

Mémoire présenté le : Le 30 Juin 2015

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Khalil SAID

Titre : Une approche gestion de risque de l'allocation du capital.

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA

Mme Catherine PIGEON
M. Arnaud COHEN
M. Gérard CROSET

Signature

Entreprise

*Nom : LSAF
Signature :*

Membres présents du jury de l'ISFA

Mme Véronique Maume-
Deschamps
Mme Beatrice Rey-Fournier

Directeur de mémoire en entreprise

*Nom : M. Didier Rullière
Signature :*

Invité

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat :

Mme Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu mes deux directeurs qui ont dirigé ce mémoire d'actuaire :

- La directrice pédagogique, Madame Véronique MAUME-DESCHAMPS, Professeur des Universités à l'ISFA, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de diriger ce travail. Son soutien, sa disponibilité, ses qualités humaines, et ses précieuses directives tout au long de la réalisation de ce travail m'ont beaucoup impressionné.
- Le directeur du mémoire, M. Didier RULLIÈRE, Actuaire, inscrit au Tableau Unique des Actuaires, membre agrégé de l'Institut des Actuaires et Maître de conférences à l'ISFA, pour le privilège qu'il m'a fait en acceptant de diriger ce travail. Sa gentillesse, sa modestie, sa riche expérience et l'accueil cordial qu'il m'a toujours réservé m'ont inspiré une grande admiration à son égard.

Qu'ils puissent trouver dans ce modeste rapport le témoignage de ma sincère gratitude et de mon profond respect.

Mes remerciements s'adressent également à MM. Frédéric PLANCHET et Stéphane LOISEL, pour leur accompagnement pédagogique, et qui, en tant que responsables de la formation SAF M2 se sont toujours montrés à l'écoute et très disponibles tout au long de l'année scolaire 2013/2014.

Ce mémoire se doit d'être un geste de remerciements et de gratitude envers l'ensemble des professeurs du Master SAF pour l'enseignement qu'ils m'ont apporté, et pour cette formation particulièrement enrichissante.

Je tiens à présenter mes excuses par avance aux membres du jury du diplôme actuaire pour le modeste niveau linguistique de ce mémoire. Etant un étudiant étranger, j'ai essayé de traduire les idées de ce travail dans un français très simple en faisant le maximum d'effort pour éviter les fautes de langue.

Enfin, j'exprime ma plus grande et humble gratitude pour la France, mon deuxième pays. Je suis très reconnaissant envers cette grande nation, qui m'a offert la chance de suivre des études dans ses établissements d'enseignement publics.

Résumé du rapport :

Les normes Solvabilité 2 apportent un changement radical en matière de gestion des risques dans le secteur actuariel. Elles sont basées sur une vision de renforcement du contrôle de risque encouru et de minimisation de la probabilité d'insolvabilité. La détermination du capital économique réglementaire connaît sous ce dispositif prudentiel une révolution méthodologique. Elle nécessite une modélisation de la dépendance entre les différents risques et le choix d'une méthodologie pour leur agrégation, cela se traduit dans le cas de l'utilisation de la Formule Standard par exemple par des matrices de corrélations qui relient les familles et les sous-familles de risques. Une fois le *capital de solvabilité requis SCR* est calculé, son allocation entre les différentes branches d'activités s'impose comme un exercice interne, certes non contrôlé par le premier pilier de Solvabilité 2, mais qui joue un rôle crucial dans la détermination des performances de toute l'activité de l'assureur. Le cas des groupes d'assurance nécessite un traitement particulier dans le cadre de l'approche *Own Risk and Solvency Assessment ORSA*, une analyse multivariée des risques semble donc inévitable.

Dans ce mémoire d'actuaire, nous nous focalisons sur la problématique de l'allocation du capital, et nous la traitons indépendamment de la méthodologie de la détermination du capital de solvabilité. Nous étudions dans un premier temps son importance dans le cadre de l'ORSA, puis nous analysons les différentes méthodes d'allocation présentes dans les pratiques des assureurs et dans la littérature des sciences actuarielles. Nous présentons dans une deuxième étape, une nouvelle méthode d'allocation basée sur la minimisation des indicateurs de risque sous une approche multivariée, ainsi qu'un algorithme stochastique d'optimisation utilisable pour la détermination de l'allocation optimale dans le cas général. Nous donnons par la suite quelques formules semi-explicites de cette allocation dans le cas de modèles de risques simples, et nous examinons le comportement asymptotique de l'allocation pour des familles de distributions particulières avant d'étudier l'impact de la structure de dépendance modélisée par des copules sur la composition de l'allocation. Les différents résultats annoncés sont illustrés à l'aide d'applications numériques. Nous terminons ce mémoire par des propositions d'applications de cette technique en assurance, réassurance et finance.

Mots-clés libres :

Gestion des risques ; Indicateurs de risque multivariés ; Solvabilité 2 ; Modèle interne ; Agrégation des risques ; Formule Standard ; Allocation du capital ; Allocation optimale ; Risque systémique ; ORSA ; SCR ; SST ; Réassurance optimale ; Copules ; Méthode d'Euler ; Méthode de Shapley.

Abstract :

Solvency 2 standards will make a radical change in risk management practices in the actuarial sector. They are based on a strengthening of risk control and minimization of the ruin probability. The determination of the economic regulatory capital will be faced under this prudential mechanism to a kind of methodological revolution. Modeling of dependence between different risks and a choice of an aggregation methodology are required. In the case of the use of the Standard Formula, risks aggregation is done using correlation matrices that connect families and subfamilies of risks. Once the *Solvency Capital Requirement SCR* is calculated, its allocation between the different risky activity branches becomes the new operational challenge.

Capital allocation is an internal exercise, certainly not controlled by the first pillar of Solvency 2, but it plays a crucial role in determining performance of all the insurer activity. The case of insurance groups requires special treatment in the context of the *Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)* approach. A multivariate analysis of risk seems relevant.

In this actuarial thesis, we focus on the issue of the capital allocation. We will treat it regardless of methodology of the solvency capital determination. Firstly, we study the importance of capital allocation in the context of the ORSA, then we analyze the different allocation methods present in the insurers practices and in the actuarial science literature. We present in a second step, a new allocation method based on the minimization of some multivariate risk indicators, we present also a stochastic optimization algorithm usable to get the optimal allocation composition in the general case. Then, we give some semi-explicit and explicit formulas of the optimal allocation in the case of particular risk models and we examine its asymptotic behavior for special distributions families. Finally, we study the impact of the dependence structure on the composition of our allocation using copulas. The different results announced are illustrated using numerical applications. The last part of this work is devoted to some application proposals of this allocation technique in insurance, reinsurance and finance.

Keywords :

Risk management ; multivariate risk indicators ; Solvency 2 ; internal model ; Standard Formula ; risk aggregation ; capital allocation ; optimal allocation ; systemic risk ; ORSA ; SCR ; SST ; Optimal Reinsurance ; Copulas ; Euler's method, Shapley Method.

Table des matières

Introduction	9
1 L'allocation du capital sous solvabilité 2	11
1.1 Le capital économique sous Solvabilité 2	11
1.1.1 Aspects majeurs du dispositif Solvabilité 2	11
1.1.2 Le bilan économique dans Solvabilité 2	15
1.1.3 Le calcul du capital économique	16
1.1.4 La formule standard dans solvabilité 2	18
1.2 De l'agrégation des risques à l'allocation du capital	22
1.2.1 Problématique de l'allocation	23
1.2.2 Méthodologie générale	24
1.2.3 Règles usuelles d'allocation	25
1.3 L'allocation du capital vue par le dispositif ORSA	27
1.3.1 L'approche ORSA	27
1.3.2 L'allocation du capital dans l'ORSA	30
2 Les méthodes classiques de l'allocation du capital	31
2.1 Cohérence d'une méthode d'allocation	31
2.2 Méthode proportionnelle	33
2.3 Méthode marginale	34
2.4 Méthode de Shapley	34
2.5 Méthode d'Euler	38
2.6 Méthode d'Aumann-Shapley	42
3 L'allocation du capital par minimisation du risque global	43
3.1 Indicateurs multivariés de risque	44
3.1.1 Nouvelle famille d'indicateurs de risque multivariés	45
3.1.2 Propriétés des indicateurs	45
3.1.3 Illustration $g_k(x) = x $	47
3.2 Allocation par minimisation des indicateurs de risque	48
3.2.1 Présentation de la méthodologie de l'allocation	48
3.2.2 Conditions d'optimalité	49
3.2.3 Fonctions de pénalités	49
3.3 Propriétés de cohérence	50
3.3.1 Symétrie	51
3.3.2 Neutralité	52
3.3.3 Monotonie	52
3.3.4 Invariance par translation	52
3.3.5 Homogénéité positive	53
3.3.6 Robustesse	53
3.3.7 Sous-additivité	53
3.3.8 Additivité comonotone	54
3.4 Minimisation par algorithmes stochastiques	55
3.4.1 L'algorithme de Robbins-Monro	56
3.4.2 Algorithme de Kiefer-Wolfowitz	57
3.4.3 L'algorithme de descente en miroir	57
3.4.4 Application à l'allocation optimale	59

3.5	Étude de l'allocation pour des modèles d'indépendance	61
3.5.1	Modèle exponentiel	62
3.5.2	Modèle subexponentiel	66
3.5.3	Modèle Pareto indépendant	69
3.5.4	Comparaison des comportements asymptotiques	70
3.6	Impact de la dépendance sur l'allocation	71
3.6.1	Impact du mélange	71
3.6.2	Risques comonotones	72
3.6.3	Modèles de dépendance avec des copules	74
3.7	Simulations	79
3.7.1	Comportement asymptotique	79
3.7.2	Allocation optimale sur une période	81
3.7.3	Allocation optimale sur plusieurs périodes	83
3.7.4	Impact de la dépendance avec les copules	86
3.7.5	Comparaison avec la méthode d'Euler	88
4	Applications de l'allocation du capital	92
4.1	Solvabilité des groupes dans un processus ORSA	92
4.2	Modélisation du risque systémique	93
4.3	Un cas particulier de la réassurance optimale	96
	Conclusion	98
A	Annexe 1 : Propriétés de cohérence	102
A.1	Neutralité	102
A.2	Monotonie	104
A.3	Invariance par translation	104
A.4	Homogénéité positive	105
A.5	Robustesse	105
A.6	Sous-additivité	106
A.7	Additivité comotone	107
B	Annexe 2 : Modèle sous-exponentiel	108
B.1	Preuve du théorème 3.2.	108
B.2	Preuve de la proposition 3.3	109
C	Annexe 3 : Modèles de dépendance	110
C.1	Modèle FGM	110
C.2	Modèle Marshall-Olkin	111

Table des figures

1	L'architecture en trois piliers de Solvabilité 2	12
2	Procédure Lamfalussy de mise en place du dispositif Solvabilité 2	13
3	Les études quantitatives d'impact (QIS)	14
4	Évaluation des actifs et passifs dans Solvabilité 2	15
5	Évaluation du capital dans Solvabilité 2	16
6	Formule Standard : Segmentation des risques.	19
7	L'agrégation des risques et le calcul du capital économique	23
8	De l'agrégation des risques à l'allocation du capital	24
9	Principe de l'allocation du capital	25
10	L'approche ORSA ventilée en cinq chantiers	28
11	Le capital économique ORSA	29
12	Illustration RORAC compatibilité - Cas de deux lignes d'affaires	33
13	Exemple de deux trajectoires pour deux stratégies d'allocation différentes.	43
14	Représentation des indicateurs I et J	48
15	Algorithme déterministe d'optimisation	56
16	L'algorithme de descente en miroir.	59
17	Modèle FGM : β en fonction de θ . Cas : $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.25$, et $u = 50$	75
18	Modèle FGM : β en fonction de θ . Cas : $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.25$, et $u = 100$	76
19	Modèle MO : β en fonction de λ_0 : $\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = 0.25$ et $u = 50$	77
20	Modèle Mélange commun : β en fonction du paramètre du mélange α	78
21	Les β des différentes méthodes en fonction de θ	90

Liste des tableaux

1	La matrice de corrélation de le formule standard.	20
2	Formule standard : La matrice de corrélation du module SCR_{life}	21
3	Allocations optimales pour des modèles comonotones	74
4	Convergence asymptotique EI <i>Zone Orange</i>	79
5	Convergence asymptotique EI <i>Zone Violette</i>	80
6	Convergence asymptotique GPDC <i>Zone Orange</i>	80
7	Convergence asymptotique GPDC <i>Zone Violette</i>	81
8	Simulations <i>zone orange</i> : $d = 5$	82
9	Simulations <i>zone violette</i> : $d = 5$	83
10	Simulations <i>zone orange</i> sur plusieurs périodes $d = 5, p = 2, 3, 5$	84
11	Simulations <i>zone orange</i> sur plusieurs périodes $d = 5, p = 2, u = 150$	85
12	Simulations <i>zone violette</i> sur plusieurs périodes $d = 5, p = 2, 3, 5$	86
13	Simulations modèles de dépendance avec des copules $u = 50$	87
14	Simulations modèles de dépendance avec des copules $u = 100$	87
15	Comparaison avec la méthode d'Euler - prise en compte de la dépendance	91

Introduction

Au cours des trois dernières décennies, l'instauration de normes prudentielles de plus en plus développées et strictes, depuis 1988 avec les accords de *Bâle I* jusqu'aux évolutions récentes de l'accord de *Bâle III* pour le secteur bancaire, et depuis le lancement du projet *Solvabilité II* en 2001 par la commission européenne pour le secteur de l'assurance, a contribué à l'amélioration des processus de gestion des risques et au développement des techniques de calcul et d'allocation du *capital économique* au sein des entreprises de ces secteurs.

Dans le cadre de ce mémoire actuariaire, nous nous proposons d'étudier une problématique purement liée à la gestion des risques dans le secteur de l'assurance. L'allocation du capital économique entre les activités risquées d'une compagnie d'assurance est un exercice interne d'une importance extrême, puisqu'il a un impact direct sur les performances de la compagnie et ses niveaux de solvabilité. En effet, si le calcul des exigences de capital est bien réglementé dans solvabilité 2, son allocation entre les branches notamment dans le cas des groupes d'assurance reste une pratique libre et interne, qui peut être implémentée dans le cadre de l'ORSA.

Ce travail a été effectué au sein de Laboratoire des sciences actuarielle et financière. Ses applications numériques se basent sur des exemples théoriques, vu la difficulté de l'accès aux données réelles. Cependant, ses méthodes peuvent être facilement appliquées à tout portefeuille d'assurance.

Nous commençons ce rapport, par un bref rappel de la vision Solvabilité 2 du capital économique. Nous nous intéressons par la suite à la problématique de l'allocation du capital, qu'on essaye de traiter dans le cadre de ce travail indépendamment du calcul du capital économique. Nous présentons son principe, sa méthodologie générale, et des exemples de ses règles usuelles. Nous examinons aussi la vision ORSA de l'allocation du capital et les problématiques qui découlent d'un exercice d'allocation dans le cadre de ce mécanisme.

Une fois que nous avons convenu du mode de calcul du capital économique et que nous l'avons appliqué sur le groupe, à l'aide d'une mesure de risque choisie, deux questions se posent : comment allouer ce capital entre les différentes branches ? Et comment distribuer le capital excédentaire, gain de la *diversification*, si on décide de l'investir dans le développement des lignes d'affaires ? Le deuxième chapitre présente la réponse de la littérature et des pratiques des compagnies d'assurance. Nous définissons dans ce chapitre la notion de l'*allocation cohérente* au sens économique, et nous analysons les principes et les propriétés des méthodes classiques de construction des *allocations du capital*.

Les compagnies d'assurance, notamment les réassureurs et les grands assureurs, sont généralement des structures multi-branches. Elles sont composées de plusieurs lignes d'affaires, soit d'activités différentes ou implantées dans différents pays ou zones géographiques. Les *mesures de risque univariées* dans ce cas, sont capables de fournir une quantification de la solvabilité globale, mais elles perdent leur efficacité dans l'analyse de la contribution de chaque ligne d'affaire dans le risque encouru par le groupe. Cela crée un besoin d'une *analyse multivariée* du risque. Nous nous intéressons dans le début du troisième chapitre

à la théorie du risque en environnement multivarié. Nous exposons une nouvelle famille d'*indicateurs de risque multivariés*, introduite par Cénac et al. dans les deux articles ([16], [17]). Ces indicateurs constituent la base théorique de la méthode d'allocation qui sera étudiée dans le cadre de ce travail.

Dans une optique de minimisation de risque, nous proposons par la suite, une construction d'une *allocation optimale* par minimisation des *indicateurs de risque multivariés*. Nous présentons quelques résultats obtenus dans le cas d'une allocation mono-périodique, pour des modèles de risques basés sur des distributions exponentielles indépendantes, de distributions de Pareto corrélées obtenues par mélange gamma d'exponentielles indépendantes, et de distributions de Pareto indépendantes. Ces résultats sont sous formes de solutions semi-explicites, dans le cas général et explicites dans le cas asymptotique, ils constituent une généralisation des formules présentées récemment par Cénac et al. (2014) dans [16], en dimension deux.

Nous terminons cette étude par une série de simulations utilisant la méthode d'optimisation numérique présentée en détails dans [17], et fondée sur une version de type *Kiefer-Wolfowitz* de l'algorithme de *descente en miroir* stochastique. Nous comparons les résultats obtenus avec les solutions théoriques, et nous analysons les effets de la structure de dépendance, du niveau de la prime et du capital à allouer sur la composition de l'allocation optimale et sa stabilité dans le temps.

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à trois applications actuarielles de la technique d'allocation par minimisation du risque multivarié. Nous présentons notre proposition pour l'évaluation de la solvabilité des branches des groupes d'assurance dans le cadre de l'approche ORSA. Nous proposons aussi une nouvelle approche pour la modélisation du risque systémique basée sur les techniques de l'allocation du capital, et nous terminons par une application dans le cadre d'un problème particulier de réassurance optimale.

Le périmètre du travail de la recherche et du développement dans le métier de l'actuaire connaîtra un élargissement profond sous Solvabilité 2. Ce travail constitue une tentative d'application de l'approche multivariée dans l'évaluation de risque, et de développement d'une méthode de gestion du capital réglementaire en fonction du profil des risques encourus à l'aide des techniques de la modélisation de la dépendance.

1 L'allocation du capital sous solvabilité 2

1.1 Le capital économique sous Solvabilité 2

L'activité des assureurs et réassureurs est caractérisée par la présence permanente et quotidienne de risques de plusieurs natures. La gestion du risque se positionne au cœur de leur métier. Face à cette caractéristique qui distingue le secteur des assurances, les régulateurs ont développé un ensemble dense de règles, dans l'objectif de s'assurer de la maîtrise du risque au niveau de tous les assureurs. Dans cette optique, les normes de Solvabilité 2 imposent aux assureurs la constitution d'un capital économique qui doit être disponible pour couvrir les risques de chocs conjoncturels. Le calcul du capital économique réglementaire peut être fait à l'aide de différentes méthodes, il est basé sur un exercice d'agrégation des risques, et nécessite un choix de mesure de risque.

1.1.1 Aspects majeurs du dispositif Solvabilité 2

Les normes solvabilité 2 (Solvency 2 en anglais) représentent une réforme européenne du cadre de la réglementation prudentielle appliquée au secteur de l'assurance. Sa date de mise en place est fixée pour le premier Janvier 2016, et sa transposition effective est mise en œuvre progressivement depuis 2014 pour une grande partie des assureurs européens. Elles ont été adoptées depuis le 22 mai 2009 par le Parlement Européen, mais la date de leur introduction officielle a connu plusieurs reports, ces décalages ont laissé le temps aux acteurs du secteur pour se préparer aux exigences du nouveau système de solvabilité.

L'objectif principal de solvabilité 2 est d'encourager une bonne gestion de risque basée sur une évaluation raisonnable des risques de différentes natures. Sa grande nouveauté est l'adaptation des exigences réglementaires aux risques qu'encourent les assureurs dans l'exercice de leur activité.

Dans la lignée de Bâle 2 pour les banques, cette réforme est construite avec une architecture en trois piliers :

Pilier 1 : Les exigences quantitatives

L'objectif de ce premier pilier est la définition des règles quantitatives dans trois niveaux :

- Les provisions techniques avec un objectif d'harmonisation de leur valorisation.
- L'exigence de capital. Solvabilité 2 introduit deux niveaux de capital réglementaire :
 - **Le minimum de capital requis** ou **MCR** (en anglais, Minimum Capital Requirement). Il est calculé suivant des règles simples et identiques pour toutes les compagnies d'assurance.
 - **Le capital de solvabilité requis** ou **SCR** (en anglais, Solvency Capital Requirement). Il s'agit d'un second niveau du capital réglementaire. Le choix de la méthode de son calcul est laissé aux assureurs. Ils peuvent utiliser la formule standard, développée par le régulateur et basée sur des modules de risques définis avec des matrices de corrélations spécifiées, ou opter pour le développement d'un modèle interne capable de refléter le profil interne de risque de l'assureur.
- La définition et les règles d'éligibilité des éléments de capital.

Le premier pilier s'attache donc à la protection de l'assureur à travers la définition d'un niveau minimal de solvabilité basé sur la suffisance des provisions techniques

pour faire face au risque de la ruine. Il présente aussi une sorte d'harmonisation des techniques de calcul des exigences de solvabilité au niveau européen.

Pilier 2 : Les exigences en matière d'organisation et de gouvernance des assureurs

Le deuxième pilier de solvabilité 2 cible le renforcement et l'harmonisation des activités de contrôle et de gouvernance interne. En effet, ce pilier assure l'homogénéisation des activités de surveillance entre les différentes autorités de contrôle telle que l'ACAM¹ ou le CEIOPS², mais aussi au niveau interne des entreprises elles-mêmes.

Au niveau interne des organismes d'assurance, le pilier 2 de solvabilité 2 renforce les mécanismes du contrôle et la politique de gestion interne de risque. Il permet aux entreprises de construire un système propre d'évaluation permanente des risques encourus et de vérification de leur état de solvabilité en continu. Il injecte dans les pratiques des assureurs une culture solide de risque, qui touche tout le processus de leur métier.

Le pilier 2 facilite le travail des autorités de contrôle, en leur offrant un regard global sur l'état instantané du risque au niveau de chaque assureur. Elles peuvent ainsi repérer plus aisément les entreprises qui sont en difficulté en matière de respect des exigences, ou de méthodologie de gestion des risques, et demander par la suite des ajustements sous forme d'exigence de capital ou changement de pratiques.

L'approche ORSA constitue l'apport fondamental du second pilier, nous présentons ce mécanisme dans la section 1.3.

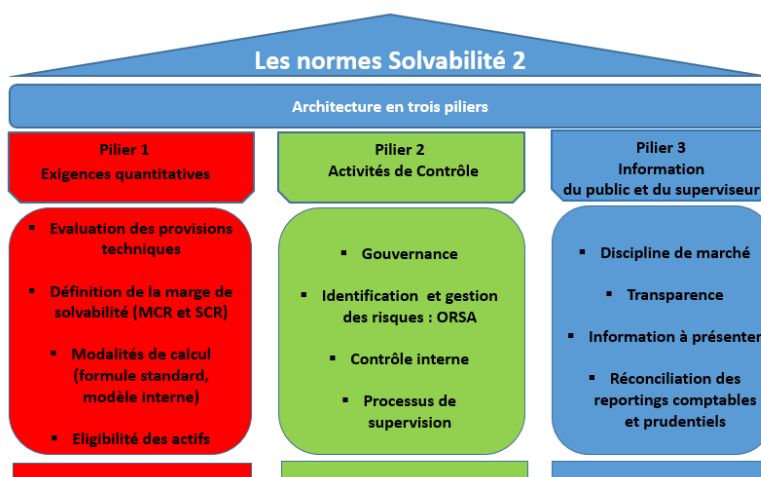


FIGURE 1 – L'architecture en trois piliers de Solvabilité 2

Pilier 3 : Les exigences en matière d'informations prudentielles et de publication.

Le troisième pilier présente les exigences en matière de reporting. Il traite l'ensemble des informations qu'une entreprise d'assurance doit publier :

- Information publique dans le cadre de la discipline de marché,
- Dossier annuel contenant les informations destinées aux superviseurs,
- Règles d'information des assurés.

Le principal objectif du pilier 3 est la garantie d'une transparence d'information et du respect de la discipline de marché. L'information étant très importante dans

1. L'Autorité de contrôle des assurances et des mutuelles

2. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors.

l'activité de l'assurance, pour les assurés ainsi que pour les autorités de contrôle. Ce pilier fixe des exigences de reporting très strictes, notamment au niveau du dossier annuel adressé aux superviseurs.

Seul le contrôle des groupes d'assurance est traité en dehors de ces trois piliers. Il constitue un quatrième aspect qui dépasse la directive en vigueur sur la surveillance complémentaire des organismes d'assurance faisant partie d'un groupe d'assurance. Solvabilité 2 intègre notamment les dispositions sur les collèges de contrôleurs d'assurance du protocole dit d'Helsinki.

Ces nouvelles normes introduisent des changements profonds par rapport aux règles de Solvabilité 1. En effet, Solvabilité 2 repose dans sa conception sur des principes plutôt que des règles. Elle vise à instaurer une concurrence juste et équitable, à harmoniser les politiques et les pratiques de contrôle, à établir des normes prudentielles prenant en compte la totalité des risques encourus par les assureurs, et à unifier le système de reporting au niveau européen.

La directive Solvabilité 2 laisse donc une très grande liberté d'appréciation aux compagnies d'assurance en matière de :

- L'évaluation des provisions techniques ;
- Le calcul des exigences de capital (**SCR** et **MCR**), qui seront déterminées en fonction du choix de l'organisme d'assurance, par la formule standard ou via un modèle interne après sa validation par l'autorité de contrôle. Cette dernière possibilité, constitue une nouveauté dans le secteur de l'assurance et ses normes de supervision ;
- La politique de placement. Ces derniers devront être effectués selon le principe de la " *personne prudente* " (**prudent person principle**).

Enfin Solvabilité 2 généralise l'évaluation à la " *juste valeur* " (**fair value**) pour l'ensemble des éléments du bilan.

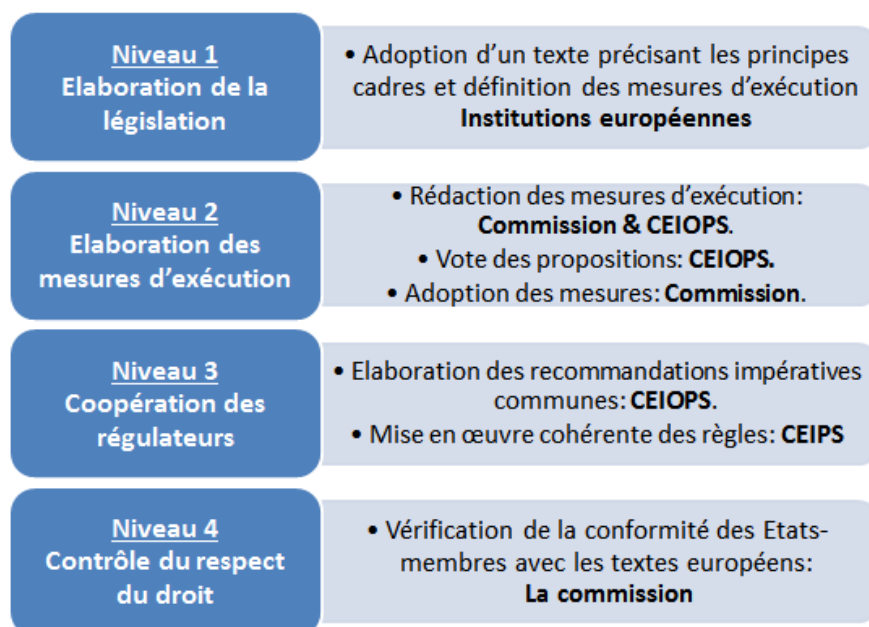


FIGURE 2 – Procédure Lamfalussy de mise en place du dispositif Solvabilité 2

La directive Solvabilité 2 [1] a été adoptée dans le cadre de la procédure dite **Lamfalussy**, présentée dans la figure 2, qui répartit la réglementation en principes (directive

dite “de niveau 1”) complétés par des mesures de mise en œuvre (règlement dit “de niveau 2” et par des standards techniques “de niveau 3” adoptés respectivement par la Commission et CEIOPS).

Les études quantitatives d’impact (QIS) ont été lancées par le CEIOPS pour répondre aux questions plus techniques soulevées par le projet de Directive Européenne. Nous donnons dans la figure 3 quelques éléments sur la mise en place de ces études. Sont notamment présentés dans ces études les chocs et les matrices de corrélation proposées par la Formule Standard afin de calculer le SCR global des compagnies d’assurance.

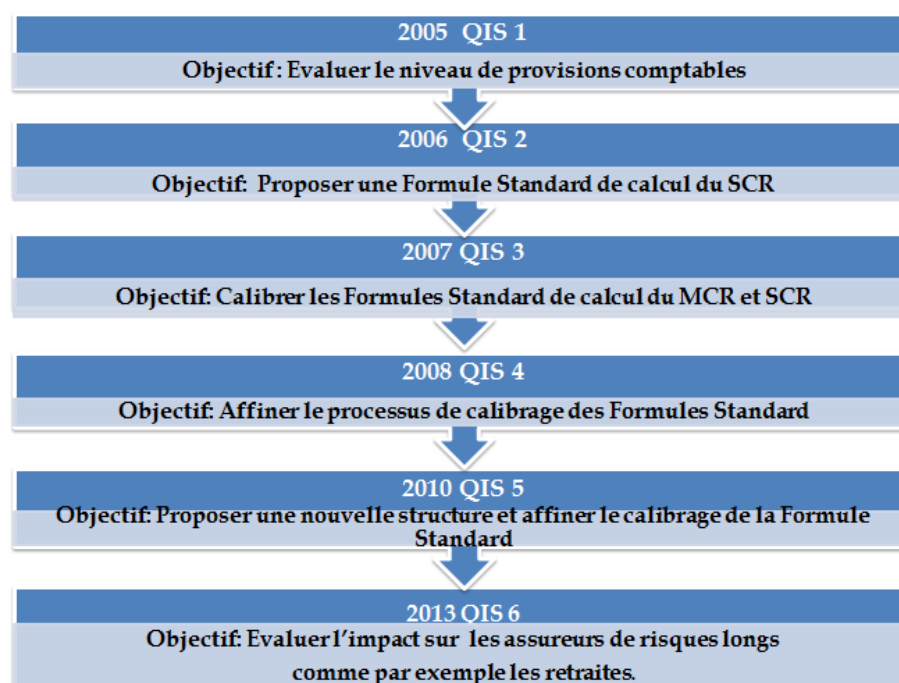


FIGURE 3 – Les études quantitatives d’impact (QIS)

La Directive-cadre du projet Solvabilité 2 a été affinée par la Directive **Omnibus 2**, votée le 11 mars 2014, et qui intègre les modifications apportées par le traité de Lisbonne et la création de l’**EIOPA**³. L’ensemble des changements apportés par Omnibus 2 sont décrits dans un focus dédié de l’ACPR [9].

L’architecture réglementaire de Solvabilité 2, modifiée par Omnibus 2, se décompose ainsi :

- Le niveau 1 correspond à la Directive 2009/138/CE [1], modifiée par Omnibus 2. Le cœur des modifications apportées à la Directive 2009/138/CE concerne le train de mesures connu sous le nom de paquet “*branches longues*”, Omnibus 2 a revu la valorisation économique du bilan afin de diminuer le montant des provisions techniques. Elle a modifié notamment les règles du premier pilier relatives à la courbe des taux ;
- Le niveau 2 correspond à des actes délégués d’application directe. Un des premiers objectifs d’Omnibus 2 était de clarifier le pouvoir réglementaire d’EIOPA et de préciser les domaines de compétence de la Commission Européenne. Ainsi Omnibus liste les sujets qui font partie des actes délégués, rédigés par la Commission Européenne, tels que la définition des paramètres de la Formule Standard, et ceux

3. Acronyme anglais pour Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles

qui peuvent être traités sous forme de standards techniques réglementaires **RTS**⁴ rédigés par EIOPA, par exemple les états de reporting de Solvabilité 2;

- Le niveau 3 correspond enfin à des standards techniques d'exécution **ITS**⁵. Omnibus 2 liste l'intégralité des ITS qui rentrent dans la compétence d'EIOPA.

Omnibus 2 contient aussi une mesure transitoire dans l'application de pouvoirs réglementaires, sous le nom *sunrise clause*, et qui autorise la Commission Européenne à rédiger elle-même les RTS entrants dans les pouvoirs d'EIOPA pendant 2 ans après la mise en application de Solvabilité 2, prévue pour Janvier 2016.

EIOPA, par son règlement, possède un pouvoir de médiation contraignante, applicable dans le cadre du contrôle des groupes. Omnibus 2 spécifie aussi les cas de recours à cette médiation contraignante.

1.1.2 Le bilan économique dans Solvabilité 2

Parmi les changements radicaux apportés par les normes Solvabilité 2, la modification de l'approche d'élaboration du bilan économique. Dans solvabilité 1, le bilan économique est basé sur une vision totalement comptable, le bilan de solvabilité 2 est par contre purement économique. En effet, les actifs sont inscrits au bilan selon leurs valeurs du marché, et les provisions techniques sont déterminés selon une vision *Best Estimate*, contrairement aux provisions techniques de Solvabilité 1 qui sont calculées à partir d'hypothèses prudentes.

La *marge pour risque* s'ajoute au *Best Estimate* des passifs, permettant ainsi d'intégrer une marge de prudence dans le calcul des *provisions techniques*, liée au fait que les risques techniques ne sont pas échangeables sur un marché complet et liquide.

La figure suivante illustre les différences entre les bilans Solvabilité 1 et Solvabilité 2 :

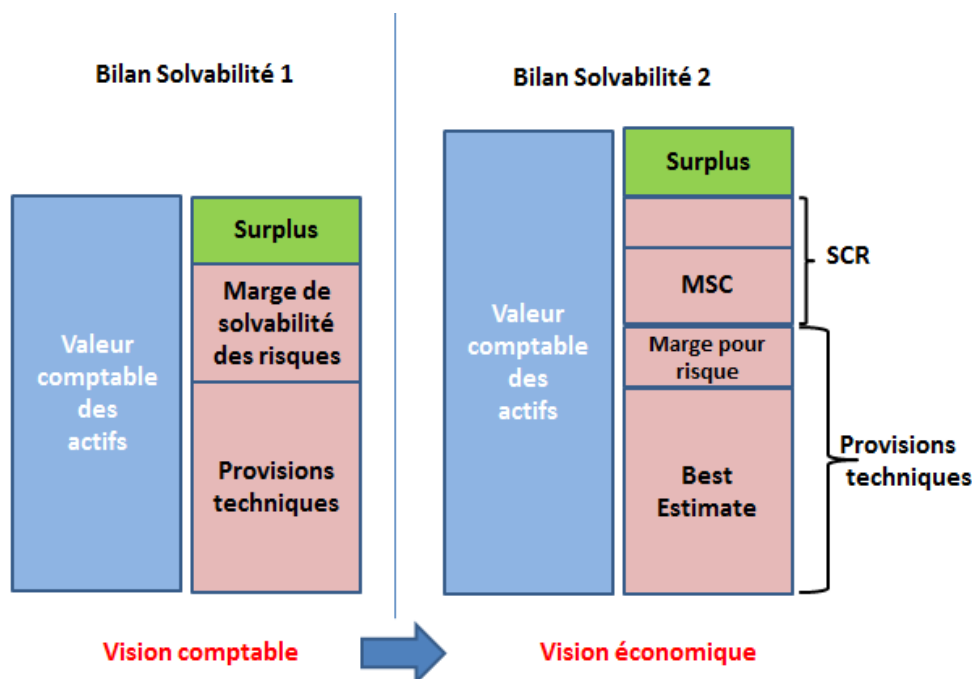


FIGURE 4 – Évaluation des actifs et passifs dans Solvabilité 2

4. Regulatory Technical Standards

5. Implementing Technical Standards

Sophie Decupère, dans son mémoire d'actuaire [18], a expliqué en détails la construction du bilan économique Solvabilité 2, notamment, le mode de valorisations des provisions techniques et des fonds propres économiques.

1.1.3 Le calcul du capital économique

Le cœur de la réforme solvabilité 2 peut être considéré son pilier 1, notamment avec son introduction des capitaux réglementaires MCR et SCR qui estiment les besoins de solvabilités des assureurs. Le SCR prend en compte les risques réels encourus par l'assureur qui a le choix pour le calculer, entre l'utilisation de la Formule Standard ou un modèle interne. Le SCR représente le montant des fonds propres à immobiliser pour faire face à tout risque de ruine. Dans la suite de ce mémoire, nous appellerons indifféremment **capital économique** ce capital cible.

Le but central de la réforme Solvabilité 2 est l'amélioration de la protection des assurés, en s'assurant que les assureurs sont capables de respecter leurs engagements de long terme pris auprès de leurs clients. La faillite d'un assureur peut prendre plusieurs formes, comme le rappel des primes, le transfert du portefeuille ou encore le retrait d'agrément. Les cas d'Europa Vie en 1997 en France, et d'AIG en 2008 aux USA illustrent bien la gravité des dégâts d'une telle situation et l'importance du renforcement de la couverture contre l'insolvabilité. Cette situation peut être définie comme une session de paiements due à l'incapacité de l'actif disponible de faire face au passif exigible. Cette condition de solvabilité peut être représentée par l'équation suivante :

$$\text{Fonds Propre} = \text{Actif} - \text{Passif} > 0$$

Dans le secteur des assurances, cette condition de solvabilité est définie de manière plus restrictive :

- **Sous Solvabilité 1** : $\text{Fonds Propre} = \text{Actif} - \text{Passif} > MS$
- **Sous Solvabilité 2** : $\text{Fonds Propre} = \text{Actif} - \text{Passif} > SCR$

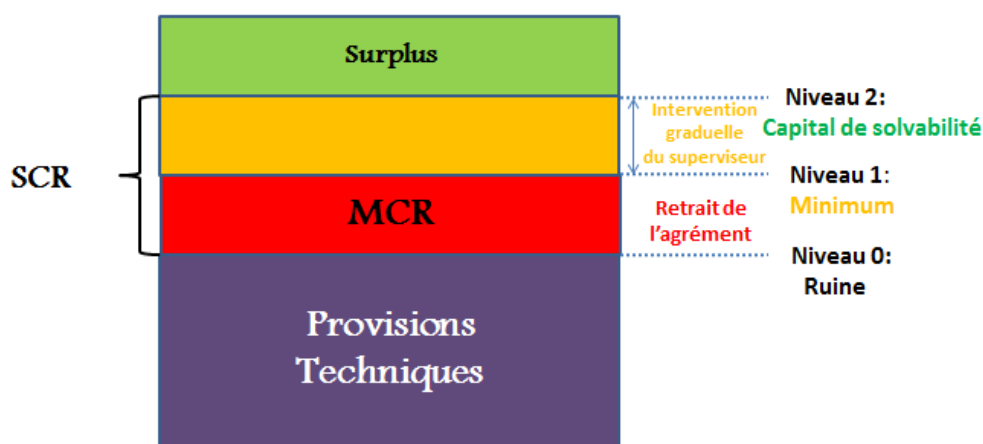


FIGURE 5 – Évaluation du capital dans Solvabilité 2

L'équation de solvabilité va donc être modifiée en fonction de tout changement qu'un risque peut créer au niveau des actifs et des passifs. L'activité des assureurs étant basée sur une inversion du cycle de production et une gestion de risques aléatoires, sa solvabilité est plus exigeante par rapport à la notion de la faillite dans d'autres secteurs.

Les causes de la ruine pour une compagnie d'assurance peuvent être de différentes natures, nous nous basons sur l'historique des expériences d'insolvabilité du secteur pour en citer :

- La mauvaise estimation des provisions techniques : *Risque de primes, Risque de réserves, Risque de modèles* ;
- La mauvaise gestion du risque de souscription : *Risque primes / réserves* ;
- La mauvaise gestion des actifs et inadéquation au passif : *Risque de marché* ;
- Le mauvais choix du programme de réassurance : *Risque catastrophe / Risque de contrepartie* ;
- La défaillance des systèmes informatiques : *Risque opérationnel*.

Sous Solvabilité 2, les compagnies d'assurance doivent mesurer leurs risques pour faire face à une insolvabilité à un horizon fixé à un an, et avec une probabilité de 99,5%. Elles sont amenées à déterminer un capital économique ajusté à la composition de leurs portefeuilles de risques afin de répondre à cette exigence réglementaire.

La détermination du capital économique passe donc par la valorisation du bilan économiques de la compagnie entre deux dates $t = 0$ et $t = 1$, cela peut se traduire mathématiquement par l'équation suivante :

$$\text{Capital Economique} = FP(0) - \delta_{1,0} VaR_{0.5\%}\{FP(1)\},$$

où $\delta_{t,0}$ désigne le facteur d'actualisation entre la date t et l'instant initial et $FP(t)$ représente le montant des Fonds Propres économiques en t .

La quantité $VaR_{0.5\%}\{FP(1)\}$ représente le quantile à 0,5% de la variable $FP(1)$ qui correspond à la **Value at Risk** (VaR) à 0,5% de cette même variable.

Solvabilité 2 mesure ainsi les risques par leur impact réel sur le bilan de l'assureur en *full fair value*, c'est-à-dire par leur impact sur les actifs et les passifs économiques.

Sous Solvabilité 2, les compagnies d'assurance ont le choix entre deux approches de calcul de leur capital économique, l'application de la **Formule Standard** fournie pour le **CEIOPS**, reposant sur l'agrégation de capitaux économiques réglementaires par famille et sous famille de risques à l'aide de matrices de corrélation, ou le développement d'un modèle interne reflétant le profil interne du risque de l'assureur.

Le choix de l'utilisation d'un modèle interne est logiquement plus avantageux à la compagnie d'assurance, le niveau de son capital sera en principe inférieur à celui de la formule standard, puisque le modèle interne prend en compte tous les risques encourus par la compagnie et utilise des structures de dépendance plus adaptées à la réalité de ses activités. Les différentes stratégies de couverture des risques, comme la réassurance ou la titrisation, sont aussi prise en compte dans le calcul du SCR.

La formule standard : Développée par le CEIOPS dans l'objectif de permettre à tous les assureurs de calculer leurs capitaux économiques réglementaires en tenant compte des risques propres à l'activité d'assurance, et sans avoir besoin de développer des modèles internes, elle représente une approximation raisonnable du risque réel de chaque compagnie d'assurance, et reflète le profil moyen de risque pour les entreprises du secteur.

Dans le cas du choix de l'utilisation d'un modèle interne pour le calcul du capital réglementaire, l'assureur est obligé de calculer aussi son capital par cette formule

afin de le comparer avec les résultats de son modèle, d'où l'importance de sa maîtrise par tous les acteurs du secteur.

Le modèle interne : Par convention, nous distinguons les deux structures de modèle interne suivantes :

- **La Formule Standard Entity Specific.** L'idée de ces modèles est l'utilisation de l'approche chocs/facteurs de formule standard, mais avec des niveaux de chocs différents et des structures de corrélations modifiées. On peut aussi construire ce genre de modèle par des changements de métrique ou de l'architecture des risques proposée par la formule standard.
- **Le Modèle Interne Partiel.** Cette catégorie de modèles internes, repose sur l'utilisation simultanée de la méthodologie de la formule standard, et des techniques de simulations. On peut qualifier un modèle interne de partiel dès que des risques significatifs ne sont pas modélisés. Les projections de ces risques permettent d'obtenir des distributions de leurs fonds propres économiques, alors que pour l'obtention de ceux des autres est faite à travers l'application de la méthodologie de la formule standard.

1.1.4 La formule standard dans solvabilité 2

L'application de la formule standard représente la méthode utilisée par défaut pour la détermination du capital réglementaire, il est donc important de comprendre son principe et son fonctionnement. Toutes les compagnies sont obligées de calculer le SCR par application de cette formule, même dans le cas de l'utilisation d'un modèle interne, afin de comparer les résultats des deux méthodes. C'est d'ailleurs la seule règle imposée par le dispositif Solvabilité 2. Dans cette partie nous présentons brièvement l'approche de cette formule et sa méthodologie de calcul du SCR.

La structure et la formule du SCR : Le SCR se calcule comme étant une somme de tous les risques pris par les sociétés d'assurance. Solvabilité 2 le définit par :

$$\text{SCR} = \text{SCR de base (BSCR)} + \text{SCR opérationnel} - \text{Ajustements}$$

avec :

- **SCR de base (BSCR) :** Le capital de solvabilité requis de base.
- **SCR opérationnel :** Le chargement en capital au titre du risque opérationnel.
- **Ajustements :** La prise en compte des pertes futures qui seront compensées par la réduction des impôts différés à payer et par la réduction de la participation aux bénéfices futurs à distribuer aux assurés.

Le calcul de BSCR se base sur une approche modulaire qui prend en compte l'ensemble des risques liés à l'activité de l'assureur à l'exception du risque opérationnel, répartis dans des modules et sous modules. Cette segmentation de risques est représentées dans la figure 6, elle représente tous les risques dans 6 grandes familles :

- **Le risque de marché (SCR_{mkt}) :** Le risque de marché représente l'impact des variables d'ordre financier, telles que la volatilités des actifs, les taux d'intérêts, et les taux de change, sur la valeur des actifs et des passifs de la compagnie. Cette famille regroupe l'ensemble de risques de nature financière.
- **Le risque de souscription Santé (SCR_{health}) :** Il représente le risque de souscription pour toutes les garanties santé et accidents de travail. Il se divise en trois sous-familles : accidents du travail, santé court terme et santé à long terme.

- **Le risque de défaut (SCR_{def})** : Il s'agit de risque de contrepartie. Il mesure le risque pour la compagnie d'assurance dans la position de créancier de perdre définitivement sa créance dans la mesure où le débiteur ne peut pas, même en liquidant l'ensemble de ses avoirs, rembourser la totalité de ses engagements.
- **Le risque de souscription Vie (SCR_{life})** : Il couvre la totalité des risques engendrés par des sous-tarifications des contrats à la souscription ainsi qu'au rachat, il englobe les risques de primes, de mortalité, de longévité, de rachat et de modèle.
- **Le risque de souscription Non vie (SCR_{nl})** : Il regroupe l'ensemble des risques actuariels liés au contrats d'assurance. Il reflète l'aspect aléatoire au niveau des résultats de l'assureur, par exemples, le nombre et les montants de sinistres, les taux de primes, et les délais de liquidations des sinistres.
- **Le risque d'actifs intangibles (SCR_{intang})** : Introduit par la QIS 5, il couvre les actifs immatériels qui ne sont pas toujours comptabilisables et les actifs incorporels qui sont des actifs immatériels comptabilisables car identifiables par le prix d'acquisition, comme les goodwill, les licences et les brevets.

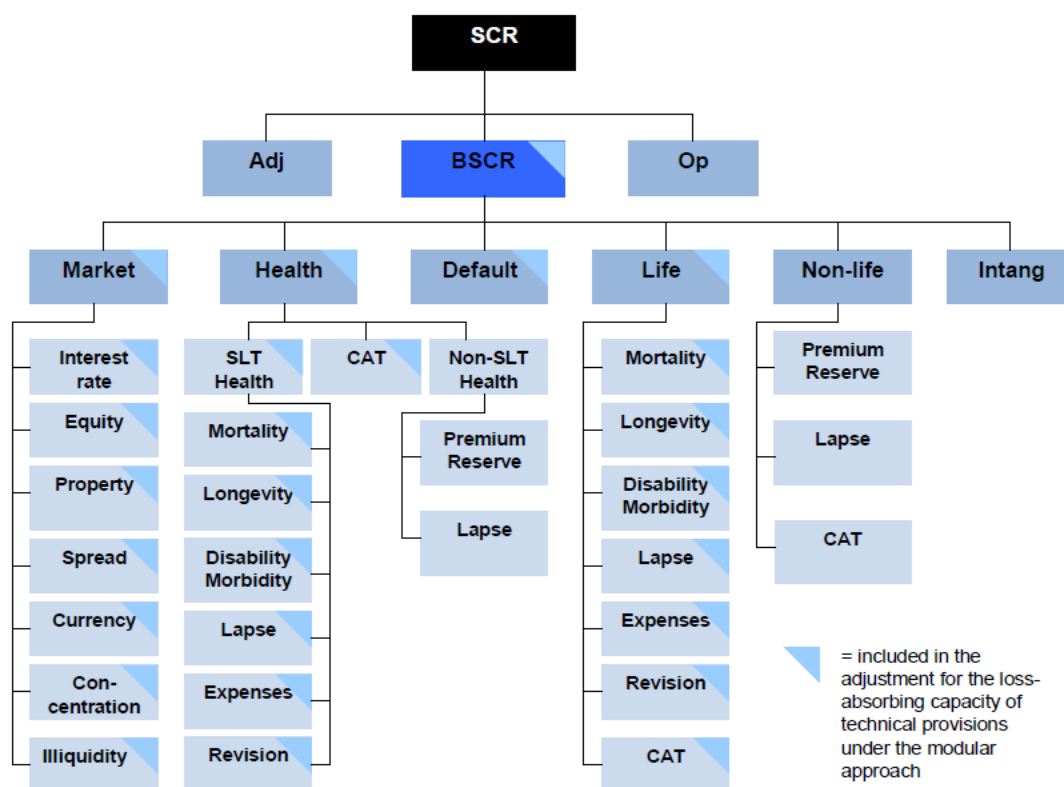


FIGURE 6 – Formule Standard : Segmentation des risques.

Le BSCR intègre dans son calcul l'ensemble de ces modules agrégés comme suit :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangibles}$$

où :

- SCR_i représente le SCR du $i^{\text{ème}}$ module de risque (sauf le SCR du risque intangible) ;

- $Corr_{ij} = Corr(i, j)$ est le coefficient de la matrice de corrélation entre les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ modules de risque.

La matrice de corrélation utilisée pour l'agrégation des risques dans l'approche formule standard est donnée par le tableau 1.

$Corr(i, j)$	SCR_{life}	SCR_{nl}	SCR_{health}	SCR_{mkt}	SCR_{def}
SCR_{life}	1				
SCR_{nl}	0	1			
SCR_{health}	0.25	0.25	1		
SCR_{mkt}	0.25	0.25	0.25	1	
SCR_{def}	0.25	0.5	0.25	0.25	1

TABLE 1 – La matrice de corrélation de le formule standard.

Un coefficient de corrélation entre modules de risque peut naturellement être :

- Nul si les risques sont indépendants (ex : vie et non-vie).
- Positif si les risques sont corrélés positivement (ex : actions et immobilier).
- Négatif si les risques sont corrélés négativement (ex : mortalité et longévité).

Les 6 modules de risques sont eux-mêmes constitués de sous-modules de risques. Le SCR global a donc une structure complexe qui a la forme modulaire présentée dans la figure 6.

Application de la formule standard pour le calcul du BSCR : L'approche formule standard est basée sur des principes de calcul fixés par les normes Solvabilité 2. Les hypothèses de calcul sont aussi précisées par la Directive. Cette méthodologie nécessite des modèles de valorisation, comme le modèle **ALM**⁶ pour le calcul du SCR vie. Ainsi, le SCR de chaque module de risque est calculé, soit à l'aide d'une formule fermée, ou en utilisant des stress tests prédéfinis. Cette dernière méthode consiste à appliquer des chocs instantanés et indépendants simultanément sur les actifs et les passifs, et d'en déduire le SCR représenté par la variation des fonds propres économiques engendrée par ces scénarios.

Le régulateur a fixé les chocs à appliquer pour le calcul des SCR des différents modules, d'une façon à garantir la solvabilité de l'assureur à l'horizon d'un an, avec une probabilité de 0.995, avec un capital économique égal au SCR de la formule standard.

Afin d'illustrer cette approche de chocs, nous présentons le traitement formule standard du module de risque de souscription Vie noté SCR_{life} , constitué des 7 sous-modules suivants :

Le risque de mortalité : Il couvre le risque de décès des assurés plus rapidement que les prévisions des hypothèses utilisées pour déterminer le *Best Estimate*, il concerne tous les engagements dont l'augmentation de la mortalité conduira à une augmentation des provisions techniques et qui engendrent un paiement de prestations supérieures aux provisions techniques en cas de décès.

- Scénario choqué pour le calcul du SCR mortalité : hausse (permanente) de 15% des taux de mortalité à tout âge.

Le risque de longévité : Ce risque représente l'inverse du risque de mortalité, il s'agit des cas où la durée de vie dépasse les estimations. Il concerne les contrats dont la

baisse de la mortalité conduira à une augmentation des engagements, comme c'est le cas pour les contrats de retraite par exemple.

- Scénario choqué pour le calcul du SCR longévité : baisse (permanente) de 20% des taux de mortalité à tout âge.

Le risque d'invalidité : Il s'agit du risque d'augmentation des engagements suite à des changements au niveau des taux d'invalidité des assurés.

- Scénario choqué pour le calcul du SCR invalidité : hausse de 35% des taux d'invalidité à tout âge pour la première année, puis de 25% de ce même taux pour les années suivantes + baisse simultanée et permanente de 20% du taux de guérison ;

Le risque de rachat vie : Ce sous-module de risque concerne les cas de pertes liés à l'exercice des options de rachat en assurance vie, par exemple dans le cas des contrats garantie plancher. Ces rachats peuvent engendrer des écarts importants par rapport au *Best Estimate*. Il couvre les risques de sortie des assurés, de rachat partiel, d'exercice d'option, et d'extension de garanties. Le calcul de son SCR prend en compte les deux sens d'évolution des rachats.

- Scénario choqué pour le calcul du SCR rachat vie : Le résultat de ce module est le maximum de ces 3 calculs :
 - Hausse de 50% du taux de rachat ;
 - Baisse de 50% du taux de rachat ;
 - Une composante de rachat massif catastrophique.

Le risque de frais de gestion : Il s'agit du risque de sur-inflation qui peut impacter les frais de gestion.

- Scénario choqué pour le calcul du SCR : hausse de 10% des frais de gestion et sur-inflation des frais de 1% par an.

Le risque de révision : Il concerne le risque d'augmentation des rentes suite à l'état de santé de l'assuré, ou encore à un changement de la législation.

- Scénario choqué pour le calcul du SCR révision : hausse de 3% des rentes annuelles jusqu'à extinction des garanties.

Le risque de catastrophe : Il couvre les cas des contrats dont les provisions techniques sont très sensibles à la hausse de mortalité.

- Scénario choqué pour le calcul du SCR catastrophe : hausse de 1,5% des taux de mortalité et des taux d'invalidité.

La matrice de corrélation entre les 7 sous modules de risques est donnée par le tableau 2.

$CorrLife_{r,c}$	mortalité	longévité	invalidité	rachat vie	frais	révision	catastrophe
mortalité	1						
longévité	-0.25	1					
invalidité	0.25	0	1				
rachat vie	0	0.25	0	1			
frais	0.25	0.25	0.5	0.5	1		
révision	0	0.25	0	0	0.5	1	
catastrophe	0.25	0	0.25	0.25	0.25	0	1

TABLE 2 – Formule standard : La matrice de corrélation du module SCR_{life} .

Le SCR du module est ensuite calculé de la même façon que le BSCR. Les sous-modules sont agrégés à l'aide de la matrice de corrélation, et selon la formule suivante :

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{r,c} Corr_{Life_r,c} \times SCR_{Life_r} \times SCR_{Life_c}}$$

où,

- SCR_{Life_r} désigne le SCR du sous-module de risque $Life_r$;
- et $Corr_{Life_r,c}$ est le coefficient de corrélation entre les sous-modules de risque $Life_r$ et $Life_c$.

Le calcul du SCR du risque opérationnel : Le risque opérationnel est traité séparément des autres modules de risques de la formule standard. Il couvre les risques de pertes liées à des défaillances de nature humaine où des systèmes, il comprend aussi les risques engendrés par des événements externes et les risques juridiques. Les risques liés à la stratégie de la compagnie et à sa réputation ne sont pas traités dans le cadre du risque opérationnel. Le capital réglementaire pour couvrir le risque opérationnel est calculé d'une façon forfaitaire, tout en restant plafonné à 30% du BSCR.

Le SCR du risque opérationnel SCR_{op} est calculé par la formule suivante :

$$SCR_{op} = \min(30\% \cdot BSCR; \max(OP_{premiums}; OP_{provisions})) + 25\% \cdot FG_{uc}$$

où ,

- $OP_{premiums} = 4\%$ des primes Vie hors UC⁷ + 3% des primes Non vie.
- $OP_{provisions} = 4,5\%$ des provisions Vie hors UC + 3% des provisions Non vie.
- et FG_{uc} représente le montant des frais de gestions annuels relatifs à l'activité en unité de compte, bruts de réassurance.

Le bénéfice de la diversification est donc visible sur deux niveaux, d'abord entre les sous modules des risques, puis entre les modules. La formule standard avec ses matrices de corrélations prend bien en compte ce gain dans l'agrégation des risques et donc dans le calcul des capitaux réglementaires. On peut aussi constater un troisième niveau de diversification dans le cas des groupes, entre les différentes lignes d'affaires ou branches d'activités. Dans cette optique, le développement de nouvelles activités peut être un choix stratégique pour les compagnies d'assurance, le besoin en capital sera dans ce cas limité grâce au gain engendré par la diversification.

La problématique qui se pose après le calcul du besoin en capital sera naturellement son allocation entre les différentes activités. Le gain de la diversification impose la variation des activités de la compagnie comme stratégie de gestion et limitation des risques, ce gain sera aussi alloué entre les lignes d'affaires pour leur développement ou consacré au lancement de nouvelles activités. Cela nous amène naturellement à évoquer la question de l'allocation du capital économique et des gains de la diversification.

1.2 De l'agrégation des risques à l'allocation du capital

Une fois le capital économique est calculé, il convient de le répartir entre les différentes activités ou branches dans le cas des groupes. La détermination du capital économique

7. unités de compte

se construit avec une vision globale du risque, basée sur une approche *bottom-up* tel que c'est le cas dans la formule standard, qui propose l'étude de chaque risque séparément au niveau local, puis l'agrégation de l'ensemble des risques à l'aide des matrices de corrélations entre les modules et les sous-modules de risques. L'allocation de ce capital nécessite une approche *top-down* pour identifier le poids réel de la participation de chaque risque dans le risque global. Il s'agit dans un sens de déterminer des seuils locaux de solvabilité qui prennent en compte à la fois le comportement marginal de l'activité et sa structure de dépendance avec les autres risques.

1.2.1 Problématique de l'allocation

Afin de formaliser la problématique de l'allocation du capital, qui représente finalement l'opération complémentaire de l'agrégation des risques, on considère un portefeuille de n risques, qui représentent les coûts ou les pertes d'une compagnie d'assurance. Ces risques peuvent représenter les pertes des différentes lignes d'affaires ou branches. La même modélisation peut être généralisée pour une problématique d'allocation de fonds pour un portefeuille financier ou portefeuille de contrats. Nous représentons ces risques à l'aide d'un vecteur de variables aléatoires (X_1, \dots, X_n) .

Le calcul du capital économique nécessite une agrégation des risques après avoir déterminé leur structure de dépendance. Le risque global peut être représenté par la somme $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Pour une mesure de risque ρ choisie, le capital économique est calculé par $\rho(S)$.

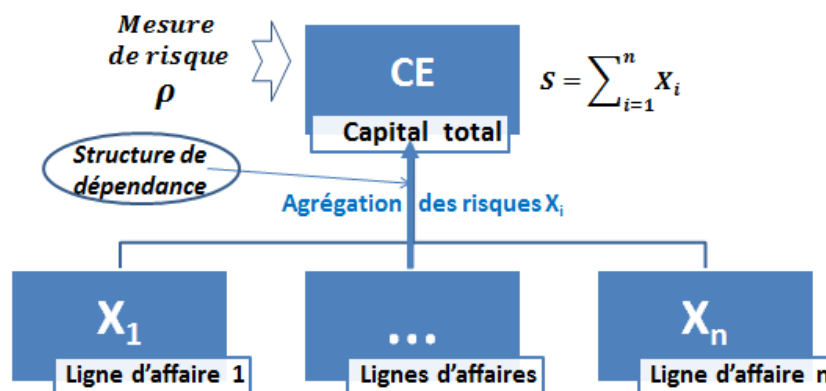


FIGURE 7 – L'agrégation des risques et le calcul du capital économique

L'allocation du capital est l'opération qui consiste à distribuer ce montant $\rho(S) = \rho(\sum_{i=1}^n X_i)$ entre les différents risques $X_i, (i = 1, \dots, n)$, et donc la détermination de la participation de chaque ligne d'affaire dans l'immobilisation des capitaux propres de solvabilité.

Nous essayons dans la figure 8 de représenter graphiquement le principe de l'allocation du capital, et sa relation avec l'opération de l'agrégation des risques.

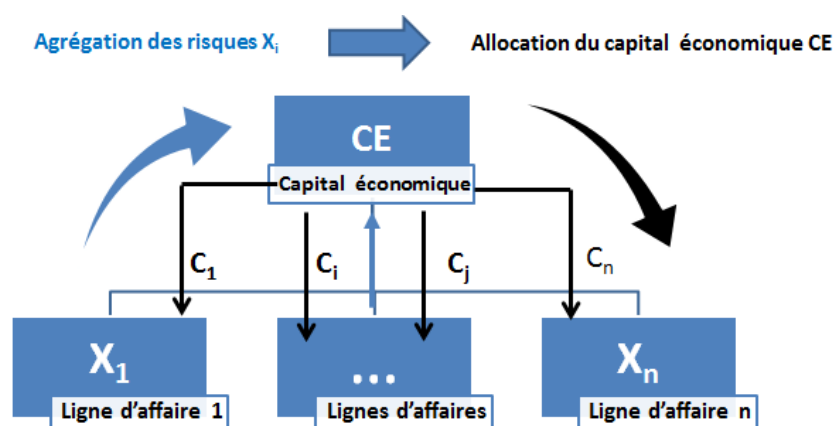


FIGURE 8 – De l'agrégation des risques à l'allocation du capital

Cette problématique touche en premier lieu les groupes d'assurances, constitués de plusieurs lignes d'affaires ou plusieurs branches, parfois implémentées dans des pays dont les règles de solvabilités sont différentes. Le cas de l'AIG⁸ et sa mise sous tutelle publique le 16 septembre 2008, suite à la crise des subprimes, est un parfait exemple pour illustrer l'importance d'une bonne allocation du capital. En effet, la filiale américaine du quatrième assureur mondial a connu des fortes difficultés alors qu'il était impossible de transférer ses capitaux des filiales européennes en bonne santé financière.

1.2.2 Méthodologie générale

Une approche simple pour traiter cette problématique serait de prendre comme poids du risque X_i , sa mesure de risque $\rho(X_i)$, et allouer à chaque ligne d'affaire $\frac{\rho(X_i)}{\sum_{k=1}^n \rho(X_k)}$ du capital économique. Cette approche qui porte le nom de la méthode proportionnelle dans la littérature est vouée à l'échec à cause de son ignorance de la présence de la dépendance entre les risques.

L'idée d'enlever le risque considéré et regarder la différence au niveau du risque global en son absence est aussi condamnée à l'échec, le risque global dépend de l'ensemble de portefeuille et des structures de dépendances qui existent entre les sous-ensembles des risques.

Nous allons présenter dans la deuxième section de ce mémoire, l'ensemble des méthodes proposées dans la littérature et présentes dans les pratiques des compagnies d'assurance, en comparant leurs propriétés de cohérence et la pertinence de leurs résultats.

Nous pouvons résumer les étapes d'une méthodologie d'allocation de capital dans le processus suivant :

- Établir la distribution multivariée des pertes $X = (X_1, \dots, X_n)$;
- Choisir une mesure de risque univariée ρ qui sera utilisée pour calculer le capital économique ;
- Calculer le capital économique $CE = \rho(S)$, on peut aussi considérer que le capital économique est le dépassement de l'espérance $CE = \rho(S) - \mathbb{E}[S]$;
- L'allocation du capital suppose la présence d'un effet de diversification positif. Dans ce cas, il faut choisir un principe d'allocation pour allouer le capital économique

8. **American International Group, Inc.** (AIG) est un des leaders mondiaux de l'assurance, classé quatrième en 2012, derrière AXA, Allianz et Generali, avec un réseau de plus de 135 pays, plus de 74 millions de clients). Basé à New York, AIG est listé sur le NYSE, ainsi qu'aux bourses de Zurich, de Paris et de Tokyo.

- entre les branches ;
- Choisir une mesure de risque pour l'allocation, qui n'est pas forcément celle utilisée pour le calcul du capital économique ;
- On définit par C_i la part de la contribution au risque allouée au risque X_i .

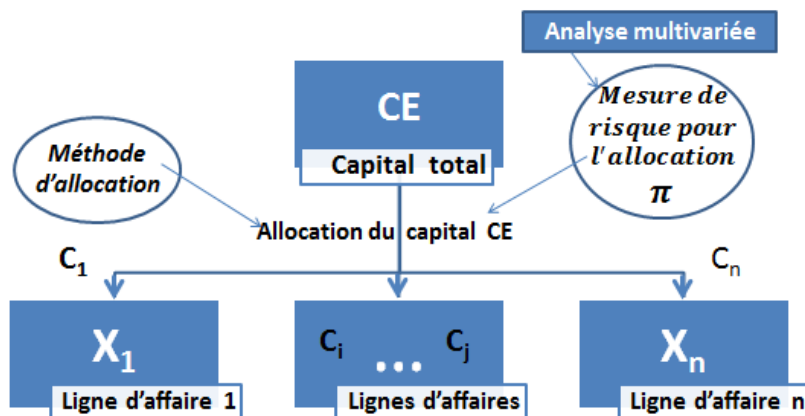


FIGURE 9 – Principe de l'allocation du capital

L'allocation doit vérifier quelques propriétés souhaitables, comme l'additivité $CE = \sum_{i=1}^n C_i$. Ces propriétés seront présentées dans la définition de l'*allocation cohérente* dans la deuxième section.

Dans la suite de ce mémoire, nous allons traiter la problématique de l'allocation du capital indépendamment du calcul du capital économique CE .

1.2.3 Règles usuelles d'allocation

En pratique, trois règles d'allocation sont les plus utilisées par les compagnies d'assurance. Elles se basent sur les mesures de risques usuelles (Covariance, VaR et TVaR), elles sont simples à implémenter, et prennent en compte la structure de dépendance.

Règle basée sur la covariance La contribution au risque X_i selon cette règle, basée sur la covariance, est donnée par :

$$C_i = \frac{Cov(X_i, S)}{Var(S)} CE,$$

avec,

$$Cov(X_i, S) = Cov(X_i, \sum_{j=1}^n X_j) = \sum_{j=1}^n Cov(X_i, X_j) = Var(X_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n Cov(X_i, X_j).$$

Cette règle est assez simple d'application, elle tient compte de la dépendance linéaire entre les risques via la covariance, et elle satisfait bien la relation $CE = \sum_{i=1}^n C_i$. En revanche, c'est méthodes devient difficilement applicable si le nombre des risques est très élevé.

Règle basée sur la VaR Nous rappelons tout d'abord la définition de la *Value at Risk* qui représente la mesure de risque la plus utilisée en pratique, notamment pour la facilité de son calcul et ses estimations, et aussi pour la performance de ses procédure de backtesting.

On appelle la *VaR* au niveau α , le quantile d'ordre α de la distribution de X :

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

Si la distribution de X est continue alors $VaR_\alpha(X) = F^{-1}(\alpha)$.

La règle d'allocation basée sur la VaR, consiste à allouer à chaque risque un capital proportionnel à son espérance quand le risque global est égal à sa VaR.

La contribution de chaque risque dans le capital économique CE est donnée par la formule suivante :

$$C_i = \frac{VaR_\alpha(X_i; S)}{VaR_\alpha(S)} CE = \frac{\mathbb{E}[X_i | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE.$$

Cette méthode vérifie la propriété de l'additivité :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_i | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE = \frac{\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE \\ &= \frac{\mathbb{E}[S | S = VaR_\alpha(S)]}{VaR_\alpha(S)} CE = CE. \end{aligned}$$

La règle basée sur le VaR prend bien en compte la structure de dépendance du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) . Elle est très utilisée en pratique, notamment dans le contexte d'un portefeuille avec un grand nombre de risque, elle permet aussi d'obtenir des expressions analytiques dans plusieurs cas.

Règle basée sur la TVaR : La mesure VaR ne donne pas d'information sur le comportement de la distribution d'une variable aléatoire X au-delà de la VaR, et donc elle n'est pas suffisante pour préciser l'ampleur de la valeur que peut prendre X si elle excède la VaR. Comme alternative qui répond à ce besoin, la mesure **Tail Value at Risque** (TVaR) avec un niveau de confiance α est définie comme la moyenne des VaR dépassant la $VaR_\alpha(X)$:

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_\mu(X) d\mu$$

La mesure TVAR fournit une meilleur indication de l'épaisseur de la queue de la distribution, elle est cohérente pour les risque continus, et elle la plus petite mesure de risque cohérente majorant la VaR.

La contribution au risque X_i selon la règle basée sur la VaR est donnée par la formule suivante :

$$C_i = \frac{TVaR_\alpha(X_i; S)}{TVaR_\alpha(S)} CE = \frac{\mathbb{E}[X_i \times \mathbb{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + \mathbb{E}[X_i \times \mathbb{1}_{S = VaR_\alpha(S)}] \beta}{(1 - \alpha) TVaR_\alpha(S)} CE$$

avec

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\mathbb{P}(S \leq VaR_\alpha(S)) - \alpha)}{\mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S))}, & \text{si } \mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S)) > 0 \text{ (S a une distribution discrète)} \\ 0, & \text{si } \mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S)) = 0 \text{ (S a une distribution continue)} \end{cases}$$

On vérifie facilement que la relation $CE = \sum_{i=1}^n C_i$ est satisfaite :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n C_i &= \sum_{i=1}^n \frac{TVaR_\alpha(X_i; S)}{TVaR_\alpha(S)} CE = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}[X_i \times \mathbb{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + \mathbb{E}[X_i \times \mathbb{1}_{S = VaR_\alpha(S)}]^\beta}{(1 - \alpha)TVaR_\alpha(S)} CE \\
 &= \frac{\mathbb{E}[S \times \mathbb{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + \mathbb{E}[S \times \mathbb{1}_{S = VaR_\alpha(S)}]^\beta}{(1 - \alpha)TVaR_\alpha(S)} CE \\
 &= \frac{\mathbb{E}[S \times \mathbb{1}_{S > VaR_\alpha(S)}] + VaR_\alpha(S)\mathbb{P}(S = VaR_\alpha(S))^\beta}{(1 - \alpha)TVaR_\alpha(S)} CE \\
 &= \frac{TVaR_\alpha(S)}{TVaR_\alpha(S)} CE = CE.
 \end{aligned}$$

Comme la règle basée sur la VaR, la règle basée sur la TVaR, est très présente en pratique, grâce à la simplicité de son application, et la cohérence de la TVaR comme mesure de risque. Dans la section 2, nous allons voir que ces règles sont des cas particuliers de méthodes d'allocation, et peuvent être reconstruites à l'aide de la méthode d'Euler, qui donne un sens économique au choix de la règle.

L'élaboration d'une stratégie d'allocation du capital ne se limite pas à la détermination des parts attribuées aux lignes d'affaires, mais nécessite aussi une réflexion profonde sur les performances économique de la méthode choisie, ainsi que sa stabilité dans le temps, est-il adéquat de conserver des capitaux alloués stables au fil du temps, afin de rester cohérent quant au pilotage de l'activité? ou faut-il appliquer des réajustements périodiques afin de minimiser à la fois le risque global et le risque par branche? L'allocation peut aussi se faire sur une durée qui dépasse une année, quel serait dans ce cas le choix optimal de la durée de l'allocation? Nous essayons dans ce travail de répondre à une grande partie des problématiques qui découlent de l'allocation du capital.

1.3 L'allocation du capital vue par le dispositif ORSA

Le processus ORSA⁹, l'auto-évaluation de la solvabilité et des risques si on essaye de traduire sa signification en français, peut être considéré comme le cœur du pilier 2 de la directive solvabilité 2.

1.3.1 L'approche ORSA

La formule standard pour le calcul du capital règlementaire de solvabilité est basée sur une vision générale de la gestion du risque, elle est appliquée à une architecture de risques bien déterminée, et elle prend en compte les dépendances entre ces risques via l'agrégation à l'aide de matrices de corrélations. Cependant, son SCR reste critiquable pour plusieurs raisons :

- La composition du portefeuille de l'assureur n'est pas prise en compte dans le calcul du SCR par application de la formule standard. Cela engendre un besoin d'une évaluation de solvabilité et des risques adaptée au profil de l'assureur.
- L'absence de plusieurs risques dans la cartographie proposée par la formule standard, présentée dans le figure 6. Comme exemples, nous citons le risque de liquidité, les risques de modèles et les risques macroéconomiques. Cet handicap impose le

9. Own Risk and Solvency Assessment

besoin d'une cartographie interne des risques encourus par l'assureur et un calcul des besoins en capital qui prend en compte l'ensemble de ces risques.

- L'obligation de calculer le SCR à un horizon d'un an ne garantit pas une couverture continue contre le risque de l'insolvabilité. Le portefeuille de risque d'un assureur peut connaître des changements radicaux durant cette période, le besoin d'une actualisation permanente du profil de risque et ainsi un recalcul des besoins de solvabilité semble raisonnable et naturel. Cet horizon pose aussi un problème dans le sens inverse pour les activités dites longues, comme la retraite et la responsabilité civile, le traitement de leurs sinistres s'écoule sur un horizon d'au moins 5 ans, mais l'impact sur la solvabilité est surévalué pour chaque année de mesure.

L'ORSA constitue une réponse pratique à l'ensemble de ces critiques. Solvabilité 2 invite les assureurs à construire en parallèle du respect des exigences de la formule standard leur propre système de gestion interne de risque à travers l'ORSA. L'objectif principal de l'ORSA est donc la mise en place d'un processus d'évaluation et gestion permanentes des risques personnalisé et qui reflète une vision interne et propre à l'assureur de ses risques.

Dans le cadre du processus ORSA, il est demandé aux assureurs d'évaluer essentiellement :

- Le besoin global de solvabilité ;
- Le respect permanent des exigences en termes de capitaux : SCR, MCR, et provisions techniques ;
- Les écarts par rapport aux hypothèses du calcul du SCR.

Ce processus est à mener régulièrement, notamment en cas des changements importants au niveau des risques.

Les exigences réglementaires listées dans l'article 45 font de l'ORSA une approche qui peut être déclinée du point de vue opérationnel en 5 tâches principales. Nous essayons dans la figure 10 de présenter notre lecture des exigences ORSA.

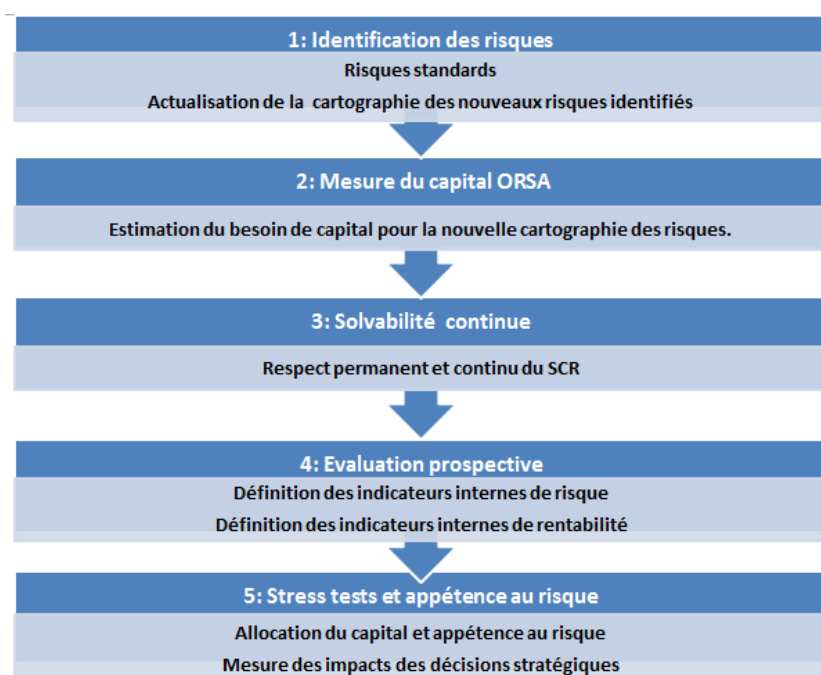


FIGURE 10 – L'approche ORSA ventilée en cinq chantiers

Les deux premières actions des cinq étapes identifiées dans la déclinaison opérationnelle de l'ORSA, représentent une définition du profil du risque de l'assureur. Le nouveau profil regroupe les risques existants ajustés ainsi que les nouveaux risques identifiés. Le capital ORSA intègre la vision prospective de la compagnie à travers les changements de métrique, et se distingue par rapport au capital réglementaire par la prise en compte des spécificités propres à chaque assureur. Il faut donc tout d'abord mettre en place une cartographie actualisée et globale des risques, puis définir une métrique qui peut être très différente du cadre du pilier 1 et qui reflète la stratégie interne à la compagnie en matière de gestion de ses risques. Dans la figure 11 nous essayons de présenter les étapes de calcul du capital économique ORSA.

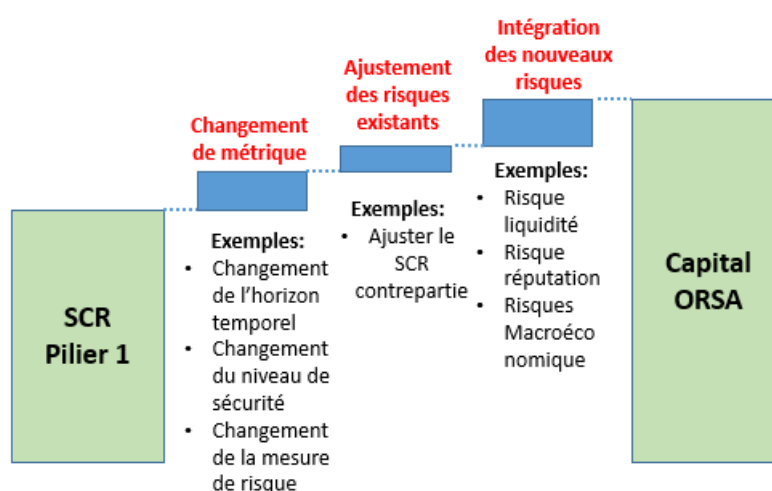


FIGURE 11 – Le capital économique ORSA

Un des objectifs principaux de l'ORSA est le suivi de l'état de solvabilité et du respect des exigences en permanence. Le troisième chantier (Figure 10) se base sur l'actualisation régulière des indicateurs de solvabilité en fonction des changements constatés au niveau des risques (primes, prestations, et provisions) et des investissements (données marché + allocation actifs).

L'évaluation prospective représente l'intégration du plan stratégique de la compagnie sur un plus grand horizon dans la gestion de la solvabilité. L'idée est d'effectuer des projections de tous les indicateurs de solvabilité et de performance sur l'horizon qui correspond mieux au business plan de l'assureur. Cela nécessite la construction de scénarios économiques et l'évaluation de la sensibilité de la stratégie de développement aux risques encourus.

La dernière étape sera la définition du niveau de l'*appétence au risque* de l'entreprise. L'appétence au risque, définie par Théron et Valade (2010)[47], et étudiée dans le cadre de l'ORSA par Gondran et Lagresle dans leur mémoire actuariaire [24], désigne le niveau du risque maximum que la compagnie souhaite prendre. Ce niveau doit être décliné sur les différents facteurs de risque, on parle dans ce cas des *tolérances aux risques*. Il s'agit donc d'une opération d'allocation du risque agrégé. Le niveau de l'*appétence au risque* accompagné des résultats des *stress tests*, permettent à la compagnie la mise à jour de ses processus stratégiques majeurs, comme la définition des politiques commerciales, la

gestion de son bilan ou encore les choix des programmes de réassurances, afin d'intégrer la dimension solvabilité.

L'ORSA est finalement un processus d'appropriation de la culture du risque à tous les niveaux de la prise de décision de la compagnie d'assurance. Les différents reporting ORSA doivent être un diagnostic des niveaux de risques prises par l'assureur et de son état réel de solvabilité.

1.3.2 L'allocation du capital dans l'ORSA

Le cas des groupes d'assurance nécessite un traitement particulier dans le cadre de l'ORSA. Le périmètre de ce traitement ne doit pas être inférieur à celui du contrôle réglementaire du groupe. En effet, l'article 246 demande explicitement aux groupes d'assurance de calculer par consolidation leurs SCRs, puis d'analyser et évaluer sa différence avec la somme des SCRs de branches. Il est aussi possible, sous réserve de l'obtention de l'accord du contrôleur du groupe, de fournir un seul rapport ORSA, présentant ses résultats à la fois pour le groupe et ses entités soumises à l'obligation de l'ORSA¹⁰.

Le capital économique ORSA étant différent du capital économique réglementaire, cela impacte directement la méthode de son allocation entre les différentes lignes d'affaires de l'assureur.

Le changement de métrique accepté par l'ORSA engendre aussi un impact significatif sur l'allocation du capital. Le changement de la mesure de risque utilisée, l'horizon du calcul du capital économique, ou l'actualisation de la structure de dépendance entre les risques, imposent aussi le changement de l'allocation de ce capital entre les branches en fonction des nouvelles données.

L'horizon de l'allocation dans le cadre de l'ORSA peut dépasser une année, et atteindre une durée de 3 voir 5 ans pour pouvoir intégrer les visions stratégiques de la compagnie à moyen terme. La stabilité de l'allocation dans le temps est donc une question importante à traiter.

L'ORSA offre une liberté quasi-totale sur le choix des méthodes d'évaluation des risques, et par suite de l'allocation du risque global entre les différentes composantes risquées. Cette liberté offre la possibilité à tout assureur de développer sa propre méthode d'allocation de son capital économique en fonction de sa vision du risque, et aussi de sa stratégie de développement. C'est dans cette optique qu'on va essayer dans ce travail de proposer une nouvelle méthode d'allocation, basée sur une stratégie de minimisation d'indicateurs multivariés de risque. Cette approche a pour principale objectif l'intégration de la gestion du risque dans le processus de l'allocation, et la prise en compte de la dépendance entre les différentes activités risquées.

10. Article 246 (4) et orientation 30

2 Les méthodes classiques de l'allocation du capital

Dans cette partie, nous analysons les différentes méthodes d'allocation du capital présentes dans la littérature des sciences actuarielles, et utilisées en pratique par les compagnies du secteur de l'assurance.

2.1 Cohérence d'une méthode d'allocation

Depuis l'apparition de la définition des mesures de risque cohérentes dans Artzner et al(1999) [6], la notion de la cohérence occupe une place importante au cœur de toutes les pratiques de la gestion des risques. Dans cette optique, Denault (2001) [19] a fourni des axiomes pour définir une méthode cohérente d'allocation de capital. Une allocation doit vérifier certaines propriétés souhaitables dans un sens économique, pour être considérée comme cohérente.

Nous considérons un vecteur de risques $X = (X_1, \dots, X_d)$, qui représente les pertes des lignes d'affaires d'un assureur ou les branches d'un groupe d'assurance, l'ensemble des indices de ces risques sera noté $N = \{1, \dots, d\}$. Le risque global du groupe sera représenté par la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Pour une méthode d'allocation choisie, et pour une mesure de risque donnée Π , qui représente le choix de mesure pour l'allocation, on désigne par $\Pi(X_i | S)$ la contribution du X_i dans le risque global, dans le sens où sa participation dans un capital économique CE sera égale à $\frac{\Pi(X_i|S)}{\Pi(S)}CE$.

Définition d'une allocation cohérente : Une méthode d'allocation est *cohérente* pour le choix d'une mesure de risque Π , si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. **Additivité** La totalité du capital doit être allouée aux différentes branches :

$$\sum_{i=1}^n \Pi(X_i | S) = \Pi(S).$$

2. **Neutralité** L'allocation du capital ne concerne que les investissements risqués, l'allocation du gain de la diversification à une branche ou activité non risquée est nulle, et la contribution d'un risque déterministe dans l'allocation est égale à sa valeur.
3. **Sous-additivité pour les sous portefeuilles** La somme des capitaux alloués à un ensemble de risques est inférieure à leur risque global agrégé :

$$\forall T \subset N \quad \sum_{i \in T} \Pi(X_i | S) \leq \Pi\left(\sum_{i \in T} X_i\right).$$

L'allocation tient compte du bénéfice de la diversification pour tout sous portefeuille de risques.

4. **Symétrie** Pour tous risques X_i et X_j ayant le même impact marginal par rapport à tout sous-ensemble contenant les deux à la fois, on alloue la même contribution. Cela se traduit mathématiquement par, si pour X_i et X_j on a

$$\forall h \in [0, 1], \forall T \text{ tel que } : \{i, j\} \subseteq T \subseteq N,$$

$$\Pi\left(\sum_{k \in T} X_k\right) - \Pi\left(\sum_{k \in T} X_k - hX_i\right) = \Pi\left(\sum_{k \in T} X_k\right) - \Pi\left(\sum_{k \in T} X_k - hX_j\right),$$

alors,

$$\Pi(X_i | S) = \Pi(X_j | S).$$

La cohérence d'une méthode d'allocation du capital est très présente dans la littérature, [19], [13]. On peut construire une allocation du capital valide théoriquement, mais si elle n'est pas cohérente, elle n'aura aucune importance pratique.

Une autre propriété souhaitable présente dans la littérature, est la propriété de *RORAC comptabilité*, introduite par Tasche (2007) [44]. La notion de la *RORAC compatibilité* est basée sur la définition de l'indicateur **RORAC**¹¹. Le RORAC est un indicateur de rentabilité, défini comme le quotient d'un indicateur de performance et d'un indicateur de risque.

Pour une mesure de risque Π , on définit les indicateurs suivants :

- Le RORAC du portefeuille : il est définie par :

$$RORAC(S) = \frac{\mathbb{E}[S]}{\Pi(S)} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]}{\Pi(S)}.$$

- Le RORAC de $i^{\text{ème}}$ branche : il est définie par :

$$RORAC(X_i | S) = \frac{\mathbb{E}[X_i]}{\Pi(X_i | S)},$$

avec $\Pi(X_i | S)$ désigne la contribution de X_i .

Définition RORAC compatibilité Les contributions au risque $\Pi(X_i | S)$ sont RORAC compatibles s'il existe des réels $\epsilon_i > 0$ vérifiant l'implication suivante, pour toute branche X_i :

$$\forall 0 < h < \epsilon_i, RORAC(X_i | S) > RORAC(S) \Rightarrow RORAC(S+hX_i) > RORAC(S).$$

Une méthode d'allocation est dite RORAC compatible si elle fournit des contributions au risque RORAC compatibles.

La RORAC compatibilité est une propriété très intéressante de point de vue économique, notamment pour une aide au pilotage de l'activité. En effet, en analysant sa définition, on constate que lorsque la rentabilité d'une branche est supérieur au RORAC du portefeuille, il est possible d'améliorer cette dernière en ajoutant la quantité h de X_i à la composition du portefeuille. La négation de l'implication, permet de conclure que si l'ajout d'une quantité h de X_i à la composition du portefeuille, diminue la rentabilité globale, alors il ne faut pas développer cette ligne d'affaires.

Une méthode d'allocation RORAC compatible, permet donc d'analyser la rentabilité des capitaux alloués.

Pour le cas de deux lignes d'affaires par exemple, on obtient :

$$RORAC(S) = \omega_1 RORAC(X_1 | S) + (1 - \omega_1) RORAC(X_2 | S),$$

avec, ω_1 le poids de la première ligne d'affaire dans l'allocation. La figure 12, illustre graphiquement l'évolution des RORAC des deux lignes d'affaires et du RORAC global.

11. **Return On Risk Adjusted Capital**

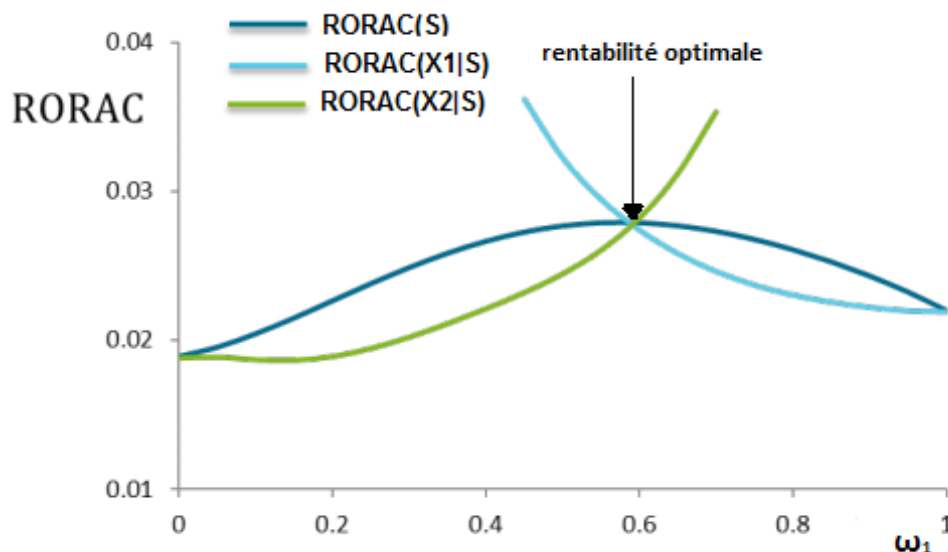


FIGURE 12 – Illustration RORAC compatibilité - Cas de deux lignes d'affaires

On peut donc déduire que l'allocation est optimale si les RORAC des deux lignes d'affaires sont égaux. Buch et al. (2011) [14] ont étudié la construction d'une méthode d'allocation du capital par optimisation du RORAC.

Après avoir identifié un cadre général pour la construction d'une allocation de capital cohérente, et économiquement pertinente, nous allons essayer d'exposer les différentes méthodes présentes dans la littérature et utilisées en pratique par les assureurs pour allouer leurs capitaux économiques.

Des approches simplifiées constituent la base du développement des méthodes proportionnelle et marginale. Cependant, ces méthodes négligent des aspects importants liées à la structure de dépendance entre les composantes du groupe. Les méthodes de *Shapley* et d'*Aumann-Shapley* sont issues de la théorie des jeux coopératifs, avec une utilisation de la valeur de Shapley pour déterminer la participation de chaque risque dans le risque global. Dans la première, les risques sont vus comme des joueurs qui partagent les gains réalisés dans les différentes coalitions possibles. La deuxième est une généralisation continue de la méthode de Shapley. La *méthode d'Euler* représente une généralisation continue de la méthode marginale, elle est basée sur la notion de *l'impact marginal infinitésimal* de chaque risque. Cette méthode est la plus utilisée en pratique, grâce à ses propriétés de cohérence, et sa vérification dans plusieurs cas de choix de mesure de risque de la propriété RORAC compatibilité.

2.2 Méthode proportionnelle

Nous commençons par l'idée la plus simple pour allouer un capital économique. La méthode proportionnelle se base sur une analyse univariée du risque, en mesurant le risque local séparément entre les différents risques. Pour allouer le capital économique CE , il suffit de choisir la mesure de risque pour l'allocation Π , la contribution au risque de l'activité X_i est déterminée par le poids $\omega_i = \frac{\Pi(X_i)}{\sum_{i=1}^n \Pi(X_i)}$, sa participation dans le capital

économique selon ce principe sera :

$$C_i = \frac{\Pi(X_i)}{\sum_{i=1}^n \Pi(X_i)} CE.$$

Bien que simple et intuitive, l'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne tient pas compte de la structure de dépendance des risques. Ce désavantage sera évité partiellement dans la méthode marginale.

2.3 Méthode marginale

La méthode marginale, qui porte aussi le nom de la *méthode incrémentielle* dans la littérature, est basée sur le principe d'allouer le capital économique entre les risques en fonction de leurs impacts marginaux sur le risque global.

Pour un risque X_i , si on note le risque global du groupe privé de X_i , $S^{-i} = \sum_{j=1; j \neq i}^n X_j$, l'impact marginal de X_i sera quantifié selon ce principe d'allocation, et en fonction du choix de sa mesure de risque Π par $\Pi(S) - \Pi(S^{-i})$. La proportion du capital économique qui sera allouée à X_i est donnée par $\omega_i = \frac{\Pi(S) - \Pi(S^{-i})}{\sum_{j=1}^n \{\Pi(S) - \Pi(S^{-j})\}}$.

La contribution de chaque risque X_i selon cette méthode, et pour une mesure de risque choisie Π est :

$$C_i = \frac{\Pi(S) - \Pi(S^{-i})}{\sum_{i=1}^n \{\Pi(S) - \Pi(S^{-i})\}} CE.$$

Bien que cette approche est basée sur l'idée de mesurer l'impact de chaque risque sur le risque global, elle présente des désavantages d'avoir négligé les structures de dépendance qui peuvent exister entre les sous-groupes de risques et d'avoir considéré un impact marginal total en mesurant la différence de risque entre S et S^{-i} . La méthode de Shapley constitue une réponse au premier point, car elle traite les différentes possibilités de coalitions entre les joueurs et donc toutes les structures de dépendance qui peuvent exister entre les sous-groupes et avoir un impact sur le risque global. La méthode d'Euler considère l'impact marginal infinitésimal, et constitue par suite une version continue de la méthode marginale et une réponse à la deuxième critique.

2.4 Méthode de Shapley

La méthode de Shapley¹² repose sur la théorie des jeux coopératifs. Elle est utilisée pour allouer le gain total entre joueurs en fonction des valeurs de gains des coalitions possibles. Michel Denault (2001) [19] a adapté cette méthode pour introduire la méthode d'allocation du capital de Shapley.

Nous présentons tout d'abord le principe de la valeur de Shapley dans son contexte d'origine, puis nous traduisons cette méthode en une technique d'allocation du capital.

Principe de la méthode de Shapley Dans un *jeu coopératif*, il est important de pouvoir trouver une répartition des gains pour une coopération. Il est souhaitable que cette répartition soit équitable. Une des solutions proposées dans la littérature de la théorie des

12. Lloyd Stowell Shapley, mathématicien et économiste américain, Lauréat du Prix Nobel d'économie 2012 avec Alvin Roth.

jeux est la valeur de Shapley. La méthode de Shapley s'applique dans le cas d'une *utilité transférable*. Par exemple si plusieurs agriculteurs décident de former une coopérative dans l'objectif de maximiser la production et le profit, et ensuite répartir ce profit entre ses membres, on peut parler de solution avec utilité transférable.

Un jeu coopératif est en général défini par sa *fonction caractéristique*, qui donne les valeurs des gains de chaque coalition. La description du jeu se fait totalement à l'aide des valeurs de sa fonction caractéristique qu'on va noter ϕ , par exemple si la coalition composé des joueurs 1 et 5 obtient un gain de 20, la valeur de la fonction ϕ sera 20 pour cette coalition $\phi(1, 5) = 20$. Le jeu est souvent appelé le jeu ϕ , et toutes les coalitions possibles ont une valeur, notamment les coalitions composées d'un seul joueur, la valeur de ϕ est par définition égale à 0 pour une coalition vide.

Dans un jeu coopératif de n joueurs, le nombre de coalitions non vides possibles est $2^n - 1$. La fonction caractéristique doit en principe vérifier la super-additivité pour les unions des coalitions disjointes, cela se traduit mathématiquement pour deux coalitions possibles C_1 et C_2 par,

$$(C_1 \cap C_2 = \emptyset) \quad \Rightarrow \quad \phi(C_1 \cup C_2) \geq \phi(C_1) + \phi(C_2).$$

Dans le cas d'un jeu à utilité transférable, Shapley a développé un ensemble d'axiomes qui engendre une solution unique, appelée la *valeur de Shapley* dans la littérature. On note $N = \{1, \dots, n\}$, l'ensemble des joueurs, et $\varphi_i(\phi)$ la valeur de Shapley dans un jeu coopératif de n joueurs et de fonction caractéristique ϕ . Les axiomes utilisés par Shapley sont les suivants :

1. **Symétrie** : Pour que le jeu soit équitable, la permutation des joueurs ne doit pas changer leurs valeurs de Shapley. C'est-à-dire, si le joueur i devient le joueur j , alors leurs valeurs de Shapley sont aussi permutées. Mathématiquement, pour toute permutation π , et pour tout joueur $i \in N$,

$$\varphi_{\pi(i)}(\pi\phi) = \varphi_i(\phi);$$

2. **Optimalité de Pareto** : La valeur des gains d'une coalition doit forcément être égale à la somme des valeurs de Shapley de ses membres :

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(\phi) = \phi(N);$$

3. **Additivité** : Dans le cas d'un joueur qui participe parallèlement à deux jeux coopératifs, de fonctions caractéristiques ϕ_1 et ϕ_2 , et si on considère ces deux jeux comme un seul jeu, donc de fonction caractéristique $\phi = \phi_1 + \phi_2$, alors la valeur de Shapley du joueur i est tout simplement la somme de ses valeurs dans ces deux jeux :

$$\varphi_i(\phi) \equiv \varphi_i(\phi_1 + \phi_2) = \varphi_i(\phi_1) + \varphi_i(\phi_2).$$

Shapley (1952) [41] a montré que l'unique valeur du jeu ϕ qui vérifie ces axiomes, est la *valeur de Shapley*, donnée pour chaque joueur i par l'expression suivante :

$$\varphi_i(\phi) = \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n - |Z|)! (|Z| - 1)!}{n!} [\phi(Z) - \phi(Z \setminus \{i\})]$$

où $|Z|$ est le nombre de joueurs de la coalition Z .

La solution de Shapley représente donc une valeur moyenne d'impacts marginaux du

joueur i dans les différentes coalitions possibles. En effet, si on considère que chaque joueur entre aléatoirement dans une coalition, son impact sera mesuré par l'accroissement réalisé au niveau du gain de la coalition suite à son entrée.

La méthode de Shapley appliquée à l'allocation du capital La méthode de Shapley peut facilement être appliquée à un problème d'allocation du capital. Pour cela, il suffit de considérer les différentes branches comme des joueurs d'un jeu coopératif. La fonction caractéristique ϕ du jeu sera la mesure du risque Π choisie, ϕ sera donc définie pour toute coalition $Z \subset N$, par :

$$\phi(Z) = \Pi \left(\sum_{i \in Z} X_i \right)$$

Le poids de la contribution du risque X_i dans le risque global représenté par le capital économique, avec cette méthode sera donc le poids de sa valeur de Shapley dans la valeur du groupe :

$$\omega_i(\Pi) = \frac{\sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-|Z|)! (|Z|-1)!}{n!} [\Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right)]}{\Pi(S)},$$

et sa contribution dans le capital économique sera donc donnée par la valeur suivante :

$$C_i = \frac{\sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-|Z|)! (|Z|-1)!}{n!} [\Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right)]}{\Pi(S)} CE.$$

Si on choisit pour l'allocation la même mesure de risque que celle utilisée pour calculer le capital économique, la contribution de chaque risque sera tout simplement donnée par sa valeur de Shapley.

Cette méthode constitue une amélioration de la méthode marginale, puisqu'elle prend en compte non seulement l'impact marginal du risque X_i sur le risque global, mais aussi son impact marginal sur les risques de tous les sous-ensembles contenant X_i .

Toutes les règles d'allocation construites par cette méthodes sont additives, symétriques, et neutres, dans les sens de la définition de la cohérence présentée dans 2.1. En effet, si les propriétés de la symétrie et la neutralité sont évidente vu la formule de la contribution, la propriété de l'additivité découle de l'axiome de l'optimalité de Pareto vérifiée par la valeur de Shapley. Nous démontrons que pour toute mesure de risque Π , les contributions au capital économique CE calculées avec la méthode de Shapley vérifient l'égalité :

$$\sum_{i=1}^n C_i = CE.$$

Les contributions au risque global vérifient,

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Pi(S) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)! (z-1)!}{n!} [\Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right)].$$

On peut écrire cette équation de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Pi(S) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)! (z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)! (z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right), \quad (2.1)$$

où $z = |Z|$. Toute coalition Z contient donc z éléments, et par permutation de ces éléments (axiome de la symétrie), on déduit que le terme $\frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{i \in Z} X_i \right)$ apparaît z fois dans l'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right)$. Cette dernière peut donc être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) &= \sum_{\substack{Z \subset N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{z(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) \\ &= \sum_{\substack{Z \subset N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{(n-z)!z!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) \end{aligned}$$

D'un autre côté, les ensembles $Z^{-i} = Z \setminus \{i\}$, sont aussi des coalitions de cardinal $z-1$. Un ensemble $Z \setminus \{i\}$ peut être formé par l'élimination d'un élément $\{j\} \notin Z \setminus \{i\}$ de l'ensemble $\{Z \setminus \{i\}\} \cup \{j\}$, donc le terme $\frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right)$ apparaît $(n-z+1)$ fois dans l'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right)$, on peut donc réécrire cette dernière la de façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right) &= \sum_{\substack{Z \subset N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{(n-z+1)(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right) \\ &= \sum_{\substack{Z \subset N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{(n-z+1)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right). \end{aligned}$$

Il suffit donc d'effectuer un changement de variable dans la dernier expression, $t = z-1$ et $T = Z^{-i} = Z \setminus \{i\}$, pour pouvoir l'écrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{Z \subset N \\ i \in Z}} \frac{(n-z)!(z-1)!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z \setminus \{i\}} X_j \right) = \sum_{\substack{T \subset N \\ 1 \leq t \leq n-1}} \frac{(n-t)!t!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in T} X_j \right).$$

Ces réécritures nous permettent de simplifier l'expression (2.1) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_i \Pi(S) &= \sum_{\substack{Z \subset N \\ 1 \leq z \leq n}} \frac{(n-z)!z!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in Z} X_j \right) - \sum_{\substack{T \subset N \\ 1 \leq t \leq n-1}} \frac{(n-t)!t!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in T} X_j \right) \\ &= \frac{(n-n)!n!}{n!} \Pi \left(\sum_{j \in N} X_j \right) = \Pi \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \Pi(S). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le résultat recherché :

$$\sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n \omega_i CE = CE.$$

La propriété de la sous-additivité est directement liée aux propriétés de cohérence de la mesure de risque Π choisie pour l'allocation.

L'inconvénient de la méthode de Shapley est son coût d'implémentation qui explose en fonction du nombre des risques, puisque le nombre de coalitions possible est de l'ordre de 2^n .

2.5 Méthode d'Euler

La méthode d'allocation la plus utilisée en pratique est sans doute la méthode d'Euler. Dirk Tasche a consacré ses deux articles [44],[45], à la description de cette méthode, qu'on rencontre aussi dans la littérature sous le nom de la **méthode du gradient**.

Présentation de la méthode d'Euler : La méthode d'Euler est basée sur l'idée d'allouer le capital selon l'**impact marginal infinitésimal** de chaque risque. Ce dernier correspond à la baisse obtenue sur le risque global, en cédant un incrément infiniment petit pour le risque X_i . Les risques sont supposés infiniment fractionnables.

Pour un capital u , on considère le portefeuille de valeurs $X(u) = \sum_{i=1}^n u_i X_i$ correspondant à l'allocation du montant u_k du capital total u au $k^{\text{ème}}$ risque.

Pour une mesure de risque Π , on construit la fonction $f_{\Pi}(u) = \Pi(X(u))$, elle est aussi une mesure de risque. On suppose que cette fonction est continument différentiable.

La contribution du risque X_i dans le capital économique CE calculée à partir de la méthode d'Euler et la mesure de risque Π sera :

$$C_i = \frac{\omega_i(\Pi)}{\Pi(S)} CE,$$

où la valeur de $\omega_i(\Pi)$ est donnée par :

$$\omega_i(\Pi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pi(X) - \Pi(X - hX_i)}{h} = \frac{\partial f_{\Pi}}{\partial u_i}(1, \dots, 1).$$

L'additivité de cette méthode d'allocation est un résultat direct du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. Nous rappelons la définition d'une fonction homogène sur un ouvert C de \mathbb{R}^d .

Définition : Une fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}^d$ est homogène de degré κ si pour tout $h > 0$ tel que pour tout $u \in C$, $hu \in C$, on a :

$$f(hu) = h^{\kappa} f(u).$$

Corollaire : Si f est homogène de degré κ , alors $\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}$ est homogène de degré $\kappa - 1$.

Nous pouvons maintenant rappeler le fameux théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

Théorème d'Euler : Si $f : C \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction continument différentiable, alors :

$$f \text{ homogène de degré } \kappa \Leftrightarrow \kappa f(u) = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial f(u)}{\partial u_i}.$$

L'application du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes nous permet de montrer que :

$$f_{\Pi}(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f_{\Pi}}{\partial u_i}(u).$$

On déduit de cela que pour une mesure de risque homogène dans le sens homogénéité des fonctions,

$$\Pi(S) = f_{\Pi}(1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\Pi}}{\partial u_i}(1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\Pi).$$

L'allocation construite avec la méthode d'Euler est donc additive pour les mesures de risques homogènes car,

$$\sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i(\Pi)}{\Pi(S)} CE = CE.$$

Reconstruction des Règles d'allocation par la méthode d'Euler On présente dans ce paragraphe une reconstruction des règles de d'allocation basées sur la covariance, sur la VaR et sur la TVaR, présentées dans 1.2.3, en utilisant la méthode d'Euler.

Règle basée sur la covariance : On choisit la variance comme mesure de risque, alors :

$$f_{Var}(u) = Var(X(u)) = Var\left(\sum_{i=1}^n u_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i u_j Cov(X_i, X_j)$$

La contribution du risque X_i par la méthode d'Euler est donnée par :

$$\omega_i(\Pi) = \frac{\partial f_{Var}}{\partial u_i}(1, \dots, 1)$$

En dérivant f_{Var} par rapport à u_i , on obtient :

$$\frac{\partial f_{Var}}{\partial u_i}(u) = 2u_i Var(X_i) + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n u_j Cov(X_i, X_j)$$

d'où,

$$\omega_i(\Pi) = 2Var(X_i) + 2 \sum_{j=1, j \neq i}^n Cov(X_i, X_j) = 2Cov(X_i, S)$$

et afin d'obtenir une méthode additive ($\sum_{i=1}^n \omega_i(\Pi) = Var(S)$), on normalise le résultat obtenu pour avoir la contribution de chaque risque :

$$\omega_i(\Pi) = Cov(X_i, S)$$

Le poids de chaque risque est donc $\frac{Cov(X_i, S)}{Var(S)}$, on retrouve bien la règle d'allocation basée sur la covariance présentée dans 1.2.3.

Règle basée sur la VaR : Dirk Tasche a démontré dans la section 3 de son article [42] que la dérivée de la fonction quantile est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial u_i}(X(u)) = \mathbb{E}[X_i | X(u) = q_\alpha(X(u))].$$

Afin d'utiliser une application plus générale de ce résultat dans notre contexte, nous rappelons la définition et la méthodologie de construction des mesures de risque appelées de distorsion. La construction des mesures de distorsion se fait sous forme de mélange de la VaR, et donc tous les résultats qu'on va montrer pour le cas du quantile peuvent donner une idée sur le comportement des allocations et leurs compositions pour les mesures de cette famille.

Mesures de risque basées sur la théorie de l'espérance d'utilité Cette famille de mesures est basée sur la notion de la fonction d'utilité, qui traduit l'aversion au risque d'un agent économique.

Une compagnie d'assurance avec une richesse initiale R , et une fonction d'utilité u croissante et concave, assure un risque X au prix $\Pi(X)$ si il est solution de l'équation suivante :

$$\mathbb{E}[u(R - X + \Pi(X))] = u(R).$$

Les mesures de risques de distorsion sont liées à la théorie de l'espérance déformée qui permet de modéliser le cas des préférences basées sur l'hypothèse de l'espérance déformée. Elle suppose l'existence d'une fonction $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ non décroissante telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, appelée fonction de déformation ou de distorsion, telle que, le critère du choix est la maximisation de l'espérance déformée :

$$\mathbb{H}_g[X] = - \int_{-\infty}^0 (1 - g(\bar{F}_X(x))) dx + \int_0^{\infty} g(\bar{F}_X(x)) dx = \int_0^1 VaR_{\alpha}(X) dg(1 - \alpha).$$

Wang (2000) [48] a étudié la famille des mesures de distorsion appelée mesures de Wang. A toute fonction de déformation convexe g , il associe la mesure de Wang donnée par :

$$\Pi(X) = \mathbb{H}_{\bar{g}}[X] = \int_0^1 VaR_{\alpha}(X) dg(\alpha)$$

où $\bar{g}(\alpha) = 1 - g(1 - \alpha)$ est une fonction de déformation concave.

Toute mesure de Wang s'exprime donc sous forme d'un mélange de VaR.

Les mesures de risque de Wang sont homogènes, invariantes par translation et monotones. Lorsque la fonction de déformation \bar{g} est concave, la mesure de risque correspondante est sous-additive.

Les mesures de risque de Wang associées à des fonctions de déformation \bar{g} concaves sont cohérentes.

Exemples de mesures de Wang :

- **La VaR** : En considérant la fonction de déformation $\bar{g}_{\alpha}(x) = \mathbb{1}_{[x \geq 1 - \alpha]}$, on obtient :

$$\Pi(X) = \mathbb{H}_{\bar{g}_{\alpha}}[X] = VaR_{\alpha}(X)$$

- **La TVaR** : La TVaR peut s'écrire sous forme de mesure de risque de Wang. En effet, on considère la fonction de déformation :

$$\bar{g}_{\alpha}(x) = \min\left\{\frac{x}{1 - \alpha}, 1\right\}.$$

Pour $\alpha \in [0, 1]$ fixé, on obtient :

$$\Pi(X) = \mathbb{H}_{\bar{g}_{\alpha}}[X] = TVaR_{\alpha}(X).$$

En revanche, on peut montrer que l'ES et la CTE ne sont pas des mesures de Wang.

Du coté méthode d'Euler pour l'allocation du capital, et pour toute mesure de risque de Wang associée à une fonction de distorsion convexe g , la fonction f_{Π} sera donc sous la forme suivante :

$$f_{\Pi}(u) = \int_0^1 VaR_{\alpha}(X(u)) dg(\alpha)$$

On dérive cette fonction, en utilisant l'expression de la dérivée de la fonction quantile :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{\Pi}}{\partial u_i}(u) &= \frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^1 VaR_{\alpha}(X(u)) \, dg(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} VaR_{\alpha}(X(u)) \, dg(\alpha) \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}[X_i | X(u) = VaR_{\alpha}(X(u))] dg(\alpha).\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi, une expression qui permet de calculer les contributions de des différents risques dans une allocation par la méthode d'Euler avec une mesure de risque de Wang.

Comme la VaR est une mesure de risque de Wang, associée à la fonction de déformation $\bar{g}_{\alpha}(x) = \mathbb{1}_{[x \geq 1-\alpha]}$, il suffit donc d'utiliser l'expression précédente pour obtenir $\frac{\partial f_{VaR}}{\partial u_i}(u)$:

$$\frac{\partial f_{VaR}}{\partial u_i}(u) = \mathbb{E}[X_i | X(u) = VaR_{\alpha}(X(u))].$$

Finalement, la contribution de chaque risque par la méthode d'Euler est :

$$C_i = \frac{\partial f_{VaR}}{\partial u_i}(1, \dots, 1) = \mathbb{E}[X_i | S = VaR_{\alpha}(S)],$$

on retrouve la règle d'allocation basée sur la VaR présentée dans 1.2.3.

Règle basée sur le TVaR : La TVaR peut s'écrire sous forme de mesure de risque de Wang associée à la fonction de déformation :

$$\bar{g}_{\alpha}(x) = \min\left\{\frac{x}{1-\alpha}, 1\right\} \Leftrightarrow g_{\alpha}(x) = \frac{x-\alpha}{1-\alpha} \mathbb{1}_{x \in [\alpha, 1]}.$$

Pour $\alpha \in [0, 1]$ fixé, g_{α} est donc la fonction de répartition de la loi uniforme sur le support $[\alpha, 1]$, et en reprenant l'expression de la dérivée $\frac{\partial f_{\Pi}}{\partial u_i}(u)$ pour une mesure de Wang, on obtient :

$$\frac{\partial f_{TVaR}}{\partial u_i}(u) = \int_0^1 \mathbb{E}[X_i | X(u) = VaR_x(X(u))] dg_{\alpha}(x).$$

En effectuant un changement de variable $t = VaR_x(X(u)) = F_{X(u)}^{-1}(x)$, et remplaçant l'espérance par son expression analytique on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{TVaR}}{\partial u_i}(u) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[X_i | X(u) = t] dg_{\alpha}(F_{X(u)}(t)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} z \frac{f_{X_i, X(u)}(z, t)}{f_{X(u)}(t)} dz \right) g'_{\alpha}(F_{X(u)}(t)) dF_{X(u)}(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} z g'_{\alpha}(F_{X(u)}(t)) f_{X_i, X(u)}(z, t) dz dt \\ &= \mathbb{E}[X_i g'_{\alpha}(F_{X(u)}(X(u)))] \\ &= \mathbb{E}\left[X_i \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{1}_{\{F_{X(u)}(X(u)) > \alpha\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_i \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{1}_{\{X(u) > VaR_{X(u)}(\alpha)\}}\right].\end{aligned}$$

On déduit la contribution du risque X_i avec la méthode Euler :

$$C_i = \frac{\partial f_{TVaR}}{\partial u_i}(1, \dots, 1) = \frac{\mathbb{E}[X_i | S > VaR_{\alpha}(S)]}{1-\alpha}.$$

C'est la construction de la règle basée sur la TVAR, présentée dans 1.2.3 par la méthode d'Euler.

La méthode Euler est très présente dans la littérature, plusieurs articles analysent ses propriétés (RORAC compatibilité, cohérence,...) sous des différentes hypothèses ([8],[43],[42]). La clé de sa célébrité est l'existence des arguments économiques qui peuvent justifier son utilisation pour développer des règles d'allocation.

2.6 Méthode d'Aumann-Shapley

La méthode d'Aumann-Shapley est une généralisation continue de la méthode de Shapley présentée dans 2.4, son principe repose sur la valeur introduite par Aumann et Shapley en théorie des jeux. Denault (2001) [19] analyse cette méthode et son application à la construction des allocations du capital.

Pour une mesure de risque Π , la contribution au risque par cette méthode est donnée par :

$$C_i(\Pi) = \int_0^1 \frac{\partial f_\Pi}{\partial u_i}(u, \dots, u) du,$$

avec, $f_\Pi(u) = \Pi(X(u)) = \Pi(\sum_{i=1}^n u_i X_i)$.

Pour toute mesure de risque Π vérifiant la propriété de l'homogénéité positive, c'est-à-dire pour tout risque X et pour toute constante réelle positive λ , Π vérifie l'égalité

$$\Pi(\lambda X) = \lambda \Pi(X),$$

on remarque que :

$$C_i(\Pi) = \int_0^1 \frac{\partial f_\Pi}{\partial u_i}(u, \dots, u) du = \int_0^1 u \frac{\partial f_\Pi}{\partial u_i}(1, \dots, 1) du = \frac{\partial f_\Pi}{\partial u_i}(1, \dots, 1).$$

La méthode d'Aumann-Shapley dans ce cas, coïncide avec la méthode d'Euler.

Les mesures de risque cohérentes vérifient la propriété de l'homogénéité positive, cela explique la timide présence de cette méthode dans la littérature.

L'implémentation pratique de toutes les méthodes présentées dans cette section reste relativement simple. Plusieurs travaux de recherche en actuariat se sont intéressés à la détermination des expressions analytiques des compositions de l'allocation par ces méthodes, notamment la méthode d'Euler, pour des modèles de distributions de risques particuliers et des structures de dépendances spéciales.

Dans cette section, nous n'allons pas présenter des illustrations numériques des résultats de ces méthodes. Toutefois, nous allons dans le chapitre suivant comparer numériquement, et pour un modèle particulier de risques, les résultats qu'on obtient à l'aide de la méthode d'Euler et ceux qu'on va obtenir par une nouvelle méthode d'allocation par minimisation des indicateurs de risques, qui fera le sujet du chapitre suivant.

Nous allons aussi analyser à l'aide toujours d'applications numériques la différence entre les comportements de ces deux méthodes pour des structures de dépendances spéciales.

3 L'allocation du capital par minimisation du risque global

Les méthodes présentées dans la section précédente sont construites sur l'idée de la détermination de la participation de chaque risque dans le risque global. L'assureur peut choisir une vision orientée minimisation du risque global réel, qui sera plus en cohérence avec les objectifs du régulateur. C'est dans cette optique que nous proposons une nouvelle méthode d'allocation basée sur la minimisation des indicateurs multivariés de risque. Les indicateurs minimisés tiennent en compte à la fois l'importance du risque au niveau local de chaque branche ou activité, et la structure de dépendance entre le groupe de risques.

D'un autre côté, la multitude de méthodes d'allocation proposées dans la littérature est ahurissante, et nous amènent naturellement à évoquer la question de l'optimalité d'une allocation. Certaines méthodes d'allocation peuvent être mieux adaptées pour traiter des questions spécifiques, d'autres peuvent dangereusement conduire à des décisions financières erronées, la question de l'optimalité d'une allocation est donc cruciale et impacte directement le niveau de risque de la compagnie.

Du côté littérature, Bush et Dorfleitner [13], Zanjani [50], proposent des allocations optimales par optimisation du RORAC, cette méthode est illustrée dans l'exemple de la figure 12. Tasche (2004) [43] introduit l'allocation par principe d'Euler proposées dans un contexte d'optimisation de portefeuille, l'application de cette méthode avec la VaR en finance a été étudiée par Balog (2011) [8] et en assurance par Mayers et al. (2011) [35].

Nous présentons dans ce chapitre, une proposition de méthode d'allocation optimale, dans le sens optimisation du risque global. Notre approche repose sur la minimisation d'indicateurs du risque multivariés qui feront le sujet de la première section 3.1 de ce chapitre.

Pour mieux expliquer le principe d'optimalité dans le contexte de cette méthode d'allocation, la figure 13 présente une illustration de la différence des trajectoires entre deux stratégies d'allocation différentes. L'idée de la méthode est de répartir la réserve initiale globale u entre les branches de façon à minimiser l'indicateur de risque, représentée par la *zone violette*.

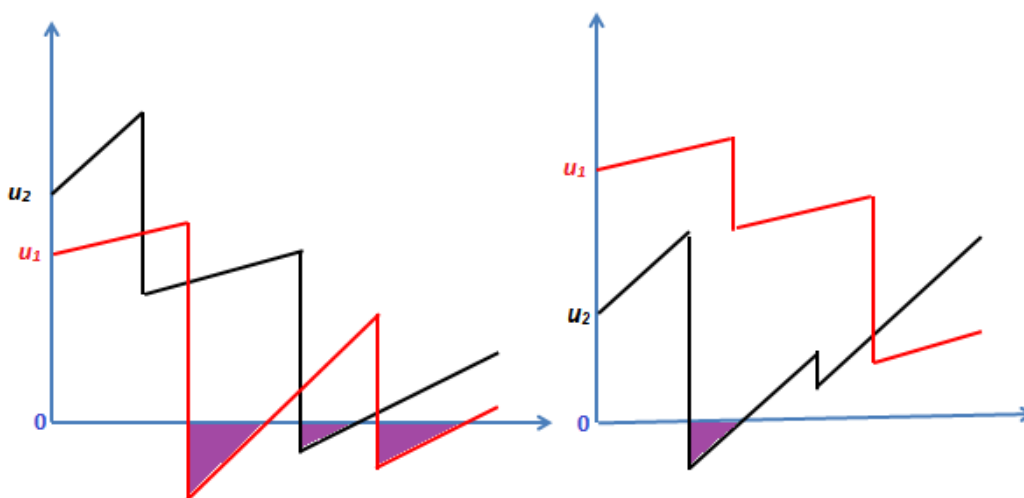


FIGURE 13 – Exemple de deux trajectoires pour deux stratégies d'allocation différentes.

Cette approche a été présentée par Cénac et al. (2012) [17]. Nous essayons d'abord d'analyser les propriétés de cette méthode d'allocation. Nous présentons par la suite une résolution du problème dans le cas général en s'appuyant sur des algorithmes de l'optimisation convexe.

Dans une seconde étape, nous développons des solutions pseudo-explicites pour des cas de distributions particulières. Nous examinons aussi le comportement asymptotique de l'allocation pour des cas particuliers de familles de distributions et nous analysons l'impact de la structure de dépendance sur la composition de l'allocation. Nous terminons par une série des simulations et illustrations numériques et des analyses des résultats obtenus. Ce chapitre est basé dans sa plus grande partie sur les résultats présentés dans un article rédigé avec Véronique Maume-Deschamps et Didier Rullière (2014) [34].

Nous utilisons dans ce chapitre les notations suivantes :

- On désigne par le risque X_k , la perte de la $k^{\text{ème}}$ ligne d'affaires durant une période. Il s'agit d'une variable aléatoire positive dans notre contexte. Dans le cas de plusieurs périodes, X_k^n représentera les pertes de la $k^{\text{ème}}$ branche de la compagnie, pendant la $n^{\text{ème}}$ période. On peut bien avoir des dépendances vectorielles entre les $(X_k^n)_i$ (par rapport à k) et/ou temporelles entre les $(X_k^i)_i$ (par rapport à n).
On note aussi $Y_k^j = \sum_{l=1}^j X_k^l$ la perte agrégée de la $k^{\text{ème}}$ branche sur j périodes.
- Le capital initial de groupe d'assurance, ou le capital économique à allouer est noté u . Nous supposons qu'il a été calculé dans une opération d'agrégation de risques. L'allocation se limite à sa distribution entre les différentes branches indépendamment de la phase de son calcul.
- On désigne par $\mathcal{U}_u^d = \{v = (v_1, \dots, v_d) \in [0, u]^d, \sum_{i=1}^d v_i = u\}$ l'ensemble des allocations possibles du capital u entre les différentes branches. Nous rappelons qu'une allocation peut être définie comme une application $\mathbb{R}^+ \rightarrow (\mathbb{R}^+)^d$.
- Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ on définit $\alpha_i = \frac{u_i}{u}$ le poids de la participation de la $i^{\text{ème}}$ branche dans le capital u , les α_i vérifient alors $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$ si $(u_1, \dots, u_d) \in \mathcal{U}_u^d$.
- De la même façon que \mathcal{U}_u^d , nous définissons $\mathbb{I}_u^d = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in [0, 1]^d, \sum_{i=1}^d \alpha_i = 1\}$ l'ensemble des poids d'allocation possibles $\alpha_i = u_i/u$. Une bijection existe donc entre \mathbb{I}_u^d et \mathcal{U}_u^d .
- Pour une allocation $(u_1, \dots, u_d) \in \mathcal{U}_u^d$, on définit la resserve de la $k^{\text{ème}}$ ligne d'affaires à l'issue d'une période par $R_k = u_k - X_k$, où u_k désigne la part du capital u allouée à la branche X_k .
Dans le cas de plusieurs périodes, cette réserve sera $R_k^j = u_k + Y_k^j$.
La $k^{\text{ème}}$ branche est *insolvable* au temps j si $R_k^j < 0$.
- La somme agrégée des différents risques est notée $S = \sum_{i=1}^d X_i$.
On définit aussi cette somme privée du risque X_i qui sera notée $S^{-i} = \sum_{j=1, j \neq i}^d X_j$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire Z est notée F_Z , sa fonction de survie \bar{F}_Z et sa densité f_Z .

3.1 Indicateurs multivariés de risque

Nous étudions dans cette section des indicateurs de risque multivariés présentés par Cénac et al. [17] en 2011. Ces indicateurs tiennent bien en compte la structure de dépendance entre les différentes branches, ainsi que le coût de ruine. Ces indicateurs seront la base de la construction d'une nouvelle méthode d'allocation du

capital qui fera le sujet de la prochaine section.

3.1.1 Nouvelle famille d'indicateurs de risque multivariés

Cette famille regroupe les indicateurs multivariés de risque qui sont définis sous les formes suivantes :

$$I(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^n g_k(R_k^p) \mathbb{1}_{\{R_k^p < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d R_j^p > 0\}} \right),$$

ou,

$$J(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^n g_k(R_k^p) \mathbb{1}_{\{R_k^p < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d R_j^p < 0\}} \right),$$

avec $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 et convexe telle que : $g_k(0) = 0, g_k(x) \leq 0$ pour $x \leq 0, k = 1, \dots, d$. C'est la fonction de pénalité de la $k^{\text{ème}}$ branche lorsqu'elle devient insolvable, qui représente le coût qu'elle devrait payer lorsqu'elle est insolvable, alors que le groupe est solvable pour les indicateurs de la forme I et en cas de la ruine totale du groupe pour les indicateurs de la forme J .

Les indicateurs de cette famille représentent donc, l'espérance de la somme des pénalités que chaque branche devrait payer pour insolvabilité temporaire.

On peut aussi définir des versions arrêtées des indicateurs de la forme I sous la forme suivante :

$$I_S(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^{n \wedge \tau} g_k(R_k^p) \mathbb{1}_{\{R_k^p < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d R_j^p > 0\}} \right),$$

avec, τ représente le premier instant de la ruine du groupe.

$$\tau = \inf \{j \in \mathbb{N}^*, R_1^j + \dots + R_d^j < 0\}.$$

La sous-section 3.1.3 présente une illustration des indicateurs de cette famille dans le cas de choix des fonctions de pénalités $g_k(x) = |x|$ pour toutes les branches. Pour des fonctions de pénalités fixées, on peut définir des *zones de risques*, liées aux indicateurs I et J :

- *Zone Orange* : représentation de l'indicateur I .
- *Zone Violette* : représentation de l'indicateur J .

Ces appellations seront utilisées pour le reste de ce mémoire. La figure 14 représente une illustration de ces zones en dimension 2.

Les indicateurs qui font partie de cette famille modélisent l'impact de la structure de la dépendance entre les risques, et tient compte de la sévérité de la ruine globale et les montants des insolvabilités locales.

La sous-section suivante 3.1.2 présente d'autres propriétés importantes vérifiées par ces indicateurs, notamment la convexité et la stricte convexité.

3.1.2 Propriétés des indicateurs

On définit les pertes cumulées d'une période p par : $S_p = \sum_{k=1}^d Y_k^p$. On rappelle que \mathcal{U}_u^d désigne l'ensemble $\{(v_1, \dots, v_d) \in (\mathbb{R}^+)^d / v_1 + \dots + v_d = u\}$. On démontre que les indicateurs I et J vérifient les propriétés suivantes :

Convexité : Les indicateurs I et J sont convexes sur \mathcal{U}_u^d .

En effet, si on réécrit l'indicateur I en fonction des S_p et des Y_k^p , on obtient l'expression :

$$I(u) = I(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^n g_k(Y_k^p + u_k) \mathbb{1}_{\{Y_k^p < -u_k\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d S_p > -u\}} \right),$$

et puisque les fonctions $(u_1, \dots, u_d) \rightarrow g_k(Y_k^p + u_k) \mathbb{1}_{\{Y_k^p < -u_k\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d S_p > -u\}}$ sont convexes, alors I est aussi convexe, car il représente la somme des espérances des fonctions convexes. Notons que la convexité est vérifiée même si les fonctions g_k ne sont pas différentiables.

Stricte convexité : Si il existe $k \in \{1, \dots, d\}$ tel que la fonction g_k est strictement convexe, $g_k(x) > 0$ pour $x < 0$, et le support de la distribution conjointe (Y_k^p, S_p) contient $] -u, +\infty[\times] -\infty, u[$, alors I et J admettent des **minima uniques** dans \mathcal{U}_u^d .

Cette propriété découle de la stricte convexité de I et J qui résulte de celle de g_k .

Différentiabilité : Si les fonctions g_k sont différentiables, donc I et J sont différentiables.

En effet, et si on suppose que le couple (Y_k^p, S_p) admet une densité conjointes $f_{Y_k^p, S_p}$, on peut écrire I sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I(u_1, \dots, u_d) &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^n g_k(Y_k^p + u_k) \mathbb{1}_{\{Y_k^p < -u_k\}} \mathbb{1}_{\{S_p > -u\}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{p=1}^n \int_{-\infty}^{-u_k} \int_{-u}^{+\infty} g_k(y + u_k) f_{Y_k^p, S_p}(y, s) dy ds. \end{aligned}$$

Cela est suffisant pour voir que I est différentiable, et de la même façon J l'est aussi. De plus, si $g'_k(Y_k^p + u_k)$ admet un moment d'ordre 1, on peut écrire $(\nabla I(v))_i$ comme suit :

$$\begin{aligned} I(v)_i &= \sum_{k=1}^d \sum_{p=1}^n \int_{-\infty}^{-u_k} g_k(y + v_k) f_{Y_k^p, S_p}(y, -u) dy \\ &\quad + \sum_{p=1}^n \mathbb{E}(g'_i(Y_i^p + v_i) \mathbb{1}_{\{Y_i^p < -v_i\}} \mathbb{1}_{\{S_p > -u\}}) \\ &\quad - \sum_{p=1}^n g_i(0) \int_{-u}^{+\infty} f_{Y_i^p, S_p}(-v_i, s) ds \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{p=1}^n \int_{-\infty}^{-u_k} g_k(y + v_k) f_{Y_k^p, S_p}(y, -u) dy \\ &\quad + \sum_{p=1}^n \mathbb{E}(g'_i(Y_i^p + v_i) \mathbb{1}_{\{Y_i^p < -v_i\}} \mathbb{1}_{\{S_p > -u\}}). \end{aligned}$$

Donc $(\nabla I(v))_i$ est la somme de deux termes. Le premier est une constante commune à tous les i , et le second est sous forme d'une somme d'espérances d'observations liées à v_i sur les n périodes. A première vue, ces deux termes sont compliquées à développer dans le cas général, en revanche, nous pouvons trouver des formules

explicités à ces dérivés partielles, dans des cas de distributions simples, et pour des petites dimensions (exemple, distributions exponentielles indépendantes cas $d = 2$, $n = 1$).

Ces propriétés sont très importantes, elles joueront un rôle singulier pour définir les méthodes d'allocation optimales.

3.1.3 Illustration $g_k(x) = |x|$

Parmi les choix naturels qu'on peut prendre pour les fonctions de pénalités g_k , la fonction $g_k(x) = |x|$ pour toutes les branches, qui représente le montant de la ruine (ou $g_k(x) = -x$, les deux choix sont équivalents, ils construisent les mêmes indicateurs), dans ce cas, on construit l'indicateur I correspondant à la *zone orange* :

$$I(u_1, \dots, u_d) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(|R_k^j| \mathbb{1}_{\{R_k^j < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^d R_i^j \geq 0\}} \right).$$

Sa version stoppée, l'indicateur I_S , correspondant à la *zone orange* stoppée :

$$I_S(u_1, \dots, u_d) = \sum_{j=1}^{p \wedge \tau} \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(|R_k^j| \mathbb{1}_{\{R_k^j < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^d R_i^j \geq 0\}} \right),$$

avec,

$$\tau = \inf \{j \in \mathbb{N}^*, R_1^j + \dots + R_d^j < 0\}.$$

Et finalement, l'indicateur qui représente la *zone violette* de risque, J définie par :

$$J(u_1, \dots, u_d) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(|R_k^j| \mathbb{1}_{\{R_k^j < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^d R_i^j \leq 0\}} \right).$$

La figure 14 présente une représentation graphique des indicateurs I et J en dimension $d = 2$.

Dans le cas mono-périodique $n = 1$, $I = I_S$, et ces trois indicateurs peuvent être considérés des cas particuliers du cas général étudié par Dhaene et al. (2012) [20], qui ont traité la minimisation de :

$$\sum_{j=1}^d v_j \mathbb{E} \left[\xi_j D \left(\frac{X_j - u^j}{v_j} \right) \right],$$

avec X_j représente la perte de la $j^{\text{ème}}$ branche, les v_j sont des réels positifs tels que $\sum_{j=1}^d v_j = 1$, les ξ_j sont des variables aléatoires non négatives telles que $\mathbb{E}[\xi_j] = 1$, et D est une fonction non négative (fonction de déviation).

Pour cela, il suffit de prendre par exemple $\xi_j = \mathbb{1}_{S \leq u}$ ou $\xi_j = \mathbb{1}_{S \geq u}$, avec S représente la somme agrégée des pertes, et $D(x) = |x|$.

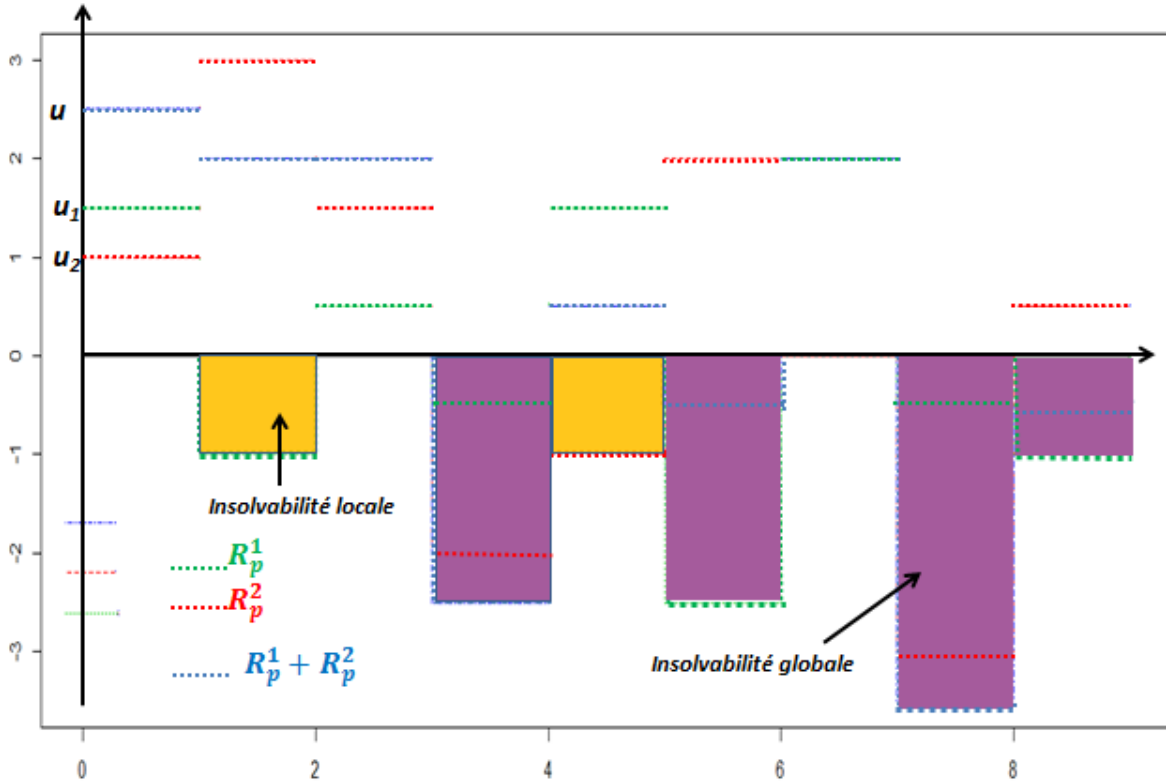


FIGURE 14 – Représentation des indicateurs I et J .

3.2 Allocation par minimisation des indicateurs de risque

Les indicateurs définis précédemment permettent de mesurer une espérance de perte locale en fonction de la situation de la solvabilité du groupe. L'indicateur I qui représente la *zone orange* de risque, reste le plus important, car elle mesure les pertes locales quand le groupe est toujours solvable. Nous proposons maintenant de fixer les niveaux des allocations par branche u_i par minimisation d'un de ces indicateurs multivariés de risque.

3.2.1 Présentation de la méthodologie de l'allocation

Mathématiquement, pour une richesse initiale u , et une allocation optimale par minimisation de la *zone orange*, on cherche $u^* \in \mathbb{R}_+^d$ telle que :

$$I(u^*) = \inf_{v_1 + \dots + v_d = u} I(u), \quad v \in \mathbb{R}_+^d.$$

Cette allocation est par définition totale, car l'optimisation se fait au niveau sur simplexe $\mathcal{U}_u^d = \{v = (v_1, \dots, v_d) \in [0, u]^d, \sum_{i=1}^d v_i = u\}$. L'avantage de cette méthode est qu'elle peut être appliquée à plusieurs type de capitaux et non seulement le capital économique, elle peut être utilisée par exemple pour allouer le gain de la diversification ou tout capital d'investissement. Elle se base sur une vision de minimisation du risque global.

Nous utiliserons durant cette partie les hypothèses suivantes :

- H1** L'indicateur multivarié de risque admet un unique minimum sur l'ensemble \mathcal{U}_u^d .
- H2** Les fonctions de pénalités g_k sont différentiables, et vérifient pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, que $g'_k(u_k - X_k)$ admet un moment de premier ordre, et (X_k, S) a une densité jointe $f_{(X_k, S)}$.

H3 Les d risques ont la même fonction de pénalités $g_k = g, \forall k \in \{1, \dots, d\}$.

La première hypothèse est vérifiée quand l'indicateur utilisé est strictement convexe. Cela est particulièrement vrai quand elle existe au moins une fonction de pénalités g_k pour $k \in \{1, \dots, d\}$ strictement convexe, et le support de la densité jointe $f_{(X_k, S)}$ contient $[0, u]^2$ (voir [25]).

3.2.2 Conditions d'optimalité

Nous examinons maintenant les conditions d'optimalité pour les indicateurs multivariés I et J dans leurs versions mono-périodiques.

Pour un capital initial u et une allocation par minimisation de l'indicateur de risque multivarié I , nous cherchons à déterminer $u^* \in \mathbb{R}_+^d$ qui vérifie :

$$I(u^*) = \inf_{v_1 + \dots + v_d = u} I(v), \quad v \in \mathbb{R}_+^d.$$

Sous l'hypothèse H2, les deux indicateurs de risque I et J sont différentiables, et dans ce cas on peut donner une expression à leurs gradients :

$$\begin{aligned} (\nabla I(v))_i &= \sum_{k=1}^d \int_{v_k}^{+\infty} g_k(v_k - x) f_{X_k, S}(x, u) dx + \mathbb{E}[g'_i(v_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > v_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] \\ \text{et, } (\nabla J(v))_i &= \sum_{k=1}^d \int_{v_k}^{+\infty} g_k(v_k - x) f_{X_k, S}(x, u) dx + \mathbb{E}[g'_i(v_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > v_i\}} \mathbb{1}_{\{S \geq u\}}]. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses H1 et H2, et en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on récupère la condition d'optimalité de premier ordre vérifiée par l'unique solution à notre programme d'optimisation :

$$\mathbb{E}[g'_i(u_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'_j(u_j - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}], \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}^2. \quad (3.1)$$

3.2.3 Fonctions de pénalités

Le choix des fonctions de pénalités reste libre par branche. Toutefois, il nous semble naturel et plus simple de choisir en pratique des fonctions qui représentent tout simplement les sévérités de la ruine au niveau local $g_k(x) = |x|$. Dans ce cas, et si il existe au moins un $k \in \{1, \dots, d\}$ tel que le support de la fonction de densité jointe $f_{(X_k, S)}$ contient $[0, u]^2$, le problème d'optimisation a une unique solution.

Dans les cas des fonctions de pénalités $g_k(x) = |x|$, on peut réécrire les indicateurs I et J sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} I(u_1, \dots, u_d) &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(|R_k| \mathbb{1}_{\{R_k < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^d R_i \geq 0\}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left((X_k - u_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^d X_i \leq u\}} \right) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left((X_k - u_k)^+ \mathbb{1}_{\{S \leq u\}} \right), \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} J(u_1, \dots, u_d) &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(|R_k| \mathbb{1}_{\{R_k < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^d R_i \leq 0\}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left((X_k - u_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^d X_i \geq u\}} \right) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left((X_k - u_k)^+ \mathbb{1}_{\{S \geq u\}} \right). \end{aligned}$$

Les composantes des gradients de ces indicateurs sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$K_I - \mathbb{P} \left(X_1 > u_1, \sum_{j=1}^d X_j \leq u \right), \dots, K_I - \mathbb{P} \left(X_d > u_d, \sum_{j=1}^d X_j \leq u \right),$$

et,

$$K_J - \mathbb{P} \left(X_1 > u_1, \sum_{j=1}^d X_j \geq u \right), \dots, K_J - \mathbb{P} \left(X_d > u_d, \sum_{j=1}^d X_j \geq u \right),$$

où,

$$K_I = K_J = \sum_{k=1}^d \int_{u_k}^{+\infty} (x - u_k) f_{X_k, S}(x, u) dx.$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous la seule contrainte $u_1 + u_2 + \dots + u_d = u$. On peut donc appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui nous offre la condition d'optimalité dans le cas de l'indicateur I par :

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S \leq u) = \mathbb{P}(X_j > u_j, S \leq u), \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2. \quad (3.2)$$

Pour le cas de l'indicateur J cette condition est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S \geq u) = \mathbb{P}(X_j > u_j, S \geq u), \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2. \quad (3.3)$$

La condition d'optimalité dans le cas de l'unicité du minimum sera la base pour produire des formules semi-explicites de la composition de l'allocation optimale pour les modèles qui seront présentés dans la sous-section 3.5. Le problème d'optimisation converge ainsi vers une étude de l'allocation en fonction de la nature des distributions des risques X_k et la forme de dépendance qui existe entre ces risques.

3.3 Propriétés de cohérence

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de cohérence vérifiées par la méthode d'allocation proposée. Nous suivons le chemin de Denault (2001) pour montrer que cette méthode d'allocation peut être considérée cohérente.

L'allocation optimale proposée est tout d'abord une allocation additive (full allocation) par construction. Nous démontrons qu'elle est aussi invariante par translation, positivement homogène, monotone, comonotonique additive, continue, neutre et symétrique, en fonction des hypothèses.

Dans un contexte multivarié, les définitions des propriétés de cohérence classiques changent. Nous avons essayé dans l'article [34] de donner des définitions multivariées des différentes propriétés de cohérence rencontrées dans la théorie des mesures de risque.

Dans le reste de ce chapitre, on désigne par $A_{X_1, \dots, X_d}(u) = (u_1, \dots, u_d)$, la composition de l'allocation optimale du capital u entre les d activités risquées dans \mathcal{U}_u^d .

3.3.1 Symétrie

Une des propriétés naturelles qu'une allocation de capital doit vérifier est la symétrie. Si la distribution jointe du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) est stable par permutation de deux risques X_i et X_j , alors la méthode d'allocation doit aussi rester stable par la même permutation, c-à-d les deux branches X_i et X_j ont la même contribution au capital du groupe. Mathématiquement, cette propriété se traduit si,

$$\begin{aligned} & (X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, \dots, X_d) \\ & \quad \underline{\underline{L}} \\ & (X_1, \dots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \dots, X_d), \end{aligned}$$

par $u_i = u_j$.

Sous l'hypothèse H1, nous montrons que si ils existent $(i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2$, tels que $i \neq j$, (X_i, S^{-i}) et (X_j, S^{-j}) sont identiquement distribués, et les deux risques X_i et X_j ont la même fonction de pénalité $g_i = g_j$ alors :

$$u_i = u_j.$$

En effet, pour $(i \neq j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2$ tels que les couples aléatoires (X_i, S^{-i}) et (X_j, S^{-j}) sont identiquement distribués, et les deux fonctions de pénalités g_i et g_k sont identiques $g_i = g_j = g$ (on suppose sans perte de généralité que $i < j$), si on note :

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_d) = A_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_d}(u),$$

alors,

$$I(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_d) = \inf_{v \in \mathcal{U}_u^d} I(v) = \inf_{v \in \mathcal{U}_u^d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g_k(v_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > v_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}).$$

D'un autre côté, et puisque $g_i = g_j = g$ et $(X_i, S^{-i}) \sim (X_j, S^{-j})$, alors :

$$\begin{aligned} I(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_d) &= \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^d \mathbb{E} (g_k(u_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}) \\ &+ \mathbb{E} (g(u_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}) \\ &+ \mathbb{E} (g(u_j - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}) \\ &= I(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_d). \end{aligned}$$

L'hypothèse H1 assure l'unicité du minimum de l'indicateur I dans \mathcal{U}_u^d , on peut donc en déduire que

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_d) = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_d),$$

puis que $u_i = u_j$.

Un corollaire de la propriété précédente, est que sous les hypothèses H1 et H3, si le vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) est échangeable, alors les deux allocations par minimisation des indicateurs I et J ont la même composition :

$$A_{X_1, \dots, X_d}(u) = \left(\frac{u}{d}, \frac{u}{d}, \dots, \frac{u}{d} \right).$$

3.3.2 Neutralité

L'allocation du capital ne doit concerner que les activités risquées. La présence d'un risque déterministe ne doit avoir aucun impact sur la composition de l'allocation. Cela se traduit dans le cas de la présence d'un risque $X = c$, où c est une constante positive $c \in \mathbb{R}^+$, par la relation suivante :

$$A_{X, X_1, \dots, X_d}(u) = (c, A_{X_1, \dots, X_d}(u - c)).$$

Nous avons montré que, sous les hypothèse H1 et H3, et pour des fonctions de pénalités 1-homogènes, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$,

$$A_{c, X_1, \dots, X_d}(u) = (c, A_{X_1, \dots, X_d}(u - c)),$$

où $(c, A_{X_1, \dots, X_d}(u - c))$ et le vecteur concaténation de c et du vecteur $A_{X_1, \dots, X_d}(u - c)$. La démonstration de ce résultat est présentée dans l'annexe 1 (A.1).

3.3.3 Monotonie

Si une branche est plus risquée presque sûrement qu'une autre, il est naturel que la contribution au risque de la première soit supérieure à celle de la deuxième. La propriété de la monotonie désigne le respect d'une allocation de capital de cette règle souhaitable. Nous rappelons la définitions de la dominance d'ordre stochastique, présentée dans Shaked et Shanthikumar (2007)[40]. Pour deux risques représentés par les variables aléatoires X et Y , Y est dit dominé par X selon la dominance stochastique de premier ordre si et seulement si :

$$\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

dans ce cas, on note cette dominance par : $X \leq_{st} Y$.

Cette définition est équivalente à :

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)], \text{ pour toute fonction croissante } u$$

Une méthode d'allocation est monotone si pour $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$:

$$X_i \leq_{st} X_j \Rightarrow u_i \leq u_j.$$

L'allocation optimale du capital par minimisation des indicateurs multivariés de risque I et J vérifie sous l'hypothèse H2 la propriété de la monotonie pour tous risques ayant la même fonction de pénalité. La démonstration de ce résultat est présentée dans l'annexe 1 (A.2).

3.3.4 Invariance par translation

L'invariance par translation est la première propriété de cohérence pour les mesures de risques. Nous pensons qu'elle doit aussi être satisfaite par une méthode d'allocation du capital. Un changement déterministe au niveau des risques doit avoir un impact déterministe et neutre sur la composition de l'allocation. L'allocation est invariante par translation si elle vérifie pour tout vecteur, $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$A_{X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d}(u) = A_{X_1, \dots, X_d} \left(u + \sum_{k=1}^d a_k \right) - (a_1, \dots, a_d).$$

Sous les hypothèses H1, H2 et pour tout vecteur $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, tel que le support de la densité jointe $f(X_k, S)$ contient $[0, u + \sum_{k=1}^d a_k]^2$, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, l'allocation optimale par minimisation des indicateurs I et J est invariante par translation. Cette propriété est démontrée dans l'annexe 1 (A.3).

3.3.5 Homogénéité positive

L'allocation du capital doit être stable par changement de devise. Cela est traduit dans la théorie du risque par la propriété de l'homogénéité positive. L'allocation est positivement homogène si pour toute $\alpha \in \mathbb{R}^+$, elle vérifie :

$$A_{\alpha X_1, \dots, \alpha X_d}(\alpha u) = \alpha A_{X_1, \dots, X_d}(u).$$

L'allocation de capital par minimisation des indicateurs de risque multivariés I et J est positivement homogène quand les fonctions de pénalités sont toutes 1-homogènes. Ce résultat est démontré dans l'annexe 1 (A.4) de ce mémoire.

3.3.6 Robustesse

Une allocation de capital peut être considérée comme robuste dans le sens continue, si pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_{X_1, \dots, (1+\epsilon)X_i, \dots, X_d}(u) = A_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_d}(u).$$

Cette propriété reflète le fait qu'un changement infinitésimal au niveau d'une branche, engendre des effets très limités sur la contribution de cette branche dans le risque global. La notion de la robustesse est plus forte dans la littérature que la continuité, elle est très liée au choix d'une distance. La robustesse par rapport à la faible topologie et en utilisant des distances de type Wasserstein ou Mahalanobis a été étudiée pour les mesures de risque usuelles. Il sera un peu plus compliqué de vérifier si une allocation est robuste pour ces distances. Nous avons décidé de nous limiter à la continuité dans le sens définie ci-dessus.

Nous montrons sous les hypothèses H1 et H2, que si pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall \epsilon, |\epsilon| < \epsilon_0, \quad \mathbb{E}[\sup_{v \in [0, u]} |g'_k(v - (1 + \epsilon)X_k)|] < +\infty,$$

et si (X_1, \dots, X_d) est un vecteur aléatoire continu, alors l'allocation optimale par minimisation des indicateurs I ou J est robuste pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_{X_1, \dots, (1+\epsilon)X_i, \dots, X_d}(u) = A_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_d}(u).$$

La preuve de cette propriété est présentée en détails dans l'annexe 1 (A.5).

3.3.7 Sous-additivité

La sous-additivité semble une des propriétés souhaitable d'une allocation du capital. Elle traduit la prise en compte de la présence du gain de la diversification par cette méthode. Cette propriété constitue un des critères de cohérence selon Denault (2001) [19]. Dans notre contexte, elle peut être formalisée comme suit, pour tout sous-ensemble

$M \subseteq \{1, \dots, d\}$, si on note $(u^*, u_1^*, \dots, u_r^*) = A_{\sum_{i \in M} X_i, X_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus M}}(u)$, où $r = d - \text{card}(M)$ et $(u_1, \dots, u_d) = A_{X_1, \dots, X_d}(u)$, alors :

$$u^* \leq \sum_{i \in M} u_i.$$

Nous avons essayé sans réussite pour l'instant de formaliser une démonstration théorique à cette propriété dans le contexte de l'allocation par minimisation des indicateurs multi-variés. Cependant, toutes les simulations effectuées à l'aide des algorithmes d'optimisation, semblent confirmer cette propriété, même pour les cas des contre exemples classiques de la sous-additivité de la VaR.

Dans le sens de la sous-additivité, nous démontrons que le sens des variations des attributions suite à une opération de fusion de deux activités est le même pour toutes les branches. Nous pouvons traduire cette propriété par le lemme ci-dessous.

Lemme On désigne par $x.e_i$ le produit vectoriel du vecteur $x \in \mathbb{R}^d$ et de la $i^{\text{ème}}$ composante de la base canonique de \mathbb{R}^d . Sous les hypothèses H1, H2, et H3, et pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$

- Si $A_{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i+X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_d}(u).e_i < A_{X_1, \dots, X_d}(u).(e_i + e_j)$, alors :

$$\forall k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}, \quad A_{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i+X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_d}(u).e_k > A_{X_1, \dots, X_d}(u).e_k,$$

- Si $A_{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i+X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_d}(u).e_i > A_{X_1, \dots, X_d}(u).(e_i + e_j)$, alors :

$$\forall k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}, \quad A_{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i+X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_d}(u).e_k < A_{X_1, \dots, X_d}(u).e_k,$$

- Si $A_{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i+X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_d}(u).e_i = A_{X_1, \dots, X_d}(u).(e_i + e_j)$, alors :

$$\forall k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}, \quad A_{X_1, \dots, X_{i-1}, X_i+X_j, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_d}(u).e_k = A_{X_1, \dots, X_d}(u).e_k.$$

La démonstration de ce Lemme est présentée dans l'annexe 1 (A.6). Il sera utilisé pour la démonstration de la propriété de l'additivité comonotone.

3.3.8 Additivité comonotone

Dans le cas d'une dépendance parfaite entre deux branches, leur fusion ne doit avoir aucun impact sur la composition de l'allocation, et le montant alloué à la nouvelle branche doit être la somme des montant alloués aux deux branches séparées.

Mathématiquement, pour $r \leq d$ risques comonotones,

$$A_{X_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus CR}, \sum_{k \in CR} X_k}(u) = (u_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus CR}, \sum_{k \in CR} u_k),$$

où $(u_1, \dots, u_d) = A_{X_1, \dots, X_d}(u)$ est l'allocation optimale du capital u entre les d branches (X_1, \dots, X_d) et CR représente l'ensemble des indices des r risques comonotones.

Le concept des variables aléatoires comonotones est lié aux travaux de Hoeffding (1940) [26] et Fréchet (1951) [21]. Nous utilisons dans ce mémoire la définition des risques comonotones telle qu'elle a été introduite dans les sciences actuarielles par Borch (1962) [11]. Dans le contexte de notre allocation, nous montrons que sous l'hypothèse H2, et pour des fonctions de pénalités égales à la sévérité de la ruine $g_k(x) = |x|$, l'allocation du capital par minimisation des indicateurs de risques I et J vérifie la propriété de l'additivité comonotone. La démonstration de la preuve de cette propriété est présentée dans l'annexe 1 (A.7).

Remarque : Les démonstrations des propriétés présentées dans cette sous-section ont été faites pour l'allocation par minimisation de l'indicateur de risque I . Ces démonstrations sont trivialement généralisables pour le cas de la minimisation de l'indicateur J aussi.

Les propriétés souhaitables pour une allocation de capital basée sur une mesure de risque univariée ne sont pas toutes traduisibles dans notre contexte. L'aspect multivarié de notre approche, fait perdre le sens à plusieurs d'entre elles, notamment la RORAC compatibilité, définie par Dirk Tasche [44]. Le capital alloué dans le cadre de notre approche est complètement libre, est ne dépend pas d'une mesure de risque spécifique pour son calcul qui peut influencer ou apparaitre dans la composition de l'allocation optimale.

Nous avons donc montré que dans le cas des sévérités des ruines locales comme fonctions de pénalités $g_k(x) = |x| \forall k \in \{1, \dots, d\}$, et d'un vecteur aléatoire de risque (X_1, \dots, X_d) de distributions continues, tel que le support de la densité jointe $f_{(X_k, S)}$ contient $[0, u]^2$, pour au moins un $k \in \{1, \dots, d\}$, l'allocation optimale par minimisation des indicateurs I et J vérifie la quasi-totalité des propriétés de cohérence présentées dans cette section. Ce résultat nous permet de conclure qu'il s'agit bien d'une méthode utilisable dans un contexte d'allocation de risque.

3.4 Minimisation par algorithmes stochastiques

Nous présentons dans cette sous-section, des algorithmes d'optimisation qu'on peut utiliser pour déterminer l'allocation optimale par minimisation de *zone orange* selon la complexité du problème (choix des distributions, possibilité d'avoir des expressions analytiques...).

L'outil le plus performant dans le cas de notre problème de minimisation des indicateurs de risque multivariés, est la version de type Kiefer-Wolfowitz de l'algorithme de descente en miroir stochastique, présentée en détails par Cénic et al. (2012) dans [17], et qui peut être utilisée dans le cas général, sous condition de respecter les conditions de sa convergence.

Le contenu de cette section est issu de la présentation faite par Véronique Maume-Deschamps [33] sur le sujet, à l'université de Bourgogne, le 26 mai 2010.

L'approche par algorithmes stochastiques présente des avantages importants, notamment :

- L'absence d'hypothèses paramétriques sur les distributions et la structure de dépendance des X_i .
- La possibilité de traiter tous les cas, notamment les cas de plusieurs périodes $p > 0$
- La possibilité de traiter la dépendance sur une période.
- L'efficacité en grandes dimensions ($d = 50$).

Algorithme déterministe : On cherche l'unique zéro d'une fonction connue f

Proposition : On suppose que :

- Il existe un unique x^* tel que $f(x^*) = 0$
- $\forall x \neq x^*, f(x)(x - x^*) > 0$,
- $\exists K > 0$ tel que $|f(x)| \leq K(1 + |x|)$ (Sous linéarité)

Soit $(\gamma_n)_n$ une suite de réels positifs, décroissant vers 0 et telle que :

$$\sum_{n \geq 0} \gamma_n = \infty,$$

alors, la suite $x_{n+1} = x_n - \gamma_n f(x_n)$ converge vers x^* pour toute valeur initiale x_0

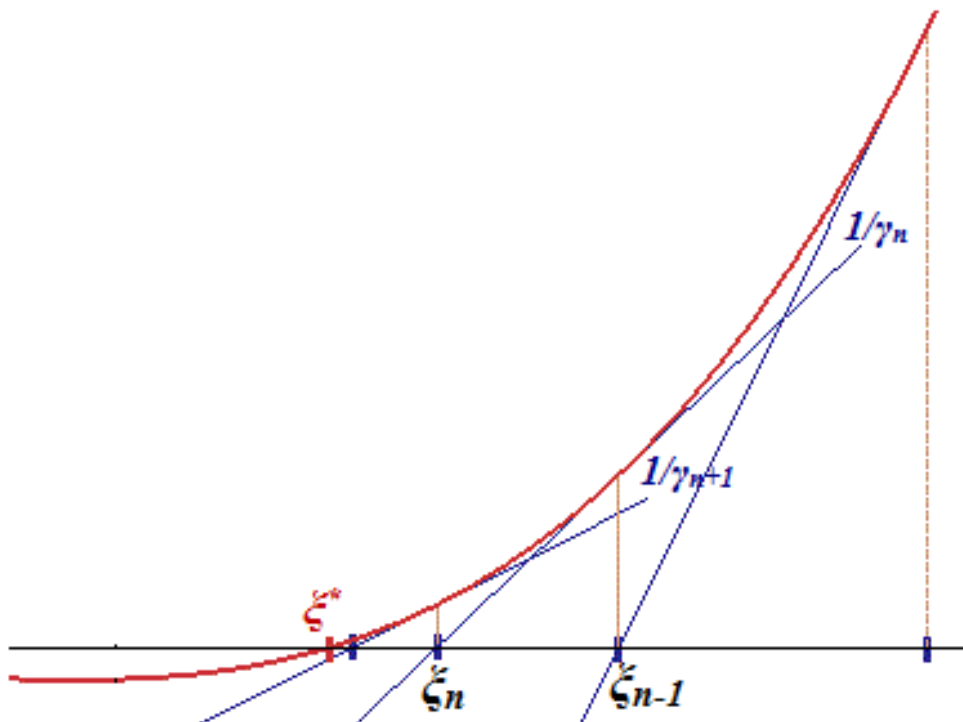


FIGURE 15 – Algorithme déterministe d’optimisation

On peut donner comme exemples de ces algorithmes :

Méthode de Newton-Raphson : Elle est basée sur l’utilisation de la tangente en un point de la courbe d’une fonction f :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

La version déterministe de l’algorithme de Robbins-Monro : En général, on n’a pas l’expression de f' , on approxime ses valeurs dans les points x_k par une suite $\frac{1}{\gamma_k}$ vérifiant les conditions demandées pour la convergence, les pentes sont donc $\frac{1}{\gamma_k}$:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n f(x_n).$$

3.4.1 L’algorithme de Robbins-Monro

Le problème se pose si on n’a qu’une version bruitée de la fonction f , (ce qui est généralement le cas), dans ce cas, on fait appel aux algorithmes de type de Robbins-Monro,[39] :

$$\chi_{n+1} = \chi_n - \gamma_{n+1} \xi_{n+1},$$

où, $\xi_{n+1} = f(\chi_n) + \varepsilon_{n+1}$, $(\varepsilon_n)_n$ est une suite i.i.d, avec ε_{n+1} indépendant de $\mathcal{F}_n = \sigma(\chi_0, \dots, \chi_n)$. Ce type d’algorithmes est très présent dans la littérature de l’optimisation numérique. La convergence est donnée par le théorème qui suit.

Théorème de Robbins Monro (1951) : χ_n et ξ_n deux suites de variables aléatoires de carrés intégrables sur \mathbb{R}^d , adaptées à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et γ_n une suite de réels décroissante vers 0.

Soit $\chi_{n+1} = \chi_n - \gamma_{n+1} \xi_{n+1}$ avec :

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = f(\chi_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\|\xi_{n+1} - f(\chi_n)\|^2 | \mathcal{F}_n] = \sigma^2(\chi_n).$$

On suppose que f est continue de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d et que :

- $f(x^*) = 0$
- $\forall x \neq x^*, f(x)(x - x^*) > 0$,
- $\exists K > 0$ tel que $\sigma^2(x) + \|f(x)\|^2 \leq K(1 + \|x\|^2)$
- $\sum_n \gamma_n = \infty$ et $\sum_n \gamma_n^2 < \infty$

Alors :

$$\chi_n \xrightarrow{p.s} x^*$$

Une preuve simplifiée de ce théorème est détaillée dans [29].

3.4.2 Algorithme de Kiefer-Wolfowitz

Dans notre cas, l'objectif est de Minimiser une fonction f strictement convexe et C^1 , donc, trouver le zéro de son gradient ∇f .

Nos indicateurs de risque multivariés sont des fonctions de la forme $f(x) = \mathbb{E}[F(x, \xi)]$, et donc ∇f n'est pas connu.

L'algorithme de Kiefer-Wolfowitz consiste à utiliser une approximation de ∇F comme version bruitée de ∇f , ∇F sera approximé par :

$$D_{c_n} = \frac{F(\chi_n + c_n, \xi_n^1) - F(\chi_n - c_n, \xi_n^2)}{2c_n},$$

avec ξ_n^1 et ξ_n^2 sont deux suites de variables aléatoires i.i.d. de même loi que ξ .

L'algorithme de Kiefer-Wolfowitz est définie par :

$$\chi_{n+1} = \chi_n - \gamma_n \frac{F(\chi_n + c_n, \xi_n^1) - F(\chi_n - c_n, \xi_n^2)}{2c_n}.$$

La convergence de l'algorithme découle du théorème suivant :

Théorème Kiefer-Wolfowitz (1952) : Soient γ_n et c_n deux suites de réels positifs décroissantes vers 0, telles que :

$$\sum_n \gamma_n = \infty, \quad \sum_n c_n \gamma_n < \infty \quad \text{et} \quad \sum_n (\gamma_n / c_n)^2 < \infty.$$

On suppose que f est C^2 et que

$$\|\nabla f(x)\| \leq K(1 + \|x\|) \quad \text{et} \quad \|\mathbb{E}[F^2(x, \xi)]\| \leq K(1 + \|x\|^2),$$

alors, χ_n converge presque surement vers l'unique minimum de f .

L'algorithme de Kiefer-Wolfowitz et la démonstration du théorème ci-dessus, sont présentés dans l'article [28].

Dans le cas de nos indicateurs de risque multivariés, la condition linéaire $u_1 + \dots + u_d = u$ ne permet pas dans le cas général d'avoir les bonnes propriétés pour la convergence de l'algorithme Kiefer-Wolfowitz, c'est pour cela qu'on utilise la version Kiefer-Wolfowitz de l'algorithme de descente en miroir.

3.4.3 L'algorithme de descente en miroir

Dans cette sous-section, nous présentons la version Kiefer-Wolfowitz de l'algorithme de descente en miroir. L'algorithme de descente en miroir a été introduit pour la première fois par Nemirovski et Yudin (1983)[37] dans sa version déterministe. Sa version stochastique a été proposée par Claire Tauvel en 2008 dans sa thèse [46].

Description de l'algorithme de descente en miroir stochastique : Pour utiliser l'algorithme, on a besoin d'une fonction auxiliaire V . On considère que \mathbb{R}^d est doté de la norme $\| \cdot \|$ et que l'espace dual $(\mathbb{R}^d)^*$ est doté de la norme $\| \cdot \|_*$:

$$\| x \| = \sum_{i=1}^d |x_i|, \quad \| \xi \|_* = \sup_{i=1, \dots, d} |\xi_i|.$$

Pour un problème d'optimisation sous la forme :

$$\min_{x \in C} f(x),$$

f une fonction convexe et C^1 et C est un compact convexe de E .

Soit $\psi(x)$ la fonctions des observations bruitées de ∇f :

$$\psi(x) = \nabla f(x) + \eta(x),$$

avec une hypothèse de différence de martingales sur η .

On fixe :

- x_0 un point initial,
- δ une fonction fortement convexe sur C , et différentiable en x_0

On construit une fonction auxiliaire V :

$$V(x) = \delta(x) - \delta(x_0) - \langle \delta'(x_0), x - x_0 \rangle,$$

qui va être utilisée pour pousser la trajectoire dans l'ensemble des contraintes C .

W_β est la **la transformée de Legendre-Fenchel** de βV définie pour $z \in E^*$ par :

$$W_\beta(z) = \sup_{x \in C} \{ \langle z, x \rangle - \beta V(x) \}.$$

Les propriétés de la transformée de Legendre-Fenchel garantissent que $W\beta$ est continue et différentiable, et que son gradient prends ses valeurs dans C . $(\gamma_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux suite de réels positifs, $(\beta_n)_n$ est croissante.

L'algorithme construit deux suites de variables aléatoires :

- (χ_n) dans C
- (ξ_n) dans l'espace dual E^*

L'algorithme :

- *Initialisation* : $\xi_0 = 0 \in E^*$, $\chi_0 \in C$
- *Mise à jour* : Pour $n = 1$ à N faire
 - $\xi_n = \xi_{n-1} - \chi_n \psi(\chi_{n-1})$
 - $\chi_n = \nabla W_{\beta_n}(\xi_n)$
- *Sortie* :

$$S^N = \frac{\sum_{n=1}^N \gamma_n \chi_{n-1}}{\sum_{n=1}^N \gamma_n}.$$

La figure 16 est une illustration graphique de l'algorithme de descente en miroir.

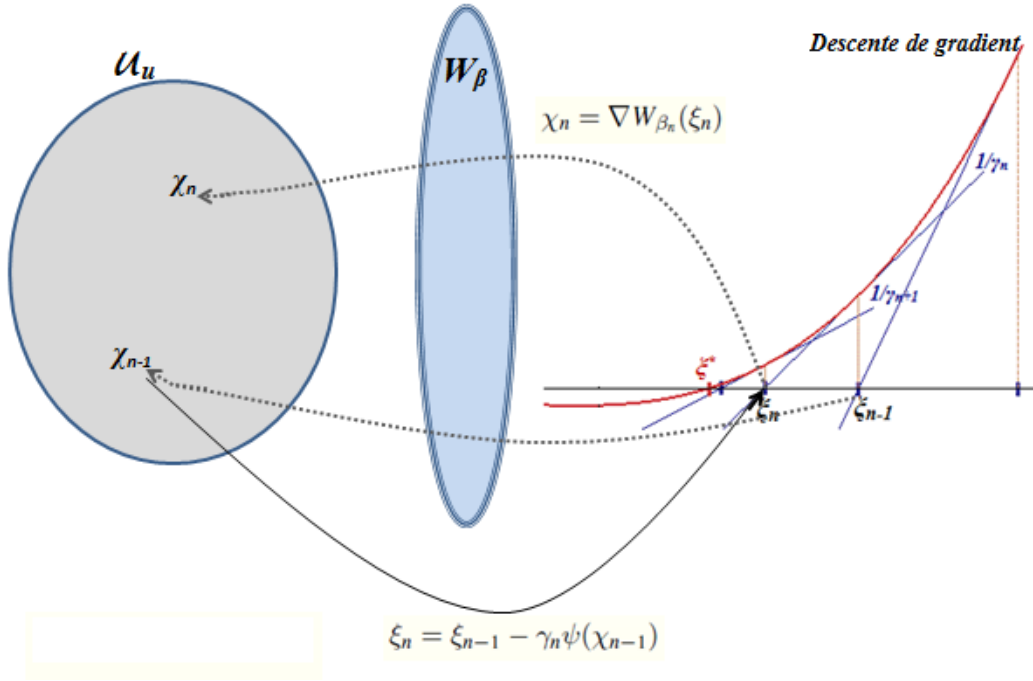


FIGURE 16 – L’algorithme de descente en miroir.

Convergence de l’algorithme : Tauvel[46] a montré la convergence de l’algorithme, $\mathbb{E}[f(S^N)] - \mathbb{E}[f(x^*)]$ vers 0, sous les conditions suivantes :

- **unicité :** f admet un unique minimum x^* .
- **différence de martingales :**

$$\mathbb{E}[\eta(\chi_{n+1}) | \mathcal{F}_n], \text{ avec } \mathcal{F}_n = \sigma(\chi_0, \dots, \chi_n),$$

où $\psi(x) = \nabla f(x) + \eta(x)$ est observable.

- **moment d’ordre 2 :** $\exists \sigma > 0$ tel que pour tout n

$$\mathbb{E}[\|\eta(\chi_{n+1})\|^2 | \mathcal{F}_n] < \sigma^2.$$

Avec une hypothèse supplémentaire de moments exponentiels sur η , Tauvel montre aussi la convergence presque sûrement de $f(S^N) - f(x^*)$ vers 0.

3.4.4 Application à l’allocation optimale

On cherche $u^* \in \mathbb{R}_+^d$ telle que :

$$I(u^*) = \inf_{v_1 + \dots + v_d = u} I(u), \quad v \in \mathbb{R}_+^d,$$

avec,

$$I(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^n g_k(R_k^p) \mathbb{1}_{\{R_k^p < 0\}} \mathbb{1}_{\{\sum_{j=1}^d R_j^p > 0\}} \right).$$

Les fonctions $g_k(x) = |x|$ sont strictement convexes. Nous avons comme montré dans 3.1.2, que l’indicateur I est strictement convexe sur $\mathcal{U}_u^d = \{(v_1, \dots, v_d) \in (\mathbb{R}^+)^d / v_1 + \dots + v_d = u\}$, et donc notre problème d’optimisation admet une solution unique.

Nous utilisons ici une version à la Kiefer-Wolfowitz de l’algorithme de descente en miroir :

- **Fonction auxiliaire** : On choisit la fonction d'entropie V

$$V(x) = \ln d + \sum_{i=1}^d \frac{x_i}{u} \ln\left(\frac{x_i}{u}\right) = \ln d + \delta(x),$$

V est bien une fonction fortement convexe.

- **La transformée de Legendre-Fenchel** : Elle se calcule facilement de V

$$W_\beta(\xi) = \beta \ln\left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \exp\left[\xi_i \frac{u}{\beta}\right]\right),$$

les valeurs de son gradient sont bien dans C : $W_\beta(\xi) \in \mathcal{U}_n^d$.

- **Gradient approximé** : Pour $I(u) = \mathbb{E}[\mathcal{I}(u_1, \dots, u_d, \mathcal{Y})]$, avec,

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} Y_1^1 & \dots & Y_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_1^d & \dots & Y_n^d \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$\mathcal{I}^k(c_i^+, \mathcal{Y}) = \mathcal{I}(\chi_{i-1}^1, \dots, \chi_{i-1}^{k-1}, \chi_{i-1}^k + c_i, \chi_{i-1}^{k+1}, \dots, \chi_{i-1}^d, \mathcal{Y}),$$

$$\text{et, } \mathcal{I}^k(c_i^-, \mathcal{Y}) = \mathcal{I}(\chi_{i-1}^1, \dots, \chi_{i-1}^{k-1}, \chi_{i-1}^k - c_i, \chi_{i-1}^{k+1}, \dots, \chi_{i-1}^d, \mathcal{Y}).$$

On considère le vecteur aléatoire $D_{c_i} \mathcal{I}$ dont la $k^{\text{ème}}$ coordonnée est :

$$D_{c_i}^k \mathcal{I}(u_1, \dots, u_d, \mathcal{Y}) = \frac{\mathcal{I}^k(c_i^+, \mathcal{Y}) - \mathcal{I}^k(c_i^-, \mathcal{Y})}{2c_i}.$$

L'algorithme :

- *Initialisation* : $\xi_0 = 0 \in E^*$ et $\chi_0 \in C$
- *Mise à jour* : Pour $n = 1$ à N faire
 - $\xi_n = \xi_{n-1} - \chi_n D_{c_n} \mathcal{I}(\chi_{n-1}, \mathcal{Y}_n)$
 - $\chi_n = \nabla W_{\beta_n}(\xi_n)$
- *Sortie* :

$$S^N = \frac{\sum_{n=1}^N \gamma_n \chi_{n-1}}{\sum_{n=1}^N \gamma_n},$$

les \mathcal{Y}_n sont des copies indépendantes de la loi de \mathcal{Y} .

conditions de convergence : Cénac et al.[17] démontrent la convergence de l'algorithme pour tout indicateur I :

$$S^N \xrightarrow{L^1} x^*$$

sous les conditions suivantes :

Conditions sur l'indicateur : Ces conditions sont bien vérifiées pour l'indicateur de la zone orange

- I est une fonction convexe de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} ,
- I est C^2 sur \mathcal{U}_u ,
- I admet un unique minimum u^* dans \mathcal{U}_u ,

- $\exists \sigma > 0$ tel que pour tout $v \in \mathcal{U}_u$

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}(v_1, \dots, v_d, \mathcal{Y})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \leq \sigma^2.$$

\mathcal{F}_{n-1} est engendré par $(\mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_{n-1})$

Conditions sur les suites : Les suites des réels positifs $(c_n)_{n \geq 0}$, $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ et $(\beta_n)_{n \geq 0}$ vérifient :

- $(\beta_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante;
- $\beta_N / \sum_{i=1}^N \gamma_i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$;
- $\sum_{i=1}^N c_i \gamma_i / \sum_{i=1}^N \gamma_i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$;
- $\sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i^2}{c_i^2 \beta_{i-1}} / \sum_{i=1}^N \gamma_i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$;
- $\sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{\gamma_i}{c_i})^2 < \infty$.

Ils démontrent aussi, que si de plus, \mathcal{I} vérifie une hypothèse de moment d'ordre > 2 , alors :

$$S^N \xrightarrow{p.s.} x^*.$$

Nous présentons des résultats numériques obtenus par cet algorithme dans la section simulations de ce chapitre.

3.5 Étude de l'allocation pour des modèles d'indépendance

Cette partie présente une généralisation en dimension quelconque des résultats présentés en dimension deux par Cénac et al (2014) [16].

Nous essayons de donner des formes explicites à la composition des allocations optimales par minimisation des indicateurs de risque multivariés I et J , dans le cas de modèles simples de distributions des risques. Ces résultats peuvent être utilisés comme benchmark pour tester la convergence des algorithmes d'optimisation numérique.

Nous examinons aussi le comportement asymptotique de l'allocation quand le capital u tend vers $+\infty$. Nous étudions séparément le cas des distributions exponentielles et celui des subexponentielles, avant de construire une conclusion comparative entre les deux comportements asymptotiques, illustrée par la différence entre les résultats des modèles exponentiel et de Pareto.

Nous nous mettons à partir de cette section dans le cas des fonctions de pénalités identiques et égales à la sévérité locale de la ruine, $g_k(x) = g(x) = |x|, \forall k \in \{1, 2, \dots, d\}$. Les conditions d'optimalité qui permettent de déterminer le minimum unique sont données par les systèmes d'équations (3.2) et (3.3) pour les indicateur I et J respectivement. Nous étudions dans cette section le cas indépendant uniquement.

Nous rappelons que $\alpha_i = \frac{u_i}{u} \in [0, 1]$, donc quand $u \rightarrow +\infty$ on peut considérer une sous suite convergente dans toutes les preuves. Par abus de notation, on considère $\lim_{u \rightarrow +\infty} \alpha_i$. En effet, nous considérons une sous-suite convergente et nous montrons à chaque fois l'existence de la limite par la présence d'un unique point limite.

3.5.1 Modèle exponentiel

Nous considérons dans cette partie, des risques X_1, X_2, \dots, X_d représentés par des variables aléatoire X_1, X_2, \dots, X_d indépendantes de distributions exponentielles, de paramètres $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_d$ respectivement. Dans le cas particulier du même paramètre $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_d$ la composition de l'allocation optimale est donnée par $u_1 = \dots = u_d = u/d$. La somme des risques S suit une distribution d'Erlang généralisée, cela nous conduit à des équations explicites pour trouver la composition de l'allocation optimale.

Allocation optimale par minimisation de l'indicateur I Dans le modèle exponentiel, l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur I est déterminée comme unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système d'équations suivant :

$$h(\beta_i \alpha_i) - h(\beta_j \alpha_j) - \sum_{l=1}^d A_l h(\beta_l) [h(\alpha_i \cdot (\beta_i - \beta_l)) - h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l))] = 0, \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad (3.4)$$

où h désigne la fonction définie par $h(x) = \exp(-u \cdot x)$, et A_l les constantes $A_l = \prod_{j=1, j \neq l}^d \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_l}$,

pour $l = 1, \dots, d$.

La preuve de ce résultat est basée sur la détermination d'une forme facilement intégrable pour les fonctions de densités jointes des couples (X_k, S) . Les variables $X_i \sim \mathcal{E}(\beta_i)$ sont indépendantes de distributions exponentielles, alors $S^{-i} = \sum_{j=1, j \neq i}^d X_j$ suit une distribution Erlang généralisée de paramètres $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_d)$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(X_i > u_i, \sum_{j=1}^d X_j \leq u \right) &= \mathbb{P} (X_i > u_i) - \mathbb{P} \left(X_i > u_i, \sum_{j=1}^d X_j > u \right) \\ &= \bar{F}_{X_i}(u_i) - \bar{F}_{X_i}(u) - \int_{u_i}^u \bar{F}_{S^{-i}}(u-s) f_{X_i}(s) ds \\ &= h(\beta_i \alpha_i) - h(\beta_i) - \sum_{l=1}^d A_l h(\beta_l) h(\alpha_i \cdot (\beta_i - \beta_l)) + \sum_{l=1}^d A_l h(\beta_i) \\ &= h(\beta_i \alpha_i) - \sum_{l=1}^d A_l h(\beta_l) h(\alpha_i \cdot (\beta_i - \beta_l)), \end{aligned}$$

car, $\bar{F}_{X_i}(x) = e^{-\beta_i x}$, $\bar{F}_{S^{-i}}(x) = \sum_{l=1, l \neq i}^d \left(\prod_{j=1, j \neq l, j \neq i}^d \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_l} \right) e^{-\beta_l x}$ et $\sum_{l=1}^d A_l = 1$.

La fonction de survie de la loi d'Erlang généralisée de paramètres $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ est donnée par (voir Marceau (2013)[32]) :

$$\bar{F}_X(x) = \sum_{l=1}^d \left(\prod_{j=1, j \neq l}^d \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_l} \right) e^{-\beta_l x} = \sum_{l=1}^d A_l e^{-\beta_l x}.$$

L'allocation optimale est l'unique solution dans l'ensemble \mathcal{U}_u^d du système d'équations :

$$\mathbb{P} \left(X_i > u_i, \sum_{k=1}^d X_k \leq u \right) = \mathbb{P} \left(X_j > u_j, \sum_{k=1}^d X_k \leq u \right), \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2,$$

cela nous permet de donner le résultat (3.4).

Il s'agit donc d'un système d'équations non linéaires à d variables qu'on peut facilement résoudre à l'aide des méthodes numériques. Nous utilisons dans le cas de nos applications numériques la méthode de **Newton-Raphson** pour le résoudre. La méthodologie est de considérer le problème suivant :

$$F : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^d \alpha_i - 1 \\ f(1, 2) \\ f(1, 3) \\ \cdot \\ f(1, d) \end{pmatrix},$$

avec, $f(i, z) = h(\beta_i \alpha_i) - h(\beta_z \alpha_z) - \sum_{l=1}^d A_l h(\beta_l) [h(\alpha_i * (\beta_i - \beta_l)) - h(\alpha_z * (\beta_z - \beta_l))]$, pour tout $(i, z) \in \{1, 2, \dots, d\}^2$.

On cherche la solution du système $F(u^*) = 0$.

F est bien dans $C^1([0, 1]^d)$, la matrice jacobienne associée à F et évaluée au point $x = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d]^T$ de R^d est de la forme :

$$J_F = u \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -m(1) & m(2) & & & \\ -m(1) & & m(3) & & \\ \vdots & & & \cdot & \\ -m(1) & & & & m(d) \end{pmatrix},$$

avec,

$$m(i) = \beta_i h(\beta_i \alpha_i) - \sum_{l=1}^d A_l (\beta_i - \beta_l) h(\beta_l) h(\alpha_i (\beta_i - \beta_l)).$$

L'algorithme de Newton-Raphson est sous la forme suivante :

Initialisation Nous choisirons comme point initial $(1/d, \dots, 1/d)$, ou la solution asymptotique qui sera déterminée dans le prochain paragraphe.

Mise à jour : pour $k = 0, 1, \dots$, jusqu'à convergence :

- $J_F(x^{(k)}) \delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$
- $x^{k+1} = \delta x^{(k)} + x^{(k)}$

Cette méthode converge très rapidement dans le cas des distributions exponentielles indépendantes.

Pour tout le reste de cette section, on utilise la même méthode pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires.

Allocation optimale asymptotique par minimisation de l'indicateur I Quand le capital initial d'allocation tend vers l'infini, la composition asymptotique de l'allocation

optimale par minimisation de l'indicateur I , dans le cadre du modèle exponentiel est donnée par la limite suivante :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha^* = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1}{u}, \frac{u_2}{u}, \dots, \frac{u_d}{u} \right) = \left(\frac{\frac{1}{\beta_i}}{\sum_{j=1}^d \frac{1}{\beta_j}} \right)_{i=1,2,\dots,d}.$$

En effet, le système d'équations (3.4) est équivalent à :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad h(\beta_i \alpha_i) \left[1 - \sum_{l=1}^d A_l h((1 - \alpha_i) \beta_l) \right] = h(\beta_j \alpha_j) \left[1 - \sum_{l=1}^d A_l h((1 - \alpha_j) \beta_l) \right]. \quad (3.5)$$

On remarque que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{u_i}{u} < 1$ car, si ce n'était pas le cas, quitte à prendre un i tel que $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_i}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i = 1$. Donc, pour tout $j \neq i$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_j}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_j = 0$, et par suite le système d'équations (3.2) représentant la condition d'optimalité ne sera pas satisfait.

Le système d'équations (3.5) est équivalent au système suivant :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad h(\beta_i \alpha_i - \beta_j \alpha_j) = \frac{1 - \sum_{l=1}^d A_l h((1 - \alpha_j) \beta_l)}{1 - \sum_{l=1}^d A_l h((1 - \alpha_i) \beta_l)},$$

ses termes de droite tendent tous vers 1 quand u tend vers $+\infty$, on peut donc déduire que $\lim_{u \rightarrow \infty} h(\beta_i \alpha_i - \beta_j \alpha_j) = 1$ et par conséquent :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i = \frac{\beta_j}{\beta_i} \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_j.$$

On conclut alors, que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d\}$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i = \frac{\frac{1}{\beta_i}}{\sum_{j=1}^d \frac{1}{\beta_j}}.$$

En se basant sur la composition asymptotique de cette allocation, on peut conclure que :

- Pour $\beta_i < \beta_j$ on a $\alpha_i > \alpha_j$. Cela veut dire qu'on alloue plus de capital à la branche la plus risquée.
- α_i est une fonction décroissante de β_i . Cette remarque est cohérente avec la conclusion précédente, le montant alloué à une branche est une fonction croissante de son risque.
- α_j pour $j \neq i$ est une fonction croissante de β_i .

Allocation optimale par minimisation de l'indicateur J Par minimisation de l'indicateur multivarié de risque J , la composition de l'allocation optimale dans le modèle exponentiel est déterminée par l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système d'équations suivant :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad \sum_{l=1}^d A_l h(\beta_l) [h(\alpha_i \cdot (\beta_i - \beta_l)) - h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l))] = 0. \quad (3.6)$$

La démonstration de ce résultat est totalement similaire à celle du système explicite pour la détermination de l'allocation par minimisation de l'indicateur I .

Allocation optimale asymptotique par minimisation de l'indicateur J Quand le capital à allouer u est très grand et tend vers $+\infty$, son allocation par minimisation de l'indicateur J tends vers les limites suivantes :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_1}{u} = 1 \text{ et } \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_j}{u} = 0 \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, d\}.$$

Pour démontrer ce résultat, nous réécrivons le système d'équations (3.6) sous la forme équivalente :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad \sum_{l=1}^d A_l \cdot h((1 - \alpha_i) \cdot (\beta_l - \beta_i)) = \sum_{l=1}^d A_l \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_i).$$

Si $\overline{\lim} \frac{u_1}{u} < 1$, par passage à la limite u tend $+\infty$ dans les équations de ce système pour ($i = 1$) on obtient :

$$\forall j \in \{2, 3, \dots, d\}, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^d A_l \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1) = A_1.$$

Les premiers termes des équations de ce système peuvent être décomposés en trois parties comme suit :

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^d A_l \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1) &= \lim_{u \rightarrow \infty} A_1 \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_1)) \\ &+ \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{l=2}^j A_l \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1) \\ &+ \lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{l=j+1}^d A_l \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1), \end{aligned}$$

et puisque, pour tout $j > 1$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{l=2}^j A_l \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1) = 0$, car $\beta_l - \beta_1 > 0$ et $\beta_j - \beta_l \geq 0$ pour $l \in \{2, 3, \dots, j\}$.

En plus, $\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{l=j+1}^d A_l \cdot h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1) = 0$, parce que pour tout $l \in \{j+1, j+2, \dots, d\}$, $\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1 = (\beta_l - \beta_j)(1 - \alpha_j) + \beta_j - \beta_1 > 0$, donc, $\lim_{u \rightarrow \infty} h(\alpha_j \cdot (\beta_j - \beta_l) + \beta_l - \beta_1) = 1$. On déduit de ce que précède que $\forall j \in \{2, 3, \dots, d\}; \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_j = o(\frac{1}{u})$. Cela constitue une contradiction avec la contrainte principale $\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^d \alpha_j = 1$.

Nous remarquons la différence entre les comportements asymptotiques pour le même modèle entre l'allocation par minimisation de l'indicateur I , et celle basée sur la minimisation de l'indicateur J . La première alloue le capital en fonction du poids de chaque risque dans la moyenne du risque agrégé ($1/\beta_i / \sum_{j=1}^n 1/\beta_j$), alors que la deuxième a tendance à allouer la totalité du capital à la branche la plus risquée considérée comme responsable de la ruine du groupe.

3.5.2 Modèle subexponentiel

Dans la plupart des cas des distributions des risques, on est dans l'incapacité de trouver des formules explicites ou semi-explicites de la composition de l'allocation optimale. La difficulté vient de l'absence d'une forme simple et intégrable de la fonction de distribution jointe d'un risque X_i et la somme des autres risques S . Dans cette sous-section nous examinons le comportement de la composition de l'allocation dans le cas des distributions issues de la famille sous-exponentielle, ainsi nous généralisons les résultats présentés en dimension $d = 2$ dans [16] en une dimension quelconque.

On rappelle la définition des distributions de la famille sous-exponentielle, constituée de toutes les distributions de support positif, dont la fonction de répartition satisfait la relation suivante :

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2,$$

où $\overline{F^{*2}}$ représente le produit de convolution de \overline{F} .

Dans Asmussen (2000) [7], il est démontré que les distributions sous-exponentielles vérifient aussi pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante :

$$\frac{\overline{F^{*d}}(x)}{\overline{F}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} d,$$

avec $\overline{F^{*d}}$ le $d^{\text{ème}}$ produit de convolution de \overline{F} .

Cénac et al (2014) ont démontré dans [16] le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Distributions Sous-exponentielles [16]) *Soit X une variable aléatoire de distribution sous-exponentielle F_X , Y une variable aléatoire de support \mathbb{R}^+ , indépendante de X , et $(u, v) \in (\mathbb{R}^+)^2$, telles que :*

- *Ils existent $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$ qui vérifient pour u suffisamment grand , $\kappa_1 \leq \frac{v}{u} \leq \kappa_2$,*
- *$\frac{\overline{F_X}(y)}{\overline{F_X}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} O(1)$, if $y = \Theta(x)$ ¹³.*

Alors,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X \geq v, X + Y \geq u)}{\overline{F_X}(u)} = 1.$$

Comportement asymptotique

Les propositions 3.3 et 3.4 concernent le comportement asymptotique de l'allocation du capital par minimisation de l'indicateur I , dans le cas des quelques distributions de la famille sous-exponentielle.

Dans tout ce qui suit, on désigne par (u_1, \dots, u_d) l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur I .

Théorème 3.2 *Soit (X_1, X_2, \dots, X_d) un vecteur de variables aléatoires continues, positives et indépendantes.*

On suppose $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2$:

1. $\overline{F_{X_i}}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \Theta(\overline{F_{X_j}}(x))$,
2. $\overline{F_{X_i}}(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} o(\overline{F_{X_i}}(t))$, if $t = o(s)$,

13. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{2+}$, on note $y = \Theta(x)$ si elles existent $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, telles que pour x assez grand, $C_1 \leq \frac{y}{x} \leq C_2$

alors, elles existent $\kappa_1 > 0$ et $\kappa_2 < 1$ telles que,

$$\kappa_1 \leq \frac{u_l}{u} \leq \kappa_2 \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, d\}. \quad (3.7)$$

La démonstration de ce théorème est présentée dans l'annexe 2 (B.1). La première condition du théorème 3.2 n'est pas satisfaite dans le cas des distributions exponentielles. Cependant, le cas des distributions de Pareto vérifie bien les condition du théorème 3.2.

Proposition 3.3 Soit (X_1, \dots, X_d) un vecteur de variables aléatoires continues, positives, et indépendantes, tel que le support de la densité jointe de (X, S) est $(\mathbb{R}^+)^2$. On désigne par (u_1, \dots, u_d) l'allocation optimale d'un capital u obtenue par minimisation de l'indicateur I . On suppose :

1. elles existent $0 < \kappa_1 < \kappa_2 < 1$ telles que pour tout $i = 1, \dots, d$ et tout $u \in \mathbb{R}^+$,

$$\kappa_1 \leq \frac{u_i}{u} \leq \kappa_2,$$

2. pour tout $i = 1, \dots, d$, si $y = y(x)$ est tel que :

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} < 1$$

alors

$$\frac{\bar{F}_{X_i}(x)}{\bar{F}_{X_i}(y)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Alors, pour tout $i, j = 1, \dots, d$,

$$\frac{\bar{F}_{X_i}(u_i)}{\bar{F}_{X_j}(u_j)} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 1.$$

La démonstration de la proposition 3.3 est présentée dans l'annexe 2 (B.2).

Cette proposition n'est pas utilisable dans le cas des distributions de Pareto. Cependant, les conditions de la proposition 3.3 sont satisfaites par les distributions de *type exponentiel*, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\bar{F}_{X_i}(x) = \Theta(e^{-\mu_i x}).$$

En effet, dans ce cas, on a $0 < \underline{\lim} \frac{u_i}{u} \leq \overline{\lim} \frac{u_i}{u} < 1$, $\forall i \in \{1, \dots, d\}$. Car, si $u_i \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\asymp} o(u)$, alors, $\exists j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$ tel que $\frac{u_j}{u} \rightarrow \kappa \in]0, 1]$, donc $u_i \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\asymp} o(u_j)$.

Et puisque $\mu_i, \mu_j > 0$, $\mu_i u_i \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\asymp} o(\mu_j u_j)$, et de la meme façon que dans la preuve du 3.2 présentée dans l'annexe (B.1) , on a :

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S > u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\asymp} o(\bar{F}_{X_i}(u_i))$$

et,

$$\mathbb{P}(X_j > u_j, S > u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\asymp} o(\bar{F}_{X_j}(u_j)).$$

De la condition d'optimalité,

$$\frac{\bar{F}_{X_i}(u_i)}{e^{-\mu_i u_i}} - \underbrace{\frac{\mathbb{P}(X_i > u_i, S > u)}{e^{-\mu_i u_i}}}_{T_1} = \frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{e^{-\mu_i u_i}} - \underbrace{\frac{\mathbb{P}(X_j > u_j, S > u)}{e^{-\mu_i u_i}}}_{T_3},$$

cela est absurde car $u \rightarrow +\infty$:

- $\bar{F}_{X_i}(u_i) = \Theta(e^{-\mu_i u_i})$,
- $T_1 = o(1)$,
- $T_2 = \frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{e^{-\mu_j u_j}} e^{-\mu_j u_j + \mu_i u_i} \rightarrow 0$, puisque $\mu_i u_i = o(\mu_j u_j)$,
- et $T_3 = o(1) e^{-\mu_j u_j + \mu_i u_i} \rightarrow 0$.

Cette remarque nous permet de retrouver le résultat obtenu précédemment dans le cas du modèle exponentiel.

Proposition 3.4 (Allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur I)
Sous les conditions du théorème 3.2, et si, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, F_{X_i} est une distribution sous-exponentielle, qui vérifie :

$$\frac{\bar{F}_{X_i}(y)}{\bar{F}_{X_i}(x)} \stackrel{x \rightarrow +\infty}{\underset{\sim}{\sim}} O(1), \text{ for } 0 < \kappa_1 \leq \frac{y}{x} \leq \kappa_2 < 1.$$

Alors les contributions u_i et u_j obtenues par minimisation de l'indicateur I satisfont :

$$\bar{F}_{X_i}(u_i) - \bar{F}_{X_i}(u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\underset{\sim}{\sim}} \bar{F}_{X_j}(u_j) - \bar{F}_{X_j}(u) + o(\bar{F}_{X_i}(u)). \quad (3.8)$$

La démonstration de la proposition 3.4 est une application directe des théorème 3.1 et 3.2. Elle est applicable dans le cas des distributions de Pareto. Nous l'utiliserons pour déterminer la composition de l'allocation asymptotique dans le modèle Pareto indépendant.

Nous nous focalisons maintenant, sur le comportement asymptotique de l'allocation par minimisation de l'indicateur J dans le cas des distributions de la famille sous-exponentielle.

Proposition 3.5 (Allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur J)
Soit (X_1, X_2, \dots, X_d) un vecteur de variables aléatoires continues, positives et indépendantes, tel que, il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ où la variable aléatoire X_i est sous-exponentielle. L'allocation par minimisation de l'indicateur de risque J , (u_1, \dots, u_d) vérifie pour tout $j \neq i$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_j \geq u_j, S \geq u)}{\bar{F}_{X_i}(u)} = 1.$$

La proposition 3.5 est une application directe du théorème 3.1. En effet, la solution de (3.3) satisfait :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, d\}, \quad \frac{\mathbb{P}(X_i > u_i, S \geq u)}{\mathbb{P}(X_i > u)} = \frac{\mathbb{P}(X_j > u_j, S \geq u)}{\mathbb{P}(X_i > u)}.$$

Il suffit d'appliquer un passage à la limite $u \rightarrow +\infty$, pour obtenir le résultat de la proposition 3.5.

Les résultats présentés dans cette sous-section peuvent sembler très théoriques, mais leur importance réside dans la simplicité d'application pour la famille des distributions sous-exponentielles. Cette famille est très présente dans la science actuarielle, notamment dans la modélisation des charges des sinistres dans le cadre du modèle classique. Afin de mieux visualiser cet intérêt nous présentons une application dans le cas d'un modèle Pareto indépendant, où les distributions de risques sont de lois Pareto indépendantes. La loi de Pareto est une illustration parfaite d'une distribution sous-exponentielle.

3.5.3 Modèle Pareto indépendant

On considère que les d risques représentant les lignes d'affaires ou les branches risquées du groupe d'assurance, sont des variables aléatoires $\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$ indépendantes de loi Pareto, de paramètres $(a, b_i)_{\{i=1,2,\dots,d\}}$ respectivement. Nous supposons sans perte de généralité que $b_1 > b_2 > \dots > b_d > 0$. Ces distributions seront donc caractérisées par une fonction de densité de la forme :

$$f_{X_i}(x) = \frac{a}{b_i} \left(1 + \frac{x}{b_i}\right)^{-a-1},$$

et une fonction de répartition comme suit :

$$\bar{F}_{X_i}(x) = \left(1 + \frac{x}{b_i}\right)^{-a}.$$

Allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur I Nous déduisons directement de l'application de la proposition 3.4, que la composition de l'allocation asymptotique dans le cas du modèle Pareto indépendant vérifie :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad \left(\frac{\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i}{b_i}\right)^{-a} - \left(\frac{\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_j}{b_j}\right)^{-a} = \left(\frac{1}{b_i}\right)^{-a} - \left(\frac{1}{b_j}\right)^{-a}.$$

Allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur J Asymptotiquement, la composition de l'allocation par minimisation de l'indicateur J vérifie :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_1 = 1 \text{ et } \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i = 0, \forall i \in \{2, 3, \dots, d\}.$$

En effet, si on suppose que $\exists j \in \{1, \dots, d\}$ tel que $0 < \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_j < 1$, l'application du théorème 3.1 d'un coté nous donne :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_j \geq u_j, S \geq u)}{\bar{F}_{X_j}(u)} = 1,$$

et l'application de la proposition 3.5 d'un autre côté nous donne, pour tout $i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{j\}$:

$$\frac{\mathbb{P}(X_j \geq u_j, S \geq u)}{\bar{F}_{X_j}(u)} = \frac{\mathbb{P}(X_j \geq u_j, S \geq u)}{\bar{F}_{X_i}(u)} \cdot \frac{\bar{F}_{X_i}(u)}{\bar{F}_{X_j}(u)} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\bar{F}_{X_i}(u)}{\bar{F}_{X_j}(u)} = \left(\frac{1 + \frac{u}{b_i}}{1 + \frac{u}{b_j}}\right)^{-a},$$

alors, pour $i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{j\}$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(X_j \geq u_j, S \geq u)}{\bar{F}_{X_j}(u)} = \left(\frac{b_j}{b_i}\right)^{-a} \neq 1.$$

Cela est absurde. On en déduit que $\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i \in \{0, 1\},$$

et puisque $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$, alors il existe un unique i tel que $\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i = 1$ et pour tout $j \neq i$ $\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_j = 0$.

Maintenant, il suffit d'utiliser l'ordre de dominance stochastique, car $X_d \preceq_{st} \cdots \preceq_{st} X_2 \preceq_{st} X_1$, parce que $b_1 > b_2 > \cdots > b_d$. L'allocation vérifié la propriété de la monotonie, on peut donc en déduire que :

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, d\}} \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i \right\} = \lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_1 = 1.$$

3.5.4 Comparaison des comportements asymptotiques

On considère l'indicateur de risque suivant :

$$I_{loc}(u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left((X_k - u_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \right) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \left((X_k - u_k)^+ \right).$$

Cet indicateur mesure uniquement les sévérités des ruines locales, et ne prend pas en considération l'impact du groupe. Si pour tout $k = 1, \dots, d$, le vecteur aléatoire (X_k, S) admet une densité dont le support contient $[0, u]^2$, alors la condition d'optimalité pour la minimisation de l'indicateur I_{loc} est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_i > u_i) = \mathbb{P}(X_j > u_j).$$

On remarque qu'il s'agit du même résultat obtenu dans le cas asymptotique pour l'indicateur I dans la proposition 3.3, où $\frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1 + o(1)$. Dans d'autres mots, l'effet du groupe est négligeable dans le cas des risques indépendants de *type exponentiel*. Ce comportement est aussi visible dans la composition de l'allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur I dans le cas du modèle exponentiel indépendant, donnée par :

$$u_i = \frac{\frac{1}{\beta_i}}{\sum_{j=1}^d \frac{1}{\beta_j}} u, \text{ for all } i = 1, \dots, d,$$

exactement la même par minimisation de l'indicateur I_{loc} .

La proposition 3.4 montre que dans le cas des distributions sous-exponentielles indépendantes, le comportement asymptotique n'est plus le même. En effet, dans l'équation (3.8), la présence des termes $\bar{F}_{X_i}(u)$ et $\bar{F}_{X_j}(u)$ est une prise en compte de l'effet du groupe dans l'allocation. Nous avons montré que dans le cas des distributions de Pareto par exemple, le comportement asymptotique de l'allocation est décrit par les équations :

$$\left(\frac{\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_i}{b_i} \right)^{-a} - \left(\frac{\lim_{u \rightarrow \infty} \alpha_j}{b_j} \right)^{-a} = \left(\frac{1}{b_i} \right)^{-a} - \left(\frac{1}{b_j} \right)^{-a},$$

alors que l'allocation par minimisation de l'indicateur I_{loc} pour des distributions de Pareto indépendantes est donnée par

$$\alpha_i = \frac{b_i}{\sum_{l=1}^d b_l},$$

pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Concernant l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur de risque J , le comportement asymptotique est identique entre les deux familles de distributions exponentielles et sous-exponentielles. La branche la plus risquée est considérée comme responsable de la ruine du groupe, et ainsi sa contribution dans le capital u sera sa totalité.

3.6 Impact de la dépendance sur l'allocation

Dans cette partie, nous nous focalisons sur l'impact des formes de la dépendance entre les différentes lignes d'affaires sur leurs contributions au capital à allouer. Nous examinons tout d'abord l'effet mélange, à travers le modèle exponentielle mélange gamma qui représente un exemple des modèles de mélange commun. Ce choix est justifié par le résultat de ce mélange qui suit un modèle Parto, cela nous permettra d'utiliser l'étude de la sous-section précédente pour pouvoir analyser l'effet de la dépendance représenté par la construction mélange.

Dans un deuxième temps, nous traitons le cas des risques comonotones pour plusieurs modèles. L'allocation optimale est explicite dans la plupart de ces cas. Finalement, nous essayons d'évaluer l'impact des paramètres de la dépendance sur la composition de l'allocation optimale à l'aide de quelques modèles à copules.

3.6.1 Impact du mélange

Nous illustrons l'impact du mélange comme forme de dépendance à l'aide d'un modèle de Pareto corrélé. Soit (X_1, \dots, X_d) un mélange Gamme des distributions exponentielles tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $X_i \sim \mathcal{E}(\beta_i, \theta)$, avec $(\beta_1 < \beta_2 \dots < \beta_d)$, et $\theta \sim \Gamma(a, b)$. Dans ce cas, les fonctions de survie des variables aléatoires X_i sont de la forme :

$$\bar{F}_{X_i}(x) = \int_0^\infty \bar{F}_{X_i|\Theta=\theta} f_\Theta(\theta) d\theta = \int_0^\infty e^{-\beta_i \theta x} f_\Theta(\theta) d\theta = \left(1 + \frac{\beta_i x}{b}\right)^{-a},$$

par conséquent les risques X_i ont des distributions de Pareto de paramètres $\left(a, \frac{b}{\beta_i}\right)$. Ils sont conditionnellement indépendants. Nous pouvons donc utiliser les résultats du modèle exponentiel dans le cas d'indépendance, et d'effectuer tout simplement une intégration par rapport à la densité de la loi Gamma. Ce modèle de construction a été étudié en détails dans e.g.[38, 49].

L'allocation par minimisation de l'indicateur I Il suffit d'intégrer le système d'équations (3.4) multiplié par la densité de θ par rapport à son support, pour trouver une la forme explicite du système vérifié par l'allocation dans notre modèle. L'allocation optimale par minimisation de l'indicateur I , est l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système suivant :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2,$$

$$s(\beta_i \alpha_i) - s(\beta_j \alpha_j) - \sum_{l=1}^d A_l [s(\alpha_i \beta_i + (1 - \alpha_i) \beta_l) - s(\alpha_j \beta_j + (1 - \alpha_j) \beta_l)] = 0, \quad (3.9)$$

où s désigne la fonction définie par $s(x) = (1 + x \frac{u}{b})^{-a}$ et $\alpha_i = \frac{u_i}{u}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

L'allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur I Nous divisons le système d'équations (3.9) par $s(1)$, et nous faisons tendre u vers $+\infty$ dans le système obtenu pour trouver une forme explicite vérifiée par l'allocation dans le cas de notre modèle de mélange. L'allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur de risque I est l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système d'équations suivant :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2,$$

$$(\beta_i \alpha_i)^{-a} - (\beta_j \alpha_j)^{-a} - \sum_{l=1}^d A_l [(\alpha_i \beta_i + (1 - \alpha_i) \beta_l)^{-a} - (\alpha_j \beta_j + (1 - \alpha_j) \beta_l)^{-a}] = 0. \quad (3.10)$$

Ce résultat illustre bien l'impact de la construction par mélange sur la composition de l'allocation asymptotique. En effet, nous avons vu pour le cas du modèle des distributions Pareto indépendantes de paramètres $\left(a, \frac{b}{\beta_i}\right)_{i=1, \dots, d}$ que l'allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur I est l'unique solution du système :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad (\beta_i \alpha_i)^{-a} - (\beta_j \alpha_j)^{-a} = (\beta_i)^{-a} - (\beta_j)^{-a}.$$

Chacune des équations de ce système relie uniquement deux risques, alors que dans le cas des distributions Pareto construites par le mélange exponentielle-Gamme, les équations du système (3.10) relie chaque risque à tous les autres. La présence de la dépendance est visible donc dans la composition de l'allocation.

L'allocation par minimisation de l'indicateur J Ici aussi, il suffit d'intégrer le système d'équations (3.6) obtenu dans le cas des distributions exponentielles indépendantes, multiplié par la densité de la variable du mélange. La composition de l'allocation du capital u par minimisation de l'indicateur J est donc l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système suivant :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad \sum_{l=1}^d A_l [s(\alpha_i \beta_i + (1 - \alpha_i) \beta_l) - s(\alpha_j \beta_j + (1 - \alpha_j) \beta_l)] = 0. \quad (3.11)$$

L'allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur J Pour obtenir la composition de l'allocation dans le cas asymptotique quand u tend vers $+\infty$, nous divisons le système (3.11) obtenu pour le cas d'un capital u quelconque par $s(1)$, puis nous appliquons un passage à la limite $u \rightarrow +\infty$. L'allocation asymptotique par minimisation de l'indicateur multivarié J est l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système d'équations suivant :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, d\}^2, \quad \sum_{l=1}^d A_l [(\alpha_i \beta_i + (1 - \alpha_i) \beta_l)^{-a} - (\alpha_j \beta_j + (1 - \alpha_j) \beta_l)^{-a}] = 0. \quad (3.12)$$

Le comportement asymptotique de l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur J change donc en présence de la dépendance. En effet, nous avons montré précédemment que dans le cas des distributions Pareto indépendantes, la minimisation de l'indicateur J alloue la totalité du capital à la branche la plus risquée, cela n'est plus le cas pour la construction mélange des Pareto. L'allocation est une solution d'un système, la contribution de toutes les branches n'est pas nulle.

3.6.2 Risques comonotones

Nous examinons maintenant le cas de la présence d'une dépendance parfaite entre les différents risques. Un vecteur de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) est dit comonotonique si et seulement si, elles existent une variable aléatoire Y et des fonctions croissantes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ telles que :

$$(X_1, \dots, X_n) =_d (\varphi_1(Y), \dots, \varphi_n(Y)).$$

La fonction de distribution jointe dans le cas des risques comonotoniques correspond à la borne supérieure de Fréchet.

Dans le cas où les risques X_1, \dots, X_d sont comonotoniques, nous pouvons déterminer la composition explicite des allocations d'un capital par minimisation des indicateurs I et J pour quelques modèles spécifiques de distributions. Pour cela, nous nous basons sur l'existence d'une variable aléatoire de loi uniforme U telle que $X_i = F_{X_i}^{-1}(U)$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, et dans ce cas, $S = \sum_{i=1}^d F_{X_i}^{-1}(U) = \varphi(U)$, où $\varphi(t) = \sum_{i=1}^d F_{X_i}^{-1}(t)$, φ est une fonction croissante. Si les fonctions de distributions des variables X_1, \dots, X_d sont croissantes et leurs supports contiennent l'intervalle $[0, u]$, alors les allocations optimales du capital u par minimisation des indicateurs I et J coïncident et elles sont déterminées par la solution $(u_1, \dots, u_d) \in \mathcal{U}_u^d$ du système :

$$F_{X_i}(u_i) = F_{X_j}(u_j) \quad \forall i, j = 1, \dots, d.$$

En effet, si on note $w_i = F_{X_i}(u_i)$, $v = \varphi^{-1}(u)$, $M_i = \max(w_i, v)$. Les indicateurs I et J peuvent être réécrits pour $(u_1, \dots, u_d) \in \mathcal{U}_u^d$ comme suit :

$$I(u_1, \dots, u_d) = \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left((F_{X_i}^{-1}(U) - u_i) \mathbf{1}_{\{U \geq w_i, U \leq v\}} \right)$$

$$J(u_1, \dots, u_d) = \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left((F_{X_i}^{-1}(U) - u_i) \mathbf{1}_{\{U \geq M_i\}} \right).$$

Nous remarquons puisque $(u_1, \dots, u_d) \in \mathcal{U}_u^d$, et F_{X_i} est strictement croissante pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, qu'on ne peut pas avoir $w_i < v$ pour tout i , pour que I ne soit pas trivialement nul. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange appliquée aux deux programmes d'optimisation de I et J , les allocations optimales sont respectivement les solutions dans \mathcal{U}_u^d des systèmes suivants :

- $\mathbb{P}(U \geq w_i, U \leq v) = \mathbb{P}(U \geq w_j, U \leq v)$, pour $i, j = 1, \dots, d$,
- $\mathbb{P}(U \geq M_i) = \mathbb{P}(U \geq M_j)$, pour $i, j = 1, \dots, d$.

Ces deux systèmes sont équivalents au cas $w_i = w_j = v$, dans d'autres mots, les solutions uniques de ces deux systèmes coïncident avec la solution de $F_{X_i}(u_i) = F_{X_j}(u_j)$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$. On remarque que le minimum de l'indicateur I est 0 dans ce cas.

L'application directe de ce résultat nous permet de déterminer la composition de l'allocation optimale pour quelques modèles particuliers :

Modèle exponentiel comonotone Pour des risques comonotones de distributions exponentielles $X_i \sim \exp(\beta_i)$, la contribution de chaque risque dans un capital u alloué par minimisation des indicateurs de risque I et J est donnée par :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad u_i = \frac{1/\beta_i}{\sum_{j=1}^d 1/\beta_j} u.$$

Modèle Pareto comonotone Pour des risques distribués selon la loi de Pareto, de même paramètre de forme α : $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$, liés par une structure de dépendance parfaite, la composition de l'allocation d'un capital u par minimisation des indicateurs I et J est déterminée par :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad u_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{l=1}^d \lambda_l} u.$$

Modèle log-normal comonotone Dans le cas des risques comonotones de distributions long-normal de même variance $X_i \sim LN(\mu_i, \sigma)$, la contribution de chaque risque dans le capital alloué u et par minimisation des indicateurs I ou J est donnée par :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \quad u_i = \frac{\exp(\mu_i)}{\sum_{l=1}^d \exp(\mu_l)} u.$$

Le Tableau 3 présente un récapitulatif des compositions des allocations par minimisations des indicateurs I et J obtenues pour les modèles étudiés.

Modèle	contributions des risques
I.D : Les risques sont identiquement distribués ($X_i \sim X$)	$u_i = u/d \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$
Exponentiel : $X_i \sim \exp(\beta_i)$	$u_i = \frac{1/\beta_i}{\sum_{j=1}^d 1/\beta_j} u \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$
Weibull : $X_i \sim We(\tau, \beta_i)$	$u_i = \frac{1/\beta_i}{\sum_{j=1}^d 1/\beta_j} u \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$
Normal : $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$	$u_i = \mu_i + \frac{\sigma_i}{\sum_{l=1}^d \sigma_l} \left(u - \sum_{l=1}^d \mu_l \right)$
Log-Normal : $X_i \sim LN(\mu_i, \sigma^2)$	$u_i = \frac{\exp(\mu_i)}{\sum_{l=1}^d \exp(\mu_l)} u \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$
Pareto : $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$	$u_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{l=1}^d \lambda_l} u \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}$

TABLE 3 – Allocations optimales pour des modèles comonotones

Le modèle Normal ne fait pas partie des cas des distributions à support positif, mais il reste utile dans le cas d'une allocation d'un capital d'investissement financier.

3.6.3 Modèles de dépendance avec des copules

L'étude du comportement de l'allocation pour le modèle des Pareto construit par mélange, et aussi des modèles de risques comonotones nous a permis de s'assurer de la bonne prise en compte de la dépendance par le processus d'allocation par minimisation des indicateurs de risque multivariés. La question qu'on se pose maintenant est de quantifier l'impact de la nature de la dépendance sur les contributions des risques. Pour cela, nous examinons quelques modèles de dépendance à copules, nous analysons la composition de l'allocation en fonction des paramètres de dépendance de chaque copule et nous comparons les résultats obtenus pour chaque modèle. Les modèles utilisés sont présentés en détails dans Nelsen (2007)[36].

Modèle FGM bivarié On considère deux risques de distributions marginales exponentielles $X_i \sim \exp(\beta_i)$ et de structure de dépendance FGM de paramètre $-1 \leq \theta \leq 1$, (voir Nelsen [36], Exemple 3.12., section 3.2.5). On suppose que $\beta_1 < \beta_2/2$, donc :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2}) + \theta(1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2})e^{-\beta_1 x_1} e^{-\beta_2 x_2}.$$

Il s'agit d'une copule bivariée de coefficients de corrélation linéaire et de Pearson : $\rho = \rho_P = \frac{\theta}{4}$.

Sa fonction de densité est :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (1 + \theta)\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} + 2\theta\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2} - \theta 2\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} - \theta\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2}.$$

Par minimisation de l'indicateur de risque I , les contributions au capital u sont déterminées par le couple $(\beta u, (1 - \beta)u)$, où $\beta = u_1/u$ est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & (1 + 2\theta)(h(\beta) - h(\alpha - \alpha\beta)) + 2\theta(h(2\beta) - h(2\alpha - 2\alpha\beta)) \\ & + (1 + \theta)h(\alpha + \beta - \alpha\beta) + \theta h(2\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta) - \theta h(\alpha + 2\beta - \alpha\beta) - \theta h(2\alpha + \beta - 2\alpha\beta) \\ = & \frac{1 + \theta}{\alpha - 1}(h(\alpha) + \alpha h(1)) + \frac{\theta}{\alpha - 1}(h(2\alpha) + \alpha h(2)) - \frac{\theta}{\alpha - 2}(2h(\alpha) + \alpha h(2)) - \frac{\theta}{2\alpha - 1}(h(2\alpha) + 2\alpha h(1)) \end{aligned}$$

avec, h est la fonction $h(x) = \exp(-\beta_1 u x)$, et $\alpha = \beta_2/\beta_1$.

La démonstration de ce résultat est présentée en détails dans l'annexe 3 (C.1).

Dans le cas indépendant $\theta = 0$ on retrouve bien l'équation (3.4) obtenue avant pour le cas du modèle exponentiel indépendant.

L'équation obtenue donne une idée sur le comportement des contributions des risques en fonction du paramètre de la copule FGM θ . Sa solution peut être déterminée numériquement. La Figure 17 présente une illustration de la variation de la composition de l'allocation optimale en fonction du paramètre θ , pour un niveau de capital $u = 50$ nous l'avons implémenté à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson.

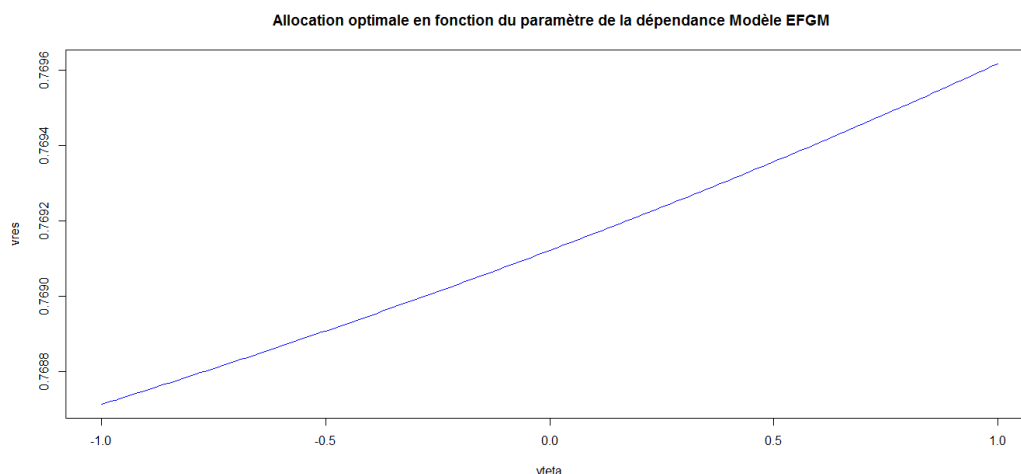


FIGURE 17 – Modèle FGM : β en fonction de θ . Cas : $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.25$, et $u = 50$

On remarque que β est une fonction croissante de θ . Au niveau de la participation au risque global, ce sens de variation semble contradictoire avec la diminution logique et attendue du poids du risque de la branche la plus risquée dans le risque global quand la corrélation augmente. L'explication est liée au niveau du capital de l'allocation. En effet, après une série d'applications avec des niveaux différents de tous les paramètres (u, β_1, β_2) , le paramètre qui change le sens de variation de β en fonction de θ est le niveau du capital. Afin d'illustrer cette remarque, nous présentons dans la Figure 18 le cas d'un niveau de capital de 100. Pour le cas de paramètres $\beta_1 = 0.05$ et $\beta_2 = 0.25$ par exemple, ce changement de sens de variation est visible dès le niveau de $u = 53$. La variation de β en fonction de θ change donc de sens en fonction du niveau de capital à allouer.

Ces remarques peuvent être vérifiées analytiquement à l'aide du théorème des fonctions implicites. Le niveau du capital à allouer est donc un facteur pris en compte par l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur de la *zone orange* de risque. Pour

l'indicateur J le sens de variation de la contribution β est plus stable, mais par construction de J il reste aussi fonction de u .

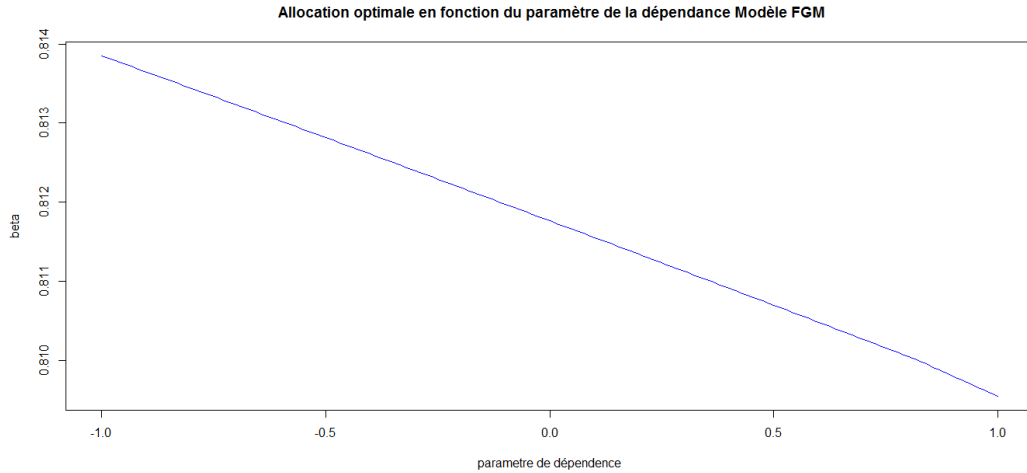


FIGURE 18 – Modèle FGM : β en fonction de θ . Cas : $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.25$, et $u = 100$

L'intervalle de la variation du β est de taille petite, et change en fonction des paramètres des distributions et du niveau du capital de l'allocation. Toutefois, sa taille peut être très grande pour d'autres structures de dépendances plus fortes que FGM qui représente une dépendance faible, c'est le cas par exemple pour une copule de Clayton, ce comportement est illustré dans la dernière sous-section de ce chapitre.

Modèle Marshall-Olkin bivarié Soient $Y_i \sim \exp(\lambda_i)$, avec $i = 0, 1, 2$ trois variables aléatoires indépendantes. On construit deux variables aléatoires avec choc commun : $X_i = \min(Y_i, Y_0)$ pour $i = 1, 2$. Les X_i ont des distributions marginales exponentielles de paramètres $\beta_i = \lambda_i + \lambda_0$ (voir e.g. Nelsen [36] section 3.1.1.).

Cette construction permet d'avoir d'une corrélation de Pearson de : $\rho_P = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}$.

La fonction de distribution jointe est :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \mathbb{P}(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1, x_2)) \\ &= e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} e^{-\lambda_0 \max(x_1, x_2)} \\ &= e^{-(\lambda_0 + \lambda_1)x_1} e^{-(\lambda_0 + \lambda_2)x_2} e^{\lambda_0 \min(x_1, x_2)} \\ &= \bar{F}_{X_1}(x_1) \bar{F}_{X_2}(x_2) e^{\lambda_0 \min(x_1, x_2)}, \end{aligned}$$

et la fonction de densité jointe est donnée par l'expression :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} f_{X_1, X_2}^1(x_1, x_2) = \beta_1 e^{-\beta_1 x_1} (\beta_2 - \lambda_0) e^{-(\beta_2 - \lambda_0)x_2} & \text{si } x_1 > x_2 \\ f_{X_1, X_2}^2(x_1, x_2) = (\beta_1 - \lambda_0) e^{-(\beta_1 - \lambda_0)x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} & \text{si } x_1 < x_2 \\ f_{X_1, X_2}^0(x_1, x_2) = \lambda_0 e^{-\beta_1 x_1} e^{-\beta_2 x_2} e^{\lambda_0 x} & \text{si } x_1 = x_2 = x \end{cases}.$$

On suppose sans perte de la généralité que $\lambda_1 < \lambda_2$. Les contributions des risques distribués selon le modèles Marshall-Olkin, déterminées par l'allocation d'un capital u par minimisation de l'indicateur multivarié de risque I , sont données par le couple $(\beta u, (1 - \beta)u)$,

où $\beta = u_1/u$ est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation suivante :

$$g(\beta_2(1 - \beta)) - g(\beta_1\beta) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2}g((\beta_1 - \lambda_2)\beta + \lambda_2) + \frac{\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_2}g((\lambda_2 - \beta_1)(1 - \beta) + \beta_1) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2}g(\beta_2) = \frac{\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_2}g(\beta_1) + g(\lambda_s/2)\left[\frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2}\right],$$

avec, $\lambda_s = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$, et g est la fonction définie par $g(x) = \exp(-ux)$.

La démonstration de ce résultat est présentée dans l'annexe 3 (C.2).

Dans le cas de l'indépendance qui correspond dans ce modèle à $\lambda_0 = 0$, nous retrouvons bien l'équation (3.4) obtenue dans l'étude du modèle exponentiel indépendant.

Nous considérons λ_0 comme paramètre de dépendance de la copule obtenue par le modèle Marshall-Olkin. La figure 19 présente une illustration de la variation de β en fonction du paramètre λ_0 .

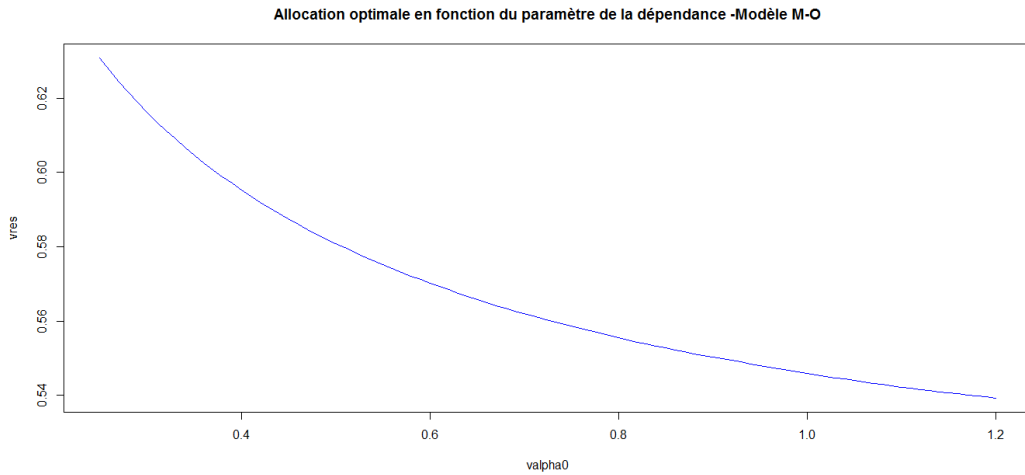


FIGURE 19 – Modèle MO : β en fonction de λ_0 : $\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = 0.25$ et $u = 50$.

Le poids de la contribution de la branche la plus risquée (ici X_1) est une fonction décroissante de λ_0 , cela reste cohérent avec le fait que β est une fonction croissante de $\alpha = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\lambda_2 + \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}$ prouvé dans le cas indépendant dans [16], puisque les deux risques sont indépendants conditionnellement à Y_0 .

Modèle Mélange commun : Cette méthode de construction de modèles multivariés est présentée en détails dans [27]. Elle se base sur le choix d'une variable aléatoire Θ de support S_Θ , et des variables aléatoires indépendantes Y_i pour construire des variables aléatoires X_i indépendantes conditionnellement à Θ , telles que :

$$\bar{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) = (\bar{F}_{Y_i}(x_i))^\theta.$$

Cette construction permet d'obtenir les lois marginales et la loi jointe par une intégration par rapport dF_Θ , tel qu'il est présenté dans le livre Marceau (2013) [32].

Nous nous intéressons ici au cas du modèle exponentiel bivarié mélange, et on suppose que la fonction génératrice des moments de Θ , M_Θ existe, alors :

$$f_{X_1,S}(x_1, s) = \int_{\theta \in S_\Theta} \beta_1 \theta e^{-\beta_1 \theta x_1} \beta_2 \theta e^{-\beta_2 \theta (s-x_1)} dF_\Theta(\theta) = \beta_1 \beta_2 \frac{d^2 M_\Theta(t)}{dt^2} \Big|_{t=-(\beta_2(s-x_1)+\beta_1 x_1)}.$$

On retrouve le modèle exponentiel-Gamme mélange étudié précédemment comme cas particulier quand $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$. Dans ce cas on obtient :

$$f_{x_1,s}(x_1, s) = \beta_1 \beta_2 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{[1 + \beta_2(s - x_1) + \beta_1 x_1]^{\alpha+2}},$$

et par une intégration double :

$$F_{X_1,S}(x_1, s) = 1 - \frac{1}{(1 + \beta_1 x_1)^\alpha} + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \left[\frac{1}{(1 + \beta_2 s)^\alpha} - \frac{1}{(1 + \beta_2(s - x_1) + \beta_1 x_1)^\alpha} \right].$$

Par symétrie, on obtient $F_{X_2,S}(x_2, s)$, pour déduire finalement une équation explicite de $F_{X_1,S}(\beta u, u) = F_{X_2,S}((1 - \beta)u, u)$ sous forme de l'égalité 3.13 :

$$h(\beta_2(1 - \beta)) - h(\beta_1\beta) + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} h(\beta_2) + \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} h(\beta_1) - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} h(\beta_1\beta + \beta_2(1 - \beta)) = 0, \quad (3.13)$$

avec $h(x) = \frac{1}{(1+xu)^\alpha}$.

On remarque tout d'abord que la solution asymptotique ($u \rightarrow \infty$) est la solution de l'équation suivante 3.14 :

$$g(\beta_2(1 - \beta)) - g(\beta_1\beta) + \frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} g(\beta_2) + \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} g(\beta_1) - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} g(\beta_1\beta + \beta_2(1 - \beta)) = 0, \quad (3.14)$$

avec $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Dans ce modèle, nous pouvons considérer α comme paramètre de dépendance. Nous pouvons donc étudier facilement le comportement de β en fonction de α .

La figure 20 présente le résultat obtenu numériquement. On remarque que le choix de α est un facteur clé pour la détermination de la composition de l'allocation optimale. L'attribution de la branche la plus risquée est une fonction croissante du paramètre du mélange α . La composition de l'allocation optimale est très sensible au paramètre du mélange α , la longueur de l'intervalle de la variation du β dépasse 15%.

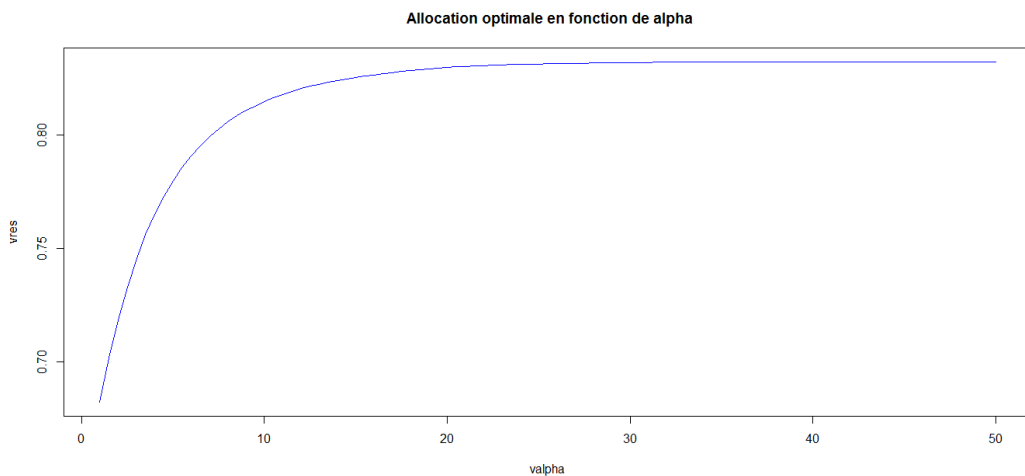


FIGURE 20 – Modèle Mélange commun : β en fonction du paramètre du mélange α

3.7 Simulations

Nous regroupons dans cette section, l'ensemble des illustrations numériques de la méthode d'allocation du capital par minimisation des indicateurs multivariés de risque. On désigne par **EI** le cas des distributions exponentielles indépendantes, par **GPDI** celui des distributions Pareto indépendantes, et par **GPDC** le cas des distribution Pareto corrélées, construites par mélange des distributions exponentielles à l'aide de la loi gamma. Nous rappelons que la *zone orange* représente l'indicateur de risque I , et la *zone violette* est la représentation graphique de l'indicateur J

La production des résultats présentés dans cette section recourt aux outils de la programmation, R et C++, le code suit l'architecture suivante :

- La production des résultats théoriques à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson pour la résolution des systèmes des équations non linéaires, implémenté en R.
- La simulation des données, entrées de l'algorithme descente en miroir en R.
- La version à la Kiefer-Wolfowitz de l'algorithme de descente en miroir a été implémentée en C++.
- La gestion des programmes se fait au niveau de R, qui fait appel à chaque fois à l'exécutable C++ de l'algorithme d'optimisation numérique.

Le coût des simulations augmente en fonction des paramètres choisis, notamment le nombre de périodes, mais il reste raisonnable par rapport aux nombre de données traitées par le programme.

3.7.1 Comportement asymptotique

Nous commençons par examiner la convergence des solutions théoriques vers les solutions asymptotiques des deux modèles EI et GPDC.

Modèle EI : $d=5, \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$

Zone Orange La convergence vers la solution asymptotique n'est pas lente, elle est observée pour des niveaux de richesse initiale inférieurs à la VaR de la somme des risques de seuil 99,5%. Partant de ce constat, on peut dire que la composition de l'allocation optimale en une unique période dépend plus de la nature probabiliste des risques, que du niveau du capital à allouer pour des risques indépendants.

EI : $\beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$					
u	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
10	0.2911	0.2698	0.2088	0.1405	0.0897
50	0.4757	0.3166	0.1245	0.0549	0.0284
100	0.5835	0.2805	0.0839	0.0346	0.0175
300	0.7250	0.1955	0.0497	0.0199	0.0100
700	0.7778	0.1587	0.0397	0.0159	0.0079
∞	0.7812	0.1562	0.0391	0.0156	0.0078

TABLE 4 – Convergence asymptotique EI *Zone Orange*

Zone violette : La convergence est encore plus rapide pour la *zone violette* (à partir de $u = 100$), l'allocation par optimisation de cette zone affecte pratiquement la totalité du montant alloué à la branche la plus risquée.

EI : $\beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$					
u	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
10	0.7877	0.1525	0.0374	0.0149	0.0074
50	0.8705	0.0963	0.0210	0.0082	0.0041
100	0.9250	0.0562	0.0119	0.0046	0.0023
300	0.9745	0.0192	0.0040	0.0016	0.0008
1000	0.9923	0.0057	0.0012	0.0005	0.0002
∞	1	0	0	0	0

TABLE 5 – Convergence asymptotique EI *Zone Violette*

Pour les deux zones, l'allocation respecte la propriété de monotonie, l'ordre des risques correspond bien à l'ordre de leurs contributions.

Modèle GPDC : $d=5, \Gamma(3, 60), \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$.

La perte de l'indépendance entre les branches augmente le niveau du capital considéré comme asymptotique, pour le modèle GPDC, (plus que 5000 pour la *zone orange*), cela est semble logique, puisque l'allocation a plus de sens économiquement dans le cas de la dépendance.

L'impact de la dépendance est encore visible pour des niveaux un peu plus grand du capital à allouer (50 – 500), l'allocation respecte l'ordre des risque, mais les niveaux des montants alloués ne sont pas équilibrés en fonction de cet ordre.

$\Gamma(3, 60), \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$					
u	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
10	0.1803	0.2963	0.2175	0.1572	0.1487
50	0.2555	0.2448	0.2118	0.1661	0.1217
100	0.2927	0.2697	0.2070	0.1400	0.0905
300	0.3829	0.3071	0.1711	0.0893	0.0495
1000	0.5160	0.3013	0.1100	0.0480	0.0247
2000	0.5928	0.2714	0.0834	0.0348	0.0176
5000	0.6705	0.2291	0.0624	0.0253	0.0127
∞	0.7462	0.1805	0.0458	0.0184	0.0092

TABLE 6 – Convergence asymptotique GPDC *Zone Orange*

On constate le même comportement pour la *zone violette*, le niveau de u considéré comme asymptotique est plus élevé, l'allocation par minimisation de cette zone confirme sa propriété d'affecter la grande partie du capital à allouer au risque le plus élevé, et des proportions négligeables aux autres risques dans l'ordre de leur niveau de risque.

$\Gamma(3, 60), \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$					
u	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
10	0.7813	0.1562	0.0391	0.0156	0.0078
50	0.7818	0.1560	0.0389	0.0156	0.0078
100	0.7844	0.1544	0.0383	0.0153	0.0076
300	0.8065	0.1404	0.0333	0.0132	0.0066
1000	0.8706	0.0960	0.0211	0.0082	0.0041
2000	0.9101	0.0672	0.0144	0.0056	0.0028
5000	0.9450	0.0412	0.0087	0.0034	0.0017
∞	0.9738	0.0196	0.0041	0.0016	0.0008

 TABLE 7 – Convergence asymptotique GPDC *Zone Violette*

3.7.2 Allocation optimale sur une période

Nous essayons maintenant d'analyser la convergence des solutions fournis à l'aide de l'algorithme d'optimisation aux solutions explicites dans le cas de plusieurs lignes d'affaire. Pour cela nous aurons besoin des indicateurs d'erreurs suivants :

- L'erreur quadratique moyenne **MSE**¹⁴ :

$$MSE(u_i) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\hat{u}_i^j - u_i)^2;$$

- L'erreur quadratique moyenne relative **RMSE** :

$$RMSE(u_i) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\hat{u}_i^j - u_i}{u_i} \right)^2.$$

Cette partie nous permettra aussi de visualiser l'effet de la dépendance (entre les modèles GPDC et GPDI) et l'effet du mélange (entre les modèles EI et GPDC). L'algorithme est appliqué pour chaque modèle 15 fois avec une longueur de 20000 itérations. Pour un niveau du capital à allouer $u = 50$, les paramètres utilisés sont les suivants :

- **EI** : $\beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$
- **GPDC** : $\Gamma(3, 60), \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$
- **GPDI** : $b_i = \frac{b}{\beta_i}$, cela garantie d'avoir les mêmes distributions du modèles GPDC, indépendantes, et donc la possibilité de comparer les résultats obtenus par les trois modèles.

14. Acronyme anglais de : Mean Squared Error.

$u = 50$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
EI					
Moyenne	23.3920	15.38250	6.2724	3.0521	1.9008
Écart-type	0.1557	0.15362	0.1288	0.07628	0.0981
Solution explicite	23.7839	15.8283	6.2244	2.7455	1.4177
\sqrt{RMSE}	0.0176	0.0296	0.02108	0.1147	0.3470
\sqrt{MSE}	0.4187	0.4690	0.1312	0.3149	0.4920
GPDC					
Moyenne	33.4410	11.2960	3.1109	1.3555	0.7966
Écart-type	0.1384	0.1241	0.0284	0.0120	0.0398
Solution explicite	33.5250	11.4535	3.1181	1.2668	0.6366
\sqrt{RMSE}	0.0047	0.0172	0.0090	0.0706	0.2582
\sqrt{MSE}	0.1559	0.1966	0.0279	0.0894	0.1644
GPDI					
Moyenne	32.2118	12.0568	3.4688	1.4652	0.7974
Écart-type	0.0889	0.0951	0.0345	0.0238	0.0182

 TABLE 8 – Simulations *zone orange* : $d = 5$

L'allocation par minimisation de la *zone orange*, respecte donc l'ordre des risques, pour les trois modèles la branche la plus risquée reçoit la plus grande attribution dans le capital u . Le niveau du capital alloué à la branche la plus risquée dans le modèle GPDI est plus élevé que celui du modèle EI, cela confirme les résultats démontrés théoriquement pour les distributions sub-exponentielles.

L'effet de la dépendance est présent mais peu visible entre les modèle GPDC et GPDI, notamment pour les deux risques les plus élevés.

La convergence des solutions obtenues avec l'optimisation numérique vers les solutions théoriques est assez satisfaisante, les niveaux des erreurs sont raisonnables.

Pour l'allocation par minimisation de l'indicateur du risque J , les résultats du tableau 9 montrent que le comportement de cette méthode déterminé théoriquement est confirmé numériquement, la branche la plus risqué reçoit la plus grande partie de l'allocation pour les trois modèles. Le niveau de cette allocation est plus grand pour le modèle GPDI. L'effet de la dépendance est remarquable, il est visible dans la différence entre GPDC et GPDI notamment au niveau des deux distributions les plus risquées.

Les résultats de la méthode numérique convergent vers le résultat théorique. En revanche, le niveau des erreurs est plus élevé par rapport au niveau constaté pour les simulations de la *zone orange*, cela peut être expliqué par le faible volume des données qui vérifient la condition de l'insolvabilité globale de la *zone violette*. Il est forcément plus petit que celui du cas de la solvabilité correspondant à la *zone orange*, la différence entre les deux engendre plus d'erreur.

$u = 50$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
EI					
Moyenne	43.4365	4.8992	1.0534	0.4074	0.2033
Écart-type	0.09700	0.05630	0.03101	0.00819	0.00357
Solution explicite	43.5232	4.8146	1.0499	0.4092	0.2029
\sqrt{RMSE}	0.00269	0.01998	0.02435	0.01697	0.01453
\sqrt{MSE}	0.1174	0.0962	0.0255	0.0069	0.0029
GPDC					
Moyenne	46.0302	2.7995	0.6943	0.3060	0.1700
Écart-type	0.2096	0.1369	0.0425	0.0243	0.0184
Solution explicite	47.2495	2.0615	0.4360	0.1692	0.0838
\sqrt{RMSE}	0.0261	0.3632	0.5992	0.8194	1.0494
\sqrt{MSE}	1.2346	0.7488	0.2612	0.1386	0.0879
GPDI					
Moyenne	47.2995	1.9029	0.4621	0.2111	0.1243
Écart-type	0.1372	0.0990	0.0283	0.0157	0.0112

 TABLE 9 – Simulations *zone violette* : $d = 5$

3.7.3 Allocation optimale sur plusieurs périodes

En général, les allocations du capital se font sur une seule période, les allocations sur plusieurs périodes sont aussi présentes en pratique, notamment dans le cadre de l'ORSA¹⁵, qui prévoit aussi des allocations sur des horizons de 2, 3 ou 5 périodes. Dans l'objectif d'analyser l'effet de l'augmentation du nombre des périodes sur la stabilité de l'allocation optimale, nous traitons dans cette sous-section, le cas des allocations sur plusieurs périodes $p > 1$.

On commence par la comparaison des résultats obtenus pour nos trois modèles. Nous présentons ici le cas correspondant à $d = 5$ et $p = 2, 3, 5$. La première partie concerne l'allocation par minimisation de la *zone orange*. Les paramètres choisis pour ces simulations sont :

- **EI** : $\beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$
- **GPDC** : $\Gamma(3, 0.60), \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.2, \beta_4 = 0.5, \beta_5 = 1$
- **GPDI** : $b_i = \frac{b}{\beta_i}$.

On considère un capital d'allocation $u = 50$. Le changement majeur dans les applications numériques sera la prise en compte du niveau des primes pour chaque période. On fixe le niveau de la prime annuelle pour toutes les branches à 5% donc $c_i = 1.05 * \mathbb{E}[X_i]$, c-à-d $1.05/\beta_i$ pour les distributions exponentielles, et $1.05 * b/\beta_i(a - 1)$ pour les distributions GPD.

On effectue pour chaque modèle 10 simulations, de taille 20000.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 10. Pour les modèles GPDI et GPDC l'ordre des risques est respecté par l'allocation, les montants alloués sont bien croissants en fonction du niveau du risque encouru.

L'effet de la dépendance entre les deux modèles est peu visible, le modèle GPDC ne

15. Own Risk and Solvency Assessment

représente qu'une reconstruction du GPDI à l'aide d'un mélange exponentiel, les résultats obtenus pour les deux modèles présentent logiquement une ressemblance remarquable, et cela est le cas dans toutes les simulations. Cependant, l'effet de la dépendance est très visible entre les modèles EI et GPDC.

	EI			GPDC			GPDI		
	mean	sd div	α_i	mean	sd div	α_i	mean	sd div	α_i
p=2									
u_1	15.0276	0.7424	0.3006	29.3718	0.6548	0.5874	28.1655	0.4305	0.5633
u_2	23.9070	0.6521	0.4781	12.7268	0.4853	0.2545	14.3450	0.3404	0.2869
u_3	6.7803	0.1191	0.1356	4.0992	0.2827	0.0820	4.1618	0.1000	0.0832
u_4	2.8207	0.0674	0.0564	2.1604	0.2343	0.0432	1.9953	0.0818	0.0399
u_5	1.4644	0.0351	0.0293	1.6418	0.3376	0.0328	1.3324	0.1012	0.0266
p=3									
u_1	12.6107	0.4776	0.2522	29.6014	0.2416	0.5920	27.8029	0.2809	0.5561
u_2	25.6472	0.4274	0.5129	13.8216	0.1999	0.2764	15.2032	0.2132	0.3041
u_3	7.2531	0.1031	0.1451	3.8853	0.0871	0.0777	4.2912	0.0624	0.0858
u_4	2.9794	0.0511	0.0596	1.7018	0.0537	0.0340	1.7708	0.0560	0.0354
u_5	1.5096	0.0152	0.0302	0.9898	0.0737	0.0198	0.9319	0.0356	0.0186
p=5									
u_1	8.1818	0.4783	0.1636	28.1777	0.1630	0.5636	25.8581	0.1134	0.5172
u_2	28.7512	0.3762	0.5750	15.0743	0.1398	0.3015	16.5939	0.1357	0.3319
u_3	8.0691	0.1470	0.1614	4.1770	0.0394	0.0835	4.6744	0.0720	0.0935
u_4	3.3134	0.0684	0.0663	1.7077	0.0253	0.0342	1.9176	0.0198	0.0384
u_5	1.6845	0.0349	0.0337	0.8633	0.0107	0.0173	0.9561	0.0150	0.0191

TABLE 10 – Simulations *zone orange* sur plusieurs périodes $d = 5$, $p = 2, 3, 5$

On remarque que dès la deuxième période, la contribution de la branche la plus risquée (la première X_1) décroît en fonction de la période, alors que les contributions des autres risques sont des fonctions croissantes de la période. Ce phénomène peut être expliqué par :

- Le niveau de la prime : Pour une allocation sur plusieurs périodes, la prime est rajoutée à chaque période, cela change le degré du risque de chaque branche, le mode de tarification du risque joue donc un rôle important dans la détermination de la composition de l'allocation optimale. En effet le risque X_i correspondant à une seule période, sera remplacé par un risque $X_i - (1 + \eta)\mathbb{E}[X]$, sa moyenne est $-\eta\mathbb{E}[X]$, le niveau du risque des branches n'est donc plus le même.
- Le choix des paramètres des distributions : Ce phénomène serait plus visible ou moins visible selon le choix des paramètres des distributions exponentielles, dans le cas des simulations présentées dans le tableau 10, nous avons choisi $(0.01, 0.05, 0.2, 0.5, 1) = 0.01 * (1, 5, 20, 50, 100)$, les rapports entre ces paramètres définissent la rapidité de l'apparition de ce phénomène. Le choix des paramètres de la distribution gamma est aussi décisif, car le rapport $\frac{b}{a}$ définit le niveau de la prime pour les distributions Pareto généralisées. Nous avons effectué les simulations pour plusieurs cas pour pouvoir comprendre l'origine des phénomènes numériquement constatés.
- Le niveau de la richesse initiale u : Nous avons effectué les simulations présentés dans cette partie avec une richesse initiale fixée à $u = 50$, ce niveau est très faible comparé

au montant des primes, pour la branche la plus risquée, la prime pour la distribution exponentielle est $c = 1.05 * 1/0.01 = 105$, et pour les distributions Pareto la prime atteint, pour $b = 60$ par exemple $c = 1.05*60/(0.01*2) = 3150 = 63*u$, (d'où le choix d'un b plus petit), cela montre l'importance du niveau du capital de l'allocation dans la détermination de composition de l'allocation optimale.

En suivant la logique ci-dessus, et pour ce mode de tarification, l'augmentation de nombre des périodes va engendrer une inversion de l'ordre des niveaux d'allocations par changement de la nature des différents risques.

Afin de s'assurer de la pertinence de ces remarques, nous produisons les simulations pour un niveau de u plus élevé. Le retour à l'ordre attendu des allocations est visible dans les résultats présentés dans le tableau 11 :

	EI			GPDC			GPGI		
	mean	sd div	α_i	mean	sd div	α_i	mean	sd div	α_i
p=2									
u_1	96.0022	0.3849	0.6400	91.2379	3.0869	0.6083	91.9200	2.9987	0.6128
u_2	37.2031	0.5392	0.2480	26.0717	1.1201	0.1738	27.3337	1.8389	0.1822
u_3	9.8915	0.1726	0.0659	11.7700	0.8952	0.0785	12.8951	4.2402	0.0860
u_4	4.2350	0.1069	0.0282	10.5018	1.1800	0.0700	9.1010	1.2237	0.0607
u_5	2.6683	0.5288	0.0178	10.4186	1.2265	0.0695	8.7502	1.3732	0.0583

TABLE 11 – Simulations *zone orange* sur plusieurs périodes $d = 5$, $p = 2$, $u = 150$

Zone violette : Pour une richesse initiale $u = 100$, on garde les mêmes paramètres utilisés pour les simulations *zone orange* : $\Gamma(3, 0.60)$, $\beta_1 = 0.01$, $\beta_2 = 0.05$, $\beta_3 = 0.2$, $\beta_4 = 0.5$, $\beta_5 = 1$, $k=20000$. les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 12.

L'allocation optimale par minimisation de la *zone violette* est plus stable dans le temps, elle confirme sa tendance à allouer la quasi-totalité du capital à la branche la plus risquée, cela est intuitivement logique. En effet, dans le cas d'une ruine globale du groupe, les chances d'avoir une solvabilité au niveau de la branche la plus risquées sont très minimes. L'ajout des primes a retardé l'apparition de ce phénomène pour les deux premières périodes. Cela souligne encore une fois, l'impact direct de la méthode de la tarification et du niveau des primes sur la composition de la l'allocation optimale.

Finalement, les différentes simulations effectuées dans le cadre de ce travail, montrent que le choix de l'indicateur à minimiser est décisif pour la construction d'une méthode d'allocation optimale au sens des besoins de l'entreprise. Pour un capital économique par exemple, nous pensons que l'optimisation par minimisation de la *zone violette* sera plus adaptée au besoin de minimisation du risque de l'insolvabilité globale, alors que pour un capital excédentaire, l'allocation optimale par minimisation de la *zone orange* peut être considérée un bon outil de contrôle de risque dans une vision orientée plus vers le développement de la rentabilité.

	EI			GPDC			GPDI		
	mean	sd div	α_i	mean	sd div	α_i	mean	sd div	α_i
p=2									
u_1	97.2351	0.8549	0.9724	61.4019	4.7868	0.6140	59.1559	5.9039	0.5916
u_2	1.5023	0.4843	0.0150	14.9113	1.7498	0.1491	11.8628	1.4303	0.1186
u_3	0.5866	0.1828	0.0059	8.7466	1.2312	0.0875	9.7947	1.5305	0.0979
u_4	0.3837	0.1200	0.0038	7.5502	1.1072	0.0755	9.6009	1.4947	0.0960
u_5	0.2923	0.0930	0.0029	7.3900	1.1214	0.0739	9.5858	1.4959	0.0959
p=3									
u_1	99.7242	0.1029	0.9972	84.3865	3.5294	0.8439	87.9560	4.0918	0.8796
u_2	0.1752	0.0689	0.0018	8.1453	1.8191	0.0815	4.3784	1.2749	0.0438
u_3	0.0496	0.0183	0.0005	3.2464	0.7051	0.0325	2.7538	0.9341	0.0275
u_4	0.0296	0.0107	0.0003	2.2724	0.5985	0.0227	2.4872	0.9443	0.0249
u_5	0.0213	0.0081	0.0002	1.9493	0.5706	0.0195	2.4246	0.9490	0.0242
p=5									
u_1	99.9956	0.0030	1	96.1397	0.8218	0.9614	98.7531	0.3389	0.9875
u_2	0.0036	0.0025	0	2.6479	0.5589	0.0265	0.7103	0.2094	0.0071
u_3	0.0004	0.0003	0	0.6696	0.1646	0.0067	0.2414	0.0650	0.0024
u_4	0.0002	0.0002	0	0.2088	0.0631	0.0021	0.1301	0.0356	0.0013
u_5	0.0002	0.0001	0	0.0577	0.4977	0.0006	0.0068	0.3607	0.0001

 TABLE 12 – Simulations *zone violette* sur plusieurs périodes $d = 5$, $p = 2, 3, 5$

3.7.4 Impact de la dépendance avec les copules

Afin de mieux visualiser l'effet de la structure de dépendance sur la composition de l'allocation optimale, nous présentons dans cette partie des exemples de simulations avec des copules bivariées pour des distributions marginales exponentielles de paramètres $\beta_1 = 0.05$ et $\beta_2 = 0.25$. Nous connaissons la solution théorique en cas d'indépendance. Nous avons donc effectué nos simulations à l'aide des techniques de simulations des copules détaillées dans le livre de Etienne Marceau (2013) [32], appliquées aux copules suivantes :

- La copule monotone : U v.a de loi uniforme sur $[0, 1]$

$$X_1 = F_{X_1}^{-1}(U) \quad \text{et} \quad X_2 = F_{X_2}^{-1}(U).$$

Pour les risques comonotones les mesures de risque VaR et TVaR sont en général additives, donc aucun effet de diversification ne doit être constaté en agrégeant ces risque.

- La copule anticomonotone :

$$X_1 = F_{X_1}^{-1}(U) \quad \text{et} \quad X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - U),$$

où U est une v.a de loi uniforme sur $[0, 1]$.

- La copule normale avec un tau de Kendall de $\tau = 0.25$ qui correspond à un paramètre de dépendance $\alpha = \sin(\pi\frac{\tau}{2})$. C'est la copule la plus utilisée en finance (notamment pour l'évaluation des CDO). La fonction de répartition d'une copule normale bivariée est la suivante :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \bar{\Phi}_\alpha(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)),$$

avec, $\bar{\Phi}_\alpha$ est la fonction de répartition de la loi normale bivariée de coefficient de corrélation α , et Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

- La copule de Clayton avec un tau de kendall de $\tau = 0.75$ qui correspond à un paramètre de dépendance de $\alpha = \frac{2\tau}{1-\tau}$. La copule de Clayton est exprimée dans ce cas par son expression analytique :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Le niveau du capital considéré est de $u = 50$, les simulations sont faites 15 fois, pour une longueur de 20000 au niveau l'algorithme d'optimisation numérique. Les résultats obtenus pour ces quatre copules sont présentés dans le tableau 13.

	EI	Comonotone		Anticomonotone		Normale		Clayton	
	sol	mean	sd div	mean	sd div	mean	sd div	mean	sd div
Zone Orange									
u_1	38.46	40.7828	0.21	38.7647	0.0816	38.8268	0.0728	39.019	0.1399
u_2	11.54	9.2172	0.21	11.2353	0.0816	11.1732	0.0728	10.981	0.1399
Zone Violette									
u_1	49.08	41.6584	0.0087	48.1483	0.6461	45.8098	0.3326	44.0346	0.1098
u_2	0.92	8.3416	0.0087	1.8517	0.6461	4.1902	0.3326	5.9654	0.1098

TABLE 13 – Simulations modèles de dépendance avec des copules $u = 50$

L'impact de la nature de la structure de dépendance est présent pour les quatre copules, il est plus visible dans le cas de l'allocation par minimisation de la *zone violette*. En cas de ruine globale du groupe correspondante à l'indicateur J , l'attribution de la branche la moins risquée est plus importante pour la copule normale, puisque le taux de kandell choisi est positif $\tau = 0.25$, donc les ruines locales sont corrélées positivement. Cette contribution est plus grande dans le cas de la copule Clayton puisque le taux de kandell est plus élevé $\tau = 0.75$. Elle est encore plus importante pour le cas de la copule comonotone puisqu'il s'agit d'une corrélation parfaite. Dans le cas de la copule comonotone nous remarquons aussi que les contributions sont quasi-proportionnelles au niveau de risque de chaque branche $\beta_2/\beta_1 = 5$, cette remarque a été démontré théoriquement pour le a cas des risques comonotones.

	EI	Comonotone		Anticomonotone		Normale		Clayton	
	sol	mean	sd div	mean	sd div	mean	sd div	mean	sd div
Zone Orange									
u_1	81.18	72.47	0.7975	75.86	0.7762	75.30	1.1691	74.54	1.3215
u_2	18.82	27.53	0.7975	24.14	0.7762	24.70	1.1691	25.46	1.3215
Zone Violette									
u_1	91.23	65.46	2.8636	57.55	3.6253	66.12	2.6532	61.07	1.8297
u_2	8.77	34.54	2.8636	42.45	3.6253	38.88	2.6532	38.93	1.8297

TABLE 14 – Simulations modèles de dépendance avec des copules $u = 100$

Les indicateurs de risque multivariés I et J , peuvent donc être utilisés comme des outils d'aide à la décision pour le choix de la création d'une nouvelle ligne d'affaires. Sa structure de dépendance avec l'ensemble des branches existantes construira un facteur déterminant de la pertinence d'une stratégie d'allocation du capital.

3.7.5 Comparaison avec la méthode d'Euler

Nous allons maintenant étudier la différence des résultats obtenus dans la sous-section précédente avec les compositions de l'allocation d'Euler pour les mesures de risques VaR et TVaR.

Dans le cadre du modèle exponentiel bivarié, nous allons utiliser la méthode d'Euler pour retrouver le poids β de la participation de chaque branche dans le risque global, et dans ce cas la composition de l'allocation sera déterminée par le couple $(\beta u, (1 - \beta)u)$. Les distributions marginales des risques X_1 et X_2 sont des exponentielles de paramètres β_1 et β_2 respectivement, tels que $\beta_1 < \beta_2$. On désigne par β^{VaR} le poids de la contribution au capital de la branche la plus risquée, représentée ici par X_1 , par une méthode d'allocation de principe d'Euler, et de mesure de risque VaR_κ , et par β^{TVaR} le poids de la contribution de la même branche obtenu par une allocation d'Euler de mesure de risque $TVaR_\kappa$. Le choix du seuil de confiance $\kappa = 0.995$ est issu du niveau fixé par Solvabilité 2 pour le calcul du SCR.

Nous utilisons les formules des règles d'allocation obtenues par la méthode d'Euler dans la section 2 pour montrer que :

$$\beta^{VaR} = \frac{\mathbb{E}[X_1 | S = s_\kappa]}{s_\kappa} = \frac{\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{S=s_\kappa}]}{s_\kappa f_S(s_\kappa)},$$

et,

$$\beta^{TVaR} = \frac{\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{S>s_\kappa}]}{(1 - \kappa)TVaR_\kappa(S)},$$

où $s_\kappa = VaR_\kappa(S)$.

Cas de l'indépendance Dans le cas de l'indépendance la somme S des deux risques suit une loi de Erlang généralisée, sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_S(s) = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}(1 - e^{-\beta_1 s}) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}(1 - e^{-\beta_2 s}).$$

Nous pouvons donc trouver $s_\kappa = VaR_\kappa(S)$ par un outil d'optimisation numérique. La $TVaR_\kappa(S)$ sera donnée dans ce cas par l'expression suivante :

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{1}{1 - \kappa} \left[\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} e^{-\beta_1 s_\kappa} \left(s_\kappa + \frac{1}{\beta_1} \right) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 s_\kappa} \left(s_\kappa + \frac{1}{\beta_2} \right) \right].$$

Nous obtenons par la suite les expressions explicites de β^{VaR} et β^{TVaR} en fonction de s_κ . On définit la fonction G pour tout $(t, a, b) \in \mathbb{R}_+^3$ par :

$$G(t, a, b) = abe^{-bt} \int_0^t x e^{-(a-b)x} dx = \frac{ab}{b-a} t e^{-at} + \frac{ab}{(b-a)^2} (e^{-bt} - e^{-at}),$$

alors,

$$\beta^{VaR} = \frac{G(s_\kappa, \beta_1, \beta_2)}{s_\kappa f_S(s_\kappa)}.$$

On définit aussi la fonction T pour tout $(t, a, b) \in \mathbb{R}_+^3$ par :

$$T(t, a, b) = \int_t^{+\infty} G(r, a, b) dt = \frac{ab}{b-a} \left(\frac{te^{-at}}{a} + \frac{e^{-at}}{a^2} \right) + \frac{ab}{(b-a)^2} \left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right),$$

alors,

$$\beta^{TVaR} = \frac{T(s_\kappa, \beta_1, \beta_2)}{(1-\kappa)TVaR_\kappa(S)}.$$

Pour le cas indépendant, le coût du calcul est le même pour les deux méthodes d'allocation, Euler et l'allocation optimale. L'utilisation d'un outil numérique d'optimisation est nécessaire dans les deux cas.

Dépendance FGM Nous étudions ici le cas d'un modèle exponentiel avec dépendance de type FGM. Cette structure de dépendance est choisie pour la simplicité des calculs. Cependant, il s'agit d'une dépendance faible qui ne permet pas de visualiser clairement l'impact de la dépendance sur l'allocation. Dans le cas de ce modèle nous obtenons des formules explicites de la composition de l'allocation. Nous utilisons le même modèle présenté dans la section 3.6.3, pour pouvoir comparer les résultats des deux méthodes d'allocation. Le paramètre de la couple FGM est $-1 \leq \theta \leq 1$, et on suppose que $\beta_1 < \beta_2/2$, pour assurer l'existence des moments.

On rappelle que la densité bivariable dans ce cas est donnée par :

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (1 + \theta)\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} + 2\theta\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2} - \theta 2\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} - \theta\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2}.$$

On définit les fonctions h_S et H_S pour tout $(s, a, b) \in \mathbb{R}_+^3$ par :

$$h_S(s, a, b) = \frac{ba}{b-a} e^{-as} + \frac{ba}{a-b} e^{-bs},$$

et

$$H_S(s, a, b) = \int_0^s h_S(t, a, b) dt = \frac{b}{b-a} (1 - e^{-as}) + \frac{a}{a-b} (1 - e^{-bs}).$$

Les expressions des fonctions de densité et de distribution de la somme des risques sont données respectivement par :

$$f_S^{FGM}(s) = (1 + \theta)h_S(s, \beta_1, \beta_2) + \theta h_S(s, 2\beta_1, 2\beta_2) - \theta h_S(s, 2\beta_1, \beta_2) - \theta h_S(s, \beta_1, 2\beta_2),$$

et,

$$F_S^{FGM}(s) = (1 + \theta)H_S(s, \beta_1, \beta_2) + \theta H_S(s, 2\beta_1, 2\beta_2) - \theta H_S(s, 2\beta_1, \beta_2) - \theta H_S(s, \beta_1, 2\beta_2).$$

La fonction de densité f_S^{FGM} figure directement dans l'expression de β^{VaR} , et la fonction de répartition F_S^{FGM} est nécessaire pour obtenir numériquement $s_\kappa^{FGM} = VaR_\kappa(S)$.

On définit aussi la fonction V_κ pour tout $(s, a, b) \in \mathbb{R}_+^3$ par :

$$V_\kappa(s, a, b) = \frac{1}{1-\kappa} \left[\frac{b}{b-a} e^{-as} \left(s + \frac{1}{a} \right) + \frac{a}{a-b} e^{-bs} \left(s + \frac{1}{b} \right) \right].$$

La $TVaR_{\kappa}^{FGM}$ de la somme S dans le cadre du modèle FGM sera donc donnée par la formule suivante :

$$TVaR_{\kappa}^{FGM}(S) = (1+\theta)V_{\kappa}(s_{\kappa}^{FGM}, \beta_1, \beta_2) + \theta V_{\kappa}(s_{\kappa}^{FGM}, 2\beta_1, 2\beta_2) - \theta V_{\kappa}(s_{\kappa}^{FGM}, 2\beta_1, \beta_2) - \theta V_{\kappa}(s_{\kappa}^{FGM}, \beta_1, 2\beta_2).$$

Finalement, les expressions explicites des poids β_{FGM}^{VaR} et β_{FGM}^{TVaR} seront :

$$\beta_{FGM}^{VaR} = \frac{1}{s_{\kappa}^{FGM} f_S^{FGM}(s_{\kappa}^{FGM})} [(1 + \theta)G(s_{\kappa}^{FGM}, \beta_1, \beta_2) + \theta G(s_{\kappa}^{FGM}, 2\beta_1, 2\beta_2) - \theta G(s_{\kappa}^{FGM}, 2\beta_1, \beta_2) - \theta G(s_{\kappa}^{FGM}, \beta_1, 2\beta_2)],$$

et,

$$\beta_{FGM}^{TVaR} = \frac{1}{(1 - \kappa)TVaR_{\kappa}^{FGM}(S)} [(1 + \theta)T(s_{\kappa}^{FGM}, \beta_1, \beta_2) + \theta T(s_{\kappa}^{FGM}, 2\beta_1, 2\beta_2) - \theta T(s_{\kappa}^{FGM}, 2\beta_1, \beta_2) - \theta T(s_{\kappa}^{FGM}, \beta_1, 2\beta_2)].$$

La figure 21 présente une comparaison entre les contributions de la branche la plus risquée X_1 par les trois méthodes, Euler VaR, Euler TVaR, et l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur I . Les autres paramètres sont toujours $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.25$, et le niveau de capital à allouer qui impact uniquement le résultat de l'allocation optimale est $u = 100$. Ce niveau du capital permet de comparer les trois méthodes, car le sens de variation de la contribution de la branche la plus risquée en fonction du paramètre de la copule θ est le même.

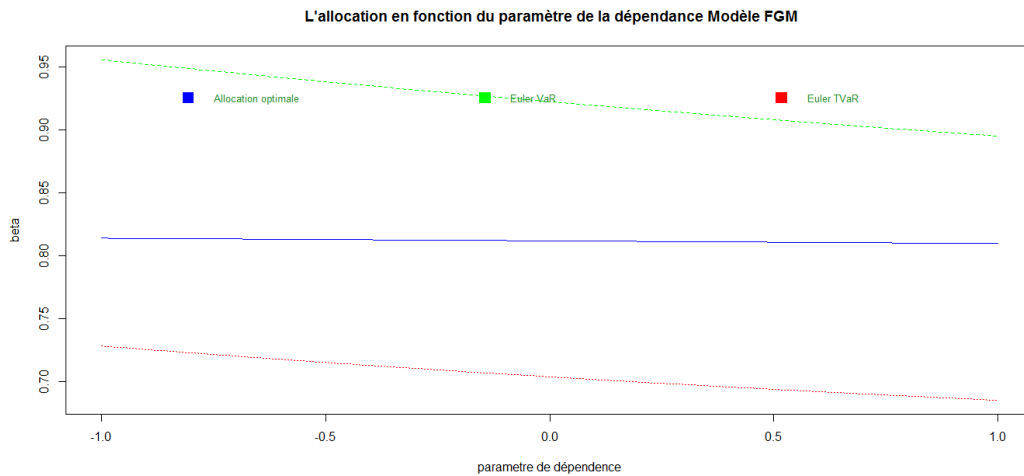


FIGURE 21 – Les β des différentes méthodes en fonction de θ .

Pour ce niveau de capital d'allocation, le sens des variations de β en fonction de θ est le même pour les trois méthodes. Cela nous permet de conclure que ces méthodes ont la même vision du poids du risque d'une branche dans le risque global. Le niveau du capital obtenu change en fonction des paramètres des distributions, pour le cas présenté dans la figure 21, le niveau de la contribution β obtenu par l'allocation optimale se situe entre ceux des contributions par les règles de la VaR et de la TVaR. La taille des variations est plus importante pour les deux règles d'Euler comparées à la méthode optimale, cela est directement lié au choix de la structure de dépendance, l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur I n'est pas très sensible aux dépendances faibles.

Pour comparer l'impact des différentes structures de dépendance sur les compositions des deux méthodes d'allocation, optimale et d'Euler, nous avons déterminé les allocations de la branche risquée données par les β pour les deux méthodes, et dans les cas des copules de la section précédente avec les mêmes paramètres de dépendance. Les résultats numériques obtenus sont présentés dans la tableau 15.

	EI	Comonotone		Anticomonotone		Normale		Clayton	
	sol ex	mean	sd div	mean	sd div	mean	sd div	mean	sd div
Allocation optimale par minimisation de l'indicateur I, capital $u = 100$									
β^I	0.812	0.725	0.008	0.759	0.008	0.753	0.017	0.745	0.013
Allocation optimale par minimisation de l'indicateur J, capital $u = 100$									
β^J	0.912	0.655	0.029	0.576	0.036	0.611	0.027	0.611	0.018
Allocation Euler VaR									
β^{VaR}	0.955	0.833	0.002	0.998	0.003	0.944	0.035	0.892	0.058
Allocation Euler TVaR									
β^{TVaR}	0.808	0.833	0.001	0.999	0.001	0.917	0.005	0.912	0.005

TABLE 15 – Comparaison avec la méthode d'Euler - prise en compte de la dépendance

Pour les solutions exactes dans le cas de l'indépendance, les niveaux des contributions sont dans l'ordre décroissant β^{VaR} , β^I , β^J et β^{TVaR} . Le poids du risque déterminé par l'allocation optimale se situe donc entre les visions VaR et TVaR de la méthode d'Euler.

La réaction par rapport au niveau de force de la dépendance est pratiquement dans le même sens pour les quatre méthodes. Cependant, et contrairement à ce qui était constaté pour la dépendance de type FGM, l'allocation optimale est plus sensible à la force de dépendance, l'écart avec le cas de l'indépendance est remarquable pour les 4 copules par minimisation des indicateurs I et J . Le sens de ces réactions est quasiment le même pour toutes les méthodes comparées, plus la dépendance est forte, plus on alloue du capital à la branche la plus risquée.

Concernant les niveaux des erreurs, l'allocation par la règle Euler TVaR réalise le niveau le plus faible, mais les deux méthodes d'allocation optimale ne dépassent pas le niveau des erreurs de la règle d'Euler VaR. Cela confirme la performance de la version Kiefer-Wolfowitz de l'algorithme de descente en miroir utilisée comme algorithme d'optimisation numérique pour déterminer les compositions des allocations optimales.

Finalement, les deux méthodes d'allocation, optimale et d'Euler sont construites sur deux approches totalement différentes. La méthode d'Euler détermine le poids de chaque risque dans le risque global, alors que la méthode optimale minimise un indicateur de risque qui dépend du niveau du capital à allouer. Nous pensons que par construction, les deux méthodes ne sont pas comparables. Le choix entre elles pour allouer un capital est directement lié à la nature de ce capital et à la vision stratégique de la compagnie et son niveau d'aversion au risque.

4 Applications de l'allocation du capital

4.1 Solvabilité des groupes dans un processus ORSA

A la différence de solvabilité 2, le SST¹⁶ traite le cas de la solvabilité des groupes dans un cadre particulier. Le SST ne se limite pas à des exigences réglementaires de capital économique de solvabilité pour le groupe uniquement, mais il exige aussi des seuils de solvabilité pour chaque branche. L'allocation du capital devient dans le cas du SST une exigence réglementaire et non seulement un exercice de gestion interne.

La première application d'allocation du capital qu'on propose est basée sur l'idée du système SST. Nous proposons un calcul interne dans le cadre de l'approche ORSA des capitaux de solvabilité par branche d'activités, calculés à l'aide d'une technique d'allocation de capital, afin d'intégrer le gain de la diversification et la structure de dépendance dans les calculs. En plus de la détermination de la participation réelle de chaque activité dans le risque global de l'assureur, nous proposons un deuxième niveau de contrôle de risque via l'utilisation des indicateurs multivariés de risque, et la détermination de capitaux de solvabilité locaux par une allocation optimale par minimisation de ces indicateurs. L'allocation peut se faire sur plusieurs périodes, avec une prise en compte des prévisions des niveaux des primes et des changements des poids des risques et de leur nature. Elle peut aussi être actualisée en continu, car sa propriété de *robustesse* montre qu'elle n'est pas sensible aux changements négligeables.

Le choix de cette technique dans le cadre de l'ORSA peut être justifié par ses avantages. Nous citons à titre d'exemples :

- Sa construction basée sur la minimisation du risque sous une approche multivariée. Les méthodes classiques déterminent uniquement le poids de chaque risque dans le risque global, alors que cette méthode minimise un niveau de risque à la fois local et global. La minimisation du risque est l'objectif central de Solvabilité 2, nous pensons que cette approche est orientée dans le même sens.
- La possibilité de son utilisation pour tout type de capital et non seulement le capital économique. Elle peut être utilisée pour l'allocation de tout capital d'investissement ou aussi pour allouer le gain de la diversification entre les branches.
- Ses propriétés de cohérences qui ne sont pas liées au choix d'une mesure de risque univariée. Les propriétés des méthodes d'allocation classiques découlent directement des propriétés de la mesure de risque utilisée, la question du choix optimal d'une mesure, entre une VaR incohérente, une TVaR difficilement backtestable (voir Gneiting (2011) [23]), ou autre mesures, n'est pas à traiter dans le cas de notre allocation optimale.
- La possibilité de construire une allocation sur plusieurs périodes. Cette possibilité répond au besoin des activités de l'assurance longue, et à l'approche ORSA qui propose la construction des allocations à des horizons de 3 à 5 ans.
- Simplicité de l'implémentation à l'aide des algorithmes numériques d'optimisation, qui permettent de traiter le cas général pour tous les types de distributions et de structure de dépendance.
- La performance du backtesting de la méthode d'allocation. En effet, l'allocation est finalement le minimum d'une espérance d'une fonction score, cela se traduit statisti-

16. Swiss Solvency Test, il représente les normes de solvabilité des assureurs suisses.

quement par la propriété de l'*élicitabilité*, introduite dans la littérature par Gneiting (2011) [23], nécessaire pour réussir le backtesting de tout indicateur statistique. Le choix de la méthode d'allocation à utiliser reste lié à la vision propre de la compagnie de son risque, de son aversion au risque et de ses stratégies de développement. Notre proposition se positionne plus du côté régulateur avec le seul objectif de minimisation du risque.

4.2 Modélisation du risque systémique

La crise financière a mis en lumière le besoin d'améliorer la compréhension et la modélisation du risque systémique. Ce risque s'est notamment matérialisé à l'automne 2008, par la mise en faillite de Lehman Brothers ([12, 22]). En effet, les institutions financières sont d'importance systémique si leur incapacité à honorer leurs engagements vis-à-vis de leurs clients ou leurs créanciers est susceptible d'endommager le système financier et, plus largement, le fonctionnement de l'économie toute entière. La nécessité de comprendre ce risque dans un système financier ([10, 2]) soulève une problématique intéressante dont le point de départ peut être les techniques de l'allocation du capital étudiées dans ce travail. En assurance, l'objectif de l'allocation du risque est le même pour la modélisation du risque systémique dans un système financier. Les deux essaient de décortiquer le mode de répartition du risque agrégé à un moment donné. La détermination du poids systémique d'une composante d'un système financier revient finalement et à notre avis à la détermination de sa part de participation dans le risque global, et peut être vue comme une problématique d'allocation du risque. Dans cette section, nous utilisons les techniques présentées dans les sections 2 et 3 pour définir des nouveaux indicateurs de risques systémique.

Nous considérons un système financier composé de d institutions financières. Et soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un processus vectoriel aléatoire qui modélise les P&L de ces institutions, donc X_i représente le P&L de la $i^{\text{ème}}$ composante du système. D'un point de vue risque, nous supposons que les variables aléatoire X_i sont positives dans les cas de pertes et négatives dans les cas de profits. Le calcul du capital risqué se fait au niveau de chaque institution séparément du système et ne tient pas compte des interactions de dépendance qui existent avec les autres composantes du système.

Parmi les rares mesures définies dans la littérature de la modélisation de risque systémique, nous citons la *MES The marginal expected shortfall* introduite par Acharya, Pedersen, Philippon and Richardson (2010) [4], et présentée sous une autre approche par Acharya, Engle and Richardson (2012) [3]. Sa définition mathématique est donnée par :

$$MES_{\alpha}(Y | X) := \mathbb{E}[Y | X \geq VaR_{\alpha}(X)].$$

Elle mesure le niveau systémique de X par rapport à Y , cette mesure existe déjà en assurance, et représente une contribution au risque d'une composante d'un groupe par la règle *TVAR*, issue de la méthode d'Euler, modulo une constante,

$$MES_{\alpha}(X_i | S = \sum_{k=1}^d X_k) == \mathbb{E}[X_i | X \geq VaR_{\alpha}(S)] = (1 - \alpha)TVAR_{\alpha}(X_i; S).$$

Cette remarque nous amène à se poser la question, si la modélisation du risque systémique n'est finalement pas un exercice d'allocation du capital, et donc la possibilité d'utiliser

toute la riche littérature qui traite cette dernière problématique pour déterminer le niveau systémique de chaque composante dans un système financier.

Une autre mesure du risque systémique présente dans la littérature est la $\Delta CoVaR$, introduite par Adrian and Brunnermeier (2011) [5]. Elle est aussi étudiée plus récemment dans Löffler et Raupach (2013) [30] et dans Castro et Ferrari (2014) [15]. Mainik et Schaanning (2012) [31] ont présenté une nouvelle approche à cette mesure, qui permet de mieux intégrer la structure de dépendance entre les composantes, ils ont aussi produit des formules explicites de cette mesure dans des cas particuliers. Leurs définitions sont présentées comme suit,

$$CoVaR_{\alpha,\beta}^-(Y | X) = VaR_{\beta}(Y | X = VaR_{\alpha}(X)),$$

$$CoVaR_{\alpha,\beta}(Y | X) = VaR_{\beta}(Y | X \geq VaR_{\alpha}(X)).$$

De la même façon ils ont défini la *CoES*, *Conditional Expected Shortfall*(CoES),

$$CoES_{\alpha,\beta}^-(Y | X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 CoVaR_{\alpha,u}^-(X) du,$$

$$CoES_{\alpha,\beta}(Y | X) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 CoVaR_{\alpha,u}(X) du.$$

Le risque systémique est mesuré par,

$$\Delta CoVaR_{\alpha,\beta}(Y | X) = CoVaR_{\alpha,\beta}^-(Y | X) - VaR_{\beta}(Y).$$

Ces mesures restent aussi très proches aux expressions des compositions des allocations par la méthode d'Euler, et parfois se base sur la théorie des mesures de risques appliquée à des variables conditionnelles.

Notre idée se base sur la mesure du risque systémique par la différence entre la quantification du risque dans la vision local de chaque composante, et sa participation réelle dans le risque global du système. Cette méthode sera utilisable pour toute mesure de risque.

Dans une vision locale, on peut choisir une mesure de risque pour évaluer le risque de chaque composante séparément des autres, et son poids dans le risque global sera dans ce cas, sa contribution par la méthode proportionnelle :

$$\frac{\rho(X_i)}{\sum_{k=1}^d \rho(X_k)},$$

où ρ désigne la mesure de risque utilisée.

Maintenant, et dans une approche multivariée, les méthodes d'allocation du risque nous donnent un autre poids par risque en fonction de ses interactions avec les autres composantes. Notons C_i la contribution alloué à la composante X_i par une méthode d'allocation donnée d'un capital égal à $\rho(\sum_{k=1}^d X_k)$, son poids réel au risque global selon cette approche est donnée par :

$$\frac{C_i}{\rho(\sum_{k=1}^d X_k)}.$$

Notre idée est de mesurer le risque systémique par le niveau de l'éloignement entre la vision univariée et l'approche multivariée comme réelle mesure. Nous proposons donc des

indicateurs systémiques en fonction des méthodes d'allocations choisies, définis par la formule générale suivante :

$$SR_{i\%} = \frac{\frac{C_i}{\rho(\sum_{k=1}^d X_k)} - \frac{\rho(X_i)}{\sum_{k=1}^d \rho(X_k)}}{\frac{C_i}{\rho(\sum_{k=1}^d X_k)}} = 1 - \frac{\rho(X_i)}{C_i} \frac{\rho(\sum_{k=1}^d X_k)}{\sum_{k=1}^d \rho(X_k)}.$$

On peut dire que la composante est systémique si l'indicateur $SR_{i\%}$ est positif, son niveau de risque est sous-estimé par la vision locale. Le risque systémique est surévalué dans le cas d'un indicateur négatif. Le niveau du risque systémique est une fonction croissante de $SR_{i\%}$. On peut utiliser aussi deux mesures de risques différentes pour le calcul des C_i et la mesure du risque univariée pour chaque composante. Toutefois, nous pensons que le choix de ρ pour la vision locale doit rester cohérent avec le contexte financier. Par exemple, il serait plus logique de choisir la VaR dans le cadre de la réglementation Bâle 2.

Le régulateur peut fixer un niveau à ne pas dépasser pour le risque systémique et demander ainsi des augmentations de capitaux en cas de dépassement.

Pour illustrer cette application, nous considérons par exemple la composition de l'indice des banques dans le CAC40 où un système financier constitués des d institutions financières, afin d'étudier le niveau systémique de ses composantes.

On note S_t^i le cours financier de l'action de $i^{\text{ème}}$ institution, et on désigne par w_i le poids de la capitalisation financière de l'institution i (Nombre des actions, $w_i S_t^i$ représente la capitalisation financière de la firme i). Notre système financier peut être représenté par la variable :

$$S_t = \sum_{i=1}^d w_i S_t^i.$$

On note $x_i = \frac{w_i S_0^i}{S_0}$, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, sachant que $S_0 = \sum_{i=1}^d w_i S_0^i$.

Pour un horizon de durée t , on note $X_i = x_i \frac{S_0^i - S_t^i}{S_0^i}$, qui représente l'inverse (dans le sens négation) du taux du rendement de l'action i , multiplié par son poids dans le système financier.

On désigne par X , l'inverse du taux de rendement du système financier, donc $S = \frac{S_0 - S_t}{S_0}$. On vérifie bien qu'il vérifie la relation

$$X = \sum_{i=1}^d X_i.$$

La méthodologie de calcul d'un indice de risque systémique basé sur l'allocation de capital, peut être représentée par les étapes suivantes :

- Détermination des poids des composantes à l'instant du calcul des indicateurs $t = 0$.
- Choix d'un modèle pour la modélisation de l'évolution de chaque spot. Comme illustration on va choisir le modèle le plus simple, Black-Scholes-Samuelson, dont la dynamique des spots est représentée par l'EDS :

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i,$$

où μ_i représente le *drift* du sport i , qui peut être calculé en pratique à l'aide de l'espérance actualisée des rendements. σ_i la volatilité de la $i^{\text{ème}}$ action, elle peut être estimée par des méthodes stochastiques dans le cas d'une volatilité implicite, ou uniquement à l'aide de calculs historiques, par exemple en prenant une volatilité journalière sur une durée historique donnée, $\sigma_i = \sqrt{Var[R_i]}$, avec R_i le rendement journalier historique de l'actif i .

- Choix d'une structure de dépendance. Pour cela nous pouvons utiliser les méthodes stochastiques pour l'estimation des copules. Dans un contexte financier, il est plus pratique d'opter pour une copule normale ou une copule de Student, dans ce cas, les tests d'inférence statistique permettent d'estimer les paramètres de ces copules et de valider le choix pour la modélisation de la dépendance entre les actifs. Le choix le plus simple de la structure de dépendance sera une copule normale multivariée qui relie directement les mouvements browniens W_i , dans ce cas, on peut facilement utiliser la factorisation de Cholesky de la matrice de covariance pour simuler les browniens corrélés.
- Choix d'une mesure de risque univariée. Dans notre exemple, on peut choisir la VaR de niveau 99%, comme c'est conseillé par le dispositif Bâle 2.
- Choix d'une méthode d'allocation. Si il s'agit d'une méthode classique, on choisit une mesure de risque et un principe d'allocation. Dans le cas du choix de l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur de risque I . Nous prenons comme capital à allouer $u = VaR_{0.99}(X)$.
- Calcul des indicateurs de risque systémique par composante du système. Dans notre exemple, l'indicateur systémique de l'institution i sera :

$$SR_i = 1 - \frac{VaR_{0.99}(X)}{\sum_{i=1}^d VaR_{0.99}(X_i)} \frac{VaR_{0.99}(X_i)}{u_i},$$

où u_i est la contribution du risque X_i dans le capital $VaR_{0.99}(X)$ par l'allocation qui minimise l'indicateur multivarié de risque I .

Ainsi, nous pouvons construire un nombre important d'indicateurs de risque systémique en fonction des choix de la méthode d'allocation, et des mesures de risques utilisées. Cette approche permet d'intégrer à la fois la vision de risque de l'institution et celle du système représenté par le régulateur dans la détermination du poids systémique de chaque composante.

Cet exercice est fait régulièrement sur une période de 6 mois par le CRM¹⁷ Lausanne, qui calcule pour toutes les banques européennes un indicateur SRISK¹⁸ de risque systémique. Nous pouvons comparer les ordres systémiques obtenus par cet indicateur avec ceux des indicateurs $SR_{i\%}$.

4.3 Un cas particulier de la réassurance optimale

Dans cette section, nous utilisons la méthode de l'allocation optimale du capital par minimisation des indicateurs multivariés du risque pour modéliser un cas particulier de la réassurance optimale. Nous imaginons le cas d'un réassureur qui doit offrir à ses clients

17. Center for Risk Management

18. Selon le dernier calcul de l'indicateur SRISK, daté du 06 Mars 2015, la France est le pays le plus systémique dans le secteur bancaire en Europe, la banque la plus systémique en Europe est la BNP Paribas SA, Le groupe Crédit Agricole quatrième et La société générale cinquième. Ces statistiques sont consultables sur le site du CRM <http://www.crml.ch/>

des contrats de réassurance type Stop Loss, et se couvrir lui-même en achetant un contrat de réassurer sur l'ensemble de son portefeuille.

Nous rappelons qu'un contrat de réassurance Stop Loss est un outil de couverture des assureurs, qui peuvent l'utiliser pour protéger le résultat d'une branche d'activité et ainsi équilibrer son bilan technique annuel. Ce type de traité fait partie de la famille des traités classiques de la réassurance non proportionnelle. Le Stop Loss (SL) est un contrat de réassurance non proportionnelle, dont le réassureur s'engage à payer pour toutes les pertes de la cédante dépassant un montant appelé la *priorité* du SL. Le montant payé par la réassurance est généralement plafonné, on parle de la notion de la *porté*, qui représente la limite maximale de l'engagement du réassureur sur le contrat. Le plafond du traité sera la somme de la porté et la priorité. Dans le cas de notre application, nous supposons que tous les contrats (SL) sont sans porté.

Nous supposons qu'un réassureur moyen assure d portefeuilles d'assurance dans le cadre de contrats Stop Loss. Les portefeuilles assurés seront modélisés par des variables aléatoires X_i , et la priorité de chaque contrat sera notée d_i , le réassureur s'engage alors à payer le montant :

$$\sum_{i=1}^d (X_i - d_i) \mathbb{1}_{\{X_i > d_i\}} = \sum_{i=1}^d (X_i - d_i)_+.$$

Maintenant, on suppose que ce réassureur veut couvrir sa perte liée aux contrats Stop Loss qu'il assume. Il va opter pour un contrat de type Stop Loss couvrant l'ensemble de son portefeuille. On désigne par d la priorité de ce contrat, le réassureur va donc supporter uniquement :

$$\sum_{i=1}^d (X_i - d_i) \mathbb{1}_{\{X_i > d_i, S < d\}} = \sum_{i=1}^d (X_i - d_i)_+ \mathbb{1}_{\{S < d\}},$$

où $S = \sum_{i=1}^d X_i$. L'espérance de ce montant correspond exactement à l'indicateur de risque multivarié I . L'allocation optimale (du capital $u = d$) par minimisation de l'indicateur I peut donc être appliqué pour déterminer les contrats de réassurances optimales à proposer aux assureurs assurés (les priorité d_i), ou pour évaluer une proposition d'un contrat Stop Loss pour son portefeuille de risque global (priorité d), ou encore pour évaluer son risque de perte lié à l'ensemble de ses contrats.

Plusieurs problématiques actuarielles et financières peuvent être vues comme un exercice d'allocation d'un capital dans un contexte multivarié. L'allocation optimale par minimisation des indicateurs multivariés de risque, étant utilisable pour tout type de capital, constitue une méthodologie qui peut être facilement adaptable pour répondre à ce genre de problématiques.

Conclusion

La gestion des risques en finance et assurance a évolué ces dernières années, la théorie du risque multivarié a fait son apparition suite à la croissance de la nécessité d'une analyse multivariée, permettant une quantification plus juste des risques encourus et une construction équitale et rentable de l'allocation des capitaux.

D'un point de vue théorique, la conception des indicateurs de risque multivariés a aussi évoluée, notamment par la recherche d'une modélisation plus réaliste de la sévérité de l'insolvabilité locale en fonction de l'état de la solvabilité globale, sans négliger la structure de dépendance entre les différents risques.

Dans ce contexte, nous avons essayé, dans le cadre de ce travail, de comprendre la problématique de l'agrégation des risques dans un modèle multivarié, et d'analyser les différentes méthodes d'allocation du capital proposées dans la littérature, ainsi que les critères de leur optimalité.

Nous pensons que ces problématiques sont encore peu étudiées dans la littérature et ouvrent un champ d'étude assez vaste. Partant de ce constat, on se propose de traiter dans des futurs travaux, des problématiques liées à la théorie du risque multivarié et ses applications.

Durant les cinq années de sa déclinaison opérationnelle, Solvabilité 2 a développé le besoin du renforcement de la robustesse des modèles et pratiques internes de la gestion et modélisation du risque par une meilleure compréhension des relations complexes entre les différents risques qui pèsent sur une compagnie d'assurance. La recherche des méthodologies permettant d'articuler les résultats issus des modèles internes et ceux de la Formule Standard constitue une nécessité urgente. Le développement des méthodologies internes de gestion des risques sous l'approche ORSA nécessite aussi une réflexion profonde, qui va sans doute murir après les ORSA blancs de 2014 et 2015, et se développer naturellement par l'expérience sous Solvabilité 2.

En ce qui concerne la construction de méthodes d'allocation optimale, adaptées à la nature du capital à allouer et à l'aversion au risque de la structure, il peut être intéressant d'entendre les résultats théoriques obtenus à une classe plus grande d'indicateurs de risque multivariés, et d'établir dans ce cadre des stratégies qui minimise le rapport risque/rentabilité. On peut notamment étudier les différents choix possibles des fonctions de pénalités en fonction de la nature du risque, et en sortant du cadre théorique pour s'intéresser plus particulièrement aux problématiques rencontrées par les compagnies d'assurance et les institutions financières lors d'une démarche d'allocation de capital. Dans ce travail la difficulté majeur était l'incapacité d'appliquer les méthodes proposées sur des données réelles issues des portefeuilles des assureurs. Cependant, leur mise en œuvre reste simple et facilement utilisable du moment qu'on valide une modélisation des risques encourus.

L'approche ORSA ouvre une porte de créativité importante dans le métier de l'actuaire en matière de modélisation et mesure de risque. Nous espérons que ce travail constituera une première étape dans notre projet professionnel qui se résume dans la participation à l'amélioration de la gestion interne des risques au niveau des compagnies d'assurance.

Références

- [1] Directive 2009/138/ce du parlement européenne et du conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité 2). *Journal officiel de l'Union européenne*, L335 :1–155, 17 Décembre 2009.
- [2] V. Acharya. A theory of systemic risk and design of prudential bank regulation. *London Business School, NYU-Stern and CEPR*, 26th January 2009.
- [3] V. Acharya, R. Engle, and M. Richardson. Capital shortfall : A new approach to ranking and regulating systemic risks. *The American Economic Review*, 102(3) :59–64, 2012.
- [4] V. Acharya, L. Pedersen, T. Philippon, and M. Richardson. Measuring systemic risk. 2010.
- [5] T. Adrian and M.K. Brunnermeier. Covar. Technical report, National Bureau of Economic Research, 2011.
- [6] P. Artzner, F. Delbaen, J-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3) :203–228, 1999.
- [7] S. Asmussen. *Ruin probabilities. Advanced series on statistical science & applied probability, Volume 2*. 2000.
- [8] D. Balog. Capital allocation in financial institutions : the euler method. Iehas discussion papers, Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, June 2011.
- [9] ACPR BF. Focus solvabilité 2 : numéro spécial omnibus ii. Février 2014.
- [10] M. Billio, M. Getmansky, A. W.Lo, and L. Pelizzon. Measuring systemic risk in the finance and insurance sectors. *MIT Sloan School Working Paper 4774-10*, March 2010.
- [11] K. Borch. Equilibrium in a reinsurance market. *Econometrica*, (30) :424–444, 1962.
- [12] C. Borio. L'approche macroprudentielle appliquée à la régulation et à la surveillance financières. *Revue de la stabilité financière- Quel avenir pour la régulation financière ?*, (13) :35–46, Septembre 2009.
- [13] A. Buch and G. Dornleitner. Coherent risk measures, coherent capital allocations and the gradient allocation principle. *Insurance : Mathematics and Economics*, 42(1) :235 – 242, 2008.
- [14] A. Buch, G. Dornleitner, and M. Wimmer. Risk capital allocation for rorac optimization. *Journal of Banking & Finance*, 35(11) :3001–3009, August 2011.
- [15] C. Castro and S. Ferrari. Measuring and testing for the systemically important financial institutions. *Journal of Empirical Finance*, 25 :1–14, 2014.
- [16] P. Cénac, S. Loisel, V. Maume-Deschamps, and C. Prieur. Risk indicators with several lines of business : comparison, asymptotic behavior and applications to optimal reserve allocation. *Annales de l'ISUP*, 58(3), 2014.
- [17] P. Cénac, V. Maume-Deschamps, and C. Prieur. Some Multivariate risk indicators : Minimization by using a Kiefer-Wolfowitz approach to the mirror stochastic algorithm. *Statistics and Risk Modeling*, (29) :47–71, 2012.
- [18] S. Decupère. Mémoire actuariaire : Agrégation des risques et allocation de capital sous solvabilité 2. Master's thesis, ENSAE, 2011.

- [19] M. Denault. Coherent allocation of risk capital. *Journal of risk*, 4 :1–34, January 2001.
- [20] J. Dhaene, E.A. Valdez, A. Tsanakas, and S. Vanduffel. Optimal capital allocation principles. *The Journal of Risk and Insurance*, 79(1) :1–28, 2012.
- [21] M. Fréchet. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Annales de l'université de Lyon, Section.A, Series 3.*, (14) :53–77, 1951.
- [22] C. Gauthier, A. Lehar, and M. Souissi. Macroprudential capital requirements and systemic risk. *Bank of Canada*, December 2012.
- [23] T. Gneiting. Making and evaluating point forecasts . *Journal of the American Statistical Association*, 106(494) :746–762, June 2011.
- [24] E. Gondran and R. Lagresle. Mémoire actuariaire : Appétence au risque et allocation de capital à partir de critères de performance sous solvabilité 2. Master's thesis, ENSAE, 2011.
- [25] H. Grund and H. Schmeiser. Capital allocation for insurance companies - what good is it? *The Journal of Risk and Insurance*, 74(2) :301–317, 2007.
- [26] W. Hoeffding. Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin*, (5) :179–233, 1940.
- [27] H. Joe. *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman and Hall, London., 1997.
- [28] J. Kiefer and J. Wolfowitz. Stochastic estimation of the maximum of a regression function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23 :462–466, 1952.
- [29] J. Lelong. A central limit theorem for robbins monro algorithms with projections. Technical report, CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, September 2005.
- [30] G. Löffler and P. Raupach. Robustness and informativeness of systemic risk measures. *Deutsche Bundesbank No 04/2013*.
- [31] G. Mainik and E. Schaanning. On dependence consistency of covar and some other systemic risk measures. *arXiv preprint arXiv :1207.3464*, 2012.
- [32] E. Marceau. *Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat*. Springer, 2013.
- [33] V. Maume-Deschamps. Indicateurs de risque multivariés : minimisation par algorithmes stochastiques. Présentation à l'Université de Bourgogne, 26 mai 2010.
- [34] V. Maume-Deschamps, D. Rullière, and K. Said. On capital allocation by minimizing multivariate risk indicators. November 2014.
- [35] S. C. Myers and J. A. Read. Capital allocation for insurance companies. *Journal of Risk and Insurance*, 68 :545–580, 2001.
- [36] R.B. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer, 2007.
- [37] A. Nemirovski and B. Yudin. Problem complexity and method efficiency in optimisation. *John Wiley and Sons*, 1983.
- [38] D. Oakes. Bivariate survival models induced by frailties. *Journal of the American Statistical Association*, 84(406) :487–493, 1989.
- [39] H. Robbins and S. Monro. *Annals of Mathematical Statistics*.

- [40] M. Shaked and J.G. Shanthikumar. *Stochastic orders*. Springer Series in Statistics, 2007.
- [41] Lloyd S Shapley. A value for n-person games. Technical report, DTIC Document, 1952.
- [42] D. Tasche. Conditional expectation as quantile derivative. Technical report, TU Munchen, Germany, November 2000.
- [43] D. Tasche. Allocating portfolio economic capital to sub-portfolios. In *Economic Capital : A Practitioner Guide*, pages 275–302. Risk Books, 2004.
- [44] D. Tasche. Euler allocation : theory and practice. Technical Report arXiv :0708.2542, Aug 2007.
- [45] D. Tasche. Capital allocation to business units and sub-portfolios : the euler principle. Papers 0708.2542, arXiv.org, 2008.
- [46] C. Tauvel. *Optimisation stochastique à grande échelle*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble, 2008.
- [47] P-E. Thérond and P. Valade. Appétence au risque : intégration au pilotage d'une société d'assurance. *Assurances et gestion des risques*, 78(1-2) :125–144, 2010.
- [48] Shaun S Wang. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *Journal of risk and insurance*, pages 15–36, 2000.
- [49] H-C. Yeh. The frailty and the Archimedean structure of the general multivariate Pareto distributions. *Bulletin Institute of Mathematics Academia Sinica*, 2(3) :713–729, 2007.
- [50] G. Zanjani. An economic approach to capital allocation. *Journal of Risk and Insurance*, 77(3) :523–549, 2010.

A Annexe 1 : Propriétés de cohérence

Dans cette annexe, nous présentons les démonstrations des propriétés de cohérence de l'allocation par minimisation des indicateurs multivariés de risque, annoncées dans la section 3.3.

A.1 Neutralité

Proposition Sous les hypothèses H1 et H3, et pour des fonctions de pénalités 1-homogènes. Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$:

$$A_{c, X_1, \dots, X_d}(u) = (c, A_{X_1, \dots, X_d}(u - c)),$$

où $(c, A_{X_1, \dots, X_d}(u - c))$ est le vecteur composé de la concaténation de la constante c et le vecteur $A_{X_1, \dots, X_d}(u - c)$.

Preuve : La présence d'une distribution discrète parmi les risques fait perdre à l'indicateur I sa différentiabilité, nous nous pouvons donc pas utiliser ni l'expression du gradient, ni la condition d'optimalité du cas de l'existence des fonctions de densités jointes.

On note $(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) = A_{c, X_1, \dots, X_d}(u)$ et $(u_1, \dots, u_d) = A_{X_1, \dots, X_d}(u - c)$.

Le risque agrégé est $S = \sum_{i=1}^d X_i$. g est la fonction de pénalité commune entre les branches $g = g_k, \forall k \in \{1, \dots, d\}$, la fonction g est convexe sur \mathbb{R}^- et vérifie $g(0) = 0$, elle est donc positivement homogène.

Nous distinguons entre trois possibilités :

- *Premier cas : $u^* < c$*

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) &= \inf_{v \in \mathcal{U}_u^{d+1}} I(v) = \inf_{v \in \mathcal{U}_u^{d+1}} \sum_{k=0}^d \mathbb{E} (g(v_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > v_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}) \\ &= \mathbb{E} (g(u^* - c) \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}) + \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(u_k^* - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}), \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$ on choisit par exemple, $\alpha_k = \alpha = \frac{u^* - c}{d} < 0$, et puisque la fonction g est convexe et $g(0) = 0$, elle satisfait pour tout réel $0 < \beta < 1$, $g(\beta x) \leq \beta g(x), \forall x \in \mathbb{R}^-$. On a donc :

$$\begin{aligned} I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) &\geq \mathbb{E} \left(d \cdot g \left(\frac{u^* - c}{d} \right) \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}} \right) + \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(u_k^* - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}) \\ &= \mathbb{E} (d \cdot g(-(-\alpha)_+) \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}) + \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(-(X_k - u_k^*)_+) \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}) \\ &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} ([g(-(X_k - u_k^*)_+) + g(-(-\alpha)_+)] \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}). \end{aligned}$$

La fonction $x \rightarrow g(-(x)_+)$ est aussi 1-homogène et convexe, et par suite :

$$I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) \geq \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(-(X_k - (u_k^* + \alpha_k))_+) \mathbb{1}_{\{S \leq u - c\}}),$$

on remarque que $\sum_{k=1}^d (u_k^* + \alpha_k) = u - c$, alors $(u_1^* + \alpha, \dots, u_d^* + \alpha) \in \mathcal{U}_{u-c}^d$.
De ce que précède,

$$\begin{aligned} I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) &\geq \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g((u_k^* + \alpha_k) - X_k)) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k^* + \alpha_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}} \\ &\geq \inf_{v \in \mathcal{U}_{u-c}^d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(v_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > v_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}) \\ &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(u_k - X_k)^+ \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}) \\ &= I(c, u_1, \dots, u_d), \end{aligned}$$

alors,

$$I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) \geq I(c, u_1, \dots, u_d).$$

Cela est contradictoire avec l'unicité du minimum dans l'ensemble \mathcal{U}_u^{d+1} .

- *Deuxième cas* : $u^* > c$

On a :

$$I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(u_k^* - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}),$$

et,

$$I(c, u_1, \dots, u_d) = \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(u_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}).$$

Soit $\alpha = \frac{u^* - c}{d} > 0$, on remarque que $(u_1^* + \alpha, \dots, u_d^* + \alpha) \in \mathcal{U}_{u-c}^d$, et que la fonction de pénalités g est décroissante sur \mathbb{R}^- car $g''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$ et $g'(0^+) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} I(c, u_1, \dots, u_d) &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(-(X_k - u_k)_+) \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}) \\ &= \inf_{v \in \mathcal{U}_{u-c}^d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(v_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > v_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}) \\ &\leq \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(-(X_k - (u_k^* + \alpha))_+) \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}) \\ &< \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(-(X_k - u_k^*)_+) \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}) \\ &= \sum_{k=1}^d \mathbb{E} (g(u_k^* - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}) = I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*). \end{aligned}$$

Cela est contradictoire avec le fait que $I(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) = \inf_{v \in \mathcal{U}_u^{d+1}} I(v)$.

On déduit que le seul cas possible est le troisième $u^* = c$.

- *Troisième cas* : $u^* = c$

De l'unicité du minimum,

$$\begin{aligned}
 (u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) &= (c, u_1^*, \dots, u_d^*) = \arg \min_{\mathcal{U}_{u-c}^{d+1}} \sum_{k=1}^d \mathbb{E}[g(u_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}] \\
 &= \arg \min_{\mathcal{U}_{u-c}^d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E}[g(u_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u-c\}}] \\
 &= (c, u_1, \dots, u_d).
 \end{aligned}$$

Finalement, nous avons prouvé que

$$(u^*, u_1^*, \dots, u_d^*) = (c, u_1, \dots, u_d).$$

A.2 Monotonie

Proposition : Sous l'hypothèse H2, et pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$, tel que $g_i = g_j = g$:

$$X_i \leq_{st} X_j \Rightarrow u_i \leq u_j.$$

Preuve : Soit (u_1, \dots, u_j) l'allocation optimale $A_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_d}(u)$. Sous l'hypothèse H2, la condition d'optimalité (3.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{E}[g'(u_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'(u_j - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}].$$

Maintenant, si $X_i \leq_{st} X_j$, et puisque, $x \mapsto -g'(-(u_i - x)_+) \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}$ est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ , alors :

$$\mathbb{E}[g'(u_i - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] \leq \mathbb{E}[g'(u_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}].$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}[g'(u_i - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] \leq \mathbb{E}[g'(u_j - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}],$$

et puisque, g' est aussi une fonction croissante et que toutes les distributions sont continues, alors $u_j \geq u_i$.

A.3 Invariance par translation

Proposition : Sous les hypothèses H1, H2 et pour tout vecteur $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, tel que le support de la densité jointe $f(X_k, S)$ contient $[0, u + \sum_{k=1}^d a_k]^2$, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, l'allocation optimale vérifie :

$$A_{X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d}(u) = A_{X_1, \dots, X_d} \left(u + \sum_{k=1}^d a_k \right) - (a_1, \dots, a_d).$$

Preuve : On désigne par (u_1^*, \dots, u_d^*) l'allocation optimale, $A_{X_1 - a_1, \dots, X_d - a_d}(u)$, et par (u_1, \dots, u_d) l'allocation optimale $A_{X_1, \dots, X_d} \left(u + \sum_{k=1}^d a_k \right)$.

Selon la condition d'optimalité, (u_1^*, \dots, u_d^*) est l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système d'équations suivant :

$$\mathbb{E}[g'_i(u_i^* - (X_i - a_i)) \mathbb{1}_{\{X_i - a_i > u_i^*\}} \mathbb{1}_{\{S - a \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'_j(u_j^* - (X_j - a_j)) \mathbb{1}_{\{X_j - a_j > u_j^*\}} \mathbb{1}_{\{S - a \leq u\}}], \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}$$

où $a = \sum_{k=1}^d a_k$. Alors, (u_1^*, \dots, u_d^*) satisfait aussi :

$$\mathbb{E}[g'_i(u_i^* + a_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i^* + a_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u + a\}}] = \mathbb{E}[g'_j(u_j^* + a_j - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j^* + a_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u + a\}}], \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

Et puisque, $(u_1^* + a_1, \dots, u_d^* + a_d) \in \mathcal{U}_{u+a}^d$, et de l'unicité de la solution de la condition d'optimalité (3.1) pour l'allocation $A_{X_1, \dots, X_d}(u + a)$. Nous en déduisons que $u_k^* + a_k = u_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$.

A.4 Homogénéité positive

Proposition : Sous l'hypothèse H1, et pour les fonctions de pénalités g_k , $k \in \{1, \dots, d\}$ 1-homogène, pour toute $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$A_{\alpha X_1, \dots, \alpha X_d}(\alpha u) = \alpha A_{X_1, \dots, X_d}(u).$$

Preuve : Pour des fonctions de pénalités convexe et 1-homogène, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, on a :

$$\begin{aligned} A_{\alpha X_1, \dots, \alpha X_d}(\alpha u) &= \arg \min_{(u_1^*, \dots, u_d^*) \in \mathcal{U}_{\alpha u}^d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E}[g_k(u_k^* - \alpha X_k) \mathbb{1}_{\{\alpha X_k > u_k^*\}} \mathbb{1}_{\{\alpha S \leq \alpha u\}}] \\ &= \arg \min_{(u_1^*, \dots, u_d^*) \in \mathcal{U}_{\alpha u}^d} \sum_{k=1}^d \alpha \mathbb{E}[g_k\left(\frac{u_k^*}{\alpha} - X_k\right) \mathbb{1}_{\{X_k > \frac{u_k^*}{\alpha}\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] \\ &= \arg \min_{(u_1^*, \dots, u_d^*) \in \mathcal{U}_{\alpha u}^d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E}[g_k\left(\frac{u_k^*}{\alpha} - X_k\right) \mathbb{1}_{\{X_k > \frac{u_k^*}{\alpha}\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] \\ &= \alpha \arg \min_{(u_1, \dots, u_d) \in \mathcal{U}_u^d} \sum_{k=1}^d \mathbb{E}[g_k(u_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] \\ &= \alpha A_{X_1, \dots, X_d}(u). \end{aligned}$$

A.5 Robustesse

Proposition : Sous les hypothèses H1 et H2, et si $\forall k \in \{1, \dots, d\}$, $\exists \epsilon_0 > 0$ tel que :

$$\forall \epsilon, |\epsilon| < \epsilon_0, \quad \mathbb{E}[\sup_{v \in [0, u]} |g'_k(v - (1 + \epsilon)X_k)|] < +\infty,$$

alors, si (X_1, \dots, X_d) est un vecteur aléatoire continu, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_{X_1, \dots, (1+\epsilon)X_i, \dots, X_d}(u) = A_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_d}(u).$$

Preuve : Soit (u_1, \dots, u_d) l'allocation optimale par minimisation de l'indicateur I du capital u sur les d risques (X_1, \dots, X_d) :

$$(u_1, \dots, u_d) = A_{X_1, \dots, X_i, \dots, X_d}(u),$$

alors (u_1, \dots, u_d) est l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système d'équations (3.1) :

$$\mathbb{E}[g'_i(u_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'_j(u_j - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}], \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

Pour $\epsilon \in \mathbb{R}$, soit $(u_1^\epsilon, \dots, u_d^\epsilon)$ la composition de l'allocation optimale de u entre les d risques $(X_1, \dots, X_{i-1}, (1+\epsilon)X_i, X_{i+1}, \dots, X_d)$:

$$(u_1^\epsilon, \dots, u_d^\epsilon) = A_{X_1, \dots, X_{i-1}, (1+\epsilon)X_i, X_{i+1}, \dots, X_d}(u),$$

donc $(u_1^\epsilon, \dots, u_d^\epsilon)$ est l'unique solution dans \mathcal{U}_u^d du système d'équations suivant :

$$\mathbb{E}[g'_i(u_i^\epsilon - (1+\epsilon)X_i) \mathbb{1}_{\{(1+\epsilon)X_i > u_i^\epsilon\}} \mathbb{1}_{\{S+\epsilon X_i \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'_i(u_j^\epsilon - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j^\epsilon\}} \mathbb{1}_{\{S+\epsilon X_i \leq u\}}], \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}.$$

L'ensemble \mathcal{U}_u^d est un compact de $(\mathbb{R}^+)^d$, on peut alors considérer une sous-suite convergente $(u_1^{\epsilon_k}, \dots, u_d^{\epsilon_k})$ de $(u_1^\epsilon, \dots, u_d^\epsilon)$.

Les fonctions de pénalités vérifient :

$$\exists \epsilon_0 > 0, \quad \forall \epsilon, |\epsilon| < \epsilon_0, \quad \mathbb{E}[\sup_{v \in [0, u]} |g'_k(v - (1+\epsilon)X_k)|] < +\infty,$$

nous pouvons donc utiliser le théorème de la convergence dominée pour montrer que :

$$\mathbb{E}[g'_i(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_i^{\epsilon_k} - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_i^{\epsilon_k}\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'_i(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_j^{\epsilon_k} - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_j^{\epsilon_k}\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}], \quad \forall j \in \{1, \dots, d\},$$

ainsi $(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_1^{\epsilon_k}, \dots, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_d^{\epsilon_k})$ est la solution de l'équation (3.1), car $\sum_{l=1}^d \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_l^{\epsilon_k} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{l=1}^d u_l^\epsilon = u$, $(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_1^{\epsilon_k}, \dots, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_d^{\epsilon_k}) \in \mathcal{U}_u^d$.

De l'unicité de la solution de 3.1) dans \mathcal{U}_u^d , on déduit que : $\lim_{k \rightarrow \infty} u_i^{\epsilon_k} = u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Pour toute sous-suite convergente de $(u_1^\epsilon, \dots, u_d^\epsilon)$ le point limite est (u_1, \dots, u_d) , on en déduit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u_1^\epsilon, \dots, u_d^\epsilon) = (u_1, \dots, u_d).$$

A.6 Sous-additivité

Preuve du Lemme 3.3.7 : Dans l'objectif de simplifier la notation, nous supposons sans perdre la généralité qu $i = d - 1$ et $j = d$. On note, $(u_1, \dots, u_{d-1}, u_d) = A_{X_1, \dots, X_d}(u)$ et $(u_1^*, \dots, u_{d-2}^*, u_{d-1}^*) = A_{X_1, \dots, X_{d-2}, X_{d-1}+X_d}(u)$.

La condition d'optimalité pour $(u_1, \dots, u_{d-1}, u_d)$ est donnée $\forall (i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$ par l'équation :

$$\mathbb{E}[g'_i(u_i - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'_i(u_j - X_j) \mathbb{1}_{\{X_j > u_j\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \lambda,$$

et pour $(u_1^*, \dots, u_{d-2}^*, u_{d-1}^*)$ par $\forall i \in \{1, \dots, d-2\}$

$$\mathbb{E}[g'_i(u_i^* - X_i) \mathbb{1}_{\{X_i > u_i^*\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \mathbb{E}[g'_i(u_{d-1}^* - (X_{d-1} + X_d)) \mathbb{1}_{\{X_d + X_{d-1} > u_{d-1}^*\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \lambda^*.$$

Maintenant, on suppose que $u_{d-1}^* > u_d + u_{d-1}$. Dans ce cas, il existe $k \in \{1, \dots, d-2\}$ tel que $u_k^* < u_k$, et puisque la fonction $x \rightarrow g'(-(x)_+)$ est décroissante sur \mathbb{R}^+ , alors :

$$\mathbb{E}[g'_i(u_k - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \lambda < \mathbb{E}[g'_i(u_k^* - X_k) \mathbb{1}_{\{X_k > u_k^*\}} \mathbb{1}_{\{S \leq u\}}] = \lambda^*,$$

de cela, on déduit que pour tout $k \in 1, \dots, d-2$, $u_k^* < u_k$.

La preuve est la même si on suppose que $u_{d-1}^* < u_d + u_{d-1}$. Le cas additif est un corollaire des deux précédents cas.

A.7 Additivité comonotone

Proposition : Sous l'hypothèse H2, et pour $g_k(x) = |x|$, pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, si $r \leq d$ risques $X_{i \in CR}$ sont comonotones, alors :

$$A_{X_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus CR}, \sum_{k \in CR} X_k}(u) = (u_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus CR}, \sum_{k \in CR} u_k),$$

où $(u_1, \dots, u_d) = A_{X_1, \dots, X_d}(u)$ est l'allocation optimale du capital u sur les d risques (X_1, \dots, X_d) , et $A_{X_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus CR}, \sum_{k \in CR} X_k}(u)$ est l'allocation optimale du capital u sur les $n - d + 1$ risques $(X_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus CR}, \sum_{k \in CR} X_k)$, et CR désigne l'ensemble des indices des r risques comonotones.

Preuve : Soit $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$. Si X_i et X_j sont des variables aléatoires comonotones, alors elle existe une fonction croissante non négative h , telle que $X_i = h(X_j)$. On remarque que cette fonction h est strictement croissante sous l'hypothèse H2. Soit f la fonction $x \rightarrow f(x) = x + h(x)$, alors $X_i + X_j = f(X_j)$.

On note $(u_1, \dots, u_d) = A_{X_1, \dots, X_d}(u)$ et $(u_1^*, \dots, u_{d-1}^*) = A_{X_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}, X_i + X_j}}(u)$, donc, $A_{X_{i \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}, X_i + X_j}}(u) \cdot e_{d-1} = u_{d-1}^*$ et $A_{X_1, \dots, X_d}(u) \cdot (e_i + e_j) = u_i + u_j$.

On déduit de la condition d'optimalité pour l'allocation $A_{X_1, \dots, X_d}(u)$, donnée par l'équation 3.2 :

$$\mathbb{P}(X_i \geq u_i, S \leq u) = \mathbb{P}(X_j \geq u_j, S \leq u),$$

que $u_i = h(u_j)$ et $u_i + u_j = f(u_j)$.

Si il existe $k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}$, tel que $u_k^* < u_k$, alors $\forall k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}$:

$$\mathbb{P}(X_k \geq u_k^*, S \leq u) > \mathbb{P}(X_k \geq u_k, S \leq u),$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i + X_j \geq u_{d-1}^*, S \leq u) &= \mathbb{P}(X_j \geq f^{-1}(u_{d-1}^*), S \leq u) \\ &= \mathbb{P}(X_k \geq u_k^*, S \leq u) \\ &> \mathbb{P}(X_k \geq u_k, S \leq u) \\ &= \mathbb{P}(X_j \geq u_j, S \leq u), \end{aligned}$$

finalemt, on déduit que $f^{-1}(u_{d-1}^*) < u_j$, et de cela que $u_{d-1}^* < f(u_j) = u_i + u_j$ et, $\sum_{k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}} u_k^* < \sum_{k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}} u_k$ qui est totalement absurde.

Le cas $u_k < u_k^*$ pour $k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}$ est traité de la même façon, il engendre une contradiction.

En utilisant le lemme (3.3.7), et sous l'hypothèse H3, on déduit la composition de l'allocation optimale pour les autres risques X_k , $k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i, j\}$.

L'additivité démontrée pour deux risques comonotones est trivialement généralisable pour plusieurs risques comonotones.

B Annexe 2 : Modèle sous-exponentiel

B.1 Preuve du théorème 3.2.

On suppose que, $\exists i \in \{1, \dots, d\}$ tel que : $\frac{u_i}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 1$ où $\frac{u_i}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$, le premier cas implique que pour tout $j \neq i$, $\frac{u_j}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$, donc, il suffit de prouver que l'existence d'un $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\frac{u_i}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ est impossible.

On suppose l'existence d'un $i \in \{1, \dots, d\}$, tel que : $\frac{u_i}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$.

Alors, $\exists j \in \{1, \dots, d\} \setminus i$ tel que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u_j}{u} \in]0, 1]$, ainsi, $u_j \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} +\infty$ et $u_i \stackrel{u \rightarrow +\infty}{=} o(u_j)$.

En utilisant les hypothèses (1) et (2) du théorème, on déduit que :

$$\frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0. \quad (\text{B.1})$$

La condition d'optimalité ((3.2)) peut s'écrire pour tout $j \neq i$ comme suit :

$$\bar{F}_{X_i}(u_i) - \mathbb{P}(X_i > u_i, S > u) = \bar{F}_{X_j}(u_j) - \mathbb{P}(X_i > u_j, S > u). \quad (\text{B.2})$$

Cela mène à une contradiction si u_i est bornée.

Maintenant, on suppose que $u_i \rightarrow +\infty$. On rappelle que $S^{-i} = \sum_{k=1, k \neq i}^{k=d} X_k$, alors :

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S > u) = \mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} > \sqrt{u}, S > u) + \mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} < \sqrt{u}, S > u).$$

On a :

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} > \sqrt{u}, S > u) \leq \mathbb{P}(X_i > u_i) \mathbb{P}(S^{-i} > \sqrt{u}) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{=} o(\bar{F}_{X_i}(u_i)).$$

En utilisant l'hypothèse (2) et puisque $u_i = o(u)$,

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} < \sqrt{u}, S > u) \leq \bar{F}_{X_i}(u - \sqrt{u}) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{=} o(\bar{F}_{X_i}(u_i)).$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S > u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{=} o(\bar{F}_{X_i}(u_i)). \quad (\text{B.3})$$

On remarque aussi que :

$$\mathbb{P}(X_j > u_j, S > u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{=} O(\bar{F}_{X_j}(u_j)) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{=} o(\bar{F}_{X_i}(u_i)). \quad (\text{B.4})$$

L'équation (B.2) implique :

$$1 - \underbrace{\frac{\mathbb{P}(X_i > u_i, S > u)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)}}_{T_1} = \underbrace{\frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)}}_{T_2} - \underbrace{\frac{\mathbb{P}(X_j > u_j, S > u)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)}}_{T_3}.$$

Finalement, les relations (B.3), (B.1), et (B.4), justifient que les trois termes T_1 , T_2 , et T_3 , tendent vers zéro. Il s'agit alors d'une contradiction.

Ainsi, nous avons prouvé le théorème 3.2.

B.2 Preuve de la proposition 3.3

Nous utilisons la même méthodologie de la preuve du théorème 3.2.

On prend $0 < \gamma < 1 - \kappa_2$,

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S > u) = \mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} > \gamma u, S > u) + \mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} > \gamma u, S > u).$$

Comme précédemment,

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} > \gamma u, S > u) \leq \mathbb{P}(X_i > u_i) \mathbb{P}(S^{-i} > \gamma u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\equiv} o(\bar{F}_{X_i}(u_i)).$$

D'un autre coté,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i > u_i, S^{-i} > \gamma u, S > u) &\leq \mathbb{P}(X_i > u - \gamma u) \\ &= \bar{F}_{X_i}((1 - \gamma)u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\equiv} o(\bar{F}_{X_i}(u_i)) \\ &\text{because } 0 < \frac{\kappa_1}{1 - \gamma} \leq \frac{u_i}{(1 - \gamma)u} \leq \frac{\kappa_2}{1 - \gamma} < 1. \end{aligned}$$

Alors, $\mathbb{P}(X_i > u_i, S > u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\equiv} o(\bar{F}_{X_i}(u_i))$ le même calcul nous donne $\mathbb{P}(X_j > u_j, S > u) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\equiv} o(\bar{F}_{X_j}(u_j))$. Maintenant, u_i et u_j vérifient l'équation (1) ainsi,

$$1 + o(1) \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\equiv} \frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)} + o(1) \frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)}.$$

Cela implique que $\frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)}$ est bornée supérieurement, par conséquence

$$\frac{\bar{F}_{X_j}(u_j)}{\bar{F}_{X_i}(u_i)} \stackrel{u \rightarrow +\infty}{\equiv} 1 + o(1).$$

C Annexe 3 : Modèles de dépendance

Nous présentons dans cette annexe les preuves de la détermination des allocations optimales par minimisation de l'indicateur I dans le cas des modèles avec copules traités dans la section (3.6.3).

C.1 Modèle FGM

On considère deux risques de distributions marginales exponentielles $X_i \sim \exp(\beta_i)$ et de structure de dépendance EFGM de paramètre $-1 \leq \theta \leq 1$, donc :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2}) + \theta(1 - e^{-\beta_1 x_1})(1 - e^{-\beta_2 x_2})e^{-\beta_1 x_1}e^{-\beta_2 x_2}$$

Il s'agit d'une copule bivariee de coefficient de corrélation de Pearson : $\rho_P = \frac{\theta}{4}$. Sa fonction de densité est :

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= (1 + \theta)\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} + 2\theta\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2} \\ &\quad - \theta 2\beta_1 e^{-2\beta_1 x_1} \beta_2 e^{-\beta_2 x_2} - \theta\beta_1 e^{-\beta_1 x_1} 2\beta_2 e^{-2\beta_2 x_2} \end{aligned}$$

Notons $f(x, t, a, b) = abe^{-(a-b)x}e^{-bt}$, la densité jointe peut donc s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x, t - x) &= (1 + \theta)f(x, t, \beta_1, \beta_2) + \theta f(x, t, 2\beta_1, 2\beta_2) \\ &\quad - \theta f(x, t, 2\beta_1, \beta_2) - \theta f(x, t, \beta_1, 2\beta_2) \end{aligned}$$

Et puisque, pour tout $s \geq x_1$: $f_{X_1, S=X_1+X_2}(x_1, s) = f_{X_1, X_2}(x_1, s - x_1)\mathbb{1}_{\{s \geq x_1\}}$, alors :

$$\begin{aligned} F_{X_1, S}(x_1, s) &= \int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1, X_2}(x, t - x)\mathbb{1}_{\{t \geq x\}} dx dt \\ &= \int_0^{x_1} \int_x^s f_{X_1, X_2}(x, t - x) dt dx \end{aligned}$$

On suppose que $\beta_1 < \beta_2/2$, il suffit de calculer l'intégrale précédente pour obtenir une expression explicite de $F_{X_1, S}(x_1, s)$:

$$\begin{aligned} F_{X_1, S}(x, s) &= (1 + \theta)F(x_1, s, \beta_1, \beta_2) + \theta F(x_1, s, 2\beta_1, 2\beta_2) \\ &\quad - \theta F(x_1, s, 2\beta_1, \beta_2) - \theta F(x_1, s, \beta_1, 2\beta_2) \end{aligned}$$

Avec,

$$\begin{aligned} F(x_1, s, a, b) &= \int_0^{x_1} \int_x^s f(x, t, a, b) dt dx = \int_0^{x_1} \int_x^s abe^{-(a-b)x}e^{-bt} dt dx \\ &= 1 - e^{-ax_1} + \frac{a}{b-a}e^{-bs} - \frac{a}{b-a}e^{-bs+(b-a)x_1} \end{aligned}$$

De la même façon et par symétrie du modèle EFGM, on obtient :

$$\begin{aligned} F_{X_2, S}(x_2, s) &= (1 + \theta)F(x_2, s, \beta_2, \beta_1) + \theta F(x_2, s, 2\beta_2, 2\beta_1) \\ &\quad - \theta F(x_2, s, 2\beta_2, \beta_1) - \theta F(x_2, s, \beta_2, 2\beta_1) \end{aligned}$$

Et puisque pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$

$$\mathbb{P}(X_i > u_i, S \leq u) = \mathbb{P}(S \leq u) - \mathbb{P}(X_i \leq u_i, S \leq u)$$

Alors l'allocation optimale par minimisation de la *zone orange* de risque est l'unique solution dans \mathcal{U}_u^2 de l'équation :

$$F_{X_1,S}(u_1, u) = F_{X_2,S}(u_2, u)$$

On reprend les notations de l'article [16] : h la fonction $h(x) = \exp(-\beta_1 ux)$, $\alpha = \beta_2/\beta_1$ et $u_1 = \beta u$.

Alors,

$$\begin{aligned} F_{X_1,S}(\beta u, u) &= 1 + 4\theta - (1 + 2\theta)h(\beta) - 2\theta h(2\beta) \\ &+ (1 + \theta)\frac{1}{\alpha - 1}[h(\alpha) - h(\alpha + \beta - \alpha\beta)] + \theta\frac{1}{\alpha - 1}[h(2\alpha) - h(2\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta)] \\ &- \theta\frac{2}{\alpha - 2}[h(\alpha) - h(\alpha + 2\beta - \alpha\beta)] - \theta\frac{1}{2\alpha - 1}[h(2\alpha) - h(2\alpha + \beta - 2\alpha\beta)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{X_2,S}((1 - \beta)u, u) &= 1 + 4\theta - (1 + 2\theta)h(\alpha(1 - \beta)) - 2\theta h(2\alpha(1 - \beta)) \\ &+ (1 + \theta)\frac{\alpha}{1 - \alpha}[h(1) - h(\alpha + \beta - \alpha\beta)] + \theta\frac{\alpha}{1 - \alpha}[h(2) - h(2\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta)] \\ &- \theta\frac{2\alpha}{1 - 2\alpha}[h(1) - h(2\alpha + \beta - 2\alpha\beta)] - \theta\frac{\alpha}{2 - \alpha}[h(2) - h(\alpha + 2\beta - \alpha\beta)] \end{aligned}$$

L'allocation optimale est donc déterminée par β solution de l'équation :

$$F_{X_1,S}(\beta u, u) = F_{X_2,S}((1 - \beta)u, u)$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &(1 + 2\theta)(h(\beta) - h(\alpha - \alpha\beta)) + 2\theta(h(2\beta) - h(2\alpha - 2\alpha\beta)) \\ &+ (1 + \theta)h(\alpha + \beta - \alpha\beta) + \theta h(2\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta) - \theta h(\alpha + 2\beta - \alpha\beta) - \theta h(2\alpha + \beta - 2\alpha\beta) \\ &= \frac{1 + \theta}{\alpha - 1}(h(\alpha) + \alpha h(1)) + \frac{\theta}{\alpha - 1}(h(2\alpha) + \alpha h(2)) - \frac{\theta}{\alpha - 2}(2h(\alpha) + \alpha h(2)) - \frac{\theta}{2\alpha - 1}(h(2\alpha) + 2\alpha h(1)) \end{aligned}$$

C.2 Modèle Marshall-Olkin

La fonction de distribution jointe dans le cas du modèle Marshall-Olkin bivarié est :

$$\begin{aligned} F_{X_1,S}(x_1, s) &= \int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}(x, t - x) \mathbb{1}_{\{t > x\}} dx dt \\ &= \int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t - x) \mathbb{1}_{\{2x > t > x\}} dx dt + \int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^2(x, t - x) \mathbb{1}_{\{t > 2x\}} dx dt \\ &+ \int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^0(x, t - x) \mathbb{1}_{\{t = 2x\}} dx dt. \end{aligned}$$

On distingue entre deux cas :

Premier cas $s > 2x_1$: dans ce cas,

$$\begin{aligned}
 \int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t-x) \mathbb{1}_{\{2x > t > x\}} dx dt &= \int_{2x_1}^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t-x) \mathbb{1}_{\{2x > t > x\}} dx dt \\
 &+ \int_0^{2x_1} \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t-x) \mathbb{1}_{\{2x > t > x\}} dx dt \\
 &= \int_0^{2x_1} \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t-x) \mathbb{1}_{\{2x > t > x\}} dx dt \\
 &= \int_0^{2x_1} \int_{t/2}^{\min(x_1, t)} f_{X_1,S}^1(x, t-x) dx dt \\
 &= \int_0^{x_1} \int_{t/2}^t f_{X_1,S}^1(x, t-x) dx dt + \int_{x_1}^{2x_1} \int_{t/2}^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t-x) dx dt,
 \end{aligned}$$

et,

$$\int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^2(x, t-x) \mathbb{1}_{\{t > 2x\}} dx dt = \int_0^{x_1} \int_0^s f_{X_1,S}^2(x, t-x) \mathbb{1}_{\{t > 2x\}} dt dx = \int_0^{x_1} \int_{2x}^s f_{X_1,S}^2(x, t-x) dt dx,$$

aussi,

$$\int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^0(x, t-x) \mathbb{1}_{\{t=2x\}} dx dt = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)x_1}),$$

de cela, on déduit l'expression explicite de $F_{X_1,S}(x_1, s)$:

$$\begin{aligned}
 F_{X_1,S}(x_1, s) &= \frac{2\beta_1\lambda_2}{(\beta_1 - \lambda_2)(\beta_1 + \lambda_2)} (1 - e^{-(\beta_1 + \lambda_2)x_1}) - \frac{\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_2} (1 - e^{-\beta_1 x_1}) - \frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2} (e^{-\beta_1 x_1} - e^{-(\beta_1 + \lambda_2)x_1}) \\
 &+ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \beta_2} (1 - e^{-(\lambda_1 + \beta_2)x_1}) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2} e^{-\beta_2 s} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2} e^{-(\lambda_1 - \beta_2)x_1 - \beta_2 s} \\
 &+ \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)x_1}).
 \end{aligned}$$

Deuxième cas $2x_1 > s > x_1$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t-x) \mathbb{1}_{\{2x > t > x\}} dx dt &= \int_0^s \int_{t/2}^{\min(x_1, t)} f_{X_1,S}^1(x, t-x) dx dt \\
 &= \int_0^{x_1} \int_{t/2}^t f_{X_1,S}^1(x, t-x) dx dt + \int_{x_1}^s \int_{t/2}^{x_1} f_{X_1,S}^1(x, t-x) dx dt,
 \end{aligned}$$

et,

$$\int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^2(x, t-x) \mathbb{1}_{\{t > 2x\}} dx dt = \int_0^s \int_0^{t/2} f_{X_1,S}^2(x, t-x) dx dt,$$

aussi,

$$\int_0^s \int_0^{x_1} f_{X_1,S}^0(x, t-x) \mathbb{1}_{\{t=2x\}} dx dt = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} (1 - e^{-(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)s/2}),$$

ainsi, on déduit dans ce deuxième cas aussi, l'expression explicite de $F_{X_1,S}(x_1, s)$:

$$\begin{aligned} F_{X_1,S}(x_1, s) &= \frac{2\beta_1\lambda_2}{(\beta_1 - \lambda_2)(\beta_1 + \lambda_2)}(1 - e^{-(\beta_1+\lambda_2)s/2}) - \frac{\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_2}(1 - e^{-\beta_1 x_1}) \\ &\quad - \frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2}(e^{-\beta_1 x_1} - e^{-(\beta_1-\lambda_2)x_1-\lambda_2 s}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2}(1 - e^{-\beta_2 s}) \\ &\quad - \frac{2\lambda_1\beta_2}{(\lambda_1 - \beta_2)(\lambda_1 + \beta_2)}(1 - e^{-(\lambda_1+\beta_2)s/2}) + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}(1 - e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)s/2}). \end{aligned}$$

On remarque que $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \beta_2 = \lambda_2 + \beta_1$, et on suppose sans perte de la généralité que $\lambda_1 < \lambda_2$. En utilisant la propriété de la monotonie vérifiée par l'allocation, on déduit que $1 > \beta > 1/2$, alors $2\beta u > u > \beta u$. Donc, pour $u_1 = \beta u$, et $g(x) = \exp(-xu)$:

$$F_{X_1,S}(\beta u, u) = 1 - g(\beta_1\beta) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2}g(\beta_2) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2}g((\beta_1 - \lambda_2)\beta + \lambda_2) + g(\lambda_s/2)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2} - \frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2}\right],$$

et,

$$F_{X_2,S}((1 - \beta)u, u) = 1 - g(\beta_2(1 - \beta)) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \beta_1}[g((\lambda_2 - \beta_1)(1 - \beta) + \beta_1) - g(\beta_1)].$$

Cela est suffisant pour trouver l'équation recherchée :

$$\begin{aligned} g(\beta_2(1 - \beta)) - g(\beta_1\beta) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2}g((\beta_1 - \lambda_2)\beta + \lambda_2) + \frac{\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_2}g((\lambda_2 - \beta_1)(1 - \beta) + \beta_1) \\ - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2}g(\beta_2) = \frac{\lambda_2}{\beta_1 - \lambda_2}g(\beta_1) + g(\lambda_s/2)\left[\frac{\beta_1}{\beta_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \beta_2}\right]. \end{aligned}$$