UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

MEMOIRE

PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION DU TITRE D'ACTUAIRE

SOLVABILITE REGLEMENTAIRE DES ASSUREURS VIE

De l'approche forfaitaire et historique à la modélisation interne et prospective

Application numérique à un portefeuille de « rentes viagères »

Claire KAECKENBEECK
Aurélie MILLER

Directeur de mémoire : Pr. Pierre DEVOLDER

Année académique 2005 – 2006

Nous tenons avant tout à remercier le Professeur Pierre Devolder, pour nous avoir permis d'investiguer ce sujet ainsi que pour ses conseils précieux.

Nous remercions également Messieurs Frédéric Chandelle, Eric Daout, Olav Jones et Thierry Hankard pour le temps qu'ils nous ont consacré.

Merci également à tous les professeurs de l'Institut des Sciences actuarielles de l'UCL sans les enseignements de qui un tel travail n'aurait pas été envisageable.

Tous nos remerciements enfin à Jean-Jacques, Julien et Marc pour leur soutien inconditionnel au cours de ce travail.

Merci enfin au lecteur qui s'apprête à plonger dans les entrailles de cet ouvrage.

Résumé

Par crainte de voir son patrimoine diminué, voire anéanti par la survenance d'un sinistre, l'individu averse au risque peut s'adresser à un assureur. En contrepartie de primes payées, ce dernier s'engage à indemniser les sinistres éventuels. Il est important que l'assuré puisse compter sur la solidité financière de son assureur, sur sa solvabilité.

Des objectifs en matière de solvabilité se traduisent typiquement en exigences de capital. Le cadre légal actuel impose aux compagnies d'assurance de détenir un niveau de capital, appelé marge de solvabilité, qui joue le rôle de matelas de sécurité permettant de faire face aux aléas de l'activité.

Au regard de ces exigences relativement limitées et en réaction à la récente débâcle des marchés financiers et de ses conséquences dans le monde de l'assurance, la Commission Européenne a entamé un projet d'envergure, le projet Solvabilité II, visant à une réforme globale du système actuel.

L'un des objectifs principaux est de définir un nouveau niveau de capital, dit de solvabilité, d'une manière qui prend en compte les risques (le risque d'assurance, de crédit, de marché et opérationnel) et les réductions de risques propres à chacune des compagnies d'assurance.

Déterminer un capital nécessite d'abord d'évaluer les actifs et les provisions techniques. Le projet met en avant le principe de valorisation économique, encore appelée valorisation cohérente avec le marché.

La majorité des actifs d'une compagnie d'assurance étant des obligations et des actions, ces actifs sont valorisés à l'aide d'approches *marked-to-market* : leur valeur économique se définit comme leur prix coté.

La valeur économique de la majorité des passifs d'assurance ne peut être « relevée » sur un marché financier. Elle est dès lors définie comme la somme de deux éléments. Le premier, la meilleure estimation des provisions techniques, représente l'espérance des *cash-flows* futurs, qui doit être calculée en utilisant des paramètres les plus réalistes possibles. Le second, la marge de risque représente le coût d'immobilisation du capital requis pour liquider les actifs exigibles en cas de difficultés financières de l'assureur.

Cette étape réalisée, il est possible de déterminer le capital de solvabilité, défini comme la (Tail) Value-At-Risk de la variation du capital disponible sur un horizon de une année et à un niveau de confiance de 99,5%.

Le capital de solvabilité peut être déterminé à l'aide de l'approche standard européenne, représentant une méthode simplifiée permettant d'évaluer ce capital.

Cependant, un des objectifs principaux du projet Solvabilité II est de créer des incitants pour les compagnies afin qu'elles gèrent de manière optimale leurs propres risques, c'est ainsi que le capital de solvabilité peut être également déterminé sur base d'un modèle interne destiné à refléter adéquatement leur profil de risque.

Après avoir présenté les principes du projet Solvabilité II, nous proposons une application pratique, dans le cadre du calcul d'un capital de solvabilité pour une compagnie fictive ne proposant que des rentes viagères. Nous développons une modélisation de gestion actif-passif, prenant en compte deux risques, le risque financier et le risque de mortalité, au départ d'une simulation de Monte Carlo jusqu'à l'horizon d'extinction du portefeuille. Nous modélisons le risque financier à l'aide de processus stochastiques (modèle de Hull & White à un facteur pour le taux court terme et modèle de type Black & Scholes pour les deux fonds dans lesquels est investi l'argent des assurés). Nous proposons deux façons de considérer la mortalité : l'utilisation de tables de mortalité périodique ou prospective (construite au départ du modèle de Lee Carter). Nous comparons alors le capital ainsi déterminé à celui découlant de l'approche standard.

Table des matières

Introduction générale

Le risque est inhérent à la vie quotidienne de chacun. Il peut affecter de manière conséquente un patrimoine. C'est très logiquement qu'un individu averse au risque tentera de transférer les conséquences économiques de celui-ci vers un tiers, professionnel en la matière, en l'occurrence, une compagnie d'assurance.

Le mécanisme est simple. La contrepartie de ce transfert de risque consistera en le versement de une ou de plusieurs primes par l'individu. Le cocontractant de l'assuré, en l'occurrence, l'assureur s'engagera aux termes d'une convention avenue, à l'indemnisation d'un risque survenu.

Pour l'individu ayant souhaité assurer un risque, le paiement de la prime devrait avoir pour corollaire l'intervention de l'assureur en toute hypothèse. Reste néanmoins pour ce dernier a pouvoir être capable financièrement de respecter les termes de son engagement.

Depuis les années 70, des réglementations européennes, introduites en droit belge, ont visé systématiquement la sécurité des assurés. Le cadre légal actuel impose à une compagnie d'assurance de détenir un certain niveau de capital, appelé marge de solvabilité.

Cependant, ce poste bilantaire porte sans doute mal son nom. Déterminée sur base de règles simples, la marge de solvabilité est, dans les faits, bien loin de garantir aux assurés la solvabilité de la compagnie d'assurance avec laquelle il a contracté.

De plus, l'ambiance morose dans lequel les marchés financiers baignent depuis l'entame de ce troisième millénaire, a déjà mis à mal la santé financière de maintes compagnies d'assurance et institutions financières. Cette situation, plus que délicate, a fait naître des réflexions en profondeur dans le secteur de la « banque-assurance ».

Dans le secteur de l'assurance, la Commission Européenne a initié un projet d'envergure, appelé Solvabilité II, visant à réformer le système aujourd'hui en vigueur.

Ce projet a notamment pour objectif de définir pour une compagnie d'assurance un capital idéal pour l'activité visée, que l'on nommera capital de solvabilité. La détermination de ce capital est, dans les principes, limpide : l'assureur doit disposer d'un capital appelé à prévenir la ruine dans 199 exercices sur 200.

Au-delà de ce principe posé, il restait à développer le mode technique de détermination de ce capital. Les autorités en charge du projet Solvabilité II ont ambitionné de développer une réglementation qui prenne réellement en compte tous les risques auxquels serait soumis une compagnie d'assurance.

Le développement de cette réglementation a imposé une réflexion à long terme, d'ailleurs non encore finalisée à ce jour.

Ce mémoire s'ancre dans cette problématique actuelle et plus précisément, dans ses aspects quantitatifs.

Il se déclinera en deux parties.

Une **première partie** aura pour vocation de présenter les grandes lignes du projet Solvabilité II ainsi que les concepts théoriques nécessaires à sa bonne compréhension. Dans ce cadre, nous aborderons la notion de solvabilité ainsi que l'historique des exigences légales et ou règlementaires en la matière. Muni de ces informations, nous nous orienterons rapidement vers les étapes de détermination du capital selon le projet Solvabilité II, en différenciant l'approche standard proposée par les autorités en charge du projet Solvabilité II d'une approche spécifique qui serait basée sur une modélisation interne à une compagnie d'assurance. La notion de solvabilité étant intimement liée à celle de ruine et de risque, ces notions seront également détaillées.

Après cette mise en jambe théorique, le lecteur sera, dans la **seconde partie**, invité à une application pratique du projet Solvabilité II et ce, dans le cadre du calcul d'un capital de solvabilité pour une compagnie d'assurance donnée ne proposant que des rentes viagères. Pour ce faire, nous développerons une modélisation complexe de gestion actif-passif, tout en comparant les résultats obtenus à ceux découlant de l'approche standard européenne.

Partie théorique : Revue de la littérature

De la solvabilité et de son cadre réglementaire

Du risque

De la détermination des différents niveaux de capital

Introduction

La première partie de ce mémoire est une partie théorique. Au long de ces quelques pages, nous présenterons le projet Solvabilité II, son contexte, ses principes ainsi que quelques notions théoriques nécessaires à la bonne compréhension de l'application pratique qui fera l'objet de la seconde partie.

Un **premier chapitre** traitera de la notion de solvabilité et de celle de capital de solvabilité. Il dressera également un historique des exigences en capital au sein de l'Union Européenne, avant de présenter les lignes directrices du projet Solvabilité II ainsi que les grands acteurs en la matière. Nous terminerons ce chapitre par une brève comparaison du projet Solvabilité II avec la réglementation bancaire (accords de Bâle) et les normes comptables internationales.

La notion de solvabilité est intimement liée à celle de risque, c'est pourquoi un **deuxième chapitre** abordera cette notion en détail. Nous nous intéresserons plus précisément à la notion du risque et à sa classification avant d'aborder l'important sujet des mesures de risque.

Enfin, dans un **troisième** et dernier **chapitre**, nous entrerons de plein pied dans le premier pilier de Solvabilité II, qui fixe les exigences quantitatives en la matière, afin de déterminer les différents niveaux de capital. Nous expliquerons pour ce faire la manière de valoriser les actifs et les provisions techniques, qui devront désormais être évalués à leur valeur de marché, avant d'entrer dans les détails de la détermination du capital disponible, du capital de solvabilité et du capital minimum.

Chapitre I. De la solvabilité et de son cadre réglementaire

L'objectif de ce chapitre consistera à définir la notion de solvabilité ainsi qu'à préciser son cadre réglementaire actuel. Nous aborderons ensuite les causes de l'évolution des normes prudentielles dans le secteur des assurances et poserons, d'une manière générale, les bases du nouveau projet Solvabilité II. Enfin, nous comparerons les principes du nouveau projet Solvabilité II aux réglementations en vigueur dans le secteur bancaire ainsi qu'au projet de normes comptables internationales.

1. LA NOTION DE SOLVABILITE

Toute compagnie d'assurance se doit d'être solvable. Cette **solvabilité** peut être définie comme la capacité pour cette dernière à faire face à ses engagements vis-à-vis des bénéficiaires de contrats avenus. En d'autres termes, il s'agit pour une compagnie d'assurance de pouvoir honorer ses obligations ou encore de régler le montant de sinistres survenus.

1.1 Solvabilité et capital

D'une manière générale, une compagnie d'assurance dans le cadre d'une recherche de solvabilité se doit de tarifer et de provisionner correctement. Certaines réglementations imposent pour ce faire des règles concernant le provisionnement et la tarification des produits. A titre d'exemple, les provisions doivent être calculées sur des bases prudentes.

Cependant, l'activité d'assurance est, par nature, risquée car liée à la survenance d'un sinistre potentiel. De plus, l'inversion du cycle de production en assurance ajoute aux risques financiers classiques, un risque dit d'assurance (*voir infra Chapitre II*) qui rend le métier d'assurance aléatoire. Par conséquent, il peut advenir que les provisions ne suffisent pas à couvrir les engagements d'une compagnie d'assurance.

Partant, des réglementations prudentielles encadrent l'activité d'assurance en exigeant un niveau minimum de fonds propres pour faire face aux aléas de l'activité. Ce niveau minimum constitue la **marge de solvabilité**. « La marge de solvabilité fournit une source supplémentaire de capitaux permettant de faire face aux imprévus et, par conséquent, de protéger les clients des entreprises d'assurance. »[1] La marge de solvabilité représente ainsi un « tampon » permettant d'absorber les écarts négatifs par rapport aux prévisions de sinistres.

[1]Note de la Commission Européenne

1.2 Remarques

Avant de clôturer ce point, nous nous devons d'insister sur deux aspects importants.

Tout d'abord, en assurance, la notion de solvabilité est intimement liée à celle de protection des **assurés**, alors qu'elle peut prendre d'autres significations dans d'autres branches (*voir infra section 5.1.2 afférente aux accords de Bâle*). Dans le cadre de cette définition, *chaque* compagnie se doit en effet de pouvoir honorer ses engagements. Les réglementations en matière de solvabilité des assurances doivent donc s'adresser individuellement à *chaque* compagnie.

Ensuite, la notion de solvabilité est directement liée à celle de **capital à détenir**. Etre solvable pour une compagnie d'assurance signifie détenir un capital suffisant, appelé à lui éviter, autant que faire se peut, une situation de faillite. Ceci explique et justifie les développements futurs de ce mémoire, dont l'objectif final est la détermination d'un capital économique.

2. HISTORIQUE DES EXIGENCES EN TERMES DE CAPITAL AU SEIN DE L'UNION EUROPEENNE

2.1 Des origines aux directives Solvabilité I

Les premières réglementations européennes en matière de capital minimal à détenir datent des années 70. En 1973 et en 1979 sont, en effet, publiées deux directives, l'une dans le secteur de l'assurance non vie[2] et l'autre dans celui de l'assurance vie[3] . Celles-ci imposent pour la première fois aux assureurs européens de constituer un « matelas » de sécurité en termes de fonds propres.

En février 2002 sont adoptées les directives « **Solvabilité I** »[4], ci-après Solvabilité I, contraignantes depuis 2004 et toujours en application à ce jour. Retenons simplement que ces directives restent, dans les grandes lignes, proches des premières réglementations européennes.

Le modèle élaboré, dans le cadre de Solvabilité I, pour évaluer la marge de solvabilité est simple. Selon Solvabilité I, le risque se situe dans les provisions ou dans les primes. Le calcul du capital requis est une approche dite « basée sur des facteurs » : les fonds propres requis sont calculés comme une fraction des éléments considérés comme risqués du bilan (provisions techniques) ou du compte de résultats (primes). Nous renvoyons le lecteur à l'annexe 1 du présent mémoire pour les détails de cette réglementation.

2.2 De Solvabilité I à Solvabilité II

Solvabilité I a le mérite d'être simple et peut donc être implémenté à moindre coût. De plus, la réglementation permet une comparaison rapide des résultats obtenus pour différentes compagnies. L'approche n'étant néanmoins pas exempte de défauts, elle a justifié l'initiation de la réforme en cours, dénommé Projet Solvabilité II, ci après Solvabilité II.

Tout d'abord, le niveau des provisions techniques ou les montants de primes ne sont pas à eux seuls de bons indicateurs du risque, pour plusieurs raisons :

- L'approche ne prend pas en compte le niveau de prudence de l'assureur dans son provisionnement. C'est ainsi qu'un assureur prudent, mieux doté en provisions techniques, doit mobiliser davantage de fonds propres qu'un assureur ayant moins provisionné. Un tel système pénalise donc la prudence.

[2] Première Directive 73/239/CEE du Conseil pour les Assureurs Non Vie.

[3] Première Directive 79/267/CEE du Conseil pour les Assureurs Vie.

[4] Directive 02/12/CE (vie) – abrogée par la Directive 2002/83/EC ; Directive 2002/13/CE (non-vie).

- L'approche actuelle mise en avant dans Solvabilité I ne se base que sur le passif du bilan des compagnies d'assurance alors que d'autres risques devraient être considérés, comme les risques de l'actif tels les risques de marché et de crédit (*voir infra Chapitre II, section 2.1.3*). De plus, les exigences en matière de marge de solvabilité ne prennent, par exemple, pas en compte la structure des placements de la compagnie d'assurance.

- Les méthodes de réduction du risque sont également ignorées : diversification entre les risques, transferts du risque, gestion actif-passif, instruments de couverture du risque. Or l'utilisation de produits dérivés, le recours à la réassurance, la qualité de crédit des réassureurs, …, devraient également influencer la marge de solvabilité requise.

Ensuite, les actifs et des passifs sont évalués à leur « coût historique ». Or cette méthode de valorisation ne reflète pas les risques et la valeur réelle des avoirs et engagements.

Enfin, le régime Solvabilité I peut induire des risques systémiques (*voir infra Chapitre II, section 2.1.5*). En effet, à titre d'illustration, un cadre de tarification obligatoire pour toutes les compagnies d'assurance expose toutes ces compagnies aux mêmes risques d'erreurs sur les tarifs.

En résumé, Solvabilité I ne permet de tenir adéquatement compte du profil de risque propre à chacune des compagnies d'assurance concernées. Ces « faiblesses » propres à Solvabilité I ont justifié à suffisance la nécessité de la réforme initiée.

Les leçons tirées des années 2002 et 2003, au cours desquelles les marchés financiers ont connu une période de crise, en mettant, dans le même temps, à mal la santé financière de certaines compagnies d'assurance, ont poussé les régulateurs à s'intéresser de près aux risques du secteur de l'assurance et à la gestion de ceux-ci.

C'est en **Suisse** que la réflexion a été la plus rapide. A partir de 2002, l'Office Fédéral des Assurances Privées (OFAP) a entrepris une réflexion sur la solvabilité des compagnies d'assurance. L'objectif était de déterminer une méthode de calcul de la marge de solvabilité qui tienne compte des risques encourus par les assureurs. C'est ainsi qu'en 2003 a été lancé le projet « **Test Suisse de Solvabilité** » (TSS), qui a abouti en fin 2004 à un document, le Livre Blanc[5] sur le Test Suisse de Solvabilité, toujours en application.

De son côté, la Commission Européenne, en collaboration avec les différents Etats membres s'est ainsi attachée, depuis mars 2003, à élaborer un référentiel unique visant à mieux intégrer le risque dans les contraintes imposées aux assureurs afin d'assurer leur capacité à remplir les engagements souscrits. Il s'agit du Projet **Solvabilité II**.

---

[5] OFAP (2004)

L'objectif principal de Solvabilité II est d'établir une exigence en termes de capital visant à refléter plus adéquatement les risques encourus par les compagnies d'assurance et ce, dans un but de protection accrue des assurés. Le projet vise également, comme toute directive européenne, à harmoniser les systèmes de solvabilité entre les différents Etats membres de l'Union Européenne.

Ce projet a été scindé en **deux phases**. La première phase consistait en une réflexion sur la forme générale que doit prendre le futur système européen de solvabilité et a pris fin le 9 avril 2003. La seconde phase vise, quant à elle, la détermination des méthodes de prise en compte des différents risques. Elle est en cours à la date de publication de ce mémoire.

Bien qu'il soit difficile de le déterminer avec précision, le Projet de directive Solvabilité II devrait être adopté par la Commission Européenne au cours de l'année 2007, étant entendu que son implémentation devrait être effective en 2010.

3. LES GRANDS PRINCIPES DE SOLVABILITE II

Sans encore aborder l'aspect technique de ce projet de réforme qui sera développé au chapitre III, il nous appartient, à ce stade, de renseigner le lecteur quant aux principes gouvernant Solvabilité II.

3.1 Une nouvelle approche de la valorisation

3.1.1 Une approche toute en principes

Solvabilité II s'articulera en principes généraux plutôt qu'en règles de calcul. Le projet fournira des lignes directrices à suivre dans l'évaluation des différents postes bilantaires et la détermination du capital requis, sans pour autant fixer des règles de calcul précises.

3.1.2 Une approche bilantaire

Solvabilité II se base uniquement sur le bilan et non sur le compte de résultats. Le capital requis sera déterminé par des projections des différents éléments du bilan.

La totalité du bilan est prise en compte dans l'évaluation de la marge de solvabilité, et non plus uniquement les postes du passif. Ceci vise à faire intervenir tous les risques.

3.1.3 Une approche économique

Selon cette approche, tous les actifs et les passifs doivent être évalués de façon cohérente avec le marché. La valorisation ne se fait donc plus sur base d'une comptabilité au coût historique mais sur base du marché. Ceci a pour corollaire (nous y reviendrons longuement par la suite) que, lorsqu'un prix de marché existe, c'est celui-ci dont on doit tenir compte dans la valorisation. Lorsqu'un tel prix n'est pas disponible, il faut se baser sur des méthodes de projection de cash-flows. Ce concept peut être mis en parallèle avec la notion de « juste valeur » développée dans les normes IFRS (*voir infra section 5.2 de ce Chapitre*).

Cette valorisation des actifs et des passifs permettra de déterminer le capital disponible (*voir infra Chapitre III, section 4*), ainsi défini comme la différence entre la valeur de marché des actifs et celle des passifs.

3.2 Une architecture en trois piliers

Inspirée de développements dans le secteur bancaire, le projet Solvabilité II s'appuie sur trois piliers complémentaires.

Le **premier pilier** contient les **exigences financières quantitatives** du système. Il comprend ainsi des dispositions sur les provisions, l'évaluation des actifs, les risques qui doivent être pris en compte ainsi que leur mesure et leur dépendance et la détermination des actifs dans lesquels investir. Ce pilier définit en particulier les calculs de marge de solvabilité, c'est-à-dire la détermination des ressources financières qu'une compagnie d'assurance se doit de disposer afin d'être considérée comme solvable.

Le **deuxième pilier** définit, quant à lui, les **exigences qualitatives** qu'une compagnie d'assurance se doit de remplir. On parlera des règles de contrôle interne, de gestion des risques et de leur application par les autorités de contrôle. Il comprend l'évaluation des risques non pris en compte au niveau du premier pilier, c'est-à-dire celle des risques plus « qualitatifs ».

Enfin, le **troisième pilier** renseigne les **règles de transparence** à respecter afin de favoriser les disciplines de marché. Il contient ainsi les règles d'information publique.

Dans le cadre forcément réduit de ce mémoire, nous nous intéresserons exclusivement aux composantes du premier pilier.

3.3 Méthodes de détermination du capital

3.3.1 Approche basée sur des facteurs vs Approche basée sur le risque

Pour rappel, la détermination du capital requis dans Solvabilité I est basée sur une approche « facteur ». En d'autres termes, le capital requis est une fraction des postes considérés comme risqués.

Le projet Solvabilité II propose, quant à lui, une approche basée sur le risque[6] : les exigences en termes de capital sont fonction des risques réellement encourus par la compagnie d'assurance. Afin de refléter, au plus près, la réalité des compagnies d'assurance et d'éviter notamment une mobilisation superflue de fonds propres, les exigences en termes de capital tiendront également compte, d'une part, de la diversification entre les risques et, d'autre part, des outils de transferts du risque.

[6] Ce type d'approche détermine un capital connu sous le nom de *Risk Based Capital*.

3.3.2 Deux niveaux de capital

Le Projet Solvabilité II évalue la situation financière des compagnies d'assurance à l'aide de deux approches complémentaire : l'une réglementaire à travers la solvabilité minimale, l'autre économique, à travers le capital de solvabilité.

Les deux niveaux de capital remplissent des objectifs distincts et sont dès lors évalués de manière différente.

Il existe tout d'abord une exigence de **capital de solvabilité** (CS). Ce capital de solvabilité est fondé sur le risque et son estimation doit être « cohérente avec le marché ». Il correspond au niveau de fonds propres requis afin que la compagnie d'assurance ne soit exposée qu'à une faible probabilité de faillite.

Il existe ensuite une exigence minimale de fonds propres absolue, un **capital minimum** (CM) à détenir. Le capital minimum s'appuie sur le bilan statutaire des compagnies d'assurance et ne reflète pas les risques encourus par celles-ci. Ce capital minimum est ainsi insensible au risque et indépendant d'un modèle. Il correspond à une exigence de capital beaucoup plus faible que le capital de solvabilité.

Le capital de solvabilité fait office de « sonnette d'alarme ». Si le capital effectivement constitué devient inférieur à ce premier seuil, cela ne signifie pas que la compagnie d'assurance concernée est insolvable. Cependant, les interventions des autorités de contrôle seront initiées et viseront à remettre la compagnie « sur le droit chemin » : plans pour atteindre le capital de solvabilité, remaniement de portefeuille en actifs moins risqués, amélioration de la gestion actif-passif, … Les conséquences d'une telle situation sont donc mineures, tant que le reliquat du capital constitué reste proche du capital requis.

Le capital minimum est un plancher sous lequel il est interdit de descendre. Si le capital de la compagnie d'assurance vient à descendre sous ce second niveau, l'intervention des autorités de contrôle est immédiate et les mesures entreprises sont sévères, pouvant aller jusqu'à l'interdiction pour ladite compagnie d'assurance d'encore contracter.

Les méthodes de détermination des niveaux de capital requis sont distinctes.

Le capital de solvabilité sera calculé de façon élaborée. Une **approche standard** de calcul sera proposée. Mais un des objectifs de Solvabilité II est de créer des incitants pour les compagnies d'assurance afin qu'elles comprennent mieux et gèrent mieux leurs propres risques. Ceci se traduit en une possibilité pour ces dernières d'avoir recours à un **modèle** développé en **interne** et destiné à mieux refléter leur profil de risque. Nous y reviendrons dans la partie II de ce mémoire.

Le capital minimum sera, par contre, calculé de manière moins spécifique, à l'aide d'une approche de type Solvabilité I.

4. LES ORGANISMES ET ACTEURS DU PROJET SOLVABILITE II

Le nouveau projet Solvabilité II est d'envergure européenne ; c'est ainsi qu'il fait intervenir un grand nombre d'acteurs, chacun se voyant attribuer un rôle. Cette partie a pour ambition de présenter succinctement les différents intervenants concernés.

4.1 La Commission Européenne

La Commission Européenne – et plus particulièrement l'unité « Assurance » de la direction « Institutions Financières » au sein de la Direction Générale Marché Intérieur et Services (DG MARKT) – **coordonne** le projet Solvabilité II.

La Commission Européenne est l'unique **acteur législatif** du processus. Afin d'élaborer une proposition de directive dans le cadre du projet Solvabilité II, les services de la Commission Européenne préparent des projets de mandats et des documents de travail en vue de mener la réflexion sur le plan technique : la Commission **consulte le CECAPP** (voir ci-dessous).

4.2 Les Etats membres

Les Etats membres interviennent par le biais de deux acteurs dans le processus Solvabilité II :

4.2.1 Les Ministères des finances

Le **CEAPP** (Comité Européen des Assurances et Pensions Professionnelles[7]), ancien Comité des Assurances, assiste la Commission Européenne dans l'adoption de mesures d'exécution pour les directives de l'Union Européenne.

Le CEAPP est divisé en sous-comités. Celui qui s'occupe du projet est le « sous-comité solvabilité », au sein duquel se retrouvent les **ministères des finances**. La fonction principale du « sous-comité solvabilité » est d'aider les services de la Commission à élaborer la directive cadre.

4.2.2 Le CECAPP : l'organisme consultatif

En novembre 2003, la Commission Européenne propose d'appliquer le processus Lamfalussy[8] aux banques, aux assurances et aux organismes de placement collectif en valeurs mobilières. En réponse

---

7 En anglais, European Insurance and Occupational Pensions Committee - EIOPC

8 La procédure Lamfalussy est une approche législative destinée à favoriser l'harmonisation européenne du cadre réglementaire des marchés financiers. Elle tire son nom du président du comité des sages - M. Alexander Lamfalussy - ayant rédigé un rapport à ce propos en 2001. Il s'agit d'un processus de mise en œuvre des dispositions européennes, dont l'élaboration s'articule en quatre niveaux :

à cette décision naît le CECAPP[9] (Comité Européen des Contrôleurs de l'Assurance et des Pensions Professionnelles) dans le secteur des assurances. Le CECAPP est composé de représentants des autorités de contrôle des Etats Membres de l'Union Européenne (pour la Belgique, il s'agit de la CBFA – la Commission Bancaire, Financière et des Assurances).

Le CECAPP est un groupe consultatif indépendant. Son rôle principal est de conseiller la Commission Européenne dans l'élaboration de ses directives. Dans ce cadre, la Commission lui adresse des mandats. L'organisme a ainsi un rôle de comité préparatoire dans Solvabilité II. Pour ce faire, le CECAPP a chargé un certain nombre de groupes de travail techniques sur les travaux relatifs à Solvabilité II, qui préparent des réponses à la Commission (qui adresse des appels à conseils).

4.3 Les professionnels

Les professionnels du secteur de l'assurance sont consultés par la Commission Européenne sur les projets d'avis du CECAPP et les projets de la Commission, par le biais de groupes consultatifs. Il existe des groupes consultatifs formés d'actuaires, de consultants ou encore d'agences de notation. Les compagnies et fédérations professionnelles sont également consultées.

Le **CEA** (Comité Européen des Assurances) fédère les assureurs européens. Il regroupe 32 associations nationales (pour la Belgique, il s'agit d'Assuralia – l'Union Professionnelle des Entreprises d'Assurances) et plus de 5000 assureurs et réassureurs européens. En moyenne, les marchés nationaux sont ainsi représentés à un niveau de 93% au sein de l'organisme.

Dans le cadre de Solvabilité II, le CEA présente le point de vue du marché de l'assurance européenne. Il répond ainsi aux institutions européennes ainsi qu'aux régulateurs internationaux et aux autorités de contrôle. Le CEA fait ainsi part au CECAPP de ses projets et recommandations.

D'autres représentants peuvent encore être cités : IAIS (International Association of Insurance Supervisors), IAA[10] (International Actuarial Association), ACME (Association of European Cooperative and Mutual Insurers), AISAM (Association Internationale des Sociétés d'Assurance Mutuelle), AEIP (Association Européenne des Institutions Paritaires)…

- Niveau 1 : Règles de base, principes cadres (directives, règlements communautaires …) → institutions européennes (Conseil et Parlement)
- Niveau 2 : Mesures d'exécution → (Commission et) CEAPP après consultation du CECAPP
- Niveau 3 : Coopération des régulateurs nationaux, en vue d'une application cohérente des textes de niveau 1 et 2 dans l'ensemble des Etats membres → CECAPP
- Niveau 4 : Vérification de l'application des textes communautaires par les Etats membres → Commission

[9] En anglais : CEIOPS – Committee of European Insurance and Occupational Pension Insurance Supervisors

[10] L'IAA agit en support de l'IAIS. Pour ce faire, elle a formé, en 2002, le WP (Insurer Solvency Assessment Working Party), afin de préparer un rapport sur l'évaluation de la solvabilité de l'assureur.

5. LE PROJET SOLVABILITE II ET LES AUTRES PROCESSUS REGLEMENTAIRES

Solvabilité II n'est pas le seul projet de réflexion en cours au niveau européen. En réaction à la crise des marchés financiers, d'autres systèmes de normes ont vu le jour, répondant chacun à des objectifs différents. Nous présentons à cette section la réglementation en matière de solvabilité dans le secteur bancaire ainsi que les normes internationales de comptabilisation, en cours d'élaboration pour le secteur des assurances.

5.1 Le projet Solvabilité II et la réglementation bancaire (accords de Bâle)

Le projet Solvabilité II est souvent présenté comme le parallèle, pour le secteur de l'assurance, du projet Bâle II. Partant, cette section se propose de présenter brièvement la réglementation en vigueur dans le secteur bancaire ainsi que les différences principales entre les deux réglementations.

5.1.1 Bâle … une histoire en deux temps

En 1974, la banque privée allemande Herstatt fait aveu de faillite, suite à des spéculations sur devises. L'impact sur l'ensemble du système bancaire international est important (grave crise sur le marché des changes).

En réaction à cette crise, les gouverneurs des banques centrales du groupe des Dix, le G10[11], créent un comité de contrôle bancaire, dénommé le Comité de Bâle, avec pour objectif d'améliorer la stabilité et la sécurité du système bancaire. Le rôle du Comité de Bâle est d'émettre des recommandations quant aux pratiques bancaires et de proposer des standards minimaux en matière de contrôle prudentiel.

En 1988, ce Comité définit des normes régissant le calcul du montant minimal de fonds propres réglementaires pour les établissements financiers. Ces normes sont connues sous le nom des **accords de Bâle I**.

Les règles de calcul proposées dans ces premiers accords sont rudimentaires : le niveau de fonds propres requis est défini comme une proportion des actifs risqués détenus par les banques.

Un minimum global est imposé : il faut détenir 8% de l'ensemble de ses crédits en fonds propres[12]. Ce pourcentage est connu sous le nom de **ratio Cooke**. Le montant de fonds propres à détenir par

---

[11] Le G10 est en fait constitué de onze pays: Allemagne, Belgique, Canada, Etats-Unis, France, Grande-Bretagne, Italie, Japon, Pays-Bas, Suède, Suisse. A ces pays se sont ajoutés le Luxembourg ainsi que l'Espagne.

[12] L'accord définit pour ce faire ce qu'il faut considérer comme « fonds propres au sens large ». Les fonds propres réglementaires peuvent inclure, outre le capital (fonds propres au sens strict), du « quasi-capital »,

actif risqué est en fait pondéré selon la classe d'actif considérée : 0% pour les obligations sans risque (d'Etats OCDE), 20% pour les contreparties bancaires, organisme international ou Etat non OCDE, 50% pour les crédits garantis par une hypothèque et 100% pour les actions propres.

Au regard de la simplicité des règles de Bâle I, elles sont aujourd'hui devenues le standard dans plus de cent pays. Le ratio Cooke est depuis 1992 implémenté dans la plupart des pays de l'OCDE.

Cette réglementation souffre cependant de lacunes et limites importantes :

- Bâle I ne prend en compte que le risque de crédit ;
- Le ratio Cooke appréhende faiblement le coût du risque de crédit : seul le montant du crédit est pris en considération et non la qualité de l'emprunteur et/ou du portefeuille de crédit ;
- La gestion des risques d'une banque n'est pas prise en compte (produits de couvertures …).

Au milieu des années 90, le ratio Cooke est aménagé afin d'autoriser la prise en compte de la gestion des risques hors bilan, des risques découlant des produits dérivés, … qui connaissent une importante diffusion à cette période. Il s'agit de l'amendement à Bâle I (1996).

Néanmoins, il s'avère rapidement qu'une refonte plus fondamentale de l'accord de Bâle est nécessaire.

En 1999, le Comité de Bâle entreprend dès lors une réflexion pour améliorer la proposition de 1988. Ce sont les travaux de **Bâle II**, finalisées le 26 juin 2004. Les accords de Bâle II, beaucoup plus complets, fournissent des principes et recommandations en matière de gouvernance, d'analyse et de contrôle de la gestion des risques, de détermination des fonds propres.

Les accords de Bâle II sont charpentés sur **trois piliers** (méthodes dont s'est inspiré le projet Solvabilité II), qui ambitionnent une approche plus holistique de la gestion des risques :

- Premier Pilier : détermination des fonds propres exigibles, d'un minimum de capital requis ;
- Deuxième Pilier: principes de surveillance et de gestion des fonds propres ;
- Troisième Pilier: exigences en matière de publication, de discipline de marché.

Le premier pilier propose une méthode élaborée pour le calcul des fonds propres. Les changements majeurs par rapport à Bâle I concernent des exigences de fonds propres pour couvrir le risque opérationnel (fraudes et pannes de système) et le risque de marché. De plus, Bâle II prend en compte la qualité du portefeuille de crédit, ainsi que les mécanismes de gestion des risques en place.

c'est-à-dire des dettes subordonnées (certaines ne pouvant cependant entrer en ligne de compte que pour 50% des fonds propres réglementaires).

La réforme remplace notamment le ratio Cooke par le **ratio McDonough**, encore appelé ratio de solvabilité bancaire. Ce ratio prend en compte de manière précise le risque des prêts accordés et vise ainsi à rendre les fonds propres cohérents avec les risques réellement encourus par les banques.

En matière de risque de crédit, les banques peuvent désormais choisir entre deux types d'approches :

- une approche standard, relativement proche des accords de Bâle I ;
- une approche fondée sur des modèles de notation interne (appelées méthodes IRB – *internal ratings based*). Pour les banques capables de développer ces modèles, les fonds propres exigibles sont alors adaptés à la qualité de leur portefeuille.

Dans l'Union Européenne, les accords de Bâle I ont été traduits en une Directive Européenne dès 1989. Les accords de Bâle II ont également été traduits en une Directive Européenne dès 2004. Ils seront d'application au sein de l'Union Européenne à partir du 1er janvier 2007.

5.1.2 Comparaison des réglementations prudentielles dans les secteurs bancaire et de l'assurance

Les deux projets présentent certaines caractéristiques communes. Tout d'abord, Bâle II, tout comme Solvabilité II, s'intéresse à la **solvabilité**. Tous deux visent à introduire une réglementation du risque. Ensuite, Solvabilité II s'est inspirée de la **structure en trois piliers** de Bâle II. Enfin, les deux projets développent une approche standard mais laissent cependant la porte ouverte à des modèles internes, plus proches de la réalité des compagnies.

Les deux approches présentent cependant des différences fondamentales :

- Le **risque considéré** n'est pas équivalent que l'on se positionne sous l'angle du secteur bancaire ou sous celui de l'assurance. Le risque bancaire est analysé sur base de l'actif (les exigences de fonds propres ne dépendent que des actifs) : il s'agit du risque de crédit, de marché. Le risque en assurance est un risque bilantaire : s'ajoute un risque important au niveau du passif, le risque d'assurance.

- L'**objectif** prudentiel dans les accords de Bâle est de renforcer la stabilité du système bancaire international. La crainte principale est le risque systémique, c'est-à-dire le risque d'une chute du système bancaire dans son ensemble. Par conséquent, les accords de Bâle visent en particulier les entreprises agissant à un niveau international.

  Dans le secteur de l'assurance, l'objectif de la réglementation prudentielle est par contre de protéger les assurés contre un risque de faillite isolé auquel est soumis toute compagnie d'assurance. Ainsi, les directives Solvabilité s'adressent à chacune des compagnies d'assurance.

- Les **mesures de risque** utilisées par les deux réglementations sont différentes.

5.2 Solvabilité II et les normes IFRS

Les normes IAS/IFRS constituent la base d'un référentiel comptable commun unique, retenu pour consolider les comptes des sociétés européennes cotées sur les marchés européens. Leur objectif est d'homogénéiser la présentation et l'évaluation des comptes des compagnies.

Cette section se propose de brosser un bref aperçu de l'état d'avancement des travaux en la matière en ce qui concerne les compagnies d'assurance.

5.2.1 Historique des normes IFRS

C'est en 1997 que l'International Accounting Standards Board (IASB) a lancé un projet de normes comptables dans le domaine de l'assurance. Aucun des référentiels nationaux existants n'étant considéré comme compatible avec le cadre général de l'IASB, l'idée lancée par le comité chargé du projet de normes consiste, dès l'origine, à créer un standard entièrement nouveau.

Les travaux aboutissent à un document préliminaire (Draft of Statement of Principles) dès **2001**.

En **mai 2002**, au vu de l'avancement des travaux, le projet est scindé en deux phases distinctes : une phase intérimaire (Phase I), qui a pour objectif d'améliorer les pratiques comptables actuelles, suivie de la phase II, qui devrait permettre d'aboutir à un standard définitif, vers 2007.

Le **31 mars 2004** est adoptée la **norme intérimaire IFRS4 – contrat d'assurance**[13]. Il s'agit d'une norme intérimaire dans le sens où elle ne restera d'application que jusqu'à l'achèvement de la seconde phase du projet sur les contrats d'assurance (Phase II).

La norme IFRS 4 spécifie l'information financière que doit établir toute entité qui émet des **contrats d'assurance**[14,15]. Les contrats qui ne comportent pas ou pas suffisamment de risques d'assurance sont considérés comme des produits d'épargne, tombant alors dans le champ d'application de la norme IAS 39 sur les instruments financiers.

---

[13] La norme provisoire est publiée au Journal Officiel de l'Union Européenne le 31/12/2004 et appliquée depuis 2005.

[14] La norme IFRS 4 concerne en effet les contrats d'assurance et non les entreprises d'assurance.

[15] La norme définit un **contrat d'assurance** comme « un contrat selon lequel une partie (l'assureur) accepte de couvrir un risque d'assurance significatif d'une autre partie (le titulaire de la police) en convenant d'indemniser le titulaire de la police si un évènement futur incertain spécifié (l'évènement assuré) affecte de façon défavorable le titulaire de la police ». Le risque d'assurance est défini par opposition au risque financier. Le **risque d'assurance** est le risque, autre que financier, transféré du titulaire de la police d'assurance. Le **risque financier** est défini comme tout « risque d'une variation future possible d'un ou de plusieurs éléments suivants ; taux d'intérêt spécifié, prix d'un instrument financier, prix d'une marchandise, taux de change, indice de prix ou de taux, notation de crédit ou indice de crédit ou autre variable, à condition que dans le cas d'une variable non financière, la variable ne soit pas spécifique à une des parties au contrat ».

5.2.2 IFRS et la notion de juste valeur

Un des grands bouleversements généré par les normes IAS consiste en la notion de juste valeur. Désormais, il ne s'agit plus de comptabiliser les éléments du bilan au coût historique, mais de les valoriser selon un nouveau principe, soit la juste valeur. L'objectif de la valorisation à la juste valeur est de parvenir à une publication des comptes qui reflète les conditions réelles auxquelles est confrontée la compagnie.

Si l'objectif paraît idéal, sa concrétisation n'en est pas moins difficile, car la notion même de juste valeur est, par définition, floue, spécialement dans le cas de la valorisation de passifs d'assurance.

L'IFRS 4 définit la notion de **juste valeur** comme : « le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif éteint, entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale »[16].

Cette définition ne pourra s'utiliser que dans des situations bien particulières car elle requiert l'existence d'un marché secondaire sur lequel la « transaction peut être effectuée ». De même, ce marché secondaire devra être complet et suffisamment liquide pour que la transaction puisse avoir lieu « dans des conditions de concurrence normale ».

Il ressort de ce qui précède que cette notion de juste valeur ne peut que difficilement s'appliquer au domaine de l'assurance, vu l'absence d'un marché secondaire pour ces produits[17].

5.2.3 Comparaison du régime de solvabilité et des normes de comptabilisations

Les deux approches ont comme principe de base la volonté d'une meilleure valorisation des éléments du bilan. Elles visent cependant des objectifs différents.

Les normes IFRS sont des normes de comptabilisation qui s'adressent aux entreprises consolidées et cotées. Ce projet intéresse particulièrement les actionnaires. Le régime Solvabilité II vise chaque compagnie d'assurance en proposant des principes de « bonne gestion » visant à diminuer le risque de faillite. Partant, il concerne les assurés.

---

[16] IFRS 4, Annexe A, L 392/48

[17] Dans certains cas, il est possible que le passif d'assurance considéré puisse être répliqué par un certain montage d'instruments financiers. Dans ce cas, quand il est possible de répliquer le passif d'assurance, la juste valeur correspond alors à la « valeur marché de l'instrument de réplication ». Dans d'autres cas, enfin, il n'existe aucune valeur marché disponible, que ce soit directement ou par le biais d'un montage d'instruments financiers. Dans ce dernier cas, la juste valeur doit être calculée comme la valeur actuelle des flux futurs.

6. CONCLUSION DU CHAPITRE I

Ce premier chapitre nous a permis de définir le cadre dans lequel s'inscrit ce mémoire.

Des objectifs en matière de solvabilité se traduisent typiquement en exigences de capital. Pour contrôler la capacité des entreprises d'assurance à faire face à leurs engagements, des réglementations imposent la constitution d'un capital. Ce capital, historiquement appelé marge de solvabilité, joue le rôle de « matelas de sécurité » permettant de faire face aux aléas de l'activité, ce qui induit une meilleure protection de l'assuré.

Pour tendre à cet objectif, l'Union Européenne a, depuis les années 70, développé un cadre réglementaire. Au regard d'exigences actuelles relativement limitées, l'Union Européenne a entamé un projet d'envergure visant à une réforme globale du système actuel.

Ce projet, dénommé Solvabilité II, ambitionne de proposer des principes appelés à contraindre les compagnies d'assurance à calculer un deuxième niveau de capital – appelé capital de solvabilité – d'une manière qui prend en compte tous les risques et les réductions de risques propres à chacune des compagnies d'assurance. Pour ce faire, Solvabilité II prévoit des méthodes d'évaluation en cohérence avec le marché.

Si ce projet Solvabilité II connaît certaines similitudes avec une démarche en cours dans le secteur bancaire, il n'en reste pas moins que, par définition, l'activité d'assurance est différente de l'activité bancaire, ceci ayant pour corollaire que les deux réglementations poursuivent des buts différents.

De même, l'approche développée par Solvabilité II connaît des différences sensibles avec un autre projet, soit celui visant à l'établissement de normes comptables internationales : le premier s'inscrivant a priori dans une détermination d'un capital requis pour l'activité d'assurance, le second s'inscrivant plutôt a posteriori dans le cadre d'un *reporting*.

Chapitre II. Du risque

Comme nous avons eu l'occasion de le mentionner dans le chapitre I du présent mémoire, l'objectif d'un système de solvabilité fondée sur le risque consiste à établir une relation entre les risques encourus par les compagnies d'assurance et l'exigence de fonds propres. En d'autres termes, plus le risque sera élevé, plus le capital a détenir sera important. Dès lors, avant de pouvoir déterminer les exigences en termes de capital à détenir, il y a lieu d'analyser les différents risques encourus par les compagnies d'assurance ainsi que leur mesure, autant de sujets qui seront étudiés en ce chapitre II.

1. LA NOTION DE RISQUE

1.1 Définition du risque

D'une manière générale, « il y a **risque** dès lors que l'individu n'est pas en mesure de prévoir avec certitude l'état futur de son patrimoine »[18]. Le risque est donc directement lié à la notion d'incertitude, d'aléa.

En assurance, la notion de **risque** est directement liée à celle de **solvabilité**. En effet, une compagnie d'assurance contracte avec un assuré, perçoit les primes du risque couvert et indemnise par la suite l'assuré en cas de survenance d'un éventuel sinistre. Ce cheminement propre à l'assurance est connu sous le nom d'inversion du cycle de production. Le moment, la fréquence de survenance d'un sinistre ainsi que le montant dudit sinistre correspondent à des éléments inconnus de l'assureur au moment de la souscription du contrat. Par conséquent, la hauteur de l'engagement de l'assureur envers son assuré est incertaine.

De la correcte appréciation du risque découlera, d'une part pour l'assureur un risque correspondant à la prime perçue et, d'autre part, pour l'assuré une couverture adéquate de son risque. Le risque représente la possibilité qu'une variable s'écarte de l'estimation de l'événement considéré (probabilité que la réalisation d'une variable aléatoire s'écarte de son espérance).

L'écart par rapport aux prévisions peut s'exprimer :

- dans un sens favorable, par la réalisation de profits plus importants que ceux initialement espérés ou de pertes moins importante que prévues ;

- dans un sens défavorable par la réalisation de profits plus faibles que ceux initialement espérés ou de pertes plus importantes que prévues.

[18] CHARPENTIER et DENUIT (2004), p.1.

En matière de solvabilité, seul le risque défavorable importe (notion de ***downside risk***). Dans ce contexte, le risque doit dès lors être redéfini comme l'« événement ou action qui peut affecter dans un sens défavorable la capacité d'une organisation à atteindre ses objectifs et exécuter ses stratégies»[19].

1.2 Traduction de la notion de risque en langage statistique

En 1933, Monsieur KOLMOGOROV a traduit en langage mathématique la notion de risque. Le triplet (Ω, A, P), appelé espace probabilisé, définit l'espace dans lequel nous nous plaçons:

- Ω : espace fondamental, ensemble des événements simples, des états du monde (notés ω_i) ;
- A : sigma algèbre, ensemble d'événements (de sous-ensembles de Ω) considéré ;
- P : mesure de probabilité.

Le risque est défini comme une variable aléatoire. Une variable aléatoire X est une fonction définie sur l'ensemble Ω et à valeurs dans R :

$$X : \Omega \to R : e \to x = X(e)^{20}.$$

On impose à cette fonction une condition de mesurabilité : pour tout réel x, on pose que $\{X \le x\}$ soit un événement, c'est-à-dire que $\{X \le x\} \equiv \{e \in \Omega | X(e) \le x\} \in A$.

Dans le cadre de ce mémoire, la variable considérée – soit le risque auquel nous nous intéressons – sera une perte. La variable X représente un montant (inconnu) de la perte concernée. Cette perte est mesurée positivement. Une valeur négative de X correspond dès lors à un profit.

La variable X peut être caractérisée par sa fonction de répartition, notée $F_X(x)$. Nous noterons $E[X]$ l'espérance de cette variable aléatoire et $V[X]$ sa variance.

19 Traduction libre de EMBRECHTS, FREY and MCNEIL (2005), p.1

20 Par convention, une lettre majuscule réfèrera à une variable aléatoire et une lettre minuscule à la réalisation de cette variable aléatoire.

2. CLASSIFICATION ET COMPOSANTES DU RISQUE

Un des objectifs majeurs – et ambitieux – du Projet Solvabilité (*voir supra Chapitre I, section 3*) consiste à appréhender l'intégralité des risques auxquels les compagnies d'assurance peuvent être exposées. Dès lors, il importe de dresser autant que faire se peut, une liste des différents risques à considérer. Dans un premier temps, nous présenterons les quatre catégories de risque évoquées par l'Association Actuarielle Internationale. Dans un second temps, nous nous proposerons de décomposer le risque en trois composantes.

2.1 Classification des risques

En son document publié en 2004[21], l'Association Actuarielle Internationale propose de distinguer quatre catégories distinctes de risque. Ce modèle a été retenu au niveau du premier pilier du Projet Solvabilité II.

2.1.1 Le risque d'assurance

Le **risque d'assurance**, encore appelé **risque de souscription**, est propre au secteur de l'assurance. Il est une conséquence directe de l'inversion du cycle de production. Il correspond au risque découlant d'une déviation d'un ou de plusieurs des éléments entrant dans la tarification du produit d'assurance concerné.

Il reprend :

- Le risque de mauvaise sélection des risques à assurer ;
- Le risque de tarification, soit le risque que les primes calculées par la compagnie d'assurance soient en leur montant inadéquates pour supporter les charges futures découlant de ces contrats ;
- Le risque du design du produit, soit le risque que la compagnie d'assurance se voit confrontée à une exposition au risque insoupçonnée dans l'offre qu'elle voulait présenter via son produit ;
- Le risque de sinistralité, soit le risque lié à l'émergence de sinistres d'une fréquence ou d'un montant plus importants que prévus ;
- Le risque lié à l'environnement économique, soit le risque que les conditions sociales évoluent dans un sens négatif pour la compagnie d'assurance (inflation, changement de la loi ou de la jurisprudence …) ;

[21] AAI (2004) … Ce paragraphe en est une traduction / adaptation libre

- Le risque d'une plus grande rétention, due à des sinistres concentrés ou catastrophiques ;
- Le risque de comportement de l'assuré, soit le risque que les assurés agissent de manière imprévue et dans un sens défavorable à la compagnie d'assurance ;
- Le risque de réservation, soit le risque que les provisions détenues s'avèrent inadéquates pour couvrir les obligations de la compagnie d'assurance envers ses assurés.

En **assurance vie**[22], le risque d'assurance correspond principalement aux risques biométriques, au risque de comportement de l'assuré et au risque de frais.

Les risques biométriques sont les risques liés à l'état de vie, de santé des assurés. Ils regroupent :

- Le risque de mortalité, soit le risque d'une déviation inattendue dans la mortalité pour les produits offrant une couverture en cas de décès ;
- Le risque de longévité, soit le risque d'une déviation inattendue dans la mortalité pour les contrats offrant une couverture en cas de vie ;
- Le risque de morbidité, soit le risque d'une déviation inattendue dans la morbidité (dans l'incidence des maladies) pour les produits offrant une couverture en cas de décès.

Le risque de comportement de l'assuré est le risque de chute, soit le risque de constater une déviation inattendue dans les rachats et réductions des contrats.

Le risque de frais représente le risque que la compagnie ne puisse pas réduire ses frais fixes dans certaines circonstances (moins de production que prévu, taux de rachat élevé).

2.1.2 Le risque de crédit

Le **risque de crédit** correspond au risque de défaut de la contrepartie (d'où ses autres dénominations : risque de défaut, risque de contrepartie) ou de changement dans les qualités de crédit des émetteurs de titres financiers, des contreparties ou des intermédiaires. En d'autres termes, le risque de crédit concerne le risque qu'un tiers ne remplisse pas ses engagements ni à l'échéance, ni ultérieurement.

Il reprend :

- Le risque de défaut direct, soit le risque qu'une compagnie d'assurance ne reçoive pas les cash-flows ou les actifs auxquels elle peut s'attendre, du fait du non-respect par une contrepartie de ses engagements ;

[22] D'après CEA (March 2006).

- Le risque de détérioration de la qualité de crédit, soit le risque d'un changement dans les capacités de crédit d'une contrepartie (par exemple, une contrepartie financière bénéficiant d'un rating AAA se voit « rétrogradée » à un rating AA), ce qui affecte la valeur actuelle du contrat ;

- Le risque de *spread*, soit le risque lié à une perception d'un risque accru par le marché ;

- Le risque de liquidation, soit le risque découlant du délai existant entre les dates valeurs[23] et les dates de liquidations des transactions sur titres ;

- Le risque dû à la baisse de la valeur d'actifs ou d'obligations libellés en monnaie étrangère ;

- Le risque de concentration des investissements, soit le risque d'une exposition accrue en raison d'une concentration des investissements dans une région géographique ou un secteur économique ;

- …

Dans l'approche standard de calcul du capital de solvabilité – que nous explicitons dans le chapitre suivant –, seuls deux risques sont repris au titre de risques de crédit : le risque de crédit de réassurance et le risque de crédit au niveau des prêts hypothécaires.

2.1.3 Le risque de marché

Le **risque de marché** correspond au risque d'un changement dans la valeur d'un portefeuille. Il inclut l'exposition aux variations des éléments sous-jacents : prix des actifs, des taux d'intérêt, des taux de change ou prix des biens. Il vise aussi l'exposition des produits dérivés (fluctuation de leurs prix en raison des mouvements dans le prix des actifs sous-jacents). Il s'agit enfin de l'exposition à d'autres mouvements non anticipés de variables financières ou de mouvements dans la volatilité (implicite) des prix des actifs et des options.

Il reprend :

- Le risque de fluctuation des taux d'intérêt ;

- Le risque de fluctuation du prix des actions, de l'immobilier ou d'autres biens ;

- Le risque de change ;

- Le risque de réinvestissement des coupons et des dividendes ;

[23] La date valeur d'une opération financière correspond à la date à laquelle cette opération est considérée comme accomplie au sein de l'entreprise effectuant ladite opération financière.

- Le risque de concentration, soit le risque d'une exposition accrue en raison d'une concentration des investissements dans les régions géographiques ou des secteurs économiques particuliers ;
- Le risque de gestion actif / passif, soit le risque d'une absence de cohérence entre les montants et les moments des cash-flows à l'actif et au passif ;
- Le risque hors bilan, soit le risque de changement dans les valeurs des produits dérivés, qui ne sont pas repris au bilan.
- …

2.1.4 Le risque opérationnel

Le **risque opérationnel** est défini par le Comité de Bâle comme le « risque de pertes provenant de processus internes inadéquats ou défaillants, de personnes, de systèmes ou d'événements externes ». C'est le risque qu'une erreur humaine, un dysfonctionnement d'un système d'information, un événement externe perturbe la réalisation des objectifs d'un établissement. Ceci inclut le risque légal mais exclut les risques stratégiques, de réputation et le risque systémique.

2.1.5 Remarques

A ces quatre types de risque, on ajoute parfois un **risque de liquidité**, qui, dans un contexte d'assurance, peut être défini comme le « risque d'exposition à une perte quand les actifs liquides représentatifs des provisions ne sont pas disponibles en quantité suffisante pour combler les besoins de cash-flows pour la couverture d'un sinistre advenu » [24].

En assurance vie, ce risque découle entre autres des options cachées (options de rachat …) des contrats. Par définition, ce risque sera particulièrement difficile à définir. Partant, dans le cadre du Projet Solvabilité II, l'AAI propose de l'intégrer de préférence au niveau du deuxième pilier.

Rappelons encore un risque non individuel mais collectif : le **risque systémique**. Il résulte de l'incapacité pour une structure en amont à faire face à ses engagements, entraînant pour d'autres structures en aval une impossibilité à faire face à leurs propres engagements. C'est « l'effet domino », qui peut être de nature à compromettre la stabilité des marchés.

[24] D'après AAI (2004), p.32

2.2 Composantes du risque

Il est d'usage de distinguer trois composantes au risque :

2.2.1 La volatilité

Il s'agit du **risque de fluctuations aléatoires** en termes de fréquence ou d'importance d'un événement. Ce risque est diversifiable car la loi des grands nombres assure une diminution de la volatilité lorsque le nombre de risques indépendants augmente.

2.2.2 L'incertitude

Le risque d'incertitude correspond au **risque d'une mauvaise spécification des modèles** utilisés pour « modéliser » les sinistres (ou autres) ou d'une mauvaise estimation des paramètres desdits modèles. En particulier, ce qui peut être observé au sein d'un groupe peut ne pas s'appliquer à un autre groupe, tout comme les observations sur la population dans son ensemble peuvent ne pas être appropriées pour une compagnie d'assurance particulière.

On distingue trois composantes au sein du risque d'incertitude :

- Le risque d'erreur quant au modèle : le modèle en soi peut être incorrect. L'erreur peut néanmoins être conservative ;

- Le risque de paramètre, soit une erreur dans l'estimation des paramètres. Ainsi, le nombre d'observations peut être limité (période d'observation trop courte) ; la volatilité des observations peut rendre les estimations moins certaines ; la période pendant laquelle les observations ont été menées peut ne pas inclure certains événements catastrophiques qui devraient pourtant être reflétés dans les paramètres de la distribution ; les observations peuvent contenir des données « contaminées » ;…

- Le risque structurel, soit le risque temporel : les paramètres peuvent évoluer au fil du temps.

Ce risque n'est pas diversifiable pour l'assureur : augmenter la taille du portefeuille ne réduirait pas ce risque. Ce risque peut s'avérer plus dangereux que le risque de volatilité car générateur de conséquences importantes en termes de capital économique à détenir. Il est cependant diversifiable pour l'investisseur.

2.2.3 Les événements extrêmes

Les évènements extrêmes correspondent à des événements qui bien que rares, ont un impact important pour la compagnie d'assurance. Ces chocs ne peuvent pas être correctement représentés par extrapolation d'événements plus communs. Il est par conséquent difficile de leur attribuer une valeur de perte et par extension un capital à détenir. Les tremblements de terre, les maladies contagieuses peuvent être cités à titre d'illustration d'évènements extrêmes.

3. GENERALITES SUR LES MESURES DE RISQUE

Un préalable à la détermination d'un capital requis consiste à disposer de **mesures de risque** adéquates.

3.1 De la solvabilité au capital requis

L'objectif principal de Solvabilité II est de réduire l'occurrence de la ruine des compagnies d'assurance. Il s'agit en effet de ne permettre la ruine qu'une année sur 200.

Nous pouvons définir deux types de ruines :

- La **ruine opérationnelle** peut être définie comme l'incapacité pour une entreprise d'effectuer ses paiements compte tenu de ses avoirs. Dans ce cas, la ruine survient lorsque l'actif ne suffit pas à payer les *cash-flows* de l'année[25] ;

- La **ruine comptable** survient lorsque l'actif net devient inférieur au capital minimum.

Pour éviter la ruine, la compagnie doit disposer d'un capital suffisant. Le **capital de solvabilité** est ce capital dont elle doit disposer pour être en mesure de dédommager les sinistres, afin d'éviter la ruine à un certain niveau de confiance fixé.

3.2 Capital de solvabilité et mesure de risque

Dans le contexte présent, les mesures de risques visent à déterminer un niveau de capital de solvabilité[26].

Une **mesure de risque** est une fonctionnelle ρ faisant correspondre à un risque X un nombre positif noté $\rho(X)$, éventuellement infini[27]. Elle résume ainsi, en un scalaire, le comportement d'un risque. Cette fonction quantifie le risque associé à X. Une grande valeur de $\rho(X)$ signifie que le risque X est « important ».

La mesure de risque $\rho(X)$ peut être comprise comme le montant de capital dont la compagnie d'assurance doit disposer pour faire face à une perte financière de montant X. Autrement dit, $\rho(X)$ est le montant de capital qui, additionné à la perte X en début de période rend le risque « acceptable ».

25 Il s'agit des *cash-flows* nets, définis comme la différence entre les flux du passif (prestations – primes) et ceux de l'actif (dividendes + coupons + loyers + plus values réalisées …). Une autre manière de parvenir au même résultat est de calculer la variation de l'actif net (Actifs – Provisions).

26 Toutes les quantifications du risque n'ont pas pour seul objectif la détermination d'un capital économique. Certaines ont pour objectif de calculer un montant de prime.

27 CHARPENTIER et DENUIT (2004), p.233

3.3 La notion de mesure de risque cohérente[28]

En 1998, Messieurs ARTZNER, DELBAEN, EBER et HEATH[29] introduisent la notion de **mesure de risque cohérente**. Ils définissent pour ce faire quatre axiomes que doit respecter une « bonne » mesure de risque.

3.3.1 Axiome 1 – Invariance par translation

Pour tout risque X et pour toute constante $c \in R$, on a : $\rho(X+c)=\rho(X)+c$

Cette propriété stipule qu'une constante ne change pas le risque : si le risque est augmenté d'une constante, le capital requis pour y faire face est augmenté de la même constante.

Découle de cet axiome les deux propriétés suivantes :

- $\rho(X-\rho(X))=0$. La position $X-\rho(X)$ est donc une position non risquée.
- $\rho(c)=c$. Le capital nécessaire pour faire face à un risque certain est le montant de ce risque.

3.3.2 Axiome 2 – Sous-additivité

Pour tous risques X et Y, on a : $\rho(X+Y)\leq\rho(X)+\rho(Y)$

Economiquement, la propriété de sous-additivité traduit l'effet de la **diversification** : l'agrégation des risques diminue le besoin en capital. Une fusion ne crée pas de risque supplémentaire. Si cet axiome n'était pas vérifié, il inciterait les compagnies d'assurance à se scinder en plus petites entités afin de diminuer le capital économique réglementaire.

L'effet de la diversification (son impact en terme de gain en capital à constituer) peut alors être mesuré par : $\rho(X)+\rho(Y)-\rho(X+Y)\geq 0$.

Cette condition permet aussi de borner le risque d'un portefeuille par la somme des risques de ses composantes. Cette propriété rend également possible une décentralisation de la gestion du risque.

Notons que l'égalité est vérifiée quand les risques X et Y sont parfaitement corrélés. Dans ce cas, il n'est en effet pas possible de faire des économies d'échelle. On a alors $\rho(X+Y)=\rho(X)+\rho(Y)$ (additivité). Dans ce cas, l'effet de diversification est nul.

[28] Chapitre inspiré de CHARPENTIER et DENUIT (2004), pp.233-234.

[29] ARTZNER, DELBAEN, EBER et HEATH (1999).

3.3.3 Axiome 3 – Homogénéité positive

Pour tout risque X **et pour toute constante positive** c **, on a :** $\rho(c.X) = c.\rho(X)$

Cette propriété est souvent interprétée en termes d'invariance par rapport aux unités monétaires : le risque n'est pas modifié par l'unité monétaire choisie.

3.3.4 Axiome 4 – Monotonicité

Pour tous risques X **et** Y **, on a :** $P[X \leq Y] = 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

La première partie de l'axiome, $P[X \leq Y] = 1$, indique que le risque Y est, avec certitude (la probabilité vaut 1), plus important que le risque X. Dans ce cas, il faut logiquement mobiliser un capital plus important pour le risque Y que pour le risque X.

Une mesure de risque qui répond aux quatre conditions ci-dessus explicitées est dite **cohérente**.

Remarque. La théorie du risque ajoute souvent une cinquième condition :

Pour tout risque X **on a :** $\rho(X) \geq E[X]$

Cette condition garantit l'existence d'un chargement de sécurité dans le tarif. Cette condition ne nous intéresse pas dans le cadre de la détermination d'un capital de solvabilité.

4. QUELQUES MESURES USUELLES DU RISQUE

Historiquement, la variance est une des premières mesures qui a été utilisée pour quantifier le risque. En découle par exemple l'approche moyenne variance, née de la théorie de Markovich qui, pour la première fois, introduit une étude du risque à deux dimensions plutôt qu'une (l'espérance du risque uniquement). C'est l'approche qui sous-tend le théorème du CAPM (*capital asset pricing model*). Le principal problème de la variance est qu'elle ne fait pas de distinction entre une déviation positive ou négative par rapport à la moyenne. Cette mesure ne nous intéresse pas dans le cadre de ce mémoire. Les trois mesures de risque auxquelles nous nous intéressons sont la duration ainsi que deux mesures basées sur les quantiles (de la distribution de pertes) : la Value-at-Risk et la Tail-Value-at-Risk.

4.1 La duration

Nous utiliserons le concept de duration dans la présentation de l'approche standard européenne de détermination du capital ; c'est pourquoi attardons-nous quelque peu sur cette mesure.

La **duration** peut être définie comme une moyenne pondérée (par les valeurs de marchés) des instants d'arrivée des *cash-flows*. Elle permet de mesurer la sensibilité d'une position aux variations de taux d'intérêt.

Soient un produit financier générant des *cash-flows* à différentes dates t_i, notés $CF(t_i)$ et une courbe des taux notée $r(t_i)$.

La valeur actuelle du produit financier est définie comme : $VA = \sum_{i=1}^{n} \frac{CF(t_i)}{\left(1+r(t_i)\right)^{t_i}}$.

La **duration modifiée** (ou sensibilité) est définie de la manière suivante : $D^{\text{mod}} = \frac{\nabla VA}{VA}$

où ∇VA représentant le vecteur gradient : $\nabla VA = \left(\frac{\partial VA}{\partial r(t_1)};...;\frac{\partial VA}{\partial r(t_n)} \right)$, où $\frac{\partial VA}{\partial r(t_i)} = -t_i . \frac{CF(t_i)}{\left(1+r(t_i)\right)^{t_i+1}}$

La **duration** est donnée par : $D = D^{\text{mod}} . \begin{pmatrix} 1+r(t_1) \\ ... \\ 1+r(t_n) \end{pmatrix} = -\frac{1}{VA} \sum_{i=1}^{n} t_i . \frac{CF(t_i)}{\left(1+r(t_i)\right)^{t_i}}$.

Cette mesure présente plusieurs inconvénients. Il ne s'agit tout d'abord que d'une approximation de premier ordre de la sensibilité aux taux d'intérêts. L'étude de la convexité peut par exemple compléter cette approche. De plus, la duration ne permet de prendre en compte que des petits mouvements parallèles de la courbe des taux. Enfin, cette mesure ne permet pas de prendre en compte l'impact de la variation de plusieurs facteurs simultanément sur la valeur du portefeuille : ces différents facteurs ne peuvent être agrégés tels quels.

4.2 La Value-At-Risk

4.2.1 Définition

Etant donnés un risque X et un niveau de confiance $\alpha \in (0;1)$, la VaR est le quantile d'ordre α de X : $\rho(X) = VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$

Elle mesure une perte potentielle probable. On a $P[X > VaR_\alpha(X)] \leq 1-\alpha$. La VaR associée à un risque est donc la valeur qui est dépassée avec une probabilité au maximum égale à $1-\alpha$. Typiquement, α vaut 95%, 99%.

La VaR telle que définie ci-dessus est une **VaR absolue**. On définit également la **VaR relative**, qui représente l'écart entre la VaR absolue et la perte attendue.

On a ainsi : $VaR_\alpha^{rel}(X) = VaR_\alpha^{abs}(X) - E(X)$

Si l'on suppose que le risque X suit une loi normale, on a $VaR_\alpha^{rel}(X) = z_\alpha \sqrt{.V(X)}$ où z_α représente le quantile de niveau α de la loi normale (0;1) et $V(X)$ la variance du risque X.

4.2.2 VaR d'une agrégation de risques normaux

Si l'on s'intéresse à ensemble de n risques corrélés, que l'on note $X_1 ... X_n$ et que l'on suppose que ces risques sont distribués selon une loi normale, on a comme résultat, en terme de VaR relative :

$$VaR_\alpha^{Tot} = \sqrt{VaR_\alpha . C . VaR_\alpha^T}$$

avec

- $VaR_\alpha = [\mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{Rel}}(\mathrm{X}_1) \ ... \ \mathrm{VaR}_\alpha^{\mathrm{Rel}}(\mathrm{X}_n)]$, le vecteur des VaR de chaque sous portefeuille ;
- $C = (\rho_{ij})_{nxn}$, la matrice de corrélation entre les différents risques.

En cas de **corrélation parfaite** entre les différents risques $(\forall i, j : \rho_{ij} = 1)$, on trouve $VaR_\alpha^{Tot} = \sum_{i=1}^{n} VaR_\alpha^i$. A l'opposé, en cas d'**indépendance**, on trouve $VaR_\alpha^{Tot} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (VaR_\alpha^i)^2}$.

Notons déjà ici que supposer une corrélation parfaite des risques est une approche conservative (car fournit le plus grand niveau de VaR).

4.2.3 VaR et cohérence

On peut montrer que la VaR est invariante par translation, homogène et monotone.

Cependant, la VaR n'est pas cohérente car elle ne respecte pas toujours la condition de sous-additivité. Partant, cette mesure de risque ne favorise pas systématiquement la diversification. Au contraire, elle incite les compagnies à se subdiviser en plus petites entités.

La condition de sous-additivité est en fait vérifiée quand le risque (la perte) est de distribution elliptique (ex : loi Normale, Student).

4.2.4 VaR et capital économique

Utiliser la Value-At-Risk comme mesure de risque suppose que l'on détermine le capital économique en limitant la **probabilité de ruine** à un niveau suffisamment faible (et étant donné un horizon de temps). Le capital est donc déterminé de façon à atteindre un niveau cible de probabilité de ruine : c'est celui qui permet de faire face à la sinistralité dans au moins $100.\alpha$ % des cas.

4.2.5 Avantages et critiques de la VaR

La VaR est une mesure « populaire ». Facile à calculer, elle a été popularisée grâce aux accords de Bâle. Cependant, elle n'est pas exempte de défauts.

Nous avons déjà constaté qu'elle n'est pas cohérente. De plus – et c'est là son inconvénient majeur – la VaR ne renseigne pas sur le montant de ruine en cas de ruine. Elle permet en effet de déterminer le montant de perte qui sera dépassé dans $1-\alpha$ % des cas au maximum … mais elle ne dit rien sur la sévérité de la ruine quand celle-ci survient. Enfin, la VaR n'est pas une très bonne mesure de risque lorsque les risques ne sont pas normaux.

4.3 La Tail Value-at-Risk

4.3.1 Définition

Etant donnés un risque X et un niveau de confiance $\alpha \in (0;1)$, la Tail-Value-at-Risk est définie par : $\rho(X) = TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}.\int_\alpha^1 VaR_\xi(X).d\xi$

La TVaR est ainsi une moyenne des VaR de niveau de confiance supérieur à α .

Pour des distributions continues, on a $TVaR_\alpha(X) = E[X|X > VaR_\alpha(X)]$. On peut alors également interpréter la TVaR comme la moyenne de la perte au-delà de la VaR.

Dans le cas de distributions discontinues, cette relation devient l'expression suivante: $TVaR_\alpha(X) = E[X|X > VaR_\alpha(X)] + \frac{1}{1-\alpha}.VaR_\alpha(X).(1-\alpha - P[X > VaR_\alpha(X)])$

Si X est de loi normale, on a $TVaR_\alpha(X) = E[X] + V[X]\frac{\phi[\Phi[\alpha]]}{1-\alpha}$ où ϕ est la densité de la N(0 ;1) et Φ sa fonction de répartition.

4.3.2 TVaR et cohérence

On peut montrer que la TVaR est cohérente.

4.3.3 TVaR et capital économique

Faire appel à la Tail-Value-At-Risk consiste à déterminer le **capital de manière à surmonter en moyenne les pires exercices**. Prendre cette mesure de risque permet en effet de déterminer un capital qui permet de survivre aux exercices « normaux » et qui permet de survivre, en moyenne, aux exercices où la perte dépasse la VaR.

4.3.4 Avantages et critiques de la TVaR

Contrairement à la VaR, la TVaR s'intéresse donc à ce qui se passe dans l'entièreté de la queue de la distribution. Elle quantifie le montant de la perte, quand celle-ci dépasse le niveau fixé par la VaR.

De plus, il s'agit d'une mesure beaucoup plus stable que la VaR. En effet, des mesures basées sur les quantiles peuvent être très variables, surtout quand le niveau de sécurité est faible. Quand la queue de la distribution est lourde, les observations peuvent être fortement réparties, ce qui entraîne une instabilité des mesures basées sur un quantile.

4.4 Remarques sur VaR vs TVaR

4.4.1 Lien entre les deux mesures

La définition de la TVaR lie cette mesure de risque à la VaR : $TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}.\int_\alpha^1 VaR_\xi(X).d\xi$

Par conséquent, $TVaR_\alpha(X) > VaR_\alpha(X)$. Le capital économique déterminé sur base de la TVaR sera toujours supérieur au capital calculé à l'aide de la VaR, pour un niveau de confiance fixé (ainsi qu'un horizon de temps et une distribution sous-jacente fixés).

4.4.2 L'horizon de temps et le niveau de confiance

Lorsqu'on utilise des mesures de risque « quantile », deux aspects doivent être spécifiés :

L'horizon de temps

La VaR et la TVaR, sont des outils d'évaluation du risque pour un horizon de temps donné. Elles n'ont de sens que pour un horizon déterminé. L'horizon de la gestion du risque devrait refléter la période selon laquelle une compagnie d'assurance pense conserver son portefeuille. En assurance par exemple, l'horizon à considérer est typiquement de un an (les primes sont souvent annuelles).

Le niveau de confiance

Il n'existe pas de niveau de confiance optimal. Il est intéressant, une fois la distribution de pertes estimée, de calculer différents quantiles (correspondant à différents niveaux de confiance).

Dans certains cas, le niveau de confiance est choisi en fonction du rating cible. Ainsi, pour un rating AAA, il s'agit souvent d'un niveau de 99,98%.

5. CONCLUSION DU CHAPITRE II

Le présent chapitre II nous a permis de poser les jalons nécessaires à la compréhension de la suite de ce travail.

Le risque, important en assurance, du fait de l'inversion du cycle de production, génère une probabilité de faillite. Pour diminuer cette probabilité, la compagnie se doit de constituer un capital de solvabilité.

Le projet Solvabilité II ambitionne d'appréhender l'intégralité des risques auxquels les compagnies d'assurance sont exposées. L'AAI propose une classification du risque en quatre grands agrégats : le risque d'assurance, le risque de crédit, le risque de marché et enfin, le risque opérationnel.

Afin de prendre en compte ces différentes composantes dans le calcul du capital requis, il y a lieu de pouvoir mesurer le risque. Une mesure de risque résume, en un scalaire, l'exposition au risque d'une compagnie d'assurance. Une mesure de risque est dite cohérente lorsqu'elle satisfait à quatre axiomes : l'invariance par translation, la sous-additivité, l'homogénéité positive et la monotonicité.

Historiquement, une première mesure de risque utilisée en gestion du risque est la duration. La duration mesure la sensibilité d'une position à un facteur de risque sous-jacent. Cette mesure, largement utilisée, présente néanmoins des inconvénients, qui justifient le recours à des mesures dites « basées sur les quantiles ».

La plus connue est la Value-At-Risk, qui est un quantile de la distribution de pertes. Elle mesure une perte maximale possible pour un horizon de temps et un niveau de confiance donnés. Cette mesure n'est cependant pas cohérente et n'indique pas le montant de la ruine quand celle-ci survient.

Une deuxième « mesure quantile » est la Tail-Value-At-Risk, qui correspond à une moyenne des VaR au-dessus d'un certain niveau de confiance. La TVaR est une mesure cohérente.

Les différentes mesures de risques aboutissent à des capitaux nécessaires différents. Par exemple, utiliser la Value-At-Risk comme mesure de risque suppose que l'on détermine le capital économique en limitant la probabilité de ruine à un niveau suffisamment faible (et étant donné un horizon de temps). Faire appel à la Tail-Value-At-Risk consiste à déterminer le niveau de capital permettant à une compagnie d'assurance de surmonter en moyenne les pires exercices.

Chapitre III : De la détermination des différents niveaux de capital

L’objectif de ce chapitre consistera à déterminer les différents niveaux de capital définis par le projet Solvabilité II pour une compagnie d’assurance souscrivant uniquement des produits d’assurance vie.

Pour ce faire, nous commencerons par fixer une valeur des **actifs** en cohérence avec le marché.

Dans un deuxième temps, nous nous attarderons à la valorisation économique des **provisions techniques**. Nous traiterons d’abord le cas des passifs « réplicables » avant d’analyser le cas plus complexe des passifs pour lesquels il n’existe pas de portefeuille de réplication. Pour ceux-ci, la valeur de marché est scindée en deux composantes : la meilleure estimation des provisions techniques et la marge de risque (calculée selon l’approche coût du capital). Nous illustrerons ces deux méthodes de valorisation par deux exemples : la valorisation d’un contrat en unités de compte avec garantie de taux et la détermination de la meilleure estimation d’une rente viagère.

La valorisation des actifs et des provisions permettra alors la détermination du **capital disponible**.

Nous nous intéresserons ensuite à la détermination du premier niveau de capital imposé par le projet Solvabilité II, soit le **capital de solvabilité**. Le plan de ce chapitre analysera ce capital de solvabilité au regard tout d’abord de l’approche standard européenne. Pour ce faire, il nous faudra scinder l’exposition des compagnies d’assurance en quatre types de risques. Un capital sera calculé pour chacun des risques, puis ces capitaux seront agrégés, pour déterminer le capital de solvabilité.

Nous présenterons ensuite les bases de calcul de ce même capital de solvabilité à l’aide d’un modèle interne.

Enfin, nous achèverons ce chapitre en présentant le modèle de calcul du deuxième type de capital imposé par Solvabilité II, soit le **capital minimum,** tout en distinguant les différentes composantes du risque.

1. LES ETAPES DE LA DETERMINATION DU CAPITAL

Afin de comparer les résultats de différentes compagnies d'assurance et de prendre en compte les risques auxquels elles sont exposées, les actifs et les passifs doivent être évalués d'une manière identique pour toutes les compagnies d'assurance.

Un des principes du projet Solvabilité II repose ainsi sur l'**évaluation économique** des éléments du bilan, encore appelée « valorisation cohérente avec le marché ». Pour ce faire, les actifs seront évalués au prix de marché et les engagements seront garantis à la valeur que leur attribuerait le marché financier, en considérant les options et garanties intégrées dans ces engagements.

Ce graphe présente une évaluation économique d'un bilan d'une compagnie d'assurance :

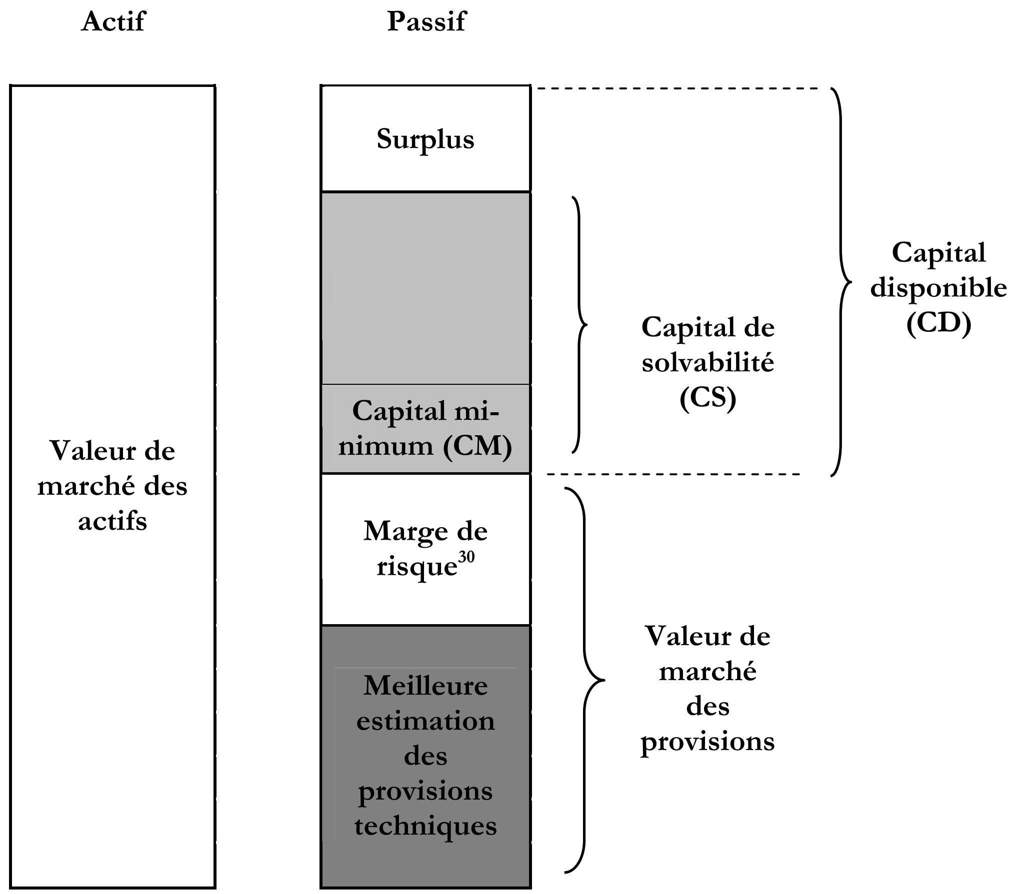


Figure 1. Evaluation économique du bilan – Source. CEA (Feb 2006), p.10

[30] En anglais : Market Value Margin

2. EVALUATION DES ACTIFS

Un des principaux changements introduits par le projet Solvabilité II est l'abandon de la valorisation des actifs au coût historique. Désormais, tous les actifs figurant au bilan doivent être évalués à leur **valeur cohérente avec le marché**.

Quand une valeur de marché est disponible et qu'elle permet une évaluation fiable et appropriée, celle-ci sera utilisée comme valeur cohérente avec le marché. Par exemple, pour une action cotée, on prendra son prix de marché.

Les actifs financiers des compagnies d'assurance sont en grande majorité constitués d'obligations et d'actions, actifs qui sont cotés. Dans ce cas, la détermination de la valeur « cohérente avec le marché » des actifs ne pose pas problème.

Quand une valeur de marché n'est pas disponible, une méthode alternative de valorisation s'impose.

Dans certains cas, il existe des produits cotés qui ont les mêmes caractéristiques que l'actif à valoriser : mêmes caractéristiques de liquidité, même risque … On utilisera alors la valeur de marché de ces produits comparables.

Pour ces deux premières méthodes de valorisation, on parle de valorisation *mark-to-market*.

Quand un prix de marché n'existe pas et qu'il n'y a pas d'actifs « comparables » disponibles, il s'agira de valoriser l'actif au départ d'une modélisation mathématique. On parlera alors de valorisation *mark-to-model*. La valeur de l'actif sera déterminée en actualisant les flux futurs.

3. EVALUATION DES PASSIFS

Les passifs doivent également être estimés à une valeur cohérente avec le marché.

3.1 La notion de valeur économique d'un passif d'assurance

Les autorités en charge du projet Solvabilité II n'ont pas encore arrêté de définition définitive de la valeur économique d'un passif d'assurance.

A ce stade, la valeur **cohérente avec le marché d'un passif** est définie selon le Test Suisse de Solvabilité comme « le montant que l'assureur devrait payer à un tiers pour qu'il accepte de reprendre ce passif dans le cadre d'une transaction conclue à des conditions de marché normales, sur un marché liquide »[31].

Cette définition rappellera au lecteur la notion de **juste valeur**, définie dans l'IFRS 4 comme « le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif éteint, entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale »[32].

Nous savons que ces définitions ne sont telles quelles pas applicables au secteur de l'assurance, à défaut de marché secondaire pour les produits d'assurance. Partant, d'autres méthodes de valorisation des contrats ont été développées.

Ces méthodes d'évaluation de la valeur cohérente avec le marché d'un passif d'assurance diffèrent en fonction du type de risque[33]. Plus spécifiquement, il y a lieu de distinguer deux méthodes d'évaluation, selon que le risque est ou non « réplicable ». Les deux sections suivantes seront consacrées à l'analyse de ces deux types de risque en assurance **vie**.

3.2 Valorisation d'un risque « réplicable »

3.2.1 Notion

Un **risque réplicable** est un risque dont on peut parfaitement reproduire les *cash-flows* à l'aide de produits financiers. Dans un marché efficient, la valeur de tels risques est déterminée par des approches *mark-to-market*, soit l'utilisation du prix de marché de ces produits financiers.

L'exemple suivant illustre ce type de valorisation.

[31] OFAP (2004), p.14

[32] IFRS 4, Annexe A, L 392/48

[33] CEA (Feb 2006), p.5

3.2.2 Illustration [34]

Soit un contrat d'assurance vie en unités de compte. Il s'agit d'un contrat en prime unique, laquelle est investie dans un fonds. Afin d'éviter que la totalité du risque d'investissement soit à charge de l'assuré, supposons que l'assureur offre une garantie de taux sur le capital touché, en cas de vie au terme du contrat ou en cas de décès avant le terme du contrat.

Hypothèses et notations

Notons :

- n, la durée du contrat ;
- x, l'âge de l'assuré à la souscription ;
- D, le montant initial investi dans le fonds ;
- S(t), la valeur du fonds à l'instant t ;
- K(t), la garantie offerte par l'assureur à l'instant t ;
- L(t), la prestation de l'assureur au temps t ;
- VM(t), la valeur de marché en 0 de L(t) ;
- PU, le montant de prime unique du produit ;
- P[D ; t ; K] la valeur en t = 0 d'une option de vente de sous-jacent D, de prix d'exercice K et venant à maturité en t ;
- r, le taux sans risque ;
- j, le taux garanti par le contrat (supposé constant sur tout le contrat).

Nous nous plaçons en cas discret : $t \in N$.

La garantie offerte par l'assureur est une garantie de rendement minimum. En d'autres termes, l'assuré recevra avec certitude un certain taux garanti sur le montant qu'il a initialement investi : $K(t) = D.e^{j.t}$

Réplication du contrat d'assurance

Les prestations de l'assureur sont les suivantes. En cas de vie au terme du contrat, l'assuré reçoit S(n) mais au minimum K(n). En cas de décès prématuré, il reçoit S(t) mais au minimum K(t). A tout instant, la prestation de l'assureur s'élève au maximum entre le montant de la garantie K(t), fixée lors de la conclusion du contrat et le montant aléatoire S(t) du fonds d'investissement :

$$L(t) = \max(K(t), S(t)) \qquad (0 < t \leq n)$$

[34] Inspiré de DEVOLDER (1993), p.202

Nous pouvons réécrire cette égalité de deux manières différentes. Tout d'abord, comme le risque pour l'assureur se situe au niveau de la garantie, la prestation peut se formuler de la manière suivante:

$$L(t) = S(t) + \max(0, K(t) - S(t))$$

La prestation de l'assureur représente la somme entre un montant aléatoire, la valeur du fonds en t, et une garantie, l'option de vente de prix d'exercice égal à K(t). Il est donc possible de répliquer la prestation d'assurance en t par la somme d'une action et d'une option de vente sur cette action.

Il est également possible de répliquer ce produit d'assurance par une somme d'un zéro coupon et d'une option d'achat sur l'actif risqué, c'est-à-dire par des produits financiers. En effet, comme l'assuré reçoit le maximum entre la garantie et la valeur du fonds d'investissement, cette relation peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$L(t) = K(t) + \max(0, S(t) - K(t))$$

Si l'on pose l'hypothèse que le fonds d'investissement est modélisé à l'aide d'un mouvement brownien géométrique[35], les options peuvent être tarifées à l'aide de la formule de tarification de Black& Scholes[36].

Nous nous intéressons au calcul de la prime unique (valorisation en t = 0). Nous raisonnons dans un premier temps conditionnellement à la date de décès, c'est-à-dire en supposant que cette date est connue avec certitude. Nous calculons donc la valeur de chacun des engagements en t = 0. Dans un second temps, il s'agira de pondérer ces différents engagements par leur probabilité d'occurrence pour déterminer la prime unique.

Valorisation du contrat conditionnellement à la date de décès

Nous notons, rappelons-le, VM(t), la valeur de marché à l'instant 0 de l'engagement en t :

$$VM(t) = VM[L(t)]$$

Reprenons la première écriture de L(t), à savoir $L(t) = S(t) + \max(0, K(t) - S(t))$. La valeur de marché de la prestation peut être scindée en deux parties :

---

[35] Son équation de comportement est donnée par $dS(t) = \alpha.S(t).dt + \sigma.S(t).dw(t)$ où α représente le rendement moyen du fonds, σ la volatilité du fonds et $w(t)$ est un mouvement brownien standard.

[36] Le prix d'un put européen à l'instant t, de prix d'exercice K, venant à maturité en t = T, est donné par $P(S,T,K) = K.e^{-r.(T-t)}.\Phi(-d_2) - S(t).\Phi(-d_1)$ où $d_{1,2} = \dfrac{\log\left(\dfrac{S(t)}{K}\right) + \left(r \pm \dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma.\sqrt{T-t}}$ et $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$ = la fonction de répartition d'une normale(0;1).

- $VM[S(t)] = D$, montant initialement investi dans le fonds d'investissement ;
- $VM[\max(0; K(t) - S(t))] = P[S(0); t; K(t)]$, la valeur en 0 d'une option de vente sur le fonds d'investissement S(t), de prix d'exercice K(t), et venant à maturité en t.

La prime à verser sous l'hypothèse d'expiration du contrat en t est ainsi donnée par :

$$VM(t) = D + P[S(0); t; K(t)]$$

Cette prime représente la somme du montant investi initialement dans le fonds d'investissement et du prix de la protection.

Valorisation du contrat inconditionnellement à la date de décès

Pour l'instant, nous n'avons tarifé ce produit que pour un instant fixé t, c'est-à-dire en supposant connaître l'instant de décès. Il nous faut encore pondérer la valeur de chaque engagement par sa probabilité d'occurrence, selon la formule suivante :

$$\text{Prix} = {}_n p_x . VM(n) + \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1} p_x \, q_{x+t-1} . VM(t) \qquad \text{où}$$

- ${}_n p_x$ est la probabilité, étant en vie à l'âge x, d'être encore vivant à l'âge x + n ;
- q_{x+t} est la probabilité, étant en vie à l'âge x + t, de mourir avant d'atteindre l'âge x + t + 1.

Le premier terme correspond à la garantie en cas de vie au terme du contrat. Le second terme correspond à la somme des primes de risque en cas de décès à des instants inférieurs à t = n. Rappelons que, dans une optique de valorisation économique, l'assureur se doit de judicieusement évaluer la mortalité future.

3.3 Valorisation d'un risque « non réplicable »

Dans la majorité des cas en assurance vie, en raison des risques biométriques, il n'est pas possible de trouver un montage de produits financiers qui réplique parfaitement les *cash-flows* du contrat. Il faut donc recourir à une autre méthode de valorisation.

Pour ces risques, la valorisation se fait par une approche *mark-to-model*. A cet égard, le projet Solvabilité II décompose la valeur cohérente avec le marché de tels risques, soit la valeur de marché des provisions, comme la somme de la meilleure estimation des provisions techniques et de la marge de risque.

3.3.1 La meilleure estimation des provisions techniques

Notion

La meilleure estimation des provisions techniques correspond au montant moyen de la sinistralité future, c'est-à-dire à l'espérance des *cash-flows* futurs relatifs à ces passifs.

Dans le cadre de la détermination de la meilleure estimation des provisions techniques, la méthode actuelle d'estimation de ces provisions (Solvabilité I), se basant sur une actualisation au taux technique et une utilisation des tables MR/FR pour la composante « mortalité », sera abandonnée pour être remplacée par une projection des *cash-flows*, prenant en compte toute l'information des marchés financiers et reflétant les développements attendus au niveau démographique.

Trouver la meilleure estimation des provisions consiste en fait à déterminer les meilleures estimations de chacun des risques inhérents au contrat.

Nous nous proposons d'illustrer cette évaluation à l'aide d'un produit phare en assurance vie : la rente viagère.

Illustration[37]

La rente viagère est un produit pour lequel l'assureur s'engage à effectuer un paiement régulier, tant que l'assuré est en vie, les paiements cessant lors du décès de l'assuré.

Le prix de rente dépend essentiellement de deux risques, qu'il faut correctement évaluer :

- un <u>risque financier</u> : il apparaît dans l'actualisation des *cash-flows*. Une rente peut être perçue comme une obligation à coupons. Une obligation délivre des coupons réguliers tout comme une rente fournit des arrérages. Ceux-ci doivent être actualisés à l'aide de la courbe des taux sans risque et non plus au taux technique. Cette courbe peut être construite au départ des taux Euribor pour les maturités inférieures à un an et des taux swaps pour les maturités supérieures à un an, par une méthode de *bootstrapping (cfr infra Partie II Chapitre IV, section 3).*

- un <u>risque démographique</u> : il apparaît à travers les probabilités de survie. En Belgique, tout comme dans la plupart des pays industrialisés, on observe depuis quelques décennies un recul de la mortalité, dont il faut tenir compte. Pour ce faire, l'assureur peut utiliser des tables prospectives, qui visent à prévoir la mortalité de demain.

[37] inspiré de DELWARDE, DENUIT, DEVOLDER et MARECHAL (2006)

Nous considérons une rente annuelle.

Notons :

- x : l'âge du bénéficiaire à la souscription du contrat (en t = 0) ;
- ω : l'âge ultime ;
- $\ddot{a}_x$: le capital constitutif d'une rente payant un montant de 1€ par an anticipativement tant que le bénéficiaire est en vie ;
- ${}_nE_x$: la prime unique à payer aujourd'hui pour recevoir 1€ dans n années, si le bénéficiaire est en vie à ce moment (capital différé) ;
- ${}_tp_x$: la probabilité étant en vie en t = 0 à l'âge x, d'être vivant, en t = t (donc à l'âge x + t) ;
- v^t : le facteur d'actualisation égal à $\frac{1}{(1+r(t))^t}$ où r(t) est le taux sans risque d'échéance t ;
- C : la valeur (constante) de l'arrérage de rente ;
- prix : le capital constitutif d'une rente payant annuellement un montant C au bénéficiaire.

Ainsi, nous avons :

$$\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot {}_tp_x$$

$$\text{prix} = C.\ddot{a}_x$$

La meilleure estimation du prix de rente correspond ainsi à la valeur des *cash-flows* futurs actualisés à l'aide de la courbe des taux sans risque et probabilisés à l'aide de tables prospectives.

3.3.2 La marge de risque

Définition et raison d'être

A la section précédente (3.2), nous avions étudié la valorisation des passifs réplicables, qui se base sur des prix de marché, soit un prix sur lequel des parties s'accordent. La valorisation est ainsi conforme aux définitions de la valeur économique d'un passif d'assurance, qui pour rappel peut être définie comme « le montant que l'assureur devrait payer à un tiers pour qu'il accepte de reprendre ce passif dans le cadre d'une transaction conclue à des conditions de marché normales, sur un marché liquide »[38].

Par contre, lorsqu'il n'est pas possible de répliquer un passif – cas des risques non réplicables, lesquels font l'objet de la présente section –, la valorisation ne fournira pas un prix sur lequel les parties s'entendraient. Imaginons un assureur A qui décide de céder un portefeuille à un assureur B.

[38] OFAP (2004), p.14.

L'assureur B n'acceptera jamais de reprendre uniquement la meilleure estimation du portefeuille concerné ainsi que les actifs correspondants. En effet, reprendre ce portefeuille l'obligera à constituer un nouveau capital réglementaire, capital qu'il faudra rémunérer.

Afin de rendre une telle transaction possible, l'assureur cessionnaire, A, doit ajouter à la meilleure estimation des provisions, un montant destiné à couvrir cette rémunération du capital. La valeur actuelle de ce coût de détention du capital s'appelle la **marge de risque**.

La valeur de marché des provisions techniques relative à un portefeuille doit donc correspondre à une valeur telle que l'assureur puisse constamment céder ce portefeuille à un tiers.

Dans le cas des risques réplicables, la marge de risque est, en fait, déjà incluse dans le prix de marché utilisé dans la valorisation. Partant, l'évaluation de cette marge de risque ne concerne que les risques non réplicables.

Méthodes de détermination de la marge de risque[39]

Deux méthodes ont été élaborées pour le calcul de la marge de risque. La première, appelée **approche** basée sur le **coût du capital** est soutenue par le CEA. La seconde, appelée **approche percentile**[40], a été proposée par le CECAPP.

A l'heure actuelle, il semble patent que l'approche coût du capital sera adoptée pour le calcul de la marge de risque. Mentionnons que cette approche a également été retenue dans le Test Suisse de Solvabilité. Ce constat justifie le fait que dans le cadre de ce mémoire, nous nous concentrerons uniquement sur cette approche.

Selon l'approche coût du capital, la marge de risque est définie comme le « coût de l'immobilisation du capital réglementaire requis pour liquider tous les actifs exigibles en cas de difficultés financières de l'assureur »[41].

Autrement dit, la marge de risque correspond à la valeur actuelle du coût de détention du capital de solvabilité, jusqu'à l'extinction du portefeuille, dans l'hypothèse où le portefeuille est liquidé au profit d'un tiers. Cette marge de risque appartient aux assurés et fait donc partie des provisions.

---

[39] Ce paragraphe et les suivants se base sur les deux documents suivants : CEA (April 2006) et CEA (2006)

[40] Selon l'approche percentile soutenue par le CECAPP, les provisions techniques doivent correspondre au 75 ième percentile de la distribution de celles-ci en tenant compte des risques jusqu'à l'extinction du portefeuille. La marge de risque correspondante est alors obtenue par la différence entre le 75[ième] percentile et la meilleure estimation.

[41] OFAP (2004),p.16.

Selon cette approche, la marge de risque est calculée au regard de la formule suivante :

$$MR = r_{capital} \sum_{t} CS_t .v^t$$

où

- CS_t représente le capital de solvabilité relatif aux risques non réplicables et à l'année t ;
- v^t représente le facteur d'actualisation ;
- $r_{capital}$ représente le coût du capital.

Approche standard européenne du calcul de la marge de risque

Cette section explicite le calcul de la marge de risque selon l'approche coût du capital à l'aide de l'approche standard européenne. Selon cette approche standard européenne, le calcul de la marge de risque peut être réalisé en trois étapes :

1) Calcul du capital de solvabilité en t = 0

   Le capital de solvabilité (CS) pour les risques non réplicables peut être calculé en t = 0 à l'aide de l'approche standard européenne de calcul du capital de solvabilité (*voir infra section 5.3 de ce Chapitre*) en considérant que les **risques de marché** sont évalués à zéro.

2) Calcul des charges annuelles de capital jusqu'à l'extinction du portefeuille

   Pour cette étape, l'hypothèse suivante est posée : le capital de solvabilité représente une proportion constante de la meilleure estimation des passifs. Il suffit alors de projeter la meilleure estimation des passifs jusqu'à l'extinction du portefeuille et d'en prendre un certain pourcentage afin de déterminer les CS annuels, ce qui se détermine de la manière suivante :

$$CS_t = ME_P(t) * x\%$$

   où $ME_P(t)$ représente la meilleure estimation des passifs d'assurance en t et x% est la proportion en t = 0 entre le capital de solvabilité calculé au point 1 et la meilleure estimation des passifs en t = 0.

3) Calcul de la marge de risque

   Après avoir déterminé le capital de solvabilité pour les années concernées jusqu'à l'extinction du portefeuille, il reste à multiplier ces montants par le coût du capital, puis à les actualiser à l'aide de la courbe des taux sans risque pour déterminer la marge de risque :

$$MR = r_{capital} . \sum_{t} CS_t .v^t$$

Le coût du capital à utiliser n'a pas encore été déterminé avec précision. Le Test Suisse de Solvabilité propose une valeur de 6% alors que les réflexions actuelles au niveau du projet Solvabilité II semblent préconiser un taux de 4%.

Remarque. L'étape n°2, soit l'étape de calcul des charges annuelles de capital jusqu'à l'extinction du portefeuille, nécessite de pouvoir projeter la meilleure estimation des passifs. Cette étape ne pose pas problème pour les compagnies d'assurance au sein desquelles un modèle de *cash-flows* peut être utilisé. Pour les compagnies d'assurance qui ne sont pas familiarisées avec ces modèles, l'approche standard renseigne une autre méthode pour la détermination de la marge de risque. Cette méthode simplifiée se base sur des facteurs dépendant de la moyenne pondérée des durations des passifs. Les étapes de cette méthode simplifiée sont les suivantes :

1) Calcul du capital de solvabilité en t=0

   Cette étape est identique à celle expliquée ci-dessus.

2) Calcul de la moyenne pondérée des durations des passifs

   La moyenne pondérée des durations, notée D, correspondra au temps utilisé comme instant d'actualisation.

3) Détermination d'un facteur

   Les facteurs utilisés dépendent de la duration du passif et peuvent être dégagés de la manière suivante :

$$facteur_D = D.r_{capital}.v^D$$

   où $r_{capital}$ représente le coût du capital et v^t représente le facteur d'actualisation pour une échéance D.

4) Calcul de la marge de risque.

   La marge de risque est déterminée en multipliant le capital de solvabilité en $t = 0$ par le facteur :

$$MR = facteur_D.CS_0$$

3.4 Synthèse

Les passifs doivent être estimés à leur valeur économique. Le schéma suivant synthétise la méthodologie de détermination de cette valeur cohérente avec le marché :

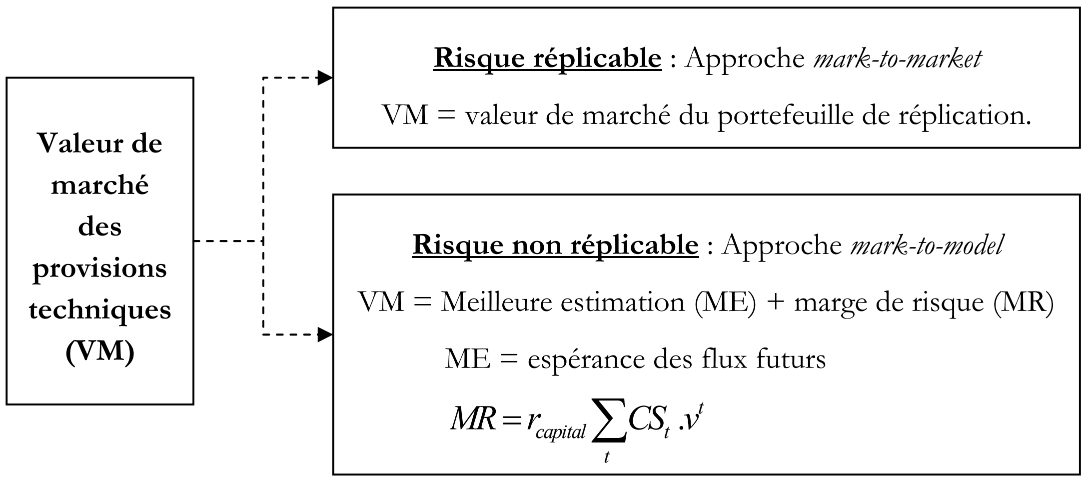


Figure 2. Valeur de marché des provisions techniques

4. DETERMINATION DU CAPITAL DISPONIBLE

Le **capital disponible** se définit comme la différence entre la valeur de marché des actifs et celle des provisions.

Capital disponible = Valeur de marché des actifs – Valeur de marché des provisions

En d'autres termes, ce capital disponible correspond à la valeur actuelle des avoirs diminués de la valeur actuelle des engagements d'une compagnie d'assurance ; on parlera de la **part disponible** du capital de la dite compagnie d'assurance.

Le capital disponible n'est pas un des niveaux de capital exigés par le législateur. Il s'agit simplement des **fonds propres** de l'entreprise, soit la part du passif constitué des apports des actionnaires.

Au sein de ce capital vont être définis le capital minimum et le capital de solvabilité, les deux niveaux imposés par le projet Solvabilité II. Ces deux niveaux de capital seront examinés aux sections suivantes.

5. DETERMINATION DU CAPITAL DE SOLVABILITE

5.1 Définition et raison d'être

Le capital de solvabilité est un niveau de capital introduit par le projet Solvabilité II. Son rôle est très important car il correspond au niveau de fonds propres requis afin que la compagnie ne connaisse qu'une **faible probabilité de faillite**. Le **niveau** de faillite admissible selon les autorités en charge du projet est de une faillite tous les deux cents ans.

Bien que le capital de solvabilité ne soit pas encore totalement défini par les autorités en charge du projet, nous pouvons néanmoins en préciser quelques éléments essentiels.

Le capital de solvabilité est défini soit, comme la Value-At-Risk, soit comme la **Tail-Value-At-Risk** de la **variation du capital disponible**, ce qui correspond à la distribution de pertes. Le milieu académique préconise l'usage de la TVaR, pour les raisons explicitées dans le chapitre II traitant du risque. Le niveau de confiance sera de **99,5%**, correspondant à une ruine tous les deux cents ans. L'horizon de temps considéré sera de **un an**.

Cette exigence de capital est censée garantir à l'assuré que la compagnie d'assurance auprès de laquelle il a contracté disposera de fonds suffisants pour faire face à ses engagements. « Suffisant » signifie que[42], même en cas d'événements défavorables (ayant une probabilité de survenance de 0.5%), la compagnie d'assurance disposera, en moyenne, d'un capital suffisant pour permettre que ses actifs et passifs puissent être cédés à un tiers, étant entendu que les actifs alors cédés devraient couvrir les passifs exigibles ainsi que les coûts futurs du capital relatif auxdits passifs cédés.

Le calcul du capital de solvabilité doit être le plus complet possible : il doit prendre en compte la majorité des risques auxquels sont soumises les compagnies d'assurance ainsi que les techniques de diversification, de transfert ou de réduction de ces risques[43].

5.2 Méthodes de détermination du capital de solvabilité

Comme nous l'avons vu, le calcul du capital de solvabilité doit prendre en compte les risques encourus par les compagnies d'assurance. Il nécessite ainsi, soit une connaissance parfaite des distributions des différents risques, soit une simulation, laquelle est souvent réalisée à l'aide d'une projection des *cash-flows*.

---

[42] … si la TVaR est la mesure de risque retenue

[43] Les compagnies utilisent un certain nombre d'instruments afin de limiter leur exposition aux risques en cas de survenance d'évènements adverses. Il s'agit notamment de la réassurance et de stratégies financières de couverture à l'aide de produits dérivés. Ces instruments doivent être considérés dans le calcul du capital de solvabilité.

Les grandes compagnies ont souvent développé en interne des modèles complexes de projection. Ces modèles existent déjà, même s'ils n'avaient pas comme objectif initial la détermination d'un capital de solvabilité. Ils seront en fait adaptés aux objectifs visés par le projet Solvabilité II.

Toutes les compagnies d'assurance n'ont cependant pas les compétences techniques ou encore le budget pour se permettre d'élaborer ce type de modèle. C'est pourquoi les autorités en charge du projet Solvabilité II développent un modèle, appelé approche standard européenne, de calcul du capital. Ce modèle se base sur des facteurs pour le calcul du capital : il s'agit de prendre des pourcentages de certains postes du bilan mesurant l'exposition au risque de la compagnie.

Au sein de cette approche standard, il existe une alternative, qui permet l'utilisation de scénarios prédéfinis. Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette alternative dans le cadre du présent mémoire.

5.3 L'approche standard européenne pour l'assurance vie[44]

Cette section s'intéresse à décrire les principes de l'approche standard européenne développés jusqu'à présent afin d'évaluer le capital de solvabilité (CS) pour une compagnie d'assurance souscrivant uniquement des produits d'assurance **vie**.

Les concepts, qui sont ici abordés d'une manière théorique, feront l'objet d'une application complète dans la partie « étude de cas » du présent mémoire.

Les différentes étapes nécessaires à la détermination du capital requis décrites dans cette section sont, à l'heure actuelle, « testées » sur le terrain par un ensemble de compagnies d'assurance au travers de l'étude quantitative[45,46] (QIS2). Dès lors, il est probable que l'analyse des résultats de cette étude quantitative, annoncée pour octobre 2006, modifie les présentes considérations.

Les différentes étapes de détermination du capital

La méthode standard définit un certain nombre d'étapes à suivre pour déterminer le capital requis.

- Un **prérequis** à ce calcul consiste à évaluer les actifs et les passifs de la compagnie d'assurance à leur valeur de marché. Nous renvoyons pour ce faire le lecteur à la section 2 et 3 de ce Chapitre.

---

44 CEA (March 2006)

45 Les études QIS (Quantitative Impact Studies) sont initiées par le CECAPP. Il s'agit d'enquêtes adressées aux entreprises d'assurances, ayant pour but de tester les concepts théoriques du projet Solvabilité II et d'en améliorer l'approche. Deux études quantitatives ont eu lieu dans le cadre du projet Solvabilité II.

46 CEIOPS-PI-08/06

- La **première étape** correspond au calcul du capital requis pour chacun des risques considérés séparément, en prenant compte l'effet de la diversification et des couvertures éventuelles au sein de chaque risque. Notons que les classes de risques considérées sont le risque d'assurance, le risque de crédit, le risque de marché et le risque opérationnel.

- La **deuxième étape** consiste alors à agréger ces différents risques en tenant compte des corrélations entre ceux-ci. Nous obtenons ainsi le capital de solvabilité après diversification.

- La **troisième et dernière étape** est de reconnaître que certains passifs peuvent être utilisés pour absorber les risques (par exemple les passifs relatifs aux participations bénéficiaires discrétionnaires). Le capital de solvabilité (CS) est alors déterminé comme la différence entre les exigences de capital après diversification et la capacité d'absorption de risques de certains passifs. Nous ne détaillerons pas cette dernière étape dans le corps de ce mémoire, tout en renvoyant quant à ce, le lecteur à l'annexe 4.

Le graphe suivant illustre le processus complet de détermination du capital.

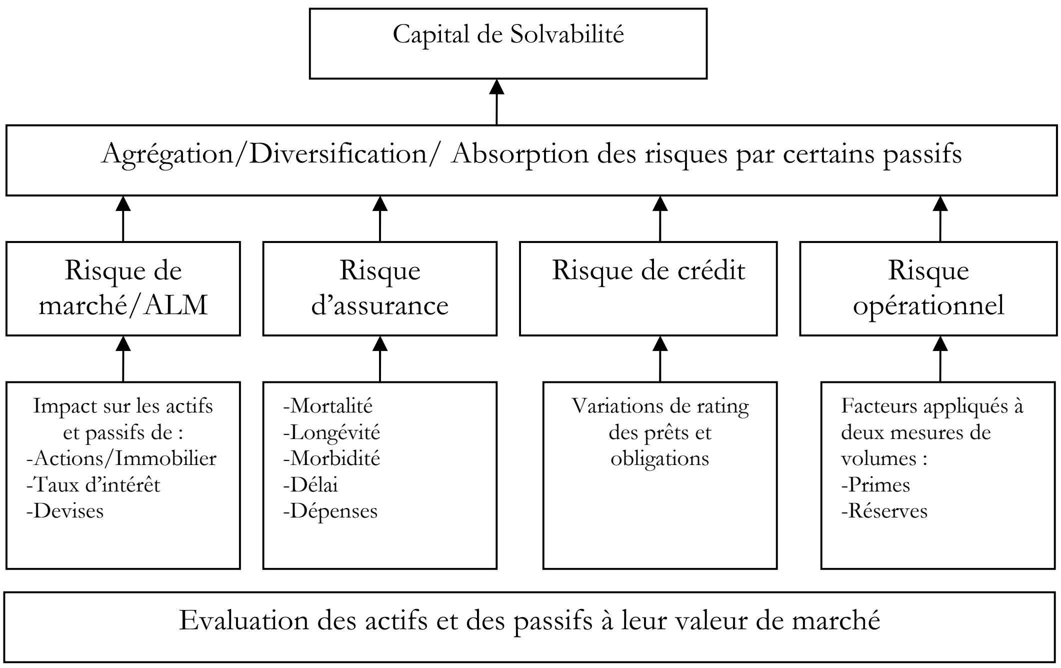


Figure 3. Etapes de détermination du capital de solvabilité – Source. CEA (March 2006), p. 4

Nous proposons maintenant au lecteur d'appréhender chaque étape de ce processus de détermination du capital.

5.3.1 Première étape : calcul des exigences de capital par type de risque

Le risque d'assurance

Pour rappel, en assurance vie, le risque d'assurance peut être scindé en trois catégories : les risques biométriques (risque de mortalité, de longévité, de morbidité), le risque de comportement de l'assuré et le risque de frais. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons au risque de longévité, que nous explicitons ici. Le lecteur intéressé trouvera un détail des autres risques en annexe n°2.

Le risque de longévité est traité en considérant séparément ses deux composantes (*voir supra Chapitre II, section 2.2*) : la volatilité et l'incertitude.

<u>Le risque de longévité</u>

$$CS_{longévité} = Risque_{longévité} + Risque_{tendance}$$

où

- $Risque_{longévité} = 2{,}58.\sigma_{longévité}.PT_{vie}$
- $\sigma_{longévité} = \sqrt{\dfrac{q_x(1-q_x)}{n}}$, où q_x correspond à la probabilité de décès moyenne[47] et n au nombre d'assurés ;
- La PT_{vie} correspond à la part des provisions relative aux produits qui offrent une couverture en cas de vie uniquement. Quand un produit offre à la fois une protection en cas de vie et en cas de décès, il s'agit d'enlever, du montant total des provisions, la part qui serait versée en cas de décès. PT_{vie} est donc une part de $PT_{longévité}$ définie ci-dessous.
- $Risque_{tendance} = 0{,}005.PT_{longévité}$ où $PT_{longévité}$ représente la somme des provisions techniques (nettes de réassurance) relatives aux produits d'assurance vie.

Le risque de crédit

Le capital requis pour le risque de crédit est évalué en appliquant un facteur à la valeur de marché des actifs sujets au risque de crédit. Les actifs sont classés en fonction de leur rating, la volatilité du crédit étant fonction de la qualité des actifs. La formule de détermination du capital relatif au risque de crédit se décline comme suit:

---

[47] La probabilité de décès moyenne peut être calculée comme le rapport entre d'une part les paiements relatifs aux contrats « de longévité » et d'autre part le total des PT_{vie}.

$$CS_{crédit} = \sum_i g(rating_i).VM_i.D_i$$

où

- i représente une classe d'actifs : les actifs sont regroupés par caractéristiques de risque ;
- $g(rating_i)$: pondération du risque pour la classe de risque i. Les catégories suivantes de rating sont considérées :

Rating i	Pondération du risque (g)
AAA	0.008%
AA	0.056%
A	0.66%
BBB	1.312%
BB	2.032%
B	4.446%
CCC ou -	6.95%
Non coté	1.6%

Tableau 1. Classes et pondération du risque de crédit

- D_i représente la duration moyenne des actifs repris dans la classe de risque i, avec une valeur minimale de un an et une valeur maximale de 5 ans ;
- VM_i représente la valeur de marché totale des actifs de la classe de risque i.

Le risque de marché

Pour rappel, le risque de marché peut être scindé en quatre catégories : le risque d'actions, le risque d'immobiliers, le risque de taux d'intérêt et le risque de devises. Nous détaillerons ici l'approche standard de calcul du capital requis pour le risque d'actions et le risque d'intérêt, tout en renvoyant le lecteur à l'annexe 3 pour les risques non traités.

Le risque des actions

Le capital de solvabilité pour les actions est déterminé comme suit :

$$CS_{actions} = 40\%.(VM_{actions} - VM_{Unité-de-Compte})$$

où

- $VM_{actions}$ = valeur de marché totale des actions ;

- $VM_{Unit\acute{e}-de-Compte} =$ valeur de marché des actions attachées aux contrats où les assurés supportent le risque d'investissement.

Le risque de taux d'intérêt

Le capital de solvabilité relatif au risque de taux d'intérêt peut être obtenu de la manière suivante :

$$CS_{taux} = \max \begin{cases} 0 \\ \mathrm{Im}\,pact_{actif}^{hausse} - \mathrm{Im}\,pact_{passif}^{hausse} \\ \mathrm{Im}\,pact_{actif}^{baisse} - \mathrm{Im}\,pact_{passif}^{baisse} \end{cases}$$

où

- $\mathrm{Im}\,pact_{actif}^{hausse/baisse} = VM_{actif}.Duration_{actif}$
- $VM_{actif} =$ valeur de marché des instruments financiers dépendants des taux d'intérêt non alloués aux polices où les assurés supportent le risque d'investissement ;
- $Duration_{actif} =$ approximation de la duration, calculée en regroupant les actifs dépendant des taux d'intérêt en cinq classes, fonctions de la maturité. Les maturités considérées sont les suivantes : entre 1 et 3 ans, de 3 à 6 ans, de 6 à 12 ans, de 12 à 18 ans et plus de 18 ans. Elle est calculée de la manière suivante :

$$Duration_{actif} = \sum_{c=1}^{5} r_c.s_c.D_c^{\mathrm{mod}}.\frac{VMc}{VM_{tot}}$$

où

- $D_c^{\mathrm{mod}} =$ duration modifiée des actifs de la classe c ;
- $VMc =$ valeur de marché des actifs de la classe c ;
- $VM_{tot} =$ valeur de marché totale des instruments financiers dépendant des taux d'intérêt ;
- PT = total des provisions techniques non allouées aux polices où les assurés supportent le risque d'investissement ;
- $Duration_{passif} =$ duration moyenne des provisions techniques ;
- « s » représente un choc de taux d'intérêt, à la hausse ou à la baisse :

c	1-3	3-6	6-12	12-18	18+
r_c	Taux d'intérêt moyen pour la classe considérée				
s_c^{hausse}	0.75	0.5	0.4	0.35	0.3
s_c^{baisse}	-0.4	-0.35	-0.3	-0.25	-0.2

Tableau 2. Risque de taux d'intérêt

<u>Agrégation du risque marché</u>

Les exigences en capital des différentes composantes du risque de marché sont agrégées à l'aide d'une matrice de corrélation :

$$CS_{marché} = \sqrt{\left(CS_{actions}\right)^2 + \left(CS_{taux}\right)^2 + 2.\rho_{actions;taux}.CS_{actions}.CS_{taux}}$$

où $\rho_{actions;taux}$ = corrélation entre le risque de marché et le risque de taux. Elle est fixée à 0,75 dans le QIS2.

Le risque opérationnel

Le capital de solvabilité relatif au risque de opérationnel se calcule de la manière suivante :

$$CS_{opérationnel} = \max\left(0{,}06.PA;0{,}006.PT\right)$$

où

- PA = total des primes acquises (brutes de réassurance) ;
- PT = total des provisions techniques.

5.3.2 Deuxième étape : agrégations des différents risques

Après avoir calculé le capital nécessaire pour chacun des quatre risques pris isolément, il y a lieu d'agréger ces différents résultats à l'aide des corrélations entre ces risques afin de prendre en compte les effets d'une concentration ou d'une diversification éventuelle.

Le QIS2 propose la matrice suivante :

$\rho_{i;j}$	Assurance	Crédit	Marché	Opérationnel
Assurance	1			
Crédit	0,25	1		
Marché	0,25	0,75	1	
Opérationnel	0,25	0,25	0,5	1

Tableau 3. Captal de solvabilité – matrice de corrélation entre les quatre types de risque

Nous dégageons alors:

$$CS = \sqrt{\sum_{i;j} \rho_{ij}.CS_i.CS_j}$$

Où i et j indicent les quatre types de risques.

Sous l'hypothèse d'indépendance entre les différents risques ($\rho_{i;j} = 0 \quad \forall i \neq j$), nous avons :

$$CS^{Indép.} = \sqrt{\sum_i (CS_i)^2}$$

Sous l'hypothèse de corrélation parfaite ($\rho_{i;j} = 1 \quad \forall i, j$), le capital requis devient :

$$CS^{Dep.} = \sum_i CS_i$$

5.4 Modèle interne de détermination du capital de solvabilité

L'approche développée ci-dessus (l'approche standard européenne) s'adresse aux compagnies qui n'ont pas la possibilité de développer des modèles plus complexes en interne. L'objectif de Solvabilité II n'est pas d'imposer une telle approche, mais bien de créer des incitants pour les compagnies d'assurance afin qu'elles comprennent et gèrent de manière optimale leurs propres risques.

Partant et dès que possible, les compagnies d'assurance utiliseront leur propre modèle, lequel reflétera adéquatement leur profil de risque.

« Un **modèle interne** consiste à simuler les flux futurs de l'entreprise de manière à déterminer une fonction reliant le niveau des fonds propres aux risques de l'entreprise. »[48]

Dans le cadre de Solvabilité II, l'objectif d'un tel modèle consiste à déterminer un capital de solvabilité, lequel, rappelons-le, peut être défini comme la Value-At-Risk ou la Tail-Value-At-Risk de la variation du capital disponible sur un horizon de une année et à un niveau de confiance de 99,5%.

Le modèle interne doit donc permettre d'aboutir à la distribution de pertes.

La fonction de répartition de la distribution de pertes est rarement connue ; ceci induisant que les quantiles ne se déterminent pas aisément analytiquement. On procédera en ce cas par simulation (simulations de Monte Carlo).

Une telle méthode nécessite de recourir à des processus stochastiques appropriés pour modéliser les actifs et simuler leur évolution dans le temps. Le passif est également déroulé année après année. Des scénarios sont générés ; ils permettent alors de calculer, à l'horizon considéré, la variable d'intérêt. Au départ des pertes dans les différents scénarios, on construit un histogramme, dont on peut calculer des quantiles.

Un modèle complet de ce type sera développé en deuxième partie de ce mémoire.

5.5 Le capital excédentaire ou surplus

Ayant déterminé le capital de solvabilité, il est possible de déterminer le **capital excédentaire** :

Capital excédentaire = Capital disponible – Capital de solvabilité

Comme son nom l'indique, le capital excédentaire représente le surplus de capital constitué par les actionnaires au-delà des exigences de solvabilité.

[48] JACQUEMIN, PLANCHET et THÉROND (2005), p. 314

6. DETERMINATION DU CAPITAL MINIMUM

6.1 Définition

Le **capital de solvabilité**, présenté dans le chapitre précédent, est le nouveau capital introduit par le projet Solvabilité II. Le projet définit également un autre niveau de capital, comparable à l'ancienne exigence de marge de solvabilité. En effet, bien que la solution ne soit pas encore définitivement arrêtée, le niveau de capital minimum pourrait correspondre à l'actuelle exigence de marge de solvabilité, moyennant l'ajout préalable de certains éléments qui restent encore à définir.

Ce capital s'appelle **capital minimum**. Il remplit une fonction toute autre que le capital de solvabilité. Ce capital, bien inférieur aux exigences en termes de capital de solvabilité, représente la limite ultime en deçà de laquelle les autorités prudentielles sont en position de prendre des mesures extrêmes (jusqu'à révocation de l'agrément).

6.2 Détermination du capital minimum

Cette section s'intéresse au calcul du **capital minimum** (CM) pour une compagnie d'assurance souscrivant uniquement des produits d'assurance **vie**. La détermination de ce seuil minimum est aisée et rapide en comparaison avec celle relative au capital de solvabilité. L'approche développée par les autorités de contrôle de Solvabilité II propose, en effet, une version simplifiée de la méthodologie adoptée pour le calcul de ce dernier.

Il s'agit, en fait, de retenir les composantes les plus importantes des risques considérées pour le calcul du capital de solvabilité – à l'exclusion du risque opérationnel – et d'imposer des exigences moins contraignantes, correspondant à un niveau de confiance plus faible.

Le capital requis est à nouveau calculé dans un premier temps par type de risque, puis agrégé, en tenant compte des corrélations. Nous reprendrons pour ce faire les deux étapes explicitées à la section précédente. Notons que seules les composantes étudiée dans la détermination du capital de solvabilité seront abordées.

6.2.1 Première étape : calcul des exigences de capital par type de risque

Le risque d'assurance/de crédit/d'actions

Le capital minimum relatif au risque de longévité, de crédit et d'actions correspond à la moitié du capital de solvabilité relatif à ces risques :

$$CM_{composante(i)} = 0{,}5.CS_{composante(i)}$$

où i indice les trois types de risques.

Le risque de taux d'intérêt

Pour ce risque de taux d'intérêt, la même approche que celle proposée pour le calcul du capital de solvabilité est utilisée. Cependant, les chocs de taux d'intérêt (« s ») sont beaucoup plus faibles :

	1-3	3-6	6-12	12-18	18+
s^{hausse}	0.3	0.25	0.2	0.15	0.15
s^{baisse}	-0.25	-0.2	-0.15	-0.1	-0.1

Tableau 4. Chocs de taux d'intérêt pour le calcul du capital minimum

Agrégation du risque marché

L'exigence en capital pour le risque de marché est alors obtenue de la manière suivante :

$$CM_{marché} = \sqrt{\left(CM_{actions}\right)^2 + \left(CM_{taux}\right)^2 + 2.\rho_{actions;taux}.CM_{actions}.CM_{taux}}$$

où $\rho_{actions;taux}$ = corrélation entre le risque de marché et le risque de taux. Elle est à nouveau fixée à 0,75.

6.2.2 Deuxième étape : agrégations des trois types de risque

Les exigences de capital pour les trois risques pris en compte sont combinées de la manière suivante :

$$CM = \sqrt{\sum_{i;j} \rho_{ij}.CM_i.CM_j}$$

où i et j indicent les trois types de risques.

A titre d'illustration, mentionnons que la matrice de corrélation testée au niveau du QIS2 est la suivante :

$\rho_{l\times c}^{CM}$	Assurance	Crédit	Marché
Assurance	1		
Crédit	0.25	1	
Marché	0.25	0.75	1

Tableau 5. Captal minimum – matrice de corrélation entre les trois types de risque

7. CONCLUSION DU CHAPITRE III

Déterminer un capital nécessite d'abord d'évaluer les actifs et les provisions techniques. Le projet Solvabilité II met en avant le principe de valorisation économique, encore appelée valorisation cohérente avec le marché.

La majorité des **actifs** financiers d'une compagnie d'assurance sont des obligations et des actions, actifs qui sont négociables sur un marché. Ces actifs sont valorisés à l'aide d'approches *mark-to-market* ; la valeur économique de tels actifs se définit alors comme le prix coté de ces actifs.

Une des pierres angulaires du projet Solvabilité II réside dans l'estimation des **passifs** d'assurance à leur valeur de marché. Le Test Suisse de Solvabilité définit la **valeur cohérente avec le marché d'un passif** comme « le montant que l'assureur devrait payer à un tiers pour qu'il accepte de reprendre ce passif dans le cadre d'une transaction conclue à des conditions de marché normales, sur un marché liquide ». Or, pour ces passifs d'assurance, il n'existe pas de marché secondaire sur lequel pourrait se conclure ces transactions. La valorisation de ces passifs d'assurance est de ce fait plus complexe que celle des actifs.

Nous distinguons deux types de passifs.

Certains passifs sont dits « **réplicables** » au regard de la possibilité de construire un portefeuille de produits financiers négociables qui reproduit exactement leurs *cash-flows*. Dans ce cas, la valeur cohérente avec le marché des passifs est celle de ce **portefeuille de réplication**. Nous avons illustré ce type de valorisation avec un contrat d'assurance vie en unités de compte avec une garantie de taux.

Néanmoins, la majorité des passifs d'assurance n'appartient pas à cette catégorie, en raison principalement de l'existence de risques biométriques. La valeur économique de ces **passifs « non réplicables »** est définie comme la somme de deux composantes : la meilleure estimation des provisions techniques et la marge de risque.

La **meilleure estimation des provisions techniques** représente l'espérance des *cash-flows* futurs relatifs à ces passifs. Cette espérance doit être calculée en utilisant les paramètres financiers (courbe des taux) et démographiques (tables de mortalité) les plus réalistes possibles. Nous avons illustré cette valorisation avec le cas de la rente viagère. La meilleure estimation des provisions techniques ne représente pas encore un prix de transfert, c'est-à-dire un montant qu'une contrepartie accepterait de reprendre ; il faut encore lui ajouter un élément, soit la marge de risque.

L'approche coût du capital définit la **marge de risque** comme le « coût de l'immobilisation du capital réglementaire requis pour liquider tous les actifs exigibles en cas de difficultés financières de l'assureur ». Cette marge est un supplément indispensable à la meilleure estimation des passifs afin que l'assureur cédant trouve acquéreur pour la branche dont il désire se défaire.

Ces actifs et provisions techniques définis à leur valeur économique, il est possible de déterminer le **capital disponible**, défini comme la différence entre la valeur de marché des actifs et celle des provisions.

Le **capital de solvabilité** est, quant à lui, le niveau de capital introduit par Solvabilité II. Il correspond au niveau de fonds propres requis afin que la compagnie ne connaisse qu'une faible probabilité de faillite. Il peut être défini comme la Value-At-Risk ou la Tail-Value-At-Risk de la variation du capital disponible sur un horizon de une année et à un niveau de confiance de 99,5%.

L'**approche standard européenne** représente une méthode simplifiée permettant d'évaluer ce capital de solvabilité. Les risques pris en considération au sein de cette approche sont les quatre catégories de risques suivantes : le risque d'assurance, le risque de crédit, le risque de marché et le risque opérationnel. Une charge de capital est d'abord calculée pour chaque risque pris isolément en appliquant un facteur à un poste du bilan valorisé économiquement. Le capital de solvabilité est alors déterminé en agrégeant les différentes charges de capital des risques considérés,et en tenant compte des corrélations entre ces risques.

Cependant, un des objectifs inhérents au projet Solvabilité II est de créer des incitants pour les compagnies afin qu'elles comprennent et gèrent, de manière optimale, leurs propres risques. Ceci se traduit en une possibilité pour les compagnies d'assurance d'avoir recours à un **modèle** développé en **interne** et destiné à adéquatement refléter leur profil de risque. Ces modèles font appel à des méthodes de simulation.

Enfin, l'autre niveau de capital défini par le projet Solvabilité II, soit le **capital minimum**, représente le seuil minimum ultime de capital à détenir. Il sera calculé en simplifiant l'approche standard de détermination du capital de solvabilité.

Partie pratique : Détermination du capital de solvabilité d’un portefeuille de rentes viagères

Enoncé

Exigences de capital sous Solvabilité I

Exigences de capital sous Solvabilité II – modèle interne

Exigences de capital sous Solvabilité II – approche standard

Introduction

La deuxième partie de ce mémoire consistera en une application pratique de la nouvelle réglementation. Nous proposerons en effet une étude de cas qui nous permettra de calculer le capital de solvabilité selon les principes de Solvabilité II.

Un **premier chapitre** présentera le **portefeuille** de rentes viagères que nous utiliserons tout au long de cette deuxième partie ainsi que les différentes hypothèses retenues. Nous détaillerons également la politique d'investissement de l'argent reçu des assurés.

Un **deuxième chapitre** calculera les exigences de capital relatives à ce portefeuille sous **Solvabilité I**, autrement dit, la marge de solvabilité.

Ensuite, dans un **troisième chapitre**, nous proposerons un modèle interne. Nous développerons pour ce faire une simulation de Monte Carlo sur un horizon de soixante ans, incluant mille scénarios financiers. Nous commencerons par expliquer comment nous simulerons le hasard, puis détaillerons les processus stochastiques retenus pour la modélisation du risque financier. Nous expliquerons ensuite la manière dont nous allons tenir compte de la mortalité, en construisant deux tables de mortalité (périodique et prospective).

Tout ceci nous permettra de procéder aux différentes valorisations nécessaires au calcul du capital de solvabilité. Il s'agira tout d'abord de calculer la valeur de marché des actifs. Dans un deuxième temps, nous déterminerons la valeur de marché des provisions techniques, somme de la meilleure estimation des provisions techniques et de la marge de risque. Nous serons alors en mesure de calculer le capital requis afin d'atteindre la probabilité de ruine cible. Nous proposerons différentes manières de calculer ce capital.

Un **quatrième chapitre** déterminera les exigences de capital sous Solvabilité II à l'aide de **l'approche standard européenne**.

Enfin, nous terminerons cette partie par une comparaison entre les différents résultats obtenus.

Chapitre I. Enoncé

Dans ce chapitre, nous présenterons le portefeuille que nous avons construit afin d'illustrer les concepts théoriques étudiés dans la partie précédente.

Nous aborderons également la politique d'investissement de l'assureur, à savoir les actifs dans lequel ce dernier investit et les proportions cibles qu'il désire maintenir entre ceux-ci.

1. LE PORTEFEUILLE

Nous considérons un portefeuille fictif de **rentes viagères** de **six cent assurés**. Ces assurés sont des hommes et des femmes âgés de **60 à 100 ans** lors de la souscription. La rente est payée annuellement par anticipation. Les arrérages de rente s'élèvent à un montant compris entre 10 000 et 27 000 €. Le taux technique est de 3,25%.

La **prime unique commerciale** pour un assuré se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$PU''=C.\ddot{a}_x + g.C.\ddot{a}_x + \alpha.PU''+ \varepsilon_1.C.\ddot{a}_x +\varepsilon_2.PU'' \quad \Leftrightarrow \quad PU''= C.\frac{\ddot{a}_x.(1+g+\varepsilon_1)}{1-\alpha-\varepsilon_2}$$

où

- C = montant de rente perçu annuellement par l'assuré ;
- $\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot {}_t p_x$ = capital constitutif de la rente viagère pour un assuré d'âge x ;
- $v^t = (1+3{,}25\%)^t$;
- ${}_t p_x$, la probabilité de survie [49] de l'âge x à l'âge x +t ;
- ω = âge ultime ;
- g = coefficient du chargement d'inventaire, proportionnel aux arrérages de rente et prélevé annuellement par anticipation (g = 0,001) ;
- α = coefficient du chargement d'acquisition, proportionnel à la prime commerciale (α = 0,03) ;
- ε_1 et ε_2 = coefficients des chargements d'encaissement ; ils comportent une partie prélevée annuellement par anticipation (proportionnelle à la rente versée en cas de vie : ε_1=0.01) et une partie prélevée lors de la conclusion du contrat (proportionnelle à la prime unique commerciale : ε_2=0,02).

[49] Ces probabilités ont été calculées à l'aide d'une table périodique que nous présentons dans une section ultérieure.

Le tableau suivant présente les huit premiers assurés.

Assuré	Age à la souscription	Sexe	Arrérage de rente	äx	Prime pure	Prime Commerciale
1	68	F	10 500	13.28	139 411	148 362
2	73	H	13 000	9.05	117 714	125 272
3	69	F	18 000	12.83	230 877	245 701
4	86	F	23 000	5.52	126 921	135 070
5	89	F	21 500	4.64	99 811	106 220
6	74	F	23 000	10.52	241 941	257 477
7	66	H	19 500	11.95	232 956	247 914
8	74	H	15 500	8.66	134 206	142 823

Tableau 6. Présentation des huit premiers assurés du portefeuille

2. POLITIQUE D'INVESTISSEMENT

2.1 Actifs d'investissement

L'argent reçu des assurés est investi dans **deux** types de **fonds** : un fonds d'actions et un fonds d'obligations gouvernementales. Il s'agit de fonds de capitalisation, qui ne versent donc aucun dividende ni coupon, mais capitalisent continuellement ces montants.

Le **fonds d'actions** est le MSCI Euro 500. Il s'agit d'un indice regroupant les actions de cinq cents grandes sociétés de quinze pays européens dont onze pays de la zone Euro. L'**indice obligataire** est le JPM EMU Government Bond Index. L'indice est constitué d'emprunts d'Etat à taux fixe émis en euros par les Etats membre de la Zone euro. Il est élaboré et calculé par JP Morgan.

Il s'agit de fonds. Autrement dit, ceux-ci n'arrivent jamais à « maturité ». Lorsque l'assureur doit honorer un paiement au passif, il devra revendre quelques parts de son fonds. Il s'expose ici à un risque, le fonds pouvant performer mal au moment de la revente. Les primes étant uniques, aucun flux positif ne viendra alimenter le passif ; il ne faudra donc jamais réinvestir de l'argent supplémentaire dans le fonds d'investissement.

2.2 Politique de rebalancement

L'assureur veille à maintenir une proportion constante de 80% de son actif investi en obligations et 20% en actions. Ces proportions s'entendent en valeur de marché. Chaque année, les deux fonds connaissent un taux de rendement propre, de sorte que la proportion cible n'est pas forcément vérifiée en fin d'année. Pour ce faire, l'assureur doit donc chaque année rebalancer son portefeuille de façon à réajuster ces proportions. Ensuite, il procède aux paiements, en veillant à vendre 20% du montant requis en actions et 80% en obligations. Et ainsi de suite …

3. HYPOTHESES

Nous nous plaçons juste après la création de ce portefeuille, en 0^+. Autrement dit, tous les assurés viennent de payer leur prime unique et, la rente étant anticipative, de recevoir leur premier arrérage. Les actifs et passifs sont évalués à leur valeur marché juste après versement des arrérages. Le graphe ci-dessous illustre les hypothèses quant aux **instants de flux et de valorisation** :

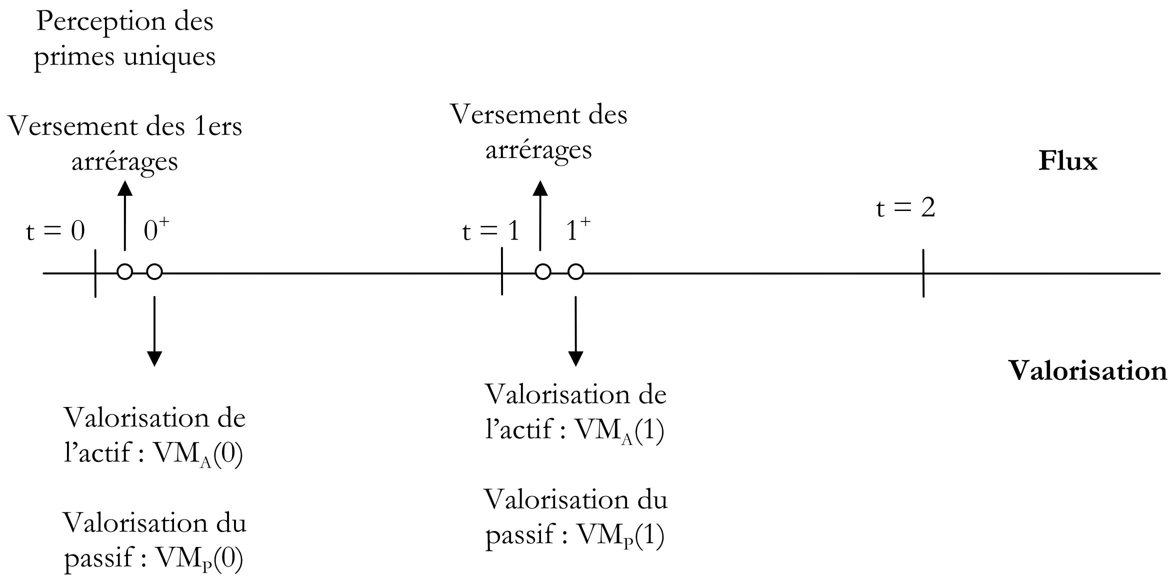


Figure 4. Hypothèses sur les instants de valorisation et de flux

Les **autres hypothèses** posées dans le cadre de cette application sont les suivantes :

- ce produit ne bénéficie pas de participations bénéficiaires ;
- les taux de rachat et de réduction sont supposés nuls ;
- il n'y a pas de réassurance ;
- nous supposons un taux d'inflation nul, que ce soit dans l'arrérage de rente perçu ou dans les frais de l'assureur ;
- …

Chapitre II. Exigences de capital sous Solvabilité I

Comme nous l'avons mentionné dans la première partie de ce travail, des réglementations prudentielles encadrent l'activité d'assurance en exigeant une marge de solvabilité minimum pour faire face aux aléas de cette activité.

Cette section s'intéresse au calcul de l'exigence de capital sous le régime Solvabilité I pour le portefeuille de rentes viagères présenté à la section précédente. Pour ce faire, nous nous attacherons à déterminer les réserves d'inventaire relatives au portefeuille concerné, ce qui nous permettra d'en déduire l'exigence de capital sous Solvabilité I.

1. CALCUL DES RESERVES STATUTAIRES

Les provisions mathématiques, représentant l'estimation de la dette de la compagnie d'assurance envers les assurés, figurent au passif du bilan. En Belgique, ce sont les provisions mathématiques non zillmérisées, soit les provisions d'inventaire qui se retrouvent au bilan de la compagnie d'assurance.

D'une manière générale, les provisions d'inventaire relatives à une rente viagère pour un assuré d'âge x en t = 0 se calculent à l'aide de la formule suivante :

- Juste avant flux (en k-0) : ${}_{k-0}V' = C.\ddot{a}_{x+k} + g.C.\ddot{a}_{x+k}$
- Juste après flux (en k+0) : ${}_{k+0}V' = C.(1+g).a_{x+k} = {}_{k-0}V' - C.(1+g)$

Dans le cadre de cette illustration, nous nous plaçons juste après le paiement des premières primes et premiers arrérages. Le montant total des réserves en 0^+ se calcule alors de la manière suivante :

$$PT(0^+) = \sum_{i=1}^{600} {}_{0+}V_i^{'}$$

Le total des provisions mathématiques en t = 0^+ s'élève à **72 451 957 €.**

2. DETERMINATION DE LA MARGE DE SOLVABILITE

Compte tenu des hypothèses que nous avons posées au niveau du portefeuille étudié la marge de solvabilité peut être déterminée de la manière suivante :

Marge de solvabilité = max (4% de la provision mathématique ; 3 millions €)

L'exigence de marge de solvabilité est ainsi de 4% . 72 451 957 €, soit 2 898 078 € ce qui est inférieur au seuil de 3 000 000€. L'exigence de capital sous Solvabilité I pour le portefeuille étudié s'élève ainsi à **3 000 000 €**.

Chapitre III. Exigences de capital sous Solvabilité II – modèle interne

Ce chapitre consistera à développer un modèle interne de calcul des exigences de capital. Nous nous baserons pour ce faire sur une **simulation de Monte Carlo**, sur un **horizon de soixante ans**, de pas de un an, incluant **mille scénarios financiers**.

A ce stade, nous retiendrons **deux types de risques** : le risque financier et le risque de mortalité. Seul le risque financier sera modélisé à l'aide de processus stochastiques. L'utilisation de tels processus implique de **simuler un hasard**, c'est pourquoi nous commencerons par expliquer la manière dont nous génèrerons les aléas, corrélés, pour les différentes sources de risque financier.

Ensuite, nous détaillerons les **modèles** retenus pour le **risque financier**.

Pour le **taux court terme**, nous proposerons un modèle de Hull & White à un facteur. Nous expliquerons précisément la dynamique retenue, puis construirons une courbe des taux initiale avant d'estimer les paramètres de la dynamique du taux. Ce taux court nous servira à calculer les valeurs du taux spot à dix ans ainsi que les facteurs d'actualisation.

Pour les deux **fonds d'investissement**, nous proposons un modèle de type Black & Scholes. Le rendement moyen du fonds d'actions sera supposé constant alors que celui du fonds obligataire sera lié au taux spot à dix ans (déterminé à l'étape précédente).

Les valeurs futures des différents processus stochastiques seront alors déterminées par une méthode de discrétisation d'Euler.

Nous expliquerons ensuite la manière dont nous allons tenir compte de la **mortalité**.

Dans un premier temps, nous construirons une table de mortalité **périodique**. Ensuite, nous élaborerons une table de mortalité **prospective**, au départ du modèle de Lee & Carter. L'objectif de ce mémoire n'étant pas de comparer différentes tables de mortalité, nous n'entrerons pas dans tous les détails de cette étape. Le lecteur intéressé trouvera davantage d'information en annexes.

Une fois ces étapes de modélisation réalisées, nous pourrons procéder aux différentes valorisations nécessaires au calcul du capital de solvabilité.

Il s'agira tout d'abord de calculer la **valeur de marché des actifs**. Celle-ci dépendra de deux éléments : les rendements des deux fonds d'investissement et les flux du passif, consistant en le paiements des arrérages de rente aux personnes encore en vie.

Dans un deuxième temps, nous déterminerons la **valeur de marché des provisions techniques**, soit la somme de la **meilleure estimation des provisions techniques** et de la **marge de risque**.

Les valeurs de marché des actifs et des provisions techniques calculés, nous serons alors en mesure de calculer le **capital requis** afin d'atteindre la probabilité de ruine cible. Nous proposerons différentes manières de calculer ce capital. Nous pourrons en effet envisager deux définitions de la ruine (opérationnelle ou comptable), deux mesures de la ruine (la VaR ou la TVaR). De même, le capital sera fonction de la table de mortalité choisie ainsi que l'horizon de temps considérés dans la modélisation.

1. GENERATION DE L'ALEA

Comme l'actif du portefeuille étudié est guidé par trois processus stochastiques corrélés (celui du taux court terme et ceux relatifs aux fonds d'actions et au fonds obligataire), il y a lieu de générer trois mouvements browniens $W(t)$ dépendants dans chacun des scénarios envisagés et pour chaque année de la projection.

Dans un premier temps, nous générons trois séries de mouvements browniens standard indépendants, notées $Z = (Z_1 ... Z_3)$ à l'aide de normales (0,1) indépendantes. En effet, $W(t) \sim N(0,1).\sqrt{t}$.

Comme nous supposons une corrélation entre les aléas, nous avons $dW_i(t).dW_i(t) = \rho_{ij}.dt$ où $i, j \in \{s; b; r\}$. Nous utilisons pour ce faire la matrice de corrélation suivante :

ρ_{ij}	**Taux court terme (r)**	**Actions (s)**	**Obligations gouvernementales (b)**
Taux court terme (r)	**1**	**-0,1**	**-0,25**
Actions (s)	**-0,1**	**1**	**+ 0,1**
Obligations gouvernementales (b)	**-0,25**	**+ 0,1**	**1**

Tableau 7. Matrice de corrélation entre les aléas

Les dépendances entre ces aléas sont introduites à l'aide de la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation ρ entre les mouvements browniens. Cette méthode consiste à déterminer la matrice triangulaire inférieure L telle que $L^t L = \rho$. Alors, si $Z = (Z_1 ... Z_3)$ est un vecteur de normales indépendantes (0,1) et $L^t L = \rho$, $N = (N_1 ... N_3) = LZ^t$ est une normale multivariée de matrice de corrélation ρ . Nous disposons ainsi de trois normales (0,1) corrélées.

Par la suite, nous noterons N_r , N_a et N_b les trois séries de normales (0,1) corrélées relatives respectivement au taux court terme, au fonds d'actions et au fonds obligataire.

2. MODELISATION DES TAUX D'INTERET

Tout modèle interne nécessite de fixer une dynamique pour les taux d'intérêt.

Dans un premier temps, nous présenterons la **dynamique** retenue pour le **taux court terme**, à savoir le modèle de Hull et White à un facteur.

Un deuxième point présentera la construction et le lissage de la **courbe des taux initiale** (taux spot continus) au départ des données de marché. La construction de la courbe initiale se fera au départ des taux Euribor et des taux swap. Le lissage sera effectué par la méthode de Nelson Siegel.

Dans un troisième point, nous estimerons les **paramètres** de la dynamique du taux au départ des données de marché.

Enfin, nous expliquerons la manière dont sont générés les taux futurs et présenterons deux variables construites au départ de cette courbe des taux dont nous aurons besoin par la suite : le **taux à 10 ans**, qui interviendra dans la modélisation du fonds obligataire, ainsi que les **facteurs d'actualisation**.

2.1 La dynamique du taux court terme

Dans le cadre de cette illustration, nous avons choisi de modéliser le taux court à l'aide du modèle de Hull & White à un facteur. L'équation d'évolution du taux court sous la mesure risque neutre est donnée par :

$$dr(t) = \left(\theta(t) - a.r(t)\right).dt + \sigma_r.dW_r(t)$$

où

- r(t) = taux d'intérêt continu instantané (taux court);
- σ_r = volatilité instantanée, supposée constante ;
- $W(t)$ = mouvement brownien standard;
- $\dfrac{\theta(t)}{a}$ = cible (mouvante) du taux ;
- a = vitesse de retour à la moyenne ;
- $\theta(t)$ = fonction déterministe à calibrer sur la courbe des taux initiale. Pour que les prix des zéro coupon générés par le modèle soient égaux à ceux du marché, il faut que :

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial t} + af^M(0,t)\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

où $f^M(0,t) = -\dfrac{\partial \ln B^M(0,t)}{\partial t}$ représente le taux forward instantané observé sur le marché.

2.2 Construction et lissage de la courbe des taux initiale

2.2.1 Construction courbe des taux

Les données dont nous disposons nous permettent de construire une courbe des taux au 13 février 2006. Par la suite, nous ferons cependant l'hypothèse que nous avons estimé la courbe au 1er janvier.

L'annexe 7 reprend les données nécessaire à cet exercice ainsi que les résultats intermédiaires.

Maturités inférieures à un an

Pour les maturités inférieures à un an, nous utilisons les taux du marché interbancaire, notés EUR_t. Ces taux sont des taux simples, qu'il s'agit de transformer en taux composés spot. Nous commençons par déterminer les facteurs d'actualisation $B(0;t)$. Sachant que le premier taux renseigné est un taux spot à un jour, que le deuxième est un taux *forward* à un jour et que les taux suivants sont des taux *forward* à deux jour, les $B(0;t)$ sont déterminés de la façon suivante : pour

- $t = \frac{1}{365}$: $B\left(0;\frac{1}{365}\right) = \left(1 + \frac{1}{365}.EUR_t\right)^{-1}$
- $t = \frac{2}{365}$: $B\left(0;\frac{2}{365}\right) = B\left(0;\frac{1}{365}\right).B^f\left(0;\frac{1}{365};\frac{2}{365}\right) = B\left(0;\frac{1}{365}\right).\left(1 + \frac{1}{365}.EUR_t\right)^{-1}$
- $t > \frac{2}{365}$: $B(0;t) = B\left(0;\frac{2}{365}\right).B^f\left(0;\frac{2}{365};t\right) = B\left(0;\frac{2}{365}\right).\left(1 + \frac{n-2}{365}.EUR_t\right)^{-1}$

Ensuite, , nous déterminons les taux composés par la relation suivante : $Y(0,t) = [B(0;t)]^{-365/n} - 1$ où n est le nombre exact de jours (convention *actual*) entre le 13 février et la maturité considérée et $B(0;t)$ le facteur d'actualisation entre l'instant 0 (13 février 2006) et l'année t.

Maturités supérieures à un an

Pour les maturités supérieures à un an, nous utilisons les taux swaps. Ceux-ci peuvent être interprétés comme des taux d'obligations cotées au pair. La relation suivante se vérifie :

$$B(0,t) + \sum_{i=1}^{t} R_{S,t}.B(0,i) = 1$$

où $R_{s,t}$ représente le taux swap pour la maturité t et $B(0;t)$ le facteur d'actualisation recherché.

Nous déterminons les facteurs d'actualisation de **façon itérative** : connaissant les $B(0;i)$, i allant de 0 à t-1, nous déterminons $B(0;t)$ de la manière suivante :

$$B(0,t) = \frac{1 - R_{S,t}.\sum_{i=1}^{t-1} B(0,i)}{1 + R_{S,t}}$$

La procédure itérative nécessite un **élément de départ**. Comme facteur de départ, nous prenons le dernier facteur déterminé à l'étape précédente, plus précisément le facteur *forward* valable entre le 15 février 2006 et le 15 février 2007.

$$B(0;1) \approx B^f\left(0;\frac{2}{365};\frac{367}{365}\right) = 0.97181$$

Procéder de la manière itérative décrite ci-dessus nécessite de déterminer des facteurs d'actualisation $B(0;t)$ pour chaque année. Nous assimilons en effet le taux swap au taux de coupon d'obligations cotant au pair qui délivre des coupons annuels. Or nous ne disposons pas des taux swap pour chacune des échéances annuelles. Pour les **taux manquants**, nous procédons par interpolation linéaire (sur les taux swap). Ainsi, si nous connaissons les taux swap aux échéances m et n (m<n) : $R_{S,m}$ et $R_{S,n}$, nous trouvons le taux à une échéance intermédiaire, soit j de la façon suivante :

$$R_{S,j} = R_{S,m} + \left[R_{S,n-} R_{S,m}\right]\frac{j-m}{n-m}$$

Une fois les différents facteurs d'actualisation connus, nous déterminerons alors le taux de la façon suivante :

$$Y(0,t) = \left[B(0;t)\right]^{-t} - 1$$

Résultat obtenu

Les deux étapes précédentes nous permettent de construire la totalité de la courbe des taux initiale :

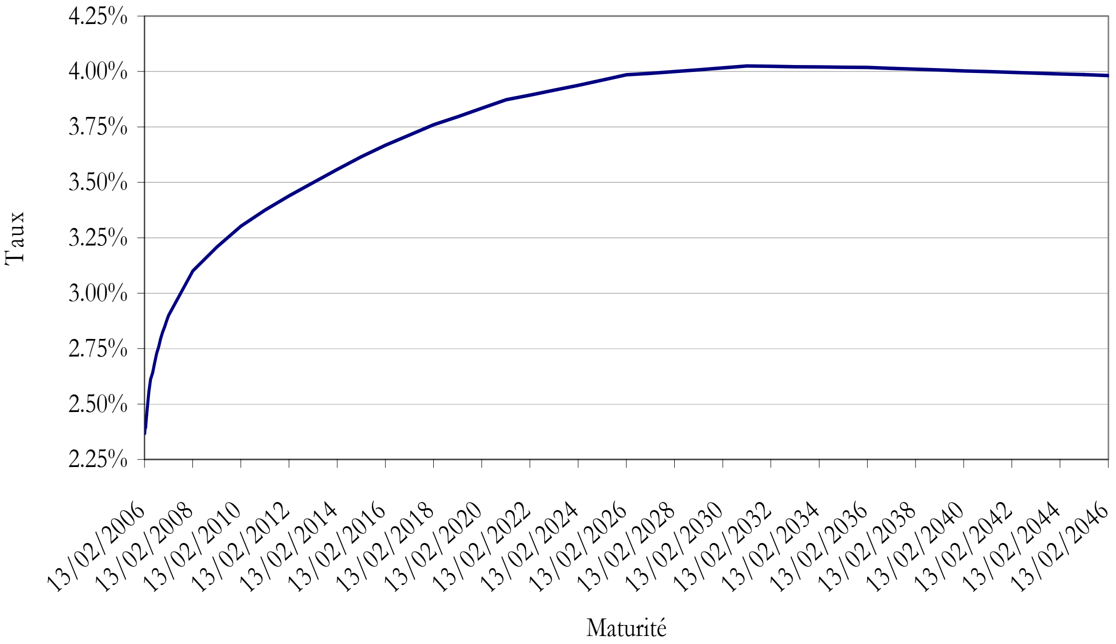


Figure 5. Courbe des taux initiale

2.2.2 Lissage par Nelson Siegel

La détermination de theta du modèle de Hull et White nécessite de dériver les taux *forward* instantanés. Or ceux-ci représentent un ensemble discret de points.

Afin de faciliter le calcul de la fonction $\theta(t)$, la courbe des taux initiale est approximée par la méthode de Nelson Siegel étendue. Selon cette méthode, l'approximation du taux *forward* instantané en 0 est donnée par :

$$f(0,t) = C_1 + C_2 e^{-kt} + C_3 t e^{-kt} + C_4 e^{-2kt}$$

Le taux annuel composé continûment en t = 0, y(0,t) , est ainsi approximé par:

$$y(0,t) = \frac{1}{t}\left\{ C_1 t + C_2 \frac{1-e^{-kt}}{k} + C_3 \frac{1-e^{-kt} - kte^{-kt}}{k^2} + C_4 \frac{1-e^{-2kt}}{2k} \right\}$$

Les constantes de Nelson Siegel sont obtenues à l'aide d'une régression sur les taux spot, en utilisant un critère de minimisation des carrés des écarts. Cette étape a été réalisée dans Matlab. Voici le résultat obtenu :

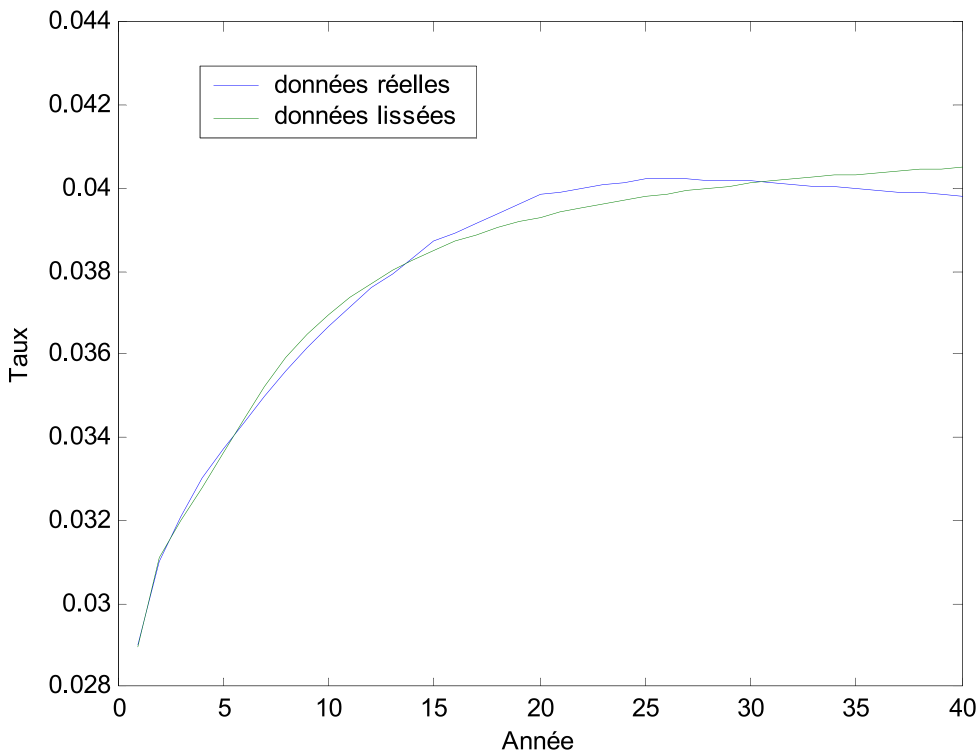


Figure 6. Lissage de la courbe des taux initiale par Nelson Siegel

Les constantes valent: C1 = 0.04172, C2 = 0.05856, C3 = -0.03607, C4 = -0.08048 et k = 0.69683.

2.3 Estimation des paramètres de Hull et White

2.3.1 Théorie

Après avoir estimé la fonction déterministe $\theta(t)$, il nous reste à déterminer les paramètres a et σ_r. L'estimation de ces deux paramètres est réalisée sur base de données historiques à l'aide d'une méthode décrite par PLANCHET et THEROND P. (2004)[50]. L'idée est de se baser sur les taux courts terme et sur les taux long terme (ces derniers reflétant mieux la réalité économique) : en comparant les variances théorique et estimée de ces taux, nous obtiendrons un système de deux équations à deux inconnues en a et σ_r.

Variance du taux court terme

Partant de la solution de l'équation de Hull & White donnée par :

$$r(t) = e^{-at}(r(0) + \int_0^t e^{as}\theta(s)ds + \int_0^t e^{as}\sigma dW_r(s))$$

où r(0) représente le taux court à l'instant 0, il peut être démontré que l'espérance et la variance du taux court sont données par :

$$E[r(t)] = e^{-at}(r(0) + \int_0^t e^{as}\theta(s)ds) \quad \text{et} \quad V[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

En négligeant le terme qui dépend du temps dans l'expression de la variance, nous trouvons : $V[r(t)] \approx \frac{\sigma^2}{2a}$ (première équation).

Variance du taux long terme

Dans le modèle de Hull & White, le prix en t d'un zéro coupon venant à maturité en T peut s'écrire de la manière suivante :

$$P(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}$$

où $B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$ et $A(t,T) = \ln(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}) + B(t,T)f(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a(T-t)})^2(1 - e^{-2at})$

Le prix d'un zéro coupon peut également s'écrire comme une fonction du taux spot de même maturité : $P(t,T) = e^{-(T-t).y(t,T)}$

[50] Cette méthode est également décrite dans le mémoire de Valérie GOFFIN (2005) intitulé *Modélisation des actifs financiers d'une compagnie d'assurance dans un cadre de gestion actif - passif* sur lequel nous nous basons.

En égalant ces deux expressions du prix de zéro coupon, il vient : $y(t,T) = \dfrac{A(t,T) - B(t,T).r(t)}{-(T-t)}$

La variance du taux spot (valant de t à T) peut ainsi être déterminée :

$$Var[y(t,T)] = \left(\frac{B(t,T)}{T-t}\right)^2 .Var[r(t)] \approx \frac{\sigma^2}{2a^3.(T-t)^2}.\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2 . \text{ (deuxième équation)}$$

Système à résoudre

Les paramètres a et σ_r sont ainsi déterminés en égalant les variances historiques aux variances théoriques. Il s'agit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} Var[r(t)] \approx \dfrac{\sigma_r^2}{2.a} \\ Var[y(t;T)] \approx Var[r(t)].\dfrac{\left(1-e^{-(T-t).a}\right)^2}{(T-t)^2.a^2} \end{cases}$$

2.3.2 Choix des données et résultats

Pour effectuer notre estimation, il nous faut un historique du taux court ainsi qu'un historique du taux à dix ans. Nous avons choisi les données suivantes[51] :

- taux court terme : taux interbancaire (EURIBOR) à 1 mois ; noté r(t) ;
- taux à dix ans : taux des obligations linéaires belges à 10 ans[52] ; noté y(t ; t+10).

L'historique pris en compte considère la période de janvier 1999 au 15 février 2006. Les données sont mensuelles. L'annexe 6 présente ces données de façon graphique.

Nous obtenons les résultats suivants :

a	0,0484
σ_r	0,0102

Tableau 8. Estimation des paramètres du modèle de Hull et White

Sur base de l'historique considéré, le niveau cible estimé des taux est de 4,84% et la volatilité du taux court terme est de 1,02%.

51 Source des données : BNB.

52 Taux de rendement moyens des emprunts ayant encore une durée à courir de 10 ans.

2.4 Simulation des taux futurs et calculs dérivés

2.4.1 Simulation des taux courts futurs

Les taux futurs sont simulés par discrétisation de pas d'un an :

$$r(t) = (1-a).r(t-1) + \theta(t-1) + \sigma_r.W_r$$

où pour rappel W_r représente une normale centrée réduite.

Comme expliqué précédemment, le taux court terme nous permet tout d'abord d'estimer les prix des zéro coupon nécessaires pour l'actualisation des flux et ensuite de calculer les taux à dix ans futurs qui interviendront dans l'indice obligataire.

2.4.2 Prix des Zéro Coupon

Les taux simulés permettent de reconstituer le prix des obligations zéro coupon. En effet, à partir de la relation $B(t,T) = E_Q[\exp(-\int_t^T r_s ds) \mid \Im_t]$, il peut être démontré que le prix d'un zéro coupon en t est lié au taux court en t par la relation explicite suivante :

$$B(t,T) = \frac{B^M(0,T)}{B^M(0,t)} \exp\left\{ \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} f^M(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1-e^{-2at})\left(\frac{e^{-a(T-t)}-1}{a}\right)^2 + \frac{e^{-a(T-t)}-1}{a} r_t \right\}$$

Les prix de ces zéro coupon nous serviront à l'actualisation des flux.

2.4.3 Taux à dix ans

Le taux à dix ans est obtenu au départ des prix de zéro coupon $B(t,t+10)$. En effet,

$$y(t,t+10) = \frac{-\ln\left(B(t,t+10)\right)}{10}$$

3. MODELISATION DE L'ACTIF

L'actif considéré dans le cadre de cette illustration est composé d'un fonds d'actions et d'un fonds obligataire.

3.1 Modélisation de l'indice d'actions

Le premier actif est un fonds d'actions. Il s'agit dans notre exemple du MSCI Euro 500. Le graphe ci-dessous reprend l'évolution de cet indice pour la période allant du 26 mars 2001 au 15 février 2006. La valeur de ce fonds a connu une baisse importante au cours de l'année 2001 et 2002, suite à la crise des marchés financiers.

Figure 7. Evolution du fonds d'actions de 2001 à 2006

3.1.1 Equation d'évolution

Ce fonds est modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$dS(t) = \mu_s.S(t).dt + \sigma_s.S(t).dW_s(t)$$

où

- $S(t)$ = valeur du fonds au temps t ;
- μ_s = rendement moyen du fonds ;
- σ_s = volatilité du rendement du fonds ;
- $W_s(t)$ = mouvement brownien standard.

3.1.2 Estimation des paramètres μ et σ

L'estimation du rendement moyen du fonds d'actions et de sa volatilité est réalisée grâce aux données historiques dont nous disposons.

La solution de l'équation d'évolution du fonds est donnée par :

$$S(t) = S(0).\exp\left[\left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right).t + \sigma_s.W_s(t)\right]$$

Le rendement du fonds entre t-1 et t est donné par :

$$rdt_s(t) = \ln\frac{S(t)}{S(t-1)} = \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) + \sigma_s\left(W_s(t) - W_s(t-1)\right)$$

Au départ de l'historique du cours, journalier, nous identifions :

- $\sigma_{s,hist}$: l'écart type de l'historique des $rdt_s(t)$;
- $\bar{r}_{s,hist}$: la moyenne historique des $rdt_s(t)$.

Soient 240 le nombre de jours ouvrables dans l'année. La variance (annuelle) est alors déterminée :

$$\sigma_s = \sigma_{s,hist}.\sqrt{240}$$

Le rendement moyen du fonds est déterminé au départ de la relation :

$$\bar{r}_{s,hist}.240 = \mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}$$

Nous avons réalisé l'estimation des paramètres de rendement et de volatilité de l'indice concerné sur différentes périodes :

	Estimation à partir du			
	26 mars 01	1er janvier 2002	1er janvier 2003	1er janvier 2004
μ_s	0.0193	**0.0310**	0.1433	0.1513
σ_s	0.1912	**0.1838**	0.1421	0.1004

Tableau 9. Estimation des paramètres du fonds d'action

Les valeurs des paramètres μ_s et σ_s sont fortement influencées par la période au cours de laquelle ceux-ci sont estimés. Nous choisissons de considérer les résultats des estimations relatives à la période 2002 – 2006. Cette période nous permet d'incorporer une certaine prudence dans nos estimations, car elle inclut une crise financière. Il serait en effet trop optimiste de considérer un rendement supérieur à 10%.

3.2 Modélisation de l'indice obligataire

L'indice obligataire est le JPM EMU Government Bond Index. Le graphe ci-dessous reprend l'évolution de ce fonds pour la période courant du 1er janvier 2000 au 15 février 2006.

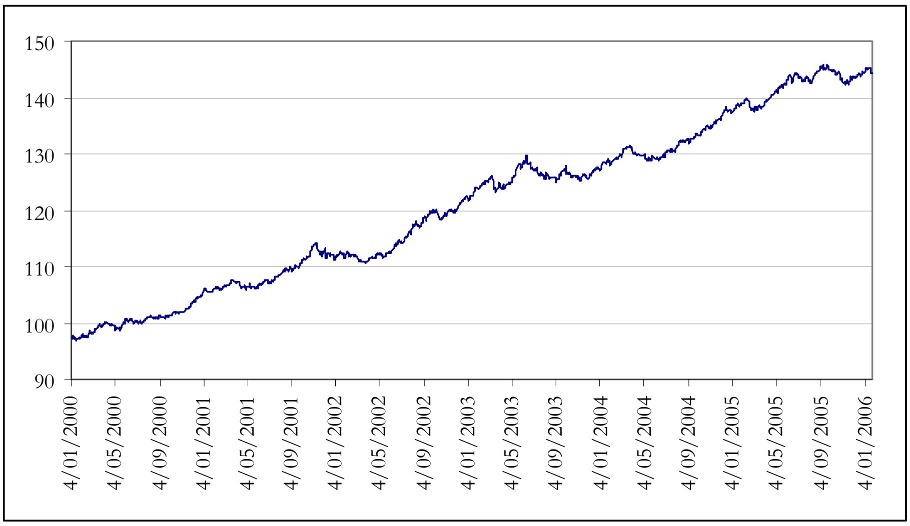


Figure 8. Evolution du fonds obligataire de 2000 à 2006

3.2.1 Equation d'évolution

Cet indice est également modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$dB(t) = \mu_b.B(t).dt + \sigma_b.B(t).dW_b(t)$$

où

- $B(t)$ = valeur du fonds au temps t ;
- μ_b = rendement moyen du fonds ;
- σ_b = volatilité du rendement du fonds ;
- $W_b(t)$ = mouvement brownien standard.

Une différence est cependant introduite par rapport à la modélisation du fonds d'actions : le rendement moyen de l'indice obligataire est lié au taux à dix ans. On a ainsi :

$$\mu_b = y(t;t+10) + \lambda_b$$

où

- $y(t,t+10)$ = taux à 10 ans à l'instant t ;
- λ_b = prime de risque du fonds par rapport au taux à dix ans.

3.2.2 Estimation des paramètres λ et σ

La méthode d'estimation des paramètres est identique à celle présentée dans le paragraphe précédent. A nouveau, nous calculons le rendement moyen et la volatilité du fonds obligataire pour différentes périodes. Les résultats sont présentés ci-dessous.

	Estimation à partir de				
	2000	2001	2002	2003	2004
σ_b	0.0319	0.0325	0.0326	0.0322	**0.0292**
μ_b	0.0613	0.0592	0.0597	0.0521	**0.0002**

Tableau 10. Estimation des paramètres du fonds obligataire (1)

Il nous faut encore déterminer λ_b, la prime de risque par rapport au taux à dix ans. Ne disposant pas des taux sans risque (déterminés à partir des taux swap) pour tout l'historique considéré, nous approximons le taux à dix ans passé par le rendement des obligations linéaires ayant une maturité de dix ans. Nous déterminons alors la prime de risque en soustrayant, au rendement moyen, le taux moyen à dix ans :

	Estimation à partir de				
	2000	2001	2002	2003	2004
μ_b	0.0613	0.0592	0.0597	0.0521	0.0002
$\overline{y}(t,t+10)$	0.0458	0.0435	0.0418	0.0390	0.0378
λ_b	0.0155	0.0157	0.0180	0.0132	**- 0.0375**

Tableau 11. Estimation des paramètres du fonds obligataire (2)

Les résultats de l'estimation des paramètres sont moins influencés par la période d'observation que dans le cas du fonds d'actions. L'estimation sur la dernière période offre cependant des résultats forts différents (beaucoup moins optimistes). La prime de risque est en effet négative sur cette période : le fonds a moins bien performé que le taux à 10 ans.

Nous restons dans notre optique de prudence et choisissons dès lors cette dernière estimation pour notre fonds obligataire.

3.3 Simulation des valeurs futures des actifs

La simulation des deux fonds d'investissement est réalisée, comme pour le taux court terme, à l'aide d'une **discrétisation** d'Euler. Nous procédons par discrétisation de pas de un an :

- Pour le fonds d'action : $S(t) = S(t-1).\exp\left((\mu_s - 0{,}5.\sigma_s^2) + \sigma_s.N_s\right)$

- Pour le fonds obligataire : $B(t) = B(t-1).\exp\left((y(t-1,t+9) + \lambda_b - 0{,}5.\sigma_b^2) + \sigma_b.N_b\right)$

Les deux graphes ci-dessous représentent l'évolution des deux fonds d'investissement sur une période de 60 ans et pour dix scénarios.

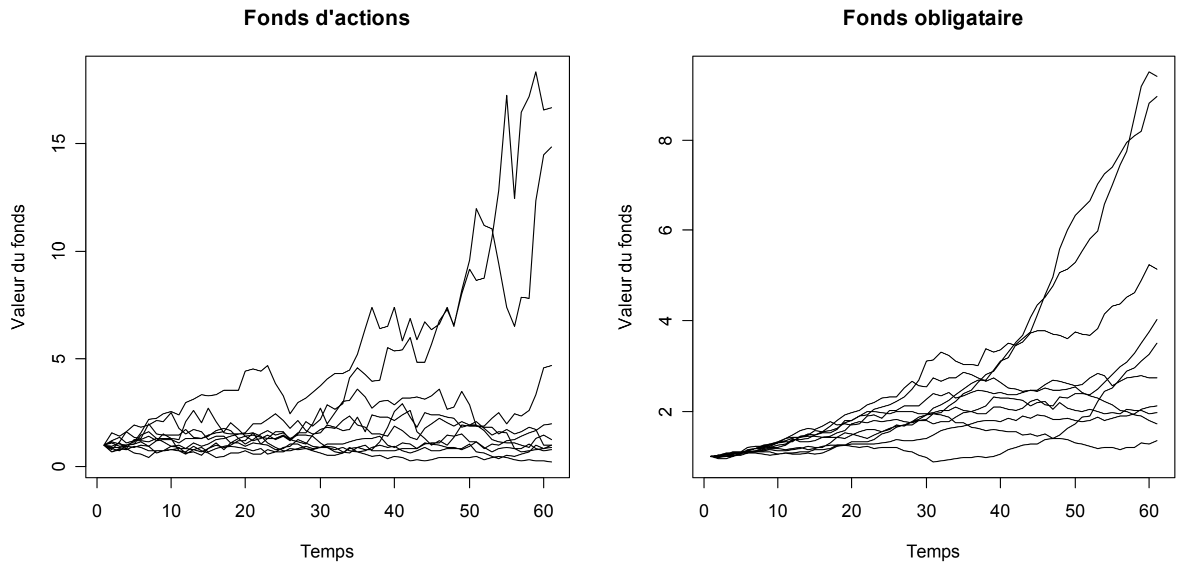


Figure 9. Simulation de l'évolution des deux fonds dans dix scénarios.

4. MODELISATION DU RISQUE DE MORTALITE

Outre le risque de marché décrit ci-dessus, nous nous intéressons également au risque de mortalité. Nous proposons de comparer deux façons de le prendre en compte : l'utilisation de tables périodiques ou de tables prospectives.

4.1 Données

Afin d'assurer la comparabilité des modèles ainsi créés, nous les générons à partir des mêmes données historiques, obtenues sur le site www.mortality.org. Comme il s'agit de données relatives à la population générale, la sous mortalité des rentiers est donc ignorée.

Nous modélisons la mortalité au départ des taux instantanés de mortalité (plus exactement, leur logarithme). Les taux de mortalité historiques sont estimés au départ des nombres de décès D_{xt} et des expositions au risque E_{xt} par âge (x) et par année (t) : $\hat{\mu}_x(t) = \frac{D_{xt}}{E_{xt}}$.

Cette estimation repose sur l'hypothèse importante de constance des taux de mortalité:

- par âge (table périodique) : $\mu_{k+\xi} = \mu_k \qquad \forall k \in \mathrm{N} \quad 0 < \xi \leq 1$

- par âge et année (table prospective) : $\mu_{k+\xi}(t+\tau) = \mu_k(t) \qquad \forall k \in \mathrm{N} \quad 0 < \xi ; \tau \leq 1$

Pour la Belgique et dans le cas qui nous intéresse, nous utilisons les données de 1955 à 2002 (dernière année disponible), pour les âges allant de 60 à 110 ans[53].

4.2 Construction de tables de mortalité périodiques[54,55]

Cette partie s'intéresse à la construction d'une table de mortalité périodique pour la Belgique. Pour ce faire, nous utilisons la dernière année disponible, soit l'année 2002. Il s'agira d'une table statique c'est-à-dire qui ne tient pas compte d'une évolution de la mortalité dans le temps

Pour réaliser cette table périodique, nous allons procéder en deux étapes : le lissage de la dernière année disponible et la fermeture de la table afin de disposer des informations sur la mortalité entre 60 et 110 ans.

---

[53] Nous nous intéressons à des rentes viagères pour des individus âgés de minimum 60 ans, il est donc inutile de considérer les âges inférieurs à 60 ans.

[54] D'après DELWARDE et DENUIT (2006), pp.85 et suivantes

[55] Le code R relatif à cette partie se trouve en annexe 7.

4.2.1 Lissage de la dernière année disponible

Principes

La première étape consiste à lisser les données de l'année considérée. Nous utilisons la méthode **Loess**, une méthode de régression linéaire locale, basée sur le critère des moindres carrés pondérés. Le modèle de base est le suivant :

$$\ln \hat{\mu}_x = f(x) + \varepsilon_x$$

où les erreurs ε_x sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à σ^2. La seule exigence au niveau de la fonction $f(x)$ est que celle-ci soit régulière, c'est-à-dire pouvant être localement bien estimée par sa tangente.

Notons que le lissage est effectué jusqu'aux âges pour lesquels les données sont disponibles, à savoir 106 ans pour les hommes et 108 pour les femmes. Pour compléter ces données, nous effectuerons, suite au lissage, une fermeture de la table.

Choix du paramètre de lissage

La méthode Loess se base sur un paramètre de lissage qui détermine le nombre de points voisins à considérer. Nous testons différentes valeurs de ce paramètre comprises entre 0.1 et 0.9. Le choix du paramètre optimal de lissage, c'est-à-dire celui qui ajuste au mieux les données tout en utilisant un nombre acceptable de paramètres, est fait à l'aide de l'analyse de la somme des carrés des résidus et du nombre équivalent de paramètres, quantités qu'il faut minimiser. Les résultats de cette analyse se trouvent en annexe 8. Tant au niveau des hommes qu'au niveau des femmes, nous retenons un paramètre de lissage de 0.4. Les résultats obtenus après cette première étape sont les suivants :

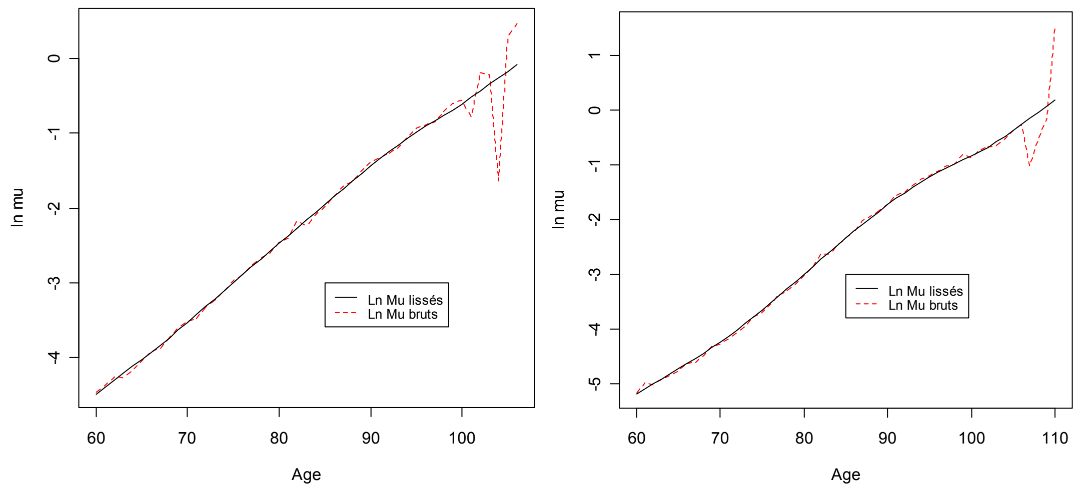


Figure 10. Construction d'une table de mortalité périodique (hommes à gauche et femmes à droite) – 1ère étape (méthode Loess)

4.2.2 Fermeture de la table

Nous disposons maintenant de données lissées jusqu'à 106 ans pour les hommes et jusqu'à 108 ans pour les femmes. Il nous reste à résoudre le problème de fin de table. En effet, le fait que nos observations ne montrent personne au-delà de 106 ans pour les hommes et de 108 ans pour les femmes ne signifie pas qu'il est impossible que des individus atteignent ces âges. Par souci de prudence, nous avons donc procédé à une fermeture de la table, afin de ne pas négliger la longévité des centenaires.

La fermeture des tables s'effectue à l'aide d'un modèle de régression log-quadratique présenté par DENUIT et GODERNIAUX[56]:

$$\ln \hat{q}_x = a + bx + cx^2 + \varepsilon_x$$

où les erreurs εx sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2.

Deux contraintes sont posées :

- La première contrainte consiste à imposer un âge limite. Dans le cas de la Belgique, un âge limite de 130 ans nous paraît être raisonnable : $q_{130} = 1$;

- La seconde contrainte est une contrainte d'inflexion, nécessaire pour imposer une tangente horizontale en fin de table : $q'_{130} = 0$.

En imposant ces deux contraintes, le modèle devient : $a + bx + cx^2 + \varepsilon_x = c(130^2 - 260x + x^2)$

Nous appliquons ce modèle log-quadratique à partir de 90 ans[57].

Sous l'hypothèse de constance des taux instantanés de mortalité par morceaux, nous déterminons alors les logarithmes des taux instantanés de mortalité par la relation suivante : $\hat{\mu}_x = -\ln(1 - \hat{q}_x)$.

Les probabilités de survies sont alors déterminées de la manière suivante : ${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+\xi} . d\xi \right)$

[56] D'après DELWARDE et DENUIT (2006), pp.116 et suivantes

[57] Pour garantir le raccord autour de l'âge de 90 ans (entre les probabilités de départ et la courbe lissée), nous réalisons une moyenne géométrique des probabilités de décès pour les âges de 85 à 95. Cette moyenne géométrique porte sur 7 valeurs (3 à gauche, 3 à droite, plus la valeur initiale).

4.3 Construction de tables de mortalité prospectives

Afin de tenir compte de l'aspect dynamique de l'allongement de la durée de vie, nous utilisons une table prospective relative à la population belge, construite à l'aide du modèle de Lee & Carter.

Une table de mortalité prospective projette dans le futur la tendance temporelle passée de la mortalité. Elle se base donc sur l'hypothèse que la mortalité de demain évoluera comme elle a évolué dans le passé.

Il s'agit, tout comme dans le cas d'une table de mortalité périodique, d'une table déterministe : toute l'évolution future de la mortalité est prévue et connue lors de la construction de la table.

Le code R utilisé pour la création des tables de mortalité prospectives à l'aide du modèle de Lee & Carter se trouve en annexe 9.

4.3.1 Le modèle de Lee & Carter

Lee & Carter proposent le modèle suivant de décomposition des taux de mortalité :

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}$$

où les erreurs ε_x sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Normale(0 ; σ^2).

Les deux premiers paramètres α et β dépendent de l'âge et le troisième κ dépend uniquement du temps. Ces paramètres peuvent s'interpréter comme suit :

- α_x représente la moyenne de $\ln\mu_x(t)$ à travers le temps ;
- β_x indique la sensibilité de $\ln\mu_x(t)$ à l'âge x aux variations de l'indice temporel κ_t. Plus ce paramètre est grand, plus la mortalité est variable au cours du temps ;
- κ_t reflète l'évolution temporelle de la mortalité.

Comme un seul paramètre dépend du temps, il s'agira, pour déterminer les taux de mortalité futurs, de projeter ce seul paramètre.

Pour assurer l'identifiabilité du modèle, les β_x et κ_t doivent satisfaire deux contraintes : $\sum_x \beta_x = 1$ et $\sum_t \kappa_t = 0$.

4.3.2 Préalable : fermeture des tables

Il est nécessaire de fermer la table avant de procéder à l'évaluation des paramètres. En effet, à partir des âges élevés, certaines données sont manquantes, ce qui pose problème pour l'estimation des paramètres de Lee & Carter (qui repose sur une décomposition en valeurs singulières). De plus, les données aux âges élevés peuvent être très erratiques car elles reposent sur un nombre peu élevé d'observations. Enfin, dans une table brute, la variance des quotients de mortalité augmente en fin de table, alors que le modèle de Lee & Carter suppose que σ^2 ne dépend pas de l'âge.

La fermeture des tables s'effectue sur les logarithmes des quotients de mortalité à l'aide du même modèle log-quadratique que celui utilisé pour les tables périodiques. S'ajoute cependant un indice temporel ; il s'agit en effet de fermer les tables pour toutes les années de l'historique :

$$\ln \hat{q}_x(t) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \varepsilon_{xt}$$

où les erreurs ε_x sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale (0 ; σ^2).

Nous décidons à nouveau de fermer la table à 130 ans (âge ultime de la table), en appliquant ce modèle aux âges 90 à 130.

L'annexe 10.1 reprend les graphes des logarithmes des quotients de mortalité bruts et lissés pour toutes les années. Voici les résultats pour l'année 2002 uniquement :

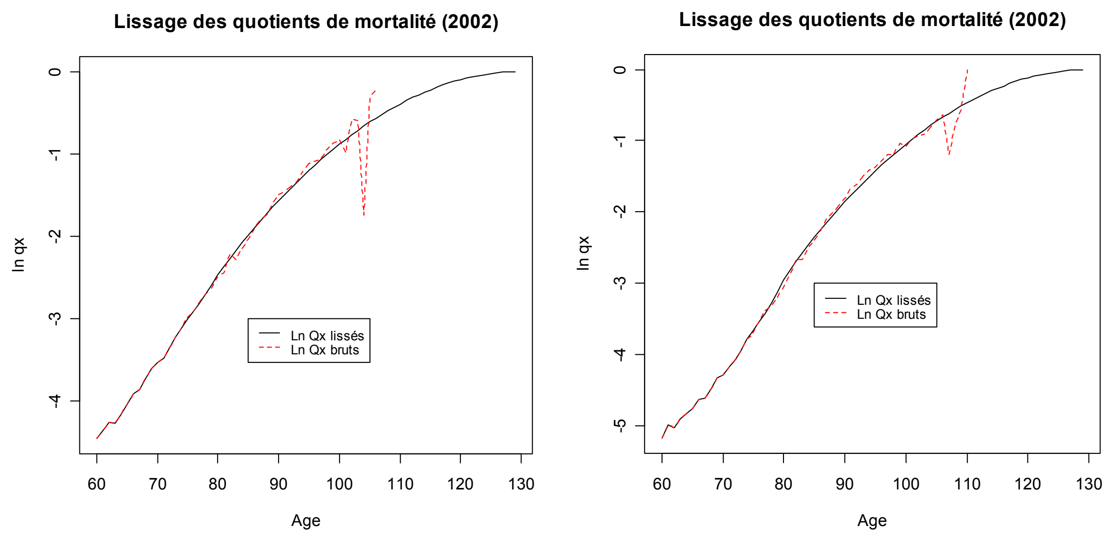


Figure 11. Lissage des quotients de mortalité pour l'année 2002 (hommes à gauche et pour femmes à droite)

4.3.3 Estimation des paramètres du modèle de Lee & Carter

Première estimation

L'estimation des paramètres du modèle de Lee & Carter s'effectue par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire en minimisant : $\sum_{x,t} (\ln \hat{\mu}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$.

Les estimateurs α_x sont donnés par : $\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \ln \hat{\mu}_x(t)$.

Les estimateurs de β_x et $\varkappa_t$ peuvent être déterminés par une décomposition en valeurs singulières de la matrice Z dont les éléments z_{xt} valent : $z_{xt} = \ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x$. En notant λ_i la $i^{ème}$ valeur singulière et v_i et u_i les vecteurs correspondants, respectivement de dimensions x_{max}-x_{min}+1 et t_{max}-t_{min}+1, nous obtenons :

$$\hat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}} \quad \text{et} \quad \hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_j v_{1j} \right) u_1$$

Les résultats obtenus pour les trois paramètres (alphas, betas et kappas) sont les suivants :

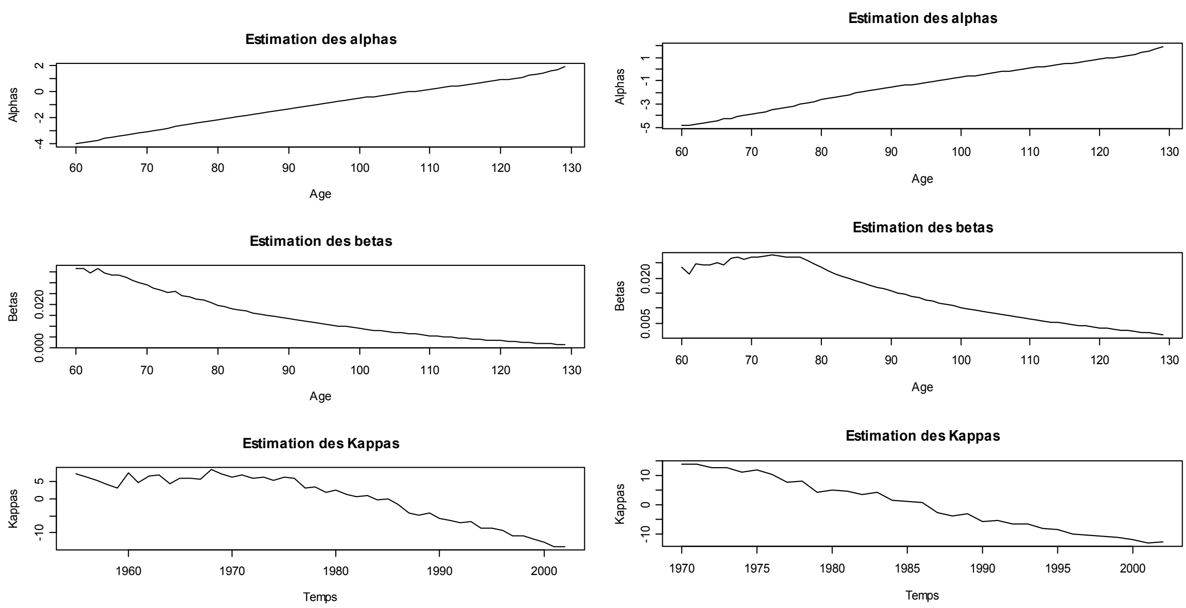


Figure 12. Résultats de Lee & Carter (hommes à gauche et pour femmes à droite)

Les **alphas**, qui représentent la mortalité moyenne, évoluent selon la forme générale des forces de mortalité, soit une tendance quasi linéaire et croissante en fonction de l'âge. Le paramètre **beta** tend vers 0 quand l'âge augmente, tant pour les hommes que pour les femmes. Enfin, les **kappas**, estimation de la tendance temporelle de la mortalité, décroissent, pour les hommes comme pour les femmes, ce qui témoigne d'une baisse de la mortalité au cours du temps.

Qualité du modèle

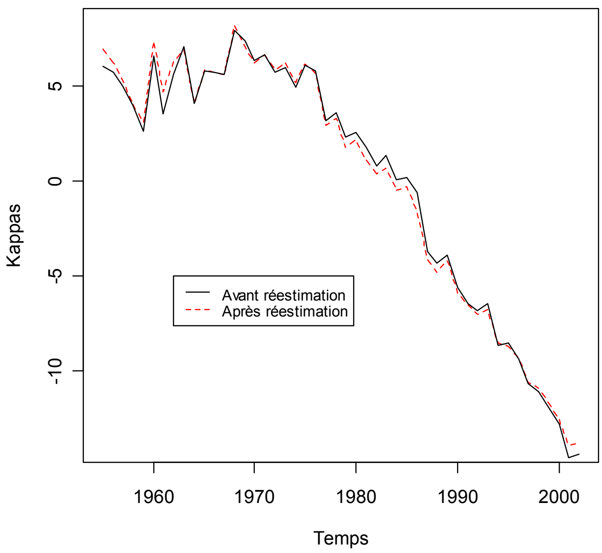
Nous présentons une mesure qui permet d'apprécier la qualité du modèle, le **taux d'inertie**. Ce taux permet d'évaluer la précision de l'approximation du premier ordre effectué par la décomposition en valeurs singulières. Il est défini par : $\pi_1 = \dfrac{\lambda_1}{\sum_i \lambda_i}$.Plus il est proche de 100%, plus l'approximation est précise. Nous obtenons une inertie de 58% au niveau des hommes et de 69% pour les femmes.

Réestimation des kappas

La première estimation des kappas n'est pas optimale car il existe une différence entre le nombre de décès estimé par le modèle et le nombre de décès observé[58]. Il est alors nécessaire de réestimer les kappas afin de reproduire exactement le nombre de décès observés pour chaque année : $\sum_x D_{xt} = \sum_x E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$. Afin de respecter les deux contraintes de départ, les estimateurs sont adaptés une seconde fois de la manière suivante :

$$\beta_x^* = \hat{\beta}_x \qquad \kappa_t^* = \hat{\hat{\kappa}}_t - \overline{\kappa} \quad \text{et} \quad \alpha_x^* = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \overline{\kappa}$$

Les deux graphes suivant présentent la valeur du paramètre kappa avant et après réestimation :



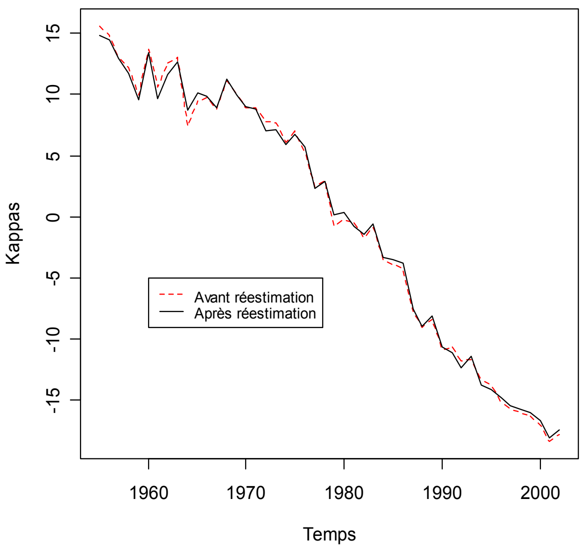


Figure 13: Estimation et réestimation des kappas pour les hommes (à gauche) et pour les femmes (à droite)

58 Les graphes en annexe 10.2 mettent en évidence la différence entre le nombre de décès observé et le nombre de décès reconstitué par le modèle.

4.3.4 Projection des kappas[59,60]

L'étape suivante consiste à projeter les kappas afin d'estimer la mortalité future. Ces kappas projetés nous permettront en effet de déterminer les nouveaux taux de mortalité à utiliser dans les tables prospectives. Nous utilisons pour ce faire des outils de séries chronologiques.

La série de départ n'est pas stationnaire[61], c'est pourquoi nous travaillerons sur la série différenciée.

Choix du meilleur modèle de projection pour les hommes

Le choix du meilleur modèle ARIMA se base sur l'analyse des autocorrélogrammes total et partiel des séries différenciées des kappas.

La première autocorrélation totale est significative, tout comme la troisième. Il en va de même pour les autocorrélations partielles. Parmi les modèles les moins complexes, nous testons un modèle autorégressif d'ordre 1 ainsi qu'un modèle de moyenne mobile d'ordre 1.

La comparaison des critères d'Akaike ainsi que ceux de Schwartz, à minimiser, nous font retenir le modèle MA(1). Nous vérifions que les autocorrélogrammes des résidus ne présentent plus aucune structure.

Le modèle obtenu est un modèle ARIMA (0,1,1) :

$$\nabla_1(\kappa_t) = -0{,}7868 - 0{,}9899.\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

où

- les ε_t sont iid et $\sim Nor(0,\sigma^2)$
- $\nabla_1(\kappa_t)$ représente la série différenciée (d'un ordre 1) des kappas.

[59] L'annexe 10.3 présente les détails de cette étape.

[60] Cette partie est effectuée grâce au logiciel EViews 3.1.

[61] Trois conditions sont nécessaires à la stationnarité d'une série chronologique :

- Valeur espérée ($E[\kappa_t]$) indépendante de la période observée ;
- Variance des observations (Var $[\kappa_t]$) indépendante de t ;
- Cov $[\kappa_t , \kappa_{t-k}]$ identique $\forall t$.

… or les graphes des kappas indiquent clairement une tendance décroissante au cours du temps (voyez supra figure 13).

Choix du meilleur modèle de projection pour les femmes

Un raisonnement identique est suivi pour les femmes. Nous choisissons également un modèle moyenne mobile d'ordre 1 sur la série différenciée, un modèle ARIMA(0,1,1). En voici l'équation :

$$\nabla_1(\kappa_t) = -0{,}8871 - 0{,}5487.\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Résultats des projections

Nous projetons alors la tendance de mortalité (contenue dans le facteur kappa) dans le futur au départ des équations définies ci-dessus. Voici les résultats obtenus pour les hommes (à gauche) et les femmes (à droite):

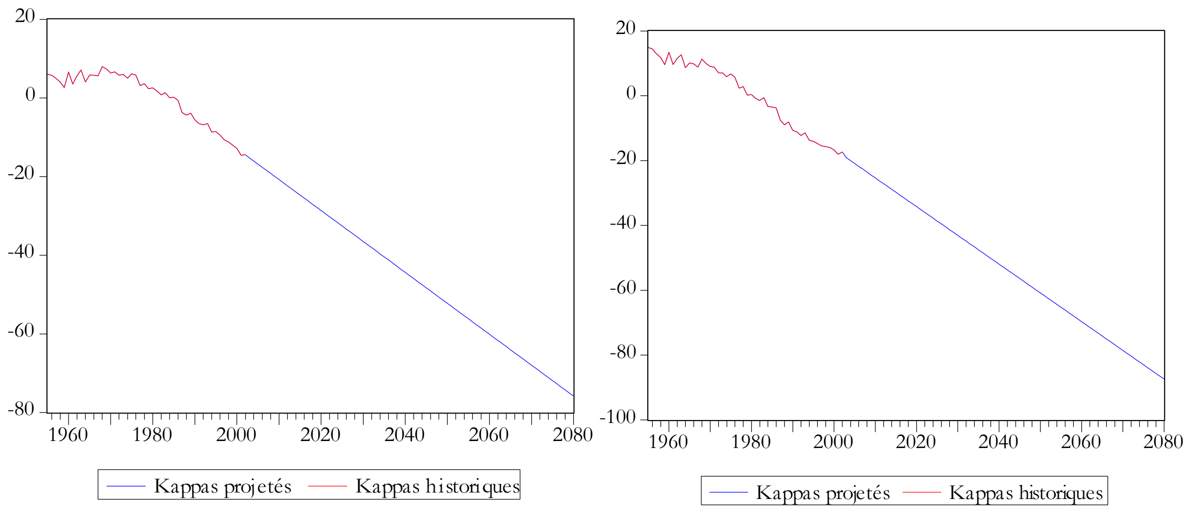


Figure 14. Projection des kappas chez les hommes (gauche) et les femmes (droite)

4.3.5 Table de mortalité prospective

Une fois la composante de Lee & Carter dépendant du temps projetée dans le futur, nous pouvons alors reconstituer les logarithmes des taux de mortalité futurs :

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t$$

L'annexe 10.4 présente graphiquement les logarithmes des taux de mortalité futurs obtenus.

5. VALEUR DE MARCHE DES ACTIFS

Au cours des pages précédentes, nous avons longuement explicité la modélisation des différents éléments stochastiques considérés dans notre simulation. Nous sommes à présent en mesure de calculer les différents agrégats nécessaires à la détermination du capital de solvabilité[62]. Pour rappel, ceci implique dans un premier temps de valoriser les actifs ainsi que les passifs. Le projet Solvabilité II impose que ces agrégats soient calculés à une valeur cohérente avec le marché.

Nous renvoyons ici le lecteur au graphe « Evaluation économique du bilan » présenté dans le chapitre III de la première partie.

Commençons par expliquer la méthode de valorisation des **actifs** dans le cadre de notre illustration. Cette valeur de marché sera déterminée d'une manière *mark-to-market*. Les actifs financiers considérés dans notre exemple étant cotés, une valeur de marché est constamment disponible pour chacun des deux actifs.

L'évolution de la valeur de marché des actifs dépend :

- du rendement des deux fonds qui le composent ;
- des flux du passif, qui viennent le réduire.

Nous posons l'hypothèse,rappelons-le, que les flux sont versés juste avant valorisation des agrégats bilantaires. Dans ce cas, la valeur de marché de l'actif évolue de la façon suivante :

$$VM_A(t) = VM_A(t-1).rdt_A(t) - flux_P(t)$$

où

- $VM_A(t)$ = valeur marché de l'actif en t ;
- $rdt_A(t)$ = rendement de l'actif entre t-1 et t ;
- $flux_P(t)$ = flux du passif (somme des arrérages de rente) au début de l'année t.

L'évolution de la valeur de marché de l'actif est fonction du scénario ainsi que de la table de mortalité considérés.

Etudions maintenant ces deux variables qui font évoluer l'actif.

62 L'annexe 11 reprend le code R nécessaire à ces étapes.

5.1 Rendement de l'actif

Le rendement du portefeuille pour un scénario et un temps t fixés peut être calculé au départ des rendements des deux fonds d'investissement, grâce à l'hypothèse de proportions constantes investies dans chacun des deux fonds (80% dans le fonds obligataire et 20% dans le fonds d'action).

Notons

- $rdt_s(t) =$ rendement du fonds d'actions entre t-1 et t
$$= \ln\left(\frac{S(t)}{S(t-1)}\right) = \left(\mu_s - 0{,}5.\sigma_s^2\right) + \sigma_s.N_s$$
- $rdt_b(t) =$ rendement du fonds obligataire entre t-1 et t
$$= \ln\left(\frac{B(t)}{B(t-1)}\right) = \left(y(t-1,t+9) + \lambda_b - 0{,}5.\sigma_b^2\right) + \sigma_b.N_b$$

En t-1 (à l'instant de valorisation, c'est-à-dire <u>après</u> rebalancement et paiements des flux), on a :

$$VM_A(t-1) = VM_s(t-1) + VM_b(t-1)$$

où $VM_s(t-1) = 0{,}2.VM_A(t-1) =$ valeur de marché des actifs investis dans le fonds d'action
$VM_b(t-1) = 0{,}8.VM_A(t-1) =$ valeur de marché des actifs investis dans le fonds obligataire

L'année suivante, <u>avant</u> rebalancement et paiement des arrérages de rentes (instant noté t^-), on a

$$VM_s(t^-) = VM_s(t-1).\exp[rdt_s(t)] \quad \text{et} \quad VM_b(t^-) = VM_b(t-1).\exp[rdt_b(t)]$$

La valeur totale de l'actif est donc devenue:

$$VM_A(t^-) = VM_s(t^-) + VM_b(t^-) = VM_A(t-1).\left(0{,}2.\exp[rdt_s(t)] + 0{,}8.\exp[rdt_b(t)]\right)$$

Notons que ce montant total ne sera pas influencé par le rebalancement (qui ne fait que modifier les proportions dans lesquelles ce total est investi).

Le rendement de l'actif entre t-1 et t est dès lors défini par :

$$rdt_A(t) = \ln\left(\frac{VM_A(t^-)}{VM_A(t-1)}\right) = \ln\left(0{,}2.\exp[rdt_s(t)] + 0{,}8.\exp[rdt_b(t)]\right)$$

Notons que ce rendement de l'actif est indépendant du choix de table de mortalité.

5.2 Flux du passif

La valeur de marché de l'actif est également influencée par les flux du passif. Chaque année, il y a en effet lieu de payer des arrérages de rente aux personnes encore en vie ainsi que les frais d'inventaire, ce qui se fait en revendant une partie de l'actif (le montant nécessaire pour honorer ces engagements). Ces montants sont supportés par l'assureur dans le seul cas où l'assuré est en vie. Ils sont déterminés de la façon suivante :

$$flux_P(t) = \sum_{i=1}^{600} (1+g).C^i \cdot {}_t p_x^i$$

où

- i = indice sur les assurés ;
- g = coefficient du chargement d'inventaire ;
- C^i = montant de rente versé à l'assuré i ;
- ${}_t p_x^i$ = probabilité de survie de l'assuré i (homme ou femme, d'âge x en 0) jusqu'en t.

Ces flux du passif sont fonction de la table de mortalité considérée. Ils sont par contre indépendants de paramètres financiers (aucun facteur d'actualisation n'intervenant ici). Les deux graphes suivants présentent l'évolution de ces frais à un horizon de 60 ans.

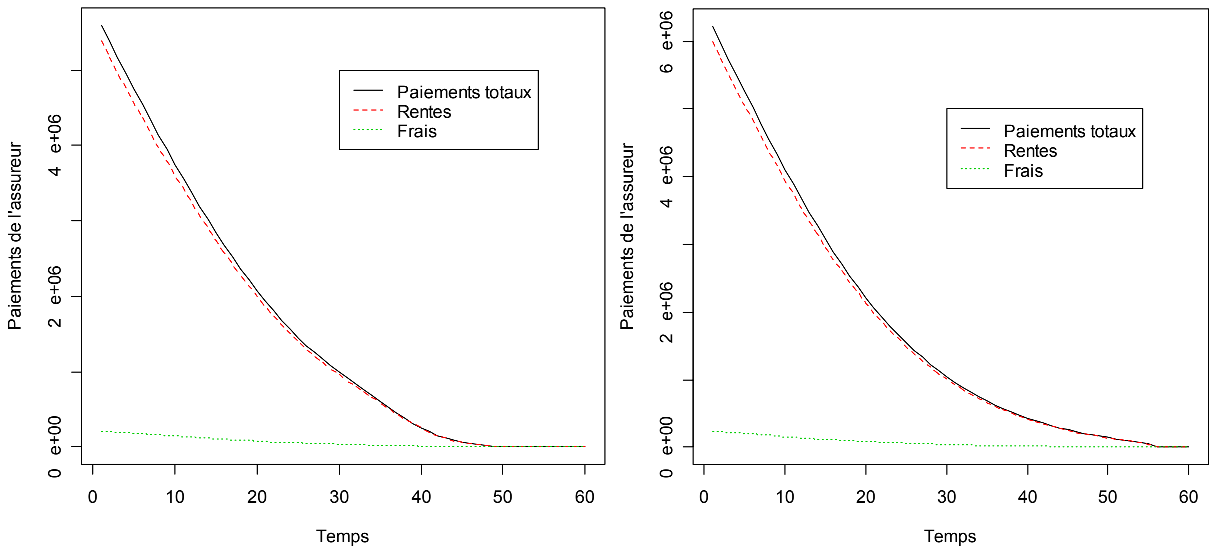


Figure 15. Flux du passif : paiement des arrérages et des frais annuels

(à gauche : table périodique, à droite : table prospective)

Les flux du passif sont supérieurs dans le cas de la table de mortalité prospective, car celle-ci prend en compte un allongement de la durée de vie. Partant, les rentes sont payées plus longtemps. Pour la première année, les flux s'élèvent respectivement à 5 597 000 € et 6 225 000 € si la table utilisée est périodique ou prospective.

5.3 Résultats

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de marché totale de l'actif.

Les deux graphes suivants reprennent l'évolution de la valeur de l'actif dans les dix premiers scénarios financiers, selon les deux tables de mortalité. Ces graphes ont été construits en supposant un actif initial (en valeur de marché) de 1,05 fois les provisions techniques d'inventaire en 0^+, c'est-à-dire un capital initial de 5% des provisions techniques.

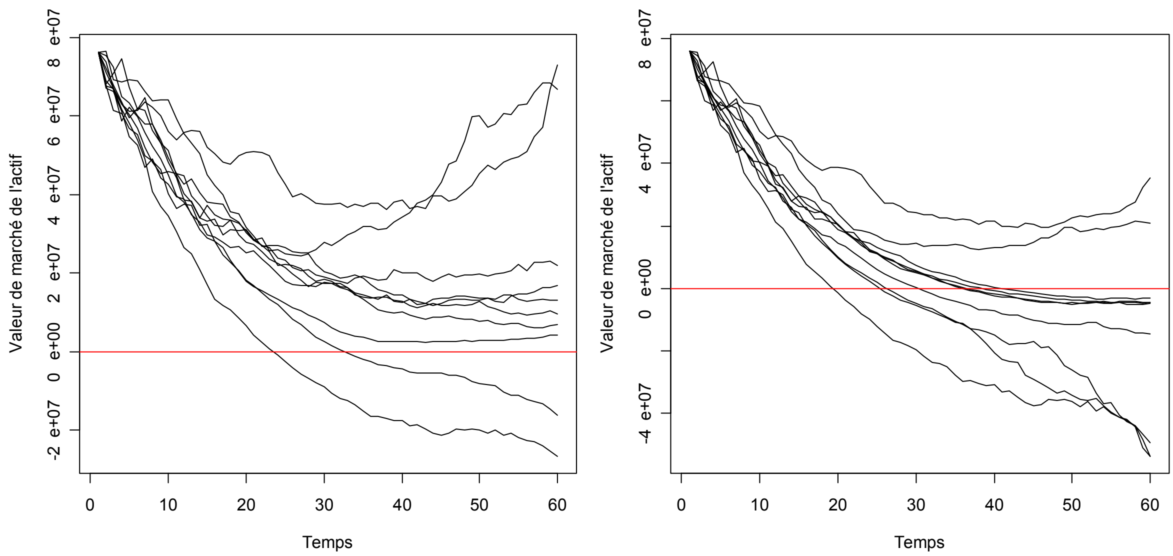


Figure 16. Valeur de marché de l'actif (à gauche : table périodique, à droite : table prospective)

Comme les deux graphes sont relatifs aux mêmes scénarios, la seule différence est due à la table de mortalité utilisée. Logiquement, la valeur de marché de l'actif est plus importante en utilisant la table périodique ; dans ce cas, les rentes sont en effet payées durant une période plus courte (les probabilités de survie étant moindres).

Au sein d'un même graphe, il est possible de comparer, à mortalité fixée, l'impact du scénario financier. Nous constatons que celui-ci est très important, au vu des variations de la valeur de marché de l'actif après soixante ans.

Les cas où l'actif devient négatif sont des cas de ruine. Nous y reviendrons par la suite.

6. VALEUR DE MARCHÉ DES PROVISIONS

Pour rappel, la valeur de marché des provisions est constituée de la somme de la meilleure estimation et de la marge de risque.

Les quelques pages suivantes présentent la manière de déterminer ces deux éléments.

6.1 Meilleure Estimation des Provisions Techniques

La meilleure estimation des provisions techniques est une notion fortement prônée dans le nouveau projet Solvabilité II.

Il s'agit d'évaluer de manière prudentielle les *cash-flows* futurs générés par un produit d'assurance, afin de calculer le « juste prix de revient technique » du produit. Trouver la meilleure estimation des provisions consiste à déterminer les meilleures estimations de chacun des risques inhérents au contrat, à savoir le risque financier, qui apparaît dans l'actualisation des *cash-flows*, et le risque démographique, qui apparaît dans les probabilités de survie.

Nous avons déjà présenté l'exemple de la rente viagère pour la détermination de la meilleure estimation dans la première partie de ce mémoire.

Pour **un individu vivant en t**, la meilleure estimation de sa provision au temps t vaut la valeur actuelle des flux futurs relatifs à son contrat (arrérages et frais) :

$$\mathrm{ME}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{t}) = (1+g).C^i.\sum_{k=t+1}^{\omega-x} B(t,k)._{k-t}p_{x+t}^i$$

où

- C^i = montant de rente de l'individu i ;
- ω = âge ultime ;
- $B(t,k)$ = prix en t d'un zéro coupon qui vient à maturité en k : ce prix dépend du scénario financier envisagé ;
- x : l'âge du bénéficiaire à la souscription du contrat (en t = 0) ;
- $_{k-t}p_{x+t}^i$: la probabilité étant en vie en t à l'âge x+t, d'être vivant, en k (à l'âge x + k) : cette quantité dépend de la table de mortalité choisie.

La valorisation se fait juste après paiement des arrérages. Le prochain arrérage est donc dû dans un an. La quantité $\sum_{k=t+1}^{\omega-x} B(t,k)._{k-t}p_{x+t}^i$ est en fait la version « meilleure estimation » d'un a_{x+t}^i .

La provision n'existe cependant qu'en cas de vie de l'individu. Pour déterminer l'**ensemble des provisions évaluées à leur estimation**, il faut dès lors pondérer chacune des provisions individuelles par la probabilité de survie de l'individu jusqu'à cet instant :

$$\mathrm{ME}_{\mathrm{P}}(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{600} {}_t p_x^i \sum_{k=t+1}^{\omega-x} B(t,k) \cdot {}_{k-t} p_{x+t}^i$$

On trouve alors :

$$\mathrm{ME}_{\mathrm{P}}(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{600} \sum_{k=t+1}^{\omega-x} B(t,k) \cdot {}_k p_x^i$$

Les deux graphes suivants présentent l'évolution de la meilleure estimation des provisions techniques dans les dix premiers scénarios, en comparant, à gauche, le résultat avec une table périodique et, à droite, celui avec une table prospective :

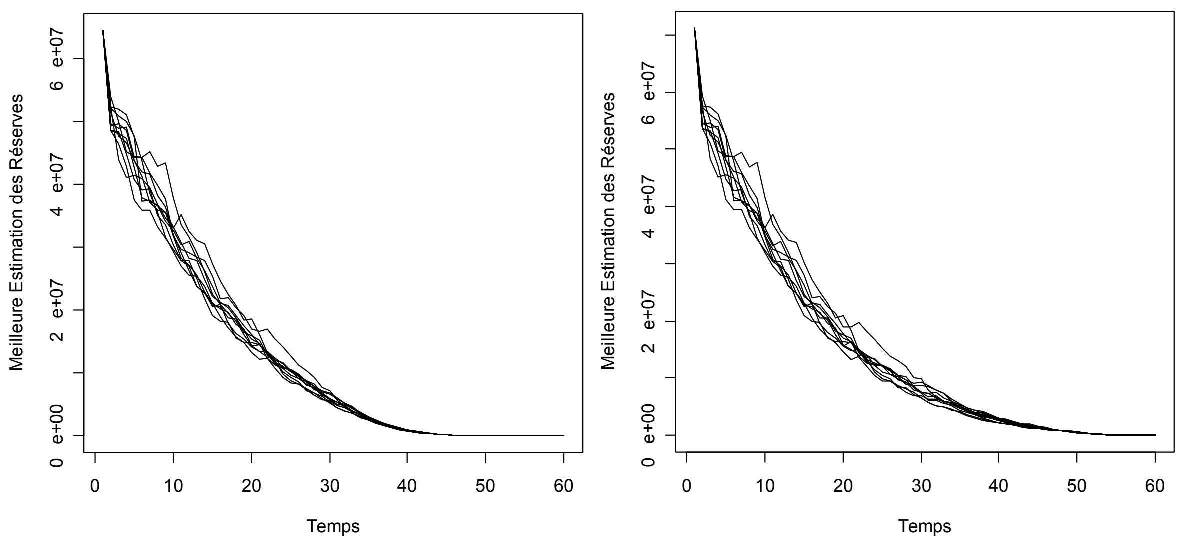


Figure 17. Meilleur estimation des provisions techniques (gauche : table périodique, droite : table prospective)

L'évolution des provisions est semblable dans les deux cas. Elles s'éteignent progressivement, au fil des flux de rente payés annuellement aux assurés encore en vie.

Nous constatons que les provisions initiales sont plus importantes lorsque la table prospective est utilisée. Dans le cas d'une table périodique, la meilleure estimation en 0 des provisions est de 64 560 000 € , alors qu'elle est de 71 194 000 € en utilisant des tables prospectives.

6.2 Marge de risque

La marge de risque représente la valeur actuelle du coût de détention du capital de solvabilité (relatif aux risques non réplicables) jusqu'à l'extinction du portefeuille.

Nous approximons la marge de risque de la même manière que dans l'approche standard. Cette approche suppose que le capital de solvabilité est une proportion constante de la meilleure estimation des provisions. Cette proportion est calculée en t = 0 comme le rapport entre le capital de solvabilité en 0 et la meilleure estimation des provisions en 0.

6.2.1 Détermination de la proportion

Il s'agit tout d'abord de déterminer le capital de solvabilité relatif aux risques non réplicables en t = 0, c'est-à-dire le capital relatif au risque de longévité. Celui-ci est calculé de la manière suivante :

$$CS_{longévité} = \left(2{,}58.\sqrt{\frac{q_x(1-q_x)}{n}} + 0{,}005 \right) PT$$

Avec

- $q_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_x^i}{n}$. Ce coefficient correspond à la probabilité de décès moyenne. Il s'élève à 0,462 dans le cas de la table périodique et 0,402 dans le cas de la table prospective ;
- n = nombre d'assurés en portefeuille (600) ;
- PT = somme des provisions techniques (72 452 000 €) ;

Ensuite, ce capital doit être rapporté à la meilleure estimation des provisions techniques en t = 0.

Nous trouvons respectivement pour les tables périodiques et les tables prospectives $x_{Per} = 6{,}455\%$ et $x_{\Pr op} = 5{,}765\%$.

6.2.2 Détermination de la marge de risque

La marge de risque en t est alors déterminée de la manière suivante :

$$MR(t) = r_{capital}.x.\sum_{k=0} ME_P(t+k).B(t,t+k)$$

avec $r_{capital}$ = 4%

6.3 Valeur de marché des provisions

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de marché des provisions, somme de la meilleure estimation de ces provisions et de la marge de risque. Le résultat obtenu dans le premier scénario est présenté ci-dessous :

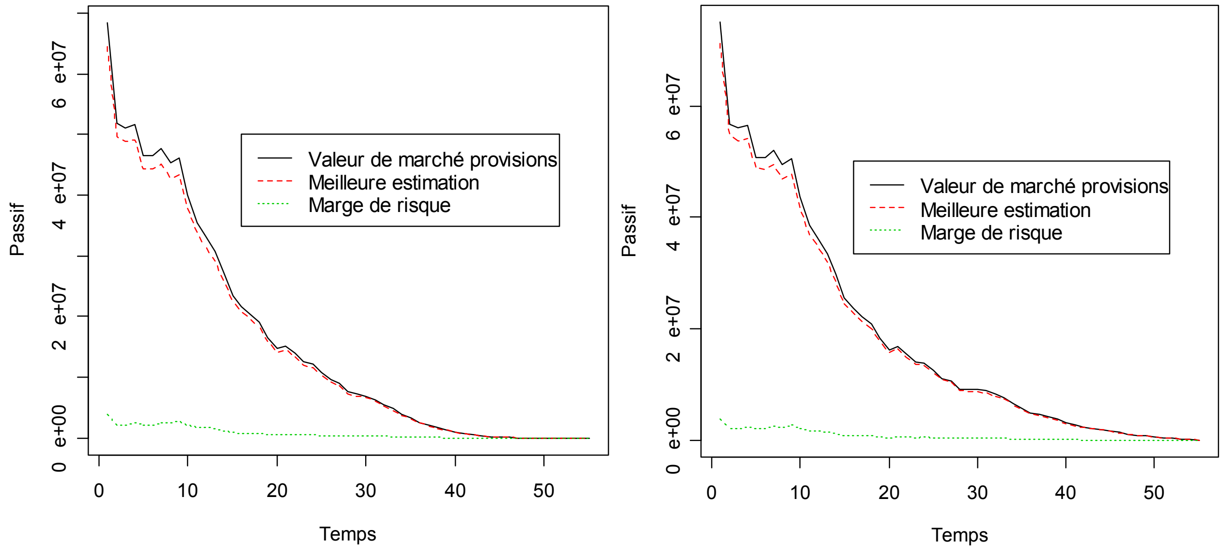


Figure 18. Composantes de la valeur de marché des provisions
(gauche : table périodique, droite : table prospective)

7. CALCUL DU CAPITAL DE SOLVABILITE

Nous sommes à présent en mesure d'estimer le capital de solvabilité. Il peut être défini, rappelons-le, comme l'actif dont il faut disposer au-delà des provisions évaluées sur une base cohérente avec le marché afin d'atteindre une probabilité de ruine cible. Ce capital de solvabilité va dépendre de la mesure de risque choisie ainsi que de la définition de la ruine retenue.

7.1 Différentes mesures de la ruine et du capital de solvabilité

7.1.1 La situation de ruine

Deux définitions de la ruine

La **ruine comptable** survient lorsque l'actif est insuffisant pour couvrir la valeur actuelle de tous les flux futurs, c'est-à-dire la valeur de marché des provisions.

Notons X_t la variable aléatoire représentant la perte de l'année t dans un scénario fixé. Selon cette définition, il y aura ruine au temps t quand $X_t > 0$ où

$$X_t = VM_P(t) - VM_A(t)$$

La **ruine opérationnelle** survient en t dans un scénario fixé lorsque l'actif en t^- est insuffisant pour couvrir les flux de l'année t (en début d'année). Le graphe ci-dessous illustre cette définition :

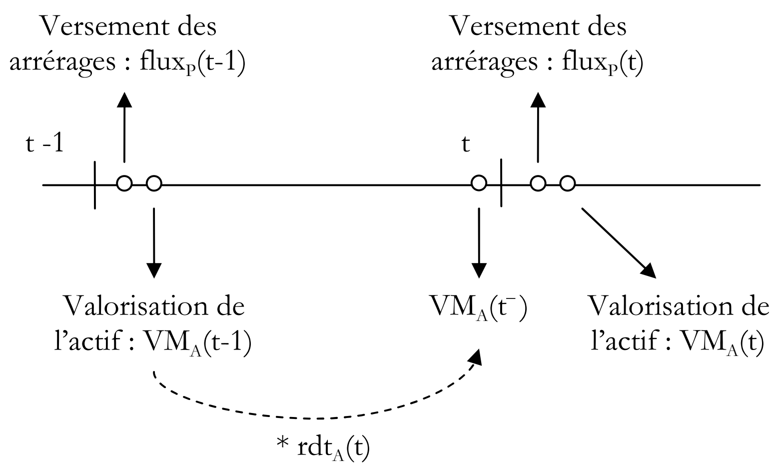


Figure 19. Détermination de la ruine opérationnelle

Notons à nouveau X_t la variable aléatoire représentant la perte l'année t dans un scénario fixé. Il y aura ruine au temps t quand $X_t > 0$ où

$$X_t = flux_P(t) - VM_A(t^-)$$

La ruine au terme de l'horizon considéré

La variable X_t ainsi définie permet de détecter la ruine au cours de l'année t pour un scénario fixé. Pour déterminer un capital de solvabilité, il faut agréger cette information de la ruine dans le temps pour chacun des scénarios. Disposant alors d'un vecteur appelé « $Perte$ » résumant, par scénario, la situation de perte, nous pourrons en construire un histogramme qui nous permettra de calculer les valeurs désirées. Nous distinguons donc deux types de scénarios :

- $X_t \leq 0 \;\; \forall t$: absence de ruine sur tout l'horizon de temps ;
- $\exists t$ tel que $X_t > 0$: la ruine survient au cours du scénario.

Dans un souci de prudence, nous construisons l'histogramme le plus défavorable pour l'assureur : en cas de ruine, nous reprenons le montant de la ruine, et en cas de non ruine, nous reprenons le résultat le moins avantageux enregistré au cours de la période.

7.1.2 La mesure de la ruine

Le montant de capital nécessaire dépend de la mesure de risque choisie, de l'horizon et du niveau de confiance associés.

Mesures de risque

Si la **Value-At-Risk** est choisie comme mesure de risque, le capital de solvabilité est celui qui permet d'éviter la ruine dans un nombre élevé de cas (ce nombre dépend du niveau de confiance et de l'horizon de temps considéré). Nous avons la relation suivante :

$$P\left[Perte > VaR_\alpha(Perte)\right] \leq 1-\alpha$$

Si la **Tail-Value-At-Risk** est retenue, il s'agit alors du capital permettant de surmonter, en moyenne, les pires exercices. Nous avons alors :

$$TVaR_\alpha(Perte) = E\left[Perte \middle| Perte > VaR_\alpha(Perte)\right]$$

Horizon de temps et niveau de confiance

Le projet Solvabilité II optera probablement pour l'utilisation d'un niveau de confiance de 99,5% sur un horizon de un an. Un capital peut également être calculé en déroulant le portefeuille jusqu'à son extinction. Ceci implique de considérer un horizon plus long et, en contrepartie, un niveau de confiance plus faible. Cette dernière méthode permet de prendre en compte une information plus précise.

Etant donné l'âge de nos plus jeunes assurés en t = 0, le portefeuille sera éteint dans cinquante-cinq ans au plus tard. C'est l'horizon que nous considérons dans cette deuxième approche. Nous considérons alors un niveau de confiance moindre pour que l'approche à un an et celle à cinquante-cinq ans soient comparables.

Il existe, sous l'hypothèse de normalité, une relation liant les niveaux de confiance pour différents horizons de temps considérés :

$$VaR(\alpha_2, t_2) = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}.\frac{z_2}{z_1}.VaR(\alpha_1, t_1)$$

Pour que les VaR soient identiques, il faut donc que $\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}.\frac{z_2}{z_1}=1$. On trouve alors, pour un horizon de 55 ans, un niveau de confiance correspondant de 63,6%. Nous travaillerons avec un niveau de confiance légèrement plus élevé, soit 70%, l'hypothèse de normalité n'étant pas a priori vérifiée.

7.1.3 De la ruine au capital

Nous devons donc déterminer le capital à détenir au-delà de la valeur actuelle de l'actif afin d'atteindre la probabilité de ruine cible. Nous faisons l'hypothèse qu'il existe des placements en représentation de ce capital et que la même proportion (que celle relative aux provisions) est maintenue entre les deux actifs : 80% en obligations et 20% en actions.

Nous connaissons le quantile (ou la valeur de la TVaR) cible (il vaut en effet 0) et faisons varier le niveau d'actif initial (en modifiant le niveau de capital), d'où la distribution de pertes à l'horizon choisi, jusqu'à atteindre le niveau de confiance désiré :

Dans le cas de la VaR, nous obtenons :

$$P[Perte(CS) > 0] \leq 1 - \alpha$$

Dans le cas de la TVaR :

$$0 = E\left[Perte(CS) \middle| Perte(CS) > VaR_\alpha\left(Perte(CS)\right)\right]$$

7.1.4 Récapitulatif

Nous proposons ainsi de déterminer le capital de différentes manières, en choisissant :

- une définition de la ruine : comptable ou opérationnelle
- un horizon de temps (et niveau de confiance) : 1 an ou 55 ans
- une mesure de risque : la VaR ou la TVaR
- la table de mortalité utilisée

7.2 Résultats

Les résultats de nos simulations sont présentés ci-dessous.

7.2.1 Ruine comptable à un horizon de un an

Les textes du projet Solvabilité II traitant du capital de solvabilité le définissent la plupart du temps comme le capital à ajouter à l'actif de façon à ce que l'actif total soit suffisant l'année suivante pour honorer les engagements de l'assureur. Ceci s'entend donc comme une **ruine comptable** à l'horizon de **un an**. Le niveau de confiance associé est de 99,5%. Nous comparons les résultats obtenus selon la mesure de risque choisie (VaR ou TVaR) ainsi que la table de mortalité (périodique ou prospective).

Dans le cadre des hypothèses introduites, ceci s'interprète de la manière suivante :

$$CS(0) \text{ est défini tel que } VM_A(0).(1+rdt_A(1)) \geq Flux_P(1) + VM_P(1) \quad \Leftrightarrow \quad VM_A(1) \geq VM_P(1)$$

Cette inégalité doit ainsi être remplie dans 99,5% des cas.

Nous supposons que l'actif en représentation des provisions est, en début de simulation, égal au montant des provisions techniques. Nous calculons alors le pourcentage de provisions techniques à ajouter à cet actif de base de sorte que les mesures de risques atteignent les résultats voulus.

Sur la première série de graphes suivants, l'abscisse représente la fraction des provisions techniques à ajouter à l'actif initial. Notons cette fraction $\beta = CS(0)/PT(0)$. En ordonnée nous pouvons lire la valeur de la mesure de risque. Nous cherchons le capital tel que la mesure de risque soit nulle.

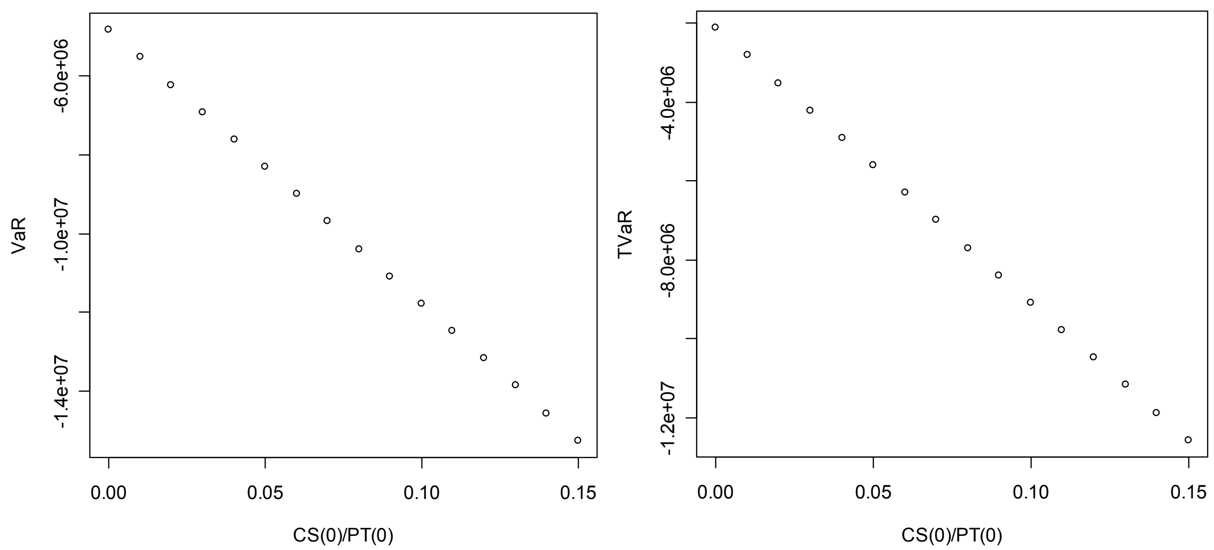


Figure 20. Détermination du capital (1 an) – Table périodique (à gauche : VaR, à droite : TVaR)

Les deux graphes précédents illustrent le fait que, même avec un capital initial nul, il n'y a jamais ruine avec l'utilisation de **tables périodiques**. En t = 0, l'actif représentatif des provisions s'élève en effet à 71 452 000 € alors que la valeur de marché des provisions estimée au départ des tables périodiques est de 68 416 000 €. Dans aucun des mille scénarios générés, l'actif ne chute à un niveau inférieur à la valeur actuelle des engagements après un an.

Les conclusions sont autres avec une **table prospective**. En effet, la valeur de marché des provisions s'élève en t = 0 à 74 992 000 €, ce qui est supérieur à l'actif initial. Il faut donc un surplus d'actif (le capital) afin d'éviter la ruine à un horizon de un an, comme l'illustrent les graphes ci-dessous :

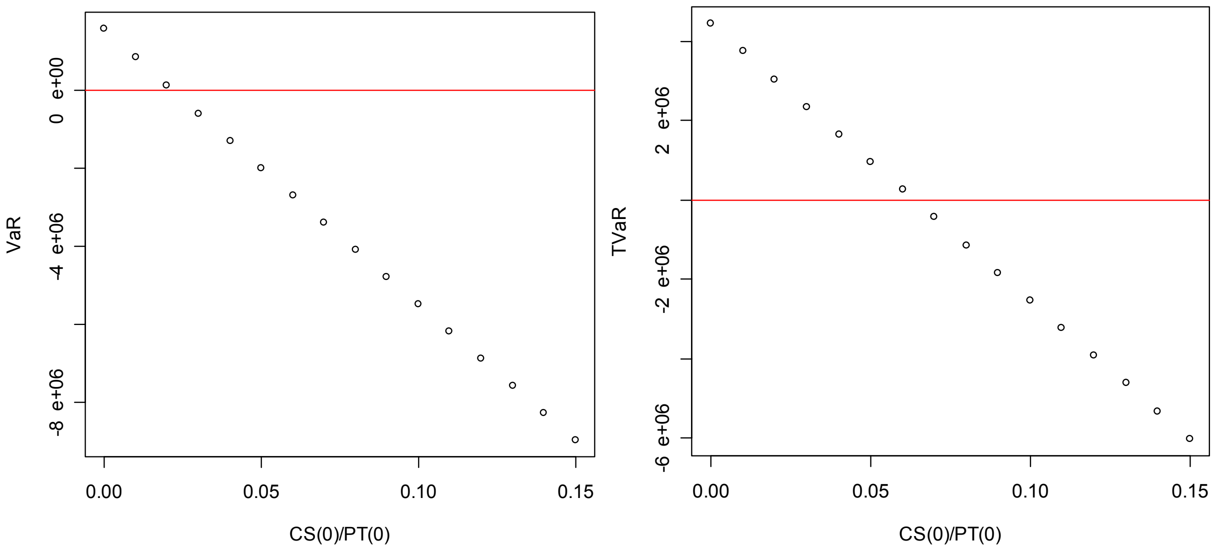
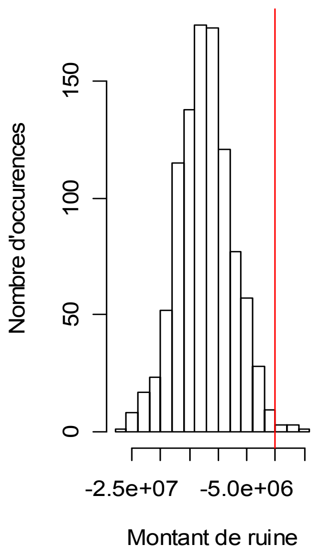


Figure 21. Détermination du capital (1 an) – Table prospective (à gauche : VaR, à droite : TVaR)



Dans le cas de la VaR, il faut ajouter environ 2% des provisions techniques à l'actif.

Ceci s'illustre par l'histogramme ci-contre. Il s'agit de l'histogramme de la variable aléatoire « Pertes » définie précédemment, où le capital représente 2% des provisions techniques en t = 0.

Sur ce graphe, la valeur « zéro » représente le quantile 99,5% de la distribution.

Figure 22. Histogramme de la distribution de « Pertes »

Le tableau suivant reprend les montants de capital nécessaires :

	Table périodique	**Table prospective**
VaR	0 €	1 553 517 €
TVaR	0 €	4 610 376 €

Tableau 12. Capital de solvabilité – modèle interne – projection à 1 an

Nous commenterons ce tableau *infra*, après présentation des autres résultats.

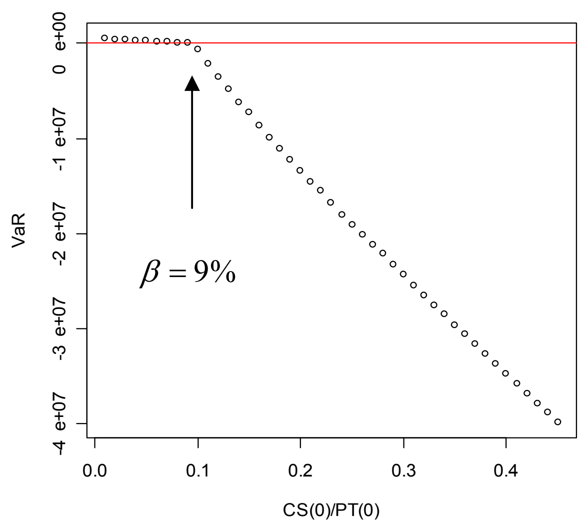
7.2.2 Ruine opérationnelle à un horizon de cinquante-cinq ans

Le capital déterminé dans le point ci-dessus permet de disposer d'un actif suffisant pour couvrir la meilleure estimation des paiements futurs. Cette approche résume donc, en une valeur (par scénario), la situation du portefeuille après un an.

Or il est intéressant de tenir compte de toute la durée de vie du portefeuille, de sorte à garantir que l'assureur puisse non seulement disposer en t = 1 d'un actif suffisant à rencontrer en moyenne ses obligations futures, mais surtout qu'il puisse honorer ses engagements lors de chacune des années jusqu'à l'extinction de son portefeuille.

Dans ce cadre, la définition de ruine opérationnelle est plus pertinente. Comme nous considérons un horizon de 55 ans, nous réduisons le niveau de confiance à 70%. Nous comparons les résultats selon la mesure de risque et la table de mortalité choisies.

A nouveau, nous supposons que l'actif initial détenu par la compagnie est équivalent aux provisions techniques et β représente la fraction des provisions techniques à ajouter à l'actif initial.



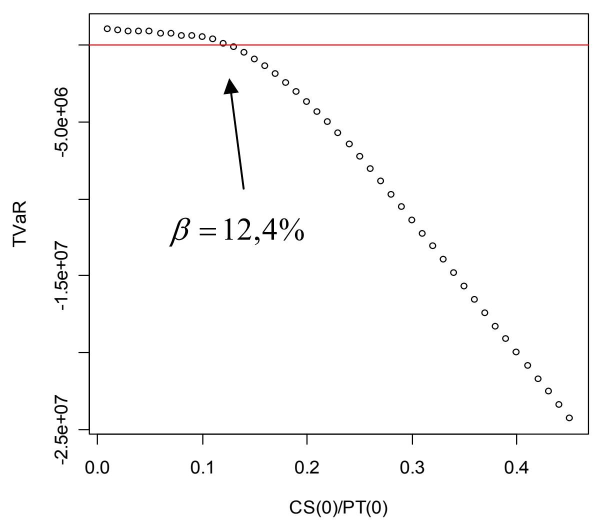


Figure 23. Détermination du capital (55 ans) – Table périodique (à gauche : VaR, à droite : TVaR)

Nous constatons qu'en utilisant une **table périodique**, un capital de l'ordre de 9% des provisions techniques est requis lors de l'utilisation de la Value-At-Risk comme mesure de risque. Ce pourcentage s'élève à 12,4% avec la Tail-Value-At-Risk.

Ces pourcentages sont bien entendu plus imposants si la mortalité est modélisée à l'aide d'une **table prospective**. Ils deviennent respectivement 21% et 32,6% selon que la mesure de risque est la VaR ou la TVaR.

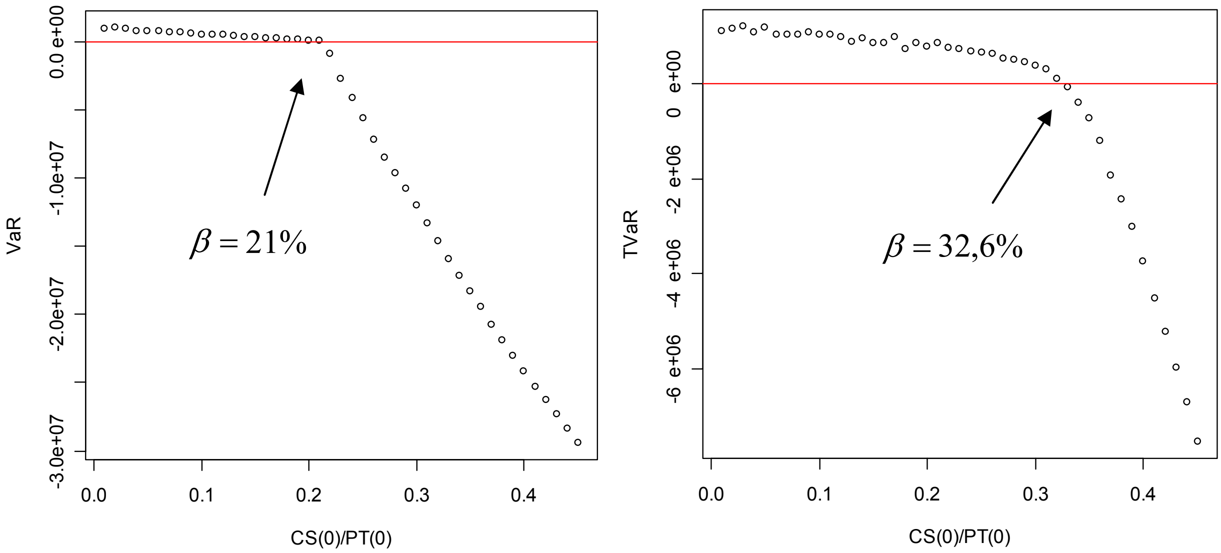


Figure 24. Détermination du capital (55 ans) – Table prospective (à gauche : VaR, à droite : TVaR)

Le tableau suivant reprend les montants de capital correspondant :

	Table périodique	Table prospective
VaR	6 538 249 €	15 240 267 €
TVaR	8 997 647 €	23 629 255 €

Tableau 13. Capital de solvabilité – modèle interne – projection à 55 ans

Avant de commenter la totalité des résultats exposés dans ce chapitre, présentons brièvement l'approche standard de détermination du capital de solvabilité.

Chapitre IV. Exigences de capital sous Solvabilité II – approche standard

Terminons cette étude de cas par un rapide calcul du capital de solvabilité nécessaire selon l'approche standard, qui propose, rappelons-le, une manière simplifiée de déterminer le capital de solvabilité.

Dans un premier temps, elle requiert de calculer le capital requis par type de risque. Ensuite, ces capitaux sont agrégés en tenant compte d'une matrice de corrélation entre les différents risques.

1. DETERMINATION DU CAPITAL PAR TYPE DE RISQUE

Nous considérons quatre types de risque : le risque d'assurance (réduit au risque de longévité dans notre exemple), le risque de crédit, le risque de marché (à savoir le risque d'action et le risque de taux) et le risque opérationnel. Nous renvoyons le lecteur à la partie théorique pour le calcul détaillé du capital requis par type de risque. Nous présentons ci-dessous les différents résultats obtenus :

Risque d'assurance : $CS_{assurance} = \left(2{,}58.\sqrt{\frac{q_x(1-q_x)}{600}} + 0{,}005 \right).PT =$ 4 166 836 € (table périodique) ou 4 103 864 € (table prospective)

Risque de crédit : $CS_{crédit} = 0{,}008\%.VM_{obligations}.D^{\text{mod}}_{obligations} =$ 28 193 € [63]

Risque de marché

- Actions : $CS_{actions} = 40\%.VM_{actions} =$ 5 796 157 €

- Taux : $CS_{taux} = \max \begin{cases} 0 \\ VM_{obligations}.D^{\text{mod}}_{obligations}.r_{obligations}.s^{hausse}_{obligations} - PT.D_{passif}.r_{passif}.s^{hausse}_{passif} \\ VM_{obligations}.D^{\text{mod}}_{obligations}.r_{obligations}.s^{baisse}_{obligations} - PT.D_{passif}.r_{passif}.s^{baisse}_{passif} \end{cases}$

  - Table périodique = 3 953 529 €

  - Table prospective = 4 041 993 € [64]

[63] Nous considérons en effet que les obligations d'Etat sont presque sans risque et sont donc de rating AAA. Et la duration moyenne du fonds obligataire est de 6,08 ans.

- Agrégation du risque marché : $CS_{marché} = \sqrt{(CS_{actions})^2 + (CS_{taux})^2 + 2.0,75.CS_{actions}.CS_{taux}}$
    - Table périodique = 9 143 235 €
    - Table prospective = 9 223 621 €

Risque opérationnel : $CS_{opérationnel} = 0{,}006.PT =$ 434 712 €

2. AGREGATIONS DES DIFFERENTS RISQUES

Le capital de solvabilité total se détermine alors : $CS = \sqrt{\sum_{i;j} \rho_{ij}.CS_i.CS_j}$

avec $\rho_{i;j}$ = corrélation entre les risques i et j (*voir supra* dans la partie théorique).

Voici les résultats obtenus :

	Table périodique	**Table prospective**
Hypothèse d'indépendance entre les risques	10 057 387 €	10 104 783 €
Matrice de corrélations prévue par le QIS 2	11 204 111 €	11 242 266 €
Hypothèse de corrélation parfaite entre les risques	13 772 975 €	13 790 389 €

Tableau 14. Capital de solvabilité requis selon l'approche standard

Les résultats obtenus sont évidemment supérieurs dans le cas de l'utilisation d'une table prospective.

---

64 $D_{passif}(0) = \dfrac{\sum_{i=1}^{600}(1+g).C^i.\sum_{t=1}^{w-x_i} t.B(0,t)._t p_x}{\sum_{i=1}^{600}(1+g).C^i.\sum_{t=1}^{w-x_i} B(0,t)._t p_x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{600}(1+g).C^i.\sum_{t=1}^{w-x_i} t.B(0,t)._t p_x}{ME_P}$

Comparaison des résultats

Nous voici arrivés au terme de notre modélisation. Nous disposons à présent du capital de solvabilité à détenir, pour différents modèles. Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus :

Approche	**Mesure de risque**	**Table périodique**	**Table prospective**
Modèle interne – horizon de 1 an	VaR	0 €	1 554 000 €
	TVaR	0 €	4 610 000 €
Modèle interne – horizon de 55 ans	VaR	6 538 000 €	15 240 000 €
	TVaR	8 998 000 €	23 629 000 €
Approche standard		11 204 000 €	11 242 000 €

Tableau 15. Comparaison des capitaux de solvabilité – modèle interne et approche standard

Les résultats obtenus dans le modèle interne à un horizon de un an semblent aberrants. Ils sont en effet extrêmement faibles, et souvent inférieurs à la marge de solvabilité minimum (3000 000 €).

Mais ne tirons pas de conclusions trop hâtives quant à la qualité de cette approche. Ces résultats sont dus au portefeuille choisi dans le cadre de cette illustration. En effet, l'ensemble des primes a été touché en t = 0 sous forme de primes uniques. Et les flux (arrérages de rente) à venir sont peu importants au regard de l'actif initial détenu. Dans ce contexte, nous comprenons qu'il est peu probable que la compagnie rencontre quelque difficulté financière dans un futur proche.

Dans cette optique, intéressons nous particulièrement à la comparaison des résultats fournis par le modèle interne pour un horizon de cinquante-cinq ans et de l'approche standard.

Nous constatons bien évidemment que choisir la TVaR comme mesure de risque fournit un capital plus important. La différence par rapport aux résultats obtenus avec la VaR est importante, surtout lorsque des tables prospectives sont utilisées. Ceci signifie que la faillite, lorsqu'elle survient, est conséquente.

Nous observons ensuite que l'approche standard fournit des résultats plus importants que le modèle interne lors de l'utilisation de tables périodiques mais que ce n'est pas le cas avec des tables prospectives. En effet, dans l'approche standard, le choix de la table n'influant que sur la probabilité de décès moyenne du portefeuille, son impact est négligeable.

Dans les modèles internes par contre, choisir une table prospective implique un capital de solvabilité qui s'élève à plus du double de celui obtenu sur base d'une table périodique.

Nous constatons donc que le choix de la mesure de risque et de la façon de modéliser la mortalité impactent fortement le montant de capital requis.

Conclusion générale

Le projet Solvabilité II constitue un projet « mammouth » dont la vocation est, en théorie, de contrôler la solidité financière des compagnies d'assurance, dans un but de protection des assurés.

Vœux pieux ou démarche utile ?

D'une manière générale, dans chaque secteur, toute crise engendre une réforme de fond. Rappelons au lecteur que les normes comptables internationales ont pour berceau le scandale « Enron ». De même, les accords de Bâle ont pour géniteur la faillite de la banque Herstatt. Le projet Solvabilité II s'ancre lui aussi dans cette logique. Il est consécutif à la crise actuelle et continuée des marchés financiers.

Cette réforme, on l'aura compris, vise à prendre en compte au mieux la situation financière des compagnies d'assurance afin de pouvoir réagir… avant qu'il ne soit trop tard.

En d'autres termes, la transparence devrait être de mise.

Convenons qu'effectivement le capital de solvabilité, défini au niveau du premier pilier du projet Solvabilité II, peut être considéré, en théorie, comme reflétant adéquatement les risques auxquels est exposée une compagnie d'assurance.

Par l'obligation de prise en compte de ces risques, le capital de solvabilité d'une compagnie d'assurance devient non seulement ardu en sa détermination mais impose également un niveau supérieur de fonds propres à détenir par rapport à celui prôné par les exigences actuelles en la matière.

Il nous a été donné de préciser que cette détermination peut s'articuler soit sur base d'une modélisation interne, soit sur base de la (future) approche standard européenne.

La modélisation interne, qui s'imposera généralement à la quasi-intégralité des compagnies d'assurance ayant « pignon sur rue » requerra un investissement financier conséquent.

L'approche standard européenne, qui représentera la seconde possibilité de détermination du capital de solvabilité sera, quant à elle, sans doute la méthodologie privilégiée par les compagnies d'assurance de moindre taille. Cette moindre taille ne peut avoir pour corollaire une détermination du capital de solvabilité selon une approche inadéquate étant entendu que cette approche sera retenue, en tous cas dans un premier temps, par un certain nombre d'acteurs dans le secteur de l'assurance.

Un capital de solvabilité « à deux vitesses » selon que l'on est grand ou petit ? Nous sommes, par définition, opposées à une telle vision des choses.

L'approche standard européenne aura dès sa forme finalisée l'avantage d'autoriser un audit aisé quant à sa correcte application. Cette avantage pourra se muer en désavantage lorsque l'angle d'appréciation s'exprimera néanmoins en termes de spécificité plutôt qu'en celui de généralité.

En effet, une modélisation interne a sans conteste l'avantage de refléter « sur mesure » le capital de solvabilité à réserver pour une compagnie d'assurance donnée…pour autant évidemment que celle-ci ne « fausse pas les règles du jeu ». Ce constat d'opacité possible dans l'audit d'un capital de solvabilité modélisé en interne, est évidemment antinomique avec le principe de transparence prôné par le projet Solvabilité II. Alors que faire ?

Tout scandale financier a usuellement pour fait générateur une perversion de principes visant à la sauvegarde d'une entreprise. Même si, sans conteste, la modélisation en interne reste, au-delà de l'approche standard européenne, l'appréciation la plus pointue d'un capital de solvabilité, il est donc impératif d'individualiser l'entité appelée à prévenir ou à tout le moins à dénoncer l'éventuelle perversion du système.

L'actuaire en charge de contrôler et agréer les modèles internes occupera de ce fait un rôle essentiel quant à crédibilité des futures normes Solvabilité II. C'est lui qui pourra, sur une base indépendante et imposée à une compagnie d'assurance, dénouer l'écheveau de la pertinence ou non de la modélisation réalisée, et ce, quelque soit l'approche adoptée.

Tables et bibliographie

Liste des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

1. LIVRES

CHARPENTIER A. et DENUIT M. (2004), *Mathématiques de l'assurance non vie, Tome 1 : principes fondamentaux de théorie du risque*, Ed. Economica, Coll. « Economie et Statistiques Avancées »

DELWARDE A. et DENUIT M. (2006), *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*, Ed. Economica, Coll. Assurance Audit Actuariat, Paris

DEVOLDER P. (1993), *Finance Stochastique*, Ed. Université de Bruxelles, Coll. Actuariat, Bruxelles

EMBRECHTS P., FREY R. and MCNEIL A.J. (2005), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton Series in Finance

FITOUCHI D. (2005), *Solvency II : Du projet de réforme à l'approche par les modèles internes*, Ed. Demos, Coll. Comptabilité et Finances, Paris

JACQUEMIN J., PLANCHET F. et THEROND P. (2005), *Modèles financiers en assurance, analyses de risque dynamiques*, Ed. Economica, Coll. Assurance Audit Actuariat, Paris

LE VALLOIS F., PALSKY P., PARIS B. et TOSETTI A. (2003), *Gestion Actif Passif en assurance vie, réglementation, outils, méthodes*, Ed. Economica, Coll. Assurance Audit Actuariat, Paris

2. ARTICLES

AAI (2004), *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*, A report by the Insurer Solvency Assessment Working Party of the International Actuarial Profession

ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M. and HEATH D. (1999), *Coherent Measures of Risk*, Math. Finance 9 no. 3, 203-228

BALE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2001), *Consultative Document on The New Basel Capital Accord*

BRENNAN et SCHWARTZ (1976), *The pricing of equity-linked Life insurance policies with an asset value guarantee* in *Journal of Financial economics 3*

CEA (2005), *Solvency Assessment Models Compared*, Rapport produit conjointement avec Mercer Oliver Wyman, Paris

CEA (Feb 2006), *Solution to major issues for Solvency II*, Joint Submission by the CRO Forum and CEA (Disponible sur le site www.cea.assur.org)

CEA (April 2006), *CEA Document on Cost of Capital* (Disponible sur le site www.cea.assur.org)

CEA (March 2006), *CEA Working Document on the Standard approach for the solvency capital requirement*

CEA (June 2006), *Solvency II – Introductory Guide*, Joint Submission by the CEA and the Tillinghast business of Towers Perrin

CEA (2006), *Calculating Market Value Margin with a Cost of Capital Approach ("CoC") under the QIS2 framework*

CEIOPS (2006), *Quantitative Impact Study 2 technical Specification*, CEIOPS-PI-08/06

CHANDELLE F., *Assurance et normes comptables internationales : reconnaître les vrais problèmes, éviter les fausses solutions*

CHANDELLE F., *Juste valeur et assurance : les principales conclusions de l'association de Genève*

COMMISSION EUROPEENNE (2003), *Conception d'un futur système de contrôle prudentiel applicable dans l'Union Européenne – Recommandation des services de la Commission*, MARKT/2509/03, Bruxelles (http://europa.eu.int/comm/internal_market/insurance/docs/markt-2509-03/markt-2509-03_fr.pdf)

COMMISSION EUROPEENNE (2004), *Norme internationale d'information financiers 4 (IFRS4) « Contrat d'assurance »* in *Journal officiel de l'Union Européenne*, règlement (CE) n°2236/2004

DELBAEN F. (2003), *Risk measures or measures that describe risk?*, Zürich

DELWARDE A.., DENUIT M., DEVOLDER P. et MARECHAL X . (2006), *Prix de rente : de la réglementation aux « fair value »*, Reacfin

DJEHICHE B. et HÖRFLET P. (2005), *Standard Approaches to Asset & Liability Risk* in *Scandinavian Actuarial Journal, 2005 n°5, pp. 377-400.*

FITCHRATINGS (2006), The Pyramid of CEIOPS : Solvency II – An update

GADMER A., KAUFMANN R. and KLETT RK, Introduction to Dynamic Financial Analysis in ASTIN Bulletin, vol. 31(1), pp. 213-249.

IAIS (2002), Principles on Capital Adequacy and Solvency

KELLER P. (2006), *A primer for calculating the Swiss Solvency Test "Cost of Capital" for a Market Value Margin*

LEFLAIVE V. et LUSTMAN F. (2002), *Normes IAS et assurance : le point de vue du contrôle prudentiel* in *Revue Risque* n°52, Commission de Contrôle des Assurances, des Mutuelles et des Institutions de Prévoyance (http://www.ccamip.fr/info/Articles/0505)

OFFICE FEDERAL DES ASSURANCES PRIVEES (2004), *Livre blanc sur le Test Suisse de Solvabilité*

PLANCHET F. et THEROND P.E., *Simulation de trajectoires de processus continus*, ", Les cahiers de recherche de l'ISFA, WP2024

SWISS RE (2006), *Solvabilité II : une approche intégrée des risques pour les assureurs européens*, revue Sigma, n°4/2006, Zurich

Annexes

Table des annexes

1. REGLES DE SOLVABILITE I[65]

Marge de solvabilité = max (exigence de marge de solvabilité ; fonds minimum de garantie)

Pour la non vie

Exigence de marge de solvabilité = max (indice des primes ; indice des sinistres)

- Indice des primes = (18% de la première tranche de 50 millions € de primes brutes + 16% des primes brutes restantes) * taux de rétention ;
- Indice des sinistres = (26% de la première tranche de 35 millions € de sinistres bruts moyens + 23% des sinistres bruts restants) * taux de rétention ;
- Taux de rétention = max (sinistres nets / sinistres bruts moyens ; 50%) ;
- Sinistres bruts moyens = sinistralité moyenne des trois derniers exercices.

Fonds minimum de garantie = max (1/3 exigence de marge de solvabilité ; 2 millions €)

Dans l'assurance de responsabilité civile (à l'exception de l'assurance RC auto) et dans l'assurance transport et habitation, on applique un coefficient de 1,5 aux indices.

Pour la vie

Exigence de marge solvabilité (vie classique) = 4% de la provision mathématique brute * taux de rétention « provisions mathématiques » + 3 pour mille du capital sous risque * taux de rétention « capital sous risque »

- Exigence de marge solvabilité (unités de compte) = 1% de la provision mathématique brute
- Taux de rétention « provisions mathématiques » = max (provisions nettes / provisions brutes ; 85%)
- Taux de rétention « capital sous risque » = max (capital sous risque net / capital sous risque brut ; 50%)

Fonds minimum de garantie = max (1/3 exigence de marge de solvabilité ; 3 millions €)

65 SWISS RE (2006), p.6

2. LE RISQUE D'ASSURANCE DANS L'APPROCHE STANDARD

2.1 Le risque de mortalité

$$CS_{mortalité} = Risque_{volatilité} + Risque_{incertitude} + Risque_{catastrophes}$$

où

- $Risque_{volatilité} = 2.58 * \sigma_{volatilité} * Capitaux\ sous\ risque$;
- 2.58 correspond au quantile 99,5% d'une distribution normale standard ;
- $\sigma_{volatilité} = \sqrt{\frac{q_x(1-q_x)}{n}}$ où q_x correspond à la probabilité de décès moyenne[66] et n au nombre d'assurés ;
- Capitaux sous risques = différence entre le capital décès et la provision déjà constitutée dans l'assurance mixte ; somme assurée pour les polices temporaires décès ;
- $Risque_{tendance} = 0{,}002.PT_{mortalité}$ où PT représente le montant des provisions techniques relatives aux contrats exposés au risque de mortalité, nettes de réassurance ;
- $Risque_{catastrophe} = \sum_i 0.003 * \max(PT_i, Capitaux\ décès\ i)$ (indice représentant la i^{ème} police).

2.2 Le risque de morbidité

$$CR_{souscription,morbidité} = Risque_{volatilité} + Risque_{tendance} + Risque_{catastrophe}$$

où

- $Risque_{volatilité} = 2.58 * \sigma_{volatilité} * Capitaux\ sous\ risque$
- $\sigma_{volatilité} = \sqrt{\frac{i_x(1-i_x)}{n}}$ = écart type de la distribution de pertes pour le risque de morbidité ;
- i_x = probabilité de morbidité moyenne ;
- $Risque_{tendance} = 0.002 * PT_{morbidité}$
- $Risque_{catastrophe} = \sum_i (0.001 * SA_i + 0.005 AB_i)$

[66] La probabilité de décès moyenne peut être calculée comme le rapport entre d'une part le total des sinistres payés et les frais relatifs à ceux-ci et d'autre part le total des capitaux à risques.

L'indice i représente chaque police où le paiement de l'assureur est conditionnel à l'état de santé de l'assuré.

- $SA_i = \begin{cases} \textit{somme assurée} & \text{si les prestations sont payées sous forme de capital} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- $AB_i = \begin{cases} \textit{montant actualisé des paiements futurs} & \text{si les prestations ne sont pas réglées en une fois} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

n = le nombre de contrats d'assurance

2.3 Le risque de dépense

$$\boxed{CR_{dépenses} = 0.1 * \textit{fraix fixes}}$$

2.4 Matrice de corrélation proposée par le QIS II

Le QIS2 propose la matrice suivante pour agréger les différentes composantes du risque d'assurance :

	Mortalité	Longévité	Morbidité	Incapacité	Délai	Dépenses
Mortalité	1					
Longévité	0	1				
Morbidité	0.5	0	1			
Incapacité	0.25	0	1	1		
Délai	0	0.5	0	0	1	
Dépenses	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1

3. LE RISQUE DE MARCHE DANS L'APPROCHE STANDARD

3.1 Le risque d'immobilier

Le risque d'immobilier naît de la volatilité des prix de marché de l'immobilier. Pour des raisons de simplicité, il n'y a pas de distinctions entre les différents types d'investissements immobiliers (résidentielles, bureau,…).

Le capital requis pour le risque d'immobilier est calculé en appliquant un facteur à la valeur de marché des immeubles détenus par la compagnie :

$$\boxed{CR_{immobiliers} = 0.2 * VM_{immeubles}}$$

3.2 Le risque de devises

Le risque de devises naît de la volatilité des taux de change de devises. Le calcul du risque de devises est basé sur la position nette en devises de la compagnie.

$$\boxed{CR_{devises} = 0.25 * positions\ nettes\ en\ devises}$$

3.3 Matrice de corrélation proposée par le QIS II

Le QIS II propose la matrice de corrélation suivante pour l'agrégation des différentes composantes du risque de marché :

	Actions	Taux d'intérêt	Immobiliers	Devises
Actions	1			
Taux d'intérêt	0.75	1		
Immobiliers	1	0.75	1	
Devises	0.25	0.25	0.25	1

4. PRISE EN COMPTE DES ELEMENTS D'ABSORPTION DU RISQUE

D'une manière générale, l'évaluation des provisions techniques comprend des montants relatifs aux participations bénéficiaires discrétionnaires.

En assurance vie, ces montants de participations bénéficiaires discrétionnaires peuvent servir à couvrir des pertes générales, c'est-à-dire qui ne sont pas relatives à un groupe d'assurés particuliers. Par conséquent, ces provisions possèdent une capacité d'absorption de risques en cas de survenance d'évènements extrêmes. Il en résulte que cette capacité doit être prise en compte dans le calcul du capital requis.

Cette capacité est mesurée en appliquant un facteur, noté k, à la part des provisions relatives aux participations bénéficiaires discrétionnaires :

$$RPB = k * PT_{participations\ bénéficiaires\ discrétionnaires}$$

- RPB = réduction pour participations bénéficiaires ;
- $PT_{participations\ bénéficiaires\ discrétionnaires}$ = part des provisions relatives aux participations bénéficiaires discrétionnaires.

La valeur du facteur est fixée par la compagnie mais dépend également d'un ensemble d'éléments :

- l'environnement légal peut restreindre l'utilisation de participations bénéficiaires futures comme élément d'absorption de pertes;
- le degré d'expectation des assurés concernant les participations bénéficiaires.

D'une manière générale, on peut considérer :
- un facteur faible, compris entre 0.2 et 0.3 lorsque la capacité d'absorption du risque par les participations bénéficiaires futures est limitée ou inconnue ;
- un facteur moyen, compris entre 0.5 et 0.6 lorsque la capacité d'absorption du risque par les participations bénéficiaires est moyenne ;
- un facteur élevé, compris entre 0.8 et 1 lorsque la capacité d'absorption du risque par les participations bénéficiaires est élevée.

Enfin, il est à noter que si les montants relatifs aux participations bénéficiaires discrétionnaires sont exclus de l'évaluation des provisions techniques et traités comme une part du capital disponible, le facteur k doit être ramené à zéro afin d'éviter un double comptage de ces montants.

5. CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX INITIALE

Données

Money market rates		
Grid point	**maturity date**	**rate**
ON	13-févr-2006	2.340%
T/N	15-févr-2006	2.340%
1W	22-févr-2006	2.365%
2W	01-mars-2006	2.372%
1M	15-mars-2006	2.426%
2M	18-avr-2006	2.533%
3M	15-mai-2006	2.592%
4M	15-juin-2006	2.623%
5M	17-juil-2006	2.668%
6M	15-août-2006	2.714%
7M	15-sept-2006	2.747%
8M	16-oct-2006	2.783%
9M	15-nov-2006	2.817%
10M	15-déc-2006	2.845%
11M	15-janv-2007	2.875%
12M	15-févr-2007	2.901%

Swap rates		
Grid point	**maturity date**	**par swap rate**
2 year	15-févr-2008	3.097%
3 year	15-févr-2009	3.203%
4 year	15-févr-2010	3.294%
5 year	15-févr-2011	3.362%
6 year	15-févr-2012	3.423%
7 year	15-févr-2013	3.479%
8 year	15-févr-2014	3.533%
9 year	15-févr-2015	3.584%
10 year	15-févr-2016	3.631%
12 year	15-févr-2018	3.711%
15 year	15-févr-2021	3.806%
20 year	15-févr-2026	3.898%
25 year	15-févr-2031	3.934%
30 year	15-févr-2036	3.939%
40 year	15-févr-2046	3.931%

Construction de la partie de courbe de maturités inférieures à un an

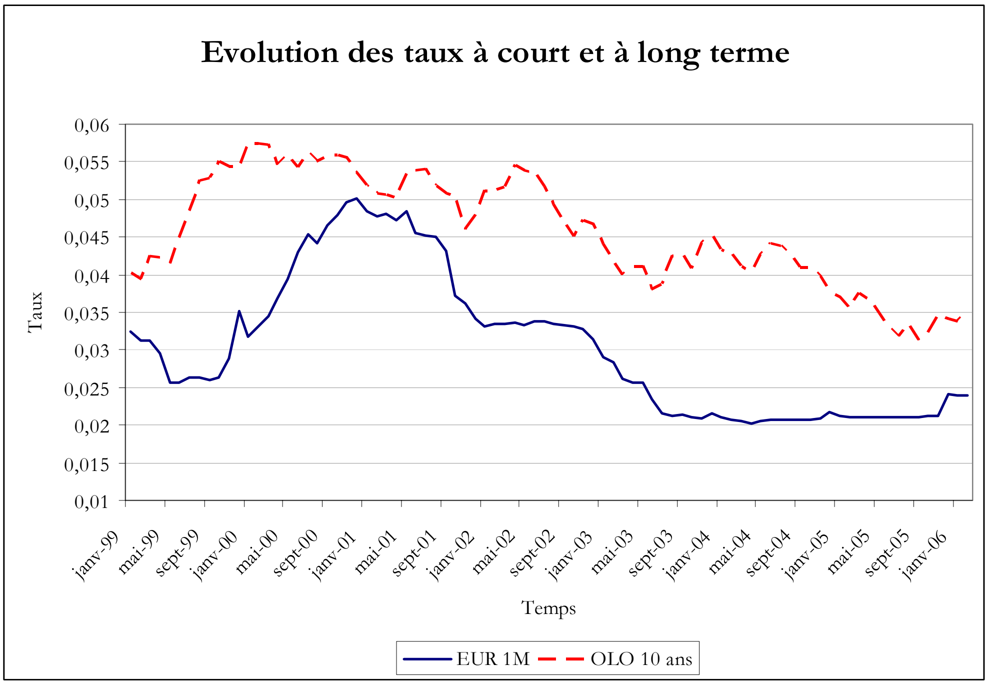
Maturité			**Jour Actual (n)**	**Taux EUR$_t$**	**DF Forward (de 2 à t)**	**Rem**	**DF Spot (de 0 à t)**	**Taux composé SPOT**
ON			0	2.340%	/	Spot 1 jr	0.99994	**2.3675%**
T/N			2	2.340%	0.99994	Fwd à 1 jr	0.99987	**2.3675%**
22	2	2006	9	2.365%	0.99955	Forward à deux jours	0.99942	**2.3871%**
1	3	2006	16	2.372%	0.99909		0.99896	**2.3953%**
15	3	2006	30	2.426%	0.99814		0.99801	**2.4476%**
18	4	2006	64	2.533%	0.99572		0.99559	**2.5538%**
15	5	2006	91	2.592%	0.99372		0.99359	**2.6120%**
15	6	2006	122	2.623%	0.99145		0.99132	**2.6416%**
17	7	2006	154	2.668%	0.98901		0.98888	**2.6846%**
15	8	2006	183	2.714%	0.98672		0.98659	**2.7286%**
15	9	2006	214	2.747%	0.98430		0.98417	**2.7591%**
16	10	2006	245	2.783%	0.98181		0.98168	**2.7924%**
15	11	2006	275	2.817%	0.97937		0.97924	**2.8236%**
15	12	2006	305	2.845%	0.97693		0.97680	**2.8486%**
15	1	2007	336	2.875%	0.97437		0.97424	**2.8754%**
15	2	2007	367	2.901%	0.97181		0.97168	**2.8981%**

Construction de la partie de courbe de maturités supérieures à un an

Maturité			Année (Tj)	Taux SWAP	Facteur d'actualisation B(0,t)	Taux Y(0,t)
13	2	2006	0			
15	2	2007	1		0.97181	2.901%
15	2	2008	2	3.097%	0.94077	3.100%
15	2	2009	3	3.203%	0.90961	3.209%
15	2	2010	4	3.294%	0.87811	3.303%
15	2	2011	5	3.362%	0.84712	3.374%
15	2	2012	6	3.423%	0.81640	3.439%
15	2	2013	7	3.479%	0.78605	3.499%
15	2	2014	8	3.533%	0.75602	3.558%
15	2	2015	9	3.584%	0.72646	3.615%
15	2	2016	10	3.631%	0.69754	3.668%
15	2	2017	11	3.671%	0.66963	3.713%
15	2	2018	12	3.711%	0.64220	3.759%
15	2	2019	13	3.743%	0.61609	3.796%
15	2	2020	14	3.774%	0.59055	3.834%
15	2	2021	15	3.806%	0.56559	3.872%
15	2	2022	16	3.824%	0.54273	3.894%
15	2	2023	17	3.843%	0.52053	3.915%
15	2	2024	18	3.861%	0.49897	3.938%
15	2	2025	19	3.880%	0.47803	3.961%
15	2	2026	20	3.898%	0.45771	3.985%
15	2	2027	21	3.905%	0.43955	3.992%
15	2	2028	22	3.912%	0.42200	3.999%
15	2	2029	23	3.920%	0.40506	4.007%
15	2	2030	24	3.927%	0.38871	4.016%
15	2	2031	25	3.934%	0.37292	4.024%
15	2	2032	26	3.935%	0.35864	4.023%
15	2	2033	27	3.936%	0.34491	4.021%
15	2	2034	28	3.937%	0.33168	4.020%
15	2	2035	29	3.938%	0.31895	4.019%
15	2	2036	30	3.939%	0.30670	4.018%
15	2	2037	31	3.938%	0.29521	4.014%
15	2	2038	32	3.937%	0.28417	4.010%
15	2	2039	33	3.937%	0.27354	4.006%
15	2	2040	34	3.936%	0.26333	4.003%
15	2	2041	35	3.935%	0.25350	3.999%
15	2	2042	36	3.934%	0.24405	3.995%
15	2	2043	37	3.933%	0.23496	3.992%
15	2	2044	38	3.933%	0.22622	3.989%
15	2	2045	39	3.932%	0.21782	3.985%
15	2	2046	40	3.931%	0.20973	3.982%

6. ESTIMATION HULL ET WHITE

Taux court et long pour l'estimation des paramètres du modèle :



7. TABLE PERIODIQUE : CODE

7.1 Choix du paramètre de lissage

```
function(data)

{
data <- as.vector(na.omit(data[,ncol(data)]))
age <- 60:(length(data)+59)
n <- length(age)

D <- matrix(nrow=9,ncol=3)

par(mfrow=c(3,3))

for (i in 1:9)
{
lisses <- loess(data~age,degree=1,span=i/10)
plot(age,data,"l",lty=2,col=2,main=paste("Par lissage
=",i/10),xlab="Age",ylab="Ln Mux")
lines(age,lisses$fitted,lty=1,col=1)
#legend(65,1,c("Bruts","Lissés"),col=c(1,2),lty=c(1,2))
D[i,1] <- i/10
D[i,2] <- lisses$enp
D[i,3] <- sum(lisses$resid^2)
}
colnames(D) <- c("Par Lissa","Nbre para","Somme carré erreurs ")}
```

7.2 Lissage et fermeture des tables

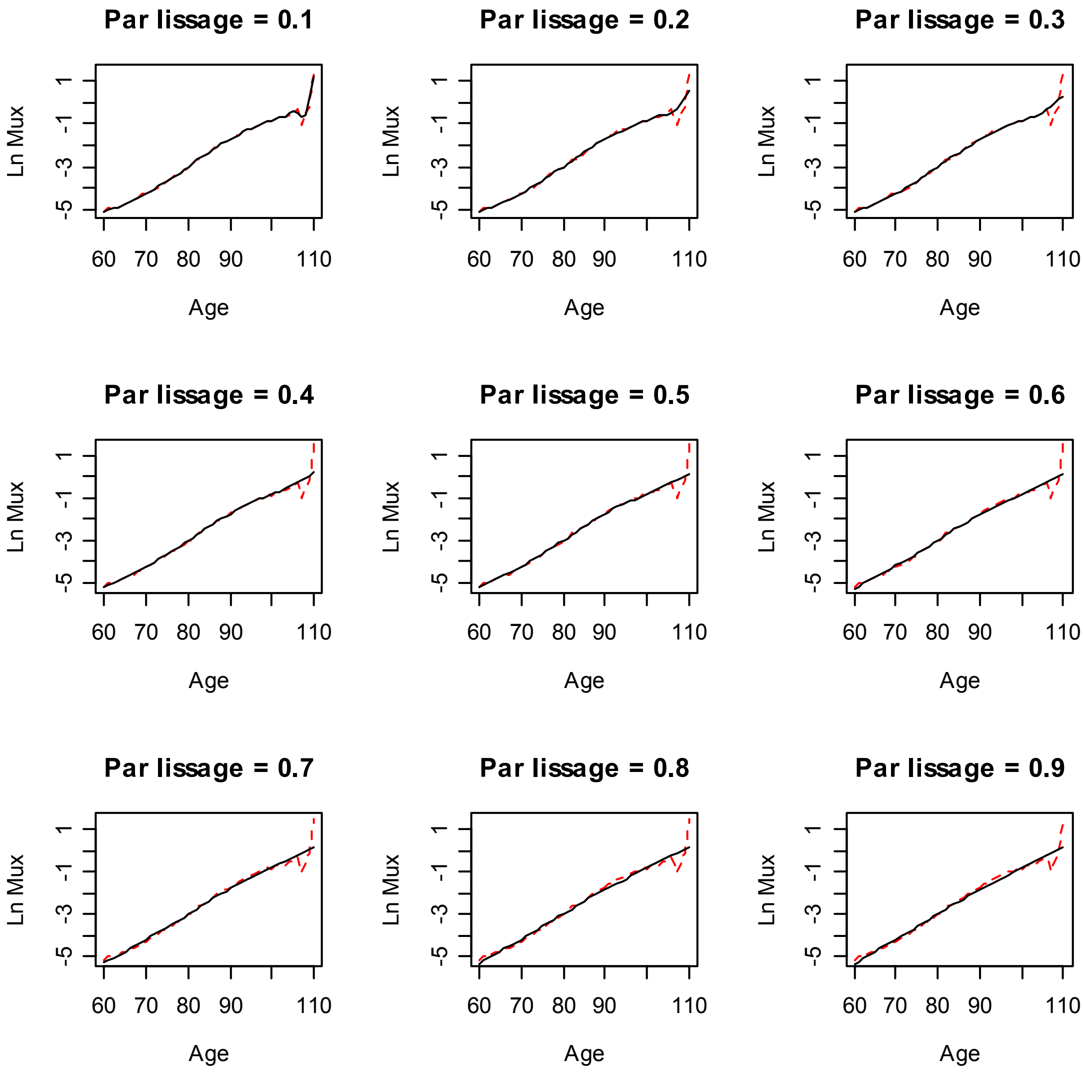
```
function(data,xlis,J)

{
data <- as.vector(na.omit(data[,ncol(data)]))
x1 <- 60
xn <- 59+length(data)
age <- x1:xn
n <- length(age)

### Lissage

lisses <- loess(data~age,degree=1,span=0.4)

### Fermeture de la table

lq <- log(1-exp(-exp(lisses$fitted)))

lignlis <- xlis-59
xproj <- xlis:110

lnqlis <- c()
lnqlis[1:(lignlis-1)] <- lq[1:(lignlis-1)]
```

```
x <- xlis:xn
y <- lq[lignlis:n]
data <- data.frame(x=x,y=y)

# Fermeture de la table dès l'âge xlis

regression <- nls (y~c*(x-111)^2,data=data,start=list(c=1))
k<-regression$m$getPars()[[1]]
lnqlis[lignlis:(111-x1)] <- k*(111-xproj)^2

# Raccord autour de xlis

      for(j in ((lignlis-5):(lignlis+5))) {lnqlis[j]<- log(prod(exp(lnqlis[(j-
J):(j+J)]))^(1/(2*J+1)))}

p<-1-exp(lnqlis)
return(p)

}
© Aurélie & Claire
```

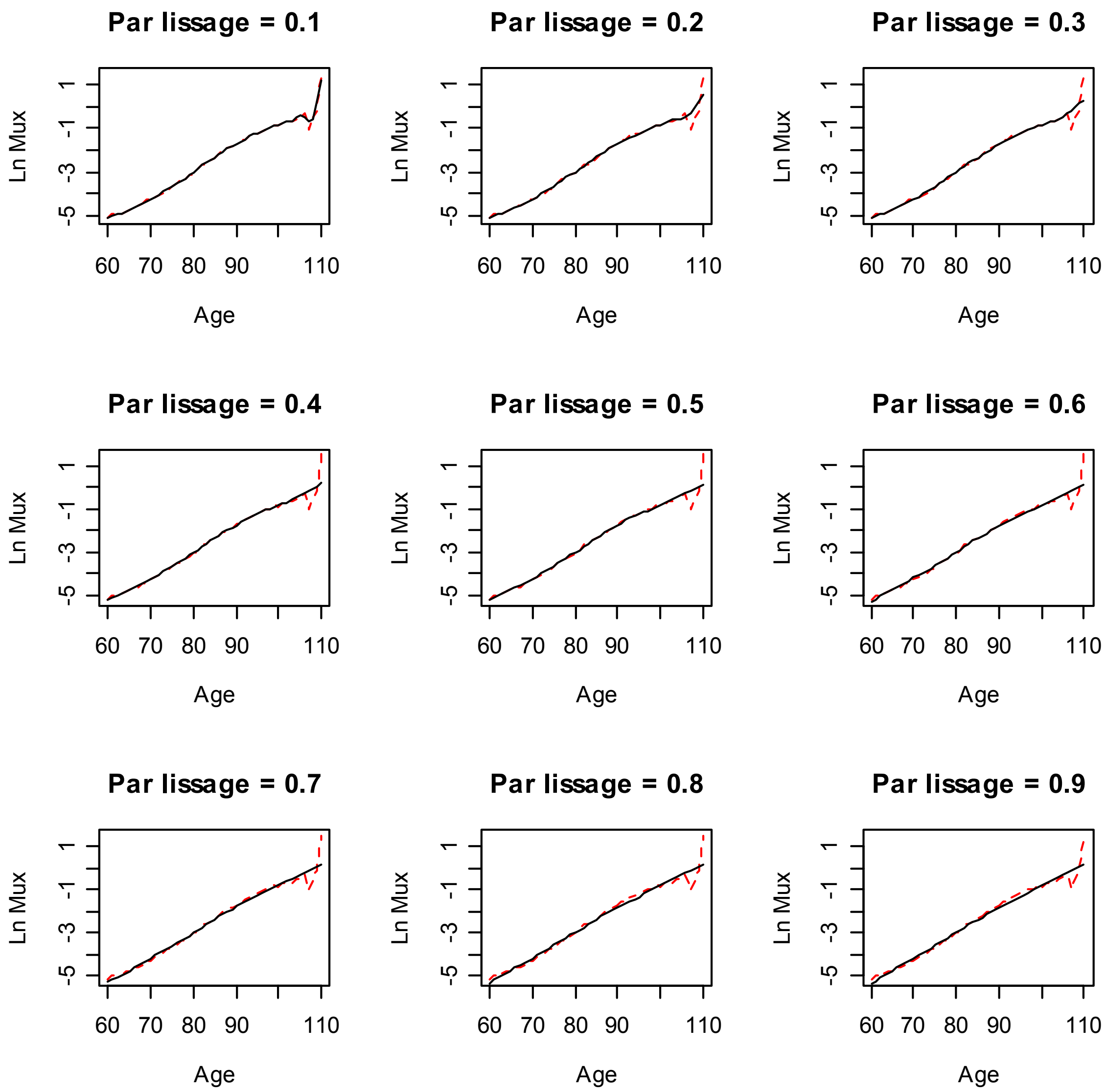
8. TABLE PERIODIQUE : CHOIX DU PARAMETRE DE LISSAGE POUR L'ANNEE 2002

Les graphes ci-dessous reprennent les courbes des logarithmes du taux de mortalité lissés pour différentes valeurs du paramètre de lissage.

<u>Résultats pour les hommes</u>



Résultats pour les femmes



Tant au niveau des hommes qu'au niveau des femmes, nous constatons que, quelle que soit la valeur du paramètre de lissage, comprise entre 0.2 et 0.8, la courbe lissée ajuste bien les données pour les âges allant de 60 à 85 ans. Pour les âges plus élevés, ce sont les paramètres les plus faibles (correspondant aux modèles plus compliqués) qui représentent le mieux les données de fin de table.

Les tableaux ci-dessous reprennent pour ces différentes valeurs de paramètres, la somme des carrés des erreurs et le nombre de paramètres équivalents pour les hommes et pour les femmes. Afin de trouver un compromis entre un nombre équivalent de paramètres raisonnable et une somme des carrés des résidus acceptables, nous retenons la valeur de 0.4 comme paramètre de lissage tant au niveau des hommes qu'au niveau des femmes.

Résultats pour les hommes

Paramètre de lissage	**Nombre de paramètres équivalents**	**Sommes des carrés des erreurs**
0.1	19.05	0.53
0.2	8.37	2.09
0.3	6.11	2.65
0.4	**4.53**	**2.88**
0.5	3.81	3.01
0.6	3.26	3.11
0.7	2.95	3.19
0.8	2.66	3.31
0.9	2.45	3.42

Résultats pour les femmes

Paramètre de lissage	**Nombre de paramètres équivalents**	**Sommes des carrés des erreurs**
0.1	19.05	0.53
0.2	8.37	2.09
0.3	6.11	2.65
0.4	**4.53**	**2.88**
0.5	3.81	3.01
0.6	3.26	3.11
0.7	2.95	3.19
0.8	2.66	3.31
0.9	2.45	3.41

9. TABLES DE MORTALITE PROSPECTIVES : CODE

9.1 Lissage et fermeture de la table brute

```
function (data,xlis,J)
{
# xlis = âge de début de lissage (80 ans)
# 2J + 1 = intervalle de moyenne géométrique
databrut <- data

Q <- as.matrix(1-exp(-exp(data)))
logq<-as.matrix(log(Q))

      l<-c()

      for (i in 1:ncol(logq)){
      if(sum(as.numeric(is.finite(logq[,i])))==length(logq[,i]))
      {l[i]=length(logq[,i])}
      else {l[i]<-min(which(is.finite(logq[,i])==FALSE))-1}}

lq <- logq[(1:min(l)),]

x1<-as.numeric(dimnames(lq)[[1]][1])
xn<-x1+nrow(lq)-1
lignlis <- xlis-x1+1

xproj <- xlis:129

k<-c()
lnqlis <- matrix(nrow=(130-x1),ncol=ncol(lq))
lnqlis[1:(lignlis-1),] <- lq[1:(lignlis-1),]
res <- matrix(nrow=xn-xlis+1,ncol=ncol(lq))
mres <- c()

      for (i in 1:ncol(lq))
      {
      x <- xlis:xn
      y <- lq[(lignlis:nrow(lq)),i]
      data <- data.frame(x=x,y=y)

      # Fermeture de la table dès l'âge xlis
      regression <- nls (y~c*(x-130)^2,data=data,start=list(c=1))
      k[i]<-regression$m$getPars()[[1]]
      lnqlis[(lignlis:(130-x1)),i] <- as.matrix(k[i]*(130-xproj)^2)

      # Résidus de la régression
      residu <- resid(regression)
      mres[i] <- mean(na.omit(residu))
      res[,i] <- (residu-mean(na.omit(residu)))/sd(na.omit(residu))

      # Raccord autour de xlis
      for(j in ((lignlis-5):(lignlis+5))){lnqlis[j,i]<-log(prod(exp(lnqlis[(j-
      J):(j+J),i]))^(1/(2*J+1)))}}

return(log(-log(1-exp(lnqlis))))}
```

9.2 Première estimation des paramètres de Lee & Carter

```
function (data,annee)
{

if(2003-annee!=ncol(data)){data <- data[,((annee-1954):ncol(data))]}

A <- as.matrix(1/ncol(data)*rowSums(data))
Z <- data - matrix(nrow=nrow(data), ncol=ncol(data), A)
SVD <- svd(Z,nu=nrow(Z),nv=ncol(Z))
B <- SVD$u[,1]/sum(SVD$u[,1])
K <- SVD$d[1]*sum(SVD$u[,1])*SVD$v[,1]

ages <- c((130-nrow(data)):129)
annees <- c(annee:2002)

# Calcul du taux d'inertie (qualité du modèle)

pi <- SVD$d[1]/sum(SVD$d)
print(pi)

return(list(alphas=A, betas=as.matrix(B), kappas=t(as.matrix(K)),inertie=pi))
}
```

9.3 Réestimation des kappas

Justification de la nécessité de réestimation des paramètres

```
function (D,E,A,B,K)
{

D <- D[61:111,25:72]
E <- E[61:111,25:72]

r <- nrow(D)
c <- ncol(D)
k <- ncol(K)
A <- as.matrix(A[1:r,])
B <- as.matrix(B[1:r,])
E <- E[,(c+1-k):c]
D <- D[,(c+1-k):c]

erreur <- c()
for (i in 1:k){erreur[i]<-error(K[i],i,D,E,A,B)}

x <- (2003-ncol(K)): 2002
plot(x,erreur,xlab="Année",ylab="Erreur",main="Erreur sur les décès avant
réestimation des kappas")
print(paste("La somme des erreurs est de",round(sum(erreur))))

return(erreur)

}
```

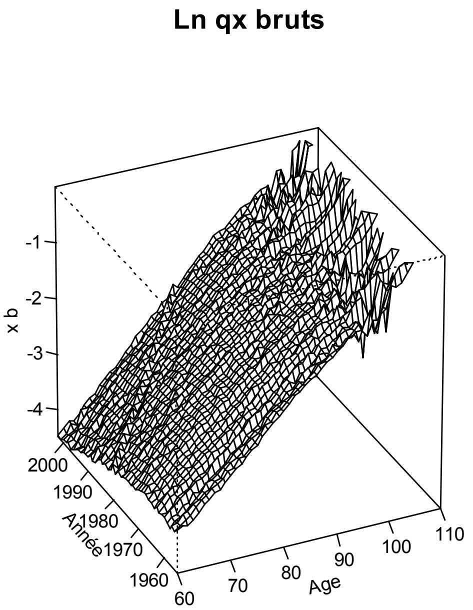
Réestimation des paramètres de Lee & Carter

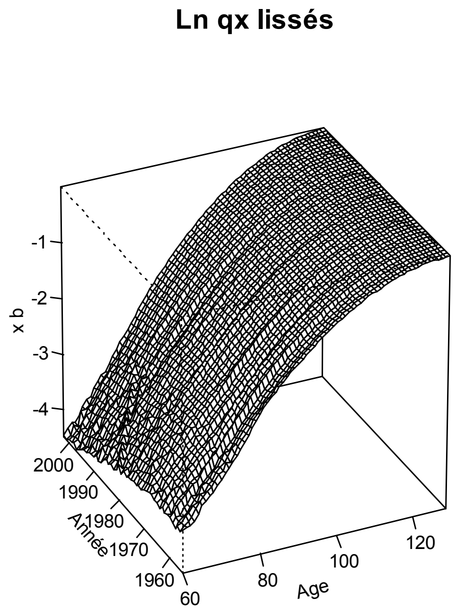
```
function (D,E,A,B,K)

{
D <- D[61:111,25:72]
E <- E[61:111,25:72]

t <- ncol(K)
D <- D[,(49-t):48]
E <- E[,(49-t):48]

rac <- c()
froot <- c()

        for(i in 1:t)
        {
        x <- seq(-100,100, by=0.1)

        uniR <- uniroot(error,c(-100,100),t=i,D=D,E=E,A=A,B=B,tol =
.Machine$double.eps^0.25)
        rac[i] <- uniR$root
        froot[i] <- uniR$f.root
        }

alphasbis <- A+B*mean(rac)
rac <- rac-mean(rac)

abs <- c(1955:2002)
oldkappas <- K[1,]
newkappas <- rac
plot(abs,oldkappas,type="l",lty=2,col=2,main="Estimation des
kappas",xlab="Temps",ylab="Kappas")
lines(abs,newkappas,lty=1,col=1)

legend(1962,-5,c("Avant réestimation","Après
réestimation"),cex=0.8,lty=c(1,2),col=c(1,2))

return(list(kappas=t(as.matrix(rac)),alphas=as.matrix(alphasbis)))

}

© Aurélie & Claire
```

10. TABLES DE MORTALITE PROSPECTIVES : GRAPHES

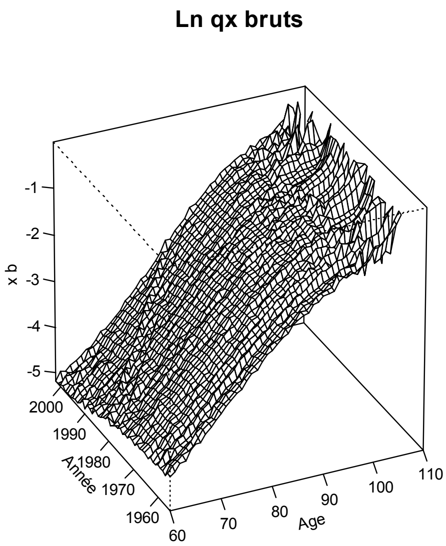
10.1 Fermeture et lissage de la table brute

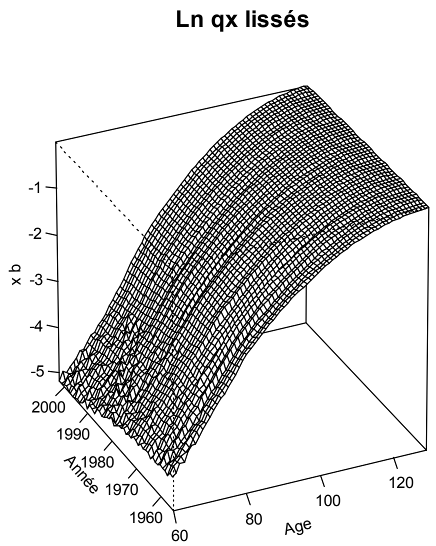
Logarithmes des taux de mortalités bruts et lissés chez les hommes





Logarithmes des taux de mortalités bruts et lissés chez les femmes

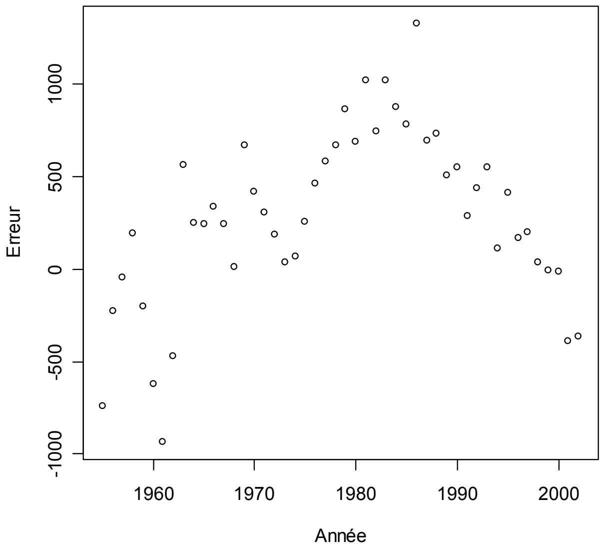


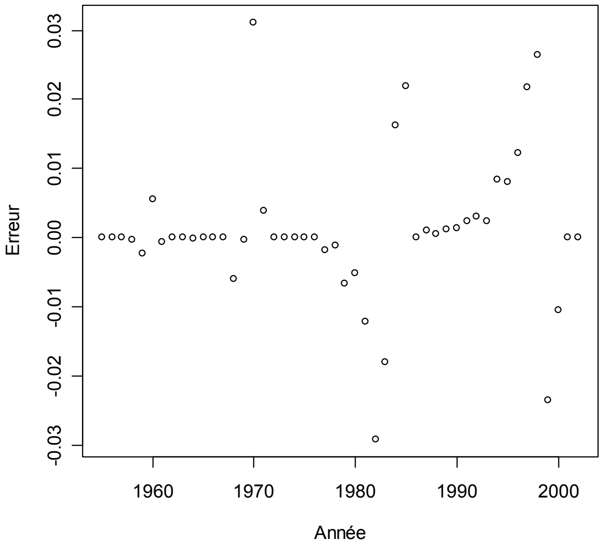


10.2 Réestimation des kappas

Résultats chez les hommes

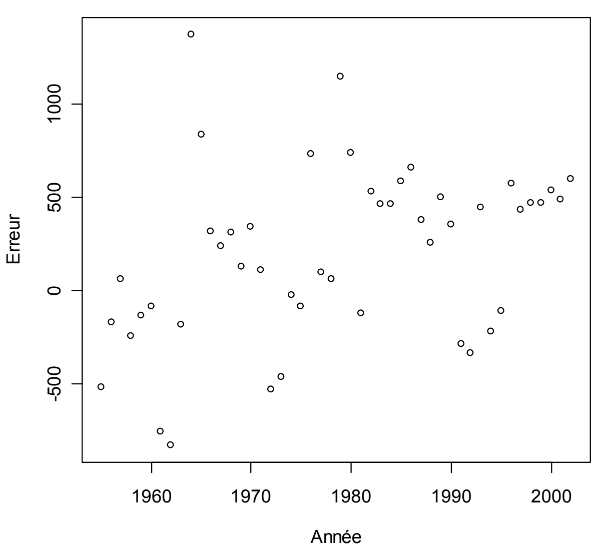
Chez les hommes, la somme des erreurs avant réestimation (à gauche) est de 13483. Elle est de 0 après réestimation des kappas (à droite) :

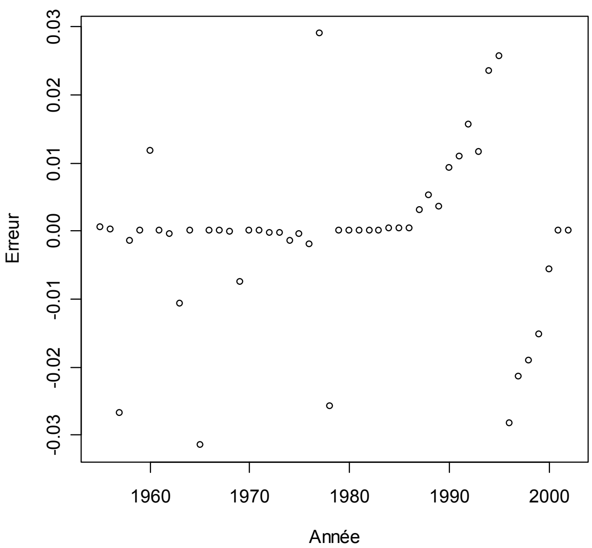




Résultats chez les femmes

Chez les femmes, la somme des erreurs avant réestimation (à gauche) est de 9671. Elle est de 0 après réestimation des kappas (à droite) :





10.3 Projection des kappas

Choix du meilleur modèle de projection pour les hommes

- Autocorrélogrammes total et partie de la série différenciée des kappas

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.399	-0.399	7.9573	0.005
2	0.016	-0.170	7.9698	0.019
3	0.376	0.386	15.373	0.002
4	-0.300	0.006	20.202	0.000
5	0.221	0.134	22.892	0.000
6	0.033	0.025	22.955	0.001
7	0.031	0.224	23.011	0.002
8	0.136	0.144	24.099	0.002
9	-0.109	-0.027	24.825	0.003
10	0.142	-0.009	26.071	0.004
11	-0.044	-0.060	26.193	0.006
12	-0.108	-0.177	26.966	0.008
13	0.234	0.036	30.665	0.004
14	-0.165	-0.056	32.559	0.003
15	0.106	0.099	33.370	0.004
16	-0.063	-0.187	33.661	0.006
17	-0.066	-0.045	33.995	0.008
18	0.126	0.015	35.248	0.009
19	-0.247	-0.107	40.246	0.003
20	0.139	-0.046	41.901	0.003

- Résultats détaillés du modèle ARIMA(0,1,1)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.786800	0.021231	-37.05971	0.0000
MA(1)	-0.989948	0.000228	-4350.549	0.0000

R-squared	0.470811	Mean dependent var	-0.728060
Adjusted R-squared	0.445612	S.D. dependent var	0.909143
S.E. of regression	0.676922	Akaike info criterion	2.140421
Sum squared resid	9.622704	Schwarz criterion	2.239160
Log likelihood	-22.61484	F-statistic	18.68340
Durbin-Watson stat	1.802637	Prob(F-statistic)	0.000301
Inverted MA Roots	.99		

- Autocorrélogrammes des résidus

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.095	0.095	0.2343	
2	-0.162	-0.172	0.9518	0.329
3	0.027	0.064	0.9727	0.615
4	-0.144	-0.191	1.6031	0.659
5	-0.388	-0.358	6.4130	0.170
6	-0.153	-0.178	7.1998	0.206
7	0.126	0.017	7.7745	0.255
8	-0.164	-0.303	8.8067	0.267
9	0.040	-0.055	8.8725	0.353
10	0.268	-0.019	12.054	0.210
11	-0.003	-0.177	12.054	0.281
12	0.002	-0.006	12.054	0.360

<u>Choix du meilleur modèle de projection pour les femmes</u>

- Autocorrélogrammes total et partie de la série différenciée des kappas

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.506	-0.506	12.818	0.000
		2	0.039	-0.292	12.895	0.002
		3	0.320	0.290	18.255	0.000
		4	-0.362	-0.047	25.284	0.000
		5	0.186	-0.025	27.172	0.000
		6	-0.012	-0.062	27.180	0.000
		7	0.000	0.171	27.180	0.000
		8	0.167	0.282	28.829	0.000
		9	-0.213	-0.051	31.568	0.000
		10	0.144	-0.097	32.855	0.000
		11	-0.055	-0.092	33.049	0.001
		12	-0.162	-0.126	34.767	0.001
		13	0.240	0.043	38.662	0.000
		14	-0.221	-0.130	42.078	0.000
		15	0.167	0.081	44.087	0.000
		16	-0.094	-0.127	44.736	0.000
		17	-0.110	-0.121	45.673	0.000
		18	0.195	0.034	48.704	0.000
		19	-0.290	-0.085	55.639	0.000
		20	0.180	0.037	58.392	0.000

- Résultats détaillés du modèle ARIMA(0,1,1)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.887119	0.104023	-8.528099	0.0000
MA(1)	-0.548732	0.174772	-3.139699	0.0042

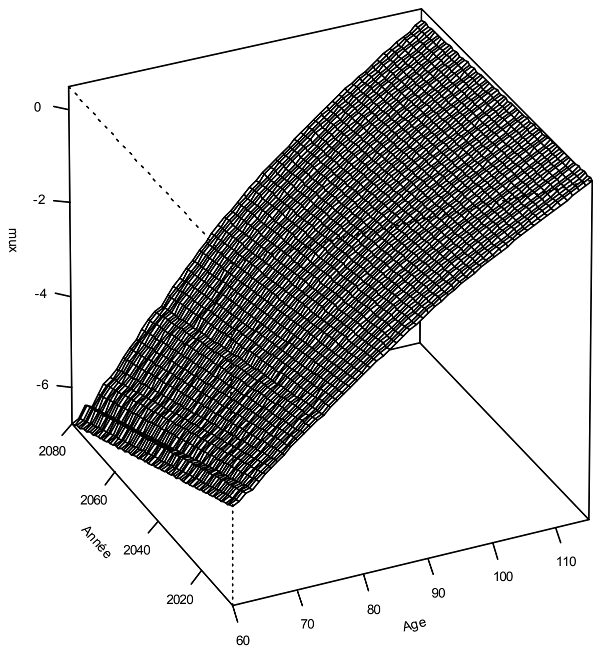
R-squared	0.259000	Mean dependent var	-0.832029
Adjusted R-squared	0.230500	S.D. dependent var	1.313284
S.E. of regression	1.152028	Akaike info criterion	3.189674
Sum squared resid	34.50637	Schwarz criterion	3.284831
Log likelihood	-42.65543	F-statistic	9.087726
Durbin-Watson stat	1.949496	Prob(F-statistic)	0.005681

- Autocorrélogrammes des résidus

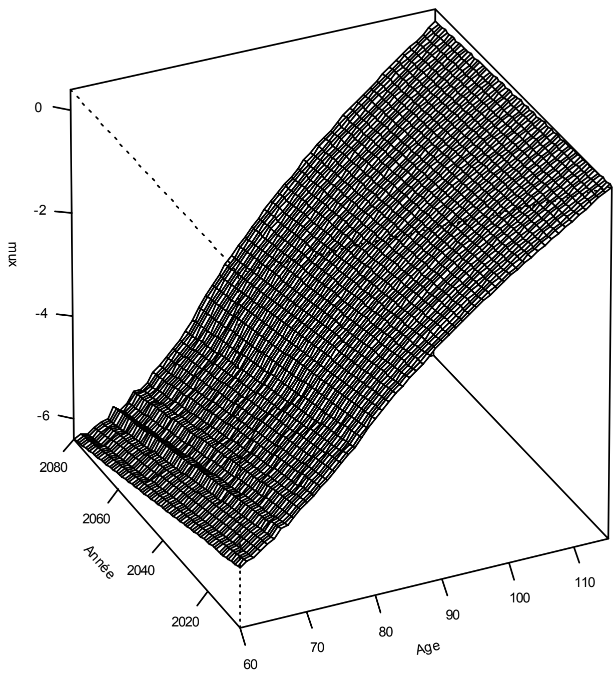
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.036	-0.036	0.0411	
		2	0.049	0.048	0.1198	0.729
		3	0.200	0.204	1.4584	0.482
		4	-0.102	-0.092	1.8213	0.610
		5	-0.141	-0.179	2.5523	0.635
		6	-0.121	-0.176	3.1120	0.683
		7	0.081	0.143	3.3721	0.761
		8	0.044	0.159	3.4524	0.840
		9	-0.053	-0.034	3.5766	0.893
		10	0.133	-0.004	4.4045	0.883
		11	0.041	-0.017	4.4875	0.923
		12	-0.335	-0.340	10.387	0.496

10.4 Tables de mortalité prospectives

Logarithmes des taux de mortalité projetés pour les hommes



Logarithmes des taux de mortalité projetés pour les femmes



11. DETERMINATION DU CAPITAL REQUIS : CODE

```
function (scenario,prop)
{

h <- 55

tableFPer <- npx(FPer)
tableMPer <- npx(MPer)
tableFLC <- npx(FLC)
tableMLC <- npx(MLC)

wPer <- nrow(tableFPer)+59
wLC <- nrow(tableFLC)+59

aleas <- aleas[1:(scenario*h),]

########## Taux court terme

a <- 0.0484
sigma <- 0.0102

C1 <- 0.04171739798819
C2 <- 0.05855883948219
C3 <- -0.03606958602730
C4 <- -0.08047902041946
k <- 0.69682560008903

theta <- c()
taux_fwd <- c()
taux_spot <- c()
B0T <- c()

taux_spot[1] <- 0
B0T[1] <- 1

for (t in 0:(h+10))
{
f <- C1+C2*exp(-k*t)+C3*t*exp(-k*t)+C4*exp(-2*k*t)
derivee_f <- -k*C2*exp(-k*t)-k*C3*t*exp(-k*t)+C3*exp(-k*t)-2*k*C4*exp(-2*k*t)
theta[t+1] <- derivee_f+a*f+sigma^2/(2*a)*(1-exp(-2*a*t))
taux_fwd[t+1] <- f
t <- t+1
taux_spot[t+1] <- 1/t*((C1*t+C2*(1-exp(-k*t))/k+C3*(1-exp(-k*t)-k*t*exp(-
k*t))/(k^2)+C4*(1-exp(-2*k*t))/(2*k)))
B0T[t+1] <- exp(-t*taux_spot[t])
}

Y_10 <- matrix(nrow=scenario,ncol=(h+11),0)
taux_court <- matrix(nrow=scenario,ncol=(h+1))
taux_court[,1] <- 0.0236751602272467
Y_10[,1] <- -log(B0T[11])/10

MEPer <- matrix(nrow=scenario,ncol=h)
MELC <- matrix(nrow=scenario,ncol=h)
MRPer <- matrix(nrow=scenario,ncol=h)
```

```
MRLC <- matrix(nrow=scenario,ncol=h)

rxPer <- 0.04*0.06455
rxLC <- 0.04*0.05765

g <- 0.001

###### Boucle

for (N in 1:scenario)
{

print(paste("Je suis au scénario",N))

      BtT <- matrix(nrow=(h+1),ncol=(h+11),0)
      BtT[1,] <- B0T[1:(h+11)]
      for (i in 1:(h+1)) {BtT[i,i] <- 1}

      margePer <- matrix(nrow=(h+1),ncol=(h+1),0)
      margeLC <- matrix(nrow=(h+1),ncol=(h+1),0)

      for (t in 1:h)

      {

      i <- t+1          # Indice sur les lignes
      taux_court[N,i] <- taux_court[N,i-1]*(1-a)+theta[i-1]+sigma*aleas[h*(N-
1)+i-1,1]


            for (T in t:(h+10))
            {
            j <- T+1          # Indice sur les colonnes
            A <- (1-exp(-a*(T-t)))/a
            X <- A*taux_fwd[i]-sigma^2/(4*a)*(1-exp(-2*a*t))*A^2-
A*taux_court[N,i]
            BtT[i,j] <- B0T[j]/B0T[i]*exp(X)
            if (T==t+10) {Y_10[N,i] <- -log(BtT[i,j])/10}
            }

      # Calcul des réserves économiques (ME) # Attention : boucle t = 1, on
calcule réserves pour t = 0

      reservetotalPer <- 0
      reservetotalLC <- 0

            for (ind in 1:600)
            {
            x <- portefeuille[ind,1]
            sexe <- portefeuille[ind,2]
            rente <- portefeuille[ind,3]

                  if(x+t>wPer) {reservetotalPer <- reservetotalPer}
                  else
                  {
                  if (sexe==2){table <- tableFPer}
                  else{table <- tableMPer}
                  axPer <- c()
```

```
                  for (u in t:(wPer-x)){axPer[u-t+1] <- BtT[t,u]*table[x-
59,u]}
                  reservePer <- (1+g)*rente*(sum(axPer))
                  reservetotalPer <- reservetotalPer + reservePer
                  }

                  if(x+t>wLC) {reservetotalLC <- reservetotalLC}
                  else
                  {
                  if (sexe==2){table <- tableFLC}
                  else{table <- tableMLC}
                  axLC <- c()
                  for (u in t:(wLC-x)){axLC[u-t+1] <- BtT[t,u]*table[x-59,u]}
                  reserveLC <- (1+g)*rente*(sum(axLC))
                  reservetotalLC <- reservetotalLC + reserveLC
                  }
            }

            for (T in t:(h+1))
            {
            margePer[t,T] <- reservetotalPer*BtT[t,T]
            margeLC[t,T] <- reservetotalLC*BtT[t,T]
            }

            MEPer[N,t] <- reservetotalPer
            MELC[N,t] <- reservetotalLC

      }

      for (t in 1:h)
      {
            MRPer[N,t] <- rxPer*sum(margePer[t,])
            MRLC[N,t] <- rxLC*sum(margeLC[t,])
      }

}

VMPassifPer <- MEPer + MRPer
VMPassifLC <- MELC + MRLC


######### Les flux du passif

fluxPer <- c()
fluxLC <- c()


for (t in 1:h)
{
      fluxPer[t] <- 0
      fluxLC[t] <- 0

      for (ind in 1:600)
      {

      x <- portefeuille[ind,1]
      sexe <- portefeuille[ind,2]
      rente <- portefeuille[ind,3]
```

```
	fluPer <- 0
	fluLC <- 0

	if(x+t>wPer){fluPer <- fluPer}
	else
		{
		if (sexe==2){table <- tableFPer}
		else {table <- tableMPer}
		fluPer <- (1+g)*rente*table[x-59,t]
		}

	if(x+t>wLC){fluLC <- fluLC}
	else
		{
		if (sexe==2){table <- tableFLC}
		else {table <- tableMLC}
		fluLC <- (1+g)*rente*table[x-59,t]
		}

	fluxPer[t]<- fluxPer[t] + fluPer
	fluxLC[t]<- fluxLC[t] + fluLC

	}
}


###### Titres financiers et Valeur de marché des actifs (avec réinvestissement des CF du passif)

S1 <- matrix(nrow=scenario,ncol=(h+1))
S2 <- matrix(nrow=scenario,ncol=(h+1))
S1[,1] <- 1
S2[,1] <- 1
mu1 <- 0.0310
sigma1 <- 0.1838
mu2 <- -0.0375+Y_10
sigma2 <- 0.0292

for (N in 1:scenario)
{
	for (t in 1:h)
	{
	i <- t+1
	S1[N,i] <- S1[N,i-1]*exp(mu1-0.5*sigma1^2+sigma1*aleas[h*(N-1)+i-1,2])
	S2[N,i] <- S2[N,i-1]*exp(mu2[N,i-1]-0.5*sigma2^2+sigma2*aleas[h*(N-1)+i-1,3])
	}
}

rdt1 <- S1[,2:h]/S1[,1:(h-1)]
rdt2 <- S2[,2:h]/S2[,1:(h-1)]
rdt <- log(rdt1*(1-prop)+rdt2*prop)

return(list(rdt=rdt,fluxPer=fluxPer,fluxLC=fluxLC,VMPassifPer=VMPassifPer,VMPassifLC=VMPassifLC))

}
```

```
function (scenario,capprop,br)
{

fonction <- fonctionruine(scenario,0.8)
rdt <- fonction$rdt
fluxPer <- fonction$fluxPer
fluxLC <- fonction$fluxLC
VMPassifPer <- fonction$VMPassifPer
VMPassifLC <- fonction$VMPassifLC

num <- 1
x <- c()
VOpPer <- c()
TOpPer <- c()
VOpLC <- c()
TOpLC <- c()
VCptPer <- c()
TCptPer <- c()
VCptLC <- c()
TCptLC <- c()

for(propcap in capprop)

{
print(paste("Cap / PT =",propcap))
x[num] <- propcap

h <- 55

VMActifPer <- matrix(ncol=h,nrow=scenario)
VMActifLC <- matrix(ncol=h,nrow=scenario)
VMActifPer[,1] <- 72500000*(1+propcap)
VMActifLC[,1] <- 72500000*(1+propcap)

        for (N in 1:scenario)
        {
        for(t in 1:(h-1)){VMActifPer[N,t+1] <- VMActifPer[N,t]*exp(rdt[N,t]) - 
fluxPer[t]}
        for(t in 1:(h-1)){VMActifLC[N,t+1] <- VMActifLC[N,t]*exp(rdt[N,t]) - 
fluxLC[t]}
        }

ruineOpPer <- - VMActifPer
ruineOpLC <- - VMActifLC
ruineCptPer <- - VMActifPer + VMPassifPer
ruineCptLC <- - VMActifLC + VMPassifLC

# Création du vecteur "Perte"

compteurOpPer <- c()
compteurOpLC <- c()
compteurCptPer <- c()
compteurCptLC <- c()

      for (N in 1:scenario)
      {
      ligneOpPer <- ruineOpPer[N,]
      maxOpPer <- max(ligneOpPer)
```

```
        if(maxOpPer <= 0){compteurOpPer[N] <- maxOpPer}
        else{compteurOpPer[N] <- ligneOpPer[ligneOpPer > 0][1]}

        ligneOpLC <- ruineOpLC[N,]
        maxOpLC <- max(ligneOpLC)
        if(maxOpLC <= 0){compteurOpLC[N] <- maxOpLC}
        else{compteurOpLC[N] <- ligneOpLC[ligneOpLC > 0][1]}

        ligneCptPer <- ruineCptPer[N,]
        maxCptPer <- max(ligneCptPer)
        if(maxCptPer <= 0){compteurCptPer[N] <- maxCptPer}
        else{compteurCptPer[N] <- ligneCptPer[ligneCptPer > 0][1]}

        ligneCptLC <- ruineCptLC[N,]
        maxCptLC <- max(ligneCptLC)
        if(maxCptLC <= 0){compteurCptLC[N] <- maxCptLC}
        else{compteurCptLC[N] <- ligneCptLC[ligneCptLC > 0][1]}
        }
par(mfrow=c(2,2),cex.main=0.8,oma=c(1,1,2,1))

hist(compteurOpPer,breaks=br,main="Ruine opérationnelle - table
périodique",xlab="Montant de ruine",ylab="Nombre d'occurences")
abline(v=0,col=2)

mtext(paste("CS(0)/PT(0) =",propcap),side=3,cex=1,outer=T)

hist(compteurOpLC,breaks=br,main="Ruine opérationnelle - table
prospective",xlab="Montant de ruine",ylab="Nombre d'occurences")
abline(v=0,col=2)
hist(compteurCptPer,breaks=br,main="Ruine comptable - table
périodique",xlab="Montant de ruine",ylab="Nombre d'occurences")
abline(v=0,col=2)
hist(compteurCptLC,breaks=br,main="Ruine comptable - table
prospective",xlab="Montant de ruine",ylab="Nombre d'occurences")
abline(v=0,col=2)

VaROpPer <- quantile(compteurOpPer,0.7)
VOpPer[num] <- VaROpPer
TVaROpPer <- mean(compteurOpPer[compteurOpPer>=VaROpPer ])
TOpPer[num] <- TVaROpPer

VaROpLC <- quantile(compteurOpLC,0.7)
VOpLC[num] <- VaROpLC
TVaROpLC <- mean(compteurOpLC[compteurOpPer>=VaROpLC])
TOpLC[num] <- TVaROpLC

VaRCptPer <- quantile(compteurCptPer,0.7)
VCptPer[num] <- VaRCptPer
TVaRCptPer <- mean(compteurCptPer[compteurCptPer>=VaRCptPer])
TCptPer[num] <- TVaRCptPer

VaRCptLC <- quantile(compteurCptLC,0.7)
VCptLC[num]<- VaRCptLC
TVaRCptLC <- mean(compteurCptLC[compteurCptLC>=VaRCptLC])
TCptLC[num] <- TVaRCptLC
num <- num + 1}}

© Aurélie & Claire
```