

Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 06/11/2017

Par : **Antoine Chancel**

Titre : **Impact des modèles de taux sur les évaluations
Solvabilité 2 en assurance vie**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Nicolas BARADEL

Entreprise : Forsides

Nom : Guillaume Gerber

Signature :

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

Matthieu CHAUVIGNY

Xavier SERVEL

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Guillaume Gerber

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Bibliothèque :

Signature du candidat

Résumé

Mots clés : assurance vie, Solvabilité 2, GSE, taux, HW, G2++, LMM, DD-LMM, finance quantitative, C#

Par son adoption en 2009, la réglementation Solvabilité 2 apporte un regard nouveau sur la compréhension des risques chez les assureurs et réassureurs. La rapidité de sa mise en place a entraîné des choix de modélisation en finance et en assurance parfois incertains. Cette constatation entre en contradiction avec le but primaire d'une évaluation juste et unique de la valeur économique des promesses d'un assureur. En parallèle de ce changement, l'apparition des taux négatifs a enrayé le fonctionnement de certains modèles de taux financiers utilisés par les assureurs. Ce nouveau paradigme économique amène donc les assureurs à repenser les choix liés à la modélisation des taux d'intérêt.

Ce mémoire vise à présenter l'implémentation d'un générateur de scénarios économiques risque-neutre et à apporter une analyse quantitative de l'impact de la modélisation des taux dans le contexte de taux bas sur les indicateurs économiques Solvabilité 2 en assurance vie. Pour couvrir au mieux la situation de l'assurance vie en France, trois portefeuilles synthétiques sont fabriqués : un portefeuille de contrats en euro, un portefeuille retraite et un portefeuille de contrats en euro-croissance. Pour chaque type d'assureur, des indicateurs de solvabilité sont calculés pour différentes tables de scénarios économiques risque-neutre. Pour répondre à la problématique, les variables étudiées sont les suivantes : le modèle de taux d'intérêt, le paramètre *shift* du modèle de taux *Diffusion-Displaced LMM* (DD-LMM), le taux long *Ultimate Forward Rate* (UFR), l'ajustement de volatilité *Volatility Adjustment* (VA).

Le Générateur de Scénarios Économiques (GSE) est codé en C#. La conception de son architecture et son implémentation ont constitué une part importante du travail nécessaire à la réalisation de ce mémoire. Le GSE produit des scénarios économiques dont le pas de temps est annuel ou discret dans un format compatible avec le moteur *Asset Liability Management* (ALM) existant. La classe des modèles de taux du GSE contient : Hull & White (HW), G2++ et deux versions du DD-LMM. Les tests de validation de la chaîne de production des scénarios économiques risque-neutre garantissent la conformité de l'outil aux exigences de *Market Consistency*. L'interface graphique de l'outil facilite la lecture des hypothèses de calcul et le lancement de la production des scénarios économiques. Certains calculs sont parallélisés pour réduire les temps de projection des variables financières.

Dans un environnement de taux bas, l'étude de ce mémoire répond a un besoin d'éclaircissement de certaines problématiques liées à la modélisation des taux d'intérêts. A partir de différents jeux de scénarios économiques risque-neutre fabriqués par le GSE, différentes sensibilités tentent d'apporter des réponses à la problématique de ce mémoire :

- Une comparaison des modèles de taux sur différents indicateurs de solvabilité permet d'étudier les impacts du choix de modélisation sur la valorisation des engagements d'un assureur. Ces résultats visent à sensibiliser les assureurs aux incertitudes liées à la modélisation des taux.
- Le paramètre *shift* du modèle DD-LMM modifie la forme de la distribution des scénarios de taux d'intérêt. Cette propriété permet d'étudier la transition d'une modélisation des taux d'intérêt exclusivement positifs vers une modélisation qui prend en compte les taux négatifs.
- Les autres sensibilités sont de courtes études d'analyse de l'impact de variation de paramètres réglementaires fixés par l'*European Insurance and Occupational Pensions Au-*

Abstract

Key Words : life insurance, Solvability 2, ESG, interest rate, HW, G2++, LMM, DD-LMM, quantitative finance, C#

Adopted in 2009, the solvency 2 regulation shines a new light on the culture of risks for insurers and reinsurers. The quick implementation of this regulation sometimes lead to uncertain choices of financial modelisation in insurance. This observation conflicts with the original target of valuating a just and unique economic value of insurers commitments. Meanwhile, the era of negative interests rates invalidates the assumptions of certains financial models used by insurers. This new economic paradigm pushes insurers to reconsider their modelisation of interests rates.

This mémoire aims to present the implementation of a risk-neutral economic scenarios generator in order to lead a quantitative analysis of the impacts of IR models on Solvability 2 economic indicators in life insurance. To widely cover the life insurance situation in France, three portfolios have been modelled : one portfolio of fonds en euros contracts, one portfolio containing pensions contracts (retirement) and one portfolio of euro-croissance contracts. For each virtual insurer, some solvability indicators are processed according to different tables of risk-neutral economic scenarios. To tackle the problem of this mémoire, several variables are selected : the IR model, the DD-LMM shift parameter, the ultimate forward rate, the volatility adjuster.

The economic scenarios generator is coded in C#. The design of the software architecture and the implementation were the two main steps of this technical project. The ESG produces economic scenarios in an annual or discrete time step format which is compatible with the existing ALM software requirements. The IR models class is composed of : Hull & White, G2++ and two DD-LMM versions. The validation tests applied to the production chain of the economic scenarios ensure the conformity of the tool to regulatory requirements in term of market consistency. The graphical interface facilitates user interaction with the computation assumptions and the economic scenarios production. Certain algorithms are parallelized in order to reduce heavy run times.

In a low interest rate environnement, the study of this mémoire partly fullfill some interest rate modelisation issues. Based on different economic assumptions built by the ESG, some sensitivities try to solve the problem of this mémoire :

- A comparison of Solvency 2 indicators measured with different IR models emphasizes the impacts of modelisation choices on the valuation of insurers liabilities. This sensitivity aims to alert the insurers to uncertainties on IR modelisation.
- The shift parameter of the DD-LMM model impacts the distribution of interest rates. This relation is an oportunity to study the bridge between a positive-only rates modelisation and an all-value rates modelisation.
- Other sensitivities try to solve problems specific to IR modelisation : the impact of the change in regulatory parameters fixed by EIOPA and a warning on the use of log-normal IR models for the interest rate solvency 2 module.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon alternance et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.

Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mon maître de stage, Guillaume Gerber, directeur de mission, qui m'a apporté son expérience sur des sujets pointus en assurance vie. Par sa confiance, j'ai pu accomplir en autonomie le développement d'un générateur de scénarios économiques risque-neutre. Il fut d'une aide précieuse dans les moments les plus délicats.

Je remercie également les collaborateurs de Forsides pour leur accueil, leur esprit d'équipe et en particulier Arthur Maillart, qui m'a beaucoup aidé à comprendre l'utilisation de l'outil ALM et m'a apporté ses précieuses connaissances en gestion actif-passif.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction de ce rapport de stage : ma tante, Valérie Dumars et mon père, Christophe Chancel.

Acronyms

ACPR Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution.

ALM *Asset Liability Management.*

ATM *At The Money.*

BE *Best Estimate.*

BK Black-Karasinsky.

CCA *Cascade Calibration Algorithm.*

CRA *Credit Risk Adjustment.*

DD-LMM *Diffusion-Displaced LMM.*

EIOPA *European Insurance and Occupational Pensions Authority.*

EONIA *Euro OverNight Index Average.*

GSE Générateur de Scénarios Économiques.

HJM Heath-Jarrow-Morton.

HW Hull & White.

LLP *Last Liquid Point.*

LMM *Libor Market Model.*

MCEV *Market Consistent Embedded Value.*

OPCVM Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières.

PB Participation aux bénéfices.

PD Provision de diversification.

PM Provision Mathématique.

PPE Provision pour Participation aux Excédents.

RCCA *Rectangular CCA.*

SCR *Solvency Capital Requirement.*

TEC Taux de l'échéance constante.

TME Taux Moyen des Emprunts d'état.

TMG Taux Minimum Garantie.

UFR *Ultimate Forward Rate.*

VA *Volatility Adjustment.*

VAP Valeur Actuelle Probable.

VM Valeur de Marché.

VNC Valeur Nette Comptable.

Table des matières

Introduction	1
I Générateur de scénarios économiques risque-neutre	3
1 Marché de taux	4
1.1 Courbes des taux	4
1.1.1 Courbe des taux marché <i>swap</i>	4
1.1.2 Courbe des taux réglementaires EIOPA	5
1.2 Swaptions	7
1.2.1 Présentation	7
1.2.2 Valorisation	7
1.2.3 Cube de volatilité	8
2 Les modèles de taux implémentés	10
2.1 Hull et White	10
2.1.1 Modèle	10
2.1.2 Calibration	10
2.2 G2++	13
2.2.1 Modèle	13
2.2.2 Calibration	14
2.3 Libor Market Model	16
2.3.1 Modèle	16
2.3.2 Calibration	16
2.3.3 Structure de dépendance	19
3 Architecture & Conception	20
3.1 Fonctionnement général	21
3.2 Génération de l'aléa	24
3.3 Modèles financiers	24
3.4 Scénarios stochastiques	26
3.5 Chaîne de production	26
3.5.1 Vision fonctionnelle	26
3.5.2 Étape de la génération	27
3.6 Optimisation et temps de calcul	31
3.7 Discrétisation	32
3.8 Tests	33
II Étude d'impact des modèles de taux	37
1 Historique des modèles de taux en assurance vie	37
2 Comparaison qualitative des modèles de taux	38
3 Passifs testés	38
3.1 Euro	38
3.1.1 Présentation du contrat	38
3.1.2 Hypothèses et modélisation	39
3.2 Euro-Croissance	41

3.2.1	Présentation du contrat	41
3.2.2	Hypothèses et modélisation	41
3.3	Retraite	42
3.3.1	Présentation du contrat	42
3.3.2	Hypothèses et modélisation	43
3.4	Comparaison qualitative	44
4	Présentation des sensibilités testées	45
4.1	Un référentiel central	45
4.2	Première sensibilité : modèles de taux <i>Market Consistent</i>	46
4.3	Deuxième sensibilité : scénarios économiques de taux bas	46
4.4	Autres sujets sur les taux	47
4.4.1	L'UFR	47
4.4.2	VA	47
5	Résultats des sensibilités et interprétations	49
5.1	Modèles de taux et coût d'option	49
5.2	Du LMM au DD-LMM	52
5.3	Autres questions	55
5.3.1	Taux long : UFR	55
5.3.2	Taux courts : VA	57
5.3.3	Informations relatives aux chocs de taux S2	58
5.3.4	Martingalité des réinvestissements	60
III	Conclusion	62
IV	Annexes	65
	Note de synthèse	80
	Executive summary	83

Introduction

Depuis le 1^{er} janvier 2016, la réglementation européenne Solvabilité 2 impose l'évaluation du bilan des sociétés d'assurance et de réassurance en valeur économique. Cette mesure a induit un besoin de la part des assureurs de pouvoir générer des scénarios économiques risque-neutre et *Market Consistent*. Pour répondre à cette demande, les assureurs vie ont dû se doter de générateurs de scénarios économiques développés en interne ou en faisant l'acquisition d'une solution externe : *B&H ESG* (Moody's Analytics), *XSG* (Deloitte), *STAR ESG* (Willis Tower Watson) ... Aujourd'hui, les assureurs ont pour objectif de mieux maîtriser leur GSE et d'acquies, notamment au travers de leur GSE, une vision personnalisée de leur risque financier. Cette démarche requiert des compétences très transverses en algorithmie, en ingénierie financière et en actuariat (assurance vie). Le croisement de ces compétences apporte un regard nouveau sur le sujet.

Au cours de la mise en place de Solvabilité 2, les taux d'intérêt se sont considérablement affaiblis jusqu'à devenir négatifs. La conséquence majeure de l'environnement économique actuel des taux d'intérêt bas et négatifs est la diminution globale de la rentabilité des contrats d'assurance vie et la perte d'attractivité du marché de l'assurance vie (cf. référence [3]). Avec 1620 milliards d'euros d'encours de provision technique (cf. référence [7]) pour le seul marché de l'assurance vie en France, la faillite d'un assureur vie représente un risque systémique majeur. Pour faire face à cette menace, le régulateur européen EIOPA mesure la résistance des acteurs de l'assurance à des scénarios économiques de taux défavorables (cf. référence [4]). Une deuxième conséquence de ce nouvel environnement est la prise en compte des taux bas dans les systèmes de gestion des risques des assureurs. Par exemple, dans le cadre des GSE, l'environnement des taux bas invalide certaines hypothèses fortes de modélisation financière des actifs. Réviser ces contraintes et mesurer les impacts de ces transformations sont au cœur des problématiques actuelles.

Ce mémoire a pour objectifs i) de proposer un générateur de scénarios économiques risque-neutre répondant aux exigences de Solvabilité 2 et ii) d'analyser les principaux impacts des choix de modélisation des taux d'intérêt sur les indicateurs prudentiels.

Le plan est construit sur les grandes étapes du projet et les principaux points de réflexion survenus au cours de l'étude. Dans sa globalité, l'enchaînement des chapitres vise à refléter une démarche de réflexion et tente de transmettre une compréhension la plus complète, cohérente et précise possible du sujet.

Avant tout, la physique est la science qui étudie par l'expérimentation et l'élaboration de concepts les propriétés fondamentales de la matière et de l'espace-temps (Larousse 2017). Cette définition de la physique rappelle l'importance de définir les conditions d'expérimentation pour la modélisation d'un phénomène. La première partie de ce mémoire tente de refléter cette approche scientifique par des rappels de base sur les marchés de taux (cf. partie 1). Les notations et les équations introduites sont nécessaires à la compréhension des parties suivantes.

La partie 2 vise à présenter les modèles de taux d'intérêt implémentés dans le GSE. Par souci de lisibilité, seuls les résultats importants issus du GSE implémenté pour ce mémoire sont analysés. Des conseils pratiques sur la calibration des paramètres et la simulation des processus stochastiques sont expliqués et illustrés.

En pratique, l'implémentation du générateur de scénarios économiques en C# a constitué une part significative du travail pour ce mémoire. La partie 3 décrit la conception, l'implémentation et les points forts de ce GSE. L'architecture du code du GSE et la chaîne de production des

scénarios économiques risque-neutre sont commentés. Au-delà des limites de l'outil, quelques améliorations techniques et évolutions fonctionnelles sont également proposées.

Dans un deuxième temps, par l'étude de l'impact quantitatif du choix de modèle dans le contexte des taux bas sur l'ensemble du processus de production des indicateurs de solvabilité (GSE et ALM), ce mémoire apporte une vision élargie du risque de taux en assurance vie dans un contexte de gestion actif-passif.

La partie 1 est un bref historique de l'essor des modèles de taux chez les assureurs et dresse un aperçu de la situation actuelle de quelques assureurs en France.

La partie 2 récapitule les principaux avantages et inconvénients des modèles de taux sélectionnés et implémentés pour l'étude.

La partie 3 présente les contrats d'assurance vie étudiés avec leur modélisation. Les choix de modélisation reposent sur des hypothèses du comportement des assurés, de l'assureur et les caractéristiques de chaque contrat. Trois bilans fictifs d'assureurs vie sont modélisés pour l'étude : euro, euro-croissance et retraite. La modélisation de chacun de ces portefeuilles est choisie pour représenter une réalité du marché simplifiée.

L'automatisation du processus de génération des scénarios économiques permet de produire des sensibilités sur les paramètres du GSE. La partie 4 présente les hypothèses économiques du jeu des scénarios économiques central : le référentiel de l'étude. Chaque sensibilité est rattachée à un ensemble d'hypothèses qui sont détaillées pour rendre transparent le cadre expérimental de l'étude. Le nombre de combinaisons des hypothèses économiques est gigantesque. Seuls des études sur les stress liés à la problématique des taux bas et négatifs sont mis en avant.

L'exploitation des résultats constitue l'aboutissement de ce mémoire. Un soin particulier a été accordé à la cohérence et la précision des mesures.

Première partie

Générateur de scénarios économiques risque-neutre

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un algorithme de projections de variables économiques : taux d'intérêt, indices, *spreads* de crédit ... En assurance vie, essentiellement deux types de GSE sont utilisés : réel et risque-neutre. Un GSE utilisé en monde réel produit des scénarios économiques les plus réalistes possibles. Ses paramètres sont souvent estimés sur des chroniques économiques historiques. Un GSE risque-neutre projette des scénarios économiques *Market Consistent* dont le but est la valorisation des engagements d'un assureur sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Le GSE implémenté ne produit que des scénarios économiques risque-neutre. Les problématiques liées à la génération des scénarios économiques en monde réel ne sont donc pas étudiées dans ce mémoire. Les principales étapes d'un GSE risque neutre sont :

1. la calibration de modèles (taux, *equity*, ...) sur des produits liquides du marché
2. la génération et la projection des courbes de taux et indices économiques
3. la validation des tests de *Market Consistency*

Beaucoup de littérature existe sur les GSE utilisés en assurance vie. Souvent, le temps d'implémentation d'un modèle est trop important pour explorer en profondeur les impacts de son utilisation en assurance vie. L'analyse quantitative de la modélisation financière des taux d'intérêt et la description d'une solution technique innovante sont les deux grands sujets abordés dans cette première partie. Ce mémoire ne réintroduit pas les notions de base sur la réglementation Solvabilité 2.

La première section, court rappel sur le marché de taux européen, introduit les connaissances de base nécessaires à la compréhension de la construction de la courbe des taux réglementaires EIOPA. Cette description est complétée par la présentation d'un produit dérivé de taux vanille utilisé dans le GSE : la *swaption*.

La deuxième section critique chacun des modèles de taux implémentés dans le GSE par des considérations exclusivement financières et mathématiques. Pour faciliter l'implémentation de ces modèles parfois complexes, quelques estimations des paramètres calibrés sur des jeux de données du marché sont fournis.

La troisième section présente la conception et l'implémentation de la solution informatique. Cette partie synthétise la maquette du logiciel et ses principales fonctionnalités. Cette démarche s'inscrit dans une perspective d'amélioration des processus internes à l'entreprise en matière de gestion des risques et de fiabilité du modèle sur le long terme.

1 Marché de taux

Pour être *Market Consistent*, les paramètres des modèles du GSE doivent être calibrés sur des données de marché. Le marché des taux se subdivise en deux grands sous-marchés de contrats : les produits à terme et les produits optionnels.

Premièrement, la courbe des taux réglementaires EIOPA sans risque utilisée en assurance vie est dérivée à partir d'une autre courbe des taux observée sur le marché : la courbe des taux *swap*. La première section définit brièvement la courbe des taux *swap* avant de présenter la construction de la courbe des taux réglementaires de l'EIOPA. Deuxièmement, certains produits dérivés optionnels de taux sont des référentiels pour la calibration des modèles de taux d'un GSE risque-neutre : *caps*, *floors*, *swaptions*, ... Pour le GSE implémenté, tous les paramètres implicites des modèles de taux sont estimés à partir des prix de *swaptions*. Introduire ce type de contrat financier et sa valorisation apportent un éclairage utile pour comprendre les sensibilités de l'étude.

1.1 Courbes des taux

1.1.1 Courbe des taux marché *swap*

Déterminer une courbe des taux zéro-coupon dite "sans risque" est une opération difficile. Au cours du temps et des crises financières, la notion de "sans risque" s'est considérablement complexifiée. La courbe des taux sans risque a pourtant une importance capitale puisque :

- elle peut définir le taux d'actualisation des cash-flows futurs ;
- elle est utilisée dans la valorisation de nombreux produits dérivés de classes d'actifs différentes (taux, action, forex, ...);

Une bonne construction de la courbe des taux commence par une réflexion sur son utilisation. La courbe des taux EIOPA a pour but de valoriser des engagements courts et longs de passifs d'assurance en assurant la meilleure cohérence possible avec le marché. Dans ce cadre, l'EIOPA dérive la courbe réglementaire à partir d'une courbe du marché.

Pour construire la courbe des taux sans risque du marché deux problématiques majeures sont à résoudre.

D'une part, les obligations zéro coupon sans risque ne sont pas cotées sur les marchés. Les courbes des taux zéro coupon ne sont donc pas directement observables. D'autre part, l'actif des assureurs européens est essentiellement en devise euro. Pour couvrir son risque de marché, l'assureur vie qui a des contrats libellés en euro opère principalement sur le marché européen.

Sur le marché européen des *swaps* (indicés sur l'Euribor 6 mois), une courbe des taux "sans risque" peut être dérivée. Ce marché présente l'avantage d'un risque de liquidité faible pour des maturités courtes et moyen terme. Chaque *swaps* est coté par un taux *swap* $S(0, T_0, T_n)$. Chaque taux *swaps* s'exprime en fonction des prix d'obligations zéro coupon (méthode *bootstrap* de la courbe des taux) :

$$S(0, T_0, T_n) = \frac{P(0, T_0) - P(0, T_n)}{\sum_{i=0}^n \tau_i P(0, T_i)} \quad (1)$$

De manière réciproque, chaque flux d'obligation zéro coupon peut se répliquer grâce à une stratégie d'achat/vente de *swaps At The Money* (ATM), stratégie gratuite hors coûts de transaction.

Euro Swaps			Action	98) Graphe			Option	
Axe X	Tenor	Axe Y	YTM mid	Devise	Rien	PCS	MUL	
Spécifique		12/31/16	Relative	Dern	1J	1S	1M	Modifier
<input checked="" type="radio"/> Valeur/membre <input type="radio"/> Valeur <input type="radio"/> Membre <input type="radio"/> Composant								
<input type="button" value="Exporter"/>								
S45 YTM mid Euro Swaps 07/05/17			S45 YTM mid Euro Swaps 12/30/16			S45 YTM mid (Variation) 07/05/17-12/30/16		
Tenor	Description	Rdmt	Description	Rdmt				
11)	1D EONIA Index	-0.356	Idem	-0.329			-2.7	
12)	1W EUR001W Index	-0.379	Idem	-0.373			-0.6	
13)	1M EUR001M Index	-0.373	Idem	-0.368			-0.5	
14)	2M EUR002M Index	-0.343	Idem	-0.338			-0.5	
15)	3M EUR003M Index	-0.331	Idem	-0.319			-1.2	
16)	6M EUR006M Index	-0.271	Idem	-0.221			-5.0	
17)	7M EUSWG Curncy	-0.288	Idem	-0.240			-4.8	
18)	8M EUSWH Curncy	-0.283	Idem	-0.244			-3.9	
19)	9M EUSWI Curncy	-0.277	Idem	-0.244			-3.2	
20)	10M EUSWJ Curncy	-0.267	Idem	-0.231			-3.6	
21)	11M EUSWK Curncy	-0.255	Idem	-0.218			-3.7	
22)	1Y EUSA1 Curncy	-0.239	Idem	-0.203			-3.6	
23)	18M EUSA1F Curncy	-0.193	Idem	-0.182			-1.1	
24)	2Y EUSA2 Curncy	-0.134	Idem	-0.160			2.6	
25)	3Y EUSA3 Curncy	-0.005	Idem	-0.104			9.9	
26)	4Y EUSA4 Curncy	0.135	Idem	-0.025			15.9	
27)	5Y EUSA5 Curncy	0.281	Idem	0.075			20.6	
28)	6Y EUSA6 Curncy	0.427	Idem	0.191			23.6	
29)	7Y EUSA7 Curncy	0.557	Idem	0.314			24.3	
30)	8Y EUSA8 Curncy	0.686	Idem	0.442			24.3	
31)	9Y EUSA9 Curncy	0.810	Idem	0.560			25.0	
32)	10Y EUSA10 Curncy	0.924	Idem	0.663			26.1	
33)	11Y EUSA11 Curncy	1.026	Idem	0.759			26.7	
34)	12Y EUSA12 Curncy	1.117	Idem	0.843			27.4	
35)	15Y EUSA15 Curncy	1.323	Idem	1.030			29.3	
36)	20Y EUSA20 Curncy	1.501	Idem	1.176			32.5	
37)	25Y EUSA25 Curncy	1.567	Idem	1.218			34.9	
38)	30Y EUSA30 Curncy	1.598	Idem	1.234			36.4	
39)	35Y EUSA35 Curncy	1.608	Idem	1.237			37.1	
40)	40Y EUSA40 Curncy	1.602	Idem	1.228			37.5	
41)	45Y EUSA45 Curncy	1.580	Idem	1.191			38.9	
42)	50Y EUSA50 Curncy	1.553	Idem	1.170			38.3	

FIGURE 1 – Taux swaps Bloomberg

1.1.2 Courbe des taux réglementaires EIOPA

Le bilan économique Solvabilité II est évalué à partir de la courbe des taux publiée par l'EIOPA sur une base mensuelle¹.

La construction de la courbe est de la responsabilité du régulateur européen qui fixe les paramètres de calibrage. L'impact des variations de ces paramètres sur les indicateurs prudentiels des assureurs et des réassureurs est étudié au travers de consultations publiques lancées par l'EIOPA.

La courbe EIOPA euro est fondée sur la courbe des taux *swap* euro. Les *swaps* de taux EUSA sont supposés liquides jusqu'à la maturité 20 ans (Last Liquid Point).

Les paiements de la jambe variable des *swaps* EUSA sont semestriels. Avant la crise de 2008, le marché ne faisait pas de distinction entre les jambes variables des *swaps*. Les *swaps* OIS permettent de convertir une jambe variable indicée sur une maturité de l'Euribor en une jambe variable *Euro OverNight Index Average* (EONIA). Pour prendre en compte le risque de crédit des *swaps* EUSA, l'EIOPA calcule chaque année un *Credit Risk Adjustment* (CRA). Cet indicateur correspond au taux du *basis swap* - Euribor 3 mois borné entre 10 et 30 points de base.

La durée des passifs en assurance vie peut être très longue (portefeuille retraite par exemple). Pour évaluer ces engagements au-delà de la vision du marché, l'EIOPA propose une extrapolation de la courbe des taux marché à partir de la maturité 20 ans vers un taux (UFR) de 4.2% (forme exponentielle).

Les deux branches obtenues sont ensuite lissées par la méthode de Smith-Wilson. Le lecteur

1. Données : <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures>

curieux sur le sujet pourra consulter la documentation technique officielle (cf. documentation [8]).

Les organismes d'assurance ont la possibilité de calculer leurs engagements avec une courbe des taux ajustée d'un coefficient appelé *Volatility Adjustment* (VA). Il représente un pourcentage de la prime d'illiquidité des obligations détenues par l'assureur. En fait, chez les assureurs, ces actifs ont principalement vocation à être détenus jusqu'à échéance et ne sont pas exposés au risque de liquidité. *Cespread* est calculé dans une monnaie à partir d'un portefeuille de référence (composé de dette souveraine, titres, bonds, ...) représentatif des assureurs européens.

La figure 2 représente au 31 décembre 2016 la courbe des taux zero coupon *swap* et la courbe EIOPA avec et sans VA. A cette date, le CRA est de 10 bps et la VA est environ égale à 0,13%.

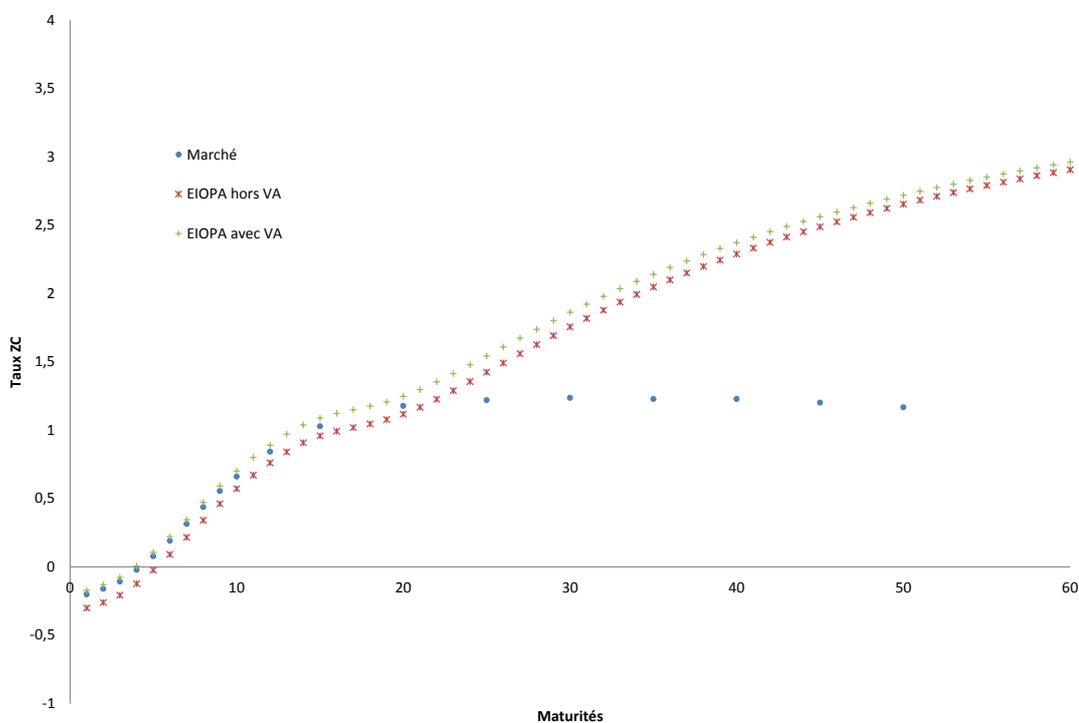


FIGURE 2 – Courbes des taux du marché et réglementaires au 31 décembre 2016

1.2 Swaptions

Pour être *Market Consistent*, les modèles de taux d'un GSE sont calibrés sur des prix/volatilités de produits dérivés échangés et valorisés par la place. Plusieurs techniques de calibration existent pour un même modèle financier. Dans ce mémoire, tous les modèles de taux sont calibrés sur des produits de taux *swaptions* à la monnaie.

1.2.1 Présentation

Une *swaption* (payeuse/receveuse) est une option qui donne le droit à l'acheteur de souscrire à un *swap* (payeur/receveur) à une date fixée T_α , de date d'échéance T_β , de nominal N et de *strike* K .

Les *swaptions* Euribor EUSP sont des produits standards et liquides. La jambe variable paye l'Euribor 6M tous les semestres. En contrepartie, la jambe fixe paie un taux annuel fixe K ; la fréquence des paiements est divisée par deux. La durée du swap sous-jacent est appelée *tenor*. La figure 3 schématise les flux et définit les différentes notations pour une *swaption* EUSP receveuse.

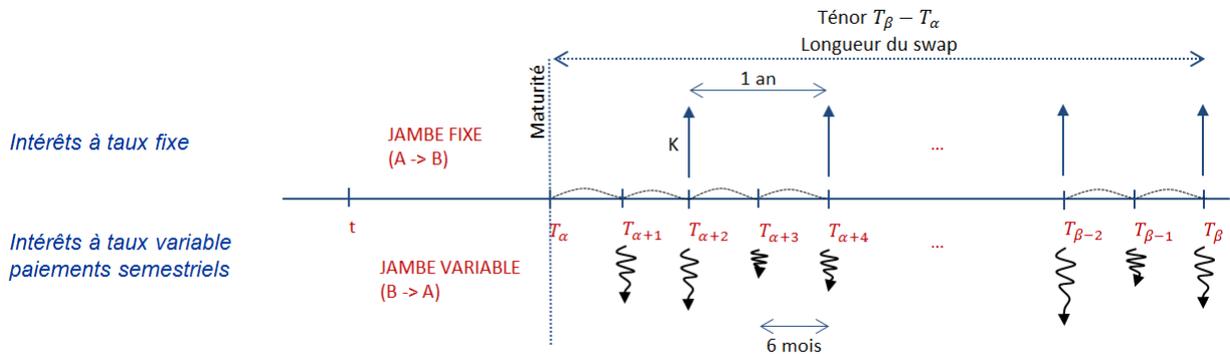


FIGURE 3 – Flux d'une *swaption* receveuse EUSP indexée sur EURIBOR 6M

1.2.2 Valorisation

À la maturité, l'acheteur de la *swaption* (payeuse/receveuse) a l'opportunité de souscrire à un *swap* (payeur/receveur) de *strike* K . Par exemple, si le *swap* sous-jacent est receveur (comme sur le schéma), il est opportun de souscrire à un *swap* dont le taux *swap* de marché $S(T_\alpha, T_\beta)$ est supérieur à K . Ce montage (de coût nul) permet à l'acheteur de se couvrir contre le risque de variation des taux lié à la jambe variable. Par conséquent, l'exercice de la *swaption* et l'achat simultané d'un *swap* de taux de même nominal N a pour *payoff* :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) (K - S(T_\alpha, T_\beta)) \quad (2)$$

L'acheteur souhaite recevoir une somme positive et n'appliquera cette stratégie seulement dans le cas où le taux *swap* est inférieur au taux fixe. Le *payoff* de la *swaption* est donc :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) (K - S(T_\alpha, T_\beta))^+ \quad (3)$$

Ce raisonnement est reproductible au cas des *swaptions* payeuses :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) (S(T_\alpha, T_\beta) - K)^+ \quad (4)$$

Sous l'hypothèse de complétude du marché et d'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix d'une *swaption* payeuse est l'espérance sous la probabilité risque neutre du *payoff* actualisé.

$$PS(t, T_\alpha, T_\beta, K, N) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[ND(t, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) (K - S(T_\alpha, T_\beta))^+ | \mathcal{F}_t] \quad (5)$$

Par changement de numéraire, le prix de la *swaption* s'écrit :

$$PS(t, T_\alpha, T_\beta, K, N) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_{LV L}}[(K - S(T_\alpha, T_\beta))^+ | \mathcal{F}_t] \quad (6)$$

1.2.3 Cube de volatilité

D'après l'équation 7, le prix initiale d'une *swaption* est :

$$PS(0, T_\alpha, T_\beta, K, N) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P^M(0, T_i) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_{LV L}}[(K - S(T_\alpha, T_\alpha, T_\beta))^+] \quad (7)$$

En postulant une dynamique log-normale pour le taux *swap forward* avec pour condition initiale $S(0, T_\alpha, T_\beta) = S^M(0, T_\alpha, T_\beta)$:

$$dS(t, T_\alpha, T_\beta) = \sigma S(t, T_\alpha, T_\beta) dW_t^{\mathbf{Q}_{LV L}} \quad (8)$$

La tendance de cette diffusion est nulle car le taux *swap forward* est martingale sous la mesure $\mathbf{Q}_{LV L}$. Ce modèle très simple présente l'avantage d'obtenir une formule explicite type Black-Scholes pour le calcul de l'espérance :

$$PS(0, T_\alpha, T_\beta, K, N) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P^M(0, T_i) Black(K, S(0, T_\alpha, T_\beta), \sigma) \quad (9)$$

La formule de Black s'écrit :

$$\begin{aligned} Black(K, S, \sigma) &= S\omega\Phi(\omega d_1) - K\omega\Phi(\omega d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln(S/K) + v^2/2}{v} \\ d_2 &= \frac{\ln(S/K) - v^2/2}{v} \\ v &= \sigma\sqrt{T_\alpha} \end{aligned}$$

Les *swaptions* EUSP sont cotées pour différents strike K , ténors $T_\beta - T_\alpha$ et maturités T_α . Pour chacun des produits, une volatilité implicite log-normale $\sigma(T_\alpha, T_\beta - T_\alpha, K)$ est affichée dans le cube de volatilité tridimensionnel. Pour chaque maturité, ténor et *strike* de *swaption* l'algorithme de Newton est utilisé pour approcher la volatilité implicite sous jacente. En pratique, seules quelques itérations suffisent : convergence rapide.

		Ténors																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maturités	1	286%	169%	126%	111%	95%	87%	79%	73%	66%	63%	58%	55%	53%	51%	49%	48%	47%	46%	45%	44%
	2	141%	124%	99%	89%	81%	73%	68%	63%	60%	57%	54%	51%	49%	48%	46%	45%	44%	44%	42%	41%
	3	115%	103%	88%	79%	71%	64%	60%	56%	54%	52%	50%	48%	46%	45%	44%	43%	42%	41%	40%	38%
	4	95%	89%	78%	69%	62%	58%	54%	52%	50%	49%	47%	45%	44%	43%	42%	41%	40%	38%	37%	36%
	5	82%	76%	67%	60%	55%	51%	49%	48%	47%	46%	44%	43%	41%	40%	40%	38%	37%	36%	34%	33%
	6	70%	63%	57%	53%	49%	47%	45%	45%	44%	42%	41%	40%	39%	37%	36%	35%	34%	33%	32%	31%
	7	60%	54%	51%	47%	45%	43%	42%	42%	42%	42%	40%	39%	38%	37%	36%	34%	33%	32%	30%	30%
	8	51%	49%	46%	44%	43%	42%	40%	40%	40%	41%	40%	38%	37%	35%	34%	32%	31%	30%	29%	28%
	9	47%	45%	44%	42%	42%	40%	39%	39%	39%	40%	39%	37%	35%	34%	32%	31%	30%	29%	28%	27%
	10	42%	43%	42%	42%	41%	40%	39%	39%	39%	40%	38%	36%	34%	32%	31%	30%	28%	27%	26%	26%
	11	42%	42%	42%	41%	40%	39%	38%	39%	38%	38%	36%	34%	32%	31%	29%	28%	27%	26%	25%	24%
	12	40%	42%	40%	40%	40%	38%	38%	38%	37%	36%	34%	32%	30%	29%	28%	26%	25%	24%	24%	23%
	13	44%	40%	41%	40%	39%	38%	37%	37%	35%	34%	32%	30%	29%	27%	26%	25%	24%	23%	23%	22%
	14	39%	40%	40%	39%	39%	37%	36%	34%	33%	32%	30%	28%	27%	26%	25%	24%	23%	22%	22%	21%
	15	44%	41%	40%	40%	39%	36%	34%	33%	31%	30%	28%	27%	26%	25%	24%	23%	22%	21%	21%	20%
	16	41%	39%	39%	38%	36%	33%	31%	30%	29%	28%	26%	25%	24%	23%	22%	21%	21%	20%	20%	19%
	17	38%	38%	37%	35%	33%	30%	28%	27%	27%	26%	24%	23%	22%	22%	21%	20%	20%	19%	19%	18%
	18	40%	37%	34%	32%	29%	27%	26%	25%	24%	23%	22%	21%	20%	20%	19%	19%	18%	18%	18%	18%
	19	35%	32%	30%	28%	26%	25%	24%	23%	23%	22%	21%	20%	20%	19%	19%	18%	18%	17%	17%	17%
	20	29%	28%	26%	25%	24%	23%	22%	21%	21%	21%	20%	19%	19%	18%	18%	17%	17%	17%	16%	16%

FIGURE 4 – Volatilités implicites Black des *swaptions* EUSP ATM au 31/12/2014

Une coupe du cube de volatilité correspondant au strike ATM est représentée sur la figure 4. Les volatilités court terme explosives sont issues de la faiblesse de la courbe des taux EIOPA en 2014. Pour rappel, le modèle de Black impose la positivité du taux *swap forward* (modèle log-normal). Avec l'apparition des taux négatifs (l'Euribor 6M devient négatif le 11 octobre 2015), les volatilités ne sont plus cotées dans ce modèle dont les hypothèses sont violées. Pour être utilisable, il est possible de proposer d'autres modèles dont la dynamique admet les taux négatif : modèle log-normal shifté, modèle normal (Bachelier), CEV, SABR.

Le modèle de Bachelier postule simplement une dynamique normale pour le taux *swap* :

$$dS(t, T_\alpha, T_\beta) = \sigma dW_t^{QLVL} \quad (10)$$

Dans ce modèle, les volatilités implicites associées aux prix *swaptions* précédents sont finies. La figure 5 est un tableau des volatilités normales estimées sur les mêmes données que la figure 4. L'acceptation des taux négatifs dans ce modèle garantit l'obtention de volatilités implicites finies.

		Ténor																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maturités	1	0,19%	0,22%	0,26%	0,33%	0,36%	0,42%	0,46%	0,50%	0,51%	0,55%	0,55%	0,55%	0,56%	0,56%	0,57%	0,57%	0,57%	0,58%	0,58%	0,58%
	2	0,25%	0,32%	0,35%	0,40%	0,44%	0,47%	0,51%	0,54%	0,56%	0,58%	0,58%	0,58%	0,58%	0,58%	0,58%	0,58%	0,58%	0,58%	0,59%	0,59%
	3	0,37%	0,43%	0,45%	0,48%	0,51%	0,54%	0,56%	0,58%	0,60%	0,61%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,59%	0,59%	0,59%	0,59%	0,59%
	4	0,47%	0,52%	0,54%	0,56%	0,57%	0,59%	0,60%	0,61%	0,63%	0,63%	0,62%	0,62%	0,61%	0,61%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%
	5	0,54%	0,58%	0,59%	0,61%	0,61%	0,62%	0,63%	0,64%	0,64%	0,65%	0,63%	0,62%	0,62%	0,61%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,59%	0,59%
	6	0,60%	0,63%	0,63%	0,64%	0,64%	0,64%	0,64%	0,64%	0,65%	0,66%	0,64%	0,63%	0,62%	0,61%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,59%	0,59%
	7	0,66%	0,66%	0,66%	0,66%	0,66%	0,65%	0,64%	0,65%	0,66%	0,67%	0,65%	0,64%	0,63%	0,62%	0,61%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,59%
	8	0,67%	0,68%	0,68%	0,68%	0,67%	0,66%	0,64%	0,65%	0,66%	0,67%	0,65%	0,64%	0,63%	0,62%	0,61%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,59%
	9	0,68%	0,70%	0,70%	0,69%	0,68%	0,66%	0,64%	0,65%	0,66%	0,67%	0,66%	0,64%	0,63%	0,62%	0,62%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,59%
	10	0,69%	0,70%	0,70%	0,69%	0,68%	0,66%	0,66%	0,67%	0,66%	0,68%	0,66%	0,64%	0,63%	0,62%	0,62%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,59%
	11	0,68%	0,69%	0,68%	0,68%	0,67%	0,65%	0,65%	0,65%	0,65%	0,66%	0,65%	0,63%	0,62%	0,61%	0,61%	0,60%	0,59%	0,58%	0,58%	0,58%
	12	0,68%	0,68%	0,67%	0,67%	0,66%	0,64%	0,64%	0,64%	0,64%	0,65%	0,64%	0,62%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,58%	0,58%	0,57%	0,57%
	13	0,68%	0,67%	0,67%	0,66%	0,65%	0,63%	0,63%	0,64%	0,64%	0,65%	0,63%	0,62%	0,61%	0,60%	0,59%	0,58%	0,58%	0,57%	0,57%	0,56%
	14	0,68%	0,67%	0,66%	0,66%	0,65%	0,63%	0,63%	0,63%	0,64%	0,64%	0,63%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,58%	0,57%	0,57%	0,56%	0,56%
	15	0,68%	0,66%	0,66%	0,65%	0,64%	0,62%	0,62%	0,63%	0,64%	0,64%	0,63%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,58%	0,57%	0,57%	0,56%	0,56%
	16	0,67%	0,65%	0,65%	0,64%	0,63%	0,61%	0,61%	0,62%	0,63%	0,63%	0,62%	0,60%	0,59%	0,59%	0,58%	0,57%	0,57%	0,56%	0,55%	0,55%
	17	0,65%	0,64%	0,63%	0,63%	0,62%	0,61%	0,60%	0,61%	0,62%	0,62%	0,61%	0,60%	0,59%	0,58%	0,58%	0,57%	0,56%	0,55%	0,55%	0,55%
	18	0,63%	0,63%	0,62%	0,62%	0,61%	0,60%	0,60%	0,60%	0,61%	0,62%	0,60%	0,59%	0,58%	0,58%	0,57%	0,56%	0,56%	0,55%	0,54%	0,54%
	19	0,62%	0,62%	0,62%	0,61%	0,61%	0,60%	0,59%	0,60%	0,61%	0,62%	0,60%	0,59%	0,58%	0,57%	0,57%	0,56%	0,55%	0,55%	0,54%	0,54%
	20	0,61%	0,61%	0,61%	0,61%	0,60%	0,60%	0,59%	0,60%	0,61%	0,61%	0,60%	0,59%	0,58%	0,57%	0,57%	0,56%	0,55%	0,54%	0,54%	0,54%

FIGURE 5 – Volatilités implicites Bachelier des *swaptions* EUSP ATM au 31/12/2014

2 Les modèles de taux implémentés

Le risque de taux est un des principaux risques en assurance vie. Cette sensibilité est issue de plusieurs caractéristiques intrinsèques à l'activité des assureurs vie.

Tout d'abord, la part obligataire représente près de 80% des placements de la plupart des assureurs : OAT du trésor, obligations d'entreprise. Le reste du portefeuille composé d'actions, immobiliers, ou fonds sont corrélés avec les variations de taux d'intérêt.

Deuxièmement, des contrats proposés par les assureurs comme le contrat en euro (croissance ou support euro) sont commercialisés avec des garanties de rémunération minimale (taux minimal garanti). Cette garantie avantageuse pour l'assuré se fait au détriment de l'assureur qui se voit exposé à un risque de taux bas. Depuis la crise de 2008 et la crise des obligations souveraines, le marché des taux s'est durablement affaibli entraînant une crainte grandissante chez les assureurs.

Troisièmement, le risque de rachat peut se produire en cas de hausse brutale des taux. La taille de ce risque est directement liée aux variations de taux.

La modélisation de l'évolution des taux d'intérêt en assurance vie est la brique de base d'un GSE. Un bon modèle de taux en assurance vie doit être capable de générer des taux négatifs et reproduire les facteurs de risque de la courbe des taux du marché. Ces points sont développés pour chaque modèle implémenté.

Une étude de la courbe des taux et des produits dérivés de taux précède un récapitulatif des modèles de taux qui ont été paramétrés, calibrés et testés. Afin de ne pas surcharger ce document, les développements mathématiques ne sont pas reproduits.

2.1 Hull et White

2.1.1 Modèle

Extension du modèle à 1 facteur de Vasicek, le modèle de Hull et White est un modèle de taux court gaussien qui réplique la structure de la courbe des taux initiale. La dynamique du taux court dans ce modèle est :

$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t) + \sigma(t)dW_t \quad (11)$$

La force de rappel $a(t)$ et la volatilité du taux court $\sigma(t)$ sont des fonctions temporelles déterministes. Dans ce mémoire, ces deux fonctions sont considérées constantes : $a(t) = a$ et $\sigma(t) = \sigma$. La fonction $\theta(t)$ est un pseudo-paramètre car entièrement déterminée par la courbe initiale des taux et les paramètres a et σ .

Un avantage majeur de ce modèle est l'existence de formules analytiques pour la valorisation de produits dérivés de taux (*caplet*, *caps/floors*, *swaptions*). Les formules ne sont pas reportées dans ce mémoire (cf. [1], pages 75-78)

Le modèle a fait l'objet de nombreuses critiques ; la diffusion de taux négatifs semblait totalement irréaliste jusqu'à ce que la configuration actuelle des taux bas démontre la réalité des taux négatifs, atténuant ainsi la force des critiques antérieures.

2.1.2 Calibration

La calibration de la force de rappel a et de la volatilité σ est simple. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$(\tilde{a}, \tilde{\sigma}) = \underset{a, \sigma}{\operatorname{argmin}} \sum_{j \in \text{tenors}} \sum_{i \in \text{maturités}} (\text{swaptionModele}_{ij}(a, \sigma) - \text{swaptionMarche}_{ij})^2 \quad (12)$$

La fonction objectif choisie affecte plus de poids aux *swaptions* dont la maturité et le ténor sont lointains. L'objectif est de garantir la réplication de la volatilité implicite des *swaptions* à long terme quelle que soit la liquidité des *swaptions*. D'autres calibrations sont envisageables (minimisation des écarts relatifs *swaptions* marché-modèle, ajout de poids, ...).

La recherche du minimum de la fonction objectif est réalisée par l'algorithme de Levenberg-Macquart (méthode d'optimisation non implémentée pour ce mémoire). La fonction objectif est très convexe selon la direction de l'axe σ . En revanche, la force de rappel a peu d'influence sur la forme de la nappe des prix *swaptions* (cf. figure 14).

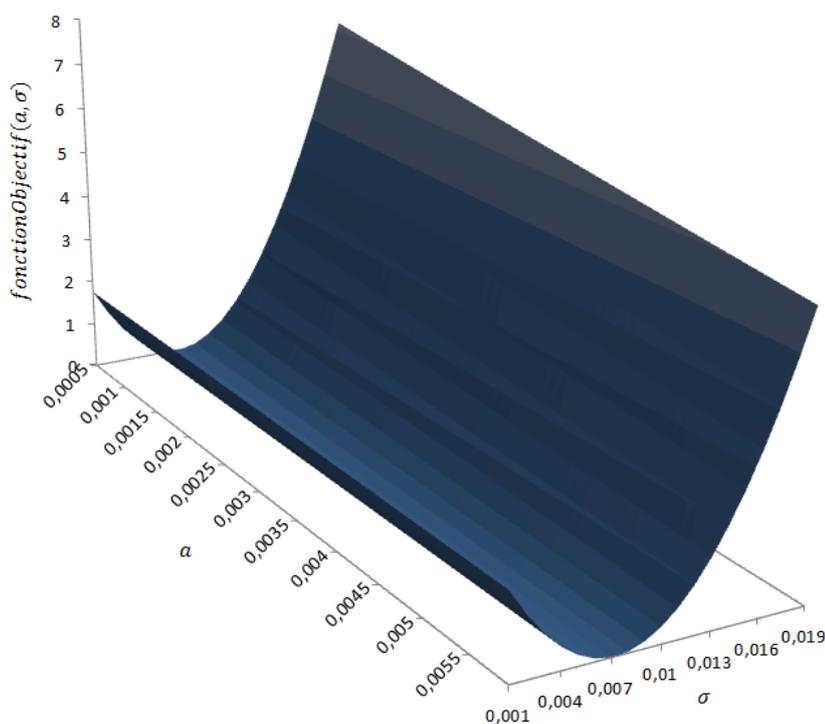


FIGURE 6 – Calibration Hull & White : fonction objectif au 31/12/2016

Le point initial de l'algorithme de Levenberg-Macquart est $(a_{init}, \sigma_{init}) = (0.5\%, 0.5\%)$. Le temps d'exécution est de l'ordre de la minute. Pour tester la robustesse d'estimation des paramètres du modèle, la calibration a été lancée sur plusieurs jeux de données (cf. tableau 7).

	2014	2015	2016
a	0,00492	0,00485	0,00981
σ	0,00635	0,00719	0,00702

FIGURE 7 – Estimations arrondies des paramètres du modèle Hull & White

Les figures 8 à 13 mettent en évidence la pauvreté de la réplication des prix *swaptions* sur des ténors courts. A contrario, la forme de la nappe des prix *swaptions* est plus régulière pour les ténors élevés. Un modèle simple (avec seulement deux paramètres) semble assez performant pour répliquer des prix de *swaptions* du marché sur les trois dernières années.

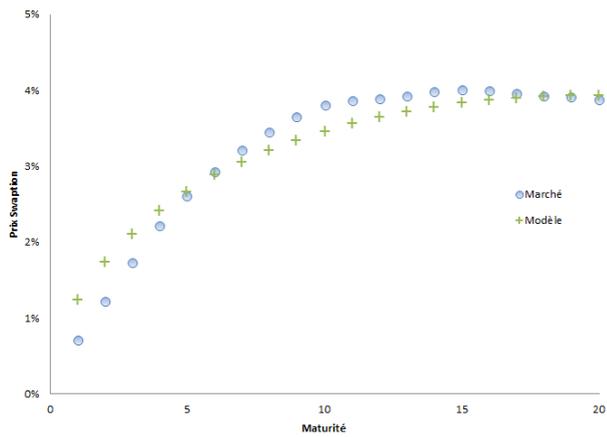


FIGURE 8 – HW - Année 2014 - Ténor 5 ans

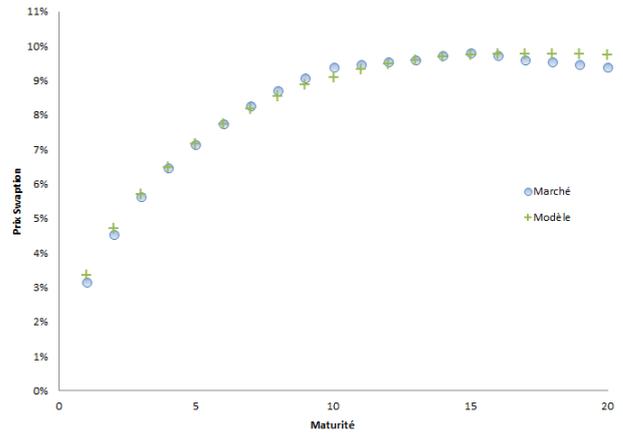


FIGURE 9 – HW - Année 2014 - Ténor 15 ans

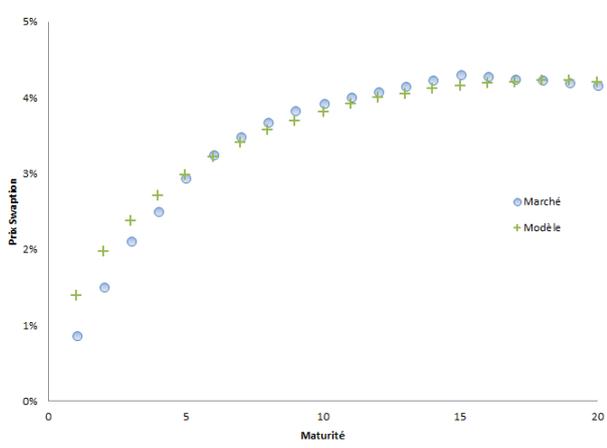


FIGURE 10 – HW - Année 2015 - Ténor 5 ans

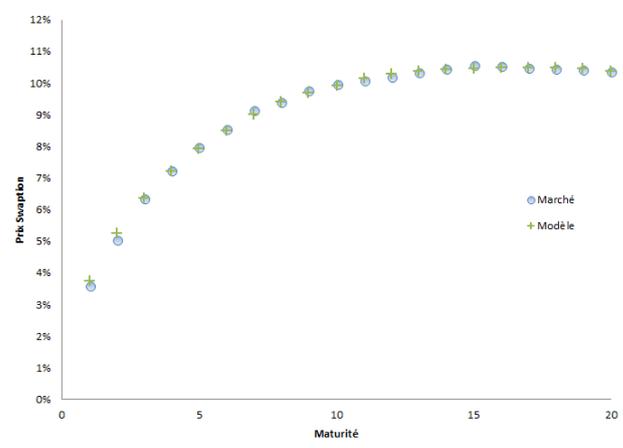


FIGURE 11 – HW - Année 2015 - Ténor 15 ans

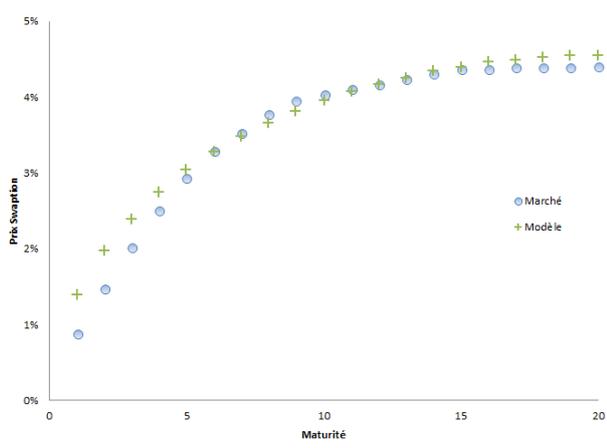


FIGURE 12 – HW - Année 2016 - Ténor 5 ans

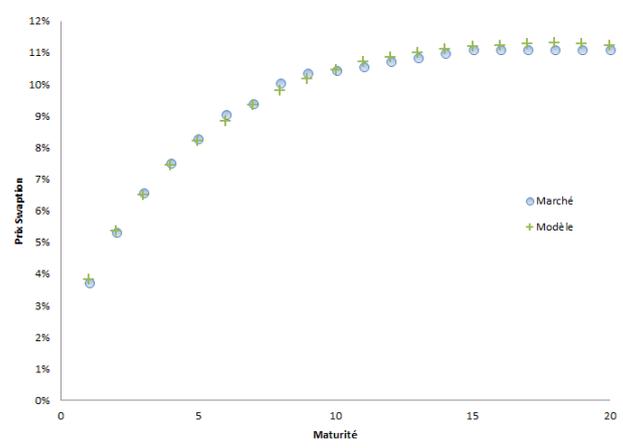


FIGURE 13 – HW - Année 2016 - Ténor 15 ans

2.2 G2++

2.2.1 Modèle

Le modèle de Hull & White est un modèle de taux à un facteur. Les courbes de taux produites (cf. figure 95) par le modèle ne sont pas réalistes : absence d'inversion, rigidité. L'ajout d'un facteur de risque à ce modèle répond à cette faiblesse.

Le modèle de taux G2++ est un modèle de taux court gaussien. La dynamique du taux court s'écrit :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t), r(0) = r_0 \quad (13)$$

Les deux facteurs de risque x et y sont définis par :

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), x(0) = 0 \quad (14)$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), y(0) = 0 \quad (15)$$

$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt \quad (16)$$

Le modèle repose sur cinq paramètres : deux forces de rappel a et b , deux volatilités σ et η et un coefficient de corrélation ρ . La fonction $\phi(t)$ est entièrement définie par la courbe des taux initiale.

Le prix d'une *swaption* européenne, dans le modèle G2++, est dérivée dans [1] en page 158. Sa formulation "simplifiée" s'écrit :

$$P(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} [\Phi(-h_1(x)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e^{\kappa_i(x)} \Phi(-h_2(x))] dx \quad (17)$$

Les notations ne sont pas explicitées et seul quelques conseils d'implémentation sont donnés. Le prix d'une *swaption* est une intégrale sur \mathbb{R} d'une fonction nécessitant une recherche de racine (par l'algorithme de Newton usuel).

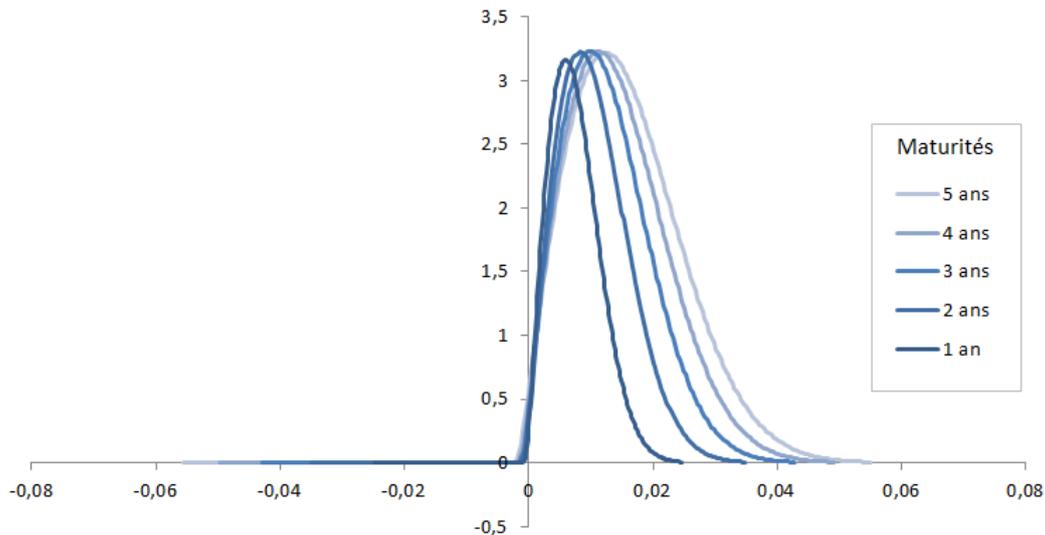


FIGURE 14 – Intégrandes du prix *swaption* G2++ - Ténor 15 ans - 31/12/2016

En pratique, l'intégrale est approchée par la méthode des rectangles. L'intégrande est calculé sur un intervalle centré autour de μ_x et de largeur $8\sigma_x$. Ce dernier est subdivisé en 300 segments de même longueur ; critère suffisant pour garantir une bonne approximation de l'aire.

2.2.2 Calibration

La calibration du modèle de taux gaussien à deux facteurs est assez difficile. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\sigma}, \tilde{\eta}, \tilde{\rho}) = \underset{a, b, \sigma, \eta, \rho}{\operatorname{argmin}} \sum_{\tau \in \text{swaptionsEnsemble}} (\text{swaptionModele}_{\tau}(a, b, \sigma, \eta, \rho) - \text{swaptionMarche}_{\tau})^2 \quad (18)$$

Calculer le prix d'une *swaption* est coûteux en temps de calcul. Seules quelques *swaptions* sont utilisées pour la calibration (cf. figure 15).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0%	0%	0%	1%	1%	1%	1%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	4%	4%	4%	4%	5%	5%
2	0%	0%	1%	1%	1%	2%	2%	3%	3%	4%	4%	4%	5%	5%	5%	6%	6%	6%	7%	7%
3	0%	1%	1%	2%	2%	3%	3%	4%	4%	5%	5%	5%	6%	6%	6%	7%	7%	8%	8%	8%
4	0%	1%	1%	2%	3%	3%	4%	4%	5%	5%	6%	6%	7%	7%	8%	8%	8%	9%	9%	10%
5	1%	1%	2%	2%	3%	4%	4%	5%	5%	6%	6%	7%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	10%	11%
6	1%	1%	2%	3%	3%	4%	5%	5%	6%	7%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	10%	10%	11%	11%
7	1%	1%	2%	3%	4%	4%	5%	6%	7%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	10%	11%	11%	11%	12%
8	1%	2%	2%	3%	4%	5%	5%	6%	7%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	13%
9	1%	2%	2%	3%	4%	5%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	10%	11%	11%	12%	12%	13%
10	1%	2%	2%	3%	4%	5%	6%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	10%	11%	11%	12%	12%	13%
11	1%	2%	3%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	13%	13%
12	1%	2%	3%	3%	4%	5%	6%	7%	7%	8%	9%	9%	10%	10%	11%	11%	12%	12%	13%	13%
13	1%	2%	3%	3%	4%	5%	6%	7%	7%	8%	9%	9%	10%	10%	11%	11%	12%	12%	13%	13%
14	1%	2%	3%	3%	4%	5%	6%	7%	7%	8%	9%	9%	10%	10%	11%	11%	12%	12%	13%	13%
15	1%	2%	3%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	13%	13%	13%
16	1%	2%	3%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	13%	13%	13%
17	1%	2%	3%	4%	4%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	12%	13%	13%
18	1%	2%	3%	4%	4%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	12%	13%	13%
19	1%	2%	3%	4%	4%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	12%	13%	13%
20	1%	2%	3%	4%	4%	5%	6%	7%	8%	8%	9%	9%	10%	11%	11%	12%	12%	12%	13%	13%

FIGURE 15 – Ensemble des *swaptions* utilisées pour la calibration du modèle G2++

La minimisation de la fonction objectif est réalisée par l'algorithme de Métropolis-Hastings. Le point initial est $(0.0001, 1.9478, 0.0062, 0.0299, -0.766)$. La température initiale de 0.002 est assez froide pour garantir une recherche locale du minimum (le point initial est choisi avec confiance). Le tirage des points d'exploration suit une loi normale multidimensionnelle d'écart type 0.003 sans structure de dépendance. L'algorithme s'arrête lorsque le nombre d'itération est maximal ou la température atteint un minimum. La décroissance de la température est une suite géométrique de raison 0.9. Pour contrôle, l'algorithme a été testé sur des fonctions unidimensionnelles simples (cf. annexes).

Comme pour la calibration du modèle de Hull & White, les paramètres du modèle G2++ ont été estimés sur plusieurs jeux de données (années 2014, 2015 et 2016) : cf. figure 16.

	2014	2015	2016
a	0,0054	0,0106	0,0001
b	1,9390	1,9431	1,9478
σ	0,0064	0,0078	0,0062
η	0,0312	0,0404	0,0299
ρ	-0,7693	-0,7650	-0,7661

FIGURE 16 – Estimations arrondies des paramètres du modèle G2++

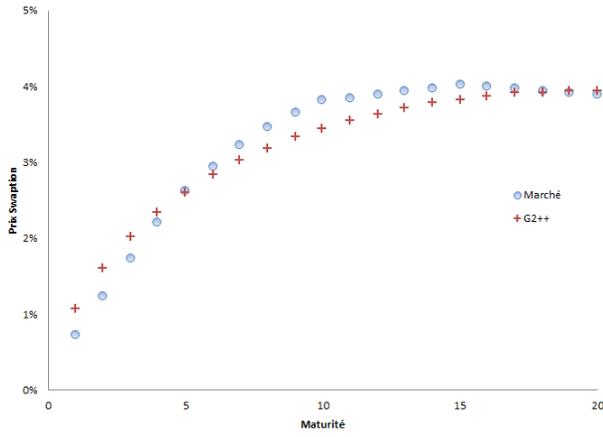


FIGURE 17 – G2++ - Année 2014 - Ténor 5 ans

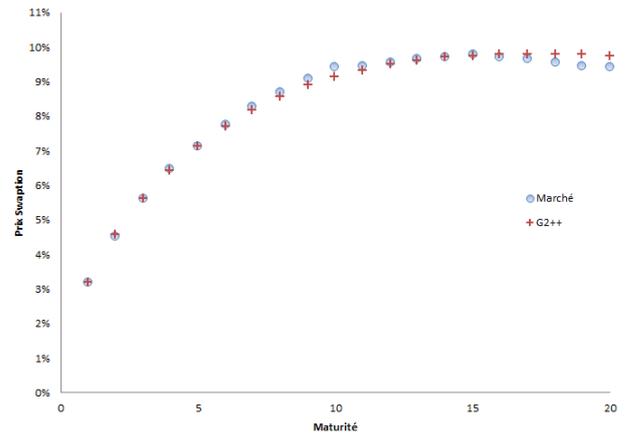


FIGURE 18 – G2++ - Année 2014 - Ténor 15 ans

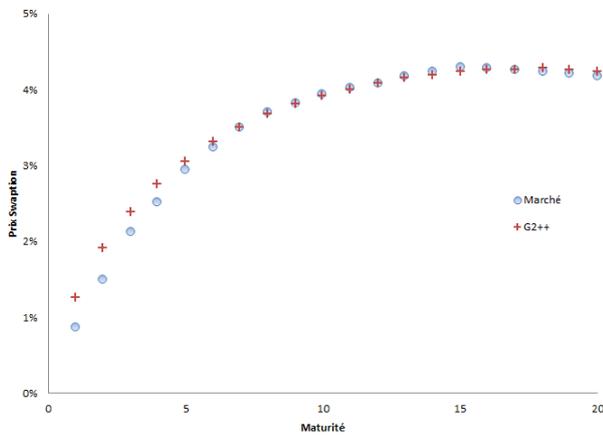


FIGURE 19 – G2++ - Année 2015 - Ténor 5 ans

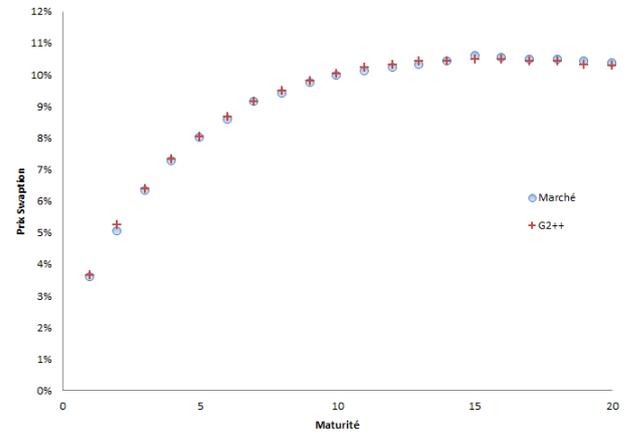


FIGURE 20 – G2++ - Année 2015 - Ténor 15 ans

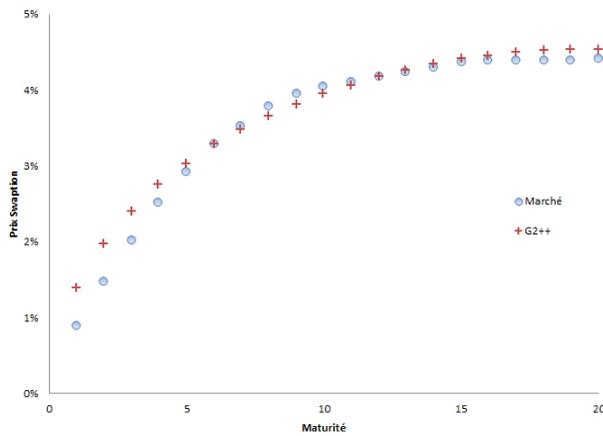


FIGURE 21 – G2++ - Année 2016 - Ténor 5 ans

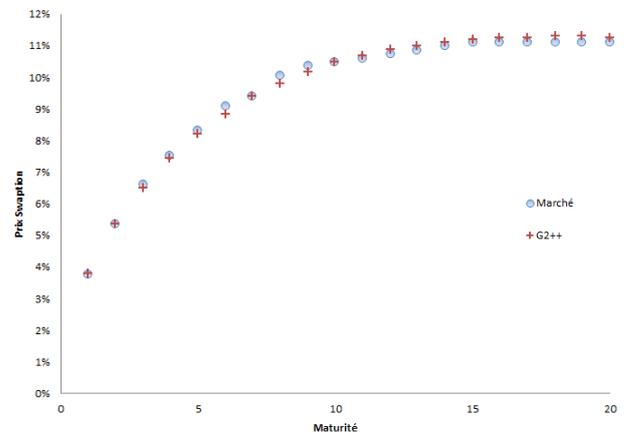


FIGURE 22 – G2++ - Année 2016 - Ténor 15 ans

2.3 Libor Market Model

2.3.1 Modèle

Le modèle de taux *Libor Market Model* (LMM) est un modèle de marché. Contrairement aux modèle de taux court à 1 ou 2 facteurs, chaque taux *forward* est considéré comme une source de risque. Sous la mesure *forward* neutre Q_k , la dynamique du taux *forward* s'écrit :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dW_k(t) \quad (19)$$

La distribution du taux *forward* est log-normale ; distribution définie sur un support positif. Les taux négatifs ne sont pas admis dans ce modèle. Pour être utilisable avec les données actuelles (contexte de taux bas/négatifs), le modèle LMM est ajusté par un paramètre *shift* s .

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)(F_k(t) + s)dW_k(t) \quad (20)$$

La généralisation du modèle LMM et ses extensions sont présentées dans le papier [9]. Sous Q_0 , la dynamique du taux *forward* se réécrit :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)(F_k(t) + s) \sum_{j=1}^k \frac{\tau_j \rho_{jk} \sigma_j(t)(F_j(t) + s)}{1 + \tau_j F_j(t)} + \sigma_k(t)(F_k(t) + s)dW_k(t) \quad (21)$$

En pratique, les taux *forwards* projetés sont annuels. Les volatilités sont constantes par morceaux. Il n'existe pas de formule exacte pour le prix d'une *swaption* dans ce modèle.

2.3.2 Calibration

La calibration du modèle diffère de la procédure pour les modèles de la classe Heath-Jarrow-Morton (HJM). Malgré l'absence de formule exactes, des approximations du prix d'une *swaption* existent. La formule de Rebonato établit le lien entre les volatilités du modèle $\sigma_k(t)$ et les volatilités de marché σ_{ij}^M (cf. [1] page 283). Pour le modèle DD-LMM, la formule s'adapte :

$$(\sigma_{\alpha,\beta}^M)^2 = \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{w_i(0)w_j(0)(F_i(0) + s)(F_j(0) + s)\rho_{ij}}{(S_{\alpha,\beta} + s)^2} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt \quad (22)$$

En postulant un profil de volatilité en escalier $\sigma_i(t) = \sigma_{i,\beta(t)}$, Brigo et Mercurio propose un algorithme de calibration en cascade *Cascade Calibration Algorithm* (CCA) (cf. [1] page 322) qui a l'avantage d'être rapide et exacte. Cette procédure résout itérativement un polynôme pour déterminer la volatilité solution. Des problèmes surviennent lorsque cette solution a une partie imaginaire non nulle. Dans ce cas, la volatilité est supposée nulle (cf. annexes). Calibrer les volatilités sur la courbe des taux *swap* ne réduit pas le nombre de volatilités irréelles (courte étude non communiquée).

Pour étendre la nappe des volatilités des taux *forwards*, un deuxième algorithme a été proposé par Brigo et Mercurio : le *Rectangular CCA* (RCCA). Ce nouvel algorithme est similaire au CCA. Les volatilités inconnues (cf. figure 24 sous la diagonale) sont supposées égales.

L'horizon de projection des scénarios économiques pour projeter les bilans en assurance est lointain. Par conséquent, l'extrapolation des volatilités des taux *forwards* est à définir. Cette extrapolation est complexe. La volatilité extrapolée est égale à la volatilité moyenne du taux *forward* associé. La grille complète des volatilités des taux *forwards* est en annexe.

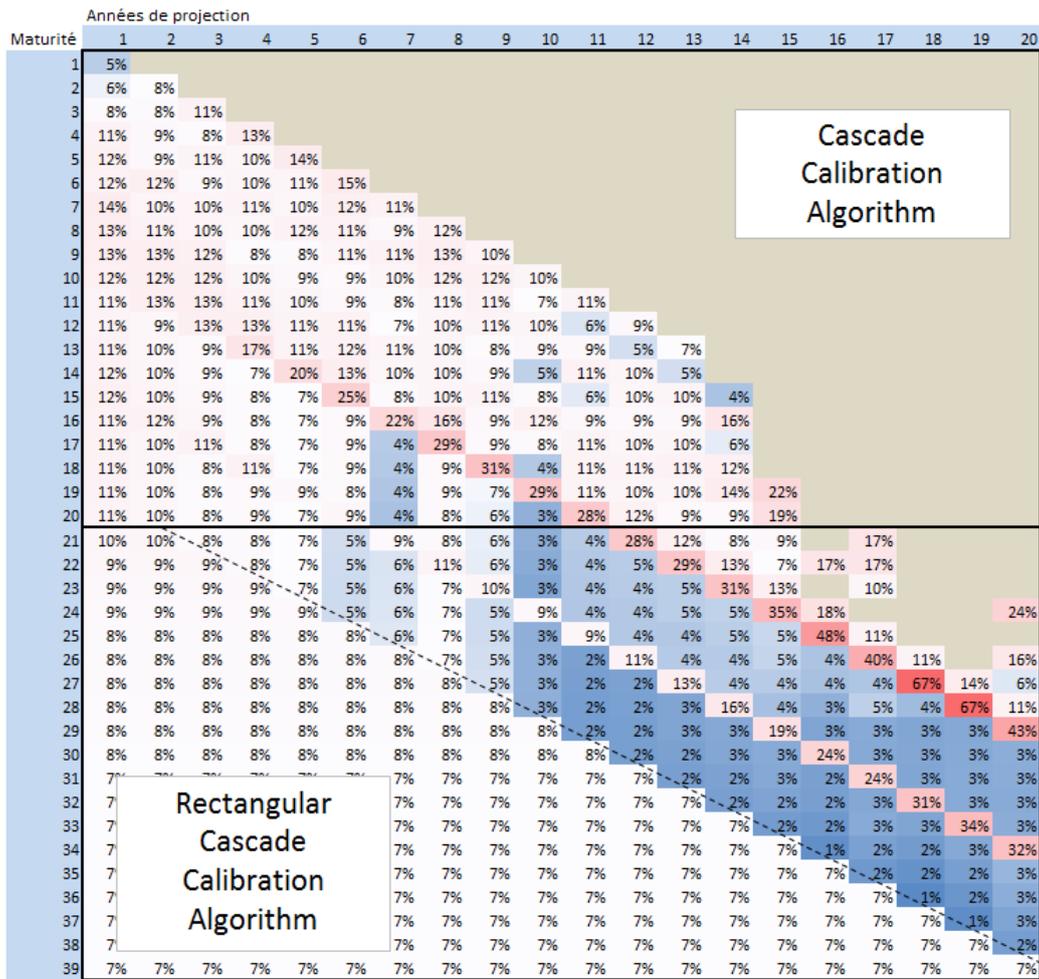


FIGURE 23 – Volatilité des taux *forwards* calibrées au 31/12/2016 - *shift* 5%

L'algorithme CCA+RCCA est testé par recalcul des volatilités Black puis des prix des *swaptions*. Les graphiques 25 à 30 illustrent la qualité de réplication des prix pour le modèle DD-LMM avec/sans matrice de corrélation paramétrique. La prise en compte des corrélations dans l'algorithme CCA engendre beaucoup de volatilités irréelles sur le jeu de données 2014 et impacte négativement la qualité de calibration. La qualité de réplication des prix *swaptions* par le modèle sur les jeux de données 2014 et 2015 est appréciable.

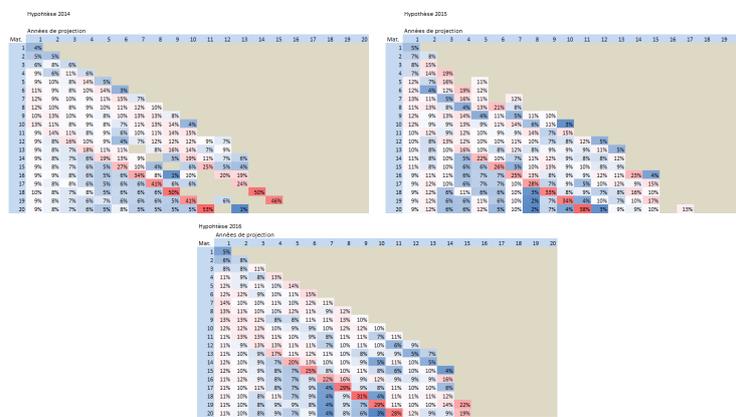


FIGURE 24 – Volatilité des taux *forwards* calibrées au 31/12/2016

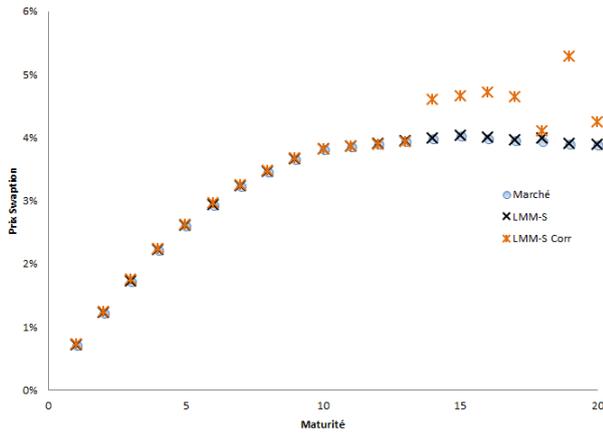


FIGURE 25 – DD-LMM - Année 2014 - Ténor 5 ans

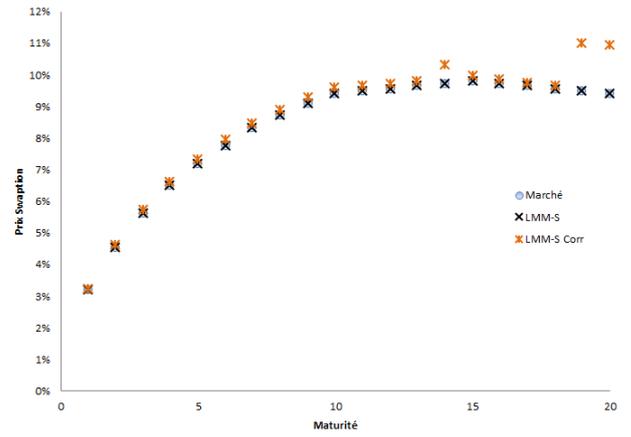


FIGURE 26 – DD-LMM - Année 2014 - Ténor 15 ans

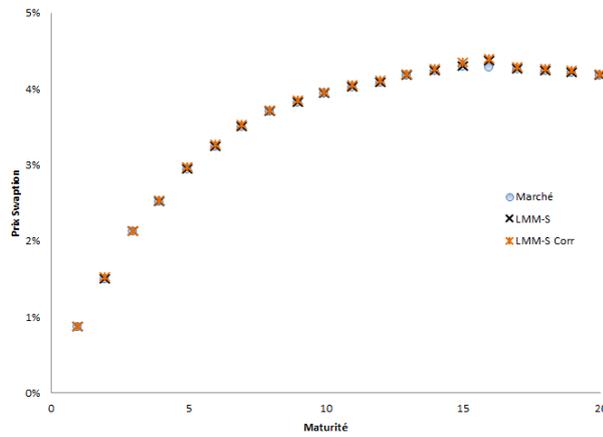


FIGURE 27 – DD-LMM - Année 2015 - Ténor 5 ans

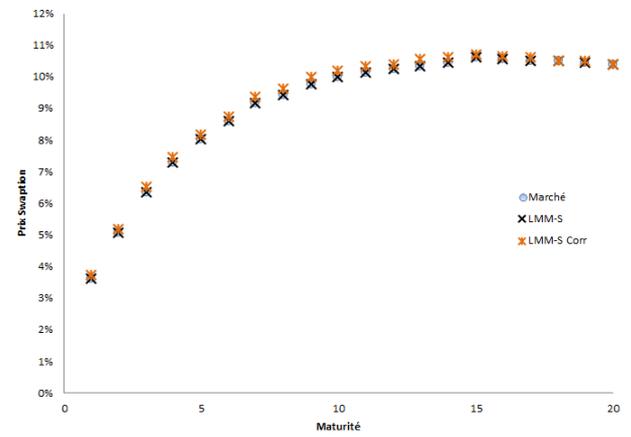


FIGURE 28 – DD-LMM - Année 2015 - Ténor 15 ans

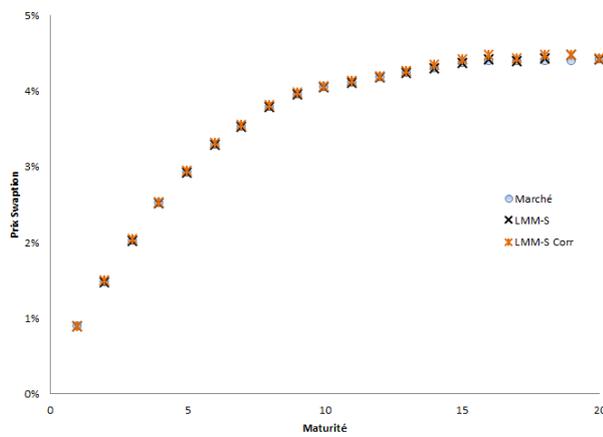


FIGURE 29 – DD-LMM - Année 2016 - Ténor 5 ans

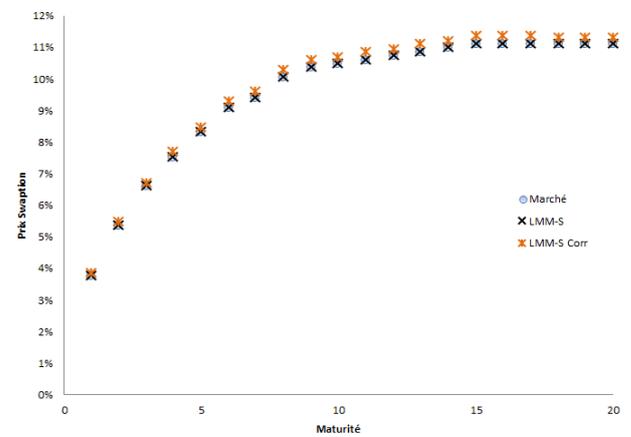


FIGURE 30 – DD-LMM - Année 2016 - Ténor 15 ans

2.3.3 Structure de dépendance

La structure de dépendance des taux *forward* peut être prise en compte par le modèle de taux LMM. La prise en compte de l'interaction des taux *forwards* de différentes maturités permet au GSE de créer des courbes des taux plus flexibles (cf figure 98) et d'augmenter le nombre de facteurs de risques.

D'un point de vue technique, l'algorithme de calibration CCA prend en paramètre la matrice de corrélation des taux *forward* (coefficient ρ_{ij} de l'équation 22). A cause du nombre important de paramètres, l'estimation de cette matrice n'est pas aisée. Plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les corrélations risque-neutre (cf. livre [1]). Actuellement, la structure de dépendance est paramétrique et repose sur le choix de trois paramètres : la corrélation long terme ρ_∞ , l'intensité de la décroissance de la corrélation β et un coefficient d'ajustement α .

$$\rho_{ij} = \rho_\infty + (1 - \rho_\infty) \exp[-|i - j|(\beta - \alpha(\max(i, j) - 1))] \quad (23)$$

Ces paramètres sont difficiles à estimer à partir des données du marché. Le choix de cette structure nécessite une étude plus approfondie. Dans ce mémoire, les valeurs des corrélations sont estimées à partir des corrélations historiques (minimisation de l'écart quadratique entre le modèle et la matrice des corrélations des taux *forwards* historiques). La figure 32 représente les corrélations historiques estimées à partir de la chronique des taux *swap* mensuelle du 31/12/2009 au 30/06/2017.

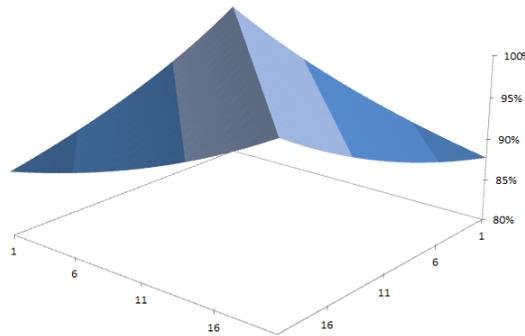


FIGURE 31 – Matrice de corrélation - $\alpha = 0$, $\beta = 0.05$, $\rho_\infty = 0.8$

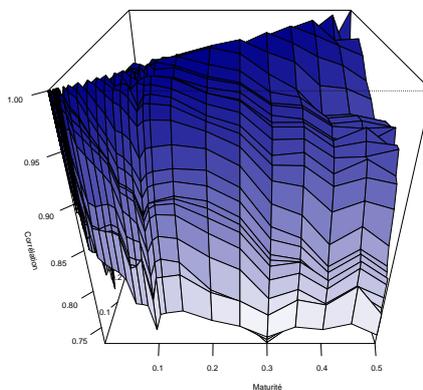


FIGURE 32 – Corrélations historiques des taux forwards

3 Architecture & Conception

La conception de la structure du GSE répond à un cahier des charges précis :

- Automatisation de la production des scénarios stochastiques risque neutre
- Optimisation du temps de calcul lors de la génération des scénarios grâce à la parallélisation
- Maintenance et suivi rapide d'un code simple, commenté et organisé
- Architecture du logiciel en cohérence avec les potentielles évolutions réglementaires à venir
- Simplification de l'interface utilisateur afin de réduire le risque opérationnel
- Implémentation de tests tout au long de la chaîne de production des scénarios pour garantir une qualité de production satisfaisante

Le langage de programmation choisi pour implémenter le GSE est le C#. C'est un langage orienté objet compilé qui permet d'implémenter des solutions informatiques performantes. La gestion automatique de la mémoire par le compilateur permet d'alléger la charge de travail du développeur sans perte importante de puissance de calcul.

Le schéma fonctionnel synthétique (figure 33) vise à présenter l'environnement du GSE et ses principales interactions. Les données lues et écrites par le GSE sont au format excel. Toutes les entrées et sorties sont soumises à des contrôles de validation de l'état, de la qualité et de cohérence de la donnée.

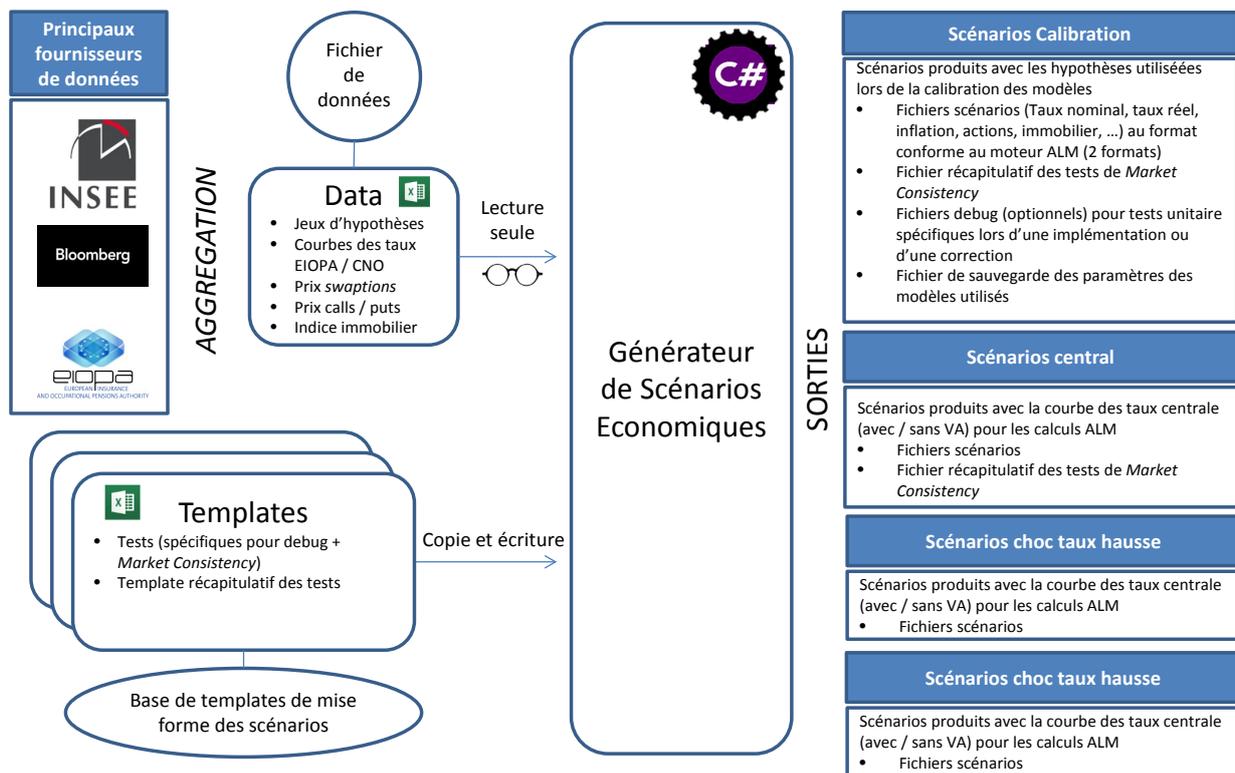


FIGURE 33 – Schéma fonctionnel du GSE

Pour devenir une solution fiable et durable, le GSE doit être conçu sur une architecture simple, structurée et flexible. Dans cet esprit, l'agencement des objets et des variables du code a souvent été repris avant d'obtenir la forme actuelle, considérée stable et satisfaisante. Le GSE implémenté est une proposition innovante de solution informatique pour la génération de scénarios économiques. Par de la recherche sur les interactions entre les modèles financiers, la calibration sur des produits du marché ou l'optimisation algorithmique, une version plus avancée du GSE est souhaitable.

3.1 Fonctionnement général

Pour fonctionner, le générateur de scénarios économiques lit un tableur. Les données d'entrée sont les chroniques de données du marché, les courbes des taux réglementaires de l'EIOPA et des séries financières. L'objectif de ce fichier d'entrée est :

- de permettre le croisement des hypothèses de génération des scénarios dans le cadre des études actuarielles d'analyse des risques financiers.
- de centraliser (agrégation) les chroniques des informations de marché pour analyser l'impact de l'évolution du marché sur le bilan économique Solvabilité 2 dans le temps et pour réduire les coûts de recherche des données financières.
- d'homogénéiser les méthodes de production des indicateurs de solvabilité avec l'utilisation actuelle du logiciel ALM.

Le bloc fonctionnel de transformation et de validation des données est contenu dans le GSE (centralisation du code). En pratique, chaque type de donnée de marché est construit dans le GSE par une classe spécifique. Cette décomposition permet d'implémenter des méthodes de calcul de variables supplémentaires, de tester les données lues dans le fichier d'input et de sécuriser l'accès aux variables par l'ajout d'accesseurs.

La capture d'écran 34 représente l'interface de contrôle de la lecture des données. L'utilisateur renseigne les chemins d'accès aux données, aux paramètres des jeux de scénarios déjà simulés et aux fichiers de mise en forme pour les sorties de test. En dessous, la console permet de visualiser les étapes de lecture pour faciliter la détection des erreurs dans le code, analyser les coûts en temps de calcul de chaque ligne et rendre plus transparent le fonctionnement de l'outil.

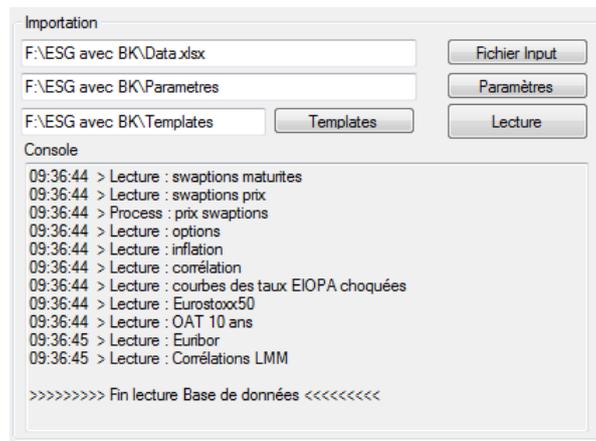


FIGURE 34 – Interface de lecture des données

Les hypothèses relatives à un jeu de scénarios économiques sont rassemblées dans le fichier des données. Pour éviter des calculs inutiles, les jeux d'hypothèses ne sont pas interprétés lors de la lecture du fichier. La création de la classe *hypothese.cs* est réalisée à partir d'une seconde interface (cf. figure 35). Deux méthodes de sélection sont possibles : multiple (production) ou unitaire (test).

La première permet de générer plusieurs jeux d'hypothèses automatiquement. L'option de parallélisation des calculs est en cours de développement. Par défaut, l'exécution des calculs s'effectue de manière itérative. Le jeu d'hypothèses est interprété puis le générateur de scénarios est lancé. Une fenêtre dynamique de contrôle de l'avancement des calculs est en cours de conception. Cette fenêtre doit permettre de suivre l'évolution des calculs en temps réel et d'afficher les tests de la chaîne de production pour chaque jeu d'hypothèses. Pour pallier le problème de *monitoring*, le processus de génération des scénarios est possible au travers de la console du

système (cf. figure 36).

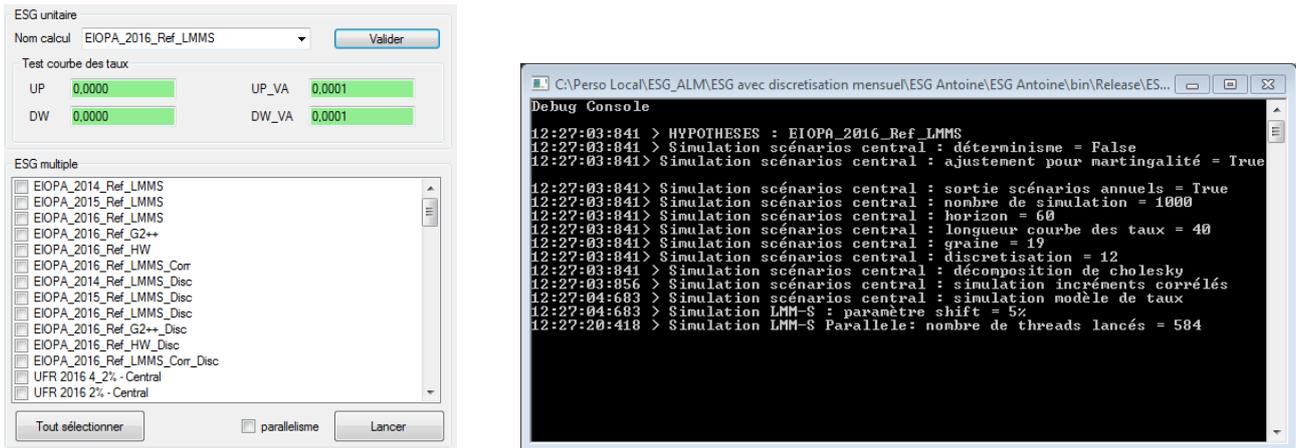


FIGURE 35 – Interface de sélection des hypothèses de calcul et console système

La méthode de sélection unitaire lit un jeu d'hypothèses, initialise l'environnement associé (plus tests) puis ouvre une fenêtre permettant de modifier les hypothèses de base. L'implémentation de cette fonctionnalité est antérieure à la sélection multiple et reste utile pour tester les implémentations plus récentes dans le GSE. La méthode de sélection précédente permet également d'éviter l'étape de calibration si le jeu d'hypothèses a déjà été généré. Dans ce cas, les paramètres des modèles financiers sont lus à partir d'un fichier de sauvegarde. Cette fonctionnalité n'est pas encore disponible pour la sélection multiple. L'étape de calibration est systématiquement faite.

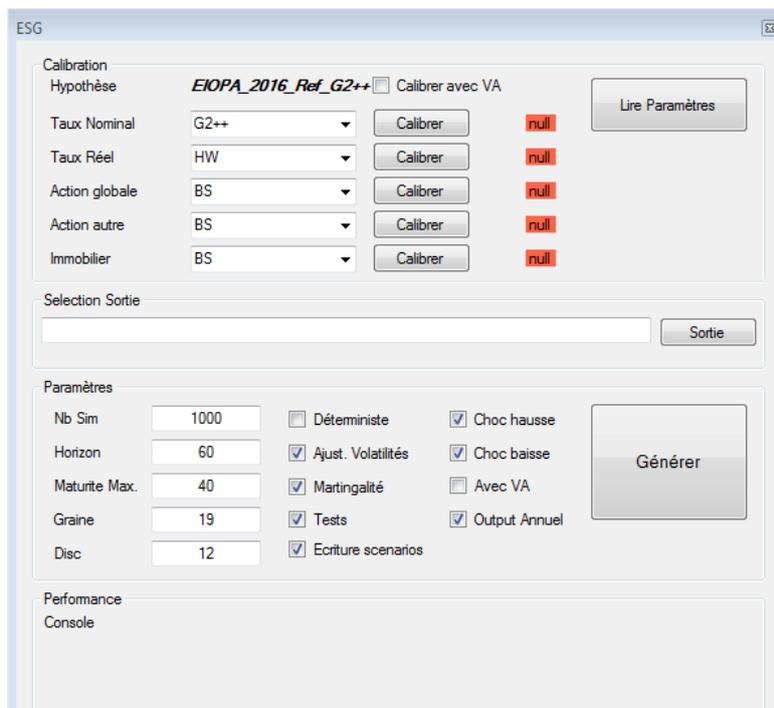


FIGURE 36 – Interface de sélection des hypothèses de calcul

3.2 Génération de l'aléa

Pour produire des scénarios stochastiques, chaque modèle doit pouvoir simuler une variable aléatoire normale sur chaque pas de temps de la projection. La génération de cet aléa s'effectue par la technique classique d'inversion de la fonction de répartition d'une loi normale Z appliquée à une variable de loi uniforme U .

$$Z = \Phi^{-1}(U) \quad (24)$$

Bien que la fonction de répartition Φ ne possède pas d'expression analytique, cette opération est possible grâce à des algorithmes d'approximation de la fonction réciproque par des morceaux de fonctions exponentielles.

La génération d'une variable aléatoire uniforme à partir d'une machine de Turing déterministe est une tâche complexe. Le générateur de nombres pseudo-aléatoires implémenté dans le package *Random()* est l'algorithme soustractif inventé par Donald E. Knuth's (The Art of Computer Programming, Volume 2 : Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley, Reading, MA, third edition, 1997). La graine initiale est un paramètre du GSE qui garantit la réplique de l'aléa et par conséquent des scénarios produits.

Les chroniques des lois normales produites sont toutes indépendantes. Cependant, les variables financières sont soumises à une structure de corrélation particulière. Pour répliquer cet effet, une matrice de corrélation doit être donnée par l'utilisateur. A chaque pas de temps, le vecteur des lois normales devient corrélé grâce à une décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation :

$$N_{corr} = LN_{indep} \quad (25)$$

L est la matrice triangulaire inférieure résultant de la décomposition de Cholesky d'une matrice de corrélation symétrique et définie positive (test à effectuer au préalable).

Des tests de validation de la qualité des corrélations, de la moyenne et des écarts-types des variables normales générées sont effectués à l'issue de cette étape. Les graphiques de la figure 38 représentent la structure de corrélation entre les indices action et immobilier.

La génération des séries des incréments normaux en amont des projections implique un temps de calcul global plus grand. Cependant, ce choix d'implémentation présente deux avantages : le test des chroniques d'aléa à la source et la possibilité d'implémenter une structure de corrélation plus complexe (copule) sans impacter le reste du code.

3.3 Modèles financiers

Le générateur de scénarios risque neutre implémente des classes de modèles financiers. Deux grandes étapes sont communes à tous ces objets : la calibration sur des produits dérivés de taux d'intérêt et la simulation selon un pas de temps précis. L'implémentation de ces méthodes est obligatoire lors de l'implémentation d'un modèle de taux : elles sont définies en *abstraite* dans la classe mère. Ce choix d'implémentation permet de séparer le code complexe des modèles financiers du code de l'exécution du GSE.

Le diagramme de classe de la figure 39 représente l'organisation et les dépendances de chacune des classes de modèles. Quatre types de variables économiques sont modélisées dans le GSE : action, immobilier, inflation, taux réels et taux nominaux. Chacune des variables économiques possède un ensemble de modèles qui peut être augmenté selon les besoins de modélisation.

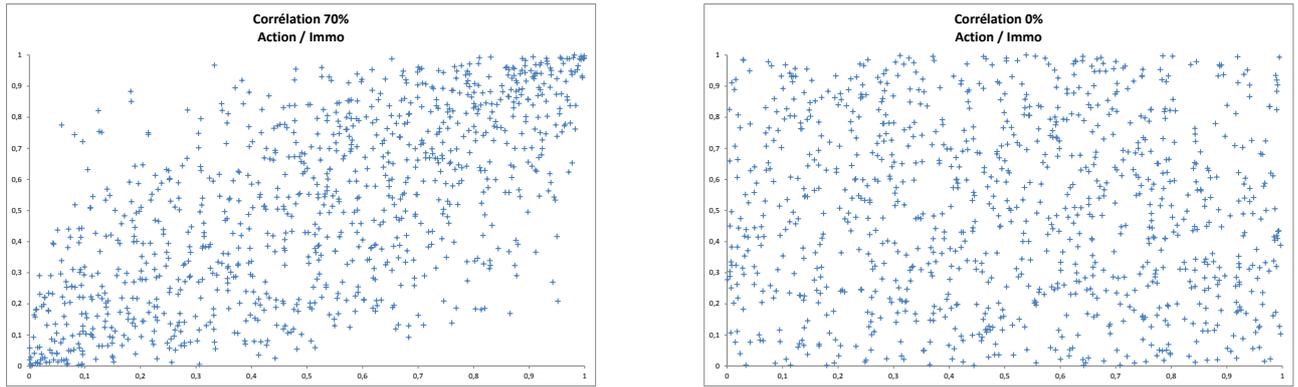


FIGURE 38 – Corrélation 70% Action / Immobilier

Dans le cadre de ce mémoire, l'étude d'impact des modèles de taux implique une charge de travail accrue dans la recherche et l'implémentation des modèles de taux. Par conséquent, cette branche du GSE est plus riche que les autres classes d'actif.

Représentées sur le diagramme 39, deux modèles de taux court G2++ et Hull & White implémentent la calibration, la simulation et certains tests spécifiques du modèle. Le modèle de marché a été décliné sous plusieurs formes : *shift*, corrélations, parallélisation. Les classes *LMMS_Corr_Parallele* et *LMMS_Parallele* implémentent la parallélisation des simulations des classes respectives *LMMS_Corr* et *LMMS*. Le sujet est abordé plus en profondeur dans la section 3.6.

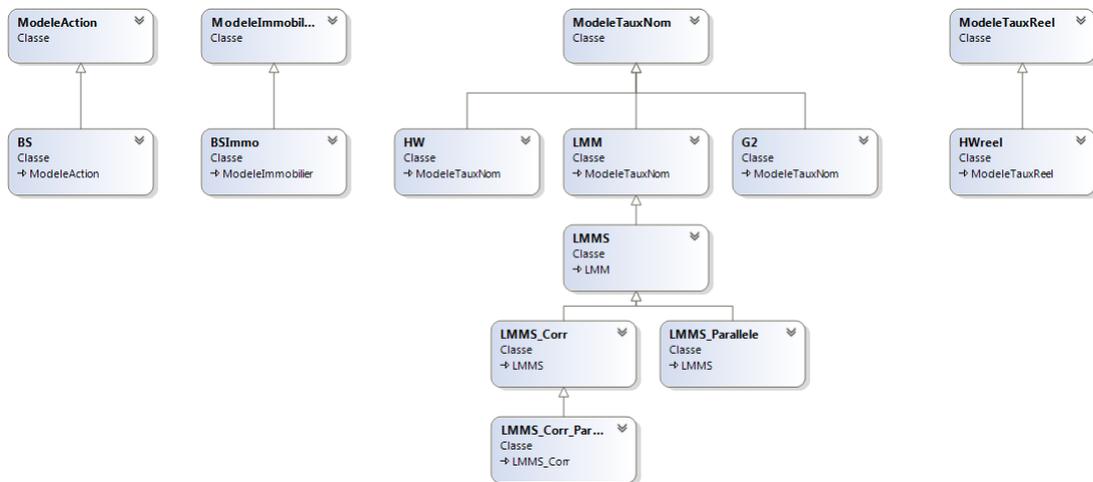


FIGURE 39 – Diagramme de classes des modèles financiers

L'indices action est modélisé par un modèle de Black & Scholes à volatilité constante. La volatilité de l'accroissement relatif de l'indice est estimée par la volatilité implicite sur une chronique de prix d'option de vente / achat du marché (SX5C / SX5P). Le taux de dividende implicite est calculé par la formule de parité call/put. Cette classe peut être complétée : modèle de Black et Scholes avec volatilité constante par morceaux, modèle de Heston, modèle à sauts poissonniens.

L'indice immobilier est également modélisé par une dynamique de Black & Scholes. Contrairement à l'indice action, peu de produits dérivés liquides du marché immobilier européen existent. Le paramètre n'est pas estimé sur des données de marché et doit faire l'objet d'une étude au préalable. D'autres modèles plus adaptés à la modélisation de la dynamique de l'immobilier peuvent être ajoutés : modèles à changement de régimes (voir [6]).

La courbe des taux réels est modélisée par un modèle de Hull et White dont les paramètres de retour à la moyenne a et de volatilité σ sont constants. Comme dans la modélisation de l'indice immobilier, les deux paramètres sont difficilement estimables et requièrent une analyse d'expert. L'ajout d'autres modélisations du taux d'intérêt réel est également possible.

En remarque, les *spreads* de crédit obligataires sont directement produits par le logiciel ALM. La modélisation de cet ensemble de variables économiques en risque-neutre croisée avec les autres indices constitue une évolution possible à la version actuelle du GSE.

3.4 Scénarios stochastiques

Le stockage des scénarios risque-neutre est externalisé dans des objets spécifiques contenant des méthodes de tests, de lecture et d'écriture propres. Le diagramme de classe 40 représente l'architecture des classes contenant les scénarios produits par les modèles risque-neutre.

Les scénarios risque-neutre économiques sont de deux types : les indices (classe *ProjectionIndice*) et les courbes de taux (classe *ProjectionTaux*). Beaucoup de méthodes communes (martingalité, quantiles, statistiques, lecture, écriture) sont implémentées dans les classes mères.

Le taux d'actualisation représenté par le déflateur ne fait pas partie de ces deux classes car les méthodes de test de martingalité et de calcul des quantiles sont spécifiques. L'indice monétaire est, quant à lui, produit par le modèle de taux d'intérêt nominal. Il correspond à la revalorisation d'une valeur initiale unitaire par le taux court.

Séparer les classes contenant les scénarios des modèles financiers des classes des modèles financiers présente l'avantage de factoriser le code pour réduire les temps de maintenance et sécuriser les tests.

3.5 Chaîne de production

3.5.1 Vision fonctionnelle

La production des scénarios par le générateur suit un enchaînement précis (cf. figure 42). La première phase de la production est la calibration des paramètres du générateur sur les données de marché d'un jeu d'hypothèse. Chaque jeu d'hypothèse contient une courbe avec et sans VA qui doit être sélectionnée comme référence. A partir de cette donnée, les paramètres des modèles associés à chaque variable économique sont estimés. L'objectif de cette étape, précédant la génération du central, est de vérifier la propriété de *Market Consistency* des scénarios générés (conformité des scénarios).

Dans un deuxième temps, le générateur de scénarios économiques produit des scénarios risque-neutre sans changement des paramètres (volatilités implicites) qui sont ajustées lors de la phase de calibration. Une nouvelle courbe des taux peut être utilisée dans cette étape. Par exemple, les paramètres des modèles peuvent être calibrés sur la courbe des taux EIOPA hors VA puis utilisés pour la génération des scénarios économiques avec une courbe des taux EIOPA

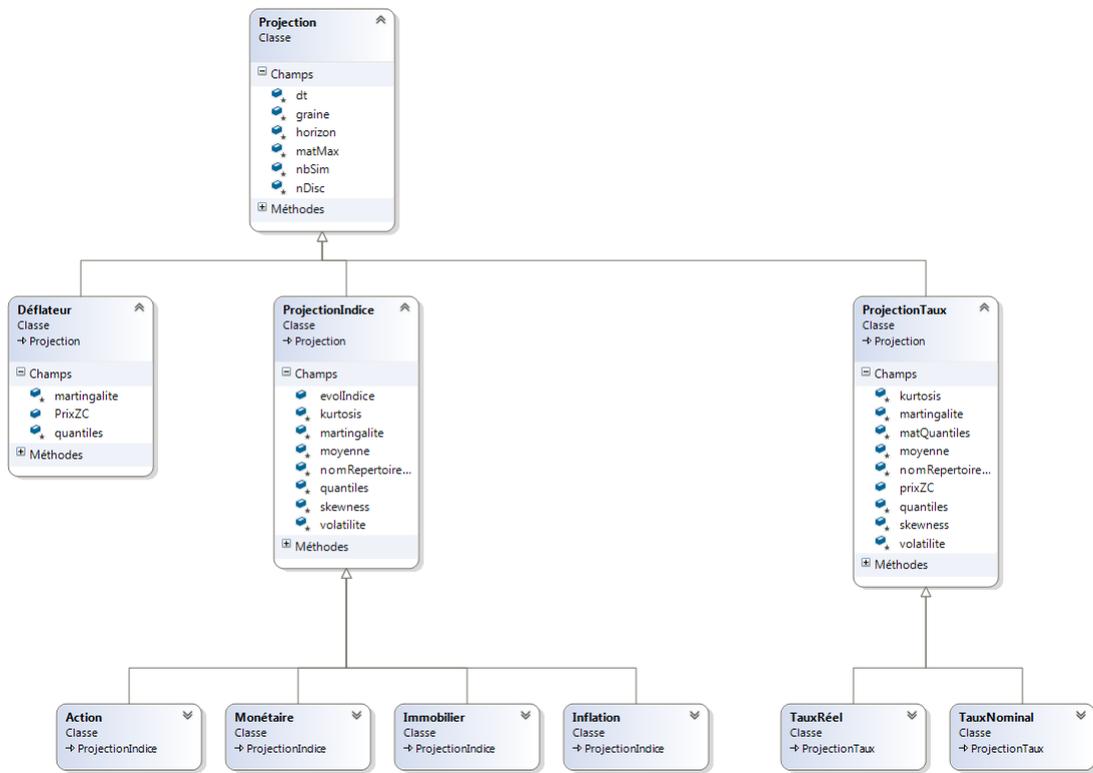


FIGURE 40 – Diagramme de classes des scénarios

qui inclut la VA. La qualité des scénarios générés est mesurée par la batterie de tests effectués sur les scénarios issus de la phase de calibration.

Enfin, le logiciel génère les jeux de scénarios avec une courbe des taux choquée à la hausse ou/et à la baisse. L'écriture des tests, hors tests de *Market Consistency*, permettent de visualiser les scénarios choqués à la hausse/baisse.

Pour être performant, certaines étapes de la chaîne de production des scénarios économiques ne sont pas exécutées (cf. figure 42). Par exemple, lors de l'implémentation d'un nouveau modèle, l'actuaire peut efficacement tester son code en activant seulement l'écriture des fichiers de tests ; réduisant ainsi le temps d'exécution global.

3.5.2 Étape de la génération

Pour respecter une certaine cohérence économique, les scénarios sont produits dans un ordre précis (cf. figure 41). Pour initialiser l'environnement économique, le GSE diffuse les courbes de taux nominal. Le taux court correspond au taux "sans risque" r_t . Dans cette première étape, l'indice monétaire et les déflateurs sont également calculés. Pour la i -ème simulation, le déflateur D s'écrit :

$$D^i(T) = e^{-\int_{t=0}^T r_u^i du} \quad (26)$$

L'indice monétaire M représente la capitalisation d'une épargne placée au taux sans risque.

$$M^i(T) = e^{\int_{t=0}^T r_u^i du} = \frac{1}{D^i(T)} \quad (27)$$

Dans le monde risque-neutre, tous les actifs ont un rendement moyen égal au taux sans risque du marché. Ils capitalisent au taux sans risque r_t et sont soumis aux variations de marché. Par exemple, l'équation de diffusion log-normales des actions S_t s'écrivent :

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \quad (28)$$

Les courbes de taux réel sont projetées avec un modèle de taux (Hull-White par exemple). Pour être risque neutre, les scénarios subissent un retraitement des déflateurs associés aux taux réels en déflateurs liés au taux nominal.

L'indice inflation est directement obtenu à partir de la relation de Fisher :

$$(1 + r_{nominal}) = (1 + r_{reel})(1 + r_{inflation}) \quad (29)$$

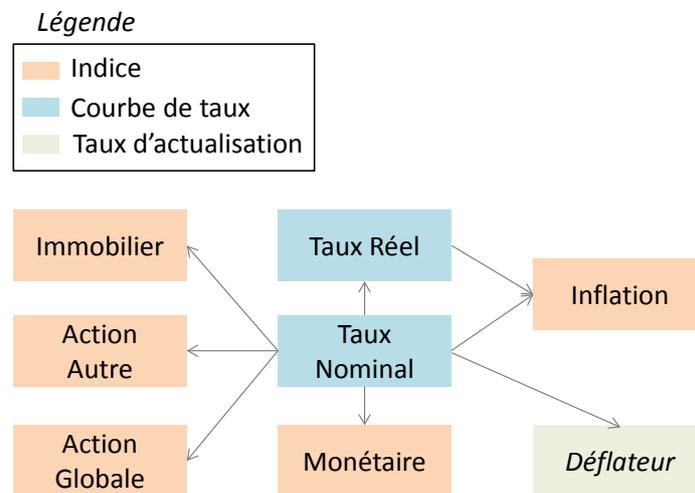


FIGURE 41 – Schéma descriptif des dépendances inter variables économiques

Chaque étape de la génération des scénarios de la figure 42 sont détaillées sur le schéma 43.

Les scénarios sont une première fois produits avec le générateur risque-neutre calibré. Pour économiser des temps de calcul, la production des incréments (voir partie 3.2) n'est pas renouvelée dans la génération du central et des chocs de taux.

Chaque changement de courbe de taux nominal (par exemple, lors d'un choc de taux) est accompagné d'un recalcul de la courbe des taux réels afin de conserver la relation 29 valide.

Le GSE autorise la diffusion des scénarios de taux nominal stressés à la hausse et à la baisse avec deux types de volatilité : absolue ou relative. L'option de conservation des volatilités absolues permet de conserver la volatilité absolue du central après application du choc de taux à la courbe de taux. En pratique, les taux nominaux sont simplement translatés non uniformément vers le haut/bas pour être consistant avec la courbe des taux stressée à la hausse/baisse. Par défaut, le GSE utilise cette option. En deuxième approche, le GSE peut diffuser les scénarios avec la même volatilité du modèle de taux et une courbe des taux différentes.

Pour conserver des temps de calcul acceptables, les calculs ALM sont souvent faits sur la base de 1000 scénarios économiques. Pour cet échantillonnage, la martingalité est très imparfaite et nécessite un ajustement. Chaque retraitement est immédiatement appliqué après la génération de l'indice ou des courbes de taux.

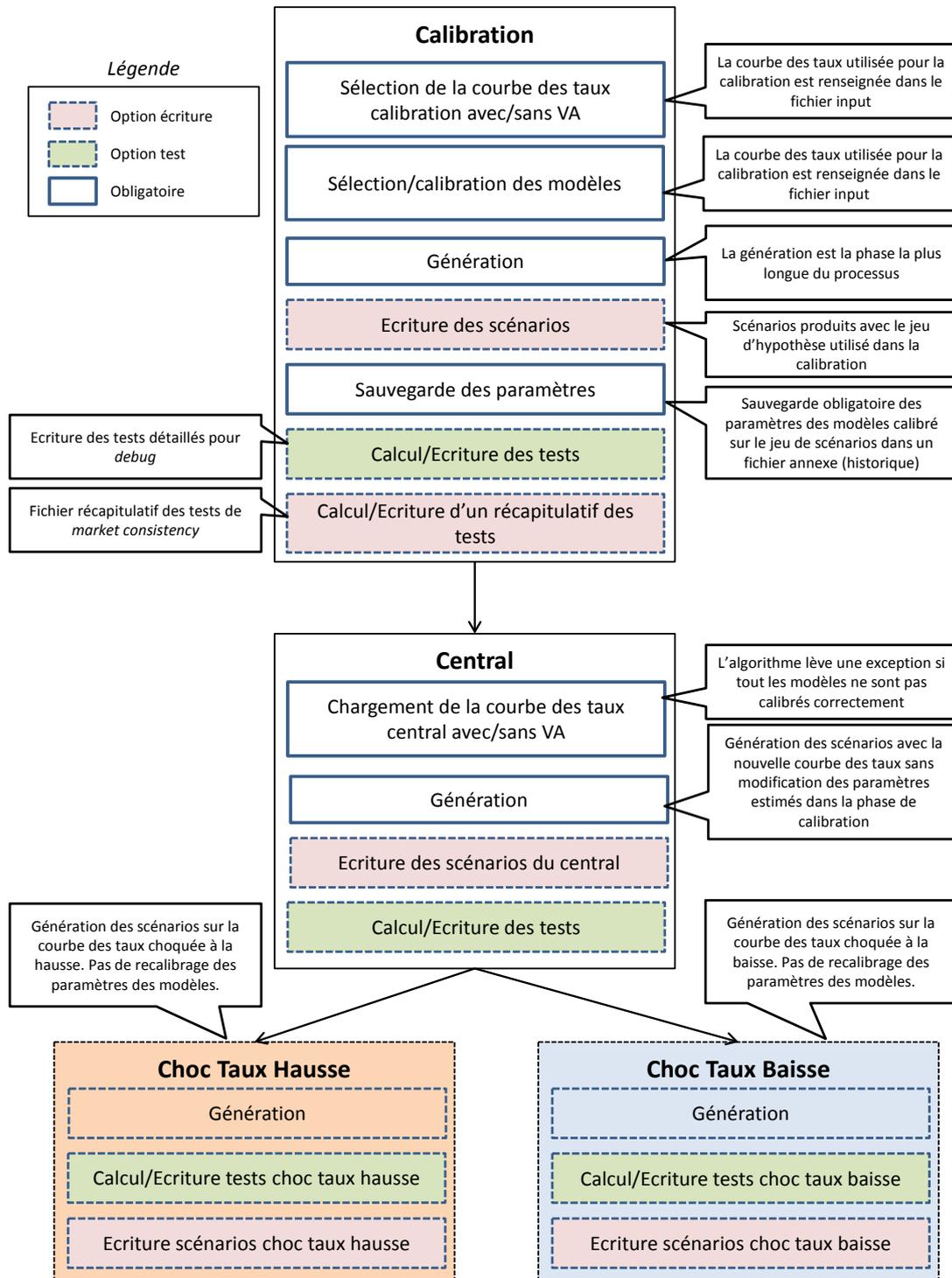


FIGURE 42 – Schéma descriptif de la chaîne de production des scénarios

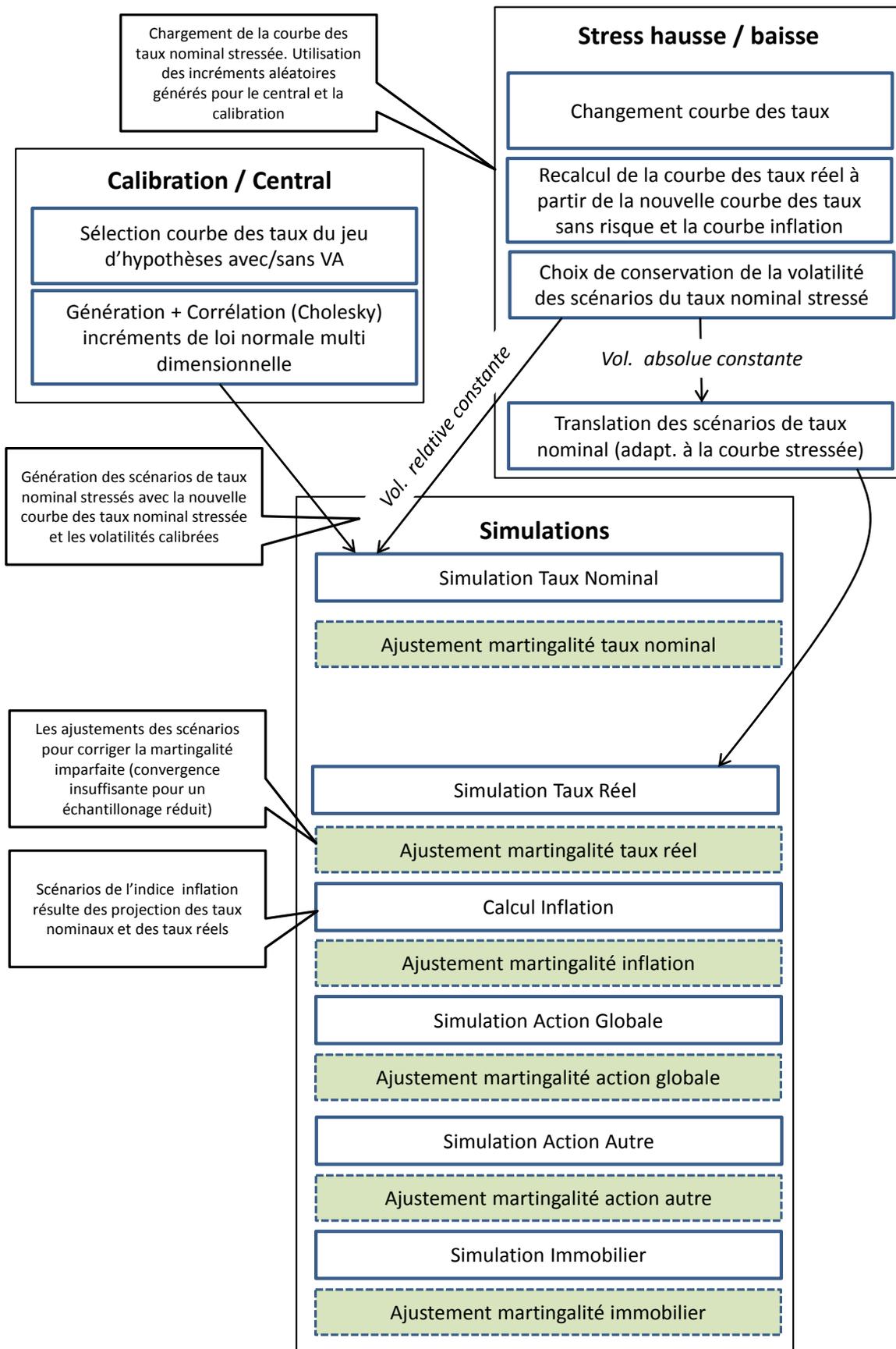


FIGURE 43 – Schéma descriptif de la génération des scénarios

3.6 Optimisation et temps de calcul

La performance du générateur de scénarios économiques est un critère important pour l'assureur. La réduction des temps de calculs permet d'alléger la charge de travail sur les serveurs informatiques, de faciliter la production de tables de scénarios économiques pour effectuer des sensibilités ALM et d'améliorer les processus de calibration des modèles financiers souvent lourds.

Tout au long du projet, beaucoup d'améliorations ont été apportées au logiciel. Une fois les modèles testés et validés, une phase d'optimisation des parties de code les plus coûteuses en temps de calcul a été menée. Cette tâche consiste, d'une part, à décomposer les lignes de calculs mathématiques longues afin d'augmenter la qualité du code produit par le compilateur. D'autre part, il est souvent utile de stocker dans des variables locales des résultats qui sont réutilisables a posteriori. En fait, l'utilisation des fonctions exponentielles, logarithmiques, racines, puissances sont "très" chronophages et leur utilisation doit être parcimonieuse. Cette attention appliquée au code du GSE a permis de nombreuses économies en temps de calcul.

La simulation des scénarios économiques représente environ 70% du temps total de calcul. En particuliers, les modèles de taux de marché (LMM, DD-LMM) sont coûteux en temps de calcul. En fait, pour ces modèles, la projection de chaque taux *forward* engendre un nombre d'opérations important :

```
// Drift
double drift = 0;
for (int k = annee * arguments.nDisc; k <= matDt; k++)
{
    int anneeVol = Convert.ToInt32(Math.Floor((double)k / arguments.nDisc));
    drift += arguments.dt * arguments.volFwd[anneeVol - 1, annee - 1] *
        (arguments.tauxFwd[indiceDiscret - 1][k] + arguments.shift) / (1 + arguments.dt *
        arguments.tauxFwd[indiceDiscret - 1][k]);
}

// Incrément
int anneeVolMatDt = Convert.ToInt32(Math.Floor((double)matDt / arguments.nDisc));
double tauxFwdDiscCurr = Math.Sqrt(arguments.dt) * arguments.epsilon[(annee - 1) *
    arguments.nDisc + (pas - 1)];
tauxFwdDiscCurr += (drift - 0.5 * arguments.volFwd[anneeVolMatDt - 1, annee - 1]) *
    arguments.dt;
tauxFwdDiscCurr *= arguments.volFwd[anneeVolMatDt - 1, annee - 1];
tauxFwdDiscCurr = (arguments.tauxFwd[indiceDiscret - 1][matDt] + arguments.shift) *
    Math.Exp(tauxFwdDiscCurr) - arguments.shift;
```

Pour un horizon de projection de 60 ans et une maturité maximale de la courbe des taux de 40 ans, les 100 premiers taux *forwards* de la courbe de taux doivent être diffusés. Par conséquent, pour un pas de discrétisation mensuel et un nombre de scénarios égal à 1000, 108,5 millions d'appels au code ci-dessus sont exécutés.

$$nb_{calculs} = \frac{(matMax + horizon)(matMax + horizon - 1)}{2} nb_{scenarios} nb_{disc} \quad (30)$$

Pour pallier l'utilisation massive de la capacité de calcul du CPU, le code a été parallélisé sur 8 cœurs grâce à un gestionnaire de *threads* nommé *semaphore*. Cette classe gère une liste d'attente contenant les simulations en cours d'exécution et alimente les cœurs libres de la machine.

Chaque simulation dure un temps aléatoire. Par conséquent, l'ordre d'exécution des simulations n'est pas assuré par le gestionnaire de *threads*. Les simulations sont rangées dans un ordre

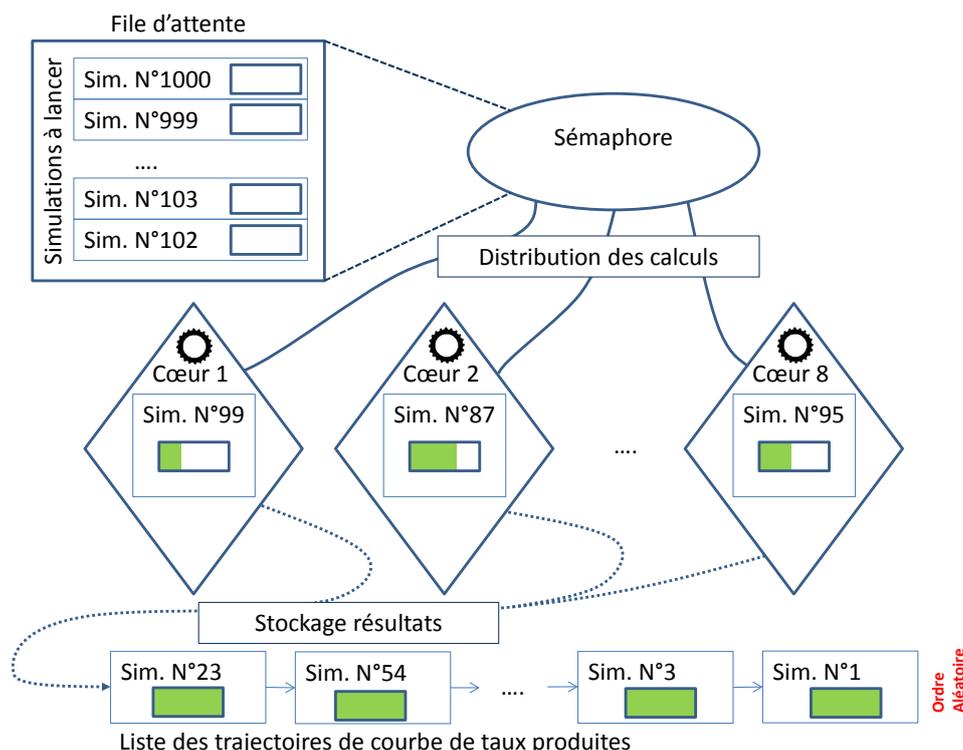


FIGURE 44 – Schéma descriptif de la parallélisation du modèle LMM

aléatoire dans une liste chaînée simple. Le tri à posteriori n'est pas nécessaire. Cependant, afin de conserver une cohérence dans la chaîne de production des scénarios, chaque simulation est référencée dans un tableau d'adresses indicées par l'identifiant de la simulation (clé).

Le temps d'exécution total des simulations parallélisées est également inconnu. Pour contrôler l'avancement de l'exécution des calculs, une fonction additionnelle est mise en place pour dénombrer le nombre de simulations exécutées sur une base périodique de 500ms.

3.7 Discrétisation

Les calculs de certains contrats d'assurance vie sont à effectuer avec un pas temporel plus court que l'année. Par exemple, pour un contrat euro-croissance, la stratégie d'allocation d'actifs peut être hebdomadaire. Pour répondre à ce besoin, un bon GSE en assurance vie doit être capable de produire des scénarios avec différents pas de discrétisation.

Le générateur de scénarios économiques produit des scénarios dont le pas de projection est paramétrable par la variable $nDisc$. Tous les tests adaptés à la discrétisation et de non régression sont fonctionnels. En revanche, le moteur ALM n'est pas suffisamment avancé pour prendre en compte les scénarios économiques discrets. Aucun test au travers de calculs ALM n'est donc pour l'instant possible.

La courbe des taux initiale est interpolée par des splines cubiques (méthode externe). Les prix zéro coupon discrets et les taux *forwards* discrets sont ensuite calculés. En pratique, les codes assurant la production des scénarios annuels et des scénarios discrets sont actuellement séparés. En fait, pour garantir la convergence du schéma de discrétisation d'Euler, les scénarios économiques annuels nécessitent un pas de temps faible. Cette contrainte requiert l'utilisation d'un *buffer* qui n'est pas nécessaire dans le cas de la discrétisation. D'autres différences entre les deux méthodes de génération existent et vont dans le sens d'une préférence pour la

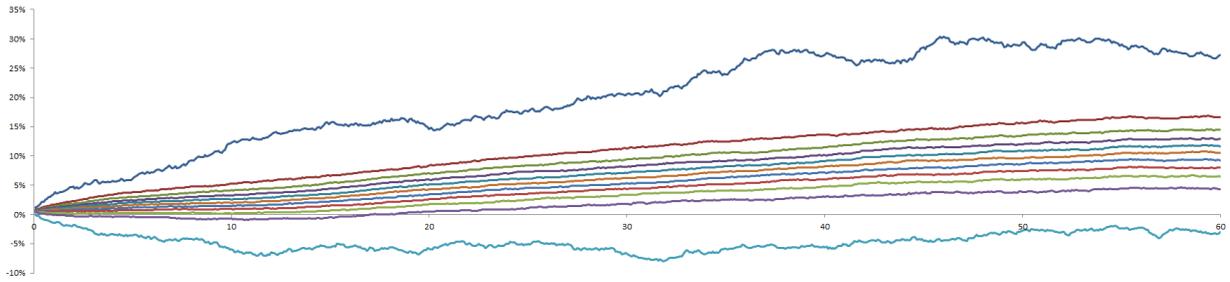


FIGURE 45 – Quantiles du taux 10 ans - Hull & White version discrète - 31/12/2016

discrétisation.

La version discrétisée du modèle DD-LMM utilise la même procédure de calibration que la version annuelle du DD-LMM : les volatilités annuelles des taux *forwards* sont calculées par l'algorithme CCA. La grille des volatilités obtenue est alors affinée (cf. annexes) selon le pas de projection souhaité en conservant la volatilité annuelle sur tous les taux *forwards* discrétisés. Les taux *forwards* d'une même année sont tous parfaitement corrélés : corrélations identiques par année de maturité de la courbe des taux initiale.

En pratique, la discrétisation impacte les temps de calculs et d'écriture. Les temps de calculs ne sont pas augmentés sur les modèles de taux court (HW, G2++). En revanche, la complexité liée à la simulation simultanée de plusieurs taux *forwards* dans le cas du modèle LMM est très coûteuse (parallélisation de mise : ~ 15 minutes). Les temps d'écriture sont aussi augmentés. La taille du fichier contenant un indice/taux augmente du nombre de simulations multiplié par l'horizon pour l'incrément d'un pas de temps.

3.8 Tests

Toute la chaîne de production des scénarios est soumise à des tests stricts afin de garantir la conformité du GSE aux exigences réglementaires et internes. Les tests se déclinent en trois types :

- les tests de *Market Consistency* imposés par la réglementation Solvabilité 2
- les tests de visualisation des données produites
- des statistiques numériques sur les variables aléatoires

Martingalité Le test de réplication des prix des zéro coupons est imposé par la réglementation Solvabilité 2.

Un zéro coupon est une obligation ne versant pas de coupons et de *payoff* unitaire. Ce produit n'est pas coté sur le marché. Les zéro coupons sont construits à partir de plusieurs produits dérivés de taux liquides : FRA, swaps, ...

Le prix d'un zéro coupon de maturité T est l'espérance sous la mesure risque neutre \mathbf{Q} du *payoff* unitaire actualisé au taux sans risque. Cette formule littérale se retranscrit en termes mathématiques :

$$P(t, T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[e^{-\int_{u=t}^T r_u dt} \mathbf{1}] \quad (31)$$

En multipliant, les deux membres par le prix zéro coupon associé à la courbe des taux du marché $P^M(0, t)$:

$$P^M(0, T) = P^M(0, t) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[e^{-\int_{u=t}^T r_u dt}] \quad (32)$$

Cette dernière égalité doit être vérifiée pour toutes les maturités T de la courbes des taux projetée et toutes les dates t de projection.

En pratique, le test de martingalité permet également de valider l'implémentation des fonctions relatives à la génération des taux stochastiques. Le GSE produit des sorties visuelles qui attestent de la qualité de la répliation des zéro coupons (cf. figure 46).

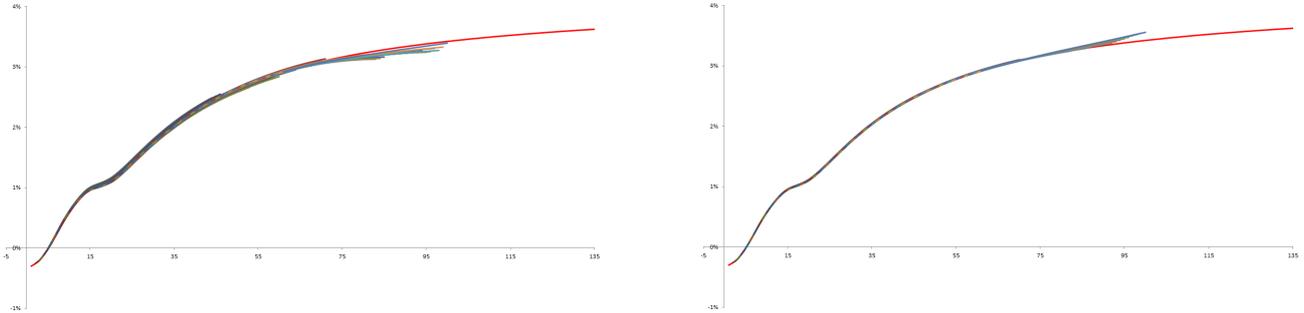


FIGURE 46 – Convergence des prix des zéro coupons pour 1000 et 10000 scénarios - DD-LMM

Réplication des prix swaptions L'article 22-3 du règlement délégué 2015/35 oblige l'assureur à tester la répliation des prix des produits financiers utilisés lors de la calibration des modèles.

Les modèles de taux du GSE sont tous calibrés à partir des prix *swaptions straddle EUSP ATM* observés en fin de mois. Une *swaption straddle* se réplie par l'achat d'une *swaption* payeuse et d'une *swaption* receveuse de même strike. De plus, le prix d'une *swaption* payeuse à la monnaie est égale au prix d'une *swaption* receveuse à la monnaie. Par conséquent, le prix d'une *swaption* payeuse (ou receveuse) à la monnaie est la moitié du prix d'une *swaption straddle* à la monnaie. Ce prix de la *swaption* sous-jacente est utilisé dans la calibration des paramètres des modèles de taux.

Les scénarios économiques du taux nominal sont *Market Consistent*. Deux biais de répliation sont possibles :

- un écart de convergence des prix *swaptions* recalculés par la méthode de Monte Carlo vers les prix implicites du modèle
- un écart de calibration entre prix implicites du modèle et les prix observés sur le marché

Les prix *swaptions* Monte Carlo correspondent à des valeurs de l'estimateur des moments défini dans l'équation 5. En posant n le nombre de trajectoires simulées et k le numéro de la simulation, l'estimateur des moments s'écrit :

$$\hat{P}S(0, T_\alpha, T_\beta, K, N) = N \sum_{k=1}^n D^{(k)}(0, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P^{(k)}(T_\alpha, T_i) (K - S^{(k)}(T_\alpha, T_\beta))^+ \quad (33)$$

Pour comprendre ces notions, trois jeux de scénarios ont été générés avec le modèle de Hull & White à partir des données de marché du 31 décembre 2016 (paramètres calibrés reste inchangés) :

- Figure 47 : 1 000 scénarios économiques risque-neutre sans ajustement pour martingalité
- Figure 48 : 10 000 scénarios économiques risque-neutre sans ajustement pour martingalité
- Figure 49 : 1 000 scénarios économiques risque-neutre avec ajustement pour martingalité

Une comparaison rapide entre les graphiques 47 et 48 met en évidence l'importance du nombre de scénarios dans la répliation des prix du modèle. La correction de la martingalité des scénarios économiques impacte positivement l'écart des prix *swaptions* modèle/marché. En moyenne pour ce ténor, 60% du biais entre les prix *swaptions* modèles/marché est expliqué par le défaut de martingalité.

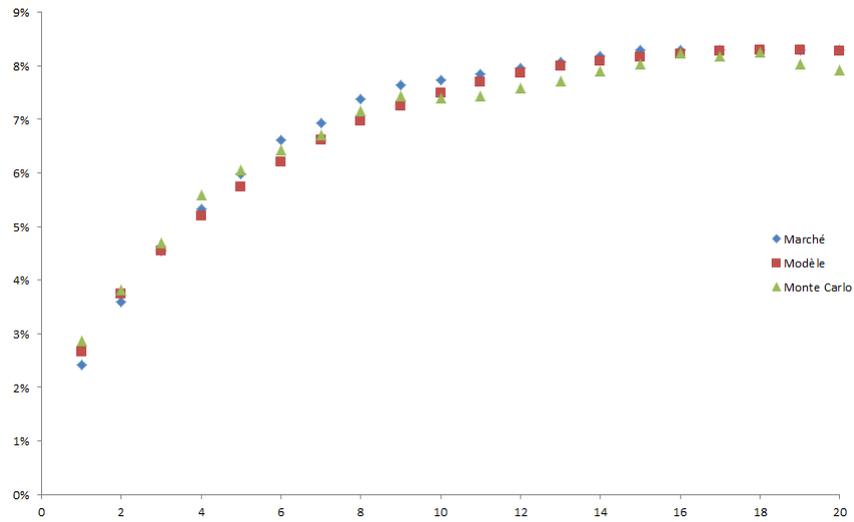


FIGURE 47 – Réplication des prix *swaptions* Hull & White - 1 000 scénarios - Hors ajustement

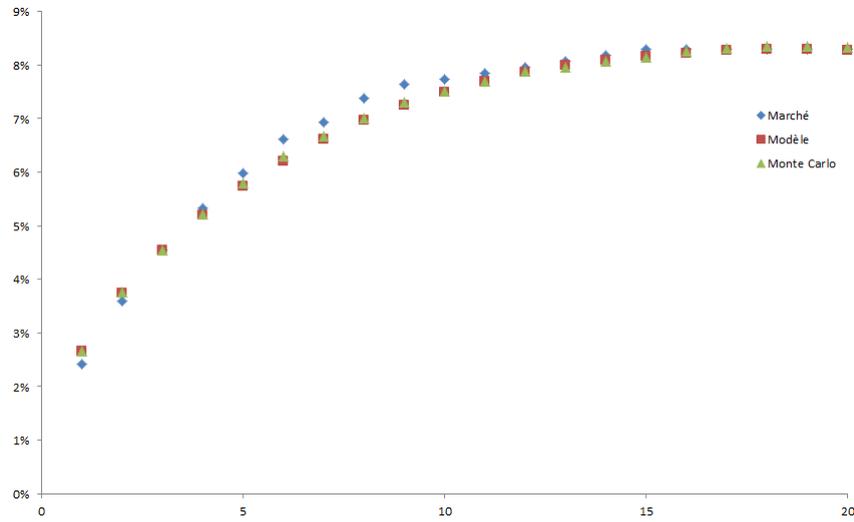


FIGURE 48 – Réplication des prix *swaptions* Hull & White - 10 000 scénarios - Hors ajustement

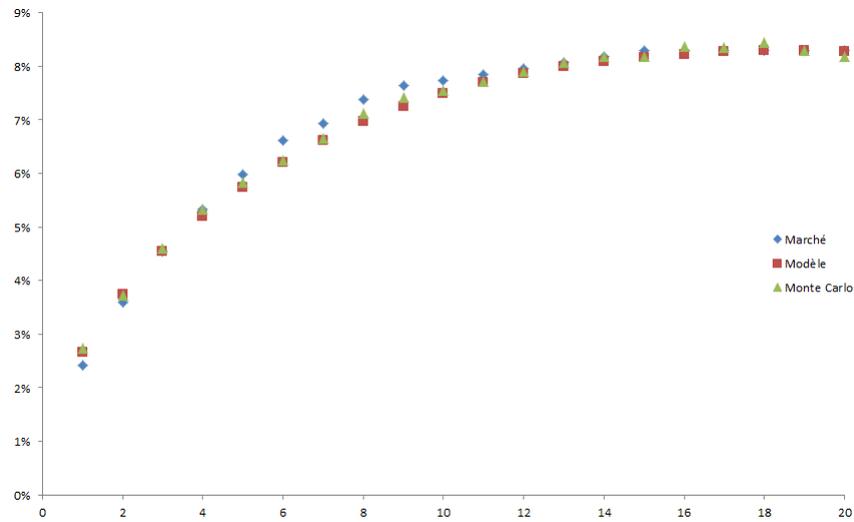


FIGURE 49 – Réplication des prix *swaptions* Hull & White - 1 000 scénarios - Avec ajustement

Statistiques Les tests réglementaires de *Market Consistency* sont obligatoires mais ne sont pas suffisants pour garantir une bonne qualité des scénarios produits. Pour chaque variable économique, des statistiques de performance sont calculées puis écrites dans des fichiers. Les 4 premiers moments des log rendements des prix zéro coupons (variations de taux) apportent de l'information sur les scénarios de taux. Les figures 50 et 51 illustrent respectivement la moyenne et l'écart type des accroissements de taux pour le modèle HW.

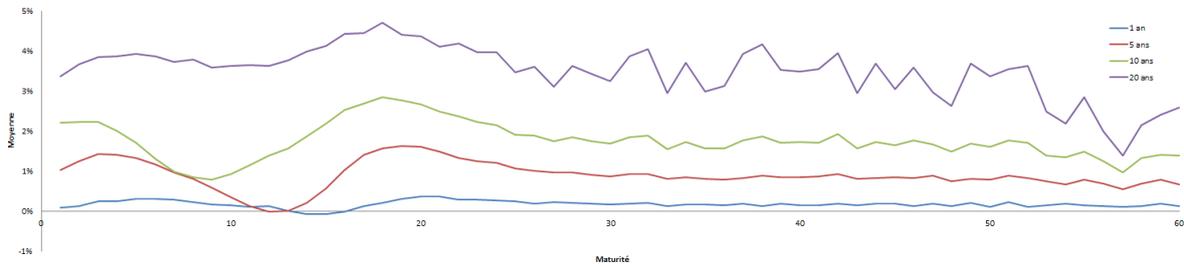


FIGURE 50 – Chroniques de la moyenne - Hull & White - 1000 scénarios

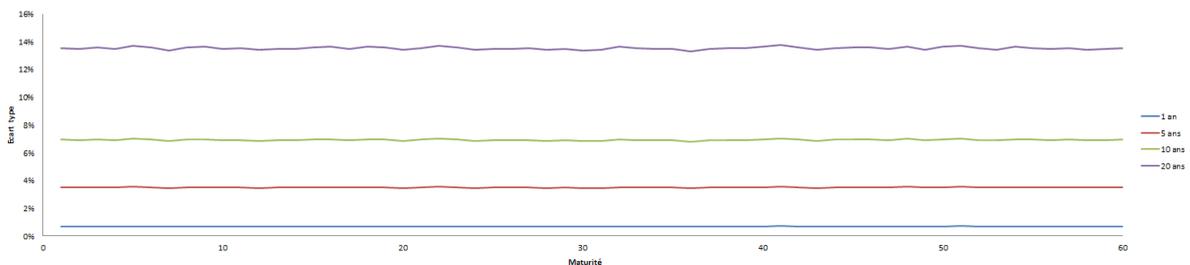


FIGURE 51 – Chroniques de l'écart type - Hull & White - 1000 scénarios

Deuxième partie

Étude d'impact des modèles de taux

Pour répondre aux besoins de Solvabilité 2, les assureurs et réassureurs ont dû se doter de GSE pour produire des scénarios économiques. Pour mieux maîtriser leurs risques, les acteurs de l'assurance doivent être avertis des incertitudes que couvrent les GSE.

Cette étude d'impact vise à sensibiliser la profession actuarielle aux incertitudes liées à l'utilisation des modèles de taux d'intérêt en assurance vie. Pour atteindre cet objectif, l'étude se décompose en plusieurs analyses d'impact de variables liées aux taux sur les indicateurs Solvabilité 2 de trois activités d'assurance vie : un portefeuille retraite, une épargne en euro et en euro-croissance. Seuls les modèles implémentés dans le GSE (G2++, HW, LMM, DD-LMM) sont utilisés dans les sensibilités de ce mémoire. L'analyse d'autres types de modélisations des taux (Black-Karasinsky (BK), LMM/CEV, LMM/SVJD, ...) pourrait compléter et approfondir l'étude présentée.

1 Historique des modèles de taux en assurance vie

En mai 2004, l'adoption par le CFO Forum de l'indicateur de *European Embedded Value* a contribué à accroître l'utilisation des modèles de taux en assurance vie. Cet indicateur à destination des investisseurs représente la valeur actuelle probable des profits futurs d'un assureur. Le principe 7 de l'*EEV* laisse un cadre assez large sur le choix des paramètres des modèles stochastiques. En pratique, les assureurs utilisent des modèles financiers de taux court qui sont interprétables et faciles à implémenter. En 2008, la réforme du CFO Forum fait converger l'*embedded value* vers une valorisation *Market Consistent* (MCEV). Cette nouvelle pratique implique le plus souvent une vision risque neutre des profits futurs de l'assureur : coût de réplication. Dorénavant, les modèles stochastiques sont calibrés sur des prix de produits financiers observés sur le marché. Pour assurer une meilleure qualité de réplication des prix de marché, les assureurs se sont progressivement tournés vers le modèle de taux de marché LMM (cf. tableau ??). La production d'une *Market Consistent Embedded Value* (MCEV) représente des coûts de développement importants et n'est pas obligatoire. Cette pratique s'est principalement répandue chez les assureurs cotés (AXA, Allianz, Generali, ...). En 2009, l'adoption de Solvabilité 2 marque un tournant. Sous cette réglementation, les assureurs vie ont généralement besoin d'implémenter un GSE pour valoriser leurs passifs selon la vision économique imposée par Solvabilité 2.

Assureur	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010
Allianz	LMM/CEV	LMM/CEV	LMM/CEV	LMM	LMM	LMM	BK 2F
AVIVA		LMM	LMM	LMM	LMM	LMM	LMM
AXA	LMM+/SVJD	LMM+/SVJD	LMM+	LMM+	LMM+	BK	
CNP	LMM+ 2F	LMM+ 2F	LMM+ 2F	LMM+ 2F	LMM	LMM	HJM 2F
Generali	LMM+	LMM+	LMM+	BK 2F	BK 2F	BK 2F	BK 2F

FIGURE 52 – Recensement des modèles de taux utilisés pour le calcul de la MCEV

Au cours de l'année 2014, l'apparition des taux négatifs invalide l'hypothèse de positivité des taux (postulat pourtant généralement adopté par le marché jusqu'alors). Le régulateur accorde désormais une grande importance à la capacité d'un modèle de taux de générer des taux négatifs. L'adaptation des modèles a ajouté un niveau de complexité supplémentaire. A titre d'exemple, les modèles stochastiques de projection de taux d'intérêts qui ne produisent pas de taux d'intérêts négatifs sont en rouge sur la figure ??.

2 Comparaison qualitative des modèles de taux

A l'origine, les modèles de taux utilisés par les assureurs ont été créés en finance de marché pour valoriser des instruments financiers (produits dérivés) dont la maturité est courte ou moyenne. Or, la durée longue des passifs en assurance vie impose de conserver une cohérence économique sur le long terme. Cette cohérence nécessitée par l'utilisation de taux long réalistes et de forme et de corrélations de courbes de taux adéquates se traduit par un niveau des taux acceptable à long terme et des formes de courbes de taux vraisemblables. La cohérence des courbes des taux à long terme avec la réalité est contredite par l'explosivité des scénarios de taux générés par le modèle LMM. La correction de cette aberration par un seuillage des scénarios déforme la distribution des taux. Le second critère est faiblement vérifié par le modèle Hull et White qui modélise notamment mal la pentification et l'inversion de la courbe des taux.

Pour assurer la *Market Consistency*, le régulateur exige une bonne qualité de réplication des prix du marché. Tous les modèles ne sont pas équivalents de ce point de vue et le modèle LMM s'impose comme le modèle de référence sur ce critère. Les modèles de taux court répliquent moins bien les prix du marché.

La complexité des modèles de taux est une réelle barrière pour les assureurs d'un point de vue pratique, la mise en place peut être longue et nécessite le travail d'experts financiers. Les modèles très complexes (LMM, *LMM+/SVJD*, ...) sont aussi plus difficilement interprétables. En fait, la compréhension des paramètres du modèle permet de justifier les sensibilités des indicateurs Solvabilité 2 suivant le type de passif valorisé.

Historiquement, le marché n'envisageait pas la possibilité des taux d'intérêt négatifs. Ce critère doit être pris en compte dans le choix du modèle de taux d'un GSE.

Modèle	Complexité	Taux négatifs	Réplication	Explosivité	Distribution	Courbes
Hull & White	Facile	Oui	+	Non	Gaussien	-
G2++	Moyen	Oui	++	Non	Gaussien	+
LMM	Difficile	Non	+++	Oui	LogNormale	+
DD-LMM	Difficile	Oui	+++	Non	LogNormale	+

FIGURE 53 – Avantages et inconvénients de plusieurs modèles de taux

Les modèles de taux implémentés dans le GSE présentent tous des atouts et des inconvénients. Les traits de caractères de chaque modèle de taux de cette étude sont résumés dans le tableau 53.

3 Passifs testés

Les sensibilités des modèles de taux sont mesurées pour trois types de passifs : portefeuille en euro, portefeuille euro-croissance et portefeuille de rentes viagères différées (retraite). Pour obtenir des résultats interprétables, ces trois types de contrat sont modélisés à partir d'hypothèses fortes. Cette partie vise donc à présenter les contrats d'assurance vie étudiés et les choix de modélisation sous-jacents.

3.1 Euro

3.1.1 Présentation du contrat

Le contrat d'épargne en euro est un produit d'assurance vie dont la promesse est le remboursement d'une ou plusieurs primes versées par l'assuré à une échéance contractuelle fixée.

En 2015, les placements en fonds euro représentaient près de 80% du marché de l'assurance vie (source [7]).

La revalorisation de l'épargne de l'assuré dépend des performances financières du fonds euros (investi en majorité en obligation 80%) de l'assureur. Pour être attractif, le contrat inclut généralement une garantie : le taux de revalorisation minimal (Taux Minimum Garantie (TMG)). Cette garantie est contrainte par une limite maximale (article A.132-3 du code des assurances) indicée sur le taux moyen des emprunts d'état (Taux Moyen des Emprunts d'état (TME)) :

- Durée du contrat inférieure à 8 ans : 75% du TME moyen semestriel
- Durée du contrat supérieure à 8 ans : $\min(60\% \text{ TME}, 3.5\%)$

Depuis plusieurs années le TMG commercialisé des contrats en euros est de zéro. Une des attractivités principales des contrats en euros est la garantie cliquet. Les intérêts perçus chaque année sont définitivement acquis. Cette garantie pour l'assuré se révèle être une réelle menace pour l'assureur en contexte de taux bas en raison de la réduction de l'écart entre le taux des obligations du marché et le TMG.

En plus de la garantie TMG, tous les contrats incluent une participation minimale aux bénéfices à l'assuré. L'article A.132-11 stipule le reversement d'au moins 85% des produits financiers aux assurés.

Enfin, l'assuré est en droit de racheter son contrat à tout instant le plus souvent sans pénalités. L'opération est partielle (retrait d'une partie du capital) ou totale (rachat de l'intégralité des primes capitalisées).

3.1.2 Hypothèses et modélisation

Un bilan fictif représentatif Pour être représentatif de la situation des assureurs en France, l'actif du bilan est créé à partir des statistiques du rapport de l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) de la situation des principaux organismes d'assurance en 2015 (cf. [5]). Le portefeuille obligataire se subdivise en cinq classes de notations (de C à AAA). La maturité de toutes les obligations est fixée à 10 ans et la duration du portefeuille obligataire est de 9 ans. Par l'ancienneté du portefeuille et la chute des taux, l'assureur constate des plus-values latentes de 11% sur ses obligations. Le *spread* obligataire résultant est estimé à 0.3%. Les autres poches d'actifs sont les actions, l'immobilier, le monétaire et les Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM) obligataires. A part l'actif monétaire, tous sont supposés en plus-value latente de 4%.

Au passif, l'assureur possède un portefeuille de contrats euro synthétisé en un seul *model point*². Les contrats en stock possèdent un taux minimum garanti (TMG) de 0%. De plus, l'assureur s'engage contractuellement à reverser chaque année 95% des produits financiers à l'assuré. Le *model-point* présente un âge de 60 ans. La provision mathématique initiale du *model point* est de 96 millions d'euros. L'assureur possède également une Provision pour Participation aux Excédents (PPE) de 4 millions d'euros équirépartie sur les 8 années à venir (soit 8 x 500 000 euros). Enfin, la réserve de capitalisation est de 2 000 000 d'euros. Le bilan initial est schématisé sur la figure 54.

Le modèle ALM de revalorisation d'un contrat en fonds euro est détaillée en annexe.

2. Un *model point* modélise un ensemble de contrats d'assurance vie. Cette simplification a pour objectif de réduire les temps de calculs du logiciel ALM.

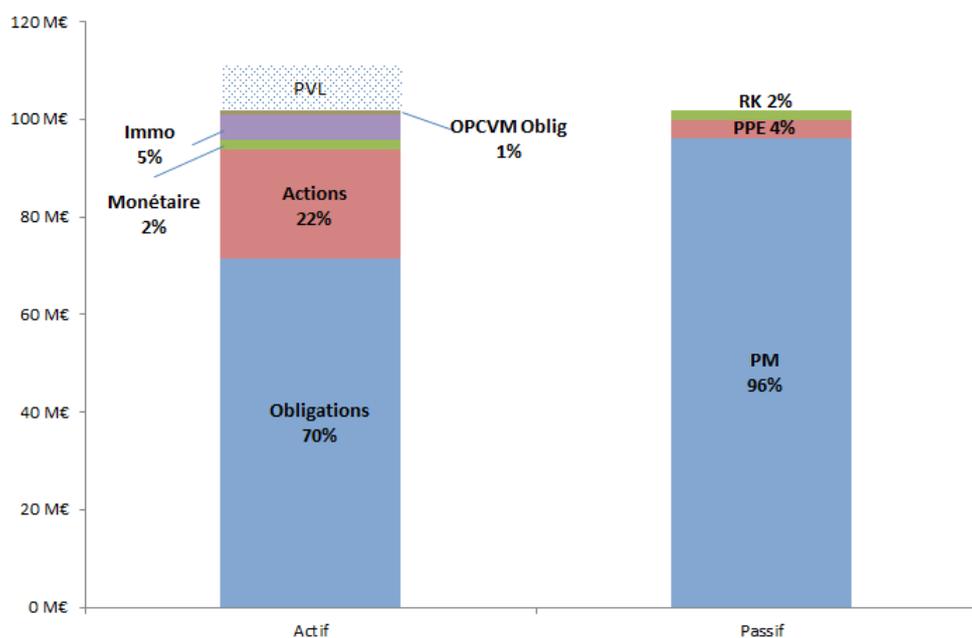


FIGURE 54 – Bilan comptable de l'euro

ACTIF	PASSIF
<ul style="list-style-type: none"> • Courbe des taux : Courbe EIOPA hors VA au 31/12/2016 • Actifs non amortissables : <ul style="list-style-type: none"> - Action 22,4 m€ (div 0,10%) - Immobilier 4,9 m€ (div 0,57%) - Monétaire 2,4 m€ - OPCVM Oblig 1 m€ (div 0%) - Plus value 4% • Actifs amortissables : <ul style="list-style-type: none"> - Obligation à taux fixe (maturité 10 ans) : <ul style="list-style-type: none"> • Taux nominal 2,20% • Rating <ul style="list-style-type: none"> - AAA 5,2 m€ - AA 29,4 m€ - A 15,7 m€ - BBB 13 m€ - C 2 m€ - No rating 6 m€ - Plus value 11% • Hypothèses de choc : Formule standard (choc action S2 : 39%) • Management rules : <ul style="list-style-type: none"> - Conservation allocation initiale - Pas d'externalisation des plus values • Frais de gestion financière : 0,038% 	<ul style="list-style-type: none"> • Montants : <ul style="list-style-type: none"> - Réserve de capitalisation : 2 m€ - PPE : 8 x 500 k€ - Provision mathématique : 96 m€ <ul style="list-style-type: none"> • TMG : 0% • Taux cible initial : 2,20% • Marge sur encours : 0,42% <ul style="list-style-type: none"> • Frais de gestion : 0,3% • Chargement : 0,72% • Lissage : 0,24% • PB : <ul style="list-style-type: none"> • Taux PB contractuel : 95% • Assiette PT : PM+PPE+RK • Assiette VM : $(VNC(n-1) + VNC(n)) / 2$ • Décès : Table TF0002_5% • Rachats : <ul style="list-style-type: none"> - Structurels : 5% - Comportementaux : Dyn. Min QIS 5 • Non pris en compte : <ul style="list-style-type: none"> • Impôts • Prestations sociales • Frais de sortie • PGG

FIGURE 55 – Récapitulatif des hypothèses de modélisation du scénarios central euro

3.2 Euro-Croissance

3.2.1 Présentation du contrat

Un contrat euro-croissance est la promesse de l'assureur de fournir à l'assuré, à une échéance donnée, une part du capital initial versé par l'assuré (généralement entre 80% et 100%). Contrairement au contrat euro, aucune garantie de revalorisation minimale de l'investissement n'est incluse dans le contrat. En revanche, une partie du capital versé est alloué à un fonds plus risqué qui peut offrir une espérance de rendement plus intéressantes.

La provision mathématique est la valeur du montant garanti au terme du contrat actualisée au Taux de l'échéance constante (TEC) de la maturité correspondant à la durée du contrat. L'écart entre la PM et la prime initiale forme une provision de diversification (Provision de diversification (PD)) qui représente le potentiel de performance au-delà de la garantie. A l'achat, l'assuré acquiert un nombre fixe de part de PD. La valeur de la part de PD fluctue jusqu'à ce qu'elle soit rachetée à l'échéance par l'assuré. Certains assureurs proposent des clauses qui prévoient une valeur minimale de la part de PD. La provision collective de diversification différée (PCDD) permet de lisser les performances et la volatilité de la valeur de la part de PD.

Les contrats euro-croissance sont rachetables à la valeur courante de la PD et de la PM.

3.2.2 Hypothèses et modélisation

Au passif, les contrats euro-croissance sont modélisés par un seul *model point* dont l'engagement total est de 100 millions d'euros. Ce montant est garanti à 100% par l'assureur au bout de 10 ans (la maturité du contrat). La provision mathématique du *model point* est l'actualisation de l'engagement à hauteur de 90% du TEC. Pour l'étude, le taux TEC 10 ans est remplacé par le taux EIOPA 10 ans. La PM vaut 95 millions d'euros. La différence entre la valeur de marché des actifs (supposée ici égale à l'engagement) et la PM constitue la provision de diversification (PD). Les assurés possèdent des parts de cette provision dont la valeur n'est pas garantie au terme. Certains assureurs commercialisent des contrats avec de plus faibles garanties. Ici, la provision de diversification est approximativement de 5 millions d'euros et la valeur de la part initiale est supposée égale à 100 euros. La valeur minimale de la part garantie est fixée à 1 euro. Tous les assurés sont supposés âgés de 60 ans.

A l'actif, l'assureur choisit une allocation de 85% dans un OPCVM obligataire "sans risque" (modélisé par une obligation zéro coupon de maturité 10 ans) et 15% en actions "risquées". Cette répartition met en avant le fait que l'assureur peut décider de ne pas couvrir entièrement sa provision mathématique en obligation et s'expose ainsi à un risque action.

Comme pour le contrat en euro, le vieillissement de la situation financière de l'assureur débute par la revalorisation de l'actif à partir des scénarios économiques. Le vieillissement de l'actif est identique à celui de l'euro et comprend une revalorisation des fonds propres proportionnelle au monétaire.

Pour le vieillissement des provisions techniques, l'assureur prélève son taux de chargement sur encours (fixe à 1.10%) sur la PM et la PD. Les frais (au sens charge) de gestion sont supposés égaux à 0.50%. La nouvelle provision mathématique est calculée à partir de la courbe des taux sans risque courante (approximation TEC - Taux ZC EIOPA). La variation entre la PM de l'année précédente et celle de l'année courante produit des intérêts techniques reportés dans le compte de résultat.

Le nombre de contrats est réduit proportionnellement au nombre de décès et à l'intensité des

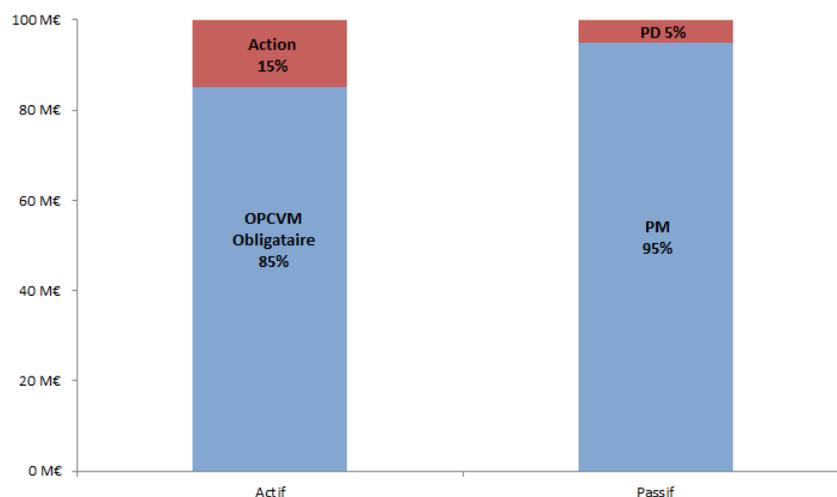


FIGURE 56 – Bilan d'étude euro-croissance

rachats survenus dans l'année. Comme pour l'euro, le taux de décès est calculé à partir de la table de mortalité TF0002_5%. En revanche, le taux de rachat annuel est fixé à 2.04%.

L'assureur doit verser les prestations aux assurés ayant racheté leur contrat ou décédés dans l'année. Le montant de participation aux bénéfices et le montant d'intérêts techniques sont affectés en proportion. La PM, le nombre de contrat et l'engagement sont réduits de la quantité des sortants.

Pour l'étude, la réallocation des actifs dépend du niveau de la PD courante. Tout d'abord, la variation du solde de trésorerie est annulée par l'achat/vente d'actif. La valeur de marché de l'actif est affectée en conséquence. Le montant d'actif disponible est ensuite réinvesti sur deux fonds "risqué"/"non-risqué". Le fonds risqué contient tous les produits indicés (actions dans cette modélisation) et le fonds "non-risqué" des produits de taux (OPCVM obligataire dans l'étude). De plus, l'assureur choisit chaque année d'investir 150% de sa PD en actions (levier), montant qui est limité entre 5% et 50% de la valeur de marché totale courante. Le restant est investi en OPCVM obligataire.

Pour clore ses opérations comptables, l'assureur calcule son compte de résultat de l'année.

3.3 Retraite

3.3.1 Présentation du contrat

Les sociétés d'assurance vie proposent des contrats d'assurance retraite aux clients souhaitant acquérir une aisance financière plus importante après leur vie professionnelle. Dans ce cadre, l'assureur fait fructifier les primes cumulées de l'assuré jusqu'à la retraite puis verse une prestation sous forme de rentes viagères ou d'un capital en fin de carrière.

Par la promesse de versement de rentes viagères, l'assureur s'expose principalement à un risque de taux et de longévité. Une sous-mortalité entraîne un allongement de la période de versement des flux. De même, une courbe des taux basse augmente la valeur actuelle des engagements de l'assureur. Ce risque de taux est positivement corrélé avec l'écart de duration actif/passif du bilan de l'assureur.

ACTIF	PASSIF
<ul style="list-style-type: none"> • Courbe des taux : Courbe EIOPA sans VA au 31/12/2016 (taux 10ans : 0,70%) • Actifs non amortissables : <ul style="list-style-type: none"> – Actif risqué : Actions – Part investie : proportionnelle à la part de PD courante avec un levier de 150% • Actifs amortissables : <ul style="list-style-type: none"> – Couverture de la PM : OPCVM Oblig. (obligation synthétique 10 ans sans dividendes) – Sensibilité : chaque année, la sensibilité obligataire est égale à 100% de la maturité moyenne du passif • Hypothèses de choc : formule standard (choc action S2 : 39%) • Sans frais de gestion financière 	<ul style="list-style-type: none"> • Provision de diversification : 5 m€ <ul style="list-style-type: none"> – Distribution de la PB : revalorisation de la valeur de la part de PD uniquement – Valeur part initiale : 100€ – Valeur minimale de la part : 1€ • Provision mathématique : 95 m€ <ul style="list-style-type: none"> – Garantie au terme : 100% durée 10 ans – Taux d'actualisation : 90% de la maturité correspondante sur la courbe TEC n (<i>Hypothèses la courbe des TEC correspond à celle de l'EIOPA au 31/12/16 dans les modélisations</i>) • Marge sur encours : 0,60% <ul style="list-style-type: none"> • Frais : 0,50% • Chargement : 1,10% • Sans décès, sans rachats • Non prise en compte des impôts • Sans arbitrages euro / euro croissance • Sans frais fixes

FIGURE 57 – Récapitulatif des hypothèses de modélisation du scénario central de l'euro croissance

Contrairement aux contrats en euro, l'assuré n'a généralement pas le droit de racheter son contrat retraite. Quelques exceptions autorisent cette opération à titre exceptionnel (phénomène marginal).

3.3.2 Hypothèses et modélisation

Le portefeuille "retraite" est un portefeuille de contrats de rentes viagères différées. Ces rentes sont agrégées en *models points*. Chaque *model point* simule le versement d'un flux à une maturité donnée. Le profil de cash-flow choisi a été calibré à partir d'un portefeuille d'assureur (cf. figure 58). Sa duration est ajustée à 17 ans et la PM est normalisée à 96 millions d'euros. Comme pour le portefeuille euro, initialement, 4 millions d'euros sont provisionnés en PPE et 2 millions d'euros sont alloués à la réserve de capitalisation. L'allocation et les caractéristiques de l'actif de l'assureur sont identiques à celles choisies pour les contrats en euros.

Le vieillissement de l'actif est exactement identique à celui de l'euro. Pour rappel, chaque classe d'actif est revalorisée en fonction des indicateurs économiques. Les frais de gestion financière (0,038%) sont proportionnels à la valeur de marché de l'actif. Aucune stratégie d'extériorisation des plus-values latentes n'est prise en compte. L'assureur conserve l'allocation initiale de son actif.

Le *model point* est ensuite vieilli. La provision mathématique de chaque *model point* est recalculée par actualisation des flux futurs au taux technique (TMG).

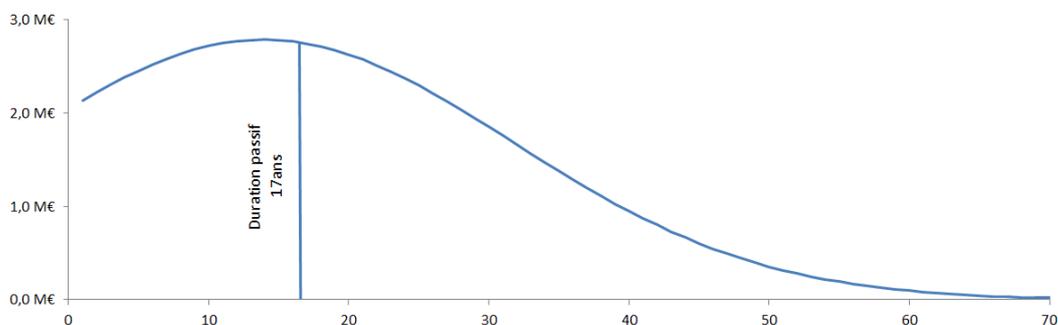


FIGURE 58 – Répartition des provisions mathématiques des *models points*

3.4 Comparaison qualitative

Les caractéristiques des trois portefeuilles d'assurance vie étudiés sont très différentes et engendrent une palette de profils de risques pour les assureurs.

Les contrats en euros offrent beaucoup d'avantages à l'assuré : rachat, participation aux bénéfices, taux garanti. Pour ce type de contrat d'assurance vie, l'engagement de l'assureur est fort et induit plusieurs risques.

Le risque de rachat se traduit par la menace d'une hausse brutale des taux. Si le taux servi par l'assureur est plus faible que le taux servi sur le marché, il est probable que l'assuré rachète son contrat et replace son épargne à un taux plus avantageux. Ce scénario induit pour l'assureur une vente massive d'obligations potentiellement en moins-value qui marque une perte.

D'autre part, la promesse de la revalorisation minimale de l'épargne des assurés (TMG) devient un risque croissant avec le contexte actuel de taux très bas. La baisse du rendement du marché obligataire atteint des seuils historiquement bas, proches des garanties commercialisées ou qui ont été vendues dans le passé. Si la performance de son actif est insuffisante, l'assureur sert une revalorisation minimale du capital de l'assuré et impacte ses fonds propres.

Les contrats euro-croissance sont sensés répondre à une volonté de la part des assureurs et du gouvernement d'offrir des engagements plus cohérents avec le contexte économique actuel. Contrairement aux contrats en euros, l'absence de garantie à tout instant de revalorisation de l'épargne libère l'assureur d'une contrainte majeure. Le capital n'est garanti qu'à la maturité du contrat. Entre la date de souscription et le remboursement du capital, l'assureur a plus de liberté dans sa gestion financière. A contrario, l'assuré s'expose à un risque de sous-rendement de la valeur de la part de PD.

Les contrats avec versement des rentes viagères offrent des avantages de versements d'une complémentaire retraite de long terme. La durée élevée implicite de ce type d'engagement menace fortement l'assureur. La chute des taux peut empêcher l'assureur de réinvestir à un taux suffisant pour honorer ses engagements. Les contrats retraite incluent souvent des garanties de revalorisation du capital assez élevées. Cette obligation peut détériorer le résultat de l'assureur si les conditions de marché sont défavorables. Enfin, le risque de rachat n'est pas un risque majeur sur ce segment de marché de l'assurance vie.

Passif testé	Rachat	Duration	TMG	Longévité
Euro	Fort	Moyenne	Oui	Faible
Euro-croissance	Faible	Faible	Non	Faible
Retraite	Faible	Élevée	Oui	Fort

FIGURE 59 – Synthèse des risques de certains contrats d'assurance vie

4 Présentation des sensibilités testées

Le GSE génère des scénarios économiques à partir d'un jeu de paramètres. Dans cette étude, chaque table de scénarios contient 1000 simulations, chacune projetée sur 60 années. Le pas des trajectoires économiques est annuel. Entre deux années, le pas de discrétisation des processus est mensuel. Toutes les courbes des taux sont diffusées jusqu'à la maturité 40 ans. Les scénarios économiques sont retraités pour assurer la propriété de martingalité. Dans les chocs de taux, les volatilités absolues sont conservées.

4.1 Un référentiel central

Un ensemble de données et d'hypothèses est nécessaire pour définir une table de scénarios économiques risque neutre. Chaque changement de valeur d'un paramètre en entrée du GSE est relative à un point de référence : le central.

Le contexte économique de référence se situe au 31 décembre 2016.

Pour le taux nominal, la courbe des taux sans risque est la courbe des taux réglementaires EIOPA hors VA. Les modèles de taux sont calibrés sur la nappe des prix *swaptions* obtenus à partir des prix *swaptions straddle* EUSP ATM du 30/12/2016 (clôture). Les volatilités implicites log-normales calculées avec cette courbe des taux sont reportées sur la figure 60. L'écart entre la courbe des taux réglementaires et la courbe des taux du marché induit par le CRA impacte positivement les volatilités log-normales. Ce choix du régulateur est donc prudent (augmentation du coût d'option). Le modèle de taux utilisé est le DD-LMM. Son *shift* est fixé à 5% et le *cap* est constant à 45%.

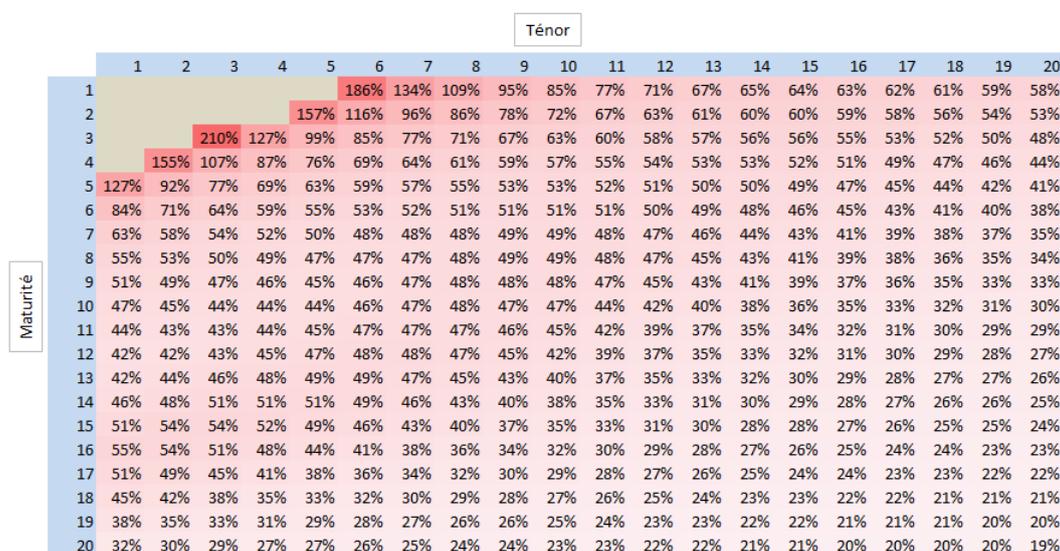


FIGURE 60 – Volatilités lognormales *swaptions* au 31 décembre 2016

La calibration des modèles des autres classes d'actif nécessite un travail plus approfondi qui est hors sujet de ce mémoire. Actuellement des modélisations simples sont implémentées.

Les actions sont modélisées par un modèle de Black & Scholes. La volatilité implicite (supposée constante) est estimée à partir des données de prix d'option d'achat à la monnaie sur Eurostoxx 50 pour plusieurs horizons. Le taux de dividende implicite est déterminé par la relation parité call-put.

L'indice immobilier est également modélisé avec un modèle de Black & Scholes. Par défaut, la volatilité log-normale de l'indice immobilier est supposée constante à 6%.

La courbe des taux réels est modélisée, par défaut, par un modèle de Hull et White de volatilité 0.6% et de force de rappel 0.1%. La matrice de corrélation entre les indices est la matrice identité (indépendance).

4.2 Première sensibilité : modèles de taux *Market Consistent*

La réglementation laisse libre cours à l'imagination des actuaires dans le choix de la modélisation des taux sous condition du respect des critères de *Market Consistency* et de permettre la génération de scénarios de taux négatifs. Le modèle gaussien à 1 facteur Hull & White, le modèle gaussien à 2 facteurs G2++, le modèle de marché log-normal DD-LMM avec/sans matrice de corrélation sont tous des modèles financiers reconnus et répondent aux exigences réglementaires actuelles.

Chaque modèle est calibré sur le même jeu de données "central" (au 31/12/2016). Les jeux de scénarios économiques risque neutre (HW, G2++, LMM, DD-LMM, DD-LMM avec corrélation) sont produits avec la même graine d'aléa initiale.

Les modèles de taux court HW et G2++ sont calibrés par minimisation de la distance euclidienne entre les prix *marché* et les prix du modèle. Ce choix accorde plus d'importance aux volatilités de ténor et de maturité élevées.

Le modèle de taux DD-LMM nécessite deux paramètres exogènes non calibrés : la borne supérieure des taux *cap* (fixée à 45%) pour restreindre l'explosivité des taux et le niveau de translation des taux *shift*. En plus du modèle DD-LMM 5% du référentiel, deux autres niveaux de *shift* sont proposés : 0.5% et 45%.

Pour le modèle DD-LMM avec matrice de corrélation, la structure de dépendance est définie par 3 paramètres. Ces trois constantes peuvent être calibrées sur une interpolation de la matrice de corrélation historique des taux *forwards*. Par défaut, le paramètre α vaut 0, β est égal à 5% et ρ_∞ est supposé égal à 80%.

4.3 Deuxième sensibilité : scénarios économiques de taux bas

La modélisation financière des taux d'intérêt a été bouleversée par l'apparition des taux négatifs. Ce nouveau paradigme a contraint le marché à ajouter un paramètre de décalage *shift* pour adapter les modèles de taux log-normaux. Cette variable permet de contrôler la borne limite basse des scénarios de taux négatifs. D'autre part, cette nouvelle variable permet de lier la modélisation des taux en l'état avant la crise des taux bas avec celle actuelle. Enfin, le *shift* modifie la forme de la distribution des taux et impacte le coût d'option d'un assureur contre ce paramètre. Par cette deuxième étude, l'analyse de l'impact de ce paramètre en assurance vie peut permettre de choisir une valeur adaptée au contexte.

Les tables de scénarios économiques sont produites pour différentes versions du modèle DD-LMM sans matrice de corrélation. Chaque modèle est calibré pour une valeur propre de *shift* à partir des données de marché observées au 31/12/2016 (référentiel). Le seuil maximal *cap* des scénarios de taux est conservé à la valeur choisie dans le référentiel de l'étude : 45%.

4.4 Autres sujets sur les taux

Au-delà des problématiques du choix de modèle de taux en contexte de taux bas, d'autres réflexions sur la modélisation des taux sont d'actualité chez les actuaires.

4.4.1 L'UFR

La construction de la courbe des taux réglementaires EIOPA est brièvement introduite dans la partie 1.1. Dans ce processus de fabrication, l'extrapolation de la courbe des taux du marché est complexe et repose sur une vision long terme de l'économie incarnée par l'UFR. L'UFR correspond au taux *forward* long terme de la courbe des taux réglementaires. Sa valeur actuelle est de 4.2% et se décompose en une composante inflation de 2% et une composante taux réel de 2.2%. L'EIOPA a officialisé le changement de méthodologie pour le calcul de ce paramètre le 5 avril 2017. Pour se préparer à ce changement, les assureurs doivent effectuer des analyses de sensibilité sur ce paramètre.

Pour cette étude, les hypothèses du référentiel sont conservées. Les courbes des taux EIOPA ont été reconstruites pour différentes valeurs d'UFR. Chaque courbe des taux est utilisée dans toutes la chaîne de productions des scénarios : estimations des volatilités *swaptions*, calibration, diffusion. L'UFR varie de 2% à 6% avec un pas de 0.25%. Les courbes reconstruites sont en figure 62.

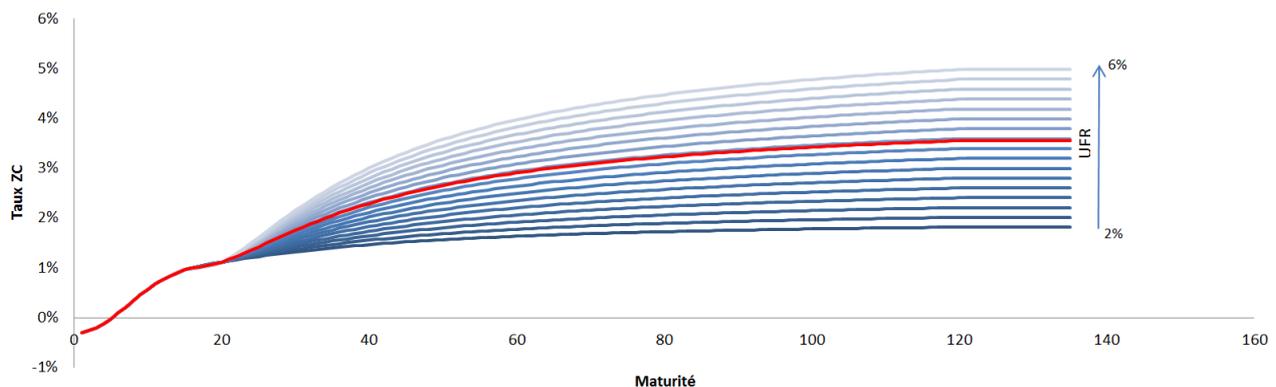


FIGURE 61 – Courbes EIOPA 31/12/2016 avec différents UFR

4.4.2 VA

L'ajustement de volatilité est une prime ajoutée à la courbe des taux EIOPA que l'assureur peut utiliser pour calculer ses engagements. Chaque courbe de taux est publiée avec une VA propre. Contrairement à l'UFR, la VA impacte l'ensemble de la courbe des taux. La transformation géométrique de la courbe est non uniforme afin de conserver la propriété de convergence des taux *forwards* vers l'UFR.

Comme pour la sensibilité à l'UFR, plusieurs courbes de taux avec différentes valeurs d'ajustement de volatilité sont construites sur la base de la courbe des taux EIOPA du 31/12/2016. En revanche, **le modèle de taux reste calibré sur la courbe des taux hors VA**. Par conséquent, les volatilités calibrées sont identiques aux volatilités calibrées sur les hypothèses du référentiel. L'ajout de la VA est effectué après l'étape de calibration. Les simulations sont produites à partir de cette courbe.

Pour l'euro croissance, la provision mathématique est calculée avec le taux zéro coupon 10 ans de la courbe **sans** ajustement pour volatilité.

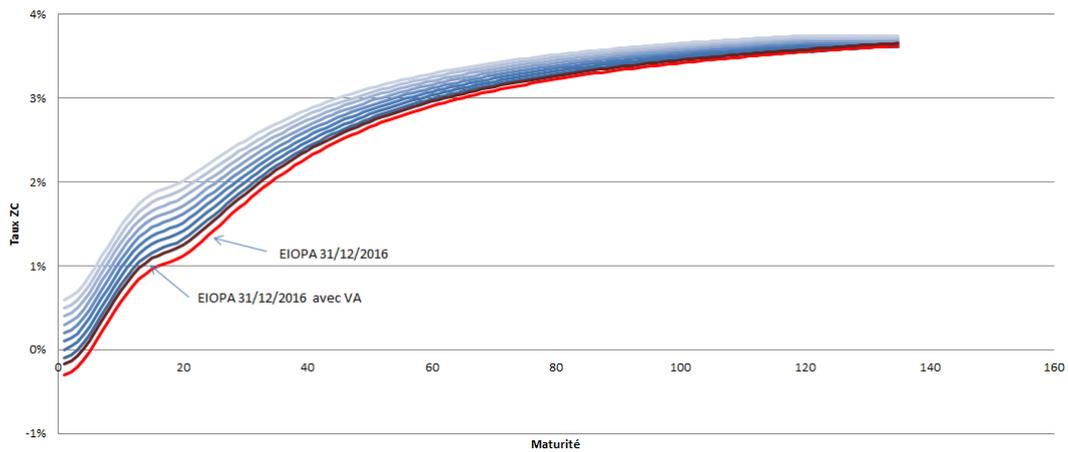


FIGURE 62 – Courbes EIOPA 31/12/2016 reconstruites pour différentes valeurs de VA

5 Résultats des sensibilités et interprétations

Dans chaque sensibilité, la modification d'une hypothèse économique du référentiel central transforme les tables de scénarios économiques. Plusieurs indicateurs de solvabilité ont été analysés pour révéler les impacts liés à certains aspects relatifs à la modélisation des taux.

Les résultats issus du logiciel ALM vérifient un test de martingalité : la valeur actuelle probable (VAP) des flux de l'assureur doit être égale à la valeur de marché initiale des actifs. La tolérance de l'écart relatif entre la Valeur Actuelle Probable (VAP) et la Valeur de Marché (VM) est fixée à 20 bps.

La finesse des sensibilités engendre un nombre de jeu de paramètre importants. Les fichiers d'entrée sont donc renseignés de manière séparée. Ces fichiers sont lourds et l'erreur opérationnelle est très probable. Afin d'assurer la consistance de tous les résultats, un test de réplication des résultats du référentiel de l'étude a été validé pour chaque fichier d'hypothèses.

5.1 Modèles de taux et coût d'option

Pour cette sensibilité, les hypothèses économiques sont décrites dans la partie 4.2 et les portefeuilles synthétiques euro, euro-croissance et retraite sont présentés en partie 3. Le but de cette sensibilité est d'évaluer l'impact de la modélisation retenue.

TVFOG Les options et garanties contractuelles vendues par un assureur représentent un risque pour lui. Ce risque se mesure par un coût de option qui se décompose en deux composantes : la valeur intrinsèque (BE calculé en déterministe) et la valeur temps (TVFOG). En pratique, la valeur temps des options et garanties (TVFOG) correspond à la différence entre le BE stochastique et le BE déterministe (volatilité des scénarios économiques nulle).

La TVFOG du portefeuille euro croissance testé est très peu sensible au modèle de taux utilisé. Ce trait s'explique par l'absence de rachats dynamiques et de TMG pour ce type de contrat.

A contrario, la valeur temps des options des portefeuilles retraite et euro sont très variables selon le modèle de taux utilisé. La TVFOG moyenne du portefeuille retraite est plus élevée car le TMG est plus fort (1%) et la durée de ce passif est plus longue. Pour les deux passifs retraite et euro, l'ordre de classement de la TVFOG pour chaque modèle de taux est identique : le LMM est le moins cher et le G2++ le plus coûteux. La TVFOG est plus importante pour les modèles de taux court HW et G2++. Ceci peut s'expliquer par la mauvaise qualité de réplication des volatilités du marché pour les ténors faibles. La calibration des modèles de taux court affectant plus de poids aux *swaptions* de maturité et de ténor longs, les volatilités implicites courtes sont surestimées par le modèle (cf. annexes). D'autre part, l'augmentation de la valeur du *shift* accroît le coût d'option car la densité des scénarios de taux bas est plus élevée si le *shift* est fort.

Le modèle DD-LMM avec corrélation des taux *forwards* augmente la TVFOG. Le phénomène de torsion des courbes de taux semble accroître la valeur temps des options de l'assureur.

En comparaison du portefeuille retraite, la plus grande variabilité des résultats pour le portefeuille euro peut s'expliquer par l'impact de l'option de rachat dynamique .

L'utilisation d'un *shift* faible paraît imprudente. En effet, le coût d'option est sous-estimé d'environ 2% du niveau des provisions techniques par le modèle LMM par rapport aux autres modèles. Cette dernière remarque doit alerter les acteurs de l'assurance sur l'enjeu de la modélisation financière des taux bas dans le contexte actuel.

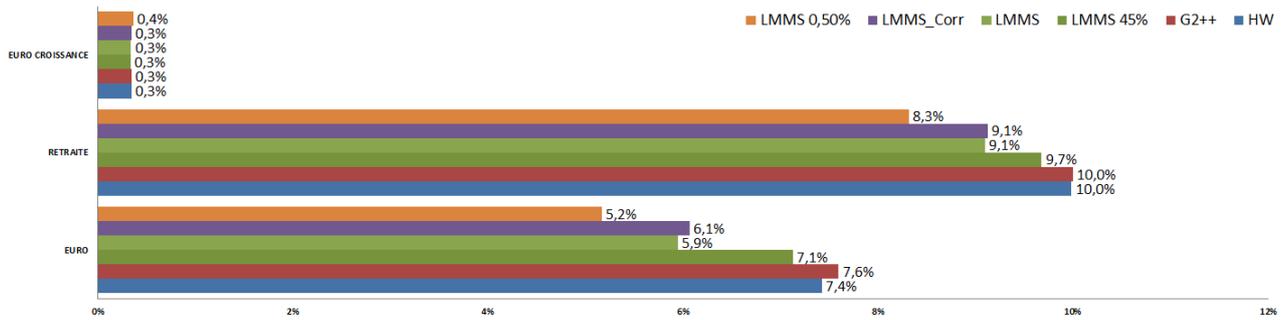


FIGURE 63 – TVFOG - valeur temps des options et garanties

Analyse des distributions de taux Pour mieux comprendre les résultats obtenus sur l'indicateur économique TVFOG, une analyse des distributions de taux de chaque modèle de taux apporte un éclairage plus précis.

Dans la modélisation de chacun des trois passifs, l'assureur réinvestit sa poche obligataire au taux 10 ans. Les quantiles du taux zéro coupon 10 ans de ce taux sont tracés sur la figure 64.

La distribution log-normale du modèle DD-LMM 5% génère certains scénarios de taux qui croissent très rapidement. Ce comportement s'atténue lorsque le *shift* augmente (réduction des volatilités implicites du modèle). Le *cap* fixé à 45% (hypothèse que des taux d'intérêts supérieurs à ce seuil dans la zone euro ne sont pas imaginables) est atteint pour un *shift* de 5%. Ce modèle paraît inadapté pour la projection des taux à long terme (explosivité trop forte).

Cette caractéristique du modèle DD-LMM s'atténue lorsque le *shift* augmente. Un *shift* élevé semble faire converger la distribution des taux vers une distribution gaussienne.

La figure 64 met bien en évidence l'augmentation du nombre de scénarios de taux bas et la chute de la volatilité des scénarios lorsque le *shift* est grand. La TVFOG est sensible au niveau des taux et à la volatilité des scénarios économiques. La croissance de la TVFOG par le *shift* montre que le niveau des taux simulés par un modèle de taux dans l'évaluation du coût d'option a une importance capitale face au niveau de volatilité.

En remarque, les quantiles du taux ZC 10 ans du modèle DD-LMM avec une structure de dépendance des taux *forwards* sont très proches du modèle DD-LMM simple. Comme vu précédemment, cette modélisation plus riche n'augmente pas fortement la valeur de la TVFOG sur les passifs testés.

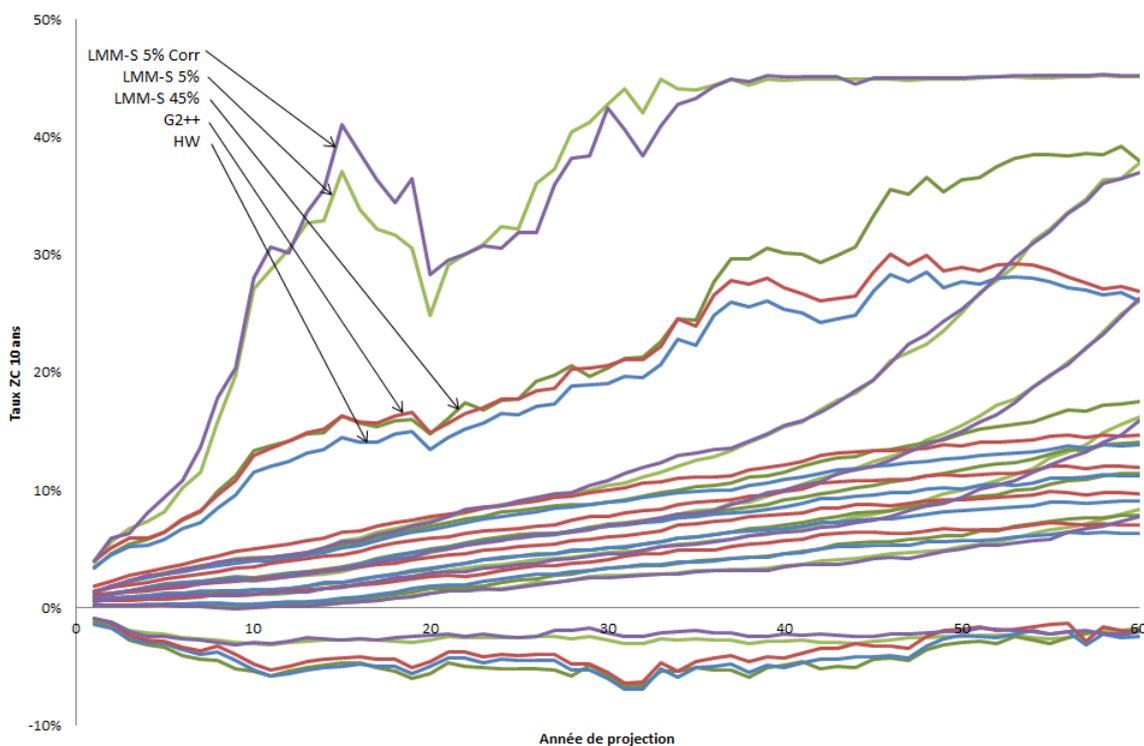


FIGURE 64 – Quantiles du taux ZC 10 ans pour différents modèles de taux

Effets croisés des taux sur la valorisation La TVFOG est une moyenne et masque une part importante de l'information. La distribution sous-jacente de la valeur actuelle du résultat de l'assureur est récupérée dans le logiciel des projections ALM. L'effet croisé des distributions de la valeur actuelle des résultats futurs de l'assureur et d'un indicateur du niveau moyen³ d'un scénarios de taux 10 ans est représenté pour le portefeuille euro (figure 65), euro-croissance (figure 66) et retraite (figure 67). Le nuage de points des distributions croisées est plus large pour le portefeuille retraite que pour le portefeuille euro : durée du passif retraite plus importante que pour l'euro. D'autre part, en moyenne, le résultat de l'assureur croît avec le niveau du scénario de taux 10 ans. Cette relation est cependant non linéaire : les scénarios de taux dont l'indicateur est négatif sont toujours très défavorables pour l'assureur.

Sur le portefeuille euro croissance, l'indicateur de taux moyen du scénario n'apporte pas d'information pour expliquer un résultat négatif. Les pertes annuelles sont dues aux variations de l'actif risqué et sont supportées par l'assuré au travers de la revalorisation de la valeur de la part de PD. Par conséquent, la variation de la valeur de marché des obligations causée par le mouvement des taux n'a que peu d'impact. De plus, la provision mathématique de l'assureur n'est pas complètement adossée en obligation (risque de taux). Par conséquent, si l'actif risqué ne performe pas assez, le résultat de l'assureur est également impacté.

3. Moyenne pondérée par une fonction exponentielle décroissante avec la maturité

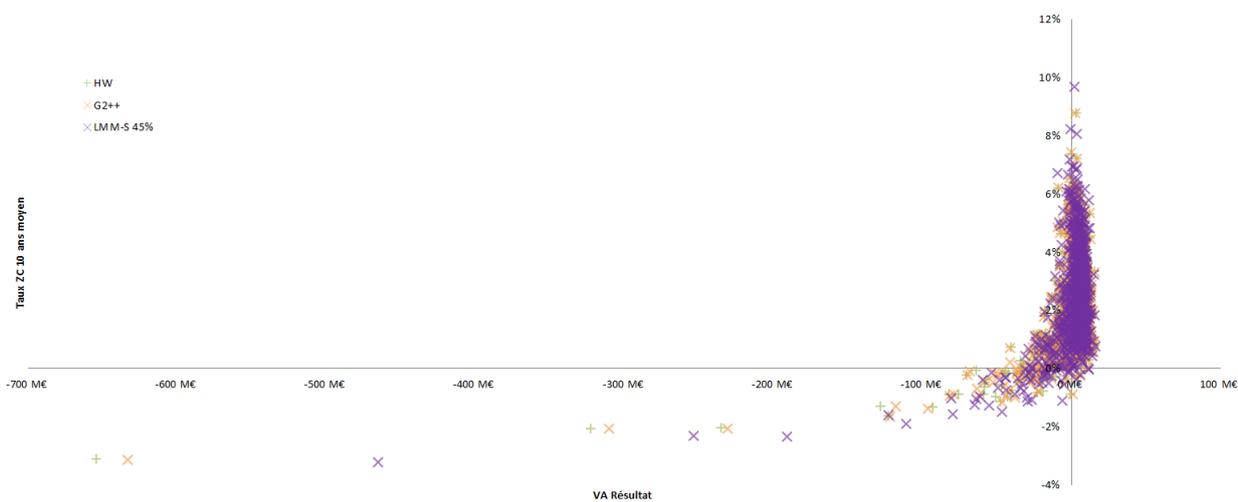


FIGURE 65 – Effets croisés indicateur de taux et valeur actuelle résultat - Euro

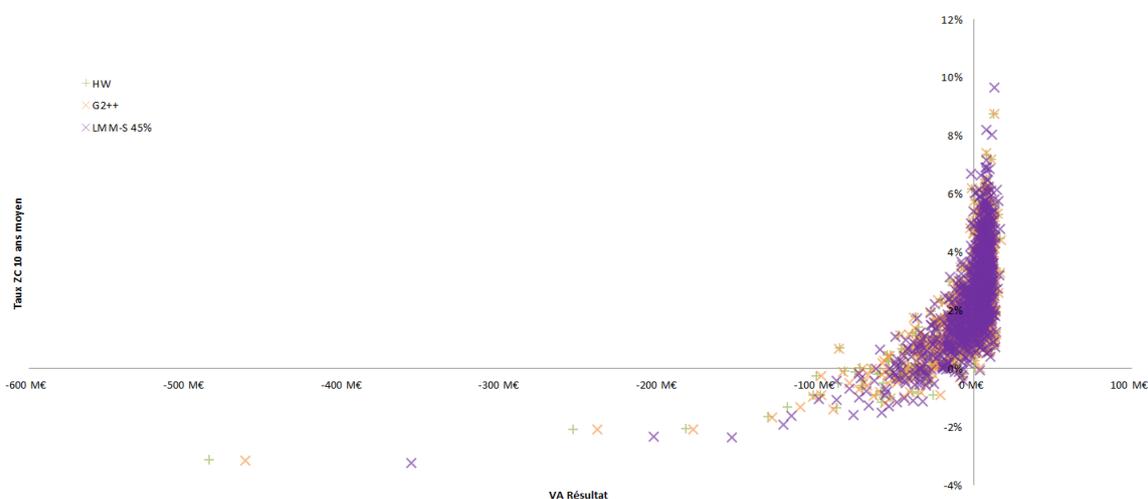


FIGURE 66 – Effets croisés indicateur de taux et valeur actuelle résultat - Retraite

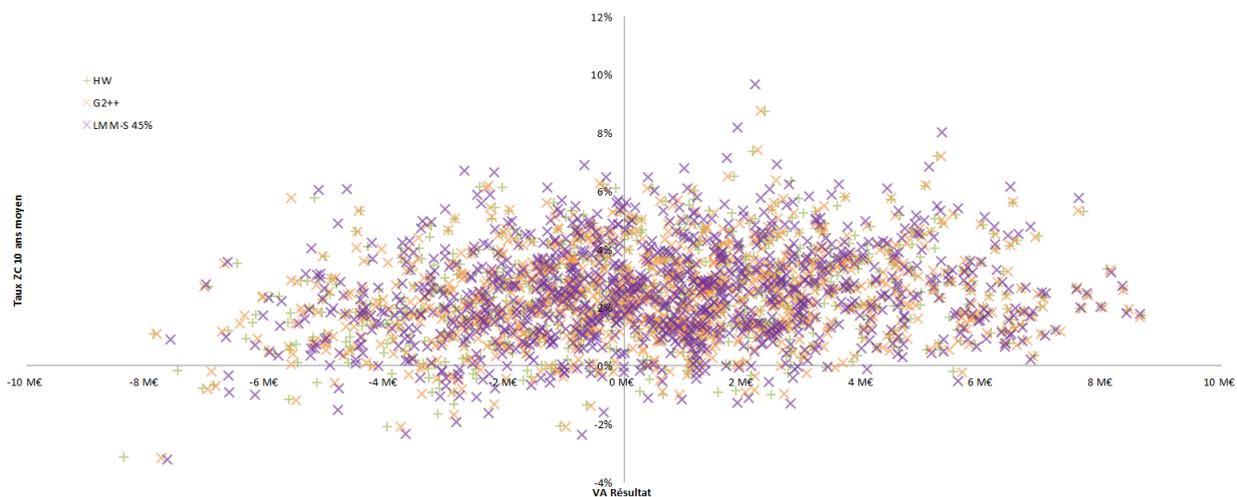


FIGURE 67 – Effets croisés indicateur de taux et valeur actuelle résultat - Euro Croissance

5.2 Du LMM au DD-LMM

Scénarios économiques Le paramètre *shift* du modèle de taux DD-LMM est une variable exogène (non calibrée sur des données de marché). Ce degré de liberté présente l'avantage de

produire des distributions de taux très différentes (cf. figure 68). Lorsque le paramètre *shift* augmente, la distribution log-normale des taux est translatée vers le bas. Un *shift* faible rend le modèle "fortement" log-normal, contrairement à un *shift* fort qui permet de converger vers un modèle plus gaussien :

$$S_t = S_0 e^{\sigma \epsilon} \sim S_0(1 + \sigma \epsilon + o(\sigma^2)) \quad (34)$$

Le passage du LMM au DD-LMM ne réalise pas une simple translation des scénarios vers le bas. D'un point de vue technique, l'augmentation du niveau de *shift* a un effet sur la tendance des taux *forwards* (voir équation 21).

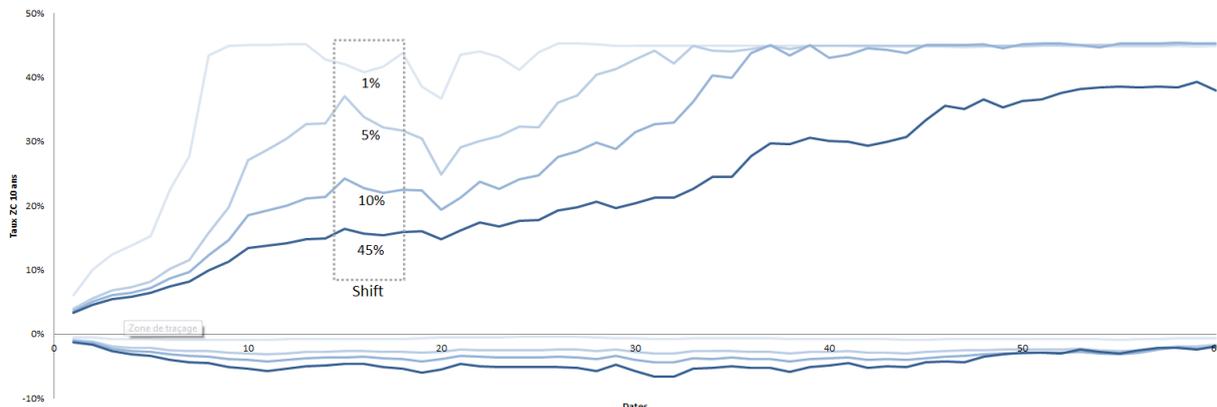


FIGURE 68 – Enveloppes des scénarios du taux zéro coupon 10 ans

Au-delà de la production de scénarios négatifs, le *shift* a un impact sur les volatilités implicites des taux *forwards*.

Tout d'abord, augmenter la valeur du *shift* a un impact négatif sur la volatilité. Ce phénomène est observable sur les nappes de volatilités calibrées (voir figure 69). Cette réduction des volatilités implicites n'est pas linéaire. L'impact de la variation du niveau du *shift* a un impact qui s'amenuise lorsque sa valeur augmente (comportement observable sur les quantiles de la figure 68).

D'autre part, le nombre de volatilités complexes (fixée par défaut à 0) ne change pas avec la valeur du *shift*.

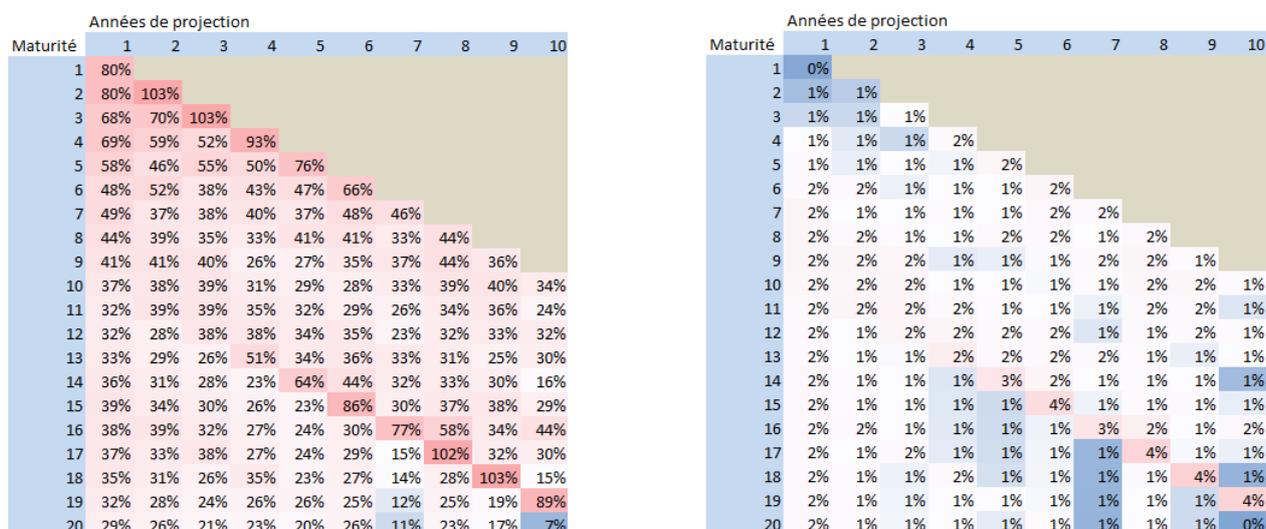


FIGURE 69 – Volatilités implicites CCA - *shift* 0,50% (gauche) et 45% (droite)

L'explosivité des scénarios de taux ZC est liée à la taille des volatilités calibrées. Pour un *shift* entre 0% et 10% (période de volatilité élevée), le seuil maximal des taux ZC 10 ans est

souvent atteint au cours des simulations et déforme la distribution log-normale (cf. figure 70). Les scénarios extrêmes rebondissent contre le seuil et créent une accumulation dans la queue de distribution tronquée. Le phénomène est évidemment plus important lorsque l'horizon de projection devient grand.

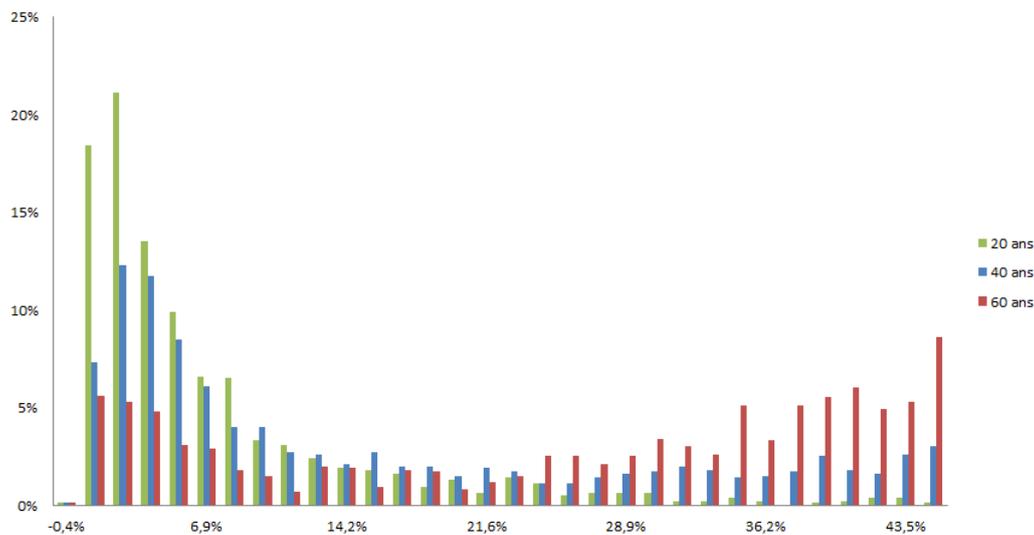


FIGURE 70 – Distributions Taux ZC 10 ans - *shift* 0,50%

Des niveaux de *shift* différents permettent de produire des trajectoires de courbes de taux variées. Chaque scénario économique engendre une chronique de l'actif et du passif de l'assureur. En pratique, le compte de résultat de la compagnie d'assurance est calculé chaque année après revalorisation de l'actif et du passif. La valeur actuelle (VA) des résultats projetés de l'assureur mesure la richesse future produite par l'assureur pour un scénario économique risque neutre donné.

Pour comprendre le lien qu'il existe entre les scénarios de taux et les variations de résultats, un indicateur de taux "moyen" pour chaque trajectoire du taux ZC 10 ans est fabriqué. Cette nouvelle variable est une moyenne des taux pondérés par une fonction exponentielle. Cette répartition des poids permet d'affecter plus d'importance aux taux courts.

Les figures 71, 72 et 73 illustrent le changement de distribution du compte de résultat avec le *shift* et l'effet des scénarios de taux bas. Les portefeuilles euro et retraites sont extrêmement sensibles aux scénarios négatifs. En revanche, les scénarios explosifs ne paraissent pas constituer un risque majeur pour la rentabilité de l'assureur (valeurs extrêmes). Par conséquent, si l'assureur ne modélise pas de taux négatifs, il s'expose à une sous-estimation de ses indicateurs de solvabilité. D'autre part, un scénario économique dont le taux moyen est n'est pas extrême engendre une distribution de valeurs actuelles de compte de résultat assez centrée. Le cœur des distributions est plus difficile à expliquer. Pour un indicateur de taux, plusieurs trajectoires sont possibles et réciproquement. Pour le portefeuille euro croissance, l'effet de changement de *shift* est très différent. La bassesse des taux ne semble pas avoir d'impact significatif sur la valeur actuelle du résultat de l'assureur. Par contre, un *shift* change la distribution des résultats actualisés. Les scénarios explosifs sont, dans l'ensemble plutôt favorables à l'assureur. En fait, la hausse des taux d'intérêt a deux effets. D'une part, elle implique une diminution de la valeur de marché du portefeuille obligataire (non exposé car pas de rachats dynamiques) et, d'autre part, elle signifie une augmentation du *drift* (taux court) pour l'actif risqué, source de bénéfice en moyenne.

En annexe, les graphiques similaires représentant les distributions croisées de la valeur actuelle des passifs projetés et l'indicateur de taux observées sont fournis. La forme incurvée des

nuages de points signifie que la VA du passif des flux de l'assureur est négativement impactée par le niveau des taux. Lorsque le taux moyen du scénario baisse, la valeur du passif gonfle.

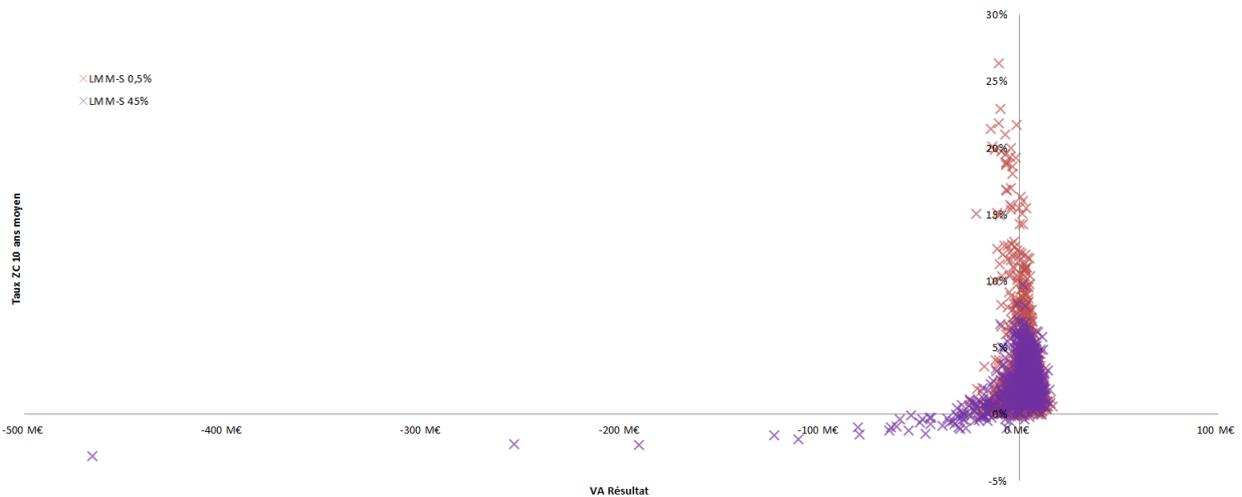


FIGURE 71 – Effets croisés indicateur de taux et valeur actuelle résultat - Euro

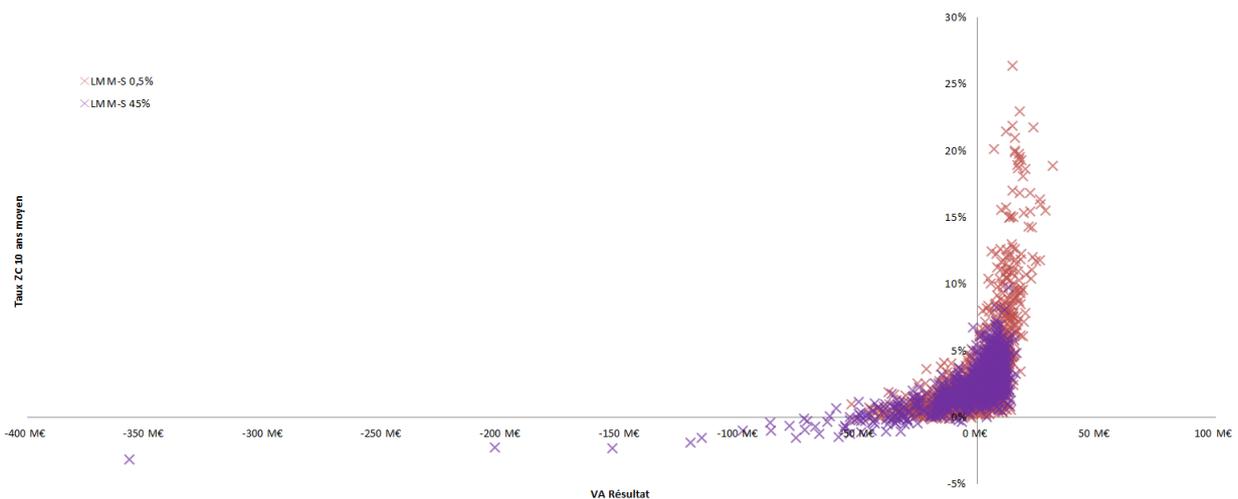


FIGURE 72 – Effets croisés indicateur de taux et valeur actuelle résultat - Retraite

L'étude des distributions croisées des taux moyens et de la VA du résultat de l'assureur met en avant la dangerosité de certains scénarios de taux bas.

5.3 Autres questions

5.3.1 Taux long : UFR

Le taux *forward* long est un paramètre d'extrapolation de la courbe des taux. Ce paramètre est mis à jour par l'EIOPA. L'étude de sensibilité à l'UFR est pertinente pour deux raisons. D'une part, la sensibilité de différents portefeuilles aux variations d'UFR est une expérience importante pour assurer la gestion des risque sur différentes lignes d'assurance vie. D'autre part, les assureurs doivent se préparer à un changement (en 2018) de la méthodologie de calcul de l'UFR et quantifier l'impact de ce changement sur leurs indicateurs de solvabilité.

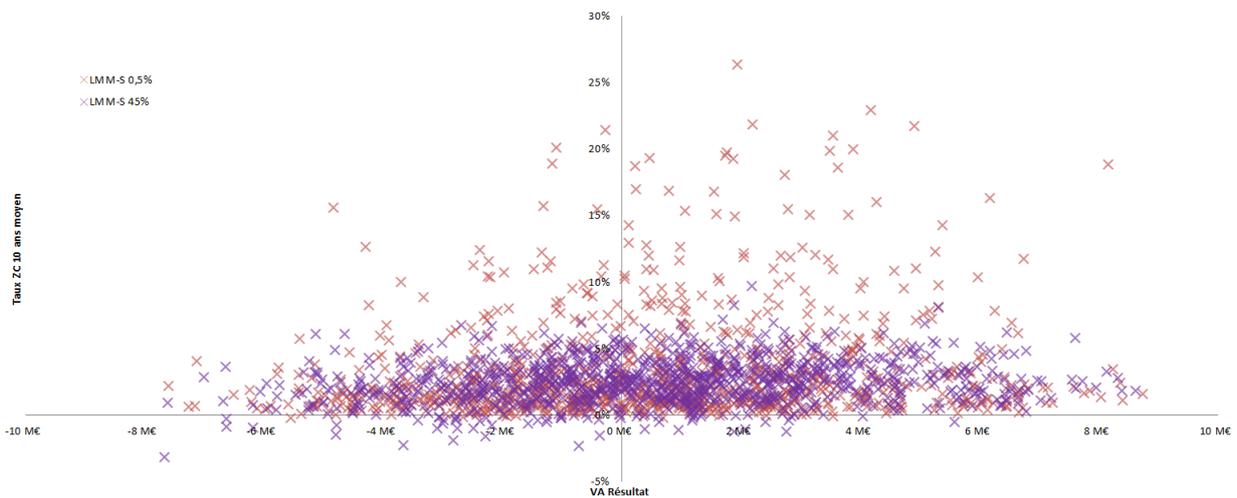


FIGURE 73 – Effets croisés indicateur de taux et valeur actuelle résultat - Euro Croissance

Pour commencer, le logiciel ALM a été sensibilisé aux scénarios économiques produits pour différentes courbes des taux. Le graphique 74 illustre les conséquences d’une variation d’UFR sur la TVFOG. La décroissance de la TVFOG pourrait s’expliquer par la baisse de la volatilité implicite des modèles de taux lorsque l’UFR augmente. La fonction est convexe avec l’UFR car les options (call ou put) ont un véga positif. La décroissance de la TVFOG est plus prononcée dans le cas de la retraite (plus grande duration). En revanche, la TVFOG du portefeuille euro croissance reste insensible aux changements d’UFR.

Le manque de régularité des points de TVFOG associés au modèle de taux G2++ est probablement dû à des écarts aléatoires de convergence causés par l’algorithme du recuit simulé. L’écart de TVFOG entre le modèle de taux DD-LMM 5% et les deux modèles de taux court est plus grand sur le portefeuille euro que sur le portefeuille retraite. Pour l’euro, les rachats dynamiques accroissent les coûts d’option. L’écart est insensible à l’UFR.

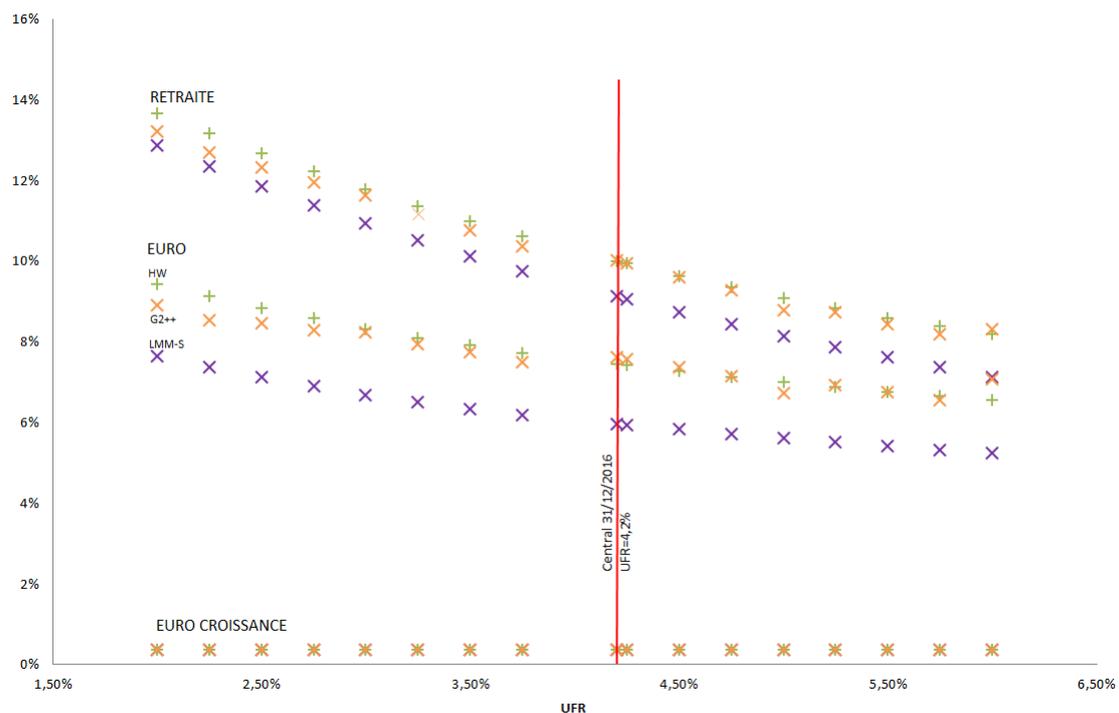


FIGURE 74 – Valeur temps normalisée des garanties et options

Modifier la courbe des taux permet également de tester la robustesse du calibrage d'un modèle. La figure 75 présente les valeurs calibrées de la volatilité σ et de la force de rappel a pour différents UFR. Seule la courbe des taux est reconstruite : les caractéristiques des *swaptions* sont inchangées.

Pour le modèle de Hull & White, les valeurs des paramètres σ et a sont présentées sur la figure 75. L'évolution de la volatilité est assez linéaire et croissante avec l'UFR. A contrario, la force de rappel est relativement constante. Les sauts de valeur de la force de rappel estimée s'expliquent par des erreurs de convergence qui peuvent être forts car la surface objective est très faiblement convexe selon ce paramètre. De plus, cette propriété de la fonction objectif montre que la force de rappel a a un impact négligeable sur le coût d'option par rapport à la volatilité σ .

Pour le modèle LMM, la diminution des volatilités à long terme est également constatée. Une étude supplémentaire sur l'extrapolation des volatilités des taux *forwards* est nécessaire pour garantir la pertinence des choix de modélisation des volatilités long terme.

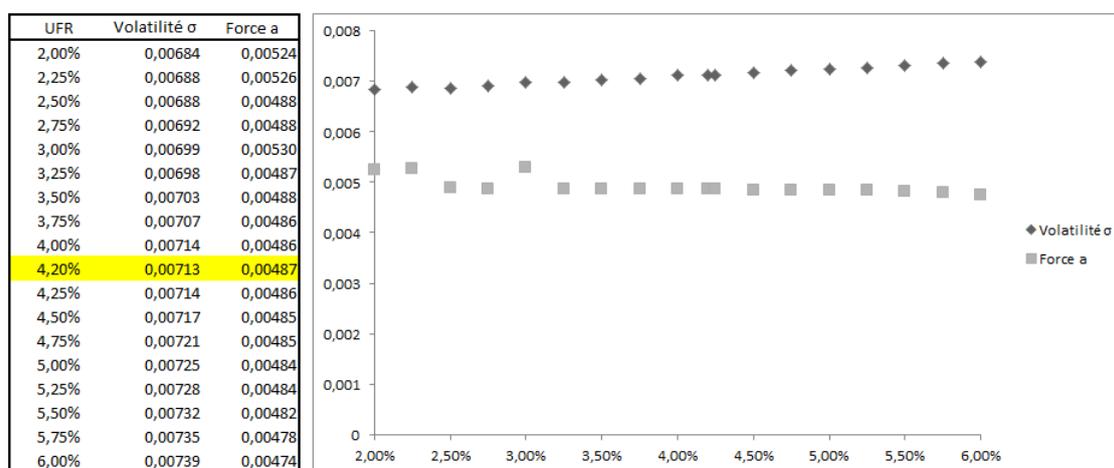


FIGURE 75 – Paramètres du modèle de Hull & White pour différents UFR

A partir de janvier 2018, l'EIOPA change sa méthode de calcul de l'UFR. L'UFR euro passe de 4.20% à 4.05% (transition maximale de 15 points de base par an). Cette nouvelle valeur de l'UFR impacte principalement les volatilités implicites log-normales des *swaptions* de longueur supérieures ou égales à 20 ans (cf. figure 76). Les écarts les plus importants se concentrent sur les *swaptions* de maturités autour de 20 ans (LLP) et de ténors courts (sensible au changement des taux *forwards*) : la courbe des taux *forwards* EIOPA est très sensible autour du *Last Liquid Point* (LLP).

La baisse de l'UFR est logiquement en défaveur de l'assureur qui perçoit des volatilités log-normales implicites globalement plus importantes. L'augmentation du coût des options et garanties financières de l'assureur s'accompagne d'un besoin en capital plus important.

5.3.2 Taux courts : VA

L'ajustement de volatilité se traduit par une translation non uniforme de la courbe des taux EIOPA à la hausse. Cette transformation géométrique est importante pour les maturités courtes puis s'atténue afin de conserver la convergence des taux *forwards* vers l'UFR. Toutes les hypothèses de calcul relatives à cette sensibilité sont en partie 4.4.2. Pour rappel, la courbe avec VA est **seulement** utilisée lors de la diffusion des taux. Les modèles sont calibrés à partir de la courbe des taux hors VA. Par conséquent, les volatilités implicites des modèles de taux sont identiques entre deux jeux de scénarios économiques dont la VA est différente.

		Ténon																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maturité	1	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%
	2	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%
	3	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%	0,09%
	4	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%	0,08%	0,11%
	5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,02%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%	0,08%	0,11%	0,12%
	6	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%	0,08%	0,11%	0,12%	0,14%
	7	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,01%	-0,03%	-0,03%	-0,02%	0,00%	0,03%	0,06%	0,08%	0,11%	0,12%	0,14%	0,15%
	8	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,02%	-0,03%	-0,04%	-0,03%	0,00%	0,03%	0,07%	0,10%	0,12%	0,14%	0,15%	0,16%	0,17%
	9	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,02%	-0,03%	-0,04%	-0,03%	0,00%	0,03%	0,07%	0,10%	0,12%	0,14%	0,15%	0,16%	0,17%	0,17%
	10	-0,01%	0,00%	0,01%	0,01%	0,00%	-0,02%	-0,04%	-0,04%	-0,03%	0,00%	0,04%	0,07%	0,10%	0,12%	0,14%	0,15%	0,16%	0,17%	0,17%	0,17%
	11	0,01%	0,02%	0,02%	0,00%	-0,02%	-0,04%	-0,05%	-0,03%	0,00%	0,04%	0,08%	0,11%	0,13%	0,15%	0,16%	0,17%	0,17%	0,17%	0,17%	0,18%
	12	0,03%	0,02%	0,00%	-0,03%	-0,06%	-0,06%	-0,04%	0,00%	0,05%	0,09%	0,12%	0,14%	0,16%	0,17%	0,18%	0,18%	0,18%	0,18%	0,18%	0,18%
	13	0,01%	-0,02%	-0,06%	-0,09%	-0,09%	-0,06%	-0,01%	0,05%	0,10%	0,14%	0,16%	0,17%	0,18%	0,18%	0,19%	0,19%	0,19%	0,18%	0,18%	0,18%
	14	-0,05%	-0,11%	-0,14%	-0,13%	-0,08%	-0,01%	0,06%	0,12%	0,15%	0,18%	0,19%	0,19%	0,20%	0,20%	0,20%	0,19%	0,19%	0,19%	0,18%	0,18%
	15	-0,19%	-0,21%	-0,17%	-0,09%	0,00%	0,08%	0,14%	0,18%	0,20%	0,21%	0,21%	0,21%	0,21%	0,21%	0,20%	0,20%	0,19%	0,19%	0,18%	0,18%
	16	-0,23%	-0,16%	-0,06%	0,04%	0,12%	0,17%	0,20%	0,22%	0,23%	0,23%	0,22%	0,21%	0,21%	0,20%	0,20%	0,19%	0,19%	0,18%	0,18%	0,18%
	17	-0,10%	0,01%	0,10%	0,17%	0,21%	0,23%	0,24%	0,24%	0,24%	0,24%	0,23%	0,22%	0,21%	0,21%	0,20%	0,20%	0,19%	0,18%	0,18%	0,17%
	18	0,09%	0,16%	0,21%	0,23%	0,25%	0,25%	0,25%	0,25%	0,24%	0,24%	0,23%	0,22%	0,21%	0,21%	0,20%	0,19%	0,19%	0,18%	0,17%	0,17%
	19	0,20%	0,24%	0,25%	0,25%	0,26%	0,26%	0,25%	0,25%	0,24%	0,23%	0,22%	0,21%	0,21%	0,20%	0,19%	0,19%	0,18%	0,17%	0,17%	0,16%
	20	0,25%	0,26%	0,26%	0,26%	0,26%	0,25%	0,25%	0,24%	0,23%	0,23%	0,22%	0,21%	0,20%	0,19%	0,19%	0,18%	0,17%	0,17%	0,16%	0,16%

FIGURE 76 – Écart des volatilités implicites UFR 4.2% et 4%

Selon le portefeuille étudié, la valeur temps des options et garantie (cf. figure 77) se comporte différemment.

Pour les contrats en fonds euro, le coût des options est décroissant avec la valeur de la VA. Cette diminution peut s'expliquer par la réduction du nombre de scénarios de taux proches ou en-dessous du TMG. Comme pour l'UFR, l'ajustement de volatilité met en avant la plus forte sensibilité du coût d'option à la baisse des taux plutôt qu'à la hausse (convexité). D'autre part, l'écart entre la valeur temps des modèles de taux court et le DD-LMM 5% s'amenuise avec la VA. En fait, en conservant les volatilités normales (G2++, HW) et log-normale (DD-LMM) calibrées sur la courbe des taux hors VA, le changement de courbe de taux pour la diffusion change le profil des scénarios. Par la hausse de la courbe des taux, l'ajustement de volatilité augmente la volatilité absolue des scénarios de taux du modèle log-normale et augmente le coût d'option.

Pour les contrats avec des rentes viagères, la valeur temps des options décroît avec la VA et l'écart de TVFOG calculée sur les trois modèles se réduit. Cependant, un point d'inflexion apparaît pour une VA de 0.30%, valeur du taux 1 an de la courbe des taux EIOPA hors VA. Avant ce point, la concavité peut s'expliquer par une hausse du BE déterministe qui modifie la valeur intrinsèque de l'option de *strike* le TMG.

5.3.3 Informations relatives aux chocs de taux S2

Le SCR de taux est le maximum entre un SCR calculé avec une courbe des taux stressée à la hausse et un SCR calculé avec une courbe des taux stressée à la baisse. L'EIOPA décide du profil des chocs à appliquer à la courbe des taux. Dans le contexte actuel de taux bas, les assureurs vie sont souvent plus sensibles aux chocs de taux à la baisse.

Sur la figure 78, la valeur du SCR de taux est normalisée par les provisions techniques initiales de l'assureur.

Pour les contrats euro croissance, le fort adossement de la valeur actuelle de la garantie de l'assureur en obligation permet d'éliminer une part importante du risque de taux. Pour les contrats en euros, la baisse de la courbe des taux augmente la densité des scénarios de taux négatifs et augmente ainsi le coût d'option lié au TMG. De même, le SCR de taux du portefeuille avec des rentes viagères est plus élevé que celui du portefeuille euro car le TMG est supérieur (1% contre 0%) et l'écart de duration actif-passif est plus important (20 ans contre 15.5 ans

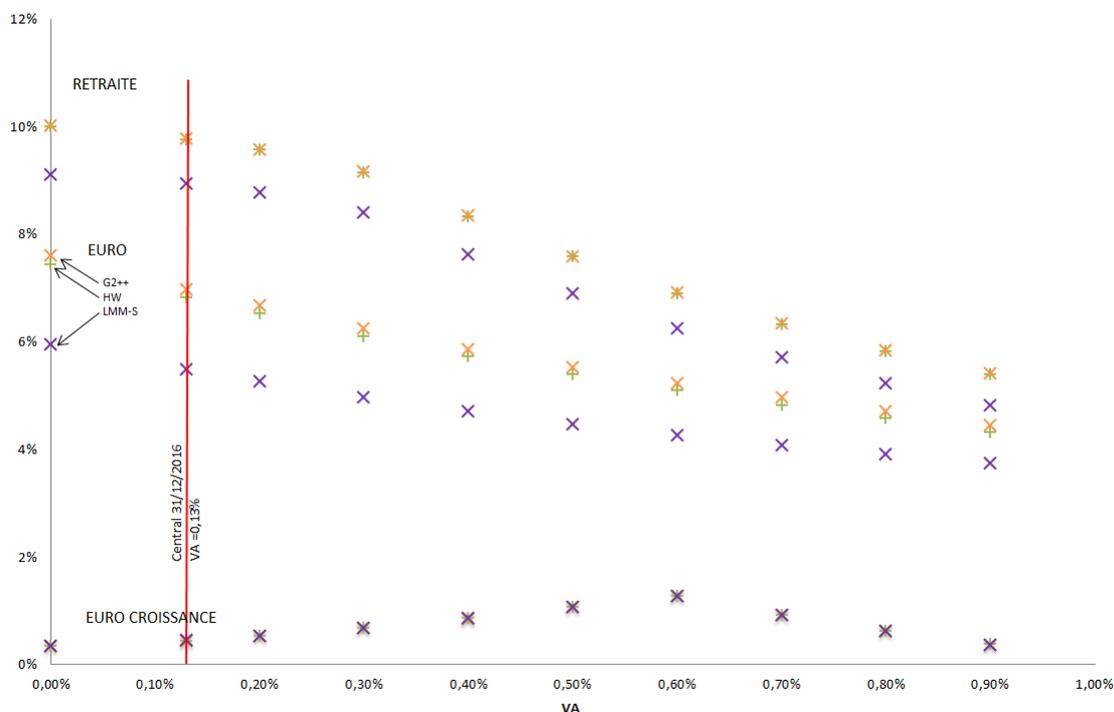


FIGURE 77 – Valeur temps normalisée des garanties et options financières - TVFOG

pour l'euro).

Le SCR de taux (cf. figure 78) se comporte différemment selon le portefeuille et le modèle de taux choisi.

Sur les contrats euro croissance, la faible sensibilité du passif de l'assureur aux taux d'intérêts se traduit par une indifférence dans le choix du modèle de taux pour évaluer cet indicateur prudentiel.

Pour les contrats en euro, le modèle de marché LMM (DD-LMM 0.5%) sous-évalue beaucoup le SCR de taux par rapport aux autres modèles. En fait, après translation de la courbe des taux à la baisse, le profil des scénarios reste explosif. Le faible taux de déclenchement de la garantie sous-estime le coût d'option par rapport à un modèle DD-LMM 45% ou gaussien. Les modèles gaussiens présentent un SCR de taux plus élevés car volatilités log-normale implicites sont surestimées (calibration sur les ténors et maturités longues). Les contrats retraite sont également assez sensibles au choix du modèle. Le SCR de taux associé au modèle de taux DD-LMM pour des valeurs faibles de *shift* est très grand en raison des fuites importantes (martingalité). Ce point est discuté dans l'analyse des résultats de la sensibilité au *shift*. Au-delà de ces considérations, le comportement du SCR de taux des modèles DD-LMM 45%, HW, et G2++ est similaire à celui de l'euro.

Sous solvabilité 2, le choc de taux correspond au maximum de deux stress : hausse et baisse de la courbe des taux. Les assureurs doivent être vigilants aux comportements des modèles de taux sur une courbe des taux stressée. Un modèle normal conserve la volatilité absolue. Cependant, pour un modèle log-normal, le niveau des taux *forwards* influe sur la volatilité absolue des taux projetés. A la baisse, la volatilité des scénarios est réduite et à la hausse, elle est augmentée.

L'impact du changement de taux sur la volatilité est quadratique. Par exemple, en prenant une diffusion log-normale *shiftée* :

$$\frac{d(F_t + s)}{F_t + s} = \sigma dW_t \quad (35)$$

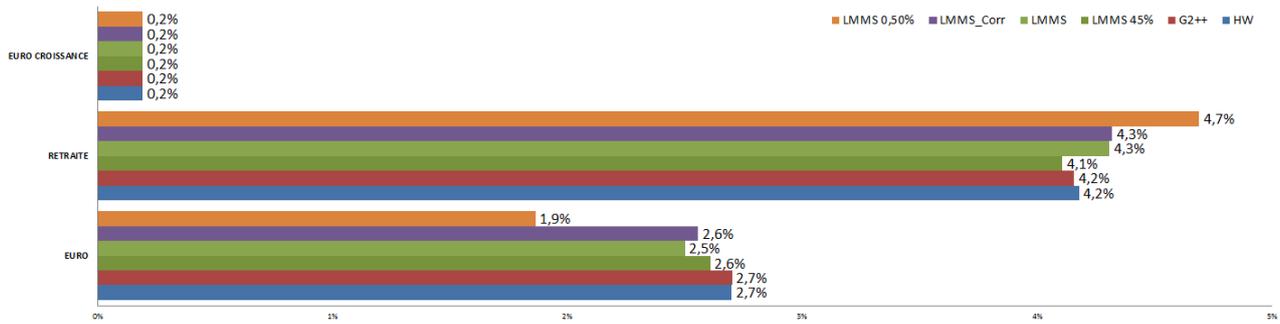


FIGURE 78 – SCR Taux normalisé

Il est facile de montrer que la volatilité du processus s'écrit :

$$\mathbf{V}[F_t] = (F_0 + s)^2(\exp^{\sigma^2 t} - 1) \quad (36)$$

L'écart type des scénarios économiques de taux est donc linéaire par rapport à la valeur du *shift*.

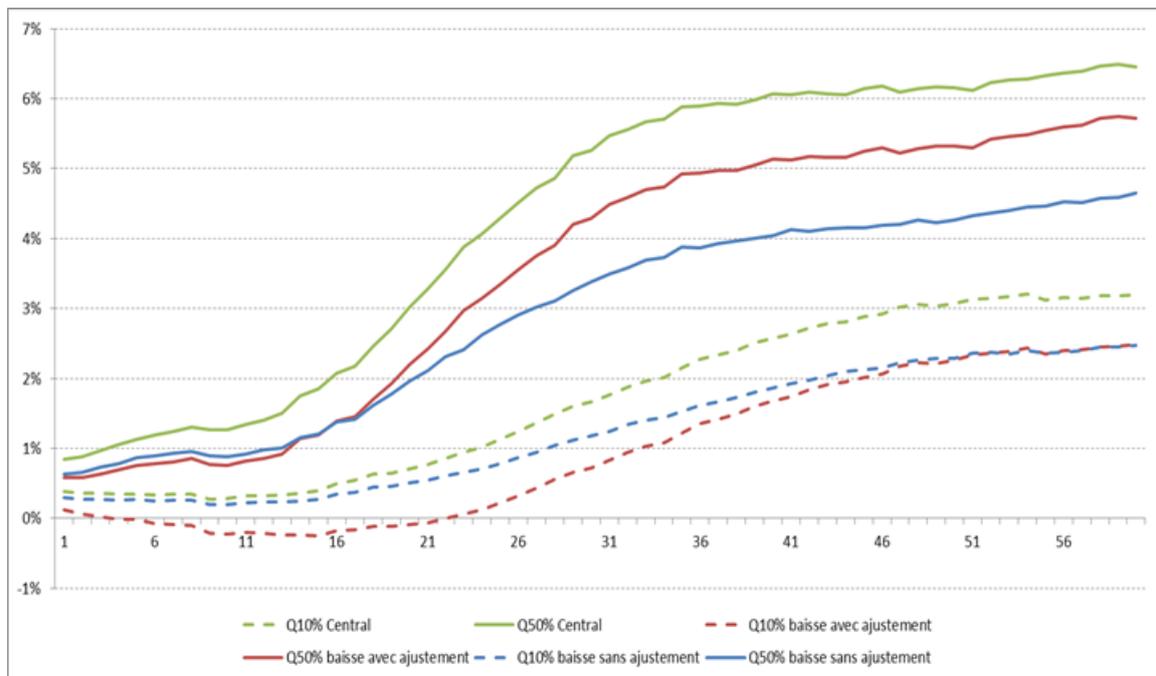


FIGURE 79 – Chocs de taux et volatilités absolues

5.3.4 Martingalité des réinvestissements

La martingalité des réinvestissements est un phénomène peu contrôlé. Certains assureurs peuvent observer des fuites de modèles dans leur utilisation courante. Ce désagrément a pour conséquence de biaiser leur valorisation de leur passif et d'impacter directement leur niveau de solvabilité. Cette courte étude tente d'illustrer ce problème.

Pour chaque portefeuille et pour chaque jeu de scénarios, les ratios VAP/VM sont représentés dans le tableau 80. Dans l'ensemble, les écarts observés sont dans une marge acceptable. En revanche, la valeur du test de martingalité du portefeuille retraite a tendance à s'accroître lorsque le *shift* est faible. Cette fuite du modèle ALM peut s'expliquer par l'utilisation de certaines stratégies de gestion d'actif dynamiques sur le long terme.

	SHIFT														
<i>Ecart VAP VM</i>	0,50%	0,75%	1,00%	1,25%	1,50%	1,75%	2,00%	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%	7,00%	8,00%	9,00%	10,00%
EURO	0,09%	0,12%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,13%	0,13%	0,13%	0,13%	0,12%	0,12%
RETRAITE	0,86%	0,69%	0,58%	0,50%	0,45%	0,40%	0,37%	0,28%	0,24%	0,22%	0,21%	0,20%	0,19%	0,19%	0,18%
EURO CROISS.	0,09%	0,12%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,14%	0,13%	0,13%	0,13%	0,13%	0,12%	0,12%

<i>Ecart VAP VM</i>	11,00%	12,00%	13,00%	14,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	35,00%	40,00%	45,00%
EURO	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%
RETRAITE	0,18%	0,18%	0,18%	0,18%	0,17%	0,17%	0,17%	0,16%	0,16%	0,16%	0,16%
EURO CROISS.	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,12%	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%	0,11%

FIGURE 80 – Ecart VAP / VM en fonction du *shift*

Pour comprendre les fuites de modèle observées, il suffit de construire une stratégie financière prédéfinie qui présente des opportunités d'arbitrage. Par exemple, considérons une stratégie reposant sur la vente et le réinvestissement annuel systématique du portefeuille dans une obligation zéro coupon sans risque 10 ans : chaque année, l'assureur vend son obligation "vieille" de maturité 9 ans et réinvestit le montant obtenu dans une obligation de maturité 10 ans (cette modélisation est typique de celle utilisée pour simuler la poche OPCVM obligatoire dans un modèle ALM). Par conséquent, à la date t , la valeur du portefeuille est revalorisée du montant $\frac{P(t,9)}{P(t-1,10)}$. La valeur du portefeuille en t s'écrit :

$$S_t = S_0 \prod_{u=1}^t \frac{P(u, 9)}{P(u-1, 10)} \quad (37)$$

Sous l'hypothèse d'AOA, tous les portefeuilles actualisés autofinancés sont des martingales :

$$\tilde{S}_0 = \mathbb{E}[\tilde{S}_t] \quad (38)$$

L'égalité 38 est testée pour plusieurs jeux de scénarios et différents horizons. Les deux graphiques de la figure 81 illustrent l'apparition d'écarts du test de martingalité importants lorsque le *shift* est élevé et/ou le *cap* bas. Par conséquent, la déformation de la distribution log-normale par le *cap* ne conserve pas la risque neutralité des scénarios de taux. La forte corrélation qui existe entre le nombre de dépassements du *cap* et l'écart de martingalité confirme cette analyse. L'utilisation du *cap* pour générer des scénarios de taux long terme n'est donc pas indiquée ici.

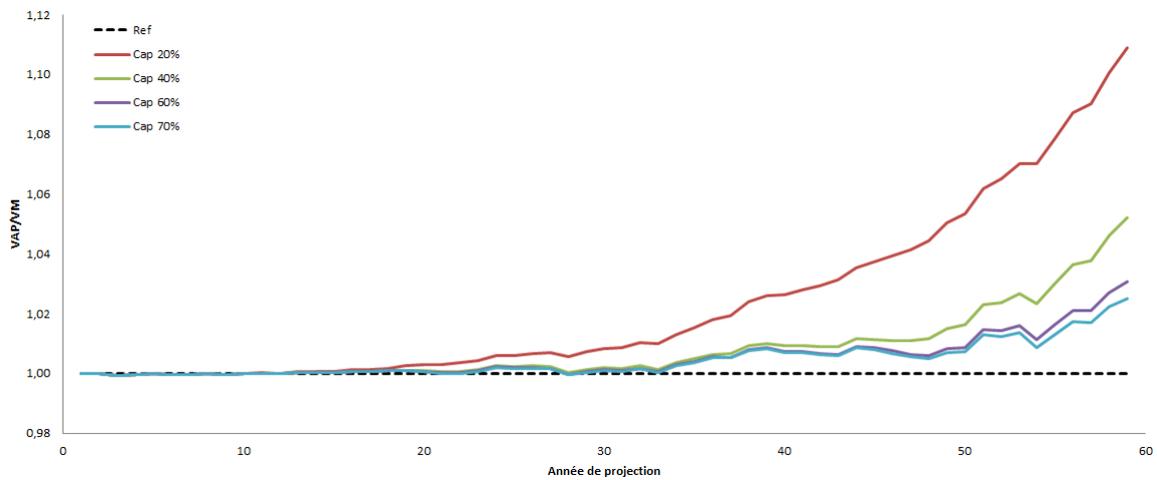
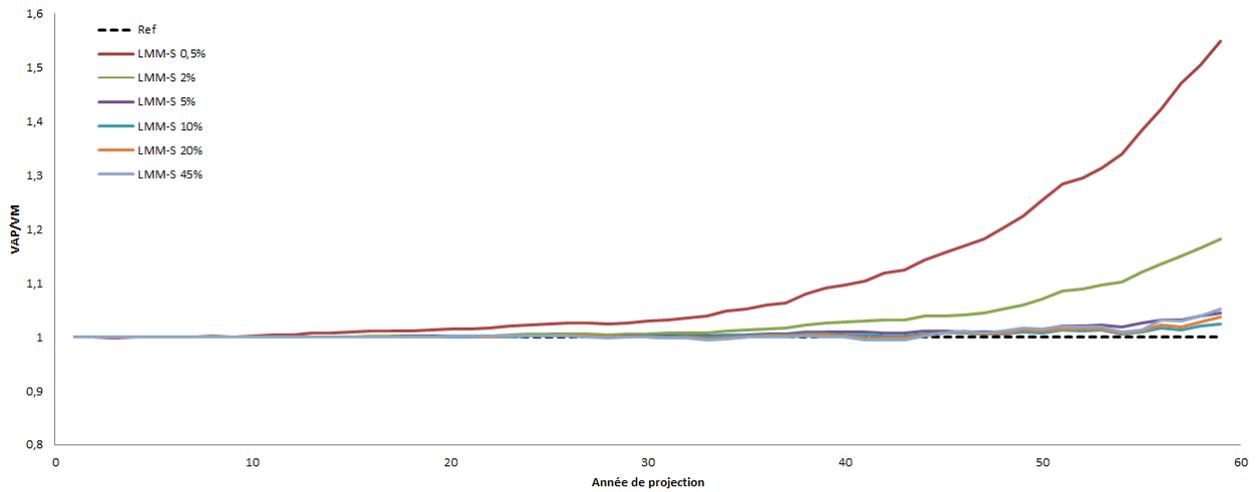


FIGURE 81 – Martingalité de réinvestissements dans une obligation ZC 10 ans

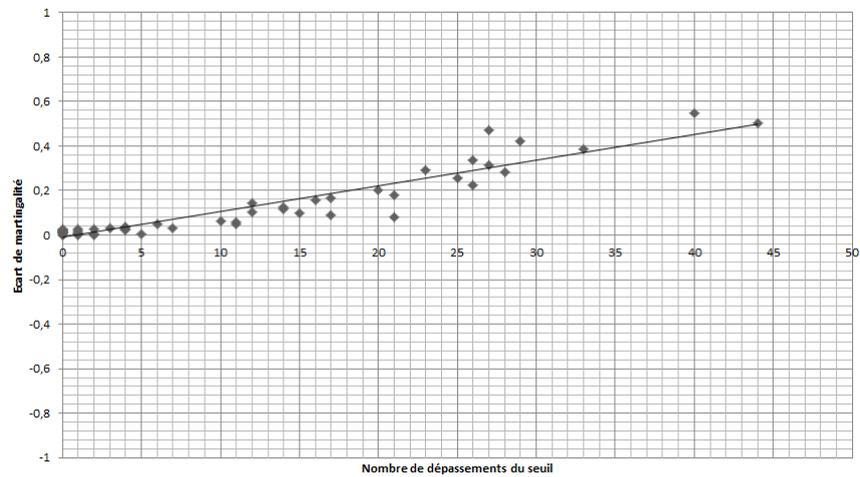


FIGURE 82 – Régression linéaire de la martingalité des réinvestissement contre le nombre de dépassement du cap - shift 0,50%

Troisième partie

Conclusion

Ce mémoire d'actuaire a présenté les principales étapes de l'implémentation d'un générateur de scénarios économique risque neutre dans une version industrielle avancée. Cet outil informatique, qui vise à être conforme avec les exigences réglementaires en vigueur, répond à une volonté de construire une solution durable et performante. La qualité du logiciel a été appréciée au travers d'une étude actuarielle de l'impact de la modélisation des taux en assurance vie, problématique actuelle et au cœur des sujets de recherche en assurance vie.

Pour les besoins de l'étude, le développement du GSE est principalement orienté sur l'enrichissement de la famille des modèles de taux : G2++, HW, LMM, DD-LMM (et autres versions). Par un travail de calibration sur des données pertinentes du marché (*swaptions*), ces modèles sont *Market Consistent*. Cette propriété est validée par des tests standards (martingalité, réplication des prix *swaptions*) avant écriture définitive des scénarios. Le GSE produit également des statistiques permettant d'illustrer d'autres caractéristiques des scénarios économiques : forme des courbes de taux, réplication des corrélations, distribution des taux, paramètres des modèles ... L'interface graphique a été conçue pour faciliter l'utilisation et la maintenance de la chaîne de production du GSE.

L'implémentation de ce GSE démontre aussi que l'automatisation de l'ensemble de la chaîne de production des indicateurs de solvabilité apporte des avantages concurrentiels et financiers pour les assureurs. La centralisation des procédés de calculs dans un unique logiciel réduit les erreurs opérationnelles. La réduction des temps de calcul des indicateurs de solvabilité permet de produire plus d'indicateurs de risque et donc de mieux connaître ses risques et de mieux les maîtriser.

Dans l'étude, les différentes sensibilités effectuées sur la modélisation des taux d'intérêts en assurance vie tentent d'apporter un nouveau regard sur ce risque. Un bon choix de modèle de taux en assurance vie doit prendre en compte les spécificités (interactions, type de contrats, duration, ...) du passif valorisé. Ce critère doit être pris en compte par les assureurs qui adoptent des modélisations financières en adéquation avec la *Market Consistency*. En contexte de taux bas, l'utilisation des modèles log-normaux simples pour projeter des taux d'intérêt sur le long terme a deux conséquences majeures : une distribution des taux totalement irréaliste et un impact fort sur le besoin en fond propre de l'assureur (sous-estimation du coût d'option). L'impulsion d'une nouvelle méthodologie de calcul de l'UFR par l'EIOPA doit être accompagnée d'analyses chiffrées d'impact de changement d'UFR et de la VA. Le changement de courbe des taux pour le calcul du choc de taux impacte la volatilité des scénarios de taux si un modèle log-normal est utilisé.

Une continuité des travaux réalisés pour cette étude est souhaitable. Concernant le GSE, l'architecture permet de facilement intégrer de nouveaux modèles financiers aux classes existantes. Le fonctionnement de l'outil est perfectible grâce notamment à l'implémentation de tests de non régression et l'enrichissement de la famille des exceptions. Concernant la problématique sur la modélisation des taux d'intérêt en assurance vie, tous les modèles de taux ne sont pas implémentés et beaucoup de comparaisons avec des modèles plus complexes sont à faire. On peut par exemple imaginer qu'une modélisation économétrique risque neutre pourrait s'avérer plus adaptée aux besoins en assurance vie.

Références

- [1] *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2006.
- [2] *Search and Optimization by Metaheuristic - Techniques and Algorithm Inspired by Nature*. Birkhäuser Basel, 2016.
- [3] ACPR. Revalorisation 2016 des contrats d'assurance-vie et de capitalisation - engagements à dominante épargne et retraite individuelle. Technical report, ACPR, juillet 2017.
- [4] ACPR. Stress tests eiopa 2016. Technical report, ACPR, mars 2017.
- [5] ACPR. Analyse et synthèses, la situation des principaux organismes d'assurance en 2015. Technical report, ACPR, septembre 2016.
- [6] Nathalie Picard Charles Maurin, André de Palma. Regime switching models : an application to the real estate market in ile-de-france. *SustainCity*, 2012.
- [7] Fédération Française de l'Assurance. Les assurances de personnes : données clés 2016. Technical report, FFA, 2017.
- [8] EIOPA. Technical documentation of the methodology to derive eiopa's risk-free interest rate term structures. Technical report, EIOPA, 2017.
- [9] Fabio Mercurio Eymen Errais, Gianvittorio Mauri. Capturing the skew in interest rate derivatives : A shifted lognormal libor model with uncertain parameters. •, 2004.

Quatrième partie
Annexes

Algorithme du recuit simulé

L'algorithme du recuit simulé est un algorithme d'optimisation probabiliste. Le but de l'algorithme est de trouver le minimum global d'une fonction objectif avec des minimums locaux. Les points explorés sont tirés aléatoirement puis acceptés selon un critère dépendant de la température de refroidissement du système. Le livre [2] présente la version de base de l'algorithme et une application sur la fonction de Easom.

Avant d'être utilisé sur la fonction objectif du modèle G2++ (cf. partie 2.2.2), l'algorithme du recuit simulé a été testé sur des fonctions plus simples. Les résultats d'une des fonctions objectifs de test sont présentés dans cette annexe. La fonction de test s'écrit :

$$f(x) = \frac{x^2}{8 + x^2} + \frac{(x + 7)^2}{5 + (x + 7)^2} \quad (39)$$

Le gradient de cette fonction existe et s'annule en deux points -0.1 et -6.91 ; abscisses de deux puits de potentiel. Le minimum global de la fonction f est environ -6.91.

Le choix des paramètres de l'algorithme est déterminant pour obtenir une bonne calibration. Par exemple, le choix d'une température initiale trop faible contraint l'algorithme à converger vers un point trop local par rapport au point initial (cf figure 83 et 84). Le critère de rejet est un tirage uniforme comparé au critère classique $e^{-\frac{\Delta f}{T}}$. Le point initial de l'algorithme est $x_0 = 10$.

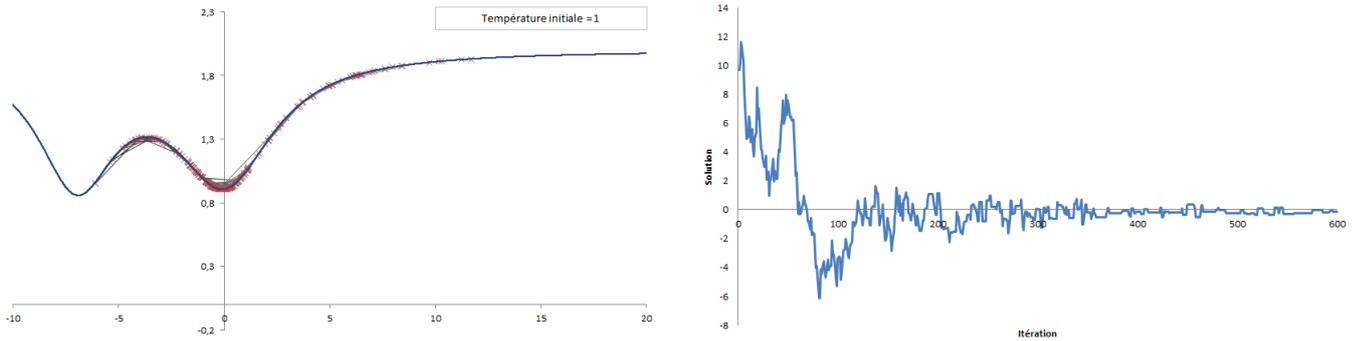


FIGURE 83 – Convergence du recuit simulé pour $T_{init} = 1$

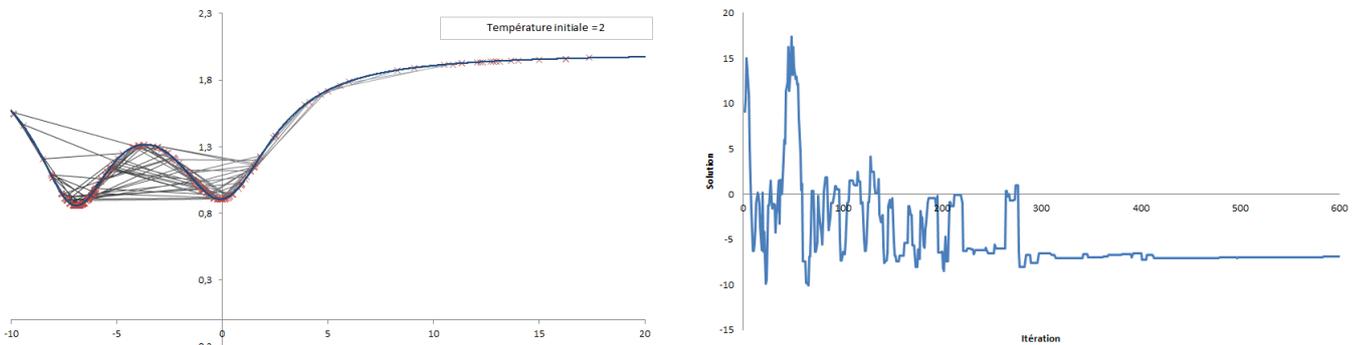


FIGURE 84 – Convergence du recuit simulé pour $T_{init} = 2$

Vieillessement d'un contrat euro

Pour calculer un *Solvency Capital Requirement* (SCR), le logiciel ALM calcule plusieurs *Best Estimates* (*Best Estimate* (BE)) avec des hypothèses différentes : marché, mortalité, longévité, ... Chaque BE représente, sous des hypothèses spécifiques (stresses), les engagements d'un assureur en vision économique. Le calcul d'un *Best Estimate* par Monte-Carlo se traduit par la projection de plusieurs trajectoires du bilan de l'assureur, chacune basée sur un scénario économique. A chaque pas de projection, la situation financière de l'assureur est modifiée : étape de vieillissement.

Le vieillissement de l'actif constitue la première étape de calcul. Chaque poche d'actif est revalorisée à partir du scénario économique risque neutre de la simulation.

La projection d'une obligation à taux fixe s'effectue en trois étapes. Tout d'abord, la valeur de marché de l'obligation est diminuée de la valeur du coupon (produit financier). Dans un deuxième temps, les montants de coupons futurs et du remboursement à la maturité sont ajustés en proportion des défauts survenus dans l'année (réalisation du *spread*). Enfin, la valeur de marché de l'obligation est recalculée à partir de la courbe des taux (sans risque) courante. Les obligations sont supposées sans primes de remboursement.

Les parts d'immobilier et d'action sont revalorisées par leurs rendements de l'année courante. Les taux annuels de dividende des indices action et immobilier sont constants et valent respectivement 0.10% et 0.57%.

L'OPCVM obligataire est revalorisé à partir d'un indice synthétique (valeur de marché d'un zéro coupon de maturité 10 ans). Le taux de dividende du fonds est supposé nul.

Différentes stratégies de gestion d'actif sont possibles au travers de *Management Rules*. Pour l'étude, la stratégie de l'assureur est de conserver son allocation initiale. Pendant ce rééquilibrage, les achats et ventes d'actifs s'opèrent sans frictions (pas de frais de transaction). Aucune externalisation systématique des plus-values latentes n'est prise en compte. Les variations des actions globales ne sont pas couvertes par une stratégie de réplique. En fin de simulation, les plus-values latentes sont liquidées. Les frais de gestion financière sont de 0.032% de la valeur de marché totale du portefeuille.

Au passif, le vieillissement du *model point* est simplifié. Dans un premier temps, la provision mathématique est réduite du montant des provisions techniques des assurés décédés et des assurés qui ont racheté leur contrat dans l'année. Le taux de décès de l'année courante est calculé à partir de la table de mortalité TF0002_5%. Le taux de rachat se projette selon deux composantes : structurel (non comportemental) et partiel (comportemental). Le rachat structurel est supposé constant égal à 5%. Les rachats partiels/dynamiques sont modélisés par une loi comportementale dynamique (RC inf sur la figure 86) issue du rapport *QIS V*. Cette loi postule que la probabilité de rachat d'un contrat dépend de l'écart entre le taux de marché et le taux servis (cf. figure 86). Le taux de rachat ne peut pas être supérieur à la provision mathématique diminuée de la provision des contrats décès. Le taux servi de l'année de départ est de 2,20%.

Le taux des frais de gestion (0,30%) s'applique sur la provision mathématique de l'année précédente. Les frais de gestion ne subissent pas d'inflation dans le temps. Par simplification, les taux de frais fixes, d'impôt et de prélèvements sociaux sont tous supposés constants et nuls. Pour conserver une provision technique contractuelle constante, le nombre de contrats est diminué en proportion de la variation de Provision Mathématique (PM) du *model point*.

Une fois le passif et l'actif projetés de manière indépendante, l'assureur effectue un ajustement de sa trésorerie et applique sa stratégie de gestion d'actif. Le solde de trésorerie de l'année

le monétaire. Si cet actif vient à manquer, l'assureur vend la même proportion de tous ses actifs (obligations, actions, immobiliers, ...).

Une fois sa trésorerie calculée et ajustée, l'assureur peut gérer son allocation d'actif comme il le souhaite. Les *management rules* permettent de paramétrer le comportement de l'assureur. Ici, l'assureur réinvestit le surplus de trésorerie puis effectue des achats/ventes afin de conserver son allocation initiale.

L'assureur peut être contraint (rachat/décès) à la vente d'obligations en plus-values latente. Cette vente permet de doter la réserve de capitalisation (RK) et d'amortir l'impact de ventes futures d'actifs amortissables en moins-value.

Enfin, l'assureur calcule le taux cible de participation aux bénéfices qu'il souhaite servir à ses assurés :

$$TxCible(n) = Max(TxMarche - TMG - TxChgt, Max(0, TxServi(n-1) - TMG - Lissage)) + TMG \quad (40)$$

Le taux de lissage est ici de 0.24%. Le taux initial servi est de 2.20%. Le taux de chargement est de 0.72%.

Chaque année, les assurés perçoivent 95% des bénéfices financiers réalisés sur les actifs en représentation de ses provisions techniques. Pour l'étude, l'assiette de Participation aux bénéfices (PB) est composée de la PM, de la réserve de capitalisation et de la PPE de l'année précédente. L'assiette d'actif est composée de la moyenne des Valeur Nette Comptable (VNC) de l'année courante et de l'année précédente. Ces deux référentiels sont des choix de modélisation. Les produits financiers de l'année sont les plus-values (hors obligations), les dividendes, les surcotes/décotes obligataires, les coupons tombés et les défauts obligataires. Si les produits financiers sont positifs, l'assureur dote une réserve de participation aux bénéfices.

$$ReserveDePB = (ProduitsFi - FraisDeGestionFi) 95\% \frac{AssiettePT}{AssietteQP} - ChargementPT \quad (41)$$

Si la PPE (vieille de 8 années) est supérieure au montant de PB cible, l'assureur peut confortablement rémunérer ses assurés avec ce montant. Sinon, l'assureur vérifie qu'il dispose d'un montant de PPE suffisant, prélève le montant de PB de l'année et stocke sa réserve de PB dans la file PPE. Si la PPE est asséchée, l'assureur est contraint de vendre des actifs. D'autres étapes de gestion de la PB sont effectuées et ne sont pas expliquées dans cette partie.

Volatilités implicites des taux forwards du LMM

Maturité	Années de projection																																																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42											
1	5%																																																				
2	6%	8%																																																			
3	8%	8%	11%																																																		
4	11%	9%	8%	13%																																																	
5	12%	9%	11%	10%	14%																																																
6	12%	12%	9%	10%	11%	15%																																															
7	14%	10%	10%	11%	10%	12%	11%																																														
8	13%	11%	10%	10%	12%	11%	9%	12%																																													
9	13%	13%	12%	8%	8%	11%	11%	13%	10%																																												
10	12%	12%	12%	10%	9%	10%	12%	12%	10%	10%																																											
11	11%	13%	13%	11%	10%	9%	8%	11%	11%	7%	11%																																										
12	11%	9%	13%	13%	11%	11%	7%	10%	11%	10%	6%	9%																																									
13	11%	10%	9%	17%	11%	12%	11%	10%	8%	9%	9%	5%	7%																																								
14	12%	10%	9%	7%	20%	13%	10%	10%	9%	5%	11%	10%	5%																																								
15	12%	10%	9%	8%	7%	25%	8%	10%	11%	8%	6%	10%	10%	4%																																							
16	11%	12%	9%	8%	7%	9%	22%	16%	9%	12%	9%	9%	9%	16%																																							
17	11%	10%	11%	8%	7%	9%	4%	29%	9%	8%	11%	10%	10%	6%																																							
18	11%	10%	8%	11%	7%	9%	4%	9%	31%	4%	11%	11%	11%	12%																																							
19	11%	10%	8%	9%	9%	8%	4%	9%	7%	29%	11%	10%	10%	14%	22%																																						
20	11%	10%	8%	9%	7%	9%	4%	8%	6%	3%	28%	12%	9%	9%	19%																																						
21	10%	10%	8%	8%	7%	5%	9%	8%	6%	3%	4%	28%	12%	8%	9%																																						
22	9%	9%	9%	8%	7%	5%	6%	11%	6%	3%	4%	5%	29%	13%	7%	17%	17%																																				
23	9%	9%	9%	9%	7%	5%	6%	7%	10%	3%	4%	4%	5%	31%	13%																																						
24	9%	9%	9%	9%	9%	5%	6%	7%	5%	9%	4%	4%	5%	5%	35%	18%																																					
25	8%	8%	8%	8%	8%	8%	6%	7%	5%	3%	9%	4%	4%	5%	5%	48%	11%																																				
26	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	7%	5%	3%	2%	11%	4%	4%	4%	40%	11%																																				
27	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	5%	3%	2%	2%	13%	4%	4%	4%	67%	14%	6%																																	
28	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	3%	2%	2%	3%	16%	4%	3%	5%	4%	67%	11%																																
29	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	2%	2%	2%	3%	3%	19%	3%	3%	3%	43%	3%																																
30	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	2%	2%	2%	3%	3%	24%	3%	3%	3%	3%	3%																																
31	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	2%	24%	3%	3%	3%	3%	3%																																
32	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	31%	3%	3%	3%	3%	3%																																
33	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	34%	3%	3%	3%	3%	3%																																
34	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	32%	3%	3%	3%	3%	3%																																
35	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																
36	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																
37	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																
38	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																
39	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																
40	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																
41	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																
42	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	7%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%																																

FIGURE 87 – Volatilités des taux *forwards* - DD-LMM 5% - 31/12/2016

Volatilités implicites des taux forwards du LMM version discret

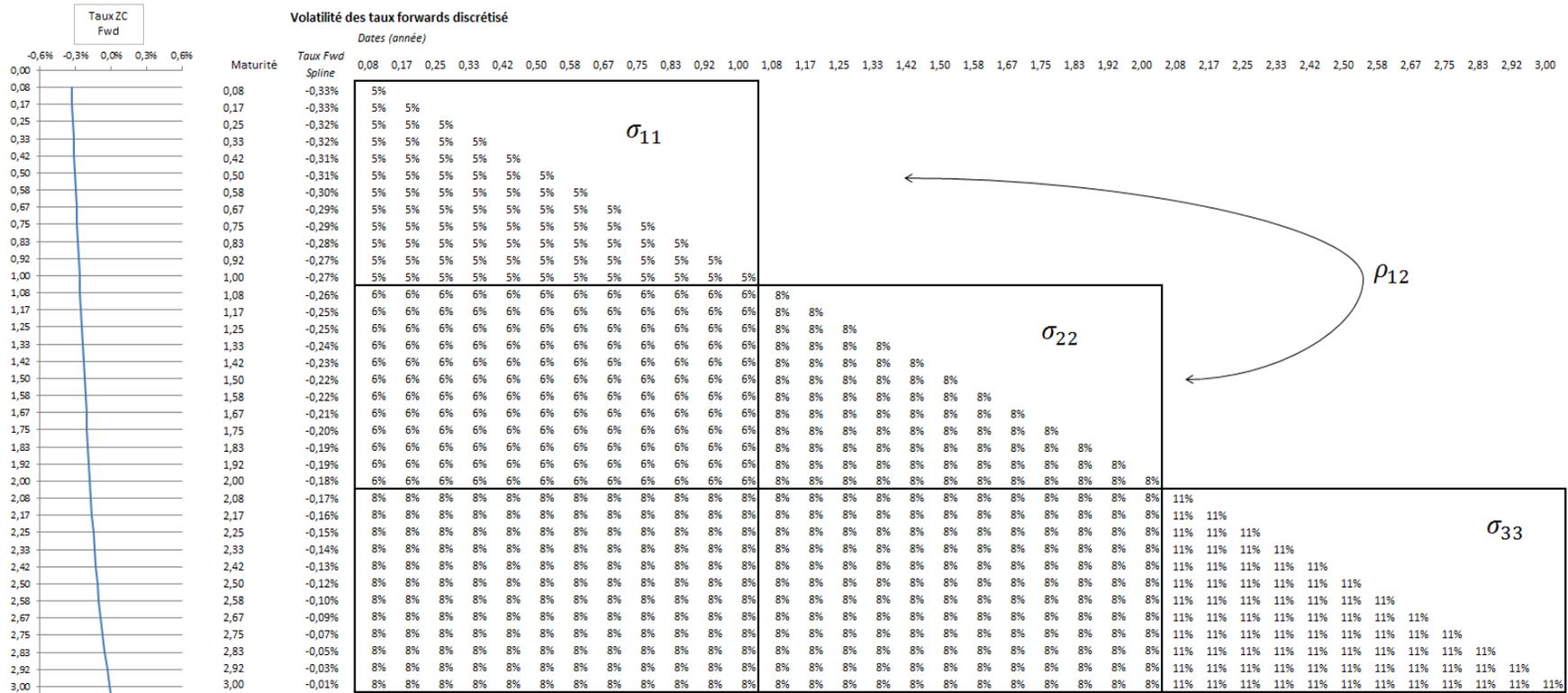


FIGURE 88 – Schéma descriptif de la modélisation des volatilités forwards du DD-LMM discrétisé

Réplication des prix *swaptions* marché / Monte Carlo

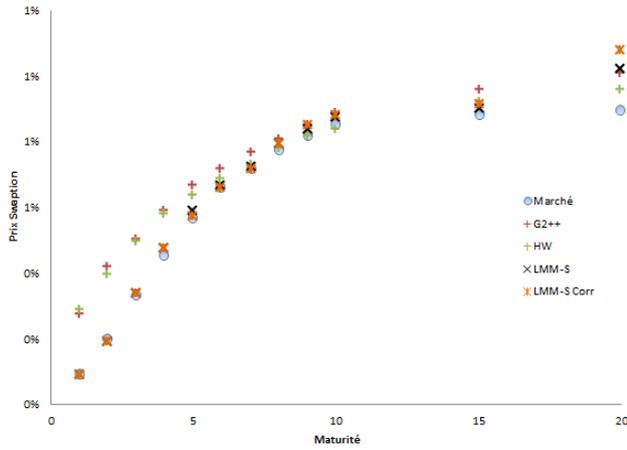


FIGURE 89 – Ténor 1 an

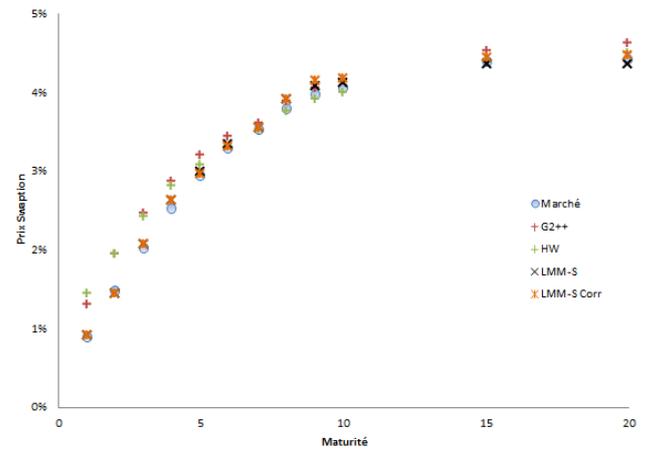


FIGURE 90 – Ténor 5 ans

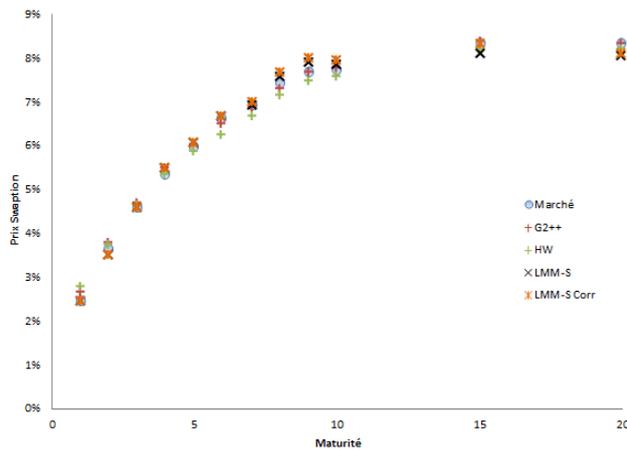


FIGURE 91 – Ténor 10 ans

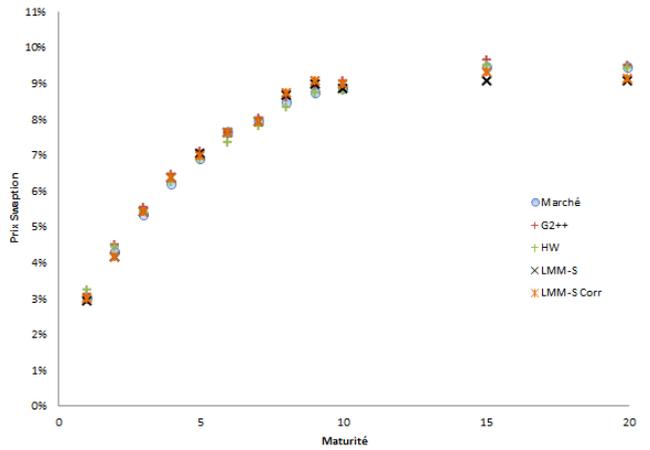


FIGURE 92 – Ténor 12 ans

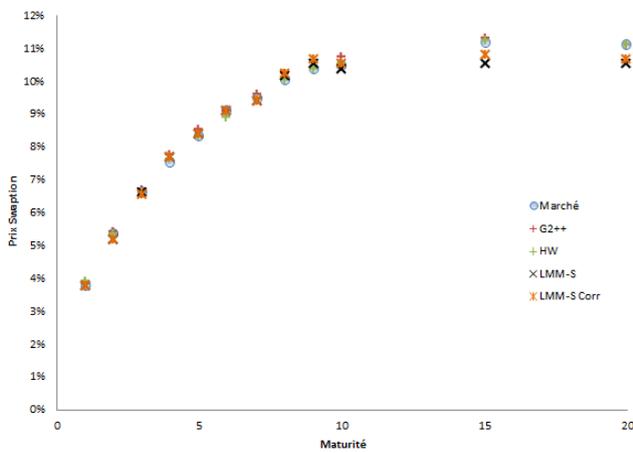


FIGURE 93 – Ténor 15 ans

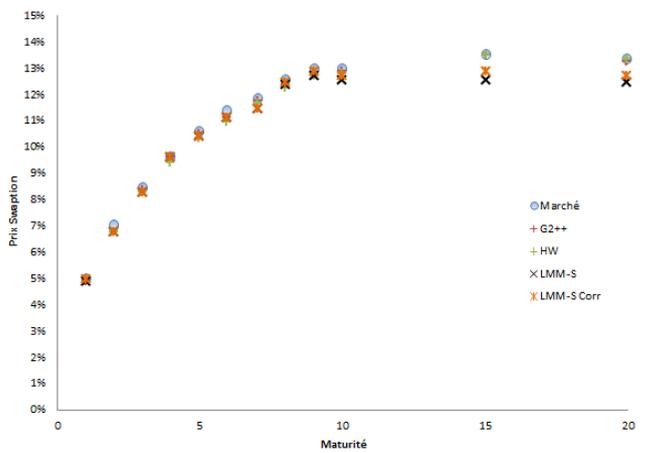


FIGURE 94 – Ténor 20 ans

Échantillonnage de courbes des taux $t = 10$ ans

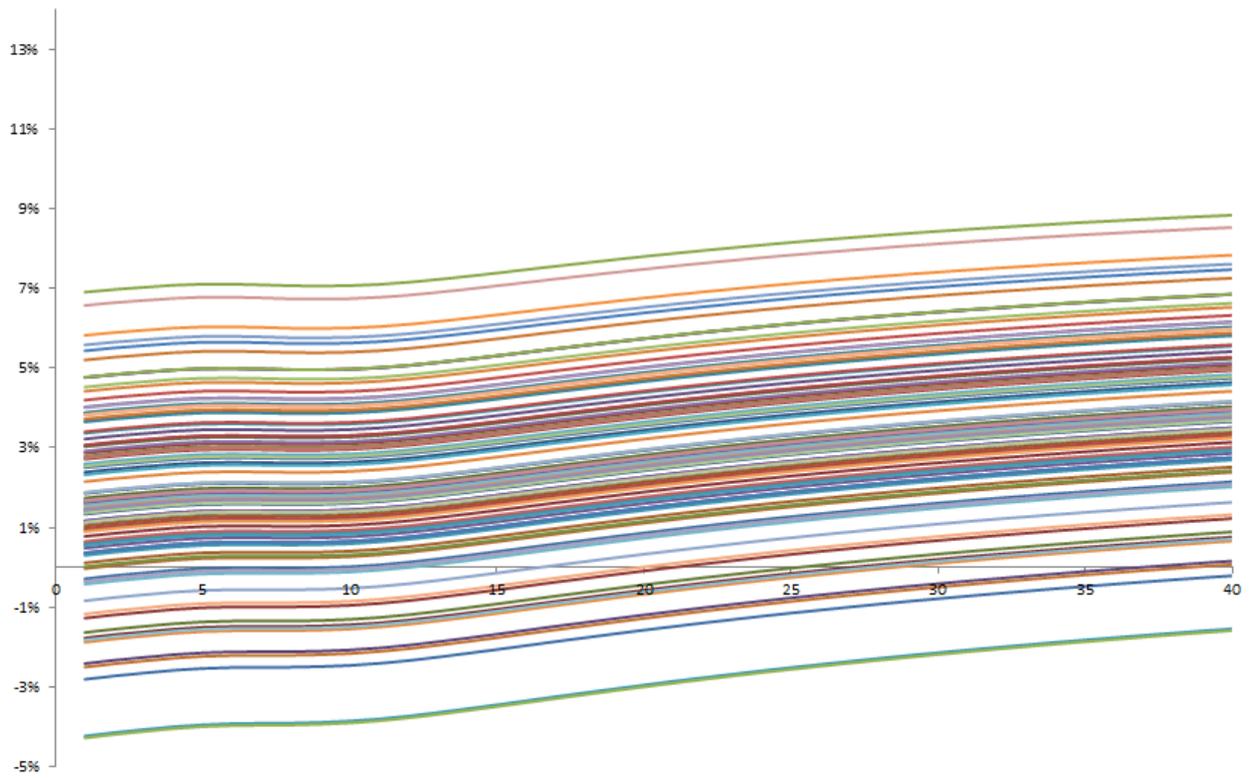


FIGURE 95 – Modèle de Hull & White

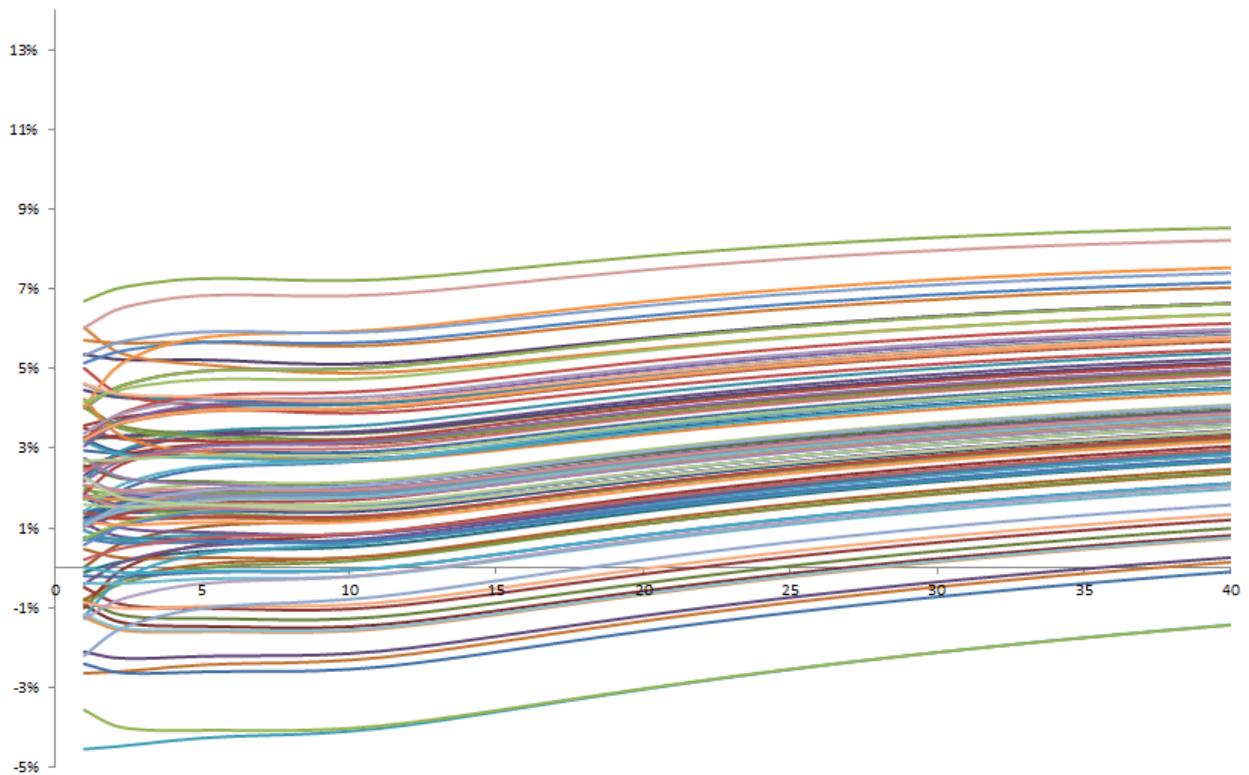


FIGURE 96 – Modèle gaussien à 2 facteurs

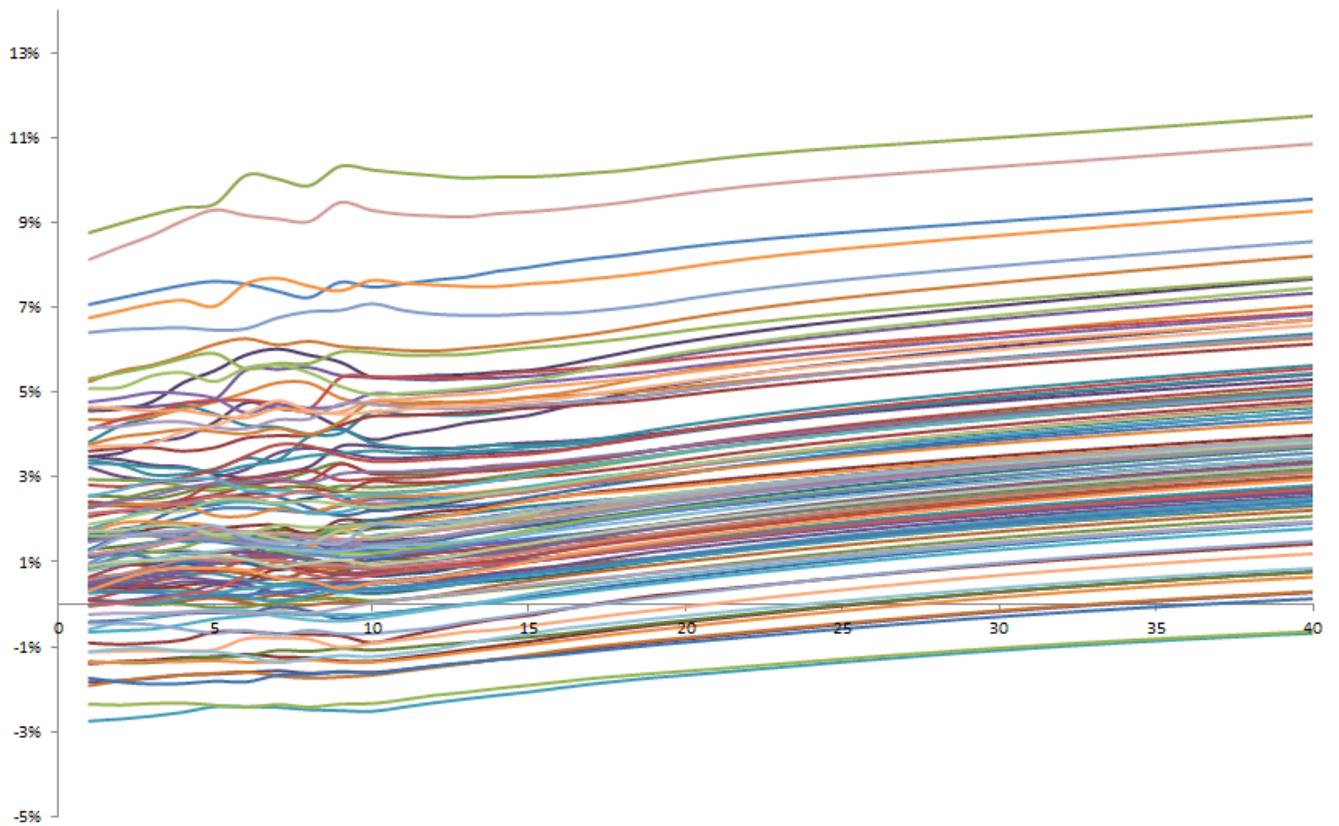


FIGURE 97 – Modèle DD-LMM *shift* 5%

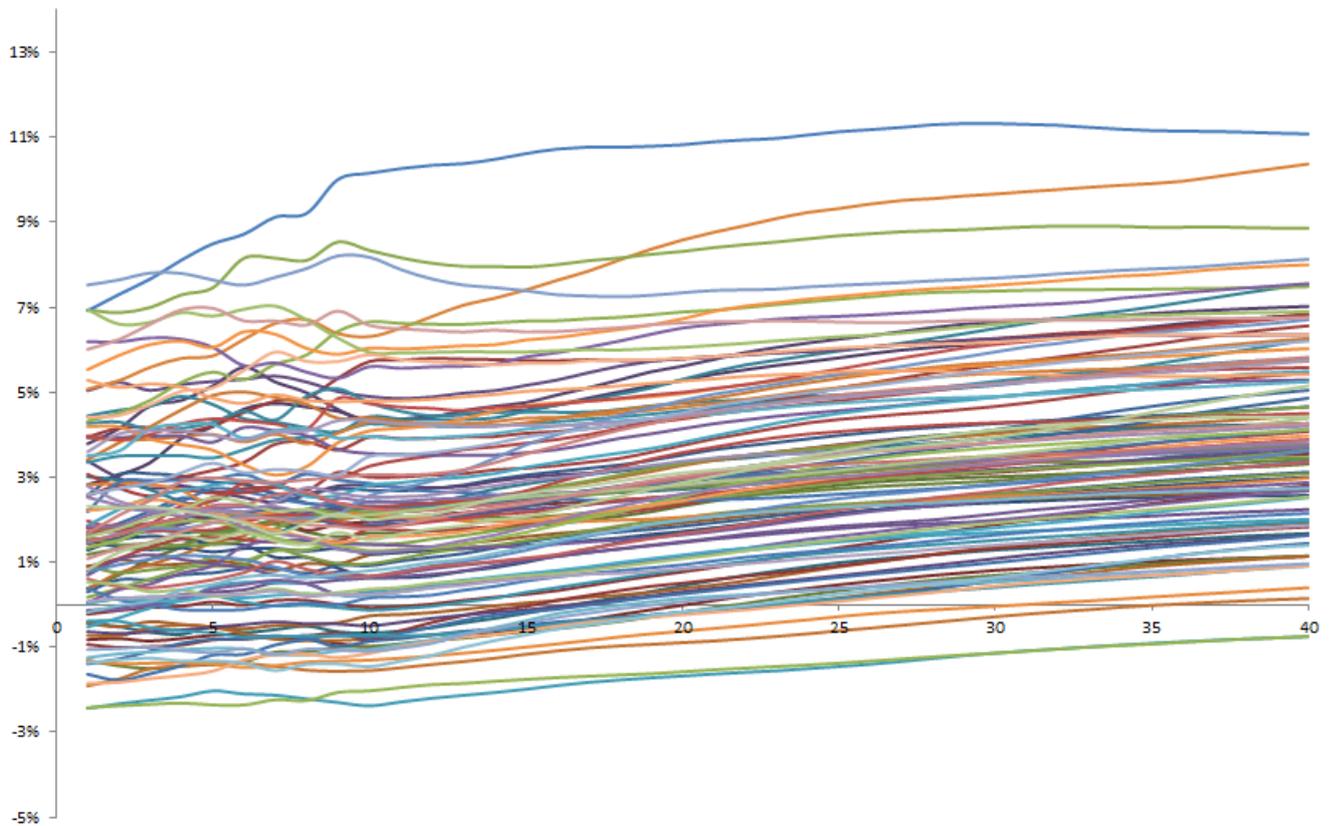


FIGURE 98 – Modèle DD-LMM *shift* 5% avec matrice de corrélation

Quantiles stochastiques du taux d'intérêt de maturité 10 ans

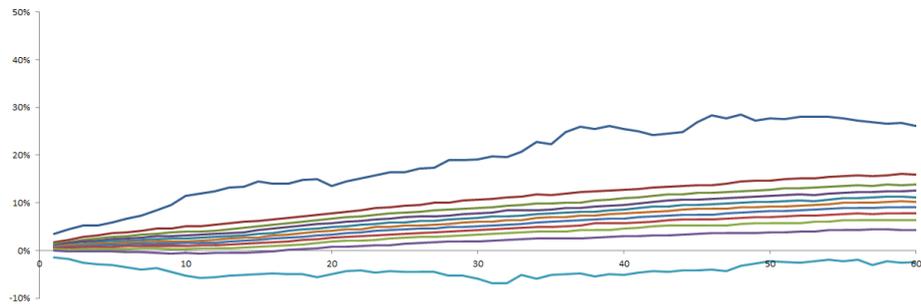


FIGURE 99 – Modèle de Hull & White

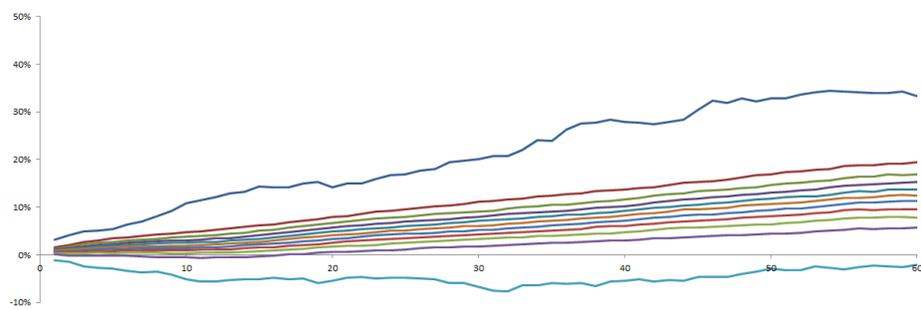


FIGURE 100 – Modèle gaussien à 2 facteurs

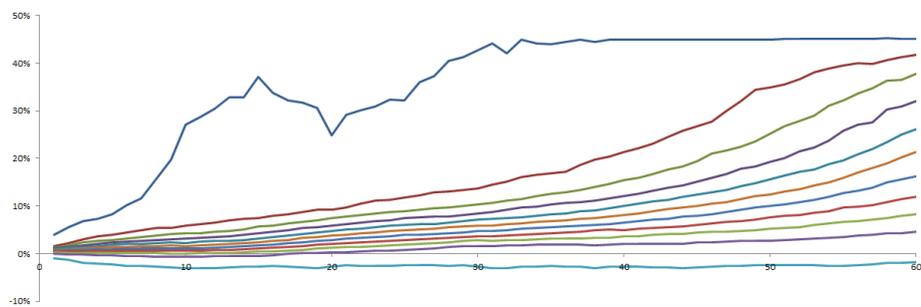


FIGURE 101 – Modèle DD-LMM *shift* 5%

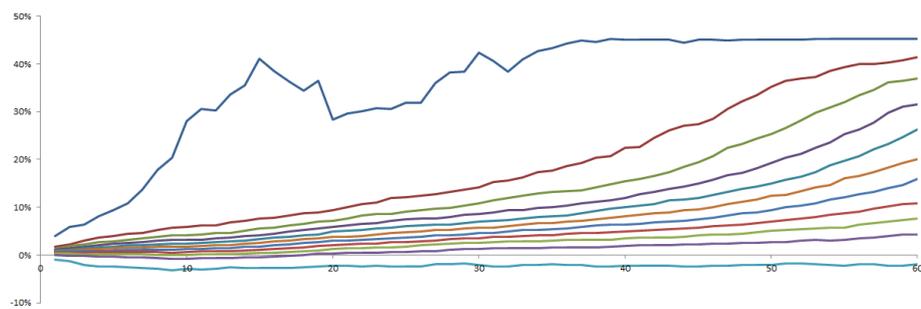


FIGURE 102 – Modèle DD-LMM *shift* 5% avec matrice de corrélation

Impact du taux moyen des scénarios sur la VA du passif - Contrat Euro

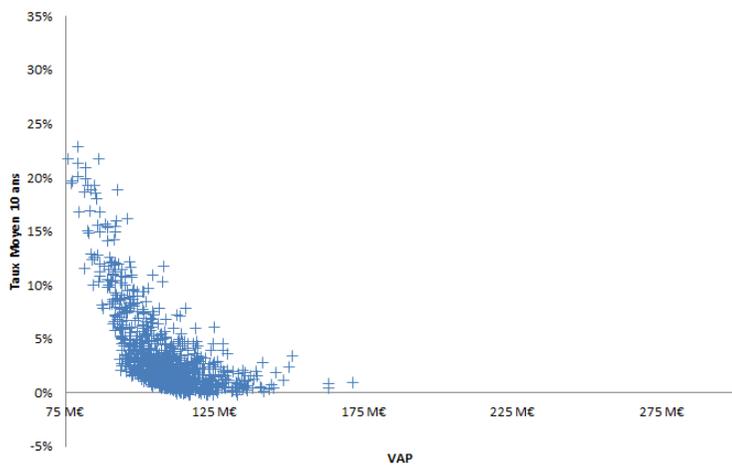


FIGURE 103 – Modèle DD-LMM *shift* 0.5%

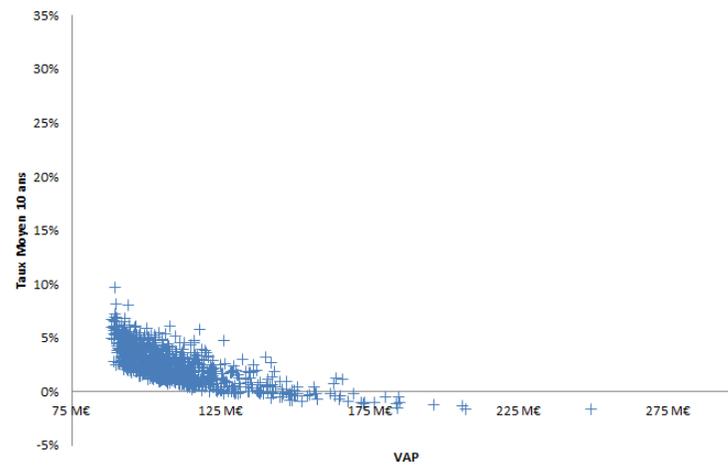


FIGURE 104 – Modèle DD-LMM *shift* 45%

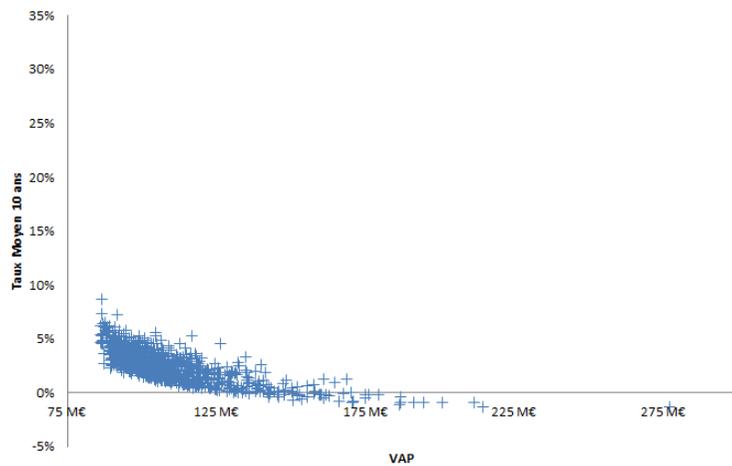


FIGURE 105 – Modèle Hull & White

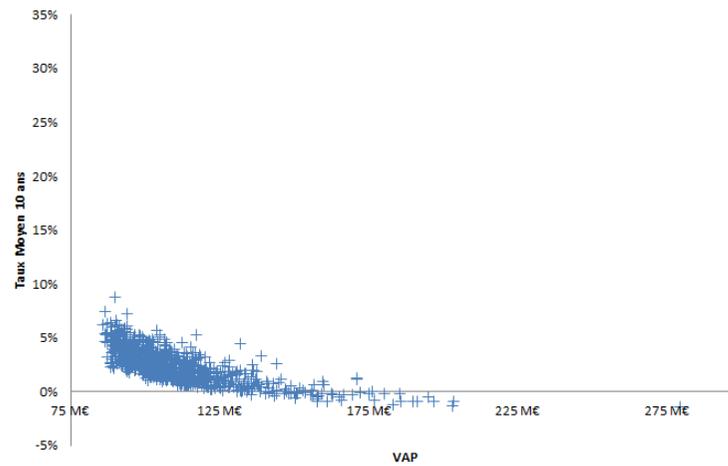


FIGURE 106 – Modèle G2++

Impact du taux moyen des scénarios sur la VA du passif - Contrat Euro Croissance

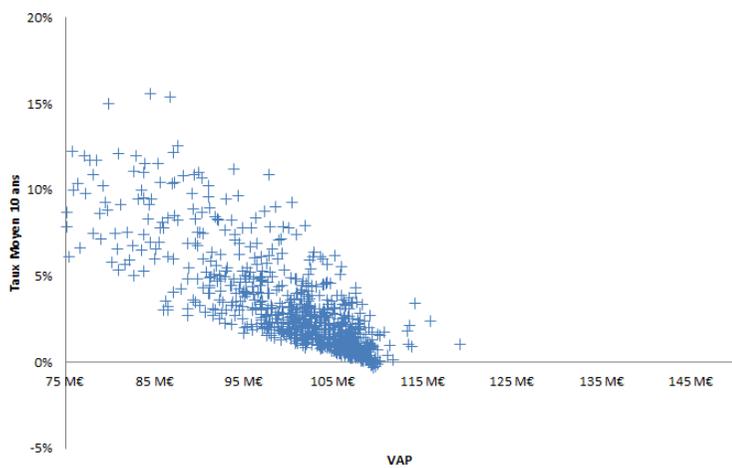


FIGURE 107 – Modèle DD-LMM *shift* 0.5%

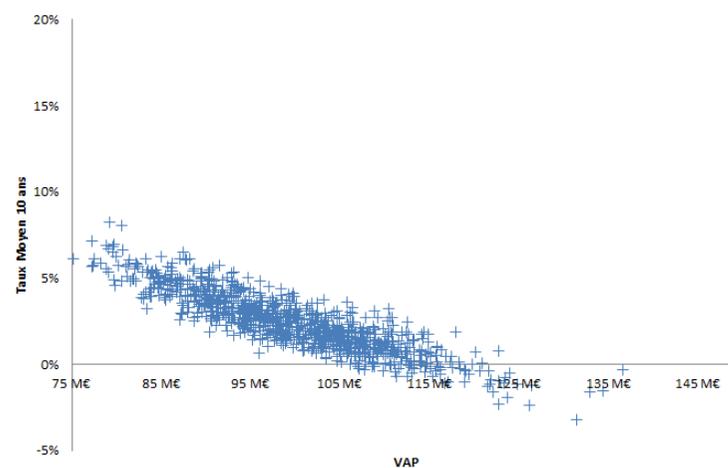


FIGURE 108 – Modèle DD-LMM *shift* 45%

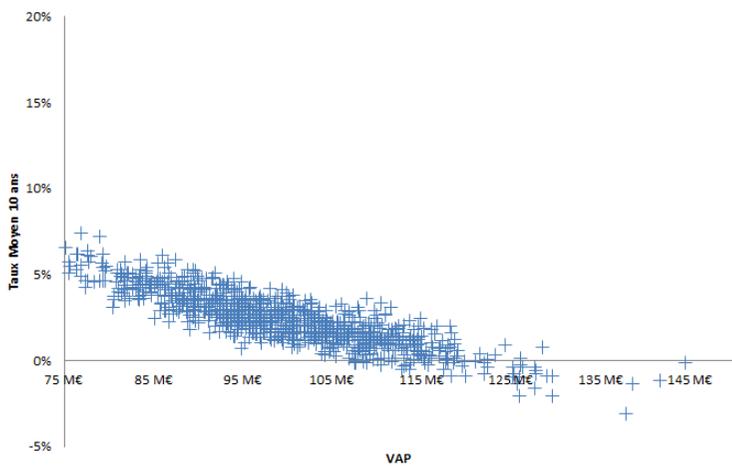


FIGURE 109 – Modèle Hull & White

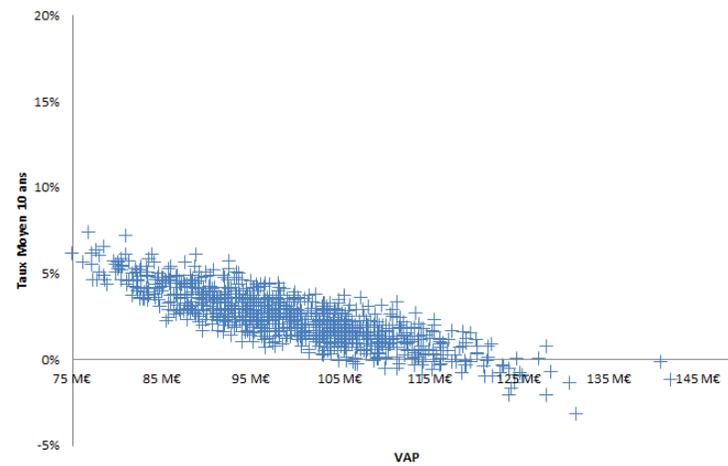


FIGURE 110 – Modèle G2++

Impact du taux moyen des scénarios sur la VA du passif - Contrat Retraite

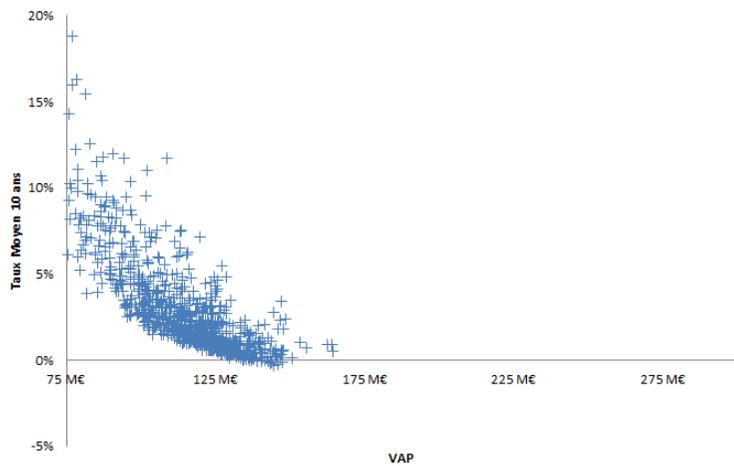


FIGURE 111 – Modèle DD-LMM *shift* 0.5%

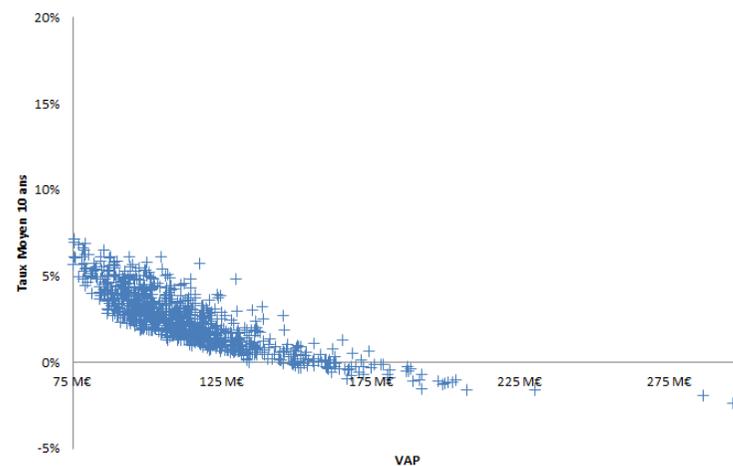


FIGURE 112 – Modèle DD-LMM *shift* 45%

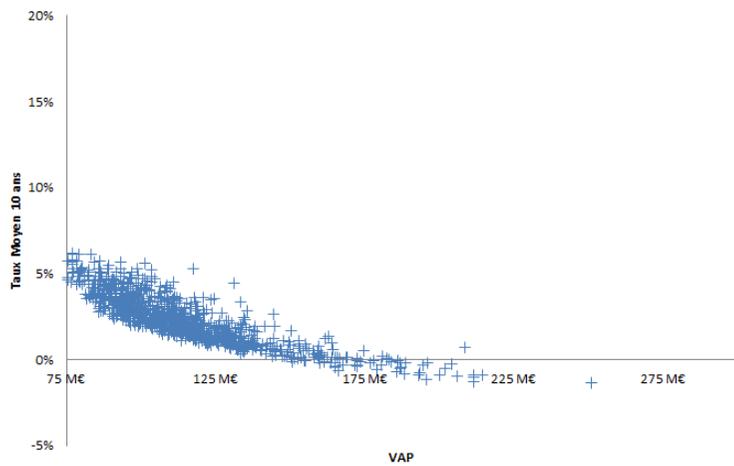


FIGURE 113 – Modèle Hull & White

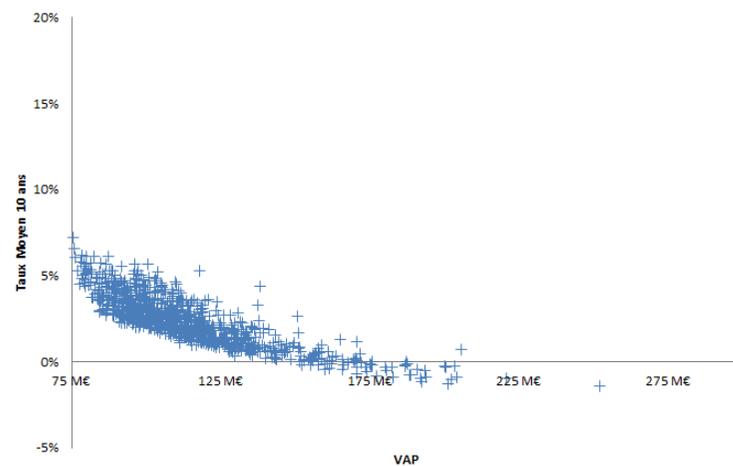


FIGURE 114 – Modèle G2++

Interface graphique

79

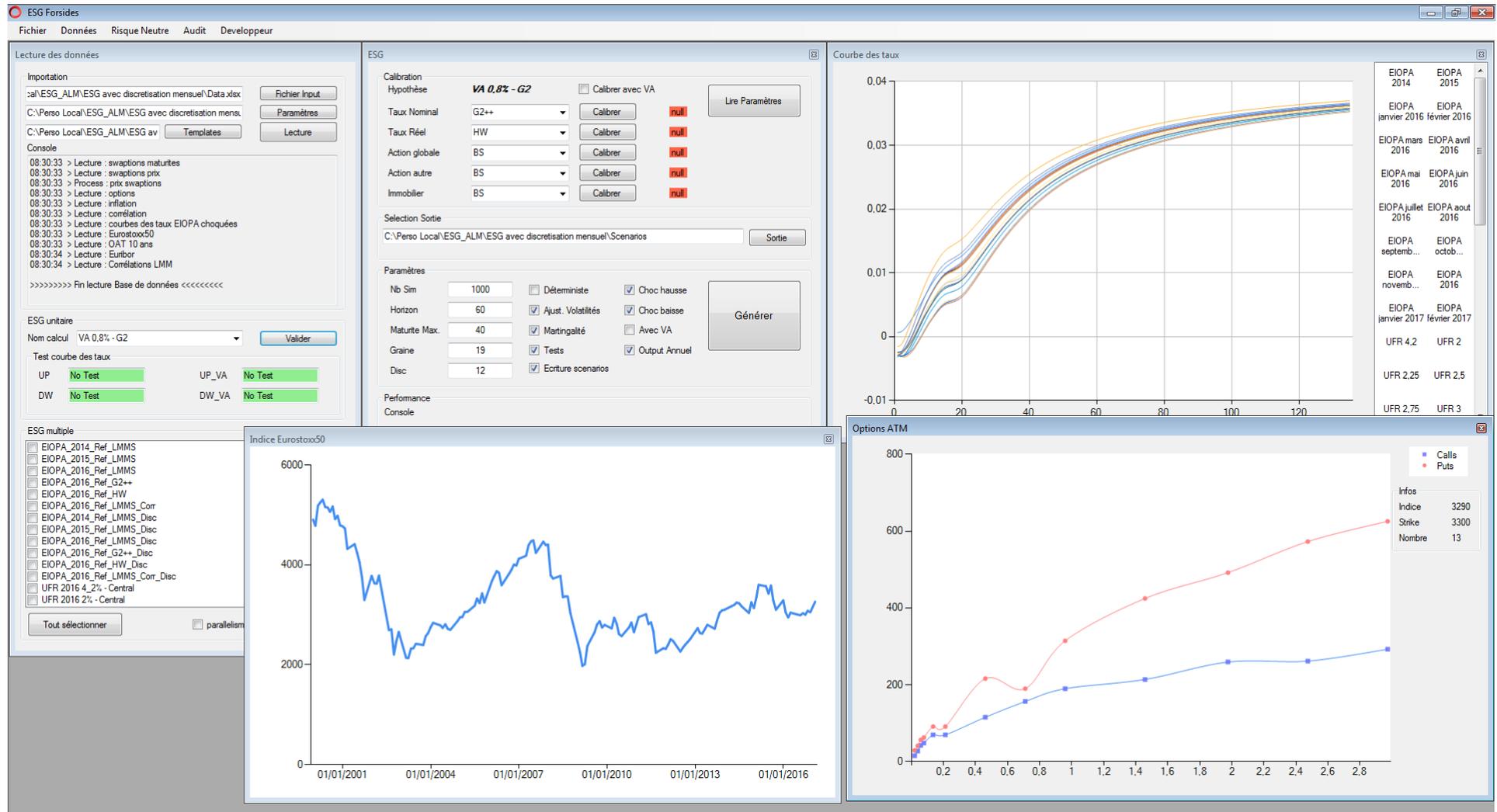


FIGURE 115 – Capture d'écran de l'interface du GSE

Note de synthèse

Contexte

Sous l'impulsion des investisseurs (*Embedded Value*) et du régulateur (*Best Estimate*), la demande croissante de calculs *Market Consistent* accroît les besoins en modélisation financière chez les assureurs et réassureurs. Les acteurs de l'assurance ont dû se doter de GSE pour répondre à ces nouvelles exigences. Les modèles économiques implémentés dans les GSE sont tous dérivés de la modélisation financière utilisée par la place. Au-delà des nombreuses critiques sur leur utilisation en finance, ces modèles n'ont pas été conçus pour la valorisation en assurance vie. L'expérience des assureurs montre que ces modèles financiers peuvent ne pas être adaptés.

Problématique

Avec l'apparition des taux négatifs en 2014, la modélisation des taux d'intérêt est (re)devenu un sujet prioritaire en finance et en assurance. Beaucoup de modèles de taux, autrefois valides, ont été ajustés pour prendre en compte les taux négatifs. Par l'inclusion de ce paramètre, la famille des modèles de taux s'est élargie. Face à la diversité des modélisations existantes, l'assureur doit faire un choix. La problématique de ce mémoire est l'étude des risques liés à l'utilisation de certains modèles de taux en assurance vie.

Démarche

Pour réaliser l'étude, un générateur de scénarios économiques est implémenté en C#, un langage de programmation compilé et orienté objet. Ce GSE *Market Consistent* produit des scénarios stochastiques risque neutre conformément aux exigences du régulateur. Pour l'étude, la gamme des modèles de taux (G2++, HW, LMM, DD-LMM) est plus riche que la modélisation des autres classes d'actif. Ces différents modèles et leur paramétrisation induit un panel large de modélisations possibles pour l'assureur. La problématique d'impact des modèles de taux de ce mémoire se décompose en plusieurs axes d'étude :

- L'analyse du choix du modèle de taux ;
- Un zoom sur les scénarios de taux bas ;
- Un chiffrage des risques liés aux variations d'UFR et de la VA ;
- Une mise en garde sur le choc de taux de Solvabilité 2 ;
- Une introduction du phénomène de fuites de modèle.

Implémentation d'un GSE risque-neutre

Le générateur de scénarios économique risque neutre fabriqué pour cette étude est un outil informatique qui permet simuler les variables économiques suivantes : taux nominal, taux réel, inflation, action, immobilier, monétaire. La classe des modèles de taux nominal contient :

- Un modèle gaussien classique : le Hull & White ;
- Un modèle gaussien à 2 facteurs : G2++ ;
- Un modèle de marché : LMM ;
- Un modèle de marché translaté : DD-LMM.

Les autres classes d'actif, non étudiées dans ce mémoire, sont toutes implémentées avec un seul modèle :

- Action : Black & Scholes à volatilité constante
- Immobilier : Black & Scholes à volatilité constante
- Taux réel : Hull & White à volatilité constante
- Inflation : Déterministe (formule de Fisher)

Créé dans une perspective d'utilisation à long terme, le GSE a été conçu sur une architecture logicielle solide qui permet la parallélisation des calculs. Les critères réglementaires et internes de qualité des scénarios économiques sont écrits avec les tables de scénarios. Les données d'entrée sont rassemblées dans un unique fichier (chroniques financières). Le croisement des données d'entrée définissent un jeu d'hypothèse unique associé à une table de scénarios économiques précise. Cette pratique traduit la volonté d'industrialiser le processus de production, de garantir un archivage des tables produites et de réduire le risque opérationnel lié à l'utilisation du logiciel.

Ce projet est la brique de base d'un travail de long terme qui peut être aisément enrichie par : l'ajout de modèles financiers, la modification de la stratégie de la production, l'ajout de méthodes de calibration sur d'autres produits financiers, une amélioration de l'interface et de ses interactions avec les données en entrée et en sortie.

Étude de l'impact des modèles de taux

L'étude d'impact des modèles de taux dans un contexte de valorisation économique sous Solvabilité 2 est abordée au travers de plusieurs sensibilités. Les équipes ALM des assureurs et réassureurs expérimentent souvent des anomalies dues à l'utilisation des modèles de taux. Les sensibilités de ce mémoire adoptent un point de vue quantitatif sur l'ensemble de la chaîne de production des indicateurs Solvabilité 2. Réalisées sur trois portefeuilles synthétiques, ces études d'impact mettent en avant le point fort de la sensibilité faible des engagements euro croissance d'un assureur. En revanche, les portefeuilles euro et retraites sont sensibles aux hypothèses retenues. Pour ces deux portefeuilles les conclusions sont les suivantes :

- Le choix du modèle de taux doit être une question plus centrale chez les assureurs. La sensibilité du coût de l'option et du SCR de taux doit mettre en garde la profession actuarielle contre une utilisation déraisonnée des modèles de taux log-normaux non prudents.
- La baisse des taux doit être prise en compte par un niveau de translation assez fort des modèles log-normaux. Le coût d'option est plus sensible à la baisse des taux plutôt qu'à la volatilité. D'autres part, la troncature de la distribution explosive des taux à long terme d'un modèle log-normal perturbe la risque-neutralité des scénarios de taux et provoque des écarts de martingalité important en sortie du modèle ALM.
- La modification du taux long UFR de la courbe des taux réglementaires modifie la valeur temps des options. L'accroissement de l'extrapolation de la courbe des taux a un impact négatif non linéaire sur la valeur temps des options. De plus, la décroissance du coût d'option est convexe. Cette convexité est plus forte lorsque la durée du passif de l'assureur augmente.
- Les variations de *Volatility Adjuster* appliquées à la courbe des taux lors des simulations engendrent deux effets contradictoires si un modèle de taux log-normal est utilisé. D'une part, l'augmentation de la courbe des taux réduit la valeur intrinsèque du coût d'option. D'autre part, l'augmentation de la volatilité absolue a un impact positif sur la TVFOG. La garantie cliquet sur les portefeuilles euro et retraite met en avant la sensibilité de l'assureur au niveau des taux (valeur intrinsèque).

- Le choc de taux Solvabilité 2 à la hausse ou à la baisse a un effet linéaire sur l'écart-type absolu des scénarios de taux si les volatilités log-normale calibrées sur la courbe des taux hors VA sont conservées.

Executive summary

Context

Under the initiative of investors (Embedded Value) and the regulator (Best Estimate), the growing demand for market consistent computations triggers an enhanced need for financial modelisation in the insurance and resinsurance industry. As a result, insurers must adopt ESGs in order to meet this new requirement. Most of economic models implemented in ESGs are created by the financial world. Beyond the great number of critics on the use of these models in finance, this modelisation was not designed to tackle issues specific to valorisation in life insurance. Insurers experience shows that financial models may not be adapted to the specificities of life insurance.

Topic

With the emergence of negative interest rates beginning in 2014, interest rate modelisation is a priority in the world of finance and insurance. Many IR models (once appropriate) are adjusted to take into account negative interest rates. With a new parameter, the family of interest rate models is larger than ever. Given the variety of existing models, insurers need to make choices. The issue of this mémoire is to study the risks related to bad practices of different interest rate modelisations and their underlying impacts in life insurance.

Approach

To achieve this study, an economic scenarios generator is coded in C#, a compiled and object oriented programming language. This market consistent ESG simulates risk neutral stochastic scenarios in line with regulatory requirements. For the purposes of this case study, the set of interest rate models of the ESG (G2++, HW, LMM, DD-LMM) is richer than the other asset classes. These models and their parametrisation form a large class of models commonly used by insurers. In this mémoire, the issue of the impact of IR models split into different axis :

- An analysis of the IR model choice
- A focus on low interest rate scenarios
- A quantification of risks bounded to UFR and VA variations
- A warning on IR stress in Solvency 2
- An introduction to risk neutral bias

Implementation of a risk neutral ESG

The risk neutral economic scenarios generator created for this study is a software that simulates economic variables : nominal rates, real rates, inflation, equity, real estate and cash. The class of nominal interest rate models is composed of :

- a classic gaussian model : Hull & White ;
- a 2 factors gaussian model : G2++ ;
- a market model : LMM ;
- a displaced market model : DD-LMM.

The other asset classes (beyond the scope of this mémoire) are implemented with only one model :

- Equity : Black & Scholes with a constant volatility

- Real Estate : Black & Scholes with a constant volatility
- Real rates : Hull & White with a constant volatility
- Inflation : determinist (Fisher formula)

Built for a long-term use, the ESG was designed on a solid software architecture that takes into account parallel computing. The internal and regulatory criterions about the quality of economic scenarios are written with the tables of the scenarios in output. The input data are gathered in a unique file (financial data). A set of different data defines a unique economic assumption linked to a specific file of economic scenarios. This highlights the will of providing an industrialisation of the production process to actuaries, a guarantee on keeping track of tables produced and a reduction of operational risk caused by the use of a complex tool. This ESG is the basic brick of a long-term project that may easily be enhanced through : the addition of financial models, the modification of the production strategy and the evolution of a basic interface and the ergonomics of the interactions with input and output objects.

Impact study of IR models

The impact study of interest rate models in a Solvency 2 regulatory environment is led through different sensibilities. The ALM experts in insurance and reinsurance often experiment anomalies related to the choice of interest rate models. In this mémoire, the capacity of leading a technical diagnosis on an ESG and an ALM engine overcomes this issue. All sensibilities of this mémoire are presented through a quantitative approach on the entire production chain of economic Solvency 2 indicators. The results are fairly different according to the type of insurance contract. The euro growth portfolio appears to be less sensitive to IR than the retirement and euro portfolios. The latter show close behaviors :

- The choice of an interest rate model is a central question for insurer. The time value of financial options and the interest rate SCR are sensitive to the IR model used. Pure (without shift) log-normal models underestimate economic indicators.
- The reduction of interest rates breaks a main assumption of financial modelling : the strict positivity of interest rates. As a result, log-normal models need to be adapted with a massive downward shift. The time value of financial options is more significant for a IR curve down-shock rather than volatility. Also, the truncation of the explosive log-normal distribution cancels the risk-neutral property of the scenarios and may trigger poor martingale tests.
- A modification of the value of the UFR impacts the time value of options. An increasing of the extrapolating value has a negative and non linear impact on TVFOG. Moreover, the relation between UFR and TVFOG is convex. That convexity is stronger when the duration of liabilities is high.
- The variations of the volatility adjuster has two paradoxical effects in the case of log-normal models. Firstly, the upward shift of the IR curve reduces TVFOG. Secondly, the implied growing of absolute volatility is positively correlated with TVFOG. The addition of financial guarantees in the case of euro and retirement contracts increases the sensibility of an insurer (intrinsic value) to interest rates.
- The Solvency 2 interest rate shock modifies the absolute volatility of the IR scenarios if log-normal volatilities keep unchanged. A down-shock reduces the absolute volatility of the scenarios. As a result, the insurer may not accurately estimate the capital requirement for this risk.