Master II Professionnel Sciences de Gestion, Finance de marché
spécialité Actuariat

Conservatoire National des Arts et Métiers
2010-2013

Mémoire d'Actuariat

Confidentiel

de
Quentin AFFAGARD

Jury
Monsieur FROMENTEAU Michel
Monsieur LAGIER Frédéric
Monsieur PETAUTON Pierre
Monsieur PHILLIPS Jacky
Monsieur RUOL Vincent
Monsieur WEISS François

Soutenu le :
22 mai 2013

Indép'AM
51, rue de Chateaudun
PARIS

Directeur de mémoire : Monsieur LAGIER Frédéric

Confidentiel

Scoring d'Emetteurs souverains
-
Application au calcul du besoin en capital complémentaire au titre du risque souverain d'un régime de retraite

Confidentiel

Résumé et Abstract

Résumé

Dans une première partie, ce mémoire compare différentes méthodes de scoring des émetteurs souverains et définit un modèle afin de pouvoir prédire l'évolution des notations des émetteurs à un an. Les méthodes mathématiques testées sont la Régression Linéaire Multiple, La Régression Logistique Multinomiale, l'Analyse Discriminante Linéaire, le Support Vector Machine et finalement Le Least-Square Support Vector Machine. Les données utilisées pour le modèle proviennent de la base de données du FMI pour les données macro-économiques des Etats.

Dans une seconde partie, ce mémoire calcule des matrices de transition à un an d'une notation à une autre pour les Etats à partir des données historiques. Cette partie détermine également les probabilités de défaut en fonction de la notation initiale et d'une échéance future et une méthode de calcul du besoin en capital au titre du risque souverain pour une obligation dans le cadre d'un investisseur *Buy and Hold*.

Enfin, dans une troisième et dernière partie ce mémoire calcule le besoin en capital au titre du risque souverain selon plusieurs méthodes sur un portefeuille de retraite. Pour cela, les méthodes présentées se basent trois approches différentes approches. La première consiste en une approche prenant en compte les spécificités propres aux investissements d'un régime de retraite, la seconde se base sur une approche ne prenant pas en compte ses caractéristiques et enfin la troisième prend en compte le régime de retraite dans sa globalité.

Mots clefs : Scoring, LSSVM, Notations, Besoin en capital, risque souverain, Solvency II

Abstract

In the first part, this thesis compares differents methods of Scoring of sovereign bonds issuers and defines a model in order to predict the evolution of issuers ratings in one year. The mathematics methods tested are the Multiple Linear Regression, the Multinomial Logistic Regression, the Linear Discriminant Analysis, the Support Vector Machine and the Least-Square Support Vector Machine. The data used for the model come from the database of the IMF for Macro-economics date for states.

In a second part, this thesis calculates transition matrix in one year from one rating to another for stats from historical data. This part determine also the probabilities of default in function of the initial rating and a future maturity and a method to calculate the need of capital funds for sovereign risk for a bond in the case of a *Buy and Hold* investor.

Finally, in a third and a last part, this thesis calculates the need of capital funds for sovereign risk through many methods on a pension fund. For that, the methods are based on three differents approaches. The first one takes into account the specificities of investment of the pension fund, the second one doesn't take into account these specificities and the third one takes into account the pension fund in a whole.

Confidentiel

Remerciements

Je tiens, en tout premier lieu, à remercier Monsieur Frédéric Lagier, Directeur Général d'Indép'AM, qui en tant que Directeur de mémoire, s'est montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je lui exprime toute ma gratitude pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie également Monsieur Michel Fromenteau, Monsieur Pierre Petauton, Monsieur Jacky Phillips, Monsieur Vincent Ruol, Monsieur François Weiss et Monsieur Frédéric Lagier d'avoir accepté d'assister à la soutenance de ce mémoire en tant que membres du jury.

Mes remerciements s'adressent également à la société Indép'AM pour m'avoir permis de suivre la formation du Master 2 Professionnel en finance de marché spécialité Actuariat du CNAM [1] en cours du soir et aux collaborateurs d'Indép'AM pour leur soutien et la patience dont ils ont su faire preuve.

J'exprime ma gratitude à mes professeurs de l'ENSIMAG [2] et du CNAM qui, grâce à la pédagogie dont ils ont toujours fait preuve, m'ont donner l'envie et le désir d'approfondir mes connaissances dans le domaine des mathématiques appliquées et d'aboutir à la rédaction de ce mémoire.

Je n'oublie pas ma femme adorée Maria-Fernanda et ma famille pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, tout particulièrement Thierry, Selma, Oussama, Fabien et Simon, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes,

1. Conservatoire National des Arts et Métiers
2. Ecole Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble

Confidentiel

Table des matières

Résumé 5

Remerciements 7

Table des matières 9

1 Introduction 13

1.1 Contexte Général . . . 13

1.1.1 Contexte économique . . . 13

1.1.2 Contexte de l'assurance-vie . . . 13

1.1.3 Contexte réglementaire . . . 14

1.2 Objectifs du mémoire . . . 15

1.2.1 Scoring des émetteurs . . . 15

1.2.2 Matrice de transition et calcul du capital complémentaire par notation . . . 16

1.2.3 Calcul du capital complémentaire sur un portefeuille . . . 16

2 Scoring des émetteurs Obligataires Souverains 17

2.1 Présentation de la méthode de Scoring . . . 17

2.1.1 Principe général de la méthode . . . 17

2.1.2 Présentation détaillée de la méthode . . . 17

2.2 Présentation des méthodes mathématiques . . . 18

2.2.1 Notations . . . 18

2.2.2 Régression Linéaire Multiple . . . 18

2.2.3 Régression Logistique Multinomiale . . . 20

2.2.4 Analyse Discriminante Linéaire . . . 23

2.2.5 Support Vector Machine . . . 25

2.2.6 Least Square Support Vector Machine . . . 39

2.3 Application . . . 51

2.3.1 Données . . . 51

2.3.2 Etude préliminaire des données . . . 51

2.3.3 Calibrage et Test . . . 52

2.3.4 Choix de modèle . . . 53

2.3.5 Prédiction . . . 53

3 Matrice de transition des notations et calcul du besoin en capital 59

3.1 Les matrices de transition des notations . . . 59
3.1.1 Présentation . . . 59
3.1.2 Résultats empiriques . . . 61
3.1.3 Résultats corrigés . . . 62
3.2 Calcul de la probabilité de défaut par notation . . . 62
3.2.1 Présentation . . . 62
3.2.2 Résultats . . . 65
3.3 Calcul du besoin en capital par notation . . . 69
3.3.1 Présentation . . . 69
3.3.2 Résultats . . . 70
3.3.3 Application aux défauts d'obligations différentes . . . 73
3.4 Calcul du Spread par notation . . . 93
3.4.1 Présentation . . . 93
3.4.2 Résultats . . . 94

4 Application au calcul du besoin de capital complémentaire d'un régime de retraite 97
4.1 Introduction . . . 97
4.2 Produit de retraite . . . 97
4.2.1 Présentation du produit . . . 97
4.2.2 Présentation du portefeuille . . . 98
4.3 Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux . . . 101
4.3.1 Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux avec notation 2011 . . . 101
4.3.2 Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux avec notation 2012 . . . 106
4.4 Méthode 2 : Calcul par une méthode basée sur les défauts à un an . . . 109
4.4.1 Méthode 2 : Calcul par une méthode basée sur les défauts à un an avec notation 2011 . . . 109
4.4.2 Méthode 2 : Calcul par une méthode basée sur les défauts à un an avec notation 2012 . . . 111
4.5 Méthode 3 : Calcul par une méthode "modèle interne" . . . 113
4.5.1 Présentation de l'outil OSCARR . . . 113
4.5.2 Méthode 3 : Calcul par une méthode "modèle interne" avec notation 2011 . . . 118
4.5.3 Méthode 3 : Calcul par une méthode "modèle interne" avec notation 2012 . . . 126
4.6 Comparaison des résultats des méthodes . . . 131

5 Conclusion 135

Bibliographie 137

Liste des Tableaux 139

Liste des Figures 143

A Modèle 147
A.1 Modèle Action : Modèle du Brownien Géométrique . . . 147
A.2 Modèle de Taux : Modèle de Vasicek . . . 147

B Lemme d'Itô **149**

B.1 Cas Unidimensionnel . . . 149

B.2 Cas Multidimensionnel . . . 149

B.3 Application du Lemme d'Itô au brownien géométrique . . . 149

C Résultats supplémentaires **151**

D Théorème de Mercer et Noyaux **157**

D.1 Théorème de Mercer . . . 157

D.2 Noyaux . . . 157

E Rappel sur les calculs du maximum de vraisemblance **159**

E.1 Fonction de vraisemblance . . . 159

E.2 Estimation du maximum de vraisemblance . . . 159

F Répartition par échéance en fonction de la notation initiale **161**

F.1 Figures des répartitions . . . 161

F.2 Tableaux des répartitions . . . 163

G Graphiques supplémentaires **171**

G.1 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 100%) et notations observées 2011 . . . 171

G.2 Résultats avec risque souverain (taux de recouvrement de 0%) et notations observées 2011 . . . 172

G.3 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 25%) et notations observées 2011 . . . 173

G.4 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 100%) et notations prédites 2012 . . . 174

G.5 Résultats avec risque souverain (taux de recouvrement de 0%) et notations prédites 2012 . . . 175

G.6 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 25%) et notations prédites 2012 . . . 176

H Meilleurs Modèles par nombre de variables explicatives **179**

H.1 5 variables explicatives . . . 179

H.2 6 variables explicatives . . . 180

H.3 7 variables explicatives . . . 181

H.4 8 variables explicatives . . . 182

H.5 9 variables explicatives . . . 183

H.6 10 variables explicatives . . . 184

H.7 11 variables explicatives . . . 185

H.8 12 variables explicatives . . . 186

1 Introduction

1.1 Contexte Général

1.1.1 Contexte économique

Les dettes souveraines de certains Etats Européens subissent une défiance de la part des investisseurs depuis la fin de l'année 2008. Cette défiance qui fait suite à la crise des subprimes, à la faillite de Lehman Brothers en septembre 2008 et à une crise financière généralisée à travers le monde s'est traduite par la hausse des taux d'emprunt des pays dits "périphériques", du "Sud" ou encore "PIIGS" (Portugal, Italie, Irlande, Grèce, Espagne) et au contraire par une baisse des taux d'emprunt des pays considérés comme plus sûrs (Allemagne, France, Pays-Bas...).
Cette hausse des taux d'emprunt couplée à un niveau élevé des déficits structurels et à l'entrée en récession des pays les plus touchés par la crise, a eu pour conséquence d'aggraver fortement leurs ratios dettes sur PIB et de transformer leurs dettes en un fardeau insoutenable. Ceci a alors nécessité la mise en place de mécanismes (FESF, MES) et de politiques de contrôle des déficits.
Dans le même temps, cette défiance a été transcrite par les principales agences de notation (Standard & Poor's, Moody's et Fitch) par une baisse importante des notations des Etats considérés comme à risque, ce qui a contribué à accentuer la hausse des taux. En effet, ces Etats ont vu rapidement passé leur situation d'*Investment Grade* à la catégorie spéculative d'après les agences de notation.

1.1.2 Contexte de l'assurance-vie

Dans ce contexte économique incertain, l'encours de l'assurance-vie au 31 décembre 2011 était de 1 362 Mds € [1] en France, malgré une décollecte observée depuis quelques mois. Cet encours est, entre autre, réparti entre l'épargne, la prévoyance et également la retraite, secteur auquel nous allons nous intéresser dans cette étude.
Les produits de retraite par capitalisation, aussi appelés "branches longues" sont des produits d'assurance-vie possédant des spécificités propres en comparaison des produits d'épargne. En effet, ces régimes doivent assurer leurs engagements sur des périodes très longues puisqu'ils doivent payer des prestations aux assurés sous forme de rentes viagères de la liquidation de leurs droits à leurs décès [2].
Pour assurer ces engagements sur des périodes longues, les assureurs Français ont tendance à investir dans des obligations souveraines des pays de l'Union Européenne et plus particulièrement de la France. Or, depuis la crise de confiance envers les Dettes Souveraines Européennes qui s'est répandue à travers le monde depuis 2008 et le défaut Grec [3], certaines de ces dettes souveraines présentent un risque accru de non-remboursement qui nécessite d'être pris en compte par les assureurs et tout particulièrement dans le cadre du besoin en capital de la future réforme Solvabilité II.

1. Source FFSA
2. Les produits d'épargne ne versent pas à l'assuré une rente mais un capital changeant de ce fait les caractéristiques des flux de prestations
3. Le défaut Grec étant presque certain au 31.12.2011

1.1.3 Contexte réglementaire

Comme évoqué ci-dessus, ce mémoire s'écrit dans le contexte réglementaire marqué par la réforme Solvabilité 2. Cette réforme européenne a principalement deux objectifs. Le premier objectif est d'adapter le calcul du besoin de fonds propres des compagnies d'assurance en fonction des caractéristiques propres de l'organisme et des risques pris par l'organisme. Le second objectif est d'harmoniser le calcul du besoin de fonds propres des compagnies d'assurance au niveau de l'Union Européenne.

Comme l'explicite [37], [38] et [1], la réforme Solvabilité 2 se caractérise par 3 piliers : les exigences quantitatives (pilier I), la gouvernance et le processus de contrôle (pilier II) et les informations communiquées par l'entreprise au superviseur et au public (pilier III).

Pilier I : l'exigence de fonds propres

Le Pilier I représente les exigences quantitatives principalement sous la forme du SCR ("Besoin de Capital de Solvabilité") qui incarne l'exposition aux risques de l'entreprise. Ce SCR incorpore tous les risques auxquels est soumise la compagnie d'assurance, avec entre autres, le risque de souscription, le risque de marché, le risque opérationnel...La figure 1.1 page 14 extraite de [16] présente le schéma des différents modules de la formule standard dans les spécifications techniques du QIS5.

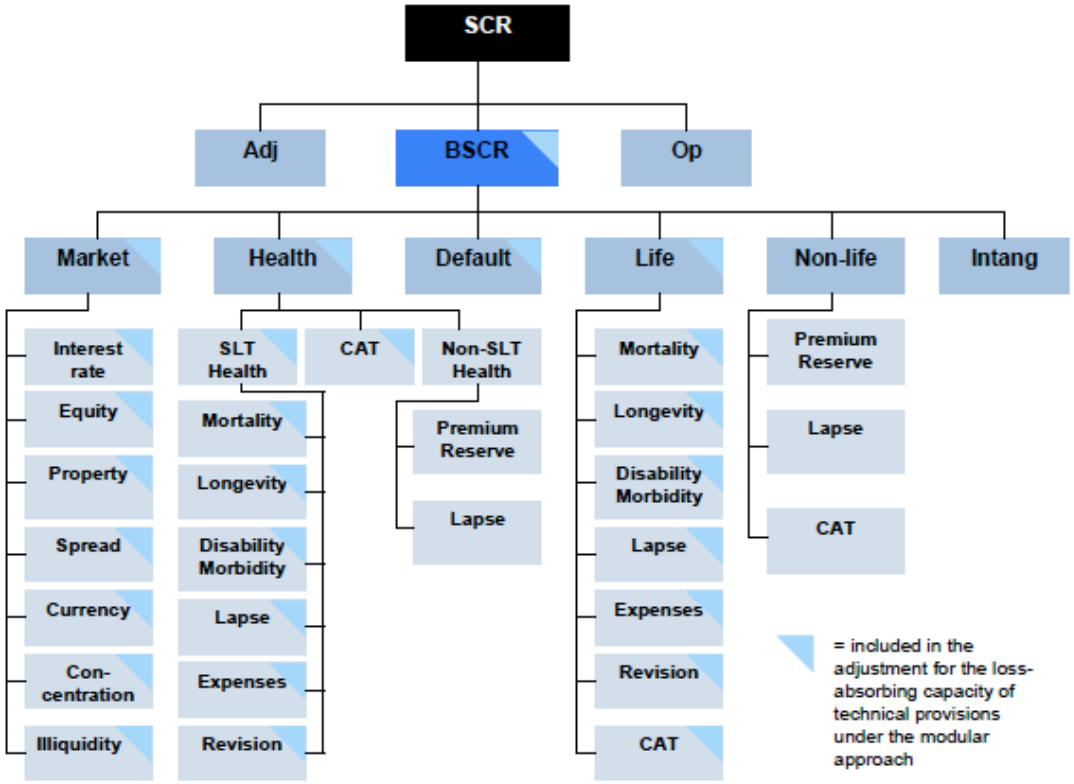

FIGURE 1.1 – Présentation du calcul du SCR selon la formule standard dans le QIS5

Le SCR est calculé de façon à ce que les fonds propres de la compagnie permettent de couvrir les pertes probables à 1 an avec une probabilité de 99.5%. En d'autres termes, la compagnie peut à minima survivre aux chocs , avec un risque de défaut tel qu'il ne peut s'en produire qu'une fois tous les 200 ans.

Les assureurs peuvent calculer le SCR à partir de la formule standard (qui a été calibrée via les différents QIS) ou à partir d'un modèle interne basé sur les risques propres à l'entreprise. Dans le cas où l'entreprise

d'assurance opte pour un modèle interne, cette dernière doit demander la validation formelle de son modèle et de ses paramètres par l'autorité de contrôle dont elle dépend.

Le lecteur gardera à l'esprit que le QIS 5 (*Quantitative Impact Study 5*) est la cinquième étude d'impact qui préfigure la réglementation Solvabilité II mais n'est en aucun cas la norme définitive tant il a été démontré que cette approche est inadaptée aux branches longues et aux situations de crise. Cette enquête a été diligentée par le CEIOPS [4] , devenu l'EIOPA [5] (https://eiopa.europa.eu/), sur ordre des instances européennes.

Pilier II : la procédure de surveillance de la gestion des fonds propres
Le pilier II se base sur le principe de l'ORSA "Own Risk and Solvency Assessment" et a pour but d'assurer que l'entreprise d'assurance est en mesure de calculer et de maîtriser ses risques mais également que celle-ci est bien gérée. Dans le cas où les exigences quantitatives du pilier I ne seraient pas suffisantes aux yeux du régulateur, ce dernier est en mesure d'imposer un capital complémentaire (Capital add-on) sous certaines conditions.

Pilier III : la discipline de marché
Le pilier III traite de la publication d'informations auprès du public et du régulateur. Les informations publiées doivent permettre aux destinataires de se faire une idée sur l'analyse effectuée (paramètres, risques...). Les informations doivent en particulier porter sur les performances financières, la sensibilité des résultats aux paramètres...
Dans ce cadre, la compagnie d'assurance doit fournir à intervalles réguliers des reportings au régulateur et au public.

1.2 Objectifs du mémoire

Ce mémoire revêt plusieurs objectifs successifs présentées dans 3 parties distinctes.

1.2.1 Scoring des émetteurs

Le premier objectif est de développer une méthode de Scoring des émetteurs souverains à partir de données macro-économiques propres aux Etats. Cette méthode de Scoring se base sur les données macro-économiques de l'année N pour estimer la notation de l'année N+1 et a plusieurs objectifs d'un point de vue opérationnel.

Premièrement, dans un objectif de gestion de portefeuille, la méthode de Scoring doit permettre d'aider les gestionnaires de portefeuille à estimer le risque relatif aux Etats en apportant une estimation de la notation dans un an mais également permettre d'améliorer la stratégie d'investissement. En effet, la notation d'un émetteur reflète la confiance que les investisseurs ont dans cet émetteur (C'est à dire la capacité de remboursement) et de ce fait le taux d'intérêt associé. Avoir une estimation de la notation dans un an doit permettre au gestionnaire de portefeuille de mieux appréhender l'évolution du taux d'intérêt et donc l'évolution du cours des titres de cet émetteur afin d'optimiser sa stratégie d'investissement dans le but d'assurer le rendement le plus élevé possible sous les contraintes qui lui sont imposées contractuellement et réglementairement.

Deuxièmement, dans un contexte où la référence à la notation octroyée par les agences de notations tend à disparaitre des textes réglementaire, cette méthode de Scoring doit apporter une aide pour l'estimation du risque et du besoin de capital supplémentaire sous solvabilité 2. Outre le fait que le gestionnaire de portefeuille doit optimiser le rendement de ces actifs en investissant de manière adéquate tout en respectant les contraintes qui lui sont imposées, il doit également prendre en compte le besoin de capital inhérent à ces investissements. En effet, même si aucun besoin de capital au titre du risque de défaut des Etats (Risque de Spread) n'est imposé en l'état actuel des choses dans le Pilier I de Solvabilité 2, il est nécessaire de le prendre en compte dans le Pilier II de cette directive. Ainsi, la connaissance de la notation à un an d'un émetteur souverain doit permettre au gestionnaire de

4. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors
5. European Insurance and Occupational Pensions Authority

portefeuille de prendre en compte dans sa stratégie d'investissement la variation du besoin de capital futur due à la variation de notation.

1.2.2 Matrice de transition et calcul du capital complémentaire par notation

Le second objectif est de calculer des matrices de transition pour les notations des dettes souveraines. Comme cela a été énoncé dans le première objectif, le taux d'intérêt est fortement lié à la notation, il est alors utile de connaître la notation sur le long terme afin de pouvoir simuler l'évolution de la valeur d'un portefeuille d'actifs obligataires souverains. Or les données macro-économiques propres aux Etats ne permettent pas d'envisager une méthode d'estimation des notations sur le long terme. Dans la mesure où ces données varient fortement au cours du temps en fonction de la conjoncture, une utilisation de ces données pour une estimation à un horizon supérieur à un an peut paraître inappropriée.

Aussi, afin de permettre de calculer la notation sur la période plus longue, la création de matrice de transition à un an va être mise en place.

1.2.3 Calcul du capital complémentaire sur un portefeuille

Le troisième et dernier objectif est d'estimer le besoin de capital complémentaire au titre du risque souverain dans le cadre d'un régime de retraite par capitalisation.

En effet, dans le cadre du pilier II de solvabilité 2, également appelé "ORSA", les entreprises d'assurance doivent calculer tous les besoins en capitaux non calculés dans le pilier I. Ceci comprend entre autre, le besoin en capital au titre du risque de défaut des Etats souverains. Cette partie s'attache à calculer ce besoin en capital complémentaire au titre du risque de défaut des Etats souverains pour un portefeuille d'assurance-vie retraite géré par *Indép'AM*.

Deux méthodes seront présentées, la première se basant sur une méthode "standard" et la seconde se basant sur une approche "modèle interne".

Confidentiel

2 Scoring des émetteurs Obligataires Souverains

2.1 Présentation de la méthode de Scoring

2.1.1 Principe général de la méthode

La méthode de scoring des émetteurs obligataires souverains a pour but de séparer les émetteurs en différents groupes en fonction des notations prédites dans un an, c'est-à-dire l'année *An+1*, estimées par un modèle. Afin de prédire la notation de chaque émetteur souverain l'année *An+1*, le modèle prend en entrée des données macro-économiques propres au pays.

L'idée sous-jacente de la méthode provient de l'article [10] publié par Van Gestel & al. . Mais contrairement à cet article, l'étude est appliquée au risque souverain et non au risque des institutions bancaires.

2.1.2 Présentation détaillée de la méthode

La méthode de Scoring est une méthode qui s'effectue en plusieurs étapes. Une première étape de calibrage et de Test sur un grand nombre de modèles possibles suivi d'une étape de choix de modèle et finalement une dernière étape de prédiction des résultats (i.e : les notations pour l'année *An+1*) par le modèle choisi.

Calibrage et Test

Le calibrage comme son nom l'indique sert à définir et calculer les paramètres du modèle. En pratique, cette étape consiste à calibrer les paramètres de chaque modèle possible. Ces modèles possibles sont issus des méthodes mathématiques qui seront présentées dans la section suivante et de différentes combinaisons de variables explicatives.

Le test, qui sera effectué sur chaque modèle possible calibré préalablement, sert à vérifier que le modèle est correctement calibré et que ces résultats sont conformes aux résultats attendus, mais il sert surtout à choisir la méthode mathématique et les variables qui permettent d'obtenir les meilleurs résultats.

Le test consiste à se servir d'un calibrage sur les données économiques allant de 1990 à 2009 (avec les notations de 1991 à 2010) et un échantillon test sur la totalité des données de 2010 (avec les notations 2011). L'avantage de ce test est de se baser sur ce qu'auraient été les résultats si la méthode avait été lancée au 31.12.2010, mais il a l'inconvénient de ne pas tenir compte des données 2010 qui peuvent avoir une influence notable sur les résultats du calibrage.

Cette méthode fait l'hypothèse que les paramètres du modèle sont les mêmes sur plusieurs années.

Choix du modèle

Il est nécessaire de réduire le risque de sur-apprentissage dans les modèles en n'ajoutant pas des variables explicatives inutiles. Pour cela, pour l'ensemble des modèles potentiels, c'est-à-dire pour chacune des méthodes mathématiques et

pour une combinaison de variables donnée, les résultats du calibrage suivie du test sont comparés afin de déterminer le modèle qui score le mieux les émetteurs souverains.

Prédiction

L'étape de prédiction consiste a simuler la notation de chacun des émetteurs souverains à partir des données de 2011. Pour cela, la méthode se sert uniquement des données économiques de 2011 (les notations 2012 étant inconnues) et prédit les notations en 2012.

2.2 Présentation des méthodes mathématiques

Pour déterminer une méthode de Scoring, 5 méthodes mathématiques ont été testées et les résultats du scoring par ces 5 méthodes ont été comparés. Ces 5 méthodes plus ou moins répandues sont présentées ci-dessous.

2.2.1 Notations

Soient :

- $Y_i, i \in [\![1, n]\!]$: Une variable endogène qui peut prendre K ($K > 2$) modalités (Dans les calculs de ce mémoire, cela correspond à la notation en année An+1)
- $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}$: L'espace des variables endogènes
- $X_{i,1}, ..., X_{i,p}, i \in [\![1, n]\!]$: Une série de p variables explicatives (Dans les calculs de ce mémoire, cela correspond aux données macro-économiques en année An)
- $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^p$: L'espace des variables explicatives
- $z_i, i \in [\![1, K]\!]$: Les modalités possibles de la variable endogène Y_i (Dans les calculs de ce mémoire, cela correspond aux notations possibles)

2.2.2 Régression Linéaire Multiple

Présentation générale de la méthode

La Régression Linéaire Multiple (LM), présentée dans [35] et par Rakotomalala R. dans [33], est une généralisation à plusieurs variables de la régression linéaire simple.
La généralisation de cette méthode par rapport à la régression linéaire simple, présentée par Gaudoin O. dans [28], réside dans le fait que la régression repose sur p ($p > 1$) variables explicatives et non sur une unique variable explicative. Le modèle est donc "enrichi" par rapport à la régression linéaire simple. Cette méthode consiste à mettre en place une relation linéaire entre la variable endogène et les variables explicatives.

Présentation de la méthode

Le modèle est de la forme suivante :

$$\boxed{Y_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^{p} \beta_k . X_{i,k} + \varepsilon_i, i \in [\![1, n]\!]}$$

Avec :

- $\varepsilon_i, i \in [\![1, n]\!]$: l'erreur du modèle
- $\beta_0, ..., \beta_p$: les paramètres du modèle

Dans le cas de la régression linéaire simple (une unique variable explicative), le modèle est de la forme :

$$Y_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^{1} \beta_k . X_{i,k} + \varepsilon_i, i \in [\![1, n]\!]$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 . X_{i,1} + \varepsilon_i, i \in [\![1, n]\!]$$

Le lecteur notera que dans la Régression Linéaire Multinomianle la valeur de la variable endogène Y_i peut différer d'une modalité z_i existante puisque la valeur est obtenue comme une combinaison linéaire des variables explicatives. Ce modèle peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{1,1} & \dots & X_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n,1} & \dots & X_{n,p} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Soit la forme réduite :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}.\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Résolution

La résolution se base sur la minimisation de l'erreur du modèle. Le résultat est alors l'estimateur des moindres carrés $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}.\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

La solution est donnée par la méthode des moindres carrés où l'erreur est minimisée par la formule suivante :

$$min \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_0,\dots,\hat{\beta}_p} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1.x_{i,1} - \dots - \hat{\beta}_p.x_{i,p})^2$$

En annulant les dérivés par rapport aux $\beta_j, j \in [\![1,p]\!]$, pour trouver le minimum comme suit :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \frac{\delta(\sum \hat{\varepsilon}_i^2)}{\delta \hat{\beta}_j} = 0$$

L'expression devient :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1.x_{i,1} - \dots - \hat{\beta}_p.x_{i,p}) = 0$$

Sous forme vectorielle, cela revient à écirre :

$$\mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$$

Qui se réarrange en :

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

La solution est alors donnée par :

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}}$$

- $\mathbf{X}'$: La transposée de $\mathbf{X}$
- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$: L'inverse de la matrice $\mathbf{X}'\mathbf{X}$

Prédiction

Après avoir estimé les paramètres $\hat{\beta}_0, ..., \hat{\beta}_p$. Il est ensuite possible de prédire les résultat de la Régression Linéaire Multiple sur une nouvelle donnée $n+1$ dont les p Variables explicatives $X_{n+1,1}, ..., X_{n+1,p}$ sont connues. Ceci permet de prédire la variable endogène Y_{n+1} par le modèle (Dans les calculs de ce mémoire, la variable endogène Y_{n+1} correspond à la notation en année An+1 alors que les p Variables explicatives $X_{n+1,1}, ..., X_{n+1,p}$ correspondent aux variables macro-économiques en année An).

$$Y_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^{p} \hat{\beta}_k.X_{n+1,k}$$

Une fois que la variable endogène Y_{n+1} est prédite par le modèle, il faut arrondir cette variable au nombre entier le plus proche pour pouvoir estimer la notation correspondante. En effet, les modalités $z_k \in [\![1; K]\!]$ possibles sont des nombres entiers.

$$Y_{n+1} = Arrondi(Y_{n+1})$$

Remarques

Deux principaux problèmes peuvent être rencontrés avec la Régression Linéaire Multiple.

Le premier problème vient du fait que le résultat de la Régression Linéaire Multiple donne une valeur numérique à la variable endogène. Or celle-ci doit être arrondie afin de retrouver une modalité plausible dans $z_k \in [\![1; K]\!]$ et l'attribuer à un groupe. Ceci montre que cette méthode est mal adaptée au scoring des émetteurs obligataires.

Le second problème vient également du fait que la valeur numérique donnée à la variable endogène par la Régression Linéaire Multiple peut, malgré l'arrondi, être en dehors des valeurs possibles des modalités. Ceci arrive particulièrement pour des pays ayant des caractéristiques propres très particulières (Norvège, par exemple).

Avantages de la méthode

La Régression Linéaire Multiple est une méthode simple qui permet de comprendre la relation entre la variable endogène et les variables explicatives. De plus, dans le cas d'une approche ne consistant qu'en la comparaison de modèles issus de la Régression Linéaire Multiple (ce qui n'est pas le cas dans ce mémoire), il est possible de comparer les modèles en utilisant des tests (cf [22]) ou des critères (cf [22]).

Inconvénients de la méthode

La Régression Linéaire Multiple n'est pas particulièrement adaptée au problème du scoring des émetteurs obligataires. En effet, la variable endogène prend des valeurs discrètes (modalités) et non des valeurs continues, ce qui rend la Régression Linéaire Multiple peut adaptée à la problématique du scoring. Par ailleurs, comme nous le verrons plus loin, les résultats issus de cette méthode sont moins "bons" que ceux issus d'autres méthodes.

2.2.3 Régression Logistique Multinomiale

Présentation générale de la méthode

Rakotomalala R. dans [32] présente de façon complète la méthode de Régression Logistique Multinomiale (MLR). Cette méthode a pour but de calculer la probabilité d'appartenance d'un individu à une modalité $z_k, k \in [\![1; K]\!]$, selon la formule suivante :

$$\pi_k(i) = P[Y_i = z_k | X_{i,1}, ..., X_{i,p}]$$

sous la contrainte :

$$\sum_k \pi_k(i) = 1$$

Pour déterminer la vraisemblance, il faut s'appuyer alors sur la loi multinomiale dont la Vraisemblance est :

$$L = \prod_{i \in [\![1;n]\!]} [\pi_1(i)]^{z_1(i)} \times ... \times [\pi_K(i)]^{z_K(i)}$$

avec :

$$z_k(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } Y_i = z_k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Présentation de la méthode

L'idée de la Régression Logistique Multinomiale est de modéliser $(K-1)$ rapports de probabilités en se servant d'une modalité de référence. Pour chaque donnée, les $(K-1)$ rapports de probabilité correspondent à la probabilité d'appartenance de la donnée à une modalité $z_k, k \in [\![1;K]\!]$ par rapport à une modalité de référence.

La méthode calcule ensuite le logit des $(K-1)$ rapports de probabilité et applique une formule linéaire sur les variables explicatives.

Supposons que la modalité de référence soit la première modalité z_1. Le logit pour la modalité z_k s'écrit alors :

$$C_k(i) = ln\left(\frac{\pi_k(i)}{\pi_1(i)}\right) = \beta_{0,k} + \beta_{1,k}.X_{i,1} + ... + \beta_{p,k}.X_{i,p}$$

En passant à l'exponentielle, l'expression devient :

$$e^{C_k(i)} = \frac{\pi_k(i)}{\pi_1(i)}$$

En sommant sur l'ensemble des modalités, cela devient :

$$\sum_{l=1}^{K} \frac{\pi_l(i)}{\pi_1(i)} = \frac{1}{\pi_1(i)}.\sum_{l=1}^{K} \pi_l(i) = \frac{1}{\pi_1(i)}$$

$$\sum_{l=1}^{K} \frac{\pi_l(i)}{\pi_1(i)} = 1 + \frac{1}{\pi_1(i)}.\sum_{l=2}^{K} \pi_l(i) = 1 + \sum_{l=2}^{K} e^{C_l(i)}$$

En se servant des expressions précédentes, il est possible d'obtenir l'expression de la probabilité suivante :

$$\pi_k(i) = \frac{e^{C_k(i)}}{1 + \sum_{l=2}^{K} e^{C_l(i)}} = \frac{e^{\beta_{0,k} + \beta_{1,k}.X_{i,1} + ... + \beta_{p,k}.X_{i,p}}}{1 + \sum_{l=2}^{K} e^{\beta_{0,l} + \beta_{1,l}.X_{i,1} + ... + \beta_{p,l}.X_{i,p}}}$$

La probabilité d'appartenance de l'observation i à la modalité 1 est :

$$\pi_1(i) = \frac{1}{1 + \sum_{i=2}^{K} e^{C_l(i)}} = 1 - \sum_{l=2}^{K} \pi_l(i)$$

Pour une donnée i, la modalité $z_k, k \in [\![1;K]\!]$ prédite par la modèle est déterminée comme étant la modalité la plus probable.

$$Y_i = z_k(i) \iff z_k(i) = \underset{k}{argmax}(\pi_k(i))$$

Résolution

Pour estimer les $(K-1) \times (P+1)$ paramètres $\beta_{0,2}, ..., \beta_{p,2}, ..., \beta_{0,n}, ..., \beta_{p,n}$, il faut optimiser la log-vraisemblance suivante via la méthode de Newton-Raphson.
La première étape est de calculer la loi multinomiale :

$$L = \prod_{i \in [\![1;n]\!]} [\pi_1(i)]^{z_1(i)} \times ... \times [\pi_K(i)]^{z_K(i)}$$

avec :

$$z_k(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } Y_i = z_k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le lecteur pourra se référer à l'annexe E pour avoir de plus amples informations sur le calcul de la vraisemblance et à [20] pour le cas spécifique du calcul de la vraisemblance dans le cas de la loi Multinomiale. Puis la méthode calcule la log-vraisemblance de la loi multinomiale :

$$LL = \sum_{i \in [\![1;n]\!]} z_1(i).ln(\pi_1(i)) + ... + z_K(i).ln(\pi_K(i))$$

Afin de déterminer les paramètres $\beta_{0,2}, ..., \beta_{p,2}, ..., \beta_{0,n}, ..., \beta_{p,n}$, il faut appliquer la méthode de Newton-Raphson. Pour appliquer cette méthode, il faut tout d'abord définir le **vecteur gradient G** et la **matrice hessienne H**. Pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur pourra se référer à [24].

Le **vecteur gradient G** est de dimension $(K-1)*(P+1) \times 1$:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{K-1} \end{pmatrix}$$

Où $\mathbf{G}_k$, relatif à la modalité z_k, est un vecteur de dimension $(P+1) \times 1$ dont la composante l s'écrit :

$$\forall l \in [\![0;p]\!], g_{k,l} = \frac{\partial LL(\beta)}{\partial \beta_{k,l}} = \sum_{i \in [\![1;n]\!]} \mathbf{x}_l(i) \times [z_k(i) - \pi_k(i)]$$

La **matrice Hessienne H** est de dimension $(K-1)*(P+1) \times (K-1)*(P+1)$:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \dots & \mathbf{H}_{1,K-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{K-1,1} & \dots & \mathbf{H}_{K-1,K-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{k,l} = \sum_{i \in [\![1;n]\!]} \pi_k(i) \times [\delta_{k,l}(i) - \pi_l(i)] \times \mathbf{X}(i) \times \mathbf{X}'(i)$$

$\mathbf{X}(i) = (1, X_1(i), ..., X_P(i))$ est le vecteur de l'observation i incluant la constante et :

$$\delta_{k,l}(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = l \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Méthode de Newton-Raphson

Comme le souligne T. Hjorteland dans [34], l'idée derrière la méthode de Newton-Raphson est d'approximer la fonction $f(\mathbf{X})$ lors de chaque itération par une fonction quadratique de la forme suivante :

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}.\mathbf{X}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{X} + \mathbf{b}.\mathbf{X} + c$$

Avec :

- $\mathbf{Q}$: une matrice définie positive
- $\mathbf{b}$: un vecteur
- c : un scalaire

Ensuite, la méthode cherche le minimum de la fonction quadratique en se servant du vecteur gradient et de la matrice Hessienne.

La fonction quadratique pour le point $\mathbf{X}$ dans un voisinage adéquat du point courant $\mathbf{X}_k$ est donnée par une série de Taylor tronquée :

$$f(\mathbf{X}) \approx f(\mathbf{X}_k) + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)^T.G_k + \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)^T.\mathbf{H}_k.(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)$$

La dérivé se présente alors sous la forme suivante :

$$\nabla f(\mathbf{X}) = G_k + \frac{1}{2}.\mathbf{H}_k.(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) + \frac{1}{2}.\mathbf{H}_k^T.(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)$$

$$\nabla f(\mathbf{X}) = G_k + \mathbf{H}_k.(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)$$

car la matrice Hessienne $\mathbf{H}_k$ est symétrique.
En supposant que $f(\mathbf{X})$ atteint sont minimum en $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$, son gradient est nul en ce point :

$$\nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{H}_k.(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_k) + \mathbf{G}_k = 0$$

La méthode de Newton-Raphson utilise alors $\mathbf{X}^*$ comme le prochain point courant, résultant en une formule itérative :

$$\mathbf{H}_k.(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) + \mathbf{G}_k = 0$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \mathbf{H}_k^{-1}.\mathbf{G}_k, k \geq 0$$

Avec $-\mathbf{H}_k^{-1}.\mathbf{G}_k$ souvent décrit comme la direction de Newton.

Avantages de la méthode

Cette méthode compare la probabilité d'appartenance des données à chaque modalité $z_k, k \in [\![1; K]\!]$ en comparant toutes les possibilités et en conservant la plus probable. Elle permet d'avoir une unicité et une interprétabilité des coefficients, mais également d'utiliser des hypothèses plus générales que dans l'Analyse Discriminante Linéaire. De plus, il est possible d'utiliser des tests pour estimer l'absence d'effet des variables.

Inconvénients de la méthode

Il y a non-convergence dans le cas de séparation parfaite des groupes.

2.2.4 Analyse Discriminante Linéaire

Présentation générale de la méthode

Dans [30], P.A. Cornillon et dans [22], G. Saporta, présentent l'Analyse Discriminante Linéaire. Cette méthode se base sur le même principe que la Régression Logistique Multinominale mais en considérant que les variables explicatives suivent des lois normales.

Présentation de la méthode

L'Analyse Discriminante Linéaire se base sur la probabilité d'appartenance à chacune des modalités $z_k \in [\![1; K]\!]$ en fonction de la valeur des variables explicatives. La différence avec la Régression Logistique Multinomiale est l'utilisation de la formule de Bayes. Le calcul des probabilités est alors :

$$\mathbb{P}(Y_i = z_k) = \frac{f(\mathbf{x}_0|y_i = z_k).\mathbb{P}(Y_i|z_k)}{\sum_{k'=1}^{K} f(\mathbf{x}_0|y_i = z'_k).\mathbb{P}(Y_i = z'_k)}$$

Les probabilités d'appartenance, a priori, à chacune des modalités $z_k \in [\![1; K]\!]$ sont connues.

Dans l'Analyse Discriminante Linéaire, la densité des variables explicatives dans chaque modalité suit une loi

multi-normale de même matrice de variance $\mathbf{\Sigma}$ dans chacune des modalités.

$$f(\mathbf{x}|y = z_k) \sim \mathcal{N}(\mu_{z_k}, \mathbf{\Sigma})$$

$$f(\mathbf{x}|y = z_k) \sim \frac{1}{(2.\pi)^{p/2}.|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}}.e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{z_k})^T.\mathbf{\Sigma}^{-1}.(\mathbf{x}-\mu_{z_k})}$$

Il suffit ensuite d'appliquer la formule suivante pour connaître les probabilités d'affectation de la nouvelle observation $\mathbf{X}_i$ dans chacune des modalités. La modalité retenue sera celle qui présente la probabilité la plus élevée.

$$z_{k_0} = \underset{k\in\{z_1,\dots,z_K\}}{argmax}\ \mathbb{P}(Y_i = z_k|X = \mathbf{x}) = \underset{k\in\{z_1,\dots,z_K\}}{argmax}\ \mathbb{P}(Y_i = z_k).f(\mathbf{x}|y_i = z_k)$$

Résolution

Les paramètres $\mu_{z_k} \in [\![1; K]\!], \mathbf{\Sigma}$ de l'Analyse Discriminante Linéaire sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour chaque modalité $z_k \in [\![1; K]\!]$, la moyenne μ_{z_k} est estimée de la manière suivante :

$$\hat{\mu}_{z_k} = \frac{1}{n_{z_k}} \sum_{i|y_i=z_k} \mathbf{X}_i$$

La matrice de variance $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ est calculée sur l'ensemble des modalités de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n-K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i|y_i=z_k} (\mathbf{X}_i - \hat{\mu}_{z_k})(\mathbf{X}_i - \hat{\mu}_{z_k})'$$

Avec :

- n_{z_k} : le nombre d'observations ayant la modalité z_k

Remarques

L'Analyse Discriminante Quadratique présentée également dans [30] et qui pourrait discriminer de manière plus efficace les différents émetteurs obligataires souverains, ne peut être appliquée sur les données de l'étude. En effet, dans cette méthode, la matrice de variance $\mathbf{\Sigma_{z_k}}$ diffère pour chaque modalité, ce qui donne l'expression suivante pour la densité des variables explicatives selon chaque modalité :

$$f(\mathbf{x}|y = z_k) \sim \mathcal{N}(\mu_{z_k}, \mathbf{\Sigma}_{z_k})$$

La répartition des données de l'étude dans les différentes modalités ne permet pas d'appliquer cette méthode. En effet, le nombre de données dans certaines modalités est trop faible.

Une interprétation géométrique est également possible comme l'indique Cornillon dans [30]. Pour cela, considérons le cas où seules deux modalités z_1, z_2 existent. Soit le point $\mathbf{x}_0$, supposé sur la frontière séparant les zones des deux modalités. Il est alors possible d'écrire :

$$f(\mathbf{x}_0|y_0 = z_1) = f(\mathbf{x}_0|y_0 = z_2)$$

$$\frac{1}{(2.\pi).|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}}.e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x_0}-\mu_{z_1})^T.\mathbf{\Sigma}^{-1}.(\mathbf{x_0}-\mu_{z_1})} = \frac{1}{(2.\pi).|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}}.e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x_0}-\mu_{z_2})^T.\mathbf{\Sigma}^{-1}.(\mathbf{x_0}-\mu_{z_2})}$$

En passant au log, cela devient :

$$\mathbf{x}_0'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mu_{z_1} - \mu_{z_2}) - \frac{1}{2}(\mu_{z_1} + \mu_{z_2})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mu_{z_1} + \mu_{z_2}) = 0$$

Cela revient à une droits dépendant des coordonnées du point $\mathbf{x}_0$. Ainsi, la frontière séparant les zones des deux modalités peut être modélisée par une droite en fonction de la matrice de variance et les moyennes de chaque modalité.

Avantages de la méthode

La méthode d'Analyse Discriminante Linéaire est une méthode très répandue pour le Scoring. Cette méthode est également simple, robuste et interprétable géométriquement.

2.2.5 Support Vector Machine

Présentation générale de la méthode

Dans l'introduction de sa thèse [25], J. Brabanter indique que la méthode des vecteurs supports pour les cas non-séparable a été présentée dans un article de Cortes et Vapnik en 1995 et que la méthode généralisée des SVM pour les fonctions à valeurs réelles a également été présentée en 1995 par Vapnik.

Comme l'indique Pietersma dans [4], le principe est de trouver une fonction discriminante qui est une fonction linéaire du vecteur $\mathbf{x}$ formulée pour :

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^t\mathbf{x} + b$$

Avec :
- $\mathbf{x}$: un vecteur de données
- b : un biais qui décrit un déplacement
- $\mathbf{w}^t$: un vecteur pondéré

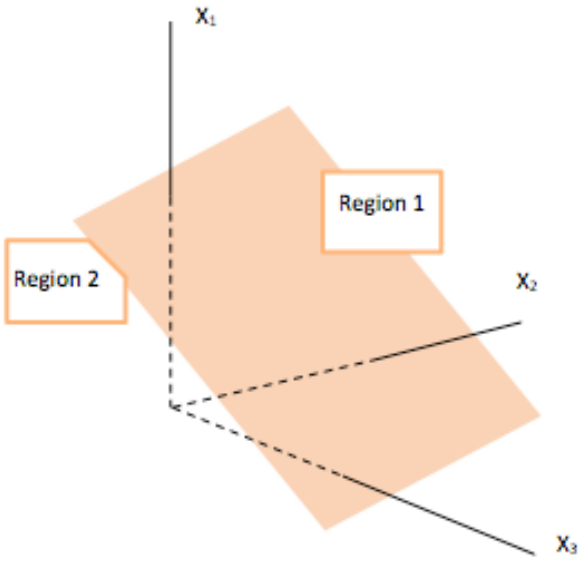

FIGURE 2.1 – Présentation d'un hyperplan séparateur en 3D

L'équation précédente pour $g(\mathbf{x}) = 0$ décrit l'hyperplan H qui sépare l'espace caractéristique en deux régions distinctes R_1 et R_2 (Comme l'indique Pietersma dans [4], les régions R_1 et R_2 sont souvent présentées comme les

cotés positifs et négatifs de l'hyperplan). Cet hyperplan est représenté sur le figure 2.1 page 25 pour un espace à 3 dimensions.

En fait, comme le montre la figure 2.2 de la page 27 inspirée de [4], tout vecteur $\mathbf{x}$ peut être décrit à partir de la formule suivante :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + r\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

Avec :
- $\mathbf{x}_p$: un vecteur de l'hyperplan à partir de l'origine
- r : un coefficient qui décrit la distance et dont le signe permet de déterminer la classification
- $\mathbf{x}$: un vecteur de l'espace orthogonal avec l'hyperplan
- $\mathbf{w}^t$: un vecteur pondéré

En fait, il est possible d'écrire pour tout point de l'hyperplan H :

$$g(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w}^t\mathbf{x}_p + b = 0$$

Il est alors possible d'écrire :

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^t\mathbf{x} + b$$

$$g\left(\mathbf{x}_p + r\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) = \mathbf{w}^t\left(\mathbf{x}_p + r\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) + b = \left[r\frac{\mathbf{w}^t\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right] + \left[\mathbf{w}^t\mathbf{x}_p + b\right]$$

En utilisant le fait que :

$$\frac{\mathbf{w}^t\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \|\mathbf{w}\|$$

Il est possible de réduite l'expression :

$$g(\mathbf{x}) = r\|\mathbf{w}\|$$

Et finalement de déterminer r :

$$r = \frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{w}\|}$$

Ainsi, la connaissance de $g(\mathbf{x})$ et de $\mathbf{w}$ permet de classifier le point $\mathbf{x}$. La particularité de la méthode Support Vector Machine (SVM) (comme la méthode LSSVM présentée plus loin) est de se placer dans un espace différent de l'espace initial, en utilisant une fonction non linéaire, afin de séparer 2 groupes de points (Groupe A et Groupe B) par une fonction discriminante, mais dans un espace de grande dimension $\Psi \subseteq \mathbb{R}^{n_f}$.
Dans la méthode SVM, l'hyperplan est défini en se servant des points du groupe A les plus proches des points du groupe B. Par comparaison, les points du premier groupe A les plus éloignés des points du groupe B ne servent pas à définir l'hyperplan.

Dans le cas où la variable endogène peut prendre plus de 2 valeurs possibles (A,B et C par exemple), la méthode des SVM est appliquée entre les paires ("A contre B", "A contre C" et "B contre C").

Présentation de la méthode

Espaces Primal et Dual

Suykens J.A.K. & al. dans [9], Huang C.H & al. dans [5], Saporta G. dans [22] ou encore [39], présentent de manière précise la méthode des SVM en se basant sur les idées présentées par Vapnik dans [11]. Le principe des SVM, comme l'indique J. Brabanter dans [25], est de cartographier le vecteur des données d'entrée dans l'espace de grande dimension Ψ en passant par la fonction permettant la cartographie non linéaire $\varphi : \mathcal{X} \to \psi$. Dans cet espace, on considère la

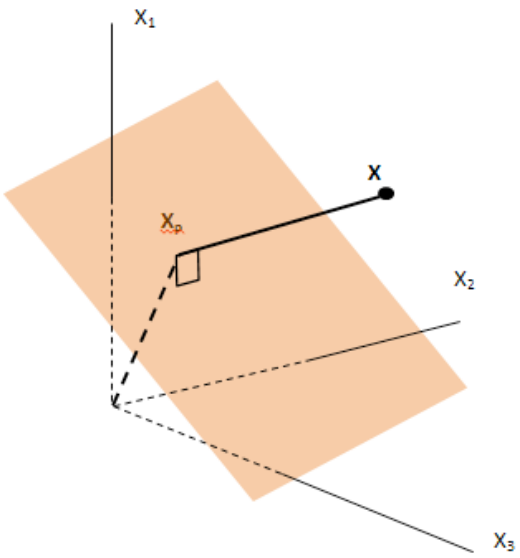

FIGURE 2.2 – Présentation du calcul de la distance d'un point à l'hyperplan séparateur

classe de fonctions suivante :

$$\mathcal{F}_\psi = \{f : f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_i) + b : \varphi : \mathcal{X} \to \Psi, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_f}, b \in \mathbb{R}\}$$

En fait, il n'est pas nécessaire de connaître de façon explicite l'espace Ψ pour construire la fonction. En effet, le produit $\varphi(\mathbf{x}_k)^T\varphi(\mathbf{x}_l)$ peut être remplacé par le noyau $K(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$ correspondant satisfaisant la condition de Mercer. En supposant que $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\varphi(\mathbf{x}_k)$ et en se basant sur le théorème de Mercer (voir [40] et Annexe D.1), la classe de fonction linéaire dans l'espace caractéristique peut se définir de façon équivalente dans l'espace des données d'entrée $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{F}_\mathcal{X} = \{f : f(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) + b : b \in \mathbb{R}, \beta_k \in \mathbb{R}\}$$

Cet espace est souvent de grande dimension dans la mesure où il est constitué de dimension égale au nombre de variables explicatives du modèle. Van Gestel & al explicite sous forme graphique ce principe dans la figure 2.3 page 27 dans le cas d'un espace à 2 dimensions d'où l'appellation de côté positif et négatif par [4].

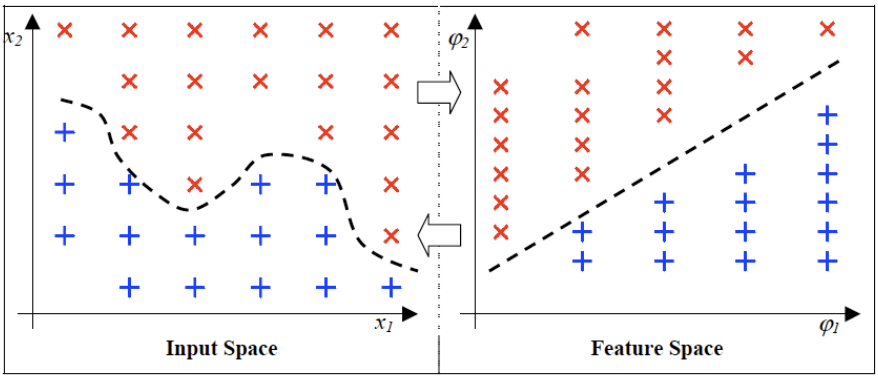

FIGURE 2.3 – Classification non linéaire présentée par Van Gestel & al.

Etape 1 : Le classifieur

Soit le cas où les variables endogènes sont sous la forme : $y_k \in \{+1; -1\}$.
Un classifieur de la forme suivante est défini :

$$y(\mathbf{x}) = sign\left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k.y_k.\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) + b\right] \qquad (A)$$

Avec :

- α_k : Constante Réelle positive
- b : Constante Réelle
- $\Psi(.,.)$: Fonction

La fonction $\Psi(.,.)$ peut prendre les formes suivantes (κ, θ, σ constantes) :

- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T\mathbf{x}$: SVM linéaire
- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_k^T\mathbf{x} + 1)^d$: SVM polynomial de degré d
- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = e^{-||\mathbf{x}-\mathbf{x}_k||_2^2/\sigma^2}$: SVM RBF (Radial Basis Function)
- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = tanh[\kappa\mathbf{x}_k^T + \theta]$: SVM de neurones à deux couches

Les caractéristiques que les noyaux doivent posséder pour pouvoir appliquer le théorème de Mercer sont présentées en annexe D.2. Pour construire le classifieur, il est supposé que :

$$\begin{cases} \mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k) + b \geq +1 & , \quad \text{si } y_k = +1 \\ \mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k) + b \leq -1 & , \quad \text{si } y_k = -1 \end{cases}$$

Cette formule peut se réécrire sous la forme suivante :

$$y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k) + b] \geq 1, \qquad k = [\![1, N]\!]$$

Avec $\varphi(.)$: Fonction non-linéaire qui transforme l'espace initial en un espace de plus grande dimension.
Cependant, comme le montre la figure 2.4 de la page 28 , il est possible dans de nombreux cas de trouver plusieurs hyperplans séparateurs dans l'espace caractéristique. Il est alors nécessaire d'utiliser un critère pour déterminer un hyperplan optimal dans l'espace caractéristique.

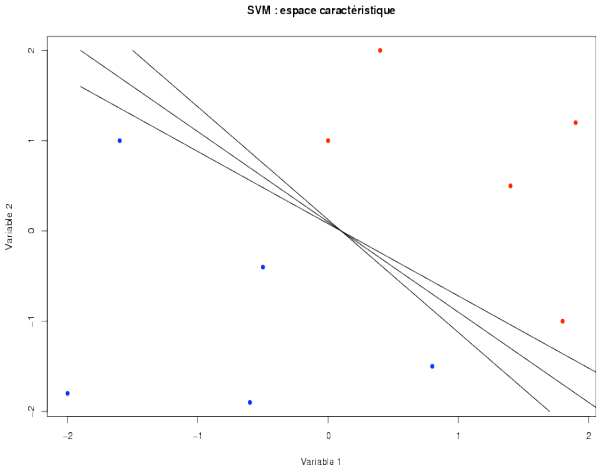

FIGURE 2.4 – SVM : Cas séparable et hyperplans séparateurs

Pour définir l'hyperplan optimal, il faut maximiser la marge, ou comme l'indique Saporta dans [22] maximiser le rayon du corridor dans l'espace caractéristique. Pour cela, il faut maximiser la distance du point le plus proche de l'hyperplan comme sur la figure 2.5 de la page 29.

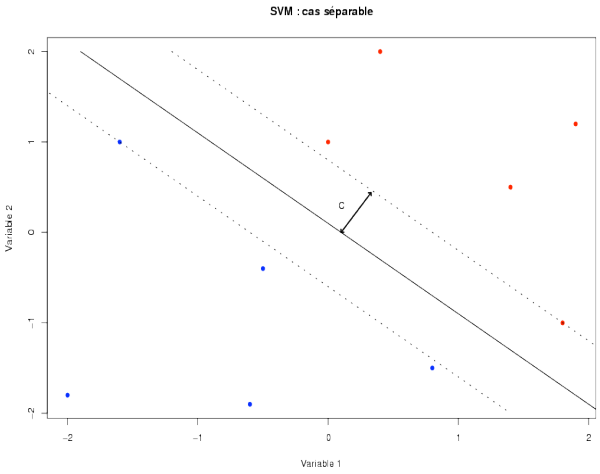

FIGURE 2.5 – SVM : Cas séparable et hyperplan optimal

En fait, comme l'indique Saporta dans [22], il faut maximiser le corridor sous contraintes :

$$\text{sc.} \begin{cases} max(C) \\ y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b] \geq C \quad , \quad k=[\![1,N]\!] \\ \mathbf{w}^t\mathbf{w}=1 \end{cases}$$

Si un hyperplan permettant d'effectuer la séparation ci-dessus n'existe pas, alors c'est un cas non-séparable. Il est alors nécessaire d'introduire une variable ξ_k. Ceci transforme l'expression du classifieur précédent en un classifieur pour le SVM généralisé :

$$\begin{cases} y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b] \geq 1-\xi_k \quad , \quad k=[\![1,N]\!] \\ \xi_k \geq 0 \quad , \quad k=[\![1,N]\!] \end{cases}$$

En fait, comme l'indique Saporta dans [22], il faut minimiser l'expression sous contraintes :

$$\text{sc.} \begin{cases} min(\mathbf{w}^t\mathbf{w}) \\ y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b] \geq 1-\xi_k \quad , \quad k=[\![1,N]\!] \\ \sum_{k=1}^{N}\xi_k < \gamma \end{cases}$$

Etape 2 : Problème d'optimisation

En se basant sur le théorème de Mercer (Voir [40] et Annexe D.1), il est possible de trouver une fonction de la forme $f(\mathbf{x})=\sum_{k=1}^{n}\beta_k K(\mathbf{x},\mathbf{x}_k)+b$ dans l'espace caractéristique de la fonction $f(\mathbf{x})=\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x})+b$.
La fonction empirique suivante doit être minimisée dans l'espace caractéristique :

$$Risk_{emp}(\mathbf{w},b)=\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}|(\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b)-y_k|$$

La formule précédente est minimisée par l'expression suivante :

$$\text{sc.} \begin{cases} \min\limits_{w,\xi_k} J_{SVM}(\mathbf{w},\xi_k)=\frac{1}{2}\mathbf{w}^t\mathbf{w}+C\sum_{k=1}^{N}\xi_k \\ y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b] \geq 1-\xi_k \quad , \quad k=[\![1,N]\!] \\ \xi_k \geq 0 \quad , \quad k=[\![1,N]\!] \end{cases}$$

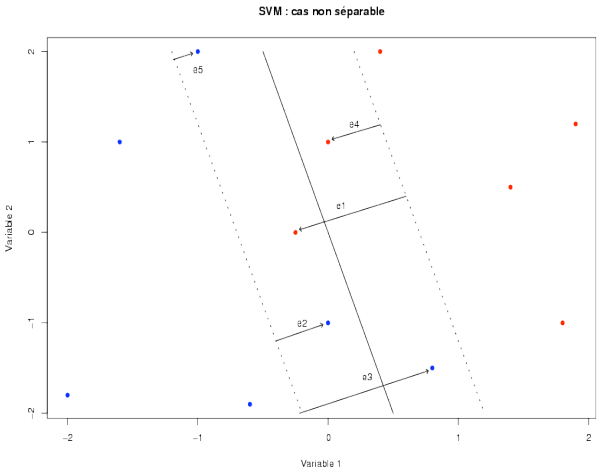

FIGURE 2.6 – SVM : Cas non séparable

Etape 3 : Lagrangien et condition d'optimalité

On peut alors construire le lagrangien pour chacun des problèmes d'optimisation précédents.

$$L_{SVM}(\mathbf{w}, b, \xi_k, \alpha_k, v_k) = J_{SVM}(\mathbf{w}, \xi_k) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \{y_k.[\mathbf{w}^t \varphi(\mathbf{x}_k) + b] - 1 + \xi_k\} - \sum_{k=1}^{N} v_k \xi_k$$

Avec $\alpha_k \geq 0, v_k \geq 0$ les multiplicateurs de Lagrange. La solution est donnée en résolvant l'équation suivante :

$$\underset{\alpha_k, v_k w, b, \xi_k}{max\ min} L_{SVM}(\mathbf{w}, b, \xi_k, \alpha_k, v_k)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{\delta L_{SVM}}{\delta \mathbf{w}} = 0 & \rightarrow \quad \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k \varphi(\mathbf{x}_k) \\ \frac{\delta L_{SVM}}{\delta b} = 0 & \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k = 0 \\ \frac{\delta L_{SVM}}{\delta \epsilon_i} = 0 & \rightarrow \quad 0 \leq \alpha_k \leq C, k = 1, ..., N \end{cases}$$

Ce qui mène à la solution du problème quadratique suivant :

$$\underset{\alpha_k}{max} Q_1(\alpha_k, \varphi(\mathbf{x}_k)) = -\frac{1}{2}. \sum_{k,l=1}^{N} y_k y_l \varphi(\mathbf{x}_k)^T \varphi(\mathbf{x}_l) \alpha_k \alpha_l + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k$$

tel que :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k = 0 \\ 0 \leq \alpha_k \leq C, k = 1, ..., N \end{cases}$$

En se basant sur le théorème de Mercer, on peut relier la fonction $\varphi(\mathbf{x}_k)$ à $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$ en imposant :

$$\varphi(\mathbf{x})^T \varphi(\mathbf{x}_k) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k)$$

on peut finalement définir le classifieur initial en résolvant :

$$\underset{\alpha_k}{max} Q_1(\alpha_k, \Psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)) = -\frac{1}{2}. \sum_{k,l=1}^{N} y_k y_l \Psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)\alpha_k\alpha_l + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k$$

tel que :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k = 0 \\ 0 \leq \alpha_k \leq C, k = 1, ..., N \end{cases}$$

Exemples de SVM

Dans la figure 2.7 page 32, les données sont les suivantes :

$$\forall i \in [\![1;10]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 1 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 1 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![11;20]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -1 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -1 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases}$$

Le SVM est calculé avec un noyau RBF.

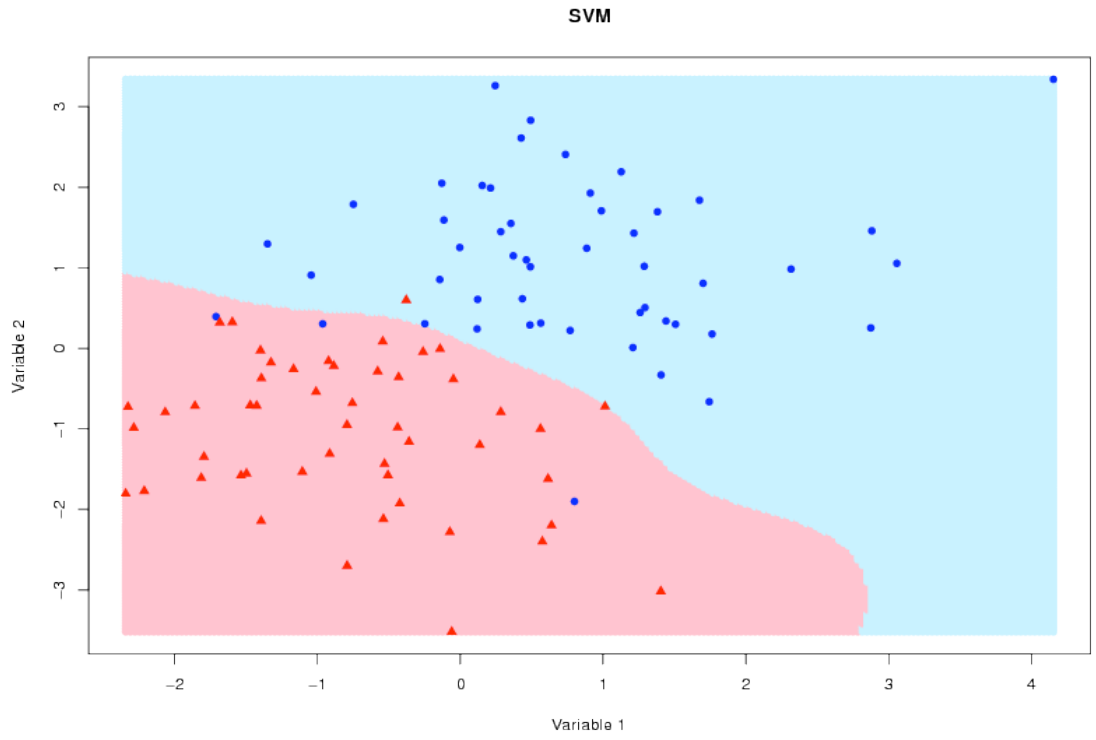

FIGURE 2.7 – SVM binaire avec noyau RBF - Exemple 1

Les points rouges et les points bleus servent à calibrer le modèle et les deux zones colorées (rouge et bleue) représentent les zones des deux différentes classes (+1 et -1) suite à le calibrage. Ces zones sont définies en prédisant les résultats sur l'ensemble de l'espace.
Ainsi, si l'appartenance à une zone doit être prédite graphiquement pour une nouvelle donnée, il suffit de la placer sur le graphique et d'observer dans quelle zone elle se trouve.
Les deux zones sont relativement bien séparées et permettent dans le cas de l'ajout d'un nouveau point de déterminer graphiquement à quelle classe il appartient.

Dans la figure 2.8 page 33, les données sont les suivantes :

$$\forall i \in [\![1;10]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![11;20]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases}$$

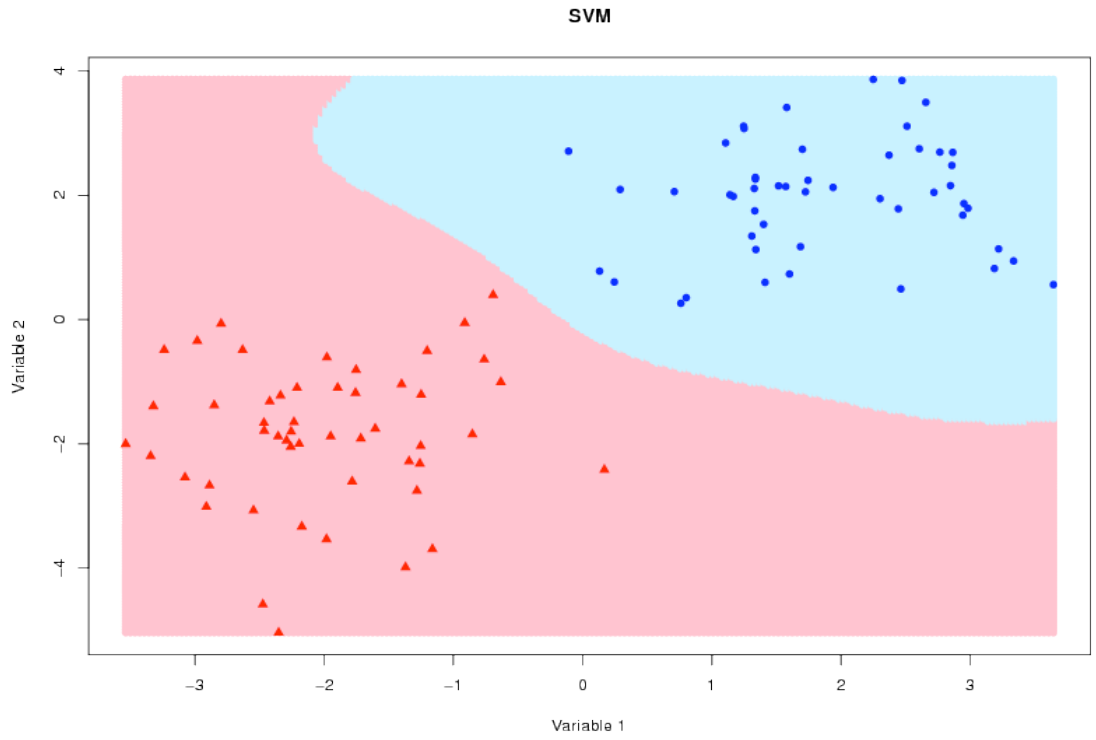

FIGURE 2.8 – SVM binaire avec noyau RBF - Exemple 2

Les deux zones sont bien séparées et permettent dans le cas de l'ajout d'un nouveau point de déterminer graphiquement à quelle classe il appartient. Par rapport à l'exemple précédent (figure 2.7) les zones sont mieux séparées à cause des données plus facilement séparables.

Dans la figure 2.9 page 34 , les données sont les suivantes :

$$\forall i \in [\![1;10]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![11;20]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases}$$

$$\forall i \in [\![21;30]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![31;40]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases}$$

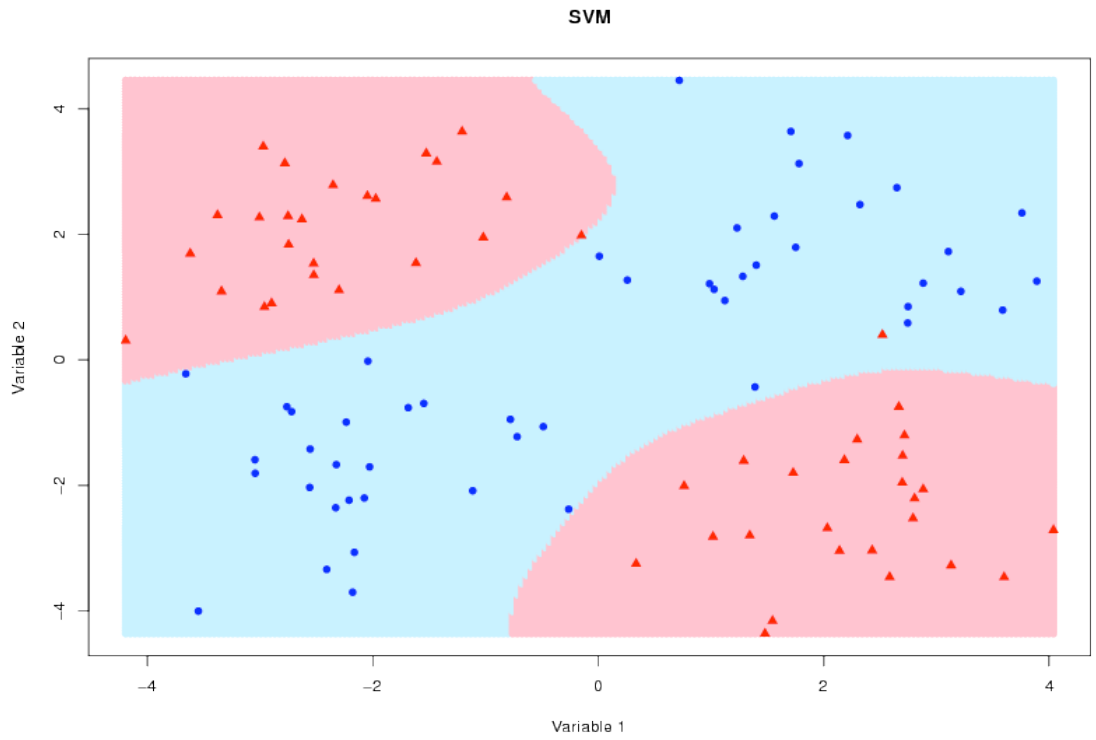

FIGURE 2.9 – SVM binaire avec noyau RBF - Exemple 3

Contrairement aux figures 2.7 et 2.8, les zones colorées ne sont pas continues. La méthode SVM permet dans le cas présent de bien définir les deux zones correspondant aux classes même si celles-ci ne sont pas continues.

Dans la figure 2.10 page 35, les données correspondent à deux spirales de données obtenues à partir d'un package de R.

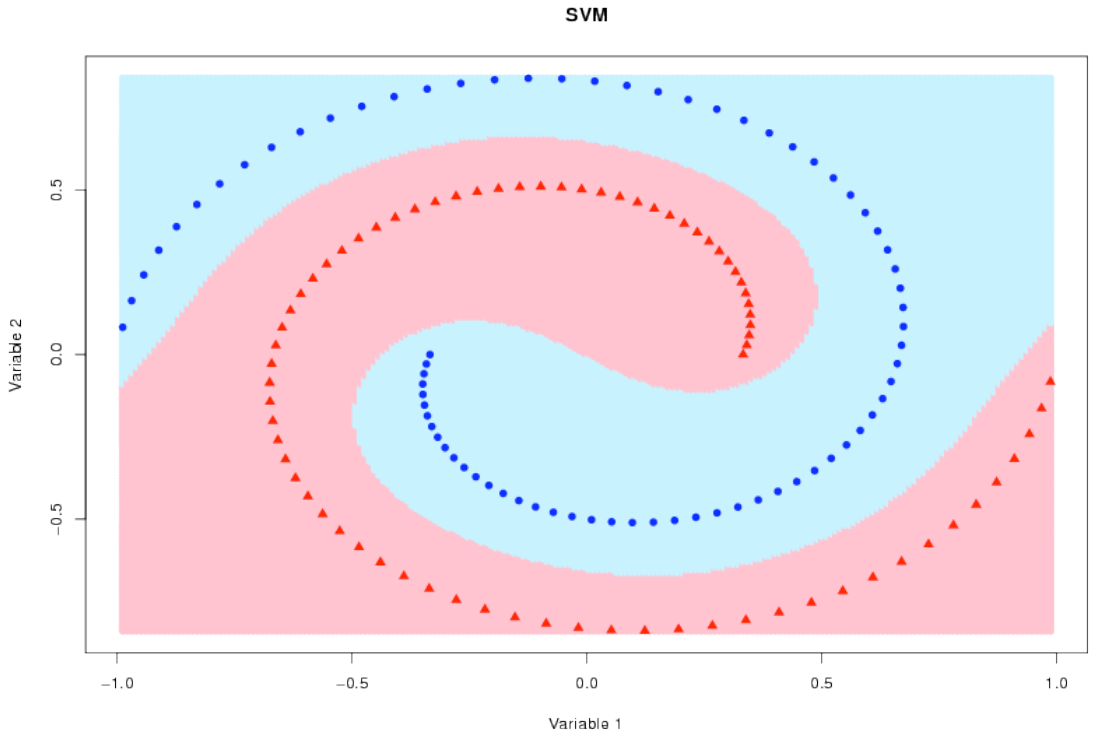

FIGURE 2.10 – SVM binaire avec noyau RBF - Spirales

Contrairement aux figures 2.7, 2.8 et 2.9, Les données ne sont pas facilement séparables dans l'espace initial. Cependant la méthode SVM donne de bons résultats car les zones colorées sont bien séparées.

Dans les figures 2.11 page 36 et 2.12 page 37, les données correspondent à deux spirales de données obtenues à partir d'un package de R avec une variance des données (écart-type de 0.05 pour la 2.11 page 36 , écart-type de 0.10 et écart-type de 0.15 pour la 2.12 page 37).

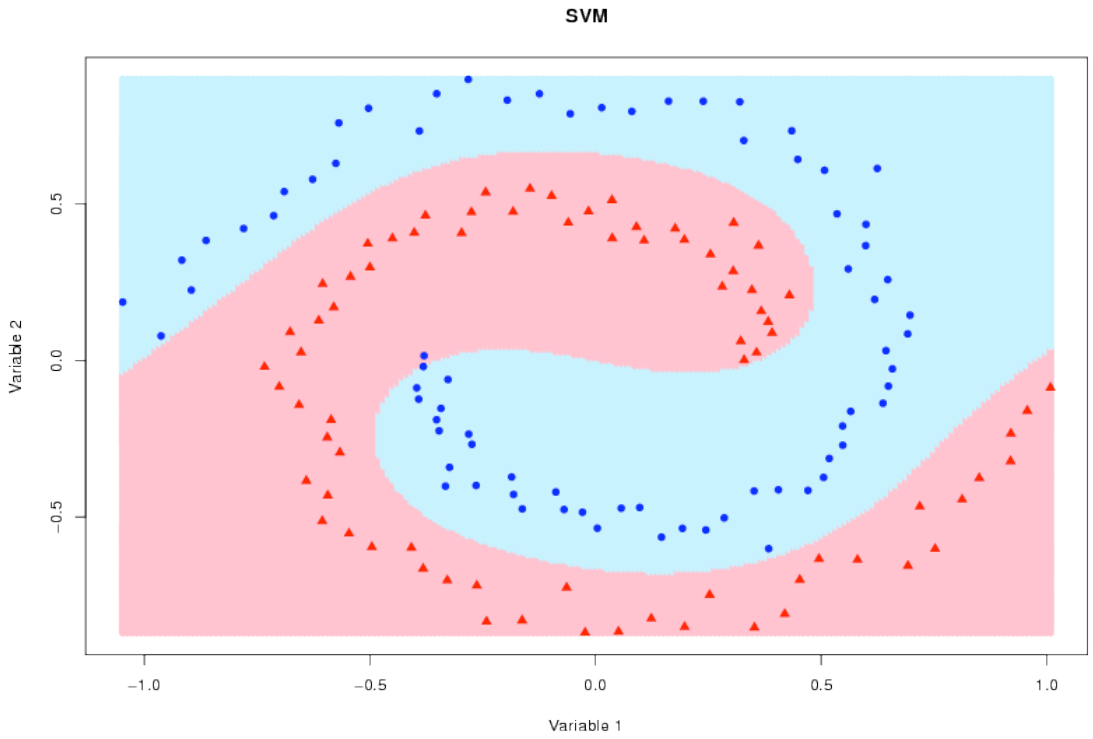

FIGURE 2.11 – SVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées

Comme dans la figure 2.10, Les données ne sont pas facilement séparables dans l'espace initial avec le bruit. Cependant la méthode SVM donne de bons résultats car les zones colorées sont bien séparées.

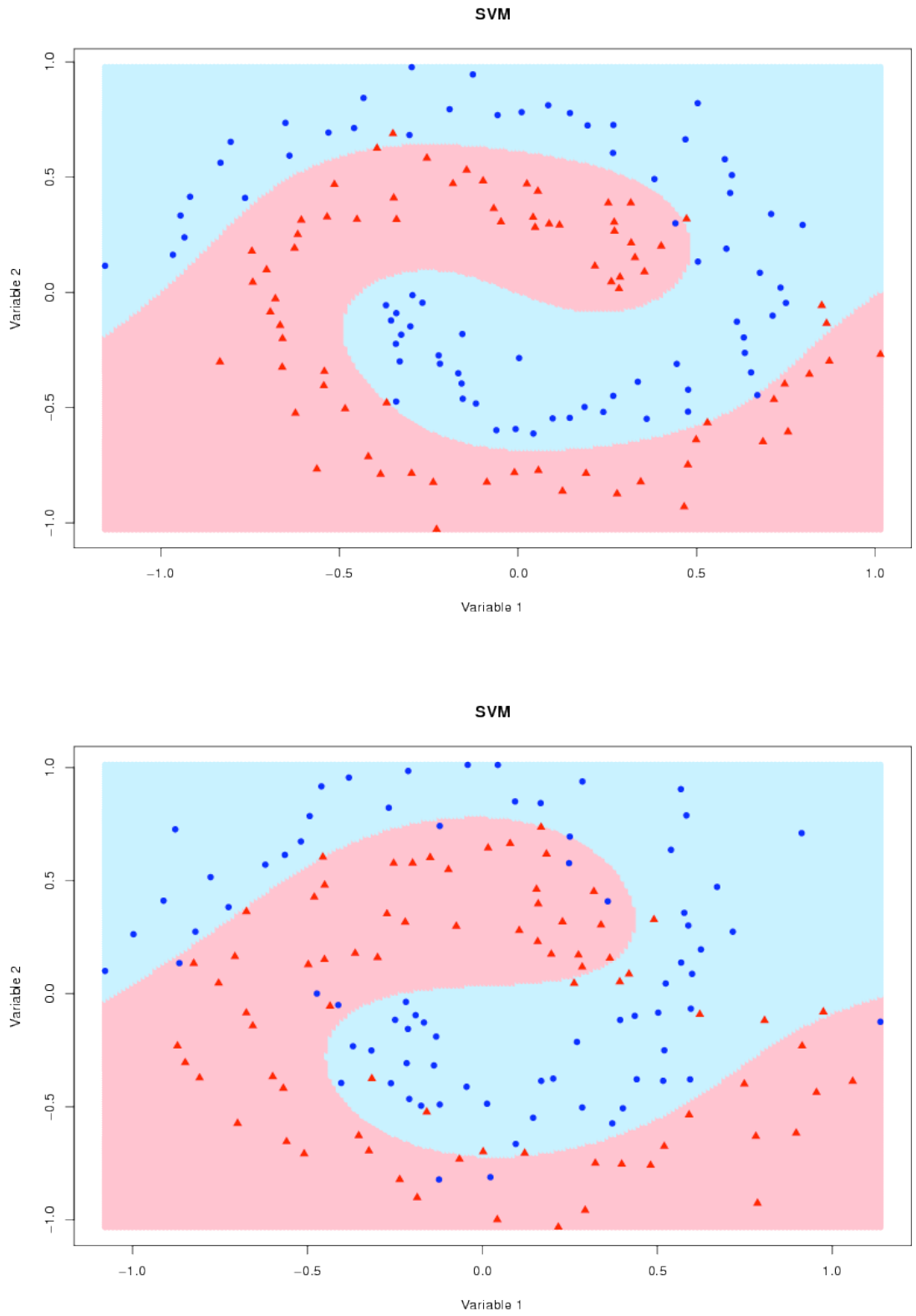

FIGURE 2.12 – SVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées

Dans la figure 2.13 page 38, les données correspondent à deux spirales de données obtenues à partir d'un package de R .

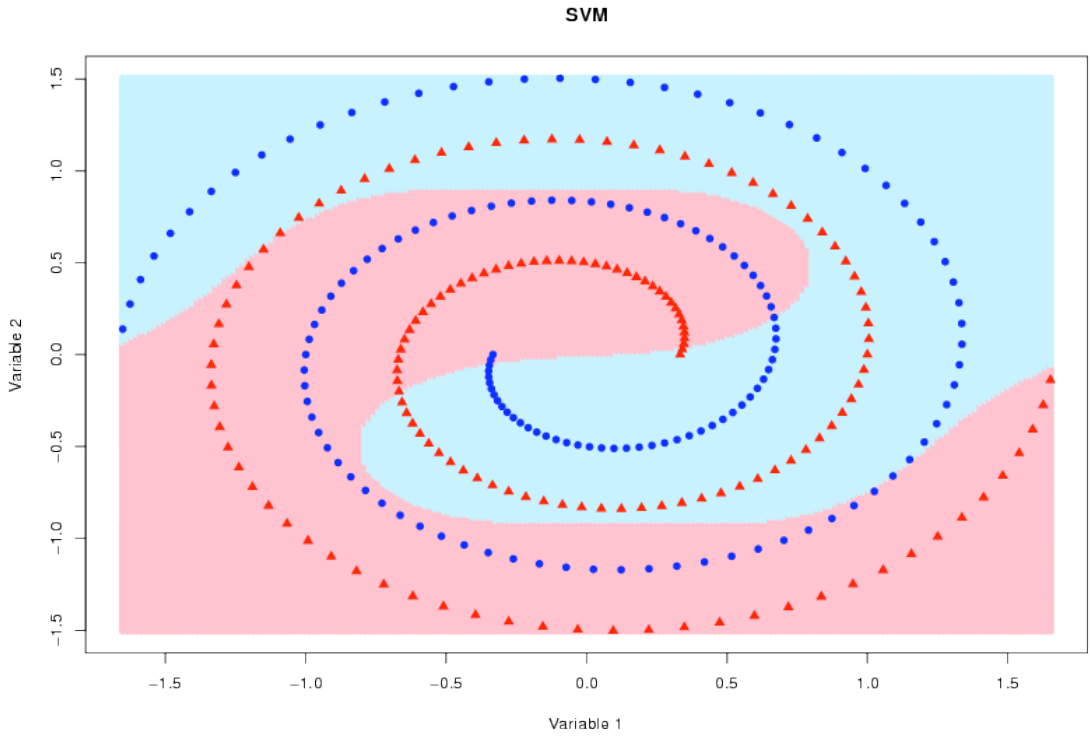

FIGURE 2.13 – SVM binaire avec noyau RBF - Spirales étendues

Comme dans la figure 2.12, Les données ne sont pas facilement séparables dans l'espace initial avec le bruit.

Avantages de la méthode

L'avantage de la méthode LSSVM est de pouvoir différencier les différents groupes de manière efficace comme le montre les graphiques précédents.

Inconvénients de la méthode

Le principal inconvénient de la méthode SVM est de ne pas pouvoir interpréter l'influence des variables sur le modèle contrairement à d'autres méthodes.
Par ailleurs, cette méthode présente une complexité beaucoup plus importante que les méthodes de la Régression Linéaire Multiple, la Régression Logistique Linéaire et de l'Analyse Discriminante Linéaire. Ceci peut poser un problème dans le cas d'une présentation à des personnes qui utilisent peu les mathématiques, mais qui prennent des décisions stratégiques.
Finalement, la cette méthode présente l'inconvénient de présenter un temps de calcul beaucoup plus important que d'autres méthodes, ce qui peut être problématique lors du choix de modèle.

2.2.6 Least Square Support Vector Machine

Présentation générale de la méthode

La méthoduast Square Support Vector Machine (LSSVM), présentée par Suykens J.A.K. & al. dans [9], J. Brabanter dans [25] ou encore dans [36], dérive de la méthode SVM. Comme la méthode SVM, elle se place dans un espace différent de l'espace initial afin de séparer 2 groupes de points par un hyperplan. Mais contrairement à la méthode SVM, l'hyperplan est défini, non pas à partir des points du groupe A les plus proches des points du groupe B, mais à partir du barycentre des points de chaque groupe.

Présentation de la méthode

Espaces Primal et Dual Comme pour les SVM, comme l'indique J. Brabanter dans [25], le principe des LSSVM (qui est une méthode dérivant des SVM) est de cartographier le vecteur des données d'entrée dans l'espace de grande dimension Ψ en passant par la fonction permettant la cartographie non linéaire $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \psi$. Dans cet espace, on considère la classe de fonctions suivante :

$$\mathcal{F}_\psi = \{f : f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{w}^t \varphi(\mathbf{x}_i) + b : \varphi : \mathcal{X} \rightarrow \Psi, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_f}, b \in \mathbb{R}\}$$

En fait, il n'est pas nécessaire de connaître de façon explicite l'espace Ψ pour construire la fonction. En effet, le produit $\varphi(\mathbf{x}_k)^T \varphi(\mathbf{x}_l)$ peut être remplacé par le noyau $K(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$ correspondant satisfaisant la condition de Mercer. En supposant que $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi(\mathbf{x}_k)$ et en se basant sur le théorème de Mercer (voir annexe), la classe de fonction linéaire dans l'espace caractéristique peut se définir de façon équivalente dans l'espace des données d'entrée $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{F}_\mathcal{X} = \{f : f(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) + b : b \in \mathbb{R}, \beta_k \in \mathbb{R}\}$$

Cet espace est souvent de grande dimension dans la mesure où il est constitué de dimension égale au nombre de variables explicatives du modèle. Van Gestel & al explicitent sous forme graphique ce principe dans [10].

Etape 1 : Le classifieur Comme dans le cas de la méthode SVM, le classifieur se définit de la manière suivante.

Soit le cas où les variables endogènes sont sous la forme : $y_k \in \{+1; -1\}$.
Un classifieur de la forme suivante est défini :

$$y(\mathbf{x}) = sign\left[\sum_{k=1}^{N} \alpha_k . y_k . \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) + b\right] \qquad \text{(A)}$$

Avec :
- α_k : Constante Réelle positive
- b : Constante Réelle
- $\Psi(.,.)$: Fonction

La fonction $\Psi(.,.)$ peut prendre les formes suivantes (κ, θ, σ constantes) :
- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}$: SVM linéaire
- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_k^T \mathbf{x} + 1)^d$: SVM polynomial de degré d
- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = e^{-||\mathbf{x}-\mathbf{x}_k||_2^2/\sigma^2}$: SVM RBF (Radial Basis Function)
- $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) = tanh[\kappa \mathbf{x}_k^T + \theta]$: SVM de neurones à deux couches

Pour construire le classifieur, il est supposé que :

$$\begin{cases} \mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b \geq +1 & , \quad \text{si } y_k = +1 \\ \mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b \leq -1 & , \quad \text{si } y_k = -1 \end{cases}$$

Cette formule peut se réécrire sous la forme suivante :

$$y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b] \geq 1, \qquad k = [\![1, N]\!]$$

Avec $\varphi(.)$: Fonction non-linéaire qui transforme l'espace initial en un espace de plus grande dimension.
Si un hyperplan permettant d'effectuer la séparation ci-dessus n'existe pas alors c'est un cas non-séparable. Il est alors nécessaire d'introduire une variable e_k. Ceci transforme l'expression du classifieur précédent en un classifieur pour le LSSVM généralisé comme l'indique Suykens J.A.K. & al. dans [9] :

$$\begin{cases} y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b] \geq 1-e_k & , \quad k = [\![1, N]\!] \\ e_k \geq 0 & , \quad k = [\![1, N]\!] \end{cases}$$

Etape 2 : Problème d'optimisation

Cas binaire : Dans cette première partie, le cas de la classification binaire est présenté. Il s'agit du cas où il n'existe que deux classes. La fonction de risque empirique à minimiser est :

$$Risk_{emp}(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}((\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b)-y_k)^2$$

La formule précédente est minimisée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{w},b,e} J_{LSSVM}(\mathbf{w}, b, e) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^t\mathbf{w} + \frac{1}{2}\gamma\sum_{k=1}^{N}e_k^2 \\ &\text{sc. } y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b] = 1-e_k,\ k = [\![1, N]\!] \end{aligned}$$

Le lecteur remarquera que les contraintes sont des égalités et non des inégalités comme dans la méthode SVM.

Cas multi-classes : Dans cette seconde partie inspirée par Suykens J.A.K. et Vandewalle J. dans [8] , le cas de la classification multi-classes est présenté. Il s'agit du cas où il existe plusieurs classes.

Dans le cas multi-classes, il faut considérer, comme l'indique Suykens J.A.K. et Vandewalle J. dans [8], les données sous la forme :

$$\{y_k^{(i)}, \mathbf{x}_k\}_{k=1,i=1}^{k=N,i=m}$$

Cette méthode permet en principe de coder 2^m différentes classes. En effet, prenons l'exemple de $m = 2$, il est possible de coder les classes $\{[+1;+1],[+1;-1],[-1;+1],[-1;-1]\}$.

La fonction de risque empirique à minimiser est :

$$\min_{w_k,b_k,e_k} J_{LSSVM}(\mathbf{w}_i, b_i, e_{k,i}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{w}_i^T\mathbf{w}_i + \frac{1}{2}\gamma\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}e_{k,i}^2$$

$$\text{sc.} \begin{cases} y_k^{(1)}.[\mathbf{w}_1^T\varphi_1(\mathbf{x}_k)+b_1] = 1-e_{k,1},\ k = [\![1, N]\!] \\ y_k^{(2)}.[\mathbf{w}_2^T\varphi_2(\mathbf{x}_k)+b_2] = 1-e_{k,2},\ k = [\![1, N]\!] \\ \ldots \\ y_k^{(m)}.[\mathbf{w}_m^T\varphi_m(\mathbf{x}_k)+b_m] = 1-e_{k,m},\ k = [\![1, N]\!] \end{cases}$$

Etape 3 : Lagrangien et condition d'optimalité

Cas binaire :

$$L_{LSSVM}(\mathbf{w},b,e,\alpha) = J_{LSSVM}(\mathbf{w},b,e) - \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\{y_k.[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b]-1+e_k\}$$

la condition d'optimalité est :

$$\begin{cases} \frac{\delta L_{LSSVM}}{\delta \mathbf{w}} = 0 & \rightarrow \quad \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k y_k \varphi(\mathbf{x}_k) \\ \frac{\delta L_{LSSVM}}{\delta b} = 0 & \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N}\alpha_k y_k = 0 \\ \frac{\delta L_{LSSVM}}{\delta e_k} = 0 & \rightarrow \quad \alpha_k = \gamma e_k, k = 1,...,N \\ \frac{\delta L_{LSSVM}}{\delta \alpha_k} = 0 & \rightarrow \quad y_k[\mathbf{w}^t\varphi(\mathbf{x}_k)+b]-1+e_k = 0, k = 1,...,N \end{cases}$$

Cette condition d'optimalité peut être écrite directement comme la solution du système linéaire d'équations suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{Z}^T \\ 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{Y}^T \\ 0 & 0 & \gamma\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \hline \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Y} & \mathbf{I} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{w} \\ b \\ \mathbf{e} \\ \hline \boldsymbol{\alpha} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \overrightarrow{\mathbf{1}} \end{array}\right]$$

Avec :

- $\boldsymbol{Z} = [\varphi(\mathbf{x}_1)^T y_1; ...; \varphi(\mathbf{x}_N)^T y_N]$
- $\boldsymbol{Y} = [y_1; ...; y_N]$
- $\overrightarrow{\mathbf{1}} = [1; ...; 1]$
- $\mathbf{e} = [e_1; ...; e_N]$
- $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1; ...; \alpha_N]$

La solution est également donnée par :

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & -\boldsymbol{Y}^T \\ \hline \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T + \gamma^{-1}\boldsymbol{I} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} b \\ \hline \boldsymbol{\alpha} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \overrightarrow{\mathbf{1}} \end{array}\right] \qquad \text{(B)}$$

On peut appliquer la condition de Mercer à la matrice $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T$ où

$$\begin{aligned} \Omega_{kl} &= y_k y_l \varphi(\mathbf{x}_k)^T \varphi(\mathbf{x}_l) \\ &= y_k y_l \Psi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

En résolvant le système d'équations donné par l'expression (C) et la matrice (B), il est possible de déterminer le classifieur utilisé dans l'expression (A).

J. Brabanter dans [25] indique que la solution est sous la forme :

$$b = \frac{\overrightarrow{\mathbf{1}}^T \left(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T + \gamma^{-1}\boldsymbol{I}\right)^{-1} \boldsymbol{Y}}{\overrightarrow{\mathbf{1}}^T \left(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T + \gamma^{-1}\boldsymbol{I}\right)^{-1} \overrightarrow{\mathbf{1}}}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^T + \gamma^{-1}\boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{Y} - \overrightarrow{\mathbf{1}}b\right)$$

Cas multi-classes :

$$L^{(m)}_{LSSVM}(\mathbf{w}_i,b_i,e_{k,i},\alpha_i) = J^{(m)}_{LSSVM}(\mathbf{w}_i,b_i,e_{k,i}) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{k,i}\{y_k^{(i)}.[\mathbf{w}_i^T\varphi_i(\mathbf{x}_k)+b_i]-1+e_{k,i}\}$$

la condition d'optimalité est :

$\forall k \in [\![1; N]\!], \forall i \in [\![1; m]\!]$

$$\begin{cases} \frac{\delta L^{(m)}_{LSSVM}}{\delta \mathbf{w}_i} = 0 & \rightarrow \quad \mathbf{w}_i = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k,i} y_k^{(i)} \varphi_i(\mathbf{x}_k) \\ \frac{\delta L^{(m)}_{LSSVM}}{\delta b_i} = 0 & \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_{k,i} y_k^{(i)} = 0 \\ \frac{\delta L^{(m)}_{LSSVM}}{\delta e_{k,i}} = 0 & \rightarrow \quad \alpha_{k,i} = \gamma e_{k,i} \\ \frac{\delta L^{(m)}_{LSSVM}}{\delta \alpha_{k,i}} = 0 & \rightarrow \quad y_k^{(i)} [\mathbf{w}_i^T \varphi_i(\mathbf{x}_k) + b_u] - 1 + e_{k,i} = 0 \end{cases}$$

En éliminant les $\mathbf{w}_i$ et les $e_{k,i}$, il vient :

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{Y}_M^T \\ \hline \boldsymbol{Y}_M & \boldsymbol{\Omega}_M \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{b}_M \\ \hline \boldsymbol{\alpha}_M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \overrightarrow{\mathbf{1}} \end{array}\right]$$

Avec :

- $\boldsymbol{Y}_M$ = Matrice diagonale par blocs $\left\{ \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_N^{(1)} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} y_1^{(m)} \\ \vdots \\ y_N^{(m)} \end{bmatrix} \right\}$
- $\boldsymbol{\Omega}_M$ = Matrice diagonale par blocs $\left\{ \boldsymbol{\Omega}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\Omega}^{(m)} \right\}$
- $\boldsymbol{b}_M = [b_1; ...; b_m]$
- $\boldsymbol{\alpha}_M = [\alpha_{1,1}; \ldots; \alpha_{N,1}; \ldots; \alpha_{1,m}; \ldots; \alpha_{N,m}]$
- $\Omega_{kl}^{(i)} = y_k^{(i)} y_l^{(i)} \Psi_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) + \gamma^{-1} \boldsymbol{I}$

En appliquant, la condition de Mercer :

$$\forall i \in [\![1; m]\!], \Psi_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) = \varphi_i^T(\mathbf{x}_k) \varphi_i(\mathbf{x}_l)$$

Cette condition s'écrit comme suit pour un noyau RBF :

$$\forall i \in [\![1; m]\!], \Psi_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) = exp\{-\|(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l)\|_2^2 / \sigma_i^2\}$$

Il est alors possible de retrouver l'expression du classifieur.

Remarque

Jieping Y. et Tao X. dans [6] présentent les LSSVM dans le cas binaire de la manière suivante. Il faut tout d'abord minimiser la fonction suivante :

$$\underset{\mathbf{w},b}{L}_{LSSVM}(\mathbf{w}, b) = \sum_{i=1}^{n} \|f(\mathbf{x}_i) - y_i\|_2^2 + C\|\mathbf{w}\|_2^2$$

Cette fonction, même si elle est écrite d'une manière différente, correspond à la fonction suivante présentée par Suykens J.A.K. & al. dans [9] et J. Brabanter dans [25].

$$\underset{\mathbf{w},b,e}{min} J_{LSSVM}(\mathbf{w}, b, e) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^t\mathbf{w} + \frac{1}{2}\gamma \sum_{k=1}^{N} e_k^2$$

Jieping Y. et Tao X. continuent en indiquant que la minimisation de L_{LSSVM} conduit à :

$$\mathbf{w} = \frac{2.n_1.n_2}{n^2}\left(S + \frac{C}{n}I_d\right)^{-1}(c_1 - c_2)$$

$$b = \frac{n_1 - n_2}{n} - c^T.\mathbf{w}$$

Avec :

- c : le centroïde des données $\mathbf{X}$
- c_1 : le centroïde des données positives
- c_2 : le centroïde des données négatives
- n : le nombre de données
- n_1 : le nombre de données positives
- n_2 : le nombre de données négatives
- S : la matrice de covariance des données $\mathbf{X}$

Ainsi, le plan séparateur est défini à partir du centroïde des données positives et du centroïde des données négatives. Cette présentation montre que le LSSVM prend en compte tous les points et non pas uniquement les points les plus proches de l'hyperplan séparateur comme dans la méthode SVM.

Exemples de LSSVM

Dans la figure 2.14 page 44, les données sont les mêmes que celles utilisées dans la figure 2.7 page 32, les données sont les suivantes :

$$\forall i \in [\![1;10]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 1 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 1 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![11;20]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -1 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -1 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases}$$

Le LSSVM est calculé avec un noyau RBF. Les points rouges et les points bleus servent à calibrer le modèle et les

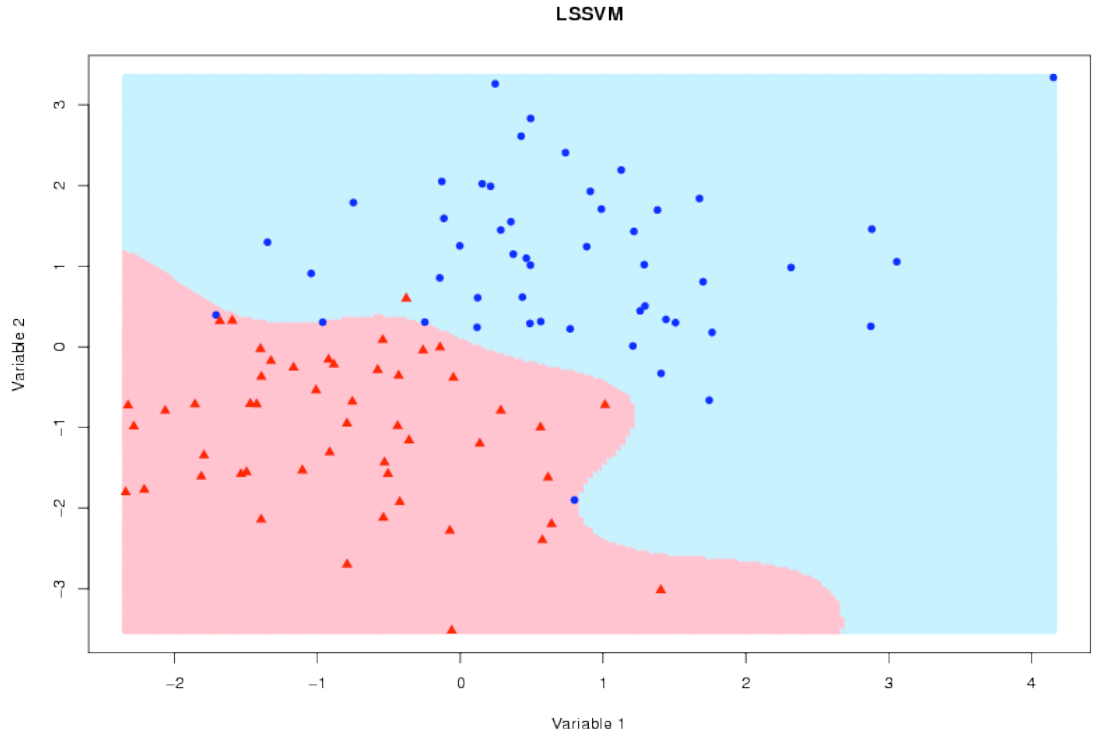

FIGURE 2.14 – LSSVM binaire avec noyau RBF - Exemple 1

deux zones colorées (rouge et bleue) représentent les zones des deux différentes classes (+1 et -1) suite à le calibrage. Ces zones sont définies en prédisant les résultats sur l'ensemble de l'espace. Ainsi, si l'appartenance à une zone doit être prédite graphiquement pour une nouvelle donnée, il suffit de la placer sur le graphique et d'observer dans quelle zone elle se trouve.
Les deux zones sont relativement bien séparées et permettent dans le cas de l'ajout d'un nouveau point de déterminer graphiquement à quelle classe il appartient.

Dans la figure 2.15 page 45, les données sont les mêmes que celles utilisées dans la figure 2.8 page 33, les données sont les suivantes :

$$\forall i \in [\![1;10]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![11;20]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases}$$

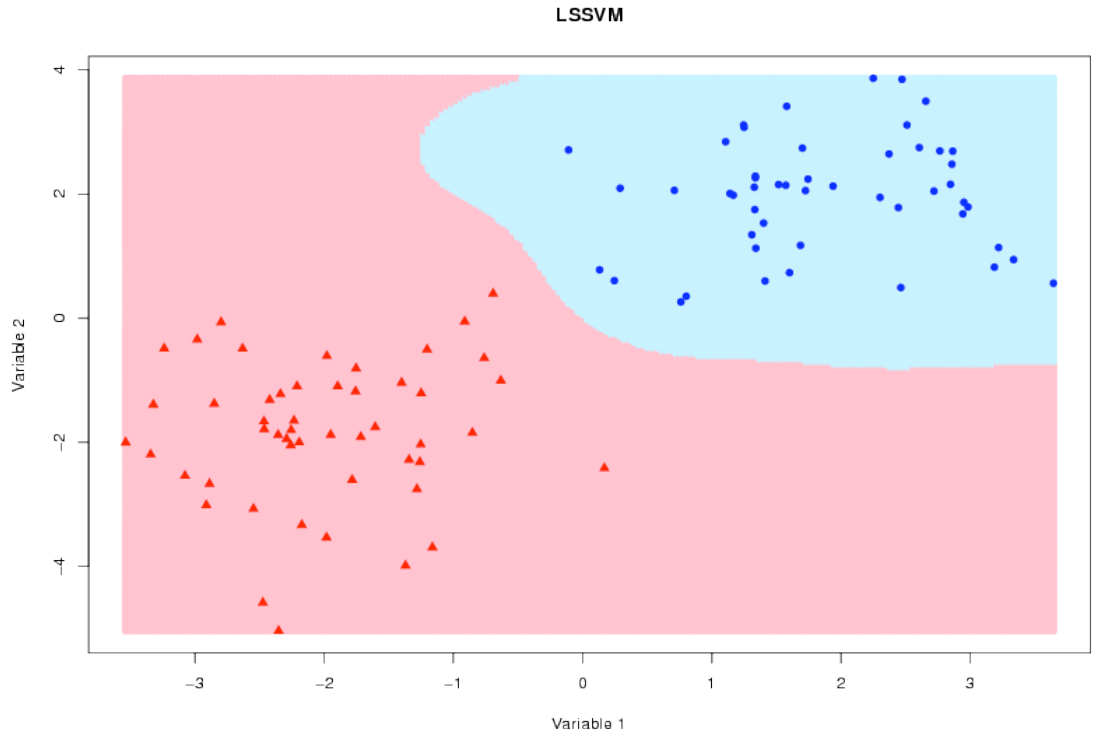

FIGURE 2.15 – LSSVM binaire avec noyau RBF - Exemple 2

Les deux zones sont bien séparées et permettent dans le cas de l'ajout d'un nouveau point de déterminer graphiquement à quelle classe il appartient. Par rapport à l'exemple précédent (figure 2.14) les zones sont mieux séparées à cause des données plus facilement séparables.

Dans la figure 2.16 page 46, les données sont les mêmes que celles utilisées dans la figure 2.9 page 34, les données sont les suivantes :

$$\forall i \in [\![1;10]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![11;20]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = +1 \end{cases}$$

$$\forall i \in [\![21;30]\!] \begin{cases} x_{i,1} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in [\![31;40]\!] \begin{cases} x_{i,1} = 2 + \mathcal{N}(0,1) \\ x_{i,2} = -2 + \mathcal{N}(0,1) \\ y_i = -1 \end{cases}$$

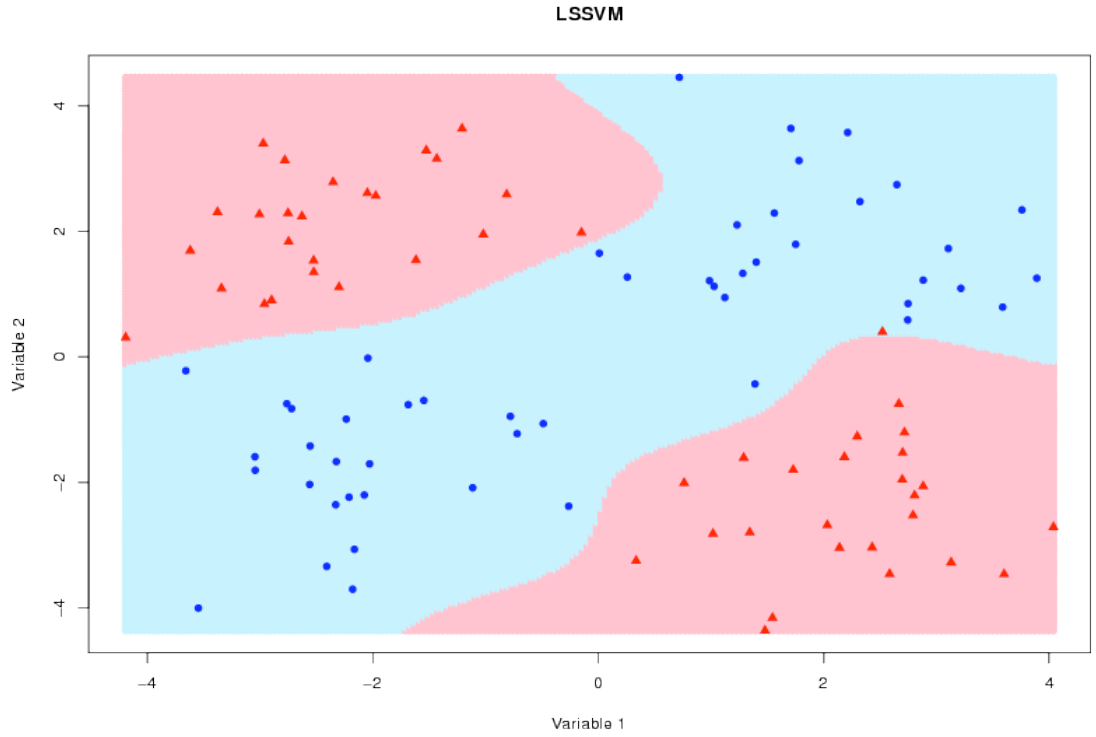

FIGURE 2.16 – LSSVM binaire avec noyau RBF - Exemple 3

Contrairement aux figures 2.14 et 2.15, les zones colorées ne sont pas continues. Comme la méthode SVM, la méthode LSSVM permet, dans le cas présent, de bien définir les deux zones correspondant aux classes même si celles-ci ne sont pas continues.

Dans la figure 2.17 page 47, les données sont les mêmes que celles utilisées dans la figure 2.10 page 35, les données correspondent à deux spirales de données obtenues à partir d'un package de R.

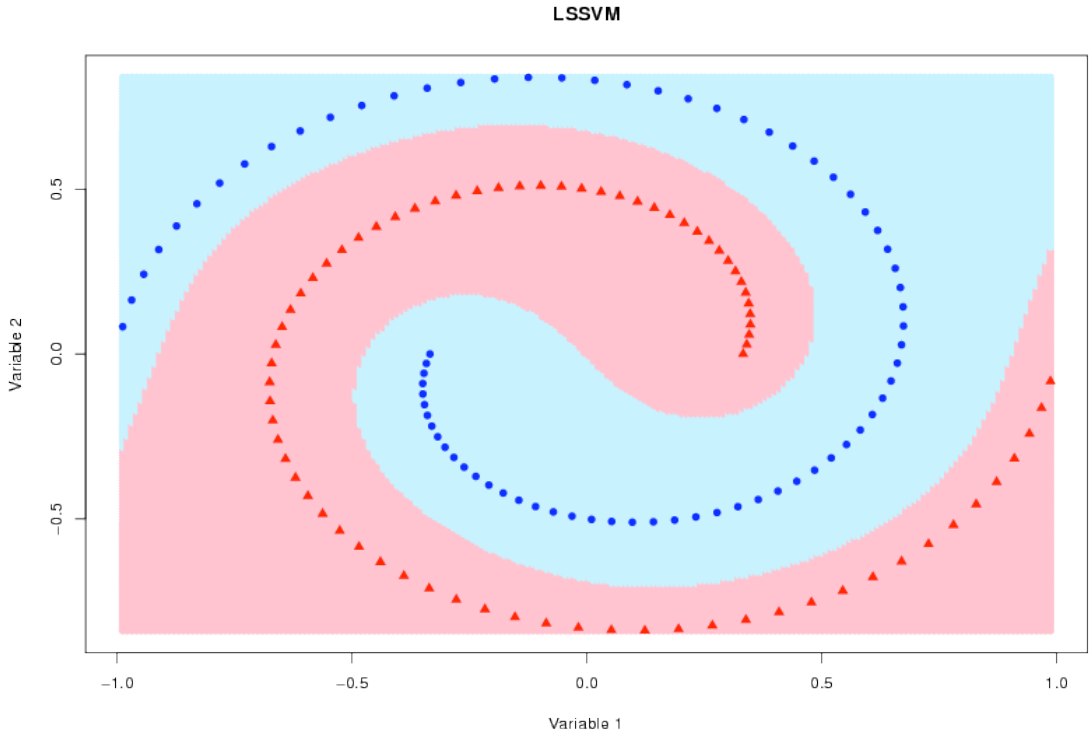

FIGURE 2.17 – LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales

Contrairement aux figures 2.14, 2.15 et 2.16, les données ne sont pas facilement séparables dans l'espace initial. Comme la méthode SVM, la méthode LSSVM donne de bons résultats car les zones colorées sont bien séparées.

Dans les figures 2.18 page 48 et 2.19 page 49, les données sont les mêmes que celles utilisées dans les figures 2.11 page 36 et 2.19 page 49, les données correspondent à deux spirales de données obtenues à partir d'un package de R avec une variance des données (écart-type de 0.05 pour la 2.18 page 48 , écart-type de 0.10 et écart-type de 0.15 pour la 2.19 page 49).

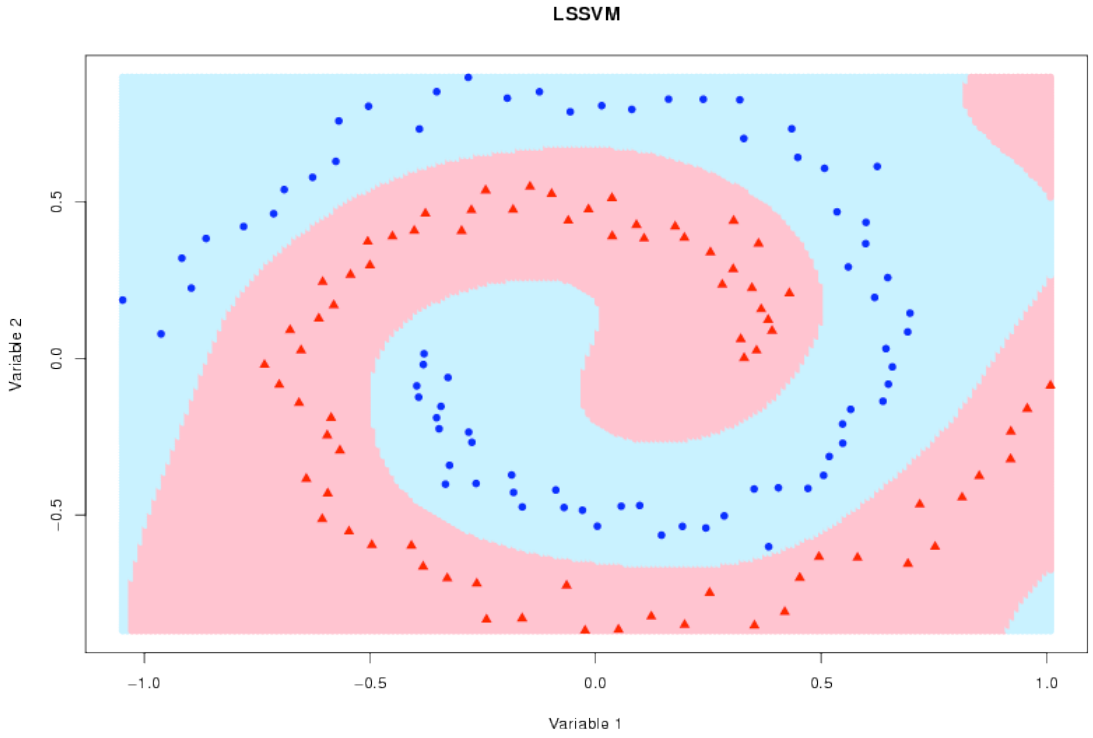

FIGURE 2.18 – LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées

Comme dans la figure 2.17, Les données ne sont pas facilement séparables dans l'espace initial avec le bruit. Cependant comme la méthode SVM, la méthode LSSVM donne de bons résultats car les zones colorées sont bien séparées.

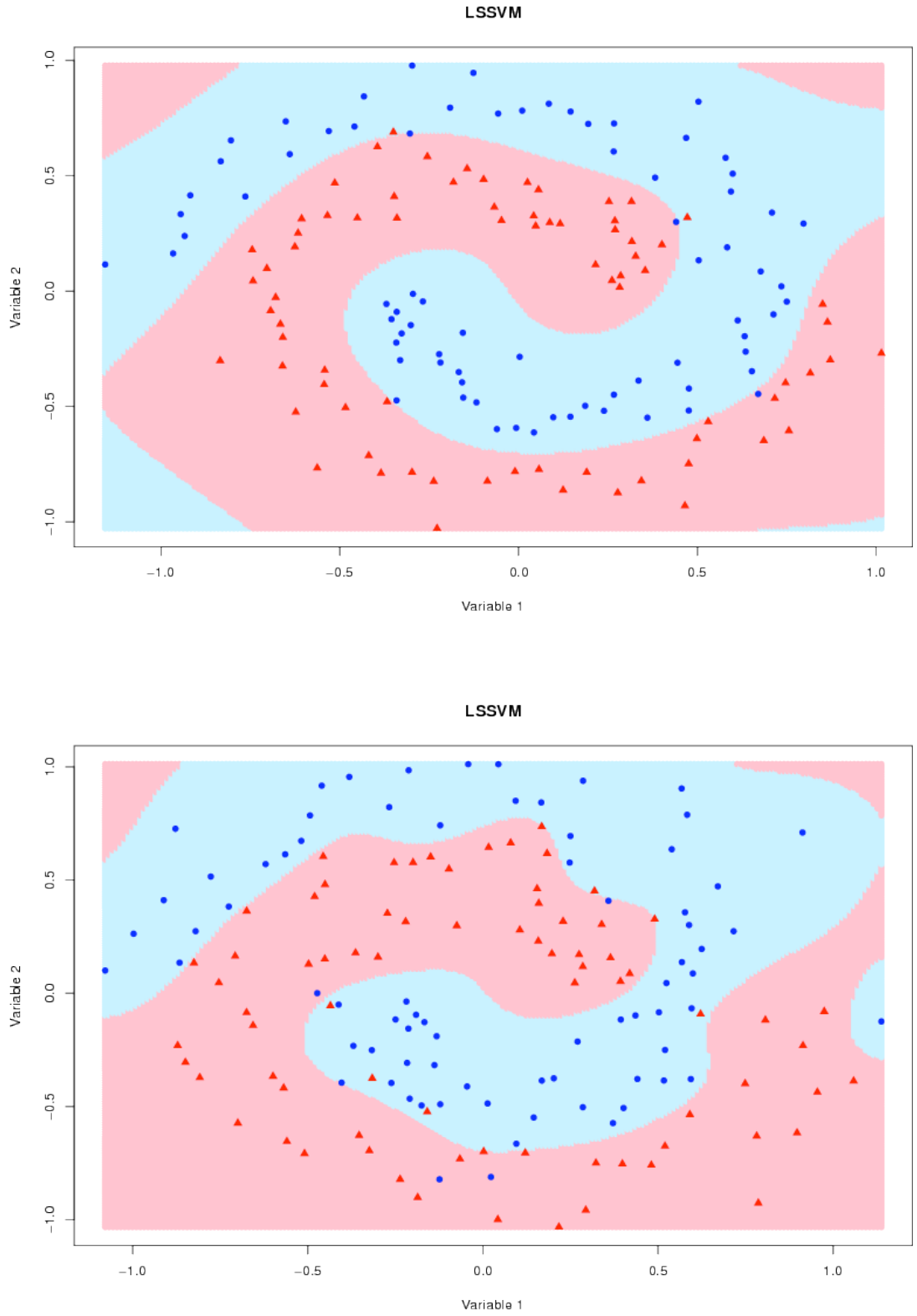

FIGURE 2.19 – LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées

Dans la figure 2.20 page 50, les données sont les mêmes que celles utilisées dans la figure 2.13 page 38, les données correspondent à deux spirales de données obtenues à partir d'un package de R .

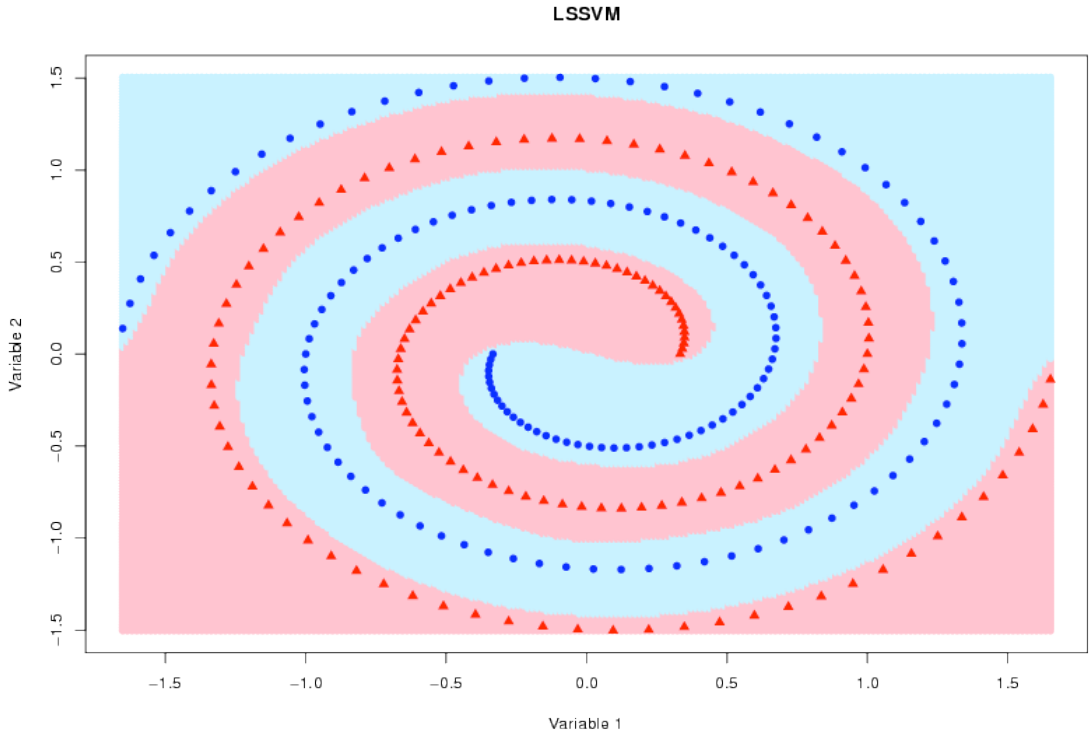

FIGURE 2.20 – LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales étendues

Comme dans la figure 2.19, Les données ne sont pas facilement séparables dans l'espace initial avec le bruit. Cependant, contrairement à la méthode SVM, les résultats de la méthode LSSVM sont très concluants.

Avantages de la méthode

L'avantage de la méthode LSSVM est de pouvoir différencier les différents groupes de manière efficace comme le montre les graphiques précédents.

Inconvénients de la méthode

Le principal inconvénient de la méthode LSSVM (comme la méthode SVM) est de ne pas pouvoir interpréter l'influence des variables sur le modèle contrairement à d'autres méthodes. Cependant dans [14] publié en août 2012, les auteurs C. Liberati and F. Camillo and G. Saporta proposent une interprétation pour la méthode LSSVM d'un manière opérationnelle.
Par ailleurs, cette méthode présente une complexité beaucoup plus importante que les méthodes de la Régression Linéaire Multiple, de la Régression Logistique Linéaire et de l'Analyse Discriminante Linéaire. Ceci peut poser problème dans le cas d'une présentation à des personnes qui utilisent peu les mathématiques, mais qui prennent des décisions stratégiques.
Finalement, cette méthode présente l'inconvénient de présenter un temps de calcul beaucoup plus important que d'autres méthodes. Ceci peut être problématique lors du choix de modèles.

2.3 Application

2.3.1 Données

Les données utilisées pour cette partie du mémoire proviennent de deux sources différentes. La première source des données est le FMI [1] (voir [21]) et la seconde source des données est la base de données *Datastream* de *Thomson-Reuters*. Les calculs ont été menés à l'aide du logiciel libre *R* disponible au lien www.cran.r-project.org.

2.3.2 Etude préliminaire des données

Lors de l'étude préliminaire des données, il est apparu que le nombre de données était relativement restreint, et ce, pour plusieurs raisons.

Contraintes liées aux notations

Nombre d'Etats : Le nombre d'Etats faisant des émissions obligataires est relativement faible. En effet, sur les quelques 194 [2] Etats que comprend le monde aujourd'hui, nombreux sont ceux qui ne font pas d'émissions obligataires et qui, de ce fait, ne sont pas notés. Une centaine d'Etats sont répertoriés parmi les émetteurs notés au moins une fois sur la période 1990-2010.

Historique : Par ailleurs parmi les Etats émettant de la dette, l'historique disponible n'est pas très important. En effet, les Etats ne sont notés que lorsqu'ils émettent de la dette et comme certains Etats n'émettent plus de dettes ou n'ont émis de la dette que sur des périodes courtes, les données sont faibles. Dans ce mémoire, le choix a été fait de considérer le maximum de données disponibles lors du calibrage des différentes méthodes. En effet, le faible nombre de notations inférieures à BB observé au cours de la période 1990 - 2009 ne permet pas de réduire l'échantillon uniquement aux dernières années.

Nombre de groupes de notations : Le grand nombre de notations disponibles et le faible nombre de défauts observés morcellent les données en groupes de notations de la même catégorie avec des effectifs très faibles.

Contraintes liées aux données économiques

Les données économiques présentent également des contraintes principalement dues au manque de données dans la base de données du FMI. En effet, pour certains Etats, les données ne sont pas disponibles pour certaines années et certains pays.

Effet Taille : Afin de ne pas avoir un effet "taille" du pays, l'ensemble des données utilisées dans les méthodes mathématiques le sont en taux. En effet, considérer directement la dette d'un pays en USD reviendrait par exemple à comparer la PIB des USA (15 000 Mds $ en 2011) à celle d'un pays comme France (2 800 Mds $ en 2011) qui est sensiblement plus petit.

Effet devise : Par ailleurs, utiliser un taux et non les valeurs exactes permet de s'affranchir de la devise et des effets des taux de change entre les monnaies.

1. Fonds Monétaire International
2. 193 états reconnus par l'ONU et le Vatican

Après analyse et traitement des données, il apparaît que 12 variables explicatives, présentées dans le tableau 2.1 page 52, peuvent être utilisées pour construire les modèles.

Variable Explicative		
N	Variable	Description
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB	Nombre d'unités de pétrole importé multiplié par le prix d'une unité en US dollars divisé par le PIB en US dollars.
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB	Ensemble du passif qui nécessite le paiement (du principal ou d'intérêts) par l'emprunteur au prêteur à une date ou des dates dans le futur.
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	Correspond à la Dette brute de l'Etat moins les actifs financiers correspondant à des instruments de dettes
4	Taux de chômage	-
5	Taux d'inflation	-
6	Investissement total en pourcentage du PIB	Investissement plus changement dans les inventaires et acquisitions moins les cessions
7	Déficit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	Correspond aux prêts nets moins les emprunts nets, plus les intérêts nets payés ou à payer
8	Déficit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	Correspond à la différence entre revenus et dépenses de l'Etat
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	Dépenses totales de l'Etat et acquisition nette d'actifs non-financiers
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	Correspond aux taxes, aux contributions sociales et autres revenus
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	Correspond à l'ensemble des revenus moins l'ensemble des dépenses ajusté des pensions de retraite
12	Balance courante en pourcentage du PIB	Ensemble des transactions autres que les transactions financières

TABLE 2.1 – Variables explicatives utilisées pour les modèles

D'autres variables explicatives ont été envisagées pour les modèles comme le taux d'intérêt, le taux de natalité, la croissance du PIB, le nombre de permis de construire, etc. Néanmoins, ces données ont été écartées car elles n'étaient pas disponibles ou bien elles n'étaient pas quantitativement ou qualitativement suffisantes.

Par ailleurs, augmenter le nombre de variables explicatives dans les modèles (par exemple, en utilisant 13 ou 14 variables explicatives) augmente fortement le nombre de modèles.

2.3.3 Calibrage et Test

Pour rappel, le test consiste à se servir d'un calibrage sur les données économiques allant de 1990 à 2009 (avec les notations de 1991 à 2010) et un échantillon test sur la totalité des données de 2010 (avec les notations 2011). L'avantage de ce test est de se baser sur ce qu'auraient été les résultats si la méthode avait été lancée au 31.12.2010, mais il a l'inconvénient de ne pas tenir compte des données 2010 qui peuvent avoir une influence notable sur les résultats du calibrage.

L'ensemble des combinaisons de 5 variables ou plus parmi 12 variables présentées plus haut est testé sur les 5 méthodes mathématiques exposées dans la section 2.1.. Ceci donne au total 3 302 modèles potentiels, c'est-à-dire de combinaisons de variables explicatives, pour chaque méthode mathématique.

$$3302 = \sum_{k=5}^{12} \begin{pmatrix} \mathrm{k} \\ 12 \end{pmatrix} = \sum_{k=5}^{12} \frac{12!}{k!.(12-k)!}$$

Le choix d'utiliser au maximum 12 variables vient du fait qu'avec un nombre plus important de variables, l'échantillon disponible se réduit fortement et ne permet pas d'utiliser les modèles.

2.3.4 Choix de modèle

Parmi les 3 302 modèles calibrés et testés sur chaque méthode mathématique (Méthode LM [3], Méthode MLR [4], Méthode LDA [5], Méthode SVM [6] et Méthode LSSVM [7]), soit au total 16 510 modèles, certains permettent de discriminer avec une plus ou moins grande efficacité les différents émetteurs. En effet, en fonction des variables choisies, les résultats des tests peuvent fortement varier. Le tableau 2.3 page 54 présente pour chaque méthode mathématique le modèle avec la meilleure adéquation lors du test.

2.3.5 Prédiction

Pour chaque méthode mathématique, le modèle présentant le meilleur résultat au test est déterminé à partir du processus présenté dans le tableau 2.21 page 53.

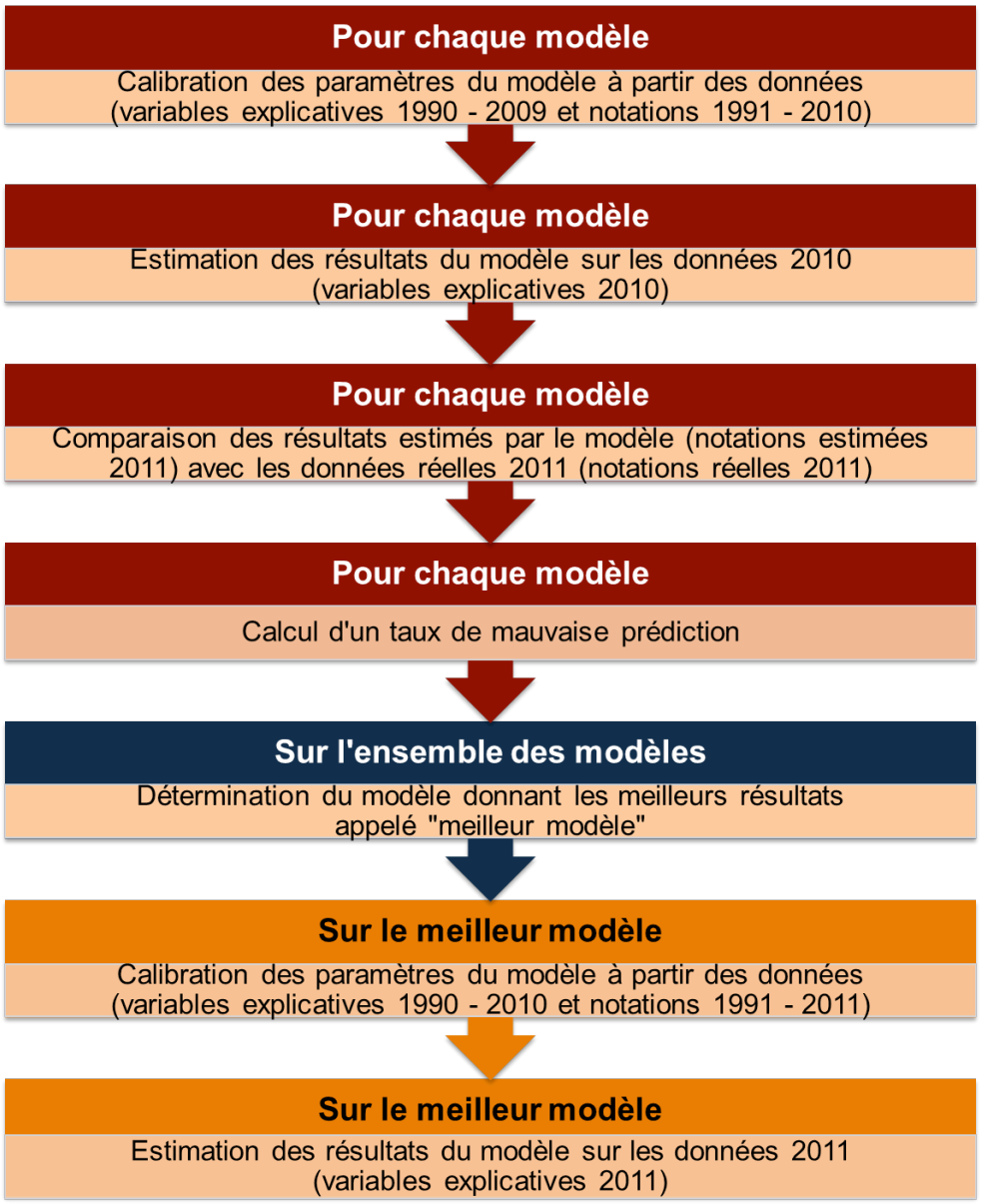

FIGURE 2.21 – Schéma du processus de calibrage, sélection de modèle et prédiction

3. Régression Linéaire Multiple
4. Régression Logistique Multinomiale
5. Analyse Discriminante Linéaire
6. Support Vector Machine
7. Least Square Support Vector Machine

Les résultats du test sur les 5 méthodes sont présentés dans le tableau 2.2 page 54. Ce tableau présente les variables explicatives de chacun des "meilleurs" modèles dont les résultats sont présentés dans le tableau précédent. Si pour une même méthode mathématique, plusieurs modèles donnent les mêmes résultats alors le modèle avec le moins de variables explicatives est retenu.

N	Variable	Modèle LM	Modèle MLR	Modèle LDA	Modèle SVM	Modèle LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB		X	X	X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB		X	X	X	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
4	Taux de chômage		X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X	X	X	X	
6	Investissement total en pourcentage du PIB		X			
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	X				
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X			
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		X
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X			X	X
12	Balance courante en pourcentage du PIB			X		

TABLE 2.2 – Variables des meilleurs modèles par méthodes mathématiques

Le lecteur pourra remarquer qu'une unique variable (Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB) est commune à tous les "meilleurs" modèles.

Le tableau 2.3 page 54 donne les résultats du test de calibrage sur les meilleurs modèles. Dans ce tableau, chaque cellule correspond au taux d'erreur de prédiction par l'application de la méthode mathématique indiquée en entête de la colonne avec les variables optimisant le modèle indiqué en entête de ligne (Les variables correspondantes sont présentes dans le tableau 2.2 page 54).

	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
Variables LM	**56.25%**	64.58%	66.67%	54.17%	45.83%
Variables MLR	68.75%	**39.58%**	54.17%	41.67%	39.58%
Variables LDA	66.67%	56.25%	**45.83%**	37.50%	33.33%
Variables SVM	80.85%	48.94%	55.32%	**27.66%**	40.34%
Variables LSSVM	75.00%	62.50%	66.07%	37.50%	**19.64%**

TABLE 2.3 – Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) des variables optimisant les différents modèles par méthodes mathématiques

Les résultats du tableau 2.3 page 54 montrent que la méthode LSSVM donne des résultats bien meilleurs que les autres méthodes. En effet, le pourcentage d'erreur lors du test (19.64%) est beaucoup plus faible que les autres méthodes (plus de 27.66%). Dans la suite de ce mémoire, ce modèle sera appelé le "meilleur modèle", pour rappel, il est présenté dans le tableau 2.4 page 55.

Le lecteur remarquera également dans le tableau 2.3 page 54 que la méthode mathématique LM possède un

taux d'erreur supérieur à 50% dans le meilleur modèle issu de cette méthode. Ceci confirme que la méthode mathématique LM est peu adaptée dans le cadre du scoring.

N	Variable	Meilleur Modèle
-	Méthode Mathématique	LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X
4	Taux de chômage	X
5	Taux d'inflation	
6	Investissement total en pourcentage du PIB	
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X
12	Balance courante en pourcentage du PIB	

TABLE 2.4 – "meilleur modèle"

Le tableau 2.5 page 55 présente pour chaque méthode mathématique et pour un nombre de variables explicatives donné, l'erreur la plus faible obtenue (Les variables explicatives de chaque modèle sont présentées en Annexe H) lors du calibrage suivi du test.

Variables	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
5	60.61%	50.00%	52.08%	36.36%	21.05%
6	58.33%	45.83%	50.00%	33.33%	19.64%
7	56.25%	43.75%	48.44%	29.79%	21.43%
8	56.25%	39.58%	47.92%	27.66%	21.43%
9	58.33%	39.58%	45.83%	27.66%	23.64%
10	60.42%	45.83%	48.94%	31.91%	25.53%
11	61.70%	46.81%	48.94%	36.17%	27.66%
12	61.70%	55.32%	51.06%	36.17%	31.91%

TABLE 2.5 – Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) par méthode mathématique et par nombre de variables explicatives

Les résultats montrent que la méthode LSSVM est la méthode qui donne les meilleurs résultats quel que soit le nombre de variables explicatives.

La figure 2.22 page 56 présente graphiquement les résultats du tableau 2.5 page 55 en représentant en abscisse les différentes méthodes mathématiques.

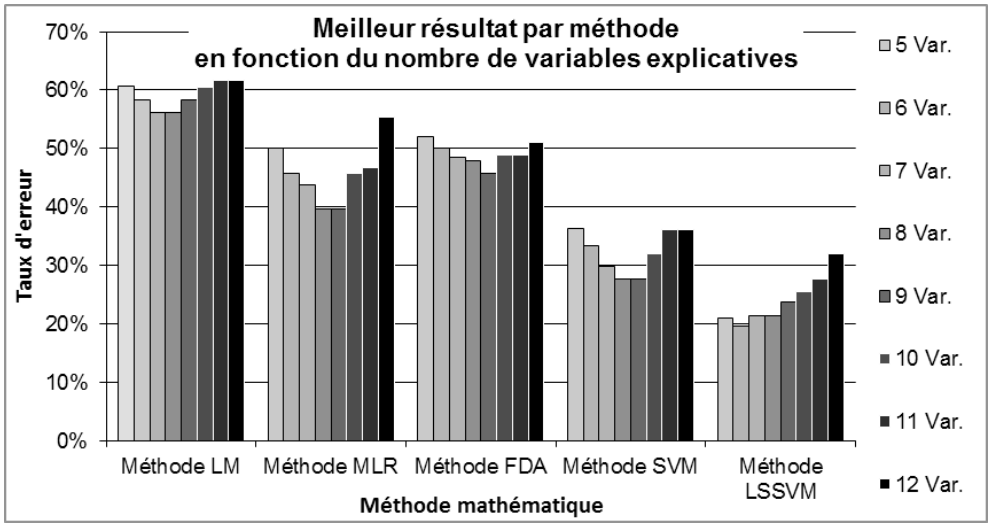

FIGURE 2.22 – Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) par méthode mathématique en fonction du nombre de variables explicatives

La figure 2.22 page 56 montre qu'au delà d'un certain nombre de variables la qualité des prédictions se dégrade pour toutes les méthodes mathématiques. Ce résultat peut paraître surprenant, mais il peut s'expliquer par le fait que lors de l'étape de calibrage, les paramètres sont estimés sur la période 1990-2009, puis testés avec les données 2010. La méthode LSSVM offre un maximum d'efficacité avec 6 variables.

La figure 2.23 page 56 présente graphiquement les résultats du tableau 2.5 page 55 en représentant en abscisse les différents nombres de variables explicatives.

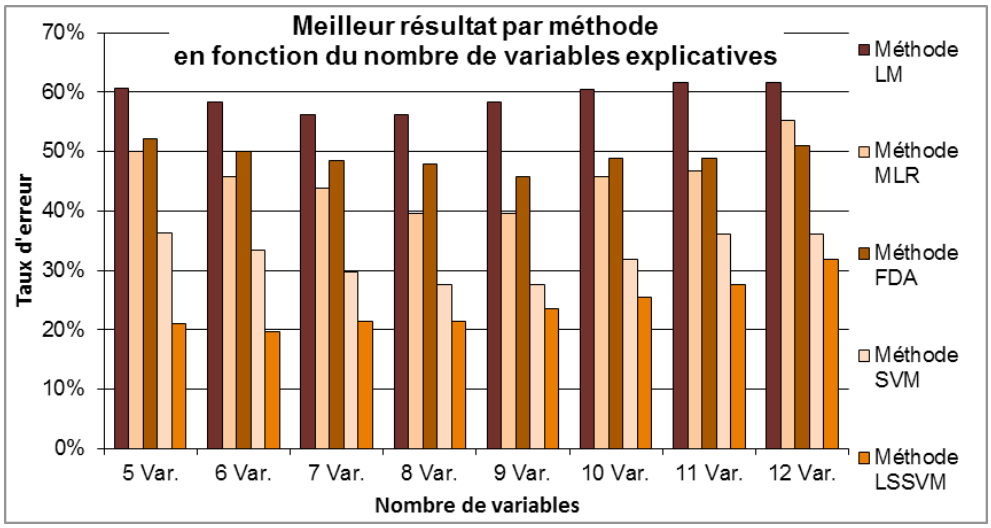

FIGURE 2.23 – Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) par nombre de variables explicatives en fonction de la méthode mathématique

La figure 2.23 page 56 montre que le rang (ou classement) de l'efficacité en fonction du nombre de variables explicatives utilisées est le même. Ceci démontre la supériorité de la méthode LSSVM par rapport aux autres méthodes.

Les différents groupes de notations utilisés dans les modèles sont présentés dans le tableau 2.6 page 57.

Notation	Description	Groupe
AAA	Première qualité	AAA
AA	Haute qualité	AA
A	Qualité moyenne supérieure	A
BBB	Qualité moyenne inférieure	BBB
BB	Spéculative	BB
B	Très Spéculative	B/CCC/CC/C
CCC/CC/C	Risqué à extrêmement risqué	B/CCC/CC/C

TABLE 2.6 – Différentes notations utilisées pour stripper le portefeuille

Le lecteur pourra remarquer qu'un unique groupe regroupe les notations B, CCC, CC et C. En effet, le nombre de données étant limité, il est impossible de distinguer ces notations lors du calibrage des modèles.

Les tableaux 2.7 page 57 et 2.8 page 58 montrent les résultats du modèle LSSVM exposé précédemment sur les données à la fin 2011. Les données prédites par le modèle correspondent aux notations à la fin 2012.

Etat	Notation Réelle 2011	Notation Prédite 2012	Evolution
Australie	AAA	AAA	⇒
Belize	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Bosnie-Herzegovine	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Canada	AAA	AAA	⇒
Commonwealth des Bahamas	BBB	BBB	⇒
Dominicaine, republique	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Etat d'Israel	A	A	⇒
Etats-Unis d'Amerique	AA	A	⇓
Etats-Unis du Mexique	BBB	BBB	⇒
France	AAA	AAA	⇒
Irlande	BBB	B/CCC/CC/C	⇓
Japon	AA	AA	⇒
Nouvelle-Zelande	AA	AA	⇒
Rep. federative du Bresil	BBB	BBB	⇒
Repub. islamique du Pakistan	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Republ.de Trinite-et-Tobago	A	A	⇒
Republ.orientale de l'Uruguay	BB	BB	⇒
Republ.socialiste du Vietnam	BB	BB	⇒
Republique arabe d'Egypte	B/CCC/CC/C	BB	⇑
Republique d'Albanie	B/CCC/CC/C	BB	⇑
Republique d'Autriche	AAA	AAA	⇒
Republique de Bulgarie	BBB	BBB	⇒
Republique de Colombie	BBB	BB	⇓

TABLE 2.7 – Notation prédite en 2012 à partir du meilleur modèle et d'un calibrage sur les données jusqu'en 2010 - Partie 1

Etat	Notation Réelle 2011	Notation Prédite 2012	Evolution
Republique de Coree (Coree du Sud)	A	A	⇒
Republique de Finlande	AAA	AAA	⇒
Republique de Hongrie	BB	AA	⇑
Republique de Lettonie	BB	BB	⇒
Republique de Lituanie	BBB	BBB	⇒
Republique de Macedoine	BB	BB	⇒
Republique de Pologne	A	A	⇒
Republique de Serbie	BB	BB	⇒
Republique des Seychelles	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Republique d'Islande	BBB	BBB	⇒
Republique du Belarus	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Republique du Chili	A	A	⇒
Republique du Costa Rica	BB	BB	⇒
Republique du Kazakhstan	BBB	BBB	⇒
Republique du Panama	BBB	BBB	⇒
Republique du Perou	BBB	BBB	⇒
Republique federale d'Allemagne	AAA	AAA	⇒
Republique federale du Nigeria	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Republique hellenique	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Republique italienne	A	A	⇒
Republique portugaise	BBB	BBB	⇒
Republique Sud-africaine	BBB	BBB	⇒
Republique turque	BB	BB	⇒
Royaume de Belgique	AA	AA	⇒
Royaume de Norvege	AAA	AAA	⇒
Royaume de Suede	AAA	AAA	⇒
Royaume des Pays-Bas	AAA	AAA	⇒
Royaume d'Espagne	AA	AA	⇒
Royaume du Danemark	AAA	AAA	⇒
Royaume du Maroc	BBB	BBB	⇒
Royaume hachemite de Jordanie	BB	BB	⇒
Royaume-Uni de Grande bretagne	AAA	A	⇓
Ukraine	B/CCC/CC/C	B/CCC/CC/C	⇒
Rep. Algérienne		BB	
République du Cap-Vert		BBB	
République d'Estonie		B/CCC/CC/C	
Iran (République Islamique d')		BB	
République de Maurice		BB	
République de Moldavie		B/CCC/CC/C	

TABLE 2.8 – Notation prédite en 2012 à partir du meilleur modèle et d'un calibrage sur les données jusqu'en 2010 - Partie 2

Les tableaux 2.7 et 2.8 pages 57 et 58 montrent que peu d'Etats sont dégradés ou upgradés d'après le "meilleur modèle" entre 2011 et 2012. Par ailleurs, le lecteur gardera à l'esprit que dans la prédiction avec les données de la fin 2011, le "meilleur modèle" défini précédemment a été calibré en ajoutant les données de la fin 2010 (avec la notation 2011) qui avait servies aux résultats du test.

Par ailleurs, les pays présents dans les tableaux 2.7 et 2.8 pages 57 et 58 correspondent à l'ensemble des pays qui possède des données macro-économiques au 31.12.2011, mais qui n'ont pas forcément été utilisés dans l'étape de calibrage. Ceci permet ainsi d'intégrer, le cas échéant, de nouveaux pays qui n'auraient pas de notation.

3 Matrice de transition des notations et calcul du besoin en capital

3.1 Les matrices de transition des notations

3.1.1 Présentation

Présentation Générale

La matrice de transition des notations à un an pour les Etats permet en fonction de la notation d'un émetteur lors de l'année *An* de déterminer la distribution des notations de ce même émetteur à l'année *An+1*.
La matrice de transition des notations à un an pour les Etats est calculée à partir des données historiques issues de *DataStream* de *Thomson Reuters*.

Remarque sur le défaut des Etats

Une différence importante entre les Etats et les Entreprises est que lors du défaut d'un Etat, contrairement à une Entreprise, ce dernier ne disparaît pas alors qu'une entreprise, elle, disparaît.

La méthode mise en place considére que si un Etat est en défaut l'année *An*, le défaut porte sur l'ensemble des obligations d'échéance *An* et des obligations d'échéances postérieures à l'année *An*. Par ailleurs, dans le cas d'un défaut, une partie du nominal peut être récupéré (La restructuration de la dette Grecque en 2012 a permis de récupérer 25% du nominal) via un *taux de recouvrement* en pourcentage du nominal.

Présentation détaillée de la méthode

Posons $M_{i,j}$ la probabilité historique qu'un émetteur noté i l'année An soit noté j l'année $An+1$. Ce coefficient $M_{i,j}$ peut se calculer comme suit :

$$M_{i,j} = \frac{\sum_{An=An_{min}}^{An_{max}} Nb_{i,j}^{hist,An}}{\sum_{j=Note_{min}}^{Note_{max}} \sum_{An=An_{min}}^{An_{max}} Nb_{i,j}^{hist,An}}$$

Avec :

- $Nb_{i,j}^{hist,An}$: le nombre d'observations où un Etat noté i le 31.12.An à la notation j le 31.12.An+1.
- $\{i,j\} \in [\![Note_{min}, Note_{max}]\!] \times [\![Note_{min}, Note_{max}]\!]$
- $Note_{min}$: la note minimale (i.e : le défaut) que peut atteindre un Etat
- $Note_{max}$: la note maximale que peut atteindre un Etat

Les propriétés peuvent alors se déduire facilement :

$$\forall i \in [\![Note_{min}, Note_{max}]\!], \sum_{j=Note_{min}}^{Note_{max}} M_{i,j} = 100\%$$

$$\forall \{i,j\} \in [\![Note_{min}, Note_{max}]\!] \times [\![Note_{min}, Note_{max}]\!], M_{i,j} \geq 0$$

Il est alors possible de définir la matrice de transition des notations comme suit, en posant $Note_{min} = n$ et $Note_{max} = 1$ pour se fixer les idées :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix}$$

La distribution des notations en *An+1* à partir de la distribution des notations en *An* et de la matrice **M** se détermine de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}_{An+1} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}_{An}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\mathbf{N}_{An+1} = \mathbf{M}.\mathbf{N}_{An}$$

Avec :

- $\mathbf{N}_{An} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}_{An}$: la distribution des notations du portefeuille en *An*.

3.1.2 Résultats empiriques

La mise en place de la méthode exposée ci-dessus avec des données issues de *Datastream* de *Thomson Reuters* permet d'obtenir la matrice de transition des notations des Etats suivante, présentée sous forme de tableau pour faciliter la compréhension :

An → An+1	AAA	AA	A	BBB	BB	B	NN	D	Total
AAA	279	11	-	-	-	-	-	-	290
AA	8	169	5	-	-	1	-	-	183
A	-	7	213	13	-	-	-	-	233
BBB	-	-	13	183	7	2	-	-	205
BB	-	-	-	18	225	11	3	2	259
B	-	-	-	-	15	146	7	2	170
NN & Spec	-	-	-	-	-	8	6	2	16
D	-	-	-	-	-	4	1	3	8

TABLE 3.1 – Nombre d'Etats par notation l'année An et notation l'année An+1 (historique 1990-2010)

An → An+1	AAA	AA	A	BBB	BB	B	NN	D	Total
AAA	96%	4%	-	-	-	-	-	-	100%
AA	4%	92%	3%	-	-	1%	-	-	100%
A	-	3%	91%	6%	-	-	-	-	100%
BBB	-	-	6%	89%	3%	1%	-	-	100%
BB	-	-	-	6%	88%	4%	1%	1%	100%
B	-	-	-	-	9%	86%	5%	1%	100%
NN & Spec	-	-	-	-	-	50%	38%	13%	100%
D	-	-	-	-	-	50%	13%	38%	100%

TABLE 3.2 – Matrice de transition des notations des Etats (historique 1990-2010)

Le lecteur remarquera que :

- Toutes les transitions possibles n'existent pas dans la matrice.
- La répartition des transitions des Etats dans la matrice est inégale.

De plus, il est important de noter que la présence d'une transition de la notation AA vers la notation B (1%) pourrait augmenter le risque de défaut sur la notation AA en comparaison, par exemple, de la notation A qui ne présente pas une telle transition.

Le choix a été fait de travailler avec des données historiques et donc de conserver cette transition pour l'ensemble des modélisations. En outre, ceci montre également que la notation octroyée par les agences de notation peut être erronée car une telle transition (de plusieurs crans) ne devrait pas se produire. Une approche, qui n'a pas été retenue, pourrait être de corriger la transition de la notation AA vers la notation B (1%) grâce à un jugement d'expert.

Finalement, des modélisations montrent qu'avec certains paramétres (variances) et certaines hypothéses (la notation initiale est sur l'intervalle -0.5/+0.5 et les autres croissent ou décroissent par pas de 1, suppression de la transition AA vers B), la distribution des transitions des notations AAA, AA, A se rapprochent de lois normales. Pour les autres notations, les lois semblent asymétriques et proches de lois à queues lourdes (Fréchet, Gumbel...), même si celles-ci n'ont pas pu être déterminées.

3.1.3 Résultats corrigés

Etant donné que lors du défaut d'un Etat l'année An, le défaut porte sur l'ensemble des obligations postérieures à l'année An, la matrice précédente (table 3.2 page 61) est corrigée afin de faciliter les calculs de coût du risque en imposant qu'un Etat en défaut reste en défaut pour toutes les années postérieures à l'année An.

$$M_{D,D} = 100\%$$

La matrice ainsi modifiée est présentée dans la table 3.3 page 62.

An → An+1	AAA	AA	A	BBB	BB	B	NN	D	Total
AAA	96%	4%	-	-	-	-	-	-	100%
AA	4%	92%	3%	-	-	1%	-	-	100%
A	-	3%	91%	6%	-	-	-	-	100%
BBB	-	-	6%	89%	3%	1%	-	-	100%
BB	-	-	-	6%	88%	4%	1%	1%	100%
B	-	-	-	-	9%	86%	5%	1%	100%
NN & Spec	-	-	-	-	-	50%	38%	13%	100%
D	-	-	-	-	-	-	-	**100%**	100%

TABLE 3.3 – Matrice de transition des notations des Etats (historique 1990-2010) corrigée avec les défauts

3.2 Calcul de la probabilité de défaut par notation

3.2.1 Présentation

Présentation générale

Le besoin en capital au titre du risque de défaut d'un titre souverain consiste à définir en fonction de la notation de l'Etat, de l'échéance d'une obligation et de la valeur de marché d'une obligation, le montant pour couvrir les pertes en cas de défaut de cet Etat en fonction de la probabilité de défaut de cet Etat. A noter qu'il est important de distinguer le risque de défaut et le risque de spread qui lui représente le risque de perte "instantanée" du à l'écartement du spread de crédit de l'émetteur.

Présentation détaillée

Afin de calculer le besoin de capital pour une notation donnée et une échéance Ech donnée, il faut calculer la probabilité d'un défaut pour ses deux paramétres. Pour cela, il faut considérer un vecteur $\mathbf{N}_0$ de la distribution des notations composé d'une seule notation et calculer la distribution issue de cette distribution lors de l'échéance Ech via la matrice de transition des notations.

Pour calculer la distribution des notations à l'échéance Ech, il faut appliquer la formule suivante qui s'obtient directement par récurrence :

$$\mathbf{N}_{Ech} = \mathbf{M}^{Ech}.\mathbf{N}_0$$

Ce qui revient à appliquer :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}_{Ech} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix}^{Ech} \cdot \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}_0$$

Avec :

- $\mathbf{N}_0 = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}_0$: la distribution des notations du portefeuille en *0*.
- $\mathbf{N}_{Ech} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}_{Ech}$: la distribution des notations du portefeuille en *Ech*.

Posons N_n, la note correspondant au Défaut, il est alors possible de réécrire le vecteur de la distribution des notations de la façon suivante :

$$\mathbf{N}_{Ech} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n-1} \\ \text{D} \end{pmatrix}_{Ech}$$

Posons également, la distribution des notations à l'échéance *Ech* pour une distribution des notations en *0* uniquement sur la notation $N_i \in [\![N_1, N_{n-1}]\!]$:

$$\mathbf{N}_{Ech}^{N_i,0} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n-1} \\ \text{D} \end{pmatrix}_{Ech}^{N_i,0}$$

Il est possible d'écrire :

$$\mathbf{N}_0^{N_i,0} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n-1} \\ \text{D} \end{pmatrix}_0^{N_i,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 100\% \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_0 \leftarrow N_i$$

La probabilité de Défaut d'un Etat pour une échéance donnée et pour une notation N_i se calcule comme suit :

$$Prob_{Ech}(D; \mathbf{N}_0^{N_i,0}, \mathbf{M}) = (\mathbf{N}_{Ech})_n = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_{n-1} \\ \text{D} \end{pmatrix}_{Ech} \leftarrow \text{Prob de Defaut}$$

Méthode de Monte-Carlo

Pour calculer la probabilité de défaut pour chaque échéance *Ech* et chaque notation, la méthode de Monte-Carlo est utilisée.

Pour une notation N_i donnée et une échéance p donnée, la méthode simule un grand nombre Nb de scénarios et pour chacun des scénarios :

$\forall An \in [\![0; Ech-1]\!], \forall N_l \in [\![N_1; N_n]\!], \forall j \in [\![1; n-1]\!]$

$$X \rightarrow U(0,1)$$

$$\text{Si } (\mathbf{N}_{An-1})_l = 100\% \text{ et } \sum_{k=1}^{j} M_{l,k} < X \leq \sum_{k=1}^{j+1} M_{l,k} \text{ alors } (\mathbf{N}_{An})_j = 100\%, \text{ sinon } (\mathbf{N}_{An})_j = 0\%$$

$$Prob_Def_{Ech}(i) = \frac{\sum_{Scen=1}^{Nb} (\mathbf{N}_{Ech})_n}{Nb}$$

En pratique, pour chaque notation initiale possible, la répartition entre les notations est calculée pour toutes les échéances futures. Les tableaux F.1 page 164, F.2 page 165, F.3 page 166, F.4 page 167, F.5 page 168, F.6 page 169 et F.7 page 170 dans l'annexe F présentent les répartitions des notations par échéance en fonction de la notation initiale. De même, les figures F.1 page 161, F.2 page 161, F.3 page 162, F.4 page 162, F.5 page 162, F.6 page 163 et F.7 page 163 présentent les répartitions des notations par échéance en fonction de la notation initiale.

Courbe de tendance

Une fois la méthode de Monte-Carlo appliquée à une notation donnée pour l'ensemble des échéances de *1* à *Ech*, les résultats sont sous la forme :

$$\forall An \in [\![1; Ech]\!], Prob_Def_{An}(i)$$

Afin de réduire les écarts dus à la simulation de Monte-Carlo, les résultats sont approximés par deux polynômes de degré 2 par la méthode des moindres carrés. Le premier polynôme est calibré sur les 5 premiéres échéances et le second est calibré sur les autres échéances de 6 à 50 ans. La probabilité de défaut est approximée par deux polynômes pour prendre en compte les caractéristiques propres aux défauts.

Le premier polynôme, calibré sur les échéances 1 à 5, est :

$$\min_{\hat{a}_0,\ldots,\hat{a}_2} \sum_{An=1}^{5} (Prob_Def_{Ech}(i) - \hat{a}_0 - \hat{a}_1.An - \hat{a}_2.An^2)^2$$

Le second polynôme, calibré sur les échéances 6 à 50, est :

$$\min_{\hat{a}'_0,\ldots,\hat{a}'_2} \sum_{An=6}^{p} (Prob_Def_{Ech}(i) - \hat{a}'_0 - \hat{a}'_1.An - \hat{a}'_2.An^2)^2$$

Soit avec les coefficients des polynômes pour la notation *Not* :

$$F_{Def}(Not, An) = \begin{cases} max(\hat{a}_0 + \hat{a}_1.An + \hat{a}_2.An^2; 0) & si \;\; 1 \leq An \leq 5 \\ max(\hat{a}'_0 + \hat{a}'_1.An + \hat{a}'_2.An^2; 0) & si \;\; 6 \leq An \leq 50 \end{cases}$$

Par ailleurs, il est également important de remarquer qu'une discontinuité peut intervenir entre les 2 polynômes. Cette discontinuité vient des choix faits pour la modélisation. Une piste pour remédier à cela (qui n'a pas été explorée dans ce mémoire) serait d'imposer la continuité polynômes à l'ordre 1 ou deux en se servant de splines par exemple.

Finalement, choisir d'autres intervalles, que les intervalles 1-5 ans et 6-50 ans, permet pour certaines notations d'améliorer les résultats de la calibration (écart des moindres carrés) et au contraire de les détériorer pour d'autres du fait de la forme très différentes des courbes de défaut. Les intervalles utilisés présentent un bon compromis dans l'optique de conserver les mêmes intervalles pour tous les polynômes. Une piste pour améliorer les modélisations (qui n'a pas été explorée dans ce mémoire) serait d'utiliser des intervalles différents pour chaque notation.

3.2.2 Résultats

La méthode précédente est appliquée à partir de la matrice de transition des notations sur le tableau 3.2 page 61 sur 250 000 scénarios.

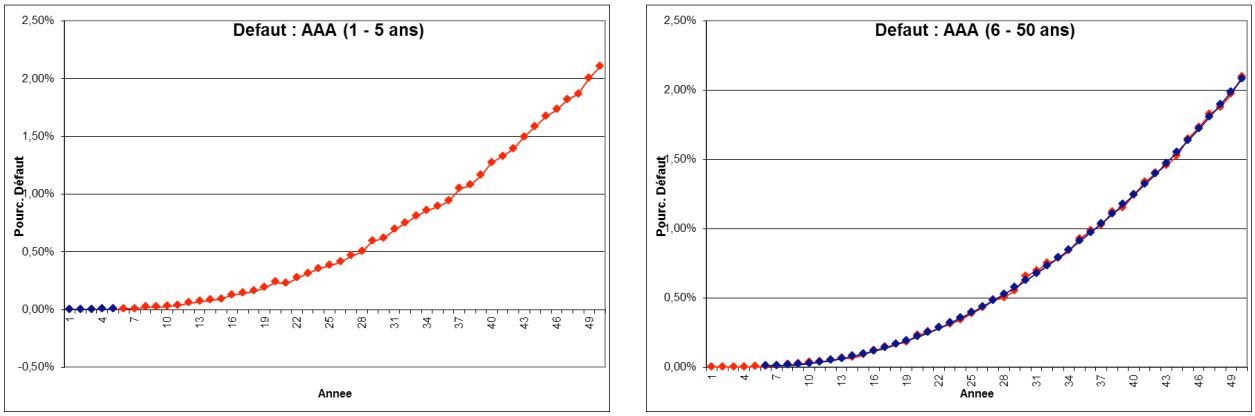

FIGURE 3.1 – Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats AAA

	AAA
	Années 1 à 5
$\hat{a}_0$	0.0000%
$\hat{a}_1$	-0.0003%
$\hat{a}_2$	0.0001%

	AAA
	Années 6 à 50
$\hat{a}'_0$	0.0497%
$\hat{a}'_1$	-0.0130%
$\hat{a}'_2$	0.0011%

TABLE 3.4 – Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats AAA

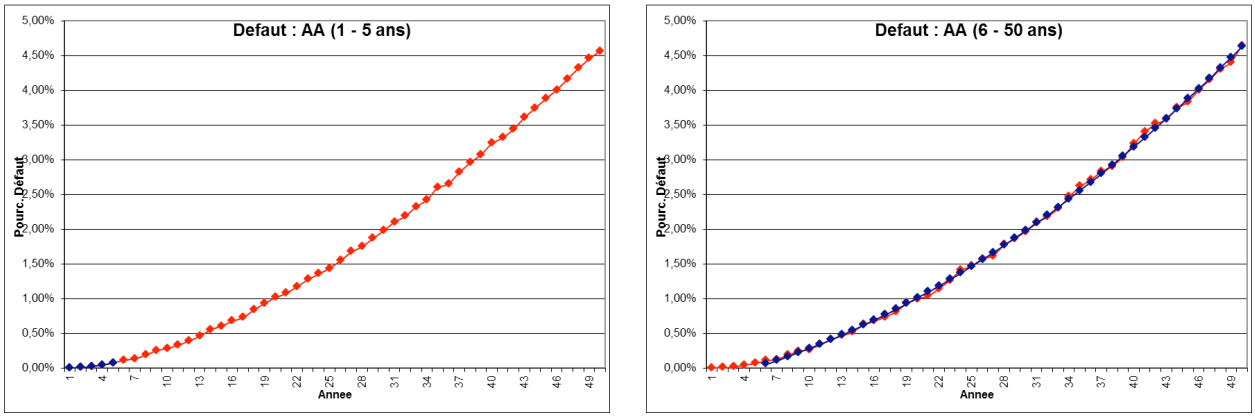

FIGURE 3.2 – Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats AA

	AA
	Années 1 à 5
$\hat{a}_0$	-0.0003%
$\hat{a}_1$	-0.0026%
$\hat{a}_2$	0.0033%

	AA
	Années 6 à 50
$\hat{a}'_0$	-0.2094%
$\hat{a}'_1$	0.0371%
$\hat{a}'_2$	0.0012%

TABLE 3.5 – Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats AA

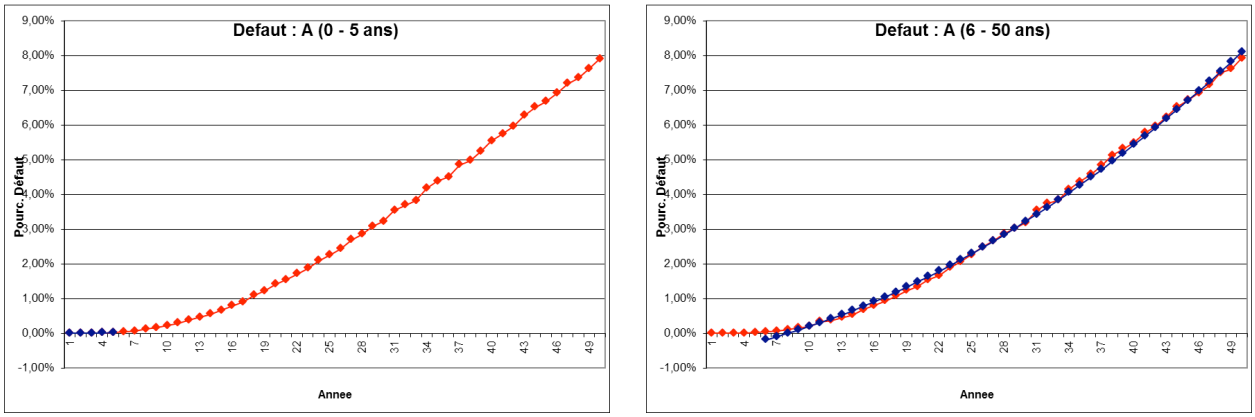

FIGURE 3.3 – Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats A

	A
	Années 1 à 5
$\hat{a}_0$	0.0028%
$\hat{a}_1$	-0.0048%
$\hat{a}_2$	0.0017%

	A
	Années 6 à 50
$\hat{a}'_0$	-0.6144%
$\hat{a}'_1$	0.0582%
$\hat{a}'_2$	0.0023%

TABLE 3.6 – Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats A

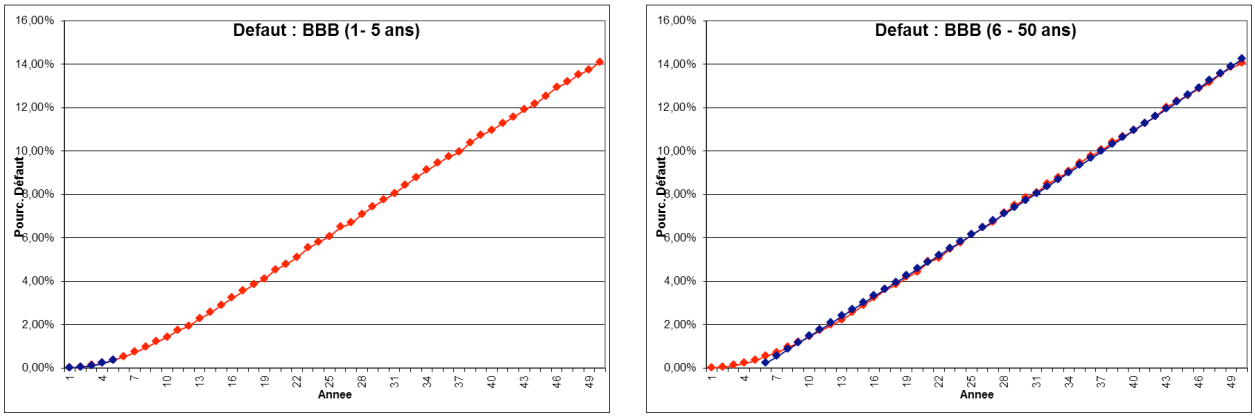

FIGURE 3.4 – Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats BBB

	BBB
	Années 1 à 5
$\hat{a}_0$	-0.0037%
$\hat{a}_1$	-0.0200%
$\hat{a}_2$	0.0184%

	BBB
	Années 6 à 50
$\hat{a}'_0$	-1.5827%
$\hat{a}'_1$	0.3013%
$\hat{a}'_2$	0.0003%

TABLE 3.7 – Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats BBB

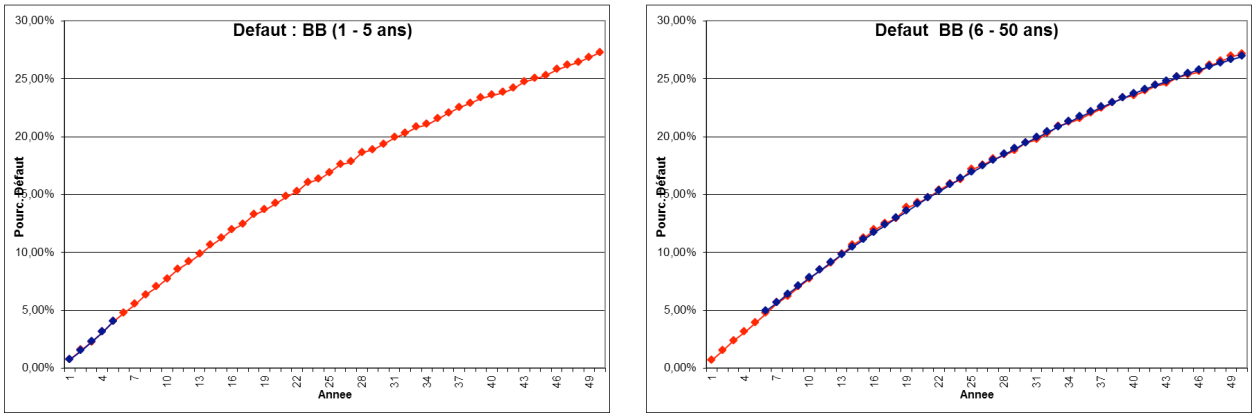

FIGURE 3.5 – Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats BB

	BB
	Années 1 à 5
$\hat{a}_0$	-0.0410%
$\hat{a}_1$	0.6756%
$\hat{a}_2$	0.0228%

	BB
	Années 6 à 50
$\hat{a}'_0$	0.3701%
$\hat{a}'_1$	0.7926%
$\hat{a}'_2$	-0.0052%

TABLE 3.8 – Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats BBB

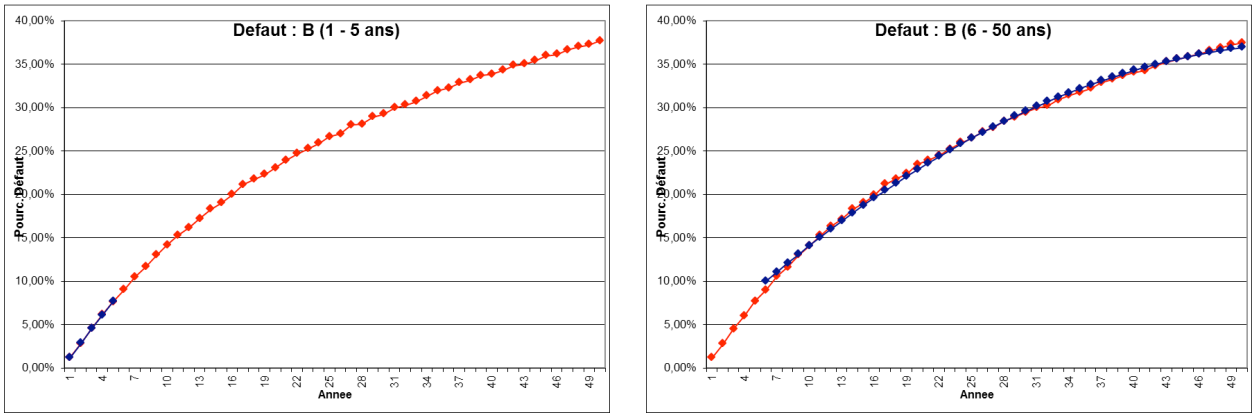

FIGURE 3.6 – Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats B

	B
	Années 1 à 5
$\hat{a}_0$	-0.5651%
$\hat{a}_1$	1.7691%
$\hat{a}_2$	-0.0250%

	B
	Années 6 à 50
$\hat{a}'_0$	3.2958%
$\hat{a}'_1$	1.1822%
$\hat{a}'_2$	-0.0102%

TABLE 3.9 – Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats B

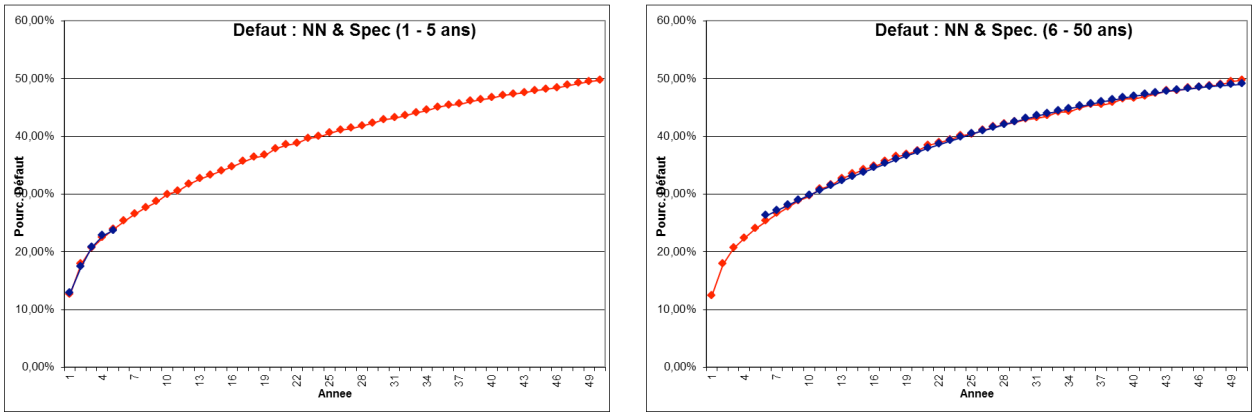

FIGURE 3.7 – Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats NN & Spec

NN & Spec	
	Années 1 à 5
$\hat{a}_0$	6.9857%
$\hat{a}_1$	6.4297%
$\hat{a}_2$	-0.6197%

NN & Spec	
	Années 6 à 50
$\hat{a}'_0$	20.4437%
$\hat{a}'_1$	1.0230%
$\hat{a}'_2$	-0.0090%

TABLE 3.10 – Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats NN & Spec

Dans les tableaux et graphiques ci-dessus, il est possible de remarquer une forte amplitude des probabilités de défaut en fonction de la notation et de l'échéance. Par ailleurs, il est normal que les courbes de défaut soient croissantes pour toutes les notations dans la mesure où elles représentent la probabilité d'avoir eu un défaut avant l'année t.

Probabilité de défaut							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.03%	0.10%	0.22%	0.39%	0.62%
AA	0.00%	0.07%	0.28%	0.62%	1.01%	1.46%	1.98%
A	0.00%	0.02%	0.20%	0.78%	1.48%	2.29%	3.22%
BBB	0.00%	0.36%	1.46%	3.00%	4.56%	6.14%	7.72%
BB	0.74%	3.99%	7.77%	11.08%	14.13%	16.91%	19.44%
B	1.18%	7.66%	14.10%	18.74%	22.87%	26.48%	29.59%
Speculatif	12.80%	23.64%	29.77%	33.76%	37.30%	40.38%	43.02%

TABLE 3.11 – Probabilité de défaut par échéance et notation

Le lecteur remarquera que pour les échéances 5 ans et 10 ans, les probabilités de défaut des notations AA et A semblent inversées. En effet, la notation AA présente un défaut supérieur à la notation A pour les échéances considérées. Comme évoqué précédemment, cela vient de l'existence d'une transition de la notation AA vers la notation B (1%).

Le tableau 3.11 page 68 montre que pour les échéances 1 an et les échéances 5 ans, les probabilités de défaut de la notation B sont faibles en comparaison des probabilités de défaut des notations BB et NN & Spec. Ceci peut s'expliquer par le fait que les données utilisées sont historiques et que l'échantillon est réduit.

3.3 Calcul du besoin en capital par notation

3.3.1 Présentation

En général, pour un investisseur institutionnel, le risque de crédit d'un Etat est composé de deux composantes. La première composante est le risque d'un défaut de l'Etat entre aujourd'hui et la date d'échéance de l'obligation. La seconde composante est le risque de spread, qui lui représente le risque de perte "instantanée" du à l'écartement du spread de crédit de l'émetteur, faisant baisser la valeur de marché du titre.

Cependant, dans le cas spécifique d'un investisseur *Buy And Hold*, c'est-à-dire qui conserve les titres obligataires jusqu'à leurs échéances, comme l'est généralement une institution gérant un régime de retraite par capitalisation, le risque peut être restreint au risque d'un défaut de l'Etat entre aujourd'hui et la date d'échéance de l'obligation. En effet, un tel investisseur conserve ses titres jusqu'à l'échéance et ne les revend que si ces derniers sont en plus-value latente ou s'il est contraint de les revendre, par exemple, en cas de rachat. De ce fait, il n'est pas soumis au risque de dégradation de la notation de l'Etat et au risque de spread. En effet, ces risques n'interviennent pas tant que l'investisseur porte les titres obligataires et ne les vend pas contrairement au risque de défaut qui intervient pour tout type d'investisseur. De plus, en comptabilité nationale, les moins values potentielles ne sont pas comptabilisées.

Ainsi, il peut être considéré que le besoin en capital au titre du risque souverain d'un portefeuille correspondant à un régime de retraite par capitalisation peut se limiter au risque de défaut. Il se calcule donc à partir de la notation de l'Etat, de l'échéance d'une obligation, de la valeur de marché d'une obligation et de la probabilité de défaut. Ce besoin en capital représente le montant en valeur de marché nécessaire pour couvrir les pertes en cas de défaut entre aujourd'hui et la date d'échéance de l'obligation de cet Etat en fonction de la probabilité de défaut de cet Etat.

Pour rappel, dans le cas d'un défaut de l'Etat l'année An, l'ensemble des obligations d'échéances postérieurs à l'année An sont également en défaut.

Le besoin en capital est calculé en pourcentage de la valeur de marché par la méthode suivante (pour un euro de valeur boursière) :

$$Besoin\ \ En\ \ Capital_{Not}(Ech) = F_{Def}(Not, Ech) \times \left(\frac{1 + taux_{Not}(Ech)}{1 + taux_{S.R}(Ech)}\right)^{f(Ech,Not)-0.5} .(1 - taux\ \ de\ \ recouvrement)$$

Avec :

- $Besoin\ \ En\ \ Capital_{Not}(Ech)$: Besoin en capital pour une obligation Zéro-Coupon d'échéance Ech et de notation Not
- Not : Notation de l'obligation ZC (AAA,AA,A,BBB,BB,B,NN)
- Ech : Echéance de l'obligation
- $taux\ \ de\ \ recouvrement$: Taux de recouvrement en pourcentage du nominal en cas de défaut de l'Etat
- $taux_{Not}(Ech)$: Taux actuariel de l'obligation d'échéance Ech et de notation Not
- $taux_{S.R}(Ech)$: Taux Sans risque d'échéance t
- $F_{Def}(Not, Ech) = \begin{cases} max(\hat{a}_0 + \hat{a}_1.Ech + \hat{a}_2.Ech^2; 0) & si\ \ 1 \leq Ech \leq 5 \\ max(\hat{a}'_0 + \hat{a}'_1.Ech + \hat{a}'_2.Ech^2; 0) & si\ \ 6 \leq Ech \leq 50 \end{cases}$
- $f(Ech, Not)$: L'année moyenne du défaut pour une obligation d'échéance Ech.

Il est possible d'exprimer la fonction $f(Ech, Not)$ de la maniére suivante :

Si $Ech \leq 5$:

$$f(Ech, Not) = \frac{\sum_{An=1}^{Ech} max(\hat{a}_0 + \hat{a}_1.An + \hat{a}_2.An^2; 0) \times An}{\sum_{An=1}^{Ech} max(\hat{a}_0 + \hat{a}_1.An + \hat{a}_2.An^2; 0)} = \frac{\sum_{An=1}^{Ech} F_{Def}(Not, An) \times An}{\sum_{An=1}^{Ech} F_{Def}(Not, An)}$$

Si $Ech > 5$:

$$f(Ech, Not) = = \frac{\sum_{An=1}^{5} max(\hat{a}_0 + \hat{a}_1.An + \hat{a}_2.An^2; 0) \times An + \sum_{An=6}^{Ech} max(\hat{a}'_0 + \hat{a}'_1.An + \hat{a}'_2.An^2; 0) \times An}{\sum_{An=1}^{5} max(\hat{a}_0 + \hat{a}_1.An + \hat{a}_2.An^2; 0) + \sum_{An=6}^{Ech} max(\hat{a}'_0 + \hat{a}'_1.An + \hat{a}'_2.An^2; 0)} = \frac{\sum_{An=1}^{Ech} F_{Def}(Not, An) \times An}{\sum_{An=1}^{Ech} F_{Def}(Not, An)}$$

Le tableau 3.12 page 70 présente les valeurs de la fonction $f(Ech, Not)$ pour différentes notations et différentes échéances :

f(Ech,Not)							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	1.00	4.20	7.78	11.75	15.35	18.82	22.23
AA	1.00	3.96	7.46	10.45	13.38	16.35	19.37
A	1.00	4.33	9.03	11.96	14.80	17.71	20.67
BBB	1.00	3.99	7.47	10.20	12.79	15.36	17.92
BB	1.00	3.09	5.41	7.67	9.89	12.04	14.11
B	1.00	3.08	5.13	7.07	9.03	10.93	12.72
Speculatif	1.00	1.88	3.02	4.20	5.50	6.83	8.13

TABLE 3.12 – Moment moyen du défaut en Année en fonction de la notation et de l'échéance de l'obligation

Le lecteur remarquera dans le tableau 3.12 page 70 que le moment moyen du défaut diminue, pour une échéance donnée, pour les notations les plus "mauvaises". Ceci est normal étant donné que les défauts sont plus importants pour ces notations.

Avec les mêmes notations, le nominal de l'obligation zéro-coupon qui doit être remboursé à l'échéance dans le cas d'une absence de défaut, peut être calculé comme suit :

$$Nominal_{Not}(Ech) = (1 + taux_{Not}(Ech))^{Ech-0.5}$$

3.3.2 Résultats

Les graphiques 3.8 page 72 présentent le chargement en capital par notation pour plusieurs échéances en fonction du taux actuariel des obligations. Ce chargement en capital est calculé pour des obligations Zéro-Coupons. Le lecteur

pourra remarquer que le chargement en capital est croissant avec le taux actuariel. Le lecteur pourra également remarquer que le chargement en capital, pour une notation donnée et pour un taux actuariel donné, n'est pas forcément plus faible pour les échéances courtes.

Le chargement en capital est en proportion de la valeur de marché de l'obligation zéro-coupon modélisée avec un taux de recouvrement nul. Ce besoin en capital est le besoin en capital moyen et non le besoin en capital issu de la Value-at-Risk.

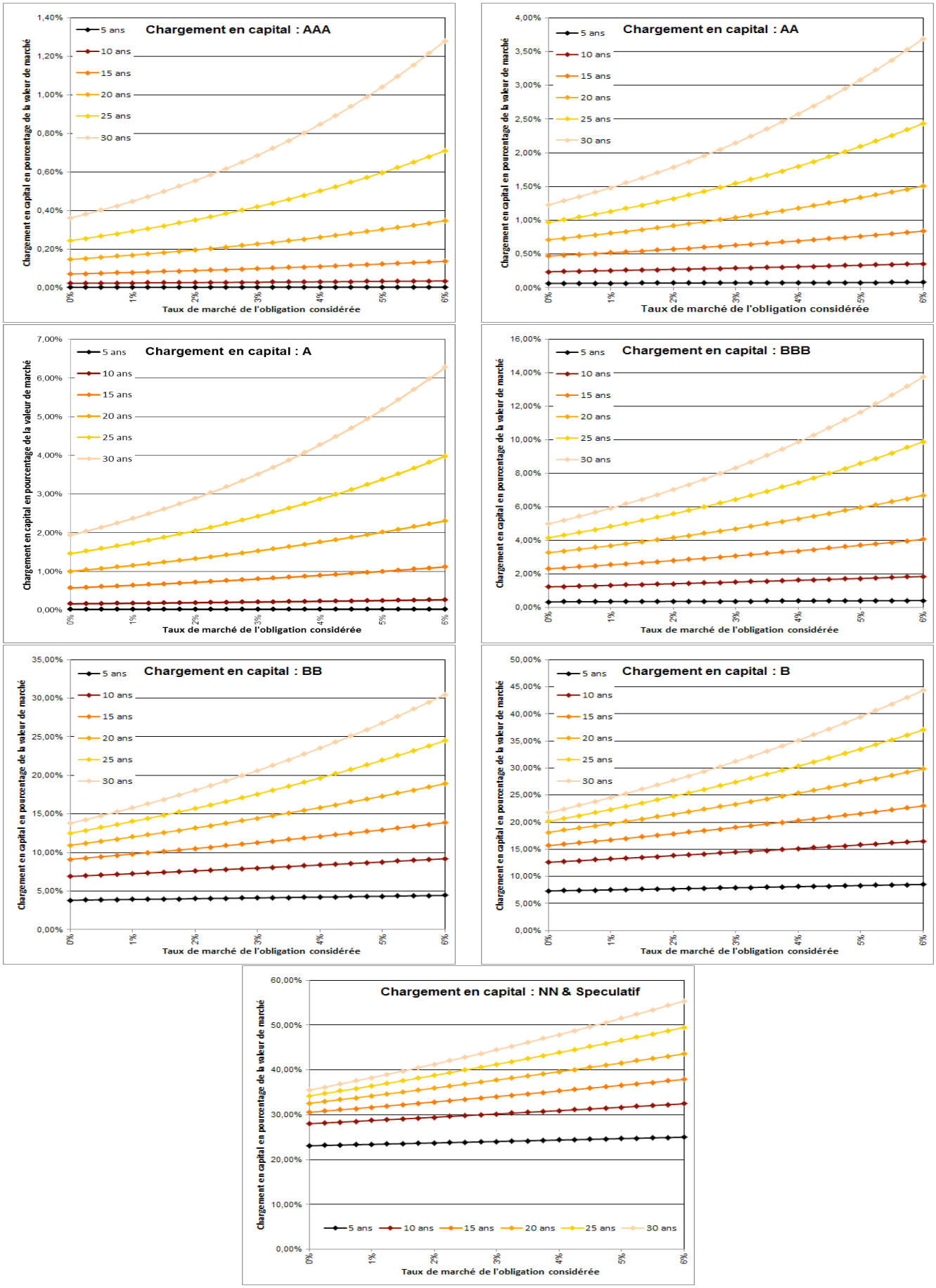

FIGURE 3.8 – Chargement en capital par notation en fonction de l'échéance et du taux de rendement obligataire

Les graphiques 3.9 page 73 présentent le chargement en capital par notation pour plusieurs échéances en fonction du taux actuariel des obligations avec un taux de recouvrement nul. Le lecteur pourra remarquer que le chargement en capital est croissant avec le taux actuariel et qu'il augmente avec les notations faibles.

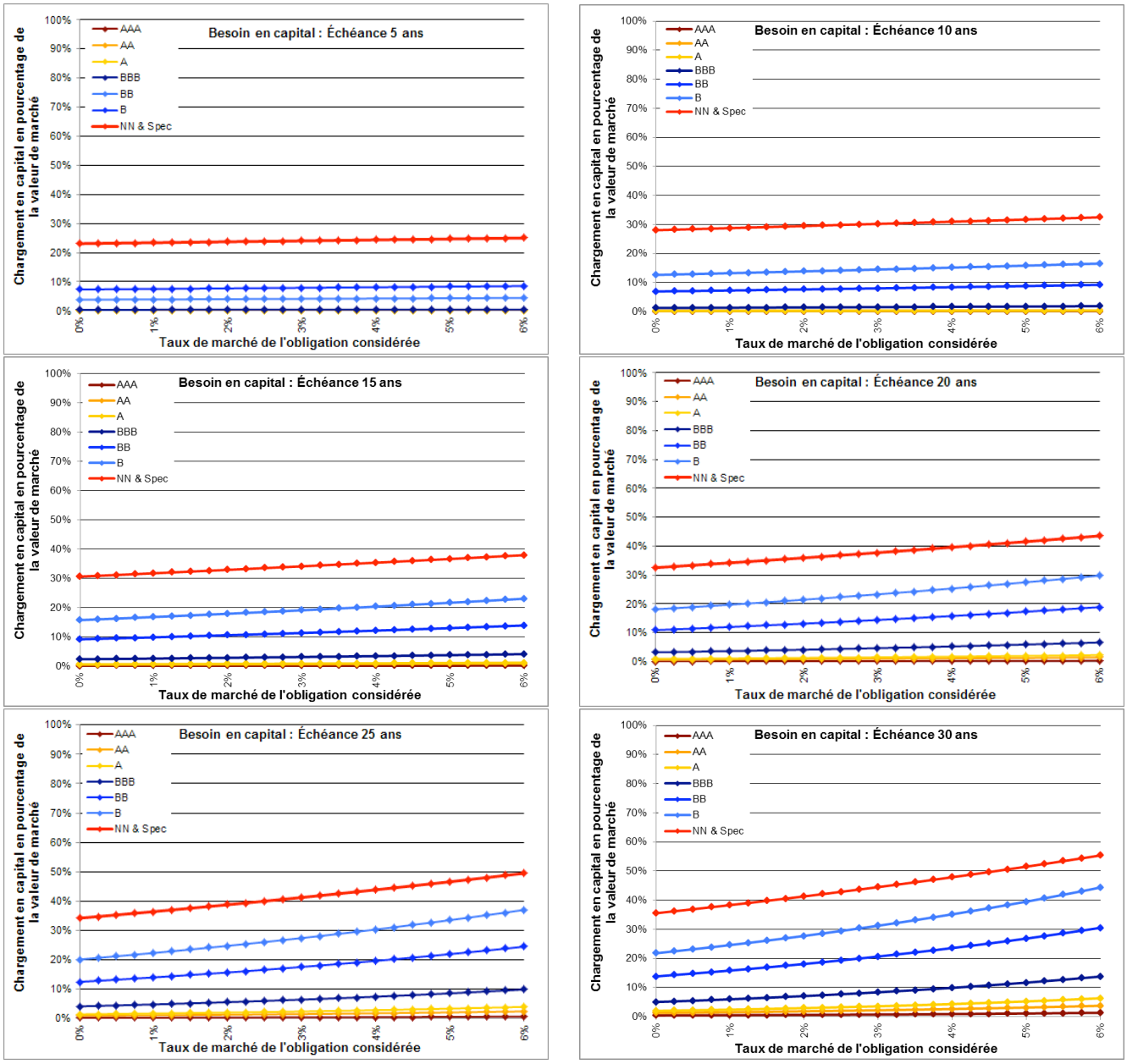

FIGURE 3.9 – Chargement en capital par échéance en fonction de la notation et du taux de rendement obligataire

3.3.3 Application aux défauts d'obligations différentes

Présentation Générale

Dans la section précédente, le lecteur a pu observer le besoin en capital dans le cas général d'un flux obligataire en fonction de l'échéance du flux obligataire, de la notation du titre et de la probabilité de défaut. Cependant, il peut être intéressant de s'intéresser aux trois cas suivants (uniquement dans cette section) :

Obligation zéro coupon de nominal 100 : Cette obligation ne présente qu'un flux unique en date d'échéance. Ainsi, en cas de défaut avant la date d'échéance de l'obligation, la totalité des flux de remboursement est perdue. La totalité de la différence entre le prix d'achat de l'obligation et sa valeur de remboursement est passé en surcote/décote

(qui est amortie sur la durée de vie de l'obligation en cas d'absence de défaut).

Obligation détachant un coupon et de nominal 100 achetée au pair : Cette obligation présente un flux de coupon annuel et un flux de remboursement de 100. par ailleurs, elle est acheté au pair, ce qui implique que sa surcote/décote est nulle et que son taux actuariel à l'achat correspond à son taux de coupon. En cas de défaut avant la date d'échéance de l'obligation, la totalité du rendement n'est pas perdu. En effet, les coupons qui ont déjà été touchés ne sont pas impactés par le défaut.

Obligation détachant un "demi coupon" et de nominal 100 : Cette derniére obligation est un cas moyen entre les deux obligations présentées précédemment. En effet, en considérant un coupon égal à la moitié du taux actuariel à l'achat, la rendement de l'obligation est pour moitié contenu dans les coupons et pour moitié contenu par sa décote par rapport au prix de remboursement. En cas de défaut avant la date d'échéance de l'obligation, la totalité du rendement n'est pas perdu car les coupons qui ont déjà été touchés ne sont pas impactés par le défaut.

Taux à l'achat en fonction de la notation et de la maturité

Dans le cadre des calculs relatifs à cette partie, les taux actuariels à l'achat retenus sont issus d'observations sur les marchés financiers lors du premier semestre 2012. Chaque taux a été déterminé en fonction des titres disponibles sur le marché (échéance, notation...). Le lecteur gardera à l'esprit que pour deux Etats ayant la même notation, la différence de taux peut être sensible (exemple de la France et de l'Allemagne). Ces taux sont présentés dans le tableau 3.13 page 74.

Taux à l'achat							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.30	1.00	2.00	2.30	2.60	2.70	2.80
AA	0.40	1.30	2.50	2.85	3.20	3.35	3.50
A	0.80	2.00	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
BBB	1.50	3.00	4.50	4.75	5.00	5.25	5.50
BB	2.80	5.25	5.50	5.63	5.75	5.88	6.00
Speculatif	5.00	7.00	10.00	10.50	11.00	11.50	12.00

TABLE 3.13 – Taux à l'achat en fonction de l'échéance et de la notation

Calcul de l'espérance de la perte

Obligation zéro coupon de nominal 100

Le prix de l'obligation ZC se calcule de la maniére suivante :

$$Prix = \frac{F_{Ech}}{(1 + Taux\ Achat(Not, Ech))^{Ech}}$$

L'espérance de la perte de l'obligation en cas de défaut se calcule comme suit :

$$Perte = F_{Def}(Not, Ech) \times \frac{F_{Ech}}{(1 + Taux\ sans\ risque(Ech))^{Ech}}$$

Finalement, l'espérance de la perte de l'obligation par rapport à la valeur de marché est :

$$perte\ en\ Pourcentage = \frac{Perte}{Prix}$$

Obligation détachant un coupon et de nominal 100 achetée au pair ou
Obligation détachant un "demi coupon" et de nominal 100 :

Le prix de l'obligation achetée au pair se calcule de la maniére suivante :

$$Prix = \sum_{An=1}^{Ech} \frac{F'_{An}}{(1 + Taux\ Achat(Not, Ech))^{An}}$$

L'espérance de la perte de l'obligation en cas de défaut se calcule comme suit :

$$Perte = \sum_{An=1}^{Ech} F_{Def}(Not, An) \times \frac{F'_{An}}{(1 + Taux\ sans\ risque(An))^{An}}$$

Finalement, l'espérance de la perte de l'obligation par rapport à la valeur de marché est :

$$perte\ en\ Pourcentage = \frac{Perte}{Prix}$$

Avec :

- Ech : Echéance de l'obligation
- $Taux\ sans\ risque(An)$: Taux sans risque d'échéance An
- Not : Notation
- $Taux\ Achat(Not, Ech)$: Taux actuariel à l'achat pour l'obligation d'échéance Ech et de notation Not
- F_i : Flux de l'obligation Zéro-Coupon
- F'_i : Flux de l'obligation achetée au pair et versant un coupon ou Flux de l'obligation versant un demi coupon
- $Nominal$: Nominal de l'obligation
- $F_{Def}(Not, An) = \begin{cases} max(\hat{a}_0 + \hat{a}_1.An + \hat{a}_2.An^2; 0) & si\ \ 1 \leq An \leq 5 \\ max(\hat{a}'_0 + \hat{a}'_1.An + \hat{a}'_2.An^2; 0) & si\ \ 6 \leq An \leq 50 \end{cases}$

L'obligation détachant un coupon et achetée au pair va détacher pour toutes les échéances un coupon égal au $Nominal \times Taux\ Achat(Not, Ech)$, excepté pour l'échéance où le remboursement du Nominal a également lieu.

$\forall An \in [\![1, Ech - 1]\!], Not, Ech,$

$$F'_i = Nominal \times Taux\ Achat(Not, Ech)\ et\ F'_{Ech} = Nominal \times (1 + Taux\ Achat(Not, Ech))$$

L'obligation détachant un demi-coupon va détacher pour toutes les échéances un coupon égal au $50\% \times Nominal \times Taux\ Achat(Not, Ech)$, excepté pour l'échéance où le remboursement du Nominal a également lieu.

$\forall An \in [\![1, Ech - 1]\!], Not, Ech,$

$$F''_i = 50\% \times Nominal \times Taux\ Achat(Not, Ech)\ et\ F''_{Ech} = Nominal \times (1 + 50\% \times Taux\ Achat(Not, Ech))$$

Résultats des prix

Les tableaux 3.14 page 76, 3.15 page 76 et 3.16 page 76 présentent les prix des obligations avec les taux actuariels présentés dans le tableau 3.13 page 74. Pour l'obligation détachant un coupon au pair, les coupons sont égaux au taux à l'achat.

Prix d'une obligation Zéro-Coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	99.85	95.62	82.85	71.91	60.62	52.06	44.28
AA	99.80	94.35	79.09	66.53	54.11	44.61	36.25
A	99.60	91.47	75.52	58.64	51.13	40.58	31.44
BBB	99.26	87.55	65.83	51.02	38.62	28.55	20.61
BB	98.63	79.43	60.13	45.23	33.61	24.69	17.93
Speculatif	97.59	73.75	40.44	23.51	13.07	6.95	3.53

TABLE 3.14 – Prix d'une obligation Zéro-Coupon

Prix d'une obligation détachant un coupon au pair							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
AA	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
A	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
BBB	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
BB	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
Spéculatif	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

TABLE 3.15 – Prix d'une obligation détachant un coupon au pair

Prix d'une obligation détachant un demi-coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	99.93	97.81	91.43	85.96	80.31	76.03	72.14
AA	99.90	97.18	89.55	83.27	77.05	72.30	68.12
A	99.80	95.74	87.76	79.32	75.56	70.29	65.72
BBB	99.63	93.77	82.91	75.51	69.31	64.27	60.30
BB	99.31	89.72	80.07	72.61	66.81	62.35	58.96
Spéculatif	98.80	86.88	70.22	61.75	56.53	53.47	51.77

TABLE 3.16 – Prix d'une obligation détachant un demi-coupon

Le lecteur remarquera que pour les tableaux 3.14 page 76 et 3.16 page 76 (coupon égal à la moitié du taux actuariel à l'achat du tableau 3.13 page 74), le prix diminue avec l'échéance et également avec la notation (i.e : l'augmentation du taux actuariel à l'achat du tableau 3.13 page 74).

Résultats de l'espérance

Les tableaux 3.17 page 77, 3.18 page 77 et 3.19 page 77 présentent l'espérance des pertes en fonction de l'échéance, de la notation et du type d'obligation.

Espérance de la perte d'une obligation ZC							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.02%	0.08%	0.17%	0.30%	0.47%
AA	0.00%	0.07%	0.26%	0.53%	0.90%	1.31%	1.80%
A	0.00%	0.02%	0.19%	0.76%	1.39%	2.25%	3.38%
BBB	0.00%	0.37%	1.61%	3.37%	5.68%	8.56%	12.37%
BB	0.75%	4.53%	9.38%	14.02%	20.20%	27.28%	35.78%
Speculatif	13.08%	28.95%	53.44%	82.19%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.17 – Espérance de la perte d'une obligation ZC

Espérance de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.02%	0.06%	0.12%	0.19%	0.27%
AA	0.00%	0.06%	0.22%	0.42%	0.63%	0.82%	1.01%
A	0.00%	0.02%	0.15%	0.52%	0.89%	1.26%	1.63%
BBB	0.00%	0.35%	1.24%	2.25%	3.27%	4.20%	5.08%
BB	0.74%	4.17%	7.62%	10.05%	12.56%	14.62%	16.44%
Speculatif	12.76%	27.82%	41.98%	51.01%	61.83%	71.66%	81.16%

TABLE 3.18 – Espérance de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon

Espérance de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.02%	0.07%	0.14%	0.23%	0.33%
AA	0.00%	0.07%	0.24%	0.46%	0.72%	0.97%	1.22%
A	0.00%	0.02%	0.17%	0.61%	1.06%	1.54%	2.05%
BBB	0.00%	0.36%	1.39%	2.63%	3.94%	5.17%	6.32%
BB	0.74%	4.33%	8.28%	11.29%	14.48%	17.13%	19.38%
Speculatif	12.92%	28.30%	45.28%	56.95%	70.53%	82.04%	92.10%

TABLE 3.19 – Espérance de la perte d'une obligation détachant un demi coupon

Le lecteur remarquera, dans les tableaux 3.17 page 77, 3.18 page 77 et 3.19 page 77 et dans les graphiques 3.10 page 78, une différence notable entre les pertes moyennes observées suivant la présence ou non d'un coupon. La perte moyenne est plus importante dans le cas dans le cas d'une obligation zéro-coupon que dans le cas d'une obligation détachant un coupon. Ceci est normal dans la mesure où, dans le cas d'une obligation zéro-coupon, la totalité du rendement du titre provient de la décote initiale et non du coupon. Ainsi, en cas de défaut avant la date d'échéance de l'obligation, la totalité du rendement et du nominal est perdue alors que pour une obligation détachant un coupon la perte ne peut être que partielle puisque certains coupons ont pu être touchés. Le cas de l'obligation détachant un demi-coupon montre, comme on pouvait s'y attendre, qu'il est plus favorable que l'obligation zéro-coupon car une partie des coupons ont pu être touchés, mais moins favorable que l'obligation acheté au pair car les coupons sont moins importants.

Les graphiques 3.10 page 78 présentent les résultats des tableaux 3.17 page 77, 3.18 page 77 et 3.19 page 77.

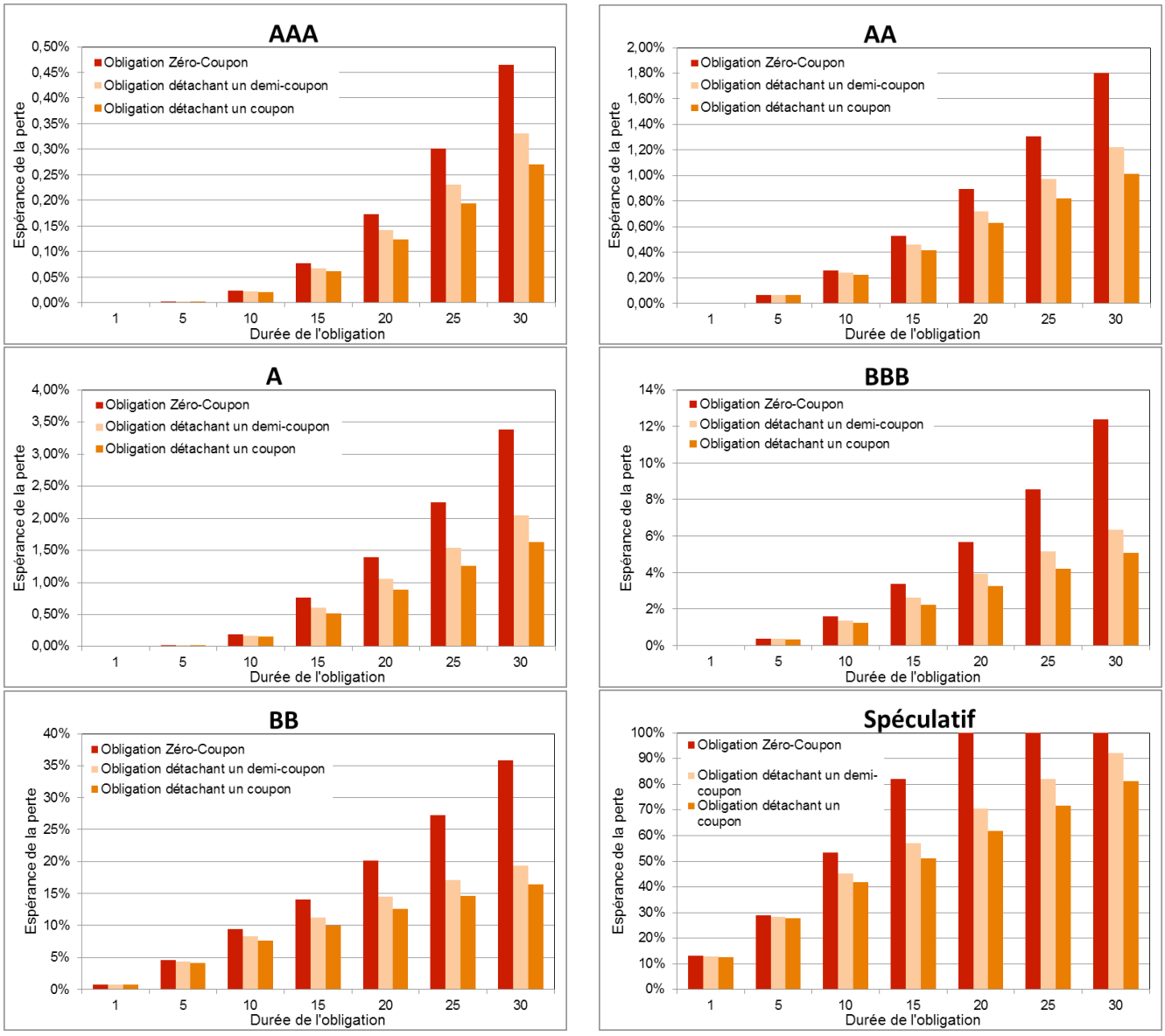

FIGURE 3.10 – Espérance de la perte obligataire en fonction du type d'obligation, de l'échéance et de la notation

Dans le cas d'un calcul de l'espérance de perte d'une obligation, il est important de prendre en compte la nature exacte de l'obligation et pour des titres donnant un rendement identiques (et sous réserves que les probabilités de défaut soient les mêmes), il semble judicieux, pour un investissement, de privilégier les titres détachant des coupons pour réduire les pertes en cas de défaut de l'émetteur (Cela fait cependant apparaître un risque de réinvestissement des coupons détachés).

Dans la partie 3 de ce mémoire, le portefeuille est « strippé » par pays émetteur et pour chaque échéance, les flux sont considérés comme des obligations zéro-coupons.

Calcul de la VaR de la perte

L'Espérance de perte calculée ci-dessus ne représente pas la perte maximale qui peut arriver mais uniquement la perte moyenne. Aussi, la Value-at-Risk représentant une perte extrême qui peut intervenir peut présenter des aspects intéressant. En effet, celle-ci permet d'observer que les pertes extrêmes à 0.5% (seuil pris en relation à Solvabilité II) sont bien supérieurs et représentent souvent des valeurs importantes en pourcentage de la valeur de marché.

Gaudoin O. dans [28] présente la densité de la loi normale centrée réduite (figure 3.11 Page 79) et le lecteur pourra remarquer que la Value-at-Risk à 99.5% dans le cas d'une loi normale centrée réduite ϕ se calcule comme suit :

$$VaR(99.5\%) = u \; tel \; que \; \phi(u) = 99.5\%$$

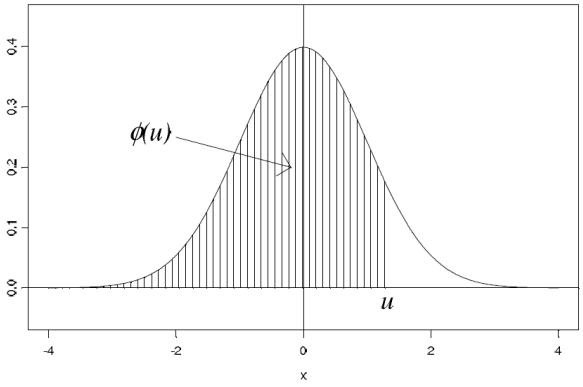

FIGURE 3.11 – Schéma de la densité de loi normale centrée réduite extraite de [28] par Gaudoin O.

Dans le cas d'un calcul par la méthode de Monte-Carlo, la méthode se base sur le même principe, mais la loi de densité est définie à partir des scénarios simulés. La Value-at-Risk à 99.5% pour la densité de la loi empirique $\phi_{empirique}$:

$$VaR(99.5\%) = u \; tel \; que \; \phi_{empirique}(u) = 99.5\%$$

Pour un grand nombre de cas Nb, les flux sont simulés en fonction d'une variable aléatoire uniforme et de la probabilité de défaut. En pratique, une variable uniforme est simulée pour chaque série de flux, pour chaque échéance, la probabilité de défaut est comparée à la valeur de la variable aléatoire simulée et en fonction du résultats, le flux est considéré comme en défaut ou non.

$$X_{scen} \rightarrow U(0,1)$$

$$\begin{cases} Si \;\; X_{scen} < F_{Def}(Not, An) \;\; alors \;\; F_{An}^{scen} = 0 \;\; avec \;\; scen \in [\![1, Nb]\!] \;\; et \;\; An \in [\![1, Ech]\!] \\ Si \;\; X_{scen} > F_{Def}(Not, An) \;\; alors \;\; F_{An}^{scen} > 0 \;\; avec \;\; scen \in [\![1, Nb]\!] \;\; et \;\; An \in [\![1, Ech]\!] \end{cases}$$

Par ailleurs, les probabilités de défaut modélisées par les polynômes étant croissantes (car représentant les défauts antérieurs à An), le défaut sera également présent les années postérieures.

Pour illustrer le calcul, supposons que :

- la valeur de la variable aléatoire X soit supérieure à la probabilité de défaut modélisée par le polynôme l'année An et la notation Not : $F_{Def}(Not, An)$.
- la valeur de la variable aléatoire X soit inférieure à la probabilité de défaut modélisée par le polynôme l'année $An+1$ et la notation Not : $F_{Def}(Not, An+1)$.

Etant donné que :

- les probabilités de défaut modélisées correspondant aux probabilités que le titre soit en défaut l'année An (c'est-à-dire que le défaut soit intervenu avant)
- le titre n'a pas subi de défaut l'année An
- le titre a subi un défaut l'année $An+1$

Alors il est immédiat au regard des hypothéses que :

- le titre n'a connu aucun défaut antérieur à An
- le titre a subi un défaut l'année $An+1$

Finalement, les flux sont actualisés à partir de la courbe des taux sans risque (voir C.1 page 151) et les pertes sont classées de maniére croissante. La Value-at-Risk à $X\%$ est ensuite déterminée comme étant la $E(X\% \times Nombre\ \ de\ \ scnarios)$-iéme perte.

Résultats de la VaR à 0.5% de la perte à terme

VaR à 0.5% de la perte d'une obligation ZC							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	74.52%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	87.64%	88.81%	89.27%	91.04%
A	0.00%	0.00%	0.00%	99.44%	93.98%	98.13%	100.00%
BBB	0.00%	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
BB	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.20 – VaR à 0.5% de la perte d'une obligation ZC

VaR à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	35.88%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	61.71%	60.17%	59.71%	60.01%
A	0.00%	0.00%	0.00%	65.16%	61.31%	64.46%	66.41%
BBB	0.00%	0.00%	82.85%	88.22%	88.36%	97.79%	100.00%
BB	99.74%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	99.74%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.21 – VaR à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon

VaR à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	47.74%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	72.07%	70.23%	68.83%	68.27%
A	0.00%	0.00%	0.00%	77.83%	72.36%	74.18%	75.63%
BBB	0.00%	0.00%	93.74%	97.03%	98.41%	100.00%	100.00%
BB	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.22 – VaR à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon

Le lecteur remarquera, dans les tableaux 3.20 page 81, 3.21 page 81 et 3.22 page 81, que la Value-at-Risk à 0.5% est très importante pour la plupart des doublets *Notation, Echéance*. En effet, dans de nombreux cas, elle représente la totalité du prix du titre. Néanmoins, ceci n'est pas anormal puisque cette Value-at-Risk à 0.5% représente une situation extrême qui n'intervient que très rarement. Les résultats contrastent fortement avec l'espérance de la perte dans les tableaux précédents. Par ailleurs, l'effet « coupon » s'estompe fortement et est à mettre en relation avec le niveau des pertes.

Le lecteur gardera à l'esprit que le besoin en capital calculé correspond au risque d'un défaut sur la durée de vie de l'obligation. Aussi, comme cela a été évoqué plus haut, cela ne correspond pas au besoin en capital à un an comme l'entend Solvabilité II, mais plutôt à une notion de besoin en capital au titre des défauts futurs. Le seuil de la Value-at-Risk à 0.5% a été choisi par rapport à Solvabilité 2 mais il ne s'appuie que sur une durée d'un an. La value-at-Risk ayant une évolution non linéaire, il est primordial de définir un seuil adéquat avec le risque que l'on souhaite mesurer. Le lecteur s'interrogera alors légitiment sur le seuil à prendre en compte pour le calcul de la Value-at-Risk. En effet, s'il peut paraître normal d'estimer la Value-at-Risk comme un phénoméne annuel arrivant une fois tous les 200 ans dans solvabilité II, cela semble très restrictif lorsqu'il s'agit d'estimer le besoin en capital

au titre des défauts sur plusieurs années. Ainsi, en utilisant une value-at-Risk à 1%, les pertes sont beaucoup plus faibles comme le lecteur peut le voir dans les tableaux 3.23 page 82, 3.24 page 82 et 3.25 page 82.

Résultats de la VaR à 1% de la perte à terme

VaR à 1% de la perte d'une obligation ZC							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	88.81%	89.27%	91.04%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	93.98%	98.13%	100.00%
BBB	0.00%	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
BB	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.23 – VaR à 1% de la perte d'une obligation ZC

VaR à 1% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%%	51.59%	48.63%	46.75%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%%	57.14%	53.49%	54.71%
BBB	0.00%	0.00%	79.27%	80.49%	84.38%	89.25%	94.58%
BB	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	99.74%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.24 – VaR à 1% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon

VaR à 1% de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%%	64.39%	61.16%	58.53%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%%	69.60%	66.38%	66.73%
BBB	0.00%	0.00%	91.58%	91.91%	95.54%	100.00%	100.00%
BB	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.25 – VaR à 1% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon

De même, en utilisant une value-at-Risk à 5%, les pertes sont beaucoup plus faibles comme le lecteur peut le voir dans les tableaux 3.26 page 83, 3.27 page 83 et 3.28 page 83.

Résultats de la VaR à 5% de la perte à terme

VaR à 5% de la perte d'une obligation ZC							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BBB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	100.00%
BB	0.00%	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.26 – VaR à 5% de la perte d'une obligation ZC

VaR à 5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BBB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	48.67%	52.07%
BB	0.00%	0.00%	89.71%	93.73%	99.19%	100.00%	100.00%
Speculatif	99.74%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.27 – VaR à 5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon

VaR à 5% de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BBB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	68.84%	70.53%
BB	0.00%	0.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.28 – VaR à 5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon

Pour rappel, la Value-at-Risk à 5% a été calculée car la Value-at-Risk à 0.5% est très restrictive dans le cas d'une prise en compte des défauts sur l'ensemble des années futures et pas uniquement les défauts à un an.

Le lecteur remarquera que dans le cas d'un Zéro-Coupon, il y a un effet de seuil important et cela pour tous les seuils de Value-at-Risk. En effet, dans le cas de tels titres, deux uniques cas sont possibles puisqu'il y a un unique flux final, soit la perte est totale, soit la perte est nulle. La Value-at-Risk peut alors passer en un an d'une valeur nulle à une valeur proche de 100%. Ce phénomène se retrouve également, mais dans une moindre mesure en raison du détachement des coupons, sur les deux autres types d'obligation. Cette observation est logique dans la mesure où la Value-at-Risk correspond à la perte extrême à un seuil donné et non pas à une moyenne. Ainsi, si lors de la période de vie de l'obligation, le taux de défaut est supérieur au seuil de la Value-at-Risk, cette derniére sera alors de 100% pour un zéro-coupon, dans le cas contraire, elle sera nulle.

Il est alors normal de s'interroger sur la légitimité d'un calcul du risque via la Value-at-Risk qui provoque des sauts du besoin en capital en fonction de l'échéance de l'obligation pour une notation donnée. En effet, pour

caricaturer, une obligation ayant une notation qui présenterait un taux de défaut de 0.49% en année *An* et un taux de défaut de 0.51% (au sens de défaut ayant eu lieu avant l'échéance) aurait une Value-at-Risk au seuil de 0.5% proche de 0% en année *An* et proche de 100% en année *An+1*. Cette même obligation aurait, au contraire une C-VaR au seuil de 0.5% très proche pour les année *An* et en année *An+1* puisqu'elle représente la perte moyenne au dessus du seuil de 0.5%.

Ainsi, plusieurs approches pourraient être envisagées pour améliorer l'estimation du besoin en capital comme l'utilisation :

- d'un seuil différent pour la Value-at-Risk en fonction de l'échéance du flux. Dans le cas où la perte suit une loi normale, il est possible d'écrire : $VaR(h,p) = \alpha_p \times \sigma \times \sqrt{h} = VaR(h',p') \times \frac{\alpha_p}{\alpha'_p} \times \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h'}}$
- d'une C-VaR en lieu et place d'une VaR.
- d'une linéarisation de la perte en fonction de l'année de défaut moyenne.

Néanmoins, dans le cas des Etats, en cas de défaut, une partie des flux peut être récupérée par recouvrement (modélisé par un taux de recouvrement). Aussi, un calcul supplémentaire dans le cas d'une Value-at-Risk au seuil de 0.5% est mené avec pour chaque scénario un taux de recouvrement est tiré aléatoirement par une loi normale de moyenne 25% et de volatilité 10%.

$$Taux\ \ recouvrement_{scen} = \mu + \sigma.N(0,1)$$

Avec :

- $Taux\ \ recouvrement_{scen}$:Taux de recouvrement du scénario *scen*
- μ : moyenne du taux de recouvrement
- σ : Ecart type
- $N(0,1)$: Loi normale centrée réduite

La perte pour chaque scénario *scen* devient alors :

$$perte\ en\ Pourcentage_{scen} = \frac{Perte \times (1 - Taux\ \ recouvrement_{scen})}{Prix}$$

Résultats de la VaR à 0.5% de la perte à terme avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 0.5% de la perte d'une obligation ZC Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	58.32%	67.62%	69.28%	72.52%
A	0.00%	0.00%	0.00%	68.26%	73.25%	77.80%	88.95%
BBB	0.00%	69.73%	86.31%	96.04%	100.00%	100.00%	100.00%
BB	74.40%	83.64%	88.81%	94.85%	100.00%	100.00%	100.00%
Speculatif	78.44%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.29 – VaR à 0.5% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	43.74%	45.45%	43.08%	43.37%
A	0.00%	0.00%	0.00%	47.45%	48.46%	45.57%	50.25%
BBB	0.00%	65.95%	65.69%	67.50%	71.91%	73.84%	81.07%
BB	73.38%	84.91%	88.85%	92.33%	96.87%	100.00%	100.00%
Speculatif	76.55%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.30 – VaR à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	49.49%	53.23%	51.93%	50.34%
A	0.00%	0.00%	0.00%	55.52%	56.81%	55.16%	57.70%
BBB	0.00%	68.02%	73.25%	75.88%	80.37%	82.75%	89.21%
BB	73.88%	84.35%	88.84%	93.12%	98.95%	100.00%	100.00%
Speculatif	77.48%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.31 – VaR à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

L'utilisation d'un taux de recouvrement tiré aléatoirement, plus proche des observations empiriques, permet de diminuer le saut engendré par le défaut puisqu'une partie de la perte est récupérée. Néanmoins, le lecteur remarquera que pour les notations *BB* et *speculatif* de nombreux cas présentent une perte de 100% malgré un taux de recouvrement de 25% en moyenne. Ceci s'explique par la différence de taux d'actualisation pour la perte et pour le calcul de la valeur de marché. En effet, la perte est calculée à partir du taux sans risque alors que la valeur de marché est calculée avec le taux actuariel à l'achat.

Afin d'observer les pertes avec des seuils différents et d'observer la non linéarité de la Value-at-Risk, les résultats de la Value-at-Risk au seuil de 1% et 5% est présentée ci-dessous.

Résultats de la VaR à 1% de la perte à terme avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 1% de la perte d'une obligation ZC Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	53.06%	61.81%	67.67%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	64.01%	76.34%	83.30%
BBB	0.00%	0.00%	74.39%	91.19%	100.00%	100.00%	100.00%
BB	0.00%	76.02%	80.71%	86.21%	95.58%	100.00%	100.00%
Speculatif	54.57%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.32 – VaR à 1% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 1% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	35.54%	35.51%	34.36%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	39.62%	43.15%	43.29%
BBB	0.00%	0.00%	56.96%	60.97%	64.71%	68.88%	70.66%
BB	0.00%	73.67%	77.09%	80.17%	84.20%	88.27%	92.17%
Speculatif	53.26%	98.42%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.33 – VaR à 1% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 1% de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	43.88%	44.66%	44.15%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	48.42%	52.28%	51.73%
BBB	0.00%	0.00%	63.71%	71.31%	74.30%	78.04%	80.15%
BB	0.00%	74.71%	78.45%	82.05%	87.06%	92.15%	96.87%
Speculatif	53.91%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.34 – VaR à 1% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

Confidentiel

Résultats de la VaR à 5% de la perte à terme avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 5% de la perte d'une obligation ZC Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BBB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	94.51%	100.00%
BB	0.00%	0.00%	65.57%	70.04%	77.65%	87.60%	99.99%
Speculatif	0.00%	86.12%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.35 – VaR à 5% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BBB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	38.32%	39.44%
BB	0.00%	0.00%	48.73%	50.91%	53.88%	56.87%	59.72%
Speculatif	0.00%	75.55%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.36 – VaR à 5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR à 5% de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
A	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BBB	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	52.32%	53.30%
BB	0.00%	0.00%	55.05%	56.87%	59.86%	62.96%	65.84%
Speculatif	0.00%	80.14%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

TABLE 3.37 – VaR à 5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

Les tableaux précédents (3.32 page 86, 3.33 page 86, 3.34 page 86, 3.35 page 87, 3.36 page 87, 3.37 page 87) montrent qu'avec un taux de recouvrement aléatoire, la Value-at-Risk aux seuils de 1% et de 5% sont plus faibles que sans prise en compte de ce taux de recouvrement. Néanmoins, pour les notations basses (*BB,Speculative...*) et les échéances longues, le besoin en capital est souvent de 100% à cause de la différence entre le taux actuariel à l'achat servant au calcul de la valeur boursière et le taux sans risque servant au calcul de la perte engendrée par les défauts.

Cependant, le lecteur remarquera que la Value-at-Risk au seuil de 5% pour la notation *Speculatif* et l'échéance 1 an est nulle dans le cas d'un taux de recouvrement aléatoire et non nul alors que celle-ci était de 100% dans le cas d'un taux de recouvrement nul.

Résultats de la VaR annualisée à 0.5% de la perte à terme avec un taux de recouvrement aléatoire

Les résultats précédents montrent que la Value-at-Risk à 0.5% avec un taux de recouvrement non nul et aléatoire conduit à une estimation du besoin en capital très importante pour certaines notations. Mais surtout, cette évaluation du besoin en capital ne prend pas en compte l'échéance de l'obligation. Aussi, en considérant que le besoin en calculé ci-dessus via la Value-at-Risk représente une perte extrême qui ne se réalise que dans de rares cas (0.5%) par ailleurs, chaque année qui passe modifie la durée de l'obligation et potentiellement la notation. Il paraît légitime d'annualiser la Value-at-Risk entre aujourd'hui et l'année moyenne du défaut. Puis de considérer que le besoin en capital correspond une unité de Value-at-Risk annualisée afin de prendre en compte à la fois l'évolution des notations, le passage du temps et l'ensemble des défauts sur les années futures.

Le besoin en capital à un an est alors calculé comme suit :

$$Besoin\ \ en\ \ capital\ \ annualise = \frac{VaR}{f(Ech, Not)}$$

Avec :

- $VaR\ \ annualise$: Besoin en capital annualisé
- VaR : Value-at-Risk totale
- $f(Ech, Not)$: L'année moyenne du défaut pour une obligation d'échéance Ech (tableau 3.12 page 70)

VaR annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation ZC Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.20%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	5.47%	4.83%	4.40%	3.80%
A	0.00%	0.00%	0.00%	5.76%	4.98%	4.59%	4.25%
BBB	0.00%	0.00%	11.30%	9.45%	7.82%	6.51%	5.58%
BB	71.64%	31.51%	18.47%	13.04%	10.11%	8.30%	7.09%
Speculatif	80.43%	53.06%	33.06%	23.82%	18.18%	14.63%	12.30%

TABLE 3.38 – VaR annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire

VaR annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.13%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	4.01%	3.27%	2.76%	2.31%
A	0.00%	0.00%	0.00%	3.80%	3.19%	2.78%	2.36%
BBB	0.00%	0.00%	8.41%	6.52%	5.58%	4.85%	4.61%
BB	70.65%	29.57%	17.49%	13.04%	10.11%	8.30%	7.09%
Speculatif	78.50%	53.06%	33.06%	23.82%	18.18%	14.63%	12.30%

TABLE 3.39 – VaR annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

Confidentiel

VaR annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi-coupon Taux de recouvrement aléatoire							
	1 an	**5 ans**	**10 ans**	**15 ans**	**20 ans**	**25 ans**	**30 ans**
AAA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.48%
AA	0.00%	0.00%	0.00%	4.62%	3.86%	3.25%	2.66%
A	0.00%	0.00%	0.00%	4.56%	3.84%	3.26%	2.76%
BBB	0.00%	0.00%	9.59%	7.41%	6.26%	5.49%	5.05%
BB	71.14%	30.07%	17.91%	13.04%	10.11%	8.30%	7.09%
Speculatif	79.45%	53.06%	33.06%	23.82%	18.18%	14.63%	12.30%

TABLE 3.40 – Value-at-Risk annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire

Les résultats des tableaux 3.38 page 88, 3.39 page 88, 3.40 page 89 sont présentés sous forme graphique dans les graphiques 3.12 page 89 et 3.13 page 90.

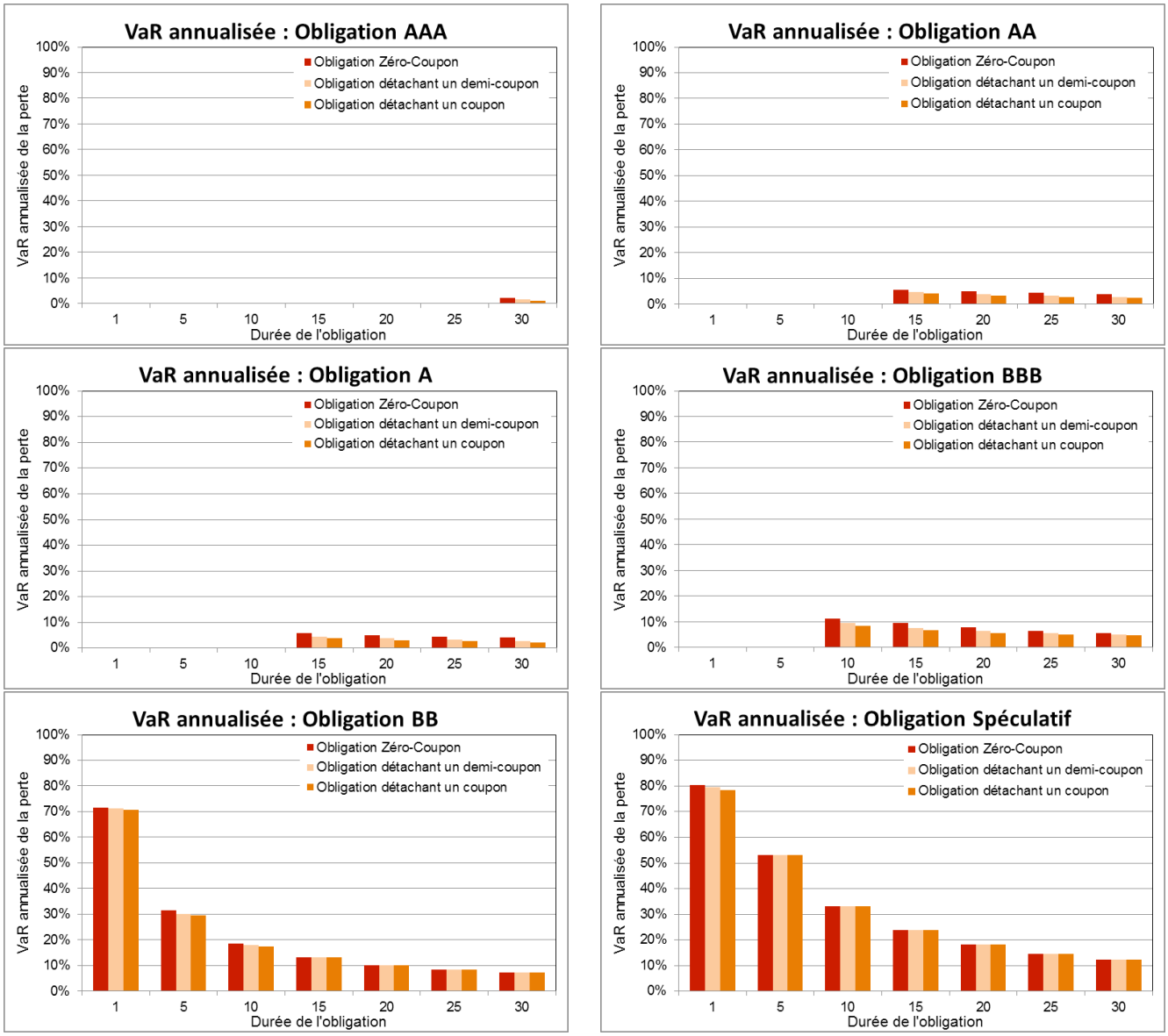

FIGURE 3.12 – Value-at-Risk annualisée au seuil de 0.5% en fonction de la notation et de la durée de l'obligation

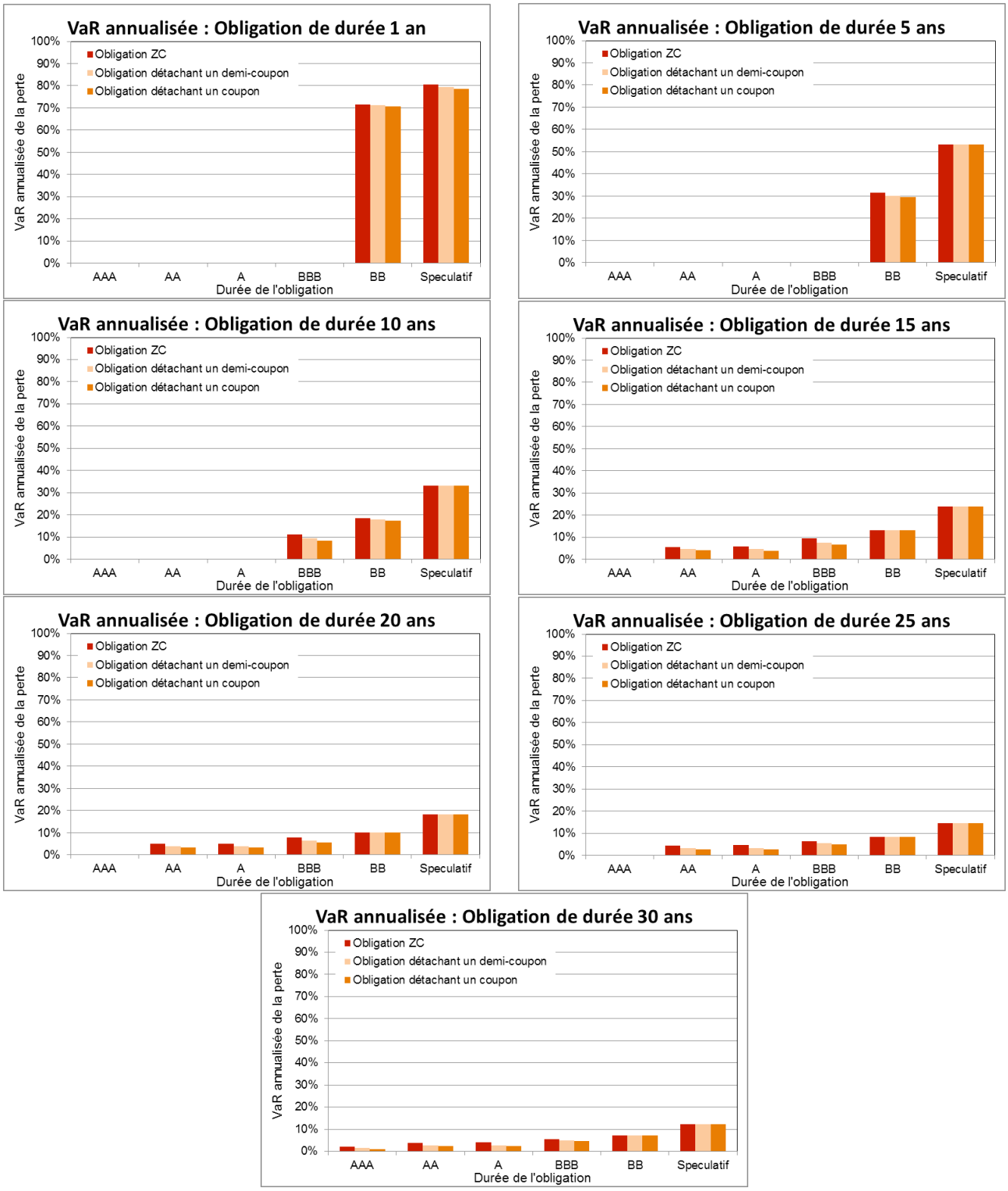

FIGURE 3.13 – Value-at-Risk annualisée au seuil de 0.5% en fonction de la notation et de la durée de l'obligation

Les résultats dans les tableaux 3.38 page 88, 3.39 page 88, 3.40 page 89 montrent qu'en cas d'une annualisation de la Value-at-Risk à 0.5% servant au calcul du besoin en capital, la Value-at-Risk annualisée est plus réaliste pour des échéances longues (20, 25 et 30 ans) et les notations élevées (AAA, AA et A) puisqu'elle est inférieure à 5%. Au contraire, la Value-at-Risk annualisée est élevée pour des échéances courtes (1 et 5 ans) et les notations basses (BB et *Speculatif*) puisqu'elle est supérieur à 29% pour l'échéance 5 ans et supérieure à 70% pour l'échéance 1 an. Ces observations sont normales dans la mesure où d'une part la probabilité de défaut est

faible pour les notations élevées, et d'autre part, le risque doit être annualisé pour les échéances supérieures à 1 an. En effet, la Value-at-Risk représentant des cas extrêmes et dépendant fortement de l'évolution des notations sur la durée de vie de l'obligation, il est normal, pour une obligation donnée, de considérer le risque uniquement sur un an et de le réévaluer chaque année en fonction de l'évolution des notations et du passage du temps.

En pratique, le besoin en capital doit être recalculé chaque année pour prendre en compte l'évolution de la notation qui modifie la probabilité de défaut, mais également avec le temps qui passe (entre l'année *An* et l'année *An+1*, la durée de l'obligation a été réduite d'un an). Une fois que ce calcul a été effectué, le besoin supplémentaire au titre du risque de défaut pour la nouvelle année correspond à la différence entre le nouveau besoin en capital au titre du risque de défaut et le besoin en capital au titre du risque de défaut de l'année précédente.

Il se peut également que le besoin supplémentaire au titre du risque de défaut pour la nouvelle année soit négatif en fonction de l'évolution des notations, du passage du temps mais également en fonction des obligations vendues, achetées et arrivées à échéance. Dans un tel cas, le besoin en capital au titre du risque souverain va diminuer par rapport à l'année précédente.

Analyse sur le calcul du besoin en capital

Le calcul de la Value-at-Risk en prenant en compte les défauts sur toute la durée de vie de l'obligation (et non uniquement sur les défauts à un an comme dans Solvency II) permet de montrer que pour des échéances longues et des notations en dessous de l'*Investment Grade*, le risque de défaut est très important et correspond souvent à une perte totale de la valeur boursière. Dans le cas d'une Value-at-Risk prenant en compte uniquement les défauts à un an comme dans Solvency II, le risque de défaut sera beaucoup plus faible, que dans le cas d'une prise en compte des défauts sur toute la durée de vie de l'obligation, pour les échéances longues [1].

Cette observation montrant que la perte pourrait correspondre à la totalité de la valeur boursière pour les échéances longues est surprenante dans l'esprit actuel d'estimation du risque, basée sur le risque à un an dans Solvabilité II, qui considère que le besoin en capital au titre du risque souverain est nul. Mais cette observation est également cohérente lorsque la nature de l'investisseur et l'évolution des notations à un horizon long sont pris en compte. En effet, pour une institution gérant un régime de retraite, généralement investisseur *Buy and Hold*, le risque ne réside pas uniquement sur le défaut à un an mais sur un défaut sur la période de portage, c'est à dire généralement jusqu'à l'échéance de l'obligation. Aussi, le risque pour un tel investisseur doit prendre en compte les défauts sur toute la période de vie de l'obligation car les conséquences seront en grande partie les mêmes (surtout dans le cas d'une obligation Zéro-Coupon) puisque le flux de remboursement qui doit servir à payer des prestations sera absent. Pour les investisseurs, ce problème est d'autant plus important pour les obligations souveraines que, contrairement aux marchés actions où le nombre de titres cotés est très important permettant de ce fait une diversification potentielle importante, le nombre d'Etats souverains en Zone Euro ou même en Union Européenne est limité et de ce fait, la diversification est très limitée. Néanmoins, le chargement en capital au titre du risque de défaut souverain doit être calculé annualisé jusqu'à la date de défaut moyenne car les défauts sont potentiels (il se réalise en fonction de l'évolution des notations) et la perte est estimée dans un cas extrême via la Value-at-Risk (et non un cas moyen) (tableau 3.38 page 88, tableau 3.39 page 88, tableau 3.40 page 89). Le fait de recalculer le besoin en capital annualisé chaque année permet de continuer à prendre en compte les défauts sur l'ensemble de la durée de vie des obligations, mais également de prendre en compte l'évolution des notations et le passage du temps.

De plus, l'approche basée sur les défauts à un an présente une vision biaisée et réduite du risque pour tout type d'investisseur. En effet, comme le montre le tableau 3.20 page 81, sur la notation A d'échéance 10 ans présenterait une Value-at-Risk de 0% si les défauts à un an sont considérés [2] et de 100% si au contraire les défauts sur 10 ans sont considérés. Le risque est donc considéré comme étant nul à un an et étant "total" à 10 ans pour une même obligation en utilisant une technique de Value-at-Risk au seuil de 0.5%, ce qui tend à prouver qu'une volatilité importante du besoin en capital est probable sur 10 ans et surtout qu'une nombre important d'institution pourrait rencontrer des problèmes dus à une augmentation importante du besoin en capital d'une année à l'autre en fonction de l'évolution des notations (basée dans l'étude sur les observations empiriques).

Finalement, un enseignement important pour les gérants de portefeuille réside dans le fait que la Value-at-Risk dans le cas d'une obligation Zéro-Coupon évolue par saut (par rapport à la notation et également par rapport à la durée) lorsque le taux de recouvrement est nul, prouvant les limites de l'estimation du risque via cette méthode. En effet, dans le cas d'une telle obligation, si la probabilité d'avoir eu un défaut avant l'échéance finale est supérieure au seuil de la Value-at-Risk alors la perte correspond à la totalité du flux de remboursement final ou une partie de ce flux si un taux de recouvrement est utilisé pour la modélisation.

1. Le calcul n'est pas présenté dans ce mémoire mais il suffit de considérer les obligations à un an dans les tableaux précédents pour estimer la Value-at-Risk avec les défauts uniquement à un an.
2. En se basant sur la Value-at-Risk de l'obligation d'échéance 1 an

3.4 Calcul du Spread par notation

3.4.1 Présentation

Afin de calculer les spreads par notation, une premiére étape est le calcul des taux moyens par notation. Pour cela, les taux mensuels 10 ans historiques (données provenant de la Banque Centrale Européenne dans [19]) sont pondérés par le PIB 2011 de chaque pays (données provenant du FMI dans [21]).

$$Taux_{hist}(Not) = \frac{\sum_{t \in T} \sum_{p \in pays} Taux_p(t) \times PIB_{p,2011} \times \mathbb{1}_{\{Not_p(t)=Not\}}}{\sum_{p \in pays} PIB_{p,2011} \times \mathbb{1}_{\{Not_p(t)=Not\}}}$$

Avec :

- $Taux_{hist}(Not)$: Taux historique moyen pour la notation Not
- Not : Notation
- T : Historique disponible
- $pays$: Ensemble des pays disponibles
- $PIB_{p,2011}$: PIB du pays p en USD en 2011
- $Not_p(t)$: Notation du pays p en t

Une fois que les taux ont été définis, il est possible de définir le spread par notation de la maniére suivante :

$$Spread_{hist}(Not) = Taux_{hist}(Not) - Taux_{hist}(Not_{max})$$

Avec :

- $Taux_{hist}(Not)$: Taux historique moyen pour la notation Not
- Not : Notation
- Not_{max} : Notation maximum (AAA)
- $Spread_{hist}(Not)$: Spread historique moyen pour la notation Not

3.4.2 Résultats

Le graphique 3.14 page 94 présente l'historique des taux 10 ans par notation. Comme présenté ci-dessus, les taux par notation sont calculés comme une pondération par le PIB 2011 de chaque pays possédant cette notation.

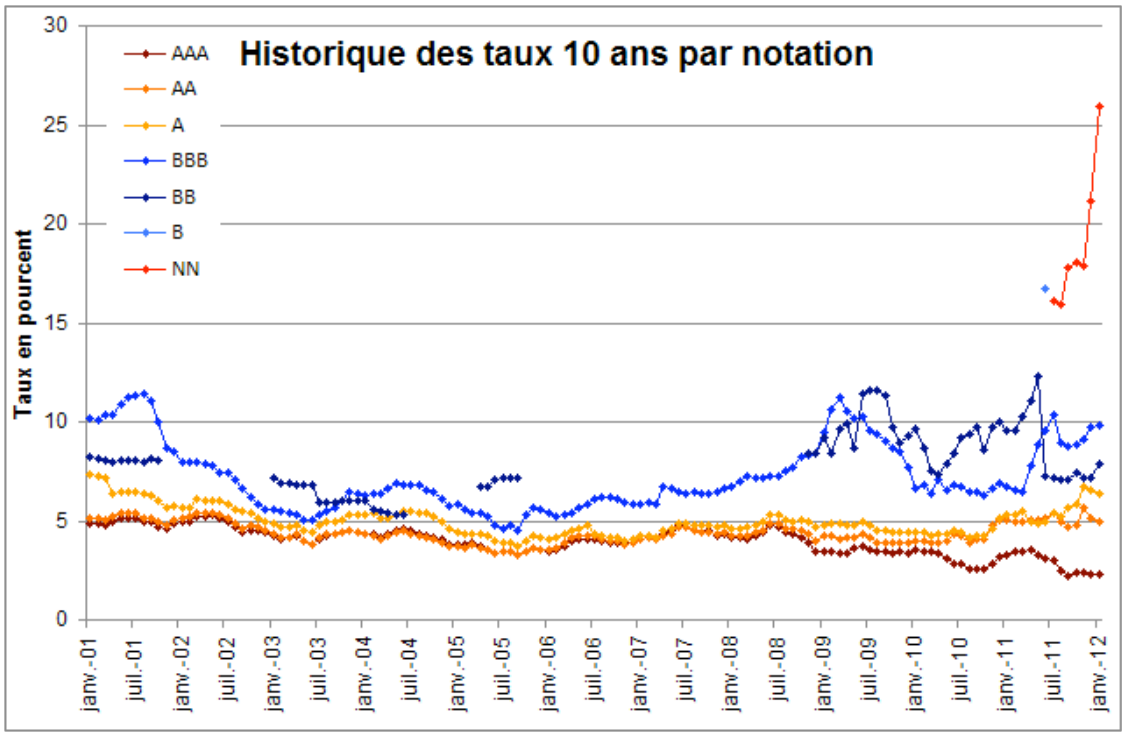

FIGURE 3.14 – Historique des taux 10 ans par notation

Le lecteur pourra remarquer que pendant une longue période (2002-2008) les taux des différentes notations ont été proches. Ce n'est que depuis 2008 et la crise que les spreads entre les différentes notations se sont écartés.

Le tableau 3.41 page 94 présente les taux 10 ans moyen par notation sur la période (début 2001-fin 2011). Le lecteur remarquera que les taux historiques moyens par notation sont progressifs avec la baisse de la qualité de la notation.

Taux 10 ans moyen	
Notation	**Taux**
AAA	3.966%
AA	4.391%
A	4.989%
BBB	7.209%
BB	8.039%
B	16.690%
NN & Spec	18.977%

TABLE 3.41 – Taux 10 ans historique moyen par notation

Le tableau 3.42 page 95 présente les spreads 10 ans moyen par notation sur la période (début 2001-fin 2011). Le lecteur remarquera que les spreads augmentent avec la baisse de la qualité de la notation.

Spread 10 ans moyen	
Notation	**Spread**
AAA	-
AA	0.441%
A	1.022%
BBB	3.243%
BB	4.347%
B	13.555%
NN & Spec	16.536%

TABLE 3.42 – Spread historique moyen par notation

Dans les modélisations de la partie 3, les spreads utilisés pour les modélisations sont constants (sauf en année initiale où ils sont translatés pour retrouver la valeur de marché) et correspondent aux spreads du tableau 3.42 page 95.

Confidentiel

4 Application au calcul du besoin de capital complémentaire d'un régime de retraite

4.1 Introduction

Dans cette partie, trois méthodes de calcul du besoin en capital au titre du risque souverain sont appliquées à un produit de retraite par capitalisation. La première méthode se base sur l'hypothèse que l'investisseur est *Buy and Hold* et que de ce fait, il n'est soumis qu'au risque de défaut sur l'ensemble des flux futurs et non au risque de spread. La seconde méthode considère uniquement la probabilité de défaut la première année et non les probabilités de défaut sur la durée de vie des titres obligataires. La troisième et dernière méthode se base sur le principe du modèle interne.

4.2 Produit de retraite

4.2.1 Présentation du produit

Généralités : Le produit d'assurance-vie utilisé pour l'étude est un produit de retraite par capitalisation dépendant de la branche 20 du code de la mutualité. Ce produit de retraite par capitalisation est géré par *Indép'AM* pour l'allocation actif-passif et la gestion financière.

Catégories d'adhérents : Ce produit est composé, comme de nombreux autres produits de retraites, de 4 catégories d'adhérents. Celles-ci sont :

Catégorie	Description
les cotisants maîtres (CM)	l'adhérent pendant la période de cotisation, c'est à dire avant qu'il ne liquide ses droits
les veufs (V)	le bénéficiaire de la réversion dans le cas où l'adhérent décède avant que ce dernier ne liquide ses droits et avant que le bénéficiaire de la réversion ne liquide lui aussi ses droits
les retraités de droit direct (RDD)	l'adhérent après la période de cotisation, c'est à dire après qu'il liquide ses droits
les retraités de droit indirect (RDI)	le bénéficiaire de la réversion après le décès du cotisant maître (dans le cas où celui-ci avait déjà liquidé ses droits auparavant) ou un veuf qui liquide ses droits

TABLE 4.1 – Différentes catégories d'adhérents

Les droits : Les adhérents achètent des droits avec une *Valeur d'Achat* (VA) donnée qui dépend de l'âge de l'adhérent, du taux technique en vigueur, de la table de mortalité en vigueur et de la *Valeur de Service* (VS). Ceci permet pour un montant de cotisation versée de définir des droits de la manière suivante :

$$Nombre\ \ de\ \ droits = \frac{Montant}{VA(age, taux\ \ technique, VS)}$$

L'adhérent peut effectuer des achats quand il le souhaite ou prévoir des achats périodiquement. Par ailleurs, l'adhérent peut souscrire différentes options lors de son adhésion (Garantie de bonne fin des cotisations...).

Les adhérents liquident leurs droits avec une *Valeur de Service* donnée qui dépend de l'âge de l'adhérent (une minoration est appliquée si l'adhérent liquide ses droits avant ses 65 ans et une majoration si l'adhérent liquide ses droits après ses 65 ans), du taux technique du droit lors de l'achat des droits et de la table de mortalité en vigueur. Ceci permet de définir pour des droits donnés le montant de la rente annuelle qui sera versée trimestriellement à l'adhérent. Par ailleurs, l'adhérent bénéficie de plusieurs choix concernant la réversion :

- *la perception intégrale* : l'adhérent bénéficie d'une rente jusqu'à son décès. Aucune rente n'est ensuite versée.
- *la réversion à 100%, 80%, 60%, 30%* : l'adhérent bénéficie d'une rente jusqu'à son décès. Un pourcentage de cette rente (100%, 80%, 60%, 30%) est ensuite versée au bénéficiaire de la réversion jusqu'au décès de celui-ci. La rente versée est minorée par rapport à la rente référence de la perception intégrale.
- *la cession intégrale* : l'adhérent ne bénéficie d'aucune rente jusqu'à son décès. Le bénéficiaire de la réversion bénéficie ensuite d'une rente qui est majorée par rapport à la rente référence de la perception intégrale.

Génération de droits : Ce produit est composé de 3 générations de droits qui sont dues aux changements de taux technique au cours du temps. Aucune des générations de taux technique ne possède de taux de revalorisation garanti contractuellement. Les trois générations de droits sont présentés dans le tableau 4.2 page 98.

Participation aux bénéfices : Comme tous les produits d'assurance-vie, ce produit bénéficie de la participation aux bénéfices réglementaire mais également potentiellement d'une participation aux bénéfices discrétionnaire. Cette participation aux bénéfices prend la forme d'une revalorisation de la *Valeur de service des droits*. Par ce biais, la rente versée aux adhérents est tout de suite revalorisée.

Droits	
	taux d'actualisation
Génération 1	3.5%
Génération 2	2.5%
Génération 3	2.0%

TABLE 4.2 – Différentes générations de droits du produit de retraite

4.2.2 Présentation du portefeuille

Le portefeuille correspondant au produit considéré est composé de produits financiers classiques tels que des actions, des obligations et des OPCVM. La répartition par montants et pourcentage est présentée dans le tableau 4.3 page 99 et graphiquement dans la figure 4.1 page 99.

Le lecteur remarquera dans le graphique 4.1 page 99 que l'encours obligataire (Monétaire et OPCVM obligataires compris) représente plus de 75% de l'encours total. Ceci est le logique pour un portefeuille d'actif d'un régime de retraite.

Portefeuille en valeur de marché		
Type de titre	**Encours (M€)**	**Pourcentage**
Actions	231.8	20.0%
Actions Alternatives	0.3	0.0%
Immobilier	11.8	1.0%
Monétaire	18.8	1.6%
Obligations Privées	184.0	15.9%
Obligations Souveraines	540.0	46.6%
OPCVM Obligataires	171.3	14.8%
Total	1158.0	100.0%

TABLE 4.3 – Répartition du Portefeuille en valeur de marché

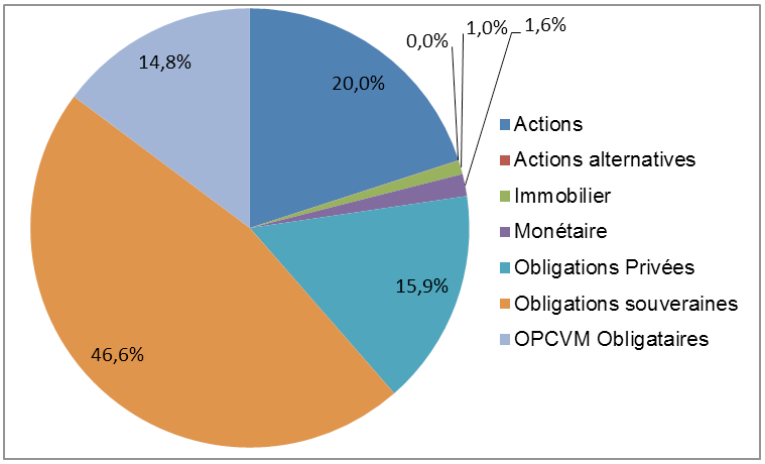

FIGURE 4.1 – Répartition du portefeuille en valeur de marché par type de titre

Afin de prendre en compte les spécifiés du traitement comptable des OPCVM, ces derniers n'ont pas été traités par transparence. Dans le cadre de la réforme Solvabilité 2, ils devraient être traités par transparence pour le calcul du coût du risque en capital.

Les flux des obligations souveraines non actualisés sont présentés dans la figure 4.2 page 100. Les flux sont représentés sur les échéances 1 à 33 ans pour les 6 Etats présents dans le portefeuille.

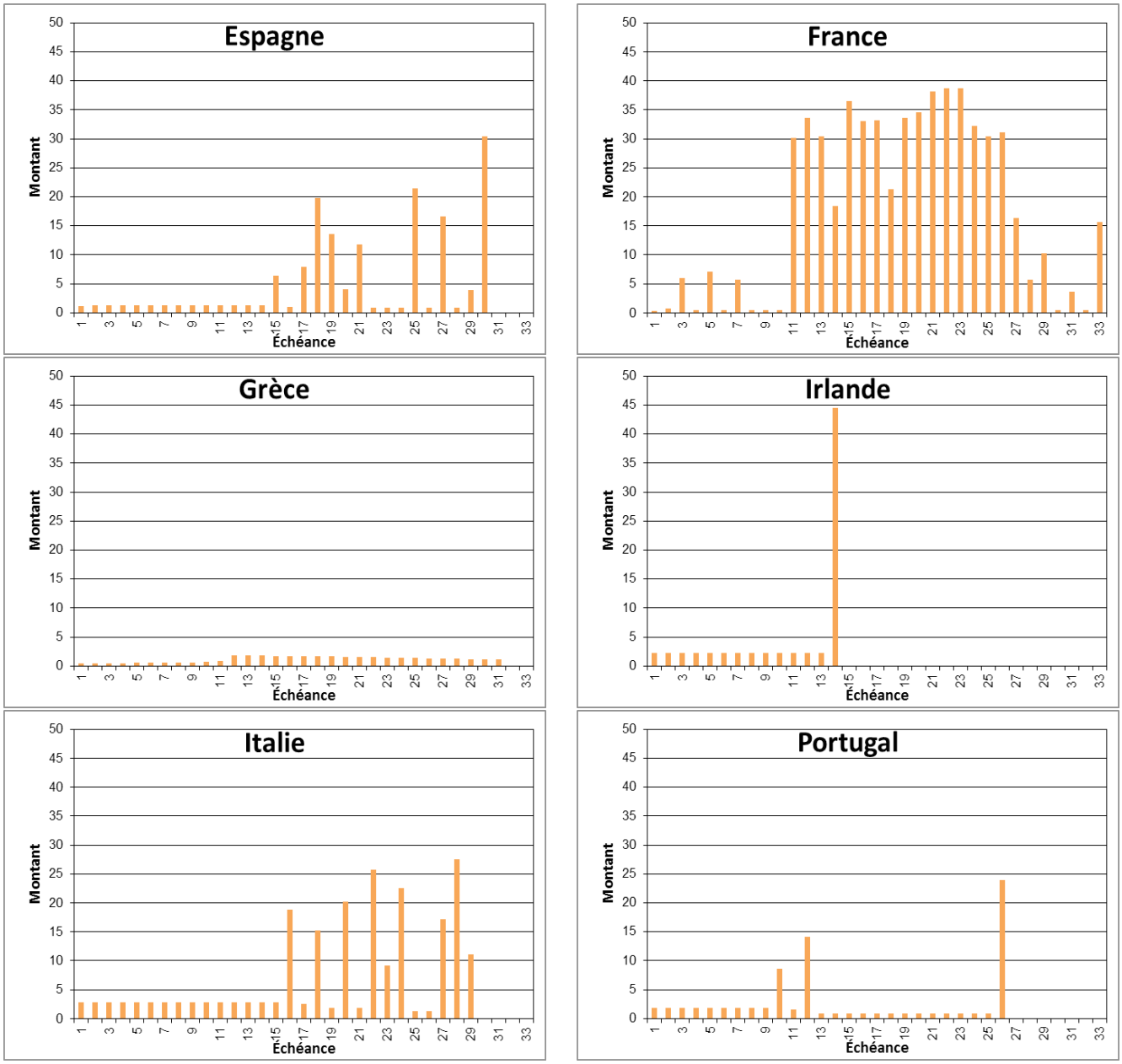

FIGURE 4.2 – Flux futurs par Etat

Le lecteur remarquera dans le graphique 4.2 page 100 que la France représente une grande partie des flux obligataires souverains, ce qui est normal pour le portefeuille d'actifs d'un régime de retraite par capitalisation français.

4.3 Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux

4.3.1 Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux avec notation 2011

Présentation Générale de la méthode

Cette première méthode de calcul du besoin en capital au titre du risque souverain se base sur l'hypothèse que l'investisseur est *Buy and Hold* et que de ce fait, il n'est soumis qu'au risque de défaut sur l'ensemble des flux futurs et non au risque de spread. De plus, la méthode considère qu'en cas de défaut l'année An alors les flux postérieurs à l'année An sont également en défaut. Le besoin en capital, pour chaque Etat, est calculé en fonction de la *Value-at-Risk* des flux en défaut actualisé au taux sans risque.

Présentation de la méthode

Etape 1 :

La première étape consiste à stripper les flux du portefeuille sur chaque Etat et de considérer pour chaque Etat la notation observée en 2011 à partir du tableau 4.4 page 101.

Notation	Description
AAA	première qualité
AA	Haute qualité
A	Qualité moyenne supérieure
BBB	Qualité moyenne inférieure
BB	Spéculative
B	très Spéculative
NN & Speculatif	Non noté et Risqué

TABLE 4.4 – Différentes notations utilisées pour stripper le portefeuille

Les échéances utilisées pour stripper le portefeuille obligataire souverain sont de 1 an à 33 ans. Les flux d'échéance supérieure à 33 ans sont regroupés sur l'échéance 33 ans afin d'avoir les mêmes données que dans la méthode suivante (où le nombre est limité par le paramétrage de l'outil).

Pour chaque Etat k, les flux obligataires sont alors définis comme suit :

$$Flux_{k,Not_k}(An)$$

Avec :

- k : Un Etat présent dans le portefeuille
- Not_k : La notation de l'Etat observée 2011
- An : Echéance du Flux

Etape 2 :

Le besoin en capital est calculé via la Value-at-Risk à 99.5% et la Value-at-Risk à 95% et l'espérance. Le calcul se base sur la méthode de Monte-Carlo et simule un grand nombre Nb (10 000) de scénarios.

Pour chaque scénario et pour chaque pays, une variable uniforme est simulée. Puis pour chaque échéance, la probabilité de défaut calculée dans le chapitre précédent et modélisée sous forme de polynômes en fonction de la notation, est comparée à la valeur de la variable aléatoire ainsi simulée. Les probabilités de défaut modélisées par

les polynômes étant croissantes (car représentant les défauts antérieurs à An), le défaut sera également présent les années postérieures. En fonction du résultats, le flux est considéré comme en défaut ou non suivant la formule suivante :

$$\forall scen \in [\![1, Nb]\!], X_{scen} \rightarrow U(0,1)$$

$Avec\ \ k \in Etat\ \ et\ \ An \in [\![1, Ech]\!]$

$$\begin{cases} Si\ \ X_{scen} < probabilite\ \ de\ \ defaut(Not_k, An)\ \ alors\ \ Flux_{k,Not_k,scen}(An) = 0 \\ Si\ \ X_{scen} > probabilite\ \ de\ \ defaut(Not_k, An)\ \ alors\ \ Flux_{k,Not_k,scen}(An) = Flux_{k,Not_k}(An) \end{cases}$$

Il y a donc Nb séries de flux simulés pour chaque Etat $Flux_{k,Not_k,scen}(An), An \in [\![1, Ech]\!]$ correspondant chacun à un scénario.

Etape 3 :

Pour chaque scénario $scen$ et pour chaque Etat k, la perte en capital est calculée de la manière suivante :

$$Perte\ \ En\ \ Capital\ \ Risque\ \ Souverain_{k,scen} =$$

$$(1 - taux\ \ de\ \ recouvrement) \times \sum_{An \in [\![1,Ech]\!]} \frac{Flux_{k,Not_k}(An) - Flux_{k,Not_k,scen}(An)}{(1 + taux\ \ sans\ \ risque(An))^{An-0.5}}$$

Avec :

- $taux\ \ de\ \ recouvrement$: taux de recouvrement fixe en pourcentage lors du défaut d'un Etat
- $Flux_{k,Not_k}(An)$: Flux obligataire en nominal pour l'Etat k ayant la notation Not_k et l'échéance An (Ce flux correspond au flux en l'absence de défaut).
- $Flux_{k,Not_k,scen}(An)$: Flux obligataire en nominal pour l'Etat k ayant la notation Not_k et l'échéance An pour le scénario $scen$ (Ce flux peut être nul suivant le scénario).
- Ech : Echéance maximale des flux obligataires
- $taux\ \ sans\ \ risque(An)$: Taux sans risque pour l'échéance An
- An : Durée en année

Etape 4 :

Les $Pertes\ \ En\ \ Capital\ \ Risque\ \ Souverain_{k,scen}$ pour chaque Etat k sont classés en ordre croissant.

$$Perte\ \ En\ \ Capital\ \ Risque\ \ Souverain'_{k,i} = TRI(Perte\ \ En\ \ Capital\ \ Risque\ \ Souverain_{k,scen})$$

Le $Besoin\ \ En\ \ Capital\ \ Risque\ \ Souverain$ est alors défini comme suit :

$$Besoin\ \ En\ \ Capital_{99.5\%} = VAR(99.5\%) = Perte\ \ En\ \ Capital\ \ Perte\ \ Souverain'_{k,E(99.5\% \times N)}$$

$$Besoin\ \ En\ \ Capital_{95\%} = VAR(95\%) = Besoin\ \ En\ \ Capital\ \ Perte\ \ Souverain'_{k,E(95\% \times N)}$$

Etape 5 :

Le $Besoin\ \ En\ \ Capital\ \ Risque\ \ Souverain$ à 99.5% est ensuite linéarisée entre aujourd'hui et la date de défaut moyenne en année.

$$Besoin\ \ En\ \ Capital_{annualise} = \frac{Besoin\ \ En\ \ Capital_{99.5\%}}{f(Not_k)} = \frac{VAR(99.5\%)}{f(Not_k)}$$

Avec $f(Not_k)$ l'année moyenne du défaut pour la notation Not_k.

Les résultats sont regroupés dans les tableaux 4.5 page 103, 4.6 page 103 et 4.7 page 104 dans le cas de l'absence de recouvrement et dans le tableau 4.8 page 105 dans le cas d'un recouvrement de 25%.

Résultats avec un taux de recouvrement de 0%

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2011 et taux de recouvrement de 0%				
Pays	**Notation Observée 2011**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	79.2	84.1%
France	AAA	363.9	25.1	6.9%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	23.8	100.0%
Irlande	BBB	54.5	43.7	80.3%
Italie	A	133.9	104.1	77.8%
Portugal	BBB	52.2	43.0	82.3%
Total	-	722.6	318.9	44.1%

* Flux actualisés au taux sans risque

TABLE 4.5 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0%

Le besoin en capital au titre du risque de défaut souverain du tableau 4.5 page 103 est très élevé et n'est pas réaliste. Cette méthode a pour particularité de prendre en compte les spécificités des investisseurs *Buy And Hold*. L'utilisation des défauts sur l'ensemble des flux futurs ainsi que de la *Value-at-Risk* comme mesure du risque conduit à une sur-évaluation du risque. En effet, la perte extrême issue de la *Value-at-Risk* n'est pas calculée à un an mais sur plus de 30 ans, ce qui n'est pas cohérent avec Solvabilité II. Cette méthode est donc inadaptée au calcul du besoin en capital d'un régime de retraite.

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 95% - Notation 2011 et taux de recouvrement de 0%				
Pays	**Notation Observée 2011**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	0.0	0.0%
France	AAA	363.9	0.0	0.0%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	23.8	100.0%
Irlande	BBB	54.5	0.0	0.0%
Italie	A	133.9	0.0	0.0%
Portugal	BBB	52.2	14.3	27.5%
Total	-	722.6	38.1	5.3%

* Flux actualisés au taux sans risque

TABLE 4.6 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 95.0%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0%

Le besoin en capital au titre du risque souverain au seuil de 95.0% du tableau 4.6 page 103 reste élevé, mais semble plus cohérent que celui du tableau 4.5 page 103. Il pourrait être exploité si parmi l'ensemble des valeurs VaR_s

pouvant être calculées, l'une d'elle permet de trouver une équivalence en terme de risque :

- La *Value-at-Risk* au seuil de 99.5% en prenant en compte les défauts de la première année
- La *Value-at-Risk* VaR_s en prenant en compte uniquement les défauts sur toutes les années futures pour un titre de maturité fixée

La recherche d'une telle équivalence n'a pas été étudiée dans ce mémoire. Ce besoin en capital au seuil de 95.0% reste élevé en comparaison du besoin en capital au titre du risque souverain dans Solvabilité 2 puisque ce dernier est nul. En revanche, une annualisation du besoin en capital peut apporter une autre réponse assez simple aux problèmes des deux autres méthodes.

Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2011 et taux de recouvrement de 0%					
Pays	**Notation Observée 2011**	**Encours***	**Année Moyenne**	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	19.5	4.1	4.3%
France	AAA	363.9	24.7	1.0	0.3%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	8.2	2.9	12.1%
Irlande	BBB	54.5	9.7	4.5	8.2%
Italie	A	133.9	19.9	5.2	3.9%
Portugal	BBB	52.2	15.8	2.7	5.2%
Total	-	722.6	-	20.4	2.8%

* Flux actualisés au taux sans risque

TABLE 4.7 – Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0%

Le besoin en capital annualisé au titre du risque souverain au seuil de 99.5% du tableau 4.7 page 104 semble réaliste et prend en considération les spécificités propres aux investisseurs *Buy and Hold*. Son niveau est plus faible que dans les tableaux précédents (tableau 4.5 page 103 et tableau 4.6 page 103) et semble raisonnable même s'il reste fortement plus important que le besoin en capital au titre du risque souverain dans solvabilité 2 (0.00%). Cette méthode s'approche d'une solution adaptée au calcul du besoin en capital d'un régime de retraite. Cependant, elle ne tient pas compte d'un taux de recouvrement qui permettrait de s'approcher des observations.

Résultats avec un taux de recouvrement de 25%

Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2011 et taux de recouvrement de 25%					
Pays	**Notation Observée 2011**	**Encours***	**Année Moyenne**	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	19.5	3.1	3.2%
France	AAA	363.9	24.7	0.8	0.2%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	8.2	2.2	9.1%
Irlande	BBB	54.5	9.7	3.4	6.2%
Italie	A	133.9	19.9	3.9	2.9%
Portugal	BBB	52.2	15.8	2.0	3.9%
Total	-	722.6		15.3	2.1%

* Flux actualisés au taux sans risque

TABLE 4.8 – Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 25%

Le besoin en capital du tableau 4.8 page 105 calculé avec un taux de recouvrement fixe de 25% conduit à un besoin en capital plus faible qu'avec un taux de recouvrement nul. Les mêmes conclusions qu'avec un taux de recouvrement nul peuvent être tirées. Néanmoins, l'utilisation d'un taux de recouvrement de 25% est plus cohérente avec la réalité dans la mesure où lors du défaut d'un Etat une partie du nominal peut être recouvrée comme cela a été observé sur le cas Grec en 2012. Cette dernière méthode paraît être la plus adaptée.

4.3.2 Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux avec notation 2012

Présentation Générale de la méthode

Comme dans la méthode précédente, cette variante se base sur l'hypothèse que l'investisseur est *Buy and Hold* et que de ce fait, il est soumis à un risque de défaut sur l'ensemble des flux futurs. De plus, la méthode considère qu'en cas de défaut l'année *An* alors les flux postérieurs à l'année *An* sont également en défaut. Le besoin en capital, pour chaque Etat, est calculé comme les flux en défaut actualisé au taux sans risque.
Cependant, contrairement à la méthode précédente, cette méthode se sert des notations prédites 2012 et non des notations observées 2011.

Présentation de la méthode

La méthode correspond à la méthode exposée dans la section précédente (*Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux avec notation 2011*), mais **en utilisant les notations prédites 2012 et non les notations observées 2011**.

Les résultats sont regroupés dans les tableaux 4.9 page 106, 4.10 page 107 et 4.11 page 107 dans le cas de l'absence de recouvrement et dans le tableau 4.12 page 108 dans le cas d'un recouvrement de 25%.

Résultats avec un taux de recouvrement de 0%

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2012 un taux de recouvrement de 0%				
Pays	**Notation Prédite 2012**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	79.2	84.1%
France	AAA	363.9	25.1	6.9%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	23.8	100.0%
Irlande	B/CCC/CC/C**	54.5	54.5	100.0%
Italie	A	133.9	104.1	77.8%
Portugal	BBB	52.2	43.0	82.3%
Total	-	722.6	329.7	45.6%

* Flux actualisés au taux sans risque
** Les défauts se basent sur les probabilités de défaut de la notation B

TABLE 4.9 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et un taux de recouvrement de 0%

Les résultats du calcul du besoin en capital au titre du risque souverain avec les notations prédites 2012 dans le tableau 4.9 page 106 est le même que dans le tableau 4.5 page 103 excepté pour l'Irlande. Les mêmes conclusions peuvent être tirées, à savoir que cette méthode conduit à un besoin en capital non réaliste.

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 95% - Notation 2012 un taux de recouvrement de 0%				
Pays	**Notation Prédite 2012**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	0.0	0.0%
France	AAA	363.9	0.0	0.0%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	23.8	100.0%
Irlande	B/CCC/CC/C**	54.5	50.1	91.9%
Italie	A	133.9	0.0	0.0%
Portugal	BBB	52.2	14.3	27.5%
Total	-	722.6	88.2	12.2%

* Flux actualisés au taux sans risque
** Les défauts se basent sur les probabilités de défaut de la notation B

TABLE 4.10 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 95.0%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et un taux de recouvrement de 0%

Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2012 et taux de recouvrement de 0%					
Pays	**Notation Prédites 2012**	**Encours***	**Année Moyenne**	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	19.5	4.1	4.3%
France	AAA	363.9	24.7	1.0	0.3%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	8.2	2.9	12.1%
Irlande	B/CCC/CC/C**	54.5	7.0	7.7	14.2%
Italie	A	133.9	19.9	5.2	3.9%
Portugal	BBB	52.2	15.8	2.7	5.2%
Total	-	722.6		23.7	3.3%

* Flux actualisés au taux sans risque
** Les défauts se basent sur les probabilités de défaut de la notation B

TABLE 4.11 – Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et taux de recouvrement de 0%

L'utilisation des notations prédites 2012 pour le calcul du besoin en capital dans le tableau 4.10 page 107 et le tableau 4.11 page 107 n'impacte que l'Irlande. La dégradation de l'Irlande provoque une augmentation du besoin en capital au titre du risque souverain en comparaison du besoin en capital calculé avec les notes observées 2011. Cette observation est logique dans la mesure où la probabilité de défaut augmente avec la dégradation. Les conclusions tirées précédemment avec les notations observées 2011 restent pertinentes.

Le lecteur peut s'interroger sur la légitimité d'utiliser les notations prédites 2012 dans le cadre du calcul du besoin en capital à la fin 2011. Néanmoins, ce calcul permet de remarquer l'augmentation importante du besoin en capital dans le cas d'une dégradation et également de servir de comparaison à l'estimation du besoin en capital par une méthode basée sur un modèle interne où l'utilisation de notations prédites est beaucoup plus pertinente.

Résultats avec un taux de recouvrement de 25%

Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2012 et taux de recouvrement de 25%					
Pays	**Notation Prédite 2012**	**Encours***	**Année Moyenne**	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	19.5	3.1	3.2%
France	AAA	363.9	24.7	0.8	0.2%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	8.2	2.2	9.1%
Irlande	B/CCC/CC/C**	54.5	7.0	5.8	10.7%
Italie	A	133.9	19.9	3.9	2.9%
Portugal	BBB	52.2	15.8	2.0	3.9%
Total	-	722.6		17.7	2.5%

* Flux actualisés au taux sans risque
** Les défauts se basent sur les probabilités de défaut de la notation B

TABLE 4.12 – Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et taux de recouvrement de 25%

Le lecteur remarquera que la seule différence entre les résultats avec les notations observées 2011 et les notations prédites 2012 réside dans l'Irlande. En effet, l'Irlande est le seul Etat dont des titres obligataires sont présents dans le portefeuille et dont la notation prédite par le modèle baisse. Cette méthode est la plus réaliste.

4.4 Méthode 2 : Calcul par une méthode basée sur les défauts à un an

4.4.1 Méthode 2 : Calcul par une méthode basée sur les défauts à un an avec notation 2011

Présentation Générale de la méthode

Cette seconde méthode de calcul du besoin en capital au titre du risque souverain se base sur l'hypothèse que le risque de défaut ne porte que sur la première année et que de ce fait, il est soumis à un risque de défaut uniquement la première année. De plus, la méthode considère qu'en cas de défaut l'année *1*, l'ensemble des flux postérieurs sont également en défaut. Le besoin en capital, pour chaque Etat, est calculé comme les flux en défaut actualisé au taux sans risque.

Présentation de la méthode

La méthode est la même que dans la section précédente (*Méthode 1 : Calcul par une méthode basée sur les défauts sur la durée totale des flux avec notation 2011*) excepté les taux de défaut utilisés pour modéliser les flux en défaut de chaque scénario. Ainsi, pour chaque scénario et pour chaque pays, une variable uniforme est simulée. Puis, la probabilité de défaut calculée pour la **première année** dans le chapitre précédent et modélisée sous forme de polynômes en fonction de la notation, est comparée à la valeur de la variable aléatoire ainsi simulée. En fonction du résultats, le flux est considéré comme en défaut ou non suivant la formule suivante :

$$\forall scen \in [\![1, Nb]\!], X_{scen} \rightarrow U(0,1)$$

$Avec \;\; k \in Etat \;\; et \;\; An \in [\![1, Ech]\!]$

$$\begin{cases} Si \;\; X_{scen} < probabilite \;\; de \;\; defaut(Not_k, \mathbf{1}) \;\; alors \;\; Flux_{k,Not_k,scen}(An) = 0 \\ Si \;\; X_{scen} > probabilite \;\; de \;\; defaut(Not_k, \mathbf{1}) \;\; alors \;\; Flux_{k,Not_k,scen}(An) = Flux_{k,Not_k}(An) \end{cases}$$

De plus, étant donné que seul le défaut de la première année est considérée dans cette méthode, le besoin en capital n'est pas annualisée et ce dernier est calculée de la manière suivante :

$$Besoin \;\; En \;\; Capital_{99.5\%} = VAR(99.5\%) = Perte \;\; En \;\; Capital \;\; Perte \;\; Souverain'_{k,E(99.5\% \times N)}$$

Les résultats sont regroupés dans le tableau 4.13 page 110 dans le cas de l'absence de recouvrement et dans le tableau 4.14 page 110 dans le cas d'un recouvrement de 25%

Résultats avec un taux de recouvrement de 0%

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2011 et taux de recouvrement de 0%				
Pays	**Notation Observée 2011**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	0.0	0.0%
France	AAA	363.9	0.0	0.0%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	23.8	100.0%
Irlande	BBB	54.5	0.0	0.0%
Italie	A	133.9	0.0	0.0%
Portugal	BBB	52.2	0.0	0.0%
Total	-	722.6	23.8	3.3%

* Flux actualisés au taux sans risque

TABLE 4.13 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0%

Le besoin en capital au titre du risque de défaut du tableau 4.13 page 110 est réaliste en moyenne, mais Etat par Etat, il est très important. Cependant, comme cela a été évoqué précédemment, cette méthode ne prend pas en compte les caractéristiques propres aux investisseurs *Buy and Hold* dans la mesure où seuls les défauts la première année sont pris en compte dans le calcul. Aussi, cette méthode n'est pas bien adaptée aux investisseurs *Buy And Hold* puisqu'elle ne considère pas le fait que ces derniers conservent les titres jusqu'à leur maturité.

Résultats avec un taux de recouvrement de 25%

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2011 et taux de recouvrement de 25%				
Pays	**Notation Observée 2011**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	0.0	0.0%
France	AAA	363.9	0.0	0.0%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	17.8	75.0%
Irlande	BBB	54.5	0.0	0.0%
Italie	A	133.9	0.0	0.0%
Portugal	BBB	52.2	0.0	0.0%
Total	-	722.6	17.8	2.5%

* Flux actualisés au taux sans risque

TABLE 4.14 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 25%

Le besoin en capital au titre du risque de défaut avec un taux de recouvrement de 25% du tableau 4.14 page 110 est réaliste. Les mêmes conclusions que dans le tableau précédent peuvent être tirées, tout en conservant à l'esprit que l'estimation avec un taux de recouvrement de 25% est plus réaliste que l'estimation avec un taux de 0% dans la mesure où une partie du nominal peut être recouvrée dans le cas du défaut d'un Etat souverain.

4.4.2 Méthode 2 : Calcul par une méthode basée sur les défauts à un an avec notation 2012

Présentation Générale de la méthode

Cette variante de la seconde méthode de calcul du besoin en capital au titre du risque souverain se base sur l'hypothèse que le risque de défaut ne porte que sur la première année et que de ce fait, il est soumis à un risque de défaut uniquement la première année. De plus, la méthode considère qu'en cas de défaut l'année *1* alors les flux postérieurs à l'année *An* sont également en défaut. Le besoin en capital, pour chaque Etat, est calculé comme les flux en défaut actualisé au taux sans risque. Contrairement à précédemment, cette méthode se sert des notations prédites 2012 et non des notations observées 2011.

Présentation de la méthode

La méthode correspond à la méthode précédemment exposée (*Méthode 2 : Calcul par une méthode basée sur les défauts à un an avec notation 2011*), mais **en utilisant les notations prédites 2012 et non les notations observées 2011**.

Les résultats sont regroupés dans le tableau 4.15 page 111 dans le cas de l'absence de recouvrement et dans le tableau 4.16 page 112 dans le cas d'un taux de recouvrement de 25%.

Résultats avec un taux de recouvrement de 0%

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2012 et taux de recouvrement de 0%				
Pays	**Notation Prédite 2012**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	0.0	0.0%
France	AAA	363.9	0.0	0.0%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	23.8	100.0%
Irlande	B/CCC/CC/C**	54.5	54.5	100.0%
Italie	A	133.9	0.0	0.0%
Portugal	BBB	52.2	0.0	0.0%
Total	-	722.6	78.3	10.8%

* Flux actualisés au taux sans risque
** Les défauts se basent sur les probabilités de défaut de la notation B

TABLE 4.15 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2012 et taux de recouvrement de 0%

Le besoin en capital au titre du risque de défaut avec les notations prédites 2012 du tableau 4.15 page 111 est réaliste, mais beaucoup plus élevé qu'avec les notations observées en 2011. La seule différence avec le tableau 4.13 page 110 se situe au niveau de l'Irlande qui, d'après les modélisations de la partie I, subie une dégradation de sa note.

Résultats avec un taux de recouvrement de 25%

Besoin en capital au titre du risque de défaut VaR 99.5% - Notation 2012 et taux de recouvrement de 25%				
Pays	**Notation Prédite 2012**	**Encours***	**Besoin**	**Besoin en pourcentage**
Espagne	AA	94.2	0.0	0.0%
France	AAA	363.9	0.0	0.0%
Grece	B/CCC/CC/C	23.8	17.8	75.0%
Irlande	B/CCC/CC/C**	54.5	40.9	75.0%
Italie	A	133.9	0.0	0.0%
Portugal	BBB	52.2	0.0	0.0%
Total	-	722.6	58.7	8.1%

* Flux actualisés au taux sans risque

** Les défauts se basent sur les probabilités de défaut de la notation B

TABLE 4.16 – Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2012 et taux de recouvrement de 25%

Le besoin en capital au titre du risque de défaut avec les notations prédites 2012 et un taux de recouvrement fixe de 25% du tableau 4.16 page 112 est réaliste, mais beaucoup plus élevé qu'avec les notations observées en 2011. Cette augmentation est logique dans la mesure où la dégradation de la notation de l'Irlande conduit à une probabilité de défaut plus élevée.

4.5 Méthode 3 : Calcul par une méthode "modèle interne"

4.5.1 Présentation de l'outil OSCARR

Le principe général de l'outil

L'outil OSCARR (*Outil de Simulation de Contrats d'Assurance vie et de Régimes de Retraite*)a été développé par *Indép'AM* et permet de simuler la plupart des données comptables et financières d'un régime de retraite par capitalisation jusqu'à disparition des engagements. Pour cela, l'outil modélise la plupart des flux de financiers, des flux de comportement et des postes du bilan de manière déterministe ou stochastique.

Les caractéristiques de l'outil

L'outil OSCARR possède plusieurs caractéristiques spécifiques :

Mode de simulation : L'outil OSCARR possède deux modes de traitement présentés dans les tableaux 4.3 page 113 et 4.4 page 114.

- *Mode déterministe* : Ce mode modélise un scénario moyen en simulant toutes les variables de manière déterministe. Ce mode permet de simuler sur une période longue l'évolution d'un régime de retraite, mais ce dernier ne permet pas d'obtenir les événements "rares" et les cas extrêmes qui peuvent intervenir. La figure 4.3 page 113 schématise le fonctionnement du programme en mode déterministe.
- *Mode stochastique* : Ce mode modélise un grand nombre de scénarios en simulant certaines variables de manière aléatoire. Contrairement au mode déterministe, ce mode permet d'obtenir une distribution de certaines variables aléatoires et également l'évolution moyenne du régime à partir de l'ensemble des scénarios simulés. La figure 4.4 page 114 schématise le fonctionnement du programme en mode stochastique.

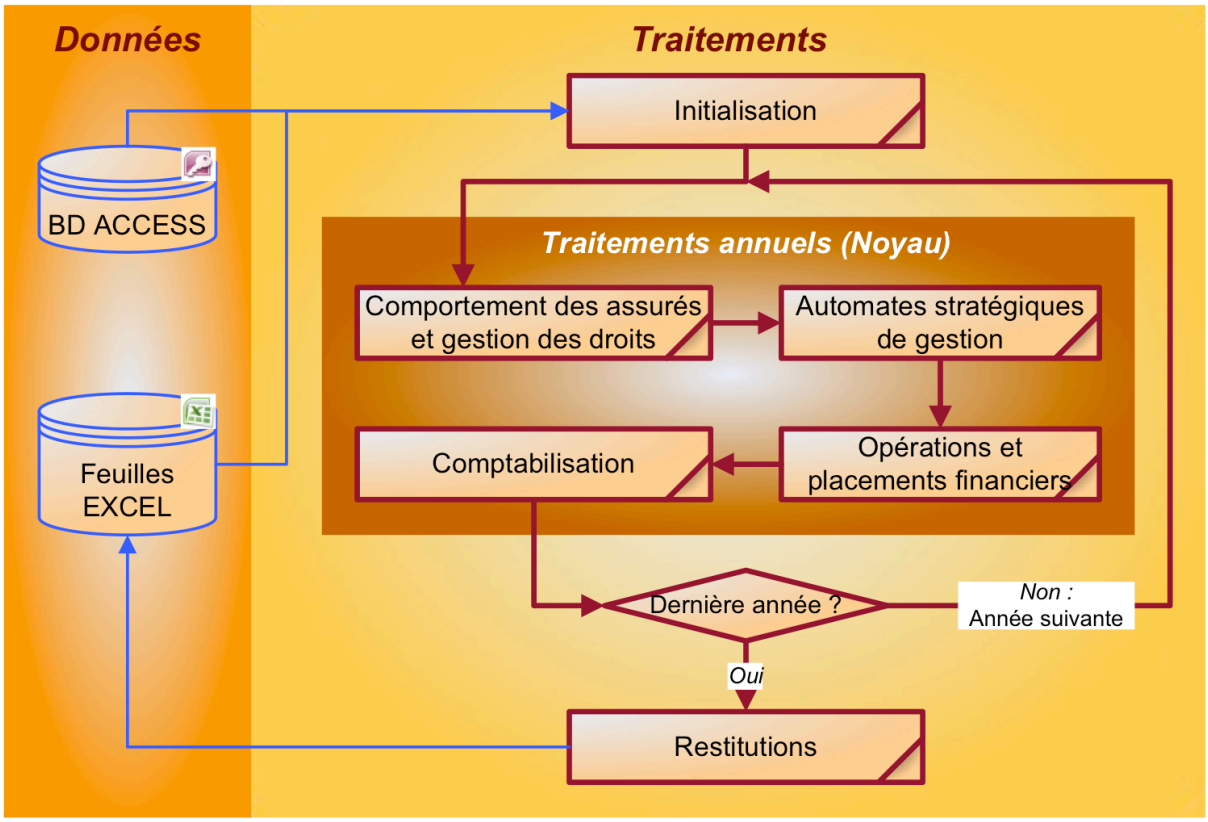

FIGURE 4.3 – Présentation du fonctionnement du mode déterministe dans OSCARR

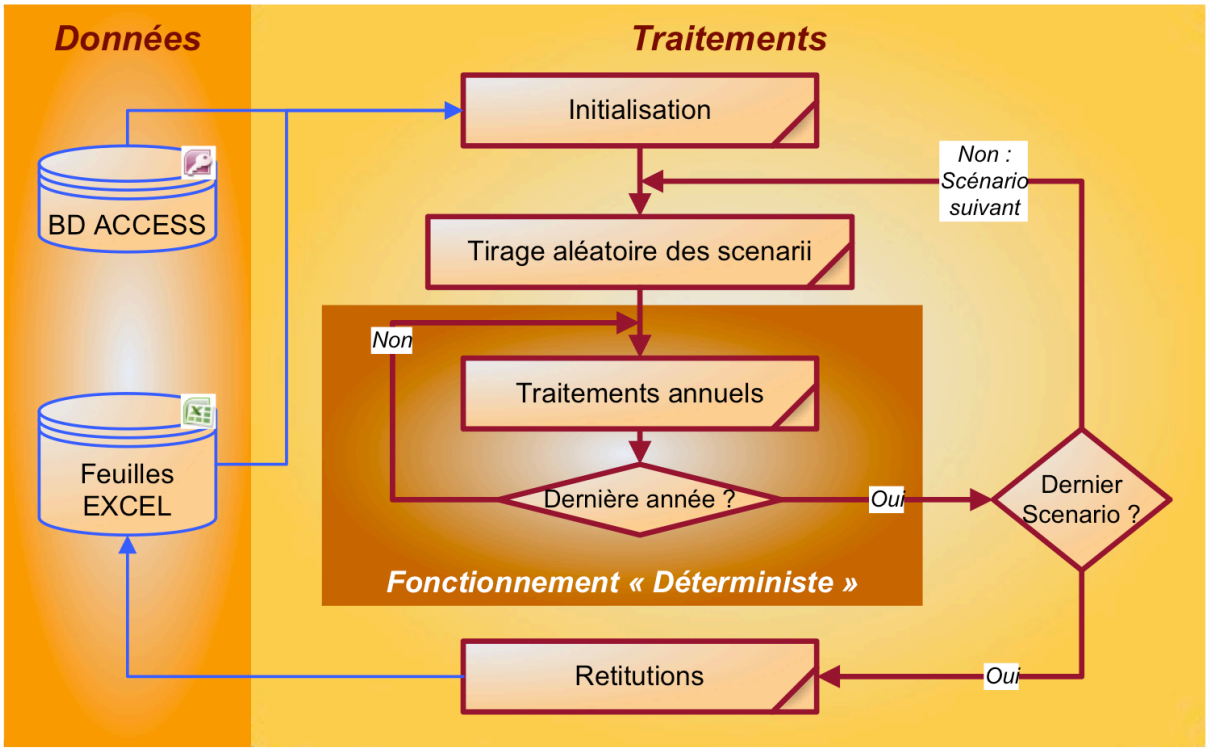

FIGURE 4.4 – Présentation du fonctionnement du mode stochastique dans OSCARR

Actifs : L'outil OSCARR permet de simuler 5 actifs différents :

- *Actif obligataire* : l'actif obligataire est décomposé en 528 catégories afin de décrire en détail le portefeuille obligataire. Ces catégories proviennent de la décomposition du portefeuille obligataire en zéro-coupons selon 3 critères : l'échéance de l'obligation, le type d'obligation (Etat ou Entreprise) et la notation de l'obligation. Par ailleurs, pour chaque catégorie, le taux actuariel à l'achat est renseigné.
- *Actif immobilier* : l'actif immobilier est composé d'une seule catégorie.
- *Actif action* : l'actif action est composé d'une seule catégorie.
- *Actif action "alternatif"* : l'actif action "alternatif" est composé d'une seule catégorie.
- *Actif OPCVM Obligation* : l'actif OPCVM obligataire est composé d'une seule catégorie. Dans le cas présent, la ligne d'actif OPCVM obligataire est nulle dans la mesure où il n'est pas traité par transparence.

Données du passif : Comme évoqué dans la présentation, le produit est composé de plusieurs générations de droits appelées "Strates" [1].

Les droits doivent être paramétrès de la manière suivante :

- génération de droits (Strate)
- âge
- catégorie d'adhérent
- sexe

1. L'outil OSCARR est capable de gérer jusque'à 10 Strates d'un même produit

Données du comportement : Les comportements sont paramétrès dans l'outil par :

- *Comportement de liquidation* : Le comportement de liquidation est paramètré par âge, catégorie d'adhérent, Strat et sexe.
- *Taux de nuptialité* : Le taux de nuptialité est paramètré par âge, catégorie d'adhérent, Strat et sexe.
- *Comportement de réversion* : Le comportement de réversion dans chacune des options possibles est paramètré dans une matrice en fonction du sexe et de la strate.
- *Comportement de départ à la retraite* : L'âge de départ à la retraite peut être modifié linéaire sur une période fixée pour prendre en compte les évolutions réglementaires.
- *Différence d'âge entre conjoints* : La différence d'âge entre conjoints est paramètrée par strate.

Données Comptables : De nombreuses données comptables sont restituées par l'outil pour chaque année de la période de simulation. Ces données comptables sont entre autres :

- *les postes du bilan et du hors bilan*
  - *Postes de l'actif*
    - Placements, autres actifs
    - Déficits financiers reportables
  - *Postes du passif*
    - Fonds propres, réserve de capitalisation, résultats
    - PM par strate, PAF, PRE, PPE, amortissements immobiliers et dettes
- *les postes du compte de résultat*
  - *Les produits*
    - Cotisations encaissées (Chiffre d'affaires)
    - Produits financiers
  - *Les charges*
    - Chargement de gestion et d'acquisition, impôts, amortissements
    - Variation de PM, produits financiers distribués, prestations, prélèvements sociaux, rachats, versements uniques par strate
    - Dotations aux provisions réglementées (PAF, PRE, PPE, RC)

Flux : L'outil OSCARR permet de modéliser de nombreux flux tels que :

- *les flux encaissés*
  - *Cotisations*
  - *Produits financiers*
- *les flux décaissés*
  - *Prestations garanties et Participation aux bénéfices*
  - *Rachats, VU et capitaux décès*
  - *Frais de gestion et d'acquisition*
  - *Impôts*
- *les flux financiers*
  - *Traçabilité des achats et des ventes pour chaque classe d'actif*
  - *Traçabilité des remboursements pour chaque classe d'actif*
  - *Traçabilité des revenus et des plus-values réalisées pour chaque classe d'actif*

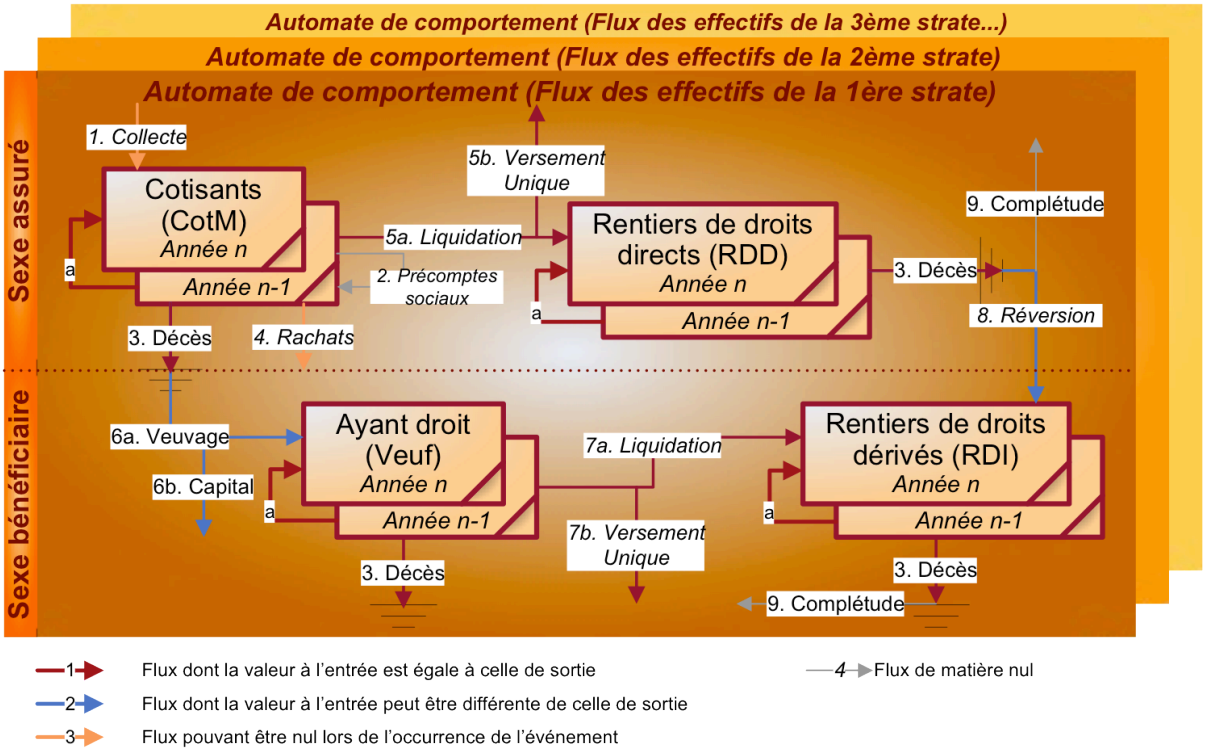

FIGURE 4.5 – Présentation du comportement des adhérents dans OSCARR

Automate : Une des caractéristiques essentielles de l'outil OSCARR est de posséder plusieurs automates pour modéliser les comportements des gestionnaires de portefeuilles. En effet, afin de reproduire au mieux les réactions du gestionnaire de portefeuille en fonction des orientations stratégiques de gestion, des automates permettant le pilotage du rendement comptable ainsi que des automates d'allocation d'actifs ont été créés.

- *Automate d'allocation de l'actif obligataire* : Cet automate possède trois modes permettant d'allouer l'actif obligataire.
  - *Mode fixe* : L'allocation de l'actif obligataire est réparti entre les 528 catégories possibles (Echéance x Notation x Type d'obligation). L'utilisateur choisit le pourcentage à attribuer dans chaque catégorie.
  - *Mode duration* : Dans ce mode, la duration du passif doit être calculée préalablement pour chaque année de la période de simulation. Ensuite, pour chaque type d'obligation (Souveraine ou Privée), l'utilisateur choisit la catégorie de notation et le pourcentage de l'actif obligataire à attribuer dans chacune des échéances proportionnelles à la duration du passif préalablement calculée.
  - *Mode gap* : Dans ce mode, les flux du passif doivent être calculés préalablement pour chaque année de la période de simulation. Ensuite, les investissements ont lieu dans les échéances présentant des manques de trésorerie, c'est-à-dire lorsque le décaissement de passif sera supérieur au flux obligataire.
- *Automate d'allocation de l'actif immobilier* : L'automate d'allocation de l'actif immobilier ne comporte qu'un seul mode consistant en une allocation fixe.
- *Automate d'allocation de l'actif OPCVM* : Cet automate ne présente à l'heure actuelle qu'un unique mode fixe qui consiste à la part d'actif que doit représenter l'OPCVM obligataire dans le portefeuille.

- *Automate d'allocation de l'actif action* : L'automate d'allocation de l'actif action comporte trois modes. Ces modes sont décrits ci-dessous :
  - *Mode duration* : Ce mode définit la part action à allouer en fonction de la duration du passif et de plusieurs Paramètres (a et b). Le plancher Action est définit comme suit :

$$PlancherAction(An)) = max\left[0; a \times \frac{duration(An-1)}{100} + b\right]$$

  - *Mode duration et PMV* : Ce mode définit la part action à allouer en fonction de la duration du passif, des Plus/Moins Values potentielles et de plusieurs Paramètres (a et b). Le plancher Action est définit comme suit :

$$PlancherAction(An)) = max\left[0; a \times \frac{duration(An-1)}{100} + PMVPotentielle(An-1) + b\right]$$

  - *Mode duration et MS* : Ce mode définit la part action à allouer en fonction de la duration du passif, du taux de couverture de la marge de solvabilité et de plusieurs Paramètres (a et b). Le plancher Action est définit comme suit :

$$PlancherAction(An)) = max\left[0; a \times \frac{duration(An-1)}{100} \times RatioMS(An-1) + b\right]$$

- *Automate de pilotage du rendement comptable* : Cet automate possède quatre modes permettant de piloter le rendement comptable. En effet, afin que le taux technique moyen garanti aux adhérents soit atteint, il est nécessaire de piloter le régime de retraite (c'est le rôle de l'adossement actif-passif). Pour cela, un automate a été développé dans l'outil OSCARR afin de reproduire au plus prés les comportements et réactions des gérants de fonds. Pour cela, il définit un rendement cible, en fonction de plusieurs Paramètres et variables explicatives. L'automate de pilotage du rendement comptable essaie alors de l'atteindre :
  - *Mode 1* : Ce mode définit le rendement cible en fonction du Taux de couverture de la marge de Solvabilité et le Taux technique Moyen. Ce mode est cohérent avec la pratique, mais très instable et difficile à calibrer.
  - *Mode 2* : Ce mode définit également le rendement cible en fonction du Taux de couverture de la marge de Solvabilité et le Taux technique Moyen. Ce mode est primaire et pas en accord avec la pratique.
  - *Mode 3* : Ce mode définit le rendement cible en fonction du taux de marché à 10 ans et d'un coefficient additif. Ce mode est instable en raison des modèles utilisés pour simuler la courbe des taux.
  - *Mode 4* : Ce mode de l'automate est utilisé dans les simulations de Monte-Carlo présentées ultérieurement. Ce mode définit le rendement cible en fonction de la Plus/Moins Value Potentielle Totale, du Taux technique Moyen et de Paramètres (a, b et c). Par retour d'expérience, ce mode est le plus stable et le plus intelligent, il est recommandé dans le cas d'une stratégie automatique. Le rendement cible est définit comme suit :
    $RendementCible(An)) =$

$$a \times max\left[0; \frac{VBIndices(An-1) - VCIndices(An-1)}{VCTotale(An-1)} - b\right] + c \times TauxTechniqueMoyen(An)$$

4.5.2 Méthode 3 : Calcul par une méthode "modèle interne" avec notation 2011

Paramétrage

Les Paramètres utilisés dans la modélisation par l'outil OSCARR sont regroupés dans les tableaux 4.17 page 118, 4.19 page 118 et 4.20 page 119. Par ailleurs, le paramétrage particulier de l'automate d'allocation de l'actif obligataire (lors du réinvestissement de la trésorerie issue des remboursements, des dividendes...) est présenté dans le tableau 4.6 page 119.

Paramètres de modélisation des actifs financiers	
Espérance du rendement des actions	1.00 %
Volatilité du rendement des actions	15.00 %
Dividende actions	1.50 %
Espérance du rendement des actions alternatives	2.00 %
Volatilité du rendement des actions alternatives	20.00 %
Dividende actions alternatives	1.50 %
Paramètres modèle de Vasicek	s=0.80%
	r_0=1.00%
	a=50%
	b=4.00% (en espérance)
Duration de l'OPCVM Obligataire	4
Frais de l'OPCVM Obligataire	0.70 %
Corrélation entre les actifs	Aucun

TABLE 4.17 – Paramètres de modélisation des actifs financiers

Nota : La valeur de b des Paramètres de Vasicek pour chaque année et chaque scénario est tirée aléatoirement entre 0% et 8% à partir d'un processus avec retour à la moyenne.

L'outil OSCARR utilise la matrice de transition des notations 4.18 page 118 identique à celle utilisée dans la partie II pour modéliser le passage d'une notation à une autre. La transition d'une notation à une autre est déterminée aléatoirement pour chaque année et chaque scénario en fonction de la matrice.

An → An+1	AAA	AA	A	BBB	BB	B	NN	D	Total
AAA	96%	4%	-	-	-	-	-	-	100%
AA	4%	92%	3%	-	-	1%	-	-	100%
A	-	3%	91%	6%	-	-	-	-	100%
BBB	-	-	6%	89%	3%	1%	-	-	100%
BB	-	-	-	6%	88%	4%	1%	1%	100%
B	-	-	-	-	9%	86%	5%	1%	100%
NN & Spec	-	-	-	-	-	50%	38%	13%	100%
D	-	-	-	-	-	-	-	**100%**	100%

TABLE 4.18 – Matrice de transition des notations des Etats (historique 1990-2010) corrigée avec les défauts

Paramètres des automates : Modes des Automates	
Automate d'allocation de l'OPCVM Obligataire	10.00%
Automate d'allocation de l'immobilier	1.00%
Automate d'allocation de l'actif obligataire	Duration
Automate de pilotage du rendement comptable	Plus/Moins Value Globale et Taux Technique
Automate de l'allocation action	Duration (a=20%,b=16%)
Automate de la PB	Fixe (0.50% sur le taux technique 2%)

TABLE 4.19 – Paramètres des automates

Comme le montre le tableau 4.6 page 119, les investissements obligataires sont répartis entre les obligations souveraines AAA, les obligations souveraines AA et les obligations privées A. Les maturités de ces obligations sont proportionnelles à la duration du passif (pour obtenir la duration du passif pour chaque année de la modélisation, le programme a été préalablement lancé en mode déterministe). Ce paramétrage est cohérent avec les orientations stratégiques d'investissement d'un régime de retraite par capitalisation.

Répartition Obligataire en mode Fixe/Duration				
	Etat		Privé	
	Part	Note	Part	Note
Monet	**10,0%**			
0,1 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
0,2 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
0,3 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
0,4 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
0,5 Dur	0,0%	AA	**10,0%**	A
0,6 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
0,7 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
0,8 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
0,9 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
1,0 Dur	**20,0%**	AA	**10,0%**	A
1,1 Dur	**5,0%**	AA	0,0%	A
1,2 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
1,3 Dur	**5,0%**	AA	0,0%	A
1,4 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
1,5 Dur	**10,0%**	AA	0,0%	A
1,6 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
1,7 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
1,8 Dur	**10,0%**	AA	0,0%	A
1,9 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2 Dur	**10,0%**	AA	0,0%	A
2,1 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2,2 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2,3 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2,4 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2,5 Dur	**10,0%**	AAA	0,0%	A
2,6 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2,7 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2,8 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
2,9 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
3 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
3,1 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
3,2 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
3,3 Dur	0,0%	AA	0,0%	A
Somme	**80%**		**20%**	
Total	**100%**			

FIGURE 4.6 – Paramétrage de l'automate d'allocation de l'actif obligataire

Paramètres de modélisation Passif	
Ecart d'âge homme (maître) - femme (conjoint)	3 ans
Ecart d'âge femme (maître) - homme (conjoint)	-2 ans
Aléa sur la mortalité	Aucun
Aléa sur les rachats	Aucun
Chiffre d'affaires	Aucun

TABLE 4.20 – Paramètres de modélisation Passif

L'annexe A.1 présente le modèle du Brownien Géométrique qui est utilisé pour modéliser les actions, les actions alternatives et l'immobilier.

L'annexe A.2 présente le modèle de Vasicek qui est utilisé pour modéliser les taux courts.

Par ailleurs, l'annexe B fait quelques rappels sur le lemme d'Ito et sur son application au modèle du Brownien Géométrique.

Calcul du besoin de capital

Le besoin en capital est calculé en plusieurs étapes. Les étapes sont les suivantes :

Etape 1 : Calcul de la Perte en capital sans risque souverain (S.R.S), c'est-à-dire avec un taux de recouvrement de 100%. Cette première étape consiste à calculer le besoin en capital sur le portefeuille sans prendre en compte le risque de défaut des Etats, mais en prenant en compte les variations de notation.
Pour cela, l'outil OSCARR est paramètré de façon à ce qu'en cas de défaut, la totalité de la valeur comptable est récupérée et réinvestie.
Pour calculer la perte sur le portefeuille, une méthode de Monte-Carlo est appliquée et la perte à 99.5% est sélectionnée à partir des scénarios calculés pour définir le besoin en capital.

Pour chacune des réalisations $scen$ des Nb scénarios, la perte en capital sans risque souverain est calculé de la manière suivante :

$\forall scen \in [\![1; Nb]\!]$,

$$Excedent\ Actif\ Sur\ Passif^{S.R.S}_{An,scen} = Actif^{S.R.S}_{An,scen} - Passif^{S.R.S}_{An,scen}$$

Avec :

- $Actif^{S.R.S}_{An,scen}$: Valeur de marché en An de l'actif pour le scénario $scen$.
- $Passif^{S.R.S}_{An,scen}$: Valeur actualisée en An avec la courbe des taux de marché en An des flux futurs du passif pour le scénario $scen$.

L'$Excedent\ Actif\ Sur\ Passif$ correspond à la différence entre le montant de l'actif en valeur de marché et le montant des flux de prestations actualisés avec la courbe des taux sans risque. Cet $Excedent\ Actif\ Sur\ Passif$ représente donc le montant que l'entreprise possède en excès pour couvrir ses prestations futures dans un scénario donné.

$\forall scen \in [\![1; Nb]\!]$,

$$Perte\ En\ Capital^{S.R.S}_{An,scen} = Excedent\ Actif\ Sur\ Passif^{S.R.S}_{An,scen} - \frac{Excedent\ Actif\ Sur\ Passif^{S.R.S}_{An+1,scen}}{1 + taux\ sans\ risque}$$

La $Perte\ En\ Capital$ peut s'interpréter comme la variation d'$Excedent\ Actif\ Sur\ Passif$ en un an en prenant en compte les taux (i.e : Actualisation de l'$Excedent\ Actif\ Sur\ Passif$ dans un an au taux de marché).
Pour chaque scénario, l'entreprise d'Assurance doit se protéger contre la baisse de son $Excedent\ Actif\ Sur\ Passif$ et donc posséder le capital nécessaire pour se couvrir contre les risques.

Etape 2 : Calcul de la *Perte en capital* avec risque souverain (A.R.S), c'est-à-dire avec un taux de recouvrement de 0%. Cette seconde étape consiste à calculer la perte en capital sur le portefeuille en prenant en compte le risque de défaut des Etats.
Pour chacune réalisation $scen$ des Nb scénarios, la perte en capital avec risque souverain est calculé de la manière suivante :
$\forall scen \in [\![1; Nb]\!]$,

$$Excedent\ Actif\ Sur\ Passif^{A.R.S}_{An,scen} = Actif^{A.R.S}_{An,scen} - Passif^{A.R.S}_{An,scen}$$

Avec :
- $Actif_{An,scen}^{A.R.S}$: Valeur de marché en An de l'actif.
- $Passif_{An,scen}^{A.R.S}$: Valeur actualisée en An avec la courbe des taux de marché en An des flux futurs du passif

$\forall scen \in [\![1; Nb]\!]$,

$$Perte\ En\ Capital_{An,scen}^{A.R.S} = Excedent\ Actif\ Sur\ Passif_{An,scen}^{A.R.S} - \frac{Excedent\ Actif\ Sur\ Passif_{An+1,scen}^{A.R.S}}{1 + taux\ sans\ risque}$$

Etape 3 : Calcul de la *Perte en capital* avec risque souverain et un taux de recouvrement de 25% (Tx.Rec.25%). Cette troisième étape consiste à calculer le besoin en capital sur le portefeuille en prenant en compte le risque de défaut des Etats et un taux de recouvrement de 25%.
Pour chacune réalisation $scen$ des N scénarios, la perte en capital avec risque souverain est calculé de la manière suivante :
$\forall scen \in [\![1; Nb]\!]$,

$$Excedent\ Actif\ Sur\ Passif_{An,scen}^{Tx.Rec.25\%} = Actif_{An,scen}^{Tx.Rec.25\%} - Passif_{An,scen}^{Tx.Rec.25\%}$$

Avec :
- $Actif_{An,scen}^{Tx.Rec.25\%}$: Valeur de marché en An de l'actif.
- $Passif_{An,scen}^{Tx.Rec.25\%}$: Valeur actualisée en An avec la courbe des taux de marché en An des flux futurs du passif

$\forall scen \in [\![1; Nb]\!]$,

$$Perte\ En\ Capital_{An,scen}^{Tx.Rec.25\%} = Excedent\ Actif\ Sur\ Passif_{An,scen}^{Tx.Rec.25\%} - \frac{Excedent\ Actif\ Sur\ Passif_{An+1,scen}^{Tx.Rec.25\%}}{1 + taux\ sans\ risque}$$

Etape 4 : Les $Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{A.R.S}$, $Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{Tx.Rec.25\%}$ et $Besoin\ En\ Capital_{0,scen}^{S.R.S}$ sont triés :

$$\forall scen \in [\![1; Nb]\!], Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{'S.R.S} = TRI(Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{S.R.S})$$

$$\forall scen \in [\![1; Nb]\!], Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{'Tx.Rec.25\%} = TRI(Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{Tx.Rec.25\%})$$

$$\forall scen \in [\![1; Nb]\!], Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{'A.R.S} = TRI(Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{A.R.S})$$

Etape 5 : La $Perte\ En\ Capital_{0,i}^{'S.R.S}$ représentant la perte à 0.5% est alors sélectionnée afin de définir le $Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{S.R.S}$, correspondant au besoin en capital sans le risque souverain sous Solvabilité II :

$$Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{'S.R.S} = Perte\ En\ Capital_{0,E(99,5\% \times N)}^{'S.R.S}$$

Etape 6 : La $Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{'Tx.Rec.25\%}$ représentant la perte à 0.5% est alors sélectionné afin de définir le $Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{Tx.Rec.25\%}$, correspondant au besoin en capital avec risque souverain et un taux de recouvrement de 25% sous Solvabilité II :

$$Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{'Tx.Rec.25\%} = Perte\ En\ Capital_{0,E(99,5\% \times N)}^{'Tx.Rec.25\%}$$

Etape 7 : La $Perte\ En\ Capital_{0,scen}^{'A.R.S}$ représentant la perte à 0.5% est alors sélectionné afin de définir le $Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{A.R.S}$, correspondant au besoin en capital avec le risque souverain sous Solvabilité II :

$$Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{'A.R.S} = Perte\ En\ Capital_{0,E(99,5\% \times N)}^{'A.R.S}$$

Etape 8 : Le besoin en capital au titre du risque souverain est alors calculé suivant deux manières.

Le premier calcul manière considère que le taux de recouvrement est de 0% et qu'en cas de défaut, aucun

montant n'est récupéré par l'investisseur.

$$\boxed{Besoin\ En\ Capital\ Risque\ Souverain_{0,SII} = Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{S.R.S} - Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{A.R.S}}$$

Le résultat correspond à la différence entre le *Besoin En Capital* sans risque souverain et le *Besoin En Capital* avec risque souverain. Le nombre de scénarios étant important (20 000), la différence entre les deux résultats ne restitue que le risque de défaut souverain dans le portefeuille, ce qui est l'objectif.

Le second calcul manière considère que le taux de recouvrement est de 25% et qu'en cas de défaut, un montant est donc récupéré par l'investisseur.

$$\boxed{Besoin\ En\ Capital\ Risque\ Souverain_{0,SII,Tx.Rec.25\%} = Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{S.R.S} - Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{Tx.Rec.25\%}}$$

Le résultat correspond à la différence entre le *Besoin En Capital* sans risque souverain et le *Besoin En Capital* avec risque souverain et un taux de recouvrement de 25%. Le nombre de scénarios étant important (20 000), la différence entre les deux résultats ne restitue que le risque de défaut souverain et un taux de recouvrement de 25% dans le portefeuille, ce qui est l'objectif.

Le *Besoin En Capital Risque Souverain* correspond donc à la perte à 99.5% (Ce qui correspond à la perte maximale qui arrive une fois tous les 200 ans) au titre du risque souverain.

Remarque sur la transition entre notations

Dans le mode stochastique, la notation l'année *An+1* est déterminée à partir de la matrice de transition des notations à un an, de la notation l'année *An* et d'une variable uniforme *U(0,1)* tirée aléatoirement pour chaque année.

$$X \to U(0,1) \ \ et \ \ k \in [\![0; Note_{max} - 1]\!]$$

$$Si \ \ Note_{An} = i \ \ et \ \ \sum_{j=1}^{k} M_{i,j} < X \leq \sum_{j=1}^{k+1} M_{i,j} \ \ alors \ \ Note_{An+1} = k$$

Dans l'outil OSCARR, il n'y a pas de distinction de transition de notations en fonction de l'échéance des titres. Ainsi, lorsque, par exemple, le tirage indique une transition de la notation AAA l'année *An* à la notation AA l'année *An+1*, cela a un effet sur toutes les échéances.

Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 100%)

La figure 4.7 page 123 présente l'évolution du portefeuille obligataire par notation dans le cas déterministe sans risque souverain avec les Notes observées 2011 (scénario moyen) au cours du temps du portefeuille par notation. La figure 4.8 page 123 présente la densité de l'indicateur lors des simulations (N=20 000) sur des intervalles de même largeur (excepté les deux intervalles extrêmes) dans le cas de scénarios stochastiques sans risque souverain avec les Notes observées 2011.

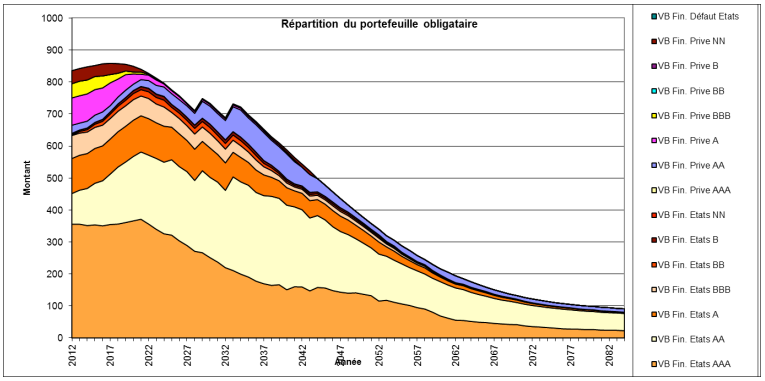

FIGURE 4.7 – Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain

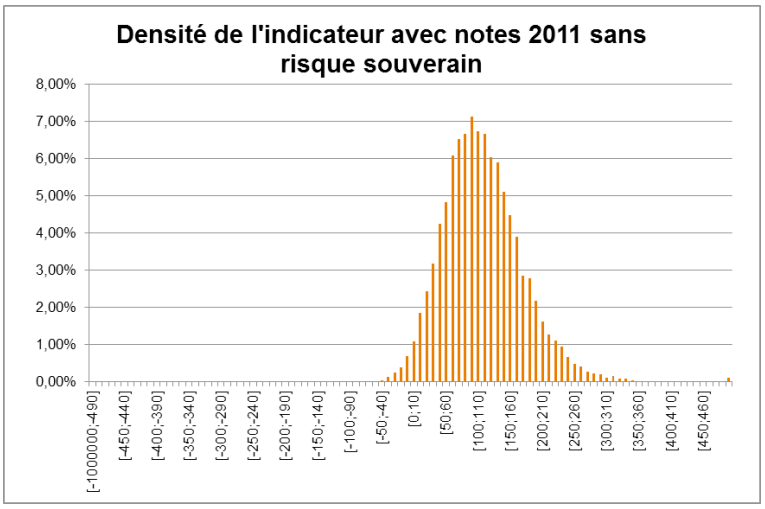

FIGURE 4.8 – Densité des scénarios - Notes observées 2011 sans risque souverain

Résultats des simulations de Monte-Carlo Notes observées 2011 sans risque souverain		
Scénario	**Valeur**	**En pourcentage de l'actif**
99	-19.6 M€	-1.7%
100	-19.6 M€	-1.7%
101	-19.4 M€	-1.7%

TABLE 4.21 – Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes observées 2011 sans risque souverain

Le tableau 4.21 page 123 montre que la Value-at-Risk à 99.5% pour 20 000 scénarios dans le cas de l'absence de risque souverain avec les Notes observées 2011, est de -19.6 M€.

Résultats avec risque souverain (taux de recouvrement de 0%)

La figure 4.9 page 124 présente l'évolution du portefeuille obligataire par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes observées 2011 (scénario moyen) au cours du temps du portefeuille par notation.

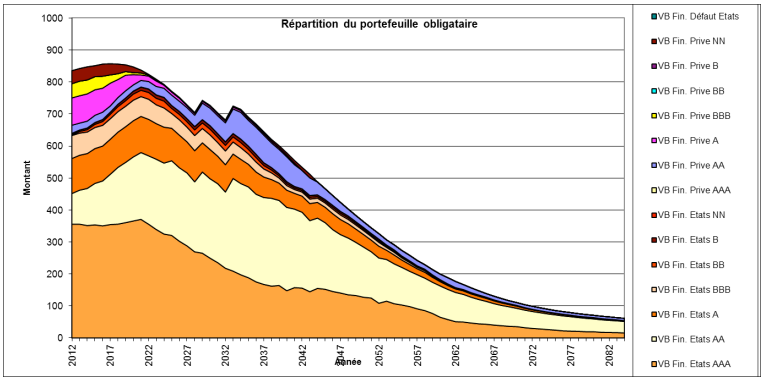

FIGURE 4.9 – Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain

Dans le scénario déterministe, le lecteur remarquera que l'encours final dans le cas de la prise en compte du risque souverain (figure 4.9) est inférieur à l'encours final dans le cas de l'absence de risque souverain (figure 4.7). Ce phénoméne est normal puisque dans le cas de la prise en compte du risque souverain une partie des titres sont en défaut au cours de la modélisation.

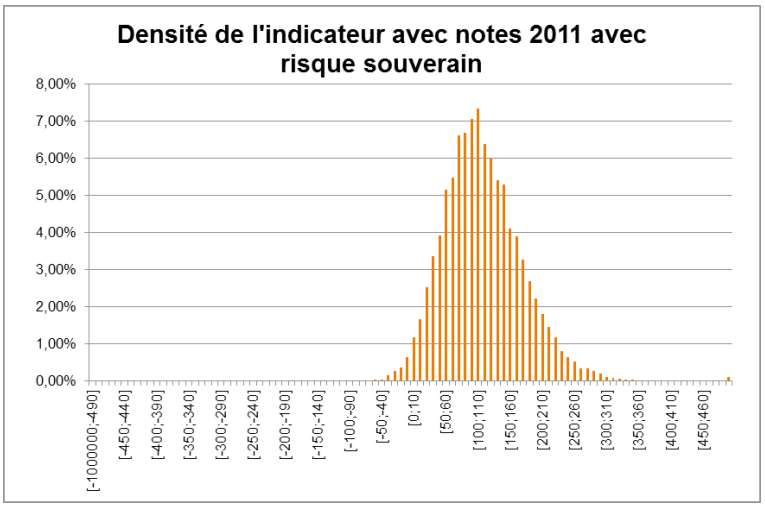

FIGURE 4.10 – Densité des scénarios - notes observées 2011 sans risque souverain

Résultats des simulations de Monte-Carlo notes observées 2011 avec risque souverain		
Scénario	**Valeur**	**En pourcentage de l'actif**
99	-22.8 M€	-2.0%
100	-22.4 M€	-1.9%
101	-22.3 M€	-1.9%

TABLE 4.22 – Résultats de la méthode de Monte-Carlo - notes observées 2011 avec risque souverain

Le tableau 4.22 page 124 montre que la Value-at-Risk à 99.5% pour 20 000 scénarios dans le cas de présence de risque souverain avec les notes observées 2011, est de -22.4 M€.

Résultats avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

La figure 4.11 page 125 présente l'évolution du portefeuille obligataire par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes observées 2011 et taux de recouvrement de 25% (scénario moyen) au cours du temps du portefeuille par notation. La figure 4.12 page 125 présente la densité de l'indicateur lors des simulations (N=20 000) sur des intervalles de même largeur (excepté les deux intervalles extrêmes) dans le cas de scénarios stochastiques avec risque souverain avec les notes observées 2011 et taux de recouvrement de 25%.

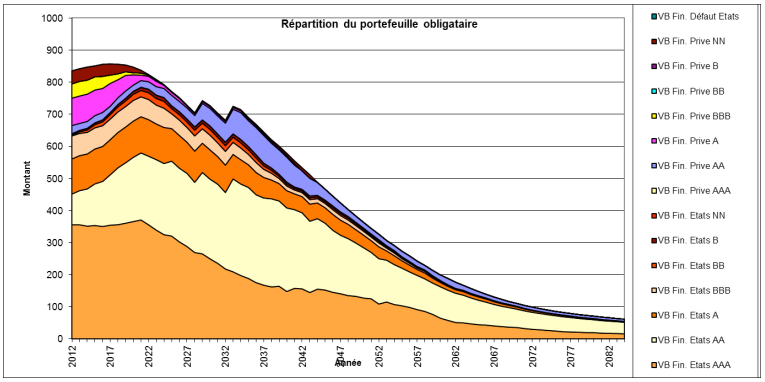

FIGURE 4.11 – Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

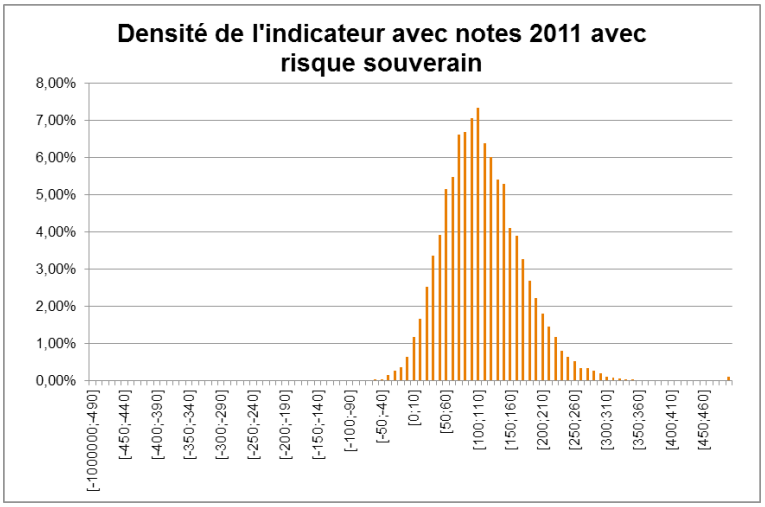

FIGURE 4.12 – Densité des scénarios - notes observées 2011 sans risque souverain et taux de recouvrement de 25%

Résultats des simulations de Monte-Carlo Notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%		
Scénario	**Valeur**	**En pourcentage de l'actif**
99	-20.7 M€	-1.8%
100	-20.5 M€	-1.8%
101	-20.4 M€	-1.8%

TABLE 4.23 – Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

Le tableau 4.23 page 125 montre que la Value-at-Risk à 99.5% pour 20 000 scénarios dans le cas de présence de risque souverain avec les notes observées 2011, est de -20.5 M€.

Résultat du calcul du besoin de capital

Le besoin en capital au titre du risque souverain est alors calculé suivant deux méthodes. Les résultats de ces calculs avec les notations prédites 2011 sont présentés dans le tableau 4.24 page 126.

Le premier calcul considère que le taux de recouvrement est de 0% et qu'en cas de défaut, aucun montant n'est récupéré par l'investisseur.

$$Besoin\ En\ Capital\ Risque\ Souverain_{0,SII} = Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{S.R.S} - Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{A.R.S}$$

Le résultat correspond à la différence entre le *Besoin En Capital* sans risque souverain et le *Besoin En Capital* avec risque souverain. Le nombre de scénarios étant important (20 000), la différence entre les deux résultats ne restitue que le risque de défaut souverain dans le portefeuille sans erreur de modélisation, ce qui est l'objectif.

Le second calcul considère que le taux de recouvrement est de 25% et qu'en cas de défaut, un montant est donc récupéré par l'investisseur.

$$Besoin\ En\ Capital\ Risque\ Souverain_{0,SII,Tx.Rec.25\%} = Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{S.R.S} - Besoin\ En\ Capital_{0,SII}^{Tx.Rec.25\%}$$

Le résultat correspond à la différence entre le *Besoin En Capital* sans risque souverain et le *Besoin En Capital* avec risque souverain et un taux de recouvrement de 25%. Le nombre de scénarios étant important (20 000), la différence entre les deux résultats ne restitue que le risque de défaut souverain et un taux de recouvrement de 25% dans le portefeuille, ce qui est l'objectif.

Résultats : Besoin en Capital au titre du risque souverain			
taux de recouvrement	**Année des notations**	**Value-at-Risk (99.5%)**	**En pourcentage de l'actif**
0%	2011	2.9 M€	0.3%
25%	2011	1.0 M€	0.1%

TABLE 4.24 – Besoin en capital avec les notations 2011

L'annexe G page 171 présente des graphiques supplémentaires pour chaque résultat de cette section. Les graphiques présentent les achats obligataires au cours du temps dans le cas du scénario moyen, les ventes obligataires au cours du temps dans le cas du scénario moyen ainsi que la fonction de répartition dans le cas des scénarios stochastiques.

4.5.3 Méthode 3 : Calcul par une méthode "modèle interne" avec notation 2012

Calcul du besoin de capital

Comme dans la méthode 1, une méthode identique se basant sur les notations prédites pour 2012 par le meilleur modèle est mise en place.

En pratique, les Etats dont la notation prédite 2012 par le modèle a évolué par rapport à la notation observée 2011 vont avoir une notation égale à cette notation prédite 2012 au cours des données 2011 et 2012. Le structure globale du portefeuille reste la m'me (taux à l'achat par échéance et flux aux différentes échéances), seule la valeur boursière de ces Etats va être modifiée du fait de la différence entre les spreads des différentes notations [2].

2. La valeur boursière du portefeuille utilisée pour calculer les pourcentages dans cette partie est la valeur boursière avant changement des notations

Résultats sans risque souverain

La figure 4.13 page 127 présente l'évolution du portefeuille obligataire par notation dans le cas déterministe sans risque souverain avec les notes prédites 2012 (scénario moyen) au cours du temps du portefeuille par notation. La figure 4.14 page 127 présente la densité de l'indicateur lors des simulations (N=20 000) sur des intervalles de même largeur (excepté les deux intervalles extrêmes) dans le cas de scénarios stochastiques sans risque souverain avec les notes prédites 2012.

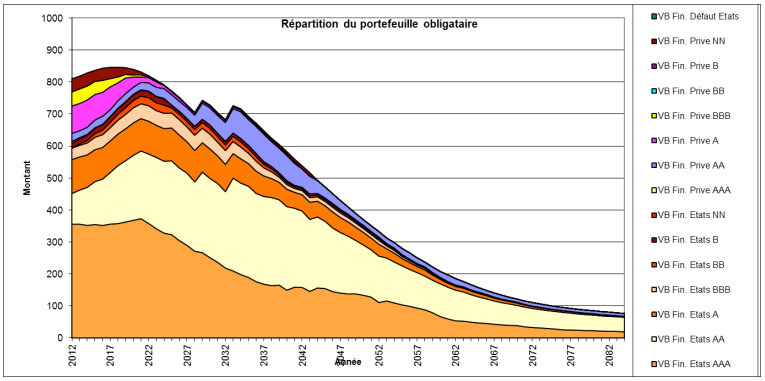

FIGURE 4.13 – Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes prédites 2012 sans risque souverain

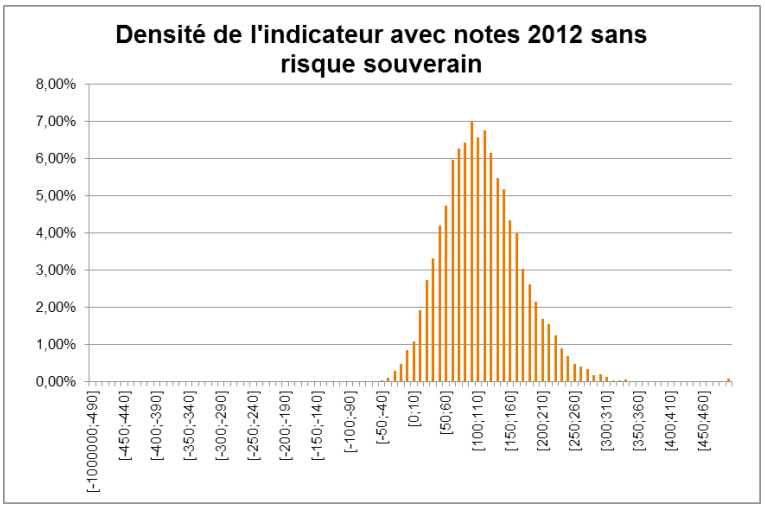

FIGURE 4.14 – Densité des scénarios - Notes prédites 2012 sans risque souverain

Résultats des simulations de Monte-Carlo Notes prédites 2012 sans risque souverain		
Scénario	**Valeur**	**En pourcentage de l'actif**
99	-21.1 M€	-1.8%
100	-20.9 M€	-1.8%
101	-20.9 M€	-1.8%

TABLE 4.25 – Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes prédites 2012 sans risque souverain

Le tableau 4.25 page 127 montre que la Value-at-Risk à 99.5% pour 20 000 scénarios dans le cas d'absence de risque souverain avec les notes prédites 2012, est de -20.9 M€.

Résultats avec risque souverain

La figure 4.13 page 127 présente l'évolution du portefeuille obligataire par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes prédites 2012 (scénario moyen) au cours du temps du portefeuille par notation. La figure 4.16 page 128 présente la densité de l'indicateur lors des simulations (N=20 000) sur des intervalles de même largeur (excepté les deux intervalles extrêmes) dans le cas de scénarios stochastiques avec risque souverain avec les notes prédites 2012.

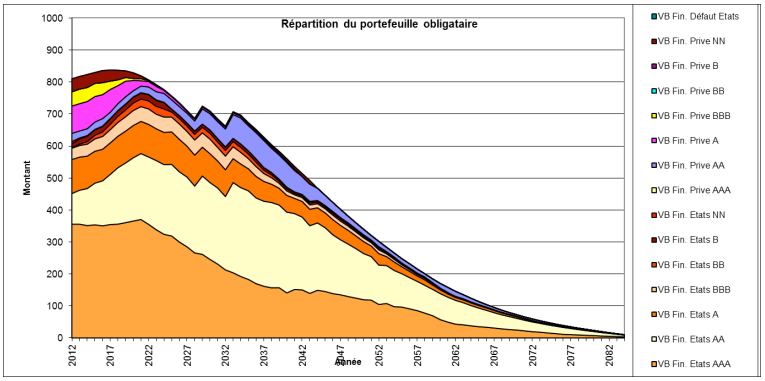

FIGURE 4.15 – Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain

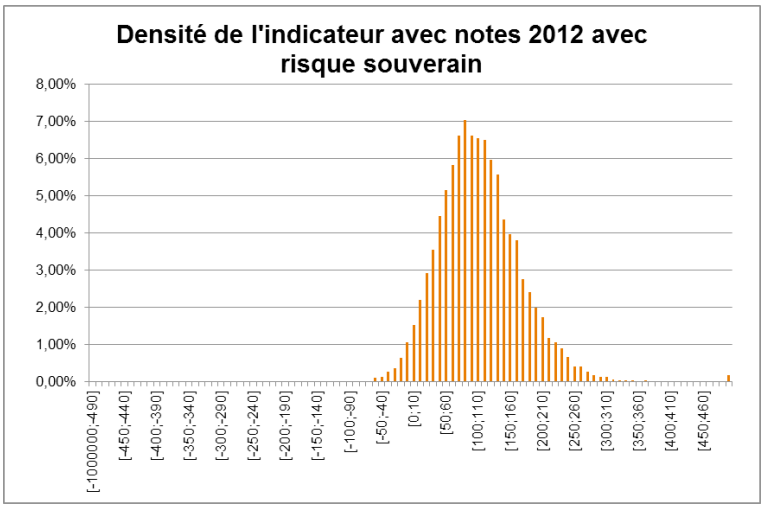

FIGURE 4.16 – Densité des scénarios - Notes prédites 2012 sans risque souverain

Résultats des simulations de Monte-Carlo Notes prédites 2012 avec risque souverain		
Scénario	**Valeur**	**En pourcentage de l'actif**
99	-32.2 M€	-2.8%
100	-32.2 M€	-2.8%
101	-20.1 M€	-2.8%

TABLE 4.26 – Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes prédites 2012 avec risque souverain

Le tableau 4.26 page 128 montre que la Value-at-Risk à 99.5% pour 20 000 scénarios dans le cas de présence de risque souverain avec les notes prédites 2012, est de -32.2 M€.

Résultats avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

La figure 4.17 page 129 présente l'évolution du portefeuille obligataire par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes prédites 2012 et taux de recouvrement de 25% (scénario moyen) au cours du temps du portefeuille par notation. La figure 4.18 page 129 présente la densité de l'indicateur lors des simulations (N=20 000) sur des intervalles de même largeur (excepté les deux intervalles extrêmes) dans le cas de scénarios stochastiques avec risque souverain et un taux de recouvrement de 25% avec les notes prédites 2012.

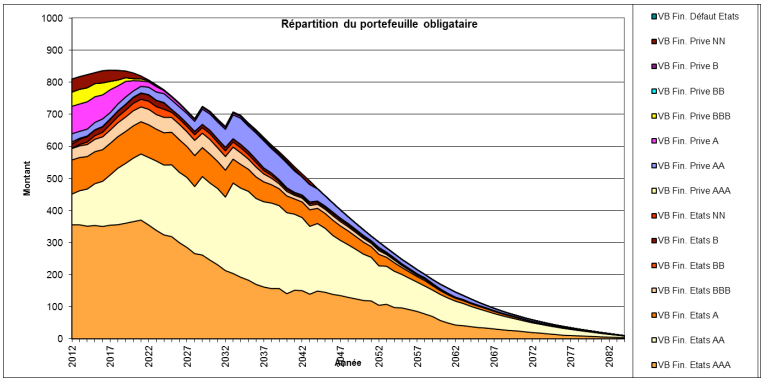

FIGURE 4.17 – Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

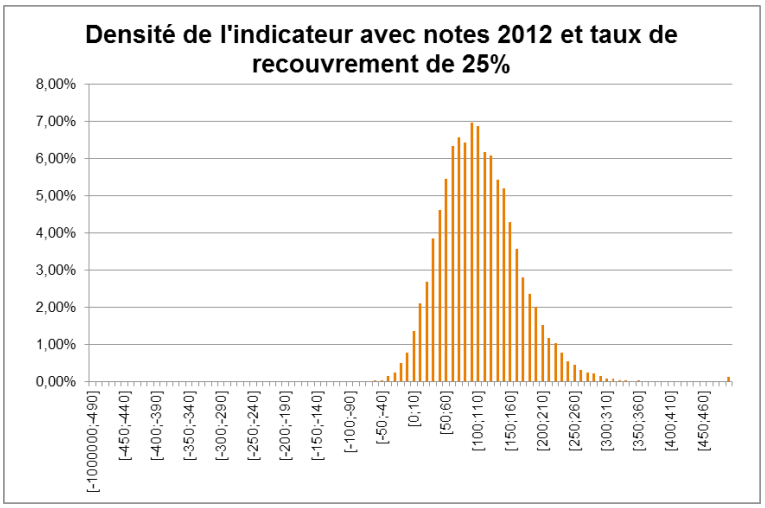

FIGURE 4.18 – Densité des scénarios - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

Résultats des simulations de Monte-Carlo Notes prédites 2012 avec risque souverain Taux de recouvrement de 25%		
Scénario	**Valeur**	**En pourcentage de l'actif**
99	-22.4 M€	-1.9%
100	-22.0 M€	-1.9%
101	-22.0 M€	-1.9%

TABLE 4.27 – Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

Le tableau 4.27 page 129 montre que la Value-at-Risk à 99.5% pour 20 000 scénarios dans le cas de présence de risque souverain avec les notes prédites 2012, est de -22.0 M€.

Résultat du calcul du besoin de capital

De la même manière que précédemment, le besoin en capital au titre du risque souverain est alors calculé suivant deux méthodes, mais avec les notations prédites 2012. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.28 page 130.

Résultats : Besoin en Capital au titre du risque souverain			
taux de recouvrement	**Année des notations**	**Value-at-Risk (99.5%)**	**En pourcentage de l'actif**
0%	2012	11.2 M€	1.0%
25%	2012	1.1 M€	0.1%

TABLE 4.28 – Besoin en capital avec les notations 2012

L'annexe G page 171 présente des graphiques supplémentaires pour chaque résultat de cette section. Les graphiques présentent les achats obligataires au cours du temps dans le cas du scénario moyen, les ventes obligataires au cours du temps dans le cas du scénario moyen ainsi que la fonction de répartition dans le cas des scénarios stochastiques.

4.6 Comparaison des résultats des méthodes

Les résultats des méthodes présentées précédemment sont regroupés dans le tableau 4.29 page 131 et le tableau 4.31 page 131 pour la Value-at-Risk à 99.5% et la Value-at-Risk à 95% lorsqu'elle est éligible. De plus, ces mêmes résultats des méthodes sont présentées en pourcentage de l'actif total du portefeuille dans le tableau 4.30 page 131 et le tableau 4.32 page 132.

Résultats : Besoin en Capital au titre du risque souverain en montant taux de recouvrement de 0%			
Méthode	**Année des notations**	**VaR 99.5%**	**VaR 95.0%**
Défaut sur la durée totale des flux	2011	318.9 M€	38.1 M€
Défaut sur la durée totale des flux	2012	329.7 M€	88.2 M€
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2011	20.4 M€	-
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2012	23.7 M€	-
Défaut sur un an	2011	23.8 M€	-
Défaut sur un an	2012	78.3 M€	-
modèle Interne	2011	2.9 M€	-
modèle Interne	2012	11.2 M€	-

TABLE 4.29 – Résultats des différentes méthodes sans taux de recouvrement - en montant

Résultats : Besoin en Capital au titre du risque souverain en pourcentage de l'actif taux de recouvrement de 0%			
Méthode	**Année des notations**	**VaR 99.5%**	**VaR 95.0%**
Défaut sur la durée totale des flux	2011	27.5%	3.3%
Défaut sur la durée totale des flux	2012	28.5%	7.6%
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2011	1.7%	-
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2012	2.1%	-
Défaut sur un an	2011	2.1%	-
Défaut sur un an	2012	6.8%	-
modèle Interne	2011	0.2%	-
modèle Interne	2012	1.0%	-

TABLE 4.30 – Résultats des différentes méthodes sans taux de recouvrement - en pourcentage de l'actif

Résultats : Besoin en Capital au titre du risque souverain en montant taux de recouvrement de 25%			
Méthode	**Année des notations**	**VaR 99.5%**	**VaR 95.0%**
Défaut sur la durée totale des flux	2011	239.2 M€	28.6 M€
Défaut sur la durée totale des flux	2012	247.3 M€	66.1 M€
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2011	15.3 M€	-
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2012	17.7 M€	-
Défaut sur un an	2011	17.8 M€	-
Défaut sur un an	2012	58.7 M€	-
modèle Interne	2011	0.9 M€	-
modèle Interne	2012	1.1 M€	-

TABLE 4.31 – Résultats des différentes méthodes avec taux de recouvrement de 25% - en montant

Résultats : Besoin en Capital au titre du risque souverain en pourcentage de l'actif taux de recouvrement de 25%			
Méthode	**Année des notations**	**VaR 99.5%**	**VaR 95.0%**
Défaut sur la durée totale des flux	2011	20.7%	2.5%
Défaut sur la durée totale des flux	2012	21.4%	5.7%
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2011	1.3%	-
Défaut sur la durée totale des flux annualisé	2012	1.5%	-
Défaut sur un an	2011	1.5%	-
Défaut sur un an	2012	5.1%	-
modèle Interne	2011	0.1%	-
modèle Interne	2012	0.1%	-

TABLE 4.32 – Résultats des différentes méthodes avec taux de recouvrement de 25% - en pourcentage de l'actif

Le tableau 4.29 page 131 montre que les Value-at-Risk à 99.5% sont élevées, ce qui est normal dans la mesure où la *Value-at-Risk* représente la perte maximale qui arrive une fois tous les 200 ans.

La méthode se basant sur *Défaut sur la durée totale des flux* montre que les résultats d'une *Value-at-Risk* à 99.5% sont très élevés en comparaison des autres méthodes et surtout que l'estimation n'est pas réaliste. Ceci est logique dans la mesure où le besoin en capital est calculé sur la totalité des défauts futurs et non uniquement sur les défauts intervenant uniquement à un an. Néanmoins, cette méthode permet de prendre en compte les caractéristiques propres aux investisseurs *Buy and Hold* qui portent les obligations jusqu'à échéance.

La méthode se basant sur les *Défauts à un an* uniquement donne des résultats réalistes mais ne prend pas en compte les caractéristiques propres aux investisseurs *Buy And Hold*. De ce fait, cette méthode semble inadéquate avec le calcul du besoin en capital d'un régime de retraite où l'investisseur est soumis à un risque de défaut jusqu'à l'échéance des titres dans la mesure où ce dernier porte ces titres.

La méthode se basant sur les *Défaut sur la durée totale des flux* mais en appliquant une annualisation est réaliste et permet de prendre en compte le caractère *Buy And Hold* des investisseurs gérant un régime de retraite. Cette méthode semble être pertinente dans le cas où une méthode basée sur un modèle interne ne peut pas être mise en place.

Finalement, le tableau 4.29 page 131 montre que la méthode issue du modèle interne donne comme résultat un besoin en capital au titre du risque souverain beaucoup plus faible que dans le cas des autres méthodes. Cette différence peut s'expliquer par le fait que la méthode issue du modèle interne prend en compte les spécificités propres à l'actif et au passif du régime de retraite alors que les autres méthodes ne prennent ni en compte ces spécificités, ni les actes de gestion réalisés par les gérants de fonds pour atteindre des objectifs (Rendement, Réalisation des plus ou moins value...).

Par ailleurs, les résultats du tableau 4.30 page 131 et du tableau 4.32 page 132 montrent que le le besoin en capital au titre du risque souverain est très élevé pour certaines méthodes relativement au besoin en capital global (SCR). En effet, le besoin en capital (SCR) calculé via la formule standard du QIS5 se situe généralement aux environs de 15% de l'actif en valeur de marché pour un régime de retraite. Cependant, il est nécessaire de considérer qu'en général, un régime de retraite a une grande partie de son actif investi en titres souverains et que de ce fait, il est normal que le besoin en capital au titre du risque de défaut souverain soit élevé.

L'utilisation d'un taux de recouvrement fixe de 25%, en lieu et place d'un taux de recouvrement de 0%, permet de rapprocher la modélisation des observations passées (Cas de la Grèce) et de la réalité. Il est donc pertinent d'utiliser un tel taux de recouvrement. Une étude pourrait être menée dans ce cadre afin de déterminer empiriquement

une valeur précise du taux de recouvrement à utiliser.

Par ailleurs, l'utilisation de la méthode de scoring pour prédire les notations au bout d'un an (en 2012) montre que le besoin en capital au titre du risque souverain augmente sensiblement dans les deux premières méthodes. Ceci est normal lorsque l'on considère que la notation de l'Etat Irlandais diminue fortement entre 2011 et 2012 par le modèle. L'approche consistant à utiliser les notations prédites reste discutable pour les méthodes autres que la méthode se basant sur le modèle interne car les données sont factuelles à une date donnée. Néanmoins, dans le cadre d'une approche basée sur le modèle interne, cette approche paraît pertinente vu que l'estimation du risque peut être faite par l'investisseur.

En outre, l'analyse des résultats des différentes méthodes montre que la prise en compte des spécificités propres à l'actif et au passif, mais surtout les actes de gestion permettent de réduire de manière très importante le besoin en capital au titre du risque souverain d'un régime de retraite. En effet, le besoin en capital dans ce cas et avec un taux de recouvrement nul est de 2.9 M€ si la méthode se base des notations 2011 et de 11.2 M€ si la méthode se base sur les notations prédites par un modèle pour 2012. En utilisant, un taux de recouvrement de 25%, le besoin en capital est de 0.9 M€ si la méthode se base des notations 2011 et de 1.1 M€ si la méthode se base des notations prédites 2012 comme le montre le tableau 4.31 page 131. Néanmoins, dans ce cas il n'est plus possible d'appliquer d'effet d'atténuation au titre de la diversification car celui-ci est déjà pris en compte à l'issu du calcul.

5 Conclusion

La première partie de ce mémoire permet de remarquer que certains modèles permettent de prédire, avec une erreur de classification faible, la notation des Etats en Année *An+1* à partir des données macro-économiques en Année *An*. Les différents modèles qui ont été testés dans la partie 1 montrent que la méthode LSSVM donne de bons résultats (taux de mauvaise classification faible). Le "meilleur" modèle défini dans la partie I a ensuite été utilisé pour prédire les notations 2012 des Etats à partir des données macro-économiques 2011. Par ailleurs, cette méthode de scoring et d'estimation de la notation permet aux gérants de portefeuille d'améliorer leur estimation du risque de crédit des émetteurs, ce qui peut s'avérer important dans un contexte de gestion des risques et d'investissement.

La seconde partie de ce mémoire permet de calculer la matrice de transition des notations ainsi que les défauts des Etats en fonction de la notation et de l'échéance. Les résultats des calculs permettent de remarquer qu'en fonction de la notation de l'Etat, les défauts en fonction de l'échéance sont très différents. Comme le lecteur l'aura remarqué dans la partie 2, les taux de défauts les premières années pour les notations les plus basses sont importants. Par ailleurs, cette seconde partie permet de caractériser le besoin en capital au titre du défaut souverain d'un investisseur *Buy and Hold* pour différentes obligations (ZC, Coupon...). Par ailleurs, cette partie met en lumière que la *Value-at-Risk* de la perte d'une obligation fonctionne par paliers, explicitant les limites de la *Value-at-Risk*, et qu'une annualisation du besoin en capital au titre du risque souverain permet d'obtenir des résultats réalistes.

La troisième et dernière partie de ce mémoire permet de calculer le besoin en capital au titre du risque souverain d'un régime de retraite. Ce besoin en capital au titre du risque souverain est calculé par plusieurs méthodes à partir des notations réelles 2011 ou des notations prédites par la méthode de scoring pour 2012. De plus, un taux de recouvrement fixe de 25% est appliqué pour se rapprocher des observations empiriques puisqu'en cas de défaut d'un Etat, une partie du nominal pour être recouvré. Les résultats montrent certains méthodes ne sont pas adaptées au calcul du besoin en capital au titre du risque souverain soit car les méthodes ne prennent pas en compte les caractéristiques propres à un investisseur *Buy and Hold*, soit car le risque n'est pas calculé à un an. Néanmoins, une méthode basée sur le modèle interne donne des résultats réalistes et une seconde méthode basé sur les défaut sur la totalité des flux futurs et une annualisation du besoin en capital donne également des résultats réalistes mais toutefois plus élevés.

Ce mémoire permet de montrer que le besoin en capital au titre du risque de défaut peut être relativement important dans le cadre d'un régime de retraite par capitalisation puisque pour ce type de produit d'assurance-vie, l'actif est fortement investi dans des actifs souverains avec des échéances longues. Or les spécifications du QIS5 négligent ce risque puisqu'il n'est à aucun moment évalué dans la formule standard. Néanmoins, une approche basée sur une méthode proche du modèle interne, prenant en compte les spécificités de l'actif et du passif propre à l'entreprise ainsi que les actes de gestion permet de réduire de manière très importante ce besoin en capital. Ceci tend à prouver que la mise en place d'un modèle interne permettant d'appréhender les caractéristiques propres à l'entreprise peut être très bénéfique dans le cadre du calcul du besoin en capital d'un régime de retraite. Dans le même temps, ceci justifie également les techniques d'atténuation mises en place dans le QIS5.

Afin d'approfondir ce mémoire, plusieurs points pourraient être étudiés. Ainsi, concernant la partie 1, d'autres mé-

thodes mathématiques pourraient être testées (les réseaux de neurones...) et d'autres noyaux (Cauchy...) pourraient être testés pour les méthodes LSSVM et SVM. Pour la seconde partie, au lieu de définir des spreads constants par notation, une modélisation pourrait être étudiée (par exemple, en se basant sur les problèmes inverses et les données macro-économiques). De même, la recherche d'un seuil adéquat pour le calcul de la *Value-at-Risk* dans le cas de la méthode se basant sur les défauts sur la totalité de la durée de vie des titres obligataires pourrait être également étudiée. Par ailleurs, concernant la partie 2, une modélisation de la matrice de transition des notations par des lois (Normale, Pareto, Weibull...) permettant de s'affranchir de certaines incohérences rencontrées sur les données historiques pourrait être étudiée. De plus, une étude pourrait être menée sur la relation potentielle d'équivalence entre la *Value-at-Risk* à 99.5% prenant en compte uniquement les défauts à un an et la *Value-at-Risk* prenant en compte tous les défauts futurs. Finalement, concernant la partie 3, l'ajout d'aléas sur les comportements (liquidation, décès...) ou sur des paramètres financiers (taux de recouvrement...) pourrait permettre d'appréhender d'autres risques.

Bibliographie

[1] ACAM. La directive solvabilité ii. http://www.acam-france.fr/solvabiliteII/.

[2] ACP. Orientations nationales complémentaires.

[3] ACP. La conférence de l'acp - solvabilité ii - pilier 2, 2011.

[4] PIETERSMA A.D. Feature space learning in support vector machines through dual objective optimization, 2010.

[5] HUANG C.L. & al. *Credit Scoring with a data mining approach based on support vector machines*. ScienceDirect, 2006.

[6] JIEPING Y. & al. *SVM versus Least Squares SVM*.

[7] Suykens J.A.K. & al. Least squares support machine classifiers : a large scale algorithm.

[8] SUYKENS J.A.K. & al. *Multiclass Least Squares Support Vector Machine*. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

[9] SUYKENS J.A.K. & al. *Least Squares Support Vector Machine Classifiers*. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1998.

[10] VAN GESTEL T. & al. *A Support Vector Machine Approach to Credit Scoring*. Dexia Group.

[11] VAPNIK V. & al. *Support-vector networks*. 1995.

[12] KARATZOGLOU Alexandros, SMOLA Alex, HORNIK Kurt, and ZEILEIS Achim. kernlab – an S4 package for kernel methods in R. *Journal of Statistical Software*, 11(9) :1–20, 2004.

[13] BOUCHARD B. *Introduction à l'évaluation d'actifs financiers par absence d'opportunité d'arbitrage*. Université Paris-Dauphine, Ceremade, ENSAE, Crest, 2010.

[14] LIBERATI C., CAMILLO F., and SAPORTA G. Kernel discrimination and explicative features : an operative approach. In *Compstat 2012*, pages 507–518, Limassol, Chypre, August 2012.

[15] CEIOPS. *QIS 5 Risk-free interest rates – Extrapolationmethod*. CEIOPS.

[16] CEIOPS. Qis5 technical specifications.

[17] GOBET. E. *Gestion dynamique des risques financiers*. ENSIMAG, 2007.

[18] GOBET. E. *Introduction au calcul stochastique et applications à la finance*. ENSIMAG, 2007.

[19] ECB. Long-term interest rate statistics for eu member states. http://www.ecb.int/stats/money/long/html/index.en.html.

[20] BACH F. Introduction aux modèles graphiques.

[21] FMI. World economic outlook database. http://www.imf.org/external/pubs/ft/weo/2012/01/weodata/index.aspx.

[22] SAPORTA G. *Cours de STA201*. CNAM, 2012.

[23] HULL J. *Options, Futures et autres actifs dérivés*. Pearson, sixième edition, 2007.

[24] LI J. *Logistic Regression*. Department of Statistics - The Pennsylvania State University, 2007.

[25] De BRABANTER K. *Least Squares Support Vector Regression with Applications to Large-Scale Data : a Statistical Approach*. PhD thesis, Faculty of Engineering, K.U.Leuven (Leuven, Belgium), 2011.

[26] ROUVIERE L. *Régression sur variables catégorielles*. Université de Rennes 2 - Haute Bretagne, 2008.

[27] EL KAROUI N. *Couverture des risques dans les marches financiers*. Ecole Polytechnique,CMAP, 2003.

[28] GAUDOIN O. *Principes et Méthodes Statistiques*. ENSIMAG, 2006.

[29] GAUDOIN O. *Statistiques Inférentielles Avancées*. ENSIMAG, 2007.

[30] CORNILLON P.A. *Discrimination et Scores*. MASS, Université Rennes 2.

[31] PONCET P. PORTAIT R. *Finance de marché*. Dalloz, deuxième edition, 2009.

[32] RAKOTOMALALA R. *Pratique de la Régression Logistique, Version 2*. Université Lumiére Lyon 2, 2011.

[33] RAKOTOMALALA R. *Pratique de la Régression Linéaire Multiple, Version 2*. Université Lumiére Lyon 2, 2011.

[34] HJORTELAND T. The newton-raphson method. http://trond.hjorteland.com/thesis/node28.html, 1999.

[35] Wikipédia. La régression linéaire multiple. http://fr.wikipedia.org/wiki/Régression_linéaire_multiple.

[36] Wikipédia. Least squares support vector machine. http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares_support_vector_machine.

[37] Wikipédia. Solvabilité ii. http://fr.wikipedia.org/wiki/Solvabilit%C3%A9_II.

[38] Wikipédia. Solvency ii directive. http://en.wikipedia.org/wiki/Solvency_II_Directive.

[39] Wikipédia. Support vector machine. en.wikipedia.org/wiki/Support_vector_machine.

[40] Wikipédia. Théorème de mercer. http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Mercer.

[41] Wikipédia. Vasicek model. http://en.wikipedia.org/wiki/Vasicek_model.

Liste des Tableaux

2.1 Variables explicatives utilisées pour les modèles . . . 52
2.2 Variables des meilleurs modèles par méthodes mathématiques . . . 54
2.3 Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) des variables optimisant les différents modèles par méthodes mathématiques . . . 54
2.4 "meilleur modèle" . . . 55
2.5 Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) par méthode mathématique et par nombre de variables explicatives . . . 55
2.6 Différentes notations utilisées pour stripper le portefeuille . . . 57
2.7 Notation prédite en 2012 à partir du meilleur modèle et d'un calibrage sur les données jusqu'en 2010 - Partie 1 . . . 57
2.8 Notation prédite en 2012 à partir du meilleur modèle et d'un calibrage sur les données jusqu'en 2010 - Partie 2 . . . 58

3.1 Nombre d'Etats par notation l'année An et notation l'année An+1 (historique 1990-2010) . . . 61
3.2 Matrice de transition des notations des Etats (historique 1990-2010) . . . 61
3.3 Matrice de transition des notations des Etats (historique 1990-2010) corrigée avec les défauts . . . 62
3.4 Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats AAA . . . 65
3.5 Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats AA . . . 65
3.6 Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats A . . . 66
3.7 Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats BBB . . . 66
3.8 Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats BBB . . . 67
3.9 Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats B . . . 67
3.10 Valeurs des paramétres des polynômes pour les Etats NN & Spec . . . 68
3.11 Probabilité de défaut par échéance et notation . . . 68
3.12 Moment moyen du défaut en Année en fonction de la notation et de l'échéance de l'obligation . . . 70
3.13 Taux à l'achat en fonction de l'échéance et de la notation . . . 74
3.14 Prix d'une obligation Zéro-Coupon . . . 76
3.15 Prix d'une obligation détachant un coupon au pair . . . 76
3.16 Prix d'une obligation détachant un demi-coupon . . . 76
3.17 Espérance de la perte d'une obligation ZC . . . 77
3.18 Espérance de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon . . . 77
3.19 Espérance de la perte d'une obligation détachant un demi coupon . . . 77
3.20 VaR à 0.5% de la perte d'une obligation ZC . . . 81
3.21 VaR à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon . . . 81
3.22 VaR à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon . . . 81

3.23 VaR à 1% de la perte d'une obligation ZC . . . 82
3.24 VaR à 1% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon . . . 82
3.25 VaR à 1% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon . . . 82
3.26 VaR à 5% de la perte d'une obligation ZC . . . 83
3.27 VaR à 5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon . . . 83
3.28 VaR à 5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon . . . 83
3.29 VaR à 0.5% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 85
3.30 VaR à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 85
3.31 VaR à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 85
3.32 VaR à 1% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 86
3.33 VaR à 1% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 86
3.34 VaR à 1% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire 86
3.35 VaR à 5% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 87
3.36 VaR à 5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 87
3.37 VaR à 5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire 87
3.38 VaR annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation ZC avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 88
3.39 VaR annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation au pair détachant un coupon avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 88
3.40 Value-at-Risk annualisée à 0.5% de la perte d'une obligation détachant un demi coupon avec un taux de recouvrement aléatoire . . . 89
3.41 Taux 10 ans historique moyen par notation . . . 94
3.42 Spread historique moyen par notation . . . 95

4.1 Différentes catégories d'adhérents . . . 97
4.2 Différentes générations de droits du produit de retraite . . . 98
4.3 Répartition du Portefeuille en valeur de marché . . . 99
4.4 Différentes notations utilisées pour stripper le portefeuille . . . 101
4.5 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0% . . . 103
4.6 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 95.0%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0% . . . 103
4.7 Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0% . . . 104
4.8 Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 25% . . . 105
4.9 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et un taux de recouvrement de 0% . . . 106
4.10 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 95.0%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et un taux de recouvrement de 0% . . . 107
4.11 Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et taux de recouvrement de 0% . . . 107
4.12 Besoin en capital annualisé au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 1 - notations prédites 2012 et taux de recouvrement de 25% . . . 108

4.13 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 0% . . . 110
4.14 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2011 et taux de recouvrement de 25% . . . 110
4.15 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2012 et taux de recouvrement de 0% . . . 111
4.16 Besoin en capital au titre du risque de défaut (VaR 99.5%)- méthode 2 - notations observées 2012 et taux de recouvrement de 25% . . . 112
4.17 Paramètres de modélisation des actifs financiers . . . 118
4.18 Matrice de transition des notations des Etats (historique 1990-2010) corrigée avec les défauts . . . 118
4.19 Paramètres des automates . . . 118
4.20 Paramètres de modélisation Passif . . . 119
4.21 Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes observées 2011 sans risque souverain . . . 123
4.22 Résultats de la méthode de Monte-Carlo - notes observées 2011 avec risque souverain . . . 124
4.23 Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 125
4.24 Besoin en capital avec les notations 2011 . . . 126
4.25 Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes prédites 2012 sans risque souverain . . . 127
4.26 Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes prédites 2012 avec risque souverain . . . 128
4.27 Résultats de la méthode de Monte-Carlo - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 129
4.28 Besoin en capital avec les notations 2012 . . . 130
4.29 Résultats des différentes méthodes sans taux de recouvrement - en montant . . . 131
4.30 Résultats des différentes méthodes sans taux de recouvrement - en pourcentage de l'actif . . . 131
4.31 Résultats des différentes méthodes avec taux de recouvrement de 25% - en montant . . . 131
4.32 Résultats des différentes méthodes avec taux de recouvrement de 25% - en pourcentage de l'actif . . . 132

F.1 Répartition de la notation par année : Notation initiale AAA . . . 164
F.2 Répartition de la notation par année : Notation initiale AA . . . 165
F.3 Répartition de la notation par année : Notation initiale A . . . 166
F.4 Répartition de la notation par année : Notation initiale BBB . . . 167
F.5 Répartition de la notation par année : Notation initiale BB . . . 168
F.6 Répartition de la notation par année : Notation initiale B . . . 169
F.7 Répartition de la notation par année : Notation initiale Spec. . . . 170

H.1 Liste des 5 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives . . . 179
H.2 Liste des 6 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives . . . 180
H.3 Liste des 7 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives . . . 181
H.4 Liste des 8 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives . . . 182
H.5 Liste des 9 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives . . . 183
H.6 Liste des 10 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives . . . 184

H.7 Liste des 11 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives 185

H.8 Liste des 12 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives 186

Liste des Figures

1.1 Présentation du calcul du SCR selon la formule standard dans le QIS5 . . . 14

2.1 Présentation d'un hyperplan séparateur en 3D . . . 25
2.2 Présentation du calcul de la distance d'un point à l'hyperplan séparateur . . . 27
2.3 Classification non linéaire présentée par Van Gestel & al. . . . 27
2.4 SVM : Cas séparable et hyperplans séparateurs . . . 28
2.5 SVM : Cas séparable et hyperplan optimal . . . 29
2.6 SVM : Cas non séparable . . . 30
2.7 SVM binaire avec noyau RBF - Exemple 1 . . . 32
2.8 SVM binaire avec noyau RBF - Exemple 2 . . . 33
2.9 SVM binaire avec noyau RBF - Exemple 3 . . . 34
2.10 SVM binaire avec noyau RBF - Spirales . . . 35
2.11 SVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées . . . 36
2.12 SVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées . . . 37
2.13 SVM binaire avec noyau RBF - Spirales étendues . . . 38
2.14 LSSVM binaire avec noyau RBF - Exemple 1 . . . 44
2.15 LSSVM binaire avec noyau RBF - Exemple 2 . . . 45
2.16 LSSVM binaire avec noyau RBF - Exemple 3 . . . 46
2.17 LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales . . . 47
2.18 LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées . . . 48
2.19 LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales bruitées . . . 49
2.20 LSSVM binaire avec noyau RBF - Spirales étendues . . . 50
2.21 Schéma du processus de calibrage, sélection de modèle et prédiction . . . 53
2.22 Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) par méthode mathématique en fonction du nombre de variables explicatives . . . 56
2.23 Résultats des tests (taux d'erreur de prédiction) par nombre de variables explicatives en fonction de la méthode mathématique . . . 56

3.1 Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats AAA . . . 65
3.2 Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats AA . . . 65
3.3 Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats A . . . 66
3.4 Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats BBB . . . 66
3.5 Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats BB . . . 67
3.6 Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats B . . . 67
3.7 Observation et Modélisation polynomiale du pourcentage de défaut par année des Etats NN & Spec . 68

3.8 Chargement en capital par notation en fonction de l'échéance et du taux de rendement obligataire . . 72
3.9 Chargement en capital par échéance en fonction de la notation et du taux de rendement obligataire . . 73
3.10 Espérance de la perte obligataire en fonction du type d'obligation, de l'échéance et de la notation . . . 78
3.11 Schéma de la densité de loi normale centrée réduite extraite de [28] par Gaudoin O. 79
3.12 Value-at-Risk annualisée au seuil de 0.5% en fonction de la notation et de la durée de l'obligation . . . 89
3.13 Value-at-Risk annualisée au seuil de 0.5% en fonction de la notation et de la durée de l'obligation . . . 90
3.14 Historique des taux 10 ans par notation 94

4.1 Répartition du portefeuille en valeur de marché par type de titre 99
4.2 Flux futurs par Etat 100
4.3 Présentation du fonctionnement du mode déterministe dans OSCARR 113
4.4 Présentation du fonctionnement du mode stochastique dans OSCARR 114
4.5 Présentation du comportement des adhérents dans OSCARR 116
4.6 Paramétrage de l'automate d'allocation de l'actif obligataire 119
4.7 Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain 123
4.8 Densité des scénarios - Notes observées 2011 sans risque souverain 123
4.9 Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain 124
4.10 Densité des scénarios - notes observées 2011 sans risque souverain 124
4.11 Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% 125
4.12 Densité des scénarios - notes observées 2011 sans risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . 125
4.13 Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes prédites 2012 sans risque souverain 127
4.14 Densité des scénarios - Notes prédites 2012 sans risque souverain 127
4.15 Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain 128
4.16 Densité des scénarios - Notes prédites 2012 sans risque souverain 128
4.17 Modélisation du portefeuille obligataire par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% 129
4.18 Densité des scénarios - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . 129

C.1 Courbe des taux en date initiale 151
C.2 Courbes des taux simulées dans un scénario 152
C.3 Graphique des rachats 152
C.4 Densité des rendements Actions Annuels en Année finale 153
C.5 Densité des rendements Immobiliers Annuels en Année finale 153
C.6 Densité des rendements OPCVM Annuels en Année finale 154
C.7 Densité des rendements Actions Alternatives Annuels en Année finale 154
C.8 Densité des taux courts en Année finale 155

F.1 Répartition des notations par échéance avec une notation initiale AAA 161
F.2 Répartition des notations par échéance avec une notation initiale AA 161
F.3 Répartition des notations par échéance avec une notation initiale A 162

F.4 Répartition des notations par échéance avec une notation initiale BBB . . . 162
F.5 Répartition des notations par échéance avec une notation initiale BB . . . 162
F.6 Répartition des notations par échéance avec une notation initiale B . . . 163
F.7 Répartition des notations par échéance avec une notation initiale spéculative . . . 163

G.1 Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain . . . 171
G.2 Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain . . . 171
G.3 Fonction de répartition des scénarios - Notes observées 2011 sans risque souverain . . . 172
G.4 Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 avec risque souverain . . . 172
G.5 Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 avec risque souverain . . . 172
G.6 Fonction de répartition des scénarios - notes observées 2011 avec risque souverain . . . 173
G.7 Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 173
G.8 Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 173
G.9 Fonction de répartition des scénarios - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 174
G.10 Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 sans risque souverain . . . 174
G.11 Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 sans risque souverain . . . 174
G.12 Fonction de répartition des scénarios - Notes prédites 2012 sans risque souverain . . . 175
G.13 Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain . . . 175
G.14 Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain . . . 175
G.15 Fonction de répartition des scénarios - Notes prédites 2012 avec risque souverain . . . 176
G.16 Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 176
G.17 Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 176
G.18 Fonction de répartition des scénarios - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25% . . . 177

A Modèle

A.1 Modèle Action : Modèle du Brownien Géométrique

Comme l'indique PORTAIT R., PONCET P. [31], le mouvement brownien a été introduit en 1828 par le botaniste Robert Brown pour décrire les mouvements de particules de pollen, mais c'est en 1900 que Louis Bachelier dans sa thèse intitulée "Théorie de la spéculation" l'a utilisé pour la première fois pour décrire les variations de cours des actions. De multiples ouvrages ont traité de ce sujet (Par exemple, HULL J. [23] et PORTAIT R., PONCET P. [31]). Le modèle de brownien géométrique, décrit dans ces ouvrages, est un processus S obéissant à l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu.S_t.dt + \sigma.S_t.dW_t$$

avec :

- $(S_t)_{t\geq 0}$: Mouvement Brownien Géométrique
- $(W_t)_{t\geq 0}$: Mouvement brownien standard
- μ : Dérive du mouvement brownien géométrique
- σ : Volatilité du mouvement brownien géométrique

En considérant que S_0 est positif alors il est possible d'écrire de l'EDS sous la forme suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu.dt + \sigma.dW_t$$

En appliquant le lemme d'Itô, il est possible d'écrire $(S_t)_{t\geq 0}$ sous la forme suivante :

$$S_t = S_0.e^{(\mu-\sigma^2/2).t+\sigma.W(t)}$$

A.2 Modèle de Taux : Modèle de Vasicek

Cette section se base sur les ouvrages de GOBET E. [17] et [18], BOUCHARD B. [13], HULL J. [23], EL KAROUI N. [27] et PORTAIT R., PONCET P. [31], mais également l'article [41].

$$dr_t = a(b - r_t)dt + dW_t$$

avec :

- $(r_t)_{t\geq 0}$: Taux court en t
- $(W_t)_{t\geq 0}$: Mouvement brownien standard
- a : Force de rappel
- b : Moyenne à long terme.
- σ : Volatilité du taux d'intérêt.

Il est alors possible de définir l'équation différentielle stochastique suivante :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right) + \sigma.e^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$$

Ainsi que l'espérance et la variance :

$$\mathbb{E}(r_t) = r_0 e^{-at} + b\left(1 - e^{-at}\right)$$

$$Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)$$

L'espérance et la variance peuvent ensuite passées à la limite :

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(r_t) = b$$

$$\lim_{t\to\infty} Var(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}$$

EL KAROUI N. dans [27] indique, pour ce modèle, que le prix d'un zéro-coupon de maturité T et la courbe des taux à la date t pour chaque échéance θ est sont donnés par :

$$B(t,T) = exp- \left[R_\infty (T-t) - (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t}}{a} + \frac{\sigma^2}{4a^3} \right]$$

$$R(t,\theta) = R_\infty - (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a\theta}}{a\theta} + \frac{\sigma^2}{4a^3\theta}(1-e^{-a\theta})^2$$

Avec :

- T : la maturité du zéro-coupon
- θ : la maturité du taux
- $B(t,T)$: Prix d'un zéro-coupon de maturité T en t
- $R(t,\theta)$: le taux de maturité θ en t
- $R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$: Le taux asymptotique

B Lemme d'Itô

Ce chapitre se base sur les ouvrages de GOBET E. [17] et [18], BOUCHARD B. [13], HULL J. [23] et PORTAIT R., PONCET P. [31].

B.1 Cas Unidimensionnel

Soit $f(t, X(t))$ un processus d'Itô avec $X(t) = \mu(t).dt + \sigma(t).dW_t$

La différentielle df peut s'écrire sous la forme suivante :

$$df = \frac{\delta f}{\delta t}(.).dt + \frac{\delta f}{\delta x}(.).dX + \frac{1}{2}.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(.).(dX)^2$$

ou encore sous la forme :

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta t}(.) + \frac{\delta f}{\delta x}(.).\mu(t) + \frac{1}{2}.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(.).\sigma^2(t).\right).dt + \frac{\delta f}{\delta x}(.).\sigma(t).dW$$

Sous la forme intégrale, cela s'écrit :

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int_0^t \left(\frac{\delta f}{\delta s}(.) + \frac{\delta f}{\delta x}(.).\mu(s) + \frac{1}{2}.\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(.).\sigma^2(s).\right).ds + \int_0^t \frac{\delta f}{\delta x}(.).\sigma(s).dW$$

B.2 Cas Multidimensionnel

Soit $f(t, X(t))$ un processus d'Itô avec $X(t)$ multidimensionnel de composantes $(X_i(t), i \geq n)$

La différentielle df peut s'écrire sous la forme suivante :

$$df = \frac{\delta f}{\delta t}(.).dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(.).dX_i + \frac{1}{2}.\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(.). < dX_i, dX_j >$$

B.3 Application du Lemme d'Itô au brownien géométrique

Dans le cas du Modèle de Brownien Géométrique, on pose :

$$f(t, X(t)) = ln(X(t))$$

En appliquant le lemme d'Itô :

$$dln(X) = \frac{1}{X}.dX - \frac{1}{2}.\frac{1}{X^2}.(dX)^2$$

En utilisant l'EDS du modèle brownien suivante :

$$dX = \mu.X.dt + \sigma.X.dW$$

On obtient :

$$\begin{aligned} dln(X) &= \frac{1}{X}.(\mu.X.dt + \sigma.X.dW) - \frac{1}{2}.\frac{1}{X^2}.\sigma^2.X^2.dt \\ &= (\mu.dt + \sigma.dW) - \frac{1}{2}.\sigma^2.dt \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2}).dt + \sigma.dW \end{aligned}$$

$$ln(X(t)) - ln(X(0)) = ln(\frac{X(t)}{X(0)}) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}).t + \sigma.W(t)$$

$$X(t) = X(0).e^{(\mu.-\frac{\sigma^2}{2}).t+\sigma.W(t)}$$

C Résultats supplémentaires

Les graphiques présentent des résultats des simulations [1] et des données de paramétrages.

La figure C.1 page 151 présente la courbe des taux en date initiale. Cette courbe des taux a été calculée suivant la méthode de Smith-Wilson (Voir [15] pour plus de détails).

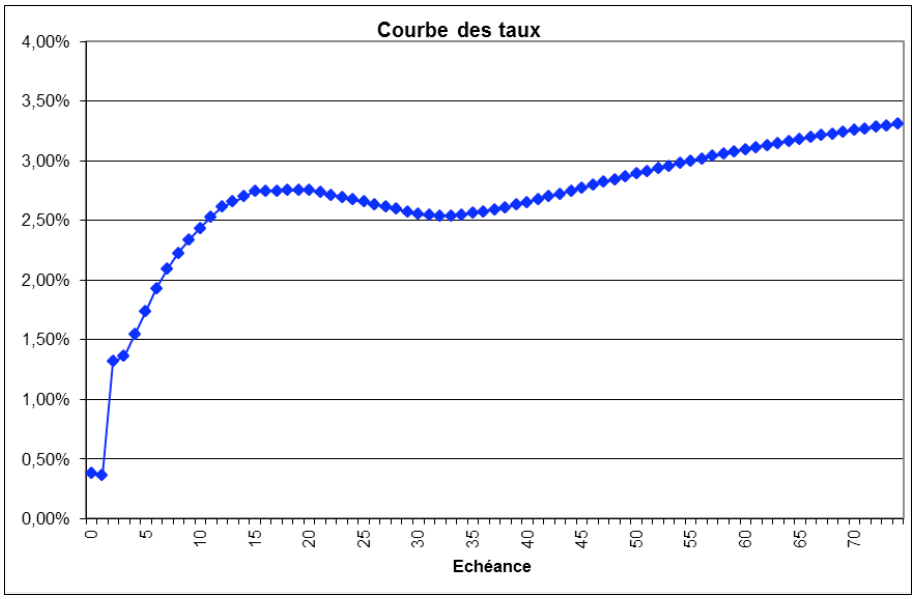

FIGURE C.1 – Courbe des taux en date initiale

1. Les résultats étant proches sur les différents cas simulés par la méthode de Monte-Carlo, seule une série de résultats est présentée

La figure C.2 page 152 présente les courbes des taux simulées pour un scénario donné à partir des taux courts modélisés par le modèle de Vasicek.

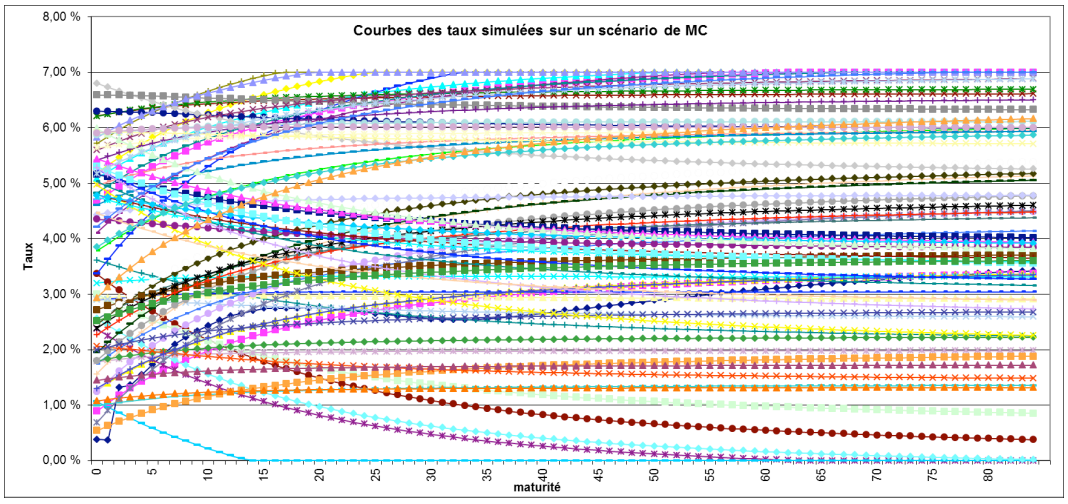

FIGURE C.2 – Courbes des taux simulées dans un scénario

La figure C.3 page 152 présente le pourcentage de rachats en fonction de l'Ecart entre le taux servi et le taux de marché (Voir les orientations nationales complémentaire dans [2] pour la fonction).

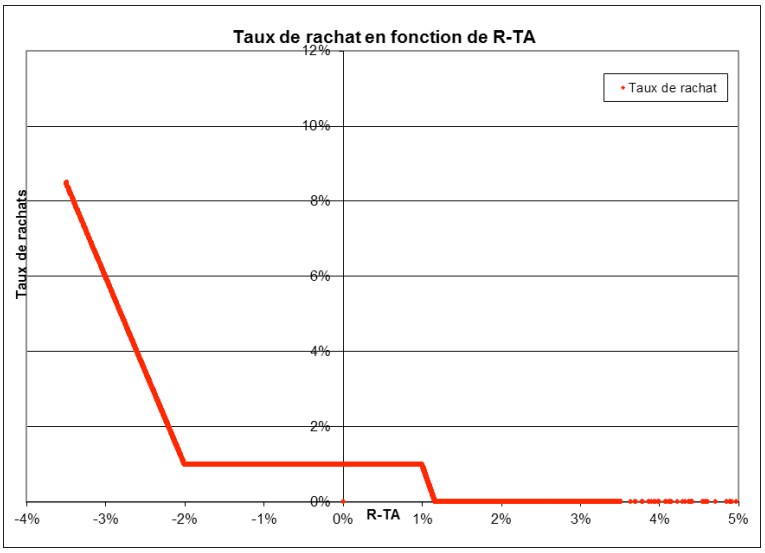

FIGURE C.3 – Graphique des rachats

La figure C.4 page 153 présente la densité des rendements actions en année finale .

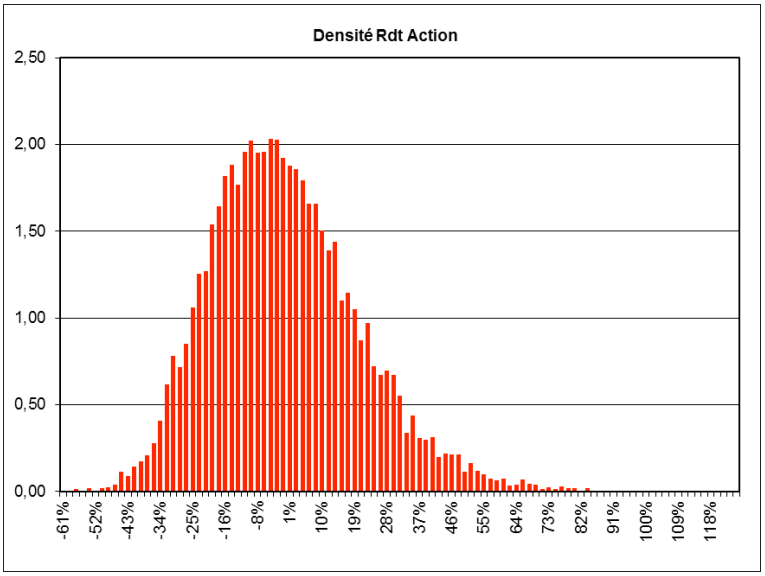

FIGURE C.4 – Densité des rendements Actions Annuels en Année finale

La figure C.5 page 153 présente la densité des rendements immobiliers en année finale .

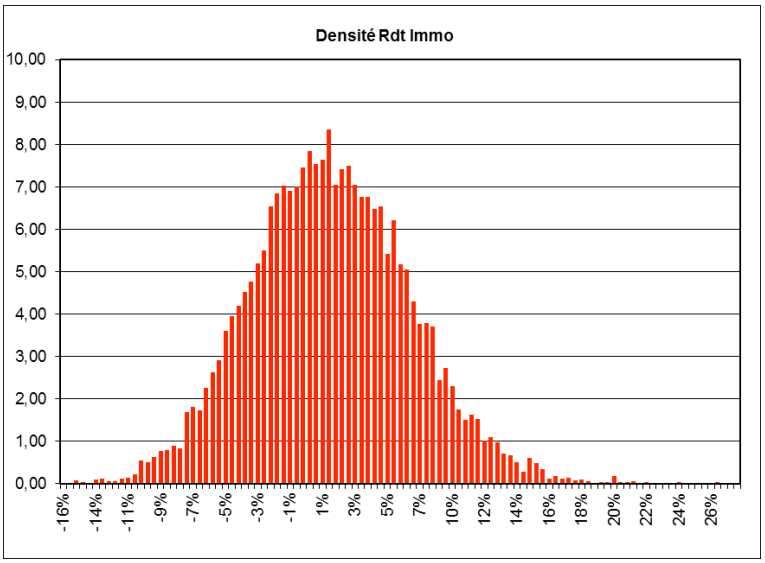

FIGURE C.5 – Densité des rendements Immobiliers Annuels en Année finale

La figure C.6 page 154 présente la densité des rendements OPCVM en année finale .

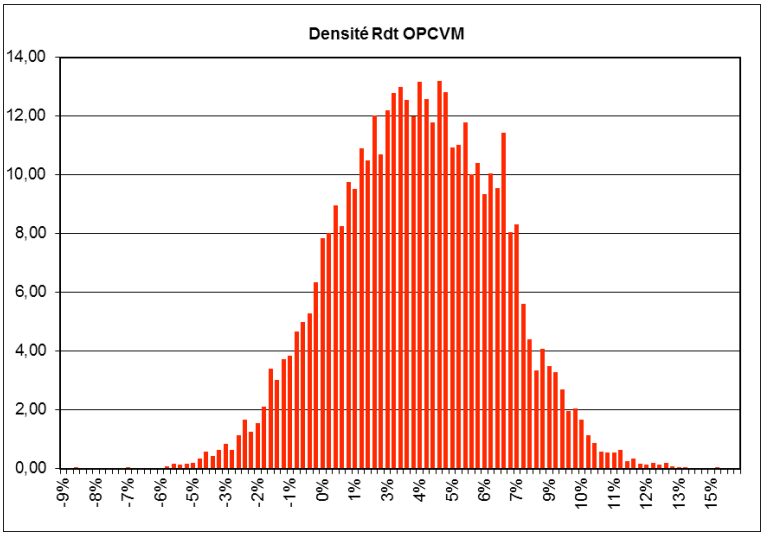

FIGURE C.6 – Densité des rendements OPCVM Annuels en Année finale

La figure C.7 page 154 présente la densité des rendements actions alternatives en année finale .

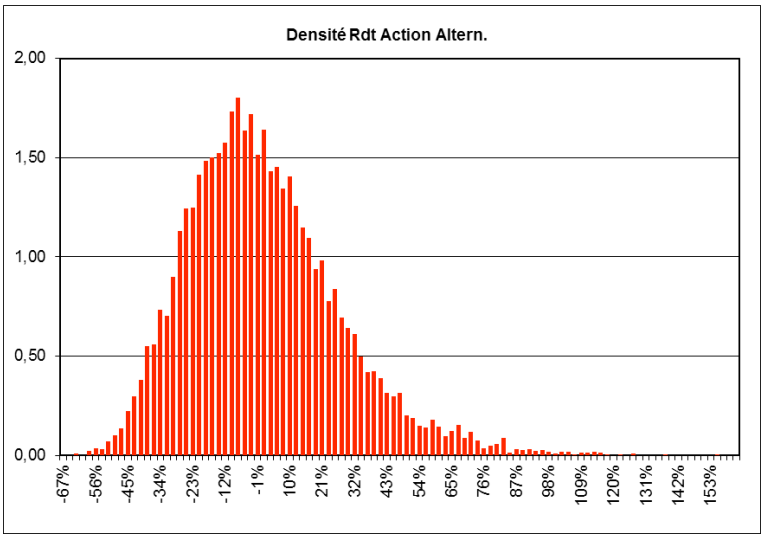

FIGURE C.7 – Densité des rendements Actions Alternatives Annuels en Année finale

La figure C.8 page 155 présente la densité des taux courts en année finale .

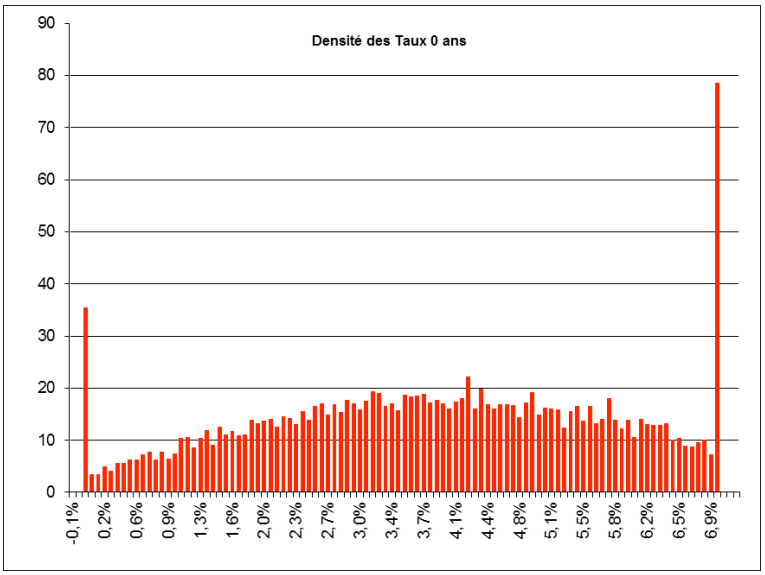

FIGURE C.8 – Densité des taux courts en Année finale

D Théorème de Mercer et Noyaux

D.1 Théorème de Mercer

Le théorème de Mercer est présenté dans [40].

Soit K une fonction noyau continue symétrique de type positif. Alors :
- les valeurs propres de T_K sont des réels positifs
- il existe une base hilberthienne $(e_i)_i$ de $L^2[a,b]$ constituée de fonctions propres
- les fonctions propres correspondant à des valeurs propres strictement positives sont continues sur [a,b]
- K admet la représentation

$$K(\mathbf{s},\mathbf{t}) = \sum \lambda_i e_i(\mathbf{s}) e_i(\mathbf{t})$$

où la convergence est absolue et uniforme.

D.2 Noyaux

Comme l'indique Pietersma dans [4], un noyau est un noyau valide ou un noyau de Mercer si :

$$\exists \phi / K(\mathbf{x},\mathbf{y}) =< \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) >$$

Avec ϕ une fonction de cartographie.

Il y a trois conditions pour garantir que la définition précédente soit respectée :

Symétrie

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) =< \mathbf{x}.\mathbf{y} >=< \mathbf{y}.\mathbf{x} >= K(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 &=< \phi(\mathbf{x}).\phi(\mathbf{y}) >^2 \\ &\leq \|\phi(\mathbf{x})\|^2.\|\phi(\mathbf{y})\|^2 \\ &\leq K(\mathbf{x},\mathbf{x})K(\mathbf{y},\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Noyau Semi-défini

Soit une fonction symétrique $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$, et un espace de dimension finie $\mathbf{v}$ tel que $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}/\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n < \infty\}$ alors $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est une fonction noyau, si et seulement si, l'expression suivante est semi-définie positive.

$$\mathbf{K} = (K(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j))_{i,j=1}^N$$

Une matrice $\mathbf{M}$ est appelée matrice semi-définie positive si :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, n < \infty, \mathbf{v}^T\mathbf{M}\mathbf{v} \geq 0$$

Confidentiel

E Rappel sur les calculs du maximum de vraisemblance

Cette annexe se base sur les ouvrages [28] de Gaudoin O., [29] de Gaudoin O., [26] de Rouvière L. et [20] de Bach F.

E.1 Fonction de vraisemblance

Soit un échantillon aléatoire $X_1, ..., X_n$ dont la loi mère appartient à une famille paramétrique $\{f(x, \theta), \theta \in \Theta\}$. On appelle fonction de vraisemblance de θ pour une réalisation $x_1, ..., x_n$ de l'échantillon, la fonction de θ :

$$L(\theta; x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

E.2 Estimation du maximum de vraisemblance

On appelle estimation du maximum de vraisemblance une valeur $\hat{\theta}$, s'il en existe une, telle que :

$$L(\hat{\theta}) = \underset{\theta \in \Theta}{sup} L(\theta)$$

Confidentiel

F Répartition par échéance en fonction de la notation initiale

F.1 Figures des répartitions

Les figures F.1 page 161, F.2 page 161, F.3 page 162, F.4 page 162, F.5 page 162, F.6 page 163 et F.7 page 163 présentent les répartitions des notations par échéance en fonction de la notation initiale.

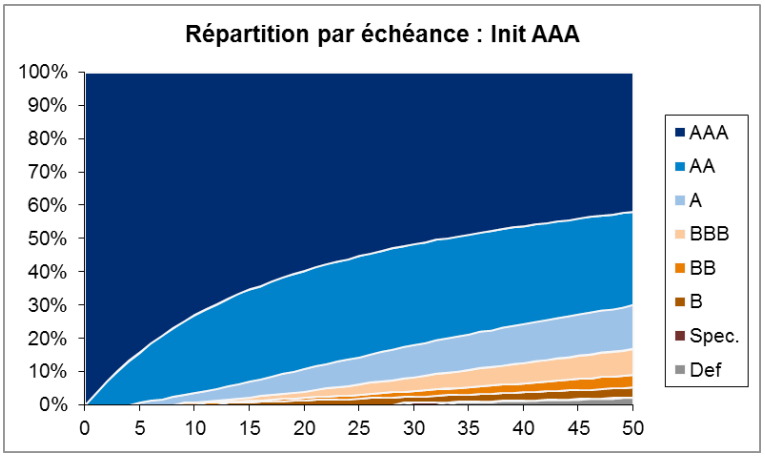

FIGURE F.1 – Répartition des notations par échéance avec une notation initiale AAA

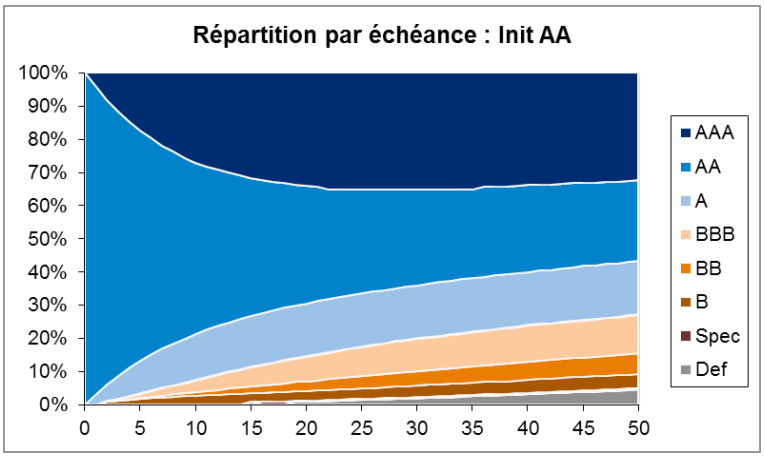

FIGURE F.2 – Répartition des notations par échéance avec une notation initiale AA

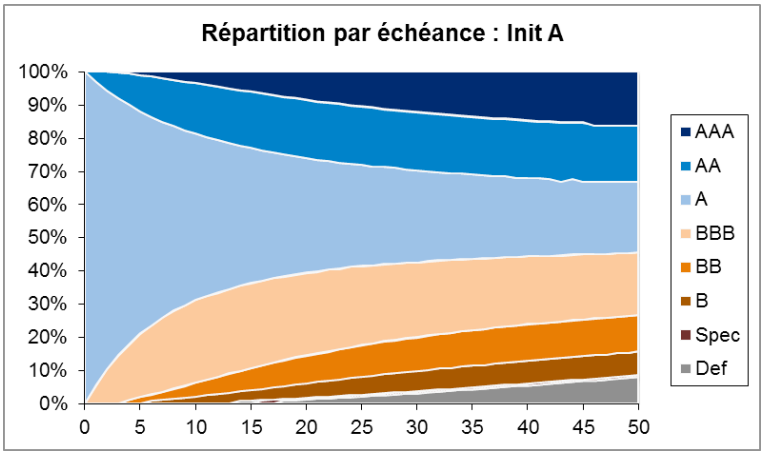

FIGURE F.3 – Répartition des notations par échéance avec une notation initiale A

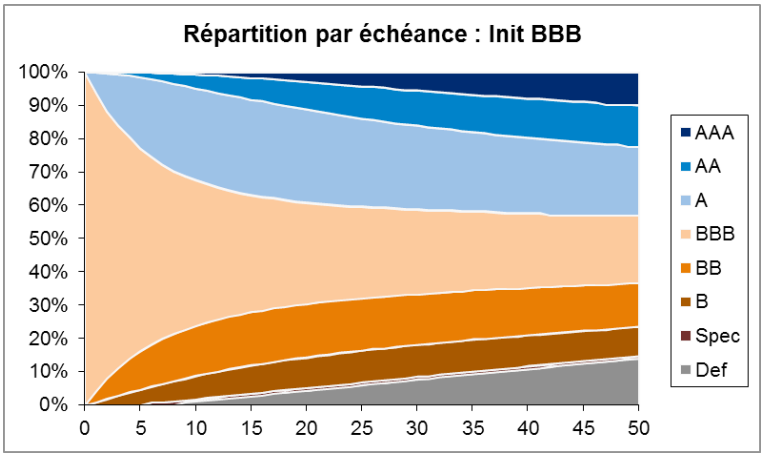

FIGURE F.4 – Répartition des notations par échéance avec une notation initiale BBB

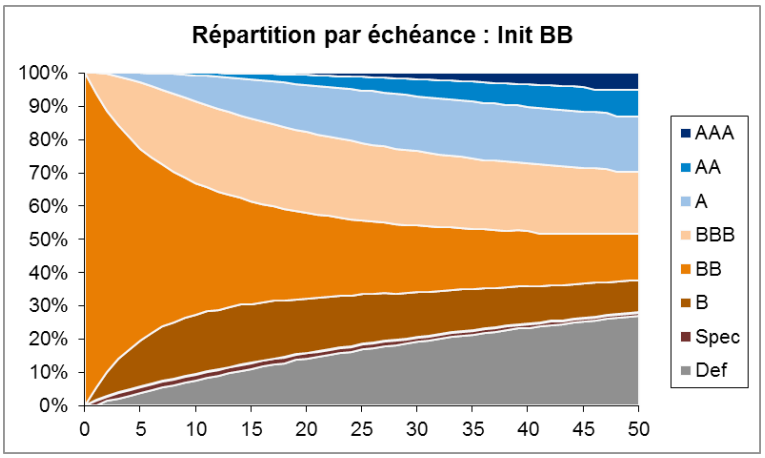

FIGURE F.5 – Répartition des notations par échéance avec une notation initiale BB

Confidentiel

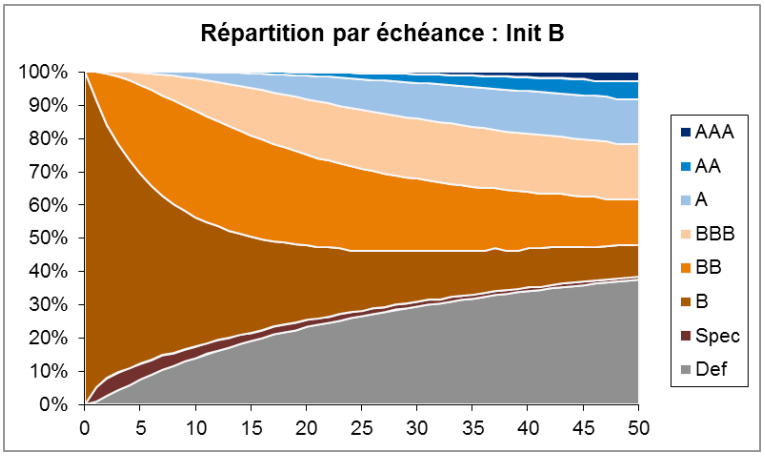

FIGURE F.6 – Répartition des notations par échéance avec une notation initiale B

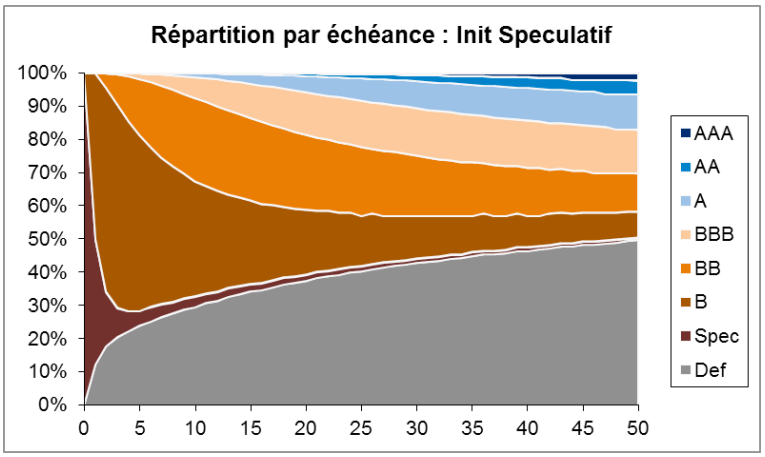

FIGURE F.7 – Répartition des notations par échéance avec une notation initiale spéculative

F.2 Tableaux des répartitions

De même, les tableaux F.1 page 164, F.2 page 165, F.3 page 166, F.4 page 167, F.5 page 168, F.6 page 169 et F.7 page 170 présentent les répartitions des notations par échéance en fonction de la notation initiale.

Répartition de la notation par année : Notation initiale AAA								
An	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**Spec**	**D**
0	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
1	96.2%	3.8%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	92.7%	7.1%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
3	89.5%	10.2%	0.3%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%
4	86.7%	12.6%	0.5%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%
5	84.0%	15.0%	0.8%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%
6	81.4%	17.2%	1.1%	0.1%	0.0%	0.2%	0.0%	0.0%
7	79.0%	19.0%	1.5%	0.1%	0.0%	0.3%	0.0%	0.0%
8	76.8%	20.6%	1.9%	0.2%	0.1%	0.3%	0.0%	0.0%
9	74.7%	22.1%	2.3%	0.3%	0.1%	0.4%	0.0%	0.0%
10	72.8%	23.4%	2.7%	0.4%	0.1%	0.5%	0.0%	0.0%
11	71.1%	24.4%	3.2%	0.5%	0.2%	0.5%	0.0%	0.0%
12	69.7%	25.2%	3.6%	0.6%	0.2%	0.6%	0.0%	0.1%
13	68.0%	26.1%	4.0%	0.8%	0.3%	0.7%	0.0%	0.1%
14	66.4%	27.1%	4.4%	0.9%	0.3%	0.8%	0.0%	0.1%
15	65.2%	27.5%	4.8%	1.1%	0.4%	0.8%	0.0%	0.1%
16	64.2%	27.8%	5.2%	1.3%	0.5%	0.9%	0.0%	0.1%
17	62.7%	28.4%	5.7%	1.5%	0.5%	1.0%	0.1%	0.1%
18	61.5%	28.9%	6.0%	1.7%	0.6%	1.1%	0.1%	0.2%
19	60.6%	29.1%	6.4%	1.9%	0.7%	1.1%	0.1%	0.2%
20	59.7%	29.4%	6.7%	2.0%	0.7%	1.2%	0.1%	0.2%
21	58.4%	29.7%	7.2%	2.3%	0.8%	1.3%	0.1%	0.3%
22	57.5%	30.0%	7.3%	2.5%	1.0%	1.3%	0.1%	0.3%
23	56.7%	30.0%	7.7%	2.7%	1.0%	1.4%	0.1%	0.3%
24	56.1%	30.1%	8.0%	2.9%	1.1%	1.4%	0.1%	0.3%
25	55.1%	30.3%	8.3%	3.1%	1.2%	1.5%	0.1%	0.4%
26	54.4%	30.2%	8.6%	3.3%	1.3%	1.6%	0.1%	0.4%
27	53.7%	30.2%	8.9%	3.5%	1.4%	1.7%	0.1%	0.5%
28	52.8%	30.4%	9.2%	3.7%	1.5%	1.8%	0.1%	0.5%
29	52.2%	30.3%	9.5%	3.9%	1.6%	1.8%	0.1%	0.6%
30	51.5%	30.3%	9.7%	4.1%	1.7%	1.9%	0.1%	0.7%
31	51.1%	30.1%	9.9%	4.3%	1.8%	1.9%	0.1%	0.7%
32	50.2%	30.2%	10.2%	4.6%	1.9%	2.0%	0.2%	0.7%
33	49.7%	30.0%	10.5%	4.8%	2.0%	2.1%	0.2%	0.8%
34	49.2%	29.9%	10.7%	4.9%	2.1%	2.1%	0.2%	0.8%
35	48.6%	29.9%	10.9%	5.1%	2.3%	2.1%	0.2%	0.9%
36	48.1%	29.7%	11.1%	5.4%	2.4%	2.3%	0.2%	1.0%
37	47.6%	29.8%	11.1%	5.6%	2.4%	2.3%	0.2%	1.0%
38	47.1%	29.5%	11.5%	5.7%	2.6%	2.4%	0.2%	1.1%
39	46.6%	29.5%	11.5%	5.9%	2.7%	2.4%	0.2%	1.2%
40	46.2%	29.2%	11.8%	6.1%	2.8%	2.4%	0.2%	1.2%
41	45.7%	29.3%	11.9%	6.3%	2.9%	2.5%	0.2%	1.3%
42	45.2%	29.0%	12.1%	6.4%	3.0%	2.6%	0.2%	1.4%
43	44.7%	29.0%	12.2%	6.7%	3.1%	2.6%	0.2%	1.5%
44	44.3%	28.8%	12.4%	6.8%	3.2%	2.7%	0.2%	1.5%
45	43.8%	28.8%	12.5%	7.0%	3.3%	2.8%	0.2%	1.6%
46	43.4%	28.7%	12.7%	7.1%	3.4%	2.8%	0.2%	1.7%
47	43.1%	28.4%	12.7%	7.3%	3.5%	2.9%	0.3%	1.8%
48	42.7%	28.4%	12.9%	7.4%	3.6%	2.9%	0.3%	1.9%
49	42.2%	28.4%	13.0%	7.5%	3.7%	3.0%	0.3%	2.0%
50	42.0%	27.9%	13.3%	7.7%	3.8%	3.1%	0.2%	2.1%

TABLE F.1 – Répartition de la notation par année : Notation initiale AAA

Confidentiel

Répartition de la notation par année : Notation initiale AA								
An	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**Spec**	**D**
0	0.0%	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
1	4.4%	92.5%	2.7%	0.0%	0.0%	0.5%	0.0%	0.0%
2	8.4%	85.5%	5.0%	0.1%	0.1%	0.9%	0.0%	0.0%
3	11.7%	79.6%	6.8%	0.4%	0.1%	1.2%	0.0%	0.0%
4	14.8%	74.2%	8.5%	0.8%	0.2%	1.4%	0.1%	0.0%
5	17.5%	69.3%	9.7%	1.2%	0.4%	1.7%	0.1%	0.1%
6	19.8%	64.9%	11.0%	1.7%	0.5%	1.9%	0.1%	0.1%
7	22.1%	61.1%	11.8%	2.1%	0.7%	2.0%	0.1%	0.1%
8	23.9%	57.7%	12.6%	2.5%	0.8%	2.1%	0.1%	0.2%
9	25.7%	54.5%	13.1%	3.0%	1.0%	2.3%	0.2%	0.2%
10	27.1%	51.7%	13.7%	3.5%	1.2%	2.4%	0.1%	0.3%
11	28.3%	49.2%	14.2%	3.9%	1.4%	2.4%	0.2%	0.3%
12	29.3%	46.9%	14.8%	4.4%	1.6%	2.5%	0.2%	0.4%
13	30.2%	45.1%	14.8%	4.9%	1.8%	2.6%	0.2%	0.5%
14	30.9%	43.1%	15.2%	5.3%	2.0%	2.7%	0.2%	0.5%
15	31.8%	41.6%	15.2%	5.7%	2.1%	2.7%	0.2%	0.6%
16	32.4%	40.2%	15.4%	6.0%	2.4%	2.7%	0.2%	0.7%
17	33.0%	38.7%	15.6%	6.4%	2.5%	2.9%	0.2%	0.7%
18	33.4%	37.5%	15.7%	6.8%	2.7%	2.9%	0.2%	0.8%
19	33.7%	36.3%	15.8%	7.1%	2.9%	3.0%	0.2%	0.9%
20	34.2%	35.4%	15.8%	7.4%	3.0%	3.0%	0.2%	1.0%
21	34.4%	34.4%	16.1%	7.6%	3.1%	3.1%	0.2%	1.0%
22	34.6%	33.6%	16.0%	7.9%	3.3%	3.2%	0.3%	1.1%
23	35.0%	32.8%	15.9%	8.2%	3.5%	3.2%	0.2%	1.3%
24	35.0%	32.0%	16.0%	8.5%	3.7%	3.2%	0.2%	1.4%
25	35.2%	31.3%	16.0%	8.6%	3.8%	3.3%	0.3%	1.5%
26	35.1%	30.8%	16.0%	8.9%	3.9%	3.3%	0.3%	1.6%
27	35.1%	30.4%	16.1%	9.0%	4.1%	3.5%	0.3%	1.6%
28	35.0%	29.9%	16.0%	9.3%	4.2%	3.5%	0.3%	1.8%
29	35.0%	29.4%	16.2%	9.4%	4.3%	3.6%	0.3%	1.9%
30	35.1%	29.1%	16.0%	9.6%	4.5%	3.6%	0.3%	2.0%
31	34.9%	28.6%	16.1%	9.8%	4.6%	3.6%	0.3%	2.1%
32	34.8%	28.3%	16.2%	9.8%	4.7%	3.6%	0.3%	2.2%
33	34.7%	28.0%	16.2%	10.0%	4.8%	3.8%	0.3%	2.3%
34	34.6%	27.6%	16.3%	10.2%	4.9%	3.7%	0.3%	2.5%
35	34.7%	27.1%	16.1%	10.3%	5.0%	3.8%	0.3%	2.6%
36	34.5%	27.0%	16.1%	10.3%	5.1%	3.9%	0.3%	2.7%
37	34.4%	26.7%	16.1%	10.5%	5.1%	3.9%	0.3%	2.8%
38	34.3%	26.5%	16.0%	10.6%	5.4%	3.9%	0.4%	2.9%
39	34.2%	26.1%	16.2%	10.6%	5.4%	4.1%	0.3%	3.0%
40	34.0%	26.1%	15.9%	10.8%	5.5%	4.1%	0.4%	3.2%
41	33.8%	25.9%	16.1%	10.9%	5.6%	4.0%	0.3%	3.4%
42	33.9%	25.6%	16.0%	10.9%	5.6%	4.1%	0.4%	3.5%
43	33.6%	25.4%	16.1%	11.1%	5.7%	4.3%	0.4%	3.6%
44	33.4%	25.3%	16.1%	11.0%	5.9%	4.3%	0.4%	3.7%
45	33.3%	24.9%	16.2%	11.2%	5.9%	4.3%	0.4%	3.8%
46	33.3%	24.8%	16.2%	11.1%	6.0%	4.3%	0.4%	4.0%
47	32.9%	24.8%	16.1%	11.3%	6.0%	4.3%	0.4%	4.2%
48	32.9%	24.6%	16.1%	11.3%	6.0%	4.4%	0.4%	4.3%
49	32.7%	24.5%	16.0%	11.4%	6.2%	4.4%	0.4%	4.4%
50	32.5%	24.2%	16.1%	11.5%	6.2%	4.5%	0.4%	4.6%

TABLE F.2 – Répartition de la notation par année : Notation initiale AA

Répartition de la notation par année : Notation initiale A								
An	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**Spec**	**D**
0	0.0%	0.0%	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
1	0.0%	3.0%	91.4%	5.6%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	0.1%	5.6%	83.8%	10.2%	0.2%	0.1%	0.0%	0.0%
3	0.4%	7.6%	77.5%	13.8%	0.5%	0.2%	0.0%	0.0%
4	0.7%	9.3%	72.1%	16.6%	1.0%	0.3%	0.0%	0.0%
5	1.1%	10.9%	66.9%	19.1%	1.4%	0.6%	0.0%	0.0%
6	1.5%	12.2%	62.7%	20.7%	2.0%	0.8%	0.1%	0.0%
7	2.0%	13.1%	59.1%	22.2%	2.4%	1.0%	0.1%	0.1%
8	2.5%	13.9%	55.6%	23.5%	3.0%	1.3%	0.1%	0.1%
9	3.0%	14.9%	52.6%	24.0%	3.6%	1.6%	0.1%	0.2%
10	3.6%	15.2%	50.0%	24.8%	4.2%	1.9%	0.1%	0.2%
11	4.0%	15.7%	47.9%	25.0%	4.7%	2.2%	0.2%	0.3%
12	4.6%	16.1%	45.9%	25.3%	5.1%	2.4%	0.2%	0.4%
13	5.1%	16.4%	44.0%	25.3%	5.7%	2.7%	0.2%	0.5%
14	5.7%	16.7%	42.0%	25.7%	6.1%	3.0%	0.3%	0.5%
15	6.1%	16.9%	40.7%	25.6%	6.5%	3.3%	0.3%	0.7%
16	6.7%	17.2%	39.2%	25.5%	6.9%	3.5%	0.3%	0.8%
17	7.2%	17.1%	37.9%	25.3%	7.3%	3.9%	0.3%	0.9%
18	7.7%	17.3%	36.7%	25.1%	7.7%	4.0%	0.4%	1.1%
19	8.1%	17.4%	35.7%	24.9%	8.1%	4.3%	0.4%	1.2%
20	8.7%	17.4%	34.5%	24.9%	8.3%	4.5%	0.4%	1.3%
21	9.1%	17.6%	33.6%	24.6%	8.5%	4.7%	0.4%	1.5%
22	9.6%	17.4%	32.6%	24.6%	8.7%	4.9%	0.4%	1.7%
23	9.9%	17.6%	31.9%	24.1%	9.1%	5.1%	0.4%	1.9%
24	10.3%	17.5%	31.0%	24.1%	9.3%	5.3%	0.5%	2.1%
25	10.6%	17.5%	30.4%	23.7%	9.5%	5.5%	0.5%	2.3%
26	11.0%	17.6%	29.7%	23.5%	9.6%	5.6%	0.5%	2.5%
27	11.4%	17.3%	29.3%	23.2%	9.9%	5.8%	0.5%	2.7%
28	11.7%	17.3%	28.7%	23.0%	10.0%	5.9%	0.5%	2.9%
29	12.0%	17.4%	28.1%	22.7%	10.0%	6.2%	0.5%	3.0%
30	12.4%	17.5%	27.7%	22.4%	10.2%	6.2%	0.5%	3.2%
31	12.7%	17.4%	27.1%	22.3%	10.3%	6.2%	0.5%	3.5%
32	12.9%	17.4%	26.5%	22.2%	10.4%	6.3%	0.6%	3.7%
33	13.3%	17.3%	26.2%	21.8%	10.5%	6.5%	0.6%	3.8%
34	13.4%	17.4%	25.8%	21.6%	10.5%	6.6%	0.6%	4.1%
35	13.7%	17.3%	25.4%	21.5%	10.6%	6.6%	0.6%	4.4%
36	14.1%	17.1%	25.1%	21.2%	10.7%	6.6%	0.6%	4.6%
37	14.3%	17.1%	24.7%	21.0%	10.9%	6.7%	0.6%	4.8%
38	14.4%	17.1%	24.3%	20.9%	10.8%	6.8%	0.6%	5.1%
39	14.8%	17.2%	23.9%	20.4%	10.9%	6.9%	0.6%	5.3%
40	14.8%	17.1%	23.6%	20.4%	10.9%	6.9%	0.6%	5.5%
41	15.1%	17.1%	23.4%	20.1%	10.9%	6.9%	0.6%	5.8%
42	15.3%	17.0%	23.2%	19.9%	11.0%	7.0%	0.6%	6.0%
43	15.4%	17.2%	22.8%	19.8%	10.9%	7.0%	0.7%	6.2%
44	15.5%	16.9%	22.7%	19.7%	11.0%	7.1%	0.6%	6.5%
45	15.6%	17.0%	22.4%	19.5%	11.0%	7.1%	0.6%	6.7%
46	15.9%	17.0%	22.1%	19.2%	11.0%	7.2%	0.6%	6.9%
47	16.0%	17.0%	21.9%	19.2%	11.0%	7.1%	0.6%	7.2%
48	16.1%	16.9%	21.7%	19.0%	11.0%	7.1%	0.6%	7.5%
49	16.3%	16.8%	21.5%	18.8%	11.2%	7.0%	0.6%	7.6%
50	16.4%	16.9%	21.1%	18.8%	11.0%	7.3%	0.6%	7.9%

TABLE F.3 – Répartition de la notation par année : Notation initiale A

Confidentiel

Répartition de la notation par année : Notation initiale BBB								
An	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**Spec**	**D**
0	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
1	0.0%	0.0%	6.2%	89.4%	3.4%	1.0%	0.0%	0.0%
2	0.0%	0.2%	11.4%	80.3%	6.1%	1.9%	0.1%	0.0%
3	0.0%	0.5%	15.5%	72.7%	8.3%	2.7%	0.2%	0.1%
4	0.0%	0.9%	18.7%	66.4%	10.0%	3.5%	0.3%	0.2%
5	0.1%	1.4%	21.4%	60.9%	11.4%	4.1%	0.3%	0.3%
6	0.1%	2.0%	23.4%	56.2%	12.5%	4.7%	0.4%	0.5%
7	0.2%	2.5%	25.1%	52.3%	13.4%	5.3%	0.5%	0.7%
8	0.3%	3.1%	26.2%	49.0%	14.0%	5.9%	0.5%	0.9%
9	0.5%	3.6%	27.1%	46.3%	14.5%	6.3%	0.6%	1.2%
10	0.6%	4.2%	27.6%	43.7%	15.0%	6.8%	0.6%	1.4%
11	0.7%	4.7%	28.2%	41.5%	15.3%	7.2%	0.7%	1.7%
12	0.9%	5.3%	28.5%	39.5%	15.6%	7.5%	0.7%	2.0%
13	1.1%	5.7%	28.7%	37.8%	15.8%	7.9%	0.8%	2.2%
14	1.3%	6.2%	29.0%	36.3%	15.7%	8.1%	0.8%	2.6%
15	1.6%	6.8%	28.7%	35.0%	16.0%	8.4%	0.7%	2.9%
16	1.8%	6.9%	28.8%	34.2%	15.9%	8.5%	0.8%	3.2%
17	2.1%	7.4%	28.4%	32.9%	16.1%	8.6%	0.8%	3.6%
18	2.3%	7.8%	28.2%	32.1%	16.0%	8.9%	0.8%	3.8%
19	2.5%	8.2%	28.1%	31.1%	16.1%	9.0%	0.9%	4.2%
20	2.8%	8.5%	28.0%	30.4%	16.1%	9.0%	0.9%	4.4%
21	3.1%	8.7%	27.7%	29.7%	16.0%	9.1%	0.8%	4.9%
22	3.4%	9.1%	27.5%	28.9%	16.0%	9.3%	0.9%	5.1%
23	3.6%	9.3%	27.1%	28.4%	15.9%	9.4%	0.8%	5.5%
24	3.9%	9.6%	26.9%	27.8%	15.8%	9.3%	0.9%	5.8%
25	4.2%	9.8%	26.6%	27.4%	15.6%	9.5%	0.9%	6.1%
26	4.4%	10.0%	26.3%	26.8%	15.6%	9.6%	0.9%	6.5%
27	4.7%	10.2%	26.0%	26.6%	15.6%	9.4%	0.9%	6.7%
28	5.0%	10.4%	25.7%	26.0%	15.5%	9.5%	0.9%	7.1%
29	5.3%	10.6%	25.4%	25.6%	15.3%	9.5%	0.9%	7.5%
30	5.5%	10.6%	25.1%	25.4%	15.2%	9.4%	0.9%	7.8%
31	5.8%	10.9%	24.9%	24.9%	15.1%	9.4%	0.9%	8.1%
32	6.0%	11.0%	24.6%	24.7%	15.0%	9.4%	0.9%	8.5%
33	6.2%	11.0%	24.5%	24.4%	15.0%	9.4%	0.9%	8.8%
34	6.6%	11.2%	24.2%	23.9%	14.8%	9.4%	0.8%	9.1%
35	6.8%	11.2%	23.9%	23.5%	14.9%	9.4%	0.9%	9.4%
36	7.1%	11.4%	23.4%	23.5%	14.7%	9.3%	0.9%	9.8%
37	7.3%	11.6%	23.2%	23.1%	14.6%	9.3%	0.9%	10.0%
38	7.5%	11.6%	23.1%	22.7%	14.6%	9.2%	0.8%	10.4%
39	7.8%	11.8%	22.9%	22.5%	14.3%	9.2%	0.8%	10.7%
40	7.9%	11.9%	22.6%	22.3%	14.2%	9.2%	0.9%	10.9%
41	8.1%	11.9%	22.4%	22.1%	14.2%	9.1%	0.9%	11.3%
42	8.4%	12.0%	22.4%	21.7%	14.0%	9.1%	0.8%	11.6%
43	8.6%	12.0%	22.0%	21.7%	13.9%	9.0%	0.8%	12.0%
44	8.8%	12.2%	21.7%	21.5%	13.8%	8.9%	0.8%	12.3%
45	9.0%	12.2%	21.5%	21.4%	13.7%	8.9%	0.8%	12.6%
46	9.2%	12.2%	21.4%	20.9%	13.7%	8.9%	0.8%	12.9%
47	9.4%	12.4%	21.3%	20.8%	13.5%	8.7%	0.8%	13.1%
48	9.6%	12.3%	21.0%	20.7%	13.4%	8.7%	0.8%	13.5%
49	9.7%	12.4%	20.7%	20.5%	13.3%	8.7%	0.8%	13.9%
50	10.0%	12.4%	20.7%	20.2%	13.3%	8.6%	0.8%	14.0%

TABLE F.4 – Répartition de la notation par année : Notation initiale BBB

Répartition de la notation par année : Notation initiale BB								
An	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**Spec**	**D**
0	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%	0.0%	0.0%	0.0%
1	0.0%	0.0%	0.0%	6.3%	88.3%	3.8%	1.0%	0.7%
2	0.0%	0.0%	0.4%	11.0%	78.4%	7.3%	1.4%	1.5%
3	0.0%	0.0%	1.1%	14.8%	70.2%	10.0%	1.6%	2.3%
4	0.0%	0.0%	1.9%	17.5%	63.5%	12.1%	1.8%	3.1%
5	0.0%	0.1%	2.8%	20.0%	57.6%	13.9%	1.8%	3.9%
6	0.0%	0.2%	3.9%	21.4%	52.8%	15.3%	1.8%	4.7%
7	0.0%	0.3%	4.8%	22.5%	48.7%	16.2%	1.9%	5.6%
8	0.0%	0.4%	5.8%	23.4%	45.3%	17.0%	1.8%	6.2%
9	0.0%	0.5%	6.8%	24.0%	42.3%	17.4%	1.8%	7.0%
10	0.1%	0.7%	7.8%	24.7%	39.5%	17.7%	1.8%	7.7%
11	0.1%	0.9%	8.8%	24.7%	37.2%	18.0%	1.9%	8.4%
12	0.1%	1.1%	9.5%	25.2%	35.3%	17.8%	1.8%	9.1%
13	0.2%	1.3%	10.3%	25.0%	33.7%	18.0%	1.7%	9.8%
14	0.2%	1.5%	11.1%	24.9%	32.1%	17.9%	1.7%	10.6%
15	0.3%	1.7%	11.7%	24.9%	31.0%	17.6%	1.7%	11.2%
16	0.3%	2.0%	12.3%	24.9%	29.6%	17.4%	1.7%	11.9%
17	0.4%	2.2%	12.9%	24.6%	28.3%	17.4%	1.6%	12.5%
18	0.5%	2.4%	13.4%	24.8%	27.5%	16.8%	1.6%	12.9%
19	0.6%	2.7%	13.8%	24.6%	26.5%	16.5%	1.6%	13.8%
20	0.7%	3.0%	14.1%	24.2%	25.8%	16.3%	1.6%	14.3%
21	0.8%	3.2%	14.6%	24.1%	24.9%	16.1%	1.6%	14.7%
22	0.9%	3.4%	14.9%	23.8%	24.3%	15.8%	1.5%	15.4%
23	1.0%	3.5%	15.3%	23.8%	23.5%	15.5%	1.4%	15.9%
24	1.1%	3.7%	15.6%	23.6%	23.1%	15.1%	1.4%	16.3%
25	1.2%	4.1%	15.8%	23.2%	22.3%	14.9%	1.4%	17.1%
26	1.4%	4.2%	16.1%	23.0%	21.9%	14.5%	1.4%	17.5%
27	1.5%	4.4%	16.1%	22.9%	21.3%	14.3%	1.3%	18.0%
28	1.7%	4.7%	16.5%	22.7%	20.9%	13.9%	1.3%	18.4%
29	1.8%	4.8%	16.6%	22.6%	20.5%	13.6%	1.3%	18.8%
30	1.9%	5.1%	16.6%	22.2%	20.0%	13.5%	1.2%	19.4%
31	2.1%	5.2%	16.8%	22.1%	19.6%	13.2%	1.2%	19.7%
32	2.3%	5.4%	16.9%	21.8%	19.3%	12.9%	1.2%	20.3%
33	2.4%	5.6%	16.9%	21.6%	18.8%	12.6%	1.2%	20.9%
34	2.6%	5.7%	16.9%	21.5%	18.5%	12.5%	1.1%	21.2%
35	2.7%	5.9%	17.1%	21.3%	18.1%	12.2%	1.1%	21.5%
36	3.0%	6.1%	17.2%	20.8%	17.8%	12.0%	1.1%	22.0%
37	3.1%	6.2%	17.1%	20.8%	17.5%	11.8%	1.1%	22.4%
38	3.3%	6.3%	17.1%	20.7%	17.1%	11.4%	1.1%	22.9%
39	3.4%	6.5%	17.0%	20.4%	16.9%	11.4%	1.0%	23.4%
40	3.5%	6.7%	17.2%	20.3%	16.7%	11.1%	1.0%	23.5%
41	3.7%	6.8%	17.1%	20.2%	16.3%	11.0%	1.0%	23.9%
42	3.8%	7.0%	17.1%	19.9%	16.0%	10.8%	1.0%	24.4%
43	4.0%	7.1%	17.1%	19.7%	15.9%	10.7%	0.9%	24.6%
44	4.1%	7.3%	17.0%	19.6%	15.6%	10.3%	1.0%	25.1%
45	4.4%	7.3%	17.0%	19.5%	15.4%	10.3%	0.9%	25.3%
46	4.5%	7.4%	16.9%	19.4%	15.1%	10.2%	1.0%	25.6%
47	4.6%	7.5%	16.8%	19.0%	14.9%	10.0%	0.9%	26.2%
48	4.8%	7.7%	16.8%	18.8%	14.6%	9.8%	0.9%	26.5%
49	4.9%	7.7%	16.8%	18.7%	14.4%	9.7%	0.9%	26.9%
50	5.1%	7.9%	16.7%	18.7%	14.2%	9.4%	0.9%	27.1%

TABLE F.5 – Répartition de la notation par année : Notation initiale BB

Confidentiel

Répartition de la notation par année : Notation initiale B								
An	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**Spec**	**D**
0	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%	0.0%	0.0%
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	8.7%	86.0%	4.1%	1.2%
2	0.0%	0.0%	0.0%	0.6%	15.4%	76.1%	5.2%	2.8%
3	0.0%	0.0%	0.0%	1.5%	20.2%	68.6%	5.2%	4.5%
4	0.0%	0.0%	0.1%	2.5%	24.1%	62.3%	5.0%	6.0%
5	0.0%	0.0%	0.3%	3.8%	26.7%	56.9%	4.6%	7.7%
6	0.0%	0.0%	0.5%	5.1%	28.8%	52.3%	4.3%	9.0%
7	0.0%	0.0%	0.8%	6.3%	30.0%	48.1%	4.2%	10.6%
8	0.0%	0.0%	1.1%	7.6%	31.2%	44.8%	3.7%	11.6%
9	0.0%	0.1%	1.5%	8.7%	31.7%	41.5%	3.6%	13.0%
10	0.0%	0.1%	1.9%	9.9%	32.0%	38.8%	3.3%	14.0%
11	0.0%	0.2%	2.3%	10.8%	32.0%	36.3%	3.1%	15.3%
12	0.0%	0.2%	2.9%	11.7%	31.7%	34.2%	3.1%	16.3%
13	0.0%	0.3%	3.3%	12.8%	31.4%	32.2%	2.9%	17.1%
14	0.0%	0.4%	3.8%	13.5%	31.1%	30.1%	2.7%	18.3%
15	0.1%	0.4%	4.4%	14.3%	30.5%	28.8%	2.5%	19.0%
16	0.1%	0.6%	4.9%	14.8%	30.1%	27.3%	2.4%	19.9%
17	0.1%	0.7%	5.5%	15.4%	29.3%	25.6%	2.3%	21.2%
18	0.1%	0.8%	5.9%	15.8%	28.7%	24.7%	2.3%	21.8%
19	0.2%	0.9%	6.5%	16.4%	28.0%	23.6%	2.2%	22.4%
20	0.2%	1.0%	7.0%	16.6%	27.2%	22.4%	2.0%	23.5%
21	0.2%	1.1%	7.5%	17.1%	26.7%	21.4%	2.0%	23.9%
22	0.3%	1.3%	7.9%	17.3%	26.0%	20.8%	1.9%	24.5%
23	0.3%	1.5%	8.4%	17.4%	25.5%	19.8%	1.9%	25.2%
24	0.4%	1.6%	8.8%	17.6%	24.8%	19.1%	1.7%	26.0%
25	0.4%	1.8%	9.2%	17.8%	24.2%	18.5%	1.7%	26.5%
26	0.5%	1.9%	9.5%	17.9%	23.5%	17.8%	1.6%	27.2%
27	0.6%	2.1%	10.0%	17.9%	23.1%	17.0%	1.6%	27.7%
28	0.6%	2.3%	10.2%	18.1%	22.3%	16.6%	1.5%	28.4%
29	0.7%	2.4%	10.5%	18.1%	21.8%	16.1%	1.5%	28.9%
30	0.8%	2.5%	10.8%	18.1%	21.2%	15.7%	1.4%	29.5%
31	0.8%	2.7%	11.0%	18.2%	20.7%	15.2%	1.4%	30.0%
32	1.0%	2.9%	11.3%	18.2%	20.4%	14.7%	1.4%	30.2%
33	1.0%	3.0%	11.5%	18.2%	19.8%	14.3%	1.3%	30.9%
34	1.1%	3.1%	11.8%	18.1%	19.4%	13.8%	1.3%	31.4%
35	1.2%	3.3%	12.1%	18.0%	18.9%	13.4%	1.2%	31.8%
36	1.4%	3.4%	12.1%	18.0%	18.5%	13.2%	1.2%	32.2%
37	1.4%	3.6%	12.5%	17.6%	18.1%	12.8%	1.2%	32.9%
38	1.6%	3.8%	12.6%	17.7%	17.7%	12.3%	1.1%	33.3%
39	1.7%	3.9%	12.7%	17.5%	17.5%	12.0%	1.1%	33.7%
40	1.7%	4.0%	12.7%	17.6%	16.9%	11.8%	1.1%	34.0%
41	1.9%	4.2%	12.9%	17.5%	16.6%	11.5%	1.1%	34.3%
42	2.1%	4.3%	13.0%	17.3%	16.2%	11.3%	1.1%	34.8%
43	2.1%	4.4%	13.1%	17.2%	15.9%	11.0%	1.0%	35.3%
44	2.3%	4.6%	13.2%	17.0%	15.6%	10.7%	1.0%	35.6%
45	2.3%	4.8%	13.3%	17.1%	15.2%	10.5%	1.0%	35.9%
46	2.5%	4.8%	13.4%	16.9%	15.0%	10.3%	0.9%	36.2%
47	2.6%	4.9%	13.4%	16.8%	14.8%	10.0%	0.9%	36.5%
48	2.7%	5.1%	13.4%	16.6%	14.4%	9.9%	0.9%	36.9%
49	2.9%	5.1%	13.4%	16.5%	14.3%	9.6%	0.9%	37.3%
50	2.9%	5.3%	13.5%	16.5%	13.9%	9.5%	0.8%	37.5%

TABLE F.6 – Répartition de la notation par année : Notation initiale B

Répartition de la notation par année : Notation initiale Spec.								
An	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**Spec**	**D**
0	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	100.0%	0.0%
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	50.0%	37.6%	12.4%
2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	4.4%	61.6%	16.2%	17.8%
3	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	9.2%	61.3%	8.6%	20.6%
4	0.0%	0.0%	0.0%	0.8%	13.7%	57.2%	5.9%	22.4%
5	0.0%	0.0%	0.1%	1.6%	17.0%	52.6%	4.7%	23.9%
6	0.0%	0.0%	0.2%	2.5%	19.7%	48.3%	4.1%	25.3%
7	0.0%	0.0%	0.3%	3.4%	21.7%	44.3%	3.7%	26.6%
8	0.0%	0.0%	0.5%	4.5%	23.1%	40.9%	3.4%	27.7%
9	0.0%	0.0%	0.7%	5.5%	24.2%	37.6%	3.2%	28.8%
10	0.0%	0.1%	1.0%	6.3%	25.3%	34.8%	2.9%	29.6%
11	0.0%	0.1%	1.4%	7.3%	25.3%	32.4%	2.8%	30.9%
12	0.0%	0.1%	1.7%	8.1%	25.6%	30.4%	2.6%	31.5%
13	0.0%	0.1%	2.1%	9.0%	25.4%	28.3%	2.5%	32.7%
14	0.0%	0.2%	2.5%	9.6%	25.2%	26.7%	2.3%	33.4%
15	0.0%	0.3%	2.8%	10.4%	24.8%	25.3%	2.2%	34.3%
16	0.0%	0.3%	3.3%	11.0%	24.7%	23.8%	2.1%	34.7%
17	0.1%	0.4%	3.7%	11.5%	24.3%	22.4%	2.0%	35.6%
18	0.1%	0.5%	4.2%	11.9%	23.7%	21.4%	1.9%	36.4%
19	0.1%	0.6%	4.6%	12.4%	23.3%	20.3%	1.9%	36.9%
20	0.1%	0.7%	4.9%	12.9%	22.7%	19.5%	1.8%	37.5%
21	0.1%	0.8%	5.4%	13.2%	22.2%	18.4%	1.7%	38.4%
22	0.2%	0.9%	5.7%	13.3%	21.6%	17.8%	1.6%	38.9%
23	0.2%	0.9%	6.1%	13.7%	21.0%	17.1%	1.6%	39.4%
24	0.2%	1.1%	6.5%	13.7%	20.5%	16.3%	1.5%	40.1%
25	0.3%	1.2%	6.8%	14.1%	20.3%	15.7%	1.4%	40.3%
26	0.3%	1.4%	7.2%	14.1%	19.5%	15.1%	1.4%	41.0%
27	0.4%	1.5%	7.5%	14.3%	19.1%	14.4%	1.3%	41.6%
28	0.4%	1.6%	7.8%	14.1%	18.7%	14.0%	1.3%	42.1%
29	0.5%	1.7%	7.9%	14.4%	18.2%	13.6%	1.2%	42.4%
30	0.5%	1.8%	8.3%	14.3%	17.8%	13.1%	1.2%	42.9%
31	0.6%	2.0%	8.6%	14.5%	17.4%	12.7%	1.2%	43.1%
32	0.7%	2.1%	8.8%	14.5%	16.9%	12.4%	1.2%	43.5%
33	0.7%	2.2%	8.9%	14.5%	16.5%	12.0%	1.1%	44.2%
34	0.8%	2.3%	9.2%	14.5%	16.2%	11.6%	1.1%	44.3%
35	0.9%	2.4%	9.3%	14.3%	15.7%	11.3%	1.0%	45.0%
36	1.0%	2.6%	9.4%	14.3%	15.2%	11.0%	1.0%	45.5%
37	1.0%	2.8%	9.7%	14.4%	14.9%	10.7%	1.0%	45.5%
38	1.1%	2.8%	9.8%	14.5%	14.7%	10.3%	1.0%	45.8%
39	1.2%	3.0%	9.9%	14.0%	14.3%	10.1%	1.0%	46.5%
40	1.3%	3.1%	10.0%	14.3%	14.0%	9.8%	0.9%	46.5%
41	1.4%	3.2%	10.1%	14.0%	13.9%	9.6%	0.9%	46.9%
42	1.4%	3.3%	10.4%	14.0%	13.4%	9.3%	0.8%	47.4%
43	1.5%	3.4%	10.4%	13.7%	13.1%	9.1%	0.9%	47.9%
44	1.7%	3.4%	10.5%	13.9%	12.8%	9.0%	0.8%	47.9%
45	1.7%	3.6%	10.5%	13.7%	12.6%	8.8%	0.8%	48.3%
46	1.8%	3.7%	10.7%	13.7%	12.4%	8.6%	0.8%	48.4%
47	1.9%	3.8%	10.6%	13.4%	12.3%	8.4%	0.8%	48.8%
48	2.0%	4.0%	10.7%	13.5%	12.0%	8.1%	0.8%	48.9%
49	2.1%	4.0%	10.7%	13.2%	11.7%	8.0%	0.7%	49.5%
50	2.2%	4.1%	10.8%	13.2%	11.5%	7.8%	0.7%	49.7%

TABLE F.7 – Répartition de la notation par année : Notation initiale Spec.

Confidentiel

G Graphiques supplémentaires

G.1 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 100%) et notations observées 2011

Les figures présentent les achats obligataires (figure G.1 page 171) et les ventes obligataires (figure G.2 page 171) du portefeuille par notation dans le cas déterministe sans risque souverain avec les Notes observées 2011 (scénario moyen) au cours du temps.

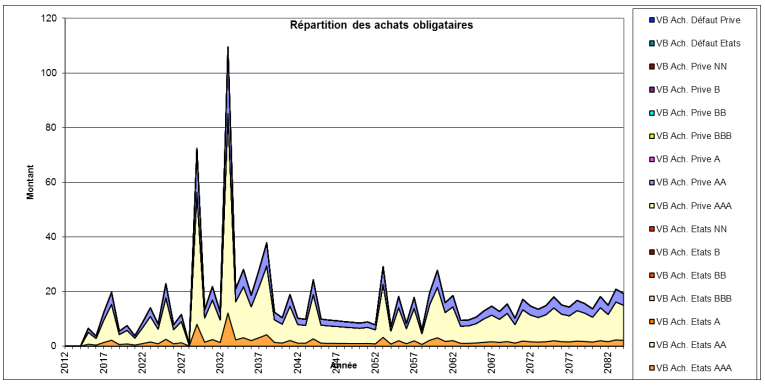

FIGURE G.1 – Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain

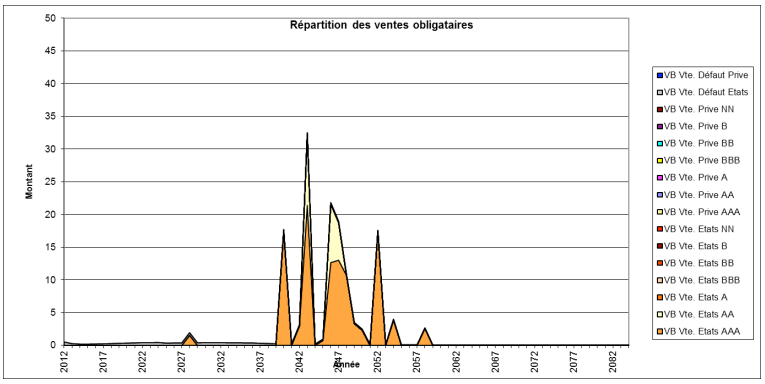

FIGURE G.2 – Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 sans risque souverain

Les figures G.3 page 172 représentent la fonction de répartition de l'indicateur dans le cas de scénarios stochastiques sans risque souverain avec les Notes observées 2011.

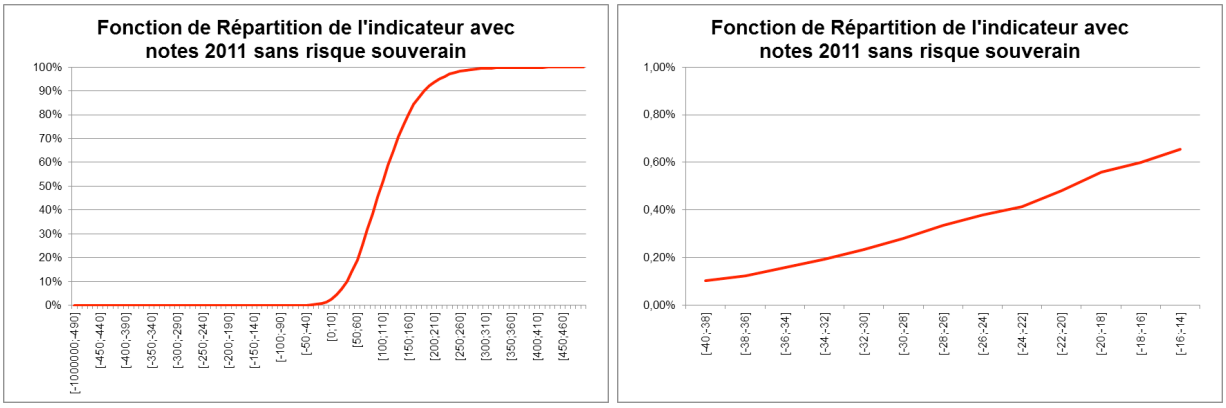

FIGURE G.3 – Fonction de répartition des scénarios - Notes observées 2011 sans risque souverain

G.2 Résultats avec risque souverain (taux de recouvrement de 0%) et notations observées 2011

Les figures présentent les achats obligataires (figure G.4 page 172) et les ventes obligataires (figure G.5 page 172) du portefeuille par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes observées 2011 (scénario moyen) au cours du temps.

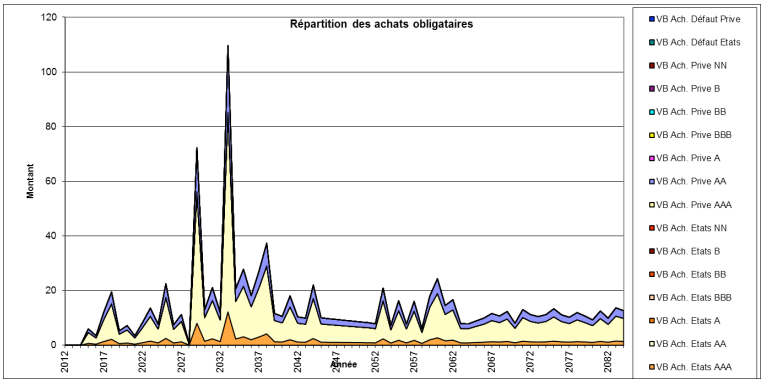

FIGURE G.4 – Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 avec risque souverain

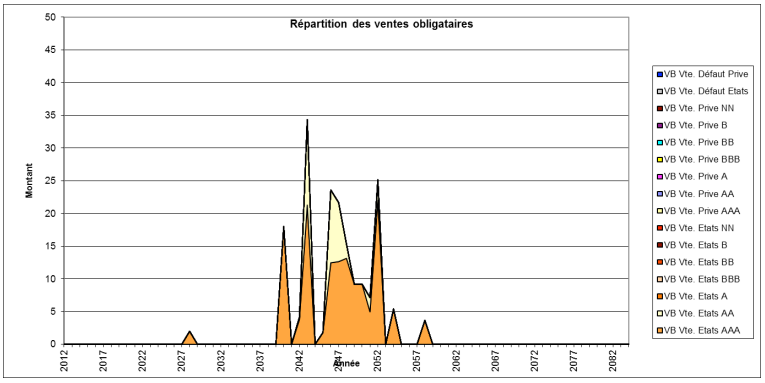

FIGURE G.5 – Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes observées 2011 avec risque souverain

Les figures G.6 page 173 représentent la fonction de répartition des de l'indicateur dans le cas de scénarios stochastiques avec risque souverain avec les notes observées 2011.

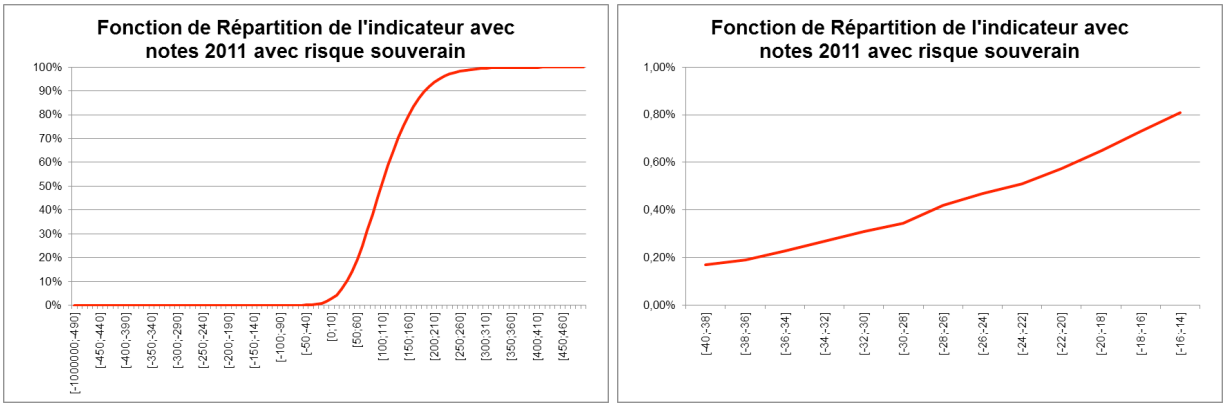

FIGURE G.6 – Fonction de répartition des scénarios - notes observées 2011 avec risque souverain

G.3 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 25%) et notations observées 2011

Les figures présentent les achats obligataires (figure G.7 page 173) et les ventes obligataires (figure G.8 page 173) du portefeuille par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes observées 2011 et taux de recouvrement de 25% (scénario moyen) au cours du temps.

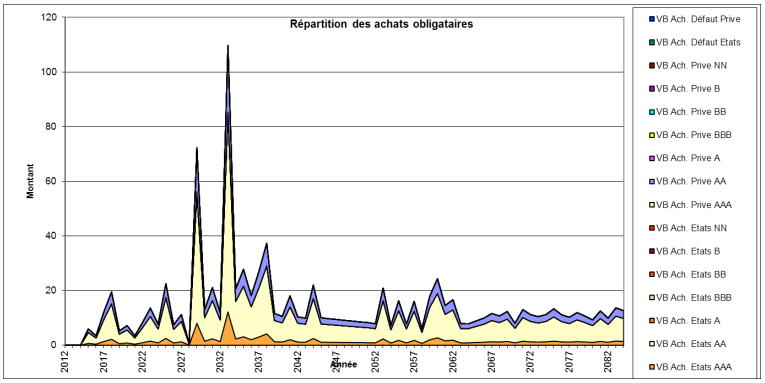

FIGURE G.7 – Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

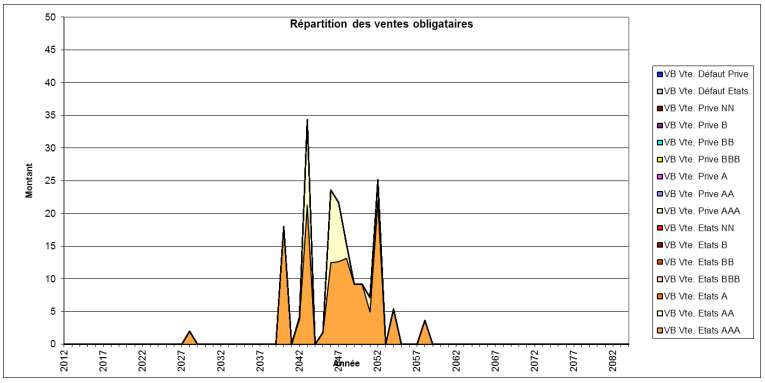

FIGURE G.8 – Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

Les figures G.9 page 174 représentent la fonction de répartition des de l'indicateur dans le cas de scénarios stochastiques avec risque souverain avec les notes observées 2011 et taux de recouvrement de 25%.

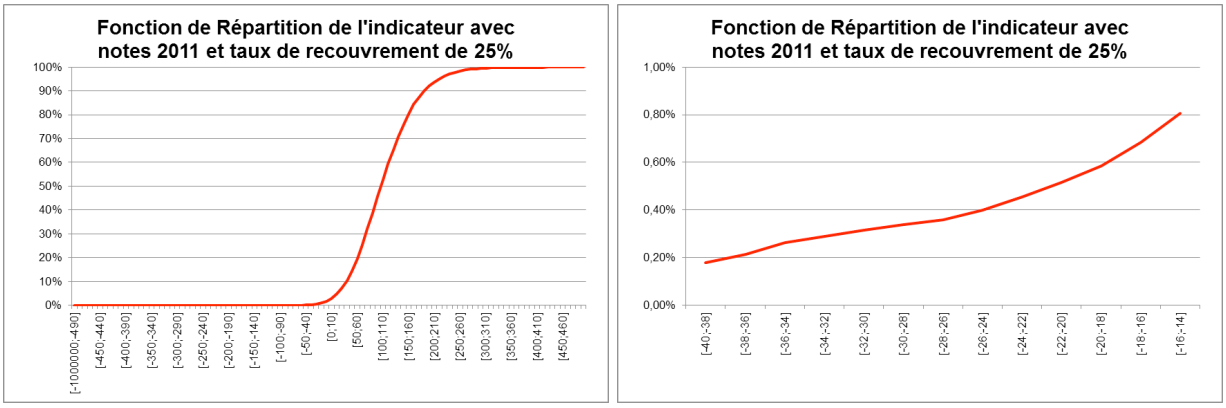

FIGURE G.9 – Fonction de répartition des scénarios - notes observées 2011 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

G.4 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 100%) et notations prédites 2012

Les figures présentent les achats obligataires (figure G.10 page 174) et les ventes obligataires (figure G.11 page 174) du portefeuille par notation dans le cas déterministe sans risque souverain avec les notes prédites 2012 (scénario moyen) au cours du temps.

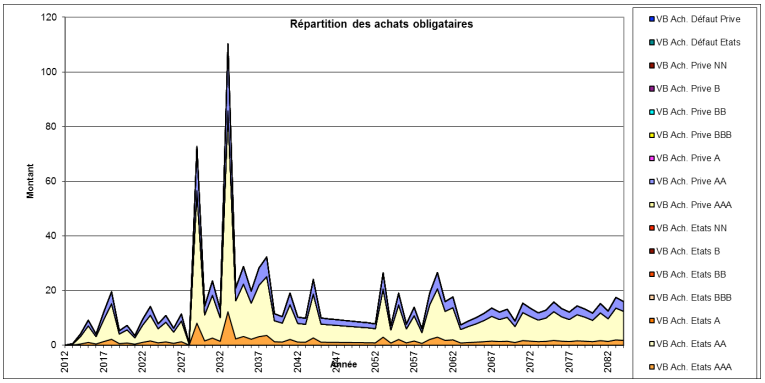

FIGURE G.10 – Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 sans risque souverain

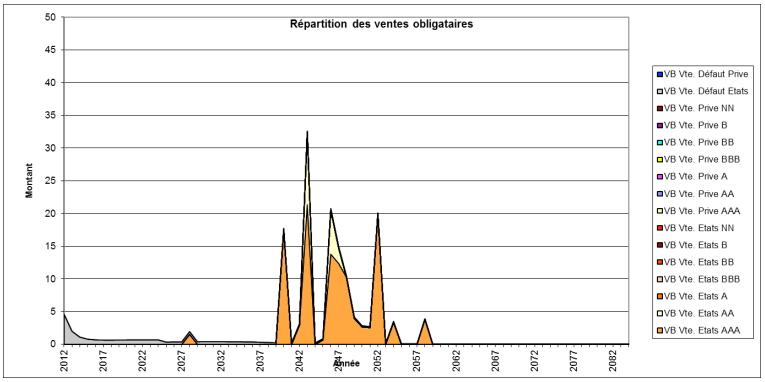

FIGURE G.11 – Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 sans risque souverain

Les figures G.12 page 175 représentent la fonction de répartition des de l'indicateur dans le cas de scénarios stochastiques sans risque souverain avec les notes prédites 2012.

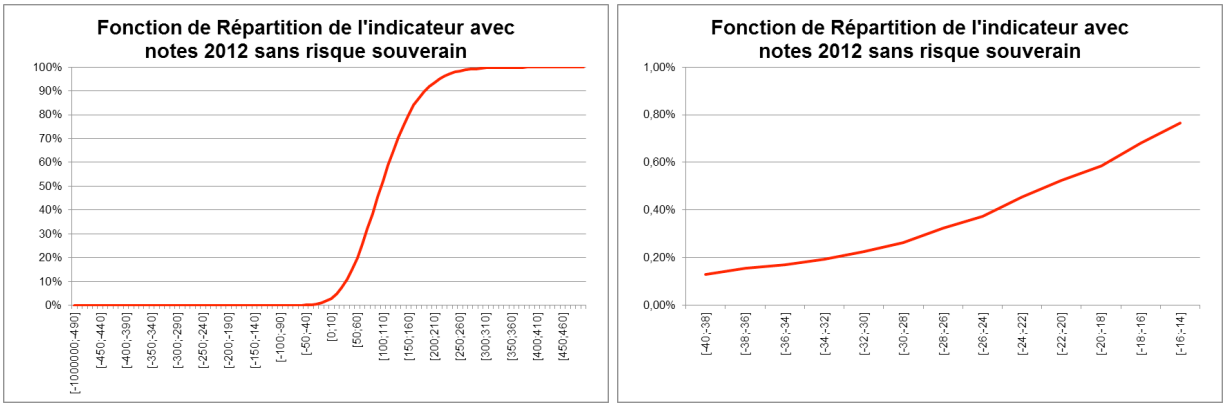

FIGURE G.12 – Fonction de répartition des scénarios - Notes prédites 2012 sans risque souverain

G.5 Résultats avec risque souverain (taux de recouvrement de 0%) et notations prédites 2012

Les figures présentent les achats obligataires (figure G.10 page 174) et les ventes obligataires (figure G.11 page 174) du portefeuille par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes prédites 2012 (scénario moyen) au cours du temps.

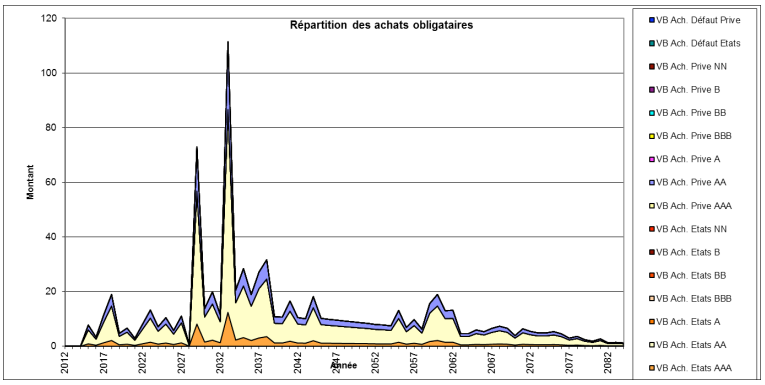

FIGURE G.13 – Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain

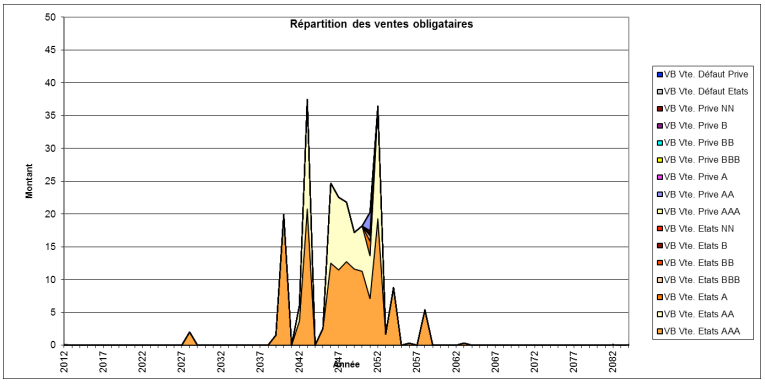

FIGURE G.14 – Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain

Les figures G.15 page 176 représentent la fonction de répartition de l'indicateur dans le cas de scénarios stochastiques avec risque souverain avec les notes prédites 2012.

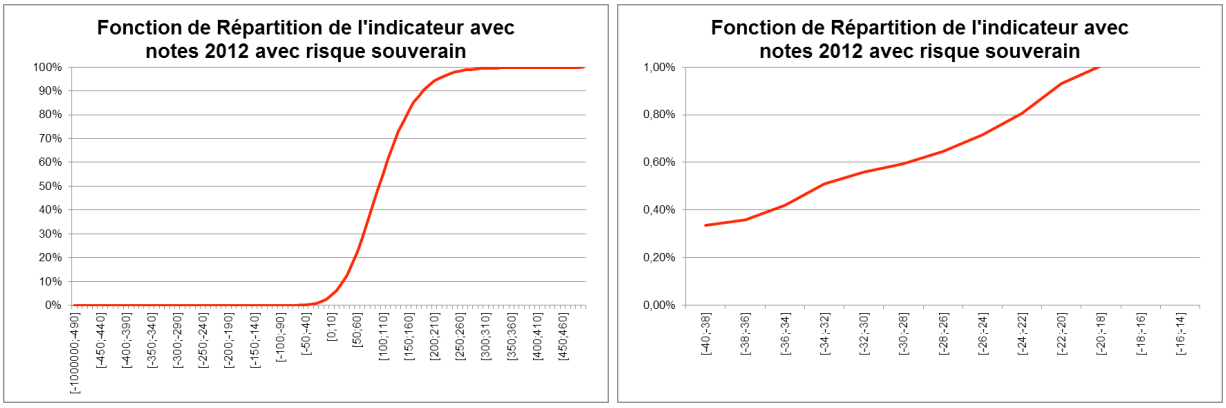

FIGURE G.15 – Fonction de répartition des scénarios - Notes prédites 2012 avec risque souverain

G.6 Résultats sans risque souverain (taux de recouvrement de 25%) et notations prédites 2012

Les figures présentent les achats obligataires (figure G.16 page 176) et les ventes obligataires (figure G.17 page 176) du portefeuille par notation dans le cas déterministe avec risque souverain avec les notes prédites 2012 et taux de recouvrement de 25% (scénario moyen) au cours du temps.

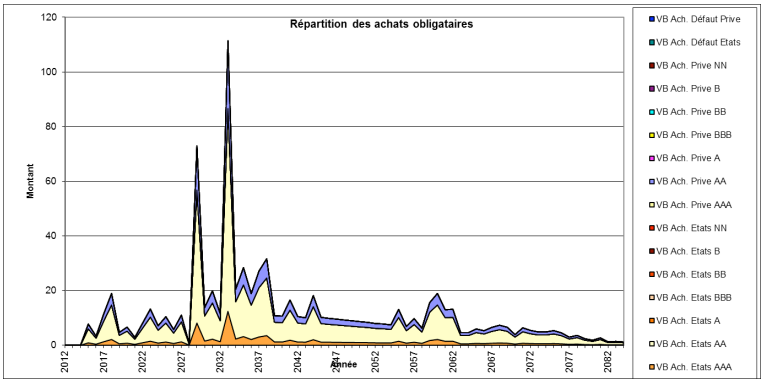

FIGURE G.16 – Modélisation des achats d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

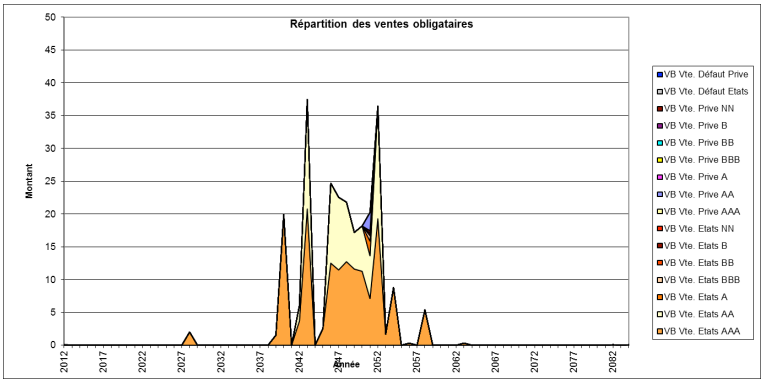

FIGURE G.17 – Modélisation des ventes d'obligations par année et par notation - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

Les figures G.18 page 177 représentent la fonction de répartition de l'indicateur dans le cas de scénarios stochastiques avec risque souverain et un taux de recouvrement de 25%.

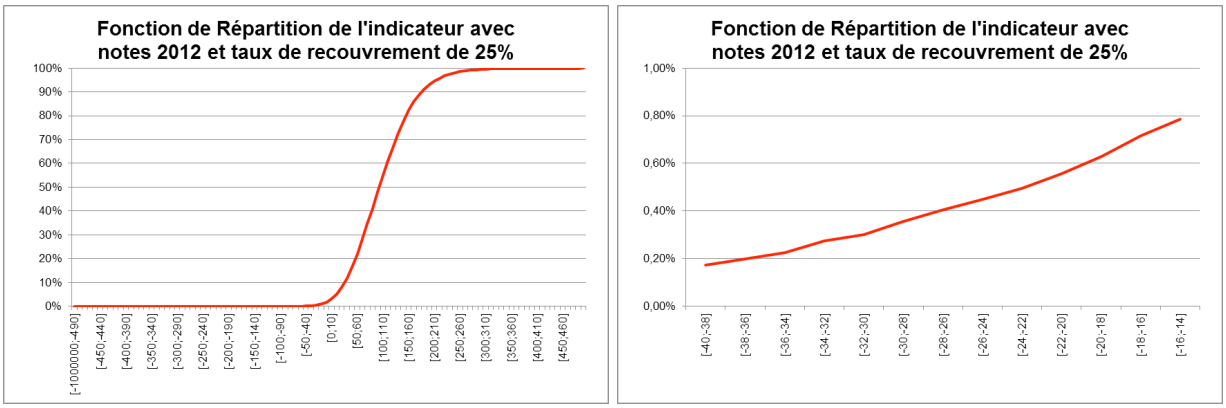

FIGURE G.18 – Fonction de répartition des scénarios - Notes prédites 2012 avec risque souverain et taux de recouvrement de 25%

Confidentiel

H Meilleurs Modèles par nombre de variables explicatives

Les tableaux ci-dessous présentent les variables des différents modèles du tableau 2.5 page 55.

H.1 5 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB	X	X		X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB		X			X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB		X	X	X	X
4	Taux de chômage		X	X	X	X
5	Taux d'inflation			X		
6	Investissement total en pourcentage du PIB				X	
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB					
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X				
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X		X		
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X			X	
12	Balance courante en pourcentage du PIB					X

TABLE H.1 – Liste des 5 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

H.2 6 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB		X		X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB		X	X	X	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
4	Taux de chômage		X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X		X		
6	Investissement total en pourcentage du PIB					
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB					
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X				
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X				X
12	Balance courante en pourcentage du PIB				X	

TABLE H.2 – Liste des 6 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

Confidentiel

H.3 7 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB		X		X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB		X	X	X	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X		X	X
4	Taux de chômage		X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X		X		
6	Investissement total en pourcentage du PIB			X	X	X
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	X				
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		X
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X			X	
12	Balance courante en pourcentage du PIB					X

TABLE H.3 – Liste des 7 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

H.4 8 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB		X	X	X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
4	Taux de chômage		X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X		X	X	
6	Investissement total en pourcentage du PIB		X		X	X
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	X				
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		X
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		X
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X			X	
12	Balance courante en pourcentage du PIB					X

TABLE H.4 – Liste des 8 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

Confidentiel

H.5 9 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB		X	X	X	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
4	Taux de chômage		X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X		X	X	
6	Investissement total en pourcentage du PIB	X	X	X		X
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X		X	
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X			X
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X		X
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X			X	X
12	Balance courante en pourcentage du PIB			X	X	X

TABLE H.5 – Liste des 9 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

H.6 10 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB		X	X		X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
4	Taux de chômage		X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X	X	X	X	
6	Investissement total en pourcentage du PIB	X		X	X	X
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X		X	X
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X		X	X
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X		X	X	X
12	Balance courante en pourcentage du PIB	X	X	X		X

TABLE H.6 – Liste des 10 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

Confidentiel

H.7 11 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
4	Taux de chômage	X	X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X		X	X	X
6	Investissement total en pourcentage du PIB	X	X		X	X
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB		X	X		X
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
12	Balance courante en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X

TABLE H.7 – Liste des 11 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

H.8 12 variables explicatives

N	Variable	Méthode LM	Méthode MLR	Méthode LDA	Méthode SVM	Méthode LSSVM
1	Importation de pétrole en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
2	Dette brute de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
3	Dette nette de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
4	Taux de chômage	X	X	X	X	X
5	Taux d'inflation	X	X	X	X	X
6	Investissement total en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
7	Décifit/Excédent primaire de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
8	Décifit/Excédent net de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
9	Dépenses totales de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
10	Revenu de l'Etat en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
11	Taux d'épargne en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X
12	Balance courante en pourcentage du PIB	X	X	X	X	X

TABLE H.8 – Liste des 12 variables explicatives pour chaque méthode mathématique pour le modèle présentant le meilleur résultat avec ce nombre de variables explicatives

Confidentiel