

Mémoire
présenté devant la Chaire d'Actuariat
du
Conservatoire Nationale Des Arts et Métiers,
en vue de l'obtention du diplôme d'actuaire

Titre : "Discrétisation de la distribution des trajectoires de l'actif –
Application au calcul du *Best Estimate* d'un contrat d'épargne"

Auditeur : Kamel ASSAM

Directeur de mémoire :
Frédéric PLANCHET

Entreprise :
Winter et Associés,
43-47 avenue de la grande Armée,
75016, Paris.

SOMMAIRE

PARTIE I : LA MODELISATION STOCHASTIQUE CONTRAINTE.....	14
1. OBJECTIF	15
2. MODELISATION DE L'ACTIF	17
2.1. MODELISATION DES ACTIONS	17
2.2. MODELISATION DE LA COURBE DES TAUX D'INTERETS	19
2.2.1 Introduction à la modelisation des taux à terme.....	19
2.2.2 Présentation du modèle.....	21
2.2.3 Utilisation du modèle.....	24
2.3. MODELISATION DE L'IMMOBILIER	24
2.3.1 Notation	24
2.3.2 Présentation du modèle.....	24
2.4. IMPLEMENTATION DES MODELES PAR SIMULATION.....	25
2.4.1 Paramètres des modèles.....	25
2.4.2 Algorithme de calcul.....	27
3. METHODES DE REGROUPEMENT DES TRAJECTOIRES D'ACTIF	31
3.1. DEFINITION	31
3.2. PROCESSUS D'AGREGATION ET APPROXIMATIONS DISCRETES	33
3.2.1 Agrégation « type1_r1 »	33
3.2.2 Agrégation « type2_r1 »	33
3.2.3 Agrégation « type1_r2 »	34
3.2.4 Agrégation « type2_r2 »	34
3.3. MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS GENERAL.....	35
3.3.1 Loi du processus discrétisé $\xi(t)$	35
3.3.2 Loi du processus discrétisé $\lambda(t)$	36
3.4. MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS DU MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE	38
3.4.1 Loi de du processus $\xi(t)$ dans le cas du mouvement brownien geometrique	38
3.4.2 Loi du processus $\lambda(t)$ dans le cas du mouvement brownien géométrique	40

4.	APPLICATION : EVALUATION D’OPTION PAR SIMULATION	42
4.1.	EVALUATION D’OPTIONS « NON PATH DEPENDENT »	42
4.1.1	Mise en œuvre dans le cas du put européenne	42
4.2.	EVALUATION D’OPTIONS « PATH DEPENDENT »	46
4.2.1	Mise en œuvre dans le cas du put Asiatiques (moyenne géométrique)	47
4.2.2	Mise en œuvre dans le cas des options exotiques a barrières	52
4.3.	CONCLUSION	59
	PARTIE II : SOLVABILITE II LE QIS 4	60
1.	INTRODUCTION	61
1.1.	LA NOTION DE SOLVABILITE	61
1.2.	LES GRANDS PRINCIPES DE SOLVABILITE II	62
1.2.1	Une nouvelle approche de valorisation	63
1.2.2	Une architecture en trois piliers	63
1.2.3	Méthode de détermination du capital	65
2.	PRESENTATION DU QIS	67
2.1.	OBJECTIF DU QIS	67
2.2.	EVALUATION DES ACTIFS DANS LE QIS	67
2.3.	EVALUATION DES PASSIFS DANS LE QIS	68
2.3.1	Principes généraux et définitions	69
2.3.2	Evaluation des passifs non-répliquables: best estimate	72
2.3.3	Evaluation des passifs non-répliquables : marge pour risque	73
2.4.	BEST ESTIMATE POUR LES CONTRATS D’EPARGNE	74
2.4.1	Contrats d’Epargne : Passifs répliquables ou Non répliquables ?	74
2.4.2	Caractéristiques de l’évaluation des contrats d’Epargne	74
3.	SCR_{MKT} : MODULE RISQUE DE MARCHE	77
3.1.	PRESENTATION DU MODULE SCR _{MKT}	77
3.2.	MKTINT : RISQUE DE TAUX D’INTERET	77
3.2.1	Impacts sur le passif	77
3.2.2	Impacts sur l’actif	78
3.2.3	Calcul du SCR	78
3.2.4	Effet d’atténuation du risque	79
3.2.5	Méthode de calcul simplifiée	79

3.3.	MKT _{EQ} : RISQUE ACTION	79
3.3.1	<i>Impacts sur le passif</i>	79
3.3.2	<i>Impacts sur l'actif</i>	80
3.3.3	<i>Calcul du SCR</i>	81
3.3.4	<i>Effet d'atténuation du risque</i>	81
3.3.5	<i>Méthode de calcul simplifiée</i>	81
3.4.	MKT _{PROP} : RISQUE IMMOBILIER.....	81
3.4.1	<i>Impacts sur le passif</i>	81
3.4.2	<i>Impacts sur l'actif</i>	81
3.4.3	<i>Calcul du SCR</i>	82
3.4.4	<i>Effet d'atténuation du risque</i>	82
3.5.	MKT _{SP} : RISQUE DE SPREAD	82
3.6.	MKT _{CONC} : RISQUE DE CONCENTRATION	82
3.6.1	<i>Données et assiette de calcul</i>	83
3.7.	SCR _{MKT} : MODULE RISQUE DE MARCHE.....	83
4.	SCR_{LIFE} : MODULE RISQUE DE SOUSCRIPTION VIE.....	84
4.1.	PRESENTATION DU MODULE SCR _{LIFE}	84
4.2.	LIFE _{MORT} : RISQUE DE MORTALITE	84
4.2.1	<i>Assiette de cacul</i>	84
4.2.2	<i>Méthode de calcul standard</i>	84
4.2.3	<i>Effet d'atténuation du risque</i>	84
4.2.4	<i>Méthode de calcul simplifiée</i>	85
4.3.	LIFE _{LONG} : RISQUE DE LONGEVITE	85
4.3.1	<i>Assiette de cacul</i>	85
4.3.2	<i>Méthode de calcul standard</i>	85
4.3.3	<i>Effet d'atténuation du risque</i>	85
4.3.4	<i>Méthode de calcul simplifiée</i>	85
4.4.	LIFE _{EXP} : RISQUE DE RACHAT	86
4.4.1	<i>Assiette de cacul</i>	86
4.4.2	<i>Méthode de calcul standard</i>	86
4.4.3	<i>Effet d'atténuation du risque</i>	86
4.4.4	<i>Méthode de calcul simplifiée</i>	86

4.5.	SCR _{LIFE} : MODULE RISQUE DE SOUSCRIPTION VIE	87
5.	CALCUL DU SCR GLOBAL	88
5.1.	BASIC SCR (BSCR).....	89
5.2.	AJUSTEMENT AU TITRE DE LA CAPACITE D'ABSORPTION DES PERTES FUTURES PAR LA PB IMPOTS OU TAXES DIFFEREES.....	89
5.2.1	<i>Ajustement par la PB</i>	89
5.2.2	<i>Ajustement par les impôts et taxes différées</i>	90
5.2.3	<i>Méthode simplifiée pour l'ajustement (Adj)</i>	90
5.3.	CHARGE DE CAPITAL POUR LE RISQUE OPERATIONNEL (SCR _{OP}).....	90
5.4.	SCR GLOBAL	90
	PARTIE III : MISE EN ŒUVRE OPERATIONNELLE	91
	CHAPITRE 1 : PRESENTATION DU CAS D'ETUDE.....	92
1.	CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE.....	92
1.1.	LES GARANTIES DU PROTEFEUILLE.....	92
1.2.	HYPOTHESES NON FINANCIERES	92
1.3.	HYPOTHESES FINANCIERES ET CARACTERISTIQUES DES PLACEMENTS	94
1.3.1	<i>Caractéristiques des obligations</i>	94
1.3.2	<i>Caractéristiques des autres actifs</i>	95
1.3.3	<i>Le Modele d'allocation cible</i>	95
1.3.4	<i>Le Modèle d'attribution de participation aux bénéfices</i>	96
1.3.5	<i>Le Modele de Rachats Dynamiques</i>	96
	CHAPITRE 2 : MISE EN OEUVRE DU QIS.....	97
2.	HYPOTHESES STOCHASTIQUES	97
2.1.	HYPOTHESES RELATIVES AU MODELE DE TAUX	97
2.2.	HYPOTHESE RELATIVES AU MODELE D' ACTIONS.....	99
2.2.1	<i>Rendement espéré et dividendes</i>	99
2.2.2	<i>Volatilité</i>	100
2.3.	HYPOTHESE RELATIVES AU MODELE D'IMMOBILIER.....	101
2.3.1	<i>Rendement espéré et dividendes</i>	101
2.3.2	<i>Volatilité</i>	102
2.4.	HYPOTHESE D'AGREGATION DES TRAJECTOIRES.....	102
3.	RESULTATS ET ANALYSE	103

3.1.	VALEURS DE MARCHE DES ACTIFS EN PORTEFEUILLE	103
3.2.	EVALUATION DES PROVISIONS TECHNIQUES CIBLES SUR UN ECHANTILLON COMPLET DE TRAJECTOIRES D'ACTIF	103
3.2.1	<i>Les « best estimate » cibles</i>	104
3.2.2	<i>SCR Cible</i>	104
3.3.	EVALUATION DES PROVISIONS TECHNIQUES A PARTIR D'ECHANTILLON AGREGÉ	105
3.3.1	<i>Calcul des « best estimate » pour le risque de marché</i>	105
3.3.2	<i>Calcul du « best estimate » pour risque de souscription vie</i>	110
3.3.3	<i>Conclusion</i>	113
3.4.	CONVERGENCE DES DES METHODES D'« AGREGATION D'ACTIF » VERS LA CIBLE D'UN POINT DE VUE « BEST ESTIMATE »	113
3.4.1	<i>Analyse de la performance des méthodes d'« agrégation d'actifs » pour un engagement de taux à 2,5 %</i>	114
3.4.2	<i>Analyse de la performance des méthodes d'« agrégation d'actifs » pour un engagement de taux à 5 %</i>	115
3.5.	IMPACTS LE CALCUL DU « SCR »	117
3.5.1	<i>Calcul du « SCR Market »</i>	117
3.5.2	<i>Calcul du « SCR Life »</i>	120
3.5.3	<i>Convergence des résultats vers leurs valeurs cibles</i>	121
CONCLUSION		124
ANNEXES		125
1. ANNEXES 1		126
1.1.	GENERATEUR DE NOMBRES ALEATOIRES	126
1.2.	MISE EN ŒUVRE DES TRAVAUX DES CALCULS SOUS LE LOGICIEL « R »	128
1.3.	LOI DES RACHAT STRUCTURELS	130
1.4.	SIMPLIFICATION POUR LE CALCUL DE LA MARGE POUR RISQUE	130
1.5.	MKT _{EQ} : RISQUE ACTION, COMPLEMENTS SUR METHODES DE SIMPLIFICATION	131
1.6.	RISQUE DE MORTALITE : METHODE DE SIMPLIFICATION	132
1.7.	RISQUE DE LONGEVITE : METHODE DE SIMPLIFICATION	133
1.8.	RISQUE RACHAT : METHODE DE SIMPLIFICATION	133
1.9.	MODELE D'ALLOCATION CIBLE : MECANISME D'INVESTISSEMENT / DESINVESTISSEMENT ..	134

REMERCIEMENTS

Je remercie très chaleureusement tous les actuaires, les professionnels de l'assurance et les enseignants qui m'ont porté ici,

Le cabinet WINTER & Associés,

Spécialement Frédéric PLANCHET pour son encadrement, sa disponibilité, ses conseils et sa confiance,

Particulièrement Pierre THEROND, Oberlain Nteukam pour leur précieuse aide et collaboration sur ce projet,

La Chaire Actuariat du CNAM,

Le corps enseignant pour la formation dispensée,

Particulièrement Michel FROMENTEAU, pour son suivi, son écoute et sa confiance.

RESUME

MOTS CLEFS : Contrats en Euros, TMG, Options « Path Dependent » et Non «Path Dependent », « *Best Estimate* », « SCR », Modèles stochastiques, Simulation, Quantile, Options et Garanties Financières, Rachats.

Dans le cadre de la modélisation dynamique des interactions actif / passif en assurance vie, le niveau de certaines hypothèses du passif, telles que les lois de rachat, est impacté par le niveau de la performance réalisée à l'actif. Ainsi la mise en œuvre de tels modèles, dans une approche par simulation, implique que le passif doit être simulé pour chaque trajectoire de l'actif, ce qui en pratique engendre des temps de calcul très importants, allant jusqu'à compromettre la démarche. Aussi l'objet de ce mémoire est de proposer des règles d'agrégation de la distribution des trajectoires d'actif dans le but d'optimiser les temps de projection actif/passif, toutes choses égales par ailleurs.

En pratique, quatre méthodes d'« agrégation d'actif » sont étudiées. Toutes reposent sur le concept suivant :

- sélection d'une ou plusieurs mesures numériques associées à chaque trajectoire, telles que la valeur au terme ou l'ensemble des valeurs observées au cours du temps;
- regroupement des trajectoires par "paquets" associés chacun à un quantile de la mesure précédemment définie ;
- la détermination pour chaque paquet d'une trajectoire représentative de sa distribution.

L'efficacité de ces méthodes est ensuite appréciée en terme de vitesse de convergence des résultats obtenus vers leurs valeurs cibles, déterminées à partir des échantillons entiers d'actif. Cela dans le cadre d'une application au *pricing* de produits dérivés types « options financières » puis pour les problématiques assurantielles que sont l'évaluation des provisions techniques et du capital économique dans le contexte Solvabilité 2.

ABSTRACT

KEY WORDS : Euro contracts, TMG, Options « Path Dependent » and None «Path Dependent », « *Best Estimate* », « SCR », Stochastic models, simulation, Quantiles, financial options and guarantees, insurance redemption.

According to the dynamic modeling of assets and liabilities interactions in life insurance, some liabilities' hypotheses such as lapse's law are impacted by the assets' performance achieved. As a consequence, the involvement of such models, according to a simulation approach, leads to a necessary liabilities simulation for each assets path and generates an overly time-consuming computer process. The purpose of this paper is to introduce aggregation rules on the assets' distribution paths (trajectories), in order to be able to significantly reduce the input data of the assets/liabilities projections tool.

In practice, four methods of “assets aggregation” are studied. All are based on the following concept:

- Selection of one or more numerical measures associated with each path, such as the future value of the assets or all its values observed over the simulation period;
- Trajectories consolidation in “packets” each linked to a quantile of a previously defined measure;
- The definition for each consolidated “packet” of a representative trajectory of its distribution.

The efficiency of these methods are then evaluated in terms of convergence rate criteria towards previously assessed variable according to a whole sample of assets, in application on derivatives' pricing as “financial options” and on insurance-issues as the assessment of technical reserves and economical capital under Solvency II frame work.

INTRODUCTION

Le monde de l'assurance vit depuis la dernière décennie de profondes évolutions dans son approche, aussi bien technique, que réglementaire. Les récentes avancées en matière de valorisation des sociétés d'assurance (MCEV), d'exigence de capital de Solvabilité (Solvabilité II) ou encore de garanties proposées (type *variables annuities*) ont contribué à l'apparition de méthodes de gestion actif/passif dites dynamiques, mieux adaptées aux spécificités des contrats d'assurance présentant de fortes interactions actif/passif.

A l'origine de l'apparition de la gestion Actif/Passif dynamique se trouve la volonté et la nécessité d'anticiper au mieux, un critère fondamental en assurance vie : la dépendance entre l'évolution des actifs d'une part et celle des passifs, de l'autre. Aussi cette modélisation dite dynamique se traduit par le fait que toute projection de passifs d'assurance est fonction des performances futures de l'actif mis en contrepartie.

La mise en œuvre d'un modèle actif / passif, dans une approche par simulation requiert alors un volume de calculs très important. C'est notamment le cas pour l'évaluation des provisions « Best Estimate » d'un contrat d'assurance vie.

Les fonctionnelles qui créent cette dépendance du passif à l'actif sont multiples en assurance vie. Elles sont dues principalement aux options et garanties financières proposées aux assurés dans le cadre de contrats d'épargne principalement et de prévoyance, dans une moindre mesure. Elles imposent de fait une gestion de l'actif en adéquation avec leurs spécificités. Les principales options et garanties financières proposées pour les produits d'épargne sont :

- **La garantie de taux minimum :** Ce mécanisme garantit un niveau de revalorisation minimum des provisions mathématiques (l'épargne de l'assuré). Cette garantie est appliquée quel que soient les rendements financiers réalisés sur les placements admis en représentation de ces provisions.
Le taux garanti¹ est fixé soit annuellement, et ne peut excéder 85 % de la moyenne des taux de rendement des actifs de l'entreprise calculés pour les deux derniers exercices, soit pour une durée maximale de 8 ans sans pouvoir excéder 75 % de cette même moyenne.
- **La participation aux bénéfices :** Réglementairement, l'assureur est tenu de reverser un pourcentage minimum des rendements financiers générés par les placements admis en représentation de l'ensemble de ses provisions mathématiques. En revanche, l'assureur peut décider de procéder à une revalorisation au-delà de 100 % des rendements financiers générés. On parle alors de PB discrétionnaire. Pour ce faire, il peut favoriser un produit au détriment d'un autre, ou bien choisir de réaliser certaines plus values latentes.
Cette démarche est stratégique, elle a une incidence directe sur la façon dont l'assuré se comporte face à sa faculté de racheter le contrat.

¹ Article A132-2 et A132-3 du code des Assurances.

- **L'option de rachat :** Le contrat prévoit une faculté de rachat. L'assureur se voit ainsi exposé au risque de devoir réaliser des moins values en cas de revente d'actifs à des cours défavorables.
En effet, en cas de hausse des taux (par exemple), le niveau de revalorisation servie par l'assureur s'avère dégradé (les titres obligataires admis en représentation des engagements, plus anciens, servent alors des coupons moindres relativement aux taux du marché). L'assuré a alors la possibilité de racheter son contrat et est d'autant plus amené à le faire pour investir sur un contrat nouvellement émis ayant un potentiel de rendement futur plus attractif (les nouveaux actifs en représentation, serviront ainsi pour la part investie en obligations des taux de coupons plus élevés). La garantie des valeurs de rachat correspond ainsi à une option de vente que l'assuré détient sur la compagnie.
- **Les garanties complémentaires en cas de décès :** aussi connues sous le nom de garanties planchers, elles consistent à offrir à l'assuré, une garantie en cas de décès survenant dans un contexte financier défavorable. La garantie porte alors sur :
 - 1) Un capital minimum défini à la souscription appelée « Garantie Majorée » (Exemple : Le total des versements effectués net de chargements)
 - 2) Ou un plancher (en rapport avec l'historique des valeurs atteintes, par exemple un pourcentage du montant maximal atteint par l'épargne placée) en dessous duquel le montant garanti en cas de décès ne peut descendre, quelles que soient les évolutions ultérieures des marchés financiers.

Les risques inhérents aux options et garanties financières susmentionnées peuvent être interdépendants, ce qui réduit en réalité le nombre des fonctionnelles à traiter dans le modèle, mais les rend par là même plus complexes.

La mise en œuvre de ces modèles dans une approche par simulation fait appel à des techniques de « *Simulations dans les Simulations* » (SdS) très pénalisantes en temps de calcul, rendant le processus peu viable d'un point de vu opérationnel.

Aussi ce mémoire s'attachera à proposer et appliquer des méthodes visant à réduire le nombre de simulations de l'actif à prendre en compte dans le déroulement du modèle ALM, lui assurant ainsi des temps de calcul acceptables, sans en détériorer l'efficacité du point de vue de la convergence des résultats en moyenne et variance.

On admettra dans la suite de ce document, l'abus de langage qui consiste à faire référence à ces méthodes en parlant de méthodes de « regroupement » et/ou « d'agrégation » de l'actif.

La mise en œuvre opérationnelle de ces méthodes de regroupement consiste à définir une (des) règle(s) de simplification et/ou d'agrégation de la distribution simulée d'un actif, dans le but de constituer un ensemble réduit de trajectoires, caractéristiques de l'évolution de cet actif. Pour ce faire la démarche proposée ici est la suivante :

- ↪ sélection d'une mesure numérique associée à chaque trajectoire, comme par exemple la valeur au terme actualisée ;
- ↪ regroupement des trajectoires par "paquets" associés chacun à un quantile de la mesure précédemment définie ;
- ↪ calcul de la trajectoire moyenne dans chacun des paquets ;
- ↪ Enfin, un calcul de passif est effectué pour chacune des trajectoires moyennes ainsi déterminées.

Cette démarche fait apparaître plusieurs erreurs dans les résultats :

- ↪ en premier lieu le choix du critère, qui va conditionner la manière de regrouper les trajectoires ;
- ↪ puis une perte d'information liée à la simplification de la distribution des trajectoires ;
- ↪ enfin, une erreur d'échantillonnage : la discrétisation de la distribution effectuée se basant sur un nombre fini de trajectoire, des fluctuations d'échantillonnage subsistent à l'intérieur de chaque paquet de trajectoires.

Ce mémoire s'attache donc à proposer des méthodes de construction de ces trajectoires caractéristiques, puis à les évaluer d'un point vu fonctionnel, via des outils de mesure notamment sur le résultat. Pour ce faire, ce travail est composé de deux parties.

- I. Dans une première partie nous décrirons de manière formelle la modélisation de l'actif, ses processus de simplification, puis des indicateurs permettant de quantifier les erreurs associées. L'analyse de ces erreurs se basera notamment sur l'étude des options financières, du fait de leurs similitudes avec les options et garanties des contrats d'assurance :
 - ✓ l'option de rachat sur un produit d'épargne en euros : La garantie de la valeur de rachat (voir garantie de taux) en cas de hausse des taux et donc de dévalorisation des produits obligataires est assimilé à une option de vente détenue par l'assuré sur la compagnie ;
 - ✓ la garantie plancher, en cas de décès, sur un produit d'épargne en UC est également assimilable à une option de vente détenue par l'assuré.

Notons que dans la même optique de contournement de cette difficulté pratique à mettre en œuvre des approches SdS dans le cadre du calcul du capital économique, plusieurs travaux ont déjà été réalisés. On pense notamment à la méthode des « *Simulations dans les Simulations (SdS) accélérées*² », reposant sur le principe de l'échantillonnage d'importance et qui est très largement utilisée. Il y a également, les techniques de réplcation de portefeuilles³. Ce sont cependant des méthodes conçues pour le calcul des quantiles du surplus⁴ actif/passif, dans le cadre de la détermination du « *capital économique* »⁵. Elles ne sont donc pas, a priori, adaptées aux problématiques de calcul de la provision dans une logique « *best estimate* »⁶, qui sont l'objet de ce mémoire.

De fait, les trajectoires déterminées par les méthodes d'agrégation d'actif, sont représentatives de l'ensemble de la distribution d'un actif simulé. Elles offrent donc un champ d'application plus vaste que les autres méthodes type « *SdS accélérées* », qui elle est contraintes, a priori, par la spécificité du calcul du « *SRC* », se focalisant uniquement sur les queues de distribution à horizon d'une année. On peut ainsi, aisément envisager la mise en œuvre des méthodes d'agrégation d'actif, dans le contexte d'un modèle interne, en complément de la méthode « *SdS accélérées* », au delà des projections d'actif à horizon d'une année, traitées par celle-ci.

- II. Dans une seconde partie seront utilisés les résultats de la partie I, pour une mise en œuvre du modèle standard au sens du QIS de la directive Solvabilité II, sur un portefeuille constitué de produits d'épargne en Euro, avec taux garantis.

On s'attache, en particulier, à déterminer le niveau de finesse nécessaire pour la discrétisation à retenir en fonction de l'erreur relative acceptée sur le résultat, à un niveau de confiance donné.

² LOISEL et DEVINEAU [2009]

³ REVELEN [2009] et SCHRAGER [2008]

⁴ Approche sélective des simulations, ne retenant que les scénarii les plus adverses en termes de risque.

⁵ Dans le dispositif Solvabilité II, le capital économique correspond au montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie pour faire face à une ruine économique à horizon 1 an et au niveau de confiance 99,5%.

⁶ Cf-section 2.3 Partie II

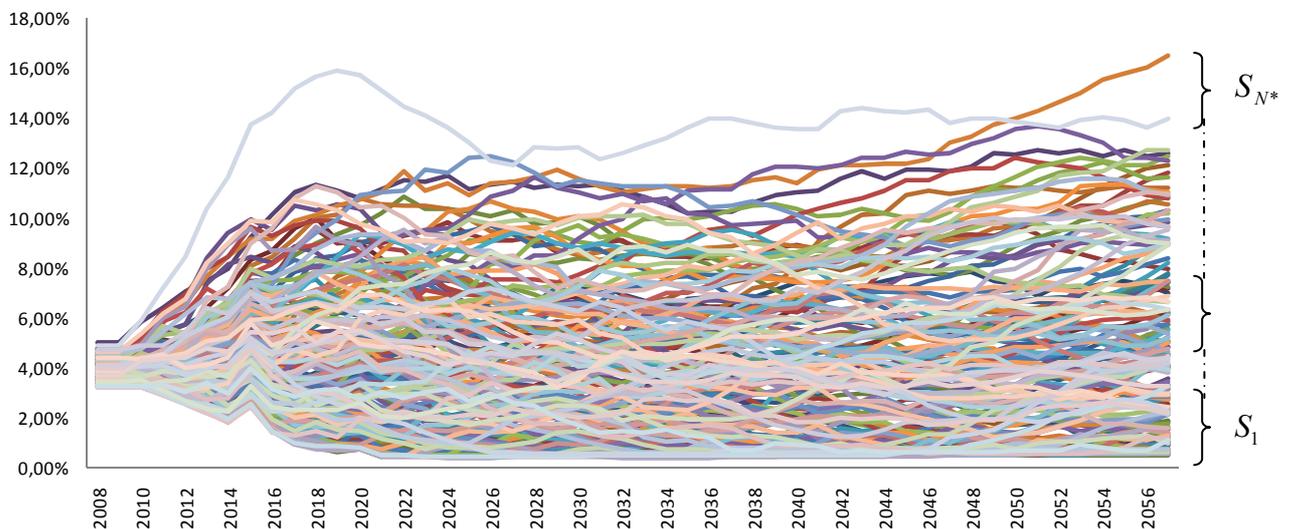
**PARTIE I :
LA MODELISATION STOCHASTIQUE CONTRAINTE**

1. OBJECTIF

L'objet de cette première partie est de proposer des méthodes de simulations avancées permettant d'optimiser les temps ainsi que les coûts de traitements dans le cadre de projections actifs/passifs dynamiques, par simulation.

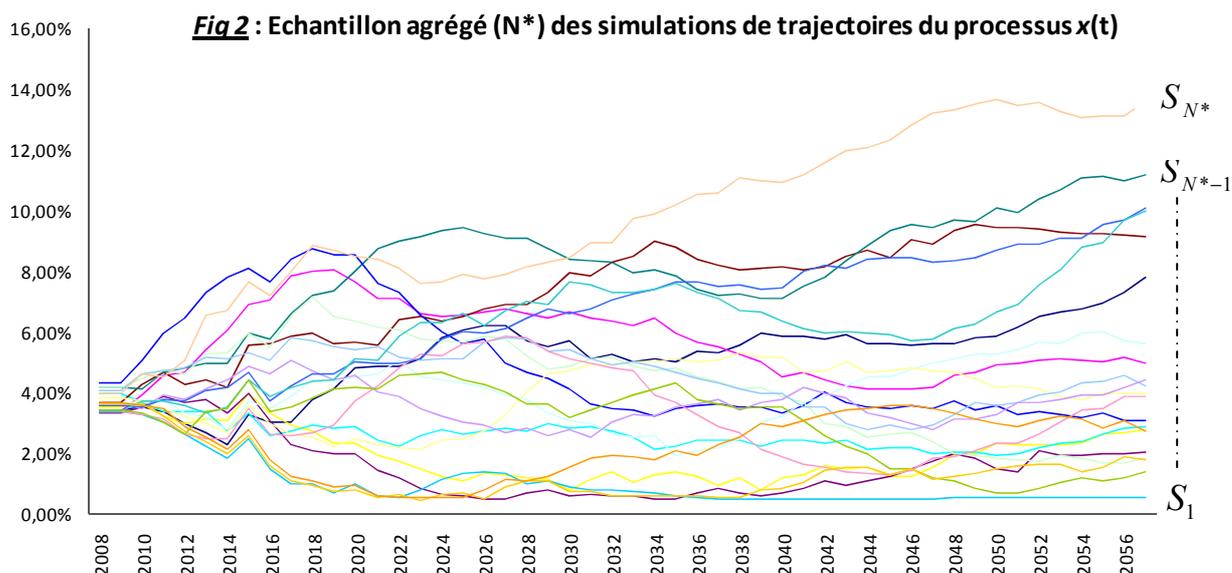
L'approche retenue consiste à remplacer un faisceau de N (Fig1) trajectoires simulées, pour un processus d'actif X_t , par un ensemble de trajectoires simplifié / agrégé (Fig2), de taille $N^* < N$, de sorte que N^* soit le niveau maximum d'agrégation en-deçà duquel, le biais d'estimation (de discrétisation) et la vitesse de convergence du modèle seront rejetés, jugés inacceptables. Ceci définit le principe général des méthodes d'« **agrégation** de l'actif ».

Fig 1 : Echantillon complet (N) des simulations de trajectoires du processus $x(t)$



Considérons, la figure 1 qui représente un échantillon complet de trajectoires d'actif ($N=10000$), simulées. L'approche présentée dans cette partie se déroule en trois étapes :

1. La sélection d'une mesure numérique de référence, associée à chaque trajectoire, comme par exemple ici la valeur au terme actualisée ;
2. Le regroupement des trajectoires par "paquets" S_j , $1 \leq j \leq N^*$, associés chacun à un quantile de la mesure précédemment définie, N^* étant ici le nombre de quantiles considérés ;
3. La détermination d'une trajectoire représentative pour chacun des paquets selon un critère appliqué à la mesure numérique sélectionnée en 1.



La figure 2 représente l'ensemble des trajectoires (ici $N^*=21$) obtenues par « agrégation », considérées comme étant représentatives de la distribution de l'échantillon complet présenté en (Fig.1).

Ainsi sous réserve que le calibrage des 3 étapes susmentionnées soit correctement réalisé, il sera envisageable d'appliquer les méthodes « d'agrégation d'actif » à tout travail de modélisation stochastique que ce soit pour calculer le prix d'un produit dérivé (cf. Partie I) ou bien encore, la valeur d'une société d'assurance, dès lors qu'une approche par simulation sera mise en œuvre.

Aussi les modèles d'actif présentés en première partie de ce document seront déroulés dans leur exhaustivité en partie II, dans le cadre de la réalisation des travaux du QIS⁷ de la directive Solvabilité 2⁸ afin d'étudier notamment la sensibilité du « Best Estimate » aux méthodes d'agrégation d'actif.

Ces modèles d'actifs sont définis par des processus stochastiques (solution d'équations différentielles stochastiques) et sont implémentés en pratiques selon 3 étapes clés :

- ↳ l'estimation des paramètres des modèles retenus,
- ↳ la discrétisation des processus stochastiques continus,
- ↳ la génération de nombres aléatoires pour des simulations, les résultats analytiques étant rarement accessibles.

Les échantillons de trajectoires obtenus respectivement pour chaque modèle d'actif déroulé (Taux, Actions..etc) seront alors simplifiés par ces méthode d'« agrégation de d'actif » avant d'être exploités pour le QIS (BE, SCR (modèle standard)...).

⁷ QIS : Quantitative Impact Studies : traduction concrète des éléments de la réforme Solvabilité2 (cf. p 73)

⁸ Solvabilité 2: réforme réglementaire européenne ayant pour objectif de mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurances et de réassurance avec les risques qu'elles encourent dans leur activité (cf. p 68)

2. MODELISATION DE L'ACTIF

Traditionnellement, un portefeuille d'actifs d'assurance, i.e. mis en contrepartie des engagements d'une société d'assurance française, se compose des quatre classes d'actifs principales suivantes : *obligations*, *actions*, les *actifs immobiliers* et le *monétaire*.

Le présent chapitre décrit la modélisation retenue pour chacune de ces quatre classes d'actifs.

Pour projeter l'actif monétaire et les obligations, la démarche consiste à simuler des courbes de taux. Dans ce contexte la méthode d'Heath, Jarrow et Morton [1990] (dite « HJM ») permet de modéliser la structure par terme de taux d'intérêt du point de vue de la théorie d'arbitrage.

Le modèle retenu pour projeter la courbe des taux est donc le modèle de Vasicek généralisé pris dans le cadre HJM, que l'on notera : Vasicek généralisé en termes HJM.

Concernant les actions et l'immobilier, nous avons retenu le modèle de Black & Scholes avec présence d'une corrélation avec les taux.

D'une manière générale, on modélise l'évolution d'un titre pour les classes Actions et Immobilier, lesquels permettront de définir des taux d'évolution à chaque période s'appliquant à la classe entière (à toutes les lignes d'actifs présentes en données). Les évolutions des obligations et les taux de rémunération du monétaire sont calculés à partir de la courbe des taux simulés selon le modèle de Vasicek généralisé en termes HJM.

2.1. MODELISATION DES ACTIONS

2.1.1 NOTATIONS

- S_t le cours de l'action à la date t et S_0 le cours initial ;
- q_A le taux continu de dividende (constant) ;
- μ_A le rendement continu espéré de l'action ;
- σ_A la volatilité du cours ;
- z_A le mouvement brownien standard sous la probabilité historique.

2.1.2 PRESENTATION DU MODELE

Black et Scholes modélisent le cours des actions dans l'univers historique par la dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_A dt + \sigma_A dz_A.$$

Dans l'univers risque-neutre, cette dynamique devient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) - q_A) dt + \sigma_A d\hat{z}_A,$$

avec,

$$d\hat{z}_A = dz_A + \frac{\mu_A - r(t)}{\sigma_A} dt,$$

et $r(t)$ le taux sans risque.

Le modèle intègre l'hypothèse que le cours des actions est corrélé avec l'évolution des taux d'intérêts. Dès lors :

$$d\hat{z} \times d\hat{z}_A = \rho_A dt,$$

où \hat{z} est le mouvement brownien qui régit l'évolution des taux d'intérêt dans l'univers risque neutre; ρ_A le coefficient de corrélation.

Il vient⁹ :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r(t) - q_A) dt + \sigma_A \rho_A d\hat{z} + \sigma_A \sqrt{1 - \rho_A^2} d\hat{z}_A,$$

où \hat{z} est un mouvement brownien indépendant de \hat{z}_A .

Par le lemme d'Îtô, on obtient :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(r(u) - q_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) du + \sigma_A \rho_A d\hat{z} + \sigma_A \sqrt{1 - \rho_A^2} d\hat{z}_A \right\}.$$

⁹ Décomposition de Choleski

2.2. MODELISATION DE LA COURBE DES TAUX D'INTERETS

2.2.1 INTRODUCTION A LA MODELISATION DES TAUX A TERME

2.2.1.1 TAUX IMPLICITE D'OBLIGATION

Le calcul du prix d'une obligation zéro-coupon s'effectue de la manière suivante :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T) \times (T-t)}$$

où :

- ❖ t : représente la date d'achat
- ❖ T : représente la date d'échéance du zéro coupon
- ❖ $R(t, T)$: représente le taux implicite de l'obligation, qui peut se calculer de la façon suivante :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{(T-t)}$$

2.2.1.2 TAUX D'INTERET INSTANTANE

Le taux d'intérêt instantané est obtenu en prenant la limite du taux implicite pris sur un intervalle de temps infinitésimal.

$$R(t, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = r_t$$

Où r_t est en fait la dérivée de la relation ci-dessus par rapport à $t + \Delta t = T$

$$r_t = -\frac{\partial}{\partial t} \ln P(t, t)$$

2.2.1.3 TAUX FORWARD

On note x le prix *forward* d'une obligation zéro coupon qui est négociée en T_1 , à échéance T_2 ($T_2 > T_1$). Pour créer un contrat *forward* de ce type, il suffit d'acheter une obligation d'échéance T_2 et de vendre x obligations d'échéance T_1 , de sorte que les prix d'achat et de vente des obligations s'annulent.

$$\text{Ainsi : } P(t, T_2) - xP(t, T_1) = 0 \Rightarrow x = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)}$$

$$\text{Ce qui donne pour le taux forward : } e^{-f_1 * (T_2 - T_1)} = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \Rightarrow f_1 = \frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

De même, en posant $T_1 = T$ et $T_2 = T + \Delta t$, où Δt est un accroissement infinitésimal. On obtient l'expression d'une dérivée (en faisant tendre Δt vers 0) correspondant à l'expression du taux *forward* d'un emprunt instantané :

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T) \quad f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$$

On remarque que pour $T = t$, on obtient le taux courant instantané r_t trouvé précédemment,

$$f(t, t) = r_t \quad (1)$$

Avec $f(t, T)$ connu, la possibilité d'en déduire $R(t, T)$ ainsi que $P(t, T)$ le prix de l'obligation via :

$$\begin{cases} R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} \\ f(t, T) = R(t + T) + (T - t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T} \end{cases}$$

Réciproquement, le prix de l'obligation peut être déterminé par le taux *forward* et/ou le rendement à échéance selon les deux égalités suivantes :

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$$

$$P(t, T) = e^{-(T-t) * R(T-t)}$$

- ❖ Par conséquent, au vu des relations précédentes, il suffira pour construire de la courbe des rendements à échéance, de modéliser une seule des trois composantes susmentionnées et les deux autres en seront déduites directement.

2.2.2 PRESENTATION DU MODELE

Les modèles d'absence d'opportunité d'arbitrage, par opposition aux modèles d'équilibre, utilisent la structure initiale des taux (ou prix) observables sur le marché comme données exogène et permettent d'éviter les situations d'arbitrage. Parmi les modèles les plus anciens, on trouve la classe de modèles Heath Jarrow Morton (1992) qui modélisent la dynamique des taux *forward* instantanés et que nous présentons au paragraphe suivant, avant d'étudier le cas particulier du modèle de Vasicek/Hull & White retenu dans le cadre applicatif de ce mémoire.

2.2.2.1 LA DEMARCHE HEATH, JARROW ET MORTON

Plutôt que de modéliser la dynamique des prix des titres zéro-coupons ou celle du taux court instantané, HJM ont modélisé la dynamique des taux *forward* instantanés dans un cadre très général. Ils ont montré à quelles restrictions étaient soumis les drifts des processus régissant ces taux (en probabilité risque neutre) pour que la gamme des taux zéro-coupons (ZC) soit exempte d'opportunité d'arbitrage.

HJM supposent que la dynamique du taux *forward* instantané est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t,$$

où W est un processus de Wiener standard sous la probabilité historique.

L'équation différentielle est complétée par la donnée de la valeur initiale $f(0, T) = f(0, T)^*$ où $f(0, T)^*$ représente le taux *forward* instantané observable sur le marché.

D'autre part, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage impose une condition sur $\mu(.,.)$ et sur $\sigma(.,.)$. Plus précisément, si $\lambda(t, T)$ est le processus vérifiant la relation :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \left[\int_t^T \sigma(t, s) ds - \lambda(t, T) \right],$$

Alors la condition d'absence d'arbitrage s'exprime par l'indépendance de $\lambda(t, T)$ vis à vis de T :

$$\lambda(t, T) = \lambda(t),$$

Mais la complexité d'estimation de la prime de risque $\lambda(t)$ à partir du marché des titres obligataires pose problème. Pour le contourner, HJM propose de faire appel à la mesure risque neutre \mathbf{Q} . Sous cette mesure, l'évaluation du prix d'une obligation ne fait en effet pas intervenir $\lambda(t)$.

Ainsi, la dynamique du taux *forward* instantané, sous la probabilité risque neutre \mathbf{Q} , est donnée par :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t.$$

L'hypothèse d'absence d'arbitrage impose également une relation entre $\mu(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot, \cdot)$, néanmoins celle-ci ne fait plus apparaître la prime de risque donnant la relation :

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds .$$

Ainsi, pour déterminer la valeur d'une obligation sans risque de défaut, il suffit de suivre les différentes étapes détaillées ci-après :

- ❖ on observe sur le marché la courbe des taux *forward* instantanés $f^*(0, T)$;
- ❖ on choisit un processus de volatilité $\sigma(t, T)$ via la relation donnée quelques lignes plus haut et on en déduit la valeur de $\mu(t, T)$;
- ❖ on détermine le taux *forward* instantané dans l'univers risque neutre :

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) d\tilde{W}_s ,$$

avec $f(0, T) = f^*(0, T)$.

- ❖ on déduit le taux court terme à partir du taux *forward* instantané via l'égalité (1) section (2.2.1.3), ce qui donne :

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \mu(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) d\tilde{W}_s .$$

Finalement, l'expression du prix d'une obligation sans coupon et sans risque de défaut s'écrit comme suit :

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(0, u) du - \int_0^t \int_t^T \mu(s, u) du + \int_0^t \int_t^T \sigma(s, u) du d\tilde{W}_s \right\} ,$$

et donc celle du taux correspondant $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$.

Le grand avantage de la méthodologie HJM est d'introduire comme paramètre de départ la courbe des taux *forward* instantanés au temps 0.

2.2.2.2 LE MODELE DE VASICEK GENERALISE OU MODELE DE HULL & WHITE

Le modèle de Vasicek généralisé /Hull White est un cas particulier de HJM dans lequel le processus de volatilité vérifie la relation suivante, où k est une constante positive :

$$\sigma(t, T) = \sigma e^{-k(T-t)}.$$

Cette forme s'interprète comme suit : plus on se rapproche de l'échéance, plus la volatilité diminue.

Le processus de dérive se déduit de l'expression de $\sigma(t, T)$:

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, T) ds = \frac{\sigma^2}{k} \left(e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)} \right).$$

On retrouve ensuite l'équation stochastique *forward* instantanée :

$$df(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} \left(e^{-k(T-t)} - e^{-2k(T-t)} \right) dt + \sigma e^{-k(T-t)} d\tilde{W}_t.$$

L'intégration de cette équation donne :

$$f(t, T) = f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kT}) + \sigma \int_0^t e^{-k(T-s)} d\tilde{W}_s$$

On déduit ensuite la valeur du taux court terme à partir de la valeur du taux forward :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2 + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} d\tilde{W}_s.$$

La relation liant le prix d'un zéro-coupon et les taux forward :

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\};$$

permet d'aboutir à la valeur de l'obligation sans coupon :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left[\left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \right) (f(0, t) - r(t)) - \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2\lambda t}) (1 - e^{-\lambda(T-t)})^2}{4\lambda^3} \right],$$

et enfin au taux zéro-coupon :

$$R(t, T) = R^f(0, t, T) - \left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} \right) (f(0, t) - r(t)) + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2\lambda t}) (1 - e^{-\lambda(T-t)})^2}{4\lambda^3 (T-t)}.$$

Dans ce modèle, $f(t, T)$ possède une distribution normale d'espérance

$f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-k(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kT})^2$ et de variance $\sigma^2 \int_0^t e^{-2k(T-s)} ds$, $r(t)$ possède

une distribution normale d'espérance $f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2} (1 - e^{-kt})^2$ et de variance $\sigma^2 \int_0^t e^{-2k(t-s)} ds$

$P(t, T)$ possède une distribution log normale, $R(t, T)$ une distribution normale¹⁰ ; $f(0, T)$ et $P(0, T)$ sont directement observés sur le marché.

2.2.3 UTILISATION DU MODELE

Le modèle HJM présenté ci-dessus permet donc de simuler des scénarii de courbes de taux d'intérêts en s'appuyant sur une courbe de taux comme paramètre, qu'il déforme.

Incidentement, dans le cadre de ce mémoire, il s'agit donc de déformer la courbe des taux préconisée par les *Technical Specifications QIS4* : la courbe des taux swaps.

2.3. MODELISATION DE L'IMMOBILIER

2.3.1 NOTATION

- ❖ I_t le cours de l'action à la date t et I_0 le cours initial ;
- ❖ q_I le taux continu de dividende (constant) ;
- ❖ μ_I le rendement continu espéré de l'action ;
- ❖ σ_I la volatilité du cours.

2.3.2 PRESENTATION DU MODELE

Il s'agit du même modèle que pour les actions, soit :

$$I_t = I_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(r(u) - q_I - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) du + \sigma_I \rho_I d\hat{z} + \sigma_I \sqrt{1 - \rho_I^2} d\hat{z}_I \right\}$$

¹⁰ A ce titre, ce modèle peut conduire à des taux négatifs. Cependant, un bon calibrage permet de remédier à ce problème (cf. **Annexes infra**).

2.4. IMPLEMENTATION DES MODELES PAR SIMULATION

2.4.1 PARAMETRES DES MODELES

Le tableau suivant recense les différents paramètres nécessaires à l'alimentation de l'algorithme sur la période.

Variable	Description	Format
T	Horizon de simulation, en année	Entier
N	Nombre de simulations	Entier
$R(0,s)$	Courbe des taux en base annuelle, en 0, de maturité $s > 0$; s en année	Tableau de réels
$f(0,s)$	Taux forward instantané, $s > 0$, s en année	Tableau de réels
k	Paramètre de diffusion de la volatilité	Réel positif
σ	Paramètre d'amplitude de la volatilité	Réel positif
r_{sr}	Taux sans risque continu espéré sans risque	Tableau de réels

Variable	Description	Format
q_A	Taux de dividendes continu des actions	Réel positif ou nul
σ_A	Volatilité des actions	Réel positif, dans [0;1]
ρ_A	Coefficient de corrélation linéaire avec les taux	Réel positif, dans [-1;1]
q_I	Taux de dividendes continu de l'immobilier	Réel positif ou nul
σ_I	Volatilité de l'immobilier	Réel positif, dans [0;1]
ρ_I	Coefficient de corrélation linéaire avec les taux	Réel positif, dans [-1;1]

Les paramètres k et σ du modèle de taux sont délicats à calibrer.

Il convient également de noter que le modèle de taux, pour générer à chaque période une courbe des taux intégrant un maturité maximale M années, doit entreprendre des simulations à horizon $T+M+1$ ¹¹.

La structure par termes des taux d'intérêts en $t=0$, $\{R(0,s):s \in \square, 1 \leq s \leq (T+M)+1\}$ ¹², sera exprimée en base annuelle. En pratique, ce sera un tableau unidimensionnel à $T+M+1$ ligne.

Notons que $R(0,s)$ représente ainsi, en base annuelle le taux aujourd'hui pour une opération durant s année.

De même les taux forward instantanés sont obtenus par l'approximation :

$$f(0,s) = -\frac{\ln(P(0,s^+)) - \ln(P(0,s))}{s^+ - s},$$

où s^+ désigne le premier instant suivant s où l'on dispose de l'information sur le prix du zéro-coupon en 0. Il est important de noter que s est exprimé en années. Cette approximation sera d'autant meilleure que $s^+ - s$ est petit.

¹¹ En effet, le modèle génère renvoie les $\{R(t,s)\}_{s=1..T, t < s}$. Pour disposer des taux de maturité allant de 1 à M ans, il faut donc générer les $\{R(t,s)\}_{s=1..T+M+1, t < s}$.

2.4.2 ALGORITHME DE CALCUL

2.4.2.1 SIMULATION DE LOI UNIFORME

La première étape pour mener à bien des simulations est la génération de nombres aléatoires selon une loi uniforme du fait notamment des méthodes de type "inversion de la fonction de répartition".

Ce mémoire n'ayant pas pour objet premier l'aspect purement informatique des simulations stochastiques, nous retenons comme générateur de nombres aléatoires celui disponible dans le logiciel IMAGE. Il s'agit en fait du générateur fourni avec JAVA, que nous considérons *a priori* comme satisfaisant.

2.4.2.2 SIMULATION DE LOI NORMALE

Nous retenons ici l'algorithme de Moro¹³. En effet, bien que cet algorithme soit basé sur une approximation de l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, celui s'avère plus efficace en termes de corrélations résiduelles entre les valeurs simulées par rapport à des méthodes exactes telles que la célèbre méthode de Box Muller.

Loi Normale

La fonction de répartition (f.r.) de la loi normale centrée réduite, est donnée par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

En l'inversant, un échantillon d'une loi normale centrée réduite est obtenu à partir d'un échantillon d'une loi uniforme puisque si $F_X(x)$ la f.r. (supposée continue) d'une variable aléatoire (v.a.) X et si G est son inverse et U une v.a. de loi $U([0,1])$, alors, comme $F_{G(U)}(x) = P[G(U) \leq x] = P[U \leq F_X(x)] = F_X(x)$, $G(U)$ suit la même loi que X .

Algorithme de Moro

Il consiste à approcher l'inverse de Φ .

Soit y la valeur de loi uniforme générée préalablement. On a dès lors $y = \Phi(x)$.

- ❖ On pose $z = y - 0,5$
- ❖ Si $|z| \leq 0,42$ alors x est approchée par :

$$x = z \frac{\sum_{i=0}^3 a_i z^{2i}}{4 + \sum_{i=0}^3 b_i z^{2i}} ;$$

¹³ Cf. Annexes **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

❖ Dans le cas contraire :

$$x = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \varepsilon \frac{c_0}{2}, \text{ avec } \varepsilon \text{ le signe de } z, \text{ et}$$

$$t = k_1 \left\{ 2 \ln \left(-\ln \left(\frac{1}{2} - |z| \right) \right) - k_2 \right\},$$

La fonction $f(t)$ pouvant être approchée par l’algorithme suivant :

❖ Soit $d_{10} = 0$ et $d_9 = 0$.

❖ Soient d_i les réels déterminés par la relation récursive :

$$d_i = 2td_{i+1} - d_{i+2} + c_j \text{ pour } i = 8, 7, \dots, 1.$$

Alors on a $f(t) = td_1 - d_2 + \frac{c_0}{2}$.

Les valeurs a_i, b_i, c_i et k_i sont les suivantes :

	<i>A</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>K</i>
0	2.50662823884	1	7,71088707054879	0,417988642492643
1	-18.61500062529	-8.4735109309	2.7772013533685169	4.2454686881376569
2	41.39119773534	23.08336743743	0.3614964129261002	
3	-25.44106049637	-21.06224101826	0.0373418233434554	
4		3.13082909833	2.8297143036967 .10 ⁻³	
5			0.1625716917922 .10 ⁻³	
6			8.0173304740 .10 ⁻⁶	
7			0.3840919865 .10 ⁻⁶	
8			0.0129707170 .10 ⁻⁶	

2.4.2.3 SIMULATION DE BROWNIENS

L’évolution d’un mouvement brownien standard aux dates de discrétisations (les t_i) s’effectue simplement par la méthode itérative :

$$w_i = w_{i-1} + z_i \sqrt{t_i - t_{i-1}} = w_{i-1} + z_i \sqrt{\delta}, i \geq 1,$$

où z_i est une réalisation d’une $N(0,1) - (z_i)_i$ indépendantes – simulée selon la méthode de l’inverse de Moro, et avec les conditions initiales $w_0 = 0, t_0 = 0$ et $t_i = t_{i-1} + \delta$.

Trois browniens indépendants sont simulés (à l’aide de trois $N(0,1)$ indépendantes à chaque t_i). Nous noterons $(B_t^A), (B_t^I)$ et (B_t) leurs réalisations à l’instant t_i – ils désignent respectivement les browniens associés aux Actions, à l’Immobilier et les taux.

2.4.2.4 SIMULATION DES DIFFERENTS PROCESSUS AFFERENTS AUX MODELES

Calculs des $r(t_i)$

$$r(t_i) = f(0, t_i) + \frac{\sigma^2}{2k^2} \left(1 - e^{-kt_i}\right)^2 + \sqrt{\sigma^2 \int_0^{t_i} e^{-2k(t_i-s)} ds} \frac{w_i}{\sqrt{t_i}},$$

soit,

$$r(t_i) = f(0, t_i) + \frac{\sigma^2}{2k^2} \left(1 - e^{-kt_i}\right)^2 + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2k} \left(1 - e^{-2kt_i}\right)} \frac{w_i}{\sqrt{t_i}},$$

où w_i désigne la valeur simulée du mouvement brownien standard à la date t_i .

Construction des courbes des taux futures $R(t_i, s)$

Pour $s = 1 \dots (T+M) \frac{1}{\delta} + 1$:

$$R(t_i, s) = R^f(0, t_i, s) - \left(\frac{1 - e^{-\lambda(s-t_i)}}{\lambda(s-t_i)} \right) (f(0, t_i) - r(t_i)) + \frac{\sigma^2 \left(1 - e^{-2\lambda t_i}\right) \left(1 - e^{-\lambda(s-t_i)}\right)^2}{4\lambda^3 (s-t_i)},$$

soit :

$$R(t_i, s) = -\frac{-s \cdot R(0, s) + t_i \cdot R(0, t_i)}{s - t_i} - \left(\frac{1 - e^{-\lambda(s-t_i)}}{\lambda(s-t_i)} \right) (f(0, t_i) - r(t_i)) + \frac{\sigma^2 \left(1 - e^{-2\lambda t_i}\right) \left(1 - e^{-\lambda(s-t_i)}\right)^2}{4\lambda^3 (s-t_i)}$$

Il est à noter que les taux obtenus $R(t_i, s)$ sont en base continue. On le transcrit en base annuelle, en s'assurant d'obtenir un taux positif, soit :

$$R(t_i, s) = \text{Max} \left(\text{Exp} \left(R(t_i, s) \right) - 1; 0 \right)$$

Construction des scénarii de taux monétaires

Notons m_i le taux de rémunération du monétaire à la date t_i . On choisit de le prendre égal au taux instantané, soit :

$$m_i = \text{Max} \left(\text{Exp} \left(r(t_i) \right) - 1; 0 \right).$$

Ici, en cas de taux négatifs, on choisit de garder un taux nul.

Calculs des S_t et I_t

On prend $S_0 = 100$ et $I_0 = 100$. On a :

$$S_t = S_{t-1} \times \text{Exp} \left[\left(r_{sr}(t_i) - q_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) (t_i - t_{i-1}) + \sigma_A \left(\rho_A (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \sqrt{1 - \rho_A^2} (B_{t_i}^A - B_{t_{i-1}}^A) \right) \right];$$

de même, pour le cours de l'immobilier :

$$I_t = I_{t-1} \times \text{Exp} \left[\left(r_{sr}(t_i) - q_I - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) (t_i - t_{i-1}) + \sigma_I \left(\rho_I (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \sqrt{1 - \rho_I^2} (B_{t_i}^I - B_{t_{i-1}}^I) \right) \right];$$

où B_{t_i} , $B_{t_i}^A$ et $B_{t_i}^I$ désignent respectivement les valeurs simulées des browniens régissant les dynamiques des taux, de l'action et de l'immobilier.

De ces valeurs, on déduit à chaque période, un taux d'évolution par :

$$\Delta_{t_i}^A = \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} - 1, \text{ et } \Delta_{t_i}^I = \frac{I_{t_i}}{I_{t_{i-1}}} - 1.$$

Par la suite nous supposerons plus généralement que les taux de dividendes et de loyers dépendent de l'année de projection k .

Variable	Description	Format
$q_A(k)$	Taux de dividendes continu des actions	Tableau de Réel positif ou nul
$q_I(k)$	Taux de dividendes continu de l'immobilier	Tableau de Réel positif ou nul

3. METHODES DE REGROUPEMENT DES TRAJECTOIRES D'ACTIF

3.1. DEFINITION

On considère la simulation d'un processus $S(t)$ à valeur dans IR^+ (ou IR) observé sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Comme évoqué précédemment, pour des raisons de temps de calcul trop important dû au rapprochement actif/passif tel qu'il est envisagé dans le cadre Solvabilité II¹⁴, nous allons remplacer le faisceau de trajectoires de ce processus par un faisceau simplifié de trajectoires représentatives.

Pour ce faire, nous nous proposons dans cette première partie d'étudier des méthodes inspirées par la théorie de l'échantillonnage et plus particulièrement « l'échantillonnage stratifié »¹⁵ dont le principe de base repose sur la partition d'un échantillon hétérogène en plusieurs strates indépendantes et homogènes, puis d'extraire de chacune d'elles un échantillon représentatif de la statistique intra-strates, de tel sorte qu'une combinaison de l'ensemble des échantillons représentatifs soit caractéristique de la statistique globale.

Sur cette base, les méthodes d'« agrégation d'actif », introduites ici, qui visent à passer d'un faisceau de N simulations du processus $S(t)$ à P simulations représentatives de ces réalisations ($P < N$) s'articulent selon deux grandes étapes :

1. La première étape consiste à établir une partition de IR^+ (ou IR), en P sous-ensembles homogènes du point de vue de la variable étudiée, $S(t)$ (à valeur dans IR^+ (ou IR)), de sorte que les réalisations de $S(t)$ soient équidistribuées sur les P sous-ensembles constitués, par rapport à la densité de probabilité du processus $S(t)$.

Pour ce faire, deux approches seront retenues :

- ↳ Regroupement « R1 » : Les sous-ensembles de trajectoires sont établis à partir de la variable $S(T)$. En d'autres termes les sous-groupes correspondent à une partition de l'ensemble des valeurs finales de l'actif, notée $IR^+(T)$, quelque soit sa trajectoire antérieure à (T) .
- ↳ Regroupement « R2 » : Les sous-ensembles de trajectoires sont établies à partir de la variable $S(t) \forall t$. Ainsi, pour chaque discrétisation de temps (t) considérée, il y a une partition de l'ensemble des valeurs de l'actif, prises à cet instant, noté $IR^+(t)$.

¹⁴ Cf. Partie II

¹⁵ R.Portait & P.Poncet, « Finance de Marché : Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques »

2. La seconde étape a pour objectif d'extraire de chacun des P sous-ensembles déterminés, une trajectoire représentative de la distribution observée dans ce sous ensemble. Aussi, pour y parvenir, deux méthodes seront envisagées :

↳ Méthode « type1 » : Chaque sous-groupe (strate), composé de n/p trajectoires est représenté (remplacé) par sa trajectoire moyenne, propre.

↳ Méthode « type2 » : Chaque sous-groupe (strate) de trajectoires de $S(t)$, est représenté (remplacé) par sa trajectoire médiane.

Notations :

Le processus $S(t)$ est à valeur dans IR^+ sur l'intervalle de temps $[0, T]$;

❖ Approche « R1 » : la partition de IR^+ ou $IR^+(T)$ est noté $\{[s_{j-1}, s_j], 1 \leq j \leq p\}$, on pose alors:

▪ Méthode « type1 » : $\xi_j(t) = \mathbf{E}(S(t) | S(T) \in [s_{j-1}, s_j])$ la trajectoire (1)
représentative du sous-ensemble $\Omega_j = \{i | S_i(T) \in [s_{j-1}, s_j]\}$;

▪ Méthode « type2 » : $\lambda_j(t) = (S_j(t) | S_j(T) = q_{50\%}(S(T) 1_{[s_{j-1}, s_j]}))$ la (2)
trajectoire représentative du sous-ensemble $\Omega_j = \{i | S_i(T) \in [s_{j-1}, s_j]\}$;

❖ Approche « R2 » : la partition de IR^+ ou $IR^+(t)$ est noté $M\{[s_{j-1}(t), s_j(t)], 1 \leq j \leq p\}$, on pose :

▪ Méthode « type1 » : $\hat{\xi}_j(t) = \mathbf{E}(S(t) | S(t) \in [s_{j-1}(t), s_j(t)])$; (3)

▪ Méthode « type2 » : $\hat{\lambda}_j(t) = q_{50\%}(S(t) | S(t) \in [s_{j-1}(t), s_j(t)])$ (4)

➤ Le processus $S(t)$ sera donc défini par ses P réalisations (trajectoires) notées respectivement, selon la méthode considérée : $\xi_j(t)$, $\lambda_j(t)$, $\hat{\xi}_j(t)$ ou $\hat{\lambda}_j(t)$, ($1 \leq j \leq P$), chacune des réalisations étant pondérée par la probabilité : $\pi_j = \mathbf{Pr}(S(T) \in [s_{j-1}, s_j])$ dans le cas de l'approche « R1 » et $\pi_{j,i} = S(t_i) \in [s_{j-1}(t_i), s_j(t_i)]$ pour l'approche « R2 ».

➤ En d'autres termes on effectue P regroupements de trajectoires en fonction des quantiles de la distribution de : la valeur au terme $S(T)$ (Approche « R1 ») ou la valeur à tout instant (t) , $S(t)$ (Approche « R2 »). En pratique chacun des

regroupements comprendra le même nombre de trajectoires (N/P), assurant ainsi la contrainte d'équidistribution susmentionnée, de telle sorte que : $\pi_{j,i} = \pi_j = \pi = \frac{1}{P}$.

3.2. PROCESSUS D'AGREGATION ET APPROXIMATIONS DISCRETES

3.2.1 AGREGATION « TYPE1_R1 »

Le critère d'agrégation dit « type1 », retenu dans cette méthode est l'espérance du processus $S(t)$ restreint au sous-ensemble de IR^+ (ou IR) considéré. Autrement dit, il s'agit de la moyenne, à chaque instant $t = \{1, \dots, T\}$, des trajectoires de $S(t)$ appartenant à une même partition de IR^+ (ou IR) réalisées selon $S(T)$ (principe « R1 »).

En pratique : on simule les trajectoires de $S(t)$, notées $S_i(t)$, $1 \leq i \leq N$, puis on détermine P sous-groupes de trajectoires selon les réalisations simulées de la variable $S(T)$, à valeur dans IR^+ (ou IR) (on parlera également de partition de IR^+ (ou IR)). Enfin le critère d'agrégation $\xi_j(t) = \mathbf{E}(S(t) | S(T) \in [s_{j-1}, s_j])$ (cf. 3.1.) est approximé par la forme discrétisée suivante :

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \text{ avec } \Omega_j = \{i / S_i(T) \in [s_{j-1}, s_j]\} \text{ et } N_j = |\Omega_j| \quad (5)$$

3.2.2 AGREGATION « TYPE2_R1 »

Le critère d'agrégation dit « type2 », retenu dans cette méthode est un critère de sélection, à savoir : la trajectoire notée $S^*(t)$, dont la valeur en (T) , correspond à la médiane des valeurs de $S(T)$, pour une même partition donnée, de IR^+ (réalisée sur $S(T)$).

En pratique : idem, avec pour approximation discrétisée du critère d'agrégation

$\lambda_j(t) = (S_j^*(t) | S_j(T) = q_{50\%}(S(T) | S(T) \in [s_{j-1}, s_j]))$, la forme suivante :

$$\tilde{\lambda}_j(t) = S_j^*(t) \text{ tel que } | S_j^*(T) - q_{0,5}(S_i(T), i \in \Omega_j) | = \inf_{i \in \Omega_j} | S_i - q_{0,5}(S_i(T), i \in \Omega_j) | \quad (6)$$

3.2.3 AGREGATION « TYPE1_R2 »

Le critère d'agrégation « type1 » est repris ici, mais dans une approche « R2 » pour la partition IR^+

En pratique, il s'agit de simuler des trajectoires de $S(t)$, notées $S_i(t)$, puis cette fois-ci, on détermine P sous-groupes de trajectoires, à chaque temps de discrétisation ($t_\eta \in [1, T]$), selon les réalisations simulées des variables respectives $S(t_\eta)$. Enfin on utilise l'approximation du critère de regroupement $\hat{\xi}_j(t) = E(S(t) | S(t) \in [s_{j-1}(t), s_j(t)])$ par :

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \text{ avec } \Omega_j = \{i | S_i(t) \in [s_{j-1}(t), s_j(t)]\}, N_j = |\Omega_j| \text{ et } t = t_\eta \quad (7)$$

3.2.4 AGREGATION « TYPE2_R2 »

Le critère d'agrégation « type2 » est repris ici, avec l'approche « R2 » pour la partition IR^+

En pratique, la démarche est la même qu'en « type1_R2 » avec pour approximation discrétisée du critère d'agrégation $\hat{\lambda}_j(t) = (S_j(t) | S_j(t) = q_{50\%} \left(S(t) 1_{S(t) \in [s_{j-1}(t), s_j(t)]} \right))$, la forme suivante :

$$\tilde{\lambda}_j(t) = q_{50\%} (S(t) 1_{S(t) \in \Omega_j}) = q_{50\%} (S_{1 \leq i \leq N_j}(t)), \text{ avec } N_j = |\Omega_j|, \quad (8)$$

$$\Omega_j = \{i | S_i(t) \in [s_{j-1}(t), s_j(t)]\} \text{ et } t = t_\eta$$

NB : Notons que pour les processus d'agrégation susmentionnés, il existe deux sources d'erreurs potentielles :

- Le remplacement des trajectoires de $S(t)$, respectivement, par le processus $\xi(t)$, $\lambda(t)$, $\hat{\xi}_j(t)$ ou $\hat{\lambda}_j(t)$ obtenu en sélectionnant l'une des p trajectoires $\xi_j(t)$, $\lambda_j(t)$, $\hat{\xi}_j(t)$ ou $\hat{\lambda}_j(t)$ avec la probabilité $\pi_j = \mathbf{Pr}(S(T) \in [s_{j-1}, s_j])$;
- Le mode de construction par simulation qui conduit en remplaçant des espérances et quantiles théoriques par des espérances et quantiles empiriques, à introduire des fluctuations d'échantillonnage.

Remarque : Dans la suite de ce mémoire, nous allons appliquer ces méthodes d'« agrégation d'actif » pour le pricing de produits dérivés premièrement, puis pour des travaux de projections Actif/Passif ayant pour but l'évaluation des provisions techniques et le montant de fonds propres d'une société d'assurance vie, dans une vision Solvency II.

Aussi, ces travaux seront réalisés, selon la convention de valorisation des actifs « Mark to Market » : Valeur économique = Valeur de marché.

⇒ On pose donc ici, l'hypothèse que les projections réalisées dans le cadre de ce mémoire sont effectuées en probabilité « Risque Neutre ».

3.3. MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS GENERAL

3.3.1 LOI DU PROCESSUS DISCRETISE $\xi(t)$.

On a, $\forall 1 \leq j \leq p$,

$$\xi_j(t) = E\left(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}(t), \hat{s}_j(t)]\right); \quad (9)$$

Avec deux cas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Approche « R1 » : } \hat{s}_j(t) = \exp(-r(T-t)) s_j(T) \text{ .i.e: (9) } \Leftrightarrow \xi_j(t) = E\left(S(t) \mid S(T) \in [s_{j-1}, s_j]\right) \\ \text{Approche « R2 » : } \hat{s}_j(t) = s_j(t_\eta), \text{ tel que, pour } t = t_\eta : \Omega_j = \{i \mid S_i(t_\eta) \in [s_{j-1}(t_\eta), s_j(t_\eta)]\} \end{array} \right.$$

En d'autres termes, dans le cas de l'approche « R1 », on se ramène à la situation où l'instant du conditionnement est le même que celui utilisé pour le calcul de l'espérance en décalant les bornes de l'intervalle. Ce qui est déjà le cas dans l'approche « R2 ».

Voyons comment cela se traduit :

Les travaux de Planchet, Thérond et Nteukam¹⁶ démontre que si

On pose donc $\xi_j^*(t) = E\left(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}(T-t), \hat{s}_j(T-t)]\right)$ et on définit $\xi^*(t)$ comme $\xi(t)$ à partir des probabilités $\pi_j^*(t) = \mathbf{Pr}\left(S(t) \in [\hat{s}_{j-1}(T-t), \hat{s}_j(T-t)]\right)$.

Alors :

$$E(\xi(t)) = E(\xi^*(t)) = E(S(t)) \quad (10)$$

Et :

$$\pi_j = \pi_j^* \quad (11)$$

Partant de ces résultats, on considérera dans la suite de ce document (cf. 3.3.), **le processus noté : $\xi_j(t) = E\left(S(t) \mid S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}]\right)$ ou $\xi_j(t) = E\left(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}, \hat{s}_j]\right)$ pour le critère d'agrégation de la méthode « Type1 » aussi bien dans une approche « R1 » que « R2 ».**

¹⁶ Planchet, Thérond & Nteukam, [2009]

Autrement dit, d'après (10) et (11), on a que :

$$\begin{aligned} \xi_j(t) &= E\left(S(t) \mid S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}]\right) \equiv \xi_j(t) = E\left(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}, \hat{s}_j]\right) \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} \xi_j(t) = E\left(S(t) \mid S(T) \in [s_{j-1}, s_j]\right) \\ \hat{\xi}_j(t) = E\left(S(t) \mid S(t) \in [s_{j-1}(t), s_j(t)]\right) \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

3.3.2 LOI DU PROCESSUS DISCRETISE $\lambda(t)$.

On a, $\forall 1 \leq j \leq p$,

$$\lambda_j(t) = q_{50\%}\left(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}(t), \hat{s}_j(t)]\right) ; \quad (13)$$

De la même manière que pour (9), $\hat{s}_j(t)$ représente, selon l'approche de regroupement :

$$\begin{cases} \hat{s}_j(t) = \exp(-r(T-t)) s_j(T) \text{ i.e. } (13) \Leftrightarrow \lambda_j(t) = q_{50\%}\left(S(t) \mid S(T) \in [s_{j-1}, s_j]\right), \text{ cas « R1 » ;} \\ \hat{s}_j(t) = s_j(t_\eta), \text{ tel que, pour } t = t_\eta : \Omega_j = \left\{i \mid S_i(t_\eta) \in [s_{j-1}(t_\eta), s_j(t_\eta)]\right\}, \text{ cas « R2 » .} \end{cases}$$

En d'autres termes, dans le cas de l'approche « R1 », on se ramène à la situation où l'instant du conditionnement est le même que celui utilisé pour le calcul de l'espérance en décalant les bornes de l'intervalle. Ce qui est déjà le cas dans l'approche « R2 ».

Sachant (10) et (11), nous allons voir de quelle façon il est possible en partant de la médiane de chaque sous-ensemble de trajectoires, de converger vers l'espérance de $S(t)$:

On pose $\lambda_j^*(t) = q_{50\%}\left(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}(T-t), \hat{s}_j(T-t)]\right)$ et on définit $\lambda_j^*(t)$ comme $\lambda_j(t)$ à partir des probabilités $\pi_j^*(t) = \mathbf{Pr}\left(S(t) \in [\hat{s}_{j-1}(T-t), \hat{s}_j(T-t)]\right)$.

Nous allons tenter de démontrer le résultat suivant:

$$E(\lambda(t)) = E(\lambda^*(t)) = E(S(t))$$

En effet :

Posons : $\lambda_j^*(t) = S_j^*(t)$ tel que $\hat{s}_{j-1} \leq S_j^*(t) \leq \hat{s}_j$,

Avec $\forall j \in \Omega_j : 0 \leq \hat{s}_{j-1} < \hat{s}_j < \hat{s}_{j+1}$

On remarque alors que : $\hat{s}_{j-1} \leq \tilde{\xi}_j^* = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \leq \hat{s}_j$

D'où : $\left| \tilde{\xi}_j^* - S_j^* \right| \leq \frac{1}{\alpha_j} |\hat{s}_j - \hat{s}_{j-1}|$ i.e. $\left| \tilde{\xi}_j^* - S_j^* \right| \leq \frac{1}{\alpha_j} (\hat{s}_j - \hat{s}_{j-1})$

$$\text{Et : } \left| \sum_{j=1}^p (\tilde{\xi}_j^* - S_j^*) \right| \leq \sum_{j=1}^p |\tilde{\xi}_j^* - S_j^*| \leq \sum_{j=1}^p \frac{1}{\alpha_j} (\hat{s}_j - \hat{s}_{j-1})$$

On pose $\alpha = \inf_{j=1, \dots, p} (\alpha_j)$ et on observe que :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^p \pi_j^* \tilde{\xi}_j^* - \sum_{j=1}^p \pi_j^* S_j^* \right| &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^p \pi_j^* (\hat{s}_j - \hat{s}_{j-1}) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^p \pi_j^* (\hat{s}_j - E(S(t))) \\ \Leftrightarrow \left| E(\xi^*(t)) - \sum_{j=1}^p \pi_j^* S_j^* \right| &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^p \pi_j^* (\hat{s}_j - E(S(t))) \end{aligned}$$

On en déduit d'après (10) et (11) :

$$\left| E(S(t)) - \sum_{j=1}^p \pi_j S_j^* \right| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^p \pi_j (s_j - E(S(t))) \quad (14)$$

Ainsi lorsque par construction : $\pi_j = \pi = 1/P$; on a :

$$\left| E(S(t)) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j^* \right| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (s_j - E(S(t))) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{p} \sqrt{\sum_{j=1}^p (s_j - E(S(t)))^2} \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow \left| E(S(t)) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j^* \right| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (s_j - E(S(t)))^2}$$

$$\Leftrightarrow \left| E(S(t)) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j^* \right| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \sigma$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j^* - E(S(t)) \right| \leq \frac{\sigma}{\alpha \times \sqrt{p}} \quad (16)$$

On observe donc que $E(\lambda_j^*(t))$ converge vers $E(S(t))$ à la vitesse $\frac{\sigma}{\alpha \times \sqrt{p}}$

D'après la première partie de l'inégalité du (15), si par construction, la partition de IR^+ est telle que $s_0 = E(S(t))$ ou encore $s_0 \leq E(S(t)) \leq s_1$ et la caractéristique des bornes croissantes i.e $\forall j \in \Omega_j : 0 \leq \hat{s}_{j-1} < \hat{s}_j < \hat{s}_{j+1}$:

$\exists \eta \in IN$ tel que :

$$\left| E(S(t)) - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p S_j^* \right| \leq \frac{1}{\eta \times \alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (s_j - E(S(t)))^2} \quad (17)$$

Notons ainsi que par construction, il est possible d'augmenter la vitesse de convergence de $E(\lambda_j^*(t))$ vers $E(S(t))$ de l'ordre de $\frac{1}{\eta}$.

Idem que pour l'expression (12), nous posons pour la méthode « type2 », toutes approches de partitionnement confondues (« R1 » et « R2 »), la notation suivante pour le critère d'agrégation :

$$\lambda_j(t) = q_{50\%} \left(S(t) | S(t) \in [\hat{s}_{j-1}, \hat{s}_j] \right) \quad (12b)$$

3.4. MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS DU MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE

Nous nous intéressons dans cette partie au cas particulier où $S(t)$ est un mouvement brownien géométrique. Nous verrons quelles sont les particularités des processus discrétisés $\xi(t)$ et $\lambda(t)$ dans ce cas précis.

On suppose donc que $S(t)$ (un mouvement brownien géométrique) suit la forme suivante :

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right) \quad (18)$$

$Y(t) = \frac{S(t)}{S_0}$ suit une loi log-normale de paramètres $\left(m_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \omega_t^2 = \sigma^2 t \right)$. La densité de la loi log-normale s'écrit :

$$f(y) = \frac{1}{\omega_t y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t} \right)^2 \right] \quad (19)$$

ceci implique que la densité de la loi tronquée $Y_j = Y(t) | Y(t) \in [y_{j-1}, y_j]$ s'écrit :

$$f_j(y) = \frac{1}{\omega_t y \pi_j^* \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t} \right)^2 \right] \mathbf{1}_{[y_{j-1}, y_j]}(x) \quad (20)$$

3.4.1 LOI DE DU PROCESSUS $\xi(t)$ DANS LE CAS DU MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE¹⁷

¹⁷ Planchet & Nteukam, [2010]

Dans l'expression de la densité (20), on pose $y_j = \frac{\widehat{S}_j}{S_0}$, $\pi_j^* = F(y_j) - F(y_{j-1})$ et

$F(y) = \phi\left(\frac{\ln(y) - m}{\omega}\right)$. Avec ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} E(Y_j) &= E(Y(t) | Y(t) \in [y_{j-1}, y_j[) \\ &= E\left(\frac{S(t)}{S_0} \middle| \frac{S(t)}{S_0} \in \left[\frac{\widehat{S}_{j-1}}{S_0}, \frac{\widehat{S}_j}{S_0}\right]\right) \end{aligned}$$

et donc $\mathbf{E}(X_j) = S_0 \times \mathbf{E}(Y_j)$.

$$\text{Mais on a : } \mathbf{E}(Y_j) = \frac{1}{\omega_t \pi_j^* \sqrt{2\pi}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t}\right)^2\right] dy.$$

En posant $u = \frac{\ln(y) - m_t}{\omega_t} - \omega_t$, $du = \frac{dy}{y\omega_t} = \exp\left(-\left(m_t + \omega_t \times u + \omega_t^2\right)\right) \frac{dy}{\omega_t}$, on trouve que :

$$\mathbf{E}(Y_j) = \frac{1}{\pi_j^* \times \sqrt{2\pi}} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \exp\left[-\frac{1}{2}(u + \omega_t)^2\right] \exp\left(m_t + \omega_t u + \omega_t^2\right) du,$$

avec
$$b_{j,t} = \frac{\ln(y_j) - m_t}{\omega_t} - \omega_t$$

donc :

$$\mathbf{E}(Y_j) = \frac{\exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right)}{\pi_j^* \times \sqrt{2\pi}} \int_{b_{j-1,t}}^{b_{j,t}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = \frac{\phi(b_{j,t}) - \phi(b_{j-1,t})}{\phi(b_{j,t} + \omega_t) - \phi(b_{j-1,t} + \omega_t)} \exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right)$$

On retrouve bien avec un unique intervalle tel que $b_{0,t} = -\infty$ et $b_{1,t} = +\infty$ l'espérance usuelle d'une loi log-normale $\mathbf{E}(Y_1) = \exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right)$.

Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}, \hat{s}_j]\right) &= S_0 \times \mathbf{E}(Y_j) = S_0 \times \frac{\phi(b_{j,t}) - \phi(b_{j-1,t})}{\phi(b_{j,t} + \omega_t) - \phi(b_{j-1,t} + \omega_t)} \exp\left(m_t + \frac{\omega_t^2}{2}\right) \\ \Rightarrow \xi_j(t) &= \frac{\phi(b_{j,t}) - \phi(b_{j-1,t})}{\phi(b_{j,t} + \omega_t) - \phi(b_{j-1,t} + \omega_t)} S_0 \exp(rt) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{où } b_{j,t} = \frac{\ln\left(\frac{\hat{s}_j}{S_0}\right) - m_t}{\omega_t} \quad \text{et, d'après (12) : } \hat{s}_j \cong s_{t,j}$$

En résumé dans le modèle de Black & Scholes, la loi de $\xi(t)$ est une loi discrète, telle que $\xi(t) = \xi_j(t) = \frac{\pi'_{j,t}}{\pi_j} S_0 \exp(rt)$ avec une probabilité π_j et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi'_{j,t} = \Phi(b_{j,t}) - \Phi(b_{j-1,t}) \text{ et } \pi_j = \Phi(b_{j,t} + \omega_t) - \Phi(b_{j-1,t} + \omega_t) \\ b_{j,t} = \frac{\ln\left(\frac{s_{t,j}}{S_0}\right) - m_t}{\omega_t} - \omega_t \\ m_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \text{ et } \omega_t^2 = \sigma^2 t \end{array} \right.$$

3.4.2 LOI DU PROCESSUS $\lambda(t)$ DANS LE CAS DU MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE

De même que pour $\xi(t)$, la loi de $\lambda(t) = q_{0,5}(S(t) \mid S(t) \in [\hat{s}_{j-1}, \hat{s}_j])$ (cf.(12b)) dans le modèle de **Black & Scholes est une loi discrète, telle que**

$$\lambda(t) = \lambda_j(t) = \inf_{i \in N_j} x_i \mid F_X(x_i) \geq 0,5N_j \text{ et } N_j = |\Omega_j| \quad (15)$$

Et /ou

$$\lambda_j(t) = \{x_j \in \Omega_j \mid F_X(x_j) = 1 - F_X(x_j) \text{ i.e } P(X \leq x_j) = P(X > x_j)\} \quad (16)$$

Sachant la densité du processus (cf.20) on a l'équivalence suivante :

$$(16) \Leftrightarrow \lambda_j(t) =$$

$$\left\{ x_i \in [y_{j-1}, y_j] \left[\int_{y_{j-1}}^{x_i} \frac{1}{w_t y \pi_j^* \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{w_t}\right)^2\right] dy - \int_{x_i}^{y_j} \frac{1}{w_t y \pi_j^* \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(y) - m_t}{w_t}\right)^2\right] dy = 0 \right. \right\}$$

$$\text{Posons : } u = \frac{\ln(y - m_t)}{w_t} \Rightarrow du = \frac{dy}{y w_t}$$

Alors :

$$\lambda_j(t) = \left\{ x_i \in \Omega_j \left| \frac{1}{\pi_j^* \sqrt{2\pi}} \left(\int_{\hat{b}_i}^{\hat{b}_i} \exp\left[-\frac{1}{2}(u)^2\right] du - \int_{\hat{b}_i}^{b_j} \exp\left[-\frac{1}{2}(u)^2\right] du \right) = 0 \right. \right\}$$

$$\text{Avec : } \hat{b}_i = \frac{\ln(x_i) - m_t}{w_t} = g(x_i) \quad , \quad b_{j-1} = \frac{\ln(y_{j-1}) - m_t}{w_t} \quad \text{et} \quad b_j = \frac{\ln(y_j) - m_t}{w_t}$$

$$\text{D'où : } \lambda_j(t) = \left\{ x_i \in \Omega_j \left| \frac{1}{\pi_j^*} \left[\phi(\hat{b}_i) - \phi(b_{j-1}) + \phi(\hat{b}_i) - \phi(b_j) \right] = 0 \right. \right\}$$

\Leftrightarrow

$$\lambda_j(t) = \left\{ x_i \in \Omega_j \left| 2\phi(\hat{b}_i) = \phi(b_{j-1}) + \phi(b_j) \right. \right\}$$

\Leftrightarrow

$$\lambda_j(t) = \left\{ x_i \in \Omega_j \left| \phi(g(x_i)) = \frac{1}{2} [\phi(g(s_{j-1})) + \phi(g(s_j))] \right. \right\}$$

En résumé dans le modèle de Black & Scholes, la loi de $\lambda(t)$ est une loi discrète, telle que

$$\lambda(t) = \lambda_j(t) = \left\{ x_i \in \Omega_j \left| x_i = g^{-1} \circ \phi^{-1} \left[\frac{1}{2} (\phi(b_{j-1}) + \phi(b_j)) \right] \right. \right\} \text{ avec une probabilité } \pi_j \text{ et :}$$

$$\begin{cases} g : x \rightarrow \frac{\ln(x) + m}{w} \\ b_j = \frac{\ln\left(\frac{S_j}{S_0}\right) - m}{w} \end{cases}$$

4. APPLICATION : EVALUATION D'OPTION PAR SIMULATION

4.1. EVALUATION D'OPTIONS « NON PATH DEPENDENT »

4.1.1 MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS DU PUT EUROPEENNE

4.1.1.1 MODELISATION EN TEMPS CONTINU ET FORMULE FERMEE

Le modèle de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique du PUT européen à partir de la formule suivante :

$$P(S_t, K, r, T, \sigma) = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-r(T-t)} N(-d_2)$$

avec :

- S_t la valeur actuelle de l'action sous-jacente,
- K le prix d'exercice fixé par l'option
- r le taux d'intérêt sans risque,
- $T-t$ le temps qui reste à l'option avant son échéance
- σ la volatilité du prix du sous-jacent
- N la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Application

Hypothèses :

- $S_0 = 100$
- $K = 100$
- $r = 0,0754$ % hebdomadaire, correspondant à un rendement annuel de 4 %
- $T = 52$ semaines
- $\sigma = 4,16$ % hebdomadaire, correspondant à une volatilité annuelle de 30 %

Résultat :

$$P(100 ; 100 ; 0,0754 ; 52 ; 4,16\%) = 9,86\text{€} \quad (26a)$$

Et

$$P(100 ; 100 ; 0,0754 ; 156 ; 4,16\%) = 14,29\text{€} \quad (26b)$$

4.1.1.2 EVALUATION PAR SIMULATION

Le prix théorique d'un PUT européen, qui donne le droit de vendre l'actif S, à la valeur K, en date T, est caractérisé par son pay off : $(K - S_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$

Ainsi sur un échantillon de N simulation de S(t) la valeur du PUT sera déterminée comme suit :

$$PUT_{sim} = e^{-rT} \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (K - S_i)^+$$

Dans cette partie sont présentées les résultats obtenus en applications des différentes méthodes introduites (en section3) appliquées au le calcul d'un PUT européen par simulation.

La démarche consiste à générer un échantillon dit global, de 100 000 simulations du cours de S(t) suivant un processus brownien géométrique. Une partition de taille P est ensuite réalisée sur IR^+ tel que $S(T) \in IR^+$.

A P fixé, on détermine la taille d'un sous groupe Ω_j , notée N_j (en section3) comme suit :

$$N_j = \frac{N}{P} \quad (27)$$

Condition :

Il s'agit d'une condition générale :

Les P sous-groupes de taille N_j sont déterminés de telle sorte que l'inégalité suivante soit toujours vraie : $\forall (S_i \in \Omega_j, S_k \in \Omega_{j+1})_{j=1, \dots, P} : S_i < S_k$ (28)

4.1.1.3 RESULTATS

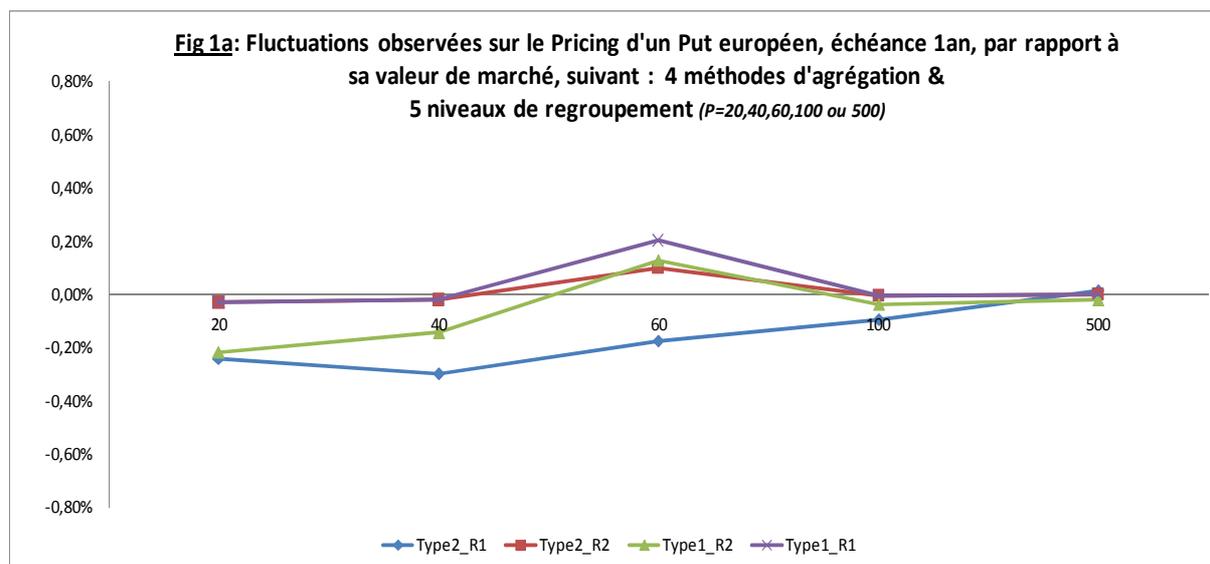
Considérant que la valeur de marché du Put européen correspond au résultat du calcul de la formule fermée (cf-(26)). Le tableau ci-dessous présente la sensibilité du prix du Put Européen (i.e écart par rapport à sa valeur de marché) dans une approche par simulation.

Cette étude est réalisée sur deux échéances possibles d'un PUT, l'une à 1 an, soit 52 semaines (a). L'autre à 3 ans soit 156 semaines (b). Cela, notamment, afin d'observer dans quelle mesure la valeur temps du put peut être affectée par le niveau d'agrégation de l'échantillon de simulation retenu pour le calcul. (i.e. Sensibilité de la valeur temps au nombre de trajectoires représentatives retenues.)

- a) Sensibilité du calcul, de la valeur d'un PUT Européen à échéance 1 an par simulation, en fonction de la variation des hypothèses croisées suivantes : méthode d'« agrégation d'actif » appliquée \otimes Nombre de trajectoires représentatives (taille du sous-ensemble) fixé.

Les résultats présentés ci-dessous sont en écarts par rapport à la valeur du Put, observée sur le marché (correspond au résultat du calcul de la formule fermée), considérée comme valeur de référence (cf-(26a)) :

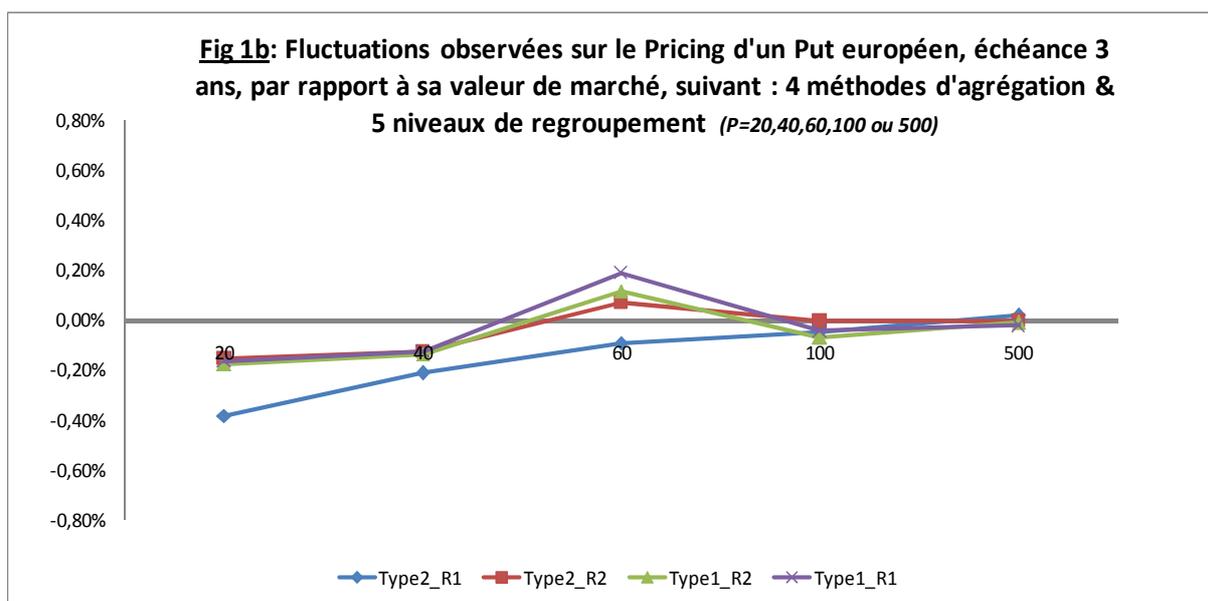
P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	-0,03%	-0,22%	-0,03%	-0,24%
40	-0,02%	-0,14%	-0,02%	-0,30%
60	0,20%	0,13%	0,10%	-0,17%
100	0,00%	-0,04%	0,00%	-0,09%
500	0,00%	-0,02%	0,00%	0,01%
Echantillon Global	-0,09%	-0,09%	-0,09%	-0,09%



- b) Sensibilité du prix d'un PUT Européen à échéance 3 an aux variations des hypothèses croisées suivantes : méthode d'« agrégation d'actif » appliquée ⊗ Nombre de trajectoires représentatives (taille du sous-ensemble) fixé.

Les résultats présentés correspondent aux écarts de prix observés en rapport à la valeur de référence du put (cf-(26b)):

P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	-0,16%	-0,18%	-0,15%	-0,38%
40	-0,12%	-0,14%	-0,12%	-0,21%
60	0,19%	0,12%	0,07%	-0,09%
100	-0,04%	-0,07%	0,00%	-0,04%
500	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,02%
Echantillon Global	-0,12%	-0,12%	-0,12%	-0,12%



Remarque : Les écarts présentés pour chacune des méthodes d'« agrégation d'actif » sont relatifs à la valeur analytique du Put, obtenue via la formule fermée (cf.4.1.1.1.) L'écart observée sur le calcul du Put avec l'échantillon globale correspond à l'erreur de discrétisation¹⁸.

Observations :

On observe 3 résultats principaux :

1. à P fixé, les 4 méthodes d'« agrégation de l'actif » sont quasi équivalentes en terme de résultat, autrement dit, d'efficacité de convergence vers la moyenne du *pay off* ou encore de vitesse de rappel du prix calculé par simulation, au prix réel observé sur le marché.(cf-*Fig 1a, Fig 1b*)
2. Les valeurs obtenues sont concluantes dès $P=20$ regroupements, avec cependant une tendance à l'amélioration des résultats, proportionnellement au nombre de trajectoires représentatives retenues pour le calcul. (i.e. à la taille de la partition de l'ensemble des valeurs de $S(t)$.)
3. La qualité d'une méthode d'« agrégation » ne varie pas lorsque la valeur temps du Put augmente, i.e. les écarts observés sont stables pour les deux échéances de Put étudiées.

¹⁸ Cf. Page 35, NB.

4.1.1.4 ANALYSE ET CONCLUSION : RISQUE D'ECHANTILLONNAGE / VITESSE DE CONVERGENCE

On observe section 4.1.1.3 que pour l'évaluation du prix d'un Put européen, les quatre méthodes d'« agrégation d'actif » étudiées ici se révèlent :

- très proches les unes des autres, d'un point de vu des résultats obtenues, et cela, quelque soit le niveau (seuil) P de regroupement retenu ;
- très performantes d'un point de vue *Pricing* : les valeurs obtenues sont toutes très proches de la valeur de marché du put, prise comme référence. En effet dès $P=20$, (le seuil minimum étudié), autrement dit lorsque l'on passe d'un échantillon de 100 000 trajectoires à 20, on observe que la variation du prix du Put européen n'excède pas 0,24 %, toutes méthodes confondues.
- Plus le nombre de trajectoires représentatives est élevé (le seuil augmente), plus le prix du put converge vers sa valeur de référence. Notons toute fois que les écarts d'un seuil à l'autre n'excèdent pas 0,35 % au maximum.

Les résultats observés sont relativement intuitifs. D'une part, le fait que la variation du prix soit inversement proportionnel au seuil de regroupement réalisé ; on retrouve là les caractéristiques de la loi des grands nombres qui veut que, plus la taille de l'échantillon considéré est importante, plus l'estimateur de la moyenne converge vers sa valeur théorique.

D'autre part, le fait que les quatre méthodes d'« agrégation d'actif » mises en œuvre dans cette étude soient très proche en termes de résultat sur le calcul du prix d'une option européenne. Cela vient principalement de la caractéristique des ces options et plus généralement des options «NON PATH DEPENDENT » dont le *Pay off*, n'est sensible, pour un *strike* fixé, qu'à la valeur du sous-jacent à l'échéance. Et cela, quel qu'ait été le comportement du sous-jacent, avant cette date d'échéance.

4.2. EVALUATION D'OPTIONS « PATH DEPENDENT »

Dans cette section nous nous penchons sur le cas des options « PATH DEPENDENT ». La tarification de ces options est sensible au comportement du sous-jacent tout au long de la durée de vie de l'option. Cette caractéristique rend de prime abord, l'exercice plus complexe, à mettre en œuvre du fait de réduire le nombre de simulations alors même qu'il ne s'agit plus d'estimer la valeur du sous-jacent à une échéance unique (terme de l'option) mais à chaque partition t de la période courue. Nous verrons dans cette section de quelle façon se comporte le prix d'options Exotiques telles que le PUT Asiatique et PUT à Barrière lors de la mise en œuvre des méthodes d'« agrégation d'actif » précitées.

4.2.1 MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS DU PUT ASIATIQUES (MOYENNE GEOMETRIQUE)

L'option à moyenne sur le prix est une option donnant droit à son détenteur de recevoir à l'échéance de l'option et à concurrence de son montant nominal, la différence positive éventuelle entre le prix d'exercice de cette option et la moyenne arithmétique (ou éventuellement géométrique) des cours du sous-jacent.

Le « *payoff* » d'un « Put » peut donc s'exprimer par :

$$X_{PutAsia} = \max(K - \underset{t}{Moy}(S(t)), 0)$$

Avec :

- K : Prix d'exercice de l'option
- $S(t)$: Cours de l'actif sous-jacent au temps t , également noté : S_t
- $\underset{t}{Moy}(S_t)$: moyenne de l'actif sous-jacent.

Elle est calculée sur k observations et peut se calculer des deux manières :

- Moyenne arithmétique : $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k S_j$

- Moyenne géométrique : $\sqrt[k]{\prod_{j=1}^k S_j}$

S étant le j -ème cours de l'actif sous jacent observé (Avec un total de k observations).

Nous retiendrons ici dans cette étude le cas de Put Asiatique à Moyenne Géométrique.

4.2.1.1 MODELISATION EN TEMPS CONTINU ET FORMULE FERMEE

Nous modéliserons ici l'option à moyenne sur le prix pour une moyenne géométrique.

La valeur en 0 du Put sur prix moyen de payoff $\max(K - \underset{[T_1;T]}{Moy}(S(t)), 0)$ s'écrit :

$$P_{Asia}(S_0, K, r, T, T_1, \sigma) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - Z_0 N(-d_1)$$

Avec :

- $Z_0 = S_0 \times e^{[-rt \cdot \frac{T-T_1}{2} - \sigma^2 \cdot \frac{T-T_1}{12}]}$
- $\Psi = \sigma \times \sqrt{\frac{T+2T_1}{3T}}$
- $d_1 = \frac{\ln(Z_0 / K) + (b + \Psi^2 / 2)T}{\Psi \sqrt{T}}$
- $d_2 = d_1 - \Psi \sqrt{T}$

Et :

- S_0 la valeur du sous-jacent à l'émission,
- K le prix d'exercice fixé par l'option
- r le taux d'intérêt sans risque,
- T le temps qui reste à l'option avant son échéance
- σ la volatilité du prix du sous-jacent

Application

Hypothèses :

- $S_0 = 100$
- $K = 100$
- $r = 0,0754$ % hebdomadaire, correspondant à un rendement annuel de 4 %
- $T = 52$ semaines
- $\sigma = 4,16$ % hebdomadaire, correspondant à une volatilité annuelle de 30 %

Résultat : $P_{Asia}(100;100;0,0754\%;52;1;4,16\%) = 6,94\text{€}$ (29)

4.2.1.2 EVALUATION PAR SIMULATION

De la même manière que dans la section 4.1.1.2, il s'agit dans cette section de réaliser le calcul du prix du Put Asiatique à partir d'un échantillon global de 100 000 simulations des trajectoires de l'actif sous-jacent. Dans un second temps les 4 méthodes de flexing introduites en section 3 seront appliquées sur cet échantillon global. L'objectif étant double, d'une part étudier l'efficacité de ces méthodes en termes de vitesse de convergence, puis dans un second temps déterminé le seuil de regroupement P présentant le meilleur rapport qualité d'évaluation/temps de réalisation.

Rappel : Le payoff d'un Put Asiatique à moyenne géométrique noté $X_{PutAsia}$ vaut :

$$X_{PutAsia} = \max(K - \underset{t}{Moy}(S(t)), 0)$$

On en déduit le Prix du Put noté P_{Asia} calculé pour un échantillon de taille N :

$$P_{Asia} = e^{-rT} * \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max[K - \underset{t}{Moy}(S_i(t)), 0] = e^{-rT} * \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max[K - \sqrt[T]{\prod_{t=1}^T S_i(t)}, 0]$$

Remarque : La mise en œuvre des méthodes d'« agrégation d'actif » testées dans cette étude respecte les conditions (27) et (28) décrites en section 4.1.1.2.

4.2.1.3 RESULTATS ET OBSERVATIONS

Considérant que la valeur de marché du Put Asiatique correspond au résultat du calcul obtenu via la formule fermée (cf-(29)) comme étant la valeur de référence.

Les tableaux ci-dessous présentent respectivement :

- (1) Les résultats obtenus pour le calcul du prix d'un Put asiatique dans une approche par simulation considérant d'une part un échantillon globale et de l'autre des échantillons restreint par application des méthodes d'« agrégation d'actif » ;
- (2) La sensibilité du prix d'un Put Asiatique à la méthode d'« agrégation d'actif » appliqué d'une part et au seuil de regroupement voulu, de l'autre.

Tableau(1) : Pricing par simulation

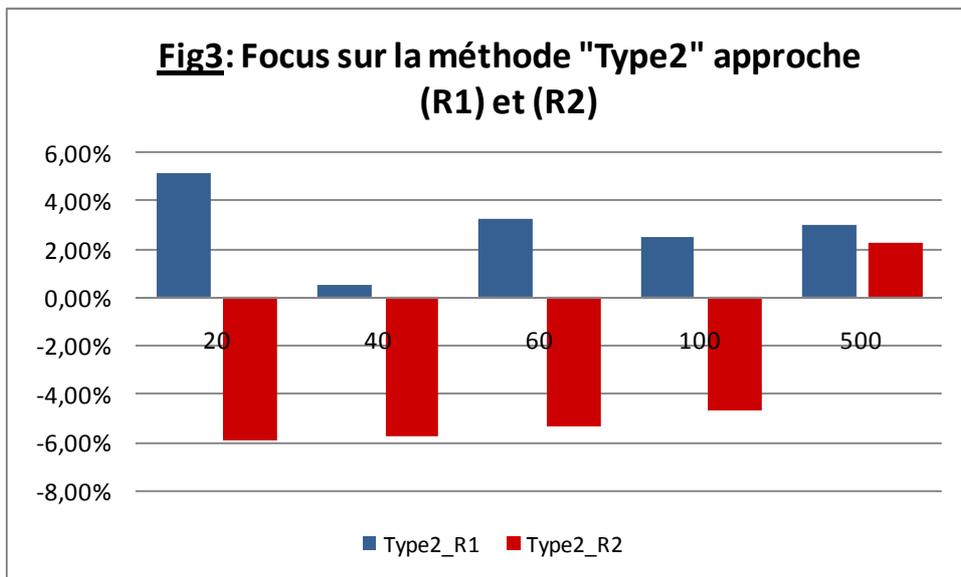
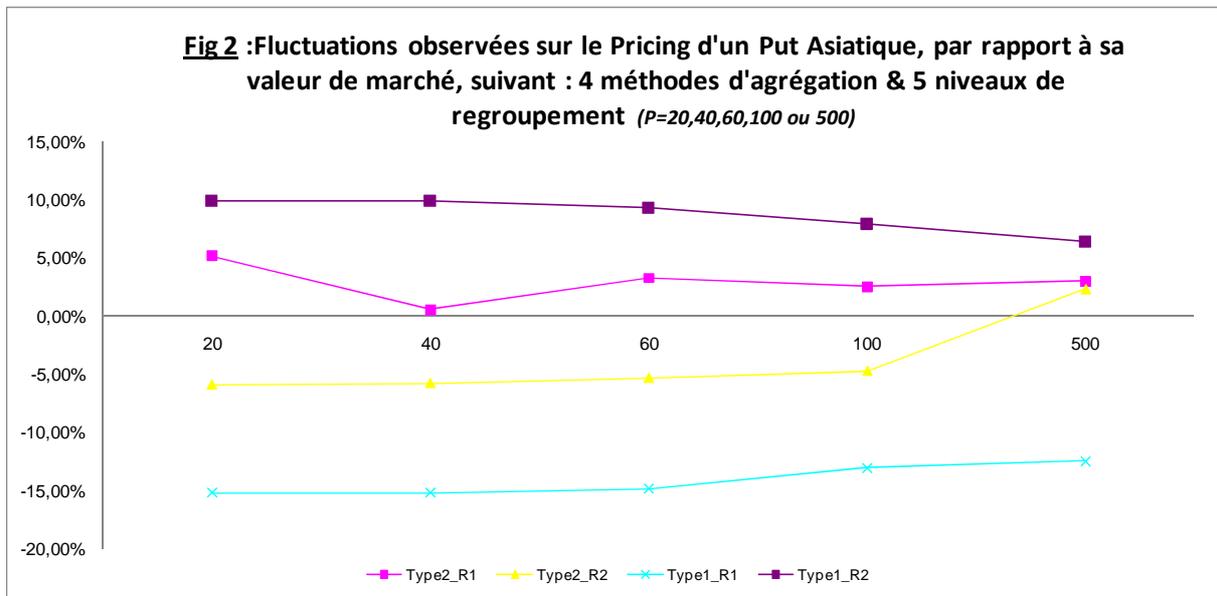
Les valeurs présentées dans le tableau ci-dessous correspondent aux valeurs moyennes obtenues sur 100 simulations d'échantillons pour chaque seuil de regroupement P étudié. Il en de même pour la valeur obtenue sur l'échantillon global de 100 000 trajectoires.

P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	5,89	7,62	6,53	7,30
40	5,88	7,62	6,54	6,98
60	5,91	7,58	6,57	7,16
100	6,03	7,48	6,61	7,12
500	6,07	7,38	7,10	7,15
Echantillon Global	7,003	7,003	7,003	7,003

Tableau(2) : Sensibilité du prix d'un Put Asiatique aux méthodes et seuils d'« agrégation de l'actif »

Les écarts présentés dans le tableau ci-dessous sont « absolus » (i.e. relatifs à la valeur de marché du put d'un montant de 6,94€ (cf.4.2.1.1)), et sont obtenus en moyenne pour 100 simulations à chaque seuil de regroupement P considéré.

P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	-15,13%	9,83%	-5,89%	5,15%
40	-15,18%	9,85%	-5,77%	0,56%
60	-14,80%	9,32%	-5,33%	3,26%
100	-13,06%	7,88%	-4,73%	2,56%
500	-12,45%	6,38%	2,30%	3,00%
Echantillon Global	0,94%	0,94%	0,94%	0,94%



Remarques Les écarts présentés pour chacune des méthodes d'« agrégation d'actif » sont relatifs à la valeur analytique du Put, obtenue via la formule fermée (cf.4.2.1.1.) L'écart observée sur le calcul du Put avec l'échantillon globale correspond à l'erreur de discrétisation¹⁹.

¹⁹ Cf. Page 35, NB.

Observations

On observe 3 résultats principaux :

1. une hétérogénéité des résultats entre les méthodes d'« agrégation d'actif » : à P fixé, les 4 méthodes d'« agrégation de l'actif » ne sont plus équivalentes en terme de résultat, contrairement au pricing des options « Non PATH DEPENDENT » ;
2. l'erreur d'échantillonnage est faible et contenue : L'écart entre la valeur théorique du Put et sa valeur calculée par simulation sur l'échantillon complet (100 000 trajectoires), est en moyennes de 0,94 %. Cette donnée peut être considérée comme une variable d'ajustement des écarts observés ci-dessus qui, pour rappel, sont des écarts absolus.
3. deux méthodes se distinguent en terme de qualité des résultats : il s'agit des méthodes « Type2 », toutes approches de regroupement confondues (« R1 », « R2 ») : l'approche « R1 » présente des résultats stables dès $P=40$ avec des écarts en moyenne < 3 %.

4.2.1.4 ANALYSE ET CONCLUSION : RISQUE D'ECHANTILLONNAGE / VITESSE DE CONVERGENCE

A l'inverse de ce que l'on constate pour le pricing du Put Européen (*section 4.1*), les méthodes d'« agrégation d'actif » présentent dans le cas du pricing d'un Put asiatiques une forte dispersion de résultats autour de la valeur de marché du put.

le pricing d'un Put Asiatique à moyenne géométrique, s'avère extrêmement sensible au choix de la méthode d'« agrégation d'actif ».

De fait, l'écart absolu du prix passe de 9 % en moyenne (valeur absolue) pour $P=20$ à 6 % pour $P=500$ toutes méthodes confondues. Notons cependant, face à cette observation, que les méthodes divergent fortement en termes de résultat. Ainsi à $P=20$, l'écart absolu constaté pour la méthode « Type1_R1 » est de -15,13% alors que pour la méthode « Type2_R1 » il atteint 5 %.

En conclusion, les travaux réalisés dans cette section, à l'inverse de ceux réalisés dans la section précédente (option « NON PATH DEPENDENT ») permettent de distinguer les méthodes d'« agrégation d'actif » entre elles du point de vu de l'efficacité de la tarification.

Aussi :

- A l'image des résultats qu'elles proposaient dans la section précédente, deux méthodes d'« agrégation d'actif » restent robustes en terme de tarification et donc, dans ce contexte, de représentativité de l'échantillon agrégé face à l'échantillon global d'origine. Il s'agit des méthodes « Type2_R1 » et « Type2_R2 », qui respectivement présentent des écarts inférieurs à 3% dès $P=100$ pour la première et dès $P=500$ pour la seconde ;

- A l'inverse, deux méthodes se révèlent peu précises dans ce contexte avec des écarts récurrents supérieur à 13% pour la méthode « Type1_R1 » et 6 % pour la « Type1_R2 », quelque soit le seuil de regroupement mis en œuvre. Ces résultats doivent être cependant relativisés d'une part par la faible valeur nominale du produit évalué (Option Asiatique Géométrique). En effet si l'on considère l'écart de 6 % constaté pour la méthode « Type1_R2 », il s'agit en valeur nominale d'un écart de moins de 0,4 €. D'autre part, la dérive due à l'erreur d'échantillonnage permet de nuancer le niveau d'écart observé, sans toute fois le remettre en question.

Afin de confirmer ou d'infirmer les conclusions de cette section, il convient de continuer nos travaux de pricing sur des options « PATH DEPENDENT » plus sensibles encore que les options asiatique à la trajectoire de l'actif sous-jacent. Pour ce faire, la section suivante propose une étude sur les options exotiques de type barrières.

4.2.2 MISE EN ŒUVRE DANS LE CAS DES OPTIONS EXOTIQUES A BARRIERES

Les options à barrière sont des options dont la valeur est conditionnée par l'évolution, pendant leur durée de vie, du prix du sous-jacent par rapport à un ou plusieurs seuils. Nous pouvons distinguer deux catégories de produit :

- Les options à barrières désactivantes :

Ces options, dites de type « out », sont des options européennes classiques en tout point sauf qu'elles disparaissent si le cours du sous-jacent atteint dans la période de référence un seuil prédéterminé. Ces options peuvent être « *down and out* » si la barrière est atteinte par une baisse du cours du sous-jacent ou « *up and out* » si elle est, au contraire, atteinte par une hausse de celui-ci.

- Les options à barrières activantes :

Ces options ne commencent à exister que si le cours du sous-jacent atteint un certain cours fixé à l'avance. Cependant, la prime est payée dès le départ, qu'une option apparaisse ou non par la suite. Ces options peuvent également être « *down and in* » si la barrière activante est atteinte une baisse du cours du sous-jacent ou « *up and in* » si la barrière est atteinte par une hausse de celui-ci.

Dans cette section nous nous focaliserons sur le Put à barrière « Down & In » proche du modèle de rachat conjoncturel proposé en assurance vie, par la directive Solvabilité II et dont le principe consiste en ce qu'un rachat est observé dès lors que le taux de rémunération (intérêts) des provisions mathématiques est inférieur à une certaine barrière de taux (correspondant au taux moyen de rémunération observé sur le marché).

Le payoff d'une telle option s'écrit donc :

$$X_{PutD\&I} = \begin{cases} \max(K - S_T; 0) & \text{ssi } \exists t \text{ tel que } S_t < B \\ 0 & \end{cases}$$

Avec :

B = la barrière considérée

K = le strike de l'option

4.2.3.1 MODELISATION EN TEMPS CONTINU ET FORMULE FERMEE

Considérant que les hypothèses concernant l'évolution du cours du sous-jacent sont celle du modèle de Black & Sholes, i.e que le processus de cours suit un mouvement brownien géométrique. Il existe la formule fermée suivante permettant pour le calcul de la valeur d'un Put « Dow & In » :

Si $K > B$:

$$P_{D\&I} = -S_0 N(-x_1) + K e^{-rt} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\varepsilon} N(y) - K e^{-rt} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2(\varepsilon-1)} N(y - \sigma\sqrt{T}) - S_0 \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2\varepsilon} N(y_1) + K e^{-rt} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{2(\varepsilon-1)} N(y_1 - \sigma\sqrt{T}).$$

Sinon :

$$P_{D\&I} = -SN(-x) + K e^{-rt} N(-x + \sigma\sqrt{T})$$

Avec :

- $x = \frac{\ln(S/K)}{\sigma\sqrt{T}} + \varepsilon\sigma\sqrt{T}$
- $x_1 = \frac{\ln(S/B)}{\sigma\sqrt{T}} + \varepsilon\sigma\sqrt{T}$
- $y = \frac{\ln(B^2/S.K)}{\sigma\sqrt{T}} + \varepsilon\sigma\sqrt{T}$
- $y_1 = \frac{\ln(B/S)}{\sigma\sqrt{T}} + \varepsilon\sigma\sqrt{T}$
- $\varepsilon = \frac{\mu}{\sigma^2} + 1$
- $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$

Application

Hypothèses :

- $S_0 = 100$
- $K = 100$
- $r = 0,0754\%$ hebdomadaire, correspondant à un rendement annuel de 4%
- $T = 52$ semaines
- $\sigma = 4,16\%$ hebdomadaire, correspondant à une volatilité annuelle de 30%
- $B = 89$

Résultat : $P_{D\&I}(100;100;89;0,075\%;52;4,16\%) = 1,14\text{€}$

4.2.3.2 EVALUATION PAR SIMULATION

le process appliqué pour le calcul du prix du Put Exotique à Barrière « Down & In » suit les mêmes étapes que dans les section 4.1.1.2, 4.2.1.2. D'abord l'évaluation sur un échantillon Global de 100000 trajectoires simulées, de l'actif sous jacent. Puis Dans un second temps l'application des 4 méthodes d' « agrégation d'actif » introduites en section 3.

L'objectif nous le rappelons est double, d'une part étudier l'efficacité de ces méthodes en terme de vitesse de convergence, puis dans un second temps déterminé le seuil de regroupement P présentant le meilleur rapport qualité d'évaluation/temps de réalisation.

Nous verrons notamment, dans cette section si les conclusions proposées en section 4.1.1.4 et 4.2.1.4 se confirment dans le cas de ces options à barrières qui nous venons de le voir présentent la particularité d'être très sensibles à l'évolution du cours du sous-jacent tout au long de la période étudiée.

Ainsi le prix du Put « Down & In » se calcul comme suit :

$$P_{D\&I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(K - S_i(T); 0) \text{ ssi } \min_t(S_i(t) \leq B)$$

4.2.3.3 RESULTATS ET OBSERVATIONS

Tableau(1) : Pricing par simulation

Les valeurs présentées dans le tableau ci-dessous correspondent aux valeurs moyennes obtenues sur 100 simulations d'échantillons, pour chaque seuil de regroupement P étudié. Il en est de même pour la valeur obtenue sur l'échantillon global de 100 000 trajectoires.

P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	0,000	0,000	0,000	0,782
40	1,357	1,305	0,000	1,351
60	0,942	0,905	0,000	1,130
100	0,899	0,869	0,000	1,108
500	0,858	0,882	0,879	1,111
Echantillon Global	1,197	1,197	1,197	1,197

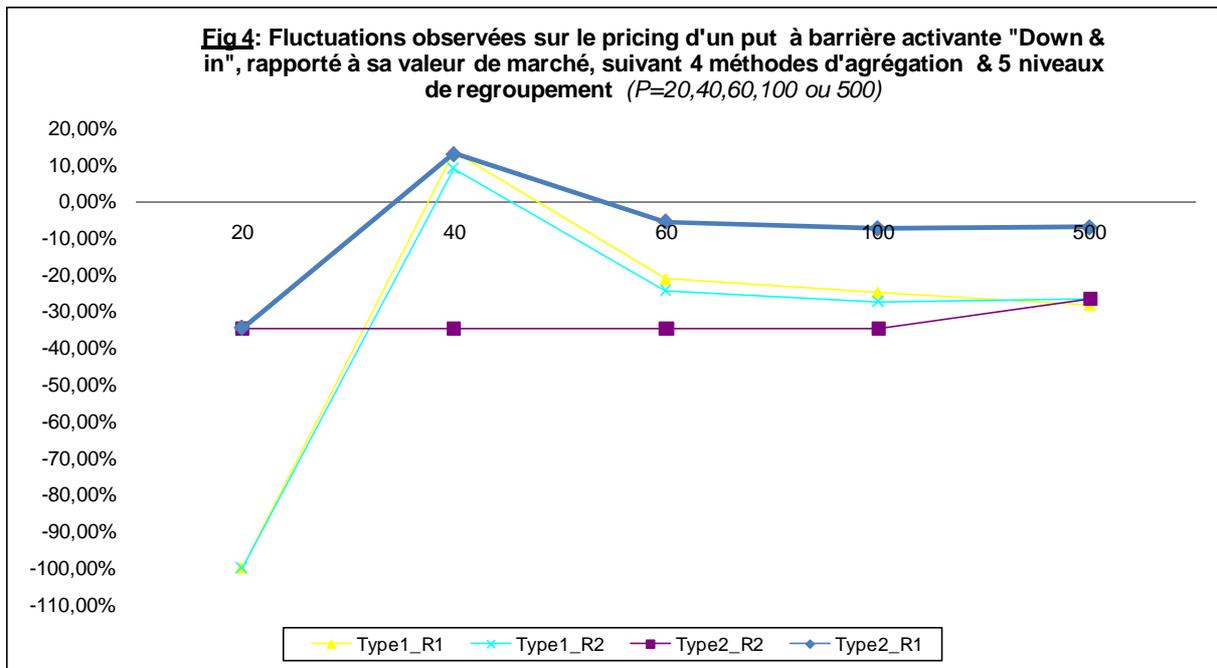
Tableau(2) : Sensibilité du prix d'un Put Barrière aux méthodes et seuils d'« agrégation de l'actif »

Les écarts présentés dans le tableau ci-dessous, contrairement aux sections précédentes sont « relatifs » (i.e. relatifs à la valeur du put obtenu sur l'échantillon complet, soit 1,197€ (cf.4.2.1.7.tableau1)), et sont obtenus en moyenne pour 100 simulations à chaque seuil de regroupement P considéré²⁰.

P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	-100,00%	-100,00%	-34,70%	-34,70%
40	13,37%	8,97%	-34,70%	12,86%
60	-21,36%	-24,43%	-34,70%	-5,66%
100	-24,93%	-27,45%	-34,70%	-7,45%
500	-28,31%	-26,37%	-26,57%	-7,18%
Echantillon Global	5,40%	5,40%	5,40%	5,40%

NB : Les écarts observés ici, pour l'échantillon global, sont dus au fait qu'il n'existe pas de formule fermée exacte pour le Put barrière étudié dans cette section (Put barrière bermudéenne).

²⁰ Etant donné le pas hebdomadaire retenue pour l'évaluation de l'option, celle-ci n'admet de formule fermée de tarification, il s'agit en réalité du cas particulier de l'option à « barrière bermudéenne ». par conséquent la valeur fermée, considérer en 4.2.1.5 n'est pas exploitable.



Observations

Les résultats ne sont pas concluants :

- L'écart le plus faible constaté est de 7,2 %, et est attribué à la méthode « Type2_R1 » Pour $P=500$;
- A $P=20$, deux méthodes présentent un résultat nul soit un écart de 100 %

4.2.3.4 ANALYSE ET CONCLUSION : RISQUE D'ECHANTILLONNAGE / VITESSE DE CONVERGENCE

Le pricing d'options à barrière est un exercice délicat du fait de la difficulté à établir la probabilité que le sous-jacent franchisse ou non la barrière établie sur la durée considérée. Difficulté amplifiée dans le cas présent par la distance entre S_0 et B (la barrière) prise égale à 50 % de S_0 . Considérant ces éléments et le fait que la volatilité retenu pour nos simulation de $S(t)$ est de 4,16 % hebdomadaire, il apparait que notre problème revient en réalité à établir un échantillon agrégé représentatif de la queue de distribution du processus $S(t)$ (Probabilité $S(t) < 50 \% * S_0$). Aussi les méthodes d'« agrégation d'actif » proposée dans le cadre de ce mémoire n'ont pas vocation à représenter les queues de distributions des processus simulés.

Les résultats de cette section rappellent que :

- les méthodes d'« agrégation d'actifs » doivent être utilisées avec précaution et que le calibrage du modèle de simulation doit être cohérent avec les objectifs poursuivis ;
- elles ne sont pas adaptées aux travaux ciblant les queues de distribution (type VAR, TailVar, etc.) ;

Afin de confirmer ou infirmer les conclusions de cette section, nous allons réaliser la même étude, en modifiant un unique paramètre qui est le niveau de la barrière.

4.2.3.5 EVALUATION PAR SIMULATION DANS LE CAS D'UNE BARRIERE SUPERIEURE

Le processus est identique à la section 4.2.3.2. Dans le cas présent, il s'agit d'un Put « Down & In » dont la barrière n'est plus placée à 50 € mais à 90 €, toute autre hypothèse égale par ailleurs.

4.2.3.6 RESULTATS ET OBSERVATIONS

Tableau(1) : Pricing par simulation

Les valeurs présentées dans le tableau ci-dessous correspondent aux valeurs moyennes obtenues sur 100 simulations d'échantillons pour chaque seuil de regroupement P étudié. Il en est de même pour la valeur obtenue sur l'échantillon global de 100 000 trajectoires.

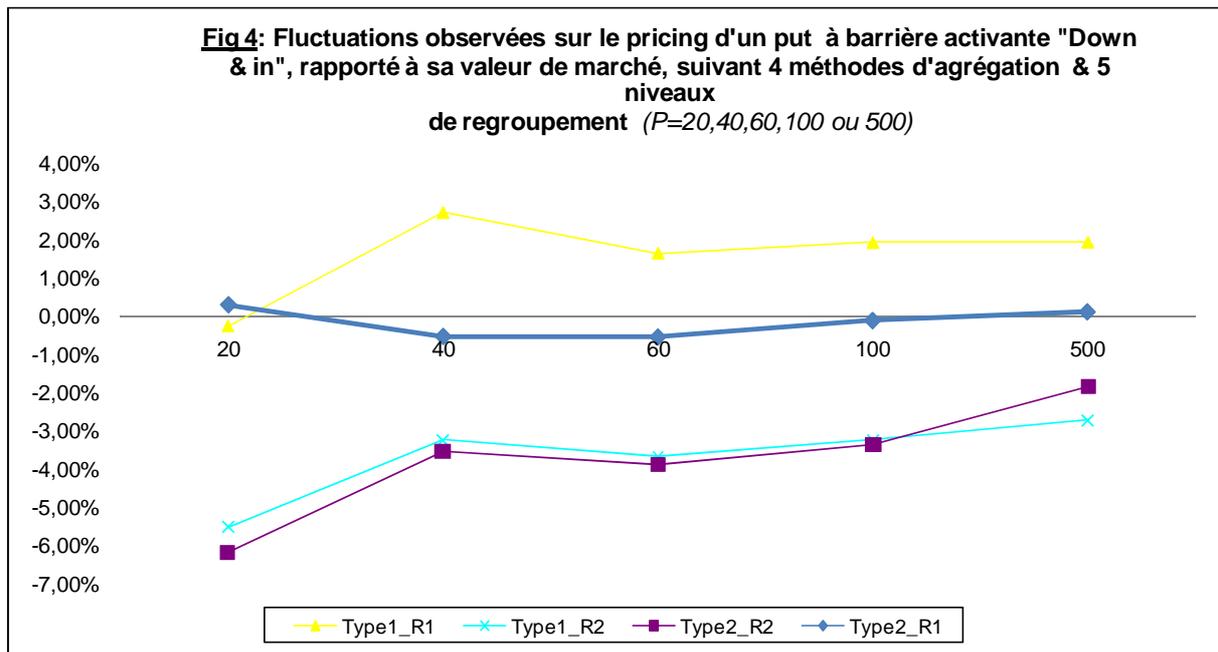
P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	11,17	10,58	10,51	11,23
40	11,50	10,84	10,80	11,14
60	11,38	10,79	10,76	11,14
100	11,42	10,84	10,82	11,19
500	11,42	10,90	10,99	11,21
Echantillon Global	11,20	11,20	11,20	11,20

Tableau(2) : Sensibilité du prix d'un Put Barrière aux méthodes et seuils d'« agrégation de l'actif »

Les écarts présentés dans le tableau ci-dessous, sont « relatifs » (i.e. relatifs à la valeur cible du put calculée à partir de l'échantillon complet, ici égale à 11,20 € pour une barrière de 90 €), et sont obtenus en moyenne pour 100 simulations à chaque seuil de regroupement P considéré²¹

P	Type1_R1	Type1_R2	Type2_R2	Type2_R1
20	-0,26%	-5,52%	-6,17%	0,29%
40	2,71%	-3,25%	-3,54%	-0,53%
60	1,64%	-3,68%	-3,90%	-0,54%
100	1,92%	-3,25%	-3,39%	-0,12%
500	1,94%	-2,72%	-1,85%	0,10%
Echantillon Global	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

²¹ Etant donné le pas hebdomadaire retenue pour l'évaluation de l'option, celle-ci n'admet de formule fermée de tarification, il s'agit en réalité du cas pas particulier de l'option à « barrière bermudéenne ». par conséquent la valeur fermée, considérer en 4.2.1.5 n'est pas exploitable.



Observations

Les 4 méthodes d'agrégation d'actif sont efficaces, à des seuils de regroupement P variables selon les méthodes :

- Les méthodes « Type2_R1 » et « Type1_R1 » présentent des résultats efficaces en terme de convergence vers la valeur cible à partir de $P=60$ avec des écarts $< 1,9\%$;
- Pour les méthodes « Type2_R2 » et « Type1_R2 », la performance est légèrement en retrait par rapport aux 2 premières, avec une efficacité atteinte entre les seuils de regroupement $P=100$ et $P=500$ pour la première, et $P=500$ voir au-delà pour la seconde.

4.2.3.7 ANALYSE ET CONCLUSION : RISQUE D'ECHANTILLONNAGE / VITESSE DE CONVERGENCE

Les résultats de cette section confirment l'hypothèse selon laquelle, dans le cas de la section 4.2.3.2, il existe un biais de modèle directement lié au mauvais calibrage de la barrière pour un niveau de volatilité donné. Ainsi lorsque la distance entre la valeur de départ du sous-jacent et la barrière du put est égale à :

- 50% de cette même valeur de départ ($L_{br,S_0} = 50\% \times S_0$) ; la problématique n'est plus de proposer une « distribution agrégée » représentative de la distribution centrale (autour de la moyenne) mais bien de la distribution de queue, du fait de la contrainte d'estimer au mieux la probabilité de franchissement de la barrière.

- 90% de la valeur de départ ($L_{br,S_0} = 50\% \times S_0$) ; l'objet de l'étude est respectée et l'application des méthodes d'« agrégation d'actif » est bien réalisé dans un contexte où les queues de distribution du processus sont faiblement sollicitées.

4.3. CONCLUSION

Dans la première partie de ce mémoire, la mise en œuvre des méthodes d'« agrégation d'actif » pour des problématiques de tarification de produits dérivés, montre que la performance de ces méthodes est toute relative à l'objectif poursuivi (la variable estimée).

Toutes fois nous avons observés quelques résultats récurrents qui confirment qu'en moyenne pour des seuils de regroupement P compris entre 100 et 500 trajectoires ces méthodes sont efficaces au sens où la distance L^1 entre, d'une part les estimateurs discrets de la variable de référence (prix du put), calculés sur les échantillons agrégés, et de l'autre la variable de référence elle-même (qu'elle soit estimée à partir de l'échantillon complet où calculée via une formule fermée lorsqu'elle existe) est presque sûrement, strictement inférieure à 1,9 %.

Enfin de tels résultats ne sont envisageables qu'en dehors de problématiques liées aux queues de distribution et quantiles du surplus, validant de fait, que les méthodes d'« agrégation d'actif » seraient une solution potentielle aux problématiques assurantielles de type évaluation du « Best Estimate », ce que l'on s'attachera à démontrer dans la seconde partie de ce mémoire.

**PARTIE II :
SOLVABILITE II LE QIS 4**

1. INTRODUCTION

1.1. LA NOTION DE SOLVABILITE

La **solvabilité** d'une compagnie d'assurance est contrainte par une réglementation visant à s'assurer que cette dernière aura la capacité de faire face à ses engagements vis-à-vis de ses assurés/bénéficiaires, quelle que soit la conjoncture dans laquelle elle évolue.

D'une manière générale, une compagnie d'assurance dans le cadre d'une recherche de solvabilité se doit de tarifier et de provisionner correctement ses engagements, en adéquation avec la réglementation en vigueur dans le pays où elle exerce son activité. A titre d'exemple, les provisions doivent être calculées selon le principe de prudence dans la réglementation française actuelle.

L'activité d'assurance est, par nature, risquée car soumise à la survenance de sinistres potentiels inconnus. L'inversion du cycle de production en assurance ajoute aux risques financiers classiques, un risque dit **assurantiel** qui rend cette activité fortement aléatoire sur le principe. Par conséquent, il se peut dans certains cas, lorsque la conjoncture devient défavorable, que les provisions ne suffisent pas à couvrir les engagements d'une compagnie d'assurance.

Partant de ce constat, les autorités de contrôle encadrent l'activité d'assurance en exigeant un niveau minimum de fonds propres pour faire face aux aléas de l'activité. Ce niveau minimum constitue la **marge de solvabilité**.

« La marge de solvabilité fournit une source supplémentaire de capitaux permettant de faire face aux situations les plus imprévisibles et de protéger ainsi au mieux les clients des sociétés d'assurance. »²². La marge de solvabilité représente ainsi un « coussin » permettant d'absorber les écarts négatifs par rapport aux prévisions de sinistres.

Pour conclure, la notion de solvabilité se définit selon les deux grands principes suivant :

- ❖ en assurance, la solvabilité est intimement liée à celle de protection des **assurés**, alors qu'elle peut prendre d'autres significations dans d'autres branches. Toute compagnie se doit en effet d'honorer ses engagements.
- ❖ la notion de solvabilité est directement liée à celle de **capital**. Être solvable pour une compagnie d'assurance signifie détenir un capital suffisant, la protégeant, autant que faire se peut d'une situation de faillite.

²² Note de la Commission européenne

1.2. LES GRANDS PRINCIPES DE SOLVABILITE II

Le projet Solvabilité II a vocation à réformer en profondeur les règles de solvabilité auxquelles sont soumises les groupes d'assurance ainsi qu'à créer un système plus harmonisé, intégrant une meilleure prise en compte des risques encourus par les organismes d'assurance. En effet les règles actuelles en vigueur ne permettent pas de prendre en compte explicitement les règles de management telles que la politique de participation aux bénéficiaires, la détermination des taux servi, le risque opérationnel, ... etc.

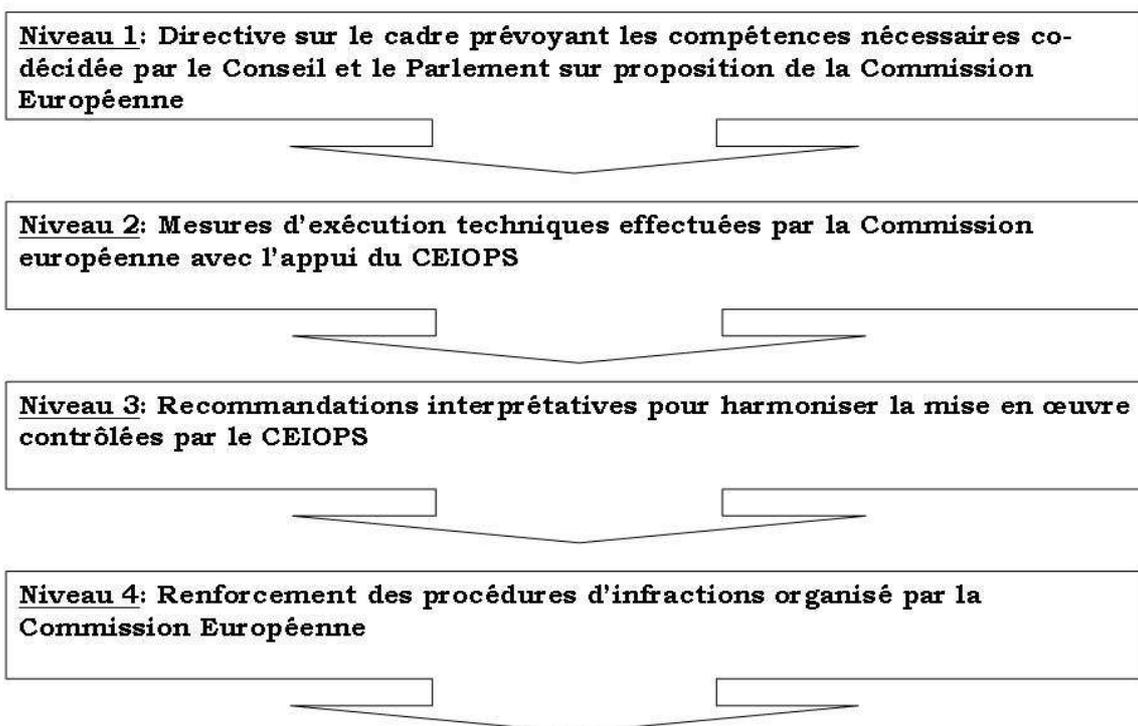
En 2004, Le CEIOPS, Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors, a été créé pour mettre en place les mesures techniques du projet.

Le projet Solvabilité II est scindé en deux phases :

- ❖ une première phase de réflexion sur les principes généraux,
- ❖ une deuxième phase de mise au point détaillée des méthodes de prise en compte des différents risques.

Cette seconde étape suit l'approche Lamfalussy, qui a pour but d'assurer la mise en place d'un cadre réglementaire et prudentiel efficace au niveau de l'Union Européenne.

L'approche Lamfalussy



1.2.1 UNE NOUVELLE APPROCHE DE VALORISATION

1.2.1.1 UNE APPROCHE EN PRINCIPE

Solvabilité II s'articuler en principes généraux plutôt qu'en règles de calcul. Le projet fournit des lignes directrices à suivre dans l'évaluation des différents postes bilantiels et la détermination du capital requis, sans pour autant fixer des règles de calcul précises.

1.2.1.2 UNE APPROCHE BILANTAIRE

Solvabilité II se base uniquement sur le bilan et non sur le compte de résultats. Le capital requis sera déterminé par des projections des différents éléments du bilan.

La totalité du bilan est prise en compte dans l'évaluation de la marge de solvabilité, et non plus uniquement les postes du passif. Ceci vise à faire intervenir tous les risques.

1.2.1.3 UNE APPROCHE ECONOMIQUE

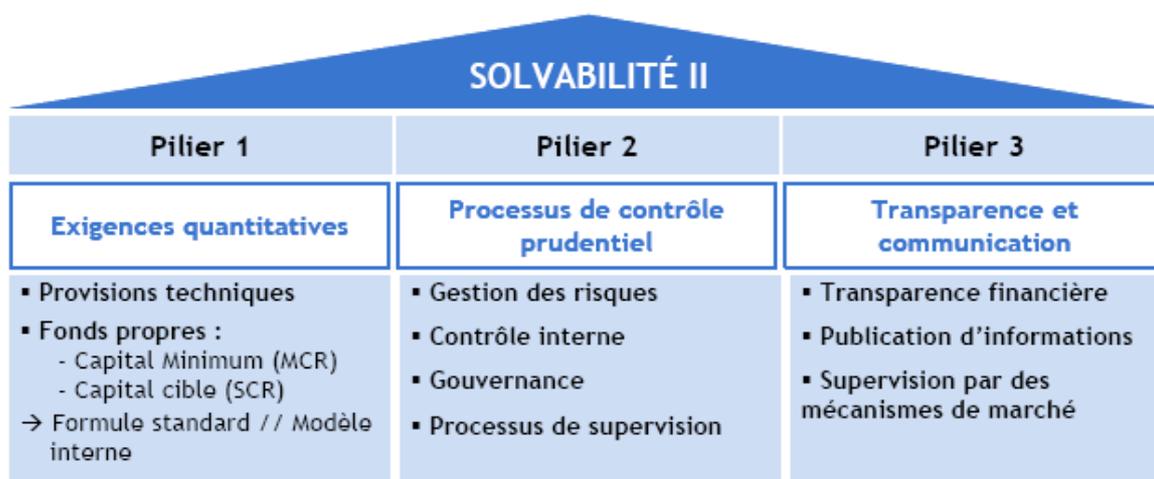
Selon cette approche, tous les actifs et les passifs doivent être évalués de façon cohérente avec le marché. La valorisation ne se fait donc plus sur base d'une comptabilité au coût historique mais sur base du marché. Ceci a pour corollaire (nous y reviendrons longuement par la suite) que, lorsqu'un prix de marché existe, c'est celui-ci dont on doit tenir compte dans la valorisation. Lorsqu'un tel prix n'est pas disponible, il faut se baser sur des méthodes de projection de cash-flows. Ce concept peut être mis en parallèle avec la notion de « juste valeur » développée dans les normes IFRS .

Cette valorisation des actifs et des passifs permettra de déterminer le capital disponible, ainsi défini comme la différence entre la valeur de marché des actifs et celle des passifs.

1.2.2 UNE ARCHITECTURE EN TROIS PILIERS

Inspirée de développements dans le secteur bancaire, le dispositif Solvabilité II s'appuie sur trois piliers complémentaires

Figure 1: Architecture du projet Solvabilité II



- ❖ Le **premier pilier** contient les **exigences financières quantitatives** du système. Il comprend ainsi des dispositions sur les provisions, l'évaluation des actifs, les risques qui doivent être pris en compte ainsi que leur mesure et leur dépendance et la détermination des actifs dans lesquels investir. Ce pilier définit en particulier les calculs de marge de solvabilité, c'est-à-dire la détermination des ressources financières qu'une compagnie d'assurance se doit de disposer afin d'être considérée comme solvable.
- ❖ Le **deuxième pilier** définit, quant à lui, les **exigences qualitatives** qu'une compagnie d'assurance se doit de remplir. On parlera des règles de contrôle interne, de gestion des risques et de leur application par les autorités de contrôle. Il comprend l'évaluation des risques non pris en compte au niveau du premier pilier, c'est-à-dire celle des risques plus « qualitatifs ».
- ❖ Enfin, le **troisième pilier** renseigne les **règles de transparence** à respecter afin de favoriser les disciplines de marché. Il contient ainsi les règles d'information publique.

1.2.3 METHODE DE DETERMINATION DU CAPITAL

1.2.3.1 APPROCHE BASEE SUR DES FACTEURS VS APPROCHE BASEE SUR LE RISQUE

Pour rappel, la détermination du capital requis dans Solvabilité I est basée sur une approche « facteur ». En d'autres termes, le capital requis est une fraction des postes considérés comme risqués.

Le projet Solvabilité II propose, quant à lui, une approche basée sur le risque²³ : les exigences en termes de capital sont fonction des risques réellement encourus par la compagnie d'assurance. Afin de refléter, au plus près, la réalité des compagnies d'assurance et d'éviter notamment une mobilisation superflue de fonds propres, les exigences en termes de capital tiendront également compte, d'une part, de la diversification entre les risques et, d'autre part, des outils de transferts du risque.

1.2.3.2 DEUX NIVEAUX DE CAPITAL

Le Projet Solvabilité II évalue la situation financière des compagnies d'assurance à l'aide de deux approches complémentaires : l'une réglementaire à travers la solvabilité minimale, l'autre économique, à travers le capital de solvabilité.

Il existe tout d'abord une exigence de **capital de solvabilité requis** (CSR²⁴). Ce capital de solvabilité est fondé sur le risque et son estimation doit être « cohérente avec le marché ». Il correspond au niveau de fonds propres requis afin que la compagnie d'assurance ne soit exposée qu'à une faible probabilité de faillite.

Il existe ensuite une exigence minimale de fonds propres absolue, un **capital minimum requis**(CMR²⁵) à détenir. Ce capital minimum s'appuie sur le bilan statutaire des compagnies d'assurance et ne reflète pas les risques encourus par celles-ci. Ce capital minimum est ainsi insensible au risque et indépendant d'un modèle. Il correspond à une exigence de capital beaucoup plus faible que le capital de solvabilité requis.

²³ Ce type d'approche détermine un capital connu sous le nom de *Risk Based Capital*.

²⁴ SCR en anglais

²⁵ MCR en anglais

Le capital de solvabilité fait office de « sonnette d'alarme ». Si le capital effectivement constitué devient inférieur à ce premier seuil, cela ne signifie pas que la compagnie d'assurance concernée est insolvable. Cependant, les interventions des autorités de contrôle seront initiées et viseront à remettre la compagnie « sur le droit chemin » : plans pour atteindre le capital de solvabilité, remaniement de portefeuille en actifs moins risqués, amélioration de la gestion actif-passif, ... Les conséquences d'une telle situation ne sont donc pas irréversibles, tant que le reliquat du capital constitué reste proche du capital requis.

Le capital minimum est en revanche un plancher sous lequel il est interdit de descendre. Si le capital de la compagnie d'assurance vient à descendre sous ce second niveau, l'intervention des autorités de contrôle est immédiate et les mesures entreprises sont sévères, pouvant aller jusqu'au retrait d'agrément.

Les méthodes de détermination des niveaux de capital requis sont distinctes.

Le capital de solvabilité est calculé de façon élaborée. Une **approche standard** de calcul est proposée. Mais un des objectifs de Solvabilité II est de créer des incitations, destinées aux compagnies d'assurance afin qu'elles comprennent mieux et gèrent mieux leurs propres risques. Ceci se traduit en une possibilité pour ces dernières d'avoir recours à un **modèle** développé en **interne** et destiné à mieux refléter leur profil de risque. Le capital minimum sera, par contre, calculé de manière moins spécifique, à l'aide d'une approche de type Solvabilité I.

2. PRESENTATION DU QIS

2.1. OBJECTIF DU QIS

Cinq études d'impact quantitatives (« QIS ») ont été réalisées à ce jour.

Si le troisième questionnaire du pilier I (QIS3) était un test global du futur système et un calibrage de la formule standard pour le calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR, niveau de capital qui doit permettre à l'entreprise d'absorber un certain montant de pertes, correspondant en principe à une probabilité de ruine sur un horizon d'un an inférieure à 0,5 %). Il est à noter que la formule de calcul du modèle standard est modulaire, elle agrège les différents types de risques (marché, souscription vie, etc.).

Les quatrième et cinquième études quantitatives d'impact (QIS4, QIS5) viennent respectivement simplifier la formule standard proposée par le QIS3 et re-calibrer le paramétrage proposé par le QIS4.

Aussi, elles donnent des clarifications concernant l'hypothèse la plus probable (« *best estimate* ») et la marge pour risque (« *risk margin* », calculée selon la méthode du coût du capital) dans le calcul des provisions techniques (le « *best estimate* » et la marge pour risque sont définis dans la *section 2.3.1.2* Flux non-réplicables).

Les calculs réalisés dans le cadre ce mémoire seront basés en termes de paramétrage sur les recommandations de la quatrième étude d'impact Quantitative (QIS4). Cela étant lié aux dates et contexte de réalisation des travaux.

2.2. EVALUATION DES ACTIFS DANS LE QIS

Dans le cadre du calcul du SCR, de nombreux stress reposent sur le calcul de la NAV. La NAV, c'est-à-dire « *Net value of assets minus liabilities* », représente la valeur des actifs nette des passifs. Aussi, il convient de déterminer dans un premier temps le montant des actifs. Cette première étape vise ainsi à décrire le périmètre, les données et la méthode d'évaluation des dits actifs.

$$\text{NAV} = \text{Actif} - \text{Passif}$$

$$\Delta \text{NAV} = (\text{Actif} - \text{Passif})_{\text{avant choc}} - (\text{Actif} - \text{Passif})_{\text{après choc}}$$

Pour le calcul du SCR, il s'agit de calculer la différence entre la NAV avant choc et la NAV après choc. Lorsque le choc n'intervient que sur les actifs, cela revient au même de faire la différence entre les actifs choqués et non choqués que de considérer la différence de NAV.

Les différents actifs, dits fiables, doivent être évalués à leur valeur de marché en Solvabilité II. Ce qui signifie que lorsqu'il existe des cours observables sur des marchés très actifs et liquides, les valeurs des actifs doivent être égales à leurs cours de marché ; il s'agit de l'approche « *mark to market* ».

Par ailleurs lorsque l'approche « *mark to market* » n'est pas applicable, il convient d'utiliser un processus « *mark to model* ». Une évaluation « *mark to model* » est une évaluation qui doit être « benchmarkée », extrapolée ou bien calculée à partir d'une donnée de marché.

2.3. EVALUATION DES PASSIFS DANS LE QIS

Concernant les passifs, l'évaluation des provisions techniques doit être effectuée en distinguant les passifs répliquables (ou *hedgeable*), des passifs non-répliquables (ou *non-hedgeable*) : à chacun de ces types de passifs sera associé une méthode d'évaluation. En outre, il est à noter que dans le calcul de ces engagements, le QIS consacre une place importante aux simplifications et autres approximations.

2.3.1 PRINCIPES GENERAUX ET DEFINITIONS

Le passif est principalement constitué des provisions techniques qui permettent à l'entreprise d'assurance d'honorer ses engagements envers ses assurés et leurs bénéficiaires.

Dans le projet de directive, les provisions techniques sont comptabilisées selon leur "*Valeur Actuelle de Sortie*", ou aussi appelée "*Current Exit Value*", dans le bilan qui se définit ainsi :

La « *Current Exit Value* » correspond au montant qu'une entreprise d'assurance s'attendrait à devoir payer aujourd'hui si elle transférait sur le champ ses droits et obligations contractuels à une autre entreprise.

Cette définition est en adéquation avec le principe selon lequel les provisions techniques doivent être cohérentes avec le marché.

Notons que suivant ce principe toujours, il existe deux méthodes d'évaluation du passif en solvabilité II, selon que celui-ci soit dit « répliquable » ou « non-répliquable » :

2.3.1.1 FLUX REPLICABLES

Un passif est répliquable si les flux qu'il engendre peuvent être parfaitement répliqués et couverts à l'aide d'instruments financiers se monnayant sur un marché suffisamment actif, liquide et transparent (par exemple les passifs des bons de capitalisation et d'épargne en UC sans garantie plancher sont théoriquement répliquables).

Il est à noter qu'un marché est supposé actif, liquide et transparent si :

- ❖ les participants du marché peuvent exécuter rapidement un grand nombre de transactions avec un faible impact sur le prix ;
- ❖ les informations sur les échanges courants et leurs prix sont disponibles au public ;
- ❖ les deux points ci-dessus sont vérifiés à tout instant.

Dans le cas où les passifs répliquables, les provisions techniques sont calculés directement à partir du montant global de la valeur observée sur le marché de ces instruments financiers répliquant le portefeuille.

D'après les Orientations Nationales Complémentaires²⁶, il y a peu de passifs répliquables car la couverture du passif doit être quasi parfaite.

Cependant, il convient de noter que si une option, une garantie ou une part du contrat peut être isolée et peut être répliquée sur un marché actif, liquide et transparent, les flux associés sont classés parmi les flux répliquables (cf. TS.II.A.19).

En revanche, lorsque qu'aucune distinction n'est possible entre les flux répliquables et non-répliquables, la méthode de calcul relative aux flux non répliquables doit être retenue.

²⁶ ONC publiées par l'ACP à partir du QIS 4 afin de limiter l'hétérogénéité des pratiques des différents acteurs nationaux observées lors du QIS 3.

2.3.1.2 FLUX NON-REPLICABLES

Dans le cas de passifs non répliquables, la provision technique correspond, selon les spécifications techniques publiées par le CEIOPS, à la somme d'un "*best estimate*" et d'une "*marge pour risque*".

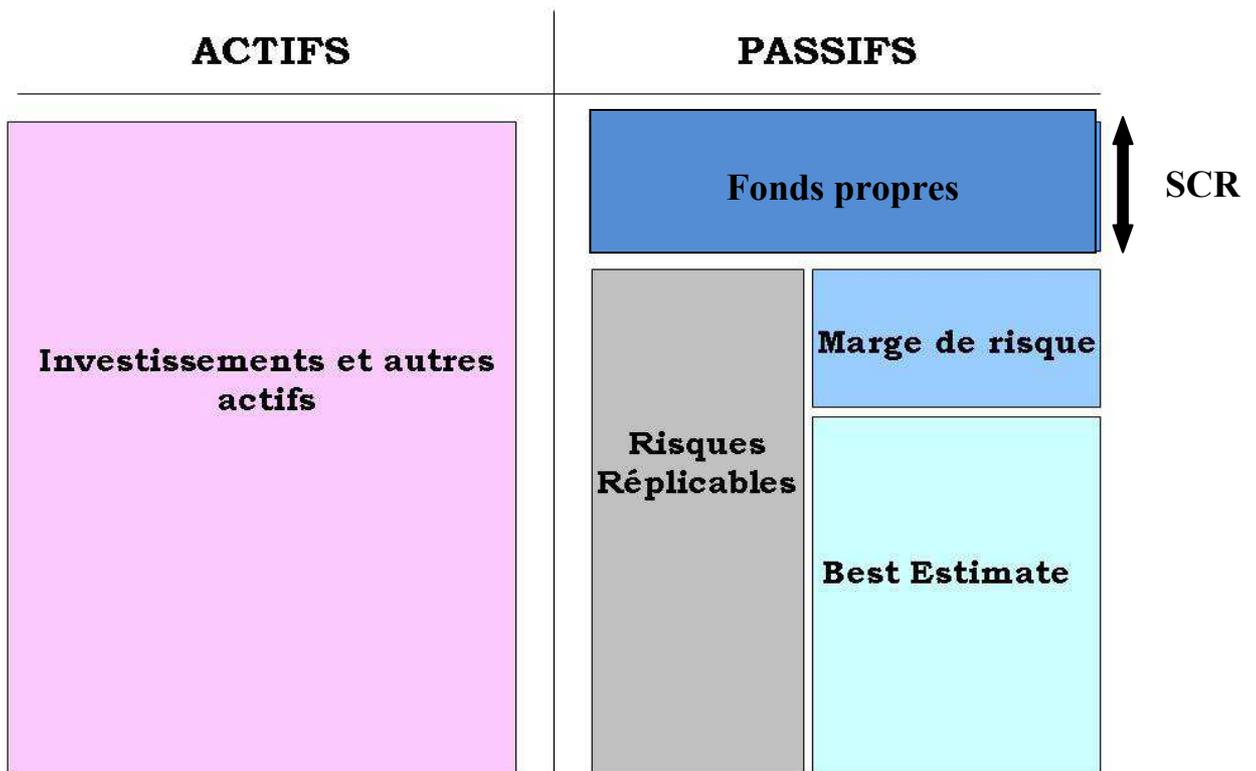
La **définition du « best estimate »**, donnée par le CEIOPS est la suivante :

Le « Best Estimate » correspond à la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs, ajustés pour tenir compte de l'inflation, qui seront requis pour honorer les obligations d'assurance pendant toute leur durée résiduelle.

La **marge pour risque** est, quant à elle, définie comme suit :

La « Marge pour Risque » garantit que le montant global des provisions techniques soit équivalent à la somme que les entreprises d'assurance s'attendraient à devoir payer aujourd'hui si elles devaient transférer sur le champ leurs droits et obligations contractuels à une autre entreprise. Elle est donc établie selon le principe de la « current exit value ».

Ainsi le **bilan simplifié**, sous la directive Solvabilité II, devient :



2.3.1.3 SEGMENTATION DES PASSIFS « NON REPLICABLES »

Le « *best estimate* » doit être réalisé selon une segmentation au moins aussi fine que celle exigée par le QIS et décrite ci-après.

Un premier de niveau de segmentation consiste à distinguer d'une part les engagements relevant de l'assurance vie (ou techniquement assimilable à de l'assurance vie) et d'autre part les engagements relevant de l'assurance non-vie (ou techniquement assimilable à de l'assurance non-vie). En particulier, les engagements correspondant à de l'assurance santé doivent être segmentés en engagements assimilables à de l'assurance vie ou assimilables à de l'assurance non-vie selon leur nature technique.

Au niveau des engagements d'assurance vie (y compris l'assurance santé), la segmentation possède deux niveaux, dont le premier niveau se décompose comme suit:

1. Contrats avec participation aux bénéfices ;
2. Contrats pour lesquels l'assuré supporte le risque d'investissement ;
3. Autres contrats sans participation aux bénéfices ;
4. Acceptation de réassurance.

Le second niveau de segmentation se présente comme suit :

- a. Contrat dont le risque principal est le décès ;
- b. Contrat dont le risque principal est la survie ;
- c. Contrat dont le risque principal est l'invalidité ;
- d. Contrat d'épargne.

Rappelons que dans le cadre de ce mémoire, nous étudions un portefeuille de contrats d'épargne en euro, avec participation aux bénéfices.

2.3.2 EVALUATION DES PASSIFS NON-REPLICABLES: BEST ESTIMATE

Après en avoir présenté les principes généraux, il convient de décrire et de détailler les principes d'évaluation du « *best estimate* », conformément au principe du QIS

2.3.2.1 HORIZON DE PROJECTION

Il est à noter que l'horizon de projection doit être suffisamment long pour saisir tous les flux de trésorerie importants résultant du contrat ou de groupes de contrats évalués doit être utilisé. Le cas échéant, l'organisme doit s'assurer que l'utilisation d'un horizon de projection plus long n'affecte pas les résultats de manière significative.

2.3.2.2 ACTUALISATION

Concernant l'actualisation, les flux financiers doivent être actualisés au taux sans risque de marché observé pour des instruments de même durée.

2.3.2.3 DEPENSES

S'agissant de la gestion, les chargements sur contrats et les dépenses futures (frais) doivent être intégrés dans les projections de flux.

2.3.2.4 REASSURANCE

Le « *best estimate* » du passif d'assurance doit être déterminé sur la base des flux bruts de réassurance.

2.3.2.5 COTISATIONS FUTURES

Les flux inclus dans le calcul du « *best estimate* » doivent être associés aux contrats en cours. Ainsi, les cotisations périodiques futures correspondant à l'engagement de l'assuré dans le cadre du contrat existant sont prises en compte. En revanche, les cotisations futures attendues, mais non incluses dans le contrat existant ne sont pas prises en compte. Pour les contrats reconductibles par tacite reconduction, les cotisations ne sont prises en compte qu'à l'issue de la reconduction effective, c'est-à-dire à l'issue de la période de renonciation. Aussi, les cotisations futures sont prises en compte dans la mesure où elles répondent à au moins l'une des conditions suivantes :

- ❖ l'assureur peut juridiquement contraindre le souscripteur à payer les cotisations ;
- ❖ les montants garantis des règlements de cotisations sont fixés à la date de souscription.

2.3.3 EVALUATION DES PASSIFS NON-REPLICABLES : MARGE POUR RISQUE

Cette partie a pour objet la description des principes d'évaluation de la « *marge pour risque* », qui vient compléter le « *best estimate* » pour obtenir les provisions techniques des engagements non-réplicables, conformément aux principes énoncés du QIS.

Il s'agit donc de la seconde composante des provisions technique avec le « *best estimate* » décrit ci-dessus. Notons cependant que toutes références aux provisions techniques dans le cadre du calcul du SCR (ou plus précisément de la NAV) excluent la marge pour risque, conformément aux principes du QIS4 et QIS5.

Aussi nous nous attacherons, dans cette partie à présenter, succinctement les grands principes seulement de calcul de la marge pour risque.

2.3.3.1 ÉTAPES DE CALCUL

Le principe de calcul de la « *marge pour risque* » avec la méthode CoC se résument en trois étapes :

- ❖ détermination du SCR (pour le risque opérationnel, le risque de souscription et le risque de contrepartie des réassureurs) pour chaque exercice futur jusqu'à la date de liquidation du portefeuille ;
- ❖ multiplication de chacun des futurs SCR par le facteur de coût du capital afin d'obtenir le coût de détention des futurs SCR (il est à noter que tous les participants doivent partir de l'hypothèse d'un facteur de coût de capital de 6 % supérieur au taux d'intérêt sans risque pour l'évaluation de la marge pour risque) ;
- ❖ actualisation des montants obtenus par la courbe des taux sans risque, la somme de ces montants actualisés correspondant à la marge pour risque recherchée.

2.3.3.2 ESTIMATION DU RISQUE OPERATIONNEL

La charge du risque opérationnel peut être calculée directement à partir de la formule standard. La formule utilise comme paramètres les cotisations acquises brutes de réassurance pour l'assurance vie ainsi que les « *best estimate* » des provisions techniques brutes de réassurance pour l'assurance vie. Il est à noter qu'il existe également une borne supérieure proportionnelle au BSCR (le BCSCR est défini dans la section **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

2.3.3.2 SIMPLIFICATIONS POUR L'ESTIMATION DE LA MARGE POUR RISQUE

La principale difficulté dans la méthode du CoC réside dans le calcul des SCR futurs. De fait, le QIS propose des méthodes simplificatrices pour les risques autres que le risque opérationnel. Pour l'ensemble des risques concernés, deux types de méthodes simplificatrices sont renseignées (cf. annexe *section I.3.*)

2.4. BEST ESTIMATE POUR LES CONTRATS D'ÉPARGNE

Le portefeuille d'assurance étudié dans le cadre de ce mémoire est constitué exclusivement de contrat d'épargne en euro.

L'ensemble de ces contrats propose une faculté de rachat, total ou partiel entièrement à la main de l'assuré.

De par sa faculté d'exercer son option selon son bon vouloir, le comportement de l'assuré est une donnée difficile à modéliser, mais il est un élément d'analyse observé dans la majeure partie des cas et repris dans le cadre de la directive solvabilité II, qui démontre que l'assuré exercera son option dans le cas où le taux de rémunération de son épargne est anormalement faible par rapport à l'offre de son contrat d'une part et celle de l'ensemble du marché de l'autre.

Voyons en détails le fonctionnement de ces produits d'épargne :

2.4.1 CONTRATS D'ÉPARGNE : PASSIFS REPLICABLES OU NON REPLICABLES ?

Comme indiqué au paragraphe 2.3.1.1 Flux répliquables, un passif est répliquable si les flux qu'il engendre peuvent être parfaitement répliqués et couverts à l'aide d'instruments financiers se monnayant sur un marché suffisamment actif, liquide et transparent.

Hors l'option de rachat d'un contrat d'épargne crée un aléa sur la date d'exercice de ce rachat et par la même du terme du contrat. Ainsi il devient difficile de répliquer les flux de passif, sans information précise sur leur échéance au delà même de la difficulté à trouver des actifs liquide monnayable de même échéance, dans l'éventualité où celle-ci serait connue.

Ainsi le passif d'un contrat d'épargne en euro avec option de rachat est considéré comme un passif « non répliquable », pour lequel il conviendra donc de calculer un « best estimate » ayant pour particularité d'être sensible aux paramètres de rachat.

2.4.2 CARACTERISTIQUES DE L'ÉVALUATION DES CONTRATS D'ÉPARGNE

L'évaluation des passifs des contrats d'épargne et de capitalisation revient à identifier les risques et contraintes de l'assureur pour ces garanties. De manière générale, l'évaluation dépend du comportement de l'assureur et de celui de l'assuré. En outre, l'évaluation devra distinguer le « *best estimate* » garanti et la partie incluant les participations aux bénéfices discrétionnaires futurs (FDB, *Future Discretionary Benefits*) le cas échéant.

2.4.2.1 PRISE EN COMPTE DU COMPORTEMENT DE L'ASSUREUR

Concernant le comportement de l'assureur, l'évaluation doit tenir compte du processus de revalorisation, qui dépend théoriquement – pour les contrats libellés en euros – de l'engagement contractuel de taux garanti (taux minimum – TMG –, taux technique), de la participation aux bénéfices réglementaire et contractuelle, de la participation aux bénéfices purement discrétionnaire et de l'éventuelle provision pour participation aux bénéfices (PPB) déjà constituée à la date d'inventaire.

En outre, ces éléments sont directement liés à la gestion du portefeuille financier de l'assureur (réalisation de plus ou moins values latentes qui participent à la constitution du taux de rendement comptable, etc.) et aux performances financières qui en découlent. Ainsi par exemple, si l'assureur retient une stratégie de recomposition annuelle du portefeuille financier, pour respecter les proportions initiales des différentes poches d'actif, les rendements présenteront des moyennes et des écart-type différents de ce qu'il observerait s'il ne touchait pas à ces actifs sur toute la durée du contrat (sous les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de probabilité risque neutre). Cette différence sur les rendements se traduirait alors par **une différence sur les processus de revalorisation.**

2.4.2.2 PRISE EN COMPTE DU COMPORTEMENT DE L'ASSURÉ

Comme évoqué antérieurement, le comportement de l'assuré impacte l'évaluation du passif, au travers de sa capacité d'exercer l'option de rachat de son contrat et particulièrement de la date à laquelle cet exercice se fait. Pour les contrats d'épargne en euro, c'est le principal facteur attribué à l'assuré qui puissent agir sur l'évaluation du passif.

L'Option de Rachat

L'assuré aura tendance à racheter le contrat en cas de hausse des taux significative et durable et si le processus de revalorisation de l'assureur ne lui semble pas concurrentiel.

Aussi, dans ses orientations nationales complémentaires (ONC) aux spécifications techniques du QIS4, l'ACP précise que les participants sont tenus de distinguer les rachats structurels, que l'on peut observer dans un contexte économique « normal », et les rachats conjoncturels, qui interviennent dans un contexte concurrentiel lorsque le participant préfère racheter son contrat et investir dans un autre produit.

Pour la modélisation des rachats structurels, la note de l'ACP précise que les participants doivent utiliser des lois d'expérience si celles-ci sont conformes aux observations passées. Dans la pratique, ces lois pourront dépendre de l'âge de l'assuré, de l'ancienneté fiscale, de l'environnement financier, etc.

Les rachats conjoncturels dépendent de l'écart entre le taux de rendement du produit et le taux de rendement attendu par le bénéficiaire. À cet effet, l'ACP a fourni une fonction (**cf. annexe section 1.3**), dépendant uniquement de l'écart entre le taux servi et un taux dépendant de l'environnement économique, permettant de modéliser et d'uniformiser le traitement des rachats conjoncturels.

Les éléments ci-dessus permettent de déterminer la valeur intrinsèque des rachats. Pour disposer d'une meilleure évaluation du risque, il conviendra ainsi d'utiliser en complément des modèles stochastiques permettant d'estimer la valeur temps de ces valeurs de rachats, et donc de disposer d'une meilleure estimation de la valeur totale des rachats.

2.4.2.3 EVALUATION DU BEST ESTIMATE GARANTI

L'évaluation de la partie garantie du « *best estimate* » doit être effectuée de façon déterministe. En outre, cette partie du *best estimate* total doit être évaluée selon les dispositions suivantes :

- ❖ la PPB constituée à la date d'inventaire doit être décomposée en fonction de la date de dotation ;
- ❖ chacun des millésimes de la PPB devra être incorporé à l'épargne ou au capital constitutif de la retraite au plus tard 8 ans après sa dotation ;
- ❖ outre l'incorporation de la PPB, l'épargne ou le capital constitutif devra être revalorisé chaque année conformément aux engagements de taux (TMG ou taux technique) prévus par le contrat ;
- ❖ les frais et chargements futurs doivent être pris en compte ;
- ❖ la PPB peut être utilisée pour servir la participation aux bénéficiaires inclus dans le TMG du contrat (par contre, elle ne peut en aucun cas être utilisée pour servir le taux technique).

En outre, les flux futurs devront être évalués en tenant compte des rachats et de la mortalité et devront être actualisés avec la courbe des taux fournie par le CEIOPS.

2.4.2.4 EVALUATION DU FUTURE DISCRETINARY BENEFITS (FDB)

Une fois cette partie garantie calculée, l'ACP précise dans ses ONC qu'il convient de calculer le « *best estimate* » total. Pour cette évaluation, les flux futurs doivent être calculés en prenant en compte, au-delà des éléments du sous-paragraphe 2.4.2.3 :

- ❖ l'évolution future de la PPB ;
- ❖ les revalorisations de l'épargne ou du capital constitutif prenant en compte, en plus des engagements de taux et contraintes de participation aux bénéficiaires réglementaires et contractuelles, toutes les revalorisations discrétionnaires ;
- ❖ des hypothèses de rachats et/ou de mortalité mises à jour ;
- ❖ des frais et chargements futurs mis à jour.

À la fin de la simulation, l'épargne accumulée est supposée intégralement rachetée par les assurés et le solde de la PPB à cette date sera incorporé à ces rachats. Sera aussi incorporée la part revenant aux assurés des plus-values latentes réalisées du fait des rachats à la fin de la simulation.

L'actualisation de tous ces flux futurs donne l'évaluation du « *best estimate* » total. Les *Future Discretionary Benefits* (FDB) s'en déduisent comme la différence entre le « *best estimate* » total et la partie garantie.

3. SCR_{MKT} : MODULE RISQUE DE MARCHÉ

3.1. PRESENTATION DU MODULE SCR_{MKT}

Après avoir décrit et mesuré les actifs et les passifs, il est possible d'entamer les évaluations des charges de capital (à travers les stress tests) pour l'ensemble des risques identifiés. Ces évaluations sont regroupées en trois modules, dont le premier est relatif au risque de marché.

Le module risque de marché mesure les risques de volatilité des cours de marché des instruments financiers. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements dans le niveau des variables financières telles que les cours des actions, les taux d'intérêt, les cours de l'immobilier, etc.

3.2. MKTINT : RISQUE DE TAUX D'INTERET

Le risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations de la structure de la courbe de taux d'intérêt ou à la volatilité des taux d'intérêt.

3.2.1 IMPACTS SUR LE PASSIF

Il s'agit d'actualiser les flux de trésorerie à partir des taux d'intérêt sous tension, à la hausse ou à la baisse, conformément au tableau suivant²⁷, l'objectif étant de maximiser la NAV.

Maturité t (années)	1	2	3	4	5	6	7
Variation relatives $s^{up}(t)$	0,94	0,77	0,69	0,62	0,56	0,52	0,49
Variation relatives $s^{down}(t)$	-0,51	-0,47	-0,44	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37

Maturité t (années)	8	9	10	11	12	13	14
Variation relatives $s^{up}(t)$	0,46	0,44	0,42	0,42	0,42	0,42	0,42
Variation relatives $s^{down}(t)$	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34	-0,34

Maturité t (années)	15	16	17	18	19	20 +
Variation relatives $s^{up}(t)$	0,42	0,41	0,40	0,39	0,38	0,37
Variation relatives $s^{down}(t)$	-0,34	-0,33	-0,33	-0,32	-0,31	-0,31

²⁷ cf. TS.IX.B.5 du QIS4

3.2.2 IMPACTS SUR L'ACTIF

Concernant l'actif, il convient de déterminer l'impact d'une variation des taux d'intérêt sous tension à la hausse ou à la baisse (conformément au tableau ci-dessus) sur la valeur de l'actif utilisée pour le calcul de la NAV (la tension qui maximise la NAV sera retenue).

La valeur de l'actif après le choc sur le taux d'intérêt peut toutefois être évaluée à partir de la sensibilité (en supposant cette information disponible) par la relation suivante :

$$ValM_choc = ValM \times (1 - SensT \times r_n \times s_n^{up}) \text{ ou } ValM_choc = ValM \times (1 - SensT \times r_n \times s_n^{down})$$

avec :

Val représente la valeur de marché de l'obligation avant le choc ;
 $ValM_choc$ représente la valeur de marché de l'obligation après le choc ;
 $SensT$ représente la sensibilité au risque de taux ;
 N | représente la durée.

Toutefois, dans le cas où l'information sur la sensibilité n'est pas disponible, l'impact peut être mesuré par la variation de la valeur de l'obligation (en supposant dans ce cas que l'information sur le coupon des obligations soit disponible – les produits sensibles au taux d'intérêt pouvant être assimilés à des obligations –), à l'aide du prix de marché et du choc.

3.2.3 CALCUL DU SCR

La charge de capital (ou SCR) au titre du risque de taux d'intérêt est égale à la variation de la NAV lorsque le taux d'intérêt est sous tension à la hausse ou à la baisse (la variation de NAV la plus forte en valeur algébrique sera retenue, à condition qu'elle soit supérieure ou égale à zéro). Il s'agit ainsi de la somme des impacts sur les passifs et les actifs présentés précédemment.

3.2.4 EFFET D'ATTENUATION DU RISQUE

Les tests présentés dans cette sous partie sont réalisés en supposant que les taux futurs de participation aux bénéfices demeurent inchangés avant et après le choc testé. Dans ce cas, la charge de capital issue de ces tests est notée Mkt_{int} .

En complément, il convient de déterminer également le résultat des tests lorsque les futurs taux de participations aux bénéfices sont ajustés en réponse au choc (effet d'atténuation du risque par la PB future). La charge de capital qui résulte de ce traitement est notée $nMkt_{int}$.

3.2.5 METHODE DE CALCUL SIMPLIFIEE

Afin de déterminer l'effet du scénario du taux d'intérêt sur la valeur des actifs et des passifs autre que les provisions techniques, un calcul simplifié pourrait être fait si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ❖ l'approche est cohérente à la nature, l'ampleur et la complexité des risques supportés par la compagnie d'assurance ou de réassurance ;
- ❖ les flux ne sont pas sensibles au taux d'intérêt, en particulier l'élément n'a pas d'options intégrées ;
- ❖ la convexité des flux ne conduit pas à une erreur matérielle sous cette approche.

Les chocs sont des stress de rendement, à toutes les durations du :

- ❖ choc baissier : -40 % ;
- ❖ choc haussier : +55 %.

3.3. MKT_{EQ} : RISQUE ACTION

Le risque action résulte du niveau ou de la volatilité des cours des actions. L'exposition au risque action fait référence à tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours des actions.

3.3.1 IMPACTS SUR LE PASSIF

Les flux de passifs doivent être recalculés en prenant en compte les tests de sensibilité menés sur le portefeuille actions. En effet, les scénarios sur l'évaluation des actions ont un impact direct sur les prestations compte tenu de l'interaction avec les rachats conjoncturels.

3.3.2 IMPACTS SUR L'ACTIF

Distinguons au préalable deux classes d'indice sensibles à la variation du cours des actions :

- ❖ l'indice « Global » (actions autres que celles de l'indice Other – cf. ci-dessous) ;
- ❖ l'indice « Other » (titres : émis hors OCDE et EEE, non cotés et/ou alternatifs).

L'impact de la chute de l'indice « Other », noté $Mkt_{eq,2}$, et celui de l'indice « Global », noté $Mkt_{eq,1}$ se calcule comme suit :

- indice « Other » : la valeur des actifs après chocs est égale à :

$$ValM_2_choc = NonCotés_Alternatifs \times (1 - \beta \times 45 \%)$$

où β correspond à la sensibilité de l'actif aux évolutions de l'indice de référence (autrement dit, il s'agit du rapport entre la rentabilité de cet actif et celui du marché).

et,
$$Mkt_2 = ValM_2_choc - ValM_2$$

où $ValM_2$ représente la valeur de marché des actifs de l'indice Other.

- indice « Global » : la valeur des actifs après choc est égale à :

$$ValM_1_choc = Actions \times (1 - 32 \%)$$

et,
$$Mkt_1 = ValM_1_choc - ValM_1$$

où $ValM_1$ représente la valeur de marché des actifs de l'indice Global.

Les impacts relatifs à chacun de ces indices sont ensuite agrégés à l'aide de la matrice établie ci-après²⁸ :

CorrIndex	Global (Classe 1)	Other (Classe 2)
Global	1	
Other	0,75	1

De fait, l'impact sur l'actif, noté Mkt_{eq} , est égal à :

$$Mkt_{eq} = \sqrt{Mkt_{eq,1}^2 + Mkt_{eq,2}^2 + 0,75 \times Mkt_{eq,1} \times Mkt_{eq,2}}$$

²⁸ Cf. partie TS.IX.C.17 du QIS4. Idem pour le QIS5

3.3.3 CALCUL DU SCR

La charge de capital (ou SCR) au titre du risque action est égale à la variation de la NAV entre le scénario central et le scénario stressé. Il s'agit ainsi de la somme des impacts sur les passifs et les actifs présentés précédemment.

3.3.4 EFFET D'ATTENUATION DU RISQUE

De la même manière que pour le risque de taux, il est possible de déterminer la charge de capital à taux de PB constant, notée Mkt_{eq} . Puis lorsque les futurs taux de PB sont ajustés en réponse au choc (effet d'atténuation du risque par la PB future). La charge de capital notée $nMkt_{eq}$.

3.3.5 METHODE DE CALCUL SIMPLIFIEE

La détermination de la charge de capital $Mkt_{eq,i}$ correspondant à une classe individuelle i peut être réalisée en prenant en compte les mécanismes de couverture et du transfert du risque utilisant un processus de deux étapes présentées en *annexe section 1.5* de ce mémoire.

3.4. MKT_{PROP} : RISQUE IMMOBILIER

Le risque immobilier résulte du niveau ou de la volatilité des cours de l'immobilier.

3.4.1 IMPACTS SUR LE PASSIF

Idem que pour le risque action, cf. section 3.3

3.4.2 IMPACTS SUR L'ACTIF

Concernant l'actif, il conviendra de déterminer l'impact de la chute des valeurs boursières immobilières de 20 %.

3.4.3 CALCUL DU SCR

La charge de capital (ou SCR) au titre du risque immobilier est alors égale à l'impact sur l'actif.

3.4.4 EFFET D'ATTENUATION DU RISQUE

Idem que pour 3.3 avec les notations suivantes : Mkt_{prop} et $nMkt_{prop}$.

3.5. MKT_{SP} : RISQUE DE SPREAD

Le risque de spread est la part de risque issue des instruments financiers qui est expliquée par la volatilité des spreads de crédit sur la structure de la courbe de taux d'intérêt sans risque. Il reflète la variation de valeur due à un mouvement de la courbe de crédit par rapport à la structure de la courbe des taux sans risque.

Ce risque ne concerne que les obligations détenues en direct, les produits structurés de crédit et les dérivés de crédit.

Le portefeuille d'actifs considéré dans le cadre de cette étude n'est composé, en termes d'actifs sensibles aux risques de taux, que d'obligations d'états. Ces obligations sont certes détenues en direct par l'assureur, mais ne sont pas sujettes au risque de spread, étant donné le profil quasi sans risque de leur émetteur (l'Etat français, notation AAA).

3.6. MKT_{CONC} : RISQUE DE CONCENTRATION

Dans le cadre du QIS4 (et QIS5), le risque de concentration est le risque d'accumulation des expositions avec les mêmes contreparties. Ce risque est ainsi relatif à la volatilité additionnelle due à une concentration d'actifs en portefeuille d'une part, et au risque additionnel dû à des pertes suite au défaut d'un émetteur.

3.6.1 DONNEES ET ASSIETTE DE CALCUL

Les actifs concernés par le risque de contrepartie sont ceux pour lesquels il peut exister une accumulation dans l'exposition avec une même contrepartie²⁹. il s'agit notamment des actions, des obligations et des produits structurés.

Dans le cadre de ce mémoire, le risque de concentration n'est pas traité, car le profil d'actifs considérés n'est pas sujet à un tel risque.

3.7. SCR_{MKT} : MODULE RISQUE DE MARCHÉ

La charge de capital au titre du risque de marché est obtenue en agréant les charges de capital des risques compris dans le module de marché à l'aide de la matrice de corrélation comme suit :

$$SCR_{mkt} = \sqrt{\sum_{r*c} CorrMkt_{r,c} \times Mkt_r \times Mkt_c},$$

où :

- ❖ $CorrMkt_{r,c}$ représente les cellules de la matrice de corrélation suivante³⁰ ;

CorrMkt	Mkt _{int}	Mkt _{eq}	Mkt _{prop}	Mkt _{sp}	Mkt _{conc}
Mkt _{int}	1				
Mkt _{eq}	0	1			
Mkt _{prop}	0,5	0,75	1		
Mkt _{sp}	0,25	0,25	0,25	1	
Mkt _{conc}	0	0	0	0	1

- ❖ Mkt_r, Mkt_c représente les charges de capital pour les risques de marché spécifiques en fonction des lignes et des colonnes de la matrice de corrélation $CorrMkt$.

Le montant du $nSCR_{mkt}$ à déterminer représente l'effet d'atténuation du risque des futures participations aux bénéfices pour le risque de marché. Cet effet est déterminé comme suit, en agréant les $nSCR$ des différents risques du module :

$$nSCR_{mkt} = \sqrt{\sum_{r*c} CorrMkt_{r,c} \times nSCR_r \times nSCR_c}$$

²⁹ cf. TS.IX.G.2 du QIS4

³⁰ cf. TS.IX.A.7 du QIS4

4. SCRLIFE : MODULE RISQUE DE SOUSCRIPTION VIE

Le deuxième module utilisé pour l'évaluation des charges de capital est relatif aux risques de souscription vie, risques liés à la souscription de contrats d'assurance vie.

4.1. PRESENTATION DU MODULE SCR_{LIFE}

Dans le cadre de la présente étude, les risques de souscription vie sont divisés en risques biométriques (comprenant le risque de mortalité et le risque de longévité), risque de rachat, risque de dépense et risque catastrophe.

4.2. LIFE_{MORT} : RISQUE DE MORTALITE

Le traitement du risque de mortalité est applicable aux contrats d'assurance pour lesquels le montant payable en cas de décès est supérieur à la provision technique et où une augmentation du risque de mortalité engendre une augmentation de la provision technique.

4.2.1 ASSIETTE DE CACUL

Le risque de mortalité concerne les produits de type épargne en euros et en UC, les produits de vie entière, les produits de capitalisation ainsi que les produits de rentes en phase de constitution.

4.2.2 METHODE DE CALCUL STANDARD

Les charges de capital pour le risque de mortalité sont égales à la variation de la valeur du « *best estimate* » suite à une augmentation permanente de 10 %³¹ des taux de mortalité pour chaque âge.

La charge de capital au titre du risque de mortalité est égale à la variation du « *best estimate* » suite à l'impact de cette augmentation.

4.2.3 EFFET D'ATTENUATION DU RISQUE

Même approche que pour les sections 3.2, et 3.3 avec les notations suivantes : $Life_{mort}$ et $nLife_{mort}$.

³¹ Cf. QIS4

4.2.4 METHODE DE CALCUL SIMPLIFIEE

Des méthodes de simplification sont proposées pour le calcul de La charge de capital au titre du risque de mortalité. Elles sont détaillées en annexe de ce mémoire section 1.6

4.3. LIFE_{LONG} : RISQUE DE LONGEVITE

Le traitement du risque de longévité est applicable aux contrats d'assurance pour lesquels il n'y a pas de prestation en cas de décès ou pour lesquels le montant payable en cas de décès est inférieur à la provision technique et où une augmentation du risque de longévité engendre une augmentation de la provision technique.

4.3.1 ASSIETTE DE CACUL

Le risque de longévité concerne les produits de type épargne en euros et en UC (en l'absence de garantie plancher), rentes viagères, capitalisation ainsi que les produits de rente en phase de constitution.

4.3.2 METHODE DE CALCUL STANDARD

Les charges de capital pour le risque de longévité sont égales à la variation de la valeur du « *best estimate* » suite à une diminution permanente de 25 % des taux de mortalité pour chaque âge.

Cette diminution est réalisée pour les contrats d'épargne en euros, de capitalisation et de rentes viagères.

Les charges de capital au titre du risque de longévité sont égales à l'impact ainsi mesuré.

4.3.3 EFFET D'ATTENUATION DU RISQUE

Même approche que pour les sections 3.2, et 3.3 avec les notations suivantes : $Life_{long}$ et $nLife_{long}$.

4.3.4 METHODE DE CALCUL SIMPLIFIEE

cf. annexe, section 1.7 .

4.4. LIFE_{EXP} : RISQUE DE RACHAT

Le risque de rachat est relatif aux pertes ou évolutions défavorables de la valeur des engagements issues de changements de niveau ou de volatilité des taux de rachats ou résiliations.

4.4.1 ASSIETTE DE CACUL

Le risque de rachat concerne les produits de type épargne en euros et en UC, vie entière, bon de capitalisation ainsi que les contrats de rentes en phase de constitution.

4.4.2 METHODE DE CALCUL STANDARD

Les charges de capital pour le risque de rachats sont calculées par la relation suivante :

$$Life_{lapse} = Lapse_{down} + \max(Lapse_{up}; Lapse_{mass}),$$

où³² :

- ❖ $Lapse_{down}$ représente la charge de capital au titre d'un risque engendré par une baisse permanente de 50 % des taux de rachats ;
- ❖ $Lapse_{up}$ représente la charge de capital au titre d'un risque engendré par une hausse permanente de 50 % des taux de rachats ;
- ❖ $Lapse_{mass}$ représente la charge de capital au titre d'un risque engendré par un événement provoquant une grande quantité de rachats (égal à 30 % de la somme des rachats potentiels du portefeuille).

4.4.3 EFFET D'ATTENUATION DU RISQUE

Même approche que pour les sections 3.2, et 3.3 avec les notations suivantes : $Life_{lapse}$ et

$nLife_{lapse}$.

4.4.4 METHODE DE CALCUL SIMPLIFIEE

Cf. annexe, section 1.8

Les Modules RISQUE DE DEPENSE et RISQUE CATASTROPHE n'entrent pas dans le cadre de l'étude réalisée dans le présent mémoire.

³² Selon les recommandations du QIS4

4.5. SCR_{LIFE} : MODULE RISQUE DE SOUSCRIPTION VIE

La charge de capital au titre du risque de souscription vie est obtenue en agrégeant les charges de capital des risques compris dans le module de marché à l'aide de la matrice de corrélation comme suit :

$$SCR_{life} = \sqrt{\sum_{r*c} CorrLife_{r,c} \times Life_r \times Life_c},$$

où :

- ❖ $CorrLife_{r,c}$ représente les cellules de la matrice de corrélation suivante³³ ;

CorrLife	Life _{mort}	Life _{long}	Life _{dis}	Life _{exp}	Life _{rev}	Life _{cat}
Life _{mort}	1					
Life _{long}	0	1				
Life _{dis}	0,5	0	1			
Life _{exp}	0,25	0,25	0,5	1		
Life _{rev}	0	0,25	0	0	0,25	1
Life _{cat}	0	0	0	0	0	1

- ❖ $Life_r, Life_c$ représente les charges de capital pour les risques de marché spécifiques en fonction des lignes et des colonnes de la matrice de corrélation $CorrLife$.

Le montant du $nSCR_{life}$ représente l'effet d'atténuation du risque des futures participations aux bénéfices pour le risque de souscription vie. Cet effet est déterminé, en agrégeant les $nSCR$ des différents risques du module de la suivante :

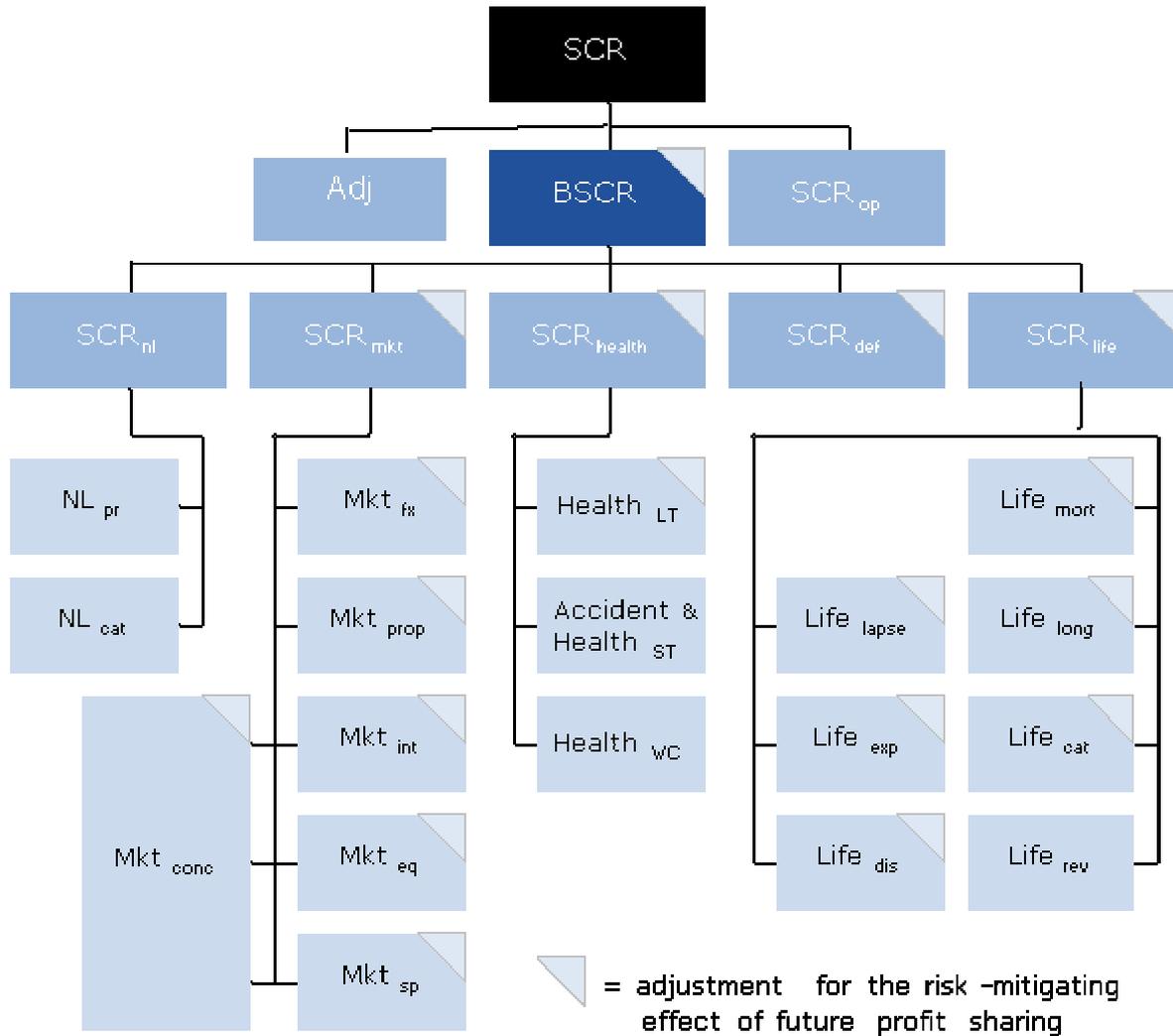
$$nSCR_{life} = \sqrt{\sum_{r*c} CorrLife_{r,c} \times nSCR_r \times nSCR_c}.$$

³³ selon la partie TS.XI.A.6 du QIS4

5. CALCUL DU SCR GLOBAL

Après avoir déterminé la charge de capital au titre de chaque module, il convient de déterminer le montant du Capital de Solvabilité Requis global (SCR) de l'assureur. Ce montant est établi à partir du SCR de base (BSCR), de l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes futures par la PB et les impôts ou taxes différés (Adj) et du SCR au titre du risque opérationnel (SCR_{op}).

La structure de la formule standard est la suivante :



5.1. BASIC SCR (BSCR)

Le BSCR est le Capital de Solvabilité Requis avant tout ajustement, combinant, dans la présente étude, les charges de capital pour les deux principaux modules de risque (module risque de marché, module risque de souscription vie).

Le BSCR est déterminé comme suit :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{r \times c} CorrSCR_{r,c} \times SCR_r \times SCR_c},$$

où :

- ❖ $CorrSCR_{r,c}$ représente les cellules de la matrice de corrélation suivante³⁴ ;

CorrSCR	SCR _{mkt}	SCR _{def}	SCR _{life}
SCR _{mkt}	1		
SCR _{def}	0,25	1	
SCR _{life}	0,25	0,25	1

- ❖ SCR_r, SCR_c représente les charges de capital pour chaque risque de SCR (parmi les deux modules de risques étudiés) en fonction des lignes et des colonnes de la matrice de corrélation $CorrSCR$;

5.2. AJUSTEMENT AU TITRE DE LA CAPACITE D'ABSORPTION DES PERTES FUTURES PAR LA PB IMPOTS OU TAXES DIFFEREES³⁵

L'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes futures (Adj) est égal à la somme de l'ajustement par la PB (Adj_{FDB}) et de l'ajustement par les impôts ou taxes différés (Adj_{DT}), soit : $Adj = Adj_{FDB} + Adj_{DT}$. Ces éléments sont présentés dans les paragraphes suivants. En outre, un troisième paragraphe présente une méthode simplifiée pour le calcul de l'ajustement (Adj).

5.2.1 AJUSTEMENT PAR LA PB

L'ajustement par la PB est calculé par la relation suivante :

$$Adj_{FDB} = \min \left(\sqrt{\sum_{r \times c} CorrSCR_{r,c} \times SCR_r \times SCR_c} - \sqrt{\sum_{r \times c} CorrSCR_{r,c} \times nSCR_r \times nSCR_c} ; FDB \right) \text{ où}$$

FDB représente la valeur des participations aux bénéfices discrétionnaires.

³⁴ cf. TS.VIII.C.4 du QIS4

³⁵ Approche QIS4

5.2.2 AJUSTEMENT PAR LES IMPÔTS ET TAXES DIFERREES

La montant de l'ajustement des pertes futures par les impôts ou taxes est égal à l'impact attendu des pertes dues à la modification des fonds propres (supposés égaux à $BSCR - Adj_{FDB} + SCR_{op}$) sur les impôts et taxes différés comptabilisés au passif du bilan.

5.2.3 METHODE SIMPLIFIEE POUR L'AJUSTEMENT (ADJ)

En outre, le QIS4 propose une simplification pour le calcul de l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes futures par la PB et les impôts ou taxes différés³⁶. La solution proposée est la suivante : $Adj = 0,1 \times FDB$.

5.3. CHARGE DE CAPITAL POUR LE RISQUE OPERATIONNEL (SCR_{OP})

Le risque opérationnel est le risque de perte résultant de processus, personnes, systèmes internes ou d'événements externes inadéquats ou défaillants. Le risque opérationnel inclut également les risques juridiques, mais exclut les risques de réputation et les risques résultants de décisions stratégiques. Le module de risque opérationnel est conçu pour traiter les risques opérationnels dans la mesure où ils n'ont pas été explicitement couverts dans les autres modules de risque.

Les charges de capital au titre du risque opérationnel sont déterminées par :

$$SCR_{op} = \min \left\{ Op_{load} \times BSCR; \max \left\{ 3 \% \times Earn_{life}; 0,3 \% \times TP_{life} \right\} \right\},$$

où :

- ❖ Op_{load} est un coefficient prédéfini, égal à 30 % ;
- ❖ $Earn_{life}$ représente le total des cotisations vie (brutes de réassurance) acquises ;
- ❖ TP_{life} représente le total des provisions techniques vie (brutes de réassurance).

5.4. SCR GLOBAL

Le SCR global est le Capital de Solvabilité Requis de la formule standard du QIS4 global. Il est égal à :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}.$$

où :

- ❖ $BSCR$ représente le Capital de Solvabilité Requis de Base ;
- ❖ Adj représente l'ajustement au titre de la capacité d'absorption des pertes futures ;
- ❖ SCR_{op} représente les charges de capital au titre du risque opérationnel.

³⁶ cf. TS.VIII.C.7

**PARTIE III :
MISE EN ŒUVRE OPERATIONNELLE**

CHAPITRE 1 : PRESENTATION DU CAS D'ETUDE

Cette partie a pour objet, l'étude de l'impact des méthodes d'« agrégation d'actifs » dans le cadre de la mise en œuvre du modèle standard. L'application de ces méthodes au calcul des « *best estimate* » nous permettra de préciser dans quelle ratio l'approche par agrégation génère ou non un biais sur une telle mesure. Enfin nous conclurons sur la sensibilité du SCR à l'utilisation de ces méthodes.

1. CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE

1.1. LES GARANTIES DU PROTEFEUILLE

Comme vu précédemment, le portefeuille étudié dans le cadre de cette étude est un portefeuille de contrats d'épargne en euro. Les garanties et options proposées à l'assuré sont les suivantes :

- ❖ une revalorisation de son épargne au taux minimum garanti (TMG) contractuel, complété de la participation aux bénéfices distribuée;
- ❖ une option de rachat total du montant de sa provision mathématique constituée.
- ❖ En cas de décès, les bénéficiaires désignés recevront le montant de la provision mathématique constituée au moment du décès.

1.2. HYPOTHESES NON FINANCIERES

Les hypothèses de projection sont les suivantes :

- ❖ Date de début de projection : 31/12/2008
- ❖ Durée de projection : 31 ans
- ❖ Table de mortalité réelle (sortie par décès) : TGF / TGH 05
- ❖ Taux Garanti : Afin de simuler au mieux les effets du modèles de rachats structurels sur la vie du portefeuille ; celui-ci sera projeté en envisageant deux Garanties de taux, avec dans un cas comme dans l'autre, le taux garantie valable jusqu'au terme des contrats en portefeuille :

- TMG = 2,5 % ;

ou ;

- TMG = 5 % ;

La simulation de deux contextes de taux garantis permet notamment d'analyser l'impact de la mise en œuvre des méthodes d' « agrégation d'actif », dans deux situations différentes, en particulier d'un point de vu du module de risque de taux (au sens solvabilité 2) du aux chocs des taux à la hausse et/ou à la baisse.

A la date de situation du 31/12/2008, Le portefeuille étudié se compose des polices suivantes :

Sexe	Nombre	PM	Age	Date de souscription	Total PM
H	83	3734,76	60	01/01/2007	310 990,25
F	110	10364,04	49	01/01/2007	1 141 029,40
H	512	19176,55	35	01/01/2006	9 816 422,05
F	1156	12289,58	56	01/01/2006	14 200 879,97
H	791	19663,94	45	01/01/2005	15 545 034,44
F	1439	14755,38	45	01/01/2005	21 226 739,33
H	1242	22342,05	48	01/01/2004	27 740 600,39
F	2403	14372,57	53	01/01/2004	34 540 639,77
H	887	20041,62	50	01/01/2003	17 782 551,35
F	2115	11875,65	50	01/01/2003	25 112 615,28
H	556	24229,04	58	01/01/2002	13 470 898,69
F	1328	15402,65	56	01/01/2002	20 453 305,28
H	563	34316,07	62	01/01/2001	19 313 606,23
F	1314	19973,48	60	01/01/2001	26 243 790,49
H	575	31066,57	42	01/01/2000	17 857 701,52
F	1197	22015,00	40	01/01/2000	26 360 759,49
H	326	31193,53	46	01/01/1999	10 183 153,57
F	765	22498,08	41	01/01/1999	17 220 830,28
H	299	34714,35	52	01/01/1998	10 394 106,09
F	993	17055,63	50	01/01/1998	16 934 250,96
H	356	25642,44	68	01/01/1997	9 120 997,27
F	853	20902,92	65	01/01/1997	17 832 190,42
H	263	39393,53	52	01/01/1996	10 363 225,84
F	223	40084,37	46	01/01/1996	8 956 406,73
H	445	49978,59	52	01/01/1995	22 245 458,16
F	324	48131,04	67	01/01/1995	15 580 864,73
Nombre total			21118		
Age moyen			51,6		
PM totale			429,94 M€		

Le passif est agrégé selon les critères de sexe, génération de souscription, âge. Ainsi on obtient 21 lignes correspondant aux 21118 polices en portefeuille. Cette agrégation permet d'optimiser les temps de calcul notamment lors de l'évaluation des « best estimate » et « SCR » cibles (cf. section 3.2).

1.3. HYPOTHESES FINANCIERES ET CARACTERISTIQUES DES PLACEMENTS

L'actif admis en représentation de ce portefeuille est ventilé comme suit :

Type d'actif	Part en %	Valeur de marché (en M€)
Action	13,08 %	56,25
OPCVM	7,92 %	34,06
Obligations	64,36 %	276,71
Immobilier	9,14 %	39,30
Monétaire	5,50 %	23,63

Soit un total de **429,95 M€**.

L'actif est représenté en valeur de marché car il sera considéré dans cette étude que la réserve de capitalisation ou que toute autre provision à caractère financier type PPB ou PRE (cf. section 2.4.2.1) est égale à 0.

1.3.1 CARACTERISTIQUES DES OBLIGATIONS

Notons les caractéristiques des obligations du portefeuille de titre, notamment en termes de taux et coupons,

Nombre	Nominal	Coupon	Tx Actuariel	Val de Marché	Val Achat	date Achat	date Rembours	Val Rembours	sur/décode
32049	1000	0,053	0,053	1016,44	996,05	04/05/2002	15/03/2011	1000	0
17500	1000	0,053	0,053	1024,33	985,73	04/05/2002	25/03/2012	1000	0
5000	1000	0,041	0,041	968,51	966,40	07/04/2003	11/03/2013	1000	0
10000	1000	0,041	0,041	968,51	980,00	07/04/2003	11/03/2013	1000	0
10000	1000	0,053	0,053	1017,68	998,40	04/05/2002	28/12/2011	1000	0
15000	1000	0,041	0,041	958,33	990,50	25/01/2007	23/07/2013	1000	0
500	50000	0,053	0,053	49657,80	49920,00	10/07/2007	18/07/2017	50000	0
200	50000	0,053	0,053	49657,80	50315,00	16/10/2007	18/07/2017	50000	0
200	50000	0,051	0,051	49814,20	49875,00	06/07/2007	18/07/2014	50000	0
200	50000	0,051	0,051	49814,20	49815,00	06/07/2007	18/07/2014	50000	0
5000	1000	0,060	0,060	1054,45	999,70	04/05/2002	18/06/2013	1000	0
5000	1000	0,054	0,054	1016,23	988,00	04/05/2002	02/03/2011	1000	0
20000	1000	0,043	0,043	967,09	989,60	31/01/2007	05/02/2014	1000	0
10000	1000	0,043	0,043	967,09	988,20	12/04/2007	05/02/2014	1000	0
30000	1000	0,044	0,044	957,04	1005,70	21/03/2007	31/05/2016	1000	0
30000	1000	0,044	0,044	957,04	990,70	10/04/2007	31/05/2016	1000	0
36800	1000	0,046	0,046	968,93	996,86	17/04/2007	27/04/2017	1000	0

La valeur de marché de ces obligations étant calculée, ligne à ligne, comme la somme des flux futurs restant au 31/12/2008, actualisés à l'aide de la courbe de taux des emprunts d'état, selon la formule suivante :

$$V_M = \sum_{K=1}^T \frac{N \times C}{(1 + r_K)^K} + \frac{N}{(1 + r_T)^T}$$

Avec :

- C le coupon de l'obligation ;
- N le nominal de l'obligation ;
- r_K le taux swap pour une maturité de K années ;
- T la maturité en années restantes de l'obligation.

1.3.2 CARACTERISTIQUES DES AUTRES ACTIFS

La poche action est constituée de titres du CAC40 appartenant à la classe d'indices « Global » (cf. section 3.3)

La poche OPCVM sera assimilée aux titres action de la classe d'indice « Global »

1.3.3 LE MODELE D'ALLOCATION CIBLE

Partant de la donnée d'une allocation cible, le modèle gère les investissements et les désinvestissements de manière automatique pour se rapprocher de cette allocation.

Ce modèle permet notamment l'étude :

- ❖ de ces allocations cibles ;
- ❖ des chemins d'investissements/désinvestissements pour y parvenir.

L'allocation cible est définie en valeur de marché. Par exemple, une allocation cible de 75 % d'actifs obligataires, de 20 % d'actifs action et de 5 % de monétaire fera référence à des répartitions des différentes classes en valeur de marché.

La mécanique des investissements / désinvestissement est détaillée en annexe, section 1.9

Précisons enfin que l'allocation cible retenue dans le cadre de notre étude correspondra à l'allocation de départ (cf. supra, section 1.3)

1.3.4 LE MODELE D'ATTRIBUTION DE PARTICIPATION AUX BENEFICES

La politique de Participation aux bénéfices retenue dans le cadre de ce mémoire est la suivante :

- ❖ Pas de dotation d'une Provisions pour Participation aux Bénéfices ;
- ❖ Les taux cibles, fixés par l'assureur, dans le cadre de sa politique de rémunération de l'épargne seront pris égaux aux taux réels constatés (projetés), nets de chargements sur encours.

1.3.5 LE MODELE DE RACHATS DYNAMIQUES

Le produit d'épargne en euro étudié dans cette partie propose aux assurés la faculté de racheter la totalité de leur épargne quand ils le souhaitent. Aussi et conformément à ce que nous avons introduit en section 2.4.1.2 le modèle de rachat se compose de deux niveaux :

- ❖ Une loi de rachats structurels, inhérente à l'historique de rachats, observé sur le portefeuille : Ainsi la courbe retenue pour le portefeuille étudié est « flat » (cf. ci-dessous) :

Année de projection	1	2	3	4	30
Taux de rachat	3,35%	3,35%	3,35%	3,35%	3,35%	3,35%

- ❖ Une loi de rachats conjoncturels sensible au niveau de rémunération de l'épargne proposée par l'assureur à l'assuré et le degré d'information et de satisfaction de ce dernier : Ainsi le modèle retenu est le suivant :

$$R_C(k) = \begin{cases} \max(0; \min[1; R_S(k)]) & \text{si } (T_{CIBLE} - TMG) > -1\% \\ \max(0; \min[1; R_S(k) + 5\%]) & \text{si } -3\% \leq (T_{CIBLE} - TMG) \leq -1\% \\ \max(0; \min[1; R_S(k) + 10\%]) & \text{si } (T_{CIBLE} - TMG) \leq -3\% \end{cases}$$

CHAPITRE 2 : MISE EN OEUVRE DU QIS

Sur la base des éléments présentés au chapitre 1, nous nous attacherons à décrire dans le chapitre qui suit le déroulement opérationnel des travaux visant à aboutir au calcul des « best estimate » et « charges de capital » relatifs au Risque de Marché ainsi que le Risque Vie, par les méthodes d' « agrégation d'actif ».

2. HYPOTHESES STOCHASTIQUES

L'objet de cette section est de présenter la démarche de calibrage des modèles de simulations d'actifs présentés en section 2, *Parti I*.

2.1. HYPOTHESES RELATIVES AU MODELE DE TAUX

Les paramètres associés à ce modèle sont les suivants (cf. section 2.4, *Partie I*) :

Variable	Description	Format
T	Horizon de simulation, en année	Entier
M	Maturité Maximale des taux modélisés	Entier
$R(0,s)$	Courbe des taux en base annuelle, en 0, de maturité $s > 0$; s en année	Tableau de réels
$f(0,s)$	Taux forward instantané, $s > 0$, s en année	Tableau de réels
k	Paramètre de diffusion de la volatilité	Réel positif
σ	Paramètre d'amplitude de la volatilité	Réel positif

Le paramétrage du modèle s'opère donc en deux temps :

- ❖ Alimentation du modèle : $R(0,s)$ et $f(0,s)$;
- ❖ Structure de volatilité : k et σ .

En rappelant que L'approche *market consistent* induit un calibrage des modèles sur la base de données fournies par le marché.

Notons que :

- ❖ La maturité maximale prise en compte par le modèle est de 10 ans ($M=10$). La simulation s'opère à horizon 31 ans ($T=31$ ans).
- ❖ Le modèle est alimenté en renseignant la courbe des taux swap³⁷ comme référence. La courbe des taux forward instantanés est reconstituée sur la base des taux swap selon l'approximation présentée en section 2.2, Partie I (model HJM).
- ❖ La structure de volatilité est choisie de sorte à obtenir une dispersion adaptée et un nombre d'occurrence négative limitée³⁸.

Ainsi les paramètres retenus en entrée du modèle de Hull & White, pour la simulation de la courbe de taux d'intérêts sont les suivant :

Variable
$T = 30$
$M = 10$
$R(0,s) = {}^{swap}R(0,s), \forall s = 1 \dots 41$
$f(0,s) = {}^{swap}f(0,s), \forall s = 1 \dots 41$
$k = 1,5$
$\sigma = 0,05$

³⁷ Vue en section 3.2, *Partie I*. Il s'agit de la courbe des taux fournie par le CEIOPS

³⁸ S.Charvet, "European Embedded Value / Market Consistent Embedded Value Options et garanties financières".

2.2. HYPOTHESE RELATIVES AU MODELE DES ACTIONS

Les paramètres associés à ce modèle (cf. section 2.1 et 2.4) sont :

Variable	Description	Format
$r_{sr}(k)$	Taux sans risque continu = taux rendement de l'action	Tableau de réels positif ou nul, par année de projection k
$q_A(k)$	Taux de dividendes continu des actions	Tableau de réels positif ou nul, par année de projection k
σ_A	Volatilité des actions	Réel positif, dans $[0;1]$
ρ_A	Coefficient de corrélation linéaire avec les taux	Réel positif, dans $[-1;1]$

2.2.1 RENDEMENT ESPERE ET DIVIDENDES

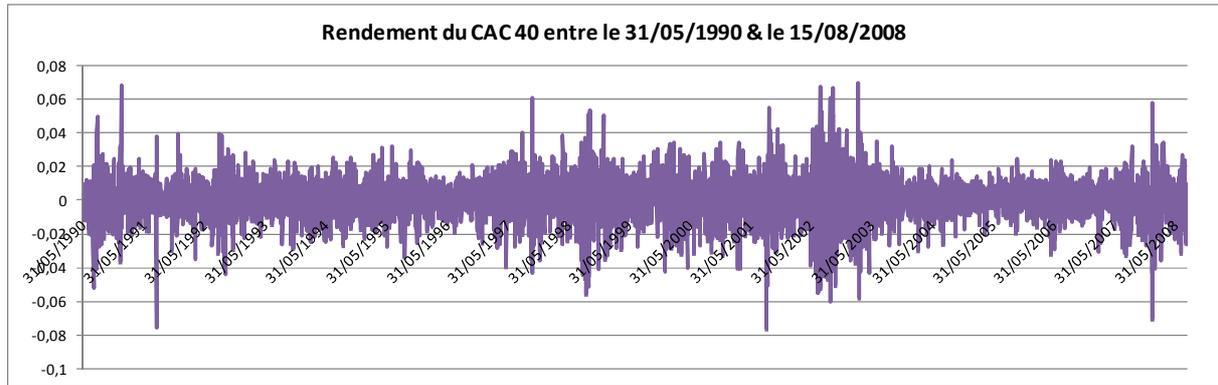
Dans le modèle de Black & Scholes le rendement espéré effectif est égal à $r_{sr}(A) - q_A(k)$.

Pour être en phase avec les hypothèses déterministes (le rendement des actions doit être calé sur le taux sans risque de référence), nous retenons :

Rendement espéré et dividendes pour l'immobilier	$r_{sr}(k) = \begin{cases} \text{si } k = 1, & {}^{SWAP}R(0,1) \\ \text{si } k = 2, \dots, N, & {}^{SWAP}R^f(0, k, k+1) \end{cases}$ $q_A(k) = 0$
---	---

2.2.2 VOLATILITE

Considérant d'une part que les titres actions détenus³⁹ sont cotés au CAC 40, et de l'autre que nous ne disposons pas de leur historique de cotation particulier alors qu'en revanche, cela est le cas l'indice CAC 40⁴⁰, la volatilité paramétrée dans le modèle est donc prise égale à la volatilité historique du CAC 40 observée sur 18 ans :



La volatilité historique est calculée comme suit :

- ❖ Calcul des rendements sur n cotations : pour $i = 1 \dots n$, $\Delta S_{t_i \rightarrow t_{i+1}} = \ln \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right)$, où S_{t_i} représente le cours de l'action à la date t_i ;

- ❖ Calcul de l'écart type des $\left\{ \Delta S_{t_i \rightarrow t_{i+1}} \right\}_{i>0}$:

❖

$$\sigma_{\Delta S} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\Delta S_{t_i \rightarrow t_{i+1}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta S_{t_k \rightarrow t_{k+1}} \right)^2}$$

- ❖ Calcul de la volatilité $\sigma_A = \sigma_{\Delta S} \sqrt{250}$. 250 correspond au nombre de jours boursiers moyen dans une année.

³⁹ cf. Supra section I.3

⁴⁰ Société Générale Asset Management, <http://www.sgametf.fr>

La valeur de la volatilité annuelle ainsi calculée est :

Volatilité pour les actions	$\sigma_A = 20\%$
------------------------------------	-------------------

Remarques

Ne disposant pas, dans le cadre de cette étude, de données permettant de déterminer une corrélation entre les taux et le cours des actions, nous retenons une corrélation nulle.

2.3. HYPOTHESE RELATIVES AU MODELE DES ACTIFS IMMOBILIERS

Les paramètres associés à ce modèle sont :

Variable	Description	Format
$r_{sr}(k)$	Taux sans risque continu = taux rendement de l'action	Tableau de réels positif ou nul, par année de projection k
$q_I(k)$	Taux de dividendes continu des actions	Tableau de réels positif ou nul, par année de projection k
σ_I	Volatilité des actions	Réel positif, dans $[0;1]$
ρ_I	Coefficient de corrélation linéaire avec les taux	Réel positif, dans $[-1;1]$

2.3.1 RENDEMENT ESPERE ET DIVIDENDES

Dans le modèle de Black & Scholes le rendement espéré effectif est égal à $r_{sr}(k) - q_I(k)$. Pour être en phase avec les hypothèses déterministes (le rendement de l'immobilier doit être calé sur le taux sans risque de référence), nous retenons :

Rendement espéré et dividendes pour l'immobilier	$r_{sr}(k) = \begin{cases} si\ k = 1, & {}^{SWAP}R(0,1) \\ si\ k = 2, \dots, N, & {}^{SWAP}R^f(0, k, k+1) \end{cases}$ $q_I(k) = 0$
---	---

2.3.2 VOLATILITE

A défaut de disposer d'informations précises sur l'historique des actifs détenus en portefeuille, nous retenons ici une volatilité de 5%. D'une manière générale, il est difficile d'estimer la volatilité des cours de l'immobilier, celui-ci ne faisant pas l'objet de cotation⁴¹. Retenir une volatilité faible permet cependant d'éviter des scénarios erratiques du cours de l'immobilier.

Volatilité pour l'immobilier	$\sigma_I = 5\%$
-------------------------------------	------------------

2.4. HYPOTHESE D'AGREGATION DES TRAJECTOIRES

Les méthodes d'« agrégation d'actif » présentées en partie I seront appliquées dans ce contexte à chacun des actifs simulés du portefeuille, taux, actions et immobilier.

Ainsi, dix seuils de regroupements ($P=20, 40, 60, 80, 100...500$) seront mis en œuvre afin d'observer la sensibilité des provisions techniques « best estimate » et du « SCR » aux méthodes d'« agrégation d'actif » d'une part, ainsi qu'au seuil de regroupement P , de l'autre.

Nous concluons, dans la mesure du possible, sur la (les) méthode(s) et /ou les paramètres d'agrégation « optimums » du point de vue de la vitesse de convergence des résultats obtenus vers les valeurs cibles de « best estimate » et « SCR », calculées à partir d'un échantillon complet de trajectoires (10 000), pour chaque actif projeté.

⁴¹ Exception faite des SICAV Immobilières

3. RESULTATS ET ANALYSE

3.1. VALEURS DE MARCHE DES ACTIFS EN PORTEFEUILLE

La valeur de marché des titres en portefeuille correspond à leurs cotations observées en date de début de projection.

Dans le cadre des chocs sur taux d'intérêts, la valeur de marché des titres obligataires est recalculée selon la formule présentée en section 1.3 à partir des courbes de taux swap⁴²

Enfin, pour les autres chocs la valeur de marché de l'actif sera réévaluée conformément aux principes présentés en section 3 « le risque de marché » :

Central	choc Taux up	choc Taux down	choc Immo	choc Action
429 949 617 ⁴³	399 804 621	467 210 896	422 089 617	401 045 162

Les montants sont en Euro

3.2. EVALUATION DES PROVISIONS TECHNIQUES CIBLES SUR UN ECHANTILLON COMPLET DE TRAJECTOIRES D'ACTIF

L'objectif général de notre étude étant d'évaluer l'efficacité des méthodes d'« agrégation d'actif », il faut pour se faire préciser les valeurs cibles, vers les quelles, plus les résultats d'une méthode convergeront, plus celle-ci sera considérée comme efficace relativement aux autres méthodes.

Les éléments de passifs présentés dans cette section ont été évalués sur la base d'un échantillon de 10 000 trajectoires par type d'actifs. Etant entendu qu'un tel nombre de trajectoires implémenté dans le modèle d'adossement actif passif entraîne des temps de calculs de l'ordre de plusieurs jours, nous avons limité cette évaluation des valeurs cibles aux seuls éléments du risque de marché, considérant qu'il s'agit du risque le plus sensible aux comportements de l'actif et donc, de fait, le mieux adapté à notre démarche de validation des méthodes d'« agrégation d'actif ».

⁴² Fournie par le CEIOPS dans le cadre du QIS4, cf. Annexe

⁴³ Cf. section 1.3

3.2.1 LES « BEST ESTIMATE » CIBLES

Ci-dessous, les montants de « best estimate » calculés pour les sous-modules du risque de marché, à partir d'un échantillon global de 10 000 trajectoires. Les calculs sont réalisés pour les deux profils de Taux Minimum Garantis (taux techniques) susmentionnés⁴⁴ :

TMG = 2,5%				
Central	choc Taux up	choc Taux down	choc Immo	choc Action
351 062 010	279 570 601	426 993 582	346 138 934	333 985 791

TMG = 5%				
Central	choc Taux up	choc Taux down	choc Immo	choc Action
392 796 313	300 993 126	487 642 454	393 098 027	389 850 341

On note l'augmentation logique du niveau de provision technique en fonction du TMG.

3.2.2 SCR CIBLE

TMG = 2,5%					
Risk	Central	choc Taux up	choc Taux down	choc Immo	choc Action
NAV	78 887 607	120 234 020	40 217 314	75 950 683	67 059 370
Delta NAV	s.o	0	38 670 293	2 936 924	11 828 237

Soit :

Mkt _{int}	Mkt _{eq}	Mkt _{prop}
38 670 293	11 828 237	2 936 924

D'où⁴⁵ :

SCR Market	41 554 351
------------	------------

Et :

TMG = 5%					
Risk	Central	choc Taux up	choc Taux down	choc Immo	choc Action
NAV	37 153 304	98 811 495	-20 431 558	28 991 590	11 194 821
Delta NAV	s.o	0	57 584 862	8 161 714	25 958 483

Remarque : Le choc des taux d'intérêts à la baisse provoque un déséquilibre actif/passif, tel que la valeur de marché de l'actif ne suffit plus à couvrir le niveau du passif.

⁴⁴ Cf. section 1.2

⁴⁵ Agrégation des charges de capital par risques selon la matrice de corrélation de la section 3.7

Soit :

Mkt _{int}	Mkt _{eq}	Mkt _{prop}
57 584 862	25 958 483	8 161 714

D'où⁴⁶ :

SCR Market	66 711 076
------------	------------

3.3. EVALUATION DES PROVISIONS TECHNIQUES A PARTIR D'ECHANTILLONS AGREGES

L'objet de cette partie est l'application des méthodes d'« agrégation d'actif » à l'évaluation des « best estimate » dans le cadre du « risque de marché » ainsi que le risque de « souscription vie ». Il s'agira notamment d'étudier, dans un premier temps, la sensibilité du « best estimate » au seuil de regroupement retenu, puis de conclure sur l'efficacité des méthodes et des seuils de regroupements mis en œuvre, d'un point de vue de la convergence vers la cible présentées supra (section 3.2).

3.3.1 CALCUL DES « BEST ESTIMATE » POUR LE RISQUE DE MARCHÉ

3.3.1.1 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 2,5 %

✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T1_R1**

	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	335 315 055	331 673 377	322 671 538	276 767 686	404 159 819
40	335 320 561	331 677 312	322 675 294	276 772 231	404 166 456
50	335 323 240	331 679 942	322 677 720	276 774 442	404 169 685
60	335 252 456	331 610 712	322 613 397	276 521 992	403 756 063
80	335 329 552	331 685 564	322 683 013	276 585 582	403 848 913
100	335 338 771	331 693 778	322 690 956	276 839 720	404 574 947
150	335 182 706	331 541 084	322 545 481	276 710 880	404 386 660
200	335 354 003	331 559 632	322 703 907	276 852 295	404 593 324
300	335 202 390	331 707 640	322 562 622	276 727 131	404 410 408
500	335 410 876	331 762 224	322 755 059	276 899 247	404 661 940

✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T2_R1**

	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	338 962 680	335 142 876	325 099 113	279 667 429	408 556 351
40	341 217 003	337 472 944	327 235 305	281 527 400	411 273 518
50	332 939 445	329 084 507	320 329 890	274 697 848	404 296 464
60	335 543 454	331 448 784	321 998 070	276 656 666	406 134 198
80	335 160 538	331 052 534	321 439 887	276 340 951	411 198 227
100	339 339 607	335 480 569	326 044 265	280 956 823	411 572 409
150	338 227 467	334 228 516	324 637 507	280 036 025	410 223 535
200	340 379 879	336 164 149	325 755 633	281 818 118	412 834 116
300	339 830 280	335 780 404	326 299 491	281 363 077	412 167 528
500	338 482 828	334 568 928	325 126 361	280 247 451	410 533 253

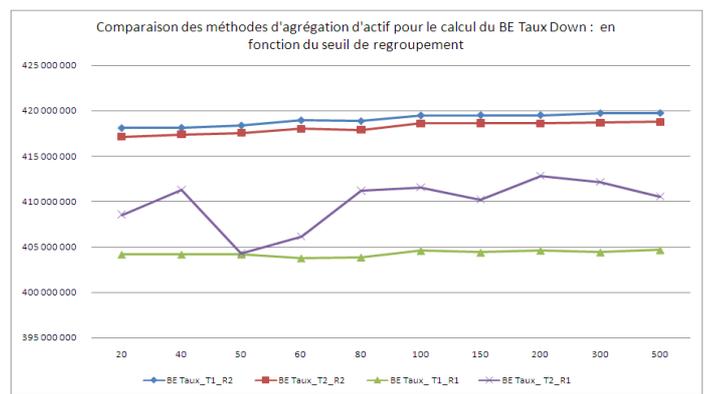
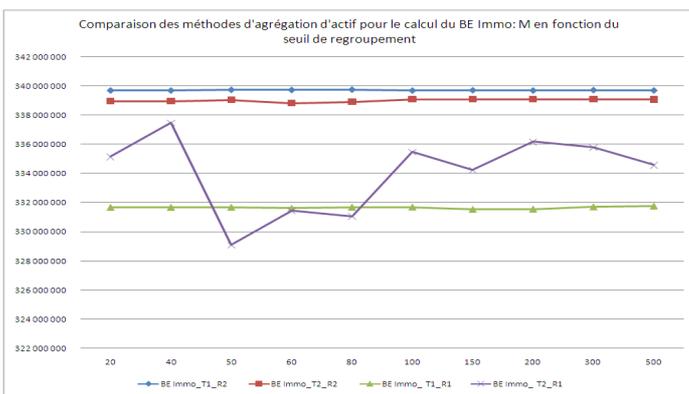
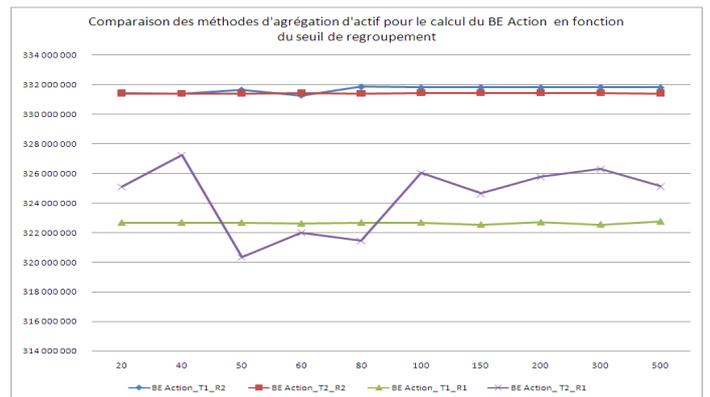
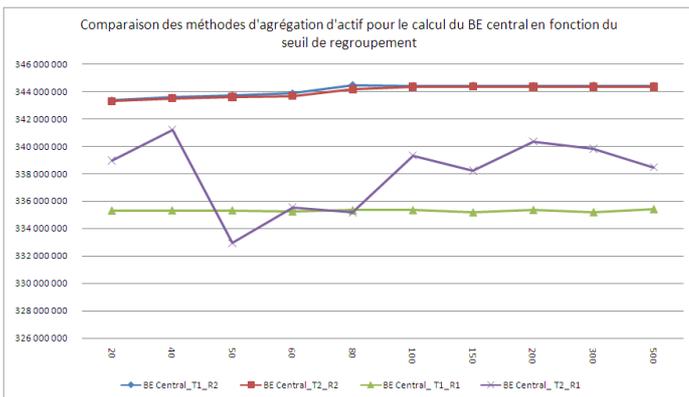
⁴⁶ Agrégation des charges de capital par risques selon la matrice de corrélation de la section 3.7

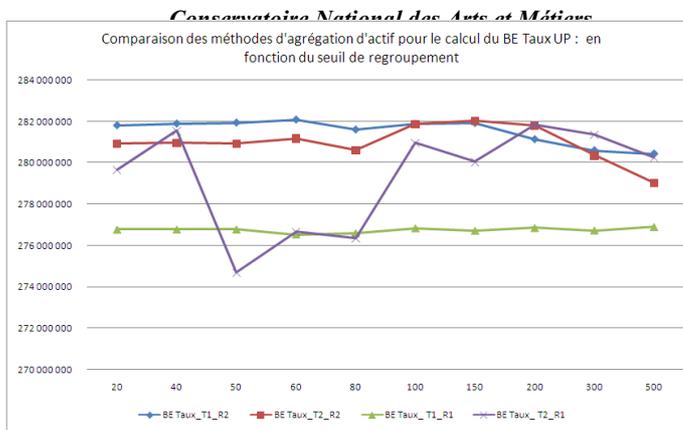
✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T1_R2**

	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	343 347 966	339 715 298	331 431 035	281 797 960	418 104 244
40	343 559 813	339 712 993	331 386 591	281 880 638	418 137 178
50	343 705 834	339 758 548	331 652 402	281 927 168	418 384 578
60	343 854 875	339 750 649	331 274 625	282 073 817	418 941 698
80	344 468 224	339 772 871	331 865 534	281 589 815	418 855 921
100	344 405 212	339 710 718	331 804 828	281 861 145	419 467 538
150	344 425 046	339 730 282	331 823 936	281 905 177	419 497 432
200	344 407 947	339 713 416	331 807 462	281 122 633	419 505 188
300	344 435 947	339 741 034	331 834 438	280 591 068	419 710 823
500	344 412 902	339 718 303	331 812 236	280 426 287	419 726 571

✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T2_R2**

	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	343 298 123	338 960 540	331 412 223	280 908 070	417 129 245
40	343 496 573	338 955 962	331 400 390	280 971 069	417 359 290
50	343 599 051	339 056 877	331 414 026	280 926 169	417 562 356
60	343 672 841	338 829 541	331 420 050	281 173 112	418 019 365
80	344 162 841	338 912 065	331 411 682	280 589 812	417 869 355
100	344 340 542	339 087 056	331 432 723	281 878 704	418 567 539
150	344 342 142	339 088 631	331 434 263	282 024 111	418 646 445
200	344 338 942	339 085 480	331 431 183	281 795 057	418 627 411
300	344 340 198	339 086 717	331 432 392	280 350 735	418 710 768
500	344 322 360	339 069 151	331 415 222	279 024 282	418 771 016





3.3.1.2 OBSERVATIONS ET ANALYSE DE SENSIBILITE

- On observe une forte distorsion des résultats entre les méthodes soumises au critère de regroupement « R2 » d'une part et celles liées au critère de regroupement « R1 » de l'autre :
 - Le montant des provisions techniques « best estimate » obtenues pour chaque sous-module du risque de marché est supérieur pour l'approche de regroupement « R2 » par rapport à l'approche de regroupement « R1 », toutes méthodes d'agrégation confondues (« type1 » et « type2 »).
 - On notera également une nette homogénéité des résultats obtenus via les méthodes d'agrégation « T1_R2 » et « T2_R2 »

Aussi le critère de regroupement des trajectoires d'actif est donc considéré comme un premier facteur de sensibilité majeur au vu de son impact sur le résultat des calculs.

- On note également la volatilité plus ou moins marquée, d'une méthode à l'autre, des valeurs de BE selon le seuil de regroupement P (cf. tableaux de sensibilités ci-dessous⁴⁷) :
 - les méthodes « T1_R1 », « T2_R2 » et « T1_R2 » présentent une faible sensibilité au seuil de regroupement P (variation inférieures à 0,4% pour $P \leq 100$, tendant lentement vers 0 pour $P \geq 100$).
 - En revanche La méthode « T2_R1 » présente une forte volatilité des résultats, pour des seuils de regroupement inférieur à $P=100$ (variation supérieures à 2%), avant de se stabilisé au delà;

BE central : Méthode "T1_R2"										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	0,06%	0,00%								
50	0,10%	0,04%	0,00%							
60	0,15%	0,09%	0,04%	0,00%						
80	0,33%	0,26%	0,22%	0,18%	0,00%					
100	0,31%	0,25%	0,20%	0,16%	-0,02%	0,00%				
150	0,31%	0,25%	0,21%	0,17%	-0,01%	0,01%	0,00%			
200	0,31%	0,25%	0,20%	0,16%	-0,02%	0,00%	0,00%	0,00%		
300	0,32%	0,26%	0,21%	0,17%	-0,01%	0,01%	0,00%	0,01%	0,00%	
500	0,31%	0,25%	0,21%	0,16%	-0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	-0,01%	0,00%

BE central : Méthode "T2_R2"										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	0,06%	0,00%								
50	0,09%	0,03%	0,00%							
60	0,11%	0,05%	0,02%	0,00%						
80	0,25%	0,19%	0,16%	0,14%	0,00%					
100	0,30%	0,25%	0,22%	0,19%	0,05%	0,00%				
150	0,30%	0,25%	0,22%	0,19%	0,05%	0,00%	0,00%			
200	0,30%	0,25%	0,22%	0,19%	0,05%	0,00%	0,00%	0,00%		
300	0,30%	0,25%	0,22%	0,19%	0,05%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	
500	0,30%	0,24%	0,21%	0,19%	0,05%	-0,01%	-0,01%	0,00%	-0,01%	0,00%

⁴⁷ Les tableaux de sensibilité correspondent aux calculs du BE central reflète la tendance de sensibilité des modèles au vu de l'homogénéité du comportement de ceux-ci lors des calculs de l'ensemble des BE du risque de marché, vu supra.

BE central : Methode T1_R1										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	0,00%	0,00%								
50	0,00%	0,00%	0,00%							
60	-0,02%	-0,02%	-0,02%	0,00%						
80	0,00%	0,00%	0,00%	0,02%	0,00%					
100	0,01%	0,01%	0,00%	0,03%	0,00%	0,00%				
150	-0,04%	-0,04%	-0,04%	-0,02%	-0,04%	-0,05%	0,00%			
200	0,01%	0,01%	0,01%	0,03%	0,01%	0,00%	0,05%	0,00%		
300	-0,03%	-0,04%	-0,04%	-0,01%	-0,04%	-0,04%	0,01%	-0,05%	0,00%	
500	0,03%	0,03%	0,03%	0,05%	0,02%	0,02%	0,07%	0,02%	0,06%	0,00%

BE central : Methode T2_R1										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	0,67%	0,00%								
50	-1,78%	-2,43%	0,00%							
60	-1,01%	-1,66%	0,78%	0,00%						
80	-1,12%	-1,77%	0,67%	-0,11%	0,00%					
100	0,11%	-0,55%	1,92%	1,13%	1,25%	0,00%				
150	-0,22%	-0,88%	1,59%	0,80%	0,92%	-0,33%	0,00%			
200	0,42%	-0,25%	2,23%	1,44%	1,56%	0,31%	0,64%	0,00%		
300	0,26%	-0,41%	2,07%	1,28%	1,39%	0,14%	0,47%	-0,16%	0,00%	
500	-0,14%	-0,80%	1,66%	0,88%	0,99%	-0,25%	0,08%	-0,56%	-0,40%	0,00%

3.3.1.3 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 5 %

L'objectif ici est d'observer le comportement et les sensibilités du « best estimate » risque de marché lorsque le portefeuille est soumis à une plus forte tension vis-à-vis de ses engagements de taux ;

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T1_R1**

	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	371 533 496	371 533 496	371 533 496	284 038 596	470 018 743
40	371 467 405	371 467 405	371 467 405	283 988 070	470 153 423
50	371 575 923	371 575 923	371 575 923	284 071 032	470 333 904
60	371 482 374	371 482 374	371 482 374	283 938 842	470 314 878
80	371 563 254	371 563 180	371 563 180	284 000 662	470 309 629
100	371 635 188	371 631 386	371 631 386	283 911 721	470 075 764
150	372 031 565	372 031 028	372 031 028	284 214 535	470 140 390
200	372 262 142	372 255 249	372 253 364	284 390 685	470 256 756
300	372 389 792	372 388 863	372 388 863	284 488 204	470 186 781
500	371 973 739	371 955 923	371 943 507	284 170 359	470 248 599

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T2_R1**

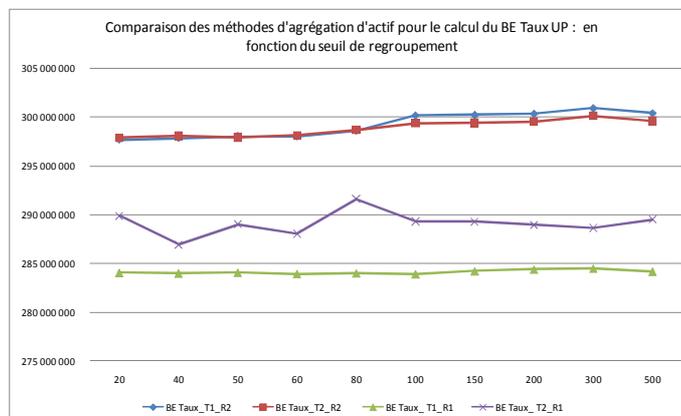
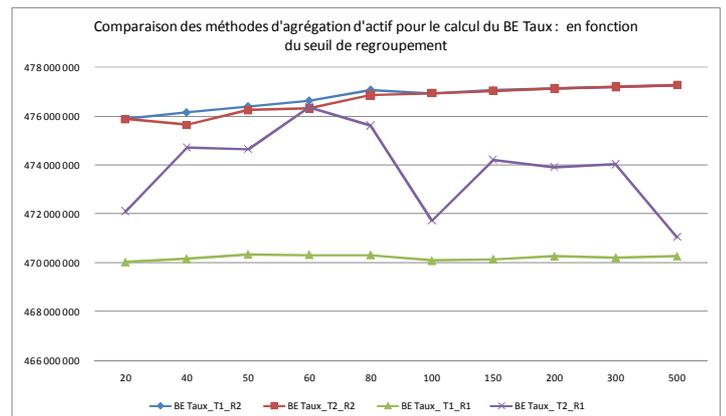
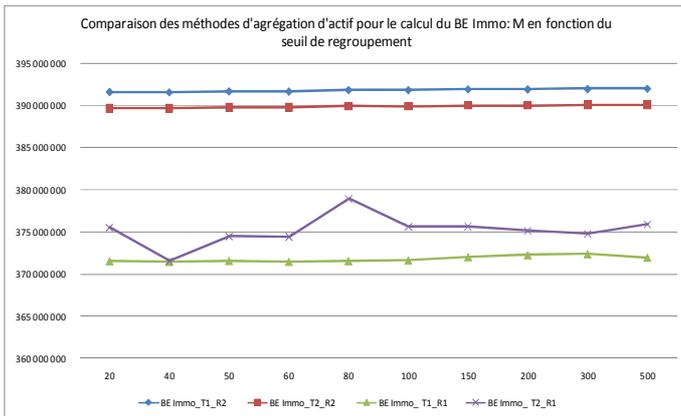
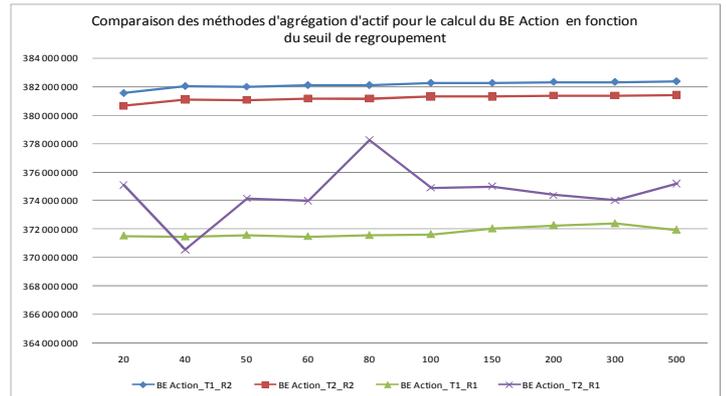
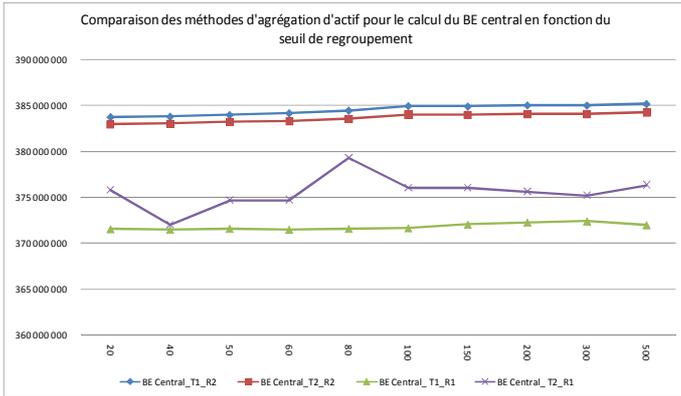
	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	375 797 056	375 499 856	375 096 476	289 869 119	472 111 517
40	372 006 272	371 522 629	370 545 229	286 945 117	474 728 778
50	374 671 480	374 428 687	374 166 826	289 000 911	474 650 793
60	374 691 303	374 403 071	373 988 210	288 060 379	476 366 145
80	379 274 608	378 920 868	378 272 153	291 583 996	475 618 299
100	376 031 739	375 620 405	374 902 617	289 289 103	471 710 088
150	376 004 297	375 636 568	375 007 299	289 267 991	474 208 637
200	375 574 088	375 148 132	374 390 387	288 937 023	473 915 362
300	375 171 448	374 769 002	374 016 029	288 627 263	474 030 318
500	376 313 477	375 918 491	375 205 994	289 505 850	471 052 104

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T1_R2**

	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	383 733 456	391 601 241	381 559 330	297 683 032	475 880 600
40	383 784 063	391 560 550	382 049 991	297 861 926	476 155 970
50	383 964 062	391 672 340	382 010 292	298 034 285	476 401 836
60	384 153 762	391 659 907	382 119 356	298 009 087	476 637 206
80	384 442 650	391 823 807	382 107 226	298 616 702	477 086 473
100	384 937 019	391 817 590	382 267 129	300 156 690	476 950 386
150	384 897 020	391 899 541	382 261 064	300 211 186	477 060 293
200	385 006 908	391 896 432	382 341 015	300 327 284	477 133 563
300	384 994 686	391 937 407	382 337 983	300 901 069	477 206 834
500	385 155 797	391 978 383	382 377 959	300 390 958	477 280 105

✓ « Best Estimate » pour le risque de Marché : **Méthode T2_R2**

	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	382 952 901	389 678 194	380 665 000	297 885 031	475 880 600
40	383 003 508	389 637 601	381 103 368	298 064 411	475 657 057
50	383 183 507	389 749 119	381 063 669	297 924 397	476 253 117
60	383 252 674	389 736 716	381 172 733	298 118 214	476 339 084
80	383 541 562	389 893 834	381 160 602	298 686 496	476 873 802
100	383 983 242	389 887 633	381 314 263	299 348 684	476 950 386
150	383 943 243	389 966 192	381 308 198	299 403 169	477 060 293
200	384 053 131	389 963 091	381 385 029	299 514 338	477 133 563
300	384 040 909	390 002 371	381 381 996	300 085 514	477 206 834
500	384 195 731	390 041 651	381 420 412	299 575 403	477 280 105



3.3.1.4 OBSERVATIONS ET ANALYSE DE SENSIBILITE

- Même constat que pour un engagement de taux à 2,5 % (cf. supra), le modèle de regroupement « R2 » requiert un niveau de provision supérieur au modèle de regroupement « R1 » ;
- La sensibilité au seuil de regroupement P est également homogène avec les conclusions de l'étude pour un engagement de taux à 2,5 % (cf. tableaux de sensibilités ci-dessous⁴⁸) :

BE central : Méthode "T1_R2"										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	0,01%	0,00%								
50	0,06%	0,05%	0,00%							
60	0,11%	0,10%	0,05%	0,00%						
80	0,18%	0,17%	0,12%	0,08%	0,00%					
100	0,31%	0,30%	0,25%	0,20%	0,13%	0,00%				
150	0,30%	0,29%	0,24%	0,19%	0,12%	-0,01%	0,00%			
200	0,33%	0,32%	0,27%	0,22%	0,15%	0,02%	0,03%	0,00%		
300	0,33%	0,32%	0,27%	0,22%	0,14%	0,01%	0,03%	0,00%	0,00%	
500	0,37%	0,36%	0,31%	0,26%	0,19%	0,06%	0,07%	0,04%	0,04%	0,00%

BE central : Méthode "T2_R2"										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	0,01%	0,00%								
50	0,06%	0,05%	0,00%							
60	0,08%	0,07%	0,02%	0,00%						
80	0,15%	0,14%	0,09%	0,08%	0,00%					
100	0,27%	0,26%	0,21%	0,19%	0,12%	0,00%				
150	0,26%	0,25%	0,20%	0,18%	0,10%	-0,01%	0,00%			
200	0,29%	0,27%	0,23%	0,21%	0,13%	0,02%	0,03%	0,00%		
300	0,28%	0,27%	0,22%	0,21%	0,13%	0,02%	0,03%	0,00%	0,00%	
500	0,32%	0,31%	0,26%	0,25%	0,17%	0,06%	0,07%	0,04%	0,04%	0,00%

BE central : Méthode T1_R1										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	-0,02%	0,00%								
50	0,01%	0,03%	0,00%							
60	-0,01%	0,00%	-0,03%	0,00%						
80	0,01%	0,03%	0,00%	0,02%	0,00%					
100	0,03%	0,05%	0,02%	0,04%	0,02%	0,00%				
150	0,13%	0,15%	0,12%	0,15%	0,13%	0,11%	0,00%			
200	0,20%	0,21%	0,18%	0,21%	0,19%	0,17%	0,06%	0,00%		
300	0,23%	0,25%	0,22%	0,24%	0,22%	0,20%	0,10%	0,03%	0,00%	
500	0,12%	0,14%	0,11%	0,13%	0,11%	0,09%	-0,02%	-0,08%	-0,11%	0,00%

BE central : Méthode T2_R1										
	20	40	50	60	80	100	150	200	300	500
20	0,00%									
40	-1,01%	0,00%								
50	-0,30%	0,72%	0,00%							
60	-0,29%	0,72%	0,01%	0,00%						
80	0,93%	1,95%	1,23%	1,22%	0,00%					
100	0,06%	1,08%	0,36%	0,36%	-0,86%	0,00%				
150	0,06%	1,07%	0,36%	0,35%	-0,86%	-0,01%	0,00%			
200	-0,06%	0,96%	0,24%	0,24%	-0,98%	-0,12%	-0,11%	0,00%		
300	-0,17%	0,85%	0,13%	0,13%	-1,08%	-0,23%	-0,22%	-0,11%	0,00%	
500	0,14%	1,16%	0,44%	0,43%	-0,78%	0,07%	0,08%	0,20%	0,30%	0,00%

3.3.2 CALCUL DU « BEST ESTIMATE » POUR RISQUE DE SOUSCRIPTION VIE

3.3.2.1 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 2,5 %

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T1_R1**

	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	338 805 263	324 244 100	369 781 306	278 918 085	349 014 356
40	338 810 775	324 249 687	369 786 193	278 923 964	349 018 530
50	338 813 452	324 252 432	371 076 795	278 927 024	349 021 308
60	338 742 574	324 180 892	369 726 590	278 851 944	348 957 395
80	338 819 759	324 258 888	371 082 209	278 934 006	349 026 511
100	338 829 051	324 267 919	369 803 076	278 942 236	349 035 811
150	338 672 890	324 109 806	370 957 120	278 774 938	348 899 023
200	338 844 266	324 283 529	371 105 303	278 959 299	349 050 090
300	338 692 548	324 130 037	370 974 146	278 797 105	348 917 818
500	338 901 320	324 340 610	369 869 722	279 016 693	349 106 936

⁴⁸ Les tableaux de sensibilité correspondent aux calculs du BE central reflète la tendance de sensibilité des modèles au vu de l'homogénéité du comportement de ceux-ci lors des calculs de l'ensemble des BE du risque de marché, vu supra.

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T2_R1**

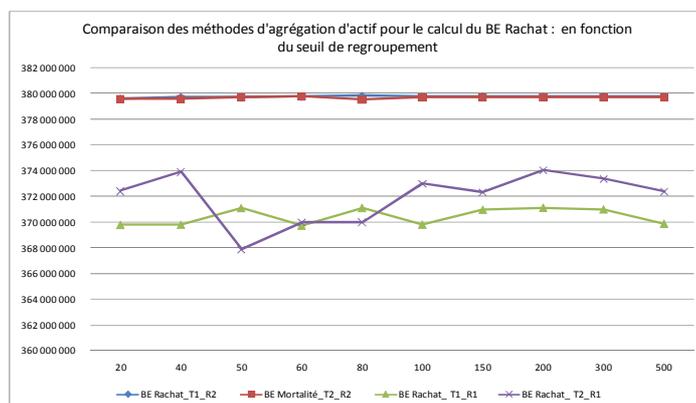
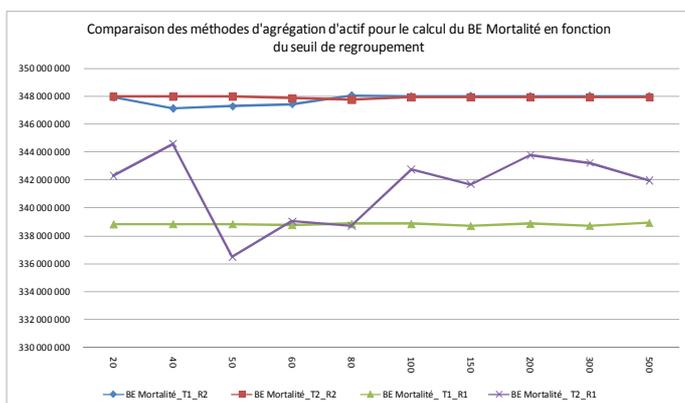
	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	342 282 809	328 525 210	372 418 889	284 910 984	352 021 657
40	344 574 109	330 536 652	373 903 178	286 597 915	353 923 809
50	336 472 081	321 913 788	367 888 466	277 132 861	351 462 115
60	339 012 133	324 384 016	369 965 416	279 062 687	349 484 245
80	338 702 192	324 134 872	370 008 596	278 503 026	349 072 620
100	342 742 545	328 400 683	373 009 114	283 964 681	352 538 986
150	341 682 761	327 162 177	372 326 393	281 668 054	351 800 138
200	343 756 942	329 468 722	374 047 167	284 081 049	353 798 903
300	343 226 613	328 910 126	373 363 455	284 098 285	353 036 894
500	341 937 858	327 538 028	372 388 597	282 552 620	351 932 960

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T1_R2**

	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	347 921 409	333 013 393	379 623 019	286 409 202	358 447 893
40	347 135 461	332 918 246	379 756 630	286 485 424	358 468 378
50	347 283 002	332 859 447	379 717 653	286 506 889	358 520 353
60	347 433 594	333 103 568	379 782 007	286 430 867	358 475 471
80	348 053 327	333 096 670	379 858 371	286 541 073	358 513 830
100	347 989 659	333 035 738	379 788 885	286 488 658	358 448 249
150	348 009 699	333 054 917	379 810 756	286 505 156	358 468 891
200	347 992 422	333 038 382	379 791 901	286 490 932	358 451 095
300	348 020 714	333 065 458	379 822 777	286 514 224	358 480 237
500	347 997 429	333 043 174	379 797 365	286 495 054	358 456 252

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T2_R2**

	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	347 968 470	332 969 001	379 582 767	286 371 177	358 296 877
40	347 968 984	332 860 902	379 601 614	286 436 257	358 303 419
50	347 972 528	332 959 998	379 714 625	286 421 503	358 410 076
60	347 847 085	332 931 353	379 795 999	286 382 885	358 386 874
80	347 742 181	332 805 182	379 536 362	286 390 489	358 296 855
100	347 921 731	332 977 020	379 732 328	286 438 309	358 381 803
150	347 923 348	332 978 567	379 734 092	286 439 640	358 383 468
200	347 920 114	332 975 472	379 730 564	286 436 978	358 380 138
300	347 921 383	332 976 687	379 731 949	286 438 023	358 381 445
500	347 903 360	332 959 437	379 712 277	286 423 184	358 362 879



« Best Estimate » calculé pour le choc de Rachat   la hausse,

3.3.2.2 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 5 %

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T1_R1**

	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	374 983 398	360 885 180	416 222 406	317 489 222	382 322 900
40	374 920 279	360 809 993	416 198 974	317 377 980	382 266 340
50	375 024 107	360 932 941	416 248 149	317 557 138	382 359 492
60	374 934 581	360 827 010	416 203 339	317 403 377	382 279 155
80	375 012 089	360 918 322	416 245 796	317 535 534	382 350 301
100	375 078 675	361 006 729	416 250 912	317 688 108	382 405 336
150	375 457 886	361 455 962	416 429 257	318 343 494	382 742 755
200	375 678 943	361 715 987	416 196 809	318 718 267	382 943 229
300	375 800 910	361 861 073	416 199 162	318 932 352	383 051 183
500	375 354 244	361 539 817	415 783 496	318 987 189	382 536 820

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T2_R1**

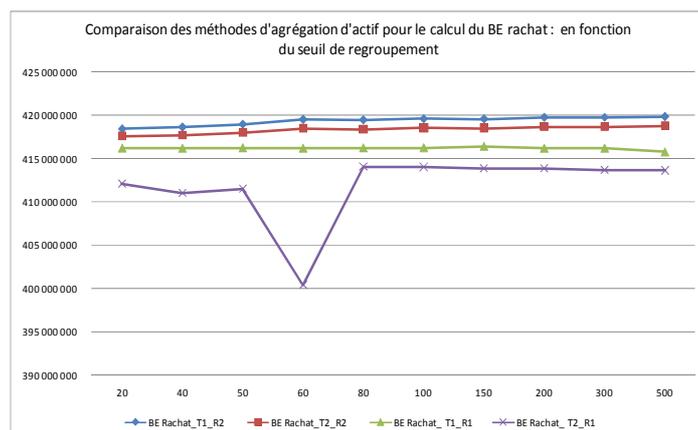
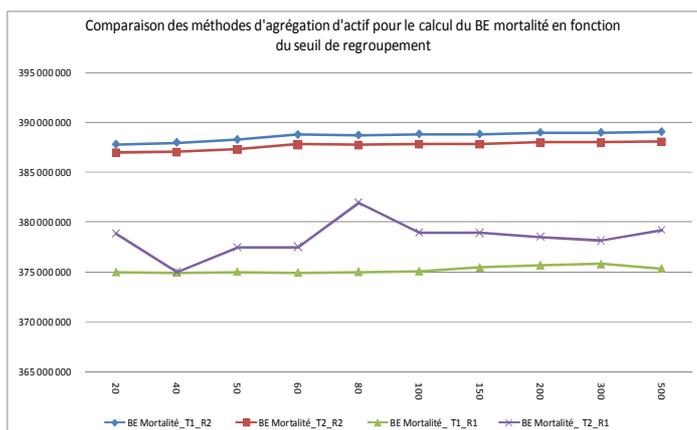
	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	378 872 908	367 662 960	412 128 121	331 842 319	384 396 854
40	375 021 640	362 735 925	411 039 482	324 790 166	381 257 833
50	377 509 267	365 920 244	411 507 719	330 020 579	383 437 669
60	377 535 009	365 925 365	400 429 632	329 970 416	383 479 935
80	381 958 830	371 023 406	414 083 965	337 095 199	387 429 836
100	378 969 424	366 998 159	414 048 290	329 990 514	385 045 663
150	378 932 123	366 994 784	413 934 219	330 075 815	384 997 785
200	378 528 783	366 480 060	413 875 635	329 229 123	384 665 237
300	378 150 380	366 010 114	413 707 650	328 505 919	384 304 453
500	379 198 176	367 442 260	413 651 850	331 074 420	385 141 414

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T1_R2**

	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	387 778 575	372 192 283	418 468 532	324 334 982	395 927 676
40	387 970 160	372 376 167	418 675 279	324 495 223	396 123 287
50	388 261 918	372 656 198	418 990 128	324 739 247	396 421 177
60	388 761 198	373 135 411	419 528 923	325 156 841	396 930 949
80	388 720 802	373 096 638	419 485 329	325 123 054	396 889 704
100	388 831 781	373 203 157	419 605 092	325 215 876	397 003 016
150	388 819 438	373 191 310	419 591 772	325 205 552	396 990 413
200	388 982 150	373 347 482	419 767 361	325 341 643	397 156 544
300	388 975 978	373 341 558	419 760 701	325 336 481	397 150 243
500	389 057 334	373 419 644	419 848 496	325 404 527	397 233 309

- ✓ « Best Estimate » pour le risque de souscription Vie : **Méthode T2_R2**

	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	386 990 265	371 435 658	417 617 833	323 675 647	395 122 800
40	387 060 120	371 502 705	417 693 216	323 734 072	395 194 123
50	387 351 878	371 782 736	418 008 065	323 978 097	395 492 012
60	387 797 946	372 210 875	418 489 436	324 351 184	395 947 454
80	387 757 549	372 172 102	418 445 842	324 317 397	395 906 209
100	387 868 529	372 278 621	418 565 605	324 410 220	396 019 521
150	387 856 186	372 266 774	418 552 285	324 399 896	396 006 918
200	388 012 546	372 416 850	418 721 020	324 530 674	396 166 564
300	388 006 374	372 410 926	418 714 360	324 525 512	396 160 263
500	388 084 555	372 485 964	418 798 728	324 590 902	396 240 086



3.3.2.3 OBSERVATIONS ET ANALYSE DE SENSIBILITE

La mise en oeuvre des méthodes d'« agrégation d'actif » dans le cadre de l'évaluation du « best estimate » pour le risque de souscription vie présente les mêmes caractéristiques que celles observées pour le risque de marché (cf. supra) avec :

- Pour le modèle de regroupement « R2 » :
 - Des valeurs de BE nettement supérieures à l'approche « R1 » ;
 - Une volatilité plus grande mais contenue pour les seuils inférieurs à $P=100$ ($\leq 1,2\%$), et toujours une nette stabilisation à partir de $P=100$ ($\leq 0,32\%$ au maximum) ;
 - Une faible variation des résultats entre les méthodes (« T1_R2 » et « T2_R2 ») ;
- Pour le modèle de regroupement « R2 » :
 - Méthode « T2_R1 » : Forte volatilité en dessous de $P=100$;

3.3.3 CONCLUSION

L'application des méthodes d'« agrégation d'actif » au calcul des « BE Market » et « BE Life » démontrent les principes suivants :

- ✓ Forte sensibilité des résultats au critère de regroupement des trajectoires en P sous-groupes de trajectoires, en vue d'en retenir une seule par sous groupe ;
- ✓ Dans une moindre mesure une sensibilité au seuil de regroupement P , tendant progressivement vers 0 à partir de $P=100$;
- ✓ Homogénéité du comportement des modèles d'agrégation pour deux profils de risque de taux.

3.4. CONVERGENCE DES DES METHODES D'« AGREGATION D'ACTIF » VERS LA CIBLE D'UN POINT DE VUE « BEST ESTIMATE »

Il a été démontré dans la section précédente qu'au delà du seuil de 100 trajectoires représentatives à l'actif, les méthodes d'« agrégation d'actif » présentaient des résultats respectifs stables, traduits par une variation entre seuils ($P \geq 100$) convergeant lentement vers 0.

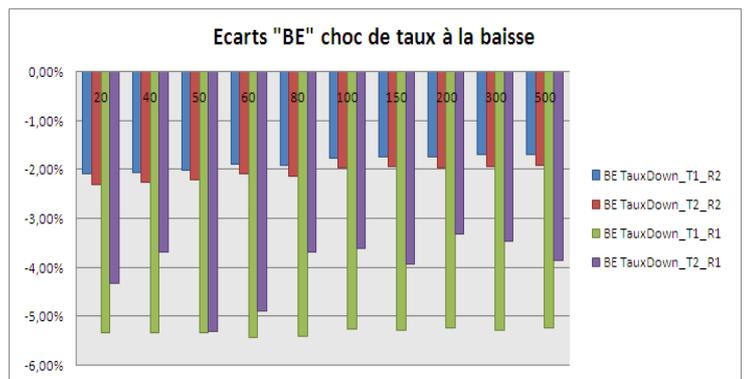
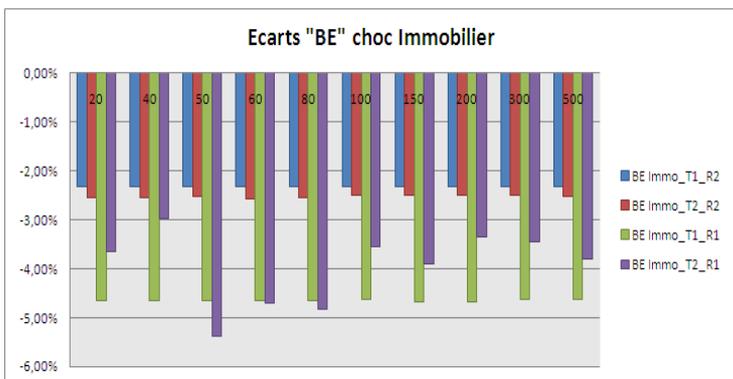
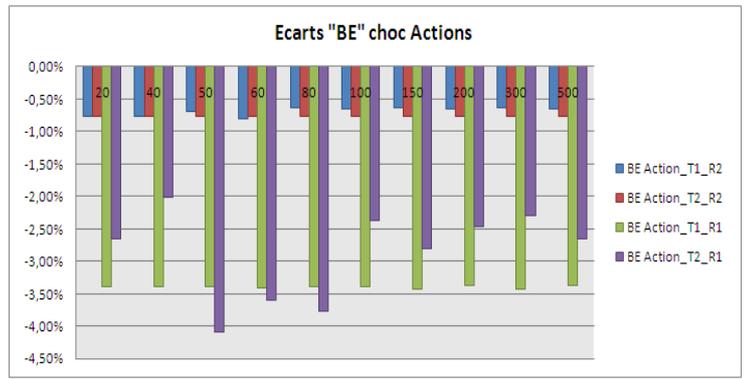
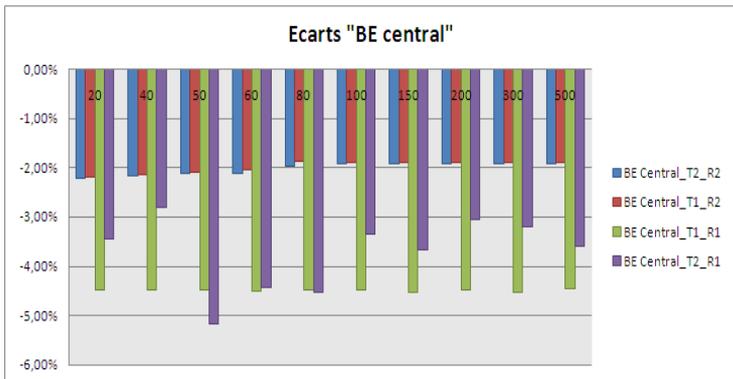
A ce stade, il convient de préciser le niveau de convergence de ces résultats vers les valeurs cibles introduites supra et de conclure sur la supériorité d'une ou plusieurs méthodes par rapport à cet objectif.

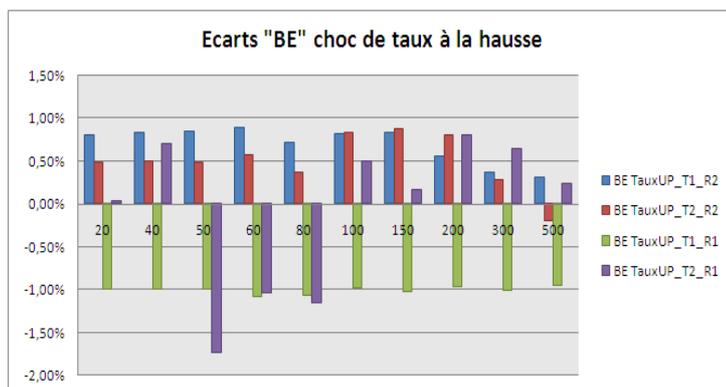
3.4.1 ANALYSE DE LA PERFORMANCE DES METHODES D' « AGREGATION D'ACTIFS » POUR UN ENGAGEMENT DE TAUX A 2,5 %

- Distance pour chaque risque de marché et de souscription vie, de la valeur du « best estimate » calculée par applications des méthodes d'agrégation d'actif à sa valeur de référence (calculée à partir d'un échantillon complet d'actifs)

	Delta BE Market 2,5% _"R1"									
	Methode T1_R1					Methode T2_R1				
	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down
20	-4,49%	-4,18%	-3,39%	-1,00%	-5,35%	-3,45%	-3,18%	-2,66%	0,03%	-4,32%
40	-4,48%	-4,18%	-3,39%	-1,00%	-5,35%	-2,80%	-2,50%	-2,02%	0,70%	-3,68%
50	-4,48%	-4,18%	-3,39%	-1,00%	-5,35%	-5,16%	-4,93%	-4,09%	-1,74%	-5,32%
60	-4,50%	-4,20%	-3,41%	-1,09%	-5,44%	-4,42%	-4,24%	-3,59%	-1,04%	-4,89%
80	-4,48%	-4,18%	-3,38%	-1,07%	-5,42%	-4,53%	-4,36%	-3,76%	-1,16%	-3,70%
100	-4,48%	-4,17%	-3,38%	-0,98%	-5,25%	-3,34%	-3,08%	-2,38%	0,50%	-3,61%
150	-4,52%	-4,22%	-3,43%	-1,02%	-5,29%	-3,66%	-3,44%	-2,80%	0,17%	-3,93%
200	-4,47%	-4,21%	-3,38%	-0,97%	-5,25%	-3,04%	-2,88%	-2,46%	0,80%	-3,32%
300	-4,52%	-4,17%	-3,42%	-1,02%	-5,29%	-3,20%	-2,99%	-2,30%	0,64%	-3,47%
500	-4,46%	-4,15%	-3,36%	-0,96%	-5,23%	-3,58%	-3,34%	-2,65%	0,24%	-3,85%

	Delta BE Market 2,5% _"R2"									
	Methode T1_R2					Methode T2_R2				
	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down
20	-2,20%	-1,86%	-0,76%	0,80%	-2,08%	-2,21%	-2,07%	-0,77%	0,48%	-2,31%
40	-2,14%	-1,86%	-0,78%	0,83%	-2,07%	-2,16%	-2,08%	-0,77%	0,50%	-2,26%
50	-2,10%	-1,84%	-0,70%	0,84%	-2,02%	-2,13%	-2,05%	-0,77%	0,48%	-2,21%
60	-2,05%	-1,85%	-0,81%	0,90%	-1,89%	-2,10%	-2,11%	-0,77%	0,57%	-2,10%
80	-1,88%	-1,84%	-0,63%	0,72%	-1,91%	-1,97%	-2,09%	-0,77%	0,36%	-2,14%
100	-1,90%	-1,86%	-0,65%	0,82%	-1,76%	-1,91%	-2,04%	-0,76%	0,83%	-1,97%
150	-1,89%	-1,85%	-0,65%	0,84%	-1,76%	-1,91%	-2,04%	-0,76%	0,88%	-1,95%
200	-1,90%	-1,86%	-0,65%	0,56%	-1,75%	-1,92%	-2,04%	-0,76%	0,80%	-1,96%
300	-1,89%	-1,85%	-0,64%	0,37%	-1,71%	-1,91%	-2,04%	-0,76%	0,28%	-1,94%
500	-1,89%	-1,85%	-0,65%	0,31%	-1,70%	-1,92%	-2,04%	-0,77%	-0,20%	-1,93%





On observe une nette supériorité des méthodes « T1_R2 » et «T2_R2 » d’un point de vue de la convergence des BE par risque vers leurs valeurs cibles avec en particulier :

Méthode « T2_R2 » : les écarts BE (méthode) / BE (cible) passent d’un maximum de 2,31 % pour P=20 tous risques confondus à 2,04 % pour P=100, ces écarts convergent ensuite très lentement vers 0 au sens où l’augmentation du seuil et donc du nombre de trajectoires représentatives à l’actif ne génèrent qu’un gain quasi nul ;

Méthode « T1_R2 » : les écarts BE (méthode) / BE (cible) passent d’un maximum de 2,20 % pour P=20 tous risques confondus à 1,89 % pour P=100 ces écarts convergent ensuite très lentement vers 0 au sens où l’augmentation du seuil et donc du nombre de trajectoires représentatives à l’actif ne génèrent qu’un gain quasi nul ;

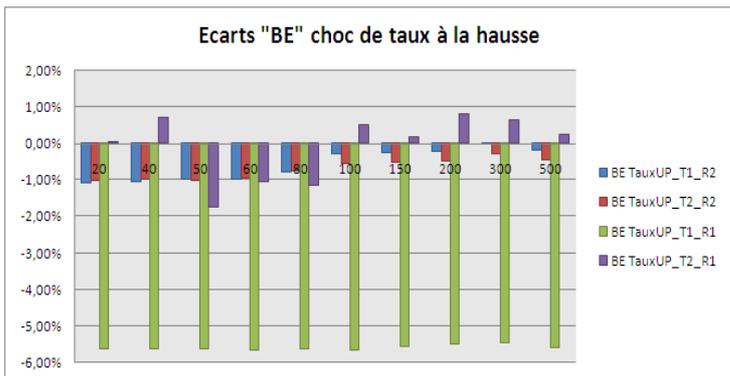
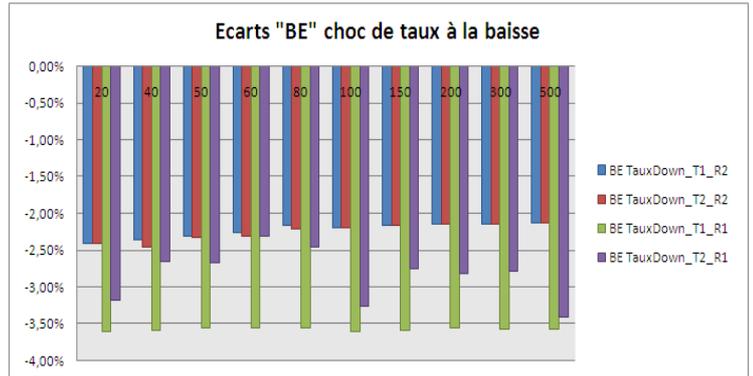
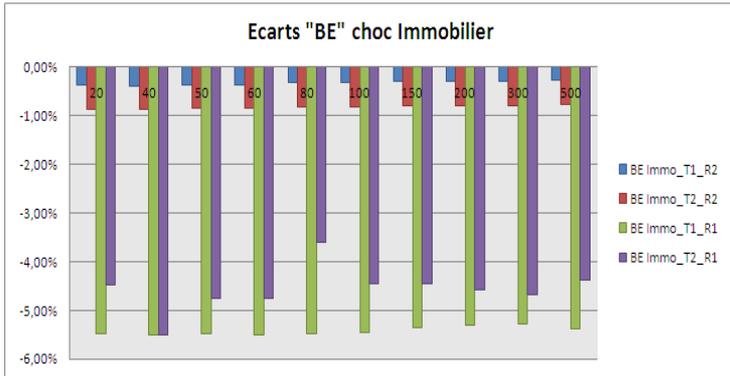
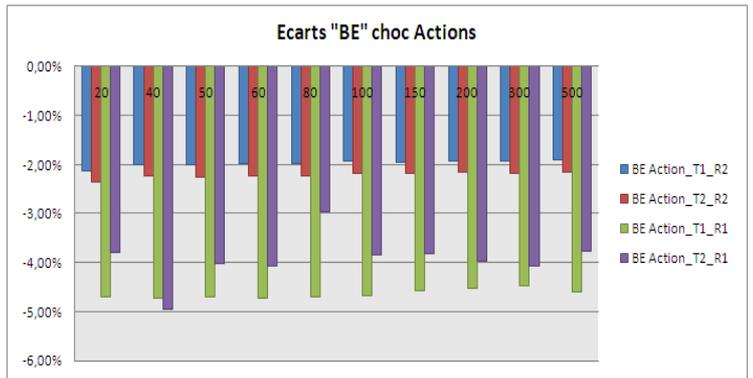
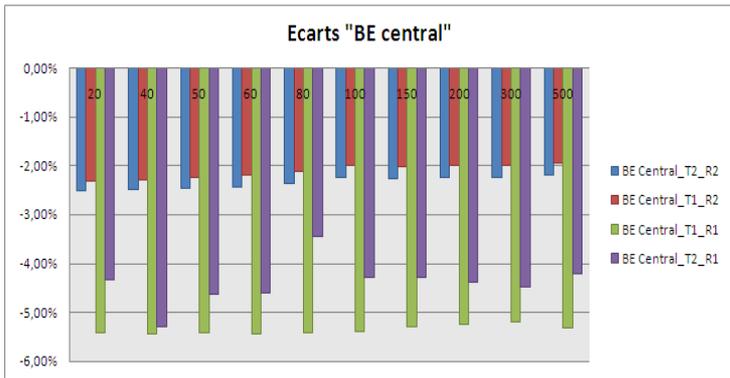
En revanche les méthodes issue de l’approche de regroupement « R1 » s’avèrent peu efficace avec parfois des écarts incompressibles d’un seuil de regroupement à un autre. Ainsi à P=500, on constate des écarts de l’ordre 5,23 % notamment, pour le BE du choc de taux à la baisse.

3.4.2 ANALYSE DE LA PERFORMANCE DES METHODES D’« AGREGATION D’ACTIFS » POUR UN ENGAGEMENT DE TAUX A 5 %

- ❖ Distance du « best estimate » calculé par applications des méthodes d’ « agrégation d’actif » à sa valeur de référence (calculée à partir d’un échantillon complet d’actifs), pour chaque sous-risque des risques de marché et de souscription vie,

	Delta BE Market 5% - "R1"									
	Methode T1_R1					Methode T2_R1				
	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down
20	-5.41%	-5.49%	-4.70%	-5.63%	-3.61%	-4.33%	-4.48%	-3.78%	-3.70%	-3.18%
40	-5.43%	-5.50%	-4.72%	-5.65%	-3.59%	-5.29%	-5.49%	-4.95%	-4.67%	-2.65%
50	-5.40%	-5.47%	-4.69%	-5.62%	-3.55%	-4.61%	-4.75%	-4.02%	-3.98%	-2.66%
60	-5.43%	-5.50%	-4.71%	-5.67%	-3.55%	-4.61%	-4.76%	-4.07%	-4.30%	-2.31%
80	-5.41%	-5.48%	-4.69%	-5.65%	-3.55%	-3.44%	-3.61%	-2.97%	-3.13%	-2.47%
100	-5.39%	-5.46%	-4.67%	-5.68%	-3.60%	-4.27%	-4.45%	-3.83%	-3.89%	-3.27%
150	-5.29%	-5.36%	-4.57%	-5.57%	-3.59%	-4.27%	-4.44%	-3.81%	-3.90%	-2.75%
200	-5.23%	-5.30%	-4.51%	-5.52%	-3.57%	-4.38%	-4.57%	-3.97%	-4.01%	-2.81%
300	-5.20%	-5.27%	-4.48%	-5.48%	-3.58%	-4.49%	-4.66%	-4.06%	-4.11%	-2.79%
500	-5.30%	-5.38%	-4.59%	-5.59%	-3.57%	-4.20%	-4.37%	-3.76%	-3.82%	-3.40%

	Delta BE Market 5% - "R2"									
	Methode T1_R2					Methode T2_R2				
	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down	BE Central	BE Immo	BE Action	BE Taux up	BE Taux down
20	-2.31%	-0.38%	-2.13%	-1.10%	-2.41%	-2.51%	-0.87%	-2.36%	-1.03%	-2.41%
40	-2.29%	-0.39%	-2.00%	-1.04%	-2.36%	-2.49%	-0.88%	-2.24%	-0.97%	-2.46%
50	-2.25%	-0.36%	-2.01%	-0.98%	-2.31%	-2.45%	-0.85%	-2.25%	-1.02%	-2.34%
60	-2.20%	-0.37%	-1.98%	-0.99%	-2.26%	-2.43%	-0.86%	-2.23%	-0.96%	-2.32%
80	-2.13%	-0.32%	-1.99%	-0.79%	-2.16%	-2.36%	-0.82%	-2.23%	-0.77%	-2.21%
100	-2.00%	-0.33%	-1.95%	-0.28%	-2.19%	-2.24%	-0.82%	-2.19%	-0.55%	-2.19%
150	-2.01%	-0.30%	-1.95%	-0.26%	-2.17%	-2.25%	-0.80%	-2.19%	-0.53%	-2.17%
200	-1.98%	-0.31%	-1.93%	-0.22%	-2.16%	-2.23%	-0.80%	-2.17%	-0.49%	-2.16%
300	-1.99%	-0.30%	-1.93%	-0.03%	-2.14%	-2.23%	-0.79%	-2.17%	-0.30%	-2.14%
500	-1.95%	-0.28%	-1.92%	-0.20%	-2.12%	-2.19%	-0.78%	-2.16%	-0.47%	-2.12%



Même constat que supra, les méthodes « T1_R2 » et « T2_R2 » sont nettement plus performantes que les méthodes « T1_R1 » et « T2_R1 » d'un point de vue de la convergence des BE (marché et vie) vers leurs valeurs cibles :

Méthode « T2_R2 » : les écarts BE (méthode) / BE (cible) passent d'un maximum (en valeur absolue) de 2,51 % pour $P=20$ tous risques confondus à 2,19 % pour $P=100$, ces écarts convergent ensuite très lentement vers 0 au sens où l'augmentation du seuil et donc du nombre de trajectoires représentatives à l'actif ne génèrent qu'un gain quasi nul ;

Méthode « T1_R2 » : les écarts BE (méthode) / BE (cible) passent d'un maximum de 2,41 % pour $P=20$ tous risques confondus à 2,19 % pour $P=100$ ces écarts convergent ensuite très lentement vers 0 au sens où l'augmentation du seuil et donc du nombre de trajectoires représentatives à l'actif ne génèrent qu'un gain quasi nul ;

Les méthodes attachées au critère de regroupement « R1 » présentent de nouveau des écarts incompressibles et rédhibitoires de l'ordre de 4,5 % en moyenne à $P=100$, contre 1,56 % pour les méthodes du critère « R2 », à seuils équivalents.

3.5. IMPACTS LE CALCUL DU « SCR »

L'objet de cette partie est de présenter l'impact de l'utilisation des méthodes d'« agrégation d'actif » sur le calcul du « SCR » par risques, afin de mettre en exergue l'homogénéité ou non des écarts constatés supra, pour le calcul des « best estimate ».

3.5.1 CALCUL DU « SCR MARKET »

3.5.1.1 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 2,5 %

❖ Calcul de la « NAV »

	NAV Methode T1_R1					NAV Methode T2_R1				
	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	94 634 562	90 416 240	78 373 624	123 036 935	63 051 077	90 986 937	86 946 741	75 946 049	120 137 192	58 654 545
40	94 629 056	90 412 305	78 369 868	123 032 390	63 044 440	88 732 614	84 616 673	73 809 856	118 277 221	55 937 378
50	94 626 377	90 409 675	78 367 441	123 030 179	63 041 211	97 010 172	93 005 110	80 715 272	125 106 773	62 914 432
60	94 697 161	90 478 905	78 431 764	123 282 629	63 454 833	94 406 163	90 640 833	79 047 092	123 147 955	61 076 698
80	94 620 065	90 404 053	78 362 149	123 219 039	63 361 983	94 789 079	91 037 083	79 605 275	123 463 670	56 012 669
100	94 610 846	90 395 839	78 354 205	122 964 900	62 635 949	90 610 010	86 609 048	75 000 897	118 847 798	55 638 487
150	94 766 911	90 548 533	78 499 680	123 093 740	62 824 236	91 722 150	87 861 101	76 407 655	119 768 596	56 987 361
200	94 595 614	90 529 985	78 341 254	122 952 326	62 617 572	89 569 738	85 925 468	75 289 529	117 986 503	54 376 780
300	94 747 227	90 381 977	78 482 539	123 077 490	62 800 488	90 119 337	86 309 213	74 745 670	118 441 544	55 043 368
500	94 538 741	90 327 393	78 290 103	122 905 374	62 548 956	91 466 789	87 520 689	75 918 801	119 557 170	56 677 643

	NAV Methode "T1_R2"					NAV Methode "T2_R2"				
	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	86 601 651	82 374 319	69 614 126	118 006 661	49 106 652	86 651 494	83 129 077	69 632 939	118 896 551	50 081 651
40	86 389 804	82 376 624	69 658 570	117 923 983	49 073 718	86 453 044	83 133 655	69 644 772	118 833 552	49 851 606
50	86 243 783	82 331 069	69 392 760	117 877 453	48 826 318	86 350 566	83 032 740	69 631 135	118 878 452	49 648 540
60	86 094 742	82 338 968	69 770 537	117 730 804	48 269 198	86 276 776	83 260 076	69 625 111	118 631 509	49 191 531
80	85 481 393	82 316 746	69 179 627	118 214 806	48 354 975	85 786 776	83 177 552	69 633 479	119 214 809	49 341 541
100	85 544 405	82 378 899	69 240 334	117 943 476	47 743 358	85 609 075	83 002 561	69 612 439	117 925 917	48 643 357
150	85 524 571	82 359 335	69 221 226	117 899 444	47 713 464	85 607 475	83 000 986	69 610 899	117 780 510	48 564 451
200	85 541 670	82 376 201	69 237 699	118 681 988	47 705 708	85 610 675	83 004 137	69 613 979	118 009 564	48 583 485
300	85 513 670	82 348 583	69 210 724	119 213 553	47 500 073	85 609 419	83 002 900	69 612 770	119 453 886	48 500 128
500	85 536 715	82 371 314	69 232 926	119 378 334	47 484 325	85 627 257	83 020 466	69 629 940	120 780 339	48 439 880

❖ Calcul de la « Delta NAV » ou « charge de capital » par sous-risques du risque de marché

	Mkt - Methode T1_R1				Mkt - Methode T2_R1			
	Immo	Action	Taux up	Taux down	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	4 218 322	16 260 938	0	31 583 485	4 040 197	15 040 889	0	32 332 393
40	4 216 751	16 259 188	0	31 584 616	4 115 941	14 922 757	0	32 795 236
50	4 216 702	16 258 936	0	31 585 166	4 005 062	16 294 900	0	34 095 740
60	4 218 256	16 265 397	0	31 242 328	3 765 330	15 359 071	0	33 329 464
80	4 216 012	16 257 916	0	31 258 081	3 751 995	15 183 804	0	38 776 410
100	4 215 007	16 256 641	0	31 974 897	4 000 962	15 609 113	0	34 971 523
150	4 218 378	16 267 231	0	31 942 675	3 861 050	15 314 496	0	34 734 790
200	4 065 630	16 254 360	0	31 978 042	3 644 271	14 280 209	0	35 192 958
300	4 365 250	16 264 688	0	31 946 739	3 810 124	15 373 667	0	35 075 969
500	4 211 348	16 248 638	0	31 989 785	3 946 101	15 547 989	0	34 789 146

	Mkt - Methode T1_R2				Mkt - Methode T2_R2			
	Immo	Action	Taux up	Taux down	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	4 227 332	16 987 525	0	37 494 999	3 522 417	17 018 555	0	36 569 843
40	4 013 181	16 731 234	0	37 316 086	3 319 390	16 808 272	0	36 601 438
50	3 912 715	16 851 023	0	37 417 465	3 317 826	16 719 431	0	36 702 026
60	3 755 775	16 324 205	0	37 825 544	3 016 700	16 651 665	0	37 085 245
80	3 164 647	16 301 765	0	37 126 417	2 609 224	16 153 297	0	36 445 235
100	3 165 506	16 304 071	0	37 801 047	2 606 513	15 996 636	0	36 965 718
150	3 165 236	16 303 345	0	37 811 107	2 606 489	15 996 576	0	37 043 024
200	3 165 469	16 303 971	0	37 835 962	2 606 538	15 996 696	0	37 027 190
300	3 165 087	16 302 946	0	38 013 597	2 606 519	15 996 648	0	37 109 291
500	3 165 401	16 303 789	0	38 052 390	2 606 791	15 997 317	0	37 187 377

Notons que la charge de capital au titre du risque de taux en cas de hausse est nulle. Ce résultat est valable pour les quatre méthodes mises en œuvre et correspond au résultat observé lors du calcul « SCR » cible (cf. section 3.2).

❖ Calcul du « SCR » risque de marché

	Mkt SCR			
	T1_R1	T2_R1	T1_R2	T2_R2
20	37 387 016	37 400 880	42 958 493	41 818 166
40	37 386 402	37 798 342	42 588 347	41 662 858
50	37 386 738	39 513 392	42 684 715	41 714 214
60	37 091 679	38 302 143	42 759 466	41 896 374
80	37 100 703	43 170 672	41 851 779	40 928 594
100	37 725 553	39 993 224	42 465 280	41 335 190
150	37 703 994	39 589 784	42 474 005	41 405 520
200	37 654 978	39 482 989	42 496 956	41 391 176
300	37 777 863	39 899 171	42 657 892	41 465 900
500	37 733 030	39 777 538	42 693 667	41 537 412

Notons, la forte exposition du portefeuille au risque de taux en cas de baisse, celui-ci représentant au minimum (méthode « T1_R1 ») de 85 % du total de besoin en capital au titre du risque de marché (« SCR Marché »).

3.5.1.2 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 5 %

❖ Résultats du calcul de la « NAV »

	NAV Methode T1_R1					NAV Methode T2_R1				
	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	58 416 121	50 556 121	29 511 666	115 766 025	- 2 807 847	54 152 560	46 589 761	25 948 686	109 935 502	- 4 900 620
40	58 482 212	50 622 212	29 577 756	115 816 551	- 2 942 527	57 943 345	50 566 988	30 499 933	112 859 504	- 7 517 882
50	58 373 694	50 513 694	29 469 239	115 733 589	- 3 123 008	55 278 137	47 660 930	26 878 336	110 803 710	- 7 439 897
60	58 467 243	50 607 243	29 562 788	115 865 779	- 3 103 982	55 258 314	47 686 546	27 056 952	111 744 242	- 9 155 249
80	58 386 363	50 526 437	29 481 982	115 803 959	- 3 098 733	50 675 009	43 168 749	22 773 008	108 220 625	- 8 407 403
100	58 314 429	50 458 231	29 413 776	115 892 900	- 2 864 868	53 917 878	46 469 212	26 142 545	110 515 518	- 4 499 192
150	57 918 052	50 058 589	29 014 134	115 590 086	- 2 929 493	53 945 320	46 453 049	26 037 863	110 536 630	- 6 997 741
200	57 687 475	49 834 368	28 791 798	115 413 936	- 3 045 860	54 375 529	46 941 485	26 654 775	110 867 598	- 6 704 466
300	57 559 825	49 700 754	28 656 298	115 316 417	- 2 975 885	54 778 169	47 320 615	27 029 133	111 177 358	- 6 819 422
500	57 975 878	50 133 693	29 101 655	115 634 262	- 3 037 703	53 636 140	46 171 126	25 839 167	110 298 771	- 3 841 208

	NAV Methode "T1_R2"					NAV Methode "T2_R2"				
	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down	Central	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	46 216 161	30 488 376	19 485 831	102 121 589	- 8 669 704	46 996 716	32 411 423	20 380 161	101 919 590	- 8 669 704
40	46 165 554	30 529 067	18 995 170	101 942 695	- 8 945 074	46 946 109	32 452 016	19 941 794	101 740 210	- 8 446 161
50	45 985 555	30 417 277	19 034 869	101 770 336	- 9 190 940	46 766 110	32 340 498	19 981 493	101 880 224	- 9 042 221
60	45 795 855	30 429 710	18 925 805	101 795 534	- 9 426 310	46 696 943	32 352 901	19 872 429	101 686 407	- 9 128 188
80	45 506 967	30 265 810	18 937 936	101 187 919	- 9 875 577	46 408 055	32 195 783	19 884 559	101 118 125	- 9 662 906
100	45 012 598	30 272 027	18 778 033	99 647 931	- 9 739 490	45 966 375	32 201 984	19 730 898	100 455 937	- 9 739 490
150	45 052 597	30 190 076	18 784 098	99 593 435	- 9 849 396	46 006 374	32 123 425	19 736 963	100 401 452	- 9 849 396
200	44 942 709	30 193 185	18 704 146	99 477 337	- 9 922 667	45 896 486	32 126 526	19 660 133	100 290 283	- 9 922 667
300	44 954 931	30 152 210	18 707 179	98 903 552	- 9 995 938	45 908 708	32 087 246	19 663 165	99 719 107	- 9 995 938
500	44 793 820	30 111 234	18 667 203	99 413 663	- 10 069 209	45 753 886	32 047 966	19 624 750	100 229 218	- 10 069 209

Notons qu'en cas de baisse des taux d'intérêts, la valeur net des actifs (NAV) est négative, ce qui traduit une valeur de l'actif insuffisante au regard du niveau de provisionnement (« best

estimate ») nécessaire. Ce phénomène est reproduit de façon homogène quelle que soit la méthode employée, en étant cohérent avec ce que nous observons lors de l'évaluation du « SCR » cible.

❖ Résultats du calcul de la « Delta NAV » ou « charge de capital » par sous-risques du risque de marché

	Mkt - Methode T1_R1				Mkt - Methode T2_R1			
	Immo	Action	Taux up	Taux down	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	7 860 000	28 904 455	0	61 223 968	7 562 799	28 203 874	0	59 053 181
40	7 860 000	28 904 455	0	61 424 739	7 376 356	27 443 412	0	65 461 226
50	7 860 000	28 904 455	0	61 496 702	7 617 207	28 399 801	0	62 718 034
60	7 860 000	28 904 455	0	61 571 225	7 571 767	28 201 362	0	64 413 563
80	7 859 926	28 904 381	0	61 485 096	7 506 260	27 902 001	0	59 082 412
100	7 856 198	28 900 653	0	61 179 297	7 448 666	27 775 333	0	58 417 070
150	7 859 462	28 903 918	0	60 847 545	7 492 271	27 907 457	0	60 943 060
200	7 853 107	28 895 678	0	60 733 336	7 434 044	27 720 754	0	61 079 995
300	7 859 071	28 903 526	0	60 535 709	7 457 554	27 749 036	0	61 597 590
500	7 842 184	28 874 223	0	61 013 581	7 465 014	27 796 972	0	57 477 348

	Mkt - Methode T1_R2				Mkt - Methode T2_R2			
	Immo	Action	Taux up	Taux down	Immo	Action	Taux up	Taux down
20	15 727 786	26 730 330	0	54 885 866	14 585 293	26 616 555	0	55 666 421
40	15 636 487	27 170 384	0	55 110 628	14 494 094	27 004 316	0	55 392 271
50	15 568 279	26 950 686	0	55 176 496	14 425 612	26 784 618	0	55 808 332
60	15 366 145	26 870 050	0	55 222 165	14 344 042	26 824 514	0	55 825 131
80	15 241 157	26 569 031	0	55 382 544	14 212 272	26 523 496	0	56 070 961
100	14 740 571	26 234 565	0	54 752 088	13 764 391	26 235 477	0	55 705 865
150	14 862 521	26 268 499	0	54 901 993	13 882 949	26 269 411	0	55 855 770
200	14 749 524	26 238 563	0	54 865 376	13 769 960	26 236 353	0	55 819 153
300	14 802 721	26 247 752	0	54 950 869	13 821 462	26 245 543	0	55 904 646
500	14 682 585	26 126 616	0	54 863 028	13 705 919	26 129 136	0	55 823 094

La charge de capital au titre du risque de taux en cas de hausse est nulle. Ce résultat est valable pour les quatre méthodes mises en œuvre et correspond au résultat observé lors du calcul « SCR » cible (cf. section 3.2).

❖ Calcul du « SCR » risque de marché

	Mkt SCR			
	T1_R1	T2_R1	T1_R2	T2_R2
20	71 109 939	68 725 625	68 711 391	68 680 677
40	71 288 405	74 067 406	69 060 960	68 575 492
50	71 352 402	72 105 727	68 973 472	68 792 492
60	71 418 692	73 523 931	68 858 901	68 780 152
80	71 342 011	68 588 780	68 783 621	68 779 390
100	71 066 724	67 913 455	67 800 449	68 081 696
150	70 775 156	70 243 402	68 014 414	68 292 967
200	70 667 057	70 257 132	67 905 036	68 183 611
300	70 498 186	70 744 440	68 013 071	68 290 530
500	70 900 954	67 098 486	67 812 982	68 102 482

Remarque

La charge de capital (ou SCR) au titre du risque de taux d'intérêt est égale à la variation de la NAV obtenue pour le choc de taux à la baisse (cf. section 3.2, *Partie II*). Ainsi l'exposition du portefeuille au risque de taux est plus importante en cas de baisse des taux d'intérêts, qu'en cas de hausse de ces derniers. Ce constat est vérifié quelque soit la méthode d' « agrégation d'actif » appliquée.

Notons que dans ce contexte d'engagement de taux, le risque de taux à la baisse est une fois encore le plus important en terme de charge de capital avec une participation de plus de 83 % au montant du « SRC Marché ».

3.5.2 CALCUL DU « SCR LIFE »

3.5.2.1 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 2,5%

- ❖ Résultats du calcul de la « charge de capital » par sous-risques de souscription Vie

	Life - Methode T1_R1					Life - Methode T2_R1				
	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	3 490 208	0	34 466 251	0	13 699 301	3 320 129	0	33 456 209	0	13 058 977
40	3 490 214	0	34 465 632	0	13 697 969	3 357 106	0	32 686 175	0	12 706 805
50	3 490 212	0	35 753 555	0	13 698 068	3 532 636	0	34 949 021	0	18 522 670
60	3 490 118	0	34 474 135	0	13 704 940	3 468 679	0	34 421 961	0	13 940 790
80	3 490 206	0	35 752 657	0	13 696 959	3 541 654	0	34 848 058	0	13 912 082
100	3 490 280	0	34 464 305	0	13 697 040	3 402 938	0	33 669 507	0	13 199 379
150	3 490 184	0	35 774 414	0	13 716 317	3 455 295	0	34 098 926	0	13 572 671
200	3 490 263	0	35 751 300	0	13 696 088	3 377 063	0	33 667 288	0	13 419 025
300	3 490 159	0	35 771 756	0	13 715 428	3 396 333	0	33 533 175	0	13 206 614
500	3 490 444	0	34 458 846	0	13 696 060	3 455 030	0	33 905 769	0	13 450 132

	Life - Methode T1_R2					Life - Methode T2_R2				
	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	4 573 443	0	36 275 053	0	15 099 928	4 670 347	0	36 284 644	0	14 998 754
40	3 575 648	0	36 196 818	0	14 908 566	4 472 411	0	36 105 041	0	14 806 846
50	3 577 168	0	36 011 820	0	14 814 520	4 373 477	0	36 115 574	0	14 811 025
60	3 578 719	0	35 927 132	0	14 620 597	4 174 244	0	36 123 158	0	14 714 034
80	3 585 103	0	35 390 146	0	14 045 606	3 579 340	0	35 373 521	0	14 134 015
100	3 584 447	0	35 383 673	0	14 043 037	3 581 189	0	35 391 786	0	14 041 261
150	3 584 653	0	35 385 710	0	14 043 845	3 581 205	0	35 391 950	0	14 041 326
200	3 584 475	0	35 383 954	0	14 043 148	3 581 172	0	35 391 621	0	14 041 195
300	3 584 767	0	35 386 830	0	14 044 290	3 581 185	0	35 391 750	0	14 041 247
500	3 584 527	0	35 384 463	0	14 043 350	3 581 000	0	35 389 917	0	14 040 519

- ❖ Calcul du « SCR » risque de souscription vie

	Life SCR			
	T1_R1	T2_R1	T1_R2	T2_R2
20	34 642 517	33 620 547	36 562 219	36 583 979
40	34 641 902	32 858 122	36 372 996	36 380 990
50	35 923 506	35 127 106	36 189 049	36 379 417
60	34 650 352	34 596 288	36 104 931	36 363 538
80	35 922 612	35 027 567	35 571 272	35 554 151
100	34 640 589	33 841 035	35 564 766	35 572 509
150	35 944 264	34 273 544	35 566 814	35 572 674
200	35 921 267	33 836 236	35 565 048	35 572 344
300	35 941 616	33 704 731	35 567 939	35 572 473
500	34 635 174	34 081 350	35 565 560	35 570 631

3.5.2.2 RESULTATS DANS LE CAS D'UN ENGAGEMENT DE TAUX (TMG) A 5%

- ❖ Résultats du calcul de la « charge de capital » par sous-risques de souscription Vie

	Life - Methode T1_R1					Life - Methode T2_R1				
	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	3 449 902	0	44 688 910	0	10 789 404	3 075 852	0	36 331 064	0	8 599 798
40	3 452 874	0	44 731 569	0	10 798 934	3 015 368	0	39 033 210	0	9 251 561
50	3 448 184	0	44 672 227	0	10 783 569	2 837 787	0	36 836 240	0	8 766 189
60	3 452 207	0	44 720 965	0	10 796 782	2 843 706	0	25 738 329	0	8 788 631
80	3 448 835	0	44 682 542	0	10 787 047	2 684 222	0	34 809 357	0	8 155 228
100	3 443 487	0	44 615 725	0	10 770 149	2 937 685	0	38 016 551	0	9 013 924
150	3 426 321	0	44 397 692	0	10 711 189	2 927 825	0	37 929 921	0	8 993 488
200	3 416 801	0	43 934 667	0	10 681 087	2 954 695	0	38 301 547	0	9 091 149
300	3 411 117	0	43 809 369	0	10 661 391	2 978 932	0	38 536 202	0	9 133 004
500	3 380 505	0	43 809 757	0	10 563 081	2 884 699	0	37 338 373	0	8 827 937

	Life - Methode T1_R2					Life - Methode T2_R2				
	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass	Mortalité	Longévité	Rachat up	Rachat down	Rachat mass
20	4 045 119	0	34 735 076	0	12 194 221	4 037 365	0	34 664 932	0	12 169 900
40	4 186 097	0	34 891 217	0	12 339 225	4 056 612	0	34 689 708	0	12 190 615
50	4 297 856	0	35 026 066	0	12 457 115	4 168 371	0	34 824 558	0	12 308 506
60	4 607 436	0	35 375 161	0	12 777 187	4 545 272	0	35 236 762	0	12 694 780
80	4 278 152	0	35 042 679	0	12 447 054	4 215 987	0	34 904 280	0	12 364 647
100	3 894 762	0	34 668 073	0	12 065 997	3 885 287	0	34 582 363	0	12 036 279
150	3 922 418	0	34 694 752	0	12 093 393	3 912 943	0	34 609 042	0	12 063 675
200	3 975 242	0	34 760 453	0	12 149 636	3 959 415	0	34 667 889	0	12 113 433
300	3 981 292	0	34 766 015	0	12 155 557	3 965 465	0	34 673 451	0	12 119 354
500	3 901 537	0	34 692 698	0	12 077 511	3 888 823	0	34 602 996	0	12 044 355

Notons que la charge de capital au titre des risques de longévité e/out rachats massifs est nulle. Ce résultat est vérifié pour les quatre méthodes mises en œuvre, quel que soit l'engagement de taux (TMG = 2,5 % ou 5 %) et correspond aux résultats observés lors du calcul du « SCR » cible (cf. section 3.2).

❖ Calcul du « SCR » risque de souscription vie

	Life SCR			
	T1_R1	T2_R1	T1_R2	T2_R2
20	44 821 875	36 461 035	34 969 823	34 899 253
40	44 864 636	39 149 507	35 141 434	34 926 093
50	44 805 109	36 945 386	35 288 764	35 073 140
60	44 854 013	25 894 946	35 673 947	35 528 705
80	44 815 444	34 912 696	35 302 860	35 157 977
100	44 748 414	38 129 885	34 886 164	34 799 932
150	44 529 706	38 042 754	34 915 772	34 829 541
200	44 067 329	38 415 345	34 987 021	34 893 259
300	43 941 968	38 651 169	34 993 235	34 899 472
500	43 939 989	37 449 641	34 911 392	34 820 831

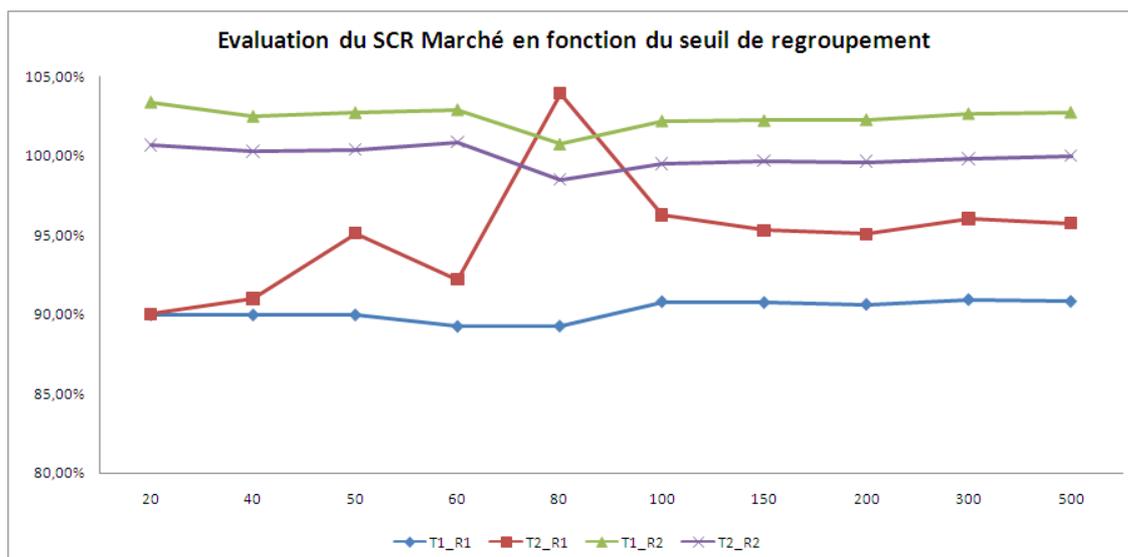
Remarque

La charge de capital (ou SCR) au titre du risque de Rachat est égale à la variation de la NAV obtenue pour le choc de rachat à la hausse (cf. section 4.4, *Partie II*). Ainsi l'exposition du portefeuille au risque de rachat est plus importante en cas de dérive à la hausse de la loi de rachat structurel, qu'en cas de rachat massifs et circonstanciels la première année de projection du portefeuille. Ce constat est vérifié quelque soit la méthode d' « agrégation d'actif » appliquée.

3.5.3 CONVERGENCE DES RESULTATS VERS LES VALEURS CIBLES

3.5.3.1 IMPACT DES METHODES D' « AGREGATION D'ACTIF » SUR LE CALCUL DU « SCR » DE MARCHE A TMG=2,5 %

	Ratio SCR (methode d'agregation)/SCR Cible, TMG=2,5%			
	T1_R1	T2_R1	T1_R2	T2_R2
20	89,97%	90,00%	103,38%	100,63%
40	89,97%	90,96%	102,49%	100,26%
50	89,97%	95,09%	102,72%	100,38%
60	89,26%	92,17%	102,90%	100,82%
80	89,28%	103,89%	100,72%	98,49%
100	90,79%	96,24%	102,19%	99,47%
150	90,73%	95,27%	102,21%	99,64%
200	90,62%	95,02%	102,27%	99,61%
300	90,91%	96,02%	102,66%	99,79%
500	90,80%	95,72%	102,74%	99,96%

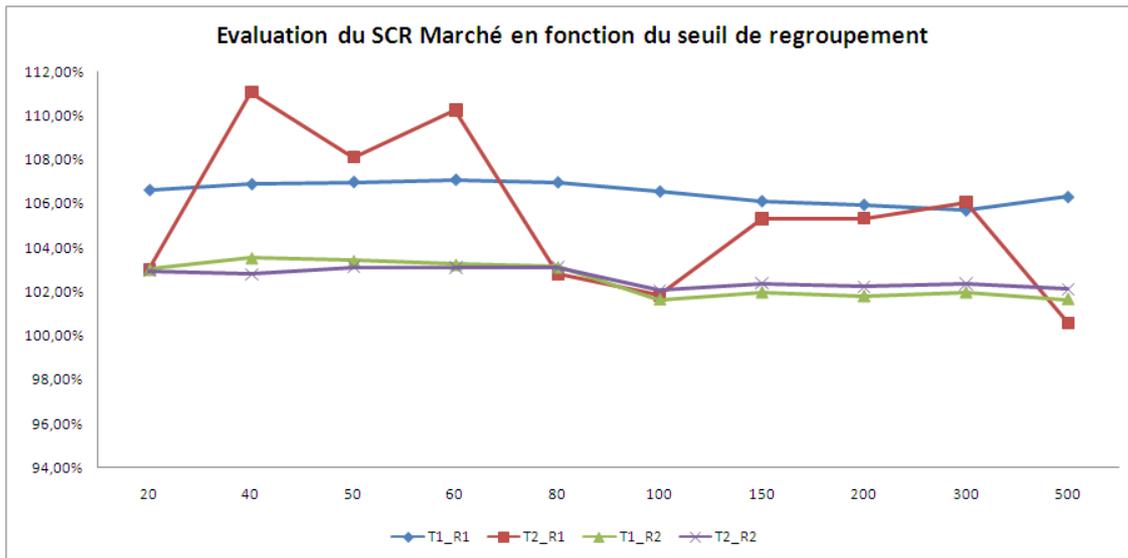


Notons globalement que la performance des méthodes d'« agrégation d'actif » observée au niveau du calcul du « best estimate » est maintenue, voire augmentée lors du passage au niveau « SCR ».

Ainsi, on constate que les résultats de la méthode « T2_R2 » pour le calcul du « SCR » de marché présentent une dérive inférieure à 1%, et cela dès $P=20$. Elle est donc la plus performante devant la méthode « T1_R2 » avec une dérive de 2% en moyenne, loin devant les méthodes attachées au critère de regroupement « R1 » dont les dérives peuvent atteindre 11% à des seuils $P < 100$ trajectoires, seuil à partir duquel les dérives observées pour « T1_R1 » et « T2_R1 » se stabilisent, respectivement autour de 10% et 5%.

3.5.3.2 IMPACT DES METHODES D'« AGREGATION D'ACTIF » SUR LE CALCUL DU « SCR » DE MARCHE A TMG=5 %

	Ratio SCR (methode d'agregation)/SCR Cible, TMG=5%			
	T1_R1	T2_R1	T1_R2	T2_R2
20	106,59%	103,02%	103,00%	102,95%
40	106,86%	111,03%	103,52%	102,79%
50	106,96%	108,09%	103,39%	103,12%
60	107,06%	110,21%	103,22%	103,10%
80	106,94%	102,81%	103,11%	103,10%
100	106,53%	101,80%	101,63%	102,05%
150	106,09%	105,29%	101,95%	102,37%
200	105,93%	105,32%	101,79%	102,21%
300	105,68%	106,05%	101,95%	102,37%
500	106,28%	100,58%	101,65%	102,09%



La performance des méthodes d'« agrégation d'actif » observée au niveau « SCR » de marché est proche de ce que nous observons au niveau des « best estimate ».

On constate dans cette section que les résultats des méthodes « T1_R1 » et « T2_R2 » sont très proches en terme de performance avec cependant un avantage à la première, qui à partir de $P=100$ présente une dérive inférieure à 2 % contre 2,2 % pour la seconde.

Ces méthodes supplantent de nouveau les méthodes attachées au critère de regroupement « R1 ».

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous nous sommes attaché à proposer une alternative aux contraintes opérationnelles posées par la comptabilisation des options et garanties financières dans le cadre de la mise en œuvre de projections actif/passif, en assurance vie. En effet dans une approche par simulation cette opération requiert des temps de calcul conséquents, limitant de fait, les moyens d'analyse et par conséquent la fiabilisation des résultats pour ce type de problématiques.

Dans cette optique, nous avons présenté quatre modèles d'« agrégation d'actif » visant à constituer un nombre réduit de trajectoires caractérisées par leur forte représentativité de la distribution des actifs.

Ces modèles se composent de deux niveaux d'hypothèses, le premier visant à définir le critère de regroupement des trajectoires en sous-groupes homogènes et de même pondération, tandis que le second précise le critère d'agrégation appliqué, identiquement, à chaque sous groupe afin d'en extraire une trajectoire représentative de la distribution d'actif au sein de ce dernier.

Ainsi il a été mis en évidence, que sous l'hypothèse de regroupement⁴⁹ qui consiste à réunir les trajectoires du processus d'actif selon les quantiles de la distribution (ordonnée/classée, à chaque instant t de discrétisation) ; les critères respectifs d'agréations par la moyenne⁵⁰ et/ou par la médiane⁵¹ (des sous-groupes constitués), offrent des performances très proches, caractérisées par une dérive inférieure à 2% sur la valeur des provisions techniques « Best Estimate » et le niveau de capital économique « SCR » requis. Cette dérive est établie pour un seuil minimum de 100 trajectoires et présente une évolution quasi nulle au-delà. Autrement dit, la vitesse de convergence du modèle d'agrégation se stabilise à partir du seuil de regroupement 100 (tout gain de convergence à des seuils supérieurs n'étant que marginal).

Enfin, il convient de rester vigilant quant au contexte d'utilisation des méthodes d'« agrégation d'actif ». En effet, à l'image de ce que nous observons pour le *pricing* de produits dérivés, en particulier les options Asiatiques à barrières, la performance de ces méthodes n'est vérifiée que dans le cadre des problématiques de modélisation liées à la distribution globale des actifs. En revanche, pour les problématiques spécifiques aux queues de distribution, les méthodes de « simulations dans les simulations » restent une alternative a priori mieux adaptée.

En conclusion, la démarche proposée dans ce mémoire permet d'optimiser les performances d'un modèle de projection Actif/Passif dynamique. De ce fait, elle ouvre un certain nombre de perspectives d'application, notamment dans la mise en œuvre de modèles internes (ou internes partiels) en Solvabilité II.

⁴⁹ Critère de regroupement « R2 »,

⁵⁰ Critère d'agrégation « T1 »,

⁵¹ Critère d'agrégation « T2 ».

BIBLIOGRAPHIE

LOISEL S., DEVINEAU L. [2009]: « *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du Capital Economique Solvabilité II* ».

PORTAIT R., PONCET P. [2009] : « *Finance de Marché : Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques* », Livre DALLOZ.

PLANCHET F., THEROND P. & NTEUKAM O. [2009]: « *Optimal strategies of hedging portfolio of unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee* ».

PLANCHET F., NTEUKAM O. [2010] : « *Evaluation stochastique des contrats d'épargne : agrégation des trajectoires de l'actif & mesure de l'erreur liée à l'agrégation* ».

QUITTARD-PINON F. [2003] : « *Marchés des capitaux et Théorie Financière. Livre* », Livre ECONOMICA.

ANNEXES

1. ANNEXES

1.1. GENERATEUR DE NOMBRES ALEATOIRES

1.1.1 GENERATEUR DE NOMBRES ALEATOIRES D'UNE LOI UNIFORME

La première étape pour mener à bien des simulations est la génération de nombres aléatoire selon une loi uniforme du fait notamment des méthodes de type "inversion de la fonction de répartition".

Ce mémoire n'ayant pas pour objet premier l'aspect purement informatique des simulations stochastiques, nous retenons comme générateur de nombres aléatoires celui du logiciel « R ».

1.2.1 METHODE DE L'INVERSION DE LA FONCTION DE REPARTITION (ALGORITHME DE MORO)

Nous retenons l'algorithme de Moro pour générer des variables gaussiennes. Bien que cet algorithme soit basé sur une approximation de l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, celui s'avère plus efficace en terme de corrélations résiduelles entre les valeurs simulées par rapport à des méthodes exactes telle que la méthode de Box Muller.

Loi Normale

La fonction de répartition F de la loi Normale est donnée par :

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, $N(0;1)$,

$$\text{avec : } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Le problème de la simulation de $N(\mu;\sigma^2)$ peut donc être vu comme le problème de l'inversion de la fonction de répartition de $N(0,1)$. En effet, si $Y \sim N(0;1)$, alors $X = \mu + \sigma Y$ suit $N(\mu;\sigma^2)$.

L'inverse de la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite n'étant pas aisément calculable, l'algorithme de Moro permet d'approcher le résultat par une méthode numérique.

Il est à noter que cette méthode de simulation est l'une des plus précises parmi l'ensemble des algorithmes existants, notamment au niveau de la queue de distribution.

L'algorithme de Moro

Soit y la valeur de loi uniforme générée, alors $y = \hat{O}(x)$ d'après ce qui précède.

Posons $z = y - 0,5$.

Si $|z| \leq 0.42$ alors x est approché par :

$$\diamond x = z \frac{\sum_{i=0}^3 a_i z^{2i}}{\sum_{j=0}^4 b_j z^{2j}}$$

Dans le cas contraire, si $|z| \geq 0.42$, alors :

$$\diamond x = \varepsilon \left(\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \varepsilon \frac{c_0}{2}, \text{ avec } \varepsilon \text{ signe de } z ; \text{ et}$$

$$\diamond t = k_1 \left\{ 2 \ln \left(-\ln \left(\frac{1}{2} - |z| \right) \right) - k_2 \right\}$$

La fonction $f(t) = \left(\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right) - \frac{c_0}{2}$ pouvant être approchée par l'algorithme suivant :

$$\diamond \text{ Soit } d_{10} = 0 \text{ et } d_9 = 0$$

Soient d_i les réels déterminés par la relation récursive :

$$\diamond d_i = 2 t d_{i+1} - d_{i+2} + c_j \text{ pour } i = 8, 7, \dots, 1.$$

$$\text{Alors on a } f(t) = t d_1 - d_2 + \frac{c_0}{2}$$

1.2. MISE EN ŒUVRE DES TRAVAUX DE SIMULATION SOUS LE LOGICIEL « R »

1.2.1 SIMULATION DES VARIABLES GAUSSIENNES ET AGREGATIONS DE TRAJECTOIRES SOUS « R »

Ci-dessous l'algorithme complet d'« agrégation d'actif » correspondant aux méthodes « T1_R2 » et « T2_R2 », sous le logiciel « R » :

#Code génération échantillon gaussien

```

sim_gauss0<-function(n,T){
x=matrix(0,nrow=n,ncol=T)
xt=matrix(0,nrow=T,ncol=n)
#x=matrix(rmorm(T,0,1),n,T)
for (i in 1:n){
x[i,]=rmorm(T,0,1)
}
xt=t(x)
xt
}
xs = sim_gauss0(n,T)

sim_gauss1<-function(n,T){
xr=matrix(0,nrow=T,ncol=n)
for (j in 1:n){
xr[1,j]= xs[1,j]
for (i in 2:T){
xr[i,j]=xs[i,j]+xr[i-1,j]
}
}
xr
}
m=sim_gauss1(n,T)

sim_gauss2<-function(n,T,sigma,tr,S){
rx=matrix(0,nrow=T,ncol=n)
for (j in 1:n){
for (te in 1:T){
rx[te,j]=S*exp(sigma*m[te,j]+tr-(0.5*sigma^2)*te)
}
}
rx
}
r=sim_gauss2(n,T,sigma,tr,S)

```

#Code agrégation des trajectoires

```

AMoy<-function(M,p){
n=ncol(M)
T=nrow(M)
Moy=matrix(nrow=T,ncol=p,0)
for(i in 1:T){
M[i,]=rbind(M[i,])[,order(M[i,])]
for(j in 1:(p-1)){
Moy[i,j]=mean(M[i,(1+(j-1)*(n%%p)):(j*(n%%p))])
}
Moy[i,p]=mean(M[i,(1+(p-1)*(n%%p)):n])
}
t(Moy)
}

AMed<-function(M,p){
n=ncol(M)
T=nrow(M)
Med=matrix(nrow=T,ncol=p+1,0)
for(i in 1:T){
M[i,]=rbind(M[i,])[,order(M[i,])]
for(j in 1:(p-1)){
Med[i,j]=median(M[i,(1+(j-1)*(n%%p)):(j*(n%%p))])
}
Med[i,p]=median(M[i,(1+(p-1)*(n%%p)):n])
Med[i,p+1]=median(M[i,1:n])
}
t(Med)
}

```

```
x=c(20,40,50,60,80,100,150,200,300,500,1000)

for(i in 1:length(x)){
K=matrix(ncol=41,nrow=x[i],0)
L=matrix(ncol=41,nrow=x[i]+1,0)
K=AMoy(r,x[i])
L=AMed(r,x[i])
write.table(K,file=lien_sortie,row.names=FALSE,col.names=FALSE)
write.table(L,file=lien_sortie,row.names=FALSE,col.names=FALSE)
}
```

1.2.2 APPLICATION DES METHODES D' «AGREGATION D'ACTIF » AU PRICING D'OPTIONS SOUS « R »

```
M1=AgregMoy(r,x[i]) #cf. ci-dessus
M2=AgregMed(r,x[i]) #cf. ci-dessus

Asiat<-function(M,K,r,T1){
N=ncol(M)
T=nrow(M)
payA=rep(0,N)
for(i in 1:N){payA[i]=max(K-(prod(M[T1:T,i]))^(1/(T-T1+1)),0)}
#PutA=exp(-r*T)*sum(payA[1:N])/N
PutA=(mean(payA))*exp(-r*T)
PutA
}

Bar<-function(M,K,B,r){
N=ncol(M)
T=nrow(M)
payB=rep(0,N)
for(i in 1:N){payB[i]=max(K-M[T,i,0]*((min(M[1:T,i]))<=B)}
#PutB=sum(payB[1:N])/N
PutB=(mean(payB))*exp(-r*T)
PutB
}

AMoy=Asiat(M1,K,tr,T1)
BMoy=Bar(M1,K,B,tr)
AMed=Asiat(M2,K,tr,T1)
BMed=Bar(M2,K,B,tr)
```

1.3. LOI DES RACHAT STRUCTURELS

L'ACP préconisait dans le cadre du QIS4/5 la prise en compte de ces deux taux de rachat. En effet, le taux de rachats conjoncturels RC doit être additionné au taux de rachats structurels RS qui aura été calibré sur la base des observations historiques.

Le taux de rachats conjoncturels est fonction de l'écart entre le taux servi R et le taux moyen des emprunts d'état (TME) observé :

$$RC(R) = \begin{cases} 30\% & \text{si } R - TME < -5\% \\ 30\% \frac{(R - TME + 1\%)}{-4\%} & \text{si } -5\% < R - TME < -1\% \\ 0 & \text{si } -1\% < R - TME < 0,5\% \\ -5\% \frac{(R - TME - 0,5\%)}{2,5\%} & \text{si } 0,5\% < R - TME < 3\% \\ -5\% & \text{si } R - TME > 3\% \end{cases}$$

1.4. SIMPLIFIATION POUR LE CALCUL DE LA MARGE POUR RISQUE

1.4.1 METHODE SIMPLIFIEE 1

Cette méthode consiste à supposé que les SCR futurs sont proportionnels aux *best estimate* futurs, les *best estimate* étant évalués ici net de réassurance. Sous cette hypothèse les SCR futurs sont calculés avec la formule suivante :

$$SCR(t) = \frac{SCR(0)}{BE_{net}(0)} \cdot BE_{net}(t)$$

où :

- ❖ $SCR(t)$ désigne le SCR relatif à l'année t ;
- ❖ $BE_{net}(t)$ désigne le *best estimate* net de réassurance.

1.4.2 METHODE SIMPLIFIEE 2

Cette méthode est basée sur la durée des engagements d'assurance.

La marge de risque pour chaque branche peut être évaluée par la formule suivante :

$$CoCM_{lob} = \frac{CoC}{(1 + r_1)} \cdot Dur_{lob}(0) \cdot SCR_{lob}(0)$$

où :

- ❖ CoC désigne le coût du capital, fixé à 6 % ;
- ❖ $SCR_{lob}(0)$ désigne le SCR en 0 ;
- ❖ $Dur_{lob}(0)$ désigne la durée des engagements nets de réassurance relatifs à la branche considérée en 0.

Afin de déterminer $SCR_{lob}(0)$, un calcul du SCR de souscription vie par segment peut être nécessaire. Ce calcul peut être simplifié en redistribuant les charges des sous-risques (mortalité, longévité, etc.) du portefeuille global aux différents segments en proportion d'une mesure de risque appropriée. À cet effet, le tableau d'exposition ci-dessous pourra être utilisé.

SOUS-RISQUE	MESURE D'EXPOSITION AU SOUS-RISQUE
Mortalité	(capital sous risque) x (durée des engagements sous le risque de mortalité)
Longévité	<i>best estimate</i> des engagements sous le risque de longévité
Invalité	(capital sous risque) x (durée des engagements sous le risque d'invalité)
Rachat	(<i>best estimate</i> des contrats sous le risque de rachat) - (valeurs de rachat des contrats sous le risque de rachat)
Dépenses	(dépenses renouvelables).x durée.
Révision	<i>best estimate</i> des engagements sous le risque de révision
CAT	capital sous risque des engagements sous le risque de mortalité et d'invalité.

1.5. MKT_{EQ} : RISQUE ACTION, COMPLEMENTS SUR METHODES DE SIMPLIFICATION

1.5.1 ÉTAPE 1 : ACTIONS ET COUVERTURES SIMPLES

Dans la première étape les instruments de couverture des actions simples doivent être pris en compte. La couverture réduit le stress avec le changement dans la valeur de marché de l'instrument même. Les calculs au sein de cette première méthode seront réalisés comme suit.

Pour chaque indice i la valeur de marché des actions individuelles affectées à i dans le cas du scénario de stress $equityshock_i$ sera calculée en prenant en compte les instruments de couverture. Les valeurs de marché « stressées » seront calculées comme suit :

$$Equity_stress_{i,j} = Equity_{i,j} \times (1 - volafactor_i) + Hedge_{i,j}$$

où :

- $Equity_{i,j}$ représente la valeur de marché de l'action j affectée à la classe i ;
- $Equity_stress_{i,j}$ représente la valeur de marché de l'action i, j après stress ;

- $Hedge_{i,j}$ représente le changement dans la valeur de marché des couvertures par action individuelle i,j sous stress ;
- $volafactor_i$ représente le facteur de volatilité dépendant du niveau de confiance et de l'écart type de la classe i .
- et où les facteurs de volatilité (cohérents avec la spécification des scénarios de la méthode standard) sont déterminés comme suit :

	Global (Classe 1)	Other (Classe 2)
volafactor_i	32%	45%

ÉTAPE 2 : ACTIONS ET COUVERTURES POUR LES SOUS-PORTEFEUILLES

- ❖ Dans une seconde étape, les instruments de couverture des classes seront pris en compte. L'atténuation du risque sera reflétée par le changement dans la valeur de marché des instruments de couverture par classe.
- ❖ Au sein de cette seconde étape, les changements dans la valeur de marché de toutes les actions de la classe i seront agrégés à une charge de capital prenant en compte les instruments de couverture pour le risque d'action pour la classe i comme suit :

$$Mkt_{eq,i} = \sum_j (Equity_{i,j} - Equity_{stress,i,j}) - Hedge_i$$

où :

- $Mkt_{eq,i}$ représente la charge de capital du risque action pour la classe i ;
- $Hedge_i$ représente le changement dans la valeur de marché des couvertures par classe i sous stress.

Finalement, la charge de capital globale pour le risque action sera établie en combinant les charges de capital des classes.

1.6. RISQUE DE MORTALITE : METHODE DE SIMPLIFICATION

La méthode de simplification peut être utilisée si :

- il n'y a pas de changement significatif dans le capital sous risque sur la durée du contrat ;
- les critères généraux de simplification sont suivis.

Cette méthode, qui consiste à utiliser des données agrégées, est définie par :

$$\text{MortalityCapitalRequirement} = \text{TotalCapitalAtRisk} \times q(\text{firm-specific}) \times n \times 0,10 \times \text{ProjectedMortalityIncrease},$$

où:

MortalityCapitalRequirement représente le capital requis pour le risque de mortalité ;

TotalCapitalAtRisk représente le capital total sous risque;

n représente la durée modifiée des flux du passif ;

q représente la mortalité attendue pour l'année prochaine pondérée par la somme assurée ;

ProjectedMortalityIncrease représente l'augmentation de la mortalité projetée et est égale à $1,1^{((n-1)/2)}$.

1.7. RISQUE DE LONGEVITE : METHODE DE SIMPLIFICATION

La méthode de simplification suivante peut être utilisée si :

- ❖ l'âge moyen des assurés au sein du portefeuille est de 60 ans ou plus ;
- ❖ les critères généraux de simplification sont suivis.

$$\text{LongevityCapitalRequirement} = 25 \% \times q \times 1,1^{((n-1)/2)} \times n \times \text{TechnicalProvisionsForContracts SubjectToLongevityRisk},$$

Où :

- ❖ *LongevityCapitalRequirement* représente le capital requis pour le risque de longévité ;
- ❖ *n* représente la durée modifiée des flux du passif ;
- ❖ *q* représente la mortalité attendue pour l'année prochaine pondérée par la somme assurée ;
- ❖ *TechnicalProvisionsForContractsSubjectToLongevityRisk* représente les provisions techniques des contrats sous le risque de longévité.

1.8. RISQUE RACHAT : METHODE DE SIMPLIFICATION

La comparaison de la valeur de rachat et du « *best estimate* » de la provision dans les calculs ci-dessus peut être faite au niveau de groupes homogènes de risque si cela est proportionnel à la nature, l'ampleur et la complexité du risque.

Un calcul simplifié de $Lapse_{up}$ et de $Lapse_{down}$ peut être fait si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ❖ le calcul simplifié est cohérent avec la nature, l'ampleur et la complexité du risque ;
- ❖ la compagnie est petite ou la charge de capital pour le risque de rachat sous le calcul simplifié est inférieure à 5 % du SCR global avant l'ajustement pour la capacité d'absorption de la perte (*loss-absorbing capacity*) des provisions techniques.

Les calculs simplifiés sont définis comme suit :

- ❖ $Lapse_{down} = 0,5 \times l_{down} \times n_{down} \times S_{down}$,
- ❖ $Lapse_{up} = 1,5 \times l_{up} \times n_{up} \times S_{up}$,

où :

- ❖ l_{down} (respectivement l_{up}) représente l'estimation du taux moyen de rachat des polices avec une tension de rachat à la baisse (respectivement à la hausse) ;
- ❖ n_{down} (respectivement n_{up}) représente la période moyenne, pondérée par les pressions de rachat, au-delà de laquelle la police avec une tension de rachat à la baisse (respectivement à la hausse) n'existe plus ;
- ❖ S_{down} (respectivement S_{up}) représente la somme des tensions de rachat à la baisse (respectivement à la hausse).

1.9. MODELE D'ALLOCATION CIBLE : MECANISME D'INVESTISSEMENT / DESINVESTISSEMENT

Les investissements et désinvestissements se déduisent de manière automatique de l'allocation au moment de l'investissement / du désinvestissement et de l'allocation cible.

Ainsi dans le cas d'un scénario d'investissement, ceux-ci vont intervenir plus massivement sur les classes d'actifs pour lesquelles l'allocation actuelle est inférieure à l'allocation cible et moins massivement sur les autres classes d'actifs surreprésentées par rapport à l'allocation cible.

De la même manière, les désinvestissements vont davantage concerner les classes surreprésentées que les classes sous-représentées par rapport à l'allocation cible de manière à se rapprocher de celles-ci.

Par ailleurs, il faut intégrer des contraintes sur les réinvestissements effectués de manière à s'assurer que le modèle décrit ne conduit pas à des situations improbables. Ainsi, nous proposons de limiter les investissements ou les désinvestissements dans certaines classes

d'actifs. Cette contrainte peut être résumée, pour chaque classe d'actifs, par quatre paramètres :

- ❖ le pourcentage maximum d'investissement d'un flux investisseur dans la classe d'actifs concernée ;
- ❖ le pourcentage minimum d'investissement d'un flux investisseur dans la classe d'actifs concernée ;
- ❖ le pourcentage maximum de désinvestissement d'un flux désinvestisseur dans la classe d'actifs concernée ;
- ❖ le pourcentage minimum de désinvestissement d'un flux désinvestisseur dans la classe d'actifs concernée.

Il faut noter que la comparaison initiale nécessite la détermination en début de période de la valeur de marché des différentes classes d'actifs.

Par ailleurs, il n'est pas prévu la possibilité de céder ou d'acheter des actifs dans des montants supérieurs au flux investisseur ou désinvestisseur (ex : vente d'une catégorie de titres surpondérés pour acheter des titres d'une catégorie sous-pondérée avec un flux investisseur nul).