

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS

PARIS

MEMOIRE

Présenté en vue d'obtenir le

MASTER D'ACTUARIAT du CNAM

Par **Didier ALEXER**

**MESURE DE LA VaR D'UN PORTEFEUILLE AUTOMOBILE
PAR LA TECHNIQUE DE LA GRANULARITE**

Soutenu le 27 Mai 2011

JURY

Président : **M. Michel FROMENTEAU**

Membres : **M. Yannick APPERT-RAULLIN**

M. Alexis DUPONT

M. Christian-Yann ROBERT

M. Vincent RUOL

M. François WEISS

- CONFIDENTIEL -

Résumé

Les réformes réglementaires visant à redéfinir la marge de solvabilité des entreprises en fonction des risques s'appliquent aussi bien aux banques (directive CDR) qu'aux assurances (directive solvabilité 2). Solvabilité I prévoyait une marge de solvabilité déterminée en fonction de pourcentages sur les primes et les sinistres ; Solvabilité 2 passe à des règles plus élaborées intégrant le risque, soit par l'application d'une formule standard, soit par la mise en place d'un modèle interne. La crise bancaire des 'subprimes', loin d'avoir mis entre parenthèses cette réforme, a convaincu la Commission Européenne de légiférer pour se prémunir des risques dits systémiques (défaillances en chaîne des acteurs).

L'activité d'assurance est basée sur la mutualisation des risques et sur leur potentielle diversification. Dans ce cadre, la plupart des approches classiques de modélisation étudie le risque individuel porté par une police d'assurance et l'étend à l'intégralité du portefeuille via des techniques d'agrégation. Or, ces techniques présupposent généralement l'indépendance des risques d'une police à l'autre, ou présupposent le portefeuille suffisamment grand pour mesurer la diversification. Dans la pratique, celle-ci est souvent surestimée (loi des grands nombres). En effet, il existe bien souvent des risques systématiques propres aux garanties délivrées comme par exemple le risque catastrophe naturelle (qui touchera les branches dommages) ou le changement de comportement des conducteurs (qui touchera les branches Auto). Ces risques ne se diversifient pas totalement au sein d'un portefeuille.

Pour répondre aux exigences de la directive Solvabilité 2, le groupe AXA a développé un modèle interne qui est utilisé par l'ensemble des filiales assurant des risques IARD, permettant également un calcul de la valeur des portefeuilles du groupe. Ce modèle est utilisé pour toutes les lignes d'affaires des différentes entités, de taille extrêmement variable. L'enjeu du mémoire est d'adapter aux risques assurantiels une technique récente, connue sous le nom de "Granularity Adjustment", pour obtenir une mesure objective de la volatilité après diversification. Cette technique, qui trouve ses premières applications en finance (Gordy, M. (2004) : "Granularity Adjustment in Portfolio Credit Risk Measurement") permet de scinder :

- la volatilité diversifiable propre au risque individuel
- la volatilité non diversifiable des risques systémiques

L'étude sera basée sur les données individuelles (tous les sinistres survenus et leurs caractéristiques) du portefeuille Auto d'AXA France recouvrant près de quatre millions de contrats exposés récemment à du risque systématique.

MOTS CLES :

Granularité - Filtre de Kalman - ACP - Simulations Monte Carlo - Copules - Capital Economique - Value at Risk - Dépendance - Modèle à Facteurs - Modèle Espace Etat - Classification - Agrégation de Risques - Modèle interne.

Abstract

Regulatory reforms aimed at redefining the margin of companies solvency based on risk, apply to both banks (CDR Directive) and insurances (Solvency II). Solvency I provided a solvency margin determined based on percentages of premiums and claims, Solvency II passes to better regulations incorporating the risk, either by applying a standard formula or by the introduction of an internal model. The Subprime's banking crisis, far from having put in brackets the reform, has convinced the European Commission to legislate in order to be protect from the so-called systemic risk (failure chain of actors).

The insurance business is based on the pooling of risks and their potential diversification. In this framework, most classical modeling approaches studies the individual risk covered by an insurance policy and extend it to the entire portfolio through aggregation techniques. However, these techniques usually assume the independence of the risks from one policy to another, or assume the portfolio large enough to measure diversification. In practice, it is often overstated (law of large numbers). Indeed, there are often systematic risks specific to guarantees issued such as natural catastrophe risk (which affects the Damage branches) or change in driver behavior (which affect the Auto branches). These risks do not diversify fully within a portfolio.

To meet the Solvency II requirements, the AXA Group has developed an internal model that is used by all subsidiaries providing property and casualty risks, which also calculates the value of the group's portfolio. This model is used for all the lines of business of the various entities, knowing that they are extremely variable in size. The challenge of our Memoir is to adapt to insurance risks a recent technique known as the "Granularity Adjustment", to obtain an objective measure of volatility after diversification. This technique, which found its first applications in finance (Gordy, M. (2004) : "Granularity Adjustment in Portfolio Credit Risk Measurement") allows to split :

- Diversifiable volatility specific to individual risk
- Non-diversifiable volatility of systemic risks

The study will be based on individual data (all claims incurred and their characteristics) of the AXA France Auto's portfolio covering almost four million contracts recently exposed to systematic risk.

KEYWORDS :

Granularity - Kalman Filter- ACP - Monte Carlo Simulations - Copula - Economic Capital - Value at Risk - Dependence - Factor Models - Space State Models Classification - Risk Aggregation - Internal Model.

Remerciements

Je remercie l'équipe du GRM d'AXA, pour son professionnalisme et son accueil. Je tiens tout particulièrement à remercier Christian Yann ROBERT et Yannick APPERT RAULLIN pour la qualité de l'encadrement qu'ils m'ont apporté au cours de la rédaction de ce mémoire et Michel FROMENTEAU pour les conseils prodigués tout au long du cursus du CNAM. Merci Monsieur ROBERT d'avoir réveillé l'actuaire qui somnait en moi.

Ma gratitude va aux deux femmes de ma vie : ma mère Pierre et mon épouse Ketsia.

Shéki, Terry, Pripri, Béki, le CNAM vous rend votre père.

Enfin je dédie ce mémoire à celui sans qui rien ne serait possible : Dieu.

Table des matières

1	INTRODUCTION	8
2	PRESENTATION DE L'ETUDE	10
2.1	Préambule	11
2.1.1	Le groupe AXA	11
2.1.2	Le Produit Assurance Auto	13
2.1.3	La garantie DTA	15
2.2	Enjeu de l'étude	15
2.2.1	Limites des approches traditionnelles	15
2.2.2	Présentation de la technique de la granularité	25
2.2.3	Approche par facteur et théorie de la crédibilité en assurance	26
2.3	Description des données	27
2.3.1	Périmètre de l'étude	27
2.3.2	Description des bases de données	28
2.3.3	Sélection des variables et principaux retraitements	28
3	ESTIMATION DES FACTEURS	47
3.1	Introduction	47
3.2	Le modèle à panel dynamique	48
3.3	Du modèle général au modèle espace état linéaire	49
3.3.1	Estimateur de Maximum de vraisemblance CSA	51
3.3.2	Estimateur de Maximum de vraisemblance GA	53
3.4	Modélisation de la fréquence	54
3.4.1	Estimateur CSA	55
3.4.2	Estimateur GA	55
3.4.3	Application	56
4	MODELISATION DE LA VaR	61
4.1	Présentation de la VaR	61
4.1.1	Définitions	61
4.1.2	Propriétés des mesures de risque	61
4.1.3	Principales mesures de risque	62
4.1.4	La VaR en Assurance	63
4.2	Approche statique	64
4.2.1	Risque de portefeuille	65
4.2.2	Risque du portefeuille asymptotique	65
4.2.3	Application de la technique de la granularité	66
4.3	Approche dynamique	69
4.3.1	Le modèle	69
4.3.2	Ajustement par granularité	70
4.3.3	Modélisation de la VaR de la fréquence automobile	74
4.3.4	Applications numériques	80
4.3.5	Etudes de sensibilité	91

5	LIMITES ET PERSPECTIVES	96
5.1	Limites	96
5.1.1	La classification	96
5.1.2	L'estimation des facteurs	97
5.1.3	Aggrégation de la VaR	97
5.2	Apports	97
5.2.1	Intérêt des résultats	97
5.2.2	Importance de la dimension temporelle	98
5.3	Perspectives	98
5.3.1	Affiner l'approche et la problématique d'agrégation	98
5.3.2	Constitution de bases de données adéquates	99
5.3.3	Intégration dans le calcul du capital économique	99
6	CONCLUSION	103
7	BIBLIOGRAPHIE	105

INTRODUCTION

Table des matières

1 INTRODUCTION

La réglementation Solvabilité 2 dont l'entrée en vigueur est prévue pour 2013 encourage le monde de l'assurance à optimiser la gestion de ses risques. Dans cette dynamique, le régulateur a retenu la VaR comme mesure de risque. Il peut donc sembler nécessaire de savoir ce que mesure effectivement la VaR.

La technique de la granularité proposée par Gordy [Gordy (2003)] permet d'obtenir des formules de forme close de mesures de risque d'un portefeuille de grande taille à l'ordre $1/n$, où n est la taille du portefeuille. Cette méthode a d'abord été appliquée aux risques financiers notamment pour la modélisation de la VaR d'un portefeuille de crédit. L'intérêt de la décomposition qui en résulte est la possibilité de distinguer, par exemple, dans le calcul de la VaR du portefeuille, la part du risque due aux éléments spécifiques, de celle liée aux facteurs systématiques.

Notre étude a pour but d'appliquer cette méthode au portefeuille automobile d'AXA France. Dans le cas du risque auto les éléments spécifiques à l'assuré, ou variables tarifaires, qui influencent ce risque (fréquence de sinistre, coût de sinistre) sont bien identifiés, les principaux étant : le sexe, l'âge du conducteur et le coefficient bonus malus. Les facteurs systématiques, pour leur part, sont assez mal connus. En effet si l'influence de l'effet radar, les tempêtes et la grêle sur la sinistralité auto semblent indubitable, les lois de ces facteurs ne sont pas pour autant connus. C'est la raison pour laquelle ces composantes seront considérés, dans le cadre de notre étude comme latents car non observables.

Le Chapitre 1 va nous fournir le cadre nécessaire pour mener à bien notre objectif par la mise à notre disposition de sous-portefeuilles homogènes après application de méthodes de classification traditionnelles. Par la suite, dans le chapitre 2 nous procédons à l'estimation des facteurs systématiques influençant le risque auto. Nous utilisons pour ce faire le filtre de Kalman et la technique de la granularité dans un modèle à facteur. Les estimateurs obtenus sont intégrés au chapitre 3 dans le calcul de la VaR. La méthode de la granularité sera par la suite utilisée pour scinder la VaR en trois parties :

- la VaR du portefeuille infini (qui a atteint ses limites en matière de diversification) appelée VaR CSA,
- l'ajustement de granularité pour la filtration des facteurs,
- l'ajustement de granularité pour le risque.

La VaR de notre portefeuille est donc la somme de ces trois éléments mettant en exergue l'idée selon laquelle la diversification n'éliminerait pas tout le risque à cause notamment de l'impact des facteurs systématiques. La portée des résultats obtenus présente certes des limites étant données les hypothèses que nous faisons mais ouvre également des perspectives évoquées dans le chapitre 4.

PREMIERE PARTIE

PRESENTATION DE L'ETUDE

2 PRESENTATION DE L'ETUDE

2.1 Préambule

2.1.1 Le groupe AXA

2.1.1.1 Historique

De la première mutuelle à l'entité d'aujourd'hui, le groupe AXA s'est bâti à partir de fusions et d'acquisitions.

1817 Naissance de la première société à l'origine d'AXA : "La Compagnie d'Assurances Mutuelles contre l'Incendie dans le Département de la Seine Inférieure et de l'Eure".

1818-1946 Regroupement de nombreuses petites mutuelles régionales.

1946-1978 Achat de Provinces Unies et création des Mutuelles Unies au Canada. Prise de contrôle de la Mutuelle Parisienne de Garantie en France.

1982 Prise de contrôle du groupe Drouot.

1985 Après concertation, il apparaît que le groupe a besoin d'un nom court, symbole de sa dynamique. Le nom AXA est retenu.

1986 Prise de contrôle de la Providence et du Secours (groupe présence).

1988 Le groupe AXA entre à la Bourse de Paris.

1989 Fusion des quatre sociétés : AGP, Présence, Drouot et Mutuelles Unies qui donnent naissance à AXA Assurances, filiale de groupe AXA.

1996 Cotation à la bourse de New-York des actions du groupe AXA.

1997 Fusion-absorption avec L'UAP. Le groupe AXA devient l'un des tous premiers acteurs mondiaux de l'assurance.

2000 Départ de Claude Bébéar, président du groupe depuis 1975. Henry de Castries devient président du directoire.

2002 AXA fait l'acquisition de la Banque Directe, filiale du groupe BNP-Paribas et va créer AXA Banque.

2005 La fusion AXA-FINAXA permet à AXA de simplifier sa structure d'actionariat et de contrôle. AXA a une politique constante de distribution d'actions à ses salariés. Elle a deux buts : fidéliser ses salariés et se prémunir d'une offre publique d'achat (OPA). Les salariés détiennent entre 4% et 6% du capital .

2006 AXA achète l'assureur Suisse Winterthur Assurances mais ne garde pas la filiale américaine de l'assureur .

2007 AXA augmente sa présence en Suisse avec l'achat de la Nationale Suisse Assurance (filiale française de la nationale suisse).

2008 AXA achète la troisième compagnie Mexicaine ING Seguros.

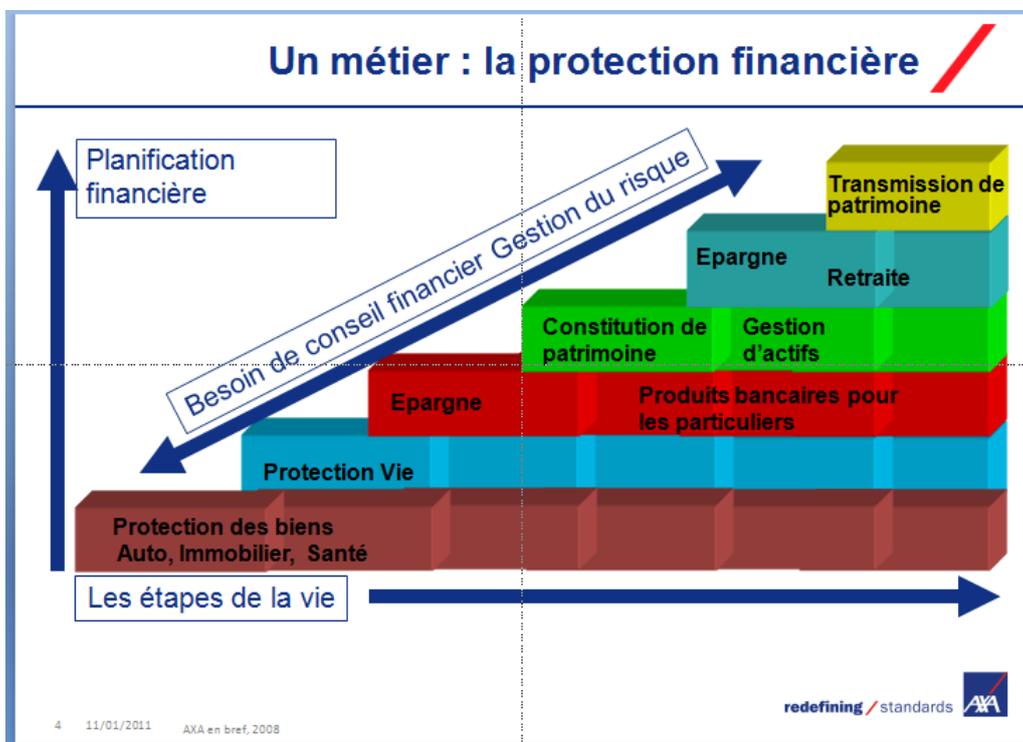
2009 AXA annonce le renforcement de sa position en Europe Centrale et de l'Est, à travers le rachat des intérêts minoritaires détenus par la Banque européenne pour la reconstruction et le développement (BERD) dans ses entités hongroises, tchèques et polonaises.

2010 AXA finalise sa réorganisation en Asie : Axa AMP Limited (AMP) et Axa Asia Pacific Holdings Limited (Axa APH) ont entériné leur accord relatif à l'opération permettant à AXA d'acquérir 100 % des activités asiatiques d'AXA APH auprès d'AMP, à la suite de l'acquisition de 100 % d'AXA APH par AMP.

AXA est aujourd'hui le quatrième assureur mondial par sa capitalisation boursière, derrière les chinois Ping An et China Life et l'assureur Allianz mais il arrive en première position grâce à ses primes émises.

2.1.1.2 Un métier : la protection financière

AXA est un assureur global dont le métier est la protection financière des personnes. Ce métier consiste à accompagner les clients : particuliers, professionnels, entreprises et institutionnels, au cours des différentes étapes de leur vie ou de leur développement. Il s'agit, comme l'illustre le graphique ci-après de leur apporter tous types de solutions et de services en matière d'assurances, de prévoyance, d'épargne, de crédits, de services bancaires et financiers, et de transmission de patrimoine.



Graphique 1

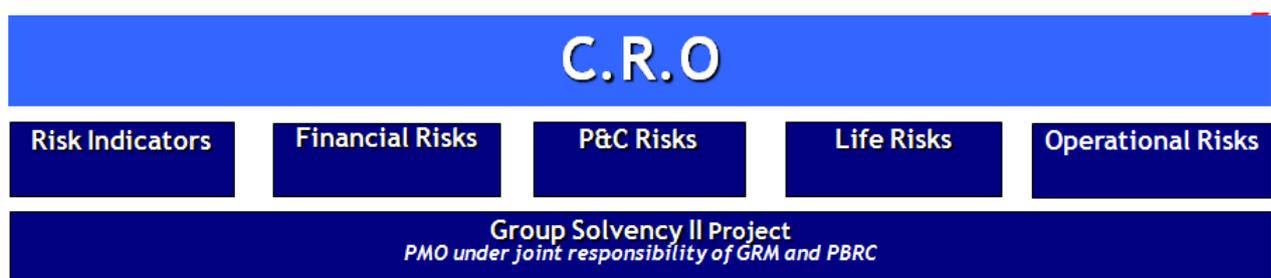
AXA exerce principalement ses activités en Europe, en Amérique du Nord, dans la région Asie / Pacifique et, dans une moindre mesure, dans d'autres régions telles que le

Moyen-Orient, l'Afrique et l'Amérique Latine. L'activité est organisée en cinq segments : vie, épargne, retraite, dommages, assurance internationale, gestion d'actifs et banques. Un segment Holdings regroupe en outre les sociétés non opérationnelles.

La diversification des activités d'AXA, tant sur le plan géographique que du point de vue des métiers, vise à mutualiser son exposition à différentes natures de risques. Par exemple, l'exposition au risque de mortalité peut être diversifiée en partie par de l'exposition au risque de longévité; et les risques Vie, Épargne, Retraite peuvent être en partie diversifiés par les risques dommages. De plus, la diversification géographique contribue à réduire la concentration des risques et la volatilité observée de la sinistralité.

2.1.1.3 Le GRM

Les fonctions centrales d'AXA (finance, ressources humaines, communication, achats, informatique, marketing...) sont réunies dans un groupement d'intérêt économique (GIE) basé à Paris. Le Group Risk Management (GRM) fait partie de ces fonctions supports centrales, c'est aussi une structure mise en place au cours de la dernière décennie qui a vu son importance croître avec l'émergence de la nouvelle réglementation Solvency 2. Son rôle est d'optimiser la gestion du risque du groupe par notamment, la diffusion continue auprès des entités des bonnes pratiques. Le GRM, comme l'indique le schéma ci-dessous est scindé en plusieurs pôles selon le type de risque considéré. C'est au sein du pôle P&C, qui a en charge notamment les risques AUTO et CATNAT (catastrophes naturels) que sera mené notre étude.



Graphique 2

Comme annoncé précédemment notre étude portera sur le portefeuille automobile d'AXA France, c'est la raison pour laquelle nous présentons au préalable les principales caractéristiques du produit auto proposé par AXA.

2.1.2 Le Produit Assurance Auto

L'activité dommages d'AXA, regroupe les assurances de dommages aux biens (automobile, habitation) et de responsabilité (civile et professionnelle). Elle couvre une large gamme de produits et de services destinée à une clientèle de particuliers et d'entreprises.

Les services d'assistance font également partie de cette activité dommages, qui recouvre enfin une activité d'assurance internationale pour les grandes entreprises européennes, ainsi que quelques lignes spécialisées, comme les assurances marine et aviation. L'activité dommages représentait 38 % de l'activité du Groupe en 2009.

L'assurance automobile est la principale branche des activités IARD d'AXA en terme de business et de chiffre d'affaire. Avant de voir les principales garanties proposées par ce type d'assurance, nous précisons dans la partie qui va suivre le type de biens que l'on retrouvera dans notre portefeuille d'étude.

2.1.2.1 Le bien assuré

Il s'agit :

- d'un véhicule terrestre à moteur de 3.5 tonnes ou moins,
- de l'ensemble que constitue ce véhicule avec une remorque qu'il tracte dont le poids total en charge est inférieur ou égal à 750 Kg,
- les sièges pour enfant pour autant qu'ils soient fixés et disposent d'un système de retenue homologué,
- le système antivol,

2.1.2.2 Les différentes garanties

→ La garantie responsabilité civile (RC) : c'est une garantie imposée par la loi. C'est l'assurance automobile minimale. Cette garantie joue lorsque des dommages matériels et/ou corporels sont subis par un tiers, à l'occasion d'un accident dans lequel le véhicule assuré est impliqué. Cette garantie est accordée sans limitation de somme pour les dommages corporels, et limitée pour les dommages matériels.

→ Assistance aux personnes et aux véhicules

→ Dommages aux véhicules : on distingue plusieurs garanties :

- Dommages tous accidents (DTA)
- Le vol
- Incendies
- Attentats
- Événements climatiques
- Catastrophes naturels
- Catastrophes technologiques
- Bris de glace

→ le Capital Réparation : permet de régler le coût des réparations dans la limite de la valeur économique du véhicule, au jour du sinistre.

→ La Défense Pénale et Recours suite à Accident (DPRSA) : l'assureur prend en main la direction de la transaction en matière civile avec les tiers lésés.

→ La protection juridique

→ La sécurité du conducteur : garanti l'indemnisation du préjudice corporel des personnes assurées en cas d'accident corporel de la circulation dont elles seraient victimes en tant que conducteur du véhicule assuré.

→ La garantie Décès du conducteur : versement au conjoint, en cas de décès du conducteur provoqué par un accident de la circulation routière et en l'absence de tiers responsable d'un capital.

2.1.3 La garantie DTA

La formule "Dommages Tout Accident " (DTA) garantit le véhicule assuré contre les dommages résultant :

- de la collision du véhicule assuré avec un ou plusieurs autres véhicules,
- du choc entre le véhicule assuré et un corps fixe ou mobile,
- du versement sans collision préalable du véhicule assuré,
- d'un acte de vandalisme.

Nous allons plus précisément étudier cette partie du risque auto couverte par la garantie DTA, car elle est plus susceptible d'être directement impactée par des facteurs systématiques tels que : l'effet radar, la grêle,...etc.

2.2 Enjeu de l'étude

Notre étude a pour but d'appliquer la méthode de la granularité au portefeuille auto d'AXA France pour scinder la part du risque liée au facteur systématique de celle due aux éléments spécifiques. L'enjeu est donc d'affiner l'estimation du risque d'un portefeuille automobile. Nous présentons dans un premier temps les insuffisances des approches traditionnelles de mesure du risque pour dans un second temps voir dans quelle mesure la technique de la granularité peut nous permettre de pallier ces limites.

2.2.1 Limites des approches traditionnelles

Le risque d'un portefeuille a souvent été associé à la notion de volatilité des éléments qui le composent. La théorie moderne du portefeuille a renforcé cette démarche par le critère de choix de portefeuille qu'elle a vulgarisé : le critère moyenne-variance. Cette théorie a démontré les bienfaits de la diversification en matière de réduction du risque du portefeuille. Mais ces deux fondamentaux que sont la volatilité comme mesure du risque et la diversification comme principale technique de réduction dudit risque présentent des limites essentielles.

2.2.1.1 Risque et volatilité

La volatilité est souvent confondue avec la notion de risque d'un portefeuille, à telle enseigne, la variance (ou l'écart type) qui la mesure à longterm est la référence en matière de mesure de risque. Elle est encore souvent calculée pour se faire une première idée du risque d'un portefeuille.

En mathématiques, plus précisément en statistiques et probabilités, l'écart type mesure la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne.

Dans le domaine des probabilités, l'écart type est une quantité réelle positive, éventuellement infinie, utilisée pour caractériser la répartition d'une variable aléatoire réelle autour de sa moyenne. En théorie de gestion de portefeuille l'écart type mesurant les fluctuations est appelée volatilité.

2.2.1.1.1 la notion de Risque en assurance

Quel que soit le produit d'assurance considéré, il est important de parler des risques au lieu du risque, dans la mesure où le risque d'un produit renvoie à plusieurs types de risques :

→ Les risques de souscription

Egalement appelés risques d'assurance ou risques actuariels, il s'agit des risques liés à la tarification insuffisamment prudente lors de la souscription ou du rachat de contrats.

Pour les risques dommages, il s'agit du risque de volatilité du résultat ou de la sinistralité sur les engagements passés et à venir.

Pour les risques vie, il s'agit du risque de table (inadéquation de la table de mortalité au portefeuille), de surmortalité, ou risque que la mortalité d'expérience du portefeuille soit différente de celle tarifée attendue par l'assureur. Il s'agit également de la volatilité de l'Embedded Value pour l'épargne.

L'assureur doit bien évaluer ces risques pour calculer la prime qu'il fera payer à l'assuré en tenant compte de la sinistralité attendue sur l'ensemble des assurés du portefeuille, selon le principe de la mutualisation des risques. Cette prime d'assurance est composée de différentes parties :

- la prime pure : c'est le montant du sinistre moyen auquel devra faire face l'assureur pour le risque. Mathématiquement, la prime pure est égale à l'espérance des pertes futures.
- le chargement de sécurité : ce montant vient s'ajouter à la prime pure. Il permet à l'assureur de pouvoir résister à la volatilité naturelle des sinistres.
- le chargement pour frais de gestion. Ces frais comportent aussi bien les frais de gestion des sinistres que la rémunération des apporteurs (agents généraux ou courtier)
- les taxes

Au sein d'un ensemble de risques mutualisés, il existe donc une volatilité résiduelle de la sinistralité. L'assureur ne connaît pas exactement le montant des sinistres qui va survenir. En tarifant les contrats au niveau de la prime pure (et en supposant une distribution des pertes symétriques), l'assureur perd de l'argent une année sur deux. En l'absence de

fonds propres, cette situation conduirait immédiatement à la faillite. Pour se protéger, l'assureur ajoute donc à sa prime un chargement de sécurité. De nombreuses méthodes permettant de le déterminer sont possibles, aucune n'ayant à ce jour supplanté largement les autres :

- Chargement proportionnel à la prime pure. Le coefficient de proportionnalité reflète l'idée que l'assureur a de la volatilité du risque.
- Chargement dépendant de l'écart type des pertes. Cette méthode est une légère formalisation de la précédente. Elle a la particularité d'introduire un chargement de sécurité qui dépendra des cas de gains (perte réelle inférieure à la prime pure).
- Chargement dépendant d'un certain quantile des pertes (par exemple le troisième quartile). Un tel chargement permet de garantir que la prime sera suffisante dans un nombre de cas déterminé à l'avance, mais ne donne aucune information sur les cas de pertes techniques.

A ce premier type de risque lié à la souscription viennent s'ajouter d'autres risques que sont :

→ **Le risque de réserve**

C'est le risque lié à la nature aléatoire de l'évaluation des sinistres et à leur mauvaise estimation.

→ **Les risques de liquidité**

Il s'agit du risque pour l'assureur de devoir faire face à un besoin important de liquidité, suite à une vague de rachats massifs ou à une grande déviation de la mortalité du portefeuille par exemple. Les vagues de rachat massifs sont souvent dues à une hausse des taux d'intérêt.

→ **Les risques opérationnels**

Les risques opérationnels résultent d'inadéquation des systèmes avec les moyens alloués, des dysfonctionnements "techniques" ou d'erreurs humaines, de fraudes, de défaillances diverses, de litiges, de pannes, etc. On peut par exemple citer la survenance d'un échec dans les procédures de contrôle des portefeuilles, un ralentissement des procédures de gestion des contrats ou dans les systèmes internes. De même, les événements extérieurs tels que le risque juridique (législation, jurisprudence) ou les conséquences logistiques d'une catastrophe naturelle font partie de cette catégorie de risque. Ce risque étant difficile à modéliser, les exigences quantitatives sont accompagnées d'importantes exigences qualitatives. Il est d'ailleurs traité à part par le CEIOPS.

→ **Les risques crédit ou risque de défaut**

Le risque de défaut en assurance représente une part minimale par rapport aux autres catégories de risque. Elle concerne la défaillance d'un réassureur. Celui-ci peut être insolvable ou contester la prise en charge de certains sinistres. Or, seul l'assureur est tenu d'indemniser l'assuré en cas de sinistre. En effet, l'assureur doit indemniser son assuré en cas de sinistre même si le réassureur ne respecte pas son engagement, car le contrat de réassurance ne lie juridiquement que l'assureur à son réassureur. Afin de mesurer le risque de défaut, on étudie l'exposition de la compagnie en évaluant les réassureurs en fonction de leur solidité financière. A noter que pour les compagnies utilisant des mécanismes de réassurance interne, le projet de directive prévoit de calculer le besoin en capital en fonction du SCR de la contrepartie, c'est-à-dire la compagnie elle-même.

→ **Les risques de marché**

Egalement appelés risques d'allocation Actif-Passif ou risque systémiques, il s'agit du risque lié aux instruments financiers mis en représentation de l'actif et dont les cours sont susceptibles de varier. Le CEIOPS en a reconnu six : le risque actions, celui des obligations, l'inflation, les cours de l'immobilier, les taux d'intérêt, et la concentration. Le SCR devra être calculé pour chacune de ces classes de risque (action, taux d'intérêt, concentration, taux de change, immobilier et risque de spread de crédit).

Les risques "hors souscription" se mesurent souvent, dans une première approche, par la volatilité des actifs constitutifs du portefeuille considéré surtout en ce qui concerne le risque de marché.

En résumé, toute compagnie d'assurance doit faire face à plusieurs catégories de risques qu'elle gère par des méthodes appropriées. Solvency 2 vient encadrer cette démarche dans le but de renforcer la solidité financière des entreprises pour mieux protéger l'assuré.

2.2.1.1.2 Evaluation et gestion des risques dans le cadre de solvabilité 2

De l'approche déterministe à l'approche probabiliste

L'appréciation d'un risque nécessite de pouvoir estimer les deux composantes « probabilité de survenance » et « gravité » des sinistres. L'estimation de la probabilité d'occurrence est rendue possible par l'application de formules statistiques et mathématiques alors que la gravité est habituellement appréciée à l'aide de la modélisation des processus et phénomènes de sinistralité. D'après ces définitions, deux approches se dessinent pour étudier et évaluer les niveaux de sinistralité potentielle d'une situation. L'approche déterministe et l'approche probabiliste.

La première met l'accent sur l'évaluation et le contrôle des conséquences possibles d'un accident. La mesure porte sur les niveaux de prévention et de protection existants par rapport à un danger. Lorsqu'un danger est identifié, des mesures de prévention sont mises en place.

La seconde approche estime, comme son nom l'indique, la probabilité de survenance de l'accident. Dans la gestion de risque, le modèle probabiliste a pour objectif de démontrer que la probabilité de survenance est maintenue à des valeurs acceptables.

Afin que les résultats obtenus par cette approche soient les plus fiables possible, il est nécessaire de prendre en compte toute évolution des informations de base servant aux calculs. Par exemple, pour l'estimation du risque d'un portefeuille automobile, celle-ci devra mettre en place un système d'information complet comprenant : un historique des sinistres, un récapitulatif des principales variables explicatives du risque...

Ainsi, ce type de mesure de risque requiert un système d'information élaboré et tenu à jour.

Pour résumer, l'approche déterministe se concentre sur l'estimation de dangers identifiés et l'approche probabiliste évalue quantitativement les risques potentiels. Dans une étude de risque optimale, ces deux approches sont associées et non opposées.

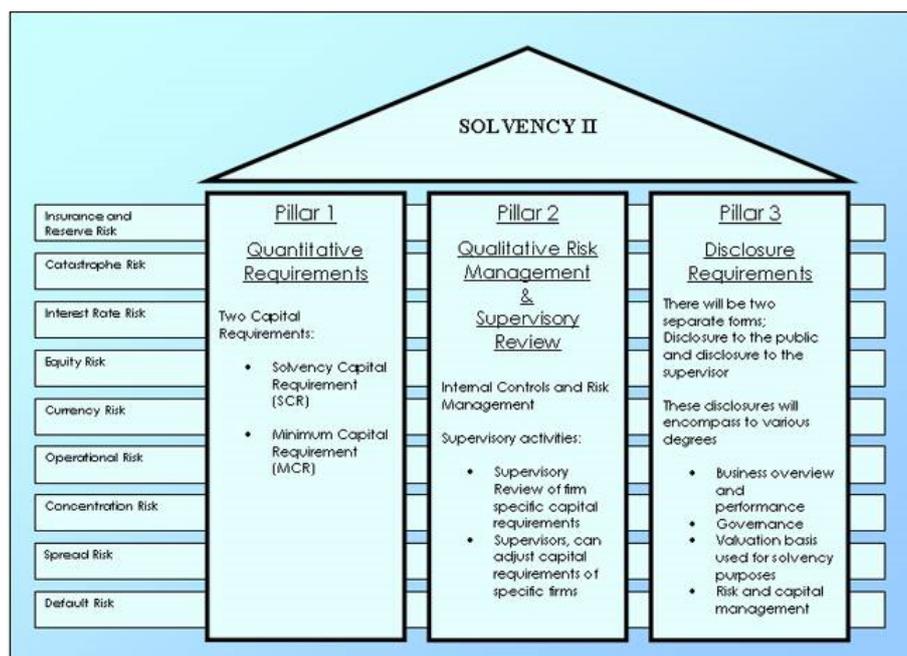
En réalité, la définition même de « risque » implique que son évaluation se fasse prioritairement via l'évaluation probabiliste.

Le projet de directive semble privilégier l'approche probabiliste, tout en ne négligeant pas l'intérêt des modèles déterministes. En effet la quantification mathématique des niveaux de risque est au coeur de Solvency II.

Les outils mathématiques de calcul de risque sont nombreux. Les principaux mis en avant dans le projet de directive regardent la volatilité des passifs et la corrélation linéaire entre les portefeuilles, ainsi que la VaR.

Solvency 2 et les trois piliers

La structure de Solvency II repose, comme le montre le graphique 3, sur 3 piliers : le premier fixe les exigences quantitatives en capital au regard des risques encourus, le second gère le processus de contrôle par le superviseur, et le troisième traite de la transparence financière et de la communication publique des entreprises d'assurance.



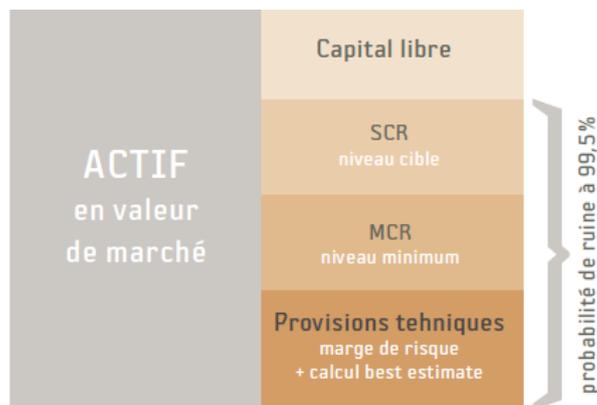
Graphique 3

Le premier pilier se rapporte à l'évaluation des provisions techniques, du capital de solvabilité et des actifs. Solvency 2 préconise une approche "fair value", c'est à dire la prise en compte de la valeur de marché de tous les postes du bilan. (voir graphique 4). Le calcul des provisions comporte deux phases :

- Le best estimate est la valeur actuelle probable des flux futurs de trésorerie, c'est à dire la moyenne des paiements futurs actualisés. Le Best Estimate peut être calculé de multiples façons (lois statistiques, etc)
- La Market Value Margin constitue une marge de prudence dans l'estimation des provisions techniques. Elle offre un complément de provision et sert en quelque sorte d'amortisseur au cas où le best estimate des engagements techniques serait insuffisant. Dans le cadre des nouvelles réglementations, une approche Cost of Capital (COC) a été retenue pour son calcul (spécifications QIS5). La marge pour risque de type COC est définie comme le coût de la valeur actuelle (à $t = 0$) du futur capital requis de solvabilité (SCR), que l'entreprise de référence devra établir durant

la liquidation du portefeuille d'actifs et de passifs pour un compte de résultat en vigueur en $t = 1$.

Le premier volet de Solvency II accentue également l'exigence en terme de quantité et de qualité du capital et instaure, comme l'illustre le graphique suivant, deux paliers dans le capital de solvabilité, le SCR et le MRC.



Graphique 4

Le Capital de Solvabilité Requis (SCR) a pour rôle d'absorber les pertes imprévues, en cas d'exercice à forte sinistralité par exemple. En cas de non respect, la compagnie doit décider d'un plan d'action qui devra être approuvé par le superviseur. Le SCR est calculé via une formule standard ou via un modèle interne élaboré par la compagnie et doit correspondre à une Value at Risk de 99,5 %, en d'autre terme à une probabilité de survenance de faillite d'une fois tous les 200 ans.

Le Minimum de Capital Requis (MCR) est inclus dans le SCR. Il s'agit du montant minimum de fonds propres à détenir sous peine d'intervention du superviseur avec un possible retrait d'agrément. Son calcul devant être « robuste, simple, et auditable », il n'impliquera pas de modèle interne et devrait vraisemblablement correspondre à une Value at Risk entre 80 et 90 % à un an.

Le second pilier expose les procédures de surveillance. Il aborde les thèmes du contrôle interne, de la gestion des risques et de la gouvernance de chaque entreprise. Quant à la supervision, elle est réalisée « sur pièce et sur place ». Il s'agit d'un contrôle principalement qualitatif (test de stress et test de continuité).

Enfin, le troisième et dernier pilier aborde le thème de l'information prudentielle et publique avec, d'un côté, la publication d'informations financières par les compagnies pour une amélioration de la transparence et la promotion d'une meilleure discipline de marché, de l'autre des "reportings" aux superviseurs dont un dossier annuel.

Un objectif commun ressort de l'étude de chacun de ces piliers : la volonté de minimiser les risques encourus par une compagnie, quels qu'ils soient, au travers de l'identification et de la gestion des risques. Le but principal étant bien entendu de mettre les assurés à l'abri de tout défaut de la part de l'assureur.

Solvency 2 et la titrisation

Solvency II reconnaît la complexification des véhicules financiers et tente d'évaluer pour chacun d'entre eux le niveau de capital nécessaire. Mais la sophistication des montages financiers brouille les pistes et cache la localisation réelle du risque, car ces montages financiers peuvent être utilisés pour couvrir les risques financiers précédemment décrit. Les principaux montages financiers sont l'utilisation de produits dérivés tels que la titrisation.

La titrisation (Securitization en anglais) est une technique financière qui consiste classiquement à transférer à des investisseurs des actifs financiers tels que des créances (par exemple des factures émises non soldées, ou des prêts en cours), en transformant ces créances, par le passage à travers une société ad hoc, en titres financiers émis sur le marché des capitaux. Elle s'opère en regroupant un portefeuille (c'est-à-dire un lot) de créances de nature similaire (prêts immobiliers, prêts à la consommation, factures mono-thématique, ...) que l'on cède alors à une structure ad hoc (société, fonds ou trust) qui en finance le prix d'achat en plaçant des titres auprès d'investisseurs. Les titres (obligations, billets de trésorerie, ...) représentent chacun une fraction du portefeuille de créances titrisées et donnent le droit aux investisseurs de recevoir les paiements des créances (par exemple quand les factures sont payées, ou quand les prêts immobiliers versent des mensualités) sous forme d'intérêts et de remboursement de principal.

Les actifs titrisables sont très nombreux puisque tout produit dégagant des cash flows réguliers peut être utilisé comme support. Outre les classiques crédits, on peut ainsi titriser des créances commerciales, des loyers d'actifs mobiliers ou immobiliers, des royalties, des flux futurs, le risque auto ou CATNAT (CAT bond) en résumé à peu près tout actif ou droit dont on peut raisonnablement prévoir les flux financiers futurs. La titrisation du risque d'assurance consiste en un échange de principal contre paiements périodiques de coupons, dans lequel le paiement des coupons et/ou le remboursement du principal sont conditionnés par la survenance d'un événement déclencheur défini à priori (tremblement de terre par exemple).

La titrisation peut également viser à ne transférer aux investisseurs que le risque financier lié aux actifs concernés, auquel cas les actifs ne sont pas vendus, mais le risque ou partie du risque transféré grâce à une titrisation synthétique. Née aux États-Unis dans les années 1960, la titrisation a connu une expansion importante également en Europe à partir de 2000, tandis que les produits et les structures devenaient de plus en plus complexes. En France, la titrisation a été introduite par la loi du 23 décembre 1988. Sous l'impulsion de Pierre Bérégovoy, l'idée était de faciliter le développement du crédit immobilier en permettant aux banques de sortir les créances de leurs bilans et d'améliorer leur ratio "Cooke". La crise des subprimes survenue en 2007 a provoqué un ralentissement du marché, cela n'a pas empêché AXA de titriser, fin 2010 son risque catnat.

2.2.1.2 Les limites de la diversification

La diversification est un élément clé de la gestion du risque de portefeuille car elle permet de réduire la volatilité. En effet selon l'optique traditionnelle de l'assurance, les assureurs tentent de composer des portefeuilles dont les risques individuels sont les plus indépendants possible. Les concepts de diversification et de dépendance se retrouvent également dans la théorie financière de gestion de portefeuille. Ils sont incorporés dans

le "Capital Asset Pricing Model" ou CAPM, introduit indépendamment par Jack Treynor, William Sharpe, John Linter, et Jan Mossin qui se basèrent sur les travaux antérieurs de Harry Markowitz sur la diversification et la théorie moderne du portefeuille. La qualité de réduction de la volatilité de portefeuille de la diversification est notamment liée aux propriétés des théorèmes asymptotiques de base.

2.2.1.2.1 L'approche de Markowitz

Sur le plan technique, il s'agit d'un problème d'optimisation quadratique bien défini. Son originalité réside dans l'application de ce modèle d'ingénieur au monde de la finance. Le modèle fait deux hypothèses fortes :

- les marchés d'actifs financiers sont efficients. C'est l'hypothèse d'efficience du marché selon laquelle les prix et rendements des actifs sont censés refléter, de façon objective, toutes les informations disponibles concernant ces actifs ;
- les investisseurs sont averses au risque (comme cela est montré par Daniel Bernoulli) : ils ne seront prêts à prendre plus de risques qu'en échange d'un rendement plus élevé. À l'inverse, un investisseur qui souhaite améliorer la rentabilité de son portefeuille doit accepter de prendre plus de risques. L'équilibre risque/rendement jugé optimal dépend de la tolérance au risque de chaque investisseur.

Le paradigme de Markowitz permet d'obtenir des portefeuilles efficients au sens moyenne-variance ; il met en exergue la problématique du risque systématique (introduction du bêta) dans un portefeuille qui ne peut être éliminé par la diversification mais ne propose pas de méthode pour résoudre cette difficulté.

En effet, cette approche permet d'aboutir à un modèle où le rendement d'un actif i à la date t obéit à l'égalité suivante :

$$R_{it} = \alpha_{it} + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it}$$

Où β_i mesure le risque systématique, ε_{it} le risque idiosyncratique ou spécifique qui peut être éliminé par diversification, R_{Mt} le rendement du marché, α_{it} l'alpha du titre désignant la performance de ce dernier si le marché dans son ensemble a une rentabilité nulle.

Le rendement d'un portefeuille sera égale à la somme pondérée du rendement des actifs qui le compose.

Cette modélisation présente plusieurs limites :

- la stabilité dans le temps des β n'est pas assurée, ce qui rend difficile l'utilisation des techniques de régression linéaire standard,
- les risques diversifiables ε_{it} sont empiriquement plus ou moins corrélés et sont le plus souvent hétéroscédatiques (à variance non constante), ce qui rend inefficaces les estimateurs obtenus par régression simple. Si les résidus sont corrélés le modèle est mal spécifié (il manque au moins une variable explicative). S'ils sont hétéroscédatiques, il faut utiliser les moindres carrés généralisés.

Par ailleurs le modèle de Markowitz ne peut pas retranscrire les contraintes de passif auxquelles les assureurs sont soumis.

Cette propriété essentielle de réduction de la volatilité reconnue à la diversification repose, comme nous le démontrons par la suite, sur les théorèmes asymptotiques de base.

2.2.1.2.2 Les théorèmes asymptotiques de base

Hypothèses de régularité A1 : Soient y_i pour $i = 1, \dots, n$, variables aléatoires iid avec des moments de second ordre. Ces observations peuvent être multidimensionnelles. La moyenne commune (resp. matrice de variance-covariance) de y_i est noté $m = E(Y_i)$ [resp $V(Y_i) = \Sigma$].

On peut dans ce cadre obtenir les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.1 loi des grands nombre : Sous l'hypothèse A1 la moyenne empirique $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ tend vers la moyenne théorique $m = E(Y_i)$.

Théorème 1.2 Théorème central limite : Sous l'hypothèse A1 la moyenne de l'échantillon est asymptotiquement gaussienne :

$$\sqrt{n}(\bar{Y}_n - m) \xrightarrow{L} N(0, \Sigma)$$

Ces deux théorèmes sont très importants en statistiques ; ils sont utilisés pour prouver la cohérence et la normalité asymptotique du maximum de vraisemblance ou estimateurs de type moments (sous les hypothèses de régularité). Ils peuvent également être utilisés pour établir les principaux résultats (en économie) de la théorie financière.

Nous pouvons, par exemple, considérer n assurés avec $y_{i,t}$ $i = 1, \dots, n$: le nombre de sinistre de l'individu i sur la période $(t, t+1)$. Par ailleurs notons n' le nombre totale d'années police du portefeuille considéré et N : le nombre total de sinistres sur la période. Supposons que les $y_{i,t}$ satisfont l'hypothèse A1. La moyenne empirique :

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{N}{n'} \quad \text{correspond à la fréquence d'accidents.}$$

Le nombre d'accident est souvent modélisé par une loi de poisson de moyenne $\frac{N}{n'}$ et d'écart type $\sqrt{\frac{N}{n'}}$. Par conséquent si n' tend vers l'infini, la volatilité tend vers zéro. En effet quand le nombre d'années police tend vers l'infini, l'écart type tend vers zéro.

A l'issue de ce raisonnement nous sommes conduits à nous interroger : peut-on conclure qu'une diversification infinie annule intégralement le risque ?

Si oui, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 1.3 : Sous l'hypothèse A1, le risque est totalement éliminé par la diversification.

2.2.1.3 Introduction des facteurs systématiques

Les deux théorèmes précédents peuvent être étendus à des séquences de variables satisfaisant des hypothèses moins fortes que les hypothèses A1. Par exemple, aux séries

temporelles stationnaires, ou à des variables avec des distributions hétérogènes. Cependant, les théorèmes limites peuvent être fortement modifiés par d'autres changements de l'hypothèse de base. Pour illustrer cela, supposons que les observations obéissent à l'égalité suivante :

$$y_i = F + u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où :

μ_1, \dots, μ_n de même distribution de moyenne 0 et de variance σ^2
 F : variable aléatoire de moyenne μ , de variance η^2 , de densité de probabilité g
 F, μ_1, \dots, μ_n sont des variables indépendantes.

Les variables y_i pour $i = 1, \dots, n$ ont des distributions marginales identiques avec comme moyenne $E(Y_i) = \mu$, et de variance $V(Y_i) = \sigma^2 + \eta^2$. Cependant ces variables sont liées à cause du facteur F . Par exemple, la corrélation entre deux observations est :

$$\text{Corr}(Y_i, Y_j) = \frac{\eta^2}{\sigma^2 + \eta^2}, \quad i \neq j.$$

Si on considère la moyenne de l'échantillon. Nous avons :

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = F + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$$

En appliquant la loi des grands nombres, nous en déduisons le comportement asymptotique suivant :

Proposition 1.5 : Dans le modèle à facteur, la moyenne de l'échantillon tend vers la valeur du facteur. En particulier cette limite est stochastique et différente de la moyenne commune $E(Y_i)$.

En d'autres termes, les risques spécifiques : μ_1, \dots, μ_n peuvent être diversifiés, mais pas le risque systématique F . La diversification ne peut donc pas éliminer totalement le risque.

Si on considère maintenant la distribution asymptotique de la moyenne de l'échantillon :

- On peut tout d'abord supposer que n est infinie, nous obtenons que la moyenne \bar{Y}_n tend vers F et la distribution asymptotique est simplement la distribution de F . Car dans ce cas le deuxième terme $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$ s'annule.
- Dans le cas où n est grand, mais fini, nous obtenons une approximation plus précise de la distribution en appliquant le théorème central limite pour μ_1, \dots, μ_n conditionnellement au facteur F :

$$\bar{Y}_n/F \xrightarrow{L} N(F, \sigma^2/n)$$

En intégrant par rapport au facteur non observable F on obtient la loi approchée de \bar{Y}_n . Notons $h_n(y)$, cette distribution qui correspond à la distribution de la sinistralité moyenne :

$$h_n(y) = \int \frac{1}{(\sigma\sqrt{n})\sqrt{2\Pi}} \exp\left[-\frac{n(y-F)^2}{2\sigma^2}\right] g(f)df$$

avec F représentant les facteurs systématiques et g leur distribution.

c'est un mélange de distributions gaussiennes. Dans le cas limite où n tend vers l'infini, h_n tend vers g, ce qui correspond au cas i).

Dans cet exemple nous devons distinguer l'analyse asymptotique correspondant au cas $n = \infty$ (CSA) et à la distribution $h_\infty(y) = g(y)$ et l'ajustement de granularité (GA), égal à $h_n(y) - g(y)$ qui doit être appliqué quand n est important mais fini. Le résultat ci-dessus repose sur l'application de la loi des grands nombres et du théorème central limite conditionnellement au facteur F. Quand cela est possible, le modèle est dit être infiniment granulaire ou infiniment à grains très fins.

Il est donc impossible d'éliminer totalement le risque par une diversification infinie. La technique de la granularité nous permettra de séparer la part du risque diversifiable, de celle qui ne l'est pas.

2.2.2 Présentation de la technique de la granularité

La technique de la granularité, introduite par Gordy(2004), a notamment été insérée dans le second document consultatif de Bâle 2 . Elle a d'abord été utilisée pour analyser le risque de portefeuilles financiers de taille importante (notamment des portefeuilles de crédit), et en particulier pour obtenir des estimations précises des fonds propres dans le cadre de cette régulation bancaire.

Cette méthode, qui consiste en un développement limité d'une fonction, est applicable à tout modèle de panel à facteurs dynamiques non observables, dès que la taille n de la population considérée est suffisamment grande. En d'autres termes, on peut appliquer cette méthode à des ensembles de données influencées par des facteurs externes. Elle conduit à des développements théoriques et appliqués très variés, par exemple :

- elle fournit des formules de filtrage et de prévisions approchées explicites dès que le nombre de mesures est grand. Elle permet par une bonne utilisation de prendre en compte l'information microéconomique disponible pour reconstituer et analyser les

dynamiques micros (individuelles) et macro (celles dues au facteur) aussi complexes soient elles,

- elle permet de définir les produits dérivés de façon plus adaptée et de les valoriser, dès que le support s'appuie sur un grand nombre de risques individuels,
- elle fournit des formules explicites des "ajustements de granularité"(GA) pour les portefeuilles efficients, leur VaR et leur performance de Sharpe.

Cette méthode, qui fournit des formules explicites approchées de la VaR, permettant ainsi de définir le capital pour couvrir des portefeuilles de grande taille, se décompose en deux étapes :

- premier temps : on évalue le cas limite du portefeuille de taille infinie (CSA),
- deuxième temps : on effectue un développement limité par rapport à la taille effective du portefeuille au voisinage de l'infini. Le premier terme de ce développement, de l'ordre $\frac{1}{n}$, constitue l'ajustement de granularité (GA) : il permet de déterminer le montant du capital nécessaire pour couvrir les effets, non complètement diversifiés, des risques individuels spécifiques.

L'intérêt de cette théorie est lié au manque de robustesse des théorèmes asymptotiques standard tel que la loi des grands nombres et le théorème central limite et à l'impossibilité des méthodes traditionnelles de pouvoir bien apprécier le risque systématique.

Notre objectif est d'adapter cette approche à notre portefeuille d'assurance. Cette technique nous permettra de calculer la VaR analytique de notre portefeuille comme la somme de deux éléments :

-une VaR infinie (VaR CSA) qui rend compte de l'effet de la partie systématique du risque, quand la taille du portefeuille est infini, c'est à dire quand les possibilités de diversification sont épuisées ;

-un ajustement de granularité (GA) qui mesure l'effet des risques spécifiques individuels et leur effet croisé avec le risque systématique quand la taille du portefeuille est très grand mais fini.

Pour notre étude, il est également nécessaire d'estimer les facteurs, car ils ne sont pas observés de plus nous ne connaissons pas leur loi et ne disposons pas de données les concernant. On va donc utiliser également la technique de granularité pour l'estimation des facteurs.

2.2.3 Approche par facteur et théorie de la crédibilité en assurance

Le système bonus-malus, abordé dans la section suivante à travers les coefficients réduction majoration (CRM), poursuit pour objectif l'ajustement du montant de la prime au cours du temps afin que celui-ci reflète le risque réel que l'assuré met à la charge des individus de sa mutualité établie sur la base des variables tarifaires. Les travaux sur les systèmes bonus-malus, et notamment ceux de Delaporte, sont à l'origine de la théorie de la crédibilité qui est celle de l'estimation linéaire appropriée au contexte de l'assurance. Dans un environnement réglementé, il s'agit d'affiner l'opinion que l'assureur se faisait à

priori du risque à assurer (telle que reflété par le tarif) grâce à la sinistralité observée. La théorie de la crédibilité veut prendre en compte dans la tarification :

- l'hétérogénéité au sein d'un portefeuille entre les classes de risque,
- l'hétérogénéité " résiduelle " au sein d'une classe de risque.

Elle repose pour se faire sur des approches semi-paramétriques de tarification, basées sur des modèles à variables cachées connues dans la littérature actuarielle sous le terme de modèles de crédibilité.

Même si notre objectif n'est pas de tarifier, il existe un lien évident entre notre démarche qui vise à estimer les facteurs systématiques qui influencent le risque et la théorie de la crédibilité. Cependant les facteurs que nous considérons sont des facteurs communs " non observables " (effet radar, grêle, évolution du prix du carburant...) sur lesquels l'individu n'a pas de prise, alors que la théorie de la crédibilité peut considérer comme facteurs non observables : l'agressivité au volant, la consommation de boissons alcoolisées ou de drogues, la justesse des réflexes, l'acuité du jugement qui ne sont pas a proprement parlés des facteurs communs.

En vertu de la théorie de la crédibilité le montant de la prime est réajusté à postériori en fonction de la sinistralité constatée, laquelle révèle les facteurs non observables évoqués plus haut.

En conclusion, dans les deux approches l'idée est d'estimer les facteurs non observables(ou non mesurables), cependant on ne considère pas les mêmes types de facteurs. Par ailleurs, le but ultime de notre démarche est de mesurer l'impact des facteurs non observables sur la mesure du risque (la VaR) alors que la crédibilité est surtout utilisée pour mieux discriminer le tarif en tenant compte de l'hétérogénéité supplémentaire générée par ces facteurs inobservables.

2.3 Description des données

2.3.1 Périmètre de l'étude

L'objectif étant de voir l'impact des facteurs systématiques dans le risque auto, nous limiterons notre étude à l'impact de ces facteurs à la garantie DTA. Pour rappel, la garantie DTA (Dommages Tous Accidents), souvent qualifiée de "tous risques", couvre les dommages atteignant le véhicule et résultant :

- soit du versement (tonneau, chute dans un ravin...),
- soit d'un choc avec un corps fixe (mur, arbre...) ou mobile (voiture, animal, piéton).

On y intègre en général, les dommages causés par : la tempête, la grêle, la neige et autres événements naturels (en l'absence de garantie spécifique). Les pneumatiques , sauf exception, ne sont couverts que si leur détérioration est l'accessoire de dégâts causés au véhicule.

Notre portefeuille d'étude se limitera donc aux assurés qui détiennent cette garantie.

→ Nous considérons les contrats présents dans le portefeuille entre le 01/01/2007 et le 31/12/2008. Même si un individu n'est pas présent sur toute la période considérée nous faisons le choix de le comptabiliser sur la durée où il est présent dans le portefeuille, ce qui nous permet d'éliminer aucun élément contribuant au risque global.

→ Le périmètre est AXA France. Nous excluons les entités Natio, Mutuelle Saint-Christophe, Etranger, Outre-Mer et AXA Partenaires, qui ont des tarifs et des règles de souscriptions particulières.

→ Nous étudions les véhicules 4 roues. Nous ne nous intéressons pas aux camping-cars, aux voiturettes et aux motos.

2.3.2 Description des bases de données

Nous considérons deux fichiers relatifs à deux bases annuelles (2007 et 2008) constitutives du portefeuille auto d'AXA France. Pour chaque base les informations disponibles que nous avons utilisées sont stockées dans une table de résultats techniques, cette table étant éditée trimestriellement. La table est étudiée du 01/01/n au 01/12/n. Dans une base chaque enregistrement correspond à un risque assuré sur la période. On y retrouve les principales caractéristiques du risque : la durée d'exposition du risque (années police), des données sur l'assuré (âge, sexe, ancienneté de permis,...), des données sur le véhicule (énergie, classe de prix,...), et bien entendu des données techniques (primes, charge sinistre).

En d'autres termes nous disposons de deux bases annuelles (2007 et 2008) qui donnent des caractéristiques d'individus ayant souscrit un contrat auto AXA. Ces caractéristiques sont résumées par 240 variables en colonne, en ligne sont portées les individus : 39206724 en 2008 et 3691314 en 2007. Etant donné que tous les événements relatifs au contrat individuel au cours d'une même année sont constatés (déchéance, sinistres, choix d'une nouvelle garantie ou franchise etc) on dénombre donc 7217648 observations (en ligne) pour 2007 et 7590690 observations en ligne pour l'année 2008.

L'objectif de l'étude est de « capter » la part spécifique du risque (relative aux caractéristiques du conducteur et du bien assuré en l'occurrence la voiture) qui est diversifiable et la part systématique (non diversifiable) qui relève d'éléments externes comme l'effet radar, la grêle, les tempêtes etc...

2.3.3 Sélection des variables et principaux retraitements

2.3.3.1 Sélection des variables

L'objectif est de sélectionner les variables expliquant le mieux le risque des individus (fréquence/coût) pour la garantie dommages. Nous nous reposerons donc sur les variables tarifaires généralement retenues par les assureurs auto pour le risque auto DTA.

Pour rappel le risque auto d'un individu soutend deux éléments : la fréquence et le coût des sinistres de l'individu en question. Cette approche fréquence coût est à la base du calcul de la prime. En effet si on s'intéresse à la charge de sinistre X pour un risque déterminé sur une période donnée ; cette charge est une somme : $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$ où N est le nombre aléatoire de sinistres durant la période considérée et où Y_1, Y_2, \dots, Y_N sont les montants aléatoires des sinistres successifs.

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i$$

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^N Y_i)$$

Si on suppose que :

- les variables Y_1, Y_2, \dots, Y_N sont des variables iid
- la distribution commune des Y_i ne dépend pas de N et N ne dépend pas des Y_i

alors :

$$E(X) = E(N) \times E(Y)$$

Prime pure = Fréquence \times Coût Moyen

Plutôt que d'estimer directement la prime pure, on modélise séparément la fréquence et le coût des sinistres.

L'intérêt de la décomposition fréquence-coût réside dans le fait que ces deux variables ont des lois de distribution usuelles, alors qu'il est difficile d'adosser à la prime pure un tel type de loi. De plus, les variables qui expliquent la fréquence ne sont pas forcément les mêmes que celles qui expliquent le coût des sinistres d'où l'intérêt de l'étude séparée de ces deux composantes de la sinistralité.

Nous adopterons donc une démarche en deux temps :

- la sélection des individus ayant souscrit la garantie DTA (dommages tout accidents) : un peu plus de la moitié des individus des deux bases (53.16 % pour la base 2008). Rappelons que contrairement à la garantie RC (responsabilité civile), la garantie DTA n'est pas obligatoire. C'est cette partie du risque auto sur laquelle portera notre analyse car l'impact des facteurs systématiques y est plus aisément identifiable,
- le choix pour chaque base des variables tarifaires retenues par AXA et les principaux assureurs de la place en matière de tarification du risque dommages pour la modélisation fréquence coût. Pour la fréquence nous retiendrons comme variables : l'âge du conducteur, son sexe, son CRM (critère bonus-malus), l'ancienneté du permis, l'âge du véhicule et sa vitesse maximale. Pour le coût : le CRM, l'âge et le sexe du conducteur, l'âge, la classe de prix et le type de carrosserie du véhicule.

Le risque étant identifié, d'autres prérequis sont nécessaires pour mener à bien notre étude :

- une périodicité suffisante pour obtenir notamment de bons estimateurs pour les facteurs systématiques : nous optons pour la fusion des deux bases et par la suite pour la mensualisation de la base obtenue,
- une base d'individus homogène : nous décidons de la mise en place d'une classification pour obtenir des classes homogènes.

2.3.3.2 Constitution de classes homogènes par classification

Le but ici est d'obtenir des classes homogènes d'individus, condition nécessaire pour appliquer notre modélisation par la validation de l'existence d'un processus factoriel sous-jacent, tel que les processus de risques individuels Y_1, \dots, Y_n sont iid conditionnellement aux facteurs. Cette propriété sera démontrée dans le chapitre suivant.

Pour obtenir ces bases homogènes trois étapes seront nécessaires : une analyse en composantes principales (ACP), une classification mixte puis une classification ascendante.

2.3.3.2.1 Mise en place de l'ACP

Dans un premier temps une ACP sera effectuée pour nous familiariser avec les données, les synthétiser, et vérifier leur cohérence. De plus la représentation graphique qui l'accompagne nous permettra une visualisation simple des segments obtenus par une classification automatique.

Pour rappel, l'Analyse en Composantes Principales est une méthode de la famille de l'analyse des données et plus généralement de la statistique multivariée, qui consiste à transformer des variables liées entre elles (dites "corrélées" en statistique) en nouvelles variables indépendantes les unes des autres (donc "non corrélées"). Ces nouvelles variables sont nommées "composantes principales", ou axes. Elle permet au praticien de réduire l'information en un nombre de composantes plus limité que le nombre initial de variables.

Il s'agit d'une approche à la fois géométrique (représentation des variables dans un nouvel espace géométrique selon des directions d'inertie maximale) et statistique (recherche d'axes indépendants expliquant au mieux la variabilité des données). Lorsqu'on veut alors compresser un ensemble de N variables aléatoires, les n premiers axes de l'ACP sont un meilleur choix, du point de vue de l'inertie ou la variance expliquée.

Pour effectuer notre ACP, nous utilisons la procédure Princomp de SAS avec un paramètre $n=4$ ayant pour effet de demander 4 axes factoriels. Les variables retenues sont les variables : ancienneté du permis (classancperm), âge du conducteur (classage), âge de la voiture (classageveh), vitesse maximale de la voiture (classevitesse), le CRM (classecrm) et le nombre de sinistre dommages (sindoma). Nous notons que les deux modalités (0 ou 1) de cette dernière sont très proches et pas très bien représentées pour l'ensemble des axes factoriels, mais nous garderons ces deux modalités car elles sont centrales dans notre étude. L'ensemble des résultats de notre ACP sont décrits ci-dessous.

La procédure PRINCOMP affiche la liste des valeurs propres dans le tableau 1 ci-dessous, liste partielle puisque l'option $n=4$ a limité à 4 les valeurs propres retenues. On voit que le premier axe explique 10,95 % de la variance, le second 9,25%, le troisième 7,97% et le quatrième 7,57%. Les quatre premiers axes expliquent ainsi 35,74% de la variance. Ce taux peut paraître limité, mais il demeure honorable compte tenu du nombre assez important de variables (28).

	Valeur propre	Différence	Proportion	Cumulé
1	3.06729309	0.47803130	0.1095	0.1095
2	2.58926180	0.35883243	0.0925	0.2020
3	2.23042937	0.11030361	0.0797	0.2817
4	2.12012576		0.0757	0.3574

Tableau 1

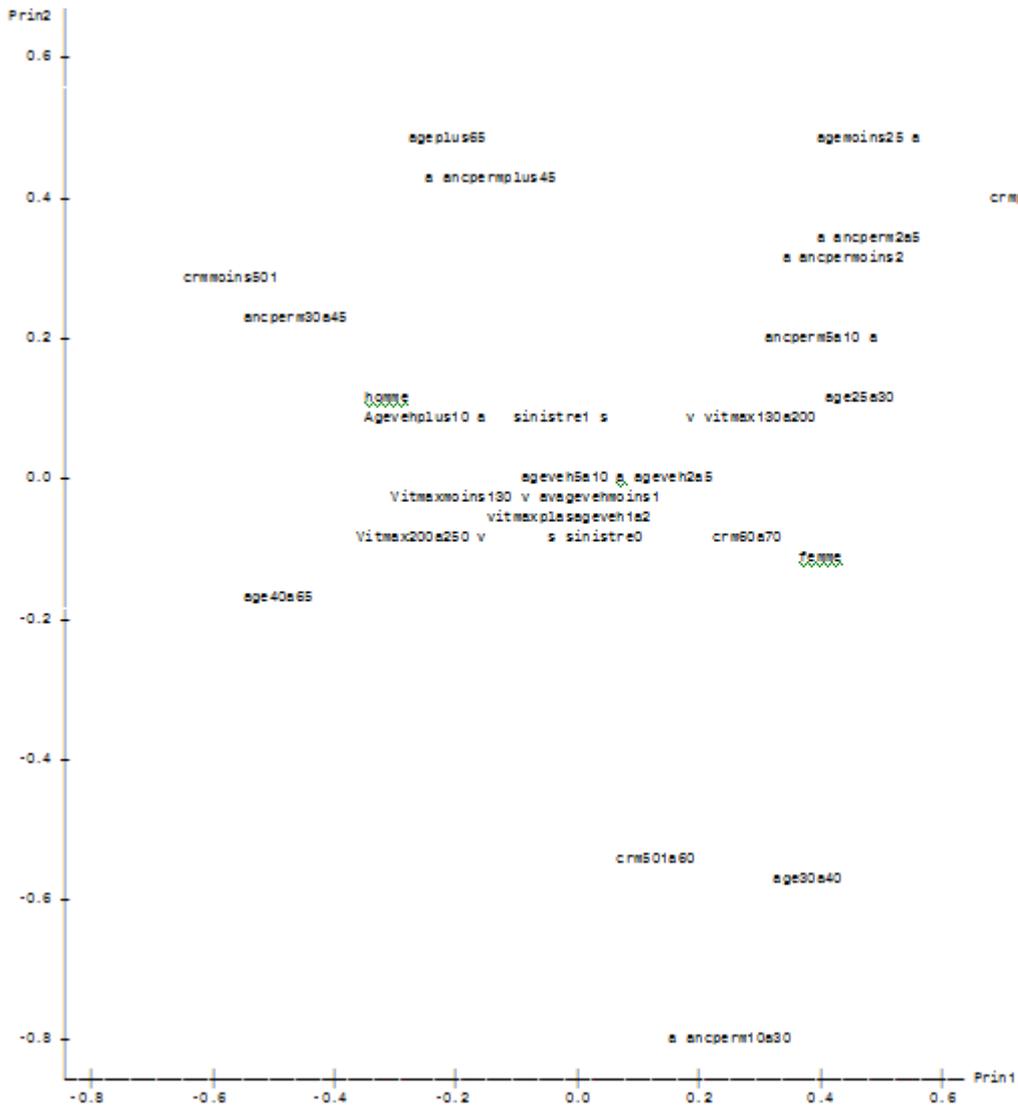
La procédure PRINCOMP affiche par la suite dans le tableau 2, les coefficients des composantes principales Prin1, Prin2, Prin3 et Prin4 comme combinaisons linéaires des variables initiales, qui sont ici centrées réduites (standardisées) puisque l'on utilise la matrice des corrélations. Rappelons que la K^e composante principale est la variable associant à chaque individu la coordonnée de sa projection sur le K^e axe factoriel.

Vecteurs propres				
	Prin1	Prin2	Prin3	Prin4
sinistre0	-.023030	-.050677	-.022178	-.073884
sinistre1	0.023030	0.050677	0.022178	0.073884
homme	-.203819	0.066346	0.441332	0.066266
femme	0.203819	-.066346	-.441332	-.066266
agevehmoins1	-.024498	-.019934	0.031714	0.046224
ageveh1a2	-.014827	-.027917	0.040747	0.057890
ageveh2a5	0.043127	-.005500	0.033580	0.045805
ageveh5a10	0.041095	0.006505	-.070143	-.069785
agevehplus10	-.086685	0.057927	-.030768	-.089675
anopermoins2	0.195417	0.192643	-.025628	0.131642
anoperm2a5	0.225976	0.216982	-.019044	0.149399
anoperm5a10	0.273669	0.123063	0.096671	0.022732
anoperm10a30	0.092140	-.498711	0.028450	-.063412
anoperm30a45	-.318556	0.146873	-.219791	0.237203
anopermplus45	-.136796	0.268844	0.220515	-.421425
agemoins25	0.322252	0.308507	-.013837	0.204271
age25a30	0.240827	0.063602	0.103385	-.001611
age30a40	0.185428	-.360347	0.154469	-.170650
age40a65	-.317068	-.109857	-.290831	0.352526
ageplus65	-.162702	0.302178	0.163667	-.434776
crmmoins501	-.374473	0.176173	-.164178	-.022980
crm501a60	0.044148	-.328741	0.097490	-.067689
crm60a70	0.122854	-.054346	0.076814	-.043813
crmplus70	0.330647	0.243147	0.025298	0.172205
vitmaxmoins130	-.051455	-.023544	0.099573	0.091042
vitmax130a200	0.103113	0.054002	-.391540	-.363515
vitmax200a250	-.087684	-.045736	0.370424	0.344439
vitmaxplus250	-.018530	-.018993	0.046456	0.042911

Tableau 2

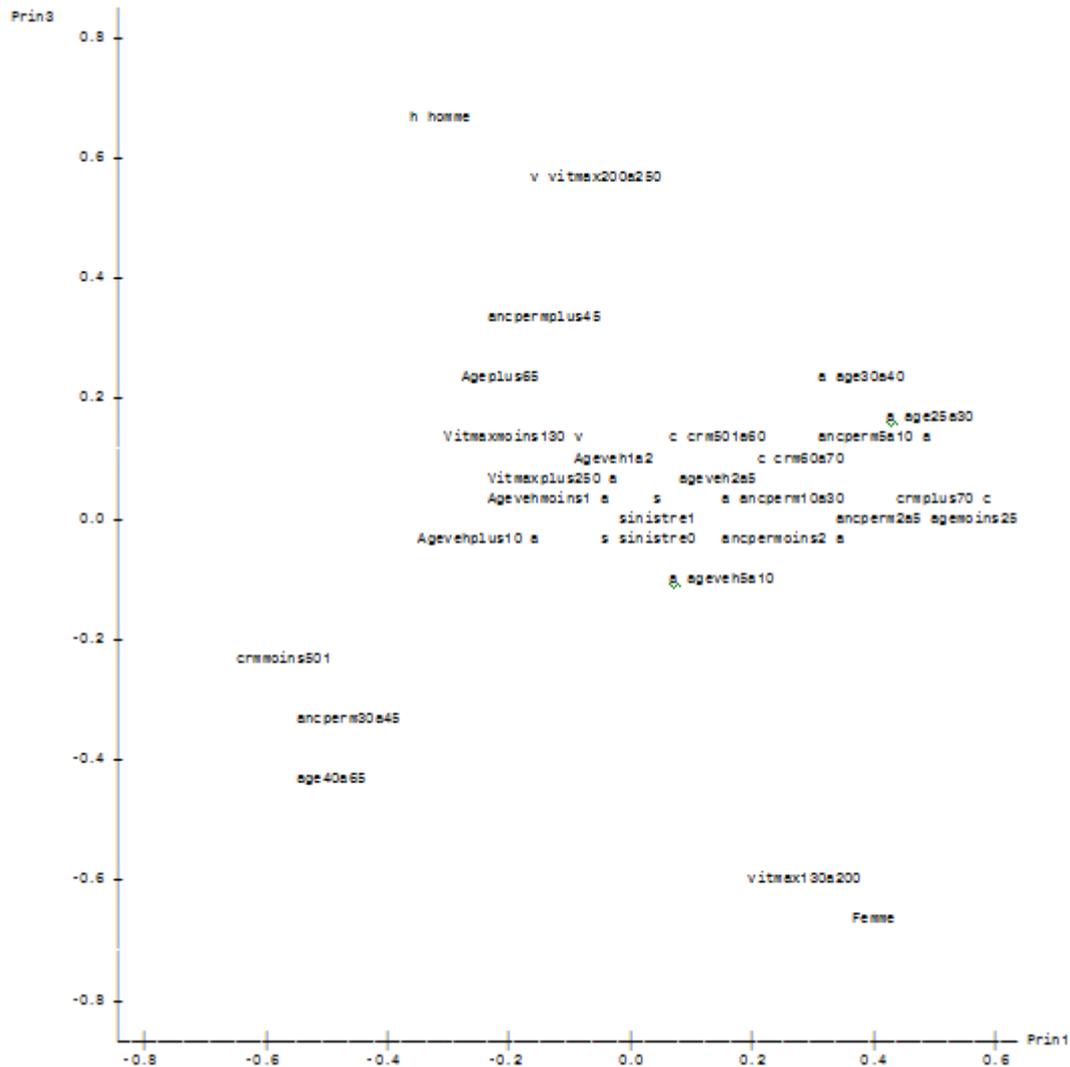
Par la suite nous affichons le nuage des variables dans les différents plans factoriels.

Dans le graphique 5 : l'axe 1 (axe horizontale : prin1 en abscisse) oppose les CRM élevés aux CRM faibles. L'axe 2 (axe verticale : prin2 en ordonnée) oppose les jeunes adultes qui ont une ancienneté de permis supérieure à 10 ans des personnes âgées ayant une ancienneté de permis supérieur à 45 ans.



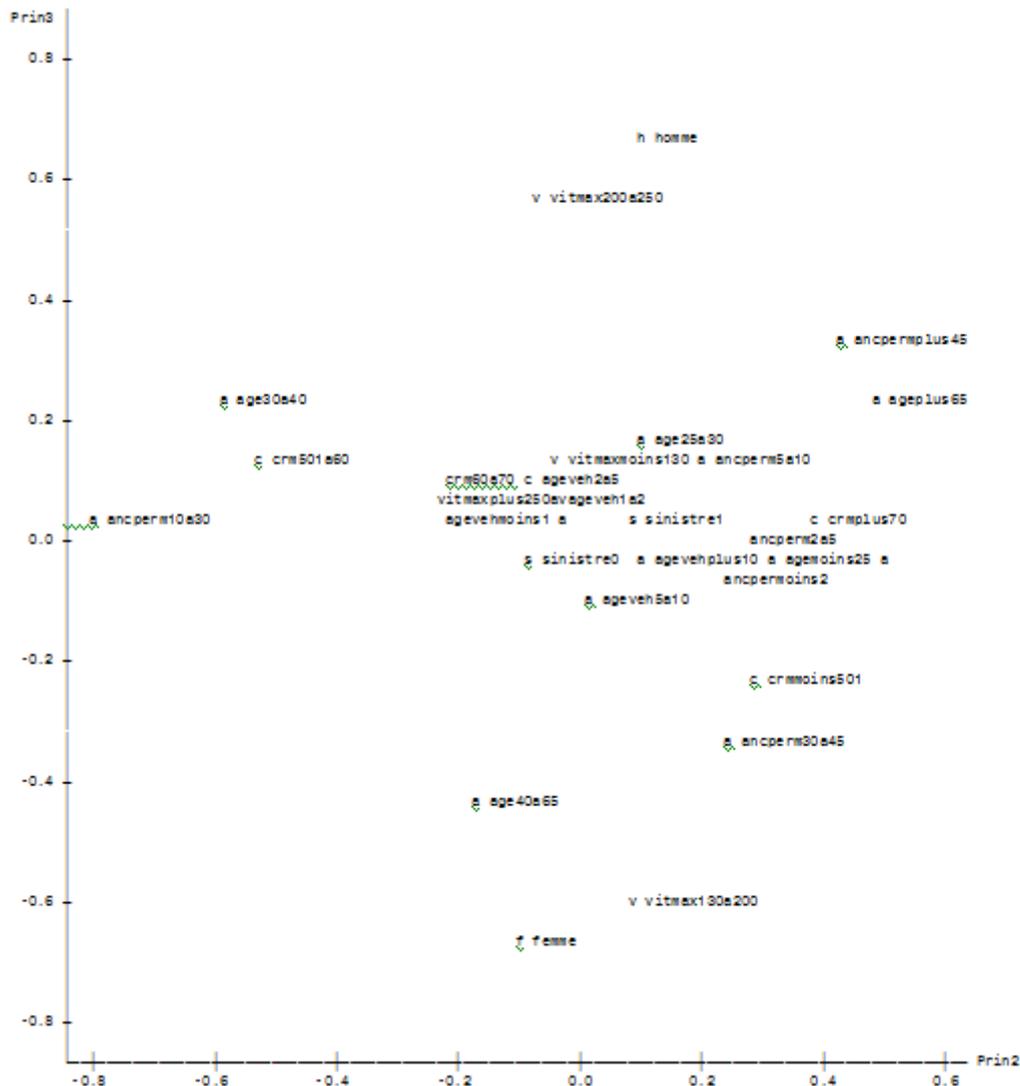
Graphique 5

Dans le graphique 6 : l'axe 2 (axe vertical : prin3 en ordonnée) oppose homme et femme tandis que l'axe 1 (axe horizontal : prin1) distingue les bons CRM des mauvais.



Graphique 6

Dans le graphique 7 : l'axe 1 (axe horizontale : prin2 en abscisse) oppose les conducteurs jeunes adultes à ancienneté de permis moyen de 20 ans aux personnes âgées ayant une ancienneté de permis supérieur à 45 ans. L'axe 2 (axe verticale : prin3 en ordonnée) oppose les hommes aux femmes.



Graphique 7

Cette première étape nous permet d'avoir une meilleure vision des interactions entre les risques par une exploration graphique de nos données. Nous pouvons désormais nous consacrer au coeur de la problématique de cette section : l'élaboration d'une segmentation de nos assurés.

2.3.3.2.2 Classification mixte par la méthode des K-Means

Nous allons maintenant mettre en oeuvre une méthode mixte de classification des clients du fichier, en commençant par utiliser la méthode des K-means (avec la procédure FASTCLUS de SAS) pour construire une centaine de classes, lesquels seront dans un second temps (section suivante) réduites à quatre classes par une classification ascendante hiérarchique (avec la procédure CLUSTER). Nous aurions pu en appliquant le critère de Wong nous limiter dès le départ à 80 classes (nombre d'individus à la puissance 0.3 ce qui donne à peu près 81) au lieu de 100. Le nombre de quatre classes sera déterminé plus loin par l'analyse des indicateurs statistiques recueillis en sortie de la procédure CLUSTER, tels que le R^2 et le R^2 semi-partiel en fonction du nombre de classes.

La procédure FASTCLUS commence par afficher les coordonnées des centres initiaux qui sont au nombre de 100 comme nous l'avions demandé au départ. La procédure affiche la distance minimale entre les centres initiaux, qui sert de base à la détermination du critère de convergence (tableau 3).

Minimum Distance Between Initial Seeds =	11.11331
---	-----------------

Par la suite l'historique des itérations permet de suivre le déplacement des centres et d'évaluer la vitesse de convergence vers les centres finaux.

On note la présence de 63 classes, l'option delete=20000 a supprimé certains centres ayant au plus 20000 observations (mais les individus sont réaffectés à d'autres centres dans l'itération suivante, sachant que la dernière réaffectation n'est pas suivie de l'option delete, pour éviter la suppression d'observations).

La procédure fournit plusieurs statistiques notamment :

Statistiques pour variables				
Variable	E-t total	Dans E-t	R-carré	RSQ/(1-RSQ)
sinistre0	1.54765	1.40693	0.173592	0.210057
sinistre1	1.54765	1.40693	0.173592	0.210057
homme	4.40114	1.27248	0.916407	10.962766
femme	4.40114	1.27248	0.916407	10.962766
agevehmoins1	2.83195	2.68360	0.102026	0.113618
ageveh1a2	3.54622	3.49354	0.029497	0.030394
ageveh2a5	4.10106	3.79911	0.141840	0.165284
ageveh5a10	4.16136	4.04072	0.057146	0.060610
agevehplus10	2.60661	2.50770	0.074457	0.080447
ancpermoins2	1.19383	0.99699	0.302577	0.433880
ancperm2a5	1.63855	1.18271	0.479008	0.919417
ancperm5a10	2.47635	0.92202	0.861371	6.213478
ancperm10a30	4.48357	0.95155	0.954958	21.201646
ancperm30a45	4.14085	1.42212	0.882051	7.478276
ancpermplus45	2.74345	1.25567	0.790515	3.773601
agemoins25	2.18293	0.89911	0.830353	4.894583
age25a30	2.39263	1.03917	0.811368	4.301323
age30a40	3.63512	0.91291	0.936931	14.855574
age40a65	4.49994	0.89595	0.960358	24.225999
ageplus65	3.23860	0.41734	0.983394	59.220095
crmmoins501	4.46781	2.16101	0.766052	3.274456
crm501a60	4.21492	2.51229	0.644729	1.814752
crm60a70	2.29830	1.69676	0.454963	0.834738
crmplus70	2.57229	1.63413	0.596418	1.477814
vitmaxmoins130	1.04224	0.74289	0.491949	0.968306
vitmax130a200	3.10490	0.90366	0.915295	10.805610
vitmax200a250	2.94644	0.59053	0.959832	23.895141
vitmaxplus250	0.44090	0.43984	0.004801	0.004824
OVER-ALL	3.18335	1.82777	0.670337	2.033397

Pseudo F Statistic = 321558.0

Approximate Expected Over-All R-Squared = 0.35118

Cubic Clustering Criterion = 16638.72

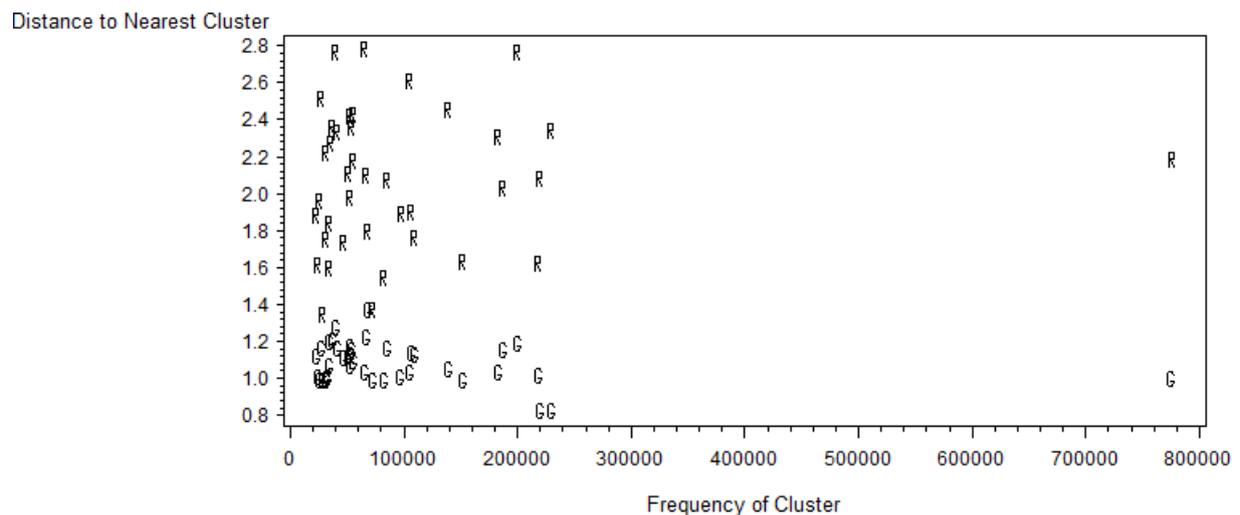
Tableau 3

-le pseudo F qui est très élevé, ce qui est un élément favorable à la classification obtenue,

- le R^2 attendu de la classification qui vaut 0.35118 et est calculée sous l'hypothèse nulle de l'indépendance linéaire des variables. Il est d'ailleurs inférieur au R^2 observé (0.670337).

-le Cubic Clustering Criterion. Le critère $CCC > 2$ de bonne classification est satisfait, mais sa valeur n'est réellement valide que si les variables ne sont pas corrélées.

L'appel de la procédure GPLOT permet de générer plusieurs graphiques, notamment le suivant :



Graphique 8

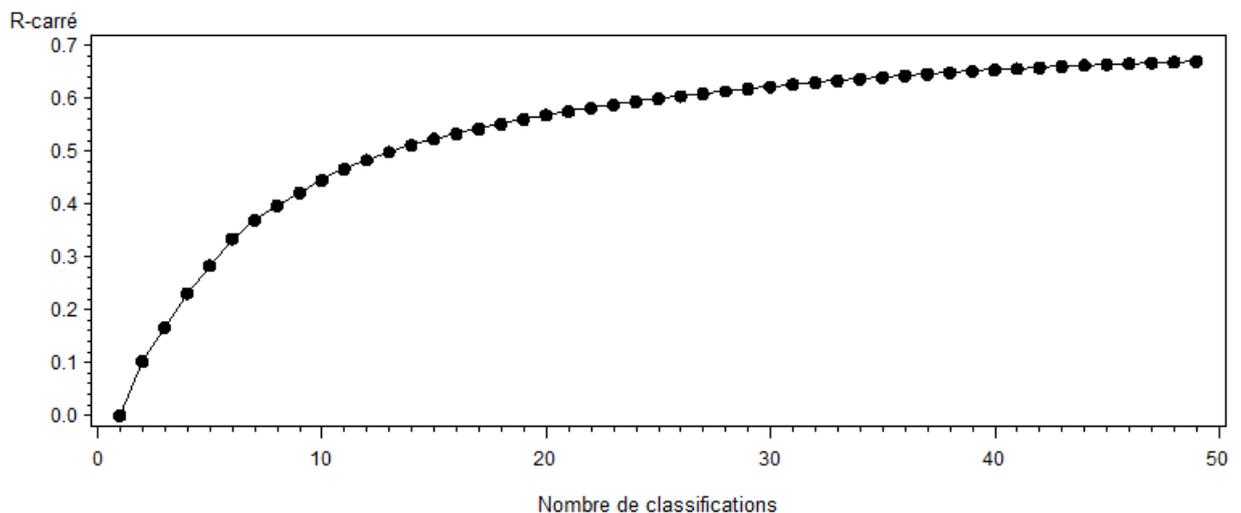
Le graphique 8 représente, pour chaque classe, en fonction de la taille de la classe, d'une part le rayon de la classe, c'est-à-dire la distance maximale séparant un individu du centre de sa classe, et d'autre part, la distance séparant le centre de la classe du centre le plus proche. On constate que les centres de classes sont assez proches l'un de l'autre surtout pour les plus petites. De plus les rayons sont plus grands que les « gaps » ce qui est le signe d'un fort recouvrement des classes, et démontre que les classes sont trop nombreuses et que la classification doit être affinée.

2.3.3.2.2 Classification ascendante hiérarchique par le Cluster

Dans un dernier temps nous procédons à une classification ascendante hiérarchique (CAH) par la procédure CLUSTER de Sas. Cette classification sera appliquée aux 100 centres finaux de la première classification (fichier DATA=CENTRES).

Un certain nombre de graphiques sont fournis par une procédure GPLOT :

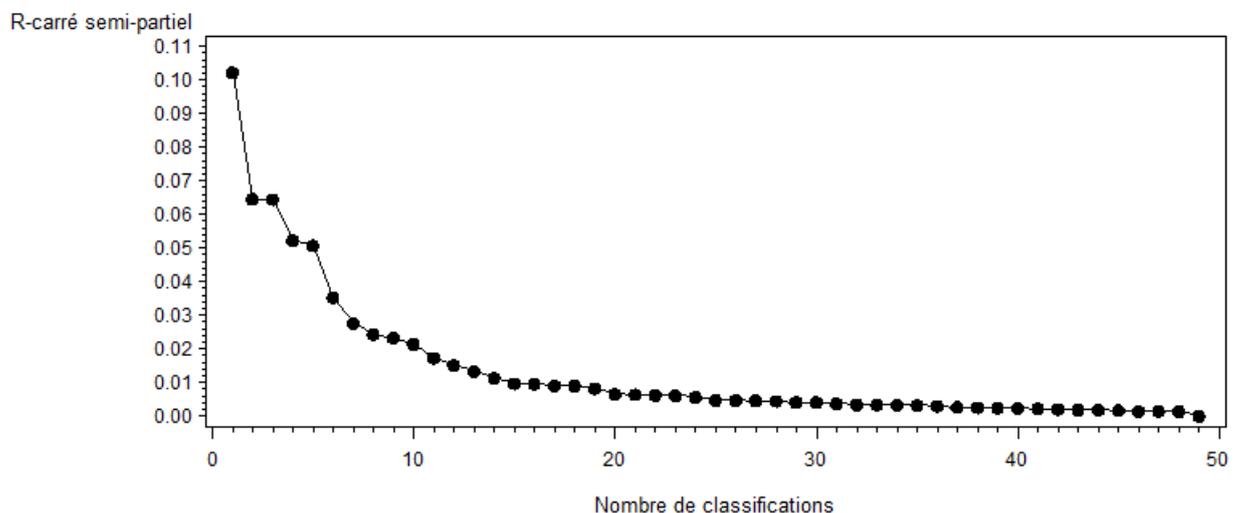
- i) le premier graphique, celui du R^2 : on cherche un compromis entre un R^2 proche de 1 et un nombre de classe limité ; on s'arrête donc après le dernier saut important.



Graphique 9

A priori 4 classes peuvent être choisies parce qu'on note, un changement de pente plus prononcé (cassure) à partir de 4 classes. Pour les 63 centres de classe obtenues par K-means, l'inertie intra-classe ne sera jamais nulle et ce n'est pas vers 1 que tend le R^2 mais vers le R^2 de la classification par K-means, correspondant à la classification ascendante hiérarchique triviale où aucun des centres n'est réuni, soit $R^2 = 0.808348$;

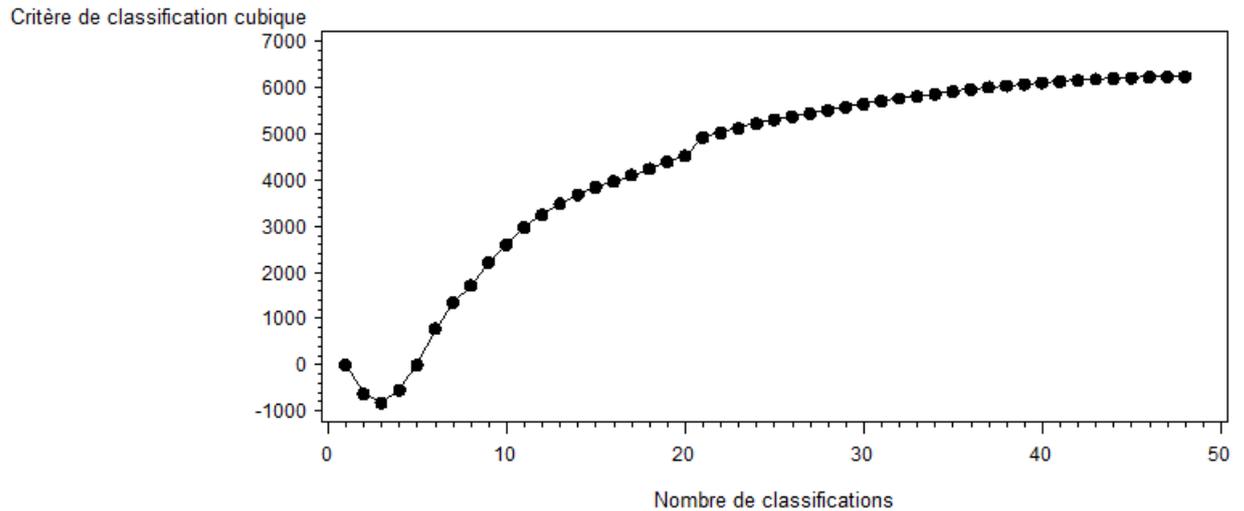
- ii) dans le second graphique, celui du R^2 semi-partiel, un creu pour K classes et un pic pour K-1 classes indiquent une bonne classification en K classes, précédent une baisse sensible de l'inertie interclasse.



Graphique 10

Le graphique suggère également 4 classes.

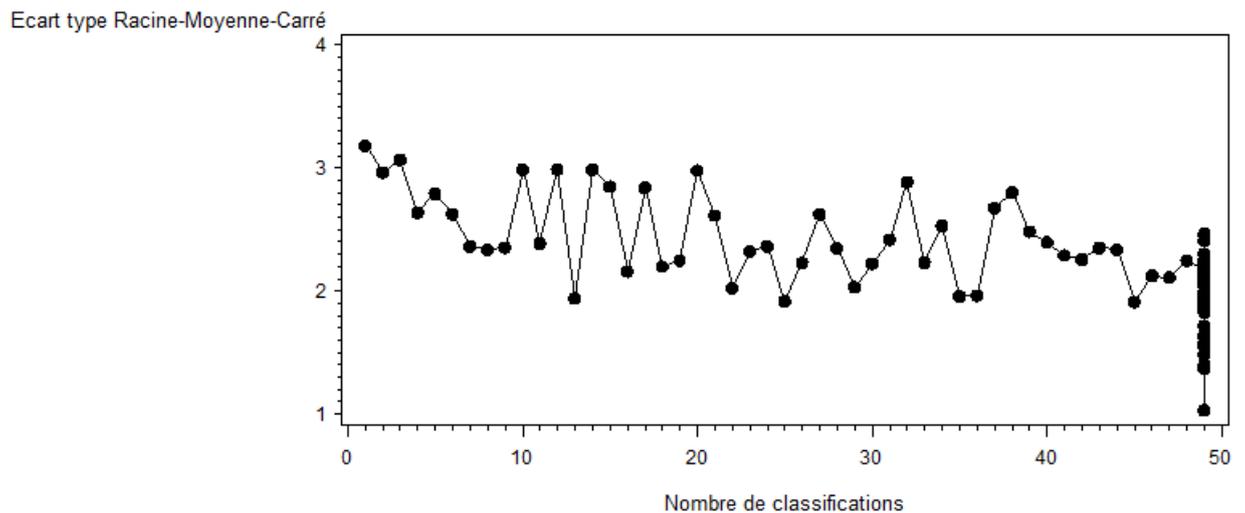
- iii) dans le troisième graphique, celui du CCC, un creux pour K classe suivi d'un pic pour K+1 classes indique une bonne classification en K+1 classes.



Graphique 11

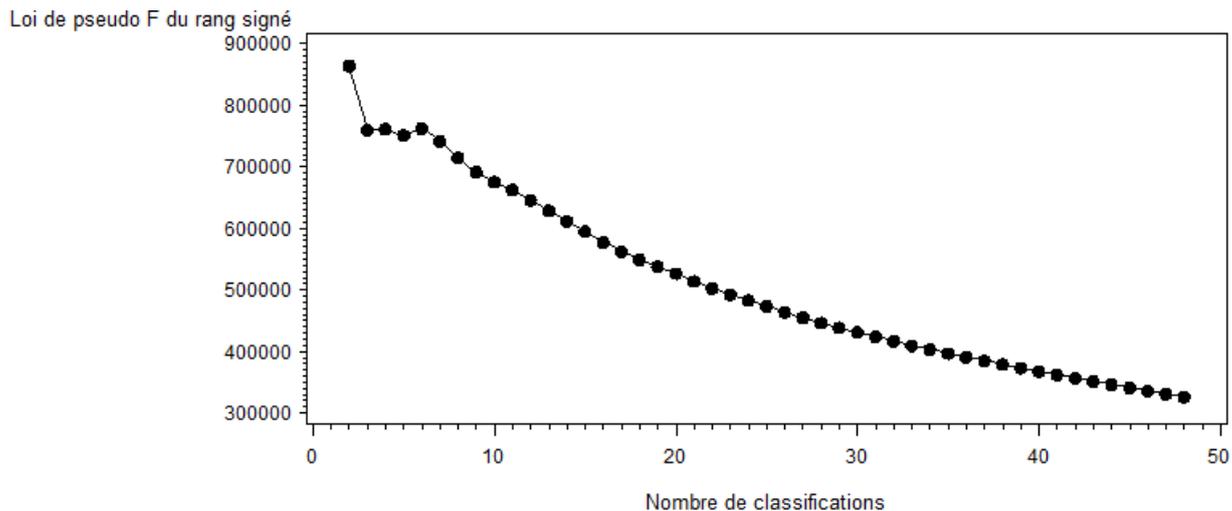
Un nombre de 4 classes semble convenir.

- iv) le quatrième graphique, celui de l'inertie interclasse, donne des résultats pas très marqués. Il présente néanmoins un creux pour 4 classes.



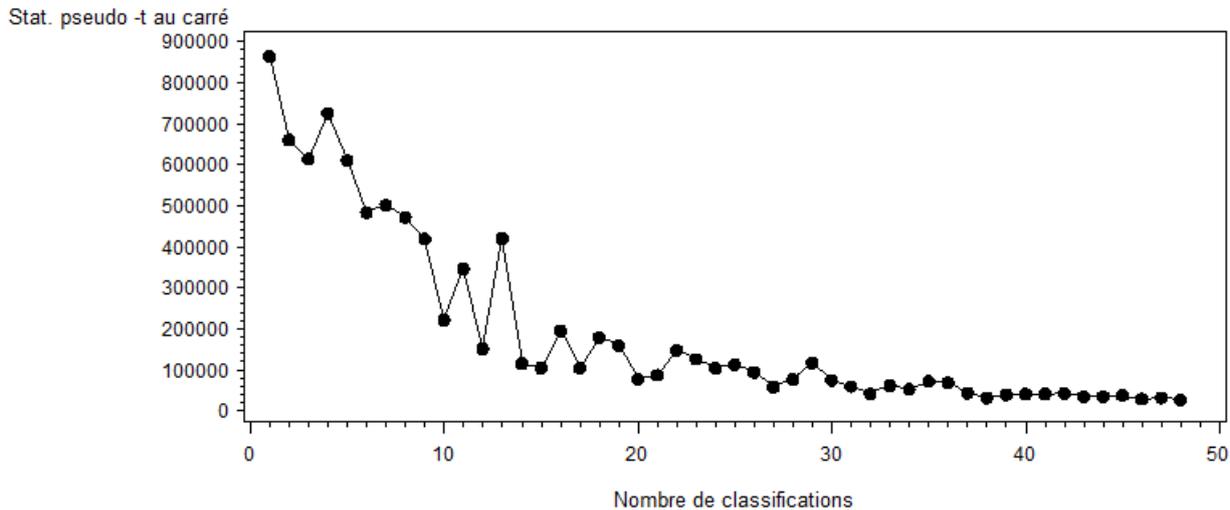
Graphique 12

- v) le cinquième graphique, celui du pseudo F est moins utilisable. On cherche un pseudo F élevé, le décrochage n'est pas très significatif.



Graphique 13

- vi) le sixième graphique, celui du Pseudo t^2 , se lit comme celui du R^2 semi-partiel, en recherchant un creux pour K classes et un pic pour K-1 classes qui signalent une bonne classification en K classe. Le graphique suggère ici 5,6,10,12,14.



Graphique 14

Au vu des graphiques précédents, les valeurs possibles pour le nombre de classe dans notre fichier sont 4, 5, 10, 12, 14 avec un avantage pour la valeur 4. C'est donc celle-ci que nous retiendrons. C'est également un bon compromis face à la complexité du modèle et à sa sensibilité. Il nous reste donc à présenter les classes ainsi trouvées.

2.3.3.2 Présentation des classes

Le tableau ci-dessous présente les 4 classes selon deux critères : leur effectif et leur fréquence de sinistralité annuelle en pourcentage. Les classes 2 et 3 sont les plus importantes avec environ 37% des effectifs chacune. Les classes 1 et 4 sont plus réduites avec 13% pour chacune d'entre elle. Concernant la sinistralité, la classe 3 est moins sinistrée avec 5,13% de fréquence d'accidents alors que les autres classes sont beaucoup plus concernées par ce risque. En effet la classe 4 est celle qui propose la plus forte sinistralité avec un taux de 8,5% alors que les deux autres classes présentent un taux avoisinant les 7,5%.

classes	Nombres d'observations	Fréquence de sinistralité (%)
1	915500	7.38
2	2739895	7.5
3	2806412	5.13
4	1086719	8.5

Tableau 4

Une étude plus poussée de ces classes par le biais de statistiques descriptives relatives aux variables tarifaires retenues précédemment nous permet de mieux découvrir ses classes et expliquer leur sinistralité. Nous étudions par la suite la distribution des fréquences de ces classes pour chacune de ses variables.

Nous avons vu précédemment que l'âge était un axe important dans la sinistralité, le tableau ci-dessous le confirme. En effet la classe 4 est essentiellement constituée de jeunes (87 % ont moins de 30 ans avec 40 % de moins de 25 ans) ce qui explique la forte fréquence de sinistralité de cette classe (8.5%). La classe 2 présente le taux de personnes âgées le plus élevé (36,81% ont plus de 65 ans), cette situation n'est pas étrangère à une sinistralité plutôt forte (7,5%). Les classes 1 et 3 regroupent essentiellement des adultes ayant entre 30 et 65 ans, c'est surtout le cas pour la classe 3 (ou cette population représente 95% de l'effectif total) qui présente le taux de sinistralité le plus faible.

Age (%)

base	1	2	3	4
Age<25	5.19	0,....	0	39.47
Age25a30	7.06	0...	0.2	46.99
Age30a40	20.42	0.03	45.86	7.67
Age40a65	55.89	63.15	53.88	3.13
Age>65	11.44	36.81	0.06	2.73

Tableau 5

Le tableau suivant montre que la vitesse maximale du véhicule n'est pas l'axe le plus explicatif de la sinistralité, les classes sont assez identiques concernant le critère de vitesse maximale des véhicules. En effet, les classes 2, 3 et 4 sont constituées essentiellement d'individus ayant une voiture dont la vitesse max est comprise entre 130 et 200km/h. Seule la classe 1 se distingue nettement avec une vitesse maximale comprise entre 200 et 250km/h pour près de 99% de ses constituants.

Vitesse max (%)

base	1	2	3	4
Vitmaxmoins130	0.85	2.23	1.01	0.45
Vimax130à200	0	96.96	98.67	99
Vitmax200à250	98.7	0.65	0	0.47
Vitmaxplus250	0.45	0.16	0.32	0.08

Tableau 6

Pour la variable sexe, deux faits sont à noter : les classes 1 et 2 concentrent plus de 2/3 d'hommes, tandis que les classes 3 et 4 sont plus équilibrées avec une particularité pour la classe 4 qui est la seule où les femmes sont majoritaires (56,78%).

Sexe (%)

base	1	2	3	4
homme	77.06	66.57	55.56	43.22
femme	22.94	33.43	44.44	56.78

Tableau 7

Le tableau qui suit traite du critère CRM. La classe 4 se distingue nettement des autres classes par son fort taux d'individus au CRM très élevé (près de 60% ont un CRM supérieur à 70), ce n'est donc pas étonnant que cette classe soit la plus sinistrée.

Crm (%)

base	1	2	3	4
CRM<50.1	46.8	68.56	39.81	2.11
CRM50.1a60	38.23	25.95	48.55	18.9
CRM60a70	7.17	4.27	7.7	18.99
CRM>70	7.79	1.22	3.94	59.99

Tableau 8

Le tableau suivant traite de l'âge du véhicule. Cette variable ne semble pas être un critère très discriminant entre les classes. On note cependant que la classe 2 concentre le plus de véhicules de plus de 10 ans de mise en circulation (13.34%), ce qui peut expliquer sa forte sinistralité.

Ageveh (%)

base	1	2	3	4
Ageveh<1	15.39	10.87	10.75	9.3
Ageveh1a2	25.51	18.38	18.59	17.71
Ageveh2a5	31.82	27.59	29.20	32.66
Ageveh5a10	22.43	29.83	33.41	34.80
Ageveh>10	4.84	13.34	8.05	5.54

Tableau 9

Le dernier tableau concerne l'ancienneté du permis qui est une variable très liée à l'âge du conducteur. On note donc la même tendance évoquée précédemment. En effet les classes 4 et 2 présentent les deux situations extrêmes. La première concentre les individus ayant une faible ancienneté (80% ont moins de 10 ans de permis dont 11% sont de jeunes conducteurs de moins de deux ans de permis), quand à la classe 2 elle renferme surtout des individus ayant une très forte ancienneté de permis avec 25% qui dépasse les 45 ans d'ancienneté. Il n'est donc pas étonnant de voir ces deux classes présenter les plus forts taux de sinistralité.

Ancperm (%)

base	1	2	3	4
Ancperm<2	0.86	0.01	0.06	11.61
Ancperm2a5	2.93	0.05	0.3	20.61
Ancperm5a10	7.83	0.27	0.05	50.21
Ancperm10a30	45.27	2.73	99.55	17.22
Ancperm30a45	34.3	71.6	0.0	0.34
Ancperm>45	8.82	25.34	0.04	0.01

Tableau 10

Nous pouvons désormais passer à l'étape suivante qui est la mensualisation de la base finale selon le critère de sinistralité (sindoma : nombre de sinistres par mois) : ce qui nous permet donc d'observer le risque de chaque individu (nombre de sinistres et charges en cas de sinistre) sur 24 périodes mensuelles.

2.3.3.3 Mensualisation

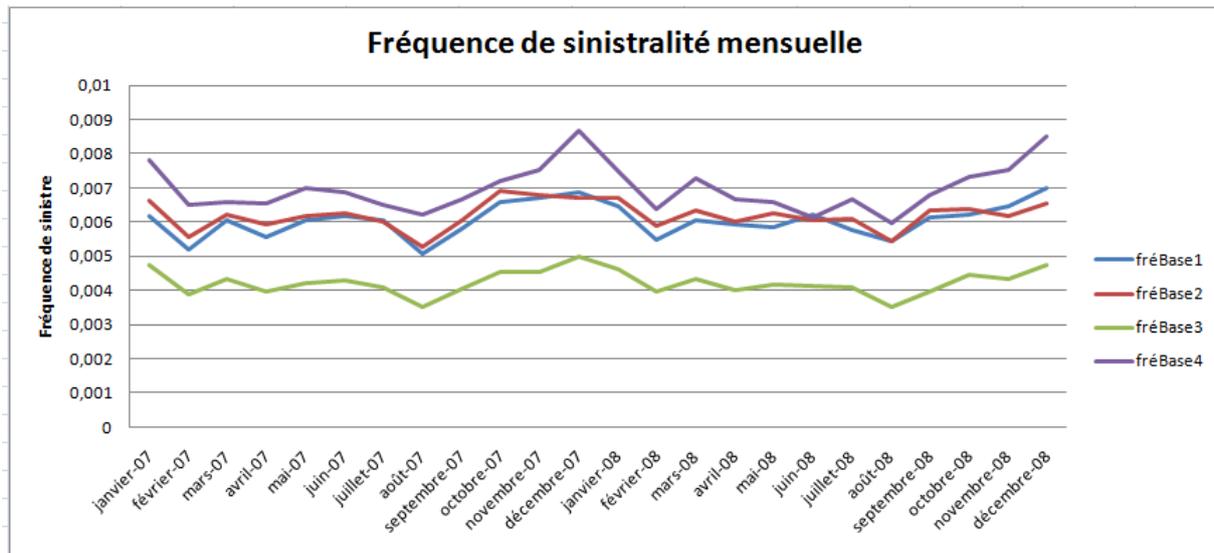
La mensualisation des 4 bases issues de la classification a pour principale motivation l'impossibilité de disposer de données annuelles assez longues et comparables entre elles.

Les deux graphiques ci-dessous nous permettent de suivre l'évolution mensuelle des deux composantes du risque auto que sont la fréquence de sinistre et le coût moyen du premier janvier 2007 au 31 décembre 2008, soit sur 24 périodes mensuelles.

Un regard rapide sur l'évolution de la fréquence mensuelle des quatres bases, proposée par le graphique 15 nous apporte plusieurs enseignements. En premier lieu la fréquence mensuelle suit les mêmes grandes tendances sur la période considérée pour chacune des bases. De plus, il y a une différence dans l'amplitude des évolutions qui confirme la hiérarchie observée précédemment concernant les fréquences annuelles :

- la base 4 domine toutes les autres bases sur la période d'étude avec des fréquences de sinistralité mensuelle oscillant autour de 0,7% et des pointes de près de 0,9% en décembre,
- les bases 1 et 3, ont des courbes d'évolution quasi confondues oscillant autour de 0,6% avec des pointes à 0,7%,
- la base 2 est celle qui présente les plus faibles fréquences de sinistralité sur toute la période atteignant au maximum 0,5% de sinistralité.

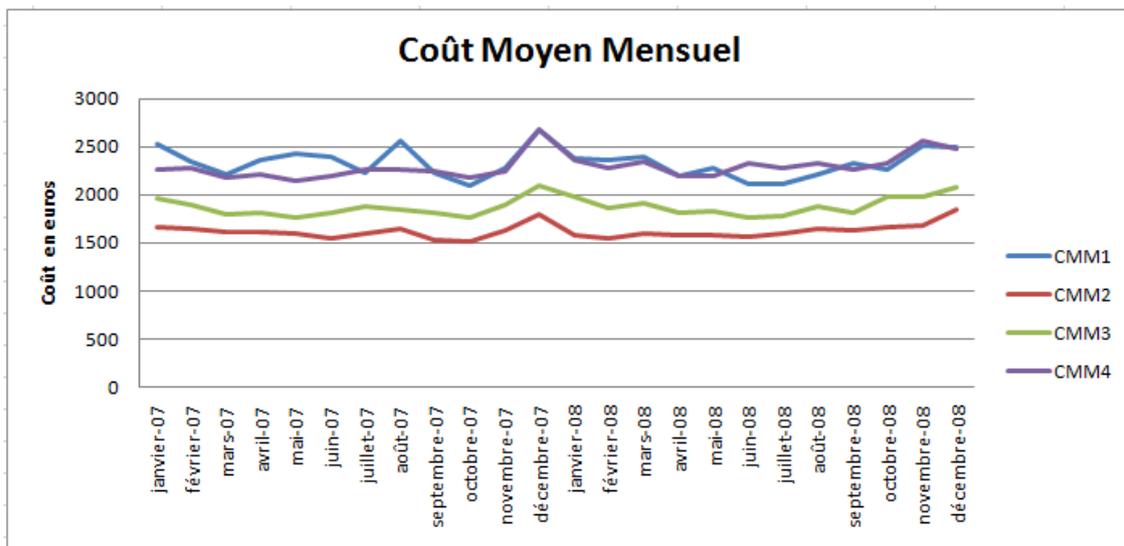
De plus, on assiste à un léger fléchissement des fréquences de sinistralité en 2008 par rapport à 2007 à mois équivalents. La tendance lourde de baisse de la fréquence de sinistralité observée depuis 2003 est souvent expliquée par l'effet radar.



Graphique 15 : Evolution de la Fréquence mensuelle des 4 bases

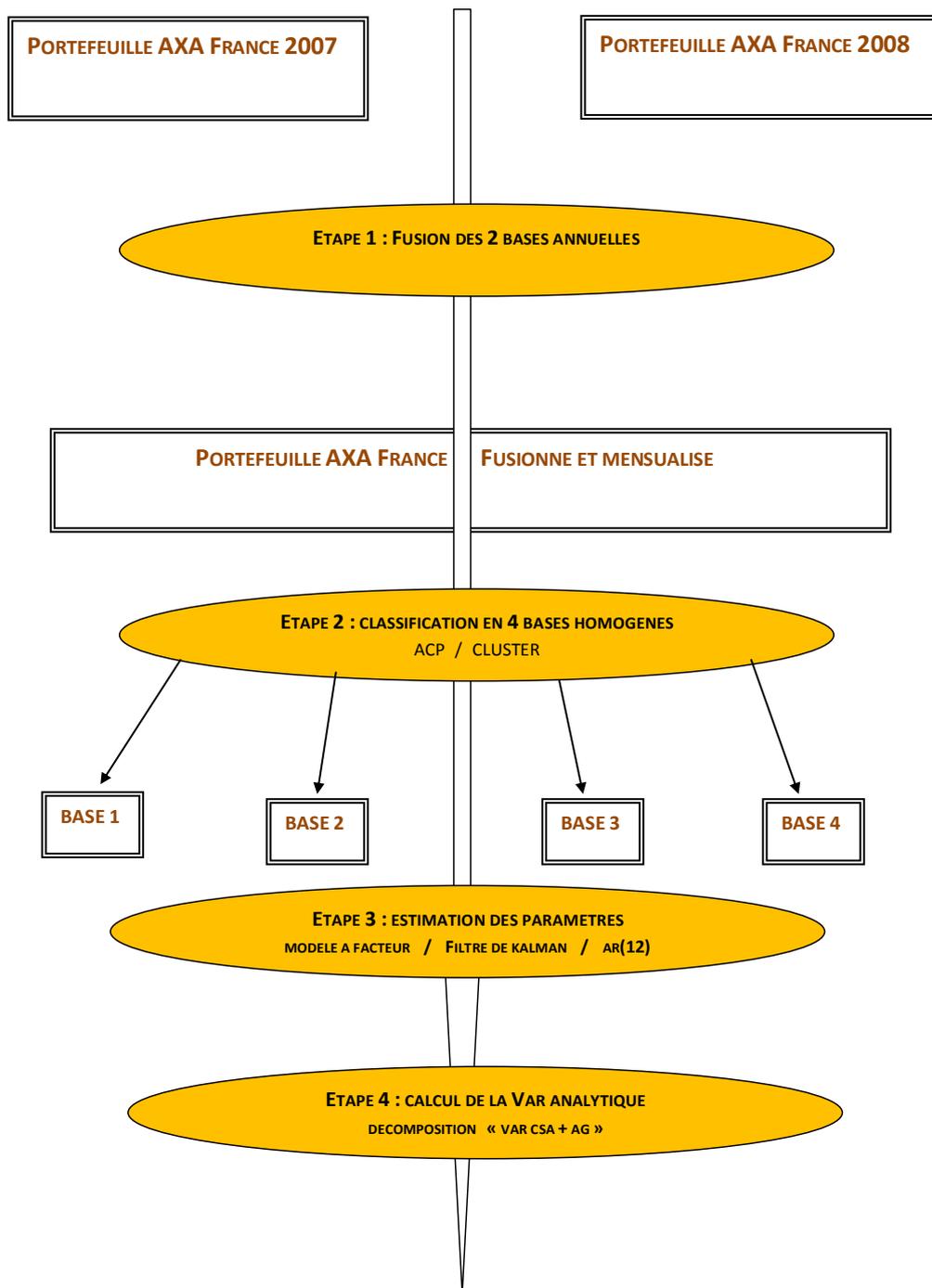
L'évolution du coût moyen résumé dans le graphique ci-dessous suit la même tendance que celui de la fréquence avec certaines particularités :

- les charges mensuelles pour la base 2 sont toujours inférieures à celles de la base 3, alors que la base 2 présente le plus faible taux de sinistralité sur toute la période d'étude,
- les évolutions semblent moins heurtées que pour la fréquence,
- les effets de saisonnalité sont certes présents mais moins marqués.



Graphique 16 : Evolution du coût moyen mensuel des 4 bases

Par la suite, nous procéderons à la modélisation dont l'objectif est de trouver des estimateurs efficaces des paramètres gouvernant la loi des facteurs pour pouvoir dans une dernière étape calculer la VaR analytique.



Graphique 17 : Synthèse Partie 1

DEUXIEME PARTIE

ESTIMATION DES FACTEURS

3 ESTIMATION DES FACTEURS

3.1 Introduction

Notre objectif est de distinguer l'apport des éléments spécifiques (variables tarifaires définies précédemment) caractérisant chaque individu, des facteurs systématiques communs à tout individu, dans la VaR de notre portefeuille automobile. Il nous faut donc au préalable estimer ces facteurs car ils sont supposés inobservables. En effet, nous soupçonnons l'existence d'au moins un facteur commun agissant sur l'ensemble des risques individuels mais nous ne connaissons ni leur identité ni la loi suivie par ces processus factoriels. Par exemple, l'augmentation du nombre des radars fixes depuis 2003 en France, s'est accompagnée d'une baisse régulière de la fréquence d'accidents et de leur charge moyenne. On en a déduit que l'évolution du nombre de radars pourrait constituer un facteur systématique influençant le risque auto. Les événements climatiques comme la grêle ou la neige sont également cités comme facteurs systématiques potentiels. Dire que ces facteurs sont inobservables ne signifie pas qu'ils n'existent pas mais que nous ne savons pas réellement lesquels influencent véritablement le risque étudié. Nous pouvons cependant essayer de les estimer.

La technique de la granularité a été utilisée en finance pour l'estimation des facteurs systématiques influençant certains risques. A cet effet, l'utilisation des modèles dynamiques à panel avec facteur commun non observable, et plus précisément une de leur variante : le modèle espace état linéaire, a été privilégié. Grâce à leur spécification "échangeable"(homogène), ces modèles sont appropriés pour analyser la série historique d'une population homogène d'individus mettant en exergue leur dépendance sérielle(en considérant plusieurs dates pour un même individu) et transversale (entre individus). Ce cadre est rencontré pour des applications liées au risque crédit. Par exemple, si l'on considère l'analyse du risque dans des portefeuilles d'obligations corporate, les données de panel sont les défauts, la perte en cas de défauts et les historiques de migration d'un groupe important d'entreprises d'un secteur industriel et pour un pays donné. Par ailleurs, le facteur commun représente une variable macro économique cachée, tel que le cycle d'affaire spécifique du secteur et du pays. Une dépendance entre les risques individuels est ainsi introduite par le biais du ou des facteurs.

Dans le cadre de notre étude, nous nous inspirons de la démarche précédente et optons pour l'utilisation du modèle espace état linéaire. L'application du filtre de Kalman dans ce type de modélisation nous permettra de trouver des estimateurs des facteurs pour la fréquence de sinistres du risque auto. Dans la section 1 nous présentons les modèles à panel dynamique. Puis, dans la section 2, après avoir décrit le modèle espace état linéaire nous calculons les deux estimateurs suivants : l'estimateur CSA (cross sectional adjustment) et GA (granularity adjusment) qui se distinguent par le degré de développement effectué. La section 3 propose les résultats des estimations pour la fréquence.

3.2 Le modèle à panel dynamique

Le modèle général considéré implique à la fois une micro et une macro dynamique. Conditionnellement au(x) facteur(s), les fréquences de sinistres liées aux différents assurés sont supposées iid avec des historiques d'observations $y_{i,t}$ suivant un même processus de Markov non homogène dans le temps. La densité de transition à la date t pour tout individu est notée :

$$h(y_{i,t}/y_{i,t-1}, f_t; \beta) \quad (2.1)$$

Elle dépend de la valeur du facteur f_t et d'un paramètre inconnu β . Le facteur f_t représente la composante systématique. La micro-dynamique est captée par l'observation individuelle passée $y_{i,t-1}$ et β . La macro-dynamique est portée par le facteur commun stochastique f_t . Ce dernier est inobservable et nous supposons qu'il suit un processus markovien avec une densité de transition g qui dépend d'un paramètre inconnu θ :

$$g(f_t/f_{t-1}; \theta) \quad (2.2)$$

L'intégration du facteur entraîne une double dépendance : une dépendance temporelle pour un même individu au travers de l'historique individuel et une dépendance transversale entre les individus. Les variables $y_{i,t-1}$ peuvent être qualitatives ou quantitatives (fréquence de défaut, migration des risques individuels), tandis que les composantes du vecteur f_t sont des nombres réels (correspondants à un continuum d'états latents). Le modèle est potentiellement non linéaire en ce qui concerne la micro et la macro-dynamique. Quand n est fixé et t tend vers l'infini, les estimateurs de maximum de vraisemblance de β (micro-paramètre) et θ (macro-paramètre) présentent des propriétés asymptotiques importantes : la convergence, la normalité et l'efficacité. Pour rappel :

- un estimateur est convergent si pour des échantillons de plus en plus grands sa variance tend vers zéro et son espérance tend vers la vraie valeur du paramètre,
- un estimateur est efficace s'il est asymptotiquement sans biais et le rapport de sa variance à la limite de Cramer-Rao tend vers 1 quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Cependant, aussi bonnes soient-elles, les propriétés asymptotiques d'un estimateur ne disent rien des propriétés de cet estimateur sur des échantillons finis, et il n'y a donc aucune raison de croire qu'un estimateur de maximum de vraisemblance soit particulièrement bon sur de tels échantillons. Ce programme asymptotique d'estimation par maximum de vraisemblance n'est donc pas forcément approprié pour un cadre incluant un nombre d'individu n très grand et un nombre de période t limité, comme dans notre application où $t=24$. De plus, le calcul numérique de l'EMV est compliqué puisque la fonction de vraisemblance concerne une intégrale de dimension importante liée à la trajectoire du facteur inobservable.

Notre approche consiste donc à utiliser l'efficacité de la limite asymptotique pour estimer à la fois les deux paramètres précédents β et θ et introduire ainsi des estimateurs

de β et θ asymptotiquement efficaces qui sont plus simples à calculer que les estimateurs de maximum de vraisemblance. Ce résultat est le fruit d'une démarche en trois temps proposée par P.GAGLIARDINI et C.GOURIEROUX [Efficiency in large dynamic panel models with common factor - 2008] :

- Dans un premier temps, ils montrent que la limite efficace pour le micro-paramètre β ne dépend pas du modèle paramétrique définissant la dynamique macro. En particulier, cette limite coïncide avec la limite efficiente dans le cas où la loi du facteur est connue, et également avec la limite efficiente semi-paramétrique quand la densité de transition du facteur n'est pas spécifiée.
- Dans un second temps, ils en déduisent qu'un estimateur cohérent et efficient du micro paramètre est l'estimateur de maximum de vraisemblance de β calculé comme si les valeurs du facteur étaient fixes dans le temps.
- En dernier lieu, ils calculent un estimateur efficient de θ qui est l'EMV calculé en remplaçant les valeurs du facteur non observable par des approximations transversales cohérentes.

3.3 Du modèle général au modèle espace état linéaire

Les modèles à panel dynamique non linéaire "échangeables" au facteur commun non observable semblent pertinents pour des applications à des portefeuilles de grandes tailles de crédits, de contrats d'assurance vie, voire non-vie et sont notamment recommandés dans les régulations bancaires du comité Bâle. Le modèle à facteur de risque unique suggéré pour la régulation du risque crédit dans Bâle2 [BCBS(2001), (2003)] est un cas particulier de tels modèles.

Il semble opportun de définir les notions de panel (ou données de panel) et d'échangeable :

Les données utilisées en économétrie sont le plus souvent des séries chronologiques, tel le nombre d'accidents enregistrés par an dans un département donné de 2000 à 2007. On peut, à l'inverse, disposer de données concernant une période donnée, dites en coupe instantanée, tel le nombre d'accidents enregistrés en 2007 dans chacun des départements français. Les données de panel, ou données croisées, possèdent les deux dimensions précédentes et rapportent les valeurs des variables considérées relevées pour un ensemble, ou panel, d'individus sur une suite de périodes. On utilise une notation naturelle à deux indices : x_{it} représente l'observation de la variable x pour l'individu i à la période t . Si on fixe l'individu observé, on obtient la série chronologique, ou coupe longitudinale le concernant, tandis que si l'on fixe la période examinée, on obtient une coupe transversale, ou instantanée, pour l'ensemble des individus.

Les modèles de panel dynamiques non linéaires sont donc des modèles dont le but est de caractériser l'évolution d'une variable dans le temps, sur la base de données de panel en supposant une relation non linéaire entre la variable endogène étudiée et les variables explicatives correspondantes.

Précisons maintenant la notion d'échangeable :

Définition : Une série d'une variable Y_i , $i=1, \dots, n$ est dite échangeable (ou homogène) ssi la distribution de Y_1, \dots, Y_n est la même que la distribution de $Y_{\sigma(1)}, \dots, Y_{\sigma(n)}$, quelle que soit la permutation σ de la série d'indice

Cette définition est également valable pour une série d'historiques individuels : $Y_i = [Y_{i1}, \dots, Y_{it}, \dots]$, $i=1, 2, \dots, n$, et $t= 0, 1, \dots, T$, c'est à dire des données panel.

Cette condition est satisfaite pour toute séquence de variables iid, mais elle peut être vérifiée avec une dépendance entre les variables comme le précise le théorème suivant :

Théorème : $Y_i = (Y_{i,t}, t \in N, i = 1, \dots, n)$ est échangeable ssi il existe un processus factoriel sous-jacent $F = (F_t, t \in N)$ tels que les processus individuels Y_1, \dots, Y_n sont iid conditionnellement au processus F .

Nous disposons dans le cadre de notre étude de données panel, car pour chaque individu, nous avons une série de fréquence de sinistralité et de charge moyenne sur les 24 périodes avec un nombre n de mois polices très élevé. Le portefeuille de départ a , comme on l'a vu précédemment, subi une classification aboutissant à la mise en place de quatre classes homogènes. Ce critère d'homogénéité est très important, car en vertu du théorème précédent, il nous permet d'affirmer l'existence d'un processus factoriel tels que les processus individuels $Y_1 \dots Y_n$ sont iid conditionnellement aux facteurs.

Le modèle général est donc un modèle à facteur "échangeable", où l'impact des facteurs systématiques sur les risques individuels, peut être résumé, comme nous le voyons par la suite, par un vecteur à facteur canonique.

Le modèle espace état linéaire

C'est un cas particulier du modèle général défini précédemment. Il est défini en trois étapes :

- Premièrement, nous définissons la micro-dynamique conditionnée par les facteurs canoniques, par la densité de probabilité de transition suivante :

$$\tilde{h}(y_{i,t}/y_{i,t-1}; a_t) \tag{2.3}$$

où a_t est un vecteur $(4, J)$ de facteur canonique latent. La taille du vecteur s'explique par la présence de 4 classes et J est le nombre de facteurs. La fonction précédente peut représenter dans le cadre de notre étude, la densité de probabilité de la fréquence de sinistralité de l'individu i à la date t conditionnée par la fréquence à la période précédente. Cette densité de probabilité dépend donc du vecteur de facteurs canoniques a_t .

- Deuxièmement, les facteurs canoniques sont tels que :

$$a_t = \alpha + \gamma F_t + u_t, \quad (2.4)$$

Ce vecteur est donc une transformation affine bruitée d'une série réduite de facteur. L'intérêt de ce vecteur est de pouvoir synthétiser l'impact des facteurs macros sur les micro-dynamiques $y_{i,t}$.

F_t est un scalaire, représentant le facteur (nous faisons l'hypothèse simplificatrice qu'il y a qu'un facteur systématique qui intervient), α est un vecteur(4,1), appelé en général vecteur de paramètres intercept, et γ est une matrice (4,1).

Le bruit u_t , $N(0,\Delta)$ avec une matrice de variance covariance diagonale $\Delta(4,4)$. La taille de ces différents vecteurs et matrices est liée au fait que nous considérons un modèle agrégé pour les 4 classes.

- Pour finir, nous supposons que le facteur réduit satisfait un modèle AR(1) :

$$F_t = \mu + \Phi F_{t-1} + v_t \quad (2.5)$$

Où v_t suit une loi $N(0,\Omega)$ et est indépendant du bruit u_t .

Nous supposons ainsi que les facteurs suivent un processus autorégressif d'ordre 1, c'est à dire, un modèle de régression linéaire où chaque facteur est expliqué uniquement par sa valeur à la période précédente plutôt que par d'autres variables.

Dans ce modèle à panel, la micro dynamique (2.3) est potentiellement non linéaire, tandis que la macro-dynamique est linéaire et est donnée par le modèle espace (2.4) état (2.5) pour les facteurs canoniques.

En ce qui concerne l'identification des facteurs et des paramètres, deux remarques sont à faire :

- Nous supposons que les facteurs canoniques sont identifiables transversalement,
- Le modèle est invariant par transformation affine inversible du facteur latent F_t et par les transformations associées des paramètres : μ , Φ , γ .

Pour obtenir l'identification précédente, nous pouvons supposer que $\mu = 0$, $\Omega = Id_J$ et $\gamma'\gamma = Id_J$. En fait, les paramètres α , γ , et Δ doivent être considérés comme des macro-paramètres. Le modèle ne présente aucun micro-paramètre.

Nous allons désormais estimer le Facteur F puis obtenir a_t pour disposer à la fin de la prédiction du risque future (fréquence de sinistre) de notre portefeuille.

3.3.1 Estimateur de Maximum de vraisemblance CSA

Au préalable, il nous faut préciser les conditions d'identification du facteur et des paramètres. Nous supposons que les facteurs canoniques a_t sont identifiables transversalement. De plus, le modèle espace état précédent est invariant par transformation affine inversible du facteur latent F_t et des transformations associées des paramètres μ , Φ , et γ . Pour garantir l'identification du facteur et des paramètres nous supposons que $\mu = 0$.

Sous les conditions d'identification sur les facteurs canoniques et des paramètres, le

modèle comprend uniquement des macro-paramètres recueillis dans le vecteur θ (qui regroupe les paramètres μ et Φ).

Pour rappel, la densité jointe de $\underline{y}_T = (y_{i,t}, t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n)$ et $\underline{f}_T = (f_t, t = 1, \dots, T)$ (conditionnellement aux valeurs initiales) est donnée par :

$$\begin{aligned} L(\underline{y}_T, \underline{f}_T, \beta, \theta,) &= \prod_{i=1}^n \prod_{t=1}^T h(y_{i,t}|y_{i,t-1}, f_t; \beta) \prod_{t=1}^T g(f_t|f_{t-1}; \theta) \\ &= l(\underline{y}_T|\underline{f}_T; \theta) \end{aligned}$$

Le développement asymptotique de la fonction log-vraisemblance dans le modèle espace état(*) devient (preuve annexe 8 "efficiency in large dynamic panel models with common factor" -P.Gagliardini et C.Gourieroux-) :

$$l_{nT}(\theta) = l^*_{nT} + \frac{1}{n}l_{1,nT}(\theta) + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (2.6)$$

où l^*_{nT} est constant en θ et la fonction $l_{1,nT}(\theta)$ vaut :

$$\begin{aligned} l_{1,nT}(\theta) &= \frac{1}{T} \log \left(\frac{1}{[(2\pi)^m \det \Delta]^{\frac{T}{2}} [(2\pi)^j \det \Omega]^{\frac{T}{2}}} \right. \\ &\quad \left. \int \dots \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\hat{a}_{n,t} - \alpha - \gamma F_t)' \Delta^{-1} (\hat{a}_{n,t} - \alpha - \gamma F_t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (F_t - \mu - \Phi F_{t-1})' \Omega^{-1} (F_t - \mu - \Phi F_{t-1}) \prod_{t=1}^T \right\} dF_t \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

Où $\hat{a}_{n,t}$ indique l'estimateur transversal du facteur canonique à la date t :

$$\hat{a}_{n,t} = \arg \max_{a_t} \sum_{t=1}^T \log \tilde{h}(y_{i,t}/y_{i,t-1}; a_t)$$

La fonction $l_{1,nT}(\theta)$ est la log-densité (T standardisée) de la trajectoire du facteur canonique a_T calculée pour $a_T = \hat{a}_{n,t}$, $t=1, \dots, T$,

Nous en déduisons le résultat suivant :

Proposition 1 : *Un estimateur efficient du paramètre θ peut être obtenu en appliquant le filtre linéaire de Kalman au modèle espace état :*

$$(*) \begin{cases} \hat{a}_{n,t} = \alpha + \gamma F_t + u_t, u_t \sim IIN(0, \Delta) \\ F_t = \mu + \Phi F_{t-1} + v_t, v_t \sim IIN(0, \Omega) \end{cases}$$

(preuve annexe 8 "efficiency in large dynamic panel models with common factor" - P.Gagliardini et C.Gourieroux-)

Pour rappel, le filtre de Kalman est un estimateur récursif, cela signifie que pour estimer l'état courant, seul l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. L'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis. Le filtre de Kalman a deux phases distinctes : prédiction et mise à jour.

La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation de l'état courant.

Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit dans le but d'obtenir une estimation plus précise.

Le modèle espace temps linéaire de la proposition 1 correspond aux équations 2.4 et 2.5 précédent après avoir remplacé les facteurs canoniques non observables a_t par leur approximations cohérentes transversales du maximum de vraisemblance : \hat{a}_n, t .

Notre objectif de départ était d'estimer les facteurs. Nous avons donc simplifié l'estimation d'un modèle non linéaire à facteur latent reposant sur un grand nombre d'individus à l'estimation d'un modèle linéaire espace état. Il est en effet beaucoup plus simple d'estimer un modèle linéaire qu'un modèle non linéaire.

3.3.2 Estimateur de Maximum de vraisemblance GA

Calculons maintenant l'estimateur de maximum de vraisemblance du GA. Dans cette optique le terme $l_{2,nT}(\theta)$ d'ordre $O_p(\frac{1}{n^2})$ dans le développement de la log-vraisemblance doit être explicitement pris en compte.

P.Gagliardini et C.Gourieroux montrent (annexe 8 "efficiency in large dynamic panel models with common factor" 2008) que :

$$l_{nT}(\theta) = \frac{1}{nT} \log \left[(2\pi)^{-(m+J)\frac{T}{2}} (\det \Omega)^{-\frac{T}{2}} (\prod_{t=1}^T \det \Psi_{n,t})^{-\frac{1}{2}} \int \dots \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\hat{a}_{n,t} - \alpha - \gamma F_t + \frac{1}{n} \hat{\xi}_{n,t})' \Delta^{-1} (\hat{a}_{n,t} - \alpha - \gamma F_t + \frac{1}{n} \hat{\xi}_{n,t}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (F_t - \mu - \Phi F_{t-1})' \Omega^{-1} (F_t - \mu - \Phi F_{t-1}) \right\} \prod_{t=1}^T dF_t \right] + o_p(\frac{1}{n^2}), \quad (2.8)$$

où

$$\hat{\Psi}_{n,t} = \Delta + \frac{1}{n} \hat{\Sigma}_{n,t}, \quad \hat{\Sigma}_{n,t} = \left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log \tilde{h}}{\partial a_t \partial a_t'} (y_{i,t}/y_{i,t-1}; \hat{a}_{n,t}) \right), \quad (2.9)$$

et $\hat{\xi}_{n,t}$ est un $(m,1)$ vecteur avec la composante r :

$$\hat{\xi}_{n,t,r} = \frac{1}{2} \sum_{l,p,q=1}^m \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 \log \tilde{h}}{\partial a_{l,t} \partial a_{p,t} \partial a_{q,t}} (y_{i,t}/y_{i,t-1}; \hat{a}_{n,t}) \right) \hat{\Sigma}_{n,t,lp} \hat{\Sigma}_{n,t,qr}, \quad r=1, \dots, m \quad (2.10)$$

Nous en déduisons le résultat suivant :

Proposition 2 : *Un estimateur équivalent asymptotiquement à l'ordre $1/n$ à l'estimateur MV du GA de paramètre θ peut être obtenu en appliquant le filtre linéaire de Kalman au modèle espace état :*

$$\begin{cases} \hat{a}_{n,t} + \frac{1}{n}\hat{\xi}_{n,t} = \alpha + \gamma F_t + u_t, u_t \sim IIN(0, \Delta + \frac{1}{n}\hat{\xi}_{n,t}) \\ F_t = \mu + \Phi F_{t-1} + v_t, v_t \sim IIN(0, \Omega) \end{cases}$$

Le modèle espace état de calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance GA implique des corrections à l'ordre $1/n$ dans la variable de mesure et dans la variance de l'erreur de mesure. Ces corrections sont suffisantes pour l'estimation du GA des macro-paramètres. La matrice $\hat{\Sigma}_{n,t}$ dans l'ajustement de la variance est l'inverse de la matrice d'information de Fisher pour l'estimation transversale des facteurs canoniques. Le vecteur $\hat{\xi}_{n,t}$ implique des dérivées du troisième ordre de la log de la micro-densité et ajuste le biais de l'estimateur de maximum de vraisemblance de a_t à l'ordre $1/n$. L'ajustement du biais n'est pas complet, puisque l'estimateur du GA (et donc le vrai EMV) a un biais du second ordre non nul comme l'indique la proposition 2.

3.4 Modélisation de la fréquence

L'objectif est d'estimer les facteurs systématiques qui influent sur la fréquence de sinistre auto. Pour rappel, notre cadre d'étude est le suivant : nous considérons des détenteurs d'une assurance dommages auto (DTA) regroupés en 4 classes homogènes de taille nk , pour $k=1...4$. Les individus sont donc doublement indexés par (i,k) , $i=1.....nk$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- il existe un seul facteur systématique qui influence le risque,
- au cours d'une période mensuelle un individu a au maximum un sinistre.

Nous utilisons pour modèle une extension du modèle à facteur unique basique qui tient compte de l'hétérogénéité entre les classes. Les indicateurs de risque (nombre de sinistres) $Y_{i,k,t} : t=1,.....24$ sont indépendants conditionnellement au facteur, et suivent une distribution de Bernouilli :

$$Y_{i,k,t}/(F_T), (u_{k,t}) \sim B(1, PD_{k,t}) \tag{2.11}$$

avec $PD_{k,t}$: la probabilité conditionnelle des sinistres.

On peut aisément montrer que la probabilité conditionnelle de sinistre est :

$$PD_{k,t} = \Phi(\alpha_k + \gamma_k F_t + u_{t,k}),$$

avec : $F_t \sim IIN(O, Id_J)$ et $u_{t,k} \sim IIN(O, \eta_k^2)$

Les paramètres du modèle (2.11) sont : α_k et γ_k

Le modèle peut se réécrire de la façon suivante :

$$Y_{i,k,t}/(F_T), (u_{k,t}) \sim B[1, \Phi(a_{k,t})]$$

où les facteurs canoniques a_t satisfont l'équation :

$$a_t = \alpha + \gamma F_t + u_t,$$

Le facteur canonique respecte les conditions d'identification et le nombre J des facteurs réduits doit être inférieur au nombre de classes c'est à dire $J \leq 3$. Dans notre cas, on prendra $J=1$.

Disposant des a_t , nous estimons les paramètres α_k et γ_k , ce qui nous permet d'aboutir à l'évaluation des facteurs.

3.4.1 Estimateur CSA

L'estimateur transversal de $a_{k,t}$ est simplement la fréquence de sinistre transformé de la catégorie k à la date t , c'est à dire : $\hat{a}_{n,k,t} = \Phi^{-1}(\widehat{PD}_{n,k,t})$, avec $\widehat{PD}_{n,k,t} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} y_{i,k,t}$

Le modèle espace état CSA devient :

$$\begin{cases} (\Phi^{-1}(\widehat{PD}_{n,k,t}), \dots, \Phi^{-1}(\widehat{PD}_{n,k,t}))' = \alpha + \gamma F_t + u_t, u_t \sim IIN(0, \Delta) \\ F_t = \mu + \Phi F_{t-1} + v_t, v_t \sim IIN(0, \Omega) \end{cases}$$

3.4.2 Estimateur GA

Nous déduisons que le modèle espace état du GA correspond aux équations de mesures pour les différentes classes :

$$\hat{a}_{n,k,t} + \frac{1}{n_k} \hat{\xi}_{n,k,t} = \alpha_k + \gamma_k F_t + \dot{u}_{k,t}$$

où les $\dot{u}_{k,t}$ sont indépendants à travers les classes et le temps, avec des distributions gaussiennes inhomogènes dépendant du temps :

$$\dot{u}_{k,t} \sim N\left(O, \eta_k^2 + \frac{\widehat{PD}_{n,k,t}(1 - \widehat{PD}_{n,k,t})}{n_k} \left[\frac{d\Phi^{-1}(p)}{dp}\right]_{p=\widehat{PD}_{n,k,t}}^2\right),$$

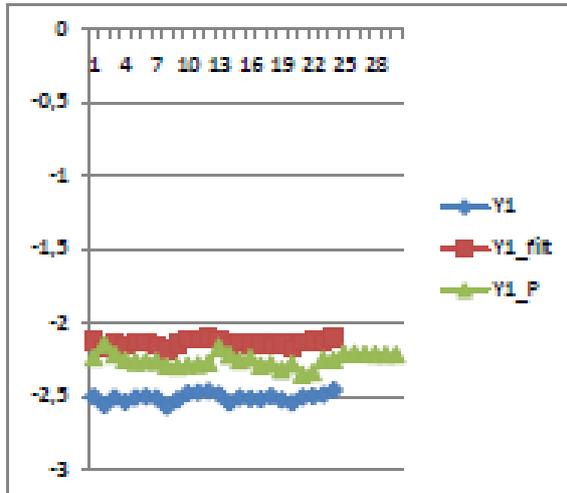
$$\hat{\xi}_{n,k,t} = (1 - 2\widehat{PD}_{n,k,t}) \left[\frac{d\Phi^{-1}(p)}{dp}\right]_{p=\widehat{PD}_{n,k,t}} + \frac{3}{2} \widehat{PD}_{n,k,t} (1 - \widehat{PD}_{n,k,t}) \left[\frac{d^2\Phi^{-1}(p)}{dp^2}\right]_{p=\widehat{PD}_{n,k,t}}$$

Les équations de mesures impliquent deux ajustements de granularité. Le premier est un ajustement de variance et correspond à la delta méthode appliquée à la transformation des fréquences de sinistres. Le second est un ajustement de biais partiel des fréquences de sinistres transformés estimés.

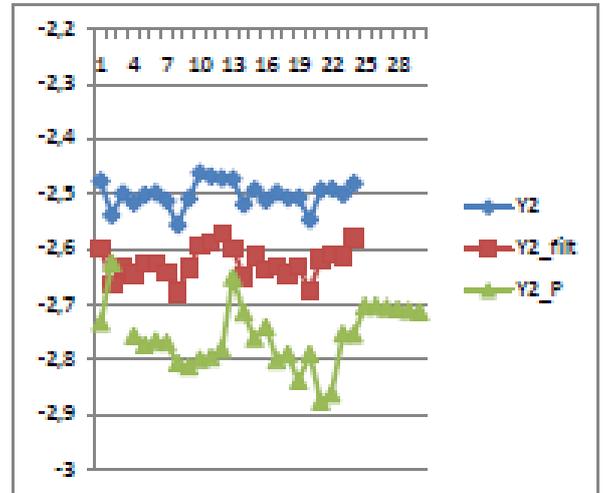
3.4.3 Application

La technique du filtre de Kalman évoquée précédemment est un outil privilégié de l'estimation des modèles structurels à composantes inobservables. Elle consiste en un ensemble d'équations récursives et procède en deux temps. Premièrement, une étape de filtrage qui permet d'obtenir la meilleure approximation de l'état Z_t du système à la date t , conditionnellement à l'information disponible jusqu'en t . Deuxièmement, une étape de lissage qui donne l'approximation optimale du vecteur d'état à l'instant t , conditionnellement à toute l'information disponible sur l'ensemble de la période, de 1 à T . Le lissage fournit des estimations des diverses composantes inobservables (tendance, cycle et irrégularité) de la série initiale, permettant ainsi de désagréger date par date.

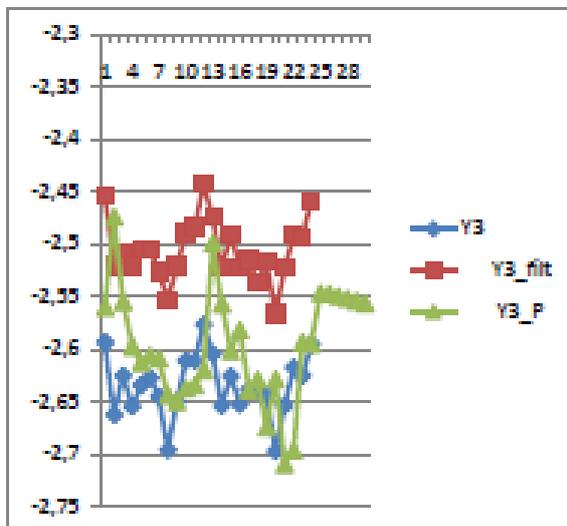
Les quatre figures suivantes donnent les résultats du filtre de Kalman pour les quatre bases. Pour chacun des graphiques nous obtenons en bleu le signal observé, en rouge la filtration et en vert la prédiction. Nous notons que la filtration ainsi que la prédiction ne sont pas de très bonne qualité quelque soit la base considérée. Cependant nous remarquons que les trois graphiques suivent les mêmes tendances d'une année sur l'autre, quelque soit la base considérée, ce qui confirme l'existence d'un effet de saisonnalité et nous conduira à opter pour un cadre d'estimation alternative (un AR(12)) que nous verrons par la suite. Le filtre de Kalman appliqué à la fréquence de sinistres donne des résultats trop sensibles aux valeurs d'entrée et donc pas très fiables.



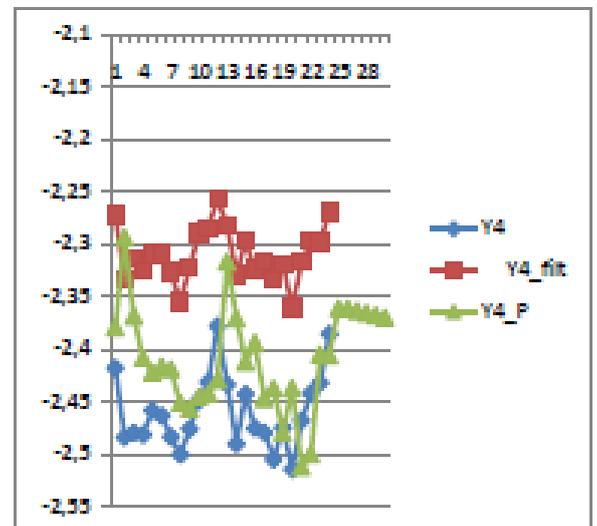
Graphique 18 : Simulation Base 1



Graphique 19 : Simulation Base 2



Graphique 20 : Simulation Base 3

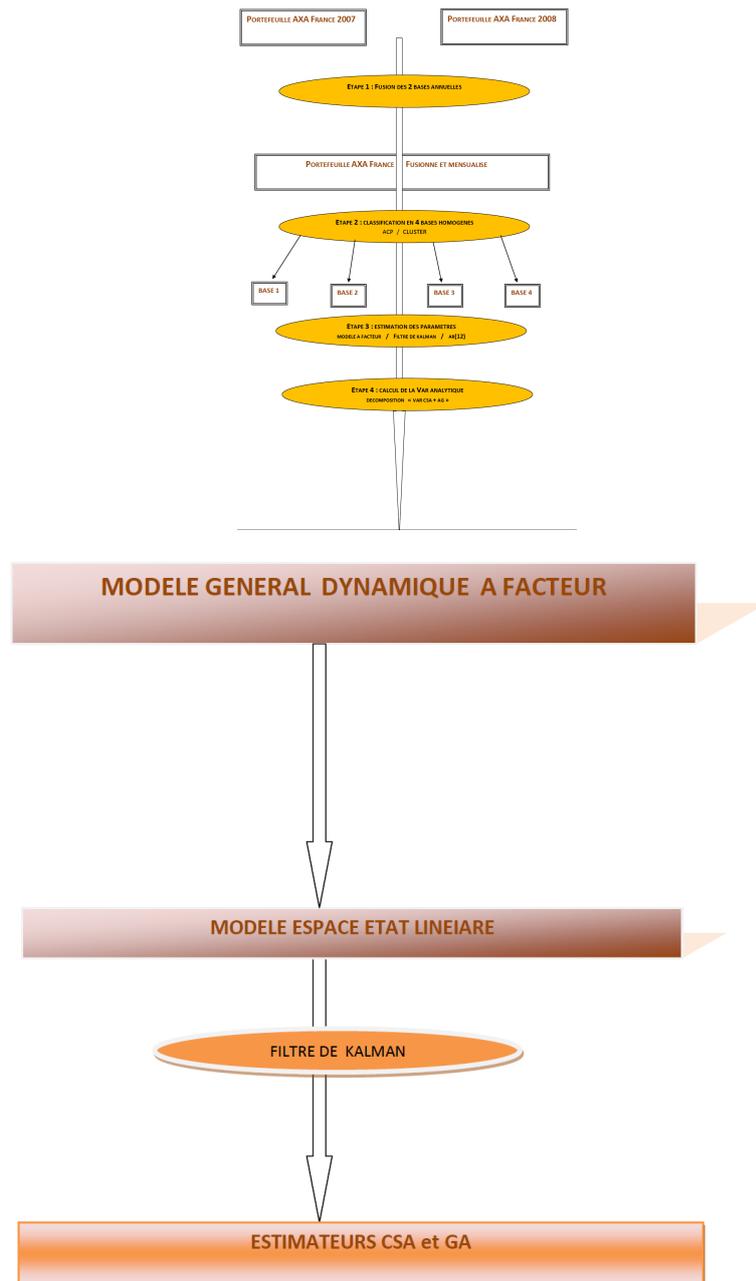


Graphique 21 : Simulation Base 4

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des paramètres obtenues par la filtration. En fait les résultats trouvés sont liés aux éléments que nous mettons en entrée : les composantes du vecteur α et μ . Le filtre nous donne les valeurs des autres paramètres du modèle espace état notamment γ , Δ et Φ . Pour rappel nous avons supposé que μ était nul et obtenons l'estimation des paramètres de notre modèle espace état dans le tableau ci-dessous. Ces estimateurs du filtre de Kalman seront utilisés dans le cadre du calcul de la VaR Monte-Carlo dans une démarche alternative.

μ	ϕ		F0	
0	1.0056		1.007	
α	-2.005	-2.055	-2.05	-2.08
γ	-0.489343	-0.529562	0.65255523	0.239853
Δ	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

Tableau 11 : Tableau des estimateurs des paramètres



Graphique 22 : Synthèse de l'étape 3

TROISIEME PARTIE

MODELISATION DE LA VaR

4 MODELISATION DE LA VaR

L'objectif de cette partie est de se familiariser avec les principales mesures de risques rencontrées dans la littérature et utilisées par les praticiens. Cette démarche nous permettra de justifier notre choix d'une mesure de risque pour notre étude.

4.1 Présentation de la VaR

4.1.1 Définitions

On appelle risque, une fonction X qui à un état de nature ω associe le réel $X(\omega)$. On formalisera ainsi la charge cumulée de sinistre (dépassant un certain seuil), conservée annuellement par AXA pour la garantie Dommages automobile.

On appelle mesure de risque, toute application ρ associant à un risque X , un réel positif $\rho(X)$. De telles applications peuvent être utilisées pour déterminer la prime de risque d'un contrat ou le besoin en capital d'une entreprise. Dans notre cas, nous mesurerons le risque en termes de besoin « relatif » en capital.

4.1.2 Propriétés des mesures de risque

Une mesure de risque est jugée cohérente, d'après Artzner si elle respecte, pour deux risques X et Y quelconques, les propriétés suivantes :

4.1.2.1 Invariance par translation

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c, \forall c \in R$$

Si on ajoute (resp. on retranche) un montant certain c dans la charge, le besoin en capital augmente (resp. décroît) du même montant.

4.1.2.2 Sous-additivité

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

La fusion de deux centres de profit ne crée pas de risque supplémentaire. Cette propriété est importante lorsqu'il s'agit d'aggréger des risques. Notre approche n'est basée que sur une seule garantie, ainsi une mesure ne vérifiant pas cette propriété ne sera pas

forcément mauvaise. Si l'on souhaitait étudier toute une branche en agrégeant plusieurs garanties, cette propriété serait à manipuler avec plus de prudence.

4.1.2.3 Homogénéité positive

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \forall \lambda > 0$$

Une fusion ne crée pas de risque supplémentaire.

4.1.2.4 Monotonie

$$\Pr(X = Y) \leq 1 \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

Si les pertes encourues avec le risque X sont toujours supérieures à celles obtenues avec Y, le besoin en capital pour X doit être supérieur à celui pour Y.

Selon Artzner et al. (1998), une mesure de risque vérifiant les propriétés P1, P2, P3, P4 est cohérente. Certains auteurs ont critiqué ce corps de propriétés. S'agissant de l'homogénéité positive en particulier, on peut soutenir qu'une variation d'échelle du risque peut conduire à un effet plus que proportionnel sur le besoin en capital ou sur la prime. Ceci peut provenir en particulier de contraintes de marché, telles que la difficulté pour se réassurer. S'agissant de la monotonie, certains auteurs (Wang (1996)) étudiant les principes de prime mettent en avant d'autres propriétés telles que : la dominance stochastique d'ordre 2, la propriété de borne inférieure et supérieure...

4.1.3 Principales mesures de risque

4.1.3.1 L'écart type et la variance

Ce sont les premières mesures de risque à avoir été utilisées. Elles sont connues dans la littérature comme critère de choix de portefeuille efficient de MARKOWITZ qui sert de base aux premières théories de l'évaluation des actifs (MEDAF). Ces mesures ne vérifient pas les propriétés P1 et P4.

4.1.3.2 La Value-at-Risk(VaR)

La Value At Risk, ou VaR, est la mesure d'une perte potentielle; plus précisément elle est égale à la perte maximale en euros que la société peut subir avec une probabilité $1 - \alpha$ (seuil de confiance) sur un horizon temporel fixé. Très souvent utilisée dans les établissements financiers, la VaR de niveau α associée au risque X est donnée par :

$$VaR(X, \alpha) = \text{Inf}\{x / Pr[X \leq x] \geq \alpha\}$$

Si l'on choisi $\alpha = 99\%$ sur un horizon d'un an, on raisonne en « scénario centennal » ; souvent utilisé car facilement compréhensible, et qui correspond au scénario « catastrophe » se produisant, en probabilité, une fois tous les 100 ans. Pour $\alpha = 1\%$ on mesure le résultat probable d'une bonne année de survenance en terme de sinistre, pouvant se produire une fois tous les 100 ans. Artzner et al. (1999) ont démontré que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente (en partie du fait de sa non convexité) car elle n'est pas sous-additive. De plus elle ne tient pas compte des possibles dérives des coûts. En effet, si l'on double la charge la plus élevée, il n'y aura aucun impact sur la VaR (pour $\alpha < 100\%$).

Remarque

- Ce concept est directement lié à celui de probabilité de ruine puisque si une société, disposant d'un montant de ressources égal à $VaR(X, \alpha)$, assure un unique risque X, sa probabilité de ruine est égale à $1 - \alpha$.
- Une variante de la VaR, la « Conditional Tail Expectation » CTE, a été définie comme une alternative pour prendre en compte la queue de distribution :

$$CTE(a) = VaR(a) + \frac{Pr X > VAR(\alpha)}{1 - \alpha} \times E[X - VaR(\alpha) | X > VaR(\alpha)]$$

Bien que plus performante que la VaR, cette mesure n'est pas très adaptée pour les faibles fréquences et pour les coûts très élevés. Cette mesure ne reflète que les charges qui dépassent le quantile « VaR » et ne prend donc pas en compte la partie de la distribution en dessous de ce quantile.

4.1.3.3 Les opérateurs de distorsion

La théorie des opérateurs de distorsions a récemment été remise à jour et étayée par Shaun S. Wang (cf bibliographie) et se base sur une idée simple qui est d'augmenter la valeur attendue des charges. L'originalité du processus réside dans le traitement mathématique : il s'agit d'effectuer une distorsion de la loi de probabilité sous-jacente des charges annuelles à l'aide d'une fonction. Il est aussi possible de montrer que la VaR ou la CTE sont des cas particuliers appartenant à cette famille mais dont la fonction de distorsion n'est pas continue. Différents opérateurs de distorsion sont possibles.

4.1.4 La VaR en Assurance

La notion de VaR est originaire du secteur de l'assurance. Elle a été importée à la fin des années 1980 sur les marchés financiers aux États-Unis par la banque Bankers Trust et popularisée par la banque JP Morgan en 1993 et son service (gratuit et public) Riskmetrics puis adoptée sous une forme embryonnaire par le Comité de Bâle (Bâle II)

pour les banques et Solvabilité II pour les assurances. La transposition de la VaR (et de la TVaR) aux problématiques d'assurance impose une approche radicalement différente de l'approche bancaire. En effet, la situation de référence du monde bancaire consiste à estimer la VaR sur un échantillon important de gains / pertes sur un portefeuille ou une position. Les données sont disponibles en quantité, avec une fréquence importante. Les approches de type VaR historique sont ainsi le socle sur lequel sont construits de nombreux modèles bancaires (cf. Christoffersen et al. (2001)). L'adaptation des techniques bancaires au portefeuille de passifs d'un assureur nécessite un certain nombre d'aménagements, essentiellement pour tenir compte de la durée de détention plus importante. On pourra par exemple se reporter à Fedor et Morel (2006) qui présentent des analyses quantitatives sur ce sujet.

Pour calculer une VaR en assurance, il est donc nécessaire de modéliser le portefeuille (et donc de faire des hypothèses). En pratique, on propose souvent une modélisation à l'aide d'un modèle paramétrique et tout se ramène alors à l'estimation des paramètres de la loi considérée (cf. Partrat et Besson (2005) pour une revue des lois les plus utilisées en pratique). La mise en pratique d'une telle démarche comporte à chaque étape des risques qu'il faut au minimum identifier :

- un risque de modèle : le modèle utilisé n'offre qu'une représentation imparfaite de la réalité ; au surplus, les modèles usuellement employés tant à l'actif qu'au passif conduisent à sous-estimer les situations extrêmes ;

- un risque d'estimation : les paramètres estimés qui alimenteront le modèle sont entachés d'une erreur. Les conséquences de cette erreur peuvent être lourdes dans le cas d'un modèle peu robuste (voir par exemple Windcliff et Boyle (2004) pour une illustration dans le cas du modèle de Markowitz) ;

- un risque de simulation : la distribution du résultat sera, en général, obtenue par simulation, et ne sera donc qu'approchée.

De plus, s'agissant de l'estimation d'un quantile d'ordre élevé (VaR à 99,5 %), choix du régulateur d'assurance, et la forme de la loi du résultat n'étant en général pas aisée à ajuster globalement à un modèle paramétrique, il n'est pas impossible qu'il faille envisager de recourir aux techniques de valeurs extrêmes pour calculer finalement la mesure de risque, avec l'apparition ici d'un nouveau risque d'estimation, sur la queue de la distribution simulée.

Après avoir défini la notion de VaR, il est temps pour nous de proposer l'expression analytique de cette VaR grâce à la technique de la granularité dont l'originalité est la possibilité qu'elle nous offre de distinguer la part du risque relative au facteur systématique de celle due aux éléments spécifiques du portefeuille. Dans un premier temps nous adopterons une démarche statique pour par la suite proposer une approche dynamique.

4.2 Approche statique

La technique de la granularité a d'abord été appliquée au modèle statique à facteur de risque unique par Gordy en 2000 dans le cadre de la réglementation Bâle 2. Nous allons tenter d'étendre son application au contexte de l'assurance auto.

La démarche que nous adoptons requiert plusieurs étapes. Dans un premier temps nous partons de W_n qui représente le risque total du portefeuille que nous divisons par le nombre de mois police pour obtenir le risque individuel. Par la suite, en appliquant le théorème central limite nous obtenons un développement limité du risque individuel du portefeuille. Cette dernière expression nous servira de base pour calculer la VaR analytique et faire ainsi apparaître l'ajustement de granularité. Par ailleurs, le chapitre 2 nous a permis, grâce au modèle espace état, d'estimer le facteur systématique. Cette estimation sera introduite dans le calcul de la VaR.

4.2.1 Risque de portefeuille

Nous disposons de 4 sous portefeuilles possédant n_k risques individuels ($k=1...4$). Soit y_i le risque de l'individu i , le risque total du portefeuille noté W_n est donc donné par la formule suivante :

$$W_n = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n c(F, u_i)$$

En effet chaque risque individuel Y_i est fonction du facteur systématique représenté par F et des caractéristiques spécifiques de l'individu i résumées par u_i .

La deuxième égalité provient de l'hypothèse selon laquelle chaque risque individuel dépend d'éléments propres à l'individu (représenté par les variables tarifaires) mais aussi d'élément commun représenté par le facteur F . Le risque total du portefeuille correspond à une perte pour l'assureur. Le quantile de W_n pour un niveau de risque donné est utilisé pour définir la VaR. Les quantiles de la distribution de W_n ne sont pas faciles à calculer pour plusieurs raisons, dont les deux principales sont : la distribution de W_n est inconnue et sa densité implique des intégrales de dimension importante.

Pour résoudre ce problème, nous pouvons considérer un portefeuille de grande taille (ce qui est le cas dans notre étude) et raisonner de façon asymptotique.

4.2.2 Risque du portefeuille asymptotique

Les théorèmes limites standard tels que la loi des grands nombres et le théorème central limite ne peuvent pas être appliqués à la séquence y_1, \dots, y_n en raison des facteurs communs(cf chapitre 1). Cependant ces deux théorèmes peuvent s'appliquer conditionnellement aux valeurs prises par les facteurs sous les hypothèses A1 et A2. C'est la condition connue sous le nom de condition de portefeuille infiniment granulaire dans la terminologie Bâle 2.

Notons : $m(F) = E[y_i/F] = E[c(F, u_i)/F]$, le risque moyen conditionnel,

et : $\sigma^2(F) = V[y_i/F] = V[c(F, u_i)/F]$, la volatilité individuelle conditionnelle. En appliquant le TCL conditionnellement à F, nous obtenons :

$$W_n/n = m(F) + \sigma(F) \frac{X}{\sqrt{n}} + O(1/n) \quad (3.4)$$

Où X est une variable Gaussienne standard indépendante du facteur F. Le terme d'ordre $O(1/n)$ est en moyenne nulle, conditionnellement à F, puisque W_n/n est un estimateur sans biais de $m(F)$.

Le développement (3.4) diffère du développement associé au TCL standard. Alors que le premier terme du développement est constant et égal à la moyenne inconditionnelle dans le CLT standard, il est stochastique dans le développement (3.4) et lié au second terme du développement par le facteur F. De plus, chaque terme du développement précédent dépend de la valeur du facteur, mais également de la distribution du risque idiosyncratique par le biais des fonctions $m(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$. En considérant le développement (3.4), le modèle initial de dimensions d'incertitude : $\dim(F) + n\dim(u)$ est approché par un modèle à trois dimensions, avec une incertitude résumée par $m(F), \sigma(F)$ et X. L'expression (3.4) simplifie donc notre démarche en réduisant la dimension de notre modèle.

4.2.3 Application de la technique de la granularité

4.2.3.1 Normalisation de la mesure de risque

Si l'on considère la VaR par risque (actif) individuel contenu dans le portefeuille, les hypothèses A1 et A2 affirmant que les individus sont interchangeables et que la fonction quantile est homothétique, la VaR par risque individuel est simplement un quantile de W_n/n . La VaR au niveau de risque $\alpha^*=1-\alpha$ est notée : $VaR(\alpha)$ et est défini par la condition suivante :

$$P[W_n/n < VaR_n(\alpha)] = \alpha,$$

α est un nombre positif proche de 1 et prend en général les valeurs suivantes : 95%, 99%, 99.5%, ce qui correspond à des probabilités de pertes respectivement de 5%, 1%, 0.5%.

4.2.3.1 La mesure de risque CSA ou VaR d'un portefeuille de taille infinie

Vasicek [Vasicek(1991)] proposa d'examiner tout d'abord le cas limite d'un portefeuille de taille infinie.

Puisque : $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n/n = m(F)$, le portefeuille infini n'est pas sans risque, car le risque systématique n'est pas diversifiable. Nous en déduisons que la mesure de risque CSA est :

$$VaR_\infty(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} VaR_n(\alpha),$$

C'est le quantile d'ordre α associé à la composante systématique du risque du portefeuille :

$$P[W_n/n < VaR_\infty(\alpha)] = \alpha$$

La mesure de risque CSA est proposée dans les notations de Bâle 2 pour l'exigence minimum de capital.

4.2.3.2 Ajustement de granularité pour un portefeuille de taille finie

Le principal résultat dans la théorie de la granularité appliquée aux mesures de risque fournit le deuxième terme du développement asymptotique de la VaR_n pour une valeur n élevée mais finie. Ce résultat est donné ci-dessous pour un modèle à facteurs multiples.

Proposition 1

Dans un modèle à facteur de risque statique, nous obtenons l'expression suivante de la VaR :

$$VaR_n(\alpha) = VaR_\infty(\alpha) + \frac{1}{n}GA(\alpha) + o(1/n)$$

Où :

$$\begin{aligned} GA(\alpha) &= -\frac{1}{2} \frac{d \log g_\infty}{dw} [VaR_\infty(\alpha)] E[\sigma^2(F)/m(F) = VaR_\infty(\alpha)] \\ &\quad + \left. \frac{d}{dw} E[\sigma^2(F)/m(F) = w] \right|_{w=VaR_\infty(\alpha)} \} \\ &= -\frac{1}{2} E[\sigma^2(F)/m(F) = VaR_\infty(\alpha)] \left\{ \frac{d \log g_\infty}{dw} [VaR_\infty(\alpha)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dw} \log E[\sigma^2(F)/m(F) = w] \right|_{w=VaR_\infty(\alpha)} \} \end{aligned}$$

et $g_\infty[resp. VaR_\infty(\cdot)]$ désigne la fonction densité de probabilité (respectivement la fonction quantile) de la variable aléatoire $m(F)$ (preuve annexe 1 "granularity adjustment for risk measures : systematic vs unsystematic risks" -P.Gagliardini et C.Gourieroux- September 2010) .

L'ajustement de granularité dans la proposition 1 dépend de l'ampleur de la queue de la composante systématique $m(F)$ par l'expression : $\frac{d \log g_\infty}{dw} [VaR_\infty(\alpha)]$ qui devrait être négatif. Cet ajustement dépend également de l'expression :

$$\frac{d}{dw} \log E[\sigma^2(F)/m(F) = w] \Big|_{w=VaR_\infty(\alpha)}$$

qui est une mesure de la volatilité individuelle à des chocs sur la dérive (moyenne) individuelle.

Quand l'effet de queue l'emporte sur l'effet de levier, le GA est positif, ce qui implique une augmentation du capital requis par rapport à la mesure de risque CSA.

Dans le cas particulier de moyenne et de volatilité stochastique indépendantes, le GA se réduit à l'expression suivante :

$$-\frac{1}{2} E[\sigma^2(F)/m(F) = VaR_\infty(\alpha)] \frac{d \log g_\infty}{dw} [VaR_\infty(\alpha)]$$

Le développement asymptotique de la VaR de la proposition 1 est importante pour plusieurs raisons :

i) le calcul des quantiles $VaR_\infty(\alpha)$ et $GA(\alpha)$ ne réclame pas l'évaluation d'un nombre important d'intégrales. En effet ces deux valeurs impliquent uniquement les distributions des transformations $m(F)$ et σ^2 du facteur systématique qui sont indépendants de la taille du portefeuille,

ii) le second terme du développement est d'ordre $1/n$ et non pas $\frac{1}{\sqrt{n}}$ comme on aurait pu s'y attendre à partir du théorème central limite. Cela implique que l'approximation : $VaR_\infty(\alpha) + \frac{1}{n}GA(\alpha)$ est probablement assez juste, même pour des valeurs plutôt réduites de n telle que $n=100$,

iii) le développement est valable pour des modèles à facteur unique ou multiple,

IV) ce développement s'étend aisément aux autres mesures de risques de distorsions qui sont des moyennes pondérées de la VaR, c'est à dire :

$$DRM_{n(H)} = \int VaR_n(u) dH(u)$$

(avec DRM : Distorsion Risk Mesure)

Où H désigne la mesure de distorsion [Wang (2000)]. L'ajustement de granularité pour le DRM est tout simplement :

$$\frac{1}{n} \int GA(u) dH(u)$$

En particulier, la perte moyenne au niveau de confiance α correspond à la mesure de distorsion avec la fonction de répartition $H(u, \alpha) = (u - \alpha)^+ / (1 - \alpha)$ et le GA est égal à :

$$\frac{1}{n(1 - \alpha)} \int_\alpha^1 GA(u) du$$

,

C'est une moyenne des ajustements de granularité pour la VaR au dessus du niveau α

V) la proposition 1 peut être utilisée pour étudier l'agrégation des risques.

L'approche statique ne considère pas l'impact des observations passées dans la prédiction du risque future, elle nous permet néanmoins d'obtenir une expression analytique de la VaR. La section 3 du chapitre 2 précédent (2.3) nous a permis d'estimer la valeur f_t du facteur systématique à la date t et de pouvoir ainsi prédire la valeur de chaque risque individuel. Nous pouvons donc envisager l'approche dynamique que nous présentons ci-dessous ; elle corrige les lacunes de la précédente en mettant en exergue deux ajustements de granularité.

4.3 Approche dynamique

Dans l'approche dynamique mis en exergue par les modèles à facteurs dynamique la VaR devient une fonction de l'information disponible. la VaR conditionnelle doit prendre en compte le caractère non observable des valeurs présentes et passées du facteur. Nous montrons par la suite que la non observation du facteur implique un GA additionnel dans l'expression de la VaR. En dépit de cette nouvelle source de complexité dans les modèles dynamiques, le principe de granularité devient encore plus utile par rapport au cadre statique. En effet, la fonction de répartition conditionnelle de la valeur du portefeuille à la date t implique une intégrale qui peut atteindre la dimension $(t+1)\dim(F) + n\dim(u)-1$, qui dépend maintenant de t , en raison de l'intégration de la trajectoire du facteur.

4.3.1 Le modèle

La dynamique est introduite dans notre modèle de la façon suivante :

i) nous supposons toujours une relation statique entre les risques individuels et les facteurs systématiques. Cette relation est donnée par les équations de mesure suivantes :

$$y_{it} = c(F_t, u_{it}),$$

où les risques spécifiques (u_{it}) sont iid à travers les individus et les dates, et indépendants du processus suivi par le facteur F_t .

ii) le facteur est supposé dynamique et suit un processus de Markov et a pour densité de transition : $g(F_t/F_{t-1})$. Toute la dynamique des risques individuels passera par la dynamique du facteur.

Si nous considérons maintenant le risque futur du portefeuille par individu nous avons :

$$W_{n,t+1}/n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i,t+1}$$

Car $y_{i,t+1}$ représente le nombre de sinistres pour l'individu i en $t+1$ et n le nombre de mois polices du portefeuille à cette même période.

La VaR conditionnelle à l'horizon 1 est définie par l'équation vue précédemment :

$$P[W_{n,t+1}/n < VaR_{n,t}(\alpha)|I_{n,t}] = \alpha,$$

où pour rappel, l'information disponible $I_{n,t}$ inclue toutes les valeurs des risques individuels passés et présents $y_{i,t}, y_{i,t-1}, \dots$, pour $i=1, \dots, n$, mais pas les valeurs présentes et passées du facteur. Le quantile conditionnel $VaR_{n,t}(\alpha)$ dépend de la date t à travers l'information $I_{n,t}$.

4.3.2 Ajustement par granularité

4.3.2.1 Développement asymptotique du risque du portefeuille

L'idée est d'effectuer pour commencer un développement asymptotique du risque. En appliquant le TCL conditionnellement au facteur, nous obtenons l'expression suivante :

$$W_{n,t+1}/n = m(F_{t+1}) + \sigma(F_{t+1})\frac{X_{t+1}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} P[W_{n,t+1}/n < y|I_{n,t}] &= E[P(W_{n,t+1}/n < y|F_t, I_{n,t})|I_{n,t}] \\ &= E[P(W_{n,t+1}/n < y|F_t)|I_{n,t}] \\ &= E\left[P\left(m(F_{t+1}) + \sigma(F_{t+1})\frac{X_{t+1}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) < y|F_t\right)|I_{n,t}\right] \\ &= E\left[a\left(y, \frac{X_{t+1}}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right); F_t\right)|I_{n,t}\right] (**) \end{aligned}$$

La fonction a est définie par :

$$a(y, \varepsilon, F_t) = P[m(F_{t+1}) + \sigma(F_{t+1})\varepsilon < y|F_t = f_t]$$

4.3.2.2 Approximation de la valeur du facteur

La fonction a dépend du facteur non observable $F_t = f_t$, et il nous faut tout d'abord expliquer comment cette valeur peut être approximée à partir des données (variables) individuelles observées. Dans ce but, notons $h(y_{i,t}, f_t)$ la densité conditionnelle de $y_{i,t}$ sachant $F_t = f_t$, déduit du modèle (5.1) et définissons l'estimateur par maximum de vraisemblance de f_t par :

$$\hat{f}_{n,t} = \arg \max_{f_t} \sum_{i=1}^n \log h(y_{i,t}|f_t)$$

La valeur du facteur f_t est traitée comme un paramètre inconnu dans le modèle conditionnel à la date t et est estimée par le principe de maximum de vraisemblance. L'estimateur $\hat{f}_{n,t}$ est une fonction des observations individuelles courantes et donc de l'information disponible $I_{n,t}$.

4.3.2.3 Ajustement de granularité pour la prévision du facteur

Il peut sembler naturel de remplacer la valeur du facteur non observée f_t par son estimation dans l'expression de la fonction a , et d'utiliser le GA du modèle statique dans la proposition 1 (3.2.3.2) pour la distribution de F_{t+1} sachant $f_t = \hat{f}_{n,t}$, cependant, en remplaçant f_t par $\hat{f}_{n,t}$ cela implique une erreur d'approximation. Il a été prouvé que cette erreur est de l'ordre de $1/n$, c'est à dire, du même ordre qu'attendu pour le GA. Plus précisément, nous avons le résultat suivant qui est donné dans le cadre d'un facteur unique pour des raisons d'exposition [Gagliardini, Gourieroux (2010a), Corollary 5.3]

Proposition 2 : Soit un modèle dynamique à facteur unique. Pour un portefeuille de données panel, la distribution conditionnelle de F_t sachant $I_{n,t}$ est approximativement normal à l'ordre $1/n$:

$$N\left(\hat{f}_{n,t} + \frac{1}{n}\mu_{n,t}, \frac{1}{n} J_{n,t}^{-1}\right)$$

Où :

$$\mu_{n,t} = J_{n,t}^{-1} \frac{\partial \log g}{\partial f_t}(\hat{f}_{n,t} | \hat{f}_{n,t-1}) + \frac{1}{2} J_{n,t}^{-2} K_{n,t},$$

$$J_{n,t} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log h}{\partial f_t^2}(y_{i,t} | \hat{f}_{n,t})$$

,

$$K_{n,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 \log h}{\partial f_t^3}(y_{i,t} | \hat{f}_{n,t})$$

.

La proposition 2 donne une approximation de la distribution filtrée du facteur f_t sachant l'information $I_{n,t}$. La moyenne et la variance sont approximées à l'ordre $1/n$ pour appliquer une correction de type Ito. L'approximation fait intervenir quatre statistiques, que sont $\hat{f}_{n,t}$, $\hat{f}_{n,t-1}$ l'information de fisher $J_{n,t}$ pour approximer le facteur de façon transversale à la date t , et la statistique $K_{n,t}$ impliquée dans la correction du biais.

4.3.2.4 Développement de la fonction de répartition du risque du portefeuille

Nous avons trouvé les paramètres de la distribution normale de F_t sachant $I_{n,t}$. En intégrant ces éléments dans l'équation (**) précédente, la fonction de répartition du risque du portefeuille peut s'écrire :

$$P[W_{n,t+1}/n < y|I_{n,t}] = E[a(y, \frac{X_{t+1}}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n}); \hat{f}_{n,t} + \frac{1}{n}\mu_{n,t} + \frac{1}{\sqrt{n}} J_{n,t}^{-1/2} X_t^*)|I_{n,t}] + o(\frac{1}{n}),$$

Où X_t^* est une variable standard gaussienne indépendante de X_{t+1} et de $O(\frac{1}{n})$.

L'indépendance entre X_t^* et X_{t+1} est liée au fait que X_t^* représente tout simplement l'approximation numérique de la distribution de filtration de f_t sachant $I_{n,t}$ et n'est pas liée aux caractéristiques stochastiques des observations à la date $t+1$.

Par la suite nous pouvons étendre l'expression ci-dessus par rapport à n , jusqu'à l'ordre $1/n$. En notant que $\hat{f}_{n,t}$, $\mu_{n,t}$, $J_{n,t}$ sont des fonctions de l'information disponible et que

$$E[X_{t+1}] = E[X_t^*] = E[O(\frac{1}{n})] = 0, E[X_{t+1}X_t^*] = 0, E[X_{t+1}^2] = E[(X_t^*)^2] = 1,$$

Nous obtenons :

$$P[W_{n,t+1}/n < y|I_{n,t}] = a(y, 0, \hat{f}_{n,t}) + \frac{1}{n} \frac{\partial \log a(y, 0, \hat{f}_{n,t})}{\partial f_t} \mu_{n,t} \\ + \frac{1}{2n} \left[J_{n,t}^{-1} \frac{\partial^2 \log a(y, 0, \hat{f}_{n,t})}{\partial f_t^2} + \frac{\partial^2 \log a(y, 0, \hat{f}_{n,t})}{\partial \epsilon^2} \right] + o(\frac{1}{n}).$$

La fonction de répartition conditionnelle CSA du risque du portefeuille est $a(y, 0, \hat{f}_{n,t})$ où : $a(y, 0, f_t) = P[m(F_{t+1}) < y | F_t = f_t]$.

Ceci correspond à la fonction de répartition de $m(F_{t+1})$ sachant $F_t = f_t$, où le facteur non observable f_t est remplacé par son approximation $\hat{f}_{n,t}$. Le GA pour la fonction de répartition est la somme des composantes suivantes :

- l'ajustement de granularité pour la fonction de répartition conditionnelle avec F_t connu et égal à $\hat{f}_{n,t}$ est :

$$\frac{1}{2n} \frac{\partial^2 \log a(y, 0, \hat{f}_{n,t})}{\partial \epsilon^2},$$

La dérivée de second ordre de la fonction $a(y, \epsilon, \hat{f}_{n,t})$ (en ϵ au voisinage de $\epsilon = 0$) peut être calculée (en utilisant le lemme a.1 de l'annexe 1 "granularity adjustment for risk measures : systematic vs unsystematic risks" -P.Gagliardini et C.Gourieroux-September 2010), ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 \log a(y, 0, \hat{f}_{n,t})}{\partial \epsilon^2} = \frac{d}{dy} \left\{ g_\infty(y, f_t) E[\sigma^2(F_{t+1}) | m(F_{t+1}) = y, F_t = f_t] \right\},$$

Où $g_\infty(y; f_t)$ désigne la fonction de densité de $m(F_{t+1})$ subordonnée à $F_t = f_t$

– l’ajustement de granularité pour la filtration :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \log a(y, 0, \hat{f}_{n,t})}{\partial f_t} \mu_{n,t} + \frac{1}{2} J_{n,t}^{-1} \frac{\partial^2 \log a(y, 0, \hat{f}_{n,t})}{\partial f_t^2}$$

Il fait intervenir la dérivée et la dérivée seconde de la fonction de répartition CSA étant donné le conditionnement par la valeur du facteur. Les expressions : X_{t+1} et X_t^* étant indépendantes, il n’y a pas de GA croisée.

4.3.2.5 GA pour la VaR

La fonction de répartition CSA est utilisée pour déterminer la mesure de risque CSA $VaR_\infty(\alpha; \hat{f}_{n,t})$, à travers la condition suivante :

$$P[m(F_{t+1}) < VaR_\infty(\alpha; \hat{f}_{n,t}) | F_t = \hat{f}_{n,t}]$$

La VaR CSA dépend de l’information courante seulement à travers l’approximation de la valeur du facteur, le GA pour la VaR (conditionnelle) est déduite directement du GA de la fonction de répartition (conditionnelle) en appliquant le développement de Bahadur [Bahadur(1966) ; voir lemme a.3 dans appendice 1]. Nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 3 :

Dans un modèle dynamique à facteur de risque la VaR (conditionnelle) est telle que :

$$VaR_{n,t}(\alpha) = VaR_\infty(\alpha; \hat{f}_{n,t}) + \frac{1}{n} [GA_{risk,t}(\alpha) + GA_{filt,t}(\alpha)] + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où :

$$GA_{risk,t}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \log g_\infty(w, \hat{f}_{n,t})}{\partial w} E[\sigma^2(F_{t+1}) / m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] + \frac{\partial}{\partial w} E[\sigma^2(F_{t+1}) / m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] \right\}_{w=c(\alpha; \hat{f}_{n,t})}$$

$$GA_{filt,t}(\alpha) = -\frac{1}{g_\infty(VaR_\infty(\alpha; \hat{f}_{n,t}), \hat{f}_{n,t})} \left\{ \frac{\partial a[VaR_\infty(\alpha; \hat{f}_{n,t}), 0, \hat{f}_{n,t}]}{\partial f_t} \mu_{nt} + \frac{1}{2} J_{nt}^{-1} \frac{\partial^2 a[VaR_\infty(\alpha; \hat{f}_{n,t}), 0, \hat{f}_{n,t}]}{\partial f_t^2} \right\},$$

où $g_\infty(\cdot; f_t)$ [respectivement $a(\cdot, 0; f_t)$ et $VaR_\infty(\cdot; f_t)$] désigne la fonction de densité

(resp la fonction de répartition et le quantile) de $m(F_{t+1})$ sachant $F_t = f_t$

Le GA pour la VaR conditionnelle est la somme de deux composantes. La première $GA_{risk,t}(\alpha)$ est analogue au GA du modèle statique, cependant la distribution de $m(F_{t+1})$ et $\sigma^2(F_{t+1})$ est maintenant conditionnel à $F_t = f_t$ et la valeur du facteur non observable est remplacée par son approximation $\hat{f}_{n,t}$. La seconde composante $GA_{filt,t}(\alpha)$ est due à la filtration de la valeur du facteur non observable, et implique des dérivées du premier et du second ordre de la fonction de répartition CSA étant donné le conditionnement de la valeur du facteur.

Nous gardons donc cette approche dynamique et décidons de l'appliquer à la fréquence de sinistre de notre portefeuille.

4.3.3 Modélisation de la VaR de la fréquence automobile

Nous considérons dans cette section une application du calcul de la VaR analytique pour la fréquence de sinistre dans le cadre du modèle de Bernoulli vu précédemment.

Les risques individuels $Y_{i,t+1}$ suivent des distributions de Bernoulli indépendantes conditionnellement au facteur $F_{1,t+1}$:

$$Y_{i,t+1} \sim B(1, F_{1,t+1})$$

où $B(1, F_{1,t+1})$ représente une distribution de Bernoulli de probabilité égale à $F_{1,t+1}$. C'est l'approche dynamique du modèle avec la probabilité de défaut stochastique, souvent appelé modèle à forme réduite ou modèle à intensité stochastique dans la littérature du risque crédit. Dans le cas de ce risque,

$$W_{n,t+1}/n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i,t+1}$$

représente la fréquence de défaut du portefeuille avec n : le nombre d'individus du portefeuille. Si maintenant on considère le risque auto $Y_{i,t+1}$ qui représente le risque qu'un assuré ait 0 ou 1 sinistre et donc $W_{n,t+1}/n$ est la fréquence de sinistre du portefeuille (avec n : le nombre de mois police). Pour rappel cette approche est permise par les retraitements que nous avons appliqués à notre base de données, à savoir la mensualisation des deux bases annuelles 2007 et 2008 qui renforce la probabilité qu'un individu donné ait au plus un sinistre. Cette hypothèse nous permet ainsi d'emprunter le cadre mis en place pour le risque crédit.

Dans ce modèle, on définit :

$$\begin{aligned} m(F_{1,t+1}) &= E(Y_{i,t+1}/F_{1,t+1}) = F_{1,t+1} \\ V(F_{1,t+1}) &= \sigma^2(F_{1,t+1}) = F_{1,t+1}(1 - F_{1,t+1}) \end{aligned}$$

si nous effectuons une transformation logistique du facteur tel que :

$$F_{1,t}^* = \log[F_{1,t}/(1 - F_{1,t})]$$

et si de plus nous faisons l'hypothèse que les facteurs suivent un AR(1) :

$$F_{1,t}^* = c + \gamma F_{1,t-1}^* + \epsilon_t$$

avec $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ et $\hat{f}_{n,t} = \frac{N_t}{n}$, la fréquence mensuelle à la date t.

Alors la proposition 2 vue précédemment nous permet de dire que la distribution conditionnelle de $F_{1,t}^*$ sachant $I_{n,t}$ suit approximativement une loi normale d'ordre $\frac{1}{n}$:

$$N\left(\hat{f}_{n,t} + \frac{1}{n}\mu_{n,t}, \frac{1}{n} J_{n,t}^{-1}\right)$$

Où :

$$\mu_{n,t} = J_{n,t}^{-1} \frac{\partial \log g}{\partial f_t}(\hat{f}_{n,t} | \hat{f}_{n,t-1}) + \frac{1}{2} J_{n,t}^{-2} K_{n,t},$$

$$J_{n,t} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log h}{\partial f_t^2}(y_{i,t} | \hat{f}_{n,t})$$

$$K_{n,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 \log h}{\partial f_t^3}(y_{i,t} | \hat{f}_{n,t})$$

Nous détaillons en annexe 4 les principaux développements mathématiques qui nous permettent d'aboutir à l'expression des statistiques : $\mu_{n,t}$, $J_{n,t}$, $K_{n,t}$ ci-dessous.

$$J_{n,t} = \frac{N_t}{n} \times \frac{1}{(f_{1,t}^*)^2} + \left(1 - \frac{N_t}{n}\right) \times \frac{1}{(1 - f_{1,t}^*)^2} = \frac{1}{f_{1,t}^*(1 - f_{1,t}^*)}$$

$$K_{n,t} = \frac{N_t}{n} \times \frac{2}{(f_{1,t}^*)^3} - \left(1 - \frac{N_t}{n}\right) \times \frac{2}{(1 - f_{1,t}^*)^3} = 2 \left(\frac{1 - 2f_{1,t}^*}{f_{1,t}^{2*}(1 - f_{1,t}^*)^2} \right)$$

$$\mu_{n,t} = -f_t \left[\frac{\log\left(\frac{f_t}{1-f_t}\right) - m}{\sigma^2} + 3 \right] + 1$$

Nous avons ainsi calculé l'expression des paramètres de la distribution normale de $F_{1,t}^*$ sachant $I_{n,t}$. Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir les trois composantes de notre VaR que sont : la VaR CSA ($VaR_\infty(\alpha; \hat{f}_{n,t})$) et les deux ajustements de granularité ($GA_{risk,t}(\alpha)$, $GA_{filt,t}(\alpha)$).

4.3.3.2 GA pour la VaR

La proposition 3 vue précédemment dit que :

Dans un modèle dynamique à facteur de risque la VaR (conditionnelle) est telle que :

$$VaR_{n,t}(\alpha) = VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}) + \frac{1}{n}[GA_{risk,t}(\alpha) + GA_{filt,t}(\alpha)] + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où :

$$GA_{risk,t}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \log g_{\infty}(w, \hat{f}_{n,t})}{\partial w} E[\sigma^2(F_{t+1})/m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] + \frac{\partial}{\partial w} E[\sigma^2(F_{t+1})/m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] \right\}_{w=c(\alpha; \hat{f}_{n,t})}$$

$$GA_{filt,t}(\alpha) = -\frac{1}{g_{\infty}(VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}), \hat{f}_{n,t})} \left\{ \frac{\partial a[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}), 0, \hat{f}_{n,t}]}{\partial f_t} \mu_{nt} + \frac{1}{2} J_{nt}^{-1} \frac{\partial^2 a[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}), 0, \hat{f}_{n,t}]}{\partial f_t^2} \right\},$$

Où $g_{\infty}(\cdot; f_t)$ [respectivement $a(\cdot, 0; f_t)$ et $VaR_{\infty}(\cdot; f_t)$] désigne la fonction de densité (resp la fonction de répartition et le quantile) de $m(F_{t+1})$ subordonné à $F_t = f_t$

4.3.3.2.1 Expression de la $VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})$

$$P[m(F_{t+1}) < VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}) | F_t = \hat{f}_{n,t}] = \alpha$$

Comme dans le cas du bernouilli : $m(F_{t+1}) = F_{t+1}$, on obtient donc :

$$P[F_{t+1} < VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}) | F_t = \hat{f}_{n,t}] = \alpha$$

$$\text{or } F_{t+1} = A(c + \gamma A^{-1}(F_{1,t}) + \epsilon_{t+1})$$

Comme la fonction A est croissante alors la fonction A^{-1} est également croissante donc l'égalité précédente devient :

$$= P[A(c + \gamma A^{-1}(F_{1,t}) + \epsilon_{t+1}) < VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}) | F_t = \hat{f}_{n,t}] = \alpha$$

$$= P[c + \gamma A^{-1}(F_{1,t}) + \epsilon_{t+1} < A^{-1}[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})] | F_t = \hat{f}_{n,t}] = \alpha$$

$$= P\left[\frac{\epsilon_{t+1}}{\sigma} < \frac{A^{-1}[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})] - (c + \gamma A^{-1}(F_{1,t}))}{\sigma} \mid F_t = \hat{f}_{n,t}\right] = \alpha$$

Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale standard :

$$\Phi\left[\frac{A^{-1}[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})] - (c + \gamma A^{-1}(F_{1,t}))}{\sigma}\right] = \alpha$$

$$\implies A^{-1}[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})] = \Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma + c + \gamma A^{-1}(F_{1,t})$$

$$\implies VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}) = A[\Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma + c + \gamma A^{-1}(F_{1,t})]$$

$$\implies VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}) = \frac{1}{1 + \exp(-\Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma - c - \gamma A^{-1}(F_{1,t}))}$$

4.3.3.2 Expression de la $GA_{risk,t}(\alpha)$

$$GA_{risk,t}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \log g_{\infty}(w, \hat{f}_{n,t})}{\partial w} E[\sigma^2(F_{t+1})/m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial w} E[\sigma^2(F_{t+1})/m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] \right\}_{w=c(\alpha; \hat{f}_{n,t})}$$

Dans notre cadre cette expression devient :

$$GA_{risk,t}(\alpha) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \log g_{\infty}(VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}), \hat{f}_{n,t})}{\partial w} [VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})][1 - VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})] \right. \\ \left. + 1 - 2[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})] \right\}$$

En effet :

$$E[\sigma^2(F_{t+1})/m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] = E[\sigma^2(F_{t+1})/F_{t+1} = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] \\ = (1 - w)w = [1 - VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})]VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial w} E[\sigma^2(F_{t+1})/m(F_{t+1}) = w, F_t = \hat{f}_{n,t}] = \frac{\partial}{\partial w} [(1 - w)w] \\ = 1 - 2[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t})]$$

On a vu précédemment que :

$$\frac{\partial \log g}{\partial y} = \frac{1}{a(A^{-1}(y))} \left[- \left(\frac{A^{-1}(y) - m}{\sigma^2} \right) - \frac{d \log a(A^{-1}(y))}{dy} \right]$$

$$\frac{d \log a(y)}{dy} = -1 + \frac{2 \exp(-y)}{1 + \exp(-y)}$$

donc :

$$\frac{d \log g_{\infty}(y)}{dy} = - \frac{(1 + \exp())^2}{\exp()} \left[\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sigma} + \frac{-1 + \exp()}{1 + \exp()} \right]$$

$$GA_{risk,t}(\alpha) = \frac{-1}{2} \left\{ - \left[\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sigma} + \frac{-1 + \exp()}{1 + \exp()} \right] + \frac{-1 + \exp()}{1 + \exp()} \right\}$$

$$\implies GA_{risk,t}(\alpha) = \frac{1}{2\sigma} \Phi^{-1}(\alpha)$$

4.3.3.2.3 Expression de la $GA_{filt,t}(\alpha)$

L'expression de cet ajustement donné précédemment est :

$$GA_{filt,t}(\alpha) = - \frac{1}{g_{\infty}(VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}), \hat{f}_{n,t})} \left\{ \frac{\partial a[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}), 0, \hat{f}_{n,t}]}{\partial f_t} \mu_{nt} + \frac{1}{2} J_{nt}^{-1} \frac{\partial^2 a[VaR_{\infty}(\alpha; \hat{f}_{n,t}), 0, \hat{f}_{n,t}]}{\partial f_t^2} \right\},$$

Rappel :

$$\begin{aligned} a(y, 0, f_t) &= P[F_{t+1} < y | F_t = f_t] = \\ &= P[A(c + \gamma A^{-1}(F_t) + \epsilon_t) < y | F_t = f_t] \\ &= P[(c + \gamma A^{-1}(F_t) + \epsilon_t) < A^{-1}(y) | F_t = f_t] \end{aligned}$$

$$= P \left[\frac{\epsilon_t}{\sigma} < \frac{A^{-1}(y) - (c + \gamma A^{-1}(F_t))}{\sigma} \mid F_t = f_t \right]$$

$$= \Phi \left[\frac{A^{-1}(y) - (c + \gamma A^{-1}(F_t))}{\sigma} \right]$$

$$\frac{\partial a}{\partial f_t} = \frac{-\gamma}{\sigma} \times \frac{1}{A'[A^{-1}(f_t)]} \times \Phi' \left[\frac{A^{-1}(y) - (c + \gamma A^{-1}(F_t))}{\sigma} \right]$$

$$\frac{\partial a}{\partial f_t} [VaR_{\infty}(\alpha; f_t)] = \frac{-\gamma}{\sigma} \times \frac{1}{A'[A^{-1}(f_t)]} \times \Phi' \left[\frac{A^{-1}(VaR_{\infty}(\alpha; f_t)) - (c + \gamma A^{-1}(F_t))}{\sigma} \right]$$

Comme $\frac{A^{-1}(VaR_{\infty}(\alpha; f_t)) - (c + \gamma A^{-1}(F_t))}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$ on obtient :

$$\frac{\partial a}{\partial f_t} [VaR_{\infty}(\alpha; f_t)] = \frac{-\gamma}{\sigma} \times \frac{1}{A'[A^{-1}(f_t)]} \times \Phi' [\Phi^{-1}(\alpha)]$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial f_t^2} = \frac{\gamma}{\sigma} \times \frac{A''[A^{-1}(f_t)]}{(A'[A^{-1}(f_t)])^3} \times \Phi' \left[\frac{A^{-1}(y) - (c + \gamma A^{-1}(F_t))}{\sigma} \right] +$$

$$\left(\frac{\gamma}{\sigma} \times \frac{1}{A'[A^{-1}(f_t)]} \right)^2 \times \Phi'' \left[\frac{A^{-1}(y) - (c + \gamma A^{-1}(F_t))}{\sigma} \right]$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial f_t^2} [VaR_{\infty}(\alpha; f_t)] = \frac{\gamma}{\sigma} \times \frac{A''[A^{-1}(f_t)]}{(A'[A^{-1}(f_t)])^3} \times \Phi'(\Phi^{-1}(\alpha)) + \left(\frac{\gamma}{\sigma} \times \frac{1}{A'[A^{-1}(f_t)]} \right)^2 \times \Phi''(\Phi^{-1}(\alpha))$$

$$g_{\infty}(y) = \frac{d_{N(m,\sigma^2)}(A^{-1}(y))}{a(A^{-1}(y))} \text{ (avec } a=A')$$

$$d_{N(m,\sigma^2)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$d_{N(m,\sigma^2)}(A^{-1}(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{A^{-1}(y)-m}{\sigma}\right)^2}$$

d'où :

$$g_{\infty}(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{A^{-1}(y)-m}{\sigma}\right)^2}}{a(A^{-1}(y))}$$

$$g_{\infty}(VaR_{\infty}(\alpha; f_t)) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sigma}\right)^2}}{a(\sigma\Phi^{-1}(\alpha) + m)}$$

$$g_{\infty}(VaR_{\infty}(\alpha; f_t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} [1 + \exp(-\sigma\Phi^{-1}(\alpha) - m)]^2 \exp\left[\frac{-1}{2}(\Phi^{-1}(\alpha))^2 + \sigma\Phi^{-1}(\alpha) + m\right]$$

En remplaçant chaque élément par sa valeur on a ainsi l'expression finale du $GA_{filt,t}(\alpha)$.

4.3.4 Applications numériques

4.3.4.1 Estimation du facteur par AR(12)

L'établissement des formules exactes de la VaR et de la VaR_{∞} pour le modèle à facteur à une dimension va nous permettre d'estimer la VaR et la VaR_{∞} pour chaque base puis pour l'ensemble par aggrégation. Dans cette approche dynamique, nous avons estimé les formules analytiques pour un modèle où le facteur systématique suit un AR(1) :

$$F_{t+1}^* = c + \gamma F_t^* + \epsilon_t$$

Or l'observation de nos bases montre qu'il existe un effet de saisonnalité qu'il faut retraiter. Nous avons donc choisi d'utiliser l'approximation suivante :

$$F_{t+12}^* = c + \gamma F_t^* + \epsilon_t ,$$

et d'adapter les formules de l'AR(1) en proposant un AR(12). Cette hypothèse est due au fait que nous raisonnons en pas mensuel et cela nous permet de contourner en partie l'effet de saisonnalité. L'estimation de cet AR(12) pour chacune des bases nous donne les résultats suivants :

ESTIMATION AR(12) BASE 1

Le Système SAS
The AUTOREG Procedure

Dependent Variable y

Ordinary Least Squares Estimates

SSE	0.01282455	DFE	10
MSE	0.00128	Root MSE	0.03581
SBC	-43.071266	AIC	-44.041079
MAE	0.0268954	AICC	-42.707746
MAPE	0.52977155	Regress R-Square	0.7729
Durbin-Watson	2.1547	Total R-Square	0.7729

Miscellaneous Statistics

Statistique	Valeur	Proba	Libellé
Normal Test	0.5699	0.7520	Pr > ChiSq

Statistique de Durbin-Watson

Ordre	DW	Pr < DW	Pr > DW
1	2.1547	0.5636	0.4364

NOTE: Pr<DW is the p-value for testing positive autocorrelation, and Pr>DW is the p-value for testing negative autocorrelation.

Variable	DDL	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
Intercept	1	-1.6746	0.5867	-2.85	0.0171
Y1	1	0.6698	0.1148	5.83	0.0002

ESTIMATION AR(12) BASE 2

Le Système SAS

The AUTOREG Procedure

Dependent Variable y

Ordinary Least Squares Estimates

SSE	0.00977165	DFE	10
MSE	0.0009772	Root MSE	0.03126
SBC	-46.333787	AIC	-47.3036
MAE	0.02435797	AICC	-45.970267
MAPE	0.47981029	Regress R-Square	0.7062
Durbin-Watson	2.1586	Total R-Square	0.7062

Miscellaneous Statistics

Statistique	Valeur	Proba	Libellé
Normal Test	0.7198	0.6977	Pr > ChiSq

Statistique de Durbin-Watson

Ordre	DW	Pr < DW	Pr > DW
1	2.1586	0.5686	0.4314

NOTE: Pr<DW is the p-value for testing positive autocorrelation, and Pr>DW is the p-value for testing negative autocorrelation.

Variable	DDL	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
Intercept	1	-2.2014	0.5873	-3.75	0.0038
Y1	1	0.5670	0.1156	4.90	0.0006

ESTIMATION AR(12) BASE 3

Le Système SAS
The AUTOREG Procedure

Dependent Variable y

Ordinary Least Squares Estimates

SSE	0.00257739	DFE	10
MSE	0.0002577	Root MSE	0.01605
SBC	-62.326285	AIC	-63.296099
MAE	0.01262229	AICC	-61.962765
MAPE	0.22982847	Regress R-Square	0.9633
Durbin-Watson	1.6722	Total R-Square	0.9633

Miscellaneous Statistics

Statistique	Valeur	Proba	Libellé
Normal Test	0.6060	0.7386	Pr > ChiSq

Statistique de Durbin-Watson

Ordre	DW	Pr < DW	Pr > DW
1	1.6722	0.2322	0.7678

NOTE: Pr<DW is the p-value for testing positive autocorrelation, and Pr>DW is the p-value for testing negative autocorrelation.

Variable	DDL	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
Intercept	1	-1.0108	0.2753	-3.67	0.0043
Y1	1	0.8176	0.0504	16.21	<.0001

ESTIMATION AR(12) BASE 4

Le Système SAS

The AUTOREG Procedure

Dependent Variable y

Ordinary Least Squares Estimates

SSE	0.03172182	DFE	10
MSE	0.00317	Root MSE	0.05632
SBC	-32.203548	AIC	-33.173361
MAE	0.04011425	AICC	-31.840028
MAPE	0.80383127	Regress R-Square	0.7175
Durbin-Watson	1.8834	Total R-Square	0.7175

Miscellaneous Statistics

Statistique	Valeur	Proba	Libellé
Normal Test	0.1276	0.9382	Pr > ChiSq

Statistique de Durbin-Watson

Ordre	DW	Pr < DW	Pr > DW
1	1.8834	0.3290	0.6710

NOTE: Pr<DW is the p-value for testing positive autocorrelation, and Pr>DW is the p-value for testing negative autocorrelation.

Variable	DDL	Valeur estimée	Erreur type	Valeur du test t	Approx. de Pr > t
Intercept	1	-0.5737	0.8719	-0.66	0.5254
Y1	1	0.8862	0.1758	5.04	0.0005

Le tableau ci-dessous donne la signification des statistiques de test de l'estimation de l'AR(12) pour chacune des bases.

SIGLE	SIGNIFICATION
SSE	Somme des carrés des erreurs
MSE	Erreur quadratique moyenne
MAE	Erreur absolue moyenne
MAPE	Pourcentage d'erreur absolue moyenne
SBC	Critère d'information de Schwarz
Root MSE	Moyenne d'erreur quadratique
AIC	Critère d'information d'Akaike
AICC	Critère d'information d'Akaike corrigé
Regress R-Square	R ² de régression
Total R-Square	R ² total
DW	Durbin Watson

Tableau 12 : Tableau récapitulatif des statistiques de test

Nous remarquons que le nombre de statistiques de test pour apprécier la qualité de l'estimation par AR(12) est assez élevé, cependant le plus important demeure le test de Durbin Watson (DW). La statistique de test (d) de DW est le ratio de la somme des carrés des différences dans les résidus successifs à la SCR. La valeur de d est comprise entre 0 et 4. Une valeur proche de zéro indique une auto corrélation positive, une valeur proche de 2 une absence d'auto corrélation et si l'on s'approche de 4, il existe une auto corrélation négative. Dans le cas de nos quatre bases, d n'est jamais égale à 2 néanmoins nous nous situons dans une zone d'indécision comprise entre 1.6 et 2.2. C'est le principal inconvénient du test de DW : lorsqu'il se trouve dans une zone d'indécision, on peut difficilement conclure de l'existence ou non d'une autocorrélation (du premier ordre). Pour résoudre cette limite certains auteurs proposent des modifications de d qui sont complexes pour des résultats incertains. C'est la raison pour laquelle nous décidons de garder les estimateurs des paramètres trouvés (résumé dans le tableau ci-dessous) que nous intégrerons dans le calcul de la VaR analytique.

Base Paramètres	B1	B2	B3	B4
C	-1.6746	-2.1014	-1.0108	-0.5737
Y	0.6698	0.5670	0.8176	0.8862

Tableau 13 : Tableau des estimateurs des paramètres pour les 4 bases

4.3.4.2 Calcul de la VaR

Ainsi, pour l'année de projection, l'équation de l'AR(12) et les formules analytiques nous permettent de déterminer :

- La fréquence moyenne attendue pour le mois m et la base b : $F_{m,b}$.
- La $VaR(99, 5\%)$ attendue (ainsi que la VaR_∞) pour ce même mois m et cette base b : $VaR_{m,b}(99, 5\%)$ et $VaR_{\infty,m,b}(99, 5\%)$.

Comme notre modèle ne nous permet pas de présupposer de la structure de corrélation entre les différents mois de l'année de projection et entre les bases, nous faisons les hypothèses suivantes :

- Nous désignons par c la corrélation entre bases et supposons cinq valeurs pour c : 0%, 25%, 50%, 75%, 100% ; c'est à dire de la non corrélation à la corrélation totale.
- Nous supposons que la corrélation entre mois successifs est de : 100%.
- Nous corrélons tout d'abord les bases entre elles puis les mois entre eux. Pour cela nous avons également supposés que les fréquences suivent des lois Gaussiennes, centrées en $F_{m,b}$ et de variance : $VaR_{m,b}(99, 5\%)$ ou($VaR_{\infty,m,b}(99, 5\%)$).

Ces hypothèses sont simplificatrices et mériteraient des analyses approfondies. Cependant, l'objectif du mémoire étant de transposer une méthodologie qui, à terme, doit s'appliquer sur des bases annuelles, nous n'avons pas approfondi ces conjectures.

Notation :

$F_{m,b}$: fréquence moyenne attendue

avec : $F_{m,b} = E \left[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \right]$ où :

$Y_{m,b}$ = Variable aléatoire des nombres de sinistres pour la base b au cours du mois m

$n_{m,b}$ = nombre de mois police pour la base b au mois m

$VaR_{m,b}(99, 5\%)$: VaR de $\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}}$

$$VaR_{\infty,m,b}(99, 5\%) : VaR_{\infty} \text{ de } \frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}}$$

On cherche à calculer : $VaR_{m,b}(99, 5\%) \left(\frac{Y_m}{n_m} \right)$

$$\text{où : } \frac{Y_m}{n_m} = \frac{\sum_{b=1}^4 Y_{m,b}}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}} = \frac{\sum_{b=1}^4 \frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \times n_{m,b}}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}} \text{ (l'objectif étant de faire apparaître les fréquences)}$$

$$= \frac{\sum_{b=1}^4 \left(\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} - E \left[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \right] \right) \times n_{m,b}}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}} + \frac{\sum_{b=1}^4 \left(E \left[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \right] \right) \times n_{m,b}}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}} \text{ (l'idée étant de faire apparaître les normales centrées)}$$

d'où :

$$VaR_{m,b}(99, 5\%) \left(\frac{Y_m}{n_m} \right) = VaR_{m,b}(99, 5\%) \left[\overbrace{\frac{\sum_{b=1}^4 \left(\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} - E \left[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \right] \right) \times n_{m,b}}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}}}^{\alpha} \right] + \frac{\sum_{b=1}^4 F_{m,b} \times n_{m,b}}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}}$$

$$\text{Car : } VaR(X + \lambda) = \lambda + VaR(X)$$

$$\alpha \text{ vaut : } \frac{1}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}} \times VaR_{m,b}(99, 5\%) \left[\overbrace{\sum_{b=1}^4 \left(\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} - E \left[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \right] \right) \times n_{m,b}}^{\beta} \right]$$

$$\text{Car : } VaR(\lambda X) = \lambda VaR(X)$$

β vaut :

$$\sqrt{\sum_{b=1}^4 \left[VaR_{m,b}(99, 5\%) \left[\left(\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} - E \left[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \right] \right) \times n_{m,b} \right] \right]^2 + 2 \times \sum_{1 \leq b \leq b' \leq 4} C \times VaR(99, 5\%) \left(\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} - E \left[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} \right] \right) \times n_{m,b} \times VaR(99, 5\%) \left(\frac{Y_{m,b'}}{n_{m,b'}} - E \left[\frac{Y_{m,b'}}{n_{m,b'}} \right] \right) \times n_{m,b'}}$$

On a simplement appliqué la formule suivante :

$$VaR(A + B) = \sqrt{VaR^2(A) + VaR^2(B) + 2cVaR(A)VaR(B)}$$

(dans le cas où A et B sont des normales centrées)

Enfin :

$$VaR(99, 5\%)(\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}} - E[\frac{Y_{m,b}}{n_{m,b}}]) \times n_{m,b} = (VaR_{n,b}(99, 5\%) - F_{n,b}) \times n_{m,b}$$

Car :

$$VaR(\lambda X + \mu) = \lambda VaR(X) + \mu \quad (\text{par linéarité})$$

En conclusion :

$$VaR(\frac{X_m}{n_m}) = \frac{\sum_{b=1}^4 n_{m,b} \times F_{m,b}}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}} + \frac{1}{\sum_{b=1}^4 n_{m,b}} \times \sqrt{\sum_{b=1}^4 ((VaR_{n,b} - F_{n,b})n_{m,b})^2 + 2C \times \sum_{1 \leq b \leq b' \leq 4} n_{m,b}n_{m,b'} \times (VaR_{n,b} - F_{n,b})(VaR_{n,b'} - F_{n,b'})}$$

Nous obtenons ainsi les coefficients c γ et l'écart type pour chaque facteur et pour chaque base. Ayant la densité de transition du processus de F, on pourra appliquer la démarche et calculer la VaR analytique comme la somme de la VaR CSA plus deux ajustements de granularité pour chaque base.

Les résultats des calculs de la VaR mensuelle pour la base 1 sont résumés dans le tableau suivant :

	MP1	F1	VaRinf1	1/n(garisk1)	1/n(gafilt1)	VaR1
janv-08	202173,9	0,006469678	0,015597479	1,82009E-05	2,91125E-06	0,015618592
févr-08	205213,1	0,005482106	0,013973306	1,79314E-05	2,58578E-06	0,013993823
mars-08	208161,42	0,006072211	0,014954712	1,76774E-05	2,72217E-06	0,014975112
avr-08	212521,8	0,005933509	0,014727066	1,73147E-05	2,62251E-06	0,014747003
mai-08	215275,29	0,005862261	0,014609427	1,70933E-05	2,57766E-06	0,014629097
juin-08	218674,67	0,006210139	0,015179341	1,68275E-05	2,62772E-06	0,015198796
juil-08	222548,61	0,0057875	0,014485461	1,65346E-05	2,47441E-06	0,01450447
août-08	225186	0,005457711	0,013931981	1,6341E-05	2,34837E-06	0,01395067
sept-08	226858,9	0,006122749	0,015037217	1,62205E-05	2,50623E-06	0,015055944
oct-08	228665,61	0,006231807	0,015214475	1,60923E-05	2,52383E-06	0,015233092
nov-08	230287,2	0,006465839	0,015591337	1,5979E-05	2,56252E-06	0,015609879
déc-08	232056,77	0,007011215	0,016452012	1,58571E-05	2,66806E-06	0,016470537
	2627623,27	0,006098667	0,01498988		2,17237E-07	

Tableau 14 : Récapitulatif des Calculs de la VaR BASE 1

La colonne MP1 donne le nombre de mois police par mois, la colonne F1, la fréquence mensuelle, la colonne suivante, la VaR CSA, les deux prochaines colonnes, les ajustements

de granularité risqué et filtré et la dernière colonne la VaR de la base 1 pour chaque mois de l'année 2008. Cette structure sera la même pour chacune des trois autres bases.

Nous constatons pour la base 1, comme nous le verrons également pour les autres bases, la VaR mensuelle CSA est quasiment égale à la VaR total (en moyenne 1,5 %), les ajustements de granularité étant très faibles.

Le tableau ci-dessous nous communique les résultats pour la base 2. Nous remarquons que les VaR mensuelles de la base 1 et de la base 2 sont du même ordre : 1.5 %.

	MP2	F2	VaRinf2	1/n(garisk2)	1/n(gafilt2)	VaR2
janv-08	669987,42	0,006698633	0,015365813	5,65381E-06	7,3229E-07	0,015372199
févr-08	674242,83	0,005876221	0,014275031	5,61813E-06	6,79198E-07	0,014281328
mars-08	678079,26	0,00635324	0,014915324	5,58634E-06	7,03915E-07	0,014921615
avr-08	685612,53	0,005997557	0,014440002	5,52496E-06	6,75895E-07	0,014446203
mai-08	689051,13	0,00624482	0,014771705	5,49739E-06	6,86789E-07	0,01477789
juin-08	694389,8	0,006070078	0,014537902	5,45513E-06	6,72373E-07	0,01454403
juil-08	700411,16	0,006096419	0,014573335	5,40823E-06	6,67171E-07	0,01457941
août-08	703392,97	0,005430819	0,013656183	5,3853E-06	6,25265E-07	0,013662194
sept-08	706850,33	0,006336561	0,014893301	5,35896E-06	6,73813E-07	0,014899334
oct-08	711431,94	0,006364628	0,014930348	5,32445E-06	6,7373E-07	0,014936346
nov-08	714376,93	0,006195609	0,014706156	5,3025E-06	6,61822E-07	0,014712121
déc-08	718029,45	0,006548478	0,015171256	5,27553E-06	6,76201E-07	0,015177208
	8345855,8	0,006184267	0,014686162			

Tableau 15 : Récapitulatif des Calculs de la VaR BASE 2

Le Calcul de la VaR mensuelle de la base 3 nous donne les résultats suivants :

	MP3	F3	VaRinf3	1/n(garisk3)	1/n(gafilt3)	VaR3
janv-08	628997	0,004610515	0,009636794	6,82523E-06	7,1412E-07	0,009644334
févr-08	634796,72	0,003983953	0,008556926	6,76287E-06	6,2924E-07	0,008564318
mars-08	639555,13	0,004331136	0,009158967	6,71255E-06	6,6781E-07	0,009166348
avr-08	647789,67	0,003998211	0,008581842	6,62723E-06	6,1883E-07	0,008589088
mai-08	651278,29	0,004167189	0,008875858	6,59173E-06	6,3644E-07	0,008883086
juin-08	656901,8	0,004146739	0,008840396	6,5353E-06	6,2915E-07	0,00884756
juil-08	662625,81	0,004100353	0,00875984	6,47884E-06	6,1721E-07	0,008766936
août-08	666227,65	0,003497303	0,007695924	6,44382E-06	6,1348E-07	0,007702981
sept-08	669549,53	0,003983275	0,008555741	6,41185E-06	6,7697E-07	0,00856283
oct-08	672847,55	0,004437855	0,009342162	6,38042E-06	7,3388E-07	0,009349276
nov-08	675366,27	0,004333945	0,0091638	6,35662E-06	7,1827E-07	0,009170875
déc-08	678277,84	0,004726677	0,009833836	6,32934E-06	7,6616E-07	0,009840932
	7884213,26	0,004193189	0,008916973			

Tableau 16 : Récapitulatif des Calculs de la VaR BASE 3

Nous remarquons que la base 3 propose la VaR mensuelle la plus faible (en moyenne 0.9 %).

Le tableau suivant est relatif à la base 4. Cette base est celle qui détient la VaR mensuelle la plus élevée (en moyenne 1.8 %).

	MP4	F4	VaRinf4	1/n(garisk4)	1/n(gafilt4)	VaR4
janv-08	221178,74	0,007487157	0,020346846	1,45574E-05	4,57688E-06	0,02036598
févr-08	225167,24	0,006390805	0,017713393	1,42995E-05	3,93174E-06	0,017731624
mars-08	228261,97	0,007298631	0,019897927	1,41057E-05	4,31475E-06	0,019916348
avr-08	232671,23	0,006666058	0,018379896	1,38384E-05	3,93735E-06	0,018397672
mai-08	234987,71	0,006587579	0,018190245	1,37019E-05	3,87095E-06	0,018207818
juin-08	237659,7	0,006130614	0,017079836	1,35479E-05	3,60895E-06	0,017096993
juil-08	240601,65	0,006674933	0,018401325	1,33822E-05	3,81074E-06	0,018418517
août-08	242593,77	0,005968826	0,016684092	1,32723E-05	3,44713E-06	0,016700812
sept-08	243699,87	0,00680345	0,018711195	1,32121E-05	3,82337E-06	0,018728231
oct-08	244598,42	0,007318118	0,0199444	1,31636E-05	4,04977E-06	0,019961613
nov-08	245066,03	0,007520422	0,020425896	1,31384E-05	4,13891E-06	0,020443174
déc-08	245967,23	0,00852146	0,02278341	1,30903E-05	4,57941E-06	0,02280108
	2842453,56	0,006951037	0,019055244			

Tableau 17 : Récapitulatif des Calculs de la VaR BASE 4

Après agrégation des 4 bases, selon les hypothèses et la méthode évoquées précédemment nous obtenons les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

MPALL	fall	VAR	VARINF								
1722337,06	0,0060104	0,010329243	0,0103246	0,011464848	0,0114584	0,012401768	0,0123939	0,013217907	0,0132088	0,013950597	0,0139404
1739419,89	0,0052058	0,009276705	0,0092722	0,010317159	0,0103109	0,011179052	0,0111714	0,011931384	0,0119225	0,012607641	0,0125977
1754057,78	0,0057056	0,009935539	0,009931	0,011046728	0,0110404	0,011963627	0,0119559	0,01276238	0,0127535	0,013479492	0,0134696
1778595,23	0,0053492	0,009456083	0,0094516	0,010523632	0,0105174	0,011405851	0,0113983	0,012174983	0,0121663	0,012865821	0,0128561
1790592,42	0,0054881	0,009630731	0,0096263	0,010706089	0,0106999	0,011594933	0,0115874	0,012369917	0,0123613	0,013066055	0,0130564
1807625,97	0,005396	0,009491884	0,0094875	0,010555223	0,0105491	0,01143412	0,0114267	0,012200425	0,0121919	0,012888763	0,0128792
647789,67	0,0054107	0,009530805	0,0095265	0,010607435	0,0106014	0,011496489	0,0114891	0,012271284	0,0122628	0,012967047	0,0129576
1837400,39	0,0048041	0,008721501	0,0087172	0,009726757	0,0097208	0,010559018	0,0105518	0,011285274	0,0112769	0,011937974	0,0119286
1846958,63	0,0055188	0,009663065	0,0096587	0,010748642	0,0107426	0,011644775	0,0116375	0,0124256	0,0124172	0,013126705	0,0131173
1857543,52	0,0057759	0,010011738	0,0100074	0,011142766	0,0111367	0,01207385	0,0120665	0,012884	0,0128756	0,013610822	0,0136014
1865096,43	0,0057289	0,0099558	0,0099515	0,011092545	0,0110865	0,012027366	0,0120201	0,012840346	0,0128319	0,013569476	0,0135601
1874331,29	0,0062054	0,010591175	0,0105868	0,01179483	0,0117888	0,012781754	0,0127744	0,013638779	0,0136303	0,014406731	0,0143973
	0,005559	0,009728135	0,0097237	0,010823937	0,0108178	0,011728036	0,0117206	0,0125156	0,012507	0,013222648	0,013213

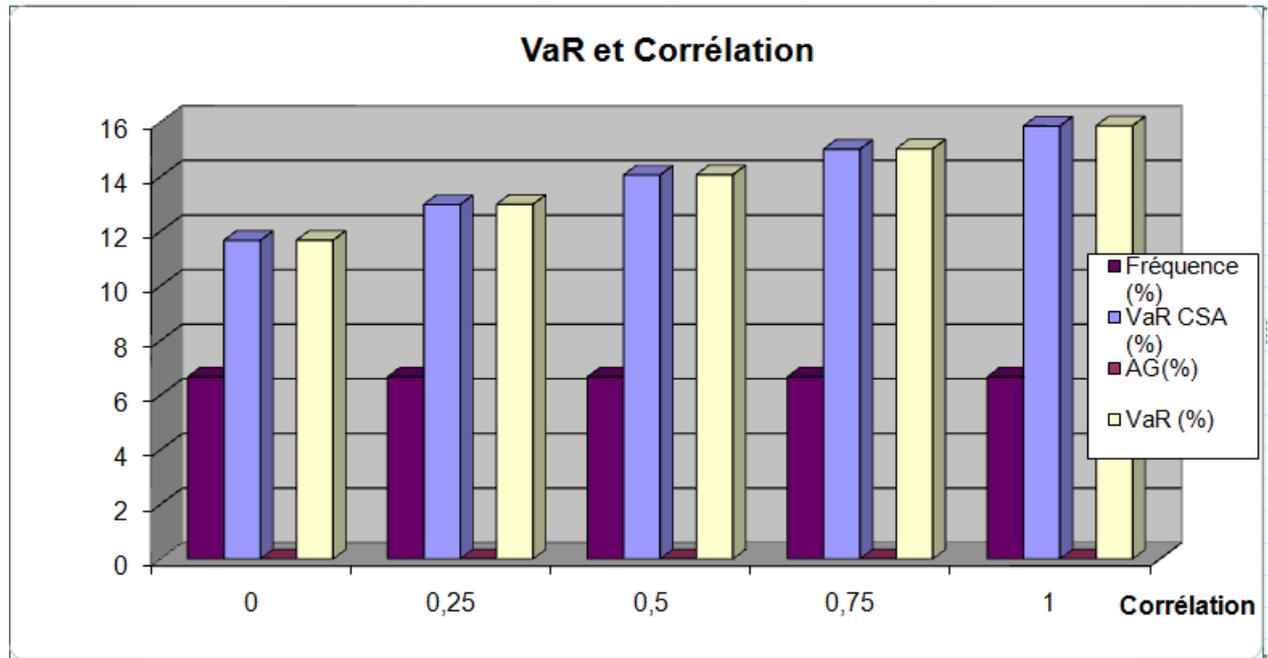
Tableau 18 : Récapitulatif des calculs de la VaR

Nous obtenons au final, pour la VaR agrégée annuelle, les résultats suivants en fonction du degré de corrélation :

Coefficient de corrélation	0	0.25	0.5	0.75	1
Fréquence (%)	6.66708	6.66708	6.66708	6.66708	6.66708
VaR CSA (%)	11.66846	12.98137	14.06467	15.00837	15.85562
AG (%)	0.00530	0.00736	0.00897	0.01035	0.0116
VaR totale (%)	11.67376	12.98872	14.07364	15.01872	15.86718

Tableau 19 : Récapitulatif des calculs de la VaR avec Ajustements de Granularité

Les résultats obtenus sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus par AXA dans son approche traditionnelle. L'ajustement de granularité semble faible, ce qui laisse à penser que le portefeuille a atteint ses limites de diversification. Il reste à confirmer ces résultats par d'autres applications.



Graphique 23 : Evolution de la VaR en fonction du degré de corrélation

4.3.5 Etudes de sensibilité

L'idée est de calculer la VaR Montecarlo en utilisant les paramètres du modèle trouvé avec le filtre de Kalman malgré les incertitudes sur la calibration. Notre objectif est de pouvoir comparer les résultats obtenus par cette méthode à ceux de la démarche précédente. Les étapes sont les suivantes :

- Simulation d'une trajectoire pour le facteur à partir de l'équation :

$$F_{t+1} = \mu + \Phi F_t + v_t \quad (3.3)$$

Pour rappel t représente le mois de l'année considérée

- Simulation d'une trajectoire de a pour chaque base à partir de l'équation suivante :

$$a_t = \alpha + \gamma F_t + u_t, \quad (3.2)$$

- Simulation de la fréquence par le tirage d'une loi binomiale de paramètres :

$$binom(n, \phi(a_t))$$

(pour le calcul de la VaR infinie, on prendra pour le tirage de la fréquence l'espérance de la binomiale qui est égale à $n * \phi(a_t)$)

- Simulation de 100 000 trajectoires de la fréquence puis on détermine la $VaR(99.5\%)$ et la $VaR_{\infty}(99.5\%)$.

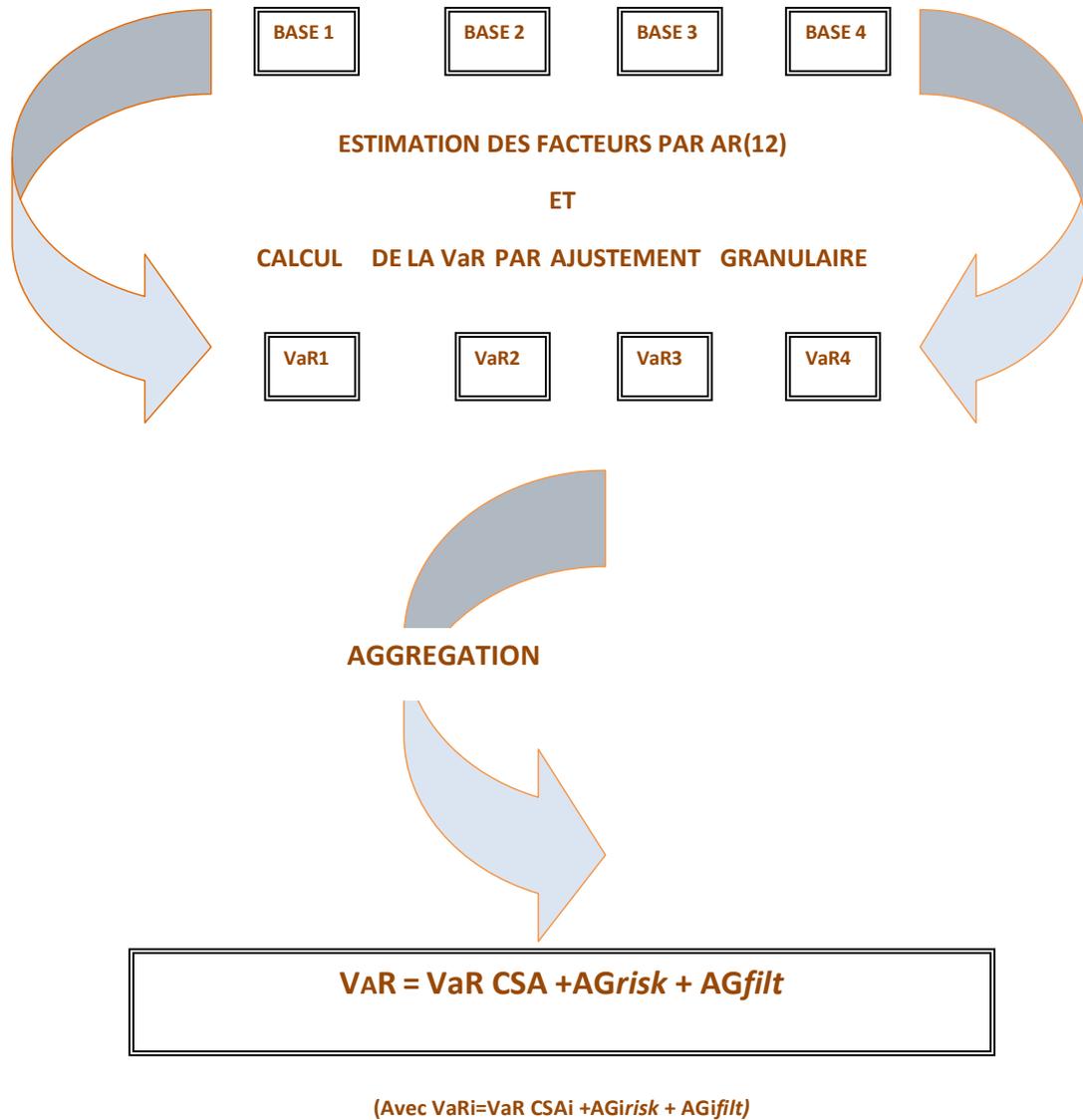
Remarque :

- Dans cette approche n reste le nombre de mois police de la période considérée.
- Nous n'avons pas les éléments permettant de modéliser l'évolution du portefeuille, on considère donc que le nombre de mois police par mois est identique sur l'année de projection à ce qu'il était sur la dernière année connue.

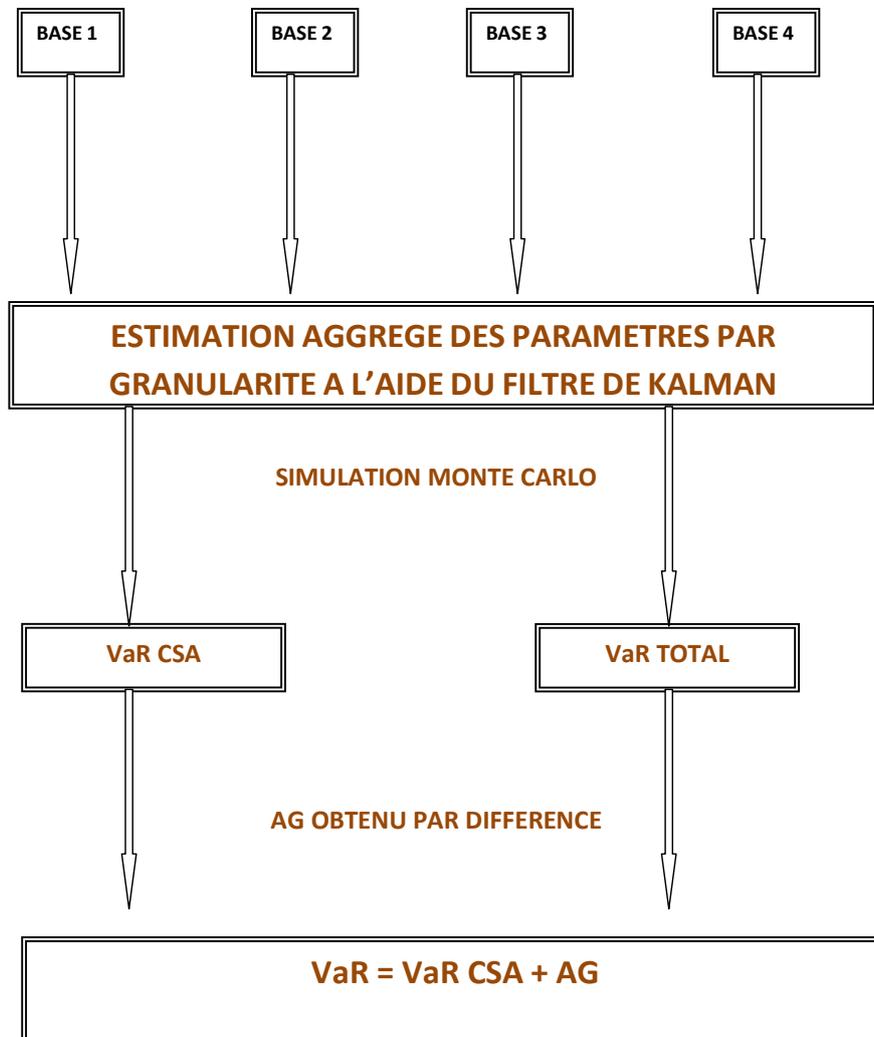
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant. Nous notons qu'ils sont très sensibles aux valeurs du paramètre α , c'est l'un des inconvénients du filtre de Kalman. Le filtre est donc très volatile cependant les résultats obtenus précédemment ne sont pas remis en cause.

CAS N°	ALPHA	VAR CSA (%)	AG (%)	VaR totale (%)
1	-2.4 ; -2.35 ; -2.35 ; -2.35	0.7723 9.2676	0.0052	0.77273 9.27278
2	-2.28 ; -2.25 ; -2.35 ; -2.35	0.865 10.3501	0.0043	0.86286 10.35433
3	-2.055 ; -2.055 ; -2.05 ; -2.05	1.60830 19.2999	0.0069	1.60888 19.30654

Tableau 20 : Calcul de la VaR Monte Carlo



GRAPHIQUE 24 : Calcul de la VaR par Granularité



GRAPHIQUE 25 : Calcul de la VaR par simulation Monte-Carlo

QUATRIEME PARTIE

LIMITES et PERSPECTIVES

5 LIMITES ET PERSPECTIVES

5.1 Limites

Notre étude présente certaines limites liées notamment aux hypothèses retenues et aux choix que nous avons dû effectuer pour tenter d'appliquer la théorie de la granularité au risque de notre portefeuille automobile. Ces limites se retrouvent donc à chacune des trois grandes étapes que sont : la classification, l'estimation des facteurs et le calcul de la VaR analytique.

5.1.1 La classification

La mise en place de la classification avait pour but l'obtention de classes homogènes. Cependant, le choix effectué est très sensible aux hypothèses de départ. Par ailleurs, même si les classes obtenues sont homogènes, le problème de la corrélation entre elles reste présent.

5.1.1.1 Nombre de classes

Pour obtenir le nombre de classes nous avons fait des choix :

- Tout d'abord celui d'une méthodologie : ACP+classification nous a permis d'avoir des classes homogènes en termes des variables de tarification mais pas des variables de risque (fréquence de sinistre pas très bien représentée). Une autre alternative était la régression par arbre qui présente également des limites notamment le risque de surajustement du modèle : même si un modèle semble performant (son erreur moyenne est très faible) il peut en réalité ne pas l'être. Il faut trouver l'arbre le plus petit possible ayant la plus grande performance possible. Plus un arbre est petit et plus il sera stable dans ses prévisions futures (en statistiques, le principe de parcimonie prévaut presque toujours); plus un arbre est performant, plus il est satisfaisant pour l'analyste. Il ne sert à rien de générer un modèle de très bonne qualité, si cette qualité n'est pas constante et se dégrade lorsque l'on applique ce modèle sur un nouvel ensemble de données.

- Nous avons ensuite retenu 4 classes à partir de l'observation de statistiques descriptives fournies par la méthode du cluster, mais ce choix, comme nous l'avons vu dans la partie 1, n'était pas le seul possible au vu de certaines statistiques.

5.1.1.2 Le problème de la corrélation inter-classes

L'objectif de la classification était de trouver des classes homogènes et le plus indépendantes possibles. Or, il est impossible d'éliminer toute corrélation entre les classes. Il faut donc tenir compte de cette corrélation résiduelle qui limite la portée de nos résultats et conditionne la question d'agrégation de la VaR.

5.1.2 L'estimation des facteurs

Nous avons fait appel au filtre de Kalman pour l'estimation des facteurs, mais cette méthode présente plusieurs inconvénients :

- cette technique suppose que les variables d'entrées sont parfaitement connues, elle ne permet pas de valider ces variables. De plus, leur incertitude de mesure n'est pas prise en compte. Il serait souhaitable de considérer les incertitudes sur ces variables pour l'estimation des variables d'état et des variances à posteriori,

- la formulation de cette technique ne permet pas de prendre en compte des contraintes d'inégalité telles que les bornes sur les différentes variables ;

- dans le cas des modèles à forte non linéarité, la convergence n'est pas aisée à mettre en oeuvre par la méthode du filtre de Kalman étendu,

- un des buts de la validation des données est d'obtenir un jeu cohérent de données qui respecte les contraintes du modèle. Or, les filtres de Kalman donnent un résultat pondéré entre la valeur prédite et la mesure.

Une alternative possible est de mettre en place une analyse à part pour pouvoir par régression trouver les facteurs systématiques influençant le risque.

5.1.3 Aggrégation de la VaR

L'aggrégation de la VaR se pose à trois niveaux :

- Du fait de la mensualisation de chaque base, pour avoir la VaR de la base considérée il faudra agréger les VaR mensuelles. Les résultats pourront être améliorés par la possibilité de disposer de périodes annuelles au lieu de mensuelles.

- En raison de l'existence de plusieurs bases, pour avoir la VaR totale il faudra agréger les 4 bases.

- Enfin, dans le cadre du calcul économique, il faudra agréger les VaR relatives à l'ensemble des risques de l'entreprise.

5.2 Apports

Il était intéressant et novateur de tenter d'appliquer la technique de la granularité en assurance dommages malgré les difficultés qu'une telle démarche soulève. Cette application nous permet d'exhiber des résultats intéressants.

5.2.1 Intérêt des résultats

Nous avons réussi à obtenir des résultats très proches de ceux obtenus en interne en faisant appel à deux approches qui utilisent la technique de la granularité à des stades différents :

- Une première approche a consisté à d'abord estimer les facteurs systématiques par un AR(12) puis à utiliser la technique de la granularité au niveau de la VaR pour aboutir

à l'écriture analytique recherchée.

- La seconde approche nous a permis d'utiliser la technique de la granularité pour estimer les facteurs à l'aide du filtre de Kalman et par la suite, à partir des estimations trouvées obtenir la VaR par simulations Montecarlo.

Les résultats obtenues valident l'idée selon laquelle le portefeuille de départ aurait atteint ses limites en matière de diversification en raison de la faiblesse des ajustements de granularité trouvés. En effet la VaR du portefeuille est quasiment égale à la VaR du portefeuille infini.

5.2.2 Importance de la dimension temporelle

Les résultats précédents ont été obtenus à l'aide d'une approche dynamique c'est à dire en tenant compte de la dimension temporelle. L'approche statique supposait en effet que les observations passées n'apportent pas d'information pour prédire le risque futur, ce qui ne semble pas pertinent. L'intérêt de la démarche dynamique est que la VaR devient une fonction de l'information disponible.

5.3 Perspectives

Il est possible d'obtenir des résultats plus robustes, mais pour atteindre cet objectif il semble urgent de disposer de bases de données plus adéquates. En effet, il faudrait impérativement disposer de bases annuelles sur une période au minimum égale à vingt ans. De plus il est impératif d'affiner l'approche en apportant une réponse à la recherche des risques systématiques et de leur loi. Par la suite il est nécessaire de considérer la problématique d'agrégation des risques. Ce n'est qu'à l'issue des démarches précédentes qu'on pourra envisager l'intégration des résultats trouvés dans le cadre du calcul du capital économique.

5.3.1 Affiner l'approche et la problématique d'agrégation

Il est nécessaire, pour optimiser l'agrégation des mesures de risques, de résoudre le problème de dépendance et de corrélation des risques individuels.

Pour rappel, la dépendance et la corrélation sont des notions différentes. En effet, on a X, Y indépendantes $\implies X$ et Y non corrélés ou $\rho(X, Y) = 0$; cependant la réciproque est fautive sauf dans le cas où les variables sont Gaussiennes.

L'hypothèse selon laquelle les risques d'un portefeuille d'assurance sont indépendants peut être testée à l'aide de la théorie des copules. En effet, les copules permettent de modéliser la dépendance entre risques. Elles permettent de décrire le comportement individuel de chaque risque et "couplent" les lois marginales pour obtenir les lois jointes. De plus, elles offrent une représentation fonctionnelle de la dépendance qui donne une description très complète de la forme de cette dernière. L'intérêt pratique essentiel à l'utilisation de cet outil consiste en la possibilité de modéliser la dépendance des événements extrêmes. Mais le problème de la calibration des copules doit être résolu.

5.3.2 Constitution de bases de données adéquates

Dès le départ, l'étude a été biaisée par la non disposition de bases annuelles fiables sur une durée suffisante (au moins 20 ans). Le problème des données peut constituer un handicap majeur pour l'obtention de résultats exploitables. Il semble urgent pour les compagnies d'assurance, surtout dans le cadre de Solvabilité II, de repenser leur système de traitement des données, condition nécessaire pour la mise en place d'études statistiques efficaces.

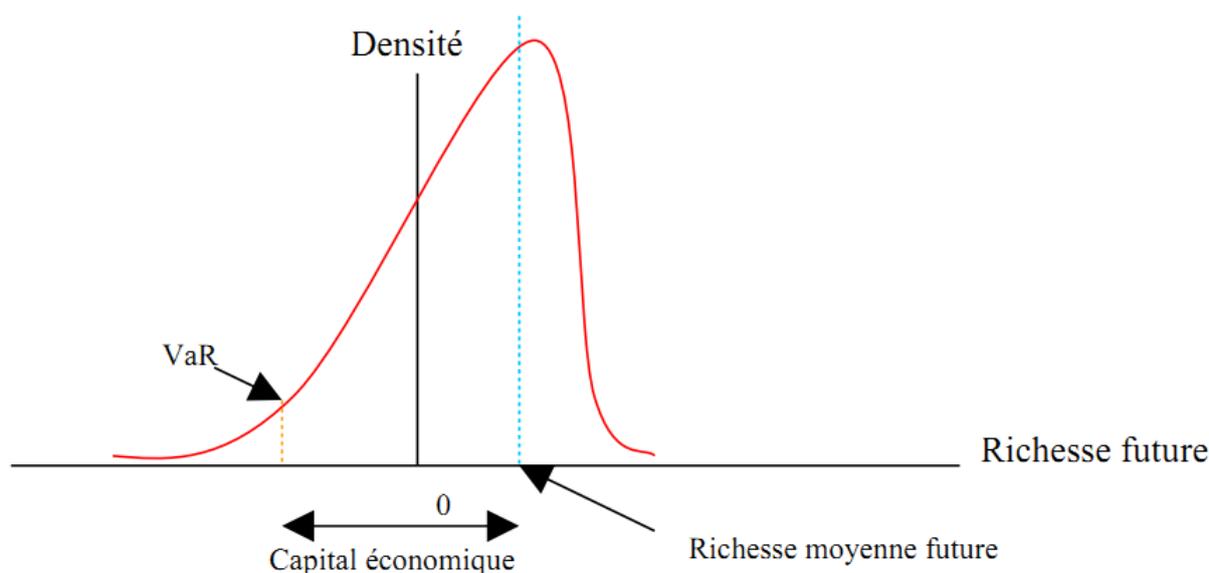
5.3.3 Intégration dans le calcul du capital économique

Pour avoir une vision globale de sa situation financière, une compagnie d'assurance peut utiliser des bilans de type financier ou comptable. Mais cette approche permet d'évaluer cette situation qu'à un instant donné. Dans quelle mesure l'entreprise pourra faire face à tout type d'aléas en lien avec ses engagements ? Autrement dit, ses fonds propres sont-ils suffisants pour assurer sa solvabilité ?

Comme nous l'avons vu précédemment, le législateur a tenté d'apporter une réponse à cette question par la définition du SCR (capital de solvabilité requis) et du MCR (minimum de capital requis). Les compagnies d'assurance peuvent opter pour le modèle standard ou développer un modèle interne pour permettre le calcul de ce SCR ou capital économique. Ce modèle doit par la suite être validé par les autorités compétentes.

Le capital économique représente donc pour les entreprises d'assurance le montant de capitaux couvrant le besoin minimum, évalué sur une base probabiliste, pour couvrir les risques qu'elle gère. Solvency II retient le capital économique à horizon 1 an pour considérer le problème de la solvabilité des compagnies d'assurance et préconise d'utiliser la VaR pour le calcul. Le calcul du SCR permet donc la détermination du niveau de solvabilité pour contrôler une probabilité de ruine à un an en imposant que celle-ci soit inférieure à 0.5% à horizon d'un an. Le SCR (Solvency Capital Requirement), capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnelle, correspond à une VaR 1 an 99.5%.

Le graphique ci-dessous illustre comment la VaR s'intègre dans le calcul du capital économique et la nécessité, au préalable, à l'aide d'une approche par simulations stochastiques, de déterminer la distribution de la richesse de l'entreprise d'assurance pour aboutir dans notre démarche.



Graphique 26 : Détermination du Calcul Economique

Nous considérons par la suite le profit que compte tirer AXA de cette étude. Au préalable il est nécessaire de présenter le modèle interne de cette entreprise.

5.3.3.1 Présentation du modèle interne d'AXA

Le modèle interne d'AXA permet de projeter et de mesurer la plupart des risques. Le modèle a été conçu pour répondre aux exigences de Solvabilité 2. Il modélise notamment les risques suivants :

- Risques financiers
- Risques d'Assurance-Vie
- Risques d'Assurance Dommages
- Risques opérationnels

Le modèle du capital économique, base de la propre estimation des risques, est calibré pour représenter la Valeur sous risque à l'horizon d'un an à un quantile à 99,5 % mesurée sur la base du bilan économique ne comprenant, par convention, que la valeur des activités actuelles. Ce bilan économique comprend : tout actif et tout passif compris dans les états financiers conformes aux principes IFRS, à l'exclusion de tout actif lié aux nouvelles affaires/clientèle comme cela a été souligné plus haut et y compris le passif éventuel.

Les risques IARD traités dans le cadre du capital économique sont les risques de Catastrophe, de Réserve et de Prime.

Le risque de Catastrophe comprend à la fois les sinistres liés à des catastrophes naturelles et les catastrophes liées à l'activité humaine.

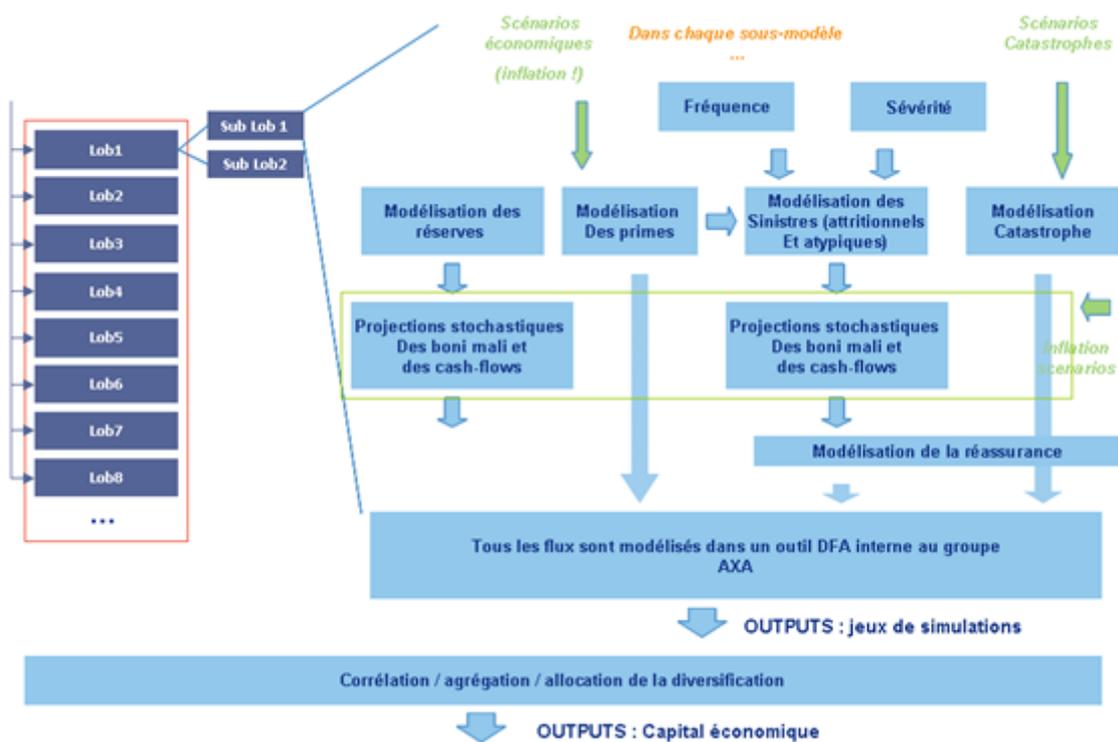
Le risque de Réserve est le risque de déviation des provisions de sinistre sur un an, y compris les réserves pour les frais de gestion des sinistres. Il s'agit ainsi du risque sur les années passées de souscription (liquidation des sinistres).

Le risque de Prime est divisé en deux composants, à savoir le risque appelé de Portefeuille et le risque de sinistres futurs. Le risque de Portefeuille : ce risque englobe toutes les

fluctuations des Primes émises brutes de l'année en cours, ces fluctuations étant normalement divisées en 2 parties. Le risque de sinistres futurs : ce risque comprend les variations relatives aux sinistres qui surviendront dans l'année en cours, à l'exception de sinistres dus à des catastrophes naturelles et il peut être divisé en deux sous-risques :

- Risque attritionnel : il est représenté par des sinistres de faible sévérité mais ayant une grande fréquence qui surviennent pendant l'année en cours.
- Risque atypique : il est représenté par des sinistres peu fréquents d'une grande sévérité, habituellement couverts par la réassurance (réassurance obligatoire ou facultative) qui surviennent pendant l'année en cours.

Le schéma suivant résume la structure du modèle :



Graphique 27 : Structure du modèle interne d'AXA

5.3.3.2 Utilisation des résultats sur la granularité dans le modèle interne AXA

Les sinistres qui ne concernent pas des catastrophes naturelles sont modélisés grâce à une approche fréquence/sévérité, avec une distinction entre sinistres " attritionnels " et atypique. Les risques attritionnels étant des risques de faible intensité mais ayant une grande fréquence.

L'approche de la granularité a deux objectifs et deux utilisations possibles :

- La modélisation de la volatilité des sinistres en décomposant la partie diversifiable et non diversifiable (tant sur la fréquence que sur la sévérité)

- L'amélioration de l'agrégation des VaR des différents risques en sortie du modèle (cette approche nécessite une analyse de plusieurs risques et n'est pas traitée dans ce mémoire).

Actuellement, la fréquence et la sévérité de la sinistralité future sont modélisées avec des distributions classiques (Poisson, Pareto, LogNormale...) qui peuvent surestimer l'effet de diversification en raison de la taille de certains portefeuilles.

Notre étude, sur le portefeuille Automobile, a permis d'illustrer cet effet et de mettre en place une approche pour identifier la part du risque non diversifiable. AXA doit désormais adapter notre transposition de l'approche de la granularité à son cadre de modèle interne qui effectue des simulations de la sinistralité puis qui agrège l'ensemble des risques. La technique de la granularité VaR peut donc permettre à AXA d'optimiser le calcul de son capital économique.

6 CONCLUSION

Notre étude a porté sur l'application de la technique de la granularité au cadre de l'assurance pour scinder la VaR de notre portefeuille auto et ainsi distinguer la part de risque due aux facteurs systématiques de celle liée aux variables tarifaires traditionnelles.

Notre approche s'est déroulée en plusieurs étapes :

- unification des deux bases annuelles pour par la suite mensualiser la base ainsi obtenue et disposer d'une périodicité suffisante pour mener à bien notre étude,
- classification par la méthode ACP et Cluster pour obtenir au final 4 bases homogènes,
- estimation des facteurs par la mise en place d'un modèle AR(12) ou d'une filtration de Kalman couplée à l'application de la technique de la granularité,
- calcul de la VaR analytique comme la somme de la VaR CSA du portefeuille infini et d'ajustements de granularité, et par simulation Monte-Carlo,
- évaluation des limites et des perspectives offertes par notre étude.

Nous avons d'une manière générale essayé de pousser l'application de la technique de la granularité au cadre de l'assurance non vie aussi loin que possible. Plusieurs barrières doivent désormais être franchies pour la mise en place opérationnelle de ce projet :

- mise à disposition d'une base de données fiable avec au moins vingt années de périodicité,
- établissement de la loi des facteurs systématiques,
- optimisation du processus d'agrégation de la VaR des sous-portefeuilles.

Ce n'est que par la suite, il sera envisageable d'intégrer les résultats obtenus dans le calcul du capital économique.

En conclusion nous pouvons dire que nous avons un risque mesuré par une volatilité. Cette volatilité ne peut être totalement éliminée par la diversification. Nous avons réussi à mesurer sur un portefeuille auto le niveau maximum de diversification. La régulation ne considère pas toujours ce phénomène, les entreprises doivent en avoir conscience et mettre en oeuvre des actions pour en tenir compte.

CINQUIEME PARTIE
BIBLIOGRAPHIE

7 BIBLIOGRAPHIE

Articles et publications

Gordy, M.(2003)

A Risk Factor Model Foundation for Rating Based Bank Capital Rules, Journal of Financial Intermediation, 199-232.

Basel Committee on Banking Supervision (2001)

"The New Basel Capital Accord, Second Consultative Paper, Bank of International Settlements, January"

Basel Committee on Banking Supervision (2001)

"The New Basel Capital Accord", Consultative Document of the Bank for International Settlements, April 2001, Part 2 : Pillar 1, Section "Calculation of IRB Granularity Adjustment to Capital".

Basel Committee on Banking Supervision (2003) "The New Basel Capital Accord", Consultative Document of the Bank for International Settlements, April 2003, Part 3 : The Second Pillar.

Gourieroux, C., Laurent, J.P. et O. Scaillet (2000)

"Sensitivity Analysis of Value-at-Risk, Journal of Financial Finance, 7, 225-245"

Gagliardini, P. et C.Gourieroux (2010)

"Efficiency in Large Dynamic Panel Models with Common Factor"

Martin, R, et T. Wilde (2002) :

"Unsystematic credit Risk, November, 123-128 "

Gagliardini, P. et C.Gourieroux (2009)

" Granularity Theory"

C.Gourieroux

"Contrôle et suivi des risques en Finance, CREST et Université de Toronto"

Gagliardini, P. et C.Gourieroux (2010)

" Granularity Adjustment in Dynamic Multiple Factor Models : Systematic VS Unsystematic Risks "

Gagliardini, P. et C.Gourieroux (2010)

"Granularity Adjustment in Dynamic Multiple Factors Models : Systematic vs Unsystematic Risks"

Wang, S. (2000)

"A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risk, Journal of risk and Insurance, 67, 15-36"

L.Sandor Richard

"Sécurisation and Financial Markets », Institutional Investor"

Goldman, Sachs Co Fixed Income Research

"Assessing Catastrophe Reinsurance Linked Securities as a New Asset Class"

Source : problème économiques 15 mars 2006

"Les investisseurs en titres d'assurance"

IXIS Corporate Bank Investment - AXA

« FCC SPARC Preliminary Deal Information »

« AXA Motor Insurance Securitization »

Standard Poor's

« Corporate securitization, FCC SPARC »

Valentin Bauwens/Jean-François Walhin

"La titrisation du risque d'assurance"

P. ARTZNER, F. DELBAEN, J-M. EBER, D. HEATH (1999)

« Coherent Measures of Risk » *Mathematical Finance* 9, N3, 203-228

S. S. WANG, V. YOUNG, H. PANJER (1997)

« Axiomatic characterization of insurance prices » *Insurance : Mathematics and Economics*, 21, 173-183.

Ouvrages statistiques et actuariat

C. Gourieroux, André Tiomo (2007) "Risque de crédit , Une approche avancée
Christian Gourieroux"

P. PETAUTON (2000)

« Théorie de l'assurance dommages »

A. TOSETTI, T. BEHAR, M. FROMENTEAU, S.MENART (2002)

« Assurance : comptabilité, réglementation, actuariat »

C. PARTRAT et J-L BESSON (2005)

"Assurance Non-Vie Modélisation"

Michel Denuit / Arthur Charpentier (2005)

"Mathématiques de l'Assurance non-vie"

Planchet, F., Therond, P., Jacquemin, J., (2005)

"Modèles Financiers en Assurances : Analyses de risques dynamiques"

Portait R., Poncet P., (2008)

"Finance de Marché

Vernimmen P,

"Finance d'entreprise"

Pierre Petauton

"Théorie de l'assurance dommages » Dunod Paris"

M.Gordy, 2004

"Granularity Adjustment in Portofolio Risk Management , in Risk Measures for the
21th Century"

Mémoires d'actuariat

J. Christophe BOUETTE et J-F CHASSAGNEUX « Mesures de risque et

allocation optimal de capital » ENSAE, 2005

Y. APPERT-RAULLIN

« Etudes des sinistres graves en responsabilité civile automobile. Optimisation de la réassurance» ISUP, 2004

C. BONNET, O. GILBERT

« Etudes des branches Dommages et Responsabilité Civile d'Axa Global "Risks Allocation de Fonds Propres" ENSAE, 1999

SIXIEME PARTIE
ANNEXES

ANNEXE 1 : GLOSSAIRE

ALM (Asset Liability Management ou gestion actif/passif) : La gestion actifs/ passifs consiste, essentiellement au sein des institutions financières, à mettre en regard la rentabilité des capitaux propres et les principaux risques financiers encourus. Elle cherche, à l'aide d'analyses financières et de modélisations, à accroître la connaissance et la maîtrise des principaux risques financiers auxquels l'institution s'expose, en particulier les risques de transformation, de liquidité, de crédit, de taux d'intérêt et de change. Ces analyses doivent permettre de décider une politique de financement et d'allocation des actifs permettant d'optimiser le rapport entre la rentabilité des capitaux propres et les risques encourus.

Capital économique : Il correspond à l'excédent des actifs sur les passifs. Solvency II les évalue en valeur de marché.

Duration : La duration apparaît comme une durée de vie moyenne actualisée de tous les flux (intérêt et capital). Ainsi, pour illustration, la duration d'une obligation correspond à la période à l'issue de laquelle sa rentabilité n'est pas affectée par les variations de taux d'intérêt.

FCP : Les fonds communs de placement sont des copropriétés de valeurs mobilières. Le nombre de parts s'accroît par souscription de nouvelles parts et diminue par les rachats effectués par le FCP à la demande des porteurs de parts, à la valeur liquidative calculée au moins deux fois par mois, et hebdomadairement le plus souvent. La gestion du FCP est similaire à celle des SICAV : la valeur liquidative de la part est en général plus élevée que pour une SICAV, et le nombre d'investisseurs plus réduit. La politique de gestion suivie peut donc mieux correspondre aux souhaits des porteurs de parts.

Fair Value (ou Juste Valeur) : La notion de juste valeur, ou Fair value en anglais, implique la valorisation d'actifs et de passifs sur la base d'une estimation de leur valeur de marché ou de leur valeur d'utilité par actualisation des flux de trésorerie estimés attendus de leur utilisation. Ainsi, l'IASB impose d'utiliser la juste valeur pour comptabiliser les instruments financiers qui n'ont pas vocation à être détenus jusqu'à leur échéance (et notamment les produits dérivés), mais il n'a pas réussi à l'étendre à tous les actifs et passifs.

Marge pour risque (ou prime de risque) : La prime de risque d'un marché financier mesure l'écart de rentabilité attendue entre le marché dans sa totalité et l'actif sans risque (l'obligation d'Etat). Dans la zone Euro, elle oscille entre 3 et 6 %. Pour déterminer la prime de risque propre à chaque titre, il suffit ensuite de multiplier la prime de risque du marché par le coefficient bêta du titre en question.

OPCVM : OPCVM signifie « Organisme de Placement Collectif en Valeur Mobilières ». Ce sont des fonds investissement. Ces entités qui gèrent un portefeuille dont les fonds investis sont placés en valeurs mobilières.

Passif : Le passif recense l'ensemble des ressources de l'entreprise, c'est-à-dire les capitaux propres apportés par les actionnaires et les dettes d'exploitation ou bancaires et financières qui vont financer l'actif de l'entreprise.

Risque de défaut (ou risque de crédit) : Le risque de crédit, ou de contrepartie, est le risque de perte sur une créance ou plus généralement celui d'un tiers qui ne paie pas sa dette à temps. Il est naturellement fonction de trois paramètres : le montant de la créance, la probabilité de défaut et la proportion de la créance qui sera recouvrée en cas de défaut.

SPV : Les SPV sont également appelé SPE (Special Purpose Entity). Il s'agit d'en-

treprises ad hoc qui rachètent un actif à une entreprise à l'occasion d'un montage déconsolidant (du type titrisation).

Taux de rentabilité actuariel : Le taux de rentabilité actuariel d'un actif financier est le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle nette de l'actif. On parle de taux de rentabilité interne dans le cas d'un investissement industriel. Un investissement est rentable si le taux de rentabilité interne est supérieur au taux de rentabilité exigé par l'investisseur.

ACAM Autorité de Contrôle des Assurances et des Mutuelles

ACP Issue principalement de la fusion de la Commission bancaire et de l'Autorité de Contrôle des Assurances et des Mutuelles (ACAM) l'ACP, autorité administrative indépendante adossée à la Banque de France, est chargée de l'agrément et de la surveillance des établissements bancaires et d'assurance dans l'intérêt de leurs clientèles et de la préservation de la stabilité du système financier.

CATNAT Catastrophes Naturelles

CEA Comité Européen des Assurances

CEIOPS Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors. Il s'agit du comité européen des superviseurs du secteur des Assurances. Il est composé de représentants issus des autorités de contrôle des divers Etats Membres.

EMR Enterprise Risk Management ou gestion de risque en entreprise.

FSA Financial Services Authority. Il s'agit de l'autorité de contrôle de services financiers britanniques.

IAS International Accounting Standards. Ancien nom des normes comptables internationales

IRB Internal Rating Based - système de notation financière interne, dans les établissements bancaires pour l'évaluation propre des risques crédit.

MCR Minimum Capital Requirement

PEIF Pan European Insurance Forum

QIS Quantitative Impact Study ou Etudes d'Impact Quantitatif : Lancées par le CEIOPS, ce sont des consultations permettant de tester par la pratique les formules envisagées pour Solvency II.

RBC Risk Based Capital

SCR Solvency Capital Requirement

SPV Special Purpose Vehicle

**ANNEXE 2 : PRINCIPALES VARIABLES TARIFAIRES EN DOMMAGES
AUTO**

VARIABLE	DESIGNATION
PERMIS	Ancienneté de Permis
ACV	Ancienneté du Véhicule
SEX	Sexe du Conducteur (M : Masculin, F : Féminin)
STATUT	Statut Matrimonial (C : Célibataire, A : Autres)
CSP	Catégorie Socioprofessionnelle (1 à 100 : Codes CSP)
USAGE	Usage du Véhicule (Privé, Privé-Trajet, Professionnel, Tournées)
AGECOND	Age du Conducteur (en Années)
K800	Option Kilométrage Limité
CRM	Coefficient Réduction Majoration (Bonus Malus)
CAR	Type de Véhicule (Berline ...)
CLA	Classe de Prix du Véhicule
ALI	Type d'Alimentation (carburateur, électrique, GPL, injection ...)
ENE	Type d'Energie du Véhicule (Electrique, Essence, Gasoil)
VIT	Vitesse Maximum du Véhicule
SEGM	Segment du Véhicule
GARAGE	Garage (1 : Individuel clos, 2 : Clos collectif, 3 : Autres)

Tableau 21 : Principales Variables Tarifaires

ANNEXE 3 : ETAT D'AVANCEMENT DE SOLVABILITE 2 ET AGENDA

Après le vote du Parlement européen le 22 avril 2009 et l'adoption le 5 mai 2009 de la directive européenne Solvabilité II (texte définitif en anglais ou en français) par le Conseil ECOFIN (réunissant les 27 ministres des Finances de l'Union européenne), les sociétés d'assurance et de réassurance entrent dans la phase d'implémentation de la directive Solvabilité II pour une mise en application au 31 décembre 2012.

Après l'adoption de la directive fixant les principes généraux (de niveau 1) de la réglementation de la solvabilité des entreprises d'assurance et de réassurance, la détermination des mesures d'exécution (mesures de niveau 2) définies par la Commission européenne aidée par le EIOPA (successeur du CEIOPS) constitue la priorité suivante. Avec l'enchaînement successif de Quantitative Impact Studies (QIS) et Consultation Papers (CP), ces mesures d'exécution se sont affinées. En effet, la détermination des modalités pratiques d'application des méthodes à mettre en oeuvre a fait l'objet des travaux du CEIOPS jusqu'en janvier 2010 (initialement prévue pour finir en octobre 2009) avec de nombreux Consultation Papers. Ces mesures d'exécution consécutivement aux Consultation Papers font l'objet d'une consultation par la Commission européenne entre novembre 2010 et janvier 2011, et devront être définitivement entérinées à la mi-2011.

En parallèle, le EIOPA s'attaque, à la suite du CEIOPS, aux recommandations pratiques (mesures de niveau 3) qui ont commencé à faire l'objet de Consultation Papers en janvier 2010. Ces recommandations sont entièrement aux mains du EIOPA et font l'objet d'échanges informels avec les autorités de marché depuis la mi-2010 avant une publication prévue après la consultation sur les mesures de niveau 2. Ces recommandations devront aussi être définitivement entérinées mi-2011 pour permettre leur mise en vigueur 18 mois après.

Au travers de ces CP et QIS, les acteurs du marché ont été très sollicités en vue de calibrer au mieux les risques sous-jacents à l'activité d'assurance et de réassurance dans les formules standards qui régiront les nouvelles règles prudentielles de ces entités dans l'Union européenne.

DIRECTIVE EUROPEENNE

Sur la base des premiers travaux réalisés par le CEIOPS, une proposition de directive européenne avait été rédigée et communiquée au Parlement européen le 10 juillet 2007. Suite à deux modifications intervenues depuis cette date (modification de l'évaluation prudentielle des acquisitions et augmentations de participation, d'une part, et de la loi applicable aux obligations contractuelles, d'autre part), une proposition de directive modifiée avait été publiée le 26 février 2008.

La "navette" Commission européenne/ Parlement européen concernant cette directive avait débuté le 7 octobre 2008 avec le vote de la Commission des affaires économiques et monétaires du Parlement européen et du Conseil ECOFIN pour aboutir à son adoption par le Parlement européen le 22 avril 2009, puis par le Conseil ECOFIN le 5 mai 2009. Le texte adopté de la directive a été ensuite publié par la Commission européenne (texte en anglais ou en français).

Deux points avaient risqué de compromettre l'adoption de cette directive : - la crise financière avait posé la question de la procyclicité : un mécanisme d'atténuation des chocs sur actions (mécanisme d'ajustement symétrique) a été introduit qui permettra de traiter ce point. - le deuxième point, plus politique, concernait le soutien de groupe selon lequel, très schématiquement, les pays disposant de sièges de groupes multinationaux s'opposent à ceux qui n'ont que des filiales de ces groupes. Après un long bras de fer, l'abandon des mesures concernant le soutien de groupe a permis de lever le dernier point d'achoppement possible. Il apparaît probable que cette mesure d'abandon ne soit que

transitoire puisqu'elle est assortie d'une clause de revoyure trois ans après la mise en vigueur de la directive.

Une nouvelle législation européenne « Omnibus II » sera introduite à la mi-octobre 2011 afin de permettre une révision de la directive Solvabilité II (niveau 1) permettant à la Commission européenne de faire évoluer cette directive sans repasser à chaque fois devant le Parlement européen. Les zones de réactivité qui seraient réclamées par la Commission européenne (et déléguées à l'EIOPA) seraient le reporting et les modèles internes.

Cette directive a été rendue possible grâce aux QIS et CP lancés par le CEIOPS et auxquels une part croissante du marché a contribué. Les mesures d'exécution vont bénéficier de la même interactivité avec le marché au travers d'autres QIS et CP.

Les mesures d'exécution (de niveau 2) ont été établies par le CEIOPS à l'aide des CP et du QIS4 et ont fait l'objet d'avis à la Commission européenne qui doit les publier en novembre 2010 et les entériner à la mi-2011. Les recommandations (de niveau 3) continuent à être définies par le EIOPA qui en est le seul décisionnaire.

L'objectif fixé consistant à obtenir des spécifications publiées pour la deuxième moitié de 2010 a quelque peu dérivé, mais l'objectif de les voir approuvées pour la deuxième moitié de 2011 demeure. Ultimement, la mise en application de ces mesures est prévue pour fin 2012, après que cette directive aura été retranscrite dans les législations nationales par chaque Parlement.

QUANTITATIVE IMPACT STUDIES (QIS)

QIS1 (première des Quantitative Impact Study) avait porté sur l'évaluation des provisions techniques (escompte, marge de risque). En France, le marché apparaissait surprovisionné. En effet, sur les 32 sociétés IARD ayant répondu au QIS1 et représentant 45 % de parts de marché, le niveau de provisionnement au "best estimate" escompté + Marge de Risque (correspondant au quantile à 75 %) correspondait à 84,5 % des provisions comptabilisées (92,9 % sur une base non escomptée) [Source : CEIOPS].

QIS2 (2e étude) avait fourni un premier canevas d'évaluation du besoin en capital et de prise en compte de la diversification des risques, bien que l'objectif affiché de ce QIS soit surtout méthodologique. Le marché IARD français avait davantage répondu que pour le QIS1 avec 44 sociétés IARD, soit 54% de parts de marché. A l'issue de l'analyse de ce QIS2, il ressortait déjà que les formules standards de MCR et SCR seraient difficiles à calibrer avec de nombreux cas où la MCR était supérieure à la SCR menant parfois à des insuffisances de fonds propres (en particulier pour les sociétés ou mutuelles de taille plus petite ou ayant une activité fortement spécialisée). Les approches par quantile ou coût du capital donnaient des résultats assez proches pour la valorisation de la Marge de Risque. Alors qu'en vie l'approche coût du capital semblait devoir être définitivement adoptée, rien ne semblait encore joué en IARD où 86% des sociétés ayant déterminé un best estimate (234 sur 272 sociétés, au niveau européen) avaient déterminé leur Marge de Risque avec une approche par quantile.

QIS3 (3e étude) a permis d'affiner le calibrage des formules standards pour le calcul de la MCR et SCR, mais aussi d'introduire la problématique spécifique des groupes. Le marché IARD français avait répondu plus massivement qu'aux précédents QIS avec 52 sociétés IARD, soit 56,4% de parts de marché. Néanmoins, cette progression avait été moins forte qu'en vie (80,8% de parts de marché) où les difficultés de calibrage semblent plus importantes qu'en IARD. En IARD, la mobilisation pour QIS3 avait été fonction de la taille de la société (2/3 des assureurs ayant plus d'1 milliard d'euros de CA ont répondu contre seulement 5% de ceux ayant moins de 100 millions d'euros). Selon l'analyse de l'ACAM, alors que le taux de couverture moyen du marché s'établit à 650% de la marge de

solvabilité avec Solvabilité I, la redéfinition des différents postes de bilan et des exigences de fonds propres conduisait à un taux de couverture de 406% de la MCR et de 150% de la SCR, selon les modalités du QIS3. Selon cette analyse, le poids relatif en IARD des différents risques constitutifs de la formule standard SCR s'établit à 49% pour le risque de marché et 45% pour le risque de souscription, puis 4% pour le risque opérationnel et 2% pour le risque de contrepartie. L'ACAM estime que le risque événementiel est sous-évalué dans le QIS3, ce qui fait que ces pourcentages sont en fait proches de ceux de QIS2 (respectivement 40%, 53%, 5% et 2%). L'ACAM fait valoir enfin que, concernant la quantification du bénéfice de diversification des groupes, le QIS3 a apporté plus d'éléments qualitatifs que quantitatifs, avec un bénéfice de diversification apparaissant très variable et dépendant de la structure des groupes en question.

Suite à une demande de la Commission européenne dans son courrier du 19 juillet 2007, précisant les éléments que le CEIOPS devrait aborder lors de son analyse des résultats, ce dernier avait produit un document le 21 décembre 2007 précisant les pour et contre concernant les trois grandes familles de méthodes de détermination de la MCR, soit (1) l'approche modulaire, (2) un pourcentage du SCR ou (3) un pourcentage des provisions techniques.

QIS4 (4e étude) a permis pour la première fois de fournir une quantification assez précise des formules standards (MCR et SCR) plus cohérente et mieux calibrée; malgré tout, des ajustements doivent encore être apportés. QIS4 a non seulement permis de tester les simplifications promises aux assureurs de taille plus réduite (règle de proportionnalité) concernant plus particulièrement l'évaluation des provisions techniques, mais aussi de tester l'utilisation de paramètres spécifiques à l'entité pour la détermination du risque de souscription, de mesurer l'impact de l'effet de diversification pour les groupes ou d'identifier l'état de préparation des modèles internes. Pour les 131 sociétés IARD ayant répondu au QIS4, soit 75% de parts de marché, le taux de couverture du MCR est de 679% et du SCR est de 236% (contre, avec Solvabilité I, 712% de taux de couverture de la marge de solvabilité) (Source : Restitution des résultats par l'ACAM du 6 octobre 2008). La différence entre les taux de couverture résultant du QIS3 et du QIS4 montre l'effort de calibrage qui a été pratiqué entre les deux QIS. L'ACAM signale quelques points encore problématiques de la formule standard, tels que la segmentation (identification de la construction), la charge excessive des branches à long développement, la prise en compte de la réassurance non-proportionnelle et la difficulté de disposer d'un historique non biaisé de loss ratios. Les sociétés ont aussi fait remonter les difficultés rencontrées pour l'évaluation de l'impact de la fiscalité, pour le traitement en transparence des OPCVM et des obligations à taux variable, indexées et convertibles, le chargement des intermédiaires d'assurances (risque de contrepartie), et le calibrage du risque opérationnel (pénalisant pour les branches longues en raison de son assiette : provisions). Néanmoins, les sociétés ont bien accueilli les propositions de simplification pour le calcul du Best Estimate et souhaiteraient une simplification comparable pour le calcul de la Marge de Risque. Les résultats au niveau européen ont été communiqués par le CEIOPS le 19 novembre 2008.

Entre le QIS4 et le QIS5, l'ACAM a demandé au marché de fournir pour fin juin 2009 une valorisation du bilan prudentiel selon les principes de la directive Solvabilité II.

QIS5 (5e étude) : Après une phase initiale où la Commission européenne avait exposé le calibrage dans un Draft Call for Advice (le 15 avril 2010) ainsi que les spécifications techniques préliminaires du QIS5 (cette publication ayant été elle-même basée sur un avis du CEIOPS concernant ce calibrage), les spécifications techniques définitives du QIS5 avaient été publiées le 6 juillet 2010 par le CEIOPS. Le QIS5 attendu pour le début août

2010, n'a finalement été publié sur le site du CEIOPS que le 24 août, complété le 27 août, puis modifié de nombreuses fois pour aboutir à une 6e version finale le 6 octobre. Les sociétés avaient jusqu'à fin octobre (entités solo) et mi-novembre (groupes) pour remplir la feuille de calcul et compléter plusieurs questionnaires qualitatifs. La Commission européenne avait accordé un délai de grâce de 2 semaines aux sociétés qui en informaient leur commissaires contrôleurs. La communication des résultats de ce QIS est annoncée pour Avril 2011. Ce QIS servira en vue de l'adoption des spécifications définitives prévues initialement pour la deuxième moitié de 2011. Un stress test a été réalisé en parallèle au QIS5, sur l'exemple du stress test demandé aux banques. Il est attendu que le SCR moyen soit en hausse d'environ +50% par rapport au QIS4 (selon une étude EMB). Comme avec ce nouveau calibrage, certaines sociétés risquent de devoir lever des fonds pour faire face à ces nouvelles exigences, Il est probable que des mesures soient prises pour permettre à ces sociétés de continuer à exercer. Deux pistes ont d'ores et déjà été envisagées pour ce faire. Le calibrage est encore susceptible d'évoluer et le CEIOPS a pris des mesures pour être à même de le faire en demandant aux sociétés de fournir dans le cadre du QIS5 (avant le 30.11.2010) des informations comptables détaillées. L'autre piste consiste en la mise en oeuvre de mesures transitoires donnant le temps aux sociétés de s'adapter au changement [cf. propos de M. Barnier]

CONSULTATION PAPERS

En parallèle à ces QIS, le CEIOPS continue de publier des Issues et Consultation Papers (CP) : - En 2004/ 5 : trois "Waves of Calls for Advice". - Entre novembre 2006 et janvier 2007 : six Consultation Papers avaient commencé à explorer les différents aspects des trois piliers. C'est sur les avis du CEIOPS issus de ces CP que la Commission européenne s'est appuyée pour rédiger la proposition de directive européenne publiée le 10 juillet 2007 : Pilier I : CP 20 (éléments quantitatifs), CP 19 (d'actifs en regard des provisions et de la SCR); Pilier II : CP 18 (harmonisation du contrôle), CP 17 ("capital add-on"), CP 16 (réassurance et règles d'admissibilité); Pilier III : CP 15 (communication / publication). - Début 2008, plusieurs CP ont servi de support à l'établissement du QIS4 : CP 23 (proxies pour la détermination des provisions techniques), CP24 (proportionnalité), CP25 (supervision des groupes). - Toujours en 2008, avant la dernière vague de Consultation Papers de 2009, des Issues Papers avaient été publiés, sur l'ORSA (Issues Paper et restitution au marché suite aux nombreux commentaires reçus); sur le contrôle des autorités de contrôle et le reporting (Issues Paper listant les aspects devant être revus par les commissaires contrôleurs et listant les documents requis); sur la gouvernance (Issues Paper sur les aspects de la gouvernance du pilier II).

Après cette phase initiale, avec la publication de la directive, à partir de mars 2009, le CEIOPS et les CP sont entrés dans une phase de concrétisation avec des CP orientés vers l'adoption des mesures d'exécution (niveau 2) et des recommandations (niveau 3).

C'est ainsi que trois vagues de Consultations Papers se sont enchaînées et ont fait l'objet de nombreuses réponses de la part du marché. Ces réponses ont permis au CEIOPS d'amender certains aspects des CP en vue d'effectuer des avis définitifs auprès de la Commission européenne. Celle-ci va utiliser ces avis afin d'établir les mesures d'exécution de niveau 2. Les avis du CEIOPS sont les suivants :

- La première vague s'est déroulée entre mars et juin 2009 et a été constituée de 12 Consultation Papers qui ont fait l'objet des avis suivants auprès de la Commission européenne :

* Provisions techniques : CP26 : Best Estimate, CP27 : Segmentation, CP30 : prise en compte des primes futures, CP32 : actions futures du management ; * Actifs : CP35 :

Evaluation des actifs; * Fonds Propres : CP29 : Fonds propres auxiliaires (en particulier, rappel de cotisations); * SCR : CP28 : Risque de contrepartie, CP31 : diversification du risque du fait des fonds cantonnés; * Modèle Interne : CP37 : approbation des modèles internes; * Pilier II : CP33 : Gouvernance, CP34 : transparence et obligation de rendre compte des régulateurs; * SPV : CP36.

- La deuxième vague a été lancée le 2 juillet 2009 et contient 24 Consultation Papers qui ont fait l'objet des avis suivants du CEIOPS auprès de la Commission européenne :

* Provisions techniques : CP39 : Best Estimate (BE), CP42 : Marge de Risque (RM), CP41 : cas de non séparation BE et RM, CP40 : taux d'intérêt sans risque, CP43 : données et approximations, CP44 : ajustement du risque de contrepartie, CP45 : simplifications; * Fonds Propres : CP46 : approbation de fonds propres non listés; * SCR : risques opérationnel (CP53), de marché (CP47), de souscription non-vie (CP48), santé (CP50) et vie (CP49), de contrepartie : simplification, prise en compte de changement de profil de risque (CP51), capacité d'absorption des pertes des provisions techniques (CP54), de transfert du risque via la réassurance (CP52); * MCR : CP55 : mode de calcul; * Pilier 2 : CP57 : capital additionnel, CP59 : rémunération; * Pilier 3 : CP58 : reporting au régulateur, rapport sur la solvabilité et la situation financière; * Groupes : CP60 : solvabilité de groupe, CP61 : opérations intra-groupe et risque de concentration, CP62 : coopération entre régulateurs et collège de régulateurs; * Modèle Interne : CP56 : Use Test, test de qualité statistique, standard de calibrage, attribution des profits et des pertes, standard de validation, documentation, modèles et données externes, modèle interne du groupe.

A cette vague a été aussi ajouté un complément au CP37 concernant l'approbation des modèles internes de groupe.

- La troisième et dernière vague a été lancée le 2 novembre 2009 et contient 17 Consultation Papers [le CP 78 a été ajouté le 30 novembre] qui ont fait l'objet des avis suivants du CEIOPS auprès de la Commission européenne :

* Fonds Propres : participations, limites quantitatives, fonds cantonnés, risque action; * SCR : risque action (CP69), calibrage des risques de marché (CP70), de souscription non-vie (CP71) et santé (CP72), MCR (CP73), paramètres de corrélation (CP74), paramètres spécifiques à l'entité (CP75); * SCR : traitement de l'auto-contrôle (CP67), transférabilité (CP68); * Règles de simplification : Provisions techniques (CP76), SCR (CP77) et Captives (CP79); * Pilier 2 : titrisation, investissement dans prêts restructurés (CP63); * Pilier 3 : programme de rétablissement et plan de financement en cas de crise (CP64); * Groupe : Risk Management centralisé (CP66); * Modèle Interne : Modèle Interne partiels : (CP65); * Conditions techniques d'équivalence à Solvabilité II pour les pays tiers (CP78) - publié le 30 novembre 2009.

Consécutivement aux avis du CEIOPS sur les mesures d'exécution de niveau 2, la Commission européenne a lancé le 24 novembre 2010 une consultation sur les mesures d'exécution de niveau 2 (57 questions portant sur tous les sujets) pour laquelle les réponses du marché sont attendues pour le 26 janvier 2011.

En parallèle, le CEIOPS lance des consultations en 2010 et 2011 sur les recommandations de niveau 3. Quelques Consultation Papers ont d'ores et déjà été publiés directement sur le site du CEIOPS, et en particulier le CP80 portant sur les recommandations en matière de soumission des modèles internes et plus spécifiquement les mesures de pré-soumission. Le CEIOPS a aussi lancé des pré-consultations (non disponibles sur le site du CEIOPS) auprès des organisations de la profession en vue de préparer une nouvelle vague de Consultations Papers pour 2011.

Enfin, le CEIOPS a donné en janvier 2010 la liste des collèges de contrôleurs et des

superviseurs de Groupe. La France a été superviseur de groupe pour ACM, AXA, BNP-Paribas, CGPA, CNP, Coface, Covéa, Crédit Agricole, Crédit Mutuel Nord Europe, Groupama, IMA, La Mondiale, MACIF, MAIF, Natixis, SCOR, SMABTP, Société Générale. La France a été nommée conjointement avec un autre pays pour Chartis/ AIG (avec le Royaume-Uni), et Swiss Life (avec la Suisse).

CRISE FINANCIERE

En parallèle, suite à la crise financière liée aux surprimes, le CEIOPS avait publié deux rapports : - Un rapport sur les standards de risk management des actifs (13 novembre 2008), précisant les mesures exécutoires tant au niveau qualitatif (définition d'une politique de gestion actif-passif clairement établie et en phase avec l'activité), qu'au niveau quantitatif (évaluation pertinente du risque de liquidité et de concentration) qui seront introduites avec Solvabilité II. - Un rapport sur les leçons apprises de la crise (19 mars 2009) qui examine une liste complète d'éléments quantitatifs (quantification des risques de crédit, liquidité, concentration...) mais aussi qualitatifs (gouvernance, ORSA, robustesse de modèles...) pour conclure sur la nécessité d'implémenter Solvabilité II tout en veillant à affiner certains éléments (calibrage) et veiller d'encore plus prêt à la bonne observation des principes (ORSA, use test...) devant permettre une prise en compte des cycles économiques.

A l'instar du stress-test mené sur les banques, le CEIOPS a annoncé (courrier du 30.10.2009) qu'en décembre 2009 un stress-test sera mené sur les plus grands et plus importants groupes d'assurances européens. Le stress-test consistera à identifier la solvabilité de ces assureurs face à trois situations de crise : - un choc financier du type de celui constaté entre septembre 2008 et septembre 2009 ; - une récession plus profonde et prolongée ; - un scénario de reprise de l'inflation et des taux d'intérêts.

PLANNING SOLVABILITE II

2008 Mi Février : Fin de la consultation sur QIS4 et le CP23. Avril : Lancement du QIS4. Mai : Avis du CEIOPS à la Commission européenne sur le contrôle des groupes. Juillet : Date limite de remise des résultats du QIS4. 6 octobre : restitution du résultat du QIS4 par l'ACAM. 19 novembre : Publication de l'analyse des résultats du QIS4 par le CEIOPS au niveau européen. Conclusion : Avis final du CEIOPS sur les formules standards. En parallèle, poursuite des débats au Parlement européen sur le projet de directive.

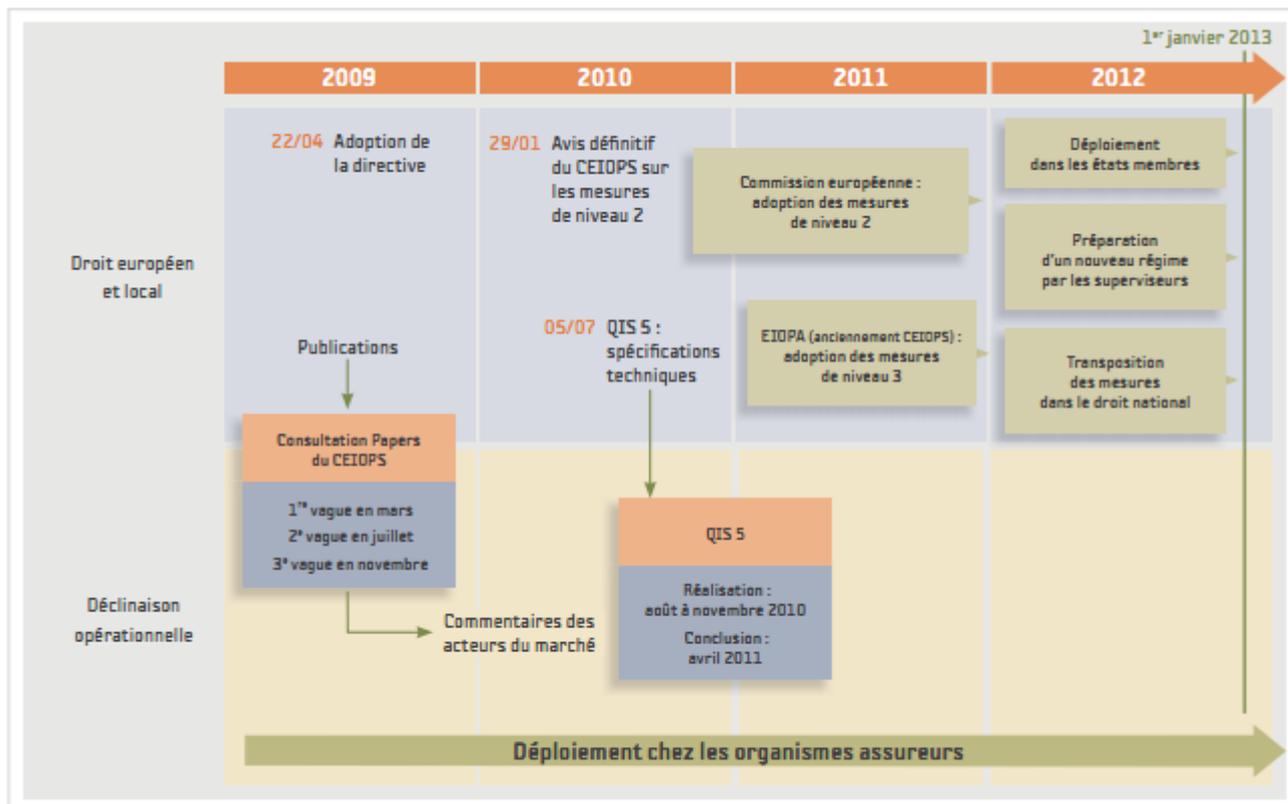
2009 Avril-Juin : 1ère série de Consultation Papers sur les mesures d'exécution (CP 26 à 37). 22 avril : Vote par le Parlement européen de la directive Solvabilité II. 5 mai : Adoption par le Conseil ECOFIN de la directive Solvabilité II. Juillet : 2e série de Consultation Papers sur les mesures d'exécution. Novembre : 3e série de Consultation Papers sur les mesures d'exécution.

2010 Janvier 2010 : Premiers Consultation Papers sur les recommandations. Début 2010 : Dernier avis du CEIOPS sur les mesures d'exécution. Août 2010 : Lancement du QIS5. Fin octobre/ mi-novembre 2010 : Limite de remise des résultats du QIS5. 2e moitié : La Commission européenne élabore les mesures d'exécution (niveau 2) et le CEIOPS les recommandations (niveau 3). Novembre : Publication des mesures d'exécution de niveau 2 par la Commission Européenne. En parallèle, transposition de la directive dans les différents droits nationaux.

2011 Avril : Communication des résultats du QIS5. Juillet/ novembre : la Commission adopte les mesure d'exécution (niveau 2) et l'EIOPA adopte les recommandations (niveau 3).

2012 Décembre : Entrée en vigueur de la directive.

2013 Publication des comptes suivant la directive Solvabilité II.



Source : OptimInd

Graphique 28 : Synthèse de la mise en place de Solvency 2

ANNEXE 4 : CALCUL DES STATISTIQUES : $\mu_{n,t}$, $J_{n,t}$, $K_{n,t}$

– calcul de l'expression de $J_{n,t}$:

$$\text{Soit : } h_{i,t} = (F_{1,t}^*)^{y_{i,t}}(1 - F_{1,t}^*)^{1-y_{i,t}}$$

$$\log h = y_{i,t} \log(F_{1,t}^*) + (1 - y_{i,t}) \log(1 - y_{i,t})$$

$$\frac{\partial \log h}{\partial f_t^*} = \frac{y_{i,t}}{f_t^*} - \frac{1 - y_{i,t}}{1 - F_{1,t}^*}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log h}{\partial f_t^{*2}} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{y_{i,t}}{f_t^{*2}} - \frac{1 - y_{i,t}}{(1 - F_{1,t}^*)^2} \right]$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 h}{\partial f_{1,t}^{*3}} = \sum_{i=1}^n 2 \left[\frac{y_{i,t}}{f_t^{*3}} - \frac{1 - y_{i,t}}{(1 - F_{1,t}^*)^3} \right]$$

$$\text{donc } J_{n,t} = -\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \log h}{\partial f_t^2} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_{i,t}}{f_t^{*2}} + \frac{1 - y_{i,t}}{(1 - f_{1,t}^*)^2} \right]$$

$$= \frac{N_t}{n} \times \frac{1}{(f_{1,t}^*)^2} + (1 - \frac{N_t}{n}) \times \frac{1}{(1 - f_{1,t}^*)^2} = \frac{1}{f_{1,t}^*(1 - f_{1,t}^*)}$$

– calcul de l'expression de $K_{n,t}$:

$$\begin{aligned} K_{n,t} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 \log h}{\partial f_t^3} (y_{i,t} | \hat{f}_{n,t}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_{i,t}}{f_t^{*3}} - \frac{1 - y_{i,t}}{(1 - F_{1,t}^*)^3} \right] \\ &= \frac{N_t}{n} \times \frac{2}{(f_{1,t}^*)^3} - (1 - \frac{N_t}{n}) \times \frac{2}{(1 - f_{1,t}^*)^3} = 2 \left(\frac{1 - 2f_{1,t}^*}{f_{1,t}^{*2}(1 - f_{1,t}^*)^2} \right) \end{aligned}$$

– calcul de l'expression de : $\mu_{n,t}$

Pour rappel :

$$\mu_{n,t} = J_{n,t}^{-1} \frac{\partial \log g}{\partial f_t} (\hat{f}_{n,t} | \hat{f}_{n,t-1}) + \frac{1}{2} J_{n,t}^{-2} K_{n,t},$$

la fonction g est la densité de transition entre f_t et f_{t-1} :

$$F_{1,t}^* = c + \gamma F_{1,t-1}^* + \epsilon_t$$

$$\text{avec } F_{1,t}^* = \log[F_{1,t}/(1 - F_{1,t})]$$

$$\text{donc : } F_{1,t} = \frac{\exp F_{1,t}^*}{1 + \exp F_{1,t}^*} = \frac{1}{1 + \exp(-F_{1,t}^*)}$$

Si on pose $F_{1,t} = A(F_{1,t}^*)$, on a $F_{1,t}^* = A^{-1}(F_{1,t})$

$$F_{1,t} = A(c + \gamma F_{1,t-1}^* + \epsilon_t) = A(c + \gamma A^{-1}(F_{1,t-1}) + \epsilon_t)$$

$$c + \gamma A^{-1}(F_{1,t-1}) + \epsilon_t \sim N(m, \sigma^2) \text{ avec } m = c + \gamma A^{-1}(F_{1,t-1})$$

Rappel : si A est une fonction croissante et X une variable de densité dX alors

$$Y = A(X) \text{ a pour densité : } dY(y) = \frac{dX(A^{-1}(y))}{A'(A^{-1}(y))}$$

Preuve

$$Y = A(X) \quad dY = A'(X)dX$$

$$P[y < Y < y + dy] = dY(y)dy$$

$$P[x < X < x + dx] = dX(x)dx$$

$$\text{On a donc : } dY(y)dy = dX(x)dx$$

$$dY(y)A'(X)dx = dX(x)dx$$

$$dY(y) = \frac{dx(A^{-1}(y))}{A'(A^{-1}(y))} \text{ cqfd}$$

$$\text{comme } X = c + \gamma F_{1,t-1}^* + \epsilon_t \sim N(m, \sigma^2)$$

$$d_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$g(f_t/f_{t-1}) = \frac{d_{N(m,\sigma^2)}(A^{-1}(f_t))}{a(A^{-1}(f_t))} \text{ (avec } a=A')$$

$$\log g(f_t/f_{t-1}) = \log d_{N(m,\sigma^2)}(A^{-1}(f_t)) - \log a(A^{-1}(f_t))$$

$$\text{Rappel : } (Fogoh)' = (goh)' \times F'(goh) = h'(Fog)'oh \text{ et } (F^{-1})' = \frac{1}{F'oF^{-1}}$$

$$\text{Calculons } \frac{\partial \log g}{\partial f_t}(\hat{f}_{n,t} | \hat{f}_{n,t-1})$$

$$\frac{\partial \log [d_{N(m, \sigma^2)}(A^{-1}(f_t))]}{\partial f_t} = \frac{\partial (A^{-1}(f_t))}{\partial f_t} \times \frac{\partial \log [d_{N(m, \sigma^2)}(y)(A^{-1}(f_t))]}{\partial y}$$

$$\frac{\partial (A^{-1}(f_t))}{\partial f_t} = \frac{1}{a(A^{-1}(f_t))}$$

$$d_{N(m, \sigma^2)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$\log d_{N(m, \sigma^2)}(y) = -\log(\sqrt{2\pi\sigma^2}) - \frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2$$

$$\frac{\partial \log [d_{N(m, \sigma^2)}(y)]}{\partial y} = -(y-m) \times \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\text{donc : } \frac{\partial \log g}{\partial f_t}(\hat{f}_{n,t} | \hat{f}_{n,t-1}) = \frac{1}{a(A^{-1}(f_t))} \left[-\left(\frac{A^{-1}(f_t) - m}{\sigma^2}\right) - \frac{d \log a(A^{-1}(f_t))}{dy} \right]$$

Pour rappel :

$$F_{1,t} = \frac{\exp F_{1,t}^*}{1 + \exp F_{1,t}^*} = \frac{1}{1 + \exp(-F_{1,t}^*)} = A(F_{1,t}^*)$$

$$\text{Donc } A(y) = \frac{1}{1 + \exp(-y)}$$

$$a(y) = A'(y) = \frac{\exp(-y)}{(1 + \exp(-y))^2}$$

$$\frac{d \log a(y)}{dy} = \frac{d \log}{dy} \left[\frac{\exp(-y)}{(1 + \exp(-y))^2} \right]$$

$$= \frac{d}{dy} \left(-y - 2 \log(1 + \exp(-y)) \right)$$

$$= -1 + 2 \frac{\exp(-y)}{(1 + \exp(-y))}$$

$$\frac{d \log a(y)}{dy} = -1 + 2A(y) \times \exp(-y)$$

$$\frac{d \log a(y)}{dy}(A^{-1}(f_t)) = -1 + 2f_t + \exp(-A^{-1}(f_t))$$

Après simplification on obtient :

$$\frac{d \log a(y)}{dy}(A^{-1}(f_t)) = 1 - 2f_t \quad (\text{avec } A^{-1}(f_t) = \log(\frac{f_t}{1-f_t}))$$

En résumé :

$$\mu_{n,t} = J_{n,t}^{-1} \frac{\partial \log g}{\partial f_t}(\hat{f}_{n,t} | \hat{f}_{n,t-1}) + \frac{1}{2} J_{n,t}^{-2} K_{n,t},$$

et on a trouvé précédemment que :

$$\frac{\partial \log g}{\partial f_t}(\hat{f}_{n,t} | \hat{f}_{n,t-1}) = \frac{1}{a(A^{-1}(f_t))} \left[- \left(\frac{A^{-1}(f_t) - m}{\sigma^2} \right) - \frac{d \log a(A^{-1}(f_t))}{dy} \right]$$

$$\frac{1}{a(A^{-1}(f_t))} = \frac{-1}{1-f_t} \quad J_{n,t}^{-1} = f_{1,t}^*(1-f_{1,t}^*) \text{ et } \frac{1}{2} J_{n,t}^{-2} K_{n,t} = 1-2f_t$$

$$\frac{d \log a(y)}{dy}(A^{-1}(f_t)) = 1 - 2f_t \quad m = c + \gamma A^{-1}(F_{1,t-1}) \text{ et } A^{-1}(f_t) = \log(\frac{f_t}{1-f_t})$$

$$\text{d'où : } \mu_{n,t} = -f_t \left[\frac{\log(\frac{f_t}{1-f_t}) - m}{\sigma^2} + 3 \right] + 1$$

**ANNEXE 5 : CODE R DE CALCUL DE LA VaR PAR SIMULATION
MONTE-CARLO**

```
#####
# Fonction Simul.F.trajectory #
#####

# Simulation d'une trajectoire pour F

# Parametres :
# mu = scalaire
# phi = scalaire
# sigma = paramètres du bruit V(t)
# FO = scalaire, initialisation de F
# n = nombre de pas de la simulation

# L'equation regissant F est :  $F(t+1) = \mu + \phi * F(t) + V(t)$ 

# resultat :
# Un vecteur de dimension n+1
# les simulations de f

Simul.F.trajectory <- fonction(mu,phi,sigma,FO,n) {
  bruit = rnorm(n,sd = sigma)
  res = rep(FO,n+1)
  for (i in 1:n) {
    res[i+1] = mu + phi * res[i] + bruit[i]
  }
  res
}

# Test
# Simulated.F = Simul.F.trajectory(-2.5,0.1,0.2,-2.5,5)

#####
# Fonction Simul.a.trajectory #
#####

# Parametres :
# alpha = scalaire
# gamma = scalaire
# nu = ecart-type du bruit U(t)
# Simulated.F = simulation d'une trajectoire pour F

# L'equation regissant a est :  $a(t) = \alpha + \gamma * F(t) + U(t)$ 

# resultat :
# Un vecteur de dimension la longueur de Simulated.F
# les simulations de a

Simul.a.trajectory <- fonction(alpha ,gamma ,nu ,Simulated.F) {
  n = length(Simulated.F)
  bruit = rnorm(n, sd=nu)
  alpha + gamma * Simulated.F + bruit
}

# Test
# Simulated.F = Simul.F.trajectory(-2.5,0.1,0.2,-2.5,5)
# Simulated.a = Simul.a.trajectory(2,1,0.05,Simulated.F)
```

```
#####

# Simulation de la fréquence pour une trajectoire de a donnée

# Parametres :
# Simulated.a = simulation d'une trajectoire pour a
# NB = nombre d'individus dans la classe par chacune des période de temps

# resultat :
# la simulation de la fréquence sur toute la période

Simul.frequency <- function(Simulated.a,NB,proba = pnorm(Simulated.a)){
  f_bern = function(p,NB) {
    rbinom(1,NB,p)
  }
  # pour le calcul de la var infini
  # ici on met NB*p au lieu de rbinom(1,NB,p)
  sum(unlist(mapply(f_bern,proba,NB)))/sum(NB)
}

# Test
# Simulated.F = Simul.F.trajectory(-2.5,0.1,0.2,-2.5,5)
# Simulated.a = Simul.a.trajectory(2,1,0.05,Simulated.F)
# Simulated.frequency = Simul.frequency(Simulated.a,c(100,200,300,200,100,200))
|
#####
# Fonction Simul.all.base #
#####

# Simulation complete (a pour chaque base et F commun)

#meme fonction que précédement avec variable augmentées pour nombre de base
# alpha = vecteur de taille le nombre de base
# gamma = vecteur de taille le nombre de base
# nu = vecteur de taille le nombre de base
# NB = matrice de nombre de lignes = le nombre de base

# Résultat : la fréquence toutes bases confondues

Simul.all.base <- function(mu,phi,sigma,FO,n, alpha ,gamma ,nu , NB) {
  k = length(alpha)
  function(void) {
    res = rep(0,k)
    Simulated.F = Simul.F.trajectory(mu,phi,sigma,FO,n)
    for (i in 1:k) {
      Simulated.a = Simul.a.trajectory(alpha[i] ,gamma[i] ,nu[i] ,Simulated.F)
      res[i] = Simul.frequency(Simulated.a,NB[i,])
    }
    res
    nb.sum = apply(NB,1,sum)
    sum(res * nb.sum) / sum(nb.sum)
  }
}

# Test
# NB = rbind(c(100,200,300,200,100,200),c(100,200,300,200,100,200),c(100,200,300,200,100,200))
# Simulated.all.base = Simul.all.base(-2.5,0.1,0.2,-2.5,5,rep(2,4),rep(1,4),rep(0.05,4))
```

```

# Simulated.all.base(1)

# Test pour effectuer plusieurs simulations
# res = unlist(lapply(rep(1,1e2),Simulated.all.base))

#####
#      Lancement sur données calibrées      #
#####

mu = 0
phi = 1.0056
sigma = 0.04
FO = 1.007
n = 11
alpha = c(-2.055,-2.055,-2.05,-2.08)
gamma = c(-0.489343,-0.529562,0.6525523,0.239853)
nu = c(1e-4,1e-4,1e-4,1e-4)
NB = rbind(
c(202174,205213,208161,212522,215275,218675,222549,225186,226859,228666,230287,232055)
c(669987,674243,678079,685613,689051,694390,700411,703393,706850,711432,714377,718023)
c(628997,634797,639555,647790,651278,656902,662626,666228,669550,672848,675366,678278)
c(221179,225167,228262,232671,234988,237660,240602,242594,243700,244598,245066,245966)

NBSIMU = 1e4

# tester une trajectoire de F
Simul.F.trajectory(mu,phi,sigma,FO,n)

# code a lancer avant l'exécution de plusieurs simulation
Simulated.all.base = Simul.all.base(mu,phi,sigma,FO,n, alpha ,gamma ,nu , NB)

# lancement de plusieurs simu
res = unlist(lapply(rep(1,NBSIMU),Simulated.all.base))

# calcul de la var
quantile(res,0.995)
mean(res)

```