Institut de Statistique
de l'Université de Paris
ISUP

-

Valorisation économique des engagements appliquée à un portefeuille de retraite complémentaire avec option de sortie en rente

-

Gauthier Ait Braham

Octobre 2017

Remerciements

Je remercie Taoufik Lachker, Directeur Actuariat et Finances à l'International de la société **Sogecap**, de m'avoir offert la possibilité de réaliser cette alternance dans son service où j'ai eu la chance de rencontrer des collaborateurs d'excellence. Je remercie chacun d'entre eux pour cette année riche en échanges et en partage.

Je remercie Arzu Akyurek Saleh, responsable de l'équipe Pilotage technique, de m'avoir accueilli dans son une équipe admirable. Cette équipe était motivée et investie dans son travail.

Je remercie, en particulier, Wen Xia et Thong Tran de m'avoir encadré et guidé tout au long de cette année passée. Je les remercie aussi d'avoir toujours eu l'investissement nécessaire pour me faire profiter de leur expertise à travers l'ensemble des travaux que j'ai pu effectuer.

Je remercie également Reda Jarir ainsi que Youssef Karmich de m'avoir accordé du temps et de m'avoir éclairé à plusieurs reprises, grâce à leurs conseils et à leurs explications pragmatiques.

Enfin, je voulais particulièrement et sincèrement remercier ma famille et mes proches de m'avoir accompagné dans tous les moments.

Résumé

Mots clés : Valorisation, Retraite complémentaire, Rente viagère, Longévité, Solvabilité II, Risque de souscription vie, Best Estimate, Marge de risque

L'inversion du cycle de production d'une société d'assurance l'oblige à identifier, évaluer, contrôler et surveiller les différents risques à court et long terme auxquels elle est confrontée. Elle se doit d'estimer, de la manière la plus juste possible, ses provisions techniques, correspondant aux dettes qui lui incombent vis-à-vis de l'ensemble de ses assurés afin de prouver sa capacité à faire face à ses engagements. La directive Solvabilité II est un ensemble de règles édité par la Commission Européenne et adopté en 2009 par le Conseil de l'Europe et le Parlement Européen. En vigueur depuis le 1er janvier 2016, elle définit les exigences de solvabilité des entreprises de façon harmonisée en Europe et encourage à mieux connaître et évaluer les risques auxquels elles sont exposées. Elle développe une vision économique des engagements et de la richesse d'une entreprise en les définissant comme la valeur actuelle des cash-flows futurs aux conditions de marché. Ainsi, la valorisation de l'actif doit respecter le principe de «mark-to-market» en utilisant les prix de marché, alors que la valorisation des passifs non couvrables doit respecter le principe de «mark-to-model» : la valorisation est définie par le modèle.

Dès lors, les hypothèses de modélisation définissent l'estimation des engagements. Solvabilité II introduit la notion de meilleure estimation, les provisions «Best Estimate», correspondant à la modélisation où les hypothèses sont en adéquation avec le profil du portefeuille valorisé ainsi qu'avec les marchés financiers. En nous appuyant sur un portefeuille de contrats de retraite complémentaire comprenant une option de sortie en rente, nous élaborons un modèle de projection stochastique des flux futurs afin de valoriser les engagements. Ce mémoire aura pour objet l'estimation de la valeur de transfert du portefeuille, c'est-à-dire la valeur qu'exigerait un tiers pour reprendre les engagements relatifs au portefeuille. Cette modélisation nécessite une cartographie précise des risques inhérents au contrat et une modélisation cohérente avec l'horizon d'écoulement du passif et des conditions de marché. La construction d'un modèle de projection stochastique permet de tenir compte de l'hétérogénéité du portefeuille ainsi que de la valeur temps des garanties. Cette approche permet d'obtenir une distribution des engagements liés au portefeuille.

Les mesures de sensibilité par rapport à l'hypothèse d'incidence à l'option de sortie en rente viagère et l'étude du risque de longévité par la construction d'une table générationnelle d'expérience permettront de conclure quant au caractère Best Estimate des hypothèses. Le calcul du capital économique et la détermination de la marge de risque donneront la valeur des provisions techniques prudentielles dans un cadre Solvabilité II.

Abstract

Keys Words : Valuation, Supplementary pension, Life annuity, Longevity, Solvency II, Life underwriting risk, Best Estimate, Risk Margin

Insurance companie's inversion of the production cycle is forcing the companie to identify, assess, control, and monitor short term and long run risks that it will have to face up. In order to prove it had the capacity to face up to its engagements, it had to estimate, in the fairest possible way, its technical provisions. These technical provisions mean commitments with regard to its insureds. The Solvency II directive is a set of rules published by the European Commission and agreed in 2009 by the European Parliament and the Council of Europe. In force since 1 January 2016, the directive ensure harmonised solvency requirements for European insurance companies and encourages companies to know better and evaluate the risks to which they are exposed. It presents an economic view of the commitments and the overall wealth of companies being seen as the present value of the future cash flows valued at market value. Thus, the valuation of assets checks compliance with the principle of "mark-to-market" using market prices, while the valuation of of the liabilities checks compliance with the principle of "mark-to-model" : valuation is defined by the model.

As a consequence, assumptions totally define commitments estimation. Solvency II introduces the concept of "Best Estimate" reserves for modelling with assumptions consistent with the profile of the portfolio and the financial markets. Based on a supplementary pension with life annuity option contract portofilio, we will design a stochastic projection model for future cash flows in order to value commitments. This study will aim to estimated portofilio's current exit value, that is the value a willing buyer would pay. This model needs high-level mapping of risks to which portoflio is exposed and a modelisation consistent with the time horizon of the liabilities runoff. Stochastic projection allows to take into account the portefolio's variability and time value of guarantees. This approach give the commitments distribution.

Sensitivity to life annuity option analysis, and longevity study thanks to prospective experience-based mortality table construction, will allow to conclude on the Best Estimate nature of assumptions. Capital requirement and risk margin calculation will provide Solvency II technical provisions.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

L'inversion du cycle de production d'une société d'assurance l'oblige à identifier, évaluer, contrôler et surveiller les différents risques à court et long terme auxquels elle est confrontée. En effet, l'assuré paie une prime avant d'avoir bénéficié du service de la société. Cette prime donne droit à une prestation dépendant de l'occurrence d'un ou plusieurs aléas futurs : nous parlons de risque assurable. Ainsi, la compagnie ne connaît pas le montant des prestations qu'elle sera amenée à verser au cours des exercices futurs. Elle se doit alors d'estimer, de la manière la plus juste possible, ses provisions techniques, correspondant aux dettes qui lui incombent vis-à-vis de l'ensemble de ses assurés afin de prouver sa capacité à faire face à ses engagements.

Dès lors, la notion de bilan (économique) prend une place essentielle dans la détermination de la solvabilité d'une compagnie d'assurance. La solvabilité est la capacité d'une entreprise à faire face à ses engagements, c'est-à-dire générer suffisamment d'activité et donc de revenus pour pouvoir rembourser ses dettes envers ses créanciers (dettes financières) et ses assurés (provisions techniques). Un bilan met en parallèle l'ensemble des biens (placements) de l'entreprise que l'on nomme l'actif et l'ensemble des engagements contractés à l'égard des assurés (provision technique). La différence entre l'actif et les engagements représente les fonds propres de l'entreprise. Nous nommons l'addition des engagements et des fonds propres le passif.

La valorisation de l'actif et des provisions techniques est primordiale tant l'impact sur le bilan est important. La méthodologie diffère en fonction des objectifs que nous cherchons à atteindre. Il existe différents référentiels donnant un cadre normé selon les finalités visées. Les normes IFRS (International Financial Reporting Standards) sont des normes internationales d'informations financières destinées à standardiser la présentation des données comptables échangées au niveau international. La MCEV (Market Consistent Embedded Value) est une mesure de la valeur de l'entreprise d'un point de vue de l'actionnaire, spécifique à l'assurance vie et à l'investissement long terme, dont la méthode de calcul est édictée par le CFO Forum. La directive Solvabilité II est un ensemble de règles édité par la Commission Européenne et adopté en 2009 par le Conseil de l'Europe et le Parlement Européen. En vigueur depuis le 1er janvier 2016, elle définit les exigences de solvabilité des entreprises de façon harmonisée en Europe et encourage à mieux connaître et évaluer les risques auxquels elles sont exposées. Bien qu'elles diffèrent sur certains points, ces normes convergent néanmoins toutes vers une vision économique des engagements et de la richesse future : ils doivent être vus comme la valeur actuelle des cash-flows futurs aux conditions de marché. La valeur actuelle est la valeur future vue en date d'aujourd'hui. L'évaluation de la valeur d'une entreprise formalisée à travers ces référentiels s'applique à différentes granularités, de l'entreprise dans son ensemble à un portefeuille spécifique.

Ce mémoire a pour objet la valorisation d'un portefeuille de la filiale marocaine La Marocaine Vie de Sogecap. Ce produit est un contrat de retraite collective avec une option de conversion en rente viagère à l'âge de départ à la retraite. Nous nous appuierons sur la réglementation en place avec Solvabilité II. Celle-ci introduit une approche par module de risque ainsi que le principe de « current exit value » pour le calcul des provisions techniques. La « current exit value » représente la valeur de transfert, c'est-à-dire la valeur à laquelle les provisions pourraient être cédées à un autre organisme. Cette approche nécessite une cartographie précise des risques inhérents au contrat et une modélisation cohérente avec l'horizon d'écoulement du passif et des conditions de marché.

Une première partie s'attachera à présenter les caractéristiques et les spécificités du produit. Les notions actuarielles élémentaires nécessaires à son étude seront développées ainsi que les fondements de l'univers Solvabilité II et ses conséquences sur la méthodologie de valorisation.

La deuxième partie sera consacrée à la construction d'un modèle de projection du passif. Après avoir détaillé un modèle déterministe, nous développerons une modélisation stochastique afin de tenir compte de l'hétérogénéité du portefeuille ainsi que de la valeur temps des garanties viagères et décès. Cette approche permettra d'obtenir une distribution des engagements liés au portefeuille. Nous étudierons enfin la sensibilité du modèle par rapport à la possibilité des assurés à choisir l'option de sortie en rente viagère.

La troisième partie portera sur l'étude de longévité. La construction d'une table générationnelle d'expérience permettra d'analyser l'adéquation des tables réglementaires à la mortalité représentative de notre portefeuille d'assurés et ainsi de quantifier l'impact du risque de longévité sur l'évaluation des engagements.

La dernière partie aura comme objectif la réalisation des calculs réglementaires de capital économique et la détermination de la marge de risque. Nous obtiendrons ainsi la valeur des provisions techniques prudentielles dans un cadre Solvabilité II.

Chapitre 1

Présentation du produit et contexte de l'étude

L'objectif de ce chapitre est de présenter le produit sur lequel nous allons réaliser notre étude ainsi que le contexte dans lequel le portefeuille sera valorisé.

Nous débuterons par une description des notions actuarielles utiles à la compréhension du contrat de retraite que nous développerons ensuite. Nous conclurons quant à la méthodologie de valorisation à mettre en place lorsque nous nous intéressons à l'univers Solvabilité II.

1.1 Les rentes viagères

Les rentes viagères sont au coeur du contrat de retraite que nous allons étudier. De ce fait, nous définissons en premier lieu les rentes viagères avant de commencer à présenter le produit en lui-même.

Les rentes viagères sont des accords financiers souvent sous la forme d'un produit d'assurance vie. Dans ce cas, c'est un accord financier entre un assureur et un assuré. L'assureur s'engage à respecter le contrat en contre-partie d'une somme d'argent versée, de manière unique ou périodique, par l'assuré. La somme versée par l'assuré est communément appelé la prime ou la cotisation. L'assuré abandonne un capital au profit de l'assureur, c'est une conversion de capital en rente viagère.

Définition - *Rente viagère.* Une rente viagère est l'engagement de verser périodiquement une somme d'argent (arrérage de rente) à l'assuré. La série de paiements s'étend pendant toute la durée de vie du bénéficiaire et s'arrête à son décès.

Les rentes viagères se distinguent des rentes dites temporaires où la période de versement est définie et finie. Il est possible de distinguer les rentes viagères immédiates et les rentes viagères différées selon la date d'entrée en service de la rente. La date d'entrée en service de la rente est le moment à partir duquel l'assureur commence les versements périodiques des arrérages.

Définition - *Rente viagère différée.* Une rente viagère différée est une rente viagère servie à un moment ultérieur au versement de la prime par l'assuré. Elle s'oppose à la rente viagère immédiate dont le service commence dès la cotisation.

La rente viagère différée est une formule intéressante pour se constituer un complément de retraite à partir d'un montant d'épargne ou d'un investissement régulier pendant sa vie. Le montant des arrérages dépend de la somme que l'assuré investit, des frais de souscription mais aussi de son âge lors de l'investissement ainsi que son âge lors du service de la rente.

1.2 Aspect actuariel

L'étude et l'analyse des produits tels que les rentes viagères nécessitent l'utilisation de notions actuarielles liées à la survie ou au décès des individus. En effet, le caractère aléatoire de ces phénomènes oblige les actuaires à quantifier de manière explicite les probabilités d'occurrence de ces événements. Nous présenterons dans un premier temps les notations communément utilisées dans la littérature puis nous introduirons les tables de mortalité, outil essentiel pour estimer les probabilités.

1.2.1 Notations

La durée de vie étant une problématique centrale dans l'étude des produits viagers, il est indispensable d'expliciter les notations courantes du monde de l'assurance vie. Considérons un individu dont la durée de vie est modélisée par la variable aléatoire T. Nous notons l'âge de cet individu x, x étant entier.

Définition - *Durée de vie résiduelle* T_x. La durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x est la durée qui lui reste à vivre. Ainsi, nous définissons la durée de vie résiduelle tel que $T_x = T - x$. En effet, la durée de vie résiduelle est la différence entre la durée de vie totale et la durée déjà écoulée.

L'utilisation de variables aléatoires pour décrire un phénomène induit l'utilisation de la théorie des probabilités. Dans notre cas, les probabilités viagères peuvent être définies soit à partir de T soit de T_x.

Définition - *Probabilité de survie* ${}_tp_x$. La probabilité de survie d'un individu d'âge x pendant une période de durée t avec t et x entiers est notée ${}_tp_x$. Ainsi, nous avons :

$$ {}_tp_x = \mathbb{P}(T > x + t | T > x) = \mathbb{P}(T_x > t | T_x > 0). $$

Cette grandeur se lit comme la probabilité de vivre au minimum jusqu'à l'âge $x + t$ sachant que le sujet étudié est en vie à l'âge x. De manière équivalente, la probabilité de décès avant l'âge $x+t$ sachant la survie jusqu'à l'âge x se nomme ${}_tq_x$.

Définition - *Probabilité de décès* ${}_tq_x$. La probabilité de décès d'un individu d'âge x pendant une période de durée t avec t et x entiers est notée ${}_tq_x$. Ainsi, nous avons :

$$ {}_tq_x = \mathbb{P}(T \leq x + t | T > x) = \mathbb{P}(T_x \leq t | T_x > 0). $$

De manière similaire, nous définissons la probabilité de vie temporaire comme la probabilité qu'un individu d'âge x survive pendant une période de durée s tout en décédant sur une période de durée t. Elle est notée ${}_{s|t}q_x$ tel que :

$$ {}_{s|t}q_x = \mathbb{P}(x + s < T \leq x + s + t | T > x) = \mathbb{P}(T_x \in]s, s + t] | T_x > 0). $$

Nous adopterons par la suite les conventions suivantes :

$$ {}_1p_x = p_x, \quad {}_1q_x = q_x, \quad {}_{0|t}q_x = {}_t q_x, \quad {}_{s|\infty}q_x = {}_s p_x. $$

Enfin, il est possible de démontrer aisément les relations suivantes :

$$ {}_{s|t}q_x = {}_s p_x - {}_{s+t}p_x, \quad {}_{s+t}p_x = {}_x p_x \times {}_t p_{x+s}. $$

1.2.2 Tables de mortalité

L'étude des produits viagers nécessite la connaissance des différentes grandeurs développées dans la partie 1.2.1. La méthode la plus classique pour les obtenir consiste en une estimation non-paramétrique grâce aux tables de mortalité. Une table de mortalité (aussi appelée table de survie) est une construction qui permet de suivre minutieusement la démographie d'une population. Cet outil est utilisé afin d'étudier le nombre de décès, les probabilités de décès ou de survie et l'espérance de vie selon l'âge et le sexe. Elle se présente sous la forme suivante :

x	l_x	d_x
0	l_0	d_0
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	l_n	d_n

où x représente l'âge, l_x correspond au nombre d'individus d'âge au moins x et d_x est défini tel que $d_x = l_x - l_{x+1}$ quantifiant ainsi le nombre de décès à l'âge x. Ainsi une table de mortalité représente la survie de l_0 individus (généralement 100000 individus) pendant une certaine durée d'observation. Nous pouvons donc suivre les décès à chaque âge (ou groupe d'âge) d'une population donnée. La table de mortalité présente une description structurée et complète de la mortalité d'une population. Dès lors, il est possible d'estimer de manières simples les probabilités de décès et de survie : q_x et p_x. En effet, nous avons les estimateurs :

$$ \widehat{p}_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad \widehat{q}_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - \widehat{p}_x. $$

Nous pouvons en déduire par les relations énoncées en partie 1.2.1, que pour tout t entier :

$$ {}_t\widehat{p}_x = \widehat{p}_x ... \widehat{p}_{x+t-1} = \frac{l_{x+t}}{l_x}. $$

1.3 Description du produit

Le produit que nous allons étudier est un régime de retraite complémentaire à adhésion facultative destiné aux salariés marocains. Le caractère complémentaire signifie que ce contrat vient en ajout au régime général de retraite marocain, le caractère facultatif signifie que l'ensemble des salariés marocains ne souscrit pas à ce contrat. C'est l'employeur qui adhère au régime complémentaire pour le compte des salariés. Les cotisations au régime comprennent les contributions patronales et salariales. Ce système par capitalisation permet d'augmenter sa pension de retraite à l'aide d'un produit d'assurance. L'assureur s'engage, sous condition de cotisations périodiques de la part de l'assuré (et son employeur), à verser au bénéficiaire une rente viagère lorsqu'il arrive à l'âge de départ à la retraite, c'est-à-dire 60 ans. Cela correspond donc à une rente viagère différée. La vie du produit se décompose alors en deux phases : une phase de constitution où l'assuré cotise et une phase de service où l'assureur sert la rente.

Nous résumons l'ensemble de la vie du produit dans le schéma suivant :

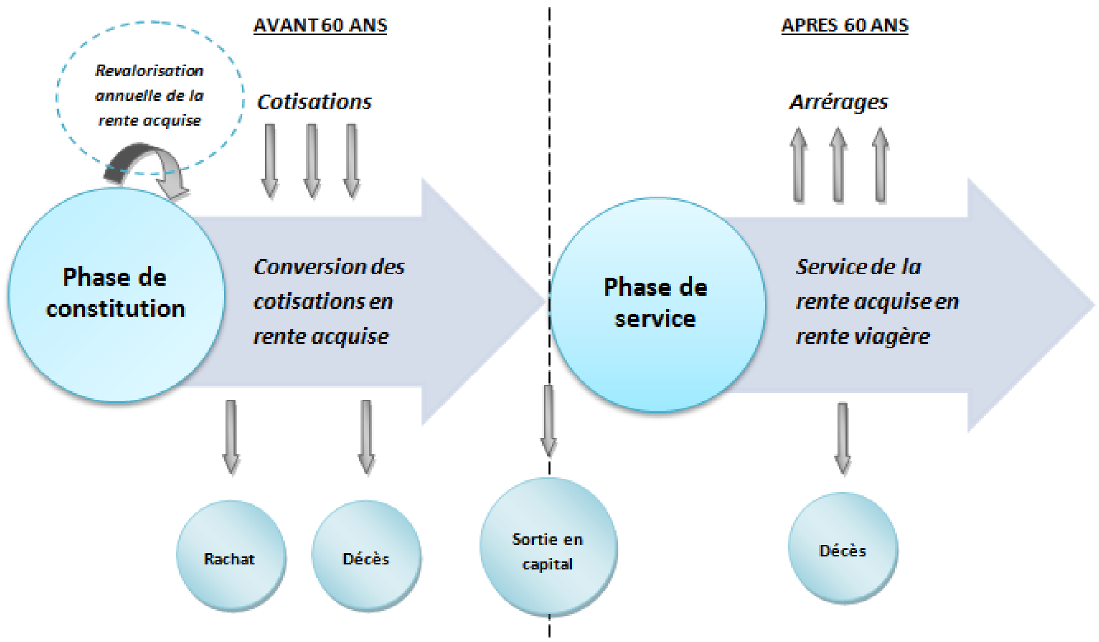


FIGURE 1 – Schéma de la vie du produit

1.3.1 Phase de constitution

Le contrat de retraite complémentaire fonctionne par capitalisation. Autrement dit, les droits s'obtiennent par des cotisations périodiques sous forme de primes. Pendant toute sa période d'activité, un salarié dont l'employeur a souscrit à ce régime paie des cotisations (contributions salariales) qui sont complétées par des contributions patronales. La part salariale est directement prélevée sur le salaire de l'employé. Le cumul des cotisations donne droit à une rente viagère différée à l'âge de départ à la retraite. Nous parlons de rente acquise, définie comme suit :

$$R_j = \sum_{t=1}^{j} \frac{CA_t}{{}_{n_t}\pi_{x_t}},$$

avec R_j la rente acquise la j ième année de cotisation, CA_t la cotisation annuelle de l'année t, et ${}_n\pi_x$ le taux de prime commerciale unique pour une unité monétaire (un dirham) de rente différée à n année correspondant à un âge x.

Pendant la phase de constitution, la rente acquise bénéficie chaque année d'une revalorisation basée sur un taux technique garanti et une indexation sur le résultat financier de l'entité marocaine souscriptrice du contrat.

Définition - ***Revalorisation.*** La revalorisation est l'augmentation de la valeur d'un capital. Elle s'applique souvent sous forme de pourcentage d'augmentation. La revalorisation permet de tenir compte de la valeur temps de l'argent pour récompenser l'investissement dans la durée.

La revalorisation minimale correspond au taux technique contractuel défini lors de la souscription. Il est fixé à 4,5% pour notre contrat. Lorsque le résultat financier est supérieur à ce taux technique, la revalorisation est majorée à hauteur de l'écart entre le rendement financier de l'année et le taux garanti. Chaque année, le capital constitutif prend donc de la valeur et le taux technique assure une garantie minimale à l'assuré.

Lorsqu'un adhérent arrive à la fin de sa période d'activité, il a le choix entre la mise en service de sa rente acquise ou la transformation de cette dernière en capital constitutif. Il peut alors récuperer ce capital constitutif en une seule fois, cette option s'appelle **l'option de sortie en capital.**

L'âge de sortie de la phase de constitution est fixé de manière contractuelle à 60 ans. Cet âge correspond à l'âge légal marocain de départ à la retraite avant 2016, année où le gouvernement marocain a mis en place une réforme du système des retraites. A 60 ans, l'adhérent doit choisir entre l'option de sortie en capital ou la mise en service de la rente.

Il existe pendant la phase de constitution plusieurs garanties supplémentaires au contrat. Premièrement, le contrat comprend une contre-assurance en cas de décès pendant la phase de constitution.

Définition - ***Contre-assurance en cas de décès.*** La contre-assurance est l'engagement de garantir, en cas de décès, le remboursement des primes versées par le salarié (contributions salariales) pendant la vie d'un contrat d'assurance.

Ainsi, si un adhérent devait décéder avant 60 ans, l'ensemble des cotisations passées serait versées au bénéficiaire de son choix, défini de manière contractuelle lors de la souscription. Pendant la phase de constitution, l'assuré possède aussi la possibilité de racheter totalement son contrat.

Définition - *Rachat total.* Le rachat total d'un contrat d'assurance-vie est l'opération par laquelle l'assuré prélève son capital investi avant le terme du contrat. Ce capital correspond à l'ensemble des primes versées par le salarié (contributions salariales) pendant la vie d'un contrat d'assurance.

En pratique, le souscripteur peut à n'importe quel moment, dès lors qu'il a moins de 60 ans, racheter son contrat. Il clôt ainsi son contrat, récupère le cumul des cotisations et perd ses droits à percevoir une rente.

Si l'adhérent choisit l'option de conversion en rente, c'est-à-dire de mise en service de sa rente acquise, il passe dans la seconde phase : la phase de service.

1.3.2 Phase de service

La phase de service correspond au moment où l'assureur effectue les versements d'arrérages liés à la rente viagère. Cette phase s'étend tant que l'assuré est en vie, c'est le caractère viager de la rente. Il n'est plus possible de racheter le contrat ou de récupérer l'équivalent du capital constitutif restant. La revalorisation est fixé au taux technique de service, soit 2,5%.

1.3.3 Facteurs de risque

La compréhension du fonctionnement du produit est primordiale pour valoriser précisément les engagements et avoir une gestion optimale du portefeuille. De nombreux facteurs ont un impact direct ou indirect sur le service des prestations du produit. Nous énumérons les principaux facteurs de risque liés au produit :

— **Facteur d'incidence à l'option rente :** Le taux de conversion en capital correspond au pourcentage de personnes qui décident de choisir l'option de sortie en capital à l'âge de la retraite. Évidemment, ce facteur est au coeur du profil de risque du produit.

— **Facteur biométrique :** Le facteur biométrique correspond à la santé des individus, la manière dont ils vivent et dont ils meurent. Ce facteur a une influence certaine sur le comportement du portefeuille. En effet, la durée de vie a un impact direct sur les prestations servies avec les rentes viagères et les décès influent sur les prestations par la garantie de contre-assurance.

— **Facteur financier :** Le facteur financier comprend l'ensemble des problématiques de gestion, de placement et de provisionnement. L'inversion du cycle de production oblige les assureurs à tarifer les produits à priori. Une sous-tarification entraîne des pertes pour l'entreprise car l'assuré paie une prime inférieure aux prestations perçues. De plus, la compagnie se doit de placer de manière adéquate les primes servant à payer les prestations dans le futur. Un sous-provisionnement entraîne des difficultés à servir les prestations tandis qu'un sur-provisionnement rend difficile le dégagement de marges. Il est important de suivre le profil de risque du produit pour mesurer l'adéquation entre l'exposition et la tarification ainsi que le suivi des provisions.

1.4 Méthode de valorisation

Cette partie s'attachera à présenter la réglementation appliquée à ce jour ainsi que les méthodes courantes de valorisation. Nous connaissons le produit ainsi que les notions de calcul actuariel nécessaires à sa compréhension. La réglementation donne un cadre dans lequel nous puiserons les concepts de valorisation à mettre en place pour valoriser notre portefeuille.

1.4.1 Valorisation économique

La valorisation économique se distingue de la valorisation comptable. La différence tient dans la méthode de comptabilisation des postes du bilan estimés en valeur économique, nous parlerons alors de valeur de marché. Cette notion renvoie à la valeur qu'un tiers serait prêt a payer pour acquérir l'entreprise ou le portefeuille valorisé.

1.4.1.1 Bilan

La notion de bilan est primordiale dans la valorisation d'une compagnie. C'est une photographie de la situation financière de l'entreprise à un instant t. Dans le cadre comptable, on compare les bilans aux différentes dates de clôture des comptes. Par exemple nous pouvons comparer les bilans au $31/12/N$ et $31/12/N-1$ pour analyser les évolutions d'une année à l'autre. Un bilan met en parallèle l'actif et le passif.

Définition - *Actif.* L'actif d'une compagnie représente l'ensemble des biens qu'elle possède. Il est constitué dans de très nombreux cas de placements comme les actions, les produits de taux, l'immobilier ou encore les fonds monétaires.

Définition - *Passif.* Le passif d'une compagnie est constitué de l'ensemble des dettes qu'elle a contractées et des fonds propres de l'entreprise. Les fonds propres résultent de la différence entre la valeur de l'actif et des dettes.

Pour une compagnie d'assurance, le passif se compose essentiellement des fonds propres et des provisions techniques. En effet, l'ensemble des dettes qu'elle a contractées sont à régler auprès de ses assurés ou des bénéficiaires des contrats.

Définition - *Provisions techniques.* Les provisions techniques sont mises en réserve afin de permettre le règlement des engagements pris envers les assurés ou les bénéficiaires des contrats. Elles doivent être suffisantes et représentent au bilan de la compagnie d'assurance une évaluation ou une estimation des engagements de la compagnie.

Définition - *Fonds propres.* Les fonds propres représentent la richesse intrinsèque de l'entreprise. La richesse intrinsèque se compose de la richesse accumulée par la compagnie ainsi que du résultat de l'exercice non distribué aux actionnaires. Ils résultent de la différence entre l'actif et les dettes. C'est l'argent qu'il resterait à l'entreprise si elle liquidait l'ensemble de ses actifs et qu'elle remboursait l'ensemble de ses dettes.

Nous présentons le bilan simplifié d'une compagnie d'assurance de la manière suivante :

ACTIF	**PASSIF**
Placements (actions, produits de taux, fonds monétaires, immobilier,etc)	Fonds propres
	Provisions techniques (estimation des engagements)

FIGURE 2 – Bilan simplifié d'une compagnie d'assurance

En distribution du passif, les provisions techniques représentent la plus grande partie du passif alors que les fonds propres n'en représentent qu'une faible part. Le calcul des provisions techniques est directement lié aux calculs actuariels dont la mise en place dépend des objectifs à atteindre. La mise en réserve de provisions suffisantes est réglementée et contraignante. Souvent, la vision prudente requise entraîne une sur-estimation des provisions afin d'être certain d'honorer les engagements envers ses assurés. Les calculs ne seront pas identiques si l'on souhaite estimer de la manière la plus juste possible les risques auxquels est exposée une entreprise. Nous ne chercherons plus à être prudents mais nous chercherons à être précis et pertinents. Il est important de comprendre le contexte dans lequel les provisions sont estimées et ce que cela implique sur leur calcul.

1.4.1.2 Valeur de marché

Le bilan d'une même compagnie peut véhiculer différentes informations. On distingue généralement le bilan comptable du bilan économique. Le bilan comptable est un modèle structuré qui répertorie, classe et comptabilise la richesse d'une entreprise. L'actif est comptabilisé en vision historique, c'est-à-dire au prix d'acquisition des placements. Nous parlons de valeur nette comptable qui ne change pas tant que l'entreprise garde en sa possession le placement. Les plus ou moins values latentes (différence entre la valeur nette comptable et la valeur de marché à l'instant t) sont prises en compte à l'aide de provisions comme la surcôte/décôte, la provision de dépréciation durable ou la provision pour risque d'éligibilité. De plus, les provisions techniques inscrites au bilan comptable sont les provisions réglementaires définies par le code des assurances. Les normes comptables dépendent du pays où opère l'entreprise. Bien qu'elles soient essentielles pour le suivi financier et la communication avec les autorités locales, elles sont peu pertinentes pour connaître la valeur d'une entreprise. En effet, la valeur dépend directement des normes comptables et rend difficile la comparaison avec des entreprises suivant des normes différentes.

Le bilan économique correspond à la réelle valeur économique d'une entreprise, c'est-à-dire la valeur qu'un tiers serait prêt à payer pour acquérir l'entreprise. Dans ce cas, l'actif est comptabilisé en valeur de marché. C'est le prix auquel le placement peut être échangé ou vendu sur les marchés financiers dès lors qu'il peut l'être. Ainsi, les plus ou moins values latentes sont directement prises en compte dans la comptabilisation économique. Pour le passif, le calcul des provisions techniques est moins réglementé. Il dépend de la méthode mise en pratique et des objectifs que l'on cherche à atteindre. Le bilan économique permet une communication financière plus homogène à l'international, mais laisse beaucoup de liberté quant à sa mise en place. Il existe plusieurs réglementations traçant un cadre commun afin d'uniformiser les bilans économiques de différentes entreprises.

1.4.2 Environnement Solvabilité II

La directive Solvabilité II est un ensemble de règles édité par la Commission Européenne et adopté en 2009 par le Conseil de l'Europe et le Parlement Européen. L'objectif de cette réglementation est d'harmoniser les exigences à un niveau Européen.

1.4.2.1 Enjeux et structure

En vigueur depuis le 1er janvier 2016, la directive exige des entreprises du secteur assurantiel qu'elles déterminent et évaluent un capital économique mobilisé dans leurs fonds propres pour garantir leur solvabilité. Ce capital économique se calcul à partir d'un bilan en vision économique. Central dans la réglementation européenne, ce calcul réglementaire n'est pour autant pas suffisant à la bonne application de la directive. Le régulateur incite aussi les compagnies d'assurance à démontrer leur capacité à évaluer et maîtriser leurs profils de risque à tout moment. L'objectif est de définir des exigences de solvabilité communes et harmonisées en Europe tout en encourageant à identifier, évaluer et contrôler de manière autonome les risques auxquels les entreprises sont exposées. La directive Solvabilité II s'articule autour de trois piliers : un premier pilier quantitatif, le second qualitatif et un dernier pilier de transparence et de rapportage à l'Autorité de contrôle.

Le schéma suivant résume les domaines d'application des différents piliers :

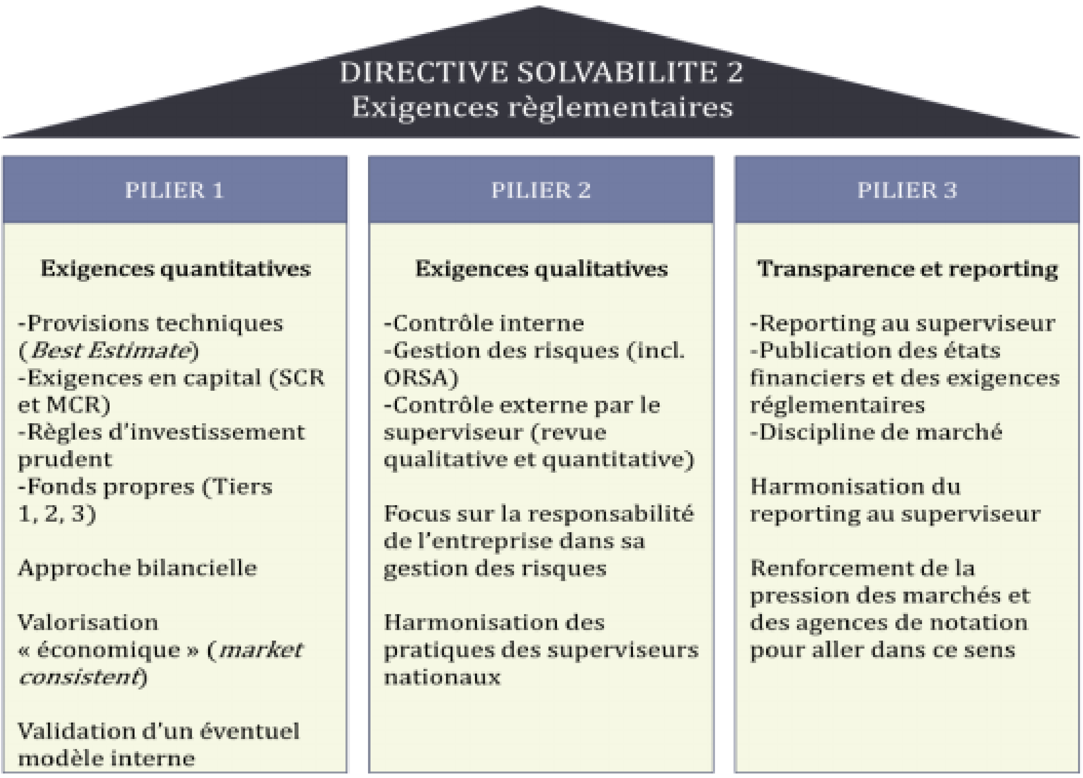


FIGURE 3 – Structure par piliers de Solvabilité II

Le pilier 1 est le pilier des exigences quantitatives. En effet, il définit les exigences quantitatives de solvabilité. Elles ont pour objet d'expliciter les normes de calcul des composantes du bilan économique sous l'univers Solvabilité II. La valorisation de l'actif, du passif et le calcul des fonds propres sont ainsi harmonisés à l'échelle européenne. L'approche bilancielle avec une valorisation économique permet le calcul de capital réglementaire.

Le pilier 2 est le pilier des exigences qualitatives. Il harmonise les pratiques des superviseurs nationaux en formalisant le rôle des autorités de contrôle nationales et donc le contrôle externe du respect des exigences quantitatives présentes dans le pilier 1. De plus, ce pilier qualitatif énonce les besoins de contrôle interne et de gouvernance des entreprises.

Le pilier 3 est celui de la communication et de la transparence. Il harmonise les comptes-rendus obligatoires auprès des superviseurs de la zone européenne ainsi que les publications publiques permettant d'identifier les organismes les plus risqués.

1.4.2.2 Composantes du bilan économique

Le bilan tient une place essentielle dans Solvabilité II. L'ensemble des calculs réglementaires prennent leur source dans ce bilan. Nous parlons de bilan économique du fait des méthodes de valorisation des différents postes du bilan. Nous résumons les hypothèses nécessaire afin d'estimer les composantes du bilan dans l'univers Solvabilité II.

Actif

L'actif est en valeur de marché et doit être valorisé en juste valeur. Cette notion renvoie à une image cohérente de l'actif par rapport aux marchés, c'est-à-dire la vision qu'ont les marchés financiers de l'actif et de l'entreprise concernée. Ainsi, pour les entreprises françaises soumises au principe de prudence, le bilan comptable se différencie du bilan économique Solvabilité II. En effet, le bilan Solvabilité II comptabilise toutes les plus et moins-values latentes immédiatement, alors que selon les normes comptables il ne faut tenir compte des plus-values qu'une fois réalisées. Les prix du marché sont utilisés comme une référence pour refléter au mieux le portefeuille d'actif de l'assureur, nous parlons de «**mark-to-market**» (défini par le marché).

Fonds propres et provisions techniques prudentielles

Le passif sous sa forme simplifiée est composé des fonds propres et des provisions techniques prudentielles. Les fonds propres résultent de la différence entre les actifs et les provisions prudentielles. Ces provisions prudentielles se composent de la meilleur estimation des engagements de la compagnie et d'une marge de risque.

La meilleure estimation des engagements est évaluée soit en juste valeur pour les risques couvrables sur les marchés soit en vision Best Estimate pour les autres risques. Par abus de langage, nous parlerons de Best Estimate pour parler des engagements Best Estimate. La vision Best Estimate repose sur des méthodes de projection définies à partir d'hypothèses crédibles, nous parlons alors d'hypothèses Best Estimate. Les hypothèses définissent l'évaluation, nous parlons donc d'une estimation «**mark-to-model**» (défini par le modèle).

Définition - *Best Estimate*. Le Best Estimate correspond à la meilleure estimation des engagements de l'entreprise. Elle est égale à la moyenne pondérée par la probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente. C'est donc la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs.

La projection des flux de trésorerie utilisée dans le calcul du Best Estimate doit tenir compte de toutes les entrées et sorties de trésorerie nécessaires pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pour toute la durée de ceux-ci. Nous pouvons donc définir la formule suivante :

$$BE = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{CF_k}{(1+i_k)^k}\right),$$

avec CF_k la somme des cash-flows de l'année k, i_k le taux d'actualisation de l'année k issu de la courbe des taux sans risque pertinente.

La marge de risque est calculée de telle manière à garantir que la valeur des provisions techniques prudentielles soit égale à la «current exit value» des engagements. Cela correspond à la valeur de transfert, c'est-à-dire la valeur de vente des engagements. Ainsi, la marge de risque correspond au montant supplémentaire que demanderait une entreprise agréée pour pratiquer les opérations d'assurance, pour reprendre et honorer les engagements d'assurance lié au Best Estimate.

L'évaluation du Best Estimate et de la marge de risque s'opèrent de manière distincte. Dans un premier temps, il est essentiel de modéliser de la manière la plus juste possible ses risques et ses engagements. Dans un second temps, il convient alors de déterminer la valeur de transfert des engagements en calculant la marge de risque afin de déterminer les provisions techniques prudentielles.

Nous résumons l'approche bilancielle de Solvabilité II :

<table>
<tr><th>ACTIF</th><th>PASSIF</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Placements valorisés en valeur de marché</td><td>Fonds propres</td></tr>
<tr><td>Marge pour risque</td></tr>
<tr><td>Best Estimate</td></tr>
</table>

FIGURE 4 – Bilan économique Solvabilité II

Nous parlons de valorisation économique «**market consistent**» dans le cadre de Solvabiltié II car nous retrouvons les concepts de «mark-to-market» pour les actifs et les passifs couvrables ainsi que de «mark-to-model» pour les passifs non couvrables. Une évaluation «market consistent» est une évaluation en adéquation avec les marchés financiers. Elle doit refléter au mieux les prix pratiqués sur les marchés dès lors que des flux similaires existent et sont échangés sur les marchés.

1.4.2.3 Capital économique

Les exigences quantitatives quant à la méthode de valorisation des postes du bilan économique référencées dans le pilier I permettent l'introduction de deux montants de fonds propres réglementaires à calculer à partir du bilan économique de la compagnie : le MCR et le SCR.

Définition - ***Minimum Capital Requirement (MCR).*** Le MCR correspond au niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'autorité de contrôle intervient systématiquement pour rétablir la santé de l'établissement concerné ou le liquider. C'est le niveau minimum pour ne pas perdre son agrément.

Définition - ***Solvency Capital Requirement (SCR).*** Le SCR représente le capital cible nécessaire pour absorber des pertes inattendues entraînées par des événements extrêmes et imprévisibles. Il est égal au capital minimum dont l'assureur doit disposer pour absorber les pertes potentielles à horizon un an avec une probabilité de 99,5%

Le SCR est l'exigence de capital centrale dans l'univers Solvabilité II. Il correspond au montant nécessaire pour réduire à moins de 0,5% la probabilité qu'a l'entreprise de devenir insolvable dans l'année, obligeant l'autorité de contrôle à intervenir. En effet, la réglementation définit le SCR comme une sécurité dans les comptes des organismes d'assurances, leurs permettant d'être capable de faire face à un événement d'une ampleur telle que nous en voyons tous les 200 ans.

La Commission Européenne propose deux méthodes de calcul pour le SCR. La première méthode consiste en l'application d'une formule dite standard mise à disposition directement par l'autorité de contrôle. La seconde méthode consiste en la création, la validation et l'application d'un modèle interne développé par l'entreprise. Il est aussi possible d'appliquer une méthode hybride en développant un modèle interne partiel tout en appliquant partiellement la formule standard.

En formule standard, le SCR est une Value at Risk de niveau 99,5% appliquée à la variable aléatoire de perte financière de la compagnie d'assurance.

Définition - ***Value at Risk (VaR).*** La VaR_α ou Value at Risk de niveau α d'une variable aléatoire X représente la limite tel que X n'atteigne ou dépasse cette limite qu'avec une probabilité $1-\alpha$. Mathématiquement, elle est définie comme suit :

$$VaR_\alpha = \inf(x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha),$$

où X est une distribution de probabilité, F_X sa fonction de répartition et α est appelé le seuil ou le niveau de la VaR.

En prenant X la perte de l'entreprise et α égal à 99,5%, nous retrouvons le SCR. Sous une probabilité d'au moins 99,5%, la perte ne dépassera pas la VaR et donc l'entreprise ayant bloqué le SCR dans ses fonds propres est en mesure d'absorber le choc et d'éviter la faillite sous la probabilité 99,5%.

1.4.2.4 Variation de bilan économique

Pour déterminer le SCR, l'application de la formule standard permet le calcul du capital réglementaire à l'aide d'un scénario de stress. Nous parlons de variation de bilan économique. En effet, nous partons du bilan économique de notre scénario initial appelé scénario central. Nous effectuons le choc représentatif d'un événement extrême ayant une période de retour de 200 ans, et nous obtenons un bilan économique pour le scénario stressé. Dans le cadre du calcul réglementaire, nous étudions la variation des deux bilans économiques en mesurant la différence de fonds propres ou d'actif net réévalué (NAV). Nous parlerons de méthode Delta NAV.

Nous schématisons la méthode standard de calcul du SCR :

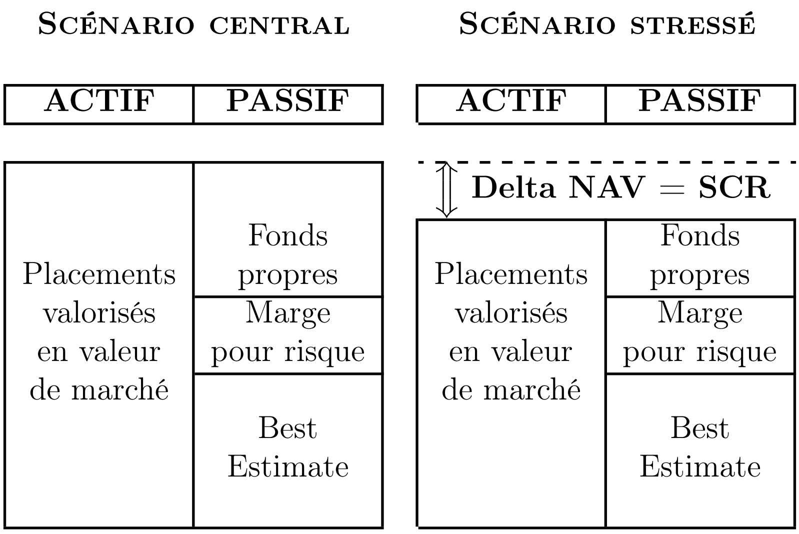


Figure 5 – Méthode de calcul du SCR : Delta NAV

Il est essentiel de mesurer la différence d'actif net pour évaluer l'impact du choc. L'unique comparaison des valeurs de passif ne suffit pas à comprendre les effets avec précision. Lorsque nous appliquons un stress à notre scénario central, différents postes du bilan sont impactés. Cependant, certains postes sont inter-dépendants. En effet, le paiement des engagements entraîne simultanément une baisse de l'actif et du Bst Estimate. En conclusion, nous regardons l'impact sur l'actif net réévalué pour mesurer la perte de capital effective qu'induit un tel choc.

1.4.2.5 Approche par risques

La cartographie des risques constitue un élément central lors de la valorisation d'une compagnie d'assurance. Solvabilité II introduit une approche par module de risques pouvant être scindés en trois parties. Nous trouvons les risques propres à l'activité d'assurance, les risques financiers liés à cette activité et les autres risques difficilement quantifiables. La réglementation propose le calcul du SCR par une formule standard basée sur un calcul par module de risque et sur une méthode d'agrégation des risques par une matrice de corrélation.

Chacun des risques induit un calcul de SCR suivant une formule spécifiée dans les textes d'application, puis ils sont agrégés à l'aide d'une matrice de corrélation suivant une arborescence déterminée.

L'organigramme suivant présente les différents modules de risques ainsi que la hiérarchie qui les lie :

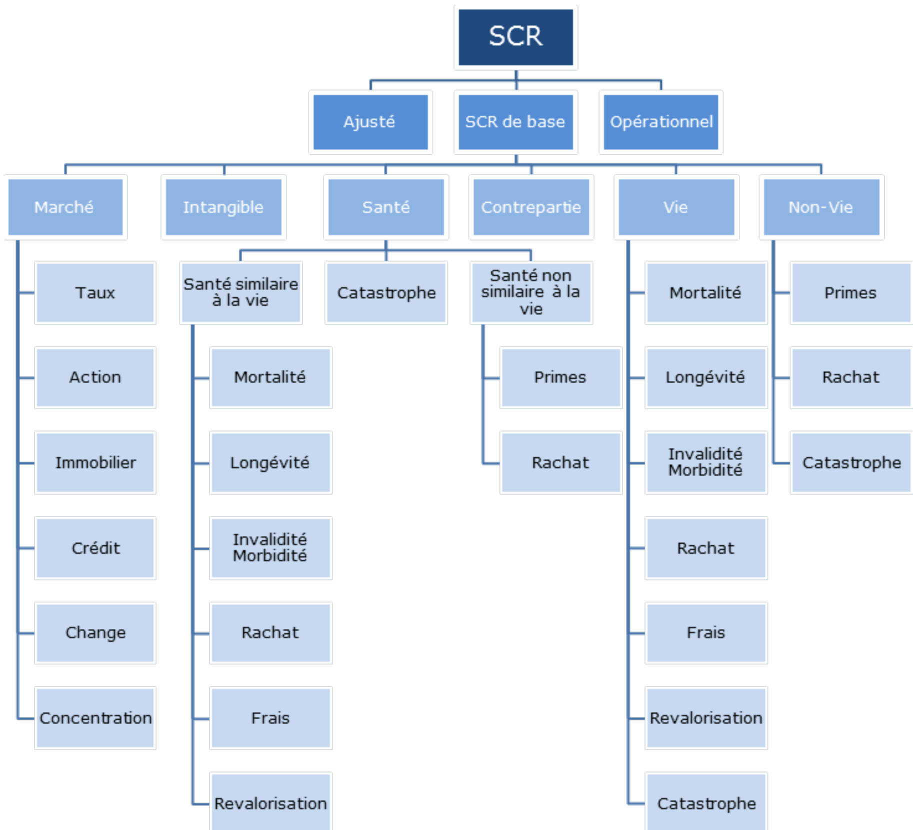


FIGURE 6 – Pieuvre hiérarchique du SCR

La hiérarchie de calcul se décompose en 6 modules de risques élémentaires, la plupart d'entre eux se décomposant ensuite en sous-modules de risque.

Module Marché

Ce module représente le risque lié à la volatilité des prix de marché des instruments financiers de l'actif de la compagnie d'assurance. L'exposition au risque de marché se mesure par l'impact des mouvements de prix ou de taux sur les marchés.

Module Santé

Ce module représente le risque lié à l'activité de l'assurance santé. Il inclut le risque provenant directement des sinistres couverts ou d'une mauvaise gestion de l'activité.

Module Contrepartie

Ce module représente le risque lié à la perte causée par le défaut inattendu d'une contrepartie. Les organismes d'assurance sont concernés par ce risque dès lors qu'ils signent des contrats visant à transférer leurs risques.

Module Vie

Ce module représente le risque lié à l'activité de l'assurance vie. Il inclut le risque provenant directement des sinistres couverts ou d'une mauvaise gestion de l'activité.

Module Non-Vie

Ce module représente le risque lié à l'activité de l'assurance non-vie. Il inclut le risque provenant directement des sinistres couverts ou d'une mauvaise gestion de l'activité. Il comprend aussi le risque lié à l'incertitude du comportement des assurés et le risque de catastrophe naturelle.

Module Intangible

Ce module représente le risque lié à la baisse de la valeur des actifs incorporels présents dans le bilan économique, comme par exemple la marque ou la réputation de l'entreprise.

Ces 6 modules agrégés forment le SCR de base. L'apport du risque opérationnel permet d'obtenir le SCR global.

Module Opérationnel

Ce module représente le risque lié à la perte due à une procédure interne défaillante ou inappropriée, ou provenant d'une erreur commise par un agent ou un système d'informations. Il comprend les risques légaux comme le non-respect du code des assurances.

Le calcul du capital réglementaire est effectué par module ou sous-module de risque en appliquant un choc pour chaque paramètre testé. La méthode Delta NAV fournit pour chaque module ou sous-module le SCR associé et la matrice de corrélation permet de remonter dans l'arborescence afin de déterminer le SCR global. Notons que certains module comme le SCR opérationnel ou le SCR de contrepartie ne se calculent pas par la méthode Delta NAV mais à l'aide de méthodes spécifiques.

L'application de la formule standard repose sur un certains nombres d'hypothèses admises par la réglementation. Dans le cadre d'un modèle interne complet ou partiel, l'ensemble des hypothèses nécessaires à l'application du modèle doivent être explicitées par la compagnie concernée et validées par l'autorité de contrôle compétente. La structure générale de la formule standard induit comme hypothèses sous-jacentes la prise en compte de l'effet de diversification des risques à l'aide de matrices de corrélation lors de l'agrégation. Les corrélations de la formule standard induisent l'hypothèse sous-jacente de pleine prise en compte des dépendances entre les risques à l'aide de coefficients de corrélation linéaire. De plus, les paramètres sont choisis de telle sorte à obtenir la meilleure approximation de la VaR à 99,5% pour l'exigence globale de capital agrégée. Enfin, les risques inclus dans le calcul impliquent la non prise en compte de risques quantifiables pouvant être pertinents pour une entreprise donnée. En effet, la formule standard a été élaborée par une entreprise considérée sur une base individuelle. Il se peut que certains risques spécifiques ne soient pas couverts car par explicitement inclus dans la formule standard. Précisons cependant que certains risques sont traités implicitement dans un module ou un sous module de risque. Nous parlons alors de risques implicitement inclus dans la formule standard.

1.4.2.6 Marge de risques

La marge de risque est définie de manière à ce que la totalité des provisions techniques prudentielles soient égales à la somme que demanderait une compagnie d'assurance pour reprendre l'ensemble des engagements. Nous parlons de valeur de transfert des engagements. Dans le cadre de la formule standard, cette marge correspond au coût du capital réglementaire.

Afin de déterminer le montant supplémentaire nécessaire à rendre le Best Estimate transférable, la marge de risque prend en compte le coût du capital à immobiliser pour les risques inhérents au portefeuille. En effet, un assureur qui reprendrait le portefeuille sous Solvabilité II devrait respecter les engagements de ce dernier mais aussi immobiliser un niveau de fonds propres au moins égal au SCR. Il convient alors de prendre en compte le coût de cette immobilisation de SCR dans la valeur de vente. Nous définissons la marge de risque (RM pour Risk Margin) de la manière suivante :

$$RM = CoC \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SCR_k}{(1+i_k)^k},$$

où SCR_k est le SCR de l'année k, CoC (Cost-of-Capital) le taux annuel de coût de capital et i_k le taux d'actualisation de l'année k issue de la courbe des taux sans risque pertinente.

Dès lors, le calcul de la marge de risque nécessite la connaissance des SCRs futurs et le taux de coût d'immobilisation du capital. La difficulté de mise en place des projections de SCRs rend le calcul de la marge fastidieux. En conséquence, Solvabilité II propose un certain nombre de simplifications pouvant être appliqué à différentes granularités.

Simplification dans le calcul de marge de risque

Le taux annuel de coût d'immobilisation de capital est estimé à 6%.

Dans ce mémoire, le calcul des SCRs futurs sera obtenu à l'aide de la simplification de niveau 3 :

$$SCR_k = SCR_0 \frac{BE_k}{BE_0},$$

où SCR_k est le SCR de l'année k, et BE_k est le Best Estimate calculé en k.

Cette hypothèse repose donc sur une proportionnalité entre l'évolution du Best Estimate et du SCR.

Conclusion de la méthode de valorisation pour notre étude

Pour conclure cette première partie, nous explicitons la méthode implémentée dans le reste du mémoire afin de valoriser notre portefeuille d'étude. Nous chercherons à calculer les provisions prudentielles liées à notre portefeuille afin de déterminer la valeur à laquelle il pourrait se transférer à un autre organisme. Pour ce faire, nous commencerons par modéliser les engagements de la manière la plus juste possible en respectant le principe de «**mark-to-model**». Dans ce calcul «**best estimate**», nous serons amenés à modéliser le portefeuille de manière stochastique. Ensuite, nous analyserons l'impact de la longévité sur les engagements et nous conclurons quant au caractère best estimate de notre modélisation. Afin d'estimer la marge de risque à travers la méthode de simplification énoncée plus haut, nous terminerons par calculer le capital réglementaire requis pour porter les risques de notre portefeuille.

Chapitre 2

Modélisation du Best Estimate

Cette partie aura pour objet la mise en place d'un modèle de projection des engagements futurs liés au portefeuille de contrats de retraite collective présenté en partie 1. Le modèle permettra l'évaluation des engagements Best Estimate à inscrire dans le bilan prudentiel lié à l'application de Solvabilité II. Nous commencerons par une étude du portefeuille. Dès lors, après avoir défini de manière explicite les hypothèses admises pour l'implémentation et l'utilisation de notre modèle prospectif, nous projetterons les flux par deux approches : l'une déterministe et l'autre stochastique.

2.1 Création du modèle

Le besoin d'évaluer les engagements futurs de notre portefeuille d'étude nous oblige à construire un modèle de projection permettant l'estimation des prestations. Après avoir décrit le portefeuille que nous utiliserons pour notre étude, nous attacherons une place importante aux hypothèses relatives à notre modèle.

2.1.1 Composition du portefeuille

Le portefeuille est composé d'un ensemble d'adhérents ayant souscrit au produit de retraite développé dans la partie 1. Il est composé de 5151 adhérents ayant entre 34 et 82 ans.

2.1.1.1 Composition par phase

Rappelons que la vie du produit peut se décomposer en deux phases : une phase de constitution où les adhérents cotisent pour l'obtention d'une rente viagère différée à l'âge de départ à la retraite et une phase de service où les adhérents reçoivent les prestations liées à la rente. Le portefeuille est constitué de 4896 adhérents en phase de constitution et 255 en phase de service au 31 décembre 2016, date de valorisation du portefeuille.

Distribution de la phase de constitution

Les 4896 adhérents en phase de constitution représentent 95% du portefeuille. La rente acquise moyenne associé à cette partie du portefeuille est de 6 197 MAD (Dirham marocain). Cela signifie qu'un adhérent touchera en moyenne 6 197 MAD par an lorsqu'il arrivera à l'âge de service de la rente. La rente acquise minimale est de 1,79 MAD contre une rente acquise maximale atteignant 74 982,48 MAD. Nous remarquons une grande disparité à l'intérieur du portefeuille. Nous étudions alors la distribution des rentes acquises afin d'avoir une image précise des engagements vis-à-vis des assurés en phase de constitution.

Seulement une partie négligeable dépasse les 20 000 MAD de rente acquise. En effet, cela représente 134 adhérents, soit 3% de la phase de constitution. Parmi l'immense majorité ayant droit entre 0 et 20 000 MAD de rente acquise, la distribution n'est pas uniforme.

Ainsi, 1 398 adhérents ont une rente acquise entre 500 et 1 500 MAD. 574 adhérents ont droit à moins de 500 MAD tandis que le reste (2 790 adhérents) est réparti entre 2 000 et 20 000 MAD avec un pic de concentration de rente acquise comprise entre 12 000 et 13 000 MAD.

Pour résumer cette information, voici le graphique représentant la distribution des montants de rente acquise pour la phase de constitution :

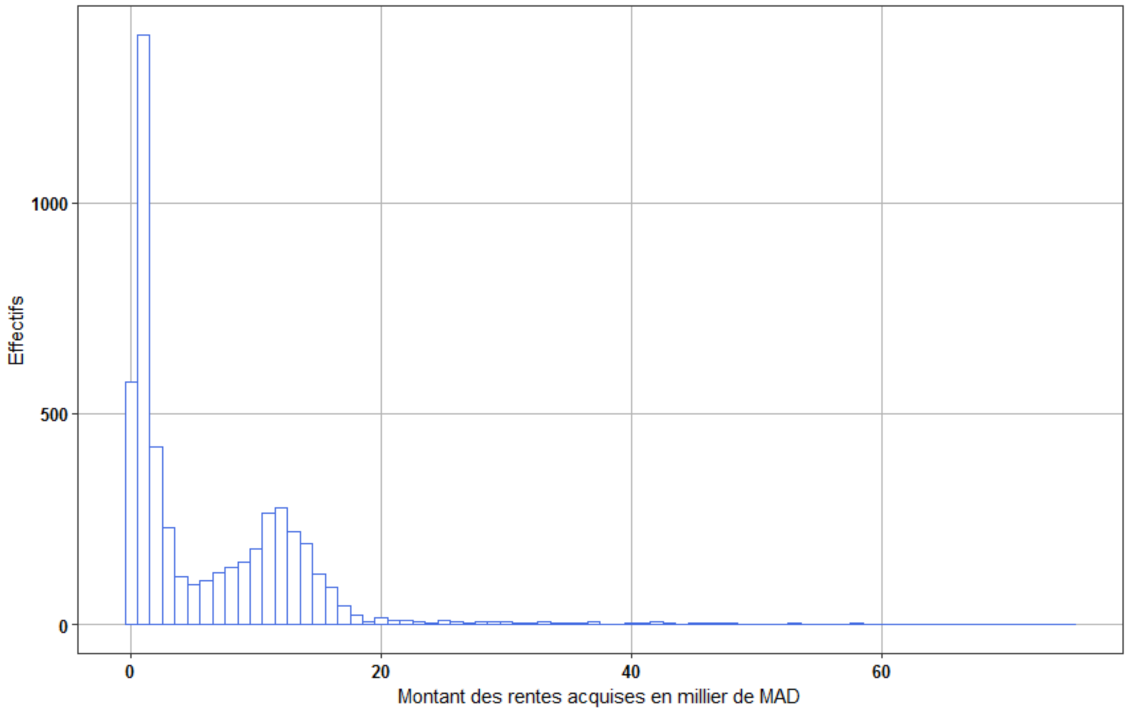


FIGURE 7 – Distribution des rentes acquises en phase de constitution

Distribution de la phase de service

Les 255 adhérents en phase de service bénéficient en moyenne d'un arrérage de 14 810 MAD. Nous remarquons une grande disparité sur les montants de rentes servies. La rente minimale servie vaut 86,28 MAD pour une rente maximale servie valant 142 078,08 MAD. La plus grande partie du portefeuille, 197 adhérents soit 77% du portefeuille de service, reçoit un arrérage inférieur à 20 000 MAD. Les 23% restant se répartissent de manière plus ou moins uniforme (des effectifs entre 1 et 3 adhérents) parmi ceux ayant droit à une rente entre 20 000 et 50 000 MAD, puis les effectifs décroissent petit à petit.

Le graphique de la distribution des montants servis en rente résume les informations développées ci-dessus :

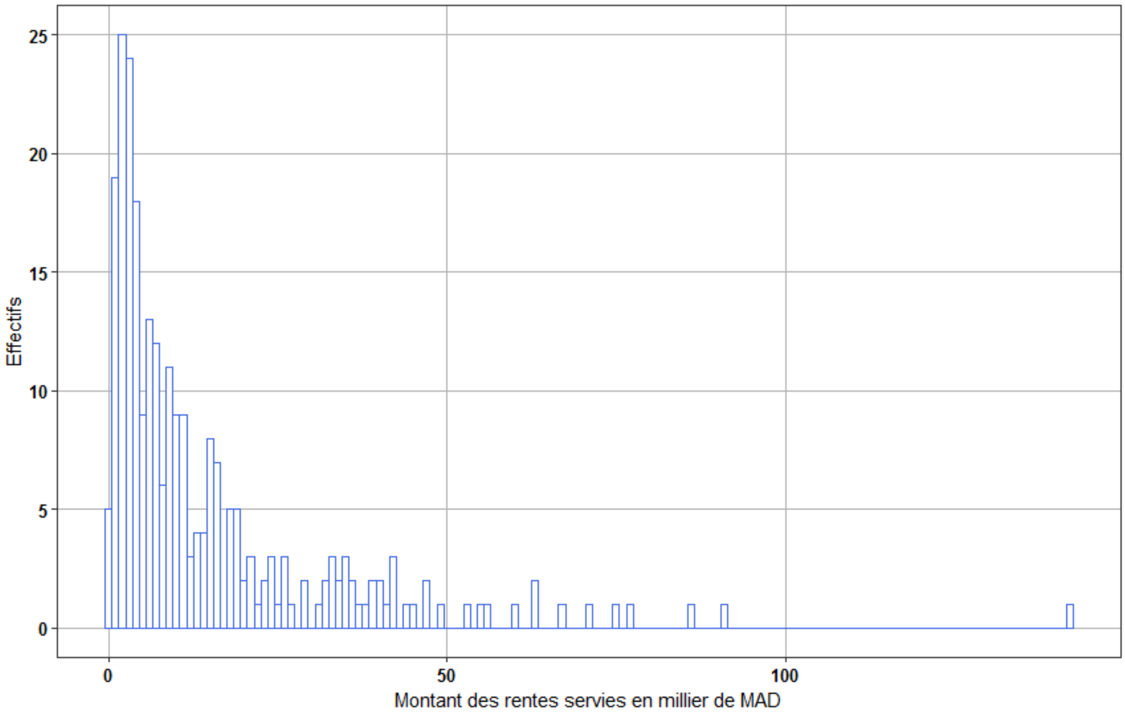


FIGURE 8 – Distribution des rentes en phase de service

2.1.1.2 Composition par âge

Le fonctionnement du produit nécessite la connaissance de l'âge des assurés. La phase de service commençant à 60 ans et la rente étant servie jusqu'au décès de l'assuré, l'âge des personnes composant le portefeuille d'étude aura un impact direct sur la valorisation de ce dernier.

Les adhérents présents dans le portefeuille ont entre 34 et 84 ans avec un âge moyen de 52,77 ans. 3 323 d'entre eux ont entre 50 et 60 ans. Cela représente 65% des adhérents. 26% du portefeuille a moins de 50 ans, nous avons ainsi 1 357 adhérents entre 34 et 50 ans.

Nous montrons la distribution de notre portefeuille à l'aide d'une pyramide des âges par sexe :

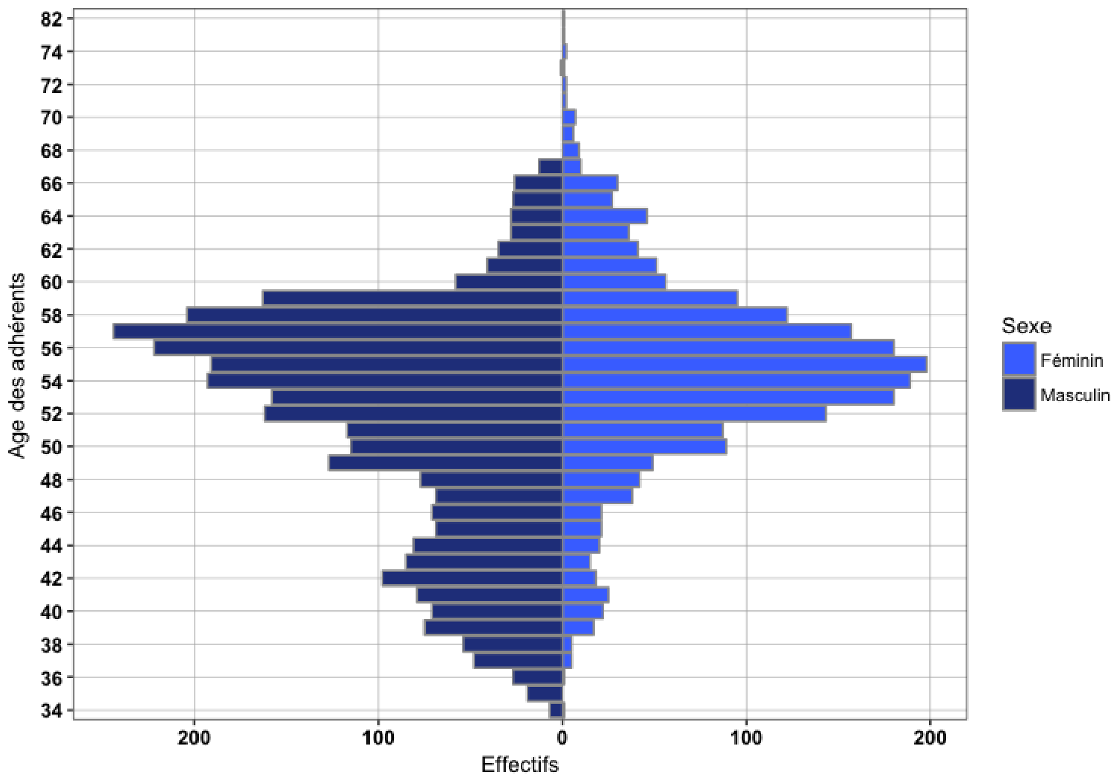


FIGURE 9 – Pyramide des âges

2.1.1.3 Composition par sexe

Une dernière approche dans l'analyse de la composition du portefeuille est l'étude de la distribution homme/femme. Il est admis que le sexe influe de manière importante sur la mortalité.

Nous possédons cette information uniquement pour les adhérents en phase de constitution. Pour les 255 adhérents en phase de service, nous considérons que l'ensemble des adhérents sont des femmes. Bien que cette hypothèse ne soit pas réaliste, elle permet de ne pas sur-estimer la mortalité des adhérents en phase de service. En l'absence d'information suffisante, nous adoptons une attitude prudente. Sous cette hypothèse, la population féminine représente 40% du portefeuille (35% liés à la phase de constitution et les 5% qui représentent les 255 adhérents de la phase de service).

Regardons maintenant cette répartition homme/femme par âge. Les hommes représentent la quasi-totalité des adhérents les plus jeunes, c'est-à-dire inférieur à 40 ans. Plus on regarde des tranches d'âge élevées, plus la proportion de femmes augmente. Elle atteint même 100% pour les âges les plus élevés. Cela relève en grande partie de l'hypothèse forte faite sur le sexe des adhérents en phase de service.

Le graphique suivant représente la proportion d'hommes et de femmes par effectifs d'âge entiers entre 34 et 82 ans :

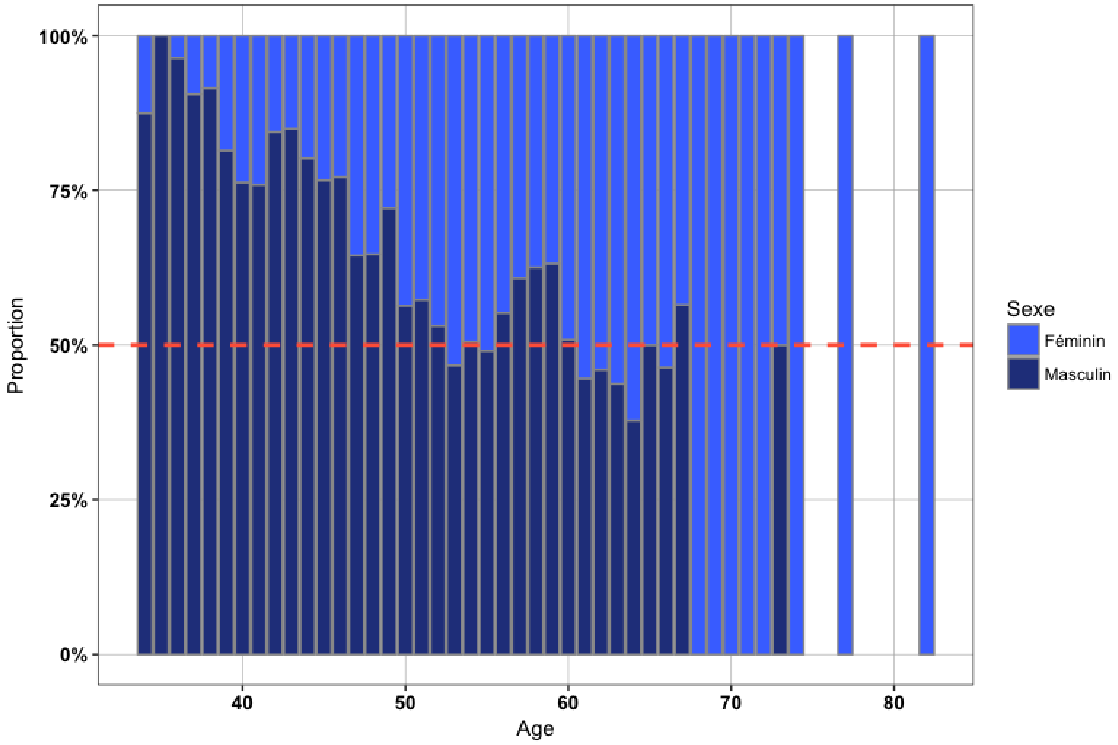


FIGURE 10 – Distribution homme/femme

2.1.2 Paramètres d'entrée

Afin d'évaluer les engagements relatifs au portefeuille présenté en partie 2.1.1, il est important d'expliciter les hypothèses nécessaires à l'utilisation d'un modèle de projection. Nous avons identifié dans la partie 1.2.3 les facteurs à forte influence sur les prestations à servir pendant la vie du portefeuille. Le choix des hypothèses liées au comportement du portefeuille face à l'option de rente viagère ainsi qu'à la mortalité des assurés est crucial parce qu'il impacte fortement les engagements futurs.

2.1.2.1 Hypothèses générales

Nous cherchons à évaluer les provisions techniques représentant les engagements relatifs au portefeuille en vision Best Estimate. Comme nous l'avons défini plus tôt, cette notion renvoie à une valeur juste et réaliste des engagements. Aucune marge de prudence ne doit être prise en compte dans ce calcul et les hypothèses doivent être cohérentes avec le produit et le marché.

Nous explicitons les hypothèses centrales à la création de notre modèle.

Actif - L'ensemble de notre étude porte sur l'évaluation du Best Estimate ainsi que la marge de risque définie comme le coût du capital du Best Estimate. De part la nature du produit, la valeur du Best Estimate dépend du comportement de l'actif. En effet, la clause de revalorisation indexée sur les résultats financiers engendre une interaction entre l'actif et le passif. Par un souci de simplification, nous supposerons la **revalorisation nulle**. Cette simplification reste en accord avec le marché. La revalorisation n'est nulle que si le rendement financier dépasse 4,5%, ce qui est peu probable avec la conjoncture économique.

Rachat - Nous avons mentionné la possibilité de racheter totalement son contrat pendant la phase de constitution. Ce phénomène est rare et n'impacte que très peu notre portefeuille. L'adhérent n'a pas d'intérêt à racheter son contrat car il récupère uniquement les cotisations salariales. En perdant ses droits aux prestations il perd les cotisations patronales. De fait, nous supposerons le **nombre de rachat nul** dans le temps.

Run-off - Le portefeuille est en situation de run-off. Cela signifie qu'aucune nouvelle adhésion ne sera enregistrée à l'avenir. De plus, **aucune nouvelle cotisation ne sera enregistrée** pour les adhérents présents dans le portefeuille. Ainsi, le portefeuille sera valorisé exactement tel qu'il est au 31 décembre 2016. De part la nature même du portefeuille, la valorisation respectera les principes énoncés dans la directive Solvabilité II en étudiant notre **portefeuille en run-off**.

Frais de gestion - Les frais de gestion doivent être inclus dans la valeur du Best Estimate. Nous utiliserons les informations fournies par le service comptabilité de La Marocaine Vie. Elles comprennent **trois tarifs unitaires** : le coût unitaire des frais de gestion liés à une année de présence en phase de constitution, le coût unitaire des frais de gestion liés à une année de présence en phase de service ainsi que le coût unitaire d'un adhérent choisissant de récupérer son capital à la sortie du portefeuille. Les tarifs ont été calculés en faisant le rapport entre les frais généraux réels relatifs aux différents événements et le nombre de personnes présentes ayant induits ces frais généraux.

Les différents tarifs unitaires appliqués sont :

Coût de gestion unitaire par occurrence	
Une sortie en capital à 60 ans	148 MAD
Une année en phase de service	1150 MAD
Une année en phase de constitution	148 MAD

Actualisation - La réglementation Solvabilité II préconise de prendre en compte la valeur temporelle de l'argent à l'aide de la courbe des taux sans risque pertinente. Nous utiliserons la **courbe des taux zéro coupons** fournie par la banque centrale marocaine.

2.1.2.2 Table de mortalité

La projection des flux futurs nécessite la modélisation du phénomène de mortalité. Dans le cadre d'estimation des flux liés aux rentes viagères, il est recommandé d'utiliser une table de mortalité générationnelle afin de tenir compte de la dérive d'espérance de vie.

Il est admis qu'au fil des années, les générations ont une espérance de vie de plus en plus longue. Les probabilités de survie et de décès dans l'année se lisent en fonction de l'âge x de l'assuré et de son année de naissance t. Dès lors, notre modèle de projection prendra comme paramètre d'entrée une table de mortalité générationnelles à lecture bidimensionnelle. Nous obtenons ainsi des probabilités viagères $p_{x,t}$ et $q_{x,t}$ à deux dimensions, fonction de l'âge et de la génération de naissance de l'assuré.

En l'absence de tables générationnelles de référence pour la population marocaine, nous modéliserons dans un premier temps la mortalité à l'aide des tables de mortalité réglementaires préconisées en France par l'Institut des Actuaires (IA) lors des calculs liés aux rentes viagères. Nous utiliserons les tables **TGH05** et **TGF05** lors de l'application de notre modèle de projection.

Les tables TGH05 et TGF05 sont les tables de mortalité en vigueur pour la tarification des rentes viagères. Elles ont été construites sur la base de données comprenant 2 millions de rentes, dont 700 000 en cours de liquidation. Ces rentes couvraient une période d'observation de 13 ans, allant de 1993 à 2005. Le nombre de données disponibles étant trop faible, elles ont été positionnées par rapport aux tables prospectives INSEE hommes et femmes des années 1962 à 2000. Celles-ci ont été lissées grâce à un ajustement par splines cubiques comportant 5 nœuds aux âges 20, 28, 40, 80 et 90 ans, puis une extrapolation des taux dans le futur a été effectuée.

Ainsi, la construction décrite ci-dessus aboutie sur deux séries de tables prospectives : la table TGH05, présentant les taux de décès masculins pour les générations de 1900 à 2005 et la table TGF05, présentant les taux de décès féminins pour les générations de 1900 à 2005.

2.1.2.3 Taux d'incidence de l'option rente

Le taux d'incidence de l'option rente correspond à la proportion d'assurés choisissant cette option lors du départ à la retraite. Nous disposons d'un historique précis de ce taux de 2010 à 2016. Nous constatons une augmentation à l'allure linéaire par morceaux entre 2010 et 2016 passant de 13% à 19%, alors que le taux d'incidence oscillait entre 3% et 9% au cours de la période 2006-2010.

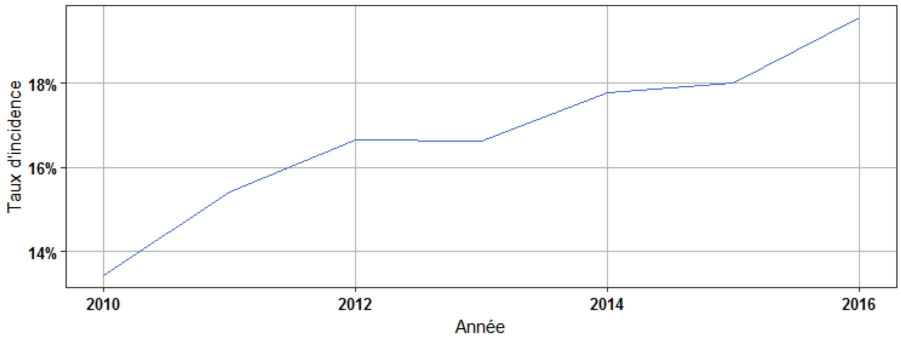


FIGURE 11 – Taux d'incidence à l'option rente entre 2010 et 2016

Après avoir échangé avec l'organisme de gestion du régime et d'autres acteurs du marché, nous adopterons un taux d'incidence de l'option rente de **20%**. Cela représente le taux prédit pour la période 2017-2020. De part le caractère arbitraire de ce choix, nous effectuerons des analyses de sensibilité lors de l'application de notre modèle.

La modélisation initiale prendra en entrée un taux d'incidence égal à **20%**. Nous testerons par la suite les taux d'incidence égaux à 10%, 15%, 25% et 30% afin d'étudier la sensibilité du Best Estimate au taux d'incidence. Enfin, nous déterminerons un taux d'incidence par génération grâce à la tendance linéaire de l'historique afin de mesurer l'impact d'une éventuelle dérive dans le temps du taux d'incidence de l'option rente.

2.2 Projection déterministe

Le premier modèle développé repose sur une projection déterministe. La notion de déterministe se rapporte à l'absence d'aléa dans la projection. Ainsi, cette projection peut être considérée comme le scénario moyen.

2.2.1 Projection des flux

Notre premier modèle permet de projeter l'ensemble des flux relatifs à notre portefeuille. Les flux sont évalués par année et ils sont composés d'une part des prestations servies, d'autre part des frais inhérents à la gestion des contrats en cours. Les engagements sont ensuite estimés en sommant les flux jusqu'à l'extinction totale du portefeuille.

Les flux sont projetés de manière déterministe. Ainsi les comportements pouvant présenter un caractère aléatoire sont déterminés directement par les hypothèses. Cela revient à supposer que les hypothèses représentent le scénario moyen et que le portefeuille se comporte exactement comme attendu.

Explicitons la projection déterministe dans notre modèle. A chaque pas de temps de modélisation (pas annuel), le nombre de personnes restant en vie est exactement le nombre de personnes en vie au pas précédant diminué du taux de décès fourni par les tables TGF05 et TGH05. Il en va de même pour le taux d'incidence de l'option rente. Parmi les adhérents arrivant à l'âge de la retraite, exactement 20% d'entre eux choisiront de convertir leur capital en rente viagère lorsque les 80% restant opteront pour la récupération de leur capital constitutif.

Cette projection est totalement déterminée par les hypothèses et correspond au scénario moyen. Les flux projetés représentent donc les flux attendus si l'ensemble des hypothèses sont respectées. Cependant, il est nécessaire de regrouper nos assurés par âges communs car lorsque nous appliquons le taux de décès de manière multiplicative, il n'est pas possible de différencier les assurés. Nous raisonnons par groupe d'assurés du même âge avec un rente acquise (phase de constitution) ou rente servie (phase de service) moyenne. Afin d'appliquer notre modèle déterministe, nous réduisons la granularité et nous perdons en précision.

Nous présentons les résultats de la projection déterministe de manière graphique en représentant l'ensemble des engagements relatifs à notre portefeuille puis nous faisons un focus sur les engagements liés aux rentes viagères :

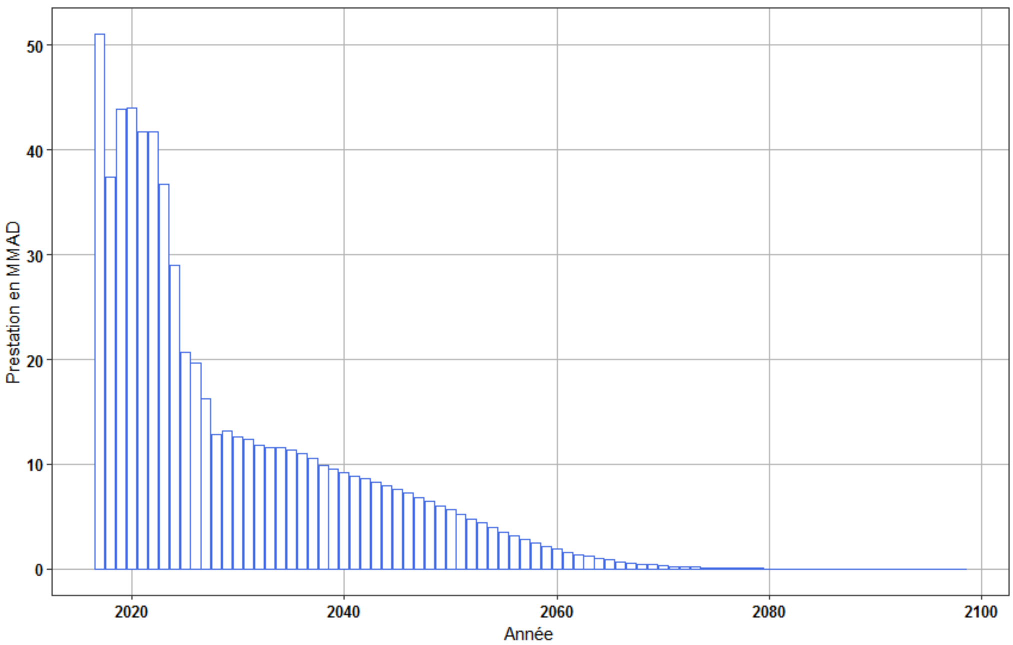


FIGURE 12 – Projection déterministe des engagements avec frais de gestion

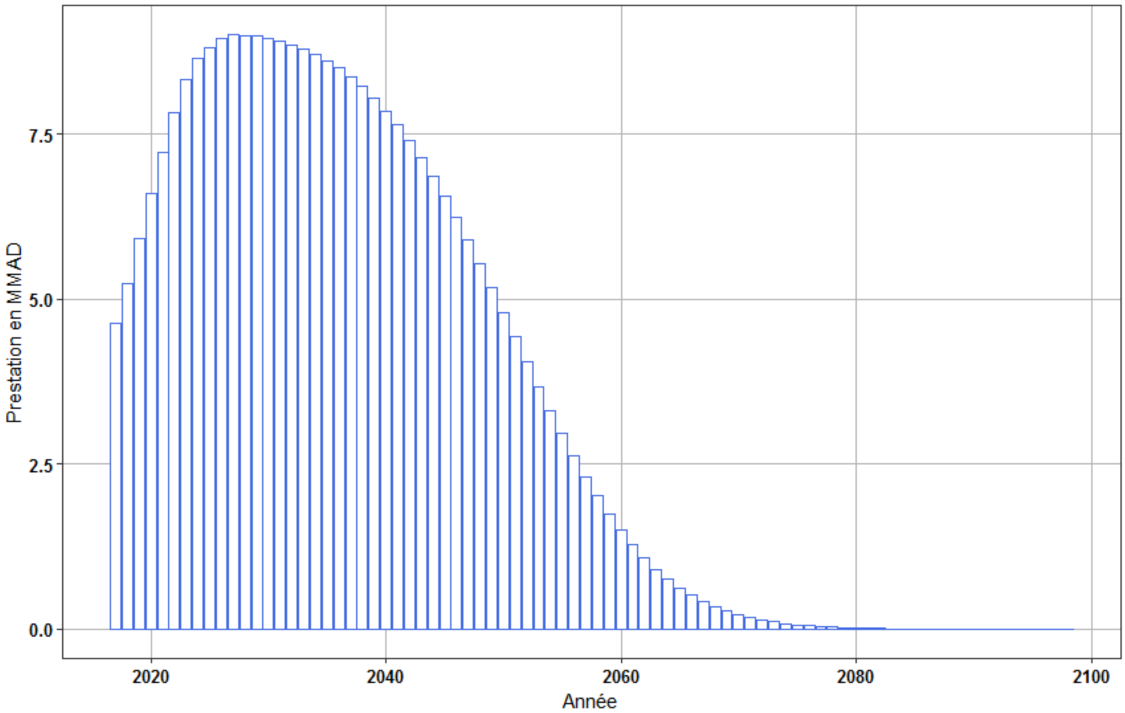


FIGURE 13 – Projection déterministe des prestations servies par les rentes viagères

Nous remarquons que les prestations à servir sont plus importantes sur les premières années. Cela provient des garanties annexes avant 60 ans. A partir de 2043, les engagements sont exclusivement liés aux rentes viagères. Concernant les rentes viagères, les prestations augmentent jusqu'en 2028, pour ensuite décroître jusqu'à extinction totale en 2098.

2.2.2 Best Estimate déterministe

L'obtention des flux par notre modèle de projection permet le calcul des provisions Best Estimate déterministes. Comme nous l'avons défini, le Best Estimate correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente. C'est donc la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs. En d'autres termes, le Best Estimate déterministe est la somme des flux déterministes pondérées par l'actualisation des taux issus de la courbe des zéro coupons.

Nous représentons l'impact de l'actualisation :

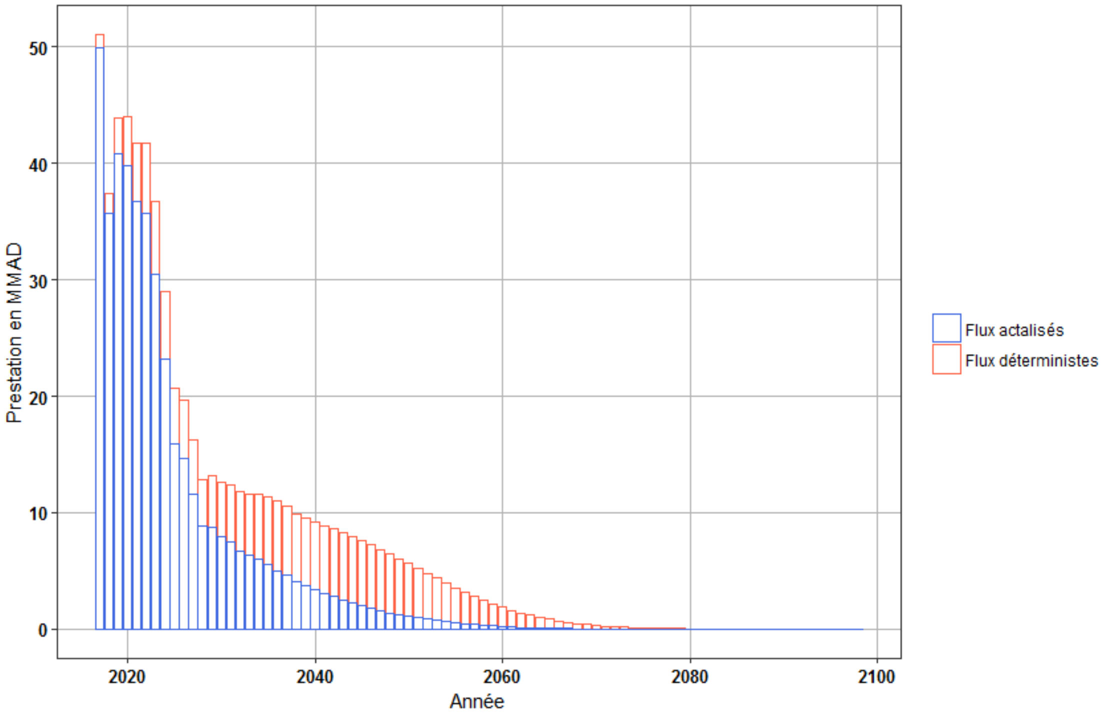


FIGURE 14 – Impact de l'actualisation sur les flux déterministes

Nous remarquons que l'actualisation est d'autant plus importante que les flux sont éloignés dans le temps. Au global, l'actualisation fait baisser les flux de 31%. Le Best Estimate déterministe est obtenu en sommant l'ensemble des flux déterministes actualisés. Nous trouvons un **Best Estimate déterministe égal à 438,94 MMAD**.

2.3 Projection stochastique

Le second modèle envisagé repose sur une projection stochastique des engagements. La notion de stochastique s'oppose à la notion de déterministe vue plus haut. En effet, stochastique signifie au hasard ou aléatoire. Ainsi, les projections stochastiques s'appuient sur la notion «d'aléa».

Lors de la modélisation, nous ne raisonnerons plus en scénario moyen comme précédemment. L'idée générale de la méthode stochastique consiste à générer non pas un scénario mais plusieurs centaines, voir idéalement plusieurs milliers où chaque scénario sera un scénario aléatoire. A la fin de l'exercice, nous disposerons d'un grand nombre d'observations correspondant à des réalisations possibles du futur.

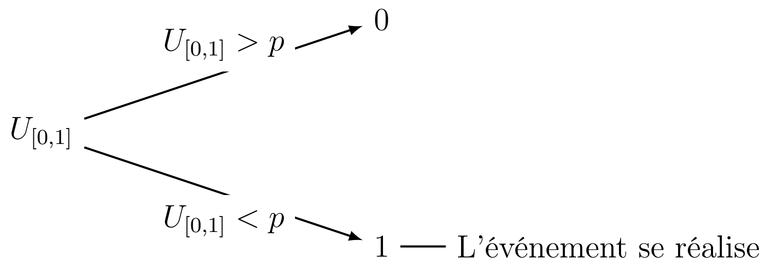
2.3.1 Événement aléatoire

Les événements pouvant présenter un caractère aléatoire sont pleinement pris en compte. Pour chacun d'entre eux, nous raisonnerons de manière binaire : l'événement se produit ou il ne se produit pas. Afin de déterminer si l'événement se produit ou non, nous utiliserons une loi de Bernoulli associée à une probabilité déterministe d'occurrence de l'événement. Nous parlons dans ce cas de modélisation stochastique de premier niveau car la probabilité associée à l'événement est déterministe. En considérant une probabilité aléatoire, nous aurions à faire à une modélisation stochastique de second niveau. Reprenons l'explication avec une projection stochastique de premier niveau. Nous cherchons à modéliser si l'événement aléatoire se réalise ou non. Nous connaissons la probabilité associée à la réalisation de l'événement. A l'aide d'une réalisation de loi de Bernoulli de même probabilité, nous associons la réalisation 1 à l'occurrence de l'événement.

Afin de pouvoir simuler une loi aléatoire de manière informatique , il est nécessaire de simuler des nombres aléatoires en amont. Il existe plusieurs types de générateurs de nombres aléatoires, nous utiliserons le générateur disponible sur le logiciel *R*. En pratique, ces générateurs permettent de réaliser des simulations d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Dès lors, la loi de Bernoulli se simule facilement. En notant p la probabilité associée à la réussite de la variable suivant la loi de Bernoulli et $U_{[0,1]}$ la réalisation d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, la réalisation de la loi Bernoulli vaut 1 si $U_{[0,1]}$ est inférieur à p, 0 sinon.

Nous schématisons le processus stochastique ainsi :



Nous utilisons ce processus stochastique pour rendre aléatoire deux comportements lors de la modélisation de notre portefeuille : la mortalité et le choix de l'option de sortie. Pour simuler la mortalité d'un assuré de génération t d'âge x de manière stochastique, nous appliquons à la fin d'année le processus de Bernoulli avec la probabilité de décès $p = q_{x,t}$ lue sur les tables TGF/H05. Si le processus renvoie 1, alors l'assuré décède, il reste en vie sinon. De même, nous déterminons si l'assuré choisit l'option rente à l'âge de 60 ans en appliquant le processus avec $p = 20\%$. Si le processus renvoie 1, l'assuré choisit la conversion en rente viagère, il choisit l'option de sortie en capital sinon.

En appliquant cette méthode ligne à ligne, assuré par assuré, à chaque pas de temps annuel et ce jusqu'à l'extinction du portefeuille, nous obtenons un scénario stochastique. En répétant l'opération un grand nombre de fois, nous obtenons un ensemble de scénarios envisageables. Le résultat est ensuite obtenu en faisant la moyenne de tous les scénarios. Nous parlons de méthode de **Monte Carlo**.

2.3.2 Convergence du Best Estimate

Les méthodes de simulation stochastique reposent sur la convergence en probabilité des valeurs de sortie vers la valeur espérée. En effet, la loi des grands nombres assure que la moyenne arithmétique des n premières réalisations d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{R}}$ $i.i.d$ converge en probabilité vers l'espérance de X_1 lorsque n tend vers l'infini.

Dans notre cas, nous associons la suite variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{R}}$ aux valeurs du Best Estimate par simulation. Ainsi, nous simulons à l'aide de processus stochastiques présentés dans la partie précédente l'ensemble des flux jusqu'à l'extinction du portefeuille. Nous calculons la somme actualisée des flux afin d'obtenir le Best Estimate pour une simulation. Nous répétons l'opération afin d'obtenir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{R}}$ de Best Estimate.

Nous reprenons les hypothèses du modèle de projection déterministe :

- La mortalité est modélisée avec les tables TGH/F05
- Le taux d'incidence de l'option rente est fixé à 20%

Dans un souci de temps de calcul, nous effectuons seulement 500 simulations. C'est un chiffre relativement faible pour l'application de la loi des grands nombres. Généralement, nous essayons d'effectuer au moins 1 000 simulations.

Afin de quantifier le nombre de simulations nécessaires pour être confortable avec le résultat obtenu, nous mesurons l'écart relatif entre la moyenne des engagements sur les n premières simulations et la moyenne sur les 500 simulations.

Nous remarquons la stabilité de la convergence dès 100 simulations. A partir de 100 simulations, l'écart ne dépasse pas 0,5%. L'écart maximum mesuré est de 0,024% au delà de 300 simulations. Dès lors, nous considérons le nombre de simulations satisfaisant pour assurer une certaine confiance dans le résultat.

Nous traçons le graphique mesurant l'impact du nombre de simulations sur l'écart à la moyenne :

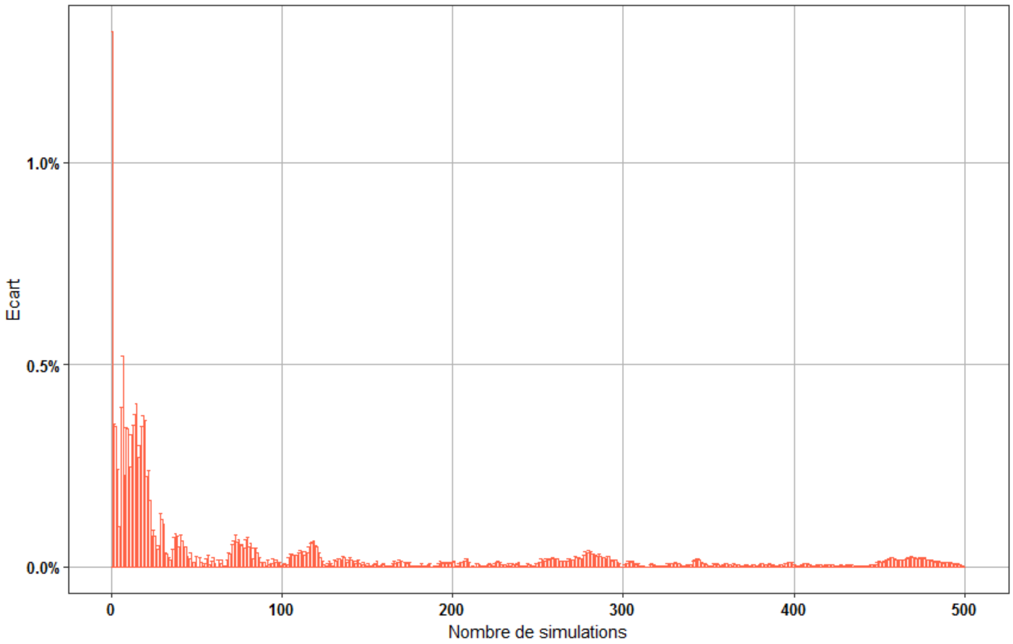


FIGURE 15 – Écart relatif des prestations moyennes par nombre de simulations

Nous considérons alors que 500 simulations est un nombre confortable pour appliquer la méthode de Monte Carlo afin d'estimer le Best Estimate.

Nous traçons le graphique de convergence du Best Estimate :

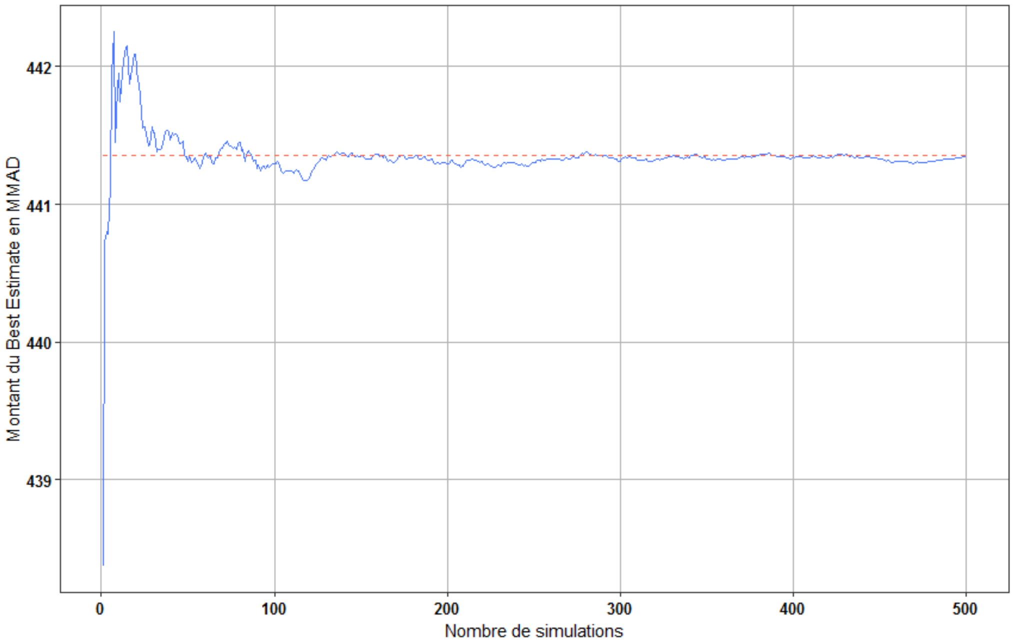


FIGURE 16 – Convergence du Best Estimate

Ainsi, nous obtenons le Best Estimate de manière stochastique en faisant la moyenne des 500 simulations. Nous trouvons un **Best Estimate stochastique égal à 441,35 MMAD**. Cela représente un écart de 0,5% par rapport au Best Estimate déterministe.

2.3.3 Distribution du Best Estimate

La simulation stochastique permet d'obtenir la valeur moyenne des engagements Best Estimate. Cette moyenne est plus précise que le Best Estimate déterministe. En effet, cette méthode ne nécessite plus le regroupement par âge et permet une projection tête par tête. De ce fait, la disparité du portefeuille, notamment sur les montants de rente, est pleinement incluse dans le calcul.

Cependant, la plus-value par rapport à la projection déterministe réside dans le fait que les projections stochastiques donnent plus d'informations qu'une projection déterministe. Le nombre de simulations effectué permet d'obtenir la distribution du Best Estimate et ainsi connaître précisément le comportement de la variable aléatoire représentant les engagements Best Estimate autour de la valeur espérée.

Nous représentons l'histogramme de distribution du Best Estimate obtenu à l'aide de nos 500 simulations ainsi que la densité associée :

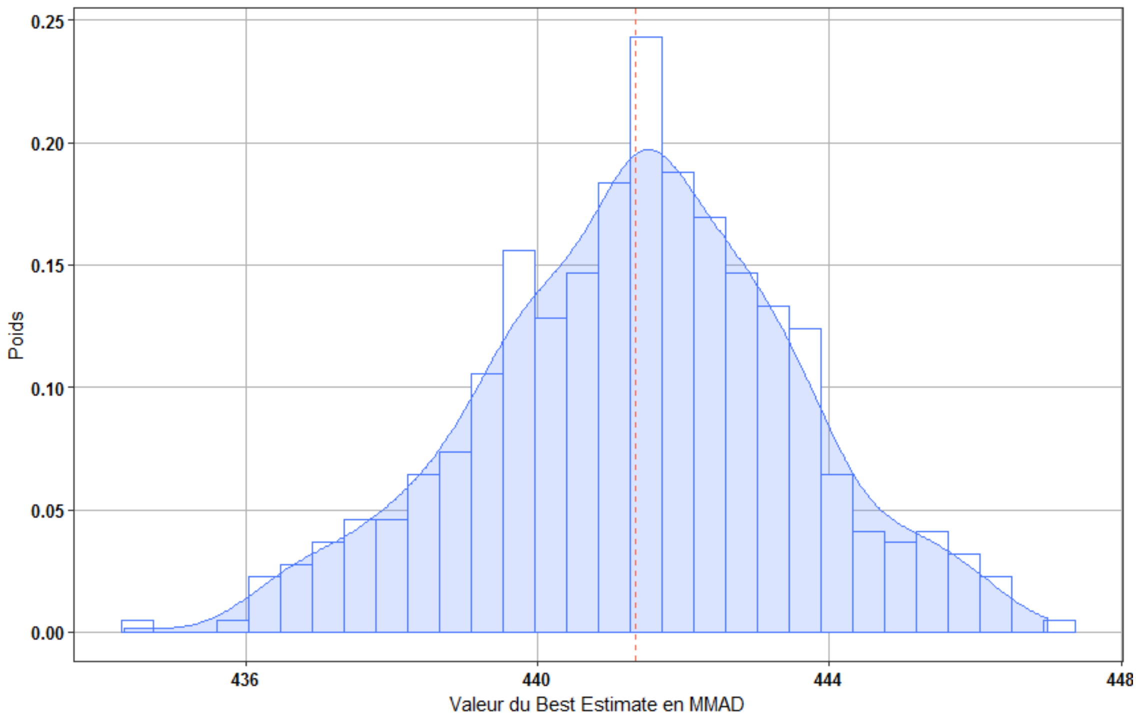


FIGURE 17 – Distribution du Best Estimate

Nous retrouvons l'information relative à l'espérance du Best Estimate, là où le poids affecté est le plus important. Nous avons une image précise de la distribution autour de cette espérance. La distribution semble symétrique en donnant autant de poids aux valeurs à droite qu'à gauche de la moyenne.

Notons tout de même qu'en raison du nombre relativement faible de simulations, la distribution n'est pas assez fiable pour effectuer une étude sur les valeurs extrêmes. En d'autres termes, l'étude autour de la moyenne a du sens mais les conclusions quant aux valeurs maximales et minimales sont à prendre avec la plus grande prudence.

2.3.4 Comparaison normative

Ces premiers résultats donnent une première estimation des engagements que représentent notre portefeuille. Jusqu'à l'extinction du portefeuille et en prenant en compte la valeur temps de l'argent, le respect des engagements envers les assurés coûtera 441,35 MMAD à l'entité.

Le Best Estimate représente les provisions prudentielles relatives aux engagements. Ces provisions sont la meilleure estimation des engagements futurs. En conséquent, il est intéressant de les comparer aux provisions réglementaires comptables à provisionner.

Les provisions comptables sont calculées selon des normes précises. Elles sont régies par le code des assurances. La table de mortalité utilisée par l'entité marocaine dans le calcul des provisions réglementaires est la table TV88-90.

Nous comparons les provisions comptables aux provisions Best Estimate obtenues à l'aide de notre modèle de projection :

Résultats en MMAD	**Best Estimate**	**Provisions comptables**	Impact sur provisions
Prestations	417,53	382,17	35,36
Frais	23,83	7,32	16,51
Total	441,35	389,49	61,52

TABLE 1 – Comparaison normative : provisions comptables et Best Estimate

En comparaison aux provisions Best Estimate, les provisions comptables semblent sous-provisionnées. Globalement, la différence entre les deux s'élève à 61,52 MMAD. Si tel est le cas, il y a un écart de 16 % entre l'argent immobilisé et l'argent nécessaire pour respecter les engagements envers les assurés. A terme, le souscripteur du contrat s'expose à de lourdes pertes.

Avant toute conclusion alarmiste, il est important de s'assurer que les engagements Best Estimate représentent bien la meilleure estimation des engagements futurs. Nous avons vu que cette meilleure estimation dépend du caractère Best Estimate des hypothèses de projection.

Les deux facteurs ayant une influence directe sur le montant du Best Estimate sont le **taux d'incidence à l'option rente** et les **hypothèses biométriques**.

Dans un premier temps, nous allons quantifier l'impact d'un changement de taux d'incidence à l'option rente sur le Best Estimate. Nous connaîtrons ainsi le risque porté par le choix de ce facteur.

Dans un second temps, nous effectuerons une étude approfondie de la longévité de nos assurés afin de juger l'adéquation des tables TGH/F05 pour projeter nos engagements. Ce sont des tables réglementaires en France mais rien n'indique que le comportement de la population marocaine face aux risques biométriques soit le même. Nous présenterons les résultats d'expérience de mortalité dans le chapitre suivant.

2.4 Impact du taux d'incidence sur le Best Estimate

En raison du caractère arbitraire du choix du taux d'incidence de l'option rente, nous essayons des sensibilités avec les taux de 10%, 15%, 25% et 30%. Nous comparons les distributions celle obtenue avec le taux de 20% :

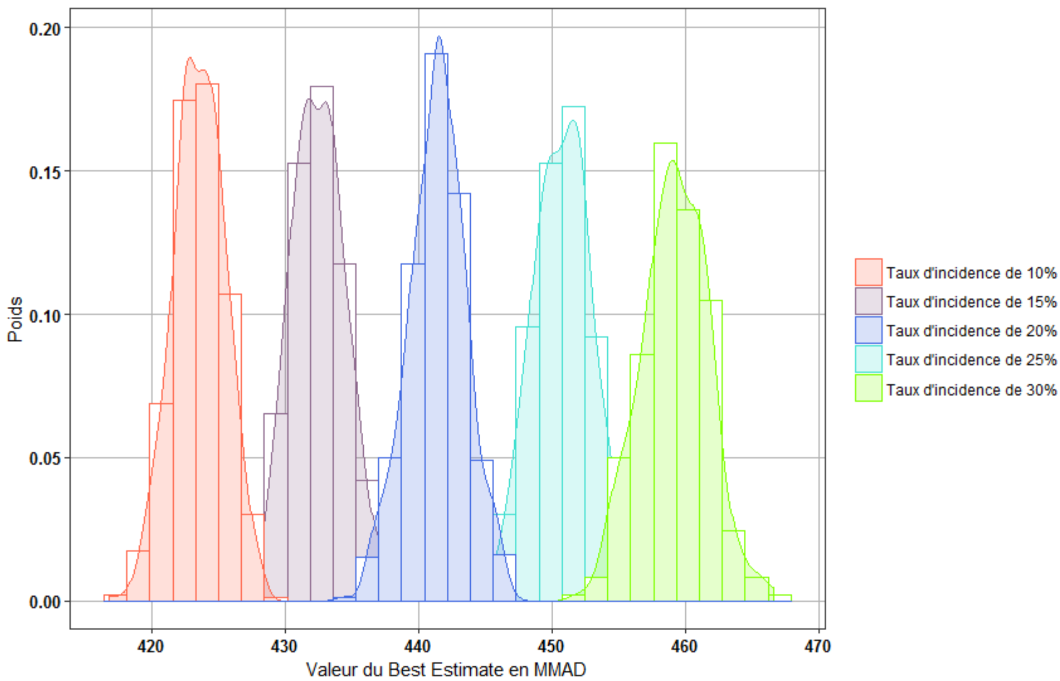


FIGURE 18 – Sensibilité du Best Estimate au taux d'incidence à l'option rente

Nous remarquons que la valeur moyenne du Best Estimate est croissante en fonction du taux d'incidence de l'option rente. L'option rente est celle qui influe le plus sur les engagements futurs. Plus le nombre de personnes choisissant cette option sera important, plus la somme des engagements sera élevée.

Nous pouvons conclure que le choix de sortie n'est pas neutre sur la valeur du Best Estimate. Une augmentation (respectivement une baisse) de 5 points du taux d'incidence à l'option rente entraîne une hausse (respectivement une baisse) de 2% du Best Estimate. Nous regardons plus en détail l'impact du taux d'incidence sur les prestations ainsi que les frais de gestion liés à la sortie en capital et à la sortie en rente viagère.

Nous regroupons les résultats dans le tableau suivant :

Résultats en MMAD	**Option sortie en capital**			**Option sortie en rente**			**Best Estimate**
	Prestations	Frais	Total	Prestations	Frais	Total	
Taux de 20%	266,53	0,46	266,99	149,68	19,16	168,84	441,35
Taux de 10%	299,35	0,51	299,86	106,19	11,96	118,15	423,5
Impact	12%	11%	11%	-29%	-38%	-30%	-4%
Taux de 15%	282,78	0,48	283,26	128,08	15,61	143,69	432,45
Impact	6%	4%	6%	-14%	-19%	-15%	-2%
Taux de 25%	249,34	0,43	249,77	172,33	22,86	195,20	450,52
Impact	-6%	-7%	-6%	15%	19%	16%	2%
Taux de 30%	233,00	0,40	233,4	193,76	26,43	220,19	459,16
Impact	-13%	-13%	-13%	29%	38%	30%	4%

TABLE 2 – Impact du taux d'incidence sur le Best Estimate

Nous remarquons une asymétrie dans l'impact d'une variation du taux d'incidence sur les prestations des deux options. Bien que les prestations de ces options varient dans un sens opposé, la variation des prestations liées à l'option de sortie en rente est plus de deux fois plus importante que celle liée à l'option de sortie en capital. Cet effet montre que le risque porte davantage sur la **longévité** des adhérents. En raison de la dérive d'espérance de vie, la tarification n'est plus en phase avec la longévité du portefeuille. De fait, plus la part des assurés choisissant l'option de sortie en rente est forte, plus les engagements sont importants.

Cet effet est accentué par la prise en compte de frais de gestion. Alors que la sortie en capital se déroule en une fois, les rentes viagères sont servies chaque année et demandent une gestion manuelle lourde pour réconcilier les informations entre l'entité marocaine et l'organisme de service de la rente. Les frais de gestion liés aux rentes ont un impact significatif lorsque le taux d'incidence évolue, alors que les frais de gestion lié à la sortie en capital sont peu matériels en comparaison.

Le Best Estimate dépend fortement du choix du taux d'incidence à l'option rente. Nous avons vu lors du choix des hypothèses que ce taux évolue de manière croissante de 2010 à 2016. Après avoir appliqué notre modèle de projection avec un taux d'incidence à l'option rente constant, nous allons supposer qu'il continue à augmenter dans le temps en suivant la même tendance linéaire que par le passé.

Pour l'année 2017, 20% des adhérents arrivant à la retraite choisiront l'option rente. Puis chaque année, ce taux prendra 1 point supplémentaire. La modélisation donne un Best Estimate égal à 450,68 MMAD, ce qui représente un écart de 2% par rapport au Best Estimate obtenu avec un taux stable à 20% au cours du temps. En reprenant les résultats développés plus haut, le Best Estimate obtenu avec un taux évolutif est équivalent à un taux constant de 25%.

Chapitre 3

Expérience de mortalité

Cette troisième partie aura pour objet l'étude de la longévité de la population de notre portefeuille. Pour ce faire, nous chercherons à créer une table de mortalité correspondant à la loi de mortalité d'expérience de nos assurés. Nous établirons une table de mortalité simple dite de moment, puis nous élaborerons une méthode pour rendre cette table générationnelle.

3.1 Étude préliminaire

L'étape préliminaire à la création d'une table d'expérience est la récolte, l'analyse et le traitement des données. Cette étape représente entre 30% et 70% du temps qu'un actuaire doit consacrer à la conception de la table. En effet, des données de mauvaise qualité ne permettent pas l'extraction d'informations fiables.

3.1.1 Les données

Notre portefeuille de 5151 adhérents n'est pas assez volumineux pour donner les informations nécessaires à l'évaluation de la mortalité d'expérience. Nous avons récolté les données provenant du portefeuille Entreprise Groupe de La Marocaine Vie. Ce portefeuille représente 11 produits proposés par La Marocaine Vie, incluant le portefeuille de contrats que nous cherchons à valoriser. Ainsi, le portefeuille Entreprise Groupe correspond à des produits de retraites collectives proposant des garanties similaires à notre produit d'étude.

Dès lors, il n'est pas insensé d'émettre l'hypothèse que la population globale de ce portefeuille possède des caractéristiques biométriques proches des adhérents de notre portefeuille d'étude. En effet, si le risque d'anti-sélection est présent lorsque nous étudions un produit tel que les rentes viagères, l'ensemble du portefeuille Entreprise Groupe propose ces garanties à forte influence biométrique. Pour le risque d'anti-sélection résultant du fait qu'un adhérent ayant tendance à vivre longtemps se tournera plus facilement vers un produit de rente viagère, étudier des assurées ayant souscrit à ces produits est cohérent. Les résultats de mortalité d'expérience pourront être appliqués directement à notre portefeuille sans retraitement supplémentaire.

La base de données comprend un certain nombre d'informations essentielles à notre étude. Elle se présente sous la forme d'un tableau, où chaque ligne correspond à un assuré différent. Nous parlons d'informations tête par tête. Chaque colonne correspond à une des variables suivantes :

Produit	*Police*	*Matricule*	*Date de naissance*	*Date d'entrée*	*Date de sortie*

Ainsi grâce à la combinaison du produit, de la police et du matricule de l'assuré, nous obtenons bien l'information tête par tête. Pour chaque assuré, nous connaissons son année de naissance, la date d'entrée dans le portefeuille et donc la date du début d'observation. Enfin, nous avons la date de fin d'observation correspondant à la date de sortie du portefeuille ou à la dernière date de récolte des données pour construire la base. Si l'assuré est sorti du portefeuille, nous connaissons le motif de sortie : décès ou autre.

Cette base de données représente 59 440 assurés sur une période d'observation allant de 1978 à 2016. L'utilisation brute de la base n'est pas envisageable, il faut l'analyser et la traiter au préalable.

3.1.2 Qualité de donnée

Le traitement des données est le processus d'analyse et de correction des anomalies constatées. Un certain nombre de tests élémentaires sont à effectuer pour rendre compte de la cohérence des données. En voici une liste non-exhaustive :

- Les variables sont renseignées
- Les dates ne sont pas aberrantes
- Il n'existe aucune ligne doublon
- Les dates de naissance sont inférieures aux dates d'entrée
- Les dates d'entrée sont inférieures aux dates de sortie
- Les lignes d'assurés décédés ont une date de sortie renseignée

Lorsque certains tests ne sont pas vérifiés, il convient alors de traiter ces anomalies. Deux possibilités s'offrent à nous : soit supprimer les lignes qui posent problèmes de la base d'observation, soit les corriger. Chacune des méthodes présentent des avantages et des inconvénients. Si nous décidons de supprimer les lignes, nous gardons le reste de l'information intacte mais nous perdons en quantité d'informations. En corrigeant les erreurs, la quantité d'informations reste identique mais nous risquons de biaiser les résultats de l'observation.

En raison du faible volume de nos données, notre choix se porte sur la correction des anomalies afin de garder un maximum d'informations à l'intérieur de la base d'observation. Nous essayons de minimiser la déformation de l'information en corrigeant les anomalies.

Nous corrigeons les anomalies à l'aide d'une étude statistique. Afin de ne pas créer un biais trop important entre la base initiale et la base traitée, nous utilisons les informations par produit. Pour ce faire, nous effectuons une étude statistique sur la base sans les différentes anomalies.

Nous présentons les résultats de cette analyse :

Numéro de produit	Nombre adhérent	Age moyen à l'adhésion	Age moyen à la sortie	Duration moyenne
1	23 483	33,00	44,63	11,63
2	9 381	32,63	52,69	20,06
3	1 656	32,32	40,27	7,94
4	8	40,39	48,53	8,15
5	90	39,93	47,86	7,93
6	256	44,12	53,51	9,38
7	181	39,06	54,22	15,16
8	10 236	34,57	46,97	12,41
9	13 633	35,37	39,36	4,00
10	24	32,07	36,22	4,16
11	29	42,84	49,19	6,35
Total	58 948	33,84	45,07	11,23

Table 3 – Statistiques sur base d'observation hors anomalies

Le premier point à soulever est l'absence d'anomalie sur les lignes comportant l'information des décès. Ainsi, les corrections n'auront aucun effet sur les décès observés. Elles affecterons uniquement l'exposition au risque décès, c'est-à-dire le nombre de personnes observées et la durée d'observation de ces personnes.

Parmi les variables, uniquement les dates sont susceptibles de poser un problème de cohérence. Lorsqu'une seule d'entre elles fait défaut, nous la corrigeons à l'aide de l'âge moyen par produit pour les dates de naissance et la duration moyenne par produit pour les dates d'entrée et de sortie. Pour les cas plus complexes où plusieurs dates sont concernées par les anomalies, nous décidons de supprimer ces lignes afin de ne pas biaiser l'information de notre base. Cela représente 194 lignes corrigées et 21 lignes supprimées. La base finale représente ainsi 59 419 lignes.

3.1.3 Période d'observation

Nous avons une base de données propre. Nous devons définir la période d'observation que nous allons considérer. Rappelons que nous possédons un historique de 1978 à 2016, mais qu'il n'est pas envisageable de garder cette période d'observation. Elle est trop longue et risque de comporter des irrégularités. Une période de 5 à 10 ans semble raisonnable. Au-delà, il conviendrait de vérifier qu'il n'y a pas d'évolution sensible de la mortalité sur la période retenue.

Afin de sélectionner notre période d'observation, nous calculons pour chaque année calendaire le nombre de personnes présentes dans le portefeuille, l'âge moyen dans le portefeuille, le nombre de décès observés, l'âge moyen au décès et le rapport du nombre de décès sur le nombre de personnes présentes.

Nous obtenons les résultats suivant :

Période	Nombre de personnes	Age moyen	Nombre de décès	Age moyen au décès	Taux de décès
1798 ... 2000	NA	NA	3	NA	NA
2001	25888	41	1	67	0,00%
2002	28346	41	2	55	0,01%
2003	28475	42	0	NA	0,00%
2004	28211	43	1	51	0,00%
2005	28114	43	13	50	0,05%
2006	19499	43	14	50	0,07%
2007	17878	43	24	48	0,13%
2008	18342	43	24	49	0,13%
2009	18698	43	22	49	0,12%
2010	19022	44	16	50	0,08%
2011	19271	44	13	49	0,07%
2012	20280	44	19	51	0,09%
2013	20864	44	24	49	0,12%
2014	20818	44	25	54	0,12%
2015	20543	44	21	51	0,10%
2016	20359	45	21	53	0,10%

TABLE 4 – Analyse pour le choix de la période d'observation

Il est important de vérifier que la période d'observation choisie est suffisamment grande pour obtenir un volume d'observations adéquat. Un grand volume permet d'augmenter la qualité des estimations. Cependant, une période trop longue entraîne des fluctuations dans les résultats. Le choix de la période d'observation doit se faire en connaissance des données de manière à s'y adapter.

Nous remarquons que la population du portefeuille fluctue dans le temps et l'âge moyen du portefeuille augmente au fil des années. Une première sélection nous oblige à retenir une période d'observation postérieure à 2005. En dessous, la composition du portefeuille diffère de manière trop importante. De 2006 à 2016, les taux de décès sont relativement stables. Nous ne constatons aucune évolution sensible des taux de mortalité. Une certaine volatilité reste cependant inhérente au portefeuille, du fait de la faible volumétrie des données.

Nous choisissons la période d'observation **2006-2016**.

3.1.4 Analyse statistique

Nous notons $L_{x,t}$ le nombre d'individus d'âge x vivant au 1er janvier de l'année calendaire t. De même, $D_{x,t}$ est le nombre de décès enregistré à l'âge x durant l'année calendaire t. Nous cherchons à créer une table de moment où nous ne prenons pas en compte la génération. Ainsi, nous avons le nombre d'individus d'âge x sur l'ensemble de la plage d'observation $L_x = \sum_t L_{x,t}$ et $D_x = \sum_t D_{x,t}$ le nombre de décès d'âge x sur l'ensemble de la plage. Enfin, nous notons $E_x = \sum_i E_{i,x}$ l'exposition au risque décès à l'âge x où pour chaque individu i, $E_{i,x}$ est le nombre de jours (exprimé en année) pendant lesquels l'individu est observé à l'âge x.

Exposition

Nous représentons l'exposition de notre portefeuille E_x en fonction de l'âge x. Rappelons que la période d'observation comprend les années 2006 à 2016. L'exposition représente le nombre de jours (en année) où nous avons observé l'ensemble des individus d'âge x.

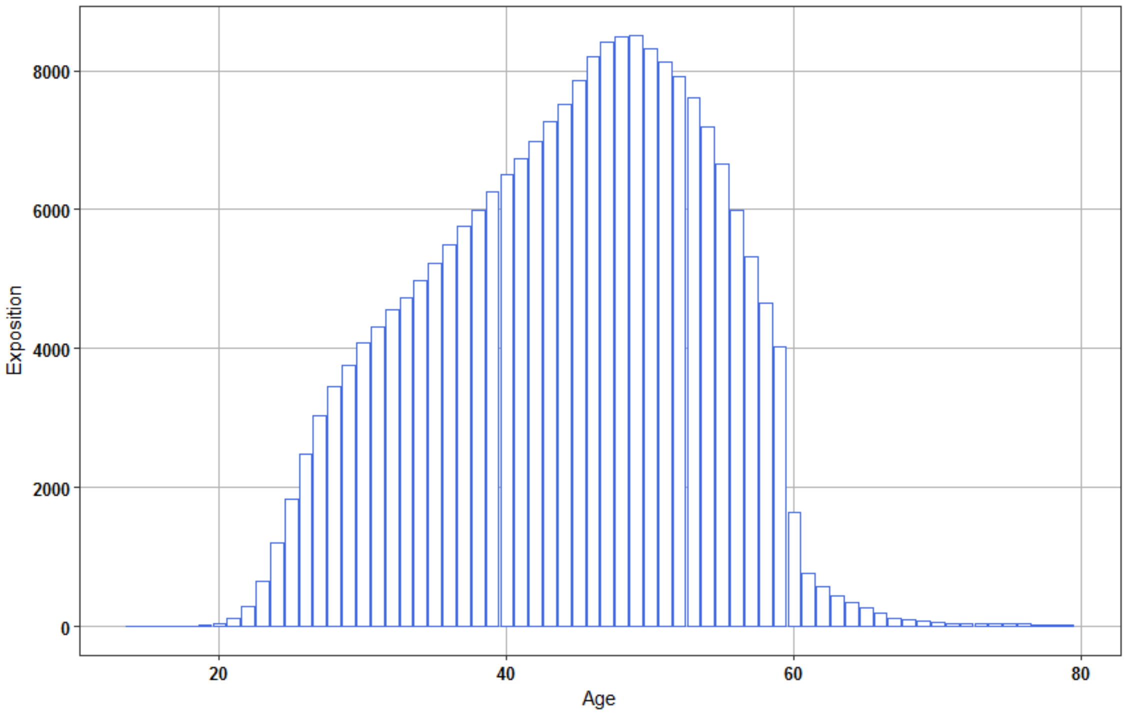


FIGURE 19 – Exposition du portefeuille par âge

Nous remarquons que la majeure partie de l'exposition est incluse entre 25 et 60 ans. L'absence d'observation aux âges supérieurs à 60 ans nous obligera à utiliser des méthodes d'extrapolation aux grands âges afin de déterminer la loi de survie. En effet, la quantité de données à ces âges n'est pas suffisante pour utiliser directement les résultats de notre étude.

Décès

De manière analogue, nous représentons le nombre de décès par âge observé entre 2006 et 2016. En reprenant les notations définies plus haut, nous traçons D_x en fonction de x.

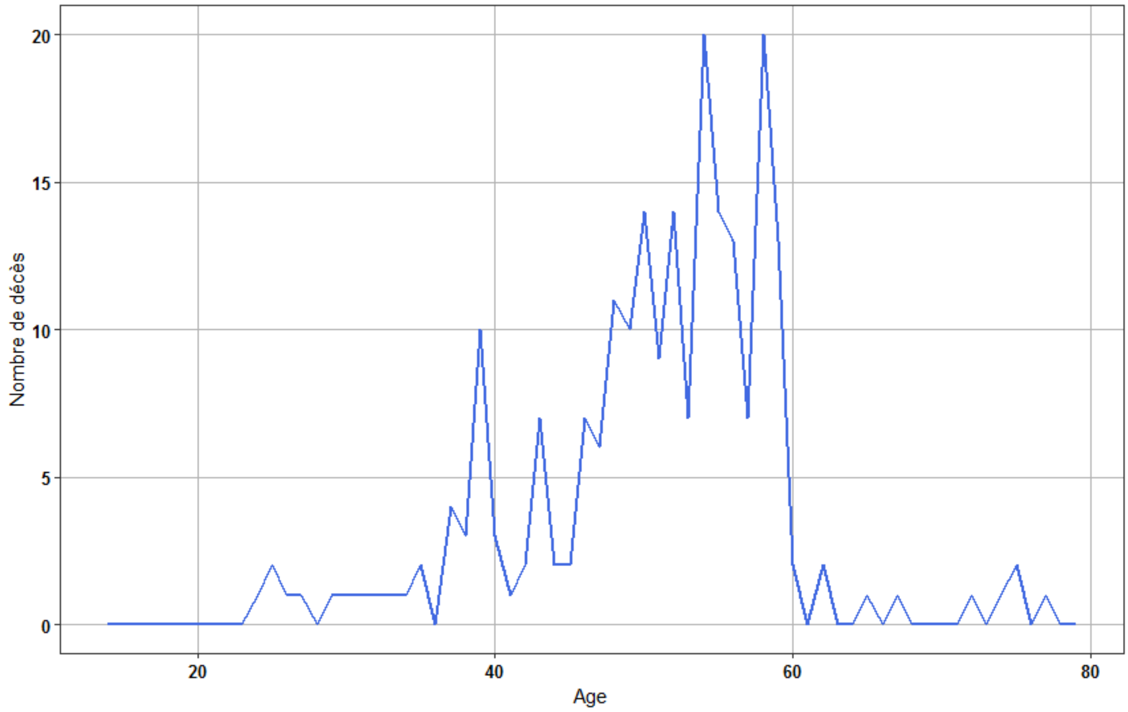


FIGURE 20 – Nombre de décès par âge

92% des décès observés se sont produits entre 35 et 64 ans. Remarquons que seulement 3 décès sont observés au dessus de 75 ans, et qu'aucun décès n'est enregistré au delà de 78 ans.

Critères d'exhaustivité

A partir des analyses statistiques précédentes, nous nous arrêtons sur 2 critères permettant de qualifier l'exhaustivité des données.

Le **critère d'exposition** permet de vérifier la suffisance d'exposition de notre portefeuille. Nous considérons un seuil à 2000 d'exposition. En raison du large intervalle d'observation (2006 à 2016), le critère est respecté de 22 à 60 ans.

Le **critère de Cochran** permet de vérifier la suffisance quant aux nombres de décès. Il peut être définit de la manière suivante : $L_x \times \hat{q}_x \geq 5$ et $L_x \times (1 - \hat{q}_x) \geq 5$ avec $\hat{q}_x = \frac{D_x}{E_x}$. On cherche ainsi la plage d'âges où le nombre de décès observé est suffisant. Pour notre portefeuille, le critère est vérifié pour les âges 39, 40, 43 et 46 à 59. Nous cherchons une plage d'âges continue, ainsi la plage d'âges retenue pour respecter le critère de Cochran est [46,59].

Afin de respecter les deux critères, nous considérons que **l'intervalle d'âges [46,59]** est exhaustif dans l'optique de déterminer une loi de mortalité d'expérience relative à notre portefeuille.

3.2 Création d'une table d'expérience périodique

Afin de clarifier le cadre permettant la création d'une table d'expérience, nous définissons les principales quantités qui sont les plus couramment utilisées pour caractériser les variables de durée.

Concepts d'analyse de survie

Dans un premier temps, nous reprenons les notations énoncées en partie 1.3.1. La probabilité qu'un individu d'âge x meurt dans l'année est notée q_x et la probabilité de survie correspondante est notée $p_x = 1 - q_x$. En analyse de durée les auteurs parlent généralement de fonction de survie. Enfin, T est la variable aléatoire correspondant à la durée de vie totale de l'individu et la durée de vie résiduelle est $T_x = T - x$.

La première grandeur utilisée en analyse de durée est la fonction de survie. Son rôle est analogue à la fonction de répartition en théorie des probabilités.

Définition - *Fonction de survie* S. La fonction de survie d'une variable aléatoire T est $S(x) = \mathbb{P}(T \geq x)$.

Le lien avec la fonction de répartition est immédiat, nous pouvons passer de l'un à l'autre. En effet, $S(x) = 1 - F(x-)$ avec $F(x) = \mathbb{P}(T \leq x)$ la fonction de répartition associée à T. La fonction de survie comme la fonction de répartition définit de manière unique la distribution de T. Nous chercherons à quantifier la fonction de survie conditionnelle de T :

$$S_x(t) = \mathbb{P}(T_x > t | T_x > 0) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = {}_t p_x.$$

La deuxième grandeur souvent mentionnée en analyse de durée est l'espérance de vie résiduelle. C'est une espérance conditionnelle.

Définition - *Espérance de vie résiduelle* e_x. L'espérance de vie résiduelle à l'âge x représente le temps moyen qu'il reste à vivre çà l'individu sachant qu'il a vécu jusqu'à l'âge x. Mathématiquement, nous avons :

$$e_x = \mathbb{E}[T - x | T \geq x] = \mathbb{E}[T | T_x \geq 0].$$

Pour $T \geq 0$ p.s., $e_x = \int_0^\infty S_x(t)\mathrm{d}t - x = \frac{1}{S(x)} \int_x^\infty S_x(t)\mathrm{d}t - x$.

Pour des âges de décès entiers, l'espérance de vie résiduelle est :

$$e_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x.$$

L'espérance de vie résiduelle est un indicateur qui a le mérite d'être assez parlant mais difficile à estimer en pratique. En effet, l'espérance est une quantité qui peut être fortement influencée par de trop grandes observations.

Le taux de risque instantané est la dernière quantité à définir dans le cadre d'analyse de variables de durée. Nous avons précédemment mentionné la fonction de survie analogue à la fonction de répartition dans la théorie des probabilités classique. Le taux de risque instantané joue le rôle de la densité. Ainsi, c'est un indicateur plus visuel que la fonction de survie, très utile pour caractériser une variable de durée.

Définition - *Taux de risque instantané* μ_t. Le taux de risque instantané est mentionné sous différents noms dans la littérature. Les plus couramment utilisés sont force de mortalité, fonction de hasard ou taux de risque instantané. Nous le définissons dans le cas discret et continue.

Cas discret

Ici, $T \in \{t_1, ..., t_n, ...\}$, la force de mortalité se définit alors comme :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mathbb{P}(T = t | T \geq t), \\ &= \frac{\mathbb{P}(T = t)}{\mathbb{P}(T \geq t)}. \end{aligned}$$

Ainsi, une forte valeur de μ_t implique un risque important de décès dans la journée ou dans la seconde. Nous pouvons assimiler ce taux de risque instantané à la probabilité de décès dans l'instant.

Une relation importante entre la force de mortalité et la fonction de survie s'écrit :

$$S(t) = \prod_{t_i \leq t} (1 - \mu_{t_i}).$$

La loi de la variable T est donc totalement définie par la force de mortalité. En effet, nous pouvons retrouver la fonction de survie avec l'information contenue dans les μ_{t_i}.

Cas continu

Ici, T n'est plus discrète mais continue. La définition précédente n'est plus pertinente car une variable aléatoire continue affecte une masse nulle à l'événement $\mathbb{P}(T = t)$. La force de mortalité est alors définie comme :

$$\mu_t = \lim_{\mathrm{d}t \to 0^+} \frac{\mathbb{P}(T \in [t, t + \mathrm{d}t] | T \geq t)}{\mathrm{d}t} = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{-S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} ln(S(t)).$$

Dans le cas continu, il résulte directement que la force de mortalité détermine entièrement la loi de T et que nous avons la relation suivante :

$$S(t) = \exp\big(- \int_0^t \mu_u \mathrm{d}u \big).$$

D'après la définition de la fonction de survie conditionnelle et de la formule de la force de mortalité, on obtient la relation d'équivalence entre μ et ${}_tp_x$:

$${}_tp_x = S_x(t) = \exp(- \int_x^{x+t} \mu_u \mathrm{d}u).$$

Dans ce mémoire, nous retenons l'hypothèse que les forces de mortalité sont constantes par morceaux entre les âges, c'est-à-dire que $\mu_{x+\epsilon} = \mu_x$ pour $0 \leq \epsilon < 1$. Sous cette hypothèse, nous vérifions facilement les relations suivantes :

$$q_x = 1 - \exp(-\mu_x), \qquad \mu_x = - \ln(1 - q_x).$$

3.2.1 Estimation des taux de mortalité bruts

La première étape lors de la création d'une loi de survie d'expérience est l'estimation de la mortalité du portefeuille. Nous présentons d'abord les méthodes d'estimation des taux de mortalité bruts.

Estimateur de Hoem

Nous avons supposé dans ce mémoire que les forces de mortalité sont constantes par morceaux. Une approche par maximum de vraisemblance (voir démonstration en annexe A) des taux de décès permet d'obtenir un estimateur appelé usuellement estimateur de Hoem. Avec les notations définies précédemment, l'estimateur de Hoem est défini tel que :

$$\hat{\mu}_x = \frac{D_x}{E_x}.$$

En utilisant la constance des taux de mortalité instantanés, nous obtenons :

$$\hat{q}_x = 1 - \exp(-\frac{D_x}{E_x}).$$

Cet estimateur est particulièrement bien adapté à l'estimation des taux de mortalité pour les portefeuilles de données de taille importante. En pratique, les actuaires utilisent également une version approximée des estimateurs des taux de décès, parfois qualifiée par abus de langage d'estimateurs de Hoem, $q_x \approx \mu_x$. Comme $1 - \exp(-x) \leq x$ lorsque $x \geq 0$, cet estimateur simplifié surestime la probabilité de décès estimée par les relations faisant intervenir l'exponentielle.

Estimateur de Kaplan-Meier

L'estimateur de Kaplan-Meier est un estimateur de la fonction de survie. Il repose sur deux notions qui renvoient à une observation partielle de certaines données : la censure et la troncature.

La **censure** est un phénomène qui se produit dès lors qu'une variable d'intérêt n'est pas observable en totalité.

La **troncature** est un phénomène qui se produit dès lors qu'une variable d'intérêt n'est observable que lorsqu'elle est inférieure à un seuil c>0.

Dans notre cas, un assuré entré dans le portefeuille avant le début de l'observation forme une donnée tronquée. Nous savons uniquement que l'assuré est encore en vie à la date de début d'observation, s'il était décédé nous n'aurions aucune information. Si un assuré est encore en vie à la fin de l'observation nous avons une observation censurée car on ne peut pas observer le décès futur.

En étudiant la variable d'intérêt du décès, il est important de prendre en compte ces phénomènes d'information partielle. C'est le cas de l'estimateur de Kaplan-Meier.

Nous schématisons la censure et la troncature de la manière suivante :

		Début de l'observation		*Fin de l'observation*	
1er cas : L'individu entre et sort pendant la période d'observation		Entrée	Sortie		Cas idéal
2eme cas : L'individu entre pendant la période d'observation et sort après		Entrée		Sortie	Observation censurée à droite
3eme cas : L'individu entre avant la période d'observation et sort pendant	Entrée		Sortie		Observation tronquée à gauche
4eme cas : L'individu entre avant la période d'observation et sort après	Entrée			Sortie	Observation tronquée à gauche et censurée à droite

FIGURE 21 – Censure et troncature

Avec les notations suivantes :
Soit a_i, $i \in \{1, ..., m\}$ les âges connus des individus entre x et $x+1$.
Soit n_i le nombre d'individus vivants en a_i.
Soit d_i le nombre d'individus décédés en a_i.
Soit c_i le nombre de personnes censurées sur la période $]a_i, a_{i+1}]$.
Soit t_i le nombre de personnes tronquées sur la période $]a_i, a_{i+1}]$.

Il existe une relation récursive sur les n_i :

$$n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1} + t_{i-1}.$$

En utilisant la propriété de la fonction de survie $S(t) = S_x(t) \times S(x)$ pour tout $t > x$ et en notant $p_i = \mathbb{P}(T > a_i | T > a_{i-1})$, nous avons :
$S(a_1) = p_1$,
$S(a_2) = s(a_1)p_2 = p_1 p_2$,
...

$S(a_i) = \prod_{k=1}^{i} p_k.$

Un estimateur naturel de p_i est le nombre de survivants à la date a_{i+1} divisé par le nombre de survivants à la date a_i ,soit logiquement $\hat{p}_i = \frac{n_i - d_i}{n_i}$.

La forme générale de l'estimateur de Kaplan-Meier s'écrit alors pour tout $0 < t \leq a_m$:

$$\hat{S}(t) = \prod_{i|a_i<t} (1 - \frac{d_i}{n_i}).$$

Dès lors, nous avons l'estimateur des q_x :

$$\begin{aligned}
\hat{q}_x &= 1 - \frac{\hat{S}(x+1)}{\hat{S}(x)}, \\
&= 1 - \frac{\prod_{i|a_i<x+1} (1 - \frac{d_i}{n_i})}{\prod_{i|a_i<x} (1 - \frac{d_i}{n_i})}, \\
&= 1 - \prod_{i|a_i<t}^{a_m} (1 - \frac{d_i}{n_i}).
\end{aligned}$$

Nous remarquons que si il n'y a pas de décès à une date donnée, le terme dans le produit vaut 1. Seules les dates de décès font changer les $\hat{q}_x$. De plus, l'estimateur ne bougera pas en cours de période si de nouvelles têtes arrivent dans le portefeuille.

En raison du faible volume de notre portefeuille, nous préférons l'estimateur de Kaplan-Meier à celui de Hoem. Nous prenons ainsi l'ensemble de l'information disponible dans notre estimation des taux bruts.

Nous présentons les estimations de taux bruts par l'estimateur de Kaplan-Meier :

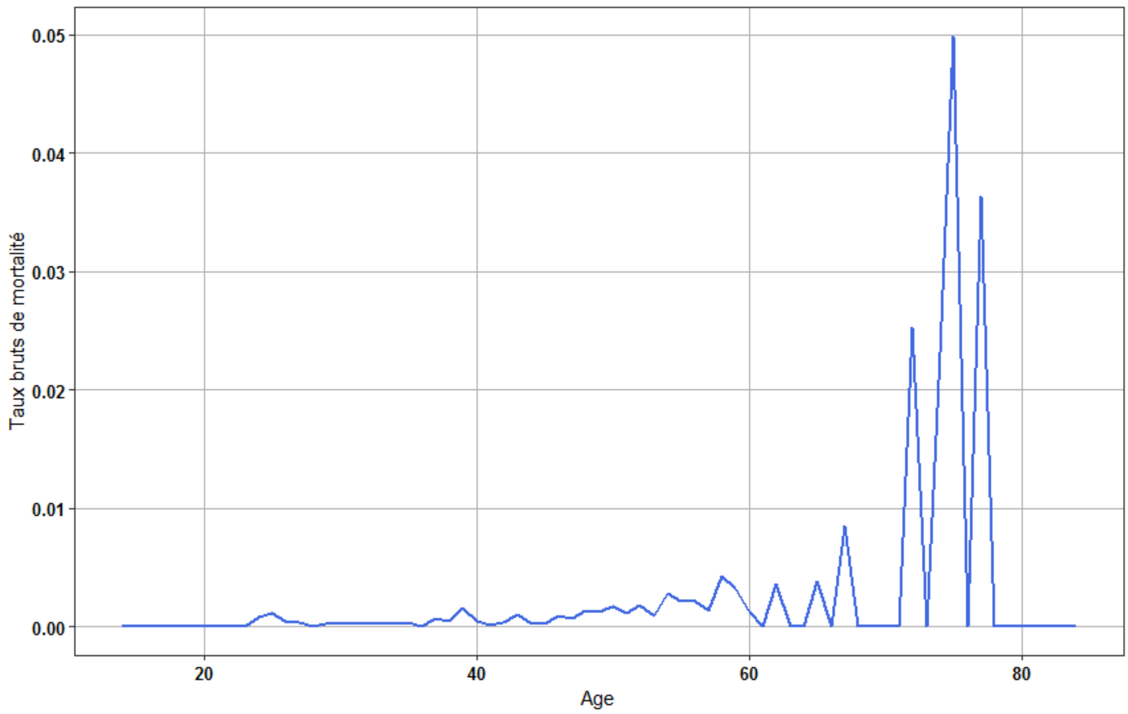


FIGURE 22 – Taux bruts de mortalité par l'estimateur de Kaplan-Meier

L'irrégularité des taux bruts nécessite l'utilisation de techniques de lissage pour obtenir une courbe de taux de mortalité exploitable.

3.2.2 Méthodes de lissage

L'obtention des taux bruts d'expérience ne permet pas l'utilisation directe de la loi de mortalité d'expérience. En effet, pour les âges où nous n'avons aucun décès, le taux de mortalité brut est nul. Les taux annuels de décès forment une courbe de mortalité irrégulière. Un certain nombre de méthodes permet d'obtenir une courbe lissée et exploitable à l'aide des taux bruts de mortalité.

3.2.2.1 Généralités

Nous cherchons à obtenir des courbes lissées des taux de mortalité. Pour ce faire, nous appliquons des méthodes d'estimation lissée des taux de décès. Nous présentons quatre catégories de méthodes :

- les modèles paramétriques,
- les lissages paramétriques,
- les lissages non-paramétriques,
- les modèles relationnels.

Les méthodes de lissage (paramétriques ou non-paramétriques) permettent un ajustement assez fidèle aux données d'expérience. Elles ne reposent sur aucune hypothèse sur la forme de la courbe de mortalité. Cependant, elles ne permettent pas d'obtenir une estimation en dehors de la plage d'âges considérée. En raison de notre faible volume de données, ces méthodes ne seront pas retenues par la suite.

Les modèles paramétriques reposent sur une hypothèse à priori de la forme de la courbe de mortalité. La fonction qui exprime le taux de mortalité doit permettre de capturer les caractéristiques fondamentales des courbes de mortalité. Ces méthodes permettent d'étendre l'estimation des taux de mortalité à des âges où il n'y a pas encore d'observation. Nous pouvons citer les lois classiques utilisées pour ces modèles : la loi de Gompetz, la loi de Makeham, la loi de Weibul ou encore le modèle logistique avec l'approximation de Kannisto. Nous laissons au lecteur intéressé le soin de consulter la large littérature sur ces modèles. Nous développerons un modèle paramétrique avec la loi de Makeham par la suite.

Enfin, les modèles relationnels partent du même principe que la modélisation paramétrique à la différence que les taux de mortalité ne sont plus exprimés en fonction de l'âge, mais en fonction du taux de mortalité donné par une table de référence. Ainsi, l'idée est de transformer à l'aide d'une fonction comprenant un petit nombre de paramètres, la table de référence pour obtenir une table reflétant l'expérience de la population étudiée. Nous développerons deux modèles relationnels par la suite, un modèle avec un unique paramètre, le coefficient du SMR et le modèle relationnel de Brass à l'aide de la fonction logit avec 2 paramètres.

3.2.2.2 Standardized Mortality Ratio

La première approche envisagée est une méthode à un paramètre à l'aide d'un unique coefficient, le SMR (Standardized Mortality Ratio) pour Ratio Standardisé de Mortalité. Elle consiste en l'application d'un coefficient de réduction ou de majoration appliqué de manière multiplicative sur les probabilités de décès d'une table de mortalité de référence. Nous gardons ainsi les propriétés de régularité de la courbe de référence ainsi que la croissance des taux de mortalité. Nous ajustons la mortalité uniquement avec un paramètre afin d'obtenir une mortalité globale équivalente à notre mortalité d'expérience.

Le SMR est définit comme le rapport entre le nombre de décès observés et le nombre de décès attendus issu de la table de référence. Ainsi, nous définissons l'indice SMR tel que :

$$SMR = \frac{\sum_{x^*} D_{x^*}}{\sum_{x^*} E_{x^*} \times q_{x^*}^{ref}}, \text{ où } x^* \text{ est une plage d'âges exhaustive.}$$

Les probabilités de décès du portefeuille $\hat{q}_x$ s'obtiennent directement par :

$$\hat{q}_x = SMR \times q_x^{ref}.$$

Le choix de la plage d'âges pour l'estimation du SMR est crucial car la table construite par positionnement ne sera valide que sur la plage d'âges retenue. L'information de la plage doit être exhaustive pour la fiabilité des résultats. Plus l'exposition sera large, plus il sera facile de positionner la table.

Nous avons définit la plage d'âges exhaustive, nous déterminons ainsi le SMR sur la **plage d'âges [46,59]**. En suivant les recommandations de l'entité marocaine, nous décidons d'utiliser la **table TV88-90** comme table de référence.

Nous obtenons :

$$\textbf{SMR} = \textbf{0,51}.$$

La mortalité d'expérience de notre portefeuille d'assurés représente 51% de la mortalité attendue par la table de référence. Cela représente un taux d'abattement de 49%. En utilisant la table TV88-90 pour estimer la longévité de nos adhérents, nous sous-estimons fortement ce risque. Pour le risque de mortalité porté par la contre-assurance avant 60 ans, il serait fortement sur-estimé. La mortalité du portefeuille s'éloigne trop de la référence de mortalité, les probabilités de décès aux âges élevés n'auront pas de sens. Nous détaillerons les méthodes de fermeture aux âges élevés dans une partie ultérieure.

Nous représentons les taux de mortalité obtenus à partir de la table TV88-90 après application du SMR :

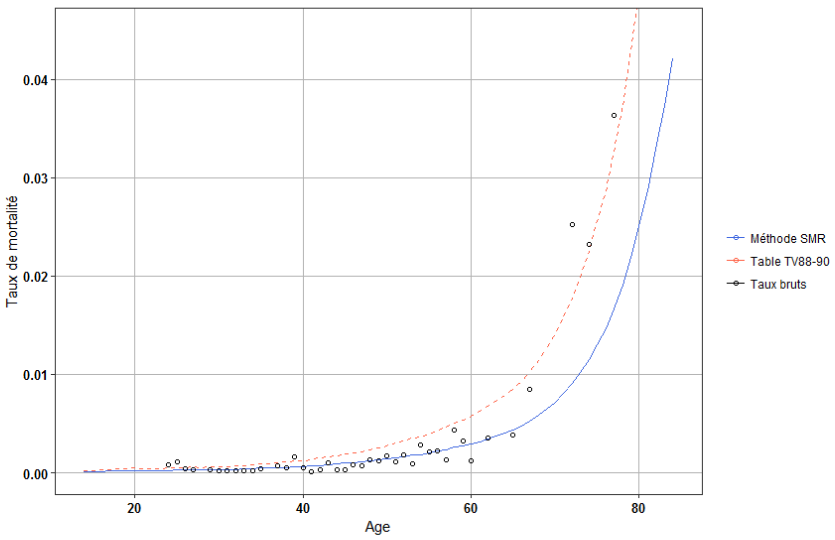


FIGURE 23 – Taux de mortalité avec application du SMR

Nous obtenons une courbe lisse et régulière profitant des propriétés de la courbe de référence. L'irrégularité des taux bruts est corrigé et l'écart entre les taux observés et les taux modélisés est réduit.

3.2.2.3 Lissage relationnel de Brass

La deuxième méthode est une approche relationnelle par l'utilisation du modèle de Brass (1971). Elle consiste en un positionnement par rapport à une table de référence. Le positionnement est effectué à l'aide de la fonction logit. Ainsi les $\hat{q}_x$ et les q_x^{ref} sont liés par la formule :

$$\text{logit}\, \hat{q}_x = \alpha + \beta\, \text{logit}\, q_x^{ref} + \epsilon_x, \text{ où } \epsilon_x \text{ est le terme d'erreur.}$$

Le paramètre α est un indicateur de mortalité qui affecte tous les âges alors que le paramètre β modifie cet effet avec l'âge. Enfin, nous obtenons les probabilités de décès du portefeuille $\hat{q}_x$ par :

$$\hat{q}_x = \frac{\exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, \text{logit}\, q_x^{ref})}{1 + \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, \text{logit}\, q_x^{ref})},$$

$\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont les paramètres estimés par minimisation de la distance pondérée par l'exposition entre les forces de mortalité observées et estimées sur notre plage d'âges exhaustive par une estimation des moindres carrés ordinaires classique.

Dans notre cas, en estimant sur la **plage d'âges [46,59]** avec la **table TV88-90** comme table de référence, nous trouvons :

$$\hat{\alpha} = \mathbf{-0{,}019}\ ,$$
$$\hat{\beta} = \mathbf{1{,}107}.$$

Remarquons que la fonction *logit* définie par $\text{logit}(x) = \ln(\frac{x}{1-x})$ est concave pour tout $0 < x < \frac{1}{2}$. L'inégalité de Jensen permet d'obtenir $\mathbb{E}(\text{logit}(q_x)) \leq \text{logit}(\mathbb{E}(q_x))$. Lorsque l'estimateur des taux de mortalité est sans biais, les probabilités de décès sont sous-estimées lorsque $q_x < \frac{1}{2}$. Cela représente une marge de prudence lorsque nous étudions le risque de survie lié aux rentes viagères. Cela représente aussi un risque de sous-estimation du risque décès lié à la contre-assurance.

Nous présentons les résultats de la méthode de Brass sur les taux de mortalité :

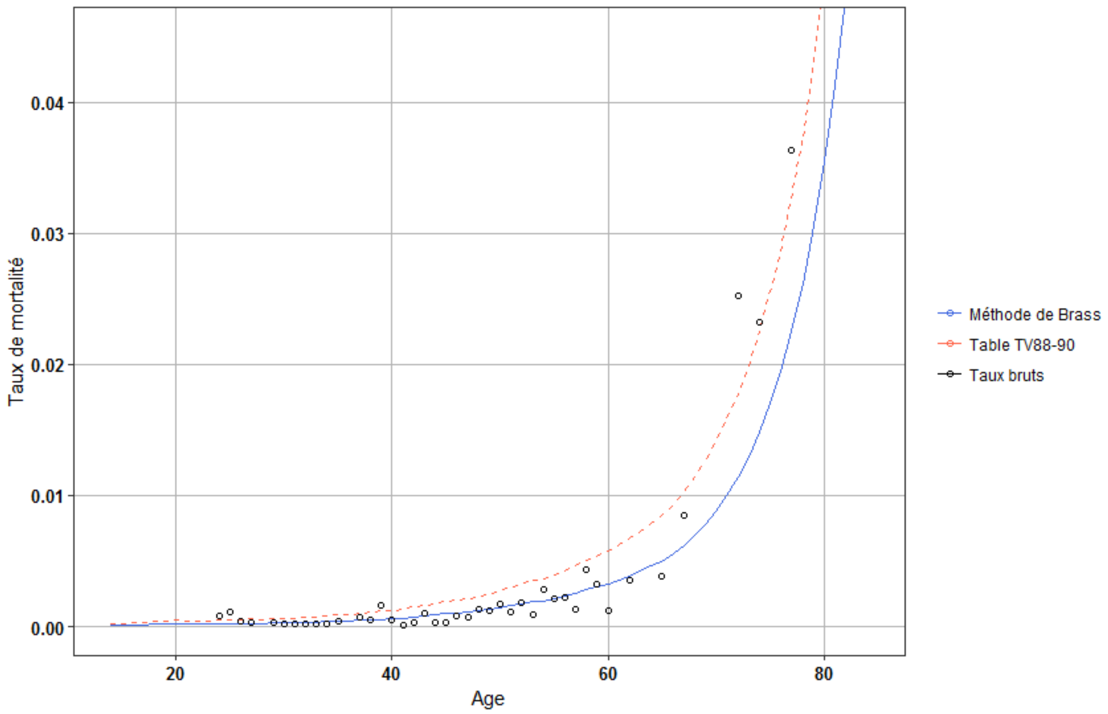


FIGURE 24 – Taux de mortalité lissés par la méthode de Brass

L'ensemble des taux estimés est inférieur à 0,5. Ainsi, les propriétés de la fonction logit nous assurent de ne pas sous-estimer le risque de longévité.

3.2.2.4 Lissage paramétrique de Makeham

La dernière approche est la méthode de lissage paramétrique à 3 paramètres. La méthode de Makeham (1960) établit un modèle à 3 paramètres reliant l'âge aux taux instantanés de mortalité par la formule suivante :

$$\mu_x = \alpha + \beta\gamma^x, \text{ avec } \alpha{>}0,\ \beta{>}0 \text{ et } \gamma{>}1.$$

Le paramètre α rend compte des décès accidentels, le paramètre $\beta\gamma^x$ reflète un processus de vieillissement faisant croître le taux de décès exponentiellement. On notera que le paramètre α est indépendant des âges.

Nous trouvons l'expression des $\hat{q}_x$ (voir démonstration en annexe B.2) :

$$\hat{q}_x = 1 - \exp(-(\hat{\alpha} + \frac{\hat{\beta}}{\ln\hat{\gamma}}\hat{\gamma}^x(\hat{\gamma} - 1))).$$

où $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont les paramètres estimés avec une approche par maximum de vraisemblance (méthode détaillée en annexe B.3).

Nous estimons les paramètres sur la **plage d'âge [46,59]** :

$$\hat{\alpha} = \mathbf{7{,}80\ E\text{-}04}\ ,$$
$$\hat{\beta} = \mathbf{2{,}44\ E\text{-}08}\ ,$$
$$\hat{\gamma} = \mathbf{1{,}22}.$$

Nous présentons les taux de mortalité obtenus grâce au lissage de Makeham :

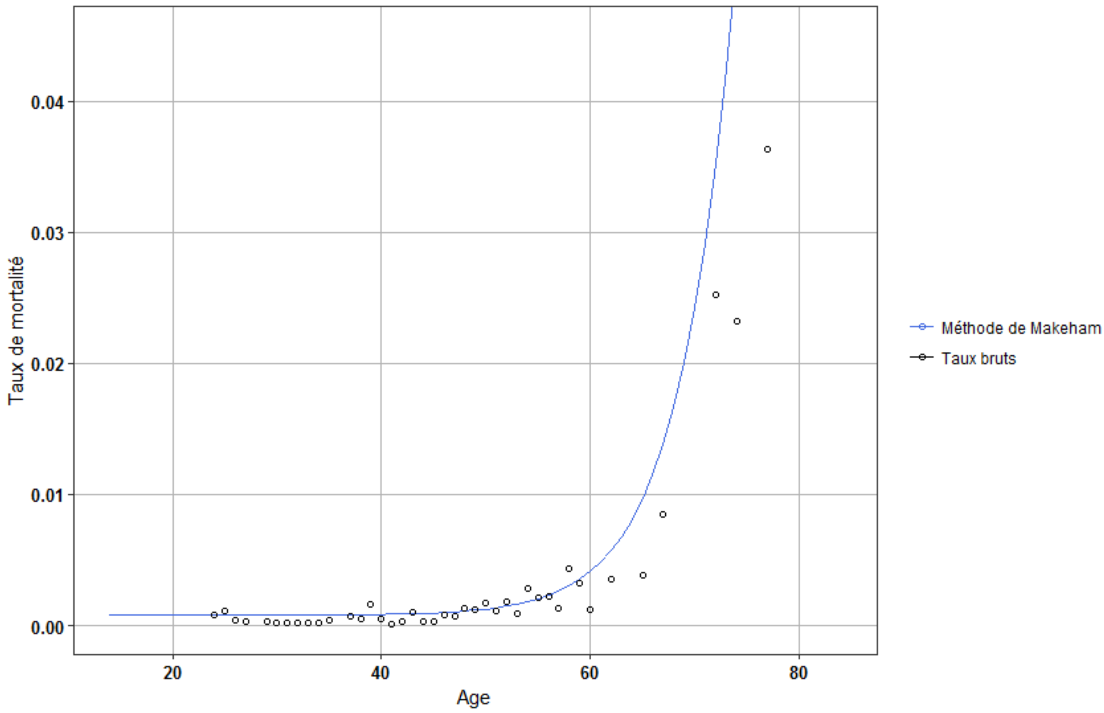


Figure 25 – Taux de mortalité lissés par la méthode de Makeham

3.2.3 Validation des ajustements

Cette partie présente les critères à la fois quantitatifs et qualitatifs envisagés pour évaluer la pertinence des approches concernant la construction de la table de mortalité d'expérience relative à notre portefeuille. Le choix entre les modèles est partiellement une question de jugement et dépend de l'objectif pour lequel la table de mortalité est construite. Nous porterons notre attention sur la régularité des ajustements et l'étude des résidus dans un premier temps, puis sur l'adéquation des ajustements par rapport aux observations.

3.2.3.1 Régularité de l'ajustement

La première étape du travail de validation concerne le contrôle de la régularité de la courbe de mortalité. Il est généralement admis que les taux de mortalité doivent avoir une croissance avec l'âge assez régulière. Il est donc souhaitable de vérifier que les estimations possèdent bien cette propriété.

Whittaker-Henderson a développé une technique de lissage des taux bruts se basant sur deux critères : la régularité et la fidélité. Dès lors, ce critère de régularité peut également constituer un test d'évaluation. Cet estimateur peut être écrit comme suit :

$$\sum_x (\hat{q}_{x+1} - \hat{q}_x)^2,$$

avec $\hat{q}_x$ les taux de mortalité estimés et où x se balade sur la plage d'âges estimée, à savoir de 15 à 85 ans. La méthode de Whittaker-Henderson rappelle qu'il y a régularité des taux lissés si cet estimateur tend vers 0. Dès lors, nous privilégions les valeurs faibles de l'estimateur.

Nous obtenons les résultats suivants :

Critère de régularité	**Coefficient SMR**	**Positionnement de Brass**	**Lissage de Makeham**
$\sum(\hat{q}_{x+1} - \hat{q}_x)^2$	1,43E-04	2,78E-04	1,09E-02

Table 5 – Indicateurs de régularité des taux lissés

Les méthodes relationnelles de Brass ainsi que l'application du coefficient SMR donnent des résultats de régularité meilleurs. Les deux méthodes prenant en référence une courbe de mortalité existante permettent d'utiliser les propriétés de la courbe de référence.

3.2.3.2 Intervalles de confiance ponctuels

Une validation classique est la comparaison entre les décès prédits par la modélisation et les décès observés âge par âge. Une première méthode de comparaison consiste en l'approximation de la loi de décès par une normale et en l'estimation d'un intervalle de confiance à 95%.

Nous supposons que la loi du nombre de décès D_x suit une loi normale tel que :

$$D_x \sim \mathcal{N}(E_x q_x, E_x q_x(1 - q_x)).$$

Dès lors, une approximation des intervalles de confiance ponctuels à 95% est

$$(E_x\hat{q}_x - z_{1-5\%/2}\sqrt{E_x\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}; E_x\hat{q}_x + z_{1-5\%/2}\sqrt{E_x\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}),$$

où $z_{1-5\%/2}$ est le quantile à $1-5\%/2$ (97,5%) de la distribution normale. Les décès observés doivent se situer à l'intérieur des intervalles de confiance théoriques sur l'ensemble de la plage d'âges estimée afin de justifier d'une représentation correcte de la réalité par la table d'expérience.

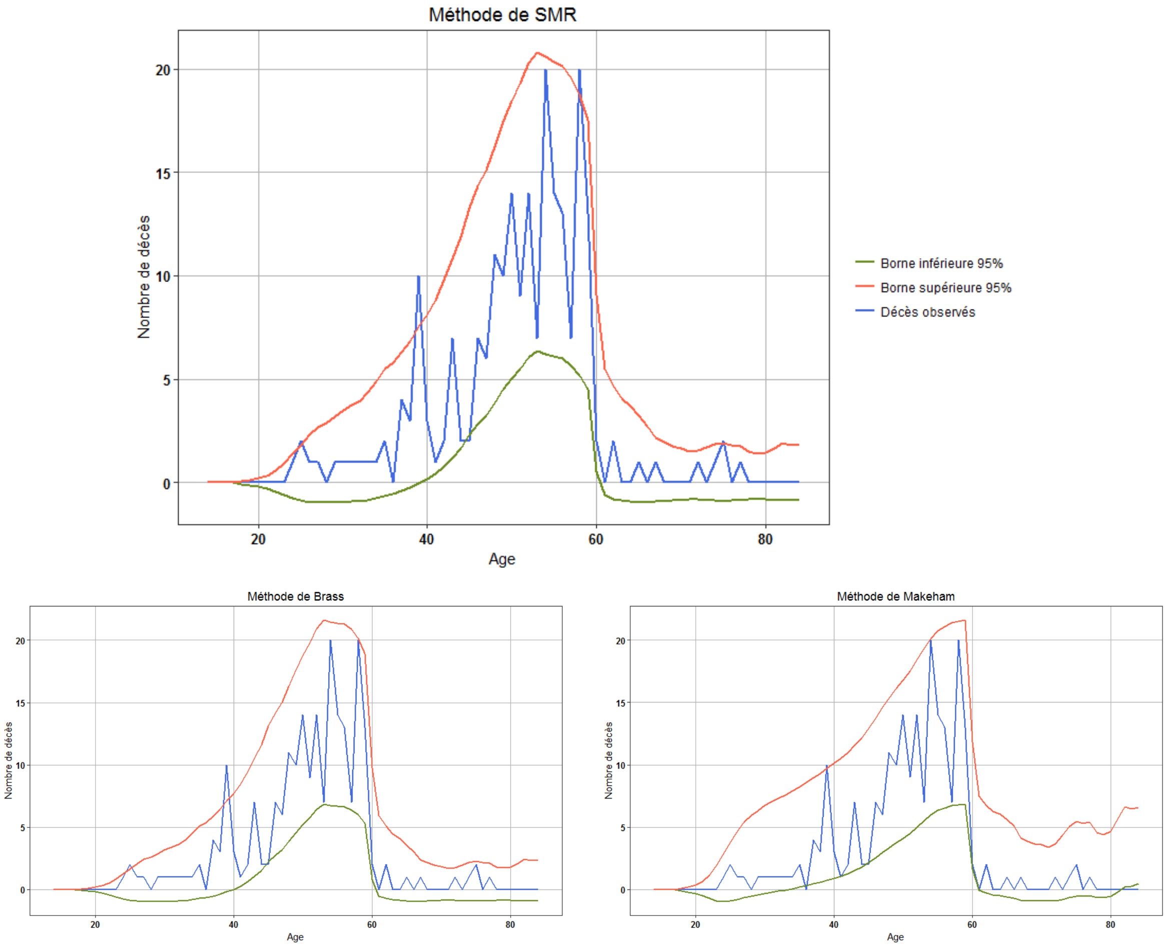


FIGURE 26 – Intervalles de confiance ponctuels sur les décès

Nous estimons pour chaque modèle le nombre de décès observés qui tombe à l'extérieur des intervalles de confiance théoriques :

- SMR : 5 décès hors de l'intervalle
- Brass : 3 décès hors de l'intervalle
- Makeham : 8 décès hors de l'intervalle

A ce titre, la méthode de Brass semble la plus adéquate bien que les écarts ne soit pas significatifs.

3.2.3.3 Étude des résidus

Nous étudions deux résidus : les résidus de la réponse et les résidus de Pearson. L'étude des résidus permet la validation du lissage au niveau local par des analyses graphiques. Il s'agit de représenter graphiquement les ajustements contre la mortalité observée pour un âge atteint. Nous notons q_x les taux bruts obtenus par l'estimateur de Kaplan-Meier, $\hat{q}_x$ les taux lissés obtenus grâce aux méthodes d'ajustement et reprenons les notations D_x et E_x définies dans les parties précédentes.

Résidus de la réponse

Les résidus de la réponse sont définis tel que :

$$r_x = q_x - \hat{q}_x.$$

Les résidus de la réponse doivent se rapprocher de 0 afin d'assurer qu'il n'y ai pas un écart trop important entre la mortalité observée et modélisée. De plus, une répartition homogène des signes positifs et négatifs des résidus de la réponse est un critère nécessaire à un bon ajustement.

Résidus de Pearson

Les résidus de Pearson sont définis tel que :

$$r_x = \frac{D_x - E_x\hat{q}_x}{\sqrt{\mathbb{V}ar[E_x\hat{q}_x]}}.$$

Aucune tendance forte ne devrait apparaître dans les résidus de Pearson. Si les résidus de Pearson sont dans l'intervalle $[-2, 2]$, cela indique que l'approche modélise correctement la variabilité des données.

Nous présentons dans les pages suivantes les résidus de la réponse et de Pearson par les trois approches envisagées :

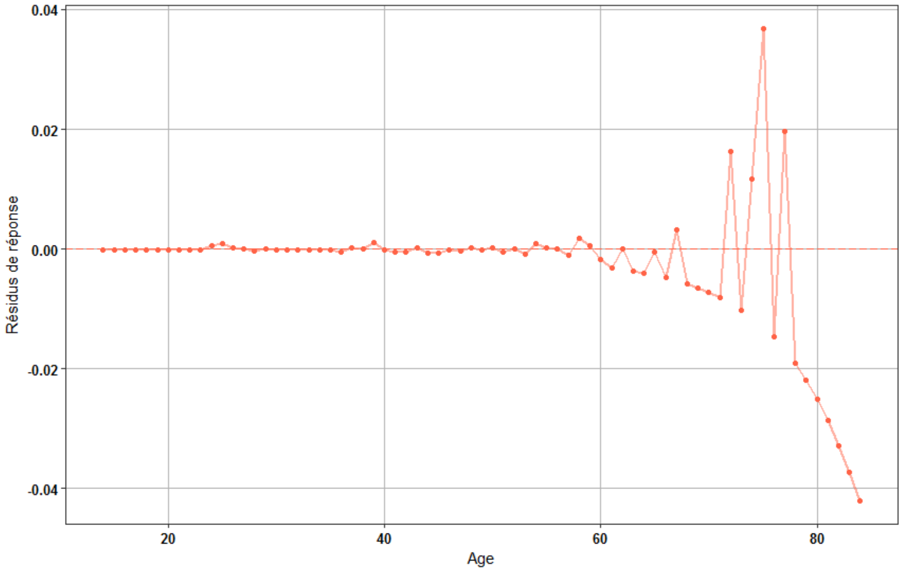


FIGURE 27 – Résidus de la réponse avec la méthode SMR

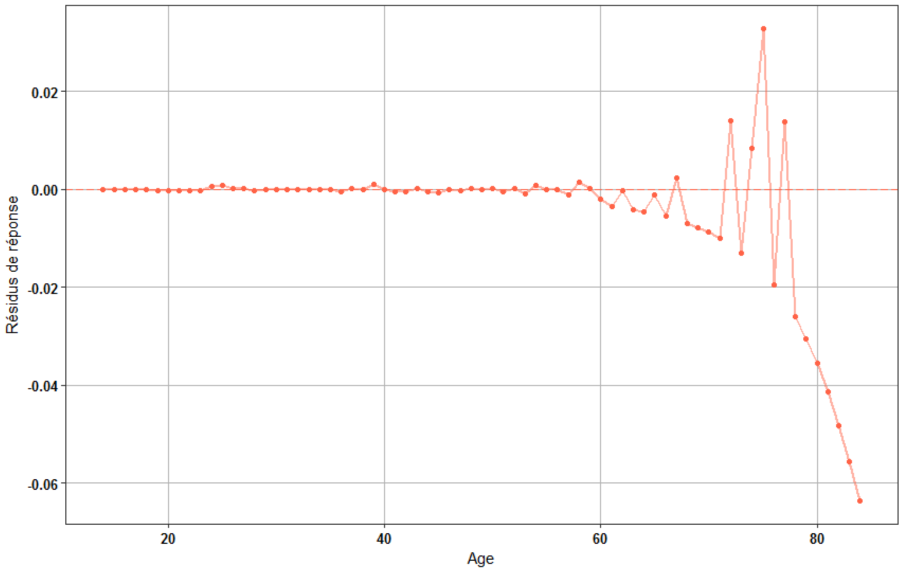


FIGURE 28 – Résidus de la réponse avec la méthode de Brass

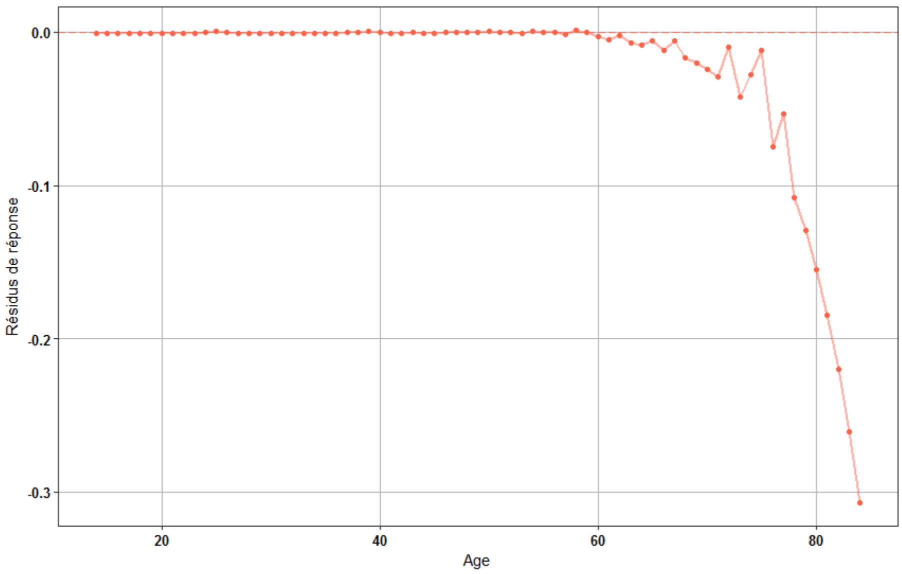


FIGURE 29 – Résidus de la réponse avec la méthode de Makeham

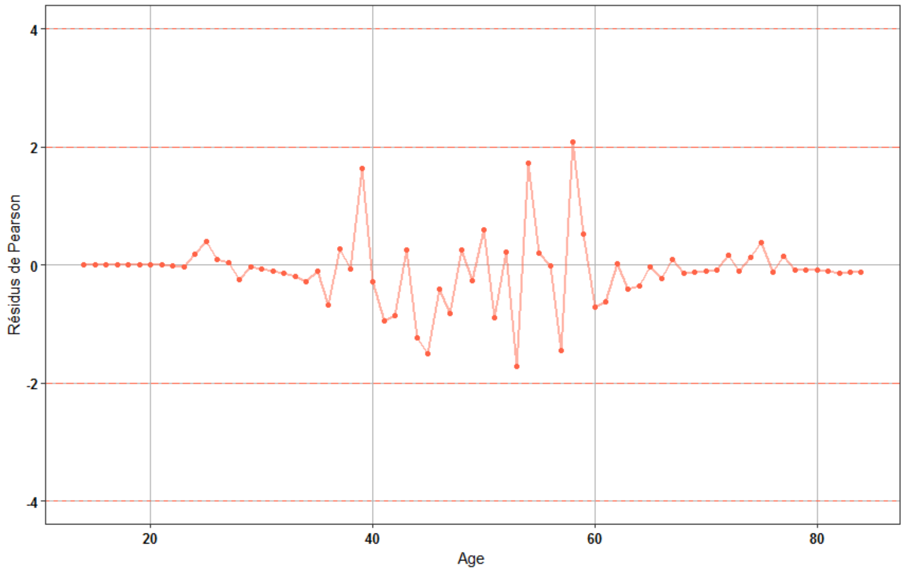


FIGURE 30 – Résidus de Pearson avec la méthode SMR

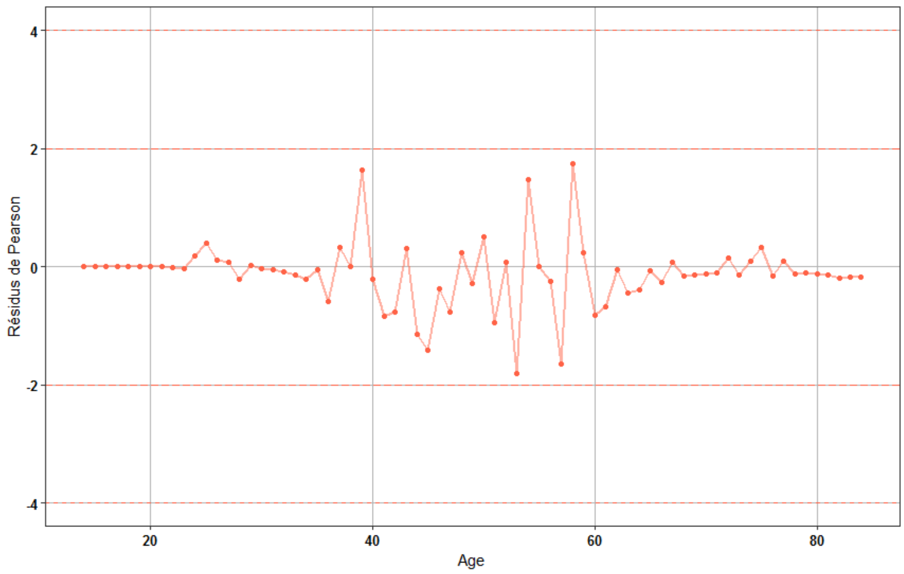


FIGURE 31 – Résidus de Pearson avec la méthode de Brass

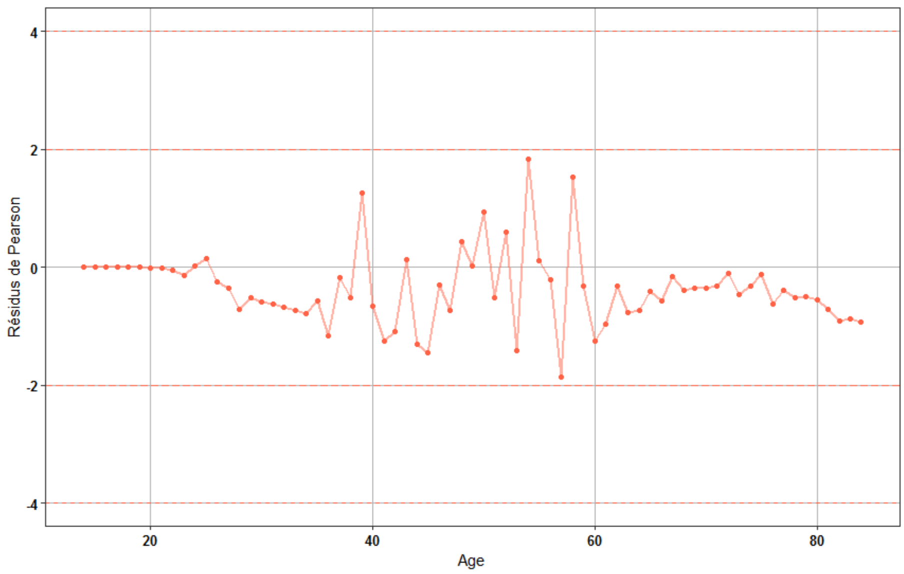


FIGURE 32 – Résidus de Pearson avec la méthode de Makeham

3.2.3.4 Écart entre l'ajustement et les observations

Nous cherchons à qualifier l'adéquation de l'approche d'ajustement aux observations de notre portefeuille. Nous disposons de plusieurs critères mesurant la distance entre l'ajustement et les observations. Ainsi, l'ajustement est évalué selon l'écart global avec la mortalité d'expérience.

Indicateur du χ_2

Le χ_2 est un indicateur qui mesure la qualité de l'ajustement du modèle. La qualité est mesurée globalement par somme des termes d'erreur. La valeur du χ_2 est définit comme :

$$\chi_2 = \sum_x \frac{(D_x - E_x\,\hat{q}_x)^2}{E_x\,\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}.$$

Nous privilégierons un modèle ayant une valeur de χ_2 la plus faible possible.

Mean Average Percentage Error

L'indicateur MAPE (Mean Average Percentage Error) mesure l'exactitude de l'ajustement par rapport aux observations. Cet indicateur correspond à la moyenne des écarts en valeur absolue par rapport aux valeurs observées. Il est définit comme :

$$MAPE = \frac{\sum_x |(D_x/E_x - \hat{q}_x)/(D_x/E_x)|}{\sum_x D_x} \times 100.$$

Il s'exprime en pourcentage et par conséquent est un indicateur pratique à des fins de comparaisons. Nous chercherons une approche avec un pourcentage d'erreur minimal.

Standardized Mortality Ratio

Le SMR (Standardized Mortality Ratio) représente le même ratio définit dans la partie 3.2.2.2 lors de la création d'une table d'expérience. L'indicateur sera calculé sur l'ensemble des âges modélisés. C'est le rapport entre le nombre de décès observés et ajustés. Il est définit comme :

$$SMR = \frac{\sum_x D_x}{\sum_x E_x\hat{q}_x}.$$

Nous chercherons un SMR le plus proche de 1 possible. Si le SMR est supérieur à 1, cela signifie que les décès ajustés sont sous-estimés par rapport aux décès observés et réciproquement si le SMR est inférieur à 1.

L'objectif est d'obtenir une courbe des taux de mortalité lissés de 15 à 85 ans. Pour les âges élevés, nous utiliserons des technique d'extrapolation aux grands âges. Ainsi, nous comparons la qualité des ajustements pour les âges concernés, c'est-à-dire de 15 à 85 ans.

Nous calculons ces trois indicateurs que nous présentons dans le tableau suivant :

Critère d'ajustement	**Coefficient SMR**	**Positionnement de Brass**	**Lissage de Makeham**
χ_2	73,92	75,19	110,56
MAPE	11,64	10,97	20,43
SMR	0,891	0,864	0,679

Table 6 – Indicateurs d'adéquation des ajustements avec les observations

Nous remarquons que le lissage de Makeham est le moins en adéquation avec nos observations. En effet, les valeurs des indicateurs sont moins bonnes et ce pour les trois indicateurs. Cela signifie que cette approche est la moins performante pour obtenir des taux de mortalité représentatifs de nos données d'expérience.

Concernant les deux autres approches, l'application du coefficient SMR donne de meilleurs résultats si l'on regarde l'indicateur du SMR. Cette approche modélise une partie plus importante des décès d'expérience (89% pour 86% avec la méthode de Brass). Le modèle de positionnement de Brass obtient une valeur de χ_2 sensiblement inférieure à la méthode du coefficient de SMR. Le pourcentage d'erreur est plus faible avec la méthode de Brass. Cela signifie que la qualité d'ajustement est meilleure en utilisant le modèle de Brass qu'en appliquant un coefficient de réduction.

Après avoir étudié la régularité et l'adéquation des taux de décès modélisés aux décès observés, deux modèles ressortent. Ce sont ceux par méthode de positionnement. Nous utiliserons les taux de mortalité pour les âges [15,85] obtenus par la **méthode de positionnement de Brass** dans le reste du mémoire.

3.3 Extrapolation aux grands âges

Au-delà de 85 ans, les données manquent pour avoir une estimation fiable. Il est donc obligatoire d'avoir recours à des méthodes spécifiques d'extrapolation des données aux âges élevés. Cette partie présente trois méthodes retenues pour extrapoler les taux lissés obtenus par la méthode de Brass. Ces méthodes sont une extrapolation exponentielle, la méthode de Coale & Kisker ainsi que la méthode Denuit & Goderniaux.

3.3.1 Extrapolation exponentielle

La première approche d'extrapolation envisagée est une méthode de fermeture exponentielle. Rappelons que nous cherchons les taux de mortalité aux âges allant de 85 à 120 ans. Cette méthodologie suppose que les taux de mortalité ont la forme suivante pour tout $x \geq 85$:

$$q_x = \alpha \times \exp(\beta x).$$

Les paramètres α et β sont déterminés par deux contraintes :

- La continuité des taux de décès à l'âge $x = 85$
- L'obtention d'un taux de décès égal à 1 à l'âge $x = 120$

Nous déterminons α et β en résolvant ce système à deux équations :

$$\alpha \exp(\beta 120) = 1,$$
$$\alpha \exp(\beta 85) = \hat{q}_{85}.$$

Nous trouvons directement :

$$\beta = \frac{-\ln(\hat{q}_{85})}{120 - 85},$$
$$\alpha = \exp(-\beta 120).$$

Cette première méthode à l'avantage de la simplicité de mise en œuvre. Elle permet l'obtention rapide d'une extrapolation de la courbe des taux de décès entre les âges 85 et 120. Cette extrapolation répond aux contraintes posées, à savoir la continuité des taux ainsi qu'un taux de décès limite égal à 1 pour l'âge $x = 120$.

3.3.2 Extrapolation de Coale & Kisker (1990)

La seconde méthode est inspirée du modèle de Coale & Kisker (1990) qui postule que les forces de mortalité sont de la forme :

$$\mu_a = \mu_{65}\big(k_a(a-65)\big), \text{ pour tout } a \geq 65$$

où k_a est le taux de croissance de la mortalité à l'âge a. Les auteurs ont considéré que les k_a possédaient un pic aux alentours de 80 ans avant de décroître linéairement. Ceci les a amené à poser l'hypothèse :

$$k_a = k_{80} + s(a-80), \text{ pour tout } a \geq 80$$

Le coefficient s relatif à la pente est définit à l'aide de forces de mortalité fixées pour un âge déterminé. Pour Coale & Kisker :

$$\mu_{110} = 1.$$

Sous ces contraintes, il vient :

$$\begin{aligned}\mu_{110} &= \mu_{79} \exp\left(\sum_{a=80}^{110} k_a\right),\\ &= \mu_{79} \exp\left(\sum_{a=80}^{110} (k_{80} + s(a-80))\right).\end{aligned}$$

Dès lors, s vaut :

$$s = -\frac{\ln(\frac{\mu_{79}}{\mu_{110}}) + 31k_{80}}{465}.$$

Les forces de mortalité ajustées μ_a peuvent être calculées à l'aide de la formule pour tout $a \geq 80$:

$$\begin{aligned}\mu_a &= \mu_{79} \exp\left(\sum_{y=80}^{a} (k_{80} + s(y-80))\right),\\ &= \mu_{a-1} \exp\Big(k_{80} + s(a-80))\Big).\end{aligned}$$

Notons que les valeurs de μ_a à 80 ans et plus sont déterminées par μ_{79} et

$$k_{80} = \frac{\ln(\frac{\mu_{80}}{\mu_{65}})}{15}.$$

Modifications des hypothèses

Nous cherchons à extrapoler les taux de mortalité de 85 à 120 ans. Dans cette optique, nous appliquons le modèle de Coale & Kisker avec les hypothèses :

- $\mu_a = \mu_{65}\big(k_a(a-65)\big)$, pour tout $a \geq 65$

- $k_a = k_{85} + s(a - 85)$, pour tout $a \geq 85$
- $\mu_{105} = 1$

Nous faisons l'hypothèse des forces de mortalité constantes par morceaux pour les âges entiers.

Nous trouvons alors pour tout $a \geq 85$:

$$\begin{aligned}
q_a &= 1 - \exp(-\mu_a), \\
\mu_a &= \mu_{a-1} \exp\Big(k_{85} + s(a-85))\Big), \\
s &= -\frac{\ln(\frac{\mu_{84}}{\mu_{105}}) + 21k_{85}}{210}, \\
k_{85} &= \frac{\ln(\frac{\mu_{85}}{\mu_{65}})}{20}.
\end{aligned}$$

Cette approche par extrapolation des forces de mortalité aux grands âges est une méthode couramment mise en place afin d'estimer les taux de décès aux âges extrêmes.

3.3.3 Extrapolation de Denuit & Goderniaux (2005)

Le troisième et dernier modèle envisagé est une variante de la méthode de Denuit & Goderniaux (2005) où nous modifions l'âge limite d'extrapolation ($x_{lim} = 130$ pour Denuit & Goderniaux, $x_{lim} = 120$ dans notre modèle).

Nous travaillons directement sur les taux de mortalité. Le modèle introduit une contrainte de fermeture sur les observations relatives aux âges les plus élevés par le modèle log-quadratique en ajustant par les moindres carrés :

$$\ln q_x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \epsilon_x,$$

avec ϵ_x les erreurs indépendantes de loi normale.

Le modèle prend en compte deux contraintes de fermeture :

$$\begin{aligned}
q_{120} &= 1, \\
\frac{\partial q_x}{\partial x}\Big|_{x=120} &= 0.
\end{aligned}$$

Les contraintes imposent à la courbe une allure concave aux très grand âges et l'existence d'une tangente horizontale au point $x = 120$ ans. Les contraintes amènent à réécrire la relation des $ln\, q_x$ comme une régression linéaire :

$$\ln\, q_x = \gamma(120^2 - 240x + x^2) + \epsilon_x.$$

Le modèle est déterminé uniquement par γ.

Un lissage est nécessaire autour de l'âge $x = 85$ pour éviter toute brisure de la courbe. Nous appliquons une moyenne géométrique pour les âge allant de 80 à 90 ans.

3.3.4 Comparaison des méthodes

Nous cherchons à comparer les trois méthodes développées ci-dessus. Nous commençons par présenter les courbes issues de ces trois méthodes :

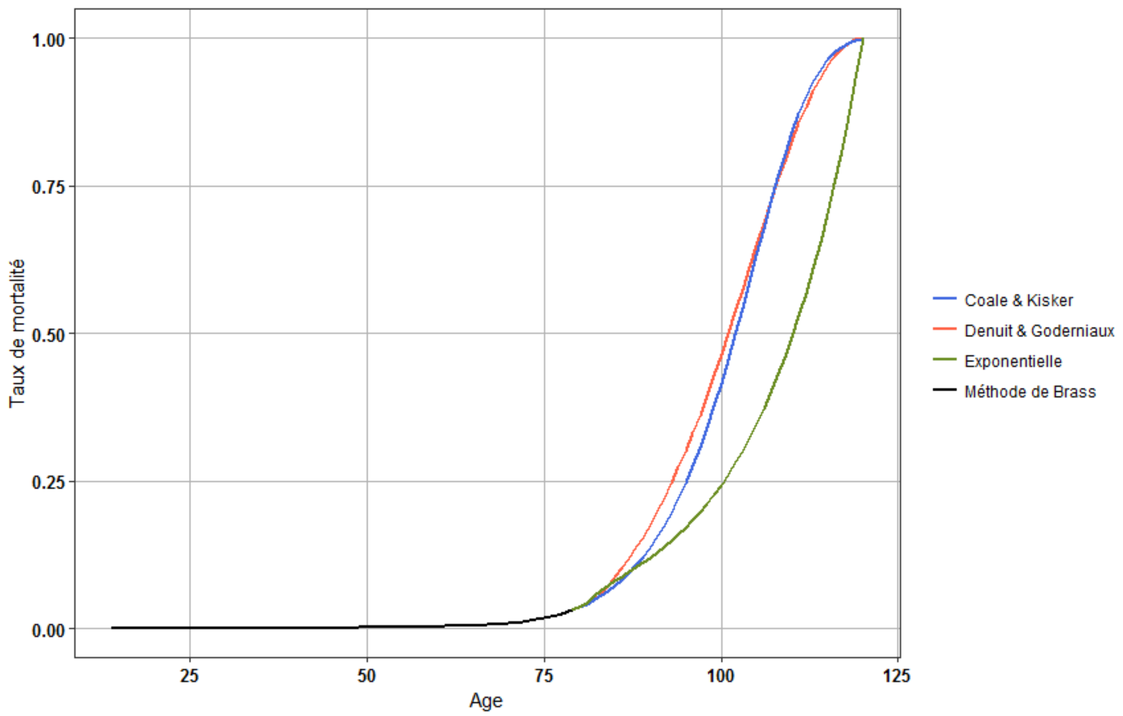


FIGURE 33 – Comparaison des méthodes d'extrapolation aux grands âges

Remarquons que les trois courbes respectent les contraintes de régularité et de croissance voulues par la courbe des taux de mortalité.

Taux de mortalité limite q_{120}

Dans un premier temps, nous nous intéressons au taux de mortalité à l'âge $x = 120$. Les méthodes d'extrapolation exponentielle et de Denuit & Goderniaux donnent $q_{120} = 1$ de part l'imposition de leurs contraintes respectives. Nous trouvons $q_{120} = 0,997 \approx 1$ avec la méthode de Coale & Kisker. Ainsi, nous ne notons aucune différence matérielle sur le taux de mortalité limite. Le comportement asymptotique aux grands âges est différent selon les approches. L'allure concave des courbes obtenues par les méthodes de Coale & Kisker et Denuit & Goderniaux sont en opposition à l'allure convexe de l'extrapolation exponentielle. La mortalité aux grands âges sera donc sous-estimée avec l'extrapolation exponentielle comparativement aux deux autres méthodes, le risque de survie sera respectivement sur-estimé.

Espérance de vie e_x

Nous comparons l'influence du choix de méthodologie de fermeture sur l'espérance de vie aux âge 80, 90, 100 et 110.

Nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

Méthodes	e_{80}	e_{90}	e_{100}	e_{110}
Exponentielle	10,21	5,40	2,70	1,03
Coale & Kisker	9,90	4,31	1,36	0,23
Denuit & Goderniaux	9,14	3,54	1,15	0,25

Table 7 – Espérance de vie par méthodes d'extrapolation

Nous retrouvons l'impact de l'allure aux grands âges. L'espérance de vie résiduelle est supérieure avec la méthode d'extrapolation exponentielle, cela provient de l'allure convexe de la courbe. Jusqu'à 100 ans, l'espérance de vie calculée avec la table issue de la méthode de Coale & Kisker est supérieure à celle obtenue avec la méthode de Denuit & Goderniaux. Ce phénomène s'inverse à partir de 105 ans lorsque les courbes issues de ces deux méthodes s'interceptent.

Nous savons qu'au delà de 60 ans, l'unique risque porté par notre produit est le risque de longévité. En effet, le seul engagement est celui des rentes viagères servies aux adhérents en phase de service. Ainsi, l'estimation de nos engagements sera plus importante si les espérance de vie à partir de 60 ans sont élevées.

Nous continuerons notre étude avec les taux de décès obtenus à l'aide des trois méthodes afin d'analyser l'impact de la méthode de fermeture sur l'estimation de nos engagements.

3.4 Passage d'une table périodique à une table générationnelle

Nous avons à travers différentes méthodes créé des tables d'expérience périodiques. Lors de l'étude de garanties telles que les rentes viagères, l'utilisation de tables générationnelles est recommandée. Il est admis que l'espérance de vie à la naissance augmente au fil des générations. Ainsi, la prise en compte de la dérive de l'espérance de vie est primordiale dans l'évaluation des engagements. En raison d'une volumétrie trop faible de nos données, nous établirons une table d'expérience générationnelle à l'aide de nos tables périodiques et de données exogènes.

3.4.1 Étude d'espérance de vie de l'OMS

L'organisation Mondiale de la Santé (OMS) publie chaque année les statistiques sanitaires mondiales constituant une solide source d'informations sur la santé publique mondiale. Les données sont collectées auprès des 194 États Membres de l'Organisation, dont le Maroc.

Nous utilisons les données relatives à l'espérance de vie au Maroc issues de cette étude. Elles contiennent l'espérance de vie pour les âges allant de 0 à 100 ans pour les années 2000 à 2015. Notre analyse porte sur les espérances de vie au delà de 60 ans. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, à partir de cet âge, le seul risque porté par le produit est le risque de longévité.

Nous représentons les espérances de vie au Maroc issues des données de l'OMS aux âges 60, 70, 80 et 90 ans de 2000 à 2015 :

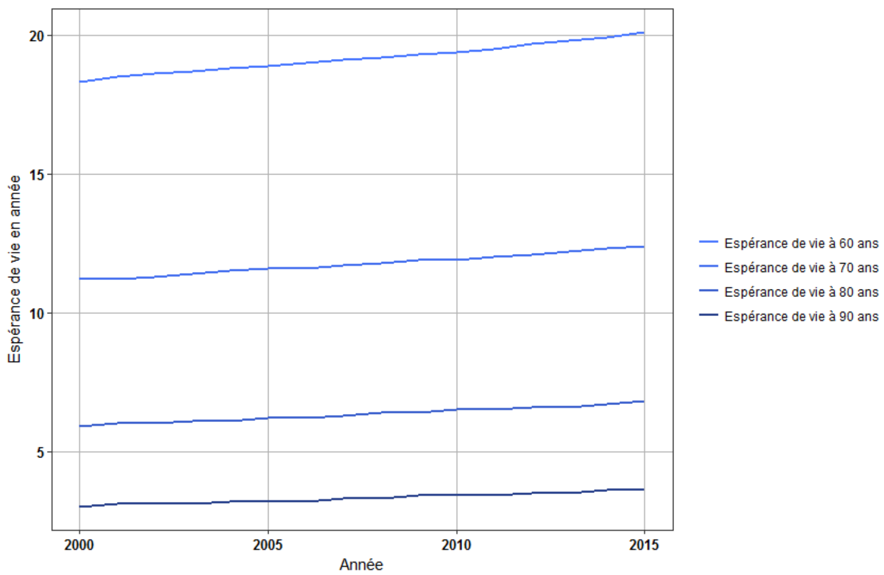


FIGURE 34 – Dérive de l'espérance de vie au Maroc de 2000 à 2015

Nous remarquons une dérive à tendance linéaire des espérances de vie. Dès lors, une régression linéaire simple permet d'obtenir les coefficients directeurs des dérives d'espérance de vie.

Nous les calculons pour les âges suivants :

Age	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Coefficient	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,01

Sous l'hypothèse de linéarité, il est possible d'extrapoler l'espérance de vie de notre table d'expérience à l'aide de ces coefficients. Nous allons définir des espérances de vie théoriques calculées à l'aide de ces derniers pour implémenter un décalage d'âge par génération dans la lecture de notre table d'expérience périodique. Ainsi, nous obtiendrons une table d'expérience par génération.

3.4.2 Décalage optimal

La méthodologie mise en place pour passer d'une table périodique à une table générationnelle est un décalage d'âge dans la lecture de notre table périodique. Par exemple, lorsque nous considérons qu'un assuré d'âge x d'une génération t doit vivre plus longtemps que la table périodique, nous lisons sa probabilité de décès sur la table périodique q_{x-i} où i est le décalage relatif à la génération t. Ainsi, nous «rajeunissons» l'assuré en prenant en compte l'hypothèse de longévité.

L'enjeu est de déterminer le décalage optimal correspondant à chaque génération. Pour ce faire, nous commençons par déterminer quelle génération représente notre table d'expérience périodique. En l'absence d'information supplémentaire, nous utilisons la distribution de l'exposition sur la période d'observation. Au milieu de la période d'observation, à savoir en 2011, l'âge le plus représenté est 52 ans. Nous supposons que la table périodique représente la génération 1959. C'est une hypothèse forte qui induit un fort risque d'estimation lié à notre modèle. Cependant, il est nécessaire d'établir une hypothèse de ce type afin d'implémenter notre méthode.

Nous pouvons obtenir les espérances de vie relatives à notre table d'expérience périodique. A l'aide des coefficients linéaires calculés précédemment, il est possible de déterminer l'espérance de vie théorique pour les générations allant de 1900 à 2005. Nous noterons e_x^{th} l'espérance de vie théorique à l'âge x.

Le décalage d'âge optimal sera déterminé comme celui qui minimise l'écart entre les espérances de vie obtenues avec le décalage et les espérances de vie théoriques. Ainsi, pour une génération t, le décalage d'âge optimal i sera celui qui minimise :

$$\Delta(i) = \sum_{x \in \{60,65,...,95,100\}} (e_x^{th} - e_x^i)^2,$$

où e_x^i est l'espérance de vie à l'âge x lue sur la table d'expérience périodique avec un décalage d'âge de lecture égal à i.

Nous appliquons cette méthode aux tables de mortalité obtenues après extrapolation aux grands âges. Nous obtenons ainsi trois tables générationnelles reflétant la mortalité de notre portefeuille d'assurés.

Nous présentons la surface de mortalité obtenue par décale d'âge à partir de la courbe de mortalité extrapolée par la méthode de Denuit & Goderniaux :

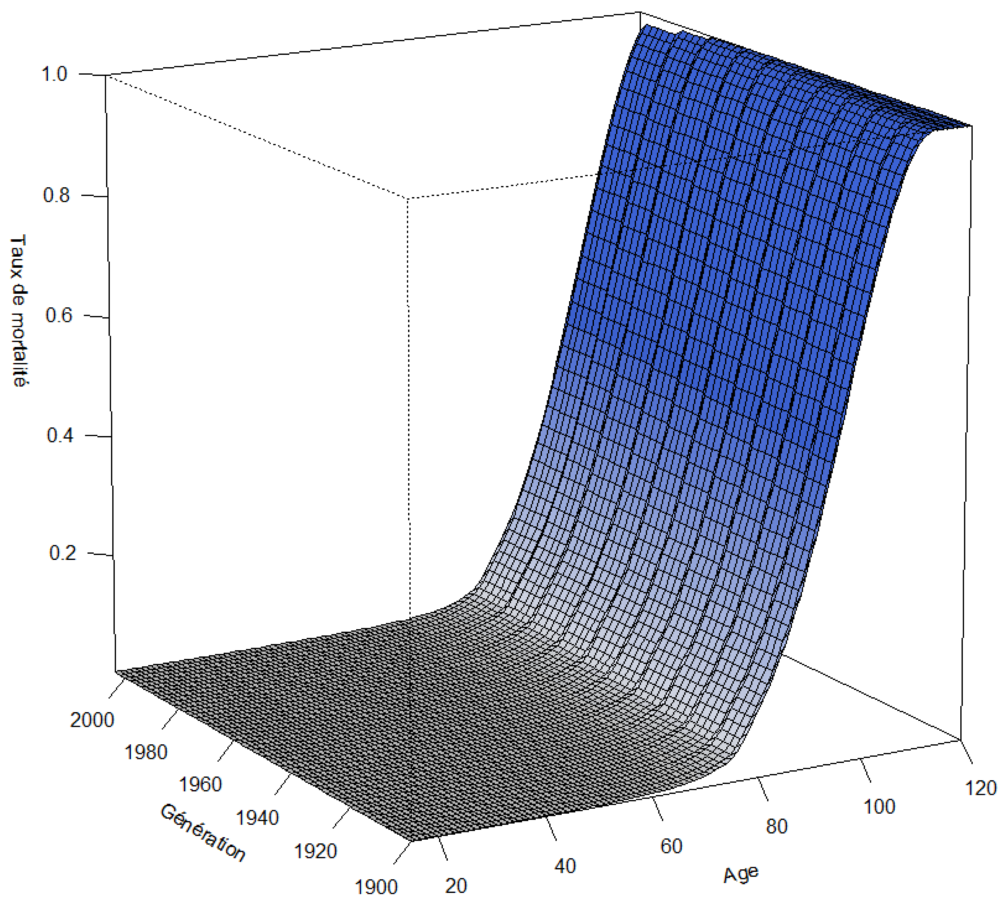


FIGURE 35 – Surface de mortalité extrapolée par l'approche de Denuit & Goderniaux

Les surfaces que nous obtenons à partir des courbes issues des autres méthodes d'extrapolation sont similaires. Nous avons ainsi trois tables de mortalité générationnelles reflétant l'expérience de notre portefeuille d'assurés. Elles sont sous la même forme que les tables TGH/TGF05 utilisées dans notre modèle de projection pour le calcul du Best Estimate.

3.5 Impact sur le Best Estimate

Rappelons que notre étude porte sur la valorisation d'un portefeuille de rentes viagères. Après avoir créé un modèle de projection pour estimer les engagements futurs, nous avons déterminer la mortalité historique de nos assurés.

Nous étudions l'impact du changement de table de mortalité dans notre modèle sur le Best Estimate. Nous projetons les engagements à l'aide de nos tables créées dans la partie 3 avec un taux d'incidence à l'option rente de 20%, et nous comparons les prestations à fournir. Nous nous intéressons aux prestations liées à l'option de sortie en rente viagère, à l'option de sortie en capital et à la contre-assurance en cas de décès avant 60 ans. Enfin, nous étudions le Best Estimate global.

Nous présentons les résultats :

Résultats en MMAD	**Prestations hors frais de gestion** Sortie en rente	Sortie en capital	Assurance décès	**Global** Best Estimate
Tables réglementaires TGH/TGF-05	149,68	226,53	1,31	441,35
Table issue de la méthode d'extrapolation **exponentielle**	138,91	266,97	0,91	429,50
Impact	-7%	0%	-30%	-3%
Table issue de la méthode de **Coale & Kisker**	141,42	266,97	0,83	432,24
Impact	-6%	0%	-36%	-2%
Table issue de la méthode de **Denuit & Goderniaux**	139,79	267,01	0,83	430,44
Impact	-7%	0%	-37%	-2%

TABLE 8 – Impact de la mortalité sur les engagements Best Estimate

L'étude des prestations liées aux différentes options permet de conclure quant à la mortalité d'expérience obtenue par les 3 méthodes. Nous remarquons que les résultats sont du même ordre pour les 3 méthodes de clôture. La mortalité d'expérience avant 60 ans est dans tous les cas inférieure à la mortalité des tables réglementaires.

En effet, les prestations de la contre-assurances décès sont inférieures à celles calculées avec les tables TGH/F05. La longévité d'expérience est globalement inférieure à la longévité des tables réglementaires au delà de 60 ans. Ceci est visible car les prestations liées aux rentes viagères sont plus faibles avec les tables d'expérience en entrée du modèle. Enfin, les prestations fournies par la sortie en capital sont stables selon les méthodologies d'expérience, ce qui est cohérent étant donné que le taux d'incidence à l'option rente est égal à 20% pour tous les scénarios.

Pour conclure cette partie, nous remarquons que le choix de la méthode d'extrapolation aux grands âges n'a que peu d'influence sur le résultat du Best Estimate. En effet, le plus grand écart entre les montants de Best Estimate est inférieur à 1%. Le choix peut alors être laissé à l'appréciation du lecteur. Il conviendrait lors d'une étude d'évaluation des engagements de garder la table la plus prudente. Dans notre cas, la table donnant le Best Estimate le plus grand est la table d'expérience donnée à l'aide de la méthode d'extrapolation de Coale & Kisker.

Chapitre 4

Calculs réglementaires

Cette partie portera sur l'évaluation des montants réglementaires définis en partie 1. Ainsi, nous calculerons le SCR par module de risque pour déterminer le SCR global relatif à notre portefeuille. Nous testerons ensuite la sensibilité du SCR au choix du scénario central. Enfin, nous calculerons la marge de risque à l'aide du SCR.

4.1 Capital économique

Nous avons défini la notion de capital économique en partie 1. Solvabilité II exige le calcul de deux montants : le MCR et le SCR. Nous allons calculer le SCR requis pour les risques portés par notre portefeuille. La méthode de delta-NAV énoncée en première partie doit être adaptée à nos hypothèses.

Nous n'avons pas modélisé la valeur de l'actif. Dès lors, les fonds propres se déduisant de la valeur de marché des actifs ne peuvent être déterminés. Dans ce cas, le SCR se calcule comme la différence entre le Best Estimate obtenu avec le scénario stressé et le Best Estimate du scénario central.

En effet, nous avons, en négligeant la marge de risque :

$NAV_c = A_c - BE_c$ et $NAV_s = A_s - BE_s$ avec c pour central et s pour stressé

En supposant l'actif nul ou constant, nous avons bien :

$NAV_c - NAV_s = BE_s - BE_c$

Nous avons déterminé le Best Estimate en scénario central à l'aide de la modélisation de la partie 2 et des hypothèses de mortalité Best Estimate évaluées en partie 3. Rappelons que sous les hypothèses de mortalité issue de la méthode d'extrapolation de Coale & Kisker avec un taux d'incidence à l'option rente de 20%, le Best Estimate est de 432,24 MMAD.

Il nous suffit maintenant de déterminer les Best Estimate en scénario stressé. Le SCR s'obtiendra par différence des deux. Nous avons expliqué en partie 1 l'approche de calcul par module de risques. En raison des hypothèses fixées sur l'actif, nous ne déterminerons pas le module de marché. Le module de contrepartie est supposé nulle car le portefeuille est constitué uniquement d'engagements envers les assurés. Quoi qu'il arrive, aucune somme d'argent ne sera reçue par l'assureur, ni des assurés, ni des réassureurs. Enfin, notre produit ne comprend aucune garantie d'assurance de santé ou d'assurance non-vie. Nous serons amenés à calculer un unique module, le module de risque de souscription en vie.

Nous déterminerons 4 composantes de ce module : le sous-module de longévité, le sous-module de mortalité, le sous-module de dépenses et le sous-module catastrophe en vie. Le sous-module de rachat est supposé nul de part l'hypothèse initiale de négliger ce phénomène. Le sous-module de revalorisation ou de révision est nul également car les rentes servies ne dépendent d'aucun indice réglementaire révisable. Enfin, le produit étudié ne contient aucune garantie sur l'invalidité ou la morbidité.

4.1.1 Module de longévité

Le module de longévité correspond au risque que représente une dérive de la longévité, c'est-à-dire une diminution des taux de mortalité. Pour notre portefeuille, ce risque est porté par les rentes viagères car la dérive de la longévité engendre une augmentation des engagements et une perte supplémentaire pour l'assureur. Ce risque est à prendre en compte uniquement s'il entraîne une augmentation des provisions techniques. Dans le cas contraire, le SCR est supposé nul.

Dans le cadre de l'application de la formule standard, l'article 138 du règlement délégué définit le «SCR de longévité» comme l'exigence de capital égale à la perte de fonds propres résultant de la baisse soudaine permanente de 20% des taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques.

Ainsi, en appliquant une baisse de 20% aux q_x de la table d'expérience issue de la méthode d'extrapolation de Coale & Kisker et en calculant le Best Estimate associé à l'aide du modèle de projection, nous obtenons le Best Estimate stressé (noté BE_s plus haut) par le choc de longévité. Le «SCR de longévité» s'obtient ensuite par différence entre ce Best Estimate stressé et le Best Estimate obtenu en scénario central.

Notre modèle donne $BE_s = 440,43$ MMAD et donc $SCR_{longevite} = 8,19$ MMAD.

4.1.2 Module de mortalité

De la même manière, le module de mortalité correspond au risque que représente une dérive de la mortalité, c'est-à-dire une augmentation des taux de mortalité. Pour notre portefeuille, ce risque est porté par la contre-assurance en cas de décès avant 60 ans. En effet, une augmentation de la mortalité entraîne une diminution des engagements liés aux rentes viagères. Comme pour le module de longévité, le SCR est supposé nul si ce risque fait baisser les provisions techniques.

Dans le cadre de l'application de la formule standard, l'article 137 du règlement délégué définit le «SCR de mortalité» comme l'exigence de capital égale à la perte de fonds propres résultant de la hausse soudaine permanente de 15% des taux de mortalité utilisés pour le calcul des provisions techniques.

Ainsi, en appliquant une hausse de 15% aux q_x de la table d'expérience issue de la méthode d'extrapolation de Coale & Kisker et en calculant le Best Estimate associé à l'aide du modèle de projection, nous obtenons le Best Estimate stressé (noté BE_s plus haut) par le choc de mortalité. Le «SCR de mortalité» s'obtient ensuite par différence entre ce Best Estimate stressé et le Best Estimate obtenu en scénario central.

Notre modèle donne $BE_s = 432,03$ MMAD et donc $SCR_{mortalite} = 0$.

4.1.3 Module de dépenses

Le module de dépenses correspond au risque que représente l'augmentation des frais engagés pour le bon déroulement des opérations d'assurance (frais de personnel, frais de maintenance informatique, frais d'indétermination, commissions, etc).

Dans le cadre de l'application de la formule standard, l'article 140 du règlement délégué définit le «SCR de dépenses» comme l'exigence de capital égale à la perte de fonds propres résultant d'une augmentation de 10% du montant des frais généraux et d'un choc d'une augmentation d'un point du taux d'inflation.

Nous ne modélisons pas l'actif, donc l'inflation n'est pas pris en compte dans notre calcul. Ainsi, nous appliquons une hausse de 10% des tarifs unitaires évoqués en partie 2.1.2.1 afin d'obtenir le Best Estimate stressé (noté BE_s plus haut) par le choc de dépenses. Le «SCR de dépenses» s'obtient ensuite par différence entre ce Best Estimate stressé et le Best Estimate obtenu en scénario central.

Notre modèle donne $BE_s = 434,54$ MMAD et donc $SCR_{depenses} = 2,30$ MMAD.

4.1.4 Module de catastrophe en vie

Le module de catastrophe en vie correspond au risque que représente les événements pouvant conduire à une mortalité extrême ou irrégulière. Il vient en complément du risque de mortalité. Comme pour le module de mortalité, le SCR est supposé nul si ce risque fait baisser les provisions techniques.

Dans le cadre de l'application de la formule standard, l'article 143 du règlement délégué définit le «SCR de catastrophe en vie» comme l'exigence de capital égale à la perte de fonds propres résultant d'une hausse soudaine de 0,15 point des taux de mortalité utilisés dans le calcul des provisions techniques afin de refléter l'évolution de la mortalité au cours des 12 mois à venir.

Ainsi, en appliquant une hausse de 0,15 point aux q_x de la table d'expérience issue de la méthode d'extrapolation de Coale & Kisker la première année uniquement et en calculant le Best Estimate associé à l'aide du modèle de projection, nous obtenons le Best Estimate stressé (noté BE_s plus haut) par le choc de catastrophe en vie. Le «SCR de catastrophe en vie» s'obtient ensuite par différence entre ce Best Estimate stressé et le Best Estimate obtenu en scénario central.

Notre modèle donne $BE_s = 394,80$ MMAD et donc $SCR_{cat} = 0$.

4.1.5 SCR Vie

Nous avons calculé les SCRs des sous-modules du risque de souscription en vie. Comme nous l'avons vu en partie 1, dans le cadre de la formule standard l'exigence de capital pour le risque de souscription en vie se calcule à l'aide d'une matrice de corrélation linéaire. Ainsi, le SCR de souscription en vie se calcule comme suit :

$$SCR_{vie} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j}$$

où la somme couvre toutes les combinaisons possibles (i, j) des sous-modules de souscription en vie, $Corr_{i,j}$ représente le coefficient de corrélation linéaire relatif au risque de souscription vie pour les sous-modules i et j et où SCR_i et SCR_j représentent les exigences de capital pour les sous-modules i et j.

Les coefficients de corrélation relatifs au risque de souscription vie sont donnés dans l'article 136 du règlement délégué. La matrice de corrélation pour les sous-modules étudiés est la suivante :

i \ j	Mortalité	Longévité	Dépenses en vie	Catastrophe en vie
Mortalité	1	-0,25	0,25	0,25
Longévité	-0,25	1	0,25	0
Dépenses en vie	0,25	0,25	1	0,25
Catastrophe en vie	0,25	0	0,25	1

Table 9 – Matrice de corrélation du module souscription en vie

Nous rappelons les résultats par sous-modules de risque :

Longévité	:	BE_s= 440,43 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{longevite}$= 8,19 MMAD
Mortalité	:	BE_s= 432,03 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{mortalite}$= 0
Dépenses en vie	:	BE_s= 434,54 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{depenses}$= 2,30 MMAD
Catastrophe en vie	:	BE_s= 394,80 MMAD	$\Rightarrow$	SCR_{cat}= 0

En appliquant la formule, nous trouvons SCR_{vie} = 8,77 MMAD. Le SCR représente 2,7% des engagements Best Estimate. En d'autres termes et en négligeant la marge de risque, immobiliser une marge de prudence égale à 2,7% du Best Estimate en addition de celui-ci permet de respecter ses engagements envers les assurés dans 99,5% des cas.

4.2 Sensibilité du SCR au scénario central

Nous avons mesuré la sensibilité de l'évaluation du Best Estimate aux paramètres de mortalité et d'incidence à l'option rente. Il est important de connaître la fiabilité du résultat. Dans le même esprit, nous allons évaluer l'impact de ces paramètres sur les valeurs de capitaux réglementaires. Dans l'univers Solvabilité II, le SCR doit être immobilisé ce qui est une contrainte importante pour l'assureur. Les hypothèses dites «Best Estimate» se doivent d'être corroborées et ces mêmes hypothèses influent sur le résultat du Best Estimate mais aussi sur la valeur du SCR.

4.2.1 Choix de la table de mortalité

Nous commençons par tester un scénario central prenant comme hypothèse de mortalité l'utilisation des tables réglementaires TGH/F05. Nous savons déjà que ces hypothèses de mortalité surestiment la valeur du Best Estimate en comparaison aux hypothèses de mortalité d'expérience.

Ainsi, nous calculons les SCRs relatifs aux quatre sous-modules du risque souscription en vie : mortalité, longévité, dépenses en vie et catastrophe en vie. Pour rappel, le Best Estimate avec la table de mortalité TGH/F05 avec un taux d'incidence à l'option rente de 20% est égal à 441,35 MMAD.

Nous obtenons les résultats suivants :

Longévité	:	BE_s= 448,67 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{longevite}$= 7,31 MMAD
Mortalité	:	BE_s= 440,78 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{mortalite}$= 0
Dépenses en vie	:	BE_s= 443,76 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{depenses}$= 2,38 MMAD
Catastrophe en vie	:	BE_s= 404,22 MMAD	$\Rightarrow$	SCR_{cat}= 0

En appliquant la formule d'agrégation nous obtenons SCR_{vie} = 7,97 MMAD. Il représente 1,8% du Best Estimate. Ainsi, bien que le Best Estimate soit supérieur à celui de notre scénario central, le SCR de souscription vie est moins important en valeur et en poids du Best Estimate. Ce phénomène provient du $SCR_{longevite}$ qui est supérieur avec notre table d'expérience. Un choc appliqué à notre table extrapolée par la méthode de Coale & Kisker a plus d'influence que le choc appliqué aux tables réglementaires TGH/F05.

En prenant cette table en scénario central, nous considérerions que les engagements sont supérieurs à ceux estimés à l'aide des tables d'expérience obtenues à l'aide de la mortalité de notre portefeuille. Cependant, le capital réglementaire à immobiliser dans le cadre de Solvabilité II serait inférieur.

4.2.2 Choix du taux d'incidence à l'option rente

De manière analogue, nous testons un scénario central avec un taux d'incidence différent. Nous avons vu dans la partie 2 qu'une augmentation du taux d'incidence se répercute par une augmentation du Best Estimate. Nous considérons ainsi que le risque porte sur une augmentation du taux d'incidence.

En conséquence, nous calculons les SCRs relatifs aux quatre sous-modules du risque souscription en vie avec un taux d'incidence à 25%. Nous commençons par calculer le Best Estimate avec un taux à 25% avec la table d'expérience de la méthode Coale & Kisker. Nous obtenons un Best Estimate égal à 440,16 MMAD. Nous calculons ensuite les scénarios stressés.

Nous obtenons les résultats suivants :

Longévité	:	BE_s= 449,15 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{longevite}$= 8,99 MMAD
Mortalité	:	BE_s= 440,13 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{mortalite}$= 0
Dépenses en vie	:	BE_s= 442,80 MMAD	$\Rightarrow$	$SCR_{depenses}$= 2,64 MMAD
Catastrophe en vie	:	BE_s= 402,82 MMAD	$\Rightarrow$	SCR_{cat}= 0

En appliquant la formule d'agrégation nous obtenons SCR_{vie} = 9,68 MMAD. Il représente 2,1% du Best Estimate.Il est évidemment plus important que le SCR calculé au taux d'incidence de 20% car le risque est porté par les rentes viagères. Ainsi, un choc de longévité a d'autant plus d'influence que le taux d'incidence à l'option rente est grand.

Le choix de ces hypothèses en scénario central serait celui qui maximise le Best Estimate et le SCR. Le SCR n'est pour autant pas celui qui correspond au plus gros pourcentage de Best Estimate.

4.3 Marge de risque

La marge de risque a été définie en partie 1. Elle représente le complément financier que demanderait un organisme d'assurance agrégé pour reprendre les engagements du portefeuille.

La directive Solvabilité II l'exprime comme le coût d'immobilisation du capital réglementaire jusqu'à l'extinction du portefeuille. Ainsi, son calcul nécessite l'obtention du SCR à la date de valorisation comme nous venons de le calculer, mais aussi les SCRs futurs représentant la valeur du SCR à une date postérieure à la date de valorisation. Le marge pour risque (Risk Margin) est alors définie comme suit :

$$RM = CoC \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SCR_k}{(1+i_k)^k},$$

où SCR_k est le SCR de l'année k, CoC (Cost-of-Capital) le taux annuel de coût de capital et i_k le taux d'actualisation de l'année k issue de la courbe des taux sans risque pertinente.

Il existe plusieurs simplifications permettant la détermination de ces SCRs futurs, nous parlons de simplification de différents niveaux de hiérarchie. L'EIOPA (Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles) conseille plusieurs méthodes classifiées selon la hiérarchie suivante :

1. Le calcul exact des SCRs

2. L'approximation de tout ou partie des modules de risques ou des sous modules élémentaires.

3. L'approximation du SCR global pour chaque année future i-e en utilisant une approche proportionnelle.

4. L'estimation des SCRs futurs en «une fois» i-e en utilisant une approximation basée sur une approche de duration.

5. Approximer la marge de risque par un pourçentage de la meilleure estimation.

Cette hiérarchie de simplifications est classée par niveau de difficulté de mise en place décroissant. Nous utiliserons la simplification à approche proportionnelle dans ce mémoire.

Comme son nom l'indique, cette méthode repose sur l'hypothèse de proportionnalité entre le SCR en t et le Best Estimate en t. Ils sont reliés comme suit :

$$SCR(t) = \frac{SCR(0)}{BE(0)} BE(t).$$

L'utilisation de cette méthode nécessite le respect de plusieurs hypothèses de constance du profil de l'assureur au cours du temps.

- La composition des modules élémentaires des modules de souscription reste identique au cours du temps.

- La qualité de crédit des réassureurs et des véhicules de transfert de risques restent identiques au cours du temps. (Risque de contrepartie)

- Le risque de marché inévitable lié à la meilleure estimation est constant au cours du temps. (Risque de marché)

- Les quotes part des réassureurs et des véhicules de transfert de risques n'évolue pas au cours du temps.

- La capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques reste constante. (Ajustement)

L'ensemble de ces hypothèses sont respectées de par les simplifications faites lors du calcul du SCR. En effet, nous ne prenons pas en considérions les risques liés au module de souscription vie hors réassurance. L'unique hypothèse à respecter est la première, elle l'est.

Ainsi, l'unique détermination des Best Estimate aux différentes date $t \geq 0$ permet la détermination des SCRs futurs et de fait le calcul de la marge de risque. Nous avons déterminé grâce à notre modèle de projection l'ensemble des flux futurs relatifs aux engagements de notre portefeuille. Le calcul du Best Estimate à la date 0 consiste simplement en l'actualisation de ces flux à partir des taux issus de la courbe des zéro coupons. Pour calculer le Best Estimate à une date différente, il faut actualiser les flux correspondant à partir des taux issus de la courbe des taux forward.

La courbe des taux forward est en fait une prévision aujourd'hui des taux à une date future. Son principe est le suivant : supposons qu'on place une unité monétaire à la date d'aujourd'hui pendant y années au taux d'intérêt sans risque de base d'échéance y, r_y. Ce placement va rapporter $(1+r_y)^y$. Supposons que par ailleurs on place une unité monétaire dans les mêmes conditions pendant x années puis qu'on les replace pendant $y-x$ années à la date x, en principe, vu de la date d'aujourd'hui tout se passe comme si cette unité monétaire avait été placée y années. La question est donc, quel est le taux auquel ont été replacés les $(1+r_x)^x$ pour obtenir $(1+r_y)^y$ $y-x$ années plus tard. Il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$(1+r_y)^y = (1+r_x)^x.(1+F(0,x,y-x))^{y-x},$$

qui a pour solution :

$$F(0,x,y-x) = \left(\frac{(1+r_y)^y}{(1+r_x)^x}\right)^{\frac{1}{y-x}} - 1,$$

avec $F(0,x,y-x)$: Le taux forward déterminé à la date 0, démarrant en x et d'échéance y.

Nous obtenons à l'aide de cette formule une courbe des taux d'actualisation pour chaque année de projection. Nous pouvons déterminer les Best Estimate à chaque date. Nous traçons l'évolution des Best Estimate jusqu'à l'extinction du portefeuille :

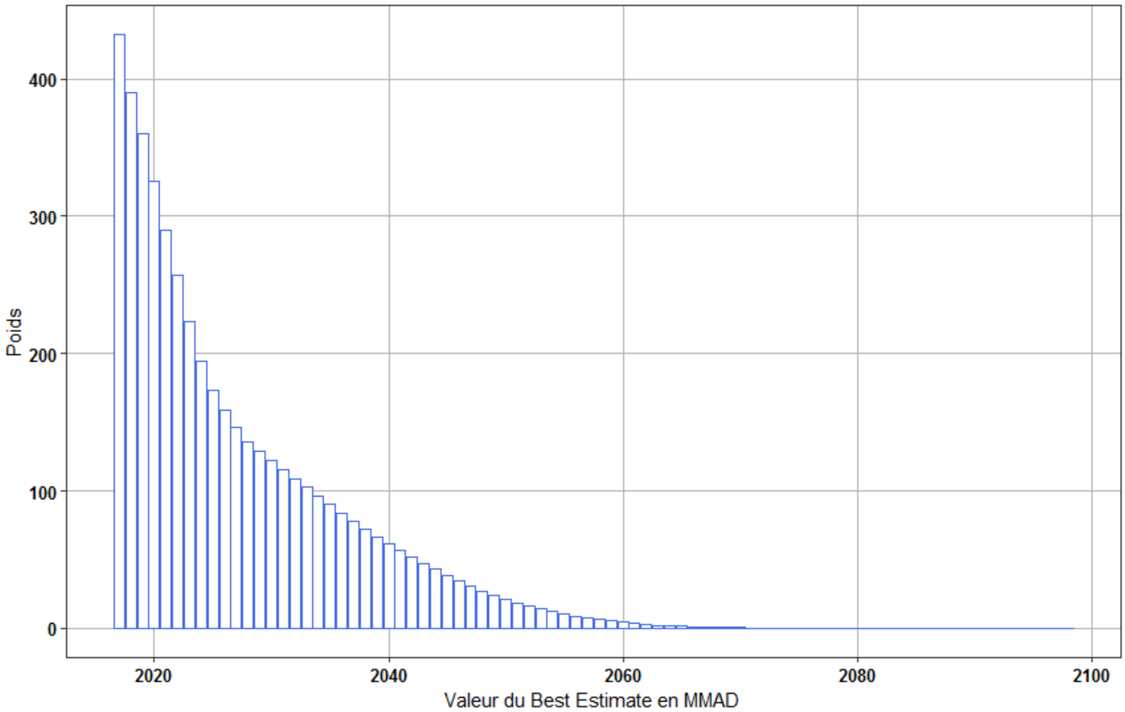


FIGURE 36 – Best Estimate futurs

Nous déterminons les SCRs futurs en appliquant la simplification à approche proportionnelle. En supposant, comme il est préconisé dans le réglementent délégué, un coût d'immobilisation du capital fixé à 6%, nous obtenons le coût de portage de tout ces SCRs futurs. En les actualisant et le sommant, nous obtenons la marge de risque. Nous obtenons :

$$RM = 4,15 \text{ MMAD}$$

Pour conclure ce dernier chapitre, nous avons déterminé à l'aide d'une méthode préconisé par l'EIOPA la marge de risque. Ce montant représente le complément à ajouter au Best Estimate pour trouver sa valeur de transfert. En d'autre terme, les engagements de notre portefeuille représente 432,24 MMAD jusqu'à son extinction. Sa valeur de transfert se trouve en y ajoutant la marge de risque. Un organisme d'assurance serait alors prêt à reprendre l'ensemble des engagements contre 436,39 MMAD, représentant l'argent nécessaire pour respecter les engagements de portefeuille et le coût pour d'immobilisation du capital réglementaire relatif à ces risques.

Conclusion

Ce mémoire a permis l'élaboration d'un modèle de projection stochastique des engagements afin de valoriser la valeur de transfert d'un portefeuille d'assurance. Dans l'univers Solvabilité II, cette valeur renvoie aux provisions techniques Best Estimate ainsi qu'à la marge de risque comme capital complémentaire dans l'optique de céder les engagements. Nous avons appliqué ce modèle à un portefeuille de retraite complémentaire appartenant à La Marocaine Vie, filiale marocaine de Sogecap.

Au-delà des techniques de projection pures dont le processus de Bernoulli est l'exemple parfait, l'étude porte davantage sur l'adéquation des hypothèses de projection au profil du portefeuille. C'est à cette unique condition que nous parlons de valorisation Best Estimate. Le produit d'assurance étudié a la particularité de laisser aux adhérents la forme de sortie des prestations acquises à l'âge de la retraite, sous la forme d'un capital unique ou sous la forme d'une rente viagère.

La modélisation du comportement des assurés est un enjeu majeur dans le choix des hypothèses de projection. En l'absence d'un historique suffisant pouvant permettre la création d'un modèle prédictif performant, nous avons déterminé un taux d'incidence constant à l'option de sortie en rente. Cette hypothèse a fait l'objet d'études de sensibilités pour connaître son impact direct sur la valorisation des engagements. Nous avons conclu que le risque portait sur les rentes : plus le taux d'incidence à l'option rente est fort, plus les prestations seront importantes.

Dès lors que la mortalité ou la longévité des assurés influence le portefeuille d'étude, le choix des tables de mortalité à utiliser est crucial. Les populations française et marocaine étant différentes quant à leur comportement face aux risques biométriques, nous avons créé une table périodique reflétant l'expérience de mortalité des assurés marocains. L'étude de rentes viagères encourage l'utilisation de tables de mortalité générationnelle afin de capter la dérive d'espérance de vie. La mise en place d'un décalage d'âge optimal nous a permis d'obtenir une table générationnelle d'expérience.

Les études d'hypothèses permettent de conclure sur le caractère Best Estimate de celles-ci. Sous ces hypothèses, le modèle projette les flux futurs de la manière la plus juste possible. Ainsi, le résultat peut être considérer comme la meilleure estimation des engagements futurs. Nous parlons de provisions techniques Best Estimate.

Nous avons terminé par calculer le capital réglementaire à immobiliser pour porter les risques inhérents à notre portefeuille. Ce calcul est nécessaire à l'obtention de la valeur de la marge de risque. Elle représente le complément à ajouter au Best Estimate pour obtenir sa valeur de transfert.

Au-delà de cette étude approfondie sur l'estimation du passif d'assurance, nous aurions pu développer dans le cadre de ce mémoire une modélisation stochastique de l'actif. Une étude de l'adéquation actif/passif permet d'assurer la capacité de paiement des prestations évaluées avec notre modèle de projection. De plus, pour les produits comprenant une revalorisation ou une participation aux bénéfices, le comportement de l'actif impacte directement le Best Estimate. Enfin, rappelons que dans le calcul du SCR_{global} des compagnies d'assurance-vie, le module de marché est celui qui a le plus d'impact.

Bibliographie

[1] Delwarde A. & Denuit M., *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*, Economica, 2006

[2] Quashie A. & Denuit M., *Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges*, 13 février 2005

[3] Tomas J. & Planchet F., *Construction et validation des références de mortalité de place*, ISFA - Laboratoire SAF, Note de travail II1291-11 v1.4, 2014

[4] Tomas J. & Planchet F., *Critères de validation : aspects méthodologiques*, ISFA - Laboratoire SAF, Note de travail II1291-14 v1.4, 2014

[5] Institut des Actuaires (IA), *Lignes directrices mortalité de la Commission d'Agrément, version approuvée et insérée en tant que recommandation dans les règles professionnelles de l'Institut par le Conseil d'Administration du 20 juin 2006*

[6] Institut des Actuaires (IA),*Groupe de travail « Best Estimate Liabilities Vie »* , 23 mai 2016

[7] CNP Assurance, *Retour d'expérience : tables mortalité vs longévité « best estimate » de place*, 5 décembre 2014

[8] AXA GRM Life, *Risques biométriques en assurance vie & santé - Longévité*, Cours ISUP, 2016/2017

[9] Appert-Raullin Y., *Entreprise Risk Management*, Cours ISUP, 2016/2017

[10] Lopez O., *Modèles de durée*, Cours ISUP, 2016/2017

[11] Caritat, *Solvabilité 2 : pratique du bilan, SCR, MCR et provisions*, Formation, 30 novembre et 2 décembre 2016

[12] European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA), *Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment (Part I)*, 28 January 2013

[13] Directive niveau 1, *directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)*, 17 décembre 2009

[14] Mesure de niveau 2, *Règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)*, 17 janvier 2015

Annexes

A Estimateur de Hoem

A.1 Notations

p_x est la probabilité de survie à l'âge x.

μ_x est la force de mortalité à l'âge x.

E_x est l'exposition au risque décès à l'âge x.

d_i est la réalisation de la variable aléatoire de décès de l'assuré i.

A.2 Construction par maximum de vraisemblance

Pour chaque assuré i exposé au risque à l'âge x, nous déterminons :

— l'intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$ contenu dans $[x, x+1]$ où l'assuré est obersvé
— $x + \alpha_i$ âge au début de l'observation sur $[x, x+1]$
— $x + \beta_i$ âge au début de l'observation sur $[x, x+1]$

Par définition, nous avons $0 \leq \alpha_i < \beta_i \leq 1$.

La grandeur $\beta_i - \alpha_i$ est l'exposition au risque de l'assuré d'âge x.

Ainsi, l'exposition au risque s'estime de la façon suivante : $E_x = \sum\limits_i \beta_i - \alpha_i$.

La fonction de vraisemblance est $L = \prod\limits_i {}_{\beta_i - \alpha_i}p_{x_i+\alpha_i}(\mu_{x+\alpha_i})^{d_i}$.

La log-vraisemblance s'écrit donc $ln(L) = \sum\limits_i ln({}_{\beta_i-\alpha_i}p_{x_i+\alpha_i}) + d_i ln(\mu_{x+\alpha_i})$.

En effectuant l'hypothèse de **force de mortalité constante** nous obtenons :

$$ln(L) = \sum_i -(\beta_i - \alpha_i)\mu_x + d_i ln(\mu_x).$$

Le maximum est atteint lorsque la dérivé est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu_x} ln(L) = \sum_i -(\beta_i - \alpha_i) + \frac{d_i}{\mu_x} = 0.$$

Nous obtenons donc $\mu_x = \frac{\sum_i d_i}{\sum_i (\beta_i - \alpha_i)}$ et par l'hypothèse de **force de mortalité constante** nous obtenons :

$$q_x = 1 - exp\left(\frac{\sum_i d_i}{\sum_i (\beta_i - \alpha_i)} \right).$$

B Lissage paramétrique de Makeham

B.1 Notations

p_x est la probabilité de survie à l'âge x.

q_x est la probabilité de décès à l'âge x.

μ_x est la force de mortalité à l'âge x.

d_i est la réalisation de la variable aléatoire de décès de l'assuré i.

B.2 Détermination des taux de mortalité

La méthode de Makeham est une méthode de lissage paramétrique qui établit un modèle à 3 paramètres reliant l'âge et les taux instantanés de mortalité par la formule suivante :

$$\mu_x = \alpha + \beta\gamma^x, \text{ avec } \alpha{>}0,\ \beta{>}0 \text{ et } \gamma{>}1.$$

Par définition :

$$\begin{aligned}
q_x &= 1 - p_x,\\
&= 1 - exp\Big(- \int_x^{x+1} \mu_s \mathrm{d}s\Big),\\
&= 1 - exp\Big(- \int_x^{x+1} \alpha + \beta\gamma^s \mathrm{d}s\Big),\\
&= 1 - exp\Big(- \Big[\alpha s + \frac{\beta}{ln\gamma} exp(s\, ln\gamma)\Big]_x^{x+1}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - exp\Big(- \Big(\alpha(x+1) + \frac{\beta}{ln\gamma}\gamma^{x+1} - \alpha\, x - \frac{\beta}{ln\gamma}\gamma^x)\Big)\Big),\\
&= 1 - exp\Big(- \Big(\alpha + \frac{\beta}{ln\gamma}\gamma^x(\gamma - 1)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

B.3 Estimation par maximum de vraisemblance

Pour chaque assuré i, nous avons :

x_i âge de l'assuré au début de la période d'observation

t_i durée d'observation de l'assuré

$x_i + t_i$ âge à la fin de la période d'observation

$d_i = 0$ si décès survenu pendant la période d'étude

$d_i = 1$ si l'assuré est en vie à la fin de la période d'observation

La vraisemblance s'écrit $L = \prod_i ({}_{t_i}p_{x_i}(\mu_{x_i+t_i})^{d_i})$.

La log-vraisemblance est égal à $ln(L) = \sum_i ln({}_{t_i}p_{x_i}) + d_i ln(\mu_{x_i+t_i})$.

Il suffit alors de trouver α, β et γ qui maximisent :

$$- \sum_i \Big(t_i\alpha + \frac{\beta}{ln\gamma}(\gamma^{x_i+t_i} - \gamma^{x_i})\Big) + \sum_i d_i ln(\alpha + \beta\gamma^{x_i+t_i}).$$