

Mémoire présenté le :
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Paul BOUYSSOUNOUSE

Titre : Optimisation d'un traité en excédent de sinistre par tête

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

.....
.....
.....

Membres présents du jury de l'ISFA

.....
.....
.....

Entreprise :

Nom : Malakoff-Humanis

Signature :



Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Mouhoub EL MARBOUH

Signature :



Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Résumé

Du fait des différences de salaires au sein de la population assurée, la sinistralité issue de la prévoyance collective et plus particulièrement des risques décès et invalidité présente une problématique de grande disparité des montants de sinistres. On distingue principalement deux types de sinistres : ceux dit attritionnels, fréquents et peu coûteux, et ceux dit graves, peu fréquents mais très coûteux, appelés risque de pointe. Les sinistres les plus graves peuvent avoir un impact non négligeable sur les résultats. Il est donc souhaitable de disposer d'une couverture de réassurance pour se couvrir contre le risque de pointe, c'est la raison pour laquelle ce type de couverture pré-existait sur les portefeuilles Malakoff-Médéric et Humanis. Suite à la fusion de ces deux groupes, il est nécessaire d'harmoniser les traités et donc de définir la nouvelle couverture. Le but de ce mémoire est de construire un modèle pour la sinistralité prenant en compte ces deux types de sinistres. On fera notamment appel à la théorie des valeurs extrêmes pour déterminer le seuil de séparation entre la partie attritionnelle et la partie grave de la sinistralité ainsi que pour ajuster une loi de probabilité à cette dernière. On cherchera ensuite à optimiser les paramètres du traité. On utilisera pour cela la méthode de Monte Carlo basée sur des simulations réalisées à partir du modèle construit précédemment. On tarifiera ensuite le traité, soit à l'aide de la méthode de Monte Carlo, soit à partir de formules analytiques, soit en faisant appel à la tarification par expérience.

Mots clés : Réassurance, Excédent de sinistre par tête, Prévoyance collective, Théorie des valeurs extrêmes, Monte-Carlo.

Abstract

Due to the wage differences within the insured population and the wide variety of guarantees offered by health insurance institutions, the latter have to face a problem of great disparity in terms of claim amounts. Claims can be grouped within two broad categories : attritional claims, which are frequent and inexpensive, and serious claims, also referred to as "peak risks", which are of low frequency but very expensive. The most serious claims can have a significant impact on the results of an insurance institution. Therefore, the latter usually chose to buy a reinsurance coverage to protect themselves against these peak risks. This reinsurance coverage already existed for Malakoff-Médéric and Humanis portfolios. However, since the merge of the two groups, it has become necessary to harmonize these reinsurance treaties and define a new coverage. The aim of this thesis is to build a reinsurance model that takes into account the two categories of risks mentioned hereabove. We will use the Extreme Value Theory in order to determine the separation threshold between attritional and serious risks, and to define a probability law for the claims experience. We will then seek to optimize the parameters of the reinsurance treaty by using a Monte Carlo method based on simulations built from the previously developed model. Finally, we will identify the best method to price the reinsurance treaty among the following : a Monte Carlo method, an analytic formula, and a pricing based on experience.

Key words : Reinsurance, Excess of loss per life, Collective welfare insurance, Extreme Value Theory, Monte-Carlo.

TABLE DES MATIÈRES

I	Contexte d'étude	9
1	Le groupe Malakoff-Humanis	10
2	La réassurance	11
2.1	Les différents types de réassurances	12
2.1.1	Obligatoire	12
2.1.2	Facultative	12
2.2	Les différentes catégories de réassurances	12
2.2.1	Proportionnelle	12
2.2.2	Non Proportionnelle	15
2.3	Focus sur le traité en excédent de sinistre par tête	16
2.3.1	Fonctionnement général	16
2.3.2	Clause Annual Aggregate Limit	16
2.3.3	Clause Annual Aggregate Deductible	16
2.3.4	Clauses particulières	16
2.4	Les différentes méthodes de tarification	17
2.4.1	La méthode <i>burning cost</i>	17
2.4.2	Tarification sur exposition	18
2.4.3	Le modèle collectif	18
3	La théorie des valeurs extrêmes	19
3.1	Généralité sur les GEV	19
3.1.1	Lois des maximums	19
3.2	Loi de Pareto généralisée et dépassements de seuils	20
3.3	Les principaux estimateurs du paramètre de queue	21
3.3.1	Maximisation de la log-vraisemblance	21
3.3.2	Estimateur de Picklands	21
3.3.3	Estimateur de Hill	22
3.3.4	L'estimateur de Dekkers-Einmahl-de Hann	22

3.3.5	Choix de l'estimateur	22
3.4	Méthode <i>peak over threshold</i>	23
4	Les indicateurs	24
4.1	La Value at Risk	24
4.2	Le Rorac	24
5	Présentation du périmètre d'étude	26
5.1	L'Arrêt de travail	27
5.1.1	Généralités	27
5.1.2	A propos du portefeuille	27
5.2	Le décès	30
5.2.1	Généralités	30
5.2.2	A propos du portefeuille.	30
6	Hypothèses	33
II	Paramètres des modèles	34
7	Commentaires sur le choix du modèle	35
8	Choix des seuils de comportement de Pareto	37
8.1	Risque Décès	37
8.2	Risque Invalidité	49
9	Choix des lois extrémales	54
10	Choix des lois de fréquences	55
10.1	Décès	55
10.2	Invalidité	56
11	Choix des lois de coûts attritionnels	57
12	Tarification de l'XS	58
12.1	Approche mathématique	58
12.2	Approche de Monte Carlo	59
III	Choix des paramètres de la couverture en situation libre	60
13	Détails sur les simulations	61
14	Effets des différents paramètres de la couverture	62
14.1	Effets des différents paramètres sur le capital immobilisé	62
14.1.1	Influence des paramètres de base.	62
14.1.2	Influence de l'engagement maximal du réassureur.	63
14.1.3	Influence de la franchise.	64
14.2	Effets sur la volatilité	65
14.2.1	Influence des paramètres de base	65
14.3	Effets des paramètres sur le Rorac	66

14.3.1 Effets de la priorité	66
14.4 Effets de la portée	67
14.5 Effets de la franchise	68
15 optimisation de la couverture décès	70
15.1 Maximisation du Rorac en situation libre	70
15.2 Maximisation sous contraintes	71
15.2.1 Tarification de la première tranche	71
15.2.2 Comparaison avec les programmes en place	72
15.2.3 Tarification de la seconde tranche	72
16 Optimisation de la couverture invalidité	73
16.1 Couverture optimale en situation libre	73
16.2 Couverture optimale sous contraintes	75
16.2.1 Comparaison avec les programmes en place	75
A Annexe des figures	82
A.1 Echantillons simulés	83

Table des abréviations

- XS (ou XL) : Excédent de sinistre (Excess of Loss).
- AAD : Annual Aggregate Deductible (Franchise).
- AAL : Annual Aggregate Limit (Engagement maximal).
- POT : *peak over threshold*.
- ME : Mean Excess (Dépassement Moyen).
- GEV : Generalized Extreme Value Distribution (Distribution Généralisée des Extrêmes).
- GPD : Generalized Pareto Distribution (Distribution de Pareto Généralisée).
- Rorac : Return on Risk Adjusted Capital (Rendement du capital ajusté au risque).
- SCR : Solvency Capital Requirement (Capital de Solvabilité Requis).
- VaR_α : Value at Risk de niveau de confiance α (quantile d'ordre α).
- RC : rente conjoint.
- RE : rente éducation.

Introduction

Le groupe Malakoff-Humanis est le leader de la Prévoyance collective. De ce fait il est amené à couvrir l'ensemble des catégories sociales, de l'employé au cadre dirigeant. Certains des affiliés comme les cadres supérieurs, dirigeants ou mandataires sociaux ont de très hauts niveaux de salaires. Or, pour les risques Décès et Invalidité, les garanties offertes sont souvent exprimées en pourcentage du salaire de l'affilié. Ceci expose donc le groupe Malakoff-Humanis à des problématiques particulières comme les sinistres graves. En effet, dans certains cas, les coûts des sinistres peuvent donc atteindre des montants de plusieurs millions d'euros. Sans couverture de réassurance adaptée, ces sinistres auraient un impact majeur sur la sinistralité totale et induiraient une volatilité importante du résultat. Le groupe Malakoff-Humanis fait donc appel à des réassureurs qui prendront en charge ces sinistres graves par le biais d'un traité en excédent de sinistre par tête, traité le mieux adapté à ce type de risque en contrepartie, du paiement d'une prime. La mise en place de cette couverture permet de réduire la volatilité du risque conservé par Malakoff-Humanis (et donc celle du résultat).

La maîtrise de ce risque de pointe est donc un sujet important pour le groupe et doit répondre à deux problématiques principales. En premier lieu il faut déterminer le niveau de couverture souhaité en fonction du risque auquel on est exposé, de la taille du groupe ou encore de son appétence aux risques. On cherchera ensuite à estimer le prix de cette couverture.

Ceci peut sembler facile a priori mais la sinistralité extrême est difficile à appréhender. En effet, on ne dispose que de peu d'observations et on ne peut donc pas appliquer les méthodes de tarification classiques. Il apparait donc nécessaire de faire appel à des outils mathématiques permettant d'extrapoler la queue de distribution de la sinistralité.

Le but de ce mémoire est d'optimiser les paramètres du traité en excédent de sinistre par tête couvrant l'ensemble du portefeuille du groupe Malakoff-Humanis et d'en déterminer le prix. On fixera pour cela un critère pertinent qui permettra de comparer les différents traités et qui prendra en compte la profitabilité et la volatilité.

Dans un premier temps nous présenterons le contexte de l'étude, les différentes méthodes de tarification ainsi que les bases de la théorie des valeurs extrêmes sur lesquelles repose la modélisation des sinistres graves. On présentera également le portefeuille étudié.

La seconde partie porte sur le choix des lois utilisées pour modéliser la sinistralité en décès et en invalidité. On utilise pour cela la méthode "*peak over threshold*". Pour chacun des risques, on cherche à déterminer un seuil au-delà duquel les sinistres sont considérés comme graves. On ajuste ensuite une loi de Pareto Généralisée pour les dépassements de ce seuil.

La troisième partie est quant à elle consacrée à l'application du modèle défini dans la partie précédente. On l'utilisera notamment pour l'optimisation du traité et l'étude de ses différents effets ainsi que pour sa tarification.

Première partie

Contexte d'étude

1

LE GROUPE MALAKOFF-HUMANIS

Malakoff-Humanis leader de la Protection sociale est un groupe paritaire et mutualiste issu de la fusion en 2019 des groupes Malakoff-Médéric et Humanis.

L'activité du groupe se concentre principalement sur deux domaines :

- L'assurance collective : il propose aux entreprises et leurs salariés des produits d'assurance et des services en santé, prévoyance et épargne.
- La retraite complémentaire : il est l'un des principaux délégataire de l'Agirc-Arcco.

En santé et prévoyance, il assure un français sur six. En retraite complémentaire, il s'occupe de près d'un français sur quatre.

Le groupe est composé de plusieurs entités aux tailles et aux statuts juridiques différents, héritage de l'histoire du groupe :

- Des Instituts de prévoyance (IP), tels que Malakoff-Médéric Prévoyance (MMP) et Humanis prévoyance (HP), ou encore les plus petits Institut National de Prévoyance des Représantant (INPR), CAPREVAL et l'Institution de Prévoyance des Salariés des Entreprises du groupe Caisse des dépôts et autres collectivités (IPSEC)
- Des mutuelles, comme la Mutuelle Malakoff-Médéric (MMM) ou encore Energie Mutuelle, Mutuelle Humanis Nationale et Mobilité Mutuelle.
- Des compagnies d'assurances (au sens Société Anonyme), comme QUATREM (4M) ou Humanis Assurance (HA).

2

LA RÉASSURANCE

D'une manière simplifiée, on peut définir la réassurance comme étant l'assurance des assurances. La réassurance :

- Protège le bilan de la cédante contre la survenance de sinistres extrêmes (décès d'un mandataire social), le cumul anormalement élevé de sinistres « normaux » (dérive de la mortalité ou du coût moyen) ou encore les événements catastrophiques.
- Augmentation des capacités de souscription de la cédante. La cédante peut ainsi développer son activité même si elle n'a pas encore (ou plus) les capacités financières pour le faire seule (en terme de solvabilité par exemple).
- Améliore la marge de solvabilité de la cédante.
- Dans un portefeuille d'investissement, la présence d'Insurance Linked Securities (ILS) génère un effet de diversification puisque elles sont presque totalement décorrélées des marchés financiers, malgré une légère dépendance positive liée à l'environnement économique. Il faut aussi prendre en considération qu'un choc majeur, tel un ouragan semblable à Katrina, les attentats du World Trade Center ou encore la survenance d'une pandémie majeure comparable à la grippe espagnole, aurait un impact significatif sur les marchés financiers tout en causant le défaut des ILS.

La demande de réassurance provient essentiellement des Etats Unis d'Amérique (42%) et d'Europe (45%). Au sein de l'Union Européenne les principaux acheteurs sont l'Allemagne (17%), la France (6%) et le Royaume-Uni (1%).

Concernant l'offre de réassurance, elle provient majoritairement d'Europe (53%), 4 des 5 premiers réassureurs mondiaux (Hannover, Swiss, Munich et la SCOR) y étant basés. Les deux autres principaux pays sont les Etats Unis d'Amérique (19%) et les Bermudes (17%).

2.1 Les différents types de réassurances

2.1.1 Obligatoire

La réassurance obligatoire se caractérise par un contrat de Réassurance dit « Traité » qui définit une catégorie de risques ainsi que des conditions ou des limites de souscription. Par ce traité, l'assureur - dit la « Cédante » - s'engage à céder tout risque correspondant aux conditions définies sans effectuer aucune sélection. De son côté, le réassureur est tenu d'accepter tous ces risques sans effectuer de sélection. C'est la forme de réassurance la plus répandue.

2.1.2 Facultative

Il s'agit dans ce cas de réassurer individuellement un risque spécifique (un navire par exemple). La réassurance « facultative » est particulière au sens où elle laisse le choix à l'assureur de céder ou non de la réassurance et au réassureur d'accepter ou non ladite réassurance.

2.2 Les différentes catégories de réassurances

2.2.1 Proportionnelle

En réassurance proportionnelle, le montant du sinistre à la charge du réassureur, ainsi que la prime qu'il perçoit, sont proportionnels à ceux de la cédante. Cette forme de réassurance est plutôt adaptée aux petites entités ayant des capacités de souscription relativement restreintes. Pour les entités plus importantes, les enjeux sont plus de l'ordre commercial que de l'ordre de la gestion des risques, même si de tels traités passés avec d'autres assureurs peuvent, sous réserve de réciprocité, induire un effet de diversification.

La Quote-Part Le traité à la Quote-Part est le mode de réassurance le plus simple. La cédante va concéder une fraction de la prime au réassureur. En échange, celui-ci s'engage à payer la même fraction des sinistres. Le réassureur et la cédante se partagent les chargements du contrat entre commissions, en faveur de la cédante, et frais, en faveur du réassureur. En pratique, les niveaux des frais et commissions de réassurance peuvent être très variables. La commission sera, par exemple, plus élevée pour des affaires avec un bon ratio sinistre sur prime. Dans ce type de traité, les comptes de la cédante et du réassureur évoluent de manière parallèle (cf. Figure 2.1), il y a un partage équitable du sort.

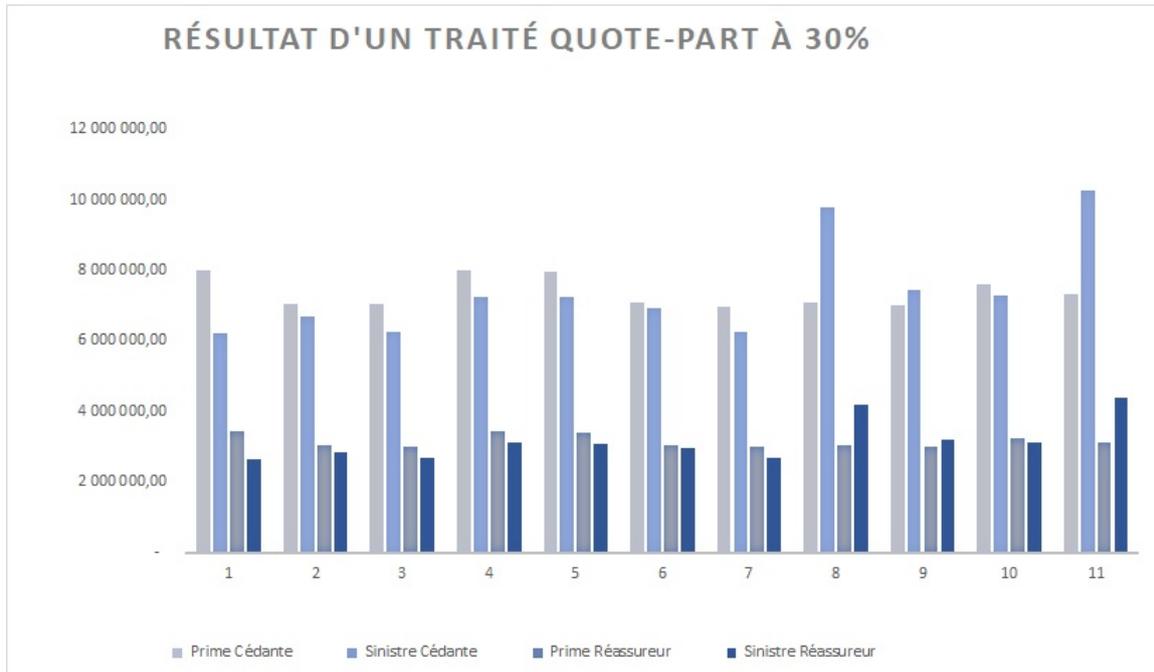


FIGURE 2.1 – Résultats d'un traité à la Quote-Part

Ainsi, même si ce type de réassurance permet de réduire le SCR de souscription de manière proportionnelle, voire dans le cas de partenariats avec d'autres assureurs, de générer de la diversification en échangeant des portions de contrats. Elle n'est cependant pas très optimale, dans le sens où elle n'immunise pas le portefeuille aux scénarios extrêmes. La survenance d'un scénario extrême sur un contrat cédé à la quote-part ne fera que réduire la perte de cette quote part. A l'inverse, le contrat à la quote part fait aussi céder des "petits" risques qu'il serait préférable de garder en portefeuille.

En résumé :

Avantages	Inconvénients
Couverture contre les dérapages de fréquence de tous types	Perte de produit financier
Partage du sort	Perte de rentabilité
Réduction des besoins en fonds propres	Pas de protection de l'exercice comptable
Couverture illimitée	Pas de traitement spécifique des risques de pointe

L'Excédent de plein Afin de garder en portefeuille ces petits risques, s'est développée une autre forme de réassurance proportionnelle : l'Excédent de Plein (Surplus Share). On définit un plein de rétention comme étant le montant de chaque sinistre qui restera à la charge de la cédante. On définit ensuite une capacité qui représente l'engagement maximal du réassureur. Pour chaque police d'assurance, on détermine alors un taux de cession par : $(\max(\text{Garantie-Retention}), \text{capacité}) / \text{Garantie}$. Ce ratio va correspondre au taux de partage des primes et des sinistres (cf. Figure 2.2). La gestion d'une telle police de réassurance est donc extrêmement lourde. De plus,

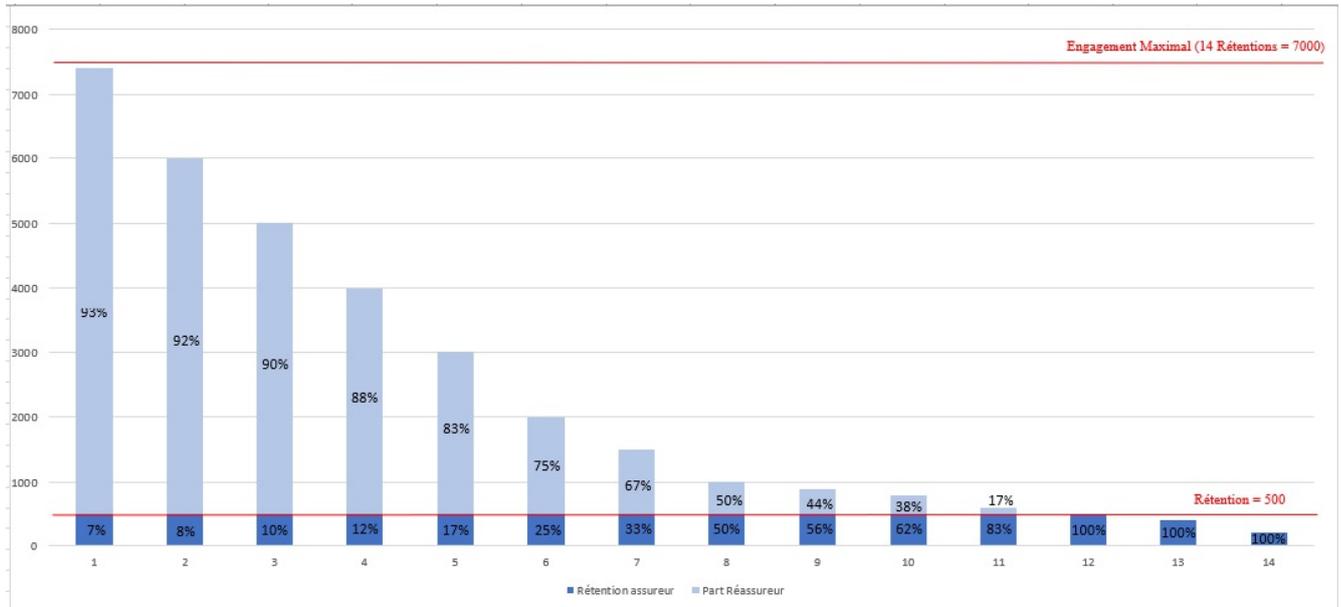


FIGURE 2.2 – Partage des polices pour un Excédent de Plein

elle implique de connaître les niveaux exacts de garantie. Ce type de traité est donc très difficilement applicable dans le cadre de l'assurance vie collective.

En résumé :

Avantages	Inconvénients
Rétention optimisée	Pas de protection de l'exercice comptable
Portefeuille homogène	Lourdeur de gestion
Economie de prime par rapport à la Quote Part	Nécessite une grille tarifaire précise.
Couverture illimitée	Inadaptée à certaines branches
Risques graves cédés	

2.2.2 Non Proportionnelle

En réassurance non proportionnelle, le montant des sinistres à la charge du réassureur est déterminé par un seuil (la priorité) et une limite (la portée), sans lien de proportionnalité avec la prime ou la sinistralité. C'est la forme de réassurance la mieux adaptée à la gestion des risques.

Excédent de pertes L'excédent de pertes ou Stop-Loss (noté X SL Y, pour une couverture de X% de la prime au delà de Y% de S/P) est un traité de réassurance non proportionnelle offrant une couverture lorsque la sinistralité excède un pourcentage donné de la prime, et ce, dans la limite d'une certaine capacité définie également en pourcentage de la prime. Ce type de réassurance permet de prémunir la cédante contre tous les risques possibles (cf. Figure 2.3) . Cependant son coût est généralement rédhibitoire et le Stop-Loss n'est donc



FIGURE 2.3 – Résultats d'un traité Stop-Loss

utilisé qu'en complément d'autres types de couvertures.

En résumé :

Avantages	Inconvénients
Protection du résultat	Coût très élevé
Réduction du SCR	Engagement limité (sauf cas exceptionnels type SL CAT de la CCR)

2.3 Focus sur le traité en excédent de sinistre par tête

2.3.1 Fonctionnement général

Le traité en excédent de sinistre par tête (couramment appelé XS tête) est une forme de réassurance non proportionnelle qui a commencé à se développer dans les années 70 afin de protéger les segments décès et invalidité des portefeuilles des organismes assurantiels contre les risques de pointe. Ces sinistres rares mais à coût très élevé ont à eux seuls un impact significatif sur les résultats. Dans sa version la plus simple, elle présente deux paramètres : une rétention, appelée aussi priorité (assimilable à une franchise par sinistre) et une portée (engagement maximal du réassureur). Pour un contrat de portée X au delà d'une rétention Y , on écrit $X \text{ XS } Y$. La plupart des traités inclue également une clause dite de reconstitution. Cette clause indique le nombre maximal de fois que la portée peut être reconstituée. Le réassureur indemnise alors la part des sinistres qui dépasse la priorité, dans la double limite de la portée pour chaque sinistre et $N+1$ fois la portée de sinistralité cumulée pour le réassureur. Ainsi la sinistralité globale de la cédante n'est plus $S = \sum_{i=0}^N X_i$ mais $S' = \min(\sum_{i=0}^N \min(X_i, \max(P, X_i - R)), S - (n + 1) * R)$ avec

- P : la priorité
- R : la portée
- n : la reconstitution
- N : le nombre de sinistres
- X_i les N sinistres

2.3.2 Clause Annual Aggregate Limit

L'Annual Aggregate Limite (AAL) est une clause indiquant l'engagement maximal du réassureur sur l'ensemble des sinistres pris en compte par l'XS. Il peut être vu comme la généralisation de la reconstitution aux nombres non entier (son seul intérêt est de rendre la définition de l'engagement maximal plus flexible). Par exemple, dans le cas d'un 100 XS 20 avec un AAL de 200, le réassureur interviendra pour tous les sinistres dépassant 20, dans la double limite de 100 par sinistre et de 200 de sinistralité cumulée.

2.3.3 Clause Annual Aggregate Deductible

Il s'agit d'une clause de charge cumulée minimale pour déclencher l'intervention du réassureur. Elle est assimilable à une franchise appliquée à l'ensemble des sinistres. Cette clause présente comme intérêt de permettre de couvrir une fréquence anormalement élevée de sinistres importants (et non seulement la survenance d'un ou plusieurs sinistres très importants) par un traité XS, en diminuant la priorité du traité en sus de l'introduction de cette clause et donc de réduire la volatilité du résultat (cf. Figure 2.4) de façon significative en surcoût de la réduction déjà induite par la mise en place d'un XS tête basique.

2.3.4 Clauses particulières

Les spécificités des risques étudiés ici ont conduit à la mise en place de plusieurs clauses spécifiques :

- Les montants de sinistres déclarés par la cédante sont les capitaux constitutifs de rentes en invalidité et la

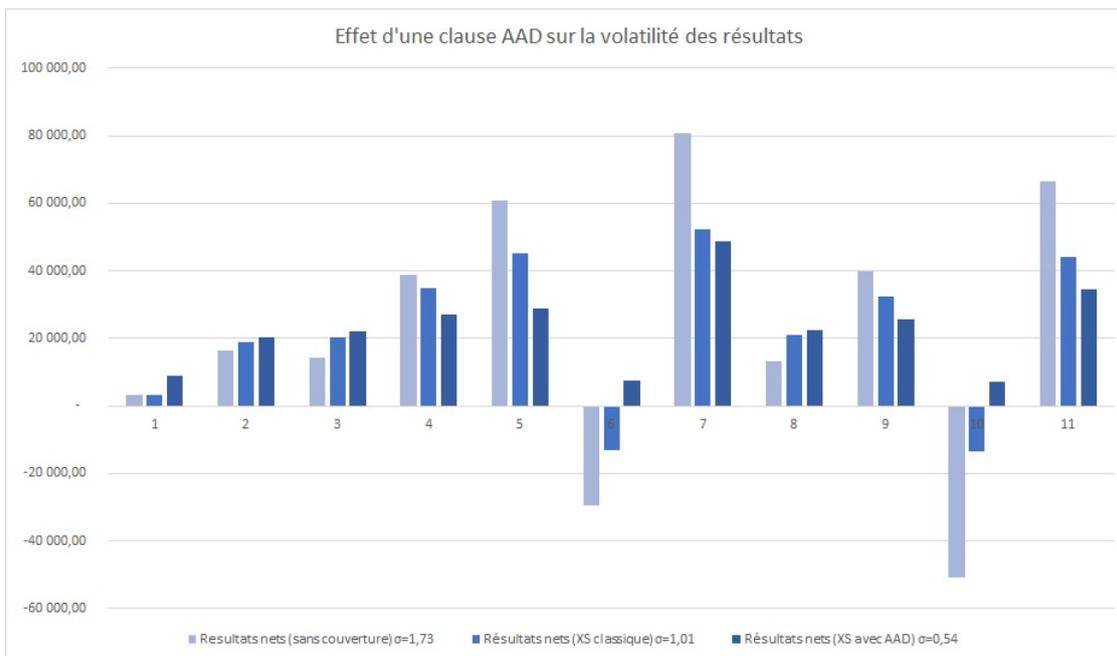


FIGURE 2.4 – Effets d'une clause AAD

somme des capitaux décès avec les éventuels capitaux constitutifs des rentes conjoints et éducations pour le décès. L'objectif poursuivi ici est de faciliter la gestion. En effet, il peut parfois s'écouler des dizaines d'années avant que la charge ultime ne soit connue avec certitude.

- Il est toutefois convenu d'une période de consolidation des sinistres déclarés. Ainsi, si le bénéficiaire d'une rente invalidité, conjoint ou éducation, décède pendant cette période de consolidation, la cédante le notifie aux réassureurs et le montant déclaré est recalculé en remplaçant le capital constitutif de la rente concernée par les montants réellement versés au titre de cette rente.
- Les montants de sinistres déclarés sont, sauf exceptions mentionnées spécifiquement dans les conditions particulières, nets de réassurance proportionnelle.
- On suppose ici que dans cette étude, le traité ne prévoit pas d'exclusion en sus de celles prévues aux conditions des polices d'assurances du portefeuille réassuré.

2.4 Les différentes méthodes de tarification

Pour tarifier une couverture XS tête, plusieurs méthodes sont envisageables. On écartera immédiatement la méthode de modélisation par coût-moyen / fréquence. Il n'est en effet pas pertinent de tarifier une couverture portant sur des risques extrêmes à partir d'indicateurs prenant en compte des paramètres moyens (qui rendent donc très mal compte des phénomènes extrêmes). Pour les mêmes raisons, on écartera également une tarification par GLM.

2.4.1 La méthode *burning cost*

La méthode Buring Cost est celle du point de vue purement financier. La prime pure réclamée par le réassureur sera égale à la moyenne de la sinistralité (actualisée). Chaque année est pondérée par l'encaissement

de primes correspondant (toujours actualisé) de manière à tenir compte des éventuelles variations du chiffre d'affaires. On pourra éventuellement introduire une pondération plus élevée sur les survenances les plus récentes. Cette méthode présente l'avantage de la simplicité, cependant, elle est basée uniquement sur l'historique ce qui fait qu'elle est très peu adaptée à la tarification de couvertures de réassurance dont la sinistralité est très volatil. Elle permet néanmoins de donner une idée du prix de la couverture et peut donc servir d'élément de comparaison pour les résultats des autres méthodes.

2.4.2 Tarification sur exposition

Pour cette méthode de tarification, on utilisera les données du portefeuille pour l'année de cotation et une mesure d'exposition au risque. Dans le cas qui nous concerne, pour le risque décès par exemple, on considérerait le salaire, le statut marital, l'âge des éventuels conjoints, le nombre d'enfants, leurs âges, si ils sont handicapés ou non, ainsi que les niveaux de garanties. Avec tous ces éléments, on calculerait le capital constitutif de décès de chaque assuré et on probabiliserait ses montants en utilisant des tables de mortalité pour obtenir la prime pure de la couverture. Le problème est qu'en prévoyance collective, on ne dispose pas de ces informations pour l'ensemble de la population assurée. Tout juste dispose-t-on d'une partie des ces données pour les salariés (ou mandataires sociaux) couverts et susceptibles de toucher la tranche la plus haute de l'XS tête. Ce cas est assez représentatif de la réalité puisqu'en pratique, la tarification par exposition est difficile à mettre en oeuvre, faute de données nécessaires.

2.4.3 Le modèle collectif

Définition Soient S la charge de sinistres et N le nombre de sinistres de la branche sur une année et (X_i) une suite de variables indépendantes identiquement distribuées représentant les montants des sinistres individuels. on a $S = \sum_{i=1}^N (X_i)$

On définit un sinistre attritionnel comme un sinistre fréquent, mais de faible coût. On définit un sinistre grave comme un sinistre peu fréquent, mais au coût élevé. On se place donc dans le cadre de ce modèle collectif et on définit en sus :

- (X_i) la variable aléatoire représentant le coût du i^{eme} sinistre attritionnel.
- (Y_i) la variable aléatoire représentant le coût du i^{eme} sinistre grave.
- N_{Att} la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres attritionnels survenus dans l'année.
- N_{Grave} la variable aléatoire représentant le nombre de sinistres graves survenus dans l'année.
- $S_{Att} = \sum_{i=1}^{N_{Att}} (X_i)$ la part de la charge totale imputable aux sinistres attritionnels.
- $S_{Grave} = \sum_{i=1}^{N_{Grave}} (Y_i)$ la part de la charge totale imputable aux sinistres graves.

En pratique on considèrera la charge attritionnelle S_{Att} non pas comme une somme de variables aléatoires, mais comme une unique variable aléatoire. Ce choix s'explique par le fait qu'on n'a pas besoin de connaître le détail de la sinistralité attritionnelle. Le choix d'inclure ce détail dans le modèle induirait en outre une augmentation considérable des temps de calculs, notamment pour celui de la VaR.

On se ramène donc au modèle suivant :

$$S = S_{Att} + \sum_{i=1}^{N_{Grave}} (Y_i)$$

3

LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES

En assurance de personnes, on observe des sinistres survenant à une fréquence très faible mais d'une amplitude très grande qui entraînent des pertes non négligeables au niveau d'un groupe entier. Dans les approches de tarification classiques, nous avons l'habitude de considérer les sinistres de très gros montants comme des points aberrants. En réalité, il convient d'y accorder une attention toute particulière, ces sinistres pesant fortement sur la charge de sinistres globale. Pour modéliser ces sinistres, on peut utiliser des lois avec des queues de distribution épaisses ou moyennement épaisses telle que la loi Pareto. Cependant, ces lois s'ajustent très mal aux sinistres de faible coût, qui représentent la majorité des sinistres. Il convient donc de séparer les sinistres attritionnels des sinistres graves.

La base mathématique permettant de déterminer ce seuil de séparation entre sinistres attritionnels (fréquence élevée, faible amplitude) et sinistres graves (fréquence faible, amplitude élevée) est la Théorie des Valeurs Extrêmes dont nous allons présenter les bases dans la partie qui suit (nous la considérerons ici univariée avec absence de dépendance temporelle).

3.1 Généralité sur les GEV

3.1.1 Lois des maximums

Les statistiques d'ordres . Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n . On note $X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{i:n} < \dots < X_{n:n}$ les statistiques d'ordre. On notera

$$m_n = X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

le minimum (plus petite statistique d'ordre) de ces n variables aléatoires et :

$$M_n = X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

le maximum (plus grande statistique d'ordre) de X_1, \dots, X_n

Théorème de Fisher-Tippett Si $\exists (c_n)_{n \in \mathbb{N}} > 0$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que quand $n \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} < x\right) \rightarrow G(x)$$

pour une distribution non dégénérée G où G est la fonction de répartition d'une distribution non dégénérée (i.e. d'une distribution dont la variance est non nulle), alors G est du même type que l'une de trois distributions suivantes :

- Fréchet ($\alpha > 0$) : $\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Weibull ($\alpha > 0$) : $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \exp(-(-x)^\alpha) & \text{sinon} \end{cases}$
- Gumbel : $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$

Distributions des extrêmes généralisées Von Mises et Jenkinson ont par la suite proposé une unique distribution unifiant les trois précédentes. On la note $GEV(\mu, \sigma, \xi)$ et on la définit comme suit :

$$GEV_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \begin{cases} \exp(-\exp(-\frac{x-\mu}{\sigma})) & \text{si } \xi = 0 \\ \exp(-[1 + \xi \times \frac{x-\mu}{\sigma}]_+^{\frac{-1}{\xi}}) & \text{sinon} \end{cases}$$

où μ désigne le paramètre de position, σ la paramètre d'échelle, et ξ le paramètre de forme.

Le paramètre ξ est souvent aussi appelé le paramètre (ou indice) de queue. Son signe donne une information sur la queue de distribution. On dira que la queue de distribution est épaisse si $\xi > 0$, intermédiaire si $\xi = 0$ et fine si $\xi < 0$.

3.2 Loi de Pareto généralisée et dépassements de seuils

Si historiquement l'étude de la loi des maximum de variables aléatoires i.i.d est la première approche de l'étude des phénomènes extrêmes, elle a ensuite été améliorée en 1975 par la méthode POT (*peak over threshold*) de Picklands qui permet d'utiliser plus d'information sur la queue de distribution que le seul maximum. Cette méthode repose sur les GPD (pour Generalized Pareto Distribution) et s'intéresse à la loi des excès au delà d'un seuil u suffisamment grand (car la loi de Pareto s'ajuste mal pour les valeurs basses et courantes).

Définition : fonction de répartition des excès au delà d'un seuil. Soit X une variable aléatoire et u un seuil appartenant au support de X . Alors, la fonction de répartition des excès de X au delà du seuil u notée $F_u(x)$ est :

$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u < x | X > u) = \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Définition : loi de Pareto Généralisée. Au lieu de considérer le seuil maximum M_n d'un échantillon $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ on s'intéresse aux $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > u_n}$ dépassement d'un seuil u_n , soit aux variables $X_i - u_n$ strictement positives. D'après le théorème de Pickands-Balkema-de Haan^[1], pour un seuil u_n suffisamment élevé, ces variables sont caractérisées par la distribution de Pareto généralisée, notée $GPD(\beta, \sigma)$ (pour Generalized Pareto Distribution) et définie comme suit :

$$G_{\beta, \xi}(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{-x}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \\ 1 - \left[1 + \xi \times \frac{x}{\beta}\right]_+^{\frac{-1}{\xi}} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} x &> 0 \text{ si } \xi \geq 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi} &\text{ si } \xi < 0 \end{aligned}$$

En résumé, dire que pour une distribution inconnue F l'échantillon des maxima normalisé converge en loi vers une distribution non dégénérée revient à dire que F appartient au domaine d'attraction d'une GEV. De plus au dessus d'un certain seuil, la distribution converge vers une loi de Pareto Généralisée. Ces deux lois limites (maximum et excès) on bien entendu le même paramètre de queue.

Quelques propriétés

- Espérance : Si $X \sim GPD(\beta, \xi)$ et $\xi < 1$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{\beta}{1-\xi}$
- Stabilité par seuil. Si X_u vérifie la propriété $X_u | X_u > 0 \sim GPD(\beta_u, \xi)$ alors $\forall v \geq u$:
 $X_v | X_v > 0 \sim GPD(\beta_u + \xi(v-u), \xi)$
- Dépassement moyen : ce point découle directement des deux précédents. Si on a $X = X_u + u$ avec $X_u | X_u > 0 \sim GPD(\beta_u, \xi)$ alors la fonction de dépassement moyen est donnée par $\forall v > u$: $\mathbb{E}(X-v | X > v) = \frac{\beta_u + \xi(v-u)}{1-\xi}$. Cette fonction est linéaire et de pente $\frac{\xi}{1-\xi}$.
- Stabilité du paramètre de queue : ce point découle du second évoqué. Si X_u vérifie $X_u | X_u > 0 \sim GPD(\beta_u, \xi)$ alors $\forall v \geq u$: $X_v | X_v > 0 \sim GPD(\beta_u + \xi(v-u), \xi)$ et donc $\forall v \geq u$: la fonction $v \mapsto \xi_v$ est constante.
- Stabilité du paramètre de forme : ce point découle également du second évoqué. Si X_u vérifie $X_u | X_u > 0 \sim GPD(\beta_u, \xi)$ alors $\forall v \geq u$: $X_v | X_v > 0 \sim GPD(\beta_u + \xi(v-u), \xi)$ et donc $\forall v \geq u$: la fonction $v \mapsto \beta_v - \xi \times (v-u)$ est constante.

3.3 Les principaux estimateurs du paramètre de queue

3.3.1 Maximisation de la log-vraisemblance

Pour estimer les paramètres de la loi de Pareto Généralisée, il est possible d'utiliser des méthodes paramétriques telles que la maximisation de la log-vraisemblance. Pour n excès notés X_1, \dots, X_n cette log vraisemblance s'écrit :

$$\ln(L) = -n \ln(\beta) - 1 + \frac{1}{\xi} \sum_{i=0}^n \ln\left(1 + \xi \frac{X_i}{\beta}\right)$$

si $\forall i$:

$$1 + \xi \frac{X_i}{\beta} > 0$$

Néanmoins, la plupart des estimateurs du paramètre de queue utilisent la statistique d'ordre $X_{i:n}$ c'est à dire la i -ème plus petite valeur d'un échantillon de taille n . Nous allons présenter les plus utilisés.

3.3.2 Estimateur de Picklands

Il repose sur les m plus grandes observations. Son expression est la suivante :

$$\xi_{n,m}^{Picklands} = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{x_{n-m:n} - x_{n-2m:n}}{x_{n-2m:n} - x_{n-4m:n}}\right)$$

L'avantage de cet estimateur est qu'il est valable quel que soit le signe de ξ . Ses défauts sont qu'il se base sur très peu de point (4) et qu'il est très volatil.

3.3.3 Estimateur de Hill

Probablement l'estimateur le plus connu car le plus efficace. Il utilise également les m plus grandes observations. Il est basé sur le fait que la fonction de survie est :

$$S(x) = x^{\frac{1}{\xi}} L(x)$$

avec L une fonction à variation lente c'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

$\forall i$, les points $(\ln(X_{n-i+1:n}); \ln(\frac{i}{n+1}))$ sont alors alignés selon une droite de pente ξ . L'estimateur de ξ est alors donné par :

$$\xi = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(x_{n-i+1:n}) - \ln(x_{n-m:n})}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(\frac{i}{n+1}) - \ln(\frac{m}{n+1})}$$

Lorsque m est suffisamment grand :

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(\frac{i}{n+1}) - \ln(\frac{m}{n+1}) \mapsto 1$$

d'où :

$$\xi_{m,n}^{Hill} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(x_{n-i+1:n}) - \ln(x_{n-m:n})$$

Cet estimateur est le plus utilisé car il est moins volatil et donc plus efficace que l'estimateur de Picklands. Cependant, il n'est utilisable que pour des distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet (les queues lourdes).

3.3.4 L'estimateur de Dekkers-Einmahl-de Hann

Comme les deux précédents, il utilise les m plus grandes observations. Il est défini comme suit :

$$\xi_{n,m}^{DEdH} = \xi_{n,m}^{Hill(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\xi_{m,n}^{Hill(1)})^2}{\xi_{m,n}^{Hill(2)}}\right)^{-1}$$

avec pour $r = 1, 2$:

$$\xi_{m,n}^{Hill(r)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} (\ln(x_{n-i:n}) - \ln(x_{n-m:n}))^r$$

3.3.5 Choix de l'estimateur

Lorsque $n \mapsto +\infty$, $m \mapsto +\infty$ et $\frac{m}{n} \mapsto 0$, ces estimateurs sont convergents. On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \sqrt{m}(\xi_{n,m}^{Picklands} - \xi) &\rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\xi^2(2^{\xi+1}+1)}{\ln(2)^2 2^{2(\xi-1)}}\right) \\ \sqrt{m}(\xi_{n,m}^{Hill} - \xi) &\rightarrow \mathcal{N}(0, \xi^2) \text{ pour } \xi > 0 \\ \sqrt{m}(\xi_{n,m}^{DEdH} - \xi) &\rightarrow \mathcal{N}(0, 1 + \xi^2) \text{ pour } \xi > 0 \end{aligned}$$

On voit ici que l'estimateur le plus efficace est bien celui de Hill. Si les paramètres de queues de nos lois s'y prêtent, c'est donc lui qu'on retiendra. On notera qu'il existe encore un estimateur, appelé QQ-estimateur, dérivé de l'estimateur de Hill par une sorte de lissage. Il est donc utilisable seulement si le paramètre de queue est positif. Toutefois, pour les paramètres de queue compris entre 0 et 1 (ce qu'on espère, car sinon la loi retenue n'admet plus d'espérance ce qui signifie que le risque n'est pas assurable car aucune prime ne suffirait à le couvrir), cet estimateur converge moins vite que l'estimateur de Hill lui même puisque on a :

$$\sqrt{m}(\xi_{n,m}^{QQ} - \xi) \rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{2}{\xi^2}) \text{ pour } \xi > 0$$

3.4 Méthode *peak over threshold*

Nous avons vu précédemment qu'il existe principalement deux méthodes pour modéliser les événements extrêmes : modélisation du maximum par la distribution GEV avec la méthode Block Maxima et la méthode *peak over threshold* qui modélise les excès au dessus d'un certain seuil. C'est cette seconde méthode que nous retiendrons pour ce mémoire car elle utilise plus d'information sur la queue de distribution. De plus il semble plus naturel d'utiliser une méthode reposant sur les excès au delà d'un seuil pour une problématique de traité XS qui couvre justement des excès au delà d'un seuil.

La méthode "*peak over threshold*" couramment appelée méthode POT permet d'estimer les paramètres d'une loi de Pareto Généralisée.

Elle commence par la détermination du seuil. Cette étape est extrêmement sensible car un seuil trop bas, bien qu'augmentant le nombre d'observations disponibles, entraînera une mauvaise approximation par GPD. A l'inverse, un seuil trop haut réduira le nombre d'observations utilisables, rendant les estimateurs moins précis.

Les méthodes utilisées pour choisir le seuil sont principalement graphiques. On utilise les propriétés précédentes et plus particulièrement celle sur le paramètre de queue ξ et le seuil retenu sera le seuil minimal pour lequel elles sont vérifiées. On pourra également tracer les graphiques quantiles-quantiles (QQ-plot) pour vérifier l'adéquation des données avec la GPD.

On estime alors les paramètres de la GPD avec ce seuil en maximisant la log vraisemblance. On pourra également tracer les graphiques quantiles-quantiles (QQ-plot) pour vérifier l'adéquation des données avec la GPD et valider ainsi les paramètres retenus.

LES INDICATEURS

4.1 La Value at Risk

On définit la Value at Risk d'ordre α d'une variable aléatoire (notée $VaR_\alpha(X)$) comme étant le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de X , ou encore la valeur telle que $F(X < VaR_\alpha(X)) = 1 - \alpha$. On l'interprète ici comme le montant de perte maximal avec une probabilité α . Par la suite, on travaillera avec $\alpha = 99,5\%$ puisqu'il s'agit du niveau associé à Solvabilité II (période de retour de 200 ans).

4.2 Le Rorac

On définit l'indicateur Rorac (Return on Risk Adjusted Capital) comme le rapport entre l'espérance de profit et le capital immobilisé (on prendra ici la Value at Risk). On a donc :

$$Rorac = \frac{\mathbb{E}(\Pi)}{VaR_{99,5\%}(S_{Conservee}) - \mathbb{E}(S_{Conservee})}$$

avec :

- $\Pi = (P_{Directe} - S_{Directe} - P_{Cedee} + S_{Cedee})$ le profit.
- $S_{Directe} = S_{Conservee} + S_{Cedee}$ la sinistralité brute de réassurance de la cédante. En pratique, on y retranche toutefois la sinistralité cédée par des traités Quote-Part.
- $S_{Conservee}$ la sinistralité nette de réassurance, proportionnelle et non proportionnelle de la cédante.
- S_{Cedee} le montant indemnisé par le réassureur au titre de la réassurance non proportionnelle.
- $P_{Directe} = P_{Conservee} + P_{Cedee}$ la prévision d'encaissement de prime en affaire directe par la cédante (brute de réassurance non proportionnelle mais nette de réassurance proportionnelle) .

- $P_{Conservee}$ la prévision d'encaissement de prime nette de toute réassurance.
- P_{Cedee} le montant prévisionnel de la prime due par la cédante aux réassureurs au titre de la couverture non proportionnelle.
- $Var_{99.5\%}(S_{Conservee})$ la Value At Risk de niveau 99,5% (ie le quantile d'ordre 99.5% de la sinistralité cumulée).

Cet indicateur nous permettra de comparer les différentes propositions de traités entre elles. En effet, on considèrera que le traité optimal est celui pour lequel le rendement du capital immobilisé est maximal. Ainsi on cherchera les paramètres qui maximisent le Rorac pour trouver le traité "optimal".

PRÉSENTATION DU PÉRIMÈTRE D'ÉTUDE

Les montants des sinistres considérés par la suite sont les capitaux constitutifs. En effet, pour des raisons pratiques évidentes, l'indemnisation par les réassureurs ne se fait pas une fois le sinistre totalement payé. Pour calculer ces montants, il a donc fallu revenir, notamment pour les rentes invalidité, conjoint et éducation, aux montants initiaux et pas ceux utilisés au dernier inventaire (qui eux comprennent des revalorisations). L'utilisation de cette méthode rend également inutile de savoir si le dossier de prestation est clos (et donc le montant définitif) ou non. On ne raisonne qu'en terme de valeur probable au jour du sinistre. Pour les calculs, on considère donc uniquement les parties "BASE" et "MAJORATION" des prestations. On exclut donc les revalorisations qui ne sont pas prises en compte dans les coûts de sinistres déclarés au réassureur, ceci dans un souci évident de simplicité. Les méthodes d'extractions de la base de données pour établir les listes de sinistres et les montants servant de base aux calculs des capitaux constitutifs sont sensiblement les mêmes en Décès et en Arrêt de travail. On garde les montants de base et de majoration associés aux dernières prestations réglées pour chaque couple Assuré/bénéficiaire distinct. Les critères retenus pour distinguer les assurés et les bénéficiaires sont :

- La date de sinistre.
- Les numéros uniques d'identifiant assuré/bénéficiaire.
- A défaut de numéro d'identifiant, le trio Nom, Prénom, date de naissance (beaucoup d'anciens dossiers ne comporte pas de numéro d'identifiant d'assuré ou de bénéficiaire).

Ces critères permettent de rattacher facilement les rentes conjoint et éducation aux capitaux décès ainsi que de regrouper les dossiers décès ou invalidité d'une même personne. Ce dernier point était primordial pour des raisons historiques : l'INPR est l'institut de prévoyance des représentants. Beaucoup de ses assurés sont donc couverts par plusieurs contrats d'assurance. En cas de décès ou d'invalidité on retrouve autant de dossiers de sinistres que d'employeurs (et donc de contrats couvrant la personne) et il est important de pouvoir cumuler les coûts de chacun de ces dossiers pour reconstituer la charge totale du sinistre qui sera éventuellement soumise aux réassureurs.

Il a fallu ensuite

- effectuer un travail de fiabilisation de la base en apportant des attentions particulières à retrouver des

erreurs humaines lors de la saisie d'information par le gestionnaire (les noms/prénoms composés par exemple génèrent souvent des doublons lors de la sélection des dossiers car ils sont écrits de plusieurs façons différentes)

- compenser les problèmes dus aux migrations des infocentres (sur certaines tables, une des migrations a écrasé le jour du sinistre, le remplaçant par le 15)
- paramétrer les informations manquantes quand cela était possible (la date du sinistre peut être manquante mais l'année de survenance renseignée ou vice versa).

Un autre travail important était de mettre à jour et de fiabiliser les taux de cessions en fonction des numéro SIREN afin de déterminer les coûts de sinistres nets de réassurance en Quote-Part.

Une fois ces montants connus, on les revalorise en utilisant un indice pertinent. Pour cette étude, l'indice retenu est l'indice INSEE de l'évolution des salaires, puisque les indemnisations, tant en décès qu'en invalidité, sont indexées sur ceux ci.

Pour passer des montants de rentes aux capitaux constitutifs, on calcule des coefficients de passage à partir des tables de mortalité (ou de maintien dans le cas de l'invalidité) en vigueur (cf. tableau 5.1) l'année qui sera couverte par le traité (ici 2020) ainsi que les prévisions de taux techniques en vigueur cette même année. Cela s'explique par le fait qu'on place les sinistres passés dans le référentiel de l'année de cotation.

Risques	Tables associées
Invalidité	BCAC 2013
Rente Conjoint	TGH/F 05
Rente éducation	Tables internes

FIGURE 5.1 – Tables utilisées

5.1 L'Arrêt de travail

5.1.1 Généralités

Pour le périmètre de cette étude, on considère uniquement la partie Incapacité Permanente (ou Invalidité). En effet le coût du sinistre déclaré exclut du calcul les montants déjà versés au titre de l'incapacité temporaire. Pour passer aux capitaux constitutifs :

- On calcule des coefficients de passage à l'aide de la table de maintien en invalidité BCAC 2013 et d'une prévision de taux techniques pour le 31/12/2020 et ce quelque soit la date réelle du sinistre (puisqu'on est dans une logique de sinistralité AS-IF).
- On revalorise ensuite les sinistres de l'inflation entre leur date de survenance et 2020. On utilisera les prévisions d'évolution des salaires pour les deux trimestres manquants.

5.1.2 A propos du portefeuille

On rappelle que comme l'entrée en invalidité peut être précédée de 3 années en incapacité, la sinistralité complète d'une survenance n'est connue que 3 années après la clotûre de l'exercice. Les survenances 2016 à 2019 de la base sont considérées comme incomplètes. On se servira de ces données uniquement pour le choix de la loi du coût des sinistres graves. Afin d'avoir 10 années complètes d'historique, on remontera donc jusqu'à la survenance 2006 (inclue). Un autre problème se pose alors : celui de la réforme des retraites de 2010. En effet, cette réforme a relevé l'âge de la retraite de deux ans. Ceci a pour effet une augmentation du coût des sinistres (pour une personne entrant en invalidité au même âge) puisque la durée maximale de paiement de la rente est allongée de 2 années. L'autre effet est une augmentation du nombre de sinistres. En retardant l'âge de la retraite, on change le profil d'âge du portefeuille en ajoutant des salariés âgés pour lesquels la probabilité d'entrer en invalidité est plus forte. Il faudra donc faire attention lors du choix des paramètres du modèle, tant sur les lois d'occurrences que sur les lois de coûts.



FIGURE 5.2 – Répartition des âges d'entrée en invalidité avant et après 2010

Sur la figure 5.2 qui présente le nombre de personnes entrées en invalidité par classe d'âges, on observe que le nombre de personnes entrant en invalidité augmente avec l'âge jusqu'à 3 années avant la date de la retraite. Les maximums sont en effet atteints respectivement pour 57 et 59ans. En effet, au delà de cet âge, les personnes peuvent rester en incapacité jusqu'à la retraite (respectivement 60 et 62ans). L'âge moyen à l'entrée en invalidité (après 2010) est de 51,7 ans ce qui est bien supérieur à la moyenne d'âge des assurés (qui est de 42ans). Le profil d'âge de la population assurée est donné figure 5.3. Cette répartition reste valable pour les assurés sur le risque décès (puisque'on ne considère que la partie collective du portefeuille)

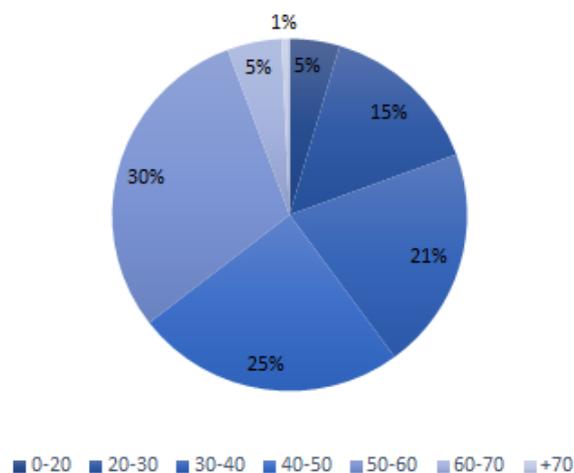


FIGURE 5.3 – Répartition des assurés par classe d'âges.

Concernant le coût des sinistres, le coût moyen est de 125 000€. La rente moyenne de base avoisine 10 000€

annuel avec une tendance à la hausse. Toutefois si on considère le montant de la rente revalorisé selon l'indice INSEE de hausse des salaires, on n'observe plus de dépendance temporelle.

5.2 Le décès

5.2.1 Généralités

L'autre partie qui sera abordée dans cette étude est le risque décès, pour la partie prévoyance collective uniquement. Le montant d'un sinistre en décès est composé du capital décès (avec des éventuelles majorations) qui correspond à un pourcentage du salaire annuel de la personne décédée. A cela s'ajoutent les capitaux constitutifs des éventuelles rentes conjoint et éducation. Pour les besoins de l'étude, les capitaux constitutifs sont recalculés comme si les sinistres s'étaient produits lors de l'année de cotation (logique de *burning cost*). On tient donc compte du changement de taux technique, de la hausse des salaires (indice INSEE) ainsi que de l'effet générationnel.

Exemple pour un sinistre datant de 2009

Monsieur John Doe décède accidentellement le 1^{er} Janvier 2009. Son salaire est de 40 000 € annuel brut. Le capital versé en cas de décès est de 100% du salaire plafonné à la tranche C de la sécurité sociale. A cela s'ajoute une majoration de 50% pour conjoint et de 100% pour décès accidentel, soit au total 250% du salaire de base plafonné à la tranche C de la sécurité sociale.

Sa femme, Jane Doe, née le 15 Décembre 1974, se voit donc verser un capital décès égal à 100 000 € (250% x 40 000). Elle bénéficiera également d'une rente de conjoint viagère d'un montant annuel de 25% du salaire soit 10 000 € annuels.

Le taux technique en vigueur en 2009 est de 2,50%.

L'indice INSEE moyen pour les salaires en 2009 est de 92,9.

Le coefficient de passage pour la RC est de 31,2. Le capital constitutif de la RC est donc de 312 000 €. Ce qui fait un capital constitutif total de 412 000 €.

Le taux technique prévu pour 2020 est de 0%.

La prévision de l'indice INSEE moyen pour les salaires en 2020 est de 115.

Pour avoir le même âge à la survenance du sinistre, on remplace la date de naissance de Mme Jane Doe par le 15 Décembre 1985.

Le nouveau capital décès est de $100000 \times \frac{115}{92,9} = 123922 \text{ €}$

Le nouveau montant de base pour la RC est de $10000 \times \frac{115}{92,9} = 12392 \text{ €}$

Le nouveau coefficient de passage pour la RC est de 46,1.

On a donc un capital constitutif en vision *burning cost* de 695204 €

5.2.2 A propos du portefeuille.

L'âge moyen des personnes décédées est de 58,7ans pour ex-Malakoff Médéric et 59,4 ans pour ex-Humanis. La répartition des âges au décès (figure 5.4) peut sembler quelque peu originale à première vue, avec ce pic du nombre de mort vers 60ans. Elle est typique d'un portefeuille principalement collectif : la grande majorité des assurés est composée de personnes actives d'où le pic du nombre de morts vers 60 ans. En effet, les effectifs de cette classe d'âges sont beaucoup plus importants que pour les suivantes dans le portefeuille.

On peut également s'étonner de la présence de décès de mineurs. En effet, la plupart des contrats prévoit des allocations obsèques en cas du décès d'un enfant voir le versement d'un capital dans certains cas. Concernant les garanties : Les majorations du capital décès concernent 14% des dossiers. On ne peut cependant pas distinguer la part due au décès accidentel de celle due aux majorations familiales. En revanche, sur le périmètre

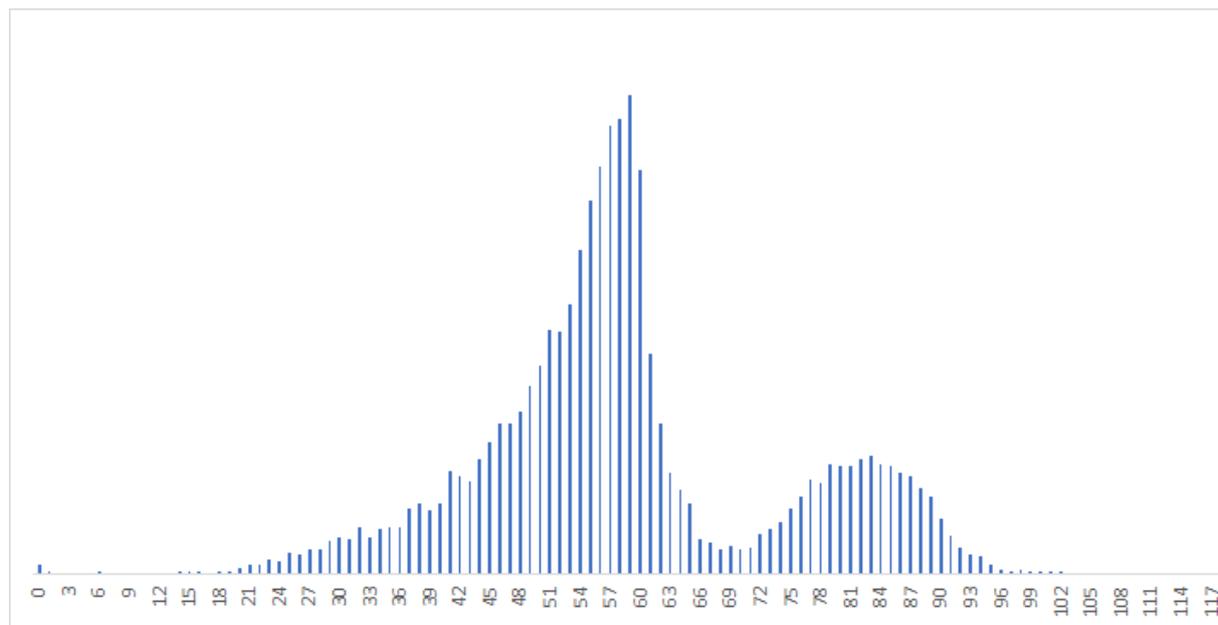


FIGURE 5.4 – Age des personnes décédées

humanis uniquement, l'infocentre nous renseigne sur la cause du décès. On peut noter que les décès accidentels représentent en 2019 2.5% des décès.

Le versement d'une rente conjoint concerne 13% des sinistres. Concernant les bénéficiaires, 89% sont des femmes (ce taux monte même à 95% sur le périmètre ex-Humanis !). A titre de comparaison, 42% des personnes décédées pour lesquels le sexe est renseigné en 2019 sur le périmètre ex-Humanis sont des femmes. Ce taux n'est que de 23% sur le périmètre ex-MM et ce chiffre chute même à 16% si on considère les 10 dernières années ! Pour le portefeuille issu de Malakoff-Médéric, cette surreprésentation est en partie un effet du portefeuille : en effet les garanties RC sont principalement concentrées sur le portefeuille ex-Médéric. Historiquement il s'agit du secteur métallurgie au sein duquel les employés sont principalement des hommes, ce qui explique en partie la très forte part des femmes dans les bénéficiaires des rentes conjoint.

Le versement d'une (ou plusieurs) rentes éducation concerne 10% des sinistres. Le sexe des bénéficiaires est plus également réparti pour cette garantie que pour la rente conjoint (50/50).

Le versement à la fois d'une rente conjoint et d'une ou plusieurs rentes éducation concernent quand à lui 2% des cas.

On s'intéresse maintenant aux âges des bénéficiaires. La moyenne d'âge au départ de la rente pour les bénéficiaires d'une rente éducation est de 12,6ans. En regardant le détail par année, on observe la présence d'une tendance haussière (alors que l'âge moyen au décès n'en présente pas). L'explication peut être cherchée dans les facteurs suivants : la population observée fait des enfants de plus en plus tard, les garanties offrent de plus en plus des prestations en cas de poursuite des études supérieures, ce qui augmente le nombre de bénéficiaires de rente ayant déjà un âge avancé, ou alors la proportion des enfants faisant des études supérieures a augmenté ce qui accroît le nombre de bénéficiaires potentiels de la garantie ayant des âges élevés. Pour les bénéficiaires d'une rente conjoint, l'âge moyen au départ de la rente est de 51,5ans. Pour les conjoints bénéficiaires, on observe que cet âge est inférieur de 7 ans à l'âge moyen des personnes décédées. On constate cependant que si on observe seulement l'âge moyen des personnes décédées en cas de versement d'une rente conjoint alors cet âge moyen s'abaisse à 53,7ans soit seulement 2 ans de plus que les bénéficiaires (voir figure 5.5).

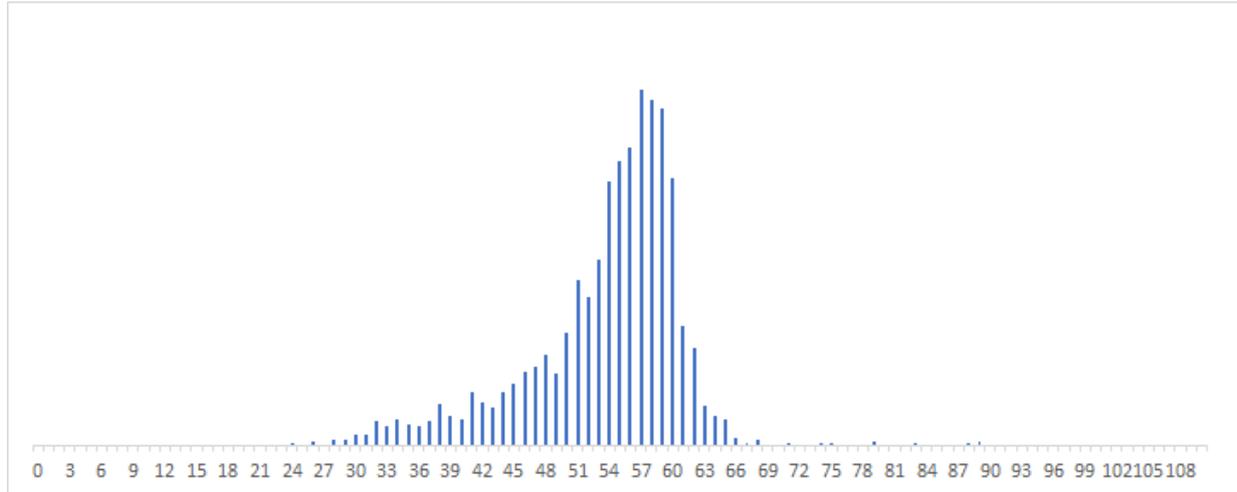


FIGURE 5.5 – Age des personnes décédées dans le cas où une RC est versée

De même l'âge moyen des personnes décédées en cas de versement d'une rente éducation est de 55,4ans. Dans le cas du versement de rentes conjoint et éducation, elle n'est même que de 53,2ans! Ce chiffre est toutefois à prendre avec précaution, les versements simultanés de rentes conjoint et éducation ne concernent que 2% des sinistres. Ces résultats ne sont pas si surprenant puisque les options avec la garantie Rente Conjoint est plus favorable aux personnes ayant un conjoint jeune. Les personnes jeunes auront donc plus tendance à choisir cette option. Celle avec les rentes éducation est quant à elle plus favorable aux personnes ayant des enfants en bas âge ce qui conduit au même résultat. Un autre élément d'explication provient de la population couverte par les garanties. En effet, on constate sur la figure 5.5 qu'aucune RC n'est versée pour des décès au-delà de 65ans. Le même phénomène s'observe sur les RE. Ces garanties ne sont en effet proposées qu'aux actifs en assurance collective et pas en assurance individuelle. Il n'y a donc pas de personnes de plus de 65 ans dont le décès déclencherait le versement de rentes conjoint ou éducation.

6

HYPOTHÈSES

Les hypothèses sous jacentes à la mise en place des modèles sont :

- L'exclusion du risque catastrophe du périmètre de l'étude. Elles sont extrêmement rares sur les risques décès et invalidité, il convient donc de les traiter à part. La couverture de ce risque fait l'objet d'un traité spécifique, il est donc tout à fait cohérent de ne pas le prendre en compte ici.
- La présence de réassureurs induit l'apparition d'un risque de contrepartie (risque de défaut d'un réassureur, on rappelle que l'assureur est seul responsable d'indemniser l'assuré. En cas de défaut d'un réassureur, il est tenu de verser l'intégralité des indemnités aux bénéficiaires). Dans le cadre de cette étude, on négligera ce risque.
- En pratique, les frais de réassurance peuvent être très variables et surtout fonction de la volatilité des résultats du traité. On fait ici l'hypothèse que les frais de réassurance sont fixes et égaux à 10% et on ne tient pas compte de la présence d'éventuels frais de courtage. Le prix demandé par les réassureurs pour une couverture donnée est donc égal à 110 % de la prime pure de ladite couverture.
- On suppose les sinistres indépendants entre eux. On les suppose également indépendants de N , le nombre de sinistres survenus dans l'année.

Deuxième partie

Paramètres des modèles

7

COMMENTAIRES SUR LE CHOIX DU MODÈLE

Le modèle présenté ici est un modèle classique en réassurance. Il s'agit de séparer la sinistralité en 3 parties :

- Attritionnelle : $S_1 \sim LN(\mu, \sigma)$ où les paramètres μ et σ sont estimés par maximum de vraisemblance.
- Graves : $S_2 = \sum_{i=1}^N (X_i)$ où les X_i sont indépendants et identiquement distribués avec $X_1 \sim GDP(\beta, \xi)$ et N suit une loi classique pour les occurrences de sinistres (Binomiale, Poisson, ou Binomiale Négative). C'est sur cette partie qu'est concentré l'essentiel du travail.
- Catastrophes : cette partie n'est pas prise en compte dans le cadre de cette étude.

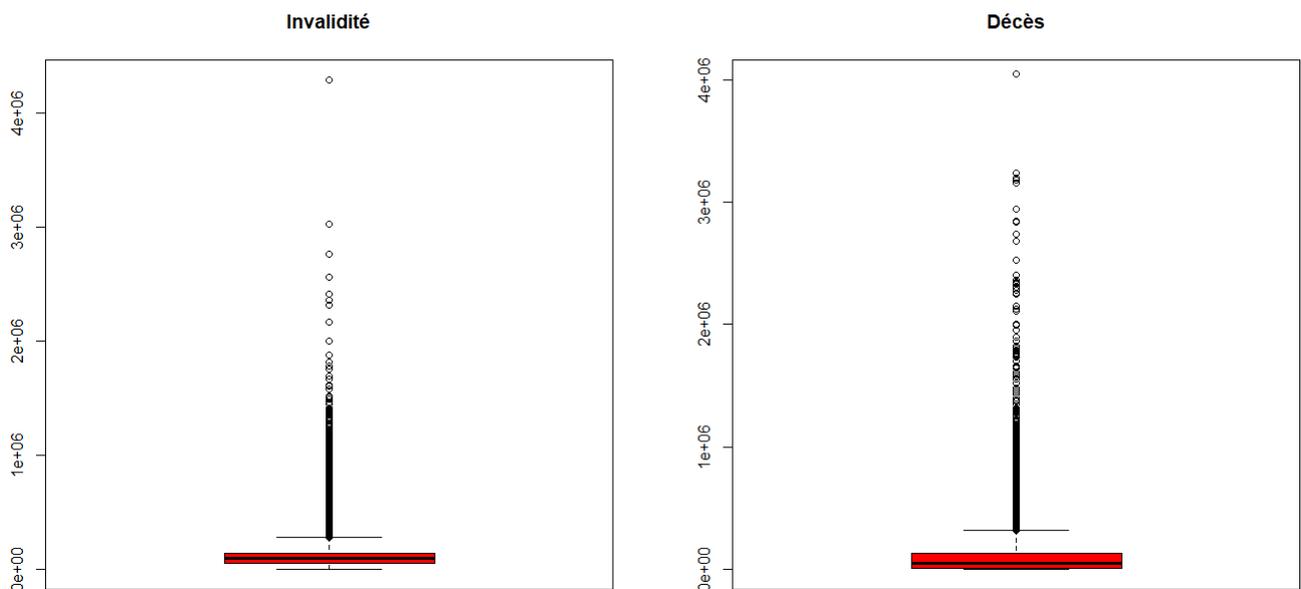


FIGURE 7.1 – Boîtes à moustaches

Sur la figure 7.1 on voit clairement qu'un nombre conséquent de sinistres est très éloigné du coût moyen. Il est donc important de bien modéliser ces phénomènes extrêmes qui expliquent sûrement une part importante de la sinistralité. On voit également que le risque invalidité est moins volatil que le risque décès puisque l'écart inter-quantiles est plus faible en invalidité. On remarque également que les sinistres les plus graves sont ceux du décès. On peut donc s'attendre par la suite à observer un indice de queue plus élevé pour les sinistres en décès que pour ceux en invalidité.

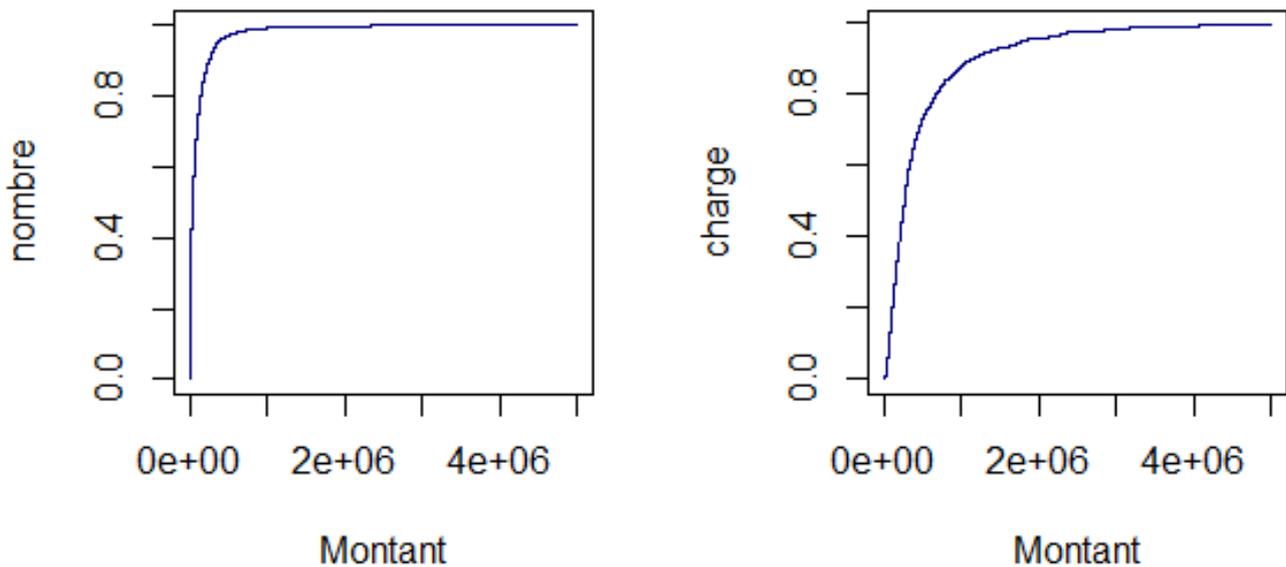


FIGURE 7.2 – Fonctions de répartition du nombre et de la charge de sinistre (décès)

La figure 7.2 confirme ce que laissait supposer les boxplots. On y voit bien que si la part des sinistres inférieurs à un montant donné tend rapidement vers 1, ce n'est pas le cas de la part de la charge cumulée. Cela indique qu'une petite partie des sinistres explique une part importante de la sinistralité. En effet, les sinistres supérieurs à 500 000 euros représentent 2,6% des sinistres mais 26,6% de la charge totale. Ceux supérieurs à 1 000 000 euros représentent 0,7% des sinistres mais encore 12,0% de la charge totale.

8

CHOIX DES SEUILS DE COMPORTEMENT DE PARETO

Le but de cette section est de déterminer les deux seuils de gravité des sinistres en invalidité et en décès. Au delà de ces seuils on considèrera que les lois régissant les montants des sinistres sont des lois de Pareto généralisées. Il s'agit d'une étape très sensible, puisque le choix d'un seuil trop élevé entraîne une imprécision des estimateurs alors qu'un seuil trop bas peut induire un biais important. On rappelle le nombre d'observations pour les différents seuils :

Seuils	Décès	Invalidité
100 000	5186	12143
300 000	1308	1670
500 000	514	646
750 000	247	235
1 000 000	130	102
1 500 000	56	22
2 000 000	25	9
2 500 000	12	4

8.1 Risque Décès

Une première façon de déterminer grossièrement le seuil de comportement de Pareto qui servira à qualifier les sinistres graves, est de regarder à partir de quel seuil l'estimateur de Hill du paramètre de forme de la loi des extrêmes généralisée (GEV) est à peu près constant^[4].

On observe (cf. Figure 8.1) que le ξ est quasiment stable dès 250 000 €. On retient donc ce nombre comme premier seuil. Celui ci étant encore relativement faible, on ne cherchera pas à l'abaisser par la suite.

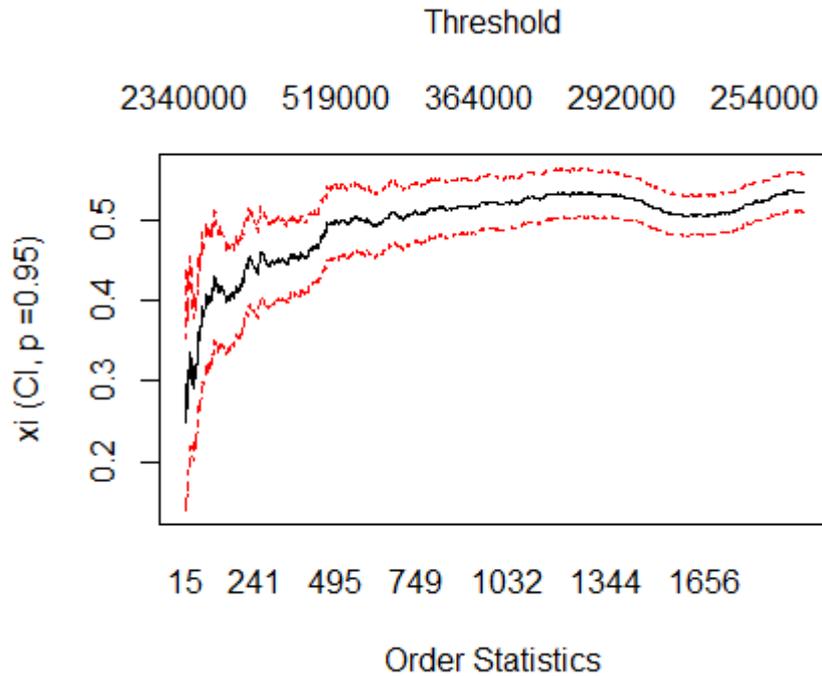


FIGURE 8.1 – Estimateur de Hill du paramètre de forme de la GEV

Dépassements Moyens On trace ensuite le graphique des dépassements moyens (Mean Excess plot). On rappelle en effet qu'une des propriétés des lois de Pareto généralisées est la linéarité du dépassement moyen (ie $E(X - u | X > u) = a \times u + b$). On estime le coefficient (en rouge sur la figure 8.2) à l'aide de la commande LM (voire annexe code) en prenant seulement les données au delà du seuil de 250 000 euros déterminé précédemment.

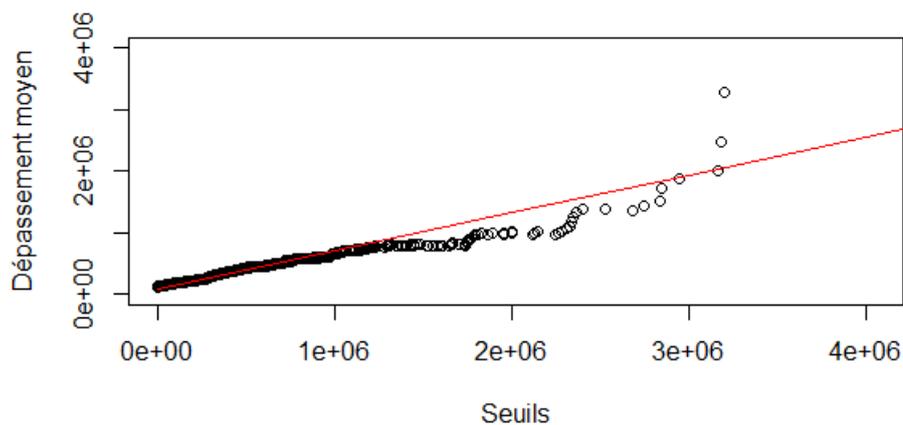


FIGURE 8.2 – Dépassement moyen de seuil

On remarque que les observations sont relativement peu éloignées de la courbe de tendance pour la partie supérieure à 300 000 € et inférieure à 1 200 000 €. En revanche le dépassement moyen est inférieur à le tendance

entre 1 200 000 € et 2 300 000 € et au dessus de la tendance au delà de 2 700 000 €. Pour la partie concernant les sinistres au delà de 2,7M €, le faible nombre d'observations (10) ne permet pas de conclure. En revanche, on dispose quand même encore de 56 observations au delà d'1.5 millions d'euros. Il faudrait peut être envisager de créer 3 seuils (à environ 300 000 €, 1 200 000 € et 2 200 000 €) et chercher à ajuster une GDP pour chacun d'eux. On va donc affiner l'observation des dépassements moyens en zoomant sur les paliers précités, puis regarder les autres indicateurs (ξ -plot, β -plot) afin de confirmer cette impression.

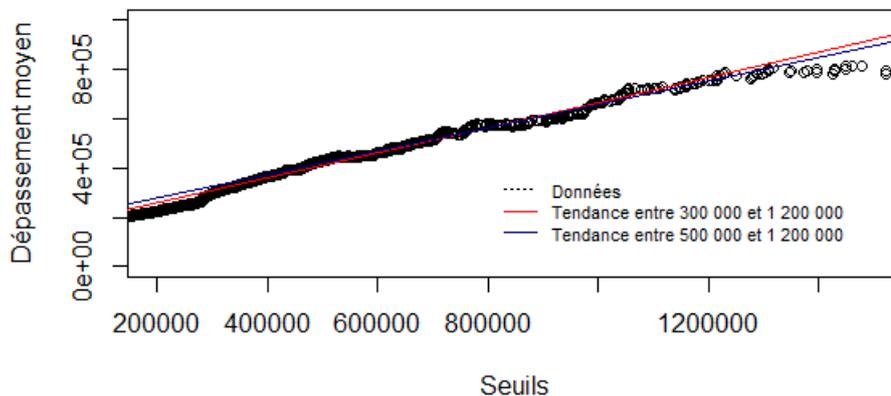


FIGURE 8.3 – Dépassement moyen de seuil entre 200 000 € et 1 500 000 €

On remarque (cf figure 8.3) que la tendance linéaire des dépassements moyens est bien confirmée pour des seuils allant de 250 000 à 1 200 000 euros. Les courbes de tendances à partir de seuils différents (en bleu et rouge sur la figure 8.3) sont en effet très proches l'une de l'autre et les données sont très peu dispersées autour d'elles. On remarque aussi qu'en dehors de cette zone, les dépassements moyens sont inférieurs à la tendance. Au vu de ces résultats, il faut peut être envisager de fixer le seuil de comportement de Pareto à 1 200 000 € et estimer une autre loi pour les montants de sinistres entre 300 000 € et 1 200 000 €. Les sinistres en deçà de 300 000 € seront eux considérés comme étant attritionnels.

On s'intéresse maintenant aux sinistres excédant 1 200 000 €.

On a observé précédemment qu'il fallait envisager de séparer une nouvelle fois les sinistres graves en deux autres catégories, avec un seuil de séparation avoisinant 2 200 000 €. La figure 8.4 présente trois propositions différentes pour le seuil de séparation, respectivement 1.8 millions, 2.2M € et 2.3M €. Le choix quelque peu arbitraire de ces propositions de seuils a été motivé par les positions des points d'inflexion de la courbe des dépassements moyens. Il ressort de l'observation que les propositions 2 et 3 sont quasiment similaires. Pour la proposition 1, la tendance proposée sur la 1ère partie (courbe bleue) rend visiblement mieux compte des données que les deux autres (la dispersion des observations autour de la tendance est plus faible), ce qui semble évident, l'amplitude d'observation étant plus faible. Elle garde également une dispersion faible des observations par rapport à la tendance en queue de distribution (en rouge). Cependant, si on compare avec les deux autres propositions, la courbe de tendance est moins pentue sur la proposition 1. Celle-ci est donc moins prudente. On garde pour l'instant les différentes options en mémoire et on se servira du β -plot et du ξ -plot pour trancher de manière définitive. On peut également se poser la question de la stabilité de ce ME plot. Il pourrait être

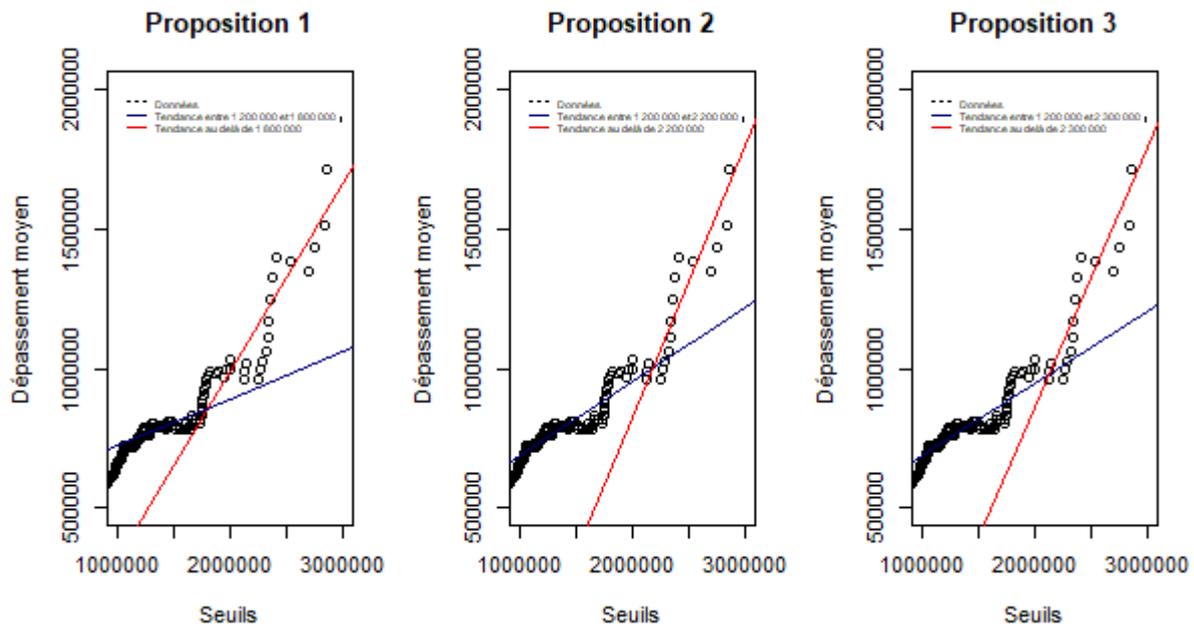


FIGURE 8.4 – Dépassement moyen de seuil au delà de 1 200 000 €

intéressant de simuler plusieurs échantillons pour chacun des différents paramètres estimés et de tracer leur ME-plot.

Linéarité du β On va maintenant chercher à vérifier la propriété de linéarité des paramètres β . On rappelle en effet que si pour un seuil u , $X_u \sim GPD(\beta, \xi)$ alors $\forall v \geq u; X_v \sim GPD(\beta + \xi \times (v - u); \xi)$. On a donc $\beta_v = \beta_u + \xi \times (v - u)$. Ainsi, si on trace la courbe $u \mapsto \beta_u$, on devrait observer, passé le seuil de comportement de Pareto, une courbe affine de pente ξ .

On remarque (cf figure 8.5), que si la propriété de linéarité du paramètre β est vérifiée entre 300 000 € et 1 400 000 € (droite bleue), on a par la suite qu'une linéarité par morceaux.

Les parties descendantes peuvent être associées à une transition vers une GDP avec un paramètre de queue plus élevé (et donc une queue de distribution plus lourde). Il convient toutefois de vérifier cette analyse en étudiant le paramètre de queue en fonction du seuil de comportement de Pareto. On peut aussi penser que, comme pour le Mean Excess, le paramètre Beta devient instable passé un certain point. Il serait donc également intéressant de le vérifier en traçant l'estimateur de beta en fonction du seuil pour des échantillons simulés.

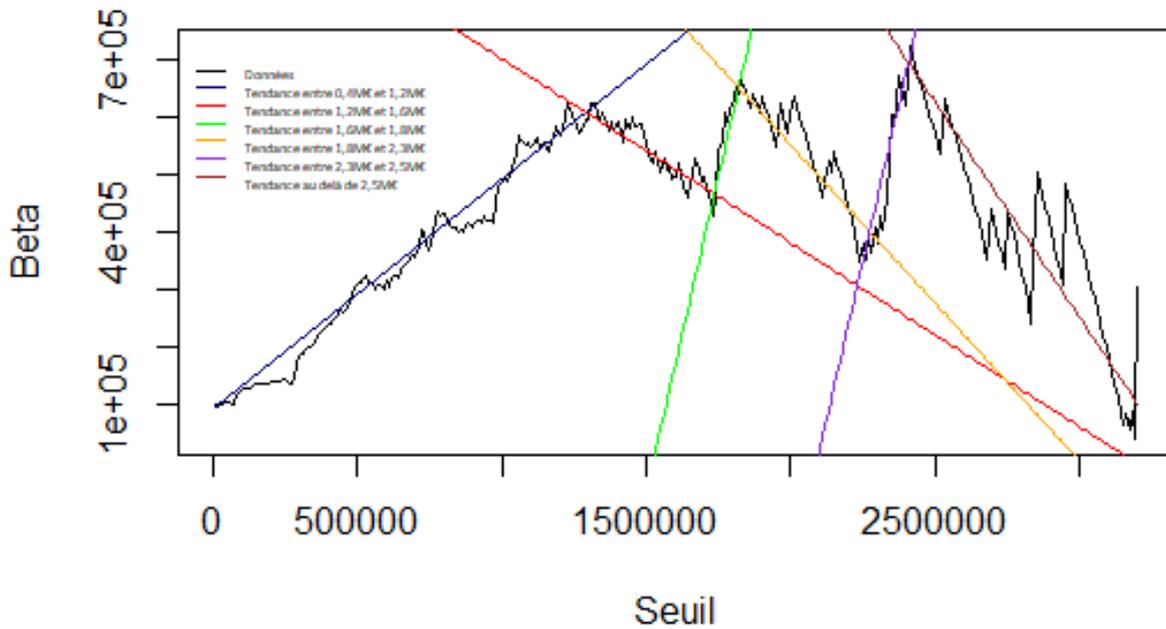


FIGURE 8.5 – β estimé en fonction du seuil

ξ -plot On s'intéresse maintenant à la propriété de stabilité du paramètre de queue ξ passé le seuil de comportement de Pareto.

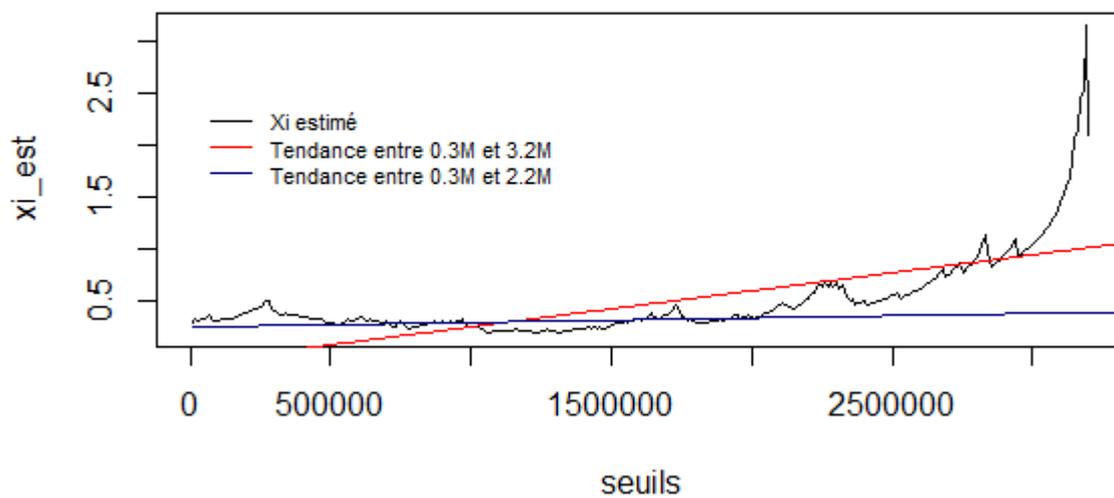


FIGURE 8.6 – ξ estimé en fonction du seuil

Sur la figure 8.6 , on observe que cette propriété de stabilité de ξ semble approximativement vérifiée jusqu'aux sinistres excédants 2 200 000 € (courbe bleue $y=ax +b$ avec $a=4.34^{-8}$ et $b=0,260$, on aurait donc sur cette partie un ξ d'environ 0.26). On observe toutefois que le ξ estimé est légèrement inférieur pour des seuils entre 1 000 000 € et 1 500 000 €. On observe également que passé le seuil de 2 000 000 €, le ξ estimé a tendance à croître.

On va maintenant zoomer sur les différentes parties.

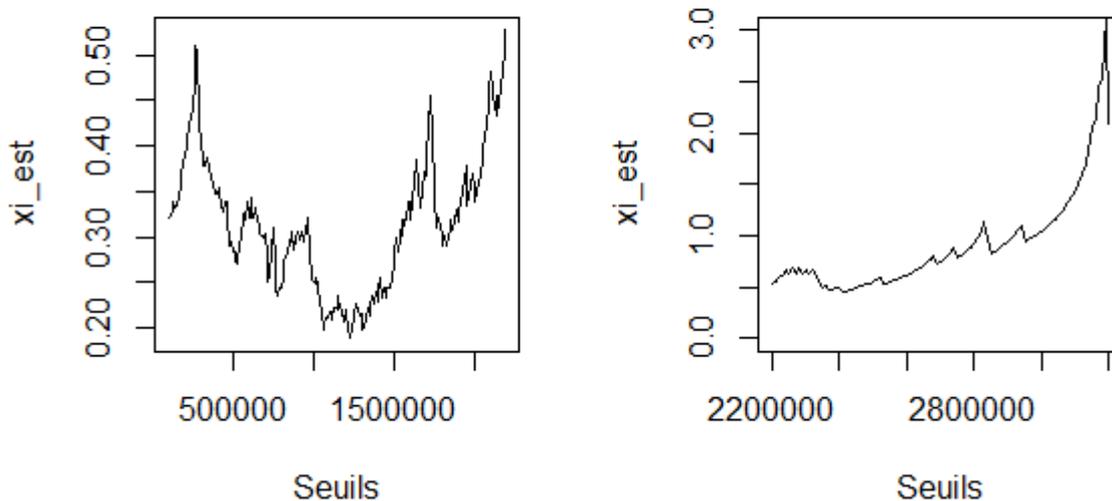


FIGURE 8.7 – ξ estimé en fonction du seuil

On voit sur les deux graphiques présentés à la figure 8.7 que les observations faites précédemment sur la figure 8.6 se confirment : le paramètre de queue estimé est plus faible pour des seuils allant de 1M € à 1,5M €. De plus, passé le seuil d'1,8M €, le ξ estimé ne cesse de croître, toutefois, on ne peut y accorder trop de crédit en raison du trop faible nombre d'observations dans cette zone. Il semble donc cohérent de constituer 3 seuils avec 3 lois de dépassement de seuils différentes . Basé uniquement sur les résultats du ξ -plot, on choisirait plutôt 500 000 €, 1 000 000 € et 1 500 000 € ou 1 700 000 €, ce qui diffère légèrement de ce qu'on avait observé précédemment avec le ME-plot et le β -plot.

On va ensuite comparer les différentes propositions à l'aide de graphiques quantiles-quantiles et de tests de Kolmogorov-Smirnov. On étudiera aussi les ME-plot, β -plot et ξ -plot d'échantillons simulés de même taille que les données utilisées précédemment, afin de voir dans quelle mesure on peut se baser sur ces indicateurs.

Echantillons simulés On simule des échantillons de données à l'aide d'une GPD(300 000 ; 180 000 ;0,4).

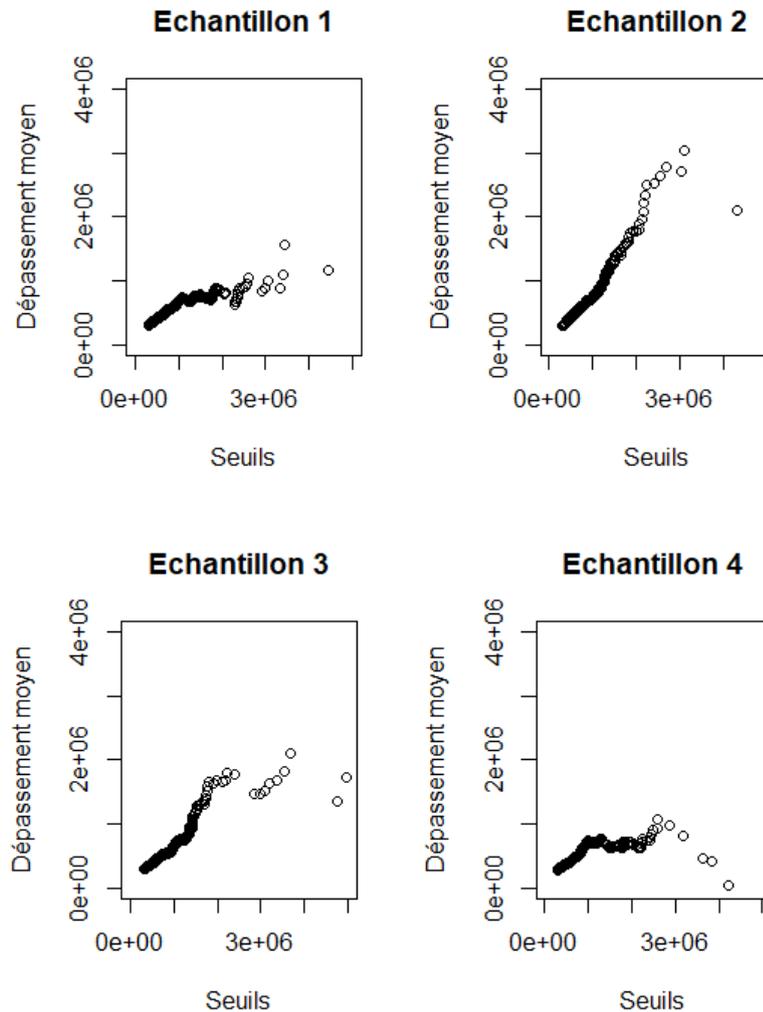


FIGURE 8.8 – ME plot sur échantillons simulés

Analyse des ME simulés On observe sur la figure 8.8 que le Dépassement Moyen devient assez rapidement instable. En effet, les allures des courbes sont très différentes suivant les échantillons. Le seul point commun est une tendance linéaire jusqu'à environ 1 500 000 € qui est également partagée avec les données réelles. On peut donc conclure que le ME-plot ne permet pas de statuer sur l'existence de plusieurs seuils.

Analyse de l'estimateur de β pour les échantillons simulés

On observe sur la figure 8.9 que l'estimateur du paramètre β est également assez volatil au delà de 1 000 000 €. Le β -plot ne permet donc pas non plus de conclure quant à l'existence de seuils sur des valeurs plus élevées. Il ne permet donc pas en soit d'infirmer ou de confirmer l'existence d'un ou plusieurs seuils.

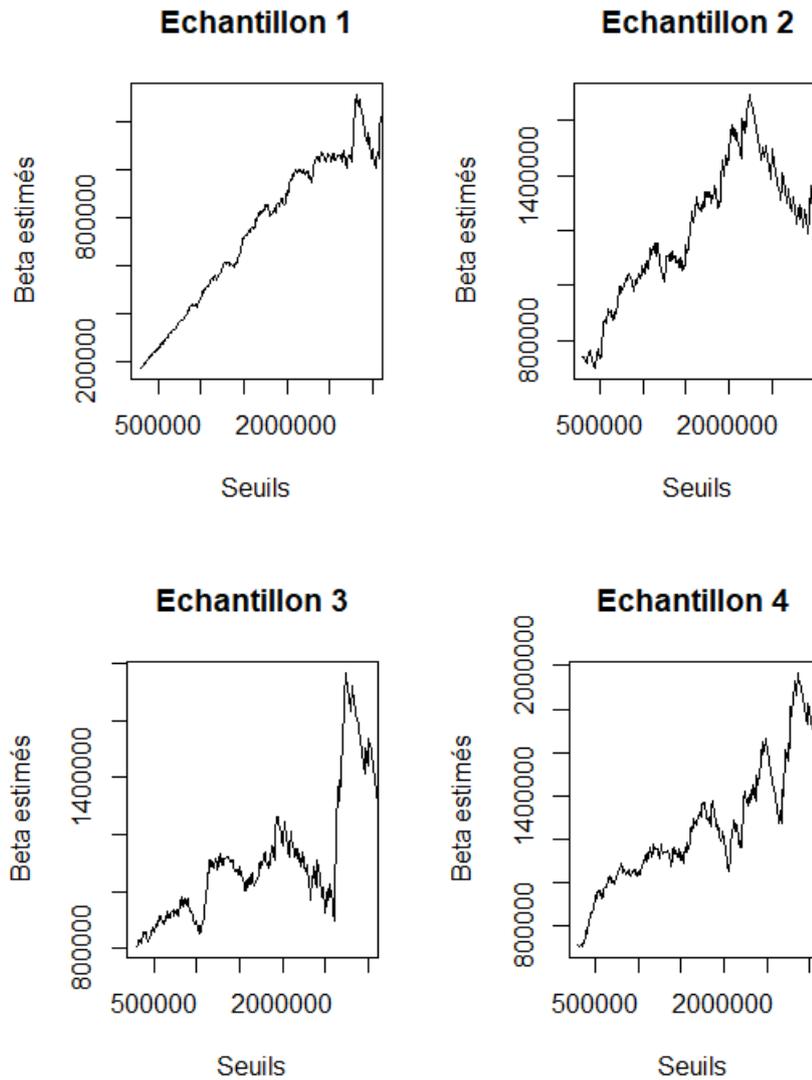


FIGURE 8.9 – Beta plot sur échantillons simulés

Analyse de l'estimateur de ξ pour les échantillons simulés On constate sur la figure 8.10 que l'indice de queue est très volatil. Il est donc difficilement envisageable de baser le choix du nombre et des valeurs des seuils sur ce seul paramètre.

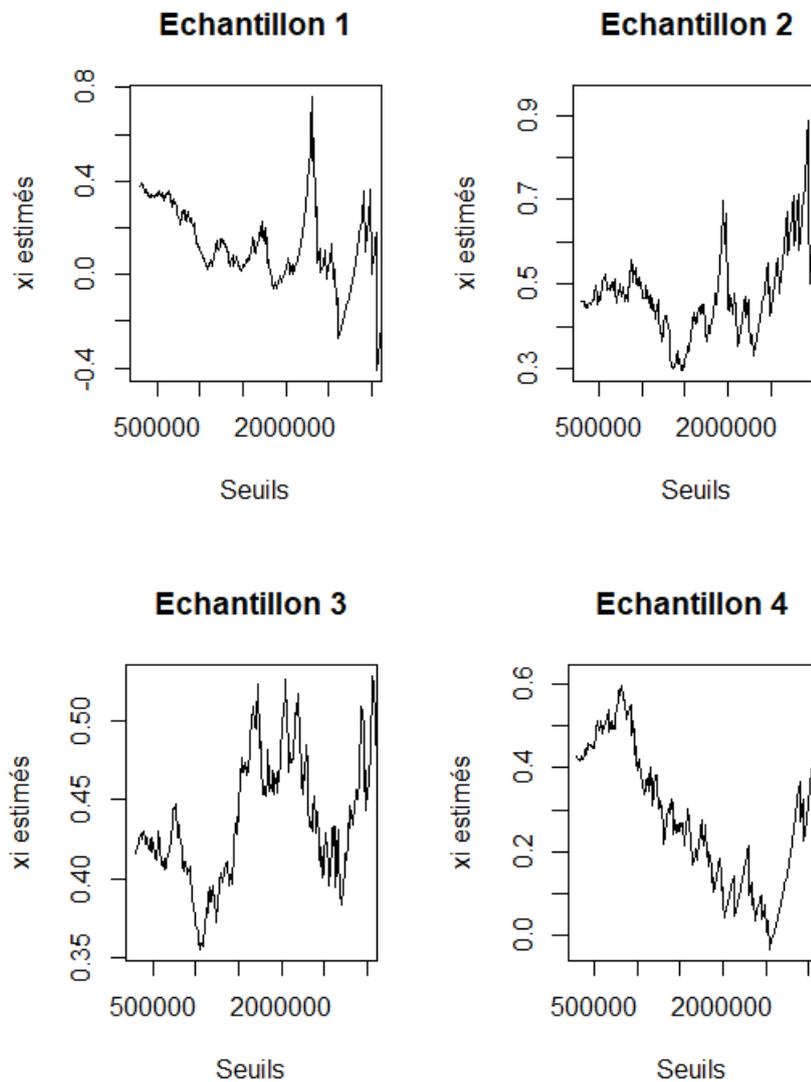


FIGURE 8.10 – Xi plot sur échantillons simulés

L'étude des échantillons simulés nous conduit donc à reconsidérer le fait qu'il existe plusieurs seuils. Il semble plutôt convenir de ne considérer qu'un seul seuil entre 300 000 € et 1 000 000 €. On va donc se référer aux analyses des quantiles par les QQ-Plot pour essayer de sélectionner le bon seuil. On comparera également ces résultats avec ceux obtenus avec deux et trois seuils.

Analyse des QQ-Plot On constate ensuite sur les solutions à trois seuils (figure 8.11) que les quatre solutions proposées sont plutôt équivalentes. On constate que le seuil à 2,2M € donne un meilleur alignement des points avec la 1ere bissectrice que pour celui à 1,8M €. Pour les seuils intermédiaires, la différence est quasiment nulle. On conserve comme solution à trois seuils les valeurs 500 000 €, 1 200 000 € et 2 200 000 € et on la comparera dans un premier temps à une solution à deux seuils.

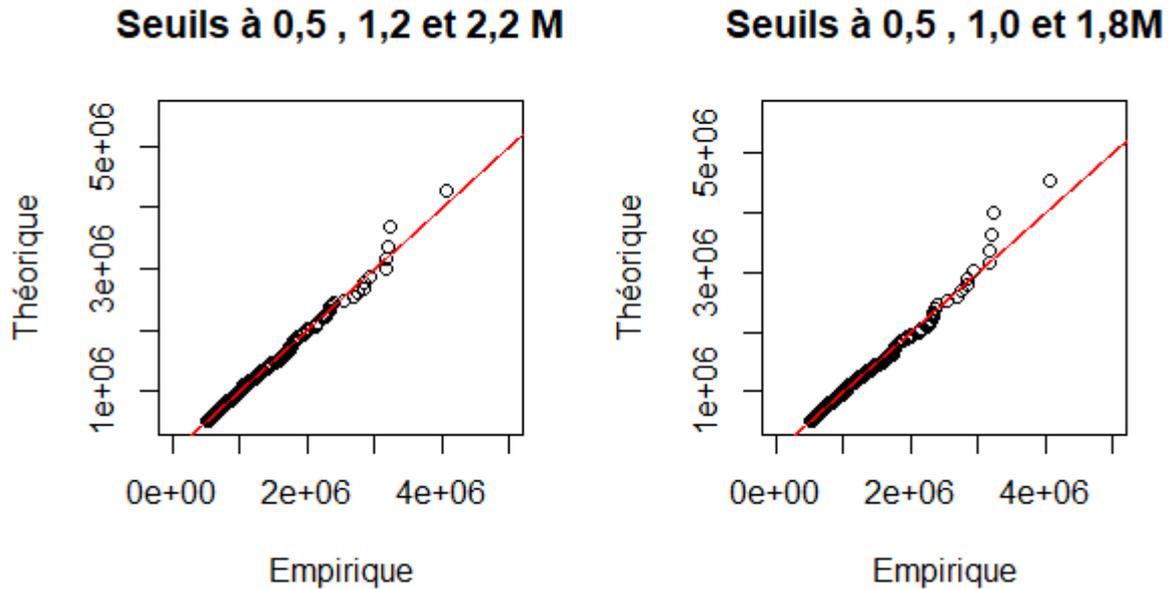
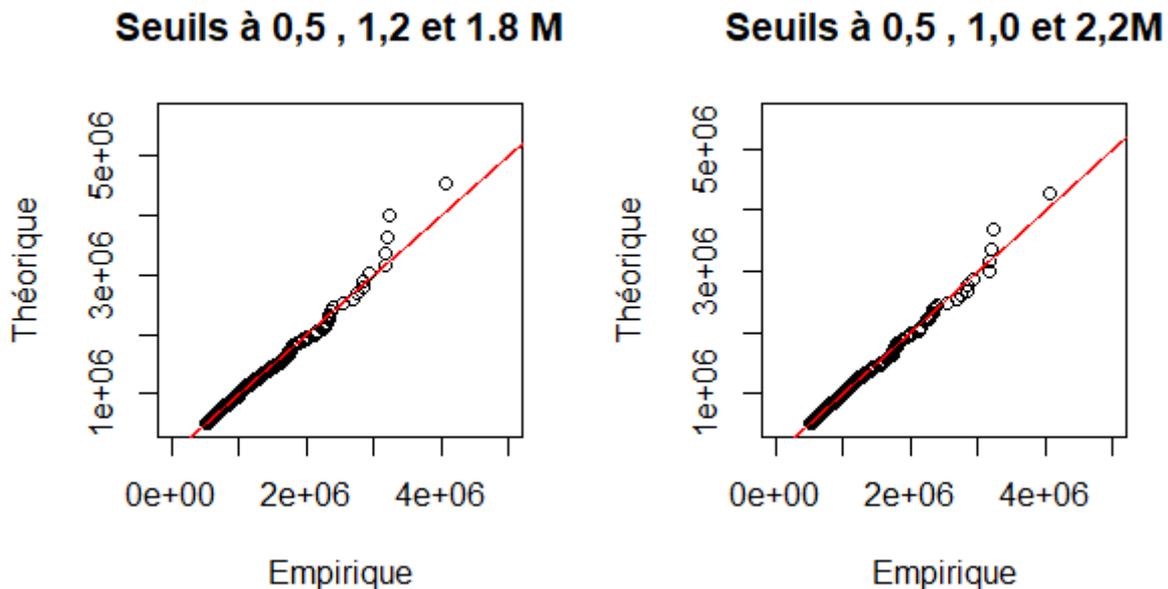


FIGURE 8.11 – Graphiques quantile-quantile de solutions à 3 seuils



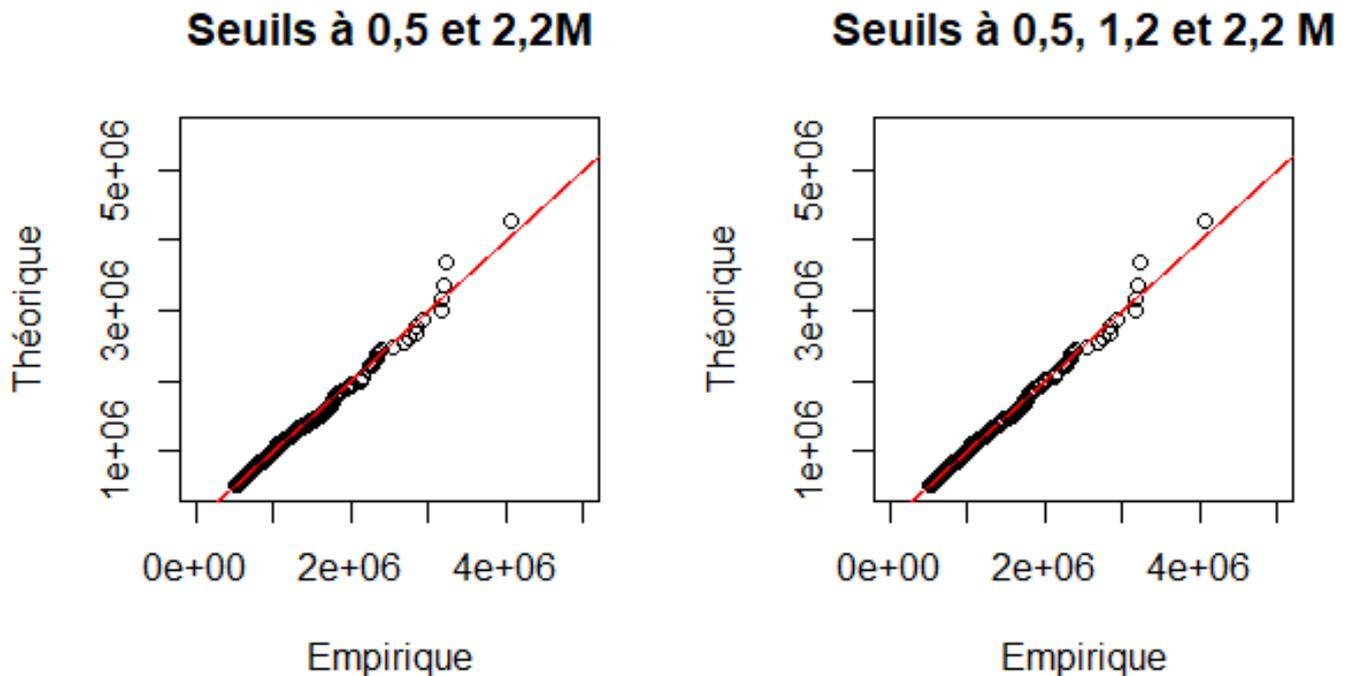


FIGURE 8.12 – Comparaison de graphiques quantile-quantile pour des solutions à 2 et 3 seuils.

Il ressort de la figure 8.12 que la proposition à deux seuils pourrait éventuellement convenir, les quantiles théoriques étant généralement assez proches des quantiles empiriques. On constate cependant que pour certaines valeurs intermédiaires, le quantile empirique est légèrement inférieur au théorique. L'écart n'est toutefois pas très important compte tenu de la marge d'erreur. Au final, la solution à deux seuils donne un ajustement des quantiles tout à fait correct. Il n'y a donc pas d'intérêt à introduire un 3ème seuil, cette solution est donc définitivement écartée et on ne comparera plus que la solution à deux seuils avec celle à un seuil.

Parmi les options présentées sur la figure 8.13, on constate qu'on peut d'emblée écarter les possibilités d'un seuil à 400 000 € ou 500 000 €. En effet, on observe que les quantiles théoriques s'éloignent des quantiles empiriques à mesure que croît l'ordre du quantile. Certes, cela va dans le sens de la prudence (puisque les quantiles théoriques sont supérieurs aux empiriques), mais la déviance est très importante et risquerait d'engendrer une surtarification importante.

On s'intéresse donc surtout au seuil de 300 000 que l'on va comparer avec l'option à deux seuils. Les résultats sont présentés figure 8.14 et A.1 (en annexe). On constate (graphique de gauche) que la qualité de la modélisation est excellente pour les sinistres allant jusqu'à un peu plus de 2 200 000 €. Au delà de ce montant, les quantiles théoriques sont, si on excepte les 5 derniers points, légèrement supérieurs aux quantiles empiriques. La solution à deux seuils permet de corriger cet écart pour les quantiles d'ordre élevé. Cependant, on peut douter de l'utilité d'introduire ce second seuil. Sa valeur est extrêmement élevée, il y a donc très peu d'observations qui y sont associées, ce qui entraîne une forte imprécision des estimateurs.

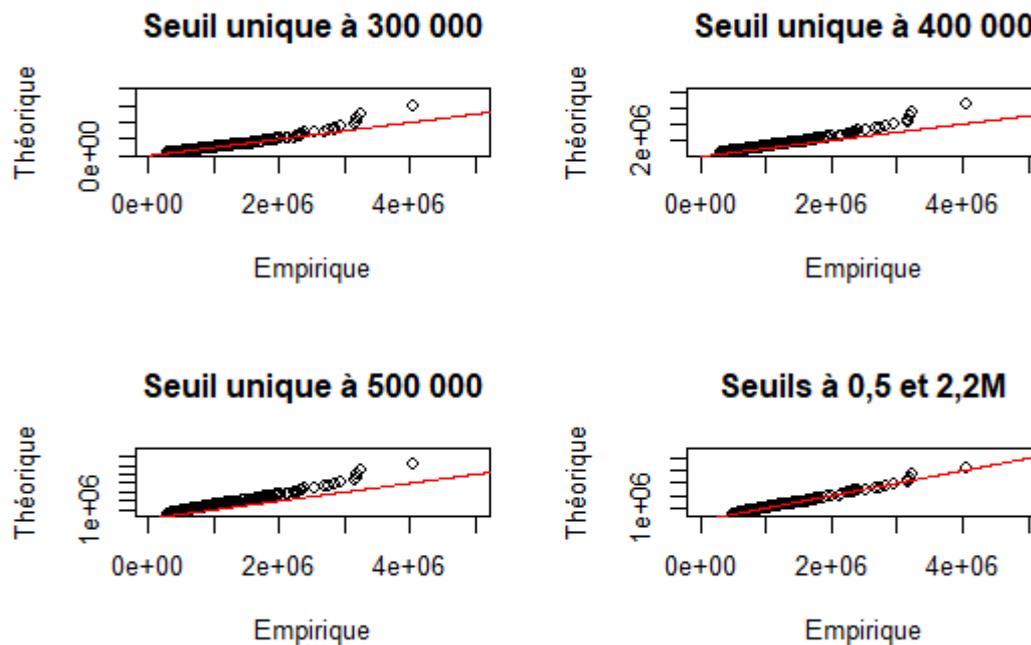


FIGURE 8.13 – Graphiques quantile-quantile pour des solutions à 1 ou 2 seuils.

La solution à seuil unique, outre sa relative simplicité, présente également l'avantage d'être plus prudente que celle à deux seuils. On effectue un test de Kolmogorov-Smirnov pour vérifier l'adéquation de la modélisation par seuil unique avec les données.

Les résultats du test sont :

$$D = 0.0169, p\text{-value} = 0.8491$$

La p-value est supérieure à la statistique, on accepte donc l'hypothèse de distribution identique. Si le test de Kolmogorov-Smirnov est assez sensible à la médiane (et donc bien adapté pour détecter des écarts entre les distributions cumulées) il ne rend pas vraiment compte de toute l'étendue de la distribution. On peut donc également effectué un test d'Anderson-Darling. Celui ci est plus sensible sur toute l'étendue de la distribution et a donc plus de chances de détecter des différences dans la répartition des distributions cumulées. Ainsi, le test d'Anderson-Darling est préférable pour savoir si les données simulées modélisent bien les données observées aux extrêmes. Le résultat du test d'Anderson Darling nous donne : $AD=0.53$ et une p-value de 0.72. Ce test confirme donc également l'hypothèse d'une loi de Pareto Généralisée. On retient donc la solution avec un seul seuil, celui de 300 000 €.

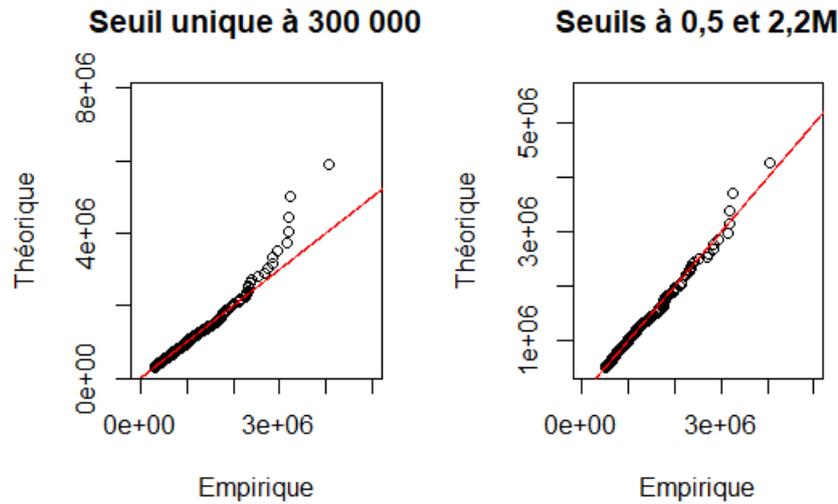


FIGURE 8.14 – Graphiques quantiles-quantiles

8.2 Risque Invalidité

Graphique de Hill Comme précédemment, on trace l'estimateur de Hill du paramètre de queue pour les données invalidité et on regarde à partir de quel seuil il se stabilise.

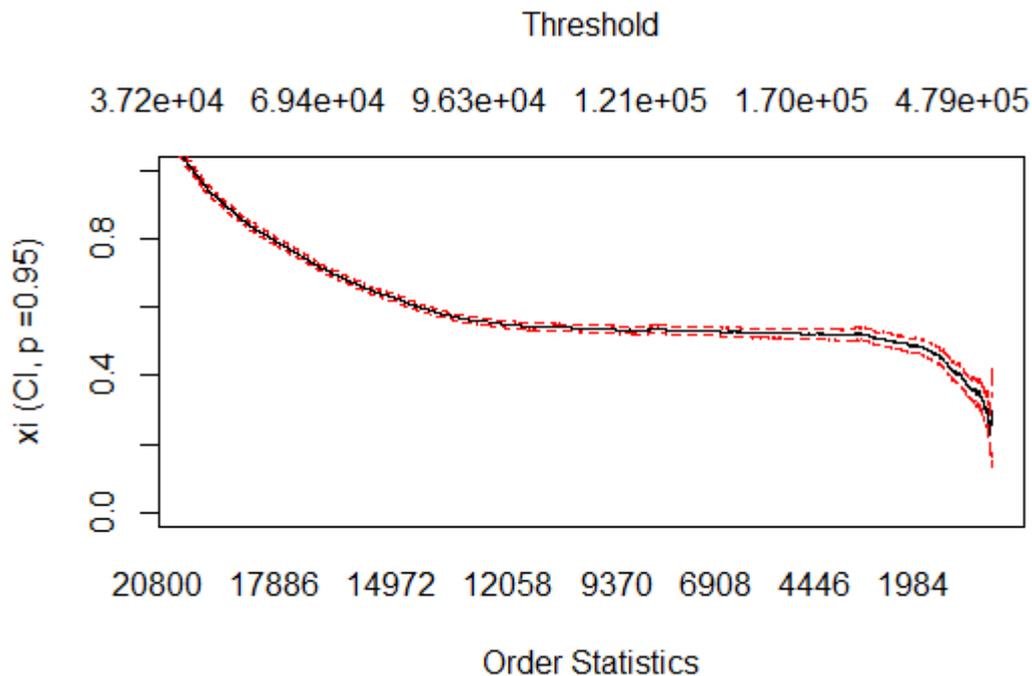


FIGURE 8.15 – Estimateur de Hill de l'indice de queue de la distribution GEV en invalidité.

On observe (cf figure 8.15) que l'estimateur de Hill devient à peu près constant passé un seuil de 100 000 €. On considèrera donc uniquement ce qui se passe au delà de cette valeur.

QQ-Plot On commence cette fois ci par selectionner un seuil à l'aide du QQ-plot avant de simuler des échantillons. On vérifiera ensuite que les propriétés de GPD soient respectées.

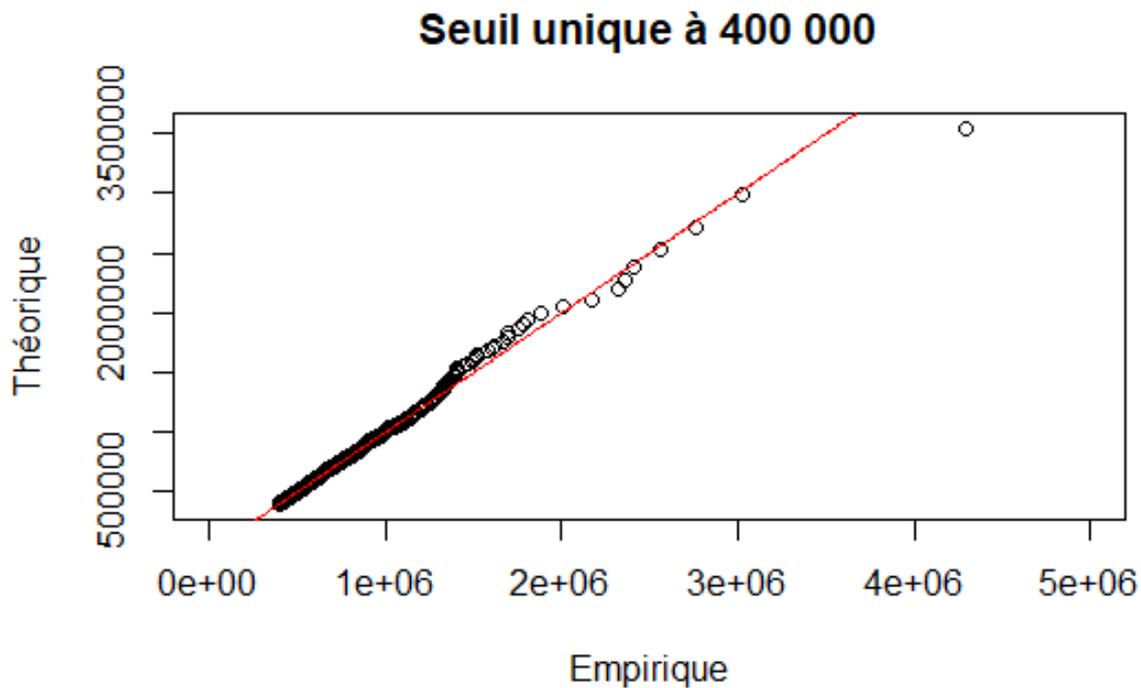


FIGURE 8.16 – Graphique quantile-quantile pour la GPD proposée pour l'invalidité.

On trace le graphique quantiles-quantiles entre des GPD au delà de divers seuil et nos données. Il en ressort que la meilleure approximation des résultats empiriques est donnée pour un seuil de 400 000 € (cf figure 8.16).

Données simulées Comme vu précédemment, on simule des échantillons à l'aide de la GPD estimée pour le seuil de 400 000€, sur lesquels on regarde dans quelle mesure les différentes propriétés de la loi utilisée pour les générer sont vérifiées. On observe sensiblement la même chose que dans le cas du décès, même si pour un seuil légèrement inférieur. Au delà d'1 000 000 € le dépassement moyen se comporte de façon chaotique, et les estimateurs de β et ξ deviennent très volatils, comme on peut le voir ci dessous pour le paramètre ξ . (Les ME-plot et β -plot des échantillons simulées sont consultables dans l'annexe, figures A.3 et A.2).

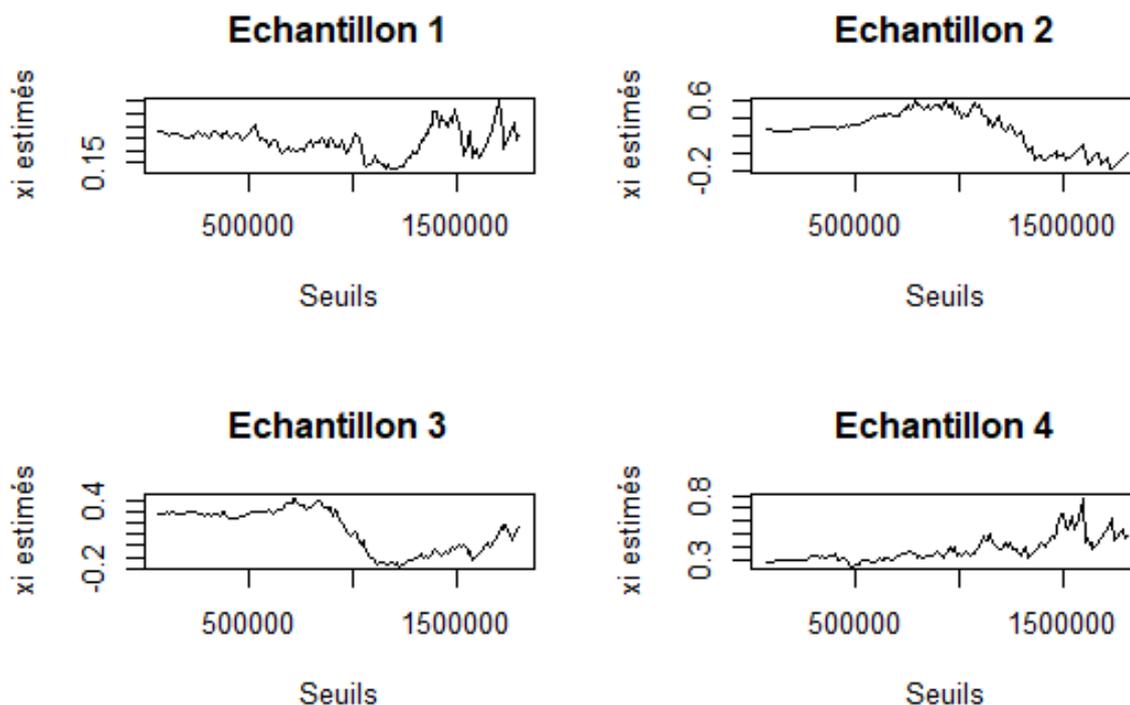


FIGURE 8.17 – Estimateur de ξ pour des échantillons simulés

Dépassements Moyens La figure 8.18 présente les dépassements moyens des différents seuils, avec en rouge la valeur théorique (droite de coefficient directeur $\frac{\xi}{1-\xi}$). On observe que jusqu'à environ 1 000 000 € les dépassements moyens empiriques s'écartent peu de cette droite. Passé ce cap, ils s'en écartent quelque peu. Mais au regard de ce qu'on a pu observer avec les échantillons simulés, cet écart n'est pas rédhibitoire. On considèrera donc que la propriété de linéarité des dépassements moyens est bien vérifiée.

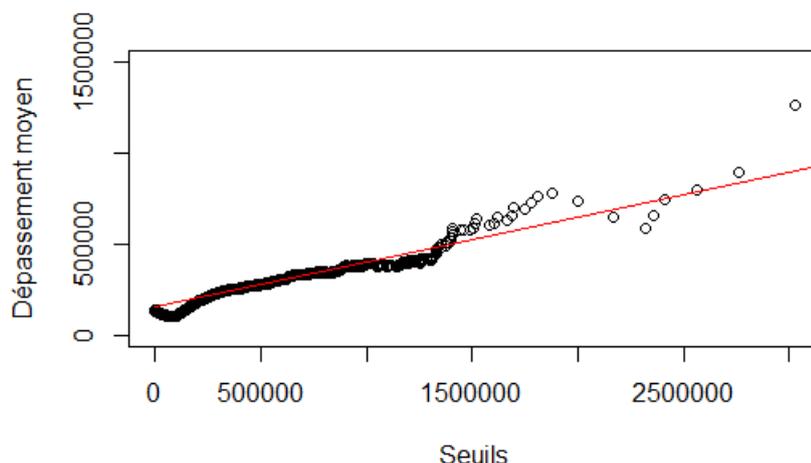


FIGURE 8.18 – Dépassements moyens de seuil en invalidité

Linéarité du paramètre β On s'intéresse maintenant à l'estimateur du paramètre β .

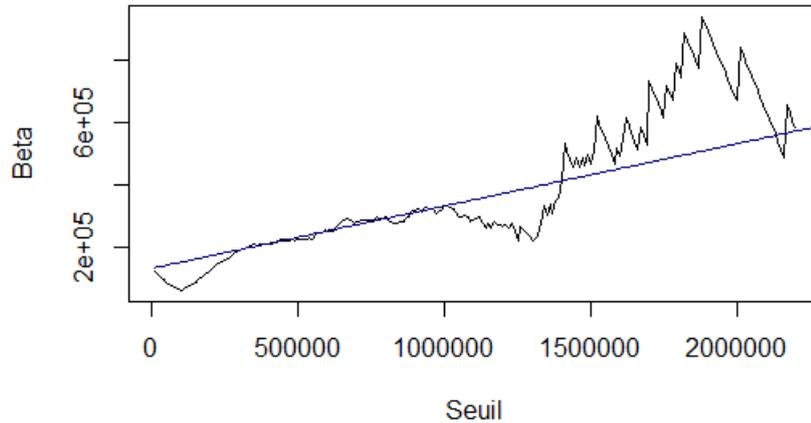


FIGURE 8.19 – Estimateur de β en invalidité

La figure 8.19 présente la valeur de l'estimateur de β pour les différents seuils. La droite bleue correspond à la pente théorique. On observe que, comme pour les dépassements moyens, la propriété concernant β s'observe de manière claire jusqu'à un seuil d'1 000 000 €. Au delà, la propriété n'est plus vraiment respectée, mais on a vu le peu de crédit qu'on pouvait accorder à ces phénomènes trop extrêmes. On considère donc que le résultat présenté dans ce paragraphe n'est pas de nature à remettre en cause le choix de modéliser la queue de distribution par une GPD au delà du seuil de 400 000 €.

Stabilité de l'indice de queue On s'intéresse maintenant à la propriété de stabilité du paramètre de forme ξ .

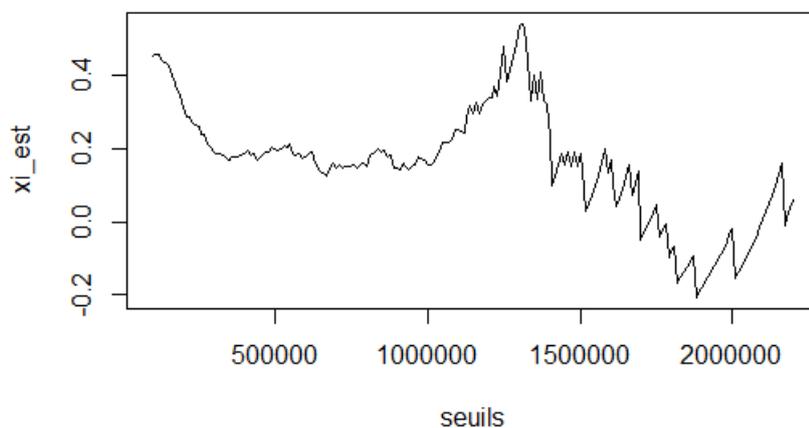


FIGURE 8.20 – Estimateur de ξ pour le risque invalidité.

On observe sur la figure 8.20 que le ξ est relativement stable pour des seuils allant de 400 000 € à 1 000 000 €.

L'instabilité qui suit s'explique par la volatilité induite par le faible nombre d'observations dans l'estimateur au delà de ce point. On considère donc la propriété de stabilité de l'estimateur de l'indice de queue comme étant vérifiée.

Test de Kolmogorov-Smirnov On réutilise un test de Kolmogorov Smirov pour tester la cohérence de la distribution de Pareto généralisée avec notre queue de distribution. On obtient les résultats suivants : $D = 0.01557$, $p\text{-value} = 0.9667$. La $p\text{-value}$ est très supérieure à la statistique, ce qui nous conforte dans le choix de la loi de Pareto Généralisée au delà du seuil de 400 000 €.

Test d'Anderson-Darling Afin de vérifier l'adéquation de la loi de Pareto au niveau de la queue de distribution, on effectue un test d'Anderson Darling. Les résultats nous donne une statistique $AD=0,27$ et une $p\text{-value}$ de 0.96. Ceci confirme l'adéquation de la loi de Pareto aux données pour la queue de distribution.

9

CHOIX DES LOIS EXTRÊMALES

Maintenant qu'on a fixé les différents seuils, on retient les paramètres des GPD associées à chacun de ces seuils. On utilise pour cela la maximisation de la log-vraisemblance. Les résultats sont présentés figure 9.1.

Risque	Décès	Invalidité
μ	300 000	400 000
β	181 105	208 195
ξ	0,401	0,190

FIGURE 9.1 – Paramètres des GPD

Comme on pouvait s'y attendre, on remarque que la queue de distribution est plus lourde en décès. Dans les deux cas, la distribution admet une espérance ($\xi < 1$) et une variance ($\xi < 1/2$).

CHOIX DES LOIS DE FRÉQUENCES

On rappelle que théoriquement, les lois des nombres de dépassement de seuils suivent des lois de Poisson. On va toutefois chercher à confirmer ce résultat en pratique, en comparant les espérances et les variances empiriques. On testera ensuite la cohérence des différentes distributions à l'aide du test de Kolmogorov-Smirnov. En effet, bien que celui-ci ne soit en pratique pas valable pour des distributions discrètes, le CRAN a récemment développé un package R permettant d'effectuer des tests de Kolmogorov-Smirnov sur des distributions discrètes (voire <http://cran.r-project.org/web/packages/dgof/dgof.pdf>), on utilisera donc celui-ci. On aurait aussi pu envisager d'utiliser le test de Cramer Von Mises.

10.1 Décès

Survenance	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	Moyenne	Variance
Occurrence	144	131	114	148	134	129	131	140	121	116	130,8	129,5

FIGURE 10.1 – Occurrences

On constate (cf figure 10.1) que l'espérance et la variance empiriques sont quasiment égales. Cela confirme l'intuition d'une loi de Poisson. Pour confirmer ce résultat, on effectue maintenant des tests de Kolmogorov-Smirnov entre le nombre d'observations et des lois de Poissons de paramètre :

- La moyenne de la série.
- La variance de la série.
- La moyenne entre la variance et la moyenne de la série.

Les résultats sont présentés sur la figure 10.2.

On rappelle que pour le test de Kolmogorov-Smirnov, l'hypothèse testée est l'identité de la distribution des deux

Paramètre	Statistique	p-value
130,8	0,160	0,959
129,5	0,205	0,793
130,2	0,183	0,892

FIGURE 10.2 – Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov

séries proposées ou de la série avec une loi. La fonction renvoie une valeur pour la statistique du test et une autre pour la p-value. Si la p-value est supérieure à la statistique, alors on accepte l'hypothèse d'identique distribution.

Les résultats des tests indiquent que les 3 distributions proposées sont envisageables. On remarque toutefois que la 1^{ère} semble la meilleure. C'est elle qu'on retiendra.

10.2 Invalidité

Pour estimer la loi de fréquence des sinistres graves en invalidité, on ne tient pas compte des 3 dernières survenances (2018, 2017 et 2016) puisque la durée maximale de l'incapacité est de 3 ans. Il faut donc attendre au moins 3ans avant de prétendre avoir l'exhaustivité des sinistres survenus lors d'une année donnée.

On constate (cf figure 10.3) dans le cas de l'invalidité que espérance et variance empiriques ne sont pas égales. La variance est en effet bien supérieure à l'espérance, ce qui conduirait à choisir plutôt une binomiale négative.

Toutefois, il convient de nuancer cette observation. On peut en effet constater dans ce tableau, que le nombre d'occurrences pour les survenances 2010 et antérieur est inférieur à ce qu'on observe ensuite. Et ceci n'est point dû à une coïncidence puisque cela correspond à la réforme des retraites. L'âge de départ légal y est passé de 60 à 62 ans, augmentant mécaniquement le nombre de personnes entrant en invalidité. On fera remarquer également que la réforme n'a en revanche aucune incidence sur les montants des capitaux constitutifs de la base. En effet, ceux ci ont été calculés dans une logique de burning-cost avec la dernière table en vigueur et donc en tenant compte de l'âge de départ à la retraite à 62ans.

On se contente donc des survenances de 2011 à 2015 pour la loi de fréquence. Sur l'échantillon ainsi restreint, on observe que espérance et variance sont très proches. Ce qui va dans le sens du résultat théorique voulant qu'il s'agisse d'une loi de Poisson.

Survenance	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	Moyenne	Variance	Moyenne restreinte	Variance restreinte
Occurrence	84	89	86	81	84	117	103	92	100	113	94,9	162,3	105,0	101,5

FIGURE 10.3 – Occurrences

Pour confirmer ce résultat, on effectue maintenant un test de Kolmogorov-Smirnov entre le nombre d'observations et une loi de Poisson de paramètre la moyenne de la série. On obtient $D = 0.19807$ (la statistique) et $p\text{-value} = 0.9652$. La p-value étant bien supérieure à la statistique, on accepte l'hypothèse d'identique distribution. Le nombre de sinistres dépassant 400 000 € en invalidité suit donc une loi de Poisson de paramètre 105.

11

CHOIX DES LOIS DE COÛTS ATTRITIONNELS

Pour des raisons d'économie de temps de calculs principalement, pour la suite de cette étude, on choisit de modéliser le coût de la sinistralité attritionnelle comme une unique variable aléatoire. On retient une log normale dont on estime les paramètres par maximisation de la log-vraisemblance. Les résultats sont présentés sur les figures 11.1 et 11.2.

	Estimate	Standard Error
Meanlog	19.124	0.021
Sdlog	0.067	0.015

FIGURE 11.1 – Paramètre pour la sinistralité attritionnelle, risque décès.

	Estimate	Standard Error
Meanlog	19.457	0.026
Sdlog	0.081	0.018

FIGURE 11.2 – Paramètre pour la sinistralité attritionnelle, risque invalidité.

12

TARIFICATION DE L'XS

Pour la tarification, deux choix sont possibles :

- L'approche théorique : on utilise la propriété $\mathbb{E}(X - v | X > v) = \frac{\beta_u + \xi(v-u)}{1-\xi}$ au delà des seuils de gravité u . Ainsi la prime pure réclamée par le réassureur pour un XS de priorité v et une portée w est $\pi_v = \frac{\beta_u + \xi(v-u)}{1-\xi} \times \mathbb{P}(X > v) \times \mathbb{E}(N_u) - \frac{\beta_u + \xi(v+w-u)}{1-\xi} \times \mathbb{P}(X > v+w) \times \mathbb{E}(N_u)$. Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre et son coût en terme de temps de calculs est quasiment nul. Cependant elle ne permet de tarifier qu'en fonction de la priorité et de la portée, avec un engagement maximal illimité et une franchise nulle.
- L'approche par simulation : on réalise un grand nombre de simulations et on applique à chacune d'elles les paramètres du traité que l'on souhaite tarifier. La prime pure est alors donnée par la moyenne des montants à charge des réassureurs pour les différentes simulations. Cette méthode permet de prendre en compte tous les paramètres. En revanche son coût en terme de temps de calculs est très important.

12.1 Approche mathématique

Avec les paramètres déterminés précédemment, on a : $u = 300000$, $\mathbb{E}(N_u) = 130,8$, $\beta = 181105$ et $\xi = 0,401$. La formule donnant la prime pure pour une priorité v et une portée w est $\pi_v = \frac{\beta_u + \xi(v-u)}{1-\xi} \times \mathbb{P}(X > v) \times \mathbb{E}(N_u) - \frac{\beta_u + \xi(v+w-u)}{1-\xi} \times \mathbb{P}(X > v+w) \times \mathbb{E}(N_u)$. On obtient les résultats suivants :

Priorité	1 000 000,00 €	2 000 000,00 €	3 000 000,00 €	4 000 000,00 €	5 000 000,00 €	6 000 000,00 €	7 000 000,00 €	8 000 000,00 €	9 000 000,00 €	10 000 000,00 €
Plafond	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €
Prime pure	7 853 380,80 €	2 642 371,34 €	1 599 946,29 €	1 077 994,68 €	774 079,97 €	579 129,38 €	445 361,66 €	348 910,36 €	276 670,61 €	220 912,15 €

FIGURE 12.1 – Prix de l'XS pour différents paramètres (risque décès) issus de la modélisation

Pour l'invalidité on obtient les résultats suivants :

On observe sur ces résultats que l'invalidité coûte bien moins à réassurer (les assiettes de primes décès et invalidité étant assez proche). On observe également que le prix de la couverture décroît plus rapidement en

Priorité	1 000 000,00 €	2 000 000,00 €	3 000 000,00 €	4 000 000,00 €	5 000 000,00 €
Plafond	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €	20 000 000,00 €
Prime pure	2 375 801,03 €	280 575,57 €	88 093,99 €	35 396,55 €	16 673,21 €

FIGURE 12.2 – Prix de l'XS pour différents paramètres (risque invalidité) issus de la modélisation

invalidité. En passant la priorité de 1 à 2M, € le cout de la couverture décès est divisé par trois, celui de la couverture invalidité par huit ! Ces résultats étaient prévisibles au vu de la figure 8.1 sur laquelle on voit plus de sinistres très graves en décès qu'en invalidité ou au vu des paramètres de queues des lois de pareto retenus (qui représente l'épaisseur de la queue de distribution), plus élevé en décès (0.40) qu'en invalidité (0.19).

12.2 Approche de Monte Carlo

L'expression analytique du prix étant plus compliquée à déterminer dès lors qu'on introduit une franchise et/ou un engagement maximal, il devient nécessaire de trouver une autre méthode pour déterminer le prix de la couverture. La méthode utilisé dans ce mémoire est celle de Monte-Carlo, basée sur les simulations. On va simuler un grand nombre de scénario grâce aux lois de probabilité déterminées précédemment. Pour chacun de ces modèles on regarde alors la charge pour le réassureur. La moyenne de la charge de sinistre du réassureur sur l'ensemble des scénarios simulés donne alors la prime pure de la couverture. On applique ensuite les chargements pour obtenir la prime commerciale.

Troisième partie

Choix des paramètres de la couverture en situation libre

DÉTAILS SUR LES SIMULATIONS

Pour la suite de ce mémoire, la VaR d'ordre 99,5% (et par conséquent le capital immobilisé) est calculée par simulation.

Puisque on s'intéresse à un quantile d'ordre élevé, il est impératif d'effectuer un grand nombre de simulations. Par la suite, le nombre de simulations effectuées est, sauf mention contraire, 10 000 000. La $VaR_{99,5\%}$ est donc égale à la 9950001^{ème} plus grande observation.

14

EFFETS DES DIFFÉRENTS PARAMÈTRES DE LA COUVERTURE

14.1 Effets des différents paramètres sur le capital immobilisé

14.1.1 Influence des paramètres de base.

On s'intéresse dans un premier temps à l'influence de la priorité et de la portée de l'XS tête sur le capital immobilisé (au sens $VaR_{99,5\%} - \mathbb{E}$ du terme). On fixe pour cela les autres paramètres de l'XS. Afin que les autres paramètres n'interfèrent pas, on prendra un AAD égal à 0€ et un AAL de 1 000 000 000 €, suffisant pour qu'il ne puisse être atteint.

Pour l'étude de l'influence de la priorité, on fixe la portée à 100 000 000 € (toujours afin de ne pas avoir d'effets parasites).

Pour l'étude de l'influence de la portée, on choisit une priorité relativement basse (1 000 000 €) afin de mieux observer l'effet.

Sur le graphique présenté à gauche de la figure 14.1, on observe que le capital immobilisé net de réassurance décroît avec la priorité. De plus, il décroît d'autant plus vite que la priorité est basse. Abaisser la priorité fait économiser de plus en plus de capital immobilisé mais coûte de plus en plus cher. Cela s'explique par le fait que chaque nouvelle tranche créée par un abaissement de la priorité a plus de chance d'être touchée que celle du dessus.

Sur le graphique présenté à droite de la figure 14.1, on observe que le capital immobilisé net de réassurance diminue lorsque croît la portée. L'économie marginale de capital immobilisé est cependant de plus en plus faible.

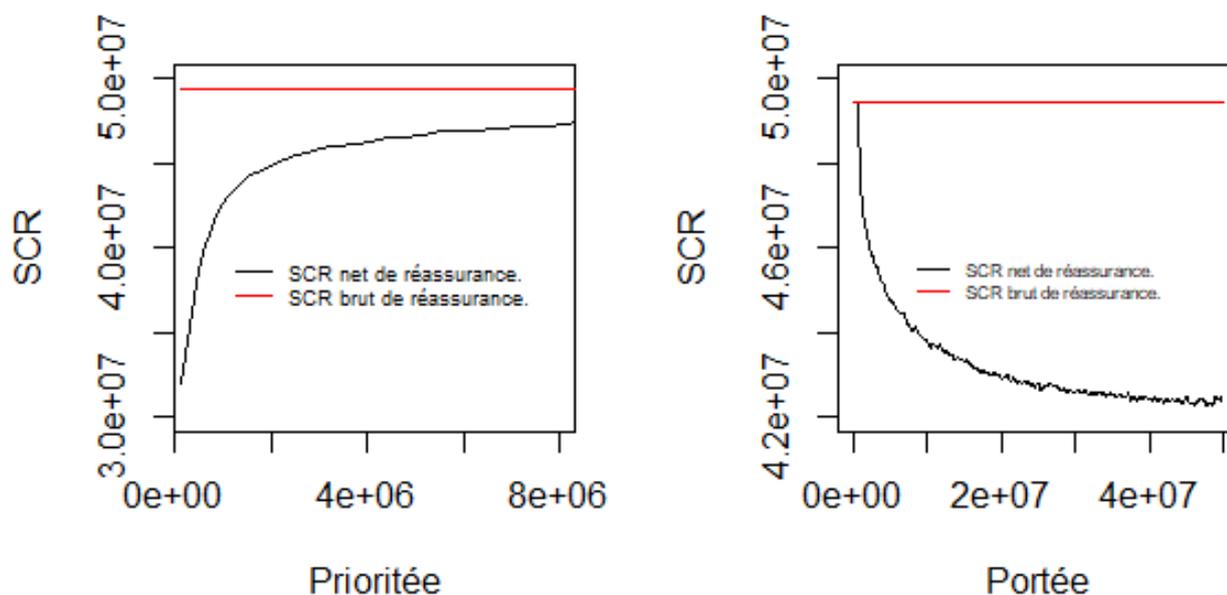


FIGURE 14.1 – Evolution du capital immobilisé en fonction des paramètres de base

14.1.2 Influence de l'engagement maximal du réassureur.

On s'intéresse maintenant à l'effet de la clause AAL (on ignore la reconstitution, qui n'en est qu'un cas particulier). On observe (cf figure 14.2) que l'augmentation de la valeur de l'engagement maximal fait diminuer le capital immobilisé net de réassurance. Au delà de 30 000 000 € une augmentation de l'engagement maximal n'a plus d'effet sur le capital immobilisé.

On constate également que les premiers euros de garantie n'ont aucun impact sur le capital immobilisé. En effet le capital immobilisé net reste égal au capital immobilisé brut jusqu'à une AAL d'environ 10 000 000 €. Ce phénomène s'explique par le fait que comme la priorité choisie pour les simulations est basse, la sinistralité est quasi certaine à cette partie. En d'autres termes, il est quasiment certain que la part de sinistralité à la charge du réassureur soit d'au moins 10 000 000 €. Ceci illustre bien l'intérêt de la clause AAD. On prendrait ici une franchise égale à au moins 10 000 000 € afin de ne pas céder au réassureur de la prime correspondant à une sinistralité quasiment certaine.

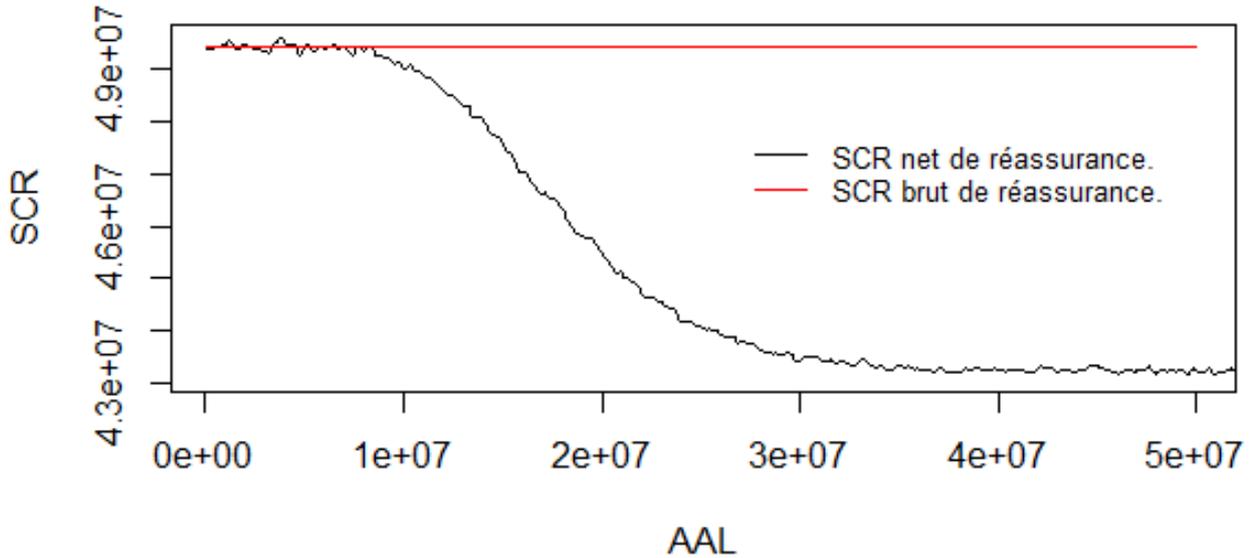


FIGURE 14.2 – Evolution du capital immobilisé en fonction de l'AAL

14.1.3 Influence de la franchise.

On s'intéresse maintenant à l'effet de la franchise (clause AAD). On observe (cf figure 14.3) que l'augmentation de la valeur de la franchise fait augmenter le capital immobilisé net de réassurance. Au delà de 40 000 000 € une augmentation de la franchise n'a plus d'effet sur le capital immobilisé net qui est à nouveau égal au brut. En effet avec une telle franchise, la probabilité de déclencher l'intervention des réassureurs est infime. De plus, de tels scénarios font partie des 0,5% les plus graves et ne sont donc pas pris en compte par la $VaR_{99,5\%}$.

On constate également (cf figure 14.3) qu'en dessous d'une valeur d'environ 10 000 000 €, l'introduction de la franchise ne fait pas diminuer le capital immobilisé net. Ce phénomène illustre parfaitement l'intérêt d'introduire une franchise. En effet, pour une même économie de capital immobilisé, le traité avec franchise coutera nettement moins cher que celui sans la franchise. Son Rorac sera donc bien supérieur.

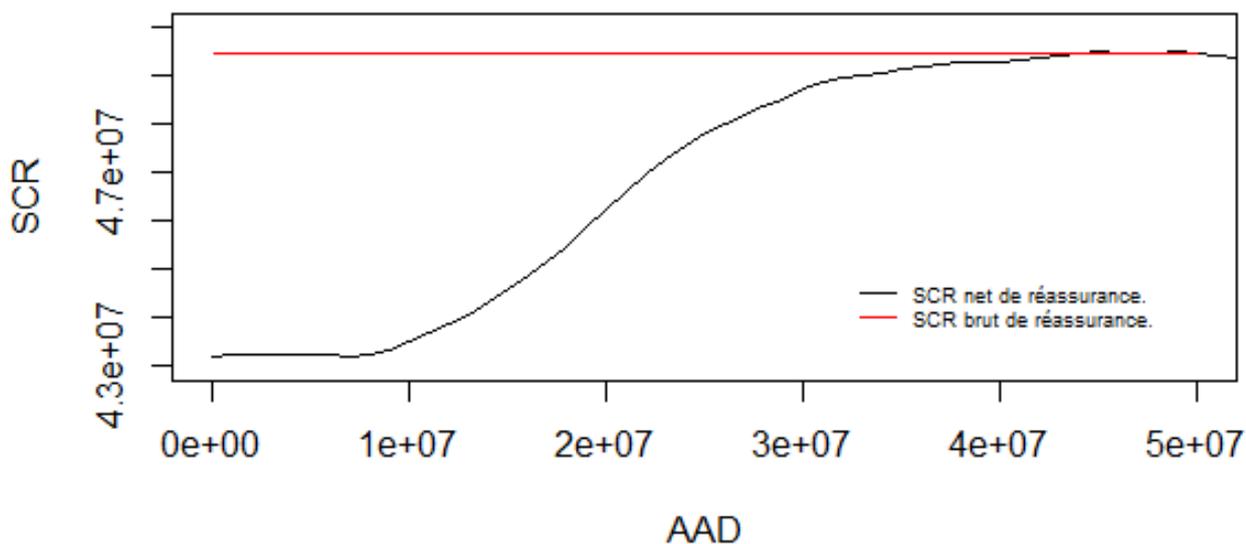


FIGURE 14.3 – Evolution du capital immobilisé en fonction de la franchise

14.2 Effets sur la volatilité

14.2.1 Influence des paramètres de base

On s'intéresse maintenant aux variations de σ , la volatilité de la sinistralité, en fonction de la priorité et de la portée du traité. Bien qu'en l'absence de clauses AAD et AAL il soit possible de déterminer une expression analytique pour σ , on fait pour l'instant le choix de le déterminer par la méthode de Monte-Carlo (voir figure 14.4).

Comme pour le capital immobilisé, on observe que l'augmentation marginale de volatilité est de plus en plus faible lorsque la portée augmente.

De même, la réduction marginale de la volatilité s'amointrie à mesure que croît la portée.

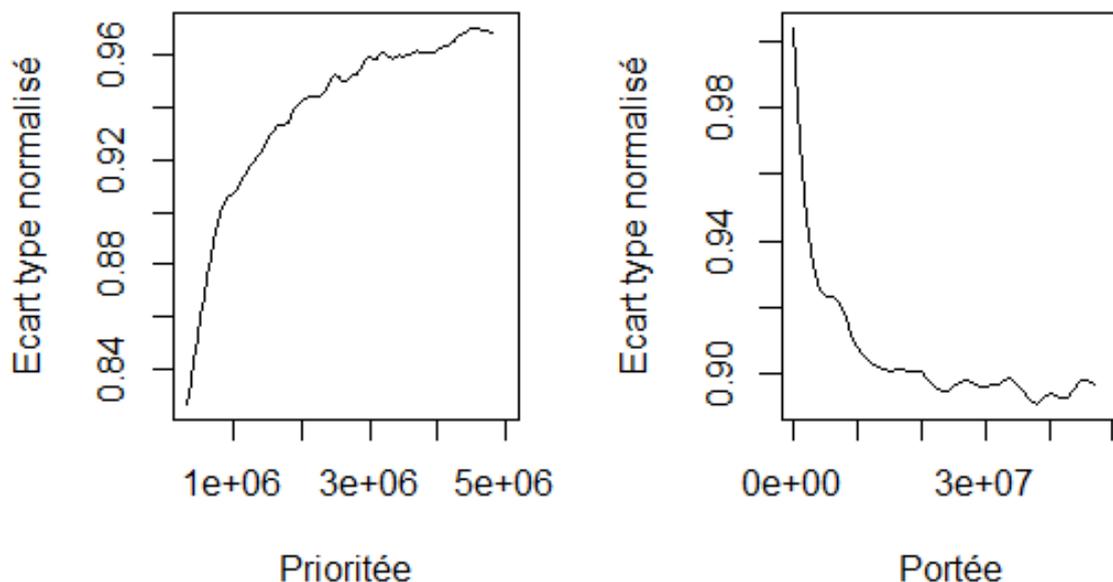


FIGURE 14.4 – Evolution de la volatilité en fonction de la priorité et de la portée.

14.3 Effets des paramètres sur le Rorac

14.3.1 Effets de la priorité

On s'intéresse au paramètre principal en déterminant le Rorac pour différentes priorités (on prend une franchise nulle et une portée et un engagement maximal très élevés pour mieux observer les effets de la priorité).

On voit sur la figure 14.5 qu'avec les paramètres retenus, le Rorac croît rapidement jusqu'à un maximum atteint pour une priorité d'environ 2 000 000 €. Il décroît ensuite lentement. L'étude de la dérivée d'ordre 1 (graphique droit de la figure 14.6 confirme cette croissance rapide suivi d'une très lente décroissance.

Par rapport à la valeur du Rorac brut de réassurance : on observe que pour des valeurs faibles de la priorité, le Rorac net (après réassurance) est inférieur au brut (avant réassurance). Cela découle du fait que pour une priorité trop basse, on cède une importante sinistralité certaine, sur laquelle viennent s'appliquer les chargements des réassureurs ce qui réduit fortement le profit réalisé. Ainsi, le choix d'une priorité basse va certes réduire la volatilité du résultat mais va aussi fortement réduire celui-ci, le réassureur portant alors la majeure partie du risque.

Pour les hautes valeurs de priorité, on constate que le Rorac net tend vers le brut : en effet, plus la priorité est élevée et moins la réassurance intervient. Avoir une priorité trop haute rend la réassurance inutile puisque celle-ci n'intervient jamais. Le résultat n'est alors pas protégé.

On observe également que le Rorac semble être une fonction concave de la priorité. On cherchera à confirmer ce point en étudiant la dérivée et la dérivée seconde du Rorac par rapport à la priorité (figure 14.6). On devrait observer une dérivée strictement décroissante et une dérivée seconde strictement négative ce qui est bien le cas ici.

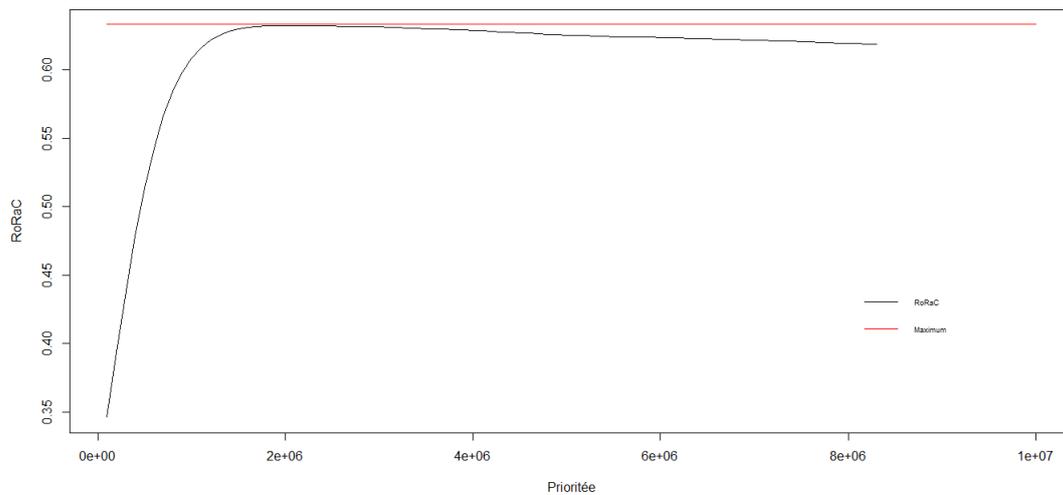


FIGURE 14.5 – Rorac en fonction de la priorité

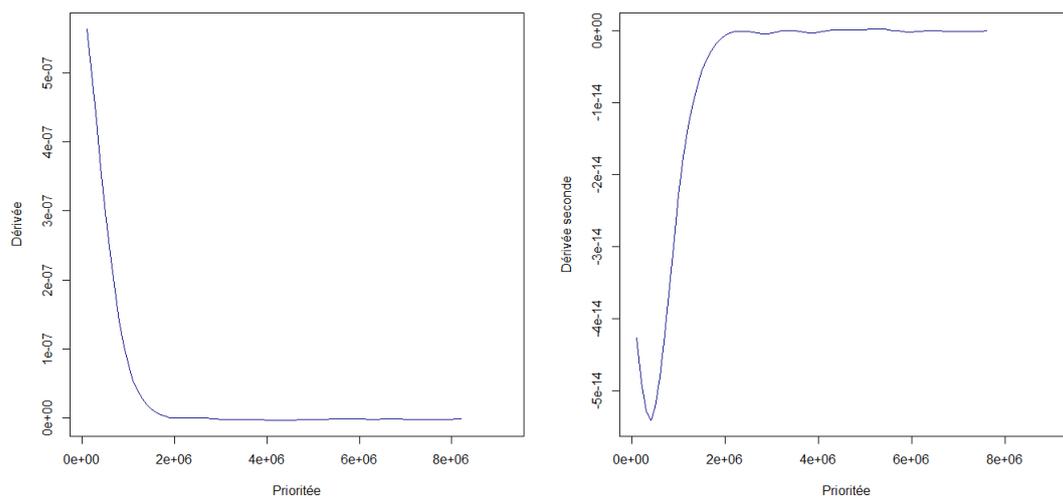


FIGURE 14.6 – Dérivée et dérivée seconde du Rorac en fonction de la priorité

14.4 Effets de la portée

On s'intéresse maintenant aux effets d'une augmentation de la portée. Comme on pouvait s'y attendre, on observe sur la figure 14.7 que plus on augmente la portée et plus la couverture de réassurance est optimale. Ceci est tout à fait logique puisque en choisissant une portée basse, les sinistres extrêmes continuent d'impacter le résultat. On cède une partie régulière de la sinistralité pour garder la volatilité ce qui est le contraire de l'objectif recherché.

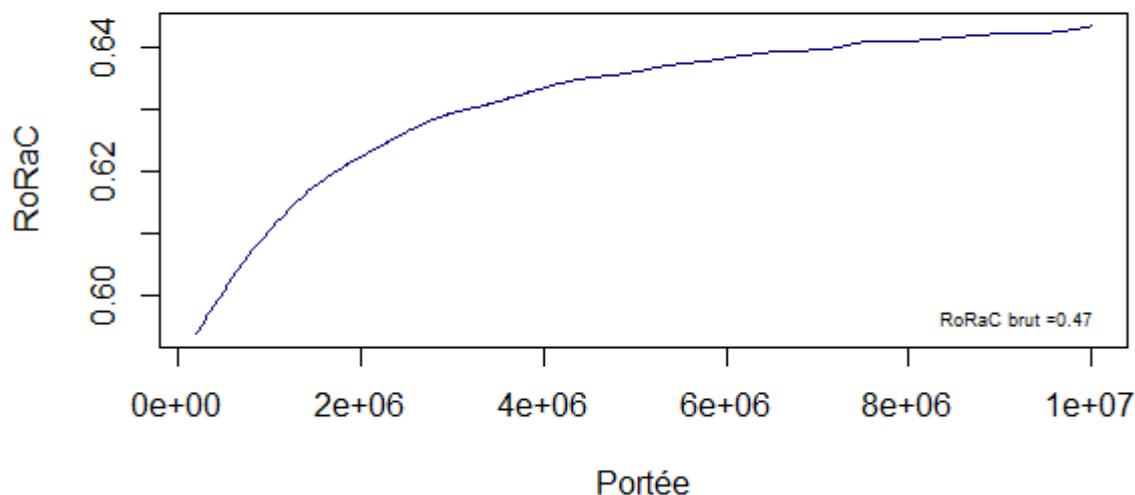


FIGURE 14.7 – Rorac en fonction de la portée

14.5 Effets de la franchise

On s'intéresse maintenant aux effets de l'introduction d'une franchise. Pour cela, on choisit une priorité très basse de sorte que les effets soient plus visibles.

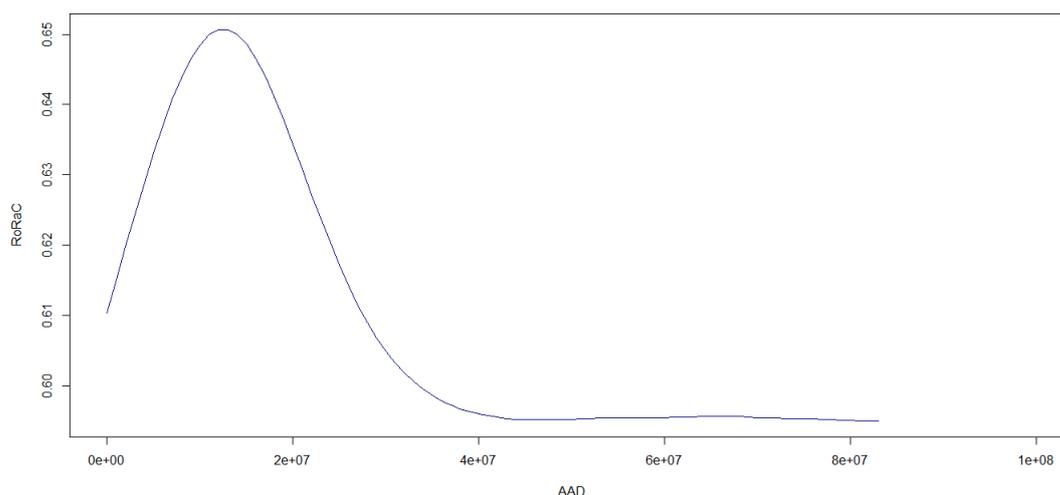


FIGURE 14.8 – Rorac en fonction de la franchise

Comme on pouvait s'y attendre, on constate que dans un premier temps, augmenter la franchise permet d'augmenter l'efficacité de la couverture. En effet, avec une priorité aussi basse, la couverture, sans la franchise, est très travaillante. On cède donc aux réassureurs une sinistralité certaine à laquelle il vient appliquer ses frais ce qui engendre une perte de bénéfice importante. La franchise permet de remédier à cela en conservant chez la

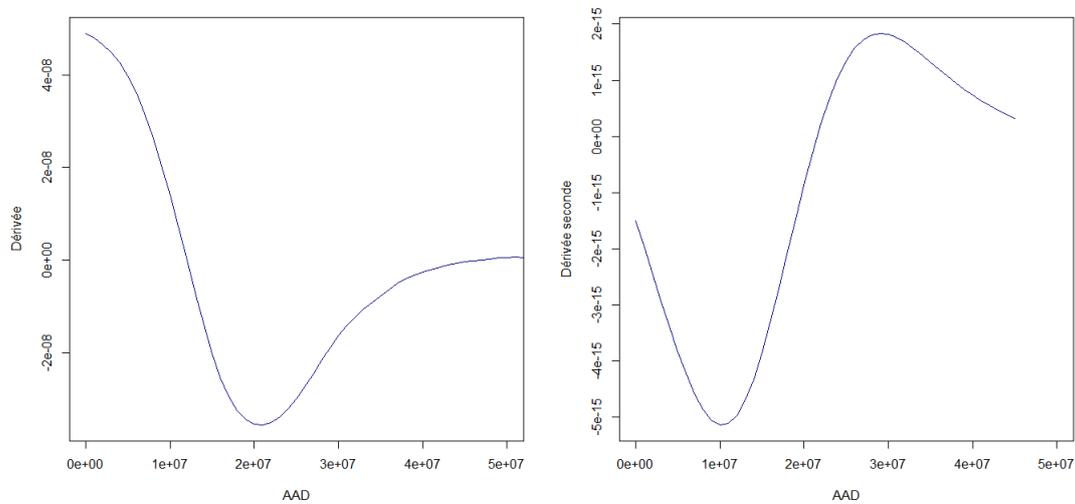


FIGURE 14.9 – Dérivée et dérivée seconde du Rorac en fonction de la franchise

cedante une partie de cette sinistralité.

On constate ici que $\forall u, v, w, f_1(X_{t,u,v,w}) \mapsto Rorac(t)$, où t est la priorité, u la portée, v la franchise et w l'engagement maximal, est une fonction concave en t puisque sa dérivée seconde est négative comme on peut le voir sur le graphique. $\forall t, v, w, f_2(X_{t,u,v,w}) \mapsto Rorac(u)$, $\forall t, u, w, f_2(X_{t,u,v,w}) \mapsto Rorac(v)$ $\forall t, u, v, f_2(X_{t,u,v,w}) \mapsto Rorac(w)$ sont également concaves sur l'intervalle des valeurs usuelles pour chacun de ces paramètres.

15

OPTIMISATION DE LA COUVERTURE DÉCÈS

15.1 Maximisation du Rorac en situation libre

On a constaté précédemment que le Rorac est concave pour les différents paramètres du traité (à condition de restreindre la franchise et l'engagement maximal à des valeurs raisonnables à savoir une franchise petite et un engagement maximal élevé) . Ceci nous assure de l'existence d'un maxima. En pratique, le plafond de la couverture est une donnée extérieure donné par une étude des risques de pointe. Ici on supposera qu'on ne dispose pas d'une telle information sur le portefeuille.

Les paramètres "optimaux" au sens du critère retenu sont alors obtenus par un algorithme générant une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N} Rorac(x_{k+1}) > Rorac(x_k)$ avec $x_k = (s_k, t_k, v_k, u_k)$ et $x_{k+1} = \max((s_k + pas, t_k, v_k, u_k), (s_k, t_k + pas, v_k, u_k), (s_k, t_k, v_k + pas, u_k), (s_k, t_k, v_k, u_k + pas))$ Afin d'économiser du temps de calcul, on choisira :

- d'initialiser l'algorithme avec des valeurs assez élevées pour les différents paramètres.
- de prendre un pas assez grand(100 000 € par exemple) quitte à prendre ensuite un pas plus petit en partant de plus près des paramètres optimaux trouvé lors de la première exécution de l'algorithme.

Pour le risque décès, on aboutis aux paramètres suivants (pas retenu : 50 000) € :

- priorité : 1 050 000 €
- Franchise : 2 200 000 €
- Portée : 23 100 000 €
- Engagement maximal : 32 400 000 €
- Rorac : 0,683
- : Prix : 3,4M €

A titre de comparaison, les résultats donnés par la maquette excel permettant la tarification en *burning cost* sont donnés ci-dessous (figure 15.1).

On observe que les deux résultats sont assez proches. La tarification par expérience donne un résultat très légèrement supérieur à celui de la modélisation.

Tranche	1
Priorité	1 050 000,00 €
Portée	23 100 000,00 €
AAD	2 200 000,00 €
AAL	32 400 000,00 €
Prime Pure	3 193 054,78 €

FIGURE 15.1 – Résultat de la tarification *burning cost* risque décès.

15.2 Maximisation sous contraintes

L'introduction d'une franchise amenant des lourdeurs de gestion, ce paramètre ne sera pas pris en compte (contrainte franchise=0). De plus le groupe souhaite être couvert quelque soit le scénario, cela amène à un engagement maximal illimité (pour la modélisation, on le fixera à une valeur inatteignable). De plus, les capitaux sous risque dépassants 10M€ pour une seule tête font l'objet d'une étude approfondie et d'une couverture spécifique. En pratique, on a donc un plafond fixé à 10M€ pour la 1ère tranche puis une seconde tranche avec une priorité à 10M€. Pour cette tranche additionnelle couvrant les capitaux sous risques élevés, on utilisera la méthode de tarification sur exposition. On a n assurés, d'âge a_k et de capital sous risque CSR_k et on utilise les probabilités associées aux tables de mortalité TH/F 00-02 pour calculer l'espérance de la sinistralité et donc le prix de la couverture.

15.2.1 Tarification de la première tranche

On réutilise le même algorithme que précédemment pour déterminer la prime pure (à ceci près qu'on ne fait plus varier qu'un seul paramètre : la priorité). On obtient une priorité à 1 850 000 € pour un Rorac à 0.667 et un prix de 2,8M€.

Tranche	1
Priorité	1 850 000,00 €
Portée	8 150 000,00 €
AAD	- €
AAL	815 000 000,00 €
Prime Pure	2 445 817,10 €

FIGURE 15.2 – Résultat de la tarification *burning cost*

En appliquant la méthode du *burning cost*, on obtient les résultats présentés figure 15.2

15.2.2 Comparaison avec les programmes en place

On notera que la priorité optimale déterminée précédemment est plus haute que celle des programmes préexistant sur les portefeuilles ex Malakoff-Médéric (1 500 000 €) et ex Humanis(1 250 000 €). On obtient les résultats suivants :

Priorité (en M€)	1,25	1,5	1,85
Rorac	0,604	0,631	0,667
Primes (en M€)	5,7	4,2	2,8

Au sens du critère choisi, le programme optimal déterminé permet un gain de 5,4% par rapport à une harmonisation sur les paramètres ex-Malakoff-Médéric et un gain de 9,4% par rapport aux paramètres ex-Humanis.

Concernant la prime, il permettrait d'économiser 33% de la prime cédée par rapport au choix de la priorité du programme ex-Malakoff-Médéric et même de 51% par rapport au choix des paramètres d'ex-Humanis, réduisant dans les mêmes proportions le résultat cédé aux réassureurs.

Ces résultats font sens puisque les priorités historiques étaient calibrées pour des groupes plus petits que celui issu de la fusion. L'effet de mutualisation étant plus fort pour un groupe plus grand, il est donc logique que la priorité optimale pour le nouveau groupe soit plus haute que celles présentes historiquement sur chacune des composantes de la fusion.

A ce titre, il paraît donc recommandable de remonter la priorité décès du programme en excédent de sinistre par tête du nouveau groupe.

15.2.3 Tarification de la seconde tranche

La méthodologie est la suivante : pour la majorité des contrats il est impossible d'atteindre un capital sous risque aussi élevé pour une tête. En effet, pour la quasi totalité des contrats, le salaire considéré est plafonné à la tranche C soit 8 fois le PASS (Plafond Annuel de la Sécurité Sociale) ce qui correspond à environ 320 000 €. De plus, une majorité des contrats présente une clause de plafonnement des capitaux constitutifs à 100 fois le PASS (soit environ 4M€). Pour atteindre un capital sous risque de 10M€ il faut donc : avoir une dérogation à la clause limitative de 100 PASS et présenter des garanties très élevées et/ou une dérogation au plafonnement à la tranche C. Ceci permet donc de réduire fortement le périmètre à étudier. Pour les dossiers concernés, on calcule alors les CSR (en pratique, il arrive que certaines données soient manquantes, comme l'âge du conjoint ou des enfants. On prend alors des hypothèses conservatives pour calculer le CSR. Une fois les CSR obtenus, on obtient le coût de la couverture en multipliant la charge pour le réassureur en cas de décès par la probabilité de décès dans l'année pour chaque assuré concerné soit dans le cas de n assuré présentant des capitaux sous risques notés CSR_1, \dots, CSR_n d'âge x_1, \dots, x_n . Il est à noter que cette méthode donne une estimation très haute du prix puisque, outre la prudence des tables utilisées, les CSR sont calculés en prenant compte les majorations pour décès accidentel et les éventuelles hypothèses conservatives en cas de données manquantes.

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \max(0; CSR_i - Prioritee)q_{x_i}$$

ou q_{x_i} représente la probabilité de décès dans l'année de la personne i (cette probabilité n'est pas la même selon le sexe de l'assuré).

16

OPTIMISATION DE LA COUVERTURE INVALIDITÉ

On garde le même algorithme que précédemment pour déterminer le point optimal.

16.1 Couverture optimale en situation libre

Sans contrainte, on obtient les résultats suivants :

- priorité : 1 200 000 €.
- Franchise : 900 000 €.
- Portée : 5 150 000 €.
- Engagement maximal : 8 750 000 €.
- Rorac : 0.711
- Prix : 0,6M€.

A titre de comparaison, les résultats donnés par la méthode *burning cost* sont présentés figure 16.1. On constate que les deux résultats sont assez proches.

On remarque que, si la priorité est du même ordre de grandeur qu'en décès, la portée et l'engagement maximal sont très inférieurs à ceux du risque décès. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la queue de distribution moins lourde pour l'invalidité. On constate également que la prime de réassurance pour ce risque serait très inférieure à celle du risque décès. Comme on pouvait le supposer, l'enjeu autour du calibrage et de la tarification du risque invalidité est bien moindre qu'en décès.

Tranche	1
Priorité	1 200 000,00 €
Portée	5 150 000,00 €
AAD	900 000,00 €
AAL	8 750 000,00 €
Prime Pure	614 170,08 €

FIGURE 16.1 – Résultat de la tarification *burning cost* en invalidité

On s'intéresse maintenant au résultat technique de la réassurance en XS par tête. La figure 16.2 présente les résultats techniques des couvertures XS par tête décès et invalidité en fonction de la période de retour. La

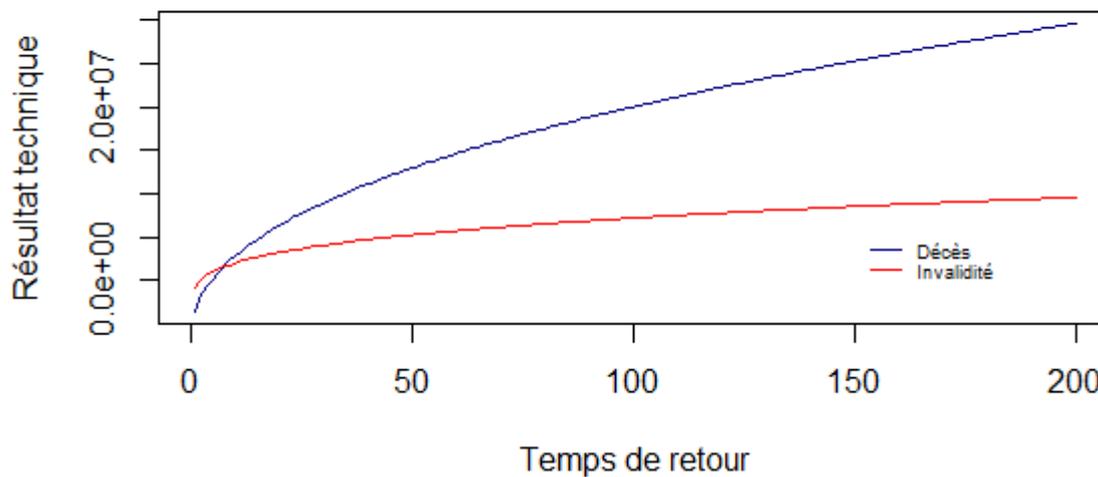


FIGURE 16.2 – Résultat technique

réassurance dégage un résultat positif : pour un temps de retour de 6.3 ans en décès et 2.9 ans en invalidité. Pour une période de retour de 200 ans, elle dégage un résultat technique de 29.2M€ en décès et 8.1M€ en invalidité.

16.2 Couverture optimale sous contraintes

On garde les mêmes contraintes que celles décrites pour le risque décès. La seule différence est qu'ici on n'introduira pas de tranche 2 basée sur l'étude des CSR, la queue de distribution étant moins lourde pour les sinistres invalidité que pour les décès. Le plafond est également plus bas que pour la tranche 1 décès. On touche ici une des limites du modèle : dans notre situation, on est capable de déterminer le montant de sinistre maximal possible ce qui borne la sinistralité. Ceci est contraire à l'utilisation d'une loi de Pareto généralisée avec un paramètre de queue positif. L'introduction d'une borne supérieure oriente en effet soit vers une loi Pareto généralisée à paramètre de queue négatif (type Weibull) soit d'autres lois de distribution bornées. On remarque cependant que pour le plafond ici fixé, le prix de la couverture déterminé avec le modèle si on souhaitait se couvrir au delà de ce plafond est négligeable (cf figure 12.2).

On obtient une portée à 1 450 000 avec un prix de 0,6M€ et un Rorac de 0,702. Les résultats donnés par la méthode *burning cost* sont présentés figure 16.3.

Tranche	1
Priorité	1 450 000,00 €
Portée	4 550 000,00 €
AAD	- €
AAL	8 750 000 000,00 €
Prime Pure	631 475,81 €

FIGURE 16.3 – Résultat de la tarification *burning cost* en invalidité

Par rapport à la situation libre, la prime est sensiblement équivalente et le Rorac est très légèrement inférieur. Au regard de notre critère la qualité de la couverture est donc quasiment équivalente.

16.2.1 Comparaison avec les programmes en place

On notera que la priorité optimale déterminée précédemment est plus haute que celle des programmes préexistant sur les portefeuilles ex Malakoff-Médéric (1 200 000 €) et ex Humanis(1 250 000 €). On obtient les résultats suivants :

Priorité (en M€)	1,2	1,25	1,45
Rorac	0,688	0,691	0,702
Primes (en M€)	1,6	1,5	0,6

Au sens du critère choisi, le programme optimal déterminé permet un gain de 2% par rapport a une harmonisation sur les paramètres ex-Malakoff-Médéric ou ex-Humanis (les deux étant ici sensiblement équivalent).

Concernant la prime, il permettrait d'économiser environ 60% de la prime cédée, réduisant dans les mêmes proportions les résultats cédés aux réassureurs. Ce point est toutefois à relativiser ces 60% d'économies s'appliquant à un volume de prime assez faible.

L'explication de cette priorité plus élevée est la même que pour le risque décès : la population assurée par le nouveau groupe est plus nombreuse, la mutualisation est donc plus forte ce qui permet d'envisager une priorité plus haute.

A ce titre, il paraît donc recommandable de remonter la priorité invalidité du programme en excédent de sinistre par tête du nouveau groupe.

Les enjeux financiers sont toutefois bien moindres que pour le décès, un tel choix n'aurait que peu d'impact sur le groupe dans son ensemble.

Conclusion

Le traitement des sinistres graves est l'une des problématiques majeures en prévoyance collective. Pour se prémunir des conséquences financières des sinistres les plus graves, les assureurs font appel à des réassureurs pour mettre en place des couvertures non proportionnelles. Nous avons vu que pour ce type de risque, la couverture la plus adaptée est celle en excédent de sinistre (XS) par tête. L'enjeu est dans un premier temps de savoir quel est le niveau de protection souhaitable en fonction du risque auquel on est exposé, de la taille du groupe, de l'appétence aux risques des administrateurs ou encore de critères plus restrictifs comme un budget alloué à une telle couverture. On cherchera ensuite à en estimer le juste prix.

Dans le cadre d'une fusion, comme c'est le cas pour Malakoff-Médéric et Humanis, est donc important de définir les paramètres du nouveau groupe de façon à apporter une protection optimale au niveau groupe. L'objectif de ce mémoire est de fournir des orientations pour les paramètres de la nouvelle couverture. Nous avons donc dans un premier temps construit un modèle pour la sinistralité. Il s'agit d'un modèle collectif classique dans lequel on sépare les sinistres graves des sinistres attritionnels. Afin de déterminer le seuil de séparation entre les deux et pour estimer les lois des excès au-delà des seuils déterminés on fait appel à la théorie des valeurs extrêmes. Grâce aux diverses propriétés des lois de Pareto généralisées ainsi qu'à divers indicateurs (graphiques quantiles-quantiles, de Hill, de dépassements moyens etc), nous avons pu déterminer des seuils au-delà desquels les sinistres invalidité ou décès seront considérés comme graves. Cette étape est tout particulièrement sensible, d'autant qu'on ne dispose pas de critère strict pour définir ces seuils. Ce point constitue une des principales limites du modèle. Une fois les seuils choisis, on a ensuite pu déterminer des lois de probabilités régissant le comportement de la sinistralité grave d'une part et de la sinistralité attritionnelle d'autre part. Les lois de probabilité déterminées servent ensuite de socle à un modèle permettant de trouver la structure optimale de la couverture en excédent de sinistre par tête du point de vue du critère choisi : le Rorac qui prend en compte à la fois la volatilité et la profitabilité. On a d'abord déterminé les paramètres optimaux en situations libres. On a ensuite introduit des contraintes propres au groupe Malakoff-Humanis pour déterminer la structure optimale pour le groupe du point de vue du critère retenu. Ceci constitue alors une indication pour le choix de relever ou non la priorité du nouveau traité XS par tête. En complément de cette méthode probabiliste, on a également utilisé la tarification par expérience (initialement à des fins de comparaisons). Compte tenu de la taille du groupe (et par conséquent de la base de données disponible), cette méthode se révèle également fort intéressante puisque ses résultats (en termes de prix déterminés) sont très similaires à ceux obtenus avec la modélisation. Elle ne permet cependant pas de faire d'optimisation. Pour cela on aurait pu envisager d'autre méthode comme le Bootstrap. Un autre complément apporté est l'utilisation de la tarification par exposition sur la partie la plus extrême du risque rendue possible par la maîtrise du portefeuille. Cela permet de compenser les éventuelles faiblesses de l'approche par modélisation sur les valeurs les plus extrêmes.

TABLE DES FIGURES

2.1	Résultats d'un traité à la Quote-Part	13
2.2	Partage des polices pour un Excédent de Plein	14
2.3	Résultats d'un traité Stop-Loss	15
2.4	Effets d'une clause AAD	17
5.1	Tables utilisées	27
5.2	Répartition des âges d'entrée en invalidité avant et après 2010	28
5.3	Répartition des assurés par classe d'âges.	28
5.4	Age des personnes décédées	31
5.5	Age des personnes décédées dans le cas où une RC est versée	32
7.1	Boîtes à moustaches	35
7.2	Fonctions de répartitions du nombre et de la charge de sinistre (décès)	36
8.1	Estimateur de Hill du paramètre de forme de la GEV	38
8.2	Dépassement moyen de seuil	38
8.3	Dépassement moyen de seuil entre 200 000 € et 1 500 000 €	39
8.4	Dépassement moyen de seuil au delà de 1 200 000 €	40
8.5	β estimé en fonction du seuil	41
8.6	ξ estimé en fonction du seuil	41
8.7	ξ estimé en fonction du seuil	42
8.8	ME plot sur échantillons simulés	43
8.9	Beta plot sur échantillons simulés	44
8.10	Xi plot sur échantillons simulés	45
8.11	Graphiques quantile-quantile de solutions à 3 seuils	46
8.12	Comparaison de graphiques quantile-quantile pour des solutions à 2 et 3 seuils.	47
8.13	Graphiques quantile-quantile pour des solutions à 1 ou 2 seuils.	48
8.14	Graphiques quantiles-quantiles	49
8.15	Estimateur de Hill de l'indice de queue de la distribution GEV en invalidité.	49
8.16	Graphique quantile-quantile pour la GPD proposée pour l'invalidité.	50

8.17	Estimateur de ξ pour des échantillons simulés	51
8.18	Dépassements moyens de seuil en invalidité	51
8.19	Estimateur de β en invalidité	52
8.20	Estimateur de ξ pour le risque invalidité.	52
9.1	Paramètres des GPD	54
10.1	Occurrences	55
10.2	Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov	56
10.3	Occurrences	56
11.1	Paramètre pour la sinistralité attritionnelle, risque décès.	57
11.2	Paramètre pour la sinistralité attritionnelle, risque invalidité.	57
12.1	Prix de l'XS pour différents paramètres (risque décès) issus de la modélisation	58
12.2	Prix de l'XS pour différents paramètres (risque invalidité) issus de la modélisation	59
14.1	Evolution du capital immobilisé en fonction des paramètres de base	63
14.2	Evolution du capital immobilisé en fonction de l'AAL	64
14.3	Evolution du capital immobilisé en fonction de la franchise	65
14.4	Evolution de la volatilité en fonction de la priorité et de la portée.	66
14.5	Rorac en fonction de la priorité	67
14.6	Dérivée et dérivée seconde du Rorac en fonction de la priorité	67
14.7	Rorac en fonction de la portée	68
14.8	Rorac en fonction de la franchise	68
14.9	Dérivée et dérivée seconde du Rorac en fonction de la franchise	69
15.1	Résultat de la tarification <i>burning cost</i> risque décès.	71
15.2	Résultat de la tarification <i>burning cost</i>	71
16.1	Résultat de la tarification <i>burning cost</i> en invalidité	74
16.2	Résultat technique	74
16.3	Résultat de la tarification <i>burning cost</i> en invalidité	75
A.1	Graphique quantile-quantile de la distribution des extrêmes retenue (décès)	82
A.2	ME plot d'échantillons simulés en invalidité	83
A.3	Estimateur de β pour des échantillons simulés en invalidité	84
A.4	Temps de retour des sinistres (en année)	84

BIBLIOGRAPHIE

- [1] PICKLANDS James (1975) , *Statistical inference using extreme order statistics*. The Annals of Statistics, Vol3, p. 119-131.
- [2] TAYLOR Arnold B. (2016), *Discrete Goodness-of-Fit Tests*, CRAN R-Project, <https://cran.r-project.org/web/packages/dgof/dgof.pdf>
- [3] CHEN Yan *Détermination des programmes de réassurance optimaux d'une société d'assurance non-vie dans le cadre de Solvabilité II* mémoire d'acuaire
- [4] PLANCHET Frédéric (2017) *Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans le cadre de Solvabilité 2* support disponible sur <http://www.ressources-actuarielles.net/>
- [5] SABOURIN Anne (2012) *Introduction à la théorie des valeurs extrêmes* disponible sur : <http://gradua-teschool.agroparistech.fr>
- [6] COLES S. (2001) *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Value* Springer, London
- [7] FISCHER R. A. AND TYPPELT L. H. C (1927) *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample*
- [8] GNEDENKO B. (1943) *Sur La Distribution Limite Du Terme Maximum D'Une Serie Aleatoire* Annals of Mathematics Second Series, Vol. 44, No. 3 (Jul., 1943), pp. 423-453
- [9] MCNEIL A. J., AND SALADIN T. (1997) *The Peaks over Threshold Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions* Proceedings of the XXVIIIth International ASTIN Colloquium, pp. 23-43.
- [10] EMBRECHTS Paul, RESNICK Sidney I. , AND SAMORODNITSKY Gennady (1999) *“Extreme Value Theory as a Risk Management Tool* North American Actuarial Journal, Volume 3, Number 2, April 1999 Colloquium.
- [11] BORCHANI ANIS (2010). *Statistiques des valeurs extrêmes dans le cas des lois discrètes* support disponible à : <https://hal-essec.archives-ouvertes.fr/hal-00572559> Colloquium
- [12] GUILLOU A. and HALL P. (2001) *A diagnostic for selecting the threshold in Extreme Value Analysis* Journal of the Royal Statistical Society Vol 63, No 2.

ANNEXE

A

ANNEXE DES FIGURES

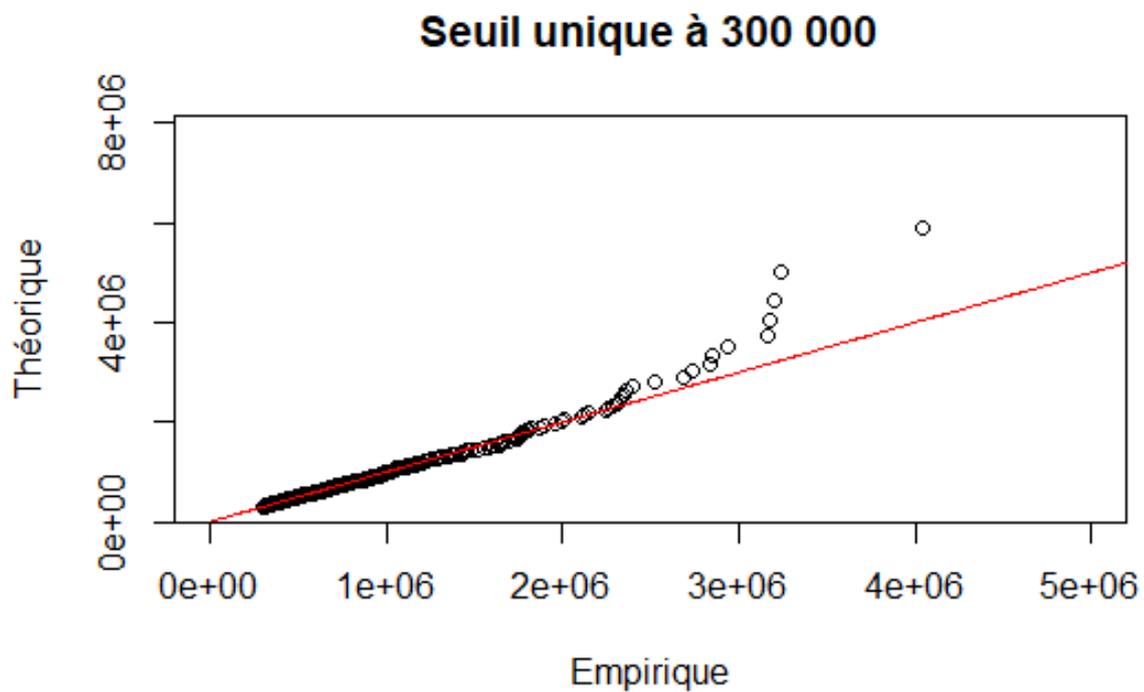


FIGURE A.1 – Graphique quantile-quantile de la distribution des extrêmes retenue (décès)

A.1 Echantillons simulés

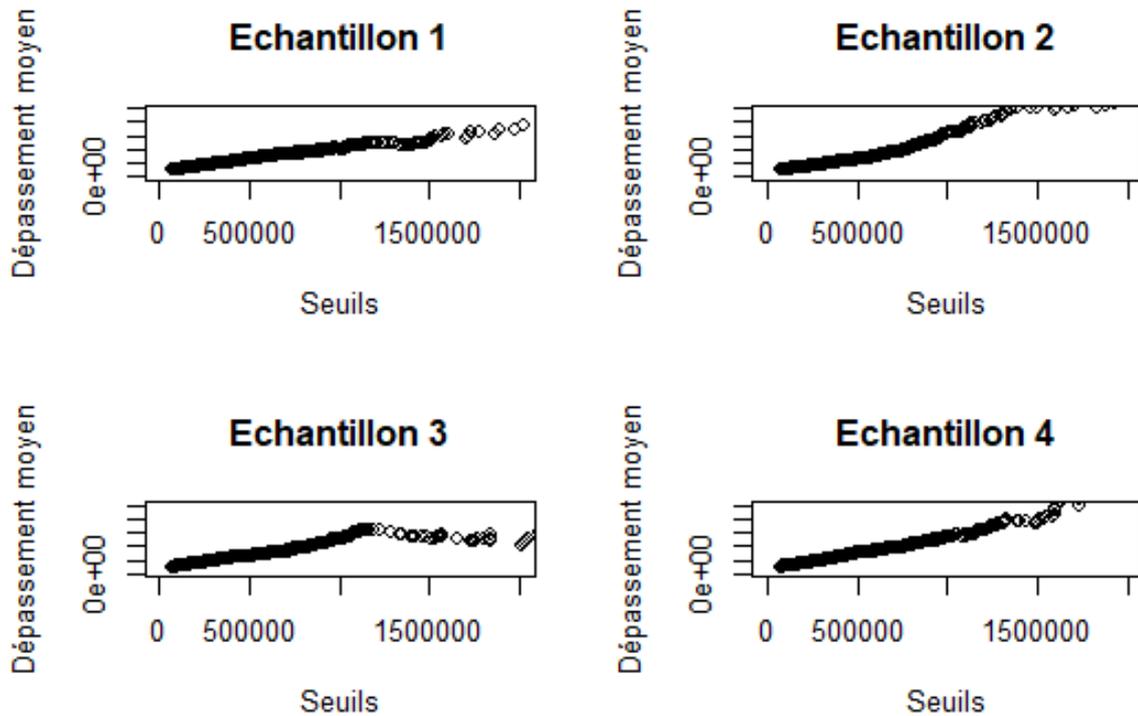


FIGURE A.2 – ME plot d'échantillons simulés en invalidité

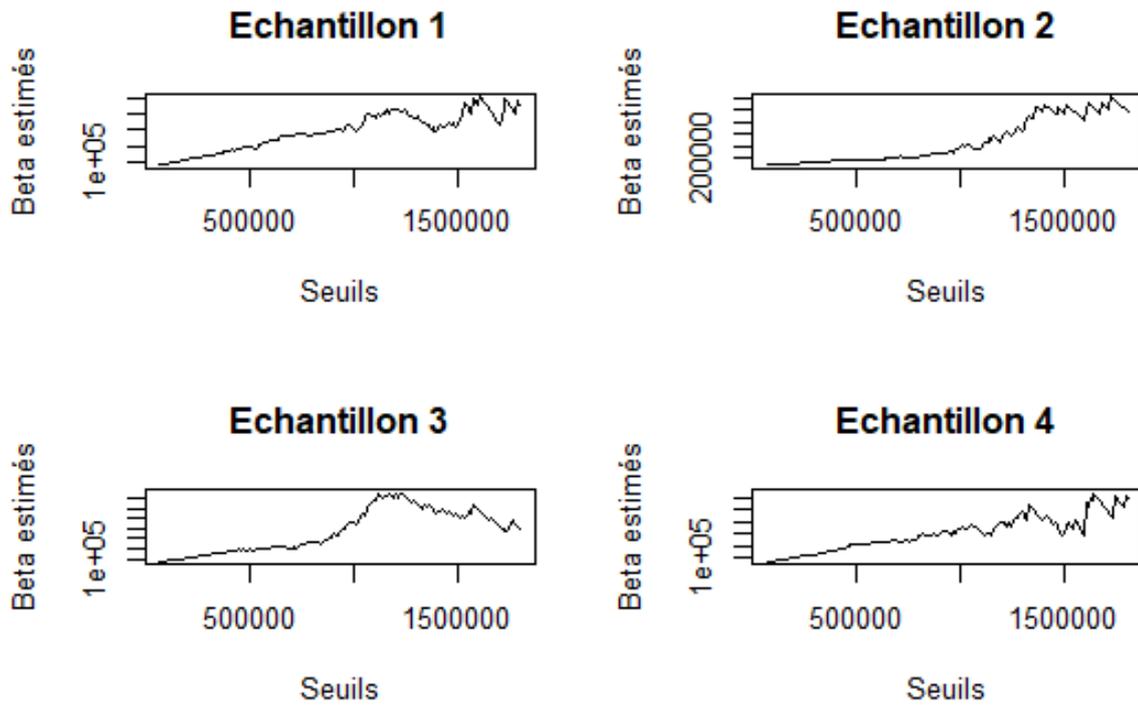


FIGURE A.3 – Estimateur de β pour des échantillons simulés en invalidité

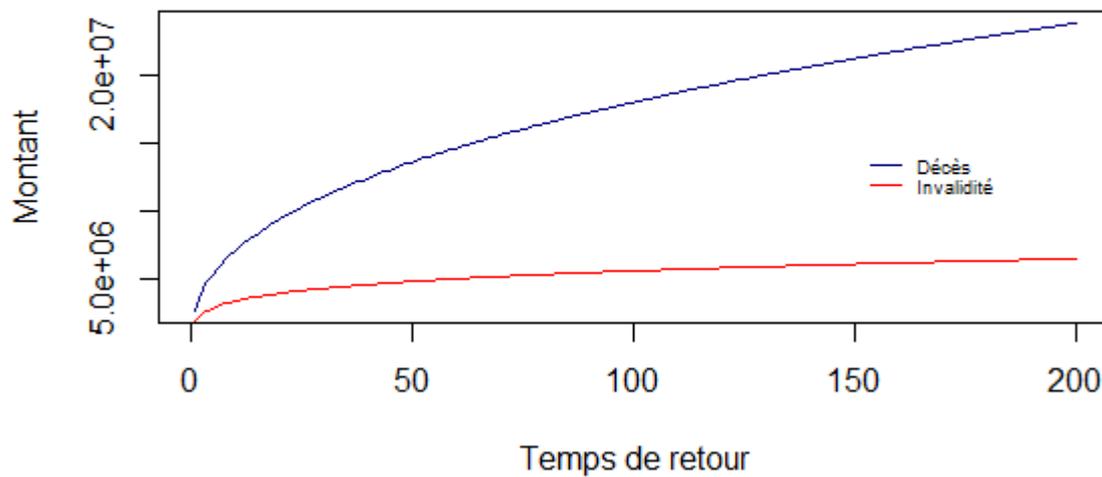


FIGURE A.4 – Temps de retour des sinistres (en année)