Marie Bresson
Elodie Lehmann

Mémoire IAF
Application de la Value at Risk pour le calcul des fonds propres en assurance vie

Sous la direction d'Olivier Pekmezian (CNP-Assurances)
et de Nathalie Pistre (ENSAE)

ensae 2000

AVERTISSEMENT

Les données utilisées dans cette étude sont fictives :

Le produit étudié est un produit type imaginaire et les phénomènes de rachat ont été volontairement amplifiés.
Les résultats obtenus doivent donc être interprétés avec précaution.

SOMMAIRE

Introduction

Evaluer le risque encouru par les compagnies d'assurance-vie est à la fois difficile et essentiel : c'est aujourd'hui un enjeu majeur pour toutes les compagnies présentes sur le marché.

Evaluer ce risque est *essentiel* car les compagnies d'assurance-vie fournissent une sécurité financière à des millions de personnes pour un montant total de cotisations de 498 milliards de francs en 1998 (revue de la FFSA [10]) et il est vital qu'elles soient fiables. La récente faillite de la compagnie Europavie incite encore plus à la prudence.

Evaluer ce risque est aussi *difficile*. La difficulté réside plutôt dans l'évaluation du passif que dans celle des actifs mis en représentation des engagements. C'est en effet la présence d'options cachées dans les contrats qui rend complexe la mesure du risque encouru au passif.

Cependant, évaluer ce risque est *indispensable* afin de disposer d'un montant de fonds propres suffisant pour couvrir les aléas de l'activité d'assurance. D'un côté, détenir un montant de fonds propres trop faible peut exposer la compagnie (et ses clients) à un risque exagéré. En effet, des fluctuations du marché financier pourraient mettre en danger la rentabilité des produits d'assurance et les fonds propres sont nécessaires pour compenser cette potentielle chute de rentabilité. D'un autre côté, détenir un montant de fonds propres trop élevé représenterait une mauvaise allocation des ressources ; cela pourrait désavantager la compagnie par rapport aux sociétés mesurant mieux leur risque et ajustant ainsi mieux leurs tarifs.

C'est d'abord aux autorités de contrôle qu'il revient de s'assurer de la solvabilité des compagnies afin de permettre la confiance du public en leurs services. Pour garantir la sécurité des produits proposés, la régulation impose aux assureurs sur la vie de maintenir une certaine marge de solvabilité. Cependant, il apparaît actuellement légitime de se demander si la marge requise est suffisante. Dans le domaine bancaire, on a vu la régulation être remplacée peu à peu par une exigence de mesures de risques internes à chaque institution, afin que le montant de fonds propres soit mieux corrélé au risque réellement encouru. Une de ces mesures de risque est la Value at Risk et le but de cette étude est d'explorer l'utilisation possible de cet outil en assurance, pour permettre l'évaluation du risque relatif à un produit d'épargne et, à terme, le calcul de la marge de solvabilité.

Nous explicitons d'abord la problématique du risque en assurance-vie. Pour ce faire, nous rappelons la réglementation qui encadre l'activité d'assurance-vie, puis nous étudions les risques qui apparaissent dans ce cadre ; enfin nous précisons le contexte de notre étude, c'est-à-dire le logiciel de gestion actif-passif permettant actuellement de mesurer le risque à CNP-Assurances. Dans une deuxième partie, nous rappelons les trois méthodes bancaires de calcul de la Value at Risk. Puis nous mettons à jour les différences entre les caractéristiques de gestion et de vie des contrats en banque et en assurance-vie, différences dont il faudra tenir compte pour transposer l'approche bancaire à l'épargne. Enfin, nous choisissons notre propre méthode de calcul de la VaR. Dans une troisième partie, nous mettons en place le calcul de la VaR pour un produit d'épargne type fictif : en particulier, nous présentons le modèle de Heath, Jarrow, Morton utilisé et la dynamique de la loi de rachat. Il faut noter qu'il existe à l'heure actuelle une seule publication faisant suite à un calcul concret de Value at Risk en assurance [7] et que celle-ci résulte d'un modèle très simple. L'apport notable de notre travail est donc de présenter des chiffres concrets issus d'une simulation basée sur un modèle relativement sophistiqué. Dans la quatrième partie, nous exposons les résultats de nos simulations et nous montrons en quoi ils incitent à penser que la marge de solvabilité réglementaire est sous-évaluée. Dans la cinquième partie, nous suggérons quelques améliorations à la méthode de calcul des fonds propres nécessaires que nous avons employée, puis nous donnons un aperçu des méthodes possibles pour se prémunir contre le risque en assurance-vie. Enfin, nous confrontons notre étude aux critiques actuelles de la Value at Risk et nous concluons sur la pertinence de l'utilisation de la Value at Risk pour le calcul des fonds propres en assurance-vie.

Partie 1 : Problématique du risque en assurance-vie.

Le but de cette première partie est de présenter les dispositions réglementaires prévues pour faire face aux différents risques auxquels est exposée une compagnie d'assurance vie. Nous expliciterons les différents risques rencontrés en assurance-vie et nous verrons également le rôle de la gestion actif-passif et les diverses stratégies mises en place par les assureurs pour faire face à ces risques. Nous terminerons cette partie en présentant le cadre de la gestion du risque à CNP Assurances.

A. La réglementation française des compagnies d'assurance-vie.

1. Règles assurant la solvabilité de l'entreprise.

a. Situation d'insolvabilité.

La situation d'insolvabilité d'une entreprise, quel que soit son secteur d'activité, survient dès que celle-ci n'est plus en mesure d'honorer les engagements qu'elle a contractés vis-à-vis des tiers, donc lorsque la masse de ses engagements excède l'ensemble de ses ressources. Le coeur de l'industrie d'assurance est la maîtrise statistique des engagements envers les assurés via la mutualisation des risques. Moyennant le paiement d'une prime par l'assuré, l'assureur s'engage à lui fournir une prestation déterminée ex ante en cas de certaines réalisations d'un événement aléatoire. L'assureur fait face à l'aléa inhérent à son activité par ses fonds propres, garants de sa solvabilité. Le volume de fonds propres dont il dispose détermine alors le volume maximal de souscriptions qu'il peut prudemment accepter.

Le lien entre ces deux grandeurs apparaît lorsque l'on cherche à exprimer la probabilité de ruine à court terme. On peut classiquement la modéliser de la façon suivante :

$$P (K + P - S + \Delta PM + U - f < 0)$$

où K sont les fonds propres de l'assureur,
P sont les primes encaissées,
S sont les sinistres payés,
U sont les produits financiers issus du placement des fonds propres et des primes,
ΔPM est la variation des provisions mathématiques
f sont les frais de gestion.

Il apparaît alors clairement que l'augmentation du niveau de fonds propres de l'assureur diminue sa probabilité de ruine, ce qui justifie la contrainte de marge de solvabilité. Toute entreprise française soumise au contrôle de l'Etat doit donc justifier de l'existence d'une marge de solvabilité suffisante relative à l'ensemble de ses activités.

b. La marge de solvabilité.

L'objectif économique visé par la réglementation relative à la solvabilité des entreprises d'assurance est entièrement décrit dans le terme "marge de solvabilité". Cet objectif est de construire une marge financière pour le marché de l'assurance.

Les postes du passif admis comme éléments constitutifs de la marge de solvabilité pour une compagnie d'assurance-vie, après déduction des pertes et des éléments incorporels, sont les suivants d'après l'article R 334-11 du Code des Assurances [5]:

- le capital social versé ou le fonds d'établissement constitué,
- la moitié de la fraction non versée du capital social,
- les réserves réglementaires ou libres ne correspondant pas à des engagements, y compris la réserve de capitalisation,
- les bénéfices reportés,

- sur demande et justification de l'entreprise et avec accord de la Commission de Contrôle des assurances :
  - un montant représentant 50% des bénéfices futurs de l'entreprise. Le montant des bénéfices futurs est obtenu en multipliant le bénéfice annuel estimé de l'entreprise par le facteur qui représente la durée résiduelle moyenne des contrats.
  - les plus-values pouvant résulter de la sous-estimation d'éléments d'actif et de la surestimation d'éléments de passif autres que les provisions mathématiques, dans la mesure où de telles plus-values n'ont pas un caractère exceptionnel.
- les fonds effectivement encaissés provenant de l'émission de titres ou emprunts subordonnés répondant aux conditions précisées dans l'article A 334-3. Le montant pris en compte doit être inférieur à 50% de la marge de solvabilité, voire à 25% pour les fonds provenant de titres ou emprunts à durée déterminée.

Il est à noter que cette dernière composante de la marge de solvabilité est importante dans les compagnies françaises. En effet, émettre des titres ou emprunts subordonnés est une bonne façon de financer son investissement : cela ne joue quasiment pas sur la rentabilité et revient moins cher que d'émettre du capital qu'il faudra rémunérer.
Il faut cependant noter que de tels emprunts ne sont pas pris en compte dans la composition de la marge de solvabilité sauf si leur durée est longue.

c. Montant minimal réglementaire de la marge de solvabilité.

Le montant réglementaire de la marge de solvabilité est fixé en fonction des branches exercées, dans l'article R 334-13 (Code des Assurances [5]).
« Dans le cas d'une opération d'appel à l'épargne en vue de la capitalisation, le montant minimal réglementaire de la marge de solvabilité est égal à 4% de la somme des provisions mathématiques et des provisions de gestion relatives aux opérations d'assurance directe et aux acceptations brutes de réassurance, multiplié par le rapport entre les provisions mathématiques après cessions en réassurance et les provisions mathématiques brutes de réassurance pour le dernier exercice ».

Cependant, comme nous l'avons dit précédemment, les assureurs se demande aujourd'hui si cette marge est bien évaluée. C'est pour cette raison que l'on va chercher à réévaluer son montant à l'aide de la Value at Risk.

d. Les fonds propres.

Les fonds propres alloués sont utilisés afin d'absorber les pertes en cas de crise. Par la suite, on pourra supposer qu'ils doivent permettre de faire face à la quasi-totalité des scénarios de taux.
Les fonds propres doivent être adaptés aux risques au fur et à mesure de l'évolution de ces derniers. A chaque opération risquée, il faut allouer un bon montant de fonds propres. L'assureur se trouve donc confronté au problème suivant : s'il augmente sa quantité de fonds propres, il améliore mécaniquement sa solvabilité mais il diminue cependant sa rentabilité car il s'expose moins au risque. Une possibilité pour l'assureur qui désirerait prendre davantage de risque sans pour autant augmenter son niveau de fonds propres serait de réassurer une partie de ses risques. Nous reparlerons de cette possibilité dans la partie 5.

2. Les engagements réglementés.

Toujours pour faire face aux risques inhérents à son activité, l'assureur est soumis à des règles prudentielles sur ses engagements. Selon l'article R 331-1, ils comprennent :

- les provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral de ses engagements vis-à-vis des assurés ou bénéficiaires de contrats,
- les postes du passif correspondant aux autres créances privilégiées,
- les dépôts de garantie des agents, des assurés et des tiers,
- une provision de prévoyance en faveur des employés et agents destinée à faire face aux engagements pris par l'entreprise envers son personnel et ses collaborateurs.

Les provisions techniques correspondant aux opérations d'assurance sur la vie sont les suivantes (article R 331-3) :

- les provisions mathématiques : différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement par l'assureur et par les assurés.
- les provisions pour participation aux excédents : montant des participations aux bénéfices attribués aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits.
- la réserve de capitalisation : réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu.
- les provisions de gestion : destinées à couvrir les charges de gestion future des contrats non couvertes par ailleurs.
- les provisions pour aléas financiers : destinées à compenser la baisse de rendement des actifs.
- les provisions pour risque d'exigibilité des engagements techniques : provisions destinées à faire face à une insuffisante liquidité des placements.
- les provisions pour frais d'acquisition reportés : provisions destinées à couvrir les charges résultant du report des frais d'acquisition.
- les provisions pour égalisation: provisions destinées à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurance de groupe contre le risque décès.
- toutes autres provisions techniques qui peuvent être fixées par décrets en Conseil d'Etat pris après avis du Conseil national des assurances.

Par la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement à la réserve de capitalisation. Grâce à celle-ci, les rendements ne baissent pas tout de suite en cas de hausse des taux. En effet, la réserve de capitalisation est une réserve provisionnée à partir des plus-values sur les obligations, provisions qui sont reprises en cas de moins-values. Cette réserve n'existe que dans les compagnies d'assurance.

3. La réglementation des placements.

Les placements sont soumis à quatre règles principales :

- Selon l'article R 332-2, les placements doivent appartenir à une *liste réglementée* :

Les engagements réglementés doivent être représentés par les actifs suivants :

- les valeurs mobilières et titres assimilés : obligations, actions, titres de créances négociables, SICAV, fonds communs de placement, fonds communs de créance.
- les actifs immobiliers : droits réels immobiliers afférents à des immeubles situés sur le territoire de l'un des Etats membres de l'O.C.D.E, parts ou actions de sociétés à objet immobilier, parts des sociétés civiles à objet strictement foncier.
- les prêts et dépôts : prêts obtenus ou garantis par les Etats membres de l'OCDE, par les collectivités publiques territoriales et les établissements publics des Etats membres de l'OCDE, prêts hypothécaires aux personnes physiques et morales, dépôts dans les conditions fixées par l'article R 332-16.

- Selon l'article R 332-33, les placements sont soumis à des *règles de diversification* :

Rapportée au montant total des engagements réglementés, toutes monnaies confondues, la valeur au bilan de chacune des catégories d'actifs ne peut excéder, sauf dérogation accordée cas par cas par la commission de contrôle des assurances :

  - 65% pour les actions,
  - 40% pour les actifs immobiliers,
  - 10% pour les prêts,
  - pas de restrictions pour les obligations.

- D'après l'article R 332-3-1, les placements sont soumis à des *règles de dispersion* :
  La valeur au bilan des actifs ne peut pas excéder, sauf dérogation accordée cas par cas par la commission de contrôle des assurances :
  - 5% pour l'ensemble des valeurs émises et des prêts obtenus par un même organisme,
  - 10% pour un même immeuble ou pour les parts d'une même société immobilière ou foncière,
  - 0,5% pour l'ensemble des actions non cotées et de fonds communs de placements à risque.
- Enfin, les placements doivent être *évalués prudemment* :
  Les articles R 332-19 et R 332-20 réglementent leur mode de comptabilisation.

4. Règles concernant la participation des assurés aux bénéfices.

En contrepartie des règles de solvabilité qui ont tendance à diminuer le taux garanti aux clients, les compagnies d'assurance sur la vie ou de capitalisation doivent faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent dans les conditions fixées par les arrêtés A 132-1 et A 132-11 (cf Code des Assurances [5]). Pour chaque entreprise, le montant minimal de participation aux bénéfices à attribuer au titre d'un exercice est déterminé globalement à partir d'un compte de participation aux résultats.

L'entreprise peut, conformément à l'article A 132-2, garantir dans un contrat un montant total d'intérêts techniques et de participation aux bénéfices qui, rapporté aux provisions mathématiques, ne sera pas inférieur à un taux minimum garanti. Cette garantie est valable pour une période maximale de huit ans. L'entreprise doit par ailleurs vérifier que la moyenne des taux de rendement de ses actifs calculés pour les deux derniers exercices est supérieure ou égale au quatre tiers du taux minimal garanti proposé par la première année : elle se prémunit ainsi contre les aléas financiers.

Ce montant réglementaire de la participation aux bénéfices des assurés correspond à une partie ou à l'ensemble de la provision pour participation aux excédents (PPE). La PPE se présente comme un différé de la participation aux bénéfices, crédité aux provisions mathématiques. Elle permet de distribuer aux assurés des revenus plus réguliers en diminuant les impacts d'éléments exceptionnels sur ces revenus.

5. Comparaison des réglementations française et américaine.

De manière générale, on peut remarquer qu'aux Etats-Unis, les assureurs-vie sont autorisés à prendre plus de risques. Leur activité peut donc être plus rentable, tandis qu'en France, la réglementation impose de prendre moins de risques ; le rendement des assureurs français est donc plus faible mais ils sont davantage à l'abri d'une éventuelle faillite. Il est alors intéressant de comparer les réglementations française et américaine.

La réglementation américaine relative à la solvabilité des sociétés d'assurance-vie a évolué au cours du temps. Pendant longtemps, elle imposait un montant forfaitaire minimum de fonds propres, indépendant des risques encourus. Ce montant différait selon les Etats. Par exemple, en 1992, les fonds propres requis au Colorado et en Louisiane étaient inférieurs à 200 000$; en Alaska, dans l'état de New York et dans l'Illinois, la marge réglementaire dépassait 1 million de dollars! Le fait que le montant réglementaire variait par Etat et non par compagnie montre bien que la réglementation ne tenait pas compte des risques pris par les assureurs. Au début des années 90, une approche tenant compte du risque a été mise en place : la méthode RBC (Risk Based Capital) ; c'est en fait la faillite de plusieurs assureurs-vie dans les années 80 qui a motivé cette tentative de réforme. Le calcul du RBC est basé sur quatre catégories de risques encourus par les assureurs :

Tableau 1 : catégories de risque de la méthode RBC.

RBC Risk Category	Risk Definition
C-1	Asset default
C-2	Actuarial pricing
C-3	Asset/liability mismatch
C-3	Other

Ce que l'on peut traduire respectivement par risque de contrepartie (asset default), risque de tarification (actuarial pricing), risque de liquidité (asset / liability mismatch) et autres risques.

A chaque risque correspond un facteur qui est appliqué à des valeurs publiées annuellement. Par exemple, le facteur C-1 appliqué à la valeur de marché d'actions est de 30% alors que le facteur appliqué aux obligations du gouvernement américain est de 0%. Le RBC total de l'assureur est la somme des différents facteurs appliqués aux montants appropriés produits annuellement. Le problème de la méthode RBC est qu'elle est trop fragmentée pour refléter le risque total d'un assureur. De plus, elle ne tient compte d'aucune corrélation entre les quatre catégories, ni entre les différentes composantes d'un même risque. Une approche considérant simultanément les deux côtés du bilan serait plus efficace. La VaR constitue une telle approche et elle permet de tenir compte des interactions entre l'actif et le passif.

Nous avons développé la réglementation à laquelle étaient soumise les compagnies d'assurance-vie. Ce cadre réglementaire a été défini afin d'assurer leur solvabilité dans la mesure où elles sont exposées à différents risques que nous exposons dans le paragraphe suivant.

B. Les risques encourus par une compagnie d'assurance-vie.

1. Identification des risques.

La limitation des risques est primordiale en assurance, d'une part à cause des longues durées sur lesquelles s'exercent les contrats, et d'autre part parce que les tarifs sont ajustés en fonction des risques. Nous allons examiner les risques auxquels est soumise une compagnie d'assurance-vie en les séparant en deux grandes catégories : les risques à l'actif et les risques au passif. Nous consacrerons une partie plus importante au risque de rachat, qui constitue le point central de notre étude.

2. Les risques à l'actif.

La compagnie est soumise à des risques financiers résultant de la structure du bilan ainsi que de l'évolution des marchés financiers. Ce sont le risque de taux, le risque de liquidité et le risque de contrepartie.

a. Le risque de taux.

Ce risque dépend de la proportion de produits financiers à taux variables ou révisables détenus en portefeuille, de la proximité des échéances des produits et des caractéristiques en termes de garantie de taux des contrats au passif.

Afin de préciser les effets liés au risque de taux, il convient de discerner le risque de taux à la hausse et à la baisse.

– Risque à la hausse :

Si en période de hausse des taux, la société doit vendre des obligations pour honorer ses engagements, elle risque de réaliser des moins-values sur les obligations à taux fixe ; c'est ce qu'on appelle le risque de réalisation. En premier recours, elle peut alors se servir de sa réserve de capitalisation. Cependant, si la réserve est insuffisante, la société devra dans un deuxième recours, diminuer le rendement offert aux assurés ou puiser dans ses fonds propres.
D'autre part, la hausse des taux peut entraîner une vague de rachats de la part des assurés trouvant que le taux servi par la compagnie est trop faible par rapport au taux de marché. Nous étudions ce risque de rachat plus en détail dans le quatrième paragraphe.
En conclusion, le risque à la hausse est un risque de rachats en période de moins-values latentes.

– Risque à la baisse :

En période de baisse des taux, le réinvestissement des coupons est moins lucratif, ce qui diminue la rentabilité à court terme. C'est le risque de réinvestissement. De plus, les obligations achetées en remplacement de celles qui sont arrivées à l'échéance présentent des taux moins intéressants, ce qui affecte cette fois la rentabilité à long terme. Si la baisse de rentabilité est trop forte, l'assureur devra puiser dans ses fonds propres pour parvenir à servir le taux garanti.

Finalement, une brusque variation des taux, dans un sens ou dans l'autre, sera défavorable à l'assureur. En revanche si les taux varient lentement, l'assureur pourra alors s'adapter en modifiant ses produits et il pourra ainsi éviter une baisse de rentabilité.

b. Le risque de liquidité.

Très généralement, dans une entreprise, on observe la structure du bilan afin d'évaluer le risque d'inadéquation entre la liquidité des actifs et l'exigibilité du passif, c'est à dire le mauvais ajustement possible entre les maturités respectives des créances et des dettes. En assurance, la compagnie doit disposer de liquidités suffisantes pour faire face aux demandes de rachat et plus généralement à tous les flux sortants du passif.

Pour cerner ce risque, on utilise souvent le concept de duration. La duration est la durée moyenne des flux actualisés générés par un bien. Les flux du passif sont ceux de versements des prestations et les flux de l’actif sont ceux d’encaissement des revenus des placements et de remboursement du capital. Si la duration du passif est inférieure à celle de l’actif, les flux du passif vont être assez vite plus importants que ceux de l’actif, la compagnie d’assurance sera donc amenée à vendre ou à emprunter pour faire face à ses engagements.

c. Le risque de contrepartie.

C’est le risque que les émetteurs d’emprunts n’honorent par leurs engagements. Ce risque justifie l’écart de rendement - spread - entre les obligations émises par les emprunteurs fiables, l’Etat par exemple, et ceux qui le sont moins. La compagnie d’assurance est soumise à ce risque car elle détient des obligations de toutes sortes, notamment des obligations émises par d’autres emprunteurs que l’Etat.

3. Les risques au passif.

Les risques au passif sont engendrés par les options cachées des contrats. En effet, les assureurs vendent des produits contenant des options qui modifient leurs engagements et qui ne figurent pas comptablement dans les bilans. Ces options (option de rachat étroitement liée au risque de taux, option de prolongation, option de versements libres) sont difficiles à évaluer et à gérer. Elles constituent cependant une part très importante des risques financiers portés par les assureurs. Les autres risques du passif sont par exemple les risques techniques ou encore le risque de transformation d’un capital en rente.

Nous avons développé précédemment le risque de taux. Nous présentons maintenant plus précisément le risque de rachat, que nous avions alors seulement évoqué.

4. Le risque de rachat.

Le Code des Assurances [5] prévoit que, si un assuré décide de cesser le paiement de ses primes, il a le droit de récupérer une partie des provisions de son contrat. On dit dans ce cas qu'il "rachète" son contrat.

Les limites à ce droit sont les suivantes:

- Dans le cas des contrats à prime périodique, l'article L-132-23 du Code des Assurances stipule qu'au moins deux années de versement des primes doivent être intervenues et au moins 15% des primes payées pour que l'assureur soit tenu de donner une valeur de rachat.
- La base de calcul de la valeur de rachat n'inclut pas toutes les provisions afférentes au contrat : c'est la provision mathématique qui est la base du remboursement.
- L'assureur peut prélever une indemnité pour rupture des engagements contractuels. Cette pénalité ne peut excéder 5% de la provision mathématique pendant les dix premières années du contrat et doit être nulle au-delà (article R-123-1).

Cependant, l'assuré peut racheter son contrat dans le premier mois sans aucune pénalité. En effet, les sommes engagées pour un tel contrat peuvent être très importantes, et c’est afin de protéger le client qui bloque un montant élevé dans ce type de contrat que le législateur a prévu une telle disposition.
On peut alors se demander quelles sont les conséquences de la réglementation en cas de rachat sur les produits proposés par les assureurs français. Dans la pratique, les conditions d'exercice du droit de rachat sont très favorables aux assurés. D’autre part, le niveau de la valeur de rachat est très élevé par rapport aux primes versées. La concurrence entre les assureurs les oblige à ne soumettre l’assuré à aucune pénalité en cas de rachat anticipé. Il faut par ailleurs remarquer que les participations aux bénéfices sont élevées et distribuées tous les ans.

Pour pouvoir proposer de tels produits, l’assureur doit avoir un portefeuille constitué en grande partie d’obligations : les actifs mis en représentation des engagements de l'assureur sont très majoritairement des titres de taux car ils permettent de garantir à la fois un taux de

revalorisation régulier et une valeur de rachat.
Le risque de rachat supporté par l'assureur est donc doublement lié à la structure des taux : si les taux montent trop brusquement, les clients auront tendance à racheter leur contrat pour accéder à des taux plus compétitifs, et l'assureur, pour rembourser les clients, devra revendre des obligations de son portefeuille, et ce en période de moins-values latentes.

Nous pouvons illustrer ce phénomène par l'exemple suivant :

Soit un assureur investissant 20% de son portefeuille en actions et 80% en obligations. On considère que la valeur totale des actions est de 25 et que celle des obligations est de 100. On suppose que les taux passent de 5% à 10% dans l'année. D'autre part, le taux garanti par l'assureur est de 5%. La hausse des taux entraîne une vague de rachats de la part des clients qui préfèrent investir sur le marché procurant des rendements plus élevés ; ces rachats ont pour montant total 100. Les primes perçues cette année-là sont de 50.

Le cheminement des flux se résume ainsi :

Tableau 2 : cheminement des flux

Flux à l'actif		Flux au passif	
remboursement des obligations	20	primes	50
coupon	5	- rachats	- 100
dividendes	0,5		

Si le solde était positif, l'assureur pourrait utiliser ce solde pour acheter des obligations et renouveler son portefeuille.

Or ici, le solde est de -24,5 et dans l'hypothèse où l'assureur possède une réserve de capitalisation insuffisante pour absorber ces pertes, il devra alors liquider des actions ou des obligations de son portefeuille. S'il choisit de liquider des obligations, cela se fait en moins-values. On peut approcher cette moins-value due à la hausse des taux en calculant la sensibilité du prix des obligations P par rapport aux taux. En supposant que la duration D est de 8 ans, la sensibilité *S* égale à $D/(1+r)$ vaut alors 7,62. Donc, la variation de prix des obligations est :

$$dP = - S \times P \times dr = -7{,}62 \times 100 \times 0.05 = - 38{,}1$$

Comme les obligations ne valent plus que 61,9 sur le marché, il faut alors vendre plus d'obligations que prévu. De ce fait, le rendement financier diminue et il est plus difficile de servir le taux garanti. Il apparaît donc que le risque de rachat peut avoir une forte incidence sur le résultat final de l'assureur.

Par la suite, nous nous limiterons à l'étude du risque de taux et du risque de rachat. Nous allons maintenant voir comment le risque est mesuré à CNP-Assurances.

C. L'approche ALM de la gestion du risque.

1. Présentation de l'ALM.

a. Historique et définition

La gestion actif-passif (ou ALM, Asset and Liabilities Management) est apparue dans le monde bancaire aux Etats-Unis dans les années 80 en raison de l'accroissement de la volatilité des taux d'intérêt.

En effet, dans les années 70, les taux d'intérêt se sont mis à largement dépasser le taux régulier de rémunération des dépôts ; puis, dès 1980, la déréglementation a libéré les contraintes et augmenté les risques. Les difficultés auxquelles les banques américaines ont alors dû faire face les ont incitées à mieux gérer leurs résultats futurs et les écarts de maturité entre l'actif et le passif. Au milieu des années 80, les banques françaises ont commencé à s'aligner sur les techniques de gestion de leurs semblables d'outre-Atlantique. C'est ainsi que la gestion Actif-Passif est apparue en France. Cette technique de gestion permet aux banques de quantifier et de contrôler les risques financiers inhérents à leur métier, en particulier le risque de remboursements anticipés. Au début des années 90, les assureurs ont intégré à leur tour ce nouveau mode de gestion des rendements et des risques. Cependant, la diversité des risques et la réglementation spécifique de l'assurance rendent cette gestion complexe.

Actuellement, les compagnies françaises suivent la réglementation en vigueur et vérifient que leurs montants de fonds propres permettent d'assurer la marge de solvabilité réglementaire. En théorie, les plus-values latentes peuvent aussi servir à couvrir la marge ; dans la pratique, en général, les fonds propres y suffisent. D'autre part, projeter les provisions mathématiques permet de prévoir l'augmentation de marge de solvabilité consécutive à l'augmentation des encours. Cependant, cette démarche n'est pas véritablement satisfaisante : la question est de savoir quel est le besoin réel en fonds propres durs. Il n'est pas sûr que la marge de solvabilité réglementaire soit toujours suffisante : il est probable que dans certains cas le montant de fonds propres nécessaire soit plus élevé que celui imposé par la réglementation. C'est précisément pour déterminer ce montant optimal de fonds propres – et pour mieux les allouer - que les techniques ALM sont utiles. Comme nous l'avons dit précédemment, l'ALM est un outil d'aide à la décision qui doit permettre à la compagnie d'optimiser son retour sur fonds propres tout en maîtrisant les risques qu'elle encourt.

b. Les différents modèles de gestion actif - passif.

Les modèles de gestion actif-passif sont classiquement regroupés en quatre catégories. Pour plus d'informations, on pourra se référer au mémoire [18] :

b1. Les modèles d'allocation d'actifs adaptés à l'assurance type modèles de Wise ou Wilkie.

Ces modèles sont issus du modèle moyenne-variance de Markowitz. Ils permettent de déterminer l'allocation optimale des actifs, en tenant compte des engagements futurs probables. Cette allocation optimale est déterminée en maximisant le rendement du portefeuille sur un horizon donné à risque de perte fixé, cela en intégrant des contraintes d'assurance : contraintes contractuelles de passif et réglementaires.
Nous ne nous y attarderons pas car ce sont des modèles qui s'intéressent essentiellement à l'actif, et dont le but n'est pas en premier la mesure du risque mais plutôt l'allocation des

actifs.

b2. Modèles de première génération d'adossement par les flux : gaps de trésorerie et gestion en duration.

Ces modèles consistent à projeter les flux du passif (prestations en particulier) et les flux d'actif (coupons, remboursements, dividendes) de manière très simple :

- Les flux d'actifs sont projetés sur la base d'un scénario économique "moyen". Les scénarios économiques comprennent un scénario de courbe des taux, un scénario du marché des actions et un scénario de l'immobilier. En général, le scénario dans ces modèles de première génération est un scénario unique.
- les flux de passif sont projetés indépendamment de l'actif, et notamment sans tenir compte de l'évolution des taux servis.
- les projections sont sur une base statique, c'est à dire sans tenir compte de la production nouvelle et des investissements nouveaux.

Ces modèles donnent des informations en terme d'impasses de trésorerie, et donc permettent d'avoir une idée sur le risque de liquidité (cash flow matching). Ils constituent à ce titre un outil apprécié des financiers qui peuvent ainsi mieux planifier leurs stratégies d'investissements. Ils permettent également de calculer les valeurs actuelles de l'actif et du passif, leurs durations, sensibilités, et convexités.

Si ces outils de première génération sont intéressants, et relativement simples à mettre en oeuvre, ils souffrent toutefois de certaines carences :

- La notion de duration n'est pas adaptée pour la majorité des contrats d'assurance-vie.
- La modélisation des flux du passif indépendamment des taux du marché et des taux servis est insuffisante pour les contrats à forte connotation d'épargne, donc pour les contrats que nous étudions.

b3. Modèles de deuxième génération : une approche comptable prenant en *compte les interactions actif / passif.*

Ces modèles sont la généralisation des modèles de première génération. Ils consistent à bâtir des scénarios économiques déterministes, à introduire différentes hypothèses sur les évolutions de la production et des rachats, puis à en mesurer les conséquences sur le compte de résultat et sur le bilan. Grâce à l'établissement des comptes de résultats et des bilans de la société, ils peuvent intégrer les interactions actif-passif. Les scénarios économiques sont fixés dans ces modèles de manière relativement arbitraire. Ce seront des scénarios de stress voire des scénarios "catastrophes".
Ces modèles sont très appréciés pour la richesse de leurs indicateurs financiers et comptables, et pour leur interprétation facile.

b4. Modèles de troisième génération avec une approche par scénarios stochastiques.

Ces modèles sont récents et demeurent encore peu répandus. Ils tendent à éliminer le caractère arbitraire des scénarios déterministes, en générant une large gamme de scénarios selon une certaine probabilité. Plus précisément, ils s'appuient sur un processus de diffusion de taux qui permet de simuler la courbe des taux dans le futur, et sur des modèles mathématiques qui génèrent les rendements des placements par classes d'actifs.

Remarques finales.

– Dans la pratique, les modèles d'ALM ne sont pas séparés de manière aussi stricte, et il se peut que certains outils opérationnels empruntent des caractéristiques aux trois générations.

– Une autre distinction est souvent faite entre les modèles selon qu'il s'agit d'une ALM "locale" (c'est à dire étudiant un seul produit) ou "globale" (sur l'ensemble du bilan).

Nous allons maintenant présenter le logiciel de gestion actif-passif de CNP-Assurances ; c'est un logiciel reposant sur un modèle de troisième génération.

2. Le logiciel GAP.

CNP-Assurances, à l'instar des autres compagnies d'assurance, cherche à déterminer les risques qu'elle encourt (et donc les fonds propres nécessaires) mais aussi les rentabilités pouvant découler de la prise de risque. C'est dans l'optique d'une meilleure gestion du risque et de la rentabilité qu'a été mis en place le logiciel Gap.

Le logiciel Gap (gestion actif-passif) mis en place à CNP-assurances ces dernières années permet une approche dynamique du risque. A partir de paramètres entrés par l'utilisateur, Gap effectue des simulations à long terme pour prévoir les conséquences d'un scénario de marché, par exemple la hausse des taux sur la rentabilité d'un produit. Plus précisément, grâce aux simulations, il est possible d'établir des prévisions de bilan sur les exercices futurs en intégrant l'évolution des aléas et la production nouvelle. Il faut noter que le logiciel Gap tient compte des réserves et qu'il liquide les actifs en vendant en premier ceux qui sont en plus-values.

a. Création d'un produit et d'un scénario-type.

Les hypothèses entrées par l'utilisateur sont réparties dans cinq rubriques :

La fiche produit est le descriptif technique du produit. L'utilisateur saisit les garanties (taux minimal garanti et durée de la garantie), les clauses de participation aux bénéfices, les événements de gestion envisagés (versements libres, souscriptions, décès…), les chargements et les coûts.

Le scénario de production indique les lois de comportement des clients à l'entrée et à la sortie.

Le scénario de marché financier rassemble les données de l'évolution des différents taux et cours du marché.

La rubrique stratégie financière regroupe les hypothèses concernant les choix d'investissement pour le portefeuille d'actifs.

La stratégie de revalorisation indique comment sont choisis le taux de chargement sur encours, le taux de chargement sur résultats, le Taux Global de Revalorisation (TGR) et la

Provision pour Participation aux Excédents (PPE).

b. Forme des résultats obtenus.

A la fin de la simulation, Gap retourne à l'utilisateur les bilans successifs de toutes les années de la simulation, par produit. Ces bilans sont exportés sous Excel afin de faciliter leur traitement. Ils comprennent notamment les détails des comptes technique, financier et administratif.

c. Objectif concernant les mesures de risque.

Nous venons de voir l'état actuel de l'évaluation des risques à CNP-assurances. Cependant, l'entreprise souhaite mettre en place une évaluation plus fine des réserves nécessaires et des risques encourus. L'idée qui est à l'origine de notre étude est d'appliquer une technique inspirée de la banque : la Value at Risk. Nous explicitons cette idée dans la partie suivante.

Partie 2 : Adaptation de la VaR bancaire à l'assurance-vie.

A. Introduction.

1. Historique de la VaR.

Nous avons vu que les institutions financières étaient soumises à un certain nombre de risques (risque de liquidité, risque de marché, risque de contrepartie) qu'il convenait de bien gérer si l'on ne voulait pas mettre en péril la pérennité de l'entreprise.

Depuis quelques années, l'importance grandissante des opérations de marché, et des risques inhérents à ces opérations ont suscité de nombreuses réflexions de la part des institutions bancaires nationales et internationales. Les autorités bancaires ont tout d'abord imposé des contraintes pour mesurer le risque de contrepartie des établissements financiers par l'intermédiaire de ratios internationaux de solvabilité. En 1993, une approche dite standard a été établie pour appréhender les risques liés aux activités de marché : l'exigence de fonds propres est alors calculée à partir de sensibilités forfaitaires.
Mais, depuis l'amendement de Bâle de 1996, les banques soumises à des risques de marché ont la possibilité de calculer le niveau de fonds propres réglementaires par un modèle interne qui doit remplir un certain nombre de conditions afin d'être homologué par la Commission Bancaire. Dans l'hypothèse où le modèle interne permettrait d'améliorer l'évaluation du niveau des risques encourus par rapport à la méthodologie standard, on peut espérer que les fonds propres liés aux activités de marché soient mieux ajustés et les risques mieux gérés. C'est pourquoi, la plupart des banques mènent actuellement un travail important pour mettre au point leur modèle de risque interne. Ce modèle interne est très souvent construit autour d'une méthodologie de type Value at Risk introduite par Riskmetrics [11]. La VaR permet ainsi de donner une mesure du risque lié aux activités de l'institution financière mais cependant elle ne permet pas de donner un modèle d'allocation de fonds propres.

Dans la banque, l'approche Value at Risk est très répandue et bien maîtrisée, en revanche, il n'existe à l'heure actuelle que très peu de travaux concernant son application en assurance. A notre connaissance, il n'existe que deux publications à ce sujet qui sont les articles de P. Artzner "Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance" [9] , et de K. C. Ahlgrim "Investigating the use of Value at Risk in insurance" [7]. Nous analyserons tout d'abord les différences entre la banque et l'assurance dont il faudra tenir compte pour le calcul de la VaR dans ce dernier secteur, puis nous préciserons comment la Value at Risk est calculée dans les banques.

2. Présentation de la VaR.

a. Définition.

La Value at Risk (VaR) tend à devenir un indicateur de risque largement utilisé par les établissements financiers car elle permet d'appréhender le risque global dans une unité de mesure commune à tous les risques encourus, quelle que soit leur nature (taux, change, actions ...).

Pour un horizon de gestion donné, la VaR correspond au montant de perte probable d'un portefeuille ou d'un ensemble de portefeuilles d'instruments financiers. Elle exprime la perte liée à des variations défavorables des prix de marché. Si l'on note x le seuil de confiance choisi, la VaR correspond au montant de perte potentielle sur une période de temps fixée qui ne sera dépassé que dans $x\%$ des cas. Le seuil $1\text{-}x$ est donc égal à la probabilité que le montant de pertes ne dépasse pas la VaR en valeur absolue. Ainsi, la VaR vérifie l'équation suivante :

$$Prob\left(\ \left|perte\right| > \left|VaR\right|\ \right) = x$$

Afin d'interpréter la VaR, il est essentiel de spécifier la période sur laquelle la variation de valeur du portefeuille est mesurée et le seuil de confiance x. Avec la VaR, qui permet de donner une vision globale du risque de marché d'un portefeuille, on passe ainsi d'une mesure de risque comme volatilité à une mesure de risque comme quantile.

b. Contexte d'utilisation.

Dans le monde bancaire, la VaR permet d'optimiser la gestion des risques financiers dus aux opérations initiées par les salles de marché. Elle permet également de donner au client une image claire du risque financier pris indirectement par lui. Cette mesure de risque s'adresse ainsi :

- aux professionnels de marchés : opérateurs de marché, gestionnaires de fonds privés, gestionnaires de fonds institutionnels et gestionnaires de fonds de pension,
- aux Risk Managers : responsables de la gestion des risques et du contrôle de la gestion des risques (middle-offices et back-offices),
- aux comptables,
- aux institutionnels.

Un grand nombre d'entreprises disposent actuellement de services de Risk Management. Ces services ont comme missions principales la réévaluation quotidienne aux prix de marché (mark-to-market) de toutes les positions et l'appréhension des risques de marché par des méthodes de sensibilité ou probabilistes comme la VaR et la mise en place de limites tant internes qu'externes.

La concept de la VaR provient du fait qu'il est nécessaire de réévaluer des positions au prix de marché qui sont à l'origine de pertes ou de profits. Si les prix de marchés changent, la réévaluation se trouve donc affectée. La réévaluation des positions à ces nouveaux prix donne une idée de la sensibilité des portefeuilles de la banque en termes de pertes et profits à une variation des prix de marché. Ces prix peuvent varier de manière inégale, parfois même de manière dramatique et imprévue, d'où la nécessité de réévaluer les positions en se fixant des scénarios de marché. A partir de cette réévaluation, on peut calculer le montant de pertes potentielles donc la VaR.

En conclusion, bien que la VaR puisse en théorie être utilisée pour la quantification des risques de marché, des risques de crédit, des risques de liquidité, des risques opérationnels, seule son application au risque de marché est aujourd'hui réellement opérationnelle. Dans le paragraphe suivant, nous présentons les différentes méthodes qui permettent de la mettre en place dans ce cadre : la VaR analytique, la VaR historique et la VaR Monte Carlo.

B. La VaR pour la quantification du risque de marché : les trois méthodes de calcul.

Notons dès à présent que les deux premières méthodes utilisent les données du passé pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille. Cela suppose implicitement que le futur se comporte comme le passé : il faut donc faire l'hypothèse que la série temporelle des valeurs du portefeuille est stationnaire.

1. La VaR analytique.

Dans ce modèle, la valeur algébrique d'un portefeuille est représentée par une combinaison linéaire de K facteurs gaussiens. Notons $P(t)$ la valeur du portefeuille en t, $F(t)$ le vecteur gaussien des facteurs et a le vecteur des sensibilités aux facteurs, de dimension K.
Supposons que $F(t) \sim N(m, V)$.
A la date t, la valeur du portefeuille est $P(t) = a^t F(t)$.
En t, $P(t+1)$ est une variable aléatoire gaussienne de loi $N(a^t m, a^t Va)$.

La valeur de la VaR pour un seuil de confiance x correspond alors à :

$$Prob\ (P(t+1) - P(t)\ ^{3} - VaR) = x$$

Dans cette équation, $P(t+1) - P(t)$ représente la variation du portefeuille entre l'instant $t+1$ et l'instant t. On est donc en présence d'une perte si la valeur réalisée du portefeuille dans un jour est inférieure à sa valeur d'aujourd'hui.
Lorsque la période de détention n'est pas de 1 jour mais de T jours, la mesure de la VaR se définit à partir de la relation suivante :

$$Prob\ (P(t+T) - P(t)\ ^{3} - VaR) = x$$

Comme $P(t+1)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $a^t m$ et de variance $a^t Va$, nous avons alors l'équation suivante:

$$\Pr\left(\frac{P(t+1)-a^t m}{\sqrt{a^t\Sigma a}} \geq \Phi^{-1}(1-x)\right) = x$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition d'une gaussienne centrée et réduite.

Comme $\Phi^{-1}(1-x) = -\Phi^{-1}(x)$, nous obtenons alors que :

$$VaR = P(t) - a^t m + \Phi^{-1}(x)\sqrt{a^t\Sigma a}$$

Lorsque les facteurs F modélisent directement la variation du portefeuille, et comme nous supposons en général que $m = 0$, nous obtenons alors :

$$VaR = \Phi^{-1}(x)\sqrt{a^t\Sigma a} \qquad (1)$$

La VaR apparaît alors proportionnelle à l'écart type de la variation de valeur du portefeuille.

Cette méthode analytique repose sur trois hypothèses qui permettent de simplifier les calculs de la VaR:

- l'indépendance temporelle des variations de la valeur du portefeuille,
- la normalité des facteurs de risque $F(t)$,
- la relation linéaire entre les facteurs de risque et la valeur du portefeuille.

La principale difficulté de cette méthode est d'estimer la matrice de covariance et de déterminer les sensibilités.

L'expression (1) de la VaR obtenue pour une période de détention d'un jour peut se généraliser à une période de détention de T jours. Dans ce cas, S représente la matrice de covariance des facteurs pour T jours, la période de détention réglementaire en banque étant de 10 jours.

Enfin, le problème de la méthode analytique est qu'elle n'est utilisable que pour les produits linéaires car elle ne prend pas en compte le risque non-linéaire des positions. Nous avons en effet supposé dans la démonstration précédente que les quantiles de $a^t\ F(t)$ étaient liés de façon linéaire au quantile de la loi normale centrée réduite.

2. La VaR historique.

Contrairement à la VaR analytique, la VaR historique est entièrement basée sur les variations historiques des facteurs de risque. Supposons que nous disposions d'un historique de taille N. En t_0 nous pouvons valoriser le portefeuille avec les facteurs de risque de l'historique en calculant pour chaque date $t = (t_0 - 1,...,t - N)$ une valeur potentielle du portefeuille. On détermine ainsi N variations potentielles. Ainsi, à partir de l'historique, nous construisons implicitement une distribution empirique de laquelle nous pouvons extraire le quantile à x %. Pour cela, il faut ranger les N pertes potentielles par ordre croissant et prendre la valeur absolue de la $N \diamond (1-x)$ i-ème plus petite valeur. Lorsque $N \diamond (1-x)$ n'est pas un nombre entier, il faut alors calculer la VaR par interpolation linéaire.

En général, la VaR historique n'impose pas d'hypothèses sur la loi de distribution des facteurs de risque à la différence de la méthode analytique. Mais il est tout de même nécessaire d'avoir un modèle sous-jacent pour estimer les facteurs de risque pour l'historique de longueur N. Cette méthode est très utilisée dans la pratique car elle est simple conceptuellement et est facile à implémenter. Cependant, elle présente quelques difficultés : en effet, l'estimation d'un quantile a une vitesse de convergence beaucoup plus faible que celle d'autres estimateurs car son estimation est locale et demande donc beaucoup d'observations.

3. La VaR Monte Carlo.

La Var Monte Carlo est basée sur la simulation des facteurs de risque dont on se donne une loi de distribution admissible avec l'historique. Cette méthode consiste à valoriser le portefeuille en appliquant ces facteurs simulés. Il suffit alors de calculer le quantile correspondant tout comme pour la méthode de la VaR historique. La seule différence entre ces deux méthodes est que la VaR historique utilise les facteurs passés, alors que la VaR Monte Carlo utilise les facteurs simulés.

Il faut cependant noter que cette méthode nécessite un ordinateur très performant car elle demande beaucoup de temps de calcul. De plus, elle demande un effort important de modélisation puisqu'elle détermine entièrement les trajectoires des facteurs de marché utilisés pour le calcul de la VaR.

C. Différences entre le secteur bancaire et l'assurance-vie .

Etant donné que nous nous proposons d'appliquer une méthode d'origine bancaire à l'assurance, nous devons nous demander quelles sont les différences entre ces deux secteurs dont il faudra tenir compte. Plus précisément, nous nous intéresserons à plusieurs secteurs bancaires : à savoir la gestion d'actifs (paragraphes 1, 2 et 4), et l'octroi de crédit (paragraphe 3). Rappelons que si dans le premier secteur les méthodes de calcul de la VaR sont aujourd'hui très développées, en revanche dans le deuxième les méthodologies d'application de la VaR sont peu répandues. Nous présentons l'application de la VaR au risque de crédit en Annexe 1.

1. La question de l'horizon de calcul de la VaR : des horizons de risque et de rentabilité différents.

Le risque en assurance n'est pas à court terme mais plutôt à un horizon de quelques années. En effet, en assurance-vie, le cycle de production est long. La durée avant rachat d'un contrat est en général au minimum égale à 8 ans puisque c'est seulement au-delà de ce délai que l'assuré peut reprendre ses intérêts sans être soumis à la fiscalité.

De plus, en assurance-vie, les obligations mises en représentation des contrats du passif ont en général une échéance lointaine. Si les taux baissent, les assureurs peuvent continuer à servir des taux qui ne sont plus accessibles sur le marché obligataire, parce qu'ils possèdent dans leur portefeuille des obligations anciennes de taux supérieurs aux taux du marché. Cependant, ils doivent renouveler leur portefeuille car les obligations arrivent à maturité, et pour cela ils ont accès à des taux moins élevés. Par conséquent, lorsqu'ils n'auront plus d'obligations anciennes dans leurs portefeuille, ils proposeront des produits d'épargne moins attractifs. Il y a donc une inertie des taux servis par les assureurs qui fait que si le marché varie trop vite, ils ne pourront pas s'y adapter et les clients rachèteront leurs contrats. Mais le risque n'est pas à court terme. Au contraire, dans la banque, un portefeuille d'actifs est immédiatement (quotidiennement) sensible aux variations des cours.

2. La question de la valeur sur laquelle calculer la VaR : valeur de marché et options cachées.

Alors qu'un portefeuille bancaire possède une valeur de marché facile à calculer, il est simple de calculer la valeur de l'actif d'un produit d'assurance (on peut prendre la valeur boursière des actifs détenus) mais il est difficile de calculer la valeur de son passif. En effet, il n'existe pas de marché où cette valeur soit échangée. La difficulté pour pricer le passif réside en particulier dans la valorisation des options cachées.

En effet, une caractéristique importante du risque en assurance-vie est la présence d'options cachées dans les contrats : option de rachat, de versements (pour les anciens contrats dont le taux est garanti à vie), et risque d'arbitrage pour les contrats multi-supports.

L'option de rachat : le client qui a souscrit un contrat d'assurance-vie a le droit de le résilier avant terme. Dans ce cas, si son retrait se fait après le seuil fiscal, il n'encourt en général aucune pénalité et il récupère le montant investi additionné des intérêts capitalisés. Comme c'est seulement après un certain nombre d'années courues que le contrat devient rentable pour l'assureur, les rachats anticipés sont très coûteux pour ce dernier.

Le risque d'arbitrage pour les contrats multi-supports : le client peut transférer une partie de sa provision mathématique vers des supports en unité de compte. Cela est préjudiciable à l'assureur car ce dernier ne sait pas quand ces transferts vont avoir lieu et donc quand ses engagements vont changer.

L'option de versement : le détenteur d'un contrat d'assurance-vie est autorisé à verser de l'argent quand il le désire sur son contrat. Si le contrat est ancien, il se peut qu'il garantisse un taux anormalement élevé par rapport au taux du marché. Dans ce cas, il est coûteux pour l'assureur de tenir ses engagements.

On pourrait résumer le problème en disant que la banque calcule un risque sur un montant fixe d'argent placé (système fermé) tandis que dans l'assurance, le montant placé n'est pas figé : il faut tenir compte des entrées et des sorties (système ouvert). Autrement dit, dans la banque il n'y a pas de problèmes de fluctuations des encours alors qu'en assurance, la bonne gestion de ces problèmes est primordiale.

3. L'influence du scénario de taux sur les risques encourus : comparaison entre risque de rachat et risque de remboursement anticipé de crédit.

Nous avons vu précédemment que ce sont les remboursements anticipés qui ont incité les banques à mettre en place une méthode de gestion du risque. Nous pourrions donc penser à nous inspirer de cette méthode afin de gérer le risque de rachat en assurance. A priori, le rachat en assurance et le remboursement anticipé dans la banque sont des phénomènes antithétiques car les rachats se produisent en cas de hausse des taux et les remboursements anticipés en cas de baisse des taux. Cependant, ces deux phénomènes peuvent être comparés parce qu'ils résultent tous les deux d'une réaction rationnelle des clients à une variation de la courbe des taux. On peut alors se demander si les seules fluctuations de la courbe des taux suffisent à provoquer l'un ou l'autre des phénomènes cités.

La vague de remboursements anticipés des années 86-88 n'était pas seulement due à la variation des taux. Elle s'expliquait aussi par la baisse de l'inflation, la hausse de la concurrence entre banques, et une réglementation en matière de pénalités favorable aux particuliers. De même, en assurance-vie, il existe des facteurs aggravant le risque de rachat en cas de hausse des taux d'intérêt. Ces facteurs sont la fiscalité et le changement de comportement de la clientèle. De manière générale, la fiscalité en assurance-vie est avantageuse au delà de huit ans de détention d'un contrat. On constate donc une hausse du nombre de rachats pour les contrats d'une ancienneté supérieure à huit ans. Les détails concernant les principes de taxation des plus-values sont présentés en Annexe 2. Le changement de comportement de la clientèle se caractérise par un engouement pour le marché des actions ou pour les produits multi-supports. L'engouement pour les actions pourrait inciter les clients à racheter leur contrat pour investir dans de tels titres (cela reste à démontrer), et comme nous l'avons vu, les produits multi-supports engendrent un risque d'arbitrage.

Nous venons de distinguer les facteurs aggravants des banques et des assurances. Une autre différence apparaît dans l'information détenue par le client. En effet, contrairement au crédit où le taux est fixé au début de l'opération, un assuré ne connaît que le taux minimum de revalorisation de son contrat et non le taux qui lui sera effectivement versé. Il lui est donc plus difficile de comparer le rendement de son contrat aux taux directement accessibles sur le marché.

4. Prise de risque et couverture.

En assurance, les placements sont de manière générale beaucoup moins risqués que dans le secteur bancaire. En effet, les portefeuilles mis en représentation des engagements sont essentiellement obligataires (souvent pour environ 80% de leur valeur) et la part des actions et de l'immobilier est faible.

Comme nous l'avons vu, le risque est essentiellement localisé au passif même si l'actif y joue un rôle. Les possibilités de couverture par produits dérivés sont rares contrairement aux nombreuses couvertures possibles pour les portefeuilles bancaires.

En revanche, il existe de nombreux mécanismes prudentiels comme la réserve de capitalisation. La réglementation bancaire ne prévoit pas de réserve de capitalisation. Ce mécanisme de lissage est spécifique à l'assurance. Comme nous l'avons vu précédemment, la réserve de capitalisation (article R331) est provisionnée par les plus-values sur les cessions de titres et les provisions sont reprises en cas de moins-values.

A propos de couverture, il faut aussi noter que dans la banque, il paraît intéressant de calculer la VaR à l'horizon où l'on souhaite redéfinir la couverture d'un portefeuille. La démarche, aussi bien dans le secteur bancaire qu'en assurance, consisterait en fait à estimer le risque au moment où l'on veut réévaluer la couverture nécessaire. En assurance, réévaluer la couverture revient à réévaluer les fonds propres et la marge de solvabilité. On peut alors envisager de calculer la VaR à l'horizon où l'on prévoit de réévaluer les fonds propres ou alors on pourrait aussi penser à calculer la VaR à l'horizon sur lequel on compte se réassurer.

D. La méthode de calcul retenue.

Nous avons vu comment la VaR était calculée dans la banque et nous avons explicité les différences entre ce secteur et celui de l'assurance-vie dont il faudrait tenir compte pour transposer la méthode bancaire à l'assurance. De plus, nous avons recensé en première partie les contraintes auxquelles nous serions soumis et les moyens dont nous disposions pour faire notre étude. Il est donc maintenant possible de proposer une méthode de calcul de la VaR dans notre contexte.

Il était de prime abord inenvisageable d'utiliser une méthode analytique car celle-ci supposait la définition de la loi de probabilité suivie par les rendements. Or les résultats d'un produit d'épargne sont bien trop complexes pour être modélisés par une loi simple dépendant seulement de quelques paramètres.

On aurait en revanche pu penser à faire des simulations historiques. Comme nous l'avons dit précédemment, une simulation historique consiste à appliquer sur le portefeuille l'ensemble des variations des facteurs de risque observées sur une période passée. Cependant, si cette méthode est facilement applicable dans la banque, elle est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre dans l'assurance. En effet, pour avoir des données suffisamment variées et nombreuses, il faudrait utiliser les résultats des 20 dernières années, ce qui est inapproprié. En admettant que ces données soient disponibles, il ne serait pas pertinent de les utiliser car le contexte actuel est trop différent de celui des précédentes décennies pour que l'on puisse inférer le futur à partir du passé. Nous avons donc rejeté la méthode historique.

Finalement, nous allons donc calculer la VaR par la **méthode de Monte-Carlo**. A l'aide du logiciel Gap, nous simulerons différents scénarios assortis d'une probabilité d'occurrence, puis nous tracerons la répartition statistique des résultats et nous calculerons alors la VaR sur cette répartition. Trois questions se posent à ce stade :

- A quel horizon sera-t-il judicieux de calculer la VaR ?
- Sur quelle valeur calculera-t-on la VaR ?
- Comment répartira-t-on les scénarios ?

Pour répondre à ces questions, il faut nous replacer dans notre problématique initiale : nous calculons la VaR pour mesurer le risque de rachats dus aux taux, et ce dans le but de voir son incidence sur le calcul des fonds propres.

Nous avons déjà réfléchi à la première question lorsque nous avons tenté d'expliciter les différences entre banque et assurance. Nous avions répondu qu'il faudrait probablement calculer la VaR à un horizon de quelques années car c'est à cet horizon que le risque se situe et que nous pouvons le mesurer. D'autre part, c'est à cet horizon que l'on peut prévoir de réallouer les fonds propres car il est coûteux de les réallouer trop souvent, et dangereux de ne pas les réallouer du tout. Il faut néanmoins remarquer que nous aurions pu faire un autre choix : Ahlgrim [7] calcule la VaR à quelques mois, pour des commodités de calcul et pour pouvoir la comparer plus facilement aux chiffres bancaires. Nous simulerons donc sur plusieurs années pour voir comment la VaR varie selon l'horizon de calcul et nous déciderons ex-post quelle est la durée de simulation optimale.
En ce qui concerne la deuxième question, nous verrons précisément dans la quatrième partie sur quelle valeur calculer la VaR.
Enfin, afin de simuler les scénarios, il nous fallait choisir un modèle de taux. Après avoir modélisé un modèle Vasicek (1977), nous avons finalement effectué nos simulations à partir d'un modèle Heath, Jarrow et Morton (1992) à deux facteurs, récemment implanté dans l'entreprise. Nous présentons dans la partie suivante les principes sur lesquels reposent nos simulations, à savoir le modèle de taux et la loi de rachat.

Partie 3 : Mise en place des simulations.

A. Le modèle de la courbe des taux.

1. Intérêt de la modélisation des taux.

L'incertitude sur les mouvements futurs des taux d'intérêts est un point très important en assurance. Comme nous l'avons déjà précisé, les décisions d'investissement et les paramètres de la gestion actif-passif sont très sensibles aux perturbations de la courbe des taux. Nous présentons donc les intérêts de la modélisation des taux pour le calcul de la rentabilité et des risques de la compagnie, dont on doit chercher des composantes à la fois à l'actif et au passif de la société.

A l'actif, le rendement du portefeuille et à moindre titre celui de la trésorerie excédentaire sont des éléments importants de la rentabilité de la compagnie. L'usage purement financier est le plus évident que l'on puisse faire du modèle de taux.

Côté passif, la rentabilité est liée entre autres à la rémunération des actionnaires, à la "santé" du portefeuille de contrats, à la qualité de la dette et au coût de la marge de solvabilité. Mais l'intérêt de la modélisation des taux réside surtout dans le fait que le comportement des clients dépend fortement des taux de rendement qu'ils obtiennent sur leur contrat.

a. A l'actif.

Un modèle générateur de scénarios de taux d'intérêt est un outil performant dans la prise de décision de gestion pour le portefeuille d'actifs. Il pourra donc être utilisé par le service des investissements et la direction financière. Après avoir modélisé l'évolution des prix des actifs de base (zéro-coupons, actions, indices...) et des taux (spots ou forwards), et évalué les prix de marché théoriques de ces actifs, on pourra pricer les actifs contingents aux taux d'intérêt (obligations à taux variables, swaps, warrants...) et ceux contingents aux actifs de base (options sur action ou sur indice, futures...). Cette méthodologie repose sur la théorie de la réplication : à tout moment, on peut répliquer l'actif contingent par un portefeuille autofinancé composé d'actifs de base et de l'actif sans risque. Les prix modélisés des actifs de base du portefeuille de réplication permettent alors de déterminer les prix des instruments financiers.

Dans une compagnie d'assurance-vie, calculer le taux de rendement global dégagé par le portefeuille d'actifs présente un autre intérêt. Plus ce taux est élevé, plus la participation aux bénéfices allouée aux assurés est importante. Une meilleure gestion du portefeuille et une meilleure prévision de ses rendements permettent donc de prévoir et d'optimiser la politique de participation aux bénéfices.

b. Au passif.

Un modèle de taux peut également fournir des informations utiles pour la gestion du passif d'une compagnie d'assurance-vie. En effet, plusieurs éléments constitutifs d'une compagnie d'assurance-vie sont sensibles aux taux : les fonds propres, la couverture de la marge de solvabilité réglementaire, la dette et les provisions mathématiques.

- Les fonds propres et la marge de solvabilité réglementaire.

Nous avons déjà explicité l'exigence de constitution d'une marge de solvabilité pour une compagnie. Cette marge peut être constituée par les fonds propres mais aussi par les plus-values latentes. Or la rentabilité attendue par les actionnaires pour leur investissement dans les fonds propres de la société est liée au niveau des taux d'intérêt du marché. De plus, les plus-values latentes dépendent du niveau des taux d'intérêt qui influent directement sur les prix des actifs. Le coût de constitution de la marge est donc fortement corrélé à la courbe des taux.

- La dette.

Pour des raisons analogues à celles concernant le rendement du portefeuille, la gestion de la politique d'endettement gagnerait à utiliser un modèle générant des scénarios de taux, afin de prévoir des stratégies de financement au moindre coût, en fonction des conditions de marché modélisées pour des dates futures.

- Les provisions mathématiques.

C'est le coeur de notre sujet. Il est clair que la structure des taux a un impact sur les entrées et les sorties du portefeuille de contrats.

Dans le cadre de notre étude, il est donc capital de connaître les facteurs qui régissent les taux et de modéliser la courbe des taux afin d'effectuer un grand nombre de simulations.

Nous avons tout d'abord pensé à étudier un modèle de Vasicek (1977) que nous avons programmé. Les caractéristiques de ce modèle sont rappelées en Annexe 3. Cependant, ce modèle est assez grossier et peut donner des taux négatifs. Nous avons finalement choisi de nous intéresser à un modèle Heath, Jarrow et Morton (1992), universellement reconnu comme plus performant.

En effet, un modèle continu à une variable d'état (modèle de Vasicek) a comme défaut de donner des taux parfaitement corrélés, leur comportement stochastique dépendant d'un seul facteur. Autrement dit, la dynamique du taux court permet de déterminer la dynamique de tout le reste de la courbe des taux. En passant à des modèles à plusieurs variables d'état, on gagne en contrôle sur le comportement de la courbe des taux. On peut ainsi modéliser conjointement le taux court terme, et le taux à dix ans par exemple.

2. Présentation du modèle général de Heath, Jarrow, Morton.

Les premiers modèles en temps continu sont apparus avant le modèle de Ho et Lee (1986), vers le milieu des années 70, notamment à la suite des travaux de Black-Scholes sur l'évaluation des prix des options sur actions. Nous présentons le cadre construit par Heath, Jarrow et Morton (1992). Dans un premier temps nous nous donnerons une structure probabiliste pour les évolutions possibles de la courbe des taux. Puis nous traduirons l'absence d'opportunité d'arbitrage pour aboutir au fait que ces modèles sont entièrement paramétrés par une fonction de volatilité.

a. Les mouvements de la structure des taux.

Nous utilisons une famille de processus pour l'ensemble de la structure des taux. Heath, Jarrow et Morton (1992) choisissent de spécifier les taux à terme instantanés notés *F(t,T)*. *F(t,T)* est donc le taux forward instantané calculé à la date *t* pour un contrat de maturité *T*. La famille de processus est prise sous la forme suivante :

$$\boxed{F(t,T) = F(0,T) + \int_0^t \boldsymbol{a}(s,T)ds + \int_0^t s(s,T)'.dW_s} \qquad (2)$$

où $(F(0,T))_T$ décrit la structure des taux initiale et est supposée donnée, et où (W_t) est un mouvement brownien de dimension *K* sous la probabilité ***P***, ***P*** étant la probabilité objective des événements.

$s(t,T)$ est la volatilité des taux à terme instantanés et $s(t,T)'$ sa transposée.

Sous forme d'équation de diffusion, on peut aussi écrire :

$$dF(t,T) = \boldsymbol{a}(t,T)dt + \sum_{i=1}^{K} s_i(t,T)dW_{it}$$

qu'on écrira encore :

$$dF(t,T) = \boldsymbol{a}(t,T)dt + s(t,T)'.dW_t$$

Les fonctions *a(t,T)* et *s(t,T)* sont a priori quelconques et peuvent être en particulier aléatoires. Elles doivent toutefois satisfaire des conditions de régularité assurant l'existence d'une solution de l'équation (2) et la légitimité des calculs qui vont suivre. De plus, la fonction de volatilité vérifie la condition d'identifiabilité suivante :

$$\begin{pmatrix} s(t,T_1)' \\ . \\ . \\ s(t,T_K)' \end{pmatrix} \text{est inversible pour tout } t \text{ et tout } (T_1, \ldots, T_K) \text{ distincts.}$$

Le processus du taux court est obtenu très simplement à partir de (2) en faisant $T = t$:

$$r_t = F(t,t) = F(0,t) + \int_0^t a(s,t)ds + \int_0^t s(s,t)'.dW_s$$

On en déduit le processus des prix zéro-coupon à partir de la formule usuelle :

$$B(t,T) = \exp(-\int_t^T F(t,s)ds)$$

En remplaçant *F(t,s)* par son expression (2) et en utilisant le théorème de Fubini pour les intégrales stochastiques, on obtient :

$$LnB(t,T) = -\int_t^T F(0,t)dt - \int_0^t ds \int_t^T a(s,t)dt - \int_0^t (\int_t^T s(s,t)dt)'.dW_s \qquad (3)$$

En utilisant l'expression du taux court, nous avons :

$$\int_0^t r_t\,dt = \int_0^t F(0,t)dt + \int_0^t dt (\int_0^t a(s,t)ds) + \int_0^t dt \int_0^t s(s,t)'.dW_s$$

Ce qui donne avec (3) :

$$LnB(t,T) = LnB(0,T) + \int_0^t \left[r_s - \int_s^T \alpha(s,\tau)d\tau \right] ds + \int_0^t (-\int_s^T \sigma(s,\tau)d\tau)'.dW_s$$

L'équation de diffusion correspondante s'écrit alors :

$$dLnB(t,T) = \left[r_t - \int_t^T \alpha(t,\tau)d\tau \right] dt + (-\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau)'.dW_t$$

En utilisant le lemme d'Ito, nous trouvons alors :

$$dB(t,T) = \left[r(t) + b(t,T) \right] B(t,T)dt + B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.dW_t$$

où : $\begin{cases} \tilde{\sigma}(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau \\ b(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,\tau)d\tau + \frac{1}{2}.\left\| \tilde{\sigma}(t,T) \right\|^2 \end{cases}$

Ainsi, si la dynamique des taux à terme instantanés s'écrit :

$$F(t,T) = F(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)'.dW_s$$

alors les prix zéro-coupon et le taux court instantané s'écrivent :

$$\boxed{B(t,T) = B(0,T) + \exp(\int_0^t \left[r_s - \int_s^T \alpha(s,\tau)d\tau \right] ds + \int_0^t (-\int_s^T \sigma(s,\tau)d\tau)'.dW_s)}$$

$$\boxed{r_t = F(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)'.dW_s}$$

Disposant des processus de prix, nous pouvons maintenant traduire les contraintes induites par l'absence d'opportunité d'arbitrage.

b. Absence d'opportunité d'arbitrage.

L'absence d'opportunité d'arbitrage implique la contrainte suivante sur la dynamique des prix et des taux à terme instantanés :

$\exists\ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)'$ tels que : $\beta(t,T) = -\varphi(t)'.\tilde{\sigma}(t,T)$, $\quad\forall\ T \geq t$ (4)

ou de façon équivalente :

$$\alpha(t,T) + \tilde{\sigma}(t,T).\sigma(t,T) = -\varphi(t)'.\sigma(t,T)$$

c. Changement de probabilité.

Comme dans les modèles en temps discret, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique l'existence d'une nouvelle mesure de probabilité appelée probabilité risque neutre, notée ***Q***, sous laquelle les processus des prix actualisés sont des martingales.
En injectant (4) dans l'équation de diffusion des prix, on a alors :

$$dB(t,T) = r(t)B(t,T)dt + B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.d\tilde{W}_t$$

avec $$d\tilde{W}_t = dW_t - \varphi(t)dt$$

Le processus des prix actualisés est alors une martingale sous la mesure de probabilité qui fait de $\tilde{W}_t$ un mouvement brownien standard. Ceci résulte du théorème de Girsanov.

Ayant défini ce changement de probabilité, on peut alors exprimer tous les processus de diffusion (taux à terme instantanés, prix zéro-coupon, taux court...) sous cette nouvelle mesure de probabilité.

d. Le modèle sous la probabilité risque-neutre Q.

– **Les taux à terme instantanés**

On obtient la dynamique des taux à terme instantanés à partir de l'équation de base :

$$dF(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)'.dW_t$$

$$\boxed{dF(t,T) = (\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau)'.\sigma(t,T)dt + \sigma(t,T)'.d\tilde{W}_t}$$

– **Le processus du taux court**

L'équation vérifiée par r_t, qui s'écrit désormais en fonction du nouveau mouvement brownien est la suivante :

$$\boxed{r_t = F(0,t) + \int_0^t (\int_s^t \sigma(s,\tau)d\tau)'.\sigma(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)'.d\tilde{W}_s}$$

– **Les prix zéro-coupon**

Sous la mesure ***Q***, le processus des prix vérifie :

$$\boxed{dB(t,T) = r(t)B(t,T)dt + B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.d\tilde{W}_t}$$

Comme attendu, le taux de rendement espéré est égal, dans l'univers corrigé du risque c'est à dire sous la probabilité ***Q***, au taux court sans risque r_t.

3. Cas particulier du HJM à deux facteurs.

Le modèle de taux utilisé est un modèle de Heath, Jarrow, Morton à deux facteurs (cf J. Hull [3]). Les taux forwards suivent sous la probabilité ***P*** la dynamique suivante :

$$\boxed{dF(t,T) = a(t,T)dt + s_1(t,T)dW_{1t} + s_2(t,T)dW_{2t}}$$

où dW_1 et dW_2 sont deux mouvements browniens indépendants,

s_1 et s_2 sont fonctions de T-t.

Les deux fonctions de volatilité ont des rôles différents. La fonction $s_1(t,T)$ est approximativement constante ; elle permet de translater la courbe des taux. La fonction $s_2(t,T)$ change de signe quand T-t augmente. Elle permet de faire tourner la courbe et donc de changer sa pente.

Sous la probabilité risque neutre ***Q*** introduite précédemment, les taux forwards se modélisent de la façon suivante :

$$\boxed{dF(t,T) = m(t,T)dt + s_1(t,T)d\tilde{W}_{1t} + s_2(t,T)d\tilde{W}_{2t}}$$

où $m(t,T) = (\int_t^T s(t,t)dt)'.s(t,T)$,

et $\tilde{W}_1$ et $\tilde{W}_2$ sont deux mouvements browniens standards sous ***Q***.

Les prix des zéros-coupons vérifient alors sous la probabilité ***Q*** l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dB(t,T) = r(t)B(t,T)dt + B(t,T)\tilde{s}(t,T)'.d\tilde{W}_t$$

soit :

$$\boxed{\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r(t)dt + \tilde{s}_1(t,T)d\tilde{W}_{1t} + \tilde{s}_2(t,T)d\tilde{W}_{2t}}$$

Le problème du calcul du drift *m(t,T)* est donc évité lorsque l'on simule les prix des zéro-coupons et non les taux forwards.

4. Extension au cas discret.

Nous généralisons le passage au cas discret dans le cas de plusieurs facteurs. Nous considérons maintenant la dynamique des taux forwards sur une période *Dt* et non plus la dynamique des taux forwards instantanés. Nous notons $f(t, T_1, T_2)$, le taux forward calculé à la date *t* pour la période $[T_1, T_2]$. Nous obtenons le taux forward instantané en passant à la limite :

$$F(t,T) = \lim_{\Delta t \to 0} f(t,T,T+\Delta t)$$

On appelle alors $m_{i,j}$ le drift et $s_{i,j}$ la déviation standard du taux forward entre les moments *jDt* et *(j+1)Dt*. Ainsi, la dynamique des taux forwards s'écrit :

$$\boxed{df(t, j\Delta t,(j+1)\Delta t) = m_{i,j}dt + s_{i,j}d\tilde{W}_t}$$

lorsque $t = iDt$.

Le prix des zéro-coupons est donné par l'équation :

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r(t)dt + \tilde{s}(t,T)d\tilde{W}_t \qquad (5)$$

Or les taux forward *f(t,* T_1*,* T_2*)* peuvent être obtenus à partir du prix des zéro-coupons grâce à l'équation suivante :

$$f(t,T_1,T_2) = \frac{\ln B(t,T_1) - \ln B(t,T_2)}{T_2 - T_1}$$

D'après (5) et le lemme d'Itô, nous obtenons :

$$d\ln B(t,T_1) = [r(t) - \frac{\tilde{s}(t,T_1)^2}{2}]dt + \tilde{s}(t,T_1)d\tilde{W}_t$$

et,

$$d\ln B(t,T_2) = [r(t) - \frac{\tilde{s}(t,T_2)^2}{2}]dt + \tilde{s}(t,T_2)d\tilde{W}_t$$

Ainsi,

$$df(t,T_1,T_2) = \frac{\tilde{s}(t,T_2)^2 - \tilde{s}(t,T_1)^2}{2(T_2 - T_1)}dt + \frac{\tilde{s}(t,T_1) - \tilde{s}(t,T_2)}{T_2 - T_1}$$

Or nous avons :

$$df(t, j\Delta t, (j+1)\Delta t) = m_{i,j}dt + s_{i,j}d\tilde{W}_t$$

Avec $t = iDt$, $T_1 = jDt$ et $T_2 = (j+1)Dt$, nous obtenons alors par identification :

On obtient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} m_{i,j} &= \frac{\tilde{s}^2_{i,j+1} - \tilde{s}^2_{i,j}}{2\Delta t} \\ s_{i,j} &= \frac{\tilde{s}_{i,j} - \tilde{s}_{i,j+1}}{\Delta t} \end{aligned}} \qquad (6)$$

où $\tilde{s}_{i,j}$ est la valeur de $\tilde{s}(t,T)$ lorsque $t = iDt$ et $T = jDt$.

Les expressions (6) de $m_{i,j}$ et de $s_{i,j}$ mènent alors à l'équation suivante :

$$\sum_{j=i}^{k} m_{i,j} = \frac{1}{2}\Delta t\left(\sum_{j=i}^{k} s_{i,j}\right)^2$$

En posant $k = i$, nous obtenons $m_{i,i}$ à partir de $s_{i,i}$. Puis en posant $k = i+1$, nous obtenons $m_{i,i+1}$ à partir de $m_{i,i}$, $s_{i,i}$ et $s_{i,i+1}$ et ainsi de suite. A partir de la forme discrète, on peut donc simuler l'évolution de la courbe des taux.

On peut dès à présent noter que ce modèle pose le problème suivant : il requiert une bonne connaissance de la courbe des taux forwards si l'on veut simuler sur une durée assez longue. Par exemple, si on veut simuler les taux d'échéance inférieure ou égale à 20 ans et ce sur une période de 10 ans, il faut disposer des taux forwards à 30 ans.

Dans la quatrième partie, nous présenterons les différents résultats obtenus à partir de ce modèle de taux.

B. La loi de rachat.

Pour des raisons de confidentialité, nous ne présentons pas en détail la loi de rachat utilisée à la CNP. Nous ne donnons ainsi qu'un aperçu général de cette loi.

Le logiciel Gap distingue deux types de rachats : les rachats naturels sur lesquels la politique de la compagnie en terme de rémunération des assurés n'a pas d'influence, et les rachats liés à l'évolution des taux d'intérêts. La loi de rachat programmée somme donc les rachats *structurels* (naturels) et les rachats *conjoncturels* (dus à la hausse des taux). Nous allons tout d'abord présenter la loi des rachats structurels puis celle des rachats conjoncturels.

1. Les rachats structurels.

Ils sont uniquement fonction de l'ancienneté du contrat. L'utilisateur entre pour chaque ancienneté le pourcentage de rachats correspondants. Par exemple :

Tableau 3 : loi des rachats naturels.

Ancienneté du contrat	Pourcentage de rachats
1 an	5%
2 ans	5%
...	...
7 ans	5%
8 ans	30%
...	...

Il faut noter que le pourcentage de rachats est un pourcentage des provisions mathématiques ou, de façon équivalente, du nombre de contrats. En effet, les contrats sont entrés de la façon suivante : pour chaque ancienneté, l'utilisateur saisit le nombre de contrats détenus et la provision mathématique moyenne correspondante. Il revient donc au même de considérer que le pourcentage de rachats est à appliquer au nombre de contrats ou à leur provision mathématique moyenne.

2. Les rachats conjoncturels.

Cette loi de rachat part de l'hypothèse que l'intérêt des clients à racheter leur contrat en cas de variation des taux dépend des paramètres suivants :

- leurs provisions mathématiques (PM) : plus les provisions mathématiques sont élevées, plus le client est sensible à une hausse des taux du marché.
- le taux global de revalorisation de l'année précédente (TGR_{n-1}) : le client le compare au taux disponibles sur le marché.
- le taux du marché (TME).
- l'ancienneté du contrat : elle joue surtout sur la fiscalité du contrat et donc sur l'intérêt ou non à partir.
- l'indice de réactivité (IR) : cet indice représente la capacité du client à réagir à des variations de rentabilité relative de son contrat.

La loi de rachat fonctionne selon les trois étapes suivantes :

1ERE ETAPE. On calcule l'espérance de rentabilité des clients selon qu'ils choisissent :
Option n°1 : De garder leur contrat. Dans ce cas, les clients espèrent une rentabilité égale à celle de l'année précédente i.e au taux global de revalorisation qui leur a été servi.
Option n°2 : De racheter immédiatement leur contrat pour en souscrire un nouveau.
Option n°3 : De garder leur contrat jusqu'à l'échéance fiscale puis d'en souscrire un nouveau.

2EME ETAPE : Si la deuxième option donne une espérance de rentabilité plus élevée que les autres, les clients ont intérêt à racheter leur contrat.
On calcule donc l'écart de rentabilité entre le choix de racheter son contrat ou de le conserver.

3EME ETAPE : On pondère ce résultat par l'indice de réactivité des clients. Seule une partie des clients qui ont en théorie intérêt à racheter leur contrat le font effectivement. En effet, si tous les clients étaient totalement rationnels et réactifs, le taux de rachat serait de 100% dès que l'écart de rendement espéré serait positif. On pondère donc le résultat précédent par l'indice de réactivité.

Finalement,

loi de rachat totale = loi des rachats structurels + loi des rachats conjoncturels

C. Choix du produit d'épargne et paramètres du modèle de taux.

1. Le produit d'épargne

Nous avons étudié un produit d'épargne fictif dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Les événements pris en compte à l'entrée sont la souscription et les versements libres tandis que ceux considérés à la sortie sont les décès, les rachats partiels et totaux, et les transferts vers un autre produit.
- Le pourcentage de distribution des produits financiers est fixé à 100%.
- La table de mortalité est la table TV 88/90 avec un taux d'abattement de 90%.
- Les rachats totaux sont estimés à partir de la loi de rachat présentée précédemment. *Les clients sont plutôt très réactifs.*
- Le bilan comptable relatif au produit est connu au 1er janvier 2000 et on simule les années suivantes.

2. Les paramètres du modèle de taux

La volatilité que nous utilisons a été paramétrée pour une autre étude de CNP-assurances. Elle est calée sur les OAT du marché, plus précisément sur les taux in fine des obligations de maturités 1 an et 10 ans. Elle présente l'avantage d'être simple ce qui pourra faciliter les interprétations ultérieures.

Elle est uniquement fonction de la maturité *T-t*, ce qu'on peut écrire :

$$s(t, T) = s(T\text{-}t)$$

$s_1(1)$ et $s_1(10)$ sont calculées sur les OAT du marché et les autres valeurs sont obtenues par interpolation linéaire, soit finalement :

Tableau 4 : valeurs de s_1.

T-t en années	s_1 en %
0	1,81
1	1,81
2	1,73
3	1,65
4	1,57
5	1,49
6	1,41
7	1,33
8	1,25
9	1,17
10	1,10
11	1,10
12	1,10
...	...
20	1,10

On obtient de même la volatilité tournante s_2 :

Tableau 5 : valeurs de s_2.

T-t en années	s_2 en %
0	-0,53
1	-0,41
2	-0,29
3	-0,18
4	-0,06
5	0,06
6	0,18
7	0,29
8	0,41

9	0,53
10	0,53
11	0,53
12	0,53
...	...
20	0,53

Dans toute la suite du mémoire, nous appellerons :

- scénario : l'ensemble des hypothèses que l'utilisateur entre avant de lancer une simulation.
- simulation : les résultats relatifs à une courbe des taux obtenue par Monte Carlo.

Nous avons fait tourner des jeux de 100 puis de 1 000 simulations.

Partie 4 : Résultats et interprétations.

A. Présentation des indicateurs étudiés

1. Choix de la valeur sur laquelle calculer la VaR

Nous avons déjà vu qu'une question primordiale était de savoir sur quelle "valeur" on allait calculer la Value at Risk. Nous avons pensé à deux solutions pouvant s'appliquer dans le cadre de notre étude :

- la 1ère valeur est égale au *résultat total*. Elle correspond au résultat comptable tel qu'il est calculé classiquement.

- la 2ème valeur est égale à la différence : *résultat total* - *PREET*.

a. Etude de la première valeur.

Rappelons que cette première valeur est égale à *résultat total*.

La variable appelée *résultat total* est en fait la somme des résultats technique, administratif, et financier. Il est à noter que dans notre cadre d'étude, puisque l'on considère un produit d'épargne, le résultat technique est nul. De plus, le résultat présenté ne tient pas compte du coût de la marge, ni des produits financiers sur les fonds propres.

Plus précisément,

Résultat technique

=

primes pures + intérêts techniques crédités + participation aux bénéfices - prestations - variation des provisions mathématiques - chargements de gestion sur encours - prélèvements fiscaux.

Résultat administratif

=

résultat sur frais de gestion + résultat sur frais d'acquisition.

Résultat financier

=

produits financiers nets des placements - intérêts techniques crédités - chargements de gestion sur produits financiers - dotation pour réserve de participation aux bénéfices - dotation à la réserve de capitalisation - variation de provision pour participation aux excédents.

Finalement,

Résultat total = Résultat technique + Résultat administratif + Résultat financier

Nous pouvons faire plusieurs remarques sur cette variable r*ésultat.* Elle présente l'avantage d'être facilement interprétable. Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, le résultat technique est nul puisque l'on étudie un produit d'épargne. D'autre part, le résultat financier, tel qu'il est construit, est toujours négatif ou nul. Il est nul dans les cas "normaux" puisque tous les produits financiers sont réalloués. Il est négatif dans le cas de forts rachats et de ventes d'actifs en moins-values, c'est-à-dire lorsque la production financière est insuffisante pour permettre à l'assureur de servir le taux garanti. Dans ce dernier cas, l'assureur devra puiser dans ses fonds propres pour compenser les pertes et honorer ses engagements (voir l'exemple de la partie 1-B-4), c'est donc ce dernier cas qui nous intéressera plus particulièrement.

Finalement, *résultat total* représente le bénéfice ou la perte totale réalisée sur le produit d'épargne au terme de l'exercice. Cependant, *résultat total* est un flux et ne rend donc pas totalement compte de la valeur du portefeuille à la fin de l'exercice considéré. Or c'est bien sur une valeur - comme son nom l'indique - que l'on doit calculer la Value at Risk. Cependant, il est très difficile de déterminer la valeur de marché d'un portefeuille d'assurance-vie. Cette constatation nous a amenées à introduire la deuxième valeur ; celle-ci servira non pas à évaluer directement le portefeuille mais plutôt à évaluer le montant de fonds propres nécessaires pour garantir la solvabilité.

b. Etude de la deuxième valeur.

Elle est égale à la différence : *résultat total* - *PREET*.

La PREET est la provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques. Elle joue un rôle capital dans le cas de rachats massifs. En effet, si l'assureur doit faire face à un nombre de rachats élevés et doit liquider des titres en moins-values pour respecter ses engagements, la PREET le prémunit contre une trop grosse variation des résultats. Comme le stipule le Code des Assurances [5] (article R 331-3), la provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques est une « provision destinée à faire face à une insuffisante liquidité des placements en cas de modification du rythme de règlement des sinistres ». Cette provision fait partie des provisions techniques et elle est inscrite au passif du bilan d'une compagnie d'assurance (présenté en Annexe 4) dans les postes "autres provisions techniques". Elle est constituée dès que le total des valeurs nettes comptables des placements est supérieur au total des valeurs de réalisation de ces mêmes placements.

Il existe deux façons de comptabiliser initialement cette provision :

- soit cette provision est initialement constatée par le compte de résultat.
- soit cette provision est initialement prélevée sur les capitaux propres.

Ces deux modes de constitution sont expliqués plus précisément dans le livre [6]. Cependant, les informations ci-dessus suffisent pour constater que, quel que soit son mode de constitution, la PREET apparaît au passif du bilan et dans l'un des deux postes qui nous intéressent pour évaluer le montant de marge nécessaire à la solvabilité : capitaux propres et résultat.

La deuxième valeur, obtenue en soustrayant le montant de la PREET à la première valeur, est donc plus complète que cette dernière. Elle présente cependant un inconvénient : elle somme une valeur et un flux. En effet, la variable *résultat total* est un flux alors que la PREET est une valeur. Pour avoir un flux, on aurait pu penser à prendre la variation de la PREET entre les années n et n-1 au lieu de son niveau l'année n. Cependant, l'année apparaîtrait bonne lorsque la PREET diminuerait globalement, même si en valeur cette dernière restait élevée. Or une valeur de PREET élevée, même si elle est en diminution, reste le signe d'une forte exposition au risque. Considérer la variation de PREET pourrait donc conduire à des interprétations erronées.

Il ne faut pas non plus perdre de vue que si l'on calcule la VaR, c'est dans le but d'évaluer le montant de fonds propres nécessaire. Or la PREET est constituée à partir des capitaux propres donc de postes admissibles au titre de marge de solvabilité. C'est donc bien le montant total de la PREET qu'il faut prendre en compte pour calculer le niveau de marge de solvabilité nécessaire, puisque c'est la totalité de la PREET qui est financée par les capitaux propres.

Nous avons donc choisi pour deuxième valeur : *résultat total - PREET*

Cette deuxième valeur, lorsqu'elle est négative, représente en fait le montant de fonds propres nécessaires pour garantir la solvabilité de l'entreprise dans le scénario et la simulation considérés. Elle rassemble en effet tous les fonds propres qui ont été "dépensés" pour permettre à l'entreprise d'être à même d'honorer ses engagements. En effet, la PREET est débitée sur les fonds propres ; et le résultat vient augmenter ces capitaux propres lorsqu'il est y incorporé (on trouvera le détail des capitaux propres dans l'annexe 4 qui présente un bilan simplifié), ou les diminuer quand il est négatif.

Lorsque la deuxième valeur est positive, elle peut s'interpréter comme le surplus de capitaux propres inutile et est dû à un excès de prudence dans la simulation considérée.

Nous choisissons donc de calculer la VaR sur cette deuxième valeur que nous appellerons désormais *montant de fonds propres nécessaires* ou encore *MFPN*. D'où :

$$\boxed{MFPN = résultat\ total\ - PREET}$$

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les différentes fonctions que nous allons appliquer aux deux valeurs présentées, fonctions parmi lesquelles on retrouve la VaR.

2. Indicateurs de risque.

Nous présentons ici quelques indicateurs qui nous semblent suffisants pour résumer le risque inhérent à un scénario.

a. La Value at Risk.

Pour chacune des années, nous avons calculé la VaR Monte Carlo à 1%, 2% et 5% de *résultat total* et de *MFPN*. Nous étudierons l'influence de l'horizon à partir des différentes simulations du scénario de base.

b. La probabilité de perte

Cette probabilité notée P est définie comme la probabilité que le résultat total soit négatif.

$$P = Prob\ (\ résultat\ total < 0\ )$$

Nous verrons toutefois que cette probabilité n'est pas suffisante pour interpréter l'ensemble de nos scénarios et nous introduirons à cet effet d'autres probabilités.

c. La perte maximale

La perte maximale complète les indicateurs précédemment cités puisqu'elle permet de borner le risque.

B. Scénario central.

Nous appelons "scénario central" le scénario correspondant au produit d'épargne présenté dans la partie 3-C. Ce scénario servira pour calculer le montant de marge de solvabilité nécessaire à l'entreprise, et il constituera une référence pour les études de sensibilité.

1. Analyse générale.

a. Quelques remarques sur le TME

Le TME, taux moyen des emprunts d'Etat, est la moyenne des taux des obligations d'Etat d'échéance comprise entre 10 et 15 ans. Ainsi,

$$TME(t) = \frac{\sum_{i=10}^{15} F(t, t+i)}{6}$$

Nous considérons que c'est sur ce taux que se basent les clients lorsqu'ils décident de racheter leur contrat.
A partir des 1 000 simulations suivant le modèle HJM, nous obtenons les valeurs du TME sur 20 ans. Nous présentons les valeurs obtenues pour 10 simulations dans le tableau 6 et la courbe correspondante en Annexe 5.

Tableau 6 : simulation du TME.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
simulation 1	4,73%	5,12%	5,98%	4,61%	4,32%	5,44%	6,31%	6,13%	4,83%
simulation 2	6,38%	6,01%	7,07%	7,52%	9,51%	9,64%	10,45%	11,44%	11,71%
simulation 3	3,82%	5,16%	4,52%	3,76%	4,66%	4,76%	5,13%	4,85%	3,59%
simulation 4	4,03%	5,26%	3,62%	4,62%	6,29%	5,82%	6,37%	6,47%	6,37%
simulation 5	6,09%	5,77%	6,78%	5,72%	7,00%	7,70%	7,89%	8,91%	10,88%
simulation 6	4,62%	4,85%	4,64%	5,26%	7,17%	6,34%	8,02%	7,30%	7,77%
simulation 7	3,95%	3,57%	5,27%	4,54%	6,24%	7,21%	6,37%	6,99%	9,64%
simulation 8	5,99%	5,99%	5,63%	4,88%	5,15%	4,76%	4,51%	3,71%	5,54%
simulation 9	4,76%	6,33%	6,97%	7,15%	6,74%	6,37%	6,87%	5,31%	7,17%
simulation 10	5,67%	4,65%	6,19%	7,16%	6,27%	6,90%	7,77%	7,44%	7,62%

2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
6,16%	5,48%	8,31%	8,05%	8,88%	8,41%	7,88%	6,96%	8,36%	7,97%	6,77%
11,59%	10,24%	9,79%	7,93%	7,71%	7,13%	7,87%	7,92%	8,76%	8,13%	8,35%
2,61%	2,15%	0,97%	0,50%	1,47%	4,32%	4,41%	4,71%	1,96%	3,62%	3,29%
7,32%	6,79%	8,58%	8,90%	9,83%	11,40%	10,29%	11,12%	10,84%	9,30%	11,98%
11,88%	11,29%	11,80%	11,63%	9,63%	8,12%	7,95%	9,70%	10,93%	13,16%	13,78%
8,67%	7,32%	10,40%	11,29%	11,54%	10,72%	9,62%	11,51%	12,53%	12,08%	10,74%
11,76%	10,71%	13,42%	10,61%	11,50%	11,53%	12,21%	12,73%	12,24%	11,63%	12,11%
6,19%	7,15%	8,41%	5,83%	4,06%	2,05%	5,70%	6,79%	5,59%	4,59%	6,84%
6,42%	4,57%	4,76%	5,35%	4,22%	6,25%	5,80%	6,02%	6,31%	5,65%	4,29%
6,50%	7,51%	8,74%	10,33%	10,75%	8,12%	9,16%	8,44%	8,29%	9,00%	8,29%

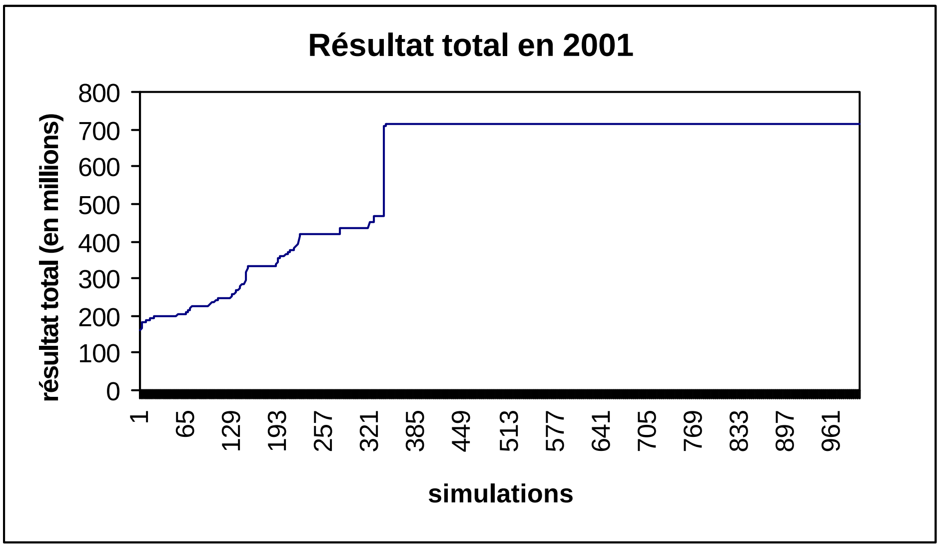
Les 10 simulations illustrent bien l'évolution possible des taux sur 20 ans : en moyenne, ils ont une tendance à la hausse, même si ce phénomène est pondéré par leur volatilité. Certaines simulations présentent des pics (à la hausse ou à la baisse). Le modèle semble donc satisfaisant pour une étude sur les risques à la hausse et à la baisse.

b. Etude du résultat total.

b1. Répartition du résultat total

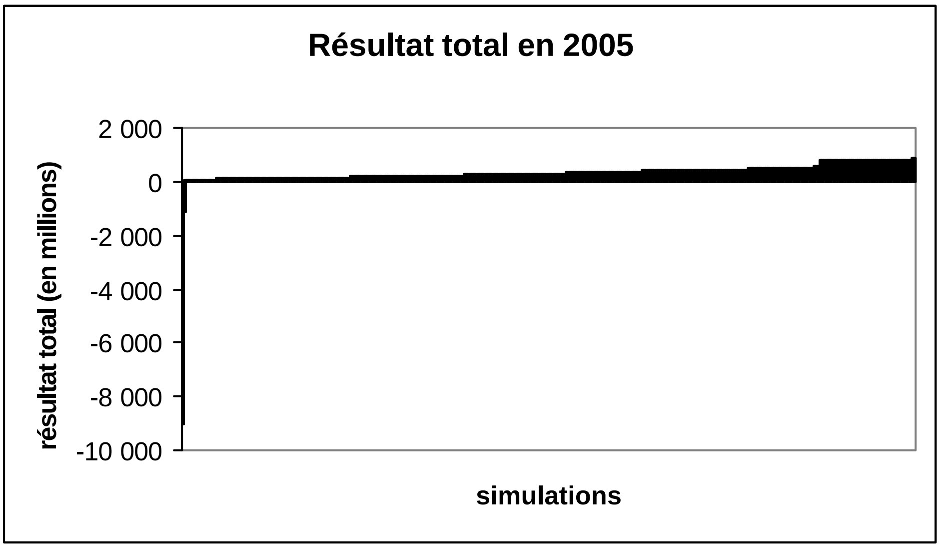
Pour les différentes simulations, nous avons classé le résultat total par ordre croissant et nous avons représenté sa répartition par un diagramme en bâtons. Nous présentons ci-dessous la répartition du résultat total au bout d'un an, de cinq ans et de huit ans, car ces échéances illustrent bien l'évolution d'ensemble de cette variable.

Graphique 1.



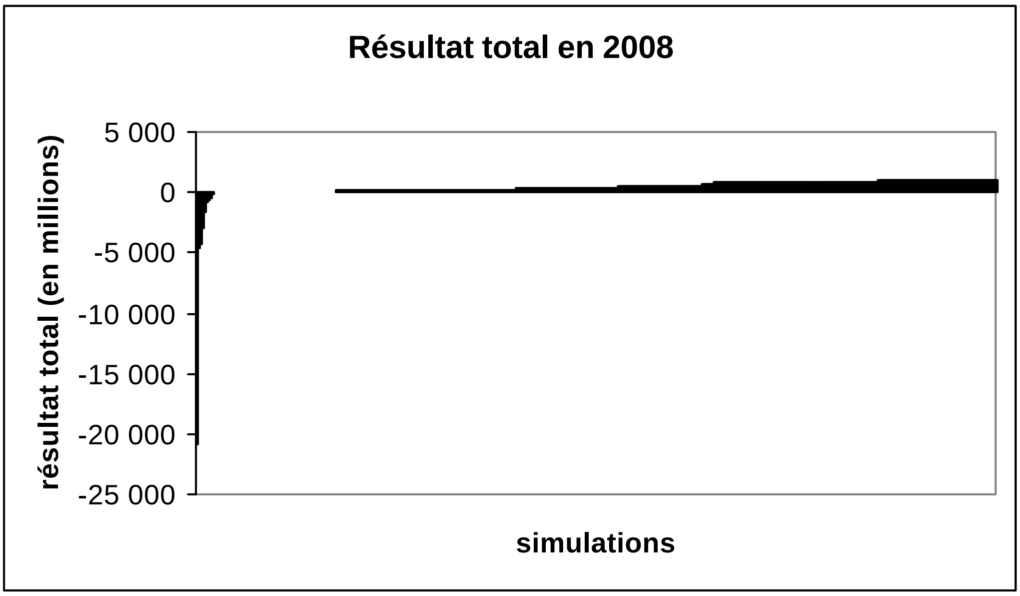
En 2001, aucune simulation ne présente de pertes. C'est ce à quoi nous nous attendions puisque le risque n'est pas à court terme, et la compagnie a donc une probabilité de perte quasiment nulle au bout d'un an. D'autre part, nous observons que le résultat total est le même pour environ 68% des simulations. Cela représente les cas où la variation du TME est encore trop faible pour influer sur le résultat.

Graphique 2.



Au bout de 5 ans quelques scénarios présentent des pertes (0,2%).

Graphique 3.



Au bout de 8 ans, la probabilité de perte est plus importante (2,6%). Cela peut être dû au fait que beaucoup de contrats arrivent à échéance fiscale ce qui influe sur les rachats. Le maximum de pertes est à -21 milliards. Il est intéressant de remarquer que les pertes semblent potentiellement illimitées alors que les gains sont majorés par 1,1 milliard.

b2. Value at Risk.

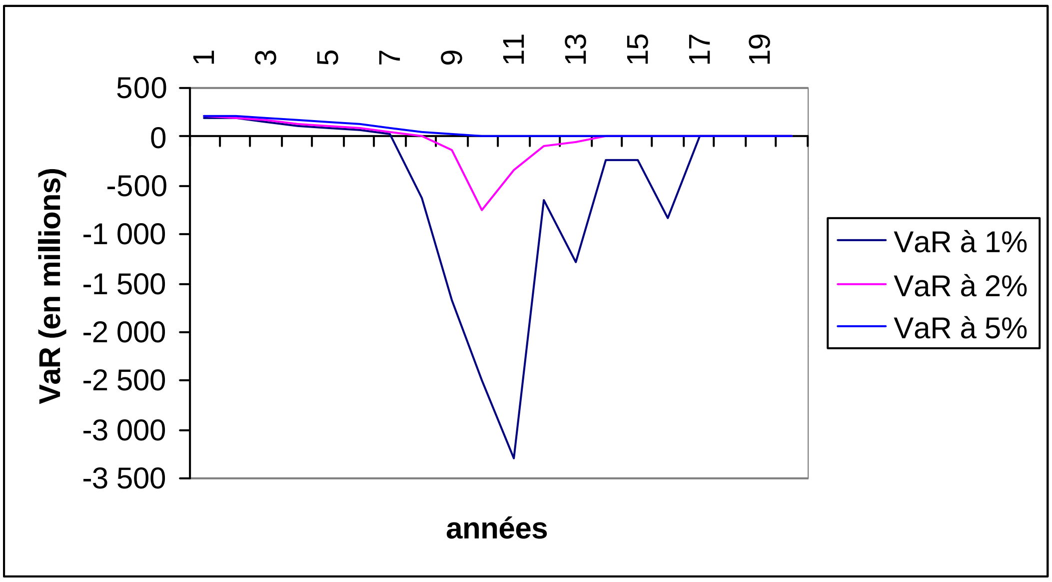
Nous avons calculé la Value at Risk à différents seuils ainsi que la probabilité de perte, et ce pour toutes les années simulées. Le tableau 7 et le graphique 4 résument ces résultats.

Tableau 7 : Value at Risk et probabilité de perte de *résultat total.*

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Probabilité de perte	0%	0%	0%	0%	0%	0,20%	0,40%	1,20%	2,60%
VaR à 1% (en millions)	197	188	160	116	86	59	34	-621	-1672
VaR à 2% (en millions)	203	196	178	139	114	81	49	13	-140
VaR à 5% (en millions)	208	200	193	177	153	121	87	51	23

2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
3,40%	4,00%	4,20%	4,80%	4,30%	5,20%	5,60%	4,80%	4,50%	3,80%	3,90%
-2493	-3304	-656	-1281	-236	-243	-833	0	0	0	0
-743	-336	-96	-65	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Graphique 4.



Les VaR à 1% et 2%présentent un pic à peu près au même moment (à la dixième année), cependant ce pic est beaucoup plus accentué pour la VaR à 1%. De plus ce pic de 2010 a une valeur de –3,3 milliards ; cette valeur très importante nous incite à nous demander si les valeurs postérieures à 2009 sont vraiment fiables.

b. Première analyse du montant de fonds propres nécessaire.

On étudie ici les cas où *MFPN* est négatif. Le tableau 8 présente les principaux résultats obtenus.

P(MFPN<0) représente la probabilité que l'assureur ait besoin de ses fonds propres pour honorer ses engagements.

MFPN maximal est le montant de fonds propres maximal dont l'entreprise pourra avoir besoin l'année considérée. Il est négatif pour les questions de conventions de signe expliquées plus haut : il correspond à une dépense de fonds propres. Le signe négatif de la moyenne et la médiane présentées en quatrième et cinquième colonnes s'interprète de la même façon.

Tableau 8 : résultats sur *MFPN* (en milliards).

Année	**P(*MFPN*<0)**	***MFPN* maximal**	**moyenne des *MFPN* négatifs**	**médiane des *MFPN* négatifs**
2000	1,4%	-13,8	-4,7	-4,1
2001	5,6%	-14,0	-3,5	-2,2
2002	7,6%	-16,2	-4,1	-3,5
2003	11,5%	-16,0	-4,1	-2,5
2004	14,1%	-22,4	-4,7	-3,4
2005	16,3%	-23,4	-4,4	-2,6
2006	17,5%	-19,9	-4,3	-2,3
2007	20,9%	-23,7	-4,3	-1,9
2008	21,8%	-41,7	-3,9	-1,2
2009	23,0%	-37,6	-3,5	-0,5
2010	22,5%	-29,6	-3,4	-0,5
2011	22,6%	-30,3	-2,9	-0,4
2012	22,4%	-37,2	-2,9	-0,4
2013	21,7%	-28,5	-3,0	-0,3
2014	22,2%	-30,2	-2,7	-0,3
2015	22,1%	-29,6	-2,8	-0,3
2016	19,6%	-30,0	-2,8	-0,3
2017	19,9%	-30,0	-2,8	-0,3
2018	19,5%	-40,5	-3,1	-0,3
2019	19,9%	-38,4	-3,1	-0,3

La probabilité d'utiliser les fonds propres augmente avec les années. Nos simulations montrent donc bien le fait que le risque en assurance-vie est à long terme. De plus, *P(MFPN<0)* est étonnamment élevée. Il faut savoir que le modèle de taux que l'on a paramétré est assez volatile et cela peut expliquer en partie ces probabilités. Mais ces probabilités incitent aussi à penser que les entreprises d'assurance-vie sont plus dépendantes de leurs fonds propres que

l'on ne peut le penser. Nous reparlons de ce fait dans le paragraphe suivant.
D'autre part, les montants de fonds propres nécessaires maximaux et moyens ne suivent pas la même évolution : *MFPN maximal* connaît un pic en 2008 alors que ce n'est pas le cas de *MFPN moyen*, ni de *MFPN médian*. En fait, *MFPN moyen* est moins volatile que *MFPN maximal.* On peut penser que *MFPN maximal* n'est pas très fiable. Ce n'est pas étonnant car *MFPN maximal* correspond à une situation extrême et, plus les situations sont extrêmes, plus il est difficile de les modéliser.

c. Etude du dépassement de la marge réglementaire.

On dit qu'il y a "dépassement" chaque fois que, dans une simulation, la marge de solvabilité réglementaire (égale à 4% des provisions mathématiques) est insuffisante pour faire face aux rachats.

Plus précisément, nous définissons la variable *dépassement.* Cette variable mesure l'écart entre la marge de solvabilité réglementaire et les fonds propres nécessaires (considérés égaux à *MFPN*). Elle est nulle quand la marge réglementaire est suffisante. Autrement dit,

$$\boxed{\textit{dépassement} = [\textit{ marge de solvabilité} - |\textit{MFPN}|\ ]^{-}}$$

NB : Le MFPN est en valeur absolue car il est par définition négatif.

Le dépassement est une variable par définition négative car on ne garde que les cas où le montant de fonds propres effectivement nécessaire à l'entreprise est supérieur au montant de marge de solvabilité imposé par la réglementation. On l'appellera encore dépassement absolu, pour le différencier du dépassement relatif que nous définissons un peu plus loin.
Le tableau 9 présente les principales caractéristiques du dépassement dans le scénario central.

Tableau 9 : dépassement (en milliards)

Année	probabilité de dépassement	dépassement maximal en valeur absolue	moyenne des dépassements	médiane des dépassements
2000	0,40%	-7,8	-2,7	-1,4
2001	0,90%	-8,6	-3,7	-2,8

2002	1,40%	-10,9	-4,6	-4,9
2003	2,90%	-11,0	-3,6	-2,0
2004	4,30%	-14,9	-4,8	-3,6
2005	4,50%	-20,9	-5,9	-4,1
2006	6,40%	-16,4	-5,3	-4,1
2007	8,00%	-23,3	-5,3	-4,0
2008	9,30%	-40,9	-5,3	-2,9
2009	10,70%	-36,9	-4,8	-2,3
2010	11,30%	-29,2	-4,0	-1,0
2011	11,50%	-29,1	-2,9	-0,3
2012	12,30%	-36,4	-2,7	-0,3
2013	12,80%	-21,5	-2,3	-0,4
2014	12,70%	-20,5	-2,0	-0,3
2015	13,00%	-28,0	-2,0	-0,3
2016	12,20%	-23,0	-1,7	-0,2
2017	12,90%	-21,5	-1,7	-0,2
2018	12,40%	-31,5	-2,1	-0,2
2019	12,20%	-30,3	-2,3	-0,2

La probabilité de dépassement augmente avec les années. Cela reflète de nouveau l'idée qu'en assurance-vie, le risque n'est pas à court terme. Il faut noter qu'à une échéance de 10 ans, la probabilité que les fonds propres réglementaires soient insuffisants pour garantir la solvabilité est de 10,7%. Ce chiffre est pessimiste car, dans notre scénario, le modèle de taux est assez volatile et les clients très réactifs.

D'autre part, le dépassement maximal connaît un pic en 2008, ce qui doit correspondre à la duration du passif c'est à dire à l'année moyenne où les contrats sont rachetés. Cette année-là, le dépassement est en moyenne égal à 5,3 milliards, ce qui veut dire qu'il faudrait augmenter la marge de solvabilité de 5,3 milliards.

Pour mieux interpréter ces dépassements, il faut avoir une idée du pourcentage qu'ils représentent par rapport à la marge de solvabilité réglementaire égale à 4% des provisions mathématiques. Nous résumons les caractéristiques de cette marge dans le tableau 10.

Tableau 10 : marge de solvabilité réglementaire (en milliards)

Année	moyenne	maximum	minimum
2000	7,2	7,5	5,5
2001	7,8	8,4	4,6
2002	8,2	9,4	3,6
2003	8,3	10,3	2,4
2004	8,4	11,2	1,3
2005	8,3	11,8	0,7

2006	8,1	12,3	0,2
2007	7,8	13,0	0
2008	7,5	13,7	0
2009	7,3	14,4	0
2010	7,0	15,1	0
2011	6,8	15,9	0
2012	6,6	16,4	0
2013	6,4	17,1	0
2014	6,2	17,7	0
2015	6,0	18,4	0
2016	5,9	19,4	0
2017	5,7	20,3	0
2018	5,5	21,2	0
2019	5,3	22,3	0

On constate que la marge de solvabilité réglementaire minimale à partir de la 8ème année est nulle. Cela veut dire qu'il existe des scénarios dont les provisions mathématiques sont nulles au-delà de la 8ème année : tous les contrats ont été rachetés. On retrouve ici le seuil fiscal de la 8ème année qui incite les clients à racheter leur contrat.

Pour tenir compte du niveau de marge réglementaire, après s'être intéressé au dépassement absolu, on peut introduire le *dépassement relatif* égal au dépassement rapporté à la marge correspondante :

dépassement relatif = dépassement absolu / marge de solvabilité

Le tableau 11 présente les caractéristiques du dépassement relatif.

Tableau 11 : dépassement relatif

Année	dépassement relatif maximal	moyenne dépassements relatifs
2000	-1,30	-0,45
2001	-1,64	-0,63
2002	-3,02	-0,98
2003	-4,60	-0,81
2004	-9,83	-1,28
2005	-30,72	-2,18
2006	-18,64	-2,58
2007	-106,90	-5,28
2008	-6,13E+03	-1,53E+02
2009	-2,79E+09	-3,62E+07

2010	-3,69E+06	-4,50E+04
2011	-7,03E+07	-7,41E+05
2012	-2,74E+07	-3,40E+05
2013	-2,93E+08	-2,48E+06
2014	-9,94E+07	-1,13E+06
2015	-1,04E+10	-8,05E+07
2016	-9,55E+12	-1,55E+11
2017	-1,36E+17	-1,11E+15
2018	-3,88E+07	-4,11E+05
2019	-4,58E+07	-5,25E+05

Dans l'ensemble, le dépassement relatif est très élevé. Par exemple, nos résultats semblent suggérer qu'il faudrait multiplier en moyenne par 2,58 les fonds propres réglementaires pour garantir la solvabilité en 2006. Pour prévenir vraiment tous les risques et faire face aux cas extrêmes, il faudrait même les multiplier par 18,64 ! On voit ici l'utilité du concept de VaR : il permet de choisir le niveau de risque contre lequel l'entreprise veut se prémunir. Par exemple, si elle accepte 0,1% de probabilité de dépassement, on étudiera la VaR à 0,1% du dépassement. Nous nous intéressons à cette question dans le paragraphe 2 ci-dessous qui traite du choix empirique des paramètres de la VaR.

De plus, le dépassement relatif est interprétable les premières années, mais à long terme, il n'est pas fiable. Cela est dû au fait que lorsque les provisions mathématiques deviennent faibles, la marge de solvabilité réglementaire est elle aussi énormément diminuée (rappelons qu'elle est égale à 4% des provisions mathématiques) alors que le montant de fonds propres nécessaires, par construction informatique et mathématique, garde une grande variance. On retrouve ici l'idée qu'il est difficile de simuler au-delà de dix ans.

2. Choix empirique des paramètres de la VaR.

Nous avons exposé dans la Partie 2 les différences existant entre le secteur bancaire et celui de l'assurance-vie dont il faudrait tenir compte pour transposer la méthode bancaire de calcul de la VaR à l'assurance. Nous avions aussi précisé que le calcul de la VaR s'accompagnait d'un choix de paramètres essentiels : le nombre de simulations, le seuil de confiance et l'horizon de calcul de la VaR. Nous nous étions alors interrogées sur le choix de la valeur de ces paramètres en notant que les différences entre banque et assurance nous amèneraient à choisir des paramètres différents de ceux utilisés par les spécialistes des risques de marché. Nous avions pu donner des différences qualitatives dans le choix des paramètres mais nous avions conclu que seule une étude empirique permettrait de les déterminer précisément.

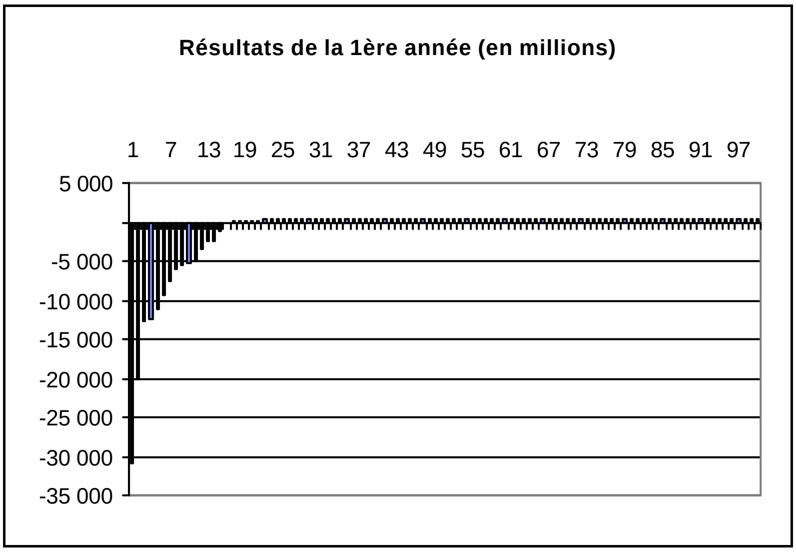
Nous présentons donc dans cette partie les valeurs empiriques que nous avons choisies pour ces paramètres suite à l'étude de leur influence sur nos résultats.

a. Sensibilité de la VaR au nombre de simulations.

Dans un premier temps, nous avons lancé 100 simulations car nous ne disposions pas encore d'un ordinateur suffisamment puissant pour en lancer un plus grand nombre. Cette série de 100 simulations nous a donné une première idée des valeurs de la variable *MFPN* mais elle nous a aussi incitées à lancer un plus grand nombre de simulations afin d'obtenir des résultats plus précis.

Lorsque l'on trace année par année la répartition de la variable *MFPN*, on s'aperçoit immédiatement que les valeurs négatives sont illimitées tandis que les valeurs positives sont bornées supérieurement. Nous avons donc affaire à une répartition à queue épaisse, ce qui d'une part, rend indispensable d'augmenter le nombre de simulations et d'autre part suggère d'utiliser la Tail VaR. Le graphique 5 illustre ce phénomène pour la première année. Les autres résultats sont présentés en Annexe 4.

Graphique 5 : diagramme de *MFPN* la première année.



Les résultats obtenus ne sont de pas lisses. Il apparaît donc d'ores et déjà que 100 simulations sont insuffisantes pour évaluer le risque et calculer la VaR. Ceci est de même visible sur les graphiques de répartition de *MFPN* de l'Annexe 6 : la valeur de *MFPN* connaît des sauts et la valeur du risque est donc insuffisamment précise comme l'illustre le tableau 12.

Tableau 12 : valeurs de trois quantiles successifs

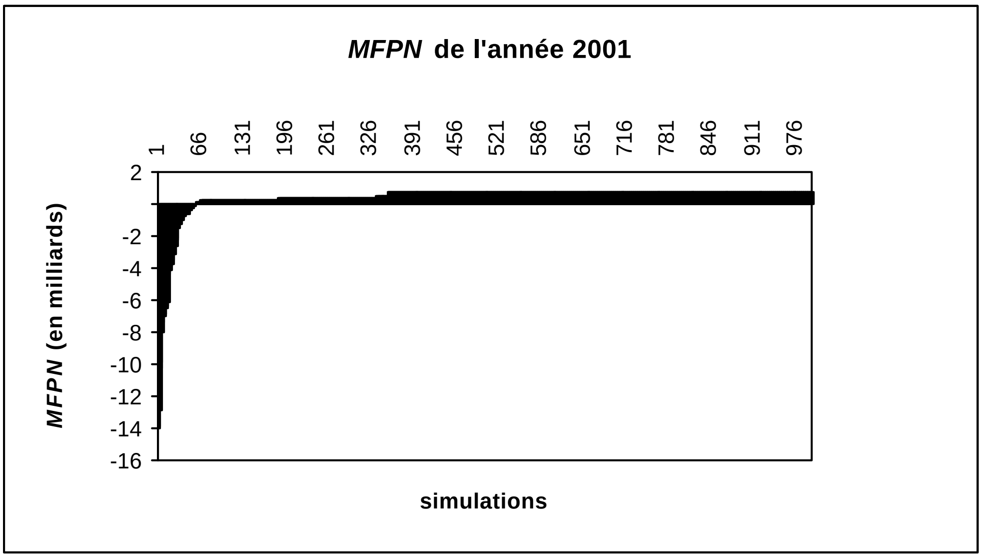
Année	quantile à 4%	quantile à 5%	quantile à 6%
2000	-12,4	-11,2	-9,48
2001	-34,5	-31,5	-26,9
2003	-53,7	-53,5	-52,7
2005	-142	-115	-95,3
2008	-196	-153	-123

N.B : Les quantiles sont en milliards de Francs.

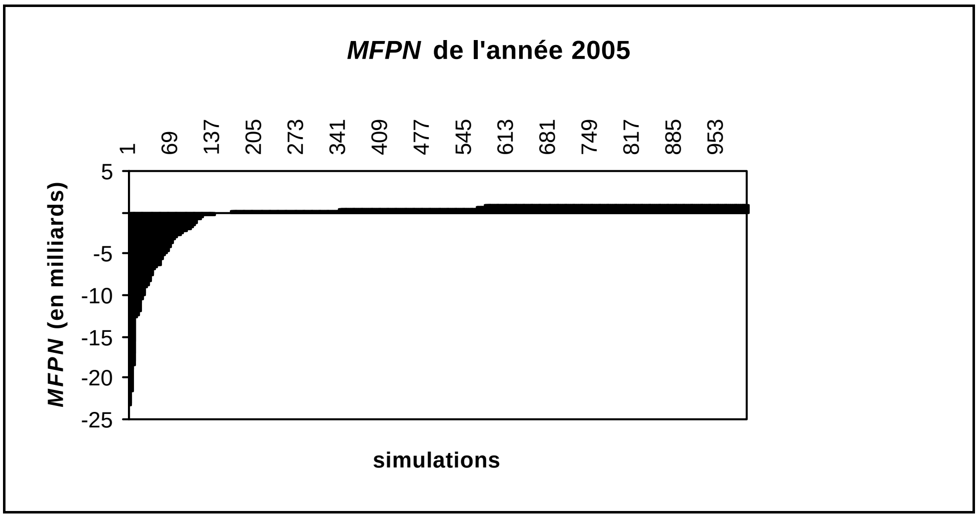
Entre deux observations successives, il apparaît un écart de l'ordre du milliard. En effet, lorsque l'on range par ordre croissant les 100 valeurs simulées du résultat annuel, on constate que pour l'année 2000, la $5^{\text{ème}}$ valeur, c'est-à-dire la quantile à 5%, vaut -11,2 milliards. La valeur qui la précède immédiatement vaut -12,4 milliards (quantile à 4%), et celle qui lui est immédiatement supérieure -9,48 milliards (quantile à 6%). On obtient ainsi un intervalle de confiance pour le quantile à 5% : [-12,4 ; -9,48]. Cet intervalle a un diamètre de 3 milliards, ce qui est très élevé. La précision de la VaR est donc mauvaise.

Pour obtenir une meilleure précision, nous avons alors lancé 1 000 simulations. Nous présentons l'allure de la variable *MFPN* pour trois années différentes dans les graphiques ci-dessous.

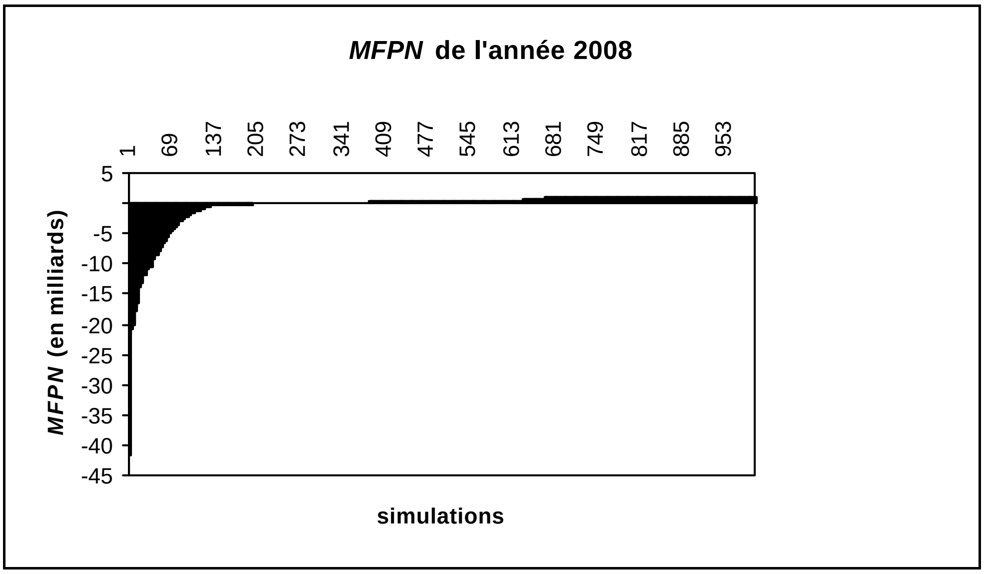
Graphique 6.



Graphique 7.



Graphique 8.



Nous pouvons remarquer que la répartition du résultat est beaucoup plus lisse que dans le cas de 100 simulations, et ce quelle que soit l'année considérée. Ceci entraînera bien sûr des valeurs de risque plus précises.

En conclusion, il apparaît que 100 simulations sont tout à fait insuffisantes. En revanche, nous obtenons des résultats corrects avec 1 000 simulations. Il serait évidemment encore mieux de lancer 10 000 simulations mais cela est trop coûteux en temps de calcul.

On se reportera au paragraphe de cette partie pour connaître le niveau de précision obtenu avec 1 000 simulations.

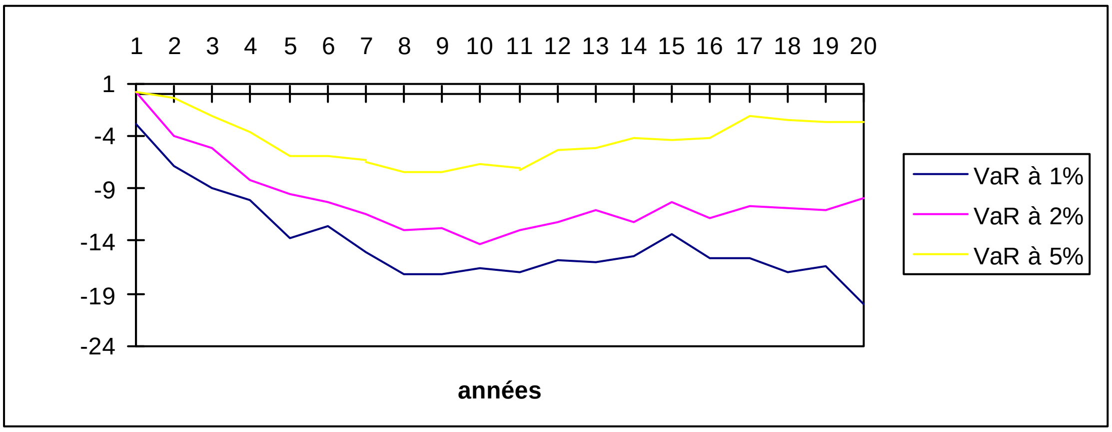
b. Influence du seuil de confiance.

Le seuil de confiance retenu, égal à la probabilité que le montant de pertes ne dépasse pas la VaR en valeur absolue, est un paramètre capital de la VaR. Afin d'étudier l'influence du seuil de confiance sur nos résultats, nous avons relevé les VaR pour différentes valeurs de ce seuil : 1%, 2% et 5%. Dans le tableau 13, nous présentons donc les VaR pour chacune des années d'étude avec les trois valeurs de seuil de confiance différentes :

Tableau 13 : comparaison des seuils à 1% , 2% et 5%.

VaR (en milliards)	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
VaR à 1%	-2,8	-6,9	-9,0	-10,1	-13,7	-12,6	-15,1	-16,6	-16,4	-14,8	-14,8	-15,9	-14,6	-14,8	-12,8	-15,5	-15,7	-16,9	-16,5	-20,1
VaR à 2%	0,2	-3,9	-5,1	-8,2	-9,6	-10,4	-11,5	-12,5	-12,2	-12,4	-11,8	-11,2	-10,4	-12,2	-10,4	-11,9	-10,4	-10,9	-11,2	-10,0
VaR à 5%	0,2	-0,3	-2,0	-3,6	-6,0	-5,7	-6,3	-7,0	-6,5	-6,4	-6,6	-4,6	-4,8	-4,2	-4,3	-3,4	-1,9	-2,4	-2,5	-2,5

Graphique 9 : impact sur *MFPN* du niveau de seuil de confiance.



Les trois VaR sont globalement décroissantes et à peu près parallèles les unes aux autres jusqu'à la dixième année. Au-delà, la VaR à 1% est la seule qui continue à décroître. Il est difficile d'expliquer ce phénomène qui est peut-être simplement dû au fait que les résultats ne sont pas fiables au-delà de 10 ans.

Toujours est-il qu'une société d'assurance ne peut pas accepter un seuil de confiance de 5% : cela signifierait qu'il y aurait une probabilité de 5% pour que ses fonds propres ne suffisent pas à couvrir son activité ! Une probabilité de 2% semble encore trop élevée.

En conclusion, nous étudierons donc la VaR à 1%, même si une telle probabilité est encore trop forte. Le nombre de nos simulations ne nous permet cependant pas de choisir un seuil de confiance supérieur à 99%.

c. Choix de l'horizon.

Nous avons déjà vu plusieurs fois plus haut que les valeurs étaient peu fiables au-delà de 10 ans. Le graphique 9 illustre bien ce phénomène. Il faut aussi noter que le modèle de taux a été calibré sur 10 ans et que cela augmente l'incertitude au-delà de cette échéance.

Nous nous intéresserons donc aux VaR d'horizon inférieur à 10 ans mais supérieur à 5 ans puisque le risque n'est certainement pas à court terme.

d. Précision obtenue.

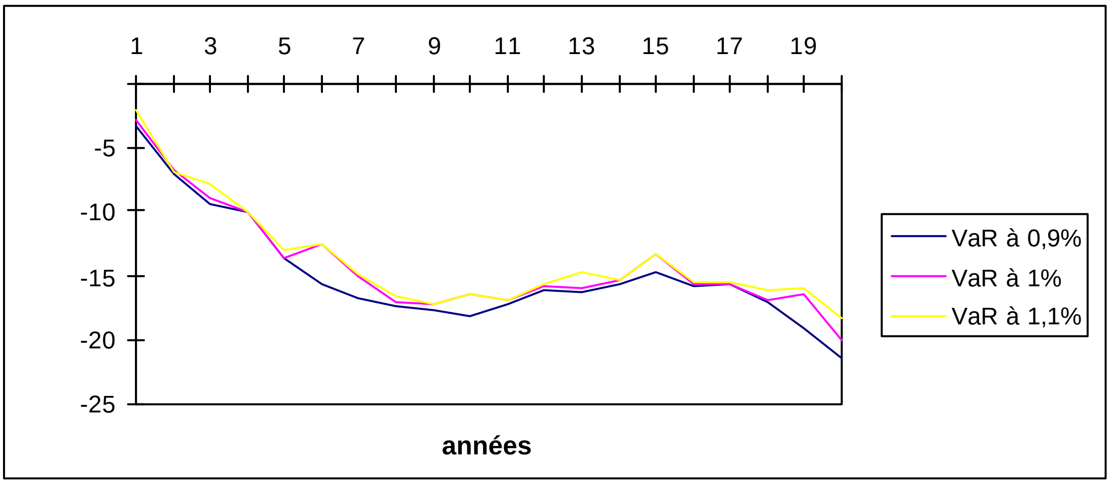
Maintenant que nous avons choisi un nombre de simulations (1 000), un seuil de confiance (1%) et une plage d'horizons (entre 5 et 10 ans), nous pouvons tester la précision que nous obtenons avec ces paramètres. Cette précision est présentée dans le tableau 14 et le graphique 10 .

Tableau 14 : intervalle de confiance de la VaR à 1%.

Année	VaR à 0,9%	VaR à 1%	VaR à 1,1%
2000	-3,3	-2,8	-2,1
2001	-7,0	-6,9	-6,8
2002	-9,5	-9,0	-7,8
2003	-10,2	-10,1	-10,0
2004	-13,7	-13,7	-13,0
2005	**-15,6**	**-12,6**	**-12,6**
2006	**-16,7**	**-15,1**	**-14,9**
2007	**-17,3**	**-17,1**	**-16,6**
2008	**-17,7**	**-17,2**	**-17,2**
2009	**-18,2**	**-16,5**	**-16,4**
2010	**-17,3**	**-16,9**	**-16,9**
2011	-16,1	-15,9	-15,8
2012	-16,3	-16,0	-14,8
2013	-15,7	-15,4	-15,4
2014	-14,8	-13,4	-13,3
2015	-15,8	-15,6	-15,5
2016	-15,7	-15,7	-15,5
2017	-17,2	-16,9	-16,1
2018	-19,1	-16,5	-15,9
2019	-21,4	-20,1	-18,3

NB : les lignes correspondant aux horizons choisis sont en gras.

Graphique 10 : allure de la VaR aux alentours d'un seuil de 1% (en milliards).



Nous avons donc étudié la différence obtenue sur nos résultats lorsque le seuil de confiance varie de 0,1% au voisinage de 1% en calculant la valeur appelée "précision". Nous calculons la précision en divisant l’écart entre les résultats obtenus avec un seuil de 0,9% et de 1,1% par deux fois le résultat obtenu avec un seuil de 1%. Nous obtenons pour les différentes années le tableau récapitulatif suivant :

Tableau 15 : précision de la VaR à 1%.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
V = VaR à 1% (en milliards)	-2,77	-6,86	-9,04	-10,13	-13,69	-12,59	-15,11	-16,62	-16,41
d = VaR à 1,1% - VaR à 0,9%	1,17	0,19	1,69	0,13	0,69	0,02	1,84	0,57	2,94
r = d/2 (en milliards)	0,59	0,09	0,85	0,07	0,34	0,09	0,92	0,28	1,47
précision = r / V	-0,21	-0,01	-0,09	-0,01	-0,03	-0,01	-0,06	-0,02	-0,01

2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
-14,83	-14,81	-15,89	-14,63	-14,81	-12,84	-15,50	-15,65	-16,92	-16,51	-20,06
0,42	0,46	1,02	1,88	0,86	1,18	0,14	0,22	1,03	3,21	3,05
0,21	0,23	0,51	0,94	0,43	0,59	0,07	0,11	0,51	1,61	1,52
-0,01	-0,01	-0,03	-0,06	-0,03	-0,05	-0,01	-0,01	-0,03	-0,10	-0,08

La précision est dans l'ensemble relativement bonne : elle n'est que de quelque pourcents. Cependant, elle est très mauvaise la première année (21%), ce qui s'explique par le faible montant de VaR (dénominateur).

3. Conclusion sur la VaR obtenue et le montant de fonds propres nécessaires.

En conclusion, on peut retenir un ordre de grandeur : les VaR à 1% d'horizon entre 5 et 10 ans sont de l'ordre de 15 milliards (cf tableau 14). Cette valeur représente le montant de fonds propres nécessaire pour garantir la solvabilité de l'entreprise à 99%. La marge de solvabilité réglementaire pendant ces années est en moyenne de l'ordre de 8 milliards (cf tableau 10). Elle apparaît donc comme deux fois trop faible ! Il faut cependant se souvenir que la VaR obtenue est pessimiste pour trois raisons : premièrement, le modèle de taux est assez volatile ; deuxièmement, la réactivité des clients a été volontairement surestimée. Le modèle que nous avons utilisé a en fait été paramétré pour grossir le phénomène de rachats afin que l'on puisse l'étudier plus facilement. Enfin, le montant de PREET pris en compte dans le calcul de *MFPN* est bien le montant total de la PREET accumulée depuis plusieurs années et non sa variation. Donc les montants prélevés sur les capitaux propres ou sur le résultat pour constituer la PREET ne seront pas prélevés tous la même année : le montant de la PREET de l'année n est constitué à partir des prélèvements effectués sur les capitaux propres des années n, n-1, n-2...

Il faut aussi remarquer que les montants de fonds propres nécessaires obtenus dépendent des conditions initiales en termes de stock de passif, de PPE, de plus-values latentes, et qu'on ne peut donc pas attribuer un unique montant de fonds propres nécessaires à un produit considéré.

Les résultats que nous obtenons ne sont donc pas inquiétants : la marge de solvabilité réglementaire apparaît insuffisante mais, dans la réalité, elle ne l'est probablement pas de façon aussi marquée que nos résultats l'indiquent, ou plutôt, notre anticipation est très prudente.

C. Etudes de sensibilité

Dans cette partie, nous étudierons la sensibilité de la VaR à 1% à la volatilité des taux puis à l'indice de réactivité.

1. Sensibilité à la volatilité des taux.

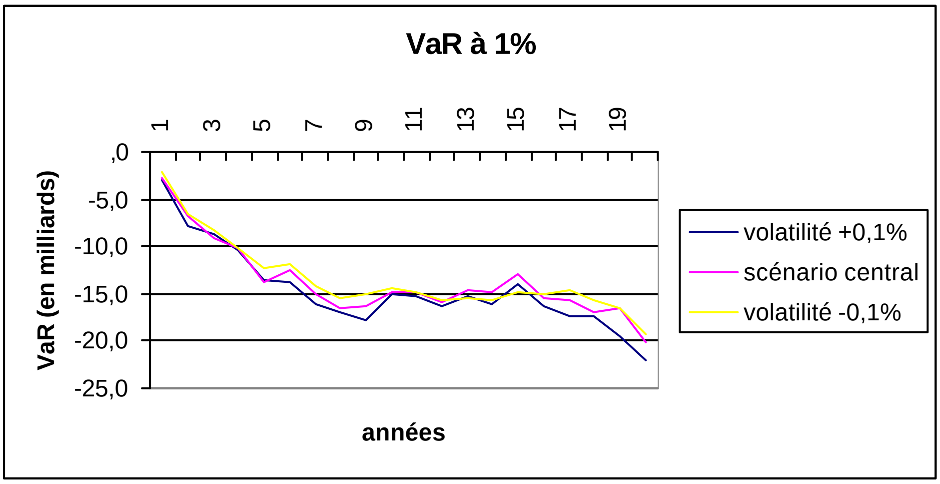
Nous avons fait varier la volatilité σ_1 du modèle particulier de Heath, Jarrow et Morton à deux facteurs, c'est à dire la volatilité permettant de translater la courbe des taux. Nous avons étudié l'évolution de la VaR à 1% en fonction de la volatilité σ_1 du modèle. Nous nous sommes placés au voisinage de la valeur de σ_1 du scénario central (voir partie 3-C), notée σ, que nous avons fait varier de plus ou moins 0,1%. Nous pouvons donc comparer les valeurs des VaR pour trois valeurs de volatilité différentes : σ, σ + 0,1% et σ - 0,1%.

Tableau 16 : sensibilité de la VaR à 1%

VaR à 1% (en milliards)	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**
σ + 0,1%	-3,07	-7,94	-8,79	-10,45	-13,50	-13,78	-16,08	-17,01	-17,89
scénario central	-2,77	-6,86	-9,04	-10,13	-13,69	-12,59	-15,11	-16,62	-16,41
σ - 0,1%	-2,18	-6,56	-8,31	-10,23	-12,34	-11,83	-14,26	-15,57	-15,04

VaR à 1% (en milliards)	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
σ + 0,1%	-14,99	-15,16	-16,28	-15,16	-16,01	-14,05	-16,31	-17,28	-17,29	-19,55	-22,10
scénario central	-14,84	-14,82	-15,89	-14,63	-14,81	-12,84	-15,50	-15,65	-16,92	-16,51	-20,06
σ - 0,1%	-14,47	-14,80	-15,74	-15,42	-15,58	-14,84	-14,96	-14,72	-15,58	-16,58	-19,24

Graphique 11 : sensibilité à la volatilité.



Il apparaît très clairement les premières années que lorsqu'on augmente la volatilité, on augmente la VaR. C'est à dire que au seuil de 1%, la perte encourue est plus élevée si les taux sont plus volatiles. C'est tout à fait logique puisqu'il y a plus de rachats quand les taux varient brusquement donc quand ils sont plus volatiles.

Nous avons fait varier la volatilité de 6,67%. En effet, cette volatilité est de l'ordre de 1,5% et nous l'avons faite varier de plus ou moins 0,1%. Pour une variation de 6,67% de la volatilité, nous obtenons une variation de la VaR comprise entre -1,5% et 16%, et en moyenne de 4,27%.

2. Sensibilité à l'indice de réactivité.

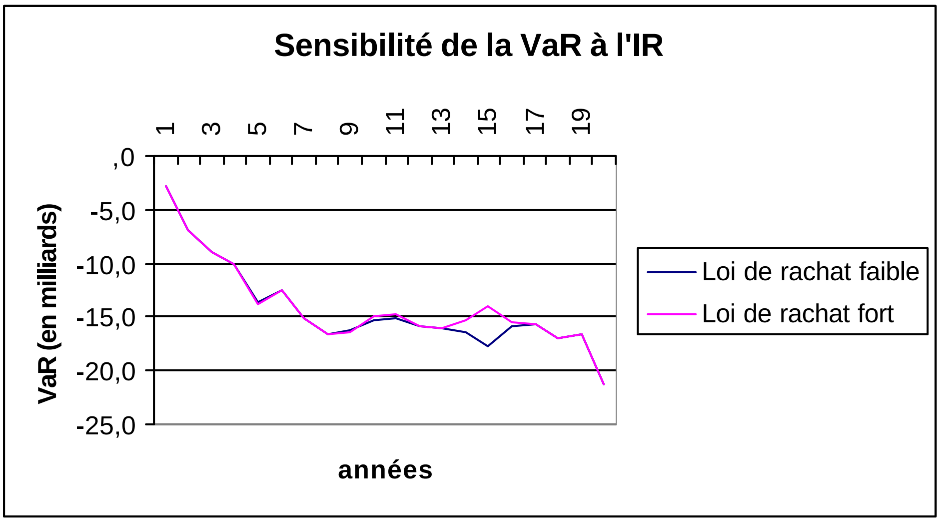
Comme nous l'avons vu précédemment, l'indice de réactivité représente la capacité du client à réagir à des variations de rentabilité relative de son contrat. L'indice de réactivité est donc un paramètre essentiel de la loi de rachat et il est intéressant de voir comment varie la VaR en fonction de ce dernier. Nous avons lancé deux jeux de simulation avec des indices de réactivité plus ou moins forts. Nous pouvons donc étudier la VaR à 1% obtenue avec la loi de rachat témoin forte et une loi de rachat plus forte. Toujours pour des raisons de confidentialité, nous ne préciserons par les valeurs des indices utilisés, et nous ne donnons que partiellement les résultats de cette étude de sensibilité, ceci afin d'avoir un aperçu de l'étude plus précise qu'il faut mener. Nous présentons l'ensemble des résultats obtenus dans le tableau 17 et le graphique 12 correspondant.

Tableau 17 : sensibilité de la VaR à 1% à l'IR.

VaR à 1% (en milliards)	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**
loi témoin	-2,77	-6,86	-9,01	-10,12	-13,71	-12,53	-15,10	-16,57	-16,30
loi forte	-2,77	-6,86	-9,02	-10,12	-13,73	-12,57	-16,10	-17,60	-17,38

2009	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
-15,31	-15,17	-15,83	-16,04	-16,44	-17,76	-15,78	-15,71	-16,92	-16,51	-21,30
-14,99	-14,71	-15,88	-15,96	-15,34	-14,04	-15,51	-15,65	-16,92	-16,51	-21,36

Graphique 12.



Nous pouvons remarquer que la VaR à 1% est assez sensible au choix d'une loi de rachat moyenne ou forte. Cependant, cette sensibilité se manifeste plutôt au bout de quelques années, période risquée pour l'assureur en matière de rachats. Il est donc important de choisir un indice de réactivité qui permette de bien modéliser les rachats.

Partie 5 : Perspectives.

Cette partie prend du recul sur l'étude menée. Elle suggère des améliorations possibles de la méthode proposée pour calculer le montant de fonds propres nécessaires. Puis, elle recense les moyens de couverture du risque existant en assurance-vie. En effet, après avoir tenté de mesurer le risque, il est logique de s'interroger sur les moyens de le réduire. Enfin, elle s'interroge ex post sur la pertinence de la méthode de la VaR en termes de modélisation et de validité des résultats fournis.

A. Améliorations possibles de la VaR.

1. La Tail VaR.

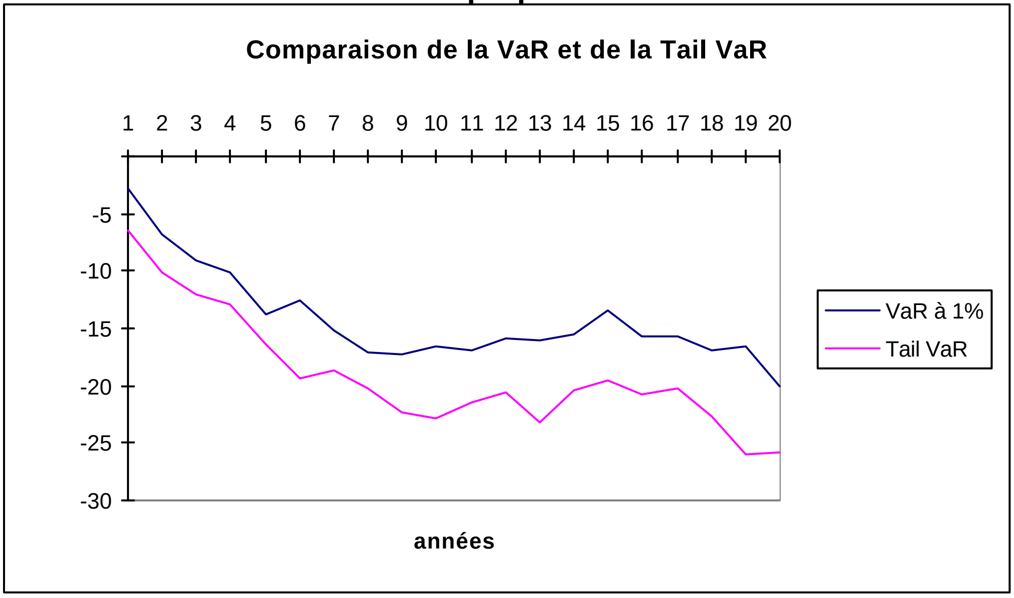
La Tail VaR est définie comme la moyenne des pertes excédant la VaR. Cette nouvelle mesure de risque a été construite pour tenir compte du fait que les queues de distribution empiriques sont souvent plus épaisses que les queues de distribution théoriques. Elle permet de lisser la Value at Risk.

Tableau 18: VaR et Tail VaR en milliards.

Année	VaR à 1%	Tail VaR	marge de solvabilité réglementaire moyenne
2000	-2,8	-6,5	7,2
2001	-6,9	-10,1	7,8
2002	-9,0	-12,1	8,2
2003	-10,1	-13,0	8,3
2004	-13,7	-16,4	8,4
2005	-12,6	-19,4	8,3
2006	-15,1	-18,6	8,1
2007	-17,1	-20,3	7,8
2008	-17,2	-22,4	7,5
2009	-16,5	-22,8	7,3
2010	-16,9	-21,4	7,0
2011	-15,9	-20,5	6,8

2012	-16,0	-23,2	6,6
2013	-15,4	-20,4	6,4
2014	-13,4	-19,6	6,2
2015	-15,6	-20,7	6,0
2016	-15,7	-20,3	5,9
2017	-16,9	-22,6	5,7
2018	-16,5	-26,0	5,5
2019	-20,1	-25,8	5,3

Graphique 13.



La Tail VaR est évidemment supérieure à la VaR ; elle présente donc un écart plus grand à la marge de solvabilité réglementaire. C'est une mesure plus prudente du montant de fonds propres nécessaires. Elle garde cependant la même tendance que la VaR comme le montre le graphique 14. Elle n'est pas vraiment plus lisse que la VaR à 1%, mais il faut bien penser qu'elle se situe à un niveau de risque supérieur.

2. Autre lissage.

Comme nous l'avons dit précédemment dans la deuxième partie, nous avons adapté l'approche bancaire du calcul de la Value at Risk aux compagnies d'assurance. De la même façon, nous allons nous demander comment déterminer l'exigence en fonds propres à CNP-assurances en nous inspirant de l'approche bancaire.

Afin de déterminer le montant de fonds propres nécessaires pour couvrir les différents risques auxquels ils sont exposés, les établissements financiers calculent quotidiennement le montant de leur perte potentielle *P(t)*, en s'appuyant sur le concept de VaR. Chaque établissement doit satisfaire, sur une base journalière, à une exigence de fonds propres correspondant à la valeur la plus élevée entre la perte potentielle du jour précédent et la moyenne des pertes potentielles sur les soixante derniers jours ouvrés, à laquelle est appliqué un facteur de multiplication. La Commission Bancaire attribue à chaque établissement un facteur multiplicatif en fonction de la qualité de son système de gestion des risques, avec un minimum de 3. Le complément éventuel, noté ξ est compris entre 0 et 1 et est directement lié aux performances du modèle, évaluées a posteriori.

A chaque date *t*, l'établissement calcule alors l'exigence de fonds propres *FP(t)* de la façon suivante :

$$FP(t) = Max(P(t-1),(3+x)\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} P(t-i))$$

Il est donc important pour chaque établissement de disposer d'une bonne mesure de risques permettant d'évaluer au mieux la valeur de la perte potentielle *P(t)* à chaque date *t* puisque celle-ci conditionne complètement le montant de fonds propres exigés.

Il est intéressant de suivre le type de raisonnement précédent afin de calculer le montant de fonds propres nécessaires aux compagnies d'assurance. Les banques comparent la valeur de la perte potentielle du jour précédent et la moyenne des pertes sur les soixante derniers jours, à laquelle est affecté un facteur multiplicatif. Cependant, le jour n'est pas une unité pertinente en assurance-vie. En revanche, une approche prospective pourrait être envisagée. Disposant de plus d'informations sur les résultats futurs que sur les résultats passés, nous pouvons tenter d'effectuer le lissage suivant :

$$FP(t) = Max(P(t+1),\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} P(t+i))$$

où : l'indice *i* représente les années prospectives de simulation,

P(t) est le montant de la perte potentielle de la $t^{ème}$ année soit la VaR du résultat.

A partir de la VaR à 1% calculée précédemment, il est alors possible de déterminer pour différentes années le montant de fonds propres nécessaires, ou encore la marge de solvabilité préconisée. Nous obtenons alors les résultats lissés suivants, pour 15 années.

Tableau 19 : lissage de la VaR

Année t	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
FP (t)	10,60	12,54	14,06	15,48	15,75	16,70	17,15

2007	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**
17,23	15,54	15,20	16,04	16,00	15,44	16,18	17,78

NB : FP(t) est en milliards.

Nous pouvons comparer ces résultats avec la marge de solvabilité réglementaire moyenne présentée dans le tableau 18. Le montant de fonds propres obtenu par cette méthode de lissage est nettement supérieur à la marge de solvabilité réglementaire moyenne. Cette méthode est donc très prudente et devrait permettre de faire face à l'ensemble des risques auxquels la compagnie est exposée.

B. Moyens de couverture du risque.

Les moyens de couverture du risque qui se présentent à l'assureur sont au nombre de trois : l'auto-assurance , la réassurance et le recours aux produits dérivés.

1. L'auto assurance.

Avant toute chose, l'assureur peut se prémunir contre certains risques en effectuant une bonne gestion de son passif. Il peut intervenir sur le passif de deux façons :

- Par le jeu des réserves légales comme la réserve de capitalisation ou la provision pour participation aux excédents : leur constitution permet de lisser dans le temps le résultat. Cependant, ces réserves ont généralement un faible niveau : sous la pression consumériste, l'assureur est amené à fournir des taux de rendement élevés, et à négliger l'alimentation de la provision pour participation aux bénéfices. Ainsi ces réserves sont vite épuisées en cas de hausse des taux et n'assurent pas une protection entière contre le risque.

– Par la mise en place d'un système de garantie de fidélité défini dans le contrat. Afin de limiter le risque de rachat, l'assureur va accorder des "privilèges" aux assurés qui conserveront leur contrat jusqu'au terme : si l'assuré demande le rachat de son contrat, il ne bénéficiera pas de la garantie de fidélité, cette dernière sera alors partagée entre les assurés restants, qui conserveront leurs contrats jusqu'au terme. La garantie peut être alimentée soit par un prélèvement sur les versements soit par toute ou partie de la participation aux excédents.

De manière plus rigoureuse, on appelle auto-assurance l'ensemble des techniques permettant à l'assureur de se prémunir contre les risques sans faire appel à des intervenants extérieurs. C'est donc le premier moyen qui s'offre à l'assureur.
En premier lieu, l'auto-assurance peut consister pour une société d'assurance à augmenter ses capitaux propres; c'est pourquoi il est important d'évaluer le montant de fonds propres nécessaire, comme nous avons tenté de le faire. Cependant, si le montant de fonds propres est trop élevé, cela fait diminuer le rendement des actionnaires. Une autre solution consiste alors à émettre des titres subordonnés, ce qui revient moins cher que d'émettre des actions puisque cela ne crée pas de capital supplémentaire à rémunérer. Mais il ne faut pas perdre de vue que l'auto-assurance a un coût.

2. La réassurance.

Toute compagnie d'assurance-vie peut se couvrir en se réassurant. Le réassureur prend alors en charge, moyennant rémunération, tout ou une partie des risques. En contrepartie, l'assureur-vie s'engage à lui verser tout ou une partie des primes qu'il a reçues des assurés en guise de couverture des risques auxquels ils sont exposés.

La réassurance est très fréquemment utilisée parce qu'elle est à la fois utile à l'assureur cédant et au réassureur.
En se réassurant, l'assureur améliore la stabilité de son bilan et donc sa situation de stabilité

financière, sa rentabilité et son calcul de primes. Il peut alors accepter des risques qu'il devait refuser normalement et ainsi couvrir des risques qui sont éliminés des contrats normaux. La réassurance lui permet aussi de limiter sa responsabilité dans le cas de risques qui sont très coûteux.
L'assurance est aussi très utile au réassureur qui voit diminuer ses coûts de travail (pas de régulations de sinistres, pas de coûts de production et de publication et une administration limitée) et qui peut alors posséder des portefeuilles homogènes composés de risques indépendants, ceci étant le cas idéal.

En assurance-vie, les sinistres à considérer sont les décès et les rachats. Le réassureur peut proposer des contrats prémunissant l'assureur contre une trop forte diminution des décès ou contre des rachats élevés. Cependant, la réassurance est très peu utilisée dans le secteur de l'épargne en raison de son coût élevé.

3. Les techniques financières.

L'assureur peut aussi avoir recours aux produits financiers pour se couvrir contre les différents risques auxquels il est exposé. Cependant, il existe sur les marchés financiers différents instruments permettant de se couvrir contre une hausse ou une baisse des taux. Suivant qu'il anticipe une hausse ou une baisse des taux, l'assureur va alors acheter des produits financiers qui lui permettront de couvrir ses pertes.
Nous présentons les stratégies que l'assureur peut adopter et les différents produits qu'il peut acheter lorsqu'il anticipe une hausse des taux.

Deux types de couverture peuvent être envisagées contre le risque de hausse des taux selon les objectifs de la compagnie d'assurance :

- La compagnie est dans une attitude commerciale agressive et souhaite servir un rendement proche des taux de marché pour l'ensemble de ses engagements. La couverture doit alors s'appliquer à l'intégralité du bilan et se déclencher dès la première hausse des taux.
- La compagnie souhaite ne couvrir que le risque de rachat anticipé. La couverture ne s'appliquera alors que lorsque les conditions prévisionnelles de rachat anticipé sont réunies, à savoir une hausse importante et durable des taux.

a. Couverture du risque de hausse.

Couverture par une stratégie d'obligations taux variables :

Cette stratégie revient à constituer un portefeuille d'obligations à taux variables : le passif se comportant en cas de sortie comme un engagement à taux variable, il paraît logique d'adosser ce passif à des actifs à taux variables. Ainsi, si les taux augmentent, le portefeuille constitué profite entièrement de cette hausse. Les actifs choisis peuvent être à taux variables courts, ou bien à taux variables longs (par exemple l'OAT TEC 10).
Cependant, cette stratégie ne convient pas si les produits proposés aux clients offrent des taux garantis, qu'il faut alors assurer par des obligations à taux fixes.

Couverture par des titres notionnels :

Il s'agit de trouver un produit notionnel qui génère des résultats en cas de hausse des taux susceptibles de couvrir les moins values réalisées lors de la revente d'obligations à taux fixe. Ce produit ne devra pas pénaliser le rendement en cas de baisse des taux et doit être de coût le moins élevé possible.

b. Choix du type d'options.

Option sur titre : le put sur obligations.

Les puts sur obligations donnent le droit à leur détenteur de revendre des obligations à taux fixe à un prix déterminé à l'avance (strike). La date de revente peut être fixe (options européennes) ou choisie par l'acheteur de l'option (options américaines). Les options américaines doivent toutefois être exercées avant leur date d'échéance.

Le problème de ces options est qu'il est difficile de trouver sur les marchés financiers des options sur titres pour des durées optionnelles supérieures à 1 an. Ainsi, une compagnie d'assurance qui choisirait ce type de couverture sera contrainte d'acheter des puts de durée optionnelle courte et de renouveler régulièrement la couverture. Une telle stratégie est en pratique coûteuse puisque l'acheteur de la protection doit maintenir sa couverture en place tant que le rachat anticipé n'a pas eu lieu, que les options aient ou non été exercées.

Options sur swaps.

L'acheteur de l'option sur swaps détient le droit de rentrer dans un swap dans lequel il paye un taux fixe (strike) déterminé lors de l'achat de l'option et reçoit un taux variable. Si le taux du marché est supérieur au strike, l'option peut être exercée : sur la durée restante à courir, le détenteur de l'option paye au vendeur un taux fixe inférieur au taux du marché. Les options sur swaps sont plus souples que les options sur titre, et permettent notamment d'avoir des durées plus longues. L'assureur peut rentrer quand il le veut dans le swap, sur toute la durée de l'option. L'exercice de l'option n'est pas automatique et nécessite de la part de l'assureur un suivi régulier du marché. Pour agir efficacement, il doit exercer l'option lorsqu'il y a eu rachat anticipé.

Caps.

Un cap est une option permettant à son détenteur de se protéger contre une hausse des taux. Le cap est défini par un certain nombre de caractéristiques : le notionnel qui correspond au montant sur lequel porte le Cap, le taux de référence qui est l'indice servant de support de garantie, le strike, la prime et la base qui est le nombre de jours de l'année pris en compte dans le calcul. Le taux de référence est constaté de façon périodique et à chaque constatation, le vendeur versera au détenteur du Cap le différentiel d'intérêts égal au montant suivant :

(Taux de référence constaté - Strike) ´ Notionnel ´ Nbre de jours de la période / Base

Ainsi, en cas de hausse des taux, le Cap permettra à l'assureur de bénéficier d'un revenu supplémentaire et donc de doper le taux servi aux assurés, même si il n'y a pas de rachat effectifs.

Il existe les Caps sur taux courts et les Caps sur taux longs (Caps TEC 10). Les Caps couvrent l'indice TEC10 qui est proche des objectifs de rendement d'une compagnie d'assurance-vie.

Pour plus d'information sur l'utilisation des produits dérivés, on pourra consulter le mémoire [18].

C. Critique de la VaR.

1. La VaR, une mesure de risque cohérente ?

Ce paragraphe est fondé sur l'article de P. Artzner, *Application of coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance* [9]. Cet article est l'application à l'assurance des principes énoncés dans *Coherent measures of Risk* [8] . Dans l'article auquel nous nous intéressons principalement, l'auteur dresse la liste des propriétés requises pour qu'une mesure de risque soit cohérente. Il examine ce que cela implique pour les exigences de fonds propres en assurance. Il commente aussi la méthode RBC. Le but de ce paragraphe est de reprendre pas à pas cet article et de le confronter à nos résultats. Il ne faut pas considérer ce qui suit comme un résumé de l'article cité : nous nous limitons à commenter les points qui ont directement à voir avec notre travail.

Dans l'introduction, l'auteur souligne une différence entre la banque et l'assurance à laquelle nous nous sommes heurtées lorsque nous avons adapté la VaR bancaire à l'assurance : en assurance, la notion de valeur de marché n'est pas toujours présente, spécialement lorsque l'on s'intéresse au passif du bilan.
Nous avons effectivement dû nous poser la question de la valeur d'un produit d'assurance pour savoir sur quelle variable calculer la VaR. En fait, nous avons proposé deux valeurs appelées *résultat total* et *MFPN*. Nous nous sommes principalement intéressées à *MFPN* qui

n’a rien d’une valeur de marché mais qui correspondait bien à notre objectif de réévaluation des fonds propres.

Dans l’article *Coherent Measures of Risk*, les auteurs définissent le risque comme une variable aléatoire : la valeur future nette. Cette définition est à comparer avec celle plus classique du risque vu comme variation de valeur.

Dans notre approche, nous mesurons le risque d’un produit à partir de simulations sur le futur et non des variations historiques de son résultat. D’autre part, nous définissons le risque comme une valeur (*MFPN*) et non pas comme une variation de valeur. Notre point de vue est donc en cela relativement semblable à celui des auteurs.

Les auteurs définissent ensuite l’univers des valeurs futures "acceptables" et la mesure de risque qui en découle. Ils supposent que l’univers des états possibles du monde à la fin de la période est connu. Pour nous, les états possibles du monde sont définis par les diverses courbes des taux. On peut à la rigueur supposer que l’univers des états possibles du monde est connu puisque, empiriquement du moins, les taux d’intérêts varient dans un intervalle borné.

En appelant $[0,T]$ l’intervalle de temps pendant lequel le risque est mesuré, les auteurs supposent de plus qu’à la date T les marchés sont liquides, et que l’on connaît donc tous les prix utiles à la date T. Ce n’est pas du tout le cas en assurance puisque le produit n’est pas valorisé à partir d’actifs, étant donné qu’il faut aussi tenir compte du passif!

Enfin, la mesure d’un risque est définie comme le montant minimal de capital que l’agent doit ajouter à sa position risquée et qu’il doit investir prudemment, c’est à dire dans l’actif sans risque de référence, pour le rendre "acceptable". Cette vision du risque est comparable à celle que nous avons choisie. En effet, notre approche consiste à mesurer le montant de fonds propres nécessaires, qui, investis prudemment, garantissent la solvabilité de l’entreprise, et donc rendent le risque encouru "acceptable".

Il faut cependant noter que, dans l’article, l’ensemble des risques acceptables et non-acceptables est défini de manière exogène par le gérant. C’est seulement une fois posés ces deux sous-ensembles qu’il devient possible de définir une mesure de risque. Il nous semble que notre façon d’utiliser la VaR ne relève pas vraiment de ce type d’approche : dans l’article, le niveau de risque "acceptable" est donné de façon exogène par une autorité, *sans probabilité associée*, contrairement à la mesure de risque par la VaR, où, *à probabilité donnée*, le risque maximum est calculé mathématiquement.

Après avoir donné quatre axiomes qui doivent être vérifiés par une mesure de risque cohérente (invariance, sous-additivité, positive homogénéité, monotonie), Artzner examine plusieurs mesures de risque existantes dont la VaR, mesure envers laquelle il est plutôt critique! Ses raisons sont les suivantes :

Premièrement, la VaR ne répond pas au critère de sous-additivité requis pour être une mesure de risque cohérente. C'est-à-dire qu'elle ne vérifie pas la relation :

$$VaR(X+Y) < VaR(X) + VaR(Y)$$

Mais ce point est-il vraiment choquant pour nous? Il en ressort seulement que la VaR est un indicateur pessimiste du risque ; mais il semble toujours préférable d'être trop prudent.
Plus généralement, les auteurs font remarquer que la VaR pose de sévères problèmes lorsqu'il s'agit d'agréger des risques. Ce fait n'est pas dérangeant pour nous puisque l'agrégation se fait *en amont* du calcul de la VaR, grâce au logiciel Gap qui prend en compte le maximum de risques possibles. En revanche, il est vrai qu'il pourra devenir gênant lorsque l'on voudra calculer la VaR totale de l'entreprise en agrégeant plusieurs produits d'assurance. Cependant, dans la mesure où les portefeuilles mis en représentation des engagements sont cantonnés par produit, il ne devrait pas y avoir de problèmes majeurs de corrélation, d'autant plus que la gestion des réserves (réserves de capitalisation, PREET) se fait transversalement.. Il faudra cependant s'intéresser aux transferts entre produits : il est possible qu'un client rachète son contrat pour réinvestir son capital dans un produit plus récent. Cette possibilité crée une corrélation entre les valeurs des différents produits.

Deuxièmement, la VaR une mesure dépendante du modèle. C'est ce que nous avons pu vérifier au cours de notre étude et cela peut effectivement être gênant En effet, la VaR que nous obtenons dépend du modèle de taux et de la loi de rachat ; il faut donc que ceux-ci soient particulièrement bien paramétrés, ce qui est très difficile à réaliser.

Troisièmement, la VaR n'encourage pas la diversification des risques mais ce dernier point ne nous concerne pas car il s'adresse aux personnes qui utilisent la VaR pour effectuer de l'allocation d'actifs.

L'auteur préconise aussi la Tail VaR comme amélioration de la VaR. Cette nouvelle mesure de risque permet de répondre à la question "how bad is bad ?" et elle tient compte du fait que les queues de distribution empiriques sont souvent plus épaisses que les queues de distribution théoriques.
Nous avons appliqué cet indicateur à nos simulations avec les résultats que l'on sait.

Enfin, plus loin, Artzner soulève un autre problème : "les éléments du passif sont évalués par des provisions actuarielles ; en conséquence ils ne tiennent pas compte des taux d'intérêt du marché, et les probabilités ne sont pas ajustées au risque". La VaR que nous avons calculée essaye justement de tenir compte de l'influence des taux du marché sur le passif et ce à travers la loi de rachat dynamique. Notre modèle peut encore largement être amélioré dans le sens où l'on pourrait ajuster ou améliorer les paramètres de la loi de rachat. Cependant il ne présente pas le défaut soulevé par Artzner : le passif que nous modélisons est corrélé aux taux du marché. La corrélation pourrait certainement être encore plus fine ou plus juste mais elle a l'avantage d'exister !

En conclusion, il nous semble que, même si nous avons été confrontés à des problèmes très justement prévus par l'article, nous avons réussi à résoudre certains des points qui rendaient la VaR criticable pour Artzner.

2. Une utilisation pertinente de la VaR.

A la fin de cette étude, il est légitime de s'interroger sur la pertinence de l'idée d'appliquer la VaR à l'assurance-vie. Est-ce seulement une idée à la mode sans avenir véritablement prometteur ou est-il pertinent de chercher à l'appliquer malgré les coûts élevés de son implémentation ?

La VaR pourra servir à :
- évaluer et comparer les risques encourus par différents produits.
- calculer les fonds propres.
- "séduire" les analystes financiers en leur fournissant un chiffre qui soit le gage d'un très bon contrôle des risques en interne

Cependant, des obstacles demeurent ; nous nous demandons s'ils pourront être surmontés et dans quels délais... Ces obstacles sont les suivants :

Tout d'abord, le calcul de la VaR nécessite un modèle de taux fiable à long terme (sur 10 ans). Pour le moment, il n'en existe pas vraiment. Nous avons vu que le modèle testé ne donnait pas de résultats véritablement satisfaisants au-delà de 10 ans, et que la VaR était très sensible à la volatilité des taux. Or il est très difficile de caler précisément la volatilité, et donc la précision de calcul de la VaR n'est pas très bonne.

De plus, le calcul de la VaR nécessite aussi une loi de rachat bien paramétrée. Or, la loi de rachat que nous avons utilisée prend en compte toute la complexité du mécanisme de rachat mais nous ne disposons pas de données économétriques permettant d'ajuster les paramètres de façon suffisante. Pour avoir de telles données, il faudrait considérer une période de temps longue (un dizaine d'années) avec des variations de taux importantes mais une stabilité des autres paramètres du marché et des produits. Il est donc illusoire d'espérer avoir un jour de telles données.

En fait, on peut résumer ces deux obstacles en disant que la VaR est une mesure du risque dépendante du modèle, ce qui avait déjà été soulevé par P. Artzner [8] et [9]. Finalement, il semble difficile d'obtenir une VaR beaucoup plus précise que celle que nous présentons. En revanche, on peut, comme nous l'avons fait, calculer une VaR dans un cadre d'hypothèses spécifié, ce qui constitue déjà une information très intéressante, et une base de discussion.

Quant à l'évaluation des fonds propres nécessaires, on peut de plus remarquer que méthode d'évaluation réglementaire de la marge de solvabilité est plus que sommaire (4% des provisions mathématiques), et que donc la méthode de la VaR constitue une amélioration notable même si elle est loin d'être parfaite.

Conclusion

Nous avons transposé l'approche bancaire du calcul de la VaR aux compagnies d'assurance en tenant compte des nombreuses différences existant entre ces deux secteurs. La démarche que nous avons suivie a été la suivante : dans un premier temps, nous avons choisi sur quelle valeur nous allions calculer la VaR. Il n'existe pas de choix idéal et nous avons effectué le nôtre en fonction de nos besoins. Puis nous avons calculé la VaR sur la valeur choisie appelée *MPFN* (montant de fonds propres nécessaires), et nous l'avons alors comparée avec le montant réglementaire. Enfin, nous avons proposé deux méthodes de lissage permettant d'améliorer le calcul des fonds propres.

Notre étude a abouti à plusieurs points concluants. En effet, nous avons tout d'abord effectué un vrai calcul de la VaR sur un produit d'épargne fictif, ce qui n'avait jamais été fait jusqu'à présent, du moins publiquement. Seul Ahlgrim avait appliqué un calcul de VaR à un produit d'assurance-vie, mais sa méthode restait cependant très simple. De plus, nous avons ensuite proposé une démarche permettant de calculer le niveau de fonds propres nécessaires à partir des mesures de VaR obtenues. Dans les hypothèses amplificatrices que nous avons prises, nous avons ainsi pu mettre en valeur que le montant de marge de solvabilité imposé par la réglementation était trop faible.

Toutefois, une difficulté majeure demeure dans le calcul de la VaR : cette dernière dépend des paramètres du modèle utilisé. Il est donc nécessaire de disposer d'un bon modèle de taux et d'une loi de rachat bien paramétrée. Le modèle de taux utilisé dans notre étude (modèle Heath, Jarrow, Morton à deux facteurs) est relativement satisfaisant mais il n'est cependant pas très fiable à long terme. Néanmoins, il n'existe pas actuellement de modèle de taux véritablement performant à long terme.

Il serait intéressant de poursuivre cette étude en se consacrant aux points suivants :

- Nous pourrions analyser les résultats obtenus en lançant non plus 1 000 simulations mais 10 000 simulations.
- Nous pourrions améliorer l'étude de sensibilité à la volatilité du modèle de taux en faisant varier davantage la volatilité (σ_1 + ou - 0,2%, 0,5%...),
- De plus, nous pourrions faire varier les conditions initiales en termes de PPE, de plus-values latentes, de stocks, pour étudier plus précisément leur effet sur la valeur obtenue.
- Enfin, il serait intéressant de calculer la VaR sur l'ensemble du bilan de la CNP et non plus sur un unique produit d'épargne fictif.

Néanmoins, il subsiste quelques questions quant à l'application pratique pour le calcul des fonds propres ; notamment, à quel rythme est il nécessaire de les recalculer et quelle est l'influence de ce choix sur la méthode de calcul? Enfin, pourrait-on penser à une variable un peu plus ajustée au risque que *MFPN*, cette dernière étant très prudente?

Bibliographie

Livres.

[1] D. Dupré et M. El Babsiri, "ALM. Techniques pour la gestion actif-passif", *Editions ESKA* 1997.

[2] Esch, Kieffer, Lopez, "Value at Risk - Vers un Risk Management moderne", *De Boeck Université* 1997.

[3] J.Hull, "Options, Futures and Other Derivatives", *Prentice Hall*, Third Edition, 1997.

[4] P.Petauton, "Théorie et pratique de l'assurance-vie", *Dunod*, 2ème édition, 1996.

[5] Le code des assurances, *Dalloz*, 1999.

[6] "La comptabilité des assurances", Befec Price Waterhouse Coopers, Axa, *Editions l'Argus*, 1997.

Articles et publications.

[7] K.C. Ahlgrim, "Investigating the Use of Value at Risk in Insurance" , *Working Paper*, août 1999.

[8] Ph. Artzner, F. Delbaen, J-M. Eber, D. Heath, "Coherent Measures of Risk", juillet 1998.

[9] Ph. Artzner, "Application of Coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance", *North American Actuarial Journal*, Volume 3, Number 2, 1999.

[10] FFSA, "L'assurance française en 1998", *Editions de la FFSA*, juin 1999.

[11] RiskMetrics, Technical Document, *J-P Morgan / Reuters*, Fourth Edition, 1996.

[12] B.Schachter, "An Irreverent Guide to VaR", *Financial Engineering News*, Volume 1, août 1997.

Polycopiés.

[13] G. Deelstra, "Théorie du risque et de la réassurance", polycopié Ensae.

[14] A.Frachot, "Les modèles de la structure des taux d'intérêts", polycopié Ensae.

[15] G.Riboulet et T.Roncali, "Les mesures de risque de marché", publication interne du GRO - Crédit Lyonnais, 1999, polycopié Ensae.

Mémoires d'actuariat.

[16] G. Plantin,: "Eléments de gestion optimale de la contrainte de solvabilité des assureurs", ENSAE, 1997.

[17] F. Pernoud, "Asset Liability Management. Une approche Value at Risk", ISFA, 1998.

[18] A. Burger, " La Gestion Actif-Passif en Assurance-Vie. Couverture du risque de taux par des produits dérivés", ISUP, 1999.

[19] A. Joubert, "Contribution d'un modèle stochastique de prévision des taux à l'évaluation d'une compagnie d'assurance-vie par la démarche ALM : analyse du coût des options cachées au passif de la compagnie", ESSEC-ISUP, 1994.

[20] C. Zaouti, "Gestion Actif-Passif d'un portefeuille d'assurance-vie", 1993.

[21] F. Desauty, "Le risque de rachat d'un contrat d'assurance-vie", ISUP, 1997.