

# **Master Sciences de gestion, Mention Finances de marché spécialité Actuariat**

Mémoire présenté devant le Conservatoire National des Arts et Métiers

pour l'obtention du diplôme d'Actuaire

le 28 mai 2013

## **Calcul du coût d'écart de table sur les versements d'un portefeuille de retraite**

Confidentiel : OUI

Durée : 5 ans

Par Soupharak Laurent THEPKAISONE

### **Responsable CNAM**

M. Michel FROMENTEAU

### **Entreprise**

AG2R LA MONDIALE

### **Membres du jury**

Mme Valérie ANDRE

M. Michel FROMENTEAU

M. Pierre PETAUTON

M. Guillaume PRIMOT

M. Vincent RUOL

M. François WEISS

### **Directeur de mémoire**

Mme Valérie ANDRE



## Mots-clés :

Garantie de table, retraite, rente, lois comportementales, versements<sup>1</sup>, rachats totaux, modèles de régression, algorithmes itératifs, test de Fisher, analyse des résidus, tables de mortalité, TGH/F05, provisionnement, IFRS 4, Solvabilité 2, coût d'écart de table, analyse de sensibilités.

## RESUME

La Mondiale, société d'assurance mutuelle, commercialise depuis de nombreuses années des contrats garantissant des prestations viagères au moment du départ à la retraite et dont les montants sont calculés sur la table de mortalité garantie à la souscription ou au versement de la prime. Les tables de mortalité garanties au terme peuvent être différentes des tables réglementaires TGH/F05 que les assureurs doivent utiliser pour le calcul des arrérages. Le décalage entre la tarification et le versement des montants de rente garantis par l'assureur, peut donc entraîner des écarts significatifs entre les prestations qui devront être versées et celles précomptées lors de la commercialisation.

Dans le cadre de la réalisation de ses comptes consolidés en norme IFRS 4 et de la mise en place des normes Solvabilité 2, La Mondiale teste la suffisance de ses provisions techniques. C'est dans ce cadre que s'inscrit le mémoire dont les principaux objectifs sont de :

- se doter d'une capacité à chiffrer le coût d'écart de table d'une dérive quant aux paramètres pris en compte pour l'évaluation de ses engagements,
- vérifier et réactualiser les paramètres actuellement utilisés pour évaluer les provisions des engagements de retraite, en particulier ceux de la garantie de table.

La Mondiale a vérifié très récemment que la longévité de ses assurés ne dérivait pas de celle définie par les tables réglementaires TGH/F05. Le mémoire s'attachera à proposer une méthode de chiffrage du coût d'écart de table sur les versements d'un portefeuille de retraite au moment de la conversion du capital constitutif en rente viagère.

Pour arriver au chiffrage du coût d'écart de table, nous déterminons tout d'abord la granularité de notre périmètre d'étude après une présentation des caractéristiques techniques des rentes en constitution et en service du portefeuille étudié.

Nous déterminons ensuite les lois comportementales de versements et de rachats totaux utiles au chiffrage du coût d'écart de table. Les lois comportementales sont ajustées à partir d'un modèle de régression non linéaire pour les versements et d'un modèle de régression linéaire pour les rachats totaux.

Enfin, le coût d'écart de table est chiffré sur la base d'un scénario choisi réaliste et il est complété par plusieurs études de sensibilité afin de mesurer l'impact des principaux paramètres de calcul.

---

1. Versements futurs de type périodique ou libre

### Key words :

Life table coverage, pension, annuity, behavioural laws, future insurance premiums, total repurchases, regression models, iterative algorithms, Fisher test, residue analysis, life table, TGH/F05, funding, IFRS 4, Solvency 2, cost of the table gap, sensitivity analysis.

## ABSTRACT

For several years now, *La Mondiale* mutual insurance company has been marketing pension policies which guarantee lifetime insurance benefits during retirement, whose amounts are calculated on the life table guaranteed in the subscription or in the payment of the insurance premium. The guaranteed life tables can differ from TGH/F05 regulatory tables which insurers have to use to calculate the annuity payments. In such cases, the gap between the pricing and the conditional payment of the guaranteed annuity payments by the insurer can lead to significant gaps between the insurance benefits to be paid and the benefits estimated during the marketing of these pension policies.

In the production of its consolidated financial statements in accordance with IFRS 4 and the implementation of Solvency 2, *La Mondiale* tests the adequacy of its technical reserves. Within this framework, this paper aims mainly to :

- develop an ability to quantify the cost of table gap from a drift as to the assumptions taken into account in the valuation of its insurance liabilities,
- verify and update the settings currently used to evaluate the reserves for pension obligations, in particular those of the warranty life table.

*La Mondiale* has recently verified that the longevity of policyholders not derived from that defined by the TGH/F05 regulatory tables. Therefore, this paper will endeavor to provide a method for estimating the cost of the table gap on future insurance premiums of a pension policies portfolio during conversion of the constitutive capital in life annuity.

In order to calculate the cost of the table gap, we shall first determine the granularity of our study after a presentation of technical annuities characteristics in constitution and in course of the studied portfolio.

Then we shall determine the behavioural laws of future insurance premiums and total repurchases useful to estimate the cost of the table gap. The behavioural laws are fitted with a nonlinear regression model for future insurance premiums and a linear regression model for total repurchases.

And finally, the cost of table gap is made around a chosen scenario which is as realistic as possible and completed with several sensitiveness studies to measure the impact of the main hypothesis of calculation.

## REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement :

**Michel FROMENTEAU** et **François WEISS** pour leur disponibilité et leurs remarques constructives sur le contenu du mémoire qui m'ont ainsi permis d'enrichir ma réflexion et mes idées.

**Les enseignants du CNAM** du Master d'Actuariat pour la qualité de leur enseignement théorique et professionnelle.

**Philippe BOURGEOIS**, Directeur de l'Actuariat d'Inventaire du groupe AG2R La Mondiale pour m'avoir permis de rédiger ce mémoire dans le cadre de mes activités professionnelles.

Mes collègues **Elodie DIELTIENS** et **Hélène HAUCHART** pour leur participation active à la relecture du mémoire.

Mes collègues **Bintou DIABY**, **Gregory VAN DAELE** et **Olivier BOUGAREL** pour leurs remarques constructives.

Enfin, je terminerais par un énorme remerciement à ma Directrice de mémoire, **Valérie ANDRE** pour m'avoir conseillé et accompagné assidûment dans cette enrichissante aventure à la fois professionnelle et humaine.

# TABLE DES MATIERES

<b>RESUME .....</b>	<b>3</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>4</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>9</b>
<b>CHAPITRE 1 LE PERIMETRE DE L'ETUDE .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Le portefeuille de La Mondiale .....</b>	<b>12</b>
1.1.1 Les catégories de contrats .....	12
1.1.2 La fiscalité des contrats .....	14
1.1.3 Les garanties proposées .....	15
1.1.4 Les primes émises .....	17
<b>1.2 Le portefeuille de retraite .....</b>	<b>17</b>
1.2.1 Les produits en portefeuille .....	17
1.2.2 Les chargements prélevés .....	18
1.2.3 Les engagements à la liquidation en rente .....	21
1.2.4 Les primes par table contractuelle .....	24
<b>1.3 Le portefeuille de rentes en service .....</b>	<b>25</b>
1.3.1 Le taux de sortie en rente au terme .....	25
1.3.2 Le choix du type de rentes au terme .....	26
1.3.3 Les rentes viagères à deux têtes .....	26
1.3.4 Les rentes à une tête avec trimestrialités garanties .....	27
1.3.5 Les rachats d'office .....	28
<b>1.4 La Base Bilan Technique (BBT) .....</b>	<b>28</b>
1.4.1 La description de la BBT .....	28
1.4.2 Le schéma de la BBT .....	29
1.4.3 Le cadrage des primes BBT .....	30
<b>1.5 Le choix du périmètre d'étude .....</b>	<b>30</b>
1.5.1 Le principe .....	30
1.5.2 La granularité .....	31
<b>CHAPITRE 2 DETERMINATION DES MODELES DE REGRESSION .....</b>	<b>33</b>
<b>2.1 Les différents modèles de régression .....</b>	<b>33</b>
2.1.1 Les modèles de régression linéaire .....	33
2.1.2 Les modèles de régression non linéaire .....	33
<b>2.2 La méthode des moindres carrés .....</b>	<b>34</b>
2.2.1 Les moindres carrés ordinaires (MCO) .....	34
2.2.2 Les moindres carrés non linéaires (MCNL) .....	36
<b>2.3 La méthode de résolution d'équations non linéaires .....</b>	<b>36</b>
2.3.1 L'algorithme de Gauss - Newton .....	37
2.3.2 Les inconvénients des algorithmes itératifs .....	38

<b>2.4 La validation du modèle de régression</b>	<b>39</b>
2.4.1 L'approche graphique	40
2.4.2 Le tableau d'analyse de la variance	40
2.4.3 Le coefficient de détermination ( $R^2$ ) et le $R^2$ ajusté	41
2.4.4 Le Pseudo- $R^2$	42
2.4.5 Le facteur de fiabilité	42
2.4.6 Le test de Fisher	44
<b>2.5 L'analyse des résidus</b>	<b>44</b>
2.5.1 Test d'homoscédasticité	45
2.5.2 Test de Durbin-Watson	46
2.5.3 Test de normalité	47
<b>2.6 L'analyse de la significativité des paramètres estimés</b>	<b>47</b>
2.6.1 Cas des modèles de régression linéaire	48
2.6.2 Cas des modèles de régression non linéaire	48
<b>2.7 Les procédures REG et NLIN du progiciel SAS</b>	<b>49</b>
2.7.1 La procédure REG	49
2.7.2 La procédure NLIN	56
<b>CHAPITRE 3 LES LOIS DE REVERSEMENTS</b>	<b>62</b>
<b>3.1 La détermination des lois en nombre</b>	<b>62</b>
3.1.1 La formule des taux de versements	62
3.1.2 Les lois recherchées	63
3.1.3 Méthode générale d'ajustement des taux de versements	65
<b>3.2 La préparation des données</b>	<b>66</b>
3.2.1 Le cadrage avec les données d'inventaire	66
3.2.2 L'extraction et la construction des données	66
3.2.3 Les données exclues de l'étude	67
<b>3.3 Les lois 2011 de versements ajustées</b>	<b>68</b>
3.3.1 Les versements périodiques et libres	68
3.3.2 Etude de la qualité globale des lois ajustées	69
<b>3.4 Le détail des lois 2011 de versements périodiques</b>	<b>71</b>
3.4.1 Des contrats individuels de retraite financière	71
3.4.2 Des contrats collectifs de retraite financière	71
3.4.3 Des contrats individuels de retraite viagère	72
3.4.4 Des contrats collectifs de retraite viagère	72
<b>3.5 Le détail des lois 2011 de versements libres</b>	<b>73</b>
3.5.1 Des contrats individuels de retraite financière	73
3.5.2 Des contrats collectifs de retraite financière	73
3.5.3 Des contrats de retraite viagère	74
<b>3.6 Les simulations avec les lois 2011 de versements</b>	<b>74</b>
3.6.1 La formule du montant brut des versements	74
3.6.2 Les montants réels des versements	75
3.6.3 Le résultat des simulations	77
<b>CHAPITRE 4 LES LOIS DE RACHATS TOTAUX</b>	<b>78</b>
<b>4.1 La détermination des lois en nombre</b>	<b>78</b>
4.1.1 La formule des taux de rachats totaux	78
4.1.2 Les lois recherchées	78
4.1.3 Méthode générale d'ajustement des taux de rachats totaux	79
<b>4.2 La préparation des données</b>	<b>80</b>
4.2.1 L'extraction des données	80
4.2.2 Les données exclues de l'étude	81

<b>4.3 Les lois 2011 de rachats totaux ajustées .....</b>	<b>81</b>
4.3.1 Les rachats totaux .....	81
4.3.2 Etude de la qualité globale des lois ajustées .....	82
<b>4.4 Le détail des lois 2011 de rachats totaux .....</b>	<b>86</b>
4.4.1 Des contrats individuels de retraite financière.....	86
4.4.2 Des contrats collectifs de retraite financière.....	86
4.4.3 Des contrats individuels de retraite viagère .....	87
4.4.4 Des contrats collectifs de retraite viagère .....	87
<b>4.5 Les simulations avec les lois 2011 de versements et de rachats totaux.....</b>	<b>87</b>
4.5.1 La détermination des montants réels.....	88
4.5.2 Le résultat des simulations .....	89
<b>CHAPITRE 5 LE CHIFFRAGE DU COUT D'ECART DE TABLE.....</b>	<b>92</b>
<b>5.1 Rappel de la problématique .....</b>	<b>92</b>
<b>5.2 Les formules de calcul .....</b>	<b>95</b>
5.2.1 Du montant net des versements.....	95
5.2.2 De la provision terme .....	97
5.2.3 Du coût d'écart de table .....	98
<b>5.3 Le moteur de calcul sous SAS .....</b>	<b>99</b>
5.3.1 Schéma du moteur de calcul.....	99
5.3.2 Validation du moteur de calcul.....	100
<b>5.4 Le scénario choisi.....</b>	<b>102</b>
5.4.1 Les paramètres du scénario choisi .....	102
5.4.2 Le chiffrage du coût d'écart de table .....	106
<b>5.5 Les études de sensibilité.....</b>	<b>107</b>
5.5.1 Sensibilité aux options de rente au terme 1T NTG, 1T et 2T.....	107
5.5.2 Sensibilité aux taux de sortie en rente des contrats de type RC.....	109
5.5.3 Sensibilité aux taux de versements .....	109
5.5.4 Sensibilité aux taux de rachats totaux .....	110
5.5.5 Sensibilité aux taux de mortalité en phase de constitution .....	110
5.5.6 Sensibilité au taux d'évolution des unités de compte (UC) .....	111
5.5.7 Sensibilité au taux de rémunération des engagements hors UC .....	112
5.5.8 Sensibilité au taux d'indexation des versements périodiques.....	112
5.5.9 Sensibilité à la durée restante du contrat .....	113
5.5.10 Sensibilité aux rachats d'office .....	114
5.5.11 Synthèse des études de sensibilité .....	115
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>116</b>
<b>TABLE DES ILLUSTRATIONS.....</b>	<b>117</b>
<b>ANNEXE 1 Les dates clés de la SGAM AG2R LA MONDIALE.....</b>	<b>119</b>
<b>ANNEXE 2 Les chiffres clés 2011 de la SGAM AG2R LA MONDIALE .....</b>	<b>120</b>
<b>ANNEXE 3 Les types de fiscalité en assurance vie.....</b>	<b>121</b>
<b>ANNEXE 4 Extrait de la table du F de Fisher.....</b>	<b>130</b>
<b>ANNEXE 5 Extrait de la table du Dw de Durbin-Watson.....</b>	<b>131</b>
<b>ANNEXE 6 Extrait de la table du t de Student bilatéral .....</b>	<b>132</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>133</b>



# INTRODUCTION

Tout comme le disait Pierre DAC<sup>2</sup>, « La prévision est difficile surtout lorsqu'elle concerne l'avenir. ». Cette citation, dite sur un ton humoristique, peut néanmoins fort bien s'appliquer au monde de l'assurance. En effet, le métier d'assureur consiste en partie à prévoir au mieux les engagements futurs envers ses assurés. C'est le cas de La Mondiale qui veille à la suffisance de ses engagements.

La Mondiale, membre fondateur de la SGAM<sup>3</sup> AG2R LA MONDIALE, est une société d'assurance mutuelle qui commercialise des contrats de retraite destinés aux travailleurs indépendants (artisans, commerçants et professions libérales) et aux salariés des petites et moyennes entreprises.

Ces contrats présupposent une relation de confiance entre l'assureur et ses adhérents et permettent de constituer un complément de revenus après la cessation d'activité. La majorité de ces contrats de retraite prévoit uniquement le versement d'une rente viagère au terme et dans ce cas, il s'agit de contrats de retraite à sortie en **rente obligatoire**. Quant aux autres contrats de retraite, ils prévoient au choix de sortir au terme en capital ou en rente viagère et dans ce cas, il s'agit de contrats de retraite à sortie en **rente facultative**.

Cette distinction entre les deux types de sortie au terme est importante car l'évaluation des engagements pris par la société d'assurance est différente selon l'option de sortie en rente ou en capital choisie par le bénéficiaire. Dans le cas d'une sortie en capital, le bénéficiaire reçoit le capital garanti par le contrat et libère ainsi la société d'assurance de tous engagements. En revanche dans le cas d'une sortie en rente viagère, la société d'assurance conserve un long engagement et assume le risque lié à toute évolution défavorable de la mortalité de ses bénéficiaires.

Pour garantir leurs prestations, les sociétés d'assurance doivent alors provisionner au mieux l'ensemble de leurs engagements en tenant compte du contexte économique et financier, de l'allongement continu de l'espérance de vie et des futures règles comptables (IFRS<sup>4</sup>) et normes prudentielles (Solvabilité 2). Par ailleurs, la crise<sup>5</sup> économico-financière qui touche l'Europe depuis 2008 et qui se poursuit encore aujourd'hui devrait continuer à impacter à la baisse le rendement des placements financiers des sociétés d'assurance et La Mondiale ne sera pas épargnée par cette crise.

Dans cet environnement économique et réglementaire en évolution, La Mondiale est alors amenée à compléter, à revoir et à approfondir ses méthodes de calcul de ses engagements pour s'assurer de la suffisance de ses provisions techniques. Cette démarche proactive lui permettra de mieux répondre d'une part aux exigences quantitatives en termes de provisions techniques et d'autre part aux exigences qualitatives en termes de gestion interne grâce à une meilleure connaissance et évaluation de ses engagements.

2. Humoriste et comédien français (1893 – 1975)

3. Société de Groupe d'Assurance Mutuelle

4. International Financial Reporting Standards

5. Crise des subprimes en 2008 suivie de la crise des dettes souveraines de la zone euro en 2010

Le provisionnement des contrats de rente apparaît alors comme un enjeu majeur car en période de crise, la problématique du financement des risques assurantiels longs, incombe davantage aux sociétés d'assurance proposant des produits de rente. L'incitation des pouvoirs publics, très soucieux ces dernières années des problèmes de financement<sup>6</sup> de la retraite et de la prise en charge de la dépendance, renforce l'importance du provisionnement des contrats de rente. En effet, un provisionnement insuffisant peut entraîner des pertes techniques sur plusieurs décennies en cas de dérive de la mortalité, tandis qu'un provisionnement excessif pénalise financièrement les sociétés d'assurance qui doivent alors mobiliser davantage de ressources, pas toujours disponibles facilement, surtout en période de crise économique et financière.

Consciente de cet enjeu majeur, La Mondiale poursuit annuellement son effort de renforcement des provisions des contrats de rente en constitution pour prendre en compte les dernières tables de mortalité, plus prudentes que celles utilisées pour le tarif du contrat. Dans les comptes sociaux, les provisions des contrats de rente en constitution sont calculées au minimum à partir de la table TPRV 93 et augmentées progressivement chaque année vers les tables TGH/F05 au taux contractuel de chaque prime versée. Le niveau de provisionnement des rentes en constitution est ensuite complété jusqu'aux tables TGH/F05 dans les comptes consolidés. Pour les contrats de rente en service, les provisions sont calculées réglementairement aux dernières tables TGH/F05<sup>7</sup> et aux taux contractuels dans les comptes sociaux et consolidés.

Pour renforcer le provisionnement des rentes face au risque de longévité, il nous est apparu nécessaire de chiffrer<sup>8</sup> avec précision le coût d'écart de table sur les versements entre la table garantie contractuellement pour le calcul de la rente au terme et les TGH/F05. En effet, le risque d'écart de table sur les versements lié à l'allongement<sup>9</sup> de la durée de vie, est bien un risque assurantiel qui doit être évalué de la meilleure manière possible.

**L'objectif principal du mémoire est de proposer une méthode de chiffrage du coût d'écart de table sur les versements d'un portefeuille de retraite à partir d'un scénario choisi réaliste en intégrant en plus des lois comportementales de versements et de rachats totaux.**

Le mémoire va ainsi permettre à La Mondiale de prendre en compte des paramètres plus économiques ainsi que des lois comportementales plus robustes que celle utilisées actuellement dans la valorisation de son passif d'assurance vie.

6. Création du PERP lors de la réforme des retraites en 2003 par l'article 108 de la loi 2003-775 du 21/08/2003

7. Voir arrêté du 1er août 2006 portant homologation des tables de mortalité pour les rentes viagères

8. La charge supplémentaire pour écart de table sur versements a été évaluée globalement dans le cadre d'un test de suffisance des passifs

9. L'espérance de vie à la naissance a progressé d'environ un trimestre par an depuis une cinquantaine d'années

Pour atteindre le chiffrage du coût d'écart de table sur les versements, nous avons besoin de déterminer au préalable notre périmètre d'étude.

C'est l'objet du premier chapitre qui commence par une présentation globale du portefeuille de La Mondiale ; les catégories de contrats, la fiscalité choisie et les principales garanties souscrites sont précisées. Cette présentation est suivie d'une description du portefeuille de retraite et de rente qui permet de cibler les engagements de table par produit de retraite et les caractéristiques techniques des rentes viagères choisies au terme. Les données qui illustrent le premier chapitre sont extraites de la Base Bilan Technique (BBT) qui sert de base de données de référence pour le bilan d'inventaire de La Mondiale ; c'est cette base qui est utilisée pour illustrer le mémoire. A partir de la composition du portefeuille et des caractéristiques techniques des contrats, le premier chapitre se termine par le choix du périmètre d'étude et de la granularité pour la détermination des lois comportementales.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation théorique de la régression linéaire et non linéaire, utile pour la détermination des lois comportementales de versements et de rachats en fonction de l'ancienneté courue du contrat. Ensuite, les outils statistiques sont précisés et permettent de valider les modèles de régression déterminés. Enfin, une présentation des procédures REG et NLIN du progiciel SAS<sup>10</sup> complète la partie théorique du mémoire et montre de façon pragmatique comment les utiliser pour déterminer les paramètres des modèles de régressions linéaire et non linéaire.

Le troisième chapitre concerne l'ajustement des lois comportementales de versements en nombre de contrats avec une distinction entre les versements périodiques et libres. Cette partie permet de mettre en pratique les méthodes statistiques des modèles de régression non linéaire dans le cadre de l'assurance vie et aussi d'apprécier la pertinence des lois ajustées en simulant les primes attendues avec les lois de versements déterminées.

Le quatrième chapitre concerne l'ajustement des lois comportementales de rachats totaux en nombre de contrats. Les lois de rachats totaux sont déterminées à partir d'un modèle de régression polynômiale et la pertinence des lois ajustées est appréciée par la simulation des primes attendues avec les lois de versements et de rachats totaux déterminées.

Enfin, le cinquième et dernier chapitre propose le chiffrage du coût d'écart de table sur les versements à partir d'un scénario choisi réaliste. Les paramètres de ce scénario choisi sont précisés après une présentation de la formule du coût d'écart de table et du moteur de calcul réalisé avec le progiciel SAS. Le cinquième chapitre se termine par plusieurs études de sensibilités, notamment sur les lois comportementales, sur le choix des options de rente au terme et sur l'évolution des unités de compte afin d'en mesurer les impacts sur le coût d'écart de table.

---

10. Statistical Analysis System

# CHAPITRE 1

## LE PERIMETRE DE L'ETUDE

### 1.1 Le portefeuille de La Mondiale

#### 1.1.1 Les catégories de contrats

Le portefeuille de La Mondiale se compose de contrats de retraite, de contrats d'épargne, de contrats vie individuelle, de contrats de rente et de contrats de prévoyance selon le schéma<sup>11</sup> ci-dessous.

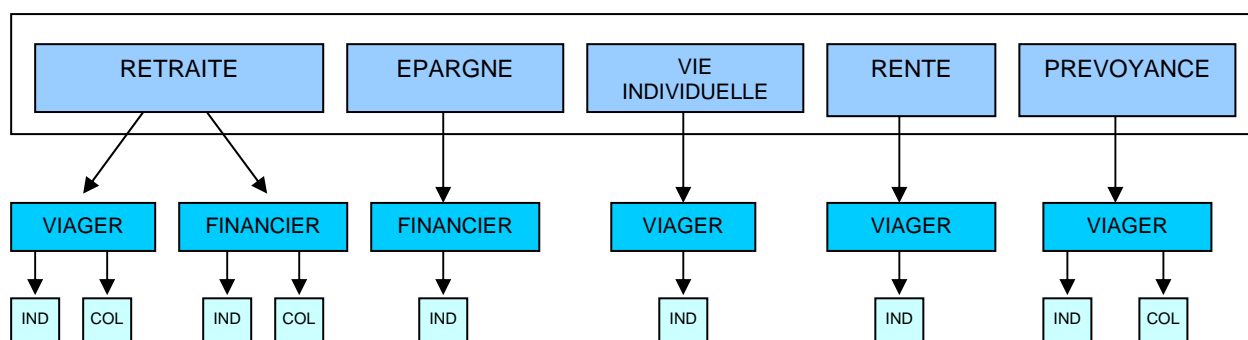


Schéma 1 - Composition du portefeuille de La Mondiale

**Les contrats de retraite** de La Mondiale permettent de constituer une rente au terme ou un capital jusqu'à un terme prévu contractuellement. Ce sont des contrats à versements (cotisations) périodiques qui permettent également d'effectuer des versements libres.

Cependant, le non-paiement<sup>12</sup> d'un versement prévu au contrat entraîne l'envoi d'une lettre recommandée donnant au souscripteur un délai de 40 jours pour l'acquitter. Si le paiement n'est pas intervenu dans les délais, le contrat peut être résilié sans remboursement des versements déjà effectués en cas d'inexistence ou d'insuffisance de la valeur de rachat. Sinon, le souscripteur peut soit racheter le contrat s'il existe une valeur de rachat<sup>13</sup>, soit maintenir l'épargne et dans ce cas, le contrat est libéré de cotisations.

La capitalisation de ces contrats est soit financière, soit viagère et la distinction de ces deux modes de capitalisation est importante car l'engagement au terme est différent. En effet, les contrats à capitalisation viagère fonctionnent sur le principe d'une rente viagère différée ; une prime donne droit à une rente garantie au terme en fonction du tarif en vigueur au moment du versement. Quant aux contrats à capitalisation financière, ils fonctionnent sur le principe d'un capital différé avec contre-assurance de la provision mathématique.

11. IND pour Individuel et COL pour Collectif

12. L'article L.132-20 du Code des assurances

13. L'article L.132-23 du Code des assurances

Les contrats de retraite de La Mondiale sortent soit en rente viagère, soit au choix<sup>14</sup> entre un capital ou une rente viagère. Ces contrats peuvent être souscrits par tout particulier ou par toute entreprise au profit d'un de ses collaborateurs et dans ce dernier cas, le contrat collectif est rattaché à un contrat firme qui prend en charge le paiement des cotisations et les frais de dossier.

**Les contrats d'épargne** de La Mondiale permettent de constituer un capital sur une durée indéterminée ou prévue contractuellement. Le souscripteur peut effectuer des versements libres ou programmés en fonction de sa capacité d'épargne et a la possibilité au terme de disposer de son épargne constituée ou d'obtenir le versement d'une rente viagère sur la base de la table de mortalité et du taux d'intérêt en vigueur à la liquidation de la rente. Ces contrats peuvent être souscrits<sup>15</sup> par tout particulier ou par toute entreprise au profit d'un de ses collaborateurs.

**Les contrats de retraite et d'épargne** de La Mondiale sont monosupports ou multisupports. Dans le cas des contrats monosupports, les versements sont investis sur des supports sécurisés de type obligations d'État. L'assureur garantit la valeur du capital mais avec une rentabilité moyenne. Dans le cas des contrats multisupports, les primes peuvent être investies à la fois sur des supports sécurisés et sur des supports en unité de compte de type actions, obligations ou valeurs immobilières. Ces supports de type actions sont risqués en cas de chute des marchés financiers mais ont une meilleure rentabilité sur le long terme. L'assureur ne garantit que le nombre d'unités de compte dont la valeur varie en fonction des marchés financiers.

**Les contrats de vie individuelle** de La Mondiale regroupent majoritairement des contrats « Vie entière », « Mixte », « Temporaire » et « Terme fixe » à capitalisation viagère qui garantissent l'assuré en cas de vie ou de décès. Des garanties complémentaires peuvent être souscrites pour apporter une protection supplémentaire au risque principal. Le souscripteur s'engage à effectuer un versement unique ou des versements périodiques et le non-versement d'une cotisation prévue au contrat entraîne les mêmes conséquences de rappel que pour les contrats de retraite, à la différence près que le contrat est réduit<sup>16</sup> au lieu d'être libéré de cotisations. Ces contrats peuvent être souscrits par tout particulier ou par toute entreprise au profit d'un de ses collaborateurs.

**Les contrats de rente** de La Mondiale permettent d'assurer le versement d'une rente viagère jusqu'au décès du ou des assurés. Cette rente est due soit suite à la constitution d'un capital par un contrat de retraite, d'épargne ou de vie individuelle, soit suite au versement d'un montant initial. Ces contrats peuvent être souscrits sur une tête ou sur deux têtes, avec ou sans réversion et avec ou sans trimesialités garanties.

**Les contrats de prévoyance** de La Mondiale permettent de couvrir l'assuré et protéger ses proches des conséquences financières en cas de problème de santé (maladie, hospitalisation, invalidité et accident), d'incapacité et d'arrêt de travail mais également de décès. Le souscripteur s'engage alors à payer périodiquement ses cotisations et le non-versement d'une cotisation prévue au contrat entraîne les mêmes conséquences de rappel de cotisations que pour les contrats de retraite à

14. Il s'agit de contrats à sortie en rente facultative

15. Pour les contrats d'épargne multisupports uniquement, une souscription sur 2 adhérents est possible

16. Le contrat est maintenu avec des garanties réduites

la différence près que l'assureur peut suspendre les garanties et résilier le contrat de plein droit à compter du 41<sup>ème</sup> jour. Ces contrats peuvent être souscrits par tout particulier ou par toute entreprise au profit d'un de ses collaborateurs.

### 1.1.2 La fiscalité des contrats

Toute personne morale ou personne physique peut souscrire un contrat d'assurance vie s'il remplit les conditions suivantes :

- avoir la capacité juridique<sup>17</sup> de souscrire un contrat,
- respecter les limites d'âge imposées par l'assureur,
- s'engager à payer les versements prévus par le contrat.

Les contrats d'assurance vie<sup>18</sup> restent le placement privilégié des ménages résidents en France après les livrets d'épargne défiscalisés (livret A, livret jeune, livret d'épargne populaire ...)

Selon une étude de l'INSEE<sup>19</sup>, 62% des ménages résidant en France métropolitaine détenaient au moins un contrat d'assurance vie début 2010. La souscription d'un contrat d'assurance vie n'est pas obligatoire et répond aux motifs de détention suivants par ordre de priorité :

- avoir une réserve d'argent en cas d'imprévu,
- faire bénéficier un proche,
- préparer ou compléter la retraite,
- obtenir un bon rendement,
- bénéficier d'un avantage fiscal.

Les contrats d'assurance vie apparaissent alors comme un placement intéressant lié à une fiscalité avantageuse. C'est pour cette raison que La Mondiale propose des contrats qui peuvent être souscrits dans les différents cadres fiscaux suivants :

- fiscalité Assurance Vie,
- fiscalité Article 82 du CGI<sup>20</sup>,
- fiscalité Article 83 du CGI,
- fiscalité Article 62 du CGI,
- fiscalité Article 97 du CTI<sup>21</sup>,
- fiscalité Madelin,
- fiscalité PEP<sup>22</sup>,
- fiscalité PERP<sup>23</sup>
- fiscalité DSK<sup>24</sup>
- fiscalité Homme-Clé

17. Les mineurs et les majeurs en tutelle ne peuvent pas souscrire seuls un contrat d'assurance-vie

18. Concerne les contrats d'assurance en cas de vie, les contrats de capitalisation et les contrats en cas de décès

19. Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques

20. Code général des impôts

21. Code territorial des impôts

22. Plan d'épargne populaire

23. Plan d'épargne retraite populaire

24. Dominique Strauss-Khan

Le lecteur peut consulter en annexe 3, les principales caractéristiques fiscales et sociales de ces différents cadres fiscaux.

Le nombre de contrats en cours par fiscalité et par catégorie au 31/12/2011 est présenté dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 1** - Nombre de contrats en cours par fiscalité et par catégorie au 31/12/2011

Fiscalité	Retraite	Epargne	Vie Individuelle	Rente	Prévoyance	Total
Article 62	8 842	89	37		21 343	30 311
Article 82	22 640	99	3 426			26 165
Article 83	179 830					179 830
Article 97	2 076					2 076
Assurance Vie	70 488	162 747	47 721	58 828	47 192	386 976
DSK		8 846				8 846
Homme Clé			103			103
Madelin	124 874				43 549	168 423
PEP	18 892	2 172	11 292			32 356
PERP	11 919					11 919
<b>Total</b>	<b>439 561</b>	<b>173 953</b>	<b>62 579</b>	<b>58 828</b>	<b>112 084</b>	<b>847 005</b>
Répartition	52%	21%	7%	7%	13%	100%

Nous observons alors que le portefeuille de La Mondiale est majoritairement composé de contrats de retraite, ce qui était prévisible puisque l'activité Retraite représente le « cœur » de son métier.

Par ailleurs, les contrats de La Mondiale sont souscrits par ordre d'importance en fiscalité :

- Assurance Vie pour les contrats d'épargne, de vie individuelle et de prévoyance,
- Article 83 et Madelin pour les contrats de retraite.

Les contrats en cours au 31/12/2011 répondent donc à un besoin à la fois de préparation d'un complément de retraite (52% des contrats) et de constitution d'une réserve d'argent (21% des contrats).

### 1.1.3 Les garanties proposées

La cotisation d'assurance correspond au montant à payer par le souscripteur pour bénéficier des garanties de base et des garanties complémentaires prévues par le contrat.

Les principales garanties proposées par les contrats de La Mondiale sont :

**1. La garantie Vie** qui assure le règlement du capital ou du montant de rente prévu au terme du contrat. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite, d'épargne et de vie individuelle.

**2. La garantie Contre-Assurance** qui permet au bénéficiaire de recevoir le maximum entre les sommes investies et la provision en cas de décès. Elle permet à l'assuré de ne pas perdre le capital investi au cas où la garantie vie n'aurait pas pu jouer. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite.

**3. La garantie Décès** qui permet au bénéficiaire de recevoir un capital ou une rente en cas de décès. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite, d'épargne, de vie individuelle et de prévoyance.

**4. La garantie Plancher** qui permet au bénéficiaire de recevoir un capital minimum ou un capital minimum converti en rente suite au décès de l'assuré. Ce capital décès minimum est égal au cumul



des versements nets investis à la date du décès et ne pourra pas être inférieur à l'épargne acquise sur le contrat. Tout nouveau versement augmente ce capital minimum du montant net investi et tout retrait partiel diminue ce capital minimum du montant brut désinvesti. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite et d'épargne multisupports.

**5. La garantie Accident** qui assure le règlement d'un capital décès supplémentaire ; doublement ou triplement du capital décès en cas d'accident avant les 65 ans de l'assuré. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite, de vie individuelle et de prévoyance.

**6. La garantie Invalidité (IPT<sup>25</sup>)** qui assure le règlement par anticipation du capital décès suite à invalidité permanente et totale avant les 62 ans de l'assuré en cas de maladie et avant les 65 ans de l'assuré en cas d'accident. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite, de vie individuelle et de prévoyance.

**7. La garantie Exonération** qui assure dans la plupart des cas la prise en charge<sup>26</sup> par l'assureur du paiement des cotisations à partir du 61<sup>ème</sup> jour d'incapacité jusqu'à la reprise du travail et au plus tard jusqu'à la fin de la période de 3 ans qui suit le 1<sup>er</sup> jour d'incapacité. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite, de vie individuelle et de prévoyance.

**8. La garantie Indemnité Journalière** qui assure le versement d'indemnités journalières complémentaires à celles payées par la sécurité sociale afin de compenser la perte de revenus liée à un arrêt de travail en cas de maladie, d'accident ou d'hospitalisation. Cette garantie est proposée par les contrats de vie individuelle et de prévoyance.

**9. La garantie Maladie Redoutée** qui assure l'exonération définitive du paiement des cotisations (délai de carence de 6 mois) avec maintien des autres garanties du contrat en cas de maladie redoutée reconnue avant les 62 ans de l'assuré. Cette garantie est proposée par les contrats de retraite, de vie individuelle et de prévoyance.

Par Maladie Redoutée, il faut entendre les maladies en lien direct avec :

- l'infarctus du myocarde,
- la chirurgie des artères coronaires,
- le cancer,
- l'insuffisance rénale irréversible,
- la transplantation d'organe,
- l'accident vasculaire cérébral,
- la maladie d'Alzheimer et formes équivalentes.

**10. La garantie Rente en cas d'invalidité totale ou partielle** qui permet de recevoir une rente viagère suite à invalidité permanente et totale avant les 62 ans de l'assuré en cas de maladie et avant les 65 ans de l'assuré en cas d'accident. Cette garantie est proposée par les contrats de prévoyance.

---

25. Invalidité permanente et totale

26. Certaines garanties Exonération peuvent prévoir une prise en charge à partir du 1<sup>er</sup> jour d'incapacité après une période de 90 jours consécutifs d'arrêt de travail



Les principales garanties de base des contrats d'épargne, de vie individuelle et de retraite correspondent aux garanties Vie, Décès et/ou Contre-assurance et celles des contrats de prévoyance aux garanties Décès, Indemnité journalière et/ou Invalidité.

La liste des garanties ci-dessus n'est pas exhaustive mais donne une vision synthétique des principales garanties proposées par les contrats de La Mondiale.

### 1.1.4 Les primes émises

Le nombre de contrats en cours et les primes émises au 31/12/2011 sont présentés dans le tableau ci-dessous. Les données du portefeuille hors prévoyance sont extraites de la Base Bilan Technique (BBT). Pour les contrats de Prévoyance, les informations sont extraites des notes internes de La Mondiale sur l'état du portefeuille et du chiffre d'affaires au 31/12/2011.

**Tableau 2** - Nombre de contrats et primes brutes émises au 31/12/2011

		Primes émises au 31/12/2011 (M€)						
Portefeuille	Nombre de contrats en cours	Versements périodiques (VP)			Versements libres (VL)			Total
		Garantie Vie	Autres garanties	S/Total	Garantie Vie	Autres garanties	S/Total	
Retraite	439 561	760	12	772	95	0.04	95	868
Epargne	173 953	-	-	-	310	-	310	310
Vie Individuelle	62 579	33	20	53	-	-	-	53
Rente	58 828	-	-	-	-	-	-	-
Prévoyance	112 084	-	80	80	-	-	-	80
Total	847 005	793	112	905	405	0.04	405	1 310

Pour rappel, les versements périodiques représentent ici les cotisations dont le montant et la durée de versement ont été définis à la souscription du contrat. Quant aux versements libres, il s'agit de cotisations que le souscripteur peut verser à tout moment en fonction de sa capacité d'épargne.

Au 31/12/2011, le chiffre d'affaires est de l'ordre de 1.3 milliards d'euros avec une part significative de versements périodiques à 69%.

## 1.2 Le portefeuille de retraite

### 1.2.1 Les produits en portefeuille

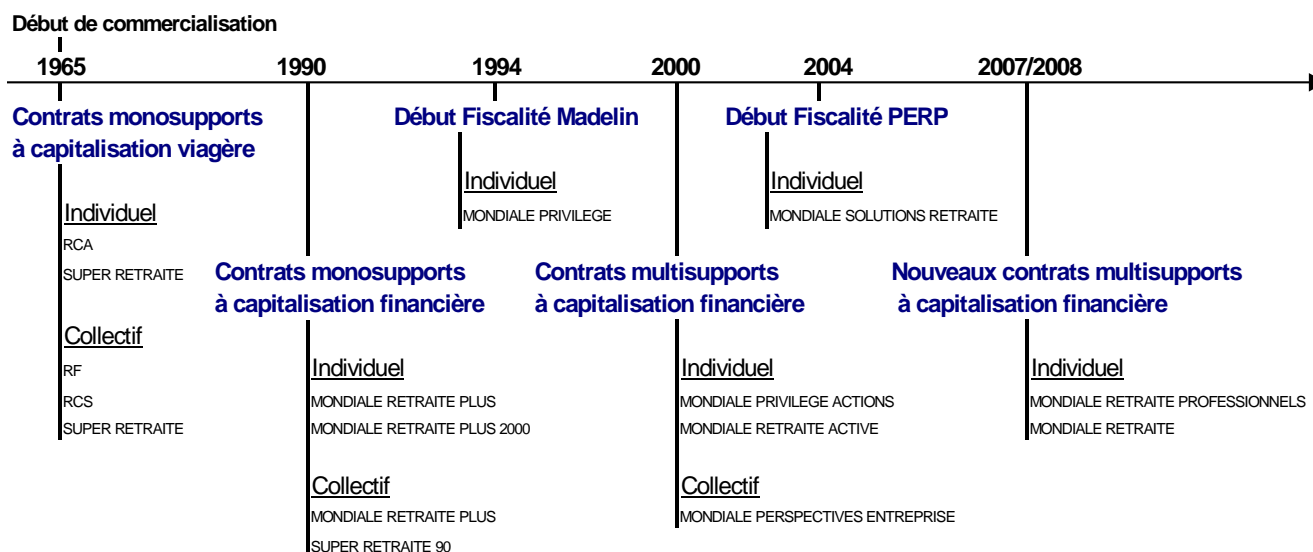
Le portefeuille de retraite se compose de contrats dont les plus anciens datent de 1965.

De 1965 à 1990, La Mondiale commercialise des produits de retraite monosupports à capitalisation viagère. De 1990 à 2000, les contrats monosupports à capitalisation financière remplacent progressivement les contrats monosupports à capitalisation viagère.

En 1994, l'arrivée de la fiscalité Madelin modifie la nature des contrats à la souscription. Les contrats souscrits en collectif avec un seul participant au profit des gérants majoritaires ou cadres dirigeants basculent sur un contrat individuel à fiscalité Madelin. Les contrats souscrits en fiscalité assurance vie par les travailleurs non salariés (TNS) pour lesquels l'avantage fiscal à l'entrée a été supprimé basculent également sur les contrats Madelin.

A partir de 2000, les premiers contrats multisupports sont commercialisés et la gamme de contrats individuels multisupports est renouvelée en 2007/2008.

Le schéma ci-dessous récapitule l'historique de la commercialisation des produits de retraite.



**Schéma 2** - Chronologie de la commercialisation des contrats de retraite

**Les contrats actuellement en commercialisation<sup>27</sup> sont :** Mondiale Retraite Professionnels,  
Mondiale Retraite,  
Mondiale Solutions Retraite,  
Mondiale Perspective Entreprises.

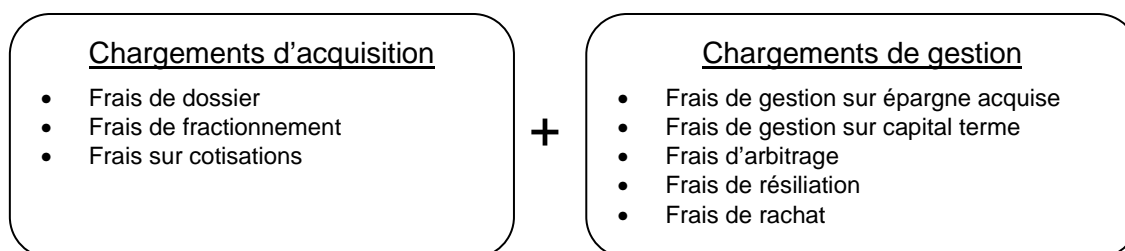
### 1.2.2 Les chargements prélevés

La prime pure d'un contrat d'assurance vie permet de couvrir en moyenne les prestations versées par l'assureur mais elle n'est pas suffisante pour équilibrer l'activité d'une société d'assurance qui doit supporter des frais tels que les frais d'émission et de gestion des contrats.

Pour couvrir ces frais, des chargements sont ajoutés à la prime pure et sont prélevés au moment du paiement de la cotisation, durant la période de gestion du contrat ou au rachat anticipé du contrat.

Les chargements sur les contrats de retraite se composent principalement des **chargements d'acquisition** et des **chargements de gestion** selon le schéma ci-dessous.

#### Chargements sur les contrats de retraite



**Schéma 3** - Les chargements des contrats de retraite

27. Quelques dérogations peuvent être accordées pour la souscription d'anciens contrats de retraite individuelle

Les différents chargements des contrats de retraite de La Mondiale sont décrits ci-dessous :

- **Les frais de dossier**

Ces frais correspondent aux coûts de police lors de la souscription d'un contrat ; le montant de ces frais est fixe et dépend du type de contrat. Les frais de dossier des contrats de retraite à capitalisation financière sont de 15 € pour les firmes et sont nuls pour les contrats de retraite à capitalisation viagère.

- **Les frais de fractionnement**

Ces frais dépendent du contrat et du type de fractionnement ; ils sont proportionnels à la cotisation versée et ne concernent que les contrats de retraite viagère.

- **Les frais sur cotisations**

Ces frais sont prélevés sur chaque cotisation versée par le souscripteur ; ils sont proportionnels au montant versé.

- **Les chargements sur épargne (frais de gestion sur épargne acquise)**

Ces frais sont prélevés sur l'encours pendant toute la durée du contrat ; ils sont proportionnels à l'encours du contrat à la date de prélèvement.

- **Les chargements sur capital (frais de gestion sur capital terme)**

Ces frais sont annuels et prélevés sur l'encours pendant toute la durée du contrat et ne concernent que les produits viagers (RCA, RCS et RF) ; ils sont proportionnels au capital terme garanti à la date de prélèvement.

- **Les frais d'arbitrage**

Ces frais sont prélevés sur l'encours des contrats multisupports dans la plupart des cas à partir du deuxième ordre de l'opération d'achat ou de vente, effectué sur les fonds de placement. Les frais d'arbitrage sont de 15€.

- **Les frais de résiliation**

Certains contrats<sup>28</sup> de La Mondiale sont résiliables selon les Articles L. 132-20 et L. 132-23 du Code des assurances. Dans ce cas, la provision mathématique atteinte au moment de la résiliation du contrat reste acquise à l'assureur.

- **Les frais de rachat (pénalités)**

Le montant des frais de rachats totaux ou partiels varie en fonction de la durée du contrat (N) prévue contractuellement et de la durée courue du contrat (T) selon la formule suivante :

---

28. Contrats vie individuelle et une partie des contrats de retraite viagers et financiers

$$\text{Si } N \neq 0 \text{ alors Frais} = \text{Rachats réglés} \times \frac{\left( 1 - \left( 0.95 + 0.05 \frac{\text{Min}(T;10)}{\text{Min}(N;10)} \right) \right)}{\left( 0.95 + 0.05 \frac{\text{Min}(T;10)}{\text{Min}(N;10)} \right)}.$$

Où T est la durée courue entre la date d'effet du contrat et la date du rachat,

N est la durée du contrat entre la date d'effet et la date terme.

Les principaux taux de chargements sur prime, fractionnement, capital et sur épargne des contrats de retraite de La Mondiale sont résumés dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 3** - Les principaux taux de chargements des contrats de retraite

Produit retraite	Type de rente (1)	Chargements d'acquisition			Chargements de gestion	
		Primes de base	Primes complémentaires	Fractionnement	Capital	Epargne
<b>Monosupport viagère</b>						
<u>Individuel</u>						
RCA	RC	3% ou 16% (2)	30%	4%, 3%, 2% ou 0%	0.15%	-
Super Retraite	RF ou RC	6% ou 7%	30%	4%, 3%, 2% ou 0%	-	-
<u>Collectif</u>						
RCS	RC	3% ou 16% (3)	30%	4%, 3%, 2% ou 0%	0.15%	-
RF	RF	2%	30%	-	0.05% ou 0.15%	-
Super Retraite	RF ou RC	6% ou 7%	30%	3%	-	-
<b>Monosupport financière</b>						
<u>Individuel</u>						
Mondiale Retraite Plus	RF ou RC	5% ou 6%	30%	-	-	0.75% ou 0.88%
Mondiale Retraite Plus 2000	RF ou RC	4%, 5% ou 6%	30%	-	-	0.75% ou 0.88%
Mondiale Privilège	RF	1% ou 5%	30%	-	-	0.60% ou 0.75%
<u>Collectif</u>						
Mondiale Retraite Plus	RF ou RC	5% ou 6%	30%	-	-	0.75% ou 0.88%
<b>Multisupport financière</b>						
<u>Individuel</u>						
Mondiale Privilège Actions	RF	1%, 2.50% ou 4.50%	30%	-	-	0.80%
Mondiale Retraite Active	RC	4.50%	30%	-	-	0.80% (4)
Mondiale Solutions Retraite	RF	2.85% ou 4.50%	-	-	-	0.80%
Mondiale Retraite Professionnels	RF	De 1% à 4.50%	30%	-	-	0.80% (5)
Mondiale Retraite	RC	De 1% à 4.50%	30%	-	-	0.80% (5)
<u>Collectif</u>						
Mondiale Perspectives Entreprise	RF ou RC	4.50%	30%	-	-	0.80% (4)

(1) RF pour rente obligatoire et RC pour rente facultative au terme

(2) 15% pour la garantie décès

(3) 15% ou 25% pour la garantie décès

(4) + 0.18% sur UC pour la garantie plancher

(5) + 0.10% ou 0.18% sur UC pour la garantie plancher

Nous observons qu'il n'y a pas de frais de fractionnement et de chargements sur le capital terme pour les contrats de retraite financiers multisupports et monosupports de La Mondiale.

Quant aux contrats viagers, il n'y a pas de chargements proportionnels à l'épargne constituée.

Le niveau des chargements d'acquisition et de gestion du portefeuille retraite au 31/12/2011 est présenté dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 4 - Chargements d'acquisition et de gestion des contrats de retraite au 31/12/2011**

Produit retraite	Chargements d'acquisition (M€)			Chargements de gestion (M€)						Total
	Frais de fractionnement	Frais de dossier	Chargement sur cotisation	Chargements sur épargne	Chargement sur capital	Chargement sur contre-assurance	Frais de résiliation	Frais de rachat	Frais d'arbitrage	
<b>Monosupport viagère</b>										
Individuel	0.5	-	1.4	-	0.1	0.2	-	0.00	-	2.2
Collectif	0.1	-	3.4	-	2.0	0.2	0.3	0.01	-	6.0
<b>Monosupport financière</b>										
Individuel	-	-	4.5	9.6	-	-	-	0.00	-	14.1
Collectif	-	0.0	1.8	8.2	-	-	-	0.01	-	10.0
<b>Multisupport financière</b>										
Individuel	-	0.1	25.9	24.6	-	-	-	-	0.001	50.6
Collectif	-	0.0	4.7	5.1	-	-	-	-	0.000	9.8
<b>Total</b>	<b>0.6</b>	<b>0.1</b>	<b>41.8</b>	<b>47.5</b>	<b>2.1</b>	<b>0.5</b>	<b>0.3</b>	<b>0.01</b>	<b>0.001</b>	<b>92.9</b>

Nous observons que les chargements 2011 de La Mondiale s'élèvent à 93 M€ et se répartissent en chargements d'acquisition pour 42.5 M€ (46%) et en chargements de gestion pour 50.4 M€ (54%).

### 1.2.3 Les engagements à la liquidation en rente

Nous nous plaçons ici dans le cas où le bénéficiaire du contrat de retraite choisit la rente au terme. Le calcul de la rente est alors établi à partir d'un tarif (table de mortalité et taux technique) précisé dans les conditions générales du contrat. En fonction du tarif de rente garanti au terme, les contrats de La Mondiale se répartissent en cinq catégories :

- Les **contrats à tarif à la souscription** qui garantissent au terme, le tarif de rente en vigueur à la souscription/adhésion.
- Les **contrats à tarif à la liquidation** qui garantissent au terme, le tarif de rente en vigueur à la liquidation de la retraite.
- Les **contrats à tarif à la prime** qui garantissent au terme, le tarif de rente en vigueur à la date d'échéance du versement périodique ou à la date du versement libre.
- Les **contrats à tarif à la PU** qui garantissent au terme, le tarif de rente en vigueur à la souscription pour les versements périodiques et le tarif de rente en vigueur à la date du versement libre. Ces contrats dits « tarif à la PU » peuvent être considérés comme des contrats à tarif à la souscription car la part des versements libres n'est pas significative<sup>29</sup>.
- Les **contrats PERP** qui garantissent au terme, le tarif de rente à partir de la table de mortalité en vigueur à la liquidation au taux technique 0%. Les PERP sont exclus de notre étude car ils ne génèrent pas d'écart de table.

29. Sur la période 2007-2011, les versements libres des contrats tarif à la PU représentent en moyenne 0.1% du total des versements retraite de la garantie Vie

Notons que les contrats de retraite de La Mondiale ne proposent pas de garantie de tarif (table et taux technique) sur la garantie vie durant la période de constitution. Seul le taux technique peut être garanti dans les limites fixées par l'article A.132-1<sup>30</sup> du Code des assurances.

L'article A.132-1-1<sup>31</sup> du Code des assurances repris ci-dessous précise le taux d'intérêt technique maximal applicable aux tarifs :

« Pour l'application de l'article A.132-1, le taux moyen des emprunts d'Etat sur base semestrielle est déterminé en effectuant la moyenne arithmétique sur les six derniers mois des taux observés sur les marchés primaire et secondaire. Le résultat de la multiplication par 60% ou 75% de cette moyenne est dénommé "taux de référence mensuel".

Le taux d'intérêt technique maximal applicable aux tarifs est fixé sur une échelle de taux d'origine 0 et de pas de 0,25 point. Il évolue selon la position du taux de référence mensuel par rapport au dernier taux technique maximal en vigueur :

- tant que le taux de référence mensuel n'a pas diminué d'au moins 0,1 point ou augmenté d'au moins 0,35 point par rapport au dernier taux technique maximal en vigueur, ce dernier demeure inchangé ;

- si le taux de référence mensuel sort des limites précédemment définies, le nouveau taux technique maximal devient le taux immédiatement inférieur au taux de référence mensuel sur l'échelle de pas de 0,25 point.

Lorsqu'un nouveau taux d'intérêt technique maximal est applicable, les entreprises disposent de trois mois pour opérer cette modification. »

Sont présentés ci-dessous un extrait des conditions générales (CG) pour les tarifs de rente garantis au terme des catégories de contrats les plus significatives :

- Contrat à tarif à la souscription (Extrait des CG de Mondiale Retraite Professionnels 01/2012)

« Le calcul de la rente est effectué sur la base de la [table de mortalité](#) en vigueur à l'adhésion pour la rente individuelle ou réversible pour le conjoint, partenaire pacsé ou concubin connu au terme de l'adhésion et cela quelles que soient les options de rente choisies par l'assuré. La rente est calculée avec un [taux technique](#) de rente égal à 1,75%. »

- Contrat à tarif à la liquidation (Extrait des CG de Mondiale Retraite Plus 2000 03/1993)

« Le calcul de la retraite est effectué pour chaque adhérent sur la base de la [table de mortalité](#) et du [taux technique](#) en vigueur à la date de liquidation de la retraite. »

- Contrat à tarif à la prime (Extrait des CG de Mondiale Retraite Plus 2000 03/2000)

« Le calcul de la retraite est effectué sur la base de la [table de mortalité](#) et du [taux technique](#) en vigueur à la date d'échéance de chaque cotisation périodique ou à la date d'encaissement de chaque versement libre. »

30. Pour les contrats à primes périodiques ou à capital variable, les tarifs appliqués doivent être établis d'après un taux qui ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5 % ou 60 % du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur une base semestrielle

31. Modifié par Arrêté 2007-04-23 art.1 JORF 2 mai 2007 - Source [www.legifrance.gouv.fr](http://www.legifrance.gouv.fr)

Les engagements à la liquidation en rente des contrats individuels de retraite sont présentés dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 5** - Engagement à la liquidation des contrats individuels de retraite

Produit retraite individuel	Commercialisation	Engagement à la liquidation		Catégorie
		Rente garantie	Table et taux	
<b>Monosupport viagère</b>				
RCA		Oui	1	Tarif à la souscription
Super Retraite	VP	Oui	1	Tarif à la PU
	VL	Oui	3	
<b>Monosupport financière</b>				
Mondiale Retraite Plus	VP	Oui	1	Tarif à la PU
	VL	Oui	3	
Mondiale Retraite Plus 2000	01/93 à 05/95	Non	4	Tarif à la liquidation
	06/95 à 01/97	Non	4	Tarif à la liquidation
	02/97 à 04/01	Oui	3	Tarif à la prime
Mondiale Privilège		Oui	1	Tarif à la souscription
<b>Multisupport financière</b>				
Mondiale Privilège Actions		Oui	1	Tarif à la souscription
Mondiale Retraite Active		Oui	1	Tarif à la souscription
Mondiale Solutions Retraite		Non	2	PERP
Mondiale Retraite Professionnels		Oui	1	Tarif à la souscription
Mondiale Retraite		Oui	1	Tarif à la souscription

1 - Table et taux technique en vigueur à la souscription (TGH/F05 depuis Septembre 2007)

2 - Table en vigueur à la liquidation et taux technique de 0%

3 - Table et taux technique en vigueur à l'échéance ou au versement de chaque cotisation

4 - Table et taux technique en vigueur à la liquidation

Nous constatons que les contrats de retraite individuels hors PERP proposent majoritairement un engagement de tarif de rente au terme, basé sur le tarif de rente en vigueur à la souscription pour les versements périodiques. **Il y a donc lieu de chiffrer un coût d'écart de table à la liquidation en rente pour ces contrats.**

Les engagements à la liquidation en rente des contrats collectifs de retraite sont présentés dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 6** - Engagement à la liquidation des contrats collectifs de retraite

Produit retraite collectif	Engagement à la liquidation		Catégorie
	Rente garantie	Table et taux	
<b>Monosupport viagère</b>			
RCS	Oui	1	Tarif à la souscription
RF	Oui	2	Tarif à la prime
Super Retraite	Oui	2	Tarif à la prime
<b>Monosupport financière</b>			
Mondiale Retraite Plus	Oui	2	Tarif à la prime
Super Retraite 90	Non	3	Tarif à la liquidation
<b>Multisupport financière</b>			
Mondiale Perspectives Entreprise	Oui	1	Tarif à la souscription

1 - Table et taux technique en vigueur à l'adhésion du participant (TGH/F05 depuis septembre 2007)

2 - Table et taux technique en vigueur à l'échéance de chaque cotisation

3 - Table et taux technique en vigueur à la liquidation

Nous constatons que seuls les produits Mondiale Perspectives Entreprise et RCS proposent un engagement de tarif de rente au terme, basé sur le tarif de rente en vigueur à la souscription. **Il y a donc lieu de chiffrer un coût d'écart de table à la liquidation en rente pour ces deux produits.**

## 1.2.4 Les primes par table contractuelle

Les primes de l'étude se limitent aux primes de la garantie Vie car le chiffrage du coût d'écart de table sur les versements n'a de sens qu'à la liquidation de la retraite, ce qui correspond à la garantie Vie. La répartition des primes brutes émises par table contractuelle et produit au 31/12/2011 est présentée dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 7 - Primes brutes émises 2011 de la garantie vie par table contractuelle et produit**

	Produit retraite	Nombre de contrats en cours	Primes émises au 31/12/2011 (M€)					TOTAL
			TGH/F05	TPG 93	TV-TD 73/77	PF-PM 60/64	AUCUNE	
INDIVIDUEL	<b>Monosupport viagère</b>							
	RCA	1 381	-	-	-	1.4	-	1
	Super Retraite	13 940	0.7	-	14	-	-	15
	<b>Monosupport financière</b>							
	Mondiale Retraite Plus	2 509	0.2	-	4	-	-	4
	Mondiale Retraite Plus 2000	13 793	22	-	-	-	-	22
	Mondiale Privilège	18 273	-	52	-	-	-	52
	<b>Multisupport financière</b>							
	Mondiale Privilège Actions	68 014	0.05	231	-	-	-	231
	Mondiale Retraite Active	41 011	7	84	-	-	-	92
COLLECTIF	Mondiale Solutions Retraite	11 919	-	-	-	-	27	27
	Mondiale Retraite Professionnels	39 427	169	-	-	-	-	169
	Mondiale Retraite	24 754	56	-	-	-	-	56
	<b>Monosupport viagère</b>							
	RCS	4 354	0.1	0.5	0.1	0.9	-	2
	RF	49 335	25	0.004	-	-	-	25
	Super Retraite	35 375	23	0.001	0.004	-	-	23
	<b>Monosupport financière</b>							
	Mondiale Retraite Plus	52 163	33	0.01	0.01	-	-	33
	<b>Multisupport financière</b>							
	Mondiale Perspectives Entreprise	63 313	58	44	-	-	-	103
<b>TOTAL</b>		439 561	395	413	18	2.3	27	855
Répartition des primes			46%	48%	2%	0.3%	3%	100%

La répartition des primes brutes émises de la garantie Vie par table contractuelle et type de sortie<sup>32</sup> en rente au 31/12/2011 est présentée dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 8 - Primes brutes émises 2011 de la garantie vie par table contractuelle et type de sortie en rente**

	Produit retraite	Nombre de contrats en cours	Primes émises au 31/12/2011 (M€)					TOTAL
			TGH/F 05	TPG 93	TV-TD 73/77	PF-PM 60/64	AUCUNE	
INDIVIDUEL	<b>Monosupport viagère</b>							
	RC	15 034	0.7	-	14	1.4	-	16
	RF	287	0.01	-	0.3	-	-	0.3
	<b>Monosupport financière</b>							
	RC	15 616	21	-	3	-	-	24
	RF	18 959	2	52	0.1	-	-	54
COLLECTIF	<b>Multisupport financière</b>							
	RC	64 782	63	80	-	-	-	143
	RF	120 343	169	236	-	-	27	432
	<b>Monosupport viagère</b>							
	RC	8 194	2	0.5	0.1	0.9	-	3
	RF	80 870	47	0.004	0.004	-	-	47
COLLECTIF	<b>Monosupport financière</b>							
	RC	6 881	3	-	-	-	-	3
	RF	45 282	30	0.01	0.01	-	-	30
	<b>Multisupport financière</b>							
	RC	9 620	20	4	-	-	-	24
	RF	53 693	38	40	-	-	-	79
<b>TOTAL</b>		439 561	395	413	18	2	27	855

Les tableaux 7 et 8 ci-dessus, nous indiquent que près de 50% des primes 2011 sont émises au tarif TPG 93 et que ces primes se répartissent principalement sur les contrats financiers de type RF et sur les contrats individuels multisupports de type RC. **Il y a donc lieu de chiffrer un coût d'écart de table à la liquidation en rente sur ces contrats.**

32. Type RC pour les contrats à sortie en rente facultative et type RF pour ceux à sortie en rente obligatoire



### 1.3 Le portefeuille de rentes en service

Les données ci-dessous concernent l'ensemble des rentes viagères de La Mondiale, quelles soient issues du capital constitutif d'un contrat de retraite ou de contrats d'épargne, de vie individuelle et de prévoyance.

**Au 31/12/2011, le nombre de rentes en cours de La Mondiale est de 58 828.**

La répartition des rentes une tête, deux têtes avec ou sans ordre et avec ou sans trimestrialités garanties est présentée dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 9** - Répartition du nombre de rentes à 1 tête et à 2 têtes au 31/12/2011

Nombre de rentes au 31/12/2011	Avec trimestrialités garanties	Sans trimestrialités garanties	Total
Rente 1 tête	10 875	15 937	26 812
Rente 2 têtes avec ordre	1 396	30 583	31 979
Rente 2 têtes sans ordre	-	37	37
Total	12 271	46 557	58 828

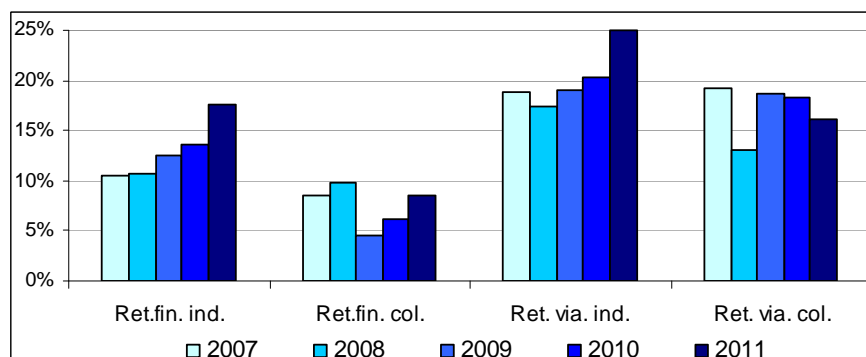
Avec ordre, la rente est versée au premier assuré tant qu'il est en vie. A son décès, une rente de réversion est versée au second assuré s'il est en vie.

Sans ordre, la rente est versée tant que les deux assurés sont en vie. Au décès de l'un des deux assurés, une rente de réversion est versée à l'assuré survivant.

En tenant compte de la répartition des types de rentes, nous considérerons par la suite que le portefeuille de rentes de La Mondiale est composé de **rentes une tête avec trimestrialités garanties (1T NTG)**, de **rentes une tête sans trimestrialités garanties (1T)** et de **rentes deux têtes avec ordre (2T)**.

#### 1.3.1 Le taux de sortie en rente au terme

Les contrats de retraite de type RF sortent obligatoirement en rente ; le taux de sortie en rente au terme est alors de 100%. Quant aux contrats de retraite de type RC, le bénéficiaire a le choix au terme entre un capital et une rente. La figure ci-dessous présente l'évolution du taux de sortie en rente au terme, calculé en montant pour les contrats de type RC entre les exercices 2007 et 2011.



**Figure 1** - Évolution du taux de sortie en rente facultative entre 2007 et 2011

Hors contrats de retraite viagère collective (Ret. Via. Col.), nous observons une augmentation du taux de sortie en rente facultative sur les 3 dernières années. Globalement, le taux de sortie en rente au terme des contrats de type RC se situe entre 5% et 25% selon les familles de contrats.

### 1.3.2 Le choix du type de rente au terme

Les contrats de retraite de La Mondiale sortent principalement en rente 1T NTG, 1T, 2T NTG ou 2T. Les figures ci-dessous présentent l'évolution et la proportion du type de rente choisi au terme entre les exercices 2007 et 2011.

Figure 2

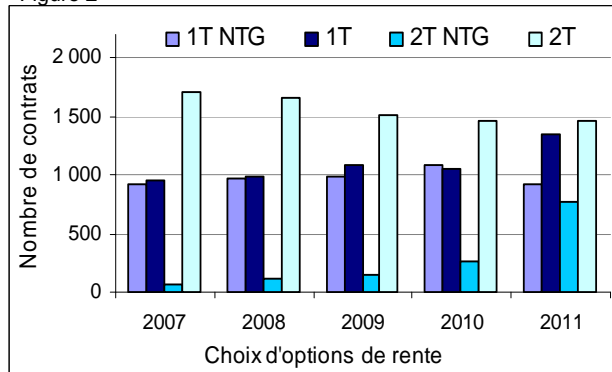


Figure 3

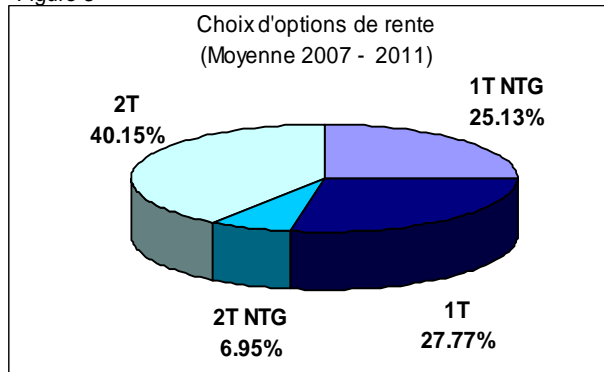


Figure 2 - Évolution du type de rente choisi au terme entre 2007 et 2011

Figure 3 - Proportion moyenne du type de rente choisi au terme entre 2007 et 2011

Nous observons une hausse du choix de rentes 1T et 2T NTG sur la période 2007-2011 et une relative stabilité pour les options 1T NTG et 2T sur les trois dernières années. La proportion moyenne sur cinq ans est de 40% pour l'option 2T, de 25% pour les options 1T et 1T NTG et de 7% pour l'option 2T NTG.

### 1.3.3 Les rentes viagères deux têtes

Les assurés d'une rente 2T sont généralement un couple d'assurés Homme-Femme (H\_F) ou un couple d'assurés Femme-Homme (F\_H). Nous désignons par H\_F, un couple d'assurés Homme-Femme où l'homme est l'assuré principal et la femme le réversataire. Inversement nous désignons par F\_H, un couple d'assurés où la femme est l'assurée principale et l'homme le réversataire. Le nombre de rentes 2T où l'assuré principal et le réversataire sont de même sexe est peu élevé ; il y a eu seulement quatre cas sur la période 2007-2011.

La figure ci-dessous indique que l'assuré principal des rentes 2T choisies au terme est majoritairement un homme et que le réversataire est une femme.

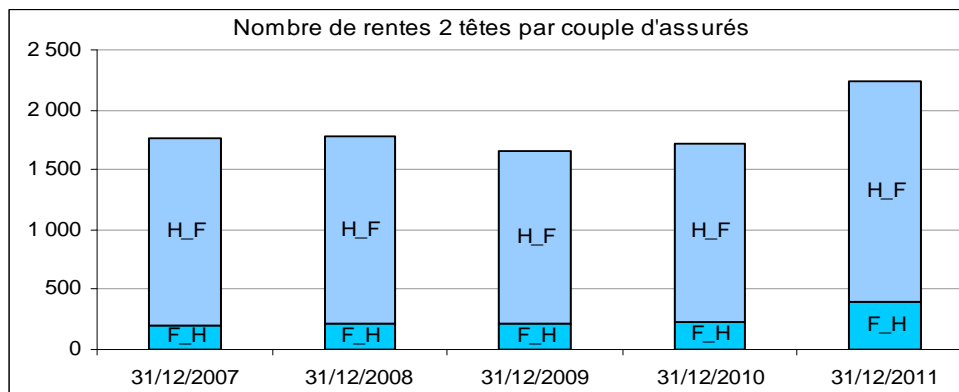
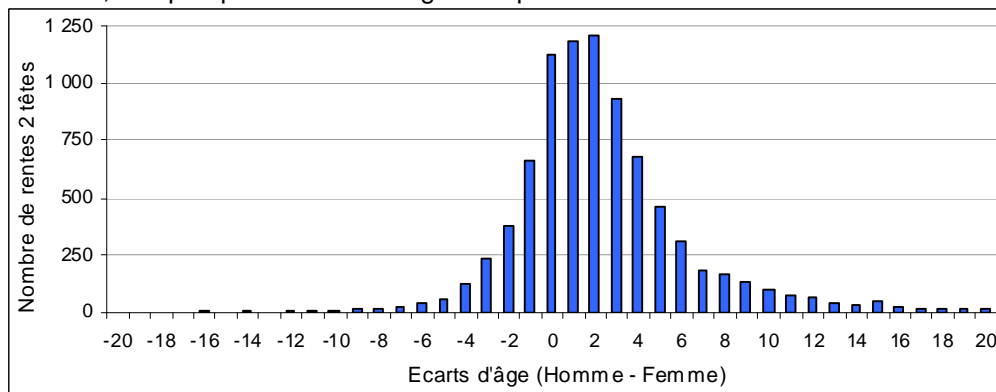


Figure 4 - Répartition des rentes 2T émises au terme, par couple d'assurés de 2007 à 2011

La figure ci-dessous réalisée à partir des couples d'assurés des rentes 2T choisies au terme sur la période 2007-2011, indique que les écarts d'âge se répartissent autour de la valeur 2 ans.

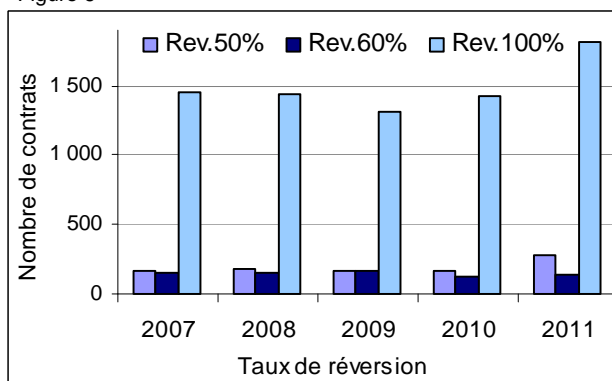


**Figure 5** - Rente 2T - Répartition des écarts d'âge (Age Homme – Age Femme)

La moyenne des écarts d'âge entre les hommes et les femmes pondérés par le nombre de rentes est de 2.3, ce qui indique que les femmes sont plus jeunes que les hommes de 2 ans en moyenne.

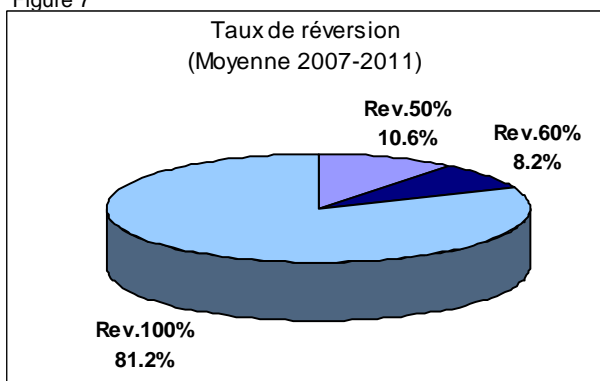
Au décès de l'assuré principal, le montant de rente versé au réversataire dépend du taux de réversion choisi au moment de la liquidation de la rente. Les figures ci-dessous présentent les taux de réversion à la liquidation des rentes 2T entre les exercices 2007 et 2011.

Figure 6



**Figure 6** - Taux de réversion choisi entre 2007 et 2011

Figure 7



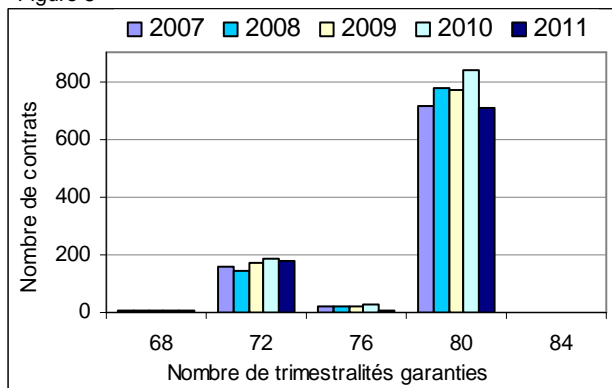
**Figure 7** - Proportion moyenne de la réversion choisie entre 2007 et 2011

Nous observons que le taux de réversion des rentes 2T est majoritairement de 100%.

### 1.3.4 Les rentes une tête avec trimestrialités garanties

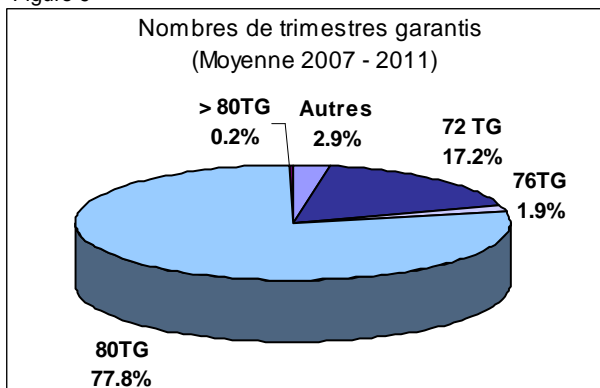
Les figures ci-dessous présentent le nombre de trimestrialités choisi à la liquidation de la rente.

Figure 8



**Figure 8** - Trimestrialité choisie à la mise en place de la rente entre 2007 et 2011

Figure 9



**Figure 9** - Proportion moyenne de la trimestrialité choisie entre 2007 et 2011

Nous observons que l'option 80 trimestrialités est majoritairement choisie pour les rentes 1T NTG.

### 1.3.5 Les rachats d'office

Les articles A.160-2 à A.160-4 du Code des assurances permettent à La Mondiale de proposer le rachat d'office des contrats de rente dont le montant mensuel des rentes viagères y compris les majorations légales ne dépasse pas un certain montant minimal. L'article A.160-2 modifié par un arrêté daté du 1er août 2006, a redéfini le montant minimal mensuel à 40 € au-dessous duquel le capital peut se substituer à la rente viagère et lorsque la périodicité du versement est supérieure à un mois, ce seuil est multiplié par le nombre de mois inclus dans la période de paiement. Le seuil atteint alors 120 € par trimestre, 240 € par semestre et 480 € par an.

**La sortie se fait en capital au tarif contractuel et dans ce cas il n'y a pas d'écart de table.**

Les figures ci-dessous présentent l'évolution entre 2007 et 2011 du montant<sup>33</sup> des rentes annuelles inférieures à 480 € pour les contrats arrivant au terme.

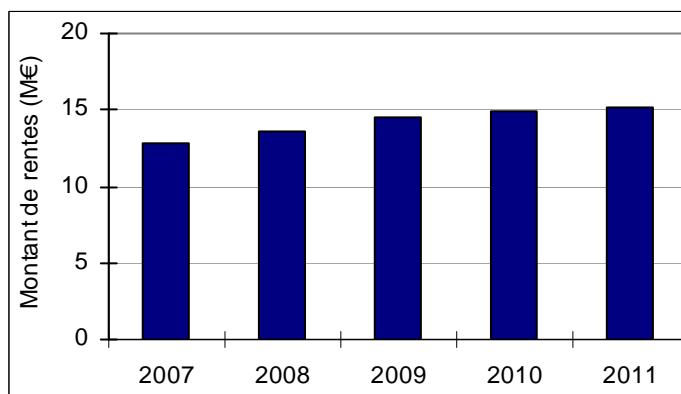


Figure 10 - Montant des rentes annuelles inférieures à 480 €

Le montant des rentes annuelles inférieures à 480 € progresse de 13 à 15 M€ sur la période 2007-2011 et tend à se stabiliser autour de 15 M€.

## 1.4 La Base Bilan Technique (BBT)

### 1.4.1 La description de la BBT

La Base Bilan Technique est la base de données de référence pour les travaux d'inventaire de La Mondiale et sa conception remonte à plus de dix ans.

Les premières réflexions pour moderniser et enrichir le système d'information des données techniques datent de 1999 et les premiers éléments de la Base Bilan Technique ont été livrés en 2003. La refonte du système d'information de La Mondiale a permis de rationaliser les étapes du processus d'alimentation des données contractuelles et techniques.

Les règles de filtrage, de contrôle, de calcul, d'agrégation et d'historisation des données ont ainsi été redéfinies selon un cahier des charges bien précis pour obtenir au final un entrepôt de données plus fiables, plus détaillées et mieux organisées pour les travaux d'inventaire.

33. Y compris les majorations légales

De nouvelles fonctionnalités sont intégrées chaque année pour optimiser les temps de traitement et de chargements de données. De nouvelles données sont également intégrées en fonction des nouveaux besoins réglementaires de reporting et d'études sur le portefeuille.

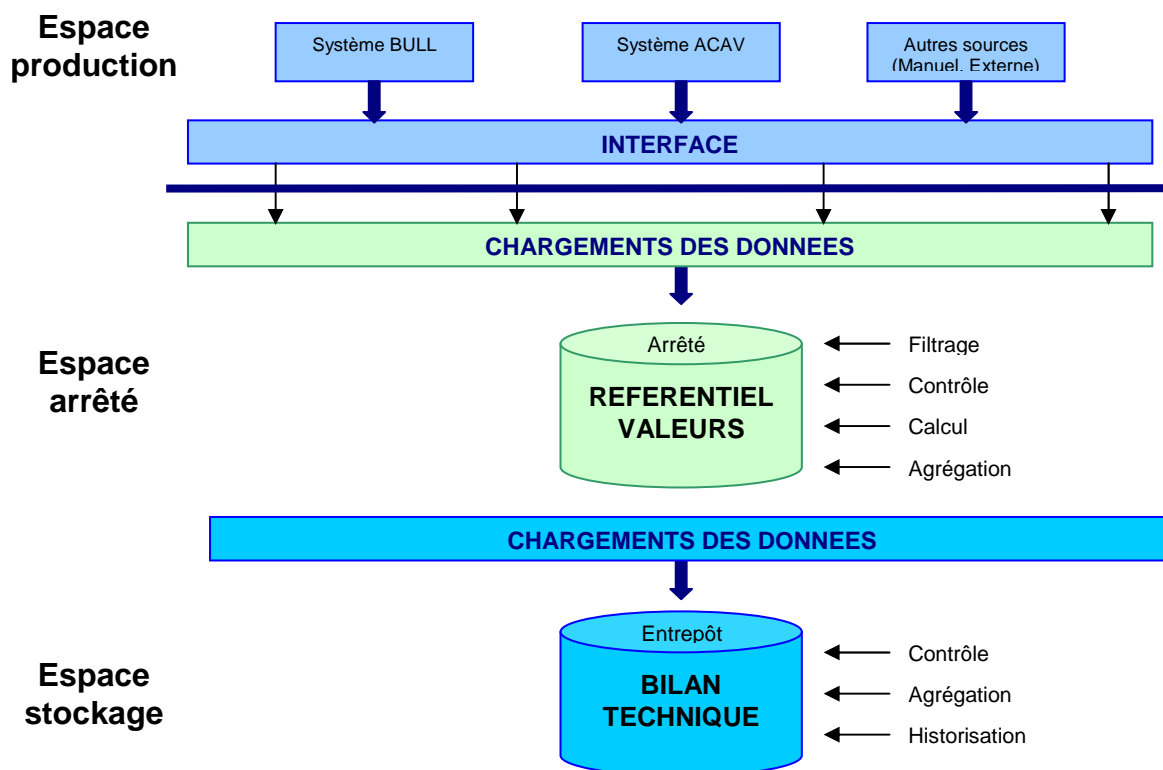
La Base Bilan Technique regroupe notamment les informations sur :

- les contrats et les garanties du contrat,
- les primes émises en gestion et les primes ventilées sur les garanties du contrat,
- les primes acquises non émises (PANE) ventilées sur les garanties du contrat,
- les règlements de prestations,
- les droits échus des contrats sortis dans la période,
- les droits acquis par tarif et garantie du contrat,
- les provisions par tarif et garantie du contrat,
- un fichier trace permettant un audit de qualité de la base de données.

Pour le moment, la Base Bilan Technique regroupe les informations des contrats de retraite, d'épargne, de vie individuelle et de rente. L'intégration des contrats de prévoyance est en projet.

#### 1.4.2 Le schéma de la BBT

Le schéma ci-dessous représente de façon simplifiée le processus d'alimentation de la Base Bilan Technique.



**Schéma 4** - Processus d'alimentation de la Base Bilan Technique

Les données sont ensuite accessibles et exploitables après chargement et validation mensuelle de la Base Bilan Technique. C'est à partir de cette base de données que nous allons extraire les informations pour notre étude.

### 1.4.3 Le cadrage des primes BBT

Le tableau ci-dessous permet de faire le cadrage des primes brutes émises de la Base Bilan Technique avec le chiffre d'affaires comptable au 31/12/2011.

Les primes des contrats de prévoyance ont été exclues du tableau car les contrats de prévoyance ne sont pas encore intégrés dans la Base Bilan Technique.

**Tableau 10** - Cadrage des primes brutes émises au 31/12/2011

Portefeuille	Primes émises BBT au 31/12/2011 (M€)			Chiffre d'affaires 2011 y compris droits d'adhésion	% Ecart
	Garantie Vie	Autres garanties	Total		
Retraite	855	12	868	867	-0.1%
Epargne	310	0	310	309	-0.2%
Vie Individuelle	33	20	53	53	0.1%
<b>Total</b>	<b>1 198</b>	<b>32</b>	<b>1 230</b>	<b>1 229</b>	<b>-0.1%</b>
	a			b	c = (b-a) / a

L'écart de 0.1% entre le chiffre d'affaires comptable et le montant des primes brutes émises BBT, nous indique que les primes extraites de la Base Bilan Technique au 31/12/2011 sont satisfaisantes.

## 1.5 Le choix du périmètre d'étude

### 1.5.1 Le principe

Après analyse de la composition du portefeuille de La Mondiale et des engagements de table au terme des contrats, nous avons décidé de chiffrer le coût d'écart de table sur les versements des contrats de retraite hors PERP.

Les PERP et les contrats d'épargne sont exclus du périmètre d'étude car il n'y pas de garantie de table au terme sur ces contrats. Quant aux contrats de vie individuelle<sup>34</sup> et de prévoyance, ils ne sont également pas concernés par le chiffrage du coût d'écart de table.

Enfin, les primes retenues sont celles de la garantie Vie car le chiffrage du coût d'écart de table est réalisé au terme du contrat.

**Le périmètre de notre étude est alors le suivant :**

Portefeuille	:	La Mondiale
Type de contrat	:	Contrat individuel ou collectif de retraite financière (hors PERP) Contrat individuel ou collectif de retraite viagère
Type de sortie	:	RC (sortie en rente facultative) RF (sortie en rente obligatoire)
Type de prime	:	Versements périodiques ou libres de la garantie Vie

34. Il s'agit majoritairement de contrats de type « Vie entière », « Mixte », « Temporaire » et « Terme fixe »

## 1.5.2 La granularité

Nous avons retenu huit familles homogènes de contrats selon le schéma ci-dessous pour lesquelles nous allons déterminer des lois comportementales de versements et de rachats totaux. Ces lois comportementales seront prises en compte pour le chiffrage du coût d'écart de table.

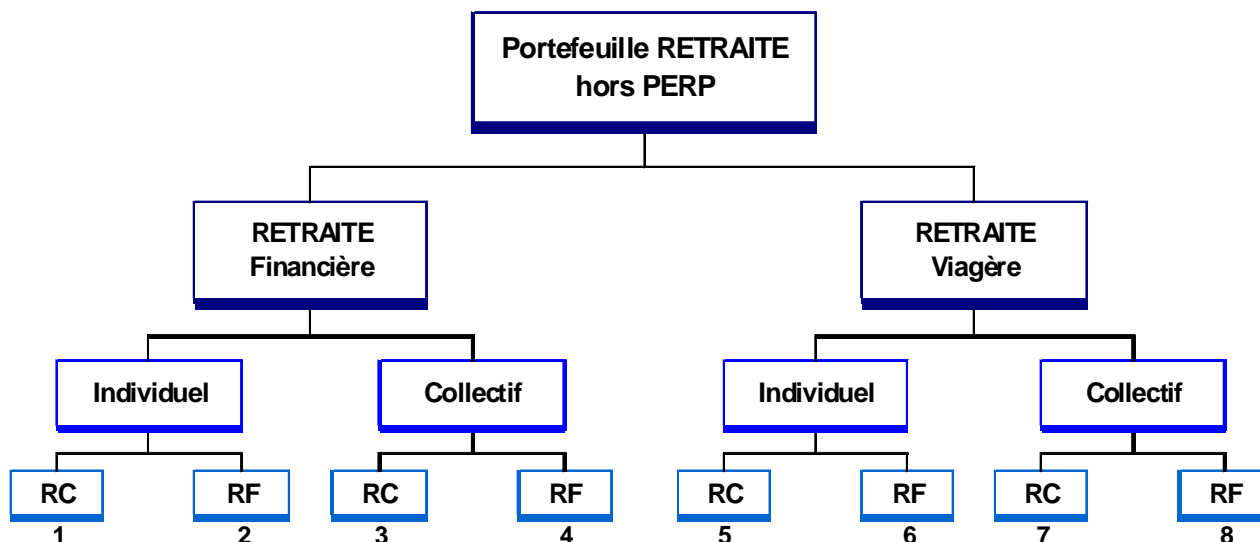


Schéma 5 - Granularité des lois comportementales

Cette granularité a été déterminée en fonction :

- des caractéristiques de capitalisation financière ou viagère des contrats,
- des comportements différents de versements des contrats individuels ou collectifs,
- du type de sorties au terme en rente facultative (RC) ou en rente obligatoire (RF).

Par ailleurs, nous avons regroupé dans les familles 1 à 4, les contrats de retraite financière multisupports<sup>35</sup> et monosupports. Ce regroupement permet d'obtenir des familles avec un nombre plus significatif de contrats, un historique de taux observés plus important et de supprimer les effets de bord entre les générations. Les figures 11 et 12 ci-dessous, donnent un aperçu de l'évolution des taux<sup>36</sup> de versements périodiques de ces contrats.

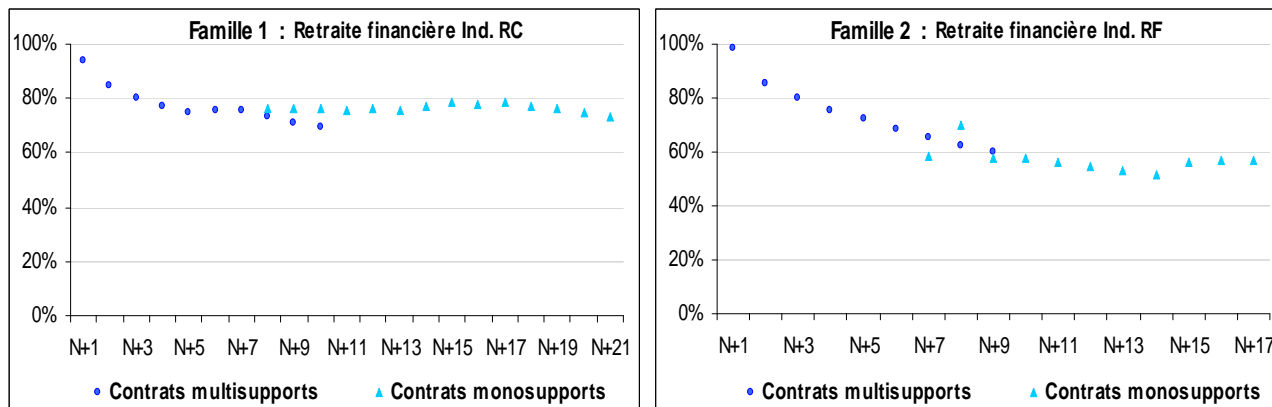
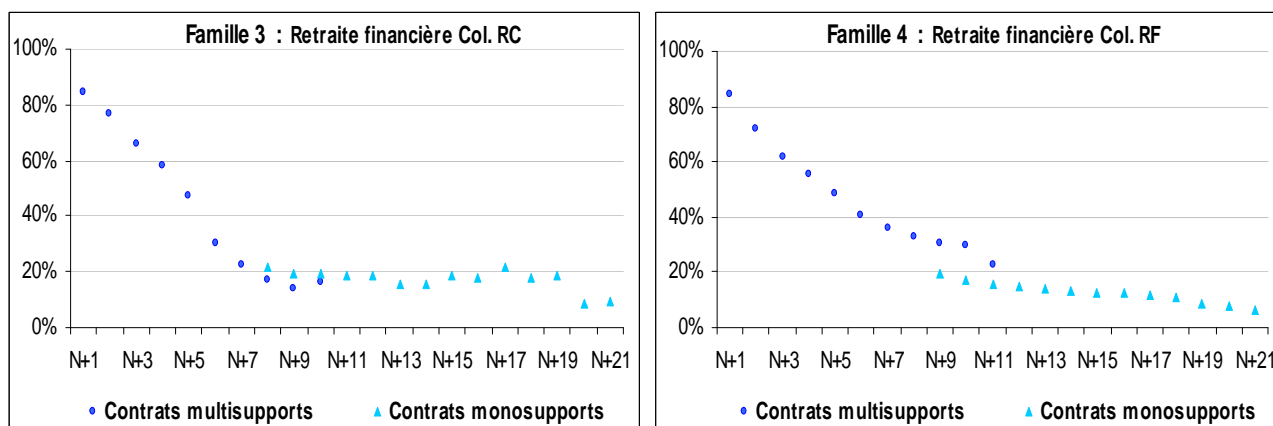


Figure 11 - Taux de versements périodiques des contrats individuels multisupports et monosupports

35. Les contrats de retraite multisupports représentent la nouvelle gamme de produits de retraite commercialisée depuis les années 2000 en remplacement des contrats de retraite monosupports commercialisés avant 2000

36. Les taux de versements périodiques ont été déterminés à partir de la méthode définie dans le chapitre 3



**Figure 12 - Taux de reversements périodiques des contrats collectifs multisupports et monosupports**

Les graphiques montrent que l'évolution des taux de reversements périodiques des contrats financiers multisupports peut être prolongée par celle des contrats financiers monosupports.

Il n'y a donc aucune raison de séparer les deux types de contrats dans le calcul des taux de reversements périodiques. Par extension, nous adoptons le même regroupement pour les reversements libres.

Ce chapitre nous a permis de présenter les caractéristiques des contrats de rente de La Mondiale et de définir le périmètre ainsi que la granularité de notre étude. Une fois le contexte établi, nous pouvons maintenant présenter le cadre théorique et les outils statistiques pour la détermination des lois comportementales qui seront prises en compte pour le chiffrage du coût d'écart de table.



# CHAPITRE 2

## DETERMINATION DES MODELES DE REGRESSION

### 2.1 Les différents modèles de régression

Nous nous plaçons ici dans le cas où nous disposons de  $n$  observations d'une variable quantitative  $Y$  et de  $p$  variables quantitatives explicatives.

En notant  $Y_i$  la valeur de l'observation  $i$  de la variable  $Y$  à régresser,  
 $f$  une fonction mathématique à déterminer,  
 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}$  les valeurs de l'observation  $i$  des  $p$  variables explicatives,  
 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  les  $k$  paramètres du modèle à estimer,  
 $\varepsilon_i$  la valeur de l'observation  $i$  de l'erreur du modèle appelés résidus,

le problème consiste à rechercher une relation entre  $Y_i$  et les variables explicatives  $x_{ik}$  en utilisant un modèle du type  $Y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i$  avec  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq p$  et  $p \leq n$ .

Il existe deux types de modèles de régression ; les modèles de régression linéaire et les modèles de régression non linéaire.

#### 2.1.1 Les modèles de régression linéaire

Le modèle de régression linéaire de base est de la forme  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$  avec  $\varepsilon_i$  les résidus du modèle de moyenne nulle.

En notant  $f_k$  avec  $1 \leq k \leq p$ , une famille de fonctions mathématiques, d'autres modèles de la forme  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 f_2(x_{i2}) + \dots + \beta_p f_p(x_{ip}) + \varepsilon_i$  et linéaires par rapport aux paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ , font aussi partie des modèles de régression linéaire.

Enfin, certains modèles non linéaires par rapport aux paramètres, peuvent se linéariser par une simple transformation. C'est le cas par exemple du modèle  $y = \beta_1 * e^{\beta_2 x_2} * x_1^{\beta_3}$  qui se linéarise par la fonction logarithmique Népérienne  $\ln$ . Le modèle  $y = \beta_1 * e^{\beta_2 x_2} * x_1^{\beta_3}$  se transforme en  $\ln(Y) = \ln(\beta_1) + \beta_2 x_2 + \beta_3 \ln(x_1)$  et devient alors linéaire par rapport aux paramètres  $\gamma_1 = \ln(\beta_1)$ ,  $\gamma_2 = \beta_2$  et  $\gamma_3 = \beta_3$ . De façon générale, un modèle de régression linéaire peut toujours s'écrire sous la forme du modèle de base  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$ .

#### 2.1.2 Les modèles de régression non linéaire

Les modèles de régression non linéaire sont de la forme  $Y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i$  où  $f$  est une fonction non linéaire par rapport aux paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  et  $\varepsilon_i$  les résidus du modèle.

Contrairement aux modèles de régression linéaire, il n'y a aucune hypothèse particulière sur les résidus  $\varepsilon_i$ .

Dire que  $f$  est une fonction non linéaire par rapport aux paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  signifie qu'il existe au moins un  $\beta_k$  pour lequel  $\frac{\partial Y}{\partial \beta_k}$  dépend d'un paramètre du modèle de régression non linéaire.

Par exemple, le modèle  $Y = \beta_1 e^{\beta_2 x} + \varepsilon$  n'est pas linéaire par rapport aux paramètres  $(\beta_1, \beta_2)$  car  $\frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = e^{\beta_2 x}$  dépend du paramètre  $\beta_2$ . Il en est de même pour les modèles  $Y = \beta_1 \ln(\beta_2 x) + \varepsilon$  et  $Y = \beta_1 x^{\beta_2} + \varepsilon$ .

## 2.2 La méthode des moindres carrés

Pour l'estimation des paramètres des modèles de régression, nous nous proposons d'utiliser la méthode des moindres carrés dont l'intérêt principal réside dans sa simplicité mathématique.

Cette méthode consiste à estimer les paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  du modèle  $Y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i$  qui minimise la somme des carrés résiduels définie par  $SCR(\beta) = \sum_i (Y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k))^2$ .

On cherche donc  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_k)$  tel que  $SCR(\hat{\beta}) = \min_{\beta} \left( \sum_i (Y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k))^2 \right)$ .

### 2.2.1 Les moindres carrés ordinaires (MCO)

$$\text{Notons } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_p \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Dans le cas d'un modèle de régression linéaire,  $Y$  peut toujours s'écrire sous la forme matricielle de base  $Y = X\beta + \varepsilon$  avec pour hypothèses, la non-corrélation et l'homoscédasticité<sup>37</sup> des résidus.

L'estimation<sup>38</sup> des paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$  peut se faire par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) qui consiste alors à chercher le vecteur  $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \dots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix}$  tel

$$\text{que } SCR(\hat{\beta}) = \min_{\beta} \left( \sum_i (Y_i - (\beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}))^2 \right) = \min_{\beta} (Y - X\beta)^T (Y - X\beta).$$

37. Variance des résidus constante quelque soit la distribution des résidus

38. Dans notre étude, l'estimation des paramètres d'un modèle de régression linéaire est réalisée avec la procédure REG de SAS

Pour cela, il suffit de rechercher les solutions qui annulent les dérivées  $\frac{\partial}{\partial \beta} ((Y - X\beta)^T (Y - X\beta))$ .

On obtient alors p équations linéaires à p inconnues, appelées **équations normales**.

L'estimateur de  $\beta$  au sens des moindres carrés ordinaires (MCO) est alors défini par  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$  où  $X^T$  (resp.  $X^{-1}$ ) est la transposée (resp. l'inverse) de la matrice  $X$ .

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} ((Y - X\beta)^T (Y - X\beta)) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} ((Y^T - \beta^T X^T)(Y - X\beta)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} (Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} (Y^T Y - (\beta^T X^T Y)^T - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} (Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2X^T Y + 2X^T X\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta = (X^T X)^{-1} X^T Y \end{aligned}$$

L'unique solution qui annule les dérivées  $\frac{\partial}{\partial \beta} ((Y - X\beta)^T (Y - X\beta))$  est donc l'estimateur des moindres carrés ordinaires défini par  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ .

Nous noterons que la matrice  $X^T X$  est bien inversible puisque nous nous sommes placés dans le cas où le nombre d'observations  $n$  est supérieur au nombre de variables explicatives  $p$ .

Le théorème de Gauss-Markov énonce sous les hypothèses d'indépendance et d'homoscédasticité des résidus que, parmi tous les estimateurs linéaires non-biaisés, l'estimateur par la méthode des moindres carrés présente une variance minimale.

**En résumé, l'estimateur par la méthode des moindres carrés (MCO) est le BLUE<sup>39</sup>.**

Remarques :

- Lorsque l'hypothèse d'homoscédasticité n'est pas vérifiée, il est toujours possible de se ramener au modèle standard de la régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés.
- Lorsque les hypothèses d'homoscédasticité et de non corrélation des résidus ne sont pas vérifiées, il est encore possible de se ramener au modèle standard de la régression linéaire en utilisant cette fois-ci, la méthode des moindres carrés généralisés.

39. Best Linear Unbiased Estimator

## 2.2.2 Les moindres carrés non linéaires (MCNL)

Dans le cas des modèles de régression non linéaire, les équations normales ne sont pas linéaires par rapport aux paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ .

En effet, avec la notation  $f(x_i; \beta) = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ , les équations normales sont définies par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sum_i (Y_i - f(x_i; \beta))^2 \right) &= 0 & \Leftrightarrow & \forall k \in [1; p] \quad \frac{\partial}{\partial \beta_k} \sum_i (Y_i - f(x_i; \beta))^2 = 0 \\ & & \Leftrightarrow & \forall k \in [1; p] \quad \sum_i \frac{\partial}{\partial \beta_k} (Y_i - f(x_i; \beta))^2 = 0 \\ & & \Leftrightarrow & \forall k \in [1; p] \quad \sum_i (Y_i - f(x_i; \beta)) \frac{\partial}{\partial \beta_k} f(x_i; \beta) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ces équations normales forment alors un système de  $p$  équations non linéaires par rapport aux paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$  et ne peuvent donc pas se résoudre analytiquement.

Pour le modèle non linéaire, le problème de l'estimation des  $p$  paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$  du système d'équations non linéaires défini au (2.1) peut se résoudre par la méthode des moindres carrés non linéaires (MCNL).

La méthode MCNL consiste à utiliser un algorithme itératif du type méthode numérique de Gauss-Newton pour estimer de proche en proche la vraie valeur des  $p$  paramètres.

**A noter que contrairement aux modèles de régression linéaire, les hypothèses d'homoscédasticité et de non corrélation des résidus ne sont pas des pré-requis à l'application de la méthode des moindres carrés non linéaires.**

## 2.3 La méthode de résolution d'équations non linéaires

Nous choisissons ici de ne présenter que la méthode de Gauss-Newton car c'est l'une des méthodes d'approximation numérique les plus connues<sup>40</sup> qui permet de résoudre les équations non linéaires.

La méthode de Gauss-Newton permet aussi de présenter simplement les principales techniques d'un algorithme itératif.

Enfin, la méthode de Gauss-Newton est utilisée par la procédure **NLIN** du logiciel SAS par défaut.

Dans notre étude, l'estimation des paramètres d'un modèle de régression non linéaire est réalisée dans la mesure du possible avec la procédure NLIN de SAS.

40. Parmi les plus connues, il existe aussi la méthode de Newton

### 2.3.1 L'algorithme de Gauss - Newton

Soit un modèle du type  $Y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i$  avec  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq p$  et  $p \leq n$  où  $f$  est une fonction mathématique non linéaire par rapport aux paramètres  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  et  $\varepsilon_i$  les résidus du modèle.

L'algorithme de Gauss-Newton se base sur la linéarisation de la fonction mathématique  $f$  par un développement de Taylor au 1er ordre au voisinage de  $\beta^0$  défini par la relation

$$f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \approx f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_k^0) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)}{\partial \beta_j} (\beta_j - \beta_j^0) \quad (2.2)$$

En notant  $f(x_i; \beta) = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ , la relation (2.2) peut alors s'écrire sous la forme  $f(x_i; \beta) \approx f(x_i; \beta^0) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f(x_i; \beta)}{\partial \beta_j} (\beta_j - \beta_j^0)$ . (2.3)

En notant  $f(\beta) = \begin{pmatrix} f(x_1; \beta) \\ f(x_2; \beta) \\ \dots \\ f(x_n; \beta) \end{pmatrix}$  et  $J_f(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_1} f(x_1; \beta) & \frac{\partial}{\partial \beta_2} f(x_1; \beta) & \dots & \frac{\partial}{\partial \beta_k} f(x_1; \beta) \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} f(x_2; \beta) & \frac{\partial}{\partial \beta_2} f(x_2; \beta) & \dots & \frac{\partial}{\partial \beta_k} f(x_2; \beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} f(x_n; \beta) & \frac{\partial}{\partial \beta_2} f(x_n; \beta) & \dots & \frac{\partial}{\partial \beta_k} f(x_n; \beta) \end{pmatrix}$  la matrice

jacobienne de  $f$  par rapport à  $\beta$ , la relation (2.3) peut s'écrire matriciellement sous la forme  $f(\beta) \approx f(\beta^0) + J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0)$ . (2.4)

En utilisant la relation (2.4) dans l'expression  $(Y - f(\beta))^T (Y - f(\beta))$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} (Y - f(\beta))^T (Y - f(\beta)) &\approx (Y - f(\beta^0) - J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0))^T (Y - f(\beta^0) - J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0)) \\ &\approx (Y - f(\beta^0))^T (Y - f(\beta^0)) - 2(Y - f(\beta^0))^T J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0) + (\beta - \beta^0)^T J_f(\beta^0)^T J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0) \end{aligned}$$

Le produit  $(Y - f(\beta))^T (Y - f(\beta))$  est alors approximé par une fonction du second degré en  $\beta$ .

En dérivant par rapport à  $\beta$  la somme des carrés des résidus, nous obtenons la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} (Y - f(\beta))^T (Y - f(\beta)) &\approx \frac{\partial}{\partial \beta} \left( (Y - f(\beta^0))^T (Y - f(\beta^0)) - 2(Y - f(\beta^0))^T J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0) + (\beta - \beta^0)^T J_f(\beta^0)^T J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0) \right) \\ &\approx -2(J_f(\beta^0))^T (Y - f(\beta^0)) + 2(J_f(\beta^0))^T J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0) \end{aligned}$$

En appliquant le critère des moindres carrés, nous obtenons une équation linéaire en  $\beta$  :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (Y - f(\beta))^T (Y - f(\beta)) = 0 \Rightarrow -2(J_f(\beta^0))^T (Y - f(\beta^0)) + 2(J_f(\beta^0))^T J_f(\beta^0)(\beta - \beta^0) = 0 \quad (2.5)$$

La solution de (2.5) est  $\beta^1 = \beta^0 + \left( (J_f(\beta^0))^T J_f(\beta^0) \right)^{-1} (J_f(\beta^0))^T (Y - f(\beta^0))$ . (2.6)

Nous noterons que  $(J_f(\beta^0))^T J_f(\beta^0)$  est bien inversible puisque  $n$  est supérieur ou égal à  $k$ .

Ainsi à partir d'une valeur  $\beta^0$ , nous obtenons une solution  $\beta^1$  annulant les équations normales non linéaires définies au (2.1). Nous pouvons recommencer le procédé avec la valeur  $\beta^1$  pour obtenir une solution  $\beta^2$  annulant les équations normales non linéaires définies au (2.1).

A partir de la formule (2.6), nous pouvons déduire la formule itérative suivante qui donne la solution  $\beta^{n+1}$  en fonction de  $\beta^n$  :

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \left( (J_f(\beta^n))^T (J_f(\beta^n)) \right)^{-1} (J_f(\beta^n))^T (Y - f(\beta^n)) \quad (2.7)$$

La formule itérative s'arrête à l'étape k en fonction d'un critère d'arrêt fixé au préalable.

Voici quelques critères d'arrêt les plus usuels basés sur :

- la stagnation de la solution :  $\|\beta^{k+1} - \beta^k\| < 10^{-3} \|\beta^k\|$  où  $\|\beta^k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k \beta_i^k}$ ,
- le nombre d'itérations k dépassant un seuil fixé à l'avance,
- l'inégalité  $\sqrt{\frac{\varepsilon^T J_f (J_f^T J_f)^{-1} J_f^T \varepsilon}{SCR^{(k)}}} < 10^{-5}$  où  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$  et  $SCR^{(k)}$  la somme des carrés résiduels à la k-ième itération,
- ou une combinaison des critères précédents.

A noter que la formule itérative (2.7) ne converge pas toujours ; c'est d'ailleurs l'un des principaux inconvénients des algorithmes itératifs.

## 2.3.2 Les inconvénients des algorithmes itératifs

### 2.3.2.1 Importance de la valeur initiale

Pour initialiser un algorithme itératif, il est très important de bien choisir la valeur de départ car une valeur initiale trop éloignée de la solution risque de demander un nombre important d'itérations avec un risque de non convergence.

Dans la pratique, lorsque la solution est inconnue, il est conseillé de lancer l'algorithme itératif à partir de plusieurs points de départ.

Mais lorsqu'une estimation de la solution est connue, il est préférable de choisir un point de départ au plus proche de la solution attendue, ce qui permet d'optimiser l'exécution de l'algorithme itératif.

Dans notre étude, une première estimation des paramètres est réalisée à partir du tableur Excel. Cela nous permet d'initialiser l'algorithme itératif à partir d'une valeur au voisinage de la solution attendue et d'assurer ainsi la convergence.

### 2.3.2.2 Cas des minima locaux

Dans le cas des modèles de régression non linéaire, la solution obtenue par un algorithme itératif n'est pas toujours unique car il peut exister des minima locaux.

Considérons par exemple le modèle  $y = \beta_1 e^{-\beta_2 x} + \varepsilon$  passant par les points  $(-2;0)$ ,  $(-1;1)$ ,  $(1;-0.9)$  et  $(2;0)$ .

La fonction à minimiser selon le critère des moindres carrées,  $SCR(\beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^3 (y_i - \beta_1 e^{-\beta_2 x_i})^2$  admet deux minima<sup>41</sup> ; l'un en  $(-0.634; -0.6988)$  et l'autre en  $(0.0872; 0.6199)$ .

**Il est donc important d'exécuter l'algorithme itératif à partir de plusieurs points de départ pour identifier ces minima locaux. Le choix de la solution dépendra ensuite de la forme de la solution recherchée.**

### 2.3.2.3 Cas des modèles non identifiables

Certains modèles de régression non linéaire ne peuvent pas être estimés quelques soient les données ou les paramètres de départ ; le modèle est alors dit non identifiable.

Cela se produit lorsque qu'il est impossible d'estimer les paramètres séparément à partir de l'équation du modèle et dans ce cas la matrice  $J_f^T J_f$  est toujours singulière<sup>42</sup>.

Considérons par exemple le modèle  $f(X_1, X_2; \lambda, \beta, \gamma) = e^{(-\beta \gamma X_1)} + \frac{\lambda}{\beta} (1 - e^{(-\beta \gamma)}) X_2$  pour lequel il y a deux paramètres indépendants  $\beta \gamma$  et  $\frac{\lambda}{\beta}$ .

Le modèle est alors non identifiable car les trois paramètres ne peuvent pas être estimés séparément. Dans ce cas, il faut essayer de réécrire le modèle pour supprimer le ou les paramètres redondants.

## 2.4 La validation du modèle de régression

Nous nous plaçons ici dans le cas où nous connaissons une estimation des paramètres du modèle de régression.

De nombreuses questions peuvent alors se poser :

- Est-ce que le modèle estimé est globalement robuste d'un point de vue statistique ?
- Comment choisir le meilleur modèle parmi plusieurs modèles équivalents ?
- Est-ce que les hypothèses sur les résidus sont vérifiées ?
- Est-ce que tous les paramètres estimés sont significatifs ?

Les paragraphes ci-dessous tentent de répondre à l'ensemble de ces questions.

41. La détermination des minima a été réalisée avec la procédure NLIN du progiciel SAS

42. Non inversible

## 2.4.1 L'approche graphique

Avant tout calcul d'indicateurs ou de tests statistiques, il est indispensable de procéder à une analyse graphique du modèle estimé car l'approche graphique permet d'écarter immédiatement les modèles trop éloignés des données observées et de faire ainsi l'économie de calculs inutiles.

Lorsque plusieurs modèles estimés sont équivalents, le choix peut être guidé par différents indicateurs<sup>43</sup> usuels et aussi par la connaissance métier du phénomène à modéliser.

Prenons par exemple les graphiques ci-dessous qui représentent l'évolution par ancienneté des taux de versements d'un portefeuille de retraite.

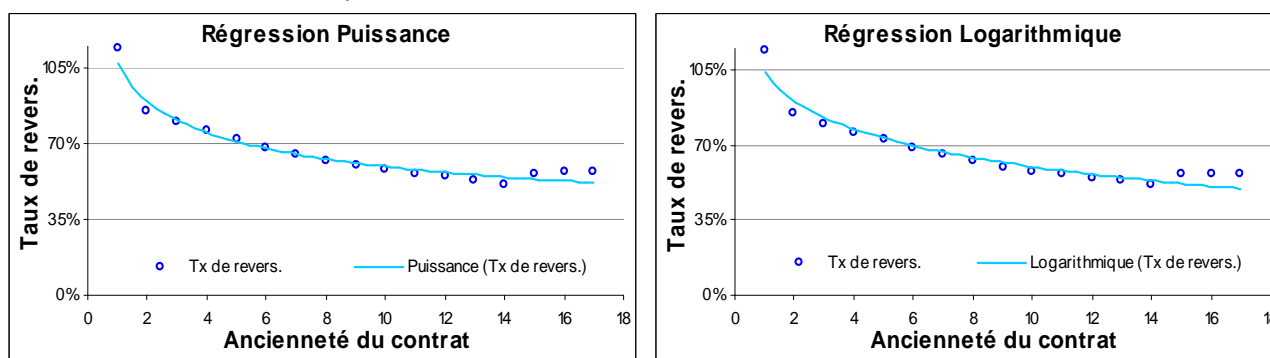


Figure 13 - Illustration de l'approche graphique de la régression

D'un point de vue graphique, les modèles de régression Puissance et Logarithmique sont équivalents. Néanmoins, nous retiendrons le modèle de régression Puissance car c'est celui qui permet d'éviter les valeurs négatives de taux quelque soit l'ancienneté du contrat.

## 2.4.2 Le tableau d'analyse de la variance

Après une analyse graphique du modèle, l'évaluation de la pertinence du modèle peut s'appuyer sur l'équation d'analyse de la variance définie par  $SCT = SCE + SCR$ ,

où SCT est la somme des carrés totaux qui traduit la variabilité totale de l'endogène,

SCE est la somme des carrés expliqués qui traduit la variabilité expliquée par le modèle,

SCR est la somme des carrés résiduels qui correspond à la variabilité non-expliquée par le modèle.

**Plus le SCR est faible, plus le modèle est ajusté aux données.**

Toutes ces informations<sup>44</sup> sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 11 - Tableau d'analyse de la variance d'une régression

Source de variation	Degré de liberté	Somme des carrés	Carrés moyens
Expliquée	$ddl_E$	SCE	$CME = \frac{SCE}{ddl_E}$
Résiduelle	$ddl_R$	SCR	$CMR = \frac{SCR}{ddl_R}$
Totale	$ddl_T$	SCT	

43.  $R^2$ , Pseudo- $R^2$  ou Facteur de fiabilité par exemple

44. Les informations du tableau d'analyse de la variance sont indiquées en sortie standard des logiciels de statistique



A partir des valeurs du tableau d'analyse de la variance, il est possible de calculer différents indicateurs qui permettent

- d'apprécier la qualité de l'ajustement ( $R^2$ ,  $R^2$  ajusté),
- de valider la significativité globale du modèle de régression (test F de Fisher).

Les principaux indicateurs usuels pour la validation d'un modèle de régression sont présentés dans les paragraphes ci-dessous. **Tous ces indicateurs seront utilisés et interprétés, en particulier au moment de la détermination des lois comportementales.**

### 2.4.3 Le coefficient de détermination ( $R^2$ ) et le $R^2$ ajusté

Dans le cas d'un modèle de régression linéaire, l'ajustement des données peut être apprécié par le coefficient de détermination, désigné par  $R^2$ .

Le  $R^2$  se définit comme la part de variance expliquée par rapport à la variance totale, soit :

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

Sa valeur est comprise entre 0 et 1 pour une régression linéaire avec constante.

Pour une valeur de  $R^2$  égale à 0.80, cela signifie que le modèle explique 80% des observations.

**En conséquence, plus le  $R^2$  est proche de 1, plus la courbe de régression est proche des observations.**

Pour comparer des modèles comportant un nombre différent de variables, le coefficient de détermination n'est pas approprié car il augmente de manière mécanique avec l'ajout de variables explicatives sans forcément améliorer le modèle.

Pour enlever ce biais, il est recommandé d'utiliser le  $R^2$  ajusté défini par la formule :

$$R^2 \text{ ajusté} = 1 - \left( \frac{n-1}{n-p} \right) (1 - R^2) = 1 - \left( \frac{n-1}{n-p} \right) \left( \frac{SCR}{SCT} \right)$$

**Cependant, un  $R^2$  ou un  $R^2$  ajusté proche de 1 ne signifie pas que le modèle soit statistiquement significatif.**

Le  $R^2$  présente les limites<sup>45</sup> suivantes :

- le  $R^2$  n'est pas un critère de validation globale du modèle d'un point de vue statistique,
- le  $R^2$  ne permet pas de comparer des modèles lorsque la variable endogène change,
- le  $R^2$  augmente mécaniquement en ajoutant des variables explicatives,
- le  $R^2$  peut changer mécaniquement en supprimant les points aberrants.

**Le  $R^2$  est donc un indicateur à utiliser avec précaution** ; il donne une première idée de la qualité globale du pouvoir explicatif du modèle sans pour autant valider statistiquement la significativité du modèle.

45. CHARPENTIER A., *Le prochain qui me parle du  $R^2$ ...*, Université de Rennes 1, 2009

#### 2.4.4 Le Pseudo-R<sup>2</sup>

Dans le cas d'un modèle non linéaire, l'équivalent du coefficient de détermination R<sup>2</sup> est le Pseudo-R<sup>2</sup> défini par la formule :

$$\text{Pseudo - R}^2 = 1 - \frac{\text{RSS}_{\text{model}}}{\text{RSS}_{\text{default}}}$$

où RSS<sub>model</sub> est la somme des carrés des résidus du modèle,

RSS<sub>default</sub> est la somme des carrés des résidus du modèle moyen<sup>46</sup>.

**Un Pseudo-R<sup>2</sup> positif et proche de 1 signifie que le modèle est meilleur que le modèle moyen et que le modèle est bien ajusté aux données.**

**Un Pseudo-R<sup>2</sup> proche de 0 signifie que le modèle est équivalent au modèle moyen.**

**Un Pseudo-R<sup>2</sup> négatif signifie que le modèle moyen est meilleur que le modèle.**

Le Pseudo-R<sup>2</sup> permet de comparer le modèle par rapport au modèle moyen dans le cas d'une régression non linéaire. Mais tout comme le R<sup>2</sup>, le Pseudo-R<sup>2</sup> ne permet pas de valider statistiquement la significativité du modèle.

#### 2.4.5 Le facteur de fiabilité

Pour comparer une famille de modèles, il est possible de se baser sur le facteur de fiabilité défini par la formule :

$$\text{Facteur de fiabilité} = \sqrt{\frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i)^2}}$$

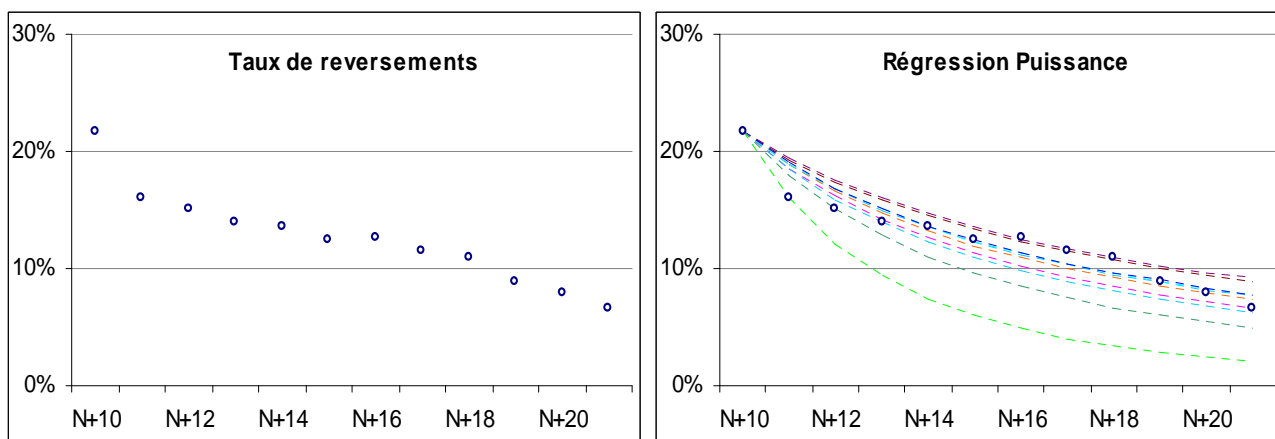
**Un facteur de fiabilité proche de 0 signifie que le modèle est bien ajusté aux données.**

Cet indicateur est surtout utile pour déterminer parmi une famille de modèles, celui qui est le plus ajusté aux données.

Prenons par exemple, le graphique de gauche de la figure 14 ci-dessous où nous avons représenté les taux de versements des contrats d'ancienneté entre 10 ans et 21 ans d'un portefeuille de retraite.

Le graphique de droite représente la même courbe de taux de versements avec en plus une famille de courbes puissances passant par les points (N + 10 ; N + 10 + k) pour 1 ≤ k ≤ 11.

46. Le modèle moyen correspond au modèle où la valeur de la prédiction est égale à la moyenne de la variable endogène calculée sur les données observées



**Figure 14** - Illustration 1 du facteur de fiabilité

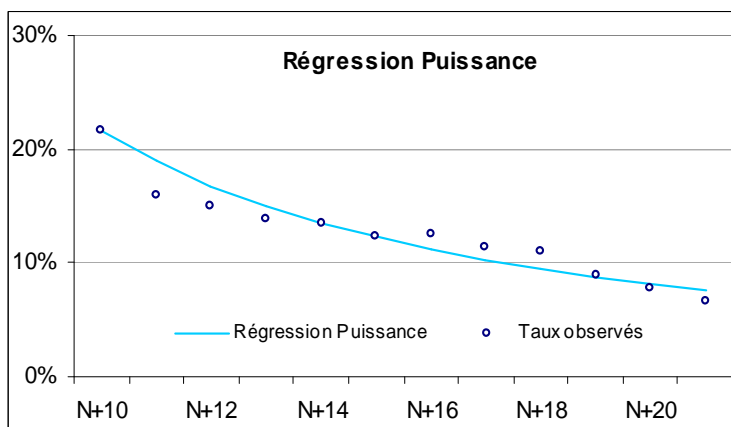
La question est maintenant de savoir quelle est la courbe puissance la plus ajustée aux données observées à partir du facteur de fiabilité. Pour répondre à cette question, nous avons regroupé la valeur du facteur de fiabilité des onze courbes dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 12** - Illustration 2 du facteur de fiabilité

Courbe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Points d'ajustement	N+10	N+10	N+10	N+10	N+10	N+10	N+10	N+10	N+10	N+10	N+10
	N+11	N+12	N+13	N+14	N+15	N+16	N+17	N+18	N+19	N+20	N+21
Facteur de fiabilité	0.4201	0.2058	0.1344	<b>0.0970</b>	0.0975	0.1330	0.1238	0.1324	0.0972	0.0992	0.1185

La plus petite valeur du facteur de fiabilité est égale à 0.0970 et correspond à celui de la courbe puissance numéro 4 passant par les points d'abscisse N+10 et N+14.

Selon le facteur de fiabilité, c'est donc la courbe puissance numéro 4 représentée ci-dessous, qui est la plus ajustée aux taux observés de versements.



**Figure 15** - Illustration 3 du facteur de fiabilité

Cependant tout comme le  $R^2$ , le facteur de fiabilité ne permet pas de valider statistiquement la significativité du modèle. Le paragraphe suivant répond à cette problématique, à savoir si le modèle est suffisamment robuste d'un point de vue statistique.

## 2.4.6 Le test de Fisher

Nous avons indiqué plus haut que l'ajustement des données par une régression linéaire (resp. régression non linéaire) s'apprécie d'abord à travers le coefficient de détermination (resp. le Pseudo- $R^2$ ) et que le  $R^2$  (resp. le Pseudo- $R^2$ ) ne permet pas de savoir si le modèle est statistiquement robuste pour expliquer les valeurs de la variable endogène.

Pour valider globalement la significativité d'un modèle de régression, il faut utiliser le test de Fisher. Plus précisément, ce test permet de savoir si au moins une variable explicative du modèle est significative avec une probabilité d'erreur  $\alpha$ . Le  $\alpha$  est appelé risque alpha de première espèce et correspond à la probabilité de rejeter à tort une hypothèse  $H_0$  vraie lors d'un test statistique. Ce risque est fixé d'avance, généralement de 1% ou de 5%.

Les hypothèses du test de Fisher sont

- $H_0$  : Tous les coefficients (hors constante) de la régression sont nuls  
 $H_1$  : Au moins un des coefficients (hors constante) de la régression est non nul

La statistique utilisée est le F de Fisher défini par

$$F_{\text{Calculé}}(ddL_E, ddL_R) = \frac{\frac{SCE}{ddL_E}}{\frac{SCR}{ddL_R}}$$

En calculant la statistique  $F_{\text{Calculé}}(ddL_E, ddL_R)$  de Fisher,  $H_0$  est rejetée avec un risque d'erreur  $\alpha$  si et seulement si  $F_{\text{Calculé}}(ddL_E, ddL_R) > F_{1-\alpha}(ddL_E, ddL_R)$ .

La statistique  $F_{\text{Calculé}}(ddL_E, ddL_R)$  est déterminée à partir des données de l'ajustement et  $F_{1-\alpha}(ddL_E, ddL_R)$  est la valeur lue dans la table de Fisher pour un risque d'erreur  $\alpha$ . Un extrait de la table du  $F_{1-\alpha}(ddL_E, ddL_R)$  de Fisher pour les valeurs  $\alpha = 1\%$  et  $\alpha = 5\%$  se trouve en annexe 4.

En utilisant la P-value<sup>47</sup>,  $H_0$  est rejetée avec un risque d'erreur  $\alpha$  si et seulement si  $\alpha > P\text{-value}$ .

**Lorsque  $H_0$  est rejetée avec un risque d'erreur  $\alpha$ , cela signifie que le modèle de régression est globalement robuste statistiquement avec un risque d'erreur  $\alpha$ .**

## 2.5 L'analyse des résidus

Le test de Fisher permet une validation globale du modèle de régression mais ne permet pas de repérer les données atypiques ou influentes.

Pour analyser en détail les estimations d'un modèle de régression, il est nécessaire de réaliser un examen des résidus. Ces résidus représentent la différence entre la valeur observée et la valeur estimée par le modèle.

47. La P-value est indiquée en sortie standard des logiciels de statistique

L'analyse des résidus permet alors de déceler d'éventuelles sources de variation que le modèle n'aurait pas prises en compte. Les résidus importants correspondent à des observations qui s'écartent du modèle. Ces observations doivent être identifiées et éventuellement retirées des données pour une meilleure estimation.

D'un point de vue statistique, les résidus d'un bon modèle prédictif présentent diverses propriétés telles que l'homoscédasticité, l'indépendance et la normalité. Cependant, si ces propriétés n'étaient pas toutes vérifiées, la qualité prédictive du modèle ne serait pas forcément mauvaise, notamment si le test de Fisher est concluant.

Dans la pratique, l'analyse des résidus est surtout utile pour valider les hypothèses d'homoscédasticité, d'indépendance et de normalité des résidus des modèles de régressions linéaire. Pour les modèles non linéaires, l'analyse des résidus permet surtout de détecter les valeurs qui s'écartent trop du modèle.

Les paragraphes ci-dessous présentent les trois tests importants à réaliser sur les résidus pour valider les hypothèses d'homoscédasticité, d'indépendance et de normalité. Nous privilégierons dans la mesure du possible, une approche graphique pour la validation des tests d'homoscédasticité et de normalité des résidus. **Ces trois tests seront utilisés et interprétés dans notre étude, en particulier au moment de la détermination des lois comportementales.**

### 2.5.1 Test d'homoscédasticité

L'hypothèse d'homoscédasticité des résidus peut être validée par le graphique des résidus en fonction des valeurs estimées de la variable endogène.

Dans la pratique, si le nuage de points des résidus en fonction des valeurs estimées ne présente aucune structure particulière, ce qui suppose une répartition aléatoire des résidus, alors l'hypothèse d'homoscédasticité est acceptable.

Prenons par exemple les deux graphiques ci-dessous représentant la répartition des résidus en fonction des valeurs estimées d'un modèle de régression. Le graphique de droite présente des résidus répartis selon une trajectoire particulière alors que celui de gauche ne montre aucune particularité graphique. Dans ces conditions, nous acceptons uniquement l'hypothèse d'homoscédasticité pour les résidus du graphique de gauche.

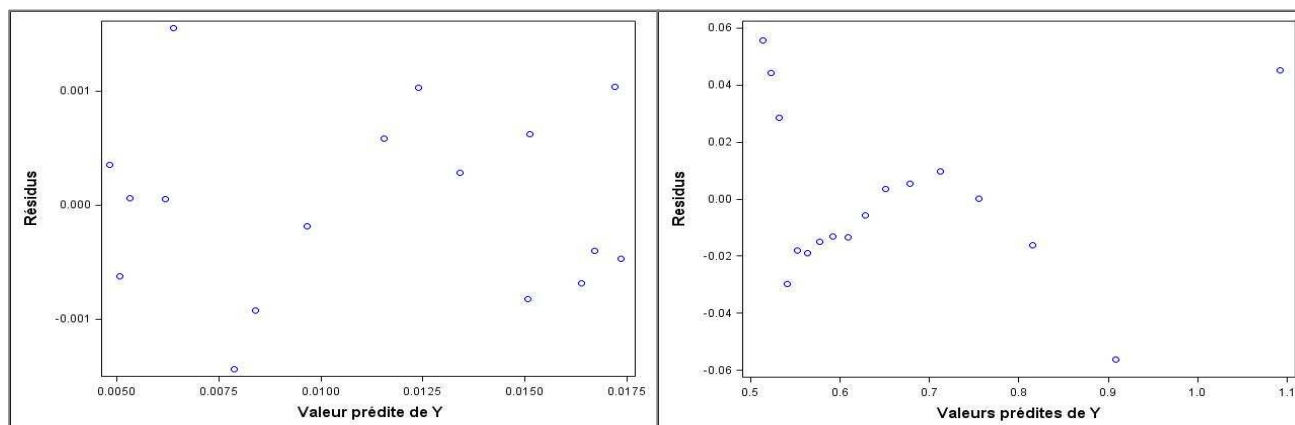


Figure 16 - Illustration du test d'homoscédasticité

En cas de doute, le test graphique des résidus peut être complété par le test d'hétéroscédasticité de White<sup>48</sup> dont l'idée générale est de vérifier si le carré des résidus peut être expliqué par les variables explicatives du modèle.

Les hypothèses du test d'hétéroscédasticité de White sont :

H0 : Il y a homoscédasticité des résidus  
H1 : Il y a hétéroscédasticité des résidus

En utilisant la P-value associée au test d'hétéroscédasticité de White, H0 est rejetée avec un risque d'erreur  $\alpha$  si et seulement si  $\alpha > P\text{-value}$ .

## 2.5.2 Test de Durbin-Watson

Le test de Durbin-Watson est un test fréquemment utilisé dans l'étude des séries chronologiques et permet de vérifier si les résidus  $\varepsilon_t$  sont autocorrélés à l'ordre 1, c'est-à-dire si  $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$  avec  $0 < |\rho| < 1$  et  $u_t$  i.i.d<sup>49</sup> de moyenne nulle.

Ce test repose sur la statistique Dw définie par 
$$Dw = \frac{\left( \sum_{t=2}^N (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 \right)}{\left( \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2 \right)}.$$

Les hypothèses du test de Durbin-Watson sont :

H0 : Les résidus ne sont pas autocorrélés à l'ordre 1  
H1 : Les résidus sont autocorrélés d'ordre 1

La distribution de la statistique Dw oscille entre deux distributions<sup>50</sup> (dL et dU) et la règle de décision qui dépend de la valeur de Dw est la suivante :

Si	$0 < Dw < dL$	alors	Autocorrélation positive,
	$dL \leq Dw \leq dU$		Zone d'indécision,
	$dU < Dw < 4-dU$		Pas d'autocorrélation,
	$4-dU \leq Dw \leq 4-dL$		Zone d'indécision,
	$4-dL < Dw < 4$		Autocorrélation négative.

Les valeurs dL et dU sont définies en fonction du nombre d'observations, du nombre de variables explicatives et du risque  $\alpha$  de 1<sup>er</sup> espèce. Un extrait de la table de Durbin-Watson pour les valeurs  $\alpha=1\%$  et  $\alpha=5\%$  se trouve en annexe 5.

**Dans la pratique, une valeur de la statistique Dw proche de 2 permet d'accepter la non autocorrélation des résidus à l'ordre 1.**

48. Le résultat du test de White est en sortie de la procédure REG de SAS avec l'option SPEC

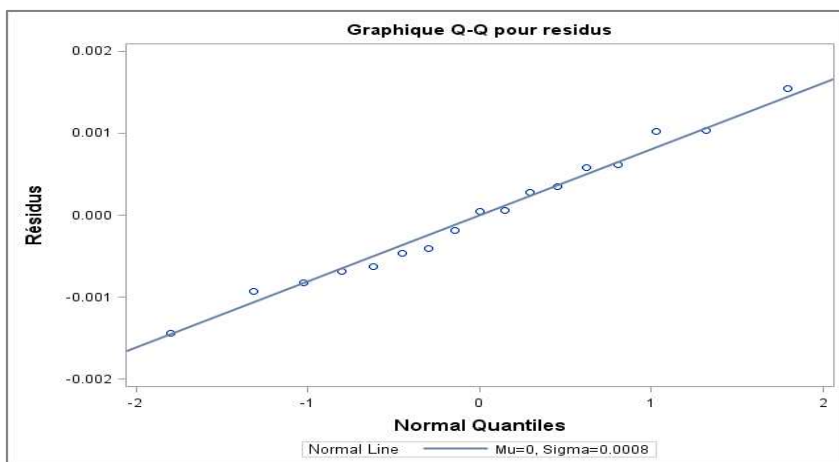
49. Indépendant et identiquement distribué

50. dL et dU sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de la table de la statistique Dw de Durbin-Watson

### 2.5.3 Test de normalité

L'hypothèse d'une distribution normale des résidus peut être vérifiée par le graphique Q-Q<sup>51</sup> plot de la répartition des résidus par rapport à une répartition normale dont les paramètres sont estimés à partir des résidus observés. **Si les points sont relativement alignés, alors cela signifie que l'hypothèse de normalité de la distribution des résidus est acceptable.**

Prenons par exemple le graphique Q-Q Plot ci-dessous, des résidus d'une régression linéaire :



**Figure 17** - Illustration du test de normalité à partir du graphique Q-Q Plot

Nous pouvons observer que les quantiles des résidus sont relativement alignés sur la distribution d'une loi normale et dans ces conditions, nous pouvons alors accepter l'hypothèse de normalité de la distribution des résidus.

En cas de doute, l'analyse graphique de la normalité de la distribution des résidus peut être complétée par le test de Shapiro-Wilk<sup>52</sup>.

Les hypothèses du test de normalité de Shapiro-Wilk sont :

- H0 : Les résidus sont normalement distribués  
H1 : Les résidus ne sont pas normalement distribués

En utilisant la P-value associée au test de normalité de Shapiro-Wilk, H0 est rejetée avec un risque d'erreur  $\alpha$  si et seulement si  $\alpha > P\text{-value}$ .

## 2.6 L'analyse de la significativité des paramètres estimés

Lorsque le modèle est globalement robuste et que l'analyse des résidus n'a pas remis en cause le modèle, il est intéressant d'analyser les paramètres estimés du modèle de régression pour voir s'ils sont tous significatifs. La question est alors de savoir si chaque paramètre estimé est significativement différent de zéro d'un point de vue statistique.

Cependant, lorsqu'un paramètre estimé n'est pas significatif, le modèle n'est pas forcément à remettre en cause, notamment si le test de Fisher est concluant.

51. Quantile-Quantile

52. Le résultat du test de Shapiro-Wilk est en sortie de la procédure UNIVARIATE de SAS avec l'option NORMAL

### 2.6.1 Cas des modèles de régression linéaire

Pour les modèles de régression linéaire, la réponse à la question de la significativité d'un paramètre estimé, est donnée par le test t de Student<sup>53</sup> bilatéral appliqué à chaque paramètre estimé.

Les hypothèses du test t de Student bilatéral appliqué au paramètre  $\beta_k$  sont

H0 : Le paramètre  $\beta_k$  n'est pas significatif

H1 : Le paramètre  $\beta_k$  est significatif

La statistique de test utilisée pour le t de Student est définie par

$$t_k = \frac{\hat{\beta}_k}{S_{\hat{\beta}_k}} \equiv t_{(n-p, 1-\alpha/2)} \quad \text{où} \quad \hat{\beta}_k \text{ est l'estimation du paramètre } \beta_k,$$

$$S_{\hat{\beta}_k} \text{ est l'estimation de l'écart type de } \beta_k.$$

En calculant la statistique  $t_k$  de Student, H0 est rejetée avec un risque d'erreur  $\alpha$  si et seulement si  $|t_k| > t_{(n-p, 1-\alpha/2)}$  avec n le nombre d'observations, p le nombre de variables explicatives et  $\alpha$  le risque d'erreur de 1<sup>er</sup> espèce. La statistique  $t_k$  est déterminée à partir des données de l'ajustement et  $t_{(ddL, 1-\alpha/2)}$  est la valeur lue dans la table de Student pour un degré de liberté ddL<sup>54</sup> et un risque d'erreur  $\alpha$ . Un extrait de la table du t de Student bilatéral pour les valeurs  $\alpha = 1\%$  et  $\alpha = 5\%$  se trouve en annexe 6.

En utilisant la P-value, H0 est rejetée avec un risque d'erreur  $\alpha$  si et seulement si  $\alpha > P\text{-value}$ .

Dans la mesure du possible, nous utiliserons la procédure REG de SAS pour étudier<sup>55</sup> la significativité des paramètres estimés ; la valeur de la statistique t de Student et sa P-value associée sont affichées en sortie standard de la procédure REG.

### 2.6.2 Cas des modèles de régression non linéaire

Pour les modèles de régression non linéaire, les hypothèses de normalité, d'homoscédasticité et d'indépendance des résidus ne sont pas nécessairement vérifiées ; le test t de Student ne peut alors pas être utilisé.

Dans ce cas, nous pouvons utiliser les résultats asymptotiques des paramètres qui permettent d'obtenir un intervalle de confiance du paramètre estimé avec un niveau de confiance  $\alpha$  choisi.

Nous pouvons alors considérer que le paramètre estimé est significativement différent de zéro lorsque son intervalle de confiance ne contient pas la valeur nulle.

Dans la mesure du possible, nous utiliserons la procédure NLIN de SAS pour étudier la significativité des paramètres estimés ; une valeur asymptotique de l'écart type et un intervalle de confiance asymptotique du paramètre estimé sont affichés en sortie standard de la procédure NLIN.

53. Le test t de Student suppose les hypothèses de normalité, d'homoscédasticité, et d'indépendance des résidus

54. ddL est égal à n-p dans le cas d'une régression linéaire avec constante, n observations et p variables explicatives

55. Lorsque le paramètre estimé n'est pas significatif, cela indique que la variable explicative associée ne permet pas d'expliquer les variations de la variable endogène



## 2.7 Les procédures REG et NLIN du progiciel SAS

L'objet de ce paragraphe est de présenter de façon pragmatique les procédures **REG** et **NLIN** de SAS utilisées dans notre étude pour l'ajustement des lois comportementales. Chaque procédure est illustrée par un exemple avec interprétation des indicateurs et test usuels définis dans les paragraphes (2.4), (2.5) et (2.6).

### 2.7.1 La procédure REG

#### 2.7.1.1 Présentation générale

La procédure **REG** permet de donner les résultats de l'estimation des paramètres d'un modèle de régression linéaire par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

La syntaxe minimale de la procédure **REG** est la suivante :

```
PROC REG DATA = <Nom de la table SAS > < options reg > ;  
MODEL < var_dép > = < var_exp > / < options model > ;  
RUN ;  
QUIT ;
```

Le début de la procédure SAS commence par **PROC**, suivi du nom de la procédure **REG**, puis de l'instruction **DATA** qui permet de spécifier la table SAS <Nom de la table SAS > contenant les données à traiter.

L'instruction **MODEL** permet ensuite de définir la variable dépendante < var\_dép > à régresser et la ou les variable(s) explicative(s) < var\_exp > ; la variable dépendante et la ou les variable(s) explicative(s) doivent être quantitatives.

Enfin, la procédure se lance avec l'instruction **RUN** et se termine avec l'instruction **QUIT**.

Il est possible de rajouter les options ci-dessous au niveau de la procédure **REG** pour créer un fichier de données des paramètres estimés ou obtenir les statistiques descriptives de base :

- **OUTEST=** pour nommer le fichier de données qui contiendra les estimations des paramètres.
- **SIMPLE** pour obtenir en sortie de la procédure REG la somme, la moyenne, la variance, l'écart-type et la somme des carrés de chaque variable.
- **ALPHA=** pour définir le degré de confiance de l'intervalle dans lequel les paramètres à estimer ont une forte probabilité de se situer.

Si cette option n'est pas spécifiée, c'est la valeur ALPHA=0.05 qui est appliquée ; l'intervalle de confiance est alors à 95%.

Il est également possible de rajouter les options ci-dessous au niveau de l'instruction **MODEL** pour compléter l'analyse des résultats de la régression linéaire :

- **DW** pour calculer la statistique Dw de Durbin-Watson.
- **RESIDUAL ou R** pour analyser les résidus.
- **PREDICTED ou P** pour calculer les prévisions.

Pour exclure une observation aberrante de la régression linéaire, nous pouvons utiliser à la suite de l'instruction **MODEL**, la syntaxe "**REWEIGHT OBS.=<numéro de l'observation> / WEIGHT = 0;**".

Pour extraire certaines valeurs calculées par la procédure **REG**, nous pouvons utiliser l'instruction **OUTPUT**, suivi de l'option **OUT=**.

L'option **OUT=** permet de désigner le nom de la table SAS dans laquelle sont enregistrées les valeurs calculées et peut être suivie des mots-clés suivants :

- **RESIDUAL** ou **R=** pour extraire la valeur des résidus.
- **PREDICTED** ou **P=** pour extraire la valeur estimée de la variable dépendante.
- **LCL=** pour extraire la borne inférieure de l'intervalle de confiance à (1-ALPHA)%.
- **UCL=** pour extraire la borne supérieure de l'intervalle de confiance à (1-ALPHA)%.

La liste des instructions, des options et des mots-clefs cités ci-dessus n'est pas exhaustive.

Le lecteur pourra se reporter à l'aide en ligne de SAS pour consulter d'autres possibilités de mise en œuvre de la procédure **REG**.

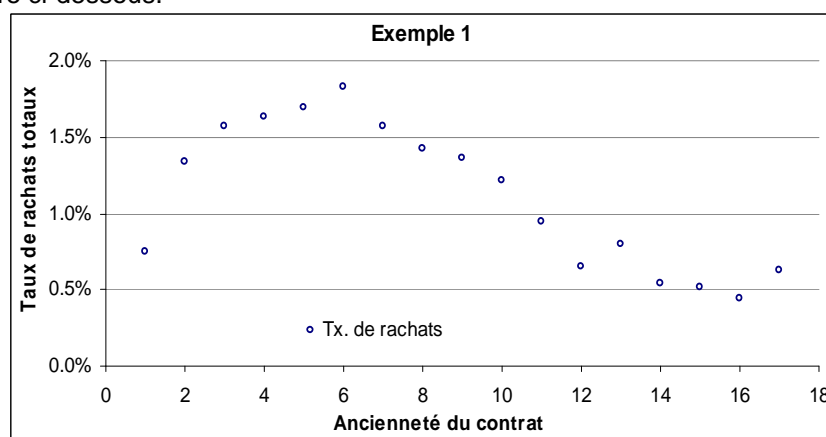
### 2.7.1.2 Exemple de régression linéaire

Nous allons illustrer la procédure **REG** sur les données du tableau ci-dessous qui représente le taux de rachats totaux en nombre de contrats (variable Y) par ancienneté courue (variable T) d'une famille de contrats de retraite.

**Tableau 13** - Exemple 1 : Taux de rachats totaux en nombre par ancienneté

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Y	0.75%	1.34%	1.57%	1.63%	1.69%	1.82%	1.57%	1.42%	1.37%	1.21%	0.95%	0.64%	0.79%	0.54%	0.52%	0.44%	0.63%

La représentation graphique des taux de rachats en fonction de l'ancienneté est donnée par la figure ci-dessous.



**Figure 18** - Exemple 1 : Taux de rachats totaux par ancienneté courue

Compte tenu de la structure de la courbe des taux, nous proposons de réaliser une régression polynômiale. Pour déterminer le degré minimal, nous allons d'abord nous baser sur une approche graphique réalisée à partir du tableur Excel pour les régressions polynômiales de degré 2 à 5.

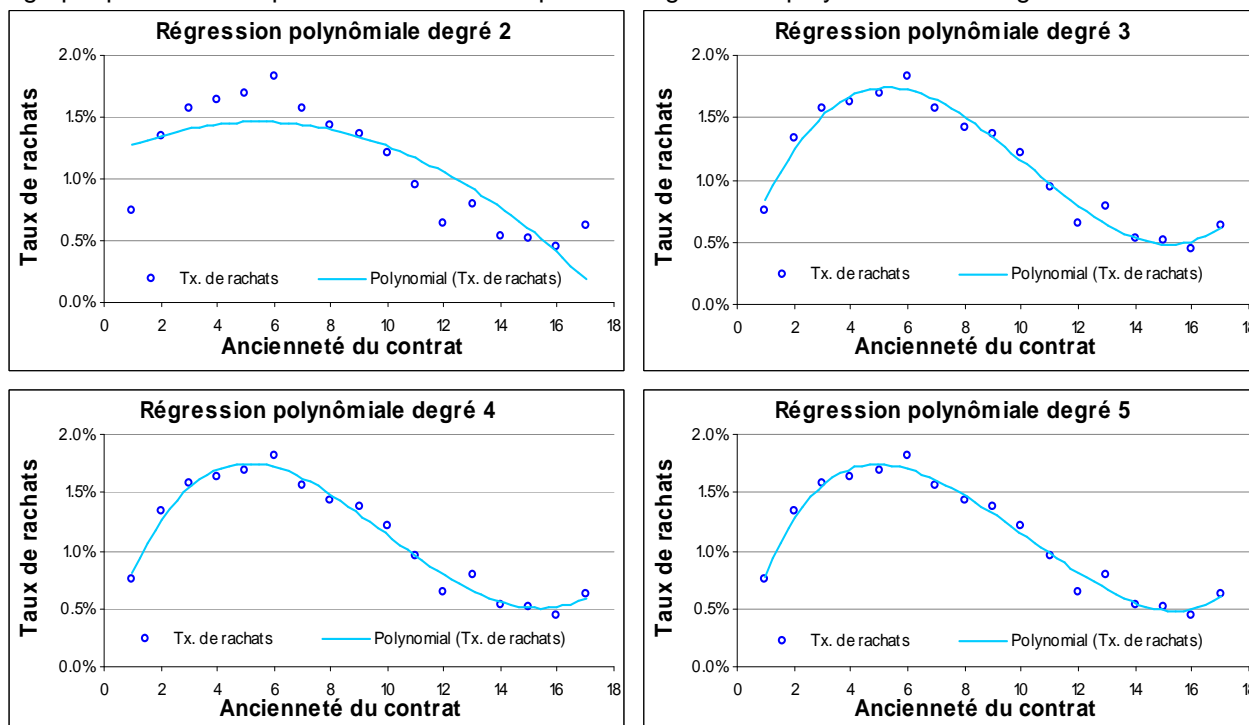


Figure 19 - Exemple 1 : Approche graphique de la régression linéaire

L'approche graphique nous indique que le polynôme doit au moins être de degré 3 pour espérer obtenir un bon ajustement des données.

Nous complétons ensuite l'approche graphique avec une analyse des  $R^2$  et  $R^2$  ajustés ci-dessous, calculés à partir du tableur Excel.

Tableau 14 - Exemple 1 : Évolution du coefficient de détermination

Degré du polynôme	2	3	4	5
$R^2$	0.715	0.971	0.973	0.975
$R^2$ ajusté	0.650	0.965	0.967	0.969

Le choix d'un polynôme de degré 3 est donc suffisant car au-delà le  $R^2$  ajusté n'est pas significativement meilleur. Nous proposons donc de retenir un modèle polynômial de degré 3 selon le modèle  $Y = \theta_0 + \theta_1 T_1 + \theta_2 T_2 + \theta_3 T_3 + \varepsilon$  avec  $T_1 = T$ ,  $T_2 = T^2$  et  $T_3 = T^3$

La syntaxe est alors la suivante<sup>56</sup> :

```
PROC REG DATA =TABLE.Exemple1 ;
MODEL Y = T1 T2 T3 ;
TITLE "Exemple 1 - Loi de rachats totaux " ;
RUN ;
QUIT ;
```

56. Les données du tableau 13 ont été au préalable enregistrées sous une table SAS intitulée «Exemple1 » dans la bibliothèque TABLE

L'instruction **TITLE** permet ici de donner un titre à la sortie standard de la procédure **REG**.

En sortie standard de la procédure **REG**, le progiciel SAS donne les résultats suivants :

Exemple 1 - Loi de rachats totaux						
The REG Procedure						
Model: MODEL1						
Dependent Variable: Y Y						
Analysis of Variance						
Source	DDL	Sum of Squares	Mean Square	Valeur F	Pr > F	
Model	3	0.00034943	0.00011648	146.05	<.0001	
Error	13	0.00001037	7.975005E-7			
Corrected Total	16	0.00035980				
Root MSE		0.00089303	R-Square	0.9712		
Dependent Mean		0.01111	Adj R-Sq	0.9645		
Coeff Var		8.03700				
Parameter Estimates						
Variable	Libellé	DDL	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr >  t
Intercept	Intercept	1	0.00299	0.00110	2.72	0.0176
T1	T1	1	0.00618	0.00051371	12.02	<.0001
T2	T2	1	-0.00078887	0.00006534	-12.07	<.0001
T3	T3	1	0.00002569	0.00000239	10.74	<.0001

**Figure 20** - Exemple 1 : Sortie standard de la procédure REG

Cette sortie standard se compose de trois blocs :

- Un bloc contenant les données du tableau d'analyse de la variance :
  - La colonne **DDL** correspond au degré de liberté.
  - Le DDL de la ligne **Model** correspond au nombre de variables explicatives.
  - Le DDL de la ligne **Corrected Total** correspond à n-1 où n est le nombre d'observations.
  - La colonne **Sum of Squares** correspond aux sommes des carrés du tableau d'analyse de la variance. La faible valeur de la somme des carrés des résidus (0.00001037) indique que le modèle de régression est bien ajusté aux données.
  - La colonne **Mean Square** correspond au sum of square divisé par le DDL.
  - Les colonnes **Valeur F** et **Pr > F** sont destinées au test de Fisher (la valeur de la P-value est inférieure à 0.0001, ce qui indique le modèle est globalement robuste d'un point de vue statistique).
- Un bloc intermédiaire avec les informations suivantes :
  - **Root MSE** est l'écart-type du modèle estimé.
  - **Dependent Mean** est la moyenne de la variable dépendante Y.
  - **Coeff Var** est le coefficient de variation, défini par  $\frac{\text{Root MSE}}{\text{Dependent Mean}} * 100$ .

- **R-Square** est le  $R^2$  et **Adj R-Sq** est le  $R^2$  ajusté (le  $R^2$  de la régression est de 0.9712, ce qui signifie que le modèle explique 97% de la variabilité du taux de rachats totaux et donc que le modèle est bien ajusté aux données observées).
- Un bloc sur l'estimation des paramètres :
  - La colonne **Variable** liste la constante, nommée « Intercept » et les variables explicatives du modèle.
  - La colonne **Parameter Estimate** donne l'estimation de la constante et des paramètres associés aux variables explicatives.
  - La colonne **Standard Error** donne l'écart-type des paramètres estimés.
  - La colonne **t value** donne la valeur de la statistique t de Student.
  - La colonne **Pr > |t|** donne la P-value relative au test t de Student.

Avec l'option **OUTEST = resultat1a**, nous obtenons en sortie de la procédure **REG**, une table SAS intitulée « resultat1a » contenant les données du tableau ci-dessous.

**Tableau 15** - Exemple 1 : Sortie OUTEST

_MODEL_	_TYPE_	_DEPVAR_	_RMSE_	Intercept	T1	T2	T3	Y
PREDICT	PARMS	Y	0.00089	2.98627E-03	6.17608E-03	-7.88873E-04	2.56878E-05	-1

Avec les options et mots-clés suivants,

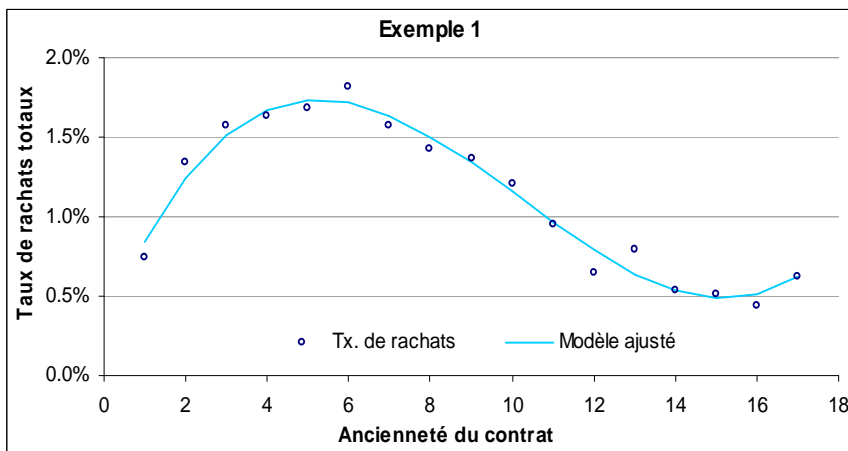
```
OUTPUT OUT=resultat1b
P=estimes
R=residus
LCL=born_inf
UCL=born_sup ;
```

nous obtenons en sortie de la procédure REG, une table SAS intitulée « resultat1b » contenant les données du tableau ci-dessous.

**Tableau 16** - Exemple 1 : Sortie OUTPUT

T1	T2	T3	Y	estimes	born_inf	born_sup	residus
1	1	1	0.00748	0.00840	0.00594	0.01086	-0.00092
2	4	8	0.01342	0.01239	0.01021	0.01456	0.00103
3	9	27	0.01573	0.01511	0.01301	0.01720	0.00062
4	16	64	0.01631	0.01671	0.01462	0.01881	-0.00040
5	25	125	0.01689	0.01736	0.01525	0.01946	-0.00047
6	36	216	0.01823	0.01719	0.01509	0.01929	0.00104
7	49	343	0.01569	0.01637	0.01429	0.01846	-0.00069
8	64	512	0.01423	0.01506	0.01300	0.01712	-0.00083
9	81	729	0.01368	0.01340	0.01135	0.01545	0.00028
10	100	1000	0.01213	0.01155	0.00949	0.01361	0.00058
11	121	1331	0.00948	0.00966	0.00758	0.01174	-0.00018
12	144	1728	0.00645	0.00789	0.00579	0.00999	-0.00144
13	169	2197	0.00794	0.00639	0.00429	0.00850	0.00155
14	196	2744	0.00538	0.00532	0.00323	0.00741	0.00006
15	225	3375	0.00518	0.00483	0.00273	0.00692	0.00035
16	256	4096	0.00444	0.00507	0.00289	0.00725	-0.00063
17	289	4913	0.00625	0.00620	0.00374	0.00866	0.00005

A partir des données du tableau 16, nous pouvons représenter sur une même figure la courbe des taux observés de rachats et la courbe de l'ajustement polynômial réalisé avec la procédure **REG**.



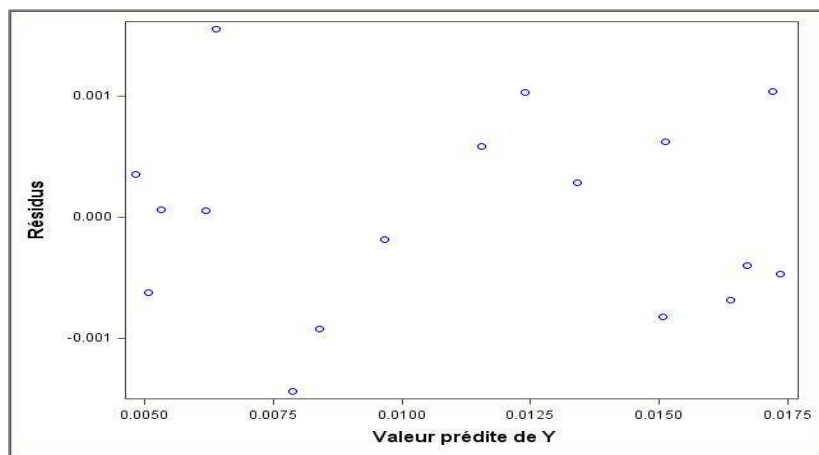
**Figure 21** - Exemple 1 : Courbes des données observées et ajustées

Le modèle ajusté donne une bonne description de la courbe des taux observés de rachats.

Vérifions à présent les hypothèses d'homoscédasticité, de non autocorrélation à l'ordre 1 et éventuellement de normalité des résidus.

#### Test d'homoscédasticité des résidus

A partir des données de la table « resultat1b », nous pouvons représenter le nuage de points des résidus en fonction des observations estimées.



**Figure 22** - Exemple 1 : Résidus en fonction des valeurs estimées

Le nuage de points obtenu n'a aucune structure particulière, ce qui signifie que l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus est acceptable.

#### Test de Durbin-Watson

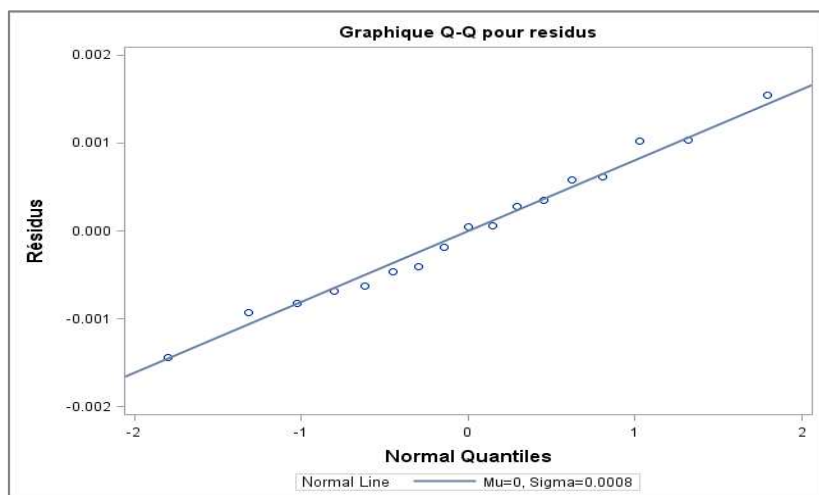
Avec l'option **DW**, nous obtenons en sortie de la procédure **REG**, la statistique Dw de Durbin-Watson du modèle de régression :

Durbin-Watson Dw	2.553
Number of Observations	17
1st Order Autocorrelation	-0.318

Au seuil de 1%,  $dL=0.67$  et  $dU=1.43$  d'après l'extrait de la table statistique de Durbin-Watson en annexe 5 et  $Dw=2.55$  se situe alors dans l'intervalle  $]dU ; 4-dU[=]1.43 ; 2.57[$ . A partir de la règle de décision du paragraphe (2.5.2), l'hypothèse que les résidus ne sont pas autocorrélés à l'ordre 1 est donc acceptable avec une probabilité de 1% d'erreur.

### Test de normalité des résidus

A partir des données de la table « resultat1b », nous pouvons représenter le diagramme QQ-Plot des résidus.



**Figure 23** - Exemple 1 : Graphique QQ-Plot des résidus

Le diagramme QQ-Plot des résidus du modèle est relativement aligné sur la droite d'une distribution normale ; l'hypothèse de normalité de la distribution des résidus est donc acceptable.

En résumé des trois tests ci-dessus, les hypothèses d'homoscédasticité, de non autocorrélation à l'ordre 1 et de normalité des résidus du modèle de régression linéaire sont donc acceptables. La significativité de chaque paramètre estimé peut alors être testée avec la statistique t de Student bilatéral.

A partir de la sortie standard de la procédure REG qui donne les P-values associées à la statistique t de Student bilatéral de chaque paramètre, nous pouvons observer<sup>57</sup> que l'ensemble des P-values sont strictement inférieures à 0.05. Les paramètres estimés sont donc significativement différents de zéro au risque d'erreur de 5%.

Le modèle peut alors s'écrire sous la forme  $Y = 299.10^{-3} + 6.18.10^{-3}T_1 - 7.89.10^{-4}.T_2 + 257.10^{-5}.T_3 + \varepsilon$ .

57. Voir colonne Pr > |t| de la figure 20

## 2.7.2 La procédure NLIN

### 2.7.2.1 Présentation générale

La procédure **NLIN** permet de donner les résultats de l'estimation des paramètres d'un modèle de régression non linéaire par la méthode des moindres carrées non linéaire (MCNL).

La procédure **NLIN** utilise une méthode itérative d'estimation des paramètres et demande de renseigner plus d'informations que la procédure **REG**.

Il est notamment nécessaire d'écrire l'expression de la régression non linéaire, de déclarer le nom des paramètres et d'indiquer une valeur de ces paramètres pour initialiser la méthode itérative.

A la k-ième itération, la procédure **NLIN** évalue la somme des carrés résiduels ( $SCR^{(k)}$ ) pour chaque combinaison de paramètres et s'arrête lorsque la quantité<sup>58</sup>  $R = \sqrt{\frac{\epsilon^T X (X^T X)^{-1} X^T \epsilon}{SCR^{(k)}}}$  est strictement inférieure à une valeur c de convergence, égale à  $10^{-5}$ .

La syntaxe minimale de la procédure **NLIN** est la suivante :

```
PROC NLIN DATA = <Nom de la table SAS > < options reg > ;
MODEL < var_dép > = < Expression de la régression > ;
PARAMETERS <paramètre 1 = >
            <paramètre k = > ;

RUN ;
QUIT ;
```

Le début de la procédure SAS commence par **PROC**, suivi du nom de la procédure **NLIN**, puis de l'instruction **DATA** qui permet de spécifier la table SAS <Nom de la table SAS > contenant les données à traiter.

L'instruction **MODEL** permet ensuite de définir la variable dépendante < var\_dép > à régresser et impose d'indiquer la formule mathématique du modèle de régression non linéaire en fonction des variables explicatives < var\_exp > ; la variable dépendante et la ou les variable(s) explicative(s) doivent être quantitatives.

Par ailleurs, contrairement à la procédure **REG**, il est impératif de déclarer les paramètres à estimer et d'indiquer une valeur initiale de ces paramètres avec l'instruction **PARAMETERS** sinon la procédure **NLIN** ne fonctionne pas.

Enfin, la procédure se lance avec l'instruction **RUN** et se termine par l'instruction **QUIT**.

Il est possible de rajouter les options ci-dessous au niveau de la procédure **NLIN** pour créer un fichier de données des paramètres estimés, spécifier la méthode<sup>59</sup> itérative d'estimation des paramètres, désigner le nombre maximum d'itérations ou modifier la valeur c de convergence.

- **OUTEST=** pour nommer le fichier de données qui contiendra les estimations des paramètres.

58. La quantité R est en sortie de la procédure NLIN de SAS dans la rubrique "Estimation Summary"

59. Les valeurs possibles de METHOD= sont GAUSS, MARQUARDT, NEWTON ou GRADIENT



- **METHOD=** pour désigner une des quatre méthodes itératives (Gauss, Marquardt, Newton ou Gradient) employée par la procédure NLIN.  
Si cette option n'est pas spécifiée, c'est la méthode de Gauss qui est utilisée par défaut.
- **MAXITER=** pour désigner le nombre maximum d'itérations.  
Si cette option n'est pas spécifiée, la procédure NLIN s'arrête après 100 itérations.
- **CONVERGENCE=** pour indiquer la valeur c de convergence lorsque  $R < c$ .  
Si cette option n'est pas spécifiée,  $c = 10^{-5}$  par défaut.

Pour extraire certaines valeurs calculées par la procédure **NLIN**, nous pouvons aussi utiliser l'instruction **OUTPUT**, suivie de l'option **OUT=**. L'option **OUT=** permet de désigner le nom de la table SAS dans laquelle sont enregistrées les valeurs calculées et peut être suivie des mots-clés suivants :

- **PARMS =** pour extraire la valeur des paramètres estimés.
- **RESIDUAL ou R=** pour extraire la valeur des résidus.
- **PREDICTED ou P=** pour extraire la valeur estimée de la variable dépendante.
- **L95=** pour extraire la borne inférieure de l'intervalle de confiance à 95%.
- **U95=** pour extraire la borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95%.

La liste des instructions, des options et des mots-clefs cités ci-dessus n'est pas exhaustive.

Le lecteur pourra se reporter à l'aide en ligne de SAS pour consulter d'autres possibilités de mise en œuvre de la procédure **NLIN**.

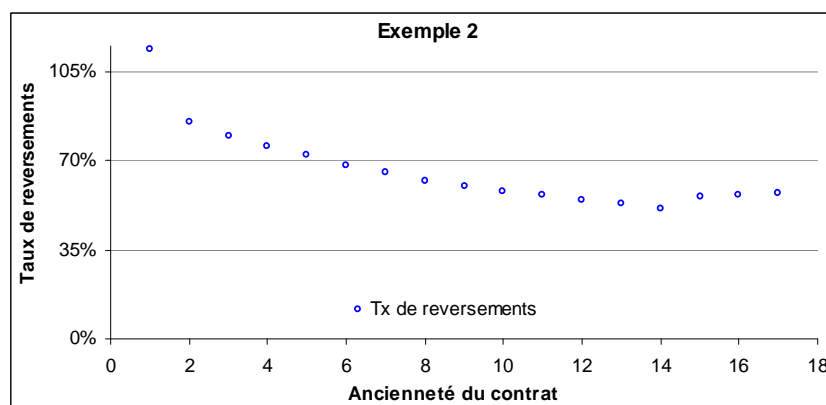
### 2.7.2.2 Exemple de régression non linéaire

Nous allons illustrer la procédure NLIN sur les données du tableau ci-dessous qui représente le taux de versements périodiques en nombre de contrats (Variable Y) par ancienneté courue (Variable T) d'une famille de contrats de retraite.

**Tableau 17** - Exemple 2 : Taux de versements périodiques en nombre par ancienneté

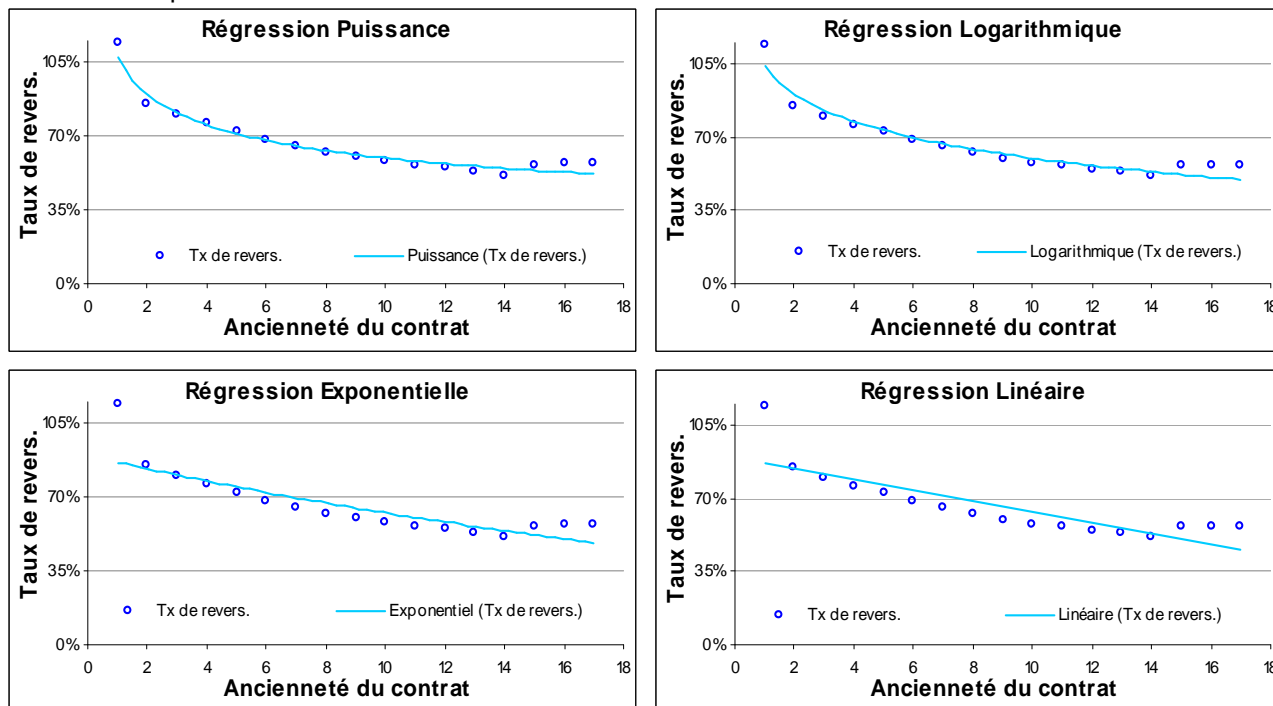
T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Y	113.66%	85.17%	79.92%	75.56%	72.13%	68.34%	65.46%	62.26%	59.54%	57.90%	56.22%	54.51%	53.41%	51.17%	56.00%	56.67%	56.98%

La représentation graphique des taux de versements par ancienneté courue est donnée par la figure suivante :



**Figure 24** - Exemple 2 : Taux de versements périodiques par ancienneté courue

Compte tenu de la structure de la courbe, nous proposons de rechercher parmi les modèles usuels de régression (exponentielle, linéaire, logarithmique et puissance), celui qui est le plus adéquat. Pour orienter notre choix, nous allons d'abord nous baser sur une approche graphique réalisée à partir du tableur Excel.



**Figure 25** - Exemple 2 : Approche graphique de la régression non linéaire

L'approche graphique nous indique que les régressions puissance et logarithmique semblent plus adaptées que les régressions exponentielle et linéaire.

Nous complétons ensuite l'approche graphique avec une analyse des Pseudo-R<sup>2</sup> et des facteurs de fiabilités indiqués dans le tableau ci-dessous:

**Tableau 18** - Exemple 2 : Evolution du Pseudo-R<sup>2</sup>

Type de régression	Puissance	Logarithmique	Exponentielle	Linéaire
Pseudo-R <sup>2</sup>	0.95	0.93	0.77	0.69
Facteur de fiabilité	0.18	0.24	0.47	0.51

Nous observons que la régression puissance donne à la fois le Pseudo-R<sup>2</sup> le plus élevé et le facteur de fiabilité le plus faible. Nous proposons alors de retenir le modèle puissance sur la base de ces deux critères.

Pour le modèle  $Y = a_1 T^{(-a_2)} + \epsilon$ , la syntaxe de la procédure NLIN est alors la suivante<sup>60</sup> :

```
PROC NLIN DATA =TABLE.Exemple2 ;
MODEL Y = a1*T**(-a2);
PARAMETERS    a1=1.0    a2=0.2    ;
TITLE "Exemple 2 - Loi de versements periodiques " ;
RUN ;
QUIT ;
```

60. Les données du tableau 17 ont été au préalable enregistrées sous une table SAS intitulée «Exemple2 » dans la bibliothèque TABLE et la valeur d'initialisation des paramètres a1 et a2 a été déterminée à partir du tableur Excel

En sortie standard de la procédure PROC NLIN, le logiciel SAS donne les résultats suivants :

Exemple 2 - Loi de reversements periodiques			
The NLIN Procedure			
Dependent Variable Y			
Method: Gauss-Newton			
Iterative Phase			
Iter	a1	a2	Sum of Squares
0	1.0000	0.2000	0.0444
1	1.0869	0.2641	0.0137
2	1.0915	0.2657	0.0136
3	1.0916	0.2657	0.0136
4	1.0916	0.2657	0.0136

NOTE: Convergence criterion met.

Estimation Summary	
Method	Gauss-Newton
Iterations	4
R	2.198E-7
PPC(a1)	3.765E-8
RPC(a1)	1.953E-6
Object	1.32E-10
Objective	0.013613
Observations Read	17
Observations Used	17
Observations Missing	0

NOTE: An intercept was not specified for this model.

Source	DDL	Somme des carrés	Carré moyen	F Value	Approx Pr > F
Regression	2	7.8262	3.9131	4311.89	<.0001
Residual	15	0.0136	0.000908		
Uncorrected Total	17	7.8398			
Corrected Total	16	0.3963			

Approx				
Parameter	Estimation	Std Error	Approximate 95% Confidence Limits	
a1	1.0916	0.0235	1.0415	1.1417
a2	0.2657	0.0118	0.2406	0.2908

Approximate Correlation Matrix		
	a1	a2
a1	1.0000000	0.8659402
a2	0.8659402	1.0000000

Figure 26 - Exemple 2 : Sortie standard de la procédure NLIN

Cette sortie standard se compose de quatre blocs importants pour l'interprétation des résultats :

- Un bloc **(Iterative Phase)** indiquant le nombre d'itérations effectuées, les estimations des paramètres et la somme des carrés des résidus à chaque itération. En **NOTE**, la procédure indique s'il y a eu convergence. Pour l'exemple en illustration, la convergence a été atteinte au bout de quatre itérations (**Iter**).
- Un bloc **(Estimation Summary)** contenant un résumé des données de convergence de l'algorithme itératif dont les plus intéressants sont :
  - Le nombre d'itérations exécutées pour atteindre la convergence (**Iterations**).
  - La valeur de  $R = \sqrt{\frac{\epsilon^T X (X^T X)^{-1} X^T \epsilon}{SCR}}$  atteinte au moment de la convergence (**R**)  
(la valeur de R atteinte est de 2.2E-7, soit inférieure à la valeur c de convergence égale à  $10^{-5}$  par défaut).
  - La valeur du SCR atteinte au moment de la convergence (**Objective**).
  - Le nombre d'observations lues et utilisées pour l'estimation des paramètres (**Observations Read & Used**).

- Un bloc contenant les données pour l'analyse de la variance et le test F de Fisher (la valeur de la P-value est inférieure à 0.0001, ce qui indique que le modèle est globalement robuste d'un point de vue statistique).
- Un bloc (**Approx**) contenant le résultat des estimations des paramètres avec indication de leur intervalle de confiance asymptotique à 95% (la valeur nulle n'est pas incluse dans l'intervalle de confiance asymptotique des paramètres a1 et a2, ce qui signifie que l'hypothèse de nullité des paramètres a1 et a2 est à rejeter).

Avec les options et mots-clés suivants,

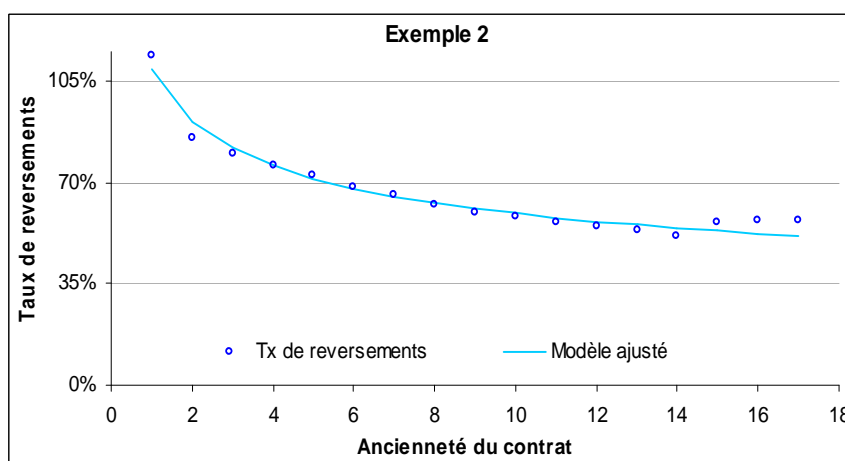
```
OUTPUT OUT = resultat2
p= estimes
r = residus
parms = a1 a2
L95 = born_inf
U95 = born_sup
```

nous obtenons en sortie de la procédure NLIN une table SAS intitulée « resultat2 » qui contient les données du tableau ci-dessous :

**Tableau 19** - Exemple 2 : Sortie OUTPUT

T	Y	ESTIM	BORN_INF	BORN_SUP	RESIDUS	a1	a2
1	1.13662	1.09157	1.01013	1.17300	0.04506	1.09157	0.26570
2	0.85174	0.90796	0.83746	0.97846	-0.05622	1.09157	0.26570
3	0.79917	0.81523	0.74761	0.88285	-0.01606	1.09157	0.26570
4	0.75555	0.75524	0.68862	0.82185	0.00032	1.09157	0.26570
5	0.72134	0.71176	0.64550	0.77802	0.00958	1.09157	0.26570
6	0.68344	0.67810	0.61194	0.74426	0.00534	1.09157	0.26570
7	0.65459	0.65089	0.58471	0.71708	0.00370	1.09157	0.26570
8	0.62259	0.62820	0.56194	0.69447	-0.00561	1.09157	0.26570
9	0.59543	0.60885	0.54248	0.67522	-0.01342	1.09157	0.26570
10	0.57897	0.59204	0.52555	0.65853	-0.01307	1.09157	0.26570
11	0.56215	0.57723	0.51063	0.64384	-0.01508	1.09157	0.26570
12	0.54512	0.56404	0.49732	0.63076	-0.01893	1.09157	0.26570
13	0.53408	0.55217	0.48534	0.61901	-0.01809	1.09157	0.26570
14	0.51167	0.54141	0.47447	0.60835	-0.02974	1.09157	0.26570
15	0.55998	0.53157	0.46453	0.59862	0.02840	1.09157	0.26570
16	0.56671	0.52254	0.45540	0.58968	0.04418	1.09157	0.26570
17	0.56979	0.51419	0.44695	0.58142	0.05561	1.09157	0.26570

A partir des données du tableau 19, nous pouvons représenter sur une même figure la courbe les taux observés de versements périodiques et la courbe de l'ajustement puissance réalisé avec la procédure NLIN.



**Figure 27** - Exemple 2 : Courbes des données observées et ajustées

D'un point de vue graphique, le modèle ajusté donne une bonne description de la courbe des taux observés de versements périodiques. De plus, la P-value du test de Fisher est inférieure à 0.001, ce qui indique que le modèle ajusté est globalement robuste d'un point de vue statistique.

Vérifions à présent la significativité de chaque paramètre estimé à partir des résultats asymptotiques affichés en sortie standard de la procédure **NLIN** et repris dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 20** - Exemple 2 : Analyse de la significativité des paramètres estimés

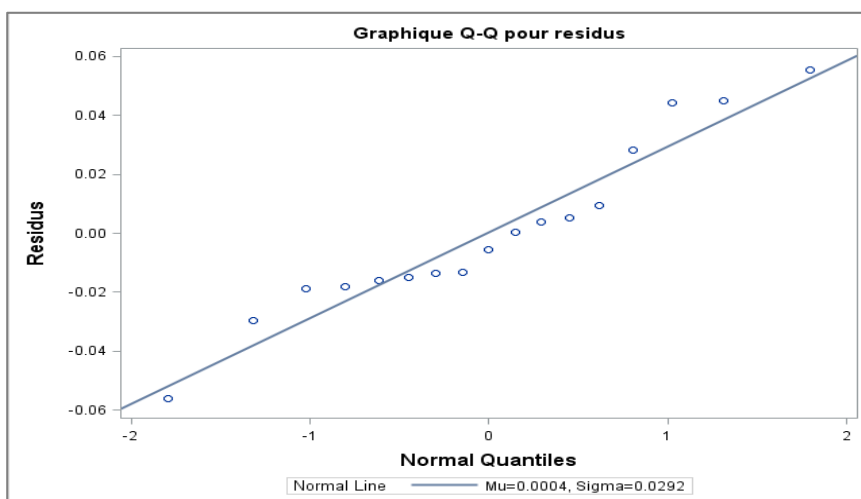
Paramètre	Valeur estimée	Erreur type approchée	Approximate 95% Confidence Limits	
<b>a1</b>	1.0916	0.0235	1.0415	1.1417
<b>a2</b>	0.2657	0.0118	0.2406	0.2908

L'intervalle de confiance asymptotique au seuil de 5% d'erreur de chaque paramètre estimé ne contient pas la valeur nulle. Nous pouvons donc accepter l'hypothèse que les paramètres estimés a1 et a2 sont significativement différents de zéro avec un risque d'erreur de 5%.

Au final, le modèle peut alors s'écrire sous la forme  $Y = 1.0916T^{(-0.2657)} + \varepsilon$ .

Remarque :

Sur cet exemple, il est impossible d'utiliser le test t de Student bilatéral pour étudier la significativité des paramètres estimés car l'hypothèse de normalité de la distribution des résidus n'est pas acceptable. En effet, le graphique QQ-Plots ci-dessous montre que les quantiles des résidus ne sont pas alignés sur la distribution d'une loi normale.



**Figure 28** - Exemple 2 : Graphique QQ-Plot des résidus

Avec ce chapitre, nous avons détaillé le cadre théorique des modèles de régression et la démarche statistique que nous allons désormais mettre en œuvre pour la détermination des lois comportementales, à commencer par celles inhérentes aux versements périodiques et libres.

# CHAPITRE 3

## LES LOIS DE REVERSEMENTS

### 3.1 La détermination des lois en nombre

#### 3.1.1 La formule des taux de reversements

Tout d'abord, rappelons qu'un reversement désigne un versement futur de type périodique ou libre. A titre d'exemple, un reversement sur l'exercice N correspond à un versement issu d'un contrat d'effet N-1 ou antérieur.

Nous proposons dans ce chapitre de construire des taux de reversements à partir du nombre de contrats à l'ouverture et du nombre de reversements car la décomposition des lois à partir de la fréquence des reversements par ancienneté courue, est plus exploitable que les lois en montant.

Par ailleurs, nous distinguons les versements périodiques et les versements libres pour identifier les reversements périodiques prévus initialement au contrat et les reversements libres versés de façon aléatoire en fonction de la capacité d'épargne de l'assuré. Cette distinction nous a semblé naturelle et pertinente puisque le rythme et le nombre de reversements sont différents entre les versements périodiques et les versements libres.

Enfin, nous décidons d'annualiser par contrat, les reversements périodiques et libres, pour neutraliser le biais lié aux changements de fractionnement des primes et pour uniformiser le traitement des primes par type de reversements.

#### Notons :

Anc	l'ancienneté courue du contrat calculée par différence de millésimes,
k	l'exercice comptable d'observation,
$Nbr\_Rev\_VP_k^{Anc}$	le nombre de reversements périodiques des contrats d'ancienneté Anc de l'exercice k ,
Typfr	le type de fractionnement du contrat (1, 2, 4 ou 12)
$Nbr\_Rev\_VP\_an_k^{Anc}$	le nombre de reversements périodiques annualisés des contrats d'ancienneté Anc de l'exercice k défini par $Nbr\_Rev\_an_k^{Anc} = \frac{Nbr\_Rev\_VP_k^{Anc}}{Typfr}$ ,
$Nbr\_Rev\_VL\_an_k^{Anc}$	le nombre de reversements libres annualisés des contrats d'ancienneté Anc de l'exercice k ,
$Nbr\_Ctr\_Ouv_k^{Anc}$	le nombre de contrats à l'ouverture d'ancienneté Anc de l'exercice k ,
$Tx\_Rev\_VP^{Anc}$	le taux observé de reversements périodiques des contrats d'ancienneté Anc ,
$Tx\_Rev\_VL^{Anc}$	le taux observé de reversements libres des contrats d'ancienneté Anc .

Les taux observés de reversements périodiques et libres sont définis par les formules :

$$Tx\_Rev\_VP^{Anc} = \frac{\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Rev\_VP\_an_k^{Anc}}{\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Ctr\_Ouv_k^{Anc}} \quad \text{et} \quad Tx\_Rev\_VL^{Anc} = \frac{\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Rev\_VL\_an_k^{Anc}}{\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Ctr\_Ouv_k^{Anc}}$$

avec  $\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Ctr\_Ouv_k^{Anc} \geq 100$  pour les reversements périodiques

et  $\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Ctr\_Ouv_k^{Anc} \geq 1000$  pour les reversements libres

Les taux observés de reversements périodiques (resp. libres) sont calculés par ancienneté courue du contrat à partir du nombre de reversements périodiques (resp. libres) et du nombre de contrats à l'ouverture pris sur un historique de trois ans maximum.

Cet historique de trois ans a été retenu pour des raisons de stabilité des données observées et d'utilisation<sup>61</sup> des lois comportementales. De plus, nous avons retenu par ancienneté, les taux observés pour lesquels la somme des contrats à l'ouverture sur les trois derniers exercices (2011, 2010 et 2009) est supérieure à 100 (resp. 1 000) pour les reversements périodiques (resp. libres) car sous ces seuils, nous considérons que les données ne sont pas significatives.

### 3.1.2 Les lois recherchées

En appliquant les formules définies dans le paragraphe (3.1.1), nous obtenons les taux de reversements périodiques suivants par ancienneté :

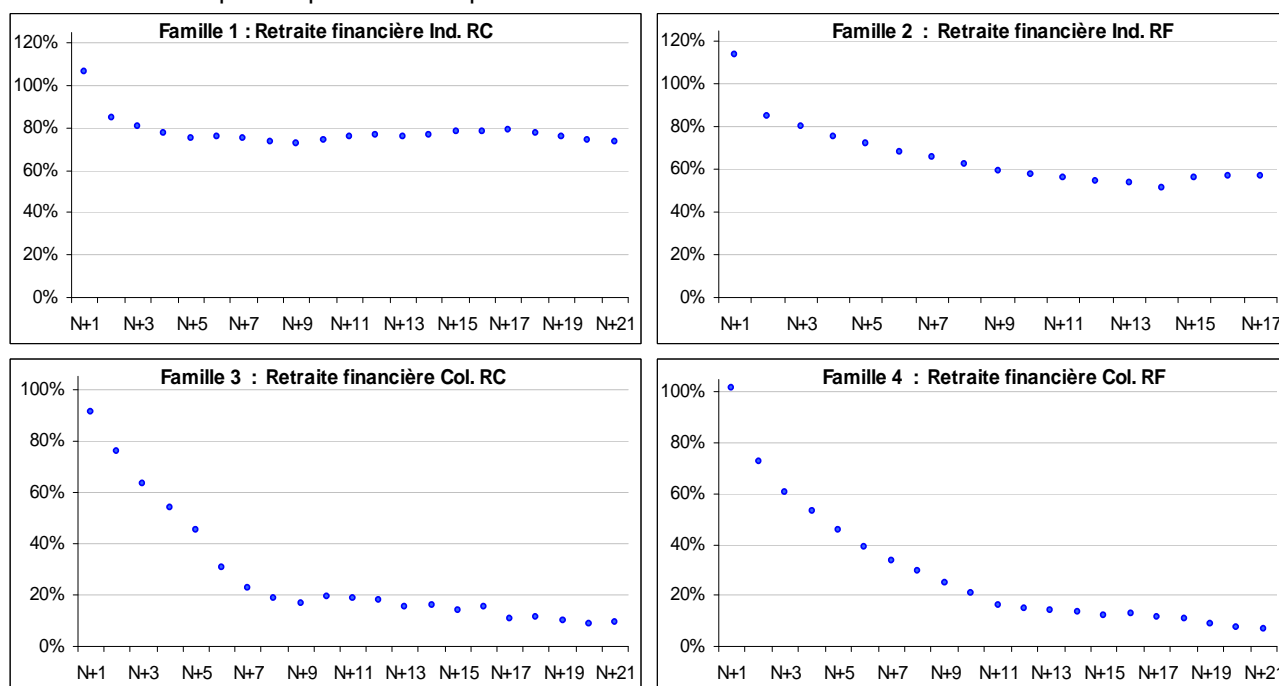


Figure 29 - Taux observés de reversements périodiques par ancienneté des familles 1 à 4

61. Les lois comportementales pourront être utilisées pour le calcul de la provision globale de gestion du portefeuille de La Mondiale

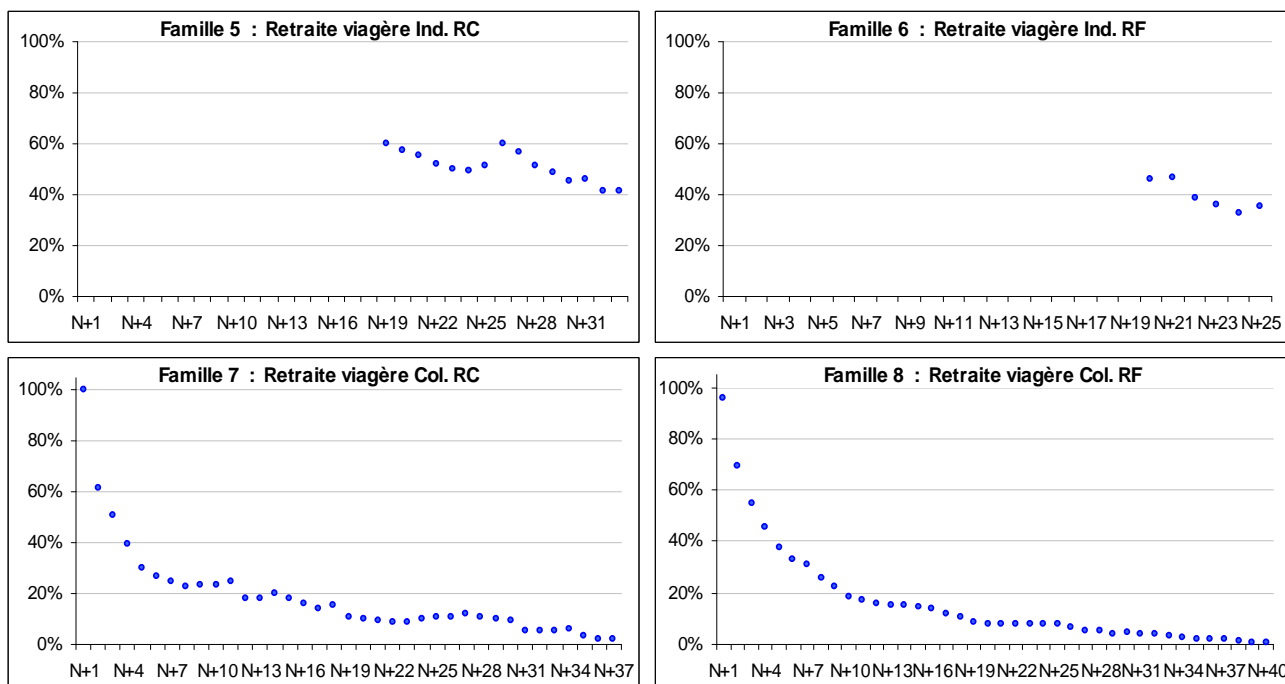


Figure 30 - Taux observés de versements périodiques par ancienneté des familles 5 à 8

Pour les versements libres, nous obtenons les résultats suivants :

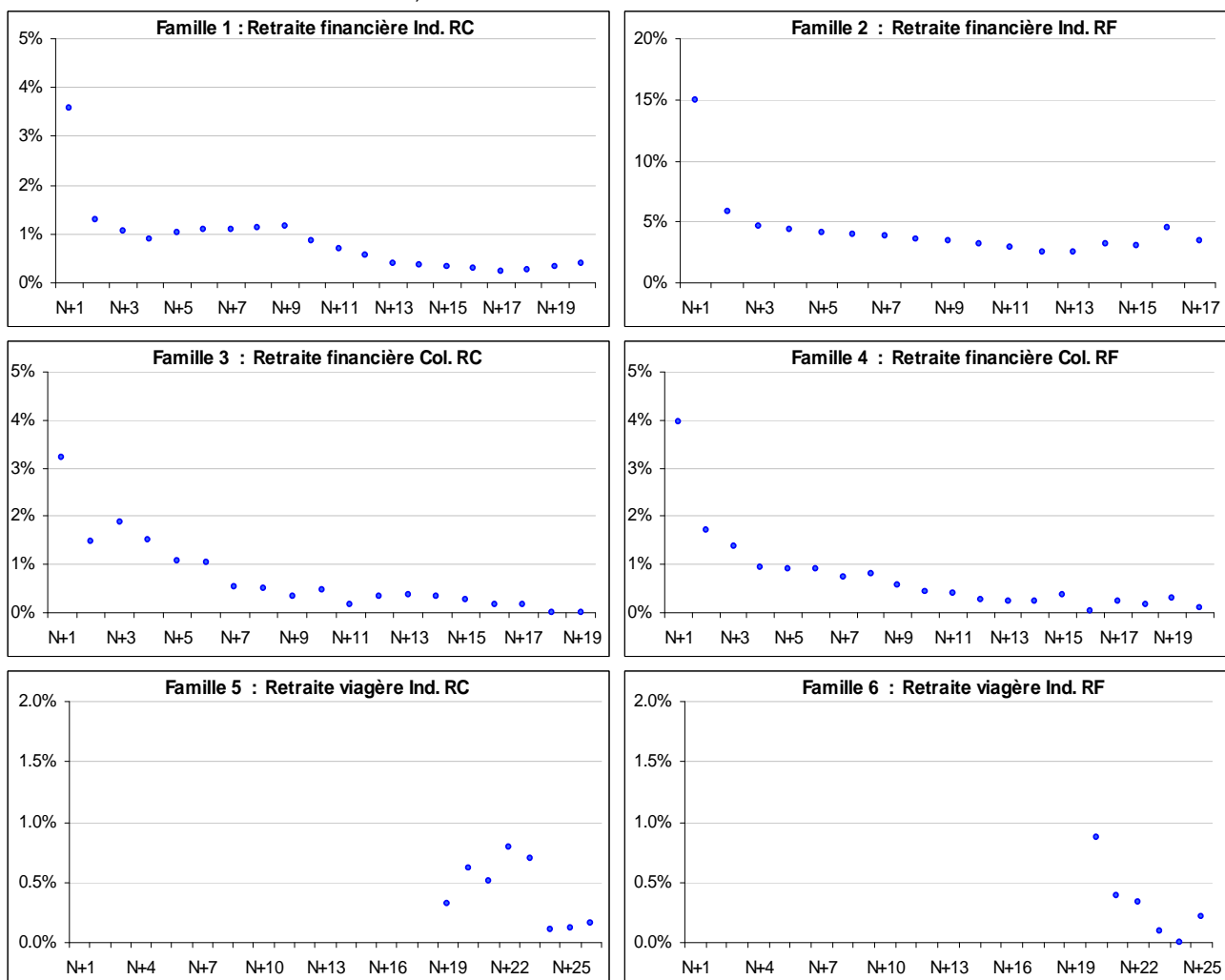
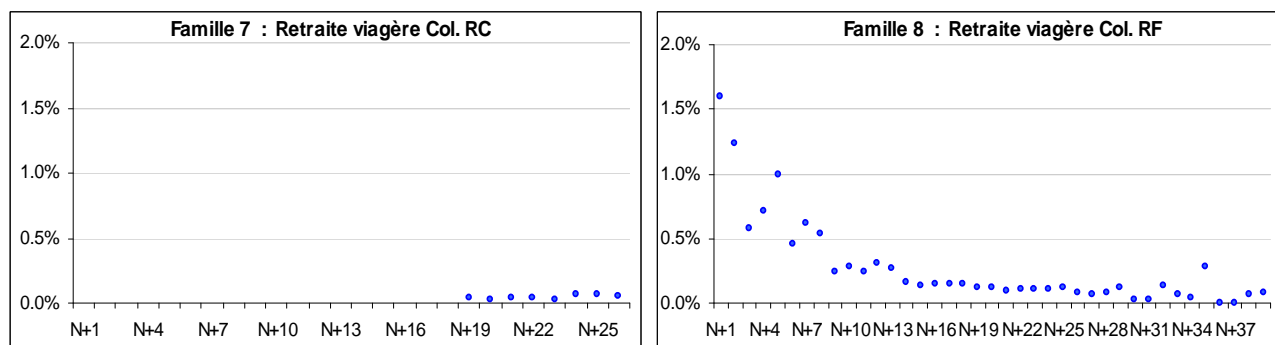


Figure 31 - Taux observés de versements libres par ancienneté des familles 1 à 6





**Figure 32** - Taux observés de versements libres par ancienneté des familles 7 et 8

Globalement, nous observons que les taux de versements périodiques et libres diminuent en fonction de l'ancienneté. Nous constatons par ailleurs que le taux d'ancienneté en N+1 des versements périodiques est bien supérieur à 100% pour les familles 1 et 2, ce qui s'explique par le nombre de contrats à l'ouverture qui n'intègre pas les contrats arrivés en base de données tardivement. Nous avons choisi de ne pas corriger ce biais qui permet de simuler un montant global de primes au plus proche du chiffre d'affaires comptable.

Après une première analyse graphique des taux de versements obtenus pour les huit familles de contrats définies au paragraphe (1.5.2), nous avons décidé de rechercher des lois convexes et décroissantes de type logarithmique, exponentielle ou puissance. Ces lois ont la particularité d'être simples à mettre à jour et entièrement adaptées à l'ajustement par morceaux. Par ailleurs lorsque les taux observés de versements ne donnent aucune tendance avec un niveau de versements significatif<sup>62</sup>, nous décidons de choisir par défaut, le modèle moyen pour l'ajustement des taux observés par ancienneté. Enfin, lorsque le niveau des versements n'est pas significatif, nous décidons de ne pas retenir de versements pour les familles<sup>63</sup> concernées.

### 3.1.3 Méthode générale d'ajustement des taux de versements

Pour l'ajustement des taux observés, nous proposons de suivre les étapes ci-dessous :

#### **Etape 1** : Approche graphique avec le tableur Excel

L'outil graphique du tableur Excel permet de tester et de sélectionner les lois usuelles (logarithmique, exponentielle, puissance, ...) les plus ajustées graphiquement aux données. Si plusieurs lois étaient graphiquement équivalentes, la loi serait choisie en fonction du Pseudo-R<sup>2</sup> ou du facteur de fiabilité. Cependant lorsque les taux observés ne présentent aucune tendance, nous retenons le modèle moyen par défaut pour l'ajustement.

#### **Etape 2** : Ajustement des taux observés de versements

Lorsqu'une des lois usuelles de type logarithmique, exponentielle ou puissance est choisie, la détermination des paramètres du modèle est réalisée à partir de la procédure NLIN du progiciel SAS. Cependant, il n'est pas toujours possible d'ajuster la série complète des taux observés et dans ce cas, nous proposons un ajustement par morceaux. Dans la majorité des cas, nous avons ajusté le 1<sup>er</sup> morceau avec la procédure NLIN. Le deuxième ajustement selon une loi de type logarithmique,

62. Cas de la famille 5 pour laquelle le montant des versements libres est supérieur à 100 000€

63. Cas des familles 6 et 7 pour lesquelles le montant des versements libres est inférieur à 100 000€

exponentielle ou puissance est ensuite entièrement déterminé à partir de deux points de la série des taux observés. Le premier point est le point de raccord entre les deux lois et le deuxième point est choisi par rapport au facteur de fiabilité comme illustré par la figure 14 du paragraphe (2.4.5).

### **Etape 3** : Etude de la qualité globale de l'ajustement des taux observés

Dans la mesure du possible, nous étudions la qualité globale du modèle (test de Fisher) et la significativité des paramètres (intervalles de confiance) à partir des informations en sortie standard de la procédure NLIN. Lorsque cela n'est pas possible, notamment en cas d'ajustement par morceaux, nous proposons d'étudier la qualité globale à partir du Pseudo-R<sup>2</sup> et du facteur de fiabilité.

### **Etape 4** : Test des lois ajustées

Pour valider de manière opérationnelle les lois de reversements ajustées, nous simulons les trois dernières années de reversements périodiques et libres. Les résultats sont ensuite comparés aux montants des reversements extraits de la Base Bilan Technique.

## **3.2 La préparation des données**

### **3.2.1 Le cadrage avec les données d'inventaire**

Avant d'extraire les données pour le calcul des taux de reversements, nous avons réalisé dans le tableau ci-dessous, un cadrage global entre les primes BBT et le chiffre d'affaires comptable pour les exercices 2006 à 2011.

**Tableau 21** - Cadrage des primes extraites (M€) de la Base Bilan Technique

	31/12/2011	31/12/2010	31/12/2009	31/12/2008	31/12/2007	31/12/2006
<b>Chiffre d'affaires</b>	867.0	839.4	811.2	815.1	764.3	681.9
<b>Primes BBT</b>	867.6	838.8	818.9	815.8	766.3	685.4
<b>Abs(Ecarts)</b>	0.7	0.6	7.7	0.7	2.0	3.5
<b>Abs(% Ecarts)</b>	0.1%	0.1%	1.0%	0.1%	0.3%	0.5%

BBT : Base Bilan Technique

Nous observons que sur les six dernières années, l'écart en pourcentage absolu se situe majoritairement en dessous de 0.5%. Les primes BBT extraites sont donc globalement satisfaisantes.

### **3.2.2 L'extraction et la construction des données**

Pour le calcul des taux observés de reversements, nous avons extrait de la Base Bilan Technique les données suivantes sur les exercices 2009 à 2011 :

CLOBIL	la date bilan (variable date au format JJ/MM/AAAA),
NUMCON	le numéro du contrat (variable qualitative),
INDCOL	le type d'adhésion au contrat (variable qualitative binaire: IND ou COL),
TYPREG	le type de produit (variable qualitative binaire: RC ou RF),
INDFIV	le code de la gamme de produit du contrat (variable qualitative),
DATEFF	la date d'effet du contrat (variable date au format JJ/MM/AAAA),
TYPFRC	le type de fractionnement de la prime (variable qualitative: A, S, T ou M),
NATPRI	le type de prime (variable qualitative binaire : VP ou VL),
DATECH	la date d'échéance de la prime (variable date au format JJ/MM/AAAA),
PRBEMI	le montant de la prime brute émise (variable quantitative).

A partir de ces données extraites, nous avons construit les informations suivantes :

GAMME la gamme<sup>64</sup> de produit (variable binaire: VIAGER ou FINANCIER),  
GEN l'année d'effet du contrat (variable quantitative),  
NBR\_CTR le nombre de contrats (variable quantitative),  
NBR\_REV le nombre<sup>65</sup> de versements annualisés (variable quantitative).

Ces données permettent de calculer les taux observés de versements selon la granularité définie au paragraphe (1.5.2).

### 3.2.3 Les données exclues de l'étude

En appliquant les formules des taux de versements définies au paragraphe (3.1.1), nous avons exclu une partie des données extraites pour l'ajustement des taux observés. A titre indicatif, les deux tableaux ci-dessous récapitulent en fonction de la granularité retenue, l'ensemble des données exclues pour l'exercice 2011.

**Tableau 22** - Données 2011 exclues de l'ajustement des taux de versements périodiques observés

		TYPREG	Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Montant revers. VP 2011(M€)	Nbr contrats ouverture 2011exclus	Nbr revers. VP 2011 exclus	Montants VP 2011 exclus (M€)
Individuel	Retraite financière hors PERP	RC	1	77 284	153	-	-	-
		RF	2	123 202	392	91	58	0.2
	Retraite viagère	RC	5	16 905	15	172	43	<0.06
		RF	6	321	0.3	1	-	-
Collectif	Retraite financière	RC	3	16 776	26	1 189	289	0.4
		RF	4	96 881	103	-	-	-
	Retraite viagère	RC	7	8 911	3	363	-	-
		RF	8	83 767	45	520	-	-
Total				424 047	738	2 336	390	0.6

**Tableau 23** - Données 2011 exclues de l'ajustement des taux de versements libres observés

		TYPREG	Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Montant revers. VL 2011 (M€)	Nbr contrats ouverture 2011 exclus	Nbr revers. VL 2011 exclus	Montants VL 2011 exclus (M€)
Individuel	Retraite financière hors PERP	RC	1	77 284	14	482	3	<0.050
		RF	2	123 202	67	91	1	<0.010
	Retraite viagère	RC	5	16 905	1	965	2	<0.020
		RF	6	321	0.03	321	3	<0.030
Collectif	Retraite financière	RC	3	16 776	1	418	2	<0.001
		RF	4	96 881	6	950	3	-
	Retraite viagère	RC	7	8 911	0.05	4 321	-	<0.001
		RF	8	83 767	1	901	-	-
Total				424 047	90	8 449	14	0.1

Les montants 2011 exclus de l'étude des versements périodiques et libres ne sont pas significatifs. Les taux observés de versements périodiques et libres sont donc suffisamment représentatifs pour les familles des contrats étudiées.

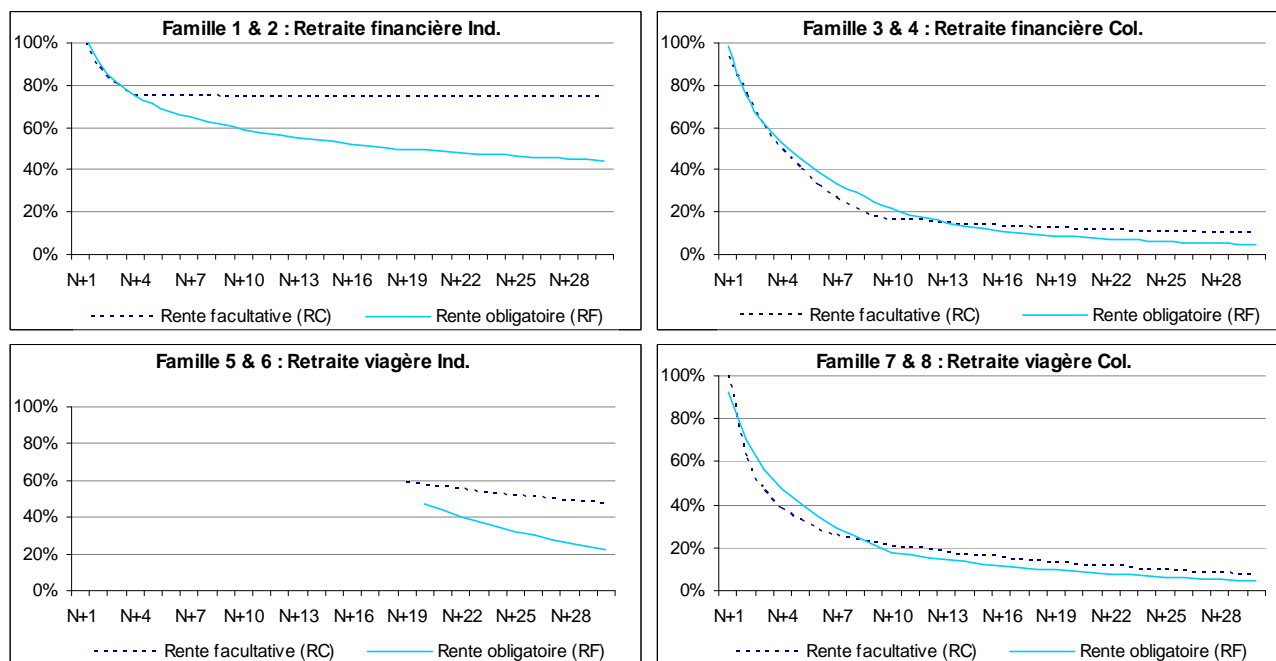
64. Variable définie par regroupement de valeurs de la variable INDFIV

65. +1 pour les versements positifs, sinon -1 par date d'échéance de la prime

### 3.3 Les lois 2011 de versements ajustées

#### 3.3.1 Les versements périodiques et libres

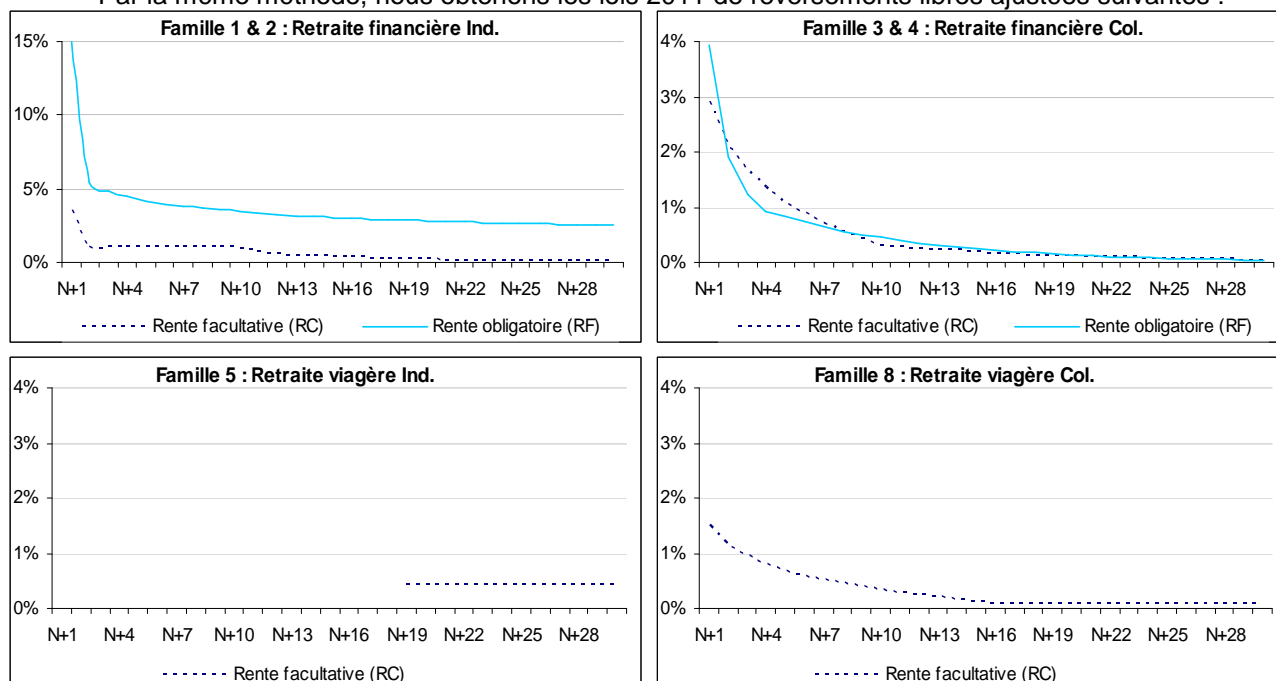
En appliquant la méthode proposée au paragraphe (3.1.3), nous obtenons les lois 2011 de versements périodiques ajustées suivantes :



**Figure 33** - Lois 2011 de versements périodiques ajustées

Nous observons que les taux ajustés des contrats individuels sont plus élevés que ceux des contrats collectifs et que les taux des contrats individuels de type RC sont supérieurs à ceux des contrats individuels de type RF.

Par la même méthode, nous obtenons les lois 2011 de versements libres ajustées suivantes :



**Figure 34** - Lois 2011 de versements libres ajustées

Pour les versements libres, nous observons également que les taux ajustés des contrats individuels sont globalement plus élevés que ceux des contrats collectifs. Par ailleurs, nous avons pris la décision de ne pas déterminer de lois pour les familles 6 et 7 car les montants de versements libres ne sont pas significatifs<sup>66</sup>. Enfin, nous avons retenu le modèle moyen pour la famille 5 car la séquence des taux observés de versements libres ne donnait aucune tendance.

### 3.3.2 Etude de la qualité globale des lois ajustées

Pour apprécier la qualité globale des **lois de versements périodiques ajustées**, nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous la valeur des facteurs de fiabilité et des Pseudo-R<sup>2</sup> associés au modèle ajusté.

**Tableau 24** - Versements périodiques - Indicateurs de la qualité globale des lois ajustées

		TYPREG	Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Montant revers. VP 2011 (M€)	Nbr de valeurs retenues (1)	Ajustement par morceaux	Facteur de fiabilité		Pseudo-R <sup>2</sup>
								Modèle ajusté	Modèle moyen	
Individuel	Retraite financière hors PERP	RC	1	77 284	153	21	oui	0.03	0.09	0.90
		RF	2	123 202	392	17	non	0.04	0.22	0.97
	Retraite viagère	RC	5	16 905	15	15	non	0.07	0.11	0.59
		RF	6	321	0.3	6	non	0.06	0.15	0.86
Collectif	Retraite financière	RC	3	16 776	26	21	oui	0.07	0.64	0.99
		RF	4	96 881	103	21	oui	0.04	0.64	0.99
	Retraite viagère	RC	7	8 911	3	37	oui	0.08	0.70	0.99
		RF	8	83 767	45	40	oui	0.05	0.78	0.99

(1) Pour le calcul des indicateurs de qualité globale du modèle

Les lois 2011 de versements périodiques sont relativement bien ajustées aux données puisque la majorité des Pseudo-R<sup>2</sup> se situe au-delà de 0.85. De plus, à partir de la valeur des Pseudo-R<sup>2</sup> et des facteurs de fiabilité, nous constatons que les modèles ajustés sont meilleurs que les modèles moyens.

En complément de l'analyse de la qualité globale des lois 2011 de versements périodiques, le tableau ci-dessous permet d'apprécier la significativité des modèles ajustés avec la procédure NLIN.

**Tableau 25** - Versements périodiques - Intervalles de confiance des paramètres estimés

		Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Nbr de valeurs retenues (1)	P-value du test F de Fisher	a0	Approximate 95% Confidence Limits		a1	Approximate 95% Confidence Limits	
Versements périodiques	Individuel	1	77 284	4	<0.01	1.05	<b>0.91</b>	<b>1.18</b>	0.24	<b>0.09</b>	<b>0.39</b>
		2	123 202	17	<0.01	1.09	<b>1.04</b>	<b>1.14</b>	0.27	<b>0.24</b>	<b>0.29</b>
		5	16 905	15	<0.01	0.85	<b>0.63</b>	<b>1.07</b>	0.02	<b>0.01</b>	<b>0.03</b>
		6	321	6	<0.01	2.10	<b>-0.13</b>	<b>4.33</b>	0.07	<b>0.03</b>	<b>0.12</b>
	Collectif	3	16 776	9	<0.01	1.15	<b>1.05</b>	<b>1.26</b>	0.21	<b>0.18</b>	<b>0.24</b>
		4	96 881	10	<0.01	0.34	<b>0.32</b>	<b>0.35</b>	0.99	<b>0.96</b>	<b>1.02</b>
		7	8 911	8	<0.01	1.01	<b>0.96</b>	<b>1.06</b>	0.71	<b>0.65</b>	<b>0.76</b>
		8	83 767	10	<0.01	0.33	<b>0.31</b>	<b>0.35</b>	0.93	<b>0.89</b>	<b>0.96</b>

(1) Pour l'ajustement des taux observés avec la procédure NLIN

La valeur des P-values inférieures à 0.01, nous indique que les modèles ajustés avec la procédure NLIN sont globalement significatifs au seuil de 1% d'erreur. De plus, les paramètres

66. Voir les montants de versements libres du tableau 23

estimés sont significatifs à 5% d'erreur puisque les intervalles de confiance des paramètres au seuil de 5% ne contiennent pas la valeur nulle, sauf pour la famille 6 pour laquelle le nombre de contrats à l'ouverture 2011 n'est pas significatif.

De même pour apprécier la qualité globale des **lois de versements libres ajustées**, nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous la valeur des facteurs de fiabilité et des Pseudo-R<sup>2</sup> associés au modèle ajusté.

**Tableau 26** - Versements libres - Indicateurs de la qualité globale des lois ajustées

		TYPREG	Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Montant revers. VL 2011 (M€)	Nbr de valeurs retenues (1)	Ajustement par morceaux	Facteur de fiabilité		Pseudo-R <sup>2</sup>
								Modèle ajusté	Modèle moyen	
Individuel	Retraite financière hors PERP	RC	1	77 284	14	20	oui	0.08	0.64	0.98
		RF	2	123 202	67	17	oui	0.09	0.54	0.97
	Retraite viagère	RC	5	16 905	1	8	non	0.52	0.52	-
		RF	6	321	0.03	NC	NC	NC	NC	NC
Collectif	Retraite financière	RC	3	16 776	1	19	oui	0.19	0.74	0.93
		RF	4	96 881	6	20	oui	0.11	0.76	0.98
	Retraite viagère	RC	7	8 911	0.05	NC	NC	NC	NC	NC
		RF	8	83 767	1	39	oui	0.23	0.78	0.91

(1) Pour le calcul des indicateurs de qualité globale du modèle

NC : Non concerné

Les lois 2011 de versements libres sont relativement bien ajustées aux données puisque les Pseudo-R<sup>2</sup> se situent au-delà de 0.90. De plus à l'exception de la famille 5, nous constatons que les modèles ajustés sont meilleurs que les modèles moyens d'après la valeur des Pseudo-R<sup>2</sup> et des facteurs de fiabilité.

En complément de l'analyse de la qualité globale des lois 2011 de versements libres, le tableau ci-dessous permet d'apprécier la significativité des modèles ajustés avec la procédure NLIN.

**Tableau 27** - Versements libres - Intervalles de confiance des paramètres estimés

		Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Nbr de valeurs retenues (1)	P-value du test F de Fisher	a0	Approximate 95% Confidence Limits		a1	Approximate 95% Confidence Limits	
Versements libres	Individuel	1	77 284	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
		2	123 202	16	<0.01	0.07	<b>0.05</b>	<b>0.08</b>	0.29	<b>0.18</b>	<b>0.40</b>
		5	16 905	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
		6	321	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
	Collectif	3	16 776	10	<0.01	0.01	<b>0.01</b>	<b>0.01</b>	0.03	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>
		4	96 881	9	<0.01	0.04	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	0.91	<b>0.78</b>	<b>1.05</b>
		7	8 911	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
		8	83 767	16	<0.01	0.01	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	0.00	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>

(1) Pour l'ajustement des taux observés avec la procédure NLIN

NC : Non concerné

La valeur des P-values inférieures à 0.01, nous indique que les modèles ajustés avec la procédure NLIN sont globalement significatifs au seuil de 1% d'erreur.

Nous observons à nouveau que les paramètres estimés sont significatifs à 5% d'erreur puisque les intervalles de confiance des paramètres au seuil de 5% ne contiennent pas la valeur nulle.

**La qualité globale des lois 2011 de versements périodiques et libres semble donc satisfaisante pour l'estimation des versements.**

### 3.4 Le détail des lois 2011 de versements périodiques

Nous allons préciser dans cette partie, l'expression mathématique<sup>67</sup> des lois de versements ajustées et les figures associées permettront d'apprécier graphiquement l'ajustement aux taux observés.

#### 3.4.1 Des contrats individuels de retraite financière

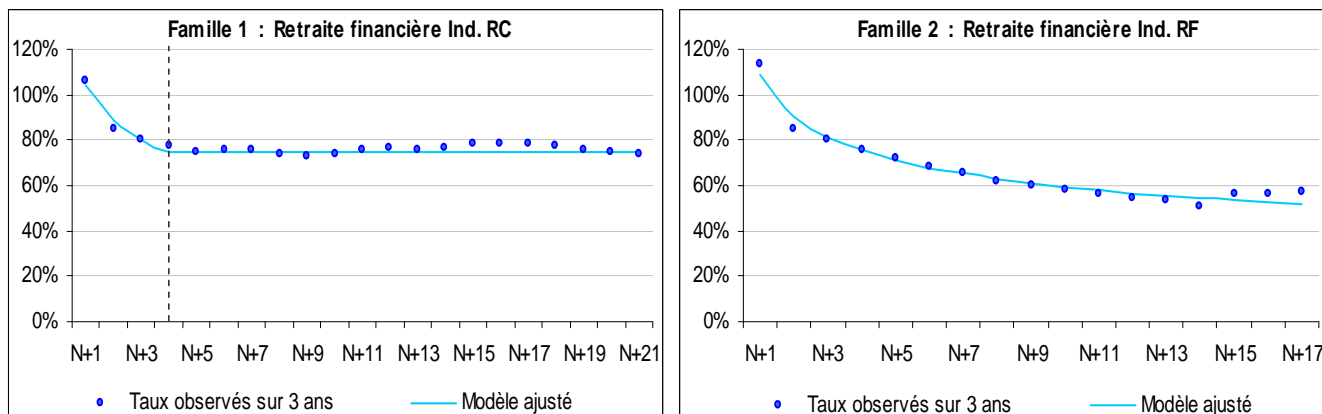


Figure 35 - Reversements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 1 et 2

- Pour la famille 1, les taux observés ont été ajustés par morceau sur  $[N+1;N+21]$  :  

$$Y = 1.04755 * X^{(-0.23997)}$$
 sur  $[N+1;N+4]$  avec la procédure NLIN,  

$$Y = 0.75690 * X^{(-0.00560)}$$
 sur  $[N+4;N+21]$  avec les contraintes en N+4 et N+20.
- Pour la famille 2, ajustement sur  $[N+1;N+17]$  avec la procédure NLIN :  $Y = 1.09157 * X^{(-0.2657)}$ .

#### 3.4.2 Des contrats collectifs de retraite financière

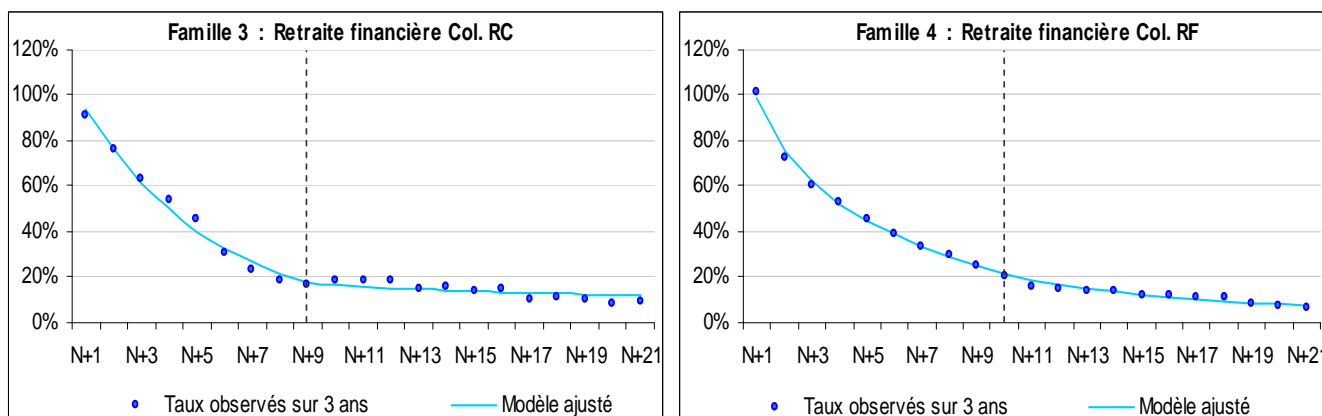


Figure 36 - Reversements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 3 et 4

Pour la famille 3, nous avons exclu les données<sup>68</sup> des contrats d'effet 1994 et 1992 parce qu'ils sont non significatifs en nombre et que leur niveau de versements périodiques est trop atypique par rapport aux autres générations. Les taux observés ont été ajustés par morceau sur  $[N+1;N+21]$  :

$$Y = 1.15441 * e^{(-0.20967 * X)} \text{ sur } [N+1;N+9] \text{ avec la procédure NLIN,}$$

$$Y = 0.49564 * X^{(-0.47401)} \text{ sur } [N+9;N+21] \text{ avec les contraintes en N+9 et N+15.}$$

67. Les paramètres estimés des modèles de régression non linéaire ont été déterminés avec la procédure NLIN de SAS

68. Inclues dans les données exclues du tableau 22 page 67

- Pour la famille 4, ajustement par morceau sur  $[N+1;N+21]$  :  
 $Y = 0.33529 * \ln(X) + 0.98816$  sur  $[N+1;N+10]$  avec la procédure NLIN,  
 $Y = 5.41689 * X^{(-1.39905)}$  sur  $[N+10;N+21]$  avec les contraintes en  $N+10$  et  $N+14$ .

### 3.4.3 Des contrats individuels de retraite viagère

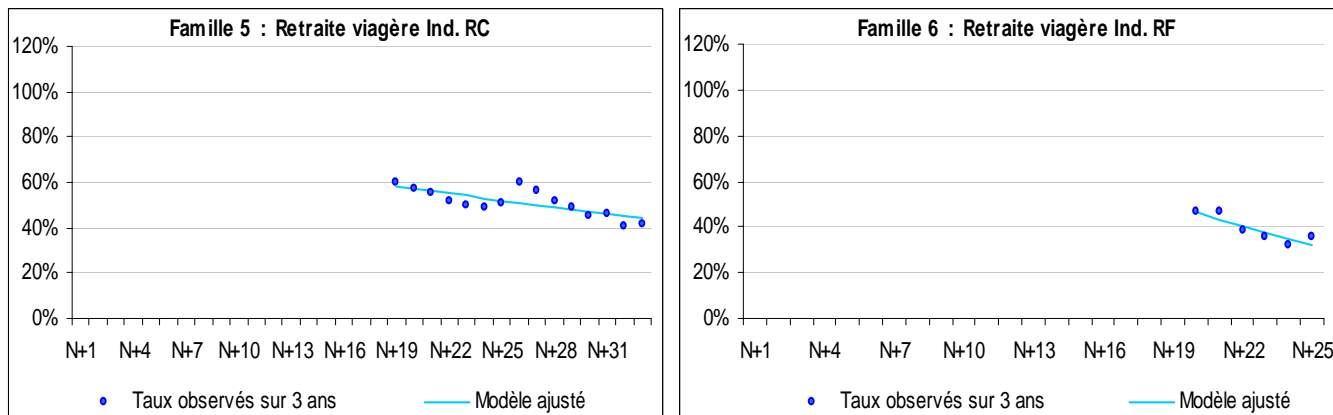


Figure 37 - Reversements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 5 et 6

- Pour la famille 5, ajustement sur  $[N+19;N+33]$  avec la procédure NLIN :  $Y = 0.85441 * e^{(-0.01994 * X)}$ .
- Pour la famille 6, ajustement sur  $[N+20;N+25]$  avec la procédure NLIN :  $Y = 1.15441 * e^{(-0.20967 * X)}$ .

### 3.4.4 Des contrats collectifs de retraite viagère

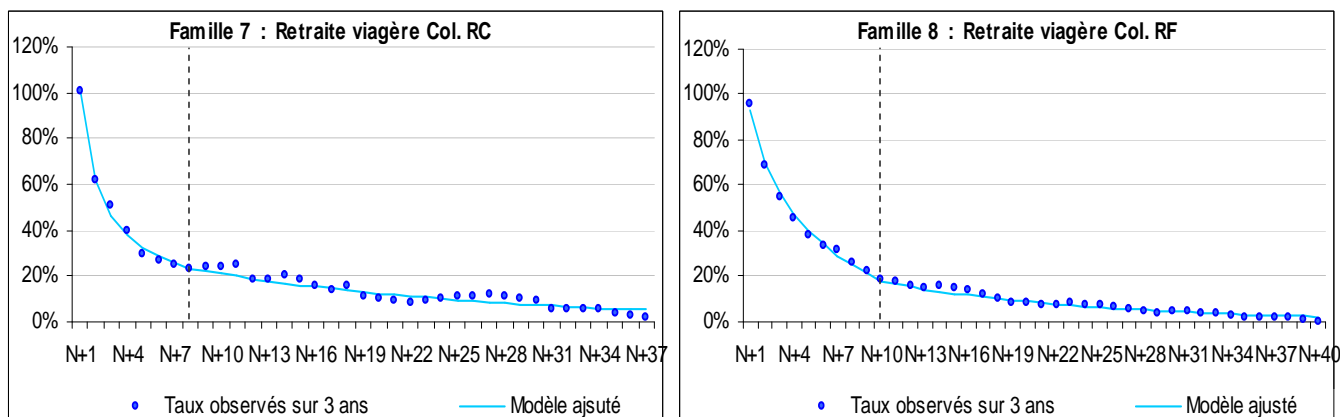


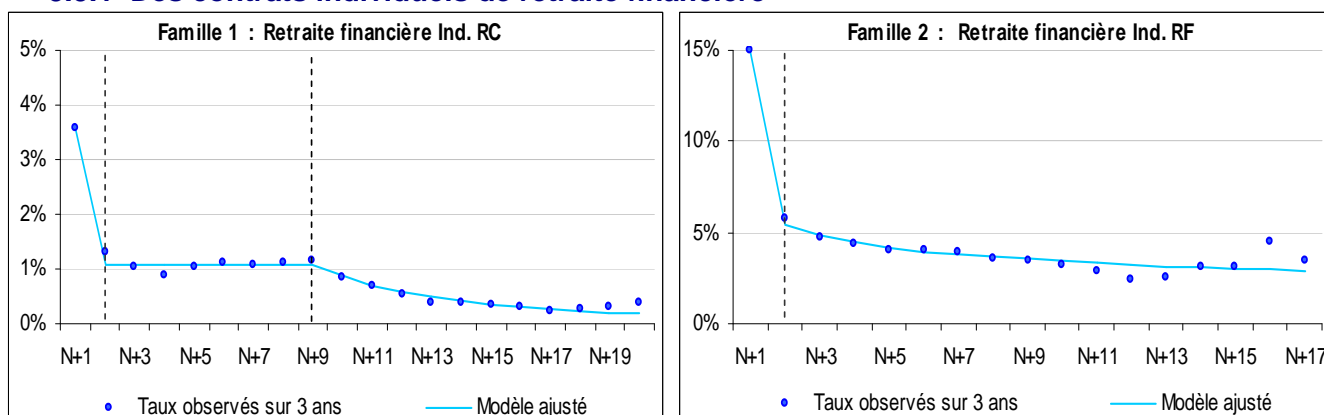
Figure 38 - Reversements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 7 et 8

- Pour la famille 7, ajustement par morceau sur  $[N+1;N+37]$  :  
 $Y = 1.0098 * X^{(-0.70547)}$  sur  $[N+1;N+8]$  avec la procédure NLIN,  
 $Y = 0.35400 * e^{(-0.05235 * X)}$  sur  $[N+8;N+37]$  avec les contraintes en  $N+8$  et  $N+34$ .
- Pour la famille 8, ajustement par morceau sur  $[N+1;N+40]$  :  
 $Y = 0.32577 * \ln(X) + 0.92626$  sur  $[N+1;N+10]$  avec la procédure NLIN,  
 $Y = 0.34702 * e^{(-0.06781 * X)}$  sur  $[N+10;N+40]$  avec les contraintes en  $N+10$  et  $N+31$ .



### 3.5 Le détail des lois 2011 de versements libres

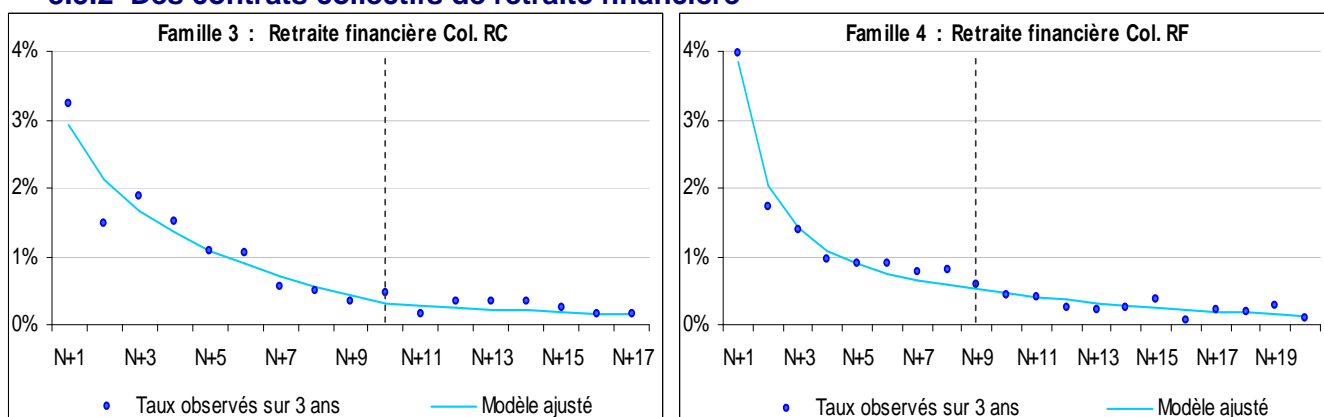
#### 3.5.1 Des contrats individuels de retraite financière



**Figure 39** - Versements libres - Taux observés et modèle ajusté des familles 1 et 2

- Pour la famille 1, ajustement par morceau sur  $[N+1;N+20]$  :  
 $Y = 3.56885$  (taux observé en  $N+1$ ),  
 $Y = 1.0957$  sur  $[N+2;N+9]$  (moyenne des taux observés entre  $N+2$  et  $N+9$ ),  
 $Y = 1.39380 * X^{(-2.20540)}$  sur  $[N+9;N+20]$  avec les contraintes en  $N+9$  et  $N+16$ .
- Pour la famille 2, ajustement par morceau sur  $[N+1;N+17]$  :  
 $Y = 15.01449$  (taux observé en  $N+1$ ),  
 $Y = 0.06620 * X^{(-0.28670)}$  sur  $[N+2;N+17]$  avec la procédure NLIN.

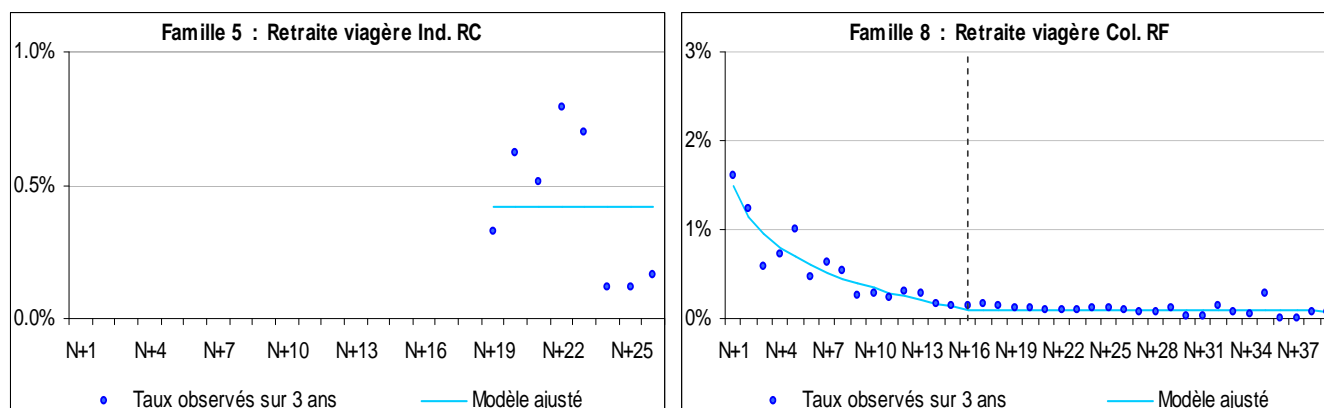
#### 3.5.2 Des contrats collectifs de retraite financière



**Figure 40** - Versements libres - Taux observés et modèle ajusté des familles 3 et 4

- Pour la famille 3, ajustement par morceau sur  $[N+1;N+17]$  :  
 $Y = 0.01140 * \ln(X) + 0.02925$  sur  $[N+1;N+10]$  avec la procédure NLIN,  
 $Y = 0.00410 * e^{(-0.03130 * X)}$  sur  $[N+10;N+17]$  avec les contraintes en  $N+10$  et  $N+16$ .
- Pour la famille 4, ajustement par morceau sur  $[N+1;N+20]$  :  
 $Y = 0.03849 * X^{(-0.91335)}$  sur  $[N+1;N+9]$  avec la procédure NLIN,  
 $Y = 0.01880 * e^{(-0.14320 * X)}$  sur  $[N+9;N+20]$  avec les contraintes en  $N+9$  et  $N+18$ .

### 3.5.3 Des contrats de retraite viagère



**Figure 41** - Reversements libres<sup>69</sup> - Taux observés et modèle ajusté des familles 5 et 8

- Pour la famille 5, les taux observés ne présentent aucune tendance particulière. Nous avons alors retenu le modèle moyen  $Y = 0.41861$  sur  $[N+19; N+26]$ .
- Pour la famille 8, ajustement par morceau sur  $[N+1; N+39]$  :  
 $Y = 0.01140 * \ln(X) + 0.02925$  sur  $[N+1; N+16]$  avec la procédure NLIN,  
 $Y = 1.15441 * e^{(-0.20967 * X)}$  sur  $[N+16; N+39]$  avec les contraintes en  $N+16$  et  $N+21$ .

## 3.6 Les simulations avec les lois 2011 de reversements

L'objet de cette partie est de tester la pertinence des lois 2011 de reversements ajustées en simulant les primes brutes 2011, 2010 et 2009.

### 3.6.1 La formule du montant brut des reversements

Notons :

- $Mnt\_rev\_brut\_VP_k^{Anc}$  le montant brut des reversements périodiques des contrats d'ancienneté  $Anc$  de l'exercice  $k$ ,
- $Mnt\_rev\_brut\_VL_k^{Anc}$  le montant brut des reversements libres des contrats d'ancienneté  $Anc$  de l'exercice  $k$ ,
- $Mnt\_rev\_brut\_VP_k$  le montant brut des reversements périodiques de l'exercice  $k$ ,
- $Mnt\_rev\_brut\_VL_k$  le montant brut des reversements libres de l'exercice  $k$ ,
- $\overline{Mnt\_VP_k^{Anc}}$  le montant brut moyen des reversements périodiques annualisés des contrats d'ancienneté  $Anc$  de l'exercice  $k$  défini par  $\overline{Mnt\_VP_k^{Anc}} = \frac{Mnt\_rev\_brut\_VP_k^{Anc}}{Nbr\_Rev\_VP\_an_k^{Anc}}$ ,

69. Nous n'avons pas réalisé d'ajustements des taux observés de reversements libres pour les familles 6 et 7 car les montants sont négligeables

$\overline{\text{Mnt\_VL}}_k^{\text{Anc}}$  le montant brut moyen des reversements libres annualisés des contrats

d'ancienneté Anc de l'exercice k défini par  $\overline{\text{Mnt\_VL}}_k^{\text{Anc}} = \frac{\text{Mnt\_rev\_brut\_VL}_k^{\text{Anc}}}{\text{Nbr\_Rev\_VL\_an}_k^{\text{Anc}}}$ ,

$\text{Nbr\_Ctr\_Ouv}_k^{\text{Anc}}$  le nombre de contrats à l'ouverture d'ancienneté Anc de l'exercice k.

Le montant brut des reversements périodiques de l'exercice k est défini par la formule :

$$\text{Mnt\_rev\_brut\_VP}_k = \sum_{\text{Anc}} \text{Mnt\_rev\_brut\_VP}_k^{\text{Anc}}$$

$$\text{avec } \text{Mnt\_rev\_brut\_VP}_k^{\text{Anc}} = \text{Nbr\_Ctr\_Ouv}_k^{\text{Anc}} \cdot \overline{\text{Mnt\_VP}}_k^{\text{Anc}} \cdot \text{Tx\_Rev\_VP}_k^{\text{Anc}}$$

De façon similaire, le montant brut des reversements libres de l'exercice k est défini par la formule :

$$\text{Mnt\_rev\_brut\_VL}_k = \sum_{\text{Anc}} \text{Mnt\_rev\_brut\_VL}_k^{\text{Anc}}$$

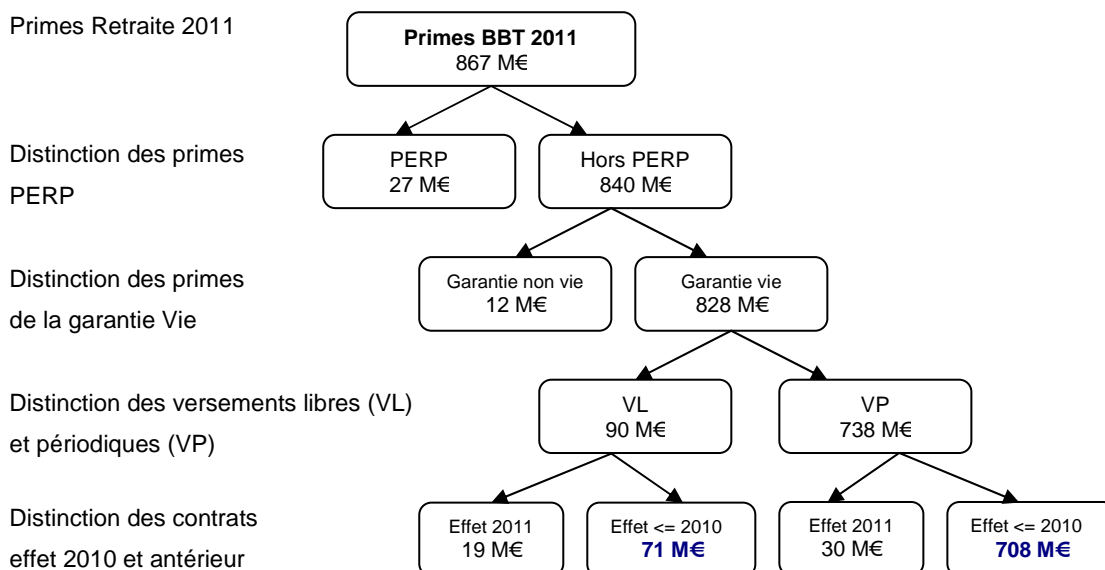
$$\text{avec } \text{Mnt\_rev\_brut\_VL}_k^{\text{Anc}} = \text{Nbr\_Ctr\_Ouv}_k^{\text{Anc}} \cdot \overline{\text{Mnt\_VL}}_k^{\text{Anc}} \cdot \text{Tx\_Rev\_VL}_k^{\text{Anc}}$$

### 3.6.2 Les montants réels des reversements

Déterminons à présent les montants réels 2011, 2010 et 2009 des reversements périodiques et libres pour les comparer aux montants des reversements simulés.

#### 3.6.2.1 Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2011

Les primes BBT 2011 se décomposent selon le schéma suivant :

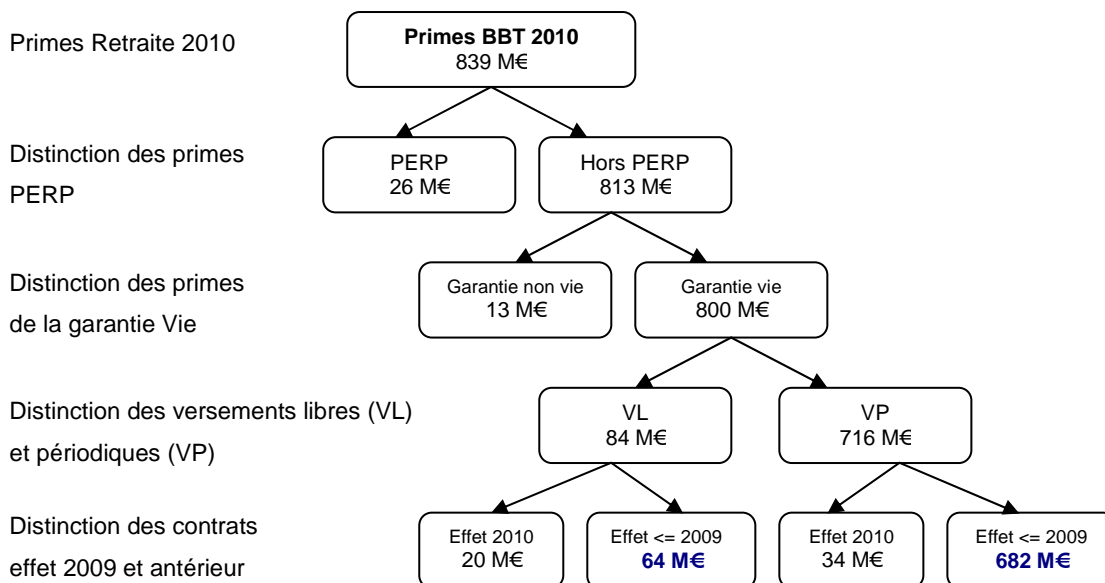


**Schéma 6** - Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2011

Le montant réel des reversements périodiques (resp. libres) 2011 à simuler à partir des contrats d'ouverture 2011 est de **708 M€**(resp. **71 M€**).

### 3.6.2.2 Montants réels 2010 des contrats d'ouverture 2010

Les primes BBT 2010 se décomposent selon le schéma suivant :

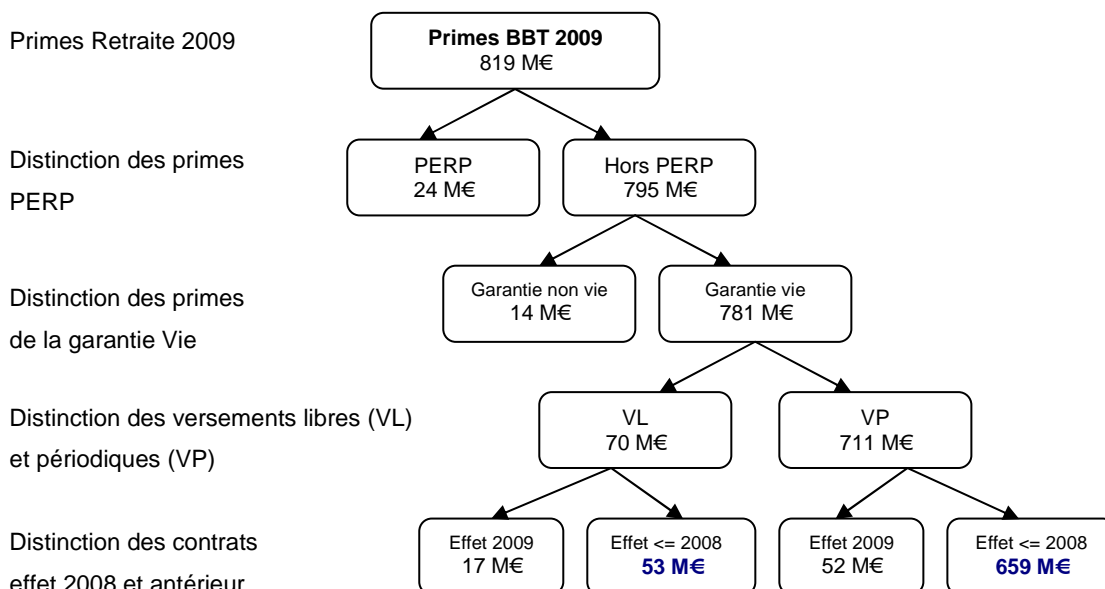


**Schéma 7** - Montants réels 2010 des contrats d'ouverture 2010

Le montant réel des reversements périodiques (resp. libres) 2010 à simuler à partir des contrats d'ouverture 2010 est de **682 M€** (resp. **64 M€**).

### 3.6.2.3 Montants réels 2009 des contrats d'ouverture 2009

Les primes BBT 2009 se décomposent selon le schéma suivant :



**Schéma 8** - Montants réels 2009 des contrats d'ouverture 2009

Le montant réel des reversements périodiques (resp. libres) 2009 à simuler à partir des contrats d'ouverture 2009 est de **659 M€** (resp. **53 M€**).

### 3.6.3 Le résultat des simulations

A partir des lois 2011 de versements ajustées, déterminées sur les versements 2009-2011, nous avons simulé les versements bruts 2011 (resp. 2010 et 2009) des contrats d'ouverture 2011 (resp. 2010 et 2009). Ces versements simulés ont ensuite été comparés aux montants de versements réels extraits de la Base Bilan Technique.

**Tableau 28** - Simulation des versements bruts N des contrats d'ouverture N

Exercice comptable	2011	2010	2009
Année d'effet du contrat	2010 et antérieure	2009 et antérieure	2008 et antérieure
<b>Versements cibles (M€)</b>	<b>778</b>	<b>746</b>	<b>712</b>
dont versements périodiques cibles (M€)	707	682	659
dont versements libres cibles (M€)	70	64	53
<b>Versements simulés (M€)</b>	<b>774</b>	<b>746</b>	<b>711</b>
dont versements périodiques simulés (M€)	702	684	655
dont versements libres simulés (M€)	71	62	55
<b>Écarts en montant (M€)</b>	<b>4.0</b>	<b>-0.7</b>	<b>0.8</b>
dont versements périodiques (M€)	5.1	-2.7	3.3
dont versements libres (M€)	-1.0	1.9	-2.5
<b>Écarts en %</b>	<b>0.5%</b>	<b>-0.1%</b>	<b>0.1%</b>
dont versements périodiques	0.7%	-0.4%	0.5%
dont versements libres	-1.5%	3.0%	-4.7%

Par type de versement, nous observons qu'une partie des écarts de simulation des versements périodiques est compensée par les écarts des versements libres.

Au final, les écarts en pourcentage se situent entre -0.1% et 0.5% des versements réels sur les trois dernières années. La simulation des versements bruts à partir des lois 2011 de versements ajustées est donc satisfaisante.

Une fois les lois de versements périodiques et libres présentées et testées de façon satisfaisante sur notre portefeuille de retraite, nous allons à présent déterminer les lois de rachats totaux nécessaires au chiffrage du coût d'écart de table.

# CHAPITRE 4

## LES LOIS DE RACHATS TOTAUX

### 4.1 La détermination des lois en nombre

#### 4.1.1 La formule des taux de rachats totaux

Les taux observés de rachats totaux sont calculés selon les mêmes principes que pour les versements périodiques définis au paragraphe (3.1.1).

Notons :

$Nbr\_Rac\_Tot_k^{Anc}$  le nombre annualisé de rachats totaux pour l'exercice  $k$  des contrats d'ancienneté  $Anc$ ,

$Tx\_Rac^{Anc}$  le taux observé de rachats totaux des contrats d'ancienneté  $Anc$ .

Les taux observés de rachats totaux sont définis par la formule :

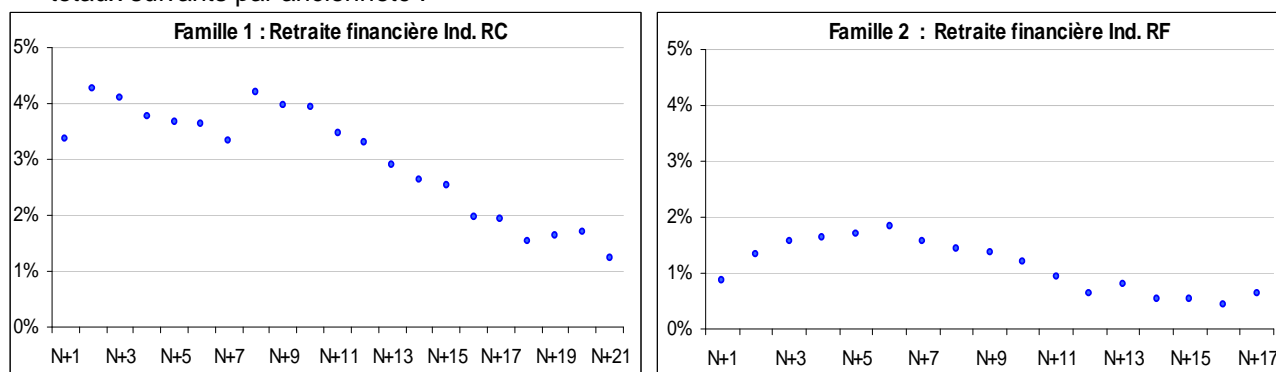
$$Tx\_Rac^{Anc} = \frac{\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Rac\_To t_k^{Anc}}{\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Ctr\_Ou v_k^{Anc}}$$

avec  $\sum_{k=2009}^{2011} Nbr\_Ctr\_Ou v_k^{Anc} \geq 100$  pour exclure les données non significatives

Remarques : Nous ne traiterons pas dans cette étude, le cas des rachats partiels car les montants qui ne concernent que les contrats à sortie en rente facultative, ne sont pas significatifs<sup>70</sup>. Nous n'aborderons pas également la composante conjoncturelle de la loi de rachats totaux.

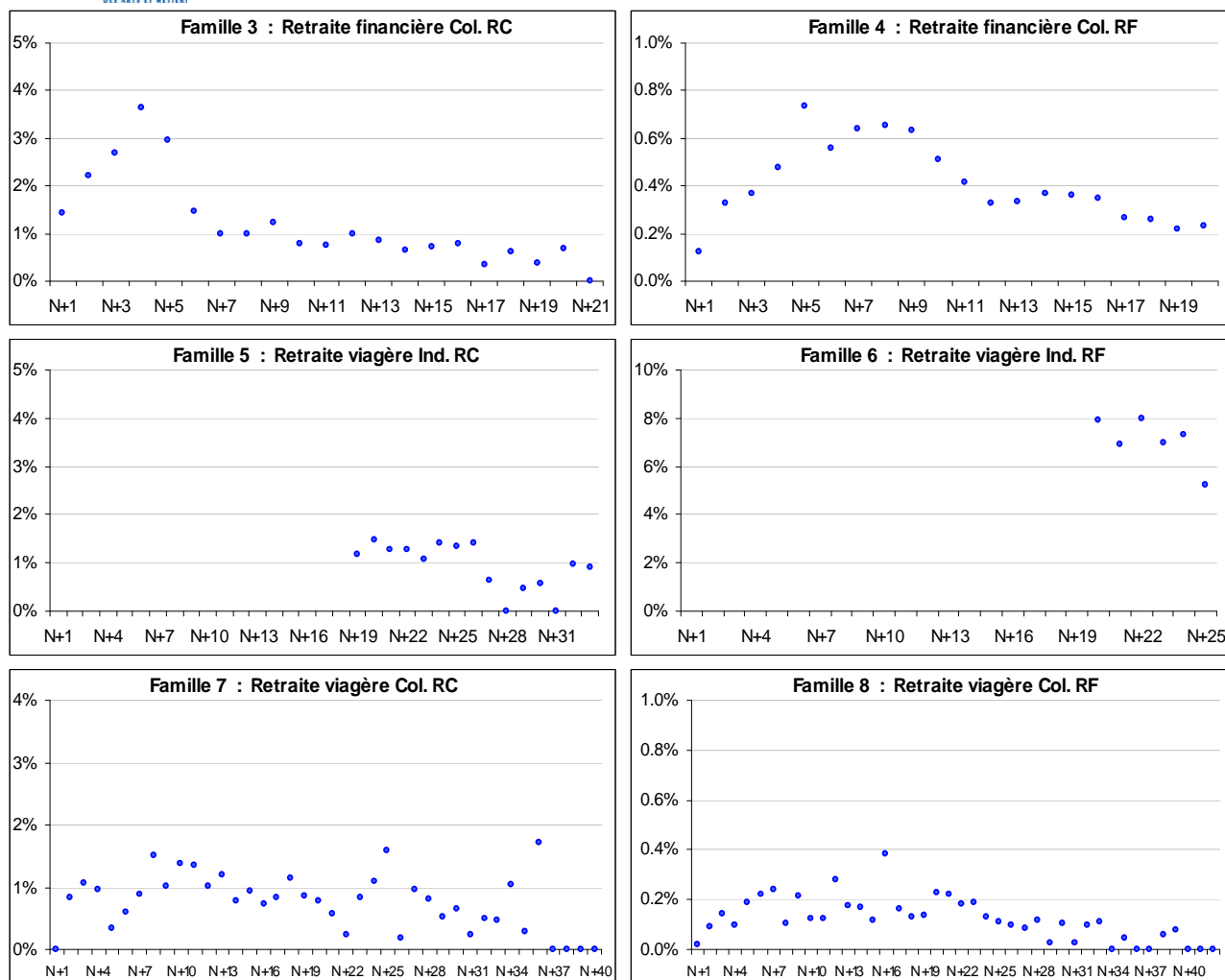
#### 4.1.2 Les lois recherchées

En appliquant la formule définie dans le paragraphe (4.1.1), nous obtenons les taux de rachats totaux suivants par ancienneté :



**Figure 42** - Taux observés de rachats totaux par ancienneté pour les familles 1 à 2

70. Le montant des rachats partiels 2011 ne représente que 1.6% des provisions contractuelles 2010 des contrats de type RC



**Figure 43** - Taux observés de rachats totaux par ancienneté pour les familles 3 à 8

Globalement, les taux observés de rachats totaux sont inférieurs à 5% sauf pour la famille 6 dont le nombre de contrats n'est pas significatif<sup>71</sup>. Après une première analyse graphique, nous constatons que les taux observés de rachats totaux par ancienneté présentent des fluctuations importantes. Nous décidons alors de rechercher des lois de type polynômial pour tenir compte de ces fluctuations. Enfin, nous pouvons observer pour certaines familles<sup>72</sup>, des taux atypiques par rapport à la séquence des taux observés de rachats totaux. Nous prévoyons alors de réaliser une analyse statistique des résidus pour identifier et isoler si possible les taux les plus atypiques dans l'ajustement des taux de rachats totaux.

### 4.1.3 Méthode générale d'ajustement des taux de rachats totaux

Pour l'ajustement des taux observés de rachats totaux, nous proposons de suivre les étapes ci-dessous :

#### **Etape 1** : Approche graphique avec le tableur Excel

L'outil graphique du tableau Excel nous permet de vérifier visuellement que les lois usuelles convexes décroissantes de type logarithmique, exponentielle ou puissance sont moins pertinentes

71. Il y a 321 contrats à l'ouverture 2011 pour la famille 6

72. Voir figure 43 pour les familles 4, 7 et 8

que les lois polynômiales. Nous décidons alors de retenir les modèles de régression polynômiale de degré 3 car en deçà, le modèle n'est pas graphiquement pertinent et au-delà, le  $R^2$  ajusté n'est pas significativement meilleur.

#### **Etape 2** : Ajustement des taux observés de rachats totaux

La détermination des paramètres du modèle de régression polynômiale est réalisée à partir de la procédure REG du progiciel SAS. Cependant, lorsque les taux observés de rachats totaux ne présentent aucune tendance significative<sup>73</sup>, nous décidons de choisir par défaut le modèle moyen pour l'ajustement des taux observés.

#### **Etape 3** : Etude de la qualité globale du modèle de régression linéaire

Après estimation des paramètres du modèle, nous étudions la qualité globale du modèle (Test de Fisher) à partir des informations en sortie standard de la procédure REG. En parallèle, une analyse des résidus est réalisée pour vérifier les hypothèses de validité du test de Student qui permet ensuite d'étudier la significativité des paramètres estimés.

#### **Etape 4** : Test des lois ajustées

Pour valider de manière opérationnelle les lois de rachats ajustées, nous simulons les trois dernières années de versements avec les lois de versements, les lois de rachats totaux et les lois de décès<sup>74</sup>. Les résultats sont ensuite comparés aux montants des versements extraits de la Base Bilan Technique.

## **4.2 La préparation des données**

### **4.2.1 L'extraction des données**

Pour le calcul des taux observés de rachats totaux, nous avons extrait de la Base Bilan Technique les données suivantes sur les exercices 2009 à 2011 :

CLOBIL	la date bilan (variable date au format JJ/MM/AAAA),
NUMCON	le numéro du contrat (variable qualitative),
LIBFMB3	le libellé du produit (variable qualitative),
INDCOL	le type d'adhésion au contrat (variable qualitative binaire : IND ou COL),
TYPREG	le type de produit (variable qualitative binaire : RC ou RF),
INDFIV	le code de la gamme de produit du contrat (variable qualitative),
DATEFF	la date d'effet du contrat (variable date au format JJ/MM/AAAA),
DATEMI	la date d'émission de la prestation (variable date au format JJ/MM/AAAA),
RSQBIL	le risque bilan (variable qualitative),
MONPRS	le montant de la prestation (variable quantitative).

A partir de ces données extraites, nous avons construit les informations suivantes :

GAMME	la gamme de produit (variable binaire : VIAGER ou FINANCIER),
GEN	l'année d'effet du contrat (variable quantitative),
NBR_RACHATS	le nombre de rachats totaux (variable quantitative).

73. Voir figure 43 pour les familles 5 et 6

74. Lois basées sur la mortalité des tables TGH/F05



## 4.2.2 Les données exclues de l'étude

En appliquant la formule des taux de rachats totaux définis au paragraphe (4.1.1), nous avons exclu une partie des données extraites pour l'ajustement des taux observés. A titre d'indication, le tableau ci-dessous récapitule l'ensemble des données 2011 exclues.

**Tableau 29** - Données 2011 exclues de l'ajustement des taux observés de rachats totaux

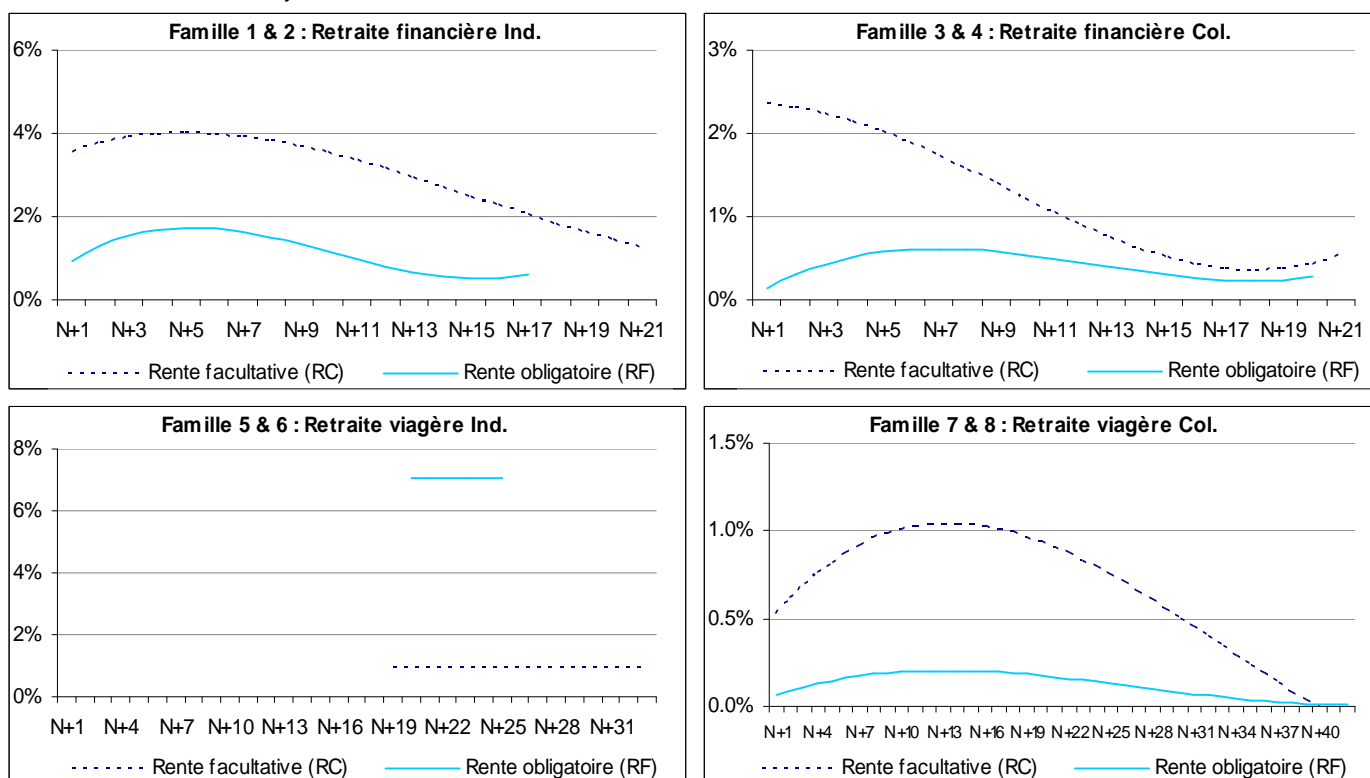
		TYPREG	Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Montants rachats 2011 ( M€ )	Nbr contrats ouverture 2011 exclus	Nbr rachats 2011 Exclus	Montants rachats 2011 exclus ( M€ )
Individuel	Retraite financière hors PERP	RC	1	77 284	29	-	-	-
		RF	2	123 202	43	91	-	-
	Retraite viagère	RC	5	16 905	4	1	1	<0.001
		RF	6	321	1	1	-	-
Collectif	Retraite financière	RC	3	16 776	4	-	-	-
		RF	4	96 881	9	950	5	0.1
	Retraite viagère	RC	7	8 911	2	297	3	0.1
		RF	8	83 767	4	37	-	-
Total				424 047	94	1 377	9	0.2

Les montants exclus de l'ajustement des taux observés de rachats totaux ne sont pas significatifs. Les taux observés de rachats totaux sont donc suffisamment représentatifs pour les familles des contrats étudiées.

## 4.3 Les lois 2011 de rachats totaux ajustées

### 4.3.1 Les rachats totaux

En appliquant la méthode proposée au paragraphe (4.1.3), nous obtenons les lois 2011 de rachats totaux ajustées suivantes :



**Figure 44** - Lois 2011 de rachats totaux ajustées par ancienneté

Nous observons que les taux augmentent globalement dans les premières années du contrat puis baissent au-delà, sauf pour les familles 5 et 6 pour lesquelles nous avons choisi de retenir la loi moyenne, car les taux observés ne présentent aucune tendance. Les taux des contrats de type RC sont globalement deux fois supérieurs à ceux des contrats de type RF dans les premières années du contrat. Cette différence s'explique par le nombre de rachats sociaux des contrats de type RF moins importants que les rachats toutes causes autorisés par les contrats de type RC.

De plus, l'augmentation des rachats dans les premières années peut s'expliquer par un nombre plus important de cessations d'activité des TNS ou des petites et moyennes entreprises qui représentent les principaux souscripteurs des contrats de retraite de La Mondiale.

Enfin, l'effet fiscal en assurance vie peut également être un facteur d'augmentation des rachats totaux puisque le taux de prélèvement forfaitaire libératoire<sup>75</sup> diminue avec la durée du contrat.

### 4.3.2 Etude de la qualité globale des lois ajustées

Pour apprécier la qualité globale des **lois de rachats totaux ajustées**, nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous la valeur des P-values associées au test de Fisher, des facteurs de fiabilité et des R<sup>2</sup> ajustés.

**Tableau 30** - Rachats totaux - Indicateurs de la qualité globale des lois ajustées

		TYPREG	Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Montants rachats 2011 (M€)	Nbr de valeurs retenues (1)	P-value du test F de Fisher	Facteur de fiabilité		R2 ajusté
								Modèle ajusté	Modèle moyen	
Individuel	Retraite financière hors PERP	RC	1	77 284	29	21	<0.01	0.09	0.30	0.90
		RF	2	123 202	43	17	<0.01	0.06	0.38	0.97
	Retraite viagère	RC	5	16 905	4	15	NC	NC	NC	NC
		RF	6	321	1	6	NC	NC	NC	NC
Collectif	Retraite financière	RC	3	16 776	4	21	<0.01	0.36	0.60	0.58
		RF	4	96 881	9	20	<0.01	0.16	0.39	0.81
	Retraite viagère	RC	7	8 911	2	38	<0.01	0.37	0.55	0.47
		RF	8	83 767	4	43	<0.01	0.33	0.57	0.64

(1) Pour le calcul des indicateurs de qualité globale du modèle

NC : Non concerné

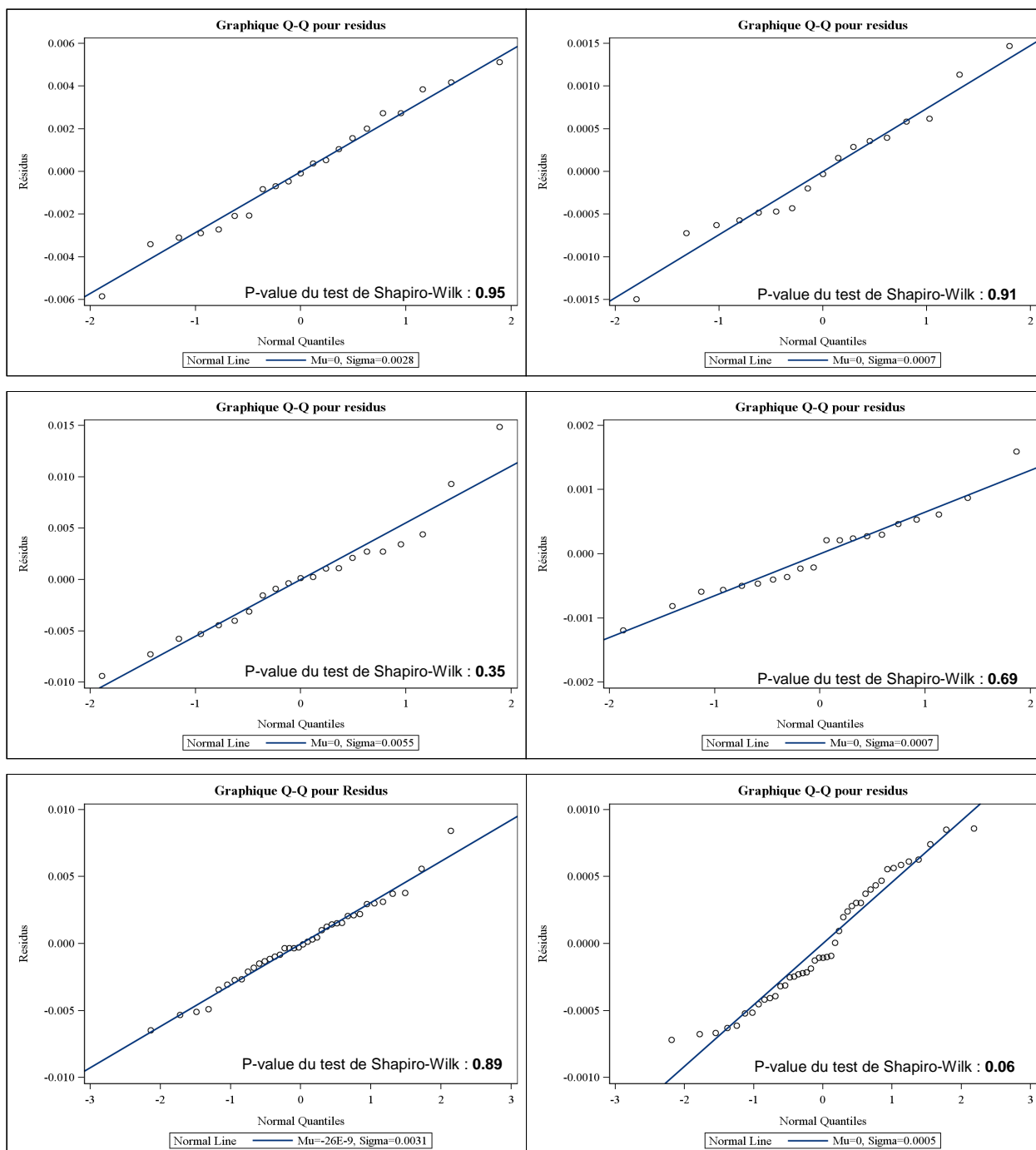
La valeur des P-values nous indique que les modèles ajustés sont globalement significatifs au seuil de 1% d'erreur même pour les familles 3, 7 et 8 dont les R<sup>2</sup> ajusté sont respectivement de 0.58, 0.47 et 0.64. La valeur peu élevée du R<sup>2</sup> ajusté est due soit à la présence de taux observés atypiques (famille 3), soit à la forte fluctuation des taux observés par ancienneté courue (famille 7 et 8).

Avant l'analyse de la significativité des paramètres estimés, nous allons étudier les trois hypothèses nécessaires à la validité du test de Student (normalité, homoscedasticité et non autocorrélation à l'ordre 1 des résidus).

75. Voir le tableau 54 des taux de prélèvement libératoire en assurance-vie à l'annexe 3

### Etude de la normalité des résidus :

Les graphiques Q-Q plot suivants donnent la répartition des quantiles des résidus observés par rapport à celle d'une distribution normale avec indication de la P-value du test de Shapiro-Wilk.



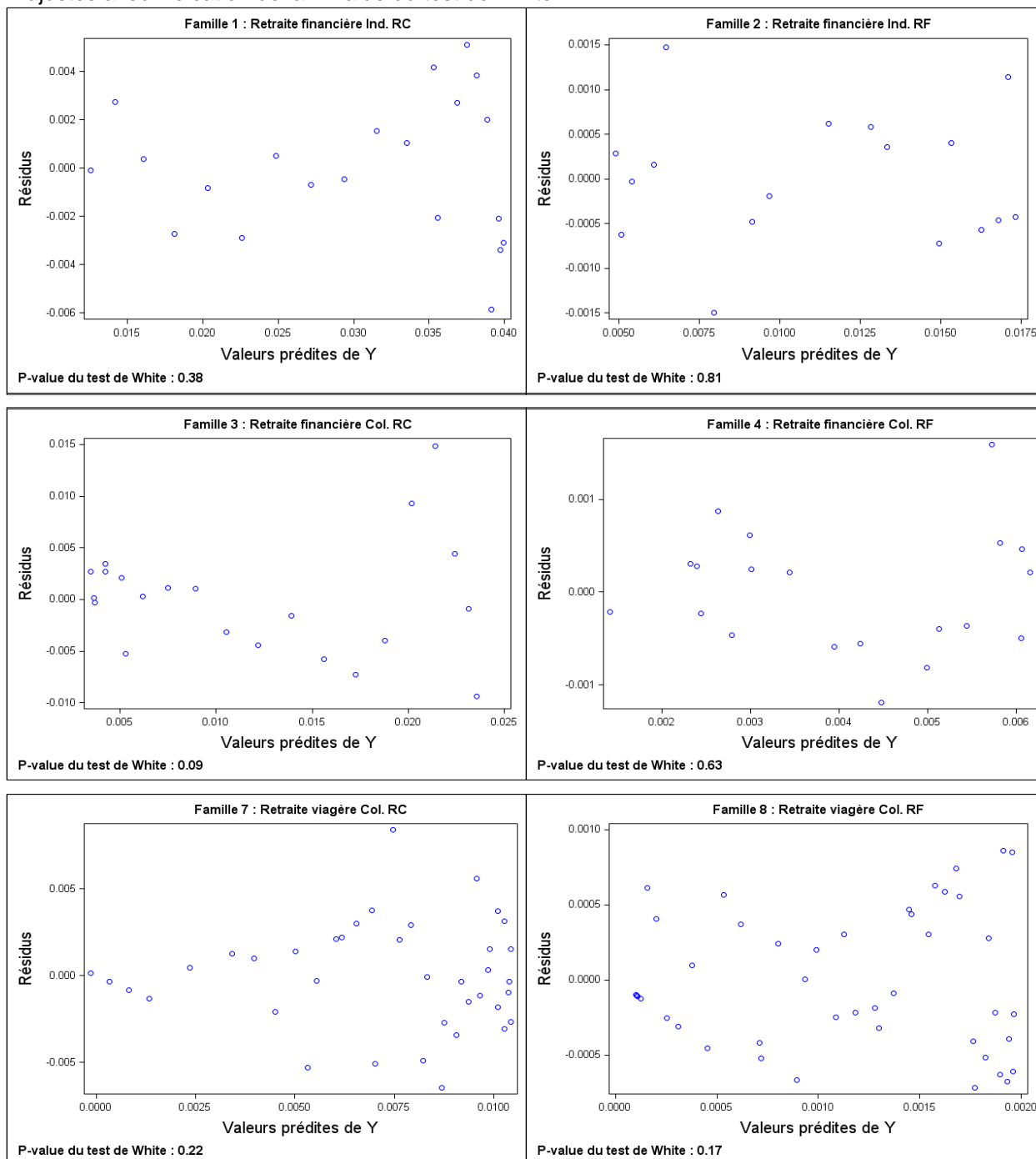
**Figure 45** - Test de normalité des résidus des familles 1, 2, 3, 4, 7 et 8

Nous observons que les quantiles des résidus des familles 1, 2, 3, 4, 7 et 8 sont relativement alignés sur la distribution d'une loi normale et que la valeur des P-values associées au test de Shapiro-Wilk<sup>76</sup> est supérieure à 0.01. **L'hypothèse de normalité de la distribution des résidus pour l'ensemble de ces familles est donc acceptable, au seuil de 1% d'erreur.**

76. Valeur de la P-value du test de Shapiro-Wilk, récupérée en sortie de la procédure UNIVARIATE de SAS

### Etude de l'homoscédasticité des résidus :

Les graphiques suivants représentent les résidus en fonction des valeurs prédites par les modèles ajustés avec indication de la P-value du test de White.



**Figure 46** - Test de l'homoscédasticité des résidus des familles 1, 2, 3, 4, 7 et 8

Nous observons que les résidus sont globalement répartis de façon aléatoire en fonction des valeurs prédites. De plus les P-values associées au test de White<sup>77</sup> sont toutes supérieures à 0.01. **L'hypothèse d'homoscédasticité des résidus pour l'ensemble de ces familles est donc acceptable, au seuil de 1% d'erreur.**

77. Valeur de la P-value du test de White, récupérée en sortie de la procédure REG de SAS

### Etude de la non autocorrélation des résidus à l'ordre 1 :

Il reste à étudier la non autocorrélation des résidus à l'ordre 1 à partir des valeurs de la statistique Dw du test de Durbin-Watson, indiquées en sortie de la procédure REG de SAS avec l'option DW.

**Tableau 31** - Test de Durbin-Watson - Lois de rachats totaux

Famille de contrats	n	k	dL	dU	4-dU	4-dL	Dw	Résultat du test
1	21	3	0.8	1.4	2.6	3.2	1.5	Non rejet de H0
2	17	3	0.7	1.4	2.6	3.3	2.7	Zone d'indétermination
5	15	3	NC	NC	NC	NC	NC	NC
6	6	3	NC	NC	NC	NC	NC	NC
3	21	3	0.8	1.4	2.6	3.2	1.0	Zone d'indétermination
4	20	3	0.8	1.4	2.6	3.2	1.6	Non rejet de H0
7	38	3	1.1	1.5	2.6	2.9	1.8	Non rejet de H0
8	43	3	1.2	1.5	2.5	2.9	2.1	Non rejet de H0

n : Nombre d'observations

k : Nombre de paramètres estimés hors constante

NC : Non concerné

Pour les familles 1, 4, 7 et 8, nous pouvons accepter à 1% d'erreur, l'hypothèse H0 de non autocorrélation des résidus à l'ordre 1 car la statistique Dw est comprise entre dU et 4-dU. Pour la famille 2, nous pouvons également accepter l'hypothèse de non autocorrélation à 1% d'erreur même si la statistique Dw est légèrement au-dessus de l'intervalle de non rejet de H0. Pour la famille 3, la statistique Dw est comprise entre dL et dU. Nous ne pouvons alors ni accepter ni rejeter à 1% d'erreur, l'hypothèse de non autocorrélation.

A la suite des tests sur les résidus, nous complétons l'analyse de la significativité globale des modèles ajustés avec la valeur des P-values associées au test de Student des paramètres estimés.

**Tableau 32** - Rachats totaux - P-values associées au test de Student des paramètres estimés

Famille de contrats	Nbr contrats ouverture 2011	Nbr de valeurs retenues	a0	P-value du t de Student	a1	P-value du t de Student	a2	P-value du t de Student	a3	P-value du t de Student
1	77 284	21	$3.10^{-2}$	<0.01	$3.10^{-3}$	<0.05	$-3.10^{-4}$	<0.05	$8.10^{-6}$	0.07
2	123 202	17	$4.10^{-3}$	<0.01	$6.10^{-3}$	<0.01	$-7.10^{-4}$	<0.01	$2.10^{-5}$	<0.01
4	96 881	20	$-6.10^{-4}$	0.5	$2.10^{-3}$	<0.01	$-2.10^{-4}$	<0.01	$6.10^{-6}$	<0.01
7	8 911	38	$4.10^{-3}$	0.06	$1.10^{-3}$	<0.05	$-5.10^{-5}$	0.9	$5.10^{-7}$	0.3
8	83 767	43	$4.10^{-4}$	0.2	$3.10^{-4}$	<0.01	$-1.10^{-5}$	<0.01	$2.10^{-7}$	<0.01

Nous observons que les paramètres estimés des familles 1 et 2 sont significatifs au seuil de 5% d'erreur puisque les P-values sont inférieures ou proches de 0.05. Pour la famille 3, il n'est pas possible d'utiliser le test de Student car le test de Durbin-Watson n'est pas concluant. Nous avons alors utilisé la procédure NLIN pour obtenir un intervalle de confiance des paramètres estimés et au final, ils ne sont pas significatifs au seuil de 5%. Enfin, les paramètres estimés des familles 4, 7 et 8 ne sont pas tous significatifs<sup>78</sup> au seuil de 5%.

Les paramètres estimés des lois de rachats totaux sont donc moins significatifs que ceux des versements et ce résultat s'explique notamment par la structure moins régulière des taux observés de rachats avec la présence de points atypiques que nous pouvons observer sur la figure 43.

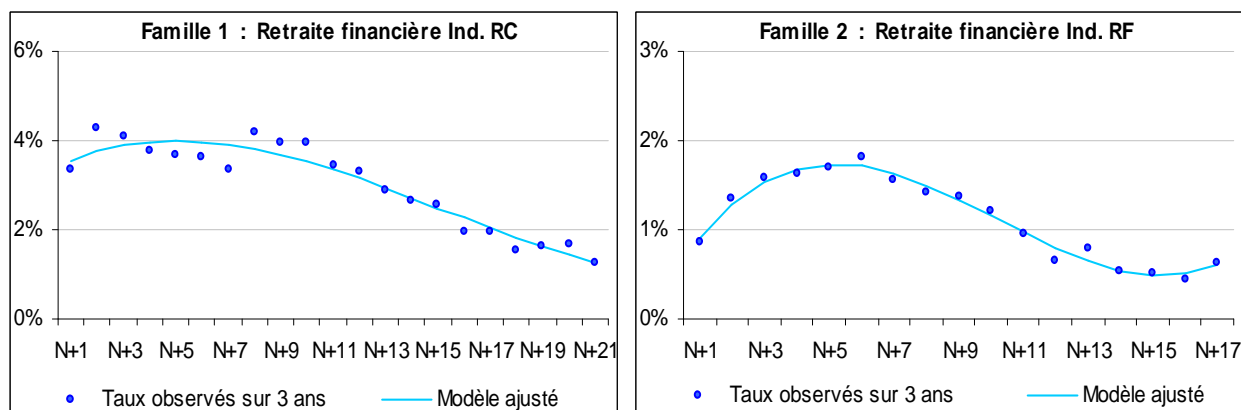
**Au final, nous décidons de maintenir les lois de rachats totaux ajustées de la figure 44 car les modèles sont globalement significatifs.**

78. Voir la valeur des P-values du tableau 32

## 4.4 Le détail des lois 2011 de rachats totaux

Nous allons préciser dans cette partie l'expression mathématique<sup>79</sup> des lois 2011 de rachats totaux ajustées et les figures associées permettront d'apprécier graphiquement l'ajustement aux données observées.

### 4.4.1 Des contrats individuels de retraite financière



**Figure 47** - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 1 et 2

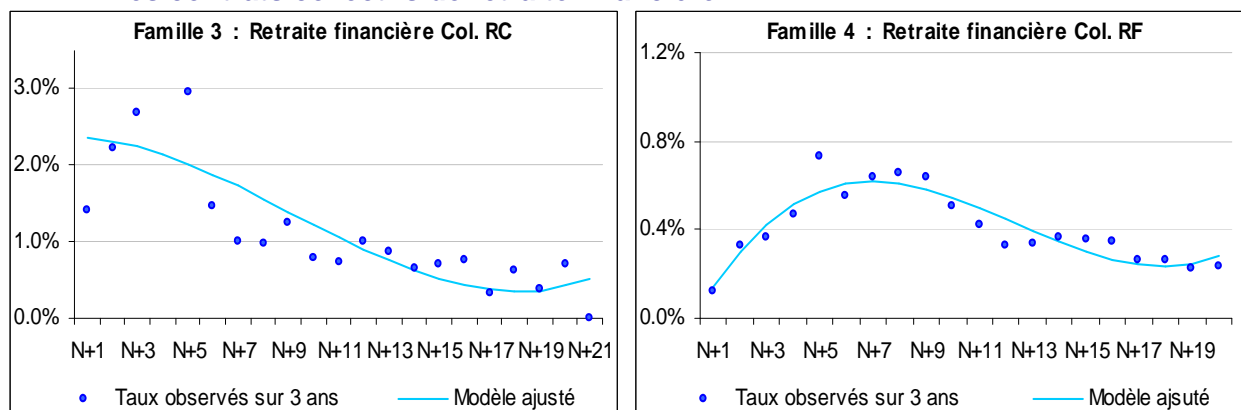
- Pour la famille 1, ajustement sur [N+1;N+21] :

$$Y = (3.300 * 10^{-2}) + (2.916 * 10^{-3}) * X - (3.439 * 10^{-4}) * X^2 + (7.553 * 10^{-6}) * X^3$$

- Pour la famille 2, ajustement sur [N+1;N+17] :

$$Y = (4.100 * 10^{-3}) + (5.758 * 10^{-3}) * X - (7.444 * 10^{-4}) * X^2 + (2.427 * 10^{-5}) * X^3$$

### 4.4.2 Des contrats collectifs de retraite financière



**Figure 48** - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 3 et 4

- Pour la famille 3, ajustement sur [N+1;N+21] :

$$Y = (2.361 * 10^{-2}) + (1.375 * 10^{-4}) * X - (2.003 * 10^{-4}) * X^2 + (7.250 * 10^{-6}) * X^3$$

- Pour la famille 4, ajustement sur [N+1;N+20] :

$$Y = (-5.931 * 10^{-4}) + (2.219 * 10^{-3}) * X - (2.205 * 10^{-4}) * X^2 + (5.902 * 10^{-6}) * X^3$$

79. Les paramètres estimés des modèles de régression linéaire ont été déterminés avec la procédure REG de SAS

#### 4.4.3 Des contrats individuels de retraite viagère

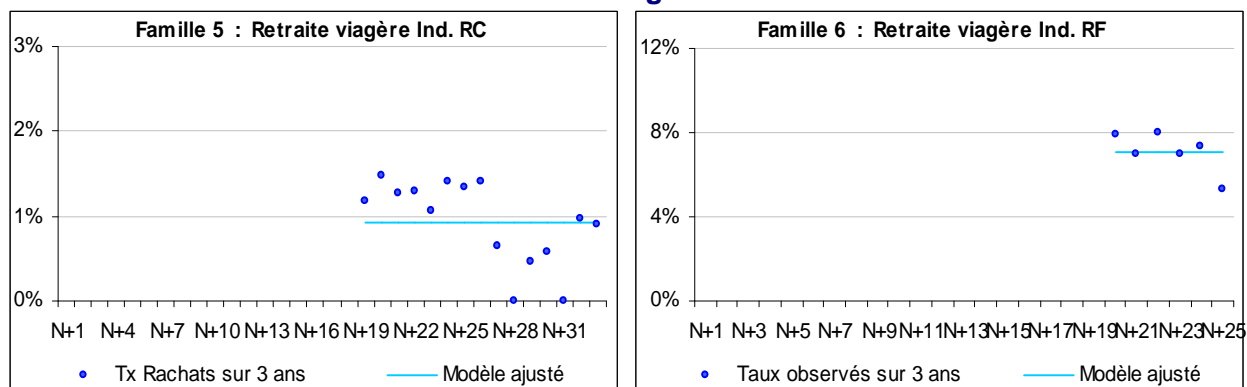


Figure 49 - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 5 et 6

- Pour la famille 5, l'historique des taux observés de rachats totaux n'est pas suffisant pour en déduire une tendance. Nous avons alors retenu le modèle moyen  $Y=0.93\%$  ajusté sur  $[N+19;N+33]$ .
- De même pour la famille 6, nous avons retenu le modèle moyen  $Y=7.07\%$  ajusté sur  $[N+20;N+25]$ .

#### 4.4.4 Des contrats collectifs de retraite viagère

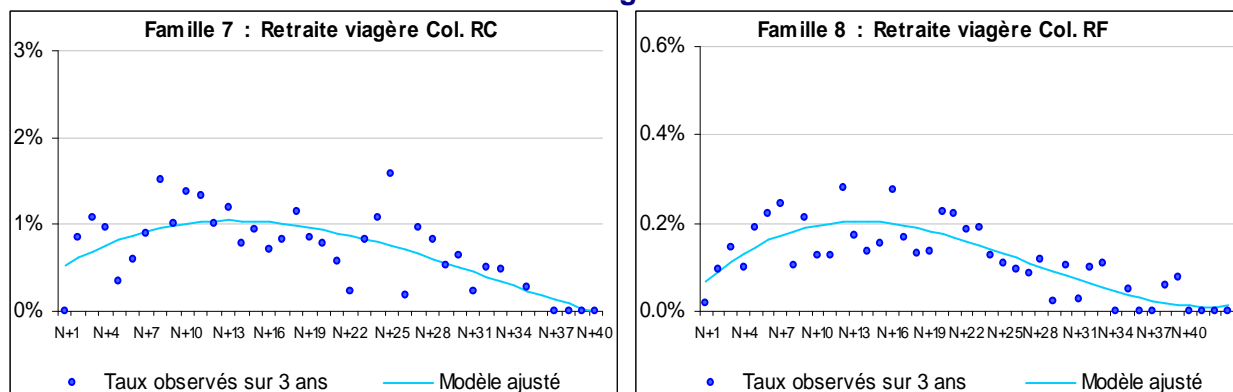


Figure 50 - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 7 et 8

- Pour la famille 7, nous avons exclu de la régression les taux respectivement observés<sup>80</sup> en N+34 (1.1%) et en N+36 (1.7%). Les taux observés ont ensuite été ajustés sur  $[N+1;N+40]$  :  

$$Y = (4.381 * 10^{-3}) + (9.866 * 10^{-4}) * X - (4.626 * 10^{-5}) * X^2 + (4.690 * 10^{-7}) * X^3$$
- Pour la famille 8, nous avons exclu les données<sup>81</sup> des contrats d'effet 1995 parce qu'ils sont non significatifs en nombre et que leur niveau de taux est trop atypique par rapport aux autres générations. Les taux observés ont ensuite été ajustés sur  $[N+1;N+43]$  :

$$Y = (4.771 * 10^{-4}) + (2.533 * 10^{-4}) * X - (1.268 * 10^{-5}) * X^2 + (1.530 * 10^{-7}) * X^3$$

### 4.5 Les simulations avec les lois 2011 de versements et de rachats totaux

L'objet de cette partie est de tester la pertinence des lois 2011 de versements et de rachats totaux ajustées, déterminées à partir des observations sur 2009-2011, en simulant les primes brutes 2011 à partir des contrats d'ouverture 2010 et 2009.

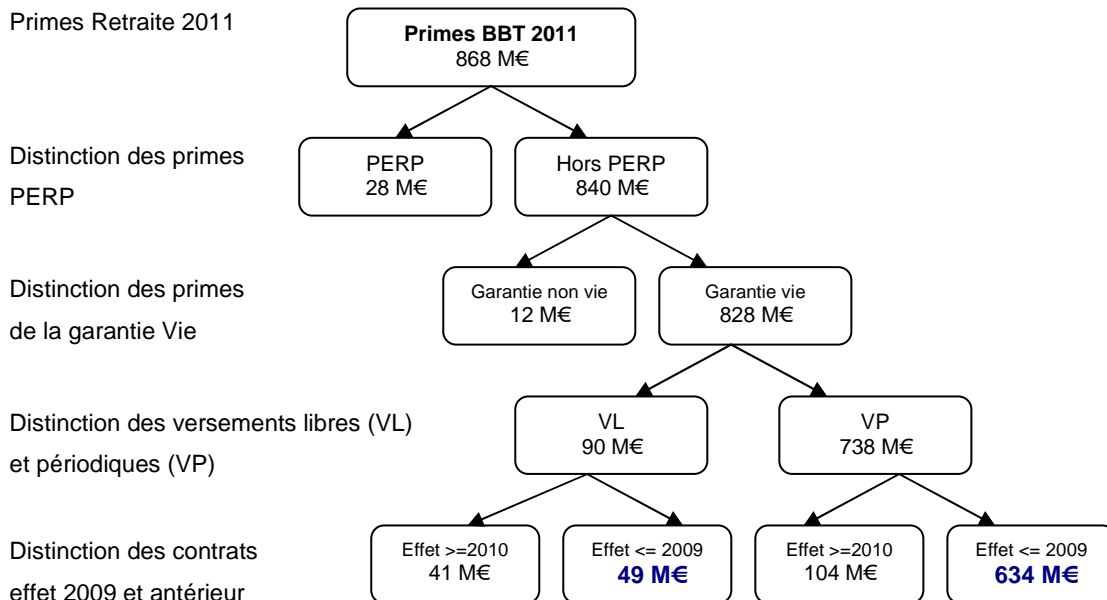
80. Taux trop atypiques, calculés sur une assiette de moins de 400 contrats à l'ouverture

81. Incluses dans les exclusions du tableau 29

#### 4.5.1 La détermination des montants réels

Nous allons déterminer les montants réels des simulations à partir des contrats d'ouverture 2010 et 2009.

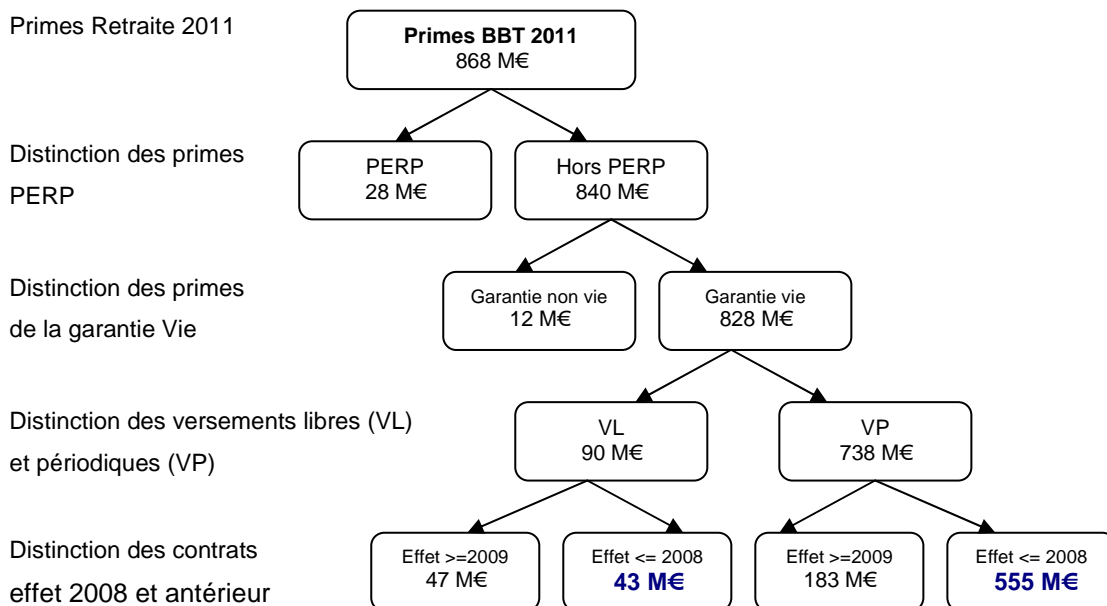
##### 4.5.1.1 Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2010



**Schéma 9** - Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2010

Le montant réel des versements périodiques (resp. libres) 2011 à simuler à partir des contrats d'ouverture 2010 est de **634 M€**(resp. **49 M€**).

##### 4.5.1.2 Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2009

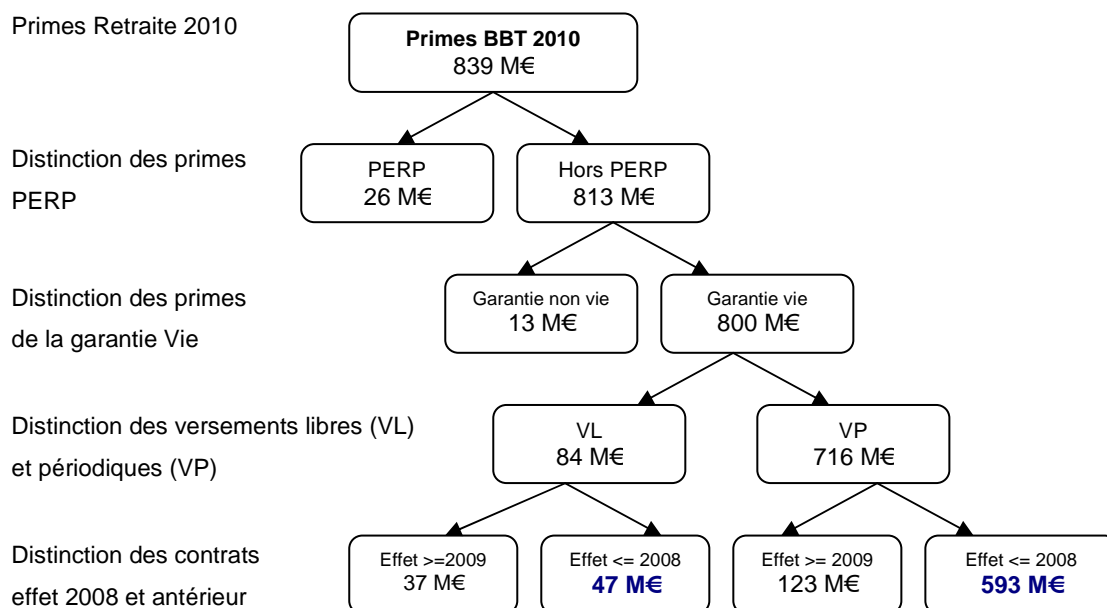


**Schéma 10** - Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2009

Le montant réel des versements périodiques (resp. libres) 2011 à simuler à partir des contrats d'ouverture 2009 est de **555 M€**(resp. **43 M€**).



### 4.5.1.3 Montants réels 2010 des contrats d'ouverture 2009



**Schéma 11** - Montants réels 2010 des contrats d'ouverture 2009

Le montant réel des versements périodiques (resp. libres) 2010 à simuler à partir des contrats d'ouverture 2009 est de **593 M€** (resp. **47 M€**).

## 4.5.2 Le résultat des simulations

### 4.5.2.1 A partir des contrats d'ouverture 2010

Après avoir déterminé les montants réels, nous avons simulé successivement les versements bruts 2010 et 2011 des contrats d'ouverture 2010 en tenant compte :

- des lois 2011 de versements périodiques,
- des lois 2011 de versements libres,
- des lois 2011 de rachats totaux,
- des sorties de contrats pour décès selon les tables TGH/F05 à 100%,
- et des sorties au terme du contrat.

Les rachats totaux et la mortalité ont été intégrés dans le calcul du nombre de contrats d'ouverture selon la formule :

$$\text{Nbr\_Ctr\_Ouv}_k^{\text{Anc}} = \text{Nbr\_Ctr\_Ouv}_k^{\text{Anc}-1} \cdot (1 - \text{Tx\_Rac}_k^{\text{Anc}-1}) \cdot p_{x^{\text{Anc}-1}} \text{ pour } \text{Anc} \geq 2,$$

avec  $x^{\text{Anc}}$  l'âge de l'assuré en début d'année des contrats d'ancienneté Anc et

$p_{x^{\text{Anc}-1}}$  la probabilité de survie des assurés à l'âge  $x^{\text{Anc}-1}$  calculée sur les TGH/F05.

Les résultats des simulations sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 33** - Simulation des primes 2011 et 2010 à partir des contrats d'ouverture 2010

Exercice comptable	2011	2010
Année d'effet du contrat	2009 et antérieure	2009 et antérieure
<b>Reversements cibles (M€)</b>	<b>683</b>	<b>746</b>
dont versements périodiques cibles (M€)	634	682
dont versements libres cibles (M€)	49	64
<b>Reversements simulés (M€)</b>	<b>684</b>	<b>746</b>
dont versements périodiques simulés (M€)	633	684
dont versements libres simulés (M€)	52	62
<b>Écarts en montant (M€)</b>	<b>-1.8</b>	<b>-0.7</b>
dont versements périodiques (M€)	1.4	-2.7
dont versements libres (M€)	-3.2	1.9
<b>Écarts en %</b>	<b>-0.3%</b>	<b>-0.1%</b>
dont versements périodiques	0.2%	-0.4%
dont versements libres	-6.5%	3.0%

Nous observons à nouveau qu'une partie des écarts de simulation des versements périodiques est compensée par les écarts des versements libres. Au final, les écarts en pourcentage sur les deux dernières années se situent entre -0.3% et -0.1% du montant des versements réels. La simulation successive des versements bruts des contrats d'ouverture 2010 à partir des lois 2011 de versements (périodiques et libres) et de rachats totaux ajustés est donc satisfaisante.

#### 4.5.2.2 A partir des contrats d'ouverture 2009

Sur le même principe qu'au paragraphe précédent, nous avons simulé successivement les versements bruts 2009, 2010 et 2011 des contrats d'ouverture 2009.

**Tableau 34** - Simulation des primes 2011, 2010 et 2009 à partir des contrats d'ouverture 2009

Exercice comptable	2011	2010	2009
Année d'effet du contrat	2008 et antérieure	2008 et antérieure	2008 et antérieure
<b>Reversements cibles (M€)</b>	<b>599</b>	<b>640</b>	<b>712</b>
dont versements périodiques cibles (M€)	555	593	659
dont versements libres cibles (M€)	43	47	53
<b>Reversements simulés (M€)</b>	<b>601</b>	<b>635</b>	<b>711</b>
dont versements périodiques simulés (M€)	555	591	655
dont versements libres simulés (M€)	46	45	55
<b>Écarts en montant (M€)</b>	<b>-2.2</b>	<b>4.6</b>	<b>0.8</b>
dont versements périodiques (M€)	0.9	2.3	3.3
dont versements libres (M€)	-3.0	2.3	-2.5
<b>Écarts en %</b>	<b>-0.4%</b>	<b>0.7%</b>	<b>0.1%</b>
dont versements périodiques	0.2%	0.4%	0.5%
dont versements libres	-7.0%	4.9%	-4.7%

Nous observons que les écarts en pourcentage sur les trois dernières années se situent entre -0.4% et 0.7% du montant des versements réels. La simulation successive des versements bruts des contrats d'ouverture 2009 à partir des lois 2011 de versements (périodiques et libres) et de rachats totaux ajustés est également satisfaisante.

**Ainsi nous avons déterminé des lois de versements périodiques, de versements libres et de rachats totaux. Nous avons ensuite testé de façon satisfaisante ces lois ajustées sur notre portefeuille de retraite pour les contrats d'ouverture 2009, 2010 et 2011.**

**Nous pouvons donc considérer que les lois 2011 de versements et de rachats totaux ajustées sont suffisamment robustes pour le chiffrage du coût d'écart de table.**

**Nous allons maintenant, après un rappel de la problématique, présenter tout d'abord les formules de calcul puis les paramètres de simulation et enfin les études de sensibilité autour d'un scénario choisi réaliste.**

# CHAPITRE 5

## LE CHIFFRAGE DU COUT D'ECART DE TABLE

### 5.1 Rappel de la problématique

Le portefeuille de La Mondiale se compose de contrats de retraite avec une rente garantie au terme selon une table qui peut être différente des TGH/F05 et l'écart de provisions doit alors être évalué et provisionné pour tenir compte de l'allongement continu de la durée de la vie. Pour les rentes viagères, le Code des assurances (art. A 335-1) impose aux assureurs de provisionner sur les dernières tables de mortalités TGH/F05 à partir du 01/01/07. Pour les rentes émises avant cette date, une période transitoire de 15 ans est autorisée pour mettre à niveau les provisions. Le tableau suivant donne les principales tables utilisées<sup>82</sup> en France :

**Tableau 35** - Les principales tables de mortalité réglementaires utilisées en France

Table	Type	Base d'observation	Utilisation	Source
PF 60/64 et PM 60/64	Table de mortalité instantanée	Mortalité de la population féminine (PF) et masculine (PM) française observée par l'INSEE sur la période 1960-1964	Tarification et provisionnement du risque en fonction du sexe	-
TV 73/77 et TD 73/77	Table de mortalité instantanée	Mortalité de la population féminine (TV) et masculine (TD) française observée par l'INSEE sur la période 1973-1977	Tarification et provisionnement du risque Vie y compris rente (TV) et Décès (TD) à partir du 01/01/86	-
TV 88/90 et TD 88/90	Table de mortalité instantanée	Mortalité de la population féminine (TV) et masculine (TD) française observée par l'INSEE sur la période 1988-1990	Tarification et provisionnement du risque Vie (TV) et Décès (TD) hors Rente à partir du 01/07/93	Arrêté du 27/04/1993 relatif aux tables de mortalité
TPG 93	Table de mortalité prospective	Mortalité prospective de la population féminine française observée par l'INSEE sur la génération 1950	Tarification et provisionnement des rentes avec décalage d'âges à partir du 01/07/93	Arrêté du 28/07/1993 relatif aux tables de mortalité
TF 00-02 et TH 00-02	Table de mortalité instantanée	Mortalité de la population féminine (TF) et masculine (TH) française observée par l'INSEE sur la période 2000-2002	En remplacement de la table TV 88-90 (TF) et TD 88-90 (TH) à partir du 01/01/06	Arrêté du 20/12/2005 relatif aux tables de mortalité
TGF 05 et TGH 05	Table de mortalité prospective	Mortalité prospective de la population féminine (TGF) et masculine (TGH) observée sur une population de rentiers assurés d'entreprises d'assurances	En remplacement de la table TPG 93 à partir du 01/01/07 pour les compagnies d'assurances et du 01/01/08 pour les mutuelles et les instituts de prévoyance	Arrêtés du 01/08/2006, du 08/12/2006 et du 21/12/2006 relatifs aux tables de mortalité applicables respectivement aux compagnies d'assurances, aux mutuelles et aux instituts de prévoyance

Pour observer l'impact d'une table sur le tarif d'une rente viagère, nous nous proposons de déterminer le coût d'une rente trimestrielle de 100€ à terme échu, pour un individu de 67 ans, un taux technique à 2% et un taux de chargements sur arrérages de 3%.

La prime unique notée PU s'écrit alors  $PU = 100 \cdot (1 + 3\%) \cdot a_{67}^{(4)}$  où  $a_{67}^{(4)}$  est le coût d'une rente viagère de 1€ payable trimestriellement à terme échu pour un assuré de 67 ans.

82. Les assureurs peuvent aussi utiliser une table d'expérience qui doit être plus prudente, établie ou non par sexe sur leurs données et certifiée par un actuaire indépendant agréé par l'une des associations d'actuaire reconnues par l'institut des Actuaire

Le tableau ci-dessous donne la PU tarifée aux tables TGH 05, TPG 93, TH 00-02 et TD 88/90.

**Tableau 36** - Impact des tables de mortalité sur le coût d'une rente trimestrielle à terme échu pour un homme de 67 ans

Tables de mortalité	TGH 05	TPG 93	TH 00-02	TD 88/90
$a_{67}^{(4)}$	20.203	19.821	12.753	11.725
Montant rente trimestrielle (€)	100	100	100	100
Prime Unique (€)	2 081	2 042	1 314	1 208
Ecart en % par rapport à la TD 88/90	72%	69%	9%	
Ecart en % par rapport à la TH 00-02	58%	55%		
Ecart en % par rapport à la TPG93	2%			

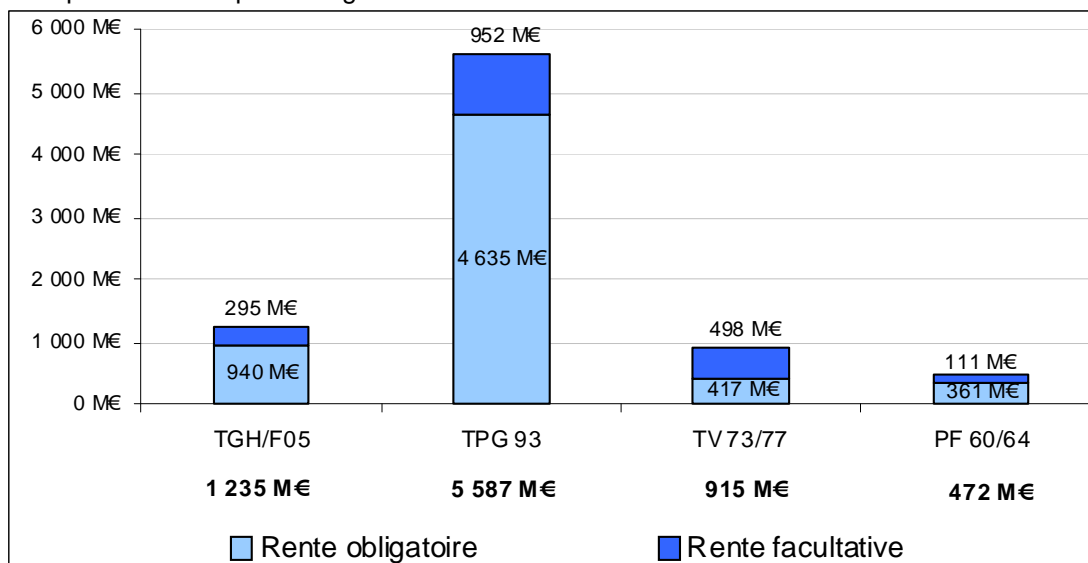
Le tableau ci-dessous donne la PU tarifée aux tables TGF 05, TPG 93, TF 00-02 et TV 88/90.

**Tableau 37** - Impact des tables de mortalité sur le coût d'une rente trimestrielle à terme échu pour une femme de 67 ans

Tables de mortalité	TGF 05	TPG 93	TF 00-02	TV 88/90
$a_{67}^{(4)}$	22.513	19.821	15.765	14.668
Montant rente trimestrielle (€)	100	100	100	100
Prime Unique (€)	2 319	2 042	1 624	1 511
Ecart en % par rapport à la TV 88/90	53%	35%	7%	
Ecart en % par rapport à la TF 00-02	43%	26%		
Ecart en % par rapport à la TPG93	14%			

Nous observons que la prime unique est plus élevée<sup>83</sup> pour les femmes et les dernières tables réglementaires TGH/F05. **De plus, les écarts en pourcentage entre les TGH/F05 et les anciennes tables ne sont pas négligeables.** Ces deux tableaux montrent donc toute l'importance de la table de provisionnement car en cas de dérive de la mortalité, l'assureur peut être confronté à des pertes techniques non anticipées.

Le tableau ci-dessous donne la **provision (hors versements) au 31/12/2011** des contrats de retraite par table de liquidation garantie contractuellement au terme.



**Figure 51** - Provisions non zillmétrisées au 31/12/2011 des rentes en cours de constitution par table de liquidation

83. Mortalité moins élevée pour les femmes et prise en compte de l'allongement de la durée de la vie dans les dernières tables TGH/F05

Le montant des provisions non zillmériées<sup>84</sup> au 31/12/2011 est de 8 209 M€ et se répartit principalement à 85% sur les tables de liquidation antérieures aux TGH/F05. La part des TPG 93 à la liquidation représente 68% et provient de contrats commercialisés avant 2007 pour lesquels il était encore possible de proposer une garantie de table au niveau de la TPG 93 pour le calcul de la rente au terme. **Il y a donc un risque de perte technique pour ces contrats sur la période de liquidation.**

Pour garantir au mieux ses engagements, La Mondiale renforce progressivement le niveau des provisions de rentes en cours de constitution vers les tables TGH/F05 plus prudentes que les anciennes tables. Le tableau ci-dessous donne au 31/12/2011, le complément d'écart de table aux TGH/F05 par rapport au tarif contractuel sur les versements effectués.

**Tableau 38** - Compléments d'écart de tables aux TGH/F05 au 31/12/2011 dans les comptes sociaux

Contrats	Type de sortie	Provision au tarif contractuel (M€)	Complément déjà constitué aux tables TGH/F05 (M€)	Complément restant à constituer aux tables TGH/F05 (M€)
Rente en cours de constitution	Rente obligatoire (RF)	6 293	281	95
	Rente facultative (RC)	1 839	0	33
<b>Total</b>		<b>8 132</b>	<b>281</b>	<b>128</b>

Sur les versements effectués, La Mondiale a enregistré sur l'exercice 2011, 281 M€ de provisions complémentaires dans les comptes sociaux et 128 M€ dans les comptes consolidés. **Pour les versements, nous nous proposons dans ce dernier chapitre de présenter une méthode précise et souple de chiffrage du coût d'écart de table à partir des lois comportementales déterminées dans les chapitres précédents.**

Pour le chiffrage, nous avons besoin des données<sup>85</sup> suivantes :

<i>CLOBIL</i>	<i>la date bilan (variable date au format JJ/MM/AAAA),</i>
<i>NUMCON</i>	<i>le numéro du contrat (variable qualitative),</i>
<i>NUMPER</i>	<i>le numéro d'identification du premier assuré (variable qualitative),</i>
<i>LIBFMB3</i>	<i>le libellé du produit (variable qualitative),</i>
<i>INDCOL</i>	<i>le type d'adhésion au contrat (variable qualitative binaire: IND ou COL),</i>
<i>TYPREG</i>	<i>le type de produit (variable qualitative binaire: RC ou RF),</i>
<i>LIBTAR</i>	<i>le libellé du tarif de rente à la liquidation (variable qualitative),</i>
<i>i</i>	<i>le taux technique du tarif de rente à la liquidation (variable quantitative),</i>
<i>i_C</i>	<i>le taux technique du tarif en cours de constitution (variable quantitative),</i>
<i>CODSEX</i>	<i>le sexe du premier assuré (variable binaire: M ou F),</i>
<i>GAMME</i>	<i>la gamme de produit (variable binaire: VIAGER ou FINANCIER),</i>
<i>GEN</i>	<i>l'année d'effet du contrat (variable quantitative),</i>
<i>ANNEE_TERME</i>	<i>l'année terme du contrat (variable quantitative),</i>
<i>ANC</i>	<i>l'ancienneté du contrat par différence de millésime (variable quantitative),</i>
<i>x</i>	<i>l'âge arrondi<sup>86</sup> du premier assuré (variable quantitative) au 31/12/2011,</i>

84. Le montant de l'écart de Zillmer est de 77 M€ au 31/12/2011

85. Les données en italique sont extraites et les autres sont construites à partir des informations de la Base Bilan Technique

86. Si  $x - \text{Int}(x) \geq 0.5$  alors  $x = \text{Int}(x) + 1$  sinon  $x = \text{Int}(x)$  où  $x = (31/12/2011 - \text{Date naissance du premier assuré}) / 365,25$

Dur_r	la durée restante arrondie <sup>87</sup> du contrat (variable quantitative) au 31/12/2011,
x_terme	l'âge arrondi <sup>88</sup> du premier assuré (variable quantitative) au terme du contrat,
GEN_x	l'année de naissance du premier assuré (variable quantitative),
NBR_CTR	le nombre de contrats en cours à la date bilan (variable quantitative),
$p_x$ à $p_{x+60}$	les probabilités de survie aux âges $x$ à $x+60$ sur la TGH/F05 (scalaire),
$a_{x\_terme}^{TG,i(4)}$	l'annuité d'une rente viagère trimestrielle 1T à terme échu calculée aux tables TGH/F05, au taux $i$ et à l'âge $x\_terme$ (scalaire),
$a_{x\_terme}^{TC,i(4)}$	l'annuité d'une rente viagère trimestrielle 1T à terme échu calculée aux tables contractuelles, au taux $i$ et à l'âge $x\_terme$ (scalaire),
$a_{x\_terme, y\_terme}^{TG,i(4)}$	l'annuité d'une rente viagère trimestrielle 2T à terme échu calculée aux tables TGH/F05, au taux $i$ et aux âges $x\_terme$ et $y\_terme$ (scalaire),
$a_{x\_terme, y\_terme}^{TC,i(4)}$	l'annuité d'une rente viagère trimestrielle 2T à terme échu calculée aux tables contractuelles, au taux $i$ et aux âges $x\_terme$ et $y\_terme$ (scalaire),
$a_{x\_terme\ 1T\ NTG}^{TG,i(4)}$	l'annuité d'une rente viagère trimestrielle 1T à terme échu et trimestrialités garanties calculée aux tables TGH/F05, au taux $i$ et à l'âge $x\_terme$ (scalaire),
$a_{x\_terme\ 1T\ NTG}^{TC,i(4)}$	l'annuité d'une rente viagère trimestrielle 1T à terme échu et trimestrialités garanties calculée aux tables contractuelles, au taux $i$ et à l'âge $x\_terme$ (scalaire).

Les données ont été regroupées dans un fichier intitulé « Données d'entrée 2011 » à partir duquel sont calculés successivement les montants :

- des versements bruts
  - des versements nets
  - de la provision terme issue des versements
  - du coût d'écart de table actualisé au 31/12/2011.
- || pour les exercices 2012 jusqu'à  $\text{Min}(60; \text{Dur}_r)$

Les paragraphes suivants détaillent les formules<sup>89</sup> de calcul des versements nets, de la provision terme et du coût d'écart de table que nous avons programmées dans notre moteur de calcul sous SAS.

## 5.2 Les formules de calcul

### 5.2.1 Du montant net des versements

Notons :

$\text{Mnt\_rev\_net\_VP}_k$  le montant net des versements périodiques de l'exercice  $k$ ,

87. Même principe que pour le calcul de  $x$  avec  $\text{Dur}_r = (\text{Date terme du contrat} - 31/12/2011) / 365,25$

88. Même principe que pour le calcul de  $x$  avec  $x\_terme = (\text{Date terme du contrat} - \text{Date naissance du premier assuré}) / 365,25$

89. La formule de calcul du montant de versements bruts a été définie au paragraphe (3.6.1)

Mnt_rev_net_VP_FG <sub>k</sub>	le montant net investi en fonds général des versements périodiques de l'exercice k,
Mnt_rev_net_VP_UC <sub>k</sub>	le montant net investi en unités de compte des versements périodiques de l'exercice k,
Mnt_rev_net_VL <sub>k</sub>	le montant net des versements libres de l'exercice k,
Mnt_rev_net_VL_FG <sub>k</sub>	le montant net investi en fonds général des versements libres de l'exercice k,
Mnt_rev_net_VL_UC <sub>k</sub>	le montant net investi en unités de compte des versements libres de l'exercice k,
%UC_PP <sup>Gen</sup>	le taux 2011 des versements périodiques investis en unité de compte, observé par famille de contrats et génération Gen,
%UC_VL <sup>Gen</sup>	le taux 2011 des versements libres investis en unité de compte, observé par famille de contrats et génération Gen,
Taux <sub>Pri</sub>	le taux 2011 de chargements d'acquisition, observé par famille de contrats.

Le montant des versements périodiques nets de l'exercice k est défini par la formule :

$$\begin{aligned} \text{Mnt\_rev\_net\_VP}_k &= \text{Mnt\_rev\_net\_VP\_FG}_k + \text{Mnt\_rev\_net\_VP\_UC}_k \\ \text{avec } \text{Mnt\_rev\_net\_VP\_FG}_k &= \sum_{\text{Anc}} \left( \text{Mnt\_rev\_brut\_VP}_k^{\text{Anc}} \cdot (1 - \% \text{UC\_VP}^{\text{Gen}}) \cdot (1 - \text{Taux}_{\text{Pri}}) \right) \\ \text{Mnt\_rev\_net\_VP\_UC}_k &= \sum_{\text{Anc}} \left( \text{Mnt\_rev\_brut\_VP}_k^{\text{Anc}} \cdot (\% \text{UC\_VP}^{\text{Gen}}) \cdot (1 - \text{Taux}_{\text{Pri}}) \right) \end{aligned}$$

De façon similaire, le montant des versements libres nets de l'exercice k est défini par la formule :

$$\begin{aligned} \text{Mnt\_rev\_net\_VL}_k &= \text{Mnt\_rev\_net\_VL\_FG}_k + \text{Mnt\_rev\_net\_VL\_UC}_k \\ \text{avec } \text{Mnt\_rev\_net\_VL\_FG}_k &= \sum_{\text{Anc}} \left( \text{Mnt\_rev\_brut\_VL}_k^{\text{Anc}} \cdot (1 - \% \text{UC\_VL}^{\text{Gen}}) \cdot (1 - \text{Taux}_{\text{Pri}}) \right) \\ \text{Mnt\_rev\_net\_VL\_UC}_k &= \sum_{\text{Anc}} \left( \text{Mnt\_rev\_brut\_VL}_k^{\text{Anc}} \cdot (\% \text{UC\_VL}^{\text{Gen}}) \cdot (1 - \text{Taux}_{\text{Pri}}) \right) \end{aligned}$$

Remarques<sup>90</sup> :

- Pour le calcul des versements bruts périodiques  $\text{Mnt\_rev\_brut\_VP}_k^{\text{Anc}}$ , nous avons indexé de 1% par an le montant moyen observé en 2011 par ancienneté.
- En revanche, nous n'avons pas retenu d'indexation pour le calcul des versements bruts libres  $\text{Mnt\_rev\_brut\_VL}_k^{\text{Anc}}$ .

90. Voir le tableau 39 du paragraphe (5.4.1)



## 5.2.2 De la provision terme

Notons :

$Taux_{RemFG}$	le taux brut de rémunération des engagements hors UC (scalaire),
$Taux_{EvoUC}$	le taux d'évolution des unités de compte (scalaire),
$Taux_{Enc}$	le taux de chargements de gestion (scalaire),
$PM\_terme\_rev\_VP$	la provision terme des versements périodiques,
$PM\_terme\_rev\_VP_{FG}$	la provision terme des versements périodiques en fonds général,
$PM\_terme\_rev\_VP_{UC}$	la provision terme des versements périodiques en unités de compte,
$PM\_terme\_rev\_VL$	la provision terme des versements libres,
$PM\_terme\_rev\_VL_{FG}$	la provision terme des versements libres en fonds général,
$PM\_terme\_rev\_VL_{UC}$	la provision terme des versements libres en unités de compte.

La provision terme sur versements périodiques est définie par la formule :

$$PM\_terme\_rev\_VP = PM\_terme\_rev\_VP_{FG} + PM\_terme\_rev\_VP_{UC}$$

$$\text{avec } PM\_terme\_rev\_VP_{FG} = \sum_{k=1}^{Dur_r} \left( Mnt\_rev\_net\_VP\_FG_k \cdot \prod_{j=k}^{Dur_r} (1 + Taux_{RemFG} - Taux_{Enc}) \cdot (1 - Tx\_Rac^j) \cdot p_{x+j-1} \right)$$

$$PM\_terme\_rev\_VP_{UC} = \sum_{k=1}^{Dur_r} \left( Mnt\_rev\_net\_VP\_UC_k \cdot \prod_{j=k}^{Dur_r} (1 + Taux_{EvoUC} - Taux_{Enc}) \cdot (1 - Tx\_Rac^j) \cdot p_{x+j-1} \right)$$

De façon similaire, la provision terme sur versements libres est définie par la formule :

$$PM\_terme\_rev\_VL = PM\_terme\_rev\_VL_{FG} + PM\_terme\_rev\_VL_{UC}$$

$$\text{avec } PM\_terme\_rev\_VL_{FG} = \sum_{k=1}^{Dur_r} \left( Mnt\_rev\_net\_VL\_FG_k \cdot \prod_{j=k}^{Dur_r} (1 + Taux_{RemFG} - Taux_{Enc}) \cdot (1 - Tx\_Rac^j) \cdot p_{x+j-1} \right)$$

$$PM\_terme\_rev\_VL_{UC} = \sum_{k=1}^{Dur_r} \left( Mnt\_rev\_net\_VL\_UC_k \cdot \prod_{j=k}^{Dur_r} (1 + Taux_{EvoUC} - Taux_{Enc}) \cdot (1 - Tx\_Rac^j) \cdot p_{x+j-1} \right)$$

Notons que la provision terme n'a de sens que si l'assuré principal est toujours vivant au moment du calcul. C'est pourquoi nous avons décidé d'intégrer en fin d'exercice, en plus du rachat total, la mortalité selon les tables TGH/F05 à 100% pour le calcul de la provision terme.

### 5.2.3 Du coût d'écart de table

Notons :

$\alpha_{1TNTG}$  la proportion de choix de rente 1T avec trimestrialités garanties au terme,

$\alpha_{1T}$  la proportion de choix de rente 1T au terme,

$\alpha_{2T}$  la proportion de choix de rente 2T au terme,

$Taux_{Ren}$  le taux de sortie en rente au terme (scalaire),

$Ecarts\_VP\_Tab_{TGH/F05}$  le coût d'écart de table sur versements périodiques,

$Ecarts\_VL\_Tab_{TGH/F05}$  le coût d'écart de table sur versements libres.

Le coût d'écart de table sur versements périodiques actualisé à la date de calcul, est défini par la formule :

$$Ecarts\_VP\_Tab_{TGH/F05} = \left( \begin{aligned} &\alpha_{1TNTG} \cdot \frac{a_{x\_terme\ 1T\ NTG}^{TG,i} (4)}{a_{x\_terme\ 1T\ NTG}^{TC,i} (4)} \\ &+ \alpha_{1T} \cdot \frac{a_{x\_terme}^{TG,i} (4)}{a_{x\_terme}^{TC,i} (4)} \\ &+ \alpha_{2T} \cdot \frac{a_{x\_terme,\ y\_terme}^{TG,i} (4)}{a_{x\_terme,\ y\_terme}^{TC,i} (4)} \end{aligned} \right) - 1 \cdot PM\_terme\_rev\_VP \cdot Taux_{Ren} \cdot (1+i)^{-(Dur\_r)}$$

avec  $\alpha_{1TNTG} + \alpha_{1T} + \alpha_{2T} = 1$

De façon similaire, le coût d'écart de table sur versements libres actualisé à la date de calcul, est défini par la formule :

$$Ecarts\_VL\_Tab_{TGH/F05} = \left( \begin{aligned} &\alpha_{1TNTG} \cdot \frac{a_{x\_terme\ 1T\ NTG}^{TG,i} (4)}{a_{x\_terme\ 1T\ NTG}^{TC,i} (4)} \\ &+ \alpha_{1T} \cdot \frac{a_{x\_terme}^{TG,i} (4)}{a_{x\_terme}^{TC,i} (4)} \\ &+ \alpha_{2T} \cdot \frac{a_{x\_terme,\ y\_terme}^{TG,i} (4)}{a_{x\_terme,\ y\_terme}^{TC,i} (4)} \end{aligned} \right) - 1 \cdot PM\_terme\_rev\_VL \cdot Taux_{Ren} \cdot (1+i)^{-(Dur\_r)}$$

avec  $\alpha_{1TNTG} + \alpha_{1T} + \alpha_{2T} = 1$

Cette formule tient compte du choix d'option de rente 1T NTG, 1T et 2T.

Ici les annuités sont à terme échu et fractionnées trimestriellement car les rentes de La Mondiale sont majoritairement à terme échu avec un fractionnement trimestriel.

Enfin, pour optimiser le temps de chiffage contrat par contrat du coût d'écart de table sur versements, nous construisons un moteur de calcul avec le progiciel SAS.

## 5.3 Le moteur de calcul sous SAS

### 5.3.1 Schéma du moteur de calcul

Pour le chiffage du coût d'écart de table, le progiciel SAS V9.3 a été choisi pour des raisons techniques et d'optimisation de l'étude :

- SAS intègre des procédures statistiques qui permettent à la fois d'estimer les paramètres des modèles de régression et de réaliser les tests statistiques de validation.
- SAS permet de créer des tables intermédiaires, de suivre étape par étape le processus de sélection/construction des données et de traiter des fichiers de taille importante.
- SAS permet de réaliser rapidement un jeu de simulations : pour un fichier de données d'entrée de 100 000 lignes environ, le temps de calcul est de l'ordre de 1 heure.

Le schéma ci-dessous, représente le processus de fonctionnement du moteur de calcul que nous avons développé sous SAS.

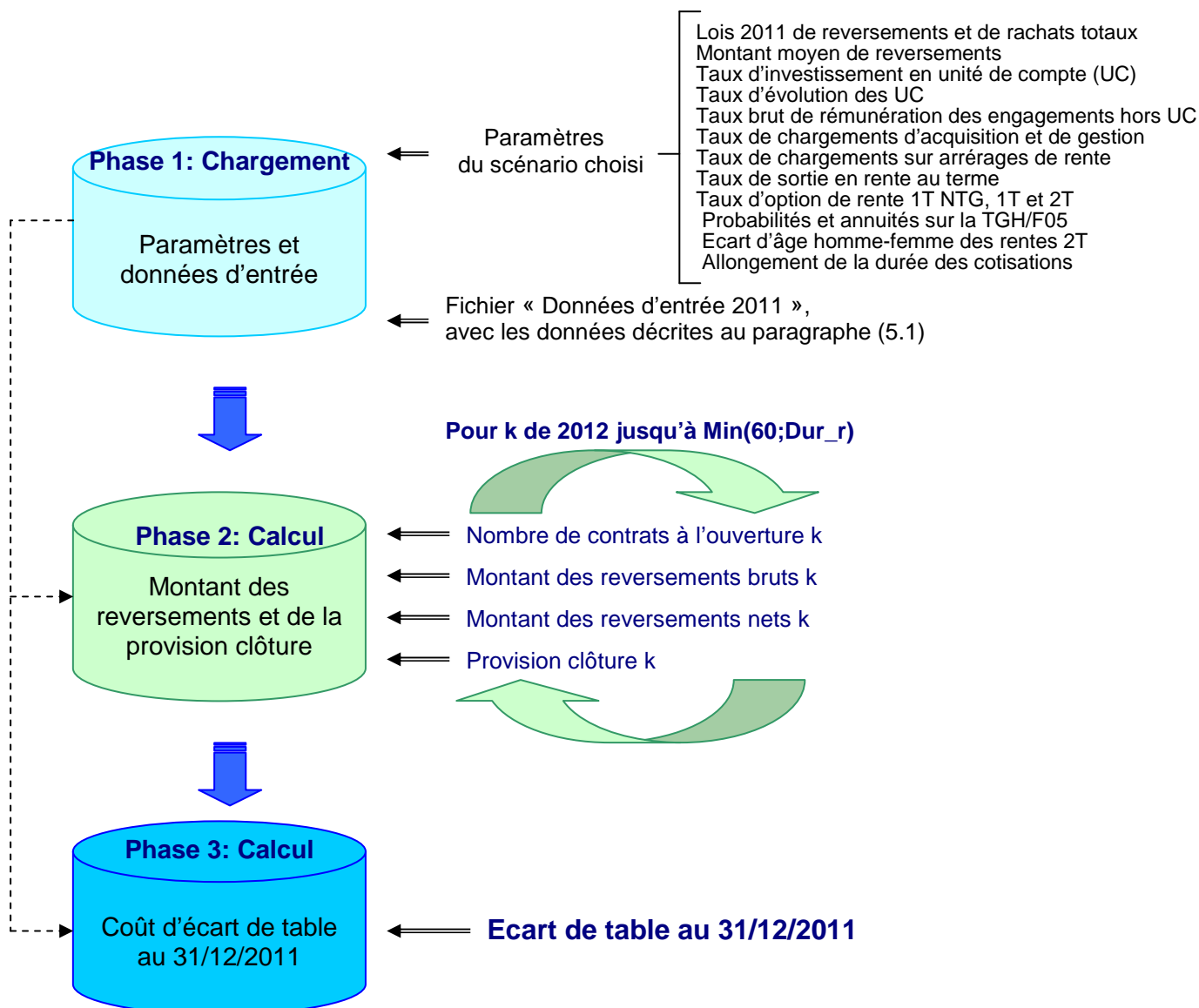


Schéma 12 - Processus de fonctionnement du moteur de calcul sous SAS

Le fonctionnement du moteur de calcul se compose de trois phases :

- une première phase de chargement des paramètres et des données d'entrée 2011,
- une deuxième phase de calcul des versements et de la provision clôture,
- une dernière phase pour le calcul du coût d'écart de table au 31/12/2011.

### 5.3.2 Validation du moteur de calcul

En parallèle, nous avons développé une feuille de calcul Excel, pour valider le moteur sur quelques contrats tests. Après validation, nous procédons au chiffrement du coût d'écart de table sur les données d'entrée 2011 à partir d'un scénario choisi réaliste.

La feuille de calcul Excel pour la ligne 22 073 du fichier « Donnée d'entrée 2011 » est présentée ci-après. Les différentes étapes de détermination du coût d'écart de table, exécutées par le moteur de calcul peuvent ainsi être visualisées.

### Caractéristiques du contrat au 31/12/2011

Numéro de ligne	22 073
Famille bilan	M. PRIVILEGE UC
Gamme de contrat	RET UC
Type de contrat	RF
Année Effet du contrat	2004
Année Terme du contrat	2051
Tarif rente en restitution	TPG 93 2.00
Taux technique en restitution	2.00%
Durée restante	40 ans

### Caractéristiques assurés

Age assuré arrondi au 31/12	27
Sexe assuré	M
Génération	1 984

### Hypothèses

Chargements sur Primes	4.55%
Chargements sur Encours	0.73%
Chargements sur Arrérages	3.00%
Taux de rémunération du FG	3.00%
Taux d'évolution des UC	4.00%
Taux de revalorisation	0.00%
Taux technique	2.00%
Taux de sortie 2011 en rente	100.00%

### Chocs en %

Choc en % sur la mortalité	100.00%
Choc en % sur le taux de versements	100.00%
Choc en % sur le taux de rachats totaux	100.00%
Choc en % sur le taux d'investissement en UC	100.00%

### Simulation Montant Versements bruts

Exercice	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	---	2049	2050	2051
Ancienneté au 01/01		8	9	10	11	12	13	14	---	45	46	47
Taux de rachat totaux		1.50%	1.33%	1.15%	0.97%	0.79%	0.65%	0.54%	---	0.61%	0.61%	0.61%
1-Taux de rachat totaux		98.50%	98.67%	98.85%	99.03%	99.21%	99.35%	99.46%	---	99.39%	99.39%	99.39%
Nombre de contrats ouverture		1.00	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.94	---	0.75	0.75	0.74
Taux d'investissement en UC		0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	---	0.34	0.34	0.34
Taux de versement		62.82%	60.88%	59.20%	57.72%	56.40%	55.22%	54.14%	---	39.70%	39.47%	39.24%
Montant moyen annuel au 01/01	4 653.13 €	4 699.66 €	4 746.66 €	4 794.13 €	4 842.07 €	4 890.49 €	4 939.39 €	4 988.79 €	---	6 791.37 €	6 859.29 €	6 927.88 €
Montant versements bruts FG		1 944.89 €	1 874.82 €	1 816.26 €	1 767.46 €	1 726.98 €	1 693.49 €	1 665.75 €	---	1 339.31 €	1 333.53 €	1 327.68 €
Montant versements bruts UC		1 007.45 €	971.16 €	940.82 €	915.54 €	894.57 €	877.23 €	862.86 €	---	693.76 €	690.77 €	687.74 €
<b>TOTAL REVERSEMENTS BRUTS</b>		<b>2 952.34 €</b>	<b>2 845.98 €</b>	<b>2 757.08 €</b>	<b>2 683.00 €</b>	<b>2 621.56 €</b>	<b>2 570.72 €</b>	<b>2 528.61 €</b>	---	<b>2 033.07 €</b>	<b>2 024.29 €</b>	<b>2 015.41 €</b>

### Simulation de la provision clôture issue des versements

Exercice	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	---	2049	2050	2051
Age assuré arrondi au 01/01		27 ans	28 ans	29 ans	30 ans	31 ans	32 ans	33 ans	---	64 ans	65 ans	66 ans
Taux de survie px à la TGH/F05		99.97190%	99.97189%	99.97188%	99.97187%	99.97086%	99.97186%	99.96984%	---	99.76690%	99.74766%	99.72724%
Montant versements nets FG		1 856.40 €	1 789.52 €	1 733.62 €	1 687.04 €	1 648.40 €	1 616.44 €	1 589.96 €	---	1 278.37 €	1 272.85 €	1 267.27 €
Montant versements nets UC		961.61 €	926.97 €	898.01 €	873.89 €	853.87 €	837.31 €	823.60 €	---	662.20 €	659.34 €	656.44 €
<b>TOTAL REVERSEMENTS NETS</b>		<b>2 818.01 €</b>	<b>2 716.49 €</b>	<b>2 631.63 €</b>	<b>2 560.93 €</b>	<b>2 502.28 €</b>	<b>2 453.75 €</b>	<b>2 413.56 €</b>	---	<b>1 940.57 €</b>	<b>1 932.19 €</b>	<b>1 923.71 €</b>
Taux de rémunération du FG		3.00%	3.00%	3.00%	3.00%	3.00%	3.00%	3.00%	---	3.00%	3.00%	3.00%
Taux d'évolution des UC		4.00%	4.00%	4.00%	4.00%	4.00%	4.00%	4.00%	---	4.00%	4.00%	4.00%
Provision clôture des versements FG		1 869.62 €	3 691.32 €	5 482.66 €	7 259.50 €	9 035.11 €	10 819.79 €	12 619.02 €	---	76 085.40 €	78 434.28 €	80 793.63 €
Provision clôture des versements UC		977.93 €	1 940.44 €	2 896.71 €	3 855.15 €	4 822.97 €	5 805.91 €	6 807.22 €	---	49 283.91 €	51 133.09 €	53 012.50 €
<b>TOTAL PROVISION CLOTURE</b>		<b>2 847.56 €</b>	<b>5 631.76 €</b>	<b>8 379.37 €</b>	<b>11 114.64 €</b>	<b>13 858.09 €</b>	<b>16 625.69 €</b>	<b>19 426.25 €</b>	---	<b>125 369.32 €</b>	<b>129 567.37 €</b>	<b>133 806.13 €</b>

### Provision terme actualisée à la date de calcul

31/12/2011	FG	UC	FG+UC
<b>PROVISION TERME ACTUALISEE</b>	<b>36 590.66 €</b>	<b>24 008.85 €</b>	<b>60 599.51 €</b>

### Ecart de table à la date de calcul

31/12/2011	FG	UC	FG+UC
Age au terme au 31/12	<b>67 ans</b>	<b>67 ans</b>	<b>67 ans</b>
Annuité 1T à la TGH/F05	20.203	20.203	20.203
Annuité 1T à la table contractuelle	19.821	19.821	19.821
Annuité 2T à la TGH/F05	25.109	25.109	25.109
Annuité 2T à la table contractuelle	23.468	23.468	23.468
Annuité 1T NTG à la TGH/F05	21.283	21.283	21.283
Annuité 1T NTG à la table contractuelle	20.955	20.955	20.955
<b>ECART DE TABLE à la TGH/F05</b>	<b>1 560.09 €</b>	<b>1 023.65 €</b>	<b>2 583.74 €</b>

## 5.4 Le scénario choisi

Ce paragraphe détaille les paramètres du scénario choisi, indiqués au schéma 12.

### 5.4.1 Les paramètres du scénario choisi

- **Les lois 2011 de versements**

Nous utilisons les lois de versements périodiques et libres ajustées, détaillées respectivement dans les paragraphes (3.4) et (3.5).

- **Les lois 2011 de rachats totaux**

Nous utilisons les lois de rachats totaux ajustées, détaillées dans le paragraphe (4.4) avec maintien du dernier taux calculé au-delà de l'intervalle d'ajustement.

- **Le taux d'indexation du montant moyen des versements annualisés**

Le tableau ci-dessous présente l'évolution du montant moyen des versements périodiques annualisés depuis 2009. Les données sont extraites de la Base Bilan Technique.

**Tableau 39** - Montant moyen des versements périodiques

Exercices	2011	2010	2009
Montant moyen	3 294	3 225	3 222
Evolution N/N-1	2,1%	0,1%	-0,2%
<b>Moyenne sur 3 ans</b>	<b>0,7%</b>	<b>1,0%</b>	<b>1,9%</b>

Nous décidons de retenir un taux d'indexation de 1% pour le montant moyen des versements périodiques, correspondant globalement à la moyenne observée sur 3 ans en 2011.

Pour les versements libres, nous décidons de retenir le montant moyen 2011 observé par ancienneté courue du contrat sans indexation.

- **Le taux d'investissement en unité de compte (UC)**

Les deux tableaux ci-dessous indiquent les taux<sup>91</sup> observés d'investissements en UC des versements périodiques et libres pour les exercices 2011, 2010 et 2009.

**Tableau 40** - Taux d'investissement en UC des versements périodiques en 2011, 2010 et 2009 par génération

Génération	Retraite financière individuelle						Retraite financière collective					
	Famille 1 - RC			Famille 2 - RF			Famille 3 - RC			Famille 4 - RF		
	2011	2010	2009	2011	2010	2009	2011	2010	2009	2011	2010	2009
2011	7%	-	-	9%	-	-	11%	-	-	24%	-	-
2010	7%	7%	-	10%	10%	-	13%	6%	-	23%	20%	-
2009	9%	9%	9%	12%	12%	11%	9%	9%	8%	21%	21%	19%
2008	24%	24%	24%	25%	26%	25%	26%	23%	22%	40%	39%	40%
2007	55%	56%	58%	56%	58%	60%	49%	40%	44%	61%	60%	62%
2006	57%	59%	62%	60%	63%	65%	44%	38%	44%	65%	63%	64%
2005	48%	50%	51%	54%	55%	57%	39%	29%	32%	56%	56%	56%
2004	30%	30%	32%	34%	36%	37%	26%	16%	19%	37%	36%	36%
2003	15%	15%	16%	26%	26%	26%	12%	9%	10%	27%	24%	24%
2002	24%	25%	26%	36%	37%	38%	18%	17%	17%	43%	41%	40%
2001	35%	36%	38%	50%	52%	54%	91%	64%	31%	54%	53%	54%
2000	60%	80%	100%	59%	61%	64%	-	-	-	63%	60%	63%
<b>Total</b>	<b>28%</b>	<b>32%</b>	<b>37%</b>	<b>36%</b>	<b>40%</b>	<b>45%</b>	<b>17%</b>	<b>15%</b>	<b>17%</b>	<b>41%</b>	<b>42%</b>	<b>47%</b>

91. Le niveau des versements investis en UC est en forte baisse sur les contrats d'année effet supérieur à 2007. Nous retrouvons ici l'impact de la crise économique et financière qui touche l'Europe depuis 2008

**Tableau 41** - Taux d'investissement en UC des versements libres en 2011, 2010 et 2009 par génération

Génération	Retraite financière individuelle						Retraite financière collective					
	Famille 1 - RC			Famille 2 - RF			Famille 3 - RC			Famille 4 - RF		
	2011	2010	2009	2011	2010	2009	2011	2010	2009	2011	2010	2009
2011	4%	-	-	5%	-	-	1%	-	-	5%	-	-
2010	3%	7%	-	8%	9%	-	9%	3%	-	5%	7%	-
2009	16%	2%	4%	8%	8%	7%	2%	12%	3%	2%	5%	3%
2008	9%	16%	4%	20%	15%	17%	2%	1%	4%	51%	57%	16%
2007	30%	24%	19%	53%	41%	51%	1%	56%	0%	22%	68%	61%
2006	33%	9%	39%	45%	44%	49%	100%	10%	55%	19%	51%	47%
2005	12%	23%	15%	35%	39%	45%	25%	18%	14%	65%	39%	31%
2004	27%	14%	3%	32%	31%	31%	0%	3%	3%	33%	33%	55%
2003	1%	12%	13%	17%	17%	27%	0%	0%	0%	46%	28%	35%
2002	4%	10%	7%	27%	27%	27%	1%	17%	1%	11%	15%	37%
2001	12%	11%	5%	37%	37%	45%	0%	86%	0%	69%	62%	14%
2000	-	-	-	39%	36%	36%	-	-	-	42%	1%	26%
<b>Total</b>	<b>9%</b>	<b>10%</b>	<b>8%</b>	<b>19%</b>	<b>21%</b>	<b>27%</b>	<b>6%</b>	<b>10%</b>	<b>9%</b>	<b>17%</b>	<b>21%</b>	<b>20%</b>

A partir de l'analyse des tableaux 40 et 41 ci-dessus, nous avons retenu par génération, les taux d'investissement en UC suivants :

**Tableau 42** - Taux d'investissement en UC par génération

Génération	Retraite financière individuelle				Retraite financière collective			
	Famille 1 - RC		Famille 2 - RF		Famille 3 - RC		Famille 4 - RF	
	VP	VL	VP	VL	VP	VL	VP	VL
2011	7%	9%	9%	19%	11%	6%	24%	17%
2010	7%	9%	10%	19%	13%	6%	23%	17%
2009	9%	9%	12%	19%	9%	6%	21%	17%
2008	24%	9%	25%	19%	26%	6%	40%	17%
2007	55%	9%	56%	19%	49%	6%	61%	17%
2006	57%	9%	60%	19%	44%	6%	65%	17%
2005	48%	9%	54%	19%	39%	6%	56%	17%
2004	30%	9%	34%	19%	26%	6%	37%	17%
2003	15%	9%	26%	19%	12%	6%	27%	17%
2002	24%	9%	36%	19%	18%	6%	43%	17%
2001	35%	9%	50%	19%	0%	6%	54%	17%
2000	0%	9%	59%	19%	0%	6%	63%	17%

VP : Versements périodiques

VL : Versements libres

Pour les versements périodiques (VP), nous retenons les taux 2011 observés par famille et génération (et non par ancienneté) car les taux sont relativement stables sur les trois dernières années d'observation. Néanmoins, lorsque les versements périodiques 2011 par génération sont en-dessous de 0.1 M€, nous considérons que les taux observés ne sont pas significatifs et par hypothèse que les versements sont totalement investis en fonds général.

Pour les versements libres (VL), nous n'avons pas observé de tendance par génération. En l'absence d'étude complémentaire, nous retenons le taux global 2011 observé par famille.

#### • Le taux d'évolution des unités de compte (UC)

La performance annuelle<sup>92</sup> moyenne du CAC 40, calculée sur la base des cours de clôture des 20 dernières années, est de 3.50%. Nous décidons de retenir un taux d'évolution des supports UC de 4% par an.

92. La rentabilité annuelle est calculée hors réinvestissement des dividendes pour les indices et les actions (Source Investirama.com)

- **Le taux brut de rémunération des engagements hors UC**

Le taux brut 2011 de rémunération des engagements hors UC des contrats de retraite est de l'ordre de 3.80% et il devrait continuer à baisser dans les années à venir. Nous décidons de retenir un taux brut annuel de rémunération égal au maximum entre 3% et le taux technique garanti à la liquidation de la retraite.

- **Le taux de chargements d'acquisition**

Nous décidons de retenir les taux recalculés à partir des chargements d'acquisition (y compris fractionnement) et de la prime émise. Les données sont extraites de la Base Bilan Technique au 31/12/2011.

**Tableau 43** - Taux de chargements d'acquisition 2011

Retraite individuel				Retraite collective			
Financière		Viagère		Financière		Viagère	
RC	RF	RC	RF	RC	RF	RC	RF
Famille 1	Famille 2	Famille 5	Famille 6	Famille 3	Famille 4	Famille 7	Famille 8
4.7%	4.6%	10.7%	9.1%	4.7%	4.6%	14.0%	3.9%

- **Le taux de chargements de gestion**

Nous décidons de retenir les taux recalculés à partir des chargements de gestion (y compris chargements de gestion sur capital) et de la provision clôture. Les données sont extraites de la Base Bilan Technique au 31/12/2011.

**Tableau 44** - Taux de chargements de gestion 2011

Retraite individuelle				Retraite collective			
Financière		Viagère		Financière		Viagère	
RC	RF	RC	RF	RC	RF	RC	RF
Famille 1	Famille 2	Famille 5	Famille 6	Famille 3	Famille 4	Famille 7	Famille 8
0.8%	0.7%	0.02%	-	0.8%	0.8%	0.1%	0.1%

- **Le taux de chargements sur arrérages de rente**

Nous retenons un taux de chargements sur arrérages de rente à 3% en conformité avec les caractéristiques techniques des contrats.

- **Le taux de sortie en rente au terme**

Nous retenons les taux de sortie en rente des contrats à rente facultative (type RC), observés et calculés en montant sur le capital acquis au tarif contractuel entre 2009 et 2011. Les données sont extraites de la Base Bilan Technique.

**Tableau 45** - Taux de sortie en rente au terme en montant entre 2009 et 2011

Retraite individuelle RC		Retraite collective RC	
Financière	Viagère	Financière	Viagère
Famille 1	Famille 5	Famille 3	Famille 7
14%	21%	6%	18%

Pour les contrats en sortie en rente obligatoire (type RF), le taux retenu est de **100%**.



- **Le taux d'option de rente 1T NTG, 1T et 2T au terme**

Nous retenons les options de rente au terme observées et calculées en nombre entre 2009 et 2011. Les données sont extraites de la Base Bilan Technique.

**Tableau 46** - Taux d'option de rente 1T NTG, 1T et 2T en nombre entre 2009 et 2011

$\alpha_{1TNTG}$	1T NTG	Retraite individuelle				Retraite collective			
		Financière		Viagère		Financière		Viagère	
		RC	RF	RC	RF	RC	RF	RC	RF
		Famille 1	Famille 2	Famille 5	Famille 6	Famille 3	Famille 4	Famille 7	Famille 8
		23%	28%	21%	28%	18%	29%	18%	22%
$\alpha_{1T}$	1T	Retraite individuelle				Retraite collective			
		Financière		Viagère		Financière		Viagère	
		RC	RF	RC	RF	RC	RF	RC	RF
		Famille 1	Famille 2	Famille 5	Famille 6	Famille 3	Famille 4	Famille 7	Famille 8
		34%	24%	38%	24%	34%	24%	34%	32%
$\alpha_{2T}$	2T	Retraite individuelle				Retraite collective			
		Financière		Viagère		Financière		Viagère	
		RC	RF	RC	RF	RC	RF	RC	RF
		Famille 1	Famille 2	Famille 5	Famille 6	Famille 3	Famille 4	Famille 7	Famille 8
		43%	48%	41%	48%	48%	47%	48%	46%

avec  $\alpha_{1TNTG} + \alpha_{1T} + \alpha_{2T} = 1$

Nous observons que le choix de l'option de rente 2T est majoritaire pour l'ensemble des familles de contrats. Par ailleurs, nous avons regroupé les familles 2 et 6 (resp. les familles 3 et 7) pour le calcul du taux d'option de rente au terme, car le nombre de rentes pour la famille 6 (resp. la famille 3) pris sur un historique de trois ans, n'était pas significatif<sup>93</sup>.

- **La mortalité appliquée en cours de versement**

Nous décidons d'utiliser les tables TGH/F05 à 100% pour la mortalité appliquée annuellement en fin d'année jusqu'au terme du contrat.

- **L'écart d'âge entre 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> tête des rentes 2T**

Pour les rentes 2T, la moyenne des écarts d'âge (Age homme - Age femme) pondérée par le nombre de contrats est de **2.3 ans**. Nous supposons donc que les femmes des rentes 2T (F-H ou H-F) sont plus jeunes de 2 ans par rapport aux hommes.

- **Allongement de la durée restante du contrat**

Pour tenir compte de la dernière réforme des retraites<sup>94</sup>, nous avons augmenté de 2 ans le terme des contrats en cours au 31/12/2011. Le paragraphe (5.5.9) présentera une étude de sensibilité sur l'allongement de la durée de versements.

93. Le nombre de rentes au terme est inférieur à 100 entre 2009 et 2011 pour les familles 6 et 3

94. Loi n°2010-1330 du 9 novembre 2010 portant de 60 à 62 ans, l'âge légal de départ à la retraite

## 5.4.2 Le chiffrage du coût d'écart de table

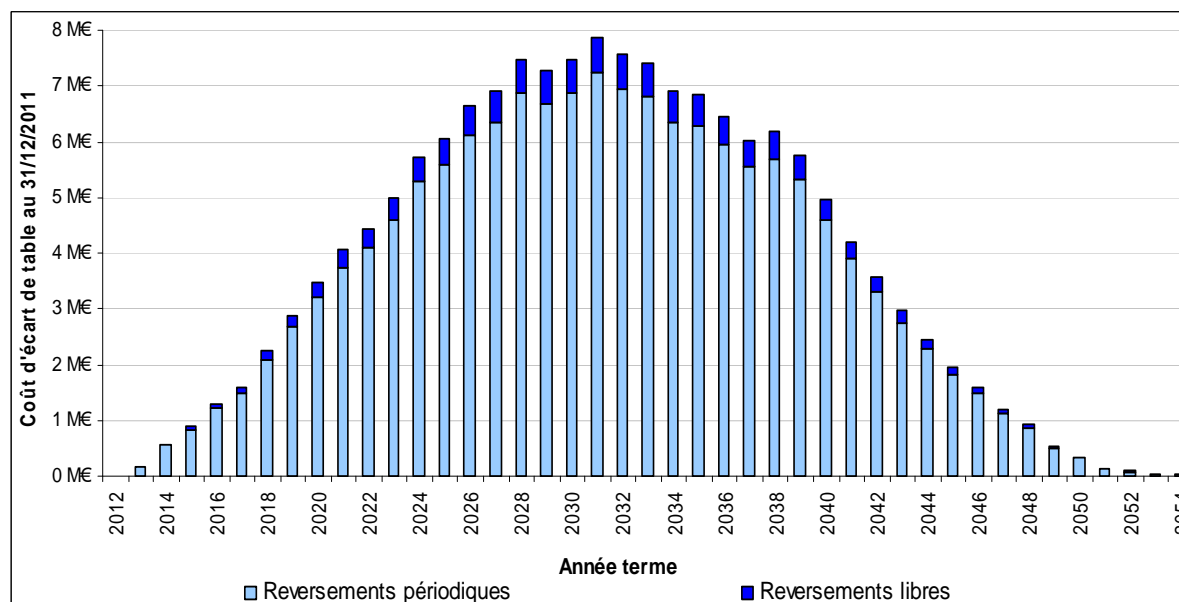
Le tableau ci-dessous présente le chiffrage du coût d'écart de table au 31/12/2011 sur la base du scénario choisi.

**Tableau 47** - Chiffrage du coût écart de table au 31/12/2011

Scénario choisi	Coût d'écart de table au 31/12/2011	
	sur la durée restante prévue	sur 1 an de versements
Périodiques	147.8 M€	13.0 M€
Libres	12.2 M€	1.1 M€
<b>Total</b>	<b>160.0 M€</b>	<b>14.0 M€</b>

Sur la base du scénario choisi, le coût d'écart de table sur les versements du portefeuille de retraite de La Mondiale entre la table garantie contractuellement à la liquidation de la rente et les tables TGH/F05, s'élève à 160 M€ au 31/12/2011 et le coût d'une année de versements, capitalisés jusqu'au terme du contrat est de 14 M€. De plus, nous observons que le coût des versements libres n'est pas négligeable (12 M€) puisqu'il représente près de 8% du coût d'écart de table des versements.

La figure ci-dessous, indique le coût d'écart de table au 31/12/2011 par année terme et type de versements.



**Figure 52** - Coût d'écart de table au 31/12/2011 par année terme

Nous observons que le coût d'écart de table augmente progressivement vers 8 M€ (7 M€ hors versements libres) jusqu'en 2031 et diminue au-delà avec la sortie au terme des contrats. La répartition des écarts par année terme est relativement symétrique par rapport à l'année terme 2031.

## 5.5 Les études de sensibilité

Pour mesurer l'impact des principaux paramètres du scénario choisi sur le coût d'écart de table, nous proposons de réaliser les études de sensibilités suivantes :

- sensibilité aux options de rente au terme 1T NTG, 1T et 2T,
- sensibilité aux taux de sortie en rente des contrats de type RC,
- sensibilité aux taux de versements,
- sensibilité aux taux de rachats totaux,
- sensibilité aux taux de mortalité en phase de constitution,
- sensibilité au taux d'évolution des unités de compte (UC),
- sensibilité au taux de rémunération des engagements hors UC,
- sensibilité au taux d'indexation des versements périodiques,
- sensibilité à la durée restante du contrat,
- sensibilité aux rachats d'office.

### 5.5.1 Sensibilité aux options de rente au terme 1T NTG, 1T et 2T

Le tableau ci-dessous présente l'impact aux options de rente.

**Tableau 48** - Sensibilité aux options de rente 1T NTG, 1T et 2T

Coût d'écart de table au 31/12/2011				
Type de versements	Option 1T NTG	Option 1T	Option 2T	Scénario choisi
Périodiques	91.8 M€	128.3 M€	188.7 M€	147.8 M€
Libres	7.6 M€	10.1 M€	16.0 M€	12.2 M€
<b>Total</b>	<b>99.4 M€</b>	<b>138.4 M€</b>	<b>204.7 M€</b>	<b>160.0 M€</b>
Ecart par rapport au scénario choisi	-38%	-13%	28%	

Par rapport au scénario choisi, nous observons que :

- le coût de l'option 1T NTG est inférieur de - 38%,
- le coût de l'option 1T est inférieur de - 13%,
- le coût de l'option 2T est supérieur de + 28%.

Le coût d'écart de table est donc **très sensible** aux options de rente au terme 1T NTG, 1T et 2T.

Le tableau ci-dessous présente l'impact aux options de rente par granularité.

**Tableau 49** - Sensibilité aux options de rente 1T NTG, 1T et 2T par granularité

Coût d'écart de table (M€) au 31/12/2011							Provision contractuelle en M€ (2)	(1) / (2)
Portefeuille retraite		TY PREG	Option 1T NTG uniquement	Option 1T uniquement	Option 2T uniquement	Scénario choisi (1)		
Individuel	Financière	RC	5.2	7.8	7.9	7.3	1 029	0.7%
		RF	84.2	112.3	177.6	135.9	3 267	4.2%
	Viagère	RC	2.3	7.4	5.3	5.5	393	1.4%
		RF	0.1	0.3	0.2	0.2	12	1.9%
S/Total Individuel			91.9	127.9	191.0	148.8	4 700	3.2%
Collectif	financière	RC	0.05	0.07	0.09	0.1	262	< 0.1%
		RF	7.3	10.0	13.2	10.7	1 380	0.8%
	Viagère	RC	0.1	0.4	0.3	0.3	155	0.2%
		RF	0.02	0.1	0.05	0.0	1 635	< 0.01%
S/Total Collectif			7.5	10.5	13.7	11.2	3 432	0.3%
Total			99.4	138.4	204.7	160.0	8 132	2.0%

Nous constatons que le coût d'écart de table sur les versements représente 2% des provisions contractuelles du portefeuille retraite de La Mondiale au 31/12/2011. Le coût est plus élevé pour les contrats individuels que pour les contrats collectifs et s'explique par le fait que les contrats collectifs sont principalement des contrats à tarif à la prime.

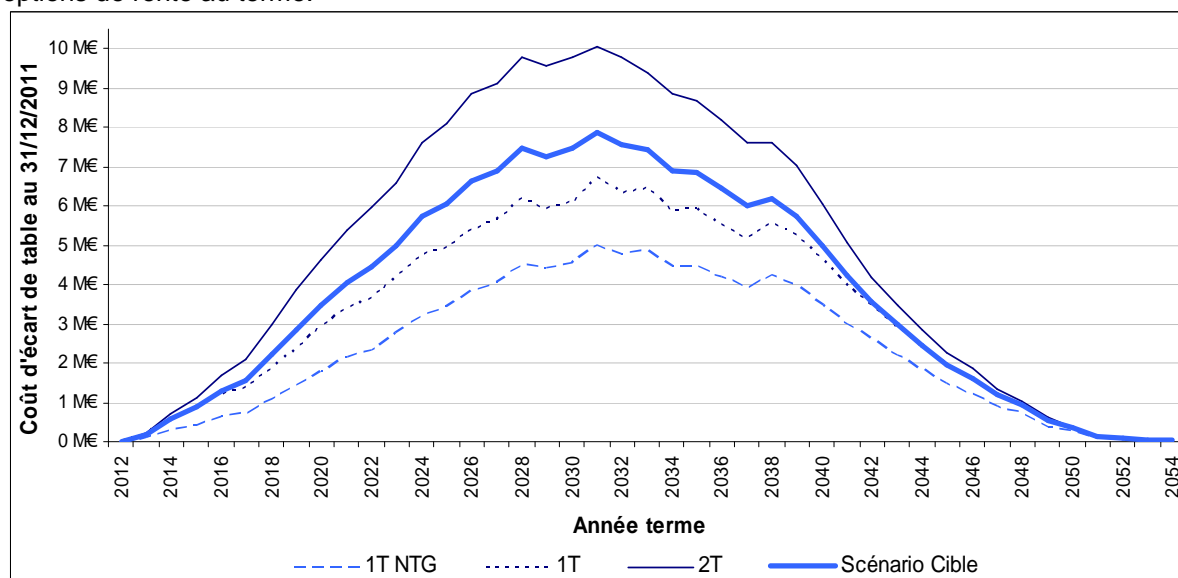
Par ailleurs, l'option la plus coûteuse pour les contrats de retraite financière (resp. viagère) correspond à la sortie en rente 2T (resp. 1T) et s'explique par la répartition<sup>95</sup> des primes et par la valeur des ratios d'annuité entre les TGH/F05 et la table contractuelle. A titre d'illustration, le tableau ci-dessous donne la valeur des ratios d'annuité entre les TGH/F05 et la table contractuelle pour un homme, né en 1963 et partant à la retraite à 67 ans.

**Tableau 50** - Exemples de ratio d'annuité entre la TGH 05 et la table contractuelle

Tables contractuelles	Ratio d'annuités (Taux technique à 4.50%)		
	1T NTG	1T	2T
TGH 05	1.000	1.000	1.000
TPG 93	1.003	1.002	1.040
TPRV 93	1.022	1.041	1.071
TD 73/77	1.122	1.633	1.485
PF 60/64	1.108	1.407	1.330
PF 46/49	1.120	1.523	1.417

Nous observons que l'option 1T est plus coûteuse pour les primes investies en TD 73/77, PF 60/64 et PF 46/49. Quant à l'option 2T, elle est plus coûteuse pour les primes investies en TPG 93 et TPRV 93. Globalement, le coût d'écart de table est plus élevé avec l'option 2T et s'explique par l'importance<sup>96</sup> des versements des contrats de retraite financière, investis en TPG 93.

La figure ci-dessous, permet de suivre le coût d'écart de table au 31/12/2011 par année terme et options de rente au terme.



**Figure 53** - Coût d'écart de table au 31/12/2011 par année terme et options de rente au terme

Nous observons que le coût d'écart de table du scénario choisi se situe entre le coût de l'option 1T et de l'option 2T.

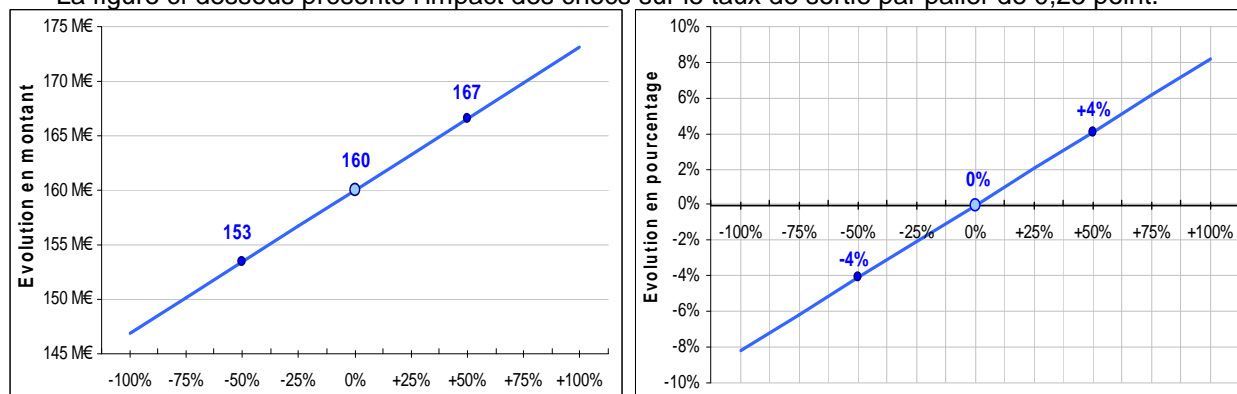
95. Les primes des contrats de retraite financière sont principalement investies en TPG 93 et TPRV 93 alors que celles des contrats de retraite viagère sont investies en TD 73/77, PF 60/64 et PF 46/49

96. Les versements des contrats de retraite financière investis en TPG 93, représentent près de 50% des versements au 31/12/2011

### 5.5.2 Sensibilité aux taux de sortie en rente des contrats de type RC

Les contrats de retraite de type RC ont la possibilité de sortir en rente ou en capital. Par construction, le coût d'écart de table est proportionnel<sup>97</sup> au taux de sortie en rente au terme.

La figure ci-dessous présente l'impact des chocs sur le taux de sortie par palier de 0,25 point.



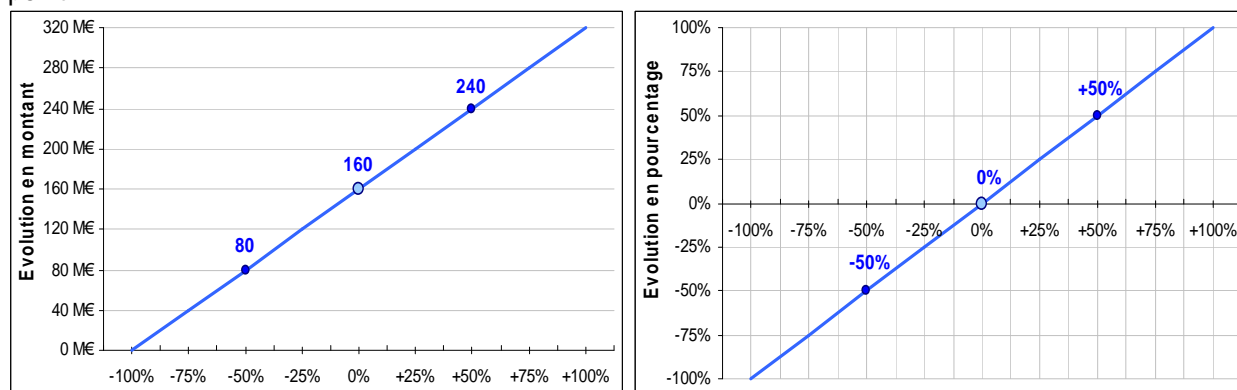
**Figure 54** - Chocs sur le taux de sortie en rente des contrats de type RC

Nous observons que le coût d'écart de table est peu sensible aux chocs sur le taux de sortie des contrats de type RC. Une hausse de 50% du taux augmente de 4% le coût d'écart de table. Inversement, une baisse de 50% de ce taux baisse de 4% le coût.

### 5.5.3 Sensibilité aux taux de versements

La variation du coût d'écart de table est également proportionnelle par construction au choc sur le taux de versements puisque le montant des versements est proportionnel<sup>98</sup> au taux de versements.

La figure ci-dessous présente l'impact des chocs sur les taux de versements, par palier de 0,25 point.



**Figure 55** - Chocs sur les taux de versements périodiques et libres

Nous observons que l'évolution du coût d'écart de table est proportionnelle aux chocs sur le taux de versements. Une hausse de 50% du taux augmente de 50% le coût d'écart de table. Inversement, une baisse de 50% de ce taux diminue de 50% le coût.

97. Voir formule au paragraphe (5.2.3)

98. Voir formule au paragraphe (3.6.1)

### 5.5.4 Sensibilité aux taux de rachats totaux

Le taux de rachats totaux impacte à la fois le nombre de contrats à l'ouverture et la provision clôture, simulés sur la durée restante du contrat. Le taux moyen 2011 de rachats totaux est de 1.6% pour les contrats de retraite financière qui génèrent plus de 95% (154M€) du coût d'écart de table. Le coût d'écart de table devrait alors être sensible aux chocs sur les taux de rachats totaux.

La figure ci-dessous présente l'impact des chocs sur les taux de rachats, par palier de 0,25 point.

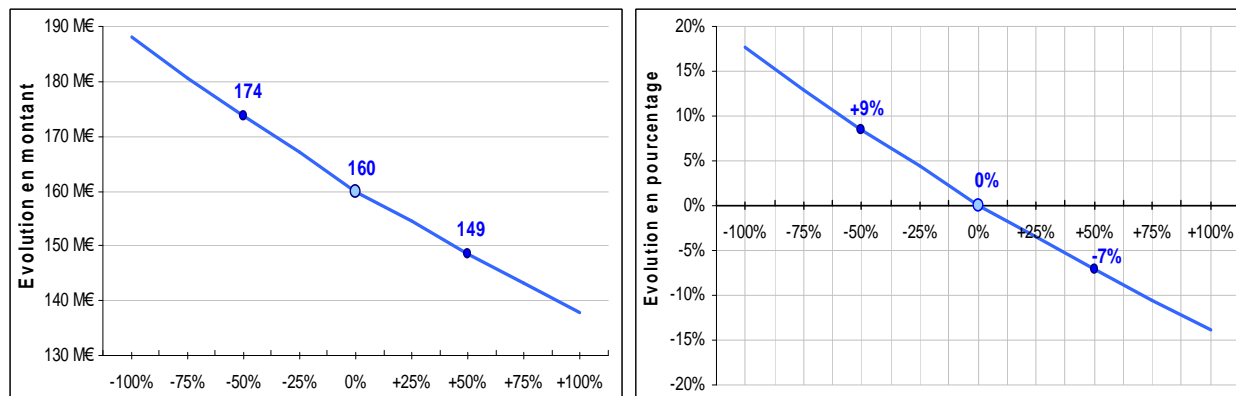


Figure 56 - Chocs sur les taux de rachats totaux

Nous observons que le coût d'écart de table est sensible aux chocs sur le taux de rachats totaux ; Une hausse de 50% du taux baisse de 7% le coût d'écart de table du scénario choisi. Inversement, une baisse de 50% de ce taux augmente de 9% le coût.

### 5.5.5 Sensibilité aux taux de mortalité en phase de constitution

Le taux de mortalité appliqué en phase de constitution impacte le nombre de contrats à l'ouverture et la provision clôture, simulés sur la durée restante du contrat. Compte tenu du faible niveau des probabilités de décès, l'effet des chocs sur les taux de mortalité ne devrait pas être important.

La figure ci-dessous présente l'impact des chocs sur les taux de mortalité, par palier de 0,25 point.

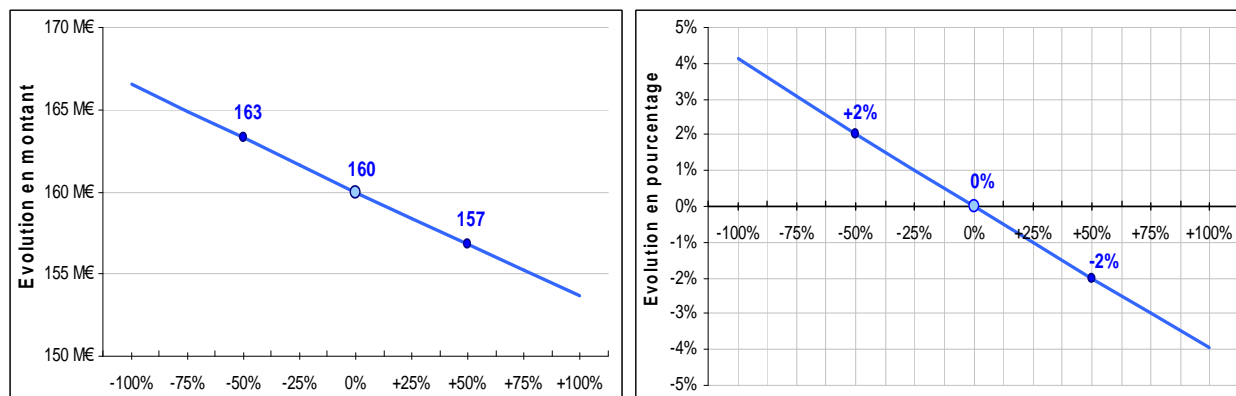
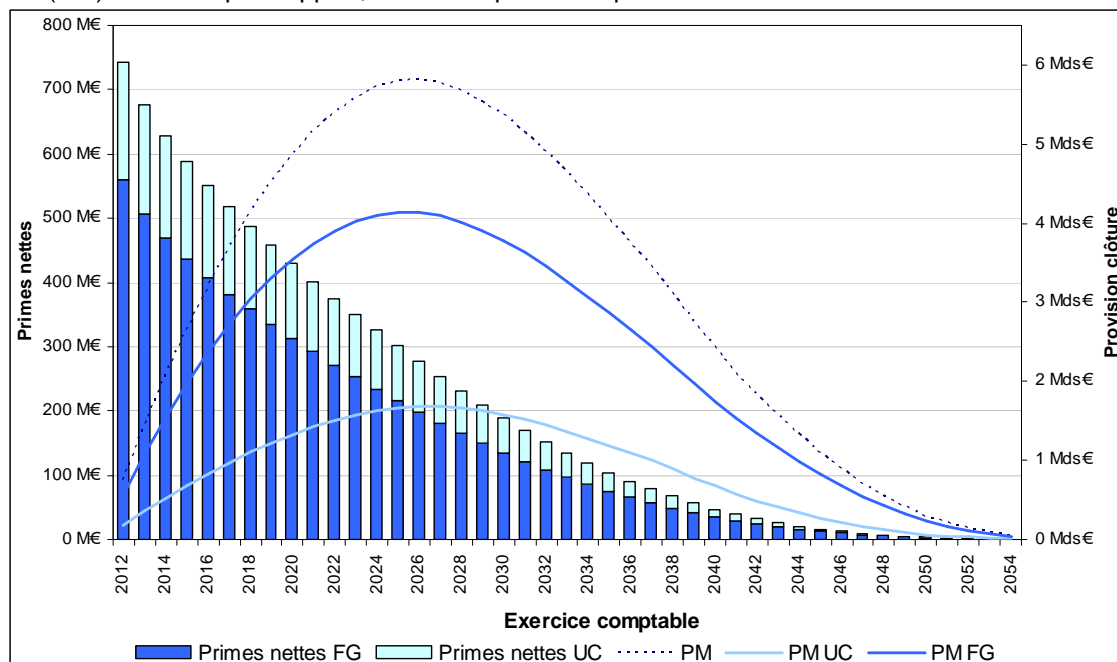


Figure 57 - Chocs sur les taux de mortalité

Nous observons que le coût d'écart de table est peu sensible aux chocs sur les taux de mortalité en phase de constitution. Une hausse de 50% du taux diminue de 2% le coût d'écart de table. Inversement, une baisse de 50% de ce taux augmente de 2% le coût.

### 5.5.6 Sensibilité au taux d'évolution des unités de compte (UC)

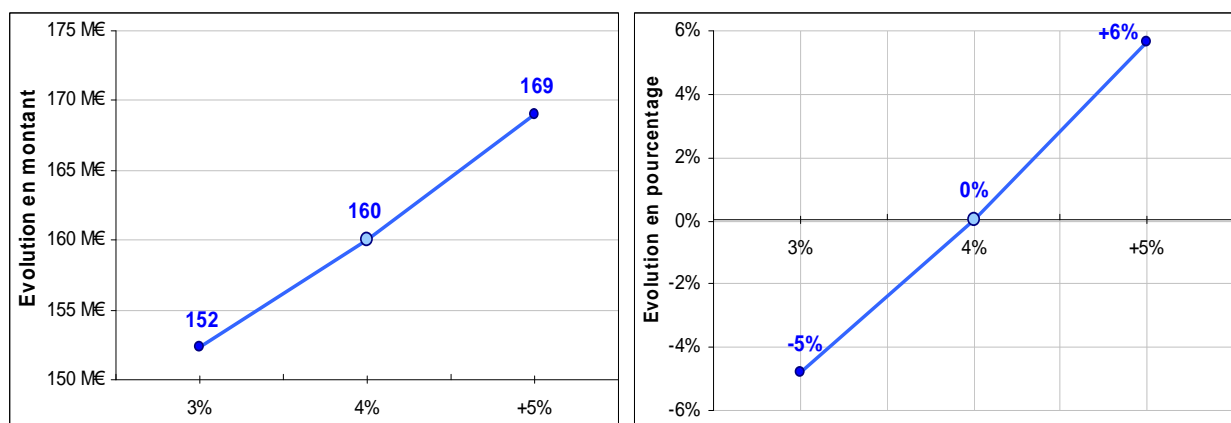
La sensibilité à la variation du taux d'évolution des UC dépend directement des versements investis en unités de compte. La figure ci-dessous représente les versements nets et la provision clôture (PM) associée par support, simulés à partir des paramètres du scénario choisi.



**Figure 58** - Reversements nets investis et provision clôture simulés par exercice comptable

Nous observons que la provision clôture en unité de compte (PM UC) issue des versements augmente jusqu'en 2025 pour atteindre un niveau élevé de 1.7 Mds€ et diminue au-delà avec la sortie au terme. Le coût d'écart de table devrait donc être sensible à la fluctuation du taux d'évolution des UC.

La figure ci-dessous présente l'impact d'une variation de 1% par rapport au scénario choisi.



**Figure 59** - Sensibilité à la variation du taux d'évolution des unités de compte

Nous observons que le coût d'écart de table est bien sensible à la variation du taux d'évolution des UC. Une hausse de 1% du taux<sup>99</sup> augmente de 6% le coût d'écart de table. Inversement, une baisse de 1% de ce taux diminue de 5% le coût.

99. Pour rappel, le taux d'évolution des UC du scénario choisi est de 4%

### 5.5.7 Sensibilité au taux de rémunération des engagements hors UC

La figure 58 indique que la provision clôture en fonds général (PM FG) issue des versements augmente jusqu'en 2025 pour atteindre un niveau élevé de 4.0 Mds€ et diminue au-delà avec la sortie au terme. Le coût d'écart de table devrait également être sensible à la variation du taux de rémunération des engagements hors UC.

La figure ci-dessous présente l'impact d'une variation de 1% par rapport au scénario choisi.

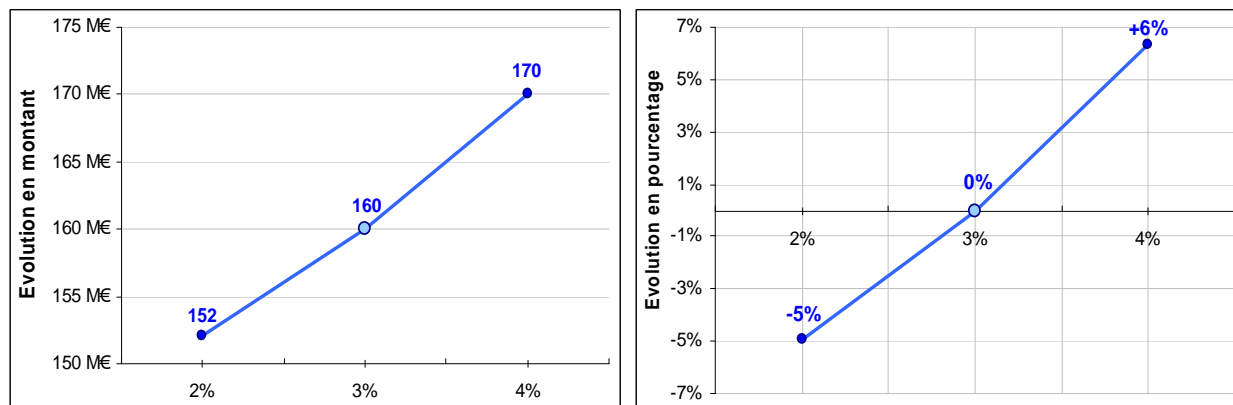


Figure 60 - Sensibilité à la variation du taux de rémunération des engagements hors UC

Nous observons que le coût d'écart de table est sensible à la variation du taux d'évolution des engagements hors UC. Une hausse de 1% du taux<sup>100</sup> augmente de 6% le coût d'écart de table. Inversement, une baisse de 1% de ce taux diminue de 5% le coût.

### 5.5.8 Sensibilité au taux d'indexation des versements périodiques

La variation du taux d'indexation impacte directement le montant moyen des versements périodiques. Une hausse du taux d'indexation augmentera donc le coût d'écart de table. Inversement, une baisse du taux d'indexation diminuera le coût d'écart de table.

La figure ci-dessous représente l'impact d'une variation de 1% par rapport au scénario choisi.

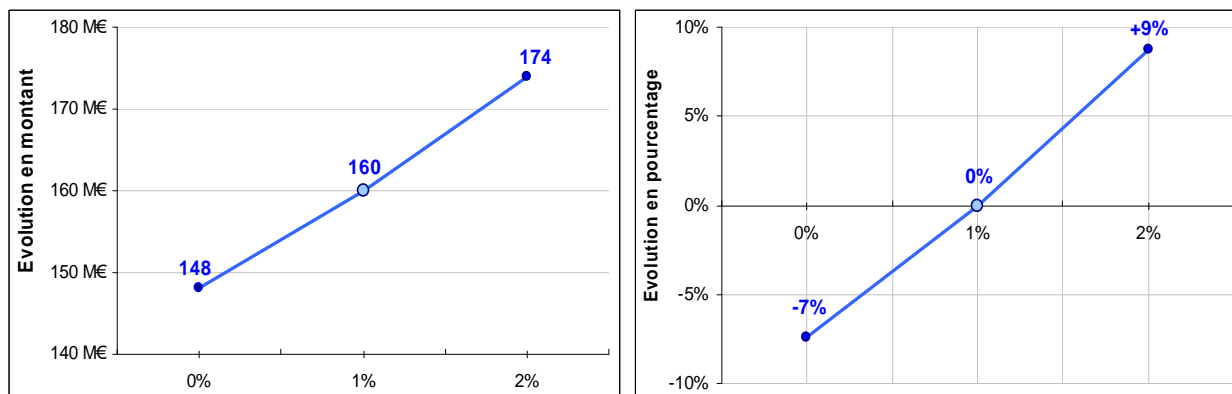


Figure 61 - Sensibilité à la variation du taux d'indexation des versements périodiques

Nous observons que le coût d'écart de table est sensible à la variation du taux d'indexation des versements périodiques. Une hausse de 1% du taux<sup>101</sup> augmente de 9% le coût d'écart de table. Inversement, une baisse de 1% de ce taux diminue de 7% le coût.

100. Pour rappel, le taux de rémunération des engagements hors UC du scénario choisi est de 3%

101. Pour rappel, le taux d'indexation des versements périodiques du scénario choisi est de 1%



### 5.5.9 Sensibilité à la durée restante du contrat

En augmentant la durée restante du contrat, la provision clôture issue des versements augmente mécaniquement par les primes supplémentaires, la rémunération des engagements hors UC et l'évolution des unités de compte. La figure ci-dessous représente l'impact d'une année supplémentaire de versements sur les primes nettes et la provision clôture associée, simulées à partir des paramètres du scénario choisi.

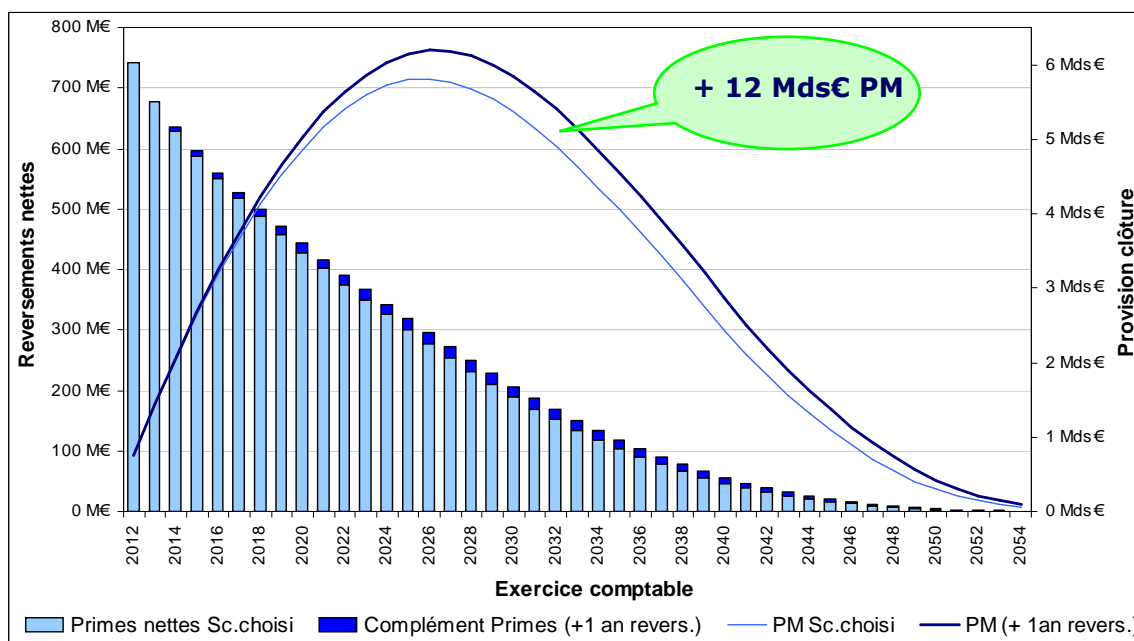


Figure 62 - Déformation de la PM avec une année supplémentaire de versements par exercice comptable

Nous observons qu'une année supplémentaire de versements impacte fortement à la hausse la provision clôture entre les exercices comptables 2012 à 2054 (272 M€ en moyenne par an). Le complément de provisions s'élève à 12 Mds€ et représente 8.8% en moyenne des provisions du scénario choisi. Le coût d'écart de table devrait donc être sensible à la durée restante du contrat.

La figure ci-dessous présente l'impact de l'allongement de la durée restante par rapport au scénario choisi.

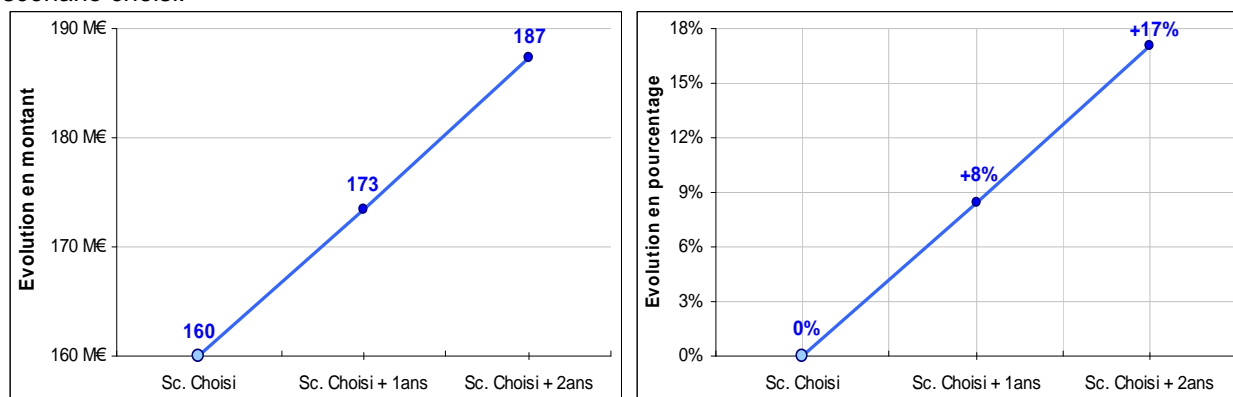


Figure 63 - Sensibilité à la durée restante du contrat

Nous observons que le coût d'écart de table est donc sensible à la variation de la durée restante du contrat. Une année supplémentaire de versements augmente de 8% le coût.

### 5.5.10 Sensibilité aux rachats d'office

En application des articles A.160-2 à A.160-4 du Code des assurances qui permettent à La Mondiale de procéder aux rachats d'office<sup>102</sup> des contrats de rente, nous proposons de chiffrer leur impact selon les étapes suivantes :

- simulation par contrat de la provision terme (hors versements) en utilisant la provision contractuelle au 31/12/2011,
- simulation par contrat de la provision terme sur versements périodiques et libres versés au-delà du 31/12/2011,
- identification des assurés bénéficiant d'une rente annuelle inférieure à 480 € y compris les majorations légales,
- chiffrage du coût d'écart de table hors assurés bénéficiant d'une rente annuelle inférieure à 480 €.

Pour tenir compte des majorations légales<sup>103</sup>, nous avons retenu les taux de majorations légales par rapport à la provision contractuelle indiqués dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 51** - Taux de majorations légales par tarif de rente et effet du contrat

Produits retraite	Effet du contrat	Tarif de rente	Taux de majoration légale
Monosupport viagère	Avant 1977	PF 4.50 1957	34%
		PF 4.50 1971	25%
	Entre 1977 et 1986	PF 4.50 1957	10%
		PF 4.50 1971	9%
		TV 4.50 1986	5%
	Après 1986	-	0%

Ces taux ont été déterminés par tarif et par période de date d'effet du contrat à partir des données extraites de la Base Bilan Technique entre 2009 et 2011.

Pour le calcul de la rente annuelle au terme des contrats à tarif de rente garantie à la liquidation, nous avons tenu compte des conséquences de l'Arrêt Test-Achat<sup>104</sup>. Par cet arrêté qui interdit de prendre en considération le critère Homme/Femme pour le calcul des primes et des prestations d'assurance, sont concernées toutes les affaires nouvelles en retraite individuelle<sup>105</sup> avec un tarif garanti à la souscription réalisées à partir du 21 décembre 2012. Sont également impactés, les contrats<sup>106</sup> pour lesquels le calcul de la rente se fait à partir de la table de mortalité en vigueur à la liquidation et dont la rente prend effet à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2013. Pour les contrats impactés par l'Arrêt Test-Achat, nous retenons les tables TGF05 pour le calcul de la rente annuelle au terme.

Par ailleurs, face à la baisse du TME (moyenne 6 mois) observée début septembre 2012, les sociétés d'assurance sont amenées à baisser le niveau du taux technique des contrats. Le taux en vigueur de 1.75% depuis le 01/01/2011 passera alors à 1.50% à partir du 21 décembre 2012. Pour les contrats tarif à la liquidation, nous retenons un taux technique de 1.50% pour le calcul de la rente annuelle au terme.

102. Voir paragraphe (1.3.5)

103. Les majorations légales ne concernent que les contrats de retraite monosupports à capitalisation viagère

104. Décision de la cour Européenne de Justice du 1<sup>er</sup> mars 2011

105. Les contrats collectifs Mondiale Perspectives Entreprise Art 83 et 82 ne sont pas concernés pour le moment

106. Seuls les contrats individuels MR+2000 commercialisés jusqu'en janvier 1997 sont concernés

Le tableau ci-dessous donne le résultat de cette sensibilité :

**Tableau 52** - Impact des rachats d'office sur le coût d'écart de table

Coût d'écart de table aux TGH/F05 au 31/12/2011			
Reversements	Scénario choisi	Avec rachats d'office	Impact des rachats d'office
Périodiques	147.8 M€	147.4 M€	-0.3%
Libres	12.2 M€	12.2 M€	-0.1%
<b>Total</b>	<b>160.0 M€</b>	<b>159.6 M€</b>	<b>-0.3%</b>

Nous observons que l'impact des rachats d'office sur le coût d'écart de table est de **-0.3%**.  
Le coût d'écart de table est donc très peu sensible aux rachats d'office.

### 5.5.11 Synthèse des études de sensibilité

Le tableau suivant récapitule l'impact des différentes sensibilités réalisées sur le chiffrage du coût d'écart de table.

**Tableau 53** - Impact des études de sensibilité sur le coût d'écart de table par rapport au scénario choisi

Type de sensibilité	Faible	Elevé	Très élevé
Choix des options de rente au terme (1T NTG, 1T, 2T)			
Choc sur le taux de sortie en rente des contrats de type RC			
Choc sur les taux de versements			
Choc sur les taux de rachats totaux			
Choc sur les taux de mortalité en phase de constitution			
Variation du taux d'évolution des unités de compte (UC)			
Variation du taux de rémunération des engagements hors UC			
Variation du taux d'indexation des versements périodiques			
Variation de la durée restante du contrat			
Rachats d'office			

## CONCLUSION

La Mondiale est une société d'assurance mutuelle spécialisée dans la vente de produits de retraite depuis 1905. Son portefeuille est composé de contrats dont certains proposent une garantie de table au terme, différente des tables réglementaires utilisées pour le provisionnement des rentes en service. L'écart de provisions entre la table garantie contractuellement au terme et les tables TGH/F05 peut donc être significatif. La directive européenne Solvabilité 2 et les prochaines normes IFRS conduisent les assureurs à mieux évaluer leurs engagements, dont la garantie de table sur les versements. La Mondiale doit donc être en mesure d'évaluer les provisions de retraite associées à ses versements ainsi que de vérifier et d'actualiser les paramètres utilisés pour le calcul, de manière à anticiper au plus juste le besoin de provisions à constituer au moment de la mise en place de la rente.

Le mémoire répond à cette problématique en proposant une méthode de chiffrage précis et souple du coût d'écart de table sur les versements entre la table garantie contractuellement au terme et les tables TGH/F05 sur la base d'un scénario choisi que nous avons voulu le plus réaliste possible. Ce scénario a été principalement défini à partir de paramètres économiques basés sur les caractéristiques des contrats de rente ainsi que sur les lois comportementales de versements et de rachats totaux, déterminées sur les données du portefeuille de La Mondiale observées entre 2009 et 2011. Nous avons utilisé le progiciel SAS V9.3, un outil fiable, performant et auditable, qui nous a permis d'optimiser le temps de calcul et de construire les différentes étapes de détermination du coût d'écart de table.

**Au 31/12/2011, le coût d'écart de table sur les versements est ainsi chiffré à 160 M€**  
D'après nos études de sensibilité, le coût d'écart de table est fortement sensible au choix du type de rente au terme ; l'option de rente deux têtes étant la plus coûteuse compte tenu de la composition du portefeuille. Par ailleurs dans des proportions moins importantes, le coût est sensible aux taux de versements, aux taux de rachats totaux, au taux d'évolution des unités de compte, au taux de rémunération des engagements hors UC, au taux d'indexation des versements périodiques et à la durée restante du contrat.

Le chiffrage peut donc fortement varier en fonction des paramètres du scénario choisi. Un contrôle et une évaluation des paramètres les plus influents tels que le choix du type de rente au terme sont alors recommandés pour estimer au plus juste le coût d'écart de table. Par la suite, certains paramètres pourront être affinés comme par exemple l'utilisation d'un vecteur de taux non constant pour les taux d'évolution des unités de compte ou de rémunération des engagements hors UC. La méthode de détermination des lois comportementales par ancienneté pourra également être approfondie, même si les lois déterminées sont satisfaisantes et globalement robustes. Pour compléter l'étude, il conviendra également d'étudier l'impact des rachats partiels non pris en compte dans le coût d'écart de table. Enfin les lois comportementales de versements et de rachats totaux déterminées pourront être prises en compte dans le cadre d'autres types de valorisation du passif comme l'Embedded Value, Solvabilité 2 ou la future norme comptable IFRS 4.

## TABLE DES ILLUSTRATIONS

<b>Schéma 1</b> - Composition du portefeuille de La Mondiale .....	12
<b>Schéma 2</b> - Chronologie de la commercialisation des contrats de retraite .....	18
<b>Schéma 3</b> - Les chargements des contrats de retraite .....	18
<b>Schéma 4</b> - Processus d'alimentation de la Base Bilan Technique .....	29
<b>Schéma 5</b> - Granularité des lois comportementales .....	31
<b>Schéma 6</b> - Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2011 .....	75
<b>Schéma 7</b> - Montants réels 2010 des contrats d'ouverture 2010 .....	76
<b>Schéma 8</b> - Montants réels 2009 des contrats d'ouverture 2009 .....	76
<b>Schéma 9</b> - Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2010 .....	88
<b>Schéma 10</b> - Montants réels 2011 des contrats d'ouverture 2009 .....	88
<b>Schéma 11</b> - Montants réels 2010 des contrats d'ouverture 2009 .....	89
<b>Schéma 12</b> - Processus de fonctionnement du moteur de calcul sous SAS .....	99
<b>Schéma 13</b> - Validation avec Excel du moteur de calcul .....	101
<b>Tableau 1</b> - Nombre de contrats en cours par fiscalité et par catégorie au 31/12/2011 .....	15
<b>Tableau 2</b> - Nombre de contrats et primes brutes émises au 31/12/2011 .....	17
<b>Tableau 3</b> - Les principaux taux de chargements des contrats de retraite .....	20
<b>Tableau 4</b> - Chargements d'acquisition et de gestion des contrats de retraite au 31/12/2011 .....	21
<b>Tableau 5</b> - Engagement à la liquidation des contrats individuels de retraite .....	23
<b>Tableau 6</b> - Engagement à la liquidation des contrats collectifs de retraite .....	23
<b>Tableau 7</b> - Primes brutes émises 2011 de la garantie vie par table contractuelle et produit .....	24
<b>Tableau 8</b> - Primes brutes émises 2011 de la garantie vie par table contractuelle et type de sorties en rente .....	24
<b>Tableau 9</b> - Répartition du nombre de rentes à 1 tête et à 2 têtes au 31/12/2011 .....	25
<b>Tableau 10</b> - Cadrage des primes brutes émises au 31/12/2011 .....	30
<b>Tableau 11</b> - Tableau d'analyse de la variance d'une régression .....	40
<b>Tableau 12</b> - Illustration 2 du facteur de fiabilité .....	43
<b>Tableau 13</b> - Exemple 1 : Taux de rachats totaux en nombre par ancienneté .....	50
<b>Tableau 14</b> - Exemple 1 : Évolution du coefficient de détermination .....	51
<b>Tableau 15</b> - Exemple 1 : Sortie OUTEST .....	53
<b>Tableau 16</b> - Exemple 1 : Sortie OUTPUT .....	53
<b>Tableau 17</b> - Exemple 2 : Taux de versements périodiques en nombre par ancienneté .....	57
<b>Tableau 18</b> - Exemple 2 : Evolution du Pseudo-R <sup>2</sup> .....	58
<b>Tableau 19</b> - Exemple 2 : Sortie OUTPUT .....	60
<b>Tableau 20</b> - Exemple 2 : Analyse de la significativité des paramètres estimés .....	61
<b>Tableau 21</b> - Cadrage des primes extraites (M€) de la Base Bilan Technique .....	66
<b>Tableau 22</b> - Données 2011 exclues de l'ajustement des taux de versements périodiques observés .....	67
<b>Tableau 23</b> - Données 2011 exclues de l'ajustement des taux de versements libres observés .....	67
<b>Tableau 24</b> - Versements périodiques - Indicateurs de la qualité globale des lois ajustées .....	69
<b>Tableau 25</b> - Versements périodiques - Intervalles de confiance des paramètres estimés .....	69
<b>Tableau 26</b> - Versements libres - Indicateurs de la qualité globale des lois ajustées .....	70
<b>Tableau 27</b> - Versements libres - Intervalles de confiance des paramètres estimés .....	70
<b>Tableau 28</b> - Simulation des versements bruts N des contrats d'ouverture N .....	77
<b>Tableau 29</b> - Données 2011 exclues de l'ajustement des taux observés de rachats totaux .....	81
<b>Tableau 30</b> - Rachats totaux - Indicateurs de la qualité globale des lois ajustées .....	82
<b>Tableau 31</b> - Test de Durbin-Watson - Lois de rachats totaux .....	85
<b>Tableau 32</b> - Rachats totaux - P-values associées au test de Student des paramètres estimés .....	85
<b>Tableau 33</b> - Simulation des primes 2011 et 2010 à partir des contrats d'ouverture 2010 .....	90
<b>Tableau 34</b> - Simulation des primes 2011, 2010 et 2009 à partir des contrats d'ouverture 2009 .....	90
<b>Tableau 35</b> - Les principales tables de mortalité réglementaires utilisées en France .....	92
<b>Tableau 36</b> - Impact des tables de mortalité sur le coût d'une rente trimestrielle à terme échu pour un homme de 67 ans .....	93
<b>Tableau 37</b> - Impact des tables de mortalité sur le coût d'une rente trimestrielle à terme échu pour une femme de 67 ans .....	93
<b>Tableau 38</b> - Compléments d'écart de tables aux TGH/F05 au 31/12/2011 dans les comptes sociaux .....	94
<b>Tableau 39</b> - Montant moyen des versements périodiques .....	102
<b>Tableau 40</b> - Taux d'investissement en UC des versements périodiques en 2011, 2010 et 2009 par génération .....	102
<b>Tableau 41</b> - Taux d'investissement en UC des versements libres en 2011, 2010 et 2009 par génération .....	103
<b>Tableau 42</b> - Taux d'investissement en UC par génération .....	103
<b>Tableau 43</b> - Taux de chargements d'acquisition 2011 .....	104
<b>Tableau 44</b> - Taux de chargements de gestion 2011 .....	104
<b>Tableau 45</b> - Taux de sortie en rente au terme en montant entre 2009 et 2011 .....	104
<b>Tableau 46</b> - Taux d'option de rente 1T NTG, 1T et 2T en nombre entre 2009 et 2011 .....	105
<b>Tableau 47</b> - Chiffrage du coût écart de table au 31/12/2011 .....	106
<b>Tableau 48</b> - Sensibilité aux options de rente 1T NTG, 1T et 2T .....	107
<b>Tableau 49</b> - Sensibilité aux options de rente 1T NTG, 1T et 2T par granularité .....	107
<b>Tableau 50</b> - Exemples de ratio d'annuité entre la TGH 05 et la table contractuelle .....	108
<b>Tableau 51</b> - Taux de majorations légales par tarif de rente et effet du contrat .....	114
<b>Tableau 52</b> - Impact des rachats d'office sur le coût d'écart de table .....	115
<b>Tableau 53</b> - Impact des études de sensibilité sur le coût d'écart de table par rapport au scénario choisi .....	115

<b>Tableau 54</b> - Taux de prélèvement libératoire en assurance vie au 01/04/2012 .....	121
<b>Tableau 55</b> - Taux de rente imposée en assurance vie au 01/04/2012 .....	122
<b>Tableau 56</b> - Fiscalité en cas de décès en assurance vie au 01/04/2012 .....	123
<b>Tableau 57</b> - Valeur $F_{1-\alpha}(ddL_E, ddL_R)$ de Fisher pour $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 5\%$ .....	130
<b>Tableau 58</b> - Extrait de la table du Dw de Durbin-Watson au seuil de 1% et de 5% .....	131
<b>Tableau 59</b> - Extrait de la table du t de Student au seuil de 1% et de 5% .....	132
<b>Figure 1</b> - Évolution du taux de sortie en rente facultative entre 2007 et 2011 .....	25
<b>Figure 2</b> - Évolution du type de rente choisi au terme entre 2007 et 2011 .....	26
<b>Figure 3</b> - Proportion moyenne du type de rente choisi au terme entre 2007 et 2011 .....	26
<b>Figure 4</b> - Répartition des rentes 2T émises au terme, par couple d'assurés de 2007 à 2011 .....	26
<b>Figure 5</b> - Rente 2T - Répartition des écarts d'âge (Age Homme – Age Femme) .....	27
<b>Figure 6</b> - Taux de réversion choisi entre 2007 et 2011 .....	27
<b>Figure 7</b> - Proportion moyenne de la réversion choisie entre 2007 et 2011 .....	27
<b>Figure 8</b> - Trimestrialité choisie à la mise en place de la rente entre 2007 et 2011 .....	27
<b>Figure 9</b> - Proportion moyenne de la trimestrialité choisie entre 2007 et 2011 .....	27
<b>Figure 10</b> - Montant des rentes annuelles inférieures à 480 € .....	28
<b>Figure 11</b> - Taux de versements périodiques des contrats individuels multisupports et monosupports .....	31
<b>Figure 12</b> - Taux de versements périodiques des contrats collectifs multisupports et monosupports .....	32
<b>Figure 13</b> - Illustration de l'approche graphique de la régression .....	40
<b>Figure 14</b> - Illustration 1 du facteur de fiabilité .....	43
<b>Figure 15</b> - Illustration 3 du facteur de fiabilité .....	43
<b>Figure 16</b> - Illustration du test d'homoscédasticité .....	45
<b>Figure 17</b> - Illustration du test de normalité à partir du graphique Q-Q Plot .....	47
<b>Figure 18</b> - Exemple 1 : Taux de rachats totaux par ancienneté courue .....	50
<b>Figure 19</b> - Exemple 1 : Approche graphique de la régression linéaire .....	51
<b>Figure 20</b> - Exemple 1 : Sortie standard de la procédure REG .....	52
<b>Figure 21</b> - Exemple 1 : Courbes des données observées et ajustées .....	54
<b>Figure 22</b> - Exemple 1 : Résidus en fonction des valeurs estimées .....	54
<b>Figure 23</b> - Exemple 1 : Graphique QQ-Plot des résidus .....	55
<b>Figure 24</b> - Exemple 2 : Taux de versements périodiques par ancienneté courue .....	57
<b>Figure 25</b> - Exemple 2 : Approche graphique de la régression non linéaire .....	58
<b>Figure 26</b> - Exemple 2 : Sortie standard de la procédure NLIN .....	59
<b>Figure 27</b> - Exemple 2 : Courbes des données observées et ajustées .....	60
<b>Figure 28</b> - Exemple 2 : Graphique QQ-Plot des résidus .....	61
<b>Figure 29</b> - Taux observés de versements périodiques par ancienneté des familles 1 à 4 .....	63
<b>Figure 30</b> - Taux observés de versements périodiques par ancienneté des familles 5 à 8 .....	64
<b>Figure 31</b> - Taux observés de versements libres par ancienneté des familles 1 à 6 .....	64
<b>Figure 32</b> - Taux observés de versements libres par ancienneté des familles 7 et 8 .....	65
<b>Figure 33</b> - Lois 2011 de versements périodiques ajustées .....	68
<b>Figure 34</b> - Lois 2011 de versements libres ajustées .....	68
<b>Figure 35</b> - Versements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 1 et 2 .....	71
<b>Figure 36</b> - Versements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 3 et 4 .....	71
<b>Figure 37</b> - Versements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 5 et 6 .....	72
<b>Figure 38</b> - Versements périodiques - Taux observés et modèle ajusté des familles 7 et 8 .....	72
<b>Figure 39</b> - Versements libres - Taux observés et modèle ajusté des familles 1 et 2 .....	73
<b>Figure 40</b> - Versements libres - Taux observés et modèle ajusté des familles 3 et 4 .....	73
<b>Figure 41</b> - Versements libres - Taux observés et modèle ajusté des familles 5 et 8 .....	74
<b>Figure 42</b> - Taux observés de rachats totaux par ancienneté pour les familles 1 à 2 .....	78
<b>Figure 43</b> - Taux observés de rachats totaux par ancienneté pour les familles 3 à 8 .....	79
<b>Figure 44</b> - Lois 2011 de rachats totaux ajustées .....	81
<b>Figure 45</b> - Test de normalité des résidus des familles 1, 2, 3, 4, 7 et 8 .....	83
<b>Figure 46</b> - Test de l'homoscédasticité des résidus des familles 1, 2, 3, 4, 7 et 8 .....	84
<b>Figure 47</b> - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 1 et 2 .....	86
<b>Figure 48</b> - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 3 et 4 .....	86
<b>Figure 49</b> - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 5 et 6 .....	87
<b>Figure 50</b> - Rachats totaux - Taux observés et modèle ajusté des familles 7 et 8 .....	87
<b>Figure 51</b> - Provisions non zillmériées au 31/12/2011 des rentes en cours de constitution par table de liquidation .....	93
<b>Figure 52</b> - Coût d'écart de table au 31/12/2011 par année terme .....	106
<b>Figure 53</b> - Coût d'écart de table au 31/12/2011 par année terme et options de rente au terme .....	108
<b>Figure 54</b> - Chocs sur le taux de sortie en rente des contrats de type RC .....	109
<b>Figure 55</b> - Chocs sur les taux de versements périodiques et libres .....	109
<b>Figure 56</b> - Chocs sur les taux de rachats totaux .....	110
<b>Figure 57</b> - Chocs sur les taux de mortalité .....	110
<b>Figure 58</b> - Primes nettes investies en TPG 93 et provision clôture simulées par exercice comptable .....	111
<b>Figure 59</b> - Sensibilité à la variation du taux d'évolution des unités de compte .....	111
<b>Figure 60</b> - Sensibilité à la variation du taux de rémunération des engagements hors UC .....	112
<b>Figure 61</b> - Sensibilité à la variation du taux d'indexation des versements périodiques .....	112
<b>Figure 62</b> - Déformation de la PM avec une année supplémentaire de versements par exercice comptable .....	113
<b>Figure 63</b> - Sensibilité à la durée restante du contrat .....	113



## ANNEXE 1

### Les dates clés de la SGAM AG2R LA MONDIALE

La SGAM AG2R LA MONDIALE est née de l'union d'AG2R et de La Mondiale, deux groupes bénéficiant d'expertises complémentaires, respectivement en retraite complémentaire, prévoyance et santé et en épargne, retraite supplémentaire.

Voici les dates clés des groupes AG2R et de La Mondiale :

- 1905 La Mondiale est créée par sept industriels du Nord pour compléter les revenus des salariés de petites entreprises et des travailleurs indépendants (artisans, commerçants, professions libérales), après leur cessation d'activité.
- 1951 L'Association Générale de Retraite par Répartition (AGRR) est créée à l'initiative des papetiers ; il s'agit de la première caisse de retraite par répartition pour les salariés non cadres.
- 1977 Création d'AGRR Prévoyance, qui deviendra AG2R Prévoyance en 2000.
- 1992 AGRR devient AG2R et l'Union des mutuelles AG. Mut<sup>107</sup> est créée.
- 1999 Acquisition de La Hénin Vie (devenue La Mondiale Partenaire), par La Mondiale.
- 2002 Rapprochement avec les trois instances des professions de la coiffure : la MNM<sup>108</sup>, l'INRPC<sup>109</sup> et l'INPCA<sup>110</sup>.  
Création d'Arial assurance, spécialisée dans l'épargne retraite et la prévoyance-santé collectives, par AG2R et La Mondiale.  
Création de La Mondiale Europartner, par La Mondiale et AEGON qui est l'un des leaders mondiaux de l'assurance de personnes. La Mondiale Europartner devient le 1er réseau européen dédié à la retraite collective et aux salariés transfrontaliers.
- 2004 Rapprochement d'AG2R avec Isica, groupe paritaire du secteur de l'alimentaire.
- 2005 Rapprochement d'AG2R avec Prémalliance.
- 2008 Création de la SGAM AG2R LA MONDIALE.
- 2009 Protocole de fusion avec Prémalliance.
- 2010 La Mondiale adhère à l'Association sommitale AG2R Isica, devenue Association sommitale AG2R LA MONDIALE.  
Les institutions AG2R Prévoyance et Prémalliance Prévoyance fusionnent sous la dénomination AG2R Prévoyance.
- 2011 Les salariés de Prémalliance rejoignent le GIE AG2R. Le groupe compte désormais 7 185 collaborateurs.

107. AG. Mut est le pôle mutualiste du Groupe qui réunit 19 mutuelles d'entreprises, professionnelles et interprofessionnelles, locales, régionales et nationales

108. Mutuelle nationale des métiers

109. Institution nationale de retraite professionnelle de la coiffure

110. Institution nationale de prévoyance du commerce et de l'artisanat

## ANNEXE 2

### Les chiffres clés 2011 de la SGAM AG2R LA MONDIALE

#### Effectifs :

7 185 collaborateurs en France (équivalent CDI, temps plein).

#### Assurés :

8 millions de personnes et ayants droit.

1 entreprise sur 4 est adhérente en France.

#### Activités :

15.5 Md€ de collecte pour l'ensemble des activités du Groupe dont

- 7.8 Md€ au titre de la retraite complémentaire Agirc et Arrco.
- 7.4 Md€ au titre des activités d'assurance dont
  - 3.6 Md€ en assurance vie épargne,
  - 1.4 Md€ en assurance vie retraite,
  - 1.2 Md€ en santé,
  - 1.1 Md€ en prévoyance.
- 0.2 Md€ de collecte en épargne salariale.
- 0.1 Md€ au titre des autres activités.

#### Positions :

N°1 en retraite supplémentaire collective.

N°2 en retraite complémentaire.

N°2 en retraite Madelin.

N°3 en assurance santé collective.

N°3 en assurance perte d'autonomie.

N°4 en assurance prévoyance collective.



## ANNEXE 3

### Les types de fiscalité en assurance vie

- Fiscalité Assurance Vie,
- Fiscalité Madelin,
- Fiscalité Article 82 du CGI,
- Fiscalité Article 83 du CGI,
- Fiscalité Article 62 du CGI,
- Fiscalité Article 97 du CTI,
- Fiscalité PEP,
- Fiscalité PERP,
- Fiscalité DSK,
- Fiscalité Homme-Clé.

#### La fiscalité Assurance Vie

Les caractéristiques fiscales et sociales sont les suivantes :

**Sur les plus values**, en cas de retrait d'une partie ou de la totalité de l'épargne du contrat, la part des primes versées n'est jamais imposée. A l'inverse, les plus-values réalisées sur le contrat sont au choix de l'assuré soumises à **l'impôt sur le revenu** ou au **prélèvement libératoire** dont le taux sur les plus-values diminue avec la durée du contrat selon le tableau ci-dessous.

**Tableau 54** - Taux de prélèvement libératoire en assurance vie au 01/04/2012

Durée du contrat	Prélèvement forfaitaire libératoire
Inférieur à 4 ans	35%
Entre 4 et 8 ans	15% (PEP: 24%)
Supérieur à 8 ans	Pas d'imposition jusqu'à 4 600€ par an pour une personne seule et 9 200€ par an pour un couple marié. Au-delà, taux de 7.5%. (PEP: Exonération d'impôt sur le revenu)

Cependant les plus values sont exonérées en cas

- de licenciement,
  - de liquidation judiciaire,
  - de mise en retraite anticipée,
  - de l'invalidité 2<sup>ème</sup> ou 3<sup>ème</sup> catégorie de la SS
  - de souscription d'un contrat avant le 01/01/1983.
- } du souscripteur ou de son conjoint

Sur le montant des rentes viagères à titre onéreux<sup>111</sup>, la fraction de la rente est imposable en fonction de l'âge à la mise en place de la rente selon le tableau ci-dessous.

Tableau 55 - Taux de rente imposée en assurance vie au 01/04/2012

Age de l'assuré à la mise en place de la rente	Fraction de la rente imposée
Inférieur à 50 ans	70%
Entre 50 et 59 ans inclus	50%
Entre 60 et 69 ans inclus	40%
Supérieur à 69 ans	30%

Les indemnités journalières ne sont pas imposables dès lors que le contrat est facultatif et que les risques assurés sont personnels.

Les prélèvements sociaux en cas de vie s'appliquent chaque année sur les intérêts générés par les contrats en euros et par les supports euros des contrats multisupports sauf si le souscripteur ou son conjoint est en invalidité de 2<sup>ème</sup> ou 3<sup>ème</sup> catégories de la sécurité sociale. Pour la part investie en unité de compte, les prélèvements sociaux ne s'appliquent qu'au terme ou au rachat. Pour les rentes viagères à titre onéreux, seule la partie imposable est soumise aux prélèvements sociaux.

Sur les prélèvements sociaux en cas de décès, la loi de financement de la sécurité sociale 2010 soumet les intérêts des contrats d'assurance vie dénoués par le décès de l'assuré qui n'ont pas été soumises à ces prélèvements sociaux du vivant de l'assuré.

A partir du 1<sup>er</sup> juillet 2012, les prélèvements sociaux des revenus d'activité ou de remplacement sont de :

- 8.2% au titre de la Contribution Sociale Généralisée<sup>112</sup> (CSG)
- + 0.5% au titre de la Contribution au Remboursement de la Dette Sociale (CRDS)
- + 5.4% au titre du Prélèvement Social (PS)
- + 0.3% au titre de la Contribution Additionnelle au Prélèvement Social (CAPS)
- + 1.1% pour le financement du Revenu de Solidarité Active (RSA)

Soit un taux de prélèvements sociaux cumulé de 15.5%.

En cas de décès de l'assuré, l'épargne constituée sur le contrat est versée au(x) bénéficiaire(s) désigné(s). Depuis la loi TEPA du 21 août 2007 en faveur du Travail, de l'Emploi et du Pouvoir d'Achat, les droits de succession sont totalement exonérés pour le conjoint survivant, le partenaire pacsé et sous conditions pour le frère ou la sœur.

Si le bénéficiaire ne rentre pas dans l'une de ces catégories, la fiscalité appliquée en cas de décès de l'assuré dépend de la date de versement des primes, de l'âge du souscripteur et de la date d'ouverture du contrat selon le tableau suivant.

111. Rentes viagères qui résultent d'une contre partie par opposition aux rentes viagères à titre gratuits

112. CSG égale à 8.2% sur les revenus d'activité ou de remplacement ; 6.20 % sur les revenus du chômage ; 6.60 % des retraites (3.80 % pour les personnes dont le revenu de référence est inférieur à 9876 € et exonération pour les foyers non imposables) ; 8.20 % des revenus du patrimoine et de placement ; 9.50 % des revenus des jeux

**Tableau 56** - Fiscalité en cas de décès en assurance vie au 01/04/2012

		Contrat souscrit avant le 20/11/91	Contrat souscrit après le 20/11/91
Primes versées avant le 13/10/98	Avant 70 ans	Exonération de droits de succession	Exonération de droits de succession
	Après 70 ans		Les produits des primes versées sont exonérés. Imposition des primes versées au-delà de versements nets supérieurs à 30 500€ dans les conditions de droit commun (Art.757 B CGI).
Primes versées après le 13/10/98	Avant 70 ans	Abattement de 152 500€ sur le capital transmis à chaque bénéficiaire et taxation de 20% jusqu'à 902 838€ et de 25% au-delà (Art. 990 I CGI).	Abattement de 152 500€ sur le capital transmis à chaque bénéficiaire et taxation de 20% jusqu'à 902 838€ et de 25% au-delà (Art. 990 I CGI).
	Après 70 ans		Les produits des primes versées sont exonérés. Imposition des primes versées au-delà de versements nets supérieurs à 30 500€ dans les conditions de droit commun (Art.757 B CGI).

### La fiscalité Madelin

Tout entrepreneur individuel<sup>113</sup> peut souscrire un contrat collectif à adhésion facultative pour se constituer une retraite supplémentaire ou des garanties de prévoyance complémentaires.

Il s'agit de contrats de retraite sur-complémentaires gérés en capitalisation appelés "contrats Madelin" relevant de l'article 154 bis du Code Général des Impôts ou 154 bis OA du Code Général des Impôts pour les exploitants agricoles. Le contrat ne doit pas autoriser le rachat en cours, sauf circonstances exceptionnelles de nature sociale prévues par la loi.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats Madelin sont les suivantes :

- Pour l'adhérent, les cotisations de retraite versées peuvent être déduites de son revenu professionnel imposable dans une limite égale au plus élevé des deux montants suivants :
  - 10% du BIC<sup>114</sup>/BNC<sup>115</sup> limité à 8 PASS augmenté de 15% du bénéfice compris entre 1 et 8 PASS
  - 10% du PASS

De plus, ces limites sont diminuées des versements effectués au régime complémentaire obligatoire d'Assurance-Vieillesse pour la partie excédant la cotisation minimale obligatoire et des versements effectués par l'entreprise au titre du plan d'épargne pour la retraite collectif (PERCO).

Enfin, l'ensemble des charges sociales obligatoires<sup>116</sup> reste dû par l'adhérent sur le montant des cotisations versées.

- Pour l'adhérent, les cotisations de prévoyance versées peuvent être déduites de son revenu professionnel imposable dans une limite égale à 3.75% du BIC/BNC augmenté de 7% du PASS, le tout limité à 3% de 8 PASS.
- Les indemnités journalières versées en cas d'incapacité s'ajoutent au revenu professionnel du bénéficiaire si l'activité professionnelle est maintenue et sont alors imposées dans la

113. Sont aussi concernés les professions libérales ainsi que leurs conjoints collaborateurs, les exploitants individuels ainsi que leurs conjoints collaborateurs, les gérants non salariés de sociétés, les associés de sociétés de personnes et les associés uniques d'EURL relevant de l'article 62 du CGI

114. Bénéfices industriels et commerciaux

115. Bénéfices non commerciaux

116. Assurances maladie-maternité, invalidité-décès, vieillesse et allocations familiales

catégorie concernée (BIC - BNC - Art. 62). En cas d'arrêt de l'activité professionnelle, l'imposition se fera dans la catégorie des pensions.

- Les remboursements de frais médicaux sont exonérés d'impôt sur le revenu, de la CSG et de la CRDS.
- Les rentes sont soumises à la CSG/CRDS et sont imposées dans la catégorie des pensions ou des pensions de retraite. Dans le dernier cas, elles bénéficient d'un abattement forfaitaire de 10%.
- En cas de décès de l'assuré, le(s) bénéficiaire(s) reçoivent une rente viagère hors droits de succession, imposable dans la catégorie des pensions de retraite.

### La fiscalité Article 82 du CGI

Toute entreprise peut souscrire un contrat collectif à adhésion facultative au profit d'un ou de plusieurs membres de son personnel, garantissant une retraite supplémentaire sous forme de rente ou de capital au terme. Il s'agit de contrats de retraite sur-complémentaires gérés en capitalisation appelés contrats Article 82 pour lesquels l'intégralité des cotisations est prise en charge par l'entreprise.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats article 82 sont les suivantes :

- Pour l'entreprise, les cotisations versées peuvent être déduites de son bénéfice imposable (Art. 39 1-1° du CGI).
- Pour le salarié, les cotisations versées sont soumises à la CSG/RDS et sont intégrées dans son revenu annuel imposable (Art. 82 du CGI).
- Pour l'entreprise et le salarié, chacun supporte les charges URSSAF, les cotisations de retraite (ARRCO-AGIRC), les cotisations de l'assurance chômage (ASSEDIC-APEC), les taxes et contributions diverses sur salaires.
- Les plus-values réalisées, les rentes et le capital au terme sont soumises aux prélèvements sociaux et sont imposées au même titre qu'en fiscalité d'assurance vie.
- En cas de décès de l'assuré, les droits de succession sont totalement exonérés pour le conjoint survivant, le partenaire pacsé et sous conditions pour le frère ou la sœur sinon après un abattement de 152 500€, taxation à 20% jusqu'à 902 838€ et 25% au-delà.

### La fiscalité Article 83 du CGI

Toute entreprise peut souscrire un contrat collectif à adhésion obligatoire au profit d'un groupe homogène de salariés, garantissant une retraite supplémentaire sous forme de rente au terme. Il s'agit de contrats de retraite sur-complémentaires gérés en capitalisation appelés contrats Article 83.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats article 83 sont les suivantes :

- Pour l'entreprise, les cotisations versées peuvent être déduites de son bénéfice imposable (Art. 39 1-1° du CGI).
- Pour le salarié, les cotisations versées par l'entreprise ne sont pas à intégrer dans son revenu annuel imposable sous respect de certaines conditions (Art. 83 du CGI) :

- Le régime doit être obligatoire.
- Le taux de cotisation doit être identique pour tous les salariés.
- L'employeur doit financer une partie des cotisations.
- La sortie est en rente obligatoire au terme du contrat.
- Le contrat ne doit pas prévoir de valeur de rachat sauf rachats sociaux prévus par la loi.
- La rente est versée à la date de liquidation de la retraite de sécurité sociale.
- Les IJ sont soumises à la CSG et à la RDS et sont en plus imposées comme traitement et salaire ou comme pension.
- Les rentes sont soumises à la CSG/CRDS et sont imposées comme des pensions ou des pensions de retraite et dans ce dernier cas elles bénéficient d'un abattement forfaitaire de 10%.
- En cas de décès de l'assuré, l'épargne constituée sur le contrat est versée au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) dans sa totalité sans droits de succession.

### La fiscalité Article 62 du CGI

Toute entreprise peut souscrire au profit du gérant ou de l'associé un contrat individuel facultatif relevant de l'article 62 du Code Général des Impôts couplé avec la fiscalité Assurance Vie ou la fiscalité Madelin.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats Article 62 sont les suivantes :

- Les cotisations prises en charge par l'entreprise, sont admises en déduction des bénéfices soumis à l'impôt sur les sociétés conformément à l'article 211 du CGI.
- Les cotisations versées par le gérant ou l'associé, sont soumises à l'imposition sur les revenus pour les contrats fiscalité Art. 62+Assurance vie et dans le cadre des limites fiscales Madelin pour les contrats fiscalité Art. 62+Assurance vie
- Dans le cas des contrats de retraite relevant à la fois de la fiscalité Art. 62+Madelin, le gérant ou l'associé peut déduire les primes versées de sa rémunération imposable dans une limite égale au plus élevé des 2 montants suivants :
  - 10% du PASS<sup>117</sup>
  - 10% de la rémunération Art. 62 limitée à 8 PASS augmenté de 15% de la rémunération Art. 62 comprise entre 1 et 8 PASS

En cas de dépassement, les cotisations restent déductibles pour les entreprises mais ne sont pas déductibles pour l'assuré.

- Dans le cas des contrats de prévoyance relevant à la fois de la fiscalité Art. 62 et Madelin, la limite est égale à 3.75% de la rémunération Art. 62 augmenté de 7% du PASS, le tout limité à 3% de 8 PASS.
- L'ensemble des charges sociales obligatoires reste dû sur le montant des primes versées à l'exception des contrats Madelin Agricole qui bénéficient d'une exonération de charges sociales.

---

117. Plafond annuel de la sécurité sociale au 1er janvier de l'année de clôture comptable

- Les frais de santé sont totalement exonérés d'imposition sur le revenu ainsi que des prélèvements sociaux (les contrats Madelin Agricole ne sont pas concernés).
- Les IJ sont soumises à la CSG et à la RDS et sont en plus imposées comme traitement et salaire ou comme pension de retraite pour les contrats Madelin + Article 62.

### La fiscalité Article 97 du CTI

Toute entreprise située en Nouvelle-Calédonie peut souscrire un contrat collectif à adhésion obligatoire au profit d'un groupe homogène de salariés, garantissant une retraite supplémentaire sous forme de rente au terme. Il s'agit de contrats de retraite sur-complémentaires gérés en capitalisation appelés contrats Article 97.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats Article 97 sont les suivantes :

- Pour l'entreprise, les cotisations versées peuvent être déduites de son bénéfice imposable.
- Pour le salarié, les cotisations versées sont déductibles de son revenu annuel dans la limite de 10 fois le montant de salaire plafond de la CAFAT<sup>118</sup> de l'année de réalisation des revenus sous respect de certaines conditions :
  - Le régime doit être obligatoire.
  - Le taux de cotisation doit être identique pour tous les salariés.
  - La sortie est en rente obligatoire au terme du contrat.
  - Le contrat ne doit pas prévoir de valeur de rachat sauf rachats sociaux prévus par la loi.
  - le contrat doit prévoir la clause bénéficiaire prévue par l'article 97 du CTI.
- Les cotisations versées par l'entreprise sont soumises à charges sociales mais sont exonérées de taxe sur les conventions d'assurance.
- Au terme, les rentes sont imposées dans la catégorie des pensions après abattement forfaitaire de 10%.
- En cas de décès de l'assuré, le(s) bénéficiaire(s) reçoivent une rente viagère soumise aux droits de succession fixés par l'article 97 du CTI.

### La fiscalité PEP

Tout contribuable<sup>119</sup> pouvait jusqu'au 25 septembre 2003 ouvrir un Plan d'Epargne Populaire (PEP) pour se constituer une épargne de longue durée avec une fiscalité avantageuse.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats PEP sont les suivantes :

- **Avant 8 ans de contrat**, tout retrait total ou partiel entraîne la clôture du plan et l'imposition des intérêts accumulés mais le titulaire peut aussi opter pour un prélèvement libératoire au taux de 35% hors prélèvements sociaux quand le retrait a lieu avant la 4<sup>ème</sup> année et au taux de 19% hors prélèvements sociaux quand le retrait a lieu entre la 4<sup>ème</sup> et la 8<sup>ème</sup> année.

118. Caisse de protection sociale de Nouvelle-Calédonie

119. Au maximum deux PEP par foyer fiscal

De plus, en cas de retrait sous forme de rente viagère, les intérêts accumulés sont exonérés mais les montants de rente sont imposés selon le régime fiscal des rentes viagères à titre onéreux.

Enfin, l'imposition des intérêts accumulés est aussi due au-delà de la limite de versement des 92 000 € autorisés par plan.

- **Après 8 ans de contrat**, le montant du capital versé ou la rente viagère servie est définitivement exonéré d'impôt sur le revenu. Cette exonération est acquise quel que soit le rythme des versements effectués dans la limite des versements autorisés par Plan. Cependant, tout retrait partiel intervenant entre la 8<sup>ème</sup> et la 10<sup>ème</sup> année du plan entraîne la clôture du PEP et au-delà de 10 ans n'entraîne pas la clôture du plan mais interdit tout nouveau versement sur le PEP
- Les produits sont toutefois exonérés en cas de retrait, quelle que soit la durée du contrat, dans les cas suivants :
  - Décès du titulaire du PEP ou décès du conjoint soumis à une imposition commune
  - Expiration des droits aux assurances chômage prévus par le Code du Travail à la suite du licenciement du titulaire ou de son conjoint
  - Cessation d'activité non salariée du titulaire ou de son conjoint à la suite d'un jugement de liquidation judiciaire
  - Invalidité deuxième ou troisième catégorie de la Sécurité Sociale du titulaire ou de son conjoint
  - Dénouement du contrat par le versement d'une rente viagère
- Les prélèvements sociaux s'appliquent conformément au régime fiscal de l'assurance vie.
- Lors du versement de la rente, les prélèvements sociaux sont dus sur la même assiette que les rentes viagères à titre onéreux.
- En cas de décès du titulaire du PEP, les sommes transmises au(x) bénéficiaire(s) sont exonérées de droits de succession conformément au régime fiscal de l'assurance vie.

### La fiscalité PERP

Tout particulier peut souscrire un Plan d'Epargne Retraite Populaire (PERP) pour se constituer un complément de retraite tout en bénéficiant d'avantages fiscaux immédiats.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats PERP sont les suivantes :

- Les versements effectués sont déductibles pour chaque membre du foyer fiscal dans la limite d'un plafond égal au plus élevé des 2 montants suivants :
  - 10% des revenus nets d'activité professionnelle de l'année précédente après abattement de 10% des frais professionnels ou frais réels pour les salariés.  
Les revenus sont retenus dans la limite de 8 fois le PASS de l'année précédente.
  - 10% du PASS de l'année précédente

De ce montant déductible, il y a lieu de prendre en compte les cotisations versées dans le cadre des autres dispositifs de retraite complémentaires possédés tels que



- les régimes de retraite supplémentaires obligatoires Article 83 du CGI pour la part patronale et salariale des cotisations,
- les régimes de retraite facultatifs Madelin pour la part des cotisations qui excède 15% de la quote-part du bénéfice imposable comprise entre 1 PASS et 8 PASS de l'année précédente (si le bénéfice imposable est inférieur à 1 PASS, les cotisations Madelin sont à rapporter en totalité au plafond),
- l'abondement versé par l'entreprise sur le PERCO.

Et lorsque le montant annuel des versements effectués sur un PERP est inférieur au plafond de déduction, le solde est reportable sur les 3 années suivantes en faveur de l'adhérent exclusivement.

A l'inverse, le montant des versements annuels dépassant le plafond de déduction n'est pas déductible ni reportable sur les années suivantes sauf si le couple marié ou pacsé soumis à imposition commune a opté pour la mutualisation du plafond de déduction.

- Au terme, le montant de rente ou le capital (à hauteur de 20% des droits acquis) est soumis à la CSG/ CRDS et est imposable dans la catégorie des pensions de retraite.
- En cas de décès du titulaire du PERP, la rente versée au(x) bénéficiaire(s) est imposable dans la catégorie des pensions de retraite.

### La fiscalité DSK

Tout particulier pouvait jusqu'au 31 décembre 2004 souscrire un contrat relevant de la fiscalité DSK pour se constituer une épargne de longue durée avec une fiscalité avantageuse.

Il s'agit de contrats d'assurance vie, de bons ou de contrats de capitalisation, investis en actions et en unités de comptes, mis en place dans le but d'encourager l'épargne en actions françaises. Pour être éligibles à la fiscalité DSK, ces contrats doivent être investis pour au moins 50% en actions françaises ou européennes, dont au minimum 5% d'actions à risque<sup>120</sup>.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats DSK sont les suivantes :

- Ces contrats suivent les mêmes règles d'imposition que les contrats d'assurance vie classiques en cas de retrait dans les 8 premières années mais sont exonérés de prélèvement forfaitaire libératoire de 7.5% au-delà de 8 ans.
- Ces contrats sont soumis aux prélèvements sociaux
- Le transfert de contrats individuels vers un contrat relevant de la fiscalité DSK a été autorisé jusqu'au 30 juin 1999, sans perte de l'antériorité fiscale.
- La loi ne prévoit aucun plafond de versement sur ces contrats.

120. Titre de sociétés non cotées, cotées au nouveau marché ou au marché libre ou encore parts de fonds communs de placement dans l'innovation ou fonds communs de placement à risque



### La fiscalité Homme-Clé

Toute entreprise<sup>121</sup> peut souscrire un contrat de type « perte d'exploitation » sur la tête d'un de ses dirigeants ou d'un collaborateur, essentiel à son fonctionnement.

Il s'agit de contrats dits Homme-Clé qui garantissent la perte d'exploitation suite aux risques de décès, d'invalidité et d'arrêt de travail et dont les prestations sont versées sous la forme de capitaux ou d'indemnités journalières. Les capitaux permettent de faire face directement au décès de l'homme clé et les indemnités journalières permettent d'assurer un salaire de remplacement de l'homme clé en cas d'incapacité temporaire totale de ce dernier.

Les principales caractéristiques fiscales et sociales des contrats Homme-Clé sont les suivantes :

- Les cotisations garantissant le versement d'un capital ou d'une indemnité prédéterminée sont déductibles des résultats imposables des exercices au cours desquels elles ont été payées (Art 39 du CGI).
- En cas de bénéfice exceptionnel suite à une prestation importante, l'impôt sur ce bénéfice peut être étalé sur 5 ans à parts égales à partir de l'année du versement.
- Les capitaux décès ne sont pas soumis à l'article 990 I du Code Général des Impôts qui prévoit que les capitaux décès soient soumis, après un abattement de 152 500 € par bénéficiaire, à un prélèvement de 20% jusqu'à 902 838 € et 25% au-delà.

---

121. Sont exclus les entreprises individuelles et les professions libérales

## ANNEXE 4

### Extrait de la table du F de Fisher

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du  $F_{1-\alpha}(ddL_E, ddL_R)$  de Fisher pour  $\alpha = 1\%$  et  $\alpha = 5\%$ .

Tableau 57 - Valeur  $F_{1-\alpha}(ddL_E, ddL_R)$  de Fisher pour  $\alpha = 1\%$  et  $\alpha = 5\%$

ddL <sub>R</sub>	Au seuil de 1%				Au seuil de 5%			
	ddL <sub>E</sub> = 1	ddL <sub>E</sub> = 2	ddL <sub>E</sub> = 3	ddL <sub>E</sub> = 4	ddL <sub>E</sub> = 1	ddL <sub>E</sub> = 2	ddL <sub>E</sub> = 3	ddL <sub>E</sub> = 4
1	4 052.18	4 999.34	5 403.53	5 624.26	161.45	199.50	215.71	224.58
2	98.50	99.00	99.16	99.25	18.51	19.00	19.16	19.25
3	34.12	30.82	29.46	28.71	10.13	9.55	9.28	9.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	7.71	6.94	6.59	6.39
5	16.26	13.27	12.06	11.39	6.61	5.79	5.41	5.19
6	13.75	10.92	9.78	9.15	5.99	5.14	4.76	4.53
7	12.25	9.55	8.45	7.85	5.59	4.74	4.35	4.12
8	11.26	8.65	7.59	7.01	5.32	4.46	4.07	3.84
9	10.56	8.02	6.99	6.42	5.12	4.26	3.86	3.63
10	10.04	7.56	6.55	5.99	4.96	4.10	3.71	3.48
11	9.65	7.21	6.22	5.67	4.84	3.98	3.59	3.36
12	9.33	6.93	5.95	5.41	4.75	3.89	3.49	3.26
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.67	3.81	3.41	3.18
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.60	3.74	3.34	3.11
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.54	3.68	3.29	3.06
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.49	3.63	3.24	3.01
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.45	3.59	3.20	2.96
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.41	3.55	3.16	2.93
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.38	3.52	3.13	2.90
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.35	3.49	3.10	2.87
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.32	3.47	3.07	2.84
22	7.95	5.72	4.82	4.31	4.30	3.44	3.05	2.82
23	7.88	5.66	4.76	4.26	4.28	3.42	3.03	2.80
24	7.82	5.61	4.72	4.22	4.26	3.40	3.01	2.78
25	7.77	5.57	4.68	4.18	4.24	3.39	2.99	2.76
26	7.72	5.53	4.64	4.14	4.23	3.37	2.98	2.74
27	7.68	5.49	4.60	4.11	4.21	3.35	2.96	2.73
28	7.64	5.45	4.57	4.07	4.20	3.34	2.95	2.71
29	7.60	5.42	4.54	4.04	4.18	3.33	2.93	2.70
30	7.56	5.39	4.51	4.02	4.17	3.32	2.92	2.69
32	7.50	5.34	4.46	3.97	4.15	3.29	2.90	2.67
34	7.44	5.29	4.42	3.93	4.13	3.28	2.88	2.65
36	7.40	5.25	4.38	3.89	4.11	3.26	2.87	2.63
38	7.35	5.21	4.34	3.86	4.10	3.24	2.85	2.62
40	7.31	5.18	4.31	3.83	4.08	3.23	2.84	2.61
42	7.28	5.15	4.29	3.80	4.07	3.22	2.83	2.59
44	7.25	5.12	4.26	3.78	4.06	3.21	2.82	2.58
46	7.22	5.10	4.24	3.76	4.05	3.20	2.81	2.57
48	7.19	5.08	4.22	3.74	4.04	3.19	2.80	2.57
50	7.17	5.06	4.20	3.72	4.03	3.18	2.79	2.56

## ANNEXE 5

### Extrait de la table du Dw de Durbin-Watson

Le tableau ci-dessous donne les valeurs dL et dU de la table du Dw de Durbin-Watson au seuil de 1% et de 5% pour le test d'auto-corrélation des résidus d'un modèle de régression linéaire **avec un terme constant**.

Pour un modèle de régression sans terme constant, il existe d'autres tables de Durbin-Watson.

**Tableau 58** - Extrait de la table du Dw de Durbin-Watson au seuil de 1% et de 5% pour un modèle de régression avec un terme constant

n	Au seuil de 1%						Au seuil de 5%					
	k=1		k=2		k=3		k=1		k=2		k=3	
	dL	du	dL	du	dL	du	dL	du	dL	du	dL	du
6	0.39	1.14	-----	-----	-----	-----	0.61	1.40	-----	-----	-----	-----
7	0.44	1.04	0.29	1.68	-----	-----	0.70	1.36	0.47	1.90	-----	-----
8	0.50	1.00	0.35	1.49	0.23	2.10	0.76	1.33	0.56	1.78	0.37	2.29
9	0.55	1.00	0.41	1.39	0.28	1.88	0.82	1.32	0.63	1.70	0.46	2.13
10	0.60	1.00	0.47	1.33	0.34	1.73	0.88	1.32	0.70	1.64	0.53	2.02
11	0.65	1.01	0.52	1.30	0.40	1.64	0.93	1.32	0.76	1.60	0.60	1.93
12	0.70	1.02	0.57	1.27	0.45	1.58	0.97	1.33	0.81	1.58	0.66	1.86
13	0.74	1.04	0.62	1.26	0.50	1.53	1.01	1.34	0.86	1.56	0.72	1.82
14	0.78	1.05	0.66	1.25	0.55	1.49	1.05	1.35	0.91	1.55	0.77	1.78
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.47	1.08	1.36	0.95	1.54	0.81	1.75
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.45	1.11	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73
17	0.87	1.10	0.77	1.26	0.67	1.43	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71
18	0.90	1.12	0.81	1.26	0.71	1.42	1.16	1.39	1.05	1.54	0.93	1.70
19	0.93	1.13	0.84	1.26	0.74	1.42	1.18	1.40	1.07	1.54	0.97	1.69
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68
21	0.98	1.16	0.89	1.28	0.80	1.41	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67
22	1.00	1.17	0.92	1.28	0.83	1.41	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.41	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66
25	1.06	1.21	0.98	1.31	0.91	1.41	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65
28	1.10	1.24	1.04	1.33	0.97	1.41	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65
31	1.15	1.27	1.09	1.35	1.02	1.43	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.06	1.43	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.44	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65
35	1.20	1.31	1.14	1.37	1.09	1.44	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.41	1.53	1.35	1.59	1.30	1.65
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.44	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66
45	1.29	1.38	1.25	1.42	1.20	1.47	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67
50	1.32	1.40	1.29	1.45	1.25	1.49	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67

n : Nombre d'observations

k : Nombre de variables explicatives du modèle de régression linéaire

## ANNEXE 6

### Extrait de la table du t de Student bilatéral

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du  $t_{(n-p, 1-\alpha/2)}$  de Student bilatéral de degré de liberté (ddl) égal à n-p au seuil de  $\alpha = 1\%$  et  $\alpha = 5\%$ .

**Tableau 59** - Extrait de la table du t de Student au seuil de 1% et de 5%

ddl	Seuil de risque Alpha bilatéral	
	1%	5%
1	63.66	12.71
2	9.93	4.30
3	5.84	3.18
4	4.60	2.78
5	4.03	2.57
6	3.71	2.45
7	3.50	2.36
8	3.36	2.31
9	3.25	2.26
10	3.17	2.23
11	3.11	2.20
12	3.05	2.18
13	3.01	2.16
14	2.98	2.14
15	2.95	2.13
16	2.92	2.12
17	2.90	2.11
18	2.88	2.10
19	2.86	2.09
20	2.85	2.09
21	2.83	2.08
22	2.82	2.07
23	2.81	2.07
24	2.80	2.06
25	2.79	2.06
26	2.78	2.06
27	2.77	2.05
28	2.76	2.05
29	2.76	2.05
30	2.75	2.04
40	2.70	2.02
50	2.68	2.01
infini	2.58	1.96

n : Nombre d'observations

p : Nombre de variables explicatives du modèle de régression linéaire

## BIBLIOGRAPHIE

### Ouvrages :

- BEFEC - PRICE WATERHOUSE, *Normes et réglementation comptables*, Paris, Argus, 1997.
- HESS C., *Méthode Actuarielles de l'Assurance Vie*, Paris, Economica, 2000.
- HUBERT M., *Statistic 1 : Introduction to ANOVA, Regression, and Logistic Regression*, SAS Institute France, 2009.
- KONTCHOU KOUOMEGNI H., DECOURT O., *Maîtriser SAS BASE et SAS Macro – SAS 9 et versions antérieures*, Paris, Dunod, 2004.
- MORINEAU A., CHATELIN Y.-M., *L'analyse statistique des données*, Paris, Ellipses, 2005.
- MURTHA C., TAO J., WALSH S., *Statistic 2 : ANOVA and REGRESSION*, SAS Institute France, 2008.
- PETAUTON P., FROMENTEAU M., *Théorie et Pratique de l'assurance vie*. 4<sup>ème</sup> édition, Paris, Dunod, 2012.
- SAPORTA G., *Probabilités, analyse des données et statistiques*, Paris, Technip, 1990.

### Documents:

- ASSOCIATION FRANCAISE DE L'ASSURANCE, *Prestations vie et capitalisation selon l'ancienneté des contrats en 2010*, Enquête de la FFSA/GEMA, 2011.
- BENNE C., PEUILLET A., *L'assurance-vie en 2010 - Une composante majeure du patrimoine des ménages*, Insee Première n°1361, 2011.
- CHAUVET-PEYRARD A., *Langage SAS*, ENSAE, 2007.
- DURET C., *Modélisation de relations non-linéaires avec hétéroscédasticité du signal et étude de robustesse par simulation de Monté-Carlo*, SAS Institute France, 1999.
- FAVRE V., KERJOSSE R., *Nouvelles entreprises, cinq ans après : l'expérience du créateur prime sur le diplôme*, Insee Première n°1064, 2006.
- HENGE F., DESPLANCHE P., HAGER T., GILDAS R., *Les tables de mortalité - De la réglementation à la modélisation des risques, un tour d'horizon sur l'actualité et les techniques actuarielles*, Optimind, 2007.
- INSTITUT DES ACTUAIRES, *Avis sur l'application des nouvelles tables de mortalité pour l'arrêté du 31.12.2006*, 2007.
- PLANCHET F., *Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentiers (Tables TGH 05 et TGF 05)*, Institut des Actuaire, 2006.

PLANCHET F., *Construction des tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers*, Institut des Actuaire, 2006.

RAKOTOMALALA R., *Pratique de la Régression Linéaire Multiple, Diagnostic et sélection de variables*, Université Lumière Lyon 2, 2011.

RAKOTOMALALA R., *Test de normalité - Techniques empiriques et tests statistiques*, Université Lumière Lyon 2, 2011.

RENNE C., TROGAN P., BONNEAU J., *Une nouvelle vision de la pérennité des jeunes entreprises*. DECAS<sup>122</sup>, 2005.

TOMBY C., *L'arrêt Test-Achats - Suivi au niveau de l'UE – Droit de l'UE relatif à l'égalité entre les femmes et les hommes - séminaire pour praticiens*, Commission européen, 2012.

VALLIN J., MESLE F., *Espérance de vie : peut-on gagner trois mois par an indéfiniment ?*, Bulletin mensuel d'information de l'INED<sup>123</sup>, 2010.

Cours STAT 2430, *Estimation de modèles non linéaires*, Université Catholique de Louvain, 2004.

## Mémoires :

SURU A., *Le Rachat : modélisation et préconisations*, CENTRALE PARIS, 2011.

TRABELSI S., *Risque de Longévité : Modélisation et Couverture*, ENSAE, 2011.

## Sites internet :

Site de l'INSTITUT DES ACTUAIRES <http://www.ressources-actuarielles.net/memoires>

Site de LEGIFRANCE <http://www.legifrance.gouv.fr>

Site de l'EUR-LEX <http://eur-lex.europa.eu/fr/index.htm>

- pour la directive<sup>124</sup> 2004/113/CE du conseil, du 13 décembre 2004
- pour les lignes directrices sur l'application de la directive<sup>125</sup> 2004/113/CE du Conseil
- pour la directive<sup>126</sup> 2006/54/CE du parlement européen et du conseil, du 5 juillet 2006

Site de documentation SAS

- pour la procédure REG  
[http://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug\\_reg\\_sect007.htm](http://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug_reg_sect007.htm)
- pour la procédure NLIN  
[http://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug\\_nlin\\_sect007.htm](http://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63962/HTML/default/viewer.htm#statug_nlin_sect007.htm)

122. Direction des Entreprises Commerciales, Artisanales et de Services

123. Institut National d'Études Démographiques

124. Mettant en œuvre le principe de l'égalité de traitement entre les femmes et les hommes dans l'accès à des biens et services et la fourniture de biens et services

125. Dans le secteur des assurances, à la lumière de l'arrêt de la Cour de justice de l'Union européenne dans l'affaire C-236/09 (Test-Achats)

126. Relative à la mise en œuvre du principe de l'égalité des chances et de l'égalité de traitement entre hommes et femmes en matière d'emploi et de travail