

Mémoire d'actuariat présenté devant
le Jury du C E A

pour l'obtention du
Diplôme d'Actuaire du CENTRE D'ETUDES ACTUARIELLES

Par : Fabrice CHOUKROUN (Société Générale)

Sur le sujet :

**L'apport des L-moments à la mesure du risque de marché : une application
au cas des hedge funds**

Devant un jury composé de :

Liste du jury :

Arnaud CLEMENT-GRANDCOURT
Arnaud COHEN
Gérard CROSET
Jean-Michel EYRAUD
Daniel HUGUEL
Pierre MATHOULIN
Florence PICARD
Christian-Yann ROBERT

Directeurs du mémoire :

Référent CEA :

M. Christian-Yann ROBERT
Directeur des Etudes du CEA

Référent Société Générale :

M. Serge Darolles
Responsable adjoint recherche et
développement (LYXOR)

REMERCIEMENTS

Je souhaiterais tout particulièrement remercier mon directeur de mémoire, M. Serge Darolles, pour son apport, son soutien, la qualité de son engagement et son précieux savoir-faire.

Je tiens également à remercier Mlle Emmanuelle Jay pour la qualité de ses commentaires et de ses conseils.

RESUME

La mesure du risque de marché est importante pour le calcul des exigences de fonds propres. La réglementation en a fait une fonction de la Value-at-Risk. Rappelant l'insuffisance des approches courantes, la crise récente nous incite à disposer d'outils donnant plus d'informations sur les valeurs extrêmes. La statistique moderne a développé ces dernières années une série d'outils probabilistes qui trouvent aujourd'hui des applications directes en finance. C'est notamment le cas des L-moments pour la mesure de performance des actifs risqués. Ce mémoire a pour objectif d'appliquer cette technique à un type particulier d'actifs financiers : les hedge funds. Ces fonds sont considérés comme plus risqués que la moyenne des fonds car ils utilisent des techniques telles que le levier ou la vente à découvert.

L'analyse de la réglementation et de son évolution suite à la crise permettent de cerner l'enjeu et la difficulté de la mesure des risques extrêmes. La présentation du concept de L-moments exhibe leurs propriétés et montre qu'ils apportent plus d'information sur les queues de distributions que ne le font les moments classiques. La description des hedge funds permet de montrer qu'il s'agit d'un cas emblématique d'actifs risqués dont le comportement est particulièrement éloigné d'une distribution normale et nécessitant ainsi des techniques particulières. Enfin l'analyse empirique d'une population de hedge funds sur longue période montre le bénéfice qu'apportent les L-moments pour caler les lois et construire des estimateurs de quantiles plus robustes que ceux construits à partir d'une loi normale ou en retenant des distributions historiques.

Mots clés : Hedge Funds, Value-at-Risk, L-moments, Bale II, Backtests

PLAN DETAILLE

	Pages
RESUME.....	3
INTRODUCTION	6
 PARTIE I : MESURE DU RISQUE ET CADRE REGLEMENTAIRE	 9
Section 1 Le cadre réglementaire actuel.....	9
1. La théorie financière classique.....	9
2. Le cadre réglementaire Bale II.....	9
3. Le cadre réglementaire Solvency II	11
4. Application dans les établissements bancaires.....	15
Section 2 La VaR.....	16
1. La VaR un outil standardisé.....	16
2. Pas une VaR mais plusieurs VaR.....	19
3. La VaR un outil incomplet.....	22
4. Développement sur l'approche paramétrique	24
Section 3 Les premiers enseignements de la crise.....	26
1. Nouvelles formes de risques	26
2. La VaR « stressée ».....	27
3. Les modèles quantitatifs sont insuffisants.....	28
4. Les évolutions réglementaires.....	30
 PARTIE II : L-MOMENTS	 31
Section 1 Les limites des moments classiques	31
Section 2 L-moments et statistiques d'ordre	32
Section 3 Propriétés	37
Section 4 Lois de probabilités généralisées.....	38
Section 5 Estimation.....	39
 PARTIE III : HEDGE FUNDS.....	 40
Section 1 Contexte.....	40
1. Définition	40
2. Les évolutions de l'industrie	41
Section 2 Les différents types de Hedge Funds.....	45
1. Plusieurs typologies.....	45
2. Principales stratégies	45
3. Tendances.....	46

Section 3	Régulation.....	47
Section 4	Les Hedge Funds et la mesure du risque	48
1.	Nature des risques Hedge Funds	48
2.	Problématique de la collecte des données	52
PARTIE IV :	APPLICATION.....	55
Section 1	Données	55
1.	Remarque préliminaire :.....	55
2.	Collecte de données.....	56
3.	Nettoyage des données pour supprimer les doublons	56
Section 2	Classification	58
Section 3	Statistiques descriptives pour chaque catégorie	60
Section 4	Calage de Loi.....	61
1.	Méthodologie	61
2.	Identification des lois	63
3.	Paramétrage des lois.....	64
4.	Qualité de l'ajustement	65
Section 5	Calcul de quantiles.....	74
1.	Méthodologie	74
2.	Formulations.....	75
3.	Résultats	77
Section 6	Backtest statique	81
1.	Méthodologie	81
2.	Résultats	82
Section 7	Backtest glissant	86
1.	Méthodologie	86
2.	Résultats	88
CONCLUSION		92
BIBLIOGRAPHIE		95
ANNEXES		98

INTRODUCTION

Les banques et les assurances ont connu au cours des dernières années un essor rapide des techniques utilisées pour calculer le niveau de leurs besoins en fonds propres. Tout d'abord les pays du G10 ont exigé un effort important de normalisation des règles et techniques utilisées à cet effet. Initialement construites sur des bases empiriques et forfaitaires (Bale I, Solvency I), les méthodes imposées aux établissements financiers ont été progressivement transformées en techniques formalisées et quantitatives plus évoluées (Bale II, Solvency II).

D'abord utilisée en assurance (concept de ruine) puis dans les salles de marché (JPMorgan – RiskMetrics) la Value-at-Risk (VaR dans la suite du rapport) a joué un rôle croissant dans l'analyse du risque et des réserves financières à mettre en regard des investissements. La sophistication des instruments de marché (options, hybrides) et leur agrégation dans des portefeuilles plus complexes (arbitrage, couverture, plusieurs classes d'actifs) a stimulé les recherches pour l'amélioration de cet outil. Devenu indispensable pour les établissements ayant des activités complexes, le régulateur en a fait une pièce maîtresse dans les modèles de calcul des fonds propres réglementaires (comité de Bale 1996).

Néanmoins, la VaR a été très tôt critiquée pour ses insuffisances (variété des résultats selon les lois utilisées, information sur le risque très différente selon le niveau de confiance retenu, non-additivité). D'ailleurs, la réglementation a imposé assez tôt que ces modèles soient confrontés à la réalité (backtests) et qu'à défaut de robustesse les résultats des modèles soient affectés par un facteur pénalisant (multiplication par un indice compris entre 3 et 4). Conscient que les modèles quantitatifs ne peuvent suffire, le régulateur a également exigé la mise en place de programmes d'analyse de cas

dégradés (stress-test) et de plans d'ajustement en cas de risques élevés au-delà de la VaR.

La crise a mis en exergue des risques nouveaux ou insuffisamment formalisés (liquidité, risque de modèle, endogénéité, risque systémique). Elle appelle à une meilleure compréhension du comportement des actifs dans les extrêmes. Le régulateur travaille actuellement à une mise à jour du cadre normatif pouvant aboutir à des exigences de fonds propres (quantitatives s'agissant du niveau et qualitatives s'agissant de la composition core capital/ hybride) particulièrement significatives. Cette évolution aura des conséquences sur la rentabilité des activités financières. Une exigence insuffisante risquerait d'autoriser des prises de risques non souhaitables. Une exigence trop élevée pourrait pénaliser à l'excès des activités utiles au développement économique. Le bon dosage reposant sur des éléments aussi factuels que possible est donc primordial. La construction d'outils permettant de livrer des informations de qualité sur les valeurs extrêmes a donc toute son importance une fois posée dans ce cadre.

Des techniques développées à partir des statistiques d'ordre et visant à construire des estimateurs capturant mieux les extrémités des distributions ont donné naissance au concept de L-moments. Ces combinaisons de statistiques d'ordre prennent mieux en compte les queues de distributions que les moments classiques. Ils permettent le calage sur des familles de lois généralisées (generalized logistic, generalized extreme value, generalized pareto, pearson type III) à trois paramètres et dont les queues peuvent être plus épaisses que la normale. Cette technique s'avère notamment utile pour le calcul d'une VaR paramétrique qui contiendrait d'avantage d'information sur les réalisations extrêmes.

Par ailleurs, les hedge funds ont connu un essor rapide au cours des dernières années. Initialement cette industrie de petite taille ne concernait que quelques investisseurs

sophistiqués. Puis les institutionnels (assurances, fonds de pensions, banques) ont investi dans ces fonds. A partir de là des intermédiaires bancaires ou affiliés (asset managers, entités de structuration des banques d'investissements, banques privées) ont dû développer des techniques pour connaître les risques de ces investissements. Enfin, les banques d'investissement et de financement ont pris des risques directement sur ces fonds en assurant leur financement à partir de leurs divisions de prime brokerage ou en investissant en compte propre. La connaissance du risque hedge funds dans un cadre réglementaire est donc devenue nécessaire.

Les hedge funds ont des risques spécifiques (illiquidité, recours au levier à la vente à découvert et aux produits dérivés) si bien que généralement leurs distributions sont asymétriques et que leurs queues de distributions sont épaisses. Aussi, les modèles supposant la normalité des distributions de rendements ne sont pas adaptés. Une application des L-moments au calcul de la VaR permet de construire des estimateurs plus robustes des pertes potentielles et ouvre un champ de recherche et de développements pratiques intéressants.

Dans une première partie nous présenterons les principaux aspects du cadre réglementaire pour la mesure du risque, en particulier la VaR, tout en soulignant les premiers enseignements de la crise. Puis, dans une seconde partie, nous introduirons le concept de L-moments. La troisième partie sera dédiée aux principales caractéristiques des hedge funds. Enfin, la dernière partie traitera d'une application empirique des L-moments au calcul de la VaR des hedge funds.

PARTIE I : MESURE DU RISQUE ET CADRE REGLEMENTAIRE

Section 1 Le cadre réglementaire actuel

1. La théorie financière classique

La théorie financière classique repose sur l'idée, introduite par Bachelier en 1900, que les prix évoluent selon une marche aléatoire conduisant à des rendements qui suivent une loi normale.

Dans ce cadre, le risque est alors entièrement décrit par la variance des rendements.

Néanmoins, l'étude empirique des chocs boursiers, confirmée par l'histoire récente, contredit cette approche et met en évidence des risques extrêmes qu'il convient de savoir anticiper, mesurer, et réduire.

Le sujet qui nous intéresse est la représentation et la modélisation des pertes extrêmes. Ce thème s'applique à une large variété de sujets qui concernent l'actuaire : décision d'investissement, couverture de risques, régulation, etc.

L'analyse de risque s'inscrit dans un cadre réglementaire de calcul des réserves et de suivi général des risques (Bale II pour les banques, Solvency II pour les assureurs).

2. Le cadre réglementaire Bale II

a- Historique : la construction du cadre réglementaire balois a été initiée dans les années 70

- 1974 : Le comité de Bâle a été créé en 1974 par le G10. Le comité formule des recommandations que les régulateurs nationaux peuvent suivre en les adaptant
- 1998 : Les premières directives du comité datent de 1988 (Bale I) et portent principalement sur le risque de crédit
- 1993 : Le concept de VaR apparaît dans plusieurs rapports en 1993
- 1996 : Un amendement du comité à Bale I préconise le recours à un modèle standard pour la mesure du risque de marché mais autorise également les principales banques à utiliser des modèles internes fondés sur la VaR [1]

- 2001 : Processus consultatif pour un deuxième accord, notamment suite aux demandes des banques d'un traitement plus spécifique du risque de crédit
- 2004 : Approbation par les gouverneurs de la banque centrale des dispositions de Bale II
- 2006 : Introduction fin 2006 de Bale II dans les différents pays [2]
- 2009 : Amendement aux accords pour la mesure du risque de marché suite à la crise, prévoyant notamment la prise en compte dans le calcul des fonds propres de risques mal capturés jusqu'alors, et préconisant le calcul d'une VaR sur des hypothèses dégradées (« stressed VaR ») en plus de la VaR classique (Section 3, 2.)

b-Bale II fait une distinction entre trois grands types de risques :

- **Risque de crédit** : risque de non paiement lié au défaut d'une contrepartie
- **Risque de marché** : risque de modification de la valeur d'une position financière liée à l'évolution des actifs qui la composent (actions, obligations, change, ...)
- **Risque opérationnel** : risque de perte liée au dysfonctionnement des processus de gestion (internes ou externes)

c- Bale II repose sur trois piliers complémentaires (approche à la fois quantitative et qualitative) :

- **Pilier I** : il vise les règles de calcul de l'exigence minimale de fonds propres (avec méthodologies spécifiques pour chacun des trois grands types de risques et selon les natures d'actifs)
- **Pilier II** : il concerne les mesures de validation des procédures de suivi et de contrôle des risques ; avec pour effet de compléter les besoins de fonds propres si les dispositifs ne donnent pas un confort satisfaisant
- **Pilier III** : disposition au sujet de la discipline de marché et la transparence dans la circulation de l'information

3. Le cadre réglementaire Solvabilité II

a- De Solvabilité I à Solvabilité II : du forfaitaire à l'approche globale des risques

Solvabilité II est une directive de l'Union Européenne s'adressant aux assureurs et réassureurs européens.

Tout comme Bâle II dans le secteur bancaire, Solvabilité II est une approche générale, qui se décline en objectifs quantitatifs et qualitatifs, visant une meilleure adaptation des fonds propres des compagnies d'assurances et de réassurance aux risques qu'elles encourent.

La directive **encourage l'adoption d'une démarche globale de gestion des risques couvrant l'ensemble de l'entreprise.**

b- Historique

- 1970 : Solvabilité I établi dans les années 1970, fondait le calcul du niveau minimal de fonds propres sur une approche forfaitaire indépendante du niveau de risque effectif.
- 2004 : Le projet réglementaire Solvabilité II a été initié par les travaux du Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS) au printemps 2004 qui, aux travers de nombreuses consultations, ont esquissé le modèle de la réforme en cours.
- 2007 : Publication de la directive cadre. La Commission Européenne a repris les travaux du CEIOPS mais en veillant à ce que les compagnies d'assurance puissent apprécier leurs propres risques et allouer un capital suffisant à chacun d'entre eux, aboutissant ainsi à une démarche plus complexe mais plus complète.

Au delà des modalités du calcul des exigences en fonds propres, l'évolution principale apportée par ce texte est une incitation à l'amélioration des pratiques de gestion du risque.

Mettre la gestion des risques au centre des préoccupations de l'entreprise est le véritable objet du nouveau dispositif.

c- Les trois piliers : une approche quantitative et qualitative similaire à celle de Bale II

Sur le modèle de Bâle II, le projet de directive Solvabilité II repose sur 3 piliers pour une évaluation quantitative et qualitative des risques.

- Pilier I : Exigences quantitatives

Le premier pilier a pour objectif de définir des seuils quantitatifs aussi bien pour les provisions techniques que pour les fonds propres.

Deux niveaux de fonds propres seront définis :

Le **MCR** *Minimum Capital Requirement* : représente le capital minimum en dessous duquel l'autorité de contrôle pourra demander le retrait de l'agrément. Il devrait être calculé de façon plus simple et plus robuste que le SCR et ne pourra être inférieur à un montant absolu fixé en euros.

Le **SCR** *Solvency Capital Requirement* représente le **capital cible requis pour absorber le choc provoqué par une sinistralité exceptionnellement importante et offrir une sécurité raisonnable aux assurés, sur la base d'une probabilité de ruine de 0,5 % (« Value at Risk » de 99,5 %) à un horizon d'un an.**

Une compagnie qui ne serait pas en mesure de démontrer que son niveau de fonds propres est suffisant pour couvrir ces risques devra soumettre à son autorité de contrôle, pour approbation, un plan d'action en vue de respecter ces critères.

Les modalités de calcul exactes du MCR (Capital Minimum) et du SCR (Capital cible) sont en cours d'harmonisation, mais il apparaît clairement que le SCR devrait devenir l'outil principal des autorités de contrôle.

Détermination du SCR:

Il est **plausible que le niveau de probabilité retenu soit finalement de 99,5%** (réaffirmé dans des échanges récents entre la Commission européenne et le CEIOPS).

Ce capital cible réglementaire pourra être déterminé en appliquant soit la formule standard, soit un modèle interne approuvé.

Pour la formule standard, le niveau du SCR est déterminé en agrégeant les exigences au titre des risques de souscription, de marché, de crédit et des risques opérationnels.

Pour les compagnies voulant opter pour un modèle interne, un accord de l'autorité de contrôle sera requis préalablement à la détermination effective du SCR à partir de ce modèle interne (*Le consultation paper n° 23* définit ces modalités de validation). L'approche par le modèle interne est plus contraignante mais, au-delà du seul respect des contraintes réglementaires, cette **approche est aussi la seule à apporter des éléments permettant une meilleure maîtrise de l'activité de la société.**

- Pilier II : Exigence qualitative et règles de contrôle

Le deuxième pilier concerne les exigences qualitatives et les règles de contrôle applicables aux compagnies d'assurances et de réassurances. Il s'agit de la deuxième innovation majeure du texte.

Les compagnies doivent être en mesure de mettre en place **un système de gouvernance** efficace afin de pouvoir apprécier par elles-mêmes la mesure et la gestion de leurs risques.

L'autorité de contrôle vérifiera la qualité des données, des procédures d'estimation, et des systèmes de mesure et de maîtrise des risques probables. L'autorité de contrôle aura aussi le pouvoir d'imposer une marge de solvabilité complémentaire, si les risques ont été mal appréciés par la compagnie.

- Pilier III : Information et discipline de marché

Le troisième pilier concerne la publication des informations. Il s'agit pour les compagnies d'assurances et de réassurance de communiquer auprès des autorités de contrôle et du public un ensemble d'éléments relatifs aux piliers 1 et 2.

Les informations destinées aux autorités de contrôles doivent comprendre

- un rapport sur la solvabilité,
- un rapport sur la situation financière
- une description du système de gestion des risques

Ce rapport doit contenir une description des méthodes d'évaluation des actifs, des provisions techniques et une explication sur les différences majeures observées entre les bases techniques et les états financiers.

L'entreprise devra également décrire sa gouvernance et indiquer son exposition à chaque type de risque, son niveau de concentration ainsi que les mesures correctives éventuelles qu'elle envisage.

d- Conséquences de la crise : poursuite de Solvabilité II et évaluation des stress-tests

Suite à la crise financière, le **CEIOPS** a publié deux rapports :

- le 13 novembre 2008, un rapport sur les standards de risk management des actifs, précisant les mesures tant au niveau qualitatif (définition d'une politique de gestion actif-passif clairement établie et en phase avec l'activité), que quantitatif (évaluation pertinente du risque de liquidité et de concentration) introduites avec Solvabilité II
- le 19 mars 2009, un rapport sur les leçons de la crise, examine une liste complète d'éléments quantitatifs (quantification des risques de crédit, liquidité, concentration...) mais aussi qualitatifs (gouvernance, robustesse de modèles...) pour conclure qu'il est nécessaire de mettre en place Solvabilité II

A l'image du stress-test mené sur les banques, le CEIOPS a annoncé (en octobre 2009) qu'en **décembre 2009**, un **stress-test sera mené sur les plus importants groupes d'assurances européens**. Le stress-test devra identifier la résistance de ces assureurs face à trois situations de crise :

- un choc financier du type de celui constaté entre septembre 2008 et septembre 2009,
- une récession plus profonde et prolongée,
- un scénario de reprise de l'inflation et des taux d'intérêts.

e- Prochaines étapes

2010 : Dernier avis du CEIOPS sur les mesures d'exécution. Dernière étude quantitative d'impact. Elaboration des mesures d'exécution par la Commission Européenne et recommandations du CEIOPS

2011 (mai): Adoption par la Commission des mesure d'exécution et des recommandations par le CEIOPS

2012 (octobre) : Entrée en vigueur de la directive 18 mois après adoption des modalités d'application

2013 : Publication des comptes suivant la directive "Solvabilité II"

4. Application dans les établissements bancaires

a- Les systèmes de suivi du risque des établissements bancaires reposent généralement sur plusieurs métriques, dont aucune n'est suffisante lorsqu'elle est prise isolément :

- les analyses de sensibilités,
- les stress test,
- la VaR.

b- L'analyse de sensibilité consiste à mesurer la sensibilité des portefeuilles d'actifs aux variations de premier et parfois second ordre de quelques grandeurs classiques (indices actions, taux d'intérêt, volatilité, etc). Il s'agit de mesures locales, et par conséquent non adaptées à la modélisation de variations de grandes amplitudes.

c- Les stress tests visent la mesure de la perte d'un portefeuille dans des scénarios de crise extrêmes. La difficulté principale réside dans le choix de scénarios pertinents et plausibles (on trouve généralement deux approches et qui peuvent être combinées parfois : scénarios historiques reprenant les caractéristiques des crises passées ou bien scénarios théoriques à dire d'expert). Il faut remarquer que ces stress-

test ne sont pas des grandeurs probabilisées. Cependant, la théorie des valeurs extrêmes pourrait contribuer à caractériser le degré plus ou moins extrême d'un stress-test [3] (A. Costinot, G. Riboulet, T Roncalli, 2000)

d- Nous prenons le parti dans ce document de traiter surtout des approches probabilistes, d'où une approche principalement par la VaR.

Section 2 La VaR

La VaR est utilisée à plusieurs niveaux dans les banques : pour le calcul des besoins de fonds propres, et pour la gestion opérationnelle des limites de risque en matière de trading.

La VaR comporte plusieurs défauts. Il a été démontré théoriquement et en pratique notamment lors de la récente crise que la VaR est manipulable.

La question est à présent : le problème vient-il de l'instrument ou de son paramétrage ? S'agissant des autres instruments tels que l'expected shortfall¹ ou les mesures de distorsions², ils posent des problèmes de paramétrages similaires à ceux de la VaR. La question reste entière : comment avoir des paramétrages plus riches en informations, moins simplificateurs, utilisant plus de moments ?

Aussi, nous prenons le parti de nous intéresser au paramétrage de la VaR. Des avancées intéressantes apparaissent avec les L-moments. Ces derniers points seront développés dans les parties III et V de ce document.

1. La VaR un outil standardisé

a- La VaR renvoie au concept de ruine

La VaR s'interprète comme le capital exposé, ou « valeur en risque » en cas de ruine.

¹ On définit l'expected shortfall comme l'espérance conditionnelle de la perte sachant que celle-ci dépasse la VaR

² On appelle mesure de distorsion le nombre $r(F; G) = \int_0^1 F^{-1}(1-u)dG(u)$, où G est une fonction de répartition sur [0,1], appelée fonction de distorsion et F est la distribution de pertes.

En termes financiers, elle correspond donc à une perte maximale potentielle qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donné

Plus formellement, on appelle VaR au niveau α , le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la distribution conditionnelle de perte [4] (C. Gouriéroux et JM Zakoian, ENSAE, Polycopié sur la Mesure de risque, 2009) :

$VaR_{t,h}(\alpha) := \inf(x \in \mathbb{R} \mid P_t[L_{t,t+h} \leq x] \geq 1 - \alpha)$, lorsque ce quantile est positif,

où $L_{t,t+h} = V_t - V_{t+h}$ la « perte » de valeur du portefeuille entre t et $t+h$.

$VaR_{t,h}(\alpha)$ augmente lorsque α décroît.

b- La VaR a connu un essor important à partir des années 80 sur les marchés financiers avant d'être institutionnalisée par la réglementation

La VaR est apparue pour la première fois dans le secteur de l'assurance.

Elle a été importée à la fin des années 1980 sur les marchés financiers par la banque Bankers Trust et popularisée par la banque JP Morgan en 1993 et son service Riskmetrics [5] (pour un historique complet de la notion de VaR et de sa diffusion se reporter au livre de Dowd, 2005) puis adoptée par le Comité de Bâle pour les banques et Solvabilité II pour les assurances.

Depuis l'amendement de Bâle en janvier 1996, les banques soumises à des risques de marché, ont la possibilité de calculer le niveau de fonds propres réglementaires par un modèle interne.

c- L'utilisation de la VaR dans les modèles de calcul de fonds propres réglementaires est encadrée

La méthodologie VaR est le fondement de ces modèles mais elle doit impérativement être complétée par l'utilisation d'un programme de simulations de crise, à court terme d'une part, pour que le modèle interne puisse être validé par la Commission Bancaire, et à plus longue échéance d'autre part, pour que le risque soit bien géré au sein de la banque, et tienne compte, notamment, des pertes importantes liées à des événements de faible probabilité.

En outre, elles doivent s'astreindre à l'autoévaluation de leurs modèles y compris en confrontant les modèles aux résultats historiques (backtesting).

d- La VaR est au cœur des modèles de calcul du risque de marché

Bale II fait une distinction entre le modèle standard et les modèles internes. Le texte prévoit que les banques ayant fréquemment recours à des instruments financiers sophistiqués utilisent des modèles internes fondés sur la VaR.

Le comité prévoit cependant certaines mesures d'encadrement :

- les banques doivent démontrer l'efficacité des modèles notamment en réalisant des backtests réguliers et en complétant leur analyse par un dispositif rigoureux de stress-test.
- les stress-tests doivent être revus périodiquement, partagés avec le senior management de l'entreprise et donner lieu à des actions correctrices lorsqu'ils mettent à jour des points de vulnérabilité
- les banques doivent prévoir dans leurs programmes d'audit internes des revues périodiques du système de mesure des risques

e- Les banques disposent d'une certaine flexibilité dans la conception des modèles mais doivent respecter des conditions minimales, telles que :

- procéder à un calcul quotidien d'une VaR 10 jours à 99%
- en utilisant un échantillon d'au moins un an pour le calcul d'une VaR historique (et que ces échantillons soient mis à jour au moins tous les 3 mois)
- la VaR peut être fondée sur des simulations (type Monte Carlo)
- possible d'utiliser des corrélations historiques
- nécessité de recourir à des modèles spécifiques pour les options
- l'exigence en fonds propres doit être au moins égale au plus élevé entre la VaR de la veille et la VaR moyenne sur 60 jours, multipliée par un facteur d'échelle

(compris entre 3 et 4) ; ce facteur d'échelle est une grandeur discrétionnaire fonction de l'appréciation de la qualité du système de mesure des risques et qui sera augmenté si les résultats des backtests ne sont pas satisfaisants.

2. Pas une VaR mais plusieurs VaR

a- Tout d'abord la VaR d'un portefeuille dépend essentiellement de 2 paramètres :

- **Le niveau de confiance choisi (95 ou 99% en général):**

Par définition, il s'agit de la probabilité que les pertes éventuelles du portefeuille ou de l'actif ne dépassent pas la Value-at-Risk.

Il reste possible de retenir plusieurs VaR, le choix de plusieurs niveaux de confiance augmentant le niveau d'information.

Il reste néanmoins, qu'il sera alors plus difficile de regrouper ces métriques dans une modélisation systématique du risque par manque de propriétés mathématiques agréables.

- **L'horizon temporel choisi:**

Ce paramètre est très important car plus l'horizon est long et plus les pertes peuvent être importantes.

Lorsque les rendements sont i.i.d. centrés et gaussiens [4], il faut multiplier la VaR quotidienne par racine de t pour obtenir la VaR sur t jours (ce n'est pas toujours le cas pour les autres modèles, cf. [4]).

Le choix de l'horizon de temps soulève cependant la question de la liquidité des actifs concernés. En effet il y a-t-il un sens à considérer la VaR quotidienne pour un actif dont on sait qu'il ne peut être revendu en une journée ?

Il existe des ébauches de réponses techniques à cette question :

- Les actifs illiquides, notamment les hedge funds ont des rendements corrélés positivement [6] (Getmanski, Lo, Makarov 2004). Aussi pour

adapter le calcul on peut intégrer la corrélation temporelle dans le calcul de la VaR, ce qui nécessite l'utilisation de modèles dynamiques.

- Parmi les modèles dynamiques de la VaR, citons notamment des développements intéressants consistants à spécifier les quantiles conditionnels (modèles Quantile Autoregressive, modèles Conditional Autoregressive VaR, modèles Dynamic Additive Quantile) cf [4]

Néanmoins, en pratique ces méthodes ne sont pas mises en œuvre. D'une manière ou d'une autre il convient d'intégrer un facteur pénalisant (typiquement dans le facteur d'échelle que les banques doivent appliquer à la VaR pour calculer la quantité de fonds propres nécessaires).

b- Par ailleurs, il convient d'avoir une discussion sur le choix de la distribution de pertes

Le plus souvent, on considère que la distribution marginale des pertes, soit normale, soit calée sur la distribution historique. Dans ce cas, la difficulté réside dans le choix de la taille de l'échantillon historique à considérer : s'il est trop petit, les probabilités de pertes élevées sont peu précises, et s'il est trop grand, la cohérence temporelle des résultats est perdue (l'hypothèse de stationnarité peut être violée). En outre, pour modéliser le risque d'un portefeuille il convient d'introduire les interactions entre actifs ce qui pose le problème de la dépendance non linéaire. Notons que des travaux de recherche sont en cours sur des méthodes plus avancées qui permettraient de mesurer la dépendance non linéaire : modèles de copules et dépendance de queue (conditionnelle) [4].

Il est également possible de fonder l'ensemble des calculs de risque sur la distribution conditionnelle des pertes. La VaR conditionnelle remplace alors la VaR marginale et chaque calcul de risque dépend de la ou des dernières observations des rendements. Le point clé réside dans le choix de la dynamique des rendements. Les deux spécifications les plus immédiates sont le modèle autorégressif à l'ordre 1, ou AR(1), et le modèle ARCH(1) (voir [4], p. 8-9, pour une présentation détaillée du calcul de la VaR dans ces deux cas particuliers).

Le principal avantage de l'approche conditionnelle est de faire dépendre le calcul de la VaR de l'environnement. Si nous prenons l'exemple du modèle ARCH(1), un choc (positif ou négatif) sur les rendements va augmenter instantanément la volatilité des rendements et pénaliser le calcul de la VaR.

Dans la suite de cette étude, et afin de centrer le sujet sur l'impact des risques extrêmes sur la VaR, nous restons dans un cadre statique en ne considérant que les distributions marginale de pertes. La prise en compte de la dynamique se fait en partie par le calibrage glissant de la distribution des pertes.

Il existe 3 approches traditionnelles de calcul de la VaR pour un portefeuille d'actifs

- **Approche non paramétrique (VaR historique)**

Dans cette approche, la VaR est calculée à partir de la distribution des rendements observés sur une période donnée généralement proche du moment où la VaR est évaluée. Sans faire d'hypothèse sur la nature de la distribution, cette méthode suppose implicitement que la distribution des rendements est stationnaire et nécessite des séries de rendements relativement longues.

- **Approche par la simulation (Monte Carlo)**

Elle permet d'évaluer la VaR à partir de la simulation des facteurs de risques auxquels le portefeuille est exposé.

Son application est complexe car elle nécessite la connaissance des facteurs de risques associés au portefeuille et d'autre part la modélisation de ces facteurs.

- **Approche paramétrique (VaR gaussienne dans le cadre classique)**

Sous l'hypothèse de normalité pour tous les actifs sous-jacents, les rendements du portefeuille sont eux-mêmes gaussiens et la VaR de leur distribution se calcule en fonction de la matrice de variance-covariance associée. Néanmoins cette approche est limitative puisqu'elle repose sur l'hypothèse de normalité rarement vérifiée en pratique.

Formulation de la VaR Gaussienne :

$$VaR(\alpha, T) = \mu T + Z_\alpha \cdot \sigma \sqrt{T} \quad \text{où } Z_\alpha = \Phi_N^{-1}(\alpha)$$

où α est le niveau de quantile, T l'horizon de temps, μ la moyenne, σ l'écart-type, et Φ_N^{-1} la fonction quantile de la loi normale centrée réduite

3. La VaR un outil incomplet

a- L'usage d'une VaR gaussienne peut largement sous-estimer le risque même s'agissant de classes d'actifs simples comme les actions [7] (Brown, Tolikas, 2006, dans une étude sur la distribution des rendements extrêmes sur l'Athens Stock Exchange).

b- La VaR aboutit à des prévisions du risque étonnamment imprécises

Danielsson le montre dans un article récent sur la régulation [8] (Danielsson 2009). A ce titre, il prend l'exemple de la VaR sur un seul actif entre 2000 et 2009 mais mesurée sur plusieurs périodes de référence (250, 500, 1000, et 2500 jours), et avec différents calibrages (simulation historique, fenêtre mobile, moyenne mobile exponentielle, modèle GARCH, modèle GARCH avec queue de distribution épaisse) .

Il en ressort que les estimations varient très fortement d'une méthode à l'autre : l'écart entre les prévisions les plus faibles et les plus hautes est au minimum de 50% (en 2003), et que dans la plupart des cas, l'écart est compris entre 100% et 320% (en 2005). Il conclut également qu'il est difficile de déterminer la meilleure méthode par manque de robustesse des techniques de backtesting.

A noter également que Escangio et Olmo mettent en évidence les insuffisances des méthodes de backtestings les plus couramment utilisées par les banques et régulateurs et proposent une méthode pour adapter ces tests [9] (J.C. Escangio, J Olmo, 2008).

c- La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous-additive

Le risque d'un portefeuille mesuré par la VaR peut être supérieur à la somme des VaR de ses composantes.

En réponse à ce type de critique Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999) ont introduit le concept de mesure de risque cohérente [4].

Soit I un ensemble de variables aléatoires de pertes réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose que I contient les constantes et est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire. Une application $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée mesure de risque cohérente si elle est :

- monotone : $\forall L_1, L_2 \in I, L_1 \leq L_2 \Rightarrow p(L_1) \leq p(L_2)$
- sous-additive : $\forall L_1, L_2 \in I, p(L_1 + L_2) \leq p(L_1) + p(L_2)$
- positivement homogène : $\forall L \in I, \forall \lambda \geq 0, p(\lambda L) = \lambda p(L)$
- invariante par translation : $\forall L \in I, \forall c \in \mathbb{R}, p(L + c) = p(L) + c$

La VaR vérifie toutes les propriétés à l'exception de la sous-additivité.

d- Bien que la VaR soit la mesure couramment utilisée le choix d'une mesure de risque adéquate n'est pas encore tranché

L'expected shortfall ou perte anticipée est la mesure de risque standard utilisée en assurance sous l'impulsion de Solvency II. Elle s'interprète comme, pour un niveau α , la moyenne de la VaR sur tous les niveaux $u \leq \alpha$. Elle donne donc une information sur la perte une fois que la VaR est dépassée. Ses propriétés mathématiques sont plus agréables que celles de la VaR car il s'agit d'une mesure de risque cohérente. Pour une définition et une caractérisation plus complète cf. [4].

Une généralisation des concepts de VaR et d'expected shortfall aboutissent à la notion de mesure de distorsion.

On appelle mesure de distorsion le nombre $r(F; G) = \int_0^1 F^{-1}(1-u)dG(u)$, où G est une fonction de répartition sur $[0,1]$, appelée fonction distorsion et F est la distribution de perte.

La VaR est un cas particulier de mesure de distorsion où G est la masse de Dirac en α , et l'expected shortfall correspond au cas où la densité g est constante sur $[0, \alpha]$. Pour une définition et une caractérisation plus complète cf. [4].

e- Le problème vient il de l'instrument ou de son paramétrage ?

Les autres instruments tels que l'expected shortfall ou les mesures de distorsions mêmes s'ils ont des propriétés mathématiques plus agréables ou un plus grand caractère de généralité, posent des problèmes de paramétrages similaires à ceux de la VaR.

Aussi, la question reste entière : comment avoir des paramétrages plus riches en informations, moins simplificateurs, utilisant plus de moments ?

4. Développement sur l'approche paramétrique

a- L'approche paramétrique par la VaR Gaussienne peut être améliorée pour tenir compte du caractère non-normal de la loi sous-jacente en introduisant le skewness et le kurtosis

La VaR de Cornish-Fisher [10] (proposée dans Favre, Galeano 2002) repose sur le développement de Cornish-Fisher de la fonction quantile d'une distribution autour de la distribution gaussienne.

Formulation de la VaR de Cornish-Fisher obtenue en corrigeant la VaR Gaussienne du skewness et du kurtosis calculés sur les données :

$$VaR_{CF,\alpha} = \mu + \left(Z_\alpha + \frac{Z_\alpha^2 - 1}{6} \cdot s + \frac{Z_\alpha^3 - 3Z_\alpha}{24} \cdot (k - 3) - \frac{2Z_\alpha^3 - 5Z_\alpha}{36} \cdot s^2 \right) \cdot \sigma$$

avec

$$Z_\alpha = \Phi_N^{-1}(\alpha)$$

où α est le niveau de quantile, μ la moyenne, σ l'écart-type, Φ_N^{-1} la fonction quantile de la loi normale centrée réduite, k le kurtosis et s le skewness. NB : on a considéré $T=1$ (horizon de temps) par soucis de simplification.

Pour les distributions de skewness négatif et de kurtosis supérieur à 3, la VaR obtenue se décale à gauche par rapport à la VaR gaussienne et permet donc de prendre en compte les écarts par rapport à la « normalité ». Néanmoins, par construction cette VaR représente correctement le risque si s est petit et k est proche de 3. Si ces deux conditions ne sont pas satisfaites, l'approximation de Cornish-Fisher n'est plus bonne [11] (Lhabitant F.S., 2004) et il convient d'utiliser d'autres méthodes.

b- Une autre extension dans le cadre paramétrique consiste à identifier d'autres classes de distribution que la normale et possédant des propriétés analytiques intéressantes (notamment s'agissant des rendements extrêmes)

La méthode des L-moments est un outil intéressant pour identifier et caler les lois asymptotiques dans une plus grande généralité. On peut alors concevoir une VaR paramétrique dont les lois sont calées avec l'aide de la méthode des L-moments.

c- On développera dans ce mémoire une application à un cas d'actifs plus risqués que la moyenne : les hedge funds

Le cas des hedge funds est intéressant à plusieurs titres

- La distribution de leurs rendements n'est généralement pas gaussienne
- La connaissance de leurs risques correspond à un besoin pratique. Ainsi, les banques sont confrontées au risque hedge funds à plusieurs niveaux de leurs activités : investissement pour compte propre, financement (au titre du prime brokerage), due diligence s'agissant des activités de structuration.

Section 3 Les premiers enseignements de la crise

1. Nouvelles formes de risques

a- La crise a mis en évidence des risques peu formalisées jusqu'alors :

- **risque de liquidité** (risque de ne pouvoir déboucler une opération financière dans un délai suffisamment court pour éviter les pertes) ; pris en compte explicitement dans la réglementation à présent (comité de bête 2009) [12]
- **risque de modèles** (risque résultant de décisions fondées sur des modèles mal spécifiés)
- **risque endogène** lié aux comportements des opérateurs qui utilisant les mêmes modèles réagissent (voire sur-réagissent) en même temps accentuant ainsi les phénomènes de pertes [8] (Danielsson 2009)
- **risque systémique** imposant de ne pas seulement regarder les risques par composantes mais également les effets d'entraînement d'un établissement à l'autre, d'une zone géographique à l'autre

2. La VaR « stressée »

a- Contexte

Une des réponses à la crise est l'introduction d'une exigence en capital liée à la « stressed value-at-risk » [12] (« Revisions to the Basel II market risk framework », Comité de Bale, juillet 2009).

Les pertes encourues par les banques pendant la crise ont été supérieures aux réserves minimales requises par le pilier 1.

Par conséquent, le comité de Bale souhaite que les banques calculent une VaR dite « stressée » assise sur les données d'une période de 12 mois dans une phase de crise. Cet indicateur doit être calculé en plus de la VaR courante. Cette exigence supplémentaire vise également à limiter l'effet procyclique des calculs de fonds propres minimaux associés au risque de marché. En effet, les calculs de VaR courante donnent des résultats faibles en période de croissance et bien plus importants en période de crise limitant alors la capacité des établissements financiers et accentuant ainsi les effets de cycles.

Les banques doivent adopter ces méthodes au 31 décembre 2010.

b- Définitions

La mesure de stressed VaR doit approcher la VaR que la banque observerait sur son portefeuille actuel si elle était dans une période de crise.

Il s'agit d'une VaR à 10 jours, à 99%, dont le modèle est calé sur un historique de 12 mois consécutifs pris dans une période de crise jugée pertinente au regard du portefeuille d'actifs de la banque.

Le choix de la période de référence doit être validé par le régulateur (par exemple une sous-période de 12 mois de pertes significatives entre 2007 et 2008 serait un choix a priori satisfaisant)

Le capital minimum requis (c) s'exprime alors ainsi :

$$c = \text{Max}(VaR_{t-1}; m_c \cdot VaR_{avg}) + \text{Max}(sVaR_{t-1}; m_s \cdot sVaR_{avg})$$

VaR_{t-1} est la VaR 10jours, 99% de la veille

VaR_{avg} est la moyenne des VaR_{t-1} où (t-1) couvre l'ensemble des 60 jours ouvrés précédents

$sVaR_{t-1}$ est la stressed VaR de la veille

$sVaR_{avg}$ est la moyenne des $sVaR_{t-1}$ où (t-1) couvre l'ensemble des 60 jours ouvrés précédents

m_c et m_s sont des facteurs multiplicatifs, compris entre 3 et 4, qui seront déterminés par les autorités de supervision en fonction de leur appréciation de la qualité du système de gestion des risques de la banque et du pouvoir prédictif des modèles (jugés à partir des résultats des backtests)

c. Point de vue des autorités

L'union européenne, la FSA, et le Trésor américain favorisent le développement des techniques atténuant les effets de cycle en constituant en période faste les réserves nécessaires pour couvrir les besoins en période de récession. Ils estiment que la stressed-VaR proposée par le comité de Bale va dans cette direction, même s'il est difficile de déterminer le bon niveau de stress à retenir pour effectuer les calculs (choix de la période de référence).

3. Les modèles quantitatifs sont insuffisants

a- Les modèles sont insuffisants et les mesures de stress test ont un rôle critique

La réglementation précise que les banques ayant recours à des modèles internes doivent disposer d'un programme de suivi en stress-test :

- Ils doivent être à la fois quantitatifs et qualitatifs, reposer sur des scénarios spécifiques à la banque au-delà de ceux demandés par le régulateur.
- Les banques doivent suivre les pertes extrêmes quotidiennes et notamment mesurer le nombre de jours de pertes extrêmes couverts par une estimation donnée de la VaR.
- Quand une banque est soumise à des risques non capturés dans la VaR (par exemple parce qu'ils apparaissent au-delà du quantile de 1%) alors la banque doit s'assurer qu'ils sont pris en compte dans la détermination du capital réglementaire notamment via les stress-test.

b- Parmi les leçons de la crise quelques points notoires concernant les modèles méritent d'être soulignés (conférence The Future of Banking Summit Novembre 2009 – The Economist ; où intervenaient plusieurs banquiers centraux de pays d'Europe)

- « la réalité est toujours pire que ce disent les stress test »
- « le régulateur ne doit pas regarder ce qui se passe à 99,9 % mais au-delà »
- « les systèmes de risques doivent à présent tenir compte de l'endogénéité »
- « la principale différence de l'après la crise est la nécessité de regarder avec plus d'acuité les risques extrêmes, les queues de distribution épaisses, et beaucoup moins les effets positifs »
- « au-delà des modèles il y a le jugement qualitatif (stress-test) et les plans d'actions » ... « c'est pourquoi nous souhaitons que les banques disposent de plans de crise »
- « pendant les crises apparaissent des problèmes qui par construction n'ont pu être identifiés préalablement » NB : ce propos est particulièrement intéressant car souligne le fait que les caractéristiques les plus extrêmes des crises sont toujours des phénomènes nouveaux si ce n'est dans leur nature profonde mais au moins dans leur forme

Remarque : on peut entendre dans ces propos de régulateurs un besoin d'information plus important sur le contenu et la formation des queues de distribution

4. Les évolutions réglementaires

a- Les régulateurs ont déjà adapté le cadre réglementaire sur certains points mais plusieurs sujets importants font encore débat et conduiront à des évolutions futures

- Une mise à jour du texte de Bale II (2009) [12] complète déjà le cadre :
 - introduction explicite du risque de liquidité
 - nécessité de compléter le système de risque par un calcul de VaR sur des hypothèses dégradées
- Plusieurs sujets ne seront traités qu'ultérieurement et stimuleront la recherche et la pratique :
 - fixation de nouvelles normes quantitatives et qualitatives sur le capital (faut il doubler le niveau des fonds propres ? le recours aux instruments hybrides doit il être pris en compte ?...)
 - quel traitement spécifique concernant les établissements jugés « systémiques » (plus de fonds propres relativement aux autres établissements, nécessité d'une plus grande flexibilité juridique pour « découper » ces établissements en cas de crise, dispositifs de gestion de la liquidité ...) ?
 - mesures visant à éviter la procyclicité des besoins de fonds propres réglementaires (fair market value, provisions dynamiques)
 - mécanismes d'assurance de place par lequel le système financier contribuerait à financer la gestion des crises futures

PARTIE II : L-MOMENTS

Les moments classiques (moyenne, variance, skewness, kurtosis, ...) sont le plus souvent utilisés pour caractériser une distribution de probabilité. Cependant, dans le cas de distributions à queues épaisses, il peut arriver que ces moments n'existent pas. Il est donc difficile d'utiliser uniquement ce type de moments.

Plus récent, le concept de L-moments, dispose de propriétés intéressantes et générales pour le calage de loi notamment. Ces moments sont définis à partir de combinaisons linéaires de la fonction quantile et existent sous des conditions plus générales.

L'idée de L-moments, est apparue progressivement dans différents travaux sur les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre (Silitto, 1969 [13] ; David, 1968 [14] ; Chernoff et al., 1967 [15] ; Greenwood et al., 1979 [16]), puis fut conceptualisée dans un cadre théorique général par Hosking (1990) [17].

Alors que les premières applications ont concerné l'hydrologie, la météorologie, le contrôle qualité (Dewar et Wallis, 1990 [18] ; Smithers et Schulze, 2001 [19] ; Chen and Tung, 2003 [20]), on trouve depuis de nombreuses applications aux marchés actions (Karvanen 2006 [21]; Brown et Konstantinos 2006 ; Chu et Salmon 2008 [22]), estimation de VaR (Martins-Filho, Yao 2006 [23]), l'allocation d'actifs (Jurcenzo, Maillet 2006 [24]) et plus récemment aux hedge funds (Darolles, Gouriéroux, Jasiak 2008 [25])

Section 1 Les limites des moments classiques

Traditionnellement une variable aléatoire X sur un espace de probabilité $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ est caractérisée par ses moments ordinaires

$$\mu = E[X], \mu_n = E[(X - \mu)^n], n > 1$$

Le moment d'ordre n et tous les moments précédents existent pour les variables aléatoires X appartenant à $L^n(\Omega; \mathcal{F}; P)$.

Si X possède une distribution de probabilité continue, les moments permettent de caractériser sa forme. En effet :

- le moment d'ordre 1 (μ) ou moyenne mesure la position du centre de la distribution
- l'écart type σ représente la dispersion de la distribution autour de sa moyenne

- le skewness s , respectivement le kurtosis κ , permettent de mesurer l'asymétrie, respectivement l'aplatissement de la distribution:

$$s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad \kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Si X appartient à $L^4(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$, les quantités μ , σ , s et κ existent et on a $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, s \in \mathbb{R}, \kappa \geq 0$. De plus l'inégalité $\kappa \geq 1 + s^2$ fournit une borne supérieure de l'asymétrie pour un niveau d'aplatissement donné par le kurtosis.

Si la variable aléatoire admet des moments de tous ordres, et sous certaines conditions, la donnée de l'ensemble des moments permet de caractériser la loi de distribution.

Section 2 L-moments et statistiques d'ordre

L'introduction des L-moments permet de caractériser la loi d'une classe de variables aléatoires plus grande que celles admettant des moments de tous ordres. Les L-moments existent si et seulement si la distribution a une moyenne finie. Plus encore, une distribution dont la moyenne est finie est caractérisée par ses L-moments [17] (Hosking, 1990). Cette propriété est essentielle quand on s'intéresse à des distributions à queues épaisses. En effet, sans les hypothèses d'intégrabilité, nous pouvons considérer des distributions dont les moments classiques n'existent pas.

Nous avons également vu dans la section précédente que les valeurs du skewness et du kurtosis sont contraintes par une relation d'inégalité. Ce n'est pas le cas pour les L-moments d'ordre supérieur (voir par exemple [21], Figure 2, pour une illustration du domaine de variation de ces paramètres). Cette propriété illustre bien l'intérêt des L-moments. Quand on se situe au « voisinage » de la distribution gaussienne, skewness et kurtosis permettent bien d'évaluer la distance entre une distribution donnée et l'hypothèse gaussienne. Quand la distribution est trop « non gaussienne », fonder l'étude de ses caractéristiques sur les moments d'ordre supérieur classiques est une mauvaise idée car leur valeur est contrainte (quand elle existe). Le fait de changer de base et d'utiliser les L-moments donne plus de souplesse.

Donnons d'abord une construction heuristique nous conduisant vers la définition des L-moments.

Prenons un échantillon de n tirages d'une variable aléatoire X de la loi étudiée, arrangé en ordre croissant $x_{1,n} \leq x_{2,n} \leq \dots \leq x_{n,n}$.

L'échantillon de taille 1, $x_{1,1}$, est une seule observation, il contient l'information sur la localisation de la distribution, i.e. sa moyenne.

Un échantillon de taille 2, constitué de 2 observations $x_{1,2}$ et $x_{2,2}$ permettent d'en dire plus. Si la distribution n'a que peu de dispersion, les deux valeurs auront tendance à être proches, dans le cas contraire, elles seront plutôt éloignées. Il est donc possible de poser $x_{2,2} - x_{1,2}$ comme mesure de la dispersion de la distribution.

Ensuite, l'échantillon de taille 3 permet de caractériser l'asymétrie de la distribution : si la distribution est symétrique, on s'attend à ce que $x_{3,3} - x_{2,3} \approx x_{2,3} - x_{1,3} \Rightarrow x_{3,3} - 2x_{2,3} + x_{1,3} \approx 0$

Si la distribution est asymétrique à droite (respectivement à gauche), la dernière expression sera typiquement positive (respectivement négative). On peut donc retenir $x_{3,3} - 2x_{2,3} + x_{1,3}$ (différence finie d'ordre 2 sur l'échantillon ordonné de 3 observations) comme mesure de l'asymétrie d'une distribution.

Enfin, avec le même raisonnement, on peut montrer que la quantité $x_{4,4} - 3x_{3,4} + 3x_{2,4} - x_{1,4}$ (différence finie d'ordre 3 sur l'échantillon ordonné de 4 observations) caractérise l'aplatissement d'une distribution comme le fait le kurtosis.

Une généralisation du raisonnement à des échantillons de toutes tailles conduit à la définition des 4 premiers L-moments.

On considère k exemplaires i.i.d. d'une variable aléatoire X et les statistiques d'ordre associées à cet échantillon conceptuel $(X_{i,k})_{i=1}^k$ et l'on définit les L-moments d'ordres 1 à 4 comme :

$$\lambda_1 = E[X_{1,1}]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} E[X_{2,2} - X_{1,2}]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} E[X_{3,3} - 2X_{2,3} + X_{1,3}]$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{4} E[X_{4,4} - 3X_{3,4} + 3X_{2,4} - X_{1,4}]$$

Il est important de remarquer que k n'est pas le nombre de tirages observés (que l'on notera n par la suite), mais la taille du vecteur aléatoire de variables aléatoires i.i.d. que l'on utilise pour définir le L-moment d'ordre k (et qui correspond à une taille d'information).

Plus généralement, en suivant la même logique on peut définir les L-moments de tout ordre k .

Soit $k \geq 1$ et $X_1, X_2, \dots, X_k$ un échantillon i.i.d de variables aléatoires de même loi que X .

On note $X_{1,k} \leq X_{2,k} \leq \dots \leq X_{k,k}$ les statistiques d'ordres associées à cet échantillon. Le L-moment d'ordre k est (Hosking, 1990) [17] :

$$\lambda_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i E[X_{k-i,k}] \quad (1)$$

λ_k est une combinaison linéaire des moyennes des statistiques d'ordre. Considérons un échantillon de taille n , ordonné, $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$

On a la formule suivante pour le calcul des espérances dans (1) :

$$E[X_{k-i,k}] = kC_{k-1}^{k-i} \int_0^1 Q(u)u^{i-1}(1-u)^{k-i} du$$

où $Q(u)$ est la fonction quantile de la distribution. En substituant dans (1) il vient :

$$\lambda_k = \int_0^1 Q(u)P_{k-1}^*(u)du = E[XP_{k-1}^*((F(X)))] \quad (2)$$

où F est la fonction de répartition de X , $P_k^*(u) = P_k(2u-1)$ et $P_k(u)$ sont les polynômes de Legendre.

Remarquons que cette formulation des L-moments, faisant apparaître explicitement la fonction quantile, présente deux avantages notables dans les applications :

- le quantile permet de construire un lien formel avec la notion de valeurs extrêmes
- la fabrication d'estimateurs de L-moments bénéficie des travaux précédents sur l'estimation des fonctions quantiles

Les polynômes P_k^* ont les propriétés suivantes :

1. P_k^* est un polynôme de degré k
2. $P_k^*(1) = 1$
3. Si $k \neq s$, $\int_0^1 P_k^*(u)P_s^*(u)du = 0$
4. les polynômes P_k^* forment une base orthonormée sur $[0; 1]$

Ainsi, pour X variable aléatoire intégrable, les L-moments s'interprètent comme les projections de sa fonction quantile sur la base constituée par ces polynômes.

L'ensemble des L-moments de X permet de reconstruire la fonction quantile de X et permet de caractériser la loi de toute variable aléatoire intégrable. Les quantités :

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \quad \tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}$$

appelées L-skewness et L-kurtosis, sont similaires aux skewness et kurtosis issus des moments ordinaires, et sont définies pour des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 1.

Section 3 Propriétés

a- Les L-moments possèdent des propriétés générales intéressantes

- Les conditions d'existence des L-moments sont plus générales que celles des moments classiques. En effet, les L-moments sont définis pour toute distribution de premier moment fini.
- Les L-moments, sont moins sensibles que les moments classiques à la présence de données atypiques (« outliers »). Ceci résulte du fait que les skewness et kurtosis classiques contiennent des puissances 3 et 4, et donc surpondèrent les données extrêmes ce qui n'est pas le cas des L-moments qui sont des combinaisons linéaires de statistiques d'ordre.
- Les L-moments ont des propriétés agréables pour le calage de lois
 - l'ensemble des λ_k , pour $k \geq 1$, caractérise entièrement la distribution puisque sa fonction quantile peut être reconstruite à partir de sa décomposition sur la base des polynômes orthogonaux [26] (pour une preuve complète cf. Hosking J.R.M., 1989)
 - Hosking (1990) [17] montre que pour des petits échantillons le calage par les L-moments donne de meilleurs résultats que la méthode du maximum de vraisemblance (repris dans Karvanen 2006 [21] ; et Brown et Tolikas 2006 [7]) ; ce qui est une propriété intéressante lorsque l'on s'intéresse à la distribution de valeurs extrêmes qui par définition correspondent à des événements plus rares
 - les 4 premiers L-moments permettent de caractériser les lois usuelles (uniforme ; exponentielle ; normale) et les lois dites « classiques généralisées » (Generalized Logistic distribution, Generalized Extreme Value, Generalized Normal distribution, Generalized Pareto distribution, Pearson type III distribution)

b- Exemples de calage pour des lois usuelles [26] (Hosking , J.R.M. 1989)

- Loi uniforme : $\tau_3 = 0, \tau_4 = 0$. Inversement, si pour une distribution on a $\tau_3 = 0$ et $\tau_4 = 0$, elle est nécessairement uniforme, les deux premiers L-moments donnent l'intervalle de définition de la distribution.
- Loi exponentielle : $\tau_3 = \frac{1}{3}, \tau_4 = \frac{1}{6}$. Inversement, si pour une distribution on a $\tau_3 = \frac{1}{3}, \tau_4 = \frac{1}{6}$ elle est nécessairement exponentielle, les deux premiers L-moments permettent de spécifier entièrement la distribution.
- Loi normale : $\tau_3 = 0, \tau_4 \approx 0,123$. Toute distribution ayant ces valeurs de τ_3 et τ_4 est nécessairement normale et les deux premiers L moments permettent de la spécifier complètement.

Section 4 Lois de probabilités généralisées

Les 4 premiers L-moments permettent de caractériser la distribution de lois dites classiques généralisées.

Ces distributions constituent une généralisation des lois classiques

- Generalized Logistic distribution (GLO). Cas particulier : distribution logistique
- Generalized Extreme Value distribution (GEV). Cas particulier : distribution de Gumbel
- Generalized Pareto distribution (GPA). Cas particulier : distributions uniformes, exponentielle et Pareto
- Pearson type III distribution (PE3). Cas particulier : distribution exponentielle, normale et Gamma

Les trois paramètres des distributions généralisées ($\beta; \alpha ; \kappa$) sont systématiquement le paramètre de localisation de la distribution β , celui de sa dispersion α et celui de forme de la distribution κ .

Les deux premiers ne coïncident pas généralement avec la moyenne et la variance de la distribution.

Les L-moments de ces distributions généralisées peuvent être calculés soit explicitement, soit numériquement en fonction des paramètres $(\beta; \alpha; \kappa)$. Pour chaque loi généralisée il existe une relation entre les L-ratios τ_3 et τ_4 qui peut être représentée par une courbe dans le plan $(\tau_3; \tau_4)$.

Le calage de loi peut être effectué à l'aide d'un diagramme où l'on repère en abscisse et en ordonnée les ratios τ_3 et τ_4 : les lois courantes y sont décrites par des courbes, et les estimateurs de L-moments par des points. Le calage consiste à identifier les lois dont les courbes sont les plus proches des points.

Ces lois généralisées sont décrites plus en détail en annexe.

Section 5 Estimation

Dans la pratique on cherchera à construire des estimateurs de L-moments à partir de n observations. Pour des statistiques d'ordres de rang $k < n$ on peut estimer (1) par :

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_{j,n}^{(k)} x_{j,n}$$

avec $w_{j,n}^{(k)}$ le polynôme de Legendre discret $(-1)^{k-1} P_{k-1}(j-1, n-1)$.

On montre que cet estimateur est consistant et asymptotiquement sans biais (voir [32]).

Une autre approche consiste à estimer les L-moments à partir de leur forme polynomiale (équation (2)) :

$$\hat{\lambda}_k = \int_0^1 \hat{Q}(u) P_{k-1}^*(u) du$$

où $\hat{Q}(u)$ est l'estimateur empirique de la fonction quantile.

Les propriétés statistiques de ce dernier estimateur sont détaillées dans [25]

PARTIE III : HEDGE FUNDS

Section 1 Contexte

1. Définition

Il n'existe pas de définition précise du terme hedge funds, mais on attribue à ces fonds certaines caractéristiques communes :

- la recherche d'une performance absolue décorrélée des évolutions des marchés,
- une liberté totale de style de gestion,
- l'utilisation par les gérants de la vente à découvert,
- le recours intensif à des effets de levier,
- une rémunération des gérants fondée sur la performance,
- un accès limité à des investisseurs qualifiés,
- l'absence de supervision réglementaire directe,
- une faible transparence,
- des valorisations rarement quotidiennes,
- une liquidité du passif souvent mensuelle ou trimestrielle

Les stratégies suivies par les hedge funds sont très nombreuses :

- l'intervention lors d'annonces de fusions-acquisitions (event driven),
- le pari sur des évolutions macroéconomiques avec effet de levier (global macro),
- la détention d'un actif et la vente à découvert d'un autre actif (long/short),

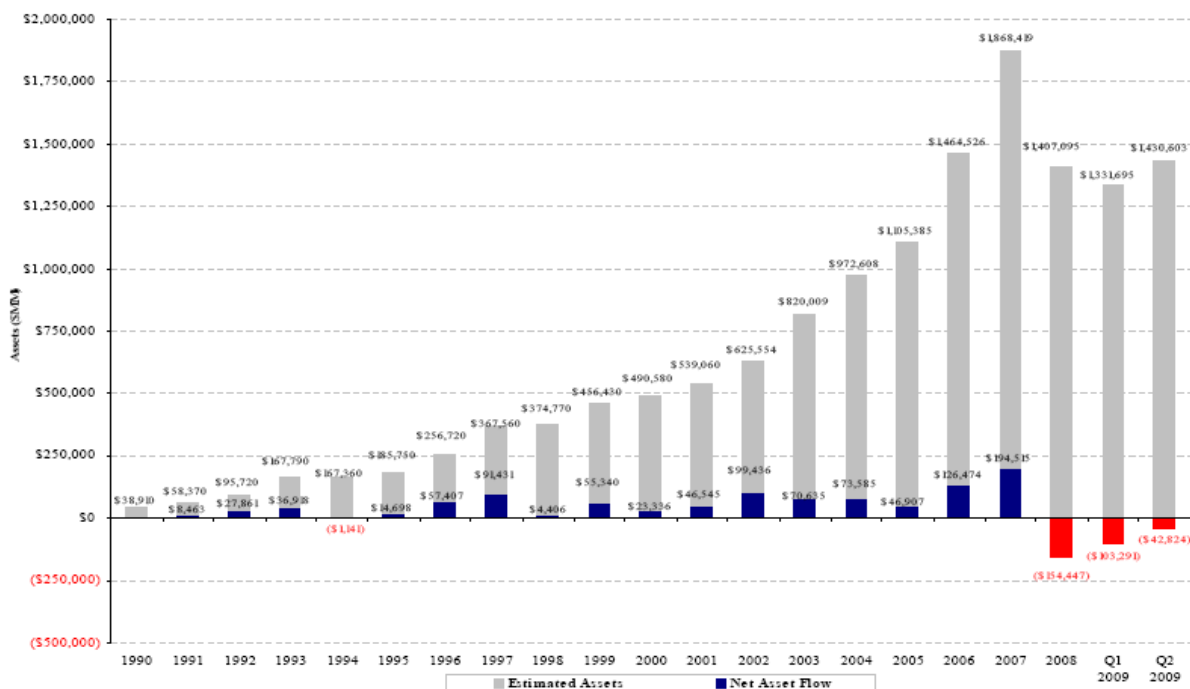
- l'investissement dans des entreprises sous-évaluées ou au bord du dépôt de bilan,
- l'investissement sur les marchés émergents, etc

2. Les évolutions de l'industrie

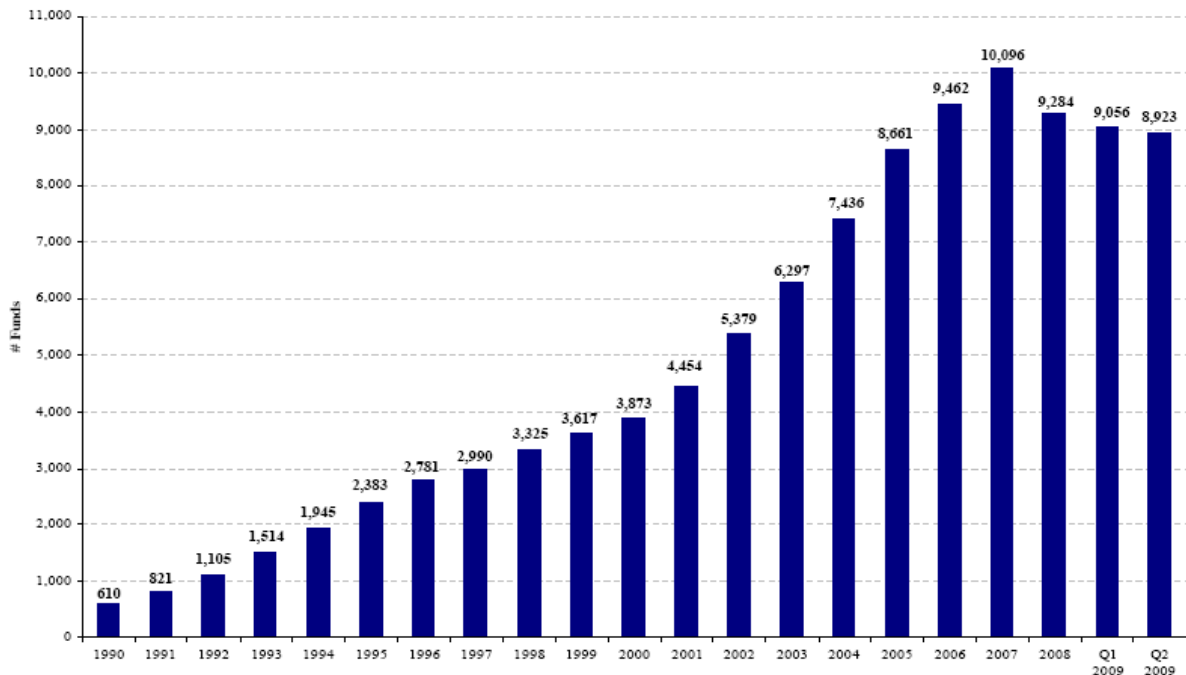
La création du premier hedge fund est attribuée à Alfred W. Jones (sociologue et journaliste financier) en 1949. Convaincu que l'évolution du prix des actifs est composée d'une tendance de marché et d'un facteur spécifique à l'actif lui-même, il couvre ses portefeuilles en achetant des actifs sous-évalués et en vendant des actifs surévalués. Le terme « hedge » funds vient à l'origine de cette propriété de « couverture » des expositions.

a- Evolution sur longue période

Presque inexistants il y a une quinzaine d'années, la sphère financière comptait, avant la crise financière, environ 10 000 hedge funds, gérant près de 2 trillions de dollars, soit environ 10 % des actifs détenus par les investisseurs institutionnels dans le monde.



Evolution des encours sous gestion (assets) et des entrées nettes (net asset flows) de l'industrie hedge funds entre 1990 et le deuxième trimestre 2009 (source : HFR)



Evolution du nombre de hedge funds entre 1990 et le deuxième trimestre 2009 (source : HFR)

En outre, la bonne performance des hedge funds, pendant un temps décorrélée de l'évolution des marchés, en a fait jusqu'à présent un instrument privilégié de diversification des risques pour les investisseurs. Ces bonnes performances attirent les investisseurs institutionnels, compagnies d'assurances et fonds de retraite, qui recherchaient de plus en plus des produits alternatifs capables de doper leurs rendements traditionnels.

b- Evolution depuis la crise

Leur importance croissante a conduit les régulateurs à réfléchir aux modalités d'une régulation pour ce secteur. En effet, épargnés au début par la crise financière, les hedge funds ont été depuis rattrapés par les derniers événements : la faillite de Lehman Brothers, l'extension de la crise aux pays émergents, la prohibition de certaines stratégies de ventes à découvert et plus récemment la fraude Madoff se sont répercutés sur les résultats de ces institutions.

En décroissance depuis la crise, tant par un effet valeur (baisse concomitante des actifs financiers sur tous les marchés) qu'un effet volume (retraits significatifs de la part de ces investisseurs suite à la fraude Madoff), l'actif sous gestion pourrait même

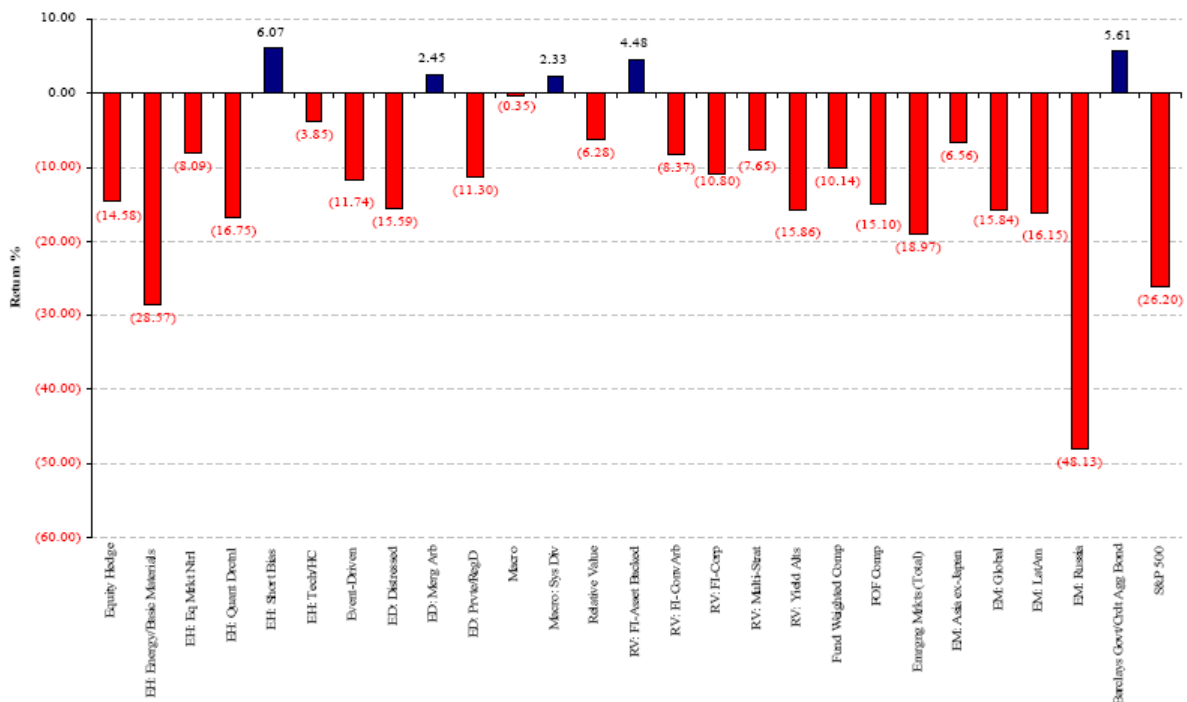
être divisé par deux, passant sous la barre du trillion de dollars dans les prochaines années.

- les actifs sous gestion ont chuté de près de 30% en 2008 à 1400 milliards de dollars
 - ce déclin, le plus important jamais observé, est le résultat de la combinaison de performances négatives, les désinvestissements des porteurs de parts, et de liquidations de fonds
 - sur un plan géographique, les désinvestissements des porteurs de parts constituent la principale cause de la chute des encours en Europe et dans les pays émergents, alors qu'aux Etats-Unis et au Japon la baisse des valeurs fut le premier facteur. L'Asie a connu la plus forte proportion de liquidations
- la performance moyenne des hedge fut une perte de -15,7% en 2008 (source IFSL), la pire jamais observée.
 - les pertes ont été répandues largement dans l'industrie, environ les trois quarts des fonds ayant une performance négative
 - néanmoins la performance des hedge funds reste meilleure que celle de la plupart des indices sous-jacents tel que le S&P qui sur la période a perdu 38%
 - l'essentiel des pertes est apparu entre septembre et novembre 2008. Les principales causes sont (i) l'effondrement de banques aux Etats-Unis et en Europe dont certaines d'entre elles fournissaient l'industrie hedge funds en services (ii) la chute des marchés actions et (iii) la limitation de la vente à découvert et (iv) les pressions pour respecter les appels de marge et les désinvestissements des clients
- les désinvestissements ont représenté 13% des encours de la clientèle en 2008
 - ce désinvestissement est lié aux pertes, à l'aversion au risque, et les dommages causés par l'affaire Madoff en termes d'image
 - c'est la deuxième plus importante vague de désinvestissement de cette industrie

- le nombre de hedge funds a chuté d'environ 10% en 2008 à environ 9000 fonds
 - cette baisse est due à la fermeture de fonds en raison des pertes, du manque de liquidité et de désinvestissements des porteurs en quête de plus de sécurité

c- L'industrie des hedge funds amorce un tournant difficile

- Les indices sont dans le rouge
- Dans le même temps, les demandes de rachat des investisseurs et la restriction de crédit imposée par les prime brokers ont créé des contraintes de liquidité sans précédent pour l'industrie
- En outre, leur propriété de dé-corrélation vis-à-vis de l'évolution des marchés est devenue contestable



Performance des indices HFRI sur 12 mois à fin juin 2009 (source : HFR)

Section 2 Les différents types de Hedge Funds

1. Plusieurs typologies

Les gérants se caractérisent par un style de gestion fonction du profil de performance recherché et des techniques ou type d'instruments utilisés.

Les stratégies courantes sont nombreuses : couverture de l'exposition au marché action par la vente à découvert (stratégie long/short), arbitrage sur tout type d'actifs (relative value), exploitation d'opportunités liées à des événements spécifiques type rapprochements d'entreprise (event driven), et d'autres combinaisons encore.

Cependant chaque fournisseur d'information dispose de sa propre nomenclature (HFR, VAN Hedge Funds, Greenwich, CSFB, etc), sans qu'il existe une typologie normative.

L'habitant [11] a dénombré 24 fournisseurs d'indices de Hedge Funds en septembre 2006 chacun disposant de ses propres classifications et définitions.

2. Principales stratégies

Dans un but d'illustration nous reprenons la classification utilisée par HFR :

Equity Hedge : gérant prenant des positions à la fois longues et courtes sur les marchés actions cash et dérivés. Plusieurs process existent, faisant reposer les décisions d'investissement sur des techniques quantitatives ou qualitatives. Le champ d'investissement peut être large ou sectoriel, et les niveaux de levier, les durées de détention variés. Ces type de gérants investissent au moins 50% de leur portefeuille en actions et sont souvent bien au-delà. HFR décompose cette classe en 7 sous-rubriques.

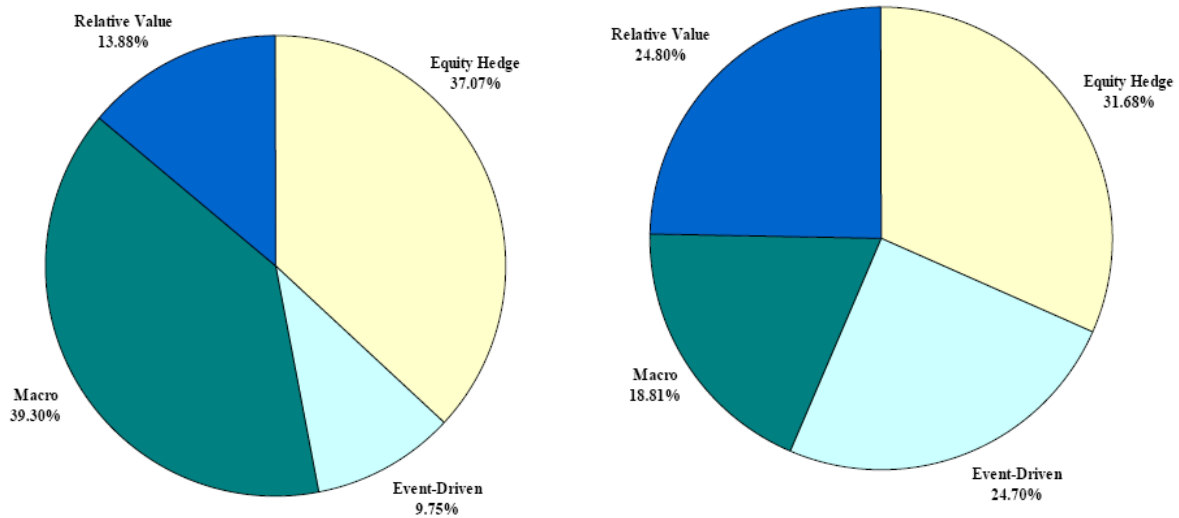
Event-Driven : gérant détenant des positions dans des sociétés impliquées dans des transactions spécifiques telles que des fusions, restructuration, rachat d'actions, conversion de dettes, ou autre opérations sur la structure financière. Les portefeuilles ainsi constitués ont à la fois une exposition au risque de marché et au risque de crédit. HFR décompose cette classe en 7 sous-rubriques.

Relative Value : gérant exploitant des écarts d'évaluation incohérents entre plusieurs titres financiers. Ils utilisent des techniques à la fois fondamentales et quantitatives pour établir ce type de prévisions et portent leur intérêt sur un large spectre d'actifs.

Les stratégies plus orientées obligataires font appel à des techniques quantitatives. HFR décompose cette classe en 6 sous-rubriques.

Macro : gérant intervenant sur un large éventail d'actifs et dont le process d'investissement est motivé par l'évolution des variables macro-économiques et leur influence sur celle des actifs financiers tels que les actions, les obligations, les devises et les matières premières. Ce type de gérant utilise des techniques systématiques ou discrétionnaires, quantitatives ou fondamentales, pour le court ou le long terme.

3. Tendances



Evolution de la décomposition par grands types de stratégies entre 1990 et 2009 (source : HFR).

Initialement très concentrée sur deux types de stratégies (Macro et Equity) la répartition sectorielle de l'industrie est aujourd'hui plus équilibrée avec un développement marqué des techniques d'arbitrage et de situations spéciales.

Section 3 Régulation

Depuis le début de la crise, les appels à davantage de régulation de cette industrie se sont multipliés.

Alors que les hedge funds n'ont pas joué un rôle important dans l'émergence de la crise, ne possédant au total que 5% des actifs investis en MBS en septembre 2007 (source IFSL), ils ont contribué à la volatilité du marché en 2008 en vendant d'importantes quantités d'actifs pour assurer leur liquidité et faire face aux demandes de rachats de leurs investisseurs.

Par ailleurs, l'image de l'affaire Madoff n'a fait qu'accentuer ce souhait d'une plus grande régulation de ce secteur.

Depuis avril 2009, les ministres des finances du G20 ont fait des propositions pour étendre la surveillance à l'ensemble des institutions importantes pour la stabilité financière mondiale y compris pour la première fois les hedge funds d'importante taille. La profession a alors proposé de travailler sur des mesures d'amélioration des pratiques. Les débats portent principalement sur les thèmes de l'information, de la gestion du risque, des conflits d'intérêts, et le contrôle des opérations.

Selon leur domiciliation les hedge funds peuvent être on shore ou off shore.

Onshore

Les fonds onshore représentent environ la moitié du nombre total de hedge funds (source IFSL), bien que leur part ait pu augmenter en 2008. Environ les deux tiers des fonds onshore sont enregistrés aux Etats-Unis.

Il est vraisemblable que les évolutions réglementaires aboutissent à la mise en place de contrainte de capital minimum. Le parlement européen a fait passer un texte demandant à la Commission Européenne que tous les participants du marché soient soumis à des contraintes de capital minimum.

Offshore

Les hedge funds offshore sont enregistrés dans une zone défiscalisée. Généralement le nombre d'investisseurs n'est pas limité. Ils sont généralement enregistrés aux Iles Caymans ou dans les Iles britanniques et au Bermudes.

Section 4 Les Hedge Funds et la mesure du risque

1. Nature des risques Hedge Funds

a- Les hedge funds portent des risques atypiques

Une opacité revendiquée vis-à-vis de leur prime brokers, du marché et des autorités publiques, rend difficile l'évaluation et la localisation du risque. Ces entités appuyant leur activité sur l'exploitation des anomalies de marché sont contraintes d'opérer rapidement et discrètement, pour maintenir ces opportunités d'arbitrages. Ce manque de transparence peut également dissimuler des fraudes, — comme l'a montré l'affaire Madoff —, ou aboutir à un risque opérationnel élevé avec de mauvaises valorisations d'actifs illiquides et complexes.

Une concentration sur certains marchés et une interconnexion avec les banques rend systémique la propagation d'une crise à ce secteur. Les hedge funds sont particulièrement actifs sur certains marchés, notamment sur les instruments dérivés, à l'instar des credit default swaps (CDS), où ils sont contrepartie à 32 % des ventes de protections. Ils sont également un des gros clients des banques d'investissement, par le poids de leurs opérations de marché.

b- L'approche moyenne-variance est insuffisante

Aux origines de cette industrie, les gérants mettaient l'accent sur la promesse de performances absolues particulièrement élevées qu'ils garantissaient par une expérience et une connaissance spécifique des marchés.

Néanmoins, vers la fin des années 90 le discours commercial a évolué. Depuis, les gérants ont mis en avant la **diversification en arguant d'une faible corrélation entre leurs rendements et vis-à-vis des autres actifs** de marché et de l'effet bénéfique de l'ajout de cette classe d'actif dans un portefeuille d'actifs traditionnels. Cette évolution du discours a potentiellement deux causes principales : d'une part la dégradation des performances absolues des hedge funds vers la fin des années 90, et d'autre part l'afflux de capitaux en provenance d'investisseurs institutionnels qu'un niveau de taux historiquement bas et des pertes importantes sur les marchés actions ont attirés vers de nouvelles classes d'actifs. Or, les institutionnels sont particulièrement attentifs à la gestion du risque et aux propriétés de diversification.

Dès lors l'investissement hedge fund a été traité comme un actif parmi d'autres dans le cadre traditionnel de la théorie du portefeuille (Markowitz) dans lequel la variance est le critère principal de mesure du risque.

Néanmoins l'approche moyenne-variance n'est pas adaptée au cas des hedge funds :

- La variance donne une représentation exhaustive du risque pour les actifs dont les rendements suivent une loi normale. En revanche pour les distributions présentant une asymétrie cette métrique est insuffisante pour caractériser le risque. En effet l'approche moyenne-variance donnera une même appréciation du risque respectif de deux distributions asymétriques et de skewness de signes opposés, alors qu'en pratique l'investisseur devrait pondérer différemment les rendements positifs et négatifs
- L'étude quantitative des distributions de rendements de hedge funds menée sur les indices de différentes stratégies [27] (C. Brooks C. H. Kat, 2001) a montré qu'elles ont un skewness négatif et un grand kurtosis au moins pour les stratégies Convertible Arbitrage, Emerging Markets et Event Driven, et s'écartent considérablement de la distribution normale. Par ailleurs, dans cette étude ces indices ont des moyennes élevées et des variances faibles, illustrant le fait que l'approche moyenne-variance donne une image inexacte du risque de ce type d'investissement

Ces particularités dans les distributions des rendements de hedge funds sont dues essentiellement aux deux faits suivants

- l'investissement dans des produits dérivés dont les rendements en général ont un skewness négatif et ne suivent pas une loi normale
- l'utilisation d'un levier dynamique (le caractère dynamique du levier est important ; si les rendements d'un fonds suivent une loi normale, X suit $N(\mu, \sigma^2)$; les rendements avec levier $w_t \cdot X_t$, où le niveau du levier w_t est lui-même une variable aléatoire, peuvent suivre une loi sensiblement différente d'une gaussienne)

Il en découle des sauts fréquents de prix, un maximum très pointu, la partie centrale assez fine et les queues de distributions épaisses [11] (Lhabitant F.S., 2004)) conduisant à l'apparition d'observations extrêmes (« outliers ») de faibles probabilités

La présence de ces observations extrêmes crée un autre problème dans le cadre moyenne-variance : le manque de robustesse des résultats. En effet, les estimateurs de la moyenne et de la variance utilisés dans cette approche ont une certaine sensibilité dans le sens où leur valeur peut changer significativement lorsqu'une nouvelle observation qui s'écarte beaucoup des autres est rajoutée à l'échantillon.

Ces spécificités ont des conséquences sur l'étude quantitative des hedge funds qui sont développées dans la section suivante.

c- Les techniques de mesure du risque hedge funds doivent être spécifiques et les développements sur le thème de la VaR peuvent apporter des réponses intéressantes

Les particularités des hedge funds ont des conséquences directes sur les techniques de mesure du risque : les mesures de performance traditionnelle telle que le Sharpe Ratio et les mesures de risque telles que la volatilité et la VaR gaussienne ne sont plus adaptées à l'étude des rendements des hedge funds.

Une première approche peut consister à introduire des mesures de risques plus sensibles à l'asymétrie de la distribution des rendements et ses écarts à la normalité. On peut citer la semi-variance qui permet de rendre compte des rendements indésirables [28] (C. Acerbi, D. Tasche, 2002).

On peut noter que les praticiens ont progressivement intégré ces contraintes mais qu'il s'agit encore d'une zone d'amélioration.

Longtemps reléguée au second plan, la VaR pour les Hedge Funds gagne en popularité. Une enquête publiée [29] en janvier 2008 par l'EDHEC-Risk & Asset Management Survey révèle que la majorité des sélectionneurs de Hedge Funds ont recours à la VaR en tant que mesure du risque. Il s'agit de l'une des conséquences de l'institutionnalisation de l'industrie alternative initiée à la fin des années 90.

Ces constats doivent cependant être nuancés :

- comme le prouvent les réponses à d'autres questions du sondage de l'EDHEC, le niveau de sophistication de l'investisseur type en Hedge Funds demeure relativement faible

- 43% des sondés optent pour une VaR calculée à partir d'une distribution normale (approche incompatible avec la distribution des rendements des fonds alternatifs qui est asymétrique avec des queues épaisses ; comme le souligne Félix Goltz, senior Research Engineer au sein de l'EDHEC et co-auteur de l'étude : «[Le calcul de la Value-at-Risk] basé sur un schéma de distribution normale (...) ne donne aucune valeur ajoutée à cette technique. Cette tactique est finalement un peu dangereuse dans la mesure où l'on a l'impression d'utiliser une mesure de risque extrême qui ne l'est pas»
- 17% des sondés préfèrent des mesures comme la «Modified Value-at-Risk» (aussi appelée Cornish Fischer VaR). L'expansion de Cornish Fisher ne s'applique qu'aux déviations restreintes de la loi normale et requiert des propriétés rarement satisfaites par les séries temporelles financières
- Enfin, certains investisseurs institutionnels interrogés avouent utiliser une VaR calculée au moyen du quantile historique. Cette approche se révèle également peu fiable lorsque les données sont rares

Cependant ces approches empiriques (semi-variance, VAR non paramétrique) présentent des inconvénients :

- les mesures de risques retenues doivent avoir des propriétés statistiques qui assureraient la possibilité de prédire correctement les risques futurs à partir du passé
- ces mesures manquent des propriétés mathématiques agréables d'agrégation et de généralisation : ex la variance d'un portefeuille s'exprime simplement à partir des variances des actifs qui le composent, ce qui n'est pas le cas de la semi-variance

Dans la suite on cherche à introduire de nouvelles mesures de risques définies en termes de L-moments qui disposent de propriétés intéressantes pour le paramétrage de la VAR et la modélisation des rendements dans le cas des hedge funds. Ceci sera davantage développé dans la partie empirique.

2. Problématique de la collecte des données

a- L'information publique ou commerciale

Il est de plus en plus courant, voire inévitable, de s'appuyer sur des sources d'informations de nature commerciale. Ces informations résultent généralement exclusivement des déclarations des gérants de Hedge Funds, ce qui peut entraîner une couverture lacunaire et inégale et obérer leur qualité.

Il existe également de nombreuses autres sources d'informations sur les activités des Hedge Funds : médias financiers spécialisés, des rapports trimestriels de l'industrie, des indices de rendements de Hedge Funds, des études universitaires, études de marché réalisées par des investisseurs, des gérants de Hedge Funds et des prime brokers.

b- Les bases de données

De nombreux responsables de bases de données suivent en interne davantage de fonds que ceux qui figurent dans les versions commerciales de leurs bases de données.

Cet ensemble plus large, qui résulte du regroupement des informations commercialement disponibles et des informations disponibles en interne, est souvent présenté dans leurs rapports trimestriels de l'industrie, qui contiennent des données trimestrielles globales sur les capitaux sous gestion et sur les flux nets d'investisseurs par stratégie. Étant donné la taille assez large des échantillons sous-jacents, les données de ces rapports sont une source d'information privilégiée et servent généralement aux participants de marché pour analyser les grandes évolutions du secteur des Hedge Funds.

Ces mêmes sources d'informations servent à créer différents indices de Hedge Funds mensuels synthétiques, ayant vocation à retracer la performance d'ensemble du secteur et la moyenne des rendements de stratégies d'investissement spécifiques des Hedge Funds.

Toutefois, ceux qui mettent en place ces indices utilisent différents échantillons, catégories de classement des stratégies d'investissement, règles d'éligibilité ou modes de pondération. Par conséquent, même pour une stratégie d'investissement identique

(ou quasi similaire), il existe des écarts dans les couvertures et les performances, ce qui complique le choix d'un indice de référence pour les besoins de l'analyse.

Cependant, certains de ces indices synthétiques peuvent être souscrits par des investisseurs et donnent des informations sur les rendements à une fréquence intra mensuelle. Ces indices «investissables » auront néanmoins tendance à afficher des performances inférieures aux indices purement synthétiques, en raison de règles d'éligibilité plus strictes et de conditions de rachat plus souples pour les investisseurs qui empêchent, par exemple, les fonds inclus dans l'indice d'investir en actifs moins liquides.

c- Les sources académiques

Les publications centrées sur les questions de stabilité financière ont été relativement peu nombreuses, mais leur nombre augmente. Les auteurs de ces publications analysent les liquidations de Hedge Funds, leurs activités au cours de différents épisodes de crise, les co-mouvements des rendements des Hedge Funds pendant les périodes de tension ou encore, essaient de mesurer l'effet de levier des Hedge Funds et leur exposition au risque d'illiquidité.

d-Les sources réglementaires

Les banques centrales, ne sont pas mesure d'assurer le suivi des activités des Hedge Funds par leurs outils statistiques habituels, en raison principalement de la domiciliation habituelle des Hedge Funds à l'étranger.

Des informations sur les Hedge Funds sont également recueillies par certaines autorités de tutelle, qui ont lancé des exercices de recensement régulier des expositions des prime brokers sur les Hedge Funds (par exemple, les études semestrielles menées par la FSA au Royaume-Uni sur les plus grandes expositions des prime brokers).

Si les autorités de tutelle peuvent choisir de communiquer leurs conclusions sous forme agrégée, les informations qu'elles ont recueillies au niveau individuel ne sont en revanche jamais divulguées, conformément au secret professionnel prévu par les directives bancaires.

e- Les banques

La communication publique d'informations par les banques elles-mêmes sur leurs expositions aux Hedge Funds est inexistante, même si un renforcement de la transparence est en cours.

En plus de rassembler régulièrement les informations recueillies auprès des banques, les autorités publiques peuvent aussi lancer des études thématiques sur les opérations souscrites par les banques avec la clientèle des Hedge Funds.

En 2005, par exemple, le comité de la supervision bancaire du système européen de banques centrales a réalisé une étude sur les expositions des grandes banques européennes aux Hedge Funds qui a, outre certaines informations encourageantes, alerté sur certaines pratiques de gestion du risque Hedge Funds dans les banques.

PARTIE IV : APPLICATION

Le cas des hedge funds fournit une application intéressante des L-moments au calcul de VaR pour les raisons suivantes :

- leurs rendements ne sont pas gaussiens, ce qui sera développé dans cette présentation
- les données sont disponibles, dans la mesure où l'intégration de plusieurs bases de données externes permet d'accéder à des séries historiques significatives sur les rendements des fonds (développé plus bas)
- les banques qui investissent en compte propre dans des hedge funds ont besoin d'estimer la VaR associée à ces expositions

Section 1 Données

1. Remarque préliminaire

Nous prenons le parti de ne pas travailler sur des séries d'indice mais directement sur des séries de rendements de hedge funds encore en vie à partir de plusieurs bases de données externes.

Ce choix est motivé par les raisons suivantes :

- Les indices toutes stratégies confondues sont trop agrégés pour que l'on puisse en tirer des conclusions intéressantes et les indices sectoriels sont construits à partir des typologies de stratégies (global macro, long short equity, etc) que les gérants déclarent sans vue critique sur la qualité de cette classification (les gérants peuvent être tentés de choisir une classification en fonction de l'opportunité du moment)
- les indices ont des comportements artificiellement proches du modèle gaussien (effet de moyenne lié à l'agrégation des différents types de fonds pour une même date)
- et enfin parce qu'en fine les investisseurs prennent des parts dans les fonds et non dans les indices

Le fait de collecter les informations directement sur les fonds permet ensuite de les classer selon une technique ad hoc permettant d'en faire des groupes homogènes pour l'analyse. Par ailleurs, ce travail étant effectué à partir de plusieurs bases de données permet d'avoir des échantillons représentatifs.

2. Collecte de données

Nous collectons les rendements mensuels des Hedge Funds entre juin 2002 et décembre 2008, soit une période constituée de 79 dates, au sein de plusieurs bases de données externes (HFR, ALTVEST, et EUREKA_HEDGE), en ne retenant que les fonds dont les rendements sont renseignés pour l'ensemble de la période.

Certes, le fait de ne retenir que les fonds vivants sur la période de référence introduit un biais de « survivance » puisque les fonds liquidés depuis ne figurent pas dans l'échantillon mais à l'inverse l'échantillon ne contient pas non plus les fonds créés sur la période de référence ce qui atténue le biais.

L'échantillon obtenu est de taille importante (2322 fonds sur 79 mois consécutifs) notamment grâce à l'utilisation de plusieurs bases de données.

3. Nettoyage des données pour supprimer les doublons

a- Première étape

- identification des sociétés de gestion derrière chaque fonds (cette étape est essentielle car elle permet de réduire la dimension du problème, la comparaison de tous les fonds serait trop complexe)
- regroupement des fonds d'une même société de gestion et identification des différentes parts de fonds existantes (devise, classe, séries)
- regroupement des fonds ayant le même nom mais pouvant émettre des parts différentes (devise, classe, série)
- comparaison pour une même date, un même type de part (devise, classe, série) des rendements mensuels des fonds pris deux à deux

- déclaration comme « doublons » de deux Hedge Funds pour lesquels les rendements sont identiques à 10^{-4} avec une marge d'erreur de 30% sur le nombre de rendements différents constatés .

Après cette étape d'élimination des doublons il reste 7412 Hedge Funds toutes parts confondues (devise, classe, série).

b- Deuxième étape

Pour les besoins de cette étude nous ne retiendrons que les parts libellées en USD de chaque fonds. Il reste alors 2965 Hedge Funds.

c- Dernière étape

Il est possible que des bases de données externes ne fournissent pas tout à fait les mêmes informations sur un même fond (abréviation du nom, changement de société de gestion, ...). Nous éliminons donc, dans la matrice des données restantes, le HF(j) lorsque la corrélation entre le HF(i) et le HF (j) est d'au moins 99%. Ceci conduit à éliminer 643 fonds.

L'échantillon final est de 2322 hedge funds.

Section 2 Classification

On cherche à regrouper les fonds ayant des comportements similaires.

Pour cela nous pourrions soit les regrouper par type de stratégie soit bâtir des groupes par une technique ad hoc.

Le regroupement par stratégie présente plusieurs inconvénients :

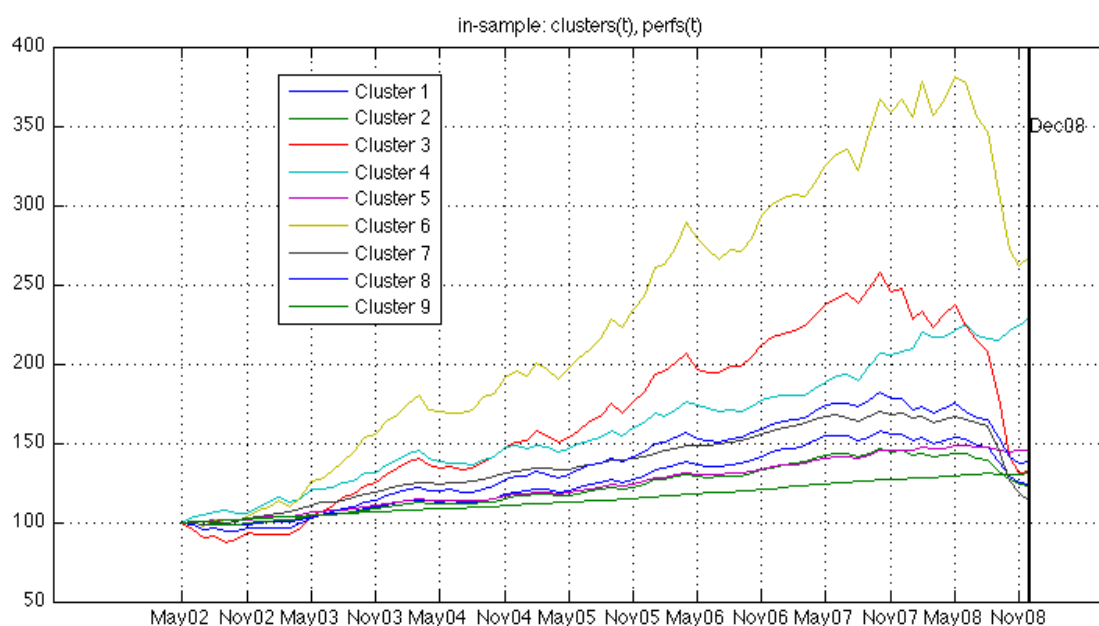
- (i) il n'existe pas de typologie standard (chaque fournisseur de données ayant une typologie propre)
- (ii) la classification se fait sur base déclarative des gérants uniquement ce qui n'est pas satisfaisant.

Aussi nous choisissons une classification ad hoc à partir des L-moments développée dans [30] (S. Darolles, E Jay, M Khairat, A Koudiraty, 2009) et [31] (Fraley C. et AE Raftery 2007).

Le principe est de regrouper les fonds dont la performance appartient à la même famille de distribution en utilisant les quatre premiers L-moments, plutôt que les rendements directement, ce qui permet ensuite de caractériser chaque catégorie (cluster) par des lois prises au sein d'une classe suffisamment large (les L-moments ne nécessitant que l'intégrabilité au premier ordre) et qui inclut notamment des distributions à queues épaisses.

Il en ressort 9 catégories (clusters).

Pour former les représentants des clusters, on ne conserve que les fonds dont la probabilité d'appartenir au groupe est supérieure à 70% puis on calcule la moyenne des rendements de ces Hedge Funds pour caractériser le groupe.



Evolution de l'indice de chaque cluster de juin 2002 à Décembre 2008.

Le graphique ci-dessus montre que les performances des différentes catégories de fonds sont bien contrastées.

Les clusters 4 et 6 ont des performances cumulées sur l'ensemble de la période nettement plus importantes que les autres.

Les clusters 4, 5 et 9 ont bien résisté à la crise avec des rendements poursuivant la tendance passée alors que les clusters 1, 2, 3, 6, et 7 ont connu des rendements très distincts d'une période à l'autre et particulièrement négatifs durant la crise. Le cluster 8 a un comportement moins marqué.

Section 3 Statistiques descriptives pour chaque catégorie

Cluster	Moyenne Annualisée	Ecart-type Annualisé	Kurtosis	Skewness
[1]	3,4002%	5,7707%	8,1724	-1,8864
[2]	3,2160%	4,4280%	7,1941	-1,7006
[3]	5,3870%	15,0830%	9,5286	-2,0610
[4]	12,8700%	6,7517%	2,5162	-0,0903
[5]	5,7726%	2,2525%	3,0243	-0,4149
[6]	15,9850%	13,4730%	4,1282	-0,8827
[7]	2,2187%	8,0231%	21,0270	-3,9148
[8]	5,1587%	7,4865%	6,0106	-1,4217
[9]	4,1160%	0,4696%	7,7350	-1,3728

Le tableau ci-dessus contient les estimateurs des moments classiques.

On observe les points suivants :

- les indicateurs de localisation de dispersion sont très différents d'un cluster à l'autre confirmant le caractère discriminant de la classification effectuée
- la plupart des clusters, à l'exception des clusters 4 , 5 et dans une moindre mesure le 6 ont des caractéristiques éloignées du modèle gaussien :
 - en effet leurs kurtosis sont nettement supérieurs à 3 sauf pour les clusters 4 et 5 (dont le kurtosis vaut respectivement 2,5162 et 3,0243), le cas du cluster 6 étant plus nuancé étant donné un kurtosis de 4,1282 certes supérieur à 3 mais nettement inférieur au cluster de kurtosis supérieur le plus proche (cluster 8 ayant un kurtosis de 6,0106). Ceci laisse penser que leurs distributions doivent être pointues au centre avec des queues épaisses
 - par ailleurs, leurs skewness sont tous négatifs et très différents de zéro à l'exception des clusters 4 et 5 (dont les skewness sont faibles à -0,0903 et -0,4149), le cas du cluster 6 étant là aussi intermédiaire (avec un skewness de -0,8827). Ceci permet d'envisager que la queue gauche (pertes extrêmes) de ces distributions est plus épaisse que la queue droite (profits extrêmes)

Cluster	Kurtosis	Cluster	Skewness
[4]	2,5162	[4]	-0,0903
[5]	3,0243	[5]	-0,4149
[6]	4,1282	[6]	-0,8827
[8]	6,0106	[9]	-1,3728
[2]	7,1941	[8]	-1,4217
[9]	7,7350	[2]	-1,7006
[1]	8,1724	[1]	-1,8864
[3]	9,5286	[3]	-2,0610
[7]	21,0270	[7]	-3,9148

En classant les clusters par ordre croissant de kurtosis et par ordre décroissant de skewness on peut former l'hypothèse que les clusters 7, 3 et 1 seront respectivement (et dans cet ordre) les plus éloignés du modèle gaussien. On retrouve par ailleurs, la proximité des caractéristiques des clusters 4, 5 et 6. Les kurtosis et skewness semblent évoluer dans le même sens, ce qui est sans doute lié au fait qu'ils doivent respecter une inégalité (ce qui n'est pas le cas des L-moments).

Section 4 Calage de Loi

1. Méthodologie

Une population de Hedge Funds est caractérisée par un ensemble de rendements sur une période de temps donnée. Cette population est importante en nombre, mais le plus souvent l'historique de ses performances disponibles est réduit.

Cette hétérogénéité observée rend l'étude des distributions des rendements de fonds, et plus particulièrement des extrêmes de ces distributions, difficile si elle est menée fonds par fonds.

En revanche, si l'on suppose une certaine homogénéité sous-jacente dans la population qui est perturbée par les effets indiqués plus haut (différences de tailles, stratégies, etc.), l'analyse des propriétés de toute la population peut être d'une grande utilité pour l'étude individuelle. C'est précisément l'idée fondamentale de la "Regional Frequency analysis" développée dans l'ouvrage de Hosking et Wallis [32].

Le regroupement en catégorie homogène a été effectué dans une section précédente (Section 2 . Classification).

Les L-moments permettent d'élargir davantage la classe paramétrique des distributions utilisée pour le calage. En effet, on a présenté dans la Partie II section 4, l'ensemble de distributions classiques généralisées entièrement déterminées par leur 4 premiers L-moments.

Le calage de distributions de cette classe aux données empiriques peut être effectué selon la méthodologie développée dans les travaux de Hosking.

Cette méthode repose sur le fait que les distributions généralisées sont représentées dans le plan $(\tau_3; \tau_4)$ par des courbes unidimensionnelles.

Ainsi, la représentation dans ce plan peut être utilisée pour comparer les relations entre les L-skewness τ_3 et L-kurtosis τ_4 des distributions généralisées et celles des données empiriques.

Ceci permet d'obtenir une représentation visuelle et rend possible l'identification de la distribution qui assure le meilleur calage.

La méthodologie de Hosking suggère de calculer pour un échantillon ou un ensemble d'échantillons les valeurs $(\hat{\lambda}_1; \hat{\lambda}_2; \hat{\tau}_3; \hat{\tau}_4)$.

Ensuite, dans le plan $(\tau_3; \tau_4)$ on trace le point ou le nuage de points associé, et on définit la position de son centre $(\hat{\tau}_3; \hat{\tau}_4)$ comme la moyenne des deux coordonnées par exemple :

$$\hat{\tau}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\tau}_3^i$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\tau}_4^i$$

La même opération est effectuée pour les 2 premiers L-moments de l'ensemble d'échantillons pour trouver les valeurs moyennes ($\hat{\lambda}_1; \hat{\lambda}_2$).

Il est possible de trouver dans le plan ($\tau_3; \tau_4$) la courbe la plus proche du centre du nuage qui déterminera la distribution généralisée assurant le meilleur calage de la distribution de l'échantillon au sens des L-moments.

Le point sur la courbe le plus proche du centre du nuage donnera alors les valeurs de τ_3 et τ_4 pour la distribution choisie, les deux premiers moments λ_1 et λ_2 , eux, seront pris égaux à $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ respectivement.

Ayant déterminé λ_1 et λ_2 , et τ_3 on peut reconstruire la distribution choisie, i.e. déterminer les paramètres ($\beta; \alpha; k$) qui la caractérisent.

2. Identification des lois

Cluster	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
GLO	0,001490	0,000104	0,002369	0,000635	0,000998	0,008136	0,015771	0,001212	0,000028
GPA	0,053399	0,041050	0,058031	0,027601	0,035714	0,061129	0,085163	0,049314	0,024923
LNO	0,006767	0,002902	0,008554	0,004768	0,005691	0,017970	0,028164	0,006189	0,001490
PE3	0,011183	0,006118	0,010944	0,005172	0,005765	0,018083	0,048046	0,007309	0,001523
GEV	0,013934	0,008063	0,015338	0,005693	0,007945	0,022009	0,042756	0,011317	0,002964
Loi retenue	GLO	GLO	GLO	GLO	GLO	GLO	GLO	GLO	GLO

Le tableau ci-dessus contient, pour chaque cluster, la distance euclidienne entre le barycentre des nuages de points dans le plan (τ_3, τ_4) et les courbes caractéristiques des lois généralisées (GLO : generalized logistic, GPA : generalized pareto, LNO : log-normal, PE3 : pearson type 3, GEV : generalized extreme value). La sélection de la loi adaptée est effectuée en retenant celle pour laquelle la distance est minimale.

Il ressort que la GLO est la loi généralisée la plus adaptée pour chaque cluster.

3. Paramétrage des lois

Cluster	Distribution	β localisation	α échelle	k forme
[1]	GLO	0,00651	0,01001	0,21165
[2]	GLO	0,00548	0,00717	0,22392
[3]	GLO	0,01199	0,03076	0,14462
[4]	GLO	0,00815	0,02337	-0,06677
[5]	GLO	0,00464	0,00913	-0,01117
[6]	GLO	0,01316	0,04987	-0,00200
[7]	GLO	0,00839	0,01104	0,31849
[8]	GLO	0,00748	0,01772	0,10761
[9]	GLO	0,00344	0,00210	0,00330

Ce tableau montre pour chaque cluster les paramètres de la loi GLO.

Les paramètres sont obtenus à partir de la procédure numérique de maximisation de la vraisemblance dans Matlab.

Les paramètres de localisation et d'échelle ne sont pas la moyenne et l'écart type. A noter qu'en particulier la moyenne n'est pas robuste car sensible à l'asymétrie de la distribution. On a pour cela tendance à utiliser la médiane plutôt que la moyenne comme paramètre de localisation.

Implicitement les 3 paramètres de la GLO donnent de l'information sur l'infinité des moments et non seulement les quatre premiers comme dans l'approche précédente.

A l'exception des clusters 4, 5 et 6 le paramètre de forme k qui caractérise les queues de distribution est généralement strictement positif confirmant le caractère dissymétrique (un k nul correspond à une loi logistique, qui est symétrique).

4. Qualité de l'ajustement

Remarque : les graphiques ci-dessus montrent la distribution des rendements mensuels pour chaque cluster.

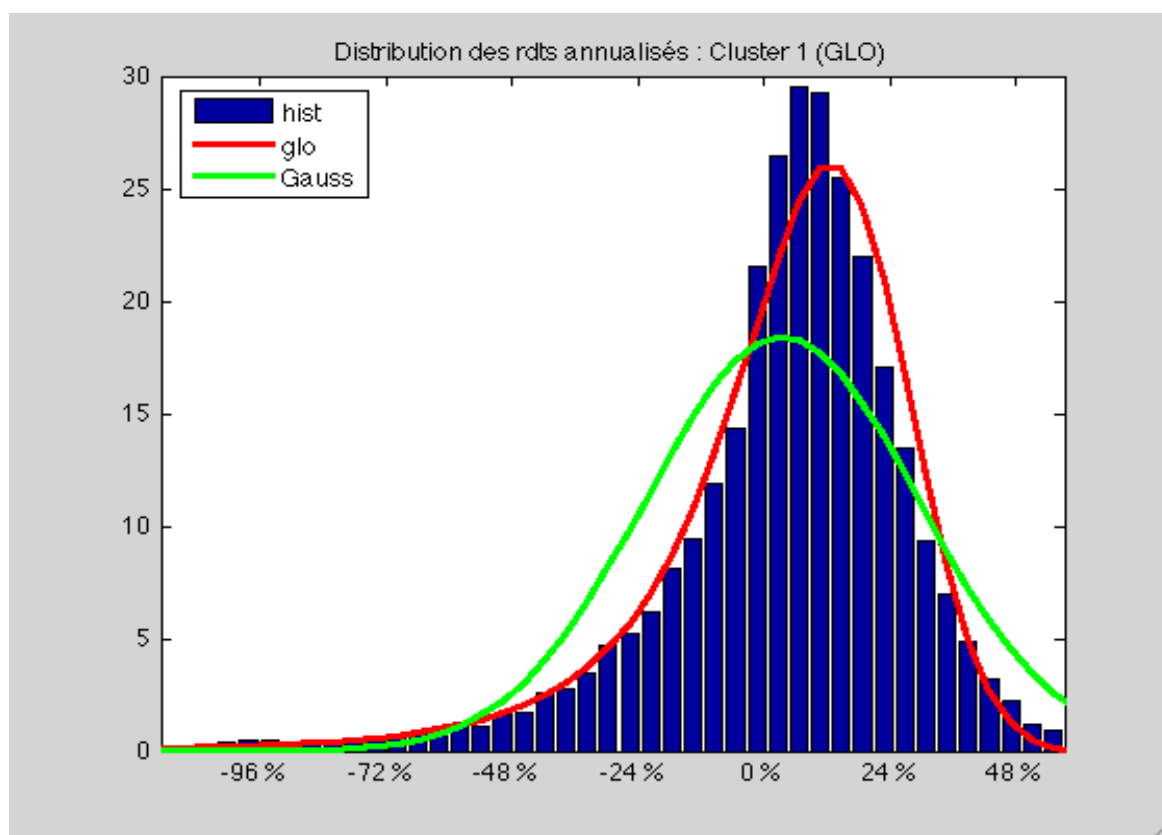
a- Cluster 1

Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

Le paramètre de localisation est légèrement positif ($\beta = 0,00651$), cohérent avec une moyenne de faible niveau. La dispersion est réduite ($\alpha = 0,01001$). La forme est dissymétrique ($k=0,21165$), avec queues gauche épaisse, ce que laissait déjà présumer les kurtosis et skewness.

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

On observe un centre pointu et un étalement à droite à laquelle la normale ne peut s'adapter. La GLO est plus adaptée que la gaussienne. L'ajustement gaussien surestime l'épaisseur de la queue droite et sous-estime celle de la queue gauche.



Cluster	Distribution	β localisation	α échelle	k forme	Moyenne Annualisée	Ecart-type Annualisé	Kurtosis	Skewness
[1]	GLO	0,00651	0,01001	0,21165	3,4002%	5,7707%	8,1724	-1,8864

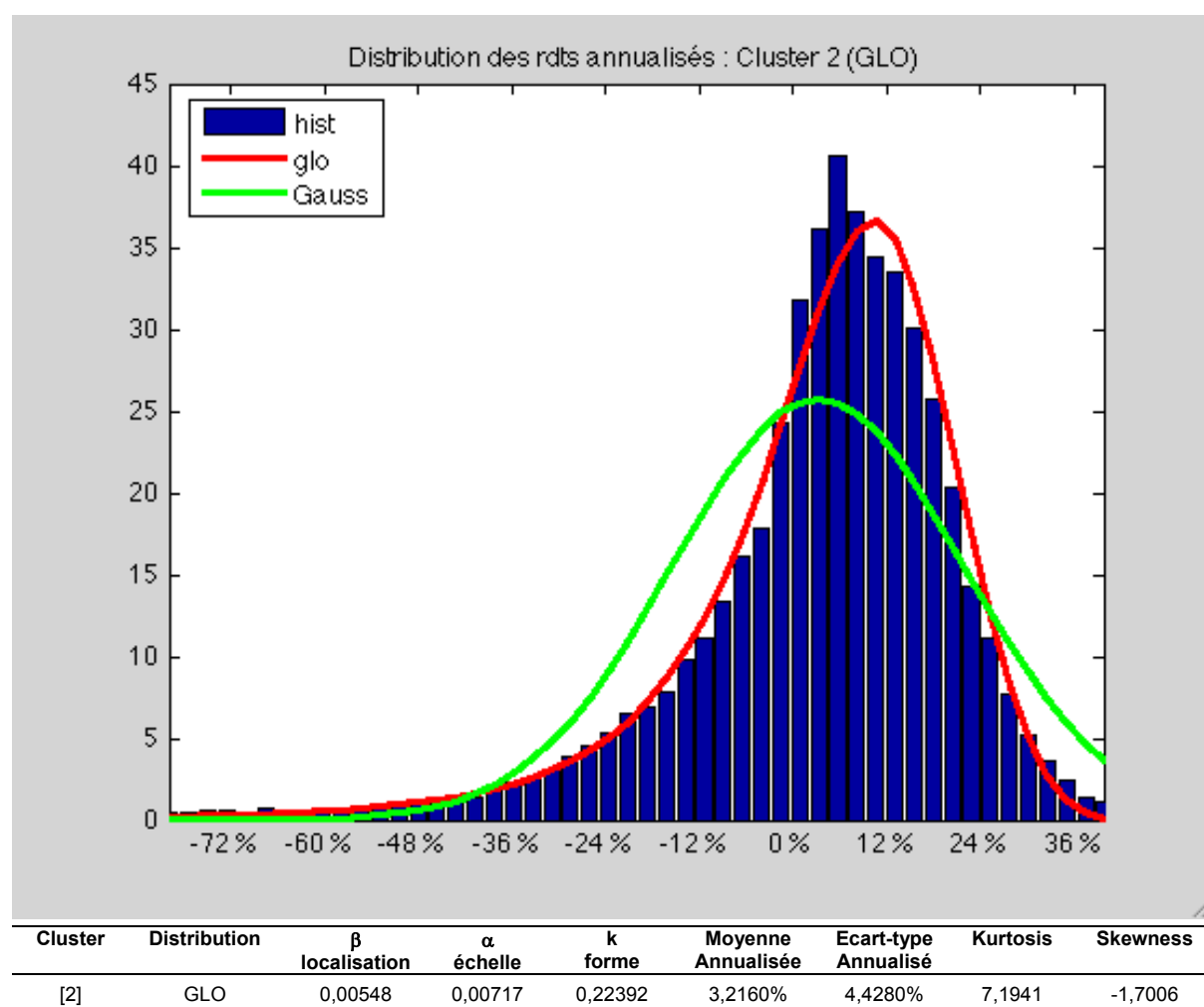
b- Cluster 2

Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

Les caractéristiques générales sont assez proches de celles du cluster 1. La localisation est légèrement positive ($\beta=0,00548$) cohérente avec la moyenne (3,2160%), et la dispersion est faible ($\alpha=0,00717$). Le centre est pointu avec étalement à droite et queue gauche épaisse, donc nettement distinct d'un modèle gaussien. Ces observations sont cohérentes avec le paramètre de forme qui est différent de zéro ($k=0,22392$) lui-même compatible avec les kurtosis (nettement supérieur à 3) et skewness (négatif).

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

Le modèle GLO semble bien adapté à une distribution dont le centre est pointu et la queue gauche épaisse et mieux ajusté que le modèle gaussien.



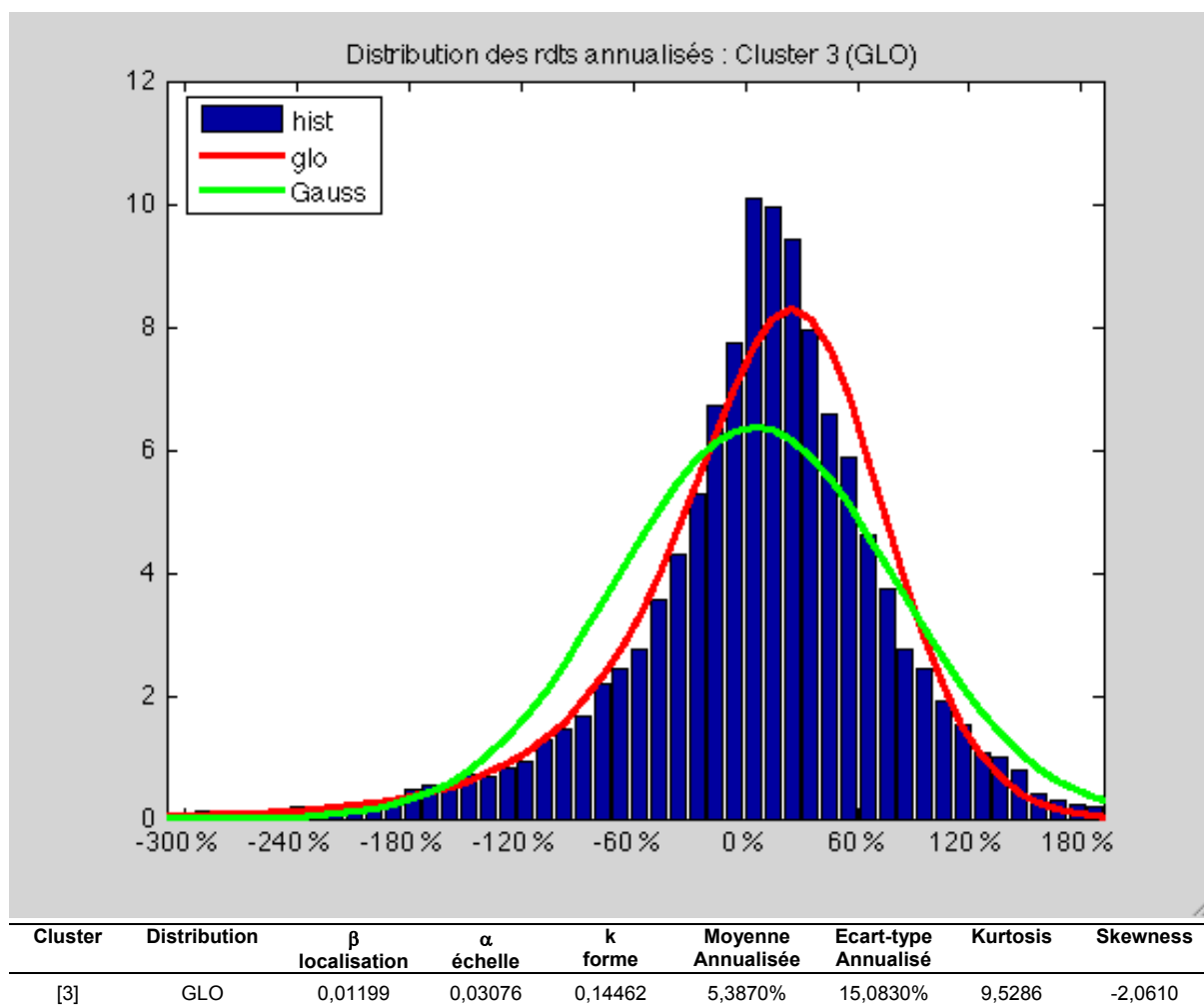
c- Cluster 3

Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

La localisation est faiblement positive (0,01199). La dispersion est limitée (0,03076) mais plus importante que celle des deux précédents clusters. La distribution est pointue au centre, étalée à droite avec une queue gauche épaisse. Ceci est cohérent avec le fait que le paramètre de forme est différent de zéro, le kurtosis élevé et le skewness négatif.

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

Même si la GLO ne s'adapte pas complètement aux fréquences les plus élevées au centre elle semble convenablement s'adapter à l'asymétrie et à l'étalement de la distribution. L'ajustement gaussien sous-estime l'épaisseur de la queue gauche et surestime celle de la queue droite.



d- Cluster 4

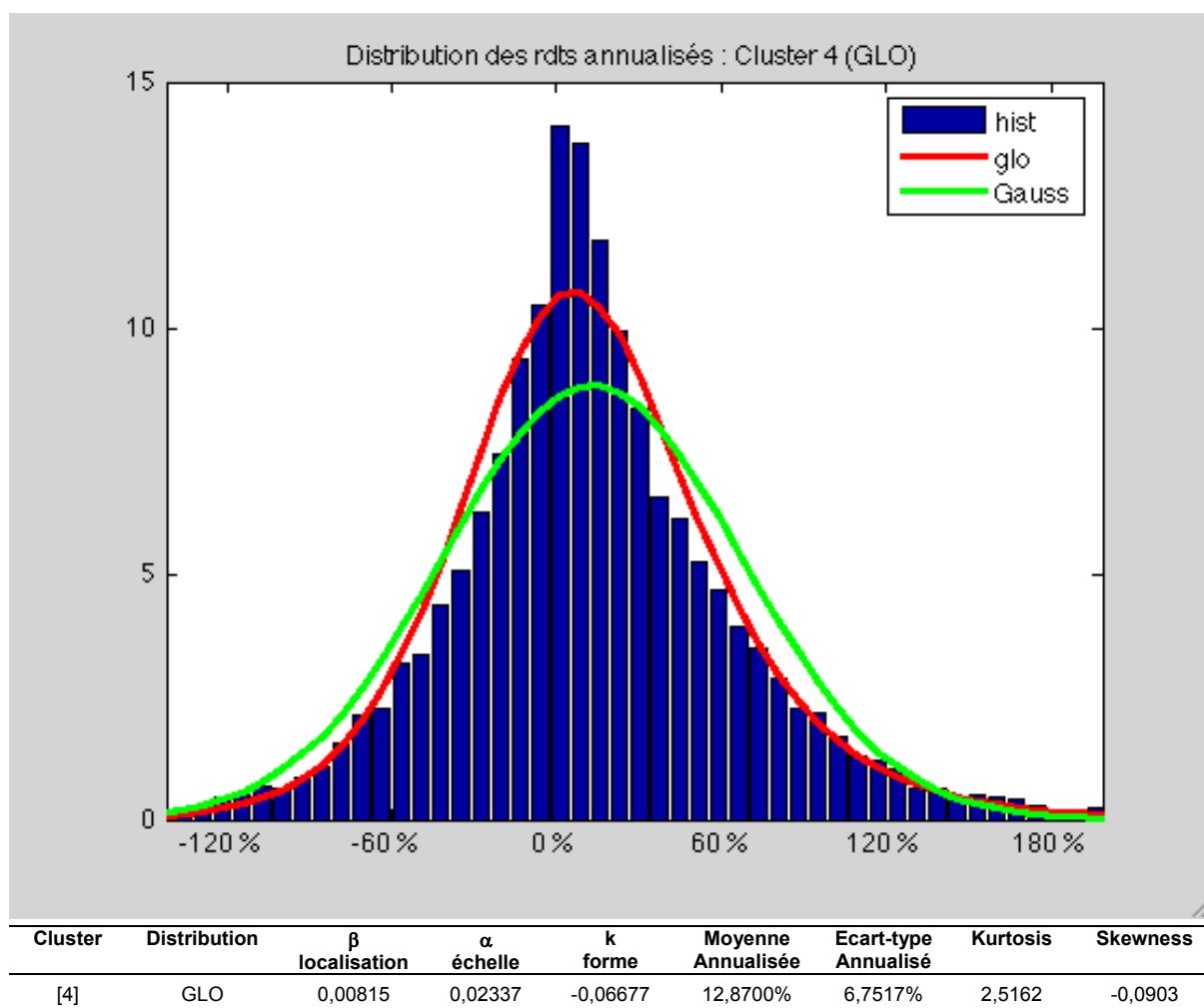
Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

Le paramètre de localisation est faible. La moyenne n'est pas robuste car sensible à l'asymétrie.

La distribution est presque symétrique avec un léger étalement à gauche. Cette observation est cohérente avec le niveau du paramètre de forme (-0,06677).

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

La GLO s'adapte convenablement à la forme générale et aux queues de distributions. La gaussienne semble cette fois surestimer l'épaisseur de la queue gauche et sous-estimer celle de la queue droite.



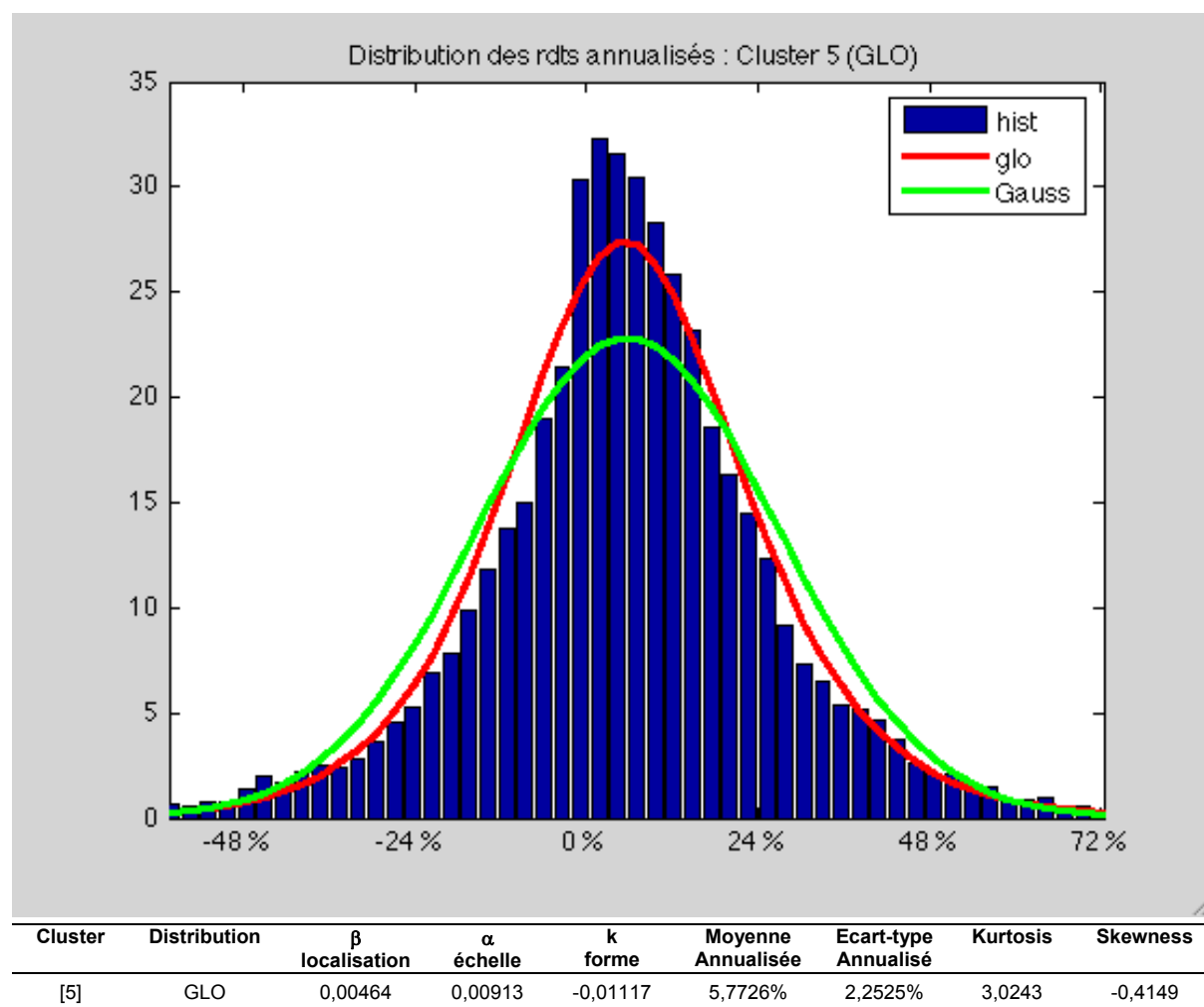
e- Cluster 5

Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

Le paramètre de localisation est faible ($\beta=0,00464$), la dispersion réduite ($\alpha=0,00913$), et la forme globalement symétrique et les queues semblent proches de celles du modèle gaussien ($k=-0,01117$).

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

La distribution, la GLO et la gaussienne sont assez proches. La GLO s'adapte mieux que la gaussienne au centre pointu de la distribution. La forme des queues de distributions est assez similaire quelque soit le modèle. Ces observations sont cohérentes avec un paramètre de forme proche de zéro ($-0,01117$).



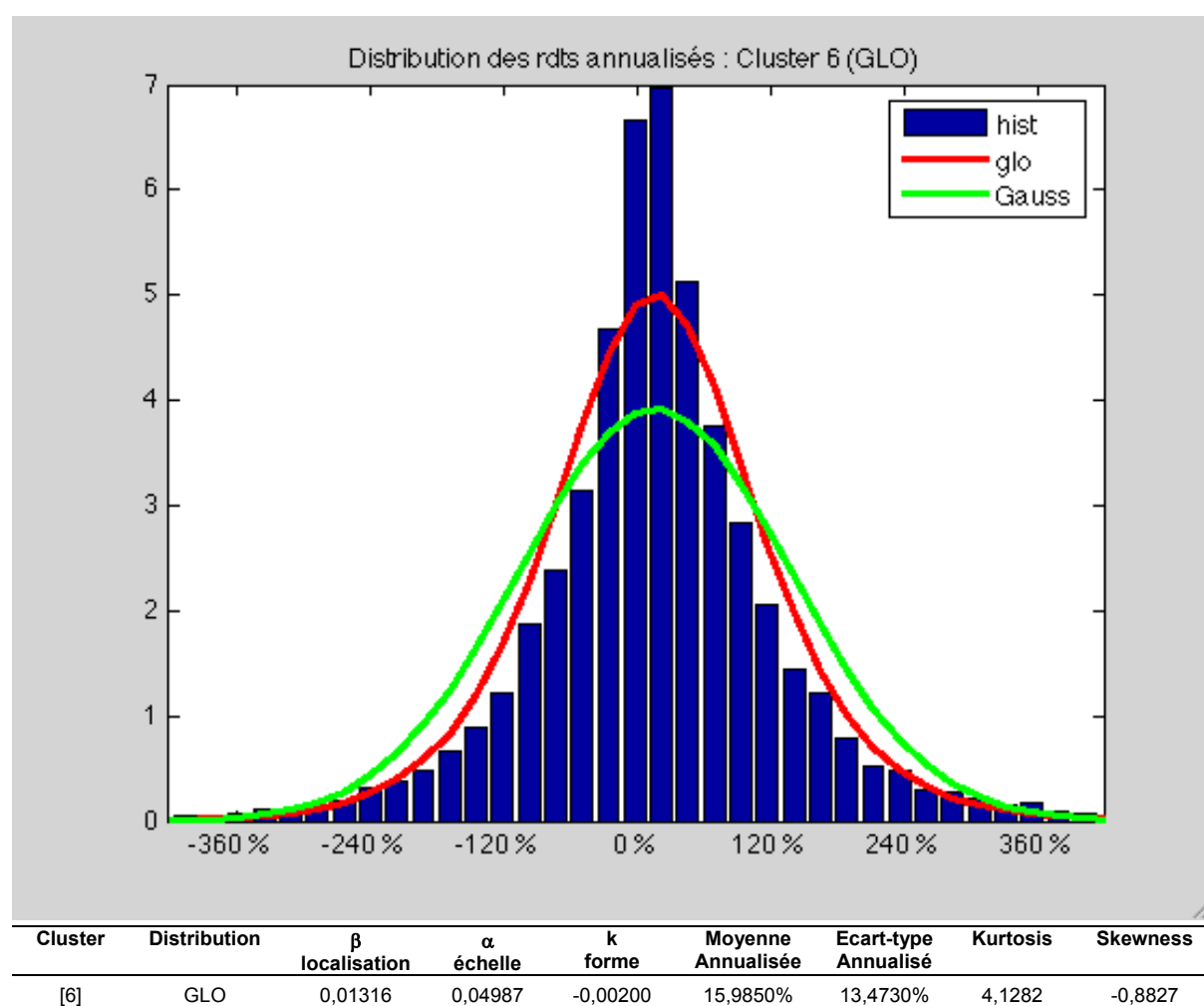
f- Cluster 6

Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

Le paramètre de localisation est faible (0,01316). La moyenne n'est pas robuste car sensible à l'asymétrie. Le paramètre de dispersion est élevé ($\alpha=0,04987$) comparativement à ceux des autres clusters. Cette observation est cohérente avec la performance de cette catégorie qui après une longue période de rendements positifs élevés a connu des rendements fortement négatifs depuis mai 2008 (cf. graphique en section 2). La forme est symétrique et les queues normales. Ces observations sont cohérentes avec un paramètre de forme proche de zéro (-0,00200).

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

La distribution, la GLO et la gaussienne sont assez proches. Aucun des deux modèles ne semble bien s'adapter au centre pointu de la distribution même s'il apparaît que la GLO est un peu plus efficace à cet effet. La forme des queues de distributions est assez similaire quelque soit le modèle.



g- Cluster 7

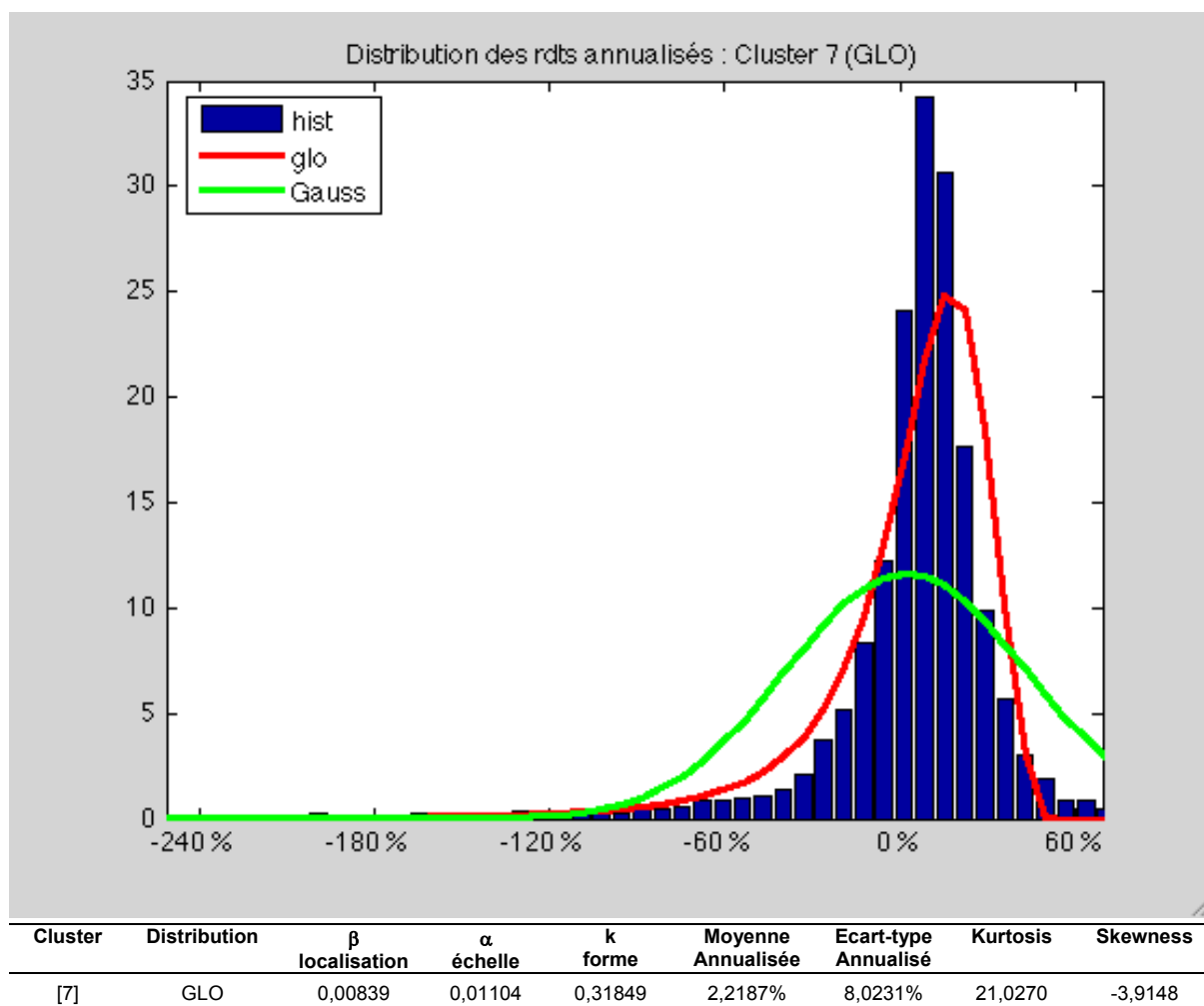
Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

La distribution est à la fois très étalée à droite et pointue au centre.

Parmi les clusters celui-ci a le paramètre de forme le plus élevé (0,31849). Il s'agit également du cluster ayant le skewness et le kurtosis le plus atypique (respectivement 21,0270 et -3,9148). On peut s'attendre à une plus grande difficulté dans la mesure du risque de ce cluster.

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

L'ajustement gaussien n'est pas satisfaisant. La GLO s'adapte mieux à la forme générale. Néanmoins elle semble sous-estimer la queue droite, ne couvre pas bien le centre, et il est plus difficile de juger sur le graphique de la qualité de l'ajustement à la queue gauche car celle-ci est très prolongée.



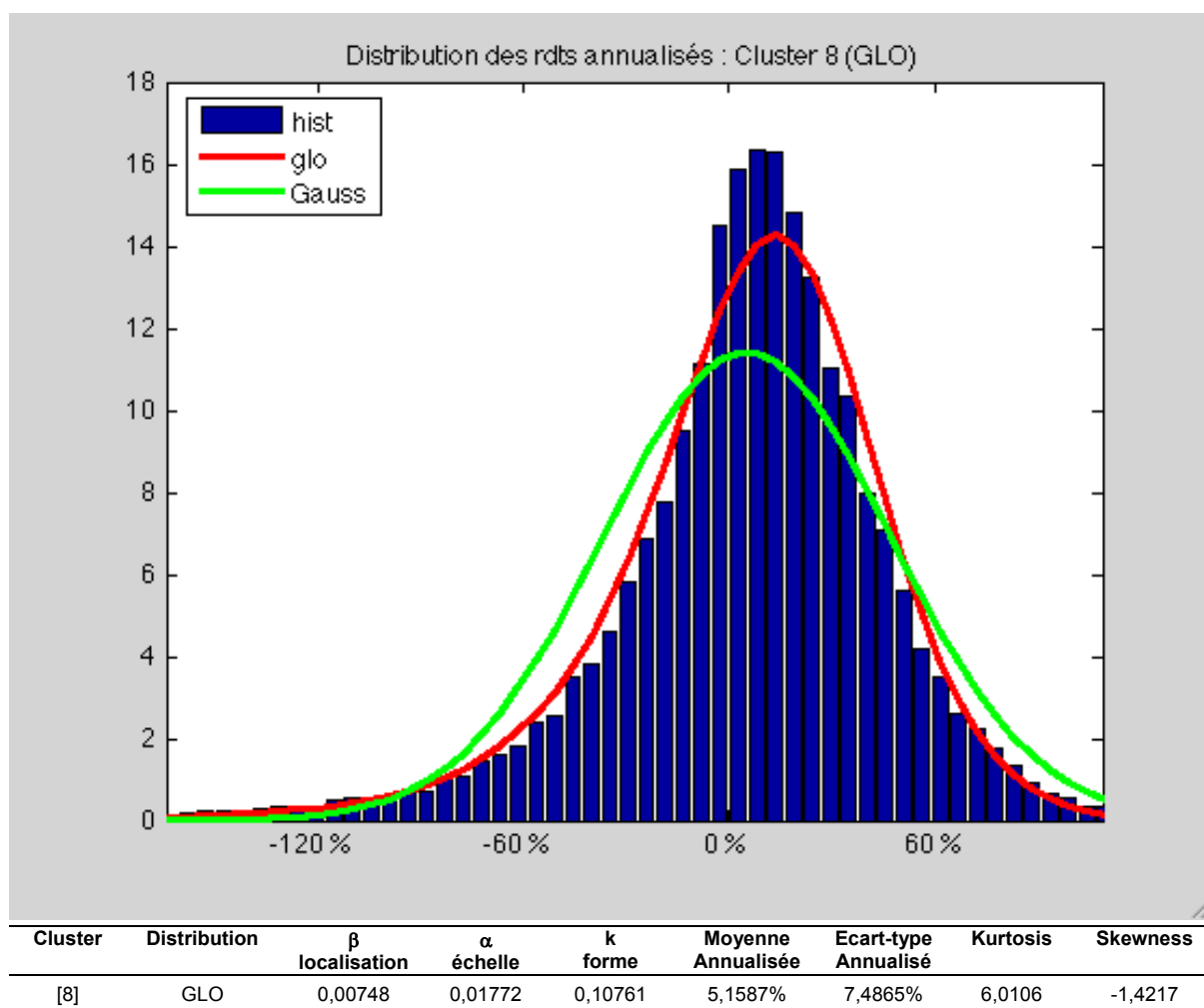
h- Cluster 8

Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

La forme est légèrement étalée à droite avec queue gauche épaisse. Ces constats sont cohérents avec un paramètre de forme strictement positif (0,10761) un kurtosis élevé (6,0106) et un skewness négatif (-1,427).

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

On observe que la GLO s'adapte bien à la forme générale ainsi qu'aux queues de distributions droite et gauche. La gaussienne sous-estime l'épaisseur de la queue gauche et surestime celle de la queue droite.



i- Cluster 9

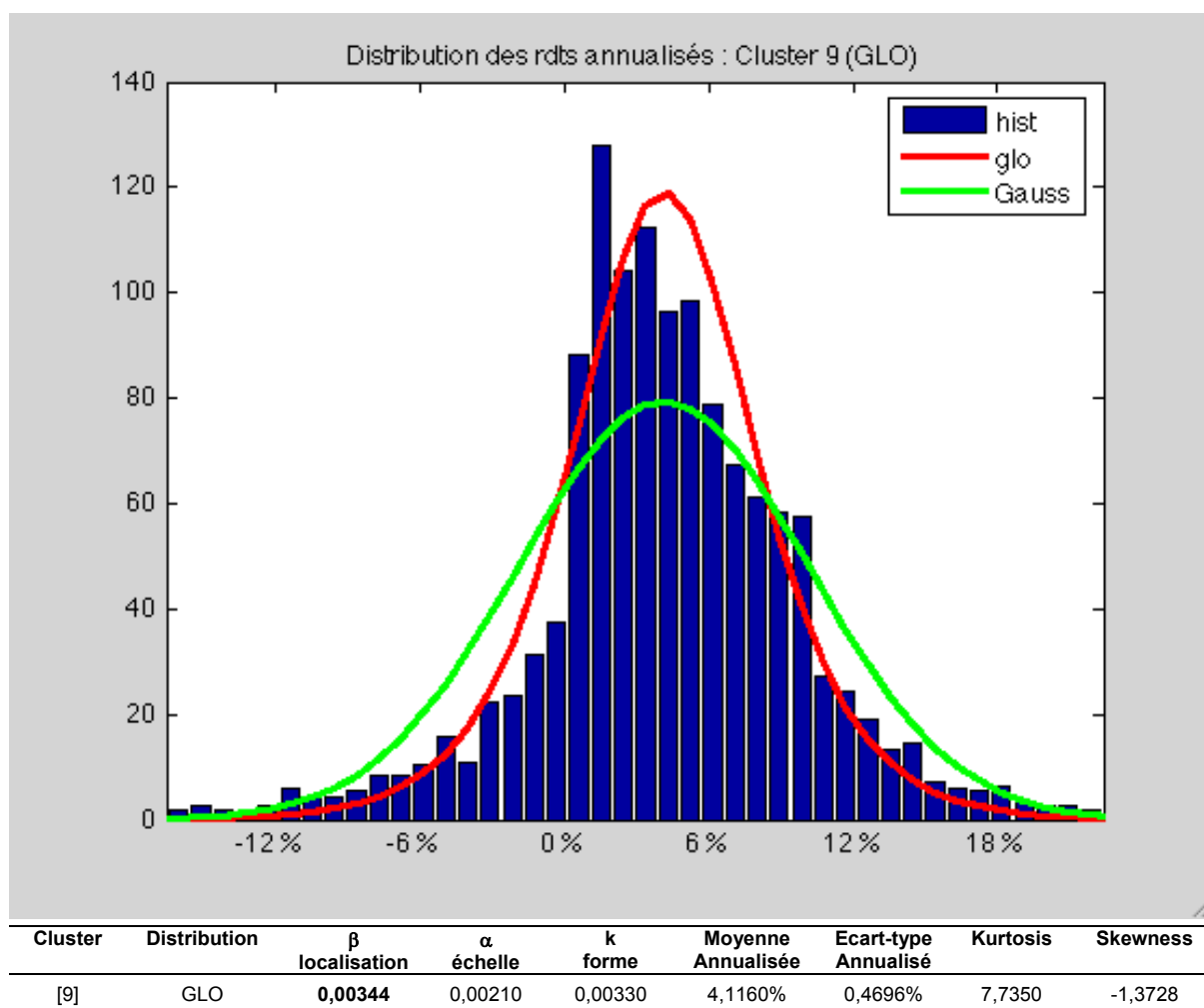
Commentaire général sur localisation, dispersion, et forme

La forme générale de la distribution est complexe avec une concentration au centre et un léger étalement à droite.

Le facteur de forme est faible (0,00330) confirmant l'asymétrie visible sur le graphique.

Qualité de l'ajustement GLO vs Gaussienne

La GLO s'adapte mieux à la distribution que la gaussienne. Néanmoins, sur le graphique, la GLO ne semble pas bien s'adapter aux queues de distributions gauche et droite.



j- Commentaires généraux sur l'ensemble des clusters

L'analyse des formes des distributions et de leurs ajustements conduit à distinguer trois grands groupes de clusters

- Les « cas principaux » (clusters 1, 2, 3, 8) : leur centre est pointu avec étalement à droite et queue gauche épaisse ; pour ceux-ci l'ajustement GLO apporte beaucoup plus d'information, et l'ajustement gaussien semble sous-estimer l'épaisseur des queues gauches et surestimer celle des queues droites
- Les « quasi-gaussiens » (clusters 4, 5 et 6) : leurs comportements sont proches du modèle gaussien, même si la GLO permet un ajustement plus complet car reposant sur une plus grande quantité d'information (3 paramètres au lieu de 2)
- Les « atypiques » (clusters 7 et 9) : leurs comportements sont spécifiques et semblent difficiles à modéliser

Il est intéressant de voir si le calcul des quantiles confirme ces hypothèses.

Section 5 Calcul de quantiles

1. Méthodologie

Nous calculons la VaR avec plusieurs modèles de lois afin d'apprécier l'impact de ce choix sur l'estimation du montant des pertes.

En particulier nous comparons les résultats obtenus avec les modèles suivants :

- Loi normale
- Formulation de Cornish-Fisher
- Distribution historique
- Loi calée avec les L-moments (en l'espèce lois GLO identifiées et paramétrées lors des étapes précédentes)

A partir ce calcul, il convient de classer les résultats par ordre croissant d'estimation de pertes.

Notamment, nous apprécions la distance entre la VaR Gaussienne, la VaR historique et la L-VaR.

Enfin, la sensibilité des résultats sera appréciée en comparant les conclusions obtenues pour plusieurs niveaux de quantile ($\alpha = 1\%$, 5% , 95% et 99%). Le même exercice sera effectué sur la partie droite des distributions, i.e. pour les rendements positifs (quantiles de 95% et 99%).

2. Formulations

VaR Gaussienne

$$VaR(\alpha) = \mu + Z_{\alpha} \cdot \sigma \quad \text{où } Z_{\alpha} = \Phi_N^{-1}(\alpha)$$

où α est le niveau de quantile, T l'horizon de temps, μ la moyenne, σ l'écart-type, et Φ_N^{-1} la fonction quantile de la loi normale centrée réduite

VaR Cornish-Fisher

$$VaR_{CF,\alpha} = \mu + \left(Z_{\alpha} + \frac{Z_{\alpha}^2 - 1}{6} \cdot s + \frac{Z_{\alpha}^3 - 3Z_{\alpha}}{24} \cdot (k - 3) - \frac{2Z_{\alpha}^3 - 5Z_{\alpha}}{36} \cdot s^2 \right) \cdot \sigma$$

avec $Z_{\alpha} = \Phi_N^{-1}(\alpha)$

où α est le niveau de quantile, μ la moyenne, σ l'écart-type, Φ_N^{-1} la fonction quantile de la loi normale centrée réduite, k le kurtosis et s le skewness. NB : on a considéré $T=1$ (horizon de temps) par soucis de simplification.

L-VaR

$$LVaR(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$$

où α est le niveau de quantile et F est la fonction de répartition de la loi GLO identifiée et paramétrée pour chaque cluster :

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-y}} \text{ , avec } y = \frac{\log(1 - k \frac{(x - \beta)}{\alpha})}{k} \text{ si } k \neq 0$$

et $y = \frac{x - \beta}{\alpha}$ si $k \equiv 0$

VaR historique

$VaR(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$ où α est le niveau de quantile et F est la fonction de répartition de la distribution historique pour chaque cluster sur l'ensemble de la période (juin 2002-décembre 2008).

3. Résultats

Les résultats sont présentés par quantile, pour chaque modèle. Chaque cluster peut être considéré comme un exemple de la manière dont les calculs de VaR se comparent d'un modèle à l'autre.

a- Quantile 1%

Le quantile de 1% une perte maximale à une probabilité de 99%. Le signe moins signifie une perte (partie gauche de la distribution).

<i>Quantile 1%</i>				
Cluster	VaRGauss	VaRCF	LVaR	VaRHist.
[1]	-4,757%	-10,306%	-7,127%	-8,071%
[2]	-3,340%	-6,795%	-5,213%	-5,740%
[3]	-14,135%	-27,888%	-18,870%	-20,954%
[4]	-9,436%	-13,337%	-8,432%	-9,950%
[5]	-3,583%	-5,721%	-3,626%	-4,122%
[6]	-22,350%	-49,304%	-21,496%	-27,901%
[7]	-7,793%	-21,931%	-10,673%	-16,079%
[8]	-7,697%	-14,707%	-9,787%	-11,369%
[9]	-0,827%	-2,114%	-0,627%	-1,170%

L'estimation de pertes avec la LVaR est proche de la VaR dans l'essentiel des cas.

La VaR gaussienne donne des pertes inférieures à la LVaR et à la VaR historique pour 5 clusters sur 9.

La VaR Cornish-Fisher aboutit à des résultats très éloignés de la LVaR et surévalue les pertes dans tous les cas.

Les écarts entre les résultats des modèles sont plus réduits s'agissant des clusters dont les distributions sont plus symétriques (par exemple 4, 5, 6 qui ont des paramètres de forme proche de zéro).

b- Quantile 5%

Le quantile de 5% une perte maximale à une probabilité de 95%. Le signe moins signifie une perte (partie gauche de la distribution).

<i>Quantile 5%</i>				
Cluster	VaRGauss	VaRCF	LVaR	VaRHist.
[1]	-3,280%	-3,816%	-3,439%	-3,500%
[2]	-2,283%	-2,679%	-2,442%	-2,502%
[3]	-9,863%	-10,792%	-10,091%	-10,450%
[4]	-6,358%	-5,303%	-5,432%	-5,830%
[5]	-2,393%	-2,188%	-2,180%	-2,360%
[6]	-15,412%	-12,234%	-13,326%	-13,937%
[7]	-5,456%	-5,866%	-4,549%	-3,410%
[8]	-5,316%	-5,804%	-5,392%	-5,586%
[9]	-0,484%	-0,479%	-0,276%	-0,454%

Les niveaux de la LVaR et de la VaR historiques sont similaires.

La VaR gaussienne donne des pertes plus faibles que la LVaR pour 4 clusters sur 9 et les écarts sont bien plus réduits que ceux observés pour le quantile d'ordre 1%. Les effets de l'asymétrie s'estompent quand on est plus près du centre de la distribution.

La VaR Cornish Fisher aboutit à des pertes plus élevées que la LVaR pour 6 clusters sur 9 mais les écarts sont également plus faibles que dans le cas à 1%.

c- Quantile 95%

Le quantile de 95% est un gain maximal à une probabilité de 5%. Le signe plus signifie un gain (partie droite de la distribution).

<i>Quantile 95%</i>				
Cluster	VaRGauss	VaRCF	LVaR	VaRHist.
[1]	3,847%	2,100%	2,844%	3,030%
[2]	2,819%	1,693%	2,095%	2,190%
[3]	10,761%	7,505%	8,574%	9,400%
[4]	8,503%	8,552%	8,418%	8,839%
[5]	3,355%	3,183%	3,197%	3,360%
[6]	18,077%	16,245%	16,044%	16,771%
[7]	5,825%	-3,283%	2,948%	3,186%
[8]	6,176%	4,543%	5,220%	5,417%
[9]	1,170%	0,973%	0,959%	1,102%

La LVaR et la VaR historique sont proches.

La VaR gaussienne aboutit à des gains plus élevés qu'avec la LVaR dans la plupart des cas. Les résultats sont plus proches dans les cas 4 et 5 (distributions dont le paramètre de forme est proche de zéro).

La VaR Cornish Fisher donne des gains généralement moins élevés que la L VaR.

d- Quantile 99%

Le quantile de 99% est un gain maximal à une probabilité de 1%. Le signe plus signifie un gain (partie droite de la distribution).

<i>Quantile 99%</i>				
Cluster	VaRGauss	VaRCF	LVaR	VaRHist.
[1]	5,323%	4,968%	3,592%	4,250%
[2]	3,876%	3,394%	2,607%	2,980%
[3]	15,033%	17,961%	11,524%	13,870%
[4]	11,581%	18,336%	13,381%	14,202%
[5]	4,545%	6,768%	4,769%	5,267%
[6]	25,014%	55,451%	24,339%	29,730%
[7]	8,162%	-2,323%	3,503%	5,172%
[8]	8,557%	10,080%	7,173%	7,927%
[9]	1,513%	2,304%	1,301%	1,671%

A nouveau, la LVaR et la VaR historique sont proches.

La VaR gaussienne donne des gains supérieurs à ceux obtenus avec la LVaR dans la plupart des cas et plus particulièrement les distributions à forte asymétrie (notamment clusters 1, 2, 3, 7, 8 ayant des paramètres de formes élevés).

La VaR Cornish Fisher donne des gains encore plus importants que ceux estimés avec la VaR gaussienne.

Les écarts sont plus importants pour les calculs effectués au quantile d'ordre 99% vs 95%. Même observation sur les queues gauche et droite de la distribution : les écarts s'accroissent en s'éloignant du centre.

e- Conclusion générale

La VaR Gaussienne est celle qui donne les estimations de pertes les plus faibles, en particulier pour les quantiles les plus extrêmes, à l'exception des cas où les distributions sont symétriques (paramètre de forme proche de zéro).

Le développement de Cornish-Fisher n'est pas satisfaisant. En effet, la VaR Cornish-Fisher donne systématiquement des estimations de pertes et de gains plus élevés que la VaR historique et la LVaR.

La LVaR et la VaR historique sont généralement proches. L'approche paramétrique développée à partir des L-moments est donc proche de la réalité.

Section 6 Backtest statique

1. Méthodologie

Une difficulté du backtesting sur une population de hedge funds est la faible quantité de données disponibles par catégorie homogène.

Aussi, plutôt que de comparer les calculs d'un modèle aux réalisations, nous prenons le parti de procéder par simulation en générant une quantité de scénarios aussi importante que souhaitée. Nous partons implicitement du principe que la loi calibrée grâce aux L-moments correspond au vrai modèle car elle est celle qui utilise le plus d'information sur les queues de distribution. Nous mesurons alors les erreurs que les autres méthodes de calcul de la VaR produisent. Si ces méthodes de calcul génèrent des erreurs importantes, ceci validera l'apport relatif des L-moments.

Dans ce backtest, nous allons tester la validité des niveaux de VaR calculés ci-dessus en simulant des données dans la loi de chaque cluster estimée grâce aux L-moments et en calculant le nombre de fois, en moyenne, où les VaR sont dépassées. On calcule également l'écart-type de ces nombres de dépassement.

Nous produisons $N=1000$ données de taille $M=250$ (comme pour une VaR journalière sur une année) pour chaque cluster et nous calculons les valeurs moyenne des dépassements et les écarts-types correspondant.

Ces analyses sont effectuées pour des quantiles de 1%, 5%, 95% et 99% respectivement.

2. Résultats

Les tableaux ci-dessous présentent, par quantile, la moyenne et l'écart-type du nombre de dépassements de la VaR spécifiée avec chaque modèle.

a- Quantile de 1%

Dépassements pour quantile de 1%

Cluster	VaRGauss		VaRCF		LVaR		VaRHist.	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
[1]	6,530	2,500	0,891	0,933	2,470	1,550	1,760	1,360
[2]	6,990	2,580	1,240	1,100	2,520	1,560	1,960	1,370
[3]	5,800	2,380	0,637	0,807	2,500	1,570	1,780	1,320
[4]	1,380	1,190	0,125	0,351	2,590	1,600	1,040	1,030
[5]	2,600	1,570	0,231	0,473	2,470	1,530	1,430	1,200
[6]	2,120	1,480	0,013	0,113	2,520	1,590	0,713	0,830
[7]	4,750	2,140	0,439	0,664	2,470	1,540	0,952	0,937
[8]	5,280	2,290	0,520	0,725	2,480	1,540	1,490	1,220
[9]	0,977	0,984	0,002	0,045	2,490	1,540	0,206	0,458

On doit s'attendre à un nombre de dépassements de 2,5 en moyenne. Par construction même de la simulation le nombre de dépassements pour la LVaR est de 2,5. Ce n'est qu'une conséquence numérique de la simulation et qui donc ne doit pas être interprétée.

Les estimations de la VaR reposant sur le modèle gaussien sous-estiment le plus souvent le bon niveau des pertes avec une fréquence d'apparition de pertes au-delà du niveau attendu (supérieur à 2,5 pour 6 clusters sur 9).

A l'inverse, l'estimation de la VaR à partir du développement de Cornish-Fisher conduit à surestimer le plus souvent les pertes.

b- Quantile 5%**Dépassements pour quantile de 5%**

Cluster	VaRGauss		VaRCF		LVaR		VaRHist.	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
[1]	13,600	3,500	10,300	3,160	12,500	3,420	12,100	3,380
[2]	13,800	3,530	10,600	3,130	12,500	3,370	11,900	3,320
[3]	13,400	3,570	11,000	3,330	12,700	3,480	11,800	3,400
[4]	7,900	2,780	13,400	3,550	12,700	3,500	10,400	3,170
[5]	9,810	3,160	12,300	3,370	12,300	3,370	10,200	3,200
[6]	8,380	2,860	15,400	3,830	12,500	3,530	11,100	3,310
[7]	9,150	2,860	8,120	2,660	12,300	3,320	12,900	3,430
[8]	13,000	3,420	10,800	3,140	12,700	3,400	11,800	3,260
[9]	4,930	2,180	5,050	2,210	12,700	3,620	5,640	2,360

On s'attend à un dépassement moyen de 12,5.

NB : Par construction même de la simulation le nombre de dépassements pour la LVaR est de 2,5. Ce n'est qu'une conséquence numérique de la simulation et qui donc ne doit pas être interprétée.

La VaR gaussienne sous-estime ou surestime les pertes selon les cas. Les pertes sont généralement surestimées dans le cas des clusters dont les distributions sont fortement asymétriques (1,2, 3, 8).

Le développement de Cornish Fisher surestime généralement les pertes (dépassements souvent supérieur à 12,5).

c- Quantile 95%**Dépassements pour quantile de 95%**

Cluster	VaRGauss		VaRCF		LVaR		VaRHist.	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
[1]	1,280	1,200	37,800	5,450	12,400	3,420	8,900	2,960
[2]	0,993	1,000	30,300	5,370	12,400	3,460	9,680	3,110
[3]	3,910	2,040	19,900	4,300	12,200	3,430	8,100	2,880
[4]	12,200	3,620	12,000	3,550	12,500	3,630	10,800	3,390
[5]	10,700	3,230	12,800	3,490	12,600	3,460	10,700	3,240
[6]	8,570	2,840	12,200	3,400	12,700	3,450	11,000	3,260
[7]	0,000	0,000	231,000	4,160	12,400	3,470	7,040	2,580
[8]	6,020	2,440	20,300	4,400	12,700	3,560	10,900	3,290
[9]	4,760	2,230	11,900	3,270	12,700	3,410	6,550	2,590

On doit s'attendre à un nombre de dépassements de 12,5 en moyenne. Par construction même de la simulation le nombre de dépassements pour la LVaR est de 12,5. Ce n'est qu'une conséquence numérique de la simulation et qui donc ne doit pas être interprétée.

La VaR gaussienne surestime le plus souvent les gains (dépassements souvent inférieurs à 12,5). Les résultats sont plus en ligne avec le vrai modèle pour des distributions plus symétriques (cas 4 et 5 notamment).

La VaR Cornish-Fisher donne des résultats non satisfaisants avec des dépassements tantôt significativement supérieurs ou inférieurs au niveau attendu signifiant alternativement une sous-estimation ou une surestimation des gains sauf pour les clusters à distribution symétrique.

d- Quantile 99%**Dépassements pour quantile de 99%**

Cluster	VaRGauss		VaRCF		LVaR		VaRHist.	
	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
[1]	0,000	0,000	0,003	0,055	2,580	1,570	0,305	0,535
[2]	0,000	0,000	0,015	0,122	2,520	1,550	0,428	0,651
[3]	0,176	0,426	0,004	0,063	2,490	1,600	0,461	0,677
[4]	4,410	2,080	0,575	0,796	2,490	1,560	1,920	1,390
[5]	3,110	1,760	0,281	0,543	2,480	1,570	1,440	1,180
[6]	2,160	1,440	0,003	0,055	2,450	1,530	0,838	0,898
[7]	0,000	0,000	222,000	5,050	2,500	1,590	0,000	0,000
[8]	0,627	0,788	0,108	0,332	2,500	1,570	1,180	1,080
[9]	0,938	0,967	0,015	0,122	2,570	1,650	0,417	0,616

On s'attend à un dépassement moyen de 2,5. Par construction même de la simulation le nombre de dépassements pour la LVaR est de 2,5. Ce n'est qu'une conséquence numérique de la simulation et qui donc ne doit pas être interprétée.

La VaR gaussienne surestime les gains le plus souvent, à l'exception des cas où la distribution est assez symétrique (cluster 4,5,6).

Comme pour les autres quantiles, le développement de Cornish-Fisher donne des résultats non satisfaisants avec une tendance à surestimer les gains.

e- Conclusion générale

L'erreur de modèle de la VaR Gauss est importante, conduisant le plus souvent à sous-estimer les pertes et surestimer les gains. Néanmoins ces résultats sont plus nuancés lorsque les distributions sont symétriques.

Le backtest conduit également à rejeter les estimations de VaR faites à partir du développement Cornish Fisher car ce modèle a tendance à surestimer les pertes.

Section 7 Backtest glissant

Nous cherchons dans cette partie à nous rapprocher d'une utilisation pratique de la VaR (avec en plus l'introduction d'une dimension équivalente à un axe temporel) en adoptant l'approche des praticiens.

Les praticiens font généralement les critiques suivantes de la VaR :

- la VaR historique subit les pertes, augmentant après des pertes effectives sans caractère prédictif
- la VaR gaussienne est fausse car les distributions sont asymétriques

Ils utilisent la VaR Cornish Fisher en pensant corriger les inconvénients de la VaR historique en se rapprochant d'un modèle paramétrique et pensant corriger la VaR gaussienne par l'introduction du kurtosis et du skwness.

Néanmoins la VaR Cornish Fisher est elle plus ou moins fausse que la VaR historique et la VaR gaussienne ?

Nous essayons dans cette partie de répondre à cette question.

1. Méthodologie

Pour effectuer un backtest sur les différentes VaR on procède comme suit :

- Pour chaque cluster, on génère $N_{\text{simu}} = 5250$ échantillons (pour avoir 5000 valeurs de test) issus de la loi estimée pour ce cluster
- On procède au calcul de la VaR sur ces données en "rolling 250" : à chaque "pseudo-date" t , on calcule la VaR sur les 250 données précédentes (intervalle= $[t-250:t-1]$) et on l'applique en t
- Pour la L VaR, on ré-estime les paramètres de la loi à chaque fois (sur chaque période précédente de 250 données) puis on calcule la VaR à l'aide de la loi théorique trouvée

- Pour les VaR Gaussienne et Cornish Fisher, les paramètres sont également estimés sur les 250 données précédentes
- Pour la VaR Historique, les quantiles sont également calculés sur les 250 données précédentes

On calcule ensuite le nombre de fois où ces VaR ont été dépassées:

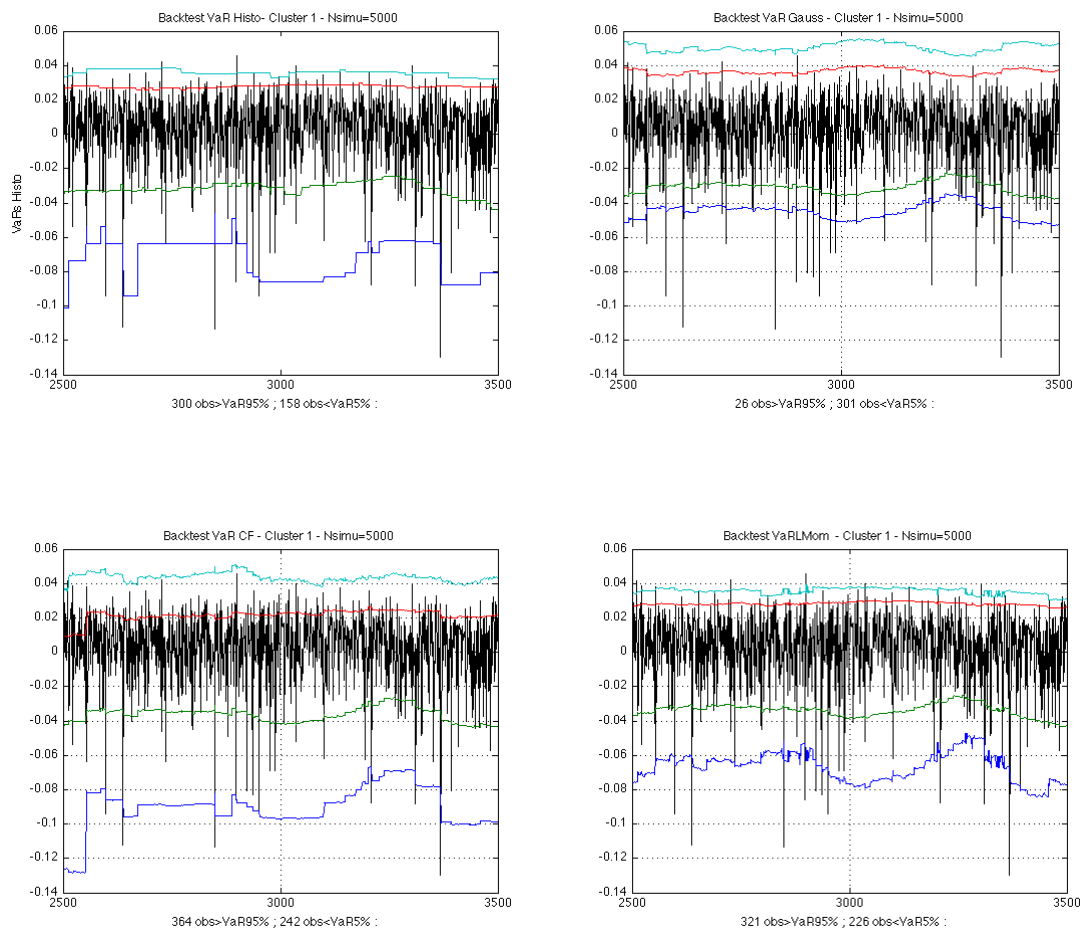
- Pour les VaR 1% et 99%, en théorie, nous devrions donc avoir $NB=5000 \times 1\% = 50$ observations
- Pour les VaR 5% et 95%, en théorie, nous devrions donc avoir $NB=5000 \times 5\% = 250$ observations

On représente graphiquement les variables générées avec les VaR calculées en "rolling". On a choisi de ne montrer, sur les graphiques qu'une partie des 5000 données, à savoir les échantillons 2500 à 3500. Nous aurions pu prendre 1000 échantillons au hasard parmi ces 5000.

2. Résultats

Nous sélectionnons deux clusters ayant des paramètres de forme très différents : le cluster 1 dont le k est élevé et le 6 dont le k est nul

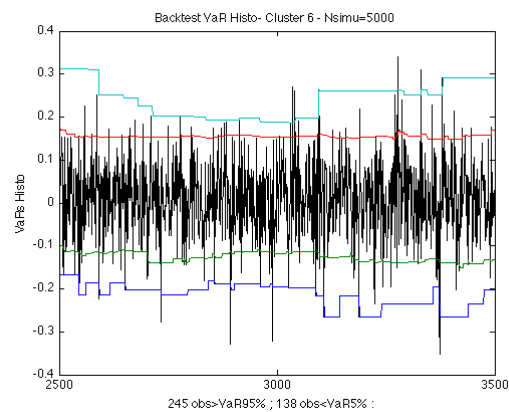
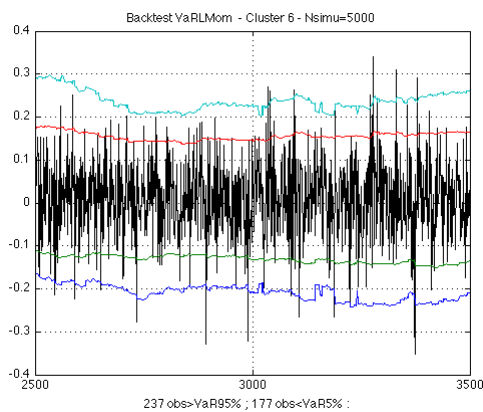
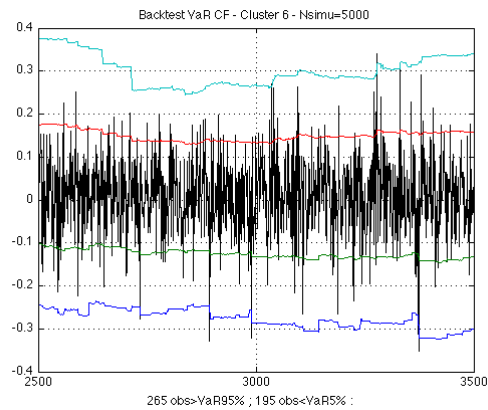
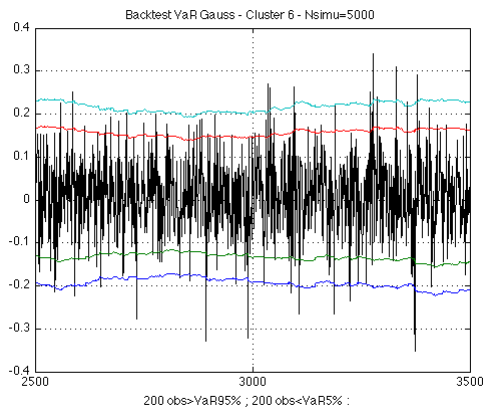
a- Cluster 1



Ces graphiques montrent plusieurs points intéressants :

- La VaR historique 1% est très changeante et évolue par paliers. Ceci met en exergue le problème de cette méthode :
 - la VaR augmente brutalement après une perte
 - son caractère prédictif est très réduit

- Inversement, la VaR gaussienne est stable. C'est une qualité (toutes les observations sont tirées dans la même loi, donc la VaR est en théorie constante) mais elle est fautive en niveau (fréquence des pertes au-delà de la VaR trop élevée). Ceci conduit à l'exclure
- La LVaR est plus variable que la VaR gaussienne (le modèle contient plus d'incertitude du fait de l'estimation d'un paramètre supplémentaire) mais elle est située au bon niveau
- La VaR Cornish-Fisher a le même comportement instable que la VaR Historique. Son niveau est trop élevé. L'introduction de deux paramètres a priori difficile à estimer (kurtosis et skewness) amène de l'instabilité
- Les conclusions sont différentes pour les queues à gauche et à droite. Par exemple, la VaR historique donne des résultats satisfaisants sur la partie gains. La VaR gaussienne a tendance à surestimer les gains. L'asymétrie est à l'origine des divergences sur la partie pertes

b- Cluster 6

- La VaR Gauss est stable et donne une estimation satisfaisante du niveau des pertes. La symétrie de la distribution (k proche de zéro) explique ceci
- La VaR Cornish-Fisher est encore erratique mais plus stable que dans le cas précédent (les perturbations liées à l'asymétrie sont ici limitées) mais elle a tendance à surestimer le risque sur l'ensemble des simulations
- La LVaR a un comportement proche de la VaR Gauss (symétrie)
- La VaR Historique est la plus instable avec une évolution par paliers, un faible caractère prédictif

c- Conclusion générale sur le backtesting glissant

Ce backtest confirme les conclusions du backtest statique.

La VaR gaussienne donne des résultats inexacts le plus souvent lorsque les distributions sont symétriques. Ces insuffisances s'estompent pour les distributions asymétriques.

La VaR gaussienne et le développement Cornish-Fisher ont tendance à surestimer les gains potentiels. L'asymétrie des distributions est à l'origine de ces phénomènes.

La correction de Cornish-Fisher ne parvient pas à mieux estimer le niveau des pertes, et de plus son évolution est erratique rappelant celle de la VaR Historique.

En introduisant dans l'approche Cornish-Fisher deux paramètres a priori difficiles à estimer (le kurtosis et le skewness) on perd la stabilité de la VaR paramétrique.

Néanmoins en introduisant un paramètre de plus dans la loi même de la distribution, ce que nous faisons avec l'approche LVaR, on obtient des résultats plus stables conformément à l'objectif recherché.

CONCLUSION

La crise nous a rappelé un enseignement simple mais que l'habitude de la prospérité avait réussi à dissimuler : l'enrichissement rapide et sans risque n'existe pas. La croissance de la valeur des biens est bornée par le temps et le risque. L'affluence des liquidités, alimentée par les politiques monétaires et les déséquilibres macro-économiques (du surendettement américain à l'excédent d'épargne chinoise), a fait oublié l'existence de risques cachés (absence de liquidité, concentrations excessives, dissémination d'actifs toxiques, etc).

Mais qu'on fait les banques pour se prémunir contre les catastrophes ? Qu'on fait les régulateurs et superviseurs pour organiser l'assurance des risques du système financier ? Certains acteurs ont échappé à la surveillance, et d'autres ont manqué des réserves capitalistiques nécessaires pour couvrir les sinistres et n'avaient pas les plans de secours adaptés pour affronter le cas du pire. La réglementation et les comportements doivent évoluer.

Certes, la nécessité d'augmenter le niveau des fonds propres fait l'objet d'un relatif consensus même s'il est difficile de déterminer le bon niveau. Mais l'enjeu est davantage comportemental. En effet, la première des responsabilités est de n'accepter que les risques supportables sans trop de casse. Les banques ne devraient s'exposer sans une conscience et une compréhension raisonnable des risques. Il faut donc des outils pour extraire les risques cachés, ceux qui sont rares et extrêmes. Mais il faut également des règles de jugement au-delà des modèles, une préférence culturelle pour la prudence, ainsi qu'un mode de gouvernement d'entreprise qui assure par les actes la couverture des risques du système.

Les hedge funds font partie de ces cas difficiles à cerner car on ne sait pas bien de quoi on parle. Sans définition précise, on les repère par un ensemble de caractéristiques propres (levier, recours au dérivés, faible régulation, etc). C'est une collection variée de fonds d'investissements, aux stratégies plus ou moins claires, mais qui sont

intéressants pour l'étude car ils sont porteurs de risques atypiques. Ils se prêtent à l'analyse car nous possédons à présent d'importantes données les concernant, même si des progrès en termes de transparence restent à faire. Par ailleurs, les comprendre revêt une utilité pratique car ils restent liés aux risques des banques via l'investissement en compte propre notamment.

Puisqu'au-delà du calcul, le risque doit être testé, puis traduit en actes de gestions prudents, il faut privilégier la simplicité (« Ce qui est simple est faux. Ce qui est compliqué est inutilisable » P. Valery). On comprend alors pourquoi la Value-at-Risk (VaR) est encore utilisée malgré ses défauts.

La Value-at-Risk (VaR) est couramment utilisée par les régulateurs et les praticiens pour calculer les besoins en fonds propres et pour gérer les expositions à des risques de marché.

Néanmoins, cette mesure peut conduire à une mauvaise appréciation des risques dans certains cas. Notamment, les modèles courants s'adaptent mal à des distributions dont les queues sont importantes telles que celles des rendements de hedge funds.

La recherche appliquée a développé des formules visant à compenser l'incapacité de la VaR gaussienne à s'adapter à l'asymétrie des distributions de rendements des hedge funds. Notamment, le développement de Cornish-Fisher est une correction de la formule de la VaR gaussienne consistant à introduire le kurtosis et le skewness dans son expression. A travers ce projet nous avons questionné la pertinence de cette approche et mis en œuvre des techniques pour proposer de meilleures mesures.

Jugeant nécessaire d'identifier un modèle s'adaptant correctement à la forme des queues de distributions nous avons exploité les propriétés d'outils développés par la statistique moderne, les L-moments. Leurs propriétés permettent de mieux capturer l'information sur les valeurs extrêmes.

L'estimation des L-moments permet de construire un indicateur plus robuste de la VaR. Il s'agit d'une VaR paramétrique calée sur une loi à trois paramètres, la LVaR.

Les études empiriques réalisées sur un large échantillon de hedge funds entre juin 2002 et décembre 2008 ont montré que :

- (i) la meilleure distribution pour la modélisation est une distribution GLO (logistique généralisée)
- (ii) la LVaR rend convenablement compte des observations

Par ailleurs plusieurs backtests montrent que :

- (iii) la LVaR est un modèle plus juste que la VaR gaussienne
- (iv) la LVaR donne des résultats à la fois plus justes et plus stables que la VaR Cornish-Fisher

La LVaR constitue donc un progrès.

Une analyse complémentaire intéressante viserait à apprécier les progrès restant à faire pour s'approcher de la véritable forme des distributions de pertes. Dans ce but, l'utilisation de famille de lois à quatre paramètres par exemple constituerait une voie de recherche prometteuse.

D'autres extensions intéressantes concernent la manière d'adapter ces modèles à la mesure du risque en cas de disparition de la liquidité. En effet, si les actifs ne peuvent plus être échangés sur un marché, l'investisseur est alors contraint de porter son risque. Il est condamné à accumuler les pertes pendant un nombre de jours pouvant aller au-delà de celui supposé lors de l'établissement du modèle. Le calcul de la VaR est alors très théorique et les pertes réelles sont plus élevées que prévues. La prise en compte de la disparition du marché dans les modèles de VaR constituerait donc un progrès significatif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Basel Committee on Banking Supervision, Jan 1996, “Amendment to the capital accord to incorporate market risks”.
- [2] Basel Committee on Banking Supervision, Jun 2006, “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards”.
- [3] Costinot A., Riboulet G., Roncalli T., Septembre 2000, « Stress testing et théorie des valeurs extrêmes : une vision quantifiée du risque extrême », Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais, France.
- [4] Gouriéroux C. , Zakoian J.M., 2009, ENSAE, Polycopié sur la Mesure de risque.
- [5] Dowd K., 2005, « Measuring Market risk », Wiley, NY.
- [6] Getmanski, Lo, Makarov, 2004, «An Econometric Model of Serial Correlation and Illiquidity in Hedge Funds Returns », Journal of Financial Economics, 74 (3), pp. 529-610.
- [7] Brown R., Tolikas K., 2006, « The Distribution of the Extreme Daily Share Returns in the Athens Stock Exchange », working paper.
- [8] Danielsson J., Septembre 2009, « Réflexions sur l’efficacité de la régulation financière », Banque de France, Revue de la stabilité financière, N° 13 Quel avenir pour la régulation financière ?
- [9] Escangio J.C., Olmo J., 2008, « Backtesting parametric value-at-risk with estimation risk », working paper.
- [10] Favre L., Galeano J., 2002, “Mean Modified VaR optimization with hedge funds”, Journal of Alternative Investment, 5, 26-44
- [11] Lhabitant F.S. , 2004, « Hedge Funds : quantitative Insights », John Wiley & Sons, New York.
- [12] Basel Committee on Banking Supervision, Jul 2009, “Revisions to the Basel II market risk framework”.

- [13] Sillitto G., 1969, "Derivations of approximate to the inverse distribution function of a continuous univariate population from the order statistics of a sample", *Biometrika* 56(3), 641-650.
- [14] David H.A. , 1968, "Gini's mean difference rediscovered", *Biometrika* 55, 573-575.
- [15] Chernoff H., Gastwirth J.L., Johns M.V., 1967, "Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation", *The annals of Mathematical Statistics* 38(1), 52-72.
- [16] Greenwood J.A., Landwehr J.M., Matalas N.C., Wallis J.R., 1979, "Probability Weighted moments : definition in relation to parameters of several distributions expressable in inverse form", *Water Ressources Research* 15, 1049-1054.
- [17] Hosking J., 1990, "L-moments : Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics", *Journal of Royal Statistical Society B* 52 (1), 105-124.
- [18] Dewar R.E., Wallis J.R., 1990, "Geographical patterning of interannual rainfall variability in the tropics and near tropics : an L-moment approach", *Journal of Climate* 12 (12), 3457-3466.
- [19] Smithers J.C., Schulze R.E., 2001, "A methodology for the estimation of short duration design storms in South Africa using a regional approach based on L-moments", *Journal of Hydrology* 241 (1-2), 42-52.
- [20] Chen X., Tung Y.-K., 2003, "Investigation of polynomial normal transform", *Structural Safety* 25(4), 423-445.
- [21] Karvanen J., 2006, « Estimation of Quantile Mixtures via L-moments and Trimmed L-moments », working paper.
- [22] Chu B., Salmon M., 2008, « Testing Distributional Assumptions : A L-moment Approach », working paper.
- [23] Martins-Filho C., Yao F., 2006, « Estimation of Value-at-Risk and Expected Shortfall based on Nonlinear Models of Return Dynamic and Extreme Value Theory », working paper.

- [24] Jurcenzo E., Maillet B., Yanou G., 2007, « Portfolio Selection with Higher-order L-moments : A Robust Non-parametric Multi-moment Efficient Frontier », working paper.
- [25] Darolles S., Gouriéroux C., Jasiak J., 2008, « L-Performance with an Application to Hedge Funds », *Journal of Empirical Finance*, 4, 671-685.
- [26] Hosking J.R.M., 1989, « Some theoretical results concerning L-moments » Research Report RC14492, IBM Research Division, Yorktown Heights, N.Y.
- [27] Brooks C., Kat H., 2001, « The Statistical Properties of Hedge Funds Index Returns and Their Implications for Investors », Cass Business School Research Paper.
- [28] Acerbi C., Tasche D., 2002, « On the coherence of expected shortfall » *Journal of Banking and Finance*, 26, 1491-1507.
- [29] EDHEC-Risk & Asset Management Survey, Janvier 2008.
- [30] Darolles S., Jay E., Khairat M., Koudiraty A., 2009, “Hedge fund classification : a quantitative approach using model-based clustering”, working paper.
- [31] Fraley C., Raftery A.E., 2007, “Model-Based Methods of Classification : using the mclust software in chemometrics”, *Journal of Statistical Software*, Vol. 18, Issue 6.
- [32] Hosking J.R.M., Wallis J.R., 1997, “Regional Frequency Analysis”, Cambridge University Press.

ANNEXE

- **Generalized Logistic distribution (GLO)**

La GLO de paramètres β (localisation), α (échelle), k (forme) a pour fonction de répartition F et densité f :

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-y}}, \text{ avec } y = \frac{\log(1 - k \frac{(x - \beta)}{\alpha})}{k} \text{ si } k \neq 0, \text{ et } y = \frac{x - \beta}{\alpha} \text{ si } k \equiv 0$$

$$f(x) = \frac{\alpha^{-1} e^{-(1-k)y}}{(1 + e^{-y})^2}$$

- **Generalized Extreme Value distribution (GEV)**

La GEV de paramètres β (localisation), α (échelle), k (forme) a pour fonction de répartition F et densité f :

$$F(x) = e^{-e^{-y}}, \text{ avec } y = \frac{\log(1 - k \frac{(x - \beta)}{\alpha})}{k} \text{ si } k \neq 0, \text{ et } y = \frac{x - \beta}{\alpha} \text{ si } k \equiv 0$$

$$f(x) = \alpha^{-1} e^{-(1-k)y - e^{-y}}$$

- **Generalized Pareto distribution (GPA)**

La GPA de paramètres β (localisation), α (échelle), k (forme) a pour fonction de répartition F et densité f :

$$F(x) = 1 - e^{-y}, \text{ avec } y = \frac{\log(1 - k \frac{(x - \beta)}{\alpha})}{k} \text{ si } k \neq 0, \text{ et } y = \frac{x - \beta}{\alpha} \text{ si } k \equiv 0$$

$$f(x) = \alpha^{-1} e^{-(1-k)y}$$

- **Pearson type III distribution (PE3)**

La PE3 de paramètres μ (localisation), σ (échelle), γ (forme) a pour fonction de répartition F et densité f :

Pour $\gamma \neq 0$, soit $\alpha = 4/\gamma^2$, $\beta = \frac{1}{2}\sigma|\gamma|$, et $\xi = \mu - 2\sigma/\gamma$

$$F(x) = G\left(\alpha, \frac{x-\xi}{\beta}\right) / \Gamma(\alpha)$$

$$f(x) = \frac{(x-\xi)^{\alpha-1} e^{-(x-\xi)/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$$

où Γ est la fonction Gamma et G la fonction gamma incomplète

$$G(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$