



Mémoire présenté le : 17 novembre 2015

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Abdou KÉLANI

Titre : Couverture Optimale des Garanties de type Variable Annuities
en présence de Risques Financiers Extrêmes

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA

M. Patrick PERRET

M. David VALLEE

Signature

Entreprise

Nom : Laboratoire SAF, ISFA

Signature :

Membres présents du jury de l'ISFA

M. Areski COUSIN

M. Pierre RIBEREAU

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : M. Areski COUSIN

Signature :

Invité

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Mme Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Signature du candidat

Remerciements

Tous mes remerciements s'adressent à Areski COUSIN pour avoir accepté de diriger ce mémoire. Les discussions avec lui ont toujours été fructueuses. Qu'il trouve également le témoignage de ma considération profonde.

Je remercie les Professeurs François QUITTARD-PINON, Monique JEANBLANC, Jean-Paul DÉCAMPS, Pietro MILLOSOVICH, Yue-Kuen KWOK et Olivier LE COURTOIS pour de nombreuses discussions ayant enrichi les travaux développés dans ce mémoire. Un grand merci au professeur Mary HARDY, pour ses échanges par mail.

À tout le personnel scientifique de l'ISFA, mes remerciements n'auront de fin que je clame la qualité scientifique et la bonne convivialité.

Je remercie les professeurs Béatrice REY-FOURNIER et Frédéric PLANCHET et exprime ma gratitude profonde à Estérina MASIELLO, Didier RULLIÈRE et Pierre RIBEREAU pour leur bienveillance, leurs réflexions toujours salutaires et pour leurs disponibilités.

Je souhaite enfin remercier le Professeur Christian ROBERT, Directeur du laboratoire SAF de l'ISFA ainsi que les responsables de la formation Actuariat.

Une mention très spéciale à Michèle SONNIER, Marie-Christine BRUNET et Marie-Claude MOUCHON. À Ymas, lui repartir une expression célèbre chez les Yorubas : *baba ni baba djê*.

*à Raima,
à Akambi,
à Elmira.*

Table des matières

| | |
|------------------------------|----------|
| Introduction générale | 5 |
|------------------------------|----------|

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Les garanties offertes | 8 |
| 2 | Un indiscutable succès aux États-Unis? | 10 |
| 3 | Contexte et cadre prudentiel | 13 |
| 4 | Notre cadre d'analyse | 15 |
| 5 | L'objectif poursuivi | 21 |

Partie I :

| | |
|---|-----------|
| Approche unifiée pour l'évaluation et la couverture d'options en présence de risques financiers extrêmes | 23 |
|---|-----------|

| | | |
|--|--|----|
| Évaluation et couverture d'options en présence de risques financiers extrêmes | 25 | |
| 1 | Processus de Lévy géométriques | 26 |

| | | |
|-----------------|---|-----------|
| 1.1 | Quelques processus de Lévy | 27 |
| 1.2 | Générateur infinitésimal | 29 |
| 2 | Évaluation d'options | 32 |
| 2.1 | Formule d'évaluation | 33 |
| 2.2 | Implémentation numérique | 34 |
| 3 | Couverture d'options en présence de sauts | 35 |
| 3.1 | Le ratio de couverture optimale | 39 |
| 4 | Une autre solution : approche unifiée | 41 |
| 5 | Illustration : θ , un ratio de crédibilité | 43 |
| 5.1 | Le cas du modèle de diffusion à sauts de Merton | 45 |
| Annexe A | | 49 |
| A.1 | Preuve de la Proposition 1 | 49 |

Partie II :
Couverture optimale des garanties de type *Variable Annuities* en présence de risques financiers extrêmes **53**

| | | |
|---|--|-----------|
| Évaluation et couverture des garanties VA en présence de risques financiers extrêmes | | 55 |
| 1 | Cadre d'analyse | 58 |
| 1.1 | Les <i>fair value</i> des garanties offertes | 59 |
| 1.2 | Valeurs actuelles probables des garanties | 60 |
| 2 | Évaluation et couverture | 64 |
| 2.1 | Évaluation | 64 |
| 2.2 | Couverture | 65 |
| 2.2.1 | Différence entre les ratios Δ Versus θ | 65 |

| | | |
|-------|---|----|
| 3 | Risk Management : couverture dynamique | 66 |
| 3.1 | Couverture des garanties en cas de vie et de décès | 67 |
| 3.2 | Erreur de couverture résiduelle | 68 |
| 3.3 | Pertes futures actualisées | 68 |
| 4 | Illustration | 69 |
| 4.1 | Évolution de la mortalité | 69 |
| 4.2 | Évolution des prix des marchés | 69 |
| 4.3 | Ajustement aux données réelles | 70 |
| 4.4 | Caractéristiques de l'assuré et des contrats | 73 |
| 4.4.1 | Quel <i>management fees</i> m_a le gestionnaire de notre fonds prélèvera-t-il? | 73 |
| 4.4.2 | Les <i>fair value</i> des garanties | 73 |
| 4.4.3 | Les fonds propres requis au titre de ces garanties | 75 |

Annexe B **83**

| | | |
|-----|---|----|
| B.1 | Valeur actuelle probable des <i>fees</i> , <i>M&E</i> | 83 |
| B.2 | Valeur actuelle de la GMAB avec <i>Ratchet</i> | 84 |
| B.3 | Correspondance des paramètres dans les univers \mathcal{P} et Q | 86 |

Conclusion générale **89**

Bibliographie **93**

Résumé

L'importance de la gestion des risques est de nouveau rappelée et propulsée au centre des débats par la nouvelle directive Solvabilité II dont l'entrée en vigueur est prévue au premier janvier 2016. Cette directive défie les assureurs européens au Pilier 2, notamment à son principal outil d'analyse décisionnelle et stratégique *Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA) considéré par l'*European Insurance And Occupational Pensions Authority* (EIOPA) comme la pierre angulaire.

En se positionnant dans le bilan Actif/Passif de l'assureur, une fois que les dynamiques réelles des facteurs de risque de l'Actif ont été identifiées et calibrées, l'une des difficultés soulevées dans l'implémentation de l'ORSA est notée lors de leur projection dans les univers historique et risque-ajusté, respectivement. Ce mécanisme est connu sous le nom de *Nested Simulations* ou de *Simulations dans Simulations* (SdS). Le caractère *path dependent* de la deuxième projection au regard de la dimension du profil de risque utilisé peut rendre son implémentation complexe en pratique, d'où le recours aux techniques de type *curve fitting*. Au même titre, des techniques de type *Least Square Monte Carlo* (LSMC) sont de plus en plus sollicitées pour la détermination d'une fonction *proxy* qui servira de générateur de scénarios économiques (GSE) du capital requis étant donnés des états du monde du profil de risque à des horizons de temps futurs.

Si les techniques LSMC sont bien connues, la détermination des *best estimate* des engagements de l'assureur au titre des garanties offertes dans les *Variable Annuities*, reste un défi important car celles-ci contiennent des options implicites et les problèmes posés aux assureurs sont ceux de l'évaluation, de la couverture, du contrôle et de la mesure de risque. À cet égard, la recherche académique apporte des solutions, notamment celles relatives à la couverture des risques financiers extrêmes qui sont souvent d'ordre théorique et ont très peu d'utilité pratique.

C'est dans cette perspective que, tout en restant dans une très large classe de processus non gaussiens, nous suggérons une approche unifiée et efficiente pour l'évaluation et la couverture en présence de discontinuités de cours boursiers. Cette méthodologie sera ensuite utilisée pour une analyse approfondie de certaines garanties offertes dans les contrats d'assurance-vie caractérisés par un lien explicite avec les marchés.

En particulier, nous quantifions l'impact des risques financiers extrêmes sur les *fair fees* prélevés au financement des garanties implicites et sur le niveau des fonds propres requis à leur couverture.

Mots clés : Risques financiers extrêmes, Processus de Lévy, *Variable Annuities*, *Fair fees*, *Fair values*, Évaluation, Couverture, FFT.

Abstract

Emerging global regulatory requirements such as Own Risk and Solvency Assessment (ORSA) is considered by the European Insurance Occupational Pensions And Authority (EIOPA) as the heart of the new Solvency II directive. This new harmonized EU-wide insurance regulatory regime scheduled to start on first January 2016, has resulted in the major consideration that should be devoted to risk management.

From the Asset/Liability perspective, once the actual risk factors driving the Asset in the insurer's balance sheet, has been identified and calibrated, one of the difficulties arising in the ORSA implementation occurs during their projection in the historical and risk-adjusted universes, respectively. This mechanism is referred to as *Nested Simulations* or to as *Simulations dans Simulations* (SdS). The path-dependent nature of the second projection in the light of the risk profile dimension makes the ORSA implementation complex in practice. As a result, many insurance firms resort to *curve fitting* techniques. In the same way, other approaches known as Least Square Monte Carlo (LSMC) are being increasingly used for the determination of a *proxy function* to serve as economic scenario generators (ESG) of the required capital at future time horizons, given the risk profile states of the world.

The LSMC technique being well known, the determination of the best estimate of the guarantee liabilities triggered in Variable Annuities, remains in contrast, an important challenge because of the embedded options involving the pricing, the hedging, and the risk measure assessments under extreme financial risks. Although theoretical solutions are necessary, the research rarely takes a computational point of view, in contrast to the approach that we develop.

In this respect, by considering a very large class of non-Gaussian processes, we suggest a unified approach for pricing and hedging in a general Lévy context. We then use this methodology for an in-depth analysis of life insurance contracts linked to financial markets.

In particular, we study the impact of extreme financial risks on the fair fees used to finance embedded guarantees and on the minimum amount of money, that the insurer is short of meeting the guarantee liabilities.

Keywords : Extreme financial risks, Lévy processes, Variable Annuities, Fair fees, Fair values, Pricing, Hedging, FFT.

Introduction générale

Dans le domaine de l'assurance-vie, on distingue deux catégories de contrats : les contrats en cas de décès dits de prévoyance par lesquels l'assureur immunise le bénéficiaire contre une baisse de ressources financières, notamment via le versement d'un capital ou d'une rente au décès de l'assuré. De l'autre côté, se trouvent les contrats en cas de vie dits d'épargne ou de placement, garantissant à terme, le versement d'un capital ou d'une rente en cas de survie. Ils fournissent ainsi une sécurité financière via le paiement d'un montant contingent au décès ou à la survie. Pendant longtemps, les techniques actuarielles traditionnelles se sont focalisées sur la gestion des risques actuariels ; celui figurant en bonne place étant le risque de mortalité. Le risque financier constituait une préoccupation mineure car le métier traditionnel de l'assureur consiste à garantir les engagements vis-à-vis de l'assuré en utilisant des instruments ayant un risque relativement faible. Cependant, ces trente dernières années ont été le théâtre d'un bouleversement profond en raison d'une demande forte des assurés poussée non seulement par des opportunités pouvant être tirées des performances des marchés mais également - plus récemment - par le vieillissement de la population et l'épuisement des régimes de retraites en Europe, notamment en France. En effet, selon une très récente étude, l'Insee¹ ne comptait en 2013, plus que 1.33 cotisant pour un retraité. Rappelons que ce rapport démographique en perpétuelle décroissance était de 1.38 en 2011 et de 1.36 en 2012. Une dernière raison s'ajoutant à ce tableau, est l'augmentation du chômage en Europe amenant plusieurs pays à intégrer désormais des éléments de capitalisation dans leur système de retraite, comme c'est déjà le cas en Suède². Afin de répondre à ce type de demande, plusieurs contrats en unités de compte ont ainsi émergé à la fin des années soixante au Royaume-Uni. Véritables véhicules de performance, ces contrats ont en commun certaines caractéristiques de contrats échangés sur les marchés financiers. Parmi ces derniers, figurent en bonne place ceux dont le portefeuille de référence est indexé à l'évolution d'un fonds risqué sous-jacent. Les souscripteurs peuvent donc profiter des performances des marchés en conjonction des protections traditionnellement offertes. Forts de leurs succès remarquables, ces contrats se sont répandus en Australie et en Afrique du Sud. Pendant la même période, d'autres sont nés sous diverses appellations : *Variable Annuities* et *Equity Indexed Annuity* aux États Unis, *Segregated fund contract* au Canada, *Equity-linked Endowment* en Allemagne et contrats en unités de compte avec garantie en France.

Afin de faciliter notre présentation, cette partie introductive sera structurée en cinq sections. À la section (1), nous passerons en revue les garanties offertes dans les *Variable Annuities* (VAs) ainsi que les différents clauses et mécanismes. À la section (2), nous exposerons le marché actuel de ces contrats en contrastant le moindre succès rencontré en Europe continentale à l'explosion des ventes sur le continent américain. Le contexte de notre étude et le cadre prudentiel des VAs seront présentés à la section (3). Le cadre de notre analyse ainsi que l'objectif poursuivi dans notre étude seront mis en perspective aux sections (4 et 5), respectivement.

1. Source : <http://www.insee.fr>

2. Source : <http://www.generali.fr>

1 Les garanties offertes

Les *Variable Annuities* peuvent comporter des garanties plancher en cas de décès et en cas de vie. Elles permettent au bénéficiaire de recevoir avec certitude un montant minimal fixé à la souscription du contrat, i.e., une proportion des cotisations investies ou celle de l'épargne acquise si celle-ci est supérieure et ce, quelle que soit la valeur des unités de compte à la date de survenance de l'événement ouvrant droit au paiement. Ces garanties appartiennent à la classe des contrats de type GMxB (*Guaranteed Minimum x Benefit*), en langue française : garantie plancher en cas de réalisation de l'événement x ouvrant droit au paiement de celle-ci. Ainsi, les garanties plancher en cas de décès, GMDB (*Guaranteed Minimum Death Benefit*), assurent au bénéficiaire un capital minimum quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au moment de décès. Notons que l'évaluation de cette garantie n'est pas immédiate d'autant plus que la date de décès de l'assuré n'est pas une donnée connue à l'avance. Dans l'hypothèse d'une mutualisation parfaite des décès, la connaissance des probabilités de décès des assurés à chaque âge grâce à l'aide des tables de mortalité réglementaires permet d'évaluer cette garantie comme une option européenne pondérée par les probabilités adéquates de survenance de décès. En cas de survie, les garanties de type GMMB, en langue anglaise *Guaranteed Minimum Maturity Benefit*, assurent un capital minimum quelle que soit la valeur des unités de compte détenues à la maturité. De même, les GMMB et les GMDB peuvent offrir une réévaluation de la garantie à un taux annuel (*Roll up*) et peuvent comporter un mécanisme d'encliquetage (*Ratchet*) à des dates anniversaires permettant à l'assuré de verrouiller les performances des unités de compte. Ces deux clauses illustrées par la figure (1) se manifestent dans les garanties de type GMAB (*Guaranteed Minimum Accumulation Benefits*). Notons que l'évaluation de la garantie GMAB *Ratchet* est complexe car, à chacune des dates anniversaires antérieure à la maturité, si la valeur du fonds risqué (épargne de l'assuré) excède le montant garanti alors celui-ci est rehaussé au fonds puis bloqué pour les périodes suivantes. Dans le cas contraire, l'encours du fonds est inférieur à la garantie et l'assureur renouvelle son engagement vis-à-vis de l'assuré en apportant la différence de telle sorte que l'évolution du fonds repart du capital garanti ; ce mécanisme est répété aux dates anniversaires précédant celle de fin du contrat. L'échéance venue, l'assureur apporte de nouveau la différence entre la valeur terminale du fonds et celle de la garantie finale si celle-ci excède l'encours. En d'autres termes, ceci s'interprète à chaque période comme une option européenne pour laquelle le sous-jacent serait l'épargne, autrement dit, l'encours du fonds sous-jacent et dont le prix d'exercice dépend de la trajectoire suivie par ce fonds : on parle d'options *path dependent*. Par ailleurs, les garanties GMWB (*Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit*) offrent la possibilité de retrait d'un pourcentage du fonds à des dates spécifiées à leur souscription, au moment où les GMIB, de la terminologie anglaise *Guaranteed Minimum Income Benefit* aussi connues sous l'appellation de GAO (*Guaranteed Annuity Option*) au Royaume-Uni, permettent à l'assuré de bénéficier du droit de conversion des unités de compte dans une rente viagère à un taux préférentiel entre le taux minimum g garanti à la souscription du contrat et celui prévalant sur le marché à sa date de fin. Les contrats en unités de

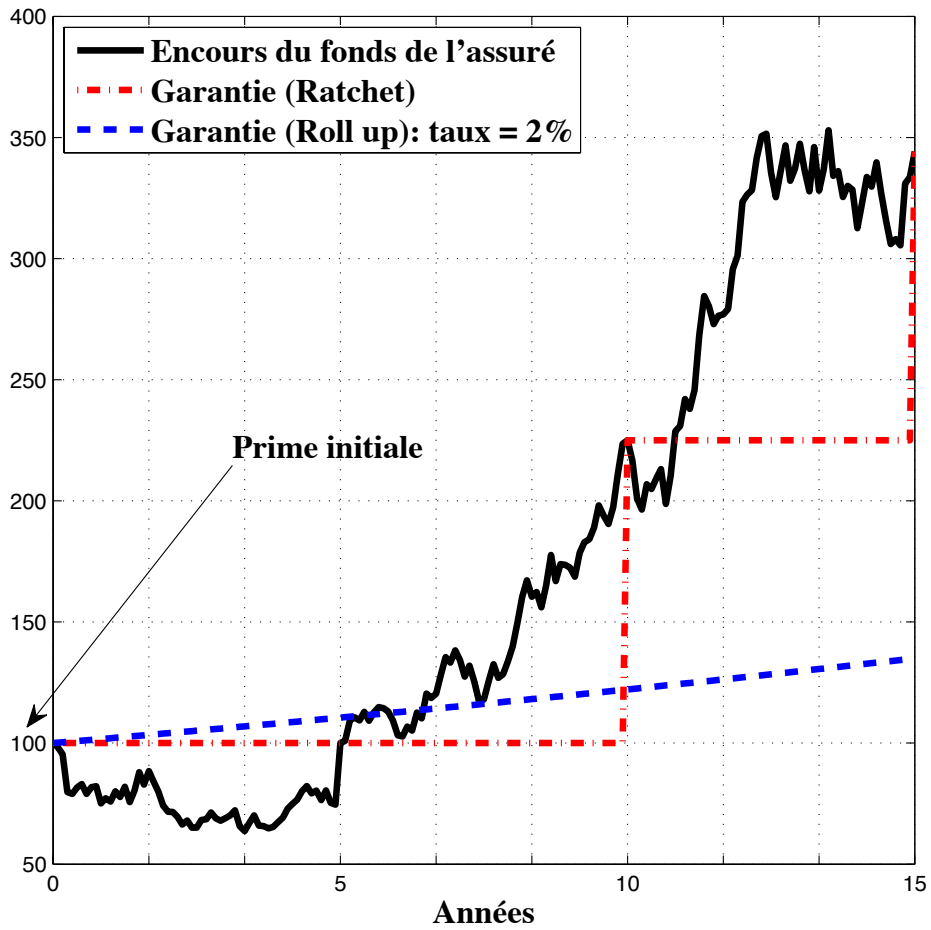


FIGURE 1 – Illustration des clauses *Roll up* et *Ratchet* dans la garantie GMAB.

compte peuvent également contenir des options cachées, comme par exemple une clause de remboursement anticipé. Ce sont des options de rachat permettant à l'assuré d'exercer un droit de récupération de la valeur de marché du contrat à n'importe quelle date avant l'échéance. Du côté de l'assureur, l'idée est de pouvoir stimuler les ventes en s'assurant que le souscripteur ne perçoit pas la police d'assurance comme un investissement illiquide. Néanmoins, elles peuvent se révéler dangereuses pour les assureurs, car exercées, celles-ci impliquent une diminution des actifs du portefeuille d'assurés pouvant engendrer des déséquilibres dans l'exposition au risque de mortalité. Ceci étant, l'évaluation de ce type d'option peut devenir très complexe pour deux raisons principales. Premièrement, les contrats d'assurance sont généralement des contrats de long terme voire de très long terme, pouvant donc offrir de nombreuses opportunités dans le remboursement anticipé. De ce fait, l'assureur peut être confronté à de multiples dates d'exercice, en théorie une infinité. Cette clause est assimilable à une option américaine. Deuxièmement, il faut non seulement prendre en compte des décisions financières rationnelles, cf. Bernard and Lemieux (2008); Kélani and Quittard-Pinon (2013), mais aussi intégrer des facteurs irrationnels du point de vue financier ou exogènes de décision de rachat, cf. Milhaud et al. (2011). La prise en compte de ces facteurs est d'autant plus ardue que l'absence de données suffisantes pour la modélisation du comportement de rachat peut créer une grande incertitude autour des paramètres du modèle utilisé.

Nous résumons à la table (1), une présentation générale des garanties offertes dans ces contrats ainsi que les différentes phases possibles. Les VAs offrent ainsi des garanties et des protections modulables sur des investissements faits dans le cadre de contrats d'assurance-vie, ce qui représente un complément de retraite ou de revenus pour des bénéficiaires, qui allient performance et sécurité. De même, ils représentent un double avantage pour les investisseurs qui peuvent financer leur retraite en toute sécurité tout en profitant des avantages fiscaux liés au format assurance-vie.

2 Un indiscutable succès aux États-Unis ?

Les *Variable Annuities* représentent un marché important. Cependant, contrairement au moindre succès relevé en Europe continentale, ils obtiennent ailleurs un succès remarquable. C'est notamment le cas aux États-Unis. Du fait de leur système de retraite par capitalisation, la majorité de la population dont l'appétence et la sensibilisation aux marchés financiers dépassent de très loin celles des français, s'était déjà tournée vers les marchés financiers pour compléter leurs pensions de retraite. La figure (2) illustre l'évolution des ventes de ces contrats de 2005 à 2014. On peut noter un pic en 2007, qui n'est pas encore atteint depuis les turbulences des marchés de 2007 à 2008. En revanche, les ventes se sont rapidement accrues entre 2009 et 2011 avant de subir une légère baisse entre 2012 et 2014. Comme le montre cette illustration, ce marché est estimé depuis la fin de l'année 2014 à 140 milliards de dollars et est contrôlé à près de 94% par une vingtaine de compagnies d'assurance enregistrant ces ventes et qui en constituent le top 20. Comme on peut le voir à la table (2), AXA US est positionné à la septième place avec une part

| Les caractéristiques de base | | |
|------------------------------|--|--------------------|
| Définitions | Garanties | Déclenchement |
| M : Maturity | Capital | Date future |
| D : Death | Capital | Mort de l'assuré |
| A : Accumulation | Capital | Date future connue |
| I : Income | Rente | Date future connue |
| W : Withdrawal | Montant : possibilité de retrait d'un pourcentage de la garantie (rachats programmés) | Date future connue |

| Les phases possibles | | |
|--|----------------------------|--|
| Accumulation | Election | Paiement |
| Durée connue, investissement en parts de fonds | Exercer | Paiement des bénéfices à l'assuré ou aux bénéficiaires |
| | ou report de l'exercice | |

TABLE 1 – Caractéristiques et phases possibles des *Variable Annuities*

| Marché des <i>Variable Annuities</i> aux États-Unis (en milliers de dollars) : fin 2014 | | |
|---|-------------------------------|-------------|
| Rang | Compagnies | Ventes |
| 1 | Jackson National Life | 23.077.425 |
| 2 | Lincoln Financial Group | 13.091.752 |
| 3 | AIG Companies | 12.728.362 |
| 4 | TIAA-CREF | 12.501.886 |
| 5 | Transamerica | 10.094.036 |
| 6 | Prudential Annuities | 9.949.891 |
| 7 | AXA US | 9.708.475 |
| 8 | MetLife | 6.347.561 |
| 9 | Nationwide | 6.154.900 |
| 10 | RiverSource Life Insurance | 4.866.921 |
| 11 | Pacific Life | 4.448.432 |
| 12 | New York Life | 3.728.283 |
| 13 | Thrivent Financial | 3.261.256 |
| 14 | Ohio National | 2.251.547 |
| 15 | Allianz Life of North America | 2.168.764 |
| 16 | Fidelity Investments Life | 2.052.515 |
| 17 | Northwestern Mutual Life | 1.666.236 |
| 18 | Forethought Annuity | 1.475.274 |
| 19 | Principal Financial Group | 1.075.642 |
| 20 | Massachussets Mutual Life | 1.042.551 |
| | Top 20 | 131.691.708 |
| | Toutes compagnies | 140.100.000 |
| | Soit une part du Top 20 de : | 94% |

TABLE 2 – Source : LIMRA Secure Retirement Institute U.S.

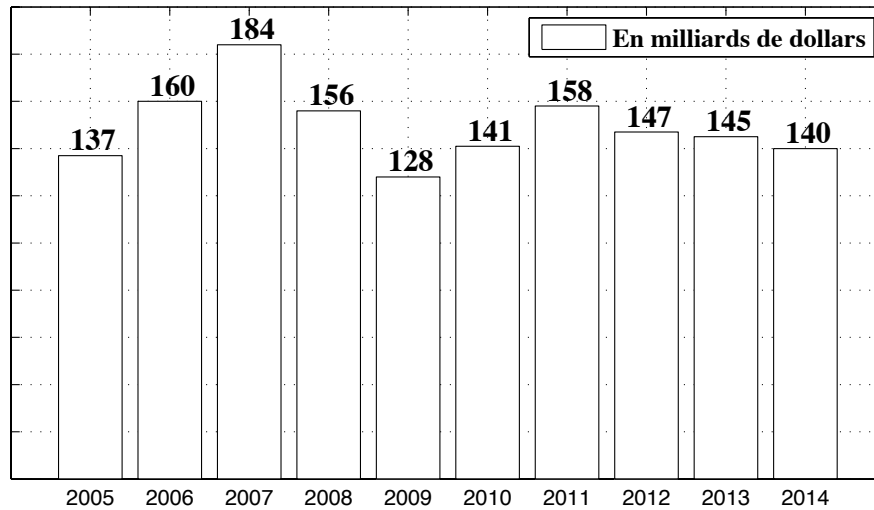


FIGURE 2 – Évolution du marché des *Variable Annuities*. Source : LIMRA Secure Retirement Institute U.S.

de marché de plus de 9.7 milliards de dollars.

À la lumière du succès des VAs aux États-Unis et compte tenu de la dégradation du rapport démographique en France et en Europe, amenant - comme souligné précédemment - certains pays européens à intégrer des éléments de capitalisation dans leur système de retraite, il nous semble vraisemblable que l'Europe continentale dont la France, ne restera pas pour longtemps en marge de l'explosion de ces ventes.

3 Contexte et cadre prudentiel

Comme nous venons de le voir, il existe aujourd'hui une offre très variée de contrats d'assurance-vie pour répondre aux attentes de particuliers désireux d'obtenir une gestion efficace de leur épargne de long-terme. La théorie financière moderne et ses outils en permettent une analyse très fine; c'est le point de vue que nous défendons. Aussi, comme propos liminaire, nous devons souligner une différence importante dans la gestion des risques actuariels et financiers. Dans le secteur de l'assurance, la gestion de risque repose en grande partie sur la mutualisation tandis que ce n'est pas le cas en finance. En d'autres termes, avec plusieurs milliers de polices d'assurance indépendantes composant le portefeuille de l'assureur, le théorème de la limite centrale nous assure qu'il y a peu d'incertitude autour du nombre total de sinistres espérés. Par conséquent, des approches déterministes peuvent être utilisées pour la détermination du *best estimate* du montant de ces sinistres. À titre d'illustration, considérons l'exemple d'un assureur qui vend dix mille contrats à différentes têtes, d'âge x , indépendantes et ayant chacune une probabilité

de sinistre de 5%. Le nombre moyen de sinistres attendus par l'assureur est alors de 500 avec un écart-type, arrondi au plus près, de 22. Remarquons qu'au terme du contrat, la probabilité d'occurrence de plus de 600 sinistres est de $2.0012e-06$ (en incluant la correction de continuité), donc quasi-nulle. L'assureur peut ainsi utiliser un taux d'arrivée de sinistre de 6% afin de contrôler la quasi-totalité de l'incertitude autour du nombre de sinistres espérés. Supposons maintenant que l'assureur vend aux mêmes assurés des contrats en unité de compte (UC) garantissant à terme le versement d'un capital si la valeur du fonds risqué sous-jacent est inférieure à sa valeur initiale. En admettant que la probabilité de ce sinistre est la même que celle du premier contrat, cet exemple montre que la nature du risque des contrats en unités de compte est telle qu'il y a 5% de chance que tous les dix mille contrats génèrent un sinistre et 95% de chance qu'il n'y en ait aucun. Bien plus encore, aucun ajustement trivial à la moyenne ne peut capturer ce type de risque, de même qu'aucune théorie de crédibilité classique. En d'autres termes, la quasi-totalité du risque ne peut être éliminée en appliquant à l'instar du premier contrat, un taux d'ajustement de 6%. D'où la nécessité d'examiner au plus près la dynamique réelle du fonds risqué sous-jacent.

L'analyse de ce risque sera un point central de nos développements. Son importance est de nouveau rappelée et propulsée au centre des débats par la nouvelle directive Solvabilité II dont l'entrée en vigueur est prévue au premier janvier 2016. Cette directive défie les assureurs européens au Pilier 2, notamment à son principal outil d'analyse décisionnelle et stratégique *Own Risk and Solvency Assessment* (ORSA), considéré par l'*European Insurance And Occupational Pensions Authority* (EIOPA) comme la pierre angulaire. En se positionnant dans le bilan Actif/Passif de l'assureur, une fois que les dynamiques réelles des facteurs de risque de l'Actif sont identifiées et calibrées, cf. Hibbert et al. (2001), Wilkie et al. (2003) et Planchet (2014), l'une des difficultés soulevées dans l'implémentation de l'ORSA est leur projection dans les univers historique et risque-ajusté, respectivement : ce mécanisme est connu sous le nom de *Nested Simulations* ou de *Simulations dans Simulations* (SdS). Le caractère *path dependent* de la deuxième projection au regard de la dimension du profil de risque utilisé rend son implémentation complexe en pratique et favorise le recours aux techniques de type *curve fitting*, d'après un sondage réalisé par KPMG (2012). Au même titre, d'autres techniques connues sous le nom de LSMC pour *Least Square Monte Carlo* sont de plus en plus sollicitées pour la détermination d'une fonction *proxy* qui servira de générateur de scénarios au capital économique étant donnés des états du monde du profil de risque à des horizons de temps futurs, cf. Koursaris (2013), Morrison et al. (2013) ou Teugua et al. (2014). Cependant, si les techniques LSMC sont bien connues, cf. Longstaff and Schwartz (2001), Clément et al. (2002), pour l'évaluation des options américaines ou Bernard and Lemieux (2008) et Kélani and Quittard-Pinon (2013) pour celle des options de rachat, la couverture des engagements de l'assureur au titre de ses garanties reste un défi important car celles-ci contiennent des options implicites dont l'évaluation et la couverture en constituent une problématique non évidente. À cet égard, la recherche académique apporte des solutions, notamment celles relatives à la couverture qui sont souvent d'ordre théorique et ont très peu d'utilité pratique. Ce plaidoyer participe ainsi de notre choix de nous focaliser sur la

couverture optimale des garanties offertes dans ces contrats.

Par ailleurs, parmi les soucis majeurs des assureurs, figure en bonne place l'évaluation en *fair value* des contrats en UC. Cette notion, prônée par les nouvelles normes *International Financial Reporting Standard* (IFRS), entraîne un bouleversement important dans l'environnement réglementaire financier, comptable et prudentiel des sociétés d'assurance et des établissements bancaires. Elle impose la réévaluation des bilans en fonction de l'évolution des prix de marché. L'*International Accounting Standards Board* (IASB) précise dans ce sens que, si les prix des actifs détenus sont observables sur ce marché, alors ceux-ci constituent la meilleure estimation possible de leur juste valeur : c'est ce qu'on appelle le *marked to market*. L'importance de cette notion sera de nouveau rappelée et mise au centre des débats comptables par la publication en mai 2011 d'une nouvelle norme entièrement dédiée à la *Fair Value Measurement* : la norme IFRS 13. Celle-ci a été homologuée par le règlement³ UE n° 1255/2012 et est en vigueur depuis le 1^{er} janvier 2013, fournissant ainsi une source unique pour son application. Dans cette perspective, nous avons développé une analyse en *fair value* avec le choix d'une méthode de type *marked to model*.

4 Notre cadre d'analyse

Dans cette perspective et afin de faciliter notre présentation, nous supposons que la prime unique de l'assuré est investie dans un fonds risqué dédié représentant le portefeuille⁴ résultant de l'évolution des facteurs de risque de l'Actif. Plus précisément, on suppose que ce portefeuille réplique les performances de l'indice S&P 500. En d'autres termes, le gestionnaire du fonds a un degré de liberté tel que le bêta de ce portefeuille par rapport à celui de l'indice boursier américain de référence est égal⁵ à 1. Relevons les cours mensuels de cet indice en devise locale entre les années 1956 et 2014. Les rentabilités correspondant aux dates de grandes turbulences des marchés sont données à la dernière colonne de la table (3). On observe des chutes de rentabilité de plus de 10% (−24.25% en 1987, −18.38% en 2008) et dont résulte une intensité d'occurrence de crise annuelle de plus de 10%, donc non négligeable. À la lumière de cette observation, il est naturel de remarquer qu'une représentation continue brownienne des rentabilités de cours ne saurait être réaliste puisqu'une modélisation de ce type met en évidence une propriété et une loi : la continuité et les rentabilités gaussiennes. Ces deux conditions supposent que la probabilité d'occurrence d'un saut d'une amplitude telle qu'observée à la fin des années quatre-vingt-sept ou au début de l'année deux mille huit est négligeable. En d'autres termes, la probabilité d'occurrence d'un krach boursier est presque nulle. Ignorer ces discontinuités peut alors engendrer des erreurs d'évaluation et une mauvaise couverture des produits dérivés financiers. Bien plus encore, une modélisation de ce type est incapable

3. <http://www.focusifrs.com>

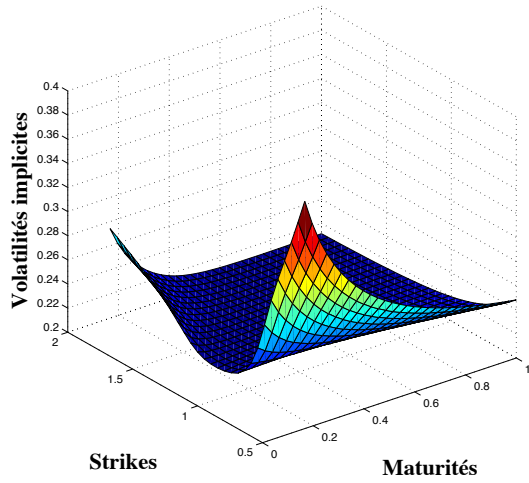
4. Notons que ce portefeuille est majoritairement investi en actions. Le lecteur pourra se référer au site officiel de la FFSA ou à celui du GEMA.

5. Le coût de réplcation étant absorbé par l'alpha généré par un gestionnaire du fonds, au minimum expérimenté, la performance nette de ce coût est alors supposée nulle.

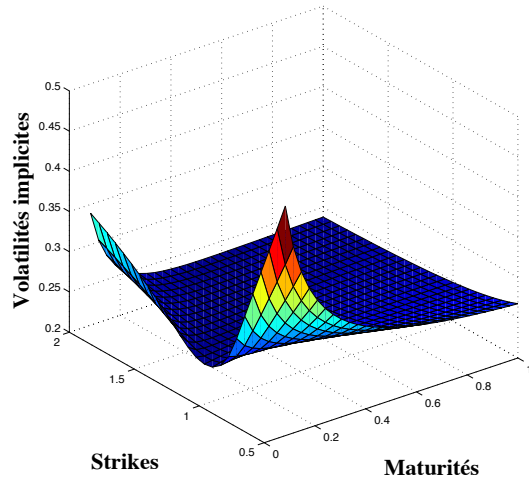
| S&P 500 (<i>Total Return</i>) en devise locale | | | |
|--|----------------|--------------|------------------------------|
| Dates de crises (Années) | Dates de début | Dates de Fin | Rentabilités (Amplitudes) |
| Crise 1973 | 31/10/73 | 30/11/73 | -11.76% |
| Crise 1974 | 30/08/74 | 30/09/74 | -12.24% |
| Crise 1987 | 30/09/87 | 30/10/87 | -24.25% |
| Crise 1990 | 31/08/90 | 28/09/90 | -4.99% |
| Crise 1998 | 31/07/98 | 31/08/98 | -15.60% |
| Crise 2000 | 29/02/00 | 31/03/00 | 9.33% |
| Crise 2001 | 31/08/01 | 28/09/01 | -8.42% |
| Crise 2007 | 29/06/07 | 31/07/07 | -3.15% |
| Crise 2008 | 30/09/08 | 31/10/08 | -18.38% |

TABLE 3 – Crises systématiques. Les séries historiques sont récupérées depuis une base de données Bloomberg[®].

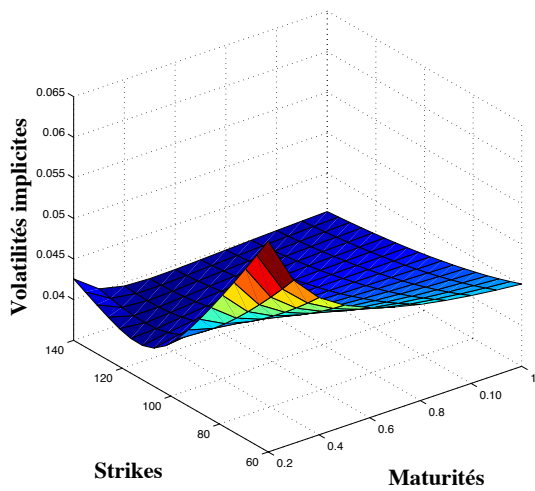
de retrouver la condition principale d'un modèle d'évaluation qui est la reproduction du *smile* de volatilité observé dans la pratique. D'où l'idée de prendre en compte des discontinuités des cours du fonds risqué, après les travaux de Cont (2001) et ceux de Aït-Sahalia and Jacod (2009), par des processus de Lévy non purement gaussiens. Dans un premier temps, nous modélisons l'évolution du fonds par des modèles mixtes de diffusion à sauts de fréquence et d'amplitudes aléatoires données par des processus de Poisson composé. Appartenant à la classe des processus de Lévy à activité finie, le modèle de Merton (1976) et celui de Kou (2002) en sont représentatifs. Cependant, des études effectuées par Ramezani and Zeng (1998) suggèrent que le modèle à sauts gaussiens de Merton peine à bien s'ajuster aux observations empiriques contrairement au modèle de Kou. Nous considérons également les modèles à subordination de brownien, notamment, celui dit variance gamma, introduit par Madan and Seneta (1990). Ce processus est obtenu en transformant le temps du mouvement brownien par un processus gamma. L'intuition principale sous-jacente à ce type de modélisation est que le temps des activités du marché est une transformation aléatoire du temps calendaire. Plutôt que d'ajouter une nouvelle source d'incertitude comme des sauts dans la dynamique du sous-jacent, ou de rendre la volatilité stochastique par des modèles de type Markov *switching* de Hamilton (1989) ou de Hardy (2003) - cf. l'illustration à la figure (4) - ou encore par le modèle de Heston (1993), on transforme le temps par un subordonateur, i.e., un processus aléatoire croissant de valeurs positives à accroissements indépendants et stationnaires : dans notre cas, un processus gamma d'où le nom donné au modèle. Ce modèle représente un cas particulier du modèle CGMY de Carr et al. (2002), d'après les noms des quatre auteurs :



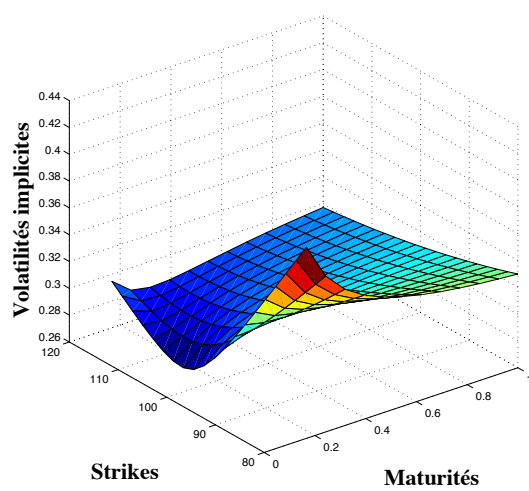
(a) Merton



(b) Kou



(c) VG



(d) CGMY

FIGURE 3 – Volatilités implicites aux modèles de : Merton, Kou, VG et CGMY

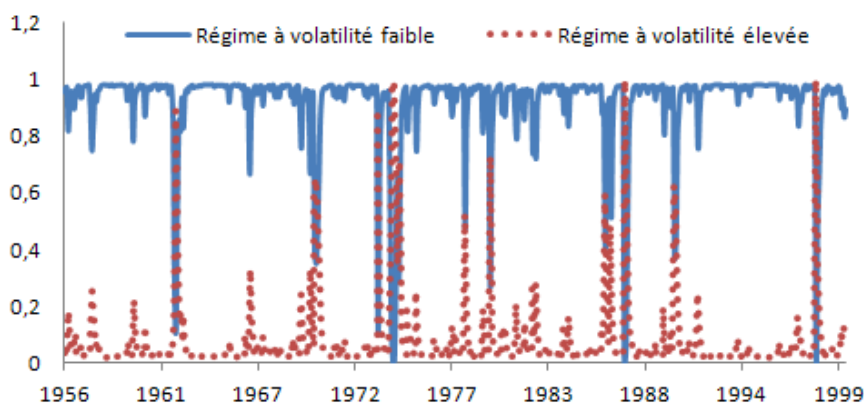


FIGURE 4 – Changement de volatilité dans l’indice S&P 500 : en utilisant le filtre de Hamilton (1989) et Hamilton and Susmel (1994). On peut se référer à Billio and Monfort (1998) pour le lissage de ce filtre.

Carr, Geman, Madan et Yor. Notons que ce dernier processus avait été pour la première fois introduit en actuariat par Dufresne et al. (1991) et construit pour la littérature financière par Koponen (1995) puis par Boyarchenko and Levendorskiĭ (2002b), d’où le nom de processus KoBoL, d’après les noms des trois auteurs : Koponen, Boyarchenko et Levendorskiĭ. Comme le montre la figure (5), la distribution des rentabilités issues de ces modèles, illustrée par le modèle de Kou, présente des caractéristiques leptokurtiques. On note que par rapport aux rentabilités gaussiennes de Black-Scholes, elle⁶ est beaucoup plus pointue et présente une queue de distribution beaucoup plus épaisse car décroissant moins vite vers l’infini. En d’autres termes, nous avons des probabilités non négligeables d’occurrence d’évènements rares et extrêmes en phase avec ce que nous avons relevé à la table (3). De même, ces modèles permettent de reproduire le *smile* de volatilité observé dans la pratique, comme l’illustre la figure (3).

Par ailleurs, il vient un autre point important ; la prise en compte des discontinuités de cours financiers apporte de l’incomplétude au marché, de telle sorte qu’il n’existe pas de portefeuille dupliquant éliminant définitivement le risque. Par conséquent, la répliation n’est plus possible. En d’autres termes, l’allocation en delta - très présente dans la pratique et dans la littérature - devient sous-optimale, d’où résulte la nécessité de trouver une allocation qui permette de rendre ce risque minimal. Cette allocation optimale dans ce contexte non-gaussien étant une solution difficile, nous pouvons relever les contributions importantes utilisant la couverture quadratique (voir Schweizer (2001)) de Riesner (2006), Vandaele and Vanmaele (2008), Delong (2014), Cont et al. (2007), Tankov and Voltchkova (2009) et celle de Cont and Tankov (2004). Citons de même, le mémoire d’actuariat de Gabriel and Surlas (2006) qui expose la solution suggérée par les derniers auteurs. Cependant, les ratios suggérés par ces auteurs ressemblent -

6. À moyenne et volatilité égales.

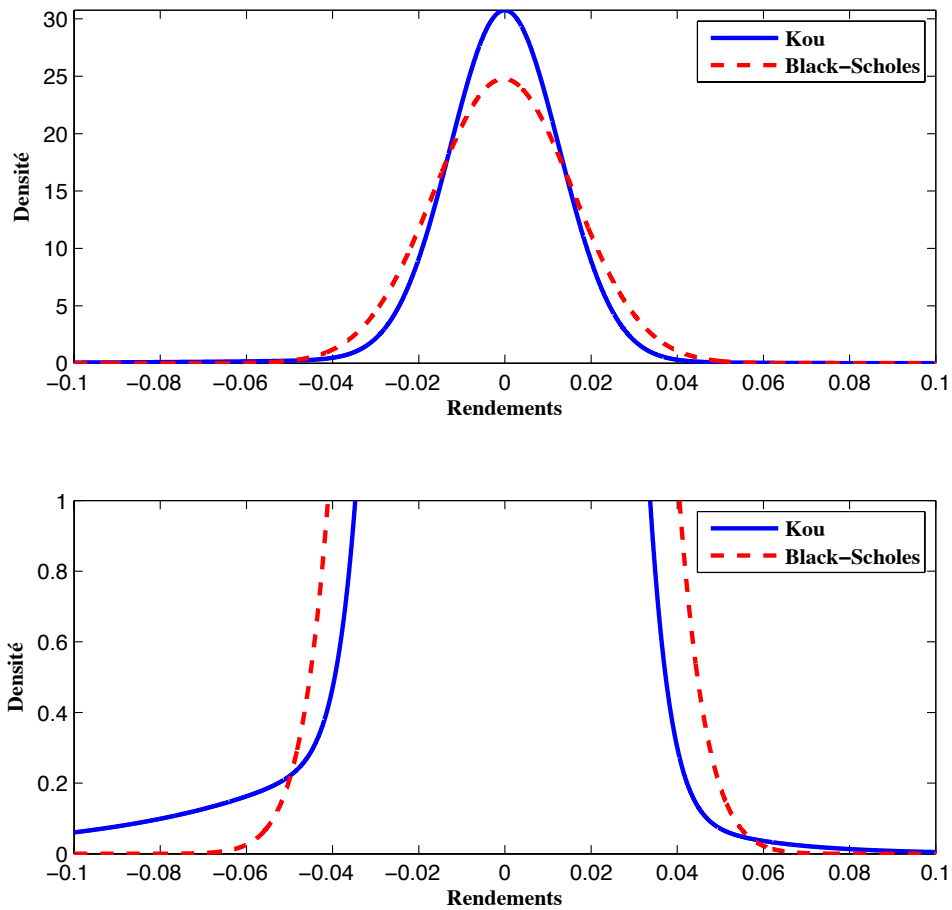


FIGURE 5 – Comparaison de la densité des rentabilités des prix obtenus par le modèle de Kou par rapport à celle sous le modèle de Black-Scholes, avec les mêmes moyenne et variance.

du point de vue technique - à la solution suggérée par Cont and Tankov (2004). Leur formule d'allocation par la couverture optimale aboutit, outre le cas gaussien de Black and Scholes (1973) ou celui à amplitudes de sauts gaussiennes de Merton (1976), à une résolution numérique non triviale. En effet, l'implémentation de leur ratio de couverture passe par l'utilisation des techniques d'intégration lourdes ou par celles de résolution des PIDEs (*partial integro-differential equation*), en langue française, équations aux dérivées partielles avec membre intégral, compliquées. Or, comme le notent Jackson et al. (2008), bien que plusieurs approches de résolution des PIDEs ont été suggérées, aucune d'entre elles n'est satisfaisante. De notre côté, tout en restant dans un cadre très général de processus non-gaussiens, nous suggérons en utilisant un résultat de Hille and Phillips (1957), une approche unifiée coïncidant avec leur résultat. Ainsi, tous les ratios suggérés par les auteurs mentionnés ci-dessus pourront être obtenus en appliquant un facteur simple à la formule d'évaluation d'options, ce qui nous permet d'unifier la méthodologie d'évaluation et celle de couverture. Sur le plan technique, et comme l'illustre la figure (6), cette méthodologie repose sur l'analyse par transformée de Fourier généralisée dans la ligne droite des travaux de Carr and Madan (1998), Raible (2000), Lewis (2001), Eberlein et al. (2010), ainsi que ceux de Boyarchenko and Levendorskiĭ (2000) et Kélani and Quittard-Pinon (2014). Celle-ci permet d'obtenir une formule d'intégration simple, particulièrement adaptée au choix de calcul par transformée de Fourier rapide (FFT). C'est une méthode particulièrement efficace pour évaluer des contrats d'option dans un cadre non gaussien. De même, elle s'avère plus satisfaisante que l'approche utilisée par Carr and Madan (1998) et permet également d'obtenir des résultats pour des séries de contrats en un temps de calcul très court. Par ailleurs, elle ne requiert que l'existence et la spécification de la fonction caractéristique du processus considéré et donc du modèle utilisé.

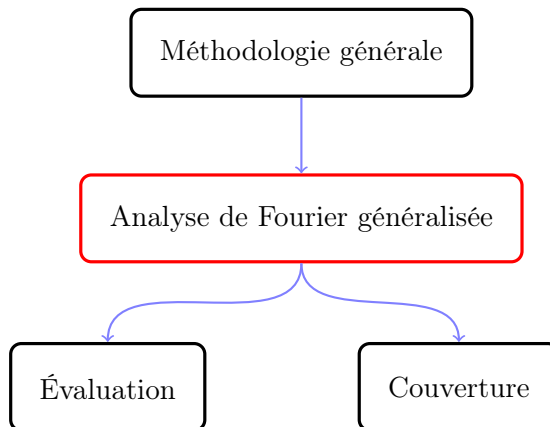


FIGURE 6 – Approche unifiée pour l'évaluation et la couverture

5 L'objectif poursuivi

L'objectif poursuivi dans notre étude est de proposer un cadre uni pour la gestion des contrats d'assurance-vie en unités de compte en présence des risques financiers extrêmes. Notre analyse comporte deux parties. La première suggère une méthodologie générale et unifiée pour l'évaluation et la couverture d'options à l'aide de processus non gaussiens en phase avec les faits relevés sur les marchés. La seconde partie est dédiée à l'utilisation de cette méthodologie pour une analyse approfondie des contrats d'Assurance-vie de type *Variable Annuities*.

Plus précisément, le cadre méthodologique de la première partie nous permet une analyse approfondie de l'impact des risques financiers extrêmes sur le niveau des *fees* prélevés pour le financement des garanties et sur celui des fonds propres requis pour la couverture des engagements au titre de ces garanties. Nous illustrons notre analyse en considérant des garanties de type mixte GMMB/GMDB et de type plus complexe GMAB avec *Ratchet* tout en prenant en compte des *management fees* pour la gestion de l'épargne de l'assuré et des *fair fees* pour le financement de ces garanties. De même, les solutions proposées jusqu'à maintenant pour l'évaluation des GMAB avec *Ratchet* - cf. Gerber and Pafumi (2000), Hardy (2003) et Coleman et al. (2007) - n'étant pas satisfaisantes, nous suggérons une formule générale et explicite permettant d'évaluer de manière simple cette garantie.

Nous déterminons le niveau des fonds propres en considérant l'allocation optimale sur le fonds risqué sous-jacent. Tout en prenant en compte des coûts de transactions engendrés par la couverture dynamique de ces garanties, nous déterminons la distribution des pertes futures actualisées probables que nous comparons à celle obtenue par la couverture classique en delta. Nous montrons que l'approche suggérée aboutit à une immobilisation très faible en capital économique.

Bien plus encore, nous mettons en lumière une illusion de sécurité dangereuse dans la gestion des VAs en présence des risques financiers extrêmes. Celle-ci s'explique par une sensibilité très différente aux risques extrêmes, du niveau des *fees* prélevé pour le financement des garanties d'une part et de celui des fonds propres requis à leur couverture d'autre part. Cette illusion permet non seulement d'expliquer des pertes importantes subies par des assureurs qui ont dû quitter le marché des *Variable Annuities* à cause de la sous-estimation de leur fonds propres, mais aussi de plaider que la bonne prise en compte des risques financiers extrêmes dans l'évaluation et dans la couverture, permet une gestion rigoureuse de contrats d'assurance-vie caractérisés par un lien explicite avec les marchés.

Enfin, il nous semble opportun de décrire dans ce dernier paragraphe le cheminement de ce mémoire. Les travaux qui y sont décrits avaient d'abord fait l'objet des réflexions nées de la rédaction d'une thèse en Finance au sein du laboratoire SAF de l'ISFA. Les prémisses de cette réflexion ont d'abord trouvé un écho dans un contexte entièrement dédié à l'Actuariat sur la gestion de certains contrats d'assurance-vie, avant d'évoluer

dans les deux parties qui résument ce mémoire. Celles-ci ont fait l'objet de publications dans *Bankers Markets and Investors* et dans *The Journal of Risk and Insurance*.

Partie I :
Approche unifiée pour l'évaluation
et la couverture d'options en
présence de risques financiers
extrêmes

Évaluation et couverture d'options en présence de risques financiers extrêmes

L'objet de cette partie est de proposer une approche unifiée pour l'évaluation et la couverture d'options en présence des variations abruptes des cours boursiers. Le problème soulevé dans ce contexte est que l'évaluation et la couverture passent par l'utilisation des techniques d'intégration lourdes ou par celles de résolution des PIDEs (*partial integro-differential equation*), en langue française, équations aux dérivées partielles avec membre intégral, compliquées. Or, comme le notent Jackson et al. (2008), bien que plusieurs approches de résolution des PIDEs ont été suggérées, aucune d'entre elles n'est satisfaisante. Néanmoins, compte tenu de la nature de convolution des PIDEs, des solutions d'évaluation d'options par transformée de Fourier rapide (FFT) avaient été suggérées. Nous pouvons citer les travaux de Carr and Madan (1998), Raible (2000), Lewis (2001), Eberlein et al. (2010), ainsi que ceux de Boyarchenko and Levendorskii (2000) et Kélani and Quittard-Pinon (2014). L'algorithme de transformée de Fourier rapide est utilisé pour sa rapidité et sa précision. Cependant, même si des prix sont obtenus quasi-instantanément et de manière précise, la formule d'évaluation par FFT ne fournit pas le portefeuille de couverture à l'instar de la formule de Black and Scholes (1973), pour la couverture (optimale) d'options dans ce contexte d'incomplétude de marché. En d'autres termes, la FFT abandonne la principale difficulté, notamment, celle de la détermination de la quantité optimale à investir dans le sous-jacent. Or, dans un cadre réaliste où la dynamique des prix observés est plus proche de celle des processus de Lévy non gaussiens, la couverture d'options est un problème difficile. On peut citer les contributions en actuariat de Riesner (2006) et Vandaele and Vanmaele (2008) via la couverture quadratique. Les formules suggérées par ces auteurs pour la couverture en présence de discontinuités de cours boursiers partagent une structure commune avec celle de Cont and Tankov (2004), et aboutit, outre le cas gaussien de Black and Scholes (1973) ou celui à sauts gaussiens de Merton (1976), à une résolution numérique non triviale. Cette structure commune vient du membre intégral des PIDEs, résulte de l'intégration des prix d'options sous toute la distribution de l'amplitude aléatoire des sauts, et aboutit à une implémentation non évidente. Bien que des intégrations numériques lourdes peuvent toutefois être utilisées, elles devront être adaptées au choix de la distribution des tailles aléatoires des sauts, ce qui en limite l'opé-

rationalité. De plus, si l'évaluation d'option est obtenue par la transformée de Fourier rapide, une approche efficace pour la couverture ne devrait-elle pas être celle-là même (cf. Boyarchenko and Levendorskii (2000) et Kélani and Quittard-Pinon (2015))?. De notre côté, en utilisant la couverture par minimisation locale du risque avec un résultat élégant de Hille and Phillips (1957), nous montrons comment calculer de manière simple et efficace l'intégrale des prix d'options sous la densité de tout processus de Lévy. Cette approche ne nécessite que la spécification et l'existence de la fonction caractéristique du processus utilisé. En particulier, nous montrons que tous les ratios suggérés par les auteurs mentionnés ci-dessus pourront être obtenus en appliquant un facteur simple à la formule d'évaluation d'options, ce qui nous permet d'unifier la méthodologie d'évaluation et celle de couverture. Bien plus encore, nous obtenons un ratio de couverture permettant une factorisation élégante. En effet, il permet de séparer la quantité provenant de la mesure équivalente dans laquelle l'évaluation est faite, de celle venant de l'univers de minimisation du portefeuille de couverture : cette distinction disparaît naturellement si la minimisation et l'évaluation sont faites dans le même univers, comme le présentent Cont and Tankov (2004).

Les travaux décrits dans cette partie ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Bankers Markets and Investors*.

1 Processus de Lévy géométriques

On suppose que le prix au temps t de l'actif risqué sous-jacent, S_t , est représenté sous la forme d'un processus de Lévy géométrique

$$S_t = S_0 e^{X_t}. \quad (1)$$

On note ϕ_t , la fonction caractéristique associée au processus X au temps t . Un processus de Lévy peut être complètement spécifié par son exposant caractéristique ψ , via la relation

$$\phi_t(u) = E[e^{iuX_t}] = e^{-t\psi(u)}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

où ψ est donné par la formule de Lévy-Khintchine

$$\psi(u) = -iu\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux1_{|x|<1})\nu(dx). \quad (3)$$

Le triplet (μ, σ, ν) spécifie complètement le processus X , voir Bertoin (1996). À la lumière de (3), notons qu'un grand nombre de comportements du processus de Lévy peuvent être générés via la spécification de la mesure $\nu(dx)$ appelée mesure de Lévy. Les trajectoires d'un processus de Lévy pur exhibent une activité finie quand $\int_{\mathbb{R}} \nu(dx) = \lambda < \infty$, où λ mesure l'intensité des sauts par unité de temps. Les trajectoires seront dites à activité infinie dans cette intégrale est infinie. De plus, on parle de processus à variation finie lorsque $\int_{\mathbb{R}} (|x| \wedge 1)\nu(dx) < \infty$. Par la suite, nous considérons des processus à variation quadratique finie, autrement dit, on supposera que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\nu(dx) < \infty.$$

1.1 Quelques processus de Lévy

Dans cette section, nous donnons les exposants caractéristiques de deux grandes familles de processus de Lévy en phase avec la réalité observée et représentatifs des processus à activité finie et infinie. Il s'agit, du mouvement brownien arithmétique, des processus de diffusion à sauts de Merton et de Kou, des processus variance gamma et CGMY. Rappelons que le seul processus de Lévy continu est le mouvement brownien arithmétique ; le mouvement brownien géométrique étant le modèle de base de la finance en temps continu, voir Black and Scholes (1973), avec $\nu(x) = 0$ dans l'équation (3) pour tout x . L'exposant caractéristique est alors réduit à

$$\psi^{\text{BS}}(u) = -iu\mu + \frac{1}{2}\sigma^2u^2.$$

Merton (1976) incorpore un processus de Poisson composé, de taux d'arrivée moyen de sauts λ , dont l'exposant caractéristique est donné par

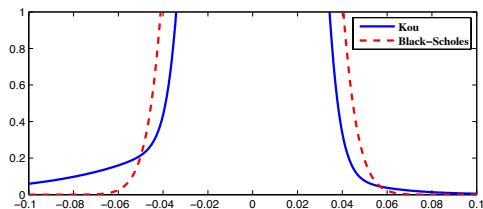
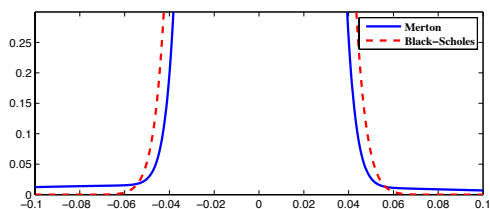
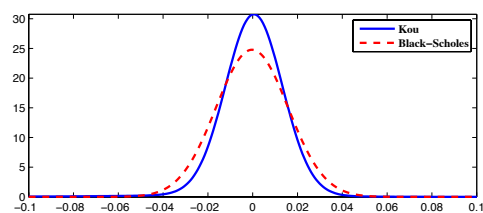
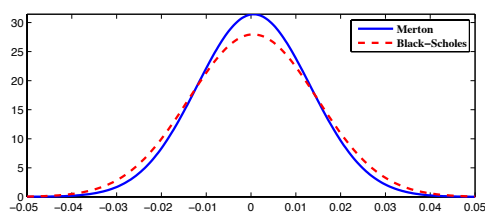
$$\psi^{\text{M}}(u) = \lambda(e^{imu - \frac{1}{2}\delta^2u^2} - 1),$$

où les tailles aléatoires des sauts, conditionnellement à l'occurrence d'un saut, suivent une distribution normale de moyenne m et de variance δ^2 . De même, en utilisant le processus de Poisson composé, Kou (2002) suggère une distribution exponentielle double asymétrique pour les amplitudes aléatoires des sauts. Des tests empiriques effectués par Ramezani and Zeng (1998) suggèrent que le modèle de Kou s'ajuste mieux aux données actions, que le modèle de diffusion à sauts de Merton. L'exposant caractéristique du processus à sauts purs de Kou est donné par

$$\psi^{\text{K}}(u) = \lambda\left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu} - 1\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0,$$

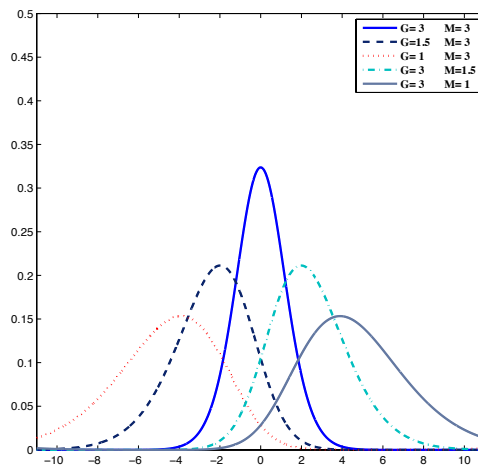
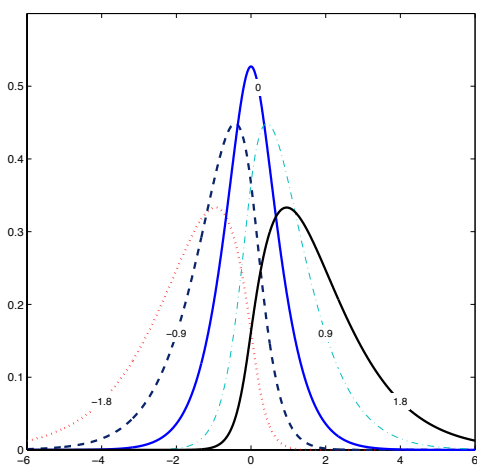
avec $p \geq 0$ et $q \geq 0$ telles que $p + q = 1$ et avec $-\lambda_1 < \text{Im } u < \lambda_2$. D'autre part, bien qu'il est approprié d'utiliser un processus de Poisson composé pour capturer des probabilités non négligeables d'occurrence de pertes rares et extrêmes, cf. Figures (1a et 1b), telles que les krachs boursiers, de nombreuses observations soutiennent que les prix des actifs exhibent une infinité de petits sauts. Ce type de phénomène est mieux expliqué par les processus à activité infinie. Un exemple connu est le modèle dit variance gamma (VG) introduit dans la littérature financière par Madan and Seneta (1990). Ce modèle est obtenu par une transformation aléatoire du temps du mouvement brownien par un subordonateur, i.e., un processus aléatoire croissant de valeurs positives à accroissements indépendants et stationnaires : dans notre cas, un processus gamma dont la variance pour un accroissement unitaire de temps est notée ς . L'exposant caractéristique de ce processus est donné par

$$\psi^{\text{VG}}(u) = -iu\mu + \frac{1}{\varsigma} \ln(1 - iu\vartheta\varsigma + u^2\frac{\sigma^2}{2}\varsigma), \quad \varsigma > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R},$$



(a) Comparaison de la densité des rentabilités des prix obtenus par le modèle de Merton par rapport à celle sous le modèle de Black-Scholes avec les mêmes moyenne et variance.
Paramètres utilisés : $T = 1/250$, $\lambda = 1$, $\mu = 0.15$, $\sigma = 0.2$, $m = -0.03$ et $\delta = 0.1$.

(b) Comparaison de la densité des rentabilités des prix obtenus par le modèle de Kou par rapport à celle sous le modèle de Black-Scholes avec les mêmes moyenne et variance.
Paramètres utilisés : $T = 1/250$, $\lambda = 10$, $\mu = 0.15$, $\sigma = 0.20$, $\lambda_1 = 1/0.02$, $\lambda_2 = 1/0.04$ et $p = 0.3$.



(c) Représentation des densités des rentabilités de prix obtenus par le modèle VG, en fonction de ϑ .
Paramètres utilisés : $T = 1$, $\zeta = 0.4$, $\sigma = 0.9$ et $\mu = 0$.

(d) Représentation des densités des rentabilités de prix obtenus par le modèle CGMY, en fonction de G et de M .
Paramètres utilisés : $T = 1$, $C = 7$ et $Y = 0.1$.

FIGURE 1 – Densités des rentabilités des prix donnés par certains types de processus de Lévy en phase avec la réalité observée : les densités sont obtenues par inversion de Fourier.

avec la bande de régularité

$$-\vartheta - \sqrt{\vartheta^2 + \frac{2\sigma^2}{\varsigma}} < \sigma^2(\operatorname{Re} u) < -\vartheta + \sqrt{\vartheta^2 + \frac{2\sigma^2}{\varsigma}}.$$

La Figure (1c) montre le comportement des densités des rentabilités des prix obtenus par le modèle VG en fonction du paramètre ϑ . Dans la continuité du modèle variance gamma, un nouveau modèle englobant le précédent, connu sous le nom de modèle CGMY de Carr et al. (2002), d'après les noms des quatre auteurs : Carr, Geman, Madan et Yor, a rapidement émergé dans les années quatre-vingt-dix. Ce type de processus avait été pour la première fois introduit en actuariat par Dufresne et al. (1991) et construit pour la littérature financière par Koponen (1995) puis par Boyarchenko and Levendorskiĭ (2002b), d'où le nom de processus KoBoL, d'après les noms des trois auteurs : Koponen, Boyarchenko et Levendorskiĭ. L'une des caractéristiques des processus CGMY est qu'ils ne partent pas de la particularité d'une distribution de probabilité ni de la subordination de brownien. Ils sont bien au contraire, construits par le choix direct d'une fonction caractéristique, autrement dit, d'une densité de Lévy. Les paramètres C, G, M et Y avec $C > 0, G \geq 0, M \geq 0$ et $Y < 2$, jouent un rôle important quant à la prise en compte des propriétés caractérisant la dynamique sous-jacente. En effet, C décrit l'intensité du processus. Plus précisément, C joue un rôle similaire à celui de la variance dans un mouvement brownien. Les paramètres G et M , contrôlent respectivement, le taux de décroissance des queues de probabilité droite et gauche de la densité de Lévy, donnant ainsi de l'asymétrie pour des valeurs de G et de M non identiques. Ainsi, le cas $G < M$ est plus en adéquation avec de nombreux faits empiriques où la queue de probabilité gauche est la plus épaisse, cf. Figure (1d). L'exposant caractéristique est donné par

$$\psi^{\text{CGMY}}(u) = -C \Gamma(-Y) [(M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y].$$

Comme on le note à la Figure (2), ces modèles permettent de retrouver le *smile* de volatilité, notamment la forte convexité pour des options de maturités courtes.

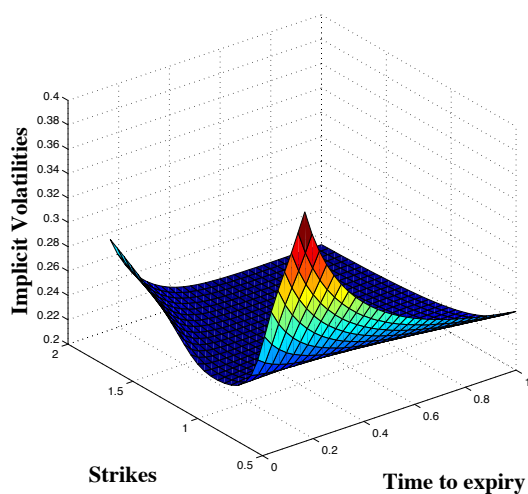
1.2 Générateur infinitésimal

Une notion qui nous sera d'une grande utilité est celle du générateur infinitésimal, \mathcal{L} , défini pour le processus X , par

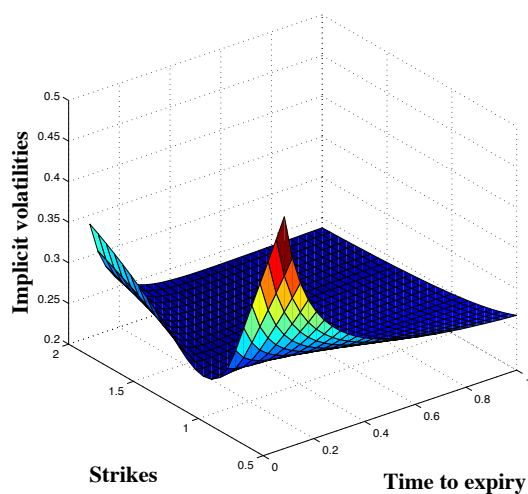
$$\mathcal{L}f(x, t) := \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{E[f(X_{t+\Delta t}, t + \Delta t) | \mathcal{F}_t] - f(x, t)}{\Delta t}, \quad (4)$$

quand la limite existe, voir Øksendal (2003). La filtration \mathcal{F} donnant l'information, est générée par X et l'information disponible en t est notée \mathcal{F}_t . X étant un processus de Markov,

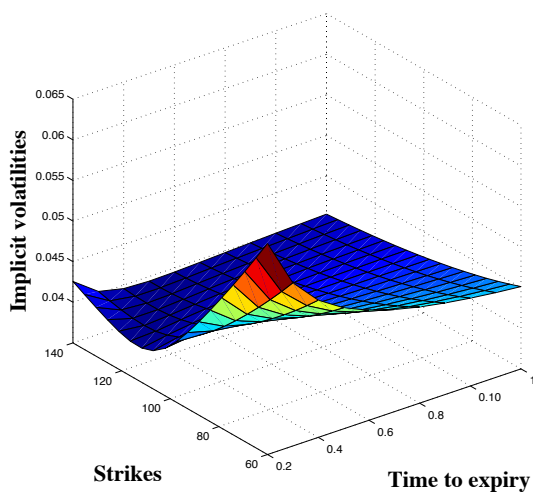
$$\mathcal{L}f(x, t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{E[f(X_{t+\Delta t}, t + \Delta t) | X_t = x] - f(x, t)}{\Delta t}.$$



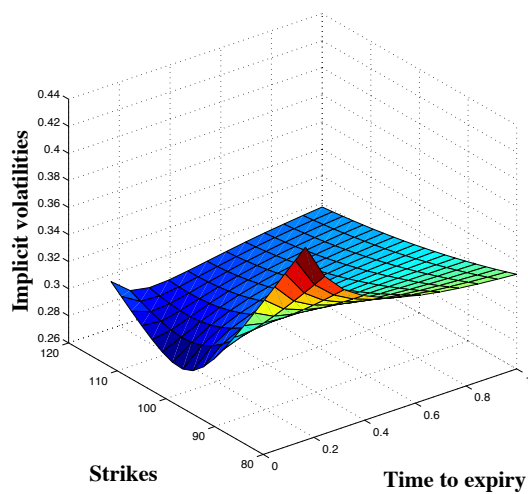
(a) Merton



(b) Kou



(c) VG



(d) CGMY

FIGURE 2 – Volatilités implicites des modèles de Merton, Kou, VG et CGMY. Les paramètres utilisés sont fournis à la Table (1).

En particulier,

$$\mathcal{L}f(x) \equiv \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{E[f(x + X_{\Delta t})] - f(x)}{\Delta t}.$$

Le générateur infinitésimal admet une représentation explicite en termes du triplet (μ, σ, ν) , donnée par

$$\mathcal{L}f(x) = \mu f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \int_{\mathbb{R}} (f(x+y) - f(x) - 1_{\{|y| \leq 1\}}(y) f'(x)) \nu(dy),$$

voir Bertoin (1996). Notons que X admet une représentation similaire en (3). Ainsi, par identification, on obtient

$$\mathcal{L}e^{ixu} = -\psi(u)e^{ixu}. \quad (5)$$

D'autre part, nous savons que si f est une fonction suffisamment régulière, alors sa transformée de Fourier \hat{f} est donnée par

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} f(x) dx.$$

L'inversion de cette transformée nous permet de déduire f , d'où résulte

$$f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \hat{f}(u) du. \quad (6)$$

À la lumière de (5), en appliquant (4) à (6), on obtient la formule suivante

$$\mathcal{L}f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} (-\psi(u)) \hat{f}(u) du,$$

que nous réécrivons

$$\mathcal{L}f(x) \equiv -\psi(D_x),$$

sous la forme d'un opérateur pseudo-différentiel (PDO) de symbole $-\psi$. Suivant Boyarchenko and Levendorskiĭ (2002a), nous pouvons

- définir, le générateur infinitésimal du processus à deux dimensions $\{X, t\}$, $\hat{\mathcal{L}}$, donné par

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv \partial_t + \mathcal{L} = \partial_t - \psi(D_x),$$

- et énoncer l'un de leurs résultats sur les opérateurs pseudo-différentiels que nous exploiterons :

$$\psi(D_x)e^x f(x) = e^x \psi(D_x - i)f(x).$$

2 Évaluation d'options

Nous donnons ici, une formule générale d'évaluation d'actifs dérivés européens sous l'hypothèse de processus de Lévy géométriques pour S . D'un point de vue technique, cela veut dire que le processus donnant le prix est modélisé à l'instant t par l'équation (1), avec X un processus de Lévy dont la fonction caractéristique est donnée en (2). Supposons un taux d'intérêt r constant dans l'économie et notons $F(\bar{S}, d, K, \tau, \gamma)$, le prix d'une option européenne de prix d'exercice K , écrite sur l'actif sous-jacent distribuant un taux de dividende continu égal à d , de valeur initiale égale à \bar{S} , où τ représente le temps restant avant échéance, avec $\gamma = 1$ pour une option d'achat ou $\gamma = -1$, pour une option de vente. Soit $g(X_T)$, le paiement à la date d'échéance T de l'actif à évaluer avec g , une fonction positive dont les propriétés seront spécifiées plus tard. En utilisant la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu,

$$F(S_t, d, K, \tau, \gamma) = E_Q [e^{-r\tau} g(X_T) | \mathcal{F}_t],$$

avec $\tau = T - t$ où Q est une mesure choisie de sorte que les processus de gains actualisés sont des martingales. Il vient donc pour tout $t > 0$

$$S_0 = E_Q [e^{-(r-d)t} S_t].$$

Ainsi, nous pouvons déduire la condition mesure martingale (EMM) suivante pour l'exposant caractéristique ψ_Q

$$r - d + \psi_Q(-i) = 0. \tag{7}$$

En utilisant l'analyse de Fourier, Boyarchenko and Levendorskiĭ (2000) donnent une formule d'évaluation que nous présentons. Quittard-Pinon and Randrianarivony (2008) ont mis en lumière que cette approche est plus satisfaisante que celle proposée par Carr and Madan (1998) dans laquelle ces derniers auteurs modifient de façon *ad hoc* les prix de l'option à évaluer en fonction du prix d'exercice à cause des raisons de singularité de l'intégrale et donc d'intégrabilité. Commençons d'abord par spécifier la transformée de Fourier \hat{g} de la fonction de paiement g . Pour cela, supposons qu'il existe un nombre réel b tel que $e^{bx}g(x)$ soit intégrable. Il vient

$$\hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x) dx,$$

qu'on peut étendre sur la ligne $\text{Im } u = b$ en sa transformée de Fourier généralisée cf. Titchmarsh (1937), Boyarchenko and Levendorskiĭ (2000) et Lewis (2001). Sans perte de généralité, considérons le payoff d'un actif contingent européen donné par la quantité suivante :

$$g(X_T) = [\gamma(S_0 e^{X_T} - K)]^+. \tag{8}$$

Dans le cas de l'option d'achat ($\gamma = 1$), la transformée de Fourier associée à g s'écrit,

$$\widehat{g}(u) = S_0 \left[\frac{e^{x(1-iu)}}{1-iu} \right]_{\ln(K/S_0)}^{+\infty} - K \left[\frac{e^{-iux}}{1-iu} \right]_{\ln(K/S_0)}^{+\infty}.$$

Elle est donc définie si et seulement si $\text{Im } u = b < -1$. Le même raisonnement pour une option de vente ouvre la voie à la généralisation suivante

$$\widehat{g}(u) = \frac{K e^{-iu \ln(K/S_0)}}{(-iu)(-iu+1)}, \quad (9)$$

avec la bande de régularité

$$\begin{aligned} b &< -1, \text{ pour } \gamma = 1 \\ b &> 0, \text{ pour } \gamma = -1. \end{aligned} \quad (10)$$

2.1 Formule d'évaluation

Davantage pour simplifier notre présentation que par nécessité, notons $F(S, t)$, le prix de l'actif contingent dont le paiement à l'échéance est donné en (8), comme une fonction de ses variables d'état S et t . Les prix actualisés étant des Q -martingales, il vient

$$\begin{aligned} F(S_t, t) &= e^{-r\tau} E_Q [g(X_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r\tau} E_Q [g(X_T - X_t + X_t) | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

X étant un processus de Markov,

$$F(S_0 e^x, t) = e^{-r\tau} E_Q [g(X_T - X_t + X_t) | X_t = x].$$

Les accroissements du processus étant indépendants et stationnaires, on a

$$F(S_0 e^x, t) = e^{-r\tau} E_Q [g(X_\tau + x)].$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse,

$$\begin{aligned} F(S_0 e^x, t) &= e^{-r\tau} \frac{1}{2\pi} E_Q \left[\int_{\mathbb{R}+ib} e^{iu(X_\tau+x)} \widehat{g}(u) du \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iux} e^{-r\tau} E_Q [e^{iuX_\tau}] \widehat{g}(u) du. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\boxed{F(S_t, d, K, \tau, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iux} e^{-\tau(r+\psi_Q(u))} \widehat{g}(u) du.} \quad (11)$$

Avec $\hat{g}(u)$ donné en (9),

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iux} e^{-\tau r} E_Q[e^{iuX_\tau}] \frac{e^{-iu \ln(K/S_0)}}{(-iu)(-iu+1)} du.$$

En regroupant les termes en x , il vient

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{-\tau r} E_Q[e^{iuX_\tau}] \frac{e^{iu(x-\ln(K/S_0))}}{(-iu)(-iu+1)} du.$$

Avec $x = \ln(S_t/S_0)$ et $\bar{x} = x - \ln(K/S_0)$, il résulte que $\bar{x} = \ln(S_t/K)$. Ainsi,

$$F(S_0 e^x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iu\bar{x}} \frac{e^{-\tau r} E_Q[e^{iuX_\tau}]}{(-iu)(-iu+1)} du,$$

que nous pouvons réécrire

$$F(S_t, d, K, \tau, \gamma) = \frac{K}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iu\bar{x}} \frac{e^{-\tau(r+\psi_Q(u))}}{(-iu)(-iu+1)} du.$$

Le changement de variable $u \rightarrow u - ib$, nous permet de réécrire la formule (11) comme suit

$$F(S_t, t) = K \frac{1}{2\pi} e^{-b\bar{x}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu\bar{x}} \frac{e^{-\tau(r+\psi_Q(u+ib))}}{(-iu+b)(-iu+b+1)} du, \quad (12)$$

avec la condition EMM (7). Cette formule donne le prix d'option associé au flux de trésorerie (8) pour une option d'achat ou de vente. La seule différence réside dans la contrainte sur le contour d'intégration (10). Comme on peut le noter à travers l'équation (12), la formule (11) ouvrirait la voie au choix de calcul numérique par transformée de Fourier rapide (FFT), comme l'étaye la section suivante.

2.2 Implémentation numérique

D'un point de vue pratique, il s'agit d'implémenter la quantité suivante

$$f(\bar{x}, t) \equiv K \frac{1}{2\pi} e^{-b\bar{x}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu\bar{x}} \frac{e^{-\tau(r+\psi_Q(u+ib))}}{(-iu+b)(-iu+b+1)} du.$$

En regroupant les termes en \bar{x} et en u , la formule (11) peut être simplifiée. Il vient

$$f(\bar{x}, t) = K \times R(\bar{x}, b) \times \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iu\bar{x}} \Psi(u, b) du, \quad (13)$$

avec

$$R(\bar{x}, b) = e^{-r\tau - b\bar{x}} \quad \text{et} \quad \Psi(u, b) = \frac{e^{-\tau\psi_Q(u+ib)}}{(-iu+b)(-iu+b+1)}.$$

Nous pouvons calculer l'intégrale ci-dessus en utilisant la méthode des rectangles avec un pas d'intégration égal à η . Soit N , un entier positif puissance de 2. Posons

$$u_j = u_{min} + \eta(j - 1) \text{ pour } j = 1, \dots, N \text{ avec } u_{min} = -\frac{N\eta}{2}.$$

Ainsi l'intégrale en (13) devient

$$f(\bar{x}, t) \cong K \times R(\bar{x}, b) \times \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N e^{i\bar{x}u_j} \Psi(u_j, b)\eta.$$

Nous pouvons aussi découper le domaine des \bar{x} avec un espacement régulier de taille Δ . Il vient donc

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{min} + \Delta(k - 1) \text{ pour } k = 1, \dots, N,$$

où \bar{x}_{min} est choisi de manière à ce que tous les contrats à évaluer soient couverts par les \bar{x}_k . La transformée de Fourier rapide retourne quasi-instantanément N valeurs pour $f(\bar{x}_k, t)$, avec

$$f(\bar{x}_k, t) \cong K \times R(\bar{x}_k, b) e^{i\Delta(k-1)u_{min}} \times \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N e^{i\Delta\eta(k-1)(j-1)} e^{i\bar{x}_{min}u_j} \Psi(u_j, b)\eta.$$

La **fft** impose une correspondance entre les paramètres Δ et η , donnée par la relation

$$\Delta\eta = \frac{2\pi}{N}.$$

Avec $N = 4096$ soit de 2^{12} et un pas d'intégration $\eta = 0.25$, la Table (1) fournit les prix des options européennes de type call et put dans un cadre général. De nos différentes expérimentations, un choix pratique du paramètre b est de -3 et de 3 , pour une option de type call et pour une option de type put, respectivement. L'influence de ce choix sur la précision des calculs est montrée à la Figure (3).

3 Couverture d'options en présence de sauts

Considérons sans perte de généralité, l'exemple d'un vendeur d'option. Dans la théorie traditionnelle d'évaluation d'option de Black-Scholes-Merton, ce dernier peut s'immuniser contre les variations de cours du titre - pouvant engendrer des pertes à l'infini⁷ - en ajustant en tout instant son portefeuille de telle sorte que sa valeur soit égale à celle de l'option vendue. Le marché est alors dit complet. En d'autres termes, la formule de Black-Scholes nous donne la composition du portefeuille répliquant, composé d'une quantité d'actif sous-jacent et d'actif sans risque telles que la variation de cours est contrebalancée par celle en actif sans risque, de telle sorte que celui-ci réplique en tout

7. Exemple de la vente d'une option d'achat, sans perte de généralité.

| Modèle : Merton | | | |
|--|----------|--------|----------|
| $S_0 = 100, \tau = 0.5, r = 5\%$ | | | |
| $\sigma = 0.16, \lambda = 1, m = -0.2, \delta = 5\%$ | | | |
| call | | put | |
| Strike | Valeur | Strike | Valeur |
| 80 | 22.96411 | 120 | 18.38050 |
| 90 | 14.87360 | 100 | 5.84588 |
| 100 | 8.31489 | 90 | 2.65150 |
| 120 | 1.34331 | 80 | 0.98890 |

| Modèle : VG | | | |
|---|-------------|--------|-------------|
| $S_0 = 100, \tau = 0.5, r = 5\%$ | | | |
| $\sigma = 0.03966, \zeta = 0.18182, \vartheta = -0.03143$ | | | |
| call | | put | |
| Strike | Valeur | Strike | Valeur |
| 80 | 21.97520 | 120 | 17.03719 |
| 90 | 12.22334 | 100 | 0.36858 |
| 100 | 2.83759 | 90 | 0.00123 |
| 120 | 2.46027e-06 | 80 | 1.06056e-06 |

| Modèle : CGMY | | | |
|---------------------------------|----------|--------|----------|
| $S_0 = 100, \tau = 1, r = 5\%$ | | | |
| $C = 1, G = 5, M = 10, Y = 0.5$ | | | |
| call | | put | |
| Strike | Valeur | Strike | Valeur |
| 80 | 27.16727 | 120 | 20.94103 |
| 90 | 20.29058 | 100 | 9.70354 |
| 100 | 14.58060 | 90 | 5.90123 |
| 120 | 6.79350 | 80 | 3.26563 |

| Modèle : Kou | | | |
|--|----------|--------|----------|
| $S_0 = 100, \tau = 0.5, r = 5\%$ | | | |
| $\sigma = 0.16, \lambda = 1, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 5, p = 0.4$ | | | |
| call | | put | |
| Strike | Valeur | Strike | Valeur |
| 80 | 23.24617 | 120 | 18.52905 |
| 90 | 14.81189 | 100 | 5.49042 |
| 100 | 7.95942 | 90 | 2.58978 |
| 120 | 1.49186 | 80 | 1.27097 |

TABLE 1 – Prix d'options européennes par des modèles de Lévy : $d = 0$.

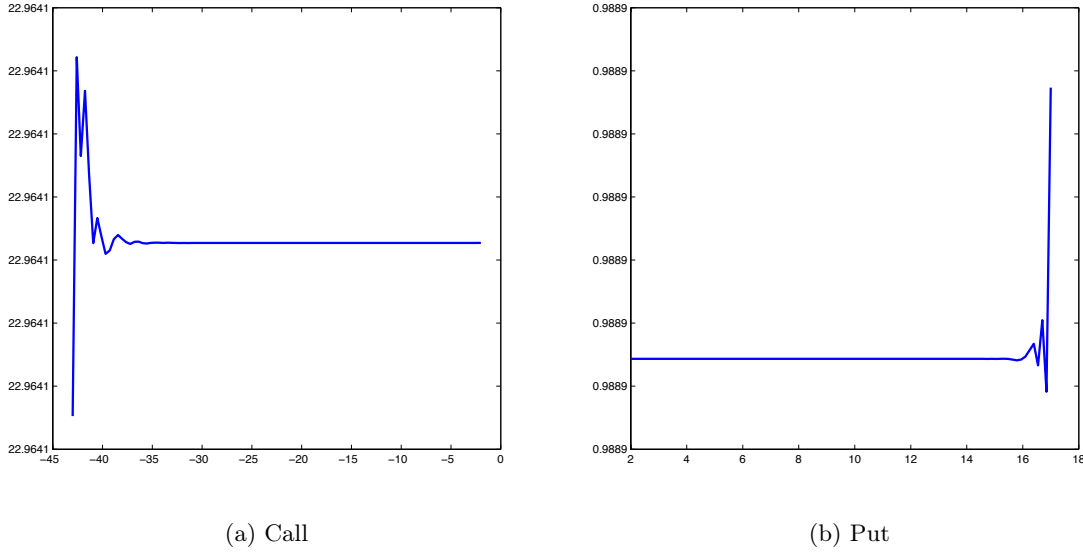


FIGURE 3 – Influence du paramètre b sur la précision du calcul des prix d'options dans le modèle de diffusion à sauts de Merton. Les paramètres utilisés sont : $S_0 = 100$, $K = 80$, $\tau = 0.5$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.16$, $\lambda = 1$, $m = -0.2$ et $\delta = 5\%$.

instant et dans tous les états de la nature l'option. En revanche, les modèles présentés jusqu'ici rejettent l'hypothèse de complétude du marché. En effet, il existe une infinité de mesures Q équivalentes, telles que les prix actualisés sont des martingales. Les prix des actifs dérivés vérifiant l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage ne peuvent donc être déterminés de façon unique. Par conséquent le marché est incomplet. Afin de clarifier ce dernier point, reprenons le raisonnement de Merton (1976). Pour cela, supposons qu'un saut de Poisson se produit dans une économie dans laquelle la dynamique réelle de l'actif sous-jacent est modélisée par

$$\begin{cases} \frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dZ & \text{s'il n'y a pas de saut} \\ \frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dZ + (Y - 1) & \text{si un saut de Poisson se produit.} \end{cases} \quad (14)$$

En effet si le saut poissonnien Y se produisait, le prix du stock passerait de S à SY . Ainsi, l'amplitude moyenne des sauts est donnée par l'espérance mathématique du pourcentage de cette variation : $(SY - S)/S$, encore égale à $Y - 1$. D'autre part, notons que le terme $(-\lambda\kappa)$ compense la perte induite par les sauts. Considérons une option dont le prix est noté $W = F(S, t)$, écrite sur un tel sous-jacent. Le rendement instantané d'une telle option obéit à une dynamique similaire à celle du sous-jacent en (14) :

$$\frac{dW}{W} = (\alpha_W - \lambda\kappa_W)dt + \sigma_W dZ + (Y_W - 1), \quad (15)$$

où α_W et σ_W^2 représentent respectivement la rentabilité et la variance instantanées de l'option. $(Y_W - 1)$ représente le pourcentage de variation du prix d'option. En supposant que la fonction $F(S, t)$ est une fonction de classe $C^{2,1}$, l'application du lemme de Itô pour les processus à sauts permet d'écrire

$$dF = \left[F_t + (\alpha - \lambda\kappa)SF_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}F_{SS} \right] dt + \sigma SF_S dZ + [F(S + S(Y - 1)) - F(S)] dN_t.$$

Les indices de F indiquent les dérivées partielles sur cette fonction. En se référant à (15), il vient par identification

$$\begin{aligned} \alpha_W &= \left[F_t + (\alpha - \lambda\kappa)SF_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}F_{SS} + \lambda E[F(SY) - F(S)] \right] / F(S, t) \quad (16) \\ \sigma_W &= \sigma SF_S / F(S, t). \end{aligned}$$

Composons un portefeuille P constitué des proportions w_1 en actif sous-jacent, w_2 en option et w_3 en actif sans risque, avec $\sum_{i=1}^3 w_i = 1$. Le prix de ce portefeuille évolue selon une dynamique similaire à celle du sous-jacent avec le même paramètre d'arrivée de sauts

$$\frac{dP}{P} = (\alpha_P - \lambda\kappa_P)dt + \sigma_P dZ + (Y_P - 1).$$

En nous référant aux dynamiques (14 et 15), nous obtenons par identification :

$$\alpha_p = w_1(\alpha - r) + w_2(\alpha_W - r) + r \quad (17)$$

$$\sigma_p = w_1\sigma + w_2\sigma_W \quad (18)$$

$$Y_p - 1 = w_1(Y - 1) + w_2E[F(SY) - F(S)] / F(S, t) \quad (19)$$

Notons que si $\lambda = 0$, alors la rentabilité du portefeuille peut être rendue sans risque en choisissant $w_1 = w_1^*$ et $w_2 = w_2^*$ tels que $w_1^* + w_2^* = 0$. Ce portefeuille étant sans risque, pour éviter l'absence d'opportunité d'arbitrage, sa rentabilité est égale au taux sans risque. En utilisant les équations (17 et 18), on obtient la relation suivante

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha_w - r}{\sigma_w}. \quad (20)$$

En servant de l'équation (16, avec $\lambda = 0$) et de (20), on obtient aisément l'équation fondamentale de Black et Scholes :

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2}F_{SS} + rSF_S + -rF + F_t = 0.$$

Cependant, remarquons qu'en présence de sauts ($\lambda \neq 0$), la rentabilité du portefeuille avec les allocations w_1^* et w_2^* n'est plus sans risque. D'ailleurs, l'analyse au plus près de la formule (19) montre qu'il n'existe aucun couple (w_1, w_2) qui élimine le risque de saut ou qui - plus précisément - annule l'équation (19) notamment pour $Y_p = 1$. La raison

principale est que ce portefeuille est une combinaison linéaire de poids w_i au moment où le prix d'option est une fonction non linéaire de l'actif sous-jacent. Néanmoins Merton propose une stratégie de couverture en delta et la justifie par la détention d'une large quantité d'actifs sous-jacents dont les composantes de diffusion sont corrélées entre elles⁸, au moment où les composantes de sauts sont indépendantes de celles de diffusion et donc diversifiables. En d'autres termes, un large marché de portefeuilles diversifiés comme par exemple les indices boursiers français CAC 40 ou américain S&P 500, ne présenteraient pas de sauts. Une telle approche ne rentre pas en adéquation avec la réalité où l'on observe de grandes variations abruptes résultant - par conséquent - de sauts très corrélés. La réplication n'est pas possible, il faut donc se résoudre à trouver une approximation du flux de paiement final auquel est exposé le vendeur d'option par une stratégie.

En utilisant une formule de Itô pour des processus à sauts, nous illustrons une solution à travers un modèle de diffusion à sauts qui - comme on le verra - coïncide avec celle de Cont and Tankov (2004).

3.1 Le ratio de couverture optimale

Supposons que la dynamique de l'actif sous-jacent S suit un modèle diffusif à sauts. Il résulte que le processus de prix évolue suivant l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \underbrace{\mu dt + \sigma dZ_t}_{\text{diffusion}} + \underbrace{(J - 1)dN_t}_{\text{sauts}}, \quad (21)$$

avec $J = e^x$ où x est un nombre aléatoire donnant la taille des sauts ; σ , le coefficient de diffusion ; Z , un mouvement brownien standard ; S_{t-} , le prix à l'instant t de l'actif sous-jacent avant l'arrivée des sauts et N , un processus de Poisson défini comme suit

$$dN_t = \begin{cases} 0 & \text{de probabilité } 1 - \lambda dt \\ 1 & \text{de probabilité } \lambda dt. \end{cases}$$

Autrement dit, en considérant une fenêtre d'observation petite $(t, t + dt)$, le processus N ne saute pas plus d'une fois avec une probabilité λdt . L'accroissement instantané est alors une variable de Bernoulli de paramètre λdt . Considérons un investisseur détenant au temps t un portefeuille W_t composé d'une position longue d'une unité d'option et d'une position courte de θ_t sur S_t . De manière équivalente,

$$W_t = F(S_t, t) - \theta_t S_t.$$

En utilisant la formule de Itô, la variation instantanée du portefeuille est donnée par

$$dW_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t}{2} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\frac{\partial F}{\partial S_t} - \theta_t \right) (\mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t) + (F(JS_t, t) - F(S_t, t) - \theta_t(J - 1)S_t) dN_t.$$

8. assimilables au risque systémique.

En regroupant les termes, il vient

$$dW_t = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t}{2} + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} + \frac{\partial F}{\partial S_t} \mu S_t - \theta_t \mu S_t \right) dt + \left(\frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma S_t - \theta_t \sigma S_t \right) dZ_t \\ + (F(JS_t, t) - F(S_t, t) - \theta_t(J-1)S_t) dN_t.$$

En utilisant l'isométrie de Itô pour les intégrales stochastiques, la variance instantanée conditionnellement à l'information disponible en t est donnée par

$$Var[dW_t] = \lambda E \left[(F(JS_t, t) - F(S_t, t) - \theta_t(J-1)S_t)^2 \right] dt \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial S_t} - \theta_t \right)^2 \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Afin de minimiser cette quantité, nous la dérivons par la variable d'intérêt θ_t , d'où résulte

$$\frac{\partial Var[dW_t]}{\partial \theta_t} = \lambda E \left[-2(J-1)S_t (F(JS_t, t) - F(S_t, t) - \theta_t(J-1)S_t) \right] dt \\ + 2\theta_t S_t^2 \sigma^2 dt - 2\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial F}{\partial S_t} dt.$$

En ramenant cette dérivée à zéro, on obtient

$$\theta_t = \frac{\lambda E \left[(J-1)(F(JS_t, t) - F(S_t, t)) \right] + \sigma^2 S_t \frac{\partial F}{\partial S_t}}{\lambda S_t^2 E[(J-1)^2] + \sigma^2 S_t}. \quad (22)$$

En d'autres termes, partant d'un processus de diffusion à sauts (21), l'immunisation du portefeuille contre une variation instantanée (locale), revient à détenir ex ante une position courte égale à (22) sur l'actif sous-jacent. En remarquant que dans le cas des processus de diffusion, la mesure de Lévy est finie, celle-ci s'écrit donc sous la forme de

$$\nu(x) = \lambda \times \text{densité des sauts.}$$

Avec $J = e^x$, l'expression suivante découle naturellement

$$\theta_t = \frac{\frac{1}{S_t} \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1) (F(S_t e^x, t) - F(S_t, t)) \nu(dx) + \sigma^2 \frac{\partial F}{\partial S_t}}{\int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 \nu(dx) + \sigma^2}. \quad (23)$$

Nous obtenons ainsi une formule qui coïncide avec celle de Cont and Tankov (2004), p.335, via une approche différente. Par conséquent, la formule (23) est en fait très générale et s'interprète de la même manière suivant que le processus de Lévy est à activité finie ou infinie.

Par ailleurs, remarquons que pour un processus de Lévy pur, i.e., en annulant le coefficient de diffusion, il vient aisément

$$\theta_t^{Jump} \equiv \frac{\bar{\theta}_t^{Jump}}{\theta_t^{Jump}} = \frac{\frac{1}{S_t} \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1) (F(S_t e^x, t) - F(S_t, t)) \nu(dx)}{\int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 \nu(dx)}. \quad (24)$$

Comme nous l'avons souligné dans notre introduction, le ratio de couverture optimale suggéré par Cont and Tankov (2004) est - du point de vue technique - similaire à ceux obtenus par Riesner (2006) et Vandaele and Vanmaele (2008). Ils partagent tous une structure commune rendant l'implémentation difficile. Cette quantité, notée $\bar{\theta}_t^{Jump}$, est donnée par

$$\bar{\theta}_t^{Jump} = \frac{1}{S_t} \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)(F(S_t e^x, t) - F(S_t, t)) \nu(dx). \quad (25)$$

En effet, de cette expression, $\int_{\mathbb{R}} F(S_t e^x, t) e^x \nu(dx)$ s'interprète comme l'intégration du prix d'option sous toute la distribution de la taille aléatoire des sauts, et dont la solution est une problématique non évidente. Cependant, en utilisant un résultat de Hille and Phillips (1957), nous suggérons à la section suivante une solution par développement en séries de Fourier, qui aboutit à une implémentation simple.

4 Une autre solution : approche unifiée

Notons que si le coefficient de diffusion est nul dans l'expression (3), l'exposant caractéristique d'un processus de Lévy pur, noté ψ^{Jump} , est donné par

$$\psi^{Jump}(u) = - \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux 1_{|x|<1}) \nu(dx).$$

En ajoutant et en retranchant $\int_{\mathbb{R}} F(S_t, t) \nu(dx)$ de la quantité d'intérêt (25), il vient

$$\begin{aligned} S_t \bar{\theta}_t^{Jump} &= \int_{\mathbb{R}} F(S_t e^x, t) e^x \nu(dx) - \int_{\mathbb{R}} F(S_t, t) \nu(dx) - \int_{\mathbb{R}} F(S_t e^x, t) \nu(dx) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} F(S_t, t) \nu(dx) - \int_{\mathbb{R}} F(S_t, t) (e^x - 1) \nu(dx). \end{aligned}$$

De façon équivalente, on a

$$\begin{aligned} S_t \bar{\theta}_t^{Jump} &= \int_{\mathbb{R}} (F(S_t e^x, t) e^x - F(S_t, t)) \nu(dx) - \int_{\mathbb{R}} (F(S_t e^x, t) - F(S_t, t)) \nu(dx) \\ &\quad - F(S_t, t) \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1) \nu(dx), \end{aligned}$$

que nous pouvons réécrire comme suit

$$\begin{aligned} S_t^2 \bar{\theta}_t^{Jump} &= E[F(S_t e^x, t) S_t e^x - F(S_t, t) S_t | \mathcal{F}_t] - S_t E[F(S_t e^x, t) - F(S_t, t) | \mathcal{F}_t] \\ &\quad - F(S_t, t) E[(S_t e^x - S_t) | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, suivant Hille and Phillips (1957), Chap.11, et comme le note Stanton (1997), l'espérance conditionnelle peut être écrite sous la forme d'un développement en séries de Taylor. En particulier,

$$E[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) | \mathcal{F}_t] = F(S_t, t) + \hat{\mathcal{L}}F(S_t, t) \Delta t + o(\Delta t),$$

où $\hat{\mathcal{L}}$ est le générateur infinitésimal à deux dimensions défini à la section (1.2). De manière équivalente,

$$E[F(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - F(S_t, t) | \mathcal{F}_t] = \hat{\mathcal{L}}F(S_t, t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Ainsi,

$$S_t^2 \bar{\theta}_t^{Jump} = \hat{\mathcal{L}}(F(S_t, t)S_t)\Delta t - S_t \hat{\mathcal{L}}(F(S_t, t))\Delta t + S_t F(S_t, t) \psi^{Jump}(-i)\Delta t + o(\Delta t),$$

ce qui nous donne

$$S_t^2 \bar{\theta}_t^{Jump} = \mathcal{L}(F(S_t, t)S_t)\Delta t - S_t \mathcal{L}(F(S_t, t))\Delta t + S_t F(S_t, t) \psi^{Jump}(-i)\Delta t + o(\Delta t),$$

où la troisième expression dans l'égalité de droite de l'expression ci-dessous vient d'un développement de Taylor au voisinage de $\Delta t = 0$ et où $F(S_t, t)$ est donné par la formule (11). En reprenant les mêmes arguments qu'à la section (1.2),

$$S_t^2 \bar{\theta}_t^{Jump} = S_t \Delta t (-\psi^{Jump}(D_x - i) + \psi^{Jump}(D_x) + \psi^{Jump}(-i))F(S_t, t) + o(\Delta t).$$

Ainsi, nous obtenons un développement en séries de Fourier

$$\bar{\theta}_t^{Jump} = \frac{\Delta t}{2\pi S_t} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iux} e^{-\tau(r+\psi_Q(u))} \hat{g}(u) \mathcal{A}^{Jump}(u) du + o(\Delta t),$$

où

$$\mathcal{A}^{Jump}(u) = -\psi^{Jump}(u - i) + \psi^{Jump}(u) + \psi^{Jump}(-i). \quad (26)$$

De même, considérons la quantité $\underline{\theta}_t^{Jump}$ donnée au dénominateur de l'équation (24). Il vient également

$$S_t^2 \underline{\theta}_t^{Jump} = E[(S_t e^x - S_t)^2 | \mathcal{F}_t].$$

En utilisant le développement de Taylor, l'équation ci-dessous peut être écrite en fonction d'exposants caractéristiques ψ^{Jump} , d'où résulte

$$\underline{\theta}_t^{Jump} = (-\psi^{Jump}(-2i) + 2\psi^{Jump}(-i)) \Delta t + o(\Delta t).$$

En passant à la limite $\Delta t \rightarrow 0^+$, (24) tend vers

$$\theta_t^{Jump} = \frac{1}{2\pi S_t} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iux} e^{-\tau(r+\psi_Q(u))} \hat{g}(u) \mathcal{B}^{Jump}(u) du, \quad (27)$$

avec

$$\mathcal{B}^{Jump}(u) = \frac{\mathcal{A}^{Jump}(u)}{-\psi^{Jump}(-2i) + 2\psi^{Jump}(-i)}, \quad (28)$$

et avec $\mathcal{A}^{Jump}(u)$ donné en (26).

5 Illustration : θ , un ratio de crédibilité

Notons que le résultat obtenu en (27), cf. Kélani (2015), est d'une grande importance. Il permet l'implémentation simple et rapide des ratios suggérés par Riesner (2006), Vandaele and Vanmaele (2008), Cont and Tankov (2004) et bien plus encore. Sans perte de généralité, nous illustrerons sa portée en travaillant avec le ratio de couverture optimale donné en (23), afin de suggérer une formule concise et crédible se prêtant à une implémentation par transformée de Fourier rapide. Rappelons que

$$\theta_t = \frac{\frac{1}{S_t} \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1) (F(S_t e^x, t) - F(S_t, t)) \nu(dx) + \sigma^2 \frac{\partial F}{\partial S_t}}{\int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 \nu(dx) + \sigma^2}.$$

Notons que ce ratio peut être réécrit en de fonction de $\frac{\partial F}{\partial S_t}$ et de θ_t^{Jump} . Il vient

$$\boxed{\theta_t = \alpha \Delta + (1 - \alpha) \theta_t^{Jump}}, \quad (29)$$

où $\Delta \equiv \frac{\partial F}{\partial S_t}$ est la sensibilité de l'actif contingent à une variation du sous-jacent et θ_t^{Jump} , la sensibilité moyenne par rapport aux sauts de taille finie, avec

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{\int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 \nu(dx) + \sigma^2}.$$

Ainsi, le ratio de couverture optimale est une fonction linéaire de $\frac{\partial F}{\partial S_t}$ et de θ_t^{Jump} . L'équation (29) se prête à une interprétation très intuitive. En effet, quand il n'y pas de diffusion de sorte que le coefficient de diffusion est nul, α est égal à 0 tandis qu'à l'extrême, lorsque le sous-jacent ne présente aucun saut, α est cette fois-ci égal à 1. Remarquons que le ratio dans l'équation (29) peut être interprété comme un ratio de **crédibilité** au moment où $\alpha \in [0, 1]$ s'interprète comme un facteur de crédibilité. En d'autres termes, le ratio de couverture optimale est le barycentre de deux stratégies de couverture particulières, notamment du Δ lorsque la trajectoire du sous-jacent présente une pure diffusion et du θ_t^{Jump} lorsque celle-ci est purement à sauts. Plus précisément, plus la variation quadratique de la taille de la diffusion σ^2 est grande, plus ce poids α est élevé, i.e., la sensibilité de l'option par rapport au sous-jacent est largement entraînée par le coefficient de diffusion où une bonne crédibilité est attachée au ratio Δ . De même, plus la variation quadratique de la taille des sauts $\int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 \nu(dx)$ est importante, élevé est ce poids où une bonne crédibilité est attachée à θ_t^{Jump} .

D'autre part, puisqu'une simple dérivée permet d'obtenir

$$\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} = \frac{1}{2\pi S_t} \int_{\mathbb{R}+ib} (iu) e^{iux} e^{-\tau(r+\psi_Q(u))} \hat{g}(u) du,$$

alors, l'équation (29) pourra être exprimée comme suit

$$\theta_t = \frac{1}{2\pi S_t} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iux} e^{-\tau(r+\psi_Q(u))} \mathcal{B}(u) \hat{g}(u) du,$$

avec

$$\mathcal{B}(u) = \alpha(iu) + (1 - \alpha)\mathcal{B}^{Jump}(u),$$

où $\mathcal{B}^{Jump}(u)$ est donné en (28). On note également que $\mathcal{B}(u)$ est une combinaison linéaire du facteur iu venant du ratio Δ et du facteur $\mathcal{B}^{Jump}(u)$ provenant du ratio θ^{Jump} . On peut montrer que le ratio de crédibilité s'exprime en fonction de l'exposant caractéristique ψ^{Jump} , d'où résulte

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{-\psi^{Jump}(-2i) + 2\psi^{Jump}(-i) + \sigma^2}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{B}(u) = \frac{-\psi^{Jump}(u - i) + \psi^{Jump}(u) + \psi^{Jump}(-i) + \sigma^2 iu}{-\psi^{Jump}(-2i) + 2\psi^{Jump}(-i) + \sigma^2}.$$

De même, après un calcul fastidieux mais qu'on vérifie aisément, on montre que $\mathcal{B}(u)$ se réécrit comme une fonction de ψ via le résultat suivant

$$-\psi^{Jump}(u - i) + \psi^{Jump}(u) + \psi^{Jump}(-i) + \sigma^2 iu = -\psi(u - i) + \psi(u) + \psi(-i),$$

d'où résulte

$$-\psi^{Jump}(-2i) + 2\psi^{Jump}(-i) + \sigma^2 = -\psi(-2i) + 2\psi(-i).$$

Finalement, le ratio de couverture optimale en (23) pourra être évalué en utilisant la formule suivante

$$\theta_t = \frac{1}{2\pi S_t} \int_{\mathbb{R}+ib} e^{iux} e^{-\tau(r+\psi_Q(u))} \mathcal{B}(u) \widehat{g}(u) du, \quad (30)$$

où

$$\mathcal{B}(u) = \frac{-\psi(u - i) + \psi(u) + \psi(-i)}{-\psi(-2i) + 2\psi(-i)}, \quad (31)$$

avec la condition EMM (7). L'un des avantages à travailler dans l'espace de Fourier est que la formule (30) permet une factorisation élégante. En d'autres termes, au facteur $(1/S_t)$ près, la seule quantité qu'apporte la couverture par rapport à la formule d'évaluation est la quantité $\mathcal{B}(u)$. Ainsi, si le portefeuille de couverture est minimisé dans une mesure de probabilité particulière telle que la mesure historique comme le suggèrent Riesner (2006), Vandaele and Vanmaele (2008), Coleman et al. (2007) et Kélani and Quittard-Pinon (2015), alors, le seul ajustement nécessaire est le calcul de la quantité (31) dans cet univers. De même, notons qu'aux facteurs S et \mathcal{B} près, la formule donnant le ratio de couverture peut être calculée rapidement et quasi-instantanément en utilisant le même schéma que celui qui a servi d'évaluation en (11) par la transformée de Fourier rapide, ce qui unifie la méthodologie d'évaluation et celle de la couverture. Bien plus encore, rappelons que la formule (30) est valide pour un call et pour un put avec le choix de b donné en (10).

5.1 Le cas du modèle de diffusion à sauts de Merton

Lorsque la dynamique du processus sous-jacent suit un modèle de diffusion à sauts de Merton, le ratio de Cont and Tankov (2004) donné en (23) peut être calculé de manière quasi-explicite. Ce qui nous permet de faire une première comparaison avec l'approche que nous suggérons en (30). Le résultat suivant donne de manière compacte ce ratio dans le cadre de ce modèle.

Proposition 1. *Soient κ , Σ , S_n et σ_n , des quantités telles que $\kappa = e^{m+\frac{\delta^2}{2}} - 1$, $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$, $S_n = Se^{nm+\frac{n\delta^2}{2}-\lambda\kappa\tau}$, $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}}$, $n \geq 0$, et soit $F_M(\tau, S, \sigma, \gamma)$, la formule de Merton (1976) légèrement étendue où le paramètre γ permet de retourner un call ou un put suivant qu'il vaut 1 ou -1 , respectivement. Alors, le ratio calculé par Cont and Tankov (2004) peut être exprimé comme*

$$\begin{aligned} \Lambda \equiv & \left\{ \sigma^2 \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \left(\gamma \frac{S_n}{S} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \right) \right. \\ & + \frac{1}{S} \left(\lambda e^{m+\frac{\delta^2}{2}} F_M(\tau, Se^{m+\frac{3\delta^2}{2}}, \Sigma, \gamma) - \lambda F_M(\tau, Se^{m+\frac{\delta^2}{2}}, \Sigma, \gamma) \right. \\ & \left. \left. - \lambda (e^{m+\frac{\delta^2}{2}} - 1) F_M(\tau, S, \sigma, \gamma) \right) \right\} \times \left\{ \sigma^2 + \lambda [e^{2m+2\delta^2} - 2e^{m+\frac{\delta^2}{2}} + 1] \right\}^{-1}, \quad (32) \end{aligned}$$

où

$$F_M(\tau, S, \sigma, \gamma) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} F_{BS}(\tau, S_n, \sigma_n, \gamma),$$

et où

$$F_{BS}(\tau, S_n, \sigma_n, \gamma) = \gamma S_n \mathcal{N} \left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) - \gamma K e^{-r\tau} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right),$$

est la formule de Black and Scholes (1973) également étendue via le paramètre γ avec $\mathcal{N}(\cdot)$, la fonction de répartition d'une distribution gaussienne standard.

Preuve. Gabriel and Surlas (2006) ont donné une preuve dans le cas d'une option call. Nous donnons en annexe (A.1), une preuve plus générale via le paramètre γ . \square

Les erreurs absolues constatées entre θ et Λ sont données à la Table (2). Les Figures (4a et 4b) illustrent cette différence. On peut noter la précision du ratio θ en (30) avec un avantage important pour ce dernier. Cet avantage découle du fait que celui-ci s'obtient quasi-instantanément, cf. Table (3), pour tout processus de Lévy dont l'exposant caractéristique est bien défini. On peut également noter que le ratio θ est plus stable que le ratio Δ , cf. Figures (5 et 6).

| call ($\gamma = 1$) | | | put ($\gamma = -1$) | | |
|--------------------------|----------|--|--------------------------|----------|--|
| S_0 | θ | $ \theta - \Lambda $ erreur absolue | S_0 | θ | $ \theta - \Lambda $ erreur absolue |
| 120 | 0.91404 | 1.44328e-15 | 80 | -0.86806 | 1.99840e-15 |
| 100 | 0.61819 | 1.22124e-15 | 90 | -0.63912 | 2.44249e-15 |
| 90 | 0.36088 | 1.33226e-15 | 100 | -0.38181 | 5.55111e-16 |
| 80 | 0.13193 | 5.27355e-16 | 120 | -0.08595 | 2.35922e-16 |

TABLE 2 – Comparaison du ratio θ donné par la formule (30) obtenue par la FFT par rapport au ratio Λ obtenu par la formule (32) dans une économie de Merton. Les paramètres utilisés sont $K = 98$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.2$, $\lambda = 1$, $m = -0.1$, $\delta = 5\%$ et $\tau = 0.5$.

| Modèles | FFT ($N = 4096$) |
|---|--------------------|
| Merton Kou Variance Gamma CGMY | $\simeq 0.008$ s |

TABLE 3 – Performance de la FFT en secondes pour le calcul de N ratios θ .

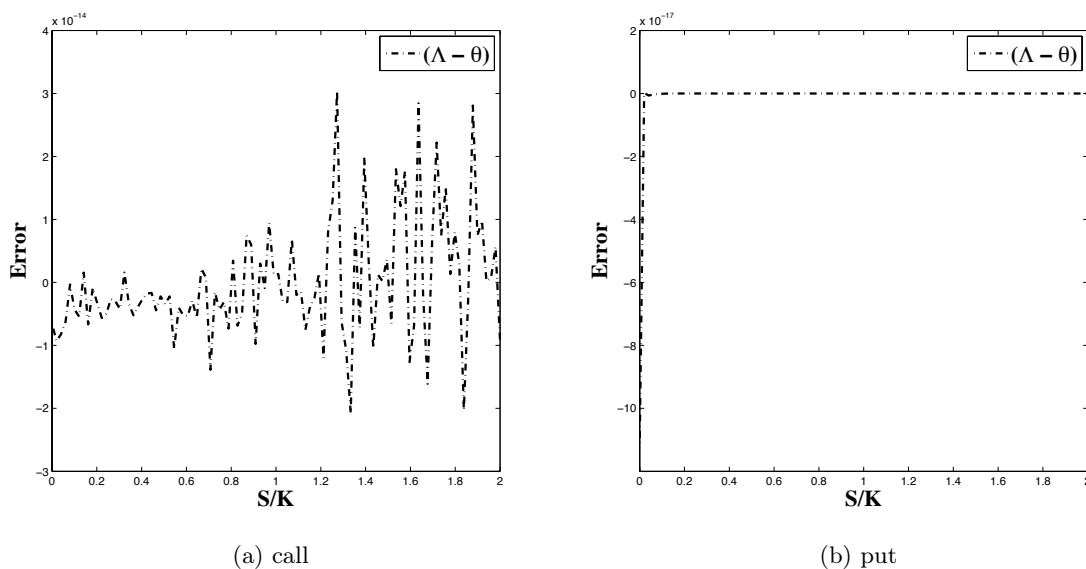


FIGURE 4 – Difference $(\Lambda - \theta)$ dans le modèle à sauts de Merton.

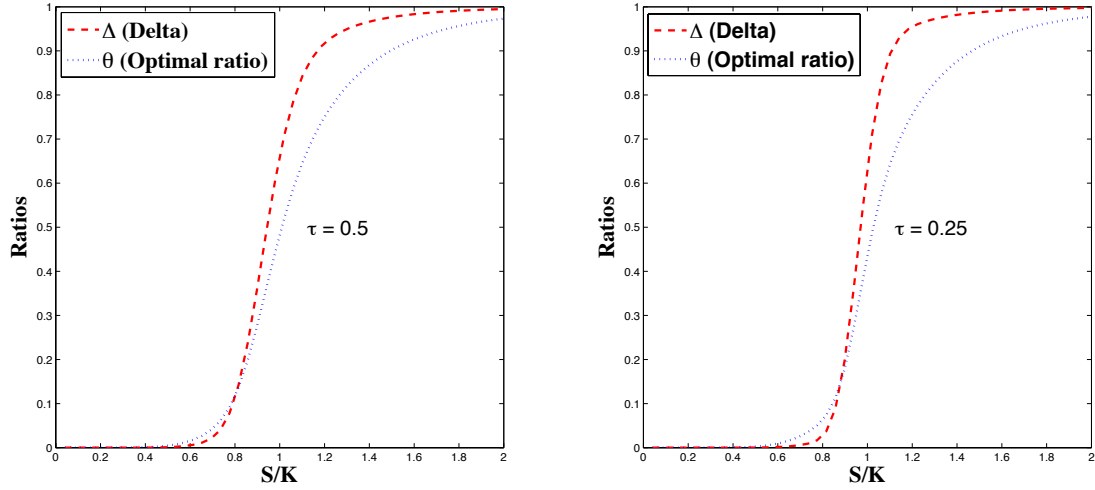


FIGURE 5 – Différence entre les ratios Δ et θ dans le modèle de Kou avec $\lambda = 1$, $p = 0.3$, $\sigma = 0.16$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$ et $r = 5\%$.

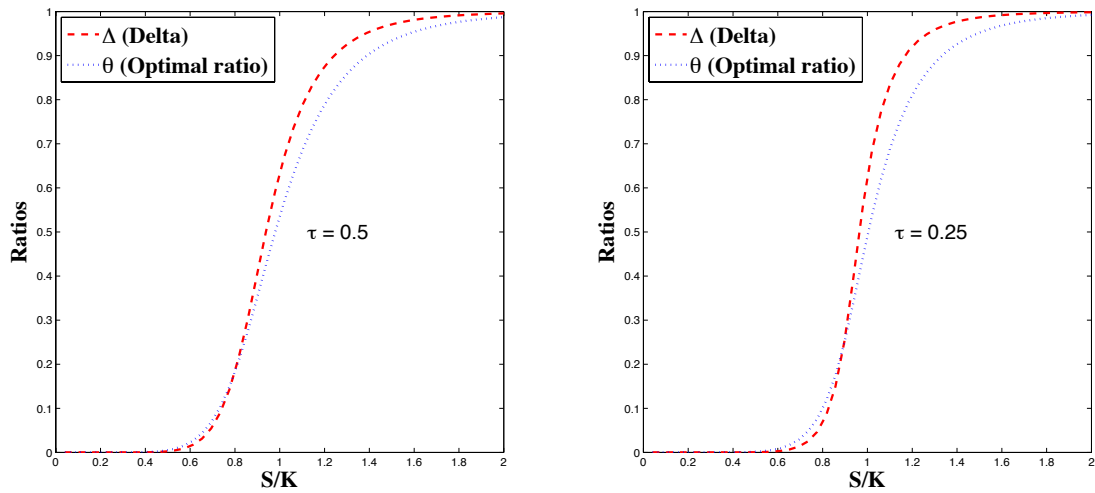


FIGURE 6 – Différence entre les ratios Δ et θ ratios dans le modèle de CGMY avec $C = 1$, $G = 5$, $M = 10$, $Y = 0.5$ et $r = 5\%$.

Conclusion

Cette partie suggère dans un cadre non-gaussien, une méthodologie unifiée pour l'évaluation et la couverture qui allie performance et opérationnalité. Elle répond aux soucis des praticiens souhaitant avoir une méthodologie unie pour la gestion rigoureuse de risques financiers extrêmes. De même, en raison de son efficacité, celle-ci pourrait être recommandée comme part du système global de gestion de risque non seulement dans le domaine de la Banque mais aussi dans le secteur de l'Assurance.

Annexe A

A.1 Preuve de la Proposition 1

Partons du ratio Λ de Cont and Tankov (2004), que nous réécrivons comme suit

$$\Lambda \equiv \frac{\sigma^2 \frac{\partial F_M}{\partial S}(\tau, S, \sigma, \gamma) + \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_M(\tau, S e^x, \sigma, \gamma) - F_M(\tau, S, \sigma, \gamma)] (e^x - 1) \nu(dx)}{\sigma^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1)^2 \nu(dx)}.$$

Dans une économie à saut de Merton, la mesure de Lévy $\nu(dx)$ associée est donnée par

$$\nu(dx) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}\right) dx.$$

Notons que l'implémentation du ratio Λ n'est pas immédiate, bien que

- le terme au dénominateur s'obtient directement par la transformée de Laplace d'une variable aléatoire gaussienne, d'où résulte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - 1)^2 \nu_X(dx) = \lambda [e^{2m+2\delta^2} - 2e^{m+\frac{\delta^2}{2}} + 1],$$

- et que

$$\frac{\partial F_M}{\partial S}(\tau, S, \sigma, \gamma) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \left\{ \gamma \frac{S_n}{S} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}}\right) \right\},$$

est aisément obtenue.

Le calcul des composantes restantes nécessite des résultats intermédiaires que nous énonçons.

Lemme A.1.1. *Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{N}(m, \delta^2)$, alors pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma \in \{-1, 1\}$ et $\eta \geq 0$,*

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta\delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{\alpha + m + \eta\delta^2}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\eta x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \gamma \frac{x + \alpha}{\beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\delta^2}}}{\sqrt{2\pi\delta^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\eta x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\eta y < \gamma \frac{\eta x + \eta \alpha}{\beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\delta^2}}}{\sqrt{2\pi\delta^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\eta y < \gamma \frac{x + \eta \alpha}{\beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\eta m)^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \gamma \frac{x + \eta \alpha}{\eta \beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\eta m)^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dx,
\end{aligned}$$

il vient,

$$\begin{aligned}
E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] &= e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \gamma \frac{x + \eta \alpha}{\eta \beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (\eta m + (\eta \delta)^2))^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dx \\
&= e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{y < \gamma \frac{x + \eta \alpha}{\eta \beta}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - (\eta m + (\eta \delta)^2))^2}{(\eta \delta)^2}}}{\sqrt{2\pi(\eta \delta)^2}} dy dx.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} E\left[1_{Y < \gamma \frac{x + \eta \alpha}{\eta \beta}}\right],$$

où $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est indépendante de $X \sim \mathcal{N}(\eta m + (\eta \delta)^2, (\eta \delta)^2)$. Avec $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et en remarquant que les événements $\{\eta \beta Y - \gamma X\}$ et $\{-\gamma(\eta m + (\eta \delta)^2) + \sqrt{(\eta \beta)^2 + (\eta \delta)^2} \epsilon\}$ sont identiques en distribution, on obtient

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{\eta \alpha + (\eta m + (\eta \delta)^2)}{\sqrt{(\eta \beta)^2 + (\eta \delta)^2}}\right),$$

d'où résulte

$$E\left[e^{\eta X} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{X + \alpha}{\beta}\right)\right] = e^{\eta m + \frac{(\eta \delta)^2}{2}} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{\alpha + m + \eta \delta^2}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}\right), \quad \forall \gamma \in \{-1, 1\}.$$

□

Lemme A.1.2. On peut montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(\tau, Se^x, \sigma, \gamma) e^x \nu_X(dx) = \lambda e^{m + \frac{\delta^2}{2}} F_M(\tau, Se^{m + \frac{3\delta^2}{2}}, \Sigma, \gamma),$$

Preuve.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(\tau, S e^x, \sigma, \gamma) e^x \nu_X(dx) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} E_Q[F_{BS}(\tau, S_n e^X, \sigma_n, \gamma) e^X].$$

Or,

$$\begin{aligned} E[F_{BS}(\tau, S_n e^X, \sigma_n, \gamma) e^X] &= \gamma S_n E_Q \left[e^{2X} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{X + \ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \right] \\ &\quad - \gamma K e^{r\tau} E_Q \left[e^X \mathcal{N} \left(\gamma \frac{X + \ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \right) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme A.1.1,

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} E[F_{BS}(\tau, S_n e^X, \sigma_n, \gamma) e^X] &= \gamma S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{(m+2\delta^2) + \ln \frac{S_n}{K} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right) \\ &\quad - \gamma e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{m + \delta^2 + \ln \frac{S_n}{K} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right). \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant $\frac{\delta^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} E[F_{BS}(\tau, S_n e^X, \sigma_n, \gamma) e^X] &= \gamma S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{(m+2\delta^2) + \ln \frac{S_n}{K} - \frac{\delta^2}{2} + (r + \frac{\sigma_n^2}{2} + \frac{\delta^2}{2\tau})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right) \\ &\quad - \gamma e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{m + \delta^2 + \ln \frac{S_n}{K} + \frac{\delta^2}{2} + (r - \frac{\sigma_n^2}{2} - \frac{\delta^2}{2\tau})\tau}{\sqrt{(\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau})\tau}} \right). \end{aligned}$$

Avec $\Sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$, il vient

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \sigma_n, \gamma) e^X] &= \gamma S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n}{K} + m + \frac{3\delta^2}{2} + \left(r + \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right) \\ &\quad - \gamma e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N} \left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n}{K} + m + \frac{3\delta^2}{2} + \left(r - \frac{\Sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}} \right). \end{aligned}$$

De manière équivalente,

$$\begin{aligned} & \lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \sigma_n, \gamma) e^X] \\ &= \gamma S_n e^{2m+2\delta^2} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}}{K} + \left(r + \frac{\Sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}}\right) \\ & \quad - \gamma e^{m+\frac{\delta^2}{2}} K e^{r\tau} \mathcal{N}\left(\gamma \frac{\ln \frac{S_n e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}}{K} + \left(r - \frac{\Sigma_n^2}{2}\right) \tau}{\sqrt{\Sigma_n^2 \tau}}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda^{-1} E[F_{BS}(t, S_n e^X, \sigma_n, \gamma) e^X] = F_{BS}(\tau, S_n e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}, \Sigma_n, \gamma).$$

Avec $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^2}{\tau}}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(\tau, S e^x, \sigma, \gamma) e^x \nu_X(dx) = \lambda e^{m+\frac{\delta^2}{2}} F_M(\tau, S e^{m+\frac{3\delta^2}{2}}, \Sigma, \gamma),$$

où

$$F_M(\tau, S, \Sigma, \gamma) = \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} F_{BS}(\tau, S_n, \Sigma_n, \gamma),$$

ce qui met fin à cette preuve. □

En utilisant le Lemme A.1.1 ainsi qu'un raisonnement similaire à celui ci-dessus, on montre aisément que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(\tau, S e^x, \sigma, \gamma) \nu_X(dx) = \lambda F_M(\tau, S e^{m+\frac{\delta^2}{2}}, \Sigma, \gamma).$$

Par ailleurs, on peut noter que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_M(\tau, S, \sigma, \gamma) (e^x - 1) \nu_X(dx) = \lambda (e^{m+\frac{\delta^2}{2}} - 1) F_M(\tau, S, \sigma, \gamma),$$

ce qui permet d'obtenir le résultat à la Proposition 1.

Partie II :
Couverture optimale des garanties
de type *Variable Annuities* en
présence de risques financiers
extrêmes

Évaluation et couverture des garanties VA en présence de risques financiers extrêmes

L'objet de cette partie est de suggérer un cadre général pour l'évaluation et la couverture des garanties de type *Variable Annuities* (VAs) en présence de risques financiers extrêmes. Les VAs sont des contrats d'assurance-vie caractérisés par un lien explicite avec les marchés. Ils permettent à leurs souscripteurs de bénéficier des mouvements haussiers des marchés, tout en étant immunisés contre une baisse de performance boursière. Ces contrats peuvent comporter des garanties plancher en cas de décès et en cas de vie. Elles permettent au bénéficiaire de recevoir avec certitude un montant minimal fixé à la souscription du contrat, i.e., une proportion des cotisations investies ou celle de l'épargne acquise si celle-ci est supérieure et ce, quelle que soit la valeur des unités de compte à la date de survenance de l'évènement ouvrant droit au paiement. Ces garanties appartiennent à la classe des contrats de type GMxB (*Guaranteed Minimum x Benefit*), en langue française : garantie plancher en cas de réalisation de l'évènement x ouvrant droit au paiement de celle-ci. Ainsi, les garanties plancher en cas de décès, GMDB (*Guaranteed Minimum Death Benefit*), assurent au bénéficiaire un capital minimum quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au moment de décès. En cas de survie, les garanties de type GMMB, en langue anglaise *Guaranteed Minimum Maturity Benefit*, assurent un capital minimum quelle que soit la valeur des unités de compte détenues à la maturité. De même, les GMMB et les GMDB peuvent offrir une réévaluation du capital garanti à un taux annuel (*Roll up*) et peuvent comporter un mécanisme d'encliquetage (*Ratchet*) à des dates anniversaires, permettant à l'assuré de verrouiller les performances des unités de compte. Ces deux clauses se manifestent dans les garanties de type GMAB (*Guaranteed Minimum Accumulation Benefits*). Notons que l'évaluation de la garantie GMAB *Ratchet* est plus complexe car, à chacune des dates anniversaires antérieure à la maturité, si la valeur du fonds risqué (épargne de l'assuré) excède le montant garanti alors celui-ci est rehaussé au fonds puis bloqué pour les périodes suivantes. Dans le cas contraire, l'encours du fonds est inférieur à la garantie et l'assureur renouvelle son engagement vis-à-vis de l'assuré en apportant la différence de telle sorte que l'évolution du fonds repart du capital garanti ; ce mécanisme est répété aux dates anniversaires précédant celle de fin du contrat. L'échéance venue, l'assureur apporte de nouveau la différence entre la valeur

terminale du fonds et celle de la garantie finale si celle-ci excède l'encours. En d'autres termes, ceci s'interprète à chaque période comme une option européenne pour laquelle le sous-jacent serait l'épargne, autrement dit, l'encours du fonds sous-jacent et dont le prix d'exercice dépend de la trajectoire suivie par ce fonds : on parle d'options *path dependent*. Par ailleurs, les garanties GMWB (*Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit*) offrent la possibilité de retrait d'un pourcentage du fonds à des dates spécifiées à leur souscription, au moment où les GMIB, de la terminologie anglaise *Guaranteed Minimum Income Benefit* aussi connues sous l'appellation de GAO (*Guaranteed Annuity Option*) au Royaume-Uni, permettent à l'assuré de bénéficier du droit de conversion des unités de compte dans une rente viagère à un taux préférentiel entre le taux minimum g garanti à la souscription du contrat et celui prévalant sur le marché à sa date de fin. Le lecteur pourra consulter le bouquin de Hardy (2003) ou celui de Kalberer and Ravindran (2009).

Ces contrats représentent un marché important. Cependant, contrairement au moindre succès relevé en Europe continentale, ils obtiennent ailleurs un succès remarquable. C'est notamment le cas aux États-Unis. Du fait de leur système de retraite par capitalisation, la majorité de la population dont l'appétence et la sensibilisation aux marchés financiers dépassent de très loin celles des français, s'était déjà tournée vers les marchés financiers pour compléter leurs pensions de retraite. On estime ce marché depuis la fin de l'année 2014 à 140 milliards de dollars, contrôlé à près de 94% par une vingtaine de compagnies d'assurance enregistrant ces ventes dont AXA US, positionné à la septième place, avec une part de marché de plus de 9.7 milliards de dollars. À la lumière du succès de ces contrats aux États-Unis, au UK ainsi qu'au Japon, et compte tenu de la dégradation du rapport démographique en France, il nous semble vraisemblable que l'Europe continentale dont la France, ne restera pas pour longtemps en marge de l'explosion de ces ventes.

L'évaluation et la couverture des *Variable Annuities* constituent une problématique non évidente pour les assureurs et représentent un défi pour les chercheurs. En effet, ces contrats contiennent non seulement différents risques, dont les méthodes d'interactions sont inconnues, cf. Bacinello et al. (2011), mais aussi des options implicites non-standard, comme c'est le cas pour les garanties GMDB dans lesquelles la date d'exercice de l'option implicite, notamment celle de décès de l'assuré, est inconnue. Milevsky and Posner (2001) baptisent cette option, *Titanic option* en référence au destin tragique du paquebot du même nom. Ces auteurs calculent ensuite les *fair fees* de ces contrats dans un cadre gaussien en les comparant à la valeur médiane des *fees* chargés par les assureurs sur marché.

Dans un but de modélisation, la première chose à faire est de s'interroger sur la représentation des cours boursiers. Or, de nombreuses études empiriques montrent que les prix des actifs financiers ne sont pas lognormaux, ce qui exclut une modélisation gaussienne. D'où l'idée de prendre en compte des discontinuités dans l'évolution du fonds risqué, après les travaux de Cont (2001) et ceux de Aït-Sahalia and Jacod (2009), par des processus de Lévy non purement gaussiens : ce qui avait fait l'objet de la première partie de notre étude. Par ailleurs, il vient un autre point important ; la prise en compte des discontinuités de cours financiers apporte de l'incomplétude au marché, de telle sorte

qu'il n'existe pas de portefeuille dupliquant éliminant définitivement le risque. Par conséquent, la réplication n'est plus possible. En d'autres termes, l'allocation en delta - très présente dans la pratique et dans la littérature - devient sous-optimale, d'où résulte la nécessité de trouver une allocation qui permette de rendre ce risque minimal. Cette allocation optimale dans ce contexte non-gaussien étant une solution difficile, nous pouvons relever les contributions importantes utilisant la couverture quadratique (voir Schweizer (2001)) de Riesner (2006), Vandaele and Vanmaele (2008), Delong (2014), Cont et al. (2007), Tankov and Voltchkova (2009) et celle de Cont and Tankov (2004). Citons de même, le mémoire d'actuariat de Gabriel and Surlas (2006) qui expose la solution suggérée par les derniers auteurs. Cependant, les ratios de couverture optimale suggérés par ces auteurs ressemblent - d'un point de vue technique - à la solution suggérée par Cont and Tankov (2004). Leur formule d'allocation aboutit, outre le cas gaussien de Black and Scholes (1973) ou celui à sauts gaussiens de Merton (1976), à une résolution numérique non triviale. En effet, l'implémentation de leur ratio de couverture passe par l'utilisation des techniques d'intégration lourdes ou par celles de résolution des PIDEs (*partial integro-differential equation*), en langue française, équations aux dérivées partielles avec membre intégral, compliquées. Or, comme le notent Jackson et al. (2008), bien que plusieurs approches de résolution des PIDEs ont été suggérées, aucune d'entre elles n'est satisfaisante. À la première partie, nous avons suggéré une méthodologie générale unifiée pour l'évaluation et la couverture. Celle-ci sera systématiquement utilisée dans cette seconde partie afin de proposer un cadre uni pour la gestion des *Variable Annuities* en présence des risques financiers extrêmes. Plus précisément, le cadre méthodologique de la Partie I nous permet une analyse approfondie de l'impact des risques financiers extrêmes sur le niveau des *fees* prélevés pour le financement des garanties et sur celui des fonds propres requis pour la couverture des engagements au titre de ces garanties. Nous illustrons notre analyse en considérant des garanties de type mixte GMMB/GMDB et de type plus complexe GMAB avec *Ratchet* tout en prenant en compte des *management fees* pour la gestion de l'épargne de l'assuré et des *fair fees* pour le financement de ces garanties. De même, les solutions proposées jusqu'à maintenant pour l'évaluation des GMAB avec *Ratchet* - cf. Gerber and Pafumi (2000), Hardy (2003) et Coleman et al. (2007) - n'étant pas satisfaisantes, nous suggérons une formule générale et explicite permettant d'évaluer de manière simple cette garantie. Tout en prenant en compte des coûts de transactions engendrés par la couverture dynamique de ces garanties, nous déterminons la distribution des pertes futures actualisées probables que nous comparons à celle obtenue par la couverture classique en delta. Nous montrons que l'approche suggérée aboutit à une immobilisation très faible en capital économique requis en terme de solvabilité.

Bien plus encore, nous mettons en lumière une illusion de sécurité dangereuse dans la gestion des VAs en présence des risques financiers extrêmes. Celle-ci s'explique par une sensibilité très différente aux risques extrêmes, du niveau des *fees* prélevé pour le financement des garanties d'une part et de celui des fonds propres requis à leur couverture d'autre part. Cette illusion permet non seulement d'expliquer des pertes importantes subies par des assureurs qui ont dû quitter le marché des *Variable Annuities*, mais aussi de plaider que la bonne prise en compte des risques financiers extrêmes dans l'évaluation

et dans la couverture, permet une gestion rigoureuse de contrats d'assurance-vie caractérisés par un lien explicite avec les marchés.

Les travaux décrits dans cette partie ont fait l'objet d'une publication dans *The Journal of Risk and Insurance*.

1 Cadre d'analyse

Notons T , la date d'échéance du contrat et $\gamma \leq T$, celle de survenance de l'événement ouvrant droit au paiement de la garantie. L'assureur assure au bénéficiaire, la garantie plancher

$$\max(F_\gamma, G_\gamma),$$

où F_γ représente l'épargne de l'assuré à la date γ , autrement dit, l'encours du fonds risqué constaté, avec G_γ , le capital garanti à cette date. Ce capital peut faire l'objet de plusieurs clauses, telles qu'un montant constant égal à la prime initiale investie, ou le montant de cette prime réévalué avec un taux annuel g (*Roll up*), ou encore, la valeur maximale du fonds constatée à des dates anniversaires antérieures à γ (*Ratchet*). Parce que

$$\max(F_\gamma, G_\gamma) = F_\gamma + [G_\gamma - F_\gamma]^+,$$

le contrat peut être interprété du point de vue de l'assuré comme le résultat d'une position longue sur les actifs détenus dans les unités de compte et sur une option de vente de maturité γ et de prix d'exercice G_γ . Nous utiliserons cette interprétation dans la suite de notre analyse. L'engagement de l'assureur vis-à-vis de l'assuré est donné par la partie optionnelle $[G_\gamma - F_\gamma]^+$. Ainsi, tout se passe comme si l'assureur vendait au souscripteur une option de vente dont le prix d'exercice serait le montant garanti et dont la date d'exercice est celle de survenance de l'événement ouvrant droit au paiement de la garantie. La prime unique payée par l'assuré est investie dans un actif risqué dont la valeur à l'instant t est notée S_t . De même, on suppose qu'en début de chaque période, le prélèvement des frais d'assurance au taux annuel continu m . Dans notre analyse, nous distinguons des frais d'assurance utilisés au financement de la garantie, prélevés au taux m_o , et ceux utilisés pour la gestion du fonds dédié, prélevés au taux m_a , de telle sorte que

$$m = m_o + m_a.$$

Ainsi, la dynamique du processus du fonds est donnée par

$$\frac{dF_t}{F_t} = \frac{dS_t}{S_t} - mdt.$$

De manière équivalente, l'encours de ce fonds à la date t est

$$F_t = F_0 \frac{S_t}{S_0} e^{-mt} = S_t e^{-mt}, \quad (1)$$

la dernière égalité vient de la convention $F_0 \equiv S_0$. Nous introduisons la mortalité en notant par \bar{T} l'âge de décès de l'assuré, âgé de x à l'instant $t = 0$ et par $T_x = \bar{T} - x$, sa durée de vie résiduelle. On définit par

$${}_t p_y = 1 - {}_t q_y = \mathcal{P}[\bar{T} > y + t | \bar{T} > y],$$

pour tous $y \geq x$ et $t \geq 0$, la probabilité de survie conditionnelle sous la probabilité historique, notée \mathcal{P} . En particulier, ${}_t p_x = \mathcal{P}[T_x > t] = \exp \left\{ - \int_0^t v(x+s) ds \right\}$, où v représente le taux instantané de mortalité. Pour $t = 0, 1, \dots, T-1$, ${}_t p_x = \prod_{j=0}^{t-1} p_{x+j}$, avec $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$, où q_{x+t} est la probabilité que l'assuré âgé de $x+t$ décède avant la fin de l'année. Dans un premier temps, nous considérons les garanties GMMB et GMDB avec un capital garanti égal à une constante K . Ainsi, en cas de survie en T , le bénéficiaire reçoit $F_T + [K - F_T]^+$ sous la garantie GMMB, et si le décès survient avant la date d'échéance du contrat, ce dernier est assuré du paiement $F_{T_x} + [K - F_{T_x}]^+$ sous la garantie GMDB. On considère dans un second temps la garantie GMAB avec *Ratchet*. Ces garanties seront détaillées à la section (1.2). La duration du contrat $[0, T]$ est subdivisée en T/h sous-périodes d'égales longueurs h (par exemple, $h = 12^{-1}$ pour une fréquence mensuelle). De même, si le décès survient dans une sous-période, on suppose le paiement de la garantie en fin de cette sous-période. Par ailleurs, notons $\xi_{S_0, m_o, \gamma}$, la valeur initiale de l'engagement de l'assureur vis-à-vis de l'assuré au titre de la garantie offerte. Nous recourons à la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu et considérons une mesure équivalente à \mathcal{P} , telle que les processus de gains actualisés sont des martingales. Parce qu'on se focalise sur les risques financiers, on suppose que le risque de mortalité peut être diversifié, ainsi, \mathcal{P} et Q coïncident sur les événements relatifs à la mortalité. On suppose également l'indépendance entre les risques financiers et les risques de mortalité sous Q .

1.1 Les *fair value* des garanties offertes

Considérons une économie dans laquelle la rémunération du compte monétaire est faite à l'instant u par le taux d'intérêt instantané r_u , puis introduisons la fonction d'actualisation

$$\delta_t := \exp \left\{ - \int_0^t r_u du \right\}.$$

Les *fees* dédiés au financement de la garantie étant proportionnels au taux de prélèvement continu m_o , à l'encours du fonds F et au temps, le montant de ces *fees* actualisés, \bar{F} , évoluent donc selon l'équation différentielle

$$d\bar{F}_t = m_o \delta_t F_t dt,$$

avec $\bar{F}_0 = 0$. On suppose que le processus de prix de l'actif risqué de référence, S , évolue dans l'univers Q , selon l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + dM_t,$$

où M_t est défini par

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} z (N(ds, dz) - \nu(dz)ds) + \sigma Z_t, \quad (2)$$

et où N est la mesure de saut; ν , la mesure de Lévy; Z , un mouvement brownien standard et σ , le coefficient de diffusion. Par construction, M est une martingale. Cette représentation de la dynamique des prix a l'ambition d'être très générale et inclut les processus de Lévy à activité finie ou infinie. Notons $M\&E$ (*Mortality and Expense*), la valeur actuelle probable des *fees* prélevés au financement de la garantie en cas de survenance de deux événements concurrents, la survie ou le décès. Il vient

$$M\&E = E[\bar{F}_{T \wedge T_x}].$$

Notons que la détermination de la valeur de marché associée à ces *fees* n'est ni évidente, ni immédiate, en raison de l'instant $T \wedge T_x$ qui peut être interprété comme un temps d'arrêt. On montre à l'Annexe (B.1) que

$$M\&E(m_o) = \underbrace{F_0}_{S_0} \frac{m_o}{m} \left\{ T p_x (1 - e^{-mT}) + \sum_{t=0}^{T-1} t p_x q_{x+t} (1 - e^{-m(t+1)}) \right\}, \quad (3)$$

d'où résulte l'identité donnant les *fair fees* ainsi que la *fair value* des garanties :

$$\xi_{S_0, m_o, \gamma} = M\&E(m_o). \quad (4)$$

En vertu de l'équation (3), la relation d'équilibre (4) établit une correspondance endogène entre les taux m_o dédiés au financement de la garantie et les taux m_a pour la gestion du fonds. L'équation (4) prend différentes formes suivant la particularité de la garantie considérée. Les formules inhérentes, données à la section (1.2), sont très générales, et pour les rendre opérationnelles, des choix relatifs à dynamique du processus des prix et à l'évolution de l'intensité de mortalité sont nécessaires. Cette détermination des *fair fees* est une généralisation de Milevsky and Posner (2001) et de Quittard-Pinon and Randrianarivony (2011).

1.2 Valeurs actuelles probables des garanties

Nous recourons à la théorie d'absence d'opportunité d'arbitrage en temps continu pour l'évaluation des garanties. L'équation (1) suggère que la dynamique de S est similaire à celle de l'actif risqué de référence distribuant un taux de dividende continu égal à m . Notons $P(\bar{S}, d, K, \tau)$ le prix d'une option européenne de vente écrite sur S , dont la valeur initiale est égale à \bar{S} , de prix d'exercice K , de taux de dividende continu d et de temps restant avant échéance τ . Sous l'hypothèse d'indépendance des risques financiers et de mortalité sous Q , l'engagement de l'assureur est évalué

- pour la garantie GMMB payée à la date d'échéance du contrat T en cas de survie, par

$$\xi_{S_0, m_o, T}^M = T p_x \times P(S_0, m_o, K, T), \quad (5)$$

- pour la garantie GMDB payée à la date de décès $T_x \leq T$, par

$$\xi_{S_0, m_o, T}^D = \sum_{t=0}^{T-1} {}_t p_x q_{x+t} \times P(S_0, m_o, K, t+1), \quad (6)$$

- pour la garantie mixte GMMB/GMDB en cas de survenance du premier événement entre la survie et le décès, par

$$\xi_{S_0, m_o, T}^{M,D} = \xi_{S_0, m_o, T}^M + \xi_{S_0, m_o, T}^D. \quad (7)$$

- Le dernier contrat que nous considérons est plus complexe. Il s'agit de la GMAB avec *Ratchet*. De façon formelle, considérons un ensemble

$$\mathcal{I} = \{t_1, t_2, \dots, t_{\bar{n}-1}, t_{\bar{n}}\},$$

constitué de \bar{n} dates de reconduction de la garantie, en langue anglaise *rollover dates*, permettant à celle-ci d'être modifiée à chacune de ces dates par le mécanisme suivant : notons F_t^- et F_t^+ , les valeurs du fonds immédiatement avant et immédiatement après la réévaluation de la garantie plancher par *Ratchet* à la date t , respectivement. Remarquons qu'à chacune des $t_i \in \mathcal{I}$, $F_{t_i}^-$ est lié à $F_{t_{i-1}}^+$, par la relation donnée à l'équation (1). En d'autres termes,

$$F_{t_i}^- = F_{t_{i-1}}^+ \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} e^{-m(t_i - t_{i-1})}. \quad (8)$$

Immédiatement avant chaque $t_i \in \mathcal{I}$, l'assureur compare l'encours du fonds $F_{t_i}^-$ au capital garanti reconduit au temps t_{i-1} , noté $G_{t_{i-1}}$. Remarquons que deux scénarios sont possibles.

- Si la garantie est dans la monnaie, $F_{t_i}^- < G_{t_{i-1}}$, l'assureur apporte la différence absolue L_{t_i} , et immédiatement après t_i , $F_{t_i}^+ = G_{t_{i-1}}$, puis G_{t_i} est réinitialisée à $F_{t_i}^+$: cf. scénario **no 1**, Figure (1).
- Si la garantie est en dehors de la monnaie, $F_{t_i}^- > G_{t_{i-1}}$, il n'y a aucun apport de la part de l'assuré, mais G_{t_i} est ramenée à $F_{t_i}^-$ et immédiatement après, $F_{t_i}^+$ est réinitialisé à G_{t_i} : cf. scénario **no 2**, Figure (1).

De manière équivalente, à chaque t_i ,

$$G_{t_i} = F_{t_i}^+ = \max(G_{t_{i-1}}, F_{t_i}^-) = F_{t_i}^- + L_{t_i},$$

où

$$L_{t_i} = [G_{t_{i-1}} - F_{t_i}^-]^+,$$

avec G_0 , la valeur initiale du capital garanti et F_0 , celle du fonds. En ignorant la mortalité, notons $H_i(S_0, m_o, t_i)$, la valeur actuelle (au temps $t = 0$) de l'engagement de l'assureur au titre la $i^{\text{ème}}$ garantie, il vient

$$H_i(S_0, m_o, t_i) = E_Q[\delta_{t_i} L_{t_i}].$$

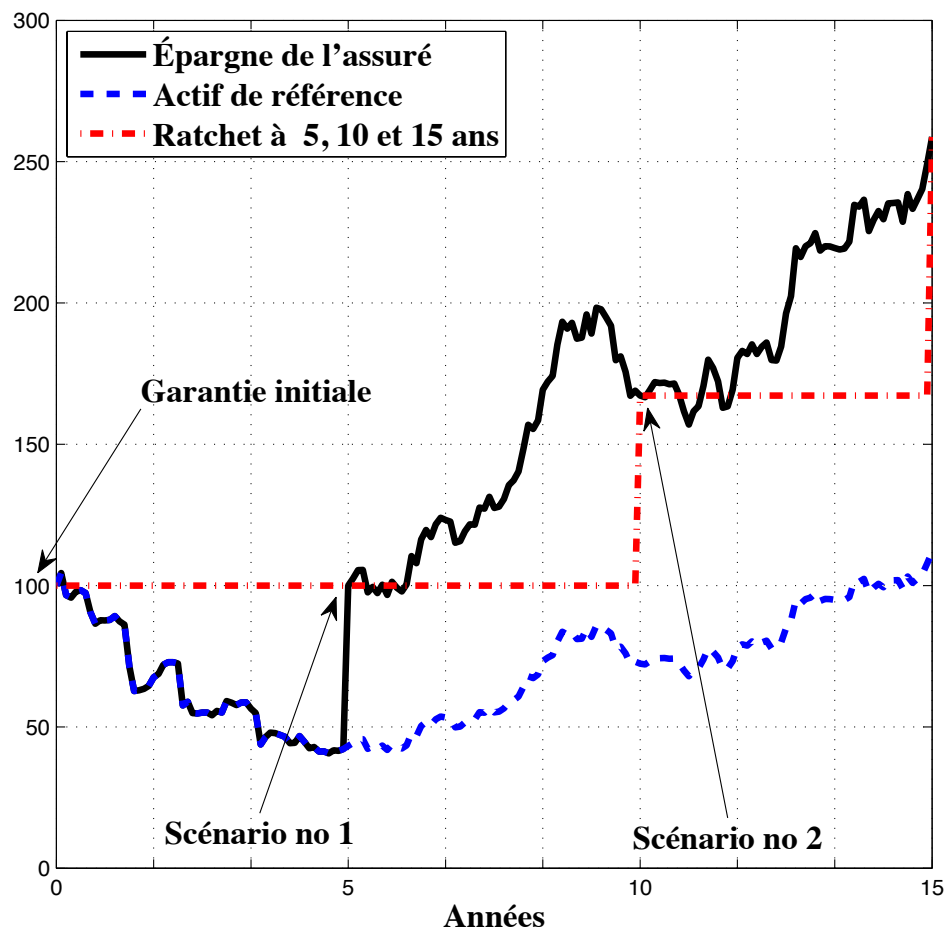


FIGURE 1 – Illustration de la clause *Ratchet* dans la garantie GMAB.

Compte tenu du caractère *path dependent* de cette garantie, notons que son évaluation pour tout $t_n \in \mathcal{I}$, n'est pas évidente. Sa complexité rappelle celle de l'évaluation d'une option *lookback* discrète. Les solutions suggérées jusqu'à maintenant pour cette garantie n'étant pas satisfaisantes, nous proposons une formule générale et explicite permettant de l'évaluer de manière simple. Plus précisément, supposons sans perte de généralité, un taux d'intérêt constant. On montre à l'Annexe (B.2), que pour tous $n > 1$, $t_n \in \mathcal{I}$, l'engagement de l'assureur au titre de cette garantie peut être évaluée par la formule (récursive) suivante

$$H_n(S_0, m_o, t_n) = \left(S_0 e^{-m_o t_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_{n-1}-t_i)} \right) \times P(e^{-m_o(t_n-t_{n-1})}, 0, 1, t_n - t_{n-1}),$$

avec

$$H_1(S_0, m_o, t_1) = P(S_0 e^{-m_o t_1}, 0, G_0, t_1).$$

En introduisant la mortalité, la valeur de marché de cette garantie, notée $\xi_{S_0, m_o, T}^A$, est alors donnée par

$$\xi_{S_0, m_o, T}^A = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \xi_{S_0, m_o, t_i}^A, \quad (9)$$

telle que pour tous $n > 1$, $t_n \in \mathcal{I}$, les valeurs actuelles probables ξ_{S_0, m_o, t_n}^A associées aux paiements L_{t_n} sont évaluées par

$$\xi_{S_0, m_o, t_n}^A = \left(S_0 e^{-m_o t_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_{n-1}-t_i)} \right) \times \left\{ \sum_{t=t_{n-1}}^{t_n-1} {}_t p_x q_{x+t} P(e^{-m_o(t-t_{n-1}+1)}, 0, 1, t - t_{n-1} + 1) + {}_{t_n} p_x P(e^{-m_o(t_n-t_{n-1})}, 0, 1, t_n - t_{n-1}) \right\},$$

avec

$$\xi_{S_0, m_o, t_1}^A = \sum_{t=0}^{t_1-1} {}_t p_x q_{x+t} \times H_1(S_0, m_o, t+1) + {}_{t_1} p_x \times H_1(S_0, m_o, t_1).$$

Les formules (5, 6, 7, 9) donnent les prix des engagements de l'assureur vis-à-vis de l'assuré au titre des quatre garanties étudiées dans notre étude. Ces formules sont très générales et ne dépendent pas de la dynamique particulière du processus des prix.

2 Évaluation et couverture

Comme nous l'avons remarqué, l'équation (1) suggère que la dynamique de F est similaire à celle de S , à un taux de dividende continu d près, égal à m . En nous référant à la première partie de notre étude, nous supposons que le prix du portefeuille risqué de référence suit un processus de Lévy géométrique. Ainsi,

$$S_t = S_0 e^{X_t}.$$

Excepté dans le cas gaussien, les processus de Lévy présentent des sauts. Le marché est alors incomplet. La principale difficulté soulevée avec les garanties mentionnées en (5, 6, 7, 9) est que l'évaluation et la couverture des options implicites - dans ce cadre d'incomplétude - aboutissent à une problématique non évidente souvent étudiée de manière théorique. De notre côté, nous nous référons à la solution efficiente - du point de vue de l'implémentation - suggérée à la Partie I. Sur le plan technique, cette méthodologie repose sur l'analyse par transformée de Fourier généralisée dans la ligne droite des travaux de Carr and Madan (1998), Raible (2000), Lewis (2001), Eberlein et al. (2010), ainsi que ceux de Boyarchenko and Levendorskii (2000) et Kélani and Quittard-Pinon (2014). Celle-ci permet d'obtenir une formule d'intégration simple, particulièrement adaptée au choix de calcul par transformée de Fourier rapide (FFT). C'est une méthode particulièrement efficace pour évaluer des contrats d'option dans un cadre non gaussien. De même, elle s'avère plus satisfaisante que l'approche utilisée par Carr and Madan (1998) et permet d'obtenir des résultats pour des séries de contrats en un temps de calcul très court. L'élément clé de notre analyse est l'exposant caractéristique ψ , tel que

$$E(e^{iuX_t}) = e^{-t\psi(u)}, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

2.1 Évaluation

On montre que le prix d'une option européenne de vente définie à la section (1.2) peut être exprimé par

$$P(\bar{S}, d, K, \tau) = K \frac{1}{2\pi} e^{-bx'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi_Q(u+ib))}}{(-iu+b)(-iu+b+1)} du, \quad (11)$$

avec $b > 0$, $x' = \ln(\bar{S}/K)$, et avec la condition mesure martingale équivalente (EMM)

$$r - d + \psi_Q(-i) = 0. \quad (12)$$

Rappelons que la formule (11) est la même que celle d'une option d'achat, avec $b < -1$. Rappelons également que cette formule se prête aisément à une implémentation par transformée de Fourier rapide (FFT). Les prix d'options pourront ainsi être obtenus quasi-instantanément et de façon précise.

2.2 Couverture

La prise en compte des discontinuités de cours financiers rend le marché incomplet de telle sorte qu'il n'existe pas de portefeuille dupliquant éliminant définitivement le risque. Comme résultante, la réplcation n'est plus possible. Il convient donc de trouver une allocation qui permette de rendre l'exposition au risque de ce portefeuille minimale. En nous référant à l'approche unifiée suggérée, et en utilisant le critère de minimisation locale de risque dans l'univers historique \mathcal{P} pour la dynamique réelle du sous-jacent, on montre que l'allocation optimale est donnée par la formule suivante

$$\theta(S_t, \tau) = K \frac{1}{2S_t\pi} e^{-bx'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi_Q(u+ib))} B^{\mathcal{P}}(u+ib)}{(-iu+b)(-iu+b+1)} du, \quad (13)$$

avec la condition EMM (12), où

$$B^{\mathcal{P}}(u) = \frac{-\psi_{\mathcal{P}}(u-i) + \psi_{\mathcal{P}}(u) + \psi_{\mathcal{P}}(-i)}{-\psi_{\mathcal{P}}(-2i) + 2\psi_{\mathcal{P}}(-i)}.$$

Rappelons que la formule (13) est aussi valable pour un call avec le choix $b < -1$ et peut être évaluée via une quadrature se prêtant à une implémentation par FFT de la même manière que celle de l'évaluation. Comme on l'avait souligné, la conséquence du cadre d'incomplétude du marché est l'existence d'une infinité de mesures risque-neutres sous lesquelles les processus de prix actualisés sont des martingales. De plus, au regard de la formule (13), il apparaît nécessaire d'établir une correspondance entre les paramètres du processus considéré entre l'univers \mathcal{P} dans lequel la dynamique du portefeuille risqué est référencée et la mesure équivalente Q pour l'évaluation. Par construction, le passage de l'univers historique vers l'univers risque-neutre choisi ne modifie pas le coefficient de diffusion et n'influe pas sur le paramètre de dérive. Par conséquent, il ne nous reste plus qu'à établir des correspondances de paramètres de sauts dans les deux univers. Un choix idéal pour l'établissement de cette correspondance est l'utilisation de la mesure de Esscher, cf. Gerber and Shiu (1994), sous laquelle le processus de gain actualisé est une martingale. Suivant Shiryaev (1999), l'Annexe (B.3) fournit une formule générale pour le pont entre les univers Esscher-risk-neutre et historique. Cette correspondance de paramètres pour certains processus de Lévy peut être explicitée, cf. section (4).

2.2.1 Différence entre les ratios Δ Versus θ

Soit Δ , la sensibilité du prix de l'actif contingent (11) aux variations de cours de l'actif sous-jacent. Celle-ci est donnée par la dérivée partielle

$$\Delta \equiv \frac{\partial P(S, d, K, \tau)}{\partial S} = K \frac{1}{2S\pi} e^{-bx'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi_Q(u+ib))}}{iu-b-1} du. \quad (14)$$

La différence entre le ratio θ dans l'équation (13) et le ratio Δ ci-dessus, est alors aisément obtenue

$$\theta - \Delta = K \frac{1}{2S\pi} e^{-bx'} \int_{\mathbb{R}} e^{iux'} \frac{e^{-\tau(r+\psi_Q(u+ib))}}{(iu-b-1)} \left(\frac{B^{\mathcal{P}}(u+ib)}{iu-b} - 1 \right) du.$$

La Figure 2 illustre cette différence pour le modèle CGMY dont les paramètres sont estimés à la section (4.2). En faisant varier le temps restant avant échéance τ de 0.5 à 1, on peut noter que la différence entre les deux allocations est importante et atteint un pic pour des options à la monnaie. Ce comportement a une implication profonde dans la gestion de risque des *Variable Annuities*, notamment pour les garanties *GMAB Ratchet*, que nous développerons à la section (4.4.3).

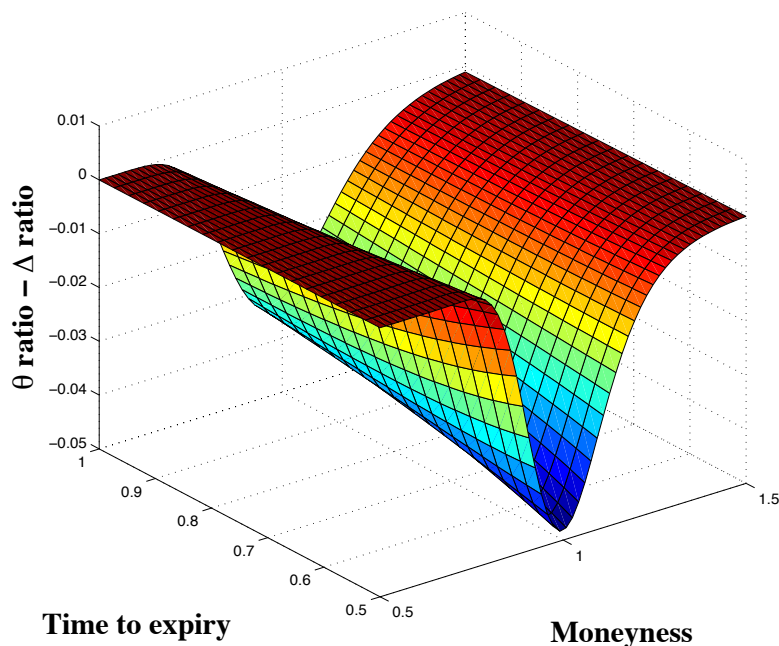


FIGURE 2 – Sensibilité de l'écart $\theta - \Delta$ à la *moneyness* et au temps restant avant échéance pour l'option européenne put, $d = 0$. Les paramètres utilisés sont des transformations de Esscher du modèle CGMY estimé à la section (4.3), Table 1.

3 Risk Management : couverture dynamique

Dans les sections précédentes, nous avons

- déterminé les *fair fees* et *fair value* des garanties offertes dans les *Variable Annuities*
- rappelé l'approche unifiée pour l'évaluation et pour la couverture - en déterminant le ratio de couverture optimale.

La gestion du risque dans la pratique, notamment la couverture dynamique, ne peut faire l'objet de prise de positions continues, mais plutôt sur un intervalle de temps discret, d'où résultent des erreurs de couverture qu'il faudra quantifier. De même, des coûts de transaction engendrés par cette couverture doivent être pris en compte. Nous présentons

une méthode pour la détermination de ces erreurs résiduelles en s'inspirant de Hardy (2003) et de Kélani and Quittard-Pinon (2015).

3.1 Couverture des garanties en cas de vie et de décès

Nous illustrons la procédure de couverture à travers la garantie mixte GMMB/GMDB. En nous référant aux notations actuarielles, on définit par ${}_{\bar{y}|h}q_y$ pour tous $y \geq x$, $\bar{y} \geq 0$, la probabilité qu'une tête d'âge y survive durant les \bar{y} prochaines années, et décède la période suivante de longueur h . Fixons $t \in [0, T]$, et supposons que ce contrat existe encore à cette date. Afin de faciliter notre présentation, écrivons la valeur du put de prix d'exercice K , par $P(S_t, \tau)$ puis par $\xi(t)$, celle du contrat au temps t . La valeur correspondante, sachant la survie au temps t , notée $\xi^c(t)$, est

$$\xi^c(t) = \sum_{k=t}^{T-h} {}_{k-t|h}q_{x+t} P(S_t, k+h-t) + {}_{T-t}p_{x+t} P(S_t, T-t).$$

Il vient

$$\xi(t) = {}_t p_x \xi^c(t) = \sum_{k=t}^{T-h} {}_{k|h}q_x P(S_t, k+h-t) + {}_T p_x P(S_t, T-t).$$

Afin de construire le portefeuille de couverture au temps t , nous considérons les deux scénarios ci-dessous.

- Dans le premier cas, sachant la survie à l'âge $x+t$, la quantité d'actifs risqués Ψ_t^c est

$$\Psi_t^c = \sum_{k=t}^{T-h} {}_{k-t|h}q_{x+t} \theta(S_t, k+h-t) + {}_{T-t}p_{x+t} \theta(S_t, T-t).$$

Il résulte que le montant investi dans l'actif sans risque noté $\widehat{\Psi}_t^c$ est donné par $\xi^c(t) - \Psi_t^c S_t$. Ainsi, le portefeuille de couverture, noté $H^c(t)$, est égal à $\Psi_t^c S_t + \widehat{\Psi}_t^c = \xi^c(t)$. Cependant, juste avant le rebalancement au temps t , sa valeur est $H^c(t^-) = \Psi_{t-h}^c S_t + \widehat{\Psi}_{t-h}^c e^{rh}$.

- Dans le second cas, la quantité investie dans l'actif risqué notée Ψ_t est

$$\Psi_t = {}_t p_x \Psi_t^c = \sum_{k=t}^{T-h} {}_{k|h}q_x \theta(S_t, k+h-t) + {}_T p_x \theta(S_t, T-t).$$

Il vient que le montant investi dans l'actif sans risque, noté $\widehat{\Psi}_t$ est donné par ${}_t p_x \widehat{\Psi}_t^c = \xi(t) - \Psi_t S_t$. Ainsi, le portefeuille de couverture, noté $H(t)$, est égal à ${}_t p_x H^c(t) = \Psi_t S_t + \widehat{\Psi}_t = \xi(t)$, et juste après le rebalancement au temps t , sa valeur est $H(t^-) = \Psi_{t-h} S_t + \widehat{\Psi}_{t-h} e^{rh}$.

3.2 Erreur de couverture résiduelle

Remarquons que l'erreur de couverture HE est déterminée par la réalisation de deux scénarios concurrents.

- Si l'assuré survit en t , elle est obtenue par la différence classique entre la valeur du portefeuille de couverture requise en t et celle avant ajustement donnée par $H(t^-)$.
- Si l'assuré décède entre $t-h$ et t , alors HE est la différence entre la garantie en cas de décès et $H(t^-)$.

Plus précisément, l'erreur résiduelle sachant la survie en $t-h$, notée HE^c , est

$$HE^c(t) = {}_h p_{x+t-h} (H^c(t) - H^c(t^-)) + {}_h q_{x+t-h} ((K - F_t)^+ - H^c(t^-)).$$

En notant que ${}_h p_{x+t-h} + {}_h q_{x+t-h} = 1$, il vient

$$HE^c(t) = {}_h p_{x+t-h} H^c(t) + {}_h q_{x+t-h} (K - F_t)^+ - H^c(t^-).$$

D'où résulte

$$HE(t) = {}_{t-h} p_x HE^c(t) = H(t) - H(t^-) + {}_{t-h|h} q_x (K - F_t)^+. \quad (15)$$

Remarquons que la quantité $HE(t)$ en (15) peut être aussi bien positive que négative car celle-ci dépend des scénarios des marchés. Lorsqu'elle est négative, elle est source de profit parce que la valeur du portefeuille avant rebalancement $H(t^-)$ vaut plus qu'elle n'est requise en t pour la couverture de la garantie.

3.3 Pertes futures actualisées

La perte future est déterminée par la différence entre le coût supporté par l'assureur et celui à la charge de l'assuré pour le financement de la garantie. Les pertes futures apparaissent donc comme l'agrégation de trois composantes. La première étant les valeurs des erreurs de couverture résiduelles données en (15), la deuxième est donnée par les coûts de transaction, la dernière est la marge (*margin offset*) prélevée par l'assureur, notée \mathcal{M} , pour le financement de la garantie sous-jacente. Il résulte que les pertes futures au temps t , \mathcal{L}_t , sont données par l'équation

$$\mathcal{L}_t = HE(t) + TC_t - {}_t p_x \mathcal{M}_t, \quad (16)$$

avec

$$\mathcal{M}_t = m_o F_t,$$

où m_o est déterminé par la relation d'équilibre (4). Par ailleurs, les coûts de transaction générés par la couverture dynamique, notés \mathcal{C} , sont proportionnels à la variation absolue de la part allouée à l'actif risqué. Ainsi, il vient à l'instant t ,

$$TC_t = \mathcal{C} S_t |\Psi_t - \Psi_{t-h}|. \quad (17)$$

La formule (16) permet de déterminer le niveau des fonds propres requis pour la couverture des garanties VA. Nous déterminons la distribution des pertes futures probables actualisées cumulées (ADL) et calculons le capital économique requis en utilisant des indicateurs de risque extrême, notamment la *Value-at-Risk* (VaR) et la *Conditional Tail Expectation* (CTE).

4 Illustration

Dans cette section, nous illustrons la procédure suggérée. Nous considérons le modèle paramétrique de mortalité de Gompertz-Makeham et les modèles de Kou et CGMY pour le processus de Lévy X défini à la section (2). Nous considérons également le mouvement brownien géométrique (GBM) comme référence. Tous ces processus seront ajustés aux données réelles.

4.1 Évolution de la mortalité

L'intensité de mortalité est donnée par

$$v(x) = \mathcal{A} + \mathcal{B}c^x, \quad \text{avec } \mathcal{B} > 0, \quad \mathcal{A} \geq -\mathcal{B}, \quad c > 1 \text{ et } x \geq 0.$$

Ainsi, la fonction de survie conditionnelle s'obtient aisément par

$${}_t p_x = \exp \left\{ -\mathcal{A}t - \frac{\mathcal{B}c^x(c^t - 1)}{\ln c} \right\}.$$

Melnikov and Romaniuk (2006) calibrent ce modèle sur des données de mortalité aux États-Unis et obtiennent les estimations suivantes

$$\mathcal{A} = 9.5666 \times 10^{-4}, \quad \mathcal{B} = 5.162 \times 10^{-5}, \quad c = 1.09369.$$

4.2 Évolution des prix des marchés

Le GBM étant le modèle de base de la finance en temps continu, voir Black and Scholes (1973), avec $\nu(z) = 0$ dans l'équation (2) pour tout z . L'exposant caractéristique est alors réduit à

$$\psi(u) = -iu\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2.$$

Kou (2002) utilise un processus de diffusion à sauts où la composante de sauts est représentée par un processus de Poisson composé et où l'amplitude aléatoire de ces sauts suit une distribution exponentielle double asymétrique. Il résulte l'expression suivante pour l'exposant caractéristique du modèle

$$\psi(u) = -iu\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 - \lambda \left(\frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - iu} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + iu} - 1 \right),$$

avec $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 > 0$ telles que $-\lambda_1 < \text{Im } u < \lambda_2$ et $p, q \geq 0$, telles que $p + q = 1$, sont respectivement les probabilités d'avoir des sauts positifs (à la hausse) et négatifs (à la baisse), et où λ représente l'intensité des sauts. Des tests empiriques effectués par Ramezani and Zeng (1998) suggèrent que le modèle de Kou s'ajuste mieux aux données actions, que le modèle de diffusion à sauts de Merton. D'autre part, bien qu'il est approprié d'utiliser un processus de Poisson composé pour capturer des probabilités non négligeables d'occurrence de pertes rares et extrêmes, telles que les krachs boursiers

ou encore des soubresauts des marchés dus aux incertitudes politiques et économiques, de nombreuses observations soutiennent que les prix des actifs exhibent une infinité de petits sauts. Ce type de phénomène est mieux expliqué par les processus à activité infinie. Un exemple connu est le modèle dit variance gamma (VG) introduit dans la littérature financière par Madan and Seneta (1990). Ce modèle est obtenu par une transformation aléatoire du temps du mouvement brownien par un processus gamma, d'où le nom donné au modèle. Un autre exemple de modèle capable de générer des sauts d'un autre type est le modèle CGMY de Carr et al. (2002), dont l'exposant caractéristique est donné par

$$\psi(u) = -iu\mu - \mathbf{C} \Gamma(-\mathbf{Y}) \left[(\mathbf{M} - iu)^{\mathbf{Y}} - \mathbf{M}^{\mathbf{Y}} + (\mathbf{G} + iu)^{\mathbf{Y}} - \mathbf{G}^{\mathbf{Y}} \right],$$

où $\mathbf{C} > 0$, $\mathbf{G} \geq 0$, $\mathbf{M} \geq 0$, $\mathbf{Y} < 2$ et où μ est un terme de dérive ajouté au modèle, cf. Kim and Lee (2007). Ce processus est une généralisation du modèle variance gamma. Le paramètre \mathbf{C} décrit l'intensité du processus. Plus précisément, \mathbf{C} joue un rôle similaire à celui de la variance dans un mouvement brownien. Les paramètres \mathbf{G} et \mathbf{M} , contrôlent respectivement, le taux de décroissance des queues de probabilité droite et gauche de la densité de Lévy, donnant ainsi de l'asymétrie pour des valeurs de \mathbf{G} et de \mathbf{M} non identiques. Ainsi, le cas $\mathbf{G} < \mathbf{M}$ est plus en adéquation avec de nombreux faits empiriques où la queue de probabilité gauche est la plus épaisse.

4.3 Ajustement aux données réelles

En utilisant la méthode des moments, nous ajustons les modèles de Kou et CGMY aux rentabilités de cours mensuels de l'indice S&P 500, observés en devise locale du 31/01/1956 au 30/05/2014. Les paramètres estimés sont fournis à la Table 1. Cette table fournit également les quatre premiers moments de ces modèles ajustés. On peut remarquer que les estimations des modèles de Kou et CGMY sont relativement proches les unes des autres en termes des quatre moments. Il n'est donc pas surprenant qu'on les distingue difficilement à la Figure 3a. Cette observation est clairement due au fait que les paramètres ont été estimés par la méthode des moments et on sait que deux distributions ayant les quatre premiers moments identiques sont approximativement égales. Par conséquent, les calculs de quantités résultant de la "moyenne" telles que l'évaluation ou la couverture utilisant de telles distributions produiront des résultats similaires. Une solution alternative, pourrait consister à déterminer les paramètres des modèles en utilisant d'autres critères - exemple : ajustement des modèles aux prix d'options. L'adéquation des paramètres aux données réelles est montrée à la Figure 3 donnant le nuage des quantiles des rentabilités des données réelles par rapport à chaque modèle. Ces projections communément appelées QQ-Plot approchent une droite en cas de bonne adéquation. La Figure 3b représente le QQ-Plot du GBM. De même en simulant un échantillon, de taille 100,000, issu des rentabilités des modèles de Kou et de CGMY ajustés, les Figures 3c et 3d donnent les QQ-Plots de CGMY et Kou, respectivement. Cette illustration est en phase avec de nombreuses études empiriques qui attestent de la bonne adéquation des modèles à sauts. En particulier, le modèle de Kou et celui de CGMY offrent un meilleur ajustement au niveau des queues de distributions, concentrant les masses importantes de

| Modèles | Kou | CGMY | GBM |
|-----------------|-----------------------|------------------------|-------------------|
| Estimations | $\mu = 0.1572$ | $\mu = 0.2799$ | $\mu = 0.0962$ |
| | $\sigma = 0.1264$ | $\mathbf{C} = 0.6235$ | $\sigma = 0.1473$ |
| | $\lambda = 2.6116$ | $\mathbf{G} = 21.0775$ | |
| | $\lambda_1 = 80.2741$ | $\mathbf{M} = 39.5137$ | |
| | $\lambda_2 = 25.8004$ | $\mathbf{Y} = 0.8$ | |
| | $p = 0.3$ | | |
| Moyenne | 0.0961 | 0.0962 | |
| Volatilité | 0.1474 | 0.1473 | |
| Skewness | -0.1968 | -0.1969 | 0 |
| Excess Kurtosis | 0.2110 | 0.2111 | 0 |

TABLE 1 – Paramètres annuels des modèles de Kou et CGMY ajustés aux séries historiques de l'indice boursier S&P 500 (*Total Return*) relevées du 31/01/1956 au 30/05/2014. Source des données : Bloomberg[®].

probabilités d'avoir des pertes extrêmes, et donc de risques financiers extrêmes, mis en lumière par le titre donné à cette seconde étude du mémoire.

Par ailleurs, comme nous l'avons mentionné à la section (2.2), une correspondance entre les paramètres estimés dans la mesure \mathcal{P} vers la mesure Q est nécessaire. Suivant Kim and Lee (2007) et Le Courtois and Quittard-Pinon (2008), cette correspondance entre l'univers historique (paramètres à la Table 1) et l'univers risk-neutre (paramètres avec chapeau) peut être explicitée pour les processus de Kou et CGMY, comme suit

$$\text{Kou : } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{p} = \frac{p\lambda_1}{\kappa(\lambda_1 - k^*)} \\ \widehat{q} = 1 - \widehat{p} \\ \widehat{\lambda}_1 = \lambda_1 - k^* \\ \widehat{\lambda}_2 = \lambda_2 + k^* \\ \widehat{\lambda} = \lambda\kappa \\ \kappa = \frac{p\lambda_1}{\lambda_1 - k^*} + \frac{q\lambda_2}{\lambda_2 + k^*} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \text{CGMY : } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \\ \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} + k^* \\ \widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - k^* \\ \widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}, \end{array} \right.$$

où k^* représente le paramètre de Esscher déterminé de sorte que les processus de gain actualisés sont des martingales, voir l'équation (B.5) à l'Annexe (B.3). D'autre part, puisque l'évaluation et la couverture reposent en bout de piste sur la "moyenne", les estimations obtenues à la Table 1 produiront inévitablement des résultats similaires pour les modèles de Kou et CGMY - comme nous le constatons dans nos expérimentations. Par conséquent, nos résultats seront illustrés en utilisant le modèle de Kou.

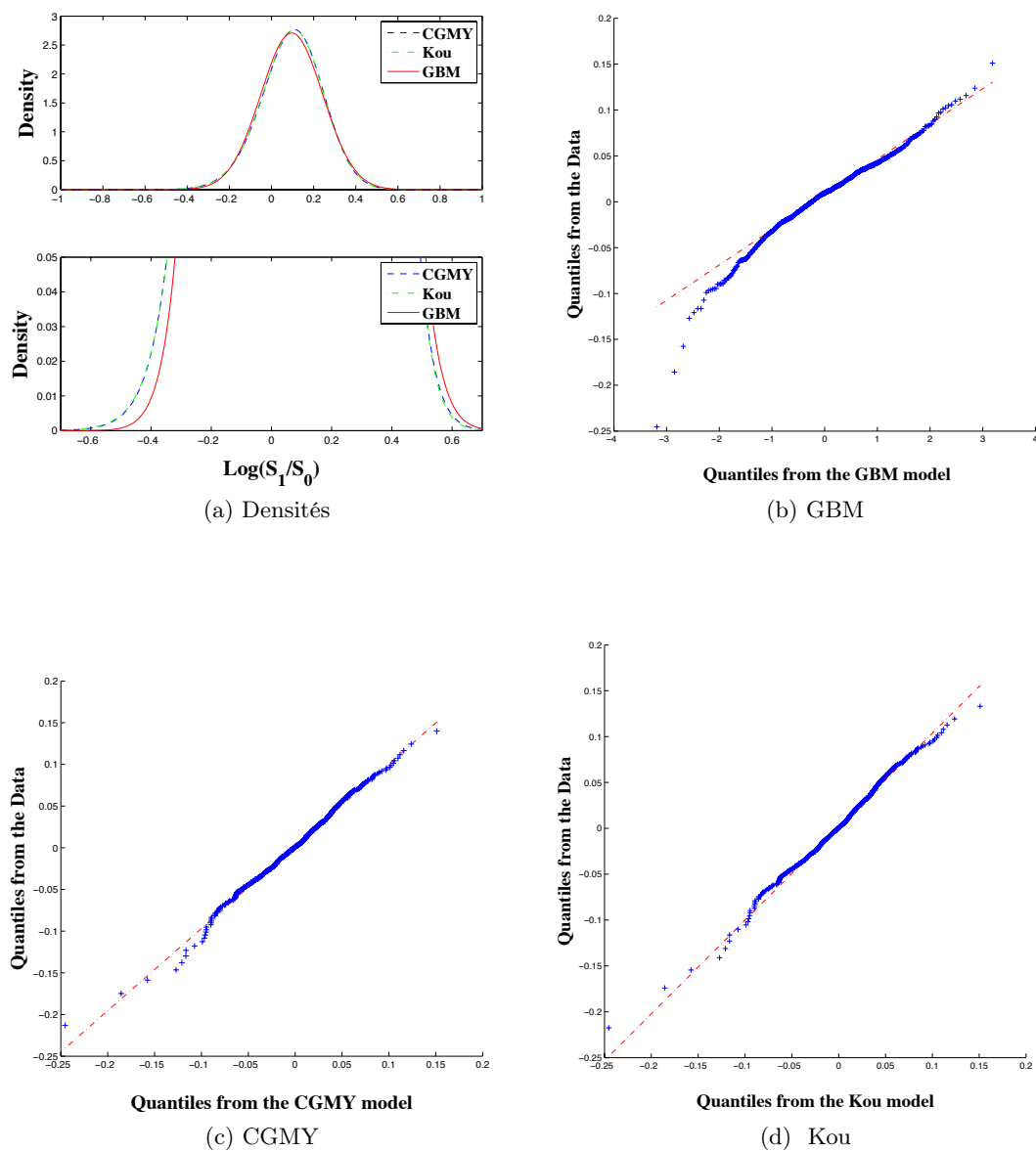


FIGURE 3 – Densités des rentabilités annuelles obtenues par inversion de Fourier (3a) et les quantiles des rentabilités des données S&P 500 par rapport aux rentabilités gaussiennes (3b) GBM, et celles simulées via les modèles de (3c) CGMY et de (3d) Kou.

4.4 Caractéristiques de l'assuré et des contrats

Sauf mention contraire, les caractéristiques suivantes seront considérées. Le portefeuille de référence suit les processus de Lévy donnés dans la section (4.2), avec les paramètres estimés sous \mathcal{P} à la Table 1. Les coûts de transaction dans l'équation (17) sont tels que $\mathcal{C} = 0.2\%$. On considère un assuré de tête d'âge $x = 40$ ans. La prime unique de 100 USD payée par ce dernier est directement investie dans le fonds de valeur initiale $F_0 = 100$. On suppose un taux d'intérêt r égal à 6%. Nous analysons les quatre garanties GMMB, GMDB, GMMB/GMDB et GMAB avec *Ratchet*. Le capital initial garanti K est supposé égal à 100% de F_0 pour les trois premières garanties et de 80% de F_0 pour la dernière.

4.4.1 Quel *management fees* m_a le gestionnaire de notre fonds prélèvera-t-il ?

En pratique, ce taux ne pourra être spécifié que de manière exogène par le gestionnaire du fonds. Plus ce dernier est expérimenté, grande sera son incitation à prélever des m_a élevés. Toutefois, rappelons que les garanties sont financées de manière endogène via la relation d'équilibre (4). Pour un *management fees* m_a donné, les Figures 4 et 5 montrent l'évolution d'équilibre des *fair fees* m_o . Comme on le voit, ces *fees* croissent en fonction des m_a . Cette croissance est plus prononcée pour des contrats de courte durée. Cette illustration met en lumière les charges m_o élevées observées par Milevsky and Posner (2001) sur le marché des *Variable Annuities*. Bien que ce marché a profondément changé cette dernière décennie, la valeur médiane de $m_o = 115$ bp relevée par ces auteurs peut être expliquée par des *management fees* de 4.24% et de 4.26% pour une garantie GMMB/GMDB de maturité 10 ans dans des économies GBM et Kou, respectivement. Ainsi, dans notre illustration, nous supposons sauf mention contraire, que le gestionnaire du fonds prélève un taux de *management* m_a égal à 3% pour toutes les garanties étudiées dans notre étude.

4.4.2 Les *fair value* des garanties

En utilisant la relation d'équilibre (4), la Table 2 pour la garantie GMMB, les Tables 3 et 4 pour les garanties GMDB, et la Table 5 pour la garantie mixte GMMB et GMDB, donnent la *fair value* des garanties ainsi que les *fair fees* m_o nécessaires à leur financement. La Table 6 présente ces résultats pour la garantie GMAB avec la clause *Ratchet*. Comme nous y attendons, la hiérarchie suivante est observée. La GMAB est plus coûteuse que la garantie mixte GMMB/GMDB qui vaut plus que la GMMB à son tour plus chère que la GMDB, qui est la garantie la moins chère. Bien qu'attractif pour le souscripteur, la garantie GMAB coûte particulièrement chère : pour un contrat de maturité 30 ans, le taux m_o est de 14.52 bp par rapport à une valeur de 1.12 bp pour un contrat GMMB/GMDB de même maturité. L'écart de 13.4 bp entre ces deux taux, est le chargement additionnel requis au financement de la clause *Ratchet* de la GMAB à ses dates de révision. En effet, à chacune de ces dates, l'assureur pourrait être amené à réinitialiser l'épargne de l'assuré au capital garanti précédent en cas de faible performance des

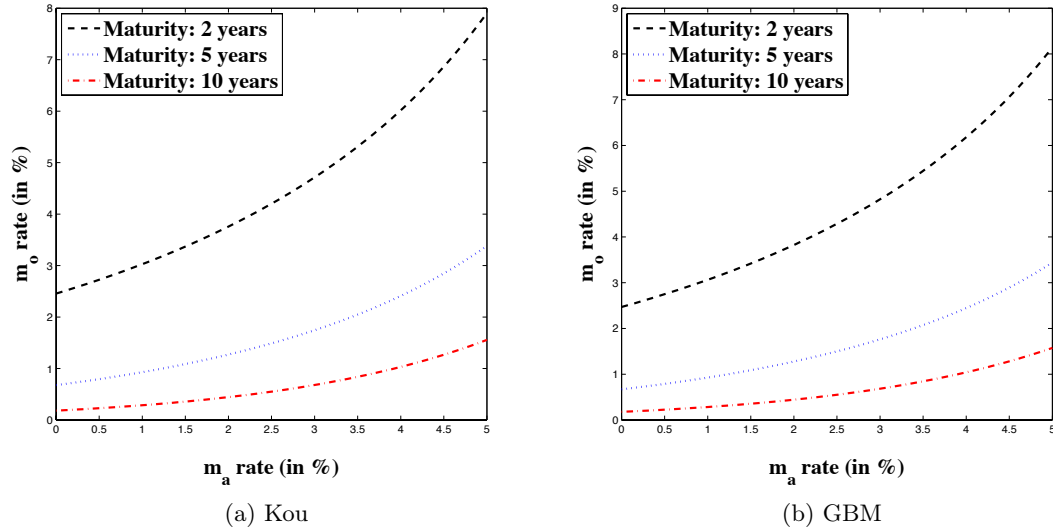


FIGURE 4 – GMMB/GMDB : relation endogène entre m_o et m_a via la formule d'équilibre (4).

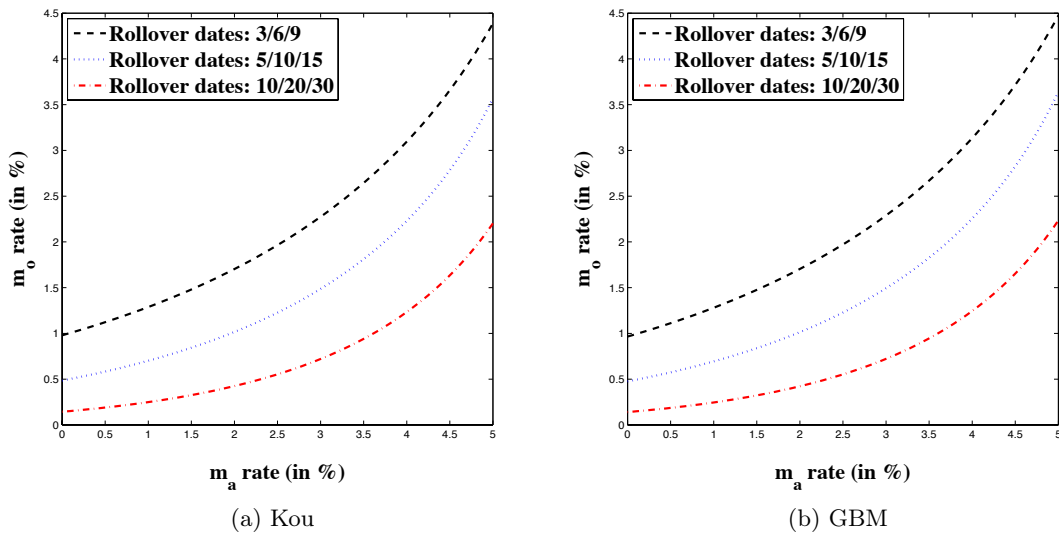


FIGURE 5 – GMAB : relation endogène entre m_o et m_a via la formule d'équilibre (4).

marchés, ou à revaloriser ce capital à une valeur élevée du fonds en cas de mouvements favorables des marchés. Ce mécanisme auquel l'assureur est exposé est financé par le taux additionnel de 13.4 bp par rapport à la garantie mixte GMMB/GMDB pour laquelle cette clause est inexistante. À la lumière des estimations faites à la Table 1, remarquons que du modèle de diffusion à sauts de Kou, résultent des *fair fees* plus élevés que ceux venant du modèle GBM. Néanmoins, comme on le note aux Tables 2-6, cette différence est négligeable. Cette illustration nous amène à une conclusion très inattendue. En effet, les *fair fees* m_o des garanties étudiées, GMMB, GMDB, GMMB/GMDB et GMAB, ne sont pas sensibles aux risques financiers extrêmes ! La question naturelle pouvant découler de cette conclusion surprenante est : qu'en est-il alors du capital économique requis ? Ce qui fera l'objet de la section suivante.

4.4.3 Les fonds propres requis au titre de ces garanties

Nous déterminons la distribution des pertes futures probables actualisées et cumulées (ADL) pour le calcul des fonds propres requis au titre des garanties GMMB/GMDB et GMAB. Pour cela, nous lançons 20,000 simulations de type Monte-Carlo et utilisons le ratio θ avec un rebalancement mensuel ($h = 12^{-1}$). Pour un niveau de confiance α donné, nous reportons la VaR (Value-at-Risk), i.e., le montant minimum requis pour la couverture de l'engagement de l'assureur au titre de la garantie considérée, avec le niveau de confiance α . Autrement dit, la moins pire des pertes constatées au niveau de la queue de probabilité $1 - \alpha$. Pour le même niveau de confiance α , nous reportons également la CTE (Conditional Tail Expectation), i.e., la moyenne des pertes au niveau de cette queue de probabilité. La Table 7 montre les résultats par rapport au GBM. Bien que que le modèle GBM n'est pas approprié, il aide à quantifier l'impact des sauts sur la perte réelle, autrement dit, des risques financiers extrêmes. Plus précisément, notons que les volatilités estimées des rentabilités issues des modèles GBM et Kou sont "égales" à la Table 1. Bien que ces variations quadratiques estimées sont "identiques", le modèle de diffusion à sauts de Kou suggère qu'il vient en moyenne 2.6 sauts par an avec une amplitude⁹ de -2.34% , et une volatilité de sauts de 4.06% . Les figures à la Table 7 exhibent l'impact de cette observation sur l'ADL des garanties GMMB/GMDB et GMAB. Comme on peut le voir, le modèle à sauts biaise de façon remarquable, la distribution des ADL vers les réalisations de pertes significatives, sous-estimées en fait par le modèle GBM. Pour $\alpha = 99$ pour cent, le modèle à saut requiert un capital économique de ($\text{VaR}_\alpha = 3.3929$, $\text{CTE}_\alpha = 3.9429$) pour la garantie mixte GMMB/GMDB et de ($\text{VaR}_\alpha = 6.5058$, $\text{CTE}_\alpha = 8.5835$) pour la GMAB ; au moment où ces valeurs sont ($\text{VaR}_\alpha = 1.9087$, $\text{CTE}_\alpha = 2.4515$) et ($\text{VaR}_\alpha = 2.7754$, $\text{CTE}_\alpha = 3.8086$), pour le modèle GBM, respectivement. En d'autres termes, pour le couple ($\text{VaR}_{99\%}$ et $\text{CTE}_{99\%}$), les sauts résultent d'une réserve additionnelle de (1.4842, 1.4914) pour la garantie mixte GMMB/GMDB et de (3.7304, 4.7749) pour la GMAB, ce qui n'est pas négligeable. Cette observation conclut que les pertes réelles des garanties offertes dans les *Variable Annuities* sont très sensibles aux queues de distribution et peuvent engendrer une mauvaise couverture pour peu qu'une légère attention est portée

9. L'amplitude moyenne des sauts est $\frac{p}{\lambda_1} - \frac{q}{\lambda_2}$ avec une variance de $pq(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2})^2 + (\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{q}{\lambda_2^2})$.

| T (années) | Modèle de Kou | | T (années) | Modèle de GBM | |
|-----------------|---------------|--------|-----------------|---------------|--------|
| | m (bp) | Valeur | | m (bp) | Valeur |
| 10 | 17.05 | 1.6616 | 10 | 16.68 | 1.6256 |
| 20 | 2.29 | 0.4363 | 20 | 2.21 | 0.4208 |
| 30 | 0.39 | 0.1058 | 30 | 0.37 | 0.1008 |

TABLE 2 – *Fair values* de la garantie GMMB, obtenues en utilisant la formule (5), avec $m_a = 0$.

| T (années) | Modèle de Kou | | T (années) | Modèle de GBM | |
|-----------------|---------------|--------|-----------------|---------------|--------|
| | m (bp) | Valeur | | m (bp) | Valeur |
| 10 | 0.99 | 0.0975 | 10 | 0.98 | 0.0962 |
| 20 | 0.84 | 0.1613 | 20 | 0.83 | 0.1582 |
| 30 | 0.73 | 0.1993 | 30 | 0.71 | 0.1946 |

TABLE 3 – *Fair values* de la garantie GMDB, obtenues en utilisant la formule (6), avec $m_a = 0$.

| Âges (années) | Modèle de Kou | | Âges (années) | Modèle de GBM | |
|------------------|---------------|--------|------------------|---------------|--------|
| | m (bp) | Valeur | | m (bp) | Valeur |
| 30 | 0.55 | 0.0548 | 30 | 0.55 | 0.0541 |
| 40 | 0.99 | 0.0975 | 40 | 0.98 | 0.0962 |
| 45 | 1.41 | 0.1378 | 45 | 1.39 | 0.1359 |

TABLE 4 – *Fair values* de la garantie GMDB en fonction de l'âge de souscription, obtenues via la formule (6), pour un contrat de maturité 10 années, avec $m_a = 0$.

| T (années) | Modèle de Kou | | T (années) | Modèle de GBM | |
|-----------------|---------------|--------|-----------------|---------------|--------|
| | m (bp) | Valeur | | m (bp) | Valeur |
| 2 | 245.59 | 4.7863 | 2 | 246.96 | 4.8123 |
| 5 | 67.77 | 3.3114 | 5 | 67.03 | 3.2760 |
| 10 | 18.14 | 1.7705 | 10 | 17.76 | 1.7331 |
| 20 | 3.15 | 0.6014 | 20 | 3.05 | 0.5827 |
| 30 | 1.12 | 0.3062 | 30 | 1.08 | 0.2964 |

TABLE 5 – *Fair values* de la garantie mixte GMMB/GMDB, obtenue via la formule (7), avec $m_a = 0$.

| GMAB en cas de décès | | |
|--|---------------|--------|
| Dates <i>rollover</i> ($t_1/t_2/t_3$) (années) | Modèle de Kou | |
| | m (bp) | Valeur |
| (2/12/22) | 1.63 | 0.3387 |
| (5/15/25) | 1.81 | 0.4226 |
| (10/20/30) | 2.23 | 0.6057 |

(a)

| GMAB en cas de décès | | |
|--|---------------|--------|
| Dates <i>rollover</i> ($t_1/t_2/t_3$) (années) | Modèle de GBM | |
| | m (bp) | Valeur |
| (2/12/22) | 1.61 | 0.3344 |
| (5/15/25) | 1.79 | 0.4168 |
| (10/20/30) | 2.20 | 0.5971 |

(b)

| GMAB en cas de survie et de décès | | |
|--|---------------|--------|
| Dates <i>rollover</i> ($t_1/t_2/t_3$) (années) | Modèle de Kou | |
| | m (bp) | Valeur |
| (2/12/22) | 19.33 | 3.9486 |
| (5/15/25) | 18.11 | 4.1430 |
| (10/20/30) | 14.52 | 3.8782 |

(c)

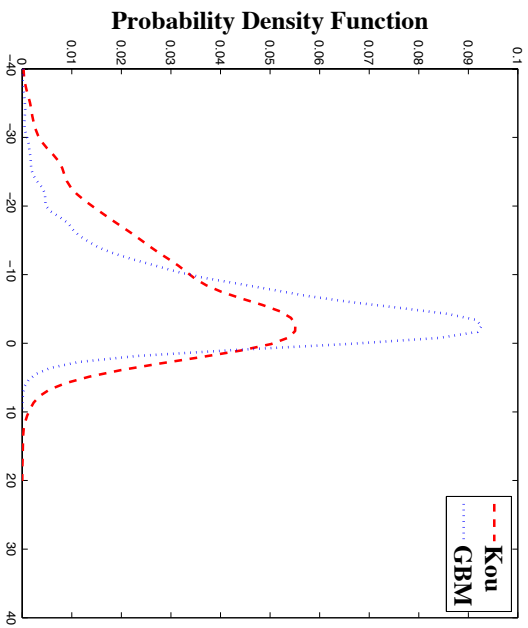
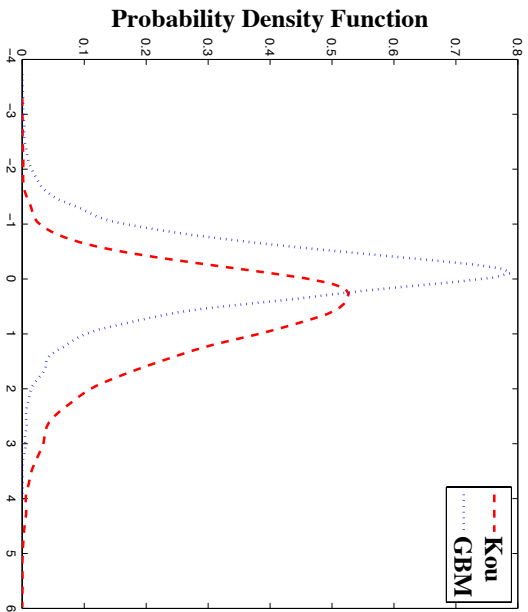
| GMAB en cas de survie et de décès | | |
|--|---------------|--------|
| Dates <i>rollover</i> ($t_1/t_2/t_3$) (années) | Modèle de GBM | |
| | m (bp) | Valeur |
| (2/12/22) | 18.64 | 3.8109 |
| (5/15/25) | 17.57 | 4.0210 |
| (10/20/30) | 14.14 | 3.7794 |

(d)

TABLE 6 – *Fair values* de la garantie GMAB, obtenue via la formule (9), avec $m_a = 0$.

TABLE 7 – Distributions des pertes futures actualisées cumulées (ADDL) et fonds propres requis au titre des garanties GMMB/GMDB et GMAB.

| GMMB/GMDB | | | | | GMAB | | | | |
|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Maturité : 10 ans | | | | | Dates rollover : (2/12/22) en années | | | | |
| α | Modèle de Kou | | Modèle de GBM | | α | Modèle de Kou | | Modèle de GBM | |
| | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ | | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ |
| 50% | 0.5768 | 1.3627 | -0.1077 | 0.4075 | 50% | -5.7630 | -0.9353 | -4.3349 | -1.5308 |
| 90% | 1.8198 | 2.5293 | 0.6931 | 1.2213 | 90% | 1.6703 | 3.7880 | 0.0340 | 1.1964 |
| 95% | 2.3315 | 3.0087 | 1.0524 | 1.5968 | 95% | 3.2209 | 5.2228 | 0.8962 | 2.0090 |
| 97.5% | 2.8943 | 3.4455 | 1.4595 | 1.9744 | 97.5% | 4.5468 | 6.6367 | 1.6091 | 2.7927 |
| 99% | 3.3929 | 3.9429 | 1.9087 | 2.4515 | 99% | 6.5058 | 8.5835 | 2.7754 | 3.8086 |



aux risques financiers extrêmes. Des épisodes récents des assureurs qui ont dû quitter le marché des VAs à cause d'une mauvaise couverture des garanties offertes, renforcent cet argument. Par ailleurs, il vient une autre remarque importante. Même pour la garantie mixte GMMB/GMDB de maturité 10 ans et pour la garantie GMAB de maturité 22 ans, la couverture en Δ aboutit à une immobilisation en capital plus importante que celle en θ , voir Table 8. Cette différence devient importante dans la gestion des GMAB avec *Ratchet*. À des fins d'illustration, ignorons la mortalité et supposant que $m_o = 0$, puis considérons un GMAB avec une armature de dates $\mathcal{I} = \{t_1, t_1 + 10\}$. En utilisant la formule générale suggérée en (9), la valeur actuelle (au temps $t = 0$) probable de l'engagement de l'assureur est alors de

$$\xi_{S_0,0,T}^A = E_Q[L_{t_1}e^{-rt_1}] + [S_0 + E_Q[L_{t_1}e^{-rt_1}]] P(1, 0, 1, 10).$$

Observons que si $t \rightarrow t_1$, et que si la garantie est en dehors de la monnaie,

$$\xi_{S_0,0,T}^A \rightarrow \xi_{S_{t_1},0,T}^A,$$

avec

$$\xi_{S_{t_1},0,T}^A = S_{t_1}P(1, 0, 1, 10).$$

En d'autres termes, immédiatement après la révision de la garantie à la date t_1 , la position de l'assureur est similaire à celle du vendeur d'une option de vente à la monnaie de prix d'exercice S_{t_1} , au moment où la différence $(\theta - \Delta)$ a atteint son pic à la Figure 2. Comme le note Hardy (2003), la garantie GMAB est exposée à une perte significative à chaque date de révision t_i - et nous ajoutons à la lumière de la Figure 2 - encore plus si la couverture en Δ est utilisée. Cette illustration dissuade de l'utilisation du ratio Δ dans la gestion des garanties *Variable Annuities*. Bien que les écarts relevés ne sont pas négligeables pour des contrats de prime initiale investie de 100 USD, ils sont sans doute importants sur l'échelle de la taille de ce marché estimé à plus de 140 milliards de dollars.

Conclusion

En nous référant à la méthodologie unifiée suggérée à la Partie I, et à un cadre très large de modélisation de la dynamique des prix en phase avec les faits stylisés relevés sur les marchés, tout en étant au plus près de la pratique, nous avons proposé un cadre d'analyse général de certaines garanties offertes dans les contrats d'assurance-vie caractérisés par un lien explicite avec les marchés. Cette analyse nous a permis de relever des observations ayant une implication profonde sur la gestion de ces contrats. En particulier, les pertes futures attendues sur les garanties offertes sont très sensibles aux queues de distribution concentrant des masses importantes de probabilités de larges pertes, et donc de risques financiers extrêmes. Nous avons montré que la mauvaise prise en compte de ces risques peut être désastreuse et engendrer une mauvaise couverture des garanties. En particulier, nous avons mis en lumière que la couverture en Δ très présente dans

| GMMB/GMDB | | | | |
|-------------------|------------------------|-----------------|------------------------|-----------------|
| Maturité : 10 ans | | | | |
| α | Couverture en Δ | | Couverture en θ | |
| | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ |
| 50% | 0.5832 | 1.3752 | 0.5768 | 1.3627 |
| 90% | 1.8218 | 2.5472 | 1.8198 | 2.5293 |
| 95% | 2.3664 | 3.0719 | 2.3315 | 3.0087 |
| 97.5% | 2.9927 | 3.4598 | 2.8943 | 3.4455 |
| 99% | 3.4172 | 4.0501 | 3.3929 | 3.9429 |

| GMAB | | | | |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------|------------------------|-----------------|
| Dates rollover : (2/12/22) en années | | | | |
| α | Couverture en Δ | | Couverture en θ | |
| | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ | VaR $_{\alpha}$ | CTE $_{\alpha}$ |
| 50% | -5.5646 | -0.6647 | -5.7630 | -0.9353 |
| 90% | 2.0382 | 4.2751 | 1.6703 | 3.7880 |
| 95% | 3.6991 | 5.7751 | 3.2209 | 5.2228 |
| 97.5% | 5.1405 | 7.2599 | 4.5468 | 6.6367 |
| 99% | 7.1116 | 9.2713 | 6.5058 | 8.5835 |

TABLE 8 – Capital économique requis pour la couverture des engagements de l'assureur au titre des garanties GMMB/GMDB et GMAB offertes dans des contrats VA pour une prime de 100 USD investie : obtenu via une couverture optimale en θ (13) et via une couverture en Δ (14).

la pratique et dans la littérature était à proscrire et avons suggéré une couverture optimale en θ qui aboutit à une immobilisation en capital économique bien inférieure à celle en Δ . Par ailleurs, au-delà de la convergence entre les méthodes quantitatives de la finance moderne et de l'assurance, notre étude plaide pour l'utilisation des approches non-gaussiennes. Celles-ci sont plus proches de la réalité observée et comme nous l'avons montré, ce cadre d'analyse fournit des outils utiles et efficaces pour le choix de décisions stratégiques.

Annexe B

B.1 Valeur actuelle probable des *fees*, *M&E*

Partant de la dynamique de l'actif de référence S sous Q , il résulte celle de l'encours du fonds

$$\frac{dF_t}{F_{t-}} = (r_t - m)dt + dM_t.$$

En utilisant la règle de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} d(\delta_t F_t) &= -r_t \delta_t F_t dt + \delta_t dF_t \\ &= -r_t \delta_t F_t dt + \delta_t (r_t - m) F_t dt + \delta_t F_{t-} dM_t \\ &= -\delta_t F_t m dt + \delta_t F_{t-} dM_t \\ &= -\delta_t F_t m_a dt - d\bar{F}_t + \delta_t F_{t-} dM_t, \end{aligned}$$

d'où

$$d\bar{F}_t = -d(\delta_t F_t) - \delta_t F_t m_a dt + \delta_t F_{t-} dM_t.$$

En utilisant la règle de Chasle, il vient finalement

$$\bar{F}_t = F_0 - \delta_t F_t - \int_0^t \delta_s F_s m_a ds + \int_0^t \delta_s F_{s-} dM_s. \quad (\text{B.1})$$

Notons que l'expression dans l'équation (B.1) est encore vraie si $t \leq T$ est aléatoire. En particulier,

$$\bar{F}_{T \wedge T_x} = F_0 - \delta_{T \wedge T_x} F_{T \wedge T_x} - \int_0^{T \wedge T_x} \delta_s F_s m_a ds + \int_0^{T \wedge T_x} \delta_s F_{s-} dM_s.$$

Sous la mesure Q , la valeur actuelle de tous les *fees* payés jusqu'en $T \wedge T_x$ est

$$\begin{aligned} E_Q[\bar{F}_{T \wedge T_x}] &= F_0 - E_Q[\delta_{T \wedge T_x} F_{T \wedge T_x}] - \int_0^{T \wedge T_x} E_Q[\delta_s F_s] m_a ds \\ &\quad + E_Q \left[\int_0^{T \wedge T_x} \delta_s F_{s-} dM_s \right]. \end{aligned}$$

Parce que les processus de gains actualisés sont des Q -martingales, il vient

$$E_Q[\bar{F}_{T \wedge T_x}] = F_0 - F_0 e^{-m(T \wedge T_x)} - m_a \int_0^{T \wedge T_x} F_0 e^{-ms} ds \\ + E_Q \left[\int_0^{T \wedge T_x} \delta_s F_{s-} dM_s \right],$$

d'où résulte

$$E_Q[\bar{F}_{T \wedge T_x}] = F_0 \frac{m_o}{m} (1 - e^{-m(T \wedge T_x)}) + E_Q \left[\int_0^{T \wedge T_x} \delta_s F_{s-} dM_s \right].$$

En utilisant un résultat de Karatzas and Shreve (1991), la dernière espérance de l'égalité de droite de l'équation ci-dessus est nulle. Ainsi,

$$E[\bar{F}_{T \wedge T_x}] = F_0 \frac{m_o}{m} \left\{ T p_x (1 - e^{-mT}) + \int_0^T (1 - e^{-ms}) {}_s p_x v(x + s) ds \right\}.$$

Une approximation discrète de $E[\bar{F}_{T \wedge T_x}]$ est donnée par

$$F_0 \frac{m_o}{m} \left\{ T p_x (1 - e^{-mT}) + \sum_{k=0}^{T-1} \Pr[\lfloor T_x \rfloor = k] (1 - e^{-m(k+1)}) \right\},$$

de telle sorte que la valeur actuelle probable de tous les *fees* prélevés en cas de réalisation de deux événements concurrents, notamment le décès ou la survie, est obtenue par l'expression suivante

$$M\&E(m_o) = F_0 \frac{m_o}{m} \left\{ T p_x (1 - e^{-mT}) + \sum_{k=0}^{T-1} k p_x q_{x+k} (1 - e^{-m(k+1)}) \right\}.$$

B.2 Valeur actuelle de la GMAB avec *Ratchet*

Par définition, on obtient aisément

$$H_1(S_0, m_o, t_1) = E_Q[e^{-rt_1} \max(G_0 - S_{t_1} e^{-m_o t_1}, 0)] = P(S_0 e^{-m_o t_1}, 0, G_0, t_1),$$

avec G_0 , la garantie initiale et $F_0 = S_0$, la valeur initiale du fonds. Notre but est de prouver le résultat suivant :

Pour tous $n > 1$, $t_n \in \mathcal{I}$,

$$H_n(S_0, m_o, t_n) = \left(S_0 e^{-m_o t_{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_{n-1} - t_i)} \right) \\ \times P(e^{-m_o(t_n - t_{n-1})}, 0, 1, t_n - t_{n-1}), \quad (\text{B.2})$$

avec

$$H_1(S_0, m_o, t_1) = P(S_0 e^{-m_o t_1}, 0, G_0, t_1). \quad (\text{B.3})$$

Preuve. Par définition,

$$H_n(S_0, m_o, t_n) = E_Q[L_{t_n} e^{-rt_n}], \quad \text{pour tous } n > 1, t_n \in \mathcal{I},$$

avec

$$\begin{aligned} E_Q[L_{t_n} e^{-rt_n}] &= E_Q \left[E_Q[L_{t_n} e^{-rt_n} | F_{t_{n-1}}^+] \right] \\ &= E_Q \left[E_Q \left[F_{t_{n-1}}^+ \max \left(1 - \frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}} e^{-m_o(t_n - t_{n-1})}, 0 \right) e^{-rt_n} \mid F_{t_{n-1}}^+ \right] \right] \\ &= E_Q \left[F_{t_{n-1}}^+ e^{-rt_{n-1}} \right] P(e^{-m_o(t_n - t_{n-1})}, 0, 1, t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Il résulte,

$$H_n(S_0, m_o, t_n) = E_Q \left[F_{t_{n-1}}^+ e^{-rt_{n-1}} \right] P(e^{-m_o(t_n - t_{n-1})}, 0, 1, t_n - t_{n-1}).$$

Notons que, au facteur $P(e^{-m_o(t_n - t_{n-1})}, 0, 1, t_n - t_{n-1})$ près, la preuve du résultat en (B.2) avec (B.3) est conclue par celui au Lemme B.2.1. \square

Lemme B.2.1. *Pour tous $n > 1$, $t_n \in \mathcal{I}$, la valeur actuelle de la garantie immédiatement après révision à la date t_n , $F_{t_n}^+ = G_{t_n}$, est donnée par*

$$E_Q \left[F_{t_n}^+ e^{-rt_n} \right] = S_0 e^{-m_o t_n} + \sum_{i=1}^n H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_n - t_i)}, \quad (\text{B.4})$$

avec (B.3).

Preuve. Notons que la formule (B.4) est vraie à l'ordre initial, pour $n = 2$

$$\begin{aligned} E_Q \left[F_{t_2}^+ e^{-rt_2} \right] &= E_Q \left[(F_{t_2}^- + L_{t_2}) e^{-rt_2} \right] \\ &= E_Q \left[\left(F_{t_1}^+ \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-m_o(t_2 - t_1)} \right) e^{-rt_2} \right] + E_Q[L_{t_2} e^{-rt_2}] \\ &= E_Q \left[F_{t_1}^+ \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-rt_2} \right] e^{-m_o(t_2 - t_1)} + E_Q[L_{t_2} e^{-rt_2}], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_Q \left[F_{t_1}^+ \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-rt_2} \right] &= E_Q \left[E_Q \left[F_{t_1}^+ \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-rt_2} \mid F_{t_1}^+ \right] \right] \\ &= E_Q \left[F_{t_1}^+ E_Q \left[\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} e^{-rt_2} \mid F_{t_1}^+ \right] \right] \\ &= E_Q \left[F_{t_1}^+ e^{-rt_1} \right] \\ &= E_Q \left[(F_{t_1}^- + L_{t_1}) e^{-rt_1} \right] \\ &= E_Q \left[\left(F_0 \frac{S_{t_1}}{S_0} e^{-m_o(t_1 - t_0)} + L_{t_1} \right) e^{-rt_1} \right], \quad t_0 = 0, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$E_Q [F_{t_2}^+ e^{-rt_2}] = S_0 e^{-m_o t_2} + E_Q [L_{t_1} e^{-rt_1}] e^{-m_o(t_2-t_1)} + E_Q [L_{t_2} e^{-rt_2}].$$

Ainsi, pour $n = 2$,

$$E_Q [F_{t_n}^+ e^{-rt_n}] = S_0 e^{-m_o t_n} + \sum_{i=1}^n H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_n-t_i)}, \text{ avec (B.3).}$$

En supposant que ce résultat est vrai jusqu'à l'ordre $n > 2$, l'équation (B.4) est aussi vraie à l'ordre $n + 1$. Plus précisément

$$\begin{aligned} E_Q [F_{t_{n+1}}^+ e^{-rt_{n+1}}] &= E_Q [(F_{t_{n+1}}^- + L_{t_{n+1}}) e^{-rt_{n+1}}] \\ &= E_Q \left[F_{t_n}^+ \frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} e^{-rt_{n+1}} \right] e^{-m_o(t_{n+1}-t_n)} + E_Q [L_{t_{n+1}} e^{-rt_{n+1}}], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_Q \left[F_{t_n}^+ \frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} e^{-rt_{n+1}} \right] &= E_Q \left[E_Q \left[F_{t_n}^+ \frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} e^{-rt_{n+1}} \mid F_{t_n}^+ \right] \right] \\ &= E_Q \left[F_{t_n}^+ E_Q \left[\frac{S_{t_{n+1}}}{S_{t_n}} e^{-rt_{n+1}} \mid F_{t_n}^+ \right] \right] \\ &= E_Q [F_{t_n}^+ e^{-rt_n}] \\ &= S_0 e^{-m_o t_n} + \sum_{i=1}^n H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_n-t_i)}, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} E_Q [F_{t_{n+1}}^+ e^{-rt_{n+1}}] &= \left(S_0 e^{-m_o t_n} + \sum_{i=1}^n H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_n-t_i)} \right) e^{-m_o(t_{n+1}-t_n)} \\ &\quad + E_Q [L_{t_{n+1}} e^{-rt_{n+1}}], \end{aligned}$$

qui peut être réécrit

$$E_Q [F_{t_{n+1}}^+ e^{-rt_{n+1}}] = S_0 e^{-m_o t_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n+1} H_i(S_0, m_o, t_i) e^{-m_o(t_{n+1}-t_i)}, \text{ avec (B.3),}$$

ce qui conclut la preuve. De même, notons que l'évaluation présentée dans cette annexe peut être aisément étendue à des taux d'intérêts stochastiques. \square

B.3 Correspondance des paramètres dans les univers \mathcal{P} et \mathcal{Q}

Suivant Gerber and Shiu (1994), introduisons la mesure de Esscher Q_k , de paramètre k , équivalente à \mathcal{P} . Celle-ci est donnée par la densité de Radon-Nykodim

$$\frac{dQ_k}{d\mathcal{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{kX_t}}{E_{\mathcal{P}}[e^{kX_t}]}.$$

Le paramètre k^* est identifié de telle sorte que la restriction martingale soit satisfaite. Plus précisément, $S_0 = E_{Q_k}[S_0 e^{-(r-d)t} e^{X_t}]$. Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} S_0 &= S_0 e^{-(r-d)t} \int_{\Omega} \frac{e^{(k+1)X_t}}{E_{\mathcal{P}}[e^{kX_t}]} d\mathcal{P} \\ &= S_0 \exp \left\{ - (r - d + \psi_{\mathcal{P}}(k+1) - \psi_{\mathcal{P}}(k))t \right\}. \end{aligned}$$

La mesure risque-neutre Q_{k^*} choisie vient du paramètre k^* tel que

$$r - d + \psi_{\mathcal{P}}(-i(k^* + 1)) - \psi_{\mathcal{P}}(-ik^*) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Le triplet caractéristique (\bar{B}, \bar{C}, ν) de la mesure de Lévy dans l'univers historique de mesure de probabilité \mathcal{P} et dans l'univers Esscher risque-neutre de mesure de probabilité Q_{k^*} est donné par

$$\begin{aligned} \bar{B}_{Q_{k^*}} &= \bar{B}_{\mathcal{P}} + k^* \bar{C}_{\mathcal{P}} + \int_{|z| \leq 1} z(e^{k^* z} - 1) \nu_{\mathcal{P}}(dz) \\ \bar{C}_{Q_{k^*}} &= \bar{C}_{\mathcal{P}} \\ \nu_{Q_{k^*}}(dz) &= e^{k^* z} \nu_{\mathcal{P}}(dz), \end{aligned}$$

cf. Shiryaev (1999), p.685.

Conclusion générale

Les travaux décrits dans ce mémoire ont présenté l'impact et la prise en compte des risques financiers extrêmes dans la gestion de certains types de contrat d'assurance-vie caractérisés par un lien explicite avec les marchés financiers, et qui contiennent de nombreuses clauses optionnelles. Les problèmes d'une grande importance, posés aux assureurs sont ceux de l'évaluation et de la couverture.

Dans un but de modélisation, la première chose à faire est de s'interroger sur la représentation des cours boursiers. Or, de nombreuses études empiriques montrent que les prix des actifs financiers ne sont pas lognormaux, ce qui exclut une modélisation gaussienne.

Dans la première partie, ont été rappelés quelques modèles traduisant cette réalité des marchés où de grandes ruptures dans l'évolution de l'actif sous-jacent sont plus susceptibles d'y être représentées que dans un cadre gaussien. Nous avons rappelé la dynamique générale des processus mixtes de diffusion et sauts. Nous avons distingué le modèle de Merton et celui de Kou. Ces modèles rendent bien compte des observations de discontinuités de cours, assorties d'effets d'asymétrie et de kurtosis relevés dans la pratique. De même, nous avons pu noter que nombre de ces faits pouvaient être retrouvés grâce au modèle à subordination de brownien dit variance gamma, obtenu en transformant le temps par un subordonateur de type gamma, avant d'accorder une attention particulière à sa généralisation au modèle CGMY encore connu sous le nom de modèle KoBoL. Comme nous l'avons constaté, ces modèles permettent également de retrouver le *smile* de volatilité, dont la convexité forte pour des maturités courtes, ce qu'on observe fréquemment dans la pratique.

Les représentations étant non gaussiennes, l'évaluation et la couverture sont des problèmes difficiles car :

- selon l'approche d'évaluation par martingale, les prix d'options sont obtenus grâce à l'espérance des flux de paiement actualisés. Ainsi, dès lors que les rentabilités des cours de l'actif sous-jacent ne suivent plus une évolution purement gaussienne, les prix obtenus par arbitrage peuvent s'exprimer à l'aide de fonctions spéciales cf. Kou (2002) ou par des résolutions compliquées d'équations aux dérivées partielles avec un facteur intégral. Ce qui rend leurs implémentations non évidentes dans la pratique.

- le marché étant incomplet, il y a une infinité de mesures équivalentes telles que les processus de prix actualisés sont des martingales, ceci donne lieu à un problème de choix de mesure appropriée. Nous avons tout d'abord rappelé le ratio de couverture optimale calculé par Cont et al. (2007), dont la mise en œuvre n'est également pas triviale. De même, notons que les approches consacrées à la couverture utilisées dans la littérature sont fréquemment d'ordre théorique et - souvent - sans utilité pratique. Ce qui pose de redoutables problèmes qui, mal posés et mal résolus, engendrent des difficultés pour les compagnies d'assurance pouvant les conduire à la faillite.

L'apport de la première partie de ce mémoire est d'ordre méthodologique. Il apporte des éléments de réponses robustes à certaines questions de gestion de risque posées aux

assureurs, restées jusqu'à présent sans solution satisfaisante. Nous avons proposé une méthodologie unifiée pour l'évaluation et la couverture, avec l'avantage d'un coût de calcul presque nul, tout en restant dans une très large classe de processus de Lévy. Nous avons montré que celle-ci permet d'obtenir des résultats pour des séries de contrats en un temps de calcul très court. Cette méthodologie a été systématiquement mise en œuvre dans la seconde partie où des contrats particuliers offrant des garanties du type GMMB, GMDB, GMMB/GMDB et GMAB avec *Ratchet*, ont été étudiés de façon approfondie.

Dans cette seconde partie, nous avons suggéré un cadre rigoureux pour la détermination de la *fair value* des contrats *Variable Annuities*. Dans un premier temps, nous avons déterminé le juste coût des frais d'assurance et afin d'être au plus près de la pratique, nous avons distingué le taux prélevé pour le financement de la garantie : *Mortality and expense*, de celui dédié à la gestion du fonds : *Management expense ratio*. Nous avons noté que la détermination de la juste valeur des garanties sous-jacentes à ces contrats, impose une correspondance implicite entre ces deux taux. Nous avons ensuite construit un portefeuille dynamique de couverture optimale résultant de la méthodologie générale suggérée à la première partie. Les pertes futures actualisées de ces garanties apparaissent comme l'agrégation de deux quantités : la somme de la valeur actuelle des erreurs de couverture résiduelles et du coût lié aux frais de transaction, diminuée du montant de marge, *Margin offset*, prélevé par l'assureur pour le financement des garanties. Ce qui nous a permis de quantifier les budgets de risque associés aux distributions de ces pertes. Notre méthodologie aboutit à une immobilisation en capital bien inférieure à celle fournie par l'allocation classique en delta. Nous avons montré qu'une telle stratégie de couverture encore présente dans la pratique était à proscrire.

Bibliographie

- Aït-Sahalia, Y., Jacod, J., 2009. Testing for jumps in a discretely observed process. *Annals of Statistics* 37 (1), 184–222.
- Bacinello, A., 2003. Fair valuation of a guaranteed life insurance participating contract embedding a surrender option. *Journal of Risk and Insurance* 70 (3), 461–487.
- Bacinello, A., Millosovich, P., Olivieri, A., Pitacco, E., 2011. Variable annuities : A unifying valuation approach. *Insurance Mathematics & Economics* 49 (3), 285–297.
- Bakshi, G., Madan, D., 2000. Spanning and derivative-security valuation. *Journal of Financial Economics* 55 (2), 205–238.
- Ballotta, L., 2005. A Lévy process-based framework for the fair valuation of participating life insurance contracts. *Insurance : Mathematics and Economics* 37 (2), 173–196.
- Bernard, C., Lemieux, C., 2008. Fast simulation of equity-linked life insurance contracts with a surrender option. In : *Simulation Conference, 2008. WSC 2008. Winter. IEEE*, pp. 444–452.
- Bertoin, J., 1996. *Lévy Processes*. Vol. 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Billio, M., Monfort, A., 1998. Switching state-space models Likelihood function, filtering and smoothing. *Journal of Statistical Planning and Inference* 68 (1), 65–103.
- Black, F., Scholes, M., May-June 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637–659.
- Bonnin, F., Planchet, F., Juillard, M., 2014. Best estimate calculations of savings contracts by closed formulas : application to the orsa. *European Actuarial Journal* 4 (1), 181–196.
- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S., 2000. Option pricing for truncated Lévy processes. *International Journal for Theory and Applications in Finance* 3 (3), 549–552.

- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S., 2002a. Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory. Vol. 9 of Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability. World Scientific, London.
- Boyarchenko, S., Levendorskiĭ, S., 2002b. Perpetual american options under Lévy processes. *SIAM Journal on Control and Optimization* 40 (6), 1663–1696.
- Brennan, M., Schwartz, E., 1976. The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee. *Journal of Financial Economics* 3 (3), 195–213.
- Bühlmann, H., Gisler, A., 2005. A course in Credibility Theory and its Applications. Springer.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., Yor, M., 2002. The fine structure of asset returns : an empirical investigation. *Journal of Business* 75 (2), 305–332.
- Carr, P., Madan, D. B., 1998. Option valuation using the fast fourier transform. *Journal of Computational Finance* 2, 61–73.
- Clément, E., Lamberton, D., Protter, P., 2002. An analysis of a least squares regression method for american option pricing. *Finance and Stochastics* 6 (4), 449–471.
- Coleman, T. F., Li, Y., Patron, M.-C., 2007. Robustly hedging variable annuities with guarantees under jump and volatility risks. *The Journal of Risk and Insurance* 74 (2), 347–376.
- Cont, R., 2001. Empirical properties of asset returns : Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance* 1, 223–236.
- Cont, R., Tankov, P., 2004. *Financial Modelling with Jump Processes*, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, London.
- Cont, R., Tankov, P., Voltchkova, E., 2007. Hedging with options in models with jumps. *Stochastic analysis and applications* , 197–217.
- Delong, Ł., 2014. Pricing and hedging of variable annuities with state-dependent fees. *Insurance : Mathematics and Economics* 58, 24–33.
- Dufresne, F., Gerber, H., Shiu, E., 1991. Risk theory with the gamma process. *Astin Bulletin* 21 (2), 177–192.
- Eberlein, E., Glau, K., Papapantoleon, A., 2010. Analysis of Fourier transform valuation formulas and applications. *Applied Mathematical Finance* 17 (3), 211–240.
- Föllmer, H., Leukert, P., 1999. Quantile hedging. *Finance and Stochastics* 3 (3), 251–273.
- Föllmer, H., Leukert, P., 2000. Efficient hedging : Cost versus shortfall risk. *Finance and Stochastics* 4 (2), 117–146.

-
- Föllmer, H., Schweizer, M., 1991. Hedging of contingent claims under incomplete information. *Applied Stochastic Analysis*, M. H. A. Davis and R. J. Elliott (eds.), *Stochastics Monographs* 5, 389–414.
- Föllmer, H., Sondermann, D., 1986. Hedging of non-redundant contingent claims. *Contributions to Mathematical Economics*, Hildenbrand, W. and Mas-Colell, A. (eds.) , 205–223.
- Gabriel, F., Sourlas, P., 2006. Couverture d'options en présence de sauts. *Mémoire d'Actuariat*, ENSAE .
- Gerber, H. U., 1997. *Life Insurance Mathematics*, 3rd Edition. Springer Verlag, Berlin, 217pp.
- Gerber, H. U., Pafumi, G., 2000. Pricing Dynamic Investment Fund Protection. *North American Actuarial Journal* 4 (2), 28–37.
- Gerber, H. U., Shiu, E. S. W., 1994. Option Pricing By Esscher Transforms. *Transactions of the Society of Actuaries* 46, 99–191.
- Goldfeld, S., Quandt, R., 1973. A markov model for switching regressions. *Journal of econometrics* 1 (1), 3–16.
- Gouriéroux, C., Laurent, J., Pham, H., 1998. Mean-variance hedging and numéraire. *Mathematical Finance* 8 (3), 179–200.
- Hamilton, J., Susmel, R., 1994. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics* 64 (1-2), 307–333.
- Hamilton, J. D., 1989. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica : Journal of the Econometric Society* 57 (2), 357–384.
- Hardy, M., 2003. *Investment Guarantees : Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, USA.
- Heston, S., 1993. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies* 6 (2), 327.
- Hibbert, J., Mowbray, P., Turnbull, C., 2001. A stochastic asset model & calibration for long-term financial planning purposes. In : *Finance and Investment Conference*.
- Hille, E., Phillips, R., 1957. *Functional analysis and semi-groups*. Vol. 31. American Mathematical Society.
- Jackson, K. R., Jaimungal, S., Surkov, V., 2008. Fourier space time-stepping for option pricing with Lévy models. *Journal of Computational Finance* 12 (2), 1–29.

- Jondeau, E., Poon, S.-H., Rockinger, M., 2007. *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer Finance. Springer Verlag, xviii+542pp.
- Kalberer, T., Ravindran, K., 2009. *Variable Annuities : A Global Perspective*. Risk Books.
- Karatzas, I., Shreve, S. E., 1991. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Vol. 113. Springer.
- Kassberger, S., Kiesel, R., Liebmann, T., February 2008. Fair valuation of insurance contracts under Lévy process specifications. *Insurance : Mathematics and Economics* 42 (1), 419–433.
- Kélani, A., 2015. Hedging with Credibility When Assets Can Jump. Available at SSRN : <http://ssrn.com/abstract=2596995>.
- Kélani, A., Quittard-Pinon, F., 2013. Pricing equity index annuities with surrender options in four models. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance* 7 (2), 105–142.
- Kélani, A., Quittard-Pinon, F., 2014. Pricing, Hedging and Assessing Risk in a General Lévy Context. *Bankers, Markets and Investors* No. 131, July-August, 30–42.
- Kélani, A., Quittard-Pinon, F., 2015. Pricing and Hedging Variable Annuities in a Lévy Market : A Risk Management Perspective. *The Journal of Risk And Insurance*, Forthcoming.
- Kim, Y. S., Lee, J. H., 2007. The relative entropy in CGMY processes and its applications to finance. *Mathematical Methods of Operations Research* 66 (2), 327–338.
- Koponen, I., July 1995. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the gaussian stochastic process. *Physical Review E* 52, 1197–1199.
- Kou, S. G., August 2002. A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science* 48, 1086–1101.
- Koursaris, A., 2013. *The advantages of least squares Monte Carlo*, Barrie & Hibbert.
- KPMG, 2012. *Economic capital modeling in the insurance industry*.
- Laurent, J., Pham, H., 1999. Dynamic programming and mean-variance hedging. *Finance and Stochastics* 3 (1), 83–110.
- Le Courtois, O., Quittard-Pinon, F., 2008. Fair valuation of participating life insurance contracts with jump risk. *The Geneva Risk and Insurance Review* 33 (2), 106–136.
- Le Courtois, O., Walter, C., 2012. *Risques Financiers Extrêmes et Allocation d'Actifs*, 1st Edition. Economica.
- Lewis, A., 2001. A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes .

-
- Longstaff, F., Schwartz, E., 2001. Valuing american options by simulation : A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies* 14 (1), 113.
- Madan, D. B., Seneta, E., 1990. The variance gamma model for share market returns. *Journal of Business* 63 (4), 511–524.
- McNeil, A., Frey, R., Embrechts, P., 2005. *Quantitative Risk Management*. Princeton Series in Finance.
- Melnikov, A., Romaniuk, Y., 2006. Evaluating the performance of gompertz, makeham and lee-carter mortality models for risk-management with unit-linked contracts. *Insurance : Mathematics and Economics* 39, 310–329.
- Merton, R. C., 1976. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3, 125–144.
- Milevsky, M. A., Posner, S. E., 2001. The Titanic Option : Valuation of the Guaranteed Minimum Death Benefit in Variable Annuities and Mutual Funds. *The Journal of Risk and Insurance* 68 (1), 91–126.
- Milhaud, X., Loisel, S., Maume-Deschamps, V., 2011. Surrender triggers in life insurance : what main features affect the surrender behavior in a classical economic context? *Bulletin Français d’Actuariat* 11 (22), 5–48.
- Møller, T., 2001. Risk-minimizing hedging strategies for insurance payment processes. *Finance and Stochastics* 5 (4), 419–446.
- Morrison, S., Turnbull, C., Vysniauskas, N., 2013. Multi-year Projection of Run-off Conditional Tail Expectation (CTE) Reserves. B&H Research, Moody’s Analytics.
- Nteukam, O., Planchet, F., Thérond, P., 2011. Optimal strategies for hedging portfolios of unit-linked life insurance contracts with minimum death guarantee. *Insurance : Mathematics and Economics* 48 (2), 161–175.
- Øksendal, B., 2003. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. Springer, Berlin.
- Patrice Poncet, R. P., 2011. *Finance de marché*, 3rd Edition. Dalloz.
- Planchet, F., 2014. Construire un générateur de scénarios économiques en assurance. Prim’Act and ISFA Research. Available at : www.ressources-actuarielles.net.
- Planchet, F., Guibert, Q., Juillard, M., 2012. Measuring uncertainty of solvency coverage ratio in orsa for non-life insurance. *European Actuarial Journal* 2 (2), 205–226.
- Quittard-Pinon, F., 2003. *Marchés des capitaux et théorie financière*, 3rd Edition. Economica.

- Quittard-Pinon, F., Randrianarivony, R., 2011. Impacts of jumps and stochastic interest rates on the fair costs of guaranteed minimum death benefit contracts. *The Geneva Risk and Insurance Review* 36 (1), 51–73.
- Quittard-Pinon, F., Randrianarivony, R. A., 2008. How to Price Efficiently European Options in Some Geometric Lévy Processes Models? *International Journal of Business* .
- Quittard-Pinon, F., Rolando, T., Le Grand, F., 2012. *La Gestion du Risque de Taux d'intérêt*, 2nd Edition. Economica.
- Raible, S., 2000. Lévy processes in finance : Theory, numerics, and empirical facts. Ph.D. thesis, University of Freiburg.
- Ramezani, C., Zeng, Y., 1998. Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes : application to security prices. Available at SSRN 606361 .
- Randrianarivony, R., 2006. *Prise en compte des discontinuités de cours financiers en assurance et finance*. Ph.D. thesis, Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I.
- Riesner, M., 2006. Hedging life insurance contracts in a Lévy process financial market. *Insurance : Mathematics and Economics* 38 (3), 599–608.
- Roger, P., 1996. *L' évaluation des actifs financiers : modèles à temps discret*. De Boeck Université.
- Sato, K.-I., 1999. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Vol. 68 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge.
- Schweizer, M., 1991. Option hedging for semimartingales. *Stochastic processes and their Applications* 37 (2), 339–363.
- Schweizer, M., 1992. Mean-variance hedging for general claims. *The Annals of Applied Probability* 2 (1), 171–179.
- Schweizer, M., 1995. Variance-optimal hedging in discrete time. *Mathematics of Operations Research* 20 (1), 1–32.
- Schweizer, M., 2001. A guided tour through quadratic hedging approaches. *Option pricing, interest rates and risk management* 12, 538–574.
- Shiryaev, A. N., 1999. *Essential of Stochastic Finance : Facts, Models, Theory*. Vol. 3. World Scientific Company.
- Stanton, R., 1997. A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk. *Journal of Finance* , 1973–2002.
- Tankov, P., Voltchkova, E., 2009. *Jump-diffusion models : a practitioner's guide*. Banque et Marchés 99.

-
- Teuguaia, O. N., Ren, J., Planchet, F., 2014. Internal model in life insurance : application of least squares monte carlo in risk assessment .
- Titchmarsh, E., 1937. Introduction to the theory of Fourier integrals. Vol. 337. Clarendon Press Oxford.
- Vandaele, N., Vanmaele, M., 2008. A locally risk-minimizing hedging strategy for unit-linked life insurance contracts in a lévy process financial market. *Insurance : Mathematics and Economics* 42 (3), 1128–1137.
- Wilkie, A., Waters, H. R., Yang, S., 2003. Reserving, pricing and hedging for policies with guaranteed annuity options. *British Actuarial Journal* 9 (02), 263–391.
- Wu, L., 2007. Chapter 3 Modeling Financial Security Returns Using Lévy Processes . In : Birge, J. R., Linetsky, V. (Eds.), *Financial Engineering*. Vol. 15 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*. Elsevier, pp. 117 – 162.