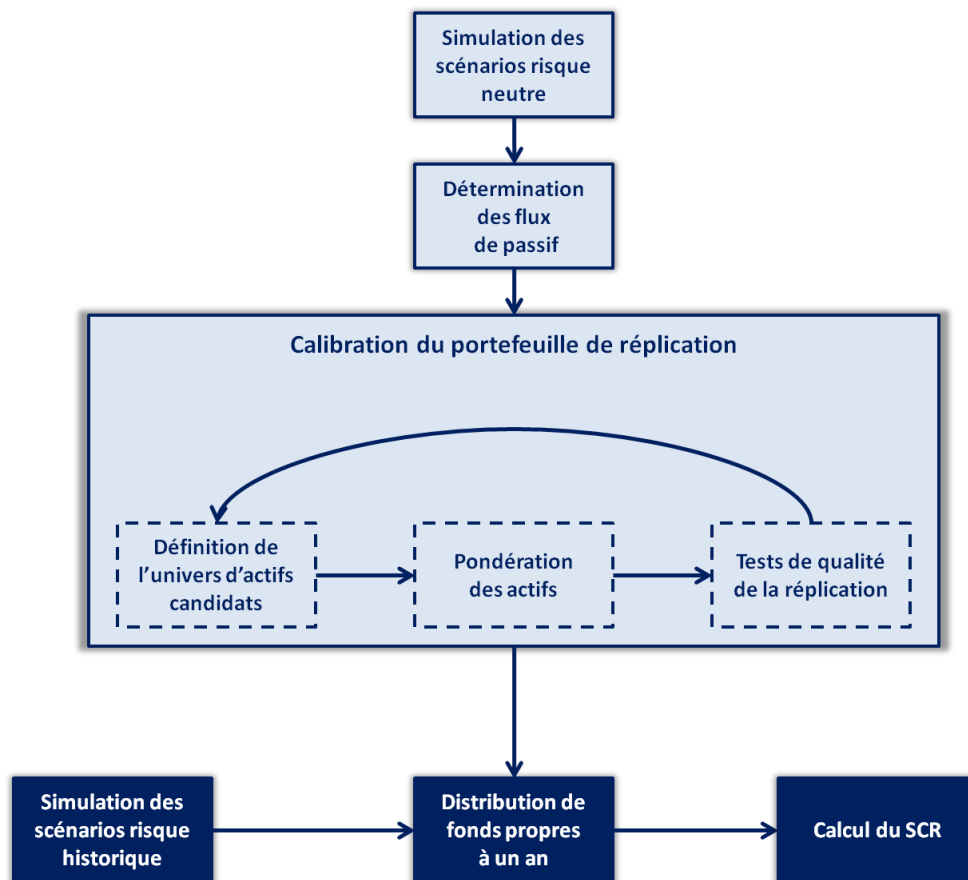
Lors du calcul du SCR lié au risque de marché à l'aide de la méthode des portefeuilles répliquants, il convient de distinguer deux phases, le calibrage du portefeuille (partie 1.3.1) et son utilisation pour calculer le SCR (partie 1.3.2).

1.3.1. Calibrage du portefeuille répliquant

Le calibrage du portefeuille répliquant consiste à déterminer les actifs permettant de répliquer au mieux les passifs ainsi que leurs pondérations (partie bleue clair de la Figure 3). Ce calibrage intervient en plusieurs étapes. Un certain nombre de scénarios économiques sont simulés sur l'horizon de projection sous probabilité risque neutre (partie 2.1). Pour chacun de ces scénarios, un modèle actif-passif, dit « ALM », permet de déterminer les flux périodiques de passif associés. Ces cash flows sont obtenus en appliquant des règles de comportement de l'assureur (partie 2.3) et de l'assuré (partie 2.4) sous contraintes comptable et réglementaire (partie 2.2). Ce sont ces flux qui serviront de référence à la réplification.

Après avoir déterminé l'univers d'actifs financiers candidats à la réplification (exemple : swaption, call sur actions, indice immobilier) et leurs caractéristiques (exemple : strike, maturité, tenor), un programme d'optimisation sous contraintes permet d'identifier la composition du portefeuille qui offre la meilleure réplification. Des tests statistiques sont ensuite réalisés pour évaluer la qualité de la réplification. Le processus peut être itéré jusqu'à ce que la qualité de la réplification soit jugée suffisante.

FIGURE 3 : ÉTAPES DE MISE EN ŒUVRE DE LA MÉTHODE DES PORTEFEUILLES RÉPLICANTS



1.3.2. Utilisation du portefeuille répliquant pour déterminer le SCR

Cette deuxième phase correspond au processus classique de détermination du SCR (partie bleu foncée de la Figure 3). Un grand nombre de scénarios économiques monde réel, de l'ordre de 10 000, sont simulés à horizon un an (paragraphe 5.1). Pour chaque scénario, les passifs sont valorisés en utilisant le portefeuille répliquant comme proxy. L'utilisation du portefeuille répliquant se substitue aux simulations secondaires de la méthode des simulations dans les simulations. S'il existe une formule de valorisation des actifs composant le portefeuille répliquant, on substitue à une méthode numérique un calcul analytique beaucoup moins coûteux en temps de calcul. C'est là tout l'intérêt de la méthode. On dispose alors d'une distribution empirique des fonds propres et donc de ses quantiles. On en déduit finalement le SCR (5.2).

Partie 2 : MODÉLISATION ACTIF-PASSIF

La détermination des flux de passif est une étape préalable à la mise en œuvre de la méthode des portefeuilles répliquants. Les flux de passif ainsi modélisés constituent le benchmark qui permet de calibrer la composition du portefeuille répliquant. La modélisation de ces flux se veut donc aussi représentative du passif réel de l'assureur que possible. Dans le cas contraire, même une excellente répliquation du mauvais passif conduirait à une estimation de la distribution des fonds propres de mauvaise qualité. La détermination des flux de passif interviendra en deux temps. D'abord, des trajectoires d'actifs sont simulées sur l'horizon de modélisation (paragraphe 2.1). Ensuite, les flux de passif sont déterminés pour chaque trajectoire à partir de règles comptables (paragraphe 2.2) et d'hypothèses sur le comportement de l'assureur (paragraphe 2.3) et des assurés (paragraphe 2.4).

2.1. Modélisation risque neutre des actifs

Le générateur de scénarios économiques risque neutre mis en œuvre dans cette partie permet de modéliser quatre classes d'actifs : le monétaire, les obligations d'États, les actions et l'immobilier. Il est dit « risque neutre » car il a pour objectif la valorisation d'actifs et à ce titre, il est calibré sur la base d'informations contenues dans les prix de marché, sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Il se distingue du générateur de scénarios économiques « probabilité historique » ou « monde réel » qui sera utilisé dans la partie 5.1 à des fins de calcul du SCR.

En effet, la valorisation en valeur de marché ou « market consistent » des passifs correspond à l'espérance des flux actualisés qu'ils génèrent, sous la probabilité risque neutre. Formellement on a :

$$P_{t_0}^{MC} = E^Q \left[\sum_{t > t_0} \delta_t \cdot CF_t | F_{t_0} \right]$$

Où :

- (F_t) est la filtration qui décrit l'information disponible à l'instant t .
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_u du}$ est un facteur d'actualisation fonction du taux sans risque instantané. On peut le discrétiser grossièrement par $\delta_t \approx \prod_{i=0}^{\Delta t-1} ZC_i^\Delta$ avec ZC_i^Δ le prix d'un zéro coupon de maturité Δ (correspondant au pas de discrétisation, ici mensuel) à la date i .
- CF_t est le flux financier produit par un actif ou un passif à la date t .

2.1.1. Modélisation du taux court et des obligations

2.1.1.1. Modélisation du taux court

Nous retiendrons le modèle de Hull et White à un facteur pour modéliser le taux court nominal. La dynamique du taux court instantané est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr(t) = [\theta(t) - a r(t)]dt + \sigma_r dW^r(t)$$

Où

- a est une constante correspondant à la force de rappel
- σ_r est la volatilité du processus
- W^r est un mouvement brownien standard
- $\theta(t)$ est une fonction du temps choisie de façon à s'ajuster à la structure par terme des taux d'intérêts initiale (Figure 4)

L'équation précédente peut également s'écrire :

$$dr(t) = a \left[\frac{\theta(t)}{a} - r(t) \right] dt + \sigma_r dW^r(t)$$

On remarque qu'il s'agit d'une généralisation d'un processus de Vasicek où la moyenne constante est remplacée par une fonction déterministe du temps. C'est pour cette raison que ce processus est aussi connu sous le nom de Vasicek généralisé. On peut montrer que :

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T} + a f^M(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a} (1 - e^{-at})$$

Où $\frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T}$ est la dérivée partielle de f^M par rapport à son deuxième argument et $f^M(T)$ est le taux forward instantané observé sur le marché à l'instant 0 pour une maturité de T :

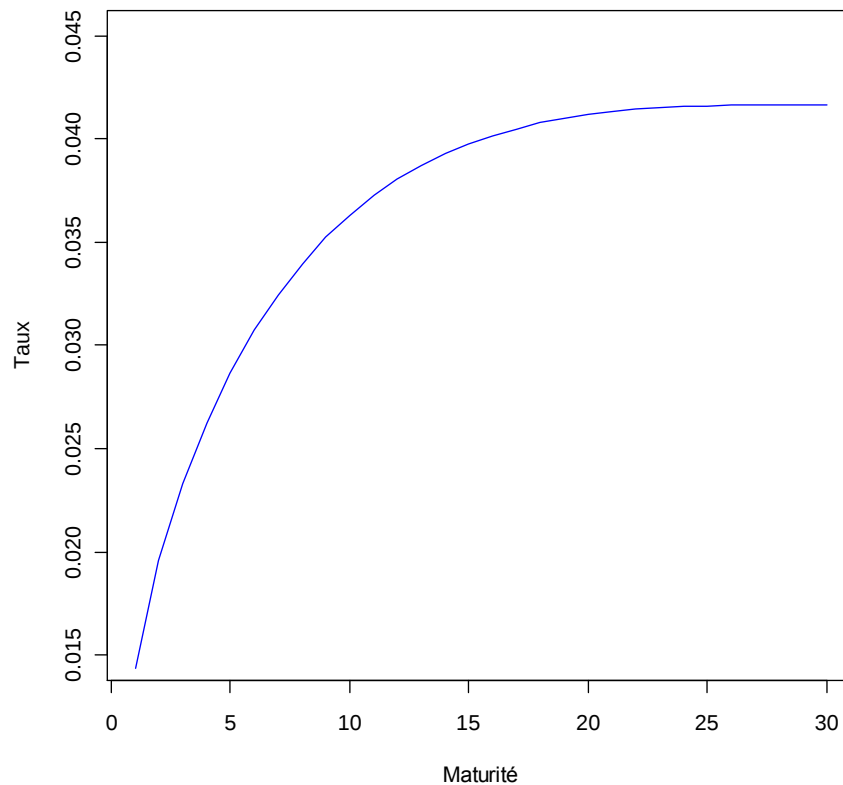
$$f^M(T) = - \frac{\partial \ln ZC^M(0, T)}{\partial T}$$

Avec $ZC^M(0, T)$ le prix de marché du zéro coupon de maturité T à l'instant 0. Nous utiliserons à cette fin la courbe des taux publiée par l'institut des actuaires³ au 30/04/2011 (Figure 4).

³ Source :

http://www.institutdesactuaires.com/gene/main.php?base=2/9&zone=docs&fw_connect3=1&opener_form=&opener_form_champ=&opener_champ_id=&details_id_dossier=45

FIGURE 4 : COURBE DES TAUX AU 30/04/2011



2.1.1.2. Valorisation des obligations

Le modèle de Hull et White permet la valorisation analytique d'une obligation zéro coupon à partir du taux court et des données de marché initiales, conformément à la formule donnée dans en annexe.

Cela permet en particulier de calculer le taux de coupon à l'instant t d'une obligation au pair de 1€ de nominal, c'est-à-dire le taux d'intérêt $R^c(t, T_n)$ tel que :

$$R^c(t, T_n) \left(\sum_{i=1}^n ZC(t, T_i) \right) + ZC(t, T_n) = 1$$

Ou encore :

$$R^c(t, T_n) = \frac{1 - ZC(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n ZC(t, T_i)}$$

2.1.1.3. Calibrage

L'un des intérêts du modèle de Hull et White est qu'il permet de valoriser des produits dérivés de taux standards (cap, floor, swaption par exemple) de manière analytique. Cela facilitera grandement le calibrage du modèle à partir des prix de marché. Nous choisissons de calibrer le modèle à partir du prix de marché des caps à la monnaie le 30/04/2011.

Les caps sont cotés en volatilité implicite dans le modèle de Black. Les caractéristiques du cap (moneyness, maturité) et les conditions de marché (courbe des taux) nous permettent d'en déduire leur prix de marché en utilisant la formule de Black :

$$CAP^M = L \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot ZC(0, t_{k+1}) \cdot [F_k \cdot N(d_k^1) - R_K \cdot N(d_k^2)]$$

Avec :

- L = le notionnel
- $t_1, t_2, \dots, t_n$ = les dates de fixation du taux variable
- $\delta_k = t_{k+1} - t_k$
- R_K = le taux d'intérêt strike de référence
- F_k = le taux forward pour la période entre t_k et t_{k+1}

Et :

$$d_k^1 = \frac{\ln\left(F_k/R_K\right) + \sigma_r^{k^2} \cdot t_k / 2}{\sigma_r^k \cdot \sqrt{t_k}}$$

$$d_k^2 = d_k^1 - \sigma_r^k \cdot \sqrt{t_k}$$

La formule de calcul du prix théorique des caps dans le modèle de Hull et White est donnée en annexe. Les paramètres du modèle, a et σ_r , sont déterminés de manière à minimiser la somme des carrés des écarts en pourcentage au prix de marché :

$$(\hat{a}, \hat{\sigma}_r) = \underset{a, \sigma_r}{\operatorname{argmin}} \left[\sum_{i=1}^N (CAP_i^M - CAP_i^{HW}(a, \sigma_r))^2 \right]$$

Avec :

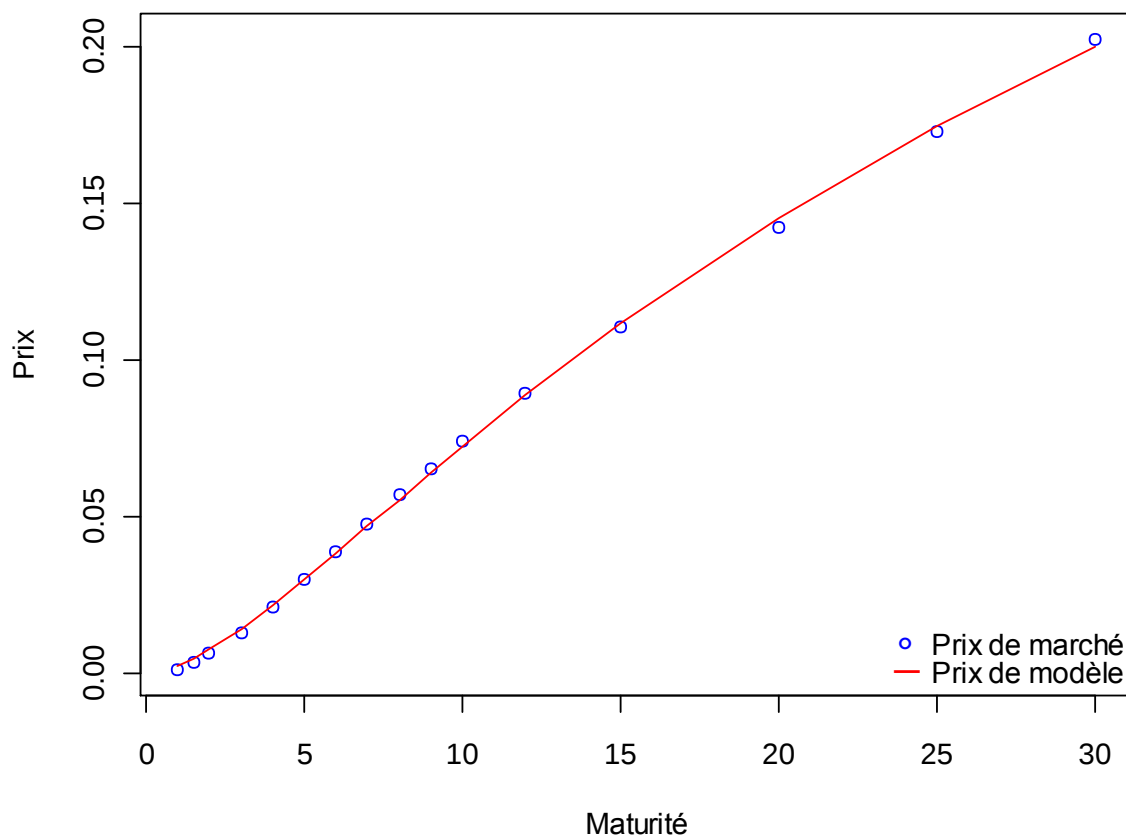
- $(\hat{a}, \hat{\sigma}_r)$ l'estimation des paramètres du modèle de Hull et White à un facteur ;
- CAP_i^M le prix de marché du i-ème cap ;
- $CAP_i^{HW}(a, \sigma_r)$ le prix du i-ème cap donné par le modèle de Hull-White en fonction des paramètres.

La résolution de ce programme d'optimisation nous donne les paramètres suivants :

- $a = 0,015$
- $\sigma_r = 0,9\%$

Ces paramètres permettent de reproduire assez fidèlement les prix de marché comme l'indique la Figure 5.

FIGURE 5 : PRIX DE MODÈLE ET PRIX DE MARCHÉ DES CAPS AU 30/04/11



2.1.1.4. Commentaires

Ce modèle de taux présente un certain nombre d'avantages. D'abord, il fait partie de la classe de modèles dits « Heath-Jarrow-Morton » (HJM). En tant que tel, il s'ajuste mécaniquement à la courbe des taux initiale, qui est un intrant du modèle. C'est une caractéristique qui s'avèrera essentielle lorsqu'il faudra valoriser le portefeuille répliquant.

Ensuite, sa simplicité permet de dériver des formules explicites de valorisation de produits dérivés de taux. Cela s'avère très utile pour le calibrage risque neutre, mais également pour la valorisation du portefeuille répliquant. En effet, dans le cas contraire, nous aurions deux options. La première est de recourir à une approximation numérique pour valoriser les produits dérivés de taux. Cela permet de traiter le calibrage mais

alourdit les calculs et fait perdre une partie de son intérêt à la méthode des portefeuilles répliquants utilisée à des fins de détermination du SCR. La méthode reste néanmoins plus efficace que les simulations dans les simulations car, si la complexité reste multiplicative, elle n'implique pas de relancer le modèle actif-passif pour chaque trajectoire. Or, c'est véritablement ce dernier qui est coûteux en temps de calcul. L'alternative serait, pour la valorisation du portefeuille répliquant, d'utiliser des formules dérivées de modèles différents de celui utilisé pour la projection risque neutre. Pour s'assurer de l'égalité du prix des instruments financiers selon le modèle de valorisation (par exemple le modèle de Black) et de l'espérance de leurs cash flows actualisés, il faut alors estimer empiriquement à partir des scénarios les paramètres du modèle de valorisation.

Par ailleurs, le caractère normal du taux court dans ce modèle rend en particulier possible des taux d'intérêt négatifs. A chaque instant, la probabilité d'obtenir des taux d'intérêt négatifs est donnée par⁴ :

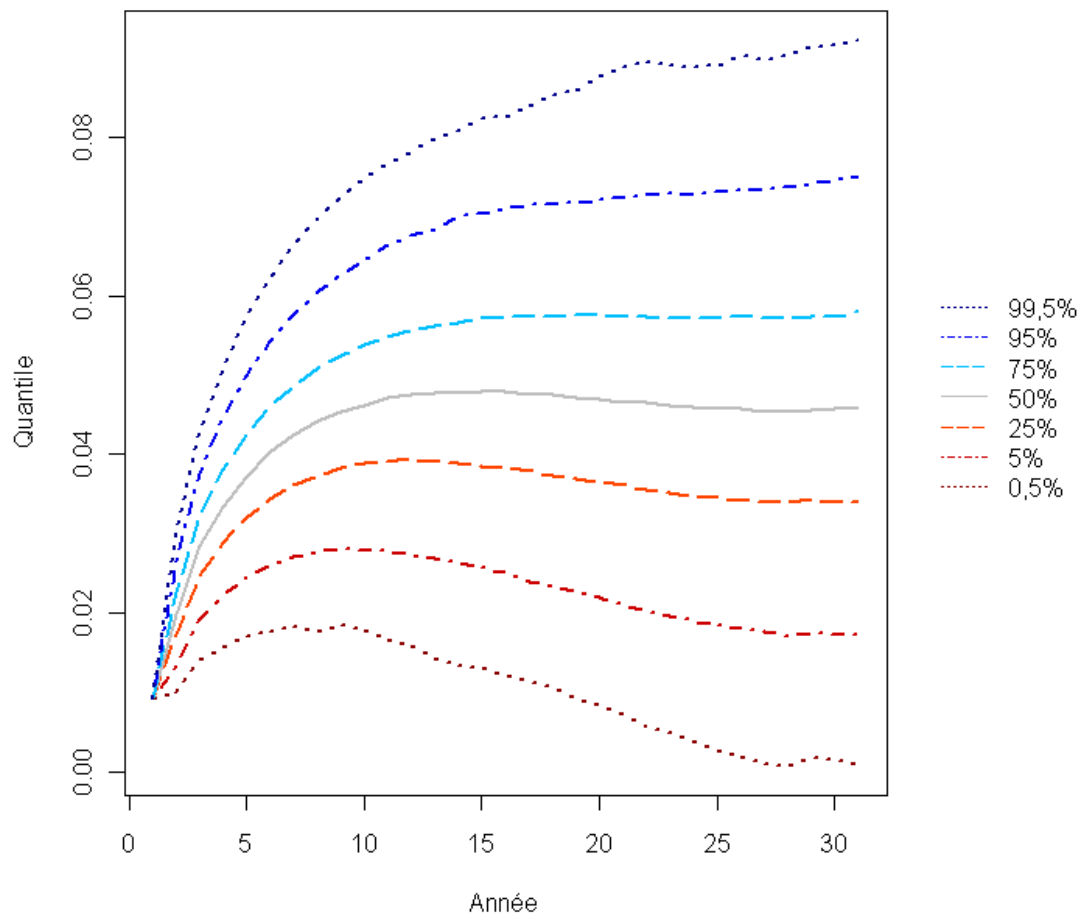
$$Q(r(t) < 0 | F_0) = \Phi \left(- \frac{f^M(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2}{\sqrt{\frac{\sigma_r^2}{2a} (1 - e^{-2at})}} \right)$$

Si cette probabilité est en général négligeable, elle peut être plus importante dans un environnement de crise où la volatilité implicite est élevée, ce qui est actuellement le cas. Compte tenu des conditions de marché actuelles et du calibrage retenu, elle augmente progressivement jusqu'à 5% autour de 25 ans avant de diminuer à nouveau. Il existe plusieurs manières de traiter le problème. La première consiste à fixer artificiellement un plancher aux taux d'intérêt pour éviter qu'ils ne deviennent négatifs. Cette solution est satisfaisante dans de nombreux cas, notamment en termes de projection. Elle s'avèrera problématique au moment de valoriser le portefeuille de réplication car elle introduit un biais. La valeur de marché des instruments le composant diffère alors de l'espérance sous la probabilité risque neutre des cash flows actualisés. L'alternative consiste à ne rien faire. C'est alors la valorisation des obligations et le déflateur qui deviennent problématique et perturbent le modèle ALM. Ce mémoire ne porte pas spécifiquement sur la modélisation risque neutre du taux d'intérêt, mais vise à dérouler l'ensemble de la chaîne de production de données dans le cadre d'un modèle interne. Nous choisissons donc de fixer le paramètre de volatilité à 0,4% au risque de sacrifier l'adéquation au prix de marché. Il s'agit clairement d'une première approche qui n'est pas pleinement satisfaisante. Cela aura notamment un léger impact sur le best estimate du fait de l'asymétrie du passif qui pâtit d'une volatilité réduite. L'approfondissement du travail ayant servi de support à ce mémoire passera nécessairement par une modélisation plus fine du taux d'intérêt, compte tenu du poids des produits de taux à l'actif des sociétés

⁴ Voir Brigo et Mercurio (2011), page 74.

d'assurance. La figure ci-dessous présente les trajectoires correspondant au paramétrage finalement retenu.

FIGURE 6 : QUANTILES DU TAUX SANS RISQUE EN FONCTION DU TEMPS



2.1.2. Modélisation risque neutre des actions et de l'immobilier

2.1.2.1. Modèle retenu

Les actions et l'actif immobilier sont modélisés dans l'univers risque neutre par un mouvement brownien géométrique. Cette modélisation simple et classique présente un certain nombre d'avantages :

- Elle garantit un prix de marché positif ;
- Elle permet de maintenir constante l'espérance de rendement ou « drift » ;
- Elle est compatible avec une tarification des produits dérivés par une formule analytique, ce qui s'avèrera utile lors de la phase de réplication et facilite grandement le calibrage risque neutre.

En contrepartie, cette modélisation, où les rendements sont gaussiens, tend à sous estimer la probabilité de survenance des événements extrêmes, en particulier à la baisse. Une alternative serait d'utiliser des modèles à volatilité stochastique et/ou sauts, lesquels sont plus difficiles à calibrer.

Sous la probabilité risque neutre, le cours de l'actif est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dA_t = (r_t - q_A)A_t dt + \sigma_A d\tilde{W}_t^A$$

Avec :

- A_t = le cours de l'actif (respectivement les actions ou l'immobilier) à l'instant t
- r_t = le taux court à l'instant t
- q_A = le taux instantané (constant) respectivement de dividendes ou de loyer
- σ_A = la volatilité (constante) de l'actif (respectivement les actions ou l'immobilier)
- $\tilde{W}_t^A$ = un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre

Cette équation différentielle stochastique admet pour unique solution le processus suivant :

$$A_t = A_{t_0} \exp \left(\left(r_t - q_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma_A (\tilde{W}_{t-t_0}^A) \right)$$

L'existence d'une solution à l'équation différentielle permet d'obtenir la discrétisation exacte suivante :

$$A_t = A_{t_0} \exp \left(\left(r_t - q_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma_A \sqrt{t - t_0} (\varepsilon_t^A) \right)$$

Où ε_t^A est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite.

2.1.2.2. Calibrage

Le taux d'intérêt étant modélisé par ailleurs, reste à calibrer les paramètres de volatilité, le taux instantané de dividendes et le taux instantané de loyer. La volatilité des actions peut être calibrée à l'aide de données de marché, comme par exemple le prix des options sur l'indice CAC 40. Il est en effet possible d'obtenir, en inversant la formule de Black et Scholes, un point de la surface de volatilité implicite pour un strike (ex : at the money) et une maturité donnée (ex : un an). Afin d'éviter d'avoir à choisir un point particulier de la surface de volatilité, le Chicago Board Options Exchange a développé la méthodologie

VIX permettant d'obtenir un indice de volatilité à partir d'un ensemble d'options de strike et de maturités différentes. Cette méthodologie a été reprise par Euronext qui propose depuis 2007 un indice de volatilité implicite du CAC 40⁵. C'est sur la base de cet indice qu'est paramétrée la volatilité actions. Au 30/04/2011, la valeur de cet indice était de 17,47%.

La volatilité du processus décrivant l'indice immobilier sous la probabilité risque neutre est plus difficile à calibrer en l'absence de produits dérivés suffisamment liquides ayant l'immobilier pour actif sous-jacent. Nous retiendrons une volatilité de 6%. Le taux instantané de loyer et de dividendes sous la probabilité risque neutre est également délicat à calibrer. Nous retiendrons 1% dans les deux cas.

2.1.3. Générateur de nombres aléatoires

La qualité du générateur de nombres aléatoires est un élément important qui conditionne la robustesse des résultats obtenus. Nous utilisons le générateur de R par défaut, à savoir le Mersenne twister initialement proposé par M. Matsumoto et T. Nishimura en 1997. Ce générateur de nombres pseudo-aléatoires à l'avantage d'être rapide, d'avoir une très longue période de retour ($2^{19937}-1$) et de posséder de bonnes propriétés statistiques. Il a notamment réussi l'ensemble de tests de qualité statistique dits « *diehard* ».

2.2. Schémas comptables et modélisation

Les règles comptables françaises introduisent une distorsion entre la performance financière de l'actif et sa prise en compte dans le résultat, lequel sert de base au calcul de la participation aux bénéfices. Elles vont donc avoir pour effet de pénaliser la qualité de la réplique des passifs par un portefeuille d'actifs. Il est donc nécessaire de modéliser correctement ces mécanismes comptables pour évaluer la robustesse de la réplique.

2.2.1. Caractéristiques du portefeuille de contrats

On s'intéresse ici à un portefeuille en run-off de contrats d'épargne en euros dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Taux technique = 1%
- Taux de participation aux bénéfices financiers contractuel = 90%
- Taux de prélèvement sur encours = 0,8%
- Pénalité de rachat = 0%

⁵ Séries historiques disponibles ici : <http://www.euronext.com/trader/summarizedmarket/stocks-2549-EN-QS0011052139.html?selectedMep=1>

Nous considérons un total de bilan de 10 000 unités monétaires dont la répartition par poste comptable est décrite dans la Figure 7. La surpondération des actifs en actions, liée à l'absence d'une modélisation plus fine du risque de crédit, sera explicitée au paragraphe 2.3.1.

FIGURE 7 : BILAN D'OUVERTURE

ACTIF		PASSIF	
Plus-values latentes	0	Fonds propres	6%
Obligations souveraines	60%	Réserve de capitalisation	1%
Actions	30%	PPB	3%
Immobilier	5%	PM	90%
Monétaire	5%		

Total bilan = 10 000

A l'ouverture, la valeur nette comptable des actifs correspond à leur valeur de marché. En d'autres termes, il n'y a pas de stock de plus-values latentes. Cette hypothèse de travail n'est pas sans conséquence sur le passif. La présence de plus-values latentes augmente la sensibilité du best estimate à des variations à la baisse de la valeur de marché des actifs. En effet, les plus-values latentes constituent un « coussin » protégeant les fonds propres de l'assureur. Elles réduisent donc l'asymétrie du passif et la valeur du best estimate, toutes choses égales par ailleurs.

2.2.2. Traitement comptable des obligations

2.2.2.1. Enregistrement des achats d'obligation, coupons et surcotes / décotes

L'achat d'une obligation donne en général lieu à l'inscription à l'actif de l'obligation à son prix pied de coupon. La différence entre le prix pied de coupon et la valeur de

remboursement, dite surcote si elle est positive ou décote si elle est négative, est amortie sur la durée de vie résiduelle de l'obligation. Comptablement, l'amortissement peut être linéaire ou actuariel. L'amortissement linéaire consiste à répartir la surcote/décote au prorata de la durée de vie résiduelle de l'obligation. L'amortissement actuariel est plus complexe et fait intervenir le taux de rendement de l'obligation. D'un point de vue fiscal, ce mode de comptabilisation est obligatoire dès lors que la surcote/décote dépasse 10% du prix d'achat.

Dans un souci de simplicité, nous supposons que les détachements de coupon ont lieu immédiatement avant les réajustements de portefeuille, lesquels ont lieu le dernier jour avant la clôture comptable. Cela permettra d'ignorer la distinction entre prix d'achat et prix pied de coupon. Nous supposons également que la société achète uniquement des obligations sur le marché primaire, donc au pair. Le prix d'achat, le nominal et la valeur comptable sont donc identiques. Sous ces hypothèses, la valeur comptable des obligations est constante dans le temps.

2.2.2.2. Enregistrement des ventes d'obligation et réserve de capitalisation

Les ventes d'obligations ont lieu au prix de marché, lequel est en général différent de la valeur comptable de l'obligation. Les ventes d'obligations donnent donc lieu à la réalisation de plus-values ou de moins-values. Le régulateur a souhaité éviter que les assureurs ne soient incités à réaliser des plus-values obligataires à court-terme au risque de dégrader la capacité de l'actif à générer du rendement sur plus longue période. Il a donc créé le mécanisme de la réserve de capitalisation. Conformément à l'article R. 333-1 du Code des Assurances, la réalisation de plus-values obligataires donne lieu à la dotation d'un montant égal à la plus-value en réserve de capitalisation, ce qui neutralise l'effet comptable de l'opération. La réserve de capitalisation est symétriquement reprise en cas de moins-value dans les limites de son montant. Sous Solvabilité I, elle est à la fois considérée comme un engagement réglementé dont la représentation à l'actif est donc nécessaire et comme un élément de couverture de la marge de solvabilité.

Le mécanisme de la réserve de capitalisation fait actuellement l'objet de discussions. Le stock a été frappé d'une « exit tax » de 10% pour l'exercice 2010 et, à l'avenir, les dotations à la réserve de capitalisation pourraient ne plus être déduites du résultat imposable, ce qui neutraliserait l'intérêt fiscal du dispositif. La problématique fiscale n'étant pas abordée dans ce mémoire, la réserve de capitalisation sera traitée sous son ancien régime. Il s'agit de toute façon d'un sujet mineur ici car la réserve de capitalisation est peu mouvementée du fait de la stratégie d'allocation d'actifs retenue (vente d'obligations en dernier ressort).

2.2.3. Traitement comptable des autres actifs

2.2.3.1. Principe général

Les autres actifs relevant de l'article R. 332-20, à savoir les actions et l'immobilier, sont enregistrés au bilan à leur coût historique et non à leur valeur de marché. Les plus-values latentes et surtout les moins-values latentes ne vont impacter le résultat que par le biais de la provision pour dépréciation à caractère durable et de la provision pour risque d'exigibilité. C'est uniquement lors de leur réalisation que les plus-values et moins-values seront pleinement comptabilisées en résultat.

2.2.3.2. La provision pour dépréciation à caractère durable

La provision pour dépréciation à caractère durable est une provision spécifique aux actifs relevant de l'article R. 332-20 du Code des Assurances, c'est-à-dire dans notre cas les actions et l'immobilier. Elle est constatée, ligne à ligne, en cas de moins-value à caractère durable. La provision dotée correspond à la différence entre la valeur comptable de l'actif considéré et sa valeur recouvrable à l'issue d'un horizon de détention. Cette provision suppose en particulier d'apprécier le caractère durable de la moins-value et d'estimer une valeur recouvrable. Dans l'esprit de la doctrine comptable⁶, nous considérerons qu'une moins-value présente un caractère durable dès lors qu'elle dépasse 30%⁷ de la valeur comptable de l'actif en question sur les six derniers mois de l'année. En cas de caractère durable, nous doterons la provision au premier euro de dépréciation⁸. Une dotation complémentaire est constatée si la valeur de réalisation continue de diminuer au cours des exercices suivants. Alternativement, la provision est reprise au fur et à mesure de l'augmentation de la valeur de réalisation au-delà de la valeur nette comptable.

Cette provision est normalement déterminée ligne à ligne. Or, nous distinguons dans le cadre de la modélisation que deux actifs : un indice synthétique actions et un indice immobilier. Afin d'éviter une dotation binaire qui impacterait trop brutalement le modèle ALM, nous isolerons les actifs par année d'achat ce qui permet une dotation plus progressive de la provision pour dépréciation durable.

⁶ Voir en particulier l'avis n°2002-F du 18 décembre 2002 du comité d'urgence du Conseil National de la Comptabilité.

⁷ Cela correspond au taux retenu en cas de marchés volatils.

⁸ Cela revient à fixer la valeur recouvrable à la valeur de marché, ou alternativement, de fixer à aujourd'hui l'horizon de détention.

2.2.4. Les provisions techniques

2.2.4.1. Les provisions mathématiques

Les provisions mathématiques constituent les principales provisions techniques en assurance vie. Elles représentent la « différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés » selon l'article R. 331-3 du Code des Assurances.

Les provisions mathématiques sont augmentées des primes nettes de frais d'entrée versées par les assurés et diminuées des prestations payées par l'assureur (décès, rachats). En fin d'année, elles sont revalorisées conformément à la formule suivante :

$$PM'_n = PM_n \times (1 + TS_n)$$

Avec :

- PM'_n = la provision mathématique en fin d'année n revalorisée
- PM_n = la provision mathématique en fin d'année n avant revalorisation
- TS_n = le taux servi au titre de l'année n

Le taux de revalorisation est déterminé par l'assureur, sous contraintes financières, réglementaires et contractuelles, dans des conditions explicitées au paragraphe 2.3.3.

2.2.4.2. La provision pour participation aux bénéfices

En assurance vie, l'assureur a l'obligation de distribuer une partie des bénéfices aux assurés, en plus des intérêts techniques. Cela étant, conformément à l'article A. 331-9 du Code des Assurances, il n'est pas obligé de le faire au cours de l'exercice qui a généré ces bénéfices. La provision pour participation aux bénéfices permet de « stocker » la participation aux bénéfices constatée en attendant de l'affecter effectivement aux assurés en dotant la provision mathématique. La provision pour participation aux bénéfices est donc un outil comptable qui permet à la fois de protéger l'assuré en constatant une créance envers lui et de lisser dans le temps le rendement d'un contrat.

Cela étant, le recours à la provision pour participation aux bénéfices est limité dans le temps. Elle doit être reprise au cours des huit années suivant sa dotation.

2.2.4.3. La provision pour risque d'exigibilité

La provision pour risque d'exigibilité, définie à l'article R. 331-5-1 du Code des Assurances, est une provision constatée en cas de moins-value globale des actifs non

obligataires par rapport à leur valeur comptable (nette de provision pour dépréciation durable). Elle reflète le risque de réalisation forcée de moins-values latentes en cas de rachats massifs dans un environnement de marché dégradé. Elle est dotée annuellement à concurrence du tiers⁹ de la moins-value latente sans pouvoir la dépasser. L'article R. 331-5-4 offre, dans certains cas, une possibilité d'étalement de la charge proportionnelle à la durée des passifs, sur une durée pouvant aller jusqu'à huit ans.

La provision pour risque d'exigibilité est plus l'expression d'une exigence prudentielle de solvabilité future que le reflet d'une réalité comptable. On peut s'interroger sur sa pertinence dans l'environnement prudentiel Solvabilité II. Aussi, elle ne sera pas modélisée.

2.2.4.4. La provision pour aléas financiers

La provision pour aléas financiers vise à couvrir une insuffisance de rendement de l'actif pour honorer les engagements de l'entreprise vis-à-vis des assurés en matière de revalorisation de l'épargne en euros. Conformément à l'article A. 331-2, elle est dotée si le taux de rendement de l'actif diminué d'un cinquième est inférieur au taux de rendement des passifs promis aux assurés. Dans ce cas, la dotation à la provision pour aléas financiers correspond à la différence entre les provisions mathématiques au bilan et les provisions recalculées avec un taux d'actualisation prudent, si ce montant est positif.

La provision pour aléas financiers est plus l'expression d'une exigence prudentielle de solvabilité future que le reflet d'une réalité comptable. On peut s'interroger sur sa pertinence dans l'environnement prudentiel Solvabilité II. Aussi, elle ne sera pas modélisée.

2.2.5. Modélisation des frais

Par souci de simplicité, les frais sont calculés comme un pourcentage fixe (0,2%) de l'encours de provisions mathématiques. S'agissant d'une provision prudentielle, la provision globale de gestion n'est pas modélisée.

⁹ L'intégralité de la moins-value latente est dotée dans le cas où l'entreprise ne satisfait pas à la représentation de ses engagements réglementés ou à la couverture de l'exigence minimale de marge de solvabilité.

2.3. Modélisation du comportement de l'assureur

2.3.1. Gestion de la trésorerie et stratégie d'allocation d'actifs

L'assureur doit ajuster annuellement son allocation d'actifs pour deux motifs. D'abord, le cours des différents actifs évolue d'une année sur l'autre, ce qui modifie leur poids respectif dans la composition du portefeuille. L'absence d'intervention de l'assureur pourrait conduire à des situations irréalistes, où le portefeuille est majoritairement composé d'actions par exemple. Ensuite, l'assureur intervient sur son allocation pour financer un déficit de trésorerie ou investir un excédent. L'allocation d'actifs n'est donc pas statique, ce qui va également impacter la qualité de la réplique.

2.3.1.1. Trésorerie positive

La solution la plus immédiate consiste à déterminer des pondérations fixes, à l'aide de modèles de choix de portefeuille (ex : Markowitz, Leibowitz) par exemple, et de réajuster annuellement le portefeuille pour revenir à cette pondération cible. Cette solution a pour inconvénient de forcer la réalisation des plus-values / moins-values au fur et à mesure qu'elles apparaissent. Une alternative consiste à fixer l'allocation cible en terme de flux et non en termes de stocks. Cela permet de résoudre le problème des réalisations systématiques des plus-values mais peut conduire à des comportements d'investissement irréalistes.

La solution intermédiaire retenue pour la modélisation consiste à définir la stratégie d'allocation sur les flux tout en fixant des limites sur le stock. Lorsque la trésorerie est positive, elle est investie dans les actifs conformément à la proportion cible. Si le plafond d'une catégorie d'actif en pourcentage de la valeur totale de l'actif est atteint, sa part dans le flux annuel est redistribuée entre les autres actifs au pro rata de leur part cible dans le flux de trésorerie. Cela étant, la modélisation retenue n'impose pas de ventes forcées, même lorsque l'investissement de la trésorerie ne suffit pas à faire passer une classe d'actif sous son plafond.

Le tableau suivant récapitule les valeurs cible et plafond retenues pour chaque classe d'actif. Les pourcentages s'apprécient en valeur de marché et non en valeur comptable.

	Cible (en % du flux annuel de trésorerie)	Plafond (en % du total d'actif)
Obligations d'État	60%	75%
Actions	30%	40%
Immobilier	5%	10%
Disponibilités	5%	10%

Le spread de crédit n'étant pas modélisé dans ce mémoire. Aussi, le pourcentage d'obligations d'entreprise que détiendrait logiquement un assureur vie a été éclaté à parts égales entre actions et obligations souveraines, ce qui explique notamment la part élevée des actions dans le total de placements, en comparaison des pratiques de marché actuelles. Il s'agit d'une première approche qui conduit à une approximation forte. Cette démarche palliative conduit à trois remarques. La première est d'ordre financière. En imaginant que l'on puisse correctement répliquer le comportement d'une obligation corporate par un portefeuille d'obligations souveraines et d'actions, ce qui est déjà une hypothèse très forte, le pourcentage retenu (50-50) n'est pas forcément pertinent. La seconde est de nature comptable. Alors que les obligations d'entreprise obéissent aux règles de comptabilisation prévues par l'article R. 332-19 du Code des Assurances (amortissement, réserve de capitalisation, etc.), les actions relèvent de l'article R. 332-20 de ce même code. La modélisation des obligations corporate par un portefeuille d'obligations souveraines et d'actions introduit par conséquent une distorsion comptable. Enfin, lors du calcul du SCR marché, cette modélisation conduira à un mode d'agrégation des sous-modules qui ne correspondra pas à l'agrégation du risque de spread telle qu'elle prévue par les spécifications techniques du QIS 5 notamment. L'approfondissement des travaux entrepris dans ce mémoire nécessiterait donc de développer une modélisation spécifiques du risque de crédit.

2.3.1.2. Trésorerie négative

En cas de trésorerie négative, les assureurs sont soumis à trois contraintes :

- ils souhaitent en général porter leurs obligations à échéance pour éviter de supporter un risque de marché sur cette classe d'actif ;
- leur horizon d'investissement étant long, ils cherchent à éviter la réalisation de moins-values latentes qui pourraient se résorber dans le temps
- il peut être long et coûteux de vendre des actifs immobiliers.

Ainsi la modélisation retenue consiste à couvrir le besoin de trésorerie en vendant par ordre de priorité :

- les disponibilités,
- les actions si elles sont en plus-value latentes,
- l'immobilier s'il est en plus-value latente,
- les actions,
- l'immobilier,
- les obligations.

2.3.1.3. Commentaires

Définir une stratégie d'allocation d'actifs est un exercice délicat car, en pratique, les gestionnaires d'actifs font varier leur stratégie dans le temps en fonction de l'évolution de leurs passifs (logique ALM) mais aussi en fonction des conditions de marché actuelles et anticipées. Il est très difficile de fixer a priori un jeu de règles qui permette d'appréhender la réaction des gestionnaires d'actifs, notamment dans des situations extrêmes, telles qu'une baisse brutale des taux d'intérêt ou un krach sur le marché actions. La réaction à un krach d'amplitude identique pourra par exemple être différente selon le contexte économique qui l'explique (exemple : krach sectoriel lié à l'explosion d'une bulle spéculative comme en 2001 ou baisse anticipée comme durable car liée à un ralentissement de la croissance mondiale). Dans le cadre de la modélisation, il est cependant nécessaire de définir un jeu de règles d'action qui ne peut pas, par construction, être pleinement satisfaisant. Dans la continuité de ce mémoire, il pourrait alors être judicieux de tester différentes stratégies, ne serait-ce que pour savoir s'il s'agit ou non d'une hypothèse structurante. Il pourrait par exemple être intéressant de tester la sensibilité du best estimate au taux de réalisation des plus-values latentes (nul dans notre scénario central).

2.3.2. Mise en œuvre de la réallocation d'actifs et duration

2.3.2.1. Achats et ventes d'actions et d'actifs immobiliers

Lorsque la stratégie d'allocation d'actifs nécessite l'achat d'actions ou d'actifs immobiliers, ils sont achetés au prix de marché en vigueur et ajoutés au portefeuille. Lorsqu'une vente d'action ou d'actif immobilier doit être réalisée, elle obéit au principe du « *first in first out* ». Les actifs en portefeuille les plus anciens sont vendus prioritairement.

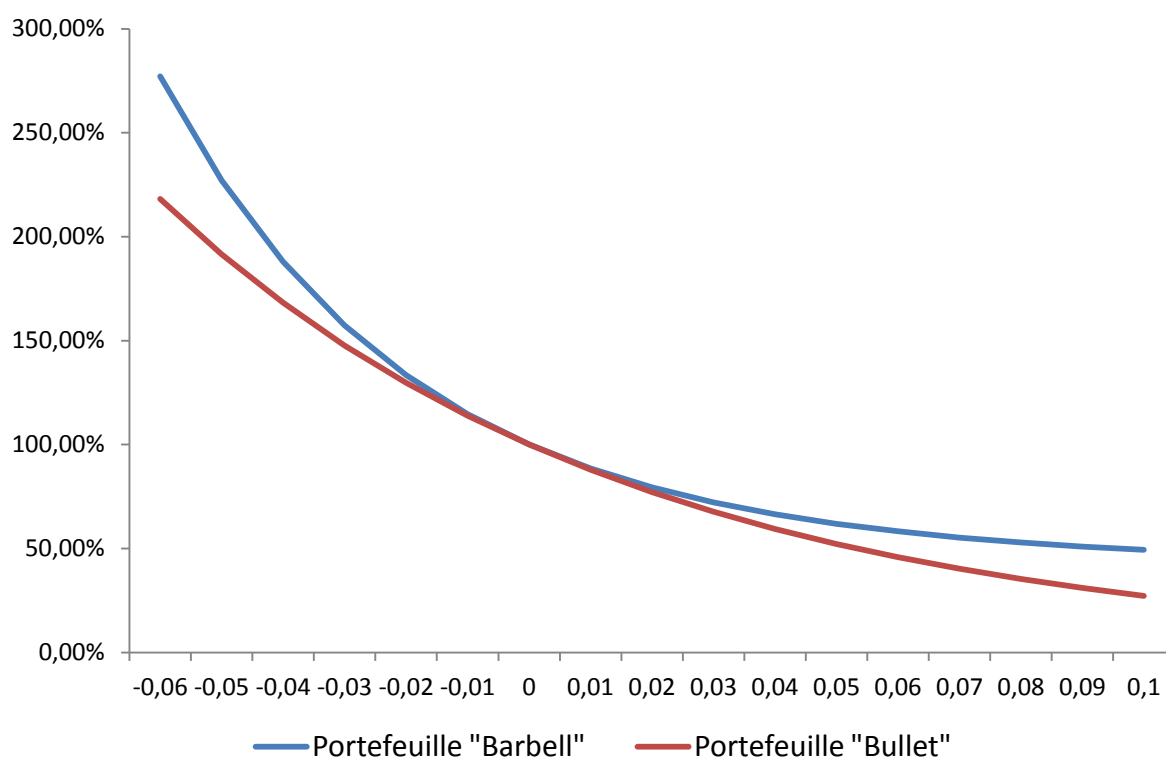
2.3.2.2. Achats d'obligations

Le traitement des achats / ventes d'obligations est un exercice plus délicat. L'existence d'obligations de différentes maturités rend nécessaire une stratégie en matière de duration, cohérente avec la maturité résiduelle moyenne des passifs. Nous supposons que la duration cible est initialement de 7 ans¹⁰ et qu'elle est réduite progressivement pour être ramenée à un an à la fin de l'horizon de projection. L'assureur utilise les investissements de l'année pour réajuster la duration de son portefeuille obligataire, laquelle évolue dans le temps du fait du vieillissement des obligations et de leur arrivée à échéance. Dans un premier temps, l'assureur détermine la duration du portefeuille à investir en s'appuyant sur la propriété de linéarité de la duration.

¹⁰ En pratique la duration est en fait légèrement plus faible puisque 5% de l'actif est également investi en produit de taux à duration courte (monétaire).

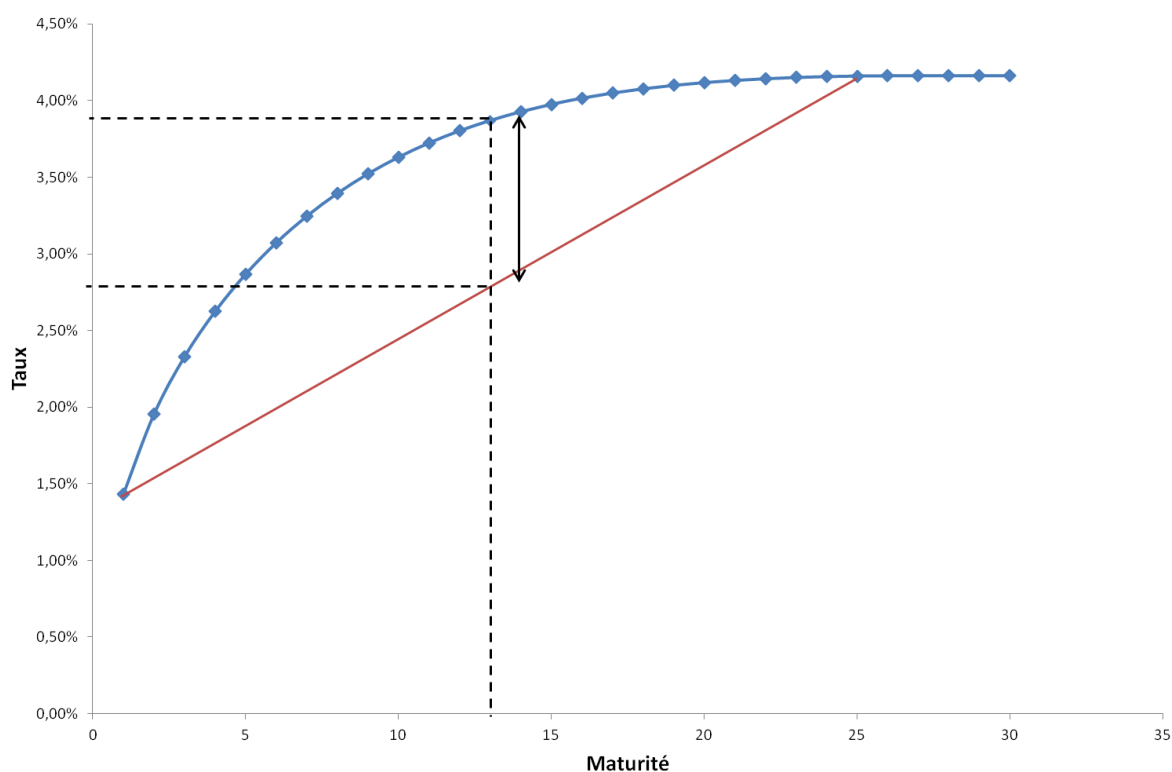
La duration du portefeuille à investir déterminée, l'assureur investit en obligations 1 an et 10 ans dans des proportions permettant d'atteindre la duration souhaitée selon la logique du portefeuille « Barbell ». L'intérêt du portefeuille Barbell est qu'il offre la possibilité d'ajuster à la marge le portefeuille en cas de hausse des taux du fait de l'arrivée à échéance rapide des obligations un an, tout en offrant une protection partielle contre la baisse des taux grâce aux maturités 10 ans. Par rapport à un investissement uniquement dans la maturité la plus proche de la maturité souhaitée (dit « portefeuille bullet »), un portefeuille Barbell est plus convexe en cas de variation de taux comme l'illustre la Figure 8 pour un portefeuille Barbell de duration 13 ans composé de zéro coupons 1 an et 25 ans, contre un portefeuille bullet 13 ans.

FIGURE 8 : SENSIBILITÉ DE PORTEFEUILLES BARBELL ET BULLET À UNE VARIATION DE TAUX



Cette convexification du portefeuille obligataire se fait au prix d'un rendement moyen inférieur comme l'illustre la Figure 9.

FIGURE 9 : RENDEMENTS DE PORTEFEUILLES BARBELL ET BULLET



2.3.2.3. Vente d'obligations

Dans le cas rare où la stratégie d'allocation d'actifs rend nécessaire une vente d'obligations, elle est réalisée au pro rata du poids en valeur de marché de chaque obligation dans le portefeuille avant réallocation.

2.3.3. **Politique de participation des assurés aux résultats**

2.3.3.1. La revalorisation annuelle des provisions mathématiques

L'assureur va chercher à satisfaire les attentes de l'assuré pour limiter les rachats anticipés. Ce faisant, il doit également respecter les contraintes réglementaires et contractuelles qui s'appliquent en matière de participation aux résultats.

Fixé au contrat dans les limites prévues à l'article A. 132-1 du Code des Assurances, le taux d'intérêt technique est une composante de la tarification en matière d'assurance vie. Le taux technique net de chargement de gestion constitue un minimum de revalorisation des provisions mathématiques. En plus du taux d'intérêt technique, l'assureur doit distribuer une part des bénéfices techniques et financiers au titre de la participation aux

bénéfices prévue à l'article L. 331-3 du Code des Assurances. La participation aux bénéfices peut être immédiatement incorporée aux provisions mathématiques ou venir alimenter la provision pour participation aux bénéfices. Dans ce cas, elle doit être distribuée dans les huit années suivant sa dotation. On a alors :

$$TS_n = \max \left(TT + \frac{PPB_{n-8}}{PM_n} ; TD_n \right) - Ch$$

Avec :

- TS_n = taux servi l'année n
- TT = taux technique du contrat brut de chargement de gestion
- PPB_{n-8} = la provision pour participation aux bénéfices dotée au titre de l'année $n-8$ non encore reprise
- PM_n = la provision mathématique en fin d'année n avant revalorisation
- TD_n = le taux discrétionnaire calculé pour l'année n
- Ch = le taux de chargement technique prévu par le contrat (0,1% par hypothèse)

Le taux discrétionnaire est l'expression de la volonté de l'assureur de satisfaire les attentes des assurés dans les limites des ressources à sa disposition pour ce faire. Outre le rendement de l'actif au cours de l'année, l'assureur peut puiser dans la provision pour participation aux bénéfices constituée au titre des huit exercices précédents. On a donc :

$$TD_n = \min \left[TC_n ; \frac{(\sum_{i=1}^8 PPB_{n-i}) + (1 - m_n) \times \max(PF_n, 0)}{PM_n} \right]$$

Avec :

- TC_n = le taux cible à servir égal au taux attendu par l'assuré par hypothèse
- $(\sum_{i=1}^8 PPB_{n-i})$ = la provision pour participation aux bénéfices accumulée au titre des huit exercices antérieurs¹¹
- PF_n = les produits financiers nets comptables globaux de l'année n
- m_n = la marge sur produits financiers conservée par l'assureur l'année n

La marge sur produits financiers va servir de paramètre d'ajustement de la politique de revalorisation annuelle des provisions mathématiques de l'assureur. L'assureur va se fixer une marge cible (100 % par hypothèse) qu'il va réduire progressivement de manière à atteindre le taux cible, dans les limites d'un plancher (fixé par hypothèse à 0%¹²). Formellement, si les produits financiers sont positifs, on a :

¹¹ Nous scindons ici de manière artificielle la provision pour participation aux bénéfices par année de constatation afin de faciliter le suivi de la condition de reprise au bout de huit années.

¹² On pourrait très bien imaginer que ce taux soit négatif, autrement dit que l'assureur accepte de puiser dans ses fonds propres pour rémunérer ses contrats.

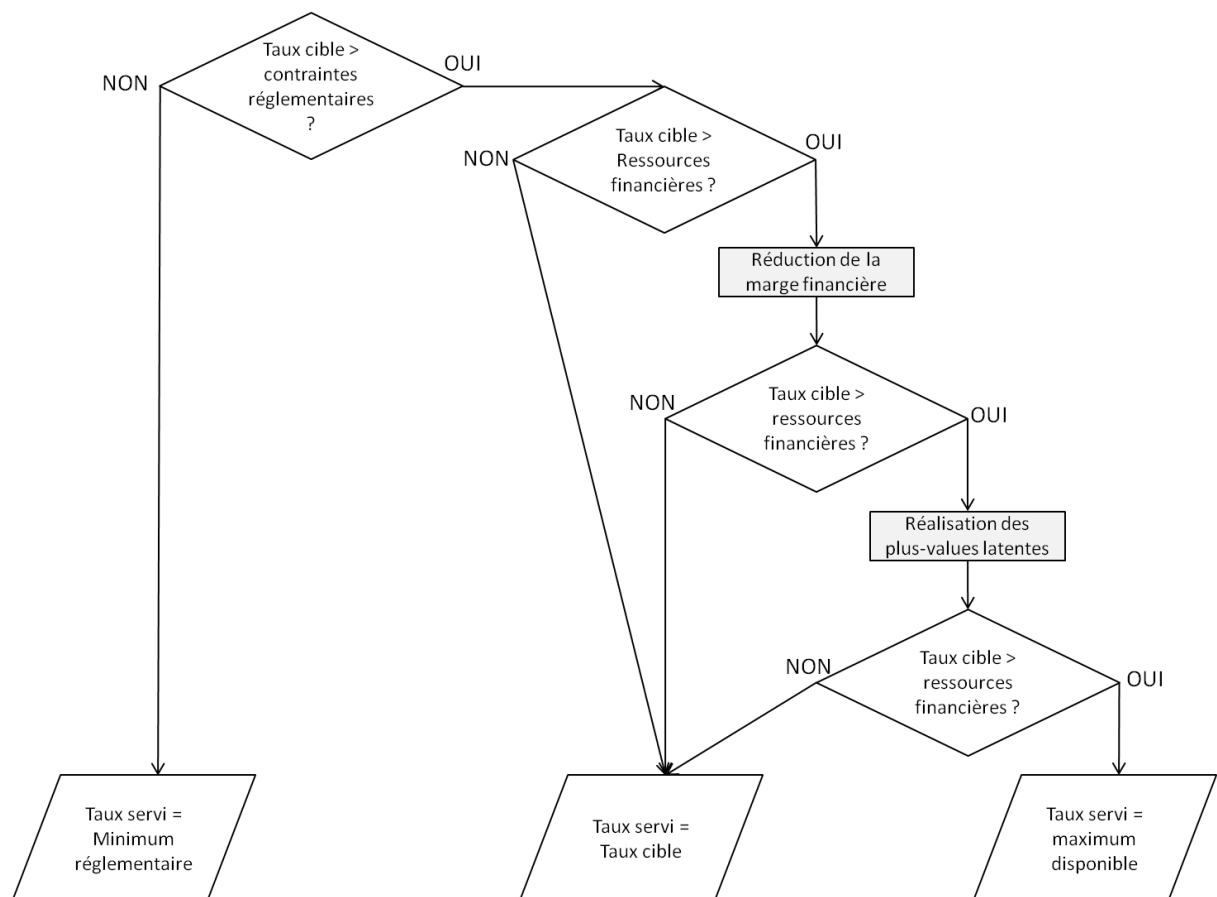
$$m_n = \min \left(\max \left(m_{\min}, 1 - \frac{TC_n \times PM_n - (\sum_{i=1}^8 PPB_{n-i})}{PF_n} \right), m_{\text{cible}} \right)$$

Avec :

- $m_{\min}$ = le minimum de marge sur produits financiers conservée par l'assureur
- m_{cible} = l'objectif de marge sur produits financiers conservée par l'assureur

S'il n'est toujours pas en mesure de servir le taux cible après avoir réduit sa marge financière, l'assureur va alors tenter de le faire en réalisant une partie des plus-values latentes¹³, d'abord sur les actions, puis, si nécessaire, sur l'immobilier. De manière schématique, la détermination du taux servi va obéir à la logique présentée dans la Figure 10.

FIGURE 10 : POLITIQUE DE REVALORISATION DE LA PROVISION MATHÉMATIQUE



¹³ N.B. : Dans le cadre de la modélisation, cette opération est enregistrée comptablement au cours de l'année suivante.

2.3.3.2. Dynamique de la provision pour participation aux bénéfices

La provision pour participation aux bénéfices dotée au titre des exercices antérieurs est reprise si nécessaire et dans les limites de son montant selon le principe du « *first in first out* ». Cela permet de « purger » le stock de provision pour participation aux bénéfices lié aux exercices antérieurs en alimentant prioritairement la revalorisation des provisions mathématiques par la provision pour participation aux bénéfices la plus ancienne. On évite ainsi autant que possible de se trouver contraint à l'avenir par la condition de reprise au bout de huit ans.

Formellement, pour i compris entre 1 et 8, on a :

$$PPB'_{n-i} = \min \left(PPB_{n-i} ; \max \left(0 ; \left(\sum_{j=1}^{9-i} PPB_{n-(9-j)} \right) - (TS_n - TT_{net}) \times PM_n \right) \right)$$

Avec :

- TS_n = le taux servi au titre de l'année n
- TT_{net} = le taux technique net de chargement de gestion
- PM_n = la provision mathématique en fin d'année n avant revalorisation
- PPB_t = le stock de provision pour participation aux bénéfices dotée l'année t et non encore reprise depuis, avant dotation/reprise de l'année n
- PPB'_t = le stock de provision pour participation aux bénéfices dotée l'année t et non encore reprise depuis, après dotation/reprise de l'année n

L'assureur va doter en provision pour participation aux bénéfices au titre de l'année n le minimum réglementaire et contractuel de participation aux bénéfices, déduction faite de la participation aux bénéfices immédiatement incorporée aux provisions mathématiques. On aura alors :

$$PPB'_n = \max \left(\min \left(PB_n^{min} ; PB_n^{min} - \left((TS_n - TT_{net}) \times PM_n - \sum_{i=1}^8 PPB_{n-i} \right) \right) ; 0 \right)$$

Avec :

- PPB'_n = la provision pour participation aux bénéfices dotée l'année n
- PB_n^{min} = le minimum réglementaire et contractuel de participation aux bénéfices au titre de l'année n
- TS_n = le taux servi l'année n
- PM_n = la provision mathématique en fin d'année n avant revalorisation

- PPB_{n-i} = le stock de provision pour participation aux bénéfices dotée l'année t et non encore reprise depuis, avant dotation/reprise de l'année n

Conformément à l'article A. 331-4 et suivants du Code des Assurances, le minimum de participation aux bénéfices correspond à la somme des éléments suivants :

- 90% du résultat technique s'il est positif, 100% sinon ;
- 85% des produits financiers définis comme le produit du montant moyen de provisions techniques par le taux de rendement comptable de l'actif, ou un pourcentage plus élevé prévu au contrat (ici 90%) ;
- Déduction faite des intérêts techniques.

Si le total de ces éléments est négatif, le solde est reporté et s'impute sur la participation aux bénéfices des exercices suivants.

2.4. Modélisation du comportement de l'assuré

2.4.1. Modélisation des rachats

Par simplification, on supposera que la prestation garantie en cas de décès est identique à la valeur de rachat. En d'autres termes, il n'y a pas de pénalité spécifique au cas du rachat. Aussi, les décès ne seront pas spécifiquement modélisés mais seront traités comme des rachats structurels.

2.4.1.1. Les rachats structurels

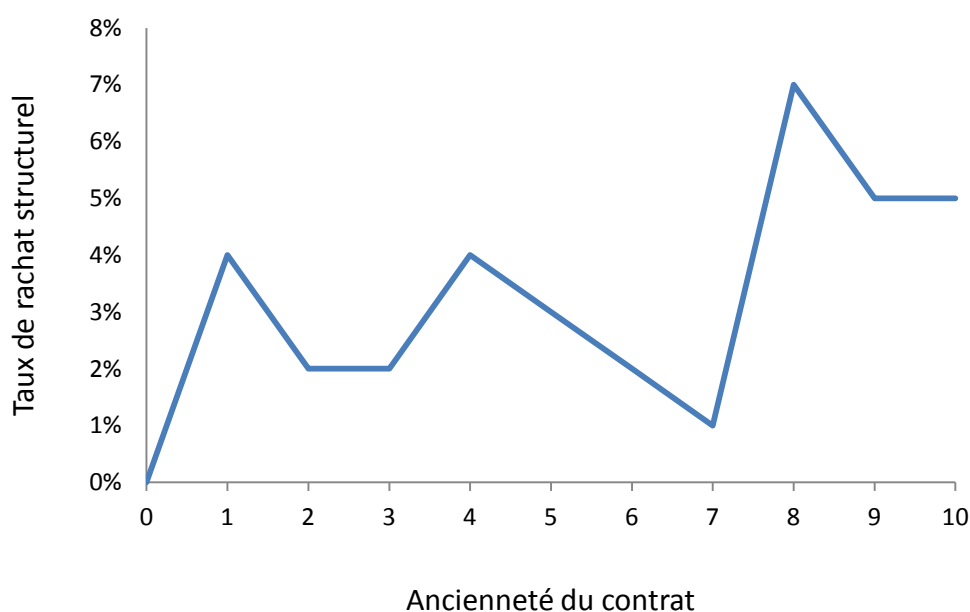
Les rachats structurels correspondent à la composante récurrente des rachats, celle qui dépend des caractéristiques du contrat et du portefeuille d'assurés plus que de l'évolution de l'environnement économique. Les rachats structurels dépendent notamment des facteurs suivants :

- L'âge de l'assuré : La capacité d'épargne tend à augmenter progressivement jusqu'à l'âge de départ en retraite où elle diminue de manière significative, ce qui rend plus probable le rachat total ou partiel. Dans le cas où les décès sont assimilés à des rachats, les rachats augmentent avec l'âge du fait de l'augmentation du taux de mortalité.
- L'ancienneté fiscale du contrat : A titre d'exemple, la première année donne souvent lieu à un premier « pic » de rachat du fait d'assurés mal conseillés qui réalisent que ce produit n'était pas adapté à leurs besoins. A l'inverse, la septième année donne lieu à peu de rachats du fait de sa proximité avec la durée de détention nécessaire pour bénéficier d'un traitement fiscal avantageux (huit ans).
- La surface financière de l'assuré (mesurée par le montant de provision mathématique par assuré par exemple) : plus un assuré dispose d'un patrimoine

important, plus il est susceptible d'arbitrer entre différents supports pour son épargne, en fonction de l'évolution de la réglementation fiscale par exemple.

Nous modéliserons les rachats structurels comme le produit des provisions mathématiques par un taux de rachat, lui-même fonction de l'âge du contrat. La Figure 11 présente la courbe des taux de rachats structurels utilisée pour la modélisation.

FIGURE 11 : TAUX DE RACHAT STRUCTUREL EN FONCTION DE L'ANCIENNETÉ DU CONTRAT



Les taux de rachat choisis conduisent à une durée du passif plus élevée que celle des obligations (7 ans). Ce différentiel est attendu dans un environnement de taux bas où les assureurs raccourcissent la durée de leur actif pour profiter de la remontée attendue des taux.

2.4.1.2. Les rachats conjoncturels

Les rachats conjoncturels correspondent à la composante aléatoire des rachats. Ils expriment l'idée que les assurés arbitrent entre le contrat et d'autres supports d'épargne en fonction des conditions de marché, de la concurrence et de la politique de revalorisation de l'assureur. Plus l'écart entre le taux attendu par les assurés (TA) et le taux servi (TS) est important, plus le taux de rachat conjoncturel (RC) est élevé. Cela étant, l'exercice de l'option de rachat n'est pas mécanique. D'abord, les frais encourus lors d'un rachat anticipé introduisent des coûts de friction qui ont un effet dissuasif. Ensuite, le comportement de rachat de l'assuré n'est pas totalement rationnel (manque d'information ou de temps pour la collecter, compréhension insuffisante du produit).

Par conséquent, pour modéliser l'exercice de cette option de rachat anticipé, nous nous appuyons sur les recommandations de l'ACP dans les Orientations Nationales Complémentaires (ONC) du QIS 5, à savoir :

$$RC_n = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } TS_{n-1} - TA_{n-1} < \alpha \\ RC_{max} \times \frac{TS_{n-1} - TA_{n-1} - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < TS_{n-1} - TA_{n-1} < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < TS_{n-1} - TA_{n-1} < \gamma \\ RC_{min} \times \frac{TS_{n-1} - TA_{n-1} - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < TS_{n-1} - TA_{n-1} < \delta \\ R_{min} & \text{si } TS_{n-1} - TA_{n-1} > \delta \end{cases}$$

Les paramètres peuvent être interprétés de la façon suivante :

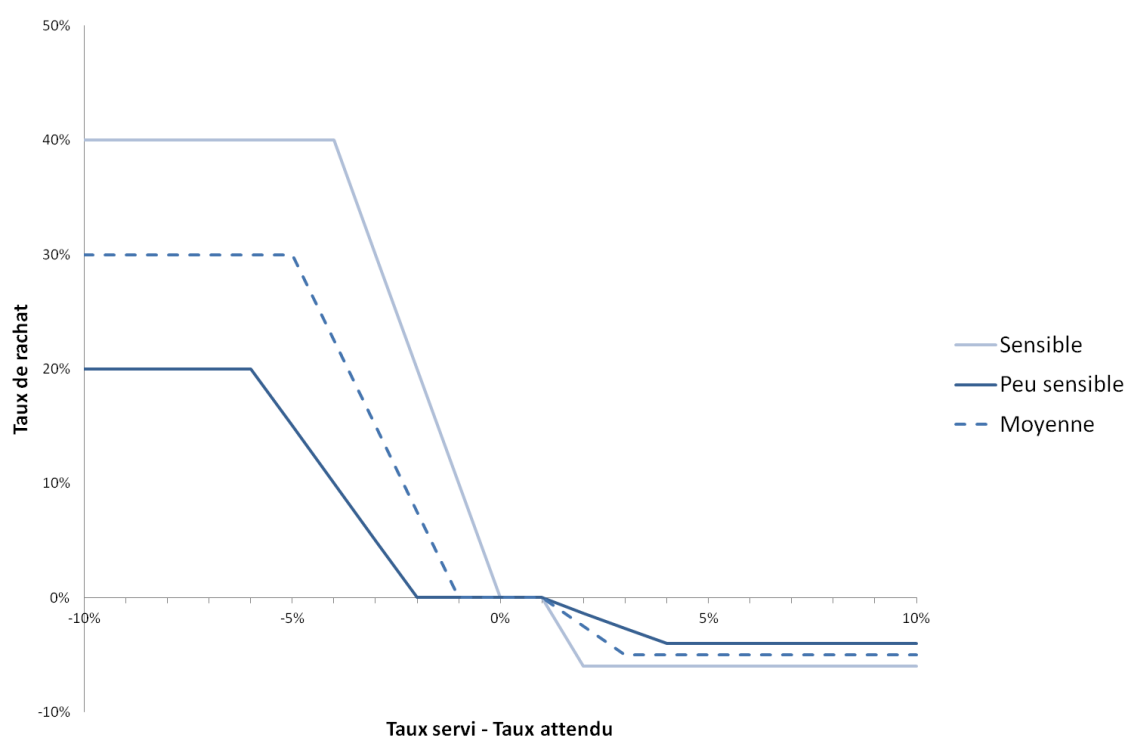
- R_{max} = le taux de rachat conjoncturel maximum, il exprime l'idée que certains assurés sont insensibles aux conditions de marché lorsqu'elles leur sont défavorables ;
- R_{min} = le taux de rachat conjoncturel minimum, il exprime l'idée que certains assurés sont insensibles aux conditions de marché lorsqu'elles leur sont favorables ;
- α = le seuil au-delà duquel les assurés sont insensibles à une évolution additionnelle défavorable de l'écart entre taux servi et taux attendu ;
- β = la borne inférieure de l'intervalle au sein duquel l'écart entre taux servi et taux attendu est trop faible pour avoir un impact sur le comportement moyen des assurés ;
- γ = la borne supérieure de l'intervalle au sein duquel l'écart entre taux servi et taux attendu est trop faible pour avoir un impact sur le comportement moyen des assurés ;
- δ = le seuil au-delà duquel les assurés sont insensibles à une évolution additionnelle favorable de l'écart entre taux servi et taux attendu.

Dans le cadre des ONC du QIS5, l'ACP propose deux jeux de paramètres faisant office de fourchette. Le premier jeu de paramètres correspond à un portefeuille d'assurés peu sensibles à l'écart entre le taux servi par l'assureur et par la concurrence. Ce calibrage pourrait par exemple s'appliquer à une clientèle grand public. Le second, qui implique une plus forte sensibilité, pourrait décrire un portefeuille d'assurés bien conseillés du fait de leur patrimoine financier important. Dans le cadre de la modélisation, nous retiendrons la moyenne de ces paramètres.

	α	β	γ	δ	$RC_{\min}$	$RC_{\max}$
Peu sensibles	-6%	-2%	1%	4%	-4%	20%
Très sensibles	-4%	0%	1%	2%	-6%	40%
Moyennement sensibles	-5%	-1%	1%	3%	-5% ¹⁴	30%

La Figure 12 illustre visuellement l'impact des coefficients retenus sur les rachats conjoncturels exprimés en fonction de l'écart entre le taux servi et le taux attendu.

FIGURE 12 : TAUX DE RACHAT CONJONCTUREL EN FONCTION DE L'ÉCART ENTRE TAUX SERVI ET TAUX ATTENDU (QIS 5)



On remarque en particulier que le taux de rachat conjoncturel peut être négatif si le taux servi est nettement supérieur au taux attendu, ce qui correspond à des versements complémentaires conjoncturels sur des contrats existant. Ce phénomène sera peu observé dans notre cadre de modélisation du fait de la politique de fixation du taux servi par l'assureur. En effet, ce dernier est supposé connaître le taux attendu par l'assuré et il ne servira un taux supérieur que s'il y est contraint (voir partie 2.3.3). Le taux attendu est calculé comme la moyenne du taux moyen des emprunts d'État¹⁵ (TME) sur les deux dernières années.

¹⁴ La possibilité d'un taux de rachat conjoncturel négatif correspond à des versements complémentaires sur des contrats existant.

¹⁵ Le TME correspond à la moyenne des rendements d'obligations d'État de maturité supérieure à 7 ans.

2.4.2. Traitement spécifique de la dernière année de modélisation

L'horizon de modélisation est fixé à 30 ans. A l'issue de ce délai, les assurés restant rachètent le solde de provisions mathématiques revalorisées et se voient également affecter :

- L'intégralité du solde de provision pour participation aux bénéfices.
- Une part de la réserve de capitalisation et des plus values latentes. Ce pourcentage est déterminé en multipliant le taux de participation aux bénéfices (le plus élevé du taux légal et du minimum contractuel) par la part des provisions techniques dans le total d'actif.

Partie 3 : SENSIBILITÉ DU BEST ESTIMATE ET CALCUL DU SCR PAR LA FORMULE STANDARD

La partie précédente nous a permis de développer un modèle permettant de simuler des trajectoires d'actifs et d'en déduire des flux de passif à partir d'un ensemble d'hypothèses et de règles de comportement fixées ex ante. Nous allons l'utiliser comme un estimateur des provisions techniques, ce qui nous servira notamment à valoriser le bilan de référence au format solvabilité II (paragraphe 3.1). En faisant varier progressivement certaines hypothèses de modélisation, nous pourrons étudier la sensibilité de notre estimation des provisions techniques (3.2). Enfin, le fait de disposer d'un outil d'évaluation des provisions techniques sous différentes hypothèses et dans diverses configurations de marché nous permettra de mesurer l'impact de chocs d'ampleur donnée. On pourra en particulier calculer certaines composantes du SCR selon la logique de la formule standard (3.3).

3.1. Valorisation du bilan Solvabilité II

3.1.1. Quelques éléments sur des postes spécifiques au bilan Solvabilité II

3.1.1.1. La marge de risque

Le calcul de la marge de risque tel que décrit au paragraphe 1.1.2.2 requiert le calcul du SCR pour chaque année de projection et l'application d'un coefficient de 6% au montant ainsi déterminé, ce qui se révèle particulièrement lourd à mettre en œuvre et peut poser des problèmes de circularité. Les spécifications techniques du QIS 5 prévoient un éventail de simplifications pour alléger ce calcul. L'évaluation de la marge de risque n'étant pas un élément central de ce travail, nous retiendrons la solution la plus simple consistant à évaluer la marge de risque comme un pourcentage du best estimate. Nous avons retenu la moyenne européenne observée lors du QIS 5 pour les contrats d'assurance vie avec participation aux bénéfices, soit 1,83%.

3.1.1.2. Les impôts différés

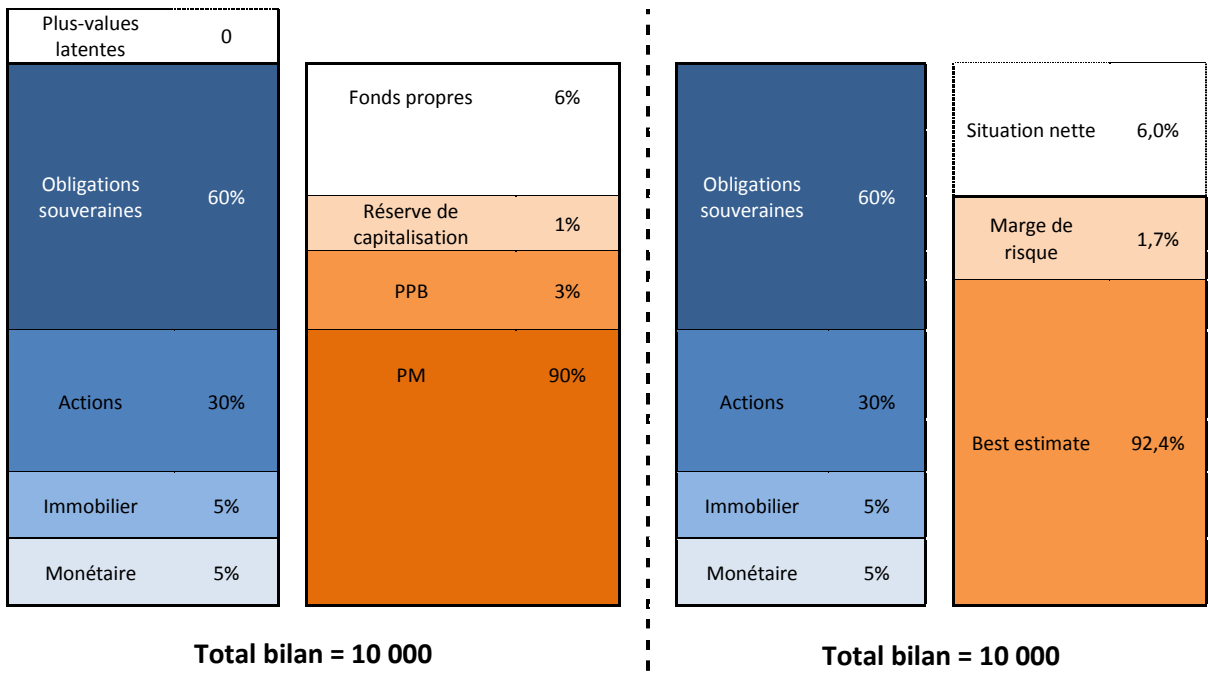
L'évaluation du bilan dans le référentiel Solvabilité II conduit en général à constater immédiatement la capacité des différents postes à dégager des profits ou des pertes dans le futur, lesquels donneront lieu au paiement de l'impôt lorsqu'ils seront réalisés. Dans un souci de cohérence, il est donc nécessaire de faire apparaître cette charge d'impôt future au bilan tel qu'il est évalué sous Solvabilité II. On parle alors d'impôts différés passif s'il s'agit d'une charge future et d'impôts différés actif dans le cas où la créance fiscale est au

profit de l'assureur. Dans le cadre fiscal français, la réalisation d'une perte ne donne pas lieu à un versement de la part de l'administration fiscale mais à un crédit d'impôt imputable sur des impôts à payer au cours des années. La matérialisation financière de cette créance fiscale qu'est l'impôt différé actif suppose donc en particulier de parvenir à dégager un bénéfice fiscal au cours des exercices ultérieurs. Les impôts différés actifs doivent donc être traités avec prudence. Dans le cadre du présent mémoire ils ne seront pas traités. Cela aura en particulier deux conséquences. La première est de ne pas constater d'impôt différé actif ou passif en $t=0$, ce qui impacte les fonds propres disponibles. En l'espèce, ce n'est pas particulièrement problématique puisque la différence entre la valeur comptable et l'évaluation Solvabilité II des fonds propres est faible. La deuxième est que l'impôt différé ne pourra pas jouer son rôle d'amortisseur lors du calcul du SCR. Le SCR obtenu sera donc surévalué.

3.1.2. Synthèse des résultats

Sous les hypothèses présentées ci-dessus, nous obtenons pour une provision best estimate de 9 235 unités monétaires et une marge de risque de 169, soit une provision technique globale de 9 404 unités monétaires sous Solvabilité II. Ce montant est légèrement supérieur aux provisions techniques comptables (provision mathématique et provision pour participation aux bénéfices) qui s'élèvent à 9 300. La Figure 13 présente de manière synthétique les bilans sous leur format comptable en normes françaises (Solvabilité 1) et sous le format Solvabilité 2. Les plus-values latentes sont représentées à des fins illustratives bien qu'il n'y en ait pas dans l'exemple retenu.

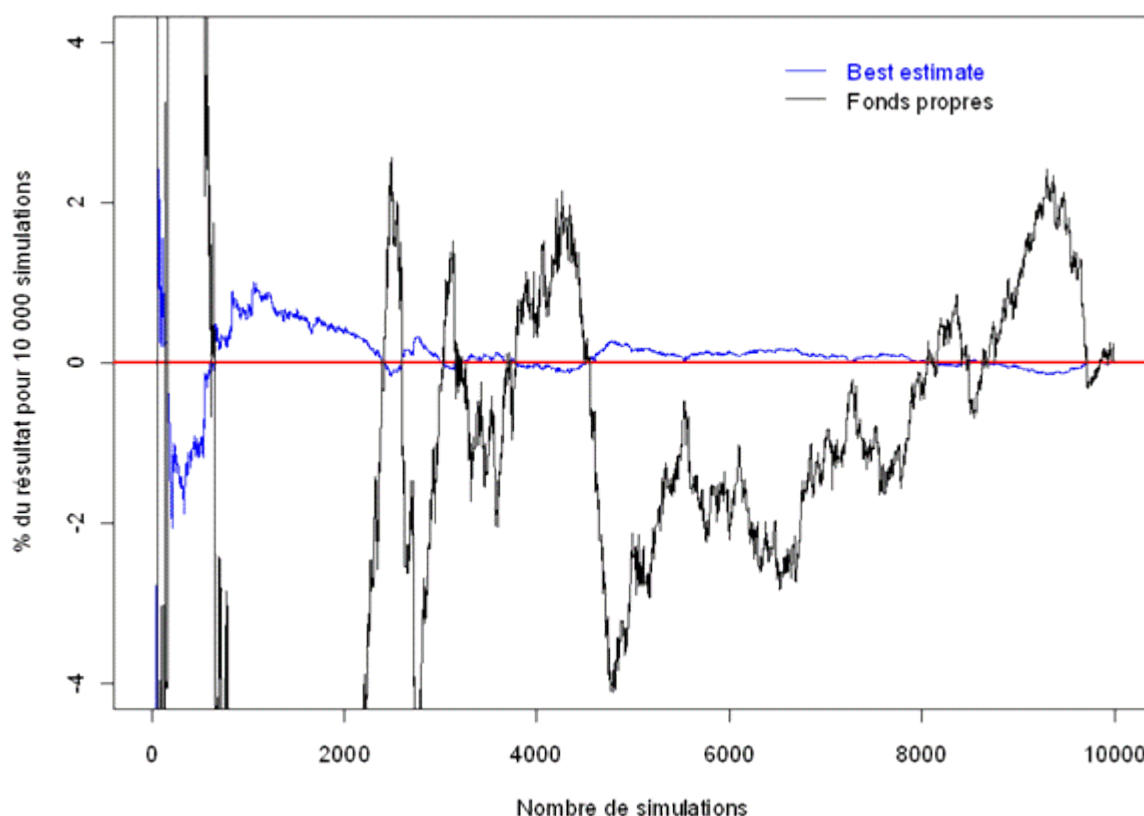
FIGURE 13 : BILANS COMPARÉS SOLVABILITÉ I ET SOLVABILITÉ II



3.1.3. Stabilité des résultats en fonction du nombre de simulations

Les résultats précédents ont été obtenus pour 10 000 simulations. La précision du calcul augmente avec le nombre de simulations, mais au prix d'un temps de calcul accru. Il peut être intéressant d'étudier la stabilité de notre estimateur du best estimate en fonction du nombre de simulations réalisées au moment d'effectuer ce nécessaire arbitrage. La Figure 14 présente l'évolution du best estimate et de la valeur de l'actif net en fonction du nombre de simulations. Les courbes décrivent l'évolution de l'écart de la valeur moyenne des premières trajectoires à la valeur moyenne obtenue avec le nombre maximum de simulations (ici 10 000).

FIGURE 14 : ÉVOLUTION DU BEST ESTIMATE ET DES FONDS PROPRES EN FONCTION DU NOMBRE DE SIMULATIONS



La figure précédente fait apparaître une rapide stabilisation du best estimate (courbe bleue) à partir de quelques milliers de simulations. L'écart est inférieur à 1% dès 1 000 simulations. Il pourrait alors être tentant de réduire drastiquement le nombre de simulations pour diminuer les temps de calcul, notamment en cas de détermination du SCR par la méthode des simulations dans les simulations. Cela appelle deux remarques.

D'abord, les trajectoires de convergence dépendent à la fois du jeu de simulation retenu et de la manière dont il est ordonné. La courbe des fonds propres en particulier aurait par exemple eu une toute autre allure si l'on avait étudié les simulations dans l'ordre inverse en partant de la dernière simulation, puis en effectuant la moyenne avec la précédente, puis avec celle d'avant, etc.

Ensuite, la courbe noire montre que la valeur de l'actif net se stabilise beaucoup moins rapidement que celle du best estimate. En effet, l'incertitude sur la valeur de l'actif net provient presque exclusivement de l'erreur d'estimation du best estimate. Or, une erreur de 1% sur un passif d'environ 9 000 unités monétaires correspond à 90. Rapporté à des fonds propres de l'ordre de 600 unités monétaire dans notre exemple, cela représente une erreur de 15%. En d'autres termes, pour une même erreur, l'impact est quinze fois plus important pour les fonds propres que pour le best estimate. Dans notre exemple, l'effet est même amplifié du fait du mode de calcul de la marge de risque comme un pourcentage du best estimate. Ainsi, selon que l'on s'intéresse aux fonds propres ou au best estimate et la précision souhaitée, le nombre de simulations requis ne sera pas le même.

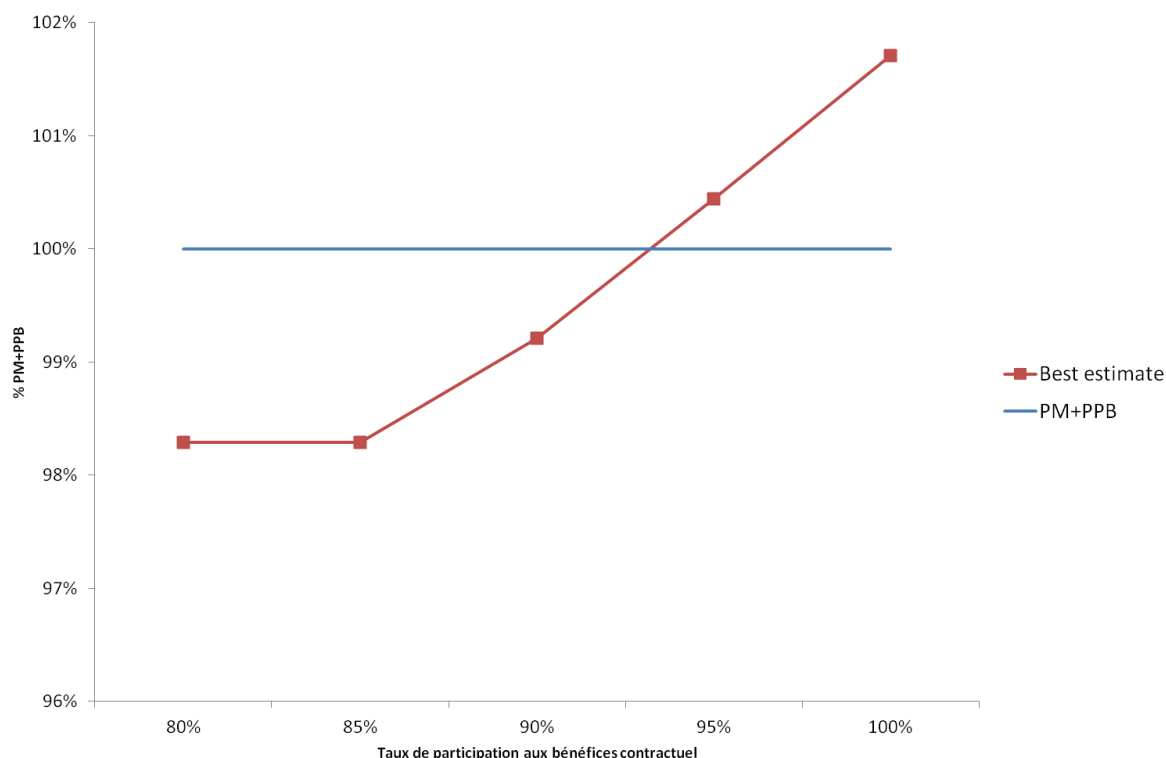
3.2. Sensibilité de la provision technique aux principaux paramètres

Le best estimate correspond à la valeur moyenne de la somme des flux de passif actualisés. Les flux générés par le passif vont varier en fonction des caractéristiques du contrat. Il est donc logique que la valeur du best estimate soit impactée. C'est ce que nous étudierons dans la partie 3.2.1. Cela permettra en particulier à l'assureur de bien mesurer la valeur des options contractuelles offertes à l'assuré. Les flux sont également conditionnés par les hypothèses de modélisation retenues. Une étude de la sensibilité du best estimate à ces paramètres (3.2.2) est nécessaire pour identifier ceux qui requièrent une attention particulière.

3.2.1. Sensibilité aux engagements contractuels

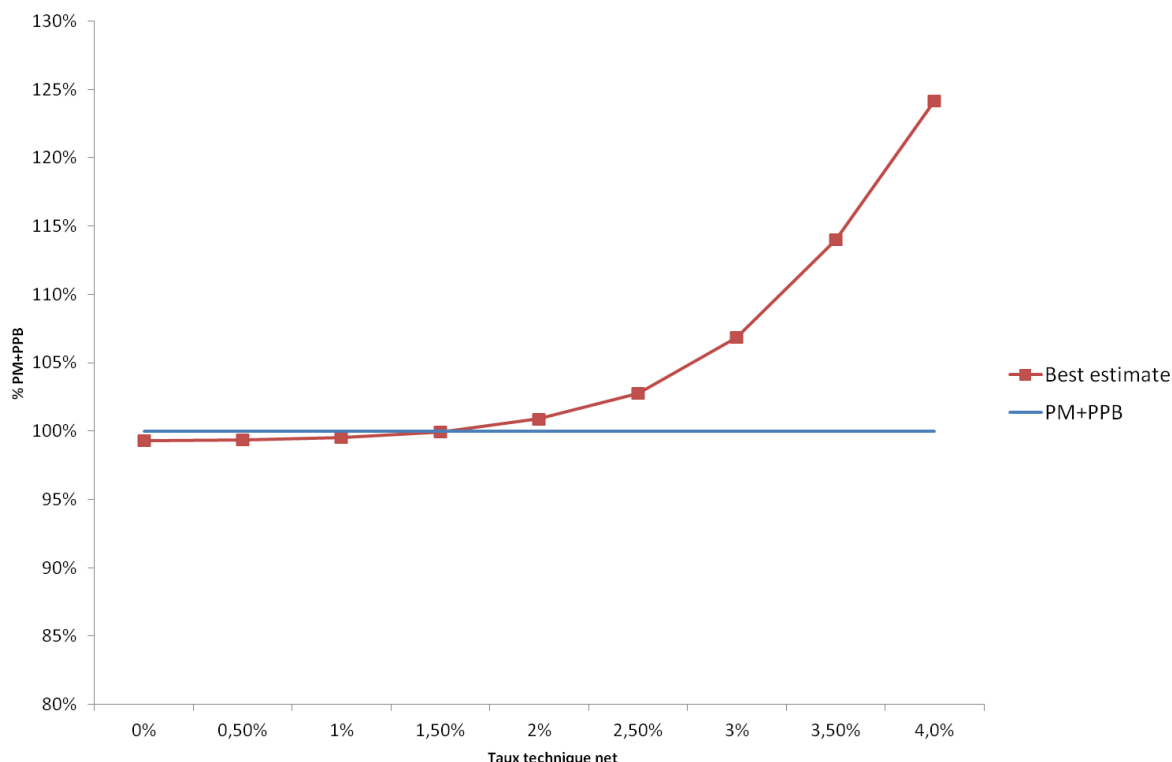
Contrairement à la provision mathématique d'un contrat en euros, le best estimate est sensible aux garanties offertes aux assurés, notamment en termes de participation aux bénéfices contractuelle et de taux technique. Plus l'engagement est favorable à l'assuré, plus le best estimate sera élevé comme le montrent la Figure 15 et la Figure 16.

FIGURE 15 : SENSIBILITÉ DU BEST ESTIMATE AU TAUX DE PARTICIPATION AUX BÉNÉFICES CONTRACTUEL



Le calcul du best estimate avec un taux de participation aux bénéfices de 80%, légalement impossible, a été représenté uniquement pour montrer l'existence de cette forme de plancher. Comme attendu, le best estimate augmente avec le taux de participation aux bénéfices contractuel. Néanmoins, la sensibilité est relativement faible dans notre exemple. La contrainte légale et contractuelle est en pratique rarement saturée. La pression commerciale, qui correspond ici à un taux cible fonction du TME, pousse l'assureur à rémunérer ses contrats au-delà. Par ailleurs, le mécanisme de la provision pour participation aux bénéfices permet à l'assureur de reporter dans le temps l'affection de la participation aux bénéfices aux provisions mathématiques. En conséquence, l'effet de la participation aux bénéfices en cas de rachat n'est pas immédiat et peut être est minoré du fait d'une actualisation plus forte.

FIGURE 16 : SENSIBILITÉ DU BEST ESTIMATE AU TAUX D'INTÉRÊT TECHNIQUE NET



La figure précédente confirme l'intuition d'une augmentation du best estimate au fur et à mesure que le taux technique est relevé. La convexité de la courbe montre que l'assureur est peu contraint lorsque le taux du tarif est faible. Garantir 1% plutôt que 0,5% est peu coûteux car la pression concurrentielle l'aurait de toute façon poussé à offrir un taux de revalorisation supérieur au taux technique. Pour des taux techniques élevés en revanche, la contrainte contractuelle prend le dessus sur la contrainte commerciale dans de nombreuses simulations, ce qui impacte lourdement le best estimate. Notons que l'étude de la sensibilité au taux technique « toutes choses égales par ailleurs » est peu pertinente pour des niveaux élevés. En effet, plus l'engagement de taux de l'assureur est élevé, plus il va chercher à sécuriser sa politique de placement en réduisant la part d'actifs risqués. Par conséquent, la stratégie d'allocation d'actifs d'un assureur engagé à servir un taux de 4,5% annuel serait sans doute très différente de celle retenue dans le cadre de ce mémoire (a fortiori compte tenu de la surpondération de la poche action).

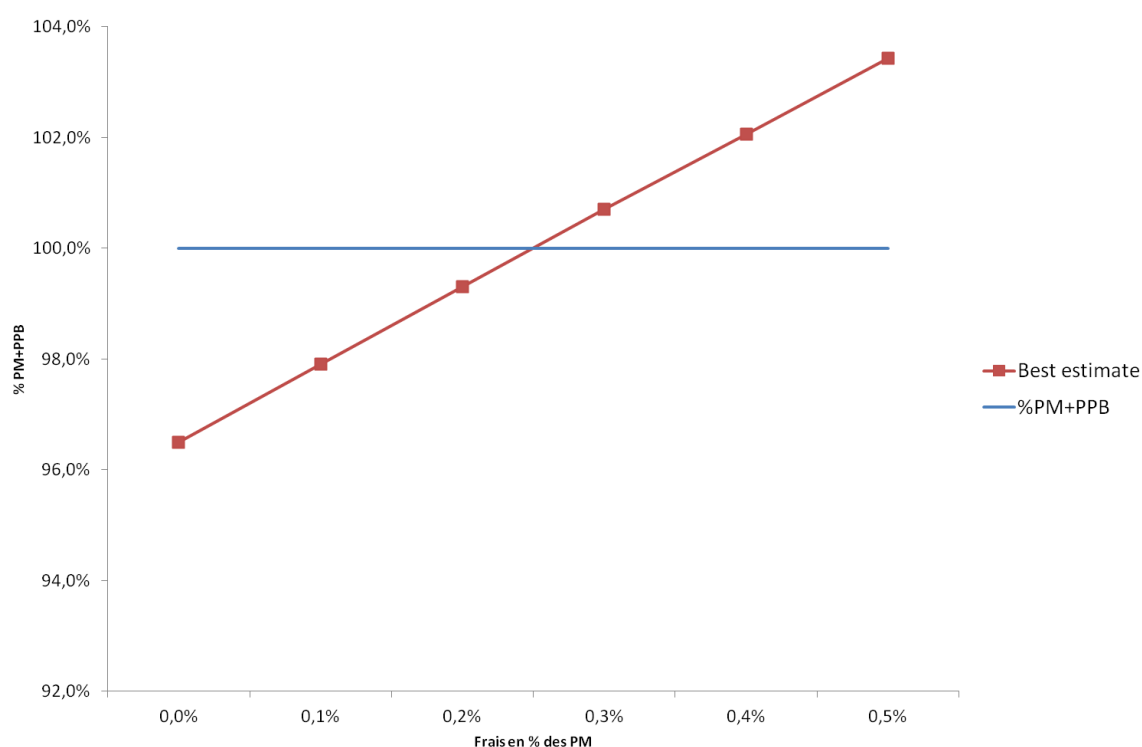
Le taux technique introduit une asymétrie dans le passif d'un assureur qui lui est défavorable. Comme nous le verrons au paragraphe 4.1.1, le taux technique correspond à une position optionnelle longue pour l'assuré. Si le taux est faible et la performance de l'actif significative, l'option est très en dehors de la monnaie. Sa valeur est alors faible. Elle n'augmente que peu la valeur du passif. Notons également que les résultats auraient sans doute été légèrement différents avec une volatilité du taux plus élevée (voir la

discussion du paragraphe 0). Si le best estimate aurait peu été impacté (pour un taux technique faible, c'est-à-dire une option très en dehors de la monnaie), la convexité aurait quant à elle été plus marquée. En effet, plus la volatilité est élevée, plus la valeur de l'option l'est.

3.2.2. Sensibilité aux choix de modélisation

Outre les caractéristiques intrinsèques du portefeuille de contrats, les résultats obtenus sont conditionnés par les hypothèses de modélisation. A titre d'exemple, nous présentons ci-dessous la sensibilité du best estimate aux hypothèses en matière de frais de gestion. La sensibilité est relativement faible, du fait du poids limité des frais dans la composition du best estimate, lequel est principalement conditionné par les rachats. En revanche, la sensibilité apparaît comme parfaitement linéaire. Cela s'explique par la modélisation retenue, où les frais sont exprimés comme un pourcentage des provisions mathématiques.

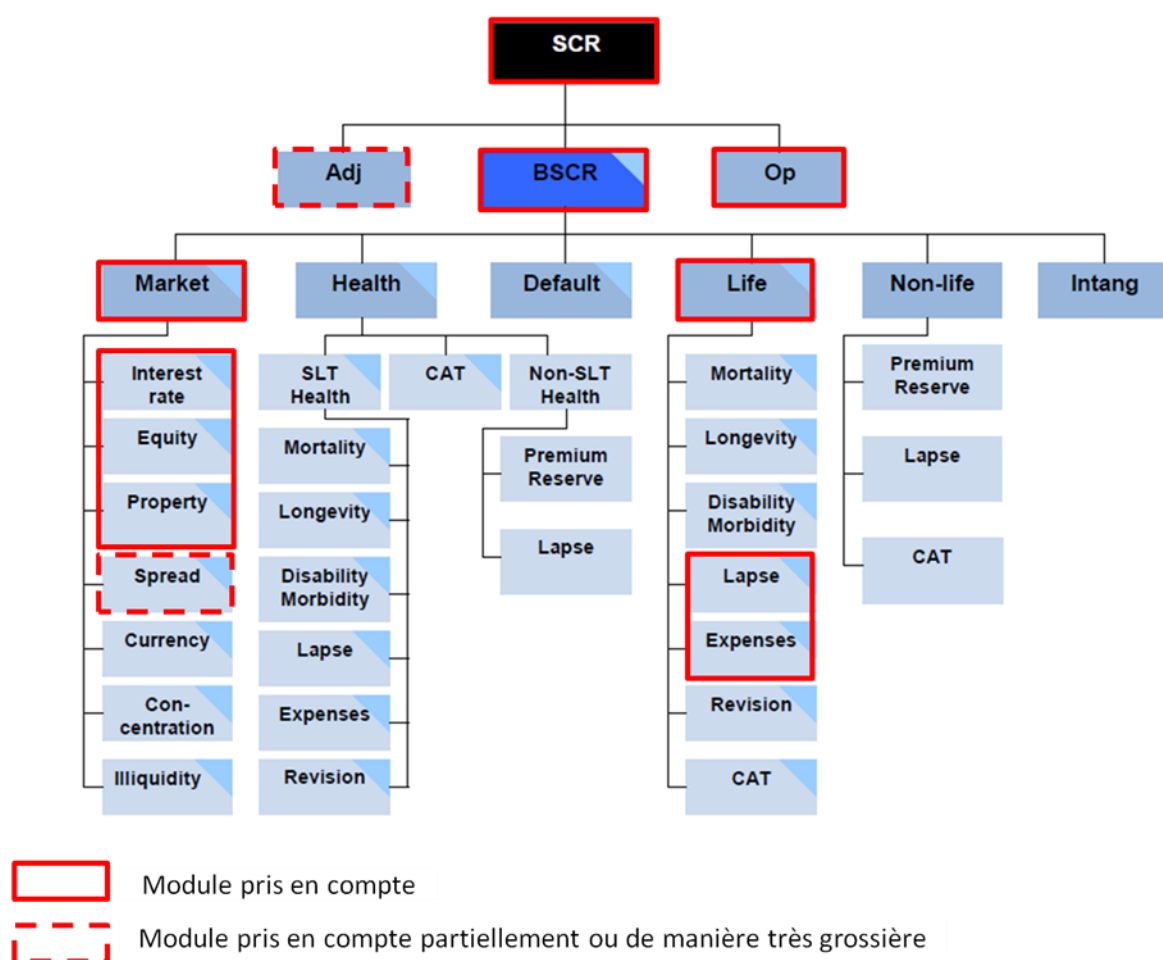
FIGURE 17 : SENSIBILITÉ DU BEST ESTIMATE AUX FRAIS DE GESTION



3.3. Calcul du SCR par la formule standard

Sous Solvabilité II, l'exigence de capital de solvabilité, dite SCR, est supposée refléter le profil de risque de l'entreprise. Elle peut être évaluée soit selon la formule standard, soit par un modèle interne. Nous nous intéressons dans cette partie à la première option. La logique de la formule standard consiste à évaluer le SCR de manière modulaire (voir Figure 18). Le risque global de l'entreprise est divisé en risques de différentes natures : risque de marché, risque de défaut, risque de souscription en vie, en non-vie et en santé. S'agissant d'un produit d'épargne en euros, nous nous limiterons aux composantes relatives au risque de marché et au risque de souscription. La quantification de ces différents risques passe par une décomposition de deuxième niveau. L'évaluation globale du SCR nécessite ensuite l'agrégation des risques individuels, ce qui est fait à l'aide de matrices de corrélation.

FIGURE 18 : ARCHITECTURE DE LA FORMULE STANDARD¹⁶



¹⁶ Source : Spécifications techniques du QIS 5.

Au niveau d'un risque individuel, l'exposition au risque est mesurée par la variation de la valeur de l'actif net¹⁷ (ou NAV) consécutive à un choc d'une ampleur donnée, généralement calibrée pour correspondre à un quantile à 99,5%. A ce stade, nous disposons de tous les éléments pour établir le bilan prudentiel sous différentes conditions de marché. Il est donc en particulier possible de déterminer la variation de la valeur de l'actif net et de calculer le SCR selon les modalités de la formule standard telles que décrites dans les spécifications techniques de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5)¹⁸.

3.3.1. Risque de marché

La composante risque de marché comprend le risque de taux d'intérêt, le risque action, le risque immobilier, le risque de spread, le risque de change, le risque de concentration et le risque de liquidité. Nous ne sommes pas concernés par le risque de change car l'actif est intégralement investi dans des produits financiers libellés dans la même devise que les contrats. Le risque de spread n'est pas traité spécifiquement. Il est pris en compte au sein du module risque actions du fait de la surpondération de la part de l'investissement dans cette classe d'actifs, avec les problèmes que cela peut poser (voir paragraphe 2.3.1). Le risque de concentration ne peut être mesuré du fait de l'absence de modélisation ligne à ligne des actifs. La thématique de la prime d'illiquidité n'est pas abordée dans ce mémoire. Aussi, seuls le risque de taux, le risque action et le risque immobilier seront traités ici. Pour chacun des chocs, on a :

$$SCR_i = \max (NAV_{choc\ i} - NAV_{BE}, 0)$$

Où NAV correspond à la valeur de l'actif net et les chocs sont les suivants :

- 39% pour les actions, déduction faite d'un effet « dampener¹⁹ » de 9%, soit 30% de baisse,
- 25% de baisse pour l'immobilier,
- Une déformation de la courbe des taux à la baisse ou à la hausse telle que décrite par les spécifications techniques²⁰. Le choc finalement retenu est celui qui conduit au SCR le plus élevé.

¹⁷ Conformément à l'article SCR 1.3. de la directive, les calculs sont effectués hors marge de risque.

¹⁸ http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf

¹⁹ Le « dampener » a une fonction contracyclique. Il évolue annuellement en fonction de l'état de la conjoncture. Le chiffre de 9% est celui qui correspond à la situation économique lors du lancement du QIS5. Le pourcentage appliqué aujourd'hui serait peut-être différent.

²⁰ Voir SCR.5.21 page 111 des spécifications techniques du QIS5.

Les différentes composantes sont ensuite agrégées à l'aide de la formule suivante :

$$SCR_{marché} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \rho_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

La matrice de corrélation utilisée dépend du choc de taux retenu pour le calcul. Les matrices correspondant à chacune des deux situations sont les suivantes.

Baisse	Taux	Actions	Immobilier
Taux	1	0,5	0,5
Actions	0,5	1	0,75
Immobilier	0,5	0,75	1

Hausse	Taux	Actions	Immobilier
Taux	1	0	0
Actions	0	1	0,75
Immobilier	0	0,75	1

Dans notre exemple, les résultats obtenus sont les suivants :

	Actifs	Passifs	NAV ²¹	ΔNAV	ΔNAV(%)
Best estimate	10 000	9 236	764	-	0%
Choc taux baisse	10 490	9 429	1 061	296	39%
Choc taux hausse	9 422	8 718	704	-61	-8%
Choc action	9 100	8 756	344	-421	-55%
Choc immobilier	9 875	9 188	687	-77	-10%

Comme on pouvait s'y attendre, l'impact d'un choc baissier sur les actions et l'immobilier sur la valeur de l'actif net est défavorable. La capacité d'absorption de la participation aux bénéfices discrétionnaire compense le choc en partie seulement. L'impact est particulièrement fort dans le cas du choc action compte tenu de son poids élevé dans la politique de placement. En effet, comme indiqué à la partie 2.2.1, les actions ont été surpondérées dans le portefeuille à défaut d'une modélisation plus fine du risque de spread des obligations corporate.

L'impact d'un choc de taux haussier est défavorable. La moindre valeur de l'actif n'est pas intégralement compensée par celle du passif. A l'inverse, le choc joue en la faveur de

²¹ Hors marge de risque

l'assureur en cas de baisse des taux. On retient donc le choc de taux à la hausse et on utilise la matrice de corrélation correspondante pour l'agrégation.

3.3.2. Risque de souscription

La composante souscription du SCR se décompose elle-même en risque de révision, risque de mortalité, risque de longévité, risque d'invalidité, risque de rachat, risque de frais, et risque catastrophique. Dans le cas d'un produit d'épargne en euros, l'incertitude sur la durée de la vie humaine a un impact marginal. Le risque de révision est également négligeable. Aussi, nous nous limiterons aux composantes rachat et frais. Comme dans le cas du risque de marché, elles sont évaluées comme la variation de la valeur de l'actif net consécutive à un choc. Pour le sous-module « frais », il s'agit d'une augmentation des frais 10% en euros constant et d'un taux d'inflation majoré de 1% par rapport à l'hypothèse retenue pour le calcul du best estimate.

Le SCR rachat est évalué comme la plus élevée des variations de la valeur de l'actif parmi trois chocs sur le niveau de rachats :

$$SCR_{rachat} = \max(\Delta NAV_{up}, \Delta NAV_{down}, \Delta NAV_{mass})$$

Le choc à la hausse correspond à une augmentation du taux de rachat²² de 50% de sa valeur initiale dans la limite d'un taux de rachat après choc de 100%. Le choc à la baisse correspond à une baisse de moitié du taux de rachat dans la limite d'une baisse de 20 points de pourcentage. Le dernier choc correspond à une vague de rachat massif. Dans le cas de contrats individuels, le choc correspond à un taux de rachat de 30% la première année.

3.3.3. SCR global

Le calcul de la formule standard nous donne un SCR global de 577 unités monétaires, à comparer à des fonds propres Solvabilité II de 596, soit un taux de couverture de 103%. A titre de comparaison, avec une exigence de marge de 360 (correspondant à 4% des provisions mathématiques) et une marge constituée de 700 (fonds propres comptables et réserve de capitalisation), le taux de couverture sous Solvabilité I était de 194%.

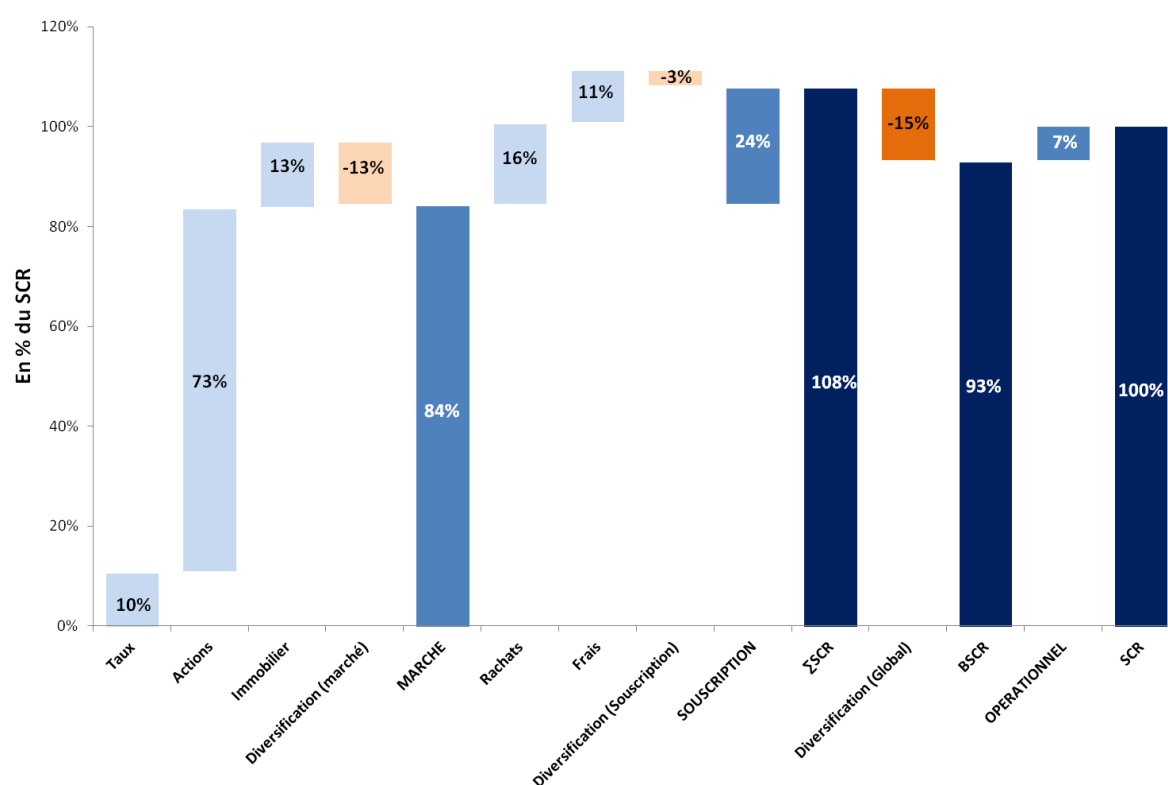
	« Fonds propres »	Capital réglementaire	Taux de couverture
Solvabilité I	700	360	194%
Formule standard	596	577	103%

²² Rachats structurels uniquement.

Dans notre exemple, le passage à Solvabilité induit une nette dégradation du taux de couverture. Ce résultat n'est pas une vérité absolue et dépend des caractéristiques du contrat (taux technique et taux de participation aux bénéfices) et des hypothèses de modélisation retenues (frais, stratégie d'allocation d'actifs). Dans notre exemple, l'assureur est notamment pénalisé par l'absence de plus-values latentes à l'origine qui auraient dopées ses fonds propres Solvabilité II, compensant ainsi en partie l'augmentation du capital réglementaire.

La figure suivante présente la contribution des différentes composantes du SCR. Il apparaît clairement que le risque de marché est prépondérant dans notre exemple, ce qui semble raisonnable dans le cas d'un contrat d'épargne en euros.

FIGURE 19 : DÉCOMPOSITION DU SCR CALCULÉ SELON LA FORMULE STANDARD



Remarquons finalement qu'il s'agit ici d'un calcul de SCR « stand alone » pour la seule activité d'épargne en euros. Un même assureur vie exerce en général différentes activités en plus de l'épargne en euros, comme les produits en unités de compte, l'assurance décès, les rentes viagères ou encore le remboursement de frais de santé (dans le cas d'une société mixte). Cela génère des bénéfices de diversification et peut faire baisser le capital de solvabilité imputable à l'activité d'épargne.

Partie 4 : CONSTRUCTION DU PORTEFEUILLE RÉPLICANT

Grâce aux travaux menés dans la partie précédente, nous disposons désormais d'un jeu de trajectoires de passif qui pourront servir de référence aux travaux de calibrage du portefeuille répliquant. Par calibrage, il faut ici entendre la détermination d'une liste d'actifs et d'une quantité pour chacun d'entre eux qui permet d'obtenir un portefeuille produisant des flux similaires à ceux du passif dans toutes les conditions de marché. Après avoir donné l'intuition du choix des actifs candidats à la réplication (paragraphe 4.1), nous expliciterons la méthodologie permettant de fixer les poids optimaux de ces différents actifs (paragraphe 4.2). Enfin, nous testerons la méthode en l'appliquant successivement à différents passifs de complexité croissante (paragraphe 4.3).

4.1. Choix des actifs candidats à la réplication

4.1.1. Exemple introductif

Dans un cadre simple, le comportement d'un passif d'assurance peut-être simplement répliqué par un portefeuille statique d'actifs pertinemment choisis. Nous l'illustrerons à travers la problématique du taux technique et de la participation aux bénéfices.

Prenons l'exemple d'un contrat qui, en l'échange d'un versement (prime) de 500 k€ aujourd'hui, garantit sur une période de 10 ans, un rendement annuel de 2% (intérêts techniques) assorti de 85% des sur-profits de l'assureur au-delà de 2% (participation aux bénéfices). Le contrat prend fin au bout des 10 ans, sans possibilité de sortie (ou rachat) anticipée. La prime est investie à 80% dans une obligation zéro coupon de 10 ans, rémunérée à 2,5% et à 20% en actions. Notons r_a le rendement des actions sur 10 ans. Le pay-off au bout de 10 ans pour l'assuré est donné par :

$$\text{Pay-off} = P (1 + 2\%)^{10} + 0,85 \times \max\left(0; \frac{4}{5} P (1 + 2,5\%)^{10} + \frac{1}{5} P (1 + r_a) - P (1 + 2\%)^{10}\right)$$

Soit, en posant S_t le cours des actions en t et en réarrangeant :

$$\text{Pay-off} = P (1 + 2\%)^{10} + 0,85 \frac{P}{5 S_0} \times \max(0; S_0 (1 + r_a) + 4 S_0 (1 + 2,5\%)^{10} - 5 S_0 (1 + 2\%)^{10})$$

Ou encore, en posant $Q = 0,85 \frac{P}{5 S_0}$ et $K = 5 S_0(1 + 2\%)^{10} - 4 S_0(1 + 2,5\%)^{10}$:

$$\text{Pay-off} = P (1 + 2\%)^{10} + Q \times \max(0; S_{10} - K)$$

On remarque que cela correspond au pay-off d'un portefeuille composé d'obligations zéro-coupon 10 ans à 2% pour un nominal de $P = 500$ k€ et d'un call sur actions européen de maturité 10 ans, de strike $K=97,46$ € et de nominal $Q = 0,85$ k€. Le tableau suivant présente une application numérique au bout de 10 ans dans les 3 cas suivants :

- Cas 1 : $r_a = 0$;
- Cas 2 : $r_a = + 50\%$;
- Cas 3 : $r_a = - 50\%$.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	
Actions (A)	100	125	75	$= 100 \times (1 + r_a)$
Obligations (B)	512,04	512,04	512,04	$= 400 \times (1+2,5\%)^{10}$
Total actif (C)	612,04	627,04	587,04	$= A + B$
Intérêts techniques (D)	609,50	609,50	609,50	$= 500 \times (1+2\%)^{10}$
Participation aux bénéfices (E)	2,16	23,41	0	$= \max ((C-D) \times 85\%, 0)$
Total assuré (F)	611,65	632,90	609,50	$= D + E$

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	
Obligations (G)	609,50	609,50	609,50	$= 500 \times (1+2\%)^{10}$
Call (H)	2,16	23,41	0	$= 0,85 \times \max (A-97,46 ; 0)$
Total réplcation (F)	611,65	632,90	609,50	$= G + H$

Dans cet exemple simple, il est donc possible de répliquer parfaitement les flux de passif par ceux issus d'un portefeuille statique d'actifs (stratégie de type « buy and hold ») pertinemment choisis : en l'occurrence une obligation zéro-coupon et un call. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, la valeur de deux instruments financiers générant les mêmes flux doit être identique. Or, une obligation et un call sont valorisables. On peut donc en déduire la valeur des passifs à tout instant.

Cela étant, comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, les mécanismes comptables et le comportement de l'assureur (allocation d'actifs, distribution de PB) et des assurés (rachats) vont introduire une distorsion entre la performance des actifs financiers et les flux de passif. Une réplcation statique par un portefeuille de produits financiers simples est de ce fait impossible. La méthode des portefeuilles réplcants conserve le principe d'une réplcation statique des passifs par un portefeuille d'actifs, mais elle remplace la réplcation exacte par un calibrage basé sur des méthodes statistiques. Cela permet d'obtenir la « meilleure » pondération des différents actifs du portefeuille réplcant selon un critère donné. Reste à déterminer l'univers d'actifs candidats retenus.

4.1.2. Choix et paramétrage des actifs candidats

Le principal intérêt de la méthode des portefeuilles répliquants est d'alléger les calculs en substituant un calcul analytique approché à une évaluation numérique par simulation. Un actif candidat à la réplication se doit donc d'être valorisable par une formule analytique (ou par un algorithme de calcul numérique rapide). Il est donc exclu de faire appel à des produits dérivés trop exotiques.

L'existence d'un marché suffisamment liquide est une autre caractéristique désirable d'un actif candidat. Intuitivement, on pourrait imaginer que la négociabilité de l'actif candidat permet l'usage du portefeuille répliquant à des fins de couverture. Une fois déterminée la composition du portefeuille répliquant, il suffirait d'investir l'actif dans un portefeuille ainsi composé pour obtenir une bonne couverture, ce qui réduirait le risque de marché au seul risque de base et donc les besoins en capital prudentiel. En pratique, la stratégie d'allocation d'actifs a un impact très significatif sur la distribution des passifs. La couverture à l'aide du portefeuille répliquant modifierait la stratégie d'allocation d'actifs, donc les passifs, rendant immédiatement caduque une réplication calibrée sur une autre distribution. Il faudrait alors recalibrer le portefeuille répliquant, puis modifier la couverture et ainsi de suite. Il n'est même pas certain que ce processus itératif converge. L'intérêt de la négociabilité est plutôt à chercher du côté de la valorisation du portefeuille. Il est en effet préférable d'avoir une valeur en « mark-to-market » plutôt qu'en « mark-to-model ». Ainsi, l'existence d'un marché liquide est une caractéristique souhaitable mais pas indispensable si l'objectif de la réplication est la valorisation des passifs et non leur couverture.

Nous avons ainsi retenu :

- Des contrats forward sur les indices action et immobilier pour une exposition à leur variations,
- Des options sur indices actions et immobilier pour refléter le caractère optionnel des engagements de l'assureur (participation aux bénéfices),
- Des zéros coupon pour la composante déterministe des flux,
- Des swaps en lien avec l'engagement de taux minimum de l'assureur,
- Des caps, des floors et des swaptions pour refléter la sensibilité des rachats aux variations des taux de marché.

S'il est souvent possible d'avoir l'intuition de la nature des actifs qui pourraient composer le portefeuille répliquant (zéro coupons, call, swaption, etc.), il est beaucoup plus délicat de fixer leurs caractéristiques (strike, maturité, etc.). Le plus souvent, une certaine variété de paramètres est retenue pour chaque actif. Le problème est alors traité à l'étape de calibrage du portefeuille répliquant par le biais de méthodes de régularisation (voir 4.2.2). Notons que l'automatisation du paramétrage des actifs candidats a fait l'objet d'un article

de Devineau et Chauvigny²³, qui proposent une réplique en deux temps. La première étape consiste à choisir les paramètres qui permettent de répliquer au mieux des facteurs de risque et la deuxième à utiliser les actifs candidats ainsi paramétrés dans le portefeuille répliquant à calibrer.

4.2. Calibrage des pondérations

4.2.1. Formulation du programme d'optimisation

Après avoir sélectionné les actifs candidats, reste à déterminer leurs pondérations respectives au sein du portefeuille répliquant. Le calibrage retenu sera celui qui permet d'obtenir la « meilleure » réplique. Il est donc nécessaire de définir un critère de qualité de la réplique, ce qui revient à formaliser un programme d'optimisation.

4.2.1.1. Réplique des passifs ou des marges

La méthode des portefeuilles répliquants est apparue pour résoudre le problème posé par la valorisation market consistant des passifs à horizon un an. Il est donc naturel de chercher à répliquer ces passifs pour lever cette difficulté. C'est en pratique l'approche la plus répandue. Cela étant, les passifs ne sont pas la variable d'intérêt dans le calcul du SCR. Ils constituent uniquement un intermédiaire de calcul pour obtenir les fonds propres. On pourrait donc imaginer répliquer directement les fonds propres, ce qui semble plus efficace au premier abord. Intuitivement, une erreur de 1% sur un passif de 100 M€ euros correspond à 1M€ en valeur absolue, soit une erreur de 20% sur des fonds propres de 5M€²⁴. Il serait donc plus pertinent de s'intéresser directement aux fonds propres à supposer que l'on puisse obtenir la même qualité de réplique. En pratique, les fonds propres peuvent être répliqués par un portefeuille composé d'une position longue sur les actifs de la compagnie et d'une position courte sur le portefeuille répliquant les passifs. La source d'erreur vient donc exclusivement des passifs et il n'y a pas de gain à attendre a priori d'une réplique des fonds propres. Les résultats obtenus par Camon et Amaro sur la réplique des fonds propres semblent aller dans ce sens. Nous retiendrons donc la réplique des passifs, plus lisible et plus naturelle.

4.2.1.2. Réplique des flux actualisés ou de leur valeur actuelle nette

Il existe deux approches principales : la réplique des flux (en valeur brute ou en valeur actuelle) et la réplique des valeurs actuelles nettes (VAN) de flux. La première consiste

²³ Devineau L., Chauvigny M., *Replicating Portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II*. 2010

http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/50/85/17/PDF/Devineau_Chauvigny_RP_03082010.pdf

²⁴ Voir Devineau et Chauvigny (2010) pour une preuve formelle.

à déterminer la pondération des différents actifs candidats de sorte que le portefeuille produise des flux proches de ceux du passif, période par période. La qualité de l'ajustement est mesurée par un critère de type moindres carrés ordinaires. Formellement, l'approche en termes de réplication de flux consiste à résoudre le programme d'optimisation suivant :

$$\min_{(w_1, \dots, w_L)} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(CF_P^i(t) - \sum_{l=1}^L w_l CF_{RP_l}^i(t) \right)^2$$

Où :

- $CF_P^i(t)$ est le flux de passif (prestations, frais, etc.) à la date t, dans la simulation i.
- $CF_{RP_l}^i(t)$ est le flux généré par l'actif l dans la simulation i à l'instant t.

L'information temporelle n'ayant plus d'importance à ce stade, nous pouvons simplement nous ramener au cadre classique des moindres carrés ordinaires à l'aide d'un indice unique :

$$\min_{(w_1, \dots, w_L)} \sum_{j=1}^{N \times T} \left(CF_P^j(t) - \sum_{l=1}^L w_l CF_{RP_l}^j(t) \right)^2$$

La deuxième approche s'intéresse uniquement à l'agrégat que constitue la VAN, laquelle est définie pour une chronique de flux donnée par : $VAN = \sum_{t=1}^H \delta(t) \cdot CF(t)$. Le programme d'optimisation est similaire à celui utilisé dans le cas de la réplication des flux :

$$\min_{(w_1, \dots, w_L)} \sum_{i=1}^N \left(VAN_P^i - \sum_{l=1}^L w_l \cdot VAN_{RP_l}^i(w_1, \dots, w_L) \right)^2$$

L'approche par les flux est beaucoup plus exigeante que l'approche en VAN puisqu'elle vise l'adéquation période par période. Pour ce faire, il faudra au moins un actif de chaque maturité. En pratique, il faudra sélectionner et paramétrer plusieurs actifs candidats par maturité. La multiplication du nombre d'actifs candidats rend nécessaire un nombre élevé de simulations actif-passif. A nombre de scénarios égal, la réplication est en général de meilleure qualité avec une réplication des VAN, c'est donc celle que nous retiendrons. La solution classique des moindres carrés ordinaires nous donne, avec l'écriture matricielle :

$$W = (VAN_{RP}' \cdot VAN_{RP})^{-1} \cdot VAN_{RP}' \cdot VAN_P$$

4.2.1.3. Améliorer la qualité de la réplication dans des conditions de marché adverses

Dans le contexte des portefeuilles répliquants, il est particulièrement important que la réplication donne des prédictions fiables dans des situations de marché extrêmement défavorables. Aussi, on peut ajouter au programme d'optimisation des contraintes de sensibilités, par exemple pour que le portefeuille répliquant se comporte de manière proche de celle du passif pour les scénarios correspondant à ceux de la formule standard. Cette démarche peut s'avérer insatisfaisante. Certes, l'introduction de ces contraintes permet de s'assurer que le comportement du portefeuille répliquant est satisfaisant dans certaines configurations. En revanche, en dehors de ces cas particuliers, la qualité de la réplication s'en trouve amoindrie. Il est donc possible que l'introduction de contraintes soit en pratique contre-productive pour le scénario correspondant au SCR.

Une alternative consiste à effectuer le calibrage sur un jeu de scénarios extrêmes et non sur des scénarios aléatoires. Enfin, on peut également affecter des pondérations plus élevées aux scénarios les plus défavorables. Ces méthodologies appellent deux remarques. D'abord, il est important de correctement identifier les scénarios dits adverses, qui correspondent à des situations où la valeur de l'actif net est faible voire négative. Il ne s'agit pas nécessairement de cas où les passifs sont élevés. A titre d'exemple, une simulation où le rendement des actifs est très fort conduira à des passifs élevés, grâce au mécanisme de la participation aux bénéfices, mais aussi à des fonds propres importants. Ensuite, il convient de distinguer la phase de calibrage du portefeuille répliquant sur des réalisations de passif et son utilisation à des fins de valorisation du best estimate dans un an. Être capable de répliquer correctement une ou plusieurs trajectoires défavorables de passif ne garantit nullement que le portefeuille répliquant ait une valeur proche du best estimate (approche en moyenne) dans des situations de marché défavorables.

Pour ces raisons, nous ne traiterons pas de manière spécifique les scénarios adverses. Nous vérifierons simplement que la réplication donne des résultats satisfaisants sur des scénarios défavorables et qu'elle donne une valeur cohérente sur les scénarios de la formule standard.

4.2.2. Résolution du programme d'optimisation

4.2.2.1. Difficultés liées à l'utilisation des moindres carrés ordinaires

Du fait de la complexité des passifs, un nombre important d'actifs peut être nécessaire pour obtenir une réplication efficace, en particulier sur les queues de distribution. Or, c'est justement sur les scénarios extrêmes que la réplication doit être la plus robuste dans un contexte de détermination du SCR. L'augmentation du nombre d'actifs candidats peut poser problème. D'abord, on risque d'introduire des actifs quasi-colinéaires, ce qui rend instable la solution classique des moindres carrés ordinaires du fait de la difficulté à

inverser la matrice « $VAN_{RP}' \cdot VAN_{RP}$ ». En particulier, cela peut conduire à des coefficients très élevés de signe opposé pour des actifs candidats colinéaires²⁵, alors que l'exposition nette au facteur de risque est faible. Cette compensation porte préjudice à la lisibilité du portefeuille répliquant. Ensuite, lors de l'utilisation du portefeuille répliquant à des fins de valorisation des passifs, la compensation pourra être imparfaite sur des scénarios autres que ceux utilisés lors du calibrage. La valeur absolue du coefficient peut conduire à des écarts très importants qui donnent une valeur du portefeuille répliquant aberrante.

Par ailleurs, l'augmentation du nombre d'actifs candidats peut conduire à un phénomène d'« overfitting » qui peut faire perdre à la réplification ses capacités prédictives sur un jeu de scénarios différents. Cela est particulièrement vrai lorsque le nombre de scénarios sur lequel le portefeuille répliquant est calibré est faible relativement au nombre de variables explicatives.

4.2.2.2. La régression PLS

Pour lutter contre les problèmes liés à la régression des moindres carrés, il existe des méthodes de régularisation comme la régression ridge, la régression sur composantes principales (ou PCR) et la régression PLS (pour « partial least squares »). La régression PLS obéit au même principe que la régression PCR, à savoir transformer la matrice des variables explicatives en une autre matrice dont les colonnes sont orthogonales entre elles. Cependant, alors que la régression PCR s'attache à expliquer au mieux la variance de la matrice des variables explicatives, la régression PLS s'intéresse à la covariance entre les variables explicatives (ici le portefeuille répliquant) et la variable à expliquer (ici les passifs). La régression PLS donne donc des résultats plus satisfaisants en termes de prédiction. Une présentation plus détaillée est fournie en annexe.

4.3. Application à différents passifs d'assurance vie

L'objet de cette partie est d'appliquer la méthode décrite aux paragraphes précédents à différents passifs correspondant à des portefeuilles d'épargne en euros. Comme l'a montré l'exemple introductif, il est possible de répliquer parfaitement certains passifs rudimentaires. En revanche, certaines subtilités du modèle ALM introduisent des distorsions entre les performances d'actifs financiers et la valeur du passif. Il peut s'agir de mécanismes comptables (provision pour dépréciation à caractère durable, réserve de capitalisation) ou d'algorithmes censés modéliser le comportement de l'assureur (dotation/reprise de la provision pour participation aux bénéfices, évolution de la stratégie d'allocation d'actifs) par exemple. La qualité de l'ajustement dépend donc fortement de la richesse du modèle ALM. La démarche naturelle consiste à introduire successivement

²⁵ Voir également Revelen (2009) pour ce point.

chacun de ces mécanismes pour évaluer la performance de la méthode en fonction des paramètres pris en compte. Nous renvoyons le lecteur intéressé vers le mémoire de Frédéric Amaro et Stéphane Camon. Nous nous contenterons ici de traiter le cas simple où l'actif est intégralement investi dans un portefeuille obligataire mais où tous les autres mécanismes sont pris en compte. Nous ferons ensuite de même avec un actif investi conformément à la stratégie décrite au paragraphe 2.3.1 comprenant, outre des obligations, des actions et de l'immobilier. Ces actifs ont la particularité d'être plus volatils et d'obéir à un traitement comptable très différent.

4.3.1. Contrat d'épargne en euros, actif investi à 100% en obligation

Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à une situation où l'actif est investi intégralement en obligations. Intuitivement, on s'attend dans ce cas à ce que l'actif soit moins volatil pour deux raisons. D'abord, l'écart type du prix d'une obligation est nettement inférieur à celui d'une action. Ensuite, le traitement comptable de cette classe d'actif au bilan d'un assureur (coût amorti, réserve de capitalisation, très rare dotation de provision pour dépréciation durable, absence de provision pour risque d'exigibilité) limite l'impact sur le résultat, et donc sur la participation aux bénéfices, d'éventuelles variations de la valeur des obligations. Par conséquent, le passif devrait lui aussi être relativement stable et soumis à un unique facteur de risque. La réplication devrait donc poser moins de difficultés qu'avec l'actif réel.

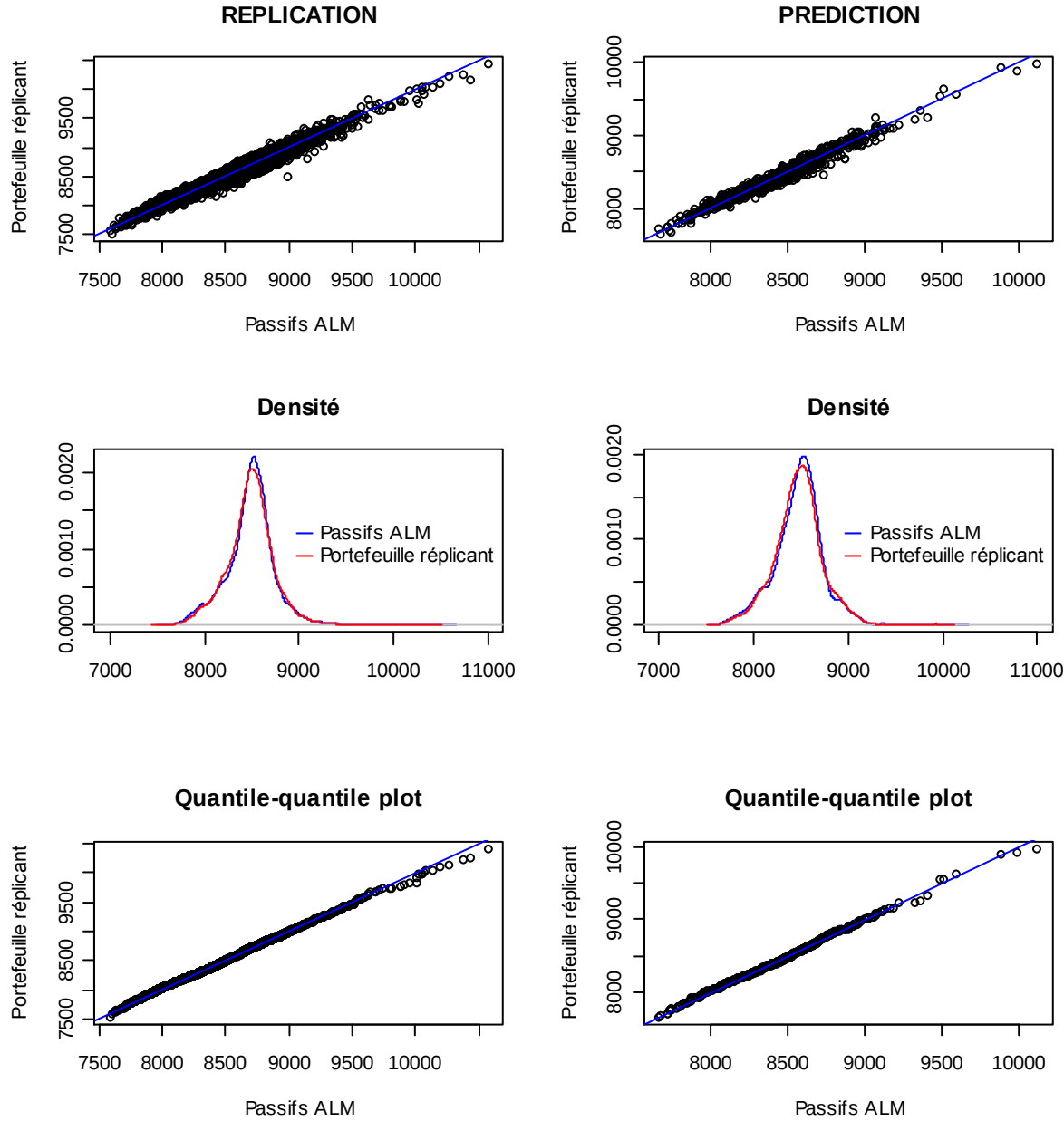
Le graphique suivant présente le résultat obtenu avec les actifs candidats permettant d'atteindre le résultat le plus satisfaisant, à savoir des zéro coupons et des swaptions receveuses (maturité du swap de 5 ans, différents strikes et maturités d'options). La colonne de gauche représente les performances du portefeuille répliquant sur 9 000 scénarios ayant servi au calibrage et la colonne de droite teste la qualité de la réplication sur 1 000 autres scénarios n'ayant pas été utilisés lors de cette première étape. L'objet de ce test sur d'autres scénarios est de s'assurer que nous ne sommes pas dans une situation de sur-réplication.

La première ligne correspond à un graphique des valeurs obtenues par réplication en fonction des valeurs de passif attendues. On souhaite donc que les points soient aussi alignés que possible sur la première bissectrice du plan. La deuxième compare la densité empirique des passifs et celle du portefeuille répliquant. Les deux courbes doivent avoir la même allure en cas de réplication de bonne qualité. Enfin, la troisième ligne est un quantile-quantile plot, c'est-à-dire les quantiles obtenus à partir de la densité du portefeuille répliquant en fonction de ceux du passif. Là encore, tous les points seraient alignés en cas de réplication parfaite. Notons que l'analyse du quantile-quantile plot est moins exigeante que le premier graphique puisqu'elle s'appuie sur les distributions, et non sur les valeurs prises isolément.

Cette série de graphiques est suivi d'un tableau qui contient le coefficient de détermination (ou R^2) obtenus sur les 9 000 scénarios de calibrage et les 1 000 autres scénarios. Plus le R^2 est proche de 1, plus la qualité de la réplique est bonne. Vient ensuite la p-valeur du test de Kolmogorov-Smirnov, un test d'adéquation de deux distributions. L'hypothèse nulle est que les deux échantillons proviennent d'une même loi. Aussi, plus la p-valeur est élevée, plus il est probable que les deux échantillons proviennent d'une même loi.

Enfin, l'écart en pourcentage de la valeur du portefeuille répliquant à la valeur du best estimate est calculé dans les scénarios correspondant aux chocs de la formule standard. Contrairement aux graphiques et aux tests précédents, on s'intéresse ici à la qualité du portefeuille répliquant utilisé à des fins de valorisation du best estimate, et non à la bonne réplique des flux. Bien sûr, on souhaite que cet écart soit aussi faible que possible.

FIGURE 20 : CALIBRAGE DU PORTEFEUILLE RÉPLICANT – ACTIF INVESTI EN OBLIGATIONS



	Calibrage	Prédiction
R ²	0,96	0,96
Kolmogorow-Smirnov (p-value)	1,79%	28,77%
Écart choc taux hausse	1,4%	
Écart choc taux baisse	0,1%	

L'analyse graphique ci-dessus montre que la réplique est de bonne qualité, tant sur les scénarios ayant servi au calibrage (première colonne) que les autres (deuxième colonne). Le portefeuille réplique donne des pay-off proches de ceux du passif pour la plupart des trajectoires risque neutre. Cela se manifeste par un bon alignement des points sur la première bissectrice dans les deux graphiques de la première ligne et par un R^2 élevé. Logiquement, cette bonne réplique des flux pris isolément se retrouve en termes de distribution. Le quantile-quantile plot est lui aussi bien aligné et les densités du passif et du portefeuille réplique sont proches l'une de l'autre. Le test de Kolmogorov-Smirnov donne des p-valeurs de 2% sur les scénarios de calibrage et de 21% sur les scénarios de test. Il est donc difficile de conclure sur ce seul test. En résumé, les éléments statistiques témoignent d'une réplique des flux de plutôt bonne qualité.

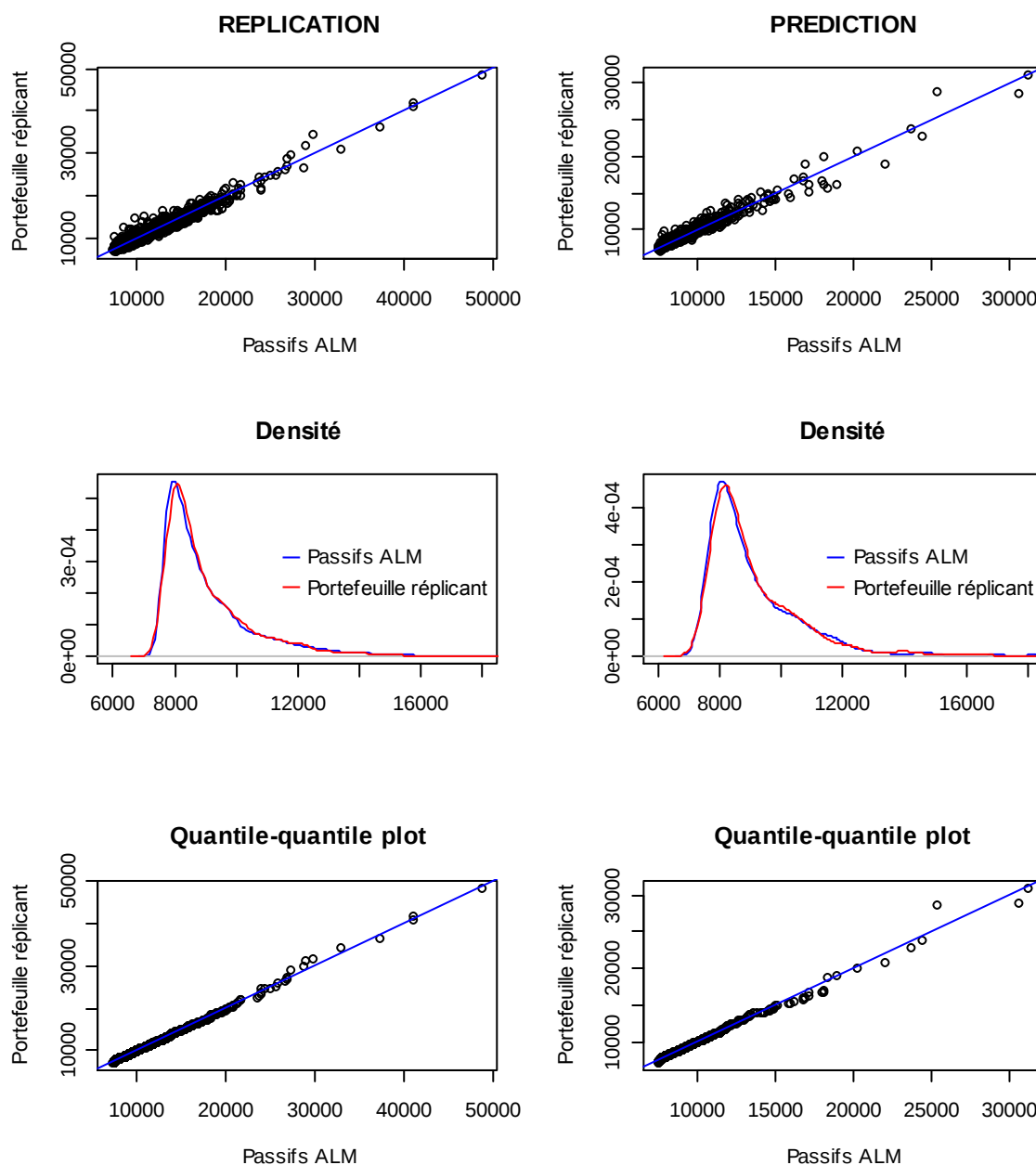
Les tests de valorisation sur les scénarios de la formule standard donnent en revanche des résultats moins satisfaisants. L'écart de la valeur du portefeuille réplique au best estimate est faible dans le cas du choc à la baisse des taux mais élevé dans le cas du choc à la hausse. Rappelons qu'un écart de l'ordre de 1% sur la valorisation des passifs peut avoir un impact de l'ordre de 15% sur l'estimation de la valeur de l'actif net. Ainsi, une réplique de bonne qualité semble ne pas garantir une valorisation cohérente dans d'autres conditions de marché.

4.3.2. Contrat d'épargne en euros, actif « réel »

Nous allons désormais tester la méthode avec les mêmes outils d'analyse dans le cas où l'actif est composé à la fois d'obligations, d'actions, d'immobilier et de monétaire. Cela est censé introduire une plus grande volatilité de l'actif à la fois financière (du fait de la nature des actifs) et comptable (du fait des mécanismes spécifiques aux actifs relevant de l'article R. 332-20). On s'attend donc à ce que les passifs soient également plus volatils et éventuellement plus difficiles à répliquer.

Nous présentons ci-dessous les résultats les plus satisfaisants. Ils ont été obtenus avec des zéro-coupons, des swaptions receveuses, des forwards sur action et immobilier, des puts et des calls sur action et des puts sur immobilier.

FIGURE 21 : CALIBRAGE DU PORTEFEUILLE RÉPLICANT – ACTIF RÉEL



	Calibrage	Prédiction
R ²	0,96	0,96
Kolmogorow-Smirnov (p-value)	0	0,21
Écart choc taux hausse	0,8%	
Écart choc taux baisse	3%	
Écart choc action	-0,7%	
Écart choc immobilier	-0,4%	
Écart choc taux hausse + action + immobilier	-0,1%	

Comme nous pouvions nous y attendre, la distribution du passif est nettement plus dispersée que dans le cas où l'actif est investi intégralement en obligations. Cela étant, la réplication semble encore d'assez bonne qualité. On constate un R^2 élevé, un bon alignement du quantile-quantile plot et de la représentation du portefeuille répliquant en fonction du passif. Les densités sont également assez similaires.

Dans le cas de l'actif réel comme dans le cas d'un actif investi en obligations, la qualité du portefeuille répliquant utilisé à des fins de valorisation du passif dans les conditions de chocs de la formule standard est décevante, avec des écarts à la valeur attendue pouvant atteindre 3%. Une réplication de bonne qualité a pu être obtenue avec d'autres actifs candidats mais le problème de valorisation perdure, éventuellement plus marqué pour l'un ou l'autre des chocs.

Cela appelle deux remarques qui remettent en question l'approche des portefeuilles répliquants dans un contexte de calcul du SCR :

- Une bonne réplication ne garantit en aucun cas un comportement satisfaisant du portefeuille répliquant lorsqu'il est utilisé à des fins de valorisation dans des conditions différentes à celles qui prévalaient lors du calibrage. Or, c'est précisément l'usage que l'on souhaite faire du portefeuille répliquant.
- Même une bonne performance du portefeuille répliquant comme outil de valorisation sur certains chocs prédéfinis n'est pas une condition suffisante pour valider la méthode. Par exemple, on aurait pu avoir un écart proche de zéro pour tous les chocs de la formule standard et un écart beaucoup plus élevé sur d'autres scénarios adverses non testés et donc ne pas voir les limitations de la méthode. Ici, l'écart est quasiment nul sur un choc global cumulant les trois chocs de la formule standard mais très élevé pour un choc de taux baissier.

Pour pallier cette difficulté, la solution consistant à introduire des contraintes de réplication de certains chocs n'est pas satisfaisante, parce que si la qualité de la réplication est améliorée en certains points, cela se fait aux dépens du reste de la distribution, éventuellement dans d'autres situations adverses. Un axe de réflexion consiste à calibrer le portefeuille répliquant non pas sur un jeu de scénarios pris au hasard mais sur des scénarios correspondant à une situation choquée (volatilité accrue, hausse des taux, baisse des actions, etc.) ou des scénarios sélectionnés a priori comme adverses. C'est notamment l'approche retenue par Camon et Amaro. Cela suppose d'abord d'être capable d'identifier a priori les scénarios adverses. Ensuite, même si le portefeuille répliquant se comporte correctement sur ces trajectoires prises une à une, la performance du portefeuille répliquant pour valoriser le best estimate n'est pas assurée. Enfin, si l'amélioration de la réplication sur les scénarios extrêmes se fait aux dépens des autres, cela peut conduire à ce que des scénarios peu risqués le deviennent du fait de l'erreur commise.

Partie 5 : ESTIMATION DU SCR PAR UTILISATION DU PORTEFEUILLE RÉPLICANT

Grâce aux travaux menés dans la partie précédente, nous disposons désormais d'un proxy permettant de valoriser le passif d'assurance. Nous pouvons déterminer simplement la valeur économique des fonds propres pour une configuration de marché par simple différence entre la valeur de marché de l'actif et la valeur de marché du portefeuille répliquant. A l'aide d'un générateur de scénarios économiques « monde réel », il est possible de projeter un grand nombre de trajectoires d'actifs sur un an pour disposer d'une distribution empirique des fonds propres (5.1). On en déduit une distribution de la variation des fonds propres en comparant cette distribution aux fonds propres initiaux précédemment déterminés (5.2). L'extraction de quantiles, et en particulier du SCR, est alors immédiate.

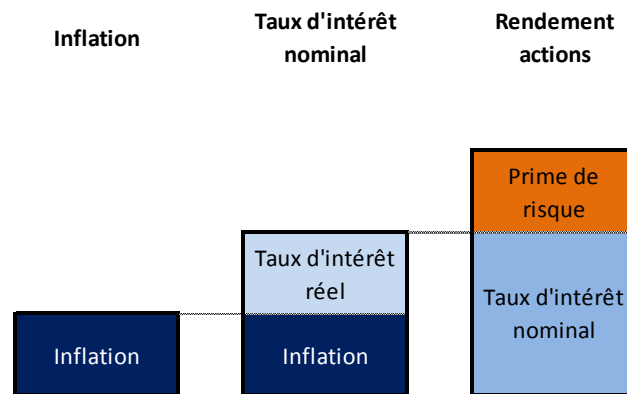
5.1. Modélisation risque historique des actifs

Parmi les différentes modélisations possibles²⁶, nous avons choisi de nous appuyer sur celle proposée par Ahlgrim, d'Arcy et Gorvett (2005) dans le cadre du groupe de travail commun de la *Casualty Actuarial Society* et de la *Society of Actuaries* en matière de modélisation financière appliquée à l'assurance. Elle est elle-même largement inspirée des travaux de Hibbert, Mowbray et Turnbull (2001).

Ahlgrim *et al.* retiennent une approche intégrée qui garantit une cohérence d'ensemble par rapport à un modèle composite. Le taux d'inflation est le socle de la modélisation. On l'additionne ensuite au taux d'intérêt réel pour obtenir le taux d'intérêt nominal. Enfin, en ajoutant la rentabilité des actions en excès du taux sans risque, on obtient finalement le taux de rendement des actions. Par ailleurs, la modélisation proposée permet d'intégrer une relation de dépendance entre les différentes variables par le biais de la corrélation linéaire, comme nous le verrons par la suite.

²⁶ On peut également citer le modèle de Wilkie cité en bibliographie.

FIGURE 22 : INFLATION, TAUX D'INTÉRÊT ET RENDEMENT ACTIONS



5.1.1. Taux d'intérêt

5.1.1.1. Inflation

Hibbert *et al.* retiennent un modèle de Hull et White à deux facteurs similaire à celui qui sera choisi pour les taux d'intérêt réels. Ahlgrim *et al.* lui préfèrent un simple processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dont l'équation différentielle stochastique est la suivante :

$$dq(t) = k_q (\mu_q - q(t)) dt + \sigma_q dW_q(t)$$

Avec :

$q(t)$ = le taux d'inflation instantané en t

μ_q = le niveau du retour à la moyenne

k_q = la force de rappel (coefficient autorégressif du processus de taux d'inflation)

σ_q = la volatilité annualisée (écart type) du taux d'inflation instantané

W_q = un mouvement brownien standard

Ce processus conduit à la discrétisation exacte suivante²⁷ :

$$q(t + \Delta t) = e^{-k_q \Delta t} \cdot q(t) + \mu_q (1 - e^{-k_q \Delta t}) + \sigma_q \varepsilon_{q,t} \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_q \Delta t}}{2k_q}}$$

Avec :

t = la date exprimée en année

Δt = le pas de discrétisation

$\varepsilon_{q,t} \sim N(0,1)$

²⁷ Voir par exemple Planchet, Thérond et Jacquemin (2005), page 168 et 169.

La version discrète de cette modélisation est donc simplement d'un processus autorégressif d'ordre 1, ce qui s'avère notamment utile lors de l'estimation des paramètres, puisque la version discrète du processus est de la forme (pour un pas de discrétisation annuel) :

$$q_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 \cdot q_t + \varepsilon$$

On a alors :

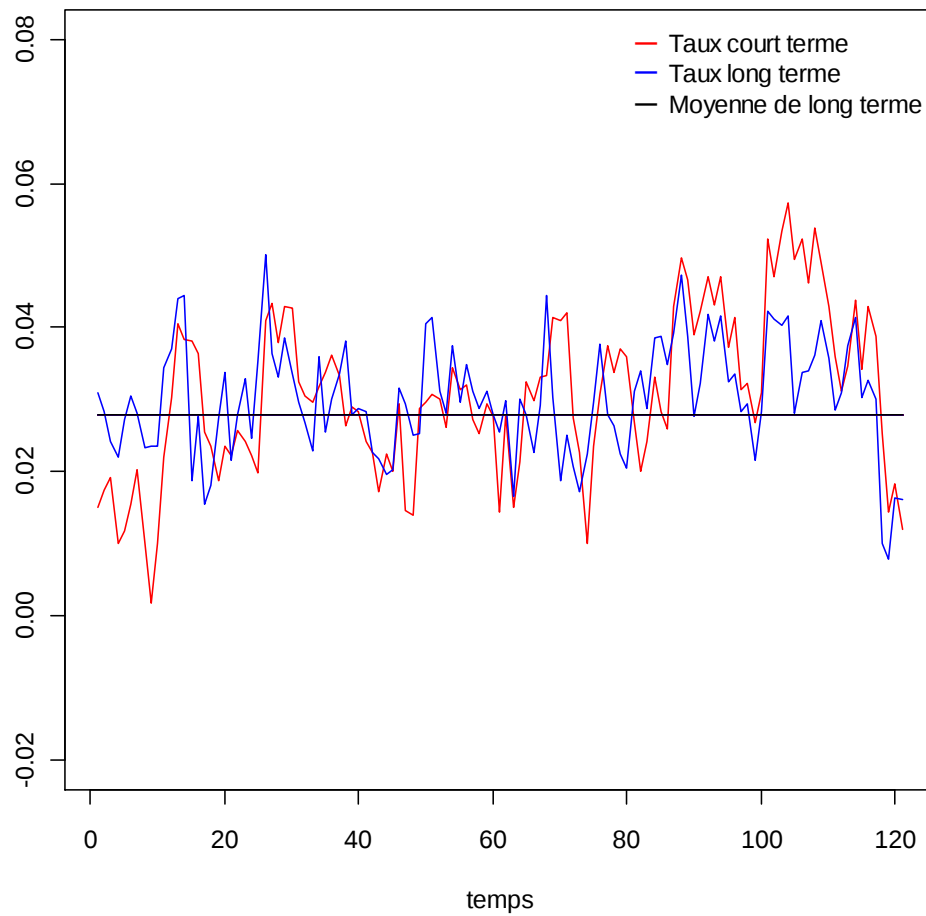
$$\begin{aligned}\widehat{k}_q &= -\ln(\widehat{\beta}_1) \\ \widehat{\mu}_q &= \frac{\widehat{\beta}_0}{1 - e^{-\widehat{k}_q}} \\ \widehat{\sigma}_q &= \frac{\widehat{\sigma}_\varepsilon}{\sqrt{\frac{1 - e^{-2\widehat{k}_q}}{2\widehat{k}_q}}}\end{aligned}$$

Avec $\widehat{\beta}_0$, $\widehat{\beta}_1$, et $\widehat{\sigma}_\varepsilon$ les estimations de β_0 , β_1 et σ_ε obtenues à partir des estimateurs du maximum de vraisemblance.

5.1.1.2. Taux d'intérêt réel

Le taux d'intérêt réel est modélisé comme un cas particulier du modèle de Hull et White à deux facteurs. Le taux d'intérêt réel court terme est supposé suivre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec retour à la moyenne, où la moyenne (le taux d'intérêt à long terme) est elle-même modélisée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Le taux court oscille donc autour du taux long qui oscille autour d'une moyenne de long terme. La figure suivante donne une trajectoire de processus ainsi modélisés.

FIGURE 23 : EXEMPLE DE TRAJECTOIRE D'UN PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK À DEUX FACTEURS



Les équations différentielles stochastiques correspondant à cette modélisation sont les suivantes :

$$\begin{aligned} dc(t) &= k_c(l(t) - c(t))dt + \sigma_c dW_c(t) \\ dl(t) &= k_l(\mu_l - l(t))dt + \sigma_l dW_l(t) \end{aligned}$$

Avec :

$c(t)$ = le taux d'intérêt réel à court terme instantané en t

$l(t)$ = le taux d'intérêt réel à long terme instantané en t

μ_l = le niveau de retour à la moyenne du taux d'intérêt réel de long terme

k_c = la force de rappel pour le taux à court terme

k_l = la force de rappel du taux d'intérêt réel à long terme

σ_c = la volatilité annualisée (écart type) du taux court réel

σ_l = la volatilité annualisée (écart type) du taux long réel

W_c = un mouvement brownien standard

W_l = un mouvement brownien standard distinct de B_c

On en déduit la discrétisation exacte suivante :

$$c(t + \Delta t) = e^{-k_c \Delta t} \cdot c(t) + l(t)(1 - e^{-k_c \Delta t}) + \sigma_c \varepsilon_{c,t} \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_c \Delta t}}{2k_c}}$$

$$l(t + \Delta t) = e^{-k_l \Delta t} \cdot l(t) + \mu_l(1 - e^{-k_l \Delta t}) + \sigma_l \varepsilon_{l,t} \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_l \Delta t}}{2k_l}}$$

En retranchant $c(t)$ aux deux membres de la première équation, il vient :

$$c(t + \Delta t) - c(t) = (l(t) - c(t))(1 - e^{-k_c \Delta t}) + \sigma_c \varepsilon_{c,t} \sqrt{\frac{1 - e^{-2k_c \Delta t}}{2k_c}}$$

Avec un pas annuel, on a alors :

$$\Delta c_{t+1} = \alpha_1 \cdot (l_t - c_t) + \varepsilon_\alpha$$

$$l_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 \cdot l_t + \varepsilon_\beta$$

On peut alors estimer les paramètres de ce modèle par deux moindres carrés simples et on obtient :

$$\widehat{k}_l = -\ln(\widehat{\beta}_1)$$

$$\widehat{\mu}_l = \frac{\widehat{\beta}_0}{1 - e^{-\widehat{k}_l}}$$

$$\widehat{\sigma}_l = \frac{\widehat{\sigma}_{\varepsilon_\beta}}{\sqrt{\frac{1 - e^{-2\widehat{k}_l}}{2\widehat{k}_l}}}$$

$$\widehat{k}_c = -\ln(1 - \widehat{\alpha}_1)$$

$$\widehat{\sigma}_c = \frac{\widehat{\sigma}_{\varepsilon_\alpha}}{\sqrt{\frac{1 - e^{-2\widehat{k}_c}}{2\widehat{k}_c}}}$$

5.1.1.1. Obligations zéro coupons

Hibbert *et al.* s'appuient sur la relation d'Irving Fisher²⁸ :

$$R_{nominal}(t, T) = R_{réel}(t, T) + R_{inflation}(t, T)$$

Avec :

$R_{nominal}(t, T)$ = le taux nominal à composition continue anticipé entre t et T

$R_{réel}(t, T)$ = le taux d'intérêt réel à composition continue anticipé entre t et T

$R_{inflation}(t, T)$ = le taux d'inflation à composition continue anticipé entre t et T

On en déduit simplement :

$$\exp(-R_{nominal}(t, T)) = \exp(-R_{réel}(t, T)) \cdot \exp(-R_{inf}(t, T))$$

D'où :

$$P_{nominal}(t, T) = P_{réel}(t, T) \cdot P_{inf}(t, T)^{29}$$

Avec :

$P_{nominal}(t, T)$ = le prix en t d'une obligation zéro-coupon qui paye 1€ en T

$P_{réel}(t, T)$ = le prix en t d'une obligation zéro-coupon qui paye 1€ en T, dont le flux est actualisé en utilisant la structure par terme des taux d'intérêt réels anticipés

$P_{inf}(t, T)$ = le prix en t d'une obligation zéro-coupon qui paye 1€ en T, dont le flux est actualisé en utilisant la structure par terme des taux d'inflation anticipés

Hull donne une formule fermée pour calculer $P_{inf}(t, T)$ dans le cas où l'inflation suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck³⁰ :

$$P_{inf}(t, T) = A_{inf}(T - t) \cdot \exp(-B_{inf}(T - t) \cdot q(t))$$

Avec :

$$A_{inf}(s) = \exp\left(\frac{(B_q(s) - s)(k_q^2 \cdot \mu_q - \sigma_q^2/2)}{k_q^2} - \frac{\sigma_q^2 \cdot B_q(s)^2}{4k_q}\right)$$

$$B_{inf}(t, T) = \frac{1 - \exp(-k_q \cdot s)}{k_q}$$

²⁸ La spécification de ce modèle ne garantit pas que les taux d'intérêts nominaux simulés soient systématiquement positifs. Cet effet indésirable est traité en fixant une borne inférieure pour les taux d'intérêts nominaux à 0,001%.

²⁹ Hibbert *et al.* montrent que dans le cas où les taux d'intérêts réels et les taux d'inflation ne sont pas indépendants, un terme correctif doit être ajouté. Nous le négligerons ici.

³⁰ Hull J., *Options, futures and other derivatives – Fifth edition*, Prentice Hall. 2002. Page 540.

Hibbert *et al.* donnent une formule de valorisation lorsque le modèle sous-jacent est un processus de Hull et White à deux facteurs, ce qui est le cas du taux d'intérêt réel :

$$P_{réel}(t, T) = \exp(A_{réel}(T - t) - B_{réel 1}(T - t) \cdot c(t) - B_{réel 2}(T - t) \cdot l(t))$$

Avec :

$$\begin{aligned} B_{réel 1}(s) &= \frac{1 - \exp(-k_c \cdot s)}{k_c} \\ B_{réel 2}(s) &= \frac{k_c}{k_c - k_l} \left(\frac{1 - \exp(-k_l \cdot s)}{k_l} - \frac{1 - \exp(-k_c \cdot s)}{k_c} \right) \\ A_{réel}(s) &= (B_{réel 1}(s) - s) \cdot \left(\mu_l - \frac{\sigma_c^2}{2k_c^2} \right) + B_{réel 2}(s) \cdot \mu_l - \frac{\sigma_c^2 \cdot B_c(s)^2}{4k_c} \\ &+ \frac{\sigma_l^2}{2} \cdot \left(\frac{s}{k_l^2} - \frac{2 \cdot (B_{réel 1}(s) + B_{réel 2}(s))}{k_l^2} + \frac{1 - \exp(-2k_c \cdot s)}{2k_c \cdot (k_c - k_l)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2k_c \cdot (1 - \exp(-(k_c + k_l) \cdot s))}{k_l \cdot (k_c + k_l) \cdot (k_c - k_l)^2} + \frac{k_c^2 \cdot (1 - \exp(-2k_l \cdot s))}{2k_l^3 \cdot (k_c - k_l)^2} \right) \end{aligned}$$

5.1.1. Autres variables

Ahlgrim *et al.* reprennent les choix de modélisation de Hibbert *et al.* pour la rentabilité des actions. Ils la décomposent en deux éléments : les gains liés à l'appréciation de la valeur boursière des actions et le versement de dividendes. Ils modélisent les deux composantes différemment et séparément. Faute de série de données publiques disponibles sur les dividendes, nous retiendrons l'approche de Planchet *et al.* qui modélisent l'excès de rendement avec dividendes réinvestis. De même, pour le rendement en excès du taux sans risque, nous retiendrons le modèle de Black et Scholes plutôt qu'un modèle à changement de régime tel que celui proposé par Hardy et retenu par Ahlgrim *et al.* Cette modélisation, et ses principaux défauts ont été décrits à la partie 2.1.2.1.

Le modèle retenu pour l'immobilier est identique que celui du taux d'inflation (voir partie 5.1.1.1), à savoir un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

En toute rigueur, il serait nécessaire de modéliser, en plus des variables économiques d'intérêt, la dynamique des paramètres des modèles utilisés lors de la détermination du best estimate sous la probabilité risque neutre. Il s'agit en particulier des paramètres de force de retour à la moyenne, de la volatilité du modèle de taux et la volatilité des modèles action, lesquels évoluent dans le temps et sont différents des paramètres monde réel. Ces paramètres sont nécessaires, que ce soit pour réaliser un calcul de type simulation dans les simulations ou pour valoriser le portefeuille répliquant. En effet, ces paramètres risque neutre sont des intrants des formules de valorisation des actifs composant le portefeuille répliquant. Afin de modéliser correctement la dynamique de ces variables risque neutre, il faudrait d'abord postuler un modèle de diffusion. Il serait

ensuite possible d'estimer les paramètres de la dynamique des variables à l'aide de méthodes classiques d'analyse des séries temporelles. Le problème qui se pose alors est l'absence de série de données historiques, notamment pour les paramètres du modèle de taux. Il serait nécessaire, au préalable, de reconstituer la série historique du paramètre risque neutre en itérant les travaux de calibrage à partir des prix de marché passés des caps ou des swaptions. Dans le cas du modèle action, l'existence d'une série historique sur la volatilité action évite d'avoir à reconstituer les données. Notons en particulier qu'une modélisation stochastique de la volatilité des actions permettrait de prendre en compte le risque d'un choc de volatilité. En effet, comme nous l'avons indiqué précédemment, la valeur de la composante optionnelle des passifs d'assurance augmente avec la volatilité des sous-jacents dans lesquels est investi l'actif. La hausse de la volatilité représente donc un risque pour l'assureur qui n'est pas pris en compte dans la formule standard mais qui peut être intégré dans un modèle interne.

En première analyse, nous supposerons que les paramètres risque neutre du modèle de taux, du modèle action et du modèle immobilier sont constants et ne varient pas en fonction de la trajectoire monde réel.

5.1.1. Calibrage

Le modèle retenu est fonction de différents paramètres qui doivent être fixés soit par estimation statistique sur la base de séries historiques, soit de manière discrétionnaire en fonction de l'avis d'experts. Nous retiendrons la première solution qui présente l'avantage de l'objectivité, au risque d'être insuffisamment prospective. La principale difficulté est le choix de l'amplitude de la série de données retenue. Elle est d'abord conditionnée par l'existence même d'un historique de données disponible et de bonne qualité. En l'absence de telle contrainte, une série longue confère de la robustesse à l'estimation et permet de s'assurer en particulier que l'intégralité du cycle économique est prise en compte. Une série courte permettra de se focaliser sur des données récentes, plus susceptibles de refléter les conditions qui prévaudront dans les années immédiatement postérieures. Aussi, notre calibrage³¹ est basé sur une version actualisée des données de Friggit pour la France citées par Planchet, Thérond et Kaméga sur une plage de 25 ans entre 1985 et 2009.

³¹ L'outil utilisé pour le calibrage est celui proposé par Planchet et al. disponible sur le site www.ressources-actuarielles.net

Les variables sont estimées à l'aide de la méthodologie décrite dans les parties 5.1.1.1 et 5.1.1.2. On obtient les estimations et les valeurs initiales suivantes :

Inflation	q_0	2,1%
	k_q	0,56
	μ_q	1,76 %
	σ_q	1,01%
Taux réels	c_0	1,00% - 2,1%
	k_c	0,13
	σ_c	1,27 %
	l_0	3,75% - 2,1%
	k_l	0,16
	μ_l	3,75%
	σ_l	0,88%
Immobilier	im_0	11%
	k_{im}	0,12
	μ_{im}	1,6%
	σ_{im}	3,70%
Actions	μ_S	4,02%
	σ_S	20,21%

5.1.2. Corrélation entre les variables

Nous modélisons la dépendance entre nos différents processus de manière linéaire à l'aide de la matrice de corrélation estimée, notée Σ . Afin de prendre en compte la relation de dépendance des trajectoires de variables économiques dans la simulation Monte Carlo, nous avons recours à la décomposition de Cholesky. Cette méthode consiste à transformer notre matrice de covariance Σ , symétrique et définie positive, en un produit d'une matrice triangulaire supérieure C et de sa transposée C^T :

$$\Sigma = C \cdot C^T$$

On peut montrer que si Σ est symétrique et définie positive, C existe. Si on impose que les coefficients diagonaux de C soit positifs, on a par ailleurs l'unicité. A partir de cette matrice C et d'un vecteur de variables aléatoires ε_{NC} non corrélées, on obtient un vecteur de variables corrélées ε_C de la manière suivante :

$$\varepsilon_C = \varepsilon_{NC} \cdot C$$

Le SCR s'appuie sur un quantile extrême (99,5%) de la distribution des fonds propres à horizon un an. Il est donc important de modéliser correctement les relations de

dépendance sur les queues de distribution. Une amélioration possible du modèle consisterait alors à intégrer des relations de dépendance non linéaires à l'aide de copules non gaussiennes³².

5.2. Détermination du SCR à l'aide du portefeuille répliquant

Grâce au générateur de scénarios économiques « monde réel », nous disposons d'un ensemble d'états de la nature à horizon un an. Il nous suffit désormais de valoriser actif et passif sur chaque trajectoire pour obtenir une distribution empirique de la valeur de l'actif net dans un an, de l'actualiser, puis d'en extraire le quantile. La comparaison aux fonds propres de départ nous permet finalement d'obtenir le SCR. Si la valorisation de l'actif est immédiate, la valorisation du passif par le biais du portefeuille répliquant ne pose pas de problème particulier. Par construction, chaque actif qui le compose est valorisable analytiquement en fonction de ses propres caractéristiques (maturité résiduelle³³, strike, nominal, etc.) et des paramètres de marché (volatilité, prix du sous-jacent, courbe des taux, etc.). Les formules de valorisation correspondent aux modèles retenus dans le cadre du générateur de scénarios économiques risque neutre et sont consultables en annexe. Nous réaliserons ce travail dans les deux configurations traitées lors de la partie précédente, à savoir dans le cas d'un actif investi exclusivement en obligations souveraines (5.2.1), et pour une stratégie d'allocation d'actifs telle que décrite au paragraphe 2.3.1 (5.2.2).

Mise en garde : Du fait des limitations de la méthode des portefeuilles répliquant mentionnées précédemment, les résultats obtenus dans cette partie sont présentés pour mener le raisonnement à son terme, mais sont difficilement interprétables.

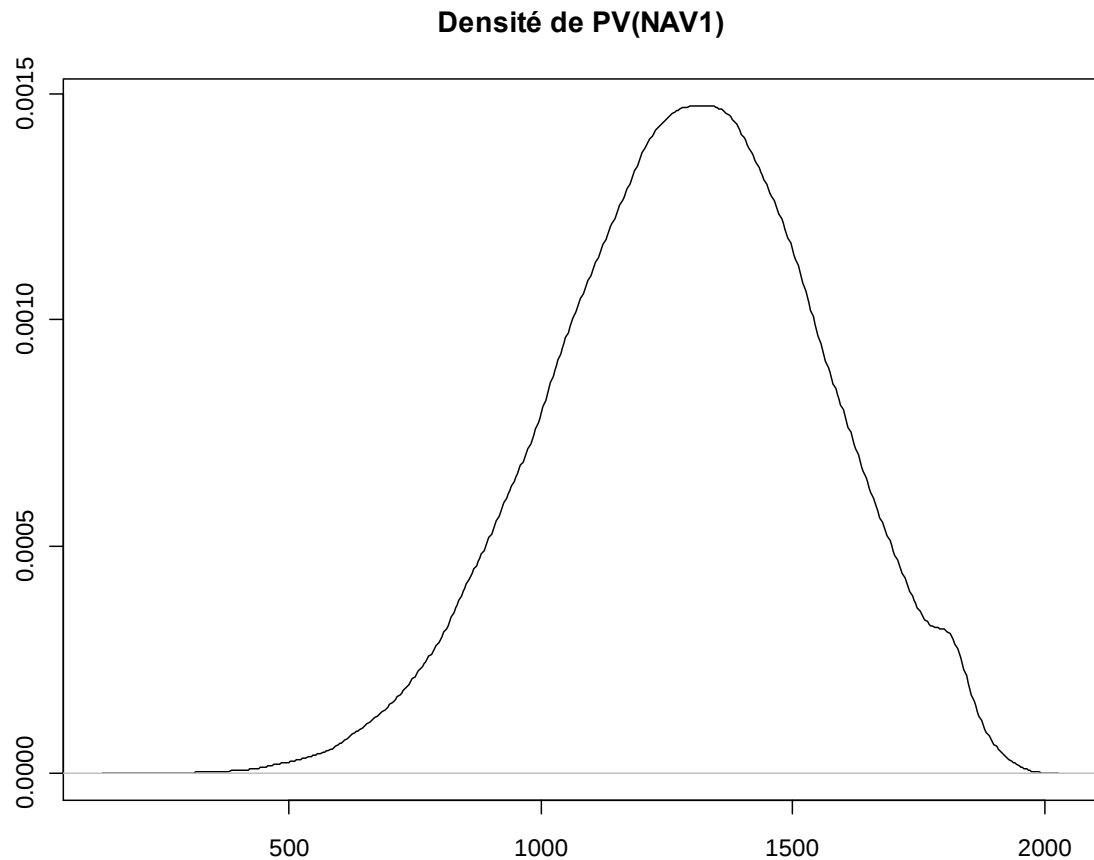
5.2.1. Contrat d'épargne en euros, actif investi à 100% en obligation

Le graphique suivant présente la distribution empirique de la valeur actualisée de l'actif net, dans le cas où l'actif est investi intégralement en obligations. La valeur de l'actif net est définie comme la différence entre la valeur de marché de l'actif et la valeur économique des passifs. La valeur de marché du portefeuille répliquant est utilisée comme approximation de la valeur économique des passifs dans une simulation donnée. La valeur de l'actif net est ensuite actualisée, trajectoire par trajectoire, pour obtenir la distribution ci-dessous pour 100 000 simulations.

³² Voir en particulier : Armel K., *Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques : Modélisation et simulation*, Mémoire d'actuariat. 2010.

³³ On pensera en particulier à réduire d'un an la maturité des actifs entre le moment de la calibration et de la valorisation.

FIGURE 24 : DENSITÉ DE LA VALEUR DE L'ACTIF NET ACTUALISÉE (ACTIF INVESTI EN OBLIGATIONS)



A partir de cette distribution, nous pouvons extraire le SCR correspondant au risque de marché à l'aide de la formule suivante où δ est le facteur d'actualisation défini par $\delta = \exp\left(-\int_0^1 r_t \cdot dt\right)$:

$$SCR = NAV_0 - VAR_{99,5\%}(NAV_1 \cdot \delta)$$

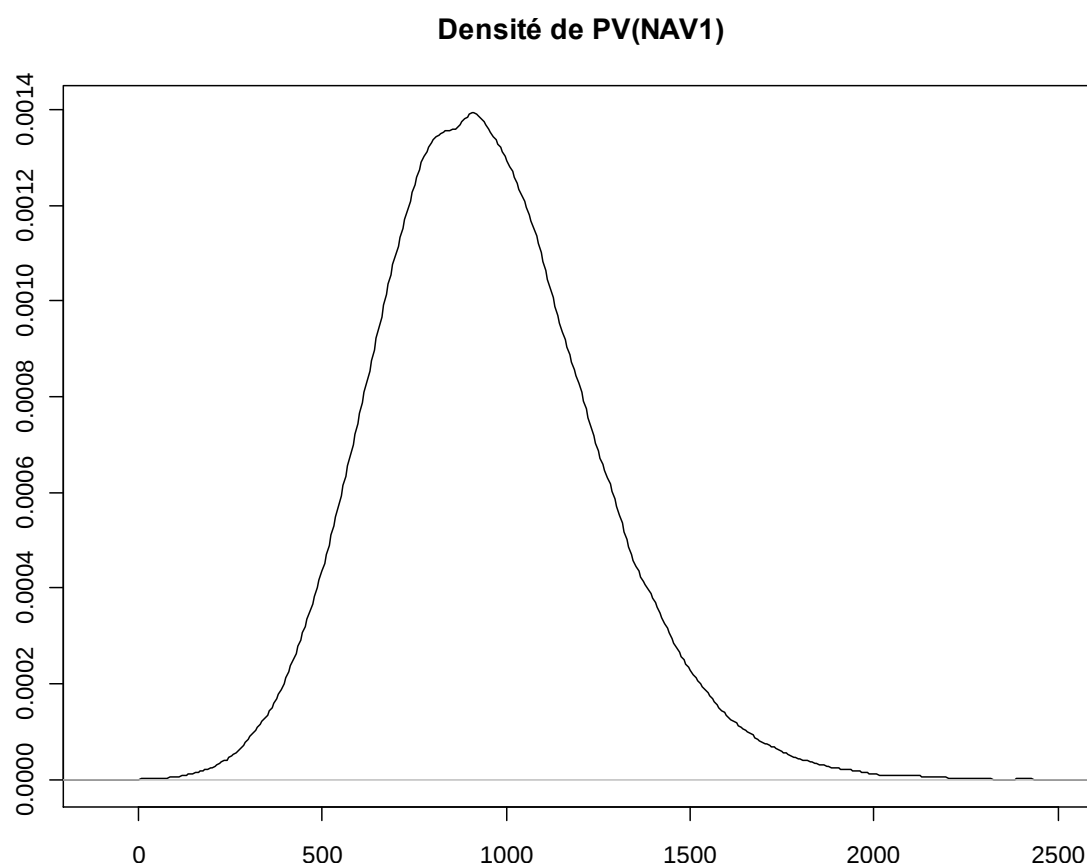
On obtient un quantile à 99,5% de la valeur de l'actif net actualisée de 593, ce qui pour une valeur de l'actif net initiale de 1511 (hors marge de risque) correspond à un SCR marché de 918. Le résultat obtenu est nettement plus élevé que celui obtenu avec la formule standard (449). Plusieurs explications peuvent être avancées :

- les piètres performances du portefeuille répliquant en cas de hausse des taux précédemment évoquées ;
- un calibrage retenu pour le processus de taux plus défavorable que celui de la formule standard ;
- une hausse des taux en moyenne par rapport à la situation en $t=0$, et donc un choc de taux plus marqué que s'il avait été instantané.

5.2.2. Contrat d'épargne en euros, actif réel

Nous renouvelons désormais l'exercice lorsque l'actif est investi dans l'actif réel tel qu'il a été décrit dans la deuxième partie.

FIGURE 25 : DENSITÉ DE LA VALEUR DE L'ACTIF NET (ACTIF RÉEL)



Comme attendu, la densité empirique de la valeur actuelle de l'actif net est plus dispersée que dans le cas de l'actif investi en obligation. Cependant, le SCR obtenu est plus faible. Avec un quantile à 99,5% de 281 contre une valeur de l'actif net de 764 initialement, on obtient un SCR marché de 483. Ce résultat est très proche du résultat obtenu dans le cas de la formule standard (485) mais il s'agit ici d'un cas fortuit, correspondant à la conjugaison de plusieurs effets :

- le risque de taux est sans doute moins marqué comme nous avons pu le constater dans le cas de l'actif investi en obligations ;
- le risque actions est modélisé de manière sans doute moins défavorable, grâce notamment à un drift de 4% ;
- l'effet de diversification entre actions et immobilier est plus fort du fait d'une corrélation plus faible (0 contre 0,75) ;
- l'erreur introduite par la réplcation fausse également l'analyse.

CONCLUSION

Ce mémoire a été l'occasion de dérouler l'ensemble de la chaîne d'opérations permettant de calculer l'exigence en capital réglementaire relative au risque de marché d'un portefeuille de contrats d'épargne en euros dans le nouveau référentiel prudentiel européen, Solvabilité II. La contrepartie logique de la grande diversité de sujets abordés a été un traitement moins approfondi de chacune des composantes prises individuellement. Le modèle développé constitue une trame qui pourra être enrichie au fil du temps par un travail ponctuel sur un module particulier. Une attention toute particulière devra être apportée aux composantes les moins satisfaisantes à ce stade :

- La modélisation risque neutre du taux d'intérêt : la modélisation retenue dans le cadre de ce mémoire permet un traitement cohérent de la calibration sur la base de produits financiers, de la projection de trajectoires risque neutre et de la valorisation des actifs du portefeuille répliquant. Sa simplicité et surtout la possibilité d'aboutir à des taux négatifs la rendent cependant inappropriée dans ce contexte. Une alternative consisterait à distinguer un modèle de projection et un modèle éventuellement plus simple de valorisation d'actifs.
- La modélisation du risque de crédit des obligations d'entreprise : à ce stade, elle a été traitée via une surpondération des actions dans la stratégie d'allocation d'actifs. S'il s'agit d'une première approche éventuellement acceptable d'un point de vue financier, cela n'est pas le cas en termes comptables, tant le traitement des actifs relevant des articles R. 332-19 et R. 332-20 est différent. La qualité de la répliquant aurait très vraisemblablement été impactée par l'introduction de cette nouvelle classe d'actifs. Par ailleurs, les événements récents tendent à montrer qu'une prise en compte du risque de crédit souverain, bien que non pris en compte dans la formule standard, soit également nécessaire.
- La prise en compte du risque de volatilité : Ce mémoire a mis en lumière le caractère optionnel des passifs d'épargne en euros, dont la valeur augmente avec la volatilité de l'actif représentant les engagements. Dès lors, l'augmentation de la volatilité présente un risque qu'une compagnie d'assurance doit pouvoir mesurer. Dans le cadre de ce mémoire, cela consisterait par exemple à rendre stochastique le paramètre de volatilité des actions, qui sert d'intrant à la valorisation du portefeuille répliquant.

Plus généralement, ce mémoire a mis en lumière la difficulté de l'exercice consistant à évaluer le risque de marché à l'aide d'un modèle interne lorsque actif et passif sont étroitement imbriqués mais avec des mécanismes de transmission complexes, comme c'est le cas de l'épargne en euros en France (comptabilisation au coût amorti avec dépréciation, provisions pour participation aux bénéfices, etc.). Face aux problèmes opérationnels rendant impossible la mise en œuvre de la méthode des simulations dans les

simulations, les portefeuilles répliquants constituent sur le papier une alternative intéressante. Mais cette méthode présente elle-même de nombreuses limitations :

- Bien que non abordé en détail dans ce mémoire, le choix et le paramétrage des actifs candidats conditionnent la qualité de la réplication. Or, ces aspects sont en général à la discrétion de l'actuaire, ce qui peut s'avérer fastidieux et imparfait. Les travaux consistant à formaliser, voire à automatiser cette étape apparaissent comme un axe de recherche préalable au déploiement de la méthode en production.
- Si les travaux de calibrage peuvent conduire à des résultats relativement satisfaisants, la méthode s'avère beaucoup moins robuste lorsque le portefeuille répliquant est utilisé pour valoriser le best estimate. Un comportement similaire du passif et du portefeuille répliquant dans un environnement de marché donné ne garantit en aucune manière que cette propriété soit vérifiée dans d'autres configurations. Or c'est précisément ce qui est souhaité en cas d'utilisation pour calculer le SCR. Pour confirmer ce point un calcul référence de type simulations dans les simulations serait nécessaire. A défaut de le réaliser pour toutes les trajectoires, une première approche pourrait consister à le faire pour les scénarios au voisinage du quantile à 99,5%.

BIBLIOGRAPHIE

GENERATEUR DE SCENARIOS ECONOMIQUES

Ahlgrim K., D'Arcy S, Gorvett R., *Modeling financial scenarios: a framework for the actuarial profession*, Proceedings of the Casualty Actuarial Society. 2005.

<http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf>

Armel K., *Structure de dépendance des générateurs de scénarios économiques : Modélisation et simulation*, Mémoire d'actuariat. 2010.

[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/59f3eff9eace9a3cc12576fd00345977/\\$FILE/memoire_ARMEL_27_05_2010.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/0/59f3eff9eace9a3cc12576fd00345977/$FILE/memoire_ARMEL_27_05_2010.pdf)

Brigo D., Mercurio F., *Interest rate models – Theory and practice (Second Edition)*, Springer. 2006.

Hardy M., *A regime switching model of long-term stock models*, American Actuarial Journal. 2001.

http://www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/2001/april/naaj0104_4.pdf

Hibbert J., Mowbray P., Turnbull C., *A stochastic asset model and calibration for long-term financial planning purposes*. 2001.

[http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/a1d9fb9416c79dfec12576020046e11b/\\$FILE/hibbert.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226.nsf/9c8e3fd4d8874d60c1257052003eced6/a1d9fb9416c79dfec12576020046e11b/$FILE/hibbert.pdf)

Hull J., White A., *Numerical procedures for implementing term structure models II: two factor-models*, The journal of derivatives. 1994.

<http://www.nuclearphynance.com/User%20Files/53/NUMERICAL%20PROCEDURES2.pdf>

Hull J., *Options, futures and other derivatives – Fifth edition*, Prentice Hall. 2002.

Martellini L., Priaulet P., *Produits de taux d'intérêt – Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture (deuxième édition)*, Economica. 2004.

Planchet F., Thérond P., Jacquemin J., *Modèles financiers en assurance – Analyse des risques dynamiques*, Economica. 2005.

Planchet F., Thérond P., Kamega A., *Scenarios Économiques en Assurance - Modélisation et Simulation*, Economica. 2009.

Wilkie A. D., *More on stochastic model for actuarial use*, British Actuarial Journal. 1995.
<http://www.ma.hw.ac.uk/~andrewc/papers/wilkie1995.pdf>

FORMULE STANDARD

Parlement européen et Conseil, *Directive sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)*, Journal officiel de l'Union Européenne. 2009.

<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:FR:PDF>

European Commission, *QIS5 technical specifications*. 2010.
http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf

ACP, *Orientations nationales complémentaires aux spécifications techniques - Solvabilité II - 5^{ème} étude quantitative d'impact*. 2010.
http://www.qis5.fr/QIS5_ONC.pdf

EIOPA, *EIOPA report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II*. 2011.
https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/reports/QIS5_Report_Final.pdf
https://eiopa.europa.eu/fileadmin/tx_dam/files/publications/reports/QIS5_Annexes_Final.pdf (annexes)

PORTEFEUILLE DE REPLICATION

Amaro F., Camon S., *Enjeux, contraintes, limites et alternatives à travers l'utilisation des portefeuilles répliquants dans le cadre de Solvabilité II*. 2011.
<http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/1226-02.nsf/d512ad5b22d73cc1c1257052003f1aed/9d68161813e8b21cc125786a0045b29c?OpenDocument&ExpandSection=1>

Boekel P., van Delft L., Hoshino T., Ino R., Reynolds C., Verheugen H., *Replicating portfolios, an introduction : analysis and illustrations*. Milliman Research Report. 2009.
http://www.lifestrategies.ie/documents/replicating_portfolios.pdf

Devineau L., Chauvigny M., *Replicating Portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II*. 2010

http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/50/85/17/PDF/Devineau_Chauvigny_RP_03082010.pdf

Devineau L., Loisel S., *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II*. Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 9, n°17, janvier – juin 2009, pp. 188-221. 2009

<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/96/50/PDF/Devineau-Loisel-ISFA-WP2101-2009-v2.pdf>

Devineau L., Loisel S., *Risk aggregation in Solvency II: How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula?*. 2009.

<http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/40/85/35/PDF/Devineau-Loisel-RiskAggr-30072009.pdf>

Oechslin J., Aubry O., Aellig M., Käppeli A., Brönnimann D., Tandonnet A., Valois G., *Replicating embedded options*, Life & Pension Risk, 2007.

http://www.risk.net/data/lifepensions/pdf/feb07/cuttingedge_0207.pdf

Revelen J., « *Replicating portfolios* » et capital économique en assurance vie. 2009.

http://dumas.ccsd.cnrs.fr/docs/00/49/58/56/PDF/TFE_4563_revelen_Julien_2009.pdf

Tenehaus M., *La régression PLS : Théorie et pratique*, Technip. 1998.

ANNEXES

ANNEXE 1 : TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 : Calcul du SCR dans la formule standard.....	11
Figure 2 : La méthode des simulations dans les simulations.....	13
Figure 3 : Étapes de mise en œuvre de la méthode des portefeuilles répliquants.....	16
Figure 4 : Courbe des taux au 30/04/2011	19
Figure 5 : Prix de modèle et prix de marché des caps au 30/04/11	21
Figure 6 : Quantiles du taux sans risque en fonction du temps	23
Figure 7 : Bilan d'ouverture.....	26
Figure 8 : Sensibilité de portefeuilles Barbell et Bullet à une variation de taux	34
Figure 9 : Rendements de portefeuilles Barbell et Bullet.....	35
Figure 10 : Politique de revalorisation de la provision mathématique	37
Figure 11 : Taux de rachat structurel en fonction de l'ancienneté du contrat	40
Figure 12 : Taux de rachat conjoncturel en fonction de l'écart entre taux servi et taux attendu (QIS 5).....	42
Figure 13 : Bilans comparés Solvabilité I et Solvabilité II.....	45
Figure 14 : Évolution du best estimate et des fonds propres en fonction du nombre de simulations.....	46
Figure 15 : Sensibilité du best estimate au taux de participation aux bénéfices contractuel	48
Figure 16 : Sensibilité du best estimate au taux d'intérêt technique net.....	49
Figure 17 : Sensibilité du best estimate aux frais de gestion	50
Figure 18 : Architecture de la formule standard	51
Figure 19 : Décomposition du SCR calculé selon la formule standard	55
Figure 20 : Calibrage du portefeuille répliquant – Actif investi en obligations.....	65
Figure 21 : Calibrage du portefeuille répliquant – Actif réel.....	67
Figure 22 : Inflation, taux d'intérêt et rendement actions	70
Figure 23 : Exemple de trajectoire d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à deux facteurs	72
Figure 24 : Densité de la valeur de l'actif net actualisée (actif investi en obligations)	79
Figure 25 : Densité de la valeur de l'actif net (actif réel)	80

ANNEXE 2 : ACTIFS CANDIDATS À LA RÉPLICATION

1. Zéro coupon

✓ Pay-off

Le pay-off d'un zéro coupon de maturité t_1 et de nominal 1€ est :

- 1 si $t = t_1$,
- 0 sinon.

✓ Valorisation

Dans le cadre du modèle de Hull et White à un facteur, le prix l'instant t d'une obligation zéro coupon qui paye 1€ à la date T est donné par :

$$ZC(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

Avec :

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$
$$A(t, T) = \frac{ZC^M(0, T)}{ZC^M(0, t)} \exp \left[B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma_r^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \right]$$

Et :

- a est une constante correspondant à la force de rappel
- σ_r est la volatilité du processus
- $ZC^M(0, t)$ le prix de marché du zéro coupon de maturité t à l'instant 0
- $f^M(T)$ est le taux forward instantané observé sur le marché à l'instant 0 pour une maturité de T , c'est-à-dire tel que $f^M(T) = - \frac{\partial \ln ZC^M(0, T)}{\partial T}$

2. Forward actions / immobilier

✓ Pay-off

Le pay-off d'une position longue sur forward actions (respectivement immobilier) de prix de livraison K en t_1 est :

- $S(t) - K$ si $t = t_1$,
- 0 sinon.

✓ Valorisation

Pour tout t entier tel que $t \leq t_1$, on a :

$$FW(t) = S(t) \cdot e^{-q \cdot (t_1 - t)} - K \cdot e^{-R_c(t, t_1) \cdot (t_1 - t)}$$

Où :

- $S(t)$ est la valeur de l'indice actions (respectivement immobilier) en t ,
- q est le taux instantané de dividende (respectivement de loyer)
- $R_c(t, t_1)$ est le taux d'intérêt zéro coupon à composition continue en t pour la maturité $t_1 - t$.

3. Call sur actions / immobilier

✓ Pay-off

Le pay-off d'un call européen sur actions (respectivement sur immobilier) de maturité t_1 et de prix d'exercice K est :

- $\max(0, S(t) - K)$ si $t = t_1$,
- 0 sinon.

✓ Valorisation

Pour tout t entier tel que $t \leq t_1$, on a³⁴ :

$$CALL(t) = e^{-q(t_1 - t)} S(t) N(d_1) - e^{-R_c(t, t_1) \cdot (t_1 - t)} K N(d_2)$$

³⁴ Pour la démonstration, voir Brigo et Mercurio (2011).

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K \cdot e^{-R_c(t,t_1)}}\right) - q \cdot (t_1 - t) + \frac{v(t,t_1)}{2}}{v(t,t_1)}$$

$$d_2 = d_1 - v(t,t_1)$$

$$v^2(t,t_1) = V(t,t_1) + \sigma_s^2 \cdot (t_1 - t) + 2 \frac{\rho_{r,s} \sigma_r \sigma_s}{A} \left(t_1 - t - \frac{1 - e^{-A \cdot (t_1 - t)}}{A} \right)$$

$$V(t,t_1) = \frac{\sigma_r^2}{A^2} \left(t_1 - t + \frac{2 \cdot e^{-A \cdot (t_1 - t)}}{A} - \frac{e^{-2A \cdot (t_1 - t)}}{2A} - \frac{3}{2A} \right)$$

Où :

- $S(t)$ est la valeur de l'indice actions (respectivement immobilier) en t ,
- q est le taux instantané de dividende (respectivement de loyer),
- $N(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite,
- σ_s est la volatilité actions (respectivement immobilier),
- σ_r est la volatilité du taux court,
- $\rho_{r,s}$ est la corrélation entre les actions (respectivement l'immobilier) et le taux court
- A est la force de rappel du processus de taux court,
- $R_c(t,t_1)$ est le taux d'intérêt zéro coupon à composition continue en t pour la maturité $t_1 - t$.

4. Put sur actions / immobilier

✓ Pay-off

Le pay-off d'un put européen sur actions (respectivement sur immobilier) de maturité t_1 et de prix d'exercice K est :

- $\max(0, K - S(t))$ si $t = t_1$,
- 0 sinon.

✓ Valorisation

Pour tout t entier tel que $t \leq t_1$, on a avec les notations précédentes :

$$PUT(t) = -e^{-q(t_1-t)} S(t) N(-d_1) + e^{-R_c(t,t_1) \cdot (t_1-t)} K N(-d_2)$$

5. Cap

✓ Pay-off

Le pay-off d'un floor de 1€ de nominal et de prix d'exercice r_K est :

- $\max(0, r(d_{i-1}) - r_K)$ si $t=d_i$ pour $i=1, \dots, N$
- 0 sinon.

Avec :

- $\{d_1, \dots, d_N\}$ les dates de paiement annuelles
- d_0 la première date de fixation du taux de référence
- $t_i = d_i - t$

✓ Valorisation

Pour tout t entier tel que $t \leq t_0$, on a³⁵ :

$$CAP(t) = \sum_{i=1}^N [ZC(t, t_{i-1})N(-h_i + \sigma_p^i) - (1 + r_K) \cdot ZC(t, t_i) \cdot N(-h_i)]$$

Avec :

$$\sigma_p^i = \sigma_r \frac{1 - e^{-A}}{A} \sqrt{\frac{1 - e^{-2A \cdot (t_{i-1} - t)}}{2A}}$$
$$h_i = \frac{1}{\sigma_p^i} \ln \left(\frac{(1 + r_K) \cdot ZC(t, t_i)}{ZC(t, t_{i-1})} \right) + \frac{\sigma_p^i}{2}$$

6. Floor

✓ Pay-off

Le pay-off d'un floor de 1€ de nominal et de prix d'exercice r_K est :

- $\max(0, r_K - r(d_{i-1}))$ si $t=d_i$ pour $i=1, \dots, N$
- 0 sinon.

Avec :

- $\{d_1, \dots, d_N\}$ les dates de paiement annuelles
- d_0 la première date de fixation du taux de référence
- $t_i = d_i - t$

³⁵ Pour la démonstration, voir Brigo et Mercurio (2011).

✓ Valorisation

Pour tout t entier tel que $t \leq t_0$, on a :

$$FLOOR(t) = \sum_{i=1}^N [(1 + r_K) \cdot ZC(t, t_i) \cdot N(h_i) - ZC(t, t_{i-1}) N(h_i - \sigma_p^i)]$$

7. Swaption payeuse

✓ Pay-off

Le pay-off d'une swaption payeuse de 1€ de nominal et de prix d'exercice r_K donnant la possibilité d'entrer dans un swap à la date T pour des paiements en $\{ t_1, \dots, t_N \}$ est :

- $\max(0, r_{\text{swap}}(T) - r_K)$ si $t=t_i$ pour $i=1, \dots, N$
- 0 sinon.

✓ Valorisation

$$SP(t) = \sum_{i=1}^N [c_i \cdot ZBP(t, T, t_i, X_i)]$$

Avec :

- $c_i = r_K$ pour $i = 1, \dots, N-1$ et $c_N = 1 + r_K$
- $X_i = A(T, t_i) e^{-B(T, t_i) r^*}$
- r^* vérifie $\sum_{i=1}^N [c_i \cdot A(T, t_i) e^{-B(T, t_i) r^*}] = 1$
- $ZBP(t, T, t_i, X_i) = X_i \cdot ZC(t, T) \cdot N(h - \sigma_p) - ZC(t, t_i) \cdot N(-h)$
- $h_i = \frac{1}{\sigma_p} \ln \left(\frac{ZC(t, t_i)}{X_i \cdot ZC(t, T)} \right) + \frac{\sigma_p}{2}$
- $\sigma_p = \sigma_r \frac{1 - e^{-A(t_i - T)}}{A} \sqrt{\frac{1 - e^{-2A(T - t)}}{2A}}$

8. Swaption receveuse

✓ Pay-off

Le pay-off d'une swaption receveuse de 1€ de nominal et de prix d'exercice r_K donnant la possibilité d'entrer dans un swap à la date T pour des paiements en $\{ t_1, \dots, t_N \}$ est :

- $\max(0, r_{\text{swap}}(T) - r_K)$ si $t=t_i$ pour $i=1, \dots, N$
- 0 sinon.

✓ Valorisation

$$SR(t) = \sum_{i=1}^N [c_i \cdot ZBC(t, T, t_i, X_i)]$$

Et :

- $ZBC(t, T, t_i, X_i) = ZC(t, t_i) \cdot N(h) - X_i \cdot ZC(t, T) \cdot N(-h + \sigma_p)$

ANNEXE 3 : LA RÉGRESSION PLS

La régression des moindres carrés partiels ou encore régression PLS (pour « partial least squares ») a été développée par Herman Wold en 1983. Il s'agit d'une méthode de régression sur variables latentes (ou inobservables) qui permet de bâtir des modèles prédictifs à partir de variables nombreuses et corrélées. En ce sens, elle est proche de la régression sur composantes principales, mais elle s'avère plus performante en termes de prédiction à nombre de variables latentes identiques.

Position du problème

Soit n le nombre de simulations et p le nombre de variables explicatives. Soit X (de dimension $n \times p$) la matrice des variables explicatives (ici les actifs candidats) et y (de dimension $n \times 1$) la variable à expliquer (ici les passifs). Le modèle postulé est le suivant :

$$y = X\beta + \varepsilon$$

De manière classique, sous certaines conditions concernant ε (indépendance, homoscedasticité), l'estimateur des moindres carrés de B est donné par :

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Dans certains cas, la matrice $X^T X$ peut être singulière (nombre d'observations inférieur au nombre de variables explicatives, colinéarité). Dans le contexte des portefeuilles répliquants, c'est la quasi-colinéarité des actifs candidats qui peut poser problème. C'est là qu'intervient la régression PLS dont l'intérêt est de reposer sur une succession de régressions simples, sans inversion ni diagonalisation de matrices.

L'algorithme PLS

L'algorithme PLS univarié est un algorithme itératif. On construit d'abord la première variable latente comme une combinaison linéaire des variables explicatives :

$$t_1 = w_{11}x_1 + \dots + w_{1p}x_p$$

Avec :

$$w_{1j} = \frac{cov(x_j, y)}{\sqrt{\sum_{j=1}^p cov^2(x_j, y)}}$$

On effectue ensuite une régression simple de y sur t_1 :

$$y = c_1 t_1 + y_1$$

Avec :

- c_1 le coefficient de régression
- y_1 le vecteur des résidus

On obtient l'équation de régression suivante :

$$y = c_1 w_{11} x_1 + \dots + c_1 w_{1p} x_p + y_1$$

On construit alors la deuxième variable latente t_2 comme une combinaison linéaire des résidus x_{1j} des régressions des variables x_j sur la t_1 :

$$t_2 = w_{21} x_{11} + \dots + w_{2p} x_{1p}$$

Avec :

$$w_{2j} = \frac{cov(x_{1j}, y_1)}{\sqrt{\sum_{j=1}^p cov^2(x_{1j}, y_1)}}$$

On peut alors effectuer la régression avec deux variables latentes :

$$y = c_1 t_1 + c_2 t_2 + y_2$$

On peut répéter ce processus itératif jusqu'à obtenir le nombre de variables latentes satisfaisant.