

DÉPARTEMENT MIDO
Master 2 Actuariat

MÉMOIRE D'ACTUARIAT PRÉSENTÉ DEVANT L'UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Stratégie de pilotage de la marge de sécurité en assurance non-vie

Candidat
Giacomo PLACHESI

Tuteur de Stage
Pierre-Antoine MERLE

Tuteur Académique
Marc HOFFMANN

Résumé

Le provisionnement de la PSAP a toujours été une problématique majeure pour les compagnies d'assurances et a poussé les actuaires à développer des nombreuses méthodes. L'apparition du référentiel Solvabilité II a de plus imposé la nécessité d'évaluer la volatilité et d'obtenir la distribution des charges ultimes.

La conséquence utilisation de plusieurs méthodes déterministes et stochastiques avec différentes modélisations possibles introduit alors une variabilité entre une année et l'autre. C'est dans l'objectif de pallier l'effet de cette volatilité qu'une marge de sécurité a été dotée par les assureurs.

Premièrement cette marge a été calculée via une approche proportionnelle, consistante à évaluer la marge comme un pourcentage du *best estimate*. La deuxième méthode répandue dans le marché repose sur la dotation d'une quantité égale à un quantile de la distribution des charges ultimes.

Ces démarches permettent aux assureurs d'augmenter les provisions dans un but prudentiel mais pas de piloter la volatilité liée à la marge de sécurité. Dans ce mémoire, en se basant sur les données d'un assureur français, il sera proposé une nouvelle méthode de pilotage de la marge de sécurité qui consiste à l'encadrer entre deux quantiles différents.

L'idée principale du mémoire est de doter une marge initiale selon une approche par quantile et de la repositionner (avec un dégagement de boni ou de mali) seulement si, dans les années suivantes, elle dépasse la limite inférieure ou la limite supérieure données par les deux quantiles précédemment introduits.

Mots clés : Provisionnement non vie, Marge de sécurité, Bootstrap Mack, Excédents des provisions, Impôts, Corrélation.

Abstract

The provisioning of the reserve for losses and loss adjustment expenses has always been a major problem for the insurance companies and pushed actuaries to develop many methods. The appearance of the Solvency II framework has also imposed the need to assess the volatility and to obtain the distribution of the ultimate cost.

The consequent use of several deterministic and stochastic methods with several possible modellings introduces variability between one year and the next one. It is to counter the effect of this volatility that a safety margin has been endowed by the insurers.

First this margin was calculated via a proportional approach, evaluating the margin as a percentage of the best estimate. The second common method is to allocate an amount equal to a quantile of the distribution of ultimate loads.

These approaches allow insurers to increase provisions in prudential purpose but not to control the volatility related to the safety margin. In this report, based on data coming from a French insurer, we propose a new method to control the safety margin, flanking it between two different quantiles.

The main idea of the report is to calculate an initial margin via a quantile approach and to relocate it - generating gains or losses for the company - only if in the following years the margin exceeds the lower limit or the upper limit given by the two quantile previously introduced.

Key words : Non-life reserving, Safety margin, Bootstrap Mack, Reserving surplus, Taxes, Correlation.

*Ai miei genitori e ad Annalisa, che hanno saputo accettare grandi
sacrifici e che mi sono stati vicini nonostante la distanza.
A Silvia, perché ogni cosa inizia e finisce con lei.*

Remerciements :

Je voudrais remercier mon maître de stage Pierre-Antoine Merle qui m'a introduit ce sujet de mémoire et qui m'a conduit jusqu'au bout de ce mémoire.

Je remercie Christophe Movrel pour sa disponibilité et sa pédagogie.

Je souhaite remercier aussi Michael Donio qui m'a accueilli dans le monde de l'actuariat et qui m'a accompagné dans la construction de mon projet professionnel.

Je voudrais également remercier Marc Hoffmann qui a su doser entre accompagnateur et coach.

Je remercie Benjamin Le Boucher, aussi que les amis et les collègues de Sia Partners qui m'ont aidé en lisant ce mémoire ou avec leur encouragement.

Table des matières

Résumé	1
Abstract	3
Introduction	11
Cadre général du mémoire	11
Démarche du mémoire	12
Synthèse	15
Chapitre 1. Le provisionnement en assurance non-vie	21
1. La vie d'un sinistre en assurance non-vie	21
2. Principales provisions en assurance non-vie	21
2.1. Provisions de primes	21
2.1.1. Provision pour Primes Non Acquises	21
2.1.2. Provisions pour Risque En Cours	22
2.2. Provisions de sinistres	22
2.2.1. Provision Dossier/Dossier	22
2.2.2. Provision Incurred But Not Reported	22
2.2.3. Provision pour Sinistres A Payer	23
Chapitre 2. Principales méthodes de provisionnement	25
1. Méthodes déterministes	25
1.1. Méthode Chain-Ladder	25
1.2. Méthode Bornhuetter-Ferguson	27
2. Méthodes stochastiques	28
2.1. Erreur Quadratique Moyenne de Prédiction - Mean Squared Error of Prediction (MSEP)	29
2.2. Modèle de Mack	29
2.3. Les méthodes bootstrap	31
2.3.1. Méthode bootstrap ODP	31
2.3.2. Méthode bootstrap Mack	32
3. Méthodes avec vision à 1 an	34
3.1. Modèle de Merz-Wüthrich	34
3.2. Re-reserving - Bootstrap à 1 an	36
Chapitre 3. Marge de sécurité et son pilotage	39
1. Problématique de la variabilité d'une année à l'autre	39
2. Pratiques de marché	39
2.1. Approche par quantile	39
2.2. Approche proportionnelle	40
2.3. Positionnement de ces approches dans les référentiels comptables	40
3. Proposition d'une méthode basée sur un encadrement par des quantiles	40

4. Approches de marché analysés dans la suite : Stratégie à quantile fixe, Stratégie à quantile décroissant	41
Chapitre 4. Mise en œuvre et comparaison des stratégies	43
1. Responsabilité Civile Entreprise	43
2. Analyse des triangles	44
3. Diagnostic du triangle de charges	47
3.1. Étude des résidus	49
3.1.1. Test d'indépendance : test du khi-deux	49
3.1.2. Test de normalité : test de Kolmogorov-Smirnov	50
3.1.3. Test de normalité : test via un graphique de type QQ-plot	50
4. Modélisation de la distribution des provisions pour la RC	52
4.1. Comparaison des visions à l'ultime et des visions à 1 an	53
5. Application de la stratégie prévoyant deux quantiles différents	54
5.1. Test de sensibilité sur le quantile de sécurité q_{secu}	57
5.2. Test de sensibilité sur le quantile maximum q_{max}	59
6. Choix des quantiles pour la stratégie de provisionnement	62
7. Comparaison des stratégies	63
Chapitre 5. Traitement fiscal	67
1. Code général des impôts	67
2. Exemple d'application du traitement fiscal	68
3. Application du traitement fiscal à la branche RC entreprise	71
Chapitre 6. Corrélation dans le cas de plusieurs portefeuilles	73
1. Modélisation de la dépendance via des copules	73
1.1. Copule gaussienne et copule empirique	74
2. Application aux données	75
3. Calcul de la marge de sécurité dans le cas multi-branches	80
3.1. Agrégation de la marge	80
3.2. Calcul de la marge sur le portefeuille global	80
Chapitre 7. Niveau de pilotage	81
1. Proposition de différents scénarios	81
2. Analyse des résultats	83
Chapitre 8. Enjeux opérationnels	85
1. Bilan prudentiel et Impôts différés passif	85
1.1. Situation avant pilotage	85
1.1.1. Bilan Solvabilité 1	85
1.1.2. Bilan Solvabilité 2	86
1.2. Situation après pilotage	86
1.3. Analyse des changements	88
2. Prise en compte de la continuité de l'activité - Aspects ORSA	88
2.1. Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)	88
2.2. Évaluation interne des risques et de la solvabilité	88
3. Solvency Capital Requirement (SCR)	91
3.1. SCR Non Vie	92
Conclusion	95
Table des figures	97

Table des matières	9
Liste des tableaux	99
Bibliographie	101
Annexe A. Démonstrations des théorèmes du modèle de Mack	103

Introduction

Cadre général du mémoire

L'article R 331-6 du code des Assurances définit la provision pour sinistres à payer (PSAP) ainsi : *la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise.*

Cette provision vise à protéger les assurés, souscripteurs et bénéficiaires des contrats d'assurance du cycle de production inversé. Elle est un des éléments les plus impactant du bilan. Son provisionnement est un sujet bien connu et maîtrisé des sciences actuarielles.

Pendant longtemps, la PSAP a été calculée avec un large éventail de méthodes basées sur les triangles. Les premières d'entre elles se limitaient juste au calcul de l'espérance des charges ultimes.

L'introduction des nouvelles réglementations basées sur le risque comme Solvabilité II, a ensuite abouti à l'utilisation des méthodes inventées dans les années 80 et 90 qui permettent le calcul de la volatilité et/ou de la distribution des charges ultimes, soit analytiquement, soit par simulation.

Les méthodes de provisionnement peuvent être déterministes (parmi lesquelles la méthode de Chain-Ladder est la plus connue) ou stochastiques (comme par exemple la méthode de Mack qui en est l'extension stochastique).

Au sein de ces méthodes on dispose généralement d'un large choix de modélisation (par exemple via l'exclusion de facteurs ou de données) et les résultats peuvent être assez différents selon ces choix.

Dans ce contexte il est compréhensible que les assureurs constatent des nombreux boni/mali sur leurs provisions. Ces derniers peuvent impacter fortement le compte de résultat.

C'est pourquoi, pour affaiblir le poids de ces phénomènes, le pilotage de la marge de sécurité s'impose.

Dans la pratique de marché deux approches de la marge sont répandues : une approche par quantile de la distribution des charges ultimes, et une approche proportionnelle.

Ces approches consistent cependant à augmenter les provisions dans le but d'accroître la prudence des compagnies. Elles ne donnent par contre pas la possibilité de gérer la volatilité liée à l'évolution de la marge.

Le but de ce mémoire est alors de proposer une stratégie dynamique consistant à encadrer l'évolution de la marge de sécurité entre deux quantiles, afin de minimiser les dotations et reprises en montant et en nombre.

Démarche du mémoire

Le premier chapitre rappellera les principales étapes du provisionnement en assurance non-vie, en remarquant les différences entre les provisions de sinistres et les provisions de primes. A la fin de ce chapitre on se focalisera sur les provisions qui vont être le sujet principal de ce mémoire : les provisions dossier/dossier, les provisions IBNR et la PSAP.

Dans le chapitre 2 on va aborder les principales méthodes de provisionnement répandues dans le marché : on présentera des méthodes déterministes (dont la plus connue est celle de Chain Ladder) aussi que des méthodes stochastiques. En particulier la méthode de Mack et la méthode bootstrap vont être analysées, aussi que le résultat de leur combinaison donnant la méthode bootstrap Mack qui sera utilisée dans la suite.

La dernière partie du chapitre sera dédiée aux méthodes avec vision à un an. Dans cette section on va présenter les méthodes les plus connues (Merz-Wüthrich et la méthode bootstrap à 1 an) et on analysera les principales différences entre ces dernières et les méthodes avec vision à l'ultime.

Dans le troisième chapitre on se focalisera sur les problématiques du provisionnement, en particulier sur la variabilité des résultats, qui découle du grand choix des méthodes à disposition des actuaires et de leur modélisation spécifique.

La réponse à cette problématique, la marge de sécurité, sera alors définie dans la section suivante, en analysant les approches de marché ainsi que leurs limites. Pour palier leurs inconvénients, en particulier l'impossibilité de piloter la volatilité liée à cette marge, on va alors introduire une nouvelle méthode qui consiste à encadrer la marge entre deux quantiles et à la repositionner seulement si elle dépasse les limites données par ces quantiles.

Dans le chapitre 4 on va introduire les données utilisées dans ce mémoire qui proviennent d'un portefeuille de responsabilité civile entreprise d'une grande compagnie française, en expliquant aussi les généralités de cette branche.

Avant d'appliquer les méthodes de provisionnement pour obtenir les charges ultimes des sinistres, on va faire un diagnostic du triangle de règlements et du triangle de charges afin de choisir le plus adapté à l'analyse. Dans ce mémoire on montrera que, pour la RC entreprise le triangle de charges est le meilleur candidat à cause des spécificités d'une branche longue.

Ensuite les différentes méthodes vont être appliquées pour obtenir la valeur de la PSAP. On pourra remarquer que les résultats de ces différentes approches semblent être assez stables et très proches, donc on pourra choisir de modéliser l'évolution des ultimes via la méthode bootstrap Mack, qui permet d'obtenir les trajectoires des ultimes et des boni/mali jusqu'à l'horizon du triangle de développement.

La partie suivante est alors dédiée à l'application de la nouvelle stratégie de pilotage introduite dans le chapitre précédent. On présentera aussi une analyse des écarts obtenus avec la stratégie proposée et ceux de marché. Cette nouvelle approche permet en fait d'obtenir une marge de sécurité plus adaptée aux besoins de la compagnie et de diminuer son coût en accordant à l'assureur de dégager un montant de boni/mali plus petit.

La dernière partie du chapitre analyse les possibles choix parmi les quantiles à utiliser pour encadrer la marge de sécurité, en détaillant le coût de la marge qui découle de ce choix et la probabilité d'obtenir des trajectoires avec 0 boni et 0 mali.

Dans le cinquième chapitre le traitement fiscal va être abordé, en introduisant la notion de taxe sur les excédents de provisions. Ensuite on va présenter un bref exemple de calcul de la taxe et on va analyser les effets qui aura l'application de la stratégie de pilotage de la marge

sur le calcul des impôts pour une compagnie d'assurance non-vie. Comme on montrera, l'impact étant très faible, la nouvelle stratégie ne sera pas pénalisée par le traitement fiscal.

Dans le chapitre suivant on traite la problématique liée à l'application de la nouvelle stratégie à des branches qui ne sont pas corrélées. L'hypothèse d'indépendance ne pouvant pas être retenue en générale, on va pousser notre analyse pour modéliser la dépendance entre deux branches différentes et on va détailler l'effet de cette corrélation sur le calcul de la marge et sur son coût.

Dans cette optique on va introduire l'outil de la copule, qui a été choisi pour modéliser cette dépendance, et on va rappeler brièvement les principales notions théoriques.

On remarque que dans ce cas, deux approches différentes pour le calcul de la marge seront possibles : une approche consistant à calculer la marge sur le portefeuille global, et une approche consistant à évaluer la marge pour chaque branche de façon indépendante et puis de les agréger.

Les deux démarches seront appliquées et montreront la présence d'écarts. En particulier la dernière approche semble donner une estimation plus prudente et sera donc considérée comme souhaitable.

Dans le septième chapitre on analyse l'impact qu'aurait un changement de politique de prudence du service de gestion sur le pilotage du provisionnement. On va donc comparer le scénario central, où les provisions dossier/dossier sont estimées à 100% de leur valeur, avec deux scénarios où ces provisions sont estimées à hauteur de 120% ou de 200%.

Cette politique de prudence impactera faiblement les résultats de nos calculs, en particulier pour ce qui concerne le ratio calculé entre ultimes et provisions et le ratio entre les provisions leur volatilité. L'application de la stratégie ne sera donc pas trop impactée par un changement de politique de prudence de ce type.

Dans la dernière section on introduit un scénario où le changement de politique de prudence sera appliqué juste à partir de la sixième année. Dans ce cas on verra apparaître un effet calendaire, qui va faire doubler le ratio entre la volatilité des provisions et les provisions et qui va pénaliser l'utilisation des méthodes nécessaires au calcul de la marge de sécurité et à son pilotage.

Dans le dernier chapitre on va aborder les enjeux opérationnels de la stratégie qu'on a introduite.

En particulier on va présenter une méthode pour liquider la marge de sécurité dotée sous le référentiel Solvabilité I et on va dresser le bilan prudentiel pour une compagnie d'assurance non-vie qui applique notre stratégie. On verra que ce pilotage va faire augmenter partiellement les impôts différés passif, mais permettra de diminuer le besoin de fonds propres de cette compagnie.

Dans la section suivante on va adapter notre stratégie pour qu'elle fonctionne également avec des triangles de règlements ou de triangles de charges qui ne soient pas en *run-off*. Cette approche, pour être cohérente avec les calculs de l'ORSA qui sera brièvement introduite, prendra en compte l'évolution des primes et des sinistres de la compagnie sur les cinq prochaines années.

Via la comparaison entre un scénario central et un scénario avec pilotage de la marge de sécurité on pourra voir que notre approche fournit des résultats meilleurs soit en considérant la probabilité d'obtenir zéro pertes sur les cinq prochaines années, soit en évaluant la probabilité d'avoir deux pertes consécutives (ce qui forcerait la compagnie à suspendre le versement des dividendes).

La dernière section introduira des aspects du SCR, en se focalisant sur le SCR non-vie et

en montrant que le pilotage de la marge de sécurité effectué en suivant la stratégie proposée n'impactera pas son calcul et ne pénalisera donc pas la compagnie.

Synthèse

Dans ce mémoire on présente plusieurs méthodes pour calculer les provisions pour sinistres à payer dans le cadre d'une branche d'assurance non vie : la Responsabilité Civile Entreprise.

La spécificité de cette branche longue pousse notre analyse à évaluer des triangles de charges au lieu des triangles de règlements : les charges, grâce à la prise en compte des provisions dossier/dossier, permettent d'obtenir des résultats plus stables et proches du vrai coût des sinistres.

L'utilisation de différentes méthodes introduites dans les premiers chapitres donne des montants très proches, soit en considérant les quantiles de la distribution des charges ultimes des sinistres, soit en considérant l'écart-type de cette distribution.

	vision ultime					vision 1 an				
	Mack (normale)	Mack (lognormale)	Mack (gamma)	Bootstrap Mack (normale)	Bootstrap Mack (gamma)	Bootstrap à 1 an (gamma)	Bootstrap à 1 an (normale)	Merz (normale)	Merz (lognormale)	Merz (gamma)
Quantile 99,5%	198,1	200,3	199,7	199,8	198,8	192,5	194,0	189,7	190,0	189,2
Quantile 90%	179,4	179,5	179,4	178,7	178,5	176,0	175,1	174,9	174,7	174,8
Quantile 75%	170,9	170,4	170,4	170,0	169,7	168,5	167,4	168,3	168,0	168,3
Quantile 60%	165,1	164,2	164,5	163,9	163,7	162,9	163,1	163,8	163,6	163,8
Moyenne	161,5	161,3	161,4	160,7	160,6	160,9	160,5	161,4	161,3	161,4
Volatilité	14,0	13,9	13,9	14,0	13,8	11,4	11,2	10,5	10,4	10,4

TABLE 0.1. Comparaison des quantiles de la distribution des charges pour différentes méthodes

Néanmoins, pour pallier les problèmes de variabilité entre une année et l'autre, on prend en compte une marge de sécurité. Cette marge de sécurité sera calculée au début selon les approches de marché (approche à quantile fixe et approche à quantile décroissant), mais on montrera que ces démarches ont l'inconvénient de se limiter à augmenter les provisions dans un but prudentiel sans avoir la possibilité de gérer la volatilité liée à l'évolution de la marge.

C'est pourquoi une nouvelle stratégie consistant à encadrer l'évolution de la marge de sécurité entre deux quantiles est proposée. La démarche de cette stratégie peut être résumée selon le procédé suivant :

- (1) on positionne initialement l'ultime margé (c'est-à-dire la somme de la charge ultime et de la marge de sécurité appliquée) sur le quantile initiale (quantile de sécurité q_{secu}) ;
- (2) pour chaque année, on calcule l'ultime margé :
 - si l'ultime margé se maintient entre la moyenne et le quantile maximum q_{max} de la distribution, alors il n'y a pas de dotations ni de reprises et l'ultime margé n'est pas modifié ;

- si l'ultime margé dépasse la limite supérieure, alors l'ultime margé est repositionnée et il y a un dégagement de la marge en boni ;
- si l'ultime margé dépasse la limite inférieure, alors l'ultime margé est repositionnée mais on doit comptabiliser un mali.

Premièrement, la sensibilité de la stratégie en fonction du quantile de sécurité et du quantile maximum sera testée. Le résultat de cette analyse est présenté à l'intérieur de ce mémoire et montre que le meilleur choix correspond à un quantile de sécurité $q_{secu} = 70\%$ et un quantile maximum $q_{max} = 90\%$.

Probabilité des trajectoires	0 boni et 0 mali max	Montant moyen (M €)
Stratégie 60%/90%	12,90%	14,1
Stratégie 70%/90%	22,82%	14,0
Stratégie 80%/90%	38,10%	14,3
Stratégie 70%/80%	17,70%	14,2

TABLE 0.2. Probabilité d'avoir 0 boni et mali et coût de la marge de sécurité en fonction du quantile de sécurité et du quantile maximum

Ensuite, on pourra voir que cette approche permet de diminuer le nombre de boni et de mali aussi que leurs montants par rapport aux stratégies de marché analysées :

Probabilité des trajectoires	0 boni et 0 mali max	Montant moyen (M €)
Stratégie 70%/90%	22,82%	14,0
Stratégie A - Quantile fixe	4,80%	15,5
Stratégie B - Quantile décroissant	1,38%	15,2

TABLE 0.3. Conclusion : pourcentage de trajectoires avec 0 boni et 0 mali et coût final de la marge de sécurité

Troisièmement, l'impact de la stratégie de pilotage sur le traitement fiscal sera évalué. Cette analyse montrera que les taxes sur les excédents de provisions sont négligeables et les impôts ne pénalisent pas notre approche.

		Quantile 50% (M€)	Quantile 75% (M€)	Quantile 87,5% (M€)	Quantile 95% (M€)
Année d'exercice	2012	0,0	0,0	0,2	0,4
	2013	0,0	0,0	0,1	0,4
	2014	0,0	0,0	0,1	0,3
	2015	0,0	0,0	0,1	0,3
	2016	0,0	0,0	0,2	0,3
	2017	0,0	0,1	0,2	0,4
	2018	0,0	0,0	0,1	0,3
	2019	0,0	0,0	0,2	0,3
	2020	0,0	0,0	0,2	0,3
	2021	0,0	0,1	0,2	0,4

TABLE 0.4. Calcul de la taxe pour la RC entreprise

De plus, la stratégie de pilotage de la marge sera adaptée pour être également utilisable dans le cas de plusieurs branches ayant des portefeuilles corrélés : pour faire cela la copule a été choisie comme l'outil le plus adapté.

Deux méthodes pour calculer la marge de sécurité résultante sont alors proposées : une première méthode consistant à agréger les marges résultantes de l'application de la stratégie aux deux branches de manière indépendante, une deuxième méthode qui calcule directement la marge de sécurité sur le portefeuille global. La deuxième approche semblant être plus prudente, il semble raisonnable de l'indiquer comme souhaitable.

Marge (M€)	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Quantile 99,5%	11	16	13	9	6	4	4	2	2	1	0
Quantile 90%	11	12	9	6	4	3	2	1	1	0	0
Quantile 75%	11	11	8	5	4	2	2	1	1	0	0
Quantile 60%	11	10	7	5	3	2	1	1	1	0	0
Moyenne	11	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0
Volatilité	0	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0

TABLE 0.5. Agrégation des marges pour les branches MRH et RC, $\rho = 0,35$

Marge (M€)	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Quantile 99,5%	11	18	13	9	7	5	4	2	2	1	0
Quantile 90%	11	14	9	7	5	3	2	1	1	0	0
Quantile 75%	11	11	7	6	4	2	2	1	1	0	0
Quantile 60%	11	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0
Moyenne	11	8	6	4	3	2	1	1	0	0	0
Volatilité	0	4	2	2	1	1	1	0	0	0	0

TABLE 0.6. Marge calculée sur le portefeuille global (branches MRH et RC), avec $\rho = 0,35$

Troisièmement l'impact d'un changement dans la politique de prudence du service de gestion sur le pilotage du provisionnement sera testé.

Les résultats de cette analyse montrent que, même en considérant un montant plus élevé de provisions dossier/dossier (une augmentation de ces dernières de 20% et une autre de 100% ont été testées), les ratios ultime sur provisions et volatilité sur provisions restent stables.

On remarque en revanche que, si la politique de prudence est appliquée à partir d'une année spécifique (et pas depuis le début de la période), un effet calendaire intervient et le ratio entre volatilité des provisions et provisions augmente jusqu'à atteindre plus du double du ratio initial.

	Scénario A (100% provision d/d)	Scénario B (120% provision d/d)	Scénario C (200% provision d/d)	Scénario D (200% provision d/d à partir du 2006)
Ultimate (charges)	500	508	546	596
Provisions	161	170	207	257
Volatilité	14	15	23	51
Ratio ultime/provisions	3,1	3,0	2,6	2,3
Ratio volatilité/provisions	0,09	0,09	0,11	0,20

TABLE 0.7. Résultats des changements des politiques de gestion

Ensuite, l'impact du pilotage de la marge dans le référentiel Solvabilité II sera examiné. Sous Solvabilité II la marge de prudence n'est plus dans les provisions mais dans les fonds propres et dans les impôts différés (prévision d'impôts qui seront payés lorsque la marge latente sera réalisée).

Il sera montré que la stratégie de provisionnement apporte de la stabilité aux fonds propres.

Finalement, une adaptation de la stratégie sera proposée afin de prendre en compte la continuité de l'activité de la compagnie. Pour cela, au lieu d'analyser des triangles concernant des business en *run-off* comme fait précédemment, on supposera que des affaires nouvelles viennent augmenter le portefeuille sur les cinq prochaines années.

Encore une fois la stratégie de pilotage permet d'obtenir des performances supérieures à celles obtenues sans dotation de marge de sécurité, en particulier en considérant la probabilité d'avoir zéro pertes et la probabilité d'avoir deux pertes consécutives (ce qui forcerait les assureurs à suspendre le versement de dividendes).

Scénario central	Quantile	2012	2013	2014	2015	2016
	70%	4	4	4	3	3
	75%	6	6	5	5	5
	80%	7	7	7	6	6
	85%	9	8	9	8	7
	90%	12	11	11	10	10
Scénario piloté	Quantile	2012	2013	2014	2015	2016
	70%	0	0	0	0	0
	75%	0	0	0	0	0
	80%	0	4	0	0	0
	85%	7	6	6	6	6
	90%	9	9	9	8	8

TABLE 0.8. Distribution des boni/mali - ORSA

	Scénario centrale	Scénario piloté
0 pertes sur 5 ans	9,2%	38,9%
2 pertes consecutives	51,9%	15,0%

TABLE 0.9. Statistiques ORSA

Dans la dernière section on montrera que la stratégie n'impacte pas le calcul du SCR (notamment du SCR non-vie) et de la marge de risque, ce qui permet donc de dire que la stratégie proposée ne pénalise pas la compagnie d'assurance.

Le provisionnement en assurance non-vie

1. La vie d'un sinistre en assurance non-vie

Dans ce chapitre on va décrire brièvement la vie d'un sinistre dans le cas de l'assurance non vie. Quelques notions de base seront préalablement introduites. Le risque peut être défini comme la probabilité qu'un événement considéré comme un mal ou un dommage survienne. Afin de se prémunir contre un risque, un assuré au travers d'un contrat d'assurance transfère ce risque à un assureur. L'assureur va donc porter le risque à la place de l'assuré en échange d'une prime. Un autre aspect caractérisant le domaine de l'assurance est l'inversion du cycle de production. Cela signifie que l'assureur encaisse une prime de la part de l'assuré avant de connaître si la compagnie sera obligée à payer des prestations (ni, dans cette éventualité, combien cela coûtera).

Le schéma suivant représente alors graphiquement le déroulement d'un sinistre :



FIGURE 1.1. La vie d'un sinistre

Pour faire face aux sinistres et en accord avec la loi, l'assureur doit constituer des provisions au passif de son bilan.

2. Principales provisions en assurance non-vie

Une provision est un élément du bilan correspondant à des réserves constituées pour faire face à des événements futurs probables. Elle peut être augmentée par des dotations aux provisions et elle peut être réduite par des reprises de provisions.

On appelle ensuite *provisions techniques* les provisions directement liées à l'activité de l'assureur. On va traiter dans la suite les deux principales provisions techniques dans le cas d'une compagnie d'assurance non-vie : les provisions pour sinistres et les provisions pour primes.

2.1. Provisions de primes

2.1.1. Provision pour Primes Non Acquises

Les primes d'assurance sont généralement payées en début de période couverte mais, comme ceci ne correspond pas souvent au début de l'année comptable, cela signifie que la prime annuelle contribue à couvrir des risques pour une partie des risques de l'année suivante aussi. La dotation de PPNA (calculé au pro rata) est donc la partie de la prime

destinée à couvrir les risques assurés la période suivante.

La formule pour la dotation à la PPNA de l'année N s'écrit alors :

$$Dotation(PPNA)_N = \Pi_N \times \frac{p_{t \geq N+1}}{p_{tot}},$$

où Π_N représente le primes de l'année N , p_{tot} est la période de couverture totale et $p_{t \geq N+1}$ est la période de couverture des années futures. De la même manière on peut noter la reprise de la PPNA :

$$Reprise(PPNA)_N = \Pi_{N-a} \times \frac{p_{t=N}}{p_{tot}}.$$

On remarque que cette quantité fait partie des primes acquises de l'exercice N .

2.1.2. Provisions pour Risque En Cours

Une deuxième provision de primes est la provision pour risque en cours. Elle se rend nécessaire dans le cas où il est constaté une sous tarification des primes par rapport aux sinistres survenus. Elle se calcule, à partir de la PPNA et sur une période de 2 ans, de la manière suivante :

$$PREC = PPNA \times (RC - 1)_+,$$

où RC est le ratio combiné, c'est-à-dire le rapport entre la somme des charges des sinistres et des frais avec les primes acquises.

2.2. Provisions de sinistres

2.2.1. Provision Dossier/Dossier

Une première provision de sinistre, dotée au moment où un sinistre est déclaré et dès que la survenance du sinistre est connue par l'assureur, est la provision dossier/dossier : elle correspond à l'estimation du montant attendu des règlements futurs concernant ce sinistre. Le montant de cette provision est évalué en fonction de l'expérience de l'assureur de ses sinistres et de sa politique de remboursement. Le cumul des règlements du sinistres ajoutés à la provision dossier/dossier constituent une estimation de la charge totale du sinistre.

2.2.2. Provision Incurred But Not Reported

Une autre importante provision de sinistre est la provision IBNR (Incurred But Not Reported). Elle est dotée par l'assureur dans le but de créer des provisions destinées à couvrir le risque de déclaration tardive et le risque d'aggravation tardive.

Pour bien prendre en compte les coûts des différents risques, on constitue souvent deux provisions distinctes : une provision IBNER (Incurred But Not Enough Reported) qui doit couvrir le risque d'aggravation du sinistre (c'est-à-dire la possibilité que le coût final du sinistre devienne très important par rapport à l'estimation actuelle) et une provision IBNYR (Incurred But Not Yet Reported) qui couvre le risque de déclaration tardive, i.e. la possibilité que un sinistre ayant eu lieu pendant l'année en cours soit déclaré dans les années suivantes.

La provision IBNR peut être alors définie de cette manière :

$$IBNR = IBNER + IBNYR$$

On remarque que l'estimation de la provision IBNR se fait, contrairement à l'estimation de la provision dossier/dossier, par des méthodes statistiques-actuarielles. Pour approfondir

les méthodes de séparation entre IBNR et IBNER on renvoie à l'article de Schnieper [1991]. Le schéma suivant présente de façon détaillée le traitement d'un sinistre et le moment de dotation de la provision IBNR :

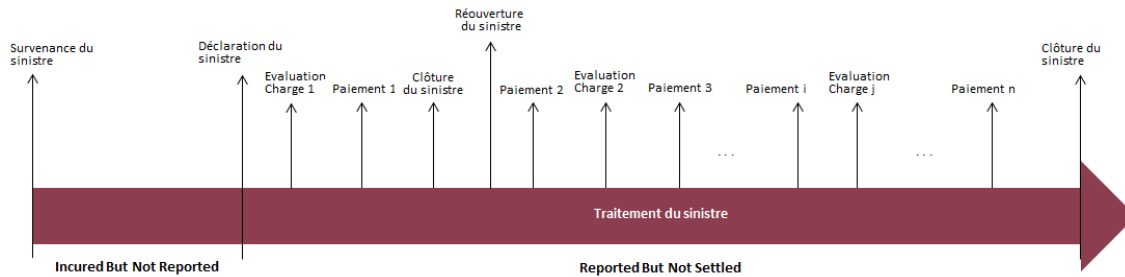


FIGURE 1.2. Le traitement d'un sinistre et la dotation de l'IBNR

2.2.3. Provision pour Sinistres A Payer

La dernière et plus consistante provision de sinistres est la Provision pour Sinistres A Payer (PSAP). Cette provision est définie dans l'article R331-6 du Code des Assurances comme « la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise¹. »

Le Code des assurances stipule également les modalités de calcul de cette provision dans l'article R331-15 : *La provision pour sinistres à payer est calculée exercice par exercice. Sans préjudice de l'application des règles spécifiques à certaines branches prévues à la présente section, l'évaluation des sinistres connus est effectuée dossier par dossier, le coût d'un dossier comprenant toutes les charges externes individualisables ; elle est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés [ou sinistres Incurred But Not Reported (IBNR)].*

La provision pour sinistres à payer doit toujours être calculée pour son montant brut, sans tenir compte des recours à exercer ; les recours à recevoir font l'objet d'une évaluation distincte. Par dérogation aux dispositions du deuxième alinéa du présent article, l'entreprise peut, avec l'accord de l'Autorité de contrôle prudentiel, utiliser des méthodes statistiques pour l'estimation des sinistres survenus au cours des deux derniers exercices.

La PSAP peut être donc calculée dans la manière suivante :

$$\text{PSAP} = \text{IBNR} + \text{Provisions dossier/dossier}$$

1. <https://www.legifrance.gouv.fr/affichCodeArticle.do?cidTexte=LEGITEXT000006073984&idArticle=LEGIARTI000006816253&dateTexte=&categorieLien=cid>

Principales méthodes de provisionnement

Notations :

On introduit les principales notations nécessaires à la compréhension de la partie suivante :

- Les années de survenance des sinistres sont désignées par la lettre $i \in 1, \dots, I$
- Les années de développement des sinistres sont désignées par la lettre $j \in 1, \dots, J$
- $I = J$ car on va considérer des triangles usuels
- $X_{i,j}$ représente l'élément du triangle incrémental pour la ligne i et pour la colonne j , c'est-à-dire le paiement réglé l'année de développement j pour un sinistre survenu l'année i
- $S_{i,j}$ représente l'élément du triangle cumulé pour la ligne i et pour la colonne j , c'est-à-dire les paiements réglés jusqu'à l'année de développement j pour un sinistre survenu l'année i .

1. Méthodes déterministes

Les méthodes de provisionnement déterministes sont les plus simples à implémenter et les plus utilisées en pratique. Ces méthodes possèdent cependant l'inconvénient de ne pas déterminer l'erreur de prédiction associé aux réserves futures. Pour pallier cette problématique, des méthodes stochastiques ont été introduites et on le traitera dans le chapitre suivant.

On se focalise maintenant sur les méthodes déterministes plus connues, c'est-à-dire Chain-Ladder et Bornuetter-Ferguson.

1.1. Méthode Chain-Ladder

La méthode de Chain Ladder, avec sa simplicité de mise en œuvre, est la méthode la plus utilisée pour estimer la PSAP.

On considère une branche de durée maximale de N années.

On définit pour l'année de survenance i , la quantité $S_{i,N}$ comme la charge ultime, c'est-à-dire comme le total des règlements futurs qui seront effectués et des règlements passés.

La méthode se base sur les hypothèses suivantes :

- il y a indépendance entre les paiements cumulés $(S_{i,1}, \dots, S_{i,N})$ et $(S_{j,1}, \dots, S_{j,N})$ pour les différentes années de survenance i, j ;
- il existe des facteurs de développement $\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1} > 0$ tels que $\forall i$

$$\mathbb{E}[S_{i,j} \mid S_{i,0}, \dots, S_{i,j-1}] = \mathbb{E}[S_{i,j} \mid S_{i,j-1}] = \lambda_{j-1} \times S_{i,j-1}.$$

Pour appliquer la méthode de Chain-Ladder on a donc besoin d'introduire la notion de facteur de développement.

Ce facteur multiplicatif peut être vu comme le ratio qui fait passer le montant des sinistres d'une année de développement au montant des sinistres pour l'année suivante :

$$\forall j \leq N, \quad \lambda_j = \frac{\mathbb{E}[S_{i,j+1}]}{\mathbb{E}[S_{i,j}]}.$$

A partir des hypothèses du modèle on suppose que les sinistres auront le même comportement que dans les années précédentes. On en déduit alors que les facteurs de développement seront constants.

Ces facteurs se calculent alors de la manière suivante :

$$\forall j \leq N, \quad \hat{\lambda}_{j-1} = \frac{\sum_{i=0}^{N-j+1} S_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{N-j+1} S_{i,j}}.$$

En introduisant les facteurs de développement individuels $\lambda_{i,j} = \frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}$ on remarque de plus que le facteur de Chain Ladder est la moyenne des facteurs individuels pondérée par les $S_{i,j}$. Il suffit pour cela de remplacer $S_{i,j+1}$ par la formule $S_{i,j} \times \lambda_{i,j}$.

Dans la pratique, les utilisateurs de la méthode de Chain Ladder font un choix des facteurs individuels qu'ils veulent garder dans le calcul du facteur de Chain Ladder : en effet, certains des facteurs individuels peuvent par exemple correspondre à des politiques de gestion de sinistres révolues.

Pour chaque année de survenance, la charge des sinistres est obtenue à partir du dernier cumul de règlements connus (il se trouve sur la diagonale du triangle) et des facteurs de développement :

On peut alors écrire :

$$\forall i \leq N, \quad S_{i,N} = \prod_{k=N-i+1}^{N-1} \lambda_k \times S_{i,N-i+1}.$$

L'application de cette méthode fournit alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} PSAP &= \sum_{i=1}^N (S_{i,N} - S_{i,N-i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\prod_{k=N-i+1}^{N-1} \lambda_k \times S_{i,N-i+1} \right) - S_{i,N-i+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\left(\prod_{k=N-i+1}^{N-1} \lambda_k - 1 \right) \times S_{i,N-i+1} \right). \end{aligned}$$

On remarque que la provision estimée par Chain-Ladder est donnée par la somme entre la provision dossier/dossier et l'IBNR. Ces deux quantités sont estimées conjointement.

Même si cette méthode présente une simplicité de mise en œuvre, elle présente néanmoins différents inconvénients comme déjà remarqué par Halliwell [2007] dans son article.

Premièrement on voit que les années les plus récentes dépendent d'un plus grand nombre de facteurs de développement et sont donc plus sensibles au choix de ces derniers.

Les facteurs de développement en queue de triangle sont en revanche estimés avec moins de données et ces dernières sont plus anciennes, donc dans certains cas plus d'actualité.

Deuxièmement la méthode Chain-Ladder suppose que le schéma de développement soit identique pour toutes les années de survenance, même si en général ce n'est pas le cas en pratique. Cette méthode sous-estime donc les effets de la volatilité et ne prend pas en compte les effets des modifications de la cadence des règlements, présentes dans certaines branches longues.

Pour pallier ces inconvénients, de nombreuses méthodes ont été mises en œuvre dans les années passées. On va introduire dans la suite certaines de ces méthodes.

1.2. Méthode Bornhuetter-Ferguson

La méthode Chain-Ladder présente certains inconvénients : en particulier, l'estimation obtenue par cette méthode pour les années les plus récentes est très sensible au choix des facteurs de développement.

La méthode Bornhuetter-Ferguson a été alors introduite dans l'article de Bornhuetter and Ferguson [1972] pour pallier cette problématique.

Cette méthode se base sur la méthode Chain-Ladder, mais elle réduit la sensibilité au choix des facteurs de développement en pondérant les estimations Chain-Ladder par des estimations à priori.

Cette méthode étant très proche de Chain-Ladder, les hypothèses restent aussi très proches. En particulier on suppose que :

- il y a indépendance entre les sinistres $(S_{i,1}, \dots, S_{i,N})$ et $(S_{j,1}, \dots, S_{j,N})$ pour les différents i ;
- il existe des paramètres $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ tels que

$$\forall i, k, \quad \mathbb{E}[S_{i,k}] = \gamma_k \times \alpha_i.$$

Dans ce modèle le paramètre $\gamma_k = \frac{\mathbb{E}[S_{i,k}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]}$ représente le pourcentage de coût total d'un sinistre effectué sur les k premiers années de développement. γ_k est alors appelée *cadence de développement*.

De plus, comme $\gamma_N = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{\mathbb{E}[S_{i,k}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]} \times \frac{\mathbb{E}[S_{i,k+1}]}{\mathbb{E}[S_{i,k+1}]} \times \dots \times \frac{\mathbb{E}[S_{i,N-1}]}{\mathbb{E}[S_{i,N-1}]} \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[S_{i,N}]} \times \frac{1}{\lambda_k} \times \dots \times \frac{1}{\lambda_{N-2}} \times \mathbb{E}[S_{i,N-1}] \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \times \dots \times \frac{1}{\lambda_{N-2}} \times \frac{1}{\lambda_{N-1}} \\ &= \prod_{i=k}^{N-1} \frac{1}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

On déduit alors à partir des formules précédentes que $\alpha_i = \mathbb{E}[S_{i,N}]$.

En se basant sur ces deux formules pour les paramètres γ et α , on peut donc calculer des estimateurs.

Les γ_k ne peuvent être estimés qu'à partir de la première année de survenance car c'est la seule pour laquelle on connaît le déroulement des règlements jusqu'à 100%. Dans ce modèle on peut par contre estimer les α_i si on fait l'hypothèse d'être à connaissance de la prime reçue P_i pour l'année i et du loss-ratio $\frac{S}{P}$ attendu.

L'estimation du paramètre α_i se fait alors par la formule suivante :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{S}{P} \times P_i.$$

On ré-écrit maintenant la formule initiale :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{i,k}] &= \mathbb{E}[S_{i,N+1-i}] + \mathbb{E}[S_{i,k}] - \mathbb{E}[S_{i,N+1-i}] \\ &= \mathbb{E}[S_{i,N+1-i}] + \left(\frac{\mathbb{E}[S_{i,k}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]} - \frac{\mathbb{E}[S_{i,N+1-i}]}{\mathbb{E}[S_{i,N}]} \right) \times \mathbb{E}[S_{i,N}] \\ &= \mathbb{E}[S_{i,N+1-i}] + \left(\gamma_k - \gamma_{N+1-i} \right) \times \mathbb{E}[S_{i,N}],\end{aligned}$$

et on obtient l'estimateur de la charge pour l'année de survenance i et pour l'année de développement de la manière suivante :

$$\widehat{S_{i,k}} = S_{i,N+1-i} + \left(\widehat{\gamma_k} - \widehat{\gamma_{N+1-i}} \right) \times \widehat{\alpha_i},$$

où la quantité $S_{i,N+1-i}$ est connue car se trouve sur la diagonale du triangle de départ. On peut alors finalement exprimer la PSAP de la façon suivante :

$$\begin{aligned}PSAP &= \sum_{i=1}^N \left(\widehat{S_{i,N}} - S_{i,N+1-i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\widehat{\gamma_k} - \widehat{\gamma_{N+1-i}} \right) \times \widehat{\alpha_i}\end{aligned}$$

Pour terminer on remarque, comme déjà fait par Lacoume [2007/2008] que dans cette méthode l'estimation du loss ratio estimé $\frac{S}{P}$ est fondamentale. Cette méthode en fait, même en gardant la simplicité de mise en œuvre de la méthode Chain-Ladder, dépend très fortement du jugement de l'expert (on pourra voir Michaud [2011/2012] pour une étude de l'importance des données exogènes et du jugement de l'expert).

Par conséquent, même en pouvant utiliser un grand nombre des données supplémentaires pour améliorer l'estimation, elle reste très subjective (pour approfondir l'utilisation d'autres modèles on pourra faire référence à Schmidt and Zocher [2007] et Guillaumin [2008/2009]).

2. Méthodes stochastiques

Comme expliqué dans les sections précédentes, les méthodes de provisionnement déterministes présentent des limites. Par exemple :

- on ne peut pas obtenir une estimation de la loi de probabilité des ultimes ;
- on ne peut pas évaluer l'erreur de prédiction des réserves.

C'est pourquoi différentes méthodes stochastiques ont été introduites. Ces méthodes permettent à minima le calcul de la variance des provisions.

Dans un premier temps cette notion de variance (appelée dans la suite de ce mémoire *Mean Squared Error of Prediction*), avec sa décomposition en erreur d'estimation et erreur de processus, sera introduite.

Ensuite les méthodes aboutissant à une formule fermée de la variance seront présentées, suivront les méthodes où la variance est calculée à l'aide de simulations. Pour une démarche d'obtention d'une formule analytique de la MSE, en particulier à 1 an, on renvoie à Appert-Raullin et al. [2013].

2.1. Erreur Quadratique Moyenne de Prédiction - Mean Squared Error of Prediction (MSEP)

On introduit dans cette section la notion d'erreur quadratique moyenne de prédiction (MSEP) comme définie dans l'article de Buchwalder et al. [2006]. Cette quantité représente l'incertitude de l'estimation des réserves et va être utilisée dans les prochains chapitres pour comparer les résultats obtenus avec les différentes méthodes.

Plus rigoureusement on peut définir la MSEP à partir d'une variable aléatoire R et d'un ensemble d'observations noté D . On suppose de plus que $\hat{R}$ soit un estimateur D -mesurable de $\mathbb{E}[R | D]$.

Alors, pour être cohérent avec la notation de England, on peut écrire

$$mse_{R|D}(\hat{R}) = \mathbb{E}[(\hat{R} - R)^2 | D],$$

ce qui nous permet finalement d'obtenir la formule suivante :

$$\begin{aligned} mse_{R|D}(\hat{R}) &= \mathbb{E}[(\hat{R} - R)^2 | D] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{R} - \mathbb{E}[R] + \mathbb{E}[R] - R)^2 | D] \\ &= \mathbb{E}[(\hat{R} - \mathbb{E}(R))^2 | D] + \mathbb{E}[(R - \mathbb{E}(R))^2 | D] \\ &= mse_{R|D}(\hat{R}) + \text{Var}(R | D), \end{aligned}$$

où $mse_{R|D}(\hat{R}) = \mathbb{E}[(\hat{R} - \mathbb{E}[R])^2 | D]$ est l'erreur quadratique moyenne qui peut être divisée aussi selon la décomposition classique biais/variance.

L'erreur quadratique moyenne de projection peut être alors écrite comme la somme de deux composantes :

- *L'erreur d'estimation* : c'est le premier terme de l'équation précédente, qui représente l'incertitude provenant de l'estimation des paramètres et de leur espérance. Ce terme est en fait la variance de l'estimateur des provisions. Comme l'estimateur se situe dans le cadre d'un modèle et que ce modèle n'est pas la réalité, il y a une autre composante de la MSEP :
- *L'erreur de processus* : c'est le deuxième terme de l'équation précédente, c'est-à-dire la variance du modèle, qui correspond à l'écart entre la réalité et sa modélisation. Elle est aléatoire et elle ne peut pas être supprimée.

2.2. Modèle de Mack

Le modèle de Mack représente la version stochastique de la méthode Chain-Ladder et se base sur l'article Mack [1993]. Pour cette raison, la méthode de mack se base sur les mêmes hypothèses et donne les mêmes résultats pour les provisions que ceux qui sont donnés par la méthode Chain-Ladder comme remarqué par son auteur dans les articles Mack [1993], Mack [1994] et Mack [1999].

On peut écrire les hypothèses du modèle de Mack de la façon suivante :

- les sinistres sont indépendants pour les différents années de survénance, c'est-à-dire que $\forall i$ les $(S_{i,1}, \dots, S_{i,N})$ sont indépendants ;
- l'élément $S_{i,j+1}$ du triangle cumulé suit une loi d'espérance $\lambda_j \times S_{i,j}$:

$$\mathbb{E}[S_{i,j+1} | S_{i,j}] = \lambda_j \times S_{i,j};$$

— l'élément $S_{i,j+1}$ du triangle cumulé suive une loi de variance $\sigma^2 \times S_{i,j}$:

$$\text{Var}[S_{i,j+1} \mid S_{i,j}] = \sigma_j^2 \times S_{i,j}.$$

Dans son article Mack [1993] montre que à partir de ces hypothèses on peut déduire trois théorèmes, qui seront à la base de cette méthode.

Le premier théorème montre que l'estimateur $\widehat{S_{i,N}}$ a la même forme que $\mathbb{E}[S_{i,N} \mid D]$ qui est la meilleure prévision de $S_{i,N}$ basée sur D qui est l'ensemble de toutes les données observées jusqu'au présent, comme l'avaient montré Mack [1993] et Murphy [1994].

THÉORÈME 2.1. *On se place sous les hypothèses du modèle de Mack. Soit $D = (S_{i,j} \mid i+j \leq N+1)$ l'ensemble de toutes les données observées jusqu'au présent. Alors on a que $\mathbb{E}[S_{i,N} \mid D] = S_{i,N-i+1} \times \lambda_{i,N-i+1} \times \cdots \times \lambda_{i,N-1}$.*

DÉMONSTRATION. Cf annexes. $\square$

Le deuxième théorème montre que les estimateurs $\lambda_k = \frac{\sum_{i=1}^{I-k-1} S_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{I-k-1} S_{i,k}}$ sont non biaisés, ce qui va nous permettre de déduire la même propriété pour l'estimateur $\widehat{S_{i,N}} = S_{i,N+1-i} \times \lambda_{i,N+1-i} \times \cdots \times \lambda_{i,N-1}$ de $\mathbb{E}[S_{i,N} \mid D] = S_{i,N+1-i} \times \lambda_{i,N+1-i} \times \cdots \times \lambda_{i,N-1}$.

THÉORÈME 2.2. *On se place sous les hypothèses du modèle de Mack. On a alors que les estimateurs λ_k pour $k \in (1, \dots, N-1)$ sont non biaisés et non corrélés.*

DÉMONSTRATION. Cf annexes. $\square$

Avant d'énoncer le dernier théorème, comme pour le modèle de Chain-Ladder, il faut introduire les facteurs de développement individuels :

$$\lambda_{i,j} = \frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}.$$

Deuxièmement on se concentre sur la dernière hypothèse du modèle, c'est-à-dire $\forall i \in (1, \dots, N)$ et $\forall j \in (1, \dots, N-1)$, $\text{Var}[S_{i,j+1} \mid S_{i,j}] = \sigma_j^2 \times S_{i,j}$. On propose ensuite un estimateur pour σ_j^2 :

$$\forall j < N-1, \quad \widehat{\sigma_j} = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} S_{i,j} \times \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}} - \widehat{\lambda_j} \right)^2,$$

et

$$\widehat{\sigma_{N-1}} = \min \left(\min(\sigma_{N-2}^2, \sigma_{N-3}^2), \frac{\sigma_{N-2}^4}{\sigma_{N-3}^2} \right).$$

Finalement on peut énoncer le dernier théorème :

THÉORÈME 2.3. *Soient $R_i = S_{i,N} - S_{i,N-i+1}$ le montant de la PSAP pour l'année de survenance $i \in (2, \dots, N)$ et $\widehat{R_i} = S_{i,N+1-i} \times \lambda_{i,N+1-i} \times \cdots \times \lambda_{i,N-1}$ son estimateur. Alors, sous les hypothèses du modèle de Mack on a que $\text{mse}(\widehat{R_i})$ peut être estimé par*

$$\widehat{\text{mse}(\widehat{R_i})} = \widehat{S_{i,N}}^2 \times \sum_{k=N-i+1}^{N-1} \frac{\widehat{\sigma_k^2}}{\widehat{\lambda_k^2}} \times \left(\frac{1}{\widehat{S_{i,k}}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{N-k} S_{j,k}} \right)$$

DÉMONSTRATION. Cf annexes. $\square$

De plus, grâce au théorème précédent on peut proposer un estimateur le mse de la PSAP totale $\widehat{R} = \widehat{R_2} + \cdots + \widehat{R_N}$.

COROLLAIRE 2.4. *Sous les hypothèses du modèle de Mack, le $mse(\widehat{R})$ peut être estimé par*

$$\widehat{mse}(\widehat{R}) = \sum_{i=2}^N \left(s.e.^2(\widehat{R}_i) + \widehat{S}_{i,N} \times \left(\sum_{j=i+1}^N \widehat{S}_{j,N} \right) \times \sum_{k=N-i+1}^{N-1} \frac{2 \times \widehat{\sigma}_k^2 / \widehat{\lambda}_k^2}{\sum_{n=1}^{N-k} \widehat{S}_{n,k}} \right),$$

où $s.e.(\widehat{R}_i)$ est l'erreur type (*standard error*) de R_i .

Ce modèle présente cependant un enjeu : il ne fournit aucune indication sur la distribution des réserves, ce qui force les actuaires à considérer des hypothèses supplémentaires. L'hypothèse *a priori* retenue en général est celle de log-normalité pour plusieurs raisons :

- les valeurs sont strictement positives ;
- les risques sont asymétriques ;
- le modèle est cohérent avec les hypothèses de la formule standard Solvabilité II.

Dans un souci de complétude il est à remarquer que dans ce mémoire la méthode de Mack a été testée avec une distribution normale et une distribution gamma.

Comme les deux estimations donnent des résultats très proches, l'hypothèse *a priori* d'une distribution log-normale a été retenue comme benchmark de comparaison pour les autres modèles à cause des raisons précédemment listés qui semblent être plus fréquemment validées par les triangles de développement.

2.3. Les méthodes bootstrap

La méthode bootstrap a été introduite dans l'article de Efron [1979] dans le but d'estimer le biais et la variabilité d'un estimateur.

Ces méthodes consistent à simuler un grand nombre d'échantillons de taille N , en tirant aléatoirement avec remise N observations à partir d'un échantillon initial de N variables aléatoires iid $(S_1, S_2, \dots, S_N)$ de fonction de répartition commune F . A chaque tirage il est obtenu une valeur différente de l'estimateur. Les différentes valeurs de l'estimateur constituent ainsi une distribution empirique de ce dernier.

Les actuaires ont appliqué cette méthode au calcul de la variance des provisions. Les estimateurs de l'espérance et de la volatilité restent en pratique très proches de ceux du modèle de Mack.

De plus, le bootstrap a l'avantage de simuler une distribution des provisions sans avoir besoin de faire des hypothèse sur cette dernière. On remarque au passage que la méthode bootstrap Mack permet aussi d'obtenir facilement l'erreur de prédiction en calculant l'écart type de la distribution des ultimes simulées.

Ces méthodes présentent cependant des inconvénients. Elles se basent, par exemple, sur un nombre limité de résidus (en particulier pour la méthode de bootstrap Mack où chaque donnée doit être simulée avec une moyenne et une volatilité spécifique) et il y a la possibilité de sous-estimer les queues de distribution.

2.3.1. Méthode bootstrap ODP

La méthode bootstrap ODP (Over Dispersed Poisson) a été introduit par Renshaw et Verrall dans leur article Renshaw and Verrall [1998] et représente l'approche pratique courante.

Elle consiste à supposer que les montants des sinistres décumulés $X_{i,j}$ soient distribués selon une loi de Poisson.

Comme la méthode suppose que les éléments de départ soient iid, en général on ne peut pas utiliser les données du triangle. Comme proposé par England & Verrall on va alors

considérer les résidus du modèle qui correspondent mieux aux hypothèses de bootstrap. Ces résidus qui seront utilisés représentent en pratique la différence entre les valeurs prédites et les valeurs réelles. Dans cette méthode, ils seront donc stockés et ré-échantillonnés avec remise.

Cette méthode va donc prendre en considération les résidus de Pearson, qui s'expriment ainsi :

$$r_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j} - \mathbb{E}[\lambda_{i,j}]}{\sqrt{\text{Var}(\lambda_{i,j})}}.$$

L'algorithme par bootstrap peut se résumer dans les points suivants :

- (1) on calcule le triangle de développement cumulé ;
- (2) on calcule les facteurs de développement et les résidus ;
- (3) on répète les actions suivantes selon le nombre d'itérations choisi ;
 - (a) on ré-échantillonne avec remise les résidus ;
 - (b) on calcule le triangle décumulé ;
 - (c) on calcule les nouveaux facteurs de développement et le triangle cumulé décollant ;
 - (d) on en déduit la PSAP ;
- (4) on obtient la distribution de la PSAP.

On remarque que la méthode bootstrap ODP n'est pas adaptée à être utilisée comme benchmark général. La présence des incréments négatifs peut en fait conduire à différentes problématiques :

- la méthode est peu adaptée aux triangles de charges ;
- des triangles bruts de recours devraient être utilisés ;
- un retraitement des incréments négatifs est requis, mais il pourrait générer des écarts.

On souligne que dans la suite de ce mémoire des données qui viennent de la RC entreprise vont être considérées.

Puisque on est dans le cas d'une branche longue, alors un triangle des charges nettes va donc être analysé.

Comme ce genre de triangles présente souvent des incréments négatifs, la méthode de bootstrap ODP ne pourra donc pas être utilisée pour comparer les résultats obtenus.

2.3.2. Méthode bootstrap Mack

La méthode bootstrap Mack représente une manière alternative d'imaginer la méthode de bootstrap. Cette méthode se situe dans le cadre du modèle stochastique sous-jacent à la méthode de Chain-Ladder, qui est moins contraignant que le modèle de bootstrap ODP. De plus, bootstrap Mack ne nécessite pas d'une forme particulière pour les incréments. Pour plus d'information le lecteur pourra faire référence aux articles England and Verrall [2002] et England and Verrall [2006].

On remarque au passage que les deux approches (modèle de Mack et méthode bootstrap) ne sont pas en contradiction : en effet, bootstrap est une procédure statistique qui peut donc être appliquée à tous les modèles bien définis.

On peut alors énoncer les hypothèses de la méthode dans la manière suivante : $\forall i = 1, \dots, N$

$$\mathbb{E}[S_{i,j+1} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,j}] = \lambda_j \times S_{i,j}$$

$$\text{Var}[S_{i,j+1} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,j}] = \sigma_j^2 \times S_{i,j}$$

Ensuite, par substitution dans la formule des résidus de bootstrap, on obtient les résidus spécifiques pour le bootstrap Mack qui ont la forme suivante :

$$r_{i,j} = \frac{\sqrt{S_{i,j-1}} \times (\lambda_{i,j} - \lambda_j)}{\sigma_j},$$

où les λ_j sont les facteurs de développement calculés via la méthode de Chain-Ladder et les $\lambda_{i,j} = \frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}$ sont les facteurs de développement individuels.

On peut finalement écrire la démarche du bootstrap Mack en suivant celle proposée par England et Verrall dans leur article England [2010] :

- (1) On calcule les facteurs de développement de Chain-Ladder à partir du triangle cumulé.
- (2) On remplit le triangle en utilisant les facteurs calculés au point précédent.
- (3) On calcule les résidus pour le modèle de Mack : $r_{i,j} = \frac{\sqrt{S_{i,j-1}} \times (\lambda_{i,j} - \lambda_j)}{\sigma_j}$.
- (4) On obtient les variances internes aux résidus $\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} r_{i,j}^2}{n-j+1}$ pour $j \in (2, \dots, J-1)$ et $\sigma_J^2 = \min(\sigma_{J-2}^2, \sigma_{J-1}^2)$
- (5) On évalue les résidus ajustés $r_{i,j}^A = \sqrt{\frac{n-j+1}{n-j}} \times \frac{r_{i,j}}{\sigma_j}$
- (6) On répète le schéma suivant selon le nombre d'itérations souhaité.
 - On ré-échantillonne avec remise les résidus ajustés de leur moyenne.
 - On évalue les facteurs de développement bootstrapés pas par pas $\lambda_{i,j}^B = r_{i,j} \times \frac{\sigma_j}{S_{i,j-1}} + \lambda_{j-1}$
 - On en déduit les facteurs de développement bootstrapés $\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} \lambda_{i,j+1}^B \times S_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i,j}}$
 - On calcule le nouveau triangle cumulé, en supposant que l'élément $S_{i,j+1}$ suit une distribution de moyenne $(S_{i,j} \times \hat{\lambda}_j)$ et de variance $(S_{i,j} \times \sigma_{j-1}^2)$ selon le modèle de Mack

Dans ce mémoire, plusieurs distribution ont été testées pour simuler les éléments du nouveau triangle cumulé dans la méthode de bootstrap Mack.

Premièrement une distribution normale $\mathcal{N}(S_{i,j} \times \hat{\lambda}_j, S_{i,j} \times \sigma_{j-1}^2)$ a été appliquée, ensuite on a supposé de suivre une distribution gamma au lieu d'une distribution normale.

Dans ce deuxième cas la démarche de la méthode ne change pas : pour le dernier point, l'élément $S_{i,j+1}$ du nouveau triangle cumulé sera calculé suivant une loi gamma de paramètres $k = S_{i,j} \times \frac{\lambda_{j-1}^2}{\sigma_j^2}$ et $\theta = \frac{\sigma_j^2}{\lambda_{j-1}}$ où k est le paramètre de forme (shape parameter) et θ est le paramètre d'intensité (scale parameter).

La distribution à utiliser sera donc la suivante :

$$\Gamma\left(S_{i,j} \times \frac{\lambda_{j-1}^2}{\sigma_j^2}, \frac{\sigma_j^2}{\lambda_{j-1}}\right)$$

L'importance de la méthode bootstrap Mack vient du fait qu'elle permet d'ignorer les problèmes présents dans l'implémentation de la méthode bootstrap ODP.

Cette méthode, en fait, n'a pas besoin de conditions spécifiques sur les incréments et permet de traiter l'hétéroscédasticité via les paramètres de volatilité de Mack. De plus, les hypothèses du modèle permettent de simuler la distribution de l'erreur de processus via

une distribution normale, une distribution log-normale en plus d'une distribution gamma à laquelle on était limité dans la méthode bootstrap ODP.

On remarque au passage que, comme pour la méthode bootstrap ODP, les estimateurs de l'espérance et de la volatilité sont très proches des estimateurs du modèle de Mack. De plus, l'hypothèse de distribution a un faible impact sur les quantiles qu'on calcule. Des légères différences sont en fait présentes juste pour les quantiles à 99,5%, mais ces écarts ne sont pas impactants dans le cadre de la stratégie de provisionnement de la marge, qui se concentre surtout sur la partie la plus robuste de la distribution.

3. Méthodes avec vision à 1 an

Les méthodes qu'on a analysées, comme bootstrap Mack par exemple, se focalisent sur le calcul de la volatilité à l'ultime. Par contre, sous le référentiel Solvabilité II, le calcul de la volatilité à 1 an est aussi important.

Pour faire ça, plusieurs méthodes stochastiques ont été créées, à la fois analytiques ou par simulation.

Dans la suite on va présenter deux méthodes parmi les plus connues : la méthode de Merz-Wüthrich et la méthode bootstrap à 1 an (appelée aussi *re-reserving*).

3.1. Modèle de Merz-Wüthrich

Le modèle de Merz-Wüthrich représente une évolution du modèle de Chain-Ladder, parallèle au modèle de Mack, proposée dans l'article Wüthrich et al. [2008].

Ce modèle, à différence de celui de Mack, se focalise sur une vision à court terme, en introduisant une mesure de volatilité à 1 an sur l'estimation de l'ultime.

Cette méthode se base encore sur les mêmes hypothèses que le modèle de Mack :

- les sinistres sont indépendants pour les différents années de survenance, c'est-à-dire que $\forall i$ les $(S_{i,1}, \dots, S_{i,N})$ sont indépendants ;
- l'élément $S_{i,j+1}$ du triangle cumulé est d'espérance $\lambda_j \times S_{i,j}$:

$$\mathbb{E}[S_{i,j+1} \mid S_{i,j}] = \lambda_j \times S_{i,j};$$

- l'élément $S_{i,j+1}$ du triangle cumulé est de variance $\sigma_j^2 \times S_{i,j}$:

$$\text{Var}[S_{i,j+1} \mid S_{i,j}] = \sigma_j^2 \times S_{i,j}.$$

Dans leurs articles Wüthrich et al. [2008] et Wüthrich et al. [2009] les auteurs ont ensuite introduit la notion de Claim Development Result (CDR). Cette quantité correspond à la différence entre la quantité de réserve pour sinistres pour l'année I et pour l'année $I + 1$, où la réserve pour l'année $I + 1$ est considérée ajustée des montant payés au cours de la même année concernant des sinistres de l'année I .

On peut alors définir cette quantité de la manière suivante :

$$CDR_i(I + 1) = \mathbb{E}(R_i^I \mid D_I) - \left(X_{i,I-i+1} - \mathbb{E}(R_i^{I+1} \mid D_{I+1}) \right),$$

où la quantité $X_{i,I-i+1} = S_{i,I-i+1} - X_{i,I-i}$ représente le paiement incrémental et où $D_I = (S_{i,j}, i + j \leq I \text{ et } i \leq I)$ représente l'information disponible à la date $t = I$.

On peut donc montrer que la formule du CDR se ré-écrit de la façon suivante :

$$CDR_i(I + 1) = \mathbb{E}(S_{i,J} \mid D_I) - \mathbb{E}(S_{i,J} \mid D_{I+1}).$$

Cette notion se confond finalement avec la notion de boni/mali de liquidation. Par contre elle nécessite de connaître en avance les facteurs de développement de Chain-Ladder.

Comme normalement ces facteurs ne sont pas connus en avance, on utilise des estimateurs.

Pour faire ça on définit alors la notion de *Observable Claim Development Result*.

$$CDR_i(\widehat{I+1}) = \widehat{S}_{i,J}^I - \widehat{S}_{i,J}^{I+1},$$

où $\widehat{S}_{i,J}^I$ et $\widehat{S}_{i,J}^{I+1}$ sont respectivement les estimateurs de $\mathbb{E}(S_{i,J} | D_I)$ et $\mathbb{E}(S_{i,J} | D_{I+1})$.

Merz et Wüthrich introduisent en fin le concept de *Mean squared error of prediction* (MSEP) qui a été précédemment introduite, afin pour obtenir la volatilité à 1 an :

$$mse_{CDR_i(I+1)|D_I}(CDR_i(\widehat{I+1})) = \mathbb{E}\left((CDR_i(I+1) - CDR_i(\widehat{I+1}))^2 | D_I\right).$$

La méthode de Merz et Wüthrich présente l'avantage de ne pas être paramétrique. De plus, cette méthode repose sur les mêmes hypothèses de Chain-Ladder et elle est également de facile implémentation.

Comme pour la méthode de Mack, dans la méthode de Merz-Wüthrich la distribution peut être estimée par différentes lois.

Dans ce mémoire une distribution log-normale, une distribution normale et une distribution gamma ont été considérées.

On remarque enfin que la méthode de Merz-Wüthrich pourra s'appliquer sans problèmes à nos triangles, car la volatilité à 1 an est bien comprise dans l'intervalle [50%,95%] de la volatilité à l'ultime.

	Modèle de Mack	Modèle de Merz-Wüthrich	Ratio
MSEP (M€)	13,9	10,4	75%

TABLE 2.1. Comparaison de la volatilité à 1 an (Merz-Wüthrich) et de la volatilité à l'ultime (Mack)

La vérification de cette condition doit être faite avant l'application de la méthode, car cette hypothèse pourrait ne pas être respectée. C'est le cas, par exemple, du triangle *Garantie des Accidents de la Vie* (GAV) présenté par Arthur Charpentier¹.

Charges Nettes (k€)		Année de développement					
		1	2	3	4	5	6
Année de survenance	2001	0	1623	1544	1472	1413	1349
	2002	155	533	508	737	488	
	2003	9	8	1012	806		
	2004	160	643	607			
	2005	272	322				
	2006	586					

TABLE 2.2. Triangle GAV

1. <https://perso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/GAV-triangle.csv>

On pourrait vérifier que pour ce triangle la volatilité à l'ultime est de 58,7 M€, alors que la volatilité à 1 an est de 67,6 M€, ce qui montre l'importance du diagnostic des triangles avant d'appliquer les méthodes de provisionnement.

3.2. Re-reserving - Bootstrap à 1 an

La méthode bootstrap à 1 an (re-reserving) est une adaptation de la méthode de Merz-Wüthrich. Cette méthode a été créée pour pallier les problématiques de ce modèle en se basant sur l'algorithme de bootstrap. Nous cherchons ici à simuler un grand nombre de nouvelles « diagonales » d'incréments.

Pour faire ça on part de chacune des simulations issues de la méthode bootstrap, qui sont des visions de l'ultime en l'année N ; ensuite on simule un ultime vu en année $N+1$.

L'algorithme de simulations par méthode bootstrap à 1 an se base sur la méthode bootstrap, donc les premières étapes sont forcément les mêmes. Les différences entre les deux méthodes apparaissent dans la démarche qu'on doit répéter pour le nombre d'itérations souhaité :

- (1) estimer les provisions pour l'année N ;
- (2) simuler la diagonale pour l'année suivante $N+1$ grâce aux facteurs de développement ;
- (3) estimer les provisions pour l'année $N+1$ (en se basant sur le triangle auquel on rajoute la nouvelle diagonale simulée).

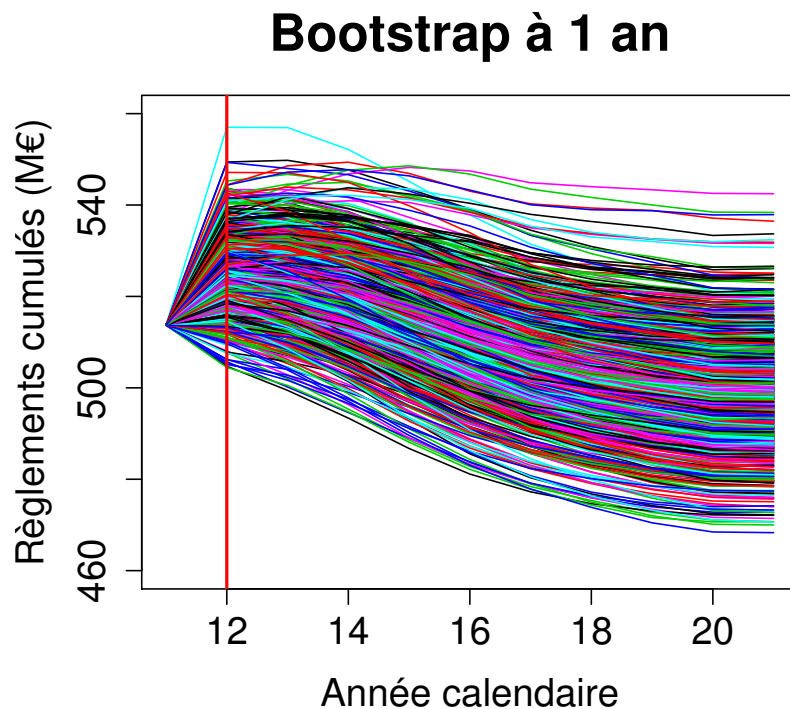


FIGURE 2.1. Bootstrap à 1 an / Re-reserving

On remarque que la volatilité obtenue grâce à cette méthode, comme dans le cas du modèle de Merz-Wüthrich, sera sensiblement inférieure à la volatilité calculée avec les autres méthodes avec vision à l'ultime. Cette différence peut s'expliquer par les spécificités

de la construction de ce modèle : on remarque en fait que la volatilité calculée ici est une volatilité à 1 an.

On remarque au passage qu'encore une fois on peut utiliser différentes lois pour la modélisation. De plus, le choix d'une distribution gamma semble donner en général des estimations plus prudentes.

Marge de sécurité et son pilotage

Dans ce chapitre on va présenter les différentes définitions de la marge de sécurité et on va expliquer les problématiques liées à son pilotage.

1. Problématique de la variabilité d'une année à l'autre

Au sein des différentes méthodes de provisionnement on dispose généralement d'un large choix de modélisation (par exemple via l'exclusion de facteurs ou de données), donc les résultats peuvent être assez différents selon ces choix.

Dans ce contexte il est compréhensible que les assureurs constatent des nombreux boni/mali sur leurs provisions, et ces derniers peuvent impacter fortement le compte de résultat. C'est pourquoi, pour affaiblir le poids de ces phénomènes, le pilotage de la marge de sécurité s'impose.

Dans la pratique de marché deux approches de la marge sont répandues : une approche par quantile de la distribution des charges, et une approche proportionnelle.

Ces approches consistent à augmenter les provisions dans le but d'accroître la prudence des compagnies, mais elles ne donnent par contre pas la possibilité de gérer la volatilité liée à l'évolution de la marge.

Deux problématiques se posent :

- Quel est le niveau optimal de marge de sécurité ?
- Comment piloter cette marge de sécurité ?

2. Pratiques de marché

La marge de sécurité correspond opérationnellement à la différence entre deux estimations de provisions : une estimation prudente et une estimation au plus juste.

Parallèlement, cette marge peut être définie comme le surplus de provisions ajouté au *best estimate* dans un but prudentiel.

On va détailler dans la suite les principales méthodes de calcul de la marge.

2.1. Approche par quantile

Soit X_t un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ adapté à une filtration F_t . On suppose aussi que la fonction de répartition conditionnelle de $X_{t+h} - X_t$ est continue.

La Value at Risk à l'horizon h et au seuil de confiance α est définie telle que :

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \leq -VaR(h, \alpha) \mid F_t) = 1 - \alpha.$$

On peut donc écrire la VaR comme

$$VaR_X(h, \alpha) = q_{X,h}(\alpha) = \inf(x, F_{X,h}(x) \geq \alpha)$$

i.e. la perte maximum d'occurrence $1 - \alpha$ à l'horizon h pour un portefeuille.

La Tail Value at Risk s'intéresse à ce qui se passe en moyenne lorsque des événements extrêmes surviennent, c'est-à-dire la moyenne des VaR de niveau supérieures à α , et on peut l'écrire de la manière suivante :

$$TVaR(X, \alpha) = \mathbb{E}[-X \mid X \leq VaR_X(h, \alpha)].$$

Dans le prochain chapitre les résultats du calcul de la Value at Risk et de la Tail Value at Risk seront présentés à côté des résultats des différentes méthodes de provisionnement utilisées.

2.2. Approche proportionnelle

La deuxième approche du marché, moins répandue, consiste à calculer la marge de sécurité comme un pourcentage du *best estimate*.

2.3. Positionnement de ces approches dans les référentiels comptables

L'approche par quantile est particulièrement adaptée à la norme IFRS 4 (dans sa phase finale) qui demande à ce qu'un Ajustement Pour Risque (qui est donc identique à ce qui est appelé "marge" dans ce mémoire) soit ajouté au Best Estimate dans un but prudentiel. La méthode de calcul de cet Ajustement est laissée au choix des assureurs mais il leur est demandé de documenter le niveau de sécurité de cette marge.

L'approche proportionnelle ne demande pas d'hypothèse sur la distribution des provisions et il est plus simple de communiquer dessus.

La marge de Solvabilité 2 demande des calculs plus compliqués que ceux a priori nécessaires pour l'évaluation des marges précédemment décrites. La directive susnommée définit la Marge de Risque comme un surplus qu'il faudrait ajouter au Best Estimate pour qu'un assureur accepte de reprendre le portefeuille, son acceptation étant acquise s'il peut obtenir un montant égal au capital qu'il doit immobiliser pour la possession du portefeuille.

3. Proposition d'une méthode basée sur un encadrement par des quantiles

Les approches qu'on vient de présenter consistent à augmenter les provisions dans le but d'accroître la prudence des compagnies. Elles ne donnent par contre pas la possibilité de gérer la volatilité liée à l'évolution de la marge.

Dans cette section on va donc proposer une nouvelle stratégie dynamique consistant pour chaque année à définir des bornes de la marge de l'année à venir, entre lesquelles cette marge est statistiquement stable à un niveau de confiance donné. Les bornes sont donc des quantiles de la distribution des provisions.

Les objectifs de cette stratégie seront de :

- minimiser les mali en nombre et en montant ;
- lisser les boni/mali sur la liquidation ;
- assurer la convergence avec l'estimation.

Les étapes de calcul de la stratégie peuvent être résumées de la façon suivante :

- (1) analyse préliminaire et diagnostic des triangles (triangle de charges, triangle de règlements, ...) ;
- (2) application de la méthode bootstrap Mack pour simuler à partir du triangle de développement des ultimes vues au moment actuel et dans chacune des années suivantes jusqu'à un certain horizon ;
- (3) stockage des trajectoires des ultimes ;

- (4) calibrage des quantiles encadrant la marge. Cette étape consiste donc à choisir les quantiles qui sont jugés limiter les montants dégagés en bonis / malis ;
- (5) Pour chaque trajectoire d'ultime stockée, application de la marge en respectant les bornes évoquées ci-dessus (cf. la démarche décrite dans le paragraphe suivant) ;
- (6) l'évolution de l'ultime margé d'une année à l'autre constitue une chronique de bonis malis.

On détaille maintenant le procédé de l'estimation de l'ultime margé.

Deux quantiles de la distribution des ultimes vont être considérés : un quantile dit "quantile de sécurité" et un quantile dit "quantile maximum". Leur rôle va être expliqué dans la démarche d'application de la stratégie qui suit :

- (1) On positionne initialement l'ultime margé sur le quantile initiale (quantile de sécurité) ;
- (2) Pour chaque année on calcule l'ultime margé :
 - si l'ultime margé se maintient entre la moyenne et le quantile maximum de la distribution, alors il n'y a pas de dotations ni de reprises et l'ultime margé n'est pas modifié ;
 - si l'ultime margé dépasse la limite supérieure, alors l'ultime margé est repositionnée et il y a un dégagement de la marge en boni ;
 - si l'ultime margé dépasse la limite inférieure, alors l'ultime margé est repositionnée mais on doit comptabiliser un mali.

Opérationnellement, c'est la méthode bootstrap qui nous permettra de simuler les trajectoires de l'ultime total estimé selon le modèle de Mack.

Dans un premier temps le quantile de sécurité a été fixé à 70% et le quantile maximum à été choisi à hauteur de 90%, ces quantiles représentant à priori des bons chiffres pour commencer la mise en œuvre de la méthode.

Dans la suite on va analyser la sensibilité de la méthode à ces quantiles et on va donc affiner le choix en fonction des résultats qu'on présentera.

4. Approches de marché analysés dans la suite : Stratégie à quantile fixe, Stratégie à quantile décroissant

Sur le marché deux stratégies sont utilisées :

- Une première stratégie consiste à piloter la marge de sécurité en suivant un quantile fixe : dans ce cas l'ultime margé est repositionnée chaque année, en se basant sur un quantile fixé à priori ;
- Une deuxième stratégie consiste à encadrer la marge par des quantiles décroissants : encore une fois l'ultime margé est repositionnée chaque année, mais on se base sur des quantiles décroissants par des pas de 5% (jusqu'au quantile 50%, c'est-à-dire la médiane).

Dans le prochain chapitre toutes ces stratégies vont être testées sur un même portefeuille et les résultats vont être comparés dans plusieurs tableaux pour montrer l'efficacité de la nouvelle stratégie par rapport aux approches de marché.

Mise en œuvre et comparaison des stratégies

Dans ce mémoire un portefeuille de la Responsabilité Civile entreprise va être utilisé. La responsabilité civile est définie dans l'article 1382 du Code civil, comme *tout fait quelque de l'homme, qui cause à autrui un dommage, oblige celui par la faute duquel il est arrivé à le réparer.*

1. Responsabilité Civile Entreprise

La RC d'une entreprise est donc l'obligation qu'elle a de réparer les dommages corporels, matériels ou immatériels qui peuvent être causés à un tiers, par les biens ou les personnes qui dépendent d'elle, au cours de son exploitation. Elle concerne également les préjudices qui pourraient intervenir après la livraison d'un bien ou d'un service.

Elle peut être divisée en trois sous-branches :

- Responsabilité Civile Exploitation qui vise à couvrir les risques liés à l'exploitation courante d'une société ;
- Responsabilité Civile Professionnelle qui vise à couvrir les risques liés aux prestations de conseils ou de service ;
- Responsabilité Civile Produits qui vise à couvrir les risques liés à la vente de produits.

La **Responsabilité Civile Exploitation** couvre une société contre une mise en cause au titre de l'exploitation de son entreprise. Autrement dit, le préjudice doit provenir d'un fait lié à la vie courante de l'entreprise. Le dommage causé n'a donc rien à voir avec la profession exercée, les prestations délivrées ou les produits vendus par la société assurée. Ce volet de l'assurance RC Entreprise couvre également la société en cas d'accident du travail d'un salarié résultant de la faute inexcusable de l'employeur.

La **Responsabilité Civile Professionnelle** couvre elle aussi l'entreprise en cas de mise en cause de clients ou tiers. Mais les risques visés sont les dommages résultant de ses prestations de conseils ou de services.

La **Responsabilité Civile Produits** entre en jeu si les prestations sont basées sur la fourniture de produits.

Un contrat d'assurance RC Produit protège l'entreprise mise en cause pour :

- sa responsabilité du fait d'un vice caché / défaut de fabrication du produit vendu ;
- le manque de recommandation (notice d'utilisation mal informée par exemple) ;
- le mauvais conditionnement des produits.

Certains contrats peuvent aller jusqu'à prendre en charge les frais de retrait d'un produit en cas de menace avéré pour la santé des clients.

2. Analyse des triangles

La RC entreprise présente des durées de règlements qui peuvent être supérieures à 15 ans, c'est pourquoi elle est considérée comme une branche longue.

Dans ce cas, le triangle de règlements ne montre pas de stabilité à la fin de son historique. Ce triangle n'est donc vraisemblablement pas assez long pour couvrir la durée de vie totale des sinistres.

Règlements Nets (M€)		Année de développement										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Année de survenance	2001	6,0	18,7	24,2	28,3	30,7	33,5	35,3	37,7	38,8	39,4	40,1
	2002	7,0	17,7	22,5	26,2	29,2	31,2	32,8	34,2	35,7	36,9	
	2003	6,9	16,5	20,0	24,3	26,9	36,1	40,1	41,2	43,0		
	2004	6,7	15,3	20,6	24,4	28,7	35,5	37,2	38,8			
	2005	5,0	13,7	19,1	23,1	26,8	29,9	32,5				
	2006	5,6	16,5	26,3	30,9	34,7	38,0					
	2007	6,0	17,9	24,6	29,4	32,4						
	2008	5,7	17,7	24,5	29,7							
	2009	5,8	17,9	24,8								
	2010	5,5	16,8									
	2011	5,5										

TABLE 4.1. Triangle des règlements nets

On peut voir dans la suite que les charges nettes deviennent assez stables à la fin du triangle (horizon 11 ans) : pour l'année de survenance 2001 par exemple, on peut vérifier que les charges restent autour de 48 M€ pour les trois dernières années de développement. On en déduit donc que l'ultime sera proche de ce chiffre, c'est-à-dire 48 M€ pour l'année de survenance 2001.

Charges Nettes (M€)		Année de développement										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Année de survenance	2001	35,1	48,8	48,0	53,1	56,2	54,2	51,6	50,3	49,7	48,3	48,1
	2002	39,5	50,1	51,1	50,9	50,6	49,8	47,1	45,8	45,1	43,0	
	2003	36,6	46,0	47,3	48,3	46,3	49,6	48,3	48,5	49,1		
	2004	35,8	46,3	47,8	47,3	51,5	49,0	47,2	46,6			
	2005	27,3	47,6	47,8	48,6	48,9	48,6	47,8				
	2006	30,4	45,3	51,1	52,6	50,3	52,0					
	2007	30,9	48,3	49,1	50,5	50,0						
	2008	27,3	42,6	45,8	46,8							
	2009	27,1	50,2	53,7								
	2010	26,5	48,6									
	2011	28,1										

TABLE 4.2. Triangle des charges nettes

En analysant les triangles des règlements et des charges on remarque de plus que, pour l'année de survenance 2001 et à l'horizon des triangles, les règlements sont constitués à hauteur de 40,1 M€.

Cela signifie que le rapport entre les charges et les règlements à l'horizon pour l'année de survenance 2001 est égal à

$$\frac{40,11}{48,07} = 83,45\%.$$

Le triangle de paiements ne permet donc le développement des règlements qu'à hauteur d'environ 83% de l'ultime, les 17% restant devant être estimés à l'aide d'un coefficient de queue.

Les charges, avec la même longueur d'historique que le triangle de paiements, fournissent une bonne approximation de l'ultime, grâce à l'information sur cette dernière contenue dans les provisions dossier/dossier. Elles seront donc utilisées pour l'application de notre stratégie.

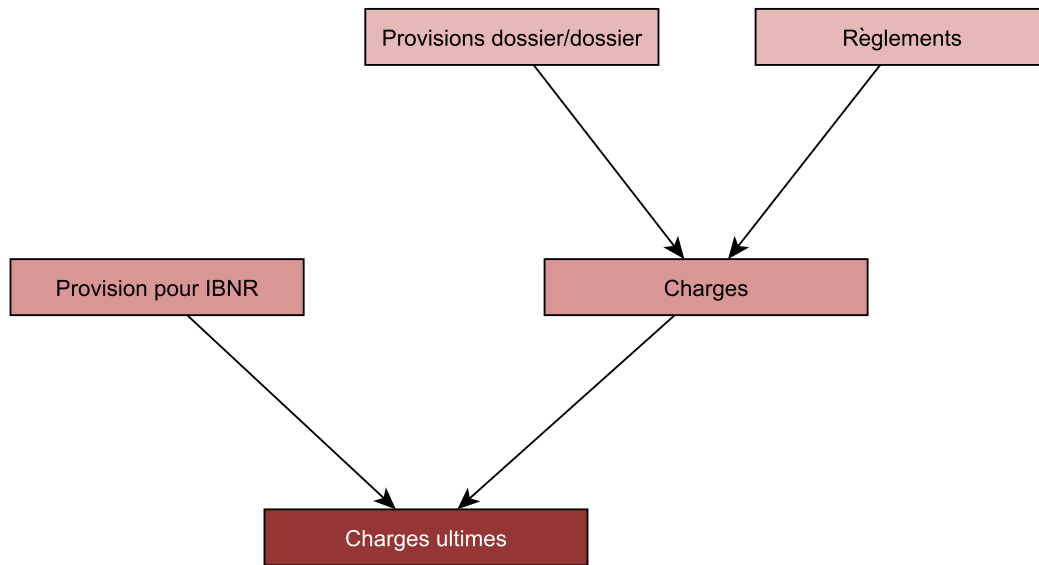


FIGURE 4.1. Représentation graphique du rapport entre règlements et charges

REMARQUE 4.1. Comme les recours ne sont pas trop importants par rapport au montant des charges (dans l'ordre de 1,6%), les charges nettes de recours vont être considérées dans la suite.

Ensuite, en observant le triangle de charges, on remarque que les charges nettes augmentent fortement entre la première et la deuxième année.

	Charges Nettes première année (M€)	Charges Nettes deuxième année (M€)	Variation (%)
2001	35,1	48,8	39,1%
2002	39,5	50,1	27,0%
2003	36,6	46,0	25,8%
2004	35,8	46,3	29,5%
2005	27,3	47,6	74,5%
2006	30,4	45,3	48,9%
2007	30,9	48,3	56,3%
2008	27,3	42,6	55,8%
2009	27,1	50,2	85,4%
2010	26,5	48,6	82,9%
2011	28,1	0,0	
Total	316,5	473,8	49,7%

TABLE 4.3. Variation des charges nettes entre la première et la deuxième année

Cet aspect peut être expliqué par différentes raisons :

- la prudence conduit les compagnies à préférer des dégagements de boni que de mali ;
- c'est un comportement typique du marché de l'assurance ;
- les impôts.

REMARQUE 4.2. Finalement, on remarque que dans ce chapitre tous les triangles analysés seront des triangles en *run-off*. Cette hypothèse simplificatrice considère que les engagements pris en compte soient rattachés à des contrats d'assurance échus.

Un chapitre à la fin de ce mémoire va proposer une démarche pour adapter la stratégie de provisionnement au cas des triangles non en *run-off*.

On remarque pour la suite que les deux dernières colonnes du triangle des charges nettes permettent d'analyser une espèce de boni/mali pour l'année en cours.

Cette analyse montre alors qu'il y a deux mali très importants : le premier pour l'année $N - 1$ qui est considéré comme typique après l'analyse précédente, et le deuxième concernant l'année en cours pour lequel rien était provisionné en avance.

Finalement la compagnie doit faire face à un mali de 11,4% (en considérant toutes les années) ou de 5,3% (en considérant les charges nettes jusqu'à l'année $N - 1$).

Période	Charges Nettes N-1 (M€)	Charges Nettes N (M€)	Variation de charges nettes (M€)	Variation de charges nettes (%)
2001	48,3	48,1	-0,3	-0,5%
2002	45,1	43,0	-2,1	-4,6%
2003	48,5	49,1	0,6	1,2%
2004	47,2	46,6	-0,6	-1,3%
2005	48,6	47,8	-0,8	-1,6%
2006	50,3	52,0	1,7	3,3%
2007	50,5	50,0	-0,6	-1,1%
2008	45,8	46,8	1,0	2,2%
2009	50,2	53,7	3,5	6,9%
2010	26,5	48,6	22,0	82,9%
2011	0,0	28,1	28,1	
Total (sauf N-1, N)	434,6	437,0	2,4	0,6%
Total (sauf N)	461,1	485,6	24,5	5,3%
Total	461,1	513,7	52,6	11,4%

TABLE 4.4. Variation des charges nettes la dernière année

3. Diagnostic du triangle de charges

Avant de les utiliser, il faut s'assurer que les modèles soient adaptés au triangle qu'on utilise.

Les 2 hypothèses du modèle de Chain-Ladder et l'hypothèse supplémentaire du modèle de Mack doivent alors être vérifiées :

- (1) Les éléments $S_{i,j}$ du triangle cumulé doivent être indépendants $\forall j$;
- (2) Il existe des facteurs de développement λ_j tels que $\mathbb{E}[S_{i,j+1} | S_{i,1}, \dots, S_{i,j}] = \lambda_j \times S_{i,j}$;
- (3) Il existe des paramètres σ_j tels que $\text{Var}[S_{i,j+1} | S_{i,1}, \dots, S_{i,j}] = \sigma_j^2 \times S_{i,j}$.

La première hypothèse va être vérifiée graphiquement à l'aide d'une représentation des résidus du triangle de charges en fonction de l'année de survenance. Une vérification graphique de la deuxième hypothèse de Chain-Ladder sera présentée aussi, pour montrer l'existence des facteurs des développement.

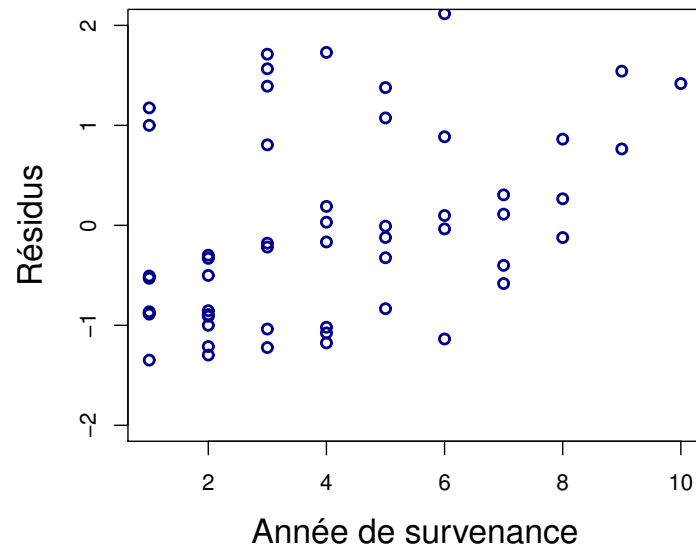


FIGURE 4.2. Vérification graphique de la première hypothèse de Chain-Ladder : le graphique montre l'indépendance des résidus par rapport aux années de survénance.

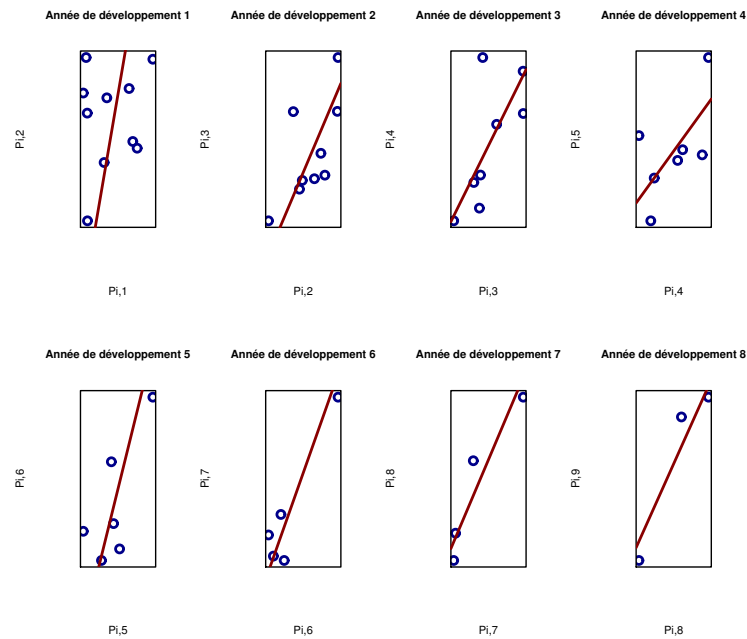


FIGURE 4.3. Vérification graphique de la deuxième hypothèse de Chain-Ladder : les figures montrent bien l'existence des facteurs de développement.

Ces graphiques montrent bien que la première hypothèse de Chain-Ladder (indépendance des éléments du triangle en fonction des années de survenance) est vérifiée empiriquement.

3.1. Étude des résidus

Après la vérification des hypothèses de Chain-Ladder on va se focaliser sur l'étude des résidus. Premièrement on va étudier l'indépendance des résidus et deuxièmement on va montrer qu'ils sont normalement distribués.

Comme on voit de la figure suivante les résidus sont répartis de manière assez équitable entre -1 et 1 et on observe un nombre convenable d'outliers par rapport au nombre total.

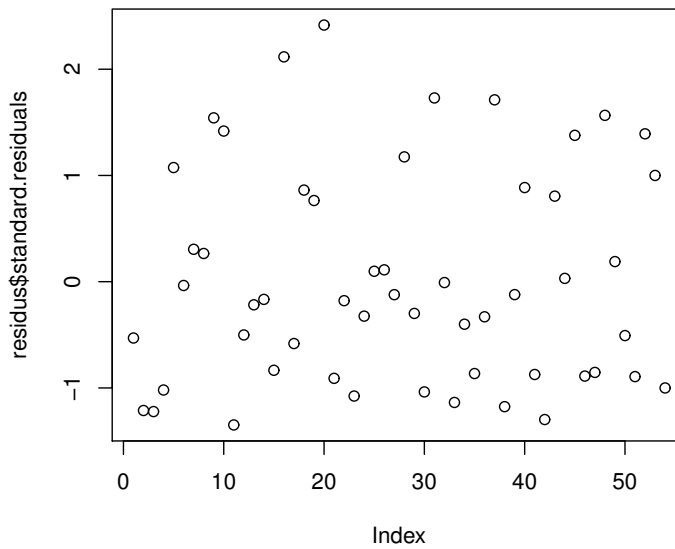


FIGURE 4.4. Nuage des résidus : les résidus sont répartis de manière assez équitable entre -1 et 1 et on observe un nombre convenable d'outliers

3.1.1. Test d'indépendance : test du khi-deux

Dans cette section le test du khi-deux est utilisé pour tester l'indépendance entre les résidus et les années de survenance.

A l'aide de la fonction *chisq.test* de R qui implémente ce test, le résultat obtenu donne une p-valeur égale à 0.3779.

Ça nous semble donc raisonnable d'accepter l'hypothèse nulle d'indépendance des résidus.

On va maintenant introduire le test de Kolmogorov-Smirnov et après vérifier graphiquement la normalité grâce à un graphique de type QQ-plot.

3.1.2. Test de normalité : test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test non-paramétrique qui peut être utilisé pour tester si un échantillon suit une distribution précise ou si deux échantillons suivent la même loi.

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles, alors la fonction de répartition empirique de cet échantillon est définie par

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n I_{]-\infty, t]}(X_i),$$

où $I_{]-\infty, t]}(X_i) = 1$ si $X_i \leq t$ et 0 sinon.

La fonction de répartition empirique est un processus qui prend ses valeurs dans l'espace des fonctions croissantes comprises entre 0 et 1.

On a que la quantité

$$D_n = \mathbb{P} \left[\sup_x |F_n(x) - F(x)| \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \right] \longrightarrow \mathbb{P}(L \geq c),$$

où F représente la fonction de répartition de la distribution qu'on souhaite vérifier et L est la loi de X .

On peut alors proposer, pour nos résidus, un test d'hypothèse nulle pour décider si l'échantillon suit une loi normale, en prenant F comme la fonction de répartition d'une loi Gaussienne.

Finalement, l'application du test aux résidus du triangle de charges pour la RC entreprise donne une p-valeur égale à 0,4665 sur un échantillon de taille $n = 54$.

Cela nous semble donc raisonnable d'accepter l'hypothèse nulle de normalité avec un seuil à 5%.

3.1.3. Test de normalité : test via un graphique de type QQ-plot

Néanmoins, le test de Kolmogorov-Smirnov n'est pas toujours statistiquement puissant. Dans cette section on va donc vérifier graphiquement la normalité des résidus. Pour faire ça un test graphique QQ-plot a été utilisé, en produisant le résultat suivant :

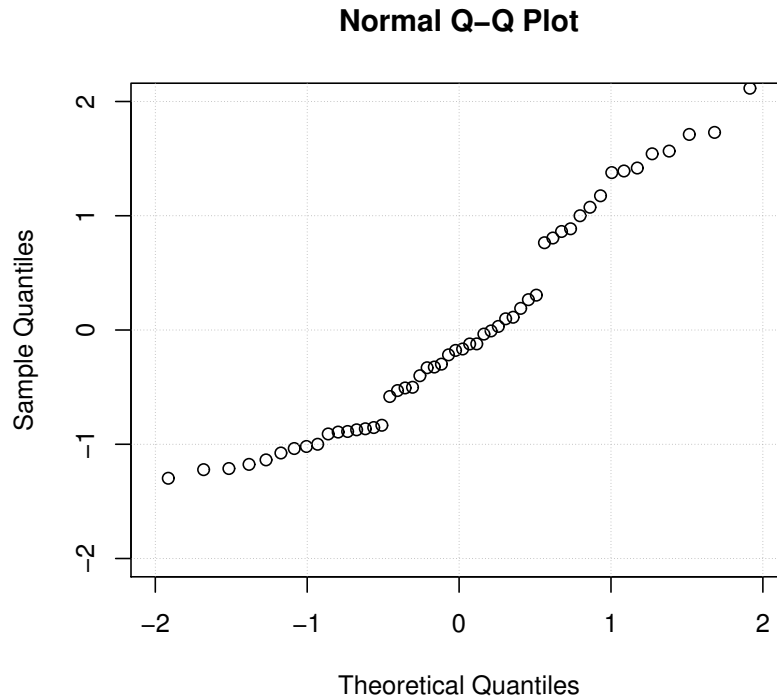


FIGURE 4.5. QQ-plot des résidus du triangle des charges

De plus, on peut calculer la moyenne et l'écart-type de la distribution. On obtient donc les résultats suivants :

$$\text{Moyenne} = 0,016$$

$$\text{Écart-type} = 1,009$$

Finalement, ça nous semble judicieux de considérer les résidus comme étant distribués selon une loi normale centrée réduite.

On remarque au passage que l'hypothèse de normalité n'est pas en conflit avec la représentation graphique du nuage des résidus. Dans le graphique, en fait, on peut voir qu'il y a que 2 outliers (c'est-à-dire des "données aberrantes" majeures de 2).

Comme le quantile à 5% de la loi normale centrée réduite est $q_{5\%} = 1,96$, on a que la probabilité pour une distribution normale centrée réduite d'avoir des éléments en valeur absolue plus grands que 1,96 est de 5%.

Dans notre cas, comme on a 54 résidus, on devrait avoir $54 \times 0,05 = \frac{54}{20} = 2,7$ outliers, ce qui est en accord avec le résultat de notre représentation et qui ne pénalise pas l'hypothèse de normalité.

4. Modélisation de la distribution des provisions pour la RC

Pour évaluer la provision du portefeuille RC entreprise, les méthodes présentées dans les chapitres précédents ont été testées.

Les résultats de leur implémentation sous *R* à partir du package *ChainLadder* (cf. Carrato et al. [2015] pour la documentation du package) sont résumés dans le tableau suivant, où les principaux quantiles, la moyenne et l'écart-type sont analysés.

	vision ultime					vision 1 an				
	Mack (normale)	Mack (lognormale)	Mack (gamma)	Bootstrap Mack (normale)	Bootstrap Mack (gamma)	Bootstrap à 1 an (gamma)	Bootstrap à 1 an (normale)	Merz (normale)	Merz (lognormale)	Merz (gamma)
Quantile 99,5%	198,1	200,3	199,7	199,8	198,8	192,5	194,0	189,7	190,0	189,2
Quantile 90%	179,4	179,5	179,4	178,7	178,5	176,0	175,1	174,9	174,7	174,8
Quantile 75%	170,9	170,4	170,4	170,0	169,7	168,5	167,4	168,3	168,0	168,3
Quantile 60%	165,1	164,2	164,5	163,9	163,7	162,9	163,1	163,8	163,6	163,8
Moyenne	161,5	161,3	161,4	160,7	160,6	160,9	160,5	161,4	161,3	161,4
Volatilité	14,0	13,9	13,9	14,0	13,8	11,4	11,2	10,5	10,4	10,4

TABLE 4.5. Comparaison des quantiles de la distribution des charges pour différentes méthodes

On peut remarquer que les quantiles pour les différentes méthodes restent très proches de la Value at Risk pour ce portefeuille. On affiche, dans un souci de complétude, la Tail Value at Risk pour les mêmes niveaux de confiance.

	Value at Risk	Tail Value at Risk
$\alpha = 99,5\%$	200,6	206,2
$\alpha = 90\%$	179,5	187,1
$\alpha = 75\%$	170,4	179,5
$\alpha = 60\%$	164,3	174,9

TABLE 4.6. Valeur de la Value At Risk et de la Tail Value At Risk à 1 an pour le portefeuille RC

On remarque de plus que les méthodes analytiques et les méthodes par simulation affichent des résultats convergents et donc le choix du modèle a un très faible impact sur ces résultats. De plus, on voit que les quelques légères différences présentes sont au niveau des quantiles à 99,5%.

Ces écarts ne seront pas importants, car la stratégie de pilotage de la marge va s'appliquer au cœur de la distribution et non pas aux queues.

A partir de ce tableau on peut voir que la méthode de bootstrap Mack appliquée suivant un bruit normal donne des quantiles plus élevés que ceux de la méthode de bootstrap Mack où le bruit suit une loi gamma.

C'est pourquoi, par soucis de prudence, on va appliquer la stratégie de pilotage aux trajectoires de l'ultime simulées à partir des triangles obtenus via l'utilisation de bootstrap Mack avec un bruit normal.

4.1. Comparaison des visions à l'ultime et des visions à 1 an

Dans cette section on va détailler les différences entre les résultats de l'application des méthodes à 1 an et les méthodes avec vision à l'ultime.

Premièrement on voit que, comme on s'attendait, la volatilité calculée dans le modèle Merz-Wüthrich (volatilité à 1 an) est plus petite que celle du modèle de Mack (volatilité à l'ultime).

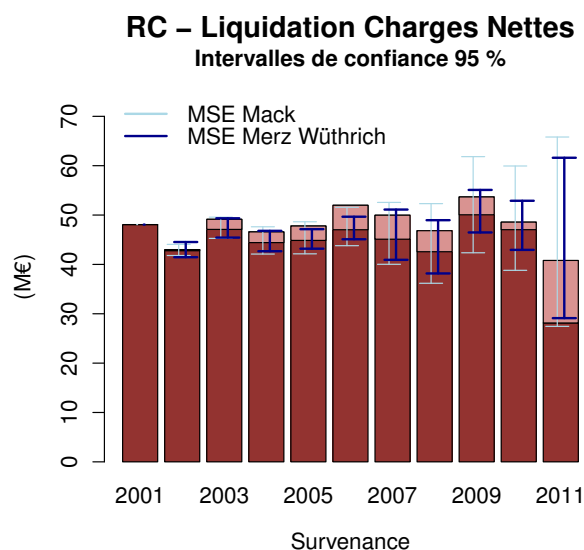


FIGURE 4.6. MSE pour la méthode de Mack et pour la méthode de Merz-Wüthrich

		MSEP Mack (M€)	MSEP Merz-Wüthrich (M€)
Année de survenance	2001	0,0	0,0
	2002	0,5	0,7
	2003	0,9	0,9
	2004	1,2	0,9
	2005	1,4	0,9
	2006	1,7	1,0
	2007	2,7	2,2
	2008	3,5	2,3
	2009	4,2	1,9
	2010	4,5	2,2
	2011	7,9	6,8
	Total	13,9	10,4

TABLE 4.7. Comparaison des MSEP pour le modèle de Mack et le modèle de Merz-Wüthrich

Les résultats des estimations pour les provisions à doter restent stables pour la méthode de Merz-Wüthrich et pour le bootstrap à 1 an. De plus, ces résultats semblent être cohérents avec ceux qui sont données par le modèle de Mack.

	vision ultime	vision 1 an				
	Mack (normale)	Bootstrap à 1 an (gamma)	Bootstrap à 1 an (normale)	Merz (normale)	Merz (lognormale)	Merz (gamma)
Quantile 99,5%	198,1	192,5	194,0	189,7	190,0	189,2
Quantile 90%	179,4	176,0	175,1	174,9	174,7	174,8
Quantile 75%	170,9	168,5	167,4	168,3	168,0	168,3
Quantile 60%	165,1	162,9	163,1	163,8	163,6	163,8
Moyenne	161,5	160,9	160,5	161,4	161,3	161,4
Volatilité	14,0	11,4	11,2	10,5	10,4	10,4

TABLE 4.8. Comparaison des visions à l'ultime et de des visions à 1 an

5. Application de la stratégie prévoyant deux quantiles différents

La stratégie d'encadrement de la marge de sécurité va être appliquée aux trajectoires des ultimes qui sortent de l'application de la méthode bootstrap Mack sur le triangle de charges pour la RC.

Premièrement les quantiles ont été fixés de la manière suivante :

- le quantile de sécurité a été fixé à hauteur de 70% ;
- le quantile maximum a été choisi au niveau de 90%.

Dans la suite on analysera la sensibilité des résultats aux changements de choix des quantiles, et on pourra montrer que notre choix initial est cohérent avec une approche prudente et suffisamment précise.

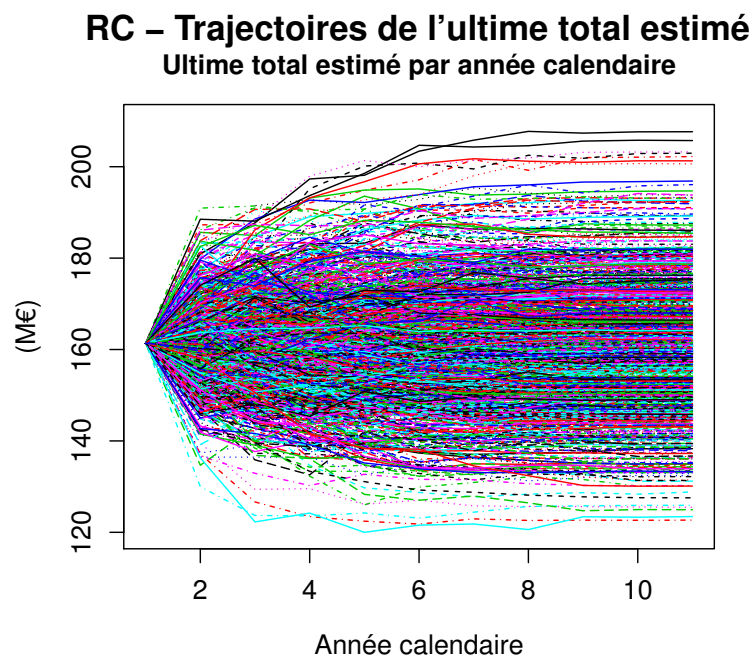


FIGURE 4.7. 10000 trajectoires des charges ultimes

Ensuite on peut calculer les boni/mali qui sont produits dans ces trajectoires, les boni/mali sont en fait le résultat de la différence entre deux ultimes (précédemment calculées) consécutives.

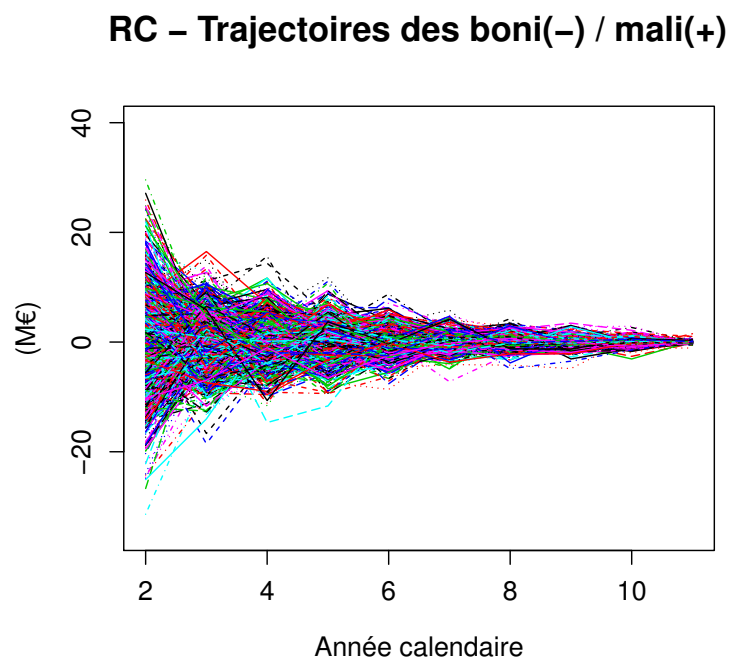


FIGURE 4.8. 10000 trajectoires des boni/mali

Comme les résultats des méthodes de provisionnement montrent que la méthode bootstrap Mack fournit une estimation plus prudente avec la simulation d'une loi log-normale plutôt que d'une loi gamma, la distribution log-normale va être retenue.

	vision ultime					vision 1 an				
	Mack (normale)	Mack (lognormale)	Mack (gamma)	Bootstrap Mack (normale)	Bootstrap Mack (gamma)	Bootstrap à 1 an (gamma)	Bootstrap à 1 an (normale)	Merz (normale)	Merz (lognormale)	Merz (gamma)
Quantile 99,5%	198,1	200,3	199,7	199,8	198,8	192,5	194,0	189,7	190,0	189,2
Quantile 90%	179,4	179,5	179,4	178,7	178,5	176,0	175,1	174,9	174,7	174,8
Quantile 75%	170,9	170,4	170,4	170,0	169,7	168,5	167,4	168,3	168,0	168,3
Quantile 60%	165,1	164,2	164,5	163,9	163,7	162,9	163,1	163,8	163,6	163,8
Moyenne	161,5	161,3	161,4	160,7	160,6	160,9	160,5	161,4	161,3	161,4
Volatilité	14,0	13,9	13,9	14,0	13,8	11,4	11,2	10,5	10,4	10,4

FIGURE 4.9. Comparaison des méthodes de provisionnement

La stratégie d'encadrement de la marge peut finalement être appliquée. On considère donc un quantile de sécurité $q_{secu} = 70\%$ et un quantile maximum $q_{max} = 90\%$ qui donnent les résultats suivants. En particulier dans le graphique les intervalles de confiance à 50%, 75% et 95% pour les distributions des boni/mali ont été considérés.

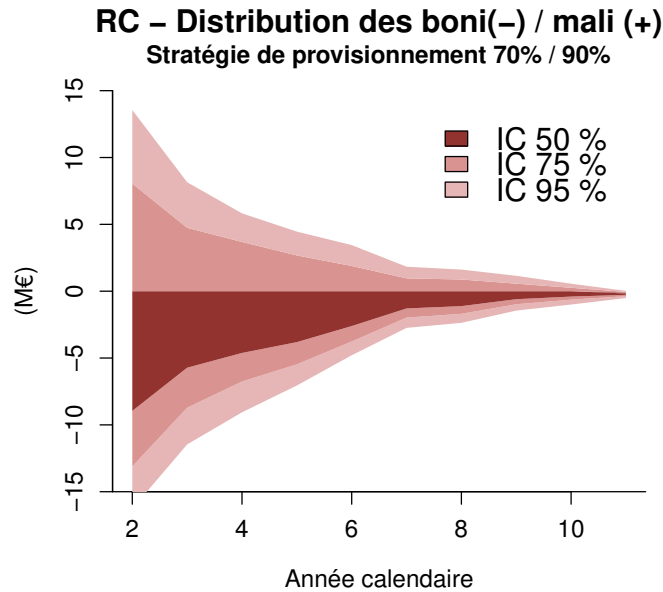


FIGURE 4.10. Stratégie 70% / 90%

On peut voir ici un exemple d'application de la stratégie de pilotage sur une simulation. Au début l'ultime margé est positionné sur le quantile de sécurité. Jusqu'à la quatrième année de vision on remarque que l'ultime margé se maintient entre les limites définies, donc il n'y a pas de reprise ni de dotation. A la quatrième année l'ultime margé dépasse par contre la limite supérieure estimée donc il y a un repositionnement et un dégagement de la marge en boni.

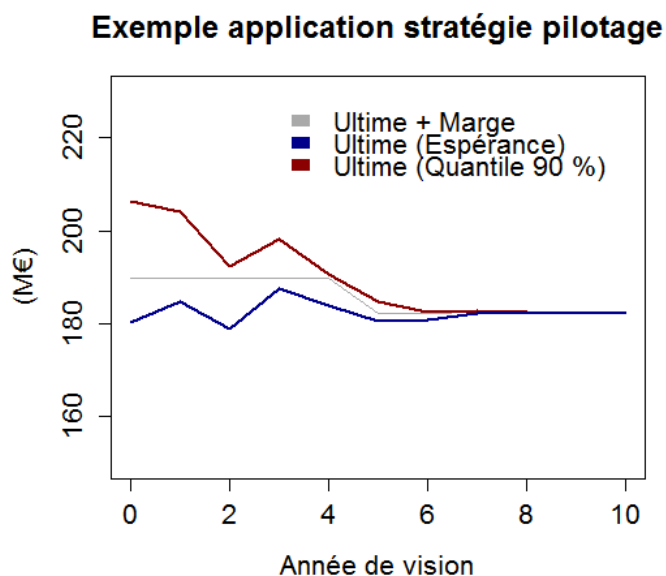


FIGURE 4.11. Exemple d'application de la stratégie 70% / 90%

5.1. Test de sensibilité sur le quantile de sécurité q_{secu}

Dans cette section on analyse la sensibilité de la stratégie au changement du quantile de prudence q_{secu} .

Les résultats graphiques sont montrés ici :

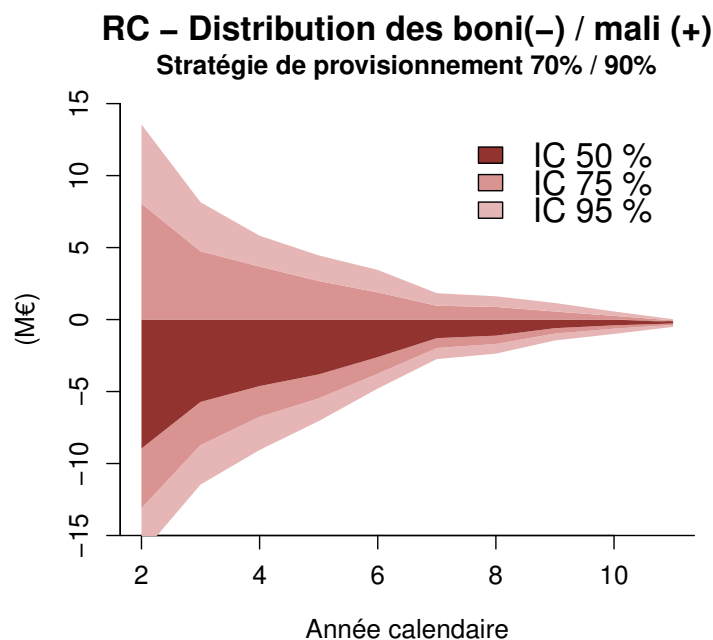


FIGURE 4.12. Stratégie de départ 70% / 90%

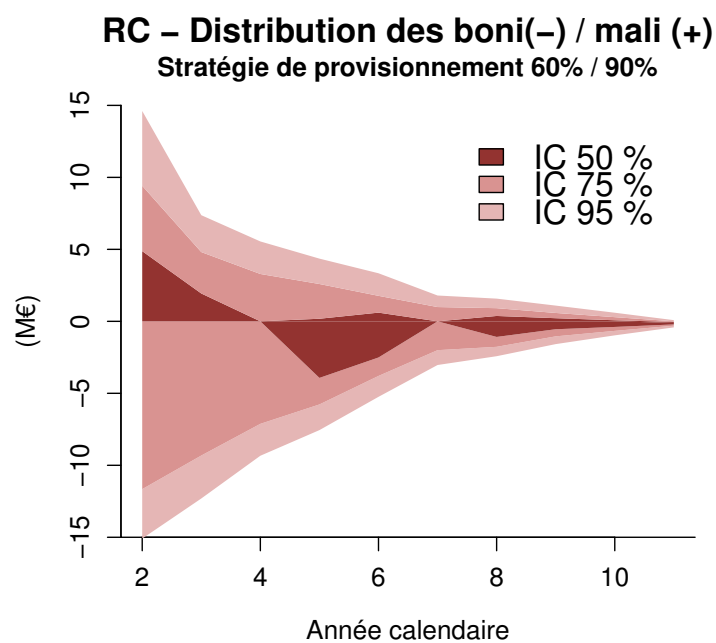


FIGURE 4.13. Stratégie 60% / 90%

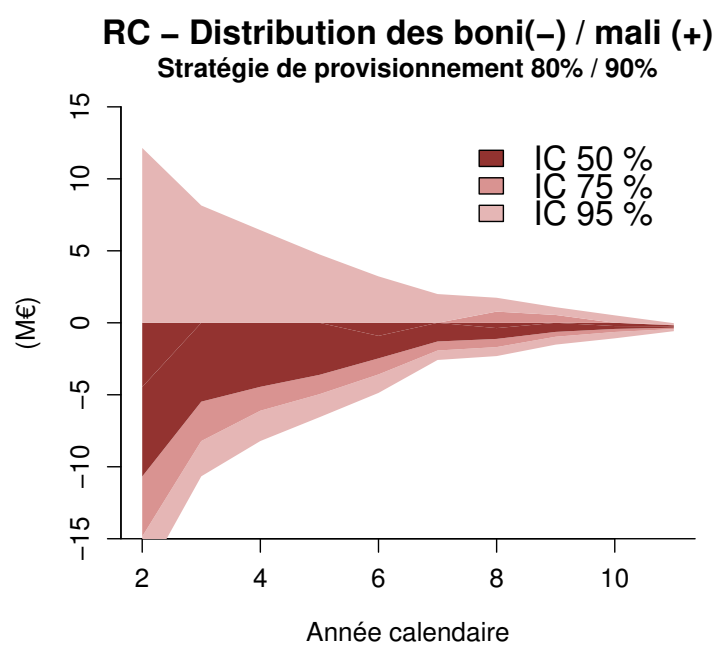


FIGURE 4.14. Stratégie 80% / 90%

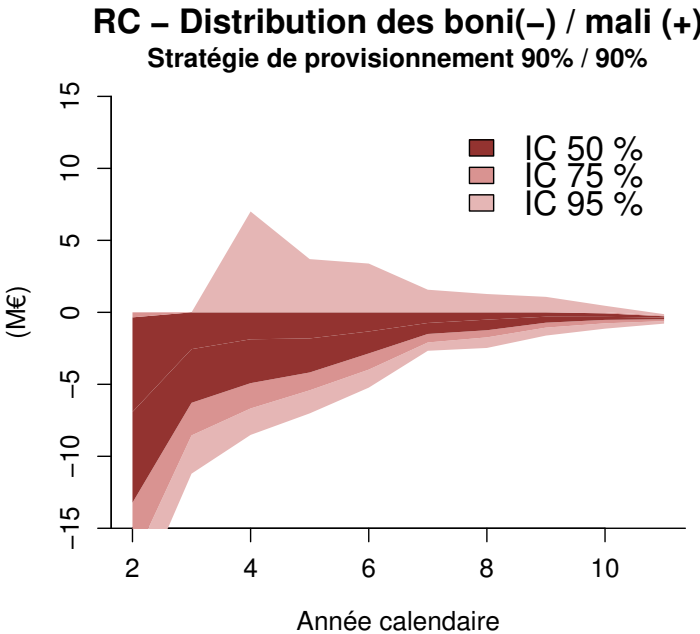


FIGURE 4.15. Stratégie 90% / 90%

On peut remarquer donc que, comme on s’attendait, si le quantile de sécurité q_{secu} augmente, le montant des mali devient plus faible alors que le montant des boni devient plus consistant.

On montre finalement le changement du coût de la marge de sécurité initiale en fonction du choix de q_{secu} .

	Marge Initiale (M€)
Quantile de sécurité = 90%	18,2
Quantile de sécurité = 80%	11,5
Quantile de sécurité = 70%	6,8
Quantile de sécurité = 60%	3,0

TABLE 4.9. Marge initiale en fonction du choix du quantile de sécurité

5.2. Test de sensibilité sur le quantile maximum q_{max}

La sensibilité de la stratégie en fonction du choix du quantile maximum q_{max} a été testée aussi.

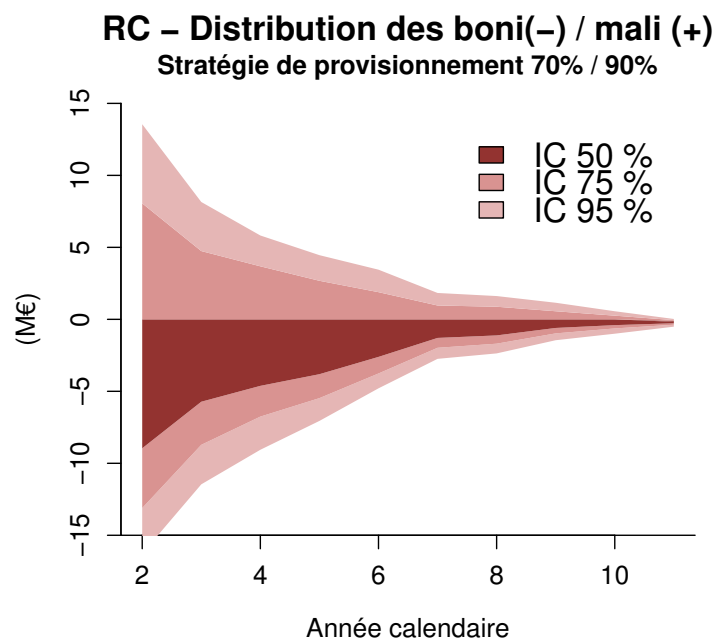


FIGURE 4.16. Stratégie 70% / 90%

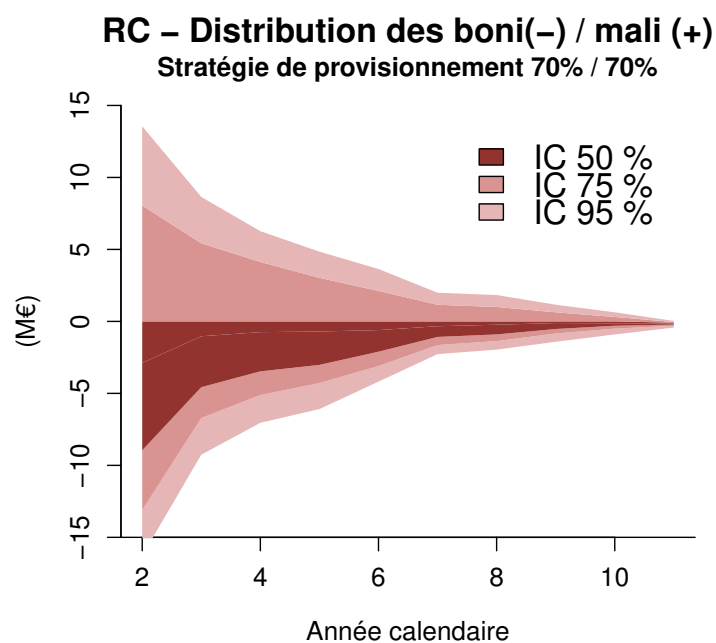


FIGURE 4.17. Stratégie 70% / 70%

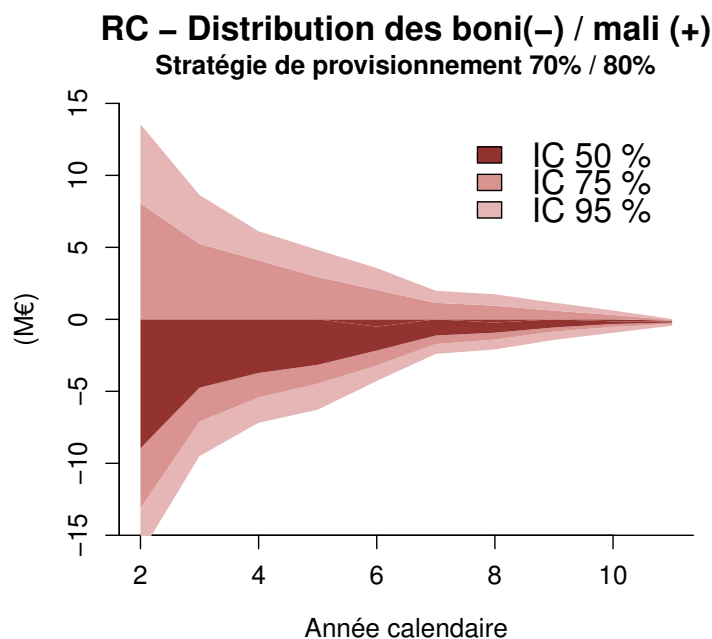


FIGURE 4.18. Stratégie 70% / 80%

Comme on a remarqué dans l'analyse de la sensibilité pour le quantile de sécurité, on peut voir qu'inversement au cas précédent, quand le quantile maximum diminue, le montant des mali augmente alors que le montant des boni diminue.

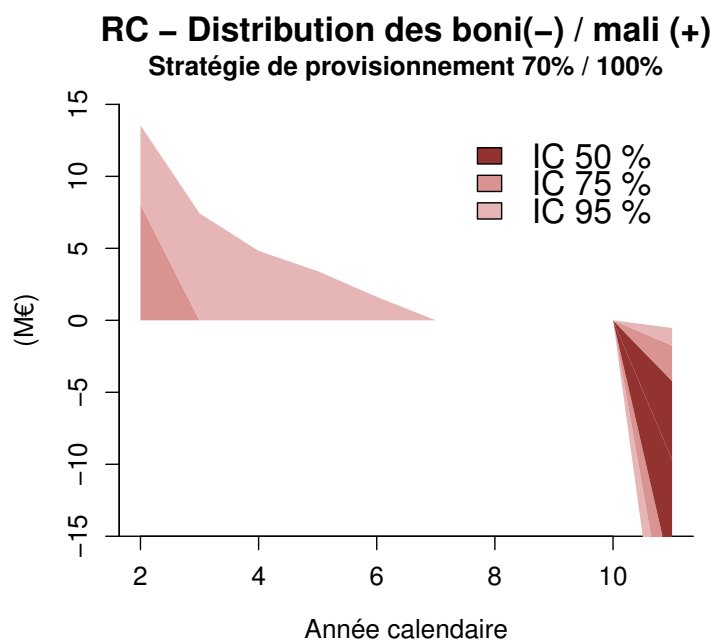


FIGURE 4.19. Stratégie 70% / 100%

REMARQUE 4.3. Le dernier cas analyse présent une distribution très différente par rapport aux autres cas ; ceci peut être expliqué via le choix particulier du quantile maximum q_{max} .

Dans ce cas en fait le quantile a été choisi à 100% : cela signifie que dans notre stratégie on a décidé de ne jamais repositionner l'ultime margé "à la hausse". Donc on a choisi de ne dégager pas de boni pour les premiers 10 ans et de tout le dégager la dernière année d'exercice.

6. Choix des quantiles pour la stratégie de provisionnement

Dans cette section on analyse l'impact du choix des quantiles qui encadrent la marge de sécurité.

Comme noté dans le chapitre précédent, au début les quantiles ont été fixés à 70% pour le quantile de sécurité et à 90% pour le quantile max.

Ensuite différents choix ont été testés pour les deux quantiles en analysant la probabilité d'avoir des trajectoires sans boni et/ou sans mali. Pour compléter l'analyse le coût de la marge de sécurité a été comparé aussi et les détails des résultats sont présentés ici :

Probabilité des trajectoires	0 boni max	1 bonus max	2 boni max	Montant boni moyen (M €)
Stratégie 60%/90%	0,70%	10,30%	33,50%	-9,4
Stratégie 70%/90%	0,24%	5,12%	18,70%	-9,8
Stratégie 80%/90%	0,10%	1,80%	9,30%	-11,0
Stratégie 70%/80%	0,10%	2,00%	9,00%	-9,5

TABLE 4.10. Probabilité d'avoir des boni et montant des boni en fonction des quantiles retenus

Probabilité des trajectoires	0 mali max	1 malus max	2 mali max	Montant mali moyen (M €)
Stratégie 60%/90%	12,20%	35,40%	61,00%	4,7
Stratégie 70%/90%	22,58%	55,20%	79,46%	4,2
Stratégie 80%/90%	38,00%	74,20%	92,80%	3,3
Stratégie 70%/80%	17,60%	48,70%	73,80%	4,7

TABLE 4.11. Probabilité d'avoir des mali et montant des mali en fonction des quantiles retenus

Probabilité des trajectoires	0 boni et 0 mali max	Montant moyen (M €)
Stratégie 60%/90%	12,90%	14,1
Stratégie 70%/90%	22,82%	14,0
Stratégie 80%/90%	38,10%	14,3
Stratégie 70%/80%	17,70%	14,2

TABLE 4.12. Probabilité d'avoir 0 boni et mali et coût de la marge de sécurité

On voit donc que la stratégie avec un quantile de sécurité à 70% et un quantile max à 90% donne des résultats meilleurs que ceux des stratégies avec des choix différents pour les quantiles.

Cette remarque justifie alors l'adoption de la stratégie 70% / 90% qui va maintenant être testée en face des stratégies de marché pour ce portefeuille de RC entreprise.

7. Comparaison des stratégies

Pour finir on compare les résultats de la stratégie d'encadrement avec les résultats des stratégies de marché qui consistent à fixer la marge de sécurité selon un quantile fixe ou en considérant un quantile décroissant.

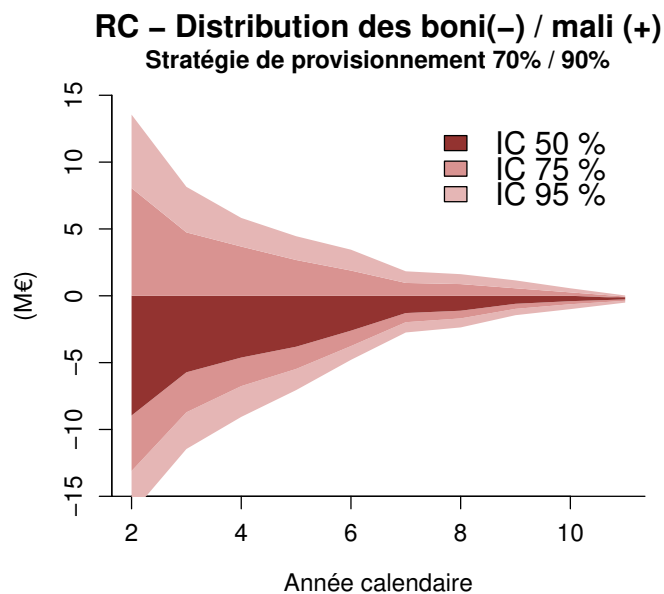


FIGURE 4.20. Stratégie 70% / 90%

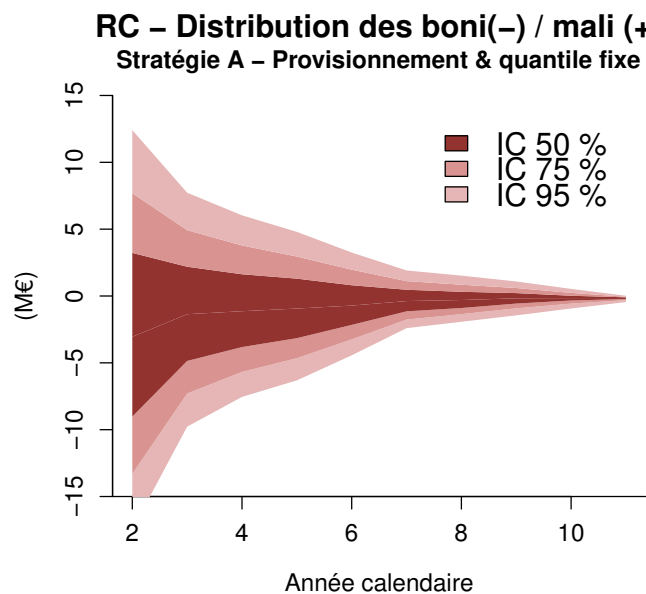


FIGURE 4.21. Stratégie A : quantile fixe 70%

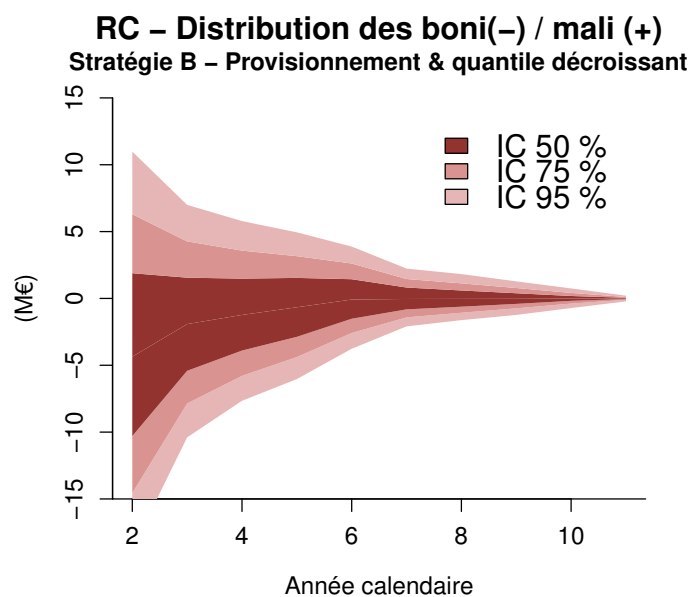


FIGURE 4.22. Stratégie B : quantile décroissant jusqu'à 50%

On montre maintenant les statistiques qui concernent la probabilité d'avoir des trajectoires avec 0, 1 ou 2 mali ou boni selon la stratégie qu'on propose et les deux stratégies de marché.

Probabilité des trajectoires	0 mali max	1 malus max	2 mali max	Montant mali moyen (M €)
Stratégie 70%/90%	22,58%	55,20%	79,46%	4,2
Stratégie A - Quantile fixe	4,80%	18,26%	39,00%	5,3
Stratégie B - Quantile décroissant	1,16%	6,64%	19,60%	5,8

TABLE 4.13. Probabilité d'avoir des mali

Probabilité des trajectoires	0 boni max	1 bonus max	2 boni max	Montant boni moyen (M €)
Stratégie 70%/90%	0,24%	5,12%	18,70%	-9,8
Stratégie A - Quantile fixe	0,00%	0,16%	1,30%	-10,2
Stratégie B - Quantile décroissant	0,22%	2,02%	8,02%	-9,4

TABLE 4.14. Probabilité d'avoir des boni

On voit que la probabilité d'avoir des trajectoires avec 0 boni est proche de 0 pour chaque stratégie.

Ce résultat n'est pas étrange et il peut s'expliquer par différentes raisons :

- les caractéristiques particulières du triangle de charges : dans ce type de triangles en fait on dote souvent des montants très élevés de charges pendant les 3 premières années, et ensuite on dote des masses d'argent de manière beaucoup plus faible.

On assiste à des cas où au cours des années on arrive aussi à reprendre une partie des charges dotées (cf. le triangle de charges qu'on utilise) ;

- le comportement typique des compagnies d'assurances : le résultat des stratégies est en fait cohérent avec l'asymétrie du coût du risque sur le marché.

Cela signifie que dans la pratique commune les assureurs préfèrent dégager des boni plutôt que des mali.

Charges Nettes (M€)		Année de développement										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Année de survenance	2001	35,1	48,8	48,0	53,1	56,2	54,2	51,6	50,3	49,7	48,3	48,1
	2002	39,5	50,1	51,1	50,9	50,6	49,8	47,1	45,8	45,1	43,0	
	2003	36,6	46,0	47,3	48,3	46,3	49,6	48,3	48,5	49,1		
	2004	35,8	46,3	47,8	47,3	51,5	49,0	47,2	46,6			
	2005	27,3	47,6	47,8	48,6	48,9	48,6	47,8				
	2006	30,4	45,3	51,1	52,6	50,3	52,0					
	2007	30,9	48,3	49,1	50,5	50,0						
	2008	27,3	42,6	45,8	46,8							
	2009	27,1	50,2	53,7								
	2010	26,5	48,6									
	2011	28,1										

TABLE 4.15. Triangle de charges pour la RC entreprise

On remarque de plus que la stratégie B (à quantile décroissant) fournit un résultat légèrement meilleur pour ce qui concerne le montant des boni, mais ça n'est pas vrai pour ce qui concerne les pourcentages de trajectoires avec un nombre limité des boni.

Ce résultat peut être expliqué par la nature de la stratégie : le choix de considérer un quantile de prudence q_{secu} qui décroît chaque année permet d'obtenir une estimation

plus prudente du dégagement des boni, mais on voit par contre que cette stratégie pénalise fortement les compagnies pour ce qui concerne le dégagement des mali.

On peut enfin comparer les stratégies pour voir combien coûte la dotation de la marge au final : on considère alors la somme des valeurs absolues des montant de boni et de mali qui seraient à dégager en adoptant la stratégie indiquée.

Probabilité des trajectoires	0 boni et 0 mali max	Montant moyen (M €)
Stratégie 70%/90%	22,82%	14,0
Stratégie A - Quantile fixe	4,80%	15,5
Stratégie B - Quantile décroissant	1,38%	15,2

TABLE 4.16. Probabilité d'avoir 0 boni et 0 mali et coût final de la marge de sécurité

On voit alors que la stratégie qu'on propose nous fournit globalement des performances meilleures des stratégies de marché qu'on a analysé, soit en considérant le montant des boni/mali à dégager, soit en prenant en compte le nombre de trajectoires qui présentent 0 boni/mali.

Traitement fiscal

Dans ce chapitre on fait un bref récapitulatif des normes concernant les impôts sur les excédents de provisions.

1. Code général des impôts

L'article 235 ter X du Code général des impôts règle la taxation des compagnies d'assurance de dommages (à l'exclusion des entreprises de réassurance). En particulier, ces compagnies [...] *doivent, lorsqu'elles rapportent au résultat imposable d'un exercice l'excédent des provisions constituées pour faire face au règlement des sinistres qui se sont passés au cours d'un exercice antérieur, acquitter une taxe représentative de l'intérêt correspondant à l'avantage de trésorerie ainsi obtenu.*

La façon de calculer l'assiette est indiquée dans le même article selon la formule suivante : *la taxe est assise sur le montant de l'impôt sur les sociétés qui aurait dû être acquitté l'année de la constitution des provisions en l'absence d'excédent. Pour le calcul de cet impôt, les excédents des provisions réintégrés sont diminués, d'une part, d'une franchise égale, pour chaque excédent, à 3 % du montant de celui-ci et des règlements de sinistres effectués au cours de l'exercice par prélèvement sur la provision correspondante, d'autre part, des dotations complémentaires constituées à la clôture du même exercice en vue de faire face à l'aggravation du coût estimé des sinistres advenus au cours d'autres exercices antérieurs. Chaque excédent de provision, après application de la franchise, et chaque dotation complémentaire sont rattachés à l'exercice au titre duquel la provision initiale a été constituée. La taxe est calculée au taux de 0,40 % par mois écoulé depuis la constitution de la provision en faisant abstraction du nombre d'années correspondant au nombre d'exercices au titre desquels il n'était pas dû d'impôt sur les sociétés.*

REMARQUE 5.1. La taxe est admise en charge déductible pour la détermination du résultat imposable.

Le code général des impôts présente de plus une asymétrie qui vise à favoriser la dotation des provisions plus consistantes, en fait les excédents de provisions rapportés au résultat constituent un avantage de trésorerie par rapport au montant de l'IS qui aurait dû être acquitté l'année de la constitution des provisions en l'absence d'excédent.

Si par contre le calcul fait apparaître un total négatif (cas de sous-provisionnement), celui-ci n'est ni remboursable, ni imputable sur la taxe exigible au titre d'un exercice suivant.

On peut montrer graphiquement comment les excédents taxables se calculent :

$$\begin{aligned} \text{Excédents taxables} = & \text{Excédents des provisions réintégrés} - \text{Franchise} \\ & - \left(\text{Dotations complémentaires} + \text{Majoration dotations complémentaires} \right), \end{aligned}$$

où la franchise se calcule de la manière suivante comme indiqué par le Code général des impôts :

$$\begin{aligned} \text{Franchise} = & 3\% \times \left(\text{Excédents des provisions réintégrés} \right. \\ & \left. + \text{Règlements de sinistres effectués au cours de l'exercice} \right), \end{aligned}$$

et les *majoration dotations complémentaires* sont données par :

$$\text{Majoration dotations complémentaires} = 3\% \times \left(\Delta \text{Provisions des survenances dotées} \right).$$

La démarche pour le calcul de l'assiette peut être alors représentée de la façon suivante :

$$\text{Assiette survenance N} = \left(\text{Dotations/Reprises N} + 3\% \times \Delta \text{Provisions N} \right) \times 33,3\%^{1/3}.$$

2. Exemple d'application du traitement fiscal

On traite dans cette section un exemple pratique pour montrer comment les calculs des taxes sur les excédents de provisions s'appliquent.

On considère les données suivantes, faisant référence à une hypothétique compagnie d'assurance non vie, sur les 4 dernières années de survenance :

Survenance	Ultime		Règlements cumulés		Provisions	
	Exercice N	Exercice N-1	Exercice N	Exercice N-1	Exercice N	Exercice N-1
N-4	110	100	100	90	10	10
N-3	95	100	90	70	5	30
N-2	110	100	70	40	40	60
N-1	90	100	40	10	50	90

TABLE 5.1. Données d'une compagnie d'assurance non vie

Premièrement on calcule les dotations ou reprises entre les deux derniers exercices et la variation de provisions sur la même période.

Deuxièmement on obtient la franchise à appliquer via la multiplication entre le coefficient réglementaire à 3% et la variation de provisions qu'on vient de calculer.

Ensuite on détermine l'assiette pour l'année de survenance N via le produit entre le taux d'impôt $33\%^{1/3}$ et les dotations/reprises diminuées de la franchise.

Les résultats de ces calculs sont alors présentés dans le tableau suivant :

Survenance	Dotations/Reprises	Variation provisions	Franchise	Excédents taxables	Assiette
N-4	10,0	0,0	0,0	10,0	3,3
N-3	-5,0	-25,0	0,8	-5,8	-1,9
N-2	10,0	-20,0	0,6	9,4	3,1
N-1	-10,0	-40,0	1,2	-11,2	-3,7

TABLE 5.2. Calcul des excédents taxables

On suppose maintenant que les excédents soient ventilés de la manière suivante sur les 4 derniers exercices :

		Survenance			
		N-4	N-3	N-2	N-1
Exercice N	Dotations/Reprises	10	-5	10	-10
	Dotations complémentaires à reporter sur la déclaration de l'année suivante	0	-5	0	-10
	Report des dotations complémentaires inutilisées sur la déclaration de l'année précédente	-6	-2	-1	0
Exercice N-1	Excédents provenant de l'année N-1	6	0	1	0
	Dotations complémentaires à reporter sur la déclaration de l'année suivante	0	-2	0	0
	Excédents provenant de provisions plus anciennes	4	0	9	0
Exercice N-2	Report des dotations complémentaires inutilisées sur la déclaration de l'année précédente	-3	-1	0	0
	Excédents provenant de l'année N-2	3	0	9	0
	Dotations complémentaires à reporter sur la déclaration de l'année suivante	0	-1	0	0
Exercice N-3	Excédents provenant de provisions plus anciennes	1	0	0	0
	Report des dotations complémentaires inutilisées sur la déclaration de l'année précédente	0	0	0	0
	Excédents provenant de l'année N-3	0	0	0	0
Exercice N-4	Dotations complémentaires à reporter sur la déclaration de l'année suivante	0	0	0	0
	Excédents provenant de provisions plus anciennes	1	0	0	0
	Report des dotations complémentaires inutilisées sur la déclaration de l'année précédente	0	0	0	0
Exercice N-4	Excédents provenant de l'année N-4	1	0	0	0
	Dotations complémentaires à reporter sur la déclaration de l'année suivante	0	0	0	0
	Excédents provenant de provisions plus anciennes	0	0	0	0

TABLE 5.3. Ventilation des excédents taxables

Du tableau précédent on peut obtenir la ventilation des assiettes. Cette imputation des excédents par exercice comptable permet d'affecter les pourcentages obtenus à la base de calcul de la taxe.

Dotations/Reprises	Survénance			
	N-4	N-3	N-2	N-1
Exercice N	10	-5	10	-10
Exercice N-1	6	0	1	-10
Exercice N-2	3	0	9	0
Exercice N-3	0	-5	0	0
Exercice N-4	1	0	0	0
Exercice N-1	60%	0%	10%	100%
Exercice N-2	30%	0%	90%	0%
Exercice N-3	0%	100%	0%	0%
Exercice N-4	10%	0%	0%	0%

TABLE 5.4. Ventilation des assiettes

Finalement on peut affecter les assiettes sur les différents exercices via la multiplication entre les pourcentages précédemment calculés et l'assiette de chaque année de survénance. Ensuite on peut évaluer le taux d'intérêt en multipliant le taux donné par les codes des impôts 0,04% fois le nombre de mois passés.

In fine la taxe pour chaque exercice peut être évaluée comme la somme des assiettes pour le même exercice et différentes survénances fois le taux précédemment calculé.

	Survénance N-4	Survénance N-3	Survénance N-2	Survénance N-1	Taux	Taxe
Assiette	3,3	-1,9	3,1	-3,7		
Exercice N-1	2,0	0,0	0,3	-3,7	5%	-0,07
Exercice N-2	1,0	0,0	2,8	0,0	10%	0,37
Exercice N-3	0,0	-1,9	0,0	0,0	14%	-0,28
Exercice N-4	0,3	0,0	0,0	0,0	19%	0,06
Taxe Totale = -0,07 + 0,37 - 0,28 = 0,06 = 0,09						

TABLE 5.5. Calcul de la taxe

On voit donc dans cet exemple, que la taxe finale à appliquer sur les excédents des provisions est de 0,09 M€.

3. Application du traitement fiscal à la branche RC entreprise

Dans cette section on analyse l'impact que les taxes sur les excédents de provisions pourraient avoir sur une compagnie qui applique la stratégie de provisionnement qu'on a présentée.

L'application de la démarche de la section précédente donne finalement les résultats suivants :

		Quantile 50% (M€)	Quantile 75% (M€)	Quantile 87,5% (M€)	Quantile 95% (M€)
Année d'exercice	2012	0,0	0,0	0,2	0,4
	2013	0,0	0,0	0,1	0,4
	2014	0,0	0,0	0,1	0,3
	2015	0,0	0,0	0,1	0,3
	2016	0,0	0,0	0,2	0,3
	2017	0,0	0,1	0,2	0,4
	2018	0,0	0,0	0,1	0,3
	2019	0,0	0,0	0,2	0,3
	2020	0,0	0,0	0,2	0,3
	2021	0,0	0,1	0,2	0,4

TABLE 5.6. Calcul de la taxe pour la RC entreprise

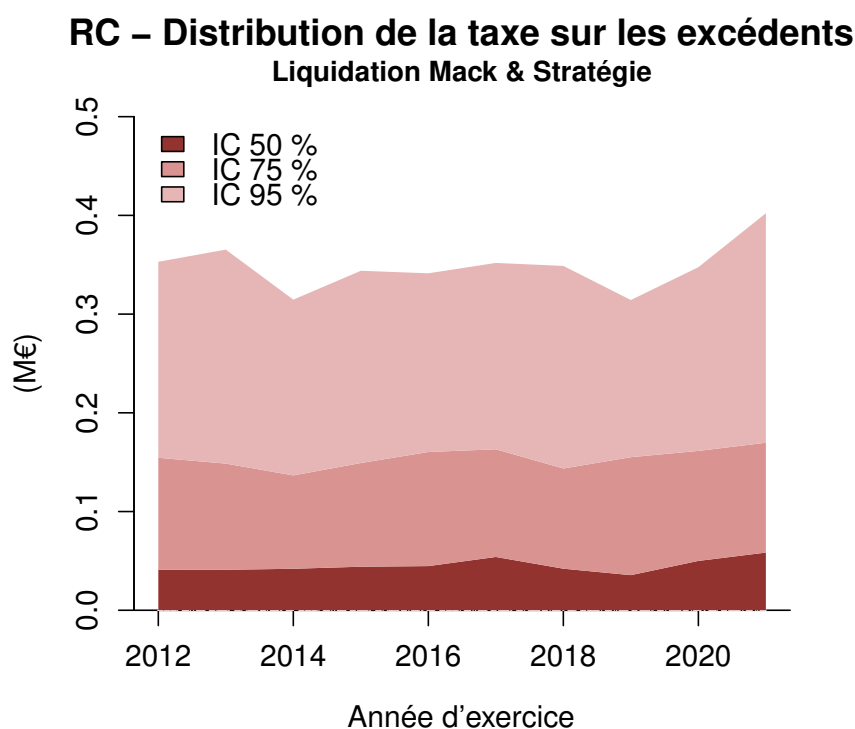


FIGURE 5.1. Représentation graphique de la distribution de la taxe pour la RC entreprise

On voit donc que le montant de la taxe est négligeable et que l'application de notre stratégie de provisionnement n'impacte pas le traitement fiscal de la compagnie. Ça nous semble donc raisonnable d'affirmer que la taxe sur les excédents de provisions ne pénalise pas notre analyse.

Corrélation dans le cas de plusieurs portefeuilles

Dans les chapitres précédents on a proposé une stratégie qui peut être appliquée à plusieurs branches seulement si elles sont indépendantes.

Cette condition est rarement vérifiée dans le monde réel. Pour détailler les problématiques liées à cet aspect on renvoie à Van Der Heyden et al. [2007].

Maintenant on va donc prendre en compte la dépendance entre deux branches, en proposant une démarche pour modéliser cette corrélation et on l'appliquera ensuite à nos triangles.

Cette approche, par contre, va soulever plusieurs enjeux qu'on analysera en détail :

- (1) Comment modéliser la structure de dépendance ?
- (2) Quelle choix entre une règle d'agrégation de la marge ou un calcul direct de la marge totale ?

En particulier, pour répondre à la première question, on va utiliser dans la suite les copules.

Les copules sont un moyen simple et efficace de représenter les structures de dépendance entre deux variables.

1. Modélisation de la dépendance via des copules

Dans cette section on va approfondir l'outil des copules, qui sera utilisé pour modéliser la dépendance en suivant l'approche déjà utilisée par Compain [2009/2010].

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire tel que $\forall i$ X_i suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ $\mathcal{U}([0, 1])$.

LEMME 6.1. *Soit X une variable aléatoire réelle, avec une fonction de répartition F et admettant une densité.*

Alors $\tilde{X} = F(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Soient de plus $F_1, \dots, F_n$ les fonctions de répartition de $X_1, \dots, X_n$, admettant des densités.

On peut alors écrire la *copule* associée à X comme

$$\tilde{X} = \left(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n) \right)$$

et sa loi est donc exprimée par

$$\begin{aligned} C_X(t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{P}\left(\tilde{X}_1 \leq (t_1), \dots, \tilde{X}_n \leq (t_n)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(F_1 X_1 \leq (t_1), \dots, F_n X_n \leq (t_n)\right). \end{aligned}$$

THÉORÈME 6.2 (de Sklar). *Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, $(F_1, \dots, F_n)$ les fonctions de répartition associées admettant des densités. Alors*

$$\begin{aligned} F_X(t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n) \\ &= \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq F_1(t_1), \dots, F_n(X_n) \leq F_n(t_n)) \\ &= C_X(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)). \end{aligned}$$

1.1. Copule gaussienne et copule empirique

Soit $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ une copule. Elle est dit gaussienne si

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_1 \leq t_1, \dots, \tilde{X}_n \leq t_n) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(t_1), \dots, \Phi^{-1}(t_n)),$$

où Φ_Σ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ de variance Σ et Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Densité théorique d'une copule gaussienne

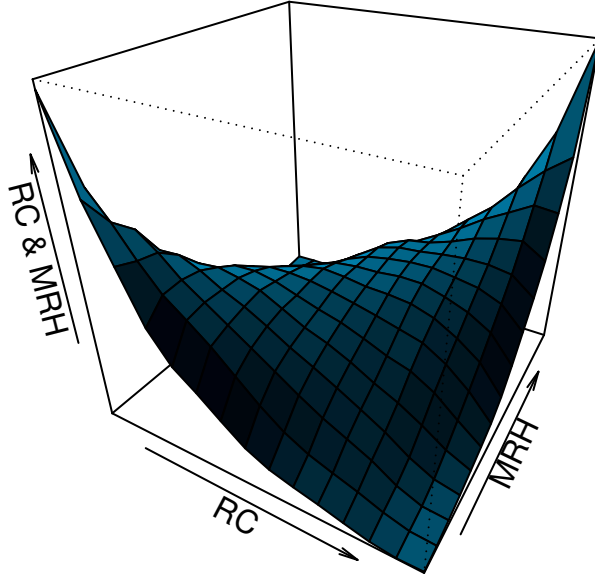


FIGURE 6.1. Densité théorique d'une copule gaussienne

2. Application aux données

Dans cette section on va appliquer les concepts précédemment introduits à nos données. En particulier on a analysé la corrélation entre le triangle de charges pour la branche RC entreprise et un nouveau triangle qui a été construit artificiellement.

La démarche pour construire le nouveau triangle est présentée ici :

- (1) On calcule les résidus du triangle de charges pour la RC entreprise ;
- (2) On applique un bruit normal aux résidus pour obtenir des résidus corrélés ;
- (3) Les nouveaux résidus sont utilisés pour construire un nouveau triangle.

Ce procédé nous permet alors d'analyser l'application de notre stratégie de provisionnement sur deux triangles corrélés.

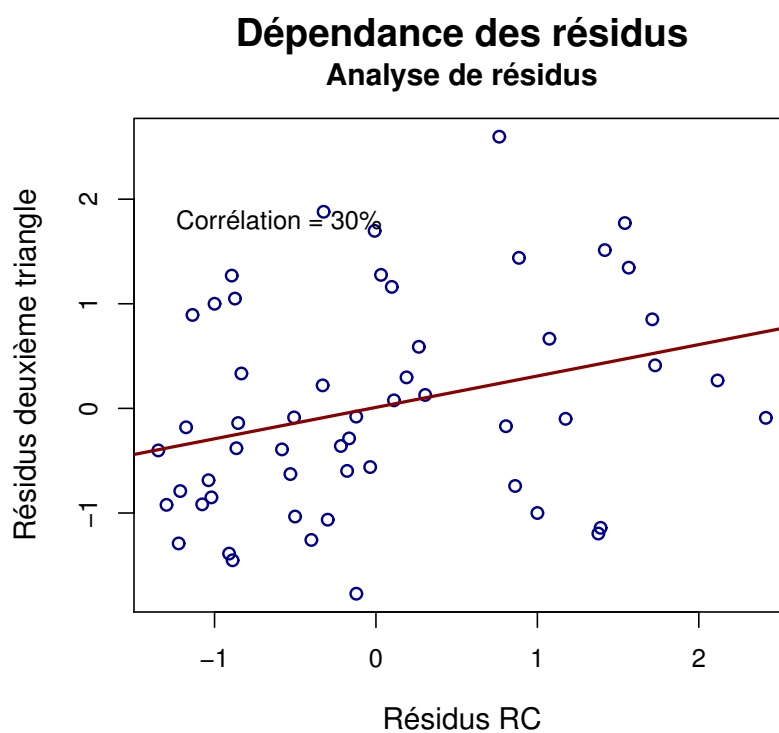


FIGURE 6.2. Corrélation des résidus des deux triangles

	Charges nettes Mack (lognormale)	
	RC	NOUVEAU TRIANGLE
Quantile 99,5%	201	239
Quantile 90%	180	207
Quantile 75%	170	194
Quantile 60%	164	185
Moyenne	161	181
Volatilité	14	20

TABLE 6.1. Résultats de la stratégie de provisionnement appliquée indépendamment à la branche RC et au nouveau triangle

Deux approches ont été testées pour simuler la distribution globale. Dans le premier cas on a simulé un nouveau portefeuille global, en prenant comme réserve globale la somme des réserves pour les deux portefeuilles et comme volatilité une moyenne pondérée des deux volatilités, selon la formule suivante :

$$\sqrt{\sigma_{RC}^2 + 2 \times \rho \times \sigma_{RC} \times \sigma_{Triangle} + \sigma_{Triangle}^2},$$

où ρ représente le paramètre de corrélation entre les deux volatilités.

De plus, la sensibilité des résultats en fonction du paramètre de corrélation des volatilités du portefeuille global ρ a été testée.

Corrélation entre les volatilités	cor = 0%	cor = 25%	cor = 50%	cor = 75%	cor = 100%
Quantile 99,5%	409	417	425	432	438
Quantile 90%	373	377	380	383	386
Quantile 80%	362	364	366	368	369
Quantile 70%	354	355	356	357	358
Moyenne	342	342	342	342	342
Volatilité	24	27	29	32	34

TABLE 6.2. Sensibilité des résultats en fonction du paramètre de corrélation ρ

REMARQUE 6.3. On remarque au passage que les résultats du portefeuille en considérant la paramètre de corrélation $\rho = 1$ sont très proches de la somme des résultats obtenus individuellement pour la RC et pour le deuxième triangle. Cela s'explique facilement en regardant la formule utilisée précédemment, en fait :

$$\sqrt{\sigma_{RC}^2 + 2 \times \rho \times \sigma_{RC} \times \sigma_{Triangle} + \sigma_{Triangle}^2},$$

dans le cas où ρ est égal à 1, devient

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma_{RC}^2 + 2 \times 1 \times \sigma_{RC} \times \sigma_{Triangle} + \sigma_{Triangle}^2} &= \sqrt{(\sigma_{RC} + \sigma_{Triangle})^2} \\ &= \sigma_{RC} + \sigma_{Triangle}\end{aligned}$$

Finalement, la nouvelle "réserve globale" et la nouvelle "volatilité globale" ont été utilisées pour simuler une nouvelle loi log-normale, en prenant comme paramètre $\log(res) - \frac{1}{2} \times \log(\frac{vol^2}{res^2} + 1)$ pour la moyenne et $\sqrt{\log(\frac{vol^2}{res^2} + 1)}$ pour la volatilité.

Néanmoins, dans le deuxième cas on a simulé une convolution des deux lois log-normales associées aux réserves et aux volatilités des deux portefeuilles.

Les résultats finals sont encore une fois très proches.

Cas multi-branches Distribution des réserves

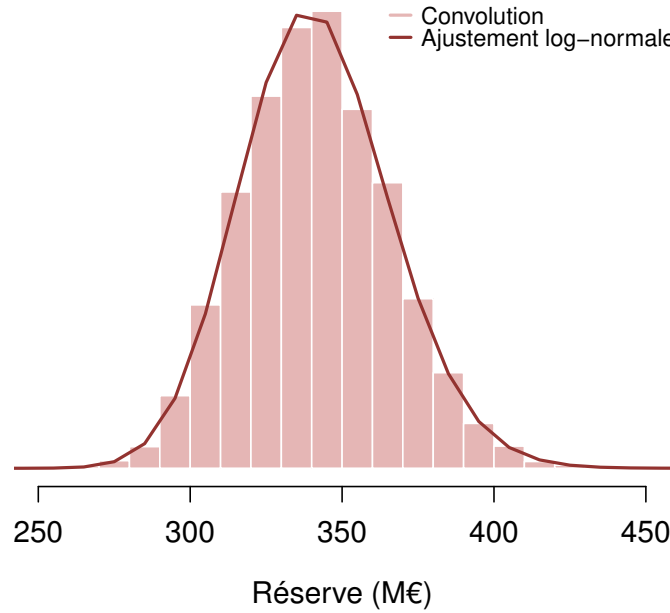


FIGURE 6.3. Comparaison de la méthode par convolution avec la méthode via une nouvelle loi log-normale, avec $\rho = 0,35$

	Convolution	Lognormale
Quantile 99,5%	407	409
Quantile 90%	372	373
Quantile 75%	360	362
Quantile 60%	353	354
Moyenne	341	342
Volatilité	24	24

TABLE 6.3. Comparaison des deux méthodes, avec $\rho = 0,35$

Finalement on a choisi de modéliser la dépendance des triangles via l'application d'une erreur de processus (simulé via un bruit normal de variance 1) à chaque pas d'itération de la méthode bootstrap Mack pour les triangles.

La sensibilité des provisions au choix du paramètre de corrélation des erreurs de processus ρ a été aussi analysée en donnant le résultat suivant :

	Avec erreur de process	Avec erreur de process	Avec erreur de process	Avec erreur de process	Sans erreur de process
Corrélation entre les erreurs de processus	100%	70%	35%	0%	
Corrélation entre les provisions	61%	44%	17%	11%	29%

TABLE 6.4. Impact de la corrélation des erreurs de processus sur les résultats

On remarque que, en augmentant la corrélation entre les erreurs de processus appliquées, on assiste à une augmentation de la corrélation entre les provisions comme on s'attendait.

Dans la suite on pourra extraire la copule empirique associée aux loi marginales log-normales en considérant ρ égal à 1.
Le graphique associé à cette copule est le suivant :

Densité de la copule empirique

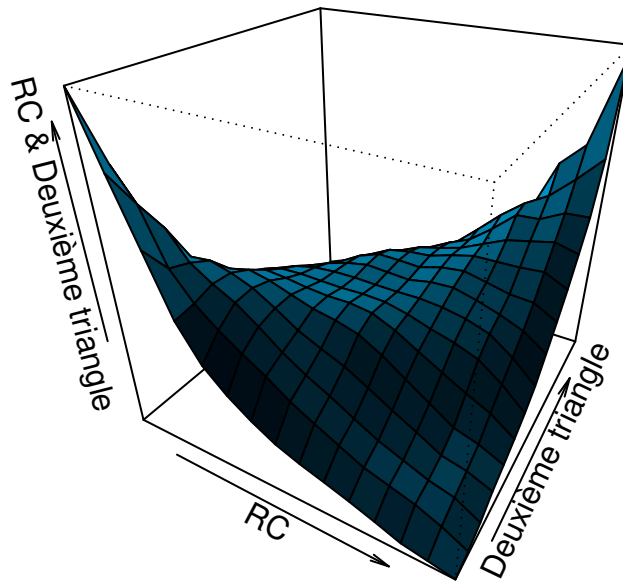


FIGURE 6.4. Densité de la copule empirique

Or la densité de cette copule est très proche de la densité d'une copule gaussienne théorique, donc l'utilisation du coefficient de corrélation de Pearson comme mesure de dépendance est justifiée.

On a :

$$\text{corr}_{\text{Pearson}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)},$$

où X et Y sont deux variables aléatoires.

On remarque finalement que la copule gaussienne est assez sensible aux valeurs extrêmes, mais dans notre cas ceci ne sera pas un problème parce que la stratégie de provisionnement se concentre sur le cœur des distributions, ce qui nous permet de ne pas être trop impacté par les événements extrêmes.

3. Calcul de la marge de sécurité dans le cas multi-branches

Deux approches pour le calcul de la marge de sécurité ont été analysées. Dans la suite on va les présenter et les comparer pour voir les avantages et les inconvénients de ces deux méthodes.

3.1. Agrégation de la marge

La première approche consiste en l'application de la stratégie de provisionnement sur chaque branche et ensuite d'un calcul de marge agrégée selon la formule suivante :

$$M_{A,B} = \sqrt{M_A^2 + M_B^2 + 2 \times \rho_{A,B} \times M_A \times M_B}.$$

Marge (M€)	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Quantile 99,5%	11	16	13	9	6	4	4	2	2	1	0
Quantile 90%	11	12	9	6	4	3	2	1	1	0	0
Quantile 75%	11	11	8	5	4	2	2	1	1	0	0
Quantile 60%	11	10	7	5	3	2	1	1	1	0	0
Moyenne	11	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0
Volatilité	0	3	2	1	1	1	1	0	0	0	0

TABLE 6.5. Agrégation des marges pour les branches MRH et RC, $\rho = 0,35$

3.2. Calcul de la marge sur le portefeuille global

La deuxième approche applique la stratégie au portefeuille global, calculant directement la marge totale.

Pour obtenir le portefeuille global on peut considérer une convolution via la somme de deux variables log-normales (mais une formule analytique n'existe pas) ou on peut simuler une nouvelle distribution log-normale.

Cette distribution va prendre comme réserve la sommes des réserves pour les deux branches et comme volatilité une combinaison des volatilités pour les deux branches.

L'écart-type est donc calculé selon la formule suivante :

$$\sigma_{globale} = (\sigma_{RC}^2 + 2 \times \rho \times \sigma_{RC} \times \sigma_{MRH} + \sigma_{MRH}^2)^{1/2}$$

Marge (M€)	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Quantile 99,5%	11	18	13	9	7	5	4	2	2	1	0
Quantile 90%	11	14	9	7	5	3	2	1	1	0	0
Quantile 75%	11	11	7	6	4	2	2	1	1	0	0
Quantile 60%	11	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0
Moyenne	11	8	6	4	3	2	1	1	0	0	0
Volatilité	0	4	2	2	1	1	1	0	0	0	0

TABLE 6.6. Marge calculée sur le portefeuille global (branches MRH et RC), avec $\rho = 0,35$

Les deux différentes approches présentent des effets asymétriques qui génèrent des légers écarts. Par souci de prudence, l'utilisation de la deuxième méthode de calcul de la marge (calcul sur le portefeuille global) est donc souhaitable car plus prudente.

Niveau de pilotage

Dans les compagnies d'assurance non vie le provisionnement est géré par deux acteurs différents : le service de gestion et le service inventaire.

Les approches de ces deux acteurs ne sont pas les mêmes, en fait le service de gestion est un service "amont" qui vise à estimer les provisions dossier/dossier.

Le service inventaire est par contre un service "aval" qui a une vision agrégée et qui cherche à estimer les provisions comptables (IBNR).

Dans cette section on va donc analyser l'impact qui pourrait avoir une politique de prudence du service de gestion sur le pilotage du provisionnement par l'inventaire.

1. Proposition de différents scénarios

En particulier on va se concentrer sur 3 scénarios : un scénario central A où on estime les provisions dossier/dossier à hauteur de 100%, un scénario B où les provisions dossier/dossier sont estimées à 120% de leur valeur réelle et un scénario C où les provisions dossier/dossier sont estimées à 200% de leur valeur réelle.

RC – Evolution de la charge

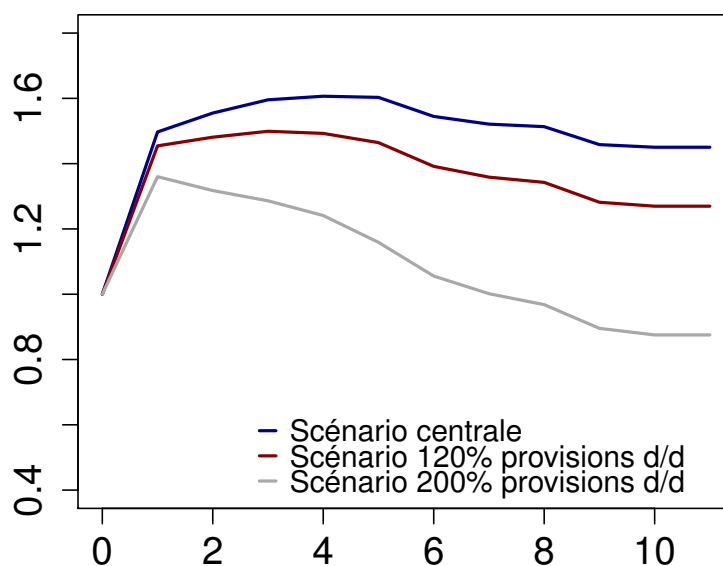


FIGURE 7.1. Évolution de la charge selon les 3 scénarios

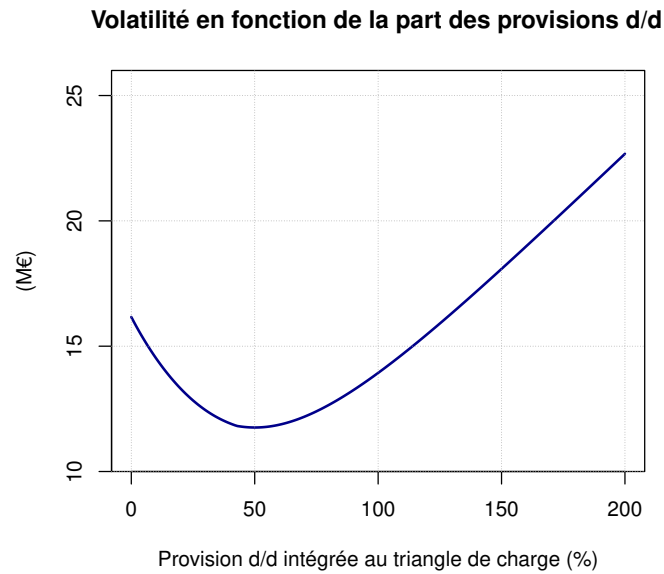


FIGURE 7.2. Volatilité en fonction de la part de provisions dossier/dossier

Pour terminer on va considérer un scénario D, où les provisions dossier/dossier sont estimées à 200% de leur valeur réelle, mais seulement à partir de l'année calendaire 2006. Dans ce cas on va montrer qu'un effet calendaire apparaît. Comme conséquence la première hypothèse de la méthode Chain-Ladder ne sera plus respectée et donc un redressement des données est rendu nécessaire.

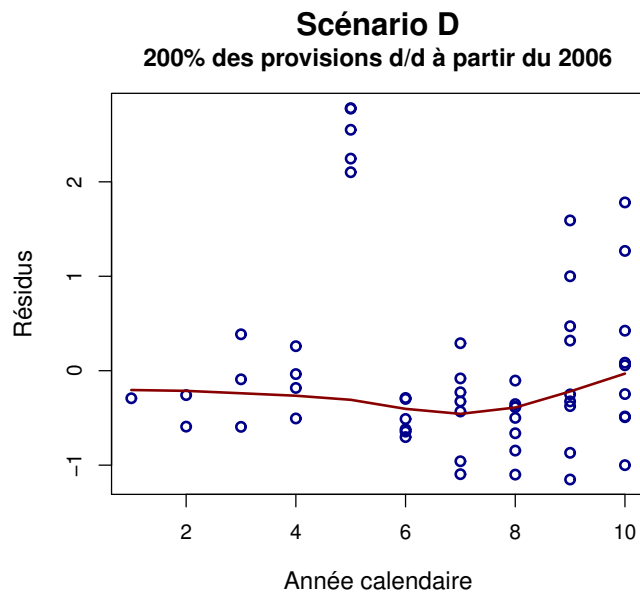


FIGURE 7.3. Scénario D : apparition d'un effet calendaire sur l'année calendaire 7. Les méthodes à *link ratios* ne seront plus utilisables à moins de redresser les données

2. Analyse des résultats

On présent ici les résultats des changements des politiques de gestion sur la stratégie de provisionnement en application aux données de la RC entreprise. Dans le tableau suivant on peut voir synthétiquement les principaux changements :

	Scénario A (100% provision d/d)	Scénario B (120% provision d/d)	Scénario C (200% provision d/d)	Scénario D (200% provision d/d à partir du 2006)
Ultimate (charges)	500	508	546	596
Provisions	161	170	207	257
Volatilité	14	15	23	51
Ratio ultime/provisions	3,1	3,0	2,6	2,3
Ratio volatilité/provisions	0,09	0,09	0,11	0,20

TABLE 7.1. Résultats des changements des politiques de gestion

Comme on voit dans le tableau ci-dessus, les politiques de prudence consistant à évaluer les provisions dossier/dossier à hauteur de 120% ou de 200% de leur valeur font augmenter le montant des provisions estimées ainsi que leur volatilité.

Ces augmentations, qui découlent logiquement du majeur poids donné au triangle des charges, impactent par contre faiblement l'analyse.

En particulier on peut voir ça en considérant le ratio entre ultimes et provisions et le ratio entre volatilité des provisions et provisions.

Néanmoins, pour le scénario D où les provisions dossier/dossier sont estimées à 200% de leur valeur à partir de la sixième année, le ratio entre ultimes et provisions semble rester stable, alors que l'introduction d'un effet calendaire pousse le ratio entre volatilité et provisions à doubler. Ainsi une volatilité artificielle dans les provisions est créée du fait de la prise en compte des deux politiques de gestion. Cela montre qu'il est important que l'actuaire connaisse le portefeuille dont il modélise la distribution des provisions.

Enjeux opérationnels

1. Bilan prudentiel et Impôts différés passif

Dans le référentiel Solvabilité II la marge de sécurité n'est pas dans les provisions. En effet ces dernières sont en *best estimate* et donc excluent toute couche de prudence.

Il pourrait être imaginé que la compagnie conserve une partie de la marge (calculée sur les provisions Solvabilité I) dans son évaluation du *best estimate*, éventuellement en retenant des hypothèses de calcul conservatrices, mais cela n'est pas conforme à la réglementation donc ne sera pas étudié dans ce mémoire.

Nous allons donc commencer par montrer comment la marge est répartie dans le bilan Solvabilité 2 entre réserve de réconciliation et impôts différés, puis nous mesurerons l'impact de la stratégie de pilotage sur le bilan économique.

1.1. Situation avant pilotage

Cette partie met en valeur l'impact de la stratégie sur le bilan d'une compagnie d'assurance dommage sur lequel les hypothèses suivantes sont faites : on suppose que les actifs sont entièrement formés par des obligations souveraines émises par des États de l'OCDE. Ensuite on établit les primes émises à hauteur de 85 M€, avec un taux de PPNA à 50%. Le taux d'imposition est supposé de 33,3%.

1.1.1. Bilan Solvabilité 1

Le bilan Solvabilité I de la société est le suivant :

Actifs	Passifs
Obligations 363 M€	Fonds propres 159 M€
	PSAP 161 M€
	PPNA 43 M€

TABLE 8.1. Bilan Solvabilité I - Situation avant pilotage

1.1.2. Bilan Solvabilité 2

Avec les hypothèses suivantes le bilan Solvabilité 2 sera dressé :

- *best estimate* de la provision pour sinistres : 132 ;
- *best estimate* de la provision pour primes : 26 ;
- moins value latente des obligations : -6 ;
- marge pour risque de 10% du *best estimate* des provisions.

Actifs	Passifs
	Fonds propres 159 M€
	Réserve de réconciliation 16 M€
	Marge pour risque 16 M€
	Best Estimate sinistres 132 M€
	Best Estimate primes 26 M€
	Impôts différés 8 M€
Obligations 357 M€	

TABLE 8.2. Bilan Solvabilité II - Situation avant pilotage

La réserve de réconciliation est un surplus de fonds propres complétant les fonds propres Solvabilité I pour constituer les fonds propres Solvabilité II.

Elle est composée de richesse latente et elle se calcule ici comme la marge dans les provisions, à laquelle sont ajoutés les produits financiers générés par les provisions (correspondant à un effet d'actualisation avec des taux sans risque), la moins value latente des actifs, et est retirée la marge de risque. La réserve de réconciliation est donc de

$$(161 + 43) - (132 + 26) + (357 - 363) - (132 + 26) \times 10\% = 24.$$

La marge de sécurité est donc de 24 avant impôts différés, et de 16 après. ($= 24 - 24 \times 33,3\%$). On remarque que l'actualisation des actifs mène à une légère diminution de leur montant parce que, dans le bilan Solvabilité II, les actifs ne sont plus comptabilisés à leur valeur d'achat mais à leur valeur de marché.

De plus, dans la situation avant pilotage, les fonds propres de base sont constitués à 159 M€ et les impôts différés sont calculés à hauteur de 8 M€.

1.2. Situation après pilotage

Sous les mêmes hypothèses, on considère que le pilotage mène l'entreprise à effectuer une reprise de marge de 7 M€.

Le bilan Solvabilité II conduit alors à un nouveau calcul pour la réserve de réconciliation

(qui contient notamment la marge de sécurité et l'effet d'actualisation du *best estimate*), qui est maintenant de 9 M€).

Actifs	Passifs
Obligations 356 M€	Fonds propres 159 M€
	Résultat 5 M€
	PSAP 154 M€
Banque 5 M€	PPNA 43 M€

TABLE 8.3. Bilan Solvabilité I - Situation après pilotage

Actifs	Passifs
Obligations 350 M€	Fonds propres 159 M€
	Réserve de reconciliation 9 M€
	Résultat 5 M€
	Marge pour risque 16 M€
	Best Estimate sinistres 132 M€
Banque 5 M€	Best Estimate primes 26 M€
	Impôts différés 8 M€

TABLE 8.4. Bilan Solvabilité II - Situation après pilotage

1.3. Analyse des changements

Les différences entre les bilans sous Solvabilité II avant le pilotage et après le pilotage sont les suivantes :

- la réserve de réconciliation diminue de 7 M€ ;
- un résultat de 5 M€ après impôt est créée ;
- les impôts différés restent identiques à ce qu'ils étaient avant la reprise de marge. Un impôt de 2M euro a été payé (et donc n'apparaît plus au bilan) comme étant 33,3% de la reprise de marge ;
- on assiste à une diminution des obligations, qui correspond à la diminution des actifs en représentation des provisions techniques sous Solvabilité I.

Plus généralement on remarque qu'une reprise de marge donnée :

- diminue d'autant la réserve de réconciliation ;
- donne lieu à 33,3% d'impôts (toutes choses étant égales par ailleurs) ;
- la reprise de marge diminue la taille du bilan Solvabilité II à hauteur de 33,3% de cette dernière.

La stratégie de pilotage diminue donc la variabilité des fonds propres Solvabilité II car elle diminue les phénomènes de dotation et de reprise.

On remarque au passage qu'il n'y a pas d'impact sur la *risk margin* car elle est calculée sur la base des risques non couvrables.

Après avoir placé la stratégie de pilotage dans le cadre du pilier 1 de Solvabilité II, ce document poursuit ci-dessous avec une application de cette stratégie dans le cadre du pilier 2.

2. Prise en compte de la continuité de l'activité - Aspects ORSA

Dans les chapitres précédents on a considéré que le portefeuille couvert par le triangle est en *run-off* (c'est-à-dire en supposant que les engagements soient tous rattachés à des produits d'assurance échus) puisque les méthodes stochastiques présentées plus haut sont basées sur cette hypothèse.

Dans cette section on va proposer une démarche pour adapter la stratégie de provisionnement au cas où on suppose la continuité de l'activité de la compagnie.

Pour faire cela les triangles analysés dans cette partie vont donc prendre en compte l'évolution des primes et des charges associées aux sinistres pour les années futures.

On remarque de plus que cette approche semble cohérente avec les dispositions de l'ORSA.

2.1. Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)

L'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) est un outil d'analyse décisionnelle et stratégique qui doit être utilisé par les compagnies d'assurance afin de comprendre et évaluer de manière continue et prospective la structure des risques liées à leur activité, leur capacité à les couvrir et à absorber les fluctuations de manière continue et prospective.

L'ORSA est définie dans l'article 45 de la directive 2009/138/CE de la manière suivante :

2.2. Évaluation interne des risques et de la solvabilité

- (1) Dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance et de réassurance procède à une évaluation interne des risques et de la solvabilité. Cette évaluation porte au moins sur les éléments suivants :

- (a) le besoin global de solvabilité, compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise ;
 - (b) le respect permanent des exigences de capital prévues au chapitre VI, sections 4 et 5, et des exigences concernant les provisions techniques prévues au chapitre VI, section 2 ;
 - (c) la mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarter des hypothèses qui sous-tendent le capital de solvabilité requis prévu à l'article 101, paragraphe 3, calculé à l'aide de la formule standard conformément au chapitre VI, section 4, sous-section 2, ou avec un modèle interne partiel ou intégral conformément au chapitre VI, section 4, sous-section 3.
- (2) Aux fins du paragraphe 1, point a), l'entreprise concernée met en place des procédures qui sont proportionnées à la nature, à l'ampleur et à la complexité des risques inhérents à son activité et qui lui permettent d'identifier et d'évaluer de manière adéquate les risques auxquels elle est exposée à court et long terme, ainsi que ceux auxquels elle est exposée, ou pourrait être exposée. L'entreprise démontre la pertinence des méthodes qu'elle utilise pour cette évaluation.
 - (3) Dans le cas visé au paragraphe 1, point c), lorsqu'un modèle interne est utilisé, l'évaluation est effectuée parallèlement au ré-calibrage qui aligne les résultats du modèle interne sur la mesure de risque et le calibrage qui sous-tendent le capital de solvabilité requis.
 - (4) L'évaluation interne des risques et de la solvabilité fait partie intégrante de la stratégie commerciale et il en est tenu systématiquement compte dans les décisions stratégiques de l'entreprise.
 - (5) Les entreprises d'assurance et de réassurance procèdent à l'évaluation visée au paragraphe 1 sur une base régulière et immédiatement à la suite de toute évolution notable de leur profil de risque.
 - (6) Les entreprises d'assurance et de réassurance informent les autorités de contrôle des conclusions de chaque évaluation interne des risques et de la solvabilité, dans le cadre des informations à fournir en vertu de l'article 35.
 - (7) L'évaluation interne des risques et de la solvabilité ne sert pas à calculer un montant de capital requis. Le capital de solvabilité requis n'est ajusté que conformément aux articles 37, 231 à 233 et 238.

Afin de prendre en compte l'évolution future des primes et des sinistres dans les triangles à analyser, on doit faire des hypothèses.

On suppose par exemple que les ratios S/P futurs doivent être estimés à partir des ratios S/P historiques et des comptes de résultats donnés par la compagnie.

On présente dans la suite les ratios S/P en fonction des années de survenance pour la branche RC entreprise qui vont être utilisés pour les estimations des années futures :

Année de survenance	Ratio S/P
2001	59%
2002	56%
2003	49%
2004	44%
2005	37%
2006	41%
2007	40%
2008	36%
2009	34%
2010	32%
2011	33%

TABLE 8.5. Ratio S/P de la compagnie pour la branche RC entreprise

Le résultat de la multiplication entre les ratios $\frac{S}{P}$ des cinq prochaines années avec les primes futures (nettes d'annulations) permette alors d'estimer les coûts des sinistres futurs et, ensuite, de projeter la marge de sécurité, notamment sur les cinq prochaines années.

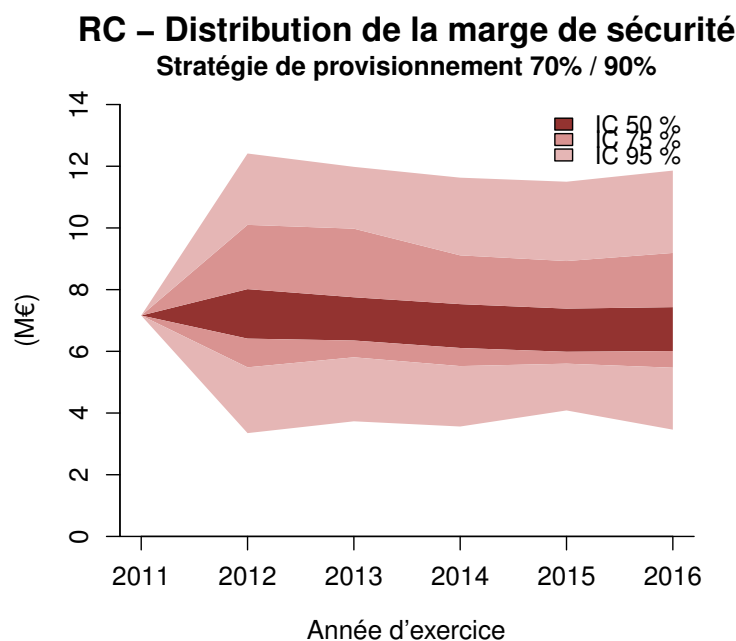


FIGURE 8.1. Distribution de la marge de sécurité - ORSA

On voit alors que la projection de la marge sur les exercices futurs permet d'obtenir des performances meilleures par rapport au scénario central simulé sans pilotage.

Scénario centrale	Quantile	2012	2013	2014	2015	2016
	70%	4	4	4	3	3
	75%	6	6	5	5	5
	80%	7	7	7	6	6
	85%	9	8	9	8	7
	90%	12	11	11	10	10
Scénario piloté	Quantile	2012	2013	2014	2015	2016
	70%	0	0	0	0	0
	75%	0	0	0	0	0
	80%	0	4	0	0	0
	85%	7	6	6	6	6
	90%	9	9	9	8	8

TABLE 8.6. Distribution des boni/mali - ORSA

On remarque en particulier que, grâce au pilotage de la marge de sécurité, la probabilité d'avoir aucune perte sur les 5 prochaines années passe de 9,2% à 38,9% et aussi que la probabilité d'avoir 2 pertes consécutives (et donc de suspendre le versement des dividendes) diminue de 51,9% à 15,0% comme montré dans le tableau suivant :

	Scénario centrale	Scénario piloté
0 pertes sur 5 ans	9,2%	38,9%
2 pertes consécutives	51,9%	15,0%

TABLE 8.7. Statistiques ORSA

3. Solvency Capital Requirement (SCR)

Dans le référentiel de Solvabilité II les compagnies d'assurance sont obligées de calculer un Solvency Capital Requirement (SCR).

Le SCR est défini comme le niveau de fonds propres nécessaires pour ne pas être en ruine à l'horizon d'un an avec une probabilité de 99,5%, c'est-à-dire pour ne faire faillite qu'une fois tous les 200 ans.

Le SCR résulte d'une agrégation de différents besoins en fonds propres pour couvrir des risques spécifiques. Le SCR peut être décomposé selon la formule suivante :

$$SCR = SCR_{op} + BSCR + Adj,$$

où le BSCR (Basic Solvency Capital Requirement) découle de l'agrégation de différents sous-modules :

- SCR Vie ;
- SCR Non Vie ;
- SCR Santé ;

- SCR Marché ;
- SCR Contrepartie (défaut) ;
- SCR Intangible.

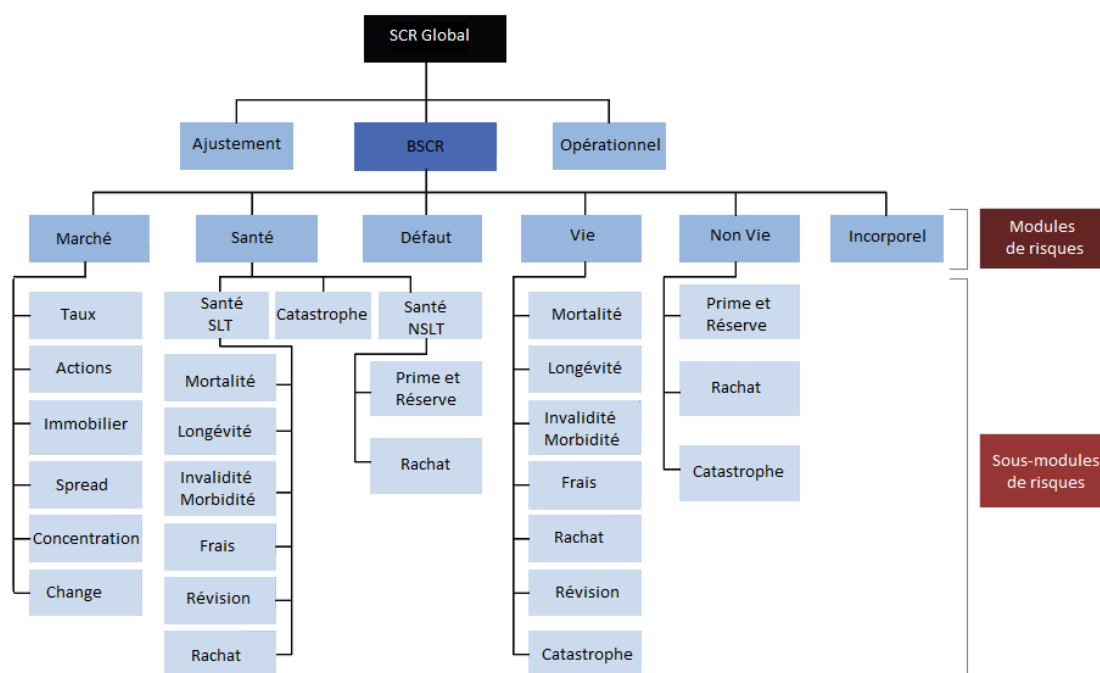


FIGURE 8.2. Pieuve SCR

3.1. SCR Non Vie

Dans cette section on va analyser le SCR Non Vie afin de montrer que ce risque n'est pas impacté par la stratégie proposée dans les chapitres précédentes. Pour approfondir la thématique liée au Solvency Capital Requirement on pourra faire référence à Compain [2009/2010].

Comme on l'a rappelé précédemment, sous le référentiel Solvabilité II le calcul du SCR revient à un calcul de Value At Risk à un an à 99,5%. On va maintenant présenter la démarche simplifiée de calcul.

On se pose à l'instant $t = 0$ et on regarde le bilan simplifié d'une compagnie (on la suppose en *run-off*) :

Actif	Passif
Actifs	Fonds Propres (= Actifs - Best Estimate - Marge pour Risque)
	Best Estimate
	Marge pour Risque

TABLE 8.8. Représentation simplifiée du bilan

On suppose par souci de simplicité que tous les actifs sont investis avec un taux sans risque r et que les paiements sont comptabilisés au milieu de l'année. Les actifs de la compagnie à l'instant $t = 1$ sont alors calculés via la formule suivante :

$$\text{Actifs}_1 = \text{Actifs}_0 \times (1 + r) - \text{Paiements}_1 \times \sqrt{1 + r}.$$

On peut alors évaluer les pertes qui vont être utilisées pour le calcul de la Value At Risk :

$$\begin{aligned}
 \text{Pertes} &= \text{Fonds Propres}_0 - \frac{\text{Fonds Propres}_1}{1 + r} \\
 &= \text{Actifs}_0 - \text{Best Estimate}_0 - \text{Marge pour Risque}_0 \\
 &\quad - \frac{\text{Actifs}_0 \times (1 + r) - \text{Paiements}_1 \times \sqrt{1 + r} - \text{Best Estimate}_1 - \text{Marge pour Risque}_1}{1 + r} \\
 &= \frac{\text{Paiements}_1 \times \sqrt{1 + r} + \text{Best Estimate}_1 + \text{Marge pour Risque}_1}{1 + r} \\
 &\quad - \text{Best Estimate}_0 - \text{Marge pour Risque}_0.
 \end{aligned}$$

Le calcul du sous-module pour le SCR Non Vie sera donc calculé comme la Value at Risk à 99,5% de cette quantité sur l'horizon 1 an.

Comme tous les termes de la formule précédente ne sont pas impactés par la stratégie de provisionnement, donc de la même manière le SCR Non Vie aussi n'est pas impacté par la stratégie.

Conclusion

Dans le marché deux approches pour le calcul de la marge de sécurité sont répandues : une démarche consistant à évaluer la marge comme un pourcentage du *best estimate* et une autre approche qui dote la marge selon un quantile de la distribution des ultimes. Cette dernière approche en particulier possède deux variantes : une première possibilité consiste à prendre en compte un quantile fixe ; on pourrait sinon doter la marge en suivant un quantile décroissant qui diminue de 5% pour chaque année. Ces différentes méthodes permettent d'augmenter les provisions d'une compagnie dans un but prudentiel mais ne permettent pas de piloter la volatilité liée à cette marge.

Dans le cadre de cette étude on a donc introduit une nouvelle stratégie qui consiste à encadrer la marge de sécurité entre deux quantiles de la distribution des ultimes : si l'estimation de cette marge dépasse la limite inférieure ou la limite supérieure données par ces deux quantiles, elle est repositionnée à hauteur d'un "quantile de sécurité" ; sinon la marge ne change pas et il n'y a pas de dégagement de boni/mali.

Cette méthode, en se basant sur les informations obtenues grâce à la simulation des différentes trajectoires des ultimes, permet de fournir des performances meilleures que celles obtenues en appliquant le calcul à quantile fixe ainsi qu'à quantile décroissant. En particulier on a pu voir que cela est vrai pour le coût de la marge ainsi que pour la probabilité d'obtenir des trajectoires avec 0 boni/mali.

L'utilisation des copules pour modéliser la dépendance de plusieurs branches, a permis ensuite d'appliquer la stratégie dans les cas de portefeuilles différents liés à des branches qui se sont pas indépendantes.

On a vu de plus que la taxe sur les excédents de provisions ainsi que le calcul du SCR ne sont pas impactés par la stratégie, ce qui nous permet donc de dire que le pilotage de la marge n'est pas pénalisé.

On remarque finalement que, comme montré dans le dernier chapitre, une approche cohérente avec l'ORSA consistant à projeter la marge de sécurité sur les 5 années suivantes, permet d'avoir des résultats meilleurs que ceux obtenus sans pilotage. Cela reste vrai soit en termes de probabilité d'avoir 0 perte sur 5 ans, qu'en terme de probabilité d'avoir 2 pertes consécutives.

Pour terminer on constate que l'analyse de la stratégie de provisionnement pourrait ensuite tester son impact sur des trajectoires d'ultimes obtenues à partir d'autres méthodes répandues dans le marché. C'est le cas, par exemple, des méthodes où on exclut certains facteurs de développement si on le juge anormaux ou des méthodes qui pourraient prendre en compte l'inflation et la corriger comme proposé par Jaziri [2011] et Habib and Riban [2011/2012].

Table des figures

1.1 La vie d'un sinistre	21
1.2 Le traitement d'un sinistre et la dotation de l'IBNR	23
2.1 Bootstrap à 1 an / Re-reserving	36
4.1 Représentation graphique du rapport entre règlements et charges	45
4.2 Vérification graphique de la première hypothèse de Chain-Ladder	48
4.3 Vérification graphique de la deuxième hypothèse de Chain-Ladder	48
4.4 Nuage des résidus	49
4.5 QQ-plot des résidus du triangle des charges	51
4.6 MSE pour la méthode de Mack et pour la méthode de Merz-Wüthrich	53
4.7 10000 trajectoires des charges ultimes	55
4.8 10000 trajectoires des boni/mali	55
4.9 Comparaison des méthodes de provisionnement	56
4.10 Stratégie 70% / 90%	56
4.11 Exemple d'application de la stratégie 70% / 90%	57
4.12 Stratégie de départ 70% / 90%	57
4.13 Stratégie 60% / 90%	58
4.14 Stratégie 80% / 90%	58
4.15 Stratégie 90% / 90%	59
4.16 Stratégie 70% / 90%	60
4.17 Stratégie 70% / 70%	60
4.18 Stratégie 70% / 80%	61
4.19 Stratégie 70% / 100%	61
4.20 Stratégie 70% / 90%	63
4.21 Stratégie A : quantile fixe 70%	64
4.22 Stratégie B : quantile décroissant jusqu'à 50%	64
5.1 Représentation graphique de la distribution de la taxe pour la RC entreprise	71
6.1 Densité théorique d'une copule gaussienne	74
6.2 Corrélation des résidus des deux triangles	75
6.3 Comparaison de la méthode par convolution avec la méthode via une nouvelle loi log-normale, avec $\rho = 0,35$	77
6.4 Densité de la copule empirique	79
7.1 Évolution de la charge selon les 3 scénarios	81

7.2 Volatilité en fonction de la part de provisions dossier/dossier	82
7.3 Scénario D : apparition d'un effet calendaire	82
8.1 Distribution de la marge de sécurité - ORSA	90
8.2 Pieuvre SCR	92

Liste des tableaux

0.1 Comparaison des quantiles de la distribution des charges pour différentes méthodes	15
0.2 Probabilité d'avoir 0 boni et mali et coût de la marge de sécurité en fonction du quantile de sécurité et du quantile maximum	16
0.3 Conclusion : pourcentage de trajectoires avec 0 boni et 0 mali et coût final de la marge de sécurité	16
0.4 Calcul de la taxe pour la RC entreprise	17
0.5 Agrégation des marges pour les branches MRH et RC, $\rho = 0,35$	17
0.6 Marge calculée sur le portefeuille global (branches MRH et RC), avec $\rho = 0,35$	17
0.7 Résultats des changements des politiques de gestion	18
0.8 Distribution des boni/mali - ORSA	18
0.9 Statistiques ORSA	19
2.1 Comparaison de la volatilité à 1 an (Merz-Wüthrich) et de la volatilité à l'ultime (Mack)	35
2.2 Triangle GAV	35
4.1 Triangle des règlements nets	44
4.2 Triangle des charges nettes	44
4.3 Variation des charges nettes entre la première et la deuxième année	46
4.4 Variation des charges nettes la dernière année	47
4.5 Comparaison des quantiles de la distribution des charges pour différentes méthodes	52
4.6 Valeur de la Value At Risk et de la Tail Value At Risk à 1 an pour le portefeuille RC	52
4.7 Comparaison des MSEP pour le modèle de Mack et le modèle de Merz-Wüthrich	53
4.8 Comparaison des visions à l'ultime et de des visions à 1 an	54
4.9 Marge initiale en fonction du choix du quantile de sécurité	59
4.10 Probabilité d'avoir des boni et montant des boni en fonction des quantiles retenus	62
4.11 Probabilité d'avoir des mali et montant des mali en fonction des quantiles retenus	62
4.12 Probabilité d'avoir 0 boni et mali et coût de la marge de sécurité	63
4.13 Probabilité d'avoir des mali	65
4.14 Probabilité d'avoir des boni	65
4.15 Triangle de charges pour la RC entreprise	65
4.16 Probabilité d'avoir 0 boni et 0 mali et coût final de la marge de sécurité	66
5.1 Données d'une compagnie d'assurance non vie	68
5.2 Calcul des excédents taxables	69

5.3 Ventilation des excédents taxables	69
5.4 Ventilation des assiettes	70
5.5 Calcul de la taxe	70
5.6 Calcul de la taxe pour la RC entreprise	71
6.1 Résultats de la stratégie de provisionnement appliquée indépendamment à la branche RC et au nouveau triangle	76
6.2 Sensibilité des résultats en fonction du paramètre de corrélation ρ	76
6.3 Comparaison des deux méthodes, avec $\rho = 0,35$	78
6.4 Impact de la corrélation des erreurs de processus sur les résultats	78
6.5 Agrégation des marges pour les branches MRH et RC, $\rho = 0,35$	80
6.6 Marge calculée sur le portefeuille global (branches MRH et RC), avec $\rho = 0,35$	80
7.1 Résultats des changements des politiques de gestion	83
8.1 Bilan Solvabilité I - Situation avant pilotage	85
8.2 Bilan Solvabilité II - Situation avant pilotage	86
8.3 Bilan Solvabilité I - Situation après pilotage	87
8.4 Bilan Solvabilité II - Situation après pilotage	87
8.5 Ratio S/P de la compagnie pour la branche RC entreprise	90
8.6 Distribution des boni/mali - ORSA	91
8.7 Statistiques ORSA	91
8.8 Représentation simplifiée du bilan	93

Bibliographie

- Yannick Appert-Raullin, Laurent Devineau, Hinarii Pichevin, and Philippe Tann. One-Year Volatility of Reserve Risk in a Multivariate Framework. Under consideration for submission to ASTIN Bulletin, July 2013. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00848492>.
- RL Bornhuetter and RE Ferguson. The actuary and ibnr. 1972.
- Alexandre Boumezoued, Yoboua Angoua, Laurent Devineau, and Jean-Philippe Boisseau. One-year reserve risk including a tail factor : closed formula and bootstrap approaches. *arXiv preprint arXiv :1107.0164*, 2011.
- Markus Buchwalder, Hans Bühlmann, Michael Merz, and Mario V Wüthrich. The mean square error of prediction in the chain ladder reserving method (mack and murphy revisited). *Astin Bulletin*, 36(02) :521–542, 2006.
- Alessandro Carrato, Fabio Concina, Markus Gesmann, Dan Murphy, Mario Wüthrich, and Wayne Zhang. Claims reserving with r : Chainladder-0.2.2 package vignette. 2015.
- Hélène Compain. *Analyse du risque de provisionnement non-vie dans le cadre de la réforme Solvabilité II*. Mémoire, Université Paris Dauphine, 2009/2010.
- Dorothea Diers. Stochastic re-reserving in multi-year internal models—an approach based on simulations. In *Presentado a Astin Colloquium*, 2009.
- Bradley Efron and Robert J Tibshirani. *An introduction to the bootstrap*. CRC press, 1994.
- Peter D England. Bootstrapping : Lessons learnt in the last 10 years. *Swiss Association of Actuaries*, 2010.
- Peter D England and Richard J Verrall. Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, 8(03) :443–518, 2002.
- Peter D England and Richard J Verrall. Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance. *Annals of Actuarial Science*, 1(02) :221–270, 2006.
- Claire Guillaumin. *Détermination d’une méthode de provisionnement pour les créances douteuses*. Mémoire, Université Paris Dauphine, 2008/2009.
- Ilan Habib and Stéphane Riban. *Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2 ?* Mémoire, ENSAE ParisTech, 2011/2012.
- Leigh Joseph Halliwell. Chain-ladder bias : its reason and meaning. *Variance*, 1 :214–247, 2007.
- Selma Jaziri. *Méthodes de provisionnement non-vie et risque de réserve à un an*. Mémoire, ISFA, 2011.
- Arnaud Lacoume. *Mesure du risque de réserve sur un horizon de un an*. Mémoire, ISFA, 2007/2008.
- A Le Tesson, A Lenain, S Samba, and J Ung. Estimation de l’erreur de prédiction dans le cas de l’utilisation d’une combinaison de méthodes pour le calcul de provisions en assurance iard.
- Thomas Mack. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *Astin bulletin*, 23(02) :213–225, 1993.
- Thomas Mack. Measuring the variability of chain ladder reserve estimates. In *Casualty Actuarial Society Forum*, volume 1, pages 101–83. Edward W. Frees, Richard A. Derrig

- and Glenn Meyers Excerpt More information, 1994.
- Thomas Mack. The standard error of chain ladder reserve estimates : Recursive calculation and inclusion of a tail factor. *Astin bulletin*, 29(02) :361–366, 1999.
- Clémence Michaud. *La mesure du risque de provisionnement à horizon un an en assurance non vie - Prise en compte du jugement d'expert et de données exogènes*. Mémoire, Institut de Science Financière et d'Assurances, 2011/2012.
- Daniel M Murphy. Unbiased loss development factors. *PCAS*, 81(1994) :p154–207, 1994.
- Arthur E Renshaw and Richard J Verrall. A stochastic model underlying the chain-ladder technique. *British Actuarial Journal*, 4(04) :903–923, 1998.
- Klaus D Schmidt and Mathias Zocher. *The Bornhuetter-Ferguson principle*. Techn. Univ., Inst. für Mathematische Stochastik, 2007.
- René Schnieper. Separating true ibnr and ibner claims. *Astin bulletin*, 21(01) :111–127, 1991.
- Serge Van Der Heyden, Patrick Warin, and François Weiss. Provisionnement et correlation entre branches. 2007.
- Mario V Wüthrich, Michael Merz, Hans Bühlmann, Massimo De Felice, Alois Gisler, and Franco Moriconi. Modelling the claims development result for solvency purposes. In *Casualty Actuarial Society E-Forum*, pages 542–568, 2008.
- Mario V Wüthrich, Michael Merz, and Natalia Lysenko. Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2009(1) : 63–84, 2009.

Annexe A

Démonstrations des théorèmes du modèle de Mack

THÉORÈME A.1. *On se place sous les hypothèses du modèle de Mack.*

Soit $D = (S_{i,j} \mid i+j \leq N+1)$ l'ensemble de toutes les données observées jusqu'au présent. Alors on a que $\mathbb{E}[S_{i,N} \mid D] = S_{i,N-i+1} \times \lambda_{i,N-i+1} \times \cdots \times \lambda_{i,N-1}$.

DÉMONSTRATION.

On définit premièrement l'opérateur $\mathbb{E}_i[X]$ de la façon suivante :

$$\mathbb{E}_i[X] = \mathbb{E}\left[X \mid (S_{i,1}, \dots, S_{i,N-i+1})\right].$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{i,N} \mid D] &= \mathbb{E}_i[S_{i,N}] \\ &= \mathbb{E}_i\left[\mathbb{E}[S_{i,N} \mid (S_{i,1}, \dots, S_{i,N-1})]\right] \\ &= \mathbb{E}_i[S_{i,N-1} \times \lambda_{N-1}] \\ &= \lambda_{N-1} \times \mathbb{E}_i[S_{i,N-1}] \\ &= \dots \text{ (par itération)} \\ &= \lambda_{N-1} \times \cdots \times \lambda_{N-i+1} \times \mathbb{E}_i[S_{i,N-i+1}] \\ &= \prod_{k=N-i+1}^{N-1} \lambda_k \times S_{i,N-i+1}. \end{aligned}$$

□

THÉORÈME A.2. *On se place sous les hypothèses du modèle de Mack.*

On a alors que les estimateurs λ_k pour $k \in (1, \dots, N-1)$ sont non biaisés et non corrélés.

DÉMONSTRATION.

On commence par montrer que les estimateurs λ_k sont non biaisés.

Soit $B_k = (S_{i,j} \mid j \leq k, i+j \leq N+1)$. On peut alors écrire :

$$\mathbb{E}[S_{i,k+1} \mid B_k] = \mathbb{E}[S_{i,k+1} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,N-i+1}] = S_{i,k} \times \lambda_k.$$

On a alors que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{\lambda}_k \mid B_k] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=0}^{N-k} S_{i,k+1}}{\sum_{i=0}^{N-k} S_{i,k}} \mid B_k\right] \\
&= \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-k} S_{i,k}} \times \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-k} S_{i,k+1} \mid B_k\right] \\
&= \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-k} S_{i,k}} \times \sum_{i=0}^{N-k} \mathbb{E}[S_{i,k+1} \mid B_k] \\
&= \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-k} S_{i,k}} \times \sum_{i=0}^{N-k} S_{i,k} \times \lambda_k \\
&= \lambda_k.
\end{aligned}$$

En supposant $j \leq k$ on peut finalement montrer que les estimateurs λ_k sont non biaisés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{\lambda}_j \times \widehat{\lambda}_k] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\widehat{\lambda}_j \times \widehat{\lambda}_k \mid B_k]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\widehat{\lambda}_j \times \mathbb{E}[\widehat{\lambda}_k \mid B_k]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\widehat{\lambda}_j \times \lambda_k\right] \\
&= \lambda_k \times \mathbb{E}[\widehat{\lambda}_j] \\
&= \lambda_k \times \lambda_j.
\end{aligned}$$

□

THÉORÈME A.3. Soient $R_i = S_{i,N} - S_{i,N-i+1}$ le montant de la PSAP pour l'année de survenance $i \in (2, \dots, N)$ et $\widehat{R}_i = S_{i,N+1-i} \times \widehat{\lambda}_{i,N+1-i} \times \dots \times \widehat{\lambda}_{N-1}$ son estimateur. Alors, sous les hypothèses du modèle de Mack on a que $mse(\widehat{R}_i)$ peut être estimé par

$$\widehat{mse}(\widehat{R}_i) = \widehat{S}_{i,N}^2 \times \sum_{k=N-i+1}^{N-1} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2} \times \left(\frac{1}{\widehat{S}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{N-k} S_{j,k}} \right)$$

DÉMONSTRATION.

Soient

$$\mathbb{E}_i[X] = \mathbb{E}\left[X \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,I}\right]$$

et

$$\text{Var}_i(X) = \text{Var}\left(X \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,I}\right).$$

De plus on peut écrire

$$\begin{aligned}
 mse(\widehat{R}_i) &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{R}_i - R_i \right)^2 \mid D \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{S}_{i,I} - S_{i,I-i+1} - S_{i,I} + S_{i,I-i+1} \right)^2 \mid D \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{S}_{i,I} - S_{i,I} \right)^2 \mid D \right] \\
 &= mse(\widehat{S}_{i,I}).
 \end{aligned}$$

On peut alors développer $mse(\widehat{S}_{i,I})$ pour obtenir la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 mse(\widehat{R}_i) &= mse(\widehat{S}_{i,I}) \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{S}_{i,I} - S_{i,I} \right)^2 \mid D \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{S}_{i,I} + \mathbb{E}[S_{i,I} \mid D] - \mathbb{E}[S_{i,I} \mid D] - S_{i,I} \right)^2 \mid D \right] \\
 &= \mathbb{V}ar \left(S_{i,I} \mid D \right) + \mathbb{E} \left[\left(\widehat{S}_{i,I} - \mathbb{E}[S_{i,I} \mid D] \right)^2 \mid D \right] + 2\mathbb{E} \left[\left(S_{i,I} - \mathbb{E}[S_{i,I} \mid D] \right) \left(\mathbb{E}[S_{i,I} \mid D] - \widehat{S}_{i,I} \right) \mid D \right] \\
 &= \mathbb{V}ar \left(S_{i,I} \mid D \right) + \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E}[S_{i,I} \mid D] - \widehat{S}_{i,I} \right)^2 \mid D \right].
 \end{aligned}$$

On va maintenant analyser séparément les deux termes de l'équation précédente, en commençant par le premier :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}ar \left(S_{i,I} \mid D \right) &= \mathbb{V}ar_i \left(S_{i,I} \right) \\
 &= \mathbb{E}_i \left[\mathbb{V}ar \left(S_{i,I} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,I-1} \right) \right] + \mathbb{V}ar_i \left(\mathbb{E}_i \left[S_{i,I} \mid S_{i,1}, \dots, S_{i,I-1} \right] \right) \\
 &= E_i \left[S_{i,I-1} \right] \times \sigma_{I-1}^2 + \mathbb{V}ar_i \left(S_{i,I-1} \right) \times \lambda_{I-1}^2 \\
 &= E_i \left[S_{i,I-2} \right] \times \lambda_{I-2} \times \sigma_{I-1}^2 + \mathbb{V}ar_i \left(S_{i,I-2} \right) \times \sigma_{I-2}^2 \times \lambda_{I-1}^2 + E_i \left[S_{i,I-2} \right] \times \lambda_{I-2}^2 \times \lambda_{I-1}^2 \\
 &= \dots \\
 &= S_{i,I-i+1} \times \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \lambda_{I-i+1} \times \dots \times \lambda_{k-1} \times \sigma_k^2 \times \lambda_{k+1}^2 \times \dots \times \lambda_{I-1}^2.
 \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on trouve :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_{i,I} \mid D] - \widehat{S}_{i,I} &= \mathbb{E}[S_{i,I-1} \mid D] \times \lambda_{I-1} - S_{i,I-i+1} \times \lambda_{I-i+1} \times \dots \times \lambda_{I-1} \\
 &= S_{i,I-i+1} \times \left(\lambda_{I-1} \times \dots \times \lambda_{I-i+1} - \lambda_{I-i+1} \times \dots \times \lambda_{I-1} \right).
 \end{aligned}$$

Pour estimer $mse(\widehat{R}_i)$ on peut donc estimer les deux termes qu'on vient de développer. Pour évaluer le premier il suffit d'estimer les facteurs de développement λ par $\hat{\lambda}$ et les volatilité σ par $\hat{\sigma}$.

La formule qui découle de cette démarche est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{S}_{i,I} \mid D] - \hat{S}_{i,I} &= S_{i,I-i+1} \times \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \lambda_{I-i+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_{k-1}^{\hat{}} \times \hat{\sigma}_k^2 \times \lambda_{k+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_{I-1}^{\hat{}} \\
&= \sum_{k=I-i+1}^{I-1} S_{i,I-i+1} \times \lambda_{I-i+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_{I-1}^{\hat{}} \times \hat{\sigma}_k^2 \times \lambda_{k+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_I^{\hat{}} \\
&= \hat{S}_{i,I} \times \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{\lambda}_k} \times \lambda_{k+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_I^{\hat{}} \\
&= \hat{S}_{i,I}^2 \times \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 \times \lambda_{k+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_I^{\hat{}}}{\hat{\lambda}_k \times \hat{S}_{i,I}} \\
&= \hat{S}_{i,I}^2 \times \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{S}_{i,k} \times \hat{\lambda}_k^2}.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme on ne peut pas utiliser cette approche, car le résultat de cette opération serait égal à 0. On écrit donc

$$\begin{aligned}
F &= \lambda_{I-i+1} \times \cdots \times \lambda_{I-1} - \lambda_{I-i+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_{I-1}^{\hat{}} \\
&= S_{I-i+1} + \cdots + S_{I-1},
\end{aligned}$$

où $S_k = \lambda_{I-i+1}^{\hat{}} \times \cdots \times \lambda_{k-1}^{\hat{}} \times (\lambda_k - \hat{\lambda}_k) \times \lambda_{k+1} \times \cdots \times \lambda_{I-1}$.

On obtient alors

$$\begin{aligned}
F^2 &= (S_{I-i+1} + \cdots + S_{I-1})^2 \\
&= \sum_{k=I-i+1}^{I-1} S_k^2 + 2 \times \sum_{j < k} (S_j \times S_k) \\
&= \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \mathbb{E}\left[\frac{S_k^2}{B_k}\right] + 2 \times \sum_{j < k} \mathbb{E}[S_j \times S_k \mid B_k],
\end{aligned}$$

où le terme $\sum_{j < k} \mathbb{E}[S_j \times S_k \mid B_k]$ est égal à 0 car $\mathbb{E}[\lambda_k - \hat{\lambda}_k \mid B_k] = 0$.

On remarque de plus que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\lambda_k - \hat{\lambda}_k)^2 \mid B_k] &= \mathbb{V}ar(\hat{\lambda}_k \mid B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{I-k} \mathbb{V}ar(S_{j,k+1} \mid B_k) / \left(\sum_{i=1}^{I-k} S_{i,k}\right)^2 \\
&= \sigma_k^2 / \left(\sum_{i=1}^{I-k} S_{i,k}\right).
\end{aligned}$$

On peut de plus montrer que

$$\mathbb{E}[S_k^2 \mid B_k] = \lambda_{I-i+1}^2 \times \cdots \times \lambda_{k-1}^2 \times \hat{\sigma}_k^2 \times \lambda_{k+1}^2 \times \cdots \times \lambda_{I-1}^2 / \left(\sum_{i=1}^{I-k} S_{i,k}\right).$$

Le deuxième terme peut être donc estimé par

$$\begin{aligned}
 F^2 &= \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \mathbb{E} \left[S_k^2 \mid B_k \right] \\
 &= \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \left(\lambda_{I-i+1}^2 \times \cdots \times \lambda_{k-1}^2 \times \hat{\sigma}_k^2 \times \lambda_{k+1}^2 \times \cdots \times \lambda_{I-1}^2 / \left(\sum_{i=1}^{I-k} S_{i,k} \right) \right) \\
 &= \lambda_{I-i+1}^2 \times \cdots \times \lambda_{I-1}^2 \times \sum_{k=I-i+1}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2 / \lambda_k^2}{\sum_{k=1}^{I-k} S_{j,k}}.
 \end{aligned}$$

Finalement la somme des estimateurs pour le premier et pour le deuxième terme nous donne un estimateur du $mse(\hat{R}_i)$ qui a la même forme que celui proposé dans le théorème. $\square$