**Master Actuariat de Dauphine**

# Mémoire présenté devant l'Université Paris Dauphine
# pour l'obtention du diplôme du Master Actuariat
# et l'admission à l'Institut des Actuaires

**le ___________________________**

Par : M[elle] Garance GENOUX

Titre: Evaluation et tarification du risque porté par l'assureur *leader* dans le cadre de programmes internationaux d'assurance collective (mécanisme de *Pooling*)

Confidentialité : ☑ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membre présent du jury de l'Institut des Actuaires :*

*Signature :*

*Entreprise :*
AXA France – AXA Entreprises – International Employee Benefits

*Signature :*

*Directeur de mémoire en entreprise :*

*Nom :* M. Fabien DURET

*Signature :*

*Membres présents du jury du Master Actuariat de Dauphine :*

***Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels*** *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

*Signature du responsable entreprise :*

*Secrétariat :*

*Bibliothèque :*

*Signature du candidat :*

**Université Paris-Dauphine,** Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 PARIS Cedex 16

# **Résumé**

Mots clés : *pooling* international, assurance collective, réassureur, clause de participation aux bénéfices internationale

Le *pooling* international est un montage financier destiné à mutualiser les résultats des contrats collectifs des filiales d'une multinationale. Cet outil délivrant une clause de participation aux bénéfices internationale, c'est l'un des plus efficaces pour optimiser les coûts de l'assurance collective. Il permet de profiter à la fois d'économies d'échelle tout en conservant les services sur mesure de prestataires locaux.

Chaque *pool* établi pour une multinationale cliente présente des risques qui lui sont propres (couverture par pays et par garantie, répartition des salariés par pays et par garantie, formule de *pooling* choisie…). Ces risques sont portés par l'assureur *leader* en tant que réassureur des assureurs membres du réseau auprès desquels chaque filiale souscrit localement à un contrat d'assurance collective pour ses salariés.

Le but de cette étude est de construire un outil capable de simuler l'activité de tout *pool* par la méthode de Monte-Carlo afin d'évaluer et de tarifer le risque porté par l'assureur *leader* au sein d'un *pool*.

Le modèle qui est construit ici inclut les garanties Santé, Décès et Arrêt de travail et traite des formules de *pooling* (ou type de protection de compte) *Annual Stop Loss*, *Loss Carry Forward Write-Off* et *Loss Carry Forward Rolling*.

# Abstract

Key words : international pooling, group insurance, reinsurer, international profit sharing clause

International pooling is a financial package that offers solutions to international companies to enable them to pool their insurance and employee benefit schemes. Because it leads to an international profit sharing clause, this instrument is one of the ultimate leveraging to optimize the group insurance costs. It combines the buying power of large organizations with the customized services of local service providers.

Each pool set up for a specific costumer shows specific risks depending on coverage type by country, employee distribution by covered risk and by country, pooling system… These risks are taken by the lead insurer. The lead insurer is the reinsurer of all other insurers to whom the costumer's subsidiaries subscribe to local group insurance contracts.

The objective of this study is to create a tool able to simulate the activity of any pool with the Monte-Carlo method in order to evaluate and price the risks' exposure of the lead insurer within a pool.

The model built in this paper includes Medical, Life and Disability. It deals with three following pooling systems (or account protection types) : Annual Stop Loss, Loss Carry Forward Write-Off and Loss Carry Forward Rolling.

# Note de synthèse

Le *pooling* international est destiné aux entreprises multinationales qui souhaitent amplifier les avantages de l'assurance collective et assurer un pilotage central de leur politique de protection sociale afin d'inclure leurs filiales étrangères dans un schéma international et harmonisé. Ce type de programme international est signé entre une entreprise transnationale et un réseau d'assureurs chargé de coordonner à travers le monde les régimes sociaux d'entreprises.

Chaque filiale souscrit localement à un contrat d'assurance collective auprès d'un assureur partenaire présent dans le pays où elle exerce ses activités, afin de protéger ses salariés en Santé, Décès et/ou Arrêt de travail. En fin d'année, les résultats des contrats d'assurance locaux sont transférés à l'assureur *leader* qui se charge de la consolidation de ces résultats. Les assureurs locaux sont dans un contrat de réassurance de type quote-part 100 % avec l'assureur *leader*, ce qui signifie que toutes les primes sont reversées à ce dernier (hors chargements locaux) et que tous les sinistres sont à sa charge. Les risques font l'objet d'une double mutualisation : mutualisation inter-garanties et mutualisation inter-pays.

En réassurance quote-part classique, sauf clause particulière, le réassureur conserve les bénéfices les années où la sinistralité est favorable pour faire face aux années où la sinistralité est importante. Le *pooling* prévoit, lui, le versement des bénéfices à la maison-mère sous la forme de dividende, via la clause de participation aux bénéfices internationale. Cette clause engendre une forte asymétrie pour l'assureur *leader* qui se rémunère alors via une prime de risque (qui s'apparente à une prime de réassurance) en contrepartie.

Cette asymétrie est plus ou moins marquée en fonction du type de protection de compte mis en place dans le *pool*. En effet, la redistribution du résultat international annuel est propre à chaque formule de *pooling* (ou type de protection de compte). On s'intéresse à trois formules dans cette étude : l'*Annual Stop Loss*, le *Loss Carry Forward Write-Off* et le *Loss Carry Forward Rolling*. Leur mécanisme est décrit plus loin.

Chaque *pool* établi pour une multinationale cliente engendre des risques qui lui sont propres. Ces risques sont liés aux éléments suivants : le type de protection de compte choisi, la sinistralité attendue pour chaque garantie couverte dans chaque pays où les filiales sont implantées et le nombre de salariés couvert par garantie et par pays.

Le but de cette étude est de construire un outil capable d'évaluer le risque porté par l'assureur *leader* quel que soit le *pool* afin de tarifer la prime de risque. On s'intéresse à la moyenne et à la volatilité du résultat de l'assureur *leader*, à la probabilité qu'il doive assumer une perte ainsi qu'au montant moyen et à la volatilité de cette perte.

On aurait pu opter pour une méthode déterministe (c'est-à-dire utiliser les observations de sinistralité à disposition), mais cette méthode est trop restrictive, les risques pris dans un pool pouvant être très volatils. De plus, le but est de pouvoir automatiser les calculs de prime de risque pour répondre à des appels d'offre, c'est-à-dire de pouvoir évaluer le risque pris par l'assureur *leader* quels que soient les paramètres qui sont propres au *pool*. On se tourne donc vers une méthode stochastique, qui prend en compte la part d'aléas dans la survenance d'un sinistre et dans le coût qu'il engendre. Un outil fondé sur la méthode de Monte-Carlo (implémenté sous R) est construit afin de simuler un grand nombre de fois l'activité d'un *pool* et en déduire des évaluations des variables recherchées.

### Première étape : Simulation du compte de résultat international

Dans un premier temps, on s'intéresse à la modélisation du résultat international, c'est-à-dire à la modélisation de la sinistralité par pays pour chaque garantie puisque les autres composantes du bilan international sont considérées comme déterministes dans le modèle (primes, chargements locaux et chargements internationaux).

Un réseau tel MAXIS GBN peut couvrir un client dans une centaine de pays et se développe activement dans une quarantaine de pays. Etant donné le temps imparti, il a été décidé que, pour chaque garantie, une même famille de lois serait utilisée d'un pays à l'autre. En revanche, les paramètres de chaque loi sont différenciés en fonction de la sinistralité attendue dans chaque pays.

Après étude, voici les familles de lois qui sont utilisées dans le modèle pour simuler la sinistralité engendrée par la couverture des trois garanties qui sont intégrées à l'outil d'évaluation (Santé, Décès et Arrêt de travail).

- **La garantie Santé**

La couverture Santé fournie par les assurances collectives garantit aux salariés une prise en charge de leurs dépenses de santé qui vient en complément des remboursements assurés par le régime de base en place dans chaque pays. La sinistralité associée est prévisible et des tests effectués sur un échantillon fourni par l'Organisation Mondiale de la Santé ont conduit à modéliser la sinistralité en Santé par une gaussienne.

- **La garantie Décès**

La couverture Décès est destinée à pallier le manque soudain de revenu pour le foyer d'un salarié lorsque celui-ci vient à décéder. Elle prévoit le versement d'un capital ou d'une rente en cas de décès de l'assuré.

La sinistralité associée à cette garantie est très volatile. La fréquence de ce type de sinistres est faible (1 à 2 décès par an pour 1 000 salariés), mais le coût varie beaucoup en fonction du salaire de l'individu au moment de son décès. Ainsi, on se place dans une approche fréquence-coût qui est adaptée à la typologie de la sinistralité Décès.

Afin de trouver les lois les plus aptes à représenter la fréquence et le coût de cette garantie, on simule une population de type européen en utilisant des hypothèses de répartition sur le sexe, l'âge, la catégorie professionnelle, le salaire et la situation familiale. Puis, en appliquant la table de mortalité française on obtient le nombre annuel de décès pour chaque entreprise simulée et en appliquant les règles de calculs du capital versé en cas de décès, on obtient le capital sous risque pour chaque salarié faisant partie de chaque entreprise simulée.

Les résultats obtenus sur cette population fictive de type européen conduisent à simuler le nombre de décès par une binomiale négative et le coût d'un sinistre décès par une loi Gamma.

- **La garantie Arrêt de travail**

La couverture Arrêt de travail est destinée à pallier le manque soudain de revenu d'un salarié qui tombe en incapacité puis en invalidité de travail.

Pour la modélisation de la sinistralité Arrêt de travail qui est complexe, on se sert de l'étude réalisée par Vincent LAUDOU et Paul UNFRIED dans leur mémoire d'Actuariat « Modélisation et valorisation d'une clause de participation aux bénéfices pour les contrats Prévoyance Salarié » (2009). Cette étude consiste à se placer dans une approche de ratio Charge de sinistralité / Cotisations. Le principe est de se rapporter à un « contrat de référence » qui fait l'objet d'une étude poussée en amont. Pour chaque pays, le modèle prévoit la simulation de la sinistralité Arrêt de travail comme une fonction linéaire d'une loi log-normale, où les paramètres d'ajustement sont calculés par rapport au contrat de référence.

En résumé, les familles de lois utilisées dans le modèle pour simuler la sinistralité relative aux trois garanties sont les suivantes :

| **Garantie** | **Santé** | **Décès** | **Arrêt de travail** |
|---|---|---|---|
| Famille de lois | Normale | - Nombre annuel de décès : binomiale négative<br>- Coût : Gamma | Fonction linéaire d'une loi log-normale |

La simulation de la sinistralité par pays et par garantie suffit à simuler le résultat international annuel. Les primes, chargements locaux et chargements internationaux sont supposés déterministes dans le modèle. Pour chaque année observée, 10 000 simulations sont réalisées.

Afin d'illustrer le mode de fonctionnement du *pooling*, on utilise l'exemple d'une transnationale appelée Multi tout au long de cette note de synthèse.

<u>Exemple de Multi :</u> On suppose qu'une entreprise transnationale française portant le nom de Multi est implantée en France, au Danemark et aux Etats-Unis. Elle souscrit à un contrat de *pooling* auprès du réseau international d'assureurs MAXIS GBN. On suppose de plus que les filiales danoise et américaine ont souscrit à un contrat Santé pour leurs salariés, tandis que la maison-mère française couvre ses collaborateurs en Santé, Décès et Arrêt de travail.

Le compte de résultat international simplifié s'établit comme suit :

| Multinationale | Multi | | | |
|---|---|---|---|---|
| Monnaie | EUR | | | |
| Pays | France | Danemark | Etats-Unis | Résultat consolidé |
| 1. Primes | 581 000 | 39 000 | 780 450 | 1 400 450 |
| 2. Sinistres | - 417 996 | - 40 000 | - 697 100 | -1 155 096 |
| 3. Chargements locaux | - 87 150 | - 5 850 | - 117 068 | - 210 068 |
| 4. Solde local (1+2+3) | 75 854 | - 6 850 | - 33 718 | 35 287 |
| 5. Chargements internationaux | | | | - 28 009 |
| Résultat international (4+5) | | | | 7 278 |

<u>Remarque :</u> les chargements internationaux présentés ici ne sont pas à confondre avec la prime de risque. Il s'agit des chargements prélevés pour les frais administratifs et les frais de gestion, et non pas d'une prime technique. Par hypothèse, ils représentent 2 %  de la prime commerciale globale.

Une fois obtenu le résultat international, on simule sa répartition en fonction des différents types de protection de compte. Les règles propres à chaque formule de *pooling* sont décrites et illustrées ci-dessous.

### Deuxième étape : Répartition du résultat international en fonction des formules de *pooling*

- **L'*Annual Stop Loss* ou Annulation Annuelle de perte**

Un compte international est établi tous les ans.

Si le compte international annuel est créditeur, le solde est versé au client multinational. S'il est débiteur, les pertes sont supportées en totalité par l'assureur *leader*. Aucun report de perte n'est effectué sur l'année suivante.

Exemple :

| **Annual Stop Loss** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Multinationale** | **Multi** | | | | | |
| **Monnaie** | **EUR** | | | | | |
| **Année N** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | - 10 000 | 25 000 |
| **Dividende versé à la maison-mère 31/12/N** | 80 000 | 0 | 10 000 | 30 000 | 0 | 25 000 |
| **Résultat Assureur leader 31/12/N** | 0 | - 90 000 | 0 | 0 | - 10 000 | 0 |

- **Le *Loss Carry Forward m Years Write-Off* ou Report de Pertes à Nouveau sur m Années sur Période Bloquée**

Un compte international est établi tous les ans. On travaille sur une période bloquée de m années.

Cette formule de *pooling* prévoit l'existence d'une réserve, appelée « fonds de contingence », qui est créditée (dans la limite d'un certain plafond) les années où le compte international est positif, et débitée les années de perte.

Si le solde international annuel est négatif, il est effacé par prélèvement sur le fonds de contingence. Si le fonds ne permet pas d'effacer la perte complètement, le surplus de perte est reporté à l'année suivante.

En cas de solde international positif et après effacement des pertes passées éventuelles, $\alpha$ % de ce solde alimente le fonds de contingence, à condition que le plafond de ce dernier ne soit pas dépassé, et (1-$\alpha$ ) % du solde est versé à la maison-mère.

En fin de cycle, c'est-à-dire la m$^{\text{ième}}$ année, s'il existe un report de perte, celle-ci est assumée par l'assureur *leader*. Si, au contraire, le fonds de contingence est créditeur, il est versé à la maison-mère.

Généralement, m vaut 3 ou 5 ans, $\alpha$ vaut 50 % et le plafond du fonds de contingence est fixé à 25 % des primes commerciales.

Exemple :

***LCF 3 Years Write-Off***

**Pourcentage de bénéfices reversés sous forme de dividende : 50 %**
**Primes annuelles totales versées : 200 000 €**
**Plafond du fonds de contingence = 25% des primes totales versées = 50 000 €**

| **Multinationale** | **Multi** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monnaie** | **EUR** | | | | | | | |
| **Période préfixée** | **Période 1** | | | | **Période 2** | | | |
| **Année** | **1** | **2** | **3** | **Bilan fin de période** | **1** | **2** | **3** | **Bilan fin de période** |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | | 30 000 | - 10 000 | 25 000 | |
| Fonds de contingence 01/01 | 0 | 40 000 | 0 | | 0 | 15 000 | 5 000 | |
| Variation du fonds de contingence | 40 000 | - 40 000 | 0 | | 15 000 | - 10 000 | 12 500 | |
| Fonds de contingence 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | **0** | 15 000 | 5 000 | 17 500 | **0** |
| Report de perte 01/01 | 0 | 0 | - 50 000 | | 0 | 0 | 0 | |
| Variation de la perte | 0 | - 50 000 | 10 000 | | 0 | 0 | 0 | |
| Report de perte 31/12 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | **0** | 0 | 0 | 0 | **0** |
| Dividende versé à la maison-mère 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | **0** | 15 000 | 0 | 12 500 | **17 500** |
| **Bilan Assureur leader** | | | | **- 40 000** | | | | **0** |

<u>Remarque :</u> les 17 500 € versés au client lors du bilan de la deuxième période correspondent à la liquidation du solde du fonds de contingence qui a lieu à la fin de chaque période. Ce dividende vient en complément des 15 000 € et 12 500 € versés en première et en troisième année.

Dans un *Loss Carry Forward Write-Off*, les périodes sont bloquées, c'est-à-dire fixées d'avance, contrairement au *Loss Carry Forward Rolling*.

- **Le *Loss Carry Forward m Years Rolling* ou Report de Pertes à Nouveau sur m Années sur Période Flottante**

Le principe de fonctionnement de cette formule de *pooling* est similaire à celui du *Loss Carry Forward m Years Write-off*, à l'exception près que les périodes ne sont pas fixées d'avance. <u>On entre dans une période la première année où une perte est reportée et on en sort dès qu'il n'y a plus de report de pertes, dans la limite de m années.</u> Si la m$^{ième}$ année consécutive de report de perte, la perte n'est pas effacée, elle est à charge de l'assureur *leader*.

Cette formule se décline sous deux formes : avec ou sans fonds de contingence.

Exemples :

***LCF 3 Years Rolling*** **avec fonds de contingence**
**Pourcentage de bénéfices reversés sous forme de dividende : 50 %**
**Primes annuelles totales versées : 200 000 €**
**Plafond du fonds de contingence = 25% des primes totales versées = 50 000 €**

| **Multinationale** | **Multi** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monnaie** | **EUR** | | | | | | | |
| **Période flottante** | | **Période 1** | | | | **Période 2** | | |
| **Année** | **1** | **2** | **3** | **4** | **Bilan fin de période** | **5** | **6** | **Bilan fin de période** |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 25 000 | |
| Fonds de contingence 01/01 | 0 | 40 000 | 0 | 0 | | 0 | 0 | |
| Variation du fonds de contingence | 40 000 | - 40 000 | 0 | 0 | | 0 | 7 500 | |
| Fonds de contingence 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | 7 500 | **7 500** |
| Report de perte 01/01 | 0 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | | 0 | - 10 000 | |
| Variation de la perte | 0 | - 50 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 10 000 | |
| Report de perte 31/12 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | - 10 000 | **0** | - 10 000 | 0 | **0** |
| Dividende versé à la maison-mère 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | 7 500 | **0** |
| **Bilan Assureur leader** | | | | | **- 10 000** | | | **0** |

***LCF 3 Years Rolling*** **sans fonds de contingence**

| **Multinationale** | **Multi** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monnaie** | **EUR** | | | | | | | |
| **Période flottante** | | **Période 1** | | | | **Période 2** | | |
| **Année** | **1** | **2** | **3** | **4** | **Bilan fin de période** | **5** | **6** | **Bilan fin de période** |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 25 000 | |
| Report de perte 01/01 | 0 | 0 | - 90 000 | - 80 000 | | 0 | - 10 000 | |
| Variation de la perte | 0 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 10 000 | |
| Report de perte 31/12 | 0 | - 90 000 | - 80 000 | - 50 000 | **0** | - 10 000 | 0 | **0** |
| Dividende versé à la maison-mère 31/12 | 80 000 | 0 | 0 | 0 | **0** | 0 | 15 000 | **0** |
| **Bilan Assureur leader** | | | | | **- 50 000** | | | **0** |

Les résultats annuels internationaux sont les mêmes d'un exemple à l'autre, sur un horizon de six ans, ce qui permet de mettre en évidence le fait que, selon les formules, le risque pris par l'assureur *leader* est plus ou moins lourd à porter.

L'application des mécanismes de redistribution des bénéfices dans notre outil de Monte-Carlo permet d'obtenir, pour chaque *pool* simulé, le résultat moyen et la volatilité du résultat de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque, la probabilité que celui-ci soit en perte ainsi que la perte moyenne et la volatilité de la perte. Ces éléments suffisent à évaluer la prime de risque à appliquer pour faire face aux pertes. La manière dont la prime de risque est calculée est laissée au choix de l'assureur *leader*, bien que celui-ci soit limité par un argument commercial.

On peut charger annuellement la prime de risque (ou chargement technique) de différentes façons, par exemple : $\Pr imeDeRisque = \Pr obabilit\acute{e}DePerte * \left\{ \left| E[Perte] \right| + \lambda * \sigma(Perte) \right\}$ (où $\lambda$ est un coefficient) ou : $\Pr imeDeRisque = \left| E[Perte] \right| + \lambda * \sigma(Perte)$.

Quelle que soit la manière dont la prime de risque est construite, on observe les résultats suivants :

- pour toutes les formules de *pooling* traitées ici : $\boxed{\begin{cases} E[R\acute{e}s.Ass.Leader^{avant}] < E[R\acute{e}s.Ass.Leader^{apr\grave{e}s}] \\ \sigma(R\acute{e}s.Ass.Leader^{avant}) < \sigma(R\acute{e}s.Ass.Leader^{apr\grave{e}s}) \end{cases}}$

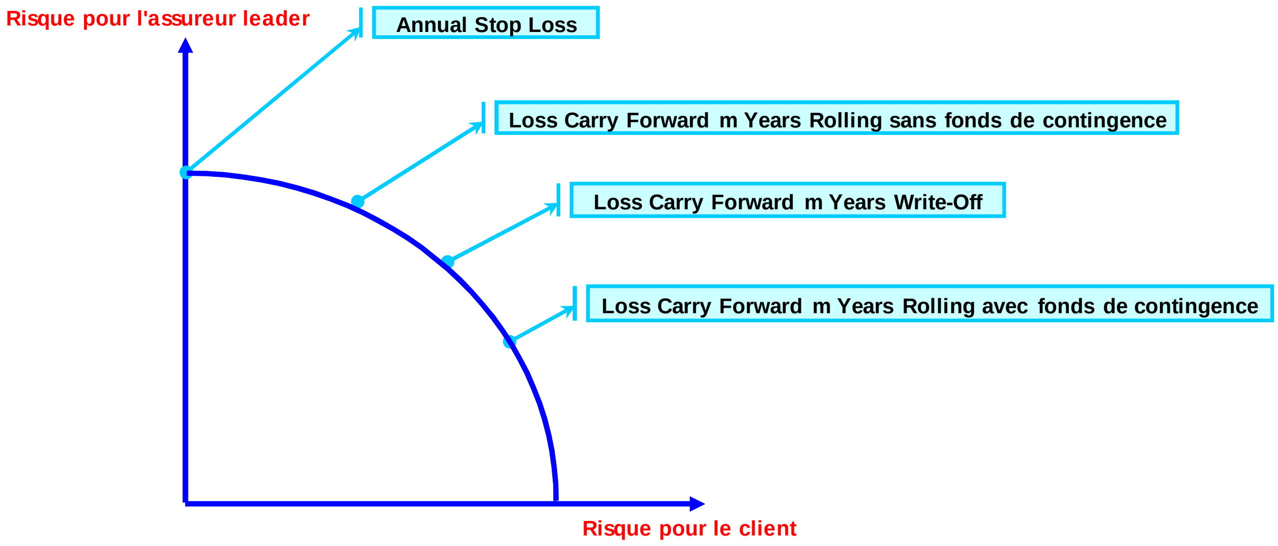
(« avant » signifiant « avant application de la prime de risque » c'est-à-dire sans prime de risque et « après » signifiant « après application de la prime de risque » soit avec chargement d'une prime de risque) ;

- pour l'*Annual Stop Loss* : $\boxed{\begin{cases} \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant} = \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{apr\grave{e}s} \\ \left| E[Perte^{avant}] \right| = \left| E[Perte^{apr\grave{e}s}] \right| \\ \sigma(Perte^{avant}) = \sigma(Perte^{apr\grave{e}s}) \end{cases}}$ ;

- pour les formules de *Loss Carry Forward* : $\boxed{\begin{cases} \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant} \leq \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{apr\grave{e}s} \\ \left| E[Perte^{avant}] \right| \leq \left| E[Perte^{apr\grave{e}s}] \right| \\ \sigma(Perte^{avant}) \leq \sigma(Perte^{apr\grave{e}s}) \end{cases}}$.

L'*Annual Stop Loss* est la formule de *pooling* qui présente le plus de risque pour l'assureur *leader*. Le *Loss Carry Forward Rolling* sans fonds de contingence est plus risqué que le *Loss Carry Forward Write-Off*, lui-même plus risqué que le *Loss Carry Forward Rolling* avec fonds de contingence.

Schématiquement, on a le classement suivant :



Le modèle qui a été établi intègre également la protection par tête qui permet de réduire l'impact d'un sinistre décès très lourd sur le compte de résultat d'un *pool* en écrêtant ce sinistre. Dans ce cas, le coût du sinistre décès est pris en charge par le *pool* jusqu'à un seuil appelé seuil d'écrêtement, et le surplus, appelé surcrête, est mutualisé non plus à échelle du pool, mais à échelle du portefeuille.

L'outil de simulation par la méthode de Monte-Carlo qui a été construit est efficace pour obtenir une bonne évaluation du risque pris par l'assureur *leader*. Cependant, malgré la rapidité du logiciel R, le temps de calcul par la méthode de Monte-Carlo est long (10 000 résultats internationaux annuels sont simulés pour chaque année d'observation afin d'obtenir des statistiques fiables). On se demande alors s'il n'est pas possible d'obtenir des formules qui donneraient directement le risque pris par l'assureur *leader*.

Effectivement, si l'on fait l'hypothèse suivante : « le résultat international annuel est gaussien », il est possible de calculer directement la prime de risque (des formules donnant espérance et volatilité du résultat de l'assureur *leader* et de la perte, ainsi que la probabilité de perte ont été établies) à appliquer pour un *Annual Stop Loss*. Il existe deux cas où cette hypothèse s'applique :
- premier cas : si les salariés de toutes les filiales ne sont protégés que par la couverture Santé. Dans ce cas, puisque le modèle prévoit la modélisation de la sinistralité en Santé par une gaussienne pour chaque filiale et que l'on suppose qu'il y a indépendance entre ces variables, on obtient une sinistralité internationale gaussienne, et donc un résultat international gaussien.
- second cas : on observe que lorsqu'une filiale couvre ses salariés en Santé, Décès et Arrêt de travail, la sinistralité locale converge vers une gaussienne lorsque le nombre de salariés couverts par la garantie croît fortement. Dans ce cas, par indépendance des sinistralités locales d'un pays à l'autre dans le modèle, on obtient une convergence du résultat international annuel vers une loi gaussienne.

**Conclusion :**

L'étude qui a été menée a permis de délivrer un outil efficace de simulation de l'activité de tout *pool* couvrant les garanties Santé, Décès et Arrêt de travail et qui font l'objet d'une protection de compte du type *Annual Stop Loss*, *Loss Carry Forward Write-Off* ou *Loss Carry Forward Rolling*.

L'outil fondé sur la méthode de Monte-Carlo qui a été construit permet aujourd'hui aux souscripteurs de tarifer la prime de risque au moment de la réponse à un appel d'offre.

Lorsque l'unique garantie incluse dans un *pool* est la Santé, ou lorsque l'on peut se placer sous approximation gaussienne du résultat international, il est possible d'appliquer une formule évaluant directement la prime de risque.

Bien que l'outil construit soit efficace, il pourra être amélioré à long terme en réalisant des études statistiques poussées sur la sinistralité attendue par garantie et par pays, à condition que les assureurs partenaires acceptent de communiquer leurs données de sinistralité.

Par ailleurs, on note que la prime de risque est calculée sous des hypothèses de sinistralité attendue par garantie et par pays. Si les contrats locaux intégrés dans un *pool* s'avèrent être plus ou moins rentables que ce qui avait été prévu, cela jouera sur le risque porté par l'assureur *leader*, et donc sur son résultat. Ceci confirme l'importance d'une tarification juste au niveau local.

# Executive summary

International pooling enables international companies to leverage the advantages of group insurance and to ensure a central steering of their employee benefits policies in order to include their foreign subsidiaries in an international scheme. This type of international agreement is signed between a multinational company and an insurance company network, in charge of the coordination of local benefit plans.

Each subsidiary subscribes locally to an insurance group contract with a partner insurance company present in the country where it practices their activities, in order to covered Medical, Life and Disability risks. At the end of each year, profit and loss accounts of local insurance contracts are transfered to the lead insurer which is in charge of consolidating. Local insurers enter a 100 % quota-share reinsurance with the lead insurer, which means that it receives all pieces of premium (local charges out) and pays for each loss. Risks are pooled in two ways : by coverage and by country.

In classic Quota-Share Reinsurance, the reinsurer keeps profits in order to face potential previous or future losses. International pooling includes dividends paid to the client parent company in agreement with the international profit sharing clause. This clause creates a strong asymmetry for the lead insurer which has to charge a risk premium in return.

However, this asymmetry is more or less significant, depending on the pooling system protecting the international account. Indeed, the allotment of the annual international result is function of each pooling system (or protection account type). Three pooling systems are studied in this paper : Annual Stop Loss, Loss Carry Forward Write-Off and Loss Carry Forward Rolling. Their mechanism is described in the following pages.

Each pool established for a multinational company generates specific risks. These risks are linked to the following elements : pooling system chosen, attended claims for each covered risks and included countries.

The aim of this study is to evaluate the risks' exposure of the lead insurer, whatever the pool is, in order to price risk charges. Mean and volatility of the lead insurer results are looked for, as well as the probability it has to undertake a loss and the mean and volatility of that loss.

The approach could have been deterministic (that is to say, using existing claims samples), but this method is too restrictive when taking into account highly volatile risks. Furthermore, the aim is to automate risks charges calculations in order to answer calls for tenders, ie, to be able to evaluate the risk exposure of the lead insurer whatever the pool characteristics.

Knowing that, a stochastic method is more relevant in order to take into account hazards of a disaster and its cost. A tool based on Monte Carlo experiments is created and implemented with R, relying on repeated random sampling and evaluating the variables.

### First step : Simulation of the global pool result

In a first time, the international result is conceptualized, which is equivalent to conceptualize claims by country and by covered risks since other parts of the international account are supposed to be deterministic in that model (premium, local charges and international charges).

An insurers network such as MAXIS GBN is able to cover a client company in about a hundred countries and is developing actively in about forty countries. Given the time constraint, it has been decided that, for each guarantee, the same distribution would be used from a country to another. On the other hand, parameters of the distribution would be adapted to the observed claims in each country.

Distributions used in that model to simulate claims by covered risks are the following :

- **Medical coverage**

Medical coverage provided by group insurance guarantee to employees to take in charge their health spendings complementing state health plan. Medical claims are easily foreseen and tests performed on samples provided by World Health Organization have lead to adopt a Gaussian model.

- **Life coverage**

Life coverage compensates an unexpected lack of incomes of an household at the death of an employee by providing a death benefit or a pension.

Life claims are volatile. This type of disaster frequency is low (1 to 2 deaths per year per 1,000 employees), but the cost of the disaster is strongly linked to the income of the employee at the time of his death. This way, a frequency-cost approach is the most adapted to the Life claims.

In order to use the most adapted frequency and cost distributions, an imaginary European employed population is simulated using hypothesis on sex, age, social and occupational group, salaries, family status repartitions. Then, using the French mortality table, the number of death per year for each simulated company is evaluated. Using the death benefit calculation laws, the cost of a death is evaluated for each employee of each simulated company.

Results based on this fictitious European employed population lead to adopt the Negative binomial distribution to simulate the number of deaths and the Gamma distribution to simulate the cost of a death benefit.

- **Disability coverage**

Disability coverage compensates an unexpected lack of incomes of an household due to a sudden disability state of an employee.

To simulate Disability claims, the study made by Vincent LAUDOU and Paul UNFRIED in their paper "Modélisation et valorisation d'une clause de participation aux bénéfices pour les contrats Prévoyance Salarié" (2009) is used. Their work used the ratio Claims / Premium approach. The principle is to refer to a "reference contract" which is deeply studied upstream. For each covered country, the model simulates Disability claims as a linear function of a log-normal distribution, adjustment parameters are calculated in comparison to the reference contrat.

To summarize, the following distributions are used in this model to represent claims due to the three covered risks :

| **Covered risks** | **Medical** | **Life** | **Disability** |
|---|---|---|---|
| Distributions | Gaussian | - Annual Death Number : Negative binomial<br>- Cost : Gamma | Linear function of a log-normal distribution |

In order to illustrate pooling mechanism, the example of an international company so called Multi is taken in this paper.

Example of Multi : We consider the case of the multinational French company, settled in France, Denmark and United-States, called Multi. It subscribes to a pooling contract of the international insurers network MAXIS GBN. Considering also that Danish and American subsidiaries have subscribed to a Medical group insurance contract for its employees whereas the French Parent Company protects its employees regarding Medical, Life and Disability.

The simplified international profit and loss statement is as follow :

| International company | Multi | | | |
|---|---|---|---|---|
| Currency | EUR | | | |
| Covered country | France | Denmark | United-States | Consolidation |
| 1. Premium | 581 000 | 39 000 | 780 450 | 1 400 450 |
| 2. Claims | - 417 996 | - 40 000 | - 697 100 | -1 155 096 |
| 3. Local charges | - 87 150 | - 5 850 | - 117 068 | - 210 068 |
| 4. Local result (1+2+3) | 75 854 | - 6 850 | - 33 718 | 35 287 |
| 5. International charges | | | | - 28 009 |
| Global pool result (4+5) | | | | 7 278 |

Once obtained the international result, we simulate its distribution depending on the different types of account protection system. Rules are linked to each pooling formulas.

## Second step : International result allotment by pooling formula

- **Annual Stop Loss**

An international account is calculated annually.

A profit in the pool in any years is refunded to the client at the end of the year.
A deficit in any year is absorbed by the Lead Insurer and not carried forward.

Example :

| **Annual Stop Loss** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **International Company** | **Multi** | | | | | |
| **Currency** | **EUR** | | | | | |
| **Year** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| Global pool result | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | - 10 000 | 25 000 |
| **Dividend paid to the Client Parent Company 12/31** | 80 000 | 0 | 10 000 | 30 000 | 0 | 25 000 |
| **Lead Insurer result 12/31** | 0 | - 90 000 | 0 | 0 | - 10 000 | 0 |

- **Loss Carry Forward m Years Write-Off**

An international account is calculated annually.

A fund called « contingency fund » is created with (a part of) the positive results of the multinational account. The negative results will be compensated by the fund.

When the global pool result is negative, the loss is compensated by the contingency fund. If the entire loss is not compensated, it will be carried forward within the Loss-Carry-Forward period.

$\alpha$ % of any profit in the pool is retained to meet possible future deficits in the current Loss-Carry-Forward period of m years, the other (1-$\alpha$) % are paid out, unless deficits carried over from previous years remain to be recouped.

At the end of each Loss-Carry-Forward period, the contingency fund is entirely released to the client and carried deficits are absorbed by the Lead Insurer.

Normally, the Loss-Carry-Forward period, m, is during 3 or 5 years and $\alpha$ = 50 %. Furthermore, contingency fund is limited to 25 % of annual global premiums.

Example :

***LCF 3 Years Write-Off***
**Dividend : 50 % of any profit**
**Annual global premium : 200 000 €**
**Contingency fund ceiling = 25% annual global premium = 50 000 €**

| **International company** | **Multi** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Currency** | **EUR** | | | | | | | |
| **Write-Off Period** | **First period** | | | | **Second period** | | | |
| **Year** | **1** | **2** | **3** | **Statement end of period** | **1** | **2** | **3** | **Statement end of period** |
| Global pool result | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | | 30 000 | - 10 000 | 25 000 | |
| Contingency fund 01/01 | 0 | 40 000 | 0 | | 0 | 15 000 | 5 000 | |
| Contingency fund variations | 40 000 | - 40 000 | 0 | | 15 000 | - 10 000 | 12 500 | |
| Contingency fund 12/31 | 40 000 | 0 | 0 | **0** | 15 000 | 5 000 | 17 500 | **0** |
| Loss carried forward 01/01 | 0 | 0 | - 50 000 | | 0 | 0 | 0 | |
| Loss carried forward variations | 0 | - 50 000 | 10 000 | | 0 | 0 | 0 | |
| Loss carried forward 12/31 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | **0** | 0 | 0 | 0 | **0** |
| Dividend paid to the Parent Client Company 12/31 | 40 000 | 0 | 0 | **0** | 15 000 | 0 | 12 500 | **17 500** |
| **Lead Insurer result** | | | | **- 40 000** | | | | **0** |

<u>NB :</u> at the end of the second period, the 17,500 € paid to the client parent company are due to the clearance of the contingency fund. The dividend paid comes in addition to the dividends of 15,000 € and 12,500 € paid at the end of the first year and at the end of the third year.

- **Loss Carry Forward m Years Rolling**

The mechanism of this pooling formula is very close to the mechanism of the Loss Carry Forward m Years Write-off, except that the periods are not written off. A new period begins with the first year of loss carried forward and ends when there is no loss carried, in the limit of m years. If, at the end of year m, the loss is not covered, it is charged on the lead insurer result.

This system comes in two forms : with or without contingency fund.

Examples :

***LCF 3 Years Rolling*** **with contingency fund**
**Dividend : 50 % of any profit**
**Annual global premium : 200 000 €**
**Contingency fund ceiling = 25 % annual global premium = 50 000 €**

| International company | Multi | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Currency | EUR | | | | | | | |
| Rolling period | | First period | | | | Second period | | |
| Year | 1 | 2 | 3 | 4 | Statement end of period | 5 | 6 | Statement end of period |
| Global pool result | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 25 000 | |
| Contingency fund 01/01 | 0 | 40 000 | 0 | 0 | | 0 | 0 | |
| Contingency fund variations | 40 000 | - 40 000 | 0 | 0 | | 0 | 7 500 | |
| Contingency fund 12/31 | 40 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 500 | 7 500 |
| Loss carried forward 01/01 | 0 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | | 0 | - 10 000 | |
| Loss carried forward variations | 0 | - 50 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 10 000 | |
| Loss carried forward 12/31 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | - 10 000 | 0 | - 10 000 | 0 | 0 |
| Dividend paid to the Client Parent Company 12/31 | 40 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 500 | 0 |
| Lead Insurer result | | | | | - 10 000 | | | 0 |

***LCF 3 Years Rolling without contingency fund***

| International company | Multi | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Currency | EUR | | | | | | | |
| Rolling period | | First period | | | | Second period | | |
| Year | 1 | 2 | 3 | 4 | Statement end of period | 5 | 6 | Statement end of period |
| Global pool result | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 25 000 | |
| Loss carried forward 01/01 | 0 | 0 | - 90 000 | - 80 000 | | 0 | - 10 000 | |
| Loss carried forward variations | 0 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 10 000 | |
| Loss carried forward 12/31 | 0 | - 90 000 | - 80 000 | - 50 000 | 0 | - 10 000 | 0 | 0 |
| Dividend paid to Client Parent Company 12/31 | 80 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 000 | 0 |
| Lead Insurer result | | | | | - 50 000 | | | 0 |

Using the same global pool results from an example to another, on a 6 year scale shows that, depending on the formula, the risk taken by the lead insurer is more or less significant.

The application of profit redistribution mechanism in our Monte Carlo tool allows to obtain, for each simulated pool :

- The average and volatility of the lead insurer's result, before risk premium application
- The probability of loss for the lead insurer
- The average loss supported by the lead insurer and its volatility

The evaluations of these variables allows the risk charges calculations. The way the risk premium is calculated is let at the appreciation of the lead insurer, although it is limited by commercial issues.

The risk premium charged annually can be calculate different ways , for example : $RiskCharges = Loss\,Probability * \{ |E[Loss]| + \lambda * \sigma(Loss)\}$ (where $\lambda$ is a fixed parameter) or : $RiskCharges = |E[Loss]| + \lambda * \sigma(Loss)$.

Independently from the risk charges calculation, the following results are observed :

- for each pooling formulas : $\boxed{\begin{cases} E[LeadInsurer^{before}] < E[LeadInsurer^{after}] \\ \sigma(LeadInsurer^{before}) < \sigma(LeadInsurer^{after}) \end{cases}}$

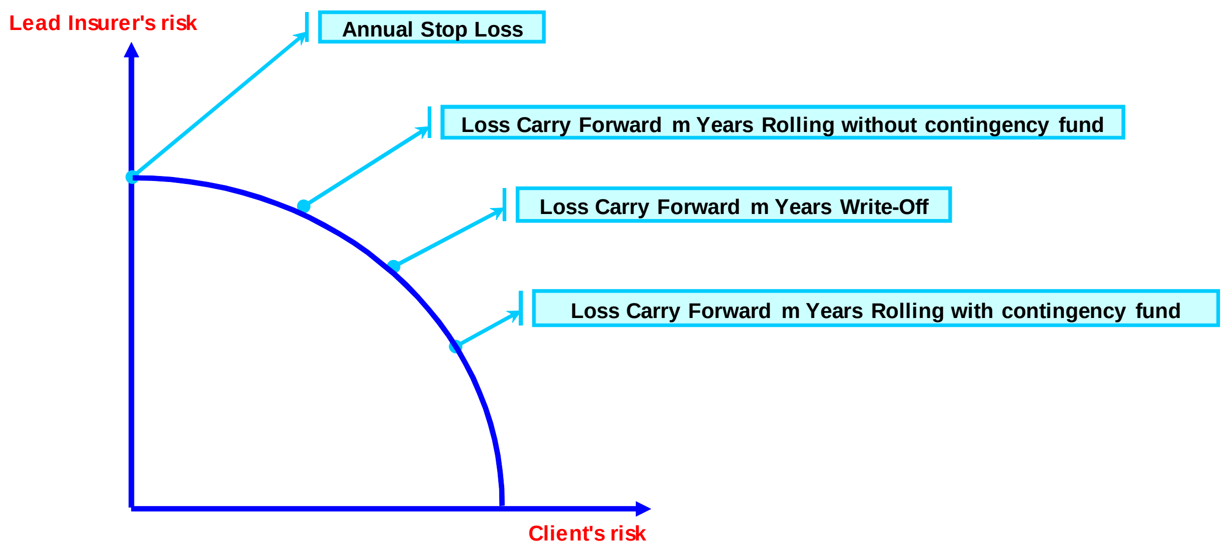
(« before » means « before risk charges application, which means without risk charges application and « after » means « after risk charges application » which means with application of risk charges) ;

- for the *Annual Stop Loss* : $\boxed{\begin{cases} Loss\,Probability^{before} = Loss\,Probability^{after} \\ |E[Loss^{before}]| = |E[Loss^{after}]| \\ \sigma(Loss^{before}) = \sigma(Loss^{after}) \end{cases}}$ ;

- for *Loss Carry Forward* : $\boxed{\begin{cases} Loss\,Probability^{before} \le Loss\,Probability^{after} \\ |E[Loss^{before}]| \le |E[Loss^{after}]| \\ \sigma(Loss^{before}) \le \sigma(Loss^{after}) \end{cases}}$.

The *Annual Stop Loss* is the more risky pooling formula for the lead insurer. Loss Carry Forward without contingency fund is more risky than Loss Carry Forward Write-Off, itself more risky than Loss Carry Forward Rolling with contingency fund.

These results can be represented in the following chart :



The model that has been established also integrates the Excess of Loss protection which reduces the impact of a heavy death disaster on the global pool result by lopping that type of disaster. When the Excess of Loss protection is applied, the cost of the death disaster is taken in charge up to a ceiling, the excess is pooled at the portfolio scale instead of the pool scale.

The simulation tool, based on Monte Carlo experiments is efficient to obtain an evaluation of the risk taken by the lead insurer. Nevertheless, despite of the R system calculation speed, the time of calculation by the Monte Carlo experiments is long. That is why we consider the possibility of formulas that could give directly the risk taken by the lead insurer.

Indeed, under the following hypothesis : « the annual global pool result distribution is Gaussian », it is possible to calculate directly the risk charges (formulas giving mean and standard deviation of the lead insurer result, loss probability and mean and standard deviation of the loss taken in charge by the lead insurer have been established) to apply for an Annual Stop Loss. The hypothesis is observed in two cases :
- first case : when subsidiaries employees are only covered for Medical. In that case, as the model simulates Medical claims with a Gaussian distribution, and by supposing independance between those variables, we obtain an international claims distribution Gaussian, and so an international result Gaussian.
- second case : when subsidiaries protect their employees for Medical, Life and Disability, local claims converge to a Gaussian distribution when the number of employees covered is getting bigger. In that case, by independence between local claims from a country to another in the model, we obtain that the annual international result converges to a Gaussian distribution.

**Conclusion :**

The study carried on lead to the delivery of an efficient tool of every pool activity simulation for covered risks Medical, Life and Disability and which the account is protected by an Annual Stop Loss, a Loss Carry Forward Write-Off or a Loss Carry Forward Rolling.

The tool based on Monte Carlo experiments which has been built allows subscribers to price risk charges when answering calls for tenders.

When the only coverage included in a pool is Health, or when the hypothesis « the annual global pool result distribution is converging to Gaussian », it is possible to apply directly formulas calculating risk premium.

However, even if the tool is efficient, it could be improve in the future by making statistical studies on expected claims by covered risk and country, providing that the network partners accept to share their claims data.

It is to be noticed that risk charges are calculated under claims expected hypothesis by coverage type and country. If local insurance contracts turn out more or less profitable, lead insurer result would be impacted. That strengthen the need of a right setting of prices locally.

# Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe française de MAXIS Global Benefits Network, filiale d'AXA France, pour son accueil.

Je remercie tout particulièrement Fabien DURET et François BERGER qui m'ont offert la possibilité de travailler tout au long de mon stage sur un sujet aussi original et intéressant.

Je remercie également tous les membres de l'équipe technique pour leur disponibilité et la confiance qu'ils m'ont accordée.

# Table des matières

# Introduction

Dans les années 1950-60, les marchés américains d'assurance collective sont très en avance sur leurs homologues européens. Ainsi, les entreprises américaines obtiennent des optimisations de leurs coûts d'assurance aux Etats-Unis, mais n'ont pas un tel avantage pour leurs filiales européennes. C'est dans ce contexte que les premiers réseaux d'assureurs ont vu le jour, dans le but de délivrer une gamme de produits correspondant aux besoins d'uniformisation des multinationales.

Aujourd'hui, le marché des réseaux d'assureurs pèse entre 4 et 5 milliards de dollars, connaissant une croissance annuelle de 7 à 8%.

A l'origine, les compagnies multinationales voyaient dans les réseaux la possibilité d'optimiser leurs coûts à échelle internationale mais, depuis, elles y ont trouvé un autre intérêt de taille : le pilotage central de leurs régimes.

Afin d'optimiser leurs régimes de santé et prévoyance, les entreprises clientes ont besoin d'un montage financier, d'où la naissance du *pooling* qui n'est autre qu'une participation aux bénéfices. Ce dispositif est l'un des outils les plus efficaces pour optimiser les coûts de l'assurance collective puisqu'il permet de profiter à la fois d'économies d'échelle tout en conservant des services sur mesure de prestataires locaux. De plus, le *pooling* délivre aux maisons-mères le *reporting* qui leur permet d'obtenir toutes les informations qualitatives et quantitatives relatives aux régimes mis en place dans leurs filiales.

Lors de la souscription à un contrat de *pooling*, chaque filiale de l'entreprise cliente souscrit localement à un contrat d'assurance collective auprès d'un assureur partenaire présent dans le pays où elle exerce ses activités, afin de protéger ses salariés en Santé, Décès et/ou Arrêt de travail. En fin d'année, les résultats des contrats d'assurance locaux sont transférés à l'assureur *leader* qui se charge de la consolidation de ces résultats. Les assureurs locaux sont dans un contrat de réassurance de type quote-part 100 % avec l'assureur *leader*, ce qui signifie que toutes les primes sont reversées à ce dernier (hors chargements locaux) et que tous les sinistres sont à sa charge.

En réassurance quote-part classique, sauf clause particulière, le réassureur conserve les bénéfices les années où la sinistralité est favorable pour faire face aux années où la sinistralité est importante. Le *pooling* prévoit, lui, le versement de tout ou partie des bénéfices à la maison-mère sous la forme de dividende, via la clause de participation aux bénéfices internationale. Cette clause se décline en plusieurs versions qui sont propres à chaque type de protection de compte (ou formule de *pooling*) mis en place. On s'intéresse à trois formules dans cette étude : l'*Annual Stop Loss*, le *Loss Carry Forward Write-Off* et le *Loss Carry Forward Rolling*. Quelle que soit la protection de compte, cette clause engendre une forte asymétrie pour l'assureur *leader* qui se rémunère alors via une prime de risque (qui s'apparente à une prime de réassurance) en contrepartie.

Chaque *pool* établi pour une multinationale cliente engendre des risques qui lui sont propres. Ces risques sont liés aux éléments suivants : le type de protection de compte choisi, la sinistralité attendue pour chaque garantie couverte dans chaque pays où les filiales sont implantées et le nombre de salariés couverts par garantie et par pays.

Le but de cette étude est d'évaluer le risque porté par l'assureur *leader* quel que soit le *pool* afin de tarifer la prime de risque. On s'intéresse à la moyenne et à la volatilité du résultat de l'assureur *leader*, à la probabilité qu'il doive assumer une perte ainsi qu'au montant moyen et à la volatilité de cette perte.

On aurait pu opter pour une méthode déterministe (c'est-à-dire utiliser les observations de sinistralité à disposition), mais cette méthode est trop restrictive, les risques pris dans un *pool* pouvant être très volatils. De plus, le but est de pouvoir automatiser les calculs de prime de risque pour répondre à des appels d'offre, c'est-à-dire de pouvoir évaluer le risque pris par l'assureur *leader* quels que soient les paramètres qui sont propres au *pool*. On se tourne donc vers une méthode stochastique, qui prend en compte la part d'aléas dans la survenance d'un sinistre et dans le coût qu'il engendre. Un outil fondé sur la méthode de Monte-Carlo est construit afin de simuler un grand nombre de fois l'activité d'un *pool* et en déduire des évaluations des variables recherchées. Certains paramètres sont considérés déterministes dans le modèle (primes commerciales, pourcentage de chargements locaux et internationaux…).

Le premier chapitre est destiné à définir le cadre de l'étude. Le deuxième présente la modélisation et la simulation du résultat international dans le modèle qui est élaboré ici. Enfin, le dernier chapitre rend compte des résultats de simulation de l'activité d'un *pool* par la méthode de Monte-Carlo et présente les résultats théoriques obtenus sous hypothèse gaussienne du résultat international.

Afin d'illustrer ce mémoire, on reprend tout au long de l'étude l'exemple d'une entreprise transnationale appelée Multi souscrivant à un contrat de *pooling* auprès du réseau d'assureurs MAXIS GBN.

# I. Le programme de *pooling* international des assurances collectives

Le *pooling* international est assez méconnu dans le monde de l'assurance. Ce premier paragraphe est destiné à présenter le cadre de l'étude, et détaille en particulier le mécanisme de cette réassurance particulière et les possibilités qu'elle offre. Sont ensuite décrites les formules de *pooling* (*Annual Stop Loss, Loss Carry Forward Write-Off* et *Loss Carry Forward Rolling*) ainsi que les garanties traitées dans cette étude (Santé, Décès et Arrêt de travail).

## 1. Les contrats collectifs en assurance

Une **assurance-groupe** ou une **assurance collective** est un système d'assurance ouvert à tous les membres d'une même collectivité (ex : employés d'une entreprise ou d'une institution, membres d'une profession, emprunteurs d'une banque...).
Un contrat de groupe s'applique de façon obligatoire ou facultative ou, dans certains cas, selon un système optionnel de souscription réservé aux membres d'un groupe.

Le premier pilier désigne les différents régimes de base (ou régimes obligatoires) mis en place dans les pays ; ils sont régis par l'Etat. Le deuxième pilier désigne les régimes complémentaires mis en place par les entreprises lorsqu'elles sont de taille suffisamment importante. Enfin, le troisième pilier correspond à l'assurance individuelle. Les contrats d'assurance collective interviennent en complément des niveaux de couverture obligatoire des risques santé, prévoyance, retraite et/ou dépendance des salariés, la couverture obligatoire variant d'un pays à l'autre ; ils relèvent donc du second pilier.

En France, le contrat d'assurance de groupe est défini par le Code des Assurances comme suit :

**Art.L.140-1 -** Est un contrat d'assurance de groupe le contrat souscrit par une personne morale ou un chef d'entreprise en vue de l'adhésion d'un ensemble de personnes répondant à des conditions définies au contrat, pour la couverture des risques dépendant de la durée de la vie humaine, des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne ou liés à la maternité, des risques d'incapacité de travail ou d'invalidité ou du risque de chômage. Les adhérents doivent avoir un lien de même nature avec le souscripteur. Ces garanties sont complémentaires aux prestations servies par la Sécurité Sociale : Frais de santé ou mutuelle, Prévoyance, Retraite.

Le contrat est composé d'un ensemble de prestations communes (ou base ou socle) au groupe désigné. Il existe deux types de contrat :

- le contrat collectif dit « obligatoire » sur lequel l'employeur intervient au titre d'une contribution financière et qui donne droit à des avantages fiscaux et sociaux,
- le contrat collectif dit « facultatif » dont la totalité de la cotisation est à la charge de l'affilié.

S'agissant dans les deux cas de contrats collectifs, les garanties sont les mêmes pour tous et elles ne sont pas modulables.

Dans le cadre du contrat collectif obligatoire, tous les salariés désignés sont tenus d'adhérer, sauf demande de dispense légale. Plusieurs structures légales de cotisations existent telles que "unique", "isolé", "famille" pour les plus utilisées. Le souscripteur du contrat, l'employeur, peut avoir négocié avec l'assureur un niveau facultatif ou renfort. Seuls les affiliés intéressés y souscrivent et il ne peut pas y avoir de participation financière de l'employeur sur ce type de garanties.

Néanmoins, un comité d'entreprise peut souscrire au bénéfice des salariés un contrat collectif dit facultatif. C'est un ensemble de garanties auxquelles souscrivent les salariés de l'entreprise de façon volontaire. Le comité d'entreprise ne peut pas se substituer à l'employeur en mettant en place une participation financière. Plusieurs contrats facultatifs peuvent co-exister dans la même entreprise.

D'un pays à l'autre, les avantages fiscaux et sociaux varient en fonction de la réglementation en vigueur, mais l'intérêt commun et principal de ce type de contrat est la mutualisation des risques, qui permet d'obtenir des tarifs plus favorables pour toute la population salariée que si des contrats individuels étaient souscrits, grâce aux économies d'échelle réalisées et grâce à l'absence d'anti-sélection.

On appelle **économie d'échelle** l'économie réalisée grâce à l'accroissement du périmètre. En assurance collective, plus le nombre de salariés assurés est grand, plus la mutualisation des risques est importante, et donc, plus le tarif est favorable à l'entreprise souscriptrice. La mutualisation des risques permet à l'assureur de diminuer la volatilité de la sinistralité du portefeuille (compensation statistique), c'est-à-dire que plus le nombre de têtes assurées est important, plus les compensations entre charges importantes de sinistralité et charges absentes ou faibles seront réalisables. La prime payée est généralement une fonction croissante de l'espérance et de la volatilité de la sinistralité ; il est donc dans l'intérêt de l'entreprise adhérente de souscrire un contrat qui couvre le plus de têtes possible.

Les contrats d'assurance de groupe détaillent les engagements réciproques qui relient la société d'assurances, l'entreprise souscriptrice et les salariés assurés.

Les agents de ce type de contrats sont les suivants :

- **l'assureur** : par définition, il s'agit d'un « organisme habilité à pratiquer des opérations d'assurances dans certaines branches de l'assurance, qui organise la mutualisation des risques au sein de la communauté des assurés et qui s'engage, en cas de réalisation de ces risques, à couvrir les pertes financières éventuelles de ses assurés dans la limite de la convention qu'ils ont fixé ensemble ».
- **le souscripteur** : c'est la personne physique ou morale qui signe et paie les contrats d'assurance. Dans le cadre des contrats collectifs, il s'agit de la personne morale qu'est l'entreprise cliente.
- **l'assuré** : personne physique sur laquelle porte le risque, on parle également de tête assurée, la personne doit satisfaire les conditions d'assurabilité pour être couverte par le contrat. Il s'agit de tout ou partie du personnel salarié (en fonction du caractère obligatoire ou facultatif du contrat d'assurance groupe), et éventuellement de sa famille (pour les contrats Santé).
- **le ou les bénéficiaire(s)** : il s'agit de la ou des personne(s) physique(s) qui percevra(ont) la prestation en cas de réalisation du sinistre dont le contrat fait l'objet.

Pour la garantie Santé, les bénéficiaires sont les assurés (salariés et famille).
Lors de la souscription d'un contrat Décès, chaque assuré désigne un ou plusieurs bénéficiaires qui toucheront la prestation en cas de réalisation du sinistre décès.

Les assurances collectives couvrent un très large périmètre d'entreprises, dans tous les domaines et dans de nombreux pays. Cependant, on peut se demander si les groupes internationaux ont les mêmes problématiques assurancielles que les groupes qui interviennent sur un périmètre national.

## 2. Les attentes en matière de protection sociale des entreprises multinationales

On appelle **entreprise multinationale (ou transnationale)** toute entreprise implantée dans plusieurs pays par le biais de filiales dont elle détient tout ou une partie du capital.
Les attentes en termes d'assurance de ces multinationales diffèrent de celles des compagnies qui ne travaillent que localement, car elles souhaitent profiter des avantages locaux et doivent respecter les règles en vigueur dans les pays dans lequel elles sont implantées, tout en inscrivant leurs filiales dans un schéma international.

Quelles sont les attentes des entreprises multinationales en termes de protection pour leurs salariés ?
Sur le plan humain :
- employer et retenir le personnel
- **comprendre les couvertures locales et les besoins locaux**
- **s'assurer que les plans locaux répondent aux règles locales et aux rapports requis localement (*reporting*)**
- mettre en application un minimum de directives
- couvrir les déplacements professionnels
- harmoniser les plans locaux suite à une acquisition ou faciliter la mobilité
- faire de la prévention

Sur le plan financier :
- **instaurer un budget de surveillance**
- **contrôler les coûts**
- améliorer les tarifs obtenus localement

Si les multinationales ont longtemps décentralisé leur politique de protection sociale (chaque filiale régissait la protection sociale à échelle locale), la tendance est aujourd'hui à l'harmonisation des décisions concernant les avantages des salariés afin d'inclure les filiales dans un schéma international. Ceci permet aux entreprises multinationales et à leurs filiales d'entrer dans une stratégie globale d'optimisation des avantages sociaux.

Afin de mutualiser les dispositifs d'assurance et de protection sociale de leurs collaborateurs, les multinationales peuvent notamment avoir recours au *pooling* international, qui n'est autre qu'un montage financier motivant les transnationales à se couvrir auprès d'un réseau, notamment pour profiter de la clause de participation aux bénéfices.

## 3. Le *pooling* international

Le *pooling* international est un des outils les plus efficaces pour optimiser l'assurance collective puisqu'il permet de profiter à la fois de l'avantage des grandes organisations et des services sur mesure de prestataires locaux. C'est un mécanisme de consolidation financière qui relie entre eux les régimes sociaux complémentaires dans les différents pays où est implantée une entreprise multinationale via la souscription auprès d'un réseau d'assureurs et prévoit le versement d'un dividende fonction du résultat consolidé à la maison-mère, via la clause de participation aux bénéfices. C'est également un outil d'information et de pilotage à l'échelle mondiale de la protection sociale complémentaire des salariés, il permet une vision globale à travers un rapport annuel (*reporting*).

Le marché de l'assurance en réseau pèse 4 à 5 milliards de dollars. MAXIS GBN, International Group Program, Insurope, Swisslife International, All Net et Generali sont les principaux réseaux proposant des solutions de *pooling* international.

Les acteurs d'un *pool* :

**Le réseau** est un ensemble d'assureurs liés entre eux par un *Cooperation Agreement* ou *Membership Agreement*. Les réseaux d'assureurs proposant aujourd'hui des contrats de *pooling* sont de puissants acteurs du marché de l'assurance collective.

**L'assureur *leader* (*Network Reinsurer*)** réassure en quote-part à 100 %[1] (hors chargements locaux) chaque assureur local inclus dans le *pool*. En tant que tel, il porte le risque et assume tout ou partie (en fonction de la formule choisie par le client) de la perte du compte de résultat international. Il peut lui-même assurer localement une des filiales de la multinationale.

**Les assureurs locaux (*Network local Insurers*)** appartenant au réseau sont les intermédiaires, ils assurent localement les filiales de la cliente multinationale.

La **cliente multinationale** est composée de la **maison-mère (*Client Parent Company*)** et de **filiales locales (*Client Subsidiaries*)**. La maison-mère est rattachée au réseau par un *Pooling Agreement* qui précise les conditions du contrat et perçoit le dividende s'il y en a un. Les filiales locales souscrivent au profit de leurs employés des contrats d'assurance collective (*Insurance contract*) auprès des assureurs locaux membres du réseau.

Le schéma ci-dessous détaille le montage de réassurance en place entre les assureurs partenaires et l'assureur *leader*.

[1] La **réassurance proportionnelle de type quote-part 100 %** prévoit que la cédante (l'assureur) cède 100 % des primes qu'il reçoit (nettes de chargements locaux) au réassureur qui devra, en échange, payer 100 % des sinistres aux assurés.

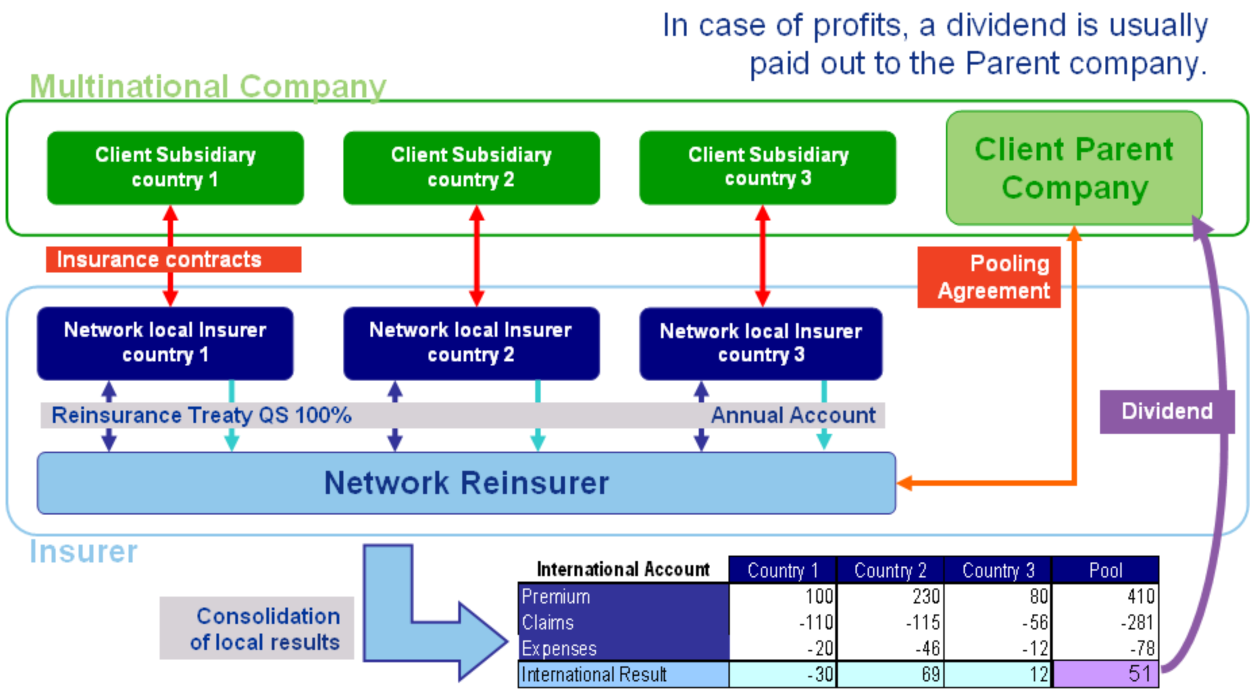



**Figure 1 : Montage de réassurance au sein d'un *pool***

**Fonctionnement d'un *pool* d'assurance :**

- La maison-mère d'une multinationale souscrit à un contrat de *pooling* auprès d'un réseau d'assureurs.
- Chaque filiale s'assure auprès d'un assureur local, membre du réseau. Les primes et prestations sont négociées et payées localement. Les pratiques et législations locales sont respectées.
- A la fin de chaque année, chaque assureur local, membre du réseau, établit pour les garanties assurées le compte de résultat du contrat local en monnaie locale.
- L'équipe centrale du réseau consolide ensuite les comptes de résultats locaux de chaque pays participant au *pool* créé pour le client et établit le compte international libellé en une monnaie unique. La consolidation permet une compensation des résultats locaux.
- Le résultat global du *pool* est ensuite redistribué selon des règles propres au type de protection de compte (ou formule de *pooling*) choisi(e) par la maison-mère (voir paragraphe I.5).

Le *pooling* international peut s'appliquer aux couvertures suivantes :

- le décès et autres garanties s'y rattachant : les rentes de conjoint et d'orphelin, les garanties en cas de décès accidentel, etc. ,
- l'arrêt de travail,
- la santé,
- la part de risques intégrée à certaines garanties de retraite (en Allemagne, Autriche, Belgique, Luxembourg, Pays-Bas, Danemark, Norvège, Suisse…).

Cette étude se limite au traitement des garanties Santé, Décès et Arrêt de travail qui correspondent aux risques liés à la commercialisation des contrats Santé et Prévoyance (Décès et Arrêt de travail).

Exemple de l'entreprise Multi (cet exemple sera repris tout au long du mémoire) :

Soit Multi, une entreprise multinationale française implantée en France, au Danemark et aux Etats-Unis. On suppose que Multi souscrit à un contrat de *pooling* auprès du réseau d'assureurs MAXIS GBN. Chaque filiale assure localement ses salariés auprès de l'un des membres du réseau. Ainsi, la maison-mère française souscrit auprès d'AXA France Vie à un contrat d'assurance collective en Santé et Prévoyance (garanties Décès et Arrêt de travail). Les filiales danoise et américaine protègent leurs salariés par un contrat collectif Santé en souscrivant respectivement auprès de Skandia Danmark et de Metropolitan Life Insurance Company (alias Metlife).

Un *pool* est établi pour chaque multinationale, c'est le cas en particulier pour la société Multi.

Remarque : il est effectivement possible et relativement fréquent de protéger ses salariés contre des garanties différentes d'un pays à l'autre.

On suppose que les chargements locaux représentent 15% des primes commerciales locales, et que les chargements internationaux représentent 2% de la prime commerciale globale.

En fin d'année, l'équipe centrale du réseau MAXIS se charge de consolider les résultats des contrats de protection sociale locaux qui lui sont remontés par les différents partenaires, et en déduit ainsi, en fonction de la formule de *pooling* choisie, le dividende à distribuer à la maison-mère.

| Multinationale | Multi | | | |
|---|---|---|---|---|
| Monnaie | EUR | | | |
| Pays | France | Danemark | Etats-Unis | Résultat consolidé |
| 1. Primes | 581 000 | 39 000 | 780 450 | 1 400 450 |
| 2. Sinistres | - 417 996 | - 40 000 | - 697 100 | -1 155 096 |
| 3. Chargements locaux | - 87 150 | - 5 850 | - 117 068 | - 210 068 |
| 4. Solde local (1+2+3) | 75 854 | - 6 850 | - 33 718 | 35 287 |
| 5. Chargements internationaux | | | | - 28 009 |
| Résultat international (4+5) | | | | 7 278 |

**Figure 2 : Exemple de compte de résultat international du *pool* associé à l'entreprise Multi**

Si les contrats d'assurance locaux n'avaient pas été mutualisés, les assureurs danois et américain auraient assumé tous les deux une perte tandis qu'AXA France Vie aurait engrangé 75 854 €.
Après consolidation des comptes locaux et prélèvement des chargements internationaux, on obtient un bénéfice international de 7 278 €. Celui-ci est ensuite redistribué en partie ou en entier à la maison-mère de Multi selon des modalités propres à la formule de *pooling* choisie.

Remarque : Les chargements internationaux désignent les frais administratifs et frais de gestion de l'assureur *leader*. Lorsqu'elle est appliquée, la prime de risque est également incluse dans ces chargements internationaux.

Le *pooling* a permis de mutualiser les risques à échelle mondiale et ainsi de réduire le déséquilibre entre les résultats d'assurance des filiales.

Le *pool* :

- réduit les probabilités de survenance des événements extrêmes,
- ne modifie pas la richesse moyenne,
- réduit la prime de risque par tête,
- réduit la volatilité.

Dans cette étude, le compte de résultat international est simplifié, seuls les éléments suivants sont pris en compte : primes, chargements locaux, chargements internationaux, sinistres réglés et prime de risque international.
En réalité, d'autres éléments tels la variation des réserves, les commissions, les taxes… sont effectivement pris en compte.

Les avantages de la mise en place d'un *pool* sont nombreux, pour les multinationales comme pour les assureurs faisant partie d'un réseau.

- **Pour l'entreprise multinationale cliente**, le *pooling* présente essentiellement des avantages, tels :

- des primes locales améliorées grâce à la mise en place du *pool* (grâce aux économies d'échelle réalisées), donc une amplification des avantages de l'assurance collective et de la protection sociale,
- des conditions privilégiées de souscription, réduisant les coûts administratifs,
- un *reporting* international, permettant le pilotage et le contrôle de la protection sociale des collaborateurs du groupe à travers le monde,
- la solvabilité et la puissance financière des réseaux d'assureurs proposant le *pooling*,
- un contrat unique et un point de contact unique pour la maison-mère, ce qui lui permet la mise en œuvre d'une stratégie claire et durable,
- la possibilité de profiter à la fois des avantages sur mesure proposés par les assureurs locaux et des avantages offerts par les grandes organisations,
- la distribution d'un dividende annuel en fonction du résultat international du *pool* et de la formule de *pooling* choisie.

- **Pour le réseau**, les avantages sont les suivants :

- les assureurs locaux sont susceptibles de signer de nombreux contrats du fait de la souscription à un programme international (dans le cas où les filiales étrangères étaient en partenariat avec des assureurs concurrents locaux avant la mise en place du *pool*),
- la distribution d'un dividende annuel à la maison-mère ne peut qu'inciter les entreprises clientes à éviter les abus.

<u>Remarque :</u> pour les assureurs locaux, la marge technique faite sur les contrats *poolés* est nulle en raison de la réassurance de type quote-part 100 % par l'assureur *leader*, mais la marge de gestion augmente sur tout le portefeuille. Le fait de faire partie d'un réseau d'assureurs apporte de nouvelles affaires aux assureurs locaux qui voient alors leurs coûts fixes répartis sur plus de contrats.

Cependant, la mise en place d'un *pool* fait peser un risque très lourd sur l'assureur *leader* qui est en réassurance de type quote-part 100 % avec les assureurs locaux et qui connaît une asymétrie très marquée entre son résultat et les dividendes versés aux multinationales clientes via la clause de participation aux bénéfices.

La particularité du *pooling* et ce qui en fait son succès auprès des multinationales est la clause de participation aux bénéfices internationale décrite à présent.

## 4. Clause de participation aux bénéfices internationale

Cette clause prévoit le versement à la maison-mère d'un dividende proportionnel au résultat international lorsque celui-ci est positif (d'où le nom de « participation aux bénéfices »). Le coefficient de proportionnalité est fonction de la formule de *pooling* choisie par la maison-mère.

En l'absence de l'application d'une prime de risque, cette clause constitue un réel déséquilibre (ou asymétrie) entre les résultats de l'entreprise multinationale cliente et ceux de l'assureur *leader*, ce dernier étant certain de ne jamais pouvoir compenser les pertes qu'il doit assumer les années où le compte de résultat international est déficitaire. La prime de risque est le chargement technique prélevé par l'assureur *leader* sur la prime commerciale globale (c'est-à-dire sur le total des primes commerciales encaissées localement). Cette prime s'apparente à une prime de réassurance et nécessite l'étude sur l'évaluation du risque porté par l'assureur *leader* que l'on fait à présent. La prime sera exprimée en pourcentage de la prime commerciale globale et est propre à chaque *pool*.

Dans un contrat classique de réassurance, le réassureur engrange les bénéfices les années où la sinistralité lui est favorable, ce qui lui permet de faire face aux années où la sinistralité est lourde, voire très lourde. Le *pooling* se distingue donc de la réassurance traditionnelle par l'existence de la clause de participation aux bénéfices et c'est pourquoi on parle de « prime de risque » plutôt que d'une « prime de réassurance ». Sans application de la prime de risque, l'assureur *leader* ne peut connaître qu'un résultat nul ou une perte.

La redistribution du résultat international entre le client et l'assureur *leader* est fonction de la formule de *pooling* choisie et fait porter plus ou moins de risque à ce dernier. Le présent mémoire traite de trois types de protection de compte : l'*Annual Stop Loss* (ou Excédent de perte ou encore Annulation Annuelle de Perte), le *Loss Carry Forward* de type *Write-off* (Report à Nouveau sur une Période Bloquée) et le *Loss Carry Forward* de type *Rolling* (Report à Nouveau sur une Période Flottante, avec ou sans fonds de contingence).

## 5. Formules de *pooling* étudiées

Dans ce paragraphe, les mécanismes de redistribution des bénéfices sont décrits puis illustrés pour chaque type de protection de compte. Les exemples présentés d'une formule de *pooling* à l'autre utilisent les mêmes résultats internationaux annuels sur un horizon de six ans, ce qui permet de comparer le résultat de l'assureur *leader* ainsi que le montant total des dividendes versés à la maison-mère sur un horizon de six ans en fonction du type de protection de compte en place. La comparaison est faite dans le paragraphe I.7.

## 5.1. L'*Annual Stop Loss* (ASL)

L'*Annual Stop Loss* ou Excédent de Perte Annuel ou encore Annulation Annuelle de Perte est la formule de *pooling* « la plus simple ».

Fonctionnement de l'*Annual Stop Loss* :
Un compte international est établi tous les ans.

- Si le compte international annuel est créditeur, le solde est entièrement versé au client multinational sous la forme d'un dividende.
- Si le compte international est débiteur, les pertes sont supportées en totalité par l'assureur *leader*.

**Aucune perte n'est reportée sur l'année suivante.**

Voici l'exemple du *pool* de l'entreprise Multi qui ferait l'objet d'une protection de compte de type *Annual Stop Loss* :

| Annual Stop Loss | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Multinationale | Multi | | | | | |
| Monnaie | EUR | | | | | |
| Année N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | - 10 000 | 25 000 |
| Dividende versé à la maison-mère 31/12/N | 80 000 | 0 | 10 000 | 30 000 | 0 | 25 000 |
| Résultat Assureur leader 31/12/N | 0 | - 90 000 | 0 | 0 | - 10 000 | 0 |

**Figure 3 : Distribution du résultat international annuel dans un *Annual Stop Loss* sur un horizon de six ans**

Avant application de la prime de risque, le résultat de l'assureur *leader* est négatif ou nul. En aucun cas il ne peut compenser les pertes qu'il prend à sa charge.

Bilan de ces six années :

| Assureur leader | Maison-mère |
|---|---|
| - 100 000 € | 145 000 € |

Cet exemple montre bien **l'importance et l'utilité de l'instauration d'une prime de risque** pour permettre à l'assureur *leader* de se protéger en cas de perte puisqu'en cas de bénéfice tout est reversé au client, tandis qu'en cas de perte il doit en assumer entièrement la charge.

## 5.2. Le *Loss Carry Forward m Years Write-Off* (*LCF m Years Write-Off*)

Le *Loss Carry Forward m Years Write-Off* est une formule de report de pertes à nouveau sur m années (m valant généralement 3 ou 5 ans) sur période bloquée. Ceci signifie que l'on s'intéresse à l'éventuelle perte reportée à la fin de chaque période fixée d'avance de m années.

Cette formule de *pooling* prévoit l'existence d'une réserve, appelée « fonds de contingence », qui est créditée, à condition de ne pas dépasser un certain plafond, les années où le compte international est positif et débitée les années de perte. Le plafond du fonds de contingence est généralement exprimé en un pourcentage des primes commerciales totales perçues. Dans notre modèle, le plafond est fixé à 25 % des primes commerciales totales.

Fonctionnement du *Loss Carry Forward m Years Write*-Off :
Un compte international est établi tous les ans.

- Si le solde international annuel est négatif, il est effacé par prélèvement sur le fonds de contingence. Si le fonds ne peut pas absorber la perte en entier, le surplus de perte est reporté.
- Si le solde est positif et qu'il n'y avait pas de report de perte en début d'année, $\alpha$ % de ce solde alimente le fonds de contingence, à condition que le plafond de ce dernier ne soit pas dépassé, et (1-$\alpha$) % du solde est versé à la maison-mère sous la forme de dividende. Si le plafond est dépassé, le surplus est versé à la maison-mère.
- Si le solde international est positif et qu'il y avait un report de perte, le bénéfice sert en premier lieu à effacer la perte. S'il existe un surplus, celui-ci est dispersé entre le fonds de contingence et le client ($\alpha$ % du surplus vient créditer le fonds de contingence et le reste est distribué à la maison-mère).

A la fin de chaque période bloquée de m années : après application des règles données ci-dessus pour la redistribution du résultat international de la $m^{\text{ième}}$ année, si le fonds de contingence est positif, il est entièrement versé à la maison-mère sous la forme d'un dividende, s'il existe un report de perte, celui-ci est entièrement pris en charge par l'assureur *leader*.

Il n'y a aucun report de perte sur la période suivante. Le fonds de contingence et le report de perte sont réinitialisés à la fin de chaque période.

Voici un exemple du fonctionnement du *Loss Carry Forward 3 Years Write-Off* appliqué sur le compte de résultat international du *pool* Multi :

***LCF 3 Years Write-Off***

**Pourcentage de bénéfices reversés sous forme de dividende : 50 %**
**Primes annuelles totales versées : 200 000 €**
**Plafond du fonds de contingence = 25% des primes totales versées = 50 000 €**

| **Multinationale** | **Multi** | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Monnaie** | **EUR** | | | | | | | |
| **Période préfixée** | **Période 1** | | | | **Période 2** | | | |
| **Année** | **1** | **2** | **3** | **Bilan fin de période** | **1** | **2** | **3** | **Bilan fin de période** |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | | 30 000 | - 10 000 | 25 000 | |
| Fonds de contingence 01/01 | 0 | 40 000 | 0 | | 0 | 15 000 | 5 000 | |
| Variation du fonds de contingence | 40 000 | - 40 000 | 0 | | 15 000 | - 10 000 | 12 500 | |
| Fonds de contingence 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | **0** | 15 000 | 5 000 | 17 500 | **0** |
| Report de perte 01/01 | 0 | 0 | - 50 000 | | 0 | 0 | 0 | |
| Variation de la perte | 0 | - 50 000 | 10 000 | | 0 | 0 | 0 | |
| Report de perte 31/12 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | **0** | 0 | 0 | 0 | **0** |
| Dividende versé à la maison-mère 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | **0** | 15 000 | 0 | 12 500 | **17 500** |
| **Bilan Assureur leader** | | | | **- 40 000** | | | | **0** |

**Figure 4 : Distribution du résultat international annuel dans un *Loss Carry Forward 3 Years Write-Off* sur un horizon de six ans**

Rappel : Les résultats internationaux annuels utilisés dans cet exemple sont les mêmes que ceux utilisés pour l'*Annual Stop Loss*, afin de comparer à résultats internationaux égaux les résultats obtenus pour le client et pour l'assureur *leader*.

Remarque : les 17 500 € versés à la maison-mère à la fin de la deuxième période viennent en supplément des 15 000 € et 12 500 € de dividendes versés en fin de première et de troisième année. Ce supplément provient de la liquidation du solde du fonds de contingence, ce dernier devant être réinitialisé en fin de période.

**Explications de la 1ère période :**

La première année, la moitié du bénéfice est placée sur le fonds de contingence et l'autre moitié est versée à la maison-mère cliente sous la forme d'un dividende. Le plafond du fonds de contingence n'est pas atteint.
La seconde année, le résultat international connaît une perte de 90 000 €. Celle-ci est effacée en partie, à hauteur de 40 000 €, par prélèvement sur le fonds de contingence. Il reste 50 000 € de perte à compenser. Ce montant est reporté à l'année suivante. Aucun dividende n'est versé au client.
La troisième année, le résultat international connaît un bénéfice de 10 000 €. Ce bénéfice va permettre d'effacer la perte reportée en partie, d'où une variation de + 10 000 € sur la perte reportée.

La troisième année correspond, dans l'exemple, à la fin de la période bloquée de 3 ans ; l'heure est donc au bilan :

- il y a un report de pertes de 40 000 € qui va donc être pris en charge par l'assureur *leader* ;
- le solde du fonds de contingence est nul, aucun dividende n'est donc versé à la maison-mère en cette fin de première période.

Il n'y a ni perte reportée ni liquidité sur le fonds de contingence en fin de période.

**Explications de la 2ème période :**

La première année de la 2ème période , le bénéfice international de 30 000 € est réparti à parts égales entre le fonds de contingence et un dividende versé à la maison-mère.
La seconde année, la perte internationale de 10 000 € est entièrement effacée par prélèvement sur le fonds de contingence.
La troisième année, le *pool* connaît à nouveau un bénéfice. Puisqu'il n'y a pas de perte reportée, ce bénéfice de 25 000 € est distribué à parts égales entre la maison-mère et le fonds de contingence.

La fin de la troisième année marque la fin de la 2ème période, le bilan est donc :

- Le solde du fonds de contingence s'élève à 17 500 €, un dividende du même montant est donc versé à la maison-mère de Multi. Le solde du fonds de contingence est réinitialisé à 0 €.
- Aucune perte n'étant reportée en fin de deuxième période, l'assureur *leader* n'a rien a payé pour cette période.

Le fonds de contingence limite le risque de perte et le montant de la perte supportée par l'assureur *leader* lorsque celle-ci a lieu.

Bilan de ces six années :

| Assureur leader | Maison-mère |
|---|---|
| - 40 000 € | 85 000 € |

## 5.3. Le *Loss Carry Forward m Years Rolling (LCF m Years Rolling)*

Le *Loss Carry Forward m Years Rolling* est une formule de report de pertes à nouveau sur m années (m valant généralement 3 ou 5 ans) sur période flottante.

Le fonctionnement de cette formule de *pooling* est similaire à celui du *Loss Carry Forward m Years Write-Off* mais, dans celle-ci, les périodes ne sont pas figées. Une période commence lorsqu'il y a un premier report de pertes et finit lorsqu'il n'y a plus de perte reportée, et ce dans la limite de m années consécutives. Si au bout de m années les bénéfices potentiels n'ont pas permi d'effacer la perte reportée, celle-ci est prise en charge par l'assureur *leader*.

Il existe deux variantes, avec ou sans existence du fonds de contingence.

Le nombre m d'années vaut généralement 3 ou 5 ans.

Contrairement au *Loss Carry Forward Write-Off*, dans le *Loss Carry Forward Rolling*, il n'y a pas de réinitialisation du fonds de contingence en fin de période lorsque celui-ci existe.

Les deux exemples ci-dessous utilisent des résultats internationaux similaires, mais le premier autorise le crédit et le débit d'un fonds de contingence, tandis que le second est une formule sans fonds de contingence.

**Exemple d'un *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* avec fonds de contingence :**

***LCF 3 Years Rolling* avec fonds de contingence**
**Pourcentage de bénéfices reversés sous forme de dividende : 50 %**
**Primes annuelles totales versées : 200 000 €**
**Plafond du fonds de contingence = 25% des primes totales versées = 50 000 €**

| Multinationale | Multi | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Monnaie | EUR | | | | | | | |
| Période flottante | | Période 1 | | | | Période 2 | | |
| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | Bilan fin de période | 5 | 6 | Bilan fin de période |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 25 000 | |
| Fonds de contingence 01/01 | 0 | 40 000 | 0 | 0 | | 0 | 0 | |
| Variation du fonds de contingence | 40 000 | - 40 000 | 0 | 0 | | 0 | 7 500 | |
| Fonds de contingence 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 500 | 7 500 |
| Report de perte 01/01 | 0 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | | 0 | - 10 000 | |
| Variation de la perte | 0 | - 50 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 10 000 | |
| Report de perte 31/12 | 0 | - 50 000 | - 40 000 | - 10 000 | 0 | - 10 000 | 0 | 0 |
| Dividende versé à la maison-mère 31/12 | 40 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 500 | 0 |
| Bilan Assureur leader | | | | | - 10 000 | | | 0 |

**Figure 5 : Distribution du résultat international annuel dans un *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* avec fonds de contingence sur un horizon de six ans**

La première année, le compte de résultat international connaît un bénéfice de 80 000 € qui est réparti à parts égales entre le fonds de contingence et un dividende versé à la maison-mère. Le plafond du fonds de contingence n'est pas dépassé.

**Explications de la première période :**

La deuxième année, le résultat international est déficitaire. La perte de 90 000 € est effacée en partie par prélèvement sur le fond de contingence, à hauteur de 40 000 €. Une perte de 50 000 € est reportée sur l'année suivante. Aucun dividende n'est versé au client.

Cette deuxième année marque donc le début d'une période, la perte doit être effacée dans les trois ans, sans quoi elle sera assumée par l'assureur *leader*.

La troisième année, le bénéfice international de 10 000 € sert à effacer une partie de la perte reportée. C'est la deuxième année consécutive de perte reportée. Aucun dividende n'est versé à la maison-mère.

La quatrième année, le bénéfice international de 30 000 € permet à nouveau d'éponger en partie la perte, aucun dividende n'est versé à la maison-mère. En fin de quatrième année, on constate une perte reportée depuis trois années consécutives. Cette perte de 10 000 € est entièrement à charge de l'assureur *leader*. On sort de la première période.

**Explications de la deuxième période :**

La cinquième année, le résultat international est en perte de 10 000 €. Le solde du fonds de contingence étant nul, la perte est entièrement reportée. On entre donc dans une deuxième période de perte. La perte doit être effacée dans les trois ans.

La sixième année, le compte de résultat international connaît un bénéfice de 25 000 €. Ceci permet dans un premier temps d'effacer entièrement la perte reportée de 10 000 €. Le surplus de 25 000 – 10 000 = 15 000 € est distribué à parts égales (7 500 €) entre le fonds de contingence et un dividende versé à la maison-mère. On sort alors de la deuxième période, puisqu'il n'y a plus de report de perte en fin de sixième année.

Bilan de ces six années :

| Assureur leader | Maison-mère |
|---|---|
| - 10 000 € | 47 500 € |

On délivre à présent l'exemple de l'entreprise Multi, en considérant que le compte international est protégé par un *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* en l'absence de fonds de contingence :

| *LCF 3 Years Rolling* sans fonds de contingence | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Multinationale | Multi | | | | | | | |
| Monnaie | EUR | | | | | | | |
| Période flottante | | Période 1 | | | | Période 2 | | |
| Année | 1 | 2 | 3 | 4 | Bilan fin de période | 5 | 6 | Bilan fin de période |
| Résultat international | 80 000 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 25 000 | |
| Report de perte 01/01 | 0 | 0 | - 90 000 | - 80 000 | | 0 | - 10 000 | |
| Variation de la perte | 0 | - 90 000 | 10 000 | 30 000 | | - 10 000 | 10 000 | |
| Report de perte 31/12 | 0 | - 90 000 | - 80 000 | - 50 000 | 0 | - 10 000 | 0 | 0 |
| Dividende versé à la maison-mère 31/12 | 80 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 000 | 0 |
| Bilan Assureur leader | | | | | - 50 000 | | | 0 |

**Figure 6 : Distribution du résultat international dans un *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* sans fonds de contingence sur un horizon de six ans**

La première année, le résultat international est en bénéfice de 80 000 €, il n'y a pas de report de perte, ce bénéfice est donc entièrement versé à la maison-mère de Multi sous la forme de dividende.

**Explications de la première période :**

La deuxième année, le résultat international est déficitaire à hauteur de 90 000 €. Cette perte est entièrement reportée à l'année suivante et doit être effacée dans les trois ans. Si tel n'est pas le cas, elle sera supportée par l'assureur *leader*. Cette première année de perte signe le début de la première période.

La troisième année, le bénéfice international de 10 000 € permet d'effacer en partie la perte. Aucun dividende n'est versé à la maison-mère et le report de pertes s'élève à 80 000 €.

La quatrième année, le compte international délivre un bénéfice de 30 000 €, ce qui permet à nouveau d'effacer une partie de la perte reportée. En fin de quatrième année, le report de perte s'élève à 50 000 €, cela fait trois années consécutives qu'il y a report de perte. L'assureur *leader* doit donc supporter la perte de 50 000 €. On sort de la première période.

**Explications de la deuxième période :**

La cinquième année, le bénéfice international est en perte de 10 000 €. Cette perte est reportée à l'année suivante et marque le début d'une deuxième période de report de perte.

La sixième année, le bénéfice international de 25 000 € permet d'effacer entièrement la perte reportée. Le surplus de 25 000 – 10 000 = 15 000 € est entièrement versé à la maison-mère sous la forme de dividende. Il n'y a plus de perte reportée en fin de sixième année, ce qui marque la fin de la deuxième période.

Bilan de ces six années :

| Assureur leader | Maison-mère |
|---|---|
| - 50 000 € | 95 000 € |

**Comparaison des deux formules de *Loss Carry Forward m Years Rolling*, avec et sans fonds de contingence sur l'exemple :**

Les résultats internationaux utilisés pour les deux formules de *pooling* sont les mêmes.
Or, avec fonds de contingence, l'assureur *leader* a pris à sa charge au total une perte de 10 000 € sur les six années observées, tandis qu'en l'absence de fonds de contingence, la perte assumée est de 50 000 €.

De son côté, la maison-mère de la compagnie Multi perçoit un total de dividendes pour les six années de 47 500 € si elle choisit la formule *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* avec fonds de contingence, contre 95 000 € si elle sélectionne la même formule mais sans fonds de contingence.

L'asymétrie entre les résultats de l'assureur *leader* et ceux de la maison-mère cliente est donc encore plus marquée lorsque la protection de compte est de type *Loss Carry Forward m Years Rolling* sans fonds de contingence. Ainsi, on peut s'attendre à trouver une prime de risque plus élevée pour cette formule.

Le risque pris par l'assureur *leader* pour les trois formules de *pooling* décrites ci-dessus est comparé dans le paragraphe I.7.

De plus, le risque de perte pour l'assureur *leader* est largement lié à la nature de la couverture. En effet, certaines garanties engendrent une sinistralité plus volatile que d'autres. Comme évoqué précédemment, ce mémoire porte sur la commercialisation des garanties Santé, Décès et Arrêt de travail (ou Incapacité/Invalidité).

## 6. Garanties traitées dans cette étude

### 6.1. La garantie Santé

Quelle que soit la couverture Santé mise en place par les organismes du Premier pilier[2] dans les pays couverts par un *pool*, les entreprises peuvent ou doivent (en fonction de la législation locale), souscrire à une solution complémentaire de remboursements de frais de soins pour leurs salariés et ayants-droit. Bien souvent, les remboursements des régimes de base (lorsqu'ils existent) ne sont pas suffisants et la complémentaire santé permet notamment de fidéliser et de motiver les collaborateurs en leur apportant une couverture complémentaire pour faire face à leurs dépenses de santé. Les prestations versées par l'assureur viennent en complément des prestations versées par le régime obligatoire.

### 6.2. La garantie Décès

Afin de compenser le manque de revenu pour la famille du salarié lorsque celui-ci décède, la

[2] Voir le rappel concernant la définition des trois piliers page 23

garantie Décès a été mise en place et prévoit le versement d'un capital, proportionnel au salaire de l'assuré au moment de son décès, au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) lors de l'adhésion au régime.

Certains contrats proposent des rentes de conjoint et des rentes éducation (pour les enfants du salarié défunt, jusqu'à la fin de leurs études).

## 6.3. La garantie Arrêt de travail

L'incapacité (ou invalidité de court-terme) est la situation temporaire dans laquelle se trouve l'assuré qui, suite à une maladie ou à un accident, ne peut exercer son activité professionnelle normalement, et se trouve ainsi privé de son salaire.

Après un certain temps, si l'état est consolidé, l'assuré bascule dans l'état d'invalidité permanente (ou invalidité de long-terme).

La couverture de l'incapacité et de l'invalidité par les organismes du premier pilier est très variable d'un pays à un autre. Les régimes complémentaires viennent donc en complément du régime obligatoire local pour aider les assurés à pallier ce manque soudain de revenu.

Généralement, les prestations versées au titre de l'incapacité sont des indemnités journalières calculées en fonction de la dernière rémunération perçue par l'assuré et leur versement peut faire l'objet d'une franchise en temps (c'est-à-dire un certain nombre de jours pendant lesquels aucune indemnité n'est versée).

Les prestations versées au titre de l'invalidité peuvent donner lieu à une sortie en rentes ou en capital.

Voici quelques exemples de pays où la garantie invalidité donne lieu à une sortie en rente : France, Canada, Etats-Unis, Norvège, Suède, Pays-Bas, Belgique, Allemagne, Royaume-Uni, Irlande, Suisse, Luxembourg, Australie, Nouvelle-Zélande et Afrique du Sud.

Voici quelques exemples de pays où la garantie invalidité donne lieu à une sortie en capital : pays d'Amérique du Sud, Espagne, pays d'Asie (bien que la garantie existe peu dans ces pays) et pays du Golfe.

La particularité française : le Code de la Sécurité Sociale définit ce qu'est l'invalidité de travail temporaire et l'invalidité permanente et ce qu'elle prend en charge.

En France, la durée d'incapacité est limitée à trois ans, au-delà de cette période, si l'état est consolidé, l'assuré devient « invalide ». L'invalidité se décline selon plusieurs degrés donnant droit à des prestations plus ou moins élevées.

Le montant des prestations journalières versées et la franchise de temps sont très volatils d'un pays à un autre, d'un domaine d'activité à un autre et d'un contrat à un autre. Ainsi, la modélisation de cette garantie n'a rien d'évident et mériterait un traitement au cas par cas.

Les trois garanties décrites ci-dessus présentent des risques inégaux pour le résultat international d'un *pool* (même sous l'hypothèse d'une « bonne » tarification du contrat). Typiquement, la Santé est bien plus prévisible que le Décès.

Comme évoqué précédemment, le résultat de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque est particulièrement asymétrique. Cependant, en fonction des garanties couvertes et du type de protection choisi par le client, le risque porté par l'assureur *leader* est plus ou moins important.

## 7. Typologie des risques

On distingue deux types de risque pour l'assureur *leader* au sein d'un *pool* :

- les risques liés à la nature de la protection de compte (*Annual Stop Loss*, *Loss Carry Forward m Years Write-Off* ou *Rolling*) ;
- les risques liés à la nature même des garanties couvertes au sein d'un *pool*.

En fonction de la formule de *pooling* choisie par la multinationale cliente, l'assureur *leader* est plus ou moins porteur du risque.

Si l'on reprend les chiffres obtenus sur l'exemple de l'entreprise Multi (paragraphe 5), en utilisant les mêmes résultats internationaux annuels du *pool* sur six années, on obtient des résultats pour l'assureur *leader* et des dividendes, sur un horizon de six ans, différents :

| ***Pool* Multi** | **Résultat de l'assureur *leader* sur six ans** | **Somme des dividendes reçus par la maison-mère sur six ans** |
|---|---|---|
| ***Annual Stop Loss*** | - 100 000 € | 145 000 € |
| ***Loss Carry Forward 3 Years Write-Off*** | - 40 000 € | 85 000 € |
| ***Loss Carry Forward 3 Years Rolling* avec fonds de contingence** | - 10 000 € | 47 500 € |
| ***Loss Carry Forward 3 Years Rolling* sans fonds de contingence** | - 50 000 € | 95 000 € |

**Figure 7 : Comparaison des résultats de l'assureur *leader* et des dividendes versés au client pour chaque formule de *pooling*, sur l'exemple du *pool* Multi**

Le schéma ci-dessous classe les formules de *pooling* étudiées dans ce mémoire en fonction du risque pris par l'assureur *leader* avant application de la prime de risque.

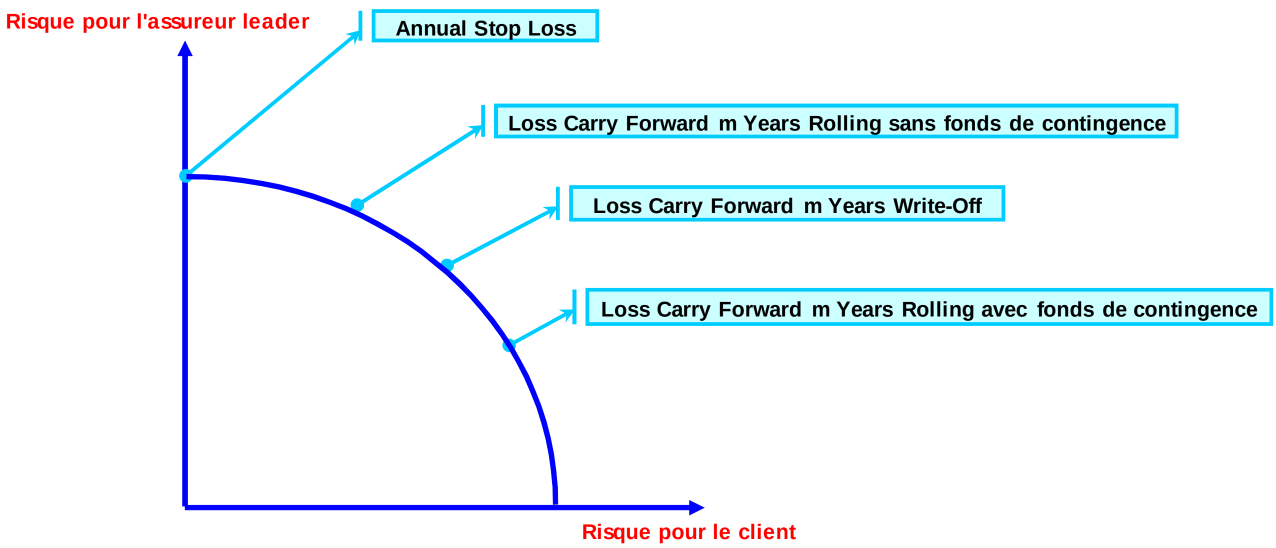



**Figure 8 : Classement des formules de *pooling* en fonction du risque porté par l'assureur *leader***

Cependant, ce classement des types de protection de compte par ordre décroissant du risque porté par l'assureur *leader* s'explique facilement.

L'*Annual Stop Loss* est la formule de *pooling* qui présente le plus de risque pour l'assureur *leader* dans la mesure où une perte annuelle du compte de résultat international équivaut nécessairement à une perte pour lui. Tous les bénéfices annuels sont reversés au client.

Les *Loss Carry Forward m Years* diminuent significativement la perte supportée par l'assureur *leader* dans la mesure où le *pool* dispose de plus d'une année pour compenser une perte éventuelle. La seule variante sans fonds de contingence est la plus risquée des formules du type *Loss Carry Forward* car aucun support ne permet d'effacer tout ou partie de la première perte qui survient. Enfin, le *Loss Carry Forward Write-Off* est la formule des *Loss Carry Forward* qui présente le plus de risque pour l'assureur *leader* dans la mesure où la période est fixée d'avance. Le résultat international annuel peut-être positif les m-1 premières années d'une période, ce qui entraîne une mise en réserve dans la limite du plafond du fonds de contingence et le versement d'une grande partie des bénéfices. Dans ce cas, si une perte abyssale survient la $m^{ième}$ année, le fonds de contingence amortira la perte mais elle devra être prise en charge en grande partie par l'assureur *leader*.

Le risque étant le plus élevé lorsque le client choisit la formule d'*Annual Stop Loss*, on peut s'attendre à trouver à risques assuranciels égaux, la prime de risque la plus importante pour cette formule.

Plus les *Loss Carry Forward* s'étendent dans le temps, moins ils présentent de risque pour l'assureur *leader* dans la mesure où il y a plus d'années qui sont susceptibles de permettre une compensation d'une perte très lourde. Ainsi, un *Loss Carry Forward 5 Years* présentera moins de risque qu'un *Loss Carry Forward 3 Years*, que la période soit flottante ou fixée d'avance, et qu'il existe un fonds de contingence ou non.

On vient donc de mettre en évidence le fait que le risque porté par l'assureur *leader* n'est pas équivalent d'un type de protection de compte à un autre. Ceci est également le cas en fonction du type de garantie couvrant les salariés.

Ainsi, en Santé, le risque qu'un sinistre très coûteux survienne est assez prévisible et, si le contrat n'est pas sous-tarifé, la mutualisation des risques permet une compensation de ce type de sinistres. En revanche, si la probabilité d'occurrence des décès est faible (pour une population salariée de 1 000 européens, on compte environ 1 à 2 décès par an), chaque sinistre décès peut impacter significativement le compte de résultat du contrat Décès, ceci est particulièrement le cas du décès des cadres supérieurs.

Exemple : On considère un contrat prévoyance (Décès et Arrêt de travail) de 10 M€ de primes qui génère un résultat technique de 50 % par an en moyenne. Si deux sinistres d'un montant de 3 M€ surviennent une même année, ils ne sont pas compensables à échelle du *pool*.

En résumé, la fréquence Décès est faible, mais tout sinistre peut avoir un impact important sur le résultat du *pool*. Il est donc nécessaire de segmenter le risque par niveau de capitaux et de mutualiser les capitaux sous risque les plus élevés en couvrant un nombre important de salariés.

Pour pallier cette problématique, les assureurs ont mis en place un système d'« écrêtement par tête » ou de « protection en *Excess of Loss* »[3] (traité XoL) qui limite les engagements pouvant impacter un *pool*. Ce mécanisme consiste à n'assurer les capitaux sous risque au sein d'un *pool* que jusqu'à un certain seuil appelé seuil d'écrêtement. Les sinistres Décès dont le coût est supérieur au seuil font l'objet d'un traitement particulier : la surcrête est mutualisée au sein du portefeuille et non plus au niveau du *pool*. Il est également possible de se tourner vers les marchés de la réassurance. Le financement de ce « processus » se fait par prélèvement d'un chargement spécifique sur la prime commerciale globale, dans le compte de résultat client.

La mutualisation des risques au sein du portefeuille permet la compensation entre bons et mauvais *pools* et évite que certains *pools* ne connaissent des pertes colossales difficilement effaçables au fil des ans. Pour le client, bien que la protection par tête engendre un chargement supplémentaire, elle permet une protection supplémentaire du compte de résultat du *pool*. Ce mécanisme réduit donc le risque pour l'assureur *leader* comme pour le client et réduit l'asymétrie sur l'ensemble des *pools*, à échelle du portefeuille.

.

[3] On rappelle que les traités en Excess of Loss (ou traité en Excédent de sinistre) sont des traités de réassurance non proportionnelle dont le fonctionnement est le suivant : l'assureur détermine le montant qu'il est prêt à conserver en cas de sinistre ; cette franchise est appelée priorité. Les traités en excédent de sinistre peuvent être décomposés en deux grandes catégories selon la nature de l'événement défini dans le traité : XS par risque ou XS par événement.

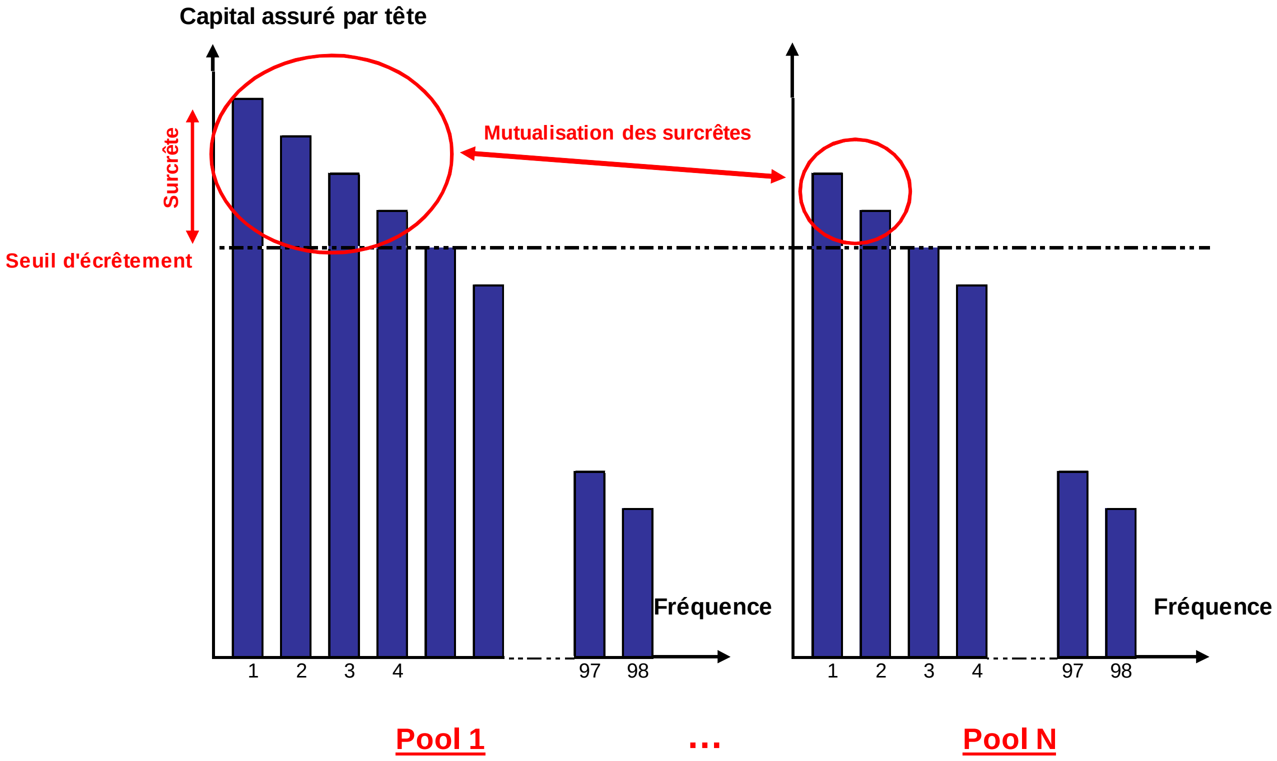



**Figure 9 : Mutualisation des surcrêtes engendrées par la protection par tête à échelle du portefeuille**

La prime liée à cette protection supplémentaire du compte de *pool* a un coût appelé « Prime de surcrête » qui doit vérifier l'équation suivante :

$$\sum_{pool\ i} \left( \text{Prime de surcrête}_i - \text{Surcrête}_i \right) \geq 0$$

# II. Modélisation et simulation du résultat international

On rappelle que le but de l'étude est de pouvoir évaluer le risque porté par l'assureur *leader* dans tout *pool*. Comme évoqué en introduction, l'approche n'est pas déterministe, mais stochastique. On souhaite simuler l'activité de tout *pool* par la méthode de Monte-Carlo. Ce chapitre se concentre sur la modélisation du résultat international de tout *pool*.

Après avoir posé les bases des notations utiles dans la suite, on s'intéresse à la modélisation de la sinistralité de chacune des trois garanties traitées dans cette étude. Cette modélisation suffit à simuler le compte de résultat international dont l'unique variable aléatoire est la sinistralité internationale dans ce modèle. Enfin, on observe l'impact de la protection par tête décrite précédemment sur le résultat international.

## 1. Jalons, vocabulaire et notations

**pays i** désigne un pays hébergeant une des filiales de la multinationale cliente incluse dans le *pool*

**garantie G** désigne l'une des garanties *poolables* (Santé, Décès ou Arrêt de travail)
On note **AT la garantie Arrêt de travail**.

Notons qu'au sein d'un même *pool*, toutes les filiales ne protègent pas nécessairement leurs salariés avec les mêmes garanties (par exemple, une filiale peut ne choisir que la garantie Santé tandis qu'une autre filiale assurera ses salariés en Décès et AT).

- **Primes**

$\Pr imes_i^G$ désigne la prime commerciale versée par la filiale du pays i à l'assureur local du même pays au titre de la garantie G. En pratique, la filiale du pays i de l'entreprise cliente verse des $\Pr imes_i = \sum_{garantie\ G} \Pr imes_i^G$ sans nécessairement connaître la répartition de la prime par garantie *poolée*.

Primes représente le total des primes commerciales reçues par tous les assureurs locaux pour les garanties *poolées* : $\boxed{\Pr imes = \sum_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} \Pr imes_i^G}$

- **Chargements locaux et internationaux**

Un pourcentage de chargements locaux est défini (par hypothèse, ce pourcentage vaut 15 % mais, l'outil de simulation prenant cette donnée en paramètre, il peut être modifié à tout moment) et correspond à la retenue sur primes commerciales de chacun des assureurs locaux inclus dans le *pool*.

De la même façon, afin de régler ses frais administratifs et frais de gestion, le réseau prélève des chargements internationaux (bien souvent égaux à 2 % de la prime commerciale globale).
On note *ChargementsLocaux* et *ChargementsInternationaux* les retenues prélevées respectivement par les assureurs locaux et le réseau.

- **Charge de sinistres ou sinistralité**

Pour chaque garantie *poolée* G et pour chaque pays i inclus dans le *pool*, on note $S_i^G$ la somme des prestations versées par l'assureur au titre de la garantie G dans le pays i. $S_i^G$ est une variable aléatoire d'espérance $E[S_i^G] = \mu_i^G$ et de volatilité (ou écart-type) $\sigma(S_i^G) = \sigma_i^G$ . Les lois utilisées pour modéliser la sinistralité des trois garanties sont décrites dans le deuxième paragraphe de ce chapitre. Pour chacune des garanties, la même famille de lois est utilisée d'un pays à l'autre ; en revanche, les paramètres sont réajustés pour chaque pays en fonction de la sinistralité attendue. Par exemple, si l'on modélise la sinistralité Santé par une gaussienne, on utilisera une moyenne et une volatilité différente selon que l'on s'intéresse à la France ou au Chili.

La sinistralité totale du *pool* est notée S et est définie comme suit :

$$\boxed{S = \sum_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} S_i^G} \quad \text{d'espérance et de volatilité :} \quad \boxed{\begin{cases} \mu_S = E[S] = \sum\limits_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} E[S_i^G] = \sum\limits_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} \mu_i^G \\ \\ \sigma_S = \sqrt{\left(\sigma^{Santé}\right)^2 + \left(\sigma^{Décès}\right)^2 + \left(\sigma^{AT}\right)^2} = \sqrt{\sum\limits_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} \left(\sigma_i^G\right)^2} \end{cases}}$$

- **Résultat international du *pool* avant incorporation de la prime de risque**

Le résultat international du *pool* avant incorporation de la prime de risque est noté : $\text{Rés.Int}^{avant}$ et se calcule comme suit :

$$\boxed{Rés.Int^{avant} = \Pr imes - S - Ch\arg ementsLocaux - Ch\arg ementsInternationaux}$$

Dans ce modèle, la seule composante aléatoire du résultat international avant application de la prime de risque est la sinistralité S, d'où l'espérance et la volatilité de ce dernier :

$$\boxed{\begin{cases} \mu_{Rés.Int^{avant}} = \Pr imes - \mu_S - Ch\arg ementsLocaux - Ch\arg ementsInternationaux \\ \\ \sigma_{Rés.Int^{avant}} = \sigma_S \end{cases}}$$

- **Prime de risque**

On appelle prime de risque, notée *PrimeDeRisque*, la prime (ou chargement technique) prélevé(e) annuellement sur la prime commerciale et qui permet à l'assureur *leader* de subvenir à ses besoins de couverture de risque. Cette prime s'apparente à une prime de réassurance. C'est un chargement technique.
Dans un contrat, le souscripteur renseigne le pourcentage de prime commerciale globale retenu au titre de la prime de risque.

- **Résultat international du *pool* après incorporation de la prime de risque**

Après incorporation de la prime de risque, le résultat international après $\text{Rés.Int}^{\text{après}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} Rés.Int^{après} &= \mathrm{Pr}imes - S - Ch\arg ementsLocaux - Ch\arg ementsInternationaux - \mathrm{Pr}imeDeRisque \\ &= Rés.Int^{avant} - \mathrm{Pr}imeDeRisque \end{aligned}$$

D'où les espérances et volatilité du résultat international après :

$$\begin{cases} \mu_{Rés.Int^{après}} = \mu_{Rés.Int^{avant}} - \mathrm{Pr}imeDeRisque \\ \\ \sigma_{Rés.Int^{après}} = \sigma_S \end{cases}$$

- **Résultat de l'assureur *leader***

On appelle $Rés.\,Ass.\,Leader^{avant}$ le résultat annuel de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque. Celui-ci est forcément négatif ou nul en raison de la clause de participation aux bénéfices qui donne lieu au versement des gains au client sous la forme de dividende alors que toute perte est assumée par l'assureur *leader*.
La variable aléatoire $Rés.\,Ass.\,Leader^{avant}$ a pour espérance $\mu_{Rés.\,Ass.\,Leader^{avant}}$ et pour volatilité $\sigma_{Rés.\,Ass.\,Leader^{avant}}$.

On note $Rés.\,Ass.\,Leader^{après}$ le résultat de l'assureur *leader* après incorporation de la prime de risque. Cette fois-ci, ce dernier est à valeurs dans $\left] -\infty\, ; \mathrm{Pr}imeDeRisque \right]$. Quel que soit le résultat international après application de la prime de risque, l'assureur *leader* perçoit annuellement la prime de risque. Puis, en fonction de la formule de *pooling* choisie, il devra assumer toute perte du résultat international chaque année, ou alors au bout d'un nombre m d'années.
La variable aléatoire $Rés.\,Ass.\,Leader^{après}$ a pour espérance $\mu_{Rés.\,Ass.\,Leader^{après}}$ et pour volatilité $\sigma_{Rés.\,Ass.\,Leader^{après}}$.

- **Perte pour l'assureur *leader***

Le but de cette étude est l'évaluation du risque porté par l'assureur *leader*. Ainsi, on s'intéresse à la probabilité de perte pour l'assureur *leader*, c'est-à-dire à la probabilité que le résultat de l'assureur *leader* soit déficitaire, ainsi que le montant moyen et la volatilité de la Perte lorsqu'elle a lieu.

On note $Perte^{avant}$ la variable aléatoire (d'espérance $\mu_{Perte^{avant}}$ et de volatilité $\sigma_{Perte^{avant}}$) représentant le montant de la perte pour l'assureur *leader* avant application d'une prime de risque. L'expression de cette perte est développée au chapitre III, en fonction de la formule de *pooling* choisie, l'assureur *leader* devra assumer toute perte annuelle ou tout report de pertes au bout de m années.
Par analogie, $Perte^{après}$ désigne la perte pour l'assureur *leader* après application de la prime de risque (d'espérance $\mu_{Perte^{après}}$ et de volatilité $\sigma_{Perte^{après}}$).

La variable *Perte* a pour support : $\left]-\infty\ ;0\right[$, elle est strictement négative.

## 2. Modélisation de la sinistralité par garantie et par pays

Ce paragraphe est consacré à la recherche de la loi la plus adéquate pour modéliser la sinistralité locale pour chaque garantie.

Un réseau tel MAXIS GBN peut couvrir un client dans une centaine de pays et se développe activement dans une quarantaine de pays. Etant donné le temps imparti, il a été décidé que, pour chaque garantie, une même famille de lois serait utilisée d'un pays à l'autre. En revanche, les paramètres de chaque loi sont différenciés en fonction de la sinistralité attendue dans chaque pays.

### 2.1. Garantie Santé

L'Organisation Mondiale de la Santé (OMS ou World Health Organization - WHO) fournit des échantillons de dépenses de Santé par pays hors de ce qui est pris en charge par le secteur public (ie par les organismes du premier pilier)[4].

Des tests d'adéquation de loi de Kolmogorov-Smirnov ont été effectués sur un échantillon de dépenses de Santé du secteur privé afin de trouver la loi la plus apte à modéliser la loi suivie par la sinistralité en Santé. Les lois suivantes sont soumises au test : la loi Normale, la loi Gamma et la loi log-normale.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test statistique d'hypothèse utilisé pour déterminer si deux échantillons suivent la même loi. Le test évalue la distance D maximale entre les quantiles des deux échantillons pris en argument. La distance D évaluée est ensuite comparée avec un seuil.

[4] Echantillons disponibles à l'adresse suivante : http://data.euro.who.int/hfadb/

Si l'hypothèse nulle est vraie (c'est-à-dire que les deux échantillons proviennent d'une même loi), alors la probabilité d'observer une statistique $D$ autant éloignée de 0 (qui correspondrait à une parfaite adéquation des deux échantillons) ou plus éloignée, vaut p-value. Plus la p-value est élevée, plus le test est significatif.

Pour un échantillon de taille n > 35, la région critique pour ne pas rejeter à tord l'hypothèse de concordance des lois empiriques et théoriques avec un risque de :

- 5 % vaut : $\frac{1.358}{\sqrt{n}}$ ;
- 1 % vaut : $\frac{1.63}{\sqrt{n}}$.

Voici les résultats obtenus par le test de Kolmogorov-Smirnov :

| Adéquation de l'échantillon à la loi | Normale | Gamma | Log-normale |
|---|---|---|---|
| Valeurs de D | 0,1644 | 0,2466 | 0.274 |
| p-value | 27,75 % | 2,36 % | 0,83 % |

Or, notre échantillon est de taille n = 73. Le plafond est donc de 0,1589 pour un risque d'erreur de 5 % et de 0,1907 pour un risque d'erreur de 1 %.
Bien que l'adéquation ne soit pas parfaite (le seuil n'est pas dépassé pour une tolérance de 1 %, mais la p-value n'est pas très convaincante), la loi la plus proche de l'échantillon est la loi normale.

Le graphique ci-dessous représente les fonctions de répartition empirique associées à l'échantillon étudié, et à des échantillons construits sur des lois gaussienne, Gamma et log-normale, prenant en paramètres les paramètres associés à la taille, la moyenne et la volatilité de notre échantillon.

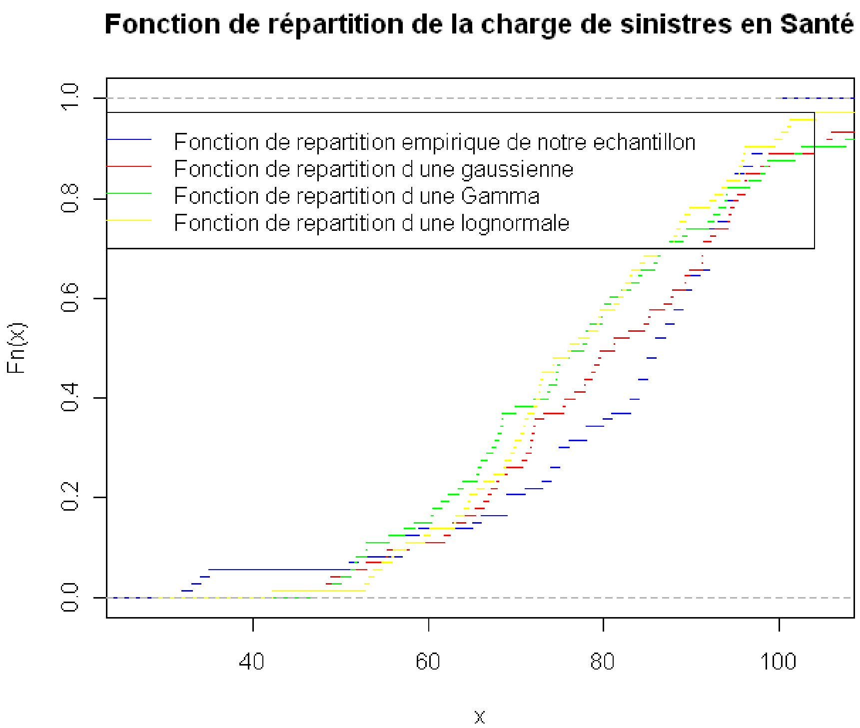



**Figure 10 : Fonctions de répartitions empirique de la sinistralité engendrée par la garantie Santé**

Le graphique confirme les résultats obtenus par le test de Kolmogorov-Smirnov : la loi la plus apte à modéliser la sinistralité en Santé est la loi normale.

En Santé, la sinistralité est assez prévisible et la loi normale s'ajuste relativement bien aux données. Espérance et variance sont proportionnelles au nombre de têtes assurées. Ainsi, on a calculé pour chaque groupement de pays similaires i une espérance $\mu_i$ et un écart-type $\sigma_i$, ce qui permet de modéliser la charge de sinistralité $S^{Santé}_i$ par une gaussienne N( $\mu_i * n_i$ ; $\sigma_i * \sqrt{n_i}$ ), où $n_i$ représente le nombre de têtes assurées dans le pays i et $\mu_i$ et $\sigma_i$ sont les espérance et écart-type de sinistralité attendue par individu dans le pays i.

$$\boxed{S_i^{Santé} \propto N(\mu_i * n_i ; \sigma_i * \sqrt{n_i}) \quad où \quad \begin{cases} \mu_i^{Santé} = E[S_i^{Santé,individuel}] \\ \sigma_i^{Santé} = \sigma\left(S_i^{Santé,individuel}\right) \end{cases}}$$

## 2.2. Garantie Décès

En décès, la sinistralité est très volatile, et autant la probabilité de décéder peut être la même pour deux collaborateurs de même âge et de même sexe, quel que soit leur niveau dans la hiérarchie, autant le montant de la prestation versée en cas de décès varie fortement d'un salarié à un autre. Afin de refléter au mieux la réalité, on se place donc dans une approche fréquence-coût qui permet de travailler séparément sur la modélisation du capital versé en cas de décès et sur le nombre annuel de décès enregistrés en fonction de l'âge et du sexe.

Lors de la réponse à un appel d'offres, les souscripteurs ne disposent que de peu d'informations (nombre de salariés couverts par pays et par garanties). Ne disposant pas d'échantillons de données propres aux entreprises clientes, il faut simuler des populations salariées en envisageant plusieurs scénarios qui permettront de trouver les lois modélisant au mieux les deux variables aléatoires « Coût » et « Fréquence ».

### 2.2.1. Modélisation de la population salariée

La première étape consiste à formuler des hypothèses permettant de modéliser une population salariée fictive qui correspond au profil d'entreprises clientes du réseau.

On modélise ici une population de type européen, d'âge moyen 40 à 45 ans. Des études similaires peuvent être faites pour des pays présentant des caractéristiques significativement différentes.

Les hypothèses utiles à la modélisation sont les suivantes : répartition de la population en fonction de l'âge, de la catégorie professionnelle et du sexe, proportion de salariés mariés et du nombre d'enfants à charge en fonction de l'âge et, enfin, répartition des salaires en fonction de la catégorie professionnelle et de l'âge.

En particulier, les hypothèses utiles à la modélisation de la fréquence sont des hypothèses de répartition de la population salariée par âge et par sexe.

| | |
|---|---|
| Age | Borne inf<br>Borne sup |
| | Entre 20 et borne inf<br>Entre borne inf et borne sup<br>Entre borne sup et 67 |
| Sexe | Proportion Homme<br>Proportion Femme |

Celles utiles à la modélisation du coût du capital versé en cas de décès sont les suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| Age | Borne inf<br>Borne sup | |
| | Entre 20 et borne inf<br>Entre borne inf et borne sup<br>Entre borne sup et 67 | |
| Conjoint | Borne inf<br>Entre 20 et borne inf<br>Entre borne et 67 ans | |
| Enfants à charge | Entre 20 et 25 ans | Min<br>Max |
| | Entre 25 et 30 ans | Min<br>Max |
| | > 30 ans | Min<br>Max |

| | | |
|---|---|---|
| Catégorie professionnelle | Proportion Cadre<br>Proportion non-cadre | |
| Salaires | Cadre | |
| | 20 à 30 ans | Espérance<br>Ecart-type |
| | 30 à 45 ans | Espérance<br>Ecart-type |
| | 45 à 67 ans | Espérance<br>Ecart-type |
| | Non-cadre | |
| | 20 à 30 ans | Espérance<br>Ecart-type |
| | 30 à 45 ans | Espérance<br>Ecart-type |
| | 45 à 67 ans | Espérance<br>Ecart-type |

Pour une population de type européen, on peut envisager ce type de démographie :

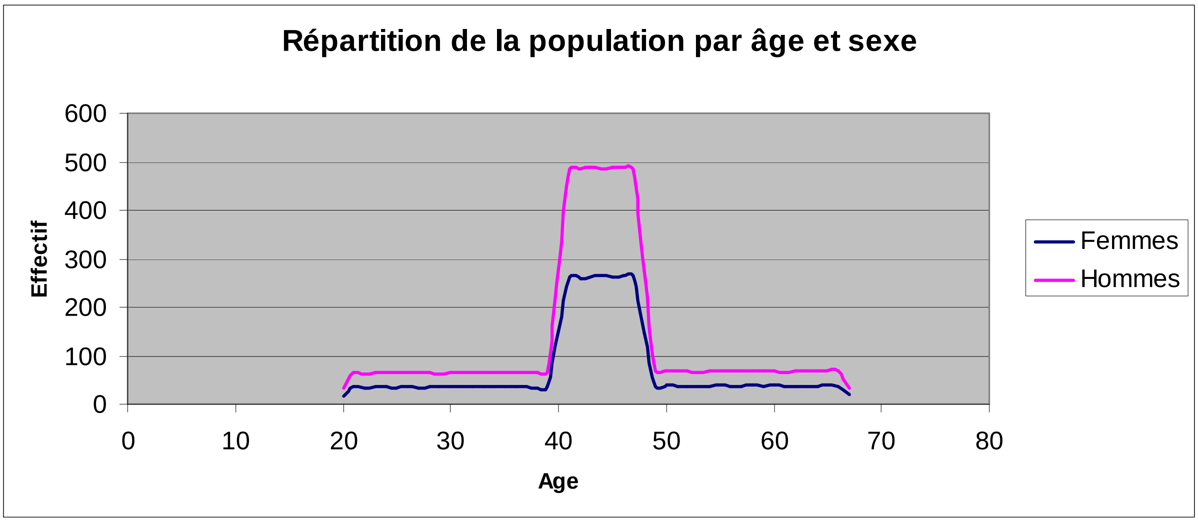



**Figure 11 : Répartition par âge et par sexe d'une population salariée de type européen de 10 000 individus**

Les populations des pays en voie de développement présentent des démographies qui sont plus de ce type :

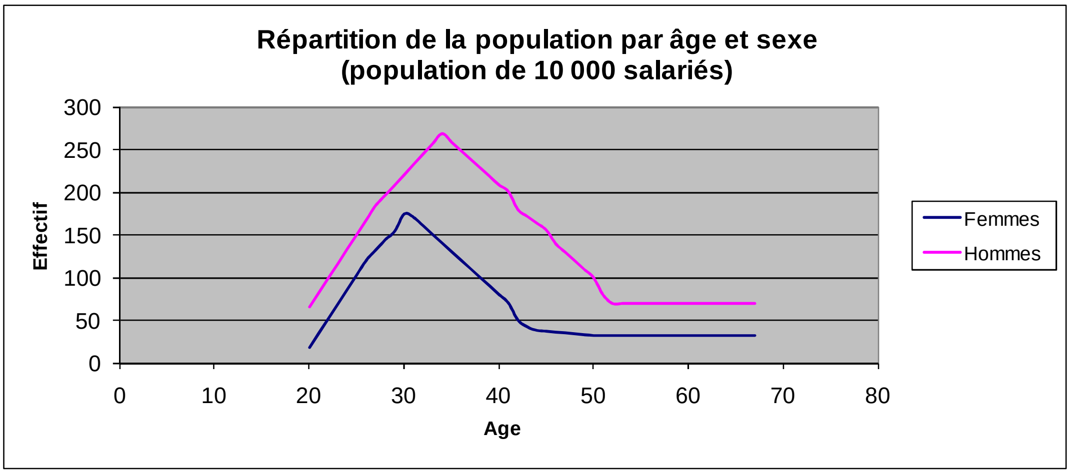



**Figure 12 : Répartition par âge et par sexe d'une population salariée de type pays en voie de développement de 10 000 individus**

Dans les pays en voie de développement, on constate non seulement que la population salariée est plus jeune que la population des pays développés, mais on constate également qu'il y a une concentration de salaires élevés autour de 30 ans. Cela s'explique par le fait que les jeunes sont plus productifs et plus au courant des nouvelles technologies que leurs aînés.

### 2.2.2. Fréquence

Dans ce paragraphe, on cherche la loi la plus apte à modéliser la fréquence annuelle de décès.

Les familles de lois discrètes de modélisation de la fréquence classiques sont les suivantes :

- la loi Binômiale : mais celle-ci est bornée (or le nombre de sinistres n'a pas de raison d'être borné) et son espérance est supérieure à sa variance ;
- la loi de Poisson : pour cette loi, espérance et variance sont égales ;
- la loi Binômiale Négative : cette loi présente une queue épaisse et sa variance est supérieure à son espérance.

Pour trouver la fréquence annuelle de décès d'une population de type européen, plusieurs scénarios sont envisagés.

Voici les six scénarios qui ont été simulés :

| | | Scénario 1 | Scénario 2 | Scénario 3 | Scénario 4 | Scénario 5 | Scénario 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Age | Borne inf | 40 | 40 | 40 | 42 | 30 | 45 |
| | Borne sup | 48 | 48 | 48 | 55 | 40 | 55 |
| | Entre 20 et borne inf | 20% | 20% | 20% | 20% | 10% | 15% |
| | Entre borne inf et borne sup | 60% | 60% | 60% | 60% | 60% | 70% |
| | Entre borne sup et 67 | 20% | 20% | 20% | 20% | 30% | 15% |
| Sexe | Proportion Homme | 65% | 50% | 40% | 70% | 65% | 65% |
| | Proportion Femme | 35% | 50% | 60% | 30% | 35% | 35% |

**Figure 13 : Hypothèses de répartition de la population salariée simulée par âge et par sexe pour les six scénarios engendrés**

Pour chaque scénario, on simule 100 populations d'entreprise de 100 000 salariés chacune en utilisant les hypothèses de répartition en âge et en sexe.

On obtient ainsi pour chaque entreprise le nombre de salariés par âge et par sexe. Il suffit ensuite d'utiliser les tables de mortalité françaises en vigueur : la table TD88-90 abattue de 37 % pour les hommes et la table TV88-90 abattue de 15% pour les femmes (provenant des conditions tarifaires standards appliquées sur les contrats « Prévoyance salarié ») pour évaluer le nombre annuel de décès pour chaque entreprise.

L'opération est répétée pour les 6 scénarios ce qui conduit à un échantillon du nombre annuel de décès de taille 600 (6 scénarios de 100 entreprises chacun).

On obtient un échantillon qui présente une estimation de la variance très supérieure à celle de l'écart-type. La famille de lois utilisée pour modéliser la variable aléatoire fréquence de décès doit être discrète, prendre en compte le fait la variance est bien largement supérieure à l'espérance. A ce titre, la loi binômiale négative est éligible. Bien que des tests d'adéquation de lois ne permettent pas de valider formellement cette hypothèse, on modélisera la fréquence par une binômiale négative définie comme suit :

$$N \propto BinNeg\,(p,r) \quad : \quad P(N=k) = \frac{\Gamma(r+k)}{k!*\Gamma(r)} * p^r * (1-p)^k$$

$$\begin{cases} E[N] = r * \dfrac{1-p}{p} \\ Var(N) = r * \dfrac{1-p}{p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{p} = \dfrac{E[N]}{Var(N)} \\ \hat{r} = \dfrac{E[N]^2}{Var(N)-E[N]} \end{cases}$$

Dans le modèle que l'on construit, pour chaque pays ou pour chaque groupement de pays similaires, le nombre annuel de décès suit une binômiale négative :

$$N_i \propto BinNeg\left(r_i * n_i\,;\,p_i\right) \qquad où \qquad \begin{cases} p_i = \dfrac{E[N_i^{individuel}]}{Var(N_i^{individuel})} \\ r_i = \dfrac{E[N_i^{individuel}]^2}{Var(N_i^{individuel}) - E[N_i^{individuel}]} \end{cases}$$

$N_i^{individuel}$ désigne la fréquence annuelle de décès.
Ainsi, pour obtenir le nombre annuel de décès engendré par la couverture de la garantie Décès dans le pays i, il faut multiplier cette fréquence par le nombre $n_i$ de salariés couverts par la garantie dans le pays i.

### 2.2.3. Coût

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la loi la plus apte à modéliser le coût d'un sinistre Décès, c'est-à-dire à modéliser le capital versé en cas de décès d'un salarié. Il doit s'agir d'une loi continue.

En cas de décès, la garantie Décès assure aux bénéficiaires du contrat le versement d'un capital proportionnel au salaire de l'employé au moment de son décès. Le coefficient de proportionnalité est fonction de la situation familiale du salarié au moment de son décès (statut marital, nombre d'enfants à charge).

Le salaire est lui-même fonction de l'âge, du sexe et du statut professionnel (cadre ou non-cadre de l'employé).

En utilisant la même méthode que pour la fréquence, on envisage six scénarios propres à une population de type européen dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

| | | | Scénario 1 | Scénario 2 | Scénario 3 | Scénario 4 | Scénario 5 | Scénario 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Age | Borne inf | | 40 | 40 | 40 | 40 | 30 | 45 |
| | Borne sup | | 48 | 48 | 48 | 48 | 40 | 55 |
| | Entre 20 et borne inf | | 20% | 20% | 20% | 20% | 10% | 15% |
| | Entre borne inf et borne sup | | 60% | 60% | 60% | 60% | 60% | 70% |
| | Entre borne sup et 67 | | 20% | 20% | 20% | 20% | 30% | 15% |
| Conjoint | Borne inf | | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 |
| | Entre 20 et borne inf | | 40% | 40% | 40% | 40% | 40% | 40% |
| | Entre borne et 67 ans | | 70% | 70% | 70% | 70% | 70% | 70% |
| Enfants à charge | Entre 20 et 25 ans | Min | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | Max | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| | Entre 25 et 30 ans | Min | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | Max | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| | > 30 ans | Min | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | Max | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Catégorie professionnel | Proportion Cadre | | 40% | 15% | 15% | 40% | 40% | 40% |
| | Proportion non-cadre | | 60% | 85% | 85% | 60% | 60% | 60% |
| Salaires | Cadre | | | | | | | |
| | 20 à 30 ans | Espérance | 37 000 | 37 000 | 37 000 | 37 000 | 37 000 | 37 000 |
| | | Ecart-type | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 |
| | 30 à 45 ans | Espérance | 45 000 | 45 000 | 45 000 | 45 000 | 45 000 | 45 000 |
| | | Ecart-type | 10 000 | 10 000 | 10 000 | 10 000 | 10 000 | 10 000 |
| | 45 à 67 ans | Espérance | 80 000 | 80 000 | 80 000 | 100 000 | 100 000 | 100 000 |
| | | Ecart-type | 40 000 | 40 000 | 40 000 | 50 000 | 50 000 | 50 000 |
| | Non-cadre | | | | | | | |
| | 20 à 30 ans | Espérance | 19 000 | 19 000 | 19 000 | 19 000 | 19 000 | 19 000 |
| | | Ecart-type | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 |
| | 30 à 45 ans | Espérance | 24 000 | 24 000 | 24 000 | 24 000 | 24 000 | 24 000 |
| | | Ecart-type | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 | 5 000 |
| | 45 à 67 ans | Espérance | 28 000 | 28 000 | 28 000 | 28 000 | 28 000 | 28 000 |
| | | Ecart-type | 4 000 | 4 000 | 4 000 | 6 000 | 6 000 | 6 000 |

**Figure 14 : Hypothèses de répartition de la population salariée simulée par âge, situation familiale, catégorie professionnelle et salaires**

Pour chacun des six scénarios, 100 entreprises de 1 000 salariés sont simulées en utilisant les hypothèses de répartition par âge, sexe, situation familiale, statut professionnel et salaire.

On obtient ainsi un grand échantillon de capitaux sous risque sur lequel on applique un test de Kolmogorov-Smirnov.

Les lois continues adaptées à la simulation du coût d'un sinistre Décès et soumises au test sont les suivantes :

- la loi normale : bien qu'elle ne soit pas à support positif, si son espérance est élevée, voire très élevée, elle présentera peu voire pas de valeurs négatives ;
- la loi Gamma : loi à support positif qui s'adapte à de nombreuses situations car l'épaisseur de sa queue varie en fonction du paramètre alpha ;
- la loi log-normale : loi à support positif.

Voici les résultats obtenus par le test de Kolmogorov-Smirnov :

| Adéquation de l'échantillon à la loi | Normale | Gamma | Log-normale |
|---|---|---|---|
| Valeurs de D | 0,179 | 0,177 | 0.207 |
| p-value | $5{,}725.10^{-6}$ % | $1{,}427.10^{-6}$ % | $1{,}422.10^{-11}$ % |

On remarque que les p-values sont très faibles, ce qui ne permet pas de considérer que les tests sont significatifs. Malgré tout, la loi la plus proche en termes de distance avec la fonction de répartition empirique de l'échantillon simulé est la loi Gamma.

La loi Gamma est définie comme suit :

$$Loi \quad \Gamma(\alpha;\beta) \quad : \quad f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^k}{\Gamma(\alpha)} * x^{\alpha-1} * e^{-\beta * x} * 1_{x>0}$$

$$\begin{cases} E[C] = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ Var(C) = \dfrac{\alpha}{\beta^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\alpha} = \dfrac{(E[C])^2}{Var(C)} \\ \hat{\beta} = \dfrac{E[C]}{Var(C)} \end{cases}$$

On utilise donc la famille de lois Gamma pour modéliser la variable coût d'un sinistre Décès dans ce modèle.

$$C_i \propto \Gamma(\alpha_i ; \beta_i) \qquad où \qquad \begin{cases} \alpha_i = \dfrac{(E[C_i])^2}{Var(C_i)} \\ \beta_i = \dfrac{E[C_i]}{Var(C_i)} \end{cases}$$

### 2.2.4. Sinistralité

La sinistralité annuelle d'un pays i, relative à la garantie Décès, est la somme des capitaux versés pour chaque décès survenu dans le pays i et dans l'année. La modélisation de cette sinistralité suit donc le modèle composé (car le nombre de décès est aléatoire, tout comme l'est le coût du capital versé lors d'un décès).

Le modèle composé ou approche fréquence-coût est défini comme suit :

On se donne un groupe homogène de risque, on considère un nombre N de sinistres et $C_1, \ldots, C_N$, les coûts des sinistres et S la charge totale (ou sinistralité).

<u>Hypothèses du modèle composé :</u>

- les variables N, $C_1, \ldots, C_N$, sont indépendantes
- les variables $(C_n)_{n>0}$ suivent la même loi
- $S = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N} C_n & si\ N > 0 \\ 0 & si\ N = 0 \end{cases}$

Ainsi, dans le modèle construit dans cette étude, on aura pour chaque pays i :

$$S_i^{Décès} = \sum_{n=1}^{N_i} C_{i,n} \quad où \begin{cases} (C_{i,n})_n \text{ représente la variable Coût}, & C_{i,n} \propto \Gamma(\alpha_i ; \beta_i) \\ N_i \text{ représente le nombre annuel de décès}, & N_i \propto BinNeg(r_i * n_i ; p_i) \end{cases}$$

$$E[S_i^{Décès}] = E[N_i] * E[C_i]$$

$$Var(S_i^{Décès}) = Var(N_i) * E[C_i^2] + E[N_i] * Var(C_i)$$

## 2.3. Garantie Arrêt de travail

D'un pays à l'autre, les garanties en cas d'incapacité de travail ou d'invalidité sont très variables, tant en terme de franchise de temps que de prestations versées en cas de réalisation de ce type de sinistres. De ce fait, la modélisation de la sinistralité relative à la couverture de l'Arrêt de travail est très complexe et mériterait une étude très poussée pour chacun des pays faisant parti d'un *pool*.

Si l'on se limite au seul cas de la France où l'on parle d'Incapacité Temporaire – Invalidité Permanente (IT-IP), autant la tarification du contrat est libre, autant le provisionnement ne l'est pas puisqu'il est encadré par l'article A331-22 du Code des Assurances. Depuis 1996, une table de provisionnement a été établie par le BCAC, construite à partir de toutes les données des contrats collectifs incapacité-invalidité.

Le BCAC fournit trois tables données par l'article A331-22 du Code des Assurances :

- table de maintien en incapacité,
- table de passage de l'incapacité à l'invalidité,
- table de maintien en invalidité.

Il existe des règles qui déterminent les trois éléments à provisionner pour cette garantie :

- les indemnités journalières à payer en cas d'incapacité (Provisions pour Sinistres A Payer Incapacité)

- les rentes d'invalidité (Provisions pour Rente d'Invalidité)
- les rentes d'invalidité qui naîtront des salariés aujourd'hui en incapacité (Provisions pour Rente d'Invalidité En Attente)

Ces règles constituent autant de lois à modéliser, ce qui rend l'évaluation de la sinistralité de la garantie Arrêt de travail complexe.

L'unique cas de la France demande un travail de longue haleine. De plus, la modélisation par une approche fréquence-coût serait très complexe car selon la réglementation, la franchise en temps varie beaucoup d'un pays à l'autre et d'un contrat à l'autre au sein d'un même pays. A titre d'exemple, la franchise de temps en invalidité est de un mois en Belgique, de un à six mois en France et de un à deux ans en Suisse.

L'étude réalisée sur ce sujet par Vincent LAUDOU et Paul UNFRIED dans leur mémoire d'actuariat : « Modélisation et valorisation d'une clause de participation aux bénéfices pour les contrats Prévoyance Salarié » est reprise ici.

Leur approche de modélisation de la sinistralité arrêt de travail consiste à modéliser le ratio : « Sinistres sur Primes nettes de frais contractuels » (ratio Sinistres / Cotisations) pour une année de survenance par une seule loi, qui prend en compte à la fois le nombre d'arrêts et le montant des prestations versées. Ce ratio intègre à la fois la structure des populations et les garanties assurées. Bien que peu précis (car peu paramétrable), il répond au besoin de modélisation des prestations d'un contrat « classique » en portefeuille.

L'idée est de tout rapporter à un « contrat de référence » qui a fait l'objet d'une étude poussée par Vincent LAUDOU et Paul UNFRIED, et ensuite, par un jeu de proportionnalité, d'en déduire la sinistralité propre au contrat que l'on simule.

Leur étude a révélé que la variable T qui représente la variable « Sinistres / Primes nettes de frais contractuels » du contrat de référence suit une loi lognormale.

La loi log-normale est définie comme suit : $\boxed{T \propto \log N(\nu;\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(T) \propto N(\nu;\theta)}$

$$\textit{Loi} \quad \log N(\nu;\theta) \quad : \quad f(x;\nu,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} * \left(\frac{\ln(x)-\nu}{\theta}\right)^2\right)}{x} \quad \textit{pour } x \in \left]0\,;+\infty\right[$$

$$\begin{cases} E[T] = \exp\left(\nu + \dfrac{\theta^2}{2}\right) \\ \sigma(T) = \sqrt{E[T]^2 * \left(\exp(\theta^2) - 1\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu = 2 * \ln(E[T]) - \dfrac{1}{2} * \ln\left(E[T]^2 + \left(\sigma(T)\right)^2\right) \\ \theta = \sqrt{\ln\left(1 + \left(\dfrac{\sigma(T)}{E[T]}\right)^2\right)} \end{cases}$$

Ainsi, dans le modèle que l'on établit, la sinistralité Arrêt de travail relative au pays i sera simulée par :

$$S_{pays\ i}^{AT} = \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} * \frac{T_i + \left(\sqrt{1+ratio_i} - 1\right) * E[\frac{S_{ref}}{P_{ref}}]}{\sqrt{1+ratio_i}}$$

$$où \quad \begin{cases} T_i \propto \log N(\nu_i\ ;\ \theta_i) \\ ratio\ est\ défini\ \ par :\ \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} = (1+ratio_i) * P_{ref} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[S_{pays\ i}^{AT}] = \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} * \dfrac{E[T_i] + \left(\sqrt{1+ratio_i} - 1\right) * E[\frac{S_{ref}}{P_{ref}}]}{\sqrt{1+ratio_i}} = \mu_i^{AT} \\ \sigma(S_{pays\ i}^{AT}) = \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} * \dfrac{\sigma(T_i)}{\sqrt{1+ratio_i}} = \sigma_i^{AT} \end{cases}$$

La sinistralité sera donc une fonction linéaire du ratio S / C du contrat de référence, et les coefficients d'ajustement sont évalués en utilisant la prime du contrat de référence et celle du contrat simulé.

<u>Remarque :</u> la variable sinistralité de l'Arrêt de travail $S^{AT}_{pays\ i}$ représente les sinistres relatifs à l'Arrêt de travail payés dans l'année ainsi que les variations de provisions.

L'étude faite par Vincent LAUDOU et Paul UNFRIED concernait exclusivement la France, des paramètres différents pour chaque pays sont évalués, en estimant les espérances et écart-types de la variable $S_{pays\ i}^{AT}$. Par la suite, des études statistiques poussées doivent venir enrichir l'outil construit.

**Digression autour de la garantie Arrêt de travail :**

A moins d'un ajustement dans la tarification, il n'est pas intéressant pour l'assureur *leader* de commercialiser un contrat couvrant l'Arrêt de travail lorsque la formule de *pooling* choisie est l'*Annual Stop Loss*.

Par exemple en France, la durée maximale d'incapacité est de 3 ans (au-delà de ces trois années, on passe en invalidité) : si un salarié quitte son état d'incapacité au bout de deux ans et demi, le provisionnement qui lui est lié est très important et sera reversé au client sous forme de dividende, alors que ce même provisionnement avait engendré des pertes pour l'assureur *leader* tout au long de sa constitution. Ceci constitue une asymétrie supplémentaire.

# 3. Modélisation et simulation du résultat international

Ce paragraphe est destiné à la construction du résultat international et à sa simulation par l'outil qui a été implémenté sous R.

Comme évoqué précédemment, dans le modèle que l'on établit ici, on considère que l'unique composante aléatoire du résultat international du *pool* est la sinistralité. On utilise la méthode de Monte-Carlo pour simuler la sinistralité totale du *pool* (le logiciel utilisé est R).

Chaque *pool* établi pour une entreprise possède des caractéristiques qui lui sont propres et qui constituent les paramètres pris en argument par l'outil qui a été construit.

Les paramètres propres à chaque *pool* sont les suivants :

- le nombre de salariés couverts par chaque garantie, et ce, pour chaque filiale
- la prime individuelle commerciale perçue par garantie et par pays
- les deux paramètres utiles à la modélisation de la sinistralité en Santé pour chaque filiale (espérance et volatilité de la sinistralité en Santé)
- les quatre paramètres utiles à la modélisation de la sinistralité en Décès (deux paramètres pour la fréquence et deux pour le coût)
- les quatre paramètres utiles à la modélisation de la sinistralité en Arrêt de travail
- le nombre d'années d'observation
- m
- le seuil d'écrêtement en cas d'application de la protection par tête de la garantie Décès

Exemple des paramètres propres au *pool* établi pour l'entreprise transnationale Multi :

| | ***Pool* Multi** | **France** | **Danemark** | **Etats-Unis** | **Pool** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Paramètres du *pool*** | **Nombre n de têtes assurées** | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | **Prime Unitaire Santé** | 1 700 | 410 | 5 203 | - |
| | **Prime Unitaire Décès** | 905 | - | - | - |
| | **Prime Unitaire Arrêt de travail** | 300 | - | - | - |
| | **n Santé** | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | **n Décès** | 200 | - | - | 200 |
| | **n AT** | 200 | - | - | 200 |
| | **mu Santé** | 272 000,00 | 34 000,00 | 437 100,00 | - |
| | **sigma Santé** | 19 982,84 | 550,00 | 87 679,49 | - |
| | **r Décès** | 14,24 | - | - | - |
| | **p Décès** | 0,97 | - | - | - |
| | **alpha Décès** | 25,30 | - | - | - |
| | **beta Décès** | 0,00 | - | - | - |
| | **E[T]** | 1,06 | - | - | - |
| | **Ecart-type (T)** | 0,48 | - | - | - |
| | **Prime de référence** | 1 000 000,00 | - | - | - |
| | **E[Sref/Pref]** | 1,10 | - | - | - |
| | **Nombre d'années d'observation (NAO)** | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | **m** | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Figure 15 : Paramètres de simulation utilisés pour le *pool* établi pour l'entreprise Multi**

## 3.1. Simulation de la sinistralité internationale

La sinistralité globale du *pool* est la somme des sinistralités des trois garanties et des filiales des pays dans lesquels l'entreprise cliente est implantée, on simule donc ces sinistralités indépendamment les unes des autres, puis les résultats obtenus sont agrégés.

$\boxed{S = S^{Santé} + S^{Décès} + S^{AT}}$ et pour chacune des trois garanties : $\boxed{S^{Garantie} = \sum_{pays\ i} S_i^{Garantie}}$

La manière dont la sinistralité a été implémentée par la méthode de Monte-Carlo sous R par filiale et par pays est décrite en Annexe 3 « Méthodologie de simulation ».

Pour chaque formule de *pooling*, le résultat international annuel est simulé 10 000 fois pour chaque année d'observation. Le nombre d'années d'observation est fonction de la formule de *pooling* mise en place pour protéger le compte international. Ce nombre est donné dans le chapitre III.

Si l'on récapitule les résultats obtenus précédemment, les lois utilisées pour la simulation sont les suivantes :

- **En Santé :**

$$S_{pays\ i}^{Santé} \propto N\left(\mu_i * n_i\ ;\ \sigma_i * \sqrt{n_i}\right) \qquad \begin{cases} E[S_{pays\ i}^{Santé}] = \mu_i * n_i & = \mu_i^{Santé} \\ \sigma(S_{pays\ i}^{Santé}) = \sigma_i * \sqrt{n_i} & = \sigma_i^{Santé} \end{cases}$$

On rappelle que $n_i$ représente le nombre d'assurés couverts dans le pays i.

- **En Décès :**

$$S_{pays\ i}^{Décès} = \sum_{n=1}^{N} C_n^i \quad où \quad \begin{cases} \left(C_n^i\right)_n \propto \Gamma(\alpha_i\ ;\ \beta_i) \\ N \propto BinNeg\,(r_i * n_i\ ;\ p_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[S_{pays\ i}^{Décès}] = r_i * n_i * \dfrac{1-p_i}{p_i} * \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} & = \mu_i^{Décès} \\ \sigma\left(S_{pays\ i}^{Décès}\right) = \sqrt{r_i * n_i * \dfrac{1-p_i}{p_i} * \dfrac{\alpha_i}{\beta_i^2} * \left(1 + \dfrac{\alpha_i + 1}{p_i}\right)} & = \sigma_i^{Décès} \end{cases}$$

- **En Arrêt de travail :**

$$S_{pays\ i}^{AT} = \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} * \frac{T_i + \left(\sqrt{1+ratio_i} - 1\right) * E[\frac{S_{ref}}{P_{ref}}]}{\sqrt{1+ratio_i}}$$

$$où \quad \begin{cases} T_i \propto \log N(\nu_i \ ; \theta_i) \\ ratio\ est\ défini\ par :\ \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} = (1+ratio_i) * P_{ref} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[S_{pays\ i}^{AT}] = \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} * \dfrac{E[T_i] + \left(\sqrt{1+ratio_i} - 1\right) * E[\frac{S_{ref}}{P_{ref}}]}{\sqrt{1+ratio_i}} & = \mu_i^{AT} \\ \sigma(S_{pays\ i}^{AT}) = \Pr ime_{nette\ ,\ i}^{AT} * \dfrac{\sigma(T_i)}{\sqrt{1+ratio_i}} & = \sigma_i^{AT} \end{cases}$$

- **Sinistralité internationale :**

$$S = \sum_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} S_i^G \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mu_S = \displaystyle\sum_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} \mu_i^G \\ \sigma_S = \sqrt{\displaystyle\sum_{\substack{pays\ i \\ garantie\ G}} \left(\sigma_i^G\right)^2} \end{cases}$$

## 3.2. Résultat international

L'outil de calcul de la prime de risque prend en paramètres le montant des primes commerciales versées localement, ainsi que les chargements retenus par les assureurs locaux et le réseau. Ainsi, à échelle internationale, on connaît : Primes – ChargementsLocaux – ChargementsInternationaux.

Avant application de la prime de risque, le résultat international du *pool* s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} Rés.\ Int^{avant} &= \sum_{pays\ i} Résultat\ local_i \quad - \quad Ch\arg ementsInternatioux \\ &= \sum_{pays\ i} (\Pr imes_i - S_i - Ch\arg ementsLocaux_i) - Ch\arg ementsInternationaux \\ &= \Pr imes - S - Ch\arg ementsLocaux - Ch\arg ementsInternationaux \end{aligned}$$

C'est sur ce résultat international que les mécanismes de redistribution propres à chaque formule de *pooling* s'appliquent.

Les résultats obtenus pour l'entreprise Multi (on a donc utilisé l'outil de Monte-Carlo qui a été construit en insérant en argument les paramètres propres à ce *pool*) sont présentés ci-dessous :

| ***Pool*** **: Entreprise Multi**<br>**La maison-mère française couvre ses 200 salariés en Santé, Décès et Arrêt de travail.**<br>**La filiale danoise couvre ses 100 salariés en Santé.**<br>**La filiale américaine couvre ses 150 salariés en Santé.** | | **France** | **Danemark** | **Etats-Unis** | **POOL** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Sinistralité** | Sinistralité moyenne / Prime Commerciale | 71,70% | 82,94% | 56,00% | 63,29% |
| | Sinistralité moyenne / Prime Pure | 86,38% | 99,93% | 67,47% | 76,26% |
| **Avant application de la prime de risque** | Résultat moyen / Prime Commerciale | 11,30% | 0,06% | 27,00% | 19,71% |
| | Volatilité du résultat / Prime Commerciale | 30,75% | 1,35% | 11,33% | 14,23% |
| | Résultat minimum / Prime Commerciale | -209,87% | -5,66% | -20,64% | -77,59% |
| | Résultat maximum / Prime Commerciale | 67,25% | 6,12% | 76,82% | 60,06% |
| | Résultat moyen / Prime Pure | 13,62% | 0,07% | 32,53% | 23,74% |
| | Volatilité du résultat / Prime Pure | 37,05% | 1,62% | 13,65% | 17,15% |

**Figure 16 : Résultats de simulation obtenus pour le *pool* établi pour l'entreprise Multi**

Les statistiques obtenues pour chaque filiale rendent compte de ce qui se passerait si les contrats locaux étaient réassurés en quote-part 100 % sans être mutualisés. La dernière colonne du tableau fournit les résultats de consolidation. On observe que le résultat local le plus volatil est celui de la France, ceci est dû à la couverture de la garantie Décès dans ce pays.

Après consolidation, le résultat international annuel moyen est de 19,71 % de la prime commerciale globale.

La mutualisation des risques est double au sein d'un *pool* :

- d'une part, les garanties se compensent les unes, les autres : une filiale peut connaître une lourde sinistralité une année en Décès, tandis que la même année, les résultats en Santé seront bons ;

- d'autre part, les mauvais résultats d'une filiale peuvent être compensés par les bons d'une autre filiale, ce qui constitue à nouveau une limitation du risque de déficit.

$$\sigma_R = \sqrt{\sum_{i,G} \left(\sigma_i^G\right)^2} \leq \sum_{i,G} \sqrt{\left(\sigma_i^G\right)^2} = \sum_{i,G} \left|\sigma_i^G\right| = \sum_{\substack{\text{pays } i \\ \text{garantie } G}} \sigma_i^G$$

Le fait de *pooler* les garanties et les résultats des filiales permet de diminuer la volatilité du résultat, et donc de diminuer le risque de perte pour l'assureur *leader*, tout en conservant un résultat moyen identique.

Après application de la prime de risque, le résultat du compte international s'établit comme suit :

$$\boxed{Rés.Int^{après} = Rés.Int^{avant} - PrimeDeRisque}$$

Les règles de redistribution du résultat international sont les mêmes après application de la prime de risque. En revanche, le résultat distribué est celui après application de la prime de risque, et il faut tenir compte du fait qu'après son application, la prime de risque est perçue chaque année par l'assureur *leader*.

## 4. Ecrêtement par tête

Comme évoquée au paragraphe 7 du chapitre I, il est possible d'améliorer la protection de compte en fixant un plafond au capital versé en cas de décès et supporté par le *pool*.

Ce type de pratique s'appelle écrêtement par tête ou protection en *Excess of Loss* (traité XoL) et limite les engagements pouvant impacter le *pool* en procédant à une mutualisation des surcrêtes au sein du portefeuille et non plus au sein du *pool*.

En contrepartie de cette protection, l'assureur *leader* va charger dans le compte client une prime de risque additionnelle correspondant aux capitaux sous risque assurés excédant le seuil de l'*Excess of Loss*. Cette prime de risque doit prendre en compte l'âge et le sexe de chaque individu représentant un risque assuranciel concerné par l'application de cette protection. Cependant, l'assureur *leader* a la possibilité de transférer une partie de ce risque en se couvrant sur le marché de la réassurance.

On cherche ici à voir l'impact de la protection par tête sur l'espérance et la volatilité attendue du coût d'un sinistre décès. On s'intéresse aux variables « Coût plafonné » et « Surplus XS », après écrêtement du capital assuré à partir du « Seuil ».

Le coût est représenté dans ce modèle par une loi Gamma comme cela a été montré au paragraphe II.2.2.3. Voici les formules donnant l'espérance et l'écart-type du coût écrêté[5] :

$$E[Coût\ Plafonné] = \frac{\alpha}{\beta} * F_{\Gamma(\alpha+1,\beta)}(Seuil) + Seuil * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)$$

*et*

$$\sigma_{Coût\ Plafonné} = \sqrt{\frac{(\alpha+1)*\alpha}{\beta^2} * F_{\Gamma(\alpha+2,\beta)}(Seuil) + Seuil^2 * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right) - \left\{\frac{\alpha}{\beta} * F_{\Gamma(\alpha+1,\beta)}(Seuil) + Seuil * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)\right\}^2}$$

Remarque : $F_{\Gamma(\alpha,\beta)}$ est la fonction de répartition d'un loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ .

En appliquant cette formule sur l'écrêtement du coût d'un sinistre décès de la filiale française de Multi, on obtient les résultats suivants :

| Seuil d'écrêtement | Rapport E[Coût Plafonné] / E[Coût] |
|---|---|
| 300 000 € | 0,9993 |
| 200 000 € | 0,9333 |
| 100 000 € | 0,5138 |

On remarque qu'il est donc possible de réduire plus ou moins fortement le capital sous risque au sein d'un *pool*.

Etant donnée la construction par une approche fréquence-coût de la sinistralité Décès pour chaque pays, ces formules modifient l'espérance et la volatilité de la sinistralité Décès par pays.

[5] Voir démonstration en Annexe 1 page 93

Calculons le surplus moyen et l'écart-type associé que l'on s'attend à trouver :

On appelle SurplusXS la variable aléatoire qui correspond à la surcrête, c'est-à-dire qu'il s'agit de la variable aléatoire qui évalue l'écart entre le coût du sinistre et le seuil, lorsque ce dernier est dépassé. Etant dans une approche fréquence-coût, il n'est pas utile de considérer le dépassement global, un surplus par tête est évalué.

Les moyenne et écart-type de la surcrête sont les suivants[6] :

$$E[SurplusXS] = E[(Coût - Seuil)_{"+\ strict"}] = \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} - Seuil$$

$$\sigma_{SurplusXS} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2} * \left\{(\alpha+1) * \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+2;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} - \alpha * \left(\frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)}\right)^2\right\}}$$

Cette formule est utile à la tarification de la prime de surcrête.

Sur l'exemple de Multi, voici l'impact d'une protection par tête de la garantie Décès sur le résultat international :

| Capital assuré par tête (filiale française) | Protection par tête | Résultat international | |
|---|---|---|---|
| | | Moyenne (en % de la prime commerciale globale) | Volatilité (en % de la prime commerciale globale) |
| moyenne : 194 090 €<br>volatilité : 38 318,27 €<br>min : 77 897,75 €<br>max : 358 907,5 € | Sans écrêtement | 19,62% | 14,43% |
| | Avec écrêtement | | |
| | Seuil de 300 000 € | 19,72% | 14,28% |
| | Seuil de 200 000 € | 19,97% | 13,73% |
| | Seuil de 100 000 € | 23,11% | 11,18% |

**Figure 17 : Impact de la mise en place d'une protection par tête sur le résultat international du *pool* établi pour l'entreprise Multi**

Pour rappel, la garantie Décès ne fait l'objet d'une couverture que pour les salariés de la maison-mère française de Multi.

Plus l'écrêtement est important, plus la volatilité du résultat international diminue et plus le résultat moyen augmente.

Dans ce chapitre, on s'est intéressé à la modélisation et à la simulation du résultat international annuel. On s'intéresse dans le chapitre suivant à la redistribution de ce résultat entre l'assureur *leader* et la maison-mère, afin d'évaluer le risque pris par l'assureur *leader* en fonction des différents types de protection de compte.

[6] Voir la démonstration en Annexe 1 page 94

# III. Evaluation et tarification du risque porté par l'assureur *leader*

Ce chapitre est destiné à présenter, dans un premier temps, les résultats issus de la simulation par méthode de Monte-Carlo pour chacune des formules de *pooling* traitées dans cette étude.

Dans un second temps, des formules donnant le risque pris par l'assureur *leader* dans un *Annual Stop Loss* sont présentées. Elles ne sont utilisables que lorsque l'hypothèse suivante est vérifiée : le résultat international annuel est gaussien.

## 1. Evaluation du risque porté par l'assureur *leader* par la méthode de Monte-Carlo

Dans le chapitre II, on a obtenu la modélisation et la simulation du résultat international annuel. A partir de ce résultat, on simule l'activité de *pooling* par la méthode de Monte-Carlo.

La manière dont le code a été implémenté est décrite en annexe (voir Annexe 3 : « Méthodologie de simulation »).

Quelle que soit la construction de prime de risque choisie, les informations qui intéressent l'assureur *leader* sont les suivantes :

- le résultat moyen de l'assureur *leader*
- la volatilité du résultat de l'assureur *leader*
- la probabilité de perte annuelle pour l'assureur *leader*
- le montant moyen de la perte assumée par l'assureur *leader* lorsqu'elle a lieu
- la volatilité de la perte assumée par l'assureur *leader* lorsqu'elle a lieu

Pour un *Annual Stop Loss*, le résultat de l'assureur s'observe sur un horizon de un an.

Pour un *Loss Carry Forward m Years Write-Off*, le résultat de l'assureur *leader* doit être observé sur un horizon de m années, car il doit assumer les éventuels reports de perte la $m^{\text{ième}}$ année.

Pour un *Loss Carry Forward m Years Rolling*, il faut pouvoir observer le résultat de l'assureur *leader* sur du long terme. En effet, les pertes sont susceptibles de surgir n'importe quelle année à partir de la $m^{\text{ième}}$ année. Par exemple, si m vaut 3, on peut étaler la simulation sur 15 ans, ce qui donnera déjà de bonnes statistiques. Si m vaut 5 ans, 20 années d'observation permettront de se faire une idée du risque de perte.

Grâce à la méthode de Monte-Carlo, on dispose d'un échantillon de données concernant le résultat annuel de l'assureur *leader*. On en déduit des statistiques pour les variables listées ci-dessus :

| Résultat de l'assureur leader | |
|---|---|
| **Résultat moyen** | **Volatilité du résultat** |
| $\dfrac{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}}{NAO * k} = \hat{L}$ | $\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} \left(Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j} - \hat{L}\right)^2}{NAO * k}}$ |

| Probabilité de perte |
|---|
| $\dfrac{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} 1_{\left\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\right\}}}{NAO * k}$ |

| Perte pour l'assureur leader | |
|---|---|
| **Montant moyen de la perte** | **Volatilité de la perte** |
| $\dfrac{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j} * 1_{\left\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\right\}}}{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} 1_{\left\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\right\}}} = \hat{P}$ | $\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} \left(Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j} * 1_{\left\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\right\}} - \hat{P}\right)^2}{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} 1_{\left\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\right\}}}}$ |

Où NAO est le nombre d'années d'observations et k le nombre de simulations.

Par ailleurs, bien que cela ne soit pas utile à l'élaboration de la prime de risque, il n'est pas inintéressant de pouvoir comparer le dividende annuel moyen versé chaque année en fonction de la formule de *pooling* :

| Dividende versé à la maison-mère |
|---|
| **Montant moyen du dividende versé** |
| $\dfrac{\sum\limits_{\substack{1\le i\le NAO \\ 1\le j\le k}} Dividende^{avant}{}_{i,j}}{NAO * k} = \hat{D}$ |

Les résultats complets de simulation relatifs à l'exemple de la filiale Multi sont donnés en Annexe 4 : « Exemples de tables fournies par l'outil construit ».

Comparaison des résultats obtenus avant application de la prime de risque pour chaque formule de *pooling* sur l'exemple de l'entreprise Multi :

| Pool Multi | Annual Stop Loss | Loss Carry Forward 3 Years Rolling sans fonds de contingence | Loss Carry Forward 3 Years Write-Off | Loss Carry Forward 5 Years Rolling sans fonds de contingence | Loss Carry Forward 5 Years Write-Off | Loss Carry Forward 3 Years Rolling avec fonds de contingence | Loss Carry Forward 5 Years Rolling avec fonds de contingence |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 3 | 5 |
| Dividende annuel moyen versé à la maison-mère (en % de la prime commerciale globale) | 20,60% | 19,78% | 19,70% | 19,70% | 19,65% | 18,07% | 18,46% |
| Résultat moyen de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | -0,90% | -0,17% | -0,12% | -0,07% | -0,04% | -0,03% | -0,01% |
| Volatilité du résultat de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | 3,94% | 1,99% | 1,62% | 1,24% | 0,81% | 0,79% | 0,37% |
| Probabilité annuelle pour l'assureur leader d'être en perte | 9,34% | 1,33% | 1,15% | 0,63% | 0,35% | 0,21% | 0,07% |
| Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | -9,59% | -12,64% | -10,82% | -11,39% | -10,17% | -12,61% | -9,97% |
| Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | 9,11% | 11,94% | 10,66% | 10,74% | 9,16% | 11,88% | 10,07% |

**Figure 18 : Comparaison des résultats obtenus suite à la redistribution du résultat international entre l'assureur *leader* et la maison-mère du *pool* établi pour l'entreprise Multi, pour différentes formules de *pooling***

Les résultats sont présentés par ordre croissant du résultat moyen de l'assureur *leader*.

Analyse des résultats obtenus :

On remarque que l'*Annual Stop Loss* est la formule de *pooling* qui présente le plus de risque pour l'assureur *leader*. Le résultat annuel moyen de l'assureur *leader* pour cette formule est de – 0,90 % (en % de la prime commerciale globale). L'écart de résultat moyen avec la deuxième formule de *pooling* présentant le plus de risque est assez important puisque l'on passe de – 0,90 % à – 0,17 % (en % de la prime commerciale globale). L'écart est beaucoup moins marqué entre les différentes variantes d'un *Loss Carry Forward*.

Cependant, la perte moyenne sous risque la plus importante n'est pas celle de l'*Annual Stop Loss*, ceci s'explique par le fait que pour les *Loss Carry Forward*, on peut avoir m années consécutives de pertes, tandis que pour un *Annual Stop Loss*, toute perte du résultat international est assumée dans l'année.

Ces résultats de simulation confirment le fait que plus les *Loss Carry Forward* s'étendent dans le temps (plus m est grand), moins le risque porté par l'assureur *leader* est grand.

A partir de ces informations, on peut évaluer la prime de risque à appliquer. L'assureur peut construire celle-ci comme il l'entend, bien qu'il reste limité par un argument commercial. On peut par exemple choisir : $\Pr imeDeRisque = \Pr obabilitéDePerte^{avant} * \left\{E[Perte^{avant}] + \lambda * \sigma\left(Perte^{avant}\right)\right\}$ (où $\lambda$ est un coefficient) ou $\Pr imeDeRisque = E[Perte^{avant}] + \lambda * \sigma\left(Perte^{avant}\right)$.

Le choix de la formule reste libre et l'on traite ici un cas général.

Cependant, on va comparer ce qui se passe avant et après application de la prime de risque pour l'assureur *leader* pour deux types de construction de prime de risque.

- La première sera du type :

$$PrimeDeRisque = ProbabilitéAnnuelleDePerte^{avant} * \{E[Perte^{avant}] + 3 * \sigma(Perte^{avant})\}$$

- La seconde du type :

$$PrimeDeRisque = E[Perte^{avant}] + 1 * \sigma(Perte^{avant})$$

## 1.1. *Annual Stop Loss*

Voici les résultats obtenus pour le *pool* Multi grâce à l'outil de simulation qui a été construit :

| Annual Stop Loss | Avant application de la prime de risque | Après application de la prime de risque 1 | Après application de la prime de risque 2 |
|---|---|---|---|
| Résultat moyen de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | -0,90% | 2,17% | 13,53% |
| Volatilité du résultat de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | 3,94% | 4,71% | 9,18% |
| Dividende annuel moyen versé à la maison-mère (en % de la prime commerciale globale) | 20,60% | 17,54% | 6,18% |
| Probabilité annuelle pour l'assureur leader d'être en perte | 9,34% | 9,34% | 9,34% |
| Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | -9,59% | -9,59% | -9,59% |
| Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | 9,11% | 9,11% | 9,11% |
| Prime de risque 1 Probabilité de perte * (E[Perte]+3*écart-type(Perte)) | 3,45% | | |
| Prime de risque 2 \|E[Perte]\|+écart-type(Perte) | 18,70% | | |

**Figure 19 : Comparaison des résultats obtenus avant et après application de la prime de risque pour l'assureur *leader* et la maison-mère pour le *pool* Multi protégé par un *Annual Stop Loss***

On remarque que quelle que soit la construction de la prime de risque, on a les trois résultats suivants :

$$\boxed{\begin{cases} Probabilité\ de\ perte^{avant} = Probabilité\ de\ perte^{après} \\ E[Perte^{avant}] = E[Perte^{après}] \\ \sigma(Perte^{avant}) = \sigma(Perte^{après}) \end{cases}}$$

C'est-à-dire que dans un *Annual Stop Loss*, l'application de la prime de risque ne réduit ni la probabilité que l'assureur *leader* connaisse une perte, ni le montant, ni la volatilité de cette perte sous risque.

Ces trois résultats étaient attendus pour la raison suivante :

$$\begin{aligned} Perte^{après} &= \left(Rés.Ass.Leader^{après}\right) * 1_{\{Rés.Ass.Leader^{après}\}} \\ &= \left(PrimeDeRisque + Rés.Int.^{après}\right) * 1_{\{PrimeDeRisque + Rés.Int.^{après} < 0\}} \\ &= \left(Rés.Int.^{avant}\right) * 1_{\{Rés.Int.^{avant} < 0\}} \\ &= Perte^{avant} \end{aligned}$$

Cependant, le résultat de l'assureur *leader* est positivement impacté par l'application de la prime de risque :

$$\boxed{\begin{cases} E[Rés.Ass.Leader^{avant}] < E[Rés.Ass.Leader^{après}] \\ \sigma\left(Rés.Ass.Leader^{avant}\right) < \sigma\left(Rés.Ass.Leader^{après}\right) \end{cases}}$$

Ceci s'explique par le fait qu'avant son application, il ne prélève pas de marge technique pour financer les pertes tandis qu'après, il encaisse chaque année la prime de risque, ce qui lui permet de compenser les pertes potentielles, au moins partiellement. La volatilité du résultat de l'assureur *leader* augmente après application de la prime de risque car celui-ci prend plus de valeurs.

## 1.2. *Loss Carry Forward m Years Write-Off*

| Loss Carry Forward 3 Years Write-Off | Avant application de la prime de risque | Après application de la prime de risque 1 | Après application de la prime de risque 2 |
|---|---|---|---|
| | m = 3 ans | | |
| Résultat annuel moyen de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | -0,12% | 0,12% | 6,64% |
| Volatilité du résultat annuel de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | 1,62% | 1,67% | 3,52% |
| Dividende annuel moyen versé à la maison-mère (en % de la prime commerciale globale) | 19,70% | 19,46% | 12,93% |
| Probabilité annuelle pour l'assureur leader d'être en perte | 1,15% | 1,19% | 2,38% |
| Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | -10,82% | -10,81% | -12,42% |
| Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | 10,66% | 10,69% | 11,81% |
| Prime de risque 1 Probabilité annuelle de perte * (\|E[Perte]\|+3*écart-type(Perte)) / m | 0,49% | | |
| Prime de risque 2 (\|E[Perte]\|+écart-type(Perte)) / m | 7,16% | | |

**Figure 20 : Comparaison des résultats obtenus avant et après application de la prime de risque pour l'assureur *leader* et la maison-mère pour le *pool* Multi protégé par un *Loss Carry Forward 3 Years Write-Off***

La prime de risque 1 est très faible et ne permet pas de voir nettement l'impact qu'elle peut avoir sur le résultat de l'assureur *leader*. On s'intéresse donc plus aux résultats de simulation obtenus par application de la prime de risque 2.

La probabilité de perte augmente après application de la prime de risque car la cette dernière est prélevée sur le résultat international en tant que prime technique, ce qui augmente la probabilité que le compte de résultat du *pool* soit en déficit, ainsi que le montant moyen de ce déficit.

On retiendra les résultats suivants :

$$\begin{cases} \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant} \leq \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{apr\grave{e}s} \\ \left|E[Perte^{avant}]\right| \leq \left|E[Perte^{apr\grave{e}s}]\right| \\ \sigma(Perte^{avant}) \leq \sigma(Perte^{apr\grave{e}s}) \end{cases}$$

En revanche :

$$\begin{cases} E[R\acute{e}s.Ass.Leader^{avant}] < E[R\acute{e}s.Ass.Leader^{apr\grave{e}s}] \\ \sigma(R\acute{e}s.Ass.Leader^{avant}) < \sigma(R\acute{e}s.Ass.Leader^{apr\grave{e}s}) \end{cases}$$

De plus, on donne ici les résultats de simulation d'un *Loss Carry Forward 5 Years Write-Off* afin de comparer les résultats obtenus lorsque la protection de compte couvre une période plus longue.

| Loss Carry Forward 5 Years Write-Off | Avant application de la prime de risque | Après application de la prime de risque 1 | Après application de la prime de risque 2 |
|---|---|---|---|
| | m = 5 ans | | |
| Résultat annuel moyen de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | -0,04% | 0,10% | 3,77% |
| Volatilité du résultat annuel de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | 0,81% | 0,82% | 1,45% |
| Dividende annuel moyen versé à la maison-mère (en % de la prime commerciale globale) | 19,65% | 19,52% | 15,84% |
| Probabilité annuelle pour l'assureur leader d'être en perte | 0,35% | 0,36% | 0,58% |
| Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | -10,17% | -10,20% | -11,82% |
| Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | 9,16% | 9,22% | 10,83% |
| Prime de risque 1 Probabilité annuelle de perte * (\|E[Perte]\|+3*écart-type(Perte)) | 0,13% | | |
| Prime de risque 2 (\|E[Perte]\|+écart-type(Perte)) / m | 3,87% | | |

**Figure 21 : Comparaison des résultats obtenus avant et après application de la prime de risque pour l'assureur *leader* et la maison-mère pour le *pool* Multi protégé par un *Loss Carry Forward 5 Years Write-Off***

On retiendra les résultats suivants :

$$Si \quad m_1 < m_2$$

$$\begin{cases} \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant}(m_2) \leq \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant}(m_1) \\ \left|E[Perte^{avant}(m_2)]\right| \leq \left|E[Perte^{avant}(m_1)]\right| \\ \sigma(Perte^{avant}(m_2)) \leq \sigma(Perte^{avant}(m_1)) \end{cases}$$

Ces résultats s'expliquent par le fait que plus la protection de compte s'effectue sur du "long" terme, plus les pertes reportées ont de probabilité d'être effacées.

## 1.3. *Loss Carry Forward m Years Rolling*

| Loss Carry Forward 3 Years Rolling avec fonds de contingence | Avant application de la prime de risque | Après application de la prime de risque 1 | Après application de la prime de risque 2 |
|---|---|---|---|
| | | m = 3 ans | |
| Résultat annuel moyen de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | -0,03% | 0,07% | 7,96% |
| Volatilité du résultat annuel de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | 0,79% | 0,80% | 2,40% |
| Dividende annuel moyen versé à la maison-mère (en % de la prime commerciale globale) | 18,07% | 17,97% | 10,28% |
| Probabilité annuelle pour l'assureur leader d'être en perte | 0,21% | 0,21% | 0,78% |
| Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | -12,61% | -12,62% | -15,03% |
| Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | 11,88% | 11,90% | 13,69% |
| Prime de risque 1 Probabilité annuelle de perte * (\|E[Perte]\|+3*écart-type(Perte)) | | 0,10% | |
| Prime de risque 2 (\|E[Perte]\|+écart-type(Perte)) / m | | 8,16% | |

**Figure 22 : Comparaison des résultats obtenus avant et après application de la prime de risque pour l'assureur *leader* et la maison-mère pour le *pool* Multi protégé par un *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* avec fonds de contingence**

La prime de risque 1 est trop faible pour que l'impact créé par son application soit nettement visible, on s'intéresse donc plus aux résultats obtenus après application de la prime de risqué 2.

Les résultats obtenus sont les mêmes que pour le *Loss Carry Forward Write-Off* et sont les mêmes avec ou sans fonds de contingence :

$$\boxed{\begin{cases} \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant} \leq \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{apr\grave{e}s} \\ \left|E[Perte^{avant}]\right| \leq \left|E[Perte^{apr\grave{e}s}]\right| \\ \sigma\left(Perte^{avant}\right) \leq \sigma\left(Perte^{apr\grave{e}s}\right) \end{cases}}$$

Et :

$$\boxed{\begin{cases} E[R\acute{e}s.Ass.Leader^{avant}] < E[R\acute{e}s.Ass.Leader^{apr\grave{e}s}] \\ \sigma\left(R\acute{e}s.Ass.Leader^{avant}\right) < \sigma\left(R\acute{e}s.Ass.Leader^{apr\grave{e}s}\right) \end{cases}}$$

| Loss Carry Forward 3 Years Rolling sans fonds de contingence | Avant application de la prime de risque | Après application de la prime de risque 1 | Après application de la prime de risque 2 |
|---|---|---|---|
| | m = 3 ans | | |
| Résultat annuel moyen de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | -0,17% | 0,46% | 7,48% |
| Volatilité du résultat annuel de l'assureur leader (en % de la prime commerciale globale) | 1,99% | 2,13% | 4,46% |
| Dividende annuel moyen versé à la maison-mère (en % de la prime commerciale globale) | 19,78% | 19,15% | 12,14% |
| Probabilité annuelle pour l'assureur leader d'être en perte | 1,33% | 1,40% | 2,81% |
| Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | -12,64% | -12,82% | -14,94% |
| Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte (en % de la prime commerciale globale) | 11,94% | 12,04% | 13,37% |
| Prime de risque 1 Probabilité annuelle de perte * (\|E[Perte]\|+3*écart-type(Perte)) | 0,65% | | |
| Prime de risque 2 (\|E[Perte]\|+écart-type(Perte)) / m | 8,19% | | |

**Figure 23 : Comparaison des résultats obtenus avant et après application de la prime de risque pour l'assureur *leader* et la maison-mère pour le *pool* Multi protégé par un *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* sans fonds de contingence**

En comparant les formules avec et sans fonds de contingence, on retiendra les résultats suivants :

$$\begin{cases} \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant}(avec\ \ fonds) \leq \Pr obabilit\acute{e}\ de\ perte^{avant}(sans\ \ fonds) \\ \left|E[Perte^{avant}(avec\ \ fonds)]\right| \leq \left|E[Perte^{avant}(sans\ \ fonds)]\right| \\ \sigma\left(Perte^{avant}(avec\ \ fonds)\right) \leq \sigma\left(Perte^{avant}(sans\ \ fonds)\right) \end{cases}$$

Cependant, la perte moyenne sous risqué et sa volatilité est à peu près stable si l'on compare les formules avec et sans fonds de contingence, l'écart existant n'est pas significatif.

## 2. Evaluation du risque porté par l'assureur *leader* sous approximation gaussienne du résultat international

L'outil de simulation construit dans cette étude fournit des résultats précieux d'évaluation du risque pris par l'assureur *leader*. Mais la limite de cet outil implémenté sous R et fondé sur la méthode de Monte-Carlo est le temps de calcul. Afin d'obtenir des statistiques fiables, il faut lancer un nombre important de simulations. On peut alors se demander s'il n'est pas possible d'approximer le risque pris par l'assureur *leader* afin d'obtenir une formule fermée qui le calcule directement.

## 2.1. Approximation gaussienne du résultat international avant application de la prime de risque

L'hypothèse d'un résultat international gaussien équivaut à l'hypothèse d'une sinistralité international gaussienne puisque

$$Rés.\ Int^{avant} = \mathrm{Pr}imes - S - Ch\arg ements\ locaux - Ch\arg ements\ \mathrm{int}ernationaux$$

et que l'on suppose dans ce modèle que les Primes, Chargements locaux et Chargements internationaux sont déterministes.

Quels sont les cas où l'on peut se placer sous l'hypothèse suivante : « la sinistralité internationale est gaussienne » ?

**Premier cas :**

Puisque le modèle prévoit la simulation de la sinistralité Santé locale par une gaussienne, par hypothèse d'indépendance de survenance des sinistres d'un pays à l'autre, on obtient que la sinistralité Santé internationale est également gaussienne.

Ainsi, dans le cas où l'unique garantie commercialisée dans un *pool* est la Santé, le résultat international est gaussien, il ne s'agit alors plus d'une approximation.

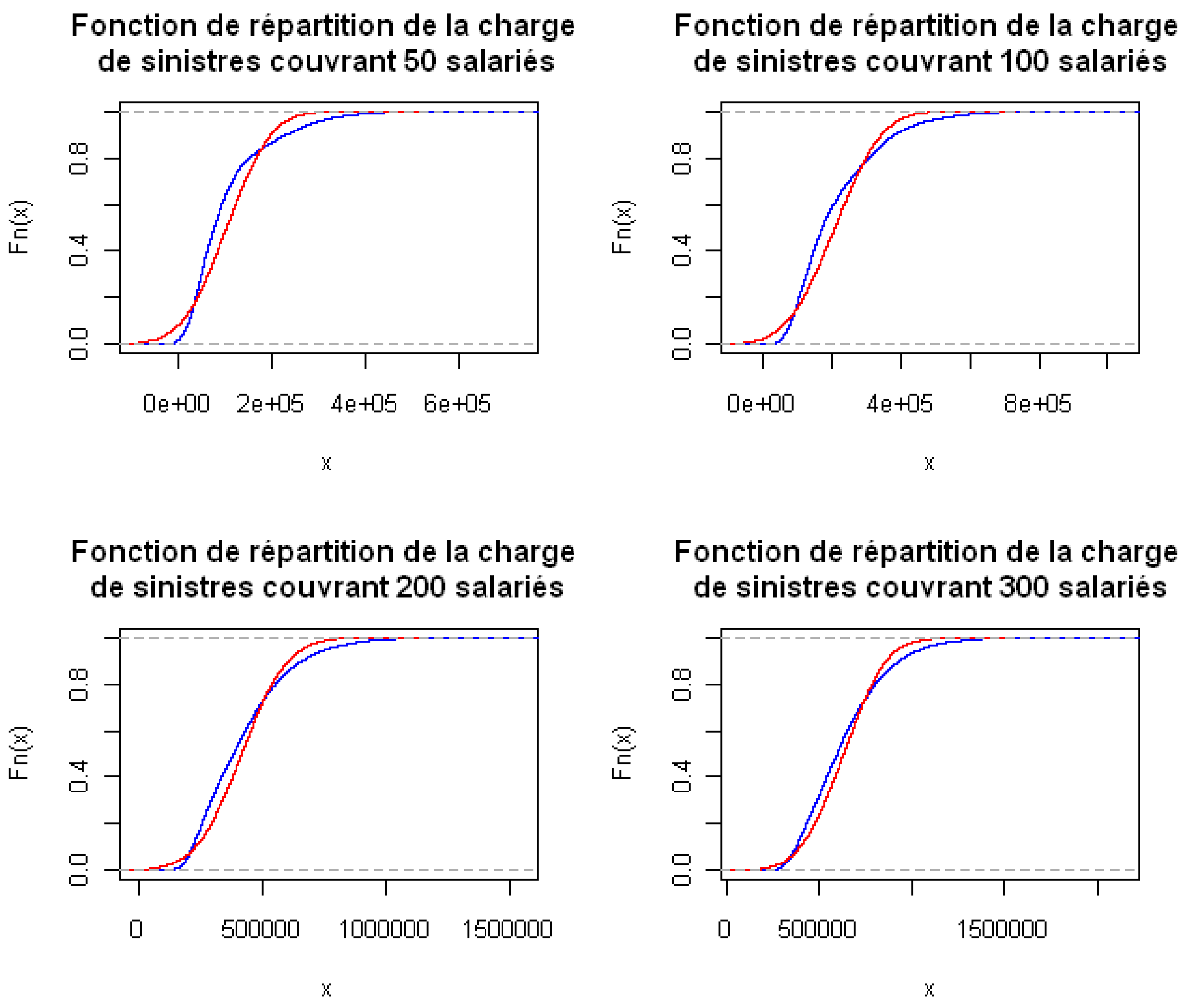
**Deuxième cas :**

On s'intéresse à présent à tout *pool* commercialisant les trois garanties évoquées précédemment (Santé, Décès et Arrêt de travail). La sinistralité de la garantie Décès étant modélisée dans une approche fréquence-coût, l'approximation par une gaussienne n'est pas évidente. On montre cependant qu'il n'est pas abberrant d'opter pour cette approximation.

La sinistralité internationale est la somme des sinistralités de chaque pays (ou de chaque zone), qui représentent elles-même la somme du coût des sinistres qui ont eu lieu localement. On peut supposer que, au sein de chaque pays et pour chaque garantie, les sinistres interviennent indépendamment les uns des autres, et que la loi de leur coût est identiquement distribuée. Si chaque sinistralité locale converge vers une gaussienne, par indépendance inter-pays, on obtiendra le caractère gaussien de la sinistralité globale.

On utilise les paramètres de sinistralité de la maison-mère française de Multi pour observer la convergence.

Sont représentées ci-dessous la fonction de répartition obtenue par simulations stochastiques (en bleu) de la sinistralité totale (toutes garanties confondues) pour un nombre croissant de têtes assurées et la fonction de répartition théorique de la sinistralité (en rouge) :




Ces quatre premiers graphiques ne sont pas très satisfaisants. En-dessous de 300 têtes assurées, il est difficile d'approximer la sinistralité locale de la maison-mère française de Multi par une loi Normale.

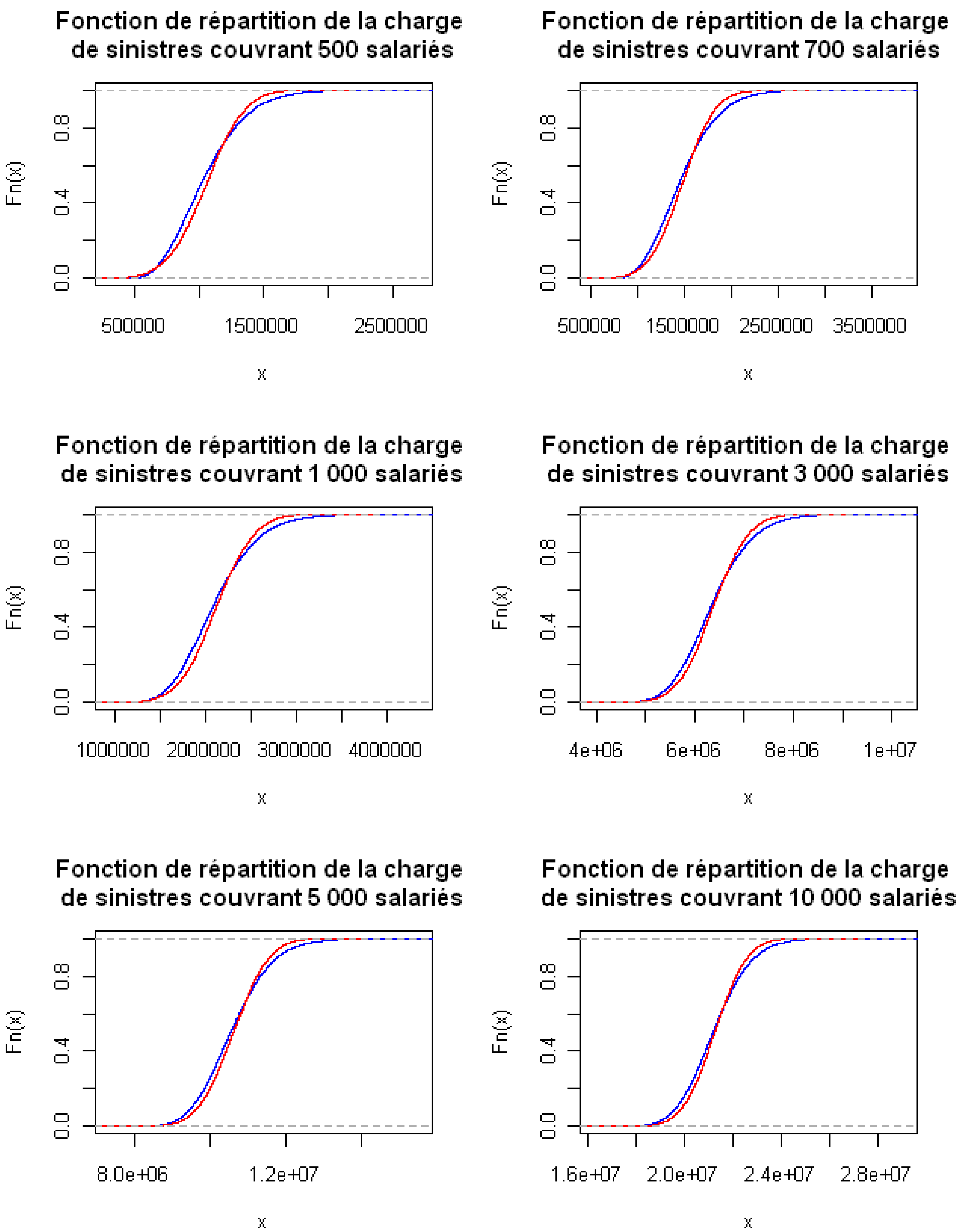



**Figure 24 : Convergence de la fonction de répartition empirique de la sinistralité locale**

La fonction de répartition de la sinistralité converge bien vers celle d'une loi normale. L'approximation normale, même dans une approche fréquence-coût, est bien envisageable.

Afin de tester l'adéquation de la loi empirique de la sinistralité locale de la maison-mère de Multi avec la loi normale, on effectue des tests de Kolmogorov-Smirnov.
Pour un échantillon de taille 100, le seuil du test de Kolmogorov-Smirnov au seuil de risque 5 % vaut : $\frac{1.358}{\sqrt{100}} = 0{,}1358$. Si l'on trouve des valeurs de D en dessous de ce seuil critique, on peut considérer que l'échantillon peut suivre une loi normale au seuil de risque 5 %.
Pour rappel, D représente la distance maximale entre les quantiles des deux échantillons pris en argument par le test.

Les résultats obtenus pour des échantillons de taille 100 sont les suivants (on trouvera en bleu les échantillons susceptibles de suivre une loi normale) :

| **Nombre de têtes assurées** | **50** | **100** | **200** | **300** | **500** | **700** | **1 000** | **3 000** | **5 000** | **10 000** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeurs de D | 0,42 | 0,3 | 0,24 | 0,3 | 0,13 | 0,12 | 0,08 | 0,12 | 0,08 | 0,12 |

Le test de Kolmogorov-Smirnov concorde avec les conclusions obtenues par observation des courbes de fonction de répartition : dans le cas de l'entreprise Multi, à partir de 500 salariés couverts en France, on peut considérer que la sinistralité locale est gaussienne.

En utilisant l'approximation par la loi normale :

$$Rés.Int.^{avant} \propto N\left(\mu_{Rés.Int^{avant}} ; \sigma_{Rés.Int^{avant}}\right)$$

$$où \quad \begin{cases} \mu_{Rés.Int^{avant}} = \Pr imes - Ch\arg ementsLocaux - Ch\arg ementsInternationaux - \mu_S \\ \sigma_{Rés.Int^{avant}} = \sigma_S \end{cases}$$

## 2.2. Evaluation du risque porté par l'assureur *leader* dans un *Annual Stop Loss* sous hypothèse gaussienne du résultat international

Dans ce paragraphe, on évalue le risque porté par l'assureur *leader* d'un *pool* dont le compte est protégé par un *Annual Stop Loss* en se plaçant sous l'hypothèse suivante : le résultat international est gaussien.

**Risque porté par l'assureur *leader* avant application de la prime de risque**

Dans le cas d'un *Annual Stop Loss* dont le mécanisme a été décrit précédemment, si en fin d'année le compte de résultat international est positif, le bénéfice est entièrement reversé à la maison-mère cliente, tandis qu'en cas de perte, celle-ci est entièrement assumée par l'assureur *leader*.

Ainsi, le résultat de ce dernier avant incorporation de la prime de risque s'écrit simplement :

$$Rés.\ Ass.\ Leader^{avant} = \begin{cases} 0 & si\ Rés.Int^{avant} \geq 0 \\ Perte^{avant} & si\ Rés.Int^{avant} < 0 \end{cases}$$

On commence par s'intéresser à la variable aléatoire $Perte^{avant}$, qui représente la perte assumée par l'assureur *leader*.

- **Probabilité que l'assureur *leader* connaisse une perte avant application de la prime de risque**

Sous hypothèse gaussienne du résultat international avant application de la prime de risque, la probabilité de perte pour l'assureur *leader* se calcule simplement[7] :

$$\mathrm{Pr}\,obabilité\ de\ perte^{avant} = \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)$$

Afin de comparer les résultats obtenus par simulations stochastiques avec la probabilité de perte obtenue par approximation gaussienne par la formule ci-dessus, on trace sur un même graphique la probabilité de perte obtenue par simulation par la méthode de Monte-Carlo (en bleu) et celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international (en rose), pour un nombre différents de salariés couverts.

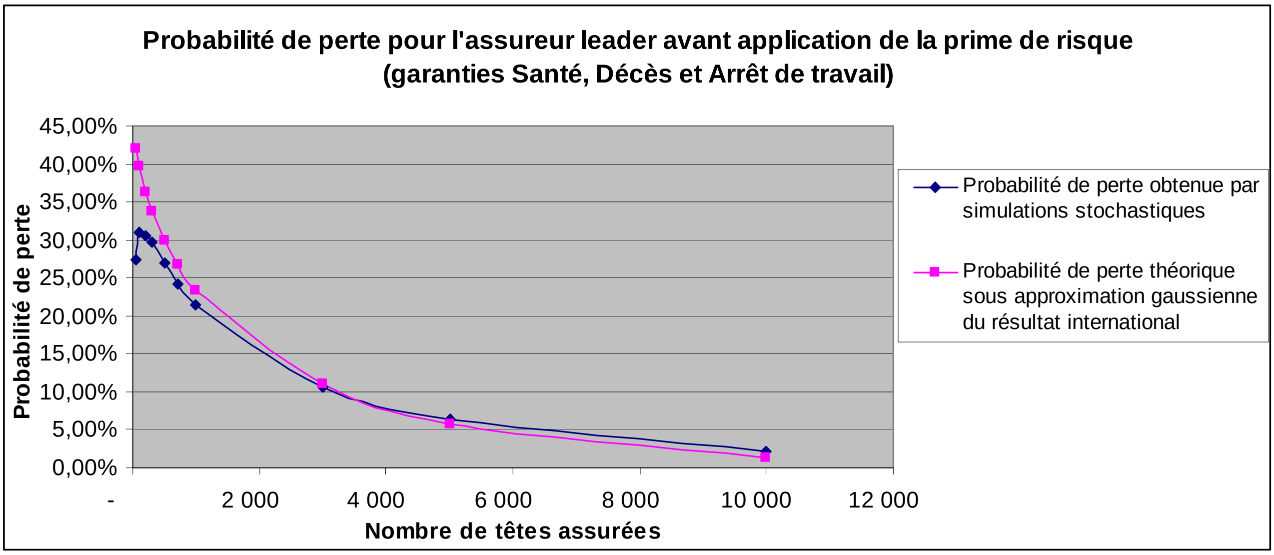



**Figure 25 : Convergence de la probabilité de perte pour l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

Lorsque le nombre d'assurés est faible, l'écart entre la probabilité de perte réelle et la probabilité de perte théorique sous l'approximation gaussienne est assez important (27% contre 42,5%), mais plus le *pool* couvre un nombre important de salariés, plus l'approximation normale est fiable.

[7] Voir la démonstration en annexe 1 page 85

En dessous de 500 têtes assurées, la probabilité calculée en théorie surestime largement la « réalité ».

On peut observer plus précisément ce qui se passe entre 100 et 1 000 têtes assurées, pour un *pool* toutes garanties.

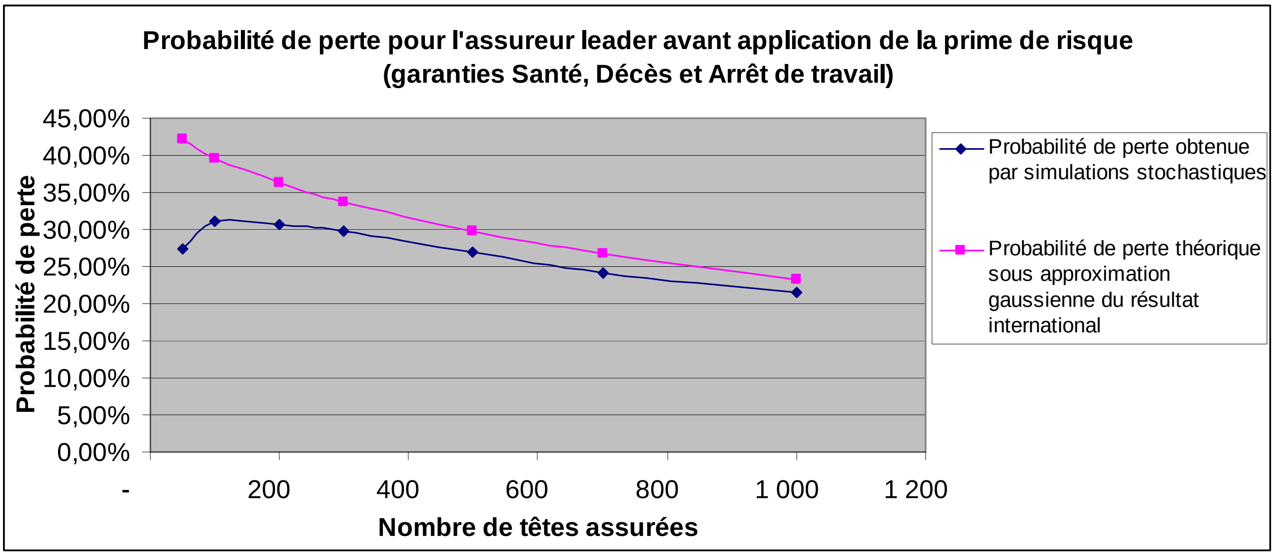



**Figure 26 : Convergence de la probabilité de perte pour l'assureur *leader* couvrant entre 100 et 1 000 salariés avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

Les chiffres obtenus ci-dessus sont propres à la modélisation du *pool*, ils ne sont donc pas à retenir, ce qui est ici intéressant est de voir l'écart entre les résultats obtenus par la théorie et ceux obtenus par la méthode de Monte-Carlo.

Comme attendu, la sinistralité en Santé étant modélisée par une gaussienne, la probabilité calculée ci-dessus ne constitue pas une approximation lorsque l'unique garantie *poolée* est la Santé.
D'où le fait que les courbes tracées ci-dessous soient confondues :

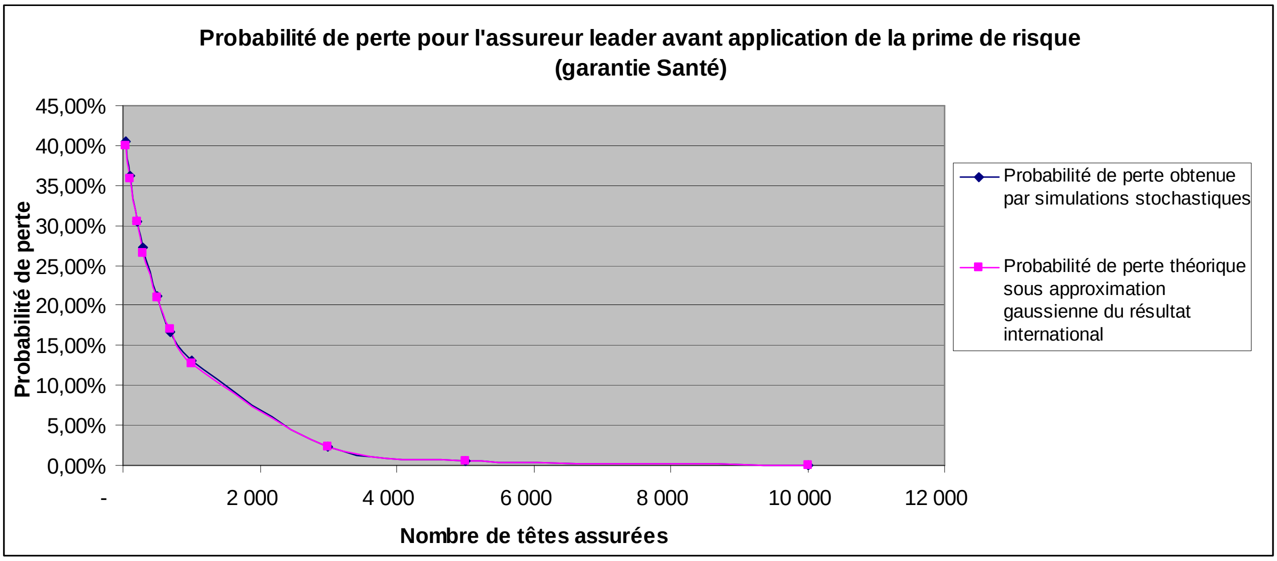



**Figure 27 : Comparaison de la probabilité de perte pour l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

- **Perte assumée par l'assureur *leader* avant application de la prime de risque**

Mais ce qui intéresse l'assureur *leader* ne se limite pas à la probabilité qu'une perte ait lieu, le montant et la volatilité de cette perte sont tout aussi importants.

La variable aléatoire $Perte^{avant}$ est le produit de deux variables aléatoires : $Rés.Int^{avant}$ et « le résultat international est en déficit ». Cette dernière variable suit une loi de Bernoulli (de paramètre la probabilité de perte calculée ci-dessus) et on maintient l'approximation par une gaussienne de la variable aléatoire $Rés.Int^{avant}$.

$$Perte^{avant} = Rés.Int.^{avant} * 1_{\{Rés.Int.^{avant}<0\}} \quad définie\ sur\ ]-\infty;0[ \quad où \quad \begin{cases} Rés.Int.^{avant} \propto N\left(\mu_{Rés.Int.^{avant}}; \sigma_{Rés.Int.^{avant}}\right) \\ 1_{\{Rés.Int.^{avant}<0\}} \propto Bern\left(\Phi\left(-\dfrac{\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)\right) \end{cases}$$

On souhaite calculer[8] la perte moyenne, on s'intéresse alors à l'espérance de la variable aléatoire Perte (cette variable admet une densité sur $]-\infty;0[$) :

$$\boxed{\mu_{Perte^{avant}} = E[Perte^{avant}] = \mu_{Rés.Int^{avant}} - \frac{1}{\Phi\left(\dfrac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}^2}{2*\sigma_{Rés.Int^{avant}}^2}\right)}$$

En procédant comme pour la probabilité de perte de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque, on met en évidence la convergence de la perte moyenne supportée par l'assureur *leader* vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international en traçant le graphique suivant :

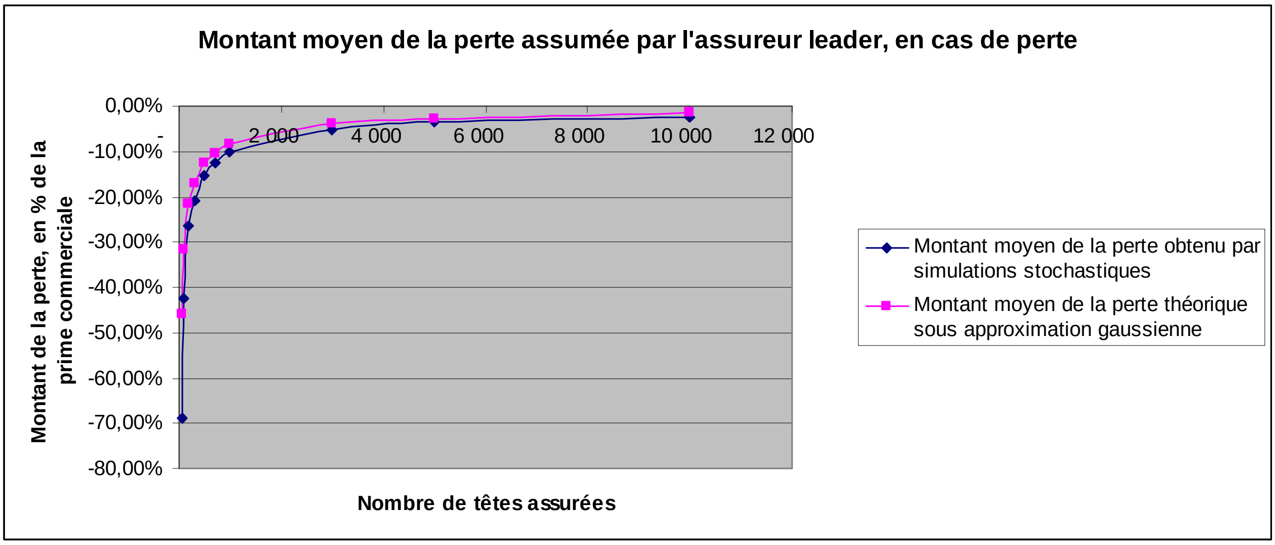



**Figure 28 : Convergence du montant moyen de la perte assumée par l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

8 Voir la démonstration en annexe 1 page 87

De la même façon, on calcule[9] l'écart-type de la variable aléatoire Perte :

$$\sigma_{Perte^{avant}} = \sqrt{\sigma_{Rés.Int^{avant}}^{\;2} + \left(\mu_{Rés.Int^{avant}} - \mu_{Perte^{avant}}\right) * \mu_{Perte^{avant}}}$$

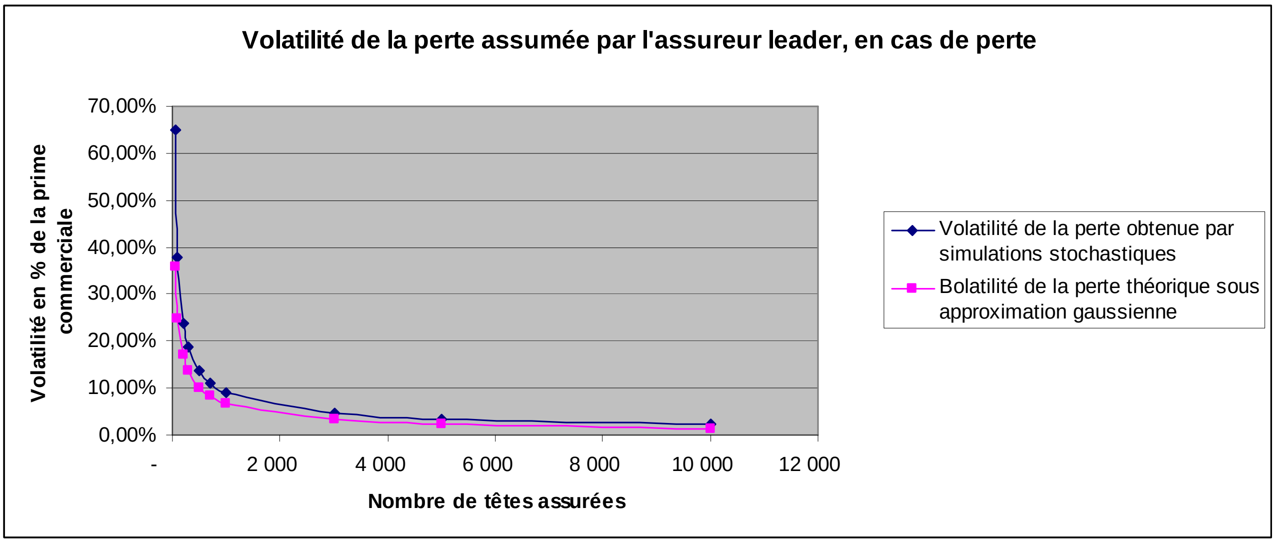



**Figure 29 : Convergence de la volatiltié de la perte assumée par l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

- **Résultat de l'assureur *leader* avant incorporation de la prime de risque**

$$Rés.\ Ass.\ Leader^{avant} = \begin{cases} 0 & si\ Rés.Int^{avant} \geq 0\ avec\ \ probabilité\ 1 - \Phi\left(-\dfrac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) \\ Perte^{avant} & si\ Rés.Int^{avant} < 0\ avec\ \ probabilité\ \Phi\left(-\dfrac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) \end{cases}$$

On obtient[10] alors les résultats théoriques sous approximation gaussienne du résultat international suivants :

$$\mu_{Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}} = \mu_{Perte^{avant}} * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)$$

$$\sigma_{Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}} = \sqrt{\left(\sigma^2_{Perte^{avant}} + \mu^2_{Perte^{avant}}\right) * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) - \mu_{Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}}^{\;2}}$$

[9] Voir la démonstration en annexe 1 page 88

[10] Voir la démonstration en annexe 1 page 88

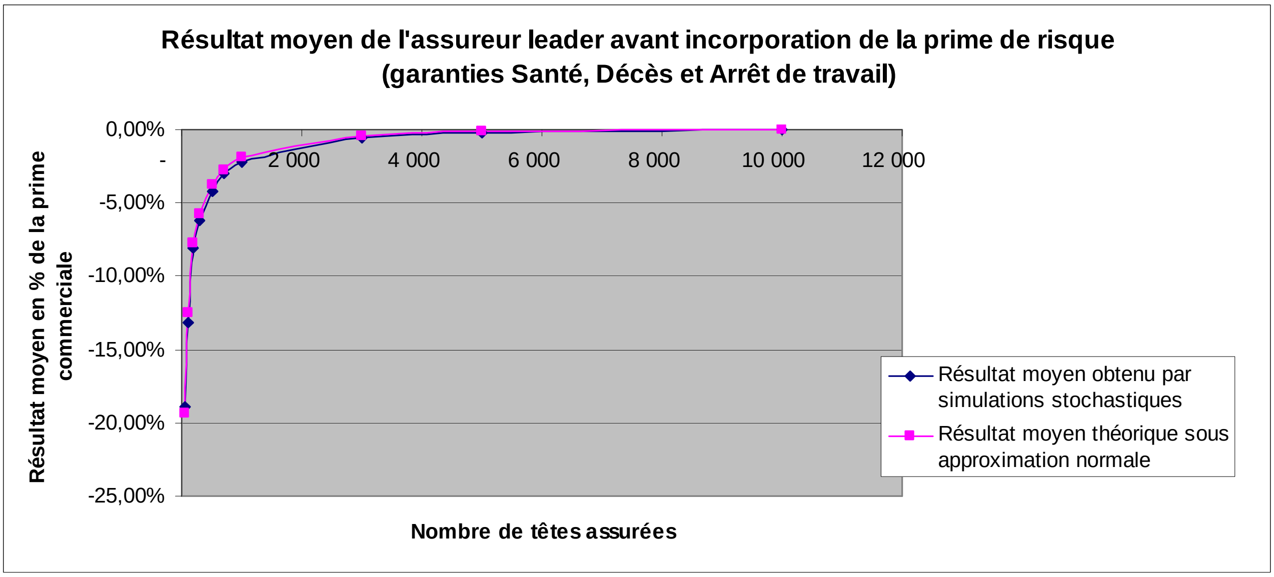



**Figure 30 : Convergence du résultat moyen de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

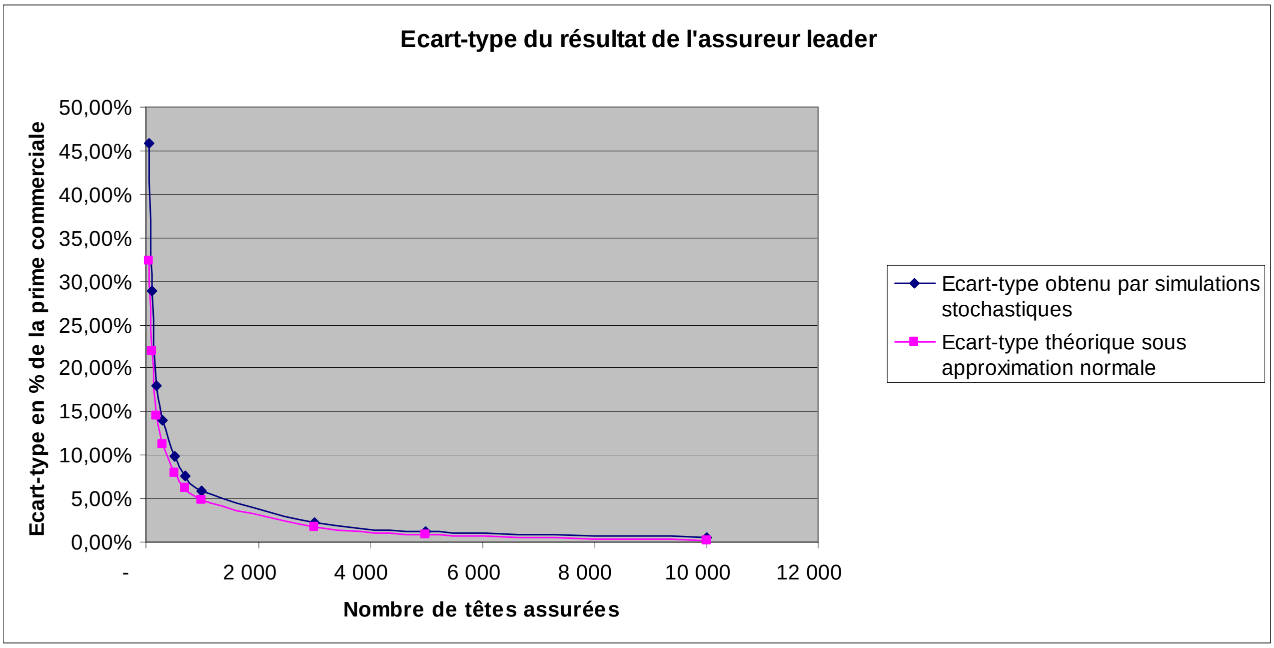



**Figure 31 : Convergence de la volatilité du résultat de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

### Risque porté par l'assureur *leader* après application de la prime de risque

Pour rappel : $Rés.Int^{après} = Rés.Int^{avant} - \Pr imeDeRisque$

$$\begin{cases} \mu_{Rés.Int^{après}} = \Pr imes - Ch\arg ements\ locaux - Ch\arg ements\ \text{int}\,ernationaux - \mu_S - \Pr imeDeRisque \\ \qquad\qquad = \mu_{Rés.Int^{avant}} - \Pr imeDeRisque \\ \\ \sigma_{Rés.Int^{après}} = \sigma_S \end{cases}$$

Donc, si l'on réalise une approximation par la loi normale :

$$\boxed{\begin{array}{l} Rés.Int.^{après} \propto N\left(\mu_{Rés.Int^{après}} ; \sigma_{Rés.Int^{après}}\right) \\ \\ où \quad \begin{cases} \mu_{Rés.Int^{après}} = \mu_{Rés.Int^{avant}} - \Pr imeDeRisque \\ \sigma_{Rés.Int^{après}} = \sigma_{Rés.Int^{avant}} = \sigma_S \end{cases} \end{array}}$$

Pour l'assureur *leader*, le résultat après incorporation de la prime de risque s'écrit :

$$Rés.\ Ass.\ Leader^{après} = \begin{cases} \Pr imeDeRisque & si\ Rés.Int^{après} \geq 0 \\ \Pr imeDeRisque + Rés.Int^{après} & si\ Rés.Int^{après} < 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{array}{l} Rés.\ Ass.\ Leader^{après} = \Pr ime\ de\ risque + Rés.Int.^{après} * 1_{\{Rés.Int.^{après} < 0\}} \\ \\ où \quad \begin{cases} Rés.Int.^{après} \propto N\left(\mu_{Rés.Int.^{après}} ; \sigma_{Rés.Int.^{après}}\right) \\ 1_{\{Rés.Int.^{après} < 0\}} \propto Bern\left(\Phi\left(-\dfrac{\mu_{Rés.Int.^{après}}}{\sigma_{Rés.Int.^{après}}}\right)\right) \end{cases} \end{array}}$$

En procédant par analogie avec les calculs réalisés pour la perte et le résultat de l'assureur *leader* avant incorporation de la prime de risque, on déduit les mêmes éléments après application de la prime de risque.

- **Probabilité de perte pour l'assureur *leader* après encaissement de la prime de risque**

Le compte de l'assureur *leader* est en perte si la prime de risque encaissée ne couvre pas un solde négatif du compte de résultat international.
L'application de la prime de risque ne permet pas de réduire la probabilité de perte de l'assureur *leader* lorsque la protection de compte est de type *Annual Stop Loss*[11] :

$$\boxed{\Pr obabilitéDePerte^{après} = \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) = \Pr obabilitéDePerte^{avant}}$$

Dans le cas de l'*Annual Stop Loss*, sur un horizon de un an, le risque pour l'assureur *leader* de se trouver en perte avant ou après application de la prime de risque est exactement le même. Ceci est vrai que l'hypothèse de résultat international gaussien soit réalisée ou non. Ce résultat a été montré et observé au paragraphe III.1.

On montre ci-dessous qu'en cas de perte, l'assureur *leader* devra faire face à la même perte moyenne et aux mêmes aléas.

[11] Voir la démonstration en annexe 1 page 90

- **Perte assumée par l'assureur *leader* après incorporation de la prime de risque**

On montre[12] également que pour un *Annual Stop Loss*, l'application de la prime de risque ne modifie ni le montant moyen ni la volatilité de la perte lorsque celle-ci se produit. Les lois de $Perte^{avant}$ et $Perte^{après}$ sont les mêmes, c'est-à-dire qu'en cas de perte, le réseau est exposé au même risque de perte. Ceci avait déjà été illustré au paragraphe III.1. par l'exemple de Multi.

- **Résultat de l'assureur *leader* après encaissement de la prime de risque**

En revanche, le résultat moyen de l'assureur *leader* est bien plus élevé après application de la prime de risque, ce qui permet de se prémunir contre une année difficile les années de bénéfice.

Après application de la prime de risque, le réseau reçoit dans tous les cas la prime de risque et, dans le cas d'une perte, il la prend en charge.

Sous hypothèse gaussienne du résultat, on calculer[13] l'espérance et de la volatilité du Résultat de l'Assureur *Leader* après incorporation de la prime de risque comme suit :

$$\mu_{Rés.\,Ass.\,Leader^{après}} = PrimeDeRisque + \mu_{Rés.Int^{après}} * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right) - \frac{\sigma_{Rés.Int^{après}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}^{\;2}}{2*\sigma_{Rés.Int^{après}}^{\;2}}\right)$$

$$\sigma_{Rés.\,Ass.\,Leader^{après}} = \sqrt{\sigma_{Rés.Int^{après}}^{\;2} + \left(\mu_{Rés.Int^{après}} - E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}]\right) * E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}]}$$

$$\text{où} \quad E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}] = \mu_{Rés.Int^{après}} - \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int^{après}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}^{\;2}}{2*\sigma_{Rés.Int^{après}}^{\;2}}\right)$$

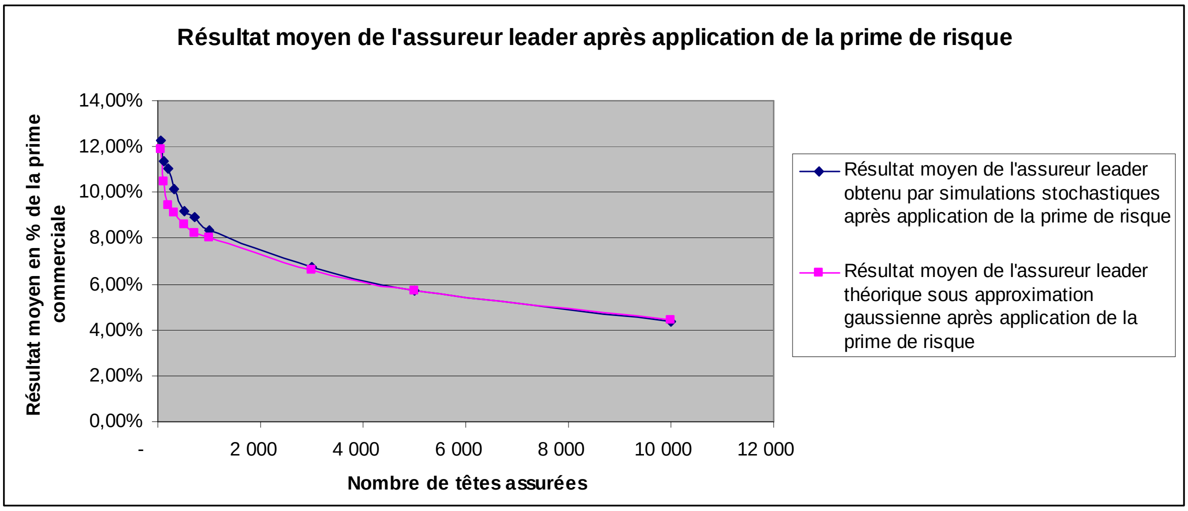



**Figure 32 : Convergence du résultat moyen de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

[12] Voir la démonstration en annexe 1 page 90

[13] Voir la démonstration en annexe 1 page 91

Là encore, les pourcentages obtenus ne sont pas à retenir, ce qui importe est la proximité entre les résultats théoriques obtenus sous approximation gaussienne, et ceux obtenus par simulations stochastiques.

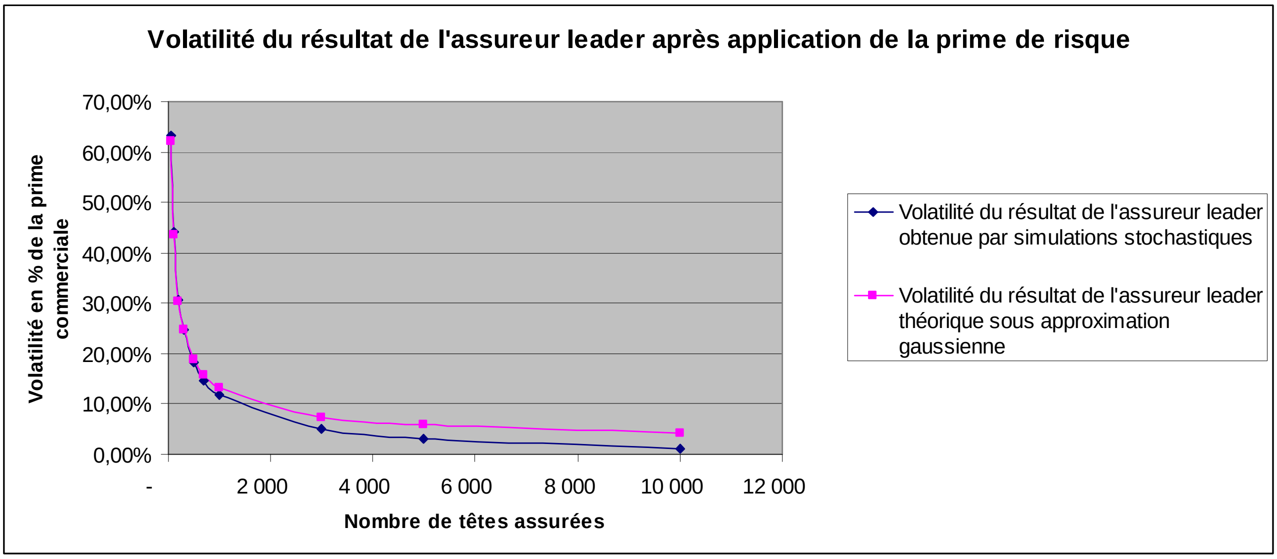



**Figure 32 : Convergence de la volatilité du résultat de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque vers celle obtenue sous hypothèse gaussienne du résultat international**

Ici, l'écart entre la théorie et la « réalité » apparaît pour un grand nombre de têtes assurées. Le phénomène est explicable : lorsque le nombre d'assurés augmente, la volatilité de la sinistralité et la prime de risque diminuent. De ce fait, le rapport Volatilité / Prime commerciale devient de plus en plus sensible.

On obtient donc des formules qui évaluent directement le risque pris par l'assureur *leader* dans un *pool* faisant l'objet d'une protection de compte par un *Annual Stop Loss* et sous hypothèse gaussienne du résultat international.

Toute une étude a été réalisée pour obtenir des formules du risque porté par l'assureur *leader* sous hypothèse gaussienne du résultat international annuel pour les protections de compte du type *Loss Carry Forward*. Malheureusement, les calculs n'ont pas aboutis. L'étude est malgré tout fournie en Annexe 2 : « Modélisation de la perte pour l'assureur *leader* dans un *Loss Carry Forward 3 Years Write-Off* ».

# Conclusion

L'étude qui a été menée a permis de délivrer un outil efficace de simulation de l'activité de tout *pool* couvrant les garanties Santé, Décès et Arrêt de travail et qui fait l'objet d'une protection de compte du type *Annual Stop Loss*, *Loss Carry Forward Write-Off* ou *Loss Carry Forward Rolling*.

La première étape consistait à modéliser le résultat international annuel d'un compte de *pool*. Les couvertures offertes dans chaque pays couvert par le réseau MAXIS GBN étant très variées, on s'est plus attaché à l'élaboration d'un modèle simple et à la construction de l'outil de simulation qu'à une étude sur la sinistralité par pays et par garantie.

La seconde étape qui consistait en la simulation de l'activité d'un *pool* par la méthode de Monte-Carlo pour les trois formules de *pooling* étudiées dans ce mémoire a permis de mettre en valeur l'asymétrie du risque porté par l'assureur *leader* d'un type de protection de compte à un autre. Ainsi, à couvertures de risques égales, la prime de risque est plus ou moins élevée d'une formule de *pooling* à une autre.

L'outil fondé sur la méthode de Monte-Carlo qui a été construit permet aujourd'hui aux souscripteurs de tarifer la prime de risque au moment de la réponse à un appel d'offres. Cependant, pour être fiable, la méthode de Monte-Carlo doit simuler un grand nombre de fois l'activité (l'outil construit à présent prévoit 10 000 simulations pour chaque année d'observation) et les temps de calculs sont relativement longs. On s'est alors intéressé à l'élaboration de formules permettant de calculer directement la prime de risque.
Des calculs ont permis de trouver les formules utiles au calcul de la prime de risque lorsque le compte de *pool* fait l'objet d'une protection du type *Annual Stop Loss* et à condition que l'hypothèse suivante soit vérifiée : « la distribution du résultat international annuel est gaussienne ».

Par ailleurs, on note que la prime de risque est calculée sous des hypothèses de sinistralité attendue par garantie et par pays. Si les contrats locaux intégrés dans un *pool* s'avèrent être plus ou moins rentables que ce qui avait été prévu, cela jouera sur le risque porté par l'assureur *leader*, et donc sur son résultat. Ceci confirme l'importance d'une tarification juste au niveau local et incite à une certaine précaution lors de la tarification de la prime de risque.

Bien que l'outil construit soit efficace, il pourra être amélioré à long terme en réalisant des études statistiques poussées sur la sinistralité attendue par garantie et par pays, à condition que les assureurs partenaires acceptent de communiquer leurs données de sinistralité.

# Bibliographie

Ouvrages :

**Chris Verhagen (2003),** « Multinational Pooling – The complete study»

**Céline DELETTRE (2006),** mémoire d'Actuariat sur l' « Optimisation et tarification des mécanismes de plans internationaux en assurances collectives »

**Vincent LAUDOU et Paul UNFRIED (2009),** mémoire d'Actuariat sur la « Modélisation et valorisation d'une clause de participation aux bénéfices pour les contrats Prévoyance Salarié »

Publications internes :

**(2002)** MAXIS Employee Benefits Network : Technical Manual

**(2010)** International Corporate Pooling and Services Agreement

**(2011)** MAXIS GBN Training : Technical Insight

Sites internet :

Site de MAXIS : www.maxisnetwork.com

Site de l'Organisation Mondiale de la Santé : www.who.int
Les données de sinistralité sont disponibles à l'adresse suivante : http://data.euro.who.int/hfdb/

# Annexe 1 : Démonstrations

Cette première annexe regroupe les démonstrations autour du résultat de l'assureur *leader* dans un *Annual Stop Loss* sous hypothèse gaussienne du résultat international.

- **Probabilité que l'assureur *leader* connaisse une perte avant application de la prime de risque**

La probabilité de perte pour l'assureur *leader* se calcule simplement :

$$\begin{aligned}\Pr obabilitéDePerte^{avant} &= P(Rés.Int.^{avant} < 0) \\ &= P(\underbrace{\frac{Rés.Int.^{avant} - \mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}}_{\propto N(0;1)} < -\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}) = \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)\end{aligned}$$

*où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite*

$$\boxed{\Pr obabilitéDePerte^{avant} = \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)}$$

- **Montant moyen et volatilité de la perte assumée par l'assureur *leader* avant application de la prime de risque**

On est en mesure de donner la fonction de répartition $F_{Perte^{avant}}$ de la variable aléatoire $Perte^{avant}$, qui correspond au résultat du réseau :

$$Perte^{avant} = Rés.Int.^{avant} * 1_{\{Rés.Int.^{avant}<0\}} \quad définie\ sur\ ]-\infty;0[ \quad où \quad \begin{cases} Rés.Int.^{avant} \propto N\left(\mu_{Rés.Int.^{avant}};\sigma_{Rés.Int.^{avant}}\right) \\ 1_{\{Rés.Int.^{avant}<0\}} \propto Bern\left(\Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)\right)\end{cases}$$

Autrement dit, la loi de la perte est une loi conditionnelle, il s'agit de la loi de la variable $Rés.Int^{avant}$, sachant que cette variable est négative. D'où :

$$\boxed{F_{Perte^{avant}}(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)} \quad pour\ x \in ]-\infty;0[}$$

Pour les deux calculs suivants, on utilise les résultats suivants :

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{cste} \varphi(y) * dy = \Phi(cste)$$

$$\int_{-\infty}^{cste} y * \varphi(y) * dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \left[-\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{cste} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{cste^2}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{cste} y^2 * \varphi(y) * dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \left[-y * \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{cste} + \int_{-\infty}^{cste} \varphi(y) * dy = -\frac{cste}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{cste^2}{2}\right) + \Phi(cste)$$

On souhaite calculer la perte moyenne, on calcule donc l'espérance de la variable aléatoire Perte (cette variable admet une densité sur $\left]-\infty;0\right[$ ) :

$$E[Perte^{avant}] = \int_{-\infty}^{0} x * f_{Perte^{avant}}(x) * dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x * \frac{1}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}} * \frac{\varphi\left(\frac{x-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)} * dx$$

$$= \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)} \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}} (y * \sigma_{Rés.Int.^{avant}} + \mu_{Rés.Int.^{avant}}) * \varphi(y) * dy$$

$$= \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)} \left\{ \sigma_{Rés.Int.^{avant}} * \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}} y * \varphi(y) * dy + \mu_{Rés.Int.^{avant}} * \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}} \varphi(y) * dy \right\}$$

$$= \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)} \left\{ \frac{-\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int.^{avant}}{}^2}{2 * \sigma_{Rés.Int.^{avant}}{}^2}\right) + \mu_{Rés.Int.^{avant}} * \Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right) \right\}$$

$$= \mu_{Rés.Int.^{avant}} - \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int.^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int.^{avant}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int.^{avant}}{}^2}{2 * \sigma_{Rés.Int.^{avant}}{}^2}\right)$$

On retient alors le résultat suivant :

$$\boxed{\mu_{Perte^{avant}} = E[Perte^{avant}] = \mu_{Rés.Int^{avant}} - \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}{}^2}{2 * \sigma_{Rés.Int^{avant}}{}^2}\right)}$$

On peut également calculer la variance de la variable aléatoire Perte :

$$Var[Perte^{avant}] = \int_{-\infty}^{0} \left(x-\mu_{Perte^{avant}}\right)^2 * f_{Perte}^{\ avant}(x) * dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left(x-\mu_{Perte^{avant}}\right)^2 * \frac{1}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}} * \frac{\varphi\left(\frac{x-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)} * dx$$

$$= \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_R^{avant}}\right)} * \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}} \left(y*\sigma_{Rés.Int^{avant}} + \mu_{Rés.Int^{avant}} - \mu_{Perte}\right)^2 * \varphi(y) * dy$$

$$= \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)} * \left\{ \sigma_{Rés.Int^{avant}}^{\ \ 2} * \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}} y^2 * \varphi(y) * dy + 2 * \sigma_R^{avant} * \left(\mu_R^{avant} - \mu_{Perte}\right) * \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_R^{avant}}{\sigma_R^{avant}}} y * \varphi(y) * dy + \left(\mu_R^{avant} - \mu_{Perte}\right)^2 * \int_{-\infty}^{\frac{-\mu_R^{avant}}{\sigma_R^{avant}}} \varphi(y) * dy \right\}$$

$$= \sigma_{Rés.Int^{avant}}^{\ \ 2} + \left(\mu_{Rés.Int^{avant}} - \mu_{Perte}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}^{\ \ 2}}{2*\sigma_{Rés.Int^{avant}}^{\ \ 2}}\right)}_{=(\mu_R - \mu_{Perte})} * \left\{2*\mu_{Perte} - \mu_{Rés.Int^{avant}}\right\}$$

$$= \sigma_{Rés.Int^{avant}}^{\ \ 2} + \left(\mu_{Rés.Int^{avant}} - \mu_{Perte}\right)^2 + \left(\mu_{Rés.Int^{avant}} - \mu_{Perte}\right) * \left\{2*\mu_{Perte} - \mu_{Rés.Int^{avant}}\right\}$$

$$= \sigma_{Rés.Int^{avant}}^{\ \ 2} + \left(\mu_{Rés.Int^{avant}} - \mu_{Perte}\right) * \mu_{Perte}$$

$$\boxed{\sigma_{Perte^{avant}} = \sqrt{\sigma_{Rés.Int^{avant}}^{\ \ 2} + \left(\mu_{Rés.Int^{avant}} - \mu_{Perte^{avant}}\right) * \mu_{Perte^{avant}}}}$$

- **Résultat de l'assureur *leader* avant incorporation de la prime de risque**

$$\boxed{Rés.\ Ass.\ Leader^{avant} = \begin{cases} 0 & si\ Rés.Int^{avant} \geq 0\ avec\ probabilité\ 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) \\ Perte^{avant} & si\ Rés.Int^{avant} < 0\ avec\ probabilité\ \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) \end{cases}}$$

D'où :

$$E[Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}] = \mu_{Perte^{avant}} * \Pr obabilité\ de\ perte = \mu_{Perte^{avant}} * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) = \mu_{Rés.\ Ass.\ Leader\ avant}$$

$$Var(Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}) = E[Rés.\ Ass.\ Leader^{avant\,2}] - E[Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}]^2$$

$$= E[Perte^{avant\,2}] * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) - \mu_{Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}}^{\ \ 2}$$

$$= \left(\sigma_{Perte^{avant}}^2 + \mu_{Perte^{avant}}^2\right) * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) - \mu_{Rés.\ Ass.\ Leader^{avant}}^{\ \ 2}$$

On retient donc les résultats suivants :

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_{Rés.\,Ass.\,Leader^{avant}} &= \mu_{Perte^{avant}} * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)\\ \sigma_{Rés.\,Ass.\,Leader^{avant}} &= \sqrt{\left(\sigma^2_{Perte^{avant}} + \mu^2_{Perte^{avant}}\right) * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right) - \mu_{Rés.\,Ass.\,Leader^{avant}}^{\;2}}\end{aligned}}$$

Pour rappel : $Rés.Int^{après} = Rés.Int^{avant} - \Pr imeDeRisque$

$$\begin{cases}\mu_{Rés.Int^{après}} = \Pr imes - Ch\arg ements\ locaux - Ch\arg ements\ \operatorname{int} ernationaux - \mu_S - \Pr imeDeRisque\\ \qquad\qquad = \mu_{Rés.Int^{avant}} - \Pr imeDeRisque\\ \\ \sigma_{Rés.Int^{après}} = \sigma_S\end{cases}$$

Donc, si l'on réalise une approximation par la loi normale :

$$\boxed{\begin{aligned}&Rés.Int.^{après} \propto N\left(\mu_{Rés.Int^{après}} ; \sigma_{Rés.Int^{après}}\right)\\ &où \quad \begin{cases}\mu_{Rés.Int^{après}} = \mu_{Rés.Int^{avant}} - \Pr imeDeRisque\\ \sigma_{Rés.Int^{après}} = \sigma_{Rés.Int^{avant}} = \sigma_S\end{cases}\end{aligned}}$$

Pour l'assureur *leader*, le résultat après incorporation de la prime de risque s'écrit :

$$Rés.\ Ass.\ Leader^{après} = \begin{cases}\Pr imeDeRisque & si\ Rés.Int^{après} \geq 0\\ \Pr imeDeRisque + Rés.Int^{après} & si\ Rés.Int^{après} < 0\end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{aligned}&Rés.\ Ass.\ Leader^{après} = \Pr ime\ de\ risque + Rés.Int.^{après} * 1_{\{Rés.Int.^{après}<0\}}\\ &où \quad \begin{cases}Rés.Int.^{après} \propto N\left(\mu_{Rés.Int.^{après}} ; \sigma_{Rés.Int.^{après}}\right)\\ 1_{\{Rés.Int.^{après}<0\}} \propto Bern\left(\Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int.^{après}}}{\sigma_{Rés.Int.^{après}}}\right)\right)\end{cases}\end{aligned}}$$

En procédant par analogie avec les calculs réalisés pour la perte et le résultat de l'assureur *leader* avant incorporation de la prime de risque, on déduit les mêmes éléments après application de la prime de risque.

- **Probabilité de perte pour l'assureur *leader* après encaissement de la prime de risque**

Le compte de l'assureur *leader* est en perte si la prime de risque encaissée ne couvre pas un solde négatif du compte de résultat international.

$$\begin{aligned}\Pr obabilitéDePerte^{après} &= P\left(\Pr imeDeRisque + Rés.Int.^{après} < 0\right)\\ &= P\left(Rés.Int.^{avant} < 0\right)\\ &= \Pr obabilitéDePerte^{avant}\\ &= \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)\end{aligned}$$

<u>Dans le cas de l'*Annual Stop Loss*, sur un horizon de un an, le risque pour l'assureur *leader* de se trouver en perte avant ou après application de la prime de risque est exactement le même</u>. On montre ci-dessous qu'en cas de perte, l'assureur *leader* devra faire face à la même perte moyenne et aux mêmes aléas.

- **Perte assumée par l'assureur *leader* après incorporation de la prime de risque**

Comme cela a été établi pour la perte avant application de la prime de risque, la loi de la variable : $Perte^{après}$ est une loi conditionnelle. Il s'agit de la loi de la variable $\Pr imeDeRisque + Rés.Int.^{après}$ , sachant que cette variable est négative.

$$\begin{aligned}&Pour\ x \in \left]-\infty;0\right[ \ :\\ &F_{Perte^{après}}(x) = P(\Pr imeDeRisque + Rés.Int.^{après} \le x \,/\, \Pr imeDeRisque + Rés.Int.^{après} \le 0)\\ &\qquad = P(Rés.Int.^{avant} \le x \,/\, Rés.Int.^{avant} \le 0) = F_{Perte^{avant}}(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)}\end{aligned}$$

Dans le cas d'un *Annual Stop Loss*, l'application de la prime de risque ne modifie donc ni la probabilité que l'assureur *leader* soit en perte, ni les montant et volatilité de la perte lorsque celle-ci se produit. Les lois de $Perte^{avant}$ et $Perte^{après}$ sont les mêmes, c'est-à-dire qu'en cas de perte, le réseau est exposé au même risque de perte.

Les courbes correspondant aux simulations stochastiques avant et après application de la prime de risque sont confondues. La même conclusion est obtenue lorsque l'on trace la volatilité stochastique avant et après application de la prime de risque.

- **Résultat de l'assureur *leader* après encaissement de la prime de risque**

Après application de la prime de risque, le réseau reçoit dans tous les cas la prime de risque et, dans le cas d'une perte, il la prend en charge.

Or, en procédant par analogie avec la variable aléatoire : $Rés.Int^{avant} * 1_{\{Rés.Int^{avant}<0\}}$ , on obtient comme résultat pour la variable $Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}$ :

$$E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}] = \mu_{Rés.Int^{après}} - \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int^{après}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}{}^2}{2*\sigma_{Rés.Int^{après}}{}^2})$$

$$\sigma_{Rés.Int^{après}*1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}} = \sqrt{\sigma_{Rés.Int^{après}}{}^2 + \left(\mu_{Rés.Int^{après}} - E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}]\right) * E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}]}$$

Ces résultats permettent de déduire les calculs de l'espérance et de la volatilité du Résultat de l'Assureur *Leader* après incorporation de la prime de risque :

$$E[Rés.\ Ass.\ Leader^{après}]$$

$$= \Pr imeDeRisque + \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right) * \left\{\mu_{Rés.Int^{après}} - \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int^{après}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}{}^2}{2*\sigma_{Rés.Int^{après}}{}^2})\right\}$$

$$= \Pr imeDeRisque + \mu_{Rés.Int^{après}} * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right) - \frac{\sigma_{Rés.Int^{après}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}{}^2}{2*\sigma_{Rés.Int^{après}}{}^2})$$

$$= \mu_{Rés.\ Ass.\ Leader^{après}}$$

Et pour la volatilité : $\sigma\left(Rés.\ Ass.\ Leader^{après}\right) = \sigma\left(Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}\right)$

$$\mu_{Rés.\,Ass.\,Leader^{après}} = PrimeDeRisque + \mu_{Rés.Int^{après}} * \Phi\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right) - \frac{\sigma_{Rés.Int^{après}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}^{2}}{2*\sigma_{Rés.Int^{après}}^{2}}\right)$$

$$\sigma_{Rés.\,Ass.\,Leader^{après}} = \sqrt{\sigma_{Rés.Int^{après}}^{2} + \left(\mu_{Rés.Int^{après}} - E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}]\right) * E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}]}$$

$$où \quad E[Rés.Int^{après} * 1_{\{Rés.Int^{après}<0\}}] = \mu_{Rés.Int^{après}} - \frac{1}{\Phi\left(\frac{-\mu_{Rés.Int^{après}}}{\sigma_{Rés.Int^{après}}}\right)} * \frac{\sigma_{Rés.Int^{après}}}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{\mu_{Rés.Int^{après}}^{2}}{2*\sigma_{Rés.Int^{après}}^{2}}\right)$$

Démonstration relative à l'écrêtement par tête :

<u>Calcul préliminaire utile pour la suite :</u>

$$x^k * f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(x) = x^k * \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} * x^{\alpha-1} * e^{-\beta * x} 1_{\{x>0\}} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} * \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\beta^{\alpha+k}} \frac{\beta^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)} * x^{(\alpha+k)-1} * e^{-\beta * x} 1_{\{x>0\}}$$

$$or \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha * \Gamma(\alpha) \quad d'où :$$

$$x^k * f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(x) = \frac{(\alpha+k-1)*(\alpha+k-2)*...*(\alpha+1)*\alpha}{\beta^k} * \frac{\beta^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)} * x^{(\alpha+k)-1} * e^{-\beta * x} 1_{\{x>0\}}$$

$$= \frac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha-1)! * \beta^k} * f_{\Gamma(\alpha+k;\beta)}(x)$$

On va se servir dans ce qui suit du résultat suivant :

$$\boxed{Pour\ k \geq 1 : \quad x^k * f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(x) = \frac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha-1)! * \beta^k} * f_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(x) \qquad (*)}$$

On souhaite calculer espérance et écart-type de la variable « Coût plafonné », ce qui permettra de calculer espérance et écart-type de la sinistralité du modèle composé.
La loi de la variable aléatoire « Coût plafonné » est en fait la loi du minimum entre la variable aléatoire « Coût » et la variable déterministe « Seuil ».

$$\boxed{\begin{array}{l} F_{Cout\ Plafonné}(x) = F_{\min(Coût;Seuil)}(x) = F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(x) \quad pour\ x \in [0; Seuil[ \\ et \quad P(\min(Coût;Seuil) = Seuil) = P(Coût \geq Seuil) = 1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil) \end{array}}$$

On en déduit ainsi les calculs de l'espérance et de l'écart-type :

$$E[Coût\ Plafonné] = \int_0^{Seuil} x * f_{\Gamma(\alpha,\beta)} * dx + Seuil * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)$$

$$= \int_0^{Seuil} \frac{\alpha}{\beta} * f_{\Gamma(\alpha+1,\beta)}(x) * dx + Seuil * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} * F_{\Gamma(\alpha+1,\beta)}(Seuil) + Seuil * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)$$

*et*

$$E[Coût\ Plafonné^2] = \int_0^{Seuil} x^2 * f_{\Gamma(\alpha,\beta)} * dx + Seuil^2 * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)$$

$$= \int_0^{Seuil} \frac{(\alpha+1)*\alpha}{\beta^2} * f_{\Gamma(\alpha+2,\beta)}(x) * dx + Seuil^2 * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)$$

$$= \frac{(\alpha+1)*\alpha}{\beta^2} * F_{\Gamma(\alpha+2,\beta)}(Seuil) + Seuil^2 * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E[Coût\ Plafonné] = \frac{\alpha}{\beta} * F_{\Gamma(\alpha+1,\beta)}(Seuil) + Seuil * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right) \\ \\ et \\ \sigma_{Coût\ Plafonné} = \sqrt{\frac{(\alpha+1)*\alpha}{\beta^2} * F_{\Gamma(\alpha+2,\beta)}(Seuil) + Seuil^2 * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right) - \left\{\frac{\alpha}{\beta} * F_{\Gamma(\alpha+1,\beta)}(Seuil) + Seuil * \left(1 - F_{\Gamma(\alpha,\beta)}(Seuil)\right)\right\}^2} \end{array}}$$

Calculons le <u>surplus moyen et l'écart-type associé que l'on s'attend à trouver</u> :

On appelle SurplusXS la variable aléatoire qui correspond à la « valeur du dépassement, en cas de dépassement, et ce par tête », c'est-à-dire qu'il s'agit de la variable aléatoire qui évalue l'écart entre le coût du sinistre et le seuil, lorsque ce dernier est dépassé. Etant dans une approche fréquence-coût, il n'est pas utile de considérer le dépassement global, un surplus par tête est évalué.

$Coût \propto \Gamma(\alpha;\beta)$ *et la loi* $L((Coût - Seuil)_{\text{"+ strict"}}) = L((Coût - Seuil) / Coût - Seuil > 0)$ *d'où* :

$$P\left((Coût - Seuil)_{\text{"+ strict"}} \leq x\right) = \frac{P\left(0 < (Coût - Seuil) \leq x\right)}{P\left((Coût - Seuil) > 0\right)} = \frac{F_{Coût}(x + Seuil) - F_{Coût}(Seuil)}{1 - F_{Coût}(Seuil)}$$

$$E[(Coût - Seuil)_{\text{"+ strict"}}] = \int_0^{+\infty} y * \frac{f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(y + Seuil)}{1 - F_{Coût}(Seuil)} * dy$$

$$= \int_{Seuil}^{+\infty} (x - Seuil) * \frac{f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(x)}{1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)} * dx \qquad \textit{donc en utilisant } (*)$$

$$= \frac{1}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} * \left\{ \int_{Seuil}^{+\infty} \frac{\alpha}{\beta} * f_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(x) * dx - Seuil * \int_{Seuil}^{+\infty} f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(x) * dx \right\}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} - Seuil$$

$$E[(Coût - Seuil)^2_{\text{"+ strict"}}] = \int_0^{+\infty} y^2 * \frac{f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(y + Seuil)}{1 - F_{Coût}(Seuil)} * dy$$

$$= \int_{Seuil}^{+\infty} (x - Seuil)^2 * \frac{f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(x)}{1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)} * dx$$

$$= \frac{1}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} * \left\{ \int_{Seuil}^{+\infty} \frac{\alpha * (\alpha + 1)}{\beta^2} * f_{\Gamma(\alpha+2;\beta)}(x) * dx - 2 * Seuil * \frac{\alpha}{\beta} * \int_{Seuil}^{+\infty} f_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(x) * dx + Seuil^2 * \int_{Seuil}^{+\infty} f_{\Gamma(\alpha;\beta)}(x) * dx \right\}$$

$$= \frac{\alpha * (\alpha + 1)}{\beta^2} * \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+2;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} - 2 * Seuil * \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} + Seuil^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} & E[SurplusXS] = E[(Coût - Seuil)_{\text{"+ strict"}}] = \frac{\alpha}{\beta} * \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} - Seuil \\ & \sigma_{SurplusXS} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2} * \left\{ (\alpha + 1) * \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+2;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} - \alpha * \left( \frac{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha+1;\beta)}(Seuil)\right)}{\left(1 - F_{\Gamma(\alpha;\beta)}(Seuil)\right)} \right)^2 \right\}} \end{aligned}}$$

# Annexe 2 : Modélisation de la perte pour l'assureur *leader* dans un *Loss Carry Forward 3 Years Write-Off*

On suppose dans ce paragraphe que la multinationale a souscrit à une formule de *pooling Loss Carry Forward m Years Write-Off*. Dans ce cas, on observe le résultat de l'assureur *leader* au bout des m années.

## Avant application de la prime de risque

On note $Z_t^{avant}$ (t = 0, …, m) la variable telle que :

$$\boxed{Z_t^{avant} = \mathrm{Re}\ portDePerte_{31/12/t}^{avant} + FondsDeContingence_{31/12/t}^{avant}}$$

Ce qui est important est la valeur de cette variable au bout des m années. Si elle est positive, elle sera reversée entièrement au client. Sinon, la perte sera à charge de l'assureur *leader*.

On cherche donc à exprimer les éléments suivants :

$$\boxed{\begin{cases} P\left(Z_3^{avant} < 0\right) = \int_{-\infty}^{0} f_{Z_3^{avant}}(x) * dx \\ \\ E[Z_3^{avant} * 1_{\{Z_3^{avant} < 0\}}] \\ \\ \sigma[Z_3^{avant} * 1_{\{Z_3^{avant} < 0\}}] \end{cases}}$$

Ainsi, le résultat de l'assureur *leader* avant application de la prime de risque s'écrit :

$$\boxed{Rés.\ Ass.\ Leader_m^{avant} = Z_m^{avant} * 1_{\{Z_m^{avant} < 0\}}}$$

Pour déterminer la probabilité de perte, l'espérance moyenne et la volatilité de la perte lorsque celle-ci a lieu, il faut s'intéresser aux m variables aléatoires $\left(Z_t^{avant}\right)_{t=1,\dots,m}$.

On note PlafondCF le plafond du fonds de contingence (CF = Contingency Fund).

L'expression de la variable $\left(Z_t^{avant}\right)_{t=1,\dots,m}$ varie selon que l'on se trouve la première année ou les suivantes :

$$Z_1^{avant} = \begin{cases} \min\left( PlafondCF \; ; \alpha * Rés.Int._1^{avant} \right) & si \quad Rés.Int._1^{avant} \geq 0 \\ Rés.Int._1^{avant} & si \quad Rés.Int._1^{avant} < 0 \end{cases}$$

*Pour* $i \in \| 2 ; m \|$

$$Z_i^{avant} = \begin{cases} Rés.Int._i^{avant} + Z_{i-1}^{avant} & si \quad Rés.Int._i^{avant} < 0 \\ \min\left( PlafondCF \; ; \left( Rés.Int._i^{avant} + Z_{i-1}^{avant} \right) * \left( 1_{Rés.Int._i^{avant} + Z_{i-1}^{avant} \leq 0} + \alpha * 1_{Rés.Int._i^{avant} + Z_{i-1}^{avant} > 0} \right) \right) & si \quad \left\{ Rés.Int._i^{avant} \geq 0 \right\} \cap \left\{ Z_{i-1}^{avant} \leq 0 \right\} \\ \min\left( PlafondCF \; ; Z_{i-1}^{avant} + \alpha * Rés.Int._i^{avant} * 1_{Rés.Int._i^{avant} > 0} + Rés.Int._i^{avant} * 1_{Rés.Int._i^{avant} \leq 0} \right) & si \quad \left\{ Rés.Int._i^{avant} \geq 0 \right\} \cap \left\{ Z_{i-1}^{avant} > 0 \right\} \end{cases}$$

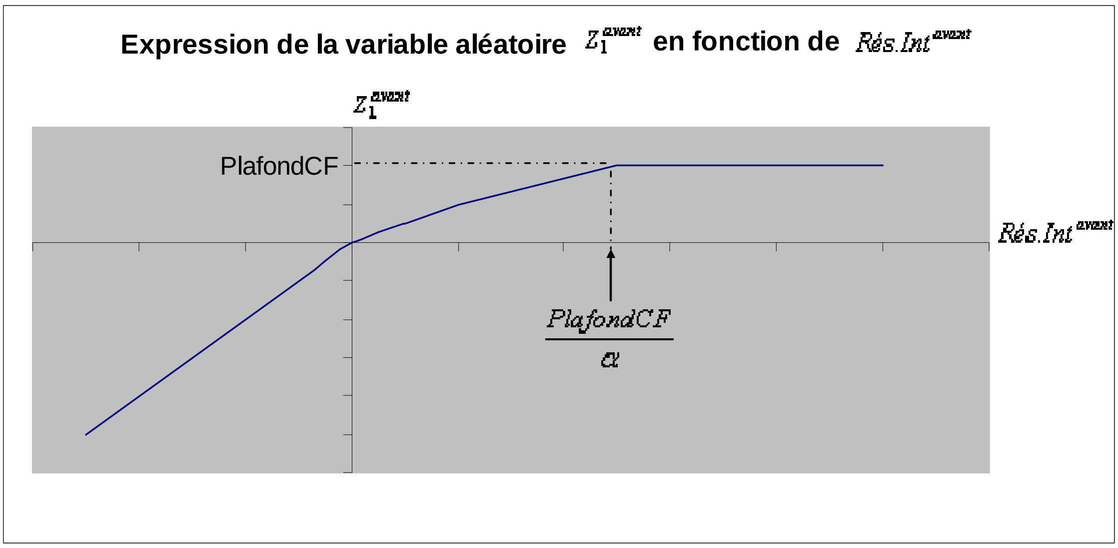
On fait ici l'hypothèse de taille suivante : les $\left( Rés.Int._i^{avant} \right)_{1 \leq i \leq m}$ sont indépendants et identiquement distribués selon la loi $Rés.Int^{avant} \propto N\left( \mu_{Rés.Int^{avant}} \; ; \sigma_{Rés.Int^{avant}} \right)$ .

Etude de $Z_1^{avant}$ :

$$Z_1^{avant} = Rés.Int^{avant} * 1_{\left\{ Rés.Int^{avant} < 0 \right\}} + \alpha * Rés.Int^{avant} * 1_{\left\{ 0 < Rés.Int^{avant} < \frac{PlafondCF}{\alpha} \right\}} + PlafondCF * 1_{\left\{ \frac{PlafondCF}{\alpha} \leq Rés.Int^{avant} \right\}}$$

$$où \quad \begin{cases} Rés.Int^{avant} \propto N\left( \mu_{Rés.Int^{avant}} \; ; \sigma_{Rés.Int^{avant}} \right) \\ 1_{\left\{ Rés.Int^{avant} < 0 \right\}} \propto Bernoulli\left( \Phi\left( -\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}} \right) \right) \\ 1_{\left\{ 0 < Rés.Int^{avant} < PlafondCF \right\}} \propto Bernoulli\left( \Phi\left( \frac{PlafondCF - \mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}} \right) - \Phi\left( -\frac{\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}} \right) \right) \\ 1_{\left\{ PlafondCF \leq Rés.Int^{avant} \right\}} \propto Bernoulli\left( 1 - \Phi\left( \frac{PlafondCF - \mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}} \right) \right) \end{cases}$$

Cette équation signifie que la variable aléatoire $Z_1^{avant}$ est entièrement déterminée par le résultat international avant application de la prime de risque, $Rés.Int^{avant}$ . C'est une fonction linéaire par morceau de $Rés.Int^{avant}$ dont voici la représentation graphique :



- Ainsi, sur le tronçon $\left]-\infty\,;0\right]$, on a : $Z_1^{avant} = Rés.Int^{avant}$

Donc sous l'approximation du résultat international par une gaussienne, on connaît la densité de la loi de probabilité de $Z_1^{avant}\Big|_{]-\infty\,;\,0]}$ sur $\left]-\infty\,;0\right]$ :

$$Z_1^{avant}\Big|_{]-\infty\,;\,0]} = Rés.Int^{avant} \quad\Rightarrow\quad Z_1^{avant}\Big|_{]-\infty\,;\,0]} \propto N\left(\mu_{Rés.Int^{avant}}\ ;\sigma_{Rés.Int^{avant}}\right)$$

$$\boxed{f_{Z_1^{avant}}(x)=\frac{1}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}*\varphi\left(\frac{x-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)*1_{x\leq 0}}$$

- Sur $\left]0\,;PlafondCF\right[$,

$$Z_1^{avant}\Big|_{]0\,;\,PlafondCF[} = \alpha * Rés.Int^{avant} \quad\Rightarrow\quad Z_1^{avant}\Big|_{]0\,;\,PlafondCF[} \propto N(\alpha*\mu_R^{avant}\ ;\alpha*\sigma_R^{avant})$$

D'où : $\boxed{f_{Z_1^{avant}}(x)=\frac{1}{\alpha*\sigma_R^{avant}}*\varphi\left(\frac{x-\alpha*\mu_R^{avant}}{\alpha*\sigma_R^{avant}}\right)*1_{0<x<PlafondCF}}$

- Enfin, $\boxed{P\left(Z_1^{avant} = PlafondCF\right)=P(Rés.Int^{avant} \geq \frac{PlafondCF}{\alpha}) = 1-\Phi\left(\frac{\frac{PlafondCF}{\alpha}-\mu_R^{avant}}{\sigma_R^{avant}}\right)}$

On retient pour la suite que :

$$\boxed{\begin{cases} f_{Z_1^{avant}}(x)=\frac{1}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}*\varphi\left(\frac{x-\mu_{Rés.Int^{avant}}}{\sigma_{Rés.Int^{avant}}}\right)*1_{x\leq 0}+\frac{1}{\alpha*\sigma_R^{avant}}*\varphi\left(\frac{x-\alpha*\mu_R^{avant}}{\alpha*\sigma_R^{avant}}\right)*1_{0<x<PlafondCF} \\ P\left(Z_1^{avant} = PlafondCF\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{PlafondCF}{\alpha}-\mu_R^{avant}}{\sigma_R^{avant}}\right) \end{cases}}$$

Etude de $Z_2^{avant}$ :

On cherche à présent la densité de la loi de probabilité de $Z_2^{avant}$ en utilisant la densité de probabilité de la loi conditionnelle de $Z_2^{avant}$ sachant $Z_1^{avant}$.

$$\boxed{f_{Z_2^{avant}}(x) = \int_{-\infty}^{PlafondCF} f_{Z_2^{avant}}(x / Z_1^{avant} = y) * f_{Z_1^{avant}}(y) * dy}$$

On va donc chercher à exprimer cette densité conditionnelle.

- **<u>Premier cas : y<=0</u>**

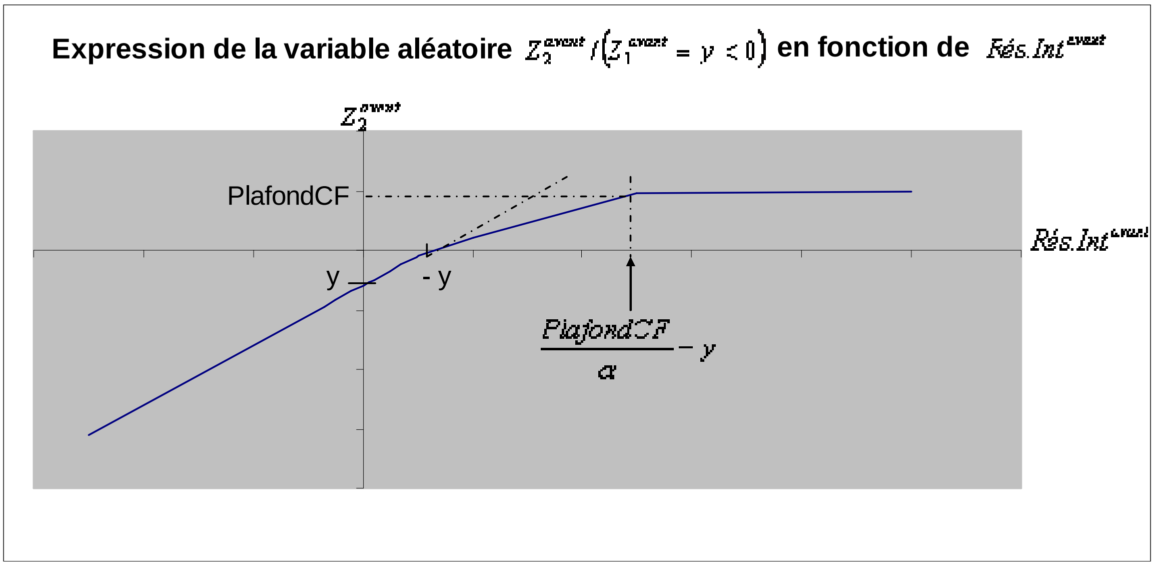
Si $Z_1^{avant} \in \left]-\infty\,;0\right]$,

$$Z_2^{avant} = \min\left(PlafondCF\;;\left(Z_1^{avant} + Rés.Int^{avant}\right)*\left(1_{\{Z_1^{avant}+Rés.Int^{avant}\le 0\}} + \alpha * 1_{\{Z_1^{avant}+Rés.Int^{avant}>0\}}\right)\right)$$

Ce qui signifie pour la loi conditionnelle que si : $\boxed{Z_1^{avant} = y \in \left]-\infty\,;0\right]}$,

$$\boxed{Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right) = \min\left(PlafondCF\;;\left(y + Rés.Int^{avant}\right)*\left(1_{\{y+Rés.Int^{avant}\le 0\}} + \alpha * 1_{\{y+Rés.Int^{avant}>0\}}\right)\right)}$$

D'où le schéma suivant :




Ainsi, sur le tronçon $\left]-\infty\,;0\right]$, on a :

$$\left(Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right)\Big|_{]-\infty\,;\,0]} = h_1\left(Rés.Int^{avant}\right) \qquad où \quad h_1(x) = x + y$$

$$D'où \qquad \left(Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right)\Big|_{]-\infty\,;\,0]} \propto N(\mu_R^{avant} + y\,;\sigma_R^{avant})$$

Donc, sous l'approximation du résultat international par une gaussienne, on dispose de la densité de la loi de probabilité de $Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)$ sur $\left]-\infty\,;0\right]$ :

$$\boxed{f_{Z_2^{avant}}\left(x / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right) = \frac{1}{\sigma_R^{avant}} * \varphi\left(\frac{x - \mu_R^{avant} - y}{\sigma_R^{avant}}\right) * 1_{x \le 0}}$$

Sur : $\left]0\,;PlafondCF\right[$,

$$\left(Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right)\Big|_{]0\,;\,PlafondCF[} = h_2\left(Rés.Int^{avant}\right) \qquad où \quad h_2(x) = \alpha * (x + y)$$

$$D'où \qquad \left(Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right)\Big|_{]0\,;\,PlafondCF[} \propto N(\alpha * \left(\mu_R^{avant} + y\right);\alpha * \sigma_R^{avant})$$

Donc sous l'approximation du résultat international par une gaussienne, on a la densité de la loi de probabilité de $Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)$ sur $\left]0\,;PlafondCF\right[$ :

$$\boxed{f_{Z_2^{avant}}\left(x / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right) = \frac{1}{\alpha * \sigma_R^{avant}} * \varphi\left(\frac{x - \alpha * \left(\mu_R^{avant} + y\right)}{\alpha * \sigma_R^{avant}}\right) * 1_{0<x<PlafondCF}}$$

Et enfin, lorsque la valeur Plafond CF est atteinte :

$$\left(Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right)\Big|_{PlafondCF} = h_3\left(Rés.Int^{avant}\right) \qquad où \quad h_3(x) = PlafondCF$$

Ainsi :

$$\boxed{P\left(Z_2^{avant} = PlafondCF / \left(Z_1^{avant} = y\right)\right) = P\left(Rés.Int^{avant} \geq \frac{PlafondCF}{\alpha} - y\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\frac{PlafondCF}{\alpha} - y - \mu_R^{avant}}{\sigma_R^{avant}}\right)}$$

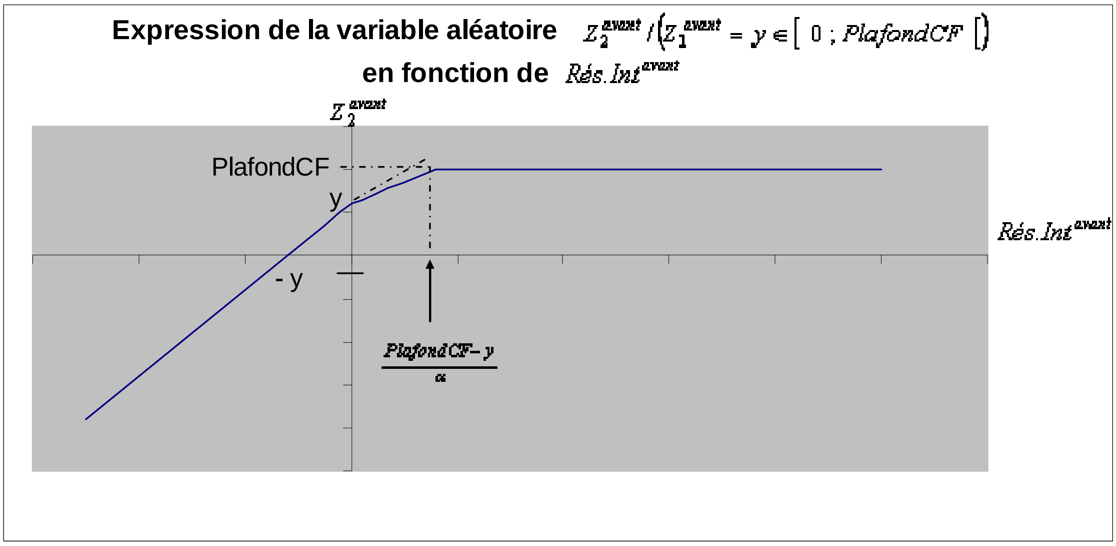
- **<u>Deuxième cas : 0<y<PlafondCF</u>**

Si $Z_1^{avant} \in \left]0\,; PlafondCF\right[$,

$$Z_2^{avant} = \min\left(PlafondCF\;;\; Z_1^{avant} + \alpha * Rés.Int^{avant} 1_{\{Rés.Int^{avant}>0\}} + Rés.Int^{avant} 1_{\{Rés.Int^{avant} \leq 0\}}\right)$$

Ce qui signifie pour la loi conditionnelle que si : $\boxed{Z_1^{avant} = y \in \left]0\,; PlafondCF\right[}$,

$$\boxed{Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right) = \min\left(PlafondCF\;;\; y + \alpha * Rés.Int^{avant} 1_{\{Rés.Int^{avant}>0\}} + Rés.Int^{avant} 1_{\{Rés.Int^{avant} \leq 0\}}\right)}$$




Ce graphique permet à nouveau de découper en trois intervalles le champ de valeurs possibles pour $Z_2^{avant} / \left(Z_1^{avant} = y\right)$.

Ainsi, le premier intervalle est : $\left]-\infty\,;\,y\right]$, sur lequel :

$$\left(Z_2^{avant}/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)\Big|_{]-\infty\,;\,y]}=y+Rés.Int^{avant} \quad\Rightarrow\quad \left(Z_2^{avant}/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)\Big|_{]-\infty\,;\,y]}\propto N\left(y+\mu_R^{avant}\,;\sigma_R^{avant}\right)$$

D'où la densité de probabilité de la loi conditionnelle sur le tronçon :

$$f_{Z_2^{avant}}\left(x/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)=\frac{1}{\sigma_R^{avant}}*\varphi\left(\frac{x-\mu_R^{avant}-y}{\sigma_R^{avant}}\right)*1_{x\leq y}$$

Puis, sur l'intervalle $\left]y\,;\,PlafondCF\right[$ :

$$\left(Z_2^{avant}/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)\Big|_{]y\,;\,PlafondCF\,[}=y+\alpha*Rés.Int^{avant}$$

$$\Rightarrow\quad \left(Z_2^{avant}/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)\Big|_{]y\,;\,PlafondCF\,[}\propto N\left(y+\alpha*\mu_R^{avant}\,;\alpha*\sigma_R^{avant}\right)$$

D'où, pour $x\in\left]y\,;\,PlafondCF\right[$ :

$$f_{Z_2^{avant}}\left(x/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)=\frac{1}{\alpha*\sigma_R^{avant}}*\varphi\left(\frac{x-\alpha*\mu_R^{avant}-y}{\alpha*\sigma_R^{avant}}\right)*1_{y\leq x<PlafondCF}$$

Et enfin,

$$P\left(Z_2^{avant}=PlafondCF/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)=P(Rés.Int^{avant}\geq\frac{PlafondCF-y}{\alpha})=1-\Phi\left(\frac{\frac{PlafondCF-y}{\alpha}-\mu_R^{avant}}{\sigma_R^{avant}}\right)$$

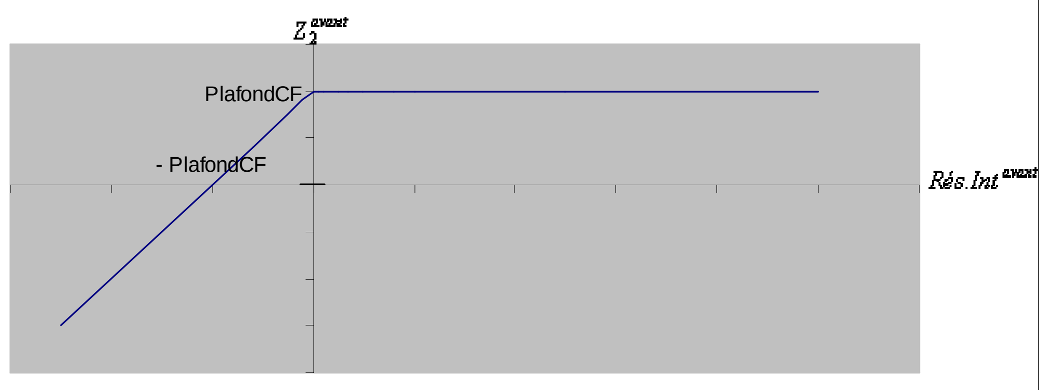
- **<u>Troisième cas : y = PlafondCF</u>**

Si le plafond du fonds de contingence est atteint la première année, la variable aléatoire $Z_2^{avant}/\left(Z_1^{avant}=PlafondCF\right)$ s'exprime de la façon suivante :

$$Z_2^{avant}/\left(Z_1^{avant}=PlafondCF\right)=PlafondCF+Rés.Int^{avant}*1_{\left\{Rés.Int^{avant}<0\right\}}$$

Soit, schématiquement :

**Expression de la variable aléatoire $Z_2^{avant}/\left(Z_1^{avant}=PlafondCF\right)$ en fonction de $Rés.Int^{avant}$**




Donc, sur l'intervalle : $\left]-\infty\,;PlafondCF\right[$,

$$\boxed{f_{Z_2^{avant}}\left(x/\left(Z_1^{avant}=y\right)\right)=\frac{1}{\sigma_R^{avant}}*\varphi\left(\frac{x-\mu_R^{avant}-PlafondCF}{\sigma_R^{avant}}\right)*1_{x<PlafondCF}}$$

Et enfin,

$$\boxed{P\left(Z_2^{avant}=PlafondCF/\left(Z_1^{avant}=PlafondCF\right)\right)=P(Rés.Int^{avant}\geq 0)=1-\Phi\left(-\frac{\mu_R^{avant}}{\sigma_R^{avant}}\right)}$$

Tous ces éléments suffisent à calculer la fonction de densité de $Z_2^{avant}$ .

La densité de $Z_2^{avant}$ s'écrit :

$$\begin{cases} Pour\ x\in\left]-\infty\,;PlafondCF\right[: \\ f_{Z_2^{avant}}(x)=\int_{-\infty}^{PlafondCF} f_{Z_2^{avant}}\left(x/Z_1^{avant}=y\right)*f_{Z_1^{avant}}(y)*dy+f_{Z_2^{avant}}\left(x/Z_1^{avant}=PlafondCF\right)*P\left(Z_1^{avant}=PlafondCF\right) \\ \\ P\left(Z_2^{avant}=PlafondCF\right)=\int_{-\infty}^{PlafondCF} P\left(Z_2^{avant}=PlafondCF/y\right)*f_{Z_1^{avant}}(y)*dy+P\left(Z_2^{avant}=PlafondCF/Z_1^{avant}=PlafondCF\right)*P\left(Z_1^{avant}=PlafondCF\right) \end{cases}$$

Malheureusement, les calculs sont fastidieux et ne permettent pas d'obtenir une formule satisfaisante.

Etude de $Z_3^{avant}$ :

$$f_{Z_3^{avant}}(x)=\left(\int_{-\infty}^{PlafondCF}\underbrace{f_{Z_3^{avant}}\left(x/Z_2^{avant}=y\right)}_{idem\quad f_{Z_2^{avant}}\left(x/Z_1^{avant}=y\right)}*\underbrace{f_{Z_2^{avant}}(y)}_{connue}*dy\right)*1_{x<0}$$

Malheureusement, les calculs destinés à trouver cette densité sont bien trop longs.
Ne pouvant les mener à terme, il faudra se « contenter » des résultats obtenus par simulations stochastiques.

# Annexe 3 : Méthodologie de simulation

Dans cette annexe est présentée la manière dont la programmation a été faite sous R.

La méthodologie a été la suivante :

Les paramètres propres à chaque *pool* auquel on s'intéresse sont pris en argument.

Pour rappel, ces paramètres sont les suivants :
- le nombre de salariés couverts par chaque garantie, et ce, pour chaque filiale
- la prime individuelle commerciale perçue par garantie et par pays
- les deux paramètres utiles à la modélisation de la sinistralité en Santé pour chaque filiale (espérance et volatilité de la sinistralité en Santé)
- les quatre paramètres utiles à la modélisation de la sinistralité en Décès (deux paramètres pour la fréquence et deux pour le coût)
- les quatre paramètres utiles à la modélisation de la sinistralité en Arrêt de travail
- le nombre d'années d'observation
- m
- le seuil d'écrêtement en cas d'application de la protection par tête de la garantie Décès

L'idée est ensuite de simuler le compte de résultat local de chaque filiale afin de pouvoir consolider ensuite les résultats. Ainsi, on construit une boucle qui répétera autant de fois la même méthodologie de simulation qu'il y a de filiales présentes.

Pour chaque filiale, la sinistralité est simulée pour les trois garanties et les résultats obtenus sont regroupés dans des matrices de taille k*NAO, où k représente le nombre de simulations et NAO le nombre d'années d'observation.

Dans l'outil, on construit **pour chaque filiale locale i, trois matrices de taille : NAO * k**
**où k désigne le nombre de simulations ( k = 10 000 ici) et NAO est le nombre d'années d'observation de l'activité.**
**Ces trois matrices représentent $S_i^{Santé}$ , $S_i^{Décès}$ et $S_i^{AT}$ .**
Pour chacune de ces matrices, chaque ligne représente une année de simulation.

Concernant le nombre d'années d'observation, il convient de l'adapter à la formule de *pooling* choisie. Par exemple, si l'on s'intéresse à un *Annual Stop Loss*, il est possible de ne simuler qu'une seule année d'activité ; pour un *Loss Carry Forward m Years Write-Off*, il est préférable d'opter pour un NAO qui soit un multiple de m (1*m ou 2*m par exemple). Pour les *Loss Carry Forward m Years Rolling*, il faut choisir au moins 10 années de simulation afin de ne pas perdre en information.

Cependant, il n'est pas utile de lancer les simulations sur un nombre très important d'années puisque pour chaque année, on dispose d'un échantillon de taille 10 000, et que le temps de calcul par R est déjà assez important.

Si l'on récapitule les résultats obtenus au chapitre II, les lois utilisées sont les suivantes :

- **En Santé :**

$$S_{pays\ i}^{Santé} \propto N\left(\mu_i * n_i\ ; \sigma_i * \sqrt{n_i}\right) \qquad \begin{cases} E[S_{pays\ i}^{Santé}] = \mu_i * n_i & = \mu_i^{Santé} \\ \sigma(S_{pays\ i}^{Santé}) = \sigma_i * \sqrt{n_i} & = \sigma_i^{Santé} \end{cases}$$

Donc, chaque ligne w (w = 1, …, NAO) de la matrice $S_i^{Santé}$ sera remplie par un vecteur gaussien de taille k, d'espérance $\mu_i * n_i$ et d'écart-type $\sigma_i * \sqrt{n_i}$ .

Rappelons que $n_i$ représente le nombre d'assurés couverts dans le pays i.

- **En Décès :**

$$S_{pays\ i}^{Décès} = \sum_{n=1}^{N} C_n^i \quad où \quad \begin{cases} \left(C_n^i\right)_n \propto \Gamma(\alpha_i\ ; \beta_i) \\ N \propto BinNeg(r_i * n_i\ ;\ p_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[S_{pays\ i}^{Décès}] = r_i * n_i * \dfrac{1-p_i}{p_i} * \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} & = \mu_i^{Décès} \\ \sigma\left(S_{pays\ i}^{Décès}\right) = \sqrt{r_i * n_i * \dfrac{1-p_i}{p_i} * \dfrac{\alpha_i}{\beta_i^2} * \left(1 + \dfrac{\alpha_i + 1}{p_i}\right)} & = \sigma_i^{Décès} \end{cases}$$

Concernant la garantie Décès, on utilise la méthode de Monte-Carlo pour le modèle composé :

1. On simule dans un premier temps un vecteur fréquence pour chaque année d'observation.
   Pour cela, chaque ligne d'une matrice Frequence de taille NAO*k est remplie par des vecteurs de loi binomiale négative de paramètres $(r_i * n_i\ ;\ p_i)$.
   Ainsi, pour chaque année d'observation w (donc pour chaque ligne $w \in \| 1 ; NAO \|$), on dispose de k fréquences $N_1^w$, …, $N_k^w$.

2. Puis, pour chaque année d'observation w, pour chaque observation j (j = 1, …, k), on simule Nj coûts de sinistres : $C_1^{w,j}$, …, $C_{Nj}^{w,j}$ en utilisant un vecteur Gamma de taille Nj et de paramètres $(\alpha_i\ ; \beta_i)$.

3. Ce qui permet de déduire pour chaque année d'observation w et pour chaque j (j = 1, …, k) : $$S_{j,w} = \sum_{l=1}^{N_j} C_l^{w,j}$$

La matrice $S_i^{Décès}$ est donc complétée pour chaque pays i présent dans le *pool*.

- **En Arrêt de travail :**

$$S^{AT}_{pays\ i} = \Pr ime^{AT}_{nette\ ,\ i} * \frac{T_i + \left(\sqrt{1+ratio_i} - 1\right) * E[\frac{S_{ref}}{P_{ref}}]}{\sqrt{1+ratio_i}}$$

$$où \quad \begin{cases} T_i \propto \log N(\nu_i\ ;\ \theta_i) \\ ratio\ est\ défini\ \ par:\ \Pr ime^{AT}_{nette\ ,\ i} = (1+ratio_i) * P_{ref} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E[S^{AT}_{pays\ i}] = \Pr ime^{AT}_{nette\ ,\ i} * \dfrac{E[T_i] + \left(\sqrt{1+ratio_i} - 1\right) * E[\frac{S_{ref}}{P_{ref}}]}{\sqrt{1+ratio_i}} = \mu^{AT}_i \\ \sigma(S^{AT}_{pays\ i}) = \Pr ime^{AT}_{nette\ ,\ i} * \dfrac{\sigma(T_i)}{\sqrt{1+ratio_i}} = \sigma^{AT}_i \end{cases}$$

Afin de remplir la matrice $S_i^{AT}$ **,** chaque ligne / année d'observation w (w = 1, …, NAO) est remplie par une combinaison linéaire du vecteur log-normale de paramètres $(\nu_i\ ;\ \theta_i)$, de taille k.

- **Sinistralité internationale :**

La matrice $S_i$ de taille NAO * k représente la sinistralité toutes garanties confondues obtenues pour la filiale du pays i. Pour l'obtenir, il suffit de sommer les trois matrices trouvées pour chacune des garanties.

Après avoir répété l'opération pour chacune des filiales i, on déduit la sinistralité internationale qui n'est autre que la somme des ($S_i$).

La matrice sinistralité globale S est par conséquent, également une matrice de taille NAO * k.

Pour chaque année d'observation, on dispose d'un échantillon de k = 10 000 simulations de sinistralité internationale.

- **Résultat international avant application de la prime de risque**

L'outil de calcul de la prime de risque prend en paramètres le montant des primes commerciales versées localement, ainsi que les chargements retenus par les assureurs locaux et le réseau. Ainsi, à échelle internationale, on connaît : Primes, Chargements Locaux et Chargements Internationaux.

Avant application de la prime de risque, le résultat international du *pool* s'écrit simplement :

$$Rés.\ Int^{avant} = \Pr imes - S - Ch\arg ementsLocaux - Ch\arg ementsInternationaux$$

D'un point de vue matriciel, la matrice représentant la simulation du résultat international avant application de la prime de risque est également une matrice de taille NAO * k.

A partir de cette matrice qui témoigne de NAO * k réalisations possibles du résultat international, on obtient un échantillon de résultat de l'assureur *leader*, et des dividendes versés à la maison-mère, en fonction de la formule de *pooling* choisie par la multinationale cliente, en appliquant les principes propres à chaque formule et donnés ci-dessous.

- **Pour l'*Annual Stop Loss* :**

Pour chaque simulation, le résultat international est affecté entre le résultat de l'assureur *leader* et le dividende versé à la maison-mère comme suit :

| | Assureur Leader | Dividende versé à la maison-mère |
|---|---|---|
| Annual Stop Loss | $\min\left(0\ ;\ Rés.Int^{avant}\right)$ | $\max\left(0\ ;\ Rés.Int^{avant}\right)$ |

- **Pour le *Loss Carry Forward m Years Write-Off*,** le NAO est un multiple de m. Chaque période de m années fait l'objet d'un traitement identique et indépendant.

Trois matrices de taille NAO * k sont créées et représentent le résultat de l'assureur *leader*, les dividendes versés à la maison-mère et enfin la variable Z (somme du report de perte et du fonds de contingence).
Pour chaque année d'observation w : $Z_w = FondsDeContingence_w + \mathrm{Re}\ portDePertes_w$.

Pour chaque période de m années, le code distribue le résultat international entre les trois matrices comme suit (donc distribue les m résultats annuels de la même façon pour les k simulations) :

| Loss Carry Forward m Years Write-Off | | | | |
|---|---|---|---|---|
| w | | Zw | Assureur Leader | Dividende versé à la maison-mère |
| w = 1 | $Si\quad Rés.Int_1^{avant} < 0$ | $Rés.Int_1^{avant}$ | 0 | 0 |
| | $Si\quad Rés.Int_1^{avant} \geq 0$ | $\min\left(PlafondCF\ ;\ \alpha * Rés.Int_1^{avant}\right)$ | | $Rés.Int_1^{avant} - Z_1$ |
| w = 2, …, m | $Si\quad Rés.Int_w^{avant} < 0$ | $Z_{w-1} + Rés.Int_w^{avant}$ | 0 | 0 |
| | $Si\quad Rés.Int_w^{avant} > 0$ | $\min\left(PlafondCF\ ;\ Z_{w-1} + \alpha * Rés.Int_w^{avant}\right)$ | | $Rés.Int_w^{avant} - (Z_w - Z_{w-1})$ |
| Fin d'année m | | 0 | $\min(0\ ;\ Z_w)$ | $\max(0\ ;\ Z_w)$ |

- **Pour le *Loss Carry Forward m Years Rolling*,** qu'il soit avec ou sans fonds de contingence, le code prévoit la création d'un vecteur report de perte, ainsi, on peut en mesurer la taille chaque année, et savoir si l'on arrive en fin de période ou non (ie si l'on a cumulé m années consécutives de report de perte).

## Loss Carry Forward m Years Rolling avec fonds de contingence

| w | | Zw | Assureur Leader | Dividende versé à la maison-mère |
|---|---|---|---|---|
| w = 1 | Si $Rés.Int_1^{avant} < 0$ | $Rés.Int_1^{avant}$ | 0 | $Rés.Int_1^{avant} - Z_1$ |
| | Si $Rés.Int_1^{avant} \geq 0$ | $\min\left(PlafondCF \;;\; \alpha * Rés.Int_1^{avant}\right)$ | | |
| w tel que Z(w-1) >0 | Si $Rés.Int_w^{avant} < 0$ | $Z_{w-1} + Rés.Int_w^{avant}$ | 0 | 0 |
| | Si $Rés.Int_w^{avant} \geq 0$ | $\min\left(PlafondCF \;;\; Z_{w-1} + \alpha * Rés.Int_w^{avant}\right)$ | | $Rés.Int_w^{avant} - (Z_w - Z_{w-1})$ |
| w tel qu'il y ait report de pertes depuis moins de m - 1 années | Si $Rés.Int_w^{avant} < 0$ | $Z_{w-1} + Rés.Int_w^{avant}$ | 0 | 0 |
| | Si $Rés.Int_w^{avant} \geq 0$ | $\min\left(PlafondCF \;;\; (Z_{w-1} + Rés.Int_w^{avant}) * \left(1_{\{Z_{w-1}+Rés.Int_w^{avant}<0\}} + \alpha * 1_{\{Z_{w-1}+Rés.Int_w^{avant}\geq 0\}}\right)\right)$ | | $Rés.Int_w^{avant} - (Z_w - Z_{w-1})$ |
| w tel qu'il y ait report de pertes depuis m - 1 années | Si $Rés.Int_w^{avant} < 0$ | 0 | $\min\left(Z_{w-1} + Rés.Int_w^{avant} \;;\; 0\right)$ | 0 |
| | Si $Rés.Int_w^{avant} \geq 0$ | 0 | | $\max\left(Z_{w-1} + Rés.Int_w^{avant} \;;\; 0\right)$ |

## Loss Carry Forward m Years Rolling sans fonds de contingence

| w | | Report de pertes (RP) | Assureur Leader | Dividende versé à la maison-mère |
|---|---|---|---|---|
| w tel qu'il n'y ait pas de report de pertes en w - 1 | Si $Rés.Int_w^{avant} < 0$ | $Rés.Int_w^{avant}$ | 0 | 0 |
| | Si $Rés.Int_w^{avant} \geq 0$ | 0 | | $Rés.Int_w^{avant}$ |
| w tel qu'il y ait report de pertes depuis moins de m - 1 années | Si $Rés.Int_w^{avant} < 0$ | $\mathrm{Re}\ portDePert\ e_{w-1} + Rés.Int_w^{avant}$ | 0 | 0 |
| | Si $Rés.Int_w^{avant} \geq 0$ | $\min\left(\mathrm{Re}\ portDePert\ e_{w-1} + Rés.Int_w^{avant} \;;\; 0\right)$ | | $\max\left(\mathrm{Re}\ portDePert\ e_{w-1} + Rés.Int_w^{avant} \;;\; 0\right)$ |
| w tel qu'il y ait report de pertes depuis m - 1 années | Si $Rés.Int_w^{avant} < 0$ | 0 | $\min\left(\mathrm{Re}\ portDePert\ e_{w-1} + Rés.Int_w^{avant} \;;\; 0\right)$ | 0 |
| | Si $Rés.Int_w^{avant} \geq 0$ | 0 | | $\max\left(\mathrm{Re}\ portDePert\ e_{w-1} + Rés.Int_w^{avant} \;;\; 0\right)$ |

**Pour toutes les formules, on en déduit des estimations du montant moyen du dividende versé à la maison-mère, des résultat moyen et volatilité du résultat de l'assureur *leader*, de la probabilité de perte pour ce dernier ainsi que des résultat moyen et volatilité de la perte.**

| Dividende versé à la maison-mère |
| --- |
| Montant moyen du dividende versé |
| $\dfrac{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} Dividende^{avant}{}_{i,j}}{NAO * k} = \hat{D}$ |

| Résultat de l'assureur leader | |
| --- | --- |
| Résultat moyen | Volatilité du résultat |
| $\dfrac{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}}{NAO * k} = \hat{L}$ | $\sqrt{\dfrac{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} \left(Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j} - \hat{L}\right)^2}{NAO * k}}$ |

| Probabilité de perte |
| --- |
| $\dfrac{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} 1_{\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\}}}{NAO * k}$ |

A noter que la probabilité de perte dont la formule est donnée ci-contre est la probabilité annuelle de perte. Dans le cas d'un *Loss Carry Forward m Years Write-Off*, on peut choisir de donner la probabilité de perte en fin de période et non annuelle.

| Perte pour l'assureur leader | |
| --- | --- |
| Montant moyen de la perte | Volatilité de la perte |
| $\dfrac{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j} * 1_{\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\}}}{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} 1_{\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\}}} = \hat{P}$ | $\sqrt{\dfrac{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} \left(Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j} * 1_{\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\}} - \hat{P}\right)^2}{\sum_{\substack{1\le i\le NAO\\1\le j\le k}} 1_{\{Rés.Ass.Leader^{avant}{}_{i,j}<0\}}}}$ |

A partir de ces informations, on évalue la prime de risque à appliquer.
L'assureur peut construire celle-ci comme il l'entend, bien qu'il reste limité par un argument commercial.
On peut par exemple choisir :

$$PrimeDeRisque = ProbabilitéDePerte^{avant} * \left\{E[Perte^{avant}] + \lambda * \sigma\left(Perte^{avant}\right)\right\}$$

où $\lambda$ est un coefficient (par exemple, $\lambda = 3$)

ou encore :

$$PrimeDeRisque = E[Perte^{avant}] + \lambda * \sigma\left(Perte^{avant}\right)$$

Le choix de la formule reste libre et l'on traite ici un cas général.

# Annexe 4 : Exemples de tables fournies par l'outil construit

Résultats de simulation par l'outil qui a été construit, pour une prime de risque du type :

Prime de risque = Probabilité annuelle de perte de l'assureur leader * (E[Perte] + 3*écart-type(Perte)).

4.1. Exemple d'un *pool* couvert par un *Annual Stop Loss*

| **Annual Stop Loss : Entreprise Multi**<br>La maison-mère française couvre ses 200 salariés en Santé, Décès et Arrêt de travail.<br>La filiale danoise couvre ses 100 salariés en Santé.<br>La filiale américaine couvre ses 150 salariés en Santé. | | | France | Danemark | Etats-Unis | POOL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nombre de têtes assurées | n | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | Hypothèses | Prime Unitaire Santé | 1 700 | 410 | 5 203 | - |
| | | Prime Unitaire Décès | 905 | - | - | - |
| | | Prime Unitaire Arrêt de travail | 300 | - | - | - |
| | | n Santé | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | | n Décès | 200 | - | - | 200 |
| | | n AT | 200 | - | - | 200 |
| | | mu Santé | 272 000,00 | 34 000,00 | 437 100,00 | - |
| | | sigma Santé | 19 982,84 | 550,00 | 87 679,49 | - |
| | | r Décès | 14,24 | - | - | - |
| | | p Décès | 0,97 | - | - | - |
| | | alpha Décès | 25,30 | - | - | - |
| | | beta Décès | 0,00 | - | - | - |
| | | E[T] | 1,06 | - | - | - |
| | | Ecart-type (T) | 0,48 | - | - | - |
| | | Prime de référence | 1 000 000,00 | - | - | - |
| | | E[Sref/Pref] | 1,10 | - | - | - |
| | | Nombre d'années d'observation (NAO) | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | m | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Sinistralité internationale | | Sinistralité internationale moyenne / Prime Commerciale | 71,70% | 82,94% | 56,00% | 63,29% |
| | | Sinistralité internationale moyenne / Prime Pure | 86,38% | 99,93% | 67,47% | 76,26% |
| Avant application de la prime de risque | | Résultat international moyen / Prime Commerciale | 11,30% | 0,06% | 27,00% | 19,71% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Commerciale | 30,75% | 1,35% | 11,33% | 14,23% |
| | | Résultat international minimum / Prime Commerciale | -209,87% | -5,66% | -20,64% | -77,59% |
| | | Résultat international maximum / Prime Commerciale | 67,25% | 6,12% | 76,82% | 60,06% |
| | | Résultat international moyen / Prime Pure | 13,62% | 0,07% | 32,53% | 23,74% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Pure | 37,05% | 1,62% | 13,65% | 17,15% |
| | | Dividende annuel moyen versé à la maison-mère / Prime Commerciale | 19,31% | 0,57% | 27,03% | 20,60% |
| | | Résultat moyen de l'assureur leader / Prime Commerciale | -8,00% | -0,51% | -0,03% | -0,90% |
| | | Volatilité du résultat de l'assureur leader / Prime Commerciale | 17,81% | 0,76% | 0,51% | 3,94% |
| | | Probabilité pour l'assureur leader d'être en perte | 30,37% | 48,29% | 0,86% | 9,34% |
| | En cas de perte pour l'assureur leader, on a les statistiques suivantes | Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -26,35% | -1,05% | -3,97% | -9,59% |
| | | Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 23,69% | 0,80% | 3,79% | 9,11% |
| | | Perte minimum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -209,87% | -5,66% | -20,64% | -77,59% |
| | | Perte maximum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 0,00% | 0,00% | -0,04% | 0,00% |
| <u>Après</u> application de la prime de risque | | Prime de risque / Prime Commerciale | 50,05% | 1,85% | 7,75% | 3,45% |
| | | Résultat international moyen / Prime Commerciale | -38,74% | -1,79% | 19,24% | 16,26% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Commerciale | 30,75% | 1,35% | 11,33% | 14,23% |
| | | Résultat international minimum / Prime Commerciale | -259,92% | -7,51% | -28,40% | -81,04% |
| | | Résultat international maximum / Prime Commerciale | 17,20% | 4,26% | 69,06% | 56,61% |
| | | Résultat international moyen / Prime Pure | -46,68% | -2,16% | 23,18% | 19,59% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Pure | 37,05% | 1,62% | 13,65% | 17,15% |
| | | Dividende annuel moyen versé à la maison-mère / Prime Commerciale | 0,15% | 0,06% | 19,45% | 17,54% |
| | | Résultat moyen de l'assureur leader / Prime Commerciale | 11,15% | 0,00% | 7,54% | 2,17% |
| | | Volatilité du résultat de l'assureur leader / Prime Commerciale | 30,55% | 1,24% | 1,33% | 4,71% |
| | | Probabilité pour l'assureur leader d'être en perte | 30,37% | 48,29% | 0,86% | 9,34% |
| | En cas de perte pour l'assureur leader, on a les statistiques suivantes | Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -26,35% | -1,05% | -3,97% | -9,59% |
| | | Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 23,69% | 0,80% | 3,79% | 9,11% |
| | | Perte minimum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -209,87% | -5,66% | -20,64% | -77,59% |
| | | Perte maximum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 0,00% | 0,00% | -0,04% | 0,00% |

## 4.2. Exemple d'un *pool* couvert par un *Loss Carry Forward 3 Years Write-Off*

**Loss Carry Forward 3 Years Write-Off : Entreprise Multi**

La maison-mère française couvre ses 200 salariés en Santé, Décès et Arrêt de travail.
La filiale danoise couvre ses 100 salariés en Santé.
La filiale américaine couvre ses 150 salariés en Santé.

| | | | France | Danemark | Etats-Unis | POOL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nombre de têtes assurées | n | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | Hypothèses | Prime Unitaire Santé | 1 700 | 410 | 5 203 | - |
| | | Prime Unitaire Décès | 905 | - | - | - |
| | | Prime Unitaire Arrêt de travail | 300 | - | - | - |
| | | n Santé | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | | n Décès | 200 | - | - | 200 |
| | | n AT | 200 | - | - | 200 |
| | | mu Santé | 272 000,00 | 34 000,00 | 437 100,00 | - |
| | | sigma Santé | 19 982,84 | 550,00 | 87 679,49 | - |
| | | r Décès | 14,24 | - | - | - |
| | | p Décès | 0,97 | - | - | - |
| | | alpha Décès | 25,30 | - | - | - |
| | | beta Décès | 0,00 | - | - | - |
| | | E[T] | 1,06 | - | - | - |
| | | Ecart-type (T) | 0,48 | - | - | - |
| | | Prime de référence | 1 000 000,00 | - | - | - |
| | | E[Sref/Pref] | 1,10 | - | - | - |
| | | Nombre d'années d'observation (NAO) | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | m | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Sinistralité internationale | | Sinistralité internationale moyenne / Prime Commerciale | 72,03% | 82,93% | 55,99% | 63,42% |
| | | Sinistralité internationale moyenne / Prime Pure | 86,79% | 99,91% | 67,46% | 76,41% |
| Avant application de la prime de risque | | Résultat international moyen / Prime Commerciale | 10,97% | 0,07% | 27,01% | 19,58% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Commerciale | 31,12% | 1,35% | 11,18% | 14,32% |
| | | Résultat international minimum / Prime Commerciale | -207,55% | -5,60% | -20,13% | -66,44% |
| | | Résultat international maximum / Prime Commerciale | 66,13% | 5,99% | 76,86% | 61,84% |
| | | Résultat international moyen / Prime Pure | 13,21% | 0,09% | 32,54% | 23,59% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Pure | 37,49% | 1,63% | 13,48% | 17,25% |
| | | Dividende annuel moyen versé à la maison-mère / Prime Commerciale | 15,08% | 0,38% | 27,01% | 19,70% |
| | | Résultat moyen de l'assureur leader / Prime Commerciale | -4,11% | -0,31% | 0,00% | -0,12% |
| | | Volatilité du résultat de l'assureur leader / Prime Commerciale | 16,16% | 0,87% | 0,00% | 1,62% |
| | | Probabilité pour l'assureur leader d'être en perte | 10,77% | 17,88% | 0,00% | 1,15% |
| | En cas de perte pour l'assureur leader, on a les statistiques suivantes | Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -38,21% | -1,71% | -0,03% | -10,82% |
| | | Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 33,49% | 1,34% | | 10,66% |
| | | Perte minimum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -228,72% | -8,63% | -0,03% | -68,19% |
| | | Perte maximum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -0,01% | 0,00% | -0,03% | -0,01% |
| Après application de la prime de risque | | Prime de risque / Prime Commerciale | 14,93% | 1,02% | | 0,49% |
| | | Résultat international moyen / Prime Commerciale | -3,96% | -0,95% | | 19,08% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Commerciale | 31,12% | 1,35% | | 14,32% |
| | | Résultat international minimum / Prime Commerciale | -222,48% | -6,63% | | -66,93% |
| | | Résultat international maximum / Prime Commerciale | 51,20% | 4,97% | | 61,35% |
| | | Résultat international moyen / Prime Pure | -4,78% | -1,15% | | 22,99% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Pure | 37,49% | 1,63% | | 17,25% |
| | | Dividende annuel moyen versé à la maison-mère / Prime Commerciale | 6,03% | 0,07% | | 19,22% |
| | | Résultat moyen de l'assureur leader / Prime Commerciale | 4,94% | 0,00% | | 0,35% |
| | | Volatilité du résultat de l'assureur leader / Prime Commerciale | 26,78% | 1,87% | | 1,72% |
| | | Probabilité pour l'assureur leader d'être en perte | 16,07% | 27,14% | 0,00% | 1,21% |
| | En cas de perte pour l'assureur leader, on a les statistiques suivantes | Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -45,23% | -2,66% | 0,00% | -10,92% |
| | | Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 38,00% | 1,75% | 0,00% | 10,72% |
| | | Perte minimum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -251,12% | -10,68% | 0,00% | -68,93% |
| | | Perte maximum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -0,01% | 0,00% | 0,00% | -0,01% |

## 4.3. Exemple d'un *pool* protégé par un *Loss Carry Forward 3 Years Rolling* avec fonds de contingence

| Loss Carry Forward 3 years avec fonds de contingence : Entreprise Multi<br>La maison-mère française couvre ses 200 salariés en Santé, Décès et Arrêt de travail.<br>La filiale danoise couvre ses 100 salariés en Santé.<br>La filiale américaine couvre ses 150 salariés en Santé. | | | France | Danemark | Etats-Unis | Mutualisation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nombre de têtes assurées | n | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | Hypothèses | Prime Unitaire Santé | 1 700 | 410 | 5 203 | - |
| | | Prime Unitaire Décès | 905 | - | - | - |
| | | Prime Unitaire Arrêt de travail | 300 | - | - | - |
| | | n Santé | 200 | 100 | 150 | 450 |
| | | n Décès | 200 | - | - | 200 |
| | | n AT | 200 | - | - | 200 |
| | | mu Santé | 272 000,00 | 34 000,00 | 437 100,00 | - |
| | | sigma Santé | 19 982,84 | 550,00 | 87 679,49 | - |
| | | r Décès | 14,24 | - | - | - |
| | | p Décès | 0,97 | - | - | - |
| | | alpha Décès | 25,30 | - | - | - |
| | | beta Décès | 0,00 | - | - | - |
| | | E[T] | 1,06 | - | - | - |
| | | Ecart-type (T) | 0,48 | - | - | - |
| | | Prime de référence | 1 000 000,00 | - | - | - |
| | | E[Sref/Pref] | 1,10 | - | - | - |
| | | Nombre d'années d'observation (NAO) | 15 | 15 | 15 | 15 |
| | | m | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Sinistralité internationale | | Sinistralité internationale moyenne / Prime Commerciale | 72,03% | 82,93% | 56,08% | 63,47% |
| | | Sinistralité internationale moyenne / Prime Pure | 86,78% | 99,91% | 67,57% | 76,47% |
| Avant application de la prime de risque | | Résultat international moyen / Prime Commerciale | 10,97% | 0,07% | 26,92% | 19,53% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Commerciale | 31,13% | 1,34% | 11,24% | 14,34% |
| | | Résultat international minimum / Prime Commerciale | -235,60% | -5,85% | -24,28% | -84,39% |
| | | Résultat international maximum / Prime Commerciale | 68,96% | 6,06% | 80,39% | 63,68% |
| | | Résultat international moyen / Prime Pure | 13,22% | 0,09% | 32,43% | 23,53% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Pure | 37,51% | 1,62% | 13,54% | 17,28% |
| | | Dividende annuel moyen versé à la maison-mère / Prime Commerciale | 12,92% | 0,23% | 25,25% | 17,98% |
| | | Résultat moyen de l'assureur leader / Prime Commerciale | -2,91% | -0,23% | 0,00% | -0,02% |
| | | Volatilité du résultat de l'assureur leader / Prime Commerciale | 14,32% | 0,78% | 0,00% | 0,73% |
| | | Probabilité pour l'assureur leader d'être en perte | 6,72% | 11,78% | 0,00% | 0,19% |
| | En cas de perte pour l'assureur leader, on a les statistiques suivantes | Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -43,32% | -1,95% | 0,00% | -11,66% |
| | | Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 36,12% | 1,37% | 0,00% | 11,97% |
| | | Perte minimum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -304,30% | -9,31% | 0,00% | -86,99% |
| | | Perte maximum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -0,01% | 0,00% | 0,00% | -0,03% |
| Après application de la prime de risque | | Prime de risque / Prime Commerciale | 79,44% | 3,32% | 0,00% | 0,09% |
| | | Résultat international moyen / Prime Commerciale | -68,47% | -3,25% | 26,92% | 19,44% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Commerciale | 31,13% | 1,34% | 11,24% | 14,34% |
| | | Résultat international minimum / Prime Commerciale | -315,04% | -9,17% | -24,28% | -84,49% |
| | | Résultat international maximum / Prime Commerciale | -10,48% | 2,74% | 80,39% | 63,59% |
| | | Résultat international moyen / Prime Pure | -82,49% | -3,91% | 32,43% | 23,42% |
| | | Volatilité du résultat international / Prime Pure | 37,51% | 1,62% | 13,54% | 17,28% |
| | | Dividende annuel moyen versé à la maison-mère / Prime Commerciale | 0,00% | 0,00% | 25,25% | 17,89% |
| | | Résultat moyen de l'assureur leader / Prime Commerciale | 10,97% | 0,07% | 0,00% | 0,07% |
| | | Volatilité du résultat de l'assureur leader / Prime Commerciale | 101,68% | 4,78% | 0,00% | 0,74% |
| | | Probabilité pour l'assureur leader d'être en perte | 33,33% | 33,24% | 0,00% | 0,19% |
| | En cas de perte pour l'assureur leader, on a les statistiques suivantes | Perte moyenne pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -125,98% | -6,44% | 0,00% | -11,78% |
| | | Volatilité de la perte de l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | 53,77% | 2,29% | 0,00% | 11,97% |
| | | Perte minimum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -463,18% | -15,46% | 0,00% | -87,17% |
| | | Perte maximum pour l'assureur leader en cas de perte / Prime Commerciale | -0,02% | 0,00% | 0,00% | -0,10% |