CENTRE D'ÉTUDES ACTUARIELLES

Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles pour l'obtention du diplôme du Centre d'Etudes Actuarielles et l'admission à l'Institut des Actuaires

le : ______________________

Par : **Laurent Jacques & Etienne Rain**

Titre : **Du modèle GLM à une approche darwinienne : Nouvelle génération de concepts et d'indicateurs pour l'optimisation du renouvellement Auto**

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI, jusqu'au 31.12.2015

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de l'Institut des Actuaires : signature

Membres présents du jury du Centre d'Etudes Actuarielles :

Thomas BEHAR

Vincent DAMAS

Gérard CROSET

Arnaud COHEN

Jean-Pierre DIAZ

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Michel FROMENTEAU

Stéphane MENART

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Florence PICARD

Olivier LOPEZ

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise :

Nom : **Philippe Marie-Jeanne**
Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : **Philippe Marie-Jeanne**
Signature :

Invité :

Nom : ______________________
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

CENTRE D'ÉTUDES ACTUARIELLES

Sommaire

CENTRE D'ÉTUDES ACTUARIELLES

Résumé

La concurrence sur les prix sur le marché de l'assurance auto pousse certains acteurs à adopter des stratégies où les affaires nouvelles sont tarifées très bas et où les bénéfices sont réalisés par l'augmentation des prix au cours de la durée de vie des contrats. Ces assureurs doivent donc proposer à chaque renouvellement des augmentations leur permettant d'optimiser leur marge sur toute la durée de vie du contrat.

Pour cela, le management doit connaître pour chaque segment la stratégie tarifaire à adopter et les incertitudes pesant sur ses décisions. Ce mémoire étudie donc les incertitudes liées aux coûts de l'assureur, c'est-à-dire principalement la prime pure, en regardant les intervalles de confiance du modèle le plus couramment utilisé, le GLM. Il s'intéresse ensuite aux réactions des clients face aux hausses tarifaires et les modélise via l'élasticité. Après avoir montré que les modèles GLM ne sont pas nécessairement les plus adaptés à la modélisation de l'élasticité, il montre comment utiliser des tests aléatoires et un modèle de taux de variation.

Les résultats sur l'élasticité et la prime pure sont ensuite comparés grâce à une nouvelle notion, « l'élasticité seuil » qui permet de donner des règles simples au management en fonction de ce qu'il souhaite optimiser, le chiffre d'affaires ou la marge, et de son horizon temporel, un an ou plus.

Comme le modèle fonctionne par une succession d'essais et de sélection de la stratégie la plus adaptée, il est qualifié de darwinien.

Abstract

Price competition on the motor insurance market leads some actors to adopt strategies where new business are priced low and where profits are made thanks to steady increases of premiums along policy lifetime. These insurers must therefore propose price increases at each renewal to optimise their margins along the contract lifecycles.

In order to achieve this optimisation, the management must know the best price strategy to adopt for each segment and the uncertainties underlying their decisions. This thesis therefore studies the uncertainties linked to the insurer's costs, i.e. the risk premium, by measuring the confidence intervals of the most commonly used model, i.e. the GLM. This thesis then looks at the customers' reactions to price increases and model them using elasticity. After showing that GLM are not very well fitted for elasticity modelling, it shows how to use random tests and a variation rate model.

Results on elasticity and risk premium are then compared thanks to a new metric "the threshold elasticity" enabling to give simple management rules depending on the optimisation targets (gross written premiums or margin) and on the time horizon (one year or more).

As the model works with a series of tries and of selection of the fittest strategy, it is called Darwinian.

Mémoire

Chapitre 1. Introduction

I. Préambule

Les assureurs auto se livrent une concurrence féroce sur les prix qui s'est encore accentuée avec l'arrivée des assureurs et de comparateurs en ligne. Pour se démarquer et réaliser des profits dans cet environnement, ils doivent trouver des stratégies de plus en plus performantes leur permettant de proposer des prix d'appel de plus en plus bas tout en conservant leur équilibre financier. Les meilleures stratégies sont celles qui englobent la totalité de la vie de chaque police. La stratégie cherche le prix optimal à la souscription et à chaque renouvellement.

La plupart des assureurs cherchent à expliquer la réaction du client face au prix et se trouvent confrontés à des problématiques complexes telles que le facteur temps, la complexité de la mesure, les restrictions posées sur les hypothèses comportementales et la réactivité des modèles.

Il est possible de transcender ces difficultés en proposant une approche innovante de l'optimisation au renouvellement, notamment matérialisée par une nouvelle génération d'indicateurs permettant d'amener, en quasi temps réel, une politique tarifaire vers un optimum local.

Ces indicateurs sont obtenus non pas en essayant d'expliquer les réactions des clients, mais en mesurant précisément ces réactions. L'objectif de modéliser l'intégralité des informations prises en compte par un client lorsqu'il reçoit son avis d'échéance et le processus psychologique qui l'amène à sa décision de résiliation ou de renouvellement nous semble difficile à atteindre, pour un résultat incertain.

Notre approche, développée pour les contrats en renouvellements, pose le cadre d'une stratégie globale de gestion optimale des moments clients. L'enjeu est d'importance ; il s'agit de redéfinir la manière de penser la tarification. Ceci pourra ensuite être étendu aux affaires nouvelles et aux remplacements.

Nous verrons comment cette approche s'adapte particulièrement aux assureurs ayant une plus grande maîtrise de leur réseau de distribution et étant capables de modifier rapidement leurs tarifs. Bien que ces approches puissent aussi s'adapter aux assureurs traditionnels, l'efficacité de l'approche est liée à l'agilité de l'assureur ; les assureurs en ligne sont ainsi des candidats naturels.

Ce changement de paradigme apporte de nouvelles réponses à des questions récurrentes pour un assureur, notamment sur les effets mémoire, sur les effets de seuil, sur l'incertitude de la décision ou sur l'influence du temps. Il permet notamment aux dirigeants d'une compagnie d'assurance d'avoir des indicateurs simples et des intervalles de confiance pour pouvoir prendre des décisions éclairées.

L'approche proposée se fonde sur une vision de tests et d'adaptabilité. À chaque instant, il est impossible de connaître quelle est la meilleure solution. Nous testons donc de manière aléatoire différentes possibilités et choisissons la plus adaptée à l'environnement. Ensuite, l'environnement change pendant que d'autres possibilités sont testées, et c'est la plus adaptée au nouvel environnement qui est choisie. C'est parce qu'elle est similaire à l'approche utilisée par la nature pour l'évolution naturelle que nous la qualifions de darwinienne.

Du facteur temps

La majeure partie des clients ne résiliant pas leur contrat à l'échéance annuelle, le portefeuille est majoritairement constitué de polices renouvelées, et la plus grande part des profits de l'assureur provient des contrats en renouvellement. Ce phénomène est encore accentué chez les assureurs vendant à perte les affaires nouvelles et espérant faire des profits grâce aux majorations au renouvellement. Ainsi l'équilibre économique d'un assureur automobile repose-t-il sur la gestion rigoureuse du cycle de vie des contrats en portefeuille.

Ces contrats renouvelés, qui représentent environ 80% du portefeuille, sont d'autant plus rentables que l'écoulement du temps permet d'amortir les coûts d'acquisition et d'accroître la connaissance du client concernant tant son risque[1] que sa sensibilité aux prix[2].

La rentabilité d'un contrat est ainsi généralement une fonction croissante du temps passé en portefeuille.

Bien que nous ayons orienté le mémoire vers une optimisation au renouvellement, nous verrons comment il est possible de construire un système complet intégrant les affaires nouvelles.

Le mémoire étudie aussi la vision long terme de l'équilibre économique de l'assureur en analysant la valeur du portefeuille et son optimisation. L'optimisation à long terme permet aussi de ne pas réaliser des profits à court terme qui pourrait mettre en péril les obligations à long terme envers les assurés.

De la complexité de la mesure

Chaque année, ou dès que l'exposition au risque évolue, le client se voit proposer un nouveau tarif. En découlent deux comportements ; soit l'assuré accepte le nouveau prix, soit il résilie son contrat.

La stratégie optimale est ainsi une confrontation entre d'une part, un comportement client fluctuant dans le temps et d'autre part de facteurs structurant la stratégie tarifaire[3] de l'assureur. En outre, cette complexité se voit renforcée par des facteurs a priori inconnus comme la stratégie des concurrents et par d'autres pouvant créer des effets de sauts (ex. nouvelles technologies).

Se pose donc rapidement la question de la mesure et donc de la capacité réelle à expliquer un phénomène par des empilements de modèles complexes : modèles sur les taux de conversion, modèles comportementaux clients, modèles sur le tarif des concurrents.

Une approche libérée d'hypothèses comportementales restrictives

Le comportement client n'est pas purement élastique et ne suit pas non plus une fonction analytique simple. En abandonnant les hypothèses traditionnelles, ce mémoire permet de franchir une étape majeure dans l'analyse de la complexité des comportements clients.

Ainsi, contrairement aux études basées sur l'utilisation de lois logistiques plus ou moins complexes, ne modélisons-nous plus la résiliation des clients à l'aide d'hypothèses sur leur comportement ; la seule hypothèse que nous adoptons est leur rationalité[4].

Cette évolution apporte un éclairage nouveau dans l'observation de phénomènes non élastiques tels que l'effet mémoire, la plasticité, l'impact de la concurrence, les effets de seuil ou la fragilité.

De la problématique de l'assureur …

La problématique de l'assureur au moment du renouvellement est bien plus simple que la complexité de certains modèles peut le laisser entendre. Au travers de majorations qu'il applique, l'assureur pose

---

[1] Le temps permet à l'assureur de mieux connaître les profils de risques et ainsi faire baisser le ratio de sinistralité (S/C) Concrètement, un processus de sélection se met en place, notamment avec la résiliation des mauvais clients et des majorations segmentées en fonction de la sinistralité.

[2] La rentabilité d'un contrat est accentuée par des majorations sur portefeuille généralement supérieures aux majorations sur affaires nouvelles

[3] Les stratégies tarifaires dépendent de nombreux facteurs tels que la sinistralité (ex. majorations post tempête), la conjoncture économique (ex. il est plus difficile de faire passer des majorations dans une économie déprimée), de la concurrence (ex. plus le marché est concurrentiel, plus la pression sur les marges sera importante), des barrières à l'entrée (ex. tentation du nouvel entrant de « casser » les prix pour générer un portefeuille) et des exigences de rentabilité dictée par l'actionnaire

[4] La rationalité considérée ici est très limitée : si un client résilie à un prix p, nous considérons qu'il résilie pour tout prix supérieur à p

fondamentalement une question unique : « quels sont les prix qui vont m'assurer un niveau de marge optimal[5]? ». De cette question naît une réflexion radicale structurant l'ensemble du mémoire :

« L'assureur n'a pas besoin d'expliquer les motifs du comportement client pour tarifier ses contrats, il a uniquement besoin de l'observer. Ainsi, une juste mesure de la sensibilité client aux prix proposés peut-elle, à l'aide des outils appropriés, permettre d'ajuster un tarif sur un optimum local. »

… à la création d'une nouvelle classe d'indicateurs d'optimisation

Une optimisation tarifaire n'a de sens que si elle peut rapidement être mise en œuvre et comprise par les dirigeants de la compagnie. Un des apports de ce mémoire est l'introduction d'une nouvelle métrique permettant de calibrer une stratégie tarifaire sur un optimum local en fonction de l'horizon de temps considéré.

Cette nouvelle métrique, baptisée « élasticité seuil », pose les bases de règles intuitives d'optimisation, manipulables par des directions techniques et compréhensibles par le comité de direction et conduit à un arbre de décisions sur chacun des segments clients considérés. Ainsi :

- Si l'élasticité réelle d'un profil est inférieure à notre « élasticité seuil », il faudra augmenter davantage les tarifs

- Si l'élasticité réelle d'un profil est supérieure à notre « élasticité seuil » il faudra au contraire baisser ou moins augmenter les tarifs.

Nous verrons comment cette élasticité seuil relève d'un concept socle et est applicable à différentes fonctions ou réalités[6] à optimiser. Trois d'entre elles ont retenu notre attention : le chiffre d'affaires, la marge annuelle et la valeur. L'optimisation de chacune de ces fonctions conduit à des stratégies tarifaires différentes.

Éclairer les décisions et limiter les risques grâce à la mesure concrète d'intervalles de confiance

Notre objectif est d'adapter, au travers de la tarification, la réaction d'un assureur automobile aux évolutions de plus en plus rapides de son environnement et ainsi lui permettre d'optimiser de manière dynamique son chiffre d'affaires, sa marge ou la valeur de son portefeuille

Au cœur de notre approche, on trouve la mesure de l'élasticité. Ainsi, la mesure de l'élasticité univariée, c'est-à-dire suivant une seule variable tarifaire, se fait-elle directement sur le portefeuille. Ensuite, l'interpolation de cette élasticité à l'aide d'un modèle intermédiaire entre le modèle multiplicatif et le modèle additif permet de déterminer une élasticité par profil.

Pour un assureur, l'enjeu de la tarification est d'importance, car son équilibre économique en dépend. L'évaluation du niveau du risque associé à la décision est tout aussi importante, sinon indissociable de la mesure elle-même. Un assureur associe généralement ses majorations à un accroissement du taux de résiliation. Sans information sur les élasticités ni sur l'estimation des impacts minimaux et maximaux d'une décision, un assureur peut hésiter à exploiter pleinement le plein potentiel de son

[5] La définition d'une marge optimale reste une problématique car vue du dirigeant cette notion dépendra généralement de son horizon de temps

[6] Par réalité, nous entendons les objectifs parfois divergents des différentes parties prenantes de l'entreprise. Ainsi, l'investisseur et l'actionnaire devraient chercher à maximiser la valeur, les réseaux de distribution chercheront plutôt à maximiser le chiffre d'affaires généralement base de leur commissionnement et le dirigeant soumis à la pression de ses actionnaires pourrait être tenté de privilégier la marge à court terme

portefeuille par crainte d'un effet trop négatif sur les résiliations. Les décisions tarifaires doivent donc se baser sur les intervalles de confiance autant que sur les indicateurs eux-mêmes.

En conséquence, un des aspects abordés dans ces travaux est la détermination de l'écart-type des mesures permettant d'identifier des niveaux de confiance dans les décisions. L'élasticité mesurant l'écart de comportement à deux niveaux de prix proches, elle est mécaniquement très volatile. Bien que la taille du portefeuille reste une contrainte pour établir une mesure adéquate, cette problématique se posera peu pour les principaux assureurs ayant déjà atteint une taille propre à la mesure.

À partir de l'optimisation d'une fonction, que celle-ci soit le chiffre d'affaires, la marge ou la valeur, notre approche trouve tout son sens car pour chaque grandeur à optimiser et pour chaque profil, il est possible d'introduire notre concept d'élasticité seuil, dépendant de l'historique et du ratio de sinistralité de chaque profil. Par conséquent, il devient possible d'agir par segment pour fixer pas à pas des niveaux prix optimaux.

Il est utile de noter à ce stade que les principes développés dans le mémoire permettent une optimisation tactique du portefeuille. L'assureur a toujours besoin de revoir régulièrement son positionnement stratégique pour confirmer qu'il conduit bien un modèle rentable. Les mouvements de portefeuille étudiés dans le cadre du mémoire sont donc de l'ordre de quelques pourcents et ne remettent donc pas en cause l'ordre de grandeur de la mutualisation des risques au sein du portefeuille.

Le modèle fait toutefois face à des contraintes et limites inévitables

Le modèle indique toujours la manière de calculer les écarts-types des indicateurs proposés. En effet, les données de base du modèle ne sont pas observables, mais déduites ou modélisées à partir d'observations. Les primes pures et les élasticités apparaissant sur tout tableau de bord sont donc toujours incertaines.

Le but est que le modèle soit utilisé par des compagnies d'assurance. Il doit donc répondre aux contraintes suivantes :

- Le modèle doit être opérationnel. Tout technique ou modèle proposé est considéré comme réellement opérationnel s'il est déjà utilisé ou jugé par les compagnies étudiées comme utilisable en moins de douze mois dans sa politique de renouvellement
- L'optimisation fournie par le modèle se situe au sein du positionnement stratégique actuel de l'entreprise
- Les données d'entrée du modèle sont les bases de données de l'assureur, incluant en général pour chaque police : les variables tarifaires de la police, les primes payées, les sinistres survenus, les primes proposées aux renouvellements et la résiliation ou non.

Le mémoire répond donc à plusieurs limites majeures qui rendaient difficiles une mise en œuvre réellement opérationnelle :

- L'incertitude de la mesure
- La sensibilité des modèles aux données d'entrée. Le résultat des modèles n'est pas toujours une fonction continue des données d'entrée
- L'empilement des modèles (prime pure, élasticité et optimisation)
- L'intervalle de temps entre la mesure et l'action

Une compagnie qui souhaite optimiser son résultat opérationnel est amenée à procéder à des évolutions tarifaires. Étant données les limites évoquées ci-dessus, plus les évolutions tarifaires seront importantes, moins les prévisions seront certaines

Un équilibre est ainsi trouvé entre de meilleurs résultats opérationnels et un risque plus faible de non-atteinte des résultats.

Pour aller plus loin

La compréhension des phénomènes élastiques au regard de l'optimisation d'une fonction permet d'aller beaucoup plus loin dans la compréhension profonde des mécanismes économiques de l'assureur, tant en quantifiant des conclusions relevant du sens commun qu'en remettant en cause certaines croyances.

Ainsi, l'influence du temps est-elle déterminante sur la stratégie tarifaire. Les contrats résiliés ne peuvent pas être réintégrés en portefeuille plus tard. L'élasticité seuil pour un horizon un an est donc très supérieure à l'élasticité seuil sur la durée de vie du portefeuille, et il existe des situations où la stratégie tarifaire augmentant la marge à un an réduit la valeur du portefeuille.

De même, ces travaux confirment l'importance de la dimension générationnelle, tant sur le vieilli du ratio combiné que sur le déroulé des résiliations. Ainsi, l'intérêt de conserver un contrat s'accroît-il à mesure que le ratio de sinistralité du contrat décroît avec le temps.

En outre, cette approche apporte des réponses à des concepts encore flous chez la plupart des assureurs comme l'existence de prix psychologiques, ou l'effet mémoire, et pose les bases d'études sur la plasticité ou la fragilité du portefeuille.

En développant une nouvelle approche de l'optimisation des prix, appliquée ici au renouvellement, ce mémoire apporte des réponses concrètes à l'une des problématiques les plus fondamentales pour un assureur tout en permettant de suggérer le meilleur point d'équilibre entre l'optimisation et le risque encouru.

La portée de ces développements ouvre la voie à des réflexions plus larges sur une gestion de l'ensemble des moments-clés de la vie d'une police (affaires nouvelles, renouvellements et remplacements). Ainsi, une application de ces principes aux affaires nouvelles permettrait-elle de définir une stratégie de pilotage réellement intégrée et optimale.

II. Principales étapes d'analyse

L'organisation des travaux est structurée en 5 étapes principales.

<u>Étude des modèles de prime pure</u> (ou étape 1)

Après le rappel des principaux modèles utilisés dans le calcul des primes pures et de leurs conditions limites, nous abordons les limites théoriques et pratiques de ces types de modèles.

Les limites théoriques portent notamment sur le fonctionnement multiplicatif du modèle, rarement vérifié totalement dans les faits, ainsi que sur les intervalles de confiance dans la mesure où les données observées comportent une part d'aléa.

Au-delà des modèles, reste aussi leurs applications pratiques. Si le modèle GLM a fait preuve de son efficacité et présente l'avantage de pouvoir être ajusté à presque toutes les données, on observe que ses conditions d'utilisation peuvent être mal comprises et générer certains biais liés à la sélection des données, au choix des variables tarifaires et à la compréhension des liens de causalité.

<u>Étude de l'élasticité</u> (ou étape 2)

Le rappel de la définition de l'élasticité permet de développer l'importance de la notion de dérivée partielle dans la compréhension et l'utilisation du phénomène. Il permet ensuite de présenter les raisons nous ayant amenés à abandonner la modélisation traditionnelle du taux de rétention par un modèle logistique pour privilégier un modèle de taux de variation.

Les calculs d'élasticités avec le modèle de variation de taux se décomposent en deux grandes étapes:

- Définition de l'élasticité univariée. En détaillant les étapes du calcul, pour un segment constitué de profils homogènes, nous montrons que l'estimateur de l'élasticité du modèle de taux de variation est asymptotiquement sans biais et convergent. Nous généralisons ensuite cette approche à des profils hétérogènes. Ceci nous permet de justifier son utilisation.

À l'issue de cette étape, nous sommes capables d'estimer l'élasticité sur un segment, tout en ayant conscience de l'importance de limiter le nombre de segments.

- Définition des élasticités multivariée. La première étape ayant permis de définir les élasticités marginales, l'utilisation d'un algorithme (IPF) permet de compléter chaque croisement suivant une généralisation des modèles multiplicatifs et additifs.

  En ajustant le modèle via l'algorithme pour différentes valeurs du rang (cf. modèle), nous pouvons adopter la valeur de celui-ci qui maximise la vraisemblance du modèle.

À ce stade, les sources d'incertitudes des estimations de prime pure et d'élasticité obtenues lors des étapes 1 et 2 ont plusieurs origines, et notamment :

- La qualité des bases de données de l'assureur
- L'hypothèse que la réalité mesurée suit un certain modèle théorique alors qu'elle est largement plus complexe : en général, la prime pure est modélisée grâce à un modèle linéaire généralisé suivant certaines variables. La prime pure réelle est beaucoup plus complexe ce qui explique en partie la nécessité pour les assureurs d'avoir des critères de souscription.
- L'incertitude du modèle statistique liée au nombre de données (intervalle de confiance du modèle) : même si le phénomène modélisé suivait parfaitement le modèle théorique et que les bases de données étaient parfaites, il subsisterait une incertitude sur les paramètres du modèle.
- La sélection des risques dans le portefeuille : à cause de la politique tarifaire, la sélection et l'antisélection font que les risques en portefeuille ne sont pas représentatifs du marché. Chaque nouveau choix tarifaire de l'assureur ou de ses concurrents conduit à une évolution du mix de portefeuille et donc à une modification des primes pures et élasticités observées.
- Pour l'élasticité, une difficulté supplémentaire vient des techniques utilisées pour la mettre en évidence. Il peut s'agir par exemple de deux politiques tarifaires décalées appliquées aléatoirement au portefeuille. De plus, l'élasticité est une fonction du prix proposé.

Étude des comportements non élastiques (ou étape 3)

Le comportement des clients n'étant pas purement élastique, apparaît la nécessite de présenter les principaux phénomènes qui différent de l'élasticité pure et de présenter leurs impacts : plasticité, effet mémoire, effet de seuil et impact de la concurrence ont ainsi retenu notre attention.

Optimisation sous contraintes avec intervalles de confiance (ou étape 4)

Les étapes précédentes nous permettant d'évaluer la prime pure et l'élasticité, nous sommes maintenant en mesure d'optimiser une fonction qu'elle soit chiffre d'affaires, marge ou valeur, suivant l'objectif du management et de déterminer les élasticités seuil.

L'optimisation d'un portefeuille entier consiste à optimiser chaque segment sur la base d'une comparaison entre l'élasticité seuil et d'autres paramètres observés (variation tarifaire, variation du nombre de résiliations, tarif standard de renouvellement, nombre standard de résiliations).

Cette étape induit une volatilité supplémentaire lors de l'optimisation. En effet, la solution de l'optimisation qui est l'ensemble des variations tarifaires à appliquer n'a aucune raison de varier continument en fonction des données d'entrée, c'est-à-dire des paramètres des modèles de prime pure et d'élasticité.

Convergence vers un optimum local (ou étape 5)

La convergence vers l'optimum local se fait pas à pas et plusieurs méthodes sont envisagées.

- L'analyse univariée itérative : la politique de renouvellement est régulièrement revue par une analyse suivant une seule variable tarifaire, les variables étant utilisées à tour de rôle. Les conséquences sur le portefeuille des évolutions effectuées sur une variable étant mesurées avant de modifier la suivante.

  Il sera montré qu'en cas de réalité statique et de données d'entrée parfaitement connues, cette technique converge vers le résultat théorique de l'optimisation sous contrainte.

- Cette technique itérative sera généralisée en une analyse multivariée à chaque étape, mais en limitant la zone de l'optimisation pour rester dans une zone où les intervalles de confiance restent faibles. Le caractère itératif du processus permet une meilleure prise en compte de l'évolution de la réalité sous-jacente.

Dans une étape complémentaire, l'étude de la fréquence maximale des pas permettrait de ne pas suivre le bruit. Une fréquence plus forte doit permettre une convergence plus rapide, mais induire une plus forte réactivité au bruit des mesures.

III.Attendus du modèle

Le modèle permet de fournir plusieurs scénarios avec pour chaque scénario :

- La liste des variations tarifaires à appliquer à chaque assuré dont la police arrive à échéance. En fonction des compagnies, chaque campagne peut s'étaler sur une semaine, un mois ou une année
- Le taux de rétention espéré ainsi qu'un intervalle de confiance
- La marge espérée ainsi qu'un intervalle de confiance

Le modèle suggère le meilleur point d'équilibre à trouver entre l'optimisation (c'est-à-dire une meilleure espérance de taux de rétention et de marge) et le risque encouru (c'est-à-dire la taille des intervalles de confiance de ces indicateurs).

IV. Périmètre retenu

Le mémoire se concentre sur la politique tarifaire de renouvellement pour l'assurance automobile dans l'Union Européenne.

Il est surement possible d'étendre certains de ses résultats à d'autres branches, d'autres pays et à la politique tarifaire en affaires nouvelles et au remplacement. Toutefois, ce mémoire n'étudie pas les effets liés aux réglementations et aux comportements clients différents dans ces contextes.

Chaque chapitre présente l'approche théorique du sujet traité ainsi qu'un cas pratique.

Il est probable que les phénomènes étudiés présentent plusieurs optimums locaux. Dans ce genre de situation, ce mémoire s'efforcera d'étudier si ces optimums sont proches ou éloignés, en matière de positionnement tarifaire. En cas d'éloignement suffisant, il sera considéré que le positionnement actuel constitue un choix stratégique de la compagnie et le problème sera ramené dans une zone où il n'existe qu'un seul optimum.

Les évolutions du marché et en particulier des tarifs concurrents ne sont pas modélisées. Le parti pris du mémoire est que ces évolutions sont difficilement prévisibles. Comme elles impactent les données observées sur le portefeuille, il s'agit surtout d'une question de réactivité aux observations.

Chapitre 2. Modélisation de la prime pure

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la partie coûts de l'assureur. En effet, pour optimiser la marge, le premier élément est de connaître ses coûts. Nous nous focalisons sur la prime pure, car c'est la partie des coûts soumise à aléa. Les autres coûts peuvent être étudiés comme dans toutes autres industries

L'objectif global étant de pouvoir donner des intervalles de confiance lors de la prise de décisions, il est important de savoir quelle est la part d'incertitude dans l'estimation de la prime pure. Nous décrivons donc la modélisation, les écarts-types inhérents au modèle et les différences entre la réalité et la modélisation.

I. Modèles linéaires simples

1. Description du modèle

Le modèle linéaire généralisé est une extension du modèle linéaire qui, s'il en reprend la philosophie[7], réussit à en dépasser les limites (cf. chapitre 2.I.1.2). Les modèles linéaires formalisent ainsi une variable à expliquer (nommée Y) comme une somme de sa moyenne et d'une variable aléatoire.

Le modèle s'écrit comme : $Y = E(X) + \varepsilon = X\beta + \varepsilon = \eta + \varepsilon$ avec les hypothèses suivantes :

- Les X sont indépendants (exemple : homme vs femme, littoral vs continental)
- $E(\varepsilon) = 0$, le modèle est spécifié en moyenne
- $V(\varepsilon) = \sigma^2$, le modèle est homoscédastique, c'est-à-dire à variance constante
- $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, quelque soit i différent de j, c'est-à-dire pas d'autocorrélation des erreurs
- $Cov(X_i, \varepsilon_j) = 0$, quelque soit i différent de j c'est dire que les erreurs sont linéairement indépendantes des variables exogènes.
- Les termes d'erreur suivent une loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2

2. Première approche de la fonction lien

La relation entre la variable à prédire (Y) et les composantes définies dans le système (X) peut être spécifiée via une <u>fonction lien</u> qui correspond à la fonction identité dans le modèle linéaire soit $E(Y) = \mu = \eta$

Cette hypothèse de la fonction identité lien, superflue à ce stade, devient significative pour la compréhension des modèles GLM dans la mesure où la <u>fonction lien permettra de linéariser le lien entre la variable à expliquer et les variables explicatives</u>.

3. Limites

Les limites des modèles linéaires simples reposent sur leurs hypothèses initiales :

- Les hypothèses de normalité de (y) et de constance de la variance ne correspondent pas à la réalité observée

---

[7] Exprimer la relation entre une variable observée (Y), et un certain nombre de variables, appelées variables explicatives (X)

- Normalité. Les valeurs de la variable de réponse peuvent être restreintes à des valeurs positives uniquement, c'est notamment le cas dans en assurance en terme de tarification. L'hypothèse de normalité enfreint cette restriction
- Variance. Si la variable de réponse est strictement non-négative, alors intuitivement la variance de Y tend vers zéro comme la moyenne de Y tend vers zéro. Autrement dit, la variance est une fonction de la moyenne
- L'additivité du modèle. Nous verrons notamment que les risques d'assurance ont plutôt tendance à varier avec des facteurs multiplicatifs plutôt qu'avec des facteurs additifs

Application à l'assurance auto :

Dans la réalité opérationnelle, les segments de clientèles (ex. 20/30 ans vs > 55 ans) ne sont pas homoscédastiques. De même, les valeurs de la variable de réponse sont positives et la fonction de répartition probablement discontinue en 0

II. Modèle GLM

1. Présentation générale

Le modèle GLM permet de relier des variables explicatives à une variable à expliquer au travers d'une fonction dite « fonction lien » linéarisant la relation entre variable expliquée / variables explicatives. Ainsi, le GLM se compose de trois éléments :

- Une variable à prédire (y) suivant une certaine loi de distribution de la famille des exponentielles. Chaque composant de y est indépendant et suit la forme de l'une des distributions de la famille des exponentielles[8] ; la même forme pour chaque composant, mais avec des paramètres différentes
- Des facteurs prédictifs qui se combinent pour produire une « prédiction linéaire » $\eta = \mathbf{X}.\beta$
- Une fonction de lien servant à linéariser la relation entre la réponse et le prédicteur. La relation entre la variable à prédire (Y) et les variables du système (X) est spécifiée via une fonction lien de type : $E(Y) = \mu = g^{-1}(\eta)$

[8] On appelle famille exponentielle un ensemble de lois dont l'écriture est résumée par une formule unique et possédant des propriétés communes. L'intérêt de cette écriture est qu'un ensemble de résultats peut être obtenu de façon globale puis décliné selon les particularités propres à chaque loi. Elle inclut notamment les lois Normal, Poisson, gamma, inverse gaussiennes, binomiale, exponentielle

Variables à expliquer

y suit une loi de densité

$$f_{\theta}, \phi = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right\}$$

Fonction de lien

La fonction de lien décrit la nature de la relation E(Yi) ~ βiXi

η (X) = g [E (Y)] = β X

Fonction de lien		Inverse du lien (utilisé dans le modèle)	Distribution de Y
Identité	$\beta x = E(y)$	$E(y) = \beta x$	Normale
Log	$\beta x = \ln[E(y)]$	$E(y) = \exp(\beta x)$	Poisson
Logit	$\beta x = \operatorname{logit}[E(y)]$	$E(y) = \frac{\exp(\beta x)}{1+\exp(\beta x)}$	Binomiale
Inverse	$\beta x = \frac{1}{E(y)}$	$E(y) = \frac{1}{\beta x}$	Gamma

<u>Note</u> : chaque fonction de lien est associé à un type de distribution de la réponse

Variables explicatives

La fonction de lien permet de linéariser le lien entre la probabilité et les variables explicatives. Cela permet de construire une combinaison linéaire des X telles que η(x) = β X

<u>Application à l'assurance Auto</u> :

Dans le cas des modèles GLM en assurance auto :

- La fréquence des sinistres est généralement modélisée avec une fonction lien de type ln(y), soit $\beta X = \ln[E(Y)]$ d'où $E(Y) = e^{\beta X}$ avec y suivant une loi de Poisson
- Le nombre de sinistres est généralement modélisé avec une fonction lien de type ln(y), soit $\beta X = \ln[E(Y)]$ d'où $E(Y) = e^{\beta X}$ avec y suivant une loi de Poisson
- Le coût moyen d'un sinistre est généralement modélisé avec une fonction lien de type ln(y), soit $\beta X = \ln[E(Y)]$ d'où $E(Y) = e^{\beta X}$ avec y suivant une loi Gamma
- Le taux de renouvellement est généralement modélisé avec une fonction lien de type logit : $\ln\left[\frac{y}{1-y}\right]$, soit $\beta X = \operatorname{logit}[E(Y)]$ d'où $E(Y) = \frac{e^{X\beta}}{1+e^{XB}}$ avec y suivant une loi Gamma

2. Fonctions de lien

Loi	Lien	Fonction	Application
Binomial	Logit	$g(\mu) = \operatorname{logit}(\mu) = \log(\frac{\mu}{1-\mu})$	Taux de rétention / renouvellement
Poisson	Log	$g(\mu) = \log(\mu)$	Fréquence de sinistres
Normale	Identité	$g(\mu) = \mu$	
Gamma	Réciproque	$g(\mu) = -1/\mu$	Coût moyen de sinistres

D'autres fonctions de lien existent (probit, puissance, cloglog) mais sont moins communément utilisées.

<u>Application pratique</u> : transformation via une fonction de lien de type ln

Soient $g(x) = \ln(x)$ alors $g^{-1}(x) = e^{x}$

Si $\ln[E(Y)] = \beta X$ et $E(Y) = \mu$, alors $\mu_i = g^{-1}(\beta_i x_{i1} + ... + \beta_i x_{ip}) = e^{\beta i x_{i1}} ... e^{\beta i x_{ip}}$

Le modèle devient alors multiplicatif

3. Densité

Le choix de la fonction de densité sera fait en fonction :

1. Du type de variable :

- Si la variable est binaire, la densité sera de la forme binomiale/Bernoulli. Ce type de variable sera utilisé dans la modélisation du taux de rétention ou la réponse du client est 0 ou 1 (j'accepte la majoration ou je résilie)
- Si la variable est un comptage, la densité choisie sera la loi de Poisson
- Pour les lois continues, le choix peut être fait entre loi gamma et loi normale.

2. De la variance

4. Description du modèle général

Le modèle GLM permet d'estimer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire (ici nommée Y)

$$E(Y_i) = g^{-1}(\sum_j X_{ij}\beta_j + \xi_i)$$

$$V(Y_i) = \frac{V(\mu_i)}{\varpi_i}$$

Avec,

Y_i est la variable prédite (ex. taux de renouvèlement / rétention)

g(x) est la fonction de lien (ex. fonction ln(x))

X_{ij} sont les facteurs explicatifs (ex. âge, sexe, localisation). Bien que ces facteurs s'appellent explicatifs, le modèle donne des corrélations (et non des liens de causalité). Dans cadre de la tarification Auto, le modèle de véhicule n'est pas une cause de la sinistralité, mais lui est corrélé.

<u>Exemple</u> : un client n'a pas plus de risque parce qu'il a acheté une BMW plutôt qu'une Renault, mais c'est parce qu'il « aime les sensations au volant » qu'il a acheté une BMW. Son risque est ainsi bien corrélé à la marque de voiture choisie.

β_j sont les paramètres que nous estimerons par maximum de vraisemblance

ξ_i permet l'ajout d'un effet (ex. ajout d'un effet de l'exposition pour l'évaluation du nombre de sinistres) ou de forcer certains paramètres.

<u>Exemple</u> : Pour évaluer la fréquence des sinistres, le modèle permet d'intégrer un coefficient de « sur sinistralité » pour les années où il y a eu beaucoup plus de neige

ω_i est le poids accordé à chacune des observations (ex. lors de l'estimation d'une fréquence des sinistres, l'exposition constitue le facteur de pondération)

Après avoir défini le modèle, les estimations des facteurs du modèle GLM, c'est-à-dire les β_j, sont obtenues en maximisant le produit des densités (maximisation de la log-vraisemblance)

5. Estimation des paramètres du modèle

La densité étant connue (famille exponentielle, et plus généralement loi de Poisson, Gamma ou binomiale), les paramètres du modèle GLM sont estimés par maximisation de la log-vraisemblance

Application à une loi normale :

1. Avec fonction de lien identité $g(\mu) = \mu$:

$$E(Y) = g^{-1}(X\beta)$$

Soit la fonction de densité $f(x; \mu, \sigma^2) = e\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} - 0{,}5\ln(2\Pi\sigma^2)\right\}$

Alors la fonction de vraisemblance s'écrit comme le produit des fonctions de densité soit :

$$L(x; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} e\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} - 0{,}5\ln(2\Pi\sigma^2)\right\}$$

Maximiser la fonction de vraisemblance est équivalent à maximiser la fonction de log-vraisemblance, l'avantage étant de passer d'un produit à une somme d'où

$$l(x; \mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} \left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} - 0{,}5\ln(2\Pi\sigma^2)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{-\frac{(y - \sum_{j=1}^{p} X_{ij}\beta_j)^2}{2\sigma^2} - 0{,}5\ln(2\Pi\sigma^2)\right\}$$

Reste ensuite à dériver le log-vraisemblance par rapport aux paramètres à estimer β_j

2. Avec une fonction de lien ln $g(\mu) = \ln(\mu)$

$$E(Y) = g^{-1}(X\beta)$$

Soit la fonction de densité $f(y; \mu) = e^{-\mu}\mu^{y} / y!$

Alors la fonction de log-vraisemblance s'écrit comme la somme des fonctions de densité soit :

$$l(y; \mu) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(y; \mu_i) = \sum_{i=1}^{n} -\mu_i + y_i \ln \mu_i - \ln(y_i)!$$ avec $\mu_i = e(\sum_j X_{ij}\beta_j)$ d'où :

$$l(y; e^{x\beta}) = \sum_{i=1}^{n} -e(\sum_{j=1}^{p} X_{ij}\beta_j + y_i \sum_{j=1}^{p} X_{ij}\beta_j - \ln(y_i)$$

Reste ensuite à dériver le log-vraisemblance par rapport aux paramètres à estimer β_j

Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance :

- L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$ est asymptotiquement sans biais (tend presque surement vers β)
- L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\beta}$ est asymptotiquement normal

6. Bonus / malus et tarification a posteriori

Dans la tarification automobile en France, l'assureur doit tenir compte des sinistres antérieurs à travers le coefficient de réduction – majoration (bonus / malus).

Le principe initial est d'avoir un coefficient qui dépend du nombre de sinistres antérieurs et qui, multiplié à la prime pure, donne une meilleure vision du risque. Le système doit aussi permettre d'inciter les conducteurs à avoir une conduite plus prudente.

Le principe en a été en partie détourné, et les assureurs l'utilisent maintenant comme une variable tarifaire parmi d'autres. Le lien entre la prime pure et le coefficient CRM n'est plus un simple produit.

III.Limites théoriques du modèle GLM

1. La réalité n'est pas multiplicative

En pratique, le modèle de prime pure utilisé après avoir étudié les données par un GLM consiste à avoir une prime pure de base multipliée par un coefficient par variable tarifaire.

Le coefficient du niveau de base de chaque variable est 1 et par chaque niveau différent, il y a un coefficient différent. Par exemple, si le coefficient vaut 1,504 pour un homme de 25 ans et 1,050 pour une femme de 45 ans, le premier paiera 1,432 fois plus que la deuxième si toutes leurs autres variables tarifaires coïncident.

L'hypothèse sous-jacente forte de ce modèle est que l'impact d'un changement de niveau sur une variable est indépendant du niveau des autres variables. C'est une hypothèse très forte.

Prenons un exemple sans aléa, mais avec une dispersion dans chaque niveau. Il peut sembler surprenant de prendre un exemple sans aléa, mais cela permet de mieux comprendre la manière dont le modèle GLM approxime la réalité sans entrer dans le détail de la volatilité. Les données réelles observées sont alors des grandeurs directement observables et pas des estimateurs.

Observons le revenu moyen des hommes et des femmes en Italie et en Espagne :

	Espagne	Italie
Hommes	15 185,60 €	18 523,50 €
Femmes	14 716,10 €	17 431,30 €

Tableau 1 : Revenus moyens hommes / femmes en Italie et Espagne en 2009[9]

Ces données peuvent être modélisées[10] par :

- une loi normale pour fonction d'erreur et l'identité pour fonction de lien (modèle additif)
- une loi de Poisson pour fonction d'erreur et le logarithme pour fonction de lien (modèle multiplicatif)

	Espagne	Italie
Hommes	15 341,27 €	18 367,82 €
Femmes	14 560,42 €	17 586,97 €

Tableau 2 : Données du tableau 1 modélisées avec une loi normale et fonction identité

[9] Source : Eurostat

[10] Le calcul pas à pas du modèle GLM n'est pas détaillé dans ce document

	Espagne	Italie
Hommes	15 304,52 €	18 403,71 €
Femmes	14 595,86 €	17 551,54 €

Tableau 3 : Données du tableau 1 modélisées avec une loi de Poisson et un logarithme

Les données d'entrée ne présentaient pas d'aléa. Les écarts entre les modèles et les valeurs observées ne sont donc pas liés à une réalisation aléatoire des observations.

Les écarts viennent du fait que dans chaque modèle, la différence de revenu entre hommes et femmes est la même en Espagne et en Italie, soit en montant pour le modèle additif, soit en pourcentage pour le modèle multiplicatif. Or les inégalités salariales sont moins fortes en Espagne qu'en Italie.

L'hypothèse très forte d'un modèle de prime pure totalement multiplicatif est donc en général rarement vérifiée.

Cette hypothèse crée d'autant plus de distorsions dans l'évaluation de la prime pure que le risque s'éloigne du risque de référence. En assurance auto, les biais les plus forts se retrouvent sur les primes élevées[11].

L'un des moyens de dépasser cette limite consiste à estimer la prime pure de chaque croisement possible de toutes les variables tarifaires.

En pratique, un assureur utilise une vingtaine de variables tarifaires. Certaines n'ont que deux modalités, mais d'autres peuvent en avoir une centaine. Le nombre de croisements possibles dépasse alors de plusieurs ordres de grandeur le nombre d'êtres humains sur la planète. La plupart des croisements n'ont pas d'observation et les croisements réellement observés n'ont pas assez de cas pour que la loi des grands nombres s'applique.

Les assureurs utilisent donc quelques croisements de deux variables lorsqu'ils observent de grosses divergences dans un modèle multiplicatif, par exemple les croisements des variables sexe et âge, mais la majeure partie du modèle reste entièrement multiplicative.

2. Intervalles de confiance

Les phénomènes couverts par l'assurance automobile, principalement les accidents, sont par nature des phénomènes aléatoires.

Même si les risques sous-jacents suivaient parfaitement un modèle multiplicatif, chaque donnée observée contiendrait quand même une part d'aléa et la précision des estimateurs des coefficients du modèle n'est donc pas parfaite.

Nous ne nous intéressons ici qu'à la prime pure d'un segment. Pour une police, il faut aussi inclure le facteur d'erreur ε_i, mais au niveau d'un segment ce terme n'intervient pas car $E(\varepsilon_i) = 0$. L'assurance fonctionnant sur la mutualisation et les grands nombres, il est illusoire d'arriver à avoir une précision quelconque sur une seule police.

Plus le nombre d'observations est faible ou plus le nombre de coefficients dans le modèle (degrés de liberté) est élevé, moins les estimations des coefficients sont précises.

Cramer et Rao ont montré que la variance d'un estimateur ne peut pas être inférieure à la dérivée seconde de la log-vraisemblance. Dans le cas multi-facteurs, la matrice de variance-covariance des estimateurs est supérieure à l'opposé de l'inverse de la matrice dérivée seconde de la log-vraisemblance. La supériorité des matrices s'entend par A ≥ B équivaut à A-B est positive semi-définie.

[11] Lena Chang and William B. Fairley, Pricing Automobile Insurance under Multivariate Classifications of Risks: Additive versus Multiplicative, The Journal of Risk and insurance, Vol. 46, No.1 (Mar., 1979), pp. 75-98

La plupart des logiciels utilisés pour modéliser les risques dans les compagnies d'assurance (par exemple EMB ou Pretium) donnent donc un intervalle de confiance des coefficients.

Dans la pratique, la fréquence et le coût moyen sont souvent estimés séparément via des modèles multiplicatifs.

Soit f la fréquence, on a donc l'estimation du log de fréquence d'un client :

$$\log \hat{f} = \log E[f] = \mathrm{X}.\underline{\hat{\beta}}$$

$$V\left[\log \hat{f}\right] = X.\mathrm{cov}\,\hat{\beta}.\underline{X}$$

Or, d'après Cramer-Rao : $X.\left(\mathrm{cov}\,\hat{\beta} + H^{-1}\right).\underline{X} \geq 0$

Donc : $V\left[\log \hat{f}\right] \geq -X.H^{-1}.\underline{X}$

Où H est la dérivée seconde de la log-vraisemblance.

De la même façon, on obtient un minimum pour la variance du logarithme du coût moyen (Y).

En considérant que les erreurs d'estimation sur la fréquence et le coût moyen sont indépendantes, la variance du logarithme de la prime pure est obtenue par :

$$V[\log PP] = V\left[\log \hat{f}\right] + V\left[\log \hat{Y}\right]$$

Ce qui permet d'obtenir une variance minimale et donc un intervalle de confiance pour l'estimation de la prime pure par police.

Dans l'hypothèse où l'erreur d'estimation suit une loi log-normale, nous avons donc le paramètre de variance de cette loi normale ($\sigma^2 = V[\log PP]$).

L'écart-type de la loi log-normale vaut alors :

$$PP \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}} \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

C'est cet écart-type que nous choisissons pour estimer des intervalles de confiance sur la prime pure.

3. Écarts-types réels

Nous appliquons ce raisonnement à l'étude de la prime pure d'une garantie par un assureur.

Pour cela, nous utilisons les résultats du modèle GLM pour cette garantie, dont la matrice de variance-covariance. Une extraction de cette matrice pour la fréquence de sinistres est donnée ci-dessous.

Variance / Covariance	1-Mean	2-PARKTYPE (1)	3-PARKTYPE (2)	4-PARKTYPE (3)	5-PARKTYPE (4)	6-USAGE (1)	7-USAGE (2)	8-USAGE (3)	9-USAGE (4)	10-USAGE (5)
1-Mean	0,00020	-0,00001	-0,00001	-0,00001	-0,00002	-0,00001	-0,00002	0	-0,00001	0
2-PARKTYPE (1)	-0,00001	0,00006	0,00001	0,00001	0,00001	0	0	0	0	0
3-PARKTYPE (2)	-0,00001	0,00001	0,00004	0,00001	0,00001	0	0	0	0	0
4-PARKTYPE (3)	-0,00001	0,00001	0,00001	0,00004	0,00001	0	0	0	0	0
5-PARKTYPE (4)	-0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00006	0	0	0	0	0
6-USAGE (1)	-0,00001	0	0	0	0	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001
7-USAGE (2)	-0,00002	0	0	0	0	0,00002	0,00025	0	0,00001	0,00001
8-USAGE (3)	0	0	0	0	0	0,00001	0	0,00093	0,00001	0
9-USAGE (4)	-0,00001	0	0	0	0	0,00001	0,00001	0,00001	0,00013	0,00001
10-USAGE (5)	0	0	0	0	0	0,00001	0,00001	0	0,00001	0,00032

Ceci amène plusieurs remarques. Nous pouvons noter que les covariances des estimateurs de deux coefficients représentant des variables différentes sont négligeables devant les autres variances et covariances. Un client n'ayant qu'un seul niveau dans chaque variable, les seules covariances utiles sont les covariances entre deux variables ; or elles sont négligeables.

Les covariances entre la moyenne et les estimateurs des variables sont presque toujours négatives ce qui semble logique : la variance de la moyenne inclut l'incertitude sur le profil de référence, et cette incertitude doit être déduite lorsque l'on change de profil.

Pour avoir une estimation de l'« erreur moyenne », nous faisons donc la somme des variances multipliées par le poids du niveau dans le nombre d'observations, additionnant les valeurs pour la fréquence et le coût moyen, ce qui donne le paramètre de variance de la loi log-normale d'erreur (σ^2)

Dans notre cas, nous obtenons un écart-type « moyen » de 10%. Cet écart-type varie en fait de 3,5% pour le profil de référence (le plus représenté) à des écarts dépassant les 50% pour les profils les moins représentés.

Lorsque la sinistralité du portefeuille mesurée par le loss ratio se situe autour de 70%, ceci signifie que pour les profils avec la meilleure précision, la prévision de loss ratio est entachée d'un écart-type de 2,5 points.

IV. Limites pratiques du modèle GLM

1. Décisions tarifaires et antisélection

L'un des éléments importants de choix d'une police d'assurance est son prix. Un assuré choisit donc souvent l'assureur lui offrant l'un des tarifs les plus bas du marché.

Les risques présents sur le portefeuille d'un assureur ne sont donc pas représentatifs de la population générale. La sinistralité observée sur le portefeuille est donc différente de la sinistralité générale et les primes pures calculées par l'assureur sur ses bases de données ne sont pas une représentation fidèle des risques du marché.

Quand l'assureur modifie son tarif, sa compétitivité sur chaque client potentiel évolue, ce qui modifie les choix d'assurance des clients. La structure de risque du portefeuille a donc tendance à se déformer.

Un nouveau modèle GLM sur les données du nouveau portefeuille montrerait une évolution des coefficients même si les caractéristiques du risque dans la population générale n'ont pas évolué.

En pratique, cet effet s'observe très fortement sur les profils de risque élevé sur lesquels une erreur de tarification a placé la compagnie bien en dessous du marché.

Pour les petites évolutions sur la masse du portefeuille, il est très difficile de séparer l'impact de cet effet d'une évolution naturelle de la sinistralité.

2. Fiabilité des bases de données de l'assureur

Une base de données standard utilisée par un assureur contiendra de nombreuses erreurs. En effet, les chargés clientèle, comme tout le monde, font un minimum incompressible de fautes de frappe. De plus, ils auront tendance à remarquer que certains éléments n'ont aucun impact sur le tarif actuel et donc prêteront moins d'attention au remplissage correct de ses champs.

Il convient donc d'élargir la taille des intervalles de confiance en fonction de la qualité des bases de données. Dans un premier temps, nous suggérons d'être assez qualitatif dans cette estimation. L'assureur devra augmenter cette marge d'erreur pour les paramètres non utilisés dans le tarif ou ayant peu d'impact.

Il est possible de dépasser en partie cette limite en modélisant les caractéristiques des polices comme des variables aléatoires, mais les estimateurs doivent alors évoluer.

V. Erreurs d'estimation de la prime pure

En général, la méthode utilisée par les assureurs est de lier la base de données des contrats contenant l'information sur toutes les variables tarifaires et l'exposition à la base des sinistres contenant l'information sur les garanties impactées et les coûts de chaque sinistre.

Pour les sinistres, l'habitude est de les lisser : les sinistres au-dessus d'un certain montant sont supprimés de la base de données. Un pourcentage uniforme est ajouté après le calcul de la prime pure attritionnelle.

Pour le calcul de cette prime pure attritionnelle, les fréquences et les coûts moyens sont étudiés séparément par des modèles GLM. Pour la fréquence, il s'agit d'une fonction de lien logarithmique et d'une distribution de Poisson. Pour les coûts moyens, d'une fonction de lien logarithmique et d'une distribution Gamma. Il est à noter que la fonction de lien canonique pour une distribution Gamma est la fonction inverse, mais que ce n'est pas celle habituellement choisie. Les assureurs préfèrent en effet conserver un tarif entièrement multiplicatif ce qui ne serait pas le cas avec la fonction inverse pour fonction de lien du coût moyen.

En utilisant les analyses des paragraphes ci-dessus, nous pouvons donc en déduire une méthode d'évaluation d'intervalles de confiance par profil.

Une fois le modèle de prime pure ajusté, il convient de récupérer du logiciel de GLM la matrice de variance-covariance des estimateurs des coefficients, ce qui permet de donner un intervalle de confiance de la prime pure pour chaque profil.

Il faut ensuite élargir ces intervalles de confiance d'un facteur dépendant du taux d'erreur habituel des bases de données utilisées

Pour les profils avec les primes pures les plus élevées (par exemple celles dépassant le quintuple de la prime pure moyenne), il convient d'abaisser la borne inférieure de cet intervalle.

Nous obtenons donc, pour un profil x, un intervalle de confiance de la forme :

$$\left[PP(x)-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\sigma(x)\cdot\tau\cdot\left(1+a1_{PP(x)\geq PP_r}\right);PP(x)+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\sigma(x)\cdot\tau\right]$$

Où :

$PP(x)$: prime pure du profil x
Φ : fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
ε : erreur tolérée pour l'intervalle de confiance
$\sigma(x)$: écart-type de l'erreur du modèle GLM sur le profil x
τ : facteur lié au taux d'erreur des bases de données (supérieur à 1)
a : coefficient d'erreur du modèle multiplicatif sur les primes élevées
PP_r : prime pure de référence au-dessus de laquelle le coefficient d'erreur est appliqué

VI. Application du modèle GLM au sein d'une compagnie d'assurance

Depuis plusieurs années, le modèle GLM s'est imposé dans les compagnies d'assurance et elles sont de plus en plus nombreuses à s'équiper de logiciels de plus en plus coûteux permettant d'améliorer la maniabilité et de réduire les temps de calcul.

Ces modèles sont principalement utilisés pour déterminer la prime pure des assurances dommages de détail dont l'assurance auto représente la plus grande part.

1. Biais de sélection

Pour évaluer la prime pure, les actuaires de la compagnie commencent par récupérer l'historique des contrats avec les caractéristiques de chaque variable tarifaire à implémenter et l'historique des sinistres. Chaque garantie est traitée séparément et en général, la fréquence et le coût moyen sont aussi traités séparément.

Avant même de commencer le moindre calcul, il y a donc déjà un biais de sélection dans les données utilisées. En effet, ce que voient les actuaires de la compagnie ne sont pas les données du marché. Imaginons que la compagnie ait historiquement utilisé une variable tarifaire de moins que ses concurrents et ne fût pas compétitive sur les bonus 50. Elle a donc eu tendance à vendre des contrats aux plus mauvais risques parmi les bonus 50. Les actuaires ne verront donc pas l'impact total du bonus 50 sur la prime pure, mais seulement une partie.

2. Choix des variables tarifaires

La tâche de l'actuaire consiste ensuite à choisir les variables tarifaires, leur répartition en groupes homogènes, les splines et les croisements.

La répartition en groupes homogènes permet de traiter de manières identiques des groupes trop faibles en ce qui concerne les polices.

Les splines permettent de lisser l'impact de certaines variables que l'on considère continuées, comme l'âge.

Les croisements permettent de tenir compte des effets non purement multiplicatifs entre deux variables. Par exemple, l'âge et le genre sont souvent considérés comme des variables ayant des interactions bien plus complexes.

Chaque contrainte ajoutée réduit l'incertitude sur les coefficients tarifaires trouvés, mais risque d'éloigner l'espace des modèles possibles de la réalité. L'ajout de croisements au contraire augmente l'espace des modèles possibles tout en augmentant l'incertitude des coefficients tarifaires.

Le modèle contient donc beaucoup de ce que pense l'actuaire de la réalité.

3. Impact des liens de causalité

Dans tout le calcul effectué par l'actuaire pour estimer la prime pure, la notion de causalité n'intervient pas. La question qui se pose est la suivante : « Connaissant les caractéristiques suivantes du risque, comment puis-je estimer au mieux la prime pure ? » Peu importe que la caractéristique observée soit une conséquence ou une cause du risque du moment qu'elle donne une information sur le risque.

L'actuaire se place, en général, implicitement dans le cas où ses choix tarifaires n'influencent pas les caractéristiques du client.

Reprenons l'exemple lié à la variable marque du véhicule. Un client conduisant une BMW sera en général plus risqué qu'un client conduisant une Renault. Est-il plus risqué parce que la BMW est plus puissante ou a-t-il choisi une BMW parce qu'il a une conduite plus nerveuse ? Si le tarif n'influence pas le choix du véhicule, peu importe. Si le tarif influence le choix du véhicule, et que nous nous situons dans le deuxième cas (le choix du véhicule est une conséquence du risque), ce n'est pas parce que le client choisira une Renault à la place d'une BMW qu'il deviendra moins risqué.

Ceci souligne bien que l'utilisation du modèle GLM pour la prime pure fonctionne en partie sur l'hypothèse que seuls les liens de corrélation comptent, que l'on ne cherche pas à agir sur des liens de causalité supposés.

4. Lissage et classification

Certaines variables utilisées dans la modélisation sont par nature des variables indicatrices, par exemple le véhicule utilisé ou la commune de résidence. Le modèle GLM donnerait une valeur de paramètre par chaque niveau de ces variables, et le nombre de ces niveaux est très élevé. Toutefois, il se dégage intuitivement un lien entre ses différents niveaux : par exemple, le risque dans une commune n'est pas indépendant du risque dans les communes limitrophes.

L'actuaire regroupe donc les véhicules en classe de véhicules, et les communes dans un zonier. Ceci permet de lisser les écarts entre éléments proches et de réduire le nombre de paramètres à ajuster dans le modèle GLM.

5. Élargissement du champ d'application du modèle GLM

Le modèle GLM a fait les preuves de son efficacité pour la modélisation de la prime pure. Il présente aussi l'avantage de pouvoir être ajusté à presque toutes les données. Les actuaires des compagnies d'assurance disposent aussi d'outils simples et puissants pour le mettre en pratique.

En conséquence, avec le temps, certains actuaires ont eu tendance à utiliser de plus en plus ce modèle sans se poser à chaque fois la question de son applicabilité.

Avant d'appliquer un modèle GLM, l'actuaire devrait toujours se poser les questions suivantes :

- Suis-je intéressé par un lien de causalité ou de corrélation ?
- La fonction de lien que j'utilise a-t-elle une relation avec la réalité sous-jacente ?
- La volatilité du phénomène suit-elle bien une loi exponentielle ?

Si la réponse à l'une de ces questions n'est pas compatible avec l'utilisation d'un modèle GLM, l'actuaire devra alors chercher un autre modèle plus adapté.

Chapitre 3. Étude de l'élasticité

Les acronymes et notations couramment utilisés sont présentés en annexe

Maintenant que nous connaissons les coûts et leurs incertitudes, nous nous penchons sur la modélisation du comportement des clients. Nous le faisons en introduisant le concept d'élasticité. Comme ce concept n'est pas directement observable, nous étudions comment le mesurer et le modéliser. Nous voyons ensuite ses limites en décrivant plusieurs éléments du comportement des clients qui ne sont pas élastiques.

I. Définition de l'élasticité

L'objectif soutenu par ce mémoire est d'optimiser la marge au renouvellement en utilisant le levier des prix proposés au terme. Pour cela, il faut donc étudier l'impact d'une variation tarifaire sur le comportement.

Comme les clients n'ont que deux possibilités, renouveler ou résilier, la mesure naturelle de leur comportement est le taux de rétention.

Pour connaître l'évolution de ce taux par rapport au prix, l'outil mathématique adapté est la dérivation partielle. Pour avoir un indicateur sans dimension, le mieux est de le diviser par le taux de rétention et multiplier par le prix. Comme le taux de rétention diminue quand les prix proposés augmentent, nous ajoutons un signe négatif pour avoir une élasticité positive.

L'élasticité est donc définie comme suit :

$$e = -\frac{\partial T}{\partial p}\frac{p}{T} = -\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}$$

À ce stade, il est intéressant de noter les points suivants :

- L'élasticité est une dérivée partielle par rapport au prix proposé ce qui signifie que toutes les autres variables sont constantes dans cette dérivation ;
- Ceci signifie aussi qu'elle se base sur différentes hausses tarifaires proposées, mais pas sur une hausse tarifaire absolue ; le prix de l'année précédente n'entre pas dans la définition ;
- Le taux de rétention est dérivé, pour être cohérent avec la définition économique générale qui dérive la demande. Nous verrons aussi dans la partie optimisation que l'interprétation en est facilitée ;
- La dérivée logarithmique pousse à raisonner en pourcentage : si j'augmente les prix de x%, les prix baissent de x% ;
- L'élasticité n'a de sens que pour les faibles variations de prix proposés.

Les éléments habituellement reconnus en économie comme impactant l'élasticité sont :

- Possibilité de substitutions : pour un assureur, il s'agit du positionnement des concurrents en matière de garanties et de prix (*cf 4 Impact de la concurrence*)
- La part du revenu disponible : les clients avec de faibles revenus sont susceptibles d'avoir une élasticité supérieure ; l'élasticité est aussi a priori supérieure pour les prix élevés
- Nécessité : l'élasticité est surement plus faible pour la garantie responsabilité civile qui est obligatoire
- Durée : plus la hausse de prix est longue, plus l'élasticité peut être élevée ; dans le cas de l'assurance, il peut s'agir que les clients s'apercevant que la stratégie des compagnies se base sur des hausses tarifaires, ils commencent à être plus attentifs à leur avis d'échéance (*cf 5 Fragilité*)

- Image de marque : des investissements marketing judicieux peuvent réduire l'élasticité des clients

Insistons bien sur cette notion de dérivée partielle. Les différents indicateurs suivis par l'assureur (chiffre d'affaires, marge, valeur, etc.) dépendent de beaucoup de paramètres : structures des produits, qualité du marketing, prix proposés, image de marque, positionnement des concurrents, situation macroéconomique.

Pour le management, il est intéressant de savoir comment les indicateurs qu'il suit bougent en fonction des décisions qu'il prend. Dans le cadre d'une optimisation au sein du même positionnement, la décision principale à prendre est la stratégie tarifaire. Pour prendre cette décision, la question n'est pas de savoir quel impact a l'évolution du contexte, mais quel impact a la décision. Que le management prenne ou non telle ou telle décision tarifaire, le contexte évoluera toujours de la même manière[12].

II. Modèles d'élasticité

1. Modèle logistique

Pour modéliser l'élasticité, certains commencent par modéliser le taux de rétention.

Ils prennent l'hypothèse que le taux de rétention suit une forme logistique :

$$T = \frac{e^{\beta x + \alpha \frac{p}{p(x)}}}{1 + e^{\beta x + \alpha \frac{p}{p(x)}}}$$

T : taux de rétention

x : caractéristiques du client

$p(x)$: prix de référence pour le profil x

p : prix proposé

α et β : paramètres du modèles GLM

Le modèle est ensuite ajusté en fonction des taux de rétention observés sur le portefeuille.

Dans un tel modèle, l'élasticité modélisée suit la relation :

$$e = -\alpha \frac{p}{p(x)}(1-T)$$

L'élasticité d'un segment ne dépend donc des caractéristiques du segment que via le prix de référence, en général le tarif des affaires nouvelles, le prix proposé et le taux de rétention de ce segment.

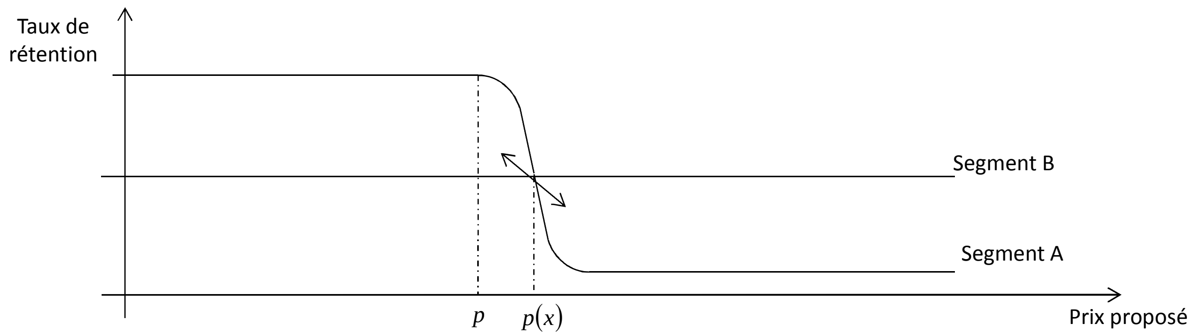
L'élasticité serait alors proportionnelle à la hausse tarifaire proposée et au taux de résiliation.

Ce modèle est peu réaliste : l'élasticité n'a aucune raison d'être corrélée au niveau du tarif ni au taux de rétention observé. Nous montrerons aussi plus loin dans les applications numériques que ce n'est effectivement pas le cas sur le portefeuille étudié.

Prenons le cas de deux segments ayant approximativement le même tarif et des taux de rétention similaires. En revanche, le segment A est constitué de clients ayant un faible pouvoir d'achat et beaucoup de temps libre. Le segment B est constitué de clients ayant un fort pouvoir d'achat et peu de temps libre. Représentons leur taux de rétention en fonction du prix.

---

[12] Nous nous plaçons ici dans le même cadre que les théories classiques de l'économie. La part de marché de l'assureur est suffisamment faible pour que ses décisions n'influencent pas le marché.



Le modèle devant trouver la même élasticité pour les deux segments trouvera une élasticité intermédiaire entre les élasticités de chaque segment.

Cet exemple montre qu'il est fort probable que dans la réalité le taux de rétention ne suive pas une loi logistique.

Ce phénomène vient d'une propriété bien connue de la dérivée : elle ne conserve pas la proximité entre deux fonctions. La modélisation par un modèle GLM du taux de rétention garantit que le taux modélisé est proche du taux réel. Lorsque l'on dérive, il n'y a aucune propriété mathématique garantissant que la dérivée du taux modélisé est proche de la dérivée du taux réel.

De plus lorsque nous étudions l'élasticité, nous sommes à la recherche d'un lien de causalité que le modèle GLM ne peut par définition pas trouver.

2. Modèle de taux de variation

Dans l'objectif d'une optimisation des prix, nous cherchons à optimiser la marge en fonction du comportement des clients en fonction du prix. Pour cela, il semble donc pertinent de prendre le moins d'hypothèses possible sur la fonction de demande.

Nous prenons donc l'hypothèse qu'à proximité du prix de référence, le logarithme du taux de rétention est proche de son développement de Taylor du premier degré :

$$\ln T \approx \ln T(x) - e(x)\ln\left(\frac{p}{p(x)}\right)$$

$T(x)$: taux de rétention du profil x au prix de référence $p(x)$

$e(x)$: élasticité du profil x

Dans ce modèle, l'élasticité dépend entièrement de toutes les caractéristiques du profil.

Rappelons à cette étape que l'élasticité est un concept qui prend son sens à l'échelle mésoscopique :

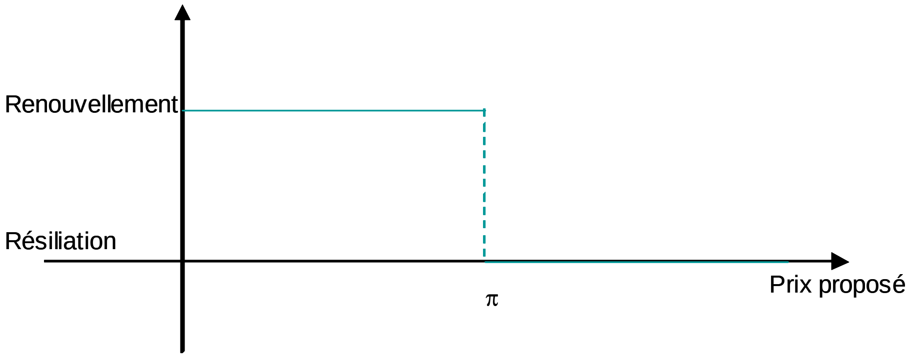
- à l'échelle d'un seul client, le concept n'a pas de sens
- à l'échelle de tout un portefeuille, il y a beaucoup de sous-segments ayant des comportements homogènes

a) Modèle de taux de rétention

Pour modéliser l'élasticité, commençons par modéliser le taux de rétention d'un client. Ce taux ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

Pour un client, prenons une variable $X_i(p)$ du prix de renouvellement proposé, valant 1 si le client renouvelle et 0 s'il résilie. Par hypothèse, si le client renouvelle à un prix p, il renouvelle aussi à tout prix p' inférieur à p.

Ceci nous conduit donc à avoir une variable saut. Nous noterons π le prix auquel se situe le saut.



Le prix π dépend du profil du client, du marketing de la société d'assurance et des prix des concurrents.

Le client peut voir son prix charnière évoluer au quotidien en fonction de son humeur du jour, de ce qu'il vient d'entendre à la radio… Son prix charnière vaudra alors $\pi+\eta$. La distribution de la variable aléatoire η est inconnue, mais son espérance est nulle. La densité de η est notée f_η et sa fonction de répartition est notée F_η. On a alors

$$X_i(p)=\begin{cases}1\,\text{si } p\le\pi+\eta\\ 0\,\text{sinon}\end{cases}$$

La variable aléatoire $X_i(p)$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1-F_\eta(p-\pi)$.

On a donc :

$$E[X_i(p)]=1-F_\eta(p-\pi)$$
$$V[X_i(p)]=F_\eta(p-\pi)\cdot(1-F_\eta(p-\pi))$$

Comme une fonction de répartition ne prend ses valeurs qu'entre 0 et 1, nous pouvons noter la propriété suivante :

$$V[X_i(p)]\le 0{,}25$$

Toute la suite du modèle n'est basée que sur l'hypothèse que la variable $X_i(p)$ suit une loi de Bernoulli dont le paramètre dépend du prix proposé, du profil du client et du marché. L'hypothèse impose aussi la décroissance et la dérivabilité du paramètre par rapport au prix proposé.

Dans la réalité, nous ne faisons que des études sur des données discrètes et non continues (les prix varient de centime en centime), et nous pouvons donc approcher un saut par une pente très forte, ce qui permet de respecter l'hypothèse de dérivabilité.

Les explications précédentes sur le comportement client permettent juste de comprendre une origine possible de cette hypothèse. Toutefois, si l'hypothèse posée a une autre cause, la suite du modèle reste valable.

b) Profils uniformes

Maintenant, imaginons que nous ayons N clients avec chacun le même profil que le client i. Ils ont donc tous le même prix charnière π et nous considérerons par hypothèse que leurs comportements η sont indépendants et identiquement distribués.

Le taux de rétention vaut alors :

$$T(p) = \overline{X_N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Et on a :

$$E[T] = 1 - F_\eta(p - \pi)$$
$$V[T] = \frac{1}{N} \cdot F_\eta(p-\pi) \cdot (1 - F_\eta(p-\pi))$$

Le taux de rétention multiplié par N suit donc une loi binomiale de paramètres N et $\mu = 1 - F_\eta(p-\pi)$.

De plus le théorème central limite nous donne que le taux de rétention suit une loi normale pour un nombre de clients suffisamment important. Nous noterons ses paramètres μ et σ.

Nous pouvons noter que :

$$\sigma^2 = \frac{\mu \cdot (1-\mu)}{N}$$

c) Estimateur de l'élasticité

Pour mettre en évidence l'élasticité et pouvoir la mesurer, l'assureur va proposer aléatoirement à ses clients deux prix différents p_1 et p_2. Il observera alors deux taux de rétention différents qui sont les réalisations de deux variables aléatoires T_1 et T_2. Si le choix du prix proposé, p_1 ou p_2, au client est complètement aléatoire, les deux variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

En mesurant le taux de variation observé, nous pouvons alors définir un estimateur de l'élasticité :

$$\hat{e} = \frac{\dfrac{T_2 - T_1}{T_1}}{\dfrac{p_2 - p_1}{p_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{\dfrac{p_2}{p_1} - 1}$$

Pour analyser la pertinence de cet estimateur, nous avons besoin d'en calculer l'espérance et la variance. Par cela, il nous faut calculer les moments de T_2/T_1.

Haya et Armstrong[13] ont donné les valeurs approchées du ratio de deux lois normales indépendantes non centrées non réduites. Ces valeurs sont valables si le dénominateur est presque surement positif. Dans le cas présent, le dénominateur représente un taux de rétention et il est donc raisonnable de le supposer presque surement positif.

On a donc le développement de Taylor suivant :

$$E\left[\frac{T_2}{T_1}\right] \approx \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2}\right)$$
$$V\left[\frac{T_2}{T_1}\right] \approx \frac{\sigma_1^2 \mu_2^2}{\mu_1^4} + \frac{\sigma_2^2}{\mu_1^2}$$

13 Hayya Jack et al., A Note on the Ratio of Two Normally Distributed Variables, Management Science, Vol. 21, No. 11, Theory Series (Jul., 1975), pp. 1338-1341

En exprimant les variances des lois normales en fonction de leurs espérances comme explicitées au paragraphe précédent, on obtient :

$$E\left[\frac{T_2}{T_1}\right]=\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\left(1+\frac{(1-\mu_1)}{N\mu_1}\right)$$

$$V\left[\frac{T_2}{T_1}\right]=\frac{(1-\mu_1)\mu_2^2}{N\mu_1^3}+\frac{(1-\mu_2)\mu_2}{N\mu_1^2}$$

Pour un grand nombre de clients, on a donc :

$$\lim_{N\to+\infty} E\left[\frac{T_2}{T_1}\right]=\frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\lim_{N\to+\infty} V\left[\frac{T_2}{T_1}\right]=0$$

Pour l'estimateur d'élasticité, nous trouvons :

$$E[\hat{e}]\approx\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\cdot\left(1+\frac{(1-\mu_1)}{N\mu_1}\right)-1\right)\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

$$V[\hat{e}]\approx\left(\frac{(1-\mu_1)\mu_2^2}{N\mu_1^3}+\frac{(1-\mu_2)\mu_2}{N\mu_1^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}-1\right)^2}$$

Nous pouvons récrire l'espérance :

$$E[\hat{e}]\approx\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}+\frac{\mu_2(1-\mu_1)}{N\mu_1^2}\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

En remarquant :

$$e=\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\right)\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

On obtient :

$$E[\hat{e}]\approx e+\frac{\mu_2(1-\mu_1)}{N\mu_1^2}\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

Et à la limite :

$$\lim_{N \to +\infty} E[\hat{e}] = e$$
$$\lim_{N \to +\infty} V[\hat{e}] = 0$$

L'estimateur d'élasticité est donc asymptotiquement sans biais et convergent.

Nous pouvons toutefois noter que l'estimateur n'est pas sans biais. Il faudra toujours vérifier par la suite que le nombre observé est suffisant pour pouvoir utiliser l'estimateur.

Nous observons aussi que le biais d'estimation et l'écart-type de l'estimation sont inversement proportionnels au taux de variation de prix testé. Pour que l'estimation ait un sens, il faut donc que l'écart de prix soit suffisant.

Notons le biais d'estimation $b = E[\hat{e}] - e$.

En observant que pour un faible écart de prix, nous avons :

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1 + o\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)$$

On obtient :

$$b \approx \frac{1-\mu}{N\mu} \cdot \frac{1}{\frac{p_2}{p_1} - 1}$$
$$\sigma[\hat{e}] \approx \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{N\mu}} \cdot \frac{1}{\frac{p_2}{p_1} - 1}$$

Prenons quelques exemples de portefeuilles en renouvellement :

		Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
Paramètres	Taux de rétention (μ)	80%	80%	80%	70%
	Nombre de polices à échéance ($2N$)	10 000	10 000	100 000	100 000
	Écart de prix testé ($\frac{p_2}{p_1} - 1$)	3%	5%	3%	3%
Estimation	Biais	$1{,}7.10^{-3}$	$1{,}0.10^{-3}$	$1{,}7.10^{-4}$	$2{,}9.10^{-4}$
	Écart-type	0,33	0,20	0,11	0,14

Tableau 4 : Exemples de biais et d'écart-type d'estimation de l'élasticité sur un portefeuille homogène

Dans des cas pratiques, nous voyons donc que le biais est faible et que nous pourrons le négliger. Dans la mesure où le biais est relativement faible, et que l'estimateur est asse intuitif, nous avons choisi de conserver cet estimateur plutôt que d'en élaborer un sans biais.

Par contre, l'écart-type est assez important et devra être pris en compte dans nos déterminations d'intervalles de confiance

Pour faire baisser l'écart type, on peut ainsi :

- Augmenter les écarts de prix entre le prix 1 et le prix 2. Exemple : le passage du cas n°1 au cas n°2 permet de faire baisser l'écart type d'environ 30%
- Augmenter la taille de l'échantillon

Si le taux de rétention est plus faible, l'écart-type de l'estimation est plus élevé.

Si les deux échantillons ont des tailles différentes, l'écart-type est plus élevé qu'avec des échantillons de même taille.

d) Profils hétérogènes dans le portefeuille

Dans la réalité, le portefeuille de l'assureur ou un segment de ce portefeuille est constitué de clients hétérogènes. Il convient donc de lever l'hypothèse précédente d'uniformité des comportements des clients.

Nous conservons pour chaque client i l'hypothèse que sa variable « rétention » suit une loi de Bernouilli dont le paramètre μ_i est une fonction décroissante et dérivable du prix proposé à ce client. Par contre, du fait de l'hétérogénéité, la somme de ces lois ne suit plus une loi binomiale.

Les moments centrés d'ordre 2 et 3 valent alors :

$$s_i^2 = \mu_i(1-\mu_i)$$
$$\rho_i^3 = \mu_i(1-\mu_i)|1-2\mu_i|$$

Comme les taux de rétention varient entre 5% et 95%, nous pouvons observer que :

$$0{,}04 \le s_i^2 \le 0{,}25$$
$$\rho_i^3 \le 0{,}25$$

Définissons les variables

$$S_N^2 = \sum_{i=1}^{N} s_i^2$$
$$r_N^3 = \sum_{i=1}^{N} \rho_i^3$$

Donc

$$\frac{1}{S_N} \le 5N^{-\frac{1}{2}}$$
$$r_N \le 0{,}7N^{\frac{1}{3}}$$

Et

$$\frac{r_N}{S_N} \le 3{,}5N^{-\frac{1}{6}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lyapounov[14] :

Le taux de rétention tend vers une loi normale lorsque le nombre de polices est suffisant.

Ses paramètres valent :

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s_i^2$$

Nous pouvons alors reprendre le même estimateur d'élasticité qu'au paragraphe précédent. Le biais et l'écart-type de l'estimateur valent alors :

$$b = \frac{\sigma^2}{\mu^2}\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

$$\sigma(\hat{e}) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\mu}\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

Nous pouvons observer que :

$$\sigma^2 \leq \frac{1}{4N}$$

Et donc

$$b \leq \frac{1}{4N\mu^2}\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

$$\sigma(\hat{e}) \leq \frac{1}{\mu\sqrt{2N}}\cdot\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-1}$$

L'estimateur est donc toujours convergent et asymptotiquement sans biais.

En reprenant les données du Tableau 4, nous pouvons donner des estimations des biais et écarts-types maximaux.

[14] Voir annexe pour le détail du théorème

		Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
Paramètres	Taux de rétention (μ)	80%	80%	80%	70%
	Nombre de polices à échéance ($2N$)	10 000	10 000	100 000	100 000
	Écart de prix testé ($\frac{p_2}{p_1} - 1$)	3%	5%	3%	3%
Estimation	Biais maximum	$2{,}6.10^{-3}$	$1{,}6.10^{-3}$	$2{,}6.10^{-4}$	$3{,}4.10^{-4}$
	Écart-type maximum	0,42	0,25	0,13	0,15

Tableau 5 : Exemples de biais maximum et d'écart-type maximum d'estimation de l'élasticité sur un portefeuille hétérogène

Les valeurs sont légèrement supérieures à celles calculées au paragraphe précédent, mais reste du même ordre de grandeur. La mesure de l'élasticité est donc tout à fait réalisable.

e) Exemple d'élasticité

En reprenant les données d'un assureur auto, nous avons les données de renouvellement suivantes :

Année	Trimestre	Majoration	Taux de résiliation assuré	Variation majoration (pt, YoY)	Variation taux de rétention (pt, YoY)	Élasticité estimée
1	1	-0,6%	11,8%			
1	2	-0,9%	11,1%			
1	3	-0,7%	15,2%			
1	4	-0,8%	16,7%			
2	1	-0,9%	12,1%	-0,3	-0,3	
2	2	-0,7%	12,2%	0,2	-1,2	
2	3	-0,6%	16,1%	0,2	-0,9	
2	4	0,0%	17,7%	0,8	-0,9	
3	1	5,1%	15,0%	6,0	-2,9	0,60
3	2	5,8%	15,2%	6,5	-3,0	0,57
3	3	5,7%	20,0%	6,3	-3,9	0,77
3	4	7,3%	22,2%	7,3	-4,5	0,78

Tableau 6 : Exemple de mesure d'élasticité sur un portefeuille

L'assureur avait tendance à baisser légèrement ses prix au renouvellement jusqu'en fin d'année 2. Dès l'année 3, il a décidé d'augmenter plus fortement les prix au renouvellement. Le taux de rétention de l'assureur se situe aux environs de 80%. Pour mesurer l'évolution du taux de rétention due aux changements tarifaires, nous ne regardons que l'évolution du taux de résiliation assurés[15].

Pour cette première étude générale, nous prenons l'hypothèse que le contexte ne change pas. Nous expliquons plus loin dans l'application pratique comment nous prenons cette hypothèse. Nous expliquerons que dans un environnement stable, l'année calendaire peut être utilisée comme variable instrumentale.

[15] Les résiliations compagnie pour non paiement ont été intégrées car nous supposons qu'elles peuvent résulter d'une volonté de l'assuré de se faire résilier

La variation du taux de majoration représente notre changement de prix, ce qui permet de calculer l'élasticité. La situation du portefeuille donne un écart-type théorique sur la mesure de l'élasticité de l'ordre de 0,12.

L'élasticité du portefeuille se situe donc aux alentours de 0,7. Les variations observées entre les trimestres sont conformes à l'écart-type théorique.

f) Modèle multiplicatif (ou additif)

Le paragraphe précédent présentait l'estimation de l'élasticité sur un segment. Étant donné les écarts-types d'estimation, il convient de ne pas faire trop de croisements de variables pour analyser l'élasticité. Le nombre d'observations ne serait alors pas suffisant pour permettre une estimation correcte.

Nous proposons donc de faire des analyses univariées de l'élasticité. Variable par variable, nous regardons le niveau de l'élasticité sur ce seul axe, en regroupant si nécessaire certains niveaux de cette variable.

Cette étude nous donne donc les marges du modèle. Ensuite, pour compléter chaque croisement possible, nous proposons d'utiliser un ajustement multiplicatif ou additif.

Pour faire ce type de modèle, il faut savoir moyenner différentes cases. Étudions donc l'élasticité de deux segments A et B.

$$T = \frac{N_A T_A + N_B T_B}{N_A + N_B}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \ln P} = \frac{1}{N_A + N_B}\left(N_A \frac{\partial T_A}{\partial \ln P} + N_B \frac{\partial T_B}{\partial \ln P}\right)$$

$$\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial \ln P} = \frac{1}{N_A T_A + N_B T_B}\left(N_A \frac{\partial T_A}{\partial \ln P} + N_B \frac{\partial T_B}{\partial \ln P}\right)$$

$$e = e_A \frac{N_A T_A}{N_A T_A + N_B T_B} + e_B \frac{N_B T_B}{N_A T_A + N_B T_B}$$

L'élasticité d'un ensemble de plusieurs segments est donc la moyenne de l'élasticité de chaque segment pondérée par le nombre de polices renouvelées dans chaque segment.

N'ayant pas de motif particulier de supposer que la réalité est plus proche d'un modèle multiplicatif ou additif, nous avons fait les deux études.

Les variables à inclure sont les variables tarifaires, le produit choisi, l'année de souscription, le positionnement par rapport à la concurrence. D'autres variables peuvent aussi être utilisées par un assureur en fonction des informations dont il dispose et qu'il juge pertinentes pour expliquer l'élasticité.

Deming et Stephan ont montré que l'algorithme de résolution « iterative proportional fitting » (IPF) converge vers le résultat des moindres carrés.

Pour chacun des modèles, l'algorithme consiste à fixer tous les coefficients à 1. Ensuite les coefficients sont ajustés pour suivre les marges d'élasticité suivant une variable, les coefficients des autres variables restant fixes. Chaque variable est ainsi ajustée de manière circulaire, l'algorithme convergeant en général en moins de vingt boucles.

Une généralisation des modèles additifs et multiplicatifs peut s'écrire sous la forme :

$$e_{las}{}^{\rho} = X\underline{\beta}$$

Où X représente toujours les caractéristiques du segment suivant les variables étudiées, β les coefficients du modèle, e_{las} l'élasticité, et ρ l'exposant du modèle.

On observe immédiatement que le cas $\rho = 1$ correspond au modèle additif. En notant ${e_{las}}^{\rho} = 1 + \rho \ln e_{las} + o(\rho)$ lorsque ρ tend vers 0, on observe que le cas $\rho = 0$ correspond au modèle multiplicatif. Le cas $\rho = -1$ correspond à un modèle harmonique, et cette représentation permet d'avoir toute une palette de possibilités lorsque ρ prend des valeurs dans R.

En ajustant le modèle via l'algorithme pour différentes valeurs de ρ, nous pouvons prendre la valeur de ρ qui maximise la vraisemblance du modèle.

Par nature, le modèle additif à tendance à sous-estimer les élasticités élevées, et le modèle multiplicatif a tendance à les surestimer, lorsque les interactions entre les variables n'ont pas de très fortes variations. Dans les cas où il y a de fortes interactions entre variables, ce type de modèle n'est pas adapté.

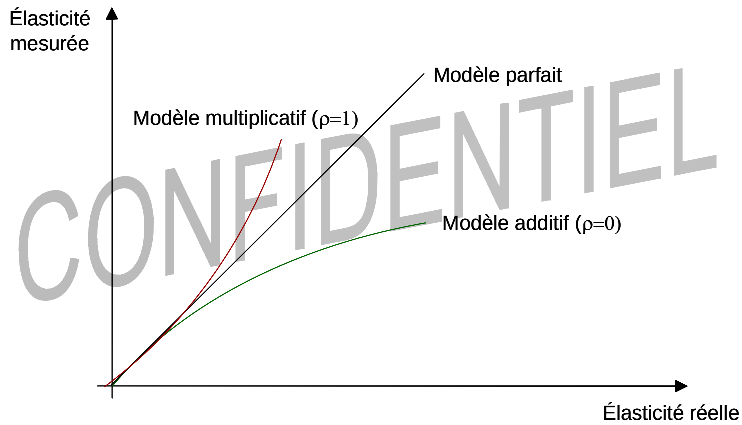


Figure 1 : Différence d'estimation des modèles multiplicatifs et additifs

Pour estimer le rang du modèle, nous proposons de répartir les différents profils en déciles d'élasticité. En effet, les différents rangs ont des impacts différents en fonction des déciles. Comme nous l'avons vu précédemment, le modèle multiplicatif a tendance à surestimer les élasticités élevées.

Dans chaque décile, il y a suffisamment de polices pour que nous puissions mesurer correctement l'élasticité réelle du décile.

Nous pouvons alors en déduire l'erreur entre l'élasticité réelle et l'élasticité mesurée par décile.

Nous choisissons alors le modèle qui minimise le carré des erreurs d'estimation d'élasticité, comme dans les mesures effectuées dans l'exemple ci-dessous.

Décile	ρ=-1	ρ=-0,5	ρ=-0,3	ρ=0	ρ=0,3	Élasticité réelle
1	0,355	0,345	0,342	0,334	0,326	0,297
2	0,441	0,437	0,436	0,435	0,435	0,456
3	0,489	0,488	0,488	0,488	0,490	0,490
4	0,524	0,526	0,527	0,529	0,532	0,520
5	0,556	0,559	0,561	0,564	0,568	0,540
6	0,590	0,596	0,598	0,602	0,607	0,552
7	0,627	0,633	0,636	0,640	0,644	0,656
8	0,676	0,684	0,686	0,690	0,694	0,667
9	0,751	0,757	0,758	0,760	0,761	0,816
10	0,954	0,936	0,930	0,919	0,906	0,967
Ecart[16]	0,033	0,032	0,033	0,034	0,036	

Tableau 7 : Élasticités par décile en fonction du rang du modèle

On observe que les élasticités faibles sont surestimées et les élasticités élevées sous-estimées. Comme anticipés, les écarts sont plus faibles pour les rangs élevés pour les élasticités faibles et sont plus faibles pour les rangs négatifs pour les fortes élasticités.

Dans cet exemple, le rang à choisir serait donc -0,5.

3. Lien entre les deux modèles

Pour faire le lien entre les deux modèles, modèle logistique et taux de variation, reprenons l'explication de l'origine de l'élasticité par une variable aléatoire η représentant l'état psychologique du client.

Il serait possible de faire l'hypothèse que cette variable représentant une variation de l'état psychologique du client autour de sa moyenne puisse être considérée comme normale.

Nous observons alors que le taux de rétention en fonction du prix suivrait le complément de la fonction de répartition de la loi normale. Les distributions normales et logistiques sont très proches et leur différence est surtout liée à la taille de leur queue de distribution. Ces queues de distribution ne sont pas observées dans la pratique dans le cas des taux de rétention.

Nous pouvons alors remarquer que les deux modèles sont très proches, la différence principale résidant dans le choix des paramètres à ajuster. Dans le modèle logistique, le facteur d'échelle (dans la modélisation par rapport au prix) ne dépend que du prix de référence du profil. Or c'est ce facteur d'échelle qui est le composant principal de l'élasticité, car c'est lui qui donne l'étalement de la courbe. Les autres paramètres liés au profil vont surtout donner la position sur la courbe.

Pour pouvoir utiliser un modèle logistique, il faudrait donc un paramètre d'échelle α (c'est le paramètre qui est multiplié au prix dans un modèle logistique) qui dépend du profil du client, alors qu'il est fixe pour tout le portefeuille dans ce modèle.

L'avantage d'un modèle de taux de variation est aussi qu'il permet de ne pas nécessiter l'hypothèse de normalité de la variable aléatoire η pour la prise compte des phénomènes listés ci-après.

III.Comportements non élastiques

Dans la réalité, le comportement des clients n'est pas purement élastique. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques phénomènes qui diffèrent de l'élasticité pure.

L'objectif n'est pas de les modéliser, mais de présenter leurs impacts possibles et pour certains d'évoquer des pistes d'analyses pour de futures études.

[16] Racine la moyenne du carré des écarts entre élasticité estimée et élasticité réelle

Certains de ces phénomènes participent aux incertitudes découlant de l'imperfection de l'adéquation d'un modèle d'élasticité pure à la réalité. D'autres impactent davantage les hypothèses de stabilité des conditions qui seront utilisées pour l'optimisation.

La fréquence d'application du modèle et sa rapidité d'exécution sont souvent des moyens permettant d'échapper à une partie des éléments cités ci-après.

1. Plasticité

Il est fort probable que les clients réagissent différemment à une hausse qu'a une baisse des prix. À proximité de variations tarifaires nulles, il se pourrait donc que l'élasticité présente des valeurs différentes « à gauche » et « à droite ».

Nous pouvons aussi trouver le même effet de discontinuité aux alentours des variations tarifaires auxquelles le client s'attend. Nous pouvons citer par exemple une baisse de 5% pour un client ayant une amélioration de son bonus, une hausse de 2% correspondant à l'inflation.

Pour observer ce phénomène, il serait intéressant de réaliser une analyse univariée de l'élasticité en fonction de la hausse de prix.

2. Effet mémoire

Il est probable que les clients réagissent différemment à une hausse tarifaire en fonction de ce qui s'est produit les années précédentes. Un client qui n'a pas subi de hausse depuis plusieurs années pourra tout à fait accepter une hausse de tarif alors que pour un client ayant déjà été fortement majoré les années précédentes, ce sera « la goutte d'eau qui fait déborder le vase ».

Il convient alors de faire un modèle élastique à plusieurs dimensions.

Commençons par deux années. L'impact d'un changement tarifaire pour le deuxième renouvellement d'une police est lié à la politique tarifaire appliquée au premier renouvellement.

On a alors :

$$e = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \ln T_1}{\partial \ln p_1} & 0 \\ -\dfrac{\partial \ln T_2}{\partial \ln p_1} & -\dfrac{\partial \ln T_2}{\partial \ln p_2} \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\Delta T_1}{T_1} \\ \dfrac{\Delta T_2}{T_2} \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta p_1}{p_1} \\ \dfrac{\Delta p_2}{p_2} \end{pmatrix}$$

Où les indices représentent l'année, et où l'on a fait l'hypothèse que l'avenir n'influence pas le passé :

$$\frac{\partial \ln T_1}{\partial \ln p_2} = 0$$

Dans le cas où nous voudrions faire l'étude sur n années, l'élasticité serait alors une matrice triangle de rang n. Il y aurait donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ coefficients d'élasticité, et leur mise en évidence propre nécessiterait de séparer de manière aléatoire le portefeuille en 2^n groupes.

Il serait possible de supposer que les années très anciennes ont peu d'impact sur les années récentes. Ceci signifierait que pour k assez grand :

$$\forall j \geq k, \forall i \leq n-j \quad \frac{\partial \ln T_{i+j}}{\partial \ln p_i} = 0$$

En pratique, les assureurs ont tendance à raisonner en matière de majorations et non de prix au renouvellement. Si l'assureur majore ses prix plus que la majoration de référence, cette majoration se transmet sur toutes les années suivantes. En restant dans le cadre où la dérivation à un sens, donc des petits mouvements, si nous notons m_i la majoration de l'année i, nous pouvons faire l'approximation :

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta p_1}{p_1} \\ \frac{\Delta p_2}{p_2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \end{pmatrix}$$

En notant les différents éléments de la matrice d'élasticité des indices, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta T_1}{T_1} \\ \frac{\Delta T_2}{T_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1,1} & 0 \\ e_{2,1} + e_{2,2} & e_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \end{pmatrix}$$

Comme ce genre d'analyse nécessite plusieurs années de recul, nous proposons une autre technique pour commencer.

Au départ, il faudrait utiliser l'ancienneté de la police comme variable d'analyse de l'élasticité. Ceci permettrait déjà de tenir compte de la diagonale de la matrice d'élasticité pluriannuelle. Le suivi de l'évolution des élasticités pourra donner un ordre de grandeur de l'impact des éléments croisés.

Une première étape consiste à observer les données disponibles chez l'assureur auto mentionné plus haut. Alors qu'il n'avait effectué aucune majoration les premières années, il continue à faire des majorations en année 4.

Nous utilisons l'année 2 comme année de référence pour les majorations et les taux de rétention. La référence pour le prix est le maintien de la même politique de majoration qu'en année 2. Voici les données du premier trimestre de chaque année :

Année	Trimestre	Majoration	Taux de résiliation assuré	Variation majoration (pt, vs référence)	Variation prix (vs référence)	Variation taux de rétention (pt, vs référence)	Élasticité estimée (majoration)[17]	Élasticité estimée (prix)[18]
2	1	-0,9%	12,1%					
3	1	5,1%	15,0%	6,0	6,0%	-2,9	0,60	0,60
4	1	4,7%	18.4%	5,6	11,6%	-6.3	1,40	0,68

Tableau 8 : Exemple d'effet mémoire[19]

[17] Elasticité estimée (majoration) = on prend la différence entre les majorations proposée que l'on divise par la variation du taux de rétention

[18] Elasticité estimé (prix) = = on prend la variation de prix que l'on divise par la variation du taux de rétention

[19] Rappel : le taux de rétention de référence est 80%

Dans l'exemple ci-dessous, on voit tout de suite l'effet mémoire, car en prenant un calcul d'élasticité comparant la variation du taux de rétention en année 4 uniquement à la majoration de cette année, on trouve une élasticité beaucoup plus élevée. L'élasticité estimée par la majoration consiste à diviser la variation de taux de rétention par la variation de majoration, tandis que l'élasticité estimée par le prix divise par la variation de prix.

Si en revanche, nous utilisons le formalisme qui vient d'être introduit pour mesurer l'élasticité, nous mesurons bien le rapport entre la variation du taux de rétention en année 4 à la variation de prix de cette année par rapport à la référence, et nous mettons au dénominateur la somme des deux variations de majorations. L'élasticité trouvée alors est du même ordre que celle du portefeuille en année 3 (0,68 à comparer à 0,60).

Il semble donc que nous puissions faire les approximations suivantes :

$$e_{1,1} = e_{2,2} = e$$

$$e_{2,1} = 0$$

Ce qui signifierait que la matrice d'élasticité serait une matrice colonne où tous les coefficients diagonaux seraient égaux.

Ce type de matrice d'élasticité signifie que les assurés ne sont sensibles qu'aux prix proposés, mais pas aux majorations. Bien évidemment, ce point n'est valable que lorsque les majorations restent à un niveau raisonnable. Les majorations supérieures à 10% n'ont pas été testées.

Lorsque l'assureur décide une majoration complémentaire l'année 1, sans prévoir de majoration supplémentaire la courbe des taux de rétention en fonction de l'ancienneté de police subit une homothétie de coefficient $1-e$. Cette homothétie ne s'applique qu'aux générations de police concernées par cette majoration.

Le nombre de polices, d'une génération donnée, N_n, présentes dans le portefeuille après le renouvellement de l'année n, si T_k représente le taux de rétention pour l'ancienneté k, et pour une seule majoration supplémentaire vaut donc :

$$N_n = N\prod_{k=1}^{n} T_k \left(1 - e\Delta m_1\right)^n$$

L'impact d'une majoration supplémentaire est donc exponentiel sur les années suivantes. Cet élément sera à prendre à compte lorsque nous verrons l'optimisation pluriannuelle aux chapitres suivants.

Pour de faibles changements de majorations :

$$\frac{\Delta N_n}{N_n} = -ne\Delta m_1$$

La vision développée ici que le client est plus sensible au niveau de prix qu'à la majoration, est fondée sur peu de données. Cette étude sera donc à affiner comme indiqué précédemment pour valider ces résultats.

3. Effet de seuil (prix psychologique)

Il est fort probable qu'il y ait des niveaux de prix psychologiques pour certains clients. En effet, il semblerait logique que l'assurance soit soumise aux mêmes problématiques que d'autres secteurs et qu'un prix de 499,90 € fasse moins réagir que 500,00 €.

Ces prix psychologiques se traduiraient par des sauts dans la fonction de demande. Dans l'approche proposée, cela signifierait que le paramètre de loi de Bernoulli représentant la rétention aurait des sauts lorsque le prix proposé varie.

Pour que l'élasticité ait un sens, nous avions pris pour hypothèse que le paramètre était dérivable par rapport au prix. Pour pouvoir avoir des sauts sur la fonction de demande, il faudrait donc refaire toutes les analyses en se plaçant dans l'espace des distributions de Schwartz.

Nous ne ferons pas cette démarche dans le cadre de ce mémoire. En effet, dans la réalité, nous ne faisons que des études sur des données discrètes et non continues (les prix varient de centime en centime), et nous pouvons donc approcher un saut par une pente très forte.

Pour analyser cet effet, nous proposons d'étudier deux groupes de polices, celles dont le prix proposé est compris entre 90,00 et 99,99 € (modulo 100 €) et celles dont le prix proposé est compris entre 0,00 et 9,99 € (modulo 100 €).

Prix	90,00 à 99,99		0,00 à 9,99		TOTAL	
Année	1	2	1	2	1	2
Nb termes	48 572	54 155	49 429	53 852	493 580	534 599
Taux renouv.	86,54%	83,19%	86,87%	83,79%	86,73%	83,66%
Prime moyenne prop.	515	544	512	541	512	544
Majoration	-0,3%	+5,7%	-0,4%	+5,7%	-0.4%	+5,7%
Vol. T rét.	0,15 pt	0,16 pt	0,15 pt	0,16 pt	0,05 pt	0,05 pt

Tableau 9: Prix psychologiques

Nous observons que le taux de rétention pour les prix situés en dessous des centaines est inférieur au taux de rétention moyen. Ce taux est à 83,19% avec une volatilité de 0,16 point, comparé à 83,79% pour le taux de la dizaine la plus élevée, avec la même volatilité. Nous observons donc un écart de 0,59 point pour une volatilité de l'écart à 0,23 point, ce qui fait une probabilité de 0,5% d'avoir ce type d'écart par simple hasard.

Cette différence s'observe alors que les primes moyennes et majorations moyennes sont quasiment identiques pour ces deux catégories de prix.

Il y a donc clairement un impact psychologique. Quand les prix dépassent une centaine, on a une perte de 0,7% du nombre de polices renouvelées[20]. En resserrant la taille des intervalles, on voit une perte de 1,0% du nombre de polices renouvelées au passage de la centaine[21].

Le fait que ce phénomène ne s'observe pas l'année où il n'y a pas eu de majoration indique que cet effet psychologique se produit lors du franchissement du seuil à la hausse, mais n'est pas uniquement dû au positionnement absolu.

4. Impact de la concurrence

Lorsque less concurrents modifient leurs prix, il est presque certain que cela va avoir un impact sur le taux de rétention et l'élasticité des clients. En effet, il doit exister un seuil d'écart tarifaire à partir duquel chaque client peut penser que « ça vaut le coup de changer ».

Nous pourrions essayer de modéliser cet impact sur le taux de rétention en prenant une élasticité du taux de rétention au prix de la concurrence.

$$\frac{\Delta T}{T} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \ln T}{\partial \ln p} & -\dfrac{\partial \ln T}{\partial \ln p_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta p}{p} \\ \dfrac{\Delta p_c}{p_c} \end{pmatrix}$$

[20] (83,79-83,19)/83,79=0,7%

[21] Calcul détaillé non présenté ici.

L'impact sur l'élasticité serait alors une dérivée seconde :

$$\frac{\partial e}{\partial \ln p_c} = -\frac{\partial^2 \ln T}{\partial \ln p \partial \ln p_c}$$

Mesurer ces impacts nécessite de connaître et de suivre précisément les prix de la concurrence. Pour que les données soient utilisables, il faut aussi que ces analyses soient très rapides.

La mise en place d'outils suffisamment puissants et rapides pour ce genre d'utilisation nous semble complexe pour les quelques années à venir.

L'approche proposée ici vise donc à effectuer un suivi très régulier des taux de rétention et des élasticités sur le portefeuille étudié.

Les modifications tarifaires opérées par les concurrents auront un impact sur ces variables que nous observons sur le portefeuille. Pour l'optimisation, ce qui compte est la prime pure et l'élasticité, mais pas les causes qui ont amené une évolution de ces grandeurs. Les prix proposés au renouvellement se mettront automatiquement à jour.

S'il n'est pas possible de maintenir la marge, l'assureur peut affiner sa démarche en ajoutant des variables explicatives.

Ensuite, il faut alors revoir la stratégie de positionnement, les garanties proposées, les règles de souscription, le marketing… La simple utilisation du levier tarifaire ne peut pas suffire, car les prix proposés représentent déjà un optimum.

L'optimisation tarifaire est en effet une question tactique, mais il faut régulièrement se reposer des questions stratégiques sur le positionnement de l'assureur.

5. Fragilité

Les différents effets non élastiques cités précédemment sont des effets qui interviennent principalement au niveau de chaque client.

Il y a aussi un effet supplémentaire intervenant au travers de l'image de l'assureur et qui impacte en même temps tout le portefeuille.

Il est probable que si les hausses tarifaires sont poussées trop loin, si par exemple les élasticités sont toujours très faibles, la presse commence à s'emparer du sujet. Avec beaucoup de reportages sur le sujet dans la presse écrite, à la télévision et sur internet, l'intégralité de clients va se rendre compte quasi instantanément qu'ils ont reçu de fortes majorations et qu'ils ont un gain immédiat à changer d'assureur. Le taux de rétention augmenterait alors très fortement en une période très courte et l'élasticité aurait surement tendance à augmenter aussi.

Le portefeuille réagirait alors comme une paroi de verre : on appuie dessus et rien ne se passe ; quand on appuie plus fort, il ne se passe toujours rien ; à un moment une petite pression additionnelle fait s'effondrer la paroi.

Ce phénomène est très délicat à mettre en évidence, car il est impensable que quiconque ait envie de le tester sur son portefeuille.

Pour éviter son apparition, il peut être intéressant de suivre plus précisément de fortes variations de taux de rétention dans certains segments ciblés. Leur détection servirait d'alerte, comme des petites craquelures sur un pare-brise.

IV. *Mesures effectives de l'élasticité*

1. Tests aléatoires

Le meilleur moyen de mettre en évidence l'élasticité et donc de la mesurer est de faire varier le prix proposé indépendamment des profils des clients. Pour cela, il faut utiliser une variable totalement aléatoire qui permet de proposer soit la majoration prévue soit la majoration prévue plus un certain pourcentage fixe. Il est important de noter que l'aléa se positionne au-dessus de la stratégie tarifaire actuelle, mais pas à sa place.

Chaque segment est alors aléatoirement séparé en deux sous-groupes uniformes et dont la seule différence est le prix proposé.

Pour cela, il faut que l'assureur soit prêt à accepter de faire des hausses supérieures (ou inférieures) sur une part non négligeable de son portefeuille. Ceci semble donc, dans un premier temps, plus approprié aux assureurs directs qu'aux assureurs à réseaux d'agents ou de courtiers.

Cette technique présente aussi l'avantage de réduire l'impact des erreurs contenues dans les bases de données. En effet, les calculs se font par analyses des différences, et non par prédiction des niveaux absolus. Les erreurs récurrentes dans les bases de données sont donc supprimées par cette dérivation partielle.

2. Décorrélation de variables

Au cas où l'assureur n'a pas à sa disposition des données basées sur des tests aléatoires ou ne souhaite pas en faire, il s'agit de pouvoir récupérer quand même une part de l'information.

Pour cela, nous proposons d'utiliser une technique habituelle d'analyse linéaire : les variables instrumentales.

À partir des variables tarifaires x utilisées, construisons deux groupes de variables y et z, tels que ces deux groupes expliquent entièrement les variables initiales et que y soit indépendant des taux de rétention et des élasticités des profils. Pour que l'étude puisse révéler un intérêt, il faut aussi que y ne soit pas totalement indépendant des hausses tarifaires proposées.

Nous pouvons alors faire la même étude qu'avec des hausses aléatoires en séparant chaque segment en sous-groupes basés sur y. Il faut alors faire attention que la variation tarifaire aléatoire n'est pas la même pour chaque segment.

Pour le portefeuille que nous étudions, les majorations ont été très faibles plusieurs années de suite avant de basculer brutalement autour de 5% une année. Nous utiliserons donc l'année de renouvellement comme variable instrumentale. L'hypothèse sous-jacente est que le contexte de marché ait très peu évolué d'une année sur l'autre. En effet, ce changement fait suite à un changement de management et de stratégie, mais n'a pas été provoqué par une évolution du marché.

3. Préparation de données

Pour constituer la base de données nous permettant de mesurer l'élasticité, nous repartons de la base de données de l'assureur reprenant la totalité des mouvements ayant eu lieu sur un contrat.

Pour chaque contrat, nous pouvons donc avoir :

- Sa prime avant le renouvellement
- La prime proposée au renouvellement
- La prime après renouvellement
- Les caractéristiques techniques du contrat (âge de l'assuré, puissance du véhicule…)
- L'ancienneté du contrat
- La date et le motif de résiliation (si le contrat a été résilié)

Comme nous ne disposons que de six mois de recul sur les résiliations du dernier exercice, chaque exercice est reconstitué comme vu avec six mois de recul. Le même coefficient de vieillissement est alors utilisé pour tous les exercices.

Pour valider cette base de données, nous vérifions que les différents taux de résiliation trouvés correspondent aux informations conservées dans les tableaux de suivi du contrôle de gestion de l'assureur.

Nous devons aussi vérifier que l'évolution de la stratégie de renouvellement correspond bien à un décalage uniforme des majorations. Pour cela, nous traçons les quantiles des majorations pour chacun des exercices étudiés et nous pouvons constater qu'ils sont presque identiques à une translation près. Une modification de la forme de ces quantiles aurait pu aussi impacter les taux de résiliations.

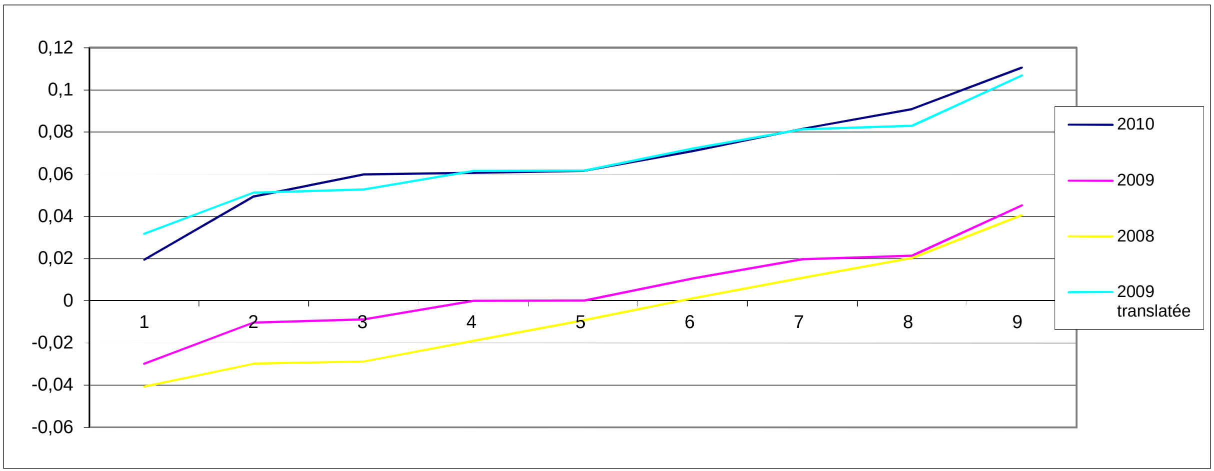


Figure 2 : Majorations en fonction des quantiles, par année

La question se pose aussi de savoir quels taux de résiliation utiliser. Il est évident qu'il faut au moins inclure le taux de résiliation à l'échéance doit être utilisé. Nous avons aussi décidé d'utiliser le taux de résiliation compagnie pour non-paiement en partant du principe qu'une partie de ce taux était lié à des assurés qui arrêtent volontairement de payer au lieu de résilier. Nous prenons aussi tous les autres motifs de résiliation assurés en partant de l'idée que le prix payé au dernier renouvellement explique en partie ces résiliations par des mécanismes psychologiques complexes que nous ne maîtrisons pas.

Nous ne cherchons pas à expliquer quelle part de ces résiliations par l'assuré est due à la hausse tarifaire. En effet, toute la méthodologie consiste à s'approcher le plus possible de dérivées partielles, donc nous comparons le taux de résiliation pour changement de véhicule pour deux prix de renouvellement différents. Le niveau de résiliation dû à d'autres causes que le prix de renouvellement reste constant et nous n'observons que l'évolution liée à ce prix. Nous restons dans l'hypothèse que le contexte de marché n'évolue pas.

Ces taux de résiliation nous permettent donc d'avoir l'évolution du taux de renouvellement liée à la majoration. Pour le nombre de polices arrivant à terme, nous devons éliminer les polices résiliées par l'assureur.

Pour les comparaisons entre exercices, nous préférons utiliser les évolutions de majorations (le lien entre majorations et prix a été expliqué plus haut) pour limiter un éventuel impact d'évolution de la structure du portefeuille. En effet, les primes moyennes peuvent avoir changé aussi en partie à cause d'un changement dans la proportion de jeunes ou de grosses cylindrées dans le portefeuille.

4. Résultats

Pour chaque variable, nous pouvons donc remplir un tableau comme ci-dessous, en utilisant toujours la technique des variables instrumentales.

Classe de prix	1	2	3	4	5
Nb de polices	17 789	128 564	135 957	195 784	56 485
Taux de renouv.	82,5%	83,0%	83,4%	84,3%	83,9%
Prime moyenne	353	438	529	590	703
Élasticité	0,37	0,59	0,57	0,64	0,53

Tableau 10 : Élasticité suivant le prix du véhicule

Ancienneté	1	2 à 4	5 et plus
Nb de polices	124 226	206 885	203 488
Taux de renouv.	82,6%	82,5%	85,4%

Prime moyenne	532	554	540
Elasticité	0,58	0,61	0,54

Tableau 11 : Élasticité suivant l'ancienneté

Les premières conclusions que nous pouvons en tirer sont :

- Les élasticités sont assez proches : la structure de prix de l'assureur est donc déjà assez équilibrée par rapport à la demande. Le rééquilibrage ne pourra se faire que sur certains profils
- L'élasticité ne varie pas comme une fonction bilinéaire du prix et du taux de résiliations comme cela serait imposé dans un modèle logistique.
- Contrairement aux croyances habituelles, l'élasticité ne varie pas avec l'ancienneté. En effet, l'élasticité mesurée varie entre 0,54 et 0,61 alors que la mesure est précise à 0,1.

La mesure directe de l'élasticité permet donc de reprendre les idées claires sur l'expression de ce phénomène sur le portefeuille. Il dépend du comportement des clients et du positionnement tarifaire de l'assureur. L'assureur ayant déjà adapté son tarif aux différents profils de la clientèle, l'élasticité peut difficilement se déduire du profil du client uniquement. En effet, sur nos exemples, l'élasticité la plus faible est pour les clients ayant les voitures les moins chères. Un raisonnement abstrait pourrait indiquer que les clients ayant acheté les voitures les moins chères sont ceux qui font attention à leurs dépenses et donc sont les plus élastiques. Or le positionnement tarifaire de l'assureur doit être bon sur ce segment et donc l'élasticité est faible.

Il est utile de rappeler ici que les applications numériques montrent bien que le modèle GLM impliquant que l'élasticité est une forme bilinéaire du prix et du taux de rétention n'est pas conforme à la réalité.

Ceci est aussi l'occasion de rappeler que l'évolution des prix du marché a un impact sur les données mesurées, taux de renouvellement et élasticités et donc sur la réaction que doit avoir l'assureur.

V. Intervalles de confiance

1. Vision théorique

En théorie, l'assureur pourra tolérer une certaine probabilité ε d'avoir une erreur sur l'estimation de l'élasticité d'un segment. Si nous estimons que l'erreur de la mesure est normale, nous avons donc un intervalle de confiance sur la mesure de l'élasticité univariée donnée par :

$$\left[e-\sigma\cdot\Phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right);e+\sigma\cdot\Phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

Pour la compréhension des intervalles de confiance pour les segments multivariés, la notion d'intervalle de confiance est plus complexe. En effet, la détermination d'un tel intervalle nécessite l'hypothèse que la réalité suit le modèle utilisé, or nous n'en avons aucune certitude. Le modèle utilisé n'étant qu'un moyen de réaliser l'interpolation nécessaire.

Nous suggérons donc de conserver en tête la longueur des intervalles de confiance univariés lors de l'analyse multivariés et de surtout regarder les profils qui ont de valeurs extrêmes.

2. Analyse pratique

L'un des éléments clefs sur la volatilité minimale dans l'observation de l'élasticité étant la volatilité du taux de rétention, commençons par analyser la volatilité de cet indicateur sur le portefeuille pour vérifier s'il est en ligne avec la théorie.

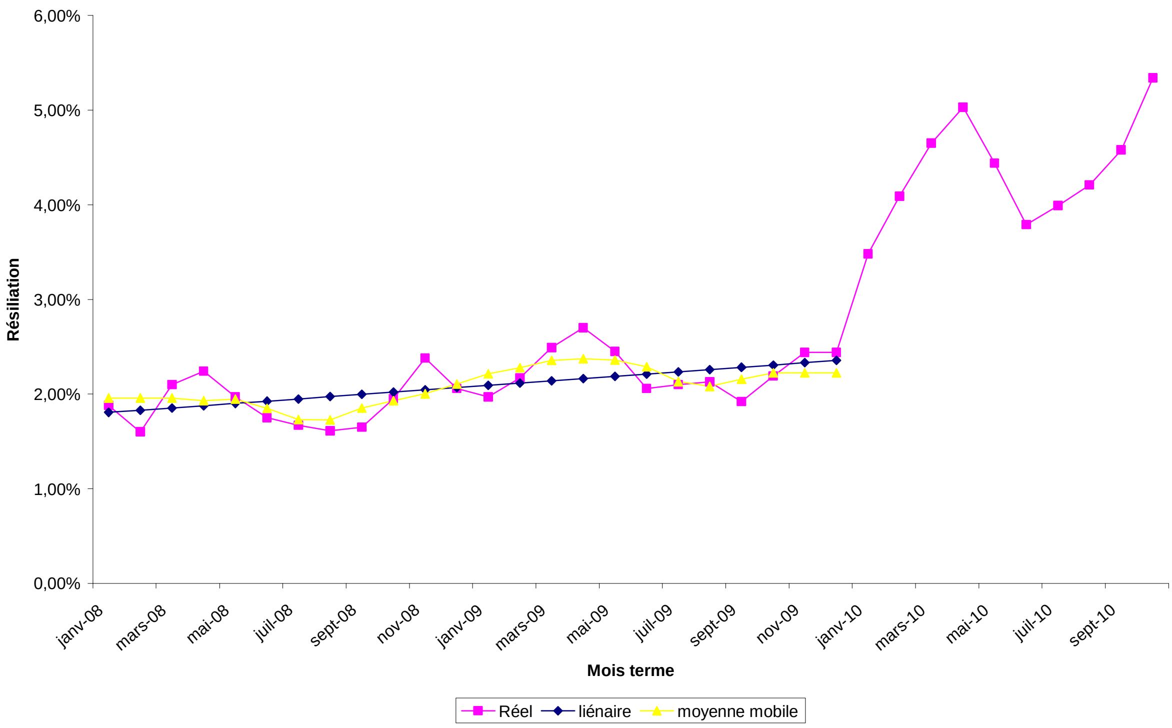


Figure 3 : Taux de résiliation « Châtel » d'un assureur auto de 2008 à 2010

Comme il y a eu un changement de politique tarifaire en janvier 2010, nous concentrons l'analyse sur les années 2008 et 2009. Nous calculons la volatilité des observations autour de deux courbes de tendance : une tendance linéaire et une moyenne mobile sur cinq mois.

Pour l'estimation théorique de la volatilité, le nombre de polices arrivant à échéance par mois est proche de 50 000.

		Écart-type
Observations	Tendance linéaire	0,25%
	Moyenne mobile (5 mois)	0,19%
Estimations	Profils uniformes	0,06%
	Profils hétérogènes	0,10%

Tableau 12 : Volatilité du taux de rétention

Les écarts-types observés et estimés sont donc bien du même ordre de grandeur et les observés sont effectivement supérieurs aux minimums théoriques.

Les écarts entre observations et estimations viennent en partie des différents effets non pris en compte dans l'estimation : les prix des concurrents évoluent, les campagnes marketing interviennent sur certains mois, la situation économique de clients changent, la politique tarifaire varie légèrement. Une partie de ses effets sont pris en compte dans le passage à une observation autour d'une moyenne mobile, mais il reste toujours une volatilité additionnelle comparée à un monde stable.

Si nous reprenons les données du *Tableau 6 : Exemple de mesure d'élasticité sur un portefeuille*, nous voyons que les élasticités mesurées sur les quatre trimestres varient bien dans l'intervalle de confiance théorique. Toutefois, il y a trop peu de données pour que nous puissions calculer un écart-type d'élasticité.

De plus, comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, le phénomène de résiliation contient aussi une part de phénomènes non élastiques. En comparant le phénomène réel à un modèle purement élastique, il est donc normal de trouver un écart-type légèrement supérieur. Une part de cet écart-type supplémentaire vient de la complexité supérieure de la réalité comparée au modèle.

Chapitre 4. Optimisation

Maintenant que nous savons évaluer la prime pure et l'élasticité, l'objectif est d'optimiser la marge en restant dans les limites imposées par le management ou notre connaissance du comportement des clients.

Pour cela, il faut donc faire une optimisation sous contrainte que nous décrivons dans ce chapitre de manière théorique puis en pratique en fonction des paramètres à optimiser.

I. Description théorique de l'optimisation sous contrainte

1. Optimum

L'objectif d'une optimisation sous contrainte est d'optimiser une fonction $f(x)$ dépendant du niveau x de l'ensemble des leviers que nous avons à disposition. La variable x prend ses valeurs dans un espace E et la fonction prend ses valeurs dans $\Re$. La contrainte signifie que l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x est limité à un sous-ensemble F.

Si le sous-ensemble F est suffisamment régulier, il existe une fonction g suffisamment régulière telle que la frontière du sous-ensemble sous l'ensemble des points tels que :

$$g(x)=0$$

Pour simplifier la suite, nous prendrons $E=\Re^n$ et la fonction f deux fois dérivable. Ces hypothèses sont restrictives vis-à-vis de la théorie de l'optimisation la plus générale. Comme nous allons l'appliquer à une optimisation tarifaire au renouvellement, nous aurons un espace avec autant de dimension que le nombre de polices, ce qui est élevé, mais non infini. Il ne nous est donc pas nécessaire ici d'utiliser les notions plus complexes liées aux espaces de Hilbert. Les hypothèses de régularité de l'élasticité nous permettront aussi de nous limiter aux cas où la fonction f est deux fois dérivable par morceaux.

L'optimum se situe soit dans le sous-ensemble F soit à sa frontière. Un optimum, élément du sous-ensemble, mais non de sa frontière, doit vérifier l'équation :

$$df(x)=0$$

Une fois les solutions de l'équation précédente trouvées, il faut vérifier que ces candidats potentiels ne sont pas des minimums ni des cols. Il faut que les valeurs propres de la matrice hessienne de f soient positives, ce qui équivaut à ce que cette matrice hessienne représente une forme quadratique positive.

Si elles sont toutes strictement positives, il s'agit bien d'un maximum local. En cas de nullité d'une ou plusieurs valeurs propres, il faut vérifier les dérivées successives. Nous n'entrerons pas dans le détail des dérivations successives, car dans le cas qui nous concerne ici, nous ne pouvons que calculer les dérivées premières.

Après avoir étudié le sous-ensemble hors sa frontière, il faut étudier la frontière. Un optimum de la frontière doit vérifier l'équation :

$$\langle df(x), dg(x)\rangle = 0$$

Où $\langle .,. \rangle$ représente le produit scalaire sur l'espace E.

Ensuite, il faut aussi vérifier qu'il ne s'agit ni d'un minimum ni d'un maximum à l'aide des dérivées successives.

Dans certains cas, il peut être plus simple algorithmiquement de représenter la frontière par plusieurs morceaux. Il faut alors faire l'étude sur chaque morceau de la frontière et aussi sur les arêtes entre les morceaux.

Après cette étude, on obtient une liste de candidats potentiels, soit dans le sous-ensemble hors de la frontière, sur certains morceaux de la frontière et sur les arêtes. Si la fonction à optimiser et les contraintes sont suffisamment régulières, il y a un nombre fini, voire même en général limité, de candidats potentiels. Il faut alors comparer chaque candidat pour trouver le véritable optimum.

2. Non-continuité du résultat

Imaginons maintenant que la fonction f dépende d'un paramètre a, notons φ la fonction qui à un paramètre a associe l'optimum de f_a. Pour les cas où il y a plusieurs optimums, c'est l'optimum choisi par la personne chargée de l'optimisation.

La fonction φ n'est en général pas continue.

Pour le montrer, prenons un exemple simple :

$$f_a : \begin{array}{l} [-1;1] \to \Re \\ x \mapsto (x-a)^2 \end{array}$$

Avec $a \in [-1;1]$

Si $a < 0$, l'optimum est 1. Si $a > 0$, l'optimum est -1.

La fonction est donc discontinue en 0.

Dans l'application que nous allons faire ici, le paramètre a représentera la prime pure et l'élasticité que nous connaissons seulement dans un intervalle de confiance. Si une ou plusieurs discontinuités de la fonction φ se situent dans l'intervalle de confiance des paramètres, il est donc probable que nous ne soyons pas capables de donner un optimum avec une confiance raisonnable.

C'est cette non continuité du résultat de l'optimisation qui peut rendre le résultat dépendant des erreurs contenues dans les bases de données. Nous verrons comment la méthode itérative proposée permet de surpasser en partie ce problème.

II. Application à l'assurance

Pour la question de l'assurance auto qui nous concerne, la fonction à optimiser est le chiffre d'affaires, la marge au renouvellement ou la valeur du portefeuille suivant l'objectif du management.

La variable dont nous cherchons le point qui optimise la fonction est l'ensemble des prix proposés au renouvellement. Les contraintes sont les limites de variations de prix à la hausse et à la baisse par segment.

Les paramètres sont la prime pure et l'élasticité.

Regardons quels sont les optimums possibles sur des segments homogènes.

1. Chiffres d'affaires

Pour commencer, prenons comme fonction à optimiser le chiffre d'affaires C_a .Nous avons :

$$C_a = Np$$

Commençons par optimiser sur l'ensemble des prix possibles. L'optimum se situe au point où :

$$dC_a = 0$$

$$Ndp + pdN = 0$$

En notant

$$dN = -eN\frac{dp}{p}$$

On a

$$(1-e)Ndp = 0$$

L'optimum se situe donc au niveau de prix pour lequel l'élasticité vaut 1.

Ce niveau peut tout à fait se situer très loin de la stratégie tarifaire actuelle et donc n'avoir jamais été testé. L'intervalle de confiance sur la position de ce niveau est donc très élevé et le management n'aura surement pas envie de prendre un tel risque.

Nous serons donc surement limités sur le niveau des variations tarifaires.

Comme nous ne connaissons pas l'évolution de l'élasticité sur ces variations tarifaires et que nous considérons que pour des variations de l'ordre de quelques pour cent, l'élasticité est stable, l'optimum se situe sur la contrainte.

Par souci de connaissance de la réaction client, il faudra choisir une hausse maximale autorisée limitée aux hausses tarifaires testées.

Le résultat de l'optimisation donne donc :

Si $e < 1$, augmenter le prix du maximum autorisé.

Si $e > 1$, baisser le prix du maximum autorisé.

En notant $[e_{\min}, e_{\max}]$, les bornes de l'intervalle de confiance, la prudence donnerait :

Si $e_{\max} < 1$, augmenter le prix du maximum autorisé.

Si $e_{\min} < 1 < e_{\max}$, ne pas modifier le prix.

Si $e_{\min} > 1$, baisser le prix du maximum autorisé.

C'est au décisionnaire de choisir quel pourcentage de confiance il souhaite avoir pour définir la taille de l'intervalle de confiance.

L'optimisation d'un portefeuille entier consiste à optimiser chaque segment de la manière définie ci-dessus.

2. La marge au renouvellement

L'optimisation de la marge est souvent recherchée plus que l'optimisation du chiffre d'affaires. L'étude se fait de la même manière que pour l'optimisation du chiffre d'affaires.

Nous noterons M la marge au renouvellement, S l'espérance de la charge sinistre d'une police, la prime pure du segment, C les coûts variables pour le renouvellement d'une police et C_f les coûts fixes de l'assureur liés à la gestion du portefeuille existant.

On a alors :

$$M = NP - (S + C)N - C_f$$

Pour chercher l'optimum, cherchons le point où la différentielle s'annule :

$$dM = NdP + PdN - (S+C)dN = 0$$

Or par définition, on a :

$$dN = -eN\frac{dP}{P}$$

D'où :

$$NdP - eNdP + (S+C)eN\frac{dP}{P} = 0$$

Ce qui donne l'optimum pour :

$$e = \frac{1}{1-\frac{S+C}{P}}$$

L'optimum se situe donc au niveau de prix où l'élasticité est égale à la valeur donnée à la ligne précédente. Comme au paragraphe précédent, il est fort probable que ce niveau tarifaire se situe très loin de la stratégie actuelle et n'ait jamais été testé.

Cet optimum se situe donc probablement hors des contraintes de variations tarifaires du management et en tout état de cause hors des contraintes nécessaires pour garder un intervalle de confiance correct.

L'optimisation sous contrainte donne donc :

Si $e < \frac{1}{1-\frac{S+C}{P}}$, augmenter le prix du maximum autorisé.

Si $e > \frac{1}{1-\frac{S+C}{P}}$, baisser le prix du maximum autorisé.

Pour tenir compte des intervalles de confiance :

Si $e_{\max} < \frac{1}{1-\frac{S_{\min}+C}{P}}$, augmenter le prix du maximum autorisé.

Si $e_{\min} > \frac{1}{1-\frac{S_{\max}+C}{P}}$, baisser le prix du maximum autorisé.

Dans les autres cas, ne rien faire. Comme précédemment, c'est au management de décider de la taille des intervalles de confiance (en termes de pourcentage de confiance) qu'il souhaite utiliser. Cette taille peut être différente pour l'élasticité et la prime pure.

Il est à noter que pour le cas où $1-\frac{S_{\max}+C}{P} < 0$, la formule indiquée ci-dessus ne s'applique plus, et nous conseillons à l'assureur de revoir complètement sa stratégie sur le segment. En effet, cela signifie qu'il a sur ce segment des pertes avant même de lui affecter une part des coûts fixes.

Il est à noter que l'élasticité seuil décroît avec la hausse des prix. Comme il semblerait que l'élasticité des clients augmente avec les prix (vision intuitive non démontrée), l'équilibre est stable.

De même que pour le chiffre d'affaires, l'optimisation d'un portefeuille entier consiste à optimiser chaque segment de la manière définie ci-dessus.

Dans le cas des données utilisées, en moyenne sur le portefeuille, on a une élasticité charnière pour augmenter ou baisser les prix d'environ 3. Comme l'élasticité moyenne est d'environ 0,7, il y a une tentation forte d'augmenter les prix pour augmenter la marge au renouvellement.

3. La valeur

L'approche de la valeur qui retient notre attention est davantage une notion relative de création de valeur qu'une détermination dans l'absolu d'un indicateur de valeur. En effet, il subsiste encore des débats sur la possibilité de calibrer suffisamment bien les données pour obtenir le niveau absolu de la valeur. Un des problèmes fréquemment cités est la non-prise en compte des futures actions du management. Nous considérons qu'il est toutefois utile de savoir dans quel sens une décision peut faire varier la valeur.

La marge au renouvellement est une vision très court terme. Pour avoir une vision plus propre du potentiel de gain pour l'assureur, il vaut mieux utiliser la notion de valeur V. En indexant les valeurs utilisées précédemment par leur année d'observation, pour l'ensemble des générations actuellement en portefeuille, mais pas les générations à venir, et i le taux d'actualisation, nous avons :

$$V = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} M_k\right)$$

L'espérance apparaît du fait que la marge des années à venir dépend de l'évolution de la sinistralité, des prix de la concurrence, des taux d'intérêt, de l'inflation, du comportement des clients et de notre propre stratégie tarifaire. Tous ces éléments peuvent être considérés comme aléatoires et pas toujours décorrélés.

En pratique, on peut limiter la sommation à un nombre d'années de l'ordre de 10, le nombre de polices au-delà, et donc la marge, étant très faibles, et l'actualisation diminuant encore plus les valeurs situées au-delà.

Le but ici n'est pas d'entrer dans le calcul détaillé de la valeur, mais de comprendre comment une majoration tarifaire actuelle peut l'influencer.

Pour trouver l'optimum, ici aussi, nous cherchons les points stationnaires de la valeur en fonction de notre levier, le prix. On a :

$$dV = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} dM_k\right) = 0$$

Du fait de la linéarité de l'espérance.

En reprenant la même approche qu'au paragraphe précédent :

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \left(N_k dP_k + P_k dN_k - (S_k + C_k) dN_k\right)\right) = 0$$

Le paragraphe sur l'effet mémoire nous donne :

$$dN_k = -ekN_k dm_1$$

Et comme l'assureur travaille les renouvellements en majoration :

$$dP_k = P_k dm_1$$

En restant toujours sur l'idée de la dérivation partielle, c'est-à-dire que seule la majoration de l'année 1 évolue, mais que la stratégie de majoration de l'assureur les années suivantes restera inchangée, et que tous les autres éléments de contexte ne dépendent pas de la majoration en année 1, on obtient :

$$dm_1 \cdot E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^k}\left(N_k P_k - ekN_k P_k + (S_k + C_k)ekN_k\right)\right) = 0$$

Où toutes les grandeurs, sauf i, e et dm_1, sont aléatoires.

Notons alors C_{act} la somme des chiffres d'affaires des années à venir actualisés, et M_k^v la marge de l'année k ne faisant intervenir que les coûts variables (prime pure et frais variables).

La solution de l'optimisation est alors :

$$e = \frac{E(C_{act})}{E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(1+i)^k}M_k^v\right)}$$

Nous noterons cette solution e_s pour élasticité seuil. Rappelons ici qu'en pratique la sommation peut se faire sur un nombre limité d'années.

Comme au paragraphe précédent, notons que cette solution peut se situer en dehors de nos contraintes. Nous avons alors pour résultat de l'optimisation :

Si $e < e_s$, augmenter le prix du maximum autorisé.

Si $e > e_s$, baisser le prix du maximum autorisé.

Les intervalles de confiance peuvent être appliqués comme au paragraphe précédent. C'est assez simple pour l'élasticité mesurée, mais plus complexe pour l'élasticité seuil. Comme indiqué, nous n'étudions pas la valeur dans ce mémoire, donc nous n'essaierons pas de définir les intervalles de confiance sur l'élasticité seuil.

Si l'élasticité est supérieure à l'élasticité seuil pour l'optimisation de la marge d'une année :

$$e > \frac{1}{1 - \frac{S+C}{P}}$$

On a alors pour chaque k :

$$N_k P_k - ekN_k P_k + (S_k + C_k)ekN_k < 0$$

Nous en déduisons que l'élasticité seuil pour l'optimisation de la valeur est nécessairement inférieure à l'élasticité seuil pour l'optimisation de la marge d'une année.

Dans une application pratique, tous les éléments de l'élasticité seuil sont complexes à calculer et peuvent l'être dans le cadre d'une étude détaillée de la valeur. Dans notre situation, pour avoir une idée de son ordre de grandeur, nous l'étudions dans un cas déterministe simple où les taux de rétention des années à venir, les primes pures des années à venir, les frais variables des années à venir et les prix des années à venir sont ceux de cette année pour les anciennetés correspondantes au décalage dans le temps. Ceci signifie que nous observons pour le dernier exercice les données de rentabilité et de résiliation par génération et considérons que cette vision par génération est identique à une vision par ancienneté.

L'inflation est appliquée à tous les éléments ayant une dimension de prix. Cet ordre de grandeur se calcule alors par génération.

Pour ce portefeuille, en prenant un taux d'actualisation de 6%, généralement utilisé pour la valeur, et une inflation de 2%, ceci donne une élasticité seuil de 0,6 pour la génération 2010.

L'élasticité mesurée était de 0,7 avec un écart-type de 0,12. Dans cette situation, il vaut donc mieux garder la stratégie de prix habituelle pour garder le maximum de valeur. Cette stratégie consiste à n'appliquer aucune majoration au renouvellement, sauf sur les polices sinistrées.

Il faut bien noter que cette approche est une dérivation partielle. Nous pouvons seulement dire que la valeur est plus élevée ou plus basse qu'elle ne l'aurait été en cas de politique tarifaire différente. Tous les éléments de contexte évoluant, la valeur peut au total augmenter alors que la politique tarifaire a tendance à la faire baisser.

4. Remarque générale sur l'unicité du résultat

Rien dans les hypothèses présentées ici ne permet d'être certain de l'unicité des résultats de l'optimisation présentés précédemment.

En effet, les différentes fonctions peuvent tout à fait avoir plusieurs points stationnaires. L'approche pas-à-pas présentée ci-après permet toutefois de supposer que nous restons à proximité de l'optimum local correspondant à la stratégie actuelle de l'assureur.

Nous n'avons pas non plus vérifié si les solutions proposées sont des maxima ou des minima. L'hypothèse sous-jacente permettant de s'assurer qu'il s'agit de maxima est que l'élasticité augmente avec le prix proposé. Cette hypothèse est assez intuitive.

Les deux paragraphes précédents peuvent sembler s'opposer. Il peut exister des points auxquels l'élasticité est discontinue lorsque le positionnement tarifaire est radicalement modifié, ce qui permet de faire coexister ces deux visions.

5. Application pratique

De manière pratique, l'optimisation de la marge commerciale s'est faite en retenant un modèle mixte additif & multiplicatif (ρ = 1/3) associé à une séquence stable de loss ratio. Cette dernière hypothèse sur le loss ratio n'est pas toujours en phase avec la réalité empirique, mais permet d'illustrer notre grille de décisions ainsi que l'impact du facteur temps.

ID	Elasticité n=1/3	Loss_Ratio	Elas seuil 1an	Décision/modèle 1 année	Elas seuil 2 ans	Décision/modèle 2 années	Elas seuil 3 ans	Décision/modèle 3 années	Elas seuil 4 ans	Décision modèle 4 années	Elas seuil 5 ans	Décision modèle 5 années
1	0,773	0,610	2,566	Augmenter Prix	1,419	Augmenter Prix	1,043	Augmenter Prix	0,859	Augmenter Prix	0,752	Diminuer Prix
2	0,566	0,481	1,927	Augmenter Prix	1,066	Augmenter Prix	0,784	Augmenter Prix	0,645	Augmenter Prix	0,565	Diminuer Prix
3	0,640	0,513	2,052	Augmenter Prix	1,135	Augmenter Prix	0,834	Augmenter Prix	0,687	Augmenter Prix	0,602	Diminuer Prix
4	0,571	0,463	1,862	Augmenter Prix	1,030	Augmenter Prix	0,757	Augmenter Prix	0,624	Augmenter Prix	0,546	Diminuer Prix
5	0,801	0,627	2,678	Augmenter Prix	1,482	Augmenter Prix	1,089	Augmenter Prix	0,897	Augmenter Prix	0,785	Diminuer Prix
6	0,920	0,370	1,588	Augmenter Prix	0,879	Diminuer Prix	0,646	Diminuer Prix	0,532	Diminuer Prix	0,466	Diminuer Prix
7	0,937	0,584	2,403	Augmenter Prix	1,329	Augmenter Prix	0,977	Augmenter Prix	0,805	Diminuer Prix	0,704	Diminuer Prix
8	0,841	0,569	2,321	Augmenter Prix	1,284	Augmenter Prix	0,944	Augmenter Prix	0,777	Diminuer Prix	0,680	Diminuer Prix
9	0,872	0,571	2,333	Augmenter Prix	1,291	Augmenter Prix	0,948	Augmenter Prix	0,781	Diminuer Prix	0,684	Diminuer Prix
10	0,783	0,614	2,589	Augmenter Prix	1,432	Augmenter Prix	1,052	Augmenter Prix	0,867	Augmenter Prix	0,759	Diminuer Prix
11	0,698	0,577	2,361	Augmenter Prix	1,306	Augmenter Prix	0,960	Augmenter Prix	0,791	Augmenter Prix	0,692	Diminuer Prix
12	1,108	0,626	2,671	Augmenter Prix	1,478	Augmenter Prix	1,086	Diminuer Prix	0,894	Diminuer Prix	0,783	Diminuer Prix
13	1,000	0,621	2,640	Augmenter Prix	1,460	Augmenter Prix	1,073	Augmenter Prix	0,884	Diminuer Prix	0,774	Diminuer Prix
14	1,034	0,622	2,644	Augmenter Prix	1,463	Augmenter Prix	1,075	Augmenter Prix	0,886	Diminuer Prix	0,775	Diminuer Prix
15	0,935	0,649	2,848	Augmenter Prix	1,576	Augmenter Prix	1,158	Augmenter Prix	0,954	Augmenter Prix	0,835	Diminuer Prix
16	0,838	0,634	2,734	Augmenter Prix	1,513	Augmenter Prix	1,112	Augmenter Prix	0,916	Augmenter Prix	0,801	Diminuer Prix
17	0,869	0,650	2,861	Augmenter Prix	1,583	Augmenter Prix	1,163	Augmenter Prix	0,958	Augmenter Prix	0,839	Diminuer Prix
18	0,842	0,453	1,830	Augmenter Prix	1,012	Augmenter Prix	0,744	Diminuer Prix	0,613	Diminuer Prix	0,536	Diminuer Prix
19	0,752	0,482	1,930	Augmenter Prix	1,068	Augmenter Prix	0,785	Augmenter Prix	0,646	Diminuer Prix	0,566	Diminuer Prix
20	0,781	0,540	2,176	Augmenter Prix	1,204	Augmenter Prix	0,885	Augmenter Prix	0,729	Diminuer Prix	0,638	Diminuer Prix
21	1,001	0,594	2,464	Augmenter Prix	1,363	Augmenter Prix	1,002	Augmenter Prix	0,825	Diminuer Prix	0,722	Diminuer Prix
22	0,900	0,632	2,714	Augmenter Prix	1,501	Augmenter Prix	1,103	Augmenter Prix	0,909	Augmenter Prix	0,796	Diminuer Prix
23	0,933	0,598	2,490	Augmenter Prix	1,377	Augmenter Prix	1,012	Augmenter Prix	0,834	Diminuer Prix	0,730	Diminuer Prix
24	0,840	0,641	2,785	Augmenter Prix	1,541	Augmenter Prix	1,132	Augmenter Prix	0,933	Augmenter Prix	0,816	Diminuer Prix
25	0,750	0,584	2,402	Augmenter Prix	1,329	Augmenter Prix	0,977	Augmenter Prix	0,805	Augmenter Prix	0,704	Diminuer Prix
26	0,779	0,605	2,530	Augmenter Prix	1,400	Augmenter Prix	1,029	Augmenter Prix	0,847	Augmenter Prix	0,742	Diminuer Prix
27	0,701	0,351	1,541	Augmenter Prix	0,852	Augmenter Prix	0,626	Diminuer Prix	0,516	Diminuer Prix	0,452	Diminuer Prix
28	0,715	0,548	2,214	Augmenter Prix	1,225	Augmenter Prix	0,900	Augmenter Prix	0,741	Augmenter Prix	0,649	Diminuer Prix
29	0,858	0,599	2,494	Augmenter Prix	1,380	Augmenter Prix	1,014	Augmenter Prix	0,835	Diminuer Prix	0,731	Diminuer Prix
30	0,767	0,614	2,594	Augmenter Prix	1,435	Augmenter Prix	1,054	Augmenter Prix	0,869	Augmenter Prix	0,760	Diminuer Prix
31	0,796	0,615	2,594	Augmenter Prix	1,435	Augmenter Prix	1,055	Augmenter Prix	0,869	Augmenter Prix	0,760	Diminuer Prix
32	1,024	0,489	1,957	Augmenter Prix	1,082	Augmenter Prix	0,795	Diminuer Prix	0,655	Diminuer Prix	0,574	Diminuer Prix
33	0,989	0,527	2,116	Augmenter Prix	1,171	Augmenter Prix	0,860	Diminuer Prix	0,709	Diminuer Prix	0,620	Diminuer Prix
34	0,971	0,639	2,773	Augmenter Prix	1,534	Augmenter Prix	1,127	Augmenter Prix	0,929	Diminuer Prix	0,813	Diminuer Prix
35	0,872	0,636	2,746	Augmenter Prix	1,519	Augmenter Prix	1,117	Augmenter Prix	0,920	Augmenter Prix	0,805	Diminuer Prix
36	0,904	0,626	2,676	Augmenter Prix	1,480	Augmenter Prix	1,088	Augmenter Prix	0,896	Diminuer Prix	0,784	Diminuer Prix
37	1,146	0,672	3,046	Augmenter Prix	1,685	Augmenter Prix	1,239	Augmenter Prix	1,020	Diminuer Prix	0,893	Diminuer Prix
38	1,035	0,674	3,063	Augmenter Prix	1,695	Augmenter Prix	1,245	Augmenter Prix	1,026	Diminuer Prix	0,898	Diminuer Prix
39	1,071	0,671	3,036	Augmenter Prix	1,680	Augmenter Prix	1,234	Augmenter Prix	1,017	Diminuer Prix	0,890	Diminuer Prix
40	0,969	0,676	3,090	Augmenter Prix	1,709	Augmenter Prix	1,256	Augmenter Prix	1,035	Augmenter Prix	0,906	Diminuer Prix

Tableau 13 : Décisions tarifaires par segment en fonction de l'horizon de temps

III.Approche pratique pas-à-pas

1. Univariée

Un exemple simple de mise en pratique de ces outils a été observé chez un assureur. Comme cet assureur opère dans un pays où il n'y a pas de tacite reconduction, son processus s'applique aux affaires nouvelles, mais le principe est le même qu'au renouvellement.

L'assureur associe à chaque prospect une variable aléatoire appliquant une hausse de prime de 5% à 10% des prospects. Il analyse ensuite chaque semaine une variable tarifaire de manière univariée. Cette analyse contient pour chaque niveau de la variable tarifaire, un ratio sinistre à prime, le taux de conversion pour chacun des deux niveaux de prix. C'est suffisant pour donner une élasticité univariée pour chaque niveau de la variable tarifaire. Le prix est ensuite ajusté en fonction du niveau de l'élasticité.

Évidemment cette évolution a des impacts en terme de mix de portefeuille suivant cette variable et donc impacte de manière indirecte l'analyse univariée des autres variables. Pas à pas, et variable par variable, ceci leur permet de se rapprocher de l'optimum.

Comme leur environnement bouge, au fur et à mesure qu'ils se rapprochent de l'optimum, l'optimum se déplace et donc il n'est jamais complément atteint. Ce système permet d'avoir la réactivité nécessaire à des évolutions rapides du marché.

2. Multivariée (Algorithme de gradient à pas fixe)

La méthode proposée ici est une vision plus générale que l'exemple de méthode univariée du paragraphe précédent.

L'application du pas fixe (par exemple 2%) se fait à tout les clients du portefeuille. En tenant compte des intervalles de confiance, si le client appartient à un profil d'élasticité faible la majoration prévue est augmentée du pas ; s'il appartient à un profil d'élasticité élevée, sa majoration prévue est diminuée du pas. Dans les cas d'élasticité moyenne, sa majoration n'évolue pas.

Pour la prochaine étape de l'algorithme, les nouvelles majorations prévues sont celles appliquées effectivement à l'étape précédente.

Concernant les profils à élasticité moyenne, la répétition des étapes avec le même niveau de majoration permet progressivement de réduire les intervalles de confiance et donc de leur appliquer à certaines étapes le pas.

Dans un environnement statique, ce type d'algorithme converge rapidement vers l'optimum (voir paragraphe suivant).

Dans un environnement en perpétuelle évolution, cet algorithme permet de suivre ces évolutions. Bien que l'optimum puisse ne jamais être atteint, l'algorithme le suit.

La taille du pas doit alors être choisie en fonction des mesures effectuées sur le portefeuille et la rapidité du marché.

3. Convergence théorique

Pour montrer la convergence de la méthode de gradient à pas fixe, nous nous plaçons dans le cadre où tous les éléments de contexte (comportement des clients, primes pures, et tarif des concurrents) sont fixes pendant tout le processus. Nous verrons ensuite comment lever ce cadre.

La convergence nécessite aussi que la différentielle de la fonction à optimiser soit lipschitzienne. Dans notre cas, ceci se limite à dire que l'élasticité est lipschitzienne. Rappelons ici que dans tout le cadre du mémoire, nous influons sur les prix pour optimiser une fonction. La caractéristique lipschitzienne doit donc s'entendre comme sur un segment donné et en observant les variations par rapport au prix.

Cette hypothèse n'est pas très restrictive et signifie juste que nous considérons qu'il n'y a pas de saut pour les prix psychologiques, mais seulement des zones de très fortes pentes. Comme nous l'avons déjà remarqué, nous sommes en réalité dans un modèle discret (les prix évoluent centime par centime). Il est donc possible de transformer chaque saut éventuel en segment sur le centime considéré.

La dernière hypothèse nécessaire à la convergence est celle de convexité. Cette hypothèse revient fréquemment dans le cadre du mémoire et est admissible si nous nous limitons à une optimisation à proximité de la stratégie tarifaire actuelle.

Sous toutes ces hypothèses, et si le pas n'est pas trop grand, l'algorithme rejoint l'optimum en un nombre fini de pas.

4. Impact des incertitudes

Comme nous l'avons vu dans l'approche théorique de l'optimisation, cette technique n'offre pas des résultats continus par rapport aux hypothèses ce qui peut donner un impact non négligeable aux incertitudes sur les données.

Deux éléments permettent de dépasser ce problème :

- L'approche itérative : les erreurs aléatoires sur les données variant d'une itération à une autre, on retrouve rapidement les bons ajustements à faire sur les segments éventuellement affectés par ces erreurs. (Les biais dans les données avaient déjà été supprimés par la dérivation partielle utilisée pour le calcul de l'élasticité)
- Le jugement d'expert : il faut toujours qu'un humain vérifie les résultats de l'optimisation afin qu'elle soit implémentée. Ceci permet de vérifier tout segment dont le réssultat peut sembler étrange ou faire penser à un artefact de calcul.

Chapitre 5. Conclusions sur le portefeuille étudié

I. Vision globale du portefeuille

L'élasticité mesurée dans les applications numériques précédentes est proche de l'élasticité charnière pour l'optimisation de la valeur. Il n'y a donc aucun gain à espérer d'un décalage global de la stratégie de tarification au renouvellement.

Une augmentation générale des prix au renouvellement aura pour impact :

- D'augmenter le résultat de l'année à venir
- De maintenir la valeur

Or le lien entre la valeur en début d'année, la valeur en fin d'année et le résultat en fin d'année est donnée par :

$$V_n = (R_{n+1} + V_{n+1})\frac{1}{1+i}$$

Donc si la valeur reste constante alors que le résultat de l'année suivante augmente, la valeur en fin d'année sera donc diminuée.

Cette évolution de la stratégie aura donc comme conséquence de réaliser plus tôt les résultats actualisés contenus dans la valeur. L'assureur n'effectuant pas cette analyse aura donc l'impression d'améliorer sa situation, alors que les résultats supplémentaires ne correspondent qu'à une forme de désinvestissement.

Analysons aussi l'évolution du chiffre d'affaires suite au renouvellement.

En année 1, le chiffre d'affaires évolue suivant :

$$\frac{dCA_1}{CA_1} = (1-e)dm_1$$

Étant donné les grandeurs mesurées sur le portefeuille étudié, le chiffre d'affaires après le premier renouvellement a dû être 2,3% plus élevé que si rien n'avait été fait.

En année 2, on a :

$$\frac{dCA_2}{CA_2} = dm_1 + dm_2 - e(2dm_1 + dm_2)$$

Comme la majoration en deuxième année s'est élevée à environ 4,5%, nous obtenons donc un chiffre d'affaires en année 2 plus élevé de 0,8% que ce qu'il aurait été s'il n'y avait pas eu de majoration. Ceci signifie que la croissance en année 2 est 1,5 point en dessous de ce qu'elle aurait été sans application de majoration.

Effectivement, la vision de l'assureur étudié avec un an de recul est que le taux de résiliation élevé commence à impacter négativement ses profits.

S'il n'y a pas de nouvelle majoration, le chiffre d'affaires en année 3 est donc prévu 5,2% donc plus bas que s'il n'y avait pas eu de majoration, soit une croissance de 6,0 points plus faibles.

L'un des éléments à prendre en compte pour l'optimisation est la taille du pas, c'est-à-dire dans notre cas la fréquence à laquelle les conclusions doivent être réévaluées.

Comme nous l'avons vu, les évaluations de l'élasticité ont des volatilités très élevées et il faut donc beaucoup de points avant de pouvoir être certains d'une évolution. Dans le cas étudié ici, nous proposerions une réévaluation annuelle avec des ajustements trimestriels.

II. Vision détaillée du portefeuille

Bien que le portefeuille soit globalement bien positionné en termes tarifaires, on observe pour certains segments des élasticités, des rentabilités et des taux de résiliations différents.

Il est donc possible d'identifier certains segments pour lesquels il serait judicieux d'augmenter les prix et d'autres de les baisser légèrement.

Les segments auxquels appliquer des hausses tarifaires, dont ceux présentant les caractéristiques suivantes :

- Élasticité plus faible
- Taux de résiliation plus élevé (élasticité seuil plus élevée, voir annexe)
- Loss ratio plus élevé (élasticité seuil plus élevée, voir annexe)

En plus du calcul numérique effectué en annexe, nous pouvons observer qu'un taux de résiliation plus élevé donne des résultats actualisés d'autant plus faibles que l'ancienneté est importante, ce qui augmente le poids du futur proche et augmente l'élasticité seuil.

Si le loss ratio est plus élevé, la marge perdue par résiliation est plus faible et donc l'élasticité seuil est plus élevée.

En classant les profils par élasticité, nous pouvons observer que l'assureur devrait baisser les prix des jeunes cadres célibataires bonussés et sans sinistre antérieur. En effet, leur élasticité est supérieure à 1.

A contrario, les femmes de quarante à soixante ans, séparées, malussées et avec des sinistres les années antérieures devraient voir leurs prix augmentés. En effet, leur élasticité est inférieure à 1.

Il est à noter que ces modifications de stratégies tarifaires proposées correspondent à des profils de risques ayant des caractéristiques de risque faible et d'autres caractéristiques de risques élevés. C'est-à-dire que dans le modèle de risque de l'assureur, ces profils ont certains coefficients faibles et d'autres élevés. Il est donc possible que d'autres assureurs accordant des importances différentes à chacune des variables tarifaires aient un positionnement tarifaire différent. Ces importances différentes peuvent être dues aux variabilités des modèles de prime pure étudiées plus haut.

Dans l'adaptation de la stratégie de renouvellement, il faut aussi tenir compte du prix psychologique. Nous avons observé que le dépassement d'une centaine faisait chuter le nombre de polices renouvelées de 1,0%. Comme nous avons vu que l'élasticité seuil se situe autour de 0,6, nous en déduisons que jusqu'à 1,7% au-dessus de chaque centaine, il est plus intéressant de limiter la hausse tarifaire à la fin de la centaine précédente. Ce qui revient à limiter les hausses tarifaires comme indiqué dans le tableau suivant.

Prime proposée a priori	200,00 à 203,40	300,00 à 305,10	400,00 à 406,80	500,00 à 508,50	600,00 à 610,20	700,00 à 711,90	800,00 à 813,10
Prime à proposer	199,99	299,99	399,99	499,99	599,99	699,99	799,99

Tableau 14 : Optimisation des prix psychologiques

III.Impact pour le management

En réponse à cette analyse, le management de la compagnie dispose de plusieurs éléments concrets lui permettant de décider sa politique tarifaire au renouvellement.

Il sait qu'il n'est pas possible d'augmenter la valeur de son portefeuille simplement en décalant la politique de renouvellement de manière soit plus agressive ou au contraire plus douce.

Dans la situation actuelle, le levier qui lui est fourni par ce décalage de politique tarifaire permet seulement de décaler les dates de réalisation des profits. Il permet donc seulement une forme de « lissage du résultat ».

Cette information est très importante pour le management, car elle permet d’éviter de croire que la hausse de résultat immédiate constatée lors de hausses tarifaires correspond à une amélioration de la situation de l’entreprise.

Ce pourrait être par exemple un levier intéressant à activer avant de vendre une filiale, ce qui permettrait de gonfler artificiellement les résultats court terme et donc d’espérer un meilleur prix si l’acheteur n’a pas pu analyser l’impact long terme de ces choix.

L’autre élément connu est qu’il y a certains segments pour lesquels il est possible d’augmenter les tarifs et d’autres les baisser légèrement pour améliorer la valeur et le résultat. Cette vision ne peut se faire que sur des segments larges et elle est entachée d’incertitudes.

Les écarts-types élevés sur les indicateurs doivent aussi inciter le management à effectuer un suivi régulier pour pouvoir réagir dès que des phénomènes non prévus se manifestent.

Chapitre 6. Conclusion

I. Résultats

L'objectif de départ du mémoire était de fournir au management d'une société d'assurance la possibilité d'optimiser sa stratégie de renouvellement par la compréhension du comportement des clients et en prenant en compte les risques de décision liés aux intervalles de confiance.

La mémoire a bien fourni un moyen d'atteindre cet objectif et nous avons pu mettre en évidence de nombreux éléments donnant une meilleure compréhension de l'impact de décisions tarifaires.

Les intervalles de confiance sur le comportement des clients peuvent être élevés et il faut des portefeuilles de taille importante pour pouvoir l'étudier proprement. En effet, cela nécessite l'évaluation de l'écart de deux grandeurs aléatoires qui du fait de la volatilité intrinsèque des phénomènes présente des écarts-types importants.

L'une des grandes nouveautés de ce mémoire est qu'il ne fait intervenir aucune hypothèse préalable sur le comportement client à part l'hypothèse de rationalité[22]. Toutes les conclusions générales sont donc valables dont tous les états possibles de la réalité. De plus, nous avons la certitude que les conclusions ne reflètent pas un choix d'hypothèse via un lien de causalité non maitrisé.

En particulier, nous ne sommes pas passés par l'intermédiaire d'une fonction logistique pour le comportement des clients. En l'absence de courbe lisse, ceci nous a donc permis de mettre en évidence l'existence de prix psychologiques aux endroits où la courbe de demande est fortement pentue.

Une fois le phénomène élastique mis en évidence, nous l'avons interpolé pour l'avoir sur l'ensemble des profils de clients.

L'utilisation de la définition précise de l'élasticité faisant intervenir la dérivation partielle a focalisé le sujet sur l'impact du levier managérial au moment du renouvellement, c'est-à-dire la stratégie tarifaire. Nous avons pu nous distancer de l'évolution totale de l'ensemble des indicateurs en fonction de l'évolution de tout le contexte pour n'avoir que l'impact marginal de la décision sur les prix.

La dérivation de la demande comme il est d'usage en économie plutôt que la dérivation du taux de résiliation comme il est habituel en assurance a aussi fortement simplifié la compréhension de l'optimisation.

La technique de dérivation permet aussi de supprimer la plupart des biais contenus dans les bases de données. Les erreurs aléatoires sont quant à elles limitées grâce à l'approche itérative du processus d'optimisation.

Cette optimisation a mis en évidence une règle simple pour le choix de la stratégie tarifaire en faisant intervenir une élasticité seuil, différente pour le chiffre d'affaires, la marge et la valeur et fonction de la rentabilité des profils. Le choix n'a plus que se faire en fonction de la position de l'élasticité mesurée par rapport à l'élasticité seuil.

Cette vision simple de l'optimisation permet aussi au management d'appréhender les conséquences à court terme, moyen terme et long terme de ses décisions et donc de mieux les mettre en perspective en fonction de ses objectifs. La vision long terme permet aussi de réduire la tentation de l'assureur d'optimiser des profits à court terme au détriment de ses obligations envers les assurés à horizons plus lointains.

La mise en place de ce concept d'élasticité seuil nécessite aussi une bonne compréhension de la rentabilité et nous avons donc développé les outils de compréhension des incertitudes des évaluations de la prime pure.

[22] Comme indiqué précédemment, la rationalité considérée ici est très limitée : si un client résilie à un prix p, nous considérons qu'il résilie pour tout prix supérieur à p

La compréhension des phénomènes à moyen et long terme a pu se faire grâce à la mise en place du cadre théorique permettant la mesure de l'effet mémoire et la première évaluation de celui-ci. Le taux de résiliation dépend essentiellement du niveau tarifaire proposé et non de la dernière majoration. L'impact du passé dans le taux de résiliation actuel ne se fait donc pas via la trajectoire des majorations, mais uniquement au travers la somme de toutes les majorations antérieures.

Bien que ce mémoire n'ait pas étudié l'impact de l'évolution des prix de la concurrence, nous avons aussi mis en place le cadre théorique qui permettra son étude. Le choix qui a été fait pour ce mémoire est de considérer les évolutions des prix de la concurrence comme une évolution du contexte et de s'ajuster aux changements via l'impact qu'ils ont sur les indicateurs que nous suivons.

Tous les outils développés ici permettent d'optimiser le positionnement de l'assureur, mais ne prétendent pas remettre en cause les choix stratégiques. Si l'optimisation ne permet d'atteindre les objectifs de la compagnie, celle-ci devra aussi utiliser d'autres leviers, voire dans certains cas revoir globalement son positionnement stratégique.

L'optimisation se fait aussi par de petites variations et donc ne change pas à court terme le niveau de mutualisation de l'assureur. Toutefois, lors de revues stratégiques régulières, l'assureur doit se poser cette question de mutualisation qui impacte son risque de ruine via la volatilité. Il peut alors décider d'adapter ses objectifs ou de modifier sa structure de réassurance.

II. Pistes d'approfondissement

Nous pensons qu'à l'avenir une meilleure optimisation au renouvellement passera par une meilleure compréhension de l'effet mémoire, de l'effet de la concurrence et des phénomènes non élastiques.

Nous avons déjà posé le cadre mathématique dans lequel étudier les deux premiers effets. La compréhension de l'effet mémoire passera par un plus grand historique de données et si possible une part aléatoire lors des renouvellements.

L'impact de la concurrence est complexe à mesurer, car il faut déjà pouvoir évaluer correctement ce que fait la concurrence. Ensuite, il est difficile d'isoler cet effet toutes choses égales par ailleurs. Ce type d'étude nécessitera surement de passer par l'intermédiaire de variables instrumentales qui restent encore à déterminer.

La prise en compte de la non-linéarité du comportement des clients pourrait passer par l'introduction du concept de convexité. Il semble toutefois délicat d'obtenir de bonnes mesures de la dérivée seconde étant donné la volatilité déjà constatée sur la dérivée première qu'est l'élasticité.

Cette mesure de la convexité pourrait par exemple nous indiquer l'évolution des élasticités en fonction de l'évolution de la stratégie tarifaire. La comparaison de l'évolution des élasticités réelles et des élasticités seuil en fonction de la stratégie tarifaire permettrait de vérifier que les équilibres sont bien stables.

L'étude des élasticités détaillées par profil a été faite grâce à une interpolation des élasticités marginales. Nous avons utilisé des outils simples d'interpolation, mais une étude plus détaillée des comportements du client devrait permettre d'obtenir de meilleures interpolations.

Une première étude consisterait à vérifier que le rang trouvé pour le modèle est bien stable avec le temps.

Nous nous sommes focalisés sur le renouvellement, mais une étude similaire sur les affaires nouvelles ou les remplacements devrait permettre aussi d'optimiser la stratégie tarifaire sur toute la durée de vie du contrat.

Nous n'avons étudié ici que le moyen d'optimiser le tarif en fonction du comportement du client, mais pas des moyens de faire évoluer le comportement du client. Citons en exemple deux voies d'approfondissement :

- La stratégie produit : en proposant différentes options plutôt qu'un produit global, il est possible de jouer sur une vision asymétrique du juste prix entre l'assureur et le client sur les différentes garanties. Par exemple, un client peut être tenté de payer cher pour une garantie perte de clé alors que la prime pure est presque négligeable.

- L’image de marque : en améliorant l’image de marque, il est possible de réduire l’élasticité de sa clientèle.

Ces concepts peuvent aussi être étendus à d’autres types d’assurance et même au-delà de l’assurance à tous les secteurs vendant en masse et pouvant fortement discriminer les tarifs, comme la téléphonie mobile et le tourisme.

Bibliographie

Mildenhall, Stephen, "A Systematic Relationship between Minimum Bias and Generalized Linear Models", Proceedings of the Casualty Actuarial Society, LXXXVI, 1999

Lena Chang and William B. Fairley, Pricing Automobile Insurance under Multivariate Classifications of Risks: Additive versus Multiplicative, The Journal of Risk and insurance, Vol. 46, No.1 (Mar., 1979), pp. 75-98

De Jong, Piet and Heller Gillian, Generalized Linear Models for Insurance Data, Cambridge University Press, 2008

Hayya Jack et al., A Note on the Ratio of Two Normally Distributed Variables, Management Science, Vol. 21, No. 11, Theory Series (Jul., 1975), pp. 1338-1341

Marshall Alfred, Principles of economics, Macmillan and Co. Ltd.

Cramer, Harald, Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press (1946)

Rao, Calyampudi Radakrishna, Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society 37:81-89 (1945)

Larrouturou Bernard and Lions Pierre-Louis, Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur : Optimisation et analyse numérique, École Polytechnique

Deming, W.Edwards and Stephan, Frederick F., On a least squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known, Annals of Mathematical Statistics, 11, 427-444 (1940)

Lee Alan, Generating synthetic microdata from published marginal tables and confidientialised files, University of Aukland (2009)

Breslow, N.E. and Day, N.E. Fitting models to grouped data, Statistical Methods in Cancer Research, Vol. II, pp. 119-176, IARC: Lyon (1987)

Aranda-Ordaz, F.J., An extension of the proportional-hazards model for grouped data, Biometrics, vol. 39, n°1, 109-117 (1983)

Bowling Shannon R. et al., A logistic approximation to the cumulative normal distribution, Journal of Industrial Engineering and Management, vol. 2, No. 1, pp. 114-127 (2009)

Breslow, N.E.; Clayton, D.G. (1993). "Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models". Journal of the American Statistical Association 88 (421)

Fitzmaurice, Garrett M.; Laird, Nan M.; Ware, James H. (2004). Applied longitudinal analysis. Hoboken, NJ: Wiley-Interscience

GARRIDO, José, ZHOU, Jun, Full Credibility with Generalized Linear and Mixed Models, ASTIN, Volume 39, No. 1 - May 2009

Bengio, Y. & Gingras, F. (1996). Recurrent neural networks for missing or asynchronous data", In Advances in Neural Information Processing Systems, Vol. 8 (1996), pp. 395-401

Paglia A. ; Phelippe-Guivarc'h M. V. Tarification des risques en assurance non-vie, une approche par modèle d'apprentissage statistique. Bulletin Bulletin Français d'Actuariat n°22 / vol. 11 / Juillet 2011 – Décembre

C. Dugas, N. Chapados, Y. Bengio, P. Vincent, G. Denoncourt et C. Fournier : Statistical learning algorithms applied to automobile insurance ratemaking. In Casualty Actuarial Society Forum-Arlington, pages 179-213, 2003.

Annexes

I. Glossaire des acronymes couramment utilisés

T_i = taux de rétention associé au prix p_i.

ΔT_i = variation du taux de rétention associé à une variation de prix

Les résiliations retenues dans l'étude s'entendent comme résultante d'un comportement de l'assuré. Ainsi, les résiliations compagnie pour surveillance du portefeuille (ex. résiliation d'un assuré en cas de nombre de sinistres trop élevé) ont été exclues et les résiliations compagnie pour non-paiement ont été intégrées (car nous supposons qu'elles peuvent résulter d'une volonté de l'assuré de se faire résilier)

N = nombre de contrats arrivant à échéance pour le chapitre sur l'élasticité, nombre de contrats renouvelés pour le chapitre sur l'optimisation

p_i = prix proposé sur le segment i

μ = estimateur du taux de rétention

m_i = majoration de l'année i (ex. 4%)

Δm_i = variation de la majoration de l'année i par rapport ç la majoration de référence

C_a = Chiffre d'affaires d'où C = Np = nombre de contrats renouvelés x prix proposé

M = marge au renouvellement

S = espérance de la charge sinistre

C_f = coûts fixes de l'assureur

C = coûts variables

V = valeur

II. Définitions courantes

La marge technique (MT) est définie comme = Primes acquises (PA) x (1 – CoR)

Le ratio combiné (CoR) étant défini comme = Loss Ratio (LR) + (Coûts fixes (CF) + Coûts variables (CV))/ Primes acquises

III.Prime commerciale

La détermination d'une prime commerciale est un exercice complexe, car c'est un empilement de trois types de problématique :

- Une problématique technique qui consiste à évaluer comment des attributs clients sont prédictifs d'une probabilité de perte. L'objectif est d'avoir une représentation réaliste du coût (appelée prime pure) c'est-à-dire une structure tarifaire qui servira de base à la détermination d'une prime commerciale. Les modèles mathématiques sous-jacents sont basés sur des statistiques multivariées, principalement des modèles GLM
- Une problématique comportementale de marché qui replace une entreprise dans un environnement c'est-à-dire avec des concurrents ayant des politiques différentes (ex. apparition de nouveaux entrants cherchant le gain de parts de marché au détriment d'une

rentabilité immédiate). Ainsi, l'intensité de la concurrence sur les différents segments a une influence directe sur les prix commerciaux pratiqués et implique une connaissance des couples prix / risques assurés. L'objectif des modèles sous-jacents est de permettre de mieux appréhender les comportements du marché

- Une problématique comportementale client qui consiste à évaluer comment des attributs clients & de marché et une majoration tarifaire de l'assureur sont prédictifs de la résiliation du contrat ou du niveau de rétention liée à des ventes croisées.

Ainsi la compréhension de ces problématiques doit-elle conduire à la détermination d'optimaux tarifaires et de paramètres prédictifs de l'effet des changements de tarifs sur la rentabilité et le volume (élasticité)

IV. Résiliations

La résiliation d'un contrat auto s'organise en deux grandes catégories, soient la résiliation assuré et la résiliation compagnie

- L'assuré peut mettre fin au contrat pour cinq motifs :
    - Augmentation de la prime (résiliation Châtel) : Si l'augmentation de la prime est supérieure au taux d'indice annuel (en général, une hausse de 2 ou 3% par an est prévue dans le contrat), l'assuré dispose de 15 jours après la réception de l'avis d'échéance pour mettre fin à l'engagement.
    - Résiliation à échéance : L'assuré peut résilier à échéance en donnant un préavis respectant les formes légales (résiliation 2 mois avant par lettre recommandée)
    - Changement de domicile, de situation matrimoniale, de profession, perte d'emploi, retraite professionnelle, cessation définitive d'activité professionnelle
    - Perte totale de l'objet assuré : selon l'article L. 121-9 du code des assurances, le contrat est résilié de plein droit.
    - Vente du véhicule assuré : dès le lendemain de la vente, le contrat est automatiquement suspendu

- La compagnie peut décider de résilier pour 4 grandes raisons :
    - Augmentation du risque: l'assuré est tenu d'informer son assureur si le risque couvert augmente. La compagnie peut alors choisir soit d'augmenter le tarif de cotisation, soit de résilier le contrat
    - Non paiement de la cotisation d'assurance: Après envoi d'un courrier de mise en demeure de règlement à l'assuré, dans un délai de dix jours suivants l'échéance, l'assuré a 30 jours pour payer sa prime. Passé ces 30 jours, la compagnie d'assurances peut résilier le contrat si l'assuré ne paie pas.
    - Fausse déclaration ou omission : si l'assureur constate que la déclaration du risque à couvrir est inexacte
    - Changements de situation: cela peut être un motif de résiliation de contrat par l'assureur s'il modifie le risque couvert. Exemple : changement concernant l'assuré (retraite, mariage, déménagement...) ou un bien (achat, vente...)

- Par ailleurs,
    - la compagnie d'assurance peut résilier le contrat d'un assuré, sans attendre l'échéance suite à un sinistre si le conducteur était sous l'empire de l'alcool ou de stupéfiants, si son permis de conduire est suspendu pour au moins 1 mois, ou annulé ou si le malus du conducteur est trop important (ces conditions de résiliation par l'assureur automobile sont précisées dans les conditions générales du contrat d'assurance du véhicule)
    - L'assureur peut résilier le contrat d'assurance à échéance, sans donner de motif, s'il le fait à l'échéance prévue

V. Théorème de Lyapounov

Ce théorème est une extension du théorème de la limite central quand les variables additionnées ne sont pas identiques.

Posons X_n une suite de variables aléatoire indépendantes sur le même espace probabilisés. Notons μ_n et σ_n leurs espérance et écart-type respectifs.

Notons $s_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$

Supposons que le moment centré d'ordre 3, $r_n = \sum_{i=1}^{n} E\left(\left|X_i - \mu_i\right|^3\right)$, existe pour tout n.

Si la condition de Lyapounov est remplie :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{r_n}{s_n} = 0$$

Alors la suite $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ converge vers la loi normale $N(m_n, s_n)$ où $m_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

VI. Mesure de l'élasticité charnière pour l'optimisation de la valeur

Reprenons la formule donnant l'élasticité charnière démontrée plus haut :

$$e = \frac{E(C_{act})}{E\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(1+i)^k} M_k^v\right)}$$

En reprenant les données mesurées lors du dernier exercice où la stratégie tarifaire était de ne pas majorer au renouvellement, nous pouvons donc produire le tableau suivant pour le cas déterministe :

renouvelleme	taux de réten	actualisation	var tarifaire	Loss ratio	Variable ratio	rétention com	numérateur	dénominateur
1	82%	1,000000	1,000000	64%	69%	82%	0,82	0,2542
2	78%	0,943396	1,000000	62%	67%	64%	0,60339623	0,39824151
3	79%	0,889996	1,000000	54%	59%	51%	0,44970096	0,55313218
4	79%	0,839619	1,000000	49%	54%	40%	0,33515449	0,61668426
5	80%	0,792094	1,000000	46%	51%	32%	0,25294678	0,61971962
6	80%	0,747258	1,000000	46%	51%	26%	0,19090323	0,56125551
7	80%	0,704961	1,000000	46%	51%	20%	0,14407791	0,49418724
8	80%	0,665057	1,000000	46%	51%	16%	0,10873805	0,42625314
9	80%	0,627412	1,000000	46%	51%	13%	0,08206645	0,36191305
10	80%	0,591898	1,000000	46%	51%	10%	0,06193694	0,30349102
11	80%	0,558395	1,000000	46%	51%	8%	0,04674486	0,25195481
12	80%	0,526788	1,000000	46%	51%	7%	0,03527914	0,20744136
13	80%	0,496969	1,000000	46%	51%	5%	0,02662577	0,16960614
14	80%	0,468839	1,000000	46%	51%	4%	0,02009492	0,13785114
15	80%	0,442301	1,000000	46%	51%	3%	0,01516598	0,11146993
16	80%	0,417265	1,000000	46%	51%	3%	0,01144602	0,0897368
17	80%	0,393646	1,000000	46%	51%	2%	0,00863851	0,07195875
18	80%	0,371364	1,000000	46%	51%	2%	0,00651963	0,05750311
19	80%	0,350344	1,000000	46%	51%	1%	0,00492047	0,04580961
20	80%	0,330513	1,000000	46%	51%	1%	0,00371356	0,03639293
TOTAL							3,22806991	5,76880212

Tableau 15 : Mesure de l'élasticité charnière pour l'optimisation de la valeur

Le chiffre d'affaires actualisé est au numérateur et les marges actualisées pondérées par l'ancienneté au dénominateur, ce qui donne une élasticité charnière d'environ 0,56.

En modifiant les données du tableau, nous pouvons étudier la sensibilité de cette élasticité charnière aux taux de rétention et à la rentabilité (loss ratio).

Pour une baisse uniforme sur toutes les anciennetés de 5 points du taux de rétention, l'élasticité charnière augmente à 0,68.

Pour une baisse uniforme du loss ratio de 5 points, l'élasticité charnière baisse à 0,50.

VII. Algorithme IPF

L'objectif de l'algorithme est de trouver la solution numérique de l'équation :

$$e_{las}{}^{\rho} = X\underline{\beta}$$

Pour chaque variable tarifaire k parmi les K variables étudiées, il y a n_k niveaux possibles.

On note $\beta_{k,j}$ la valeur du coefficient du niveau j de la variable k. L'algorithme est initialisé avec tous ces coefficients égaux à 1.

On note $e_{i_1,\cdots,i_K}$ l'élasticité du profil ayant pour niveau de chaque variable tarifaire k le niveau i_k. De même, on note $N_{i_1,\cdots,i_K}$ le nombre de polices de ce profil renouvelées.

Définissons maintenant les grandeurs marginales :

$$N_{k,j} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{n_{k-1}} \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{k+1}} \cdots \sum_{i_K=1}^{n_K} N_{i_1,\cdots i_{k-1},i_k,i_{k+1},\cdots i_K}$$

$$e_{k,j} = \frac{1}{N_{k,j}} \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{n_{k-1}} \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{k+1}} \cdots \sum_{i_K=1}^{n_K} N_{i_1,\cdots i_{k-1},i_k,i_{k+1},\cdots i_K}\, e_{i_1,\cdots i_{k-1},i_k,i_{k+1},\cdots i_K}$$

Cela signifie que sur le portefeuille, il y a au total $N_{k,j}$ polices renouvelées ayant le niveau j pour la variable k, quelque soit leur niveau pour les autres variables. Leur élasticité moyenne vaut $e_{k,j}$.

Par hypothèse du modèle que nous cherchons à ajuster, on a :

$$e_{i_1,\cdots,i_K} = \left(\beta_{1,i_1} + \cdots + \beta_{K,i_K}\right)^{\frac{1}{\rho}} \text{ si } \rho \neq 0$$

$$e_{i_1,\cdots,i_K} = \beta_{1,i_1} \cdot \cdots \cdot \beta_{K,i_K} \text{ si } \rho = 0$$

L'exercice consiste donc pour chaque k de 1 à K à résoudre n_k équations en β_{k,i_k} en gardant tous les autres coefficients β fixes. Ces équations égalisent les élasticités marginales calculées par l'algorithme aux élasticités marginales mesurées sur le portefeuille pour la variable k. A chaque étape correspond une variable k et les coefficients β_{k,i_k} sont mis à jour.

Une fois les K variables traitées, l'algorithme redémarre à la première variable.

L'algorithme s'arrête quand la moyenne des écarts absolus des marges calculées et des marges mesurées est inférieure à 10^{-4} fois la marge mesurée maximale.

VIII. Coûts fixes et coûts variables

La détermination des élasticités seuils nécessite la séparation des coûts de l'assureur en coûts fixes et coûts variables.

Il est utile de rappeler que la séparation des coûts suivant ces deux catégories n'est pas unique, mais dépend de l'étude réalisée. En effet, à échéance courte et pour de faibles variations de chiffres d'affaires, certains coûts peuvent être considérés comme fixes, par exemple le salaire de base des chargés de clientèle. Par contre, à plus long terme ces mêmes coûts peuvent être considérés comme variables, par exemple si le chiffre d'affaires double. En effet, la compagnie ne va ni embaucher ni licencier personne pour des variations de 1% du chiffre d'affaires, mais y sera contrainte pour un doublement.

Dans le cas qui nous étudions dans ce mémoire, nous regardons l'impact marginal d'une variation de tarif supplémentaire. Dans chaque année à venir, cet impact marginal d'une décision sur l'année en cours n'affectera le nombre de polices et le chiffre que d'un maximum de quelques pour cent. Il est donc logique de considérer la majeure partie des coûts comme des coûts fixes.

Voici un exemple de la répartition des coûts :

Coûts fixes	Coûts variables
Loyer et charges Informatique Masse salariale (hors primes des commerciaux)	Frais d'envoi des quittances et cartes vertes Frais d'encaissement Primes de commerciaux liés aux ventes

Tableau 16 : Exemple de répartition des coûts

IX. Analyse des données

1. Construction des bases de données

Deux bases SAS ont été construites rassemblant les caractéristiques des contrats et des assurés.

Variable	Description
IDCNT	Numéro du contrat
NOVERCNT	Numéro de version correspondante au contrat
NOHISTO	Autre façon de numéroter les versions du contrat
IFCDTDEB	Date de début de l'image de la version du contrat
IFCDTFIN	Date de fin de l'image de la version du contrat
DTINTER	Date d'interruption du contrat (valeur manquante si le contrat est encore en cous)
LASTMOVE	Dernier mouvement
ETATCNT	Etat du contrat
ETATPROP	Etat de la proposition
STATUT	Statut du contrat
MOTIFMVT	Motif du dernier mouvement
COTANNU	Cotisation annuelle payée

FIG8. Caractéristiques du contrat

Variable	Description
IDCNT	
NOVERCNT	
C_SEXE_CP	Sexe
C_AGE_CP	Age
C_CSP_CP	Catégorie socio-professionnelle
C_CLASSE_SRA	Classe du véhicule (indicatrice du prix du véhicule)
C_SITMATCP	Situation matrimoniale
CRM	Coefficient CRM
C_SIN_1AN	Existence de sinistres dans les 12 derniers mois
C_ANC_CONT	Ancienneté de contrat
C_DEPT_BDG	Département du lieu de garage
C_USAGE	Usage du véhicule

FIG9. Caractéristiques de l'assuré

2. Retraitement des données

Les données utilisées pour ces travaux sont principalement issues de bases de tarification. Elles sont ainsi normalement existantes puisqu'il s'agit de pré-requis à l'obtention d'un tarif et donc d'un contrat.

Dans une première étape, nous avons réalisé un travail de vérification des données afin d'en vérifier la qualité, notamment au regard de données possiblement manquantes, aberrantes ou en doublons. Pour cela, nous avons adopté une démarche pragmatique de résolution :

- Données manquantes. Nous avons pu utiliser uniquement les enregistrements pour lesquels les données étaient complètes, sans appliquer de méthodes de repondération ou d'imputation d'une valeur. En effet, les bases utilisées étant en partie celles utilisées pour la tarification, les données manquantes concernaient un nombre marginal de cas et principalement des dates (moins de 0,1% des valeurs).

- Données aberrantes. De manière assez similaire aux données manquantes, les données aberrantes concernent les données n'entrant pas en compte dans la tarification et touchent aussi principalement des dates ; ces enregistrements ont été supprimés dans les requêtes.

- Doublons. Pour supprimer les doublons, nous avons opéré une série de traitements au travers de tests d'unicité sur les numéros de contrats, sur les noms / prénom et sur des croisements de modalités.

Au final, le travail de vérification n'a pas révélé de véritables anomalies.

Dans une première étape, nous avons testé et retraité les données pour les adapter à nos règles de gestion :

- Si un client interrompt plus d'une fois son contrat la même année, nous retenons uniquement sa dernière interruption
- Si nous ne possédons pas la valeur que prennent les variables tarifaires au moment de leur terme, nous ne prenons pas en compte le contrat
- S'il s'agit de résiliations « compagnie », nous retenons uniquement celles correspondant au motif de non payement.

De plus, nous nous sommes assurés de :

- L'unicité de l'image du renouvellement. Chaque ligne de la base correspond à l'image d'un contrat d'assurance c'est-à-dire à une « photo » représentant le contrat sur une période. A chaque mouvement sur le contrat, notamment une échéance, un avenant, une suspension, une remise en vigueur ou une résiliation, est ainsi associé une nouvelle image excluant les simulations ou les projets de contrat.
- L'existence d'une prime avant et après renouvellement. Pour chaque année N, il convient de filtrer les contrats arrivant à terme en capant leur prime au renouvellement ; on collecte ensuite les versions antérieures de ces contrats afin d'avoir la prime avant renouvellement.
- La comparabilité des données en rendant cohérente les périodes.

  <u>Exemple</u> : Si le mois d'étude est juin de l'année N, nous savons qu'il va nous manquer certaines résiliations concernant les contrats renouvelés après Juin N-1, notamment les résiliations à échéance. Dans ce cas, pour comparer plusieurs années N (ex : 2008, 2009, 2010), nous ne prendrons pas en compte les résiliations arrivant après le mois de juin de l'année N+1.

3. Segmentation des données

Sachant le lien existant entre intervalles de confiance sur l'élasticité et le nombre de renouvellements, le portefeuille retraité a été segmenté afin de :

- Limiter le nombre de variables. Exemple : compte tenu des premiers résultats d'élasticité, la variable « usage du véhicule » a été supprimée
- Limiter le nombre de modalités par variable. Exemple : Les agriculteurs ont été regroupés avec les employés

Ainsi, 7 principales variables ont été retenues : sexe, âge, CSP, niveau prix véhicule, situation matrimoniale, CRM, sinistre année antérieure, constituant 7 680 croisements sur un effectif de 534 000 contrats.

L'arbitrage pour le choix final de la segmentation des différentes variables a été opéré de la manière suivante :

- Dans premier temps, nous n'avons gardé que les variables pour lesquelles on observe que l'élasticité varie considérablement d'une modalité à une autre
- Dans un second temps, pour chaque variable, nous n'avons gardé que les modalités dont l'élasticité se trouve assez écartée de l'élasticité moyenne, et en agrégeant les modalités dont les élasticités se rapprochent notamment les modalités ayant un faible effectif.

Sexe

Modalités	Homme	Femme
Élasticité	0,61	0,54
Pourcentage	62%	38%
Effectif	330 740	203 859

Age

Modalités	18-25	26-30	31-35	36-40	41-50	51+
Élasticité	0,74	0,65	0,65	0,57	0,51	0,47
Pourcentage	5,50%	13,25%	21,06%	22,89%	23,82%	13,49%
Effectif	29 400	70 815	112 583	122 353	127 318	72 130

CSP

Modalités	AGRICULTEUR-ARTISAN,COMMERCANT-PROF.LIBERALE	CADRE-ENSEIGNANT	EMPLOYE-OUVRIER	RETRAITE-SANS ACT.PROFES
Élasticité	0,43	0,62	0,58	0,62

Pourcentage	5,33%	13,69%	66,73%	14,25%
Effectif	28 518	73 166	356 716	76 199

Niveau de prix du véhicule

Modalités	Cat 1	Cat 2	Cat 3	Cat 4
Élasticité	0,55	0,57	0,63	0,52
Pourcentage	27,38%	25,43%	36,62%	10,57%
Effectif	146 373	135 957	195 784	56 485

Situation matrimoniale

Modalités	CELIBATAIRE	MARIE	CONCUBIN	SEPARE-DIVORCE-VEUF
Élasticité	0,72	0,59	0,52	0,36
Pourcentage	18,82%	48,31%	27,27%	5,61%
Effectif	100 601	258 260	145 768	29 970

CRM

Modalités	50	51-60	61-80	81-99	100+
Élasticité	0,53	0,61	0,56	0,74	0,33
Pourcentage	34,56%	18,96%	24,91%	17,40%	4,17%
Effectif	184 737	101 362	133 185	93 035	22 280

Sinistres années antérieures

Modalités	non	oui
Élasticité	0,60	0,48
Pourcentage	81,39%	18,61%
Effectif	435 124	99 475

Compte tenu des données à disposition et de la nécessité d'intégrer un portefeuille conséquent, nous avons supposé que :

- Le comportement client est identique sur chaque segment entre l'année N et l'année N-1 (exemple : le comportement des femmes vis-à-vis d'un niveau de majoration donné n'a pas changé entre 2009 et 2010)
- La structure de majoration du portefeuille sur chaque segment est identique entre N et N-1

Graphique : Illustration simplifiée de l’élasticité