

**Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles
pour la validation du
cursus à la Formation d'Actuaire du Centre d'Etudes Actuarielles
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le / / 2015**

Par : M. Alaeddine FALEH

Titre : ALM et allocation stratégique d'actifs : cas des régimes de retraite et des fonds de pension

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présent du jury de
l'Institut des Actuaires :*

*Membres présents du jury du
Centre d'Etudes Actuarielles :*

Secrétariat :

Bibliothèque :

*Entreprise : Caisse des Dépôts et
Consignations_____*

Nom : M. Guillaume LEZAN

Signature :

Directeur de mémoire :

Nom : M. Frédéric PLANCHET_____

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**
*(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

M. Patrick Badilian

Signature(s) du candidat(s)

RÉSUMÉ

Le présent mémoire s'intéresse aux modèles d'allocation stratégiques d'actifs et à leurs applications pour la gestion des réserves financières des régimes de retraite par répartition, en particulier ceux partiellement provisionnés. L'étude de l'utilité des réserves pour un système par répartition et *a fortiori* de leur gestion reste un sujet peu exploré. Ce mémoire commence donc par rappeler les différents risques sous-jacents à la gestion des réserves d'un régime de retraite en proposant un certain nombre de critères d'optimisation de cette gestion.

L'importance du choix de la stratégie sous-jacente au choix final de l'allocation de long-terme d'actifs nous a conduits à effectuer cette étude en trois parties. Dans la première partie, nous avons étudié les stratégies statiques d'allocation d'actifs en présentant une illustration numérique détaillée de la stratégie à poids constants (ou *Fixed-Mix*).

Dans la deuxième partie, nous avons exploré les stratégies dynamiques d'allocation d'actifs. En particulier, nous avons présenté les techniques d'ALM basées sur la programmation stochastique. Leur application a été illustrée pour le choix de l'allocation stratégique d'actifs des régimes de retraite par répartition partiellement provisionnés. Une méthodologie pour la génération de l'arbre des scénarios a été également détaillée à ce niveau. A la fin de cette partie, une étude comparative du modèle d'ALM développé avec celui basé sur la stratégie *Fixed-Mix* a été effectuée. Par ailleurs, différents tests de sensibilité ont été mis en place pour mesurer l'impact du changement de certaines variables clés d'entrée sur les résultats produits par notre modèle d'ALM.

La troisième partie a consisté dans un focus sur une approche de gestion fortement adoptée par les fonds de pension anglo-saxons à savoir la LDI (*Liability Driven Investment*). Après le passage en revue de son principe et du contexte économique de son apparition, les principales techniques et stratégies de gestion utilisées dans le cadre de la LDI sont présentées. A ce niveau, une synthèse de certains résultats obtenus par Badaoui et al. [2014] a été effectuée. Ces résultats ont le mérite de comparer la performance des différentes stratégies de gestion mis en place dans le cadre de l'approche LDI.

MOTS-CLÉS

Gestion actif-passif, Allocation d'actifs, LDI, Optimisation stochastique, Programmation stochastique, Régime de retraite

ABSTRACT

This thesis focuses on the strategic asset allocation models and on their application for the financial reserve management of a pay-as-you-go (PAYG) retirement schemes, especially those with partial provision. The study of the reserve utility for a PAYG system and of their management still leaves a lot to be explored. Classical hypothesis are usually considered too restrictive for the description of the complex reserve evolution. Models and results have been developed over the choice of optimal strategic asset allocation in the case of an Asset-Liability Management (ALM).

First, we recall principal risks and classical technics of ALM for retirement schemes (specially the Fixed-Mix strategy). We then presented ALM techniques based on stochastic programming. An application to the strategic asset allocation of a retirement scheme with partial provision is developed. A specific methodology for the scenario tree generation was also proposed at this level. Finally, a comparative study between proposed ALM model and Fixed-Mix strategy based model was achieved. We also made a variety of a sensitivity tests to detect the impact of the input values changes on the output results, provided by our ALM model.

In the last chapter, we focused on the LDI strategies which are seen as the latest and most sophisticated form of ALM. Those strategies were first developed in northern European countries and in English speaking countries (especially in the United Kingdom) where pension funds are widespread. We had as objectives to understand why the LDI has become increasingly popular among pension funds and what has led pension funds to consider LDI. Also, we described how the LDI should work and its benefits and limits. Then, we presented principal risk management and modeling solutions in the LDI framework. Results obtained by Badaoui and al. [2014] are presented to compare asset allocation strategy performance in a context of LDI.

KEY-WORDS

Asset-Liability Management, Asset Allocation, LDI, Stochastic Optimization, Stochastic Programming, Retirement Scheme

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier vivement Prof. Frédéric PLANCHET pour avoir dirigé ce mémoire. Je suis particulièrement reconnaissant de la confiance qu'il a su m'accorder dès les premiers kilomètres de ce marathon, ainsi que de ses précieux conseils.

J'adresse chaleureusement mes remerciements aux membres du jury auxquels je suis reconnaissant pour l'honneur qu'ils me font de juger ce travail.

Mes vifs remerciements s'adressent à Mme. Virginie CHAPRON DU JEU (directrice du département des Investissements et de Comptabilité à la Caisse des Dépôts et Consignations CDC) pour m'avoir accordée sa confiance : un atout qui a permis le déroulement de mon travail, au sein de son département, dans les meilleures conditions.

Ma profonde gratitude à M. Patrick BADILIAN (directeur du Département Financier à la CDC) et à M. Guillaume LEZAN (mon supérieur hiérarchique à la CDC) pour leurs encouragements et leurs pertinentes suggestions.

Ce mémoire a bénéficié d'un précieux soutien, à son commencement, de la part de Mme. Edith JOUSSEAUME (ancienne directrice du département des Investissements et de Comptabilité à la CDC) envers qui je reste toujours reconnaissant.

J'adresse un chaleureux remerciement à toute ma famille qui n'a pas cessé de me supporter pour l'aboutissement de ce travail.

Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé, de près ou de loin, à l'accomplissement de ce mémoire.

DEDICACES

A ma chère femme ASMA

A nos deux chers anges YACINE et YASMINE

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	7
Objectifs et enjeux	7
Présentation détaillée	9

Chapitre 1 – La gestion ALM : l'allocation d'actifs et les risques sous-jacents	12
1. Introduction	12
1.1 Importance de l'allocation stratégique d'actifs.....	12
1.2 Allocation stratégique et générateurs de scénarios économiques...	13
1.3 Allocation stratégique dans le cadre de l'ALM	14
2. Modélisation du régime-type	15
3. Étude des critères d'allocation	16
4. Principaux risques sous-jacents.....	21
4.1 Le risque de rendement de l'actif.....	21
4.2 Le risque d'indexation : cas particulier de l'inflation.....	22
4.3 Remarques sur la question du taux d'actualisation des engagements.....	23
4.2 Le risque de longévité.....	24
4.4 Le nécessaire positionnement de l'analyse des risques financiers par rapport au cadre Solvabilité II.....	27
5. Conclusion.....	30

Chapitre 2 – Les modèles d'ALM classiques	31
1. Immunisation du portefeuille.....	31
1.1. Adossement des flux de trésorerie.....	33
1.2 Adossement par la durée.....	33
2. Modèles basés sur le surplus.....	36
3. Étude de l'allocation d'actifs dans le cadre de la stratégie <i>Fixed-Mix</i> ..	39
3.1. Présentation	39
3.2. Application	41
3.2.1. Hypothèses du modèle d'actifs	41
3.2.2. Hypothèses du modèle du passif et d'ALM.....	46
3.2.3. Méthodologie retenue	50
3.2.4. Résultats obtenus	53
4. Conclusion.....	59

Chapitre 3 – Allocation stratégique d'actifs et modèles d'ALM dynamique..... 61

1. Allocation stratégique d'actifs dans le cadre des modèles classiques d'ALM dynamique62
2. L'allocation stratégique d'actifs dans le cadre de la programmation stochastique 64
 - 2.1. Introduction 64
 - 2.2. Présentation de la programmation stochastique..... 64
 - 2.3. Illustration de la programmation stochastique « avec recours » dans le cas de la planification de la production.....65
 - 2.4. Formulation mathématique de la programmation stochastique avec recours 69
 - 2.5. Résolution des programmes stochastiques 72
3. Nouvelle approche d'ALM par la discrétisation des scénarios économiques 74
 - 3.1. Méthode des quantiles de référence pour le GSE 75
 - 3.2. Modèle d'optimisation basé sur la programmation stochastique...78
 - 3.3. Discussion des résultats..... 86
4. Conclusion..... 95

Chapitre 4– Focus sur les techniques d'allocation d'actifs d'un fonds de pension anglo-saxon: cas du LDI.....96

1. Introduction..... 96
2. Contexte économique et historique.....98
3. Fonctionnement général du LDI.....101
 - 3.1. Indicateurs de situation : le financement.....101
 - 3.2. L'investissement en deux portefeuilles.....102
 - 3.3. Le budget de risque et les objectifs d'investissement dans une stratégie LDI.....104
 - 3.4. LDI et les autres stratégies de d'investissement.....107
4. Risk Management et le LDI.....108
5. Stratégies et techniques d'optimisation avec le LDI.....111
6. Conclusion.....119

Bibliographie 120

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Objectifs et enjeux du mémoire

Récemment, la gestion actif-passif s'est imposée pour les sociétés d'assurance et les fonds de pension (équivalents anglo-saxons des fonds de retraite) comme une approche de gestion des risques qui tient compte des actifs, des engagements et aussi des différentes interactions existant entre ces deux parties. Les gérants des fonds doivent déterminer les stratégies admissibles qui garantissent avec une probabilité suffisante que la solvabilité de la compagnie est assurée (compte tenu des prestations attendues).

Les techniques utilisées pour la mise en place de cette gestion actif-passif diffèrent particulièrement en fonction de la nature des engagements de la compagnie d'assurance. L'*Asset-Liability Management* (ALM) est en charge d'établir les recommandations sur les deux principaux leviers de pilotage de l'activité :

- la stratégie commerciale qui permet d'orienter la composition du portefeuille de contrats d'assurance.
- l'allocation stratégique des placements qui limite les risques financiers, nés de l'inversion du cycle de production, afin de garantir le paiement des prestations aux assurés et les profits futurs de la compagnie.

D'un autre côté, le champ d'étude offert par les régimes de retraite est très étendu et peut être segmenté selon différentes clés telles que notamment : régimes publics *versus* régimes d'entreprises, gestion en répartition¹ *versus* gestion en capitalisation², régimes à cotisations définies *versus* régimes à prestations définies, etc. Trois situations peuvent être recensées pour un régime donné : régime provisionné (cas où le régime est tenu à la couverture totale des engagements souscrits par ses cotisants et

1. Mode d'organisation des systèmes de retraite fondé sur la solidarité entre générations. Les cotisations versées par les actifs au titre de l'assurance vieillesse servent immédiatement à payer les retraites. L'équilibre financier des systèmes de retraite par répartition est fonction du rapport entre le nombre de cotisants (population active, taux de croissance des revenus) et celui des retraités. Le système français de retraite est fondé sur le principe de la répartition.

2. Mode d'organisation des systèmes de retraite dans lequel les cotisations d'un assuré sont placées à son nom durant sa vie active (placements financiers et immobiliers dont le rendement varie en fonction des taux d'intérêt) avant de lui être restituées sous forme de rente après l'arrêt de son activité professionnelle. La constitution du capital peut s'effectuer à titre individuel ou dans un cadre collectif (accord d'entreprise). En France, seuls les systèmes de retraite dits sur-complémentaires (ex. PREFON, COREM, le PERP ou Plan d'Épargne Populaire) fonctionnent selon le principe de la capitalisation à l'exception du RAFF.

retraités actuels), régime partiellement provisionné (couverture d'une partie seulement des engagements souscrits par ses cotisants et retraités actuels) et enfin régime non provisionné.

Pour apprécier la solidité prudentielle d'un régime de retraite, les experts se sont longtemps limités à une approche binaire, selon laquelle il convenait de tout provisionner dans le cas d'un système par capitalisation et rien dans le cas d'un système par répartition. Des travaux récents mettent en évidence l'utilité de réserves pour un système par répartition (cf. Delarue [2001]).

Le fonctionnement financier des régimes de retraite par répartition, en particulier en France, peut être schématisé comme suit : les flux de cotisations permettent de régler les flux de prestations, ensuite le surplus permet, le cas échéant, d'alimenter une réserve destinée à régler une partie des prestations futures. Cette même réserve peut se voir prélever le solde technique débiteur s'il s'avère que les cotisations sont insuffisantes pour régler les prestations. Dans le même temps, la réserve est placée sur les marchés financiers et allouée selon différentes classes d'actifs.

La gestion actif-passif de façon générale peut être basée sur l'optimisation de la valeur de la réserve, compte tenu des contraintes liées au passif qu'elle doit respecter. C'est dans ce cadre que le choix d'une allocation stratégique efficace joue un rôle essentiel dans le pilotage actif-passif d'un régime de retraite, étant donné que les réserves contribuent à part entière à la solidité du régime. Cependant, aussi bien pour les sociétés d'assurance ou pour les fonds de retraite, il est difficile de définir la « meilleure » stratégie de placement de ces réserves sur les marchés financiers, notamment dans un contexte de fortes incertitudes économiques.

Le présent mémoire est consacré aux modèles d'allocation stratégique d'actifs et à leurs applications pour la gestion des réserves financières dans un cadre de gestion actif-passif. Les approches développées pour les fonds de retraite peuvent également être adaptées au cadre de l'allocation d'actifs d'une société d'assurance. Aussi, il nous a paru intéressant de mener une étude sur l'une des principales approches de gestion des fonds de pension anglo-saxonnes à savoir la gestion LDI (*Liability Driven Investment*).

Ce travail se distingue par l'attention toute particulière portée aux techniques récentes d'allocation d'actifs et leurs conséquences en termes d'approche de « *management* » du risque. Ainsi, deux points particuliers font l'objet d'un examen approfondi : d'une part les modèles classiques d'ALM puis, dans un deuxième temps, les modèles dits « dynamiques » d'ALM.

Concernant les générateurs de scénarios économiques (GSE), nous notons que le choix de leurs composantes est lié à la vocation finale du

générateur de scénarios économiques, que ce soit en tant qu'outil d'évaluation des produits financiers (*pricing*) ou en tant qu'outil de projection et de gestion des risques. Un GSE typique sera considéré pour l'ensemble des applications et sera supposé comme un outil externe donné. Une description détaillée des caractéristiques de ce GSE est présentée dans Faleh [2012].

Concernant les modèles d'allocation d'actifs, notre étude est axée sur la comparaison des modèles disponibles selon les hypothèses sous-jacentes de « rebalancement » des portefeuilles : nous faisons la distinction entre une gestion « statique » (pour laquelle les poids reviennent périodiquement à ceux de l'allocation stratégique de long-terme – cas par exemple des modèles à poids constants *Fixed-Mix*) et une gestion dite « dynamique », pour laquelle les poids peuvent s'écarter définitivement de l'allocation stratégique initiale selon des règles de gestion prédéfinies.

Nous verrons que l'approche dynamique présente l'avantage théorique de la robustesse face aux changements de régime des marchés. L'auto-réajustement du changement des poids des différentes classes d'actifs, sur la base d'une règle de gestion bien définie, constitue *a priori* un élément intéressant. Cela, en effet, permet l'ajustement des expositions aux différentes classes d'actifs suite à l'évolution des conditions de marché.

La gestion dynamique de portefeuille sur le long terme reste un domaine de recherche relativement peu exploré, par comparaison avec l'importance des travaux déjà réalisés sur les aspects à court terme. Cette réflexion sur la construction de modèles d'allocation d'actifs applicables dans une optique prévisionnelle à long-terme nous conduira à étudier une approche innovante fondée sur les techniques de « programmation stochastique » (cf. Birge et Louveaux [1997]). Il s'agit d'une version adaptée d'une technique déjà utilisée dans le domaine de l'ingénierie pour la planification de la production (cf. Dantzig et al. [1990], Escudero et al. [1993]).

Présentation détaillée du mémoire

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Le **premier chapitre** a pour but d'introduire les notions d'allocation d'actifs et d'ALM dans le contexte de la gestion d'un régime de retraite. Une modélisation type de ce dernier est présentée ainsi que différents critères d'allocations possibles. Il nous a également paru nécessaire de recenser les principaux risques pris en compte lors de l'allocation d'actifs. Les deux chapitres suivants sont, quant à eux, consacrés à l'élaboration de l'allocation d'actif elle-même.

Il est question dans le **chapitre 2** d'analyser les approches classiques (ou déterministes) de gestion actif-passif à savoir les modèles basés sur la

notion de « duration » et de « surplus ». L'objectif de cette partie est de revoir rapidement l'état de l'art en matière de modèles d'ALM déterministe (ou classique). Après avoir mis en évidence les limites de ces modèles, nous passons à l'étude de modèles plus élaborés et plus sophistiqués.

Nous considérons donc une approche récente d'allocation stratégique d'actifs basée sur la stratégie dite « à poids constants » ou *Fixed-Mix* (cf. Kouwenberg [2001]).

Nous proposons une modélisation du régime-type de retraite et étudions certains critères d'allocation stratégique d'actifs en fonction du type du régime (provisionné, partiellement provisionné, etc.). Nous passons ensuite à l'illustration de la stratégie *Fixed-Mix* avec une application sur les réserves d'un régime de retraite partiellement provisionné. Les résultats obtenus sont discutés et différents tests de sensibilité sont mis en place : ces tests sont liés principalement à l'impact des hypothèses de rendement ou de corrélation retenues.

Les modèles classiques d'ALM dynamiques sont explorés dans le **chapitre 3**, notamment les techniques d'assurance de portefeuille (cf. Perold et Sharpe [1988]) et les techniques de programmation dynamique (cf. Cox et Huang [1989], Merton [1971]). À ce niveau, les techniques d'assurance de portefeuille basées sur la notion de CPPI ou *Constant Proportion Portfolio Insurance* (cf. Perold et Sharpe [1988]) sont décrites. De même, les principes des techniques de programmation dynamique et leurs limites sont également mis en évidence.

Nous nous penchons par la suite sur une autre approche fondée sur les techniques de « programmation stochastique » (cf. Birge et Louveaux [1997]). Il s'agit d'une version adaptée d'une technique déjà utilisée dans le domaine de l'ingénierie pour la planification de la production (cf. Dantzig et al. [1990], Escudero et al. [1993]). Dans ce cadre, nous mettons en place un exemple de modèle d'ALM dynamique basé sur les techniques de programmation stochastique.

Nous détaillons, au cours d'une illustration numérique, une méthodologie de génération de scénarios économiques que nous appelons méthodologie « des quantiles de référence ». Cette dernière permet de partir d'une structure linéaire de génération de scénarios (telle que décrite dans le chapitre 2) pour réduire la dimension du problème rencontré avec la stratégie *Fixed-Mix* tout en tenant compte de la corrélation entre les distributions des différentes variables projetées. Cela s'insère dans le cadre de la recherche d'une vision à la fois simplifiée, réelle et dynamique des stratégies possibles pour l'allocation d'actifs sur le long terme.

À travers la même application numérique, nous comparons les premiers résultats relatifs aux deux approches d'allocation stratégique d'actifs : celle

basée sur la stratégie *Fixed-Mix* et celle basée sur les techniques de programmation stochastique. Nous testons également la sensibilité de cette deuxième approche par rapport au changement de certains de ses paramètres, toutes choses étant égales par ailleurs.

Afin d'avoir plus de recul sur le sujet, nous consacrons un **quatrième chapitre** à l'étude de l'une des principales approches de gestion des fonds de pension anglo-saxonnes appelée LDI (*Liability Driven Investment*). Cette approche, largement citée dans les milieux professionnels, sera explorée. Pour cela, on commence par un rappel du contexte économique et historique d'apparition du LDI avant de passer à la description de son principe général et de son positionnement par rapport à la gestion des risques (*risk management*). Les différentes stratégies et techniques d'optimisation sous le LDI seront ensuite expliquées. Un exemple de formulation mathématique du problème sera finalement discuté en reprenant notamment des éléments des travaux de Badaoui et al. [2014].

Tout au long de ce travail, nous mettons en évidence le lien effectif entre les recherches académiques et les besoins du monde de la gestion des fonds de retraite en matière de gestion des risques et de respect des engagements vis-à-vis des adhérents.

Chapitre 1

LA GESTION ALM : L'ALLOCATION D'ACTIFS ET LES RISQUES SOUS- JACENTS

1. Présentation théorique

1.1 Importance de l'allocation stratégique d'actifs

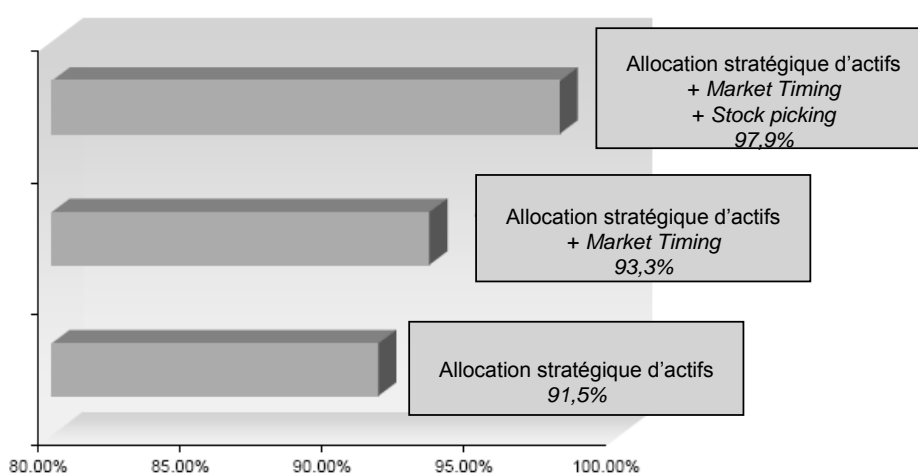
L'allocation stratégique d'actifs d'une compagnie d'assurance ou d'un régime de retraite en général est souvent définie comme une étape d'un processus plus général de la gestion actif-passif, en particulier comme l'étape en aval de l'appréhension des risques et en amont de l'allocation tactique d'actifs. Compte tenu de ce positionnement, l'allocation stratégique d'actifs vise, soit à confirmer l'optimalité de la structure de l'actif existant de la réserve, soit à proposer une structure optimale d'actifs de cette réserve qui permette à la compagnie d'atteindre un certain objectif de performance financière tout en respectant ses engagements avec un niveau de confiance donné. La caractérisation de « stratégique » vient, d'une part, de l'horizon temporel auquel s'appliquent les études d'allocation stratégique, d'autre part, du nombre limité de classes d'actifs considérées dans ces études, généralement limité entre trois et dix au maximum.

Après avoir déterminé l'ensemble des allocations d'actifs possibles (allocations à tester), la résolution du problème de détermination de l'allocation stratégique d'actifs pour la société étudiée passe en pratique par trois étapes principales. La première étape consiste à *générer des trajectoires* pour chaque classe d'actifs (actions, obligations, immobilier, etc.). La deuxième consiste à projeter chaque allocation possible en fonction de la *règle de gestion* du dispositif. La troisième étape vise à déterminer la valeur de la *fonction objectif* pour chacune de ces

allocations. Seront susceptibles d'être retenues alors celles qui à la fois maximisent la fonction objectif et respectent les contraintes fixées.

L'importance de l'allocation stratégique pour les investisseurs à long terme est mise en évidence dans l'étude de Brinson et al. [1991] comme le montre le graphique suivant :

Figure 1 – Pourcentages de la performance globale expliqués par certaines composantes de l'allocation d'actifs selon l'étude de Brinson et al. [1991]



Selon cette étude, la gestion passive d'un indice de référence répliquant le jeu de poids stratégiques du portefeuille suffit pour obtenir l'essentiel de la performance espérée de ce portefeuille (autrement dit, l'évolution de la rentabilité d'un portefeuille est à 91,5 % le résultat de l'évolution des classes d'actifs sur lesquelles il est investi). L'allocation tactique qui permet de bénéficier des inefficiences temporaires du marché des titres et qui peut avoir pour source, soit une sélection optimale de titres différents de ceux de l'indice (*stock picking*), soit le choix optimal des dates d'achat et de vente de ces titres (*market timing*), n'explique qu'environ 6,5 % de la performance globale obtenue *in fine* sur le portefeuille.

1.2 Allocation stratégique et générateurs de scénarios économiques

La projection sur le long terme des valeurs de marché des actifs financiers et des variables macro-économiques, souvent appelée « génération de scénarios économiques », constitue une phase cruciale dans le

processus d'allocation stratégique des fonds d'une compagnie d'assurance ou d'un fonds de retraite. Elle est un élément central de l'évaluation des provisions pour les garanties financières sur des contrats d'épargne dans le cadre de la directive Solvabilité II (cf. Planchet [2009]).

Un générateur de scénarios économiques (GSE) s'avère ainsi un outil important d'aide à la décision dans le domaine de la gestion des risques, en permettant d'obtenir des projections dans le futur des valeurs des éléments qui sont présents dans les deux compartiments du bilan de la société : les actifs (actions, obligations, immobilier,...) et le passif (provisions techniques, dettes financières,...). L'obtention de ces valeurs passe par la projection d'autres variables macro-économiques et financières telles que les taux d'intérêt, l'inflation des prix, l'inflation des salaires et le taux de chômage.

La construction et la mise en œuvre d'un GSE passent par les quatre étapes suivantes (voir par exemple Hibbert et al. [2001] ou Ahlgrim et al. [2005]). La première étape consiste en l'identification des sources de risque prises en compte et des variables financières à modéliser (taux d'intérêt, inflation, rendement des actions, etc.) qu'on appellera dans la suite les variables du GSE. Ensuite est effectué le choix du modèle pour la dynamique de chacune de ces variables. La troisième étape consiste à sélectionner une structure de dépendance entre les sources de risque de façon à obtenir des projections cohérentes. Ensuite l'estimation et le calibrage des paramètres des modèles retenus doivent être effectués. Enfin l'analyse des résultats obtenus de chaque GSE se fait en termes probabilistes, en analysant la distribution d'indicateurs clés tels que le surplus, ou la valeur nette de l'actif.

1.3 Allocation stratégique dans le cadre de l'ALM

De son côté, la gestion actif-passif ou l'ALM consiste dans une méthode globale et coordonnée permettant à une société d'assurance et notamment à un régime de retraite partiellement provisionné, de gérer la composition et l'adéquation de l'ensemble de ses actifs et passifs. Les techniques utilisées pour sa mise en place diffèrent particulièrement en fonction de la nature des engagements de la compagnie.

Récemment, la gestion actif-passif s'est imposée pour les fonds de pension (ou de retraite) comme une approche de gestion des risques qui tient compte des actifs, des engagements et aussi des différentes interactions existantes entre ces deux parties (cf. Adam [2007]). Les gérants des fonds doivent déterminer les stratégies admissibles qui garantissent avec une probabilité suffisante que la solvabilité du fonds est assurée

(compte tenu des prestations attendues). La solvabilité est définie comme la capacité du fonds à payer les prestations sur le long terme.

Nous présentons dans ce qui suit une modélisation du régime-type de retraite qui servira de base à l'ensemble de nos applications avant de passer à une étude des critères d'optimisation pouvant être considérés.

2. Modélisation du régime-type

Le montant de la réserve totale d'un régime type évolue selon la dynamique suivante :

$$R_{n+1} = \left[R_n + c_{n-\nabla^{(c)}} \times i_{n-\nabla^{(c)}}^{(c)} - p_{n-\nabla^{(p)}} \times i_{n-\nabla^{(p)}}^{(p)} \right] \times (1 + \rho_n) + c_{n-\nabla^{(c)}+1} \times i_{n-\nabla^{(c)}+1}^{(c)} - p_{n-\nabla^{(p)}+1} \times i_{n-\nabla^{(p)}+1}^{(p)}$$

avec les notations suivantes :

- n : le semestre ;
- $(\rho_n)_{n \geq 0}$: la suite des rendements (nets de frais) de l'actif du régime où ρ_n désigne le rendement (*a priori* aléatoire) sur la période $[n, n+1[$;
- $(p_n)_{n \geq 0}$: la suite des prestations désinflatées où p_n représente le montant des prestations à verser au titre de la période (semestre) $[n, n+1[$;
- $(c_n)_{n \geq 0}$: la suite des cotisations désinflatées où c_n représente le montant des cotisations à recevoir au titre de la période $[n, n+1[$;
- $(i_n^{(x)})_{n \geq 0}$: la suite des facteurs d'indexation de la grandeur x désinflatée avec $x = c, p$ selon que nous considérons les facteurs d'indexation des cotisations ou des prestations ;
- $\nabla^{(x)}$: l'indicateur de paiement de la suite associée à la grandeur x : $\nabla^{(c)} = 0$ si les cotisations relatives à la période $[n, n+1[$ sont versées en n , $\nabla^{(c)} = 1$ si elles sont versées en $n+1$.

3. Étude des critères d'allocation

Nous visons, dans ce qui suit, à formaliser et à synthétiser certains critères (qui peuvent servir en tant que contraintes ou en tant qu'objectifs (c'est-à-dire la fonction à optimiser) pour un régime de retraite.

L'allocation stratégique repose souvent sur la maximisation de la fonction de la richesse du régime (valeur de la réserve) ou de son corollaire le Taux de Rendement Interne (TRI), particulièrement sur différents horizons d'investissement (court terme, moyen terme, long terme). Le TRI est le taux de rendement permettant d'avoir la relation suivante :

$$R_{t_0} = \sum_{i=t_0+1}^{d_H-1} \frac{\bar{c}_i - \bar{p}_i}{(1+TRI)^{i-t_0}} + \frac{R_{d_H}}{(1+TRI)^{d_H-t_0}}$$

où :

- \bar{c}_t représente les cotisations (y compris inflation) à la date t ;
- \bar{p}_t représente les prestations (y compris inflation) à la date t ;
- R_{t_0} représente la valeur de la réserve à la fin de l'année t_0 , date de détermination de l'allocation stratégique (date de départ) telle que définie ci-dessus ;
- d_H représente l'horizon de placement de l'allocation stratégique ;
- TRI le taux de rendement interne.

ce qui revient à :

$$R_{t_0}(1+TRI)^{d_H-1} - \sum_{i=t_0+1}^{d_H-1} (\bar{c}_i - \bar{p}_i)(1+TRI)^{d_H-i} = R_{d_H}$$

Il est précisé que la réserve utilisée ici est la réserve investie (réserve financière).

Dans la description des critères recherchés de l'allocation stratégique, il convient de distinguer différents types de régimes de retraite (régime provisionné, régime partiellement provisionné, régime non provisionné). En outre, quel que soit le régime, dans le développement de l'allocation stratégique de l'actif, une attention particulière sera portée à la distinction entre la phase de constitution et la phase de restitution du régime.

Dans ce qui suit, nous présentons certains critères qui peuvent servir à la fois comme objectif et / ou contrainte selon le type du régime.

• **Pour un régime partiellement provisionné** : maintenir un ratio de couverture des droits acquis par la réserve. Il s'agit du rapport entre la valeur des actifs de la réserve financière et la valeur des flux futurs (au titre des droits acquis) actualisés au taux sans risque. Les contraintes de solvabilité pour l'allocation stratégique peuvent être de différents ordres : elles portent d'une part sur l'horizon de viabilité, et d'autre part sur le niveau des réserves et des prestations.

Un horizon de viabilité minimal de H_v années

L'horizon de viabilité correspond à l'horizon d'épuisement des réserves (pour mémoire, la réserve à la date t est égale à la somme de la réserve à la date $t-1$, de la marge d'exploitation à la date t et des produits financiers à la date t). Ce critère revient à vérifier la condition suivante (pour $H_v = 30$) :

$$\frac{R_t + \sum_{i=t+1}^{t+30} \frac{\bar{c}_i}{\prod_{j=t+1}^i (1+r_j)}}{\sum_{i=t+1}^{t+30} \frac{P_i}{\prod_{j=t+1}^i (1+r_j)}} \geq 1.$$

avec r_j le taux de rémunération prudent de la réserve à la date j .

Un horizon de solvabilité minimal de h années

Un deuxième critère possible d'allocation stratégique porte sur le rapport entre le niveau des prestations à terme à h ans et les réserves à cette échéance : la réserve devra assurer, de façon permanente, la capacité de provisionner m fois la prestation à payer dans h années. Autrement dit, pour chaque année t , la somme de la réserve de l'exercice ajustée de l'actualisation des flux futurs du régime, projetée sur les h années suivantes doit au moins être équivalente à un engagement prédéfini (par exemple une fois et demi l'actualisation en t de la prestation provisionnelle à horizon de h ans par rapport à t).

Le taux d'actualisation r_t utilisé doit correspondre à un taux de rendement prudemment estimé des actifs en représentation de l'engagement sur la période de projection. Les taux retenus peuvent ainsi être ceux de la courbe des taux *forwards* zéro-coupon obtenue à partir des obligations état indexées.

Financièrement ce type de critère peut être exprimé pour chaque fin d'année par la formule suivante :

$$R_t + \sum_{i=t+1}^{t+h} \frac{\overline{c_i - p_i}}{\prod_{j=t+1}^i (1+r_j)} \geq m \times \frac{\overline{p_{t+h}}}{\prod_{j=t+1}^{t+h} (1+r_j)}$$

où :

m : représente le rapport minimum entre la valeur de la réserve à une date donnée et le flux de prestation cible actualisé correspondant (par exemple $m = 1,5$) ;

h : représente l'horizon de projection pour le flux de prestation à couvrir par rapport à la date t .

Dans un univers incertain (en particulier avec un horizon de long terme), le respect du critère doit être probabilisé avec un niveau de confiance $1-\alpha$ (par exemple 97,5 %) où α est le risque d'erreur toléré ou « la probabilité de ruine.

• **Pour un régime provisionné** : maintenir un ratio de couverture des droits acquis par le total de la réserve et de la marge actuarielle future (ou « Potentiel de Répartition Futur », cf. Delarue [2001]). Il s'agit du rapport entre la valeur des actifs de la réserve financière et la valeur des flux futurs (au titre des droits acquis et des cotisations futures nettes des prestations induites par les droits que ces cotisations génèrent) actualisés au taux sans risque. Ce ratio peut être fixé entre 90 % et 100 % par exemple.

Aussi, le critère proposé consistera à minimiser l'espérance de la valeur actuelle des Droits Acquis à la date t_0 . Cette valeur actuelle est la somme :

- des prestations dues et réglées sur la période d'allocation (t_0 à D) actualisées aux taux de rendement périodiques du portefeuille financier (allocation d'actifs) ;
- de la provision de tous les flux de prestations dues au-delà de cet horizon représentatifs des droits acquis jusque-là et actualisés au taux sans risque.

où :

$$ValeurDroitsAcquis_{t_0} = \sum_{i=t_0+1}^{d_H-1} \frac{\sum_{j=t_0+1}^i D_j^i}{\prod_{j=t_0+1}^i (1+r_j)} + \frac{Provision_{TSR_{31/12}/d_H}}{\prod_{j=t_0+1}^{d_H-t_0} (1+r_j)}$$

$$Provision_TSR_{31/12/d_H} = \sum_{i=t_0+1}^{d_H-1} \frac{D_{d_H}^i}{\prod_{i=d_H}^{d_f} (1+r_{sr})}$$

- t_0 : date initiale (par exemple date de calcul de l'allocation stratégique) ;
- D_j^i : représente les prestations (avec l'indexation inflation) payables à la date i correspondants aux stocks en j des droits acquis et non échus antérieurs à cette date ;
- r_j : représente le rendement du portefeuille d'actifs financiers au cours de la période j ;
- d_H : représente l'horizon de l'allocation stratégique ;
- $Provision_TSR_{31/12/d_H}$: représente la valeur des flux futurs (au titre des droits acquis) actualisés au 31/12/ d_H au taux sans risque.
- d_f : date finale de la série disponible des flux au titre des droits acquis à t_0 (nous choisirons par exemple une date lointaine, ou bien un horizon de « viager », i.e la date de décès du dernier survivant des cotisants).

Concernant les contraintes relatives aux taux de couverture d'autres engagements tels que les droits acquis, les contraintes à respecter seront par exemple :

- couverture des prestations acquises par la réserve :

$$\varphi_t = \frac{Réserves(31/12/t)}{Provisions_TSR(31/12/t)} > \beta$$

avec :

- φ_t est le ratio de couverture à la date t ;
- β est compris entre 6 % et 10 % (exemple régime cas 1) ;

$Provisions_TSR(31/12/t)$ représente la valeur des flux futurs (au titre des droits acquis) actualisés au 31/12/ t au taux sans risque.

– couverture des prestations acquises par la réserve et la marge actuarielle future (ou « Potentiel de Répartition Futur ») : si nous définissons la Marge Actuarielle Future (MAF) par :

$$MAF = \sum_{i=t}^{\infty} \frac{\bar{c}_i - \bar{p}_i}{\prod_{j=t}^i (1+r_j)},$$

le ratio de couverture des prestations peut s'exprimer par :

$$\phi = \frac{Réserves(31/12/t) + MAF}{Provisions_TSR(31/12/t)}.$$

En résumé, les contraintes à considérer pour les régimes de type provisionnés avec prise en compte des droits acquis sont les suivantes (au choix) :

- la VaR à 99 % du ratio de couverture des prestations acquises par la réserve doit être supérieure à un coefficient béta 1 (fixé en *input*, exemple entre 6 % et 10 %)

$$VaR99\% [Réserves(31/12/t) / Provisions_TSR(31/12/t)] > \beta_1$$

- la VaR à 99 % du ratio de couverture des prestations acquises par la réserve et la marge actuarielle future doit être supérieure à un coefficient béta 2 (fixé en *input*, exemple entre 90 % et 100 %)

$$VaR99\% [(Réserves(31/12/t) + MAF) / Provisions_TSR(31/12/t)] > \beta_2$$

• **Pour un régime non provisionné** : un principal objectif dans ce cas vise à maximiser un ratio de couverture des prochains flux nets de règlement par les actifs jusqu'à la date prévisionnelle d'épuisement des réserves, supérieur à 100 %. Il s'agit du rapport entre le total de la valeur des actifs de la réserve financière augmenté de la valeur actualisée des flux futurs de règlement nets encaissés (cotisations moins prestations) et la valeur des flux futurs de règlement nets décaissés. Il s'agit en fait d'un ratio de « liquidité » ou de « trésorerie » du régime.

Les contraintes posées consistent, par exemple, à vérifier que dans la majorité des cas (par exemple dans 99 % des cas) : le ratio de couverture des flux futurs de trésorerie ou règlement (amputé d'une année par rapport à l'horizon de viabilité du régime qui correspond à l'horizon d'épuisement des réserves) est supérieur à 100 %, cela signifie que le budget de risque pour le choix de l'allocation ne peut être supérieur à la perte d'une année de prestation.

Dans ce cadre, nous supposons que la Valeur à Risque (VaR), pour un certain niveau de confiance, du rapport (ratio de couverture) à la date d_H entre les deux quantités ci-après doit être supérieure à 100 % :

- la réserve, augmentée de la valeur actualisée des flux futurs de règlement net encaissés (i.e. positifs) jusqu'à la date $d_e - 1$;
- la valeur actualisée des flux futurs de règlement net (i.e. négatifs) jusqu'à la date $d_e - 1$.

Le taux d'actualisation des flux futurs est le même que celui défini pour l'actualisation des flux d'un régime partiellement provisionné lors du calcul des ratios prudentiels. Notons enfin que les critères d'allocation peuvent aussi être établis en fonction de la phase dans laquelle évolue le régime (constitution/restitution).

4. Principaux risques sous-jacents

De manière générale, on distingue deux grandes familles de risques dans la gestion ALM : les risques financiers et les risques actuariels notamment ceux liés au calcul adéquat des engagements du régime.

Leur importance relative va dépendre de la situation et de la maturité du fonds, par exemple, un fonds très mature sera peu sensible aux hypothèses de salaires. Cependant, les hypothèses de taux d'actualisation sont toujours déterminantes, quel que soit le plan. En règle générale, les hypothèses économiques ont un impact plus fort sur la valorisation du passif d'un fonds que les hypothèses démographiques.

Au cours de notre étude nous nous sommes essentiellement focalisés sur le risque de taux et d'inflation, le risque des actions et le risque de choix du taux d'actualisation.

Dans une dernière partie on s'intéressera au risque de longévité et notamment son impact sur les risques financiers.

4.1 Risque de rendement de l'actif

Le rendement des actifs dans lesquels le fond investi variera avec les rendements du marché et les prix. Dans un système à prestations définies avec un pré-engagement sur l'indexation des prix, le risque est supporté par le fonds lui-même. Il impose donc une bonne modélisation de l'actif et notamment des actions. Dans un système à contributions (ou cotisations) définies, le risque durant la période de préretraite, est supporté par les individus.

De façon générale, le risque financier découle de la politique d'investissement choisie par le promoteur du régime. Ce type de risque représente les pertes potentielles reliées aux rendements provenant de l'exposition aux marchés financiers. Plusieurs fonds de retraite ont également opté pour des classes d'actifs alternatives, telles que l'infrastructure, l'immobilier ou les marchés privés afin de bénéficier d'une meilleure diversification de leur portefeuille.

Ce type de classes d'actifs entraîne avec elles un risque relié à la liquidité de ces produits. En effet, la faible liquidité demeure un enjeu financier important dans un contexte où la position investie devait être vendue rapidement. En addition, les investissements à l'étranger sont soumis au risque du taux de change qui peut être géré par l'entremise de stratégies de couverture de devises.

4.2 Risque d'indexation : cas particulier de l'inflation

La plupart des caisses de retraite (provisionnées ou partiellement provisionnée) incluent une garantie dans leurs prestations. Chaque année, les prestations sont revalorisées à un taux défini dans le plan de retraite. A minima, il s'agit en général d'une garantie en capital : les prestations sont chaque année « augmentées » de 0%.

Dès lors, si le passif du fonds de retraite est revalorisé à un certain taux, le risque est que les actifs ne suivent pas cette indexation. Il n'existe parfois aucun actif de base sur les marchés qui rapporte le taux d'indexation. C'est par exemple le cas des Etats-Unis, où l'indexation du capital peut être donnée par l'inflation plus 3%.

Ainsi, l'inflation réalisée représente un risque pour un régime de retraite offrant une indexation à ses participants. En effet, si l'inflation réalisée est plus grande que l'inflation anticipée, ceci aura comme conséquence d'augmenter les engagements futurs du régime.

Dans le cas d'un fonds typique, par exemple, partant du fait que les actifs doivent permettre de payer les prestations tout au long de la vie du fonds, si le passif est indexé à l'inflation, une allocation d'actifs « idéale » utilise des produits indexés sur l'inflation (couverture du risque d'inflation).

Nous retrouvons généralement deux types de passif, soit le passif nominal (*nominal liabilities*) et le passif réel (*real liabilities*). Le passif nominal représente les bénéfices sous une base nominale ou nivelée

tandis que le passif réel inclut une protection contre l'inflation et permet aux bénéficiaires de s'assurer d'un pouvoir d'achat fixe.

Chacun de ces deux types de passif doit être évalué au taux qui leur est propre, soit le taux sans risque pour le passif nominal et le taux à rendement réel pour le passif réel. Par la nature même du passif d'une caisse de retraite, il est essentiel d'accorder une importance au risque relié au taux d'intérêt. Le passif réel est exposé au risque d'incertitude des taux d'intérêt à rendement réel tandis que le passif nominal est sensible au même risque, mais doit également se soucier du risque relié à l'inflation future.

4.3 Remarques sur la question du taux d'actualisation des

engagements

Le risque de taux est le risque de voir ses résultats affectés défavorablement par les mouvements des taux d'intérêts. Le mouvement des taux a un impact direct sur les prix des actifs mais aussi sur la valeur actuelle des différents flux futurs côté passif.

De manière générale, le choix du taux d'actualisation des engagements suscite un débat entre les professionnels du monde de l'assurance depuis quelques années, surtout depuis la crise des fonds de pension de 2001 (crise de sous financement). Un écart de quelques points dans le choix du taux peut faire varier le montant de la provision de manière significative. Certains recommandent aussi d'utiliser des taux de court terme pour les provisions d'une population proche de l'âge de la retraite, et des taux de long terme pour une population jeune. Dans tous les cas, le débat sur le taux d'actualisation ne peut pas être décorrélé du processus de réévaluation des rentes (cf. Planchet et Théron [2007]).

Dans le cas où l'actualisation est effectuée avec le taux sans risque du marché, le risque de taux intérêt se manifeste surtout en cas de baisse des taux. Quand le taux d'intérêt baisse, la valeur de l'actif augmente, dans des proportions qui dépendent de la composition du portefeuille du fonds (actions ou obligations notamment). Si ce taux d'intérêt est celui utilisé pour actualiser les engagements, leur valeur actualisée augmente également.

Le risque de taux provient de ce que l'actif et le passif n'ont généralement pas la même sensibilité aux taux d'intérêt : une baisse des taux à long terme se traduit, en règle générale, par une hausse de la valeur du passif plus importante que celle de l'actif. Dans ces conditions, le taux de couverture du fonds, défini comme le rapport entre la valeur des actifs et la valeur actualisée des engagements, se détériore. De même, la baisse des taux réduit la marge financière future car le rendement des nouveaux actifs

peut apparaître insuffisant pour faire face aux taux garantis par les contrats antérieurs.

Jusqu'à une date récente, les engagements des fonds de pension anglo-saxons (États-Unis, Royaume-Uni, Pays-Bas, etc.) étaient valorisés avec un taux d'actualisation fixe, par exemple 4 % par an. Mais, depuis quelques années, les règles prudentielles et les normes comptables de ces pays ont évolué en direction d'une comptabilisation en juste valeur où la courbe des taux d'intérêt de marché est utilisée pour actualiser les versements (selon les pays, il s'agit du taux des obligations d'État, du taux moyen des obligations émises par les entreprises ou du taux observé sur le marché des contrats d'échange de taux appelé taux de *swap*). La mesure en juste valeur présente simultanément des avantages et des inconvénients :

– ***Avantages de la mesure en juste valeur des engagements des fonds de pension :***

Elle accroît la transparence, favorise la portabilité des droits à la retraite, qui peuvent être transférés à tout moment d'un fonds à l'autre sur la base de leur valeur de marché, et permet d'utiliser des instruments financiers pour gérer plus finement les risques.

– ***Inconvénients de la mesure en juste valeur des engagements des fonds de pension :***

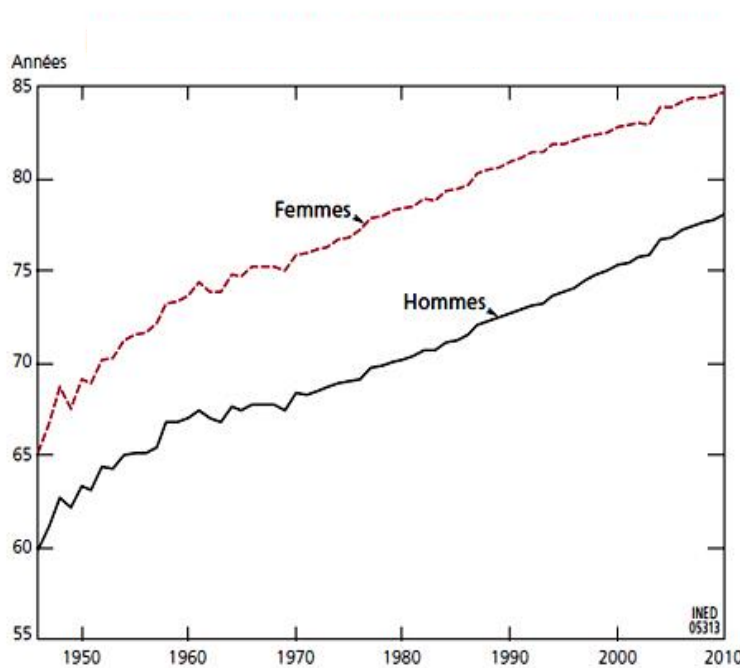
Le passage d'un taux fixe à des taux de marché crée un risque de taux sur le passif du fonds, qui n'est généralement pas couvert par une variation équivalente de la valeur de l'actif.

D'autre part, la hausse des taux réduit la valeur de marché des actifs, en particulier celle des portefeuilles obligataires, et peut provoquer éventuellement le rachat de certains contrats, notamment ceux à rendement garanti inférieur à celui des nouveaux contrats proposés.

4.4 Risque de longévité

Il s'agit du risque pour le fonds de devoir payer un nombre de pensionnés plus nombreux que prévu suite à une hausse de la durée de vie des ayants droit. On parle du risque de longévité pour l'allongement de la durée de vie et du risque de mortalité pour l'écartement temporaire de la mortalité observée par rapport à la mortalité prévue. Il faut donc être capable d'anticiper l'évolution de la mortalité.

Figure 2 – Evolution de l'espérance de vie à la naissance par sexe en France sur la période 1946-2010



Source : Insee, division des Enquêtes et études démographiques

Ces progrès, constatés dans la plupart des pays du monde, sont largement dus à l'amélioration des soins médicaux et du niveau de vie. On remarque donc deux faits saillants :

- un allongement de l'espérance de vie à la naissance mais dont la croissance semble ralentir,
- une accélération de l'allongement de l'espérance de vie aux grands âges.

Cette tendance générale recouvre plusieurs réalités. Il y a des différences de niveau et de rythme dans l'évolution de la mortalité selon la population concernée. Plusieurs effets peuvent être notés :

- un effet d'âge : la mortalité n'évolue pas uniformément pour tous les âges,
- un effet d'époque : l'évolution de la mortalité change de rythme dans le temps,
- un effet de catégorie sociale : selon les caractéristiques socio-économiques de la population étudiée, la mortalité évolue,

- un effet de cohorte : les actuaires anglais ont remarqué des évolutions différentes de la mortalité selon l'année de naissance.

Cet allongement de la durée de vie humaine a un coût financier. L'alourdissement de la charge financière des prestations est par ailleurs une fonction décroissante du niveau des taux d'intérêt. La table ci-dessous donne un exemple de la sensibilité de la valeur d'une annuité à l'allongement de la durée de vie pour différents taux techniques.

Tableau 1 – Prix d'une rente viagère pour un individu de 65 ans en 2005

	Taux technique		
Evolution de la mortalité	3,5 %	4,50 %	5,50 %
Pas d'augmentation de longévité	118,6	108,6	100
+ 1,2 an d'espérance de vie tous les 10 ans	122,3	111,6	102,4

Source : OCDE

Pablo Antolin (OCDE) considère la situation d'un fonds de pension hypothétique devant verser à ses membres une annuité fixe à partir de leur départ en retraite à 65 ans. Il s'agit d'un plan fermé, dont la croissance du salaire des membres est de 3,5% par an, égal au taux d'actualisation. Dès lors, toute variation du passif est due à une variation de la durée de vie des membres. Il étudie l'impact d'un allongement de l'espérance de vie de 1,2 an tous les dix ans jusqu'à 65 ans et de 0,8 an tous les dix ans après cet âge sur le passif du fonds. Trois structures de population sont étudiées, les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Tableau 2 – Impact de l'allongement de la durée de vie sur un fonds de pension

Structure de la population	Hausse du passif
65% 25-49 ans, 20% 50-59 ans, 10% 60-69 ans, 5% 70 ans et plus	10,4%
60% 25-49 ans, 20% 50-59 ans, 15% 60-69 ans, 5% 70 ans et plus	9,6%
50% 25-49 ans, 20% 50-59 ans, 20% 60-69 ans, 10% 70 ans et plus	8,2%

Source : OCDE

Ainsi, L'augmentation de l'espérance de vie a donc des conséquences importantes et doit être prise en compte.

4.5 Nécessaire positionnement de l'analyse des risques financiers par rapport au cadre Solvabilité II

Solvabilité II est une directive-cadre qui a pour but de mettre à jour le système européen de solvabilité des entreprises d'assurance. Cette directive vise en particulier une meilleure adaptation des capitaux propres exigés des compagnies d'assurances et de réassurance avec les risques que celles-ci encourent dans leur activité. Sa mise en application est prévue en 2016 lorsque les discussions entre la commission européenne et le Parlement européen auront abouti et que cette directive aura été retranscrite dans les législations nationales par chaque parlement.

Dans cette directive, une formule standard permet le calcul du capital nécessaire pour couvrir les risques supportés par les assureurs et les réassureurs notamment suite à un choc provoqué par un évènement exceptionnel (ce niveau de capital est également appelé capital de solvabilité requis ou SCR en anglais pour *Solvency Capital Requirement*). Cela est effectué dans le but de contrôler la probabilité de ruine à un an et de la limiter à moins de 0,5 %. Une alternative proposée aux assureurs sera

l'utilisation d'un modèle interne (basé sur leur structure de risque spécifique). Dans ce cas, une validation de l'autorité de contrôle sera requise préalablement à la détermination effective du SCR à partir du modèle interne.

Le calcul du SCR tient compte d'une panoplie de facteurs de risque (taux, action, *spread*, concentration, liquidité, etc.) agrégés sous forme de modules et ce en fonction du domaine d'activité de la compagnie. Les spécifications techniques pour la cinquième étude³ quantitative d'impact (QIS5) précisent que l'analyse des risques se décline en quatre catégories principales que l'on retrouve au sein des différents modules :

- le risque de marché, provenant de l'incertitude associée à la valeur et aux rendements des actifs financiers ;
- le risque de souscription, provenant de l'incertitude liée à la mesure des engagements pris par l'assureur en vie, en santé et en non vie ;
- le risque de contrepartie, lié à au défaut potentiel des contreparties ;
- le risque opérationnel comprenant l'ensemble des risques associés aux procédures de gestion interne et aux conséquences d'un dysfonctionnement à ce niveau.

Chacune de ces grandes catégories de risques se retrouve éclatée dans les différents sous modules qu'il faut ensuite agréger, de manière à tenir compte de la dépendance entre les risques (cf. Figure 3).

La gestion des risques de marché sous Solvabilité II va présenter un défi considérable pour les assureurs notamment du fait qu'aux choix pris d'allocation d'actifs un coût du capital sera associé (exigences en capitaux de Solvabilité II). Par exemple, les fonds propres requis pour les investissements en actions sont définis, dans le modèle standard, à partir de la variation de la valeur nette des actifs à la suite d'un choc sur les prix des actions. Cette contrainte de coût de capital n'est pas sans conséquence sur la philosophie traditionnelle d'allocation stratégique d'actif. Deux points peuvent « gêner » cette philosophie.

Le premier point trouve son origine dans le fait que les niveaux de chocs standards appliqués aux classes d'actifs sont, sous Solvabilité II, calculés à partir de la Value-at-Risk (VaR) sur un horizon d'un an. La question qui se pose ici est comment la gestion d'actifs garantissant le passif d'assurances sur le long terme va-t-elle s'articuler avec les contraintes de court terme de Solvabilité II. Le deuxième point se trouve au niveau de la définition de la contrainte de l'allocation stratégique d'actifs. En effet, la contrainte

3. Afin de mesurer leurs implications concrètes, les directives européennes doivent faire l'objet d'une étude d'impact. C'est dans ce cadre que s'inscrit la cinquième étude d'impact (QIS 5 acronyme anglais pour *Quantitative Impact Studies 5*) pour Solvabilité II.

traditionnelle de la gestion actif-passif cède du poids au profit de la contrainte de minimisation du capital exigé. L'allocation stratégique d'actifs, sous Solvabilité II, doit tenir compte de cette nouvelle contrainte dans le module d'optimisation.

La conséquence directe est que de nombreux assureurs ont d'ores-et-déjà réduit leurs investissements en actions compte tenu du coût en capital prudentiel élevé imposé par Solvabilité II. Le coût d'opportunité de la prime de risque actions, auquel s'ajoute un environnement de taux d'intérêts faibles, comme c'est le cas actuellement, incite les assureurs à investir dans des obligations souveraine. Les assureurs sont donc potentiellement réduits à rémunérer à taux plus faibles les assurés, ou à répercuter les coûts additionnels de leurs fonds sur les primes des assurés.

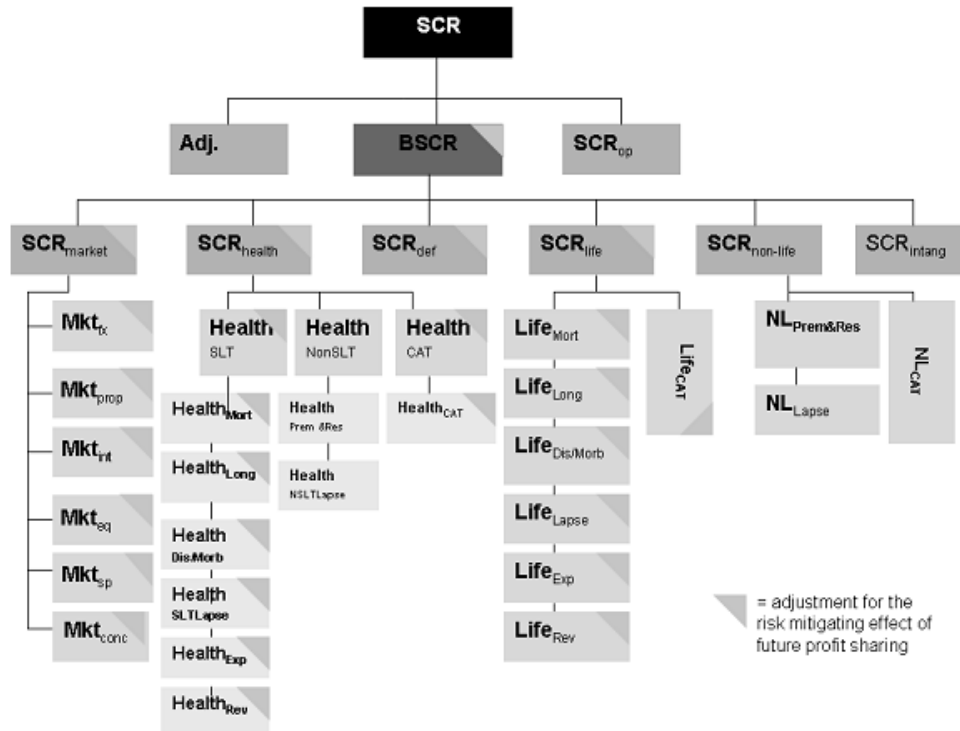
L'application de Solvabilité II aux opérations de retraite semble problématique, étant donné la particularité de ces dernières :

- Horizon de gestion – La probabilité de ruine à un an n'est pas forcément une mesure de risque pertinente pour juger de la solvabilité de l'activité de retraite, pour laquelle les engagements se pilotent sur le long terme. Ceci laisse donc une grande marge de manœuvre pour les régimes de retraite susceptibles d'amortir sur le long terme les risques à court terme.

- Politique d'investissement – Une gestion adaptée aux contrats retraite tournée vers des actifs risqués induit un besoin en capital de solvabilité élevé. La détention d'actifs réels ou risqués, tels que les actions ou l'immobilier, est fortement pénalisée dans la formule standard, alors qu'il s'agit de supports qui présentent des avantages sur le long terme pour optimiser le couple rendement/risque.

Toutefois, le positionnement par rapport à la grille d'analyse des risques proposée par Solvabilité II est incontournable compte tenu de la référence que constitue ce référentiel dans le monde de l'assurance. De ce fait, l'analyse des risques supportés par un régime de retraite sera également effectuée (dans la suite) conformément à cette grille de lecture.

Figure 3 – Les modules de la formule standard du SCR



Source : Spécifications techniques pour la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5).

5. Conclusion

Ce premier chapitre avait pour objectif de présenter le cadre général dans lequel l'ensemble des modèles d'allocation d'actifs (que nous allons étudier par la suite) peuvent être appliqués. En particulier, la définition de l'objectif de gestion ainsi que des contraintes relative à cette gestion est une étape fondamentale lors de l'élaboration de l'allocation stratégique d'actif d'un fonds de retraite (ou de pension). Il s'agit d'une étape clé qui dépend des caractéristiques propres au régime ce qui n'est pas le cas par exemple pour la génération des scénarios économiques et de marchés financiers.

Chapitre 2

LES MODÈLES D'ALM CLASSIQUES

Il est question dans ce qui suit d'analyser les approches classiques d'allocation d'actifs dans un esprit de gestion actif-passif. Pour cela, les modèles de gestion de référence sont de deux types : des modèles déterministes basés sur la notion de « duration » et/ou de « surplus » ainsi que les modèles stochastiques classiques de type « *Fixed-Mix* ». Plus précisément, nous détaillons différentes approches tout en mettant en évidence les éléments clés pour l'allocation d'actifs.

1. Immunisation du portefeuille

Redington [1952] définit l'immunisation du portefeuille comme « l'investissement de l'actif d'une telle manière que le portefeuille soit protégé contre un changement des taux d'intérêt ». Autrement dit, c'est une stratégie d'investissement qui, dans le cas de l'assurance ou de celui des régimes de retraite, produit des flux exactement adossés en maturité et en valeur à ceux que doit payer l'entreprise. Cette technique suppose que le risque principal des portefeuilles financiers est celui du changement des taux d'intérêt.

Nous pouvons énumérer deux approches classiques appartenant à la catégorie de l'immunisation :

- l'adossement des flux de trésorerie (*cash flows*) à ceux du passif ;
- l'adossement des durations de l'actif et du passif.

Nous rappelons cependant quelques notions qui seront reprises ultérieurement dans cette étude (cf. Le Vallois et al. [2003]).

Taux de rendement actuariel

En suivant à une démarche inverse à celle du calcul de la valeur actuelle d'un actif (ou de toutes séquences de flux fixes), il est possible de calculer, à partir du prix de marché, un taux d'actualisation des flux de trésorerie correspondants dit taux de rendement actuariel r_a . Ce dernier vérifie :

$$\text{Prix de marché} = \text{Valeur actuelle} = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}$$

Avec F_{t_i} est le flux de l'actif financier (coupon, dividende, amortissement...) à l'époque t_i .

Courbe des taux zéro-coupon

Le calcul du taux de rendement actuariel des actifs financiers, et des obligations en particulier, présente l'inconvénient de ne pas donner la même valeur de taux pour les différents actifs. L'observation des prix des zéro-coupon permettrait donc de bâtir une courbe des taux zéro-coupon. Cette courbe existe, mais en pratique elle est obtenue par des moyens différents compte tenu de la faible liquidité des zéro-coupon existants sur le marché. La courbe zéro-coupon est également appelée structure par terme des taux, ou encore courbe des taux spot.

Valeur actuelle nette des actifs obligataires

En pratique il n'est pas nécessaire de calculer la valeur actuelle des actifs obligataires, puisqu'il est plus simple d'observer leur valeur de marché. Cependant, dans le cas des obligations à taux fixe, la séquence des flux de trésorerie futurs associés à un titre est parfaitement connue.

Nous considérons même généralement que dans le cas des emprunts d'État, cette séquence est certaine et ne présente aucun risque de défaillance de l'émetteur. À l'aide de la structure par terme des taux (notée r_{t_i}) il est possible de reconstituer le prix d'équilibre de l'obligation sans risque :

$$\text{Prix de marché} \approx \text{Prix estimé} = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_{t_i})^{t_i}}$$

Par analogie avec la valorisation des actifs, la valorisation des flux du passif se fait en se basant sur la courbe des taux zéro-coupon. Cette dernière permet de tenir compte de la maturité de chacun des flux pour lui attribuer un taux d'actualisation précis. En pratique, le calcul de la valeur actuelle du passif peut être réalisé avec une prime de risque arbitrairement choisie, éventuellement nulle.

1.1. Adossement des flux de trésorerie

Il s'agit de la procédure d'immunisation la plus simple et la plus ancienne. Elle consiste à investir la richesse initiale dans un portefeuille de titres (le plus souvent des zéro-coupon) qui produisent exactement, et aux échéances prévues, les flux du passif. Autrement dit, lorsque sur chaque période les flux nets obtenus (total des entrées de flux – total des sorties de flux) sont toujours positifs ou nuls, l'actif est dit adossé au passif. Il est dit exactement ou parfaitement adossé si les flux nets sont nuls.

L'adossement des flux de trésorerie est valable à très court terme, mais malheureusement, il ne trouve pas d'applications pratiques à long terme. En effet, les flux de l'actif et ceux du passif sont très influencés par des facteurs externes, notamment les taux d'intérêt. Ils sont donc eux-mêmes sujet à des variations dans des sens différents, il importe donc de réitérer souvent cette immunisation.

1.2. Adossement par la duration

Cette technique consiste à appairer les sensibilités de l'actif et du passif vis-à-vis de la variation des taux d'intérêt. En d'autres termes, elle consiste à définir une stratégie d'investissement qui fait que la valeur de marché des actifs suit tout mouvement de la valeur actuelle des engagements. L'immunisation par la duration définit un portefeuille dont la valeur, au premier ordre, évolue comme la valeur actuelle des engagements. La règle de décision dans cette technique est basée sur l'indice de « sensibilité », défini par Macauley [1938]. Il est obtenu à partir de la formule de développement limite de Taylor du prix en fonction du taux d'intérêt.

Pour un titre, dont les caractéristiques contractuelles sont déterminées indépendamment du mouvement des taux, la sensibilité est exprimée comme la variation relative de cette valeur induite par une variation infinitésimale de taux d'intérêt.

La sensibilité de l'actif

Nous reprenons l'expression simplifiée de la valeur actuelle d'une obligation à taux fixe en fonction du taux d'actualisation actuariel r_a :

$$VA(r_a) = \sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}$$

La variation de la valeur actuelle pour une petite variation du taux d'actualisation est donnée par le calcul de la dérivée première :

$$\frac{dVA(r_a)}{dr} = VA'(r_a) = \sum_{i=1}^n -t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i+1}}$$

Cette dérivation n'a de sens que si les flux F_{t_i} sont fixes par rapport à r .

La sensibilité est ainsi donnée par l'expression suivante :

$$sensibilité = \frac{dVA(r_a)}{VA \times dr} = -\frac{1}{VA} \times \sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i+1}}$$

Lorsque les flux de trésorerie sont tous positifs, la sensibilité de la valeur actuelle aux variations du taux d'actualisation est nécessairement négative. Cela est effectivement le cas pour les obligations dont la valeur de marché croît quand les taux baissent et réciproquement.

La sensibilité est appelée aussi durée modifiée.

La durée de l'actif

La durée telle que définie par Macaulay [1938] est donnée par l'expression suivante :

$$duration = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}}{VA(r_a)}$$

Avec F_{t_i} une série de flux fixes.

La durée peut s'interpréter comme la durée de vie moyenne de l'obligation. En fait, chaque durée t_i étant pondérée par la valeur actuelle du flux correspondant $\frac{F_{t_i}}{(1+r_a)^{t_i}}$. Elle peut s'interpréter aussi comme

l'élasticité du prix de l'obligation par rapport aux variations des taux. C'est la définition de Hicks [1946] qui relie la sensibilité à la durée :

$$duration = -\frac{\frac{dVA(r_a)}{VA(r_a)}}{\frac{dr_a}{1+r_a}} = -(1+r_a) \times \frac{dVA(r_a)}{dr_a} = -(1+r_a) \times sensibilité$$

La duration s'interprète aussi comme la date à laquelle les deux effets de la variation des taux, effet sur la valeur et effet sur le revenu, se compensent.

Elle est compatible avec une structure par terme des taux à condition de se limiter aux variations parallèles des courbes de taux. Autrement dit, la variation de taux dr_t doit s'appliquer d'une façon uniforme à la courbe des taux (chaque r_{t_i} devient $r_{t_i} + dr_t$) ce qui correspond bien à une translation uniforme de la courbe des taux. La duration s'exprime dans ce cas comme suit :

$$duration = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_{t_i})^{t_i}}}{\sum_{i=1}^n \frac{F_{t_i}}{(1+r_{t_i})^{t_i}}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \frac{F_{t_i}}{(1+r_{t_i})^{t_i}}}{VA(r_{t_i})}$$

Si nous étendons la notion de la duration à des flux variables (obligations à taux variables par exemple), nous pourrions dans certains cas obtenir la relation ci-dessus entre la duration et la sensibilité (tant que les dérivées $F'_{t_i}(r_a)$ sont connues), mais la différence est que la duration n'est plus assimilable à une durée moyenne. Il existe deux limites principales des indicateurs ci-dessus :

- Le domaine d'utilisation de ces concepts est limité aux variations parallèles de la courbe des taux.
- Les calculs de la duration et de la convexité ne gardent leurs significativité que pour des flux fixes, indépendants des taux de marché.

La convexité de l'actif

La sensibilité permet de traiter de la variation du cours des obligations par rapport aux petites variations parallèles de la courbe des taux. Mais lorsque la variation des taux est forte, l'erreur obtenue en mesurant la variation relative du cours par la droite tangente devient importante.

Nous faisons donc recours au développement de Taylor du second ordre pour améliorer notre estimation de la variation de la valeur VA :

$$\Delta VA \approx VA \times \Delta r + \frac{1}{2!} VA'' \times \Delta r^2$$

Formule où VA' et VA'' représentent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de $VA(r)$. En divisant par VA , Nous obtenons :

$$\frac{\Delta VA}{VA} \approx \frac{VA'}{VA} \times \Delta r + \frac{1}{2!} \frac{VA''}{VA} \times \Delta r^2$$

L'expression de la convexité est la suivante :

$$convexité = \frac{VA''}{VA} = \frac{1}{VA \times (1+r)^2} \times \left(\sum_{i=1}^n t_i \times (t_i + 1) \times \frac{F_{t_i}}{(1+r)^{t_i}} \right)$$

Avec cette définition, l'approximation de la valeur actuelle du cours de l'obligation est la suivante :

$$\Delta VA \approx VA \times \left[sensibilité \times \Delta r + \frac{convexité}{2} \times (\Delta r)^2 \right]$$

Comme la duration, la convexité est compatible avec l'analyse de la structure par terme des taux. Nous pouvons écrire :

$$convexité = \frac{1}{VA} \times \left(\sum_{i=1}^n t_i \times (t_i + 1) \times \frac{F_{t_i}}{(1+r_{t_i})^{t_i+2}} \right)$$

Comme pour la duration cette extension n'est valide que pour des variations parallèles de la courbe des taux.

Lorsque les flux de trésorerie sont tous fixes et positifs, la convexité est positive. Quel que soit le sens de la variation du taux d'actualisation, le terme $\frac{convexité}{2} \times (\Delta r)^2$ intervient positivement dans la variation du cours.

Il est donc habituel de considérer qu'une convexité supplémentaire liée à la dispersion des flux de trésorerie est la bienvenue.

L'insuffisance de l'indice de « duration », comme mesure de sensibilité, dans le cas systématique où les flux sont sensibles aux variations de taux a été la motivation majeure du développement d'autres approches (dont les modèles basés sur le surplus et les techniques de simulations). Le but est de fournir un indice de « sensibilité » plus adapté au cas des flux sensibles aux variations de taux.

2. Modèles basés sur le surplus

Ces modèles sont basés sur la notion du surplus S qui est souvent défini comme étant la différence entre la valeur de marché des actifs et la valeur

actuelle du passif. Parmi les modèles les plus connus on retrouve celui de Kim et Santomero [1988], Sharpe et Tint [1990] et Leibowitz [1992]. L'idée commune de ces différents modèles est d'étudier le couple rendement/risque d'une variable défini en avance en fonction du surplus S (et/ou de l'actif A et du passif P du fonds). Cette étude se fait souvent dans un cadre classique d'optimisation de type Markowitz [1952].

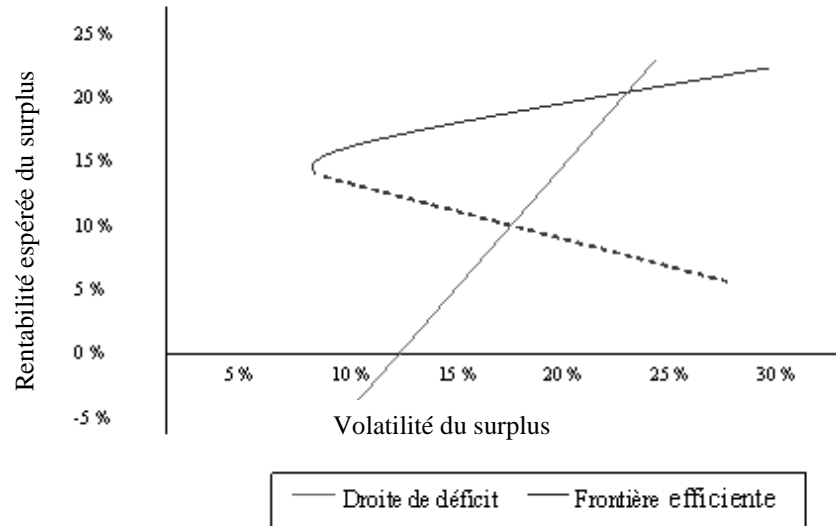
Ce dernier est le modèle d'allocation d'actifs le plus répandu. Son objectif est de résoudre le problème suivant : pour une rentabilité espérée fixée par l'investisseur, trouver les proportions à investir dans chaque titre, conduisant à un portefeuille de risque minimum et sous un ensemble de contraintes. L'ensemble des portefeuilles vérifiant le programme d'optimisation de Markowitz pour différents niveaux de rentabilité espérée, décrit une hyperbole dans le repère (risque mesuré par l'écart type de la rentabilité / rentabilité espérée).

Prenons l'exemple du modèle de Sharpe et Tint [1990] pour détailler un peu plus la logique sous-jacente aux approches basées sur la notion de surplus. Ce modèle s'applique à un portefeuille composé de plusieurs classes d'actifs. Le passif est évalué en valeur actuelle et l'actif en valeur de marché. Il est basé sur la notion de surplus S défini comme étant la différence entre la valeur de marché des actifs et la valeur actuelle du passif. Le but du modèle est de minimiser le risque de perte du surplus (mesuré par la variance de la « rentabilité du surplus ») pour un niveau de « rentabilité du surplus » donné et sous un ensemble de contraintes (même démarche que Markowitz [1952]).

La notion de rentabilité du surplus utilisée est la variation du surplus divisée par la valeur initiale des actifs :

$$R_S = \frac{S_1 - S_0}{A_0}$$

L'ensemble des portefeuilles vérifiant ce programme d'optimisation pour différents niveaux de rentabilité espérée, décrit *une hyperbole* dans le repère (risque mesuré par l'écart type de la rentabilité du surplus, rentabilité espérée du surplus). La partie supérieure de cette hyperbole représente *la frontière efficiente*.

Figure 4 – Frontière efficiente et contrainte de déficit (Sharpe et Tint)

Par contrainte de déficit, on entend « la probabilité pour que la rentabilité du surplus soit inférieure à un certain seuil (u) ne doit pas dépasser une certaine probabilité (p) ». Si nous supposons que le vecteur des rentabilités est gaussien, la variable aléatoire rentabilité du surplus suit une loi normale. La contrainte de déficit se traduit par l'équation de droite suivante dans le plan (volatilité du surplus, rentabilité espérée du surplus) :

$$E(R_S) = q_P^{N(0,1)} * \sigma_S + u$$

Où $q_P^{N(0,1)}$ représente le quantile de la loi normale centrée réduite associé à la probabilité $1 - p$.

L'intersection entre la droite de déficit et la frontière efficiente donne le **portefeuille efficient de rentabilité maximale et vérifiant cette contrainte**.

L'aspect mono-périodique qui caractérise les différents modèles classiques de gestion actif-passif (que ce soient ceux basés sur les techniques d'immunisation ou ceux basés sur la notion du surplus) limite leur capacité à refléter de façon fiable les perspectives d'évolution des différentes variables financières, en particulier sur le long terme. Cela devient d'autant plus compliqué que les variables à considérer sont plus nombreuses et que la nécessité de prendre en compte les corrélations entre les différentes variables est plus importante.

Nous notons comme même que les modèles classiques de la gestion actif-passif, servant en particulier pour l'allocation stratégique d'actif, étaient de loin l'outil de référence sur le marché et ce depuis les années 1950. Les limites que présentent ces modèles ainsi que le développement des supports informatiques au cours des années 1980 ont permis récemment de passer vers d'autres types de modèles : les modèles stochastiques d'ALM. Ces derniers seront l'objet de la section suivante.

3. Étude de l'allocation d'actifs dans le cadre de la stratégie Fixed-Mix

Les modèles stochastiques d'ALM utilisent les techniques de simulation (Monte-Carlo) pour modéliser l'évolution des différents éléments, que ce soit au niveau des actifs financiers et des engagements, ou au niveau des variables de marché et des variables démographiques. Nous pourrions ainsi estimer les lois de probabilité associées aux résultats du fonds de retraite sur le long terme. Un passage vers le cadre multi-périodique est effectué.

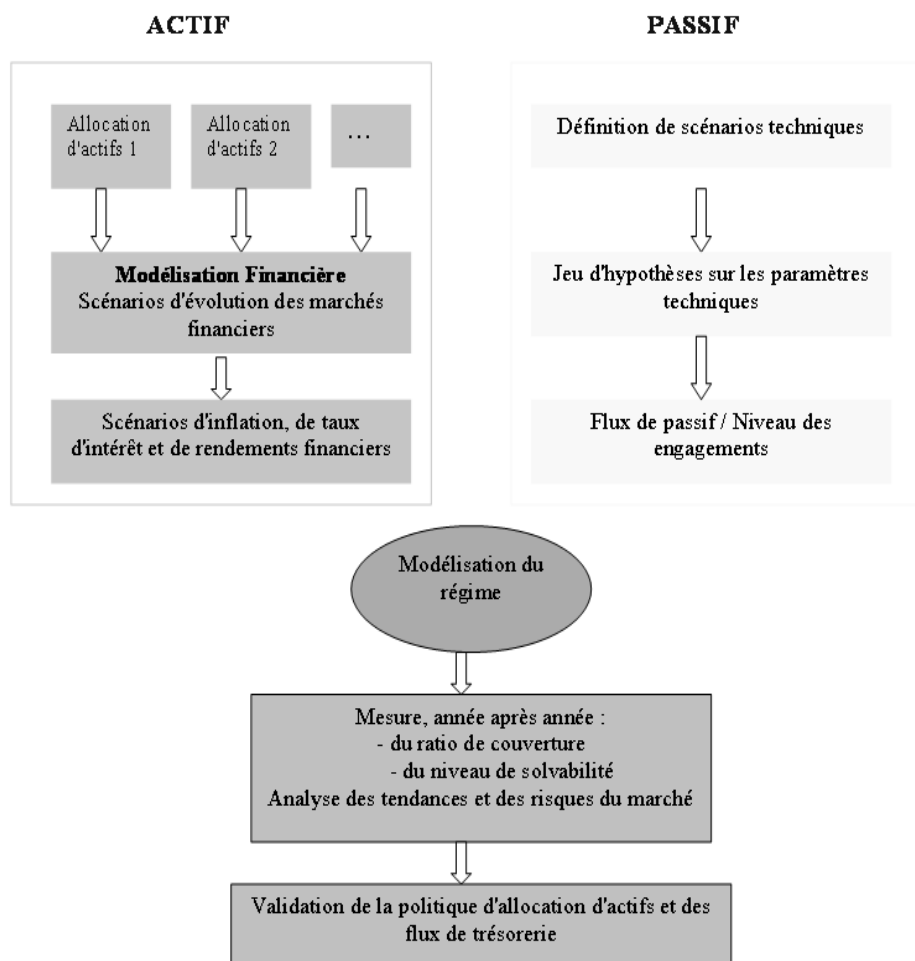
Dans ce chapitre, nous considérons une approche d'allocation stratégique d'actifs basée sur la stratégie dite « à poids constants » ou *Fixed-Mix*. Nous présentons dans un premier temps les caractéristiques de notre générateur de scénarios économiques ainsi que les hypothèses liées aux flux de passif et à l'optimisation. Nous passons ensuite à l'illustration de la stratégie *Fixed-Mix* avec une application sur les réserves d'un régime de retraite partiellement provisionné.

3.1. Présentation

La gestion à poids constants est une gestion pour laquelle les poids reviennent périodiquement à ceux de l'allocation stratégique long-terme. Autrement dit, à chaque fin de période de simulation nous reconstituons le fonds géré (en effectuant les opérations d'achats/ventes nécessaires) de façon à respecter les proportions initiales retenues par l'allocation stratégique. Cette approche est également appelée règle de gestion par « rebalancement » ou *Fixed-mix*. Il s'agit d'une stratégie d'investissement dont le principe consiste dans un rebalancement périodique des poids vers des niveaux cibles, correspondants à ceux de l'allocation stratégique optimale.

Le graphique suivant illustre les étapes générales nécessaires pour l'aboutissement d'un processus d'ALM stochastique.

Figure 5 – Illustration du modèle de gestion actif-passif dans le cadre stochastique



La combinaison de la stratégie *Fixed-Mix* avec un modèle d'ALM stochastique dédié à un régime de retraite typique en France sera l'objet de l'étude suivante. La démarche retenue lors de la mise en place de cette stratégie peut être appliquée dans le cadre d'une allocation stratégique d'actifs d'une compagnie d'assurance.

3.2. Application

3.2.1. Hypothèses du modèle d'actifs

Nous décrivons dans ce qui suit les hypothèses générales du générateur de scénarios économique (GSE) notamment les modèles stochastiques retenus pour chacune des variables modélisées. Ensuite, un rappel des différentes structures schématiques de projection est effectué.

Modèle de dynamique pour la génération de scénarios

L'objectif de ces modèles est de projeter les valeurs des rendements des différents actifs financiers (actions, obligations, etc.) ainsi que les différents taux d'intérêt et variables économiques. Cela permet d'évaluer ensuite l'optimalité de la politique d'investissement financier du fonds et de préserver l'équilibre actuariel recherché.

Comme l'horizon de l'allocation stratégique est le long terme, le nombre de classes d'actifs considérés est souvent limité à trois, à savoir : le monétaire, les obligations et les actions (cf. Campbell et al. [2001]). Dans notre cas, la méthodologie de projection des variables financières et économiques sera basée sur des modèles stochastiques. En pratique, une attention particulière doit être portée à l'inflation, qui est utilisée pour revaloriser les cotisations et les prestations des régimes étudiés.

Le choix d'un modèle de structure par terme des taux doit tenir compte de l'objectif de planification stratégique de long terme qui diffère d'un objectif d'application de court terme basé sur la précision et la comparaison des résultats avec les prix des produits dérivés tels que ceux observés sur le marché (cf. Faleh et al. [2010]).

Dans le modèle retenu, la structure par terme des taux nominaux est déduite à partir de la structure par terme des taux réels et de la structure par terme des taux d'inflation anticipés. Nous avons choisi de modéliser ces deux dernières par le modèle de Hull et White [1994] à 2 facteurs (taux court et taux long) appliqué dans un cadre d'équilibre général, avec un principe de retour à la moyenne des taux d'intérêt et avec une tendance (ou *drift*) dépendante du temps.

Les équations régissant ce processus sont les suivantes :

$$dr_t = k_r(l_t - r_t)dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

$$dl_t = k_l(\mu_l - l_t)dt + \sigma_l dB_{l,t}$$

Avec :

r_t = le taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme à la date t .

l_t = le taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme à la date t .

μ_l = le taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme moyen.

k_l = la vitesse de retour à la moyenne pour les taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme.

k_r = la vitesse de retour à la moyenne pour les taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme.

σ_l = la volatilité des taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme.

σ_r = la volatilité des taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme.

$dB_{l,t}$ = le choc brownien appliqué aux taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à long terme à la date t .

$dB_{r,t}$ = le choc brownien appliqué aux taux d'intérêt (réel ou d'inflation) à court terme à la date t .

Ce modèle a le mérite d'être utilisé pour des fins de projection de long terme et dans un cadre d'analyse d'un « monde réel » (Ahlgrim et al. [2005]). Il fournit aussi des formules explicites pour les prix des obligations zéro-coupon ce qui permet à son utilisateur d'obtenir les taux de rendements de différentes maturités, à n'importe quelle date durant la période de simulation (courbe des taux).

Nous pourrions obtenir ainsi différentes formes de la courbe des taux en fonction de l'évolution de sa partie de long terme par rapport à sa position initiale. De même, en considérant deux facteurs, nous évitons la limite du modèle à un seul facteur qui est celle d'une corrélation parfaite, égale à 1, entre les taux de rendement exigés sur différentes maturités. Le taux d'intérêt nominal i est déduit de l'approximation suivante de la relation de Fisher [1930] (avec q et r représentant le taux d'inflation et le taux d'intérêt réel respectivement) : $i = [(1 + q) \times (1 + r)] - 1$

Les rendements des différentes classes d'actifs obligataires peuvent ensuite être déduits à partir de ces projections de taux d'intérêt : nominaux, réels et d'inflation.

Les rendements totaux (avec dividendes réinvestis) des actions sont simulés selon un modèle de changement de régime tel que proposé par Hardy [2001]. Cela permet de tenir compte du phénomène des queues épaisses observé sur le long terme dans le cas des séries des rendements annuels des actions. Ce modèle suppose donc que les rendements des actions évoluent sous l'un de deux régimes suivants : un premier régime avec une tendance relativement élevée et une volatilité faible des rendements et un deuxième régime avec une tendance relativement faible et une volatilité élevée des rendements.

En supposant ρ_t le régime dans lequel se trouve le processus dans l'intervalle de temps $[t, t+1]$ et S_t la valeur de l'indice de rendement total des actions à l'instant t , le modèle de changement de régime peut être formulé ainsi :

$$\log(S_{t+1} / S_t) \mid \rho_t \sim N(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}^2) \quad \rho_t = 1,2$$

Avec μ_{ρ_t} et $\sigma_{\rho_t}^2$ correspondant au rendement moyen et à la volatilité des rendements des actions sous le régime ρ_t . Par ailleurs, une matrice de transition P dénote les probabilités de passage entre les deux régimes :

$$p_{ij} = \Pr[\rho_{t+1} = j \mid \rho_t = i] \quad i = 1,2, j = 1,2$$

Les rendements du monétaire sont supposés suivre chacun un modèle lognormal de Black et Scholes [1973] :

$$dM_t = \mu_M \times dt + \sigma_M \times dZ_M$$

Avec :

M_t = Le taux de rendement du monétaire à l'instant t .

μ_M = Le rendement annuel moyen du monétaire.

σ_M = La volatilité du rendement du monétaire.

dZ_M = Un mouvement brownien corrélé avec les autres variables du modèle.

Concernant la corrélation entre les actifs, elle sera supposée être linéaire : les corrélations entre les différents variables peuvent être dans ce cas illustrées à travers la matrice ci-dessous (où ρ_{ij} est la corrélation entre l'actif de la ligne i et l'actif de la ligne j de la matrice) :

	$dz_t^{OBLIGATION}$	dz_t^{ACTION}	$dz_t^{MONETAIRE}$
$dz_t^{OBLIGATION}$	dt	$\rho_{12}dt$	$\rho_{13}dt$
dz_t^{ACTION}	$\rho_{12}dt$	dt	$\rho_{23}dt$
$dz_t^{MONETAIRE}$	$\rho_{13}dt$	$\rho_{23}dt$	dt

Tab. 3 : Illustration de la matrice de corrélation entre les différents actifs du portefeuille

Afin de simuler les browniens des modèles retenus (taux courts, taux longs, etc.) tout en prenant en compte une structure de corrélation prédéfinie, nous utilisons la décomposition de Choleski de leur matrice de variance covariance (cf. Campbell et al. [2001]).

La calibration de ces processus stochastiques ne constituant pas le cœur du problème, des méthodes classiques basées sur les données historiques ont été retenues pour l'estimation de leurs paramètres. Cependant, il paraît nécessaire de signaler que l'approche basée sur les données historiques possède ses propres limites en matière de projection sur le long terme soit à cause de la non disponibilité de la profondeur nécessaire de certaines variables ou à cause du fait que certaines de ces variables ne sont pas directement observables.

Après avoir décrit les différents modèles du GSE à construire, notamment ceux liés aux variables modélisées, nous présentons dans ce qui suit les deux structures schématiques de projection souvent rencontrées dans la littérature.

Structure schématique pour la génération de scénarios

Le choix de la structure de projection, appelée aussi structure schématique de projection, pour chacune des variables du GSE peut être considéré comme une problématique à part (cf. Faleh et al. [2010]). Elle

concerne la définition du schéma graphique de transition entre deux valeurs successives, observées à la date t et $t + 1$, de la même variable.

Ainsi à chaque variable du GSE peut correspondre une structure de projection particulière. Afin de simplifier l'analyse, on suppose dans la suite que la structure de projection choisie est la même pour toutes les variables. De même, on définit un nœud comme la réalisation possible de la variable modélisée à une date donnée. Une trajectoire correspond ainsi à l'ensemble des nœuds successifs qui forment un scénario futur possible d'évolution de la variable financière ou macro-économique.

On présente ici les caractéristiques des structures de projection les plus utilisées en pratique. En particulier, deux principales structures peuvent être avancées à ce stade : la structure de projection linéaire d'une part (cf. Ahlgrim [2005]) et la structure d'arborescence d'autre part (cf. Kouwenberg [2001]).

La différence principale entre ces deux structures de projection se situe au niveau de la nature de la dépendance entre les différentes trajectoires simulées. Alors que pour les structures de projection linéaire, une seule trajectoire est dérivée à partir de chaque nœud, les structures par arborescence supposent quant à elles que chaque nœud possède différents nœud-enfants et ainsi différentes trajectoires possibles sont déduites à partir de chaque nœud (cf. graph 6).

Par exemple, on se positionne dans le cas où la projection des rendements des actions se déroule sur deux périodes seulement et que pour les deux structures on obtient n_1 nœuds (ou rendements) à la fin de la première période. Si on opte pour une structure linéaire de projection, on ne peut obtenir que n_1 nœuds (ou rendements) à la fin de la deuxième période, chacun d'entre eux forme avec le nœud précédent une trajectoire distincte. Si par contre on opte pour une structure d'arbre, le nombre de scénarios à la fin de la deuxième période est m_1 , avec m_1 supérieur à n_1 comme on projette différents rendements à partir de chacun des n_1 nœuds simulés fin de la première période (cf. graphique ci-dessous).

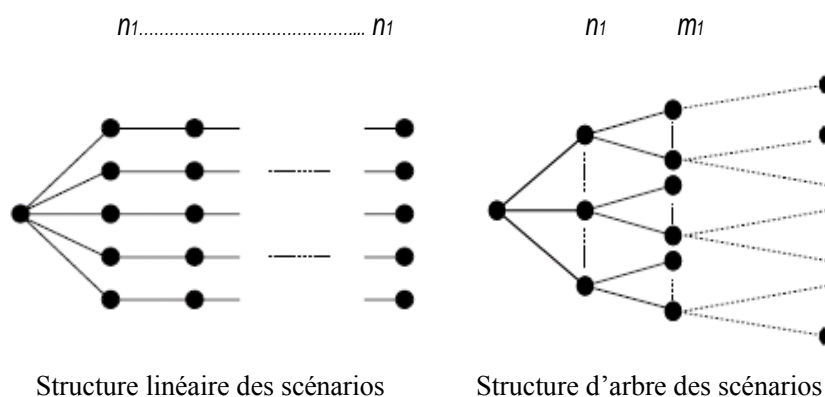


Fig. 6 : Présentation de deux structures schématiques de projection pour un GSE

On focalisera notre intérêt dans la suite sur la structure de projection linéaire plus utilisée dans le cas d'une allocation de type *Fixed-Mix*.

3.2.2. Hypothèses du modèle du passif et d'ALM

Concernant le passif, le fonds est considéré comme un fonds fermé (pas de nouveaux cotisants jusqu'à la fin de la période d'étude). Les flux nets à payer sont définis en termes de « marge d'exploitation » :

- + Flux techniques (cotisations normales et rétroactives + compensations)
- Prestations (allocations + capitaux décès + transferts)
- = **Marge technique**
- Frais de gestion
- Dépenses au titre de l'action sociale
- = **Marge d'exploitation**

Nous supposons que la projection du flux est déjà effectuée en termes de flux réels. La période de projection sera celle du 01/01/2014 au 31/12/2064.

Le graphique 7 montre un exemple de projection des flux de passif pour ce type de fonds. L'horizon de projection des scénarios économiques et financiers est de 50 années (du 01/01/2014 au 01/01/2064) avec un pas de projection trimestriel. La fréquence de rebalancement du portefeuille vers l'allocation stratégique testée est également trimestrielle (nous rappelons

qu'on se situe dans le cas d'un modèle *Fixed-Mix* et ainsi un retour périodique aux poids prédéfinis par l'allocation stratégique est effectué).

Une approche d'ALM financière a été adoptée : actualisation des flux du passif avec la courbe des taux simulée à chaque instant. La valeur actuelle à l'instant t de N flux futurs est donnée par l'expression suivante :

$$\text{Engagements Actualisés}_t = \sum_{i=1}^N \frac{\text{Flux}_i}{\prod_{j=1}^i (1+r_j)}$$

avec : r_j le taux d'intérêt sur la sous période j (taux réel en cas de flux réels et taux nominal en cas de flux nominaux).

La même démarche est utilisée pour l'indexation des flux de passif par les taux d'inflation simulés. Dans ce cas, le flux réel à un instant t est multiplié par le coefficient d'indexation déduit à partir des taux d'inflation réalisés sur les périodes entre l'instant initial $t_0 = 0$ et t :

$$\text{Flux indexé}_t = \text{Flux Réel}_t \times \prod_{j=1}^t (1+i_j)$$

avec : i_j le taux d'inflation sur la sous période j .

Nous supposons que le choix de l'allocation stratégique sera principalement guidé par des critères portant sur le niveau des réserves : maximisation d'un montant de réserve à terme ou de sa résultante le Taux de Rendement Interne (TRI) à horizon de l'allocation stratégique.

Autrement dit, nous supposons que la politique d'investissement vise à maximiser la valeur de la réserve financière du régime (ou de la société d'assurance) à une date donnée dans le futur : ce qui revient à maximiser le taux de rendement interne de la réserve entre la date initiale et cette date future.

Simultanément, deux contraintes seront à respecter par l'allocation optimale :

Contrainte 1 : Le rapport à une date t_0 donnée entre :

- la somme de la valeur de la réserve à la date t_0 et des flux futurs de cotisation sur les H_v prochaines années (ces flux sont *actualisés* à la date t_0) ;

- la somme des flux futurs de prestation sur les H_v prochaines années (ces flux sont *actualisés* à la date t_0) devra également être supérieure à un niveau m_1 dans $(1-\alpha_1)$ % des cas.

Contrainte 2 : Le rapport à une date t_0 donnée entre :

- la valeur projetée de la réserve à la date t_0 plus H_{\max} années ;
- la prestation prévisionnelle versée à la date t_0 plus H_{\max} années devra être supérieur à un niveau m_2 dans $(1-\alpha_2)$ % des cas

De point de vue mathématique, ce système d'optimisation peut être formulé ainsi :

$$\underset{TRI}{Max} R_{t_0}(1+TRI)^{H_{\max}} + \sum_{i=t_0+1}^{(t_0+H_{\max})-1} (\bar{c}_i - \bar{p}_i)(1+TRI)^{(t_0+H_{\max})-i} = R_{(t_0+H_{\max})}$$

$$S/C \quad P \left[\frac{R_t + \sum_{i=t_0+1}^{t_0+H_v} \frac{\bar{c}_i}{\prod_{j=t_0+1}^i (1+r_j)}}{\sum_{i=t_0+1}^{t_0+H_v} \frac{\bar{p}_i}{\prod_{j=t_0+1}^i (1+r_j)}} \geq m_1 \right] \geq 1-\alpha_1$$

$$P \left[\frac{R_t + \sum_{i=t_0+1}^{t_0+H_{\max}} \frac{\bar{c}_i - \bar{p}_i}{\prod_{j=t_0+1}^i (1+r_j)}}{\frac{P_{t_0+H_{\max}}}{\prod_{j=t_0+1}^{t_0+H_{\max}} (1+r_j)}} \geq m_2 \right] \geq 1-\alpha_2$$

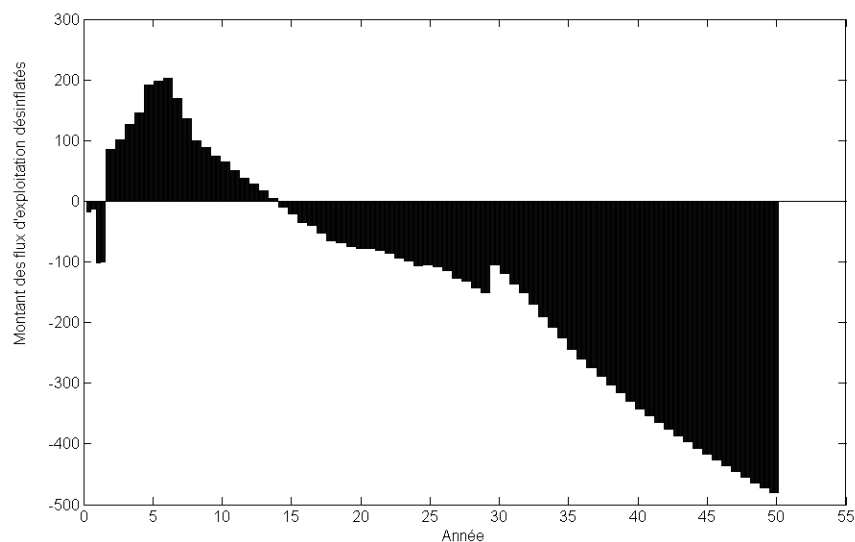
avec :

- \bar{c}_t : représente les cotisations (y compris inflation) à la date t ;
- \bar{p}_t : représente les prestations (y compris inflation) à la date t ;
- R_{t_0} : représente la valeur de la réserve à la fin de l'année t_0 , date de détermination de l'allocation stratégique (date de départ) ;

- TRI : le taux de rendement interne ;
- r_j : représente le taux de rémunération prudent de la réserve à la date j (taux nominal sans risque) ;
- m_1 : représente le rapport minimum pour la contrainte 1 (dans notre cas $m_1 = 1$) ;
- m_2 : représente le rapport minimum pour la contrainte 2 (dans notre cas $m_2 = 1,5$) ;
- H_v : représente l'horizon considéré pour le calcul du rapport de la contrainte 1 (dans notre cas $H_v = 30$ ans) ;
- H_{\max} : représente l'horizon considéré pour le calcul du rapport de la contrainte 2 (dans notre cas $H_{\max} = 20$ ans) ;
- α_1 et α_2 correspondent aux marges d'erreur au niveau du respect de la contrainte 1 et 2 respectivement ($\alpha_1 = \alpha_2 = 2,5$ % dans notre cas).

Le rapport de la première contrainte peut être assimilé à un ratio de couverture des flux de prestation sur les prochaines années par la réserve initiale augmentée des flux futurs de cotisation sur les mêmes années : cela assure la **viabilité** du régime. De même, le rapport de la deuxième contrainte représente un ratio de couverture de la prestation à payer dans années par la valeur de la réserve de la même année : cela assure un niveau de **solvabilité** requis par le fonds après H_{\max} années. Cela correspond au cas d'un régime de retraite **partiellement provisionné** (ou au cas particulier d'une société d'assurance avec de telles contraintes de solvabilité et de viabilité).

Concernant les contraintes de poids sur la composition de l'allocation cible, il doit être possible d'imposer *a priori* pour chaque classe d'actif de l'allocation une composition minimum et maximum à respecter pour chaque allocation testée.

Figure 7 – Exemple d'évolution des flux nets de trésorerie (flux désinflatés)

Nous rappelons finalement, qu'en termes de règles de gestion, il est considéré qu'à chaque fin de période de simulation nous « forçons » le fonds à respecter les proportions initiales (« rebalancement »). Ceci est dû à la stratégie *Fixed-Mix* adoptée. Cette dernière présente l'avantage :

- d'être cohérente avec l'idée d'allocation stratégique ;
- de considérer le fonds comme un FCP (Fonds Commun de Placement) en travaillant avec son rendement issu des pondérations des rendements de chaque poche ;
- d'éviter de définir des règles complexes d'investissement/désinvestissement.

3.2.3. Méthodologie retenue

Les étapes de cette étude actif-passif sont les suivantes :

Étape de simulation des scénarios économiques et financiers

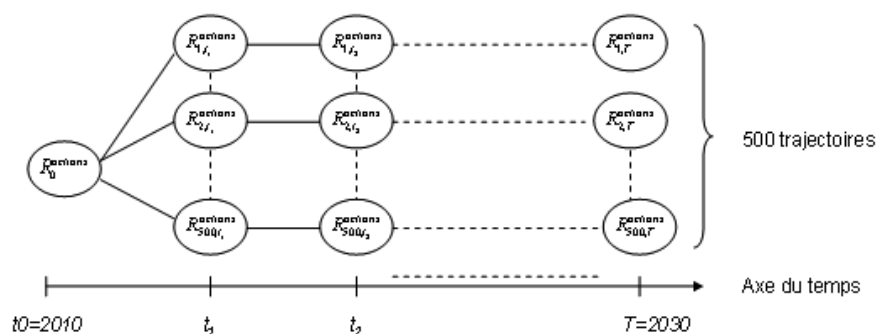
Il s'agit d'une étape commune et préliminaire et au cours de laquelle nous nous basons sur le GSE proposé pour :

- la simulation des différents taux d'intérêt réels (longs et courts), des taux d'inflation anticipés (longs et courts) avec déduction des taux nominaux (longs et courts) ;

- la simulation du rendement des actions, du rendement de l'immobilier et de l'évolution du taux monétaire ;
- la détermination des prix des zéro-coupon nominaux, indexés à l'inflation et à risque de crédit ;
- la détermination des performances des produits de taux.

Ces simulations se feront selon la structure schématique linéaire (quelle que soit la classe d'actifs considérée). Ce type de structure est souvent utilisé dans le cas de la stratégie *Fixed-Mix* (cf. Kouwenberg [2001]). Pour rappel, cette structure se présente ainsi (cas des actions) :

Figure 8 – Illustration de la structure schématique linéaire dans le cas de la projection des rendements des actions



Étape de préparation des flux du passif

Cette étape consiste dans la préparation des flux indexés en fonction de la politique des prestations du régime (ou de la compagnie) ainsi que de la projection de l'évolution de la valeur actualisée des engagements du régime (ou de la compagnie). Les opérations suivantes sont mises en place :

- l'ajustement de la fréquence initiale des flux du passif (la marge d'exploitation) à la fréquence retenue dans notre étude (trimestrielle) ;
- le calcul des coefficients d'indexation des prestations à partir des taux d'inflation simulés par le GSE ;
- l'indexation des flux du passif ;
- le calcul des coefficients d'actualisation des flux à partir des taux d'intérêts simulés par le GSE (en cas de flux de passif initiaux exprimés en euro réel, nous utilisons le taux réel simulé pour l'actualisation des flux futurs) ;
- la détermination de l'évolution des engagements actualisés à chaque instant.

Étape de détermination de l'évolution du ratio de couverture

Pour une allocation donnée, nous passons par les opérations suivantes pour déterminer la distribution des ratios de couverture (que ce soit le ratio de solvabilité ou le ratio de viabilité comme définies ci-dessus) :

- l'ajustement de la valeur de la réserve à chaque fin de période par rapport aux flux indexés :

Réserve fin de période = Réserve début de période capitalisée sur le marché financier + flux fin de période.
--

- la détermination de l'évolution du ratio de couverture tout au long de la période de projection et pour les différentes trajectoires simulées.

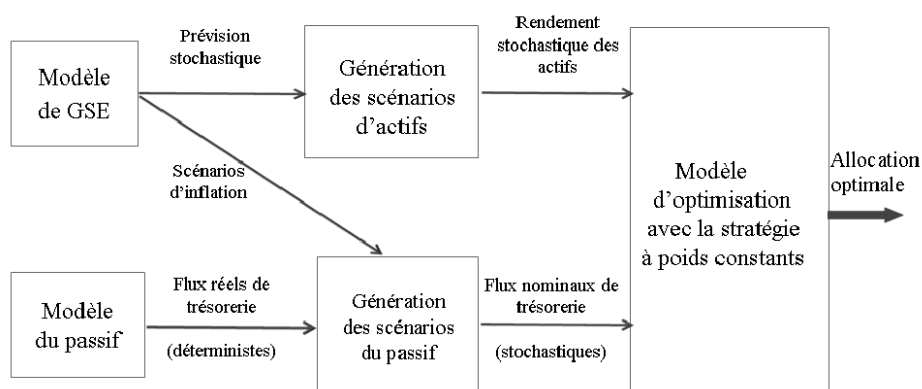
Le schéma opérationnel illustrant l'approche retenue pour l'ALM est le suivant :

- nous construisons initialement un très grand nombre d'allocations « tests » (ex. 100 000) ;
- parallèlement nous simulons un grand nombre de scénarios de marché⁴ (ex. 5 000) pour chaque classe constituant l'actif (taux, action, immobilier) ;
- nous appliquons les scénarios de marché à chacune des allocations tests, afin de simuler les trajectoires (évolutions) correspondantes de la réserve entre la date de calcul de l'allocation et l'horizon du régime (ou de la compagnie d'assurance) ;
- nous aurons ainsi par ex 5 000 trajectoires simulées pour chacune des 100 000 allocations tests ;
- nous effectuons enfin un « tri » parmi les allocations tests, afin d'obtenir des allocations dites « admissibles » : il s'agit des allocations associées à la meilleure probabilité que le rendement soit maximal tout en respectant les contraintes définies ci-dessus. Cette probabilité est évaluée sur la base des 5 000 trajectoires simulées.

⁴ La question de l'optimisation du couple nombre de scénarios de marché/nombre d'allocations « tests » a été étudiée dans Rullière et al. [2013]). L'objectif étant d'obtenir une réduction du temps de calcul avec un minimum de perte sur la fiabilité du résultat final du problème.

La figure suivante illustre les principales étapes du modèle de gestion actif-passif considéré :

Figure 9 – Illustration du modèle de gestion actif-passif stochastique objet de l'application dans le cadre de la stratégie *Fixed-Mix*



3.2.4. Résultats obtenus

Dans le cadre de l'application de la stratégie *Fixed-Mix*, nous optons pour la majoration des poids des différentes classes d'actifs dans l'allocation optimale de la manière suivante : pondération maximale de 40 % pour la classe des obligations à taux fixe, la classe des actions, l'immobilier et les obligations indexées et pondération maximale de 10 % pour le monétaire. L'intérêt de ce plafonnement des poids des classes d'actifs est d'ordre pratique : il permet de réduire le nombre d'allocations possibles, et donc de minorer les temps de calculs du moteur ALM.

L'objectif étant d'illustrer le caractère opérationnel du moteur ALM, la matrice d'allocation est générée en fixant un pas de maillage (de 5 %) et des bornes pour les poids de chaque actif. Les bornes ont été choisies en prenant en compte deux facteurs : le premier consiste à limiter la taille de la matrice des allocations possibles et le second consiste à couvrir un ensemble d'allocations pertinentes et vraisemblables.

Les bornes retenues pour l'illustration des résultats sont donc les suivantes :

Tableau 4 – Bornes retenues pour les poids de différentes classes d'actifs

	Borne min.	Borne sup.
Monétaire	0,00 %	30,00 %
ZC 5 ans (nominal)	10,00 %	30,00 %
ZC 10 ans (nominal)	10,00 %	30,00 %
ZC 15 ans (nominal)	0,00 %	0,00 %
ZC 8 ans (réel)	10,00 %	30,00 %
ZC 15 ans (réel)	0,00 %	0,00 %
Obligation crédit	0,00 %	30,00 %
Actions	25,00 %	40,00 %
Immobilier	0,00 %	10,00 %

D'un autre côté, deux scénarios économiques ont été considérés : un scénario de stress et un scénario alternatif. En pratique, le but de ce type de scénario est de tester la robustesse des allocations optimales obtenues avec le scénario central. Dans le tableau 5, nous présentons les paramètres relatifs à un scénario de stress (avec forte baisse des rendements des actions : chute de 30 % sur un an) et au scénario alternatif (baisse continue de l'inflation moyenne de 100 pb). Il est rappelé que les paramètres utilisés pour les différents scénarios sont purement illustratifs.

Il est à préciser que le TRI et le médian de la réserve sont calculés sur un horizon égal à l'horizon d'allocation (9 ans) ou l'horizon de vérification des contraintes. Par ailleurs, la VaR du ratio de viabilité et la VaR du ratio de solvabilité sont établis pour un horizon d'allocation de 9 ans (sachant par ailleurs que l'horizon de la contrainte de solvabilité est de 20 ans et que l'horizon de la contrainte de viabilité est de 30 ans). La performance et la volatilité sont des valeurs moyennes calculées sur l'ensemble de la projection (50 ans).

Au niveau des résultats sur l'allocation optimale, nous observons à première vue que le poids du monétaire est nul. Aussi, nous observons que les poids cumulés des obligations nominales et l'obligation crédit est de 40 %. Cette valeur est de 10 % pour les obligations indexées à l'inflation et de 50 % pour les actifs risqués (actions et immobilier). En outre l'allocation optimale présentée ci-dessous ne comporte pas d'obligation nominale et d'obligation indexée à l'inflation de maturité 15 ans, étant donné que ces poids sont nuls dans la matrice des allocations testées.

Tableau 5 – Paramètres retenus pour les différents scénarios

Paramètre	Scénario central	Scénario stress (forte baisse des rendements des actions -30%)	Scénario alternatif (baisse de l'inflation moyenne de 10 bp)
Inflation à long terme			
Vitesse de retour à la moyenne	0,01%	0,01%	0,01%
Volatilité	5,00%	5,00%	5,00%
Moyenne	2,00%	2,00%	1,00%
Valeur initiale	2,00%	2,00%	2,00%
Inflation à court terme			
Vitesse de retour à la moyenne	10,00%	10,00%	10,00%
Volatilité	1,00%	1,00%	1,00%
Valeur initiale	1,00%	1,00%	1,00%
Borne inférieure	-1,00%	-1,00%	-1,00%
Borne supérieure	3,00%	3,00%	3,00%
Taux d'intérêt réel long			
Vitesse de retour à la moyenne	35,00%	35,00%	35,00%
Volatilité	2,50%	2,50%	2,50%
Moyenne	3,00%	3,00%	3,00%
Valeur initiale	2,50%	1,50%	2,50%
Taux d'intérêt réel court			
Vitesse de retour à la moyenne	40,00%	40,00%	40,00%
Volatilité	2,50%	2,50%	2,50%
Valeur initiale	1,00%	1,00%	1,00%
Borne inférieure pour les taux	-1,00%	-1,00%	-1,00%
Borne supérieure pour les taux	4,00%	4,00%	4,00%
Action			
Valeur initiale	100,00%	100,00%	100,00%
Moyenne régime 1 (faible volatilité)	7,50%	chute 30% sur un an	6,50%
Volatilité du régime 1 (faible volatilité)	16,00%	16,00%	16,00%
Moyenne régime 2 (forte volatilité)	-10,00%	chute 30% sur un an	-11,00%
Volatilité du régime 2 (forte volatilité)	27,00%	27,00%	27,00%
Immobilier			
Vitesse de retour à la moyenne	15,00%	15,00%	15,00%
Volatilité	10,00%	11,00%	10,00%
Moyenne	6,00%	6,00%	5,00%
Valeur initiale	5,00%	5,00%	5,00%
Crédit			
Coefficient d'battement*			
Maturité 5 ans	97,18%	97,18%	97,18%
Maturité 4 ans et 9 mois	97,17%	97,17%	97,17%
Valeur initiale	-	-	-
Moyenne régime 1 (faible volatilité)	-	-	-
Volatilité du régime 1 (faible volatilité)	-	-	-
Moyenne régime 2 (forte volatilité)	-	-	-
Volatilité du régime 2 (forte volatilité)	-	-	-
Monétaire (lognormal)			
Moyenne	3,50%	3,50%	2,50%
Volatilité	1,50%	1,50%	1,50%

Le tableau ci-après présente les dix meilleures allocations parmi les 2 985 allocations testées avec le scénario économique central, la meilleure allocation est soulignée en gris :

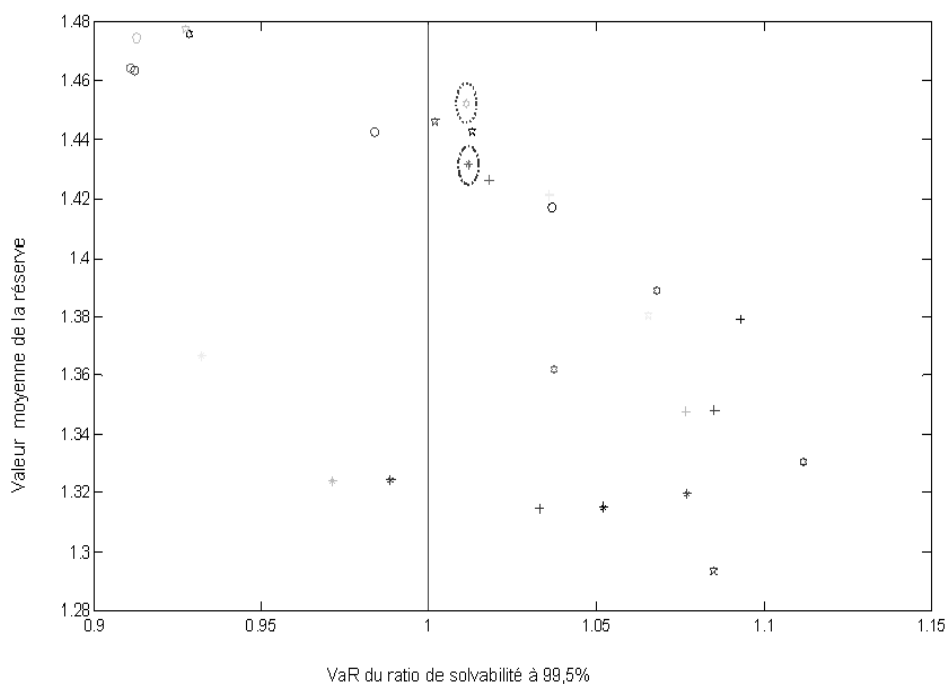
Tableau 6 – Liste des dix meilleures allocations obtenues dans l'exemple illustratif

TRI moyen (9 ans)	10,631%	10,630%	10,629%	10,630%	10,629%	10,631%	10,631%	10,632%	10,630%	10,630%
Median de la réserve (9 ans)	10 133	10 137	10 124	10 125	10 136	10 126	10 138	10 138	10 125	10 133
VaR Ratio de pérennité (9 ans)	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06
VaR Ratio de financement (9 ans)	2,786	2,788	2,792	2,792	2,787	2,792	2,788	2,792	2,792	2,786
Performance moyenne à long terme (50 ans)	5,551%	5,553%	5,545%	5,546%	5,552%	5,548%	5,553%	5,549%	5,547%	5,550%
Volatilité à long terme (50 ans)	7,396%	7,414%	7,385%	7,370%	7,382%	7,373%	7,381%	7,375%	7,369%	7,370%
Poids du monétaire	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Poids des ZC 5 ans (nominal)	10%	15%	30%	25%	20%	15%	10%	10%	20%	15%
Poids des ZC 10 ans (nominal)	15%	20%	10%	10%	20%	10%	20%	10%	10%	15%
Poids des ZC 15 ans (nominal)	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Poids des ZC 8 ans (réel)	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
Poids des ZC 15 ans (réel)	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Poids des obligations crédit	15%	5%	0%	5%	0%	15%	10%	20%	10%	10%
Poids des actions	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%
Poids de l'immobilier	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%

Nous notons que le poids du monétaire est nul dans les 10 allocations. Nous observons également sur l'ensemble des allocations une répartition équilibrée entre les actifs risqués (actions et immobilier), qui ont un poids total de 50 %, et les actifs moins risqués (obligations), qui ont également un poids total de 50 %.

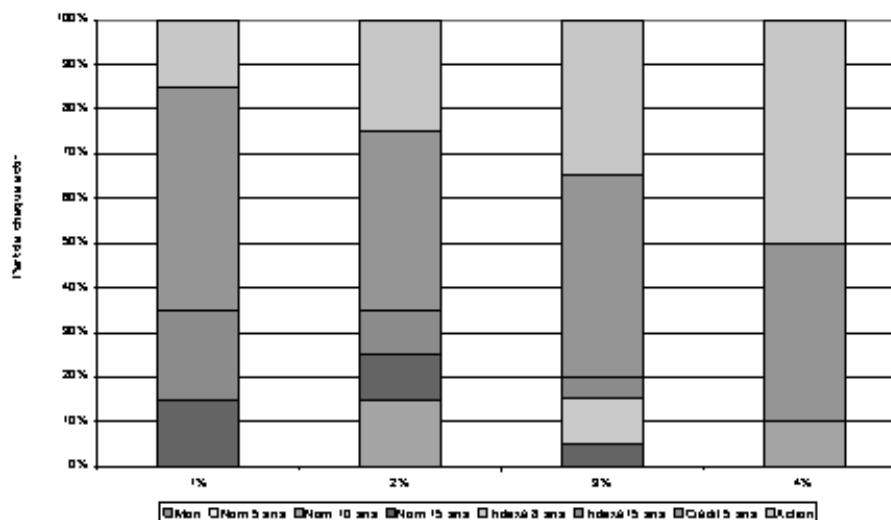
En complément, un test est mené sur les 10 meilleures allocations obtenues. Le test sur ces dix allocations est réalisé pour s'assurer de leur robustesse en cas de scénarios de stress (forte baisse des actions sur un an) ou alternatif (diminution du niveau d'inflation de long terme) : il s'agit ainsi de s'assurer que ces 10 meilleures allocations vérifient les contraintes dans les deux scénarios complémentaires retenus (scénario de stress et scénario alternatif). Dans le cadre de ce test, il s'avère que les 10 allocations présentées comme les meilleures dans le scénario central vérifient bien les contraintes dans les deux scénarios complémentaires. Aussi, les allocations optimales proposées semblent résister à des scénarios de projections des actifs différents de ceux retenus dans le scénario central. La conclusion de ce test confirme le caractère robuste des dix allocations testées.

Figure 10 – Ratio de couverture des flux jusqu'en 2029 sur un horizon de 9 ans (2018) et un niveau de confiance de 99,5 %



Les résultats suivants sont indiqués à titre d'illustration : Valeur à Risque (VaR) du ratio de solvabilité à 99,5 % et valeur moyenne de la réserve dans la figure 10, ceci pour un échantillon donné d'allocation. On obtient alors une courbe d'efficacité au sens de Markowitz : certaines allocations permettent d'avoir plus de rendement (valeur moyenne de la réserve) pour un niveau de risque plus réduit (VaR du ratio à 99,5 %). Il s'agit du cas, par exemple, des deux allocations ayant le couple de rendement/risque encerclé dans la figure 10 et qui garantissent un niveau de VaR supérieur à 1. La figure 11 illustre, quant à elle, un test effectué sur la sensibilité de l'allocation optimale par rapport aux changements des niveaux des rendements espérés des actions.

Figure 11 – Sensibilité de l'allocation optimale par rapport à l'espérance de rendement des actions



Deux constats peuvent être avancés à ce titre :

- une sensibilité significative de l'allocation stratégique d'actifs par rapport aux hypothèses de départ sur les rendements des actions ;
- une sensibilité croissante : plus les hypothèses de rendement sont élevées plus la variation des poids de l'allocation stratégique optimale est significative dans notre cas.

Dans ce qui suit nous nous intéressons à l'impact du recours à deux matrices de corrélation différentes entre les actions et les autres classes d'actifs : une première matrice reflétant la structure dépendance dans un contexte « normal » et une deuxième matrice reflétant une situation de « crise » (appelée matrice de « corrélation à risque »).

Pour cela, un premier tableau (cf. tableau 7) est présenté indiquant l'allocation optimale obtenue dans le cas d'un seul régime (1 matrice de corrélation) et dans le cas de deux régimes (2 matrices de corrélation), toutes choses étant égales par ailleurs. Nous constatons que, dans ce dernier cas, nous sommes moins exposés aux classes d'actifs risqués (exposition totale aux actions et à l'immobilier à la hauteur de 65 % contre 70 % dans le cas d'un seul régime). Cela constitue une réponse à une aversion au risque supplémentaire prise en compte via la matrice de « corrélation à risque ».

Tableau 7 – Allocations optimales en fonction du nombre de régimes de corrélations

	Alloc. optim. 1 matrice de corr.	Alloc. optim. 2 matrice de corr.
Nom 5 ans	0 %	0 %
Nom 10 ans	10 %	15 %
Nom 15 ans	5 %	10 %
Indexées 8 ans	0 %	0 %
Indexées 15 ans	15 %	10 %
Crédit 5 ans	40 %	40 %
Actions	30 %	25 %

Le même travail a été effectué au niveau des VaR (Valeur à risque) correspondant au montant de la réserve totale observée à une date donnée (horizon de l'allocation). Ainsi, pour deux niveaux de confiance possibles (97,5 % et 99,5 %), nous avons calculé ces valeurs dans le cas où nous avons un seul régime de corrélation et dans le cas où nous avons deux régimes de corrélation (cf. tableau 8). Les résultats confirment une moindre exposition dans le cas de deux régimes et montrent une sensibilité significative du niveau de la VaR (en montant) par rapport à l'approche retenue (dans le cas du seuil de 97,5 %, nous remarquons bien un doublement du montant extrême en passant de l'approche à un seul régime à l'approche à deux régimes de corrélation).

Tableau 8 – Valeur à Risque de la valeur de la réserve en fonction du nombre de régimes de corrélations

	VaR 97,5 %	VaR 99,5 %
Alloc. optim. 1 matrice de corr.	203	- 3 740
Alloc. optim. 2 matrice de corr.	435	- 3 255

4. Conclusion

Le paysage des régimes de retraite en France est diversifié. Une panoplie large de contraintes et d'objectifs peut être rencontrée en pratique. Dans ce cadre, nous avons proposé une modélisation du régime-type de retraite tout en étudiant certains critères d'allocation stratégique d'actifs. La stratégie *Fixed-Mix*, une des référence en matière d'allocation d'actifs, a été

explorée et mise en œuvre dans le cas d'un régime de retraite partiellement provisionné.

Dans le chapitre suivant, nous essayons d'étudier, sur un autre plan, le problème d'allocation stratégique d'actifs. L'objectif sera, cette fois-ci, de modifier la stratégie d'allocation et d'étudier l'effet sur le résultat final. En particulier, nous explorons différentes techniques permettant de nous positionner dans un contexte d'allocation dynamique, différent de celui considéré jusque-là avec l'allocation à poids constants (*Fixed-Mix*).

Chapitre 3

ALLOCATION STRATÉGIQUE D'ACTIFS ET MODÈLES D'ALM DYNAMIQUE

Dans le chapitre précédent, le cadre général pour la mise en place d'un modèle de gestion actif-passif basé sur la stratégie *Fixed-Mix* a été présenté : ce type de modèle suppose un rebalancement périodique des actifs, de façon à garder constante la composition du portefeuille financier au début de chaque sous-période. Même si la stratégie *Fixed-Mix* a le mérite de prendre en compte l'aspect aléatoire des scénarios économiques et financiers, cette stratégie peut être critiquée du fait qu'elle ne suppose pas une flexibilité des positions futures sur le marché face aux différents scénarios projetés de rendement. Plus précisément, cette approche ne permet pas d'utiliser complètement l'information qui arrive au fur et à mesure dans le temps pour optimiser le choix de l'allocation stratégique (cf. Zenios [2007]).

Une autre approche, tournée vers le futur et permettant d'intégrer l'aspect dynamique dans la composition du portefeuille serait « *a priori* » d'une importance majeure. L'élément clé de distinction entre les deux stratégies (dynamique et *Fixed-Mix*) se situe au niveau des compositions des portefeuilles testés par le moteur d'optimisation, tout au long de la période de projection.

Dans le cas de la stratégie *Fixed-Mix*, nous partons à $t = 0$ d'un vecteur de poids unique (ex. : 40 % actions et 60 % obligations) et constant (puisque nous supposons un rebalancement périodique, par exemple annuel, de la composition du portefeuille vers ce vecteur). Nous calculons *in fine* (ex. à $t = 10$ ans) les indicateurs risque/rendement correspondant. Ce calcul est appliqué pour différents vecteurs. Le but est de comparer les indicateurs relatifs aux différents vecteurs de poids pour finalement choisir celui qui optimise les critères d'allocation retenus. L'allocation stratégique optimale correspond dans ce cas au vecteur de poids optimal.

Dans le cas d'une stratégie dynamique, nous nous autorisons la possibilité d'avoir des compositions intermédiaires de poids différentes (ex. : entre $t = 0$ et $t = 10$ ans). L'ensemble de ces compositions (ou vecteurs) intermédiaires donnera lieu à ce que nous pouvons appeler un « chemin » d'allocation. L'objectif dans le cadre de la stratégie dynamique est de comparer les indicateurs risque/rendement obtenus par chaque « chemin » pour finalement retenir celui qui optimise les critères retenus d'allocation. Nous aurions dans ce cas un chemin optimal ainsi qu'une allocation stratégique optimale (correspondant au vecteur de poids de la date $t = 0$).

Dans ce chapitre, les modèles classiques d'ALM dynamiques sont brièvement rappelés, notamment les techniques d'assurance de portefeuille et les techniques de programmation dynamique. Les principes des techniques de programmation stochastique sont ensuite présentés. À travers une application numérique, nous comparons certains résultats relatifs aux deux approches d'allocation stratégique d'actifs : celle basée sur la stratégie *Fixed-Mix* et celle basée sur les techniques de programmation stochastique. Nous testons également la sensibilité de cette dernière approche par rapport au changement de certains de ses paramètres, toutes choses étant égales par ailleurs.

1. Allocation stratégique d'actifs dans le cadre des modèles classiques d'ALM dynamique

Les modèles classiques d'ALM dynamiques englobent notamment les techniques d'assurance de portefeuille (cf. Perold et Sharpe [1988]) et les techniques de programmation dynamique (cf. Cox et Huang [1989], Merton [1971]).

L'objectif de l'assurance de portefeuille est de permettre aux investisseurs de participer à la performance du marché, tout en leur offrant une protection à maturité d'une proportion du capital initial investi. Cette technique peut s'inscrire parmi les stratégies de gestion dynamique d'un surplus dans le cadre de l'ALM.

Une des méthodes standards d'assurance de portefeuille est la méthode dite « de l'assurance de portefeuille à proportion constante » (en anglais « *Constant Proportion Portfolio Insurance* » ou CPPI, cf. Perold et Sharpe [1988], Hilli et al. [2007]). Cette stratégie est fondée sur une allocation dynamique entre un actif risqué (par exemple les actions) et un actif sans risque (par exemple le monétaire) afin de garantir à chaque date un niveau minimal prédéterminé pour le portefeuille.

Dans la terminologie de l'assurance de portefeuille, nous définissons couramment :

- « le Plancher » : la valeur minimale du portefeuille acceptable pour l'investisseur à maturité,
- « le Coussin » (analogue au surplus en ALM) : l'écart entre la valeur du portefeuille et le plancher garanti,
- « l'exposition » : la proportion du portefeuille qui est investie en actif risqué.

Dans l'approche CPPI, la proportion du portefeuille investie dans l'actif risqué varie proportionnellement au montant placé en actif sans risque, de manière à assurer à chaque date le niveau plancher. Mathématiquement, cela consiste à introduire le paramètre m (appelé « multiplicateur »), tel qu'à chaque date de rebalancement du portefeuille nous ayons la relation :

$$\text{Exposition} = m \times \text{Coussin}$$

En pratique le multiplicateur doit être ajusté en fonction des fluctuations du marché, tout en restant à l'intérieur d'une zone cible.

La stratégie d'assurance de portefeuille reste une des stratégies les plus intéressantes en pratique. Un inconvénient majeur de cette approche consiste dans le fait qu'elle limite le champ du choix de la règle de gestion pour l'investisseur : elle réduit sa problématique à l'unique gestion de la proportion constante (cf. Hilli et al. [2007]). Cet éventuel manque de flexibilité, en termes de choix des éléments du système d'optimisation (que ce soit au niveau de la fonction objectif ou au niveau des contraintes), nous mène à explorer d'autres techniques pouvant traiter des cas plus généraux.

Dès lors que l'on veut aborder les problèmes d'allocation inter-temporelle d'actifs financiers, nous faisons également recours à des méthodes plus sophistiquées. S'offre également la possibilité de se placer soit en temps discret soit en temps continu. Le cas multi-périodique s'avère *a priori* très lourd à manipuler. En temps continu, la résolution de ce type de problème peut par exemple se faire via les techniques de programmation dynamique : soit à partir d'une approche martingale (Cox et Huang [1989]) soit à partir du contrôle stochastique (Merton [1971]).

Plus le nombre de paramètres dans le modèle augmente plus l'obtention d'une solution analytique au problème d'optimisation dynamique devient difficile et parfois impossible (cf. Brandimarte [2006]). Le recours à la Programmation Stochastique (PS) permet la prise en compte de modèles plus proches de la réalité. Ces techniques constituent l'objet de l'étude détaillée de la section suivante.

2. L'allocation stratégique d'actifs dans le cadre de la programmation stochastique

2.1. Introduction

Dans le cadre général de la résolution des problèmes d'optimisation stochastique deux approches inspirées des techniques de recherche opérationnelle sont souvent présentées dans la littérature : la programmation dynamique et la programmation stochastique. Ces deux approches ont différents points communs. Alors que la programmation dynamique est plus utilisée dans le monde de l'économie (en particulier en théorie de la consommation et la théorie des options), la programmation stochastique est souvent appliquée par la communauté des ingénieurs en particulier dans le domaine de la planification de la production. Nous nous proposons de présenter les modalités de leur adaptation dans le cadre d'une étude de gestion actif-passif.

En particulier, nous focalisons notre intérêt sur les modèles de programmation stochastique avec recours. Le lien avec le monde de la finance est mis en évidence au terme de cette partie. Ensuite, nous formulons, du point de vue mathématique, le problème de programmation stochastique avec recours et nous recensons certains outils de résolution de ce problème. La mise en place effective d'un modèle d'ALM dynamique basé sur les techniques de PS fera quant à lui l'objet de la section suivante.

2.2. Présentation de la programmation stochastique

Le comité de programmation stochastique COSP (*Committee on Stochastic Programming*⁵) définit la programmation stochastique comme « un cadre de modélisation des problèmes d'optimisation incluant l'incertitude ». Alors que les problèmes d'optimisation déterministes sont formulés avec des paramètres et des coefficients connus, les problèmes du monde réel incluent souvent des paramètres aléatoires. La programmation stochastique cherche à présenter la solution optimale en se basant sur le fait que la distribution de probabilité des données est connue ou qu'elle peut être estimée.

La programmation stochastique est un programme mathématique dans lequel certains des paramètres du problème étudié sont aléatoires ; la programmation stochastique linéaire est le cas particulier le plus simple de la PS. Parmi les hypothèses nécessaires pour l'utilisation de ces techniques nous pouvons citer les deux suivantes : d'une part, la distribution de

5. Un groupe international de chercheurs qui développent des modèles, des méthodes et des théories pour la prise de décision dans le contexte d'incertitude : <http://stoprog.org/>

probabilité de l'incertitude (sur les paramètres) est soit connue soit pouvant être estimée et d'autre part les probabilités sont indépendantes des décisions à prendre (cf. Zenios [2007]).

Les concepts basiques des modèles d'ALM sous l'incertitude et avec PS ont été développés par Kallberg, White et Ziemba [1982] ainsi que Kusy et Ziemba [1986]. Plusieurs développements ont été ensuite présentés. Parmi les modèles les plus adoptés en pratique, nous trouvons le modèle de Russel-Yasuda Kasai développé par Cariño et al. [1994]. Il s'agit d'un modèle d'ALM pour la compagnie d'assurance japonaise Yasuda basé sur la programmation stochastique multi-périodique (*multistage stochastic programming*). Selon ces auteurs, le modèle permet à Yasuda de combiner à la fois les outils sophistiqués utilisés en matière de prise de décision et les outils de gestion des risques. Ceci permettra d'avoir une analyse plus fiable et plus performante du positionnement de la société vis-à-vis des différents risques auxquels elle est exposée.

Les modèles de programmation stochastique les plus appliqués et étudiés sont les programmes avec recours (cf. Brandimarte [2006]). Dans le cas mono-périodique par exemple, la démarche générale de ce type de modèle suppose la prise de deux décisions : la première au début de la période et donc avant la réalisation de l'évènement aléatoire et la deuxième à la fin de la période et après la réalisation de l'évènement aléatoire. Autrement dit, le planificateur aura à prendre une décision dans la première étape compte tenu de l'information disponible à cette date, avant qu'un évènement aléatoire ait lieu. Une décision de recours peut ensuite être prise dans une deuxième étape afin de compenser les éventuelles conséquences négatives dues à une mauvaise décision initiale.

La politique optimale dans ce type de modèle permet de définir les décisions à l'étape initiale ainsi que les différents recours ultérieurs correspondant à chaque réalisation possible des éléments aléatoires. Ces résultats peuvent ensuite être étendus pour le cas de la programmation stochastique multi-périodique. La partie suivante illustre de façon détaillée les principes de la programmation stochastique « avec recours » dans le cadre d'un problème de planification de la production. Le même principe sera par la suite étendu au cadre financier.

2.3. Illustration de la programmation stochastique « avec recours » dans le cas de la planification de la production

Les problèmes rencontrés dans le domaine de la planification de la production constituent le contexte classique d'utilisation des techniques de

programmation stochastique (cf. Escudero et al. [1993]). Nous illustrons dans ce qui suit le cas mono-périodique (à deux étapes) à travers un exemple détaillé. Le cas multi-périodique peut être déduit par un déroulement de la logique sur plusieurs périodes.

La programmation stochastique avec recours dans le cas d'une seule période passe par deux étapes :

- dans la première étape, qui correspond au début de la période, il y aura une prise de décision sur un élément incertain ;
- dans la deuxième étape, qui correspond à la fin de la période, et après la réalisation de la variable aléatoire, des décisions supplémentaires peuvent être prises afin d'éviter que les contraintes soient non respectées.

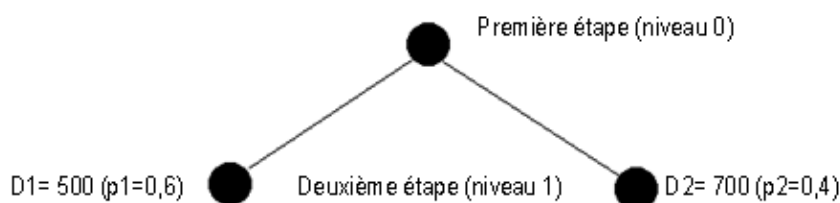
Nous illustrons ce simple modèle (avec recours et à deux étapes) dans le cadre de la mise en place d'un plan de production⁶. Supposons que nous ayons à décider de la quantité x_1 du produit X à produire. Chaque unité de X que nous produisons coûte 2 €. La quantité x_1 est supposée répondre à une demande des consommateurs déterminée à la fin de la période. La demande est donc stochastique avec une distribution de probabilité discrète : elle est égale à D_s avec une probabilité p_s ($s = 1, \dots, S$) et ainsi S demandes futures possibles.

Il est également supposé que la demande des consommateurs devra être satisfaite quel que soit la décision sur la quantité initialement produite (x_1). En cas d'une demande effective supérieure à cette quantité, une solution sera par exemple d'acheter la quantité manquante du produit X auprès d'un fournisseur externe mais avec un coût unitaire de 3 € (c'est-à-dire avec **recours** à une source additionnelle de l'offre avec un coût correspondant : coût du recours). La question posée est donc quelle quantité optimale x_1^* devons-nous produire avant de connaître la réelle demande des consommateurs ?

Ci-dessous, nous illustrons notre exemple avec : $S = 2$ et $D_1 = 500$, $p_1 = 0,6$; $D_2 = 700$, $p_2 = 0,4$.

6. En s'inspirant de Beasley [1990] et précisément de : <http://people.brunel.ac.uk/~mastjb/jeb/info.html>

Figure 12 – Illustration du problème de planification à deux étapes
(dans le cas d'une seule période)



Nous avons donc à décider de la quantité à produire à la date actuelle, avant que la demande ne soit connue. Si nous avons à produire 600 unités par exemple et que la demande effective sera de 500 nous n'aurons pas de problème. Cependant, si la demande est de 700 nous aurons besoin de recourir à l'achat de 100 unités supplémentaires.

Nous procédons de façon classique à la modélisation du problème, en définissant les variables. Soit $x_1 \geq 0$ le nombre d'unités à produire à l'instant de départ (à la première étape). Étant donné S scénarios, nous associons un scénario à chaque variable de recours à la deuxième étape, soit donc $y_{2s} \geq 0$ le nombre d'unités de X à acheter auprès de notre fournisseur externe à la seconde étape pour le scénario s , lorsque la réalisation de la demande est D_s ($s = 1, \dots, S$).

Ainsi, les contraintes qui garantissent la satisfaction de la demande seront :

$$x_1 + y_{2s} \geq D_s$$

avec : $s = 1, \dots, S$

Notons qu'il faut avoir ici l'égalité non stricte (\geq) car la quantité x_1 à produire pourra dépasser la demande effective des consommateurs. Si nous retenons $x_1 + y_{2s} = D_s$ avec l'hypothèse $y_{2s} \geq 0, \forall s = 1, \dots, S$, nous serons emmenés à supposer que : $x_1 \leq \min[D_s / s = 1, \dots, S]$ ce qui limite l'univers de décision.

Pour la fonction objectif, nous avons un coût de $2x_1$ supporté avec certitude et S coûts possibles coûtant chacun $3y_{2s}$ et se réalisant chacun avec une probabilité p_s . Notons qu'en pratique, un seul scénario sera observé effectivement mais qu'avant sa réalisation nous nous disposons de sa distribution de probabilité. Dans notre exemple, nous avons choisi

intuitivement la fonction objectif comme étant la minimisation du coût total

espéré qui est égal à : $2x_1 + \sum_{s=1}^S p_s (3y_{2s})$

Notre programme stochastique avec recours est :

$$\begin{array}{l}
 \text{Minimiser } 2x_1 + \sum_{s=1}^S p_s (3y_{2s}) \\
 \text{S/c : } x_1 + y_{2s} \geq D_s \quad s = 1, \dots, S \\
 \quad \quad \quad x_1 \geq 0 \\
 \quad \quad \quad y_{2s} \geq 0 \quad \quad s = 1, \dots, S
 \end{array}$$

Notons qu'il s'agit là d'un programme déterministe. Nous pouvons aussi exiger que x_1 et y_{2s} soient des entiers.

La résolution de ce programme stochastique nous indique :

- une valeur de x_1 qui est la quantité de X que nous allons produire maintenant,
- l'ensemble des valeurs possibles de y_{2s} .

Notons qu'une seule valeur y_{2s} parmi les S valeurs possibles sera importante lorsque la demande des consommateurs sera connue.

Pour résumer, dans un programme stochastique avec recours :

- nous prenons des décisions à la première étape, sachant seulement la distribution de la probabilité des éléments stochastiques ;
- nous avons recours, avec des coûts relatifs, à la deuxième étape à des variables permettant d'assurer la faisabilité des contraintes, ces variables seront différentes pour différentes réalisations des éléments stochastiques ;
- nous minimisons le coût total espéré: somme des coûts connus certains, issus des décisions de la première étape et des coûts espérés issus des décisions de la seconde étape.

Nous proposons dans ce qui suit d'appliquer les techniques de PS avec recours pour effectuer l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné. Cela sera développé de façon détaillée dans un cadre de gestion actif-passif (cf. la section 3 de ce chapitre). Dans

ce qui suit, une formulation mathématique de la PS avec recours sera présentée.

2.4. Formulation mathématique de la programmation stochastique avec recours

Nous partons dans un premier temps de l'étude des programmes stochastiques linéaires (cas de l'exemple développé dans la sous-section précédente) pour ensuite généraliser la démarche. Selon Birge et Louveaux [1997] la forme générale d'un programme linéaire déterministe est la suivante :

$$\begin{aligned} \min_x & c'x \\ \text{s.c.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec : x un vecteur de décision ($n \times 1$) et c , A et b sont des données connus de taille ($n \times 1$), ($m \times n$) et ($m \times 1$).

Cette formulation suppose que nous avons des informations précises et certaines sur les paramètres de la matrice A et des vecteurs c et b . L'incertitude existante dans le monde de la finance limite l'utilité de cette formulation et conduit à son insuffisance lors de la résolution des problèmes d'optimisation en général.

Le passage à un programme linéaire stochastique tient compte de cette limite et suppose que nous avons de l'aléa au niveau de certaines données ou de certains paramètres. La formulation du problème sera dans ce cas comme suit :

$$\begin{aligned} \min_x & c(\omega)'x \\ \text{s.c.} & A(\omega)x \geq b(\omega) \\ & x \geq 0 \quad \omega \in \Omega \end{aligned}$$

Il s'agit d'un programme linéaire paramétrisé par un vecteur d'évènements aléatoires ω (*a priori* continu). Trouver une solution x tel que les contraintes sont toujours satisfaites apparaît être impossible dans ce cas (x est une variable aléatoire fonction de ω) : c'est pour cette raison que les contraintes du programmes ne peuvent pas être présentées sous forme d'égalités. Une approche possible est de «relaxer» les contraintes en acceptant que dans certains cas elles ne seront pas respectées, nous cherchons dans ce cas à limiter la probabilité de ces dépassements. Ceci conduit aux modèles dits « *chance-constrained models* » tel que :

$$\begin{aligned}
 & \min_x c'x \\
 & \text{s.c. } Ax \geq b \\
 & \quad P\{G(\omega)x \geq h(\omega)\} \geq \alpha \\
 & \quad x \geq 0
 \end{aligned}$$

Nous séparerons par ce modèle les contraintes déterministes des contraintes avec incertitude. La facilité de résolution de ce type de problème dépend de la distribution des paramètres incertains : convexité ou non-convexité du modèle (le cas de la convexité rend plus facile la résolution). Une autre difficulté est potentiellement rencontrée avec ce type de modèle : même s'il permet la prise en compte de l'incertitude existante dans le processus de prise de décision, ce modèle n'est pas apte à modéliser des processus de décision dynamiques (où les décisions sont réajustées en fonction des nouvelles informations acquises avec le passage du temps).

Dans un processus de décision dynamique, nous commençons par prendre un ensemble de décisions à la date initiale, basées sur les informations disponibles, mais nous ajustons ensuite ces décisions lorsque l'incertitude a disparu. Cet ajustement conduit bien évidemment à des coûts additionnels, et l'objectif sera de prendre des décisions minimisant aussi bien les coûts immédiats que les coûts futurs espérés des éventuels ajustements. Cette approche nous conduit au principe des modèles de programmation stochastique avec recours.

Le problème d'optimisation sera formulé de façon à choisir les valeurs optimales de x et y . Notons qu'une propriété importante caractérise ce type de modèles : la décision prise à la première étape (x) est indépendante du scénario pouvant avoir lieu à la deuxième étape : il s'agit de la propriété de non-anticipation. La programmation stochastique avec recours et à deux étapes cherche en général à minimiser le coût de la décision à la première période ainsi que le coût espéré du recours effectué à la deuxième étape.

Nous supposons dans ce qui suit que ω est une variable aléatoire discrète pouvant avoir s valeurs possibles : $\omega_1, \dots, \omega_s$ avec les probabilités p_1, \dots, p_s (chaque valeur de ω_i , $i = 1, \dots, s$ correspond à un scénario).

La formulation d'un programme stochastique linéaire avec recours (à deux étapes) peut être présentée comme suit (cf. Brandimarte [2006]) :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x + E_\omega(Q(x, \omega)) \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} Q(x, \omega) &= \min_y (q(\omega)'y) \\ \text{s.c.} \quad & T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega) \\ & y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2} \end{aligned}$$

La fonction de recours $E_\omega(Q(x, \omega))$ est fournie par les quatre éléments suivants :

un ensemble Y qui décrit l'ensemble réalisable des actions de recours, par exemple $Y = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} / y \geq 0\}$;

q : un vecteur de coûts de recours ($n_2 \times 1$) ;

W : une matrice $s \times n_2$, elle est appelée la matrice de recours ;

T : une matrice $n_2 \times n$ reliant x à y , elle est appelée la matrice de technologie (nous rappelons que x est un vecteur de décision de taille $n \times 1$).

La formulation présentée ci-dessus est composée de deux programmes. Le premier programme minimise les coûts directs de la première étape, $c'x$, plus l'espérance du coût du recours appelée également fonction de recours, $E_\omega(Q(x, \omega))$. Cela tient compte évidemment de toutes les réalisations possibles de l'évènement aléatoire ω et du respect de la contrainte $Ax = b$. Le coût de recours $Q(x, \omega)$ dépend à la fois de la valeur x (la décision de la première étape) et de l'élément aléatoire ω . Le deuxième programme décrit comment choisir les décisions qui forment $y(\omega)$. L'objectif à ce stade est de minimiser le coût de recours $q(\omega)'y$ compte tenu d'une contrainte liée aux actions de recours elles-mêmes :

$$T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega).$$

Le cas général suppose que $Q(x, \omega) = \min_y (q(y, \omega))$. Il est souvent considéré que $q(y, \omega)$ est une fonction linéaire ayant pour forme $q(\omega)'y$ et que y est non-négatif (cf. Castro [2009]). Le cas de la non-linéarité de $q(y, \omega)$ peut être envisagé. De telles fonctions sont difficiles à traiter puisque cela implique l'intégration multidimensionnelle d'une fonction

définie implicitement à travers un problème d'optimisation. Même dans le cas où nous ne disposons pas d'une forme analytique simple de $q(y, \omega)$, le fait que dans la plupart des cas la fonction de recours est convexe rend possible l'évaluation (ou l'estimation) de ses valeurs et de trouver un sous-gradient à un point donné x (cf. Brandimarte [2006]).

Nous pouvons réécrire la formulation ci-dessus sous un seul et unique programme, appelé la forme étendue :

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c'x + E_{\omega}(Q(x, \omega)) \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & T(\omega)x + W(\omega)y(\omega) = h(\omega) \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

En supposant que pour chaque scénario il existe une action de recours correspondante ($y_i, i = 1, \dots, s$), le problème de programmation stochastique linéaire avec recours (à deux étapes) se présentera comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{x, y_i} \quad & c'x + \sum_{i=1}^s p_i q'(\omega_i) y_i \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & \left. \begin{aligned} T(\omega_i)x + W(\omega_i)y_i &= h(\omega_i) \\ y_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, s \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Après avoir étudié le cadre général de modélisation mathématique des PS avec recours, nous nous intéressons dans la sous-section suivante à la panoplie d'outils disponibles pour la résolution de tels problèmes.

2.5. Résolution des programmes stochastiques

Pour certains problèmes complexes de programmation stochastique, les méthodes classiques de résolution (tel que le simplexe et la méthode de point intérieur) s'avèrent parfois inefficaces pour trouver une solution exacte ou dans un temps de calcul raisonnable. Nous devons alors recourir à des algorithmes d'optimisation dédiés. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées suivant la nature et la complexité des problèmes rencontrés.

La méthode la plus répandue est l'algorithme de séparation et d'évaluation (« *Branch and Bound* », cf. Lawler et al. [1966]). Il s'agit d'une méthode d'énumération implicite des solutions. Lors de l'étape de séparation (« *branching* »), les solutions du problème sont énumérées. Cette

étape permet de diviser la région réalisable en sous-régions, pouvant à leur tour être divisées récursivement en d'autres sous-régions. Chaque sous-région possède un ensemble de solutions réalisables. Un arbre de solutions est ainsi construit, formant l'arbre de décision ou l'arbre de recherche.

L'étape d'évaluation (« *bounding* ») intervient pour éviter l'énumération systématique de toutes les solutions. Les solutions trouvées sont utilisées dans la phase d'évaluation pour définir des bornes supérieures et inférieures de la solution optimale. L'algorithme s'arrête généralement suivant une contrainte imposée sur le temps de calcul ou sur la précision de la solution. La plupart des outils commerciaux d'optimisation reposent sur cette méthode de résolution.

D'autres méthodes s'appuient sur l'algorithme de séparation et d'évaluation, mais permettent de restreindre astucieusement l'espace des solutions par l'introduction de contraintes supplémentaires au problème initial. Elles se réfèrent généralement aux méthodes de décomposition (« *branch and cut* »). La plus connue d'entre elles est la décomposition de Benders (Dogan et Goetschalckx [1999]). Cette méthode repose sur la division d'un problème en un problème maître et en un ensemble de sous-problèmes. Des solutions sont successivement obtenues du problème maître et corrigées, au besoin, par les variables duales calculées des sous-problèmes pour ainsi ajouter une coupe d'optimalité au problème maître. L'algorithme s'arrête sur la base d'un critère d'arrêt sur les temps de calcul ou sur la précision de la solution. Dans un contexte stochastique, son équivalent est désigné par la méthode de décomposition « *L-Shaped* » (*L-Shaped decomposition method*, cf. Santosa et Alexandrov [2005]).

Les méta-heuristiques sont abordées en dernier recours lorsque ces dernières méthodes de résolution se sont avérées vaines. Les méta-heuristiques sont des algorithmes itératifs qui progressent vers un optimum par échantillonnage d'une fonction objectif. Dans un espace de recherche, une ou plusieurs solutions sont évaluées et comparées afin d'éliminer les solutions de mauvaise qualité et ainsi arriver vers une solution optimale approximée. Une borne inférieure et supérieure de la solution est calculée dans cette démarche. L'algorithme prend fin lorsqu'un critère d'arrêt est rencontré, soit en fonction du temps de calcul ou encore de la précision obtenue des bornes calculées.

Parmi les méta-heuristiques les plus connues, notons les algorithmes évolutionnaires incluant les algorithmes génétiques (Alliot [1996]), le recuit simulé (Branke et al. [2008]) et la recherche avec tabous (Mazzola et Schantz [1996]). Une méthode a été proposée plus spécifiquement à l'égard

de modèles stochastiques avec recours faisant intervenir des facteurs aléatoires indépendants. Il s'agit de la méthode d'approximation de la moyenne d'échantillonnages, basée sur les techniques d'échantillonnage de *Monte Carlo* (Santosa et al. [2005]).

Cette méthode permet de contourner les difficultés d'évaluation des probabilités d'occurrence des scénarios. Des échantillons de scénarios sont définis hors de la procédure d'optimisation, suivant les fonctions de distribution considérées pour les facteurs aléatoires. Une ou des solutions sont d'abord obtenues d'échantillons faisant intervenir un nombre plus restreint de scénarios. La réaction des solutions face aux facteurs aléatoires est ensuite étudiée avec un échantillon de plus grande taille.

Pour les deux étapes, la partie des coûts reliée aux décisions sujettes aux facteurs aléatoires se calcule par la moyenne des coûts pour chaque scénario. La méthode d'approximation de la moyenne d'échantillonnages incorpore une procédure d'analyse de convergence. Une borne inférieure et borne supérieure est ainsi calculée à l'égard de la solution optimale du problème (Shapiro et al. [2003]). Ces bornes servent à sélectionner la meilleure solution et évaluer la qualité du résultat.

La plupart des méthodes exposées ci-dessus, allant de l'algorithme de séparation et évaluation jusqu'à la méthode d'approximation de la moyenne d'échantillonnages, sont implémentées sous forme de solveurs et utilisées dans des outils plus globaux d'optimisation numérique (cf. Brandimarte [2006] et Klassen [1997]). Cela concerne également le solveur que nous allons utiliser dans la section suivante, dédiée à l'exploitation des techniques de PS dans le cadre de l'allocation stratégique d'actifs d'un régime de retraite typique.

3. Une approche d'ALM par la discrétisation des scénarios économiques

Il s'agit ici de proposer notre conception pour l'adaptation des techniques de programmation stochastique, en particulier celles avec recours, dans un contexte d'allocation stratégique d'actifs et d'ALM d'un régime de retraite partiellement provisionné. Nous décrivons, au cours de la même proposition, une méthodologie de génération de scénarios économiques que nous appelons méthodologie « des quantiles de référence » (cf. Faleh [2011]).

Tout au long de l'application numérique développée ci-après, nous comparons des résultats relatifs aux deux stratégies d'allocation d'actifs : celle basée sur la stratégie *Fixed-Mix* et celle basée sur les techniques de programmation stochastique. Nous testons également la sensibilité de

l'approche développée d'ALM par rapport au changement de certains de ses paramètres, toutes choses étant égales par ailleurs.

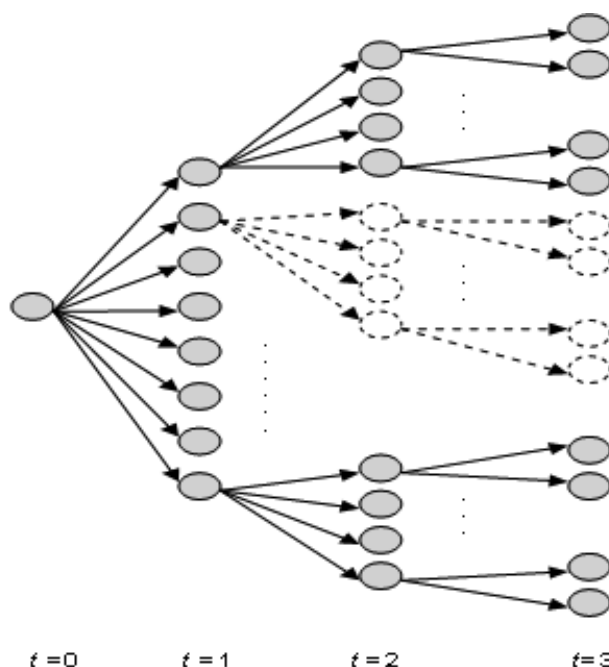
3.1. Méthode des quantiles de référence pour le GSE

L'utilisation des techniques de programmation stochastique nécessite de représenter les incertitudes futures en utilisant une structure arborescente qui illustre de façon intuitive l'aléa. Au-delà de cette contrainte d'ordre technique, la structure arborescente a le mérite de synthétiser le problème de projection des scénarios économiques et financiers et de simplifier son interprétation par le décideur : il s'agit d'une représentation plus simplifiée du problème initial où la projection est effectuée avec une structure linéaire. Plus précisément, nous réduisons la dimension du problème en passant d'une structure linéaire sous forme de matrice⁶ ($n \times m$) à une structure arborescente avec un nombre plus petit de nœuds. Un autre atout consiste dans l'aspect conditionnel qui caractérise le lien entre les nœuds-enfants de la structure arborescente à une date donnée et les nœuds de la date précédente : cela permet la prise en compte, dans le temps, des relations entre les différentes valeurs projetées.

Pour rappel, un exemple de cette structure est présenté dans la figure 13. Dans la figure 13, la structure de l'arbre comporte 64 scénarios. Nous retenons 8 réalisations possibles durant la première période. À partir de chacune de ces réalisations, nous déterminons 4 réalisations durant la deuxième période. Chacune d'entre elle est ainsi appelée « réalisation conditionnelle » car elle est fonction de la valeur dans le nœud antécédent. La troisième période est caractérisée par la génération de 2 réalisations à partir de celles obtenues à la fin de la deuxième période. Ceci donne un total de $8 \times 4 \times 2 = 64$ scénarios (ou trajectoires).

6. n pour le nombre de simulation et m pour le nombre de pas (fonction de l'horizon de projection et du pas choisie).

Figure 13 – Exemple de la structure schématique d'arborescence pour les trajectoires simulées



Dans cette étude sur l'application des techniques de la programmation stochastique, le générateur d'arbre se base sur une méthodologie que nous appellerons méthodologie « des quantiles de référence ». Cette dernière repose sur deux éléments clés : le choix d'une variable, parmi celles modélisées, comme variable de référence (ex. les rendements des actions) et le passage de la structure linéaire de projection à une structure arborescente (pour chacune des variables modélisées) en se basant sur un certain nombre de quantiles de la variable de référence. La méthodologie « des quantiles de référence » passe par les étapes suivantes :

- Dans un premier temps, nous générons un nombre élevé de scénarios pour chacune des variables modélisées selon le principe de la structure linéaire et compte tenu de la période de projection (ex. 1 000 trajectoires possibles sur les 20 prochaines années avec un pas annuel).
- Ensuite, nous sélectionnons une classe d'actifs ou une variable donnée (ex. les rendements des actions) qui sera appelée « variable de référence ».
- Puis, à chaque niveau de l'arbre (date $t = 1$ par exemple) associée à la variable de référence (rendement des actions), nous retiendrons un nombre prédéfini de quantiles « quantiles de référence » en fonction

de la structure de l'arbre, en particulier en fonction du nombre des nœuds prévu à cette date (ex. les trois quantiles 99,5 %, 50 % et 0,5 % des rendements des actions à la date $t = 1$ si le nombre de nœud à cette date est prévu être égal à 3).

Par ailleurs, nous notons que si le nombre d'années considérées entre deux niveaux de l'arbre est supérieur à 1, le générateur de l'arbre déduit le rendement simulé sur la période considérée (ex. 5 ans) à partir du générateur linéaire mentionné ci-dessus selon la formule suivante :

$$R_{arbre} = \prod_{i=1}^H (1 + R_i)$$

où :

H est la période considérée dans l'arbre (ex. 5 ans),

R_{arbre} est le rendement sur la période H ,

R_i est le rendement annuel simulé dans la structure linéaire.

- Les projections sous forme d'arbres des autres variables (en dehors de la variable de référence) sont ensuite déterminées : en chaque nœud de ces arbres, nous donnons à ces variables la valeur qui correspond à la variable de référence, sur la base des scénarios simulés en amont avec la structure linéaire de projection. Cette démarche a le mérite de conserver la structure de dépendance des scénarios générés initialement. Nous obtenons ainsi, pour chacune des variables modélisées (les rendements des obligations, l'inflation, etc.) son propre arbre de scénarios.
- Les flux de passif de départ, exprimés en euros désinflatés, seront également inflatés, compte tenu de l'arbre obtenu pour l'inflation : ainsi ces flux inflatés seront également représentés sous forme d'arbre.

Ces approches s'insèrent dans le cadre de la recherche d'une vision à la fois simplifiée, réelle et dynamique des stratégies possibles pour l'allocation stratégique d'actifs, en présence de contraintes d'ALM. La méthodologie des quantiles de référence tient compte des hypothèses de distribution des différentes variables projetées : elle garde la structure de risque initiale en retenant les quantiles « approximatifs » de cette distribution. Il s'agit d'une stratégie à la fois utile et cohérente. Sa mise en œuvre est simple et elle peut être adaptée pour étudier d'autres problématiques.

3.2. Modèle d'optimisation basé sur la programmation stochastique

Par analogie avec le principe de la programmation stochastique avec recours (développé dans les sous-sections précédentes), nous pouvons considérer l'action de recours dans un modèle d'ALM d'un régime de retraite provisionné comme la possibilité de liquider une partie du portefeuille de marché compte tenu de la réalisation de l'évènement aléatoire (ω) qui affectera dans notre cas aussi bien l'actif que le passif du régime, spécificité issue du contexte d'ALM (ex. performance des actions côté actif, inflation constatée des salaires côté passif). La décision de début de période concerne donc la répartition des poids des différents actifs du portefeuille de marché (x). Elle va être ajustée à la fin de la même période en fonction des réalisations de l'évènement aléatoire considéré. Le cadre d'une allocation dynamique d'actifs est ainsi vérifié.

Pour le modèle d'optimisation, nous présentons dans un premier temps un cadre général et typique de problème d'optimisation que différents types de régimes de retraite peuvent rencontrer, notamment ceux partiellement provisionnés. Ce modèle sera par la suite simplifié au niveau de l'implémentation. Le but est ici de proposer une approche générale permettant la mise en place d'un modèle d'ALM dynamique basé sur la programmation stochastique multi-périodiques.

La programmation stochastique est caractérisée par l'utilisation d'une fonction objectif qui devra être optimisée et d'un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations linéaires ou non linéaires et qui doivent être respectées. La fonction objectif est introduite afin qu'elle illustre la fonction d'utilité du décideur. La satisfaction des contraintes pourrait être obtenue par une multitude de solutions. La PS cherche à déterminer la meilleure solution parmi celles qui satisfont les contraintes. C'est le cas d'une analyse type ALM où la satisfaction de l'adossement des flux de passifs par les flux d'actifs peut être faite avec différentes allocations de portefeuille. La formulation de ce problème à travers la PS, permet d'aboutir aux décisions d'allocations d'actifs optimales dans le cadre de l'ALM.

Le fonctionnement financier du régime (ou du fonds) de retraite, objet de cette étude, peut être présenté comme suit : les flux de cotisations permettent de régler les flux de prestations. Le surplus, le cas échéant, permet d'alimenter une réserve destinée à régler une partie des prestations futures. Cette même réserve peut se voir prélever, le cas échéant, le solde technique débiteur (cotisations insuffisantes pour régler les prestations). Entre temps, la réserve est placée sur le marché financier et répartie entre différentes classes d'actifs.

De façon générale, nous considérons le cas d'un fonds de retraite qui possède à la date initiale t_0 une réserve W_0 et qui devra faire face à une série de flux F_t ($t=1, \dots, T$) sur les T prochaines années. F_t est positive dans le cas où les cotisations sont supérieures aux prestations et elle est négative dans le cas contraire. Nous supposons que le dernier flux F_T est négatif et qu'il représente l'engagement final du fonds vis-à-vis de ses adhérents.

Nous nous intéressons à la stratégie d'investissement qui permet de parvenir au moins à payer ces différents flux, en particulier le dernier F_T (ou L). L'idéal serait, bien sûr, d'avoir un montant de réserve finale supérieur à F_T . Ceci étant dit, la prise en compte de l'aversion au risque est elle aussi nécessaire puisque nous pouvons se retrouver avec une réserve finale W_T inférieure à F_T .

La fonction objectif considérée est une fonction d'utilité linéaire : le fonds de retraite attribue un malus q pour chaque unité de déficit (écart négatif entre le montant de la réserve finale W_T^s et l'engagement final F_T^s pour le scénario s) et un bonus r pour chaque unité de surplus. Pour un scénario s avec un écart positif entre W_T^s et F_T^s , l'utilité totale du fonds de retraite sera augmentée de $r \cdot (W_T^s - F_T^s) \cdot p^s$ (avec p^s la probabilité associée au scénario s). Pour un scénario s avec un écart négatif entre W_T^s et F_T^s , l'utilité totale du fonds de retraite sera diminuée de $q \cdot (W_T^s - F_T^s) \cdot p^s$. L'utilité totale du fonds sera supposée être égale à la somme de ces quantités calculées pour tous les scénarios projetés.

Côté contraintes, différents aspects peuvent être considérés. La contrainte principale sera appelée la contrainte de probabilité de ruine : il s'agit d'assurer que la stratégie optimale d'allocation d'actifs permet d'avoir un W_T^s supérieur à F_T^s dans $(1 - p_{crt})$ fois du nombre total de scénarios. Plusieurs autres contraintes peuvent être considérées à savoir :

- Contraintes budgétaire : le montant investi à chaque instant t dans l'actif j doit être égal au montant investi dans le même actif à $t - 1$ et capitalisé entre ces deux dates augmenté (diminué) du montant des achats (ventes) dudit actif effectués à la date t .
- Contraintes de rebalancement : les flux encaissés à la date t en provenance de la vente de l'actif j ou d'un solde technique positif (cotisations > prestations) constituent l'unique source de finan-

cement pour l'achat dudit actif à la même date t (y compris les différents frais de transaction).

- Contraintes de portefeuille : le montant investi dans l'actif j est borné à chaque instant t entre deux montants proportionnels à la valeur de la réserve observée à la même date.
- Contraintes de transaction : les montants des achats et des ventes de l'actif j sont plafonnés à chaque instant t en fonction de la valeur de la réserve observée à la même date.

Le modèle général d'optimisation considéré peut ainsi être présenté comme suit :

Paramètres Déterministes :

h_j^0 :	Montant initial investi dans l'actif j
W_0 :	Réserve initiale totale
c_j^P :	Coût de transaction pour l'achat de l'actif j
c_j^S :	Coût de transaction pour la vente de l'actif j
l_j :	Poids inférieur du montant investi dans l'actif j (exprimée en pourcentage de la réserve totale)
u_j :	Poids supérieur du montant investi dans l'actif j (exprimée en pourcentage de la réserve totale)
b_j^P :	Poids maximal du montant d'achat périodique de l'actif j (exprimée en pourcentage de la réserve totale)
b_j^S :	Poids maximal du montant de vente périodique de l'actif j (exprimée en pourcentage de la réserve totale)
τ_t :	Durée de la période $[t-1, t]$ en nombre d'années
$\text{card}(S)$:	Nombre total de scénarios (nombre de branches à la date finale T)
p^S :	Égale à $1/\text{card}(S)$ (hypothèse approximative de la probabilité de chaque scénario)
q :	Bonus de chaque unité de surplus (rémunération)
r :	Malus de chaque unité de déficit (pénalité)

Paramètres Stochastiques :

- $R_{t,j}$: Rendement de l'actif j sur la période $[t-1, t]$,
 F_t : Flux de trésorerie de la période $[t-1, t]$
 L_s : Engagement final cible (à la date T) dans le cas du scénario s

Variables de décision :

- $h_{t,j}$: Montant investi dans l'actif j entre la date t et $t+1$
 $p_{t,j}$: Montant d'achat de l'actif j à la date t
 $s_{t,j}$: Montant de vente de l'actif j à la date t
 W_t : Réserve totale à la date t
 w_+^s : Surplus (écart positif entre la réserve finale et l'engagement final L_s pour le scénario s)
 w_-^s : Déficit (écart négatif entre la réserve finale et l'engagement final L_s pour le scénario s)
 $\text{card}(W_-)$: Nombre total des scénarios où l'écart entre la réserve finale et l'engagement final est négatif (nombre de scénario où $w_-^s > 0$)
 p_{ctrt} : Probabilité maximale acceptée d'avoir des scénarios où la réserve finale est inférieure à l'engagement final ($w_-^s > 0$). Autrement dit, le rapport $\text{card}(W_-)/\text{card}(S)$ doit être inférieur à p_{ctrt} .

Objectif :

$$\text{Maximiser } \sum_{s \in S} p^s (qw_+^s - rw_-^s)$$

Contraintes :*Contraintes budgétaires*

$$\sum_{j \in J} h_{0,j} = W_0$$

$$h_{0,j} = h_j^0 + p_{0,j} - s_{0,j}$$

$$h_{t,j} = R_{t,j} h_{t-1,j} + p_{t,j} - s_{t,j}$$

Contraintes de rebalancement

$$\sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{0,j} = \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{0,j}$$

$$\sum_{j \in J} (1 + c_j^p) p_{t,j} = \sum_{j \in J} (1 - c_j^s) s_{t,j} + F_t$$

Contraintes de portefeuille

$$l_j W_t \leq h_{t,j} \leq u_j W_t \quad (\text{Avec : } \sum_j h_{t,j} = W_t)$$

Contraintes de transaction

$$p_{t,j} \leq \tau_t b_j^p W_t$$

$$s_{t,j} \leq \tau_t b_j^s W_t$$

Contraintes d'équilibre final

$$W_T^s = \sum_{j \in J} R_{T,j} h_{T-1,j} = L_s + w_+^s - w_-^s$$

Contraintes de probabilité de ruine

$$\text{card}(W_-) / \text{card}(S) \leq p_{\text{crt}}$$

$$\forall t = 1, \dots, T-1, j \in J$$

Pour le modèle d'optimisation, objet de l'implémentation, certains paramètres seront considérés comme nuls afin de simplifier la mise en

place, en particulier les paramètres relatifs aux contraintes de transaction, de rebalancement et de portefeuille. Autrement dit, nous supposons l'absence de frais de transaction, des contraintes de rebalancement et de portefeuille définies ci-dessus.

Concernant la mise en place de la méthodologie des « quantiles de référence », nous avons supposé que le nombre minimum de quantiles par niveau (ou date) sera de deux : 97,5 % et 2,5 %. L'ensemble des quantiles supplémentaires sera choisi de façon à ce que les distances, en termes de niveaux de probabilité cumulée, entre les différents quantiles successifs soient les mêmes. Autrement dit, si $n_q = 5$ désigne le nombre de quantiles retenus à une date donnée (y compris celui du 97,5 % et celui du 2,5 %) alors cette distance est égale à :

$$\frac{97,5 - 2,5}{n_q - 1} = \frac{97,5 - 2,5}{5 - 1} = 23,75$$

ce qui revient à considérer successivement les quantiles avec les niveaux de confiance suivants :

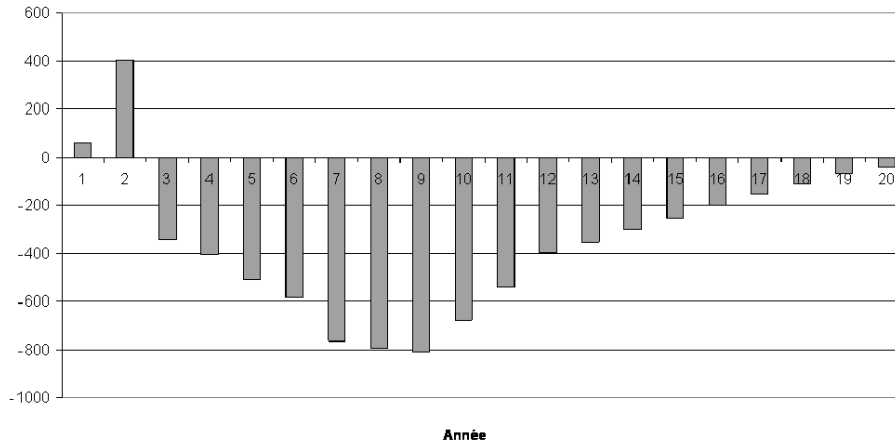
2,5 %, 26,25 % (= 2,5 % + 23,75 %),

50 % (= 26,25 % + 23,75 %),

73,75 % (= 50 % + 23,75 %), 97,5 %.

Nous considérons aussi qu'à chaque date, les différents quantiles de l'arbre auront la même probabilité d'occurrence et ainsi un identique p^s pour tous les scénarios : $p^s = 1 / \text{card}(S)$. Cela garantit la convergence vers la distribution réelle de la variable modélisée du moment où les niveaux de probabilité cumulée des quantiles sont équidistants (Cf. Faleh et al. [2012]).

Dans l'implémentation numérique, la génération des différents arbres est effectuée via le logiciel MATLAB et compte tenu d'un même GSE à structure linéaire identique, en termes de modèles et de paramètres, à celui retenu précédemment. L'horizon des projections (et donc des différents flux de passif) est de 20 ans. La figure ci-dessous représente la série des flux de passif considérée :

Figure 14 – Flux de passif (déinflatés) sur 20 ans

Parmi les *inputs* supplémentaires de MATLAB nous choisissons, de façon arbitraire, les paramètres standards suivants :

Tableau 9 – Paramètres standards dans le modèle d'optimisation stochastique multi-périodique

Structure des nœuds de l'arbre	[1 5 4 4]
Structure des périodes de l'arbre	{1 4 15}
P_{crit}	20 %
q	2
r	1
W_0	10 000
Variable de référence	Rdt des actions

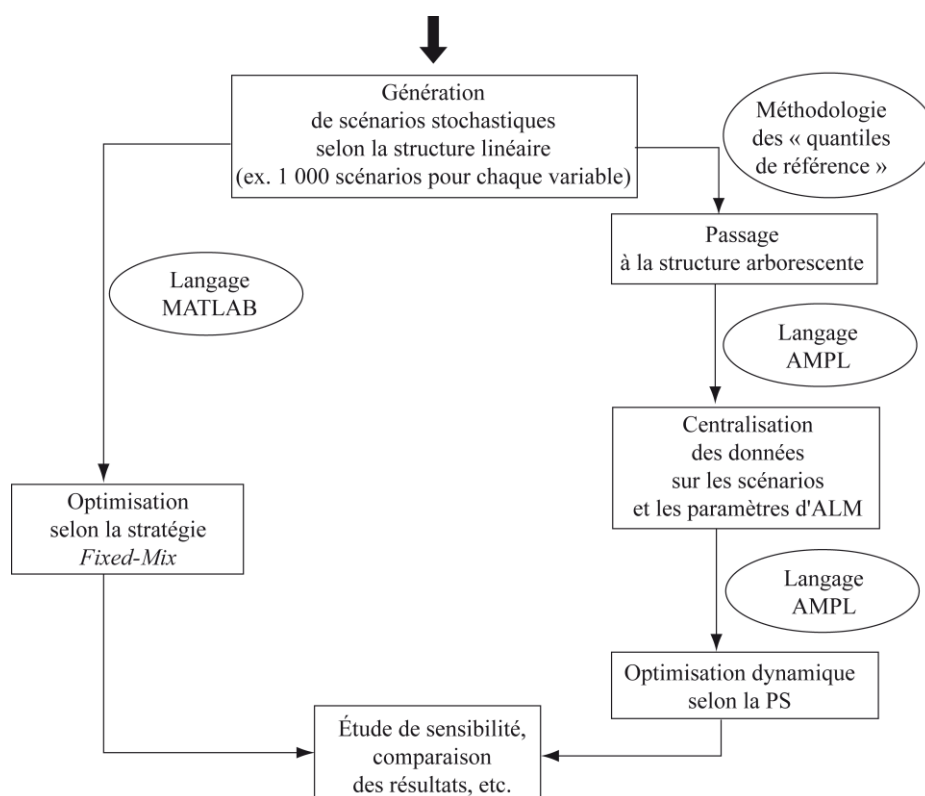
Nous rappelons que la structure des nœuds de l'arbre correspond au vecteur du nombre de nœuds-enfants à chacune des quatre niveaux considérés dans l'exemple ($[n_{t_0} n_{t_1} n_{t_2} n_{t_3}]$). La structure des périodes de l'arbre correspond au vecteur des horizons de projection supposés entre deux niveaux ($\{H_1 H_2 H_3\}$).

L'implémentation du modèle d'optimisation stochastique multi-périodique est quant à elle effectuée via le langage de modélisation AMPL

(cf. Fourer et al. [2002]). Ce dernier est adapté pour le type de problématique basé sur la programmation stochastique avec recours : après lui avoir précisé les différents paramètres (les paramètres déterministes, les paramètres stochastiques, les variables de décisions, l'arbre des scénarios, etc.), l'optimisation est effectuée avec un solveur dédié à la PS avec recours (cf. Brandimarte [2006]).

Parallèlement, le problème d'optimisation sera mis en place dans le cadre de la stratégie *Fixed-Mix* en gardant le même GSE et les mêmes paramètres que ceux utilisés pour la stratégie avec programmation stochastique (cf. figure 15). Le même flux de passif sera également considéré dans les deux stratégies. Le nombre de scénarios projetés dans le cas de la stratégie *Fixed-Mix* est égal à 1 000. Le logigramme (présenté dans la figure 15) synthétise la démarche générale adoptée. Dans ce schéma, le cercle représente la méthodologie ou le logiciel utilisé. Le rectangle représente, quant à lui, une étape dans l'étude du modèle d'ALM développé.

Figure 15 – Logigramme des traitements effectués dans le cadre de l'étude du modèle d'ALM développé



3.3. Discussion des résultats

Nous étudierons ici l'effet du changement des « quantiles de référence » sur l'allocation finale, toutes choses étant égales par ailleurs. De même, la structure des nœuds de cet arbre sera variable : différents tests seront effectués pour mettre en évidence l'impact du changement de cette structure sur les résultats finaux de l'allocation. Un test supplémentaire par rapport au nombre d'années entre deux niveaux de l'arbre est mis en évidence : il s'agit du test de changement de la structure des périodes de l'arbre, toutes choses étant égales par ailleurs.

Le tableau de la structure des nœuds de l'arbre (cf. tableau 10) indique les poids optimaux⁷ du portefeuille au niveau $t = 0$ pour différentes structures de nœuds possibles ([1 5 3 3], [1 7 3 3], [1 9 3 3], [1 3 4 4], [1 4 4 4] et [1 5 4 4])⁸, toutes choses étant égales par ailleurs.

Il s'agit de l'allocation initiale recommandée, début 2014, pour chacune de ces structures. Il est supposé que les poids vont être ajustés aux différents niveaux ultérieurs de l'arbre compte tenu des évolutions possibles des variables modélisées. Cela donne lieu en fait non pas à une unique allocation stratégique vers laquelle nous convergions de façon périodique et systématique via un processus de rebalancement (cas de la stratégie *Fixed-Mix*) mais plutôt à un « chemin » optimal d'allocations avec comme point de départ les allocations du tableau 10. Un exemple du « chemin » optimal d'allocations obtenu sur toute la période de projection (tout au long de l'arbre) est donné dans les graphiques 16 et 17 respectivement pour les deux structures [1 5 4 4] et [1 5 3 3].

Le tableau 10 présente également la valeur de la fonction objectif et la probabilité de ruine estimées pour chacune de ces solutions. Quant à la « réserve initiale minimale », elle correspond à W_0 minimale à partir de laquelle il est possible d'avoir au moins un « chemin » d'allocation résolvant le problème d'optimisation. Nous notons que plus la réserve initiale est élevée, plus la probabilité de ne pas couvrir l'engagement final cible L_G est faible et implicitement l'effet de la pénalité devient négligeable. Le même tableau présente les valeurs de ces différents indicateurs obtenus dans le cas de la stratégie *Fixed-Mix*. Il est intéressant d'étudier la convergence entre les deux stratégies lorsque nous augmentons sensiblement le nombre de scénarios mis en jeu dans l'arbre.

7. Ces valeurs sont arrondies (avec un pas de 5 %) pour l'ensemble des tableaux de cette sous-section.

8. Rappel : Nous adoptons la convention d'écriture suivante : [1 5 3 3] signifie par exemple que le nœud parent initial a 5 nœuds enfants, lesquels ont chacun 3 nœuds enfants, puis chacun d'entre eux encore 3 nœuds enfants.

Nous constatons dans notre exemple que, même si l'allocation initiale recommandée est peu sensible au choix de la structure (environ 40 % d'actions), les valeurs estimées de la fonction objectif et de la probabilité de ruine diffèrent nettement selon la structure des nœuds, en particulier pour le cas des structures qui supposent principalement un découpage en 3 quantiles (à savoir [1 5 3 3], [1 7 3 3], [1 9 3 3]) ainsi que pour celles basées essentiellement sur une projection en 4 quantiles (à savoir [1 3 4 4], [1 4 4 4], [1 5 4 4]). Le premier groupe permet d'avoir des valeurs de la fonction objectif relativement plus élevées avec des niveaux de probabilité de ruine également plus élevés. Autrement dit, pour pouvoir obtenir un meilleur rendement l'investisseur doit aussi assumer plus de risque : nous retrouvons ainsi le cadre de la théorie d'efficacité de Markowitz.

Incidemment, nous remarquons que l'effet de la structure des nœuds sur la valeur du couple d'indicateurs (objectif/probabilité de ruine) est très significatif, voire même plus important que l'effet du nombre de scénarios ou du nombre total de nœuds dans l'arbre. En fait, l'augmentation du nombre de scénarios (en passant par exemple de 45 scénarios avec la structure [1 5 3 3] à 80 scénarios avec la structure [1 5 4 4]) ne donne pas forcément lieu à une convergence de la valeur de la fonction objectif vers celle de la stratégie *Fixed-Mix* (21 211 euros), mais au contraire nous constatons la baisse de la valeur de la fonction objectif passant de 18 884 à 16 069, le tout accompagné d'un profil de risque de moins au moins élevé (en particulier, le passage de la structure [1 7 3 3] à la structure [1 5 4 4] induit la baisse du niveau de risque de 19 % à 11 %).

Par ailleurs, plus le nombre de scénarios augmente dans l'arbre, plus le besoin initial en réserve diminue et converge vers celui exprimé dans le modèle *Fixed-Mix*. Par exemple, dans le cas de la structure [1 5 3 3], qui correspond au nombre de scénarios le moins élevé, l'exigence en capital initial est également la plus élevée (8 000). À l'inverse, la structure [1 5 4 4] qui comporte pratiquement le plus grand nombre de scénarios possède, quant à elle, la valeur de la réserve initiale minimale la plus faible. On le voit, le rôle du nombre de scénarios intervient plus au niveau de la réserve initiale minimale exigée qu'au niveau de la convergence vers la solution optimale absolue.

Tableau 10 – Allocations optimales et leurs caractéristiques
en fonction des structures de l'arbre retenues et des stratégies retenues
(avec la structure des périodes {1 4 15}
et les actions comme variable de référence)

	Structure des nœuds de l'arbre						Fixed Mix
	[1 5 3 3]	[1 7 3 3]	[1 9 3 3]	[1 3 4 4]	[1 4 4 4]	[1 5 4 4]	
Monétaire	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%
Obligation	50%	50%	50%	50%	50%	50%	40%
Action	40%	40%	40%	40%	40%	40%	50%
Fonction objectif	18 884	18 636	18 782	16 062	15 522	16 069	21 211
Probabilité de ruine	13,30%	19,00%	18,50%	12,50%	11,00%	11,25%	13,70%
Réserve initiale minimale	8000	8000	6000	6000	4000	4000	4000
Nombre de scénarios	45	63	81	49	64	80	1000
Nombre total de nœuds	65	91	117	63	84	105	-

Le tableau 11, relatif à la structure des périodes de l'arbre, montre que les résultats obtenus via la programmation stochastique sont très sensibles au choix de la structure retenue pour les durées des périodes (ou précisément les sous-périodes sur la durée totale de 20 ans), cela en supposant un même flux de passif de départ. Plus précisément, nous procédons en agrégeant sur 20 ans un même flux de passif via différentes structures de période, à savoir les suivantes : {1 4 15}, {1 1 18}, {1 9 10}, {6 7 7}, {10 9 1}, {15 4 1} et {18 1 1}⁹.

Nous constatons à ce niveau que les valeurs pour la fonction objectif et pour la probabilité de ruine diffèrent sensiblement selon que l'agrégation est essentiellement effectuée sur les 15 dernières années (par exemple {1 4 15} et {1 1 18}) ou sur les 15 premières années (par exemple {15 4 1} et {18 1 1}). L'exposition au risque action peut également fluctuer significativement au niveau de l'allocation initiale recommandée. Bien entendu, l'ampleur et le sens de cet impact sur les différents indicateurs (valeur de la fonction objectif, poids optimaux, etc.) ne peut pas être généralisé puisque cela dépend de la série de flux de passif considérée. Afin de neutraliser cet impact, une première idée serait de choisir des sous-périodes de durées quasi identiques les unes aux autres (par exemple {6 7 7}). La réserve initiale minimale nécessaire pour avoir une solution au problème reste, quant à elle, quasi constante, quelle que soit la structure des périodes retenue.

9. Rappel : Nous adoptons la convention d'écriture suivante : {1 4 15} signifie par exemple les 3 sous-périodes consécutives 1 ans, 4 ans et 15 ans.

Le tableau 12 étudie la sensibilité de l'allocation optimale par rapport au choix effectué pour la variable de référence (ex. rendement des actions) dans le cadre de la méthodologie proposée (méthodologie « des quantiles de référence »), toutes choses étant égales par ailleurs. L'effet de ce choix sur les valeurs de la fonction objectif, la probabilité de ruine ainsi que la réserve initiale minimale est étudié.

Notons que le changement de la variable de référence a un effet moindre sur l'allocation optimale initiale à t_0 que le changement de la structure des périodes de l'arbre (cf. tableau 11). De même, nous remarquons une baisse significative de la valeur de la fonction objectif, accompagnée par une aversion au risque plus importante lorsque l'on passe des actions comme variable de référence au monétaire : la valeur de la fonction objectif pour la solution optimale passe ainsi de 16 069 dans le cas des actions à 11 058 dans le cas du monétaire tandis que la probabilité de ruine estimée passe respectivement de 11 % à 0 %, indiquant un degré élevé de prudence dans le chemin d'allocations recommandé dans le cas où la variable de référence est le monétaire.

Cela montre l'importance significative du choix de la variable de référence à ce niveau. La réserve initiale minimale nécessaire pour avoir une solution au problème reste, quant à elle, quasi constante quel que soit le quantile de référence retenu.

Tableau 11 – *Allocations optimales et leurs caractéristiques en fonction des horizons retenus (avec la structure des nœuds [1 5 4 4] et les actions comme variable de référence)*

	Structure des périodes de l'arbre						
	{1 4 15}	{1 1 18}	{1 9 10}	{6 7 7}	{10 9 1}	{15 4 1}	{18 1 1}
Monétaire	10%	10%	85%	0%	85%	0%	0%
Obligation	50%	50%	0%	65%	15%	65%	65%
Action	40%	40%	15%	35%	0%	35%	35%
Fonction objectif	16 069	16 431	15 639	16 023	12 003	16 318	15 624
Probabilité de ruine	11,25%	15,00%	17,50%	12,50%	5,00%	5,00%	11,00%
Réserve initiale minimale	4000	4000	4000	4000	4000	3000	4000

Tableau 12 – Allocations optimales et leurs caractéristiques
en fonction des quantiles de référence retenus
(avec la structure des nœuds [1 5 4 4] et la structure des périodes {1 4 15})

	Variables de référence			
	Action	Monétaire	Obligation	Inflation
Monétaire	10%	75%	10%	10%
Obligation	50%	0%	50%	50%
Action	40%	25%	40%	40%
Fonction objectif	16 069	11 058	12 978	10 913
Probabilité de ruine	11%	0%	0%	0%
Réserve initiale minimale	4000	3000	4000	4000

Le tableau suivant résume nos différentes constatations sur l'effet du changement de certains facteurs d'entrée (*input*) sur les états de sortie (*output*) du modèle d'ALM développé.

Tableau 13 – Synthèse de l'impact constaté de certains facteurs
sur les résultats obtenus par le modèle d'ALM proposé⁹

<i>Facteur</i> \ <i>Output</i>	Fonction objectif/ probabilité de ruine	Réserve initiale minimale	Allocation initiale optimale
Structure des nœuds	(+)	(+)	(-)
Structure des périodes	(+)	(-)	(+)
Variable de référence	(+)	(-)	(+)
Nombre de scénarios	(-)	(+)	(-)

9. (+) si le facteur a un impact significatif sur la valeur de l'indicateur de sortie (*output*), (-) si le facteur n'a pas d'impact significatif sur la valeur de l'indicateur de sortie (*output*).

Concernant les deux graphiques 16 et 17, et pour mieux les comprendre, nous décrivons dans un premier temps le graphique 16 (ayant la structure des nœuds [1 5 4 4] et la structure des périodes {1 4 15}). Chaque rectangle dans ce graphique représente l'allocation optimale, selon le modèle proposé d'ALM, à l'instant indiqué et dans le cas du scénario de marché correspondant : c'est pour cette raison que l'arbre des allocations est identique, dans son schéma de présentation, à l'arbre des scénarios. La différence est que l'arbre des allocations indique, à chaque nœud, l'allocation prévue être optimale plutôt que la performance anticipée (ou projetée) du marché.

Par exemple, l'allocation optimale à l'instant t_0 est indiquée par le vecteur (10 %, 50 %, 40 %) dont les éléments sont les poids respectifs du monétaire, des obligations et des actions. n_{t_0} correspond au nombre de nœuds dans l'arbre à l'instant t_0 . En passant à l'instant t_1 , autrement dit après une année selon la structure des périodes considérée, nous avons cinq scénarios possibles de marché ($n_{t_1} = 5$). Pour chacun de ces scénarios, le modèle basé sur la programmation stochastique indique l'allocation optimale au début de la sous période suivante : par exemple pour le scénario de marché le plus défavorable entre t_0 et t_1 (représenté par le rectangle tout à fait en bas dans le graphique) l'allocation optimale au début de la deuxième sous-période est 100 % obligation. La même lecture peut être appliquée aux instants ultérieurs de prise de décision (notamment t_2) ainsi qu'au graphique 17.

Les graphiques 16 et 17 illustrent deux « chemins » optimaux d'allocations proposées pour une même structure de période (celle du {1 4 15}) et pour deux structures de nœuds différentes (respectivement [1 5 4 4] et [1 5 3 3]). Nous constatons une nette différence entre les deux chemins surtout au niveau des 15 dernières années, ce qui est dû au fait que la structure des nœuds diverge sur cette période. La dynamique des poids est mise en évidence via ces deux graphiques : le processus suppose une adaptation « optimale » de la composition du portefeuille compte tenu des scénarios économiques projetés. Les nœuds représentant les « pires » scénarios (ceux qui se situent en bas) tendent souvent à préconiser plus d'obligations que les autres, compte tenu de l'hypothèse que les obligations représentent moins de risque que les actions.

Figure 16 – Présentation de l'arbre des allocations (« chemin ») obtenu par le modèle d'optimisation avec PS (cas des paramètres standards, en particulier la structure des nœuds [1 5 4 4] et la structure des périodes {1 4 15})

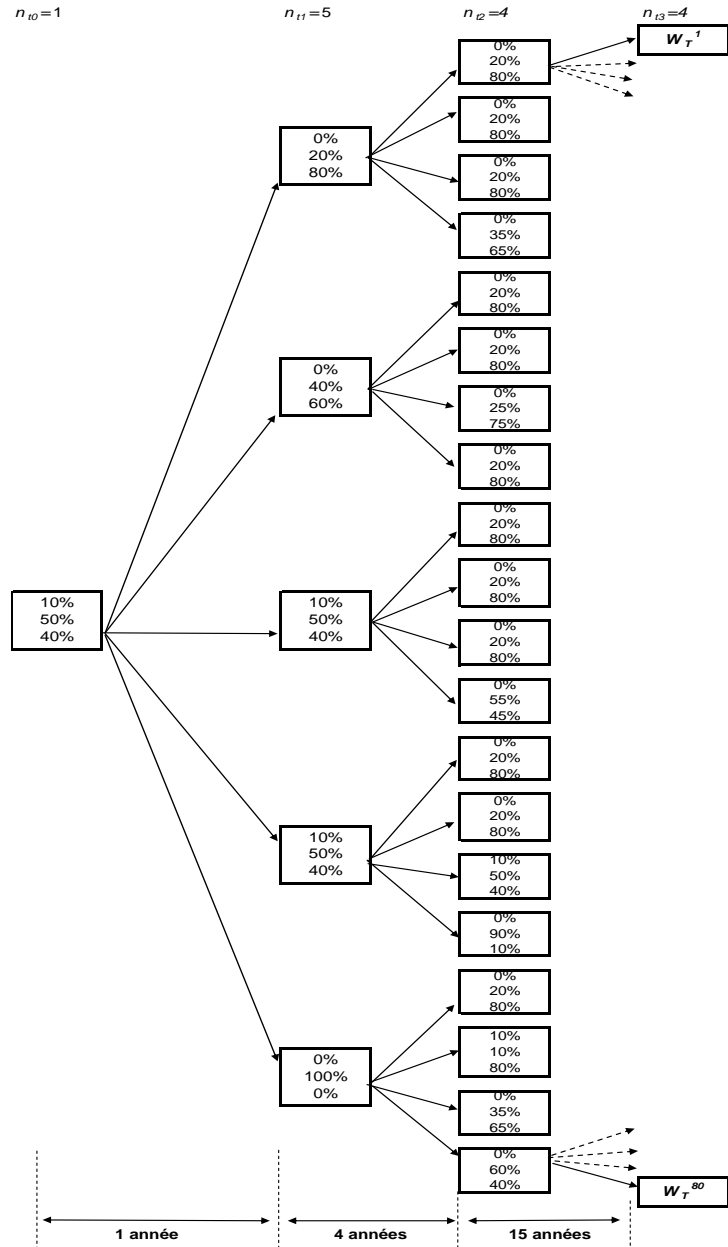
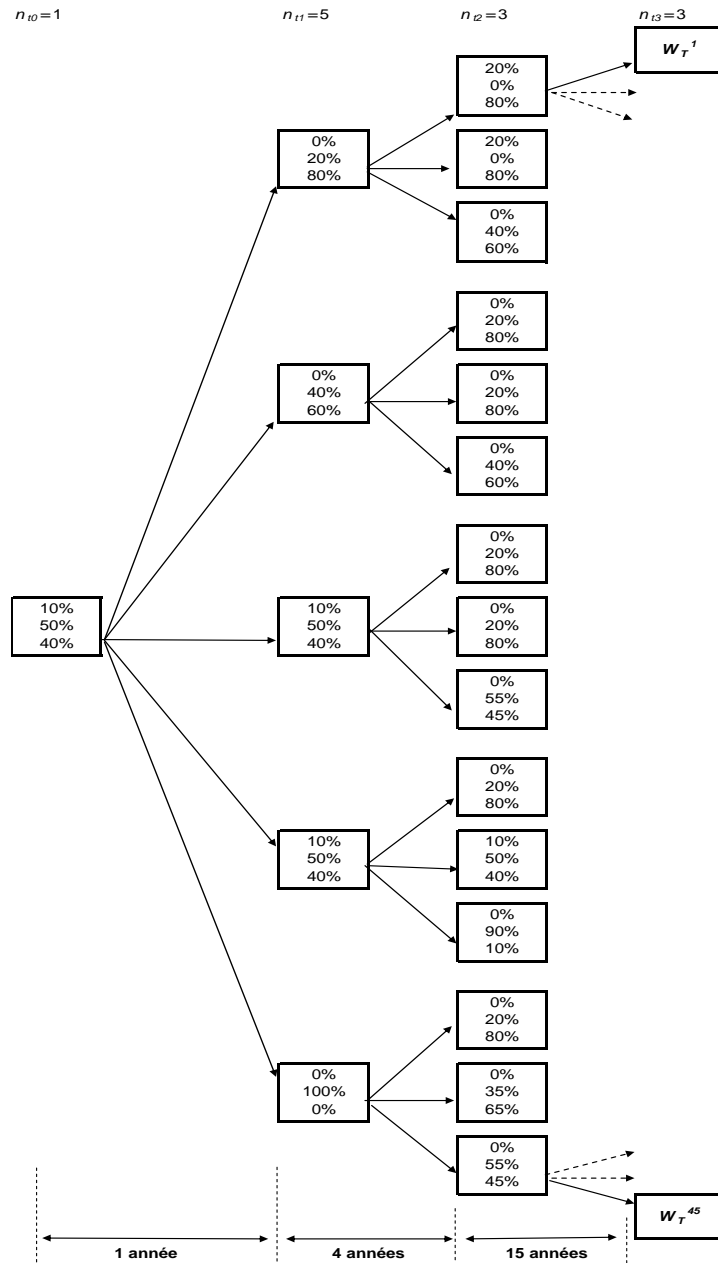


Figure 17 – Présentation de l'arbre des allocations (« chemin »)
 obtenu par le modèle d'optimisation avec PS
 (cas des paramètres standards,
 en particulier la structure des nœuds [1 5 3 3]
 et la structure des périodes {1 4 15})



Selon le modèle d'allocation stratégique d'actifs développé ici (en se basant sur les techniques de programmation stochastique), la règle générale constatée de cheminement des allocations optimales est la suivante :

- soit la réalisation de la période précédente est favorable (le rendement du portefeuille a augmenté) le portefeuille s'autorise à rajouter de l'actif risqué (notamment les actions),
- sinon le portefeuille tend à se couvrir de plus en plus en actif moins risqué.

À titre d'exemple, dans le graphique 16, le scénario le plus défavorable entre t_0 et t_1 conduit à une allocation préconisée pour le début de la période suivante correspondant à « 100 % obligations » (comme le montre le nœud le plus bas à la date t_1) : il s'agit d'une réponse à cette évolution défavorable du rendement du portefeuille avec sa composition précédente (à la date t_0). Les nœuds enfants à t_2 dudit nœud ne préconisent pas la même allocation. En particulier, nous constatons un passage à une allocation (0 %, 20 %, 80 %) pour le nœud enfant issu du scénario de marché le plus favorable entre t_1 et t_2 . De même, l'allocation reste fortement chargée en obligation suite au scénario le plus défavorable entre ces deux dates (60 % obligation contre 40 % actions).

De façon synthétique, selon cette application du modèle basé sur la programmation stochastique, au fur et à mesure que nous rencontrons des scénarios favorables, l'allocation préconisée commence à retenir de plus en plus d'actions. Dans le cas inverse, le portefeuille se charge en actifs non risqués. La non utilisation de bornes supérieures pour les poids intermédiaires des différentes classes d'actifs (à l'exception de ceux des actions plafonnées à 80 %) a permis de mieux mettre en évidence ce constat. En pratique, le recours par les gestionnaires à l'utilisation de tels plafonds (ou plus généralement de bornes *sup* et *inf*) est souvent constaté, pour des raisons réglementaires ou simplement pour des raisons de prudence interne.

Cela nous emmène à avancer deux dernières remarques. Nous tenons dans la première à rappeler le rôle des valeurs retenues pour les variables d'entrée du modèle : leur modification conduit sûrement à des résultats différents (en particulier pour l'allocation initiale optimale). L'objet a été, rappelons-le, d'illustrer et de mettre en évidence le cadre d'utilisation des techniques de PS pour l'allocation stratégique des actifs d'un régime de retraite partiellement provisionné ou d'une allocation d'actifs relative à une compagnie d'assurance (en supposant estimés les flux futurs nets de la compagnie). La deuxième remarque a trait à l'élargissement du champ des tests de sensibilité, notamment le test d'impact d'une structure des nœuds

plus grande. Cela n'a pas été effectué à ce niveau et reste un champ d'investigation très intéressant.

4. Conclusion

Après avoir discuté du cadre général d'utilisation des programmes stochastiques avec recours, nous avons développé un modèle d'ALM dynamique basé sur ces techniques. Une des spécificités du modèle développé se situe au niveau de la méthodologie de génération de scénarios économiques que nous avons appelée méthodologie « des quantiles de référence ».

Cette dernière permet de partir d'une structure linéaire des scénarios générés (telle que décrite dans le chapitre 2) pour finalement construire l'arbre de scénarios servant de base à l'optimisation avec les techniques de PS. La méthodologie a le mérite de tenir compte de la corrélation entre les distributions des différentes variables projetées et permet de lier l'aspect linéaire de génération des scénarios avec les techniques de PS. En particulier, le modèle d'ALM développé réduit la dimension du problème rencontré avec la stratégie *Fixed-Mix*.

Chapitre 4

FOCUS SUR LES TECHNIQUES D'ALLOCATION D'ACTIFS D'UN FONDS DE PENSION ANGLO-SAXON: CAS DU LDI

1. Introduction

Récemment, le monde de la gestion actif/passif des investisseurs institutionnels s'est tourné vers une nouvelle approche : le LDI (L'acronyme LDI signifie *Liability Driven Investment* ou *Liability Driven Investing*, en français stratégie d'investissement adossée au passif). La méthode vise d'abord à neutraliser le passif par des couvertures adaptées, avant d'optimiser l'actif.

D'origine anglo-saxonne, les fonds de pension permettent aux actifs de constituer eux-mêmes leur retraite. Il s'agit d'un organisme financier qui collecte l'épargne des actifs pour la placer aux meilleures conditions du marché. Les cotisations peuvent être versées par les salariés (ou par leur employeur), comme par les non-salariés. Lorsque l'actif arrive à la retraite, le fonds de pension lui verse soit une rente (mensuelle ou trimestrielle), soit un capital unique.

Le fonds peut être géré par l'entreprise elle-même, et les cotisations des salariés sont alors considérées comme une dette de l'entreprise vis-à-vis d'eux. À l'opposé se situent les fonds gérés à l'extérieur des entreprises, par des entités ayant un fort pouvoir sur les marchés financiers, et gérant des sommes très importantes au niveau mondial. Ces fonds ont une stratégie d'investissement très active, et détiennent des parts élevées dans les entreprises de façon à pouvoir en contrôler la gestion.

En France, le régime général par répartition prévaut. Il existe une méfiance culturelle à exposer la retraite des épargnants aux aléas des marchés financiers, même si certains gouvernements ont pu envisager d'introduire le principe des fonds de pension en France. Le Prefon (Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique), pour les fonctionnaires, s'approche d'un fonds de pension : chacun cotise sur un compte personnel et l'ensemble des comptes est géré collectivement.

Il existe également de nombreux systèmes d'épargne retraite par capitalisation individuelle tel que les contrats d'assurance-vie, le Perp (Plan d'épargne retraite populaire), Plan d'épargne populaire (Pep) et les contrats Madelin dont le principe et/ou le fonctionnement peut, dans certaines mesures, faire penser à des fonds de pension au sens allemand ou anglo-saxon.

Les fonds de pension ont connu jusqu'à présent un important développement, notamment dans les pays d'Europe du Nord et dans les pays anglophones. Selon le pays et le système de retraite public mis en place, les fonds de pension jouent un rôle plus ou moins important dans les retraites. A l'origine, ils furent développés par les entreprises et la plupart d'entre elles promettaient à leurs employés un montant fixe pour leurs retraites. Ces prestations peuvent être calculées comme un certain pourcentage du dernier salaire acquis dans l'entreprise.

Cependant, promettre un certain niveau de prestation pour les retraites contraint les fonds de pension à gérer leurs actifs avec attention. Ils doivent en effet assurer les engagements pris envers les employés quelle que soit la situation.

Les fonds de pension ont fonctionné correctement jusqu'à la fin du siècle dernier. Néanmoins, au cours de la dernière décennie et encore à l'heure actuelle, les marchés financiers ont été particulièrement secoués. De ce fait, de nombreux fonds de pension, qu'ils soient publics ou privés, ont été durement touchés, en particulier aux Etats-Unis. Les périodes les plus difficiles furent les crises de 2000-2003 et de 2007-2008. Ces événements ont mis en exergue la faible résistance des fonds de pension à des chocs financiers majeurs.

Les fonds de pension investissaient alors en masse en actions. Les titres à revenus fixes étaient peu utilisés, ce qui a eu de graves conséquences sur la période 2000-2003. De meilleures fonctions de gestion des risques ont dès lors été développées. Néanmoins, comme de nombreux acteurs financiers, les fonds de pension ne pouvaient prévoir qu'ils auraient à faire face en 2007 à la plus grave crise depuis 1929. Le Pension Protection Act, le SFAS 158 et les normes IFRS ont renforcé les besoins en matière de gestion des risques et pénalisent entre autre la volatilité du rapport actif-passif.

Le LDI se concentre sur le ratio de financement qui est défini comme le ratio actif-passif des fonds de pension. Les objectifs sont de relever ou maintenir ce ratio au niveau des normes règlementaires, de réduire sa volatilité et de s'assurer que les prestations seront payées comme convenues. Ces objectifs s'inscrivent dans la même optique que ceux prévalant dans le monde de l'assurance avec Solvabilité 2. *In fine*, le but est de protéger les bénéficiaires.

L'objectif de notre étude de la LDI peut se résumer dans les points suivants :

- Comprendre pourquoi le LDI est devenu aussi populaire dans les fonds de pension et ce qui les a amenés à considérer le LDI
- Savoir comment fonctionne le LDI et quels sont les avantages et les inconvénients
- Chercher le principe des techniques de modélisation et de gestion des risques pour le LDI
- Expliciter les différentes manières d'appliquer les techniques d'allocation d'actifs présentées jusqu'ici dans un cadre de gestion LDI

Le LDI concentre de nombreux thèmes, comme c'est souvent le cas dans les sujets portant sur les relations actif-passif. Il est illusoire de vouloir tout aborder. En outre on se rend compte qu'il ne pouvait s'agir d'une solution applicable à tous les cas. Bien au contraire, les stratégies LDI doivent être appliquées au cas par cas.

2. Contexte économique et historique

Lorsque l'on parle de LDI, on adresse historiquement les méthodes de gestion sous contraintes de passif développées chez les assureurs, les caisses de retraite et les fonds de pension. Ces techniques ont pour objectif de répondre à un besoin : la gestion des portefeuilles d'investissement en vue de couvrir des engagements futurs et ce, sur des horizons pouvant être très longs. Les risques portés par ces portefeuilles sont à la fois financiers (principalement de taux) et extra-financiers (inflation, sinistre, longévité, mortalité...).

L'histoire des fonds de pension peut expliquer pourquoi un bon nombre de ces fonds utilise aujourd'hui les stratégies LDI. Cette dernière est considérée pour certains comme l'approche la plus efficace pour protéger les fonds de pension. Aussi, il est intéressant de comprendre sa place dans le contexte financier actuel. Ci-après une revue rapide de l'historique lié à l'apparition de la notion de LDI.

Dans les années 70, les taux d'intérêt (notamment au Royaume Uni) étaient autour de 6 % avec des rendements des actions relativement faibles. Ainsi des investissements en obligations ou de façon générale des produits financiers à revenu fixe étaient préférés à des investissements en actions. Les stratégies d'immunisation étaient implémentées afin de tenir compte des risques de taux d'intérêt. Cela constitue des prémisses à des investissements indexés sur les niveaux d'engagements (de type LDI).

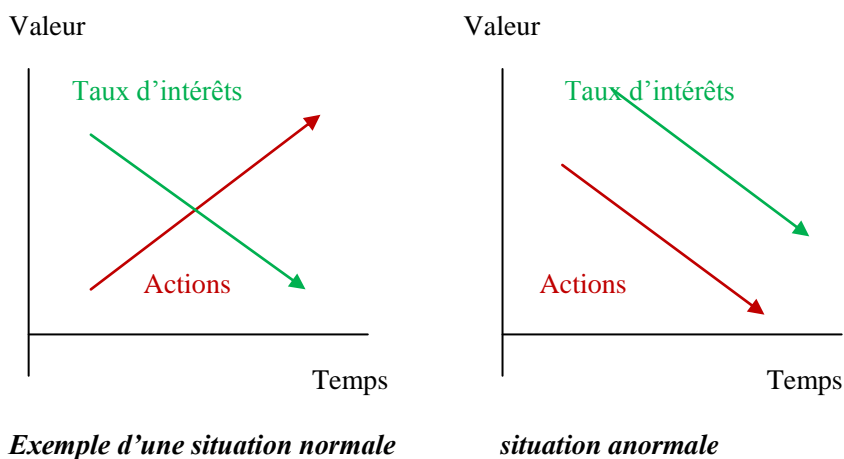
Dans les années 80 et jusqu'à la fin du 20^{ème} siècle, « une bulle » du marché des actions a été constatée. Cela s'est manifesté par la forte hausse des prix des actions suite à un optimisme accru des investisseurs. Au Royaume-Uni, les rendements des obligations ainsi que ceux des actions dépassaient respectivement les 15 % et les 17 % sur la décennie. En conséquence, la valeur actuelle des engagements diminuaient et les actions devenaient intéressantes dans l'allocation d'actifs avec la naissance du fameux ratio « 60/40 » (ratio d'allocation entre taux et actions respectivement).

Dans les années 90, les rendements des obligations ont baissé conduisant à une augmentation de la valeur actuelle probable des engagements des fonds de pension. Parallèlement, les rendements des actions continuaient à être attractifs (dépassant les 18 % par an parfois) ce qui a encouragé ces fonds à augmenter leurs investissements en actions. Les risques encourus par les fonds de pension étaient donc compensés par la performance de la classe actions et par les techniques globales de gestion des risques (sans passer nécessairement par une étude fine de ces risques).

Avec le début du 21^{ème} siècle, compte tenu de la décennie précédente, la plupart des stratégies d'investissement visaient la génération de la performance maximale indépendamment des engagements. On est allé même à dire que, sur le long terme, les portefeuilles d'actions surperforment de loin les autres stratégies. Nous savons actuellement que ce n'est pas forcément vrai notamment durant une crise profonde des marchés financiers.

Sous des conditions économiques normales, lorsque les marchés des actions baissent les taux d'intérêt augmentent et vice versa (cf. graphiques suivants). Ainsi, il est possible de limiter les pertes en investissant plus dans un marché et moins dans l'autre.

Récemment, durant l'explosion de la bulle internet en 2000-2003 et durant la crise des *subprimes* en 2007-2008, les investisseurs institutionnels avaient à faire face à une situation anormale. Il s'agit d'un contexte où cohabite une baisse des marchés des actions (avec une tendance soutenue à la baisse) ainsi qu'un marché de taux d'intérêt également baissier. Pour les fonds de pension, cela constitue une véritable « tempête » et une combinaison désastreuse d'évènements néfastes (cf. chapitre 1).

Figure 18 - Deux cas pour l'évolution des actions et des taux d'intérêts

En fait, lorsque les marchés baissent, cela détériore de façon dramatique la situation des fonds sur le court terme. Plusieurs fonds de pension notamment aux Etats-Unis sont arrivés à une situation de sous financement sur la période 2000-2003. Ceux qui avaient des stratégies efficaces de gestion des risques (ou de « *risk management* ») ont mieux résisté au retournement du marché.

Même si sur les trois dernières années (2012- 2014) le marché des actions a connu une belle reprise (plus de 15 % par an pour le S&P 500), les marchés financiers restent encore sous la pression et le manque d'optimisme apparut depuis la crise de la dette aux Etats-Unis en 2007 et accentué par la crise de la dette de la zone euro. Les taux d'intérêt sont dans leur niveau historique le plus bas. Aujourd'hui, tout le monde s'attend ainsi à une reprise à la hausse des taux d'intérêt mais l'ampleur et la date de cette hausse restent la grande question à poser.

Face à ces problèmes, une nouvelle réglementation et de nouvelles normes de comptabilité ont été adoptés en début de cette décennie au Royaume-Uni (telle que la norme de comptabilité des fonds de pension FRS17). Les fonds de pension s'orientent vers une évaluation *mark-to-market* aussi bien pour leurs actifs que pour leurs passifs. Aux Etats-Unis la « Pension Protect Act » de 2006 entrée totalement en vigueur en 2011 et la « SFAS 158 » pénalisent les fonds de pension sous financés et à situation jugée trop volatile. Le statut « de danger » est retenu lorsque le ratio de financement est au-dessous de 70 % et le statut de situation « critique » lorsque le ratio est au-dessous de 60 %.

Avec les normes IFRS (International Financial Reporting Standards) et la valorisation en *mark-to-market*, un plan de pension sous financé ou sur financé constitue dorénavant respectivement un engagement ou un actif. Aux Etats-Unis, les fonds de pension qui utilisent des taux d'intérêt très élevés pour l'escompte de leurs engagements sont contraints de payer des pénalités de sorte à les pousser à choisir des taux en ligne avec le contexte réel des marchés. L'idée avec toute cette batterie d'outils réglementaires est de bien couvrir le risque. L'enjeu est de ne pas encore aggraver la situation des fonds déjà fragile suite aux différentes crises.

Cette nouvelle réglementation s'intéresse à la notion de ratio de financement et à la volatilité de la valeur de marché des actifs et des engagements du fonds de pension. Cela a donné lieu indirectement au renforcement du rôle des stratégies dites LDI. D'un autre côté, les deux principales crises de 2000-2003 et 2007-2008 ont contribué au développement de nouveaux stress tests dans les fonds de pension et dans plusieurs autres entités financières.

Malgré qu'elles soient essentiellement utilisées pour les fonds de pension, les stratégies LDI ont un fort potentiel de s'imposer sur le marché de l'assurance. En fait, le dispositif Solvabilité II vise à déterminer un capital requis qui dépend du déséquilibre entre les actifs et les engagements. Une stratégie LDI qui cherche à diminuer ce déséquilibre conduit donc à un niveau de capital requis plus faible. Les gestionnaires LDI peuvent contribuer par leur expertise à ce sujet. Au final, l'objectif reste de savoir s'il y a de l'intérêt à prendre ou pas du risque et s'il y a assez de rémunération de ce risque comparé au simple fait d'investir dans des produits peu risqués (tel que les obligations d'Etat).

3. Fonctionnement général du LDI

L'objectif est, rappelons-nous, de bien gérer les risques aussi bien du côté de l'actif que du côté du passif d'un fonds de pension, dans un contexte d'évaluation en valeur de marché. Les valeurs actuelles des actifs et des engagements sont incertaines et varient en fonction de l'évolution des marchés financiers. Par ailleurs, ces deux compartiments n'ont pas la même sensibilité aux marchés financiers. Aligner les mouvements de l'actif et des engagements constitue un objectif principal d'une stratégie LDI.

3.1 Indicateurs de situation : le financement

Pour les stratégies LDI, les indicateurs de la performance sont essentiellement le niveau de la valeur actuelle de l'actif par rapport à la

valeur actuelle des engagements du fonds ainsi que la volatilité de ce niveau. Le ratio de financement et le gap de financement sont deux indicateurs souvent utilisés pour juger la situation d'un fonds de pension. Ils ont la même signification mais peuvent être plus efficaces s'ils sont comparés à un niveau cible.

Soient A_t et L_t les valeurs actuelles des actifs et des engagements respectivement à la date t . Le gap de financement, appelé aussi surplus, est donné par :

$$G_t = A_t - L_t$$

Le gap de financement G_t à la date t est tout simplement la différence entre les valeurs actuelles de l'actif et des engagements à la date t . Un gestionnaire des risques peut utiliser cet indicateur s'il s'intéresse à une valeur absolue plutôt qu'à une valeur relative pour confirmer un statut optimal du fonds.

Si nous supposons que L_t est bien estimée (par hypothèse), cela revient à avoir pour tout t , $L_t > 0$ et un ratio de financement défini comme suit :

$$F_t = A_t / L_t$$

F_t est le ratio entre les valeurs actuelles de l'actif et des engagements à la date t . Un investisseur intéressé par la valeur relative entre ces deux dernières quantités préférera le ratio de financement au gap de financement. C'est le cas de la plupart des cadres réglementaires qui favorisent la notion de ratio de financement. En fixant en pratique le seuil de 100 % comme seuil cible de F_t , nous obtenons trois situations pour un fonds de pension. Une situation de sous-financement lorsque F_t est inférieure à 100 %. Une situation de financement parfait lorsque F_t est égale à 100 %. Une situation de sur-financement lorsque F_t est supérieure à 100 %.

3.2 L'investissement en deux portefeuilles

Après l'analyse et la modélisation des flux de trésorerie du passif et des différents risques encourus par le fonds, l'objectif de l'investissement est double :

- la couverture des engagements de flux de trésorerie afin de protéger les adhérents du fonds
- la génération de la performance pour être compétitif et performant au-delà d'un certain seuil de ratio de financement.

Pour une gestion LDI type, au lieu d'investir dans un seul portefeuille permettant de répondre à ces deux objectifs, deux portefeuilles sont créés. Chacun d'eux répond à un des objectifs. Le portefeuille dédié au paiement et à la couverture des engagements est appelé portefeuille de couverture des

engagements (noté HP pour *Hedging Portfolio*). Le portefeuille dédié à la génération de la performance est appelé portefeuille de recherche de performance (noté PP ou *Performance Seeking*). On présente ainsi le plus souvent le portefeuille LDI comme la mise en place de deux portefeuilles.

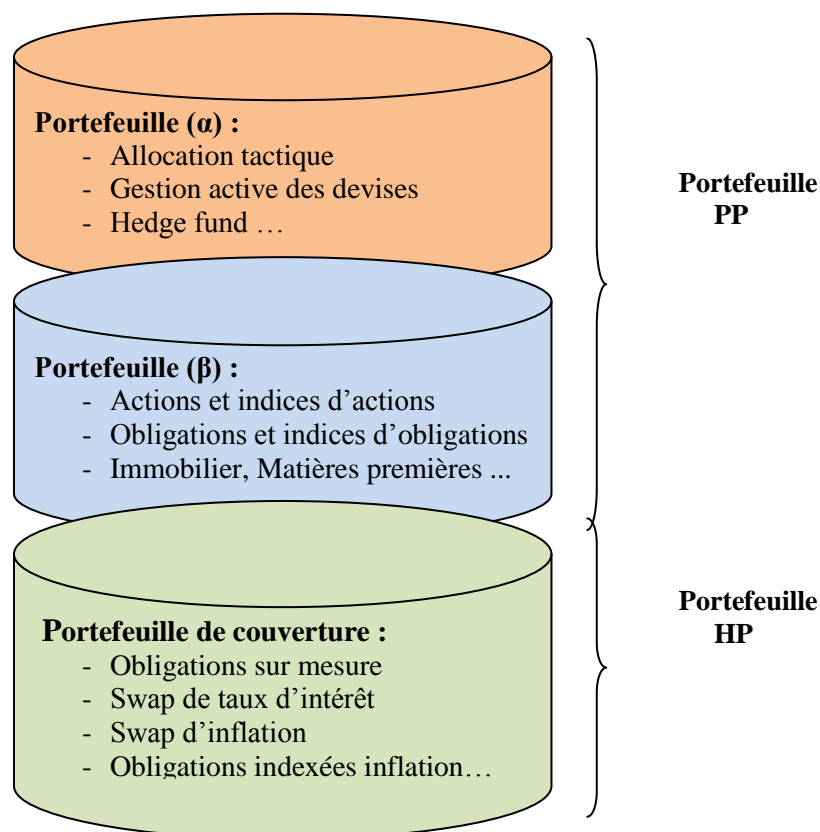
Notons qu'en pratique, le portefeuille PP peut être lui-même scindé en deux sous portefeuilles : le portefeuille beta et le portefeuille alpha. Le portefeuille beta est celui dont le rendement provient de l'exposition au marché et non de la gestion active. Il s'agit du rendement qui peut être obtenu par exemple à travers un simple investissement dans un fonds indiciaires (ayant pour objectif de répliquer la performance d'un indice de marché). Le portefeuille alpha est celui dont le rendement est obtenu à travers les décisions subjectives d'une gestion active. Si un manager essaye de réaliser 2 % par année au-delà du benchmark, ces 2 % (ou ce qui va être réellement obtenu) constitue l'alpha.

De façon générale, le gestionnaire LDI essayera d'optimiser les deux portefeuilles HP et PP avec les actifs adéquats. Il doit s'assurer de l'indépendance des deux portefeuilles afin de limiter les risques et profiter de la diversification. L'objectif est que les effets négatifs sur le portefeuille PP ont le moins d'impact possible sur le portefeuille HP et vice versa. Le PP est géré comme un portefeuille classique d'actifs indépendamment du passif. Il dépend en particulier de l'aversion au risque et du contexte financier.

Le HP est structuré de sorte à être le plus proche possible des engagements. Pour cela, il est souvent composé de produits de taux fixes, des obligations indexées inflation. Différents types de swaps peuvent aussi être utilisés pour mieux contrôler l'exposition aux risques et constituent dans certains cas une part importante du portefeuille HP.

L'allocation d'actifs doit être par la suite suivie et revue tout au long de la durée de vie du fonds. Une approche dynamique des stratégies LDI consiste dans l'élaboration de choix d'investissements qui dépendent de la situation du marché financier. Les événements récents sur les marchés financiers soutiennent l'idée d'un nécessaire ajustement rapide de l'allocation. En pratique, certaines révisions de l'allocation sont dorénavant effectuées de façon trimestrielle. Autre particularité de la gestion LDI consiste dans l'attractivité des classes d'actifs risquées notamment dans une situation de sous-financement : la prise de risque donne dans ce cas plus de chance de se rattraper et de converger vers le niveau cible du ratio de financement.

Figure 19 – Illustration de la composition typique du portefeuille d'actifs géré sous la stratégie LDI



En pratique, on définira la stratégie à adopter en fonction de la tolérance au risque de l'investisseur et de ses objectifs. Pour illustrer, on peut citer à titre d'exemple :

- une immunisation parfaite dans le cas où aucun risque n'est acceptable,
- une couverture uniquement sur les 10 premières années puis recherche de la performance avec le reste de l'actif disponible,
- une couverture à 50 % des engagements en échange d'une espérance de rendement attrayante...

3.3 Le budget de risque et les objectifs d'investissement dans une stratégie LDI

Comme nous l'avons présenté précédemment, la LDI est une philosophie d'investissement et non un produit. La mise en place d'une LDI consiste

dans un développement d'une stratégie d'investissement tenant compte de certains niveaux cibles de risque et de rendements qui eux même sont définis relativement à l'engagement du fonds. Par ailleurs, l'atteinte de ces objectifs par une stratégie LDI passe souvent par un recours à des produits financiers non traditionnels (swaps,..).

Au début, les stratégies LDI ont été associées à une approche visant la constitution d'un portefeuille d'obligations qui permet d'assurer le paiement des flux futurs aux retraités. Récemment cette définition a évolué pour associer la LDI à toute approche visant la gestion d'actifs qui tient compte des contraintes de passif. Surperformer les engagements joue ainsi un rôle central notamment pour garantir un coussin de solvabilité confortable pour le fonds.

Une question commune à ce stade peut être de savoir si c'est nécessaire de choisir un objectif d'investissement de la forme « engagements + x % » pour mener une gestion LDI. La réponse est non, même si cela paraît à premier regard évident (les actifs sont investis dans le but de couvrir les engagements).

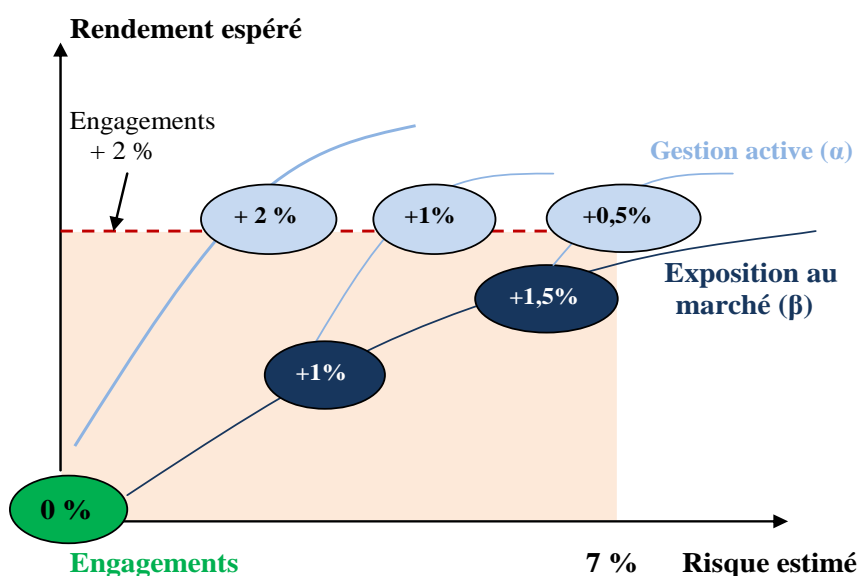
Si nous prenons le cas des fonds de pension britanniques par exemple, la majorité d'entre eux possède un indice (ou benchmark) spécifique à son fonds (typiquement 40 % actions UK, 20 % actions étrangers, 30 % obligations et 10 % immobilier). Ces stratégies sont définies de sorte à surperformer les engagements et se basent sur certaines hypothèses. Il est possible ainsi de traduire une stratégie donnée d'un fonds de pension en un équivalent exprimé en termes d'engagements. Une stratégie d'investissement de « 60 % actions » est équivalente par exemple à un rendement de « engagements + 2 % ou 3 % ».

La question clé ici est à quel niveau le risque peut être accepté compte tenu de la contrainte des engagements. L'analyse sous-jacente sera un exercice d'attribution du budget de risque qui va déterminer l'ensemble des contraintes du portefeuille ainsi que la surperformance globale souhaitée. Nous pouvons aussi déterminer la répartition de la surperformance souhaitée entre celle en provenance de l'exposition au marché (beta) et celle en provenance de la gestion active (alpha).

Par exemple, un objectif de 2 % de surperformance au-dessus des engagements peut être fixé avec un niveau maximum de risque de 7 %. Un niveau de risque de 7% signifie par exemple que dans 2/3 du temps les rendements annuels des actifs seront attendus être pas loin de 7 % du niveau de variation des engagements (1/6 du temps le rendement de l'actif dépassera celui des engagements de +7 % et 1/6 du temps au-dessous des engagements de - 7 %).

Dans le graphique suivant, nous illustrons les différentes possibilités d'atteindre cet objectif (la surperformance est représentée ici par la ligne rouge en pointillé : engagements + 2 %). La région colorée montre les portefeuilles avec un risque inférieur à 7 %. La ligne bleu foncé montre les choix offerts par une exposition au marché (beta) et la ligne en bleu léger montre l'apport de la gestion active.

Figure 20 – Illustration de différentes stratégies permettant d'atteindre l'objectif défini dans le cadre d'une gestion LDI



Ainsi, trois choix peuvent par exemple permettre d'atteindre l'objectif de « engagements + 2% » avec un risque de 7 % ou moins :

- 2 % de la gestion active (alpha) sans une exposition au marché (beta)
- 1 % en provenance du beta et 1 % en provenance de l'alpha
- 1,5 % en provenance de la beta et 0,5 % en provenance de l'alpha

Bien entendu, d'autres combinaisons peuvent être envisagées. De façon plus générale, les fonds de pension se trouvent face à deux choix pour définir leur objectif : reconnaître que les engagements sont leur ultime objectif et définir un objectif d'investissement exprimé en terme d'engagements (exemple : engagements + 2 %) ou déterminer un benchmark spécifique au fonds qui tient compte implicitement de la contrainte des engagements.

3.4 LDI et les autres stratégies de d'investissement

Les stratégies LDI font partie des processus d'ALM des fonds de pension. Elles doivent leur existence en grande partie à l'évolution de la réglementation. Alors que la plupart des stratégies traditionnelles visent à couvrir les dépenses et risques de long terme, les stratégies LDI s'intéressent en plus à la gestion et à la couverture des risques sur le court terme. Elles mettent l'accent sur la notion du budget de risque (*risk budgeting*) : comment dépenser un budget prédéterminé de la façon la plus efficiente ? Elles cultivent aussi le concept des « risques non rémunéré » (*unrewarded risks*).

Parmi les autres spécificités du LDI, on retrouve :

- Une utilisation importante des produits dérivés (options, swaps,...) pour gérer les risques
- La mise en place de deux stratégies de portefeuille dans la gestion du fonds.

Les opposants au LDI ou ceux qui au moins doutent de son efficacité considèrent qu'il s'agit ni plus ni moins d'anciennes stratégies simplement renommées. Cela part du fait que dans une stratégie LDI les outils utilisés sont ceux d'un modèle classique d'ALM (modélisation des variables financières, indicateurs de statut de fonds,...). Cependant, le fait d'utiliser des outils classiques ne signifie en aucun cas la non originalité des stratégies LDI. De même le champ d'intervention d'une stratégie LDI est relativement plus réduit par rapport à celui de l'ALM (qui va au-delà de l'allocation d'actifs pour traiter de tout ce qui concerne la gestion des paramètres du fonds).

Les stratégies d'investissement traditionnelles cherchent à maximiser l'espérance de rendement du portefeuille pour une volatilité donnée. Dans ce cas, les rendements espérés les plus élevés sont systématiquement les plus appréciés. Cela n'est pas adapté au cas d'un fonds de pension à prestation défini par exemple. L'utilité de dépasser un certain niveau de rendement n'est pas aussi élevée. Si le statut de financement dépasse un certain niveau, le gestionnaire peut se contenter d'une simple stratégie peu risquée d'allocation d'actifs (obligations d'Etat,..).

Par ailleurs, dans une gestion traditionnelle d'actifs, l'objectif est souvent de battre ou de répliquer un indice de marché (supposé être constitué des mêmes classes d'actifs). Cela ne correspond pas forcément à la problématique d'assurer les engagements d'un fonds de pension. Un gestionnaire d'actifs peut parfaitement surperformer un indice mais échouer dans le même temps à faire face aux obligations du fonds.

4. Risk Management et le LDI

Compte tenu de l'horizon long terme en question, les risques essentiels à considérer sont l'inflation, les taux d'intérêt et les risques de longévité. Il ne s'agit cependant pas des seuls risques. Les stratégies LDI utilisent des classes d'actifs qui ont la propriété d'une meilleure couverture de ces risques.

Au-delà des actifs traditionnels, à savoir les actions et les obligations, certains produits dérivés complètent le portefeuille du gérant notamment les swaps de taux d'intérêt et d'inflation. Aussi, il est important de tenir compte de l'aspect de risque d'illiquidité de certains actifs comme c'est le cas pour l'immobilier (« en pierre ») et de la non adéquation entre des engagements de court terme et certains actifs tel que les actions.

Une notion fondamentale dans les stratégies LDI serait celle du risque non rémunéré (*unrewarded risk* ou *uncompensated risk*). Il s'agit du risque encouru par un fonds de pension pour lequel aucun rendement additionnel n'est attendu. C'est le cas par exemple de l'exposition aux risques de taux d'intérêt ou d'inflation qui n'ont pas de contrepartie attendue de rendement et leur présence contribue à augmenter la volatilité du fonds. Cela n'est pas le cas de l'exposition sur les actions où nous pouvons espérer des rendements significatifs en y augmentant notre exposition. En d'autres termes, un risque non rémunéré est un risque qui ne peut poser que des problèmes (de point de vue financier) au fonds.

Dans le cas d'un risque « rémunéré », type exposition en actions, la diversification constitue l'une des principales méthodes de couverture. Pour les risques non rémunérés, la plupart des stratégies LDI, préconisent une couverture via des supports de swaps. En effet, l'un des objectifs ultimes d'une stratégie LDI est de réduire au maximum ce type de risque et de gérer de façon optimale (via la règle de diversification) les risques rémunérés.

Concernant le risque de taux d'intérêt, un objectif important de toute stratégie LDI est d'aligner la sensibilité des actifs à celle des engagements (ou du passif). Souvent, les actifs d'un fonds de pension ont une duration inférieure à 10 ans alors que celle des engagements est largement supérieure à 10 ans. Cela engendre un décalage avec un risque significatif. En pratique, deux principales méthodes peuvent répondre à l'objectif d'alignement des sensibilités :

- l'augmentation de l'allocation en obligation de longue durée
- utiliser des swaps de taux d'intérêt pour une partie ou pour la totalité du portefeuille.

Le *matching* de la duration appelé aussi « immunisation » (cf. chapitre 2) représente ainsi une des principales méthodes LDI pour faire face au risque

de taux d'intérêts. Bien entendu, cela nécessite de passer par un calcul fin des grandeurs telles que la sensibilité, la duration et la convexité.

Pour le swap de taux d'intérêt, il s'agit d'un produit dérivé qui implique deux contreparties. Il permet un échange d'une série de flux basés sur un même notionnel selon un tableau d'échéancier¹⁰. Un indice (ou benchmark) commun pour les swaps échangés dans la zone euro est l'European Interbank Offered Rate (ou EURIBOR) où les maturités peuvent aller jusqu'à 50 ans ou l'Euro Over Night Index Average (EONIA) où les maturités vont d'une semaine à 1 an. Ces indices sont souvent utilisés comme des benchmarks pour les stratégies LDI ayant recours au swap dans leur portefeuille.

Le tableau suivant illustre les avantages et inconvénients des deux principales approches LDI de couverture contre le risque de taux d'intérêt :

Tableau 14 – Principaux avantages et inconvénients de deux approches LDI de couverture contre le risque de taux d'intérêt

Approches	Avantages	Inconvénients
Immunsation par la duration (ou la sensibilité)	<ul style="list-style-type: none">- La simplicité- L'immunsation peut être effectuée avec des produits financiers classiques.	<ul style="list-style-type: none">- Elle suppose une translation parallèle de la courbe des taux.- Elle nécessite une revue dynamique de la

¹⁰ Un swap de taux est un contrat dans lequel deux contreparties (A et B) s'engagent mutuellement à se verser des flux financiers (les jambes du swap) calculés sur un montant notionnel (K), pendant une durée déterminée (n), suivant une fréquence (f), et une base de calcul calendaire. Ainsi, quand on est payeur ou emprunteur swap taux fixe, cela signifie qu'on paye taux fixe pour recevoir un taux variable. À l'inverse, être receveur ou prêteur taux fixe signifie payer taux variable et recevoir taux fixe.

Exemple: Swap 10 ans contre EURIBOR 6 mois, fréquence semi-annuelle, base 30/360, notionnel 100M EUR à 4 %. A paye le taux fixe à B. La contrepartie A, s'engage dans notre exemple à verser à B la somme de $4 \% \times 100M \times (180/360)$ tous les six mois. En échange, la contrepartie B s'engage à verser la somme de $\text{EURIBOR } 6M \times 100M \times (\text{nb jours exact}/360)$ tous les six mois.

		couverture (avec des coûts éventuels).
Swaps de taux	<ul style="list-style-type: none"> - Des maturités allant à 50 ans. - Il n'est pas nécessaire de payer de l'argent à la mise en place d'un swap. <p>Il s'agit donc d'une approche peu chère et flexible pour couvrir les engagements.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Le swap de taux fait surgir le risque de crédit (ou de contrepartie). - Les swaps sont basés sur des taux variables calculés souvent 1 mois avant la livraison des flux. Cela peut être à conséquence significative dans des périodes d'instabilité des taux.

Concernant le risque de taux d'inflation, cela suppose bien entendu qu'une partie des engagements soit indexée sur l'inflation. Il s'agit d'un risque non rémunéré. En pratique, l'outil principal de couverture contre ce risque est les obligations indexées sur l'inflation. Ces dernières garantissent un taux de coupon fixe (taux réel) en plus de l'inflation constatée *ex-post*.

L'idéal pour les gestionnaires du risque d'inflation serait de reconstituer (du côté de l'actif) la sensibilité des engagements à l'inflation. La complexité surgit surtout lorsque les engagements sont à la fois sensibles au taux réels et aux taux d'inflation. Dans ce cas, constituer un portefeuille d'actifs dont la duration est alignée à celle de ces deux risques devient un défi.

Dans une stratégie LDI, un autre produit peut être utilisé pour lutter contre le risque d'inflation. Il s'agit du swap d'inflation. Ce produit est similaire dans son principe à un swap de taux d'intérêt. On continue à considérer deux contreparties : la première payera le taux d'inflation (jambe variable) contre un taux d'intérêt fixe reçu par la deuxième sur la base d'un notionnel fixé à l'avance.

Concernant le risque de longévité, il faut rappeler que l'échéance des prestations étant lointaine, il paraît sensé de supposer que les taux de mortalité actuels ne seront pas les mêmes dans plusieurs années. Ainsi, l'objectif est de prévoir les tendances futures en modélisant les taux et la force de mortalité.

Il y a essentiellement deux possibilités. La première est de projeter les tables de mortalité avec des méthodes classiques comme Lee Carter ou Log Poisson. Elles sont basées sur la modélisation de la dynamique de la force de mortalité au cours du temps et en fonction de l'âge des bénéficiaires. La seconde possibilité est d'utiliser des produits dérivés, parmi lesquels les obligations ou les swaps de longévité. Ils peuvent être valorisés en utilisant la dynamique de la force de mortalité. En conséquence, la projection de tables de mortalité et la valorisation de produits dérivés sont des travaux assez complémentaires.

Dans le cas des fonds de pension, et de point de vue juridique, la nécessité comptable de juste valeur impose d'utiliser des tables de mortalité « raisonnables ». Toutefois, ces fonds disposent encore de marges importantes dans le choix des hypothèses retenues et les pratiques varient d'un pays à l'autre.

5. Stratégies et techniques d'optimisation avec le LDI

Plusieurs types stratégies peuvent être considérés dans un cadre de gestion LDI. Ces stratégies dépendent essentiellement de la situation du fonds de pension. Nous pouvons les résumer en trois principales classes.

La première stratégie est une stratégie de profil de risque. Elle consiste dans le choix d'une stratégie initiale et le suivi par la suite des paramètres de régulations utilisés pour évaluer les risques du fonds de pension. Un exemple de ces paramètres peut être la volatilité ou la Valeur-à-Risque. Autrement dit, nous voulons que le niveau d'un indicateur R (préalablement choisi) reste au-dessous d'un certain niveau l sur une période de temps donnée.

Ainsi pour tout $t > 0$ et pour Δ périodes de temps, nous voulons que :

$$R(s) < l \quad \text{pour tout } s \in [t, t + \Delta]$$

Dès que R atteint ce niveau, la stratégie d'investissement est changée de façon à revenir vers un niveau accepté (c'est-à-dire au-dessous de l). Autrement dit, l'objectif est de plafonner le niveau du risque quel que soit l'allocation d'actifs retenue (et donc quel que soit le rendement attendu).

La seconde stratégie correspond au cas où à la date $t=0$, le ratio de financement $F_0=x$ est au-dessous du niveau y . Nous fixons dans ce cas l'objectif d'atteindre ce niveau à la date T , c'est-à-dire $F_T=y$. Etant données les fluctuations dans les niveaux de A_t et L_t , nous ne pouvons pas garantir que, même en suivant la meilleure stratégie, l'objectif sera atteint. Ainsi,

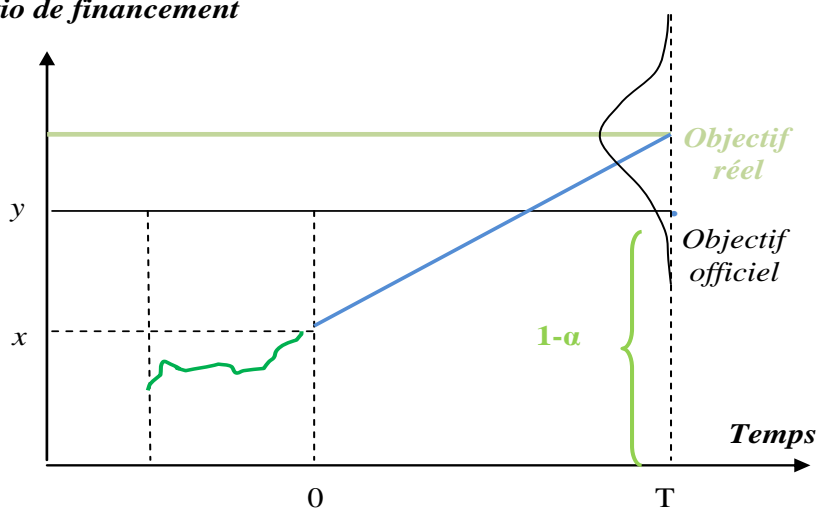
nous définissons une certaine probabilité α pour laquelle cet objectif sera atteint :

$$P(F_T \geq y / F_0 = x) = \alpha$$

Nous écrivons $F_T \geq y$ au lieu de $F_T = y$ pour deux raisons. De point de vue économique, il est déjà intéressant d'avoir un ratio de financement plus élevé que prévu. Aussi, de point de vue mathématique, F_t est souvent une fonction continue. Dans ce cas, l'équation ci-dessus n'aura pas de sens s'il s'agissait d'une égalité.

Figure 21– Illustration de la seconde stratégie LDI

Ratio de financement



Dans le cas d'un fonds sous-financé, nous nous permettons de prendre plus de risque afin d'atteindre l'objectif (et ainsi de se rattraper !). En conséquence, nous acceptons d'augmenter la volatilité puisque plus de rendement suppose de prendre plus de risque.

La troisième stratégie suppose que la deuxième stratégie ne peut pas être appliquée à tous prix. Cette position est l'essence même de la philosophie LDI. Un retour à l'approche de base qui consiste dans le calcul de la sensibilité des engagements devrait être effectué. L'objectif avec ce type de stratégie est d'aligner les valeurs et notamment les sensibilités de l'actifs à celles des engagements.

Autrement dit, si $S_A(t)$ et $S_L(t)$ sont les sensibilités respectifs de l'actif et du passif, nous aurons à obtenir pour chaque t :

$$| S_A(t) - S_L(t) | \leq \varepsilon$$

avec ε le plus petit que possible. Idéalement ε doit être égale à 0. Le problème principal reste l'estimation des sensibilités à chaque date t . Au-delà des problèmes techniques, cette stratégie peut être considérée comme une version particulière de la première stratégie où l'objectif de croissance, en termes de rendement, est attendu être au moins positif. C'est dans ce sens qu'une stratégie LDI a comme priorité de baisser les risques au niveau le plus faible que possible.

En pratique, l'objectif du portefeuille de couverture est d'aligner les sensibilités de l'actif et du passif avec des techniques de gestion des risques. Néanmoins l'estimation des sensibilités n'est pas simple, d'autant qu'elles varient dans le temps. Si la structure du passif est complexe, il peut être nécessaire de recourir à des simulations de type Monte Carlo pour à la fois déterminer et calculer le passif et ses sensibilités. Cela ajoute un degré supplémentaire de complexité dans les stratégies d'investissement dynamiques.

Concernant les techniques de mise en place d'une stratégie de type LDI nous retrouvons essentiellement les techniques développées dans les chapitres précédents à savoir : l'adossement des *cash-flows*, l'adossement par la duration, le contrôle stochastique optimal et la programmation stochastique. Autrement dit, ces techniques sont des outils indispensables dans un contexte d'étude de type LDI.

Les deux premières techniques (c'est-à-dire l'adossement par la duration ou les *cash-flows*) constituent les techniques les plus classiques en matière de gestion LDI. Plus précisément, elles permettent de déterminer les poids des différentes classes d'actifs du portefeuille HP (Hedged Portfolio). Elles garantissent ainsi la couverture des risques liés aux engagements du fonds.

Le capital initial restant (qui constituera notre PP ou Performance Portfolio) peut ensuite être géré par les techniques de type Markowitz adaptées au cas d'un portefeuille de performance absolue (sans contrainte de passif). Un outil fondamental de la gestion du portefeuille PP sera la diversification afin de maîtriser le couple rendement/volatilité.

L'optimisation rendement/risque de type Markowitz peut être appliquée sur un ensemble défini de titres ou sur un ensemble d'indices de référence synthétisant les titres en question (benchmarks). Autrement dit, ces indices seront déduits du regroupement des différents titres en fonction de certains critères (tels que la zone géographique, le secteur d'activité, la taille de l'entreprise,...). Cette dernière approche a l'avantage de réduire le nombre d'actifs à considérer lors de l'optimisation et ainsi le nombre de paramètres à estimer.

Les deux dernières techniques (c'est-à-dire le contrôle stochastique optimal et la programmation stochastique) sont des techniques plus récentes. L'idée commune est la prise en compte de la variable flux de passif comme contrainte dans le processus d'optimisation. La façon de les appliquer en matière d'optimisation de type LDI diffère en fonction des besoins du fonds. Un exemple d'utilisation serait de déterminer le montant de capital initial (et sa composition en termes de classe d'actifs) nécessaire à garantir le paiement des *cash-flows* futurs. Le capital initial restant (le reliquat ou le free capital) peut être géré de façon distincte par la suite et constitue en conséquence un portefeuille PP.

Une fois que les compositions des portefeuilles PP et HP sont soigneusement choisis, en utilisant l'une des techniques citées ci-dessus, l'étape suivante peut être la détermination de la part de chacun de ces deux portefeuilles dans le portefeuille total du fonds de pension. Plusieurs modèles traitant du sujet existent dans la littérature mais nous détaillons ici le modèle présenté par Badaoui et al. [2014] qui se base déjà sur le modèle de consommation de Cox et Huang [1989].

Nous supposons ainsi que le gestionnaire du fonds de pension a accès à N actifs risqués et à un actif sans risque procurant le taux d'intérêt r , supposé être constant pour simplifier. Soit S_t le vecteur de taille $(N \times 1)$ des prix des actifs risqués et B_t le prix de l'actif sans risque. Les dynamiques de ces prix sont données par :

$$\begin{cases} dS_t = \text{diag}(S_t)[(r + \sigma_s' \lambda_s)dt + \sigma_s' dz_t] \\ \frac{dB_t}{B_t} = rdt \Leftrightarrow B_t = B_0 e^{rt} \end{cases}$$

Dans ces équations, z est un processus de mouvement brownien standard à N dimensions, $\text{diag}(S_t)$ est la matrice diagonale des prix des actifs risqués, λ_s est le prix du vecteur de risque pour les N actifs et σ_s la matrice de volatilité. L'investisseur a besoin de payer les engagements du fonds de pension qui peuvent être modélisés ici comme un processus exogène de mouvement brownien géométrique :

$$dL_t = L_t[\mu_L dt + \sigma_L' dz_t]$$

Soit w_t le vecteur $(N \times 1)$ des poids investis dans les actifs risqués à la date t et e le vecteur de même taille dont tous les coefficients valent 1. Le processus de la valeur de l'actif total pour une stratégie de portefeuille autofinçante est modélisé comme suit :

$$dA_t = A_t \left[w_t' \frac{dS_t}{S_t} + (1 - w_t' e) \frac{dB_t}{B_t} \right] = A_t [(r + w_t' \sigma_s' \lambda_s)dt + w_t' \sigma_s' dz_t]$$

Nous supposons également que le gestionnaire du fonds de pension cherche à avoir la stratégie d'allocation qui génère la valeur espérée maximale du ratio de financement à un horizon donné (par exemple la duration des engagements) compte tenu de l'incertitude donnée sur la distribution de ce ratio. De tel compromis rendement-risque dans le cas d'un fonds de pension peut être appréhendé en supposant un cadre standard de maximisation de l'utilité espérée. Considérons le cas particulier de la fonction de préférence CRRA (Constant Relative Risk Aversion) représenté par la fonction d'utilité suivante :

$$u(x) = x^{(1-\gamma)}/(1-\gamma)$$

où γ est le coefficient d'aversion relative au risque de l'investisseur. Dans ce cas, la stratégie optimale d'allocation est donnée par :

$$\max_{(w_t)} E \left[u \left(\frac{A_t}{L_t} \right) \right] \Rightarrow w_t^* = \frac{\lambda}{\gamma\sigma} w^{PP} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \beta w^{HP} \quad \text{équation(A)}$$

Ici le PP est supposé être le portefeuille qui procure le ratio de Sharpe¹¹ le plus élevé (maximisation classique de type Markowitz) avec comme composition optimale w^{PP} . λ et σ sont respectivement le ratio de Sharpe et la volatilité du portefeuille PP. Aussi, le HP est le portefeuille qui assure la corrélation la plus élevée avec le processus des engagements (avec comme composition optimale w^{HP} déduite de l'opération d'adossement par exemple). Le coefficient β représente la sensibilité (ou l'élasticité) de la valeur des engagements du fonds par rapport au changement de la valeur du portefeuille HP. La preuve de ce résultat est obtenue en appliquant l'approche de martingale de Cox et Huang [1989].

L'expression de l'équation (A) pour la stratégie de portefeuille optimale est connue sous le nom de « théorème de séparation des fonds » en théorie d'évaluation des actifs. Dans cette expression, l'allocation au portefeuille « risqué » est une fonction croissante du ratio de Sharpe du PP, noté par λ , et une fonction décroissante de la volatilité du PP, noté ici σ , comme cela peut être attendu intuitivement. D'un autre côté, l'allocation au portefeuille de « prudence » est une fonction croissante du coefficient β . S'il existe un portefeuille qui permet un adossement parfait des engagements du fonds, alors beta est égal à 1.

¹¹ Le ratio de Sharpe est l'écart de rentabilité d'un portefeuille d'actifs financiers par rapport au taux de rendement d'un placement sans risque (autrement dit la prime de risque, positive ou négative), divisé par un indicateur de risque, l'écart type de la rentabilité de ce portefeuille (autrement dit sa volatilité). Il s'agit d'un indicateur de la rentabilité (marginale) obtenue par unité de risque pris dans cette gestion.

Par ailleurs, l'allocation au portefeuille PP n'est pas seulement fonction de ces trois paramètres mais aussi fonction d'un paramètre subjectif à savoir l'aversion au risque de l'investisseur γ . Comme cela peut être attendu, l'allocation optimale au portefeuille PP doit être inversement proportionnée à l'aversion au risque de l'investisseur. Si cette aversion croît jusqu'à atteindre l'infini, l'investisseur détiendra seulement le portefeuille prudent HP.

Notons que dans cette approche du « théorème de séparation des fonds », on peut considérer un troisième portefeuille qui est tout simplement la trésorerie (ou le *cash*). Ce dernier sera considéré si le total des poids optimaux du PP et HP n'est pas égal à 100%. Ainsi, nous pouvons avoir une position courte en trésorerie (cas où le total PP et HP dépassera les 100 %). Le fonds de pension se trouve dans ce cas en voie de mettre en place une version du LDI basée sur un levier financier (endettement).

Aussi, il est important de signaler que le paramètre d'aversion au risque est non observable et difficilement défini pour les fonds de pension. Il est ainsi considéré comme un degré de liberté dont la valeur pourra être déduite à partir d'un budget de risque donné. Ce dernier est souvent exprimé en termes de perte potentielle maximale tolérée étant donné les engagements du fonds.

Badaoui et al. [2014] se sont basés sur ce modèle pour effectuer une comparaison entre différentes stratégies de portefeuille. Dans un premier temps, ils ont comparé la stratégie *Fixed-mix* (exposée dans le chapitre 2) à la stratégie *Buy-and-Hold*. La première stratégie, rappelons-le, consiste dans le rebalancement périodique des poids du portefeuille vers des niveaux cibles de l'allocation stratégique (définis à la date 0 comme w par exemple). Pour la stratégie *Fixed-mix* l'équation (A) devient ainsi :

$$w = \frac{\lambda}{\gamma\sigma} w^{PP} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \beta w^{HP}$$

De son côté, la stratégie *Buy-and-Hold* consiste simplement dans la non intervention de l'investisseur entre la date d'achat initial et la date finale du placement. Cela conduit bien entendu à une modification de la composition du portefeuille par rapport à l'allocation cible initiale. Pour la stratégie *Buy-and-Hold* l'équation (A) devient ainsi :

$$w_0 = \frac{\lambda}{\gamma\sigma} w^{PP} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \beta w^{HP}$$

La simulation, par des techniques Monte Carlo, de la performance d'un placement d'un fonds de pension a permis à Badaoui et al. [2014] de vérifier la supériorité de la stratégie *Fixed-mix* par rapport à la stratégie *Buy-and-Hold* notamment pour des horizons de placement plus lointains. En particulier, les deux stratégies arrivent en générale à avoir des niveaux de richesses finales comparables pour une volatilité nettement inférieure dans le cas d'une stratégie *Fixed-mix*. Ce constat est resté valable en supposant différents profils d'aversion au risque.

Dans un deuxième temps, Badaoui et al. [2014] ont considéré le cas général où les paramètres de rendement et de risque sont indexés sur le temps. Ce type de modélisation est confirmé par des recherches empiriques suggérant que les paramètres changent dans le temps suite au changement de certaines variables clés liés au cycle économique.

La première conséquence de ce phénomène serait que les poids des portefeuilles PP et HP seront indexés également au temps. La deuxième conséquence, avancée par les auteurs, serait l'introduction d'un troisième portefeuille dédié à la couverture optimale des variables clés impactant les paramètres du modèles (par exemple le prix du pétrole). Ce troisième portefeuille est appelé portefeuille de la demande de couverture (*Hedging demand* ou « HD »). Il contiendra des actifs permettant de se couvrir contre la variation dans le temps des paramètres du modèle (par exemple : position longue en actions pour se prémunir contre la baisse de la prime de risque action).

Afin de mettre en avant l'intérêt d'un modèle avec des paramètres indexés sur le temps par rapport à un modèle de type *Fixed-Mix*, les auteurs ont comparé les 3 stratégies suivantes (introduites dans un ordre croissant de complexité) :

- Une stratégie basée sur le changement dans le temps du niveau de la volatilité des actions seulement (la prime de risque action est supposée constante dans ce cas). Cela peut être illustré comme suit :

$$w_t = \frac{\lambda}{\gamma\sigma_t} w_t^{PP} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \beta w_t^{HP}$$

- Une stratégie basée sur le changement dans le temps de la prime de risque ainsi que la volatilité des actions. On ne considère pas à ce stade la présence du portefeuille de la demande de couverture HD. Cela peut être présenté comme suit :

$$w_t = \frac{\lambda_t}{\gamma\sigma_t} w_t^{PP} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \beta w_t^{HP}$$

- Une stratégie basée sur le changement dans le temps de la prime de risque et de la volatilité des actions avec la présence cette fois-ci du portefeuille de la demande de couverture entre t et T :

$$w_t = \frac{\lambda_t}{\gamma\sigma_t} w_t^{PP} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \beta w_t^{HP} + HD_{t,T}^\lambda$$

Les résultats des différentes simulations ont montré l'avantage significatif de la mise en place de ces stratégies « dynamiques » par rapport à la stratégie de type *Fixed-Mix*. Cela est valable en termes d'accroissement du montant moyen de la richesse finale ou en termes de la réduction du niveau de la volatilité autour de cette moyenne.

Par exemple, pour avoir le même montant moyen de richesse finale et la même volatilité du portefeuille total, le fonds de pension peut économiser jusqu'à 17 % de son capital initial s'il opte pour une stratégie de volatilité indexée dans le temps au lieu de la stratégie *Fixed-Mix*. Les exigences de capital initial peuvent baisser de 27 % s'il opte pour la troisième stratégie (avec la présence de portefeuille de la demande de couverture) au lieu de la stratégie *Fixed-Mix*.

6. Conclusion

On peut définir une stratégie LDI tout simplement comme une stratégie d'investissement qui vise à aligner les actifs avec le passif (ou les engagements du fonds). Certains obstacles non négligeables peuvent surgir. Couvrir les engagements de façon « parfaite » peut conduire à opter pour des niveaux de rendement faibles. De même, l'adoption d'une stratégie LDI coûte souvent plus cher qu'une stratégie classique de gestion d'actifs.

En effet, malgré les points forts présentés dans ce chapitre de la LDI, cette « philosophie » de gestion mobilise a priori plus de ressources humaines et de compétences (actuaire expérimentés, des gestionnaires d'actifs, des consultants...). En conséquence, le changement de la stratégie d'allocation d'actifs pour un fonds de pension nécessite souvent un budget de coût significatif, ce qui a découragé certains d'entre eux à réaliser la transition.

BIBLIOGRAPHIE

- Adam A. [2007] *Handbook of Asset and Liability Management: From Models to Optimal Return Strategies*, Wiley.
- Ahlgrim K.C., D'Arcy S.P., Gorvett R.W. [2005] « Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession », *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 177-238.
- Alliot J.M. [1996] *Techniques d'optimisation stochastique appliquées aux problèmes du contrôle aérien*, INPT, Habilitation à Diriger des Recherches.
- Aubin J.P., Chen L., Dordan O., Faleh A., Lezan G., Planchet F. [2012] « Stochastic and Tychastic Approaches to Guaranteed ALM Problem », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 12, n° 23.
- Badaoui S., Deguest R., Martellini L., Milhau V. [2014] *Dynamic Liability-Driven Investing. Strategies: The Emergence of a New Investment Paradigm for Pension Funds?*, EDHEC Risk Institute, Février 2014.
- Birge J.R., Louveaux F. [1997] *Introduction to Stochastic Programming*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering Heidelberg, 1997.
- Black F., Scholes M. [1973] « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy*, 1973, pp. 637-654.
- Brandimarte P. [2006] *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction*, Wiley-Interscience, deuxième édition.
- Branke J., Meisel S., Schmidt C. [2008] « Simulated annealing in the presence of noise », *Journal of Heuristics*, vol. 14, n° 6, pp. 627-654.
- Brinson G. P., Singer B.D., Beebower G.L. [1991] « Determinants of portfolio performance II : An update », *Financial Analysts Journal*, May-June 1991.
- Campbell J.Y., Viceira L.M. [2001] *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford University Press.
- Cariño D.R., Kent T., Myers D.H., Stacy C., Sylvanus M., Turner A., Watanabe K., Ziemba W. T. [1994] « The Russell-Yasuda Kasai Model : An Asset Liability Model for a Japanese Insurance Company using Multi-stage Stochastic Programming », *Interfaces*, 24, Jan.-Feb. 1994, 29-49.
- Castro J. [2009], « A stochastic programming approach to cash management in banking », *European Journal of Operational Research*, 2009, vol. 192, issue 3, pp. 963-974.
- COSP - Stochastic Programming Community : <http://stoprog.org/> [17, 101]
- Cox J.C., Huang C.F. [1989] « Optimum Consumption and Portfolio Policies When Asset Prices Follow a Diffusion Process », *Journal of Economic Theory*, 49, 33-83.
- Dantzig G.B., Glynn P.W. [1990] « Parallel processors for planning under uncertainty », *Annals of Operations Research*, 22, 1-22.

- Delarue A. [2001] « Evaluation des réserves prudentielles en répartition », Lettre de l'Observatoire des retraites, n° 12 mars 2001.
- Dogan K., Goetschalkx M. [1999] « A primal decomposition method for the integrated design of multi-period production–distribution systems », *IIE Transactions*, Volume 31, Number 11, November 1999, pp. 1027-1036(10).
- Escudero L.F., Kamesam P.V., King A., Wets R.J.B. [1993] « Production planning via scenario modeling », *Annals of Operations Research*, 43, 311-335.
- Faleh A. [2011] « Allocation stratégique d'actifs et ALM pour les régimes de retraite », *Thèse de Doctorat*, Université Claude Bernard (Lyon I).
- Faleh A., Planchet F., Rullière D. [2010] « Les générateurs de scénarios économiques : de la conception à la mesure de la qualité », *Assurances et gestion des risques*, n° double avril/juillet, Vol. 78 (1/2).
- Faleh A., Planchet F., Rullière D. [2012] *Scénarios économiques et techniques d'allocation d'actifs*, Economica.
- Fourer R., Gay D.M., Kernighan B.W. [2002] *AMPL : A Modelling Language for Mathematical Programming*, 2nd edition, Duxbury Press.
- Hardy M.R., [2001] « A Regime Switching Model of Long-Term Stock Returns », *North American Actuarial Journal*, 5 (2), 41-53.
http://www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/2001/april/naaj0104_4.pdf
- Hibbert J., Mowbray P., Turnbull C. [2001] *A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes*, Rapport Barrie & Hibbert Limited.
http://www.actuaries.org.uk/_data/assets/pdf_file/0014/26312/hibbert.pdf
- Hicks J.R. [1946] *Value and capital*, Second Edition, Oxford : Clarendon Pressa. Edition française publiée en 1956, « Valeur et Capital », Dunod.
- Hilli P., Koivu M., Pennanen T., Ranne A. [2007] « A stochastic programming model for asset and liability management of a Finnish pension company », *Annals of Operations Research*, 152(2007), pp. 115-139
- Hull J.C., White A. [1994] « Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models », *Journal of Derivatives* (Winter), 37-48.
- Kallberg J.G., White R.W., Ziemba W.T. [1982] « Short Term Financial Planning under Uncertainty », *Management Science*, Vol. 28, No. 6, June 1982, pp. 670-682.
- Kaut M., Wallace S.W., [2003] « Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming », SPEPS, *Working Paper*, 14 (<http://edoc.hu-berlin.de/series/speps/2003-14/PDF/14.pdf>), 2003.
- Kim D., Santomero A. [1988] « Risk in banking and capital regulation », *Journal of Finance*, Vol. 43 (5), pp. 1219-1233.
- Klassen P. [1997] « Solving stochastic programming models for asset/liability management using iterative disaggregation », *Research*

- Memorandum, 0011*, VU University Amsterdam, Faculty of Economics, Business Administration and Econometrics.
- Kouwenberg R. [2001] « Scenario Generation and Stochastic Programming Models for Asset Liability Management », *European Journal of Operational Research*, vol. 134, 51-64.
- Kusy M.I., Ziemba W.T. [1986] « A Bank Asset and Liability Management Model », *Operations research*, Vol. 34, No. 3, May-June 1986, pp. 356-376.
- Lawler E.L., Wood D.E. [1966] « Branch and Bound methods : a survey », *Operations Research*, Vol. 14, n° 4, pp. 699-719.
- Leibowitz M.L., Kogelman S., Bader L.N. [1992] « Asset Performance and Surplus Control: A Dual-Shortfall Approach », *The Journal of Portfolio Management*, WINTER.
- Le Vallois F., Palsky P., Paris B., Tosetti A. [2003] *Gestion actif passif en assurance vie : Réglementation - Outils – Méthodes*, Economica.
- Macaulay F.R. [1938] « The Movements of Interest Rates. Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856 », New York: *National Bureau of Economic Research*.
- Markowitz H. M. [1952] « Portfolio Selection », *The Journal of Finance*, Vol. 7, No.1, March.
- Mazzola J.B., Schantz R.H. [1996] « Multiple-facility loading under capacity-based economies of scope », *Naval Research Logistics (NRL)*, Volume 44 Issue 3, pp. 229-256.
- Merton R. [1971] « Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model », *Journal of Economic Theory*, 3, 373-413.
- Pennanen T., Koivu M. [2002] « Integration quadratures in discretization of stochastic programs », *Stochastic Programming*, E-Print Series, <http://www.speps.info>, May 2002.
- Perold A. F, Sharpe W. F. [1988] « Dynamic Strategies for Asset Allocation », *Financial Analysts Journal*, 44, n° 1.
- Pierre S.N. [2009] *Passif social, construction du portefeuille d'investissement et couverture du risque de taux*, Mémoire d'actuaire, CNAM.
- Pirkul H., Jayaraman V. [1996] « Production, Transportation, and Distribution Planning in a Multi-Commodity Tri-Echelon System », *Transportation Science*, 30(4), 291-302.
- Planchet F. [2009] « Quel modèle d'actifs en assurance ? », *la Tribune de l'Assurance* (rubrique « le mot de l'actuaire »), n° 136 du 01/05/2009.
- Planchet F., Théron P.E. [2007] *Pilotage technique d'un régime de rentes viagères*, Paris : Economica.
- Redington F.M. [1952] « Review of the principles of life office valuations », *Journal of the Institute of Actuaries*, 78: 1-40.
- Rullière D., Faleh A., Planchet F., Youssef W. [2013] « Exploring or reducing noise? A global optimization algorithm in the presence of noise », *Structural and Multidisciplinary Optimization*, juin 2013, volume 47 issue 6 pp 921-936.

- Santosa F., Alexandrov O. [2005] « A topology-preserving level set method for shape optimization », *Journal of Computational Physics*, Volume 204, Issue 1 (March 2005), Pages: 121-130.
- Sharpe W.F., Tint L.G. [1990] « Liabilities – A new approach », *Journal of Portfolio Management*, Winter, 1990, 5-10.
- Zenios S.A. [2007] *Practical Financial Optimization : Decision Making For Financial Engineers*, Blackwell Publishers, Oxford.