

Mémoire présenté le :
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : **Victor GILLIER**

Titre : **Calibration avancée du modèle de tarification à l'exposition dans le cadre
de la réassurance incendie par risque**

Confidentialité : ☒ NON ☐ (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaires*

*Entreprise : **QBE Re**
Nom :*

Signature :

*Directeur de mémoire en entreprise :
Nom : **Stijn DESMEDT***

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de dif-
fusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE
ET D'ASSURANCES

M2 ACTUARIAT

Calibration Avancée du modèle de Tarification à l'Exposition dans le cadre de la réassurance Incendie par Risque

Auteur :

Victor GILLIER

Tuteur ISFA :

Yahia SALHI

Tuteurs entreprise :

Stijn DESMEDT

Mohammed SNOUSSI



Résumé

Mots-Clefs : Réassurance, Excédent de sinistre, Calibration, Property, Fréquence, MBBEFD, Tarification, Courbes d'exposition.

La cotation d'un traité de réassurance de type *Excess of Loss* (excédent de sinistre) nécessite beaucoup d'attention. Face à la complexité du risque et au développement des puissances de calcul, les méthodes de tarification évoluent régulièrement, afin de prendre en considération toujours plus d'informations.

Dans ce mémoire, nous allons présenter les méthodes classiques de tarification du risque *Property*, à l'expérience et à l'exposition, puis la méthode combinée, interne à QBE Re. Nous verrons ensuite la manière actuelle de calibrer le modèle combiné, les difficultés qu'elle pose, et l'impact qu'elle peut avoir sur le modèle ainsi obtenu.

Enfin, nous chercherons une nouvelle méthode de calibration se basant sur une étude de la fréquence des sinistres, en tentant de résoudre les problèmes détectés, puis nous détaillerons le nouvel outil de calibration qui en découle, à travers un exemple illustrant les apports concrets.

Quand le temps presse...

A la fin de chaque chapitre, vous trouverez un résumé des présentations et des points clefs, dans un cadre comme celui-ci.

Abstract

Key-words : Reinsurance, Excess of loss, Calibration, Property, Frequency, MBBEFD, Pricing, Exposure Curves.

The pricing of an Excess of Loss treaty is very demanding. As computing power is rapidly increasing, pricing methods are regularly reviewed to take benefit of it and use as much information as possible.

In this Master's thesis, we will present various classical pricing methods for pricing property per risk reinsurance treaties, such as experience and exposure rating. We will also present the method used by QBE Re that combines these two techniques, which are traditionally seen as independent methods. Then we will see how is currently calibrated this combined model, what issues can occur, and how it can impact the retained model.

Finally, we will look for a new alternative way of calibrating this model, using claims' frequency analysis, while attempting to resolve the issues observed with the current calibration. We will conclude by introducing a new calibration tool, through an example showing the concrete impact of it.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Stjin Desmedt, mon tuteur au sein de QBE Re, pour le temps qu'il m'a consacré, son aide précieuse et sa relecture.

Mes remerciements vont également à Mohammed Snoussi, mon second tuteur, pour m'avoir fait profiter de sa connaissance du risque et du modèle étudié dans ce mémoire.

Je remercie aussi Aurélien et Indra pour leur expertise et leurs conseils judicieux.

Merci beaucoup à Yahia Salhi pour son aide durant la rédaction de ce mémoire, son encadrement, et sa relecture attentive.

Enfin, je remercie mes collègues pour leur bonne humeur, ainsi que toute l'équipe de QBE pour son accueil chaleureux.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
1 Problématique	1
1.1 Introduction à la Réassurance	1
1.1.1 Présentation Générale	1
1.1.2 Réassurance non-proportionnelle - <i>Excess of Loss</i>	2
1.1.3 Présentation de QBE Re	4
1.1.4 Risques couverts	5
1.1.5 Information disponible	5
1.2 Méthodes de tarification	8
1.2.1 Tarification à l'expérience	8
1.2.2 Tarification à l'exposition	9
1.2.3 Méthode à l'exposition calibrée	12
1.2.4 Méthode combinée (développée au sein de la compagnie)	13
1.3 Problématique & Objectifs	21
2 Modélisation & Impacts de la méthode actuelle	23
2.1 Modèle Poisson-Pareto	23
2.1.1 Définition & Utilisation de la méthode	23
2.1.2 Conclusions préliminaires	25
2.2 Contexte de l' <i>Exposure Rating</i>	27
2.2.1 Portefeuilles utilisés	27
2.2.2 Structure de la simulation	29
2.2.3 Impact de la méthode actuelle	34
2.2.4 Conclusions	35
3 Nouvelle Méthode & Résultat	37
3.1 Utilisation de la Méthode des Trapèzes	37
3.1.1 Explication de la méthode	37

3.1.2	Résultats	39
3.2	Calibration en Fréquence	40
3.2.1	Motivations & Explications	40
3.2.2	Modélisation & Simulations	40
3.2.3	Résultats des simulations de la nouvelle méthode	44
3.3	Développement du nouvel outil de calibration	47
3.4	Exemple d'utilisation de l'outil	53
	Conclusion	61

Chapitre 1

Problématique

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la calibration d'un modèle de tarification à l'exposition des traités en excédent de sinistre dans le cadre de la réassurance incendie par risque.

Dans le premier chapitre, les différentes méthodes de tarification seront décrites, en particulier la méthode développée chez QBE Re, et les raisons qui y font intervenir une calibration. Nous expliciterons également les raisons nous incitant à remettre en cause la méthode actuelle de calibration qui y est présentée, notamment son manque de transparence.

Afin d'étudier l'impact de la méthode actuelle de calibration, le chapitre 2 s'efforcera de l'implémenter et d'en étudier les effets en matière d'estimation de la sinistralité attendue, en la comparant aux résultats de simulations. Un biais de tarification sera identifié et nous incitera à développer une nouvelle méthode.

Enfin, le chapitre 3 s'attachera à développer une nouvelle méthode de calibration du modèle propre à QBE Re, qui sera basée sur l'analyse des fréquences attendues et observées au delà de différents seuils. Nous présenterons ensuite le nouvel outil qui a été créé à travers un exemple d'utilisation, expliquant les différentes analyses ajoutées afin de rendre la nouvelle méthode de calibration plus transparente pour l'utilisateur du modèle de tarification.

1.1 Introduction à la Réassurance

1.1.1 Présentation Générale

Comme n'importe quel particulier, il arrive que les Compagnies d'assurance aient besoin, pour diverses raisons, de s'assurer. Elles doivent alors se tourner vers un spécialiste : le réassureur, souvent défini comme *l'assureur des assureurs*. Ainsi,

les compagnies d'assurance, appelées *cédantes*, sont amenées à céder une partie des risques qu'elles ont en portefeuille au réassureur, en échange d'une prime de réassurance.

Plusieurs facteurs poussent les Compagnies à se réassurer. D'abord pour se protéger contre les très grands sinistres, mais aussi pour augmenter leur limite de souscription, respecter les récentes normes « Solvency II » en capitaux propres, ou même stabiliser leur résultat.

Enfin, la réassurance permet le développement du marché et de la concurrence, par le partage au niveau mondial du coût des grands sinistres. Cela incite les Compagnies à créer de nouveaux produits, quitte à céder une grande partie du risque aux réassureurs au lancement.

Il existe deux grandes catégories de traités de réassurance : Les traités proportionnels et les traités non-proportionnels. La réassurance proportionnelle est définie autour d'un taux de cession. Le réassureur accepte de payer la portion des sinistres correspondante à ce taux, et reçoit, en échange, la même portion de prime. Dans ce mémoire, nous nous focaliserons sur les traités non-proportionnels. Plus précisément, nous aborderons les traités *Excess of Loss*.

1.1.2 Réassurance non-proportionnelle - *Excess of Loss*

La réassurance non-proportionnelle est construite à partir du montant des sinistres. On établit une franchise (la priorité ou *deductible*), montant qui restera en rétention de la cédante, et un plafond d'intervention du réassureur (la limite ou *limit*). En d'autres termes, le réassureur garantit une indemnisation des sinistres au-delà d'une franchise, appelée priorité, voulue par l'entreprise. L'intervention du réassureur est, néanmoins, limitée comme nous l'avons évoqué précédemment. Cette fois ci, le réassureur ne reçoit plus une portion de la prime proportionnelle à son engagement, mais fixe un prix qu'il aura calculé lui même, basé sur le risque sous-jacent (sinistralité au delà de la priorité ou ratio S/P par exemple).

Passons plus spécifiquement au traité EXCESS OF LOSS (ou Excédent de Sinistre). Il est destiné à couvrir la part de chaque sinistre entre la priorité et la limite. On l'écrit généralement de la forme PORTÉE XS PRIORITÉ où la portée (ou *cover*) correspond à la différence entre la limite et la priorité. Il peut regrouper plusieurs tranches successives.

En termes mathématiques : notons D la priorité, C la portée, et X le montant d'un sinistre. Alors, la prise en charge du réassureur est :

$$R = \min(\max(0, X - D), C)$$

Un tel traité sera noté $C \text{ xs } D$.

Prenons un exemple d'un traité de deux tranches :

- T1 : 1 000 000 xs 500 000 €
- T2 : 750 000 xs 1 500 000 €

Le réassureur va donc couvrir 1 000 000 € en excès de 500 000 € en tranche T1 et 750 000 € en excès de 1 500 000 € en tranche T2.

Sinistre	Rétention	T1	T2	Reste
400 000	400 000	0	0	0
1 250 000	500 000	750 000	0	0
2 000 000	500 000	1 000 000	500 000	0
3 000 000	500 000	1 000 000	750 000	750 000

TABLE 1.1 – Fonctionnement du traité XS.

C'est encore plus parlant visuellement :

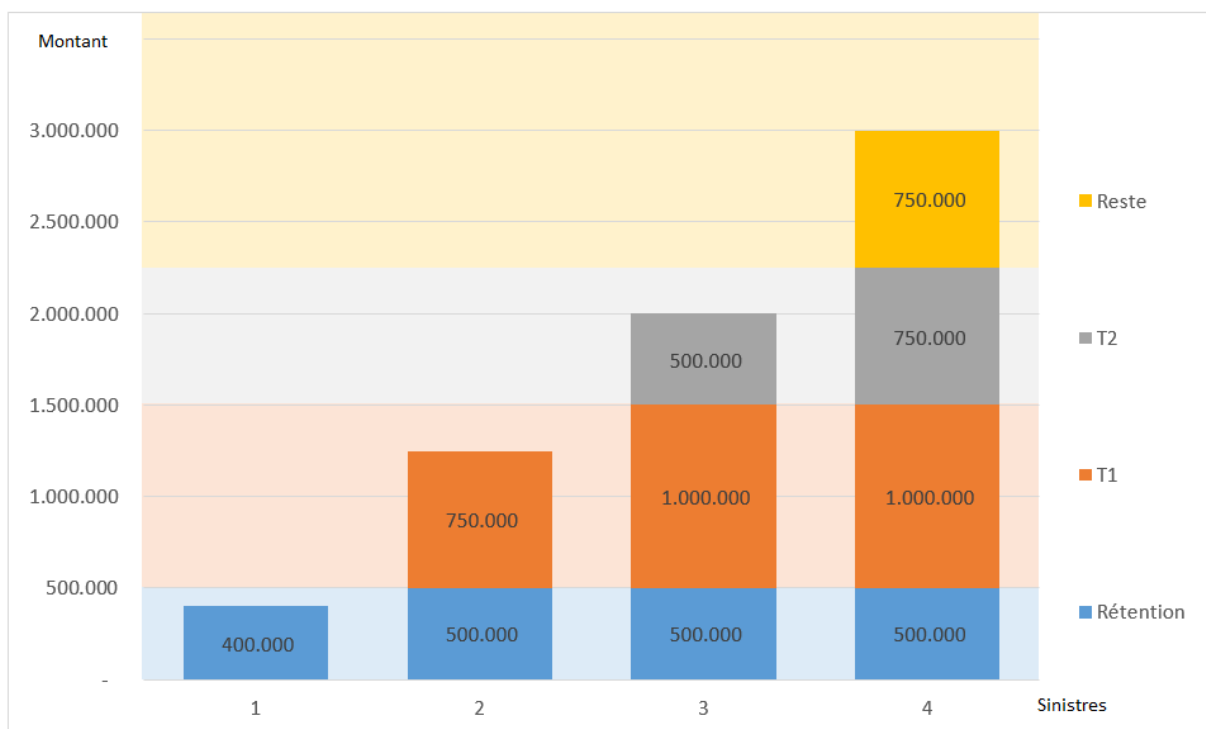


FIGURE 1.1 – Visualisation d'un traité XS à deux tranches

Le reste à charge pour la cédante sera éventuellement pris en charge par une autre tranche, avec les mêmes ou d'autres réassureurs, ou même un autre traité.

Un autre aspect essentiel qui apparaît dans ce schéma est la notion de *reinstatements*, ou reconstitutions en français. Dans un traité de réassurance, il est précisé le nombre de fois qu'une tranche peut être consommée entièrement : c'est la limite annuelle d'engagement du réassureur. On va définir un nombre de reconstitutions k , qui offrira à la cédante une couverture de taille $k+1$ fois la portée. Ces reconstitutions peuvent être gratuites ou payantes.

Dans notre exemple, on voit que la tranche T1 est consommée presque 3 fois entièrement. Pour que le réassureur intervienne sur tous les sinistres, il faudrait avoir acheté un traité d'au moins 2 reconstitutions (pour avoir 2+1 fois la couverture).

Ainsi, les traités se font en «tranches» PORTÉE XS PRIORITÉ, que l'on va étudier et tarifier une à une. Nous distinguerons les «tranches travaillantes» (notées *WL* pour *Working Layer*) qui sont sinistrées avec une grande probabilité, des tranches non-travaillantes, qui sont, elles, touchées très rarement, par quelques sinistres extrêmes, voire pas du tout.

Il convient de distinguer deux types de traité XS :

- **Par risque** : dans ce cas, le réassureur s'engage à payer, uniquement pour une police, la part du sinistre qui dépasse la franchise,
- **Par événement** : il intervient à chaque survenance d'évènement, éventuellement sur plusieurs polices. Cela oblige à définir ce qu'est un événement dans le contrat. C'est, par exemple, le cas pour les tempêtes qui se produisent dans un court intervalle de temps.

1.1.3 Présentation de QBE Re

QBE Re est un réassureur vie et non-vie international, faisant partie du groupe QBE. La division de réassurance possède des bureaux à Londres, Bruxelles, Dublin et New York. Le bureau de Bruxelles, lieu de ce mémoire, a été acquis en 2010 par le groupe QBE, et était auparavant détenu par le groupe KBC, grand groupe bancaire belge. QBE Re génère environ 1 milliard d'euros de prime brute annuelle, dont 30 % provient du bureau de Bruxelles. La prime acquise dans le cadre de la réassurance incendie non-proportionnelle, étudié dans ce mémoire, en représente une partie importante, d'où la nécessité de maintenir et d'améliorer le modèle associé.

Le bureau de Bruxelles est composé de 85 personnes, dont environ 20 actuaires. Il y a 3 départements principaux, que sont le département *Analytics* (Recherche et Développement), la souscription, et le département technique. Le département

Analytics s'occupe du développement des modèles et des outils, qui vont être utilisés par le département technique pour calculer le prix technique des traités de réassurance. L'analyse technique est ensuite transmise à la souscription qui se charge des négociations avec les cédantes. Ce mémoire a été effectué au sein du département *Analytics*.

1.1.4 Risques couverts

Dans le cadre de la réassurance incendie par risque, le réassureur va couvrir des portefeuilles pouvant contenir plusieurs types de risques.

En général, la majorité du portefeuille est composée de risques résidentiels simples (maisons individuelles) ou d'appartements. On trouve également un certain nombre des risques commerciaux ou agricoles, comme des magasins ou des entrepôts. Enfin, on y trouve aussi des risques industriels, beaucoup plus lourds, allant de la simple usine à la plateforme pétrolière. Dans ce cas, la cédante utilise surtout la réassurance par risque pour stabiliser son portefeuille et limiter l'impact potentiel que des grands sinistres (moins fréquents) pourraient avoir. En effet, si la cédante n'a pas suffisamment de risques d'une certaine taille en portefeuille, il est difficile de bénéficier de la loi des grands nombres.

Les sinistres pouvant survenir sont, entre autres, des défauts électriques, des incendies, voire des explosions pour les risques industriels.

1.1.5 Information disponible

Pour tarifier un tel traité de réassurance, la cédante va communiquer certaines informations au réassureur afin qu'il puisse analyser le risque cédé. Les traités étant renouvelés au 1^{er} janvier de chaque année, l'envoi de données est effectué tous les ans, entre les mois d'octobre et de décembre. En général, le réassureur dispose de quinze jours pour rendre sa proposition de prix. Il reçoit :

- Le profil du portefeuille,
- L'historique des sinistres et des primes,
- Le programme de réassurance désiré.

Nous allons les présenter ici et introduire les notations qui seront utilisées dans la suite. Supposons que nous sommes en année $t \in \{1, \dots, T\}$.

Profil de portefeuille

Borne Basse	Borne Haute	Prime	Nombre de Risques	Somme Assurée Totale
$LB_1 = 0$	$UB_{t,1}$	$P_{t,1}$	$N_{t,1}$	$TSI_{t,1}$
$LB_{t,2} = UB_{t,1}$	$UB_{t,2}$	$P_{t,2}$	$N_{t,2}$	$TSI_{t,2}$
$LB_{t,3} = UB_{t,2}$	$UB_{t,3}$	$P_{t,3}$	$N_{t,3}$	$TSI_{t,3}$
...	...	...	...	...
$LB_{t,B_t} = UB_{t,B_t-1}$	UB_{t,B_t}	P_{t,B_t}	N_{t,B_t}	TSI_{t,B_t}

TABLE 1.2 – Profil pour l'année $t \in \{1, \dots, T\}$

Le profil est une description du portefeuille de la cédante qui se présente sous la forme d'un tableau où chaque ligne est appelée "bande", et notée $b_t \in \{1, \dots, B_t\}$. Il contient la totalité des risques couverts, divisés en bandes en fonction de la somme assurée du risque, avec la prime, le nombre de risques par tranche, et la somme assurée totale. A partir de ce profil, nous pouvons déterminer la Somme Assurée Moyenne (*Average Sum Insured* en anglais) par bande valant $ASI_{t,b_t} = TSI_{t,b_t}/N_{t,b_t}$. On définit également le tarif par bande (ou taux de prime) en année t par :

$$T_t = P_t/TSI_t, t \in \{1, \dots, T\}.$$

Plus ce profil est détaillé, meilleures sont les analyses que nous pouvons en tirer. Il n'est cependant pas toujours aisé d'obtenir une meilleure granularité que celle décidée par la cédante.

Historique de sinistres et de primes

Le réassureur va aussi recevoir, pour chaque année $t \in \{1, \dots, T-1\}$, une liste de sinistres donnée au delà d'un seuil A_t . En général, ce seuil correspond à la moitié de la priorité du programme de réassurance. C'est une pratique de marché, considérant que les sinistres proches du programme pourraient éventuellement le toucher en cas de développement (les sinistres peuvent évoluer dans le temps, en fonction des expertises ou des recours en justice), mais que ceux encore plus petits (donc inférieurs à la moitié du programme) ne sont pas nécessaires. Ce problème de troncature des données ne sera pas traité dans ce mémoire.

Ces sinistres seront notés $\{C_{t,1}, \dots, C_{t,n_t}\}$.

De plus, la cédante transmet l'historique des primes qu'elle a reçu pour les années antérieures notées P_t pour $t \in \{1, \dots, T-1\}$.

Programme de réassurance désiré

La cédante transmet également le programme qu'elle souhaite sous la forme suivante :

Tranche	Priorité	Limite
XL_1	D_1	D_2
XL_2	D_2	D_3
XL_3	D_3	D_4

TABLE 1.3 – Programme de Réassurance

La première tranche XL_1 va couvrir les portions des sinistres entre D_1 et D_2 , et ainsi de suite. Comme nous travaillons dans un cadre de réassurance **par risque**, les sinistres ne sont pas agrégés dans le programme de réassurance. Le réassureur va alors fournir R_i reconstitutions pour chaque tranche i , fournissant $R_i + 1$ fois la couverture à la cédante. Ces reconstitutions peuvent être gratuites ou payantes (*pro rata capita* en général; c'est-à-dire que si la moitié de la tranche est consommé, la cédante doit repayer la moitié de la prime de réassurance).

1.2 Méthodes de tarification

La tarification des traités *Excess of Loss* requiert une modélisation des grands sinistres. L'intervention du réassureur n'est pas automatique car soumise à une franchise et donc à une sinistralité suffisamment importante du portefeuille. Il existe deux principales méthodes : la tarification à l'expérience et la tarification à l'exposition.

1.2.1 Tarification à l'expérience

Cette première méthode, la plus intuitive, se base uniquement sur l'historique d'encaissement et de sinistres de la cédante : on suppose que l'histoire de la cédante donne une bonne prédiction du futur. Cela nécessite que l'historique soit suffisamment fourni et que le profil de risque n'ait pas changé, sinon il faudrait se tourner vers des méthodes alternatives.

Introduisons le *Burning Cost* (BC) à l'expérience :

On définit le *Burning Cost* à l'expérience (aussi appelé BC Observé) comme le rapport entre la sinistralité et la prime dans une tranche de réassurance :

$$\text{BC Expérience} = \frac{\text{Sinistralité attendue dans la tranche}}{\text{Prime encaissée}}$$

Pour une tranche en excédent de sinistre XL_j , de priorité D_j et de limite D_{j+1} , et en reprenant les notations précédentes, on a :

$$\text{BC Expérience} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{k_t=1}^{n_t} \min(D_{j+1} - D_j; \max(0; C_{t,k_t} - D_j))}{\sum_{t=1}^{T-1} P_t}.$$

Ensuite, il est possible d'indexer les sinistres et les primes afin de rendre l'historique représentatif du présent, puis d'ajouter la marge commerciale désirée.

Indexer les sinistres revient à les considérer à euros constants, c'est-à-dire en valeur réelle (comme s'ils avaient lieu aujourd'hui). Pour cela, on va utiliser un indice de référence tel que l'indice des prix à la construction.

Les atouts principaux de cette méthode sont sa simplicité, sa rapidité de mise en place et sa faible consommation de ressources. Elle permet d'utiliser l'historique de la cédante et est une bonne méthode pour obtenir une estimation du risque.

Cependant, elle possède de nombreux inconvénients :

- Suppose une structure du portefeuille inchangée dans le temps. En effet, comme nous n'utilisons que l'historique de la sinistralité passée, elle est représentative de l'exposition du passé. En cas d'évolution du portefeuille, ces données passées ne sont plus représentatives de la structure qui peut avoir été déformée, par

- exemple si la cédante décide de changer de politique de souscription, de souscrire des risques plus lourds, et qu'elle s'expose à de l'antiselection,
- Nécessite beaucoup de données afin de mesurer avec fiabilité la sinistralité attendue, et donc ne peut fonctionner que dans une tranche sévèrement touchée, générant une forte incertitude statistique
- Donne un BC nul dans une tranche jamais touchée, alors que le risque est réel.

Pour pallier ce dernier point, on pourrait utiliser un modèle individuel ou collectif. Dans un **modèle individuel**, on va considérer la sinistralité pour chaque police individuellement : supposons que nous possédons n polices en portefeuille, la charge générée vaut alors :

$$S_{ind} = \sum_{i=1}^n X_i$$

Où X_i représente la charge de sinistre générée par la police i .

Cependant, nous n'avons pas, en réassurance, la granularité nécessaire pour travailler police par police, et pourrions plutôt utiliser un **modèle collectif** qui permet de considérer un portefeuille entier : notons N la variable aléatoire à valeurs entières représentant le nombre de sinistres générés par le portefeuille, et $(X_i)_{i>0}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (IID) représentant les montants de sinistres. La charge totale vaut :

$$S_{coll} = \sum_{i=1}^N X_i$$

Traditionnellement en réassurance, on utilise un modèle Poisson-Pareto, c'est-à-dire que l'on va modéliser la fréquence N à l'aide d'une loi de Poisson, et la sévérité des X_i avec une loi de Pareto. Néanmoins deux problèmes majeurs subsistent :

- Les sinistres historiques ne prennent pas en compte l'évolution du portefeuille de la cédante,
- Lorsque l'on détermine une distribution de sinistralité à partir des sinistres historiques et qu'elle est utilisée dans une région où il n'y a pas eu de sinistre, on ne prend pas en compte les informations disponibles sur le portefeuille dans la zone concernée.

1.2.2 Tarification à l'exposition

La tarification à l'exposition repose sur des concepts en partie introduits par Stefan BERNEGGER dans les années 1990[1], en particulier ce que l'on nomme les courbes d'exposition.

Profil du portefeuille

L'un des éléments nécessaires à l'utilisation de cette méthode est le profil de la cédante, introduit précédemment sous forme de notations.

Prenons un exemple de profil avec des données :

Borne Basse	Borne Haute	Prime	Nombre de Risques	Somme Assurée Totale
0	100 000	1 200 000	10 000	600 000 000
100 000	500 000	1 500 000	4 000	800 000 000
500 000	1 000 000	200 000	200	150 000 000
1 000 000	2 000 000	4 000	2	3 200 000

TABLE 1.4 – Exemple de Profil

Cela permet de déterminer le tarif (la prime divisée par la somme assurée totale) et les sommes assurées moyennes (qui seront désormais notées ASI pour *Average Sum insured*). Parfois, les ASI sont remplacées par les *Probable Maximum Loss (PML)*, ou perte maximum probable. Cela représente non pas la valeur assurée mais la perte maximale la plus probable. Cela peut avoir une grande différence de valeur sur un risque industriel par exemple, où plusieurs bâtiments séparés sont assurés dans la même police, et où il est peu probable que plusieurs bâtiments soient détruits ensemble. Prenons l'exemple d'un site industriel possédant 4 bâtiments distincts d'une valeur individuelle de 1 000 000 euros. Dans un profil en valeur assurée, cette police serait matérialisée par 1 risque de 4 000 000 euros. Dans un profil en PML, si la cédante considère qu'un seul des quatre bâtiments peut être détruit par un sinistre unique (si les bâtiments sont éloignés, l'incendie ne pourrait pas se propager), on n'aurait plus qu'1 risque de 1 000 000 euros.

Fonctionnement des courbes d'exposition

Une courbe d'exposition est une courbe donnant la part de prime nécessaire à la couverture d'un risque, en fonction du degré de dommage maximal que l'on couvre. Or, dans le cadre de la réassurance *Excess of Loss* par risque, comme nous possédons la valeur assurée de chaque bande (et supposons que chaque risque de la bande a la même valeur assurée), et que l'on suppose qu'un bien ne peut pas générer un sinistre plus grand que sa valeur assurée, nous cherchons à déterminer le degré de dommage, soit une valeur comprise entre 0 et 1 (si on a une somme assurée de 1 000 000 € et un degré de dommage de 45 %, alors le sinistre est de 450 000 €).

Pour cela, nous nous appuyons sur les courbes d'exposition. Elles nous donnent, pour

un traité XL, la part de prime pure nécessaire à la couverture du traité.

Prenons un exemple :

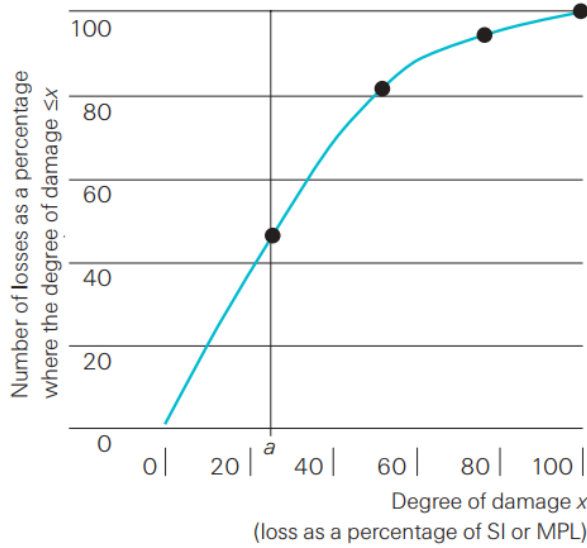


FIGURE 1.2 – Exemple de courbe d'exposition

Sur cette courbe, nous avons en abscisse le degré de dommage, exprimé en pourcentage de la somme assurée.

En ordonnée, nous avons le nombre de sinistres de degré de dommage inférieur. Ainsi, on peut lire ici que pour couvrir les sinistres limités à a % de degré de dommage, il faut environ 50 % de la prime.

On comprend également que plus la courbe d'exposition est proche de la droite d'équation $y = x$, plus la proportion de sinistres totaux (c'est-à-dire que le montant du sinistre

correspond à la valeur assurée) est grande. A l'inverse, plus les degrés de dommages petits sont fréquents, plus on s'en éloigne.

Formulation mathématique des courbes d'exposition

Soit Y une variable aléatoire représentant le sinistre lié à un risque de valeur assurée M . Le degré de dommage X est défini comme Y/M . Soit D la priorité d'un programme de réassurance, et $d = D/M$. Alors, la courbe d'exposition G est définie comme le rapport entre la prime nécessaire à l'assureur pour couvrir les sinistres limités à D , et la prime totale :

$$G(d) = \frac{\mathbb{E}[\min(d, X)]}{\mathbb{E}[\min(1, X)]} = \frac{\int_0^d (1 - F_X(x)) dx}{\int_0^1 (1 - F_X(x)) dx}$$

Où F_X représente la fonction de répartition du degré de dommage X .

Comme expliqué précédemment, $G(d)$ s'interprète comme la portion de prime pure nécessaire pour couvrir la part des sinistres tronquée au degré de dommage d . De plus, comme expliqué dans l'article de S. BERNEGGER[1], on peut déterminer la fonction de répartition du risque à partir de sa courbe d'exposition :

$$F_X(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } d = 1, \\ 1 - \frac{G'(d)}{G'(0)} & \text{if } 0 \leq d < 1, \end{cases}$$

Où $F_X(0) = 0$ et $G'(0) = 1/\mathbb{E}[X]$.

Tarification

Ces courbes vont nous permettre de mettre en place la tarification à l'exposition : si l'on veut tarifier à l'exposition un traité C *vs* D , de limite $L = C + D$, il faut s'appuyer sur le profil de l'année T de la cédante et calculer deux quantités pour chaque bande b_T :

- $r_{b_T} = \frac{D}{ASI_{b_T}}$, le degré de dommage minimum,
- $s_{b_T} = \frac{L}{ASI_{b_T}}$, le degré de dommage maximum dans la bande.

Pour chaque bande, on associe une courbe d'exposition notée G_{b_T} , de telle sorte que $G_{b_T}(x)$ corresponde à la portion de la prime nécessaire pour couvrir tous les sinistres de la bande b_T de degré de dommage limité à x (par définition des courbes d'exposition). Or, nous voulons couvrir dans notre traité C *vs* D , la partie des dommages comprise entre r_{b_T} et s_{b_T} . Ainsi, la prime nécessaire totale sera :

$$EX = \sum_{b_T=1}^{B_T} (G_{b_T}(s_{b_T}) - G_{b_T}(r_{b_T})) * P_{b_T}$$

Où P_{b_T} représente la prime de la bande b_T .

Nous allons maintenant voir comment combiner les deux méthodes précédentes.

1.2.3 Méthode à l'exposition calibrée

Cette méthode est un mélange des deux méthodes précédentes. D'abord, on effectue une tarification à l'Expérience sur les «tranches travaillantes». Puis on fait une tarification à l'Exposition sur toutes les tranches du traité.

Dès lors que nos deux tarifications sont calculées, nous pouvons effectuer la *calibration*. Cela consiste simplement à déterminer le ratio suivant :

$$\frac{\text{BC à l'expérience}}{\text{BC à l'exposition}}$$

Une fois ce ratio déterminé, on l'appliquera sur les résultats à l'exposition des tranches non-travaillantes, afin d'affiner nos conclusions.

Cette méthode permet de prendre en compte les informations que l'on a sur la sinistralité passée, mais également nos modélisations mathématiques faites à l'exposition. Cependant, il n'est pas toujours simple de déterminer des tranches travaillantes fiables, et le ratio y est directement lié. Le choix du ratio va dépendre de l'avis d'expert, basé principalement sur l'expérience et la connaissance de la cédante et la crédibilité de l'information qui en provient. De plus, bien que cette méthode permette de prendre en compte l'évolution du portefeuille à travers l'expérience, elle n'en permet pas une étude approfondie, et l'on s'expose au risque de ne pas

voir certaines évolutions, comme l'alourdissement de certains risques, ou encore l'augmentation de la proportion de grands risques dans le portefeuille à travers le temps.

1.2.4 Méthode combinée (développée au sein de la compagnie)

La méthode utilisée chez QBE Re qui a été développée en interne est une amélioration de la méthode à l'exposition calibrée, dans le but de tenir compte de toutes les informations dont nous disposons concernant la cédante.

Cette méthode va reposer sur deux éléments principaux :

- une mesure d'exposition basée sur la fréquence théorique issue du profil,
- une méthode d'indexation des sinistres s'appuyant sur l'évolution du profil.

Ces deux quantités vont être détaillées et expliquées dans les étapes suivantes. On suppose que l'on est en année T et que l'on possède les profils et les sinistres depuis l'année 1.

Détaillons les étapes nécessaires à l'utilisation de cette méthode, décrite dans *Experience and Exposure Rating for Property Per Risk Excess of Loss Reinsurance Revisited* [2] :

- **Etape 1** : Création d'un profil continu,
- **Etape 2** : Indexation des sinistres, des primes, et du profil,
- **Etape 3** : Analyse de l'évolution du profil,
- **Etape 4** : Choix des courbes d'exposition,
- **Etape 5** : Calcul de la mesure d'exposition du profil à l'aide des fréquences,
- **Etape 6** : Calcul des sinistres "As-If",
- **Etape 7** : Calibration du modèle à l'aide des tranches travaillantes,

— **Etape 1 : Création d'un profil continu :**

Le profil transmis par les cédantes manque souvent de granularité pour appliquer les modèles de tarification précisément. Il est nécessaire de le lisser en découpant chaque bande en sous-bandes, selon un algorithme décrit par S. Desmedt et al. dans *Experience and Exposure Rating for Property Per Risk Excess of Loss Reinsurance Revisited* [2]. Le principe est de découper chaque bande de manière à garder le même tarif (à savoir $T_t = P_t/TSI_t$, défini en section 1.1.5).

— **Etape 2 : Indexation des sinistres, des primes, et du profil :**

Nous allons indexer tous les sinistres et toutes les primes en utilisant un indice publié, par exemple l'indice des coûts à la construction, ou des prix à la consommation. Cela permet de considérer ces valeurs en monnaie constante. On peut utiliser un indice différent pour les sinistres et les primes, par exemple en tenant compte de l'évolution des tarifs de la cédante dans l'indexation des

primes (si la cédante baisse ses tarifs pour des raisons commerciales, on souhaite compenser cette baisse qui ne reflète pas l'évolution du risque). Les sinistres indexés vont ensuite servir dans l'étape 6 afin de construire des sinistres tenant compte de l'historique des profils de la cédante. De plus, pour indexer les profils, on va indexer les bandes, les sommes assurées, et les primes.

— **Etape 3 : Analyse de l'évolution du profil :**

Afin de bien comprendre le risque que l'on couvre et son évolution, on va inspecter l'évolution des profils, que cela soit le nombre de risques, la prime touchée, et la somme assurée totale, au delà de différents seuils. En effet, se contenter de regarder la prime totale ou le nombre total de risque dans le profil n'est que rarement représentatif du risque couvert en réassurance. Considérons le cas suivant :

Seuil	Année T-1 -> Année T		
	Prime	Nombre	Somme Assurée
0	4 %	3 %	3 %
1 000 000	27 %	23 %	25 %
5 000 000	16 %	16 %	14 %

TABLE 1.5 – Exemple d'évolution de profil au delà de différents seuils

On remarque immédiatement que l'évolution du profil dans son ensemble est faible (3 % à 4 %) alors qu'au delà d'un seuil de somme assurée plus élevé, l'évolution est nettement différente. C'est dans ce cadre que cette analyse est primordiale, car les cas comme cela ne sont pas si rare. Si l'on utilisait la prime totale comme mesure d'exposition, nous pourrions commettre une grave erreur d'estimation du risque. Nous verrons dans l'étape 5 comment nous allons prendre en compte ce type d'évolution.

— **Etape 4 : Choix des courbes d'exposition :**

Les courbes d'exposition que nous utilisons dépendent de la somme assurée moyenne du risque. Nous allons donc associer une courbe différente à chaque bande du profil. Pour ce faire, nous travaillons avec des courbes d'exposition définies par un seul paramètre, appelé « paramètre c ».

Pour obtenir des courbes à un seul paramètre, nous utilisons la classe des fonctions MBBEFD (Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, Fermi-Dirac), $G_{b,g}$.

Avec $G_{b,g}(0) = 0$ et $G_{b,g}(1) = 1$, on définit les courbes MBBEFD comme suit :

$$G_{b,g}(d) = \begin{cases} d & \text{si } g = 1 \text{ et } b = 0, \\ \frac{\ln(1 + (g-1)d)}{\ln(g)} & \text{si } b = 1 \text{ et } g > 1, \\ \frac{1 - b^d}{1 - b} & \text{si } bg = 1 \text{ et } g > 1, \\ \frac{\ln(((g-1)b + (1 - gb)b^d)/(1 - b))}{\ln(gb)} & \text{si } b > 0, b \neq 1, bg \neq 1 \text{ et } g > 1. \end{cases}$$

En prenant $G_X(d) = G_{b(c),g(c)}(d) = G_c(d)$, et :

$$b(c) = e^{3.1 - 0.15(1+c)c},$$

$$g(c) = e^{(0.78 + 0.12c)c},$$

on obtient une classe de fonctions MBBEFD à un seul paramètre, le paramètre c . On obtient également la distribution du degré de dommages à partir de la courbe d'exposition comme :

$$F_{b,g}(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1, \\ 1 - \frac{1 - b}{(g-1)b^{1-d} + (1 - gb)} & \text{si } 0 \leq d < 1 \end{cases}$$

Pour associer la courbe à la bande du profil, on possède une liste de paramètres c en fonction de la somme assurée :

Somme Assurée	c
$\leq 100\,000$	1.75
250 000	2.25
700 000	2.75
1 300 000	3.2
10 000 000	3.9
$\geq 50\,000\,000$	4.625

TABLE 1.6 – Exemple de paramètres c en fonction de la somme assurée en EUR

Pour les sommes assurées situées entre celles du tableau, on utilise une interpolation linéaire.

— **Etape 5 : Calcul de la mesure d'exposition du profil à l'aide des fréquences :**

Soient A_t le seuil de déclaration des sinistres de l'année t , A_t^I le seuil indéxé, $t \in [1, T-1]$.

On définit le seuil $D \geq A_{min}^I = \max_{t \in [1, T-1]} A_t^I$ (on prend le plus grand seuil afin de s'assurer d'être dans une zone où nous connaissons tous les sinistres ayant eu lieu).

On obtient la fréquence observée en année t comme suit :

$$\bar{\lambda}_t^D = \sum_{k_t=1}^{n_t} I_{C_{t,k_t}^I > D}$$

Où $C_{t,k_t}^I > D$ représente les sinistres survenus en année k_t , indexés en année t , et plus grands que D , et I l'indicatrice.

On définit ensuite $\bar{E}_{t,b_t}^D$ comme l'espérance du nombre de sinistres indexés au delà du seuil D en année t venant de la bande b_t . On obtient :

$$\bar{E}_{t,b_t}^D = \mathbb{E}[M_{t,b_t}] \mathbb{P} [\bar{Z}_{t,b_t,i_{t,b_t}} > D] = N_{t,b_t} q_{t,b_t} \mathbb{P} \left[X_{t,b_t} > \frac{D}{ASI_{t,b_t}^I} \right],$$

Où, pour $t \in \{1, \dots, T-1\}$:

- M_{t,b_t} est le nombre de sinistres en année t provenant de la bande b_t ,
- $\bar{Z}_{t,b_t,i_{t,b_t}}$ avec $i_{t,b_t} \in \{1, \dots, M_{t,b_t}\}$ représente la montant indexée du sinistre i_{t,b_t} dans la bande b_t en année $t \in \{1, \dots, T-1\}$,
- q_{t,b_t} est l'espérance du nombre de sinistres pour chaque risque de la bande b_t en année t ,
- X_{t,b_t} est la variable aléatoire donnant le degré de dommage de la bande b_t ,
- ASI_{t,b_t}^I est la somme assurée moyenne **indexée** de la bande b_t en année t ,
- N_{t,b_t} est le nombre de risques dans la bande b_t en année t .

Ainsi, l'espérance totale du nombre de sinistres au delà de D en année t devient :

$$\bar{E}_t^D = \sum_{b_t=1}^{B_t} \bar{E}_{t,b_t}^D = \sum_{b_t=1}^{B_t} N_{t,b_t} q_{t,b_t} \mathbb{P} \left[X_{t,b_t} > \frac{D}{ASI_{t,b_t}^I} \right].$$

De même, en année T :

$$E_T^D = \sum_{b_T=1}^{B_T} N_{T,b_T} q_{T,b_T} \mathbb{P} \left[X_{T,b_T} > \frac{D}{ASI_{T,b_T}^I} \right],$$

Pour déterminer q_{t,b_t} , on utilise le *Expected Value Premium Principle* tel que défini par DENUIT M. et al.¹ :

$$P_{t,b_t} = q_{t,b_t} \mathbb{E}[X_{t,b_t}] TSI_{t,b_t} (1 + \gamma_{t,b_t}), \quad t \in \{1, \dots, T\} \text{ et } b_t \in \{1, \dots, B_t\}.$$

γ_{t,b_t} représente la marge et les frais de l'assureur.

TSI_{t,b_t} représente la somme totale assurée dans la bande b_t en année t . Grâce à

$\bar{E}_t^D$, nous allons définir une mesure d'exposition basée sur la fréquence qui nous sera utile pour adapter (dans le sens d'indexer) les sinistres passés à l'exposition

1. [3] DENUIT, M. et al., *Modern Actuarial Risk Theory*, Springer, 2002

actuelle du portefeuille.

Les poids de cette mesure sont :

$$\omega_t^D = \frac{\overline{E}_t^D}{\sum_{s=1}^{T-1} \overline{E}_s^D}.$$

— **Etape 6 : Calcul des sinistres "As-If" :**

Désormais, nous voulons réévaluer les sinistres observés en tenant compte de deux éléments :

- Indexation (liée à l'évolution des coûts à la construction),
- Évolution de l'exposition du profil au delà d'un seuil.

En ce qui concerne le premier élément, il suffit d'indexer les sinistres à l'aide d'un indice classique, comme l'indice des prix à la construction, c'est ce qui est fait dans l'étape 2. Le second élément nécessite cependant plus d'efforts. La méthode proposée au sein de QBE consiste à indexer les sinistres comme s'ils avaient lieu dans le portefeuille d'aujourd'hui.

Nous allons donc comparer les fonctions de distribution (issues de l'exposition appliquée aux profils - voir étape 4) des sinistres du profil actuel avec celles du profil de l'année du sinistre. Nous allons ensuite regarder à quel niveau, dans la distribution actuelle, correspond le niveau du sinistre dans la distribution de son année de survenance. Supposons que l'on considère les sinistres au delà de 100 000 €, et qu'en année 1 il y ait eu un sinistre de 200 000 €, cela aboutirait au graphique suivant :

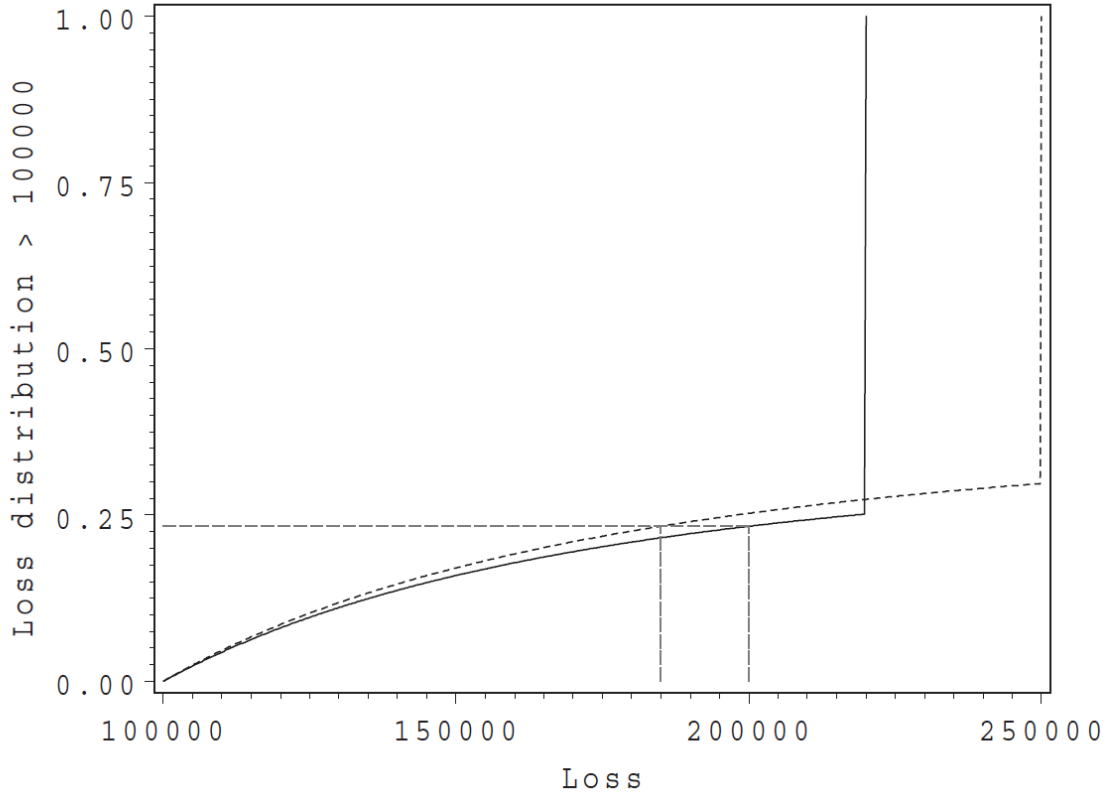


FIGURE 1.3 – Exemple de calcul d'un sinistre "As-if"

La ligne pleine représente la distribution de l'année de survenance et la ligne pointillée représente la distribution actuelle.

Le sinistre vaudrait donc 185 000 € dans le portefeuille actuel, avec le même niveau de probabilité. Le saut que l'on observe à la fin de la courbe traduit le fait que lorsque l'on observe une distribution au delà d'un seuil assez haut (100 000 € dans notre exemple), il est fort probable que le sinistre soit une perte totale.

D'un point de vue mathématique :

Soient $t \in [1, T - 1]$, $\bar{Z}_t$ la variable décrivant les sinistres indexés en année t . En notant D le seuil d'étude au delà duquel on considère les sinistres, et en considérant la distribution $F_{\bar{Z}_t | \bar{Z}_t > D} : z \mapsto P[\bar{Z}_t \leq z | \bar{Z}_t > D]$, on obtient alors la valeur du sinistre "as-if" comme :

$$C_t^{As-If,D} = F_{\bar{Z}_t | \bar{Z}_t > D}^{-1}(F_{\bar{Z}_t | \bar{Z}_t > D}(C_t^I))$$

Où C_t^I est le montant indexé du sinistre survenu en année t .

Reste à déterminer F_{Z_T} . Pour cela, deux hypothèses sont nécessaires :

- On suppose que les nombres de sinistres pour chaque risque dans une bande b_T sont IID (indépendantes et identiquement distribuées), d'espérance q_{T,b_T} .
- On suppose également que les montants des sinistres dans une bande b_T ont la même distribution Z_{T,b_T} .

Ce sont des hypothèses fortes, mais classiques, et nécessaires compte tenu du peu d'information que nous avons en réassurance. Ainsi, F_{Z_T} peut s'écrire comme suit² :

$$F_{Z_T}(z) = \frac{1}{\sum_{b_T=1}^{B_T} \mathbb{E}[M_{T,b_T}]} \sum_{b_T=1}^{B_T} \mathbb{E}[M_{T,b_T}] F_{Z_{T,b_T}}(z)$$

Où $F_{Z_{T,b_T}}(z)$ est obtenue directement depuis la courbe d'exposition comme expliqué à l'étape 4, et ce pour chaque bande du profil.

— Etape 7 : Calibration du modèle à l'aide des tranches travaillantes :

Pourquoi devons-nous calibrer ?

Il est nécessaire de calibrer le modèle pour 3 raisons essentielles :

- La qualité des profils transmis par la cédante peut faire perdre beaucoup d'information, notamment en présence de coassurance, ou lorsque le profil est transmis en PML (*Probable Maximum Loss*) et pas en valeur assurée,
- Pour appliquer les courbes d'exposition, il est nécessaire de connaître la prime pure de la cédante, et cette valeur est difficile à estimer,
- Enfin, il existe toujours un risque de modèle lié à la courbe d'exposition, qui ne correspond pas exactement aux risques (en particulier car nous faisons l'hypothèse que tous les risques d'une même bande possèdent la même courbe d'exposition).

Comment calibrer ?

La méthode de calibration actuelle chez QBE Re consiste à choisir une tranche dont la limite correspond au 5^{ème} plus grand sinistre observé dans l'historique de la cédante.

On choisit également un seuil à partir duquel on va appliquer notre modèle. Ce seuil correspond également à la limite du 5^{ème} plus grand sinistre observé. En deçà de celui-ci, le prix sera calculé à l'expérience pure, au delà on utilisera le modèle calibré (c'est-à-dire le *BC à l'exposition * Ratio*).

2. [2] DESMEDT, S. et al. Experience and Exposure Rating for Property Per Risk Excess of Loss Reinsurance Revisited. ASTIN Bulletin 42, 1 (2012), 233–270.

Difficultés liées à la sélection de la tranche travaillante

Le choix de cette tranche travaillante, bien qu'une recommandation soit faite de la sélectionner en allant jusqu'au 5^{ème} plus grand sinistre observé, est très problématique. Il faut, en effet, trouver un équilibre entre la **représentativité** et la **fiabilité** de la tranche travaillante. Par représentativité, nous entendons que la tranche travaillante doit se situer suffisamment « proche » du programme de réassurance, donc haute. Cependant, afin de rester fiable, cette tranche travaillante doit se situer à proximité du plus grand nombre de sinistres, et donc basse. Dans ce contexte, il est relativement difficile d'imposer des critères précis de choix de la tranche travaillante et de la calibration. De plus, il n'existe aucun outil permettant de vérifier les hypothèses faites en terme de calibration, et la signification de ce choix en terme de sinistres attendus. C'est un manque de transparence qui peut complexifier les choix du technicien.

C'est donc sur cette étape que ce mémoire va se concentrer.

1.3 Problématique & Objectifs

Plusieurs études ont été effectuées ces dernières années pour améliorer la tarification chez QBE Re. D’abord, la méthode combinée présentée ici a été développée il y a 10 ans afin d’utiliser un maximum d’informations de la cédante. Ensuite, différentes études ont été menées sur le choix des courbes d’exposition. Après le mémoire de Ramachandra Loljeeh³, concluant sur l’impossibilité d’estimer une courbe d’exposition par maximum de vraisemblance dans un contexte de censure et/ou troncature d’information, le mémoire de David Meiller⁴ a tout de même permis de valider les courbes d’exposition, actuellement utilisées.

Cependant, le modèle nécessite toujours d’être calibré, et ce pour plusieurs raisons :

- L’estimation de la prime pure n’est jamais exacte, car nous ne connaissons pas les marges de la cédante,
- Il existe toujours un risque de modèle lié à l’inadéquation de la courbe d’exposition,
- Les profils transmis par la cédante ne sont pas toujours très précis, et peuvent contenir des distorsions lorsque plusieurs risques du portefeuille sont groupés par police ou lorsque le profil est fait en *Probable Maximum Loss* et pas en somme assurée.

Ainsi, la méthode des tranches travaillantes est utilisée. Pour la sélection de la tranche travaillante, la méthode préconisée jusqu’alors chez QBE Re consiste à utiliser une tranche allant jusqu’au 5^{ème} plus grand sinistre. Ainsi, on considère que ce que l’on observe en dessous est suffisamment **représentatif et fiable** pour calibrer notre modèle.

Bien que la méthode utilisant les tranches travaillantes semble efficace et logique, nous nous sommes demandé si elle ne risquait pas d’apporter un biais systématique. C’est une question importante à vérifier lors de la mise en place de tels procédés.

Ce mémoire s’attachera à déterminer l’existence de ce biais et à l’identifier. L’objectif sera ensuite de proposer d’autres méthodes de calibration du modèle de réassurance incendie par risque. Enfin, nous réfléchirons à une manière d’ajouter plus de transparence dans notre modélisation, afin d’apporter une meilleure compréhension des grands sinistres prédits par notre modèle.

3. [4] LOLJEEH, R. Estimation de courbes d’exposition dans le cas de données incomplètes. 2012.

4. [5] MEILLER, D. Méthodes de tarification à l’expérience et à l’exposition des excédents de sinistre incendie. 2016.

Résumé du Chapitre 1

Dans cette partie, nous avons vu les bases des contrats non-proportionnels de type *Excess of Loss*, et les méthodes de tarification classiques (expérience/exposition) pour les traités de type EXCESS OF LOSS par risque, ainsi que la méthode combinée utilisée chez QBE Re.

La méthode combinée consiste à indexer les sinistres par rapport à l'évolution du profil (pour prendre en compte un alourdissement ou un nettoyage du profil), puis à déterminer les prix à l'expérience et à l'exposition, pour enfin calibrer la prime pure finale à l'aide du rapport $\frac{\text{Expérience}}{\text{Exposition}}$.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le biais induit par cette calibration et de proposer une méthode alternative permettant de l'éviter.

Chapitre 2

Modélisation & Impacts de la méthode actuelle

Nous allons maintenant modéliser de différentes manières la sinistralité d'un portefeuille, afin d'étudier l'impact de notre méthode de calibration (qui correspond à l'étape 7 de la méthode détaillée au chapitre 1). Ainsi, nous commencerons par un modèle Poisson-Pareto, très simplifié, avant d'implémenter la méthode réelle, beaucoup plus lourde.

2.1 Modèle Poisson-Pareto

Nous allons ici implémenter un modèle collectif de type Poisson-Pareto. Pour rappel, cela consiste à modéliser la fréquence de sinistre par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson, et les montant de sinistres $(X_i)_{i \geq 1}$ selon une loi de Pareto, de sorte que la charge totale valent :

$$S_{coll} = \sum_{i=1}^N X_i$$

2.1.1 Définition & Utilisation de la méthode

Définition

La méthode Poisson-Pareto est très intuitive. On suppose que la fréquence des sinistres suit une loi de Poisson, et que le montant des sinistres suit une loi de Pareto. Nous utilisons une loi de Pareto pour les montants de sinistres car le seuil peut être modifié tout en conservant une Pareto, ce qui en fait une loi très maniable. En effet :

Supposons que nos montants de sinistres suivent une Pareto de paramètres A et α : $Par(A, \alpha)$.

Alors, pour tout $B > A$, nos sinistres suivront une loi $Par(B, \alpha)$.

De plus, si l'on observe, au delà de A , la fréquence λ_A , on peut déterminer la fréquence théorique au delà de B telle que :

$$\lambda_B = \lambda_A * \left(\frac{A}{B}\right)^\alpha$$

C'est l'estimation de cette dernière valeur que nous allons tester.

Application

Pour ce faire, nous avons procédé par simulations de Monte Carlo en R et avons simulé 5 ans de sinistralité. Nous avons effectué 50 000 simulations de 5 ans.

— Création d'une matrice de survenance

Tout d'abord, nous créons une matrice remplie de 0 et de 1 (suivant une loi de Poisson) afin de modéliser la survenance des sinistres, chaque ligne de la matrice représentant une simulation de 5 ans.

— Détermination des montants

Pour chaque 1 dans la matrice, on détermine un montant suivant une loi de Pareto. Nous obtenons alors une matrice des montants où l'on peut identifier chaque année. Nous pouvons également tracer la sinistralité, comme ci-dessous.

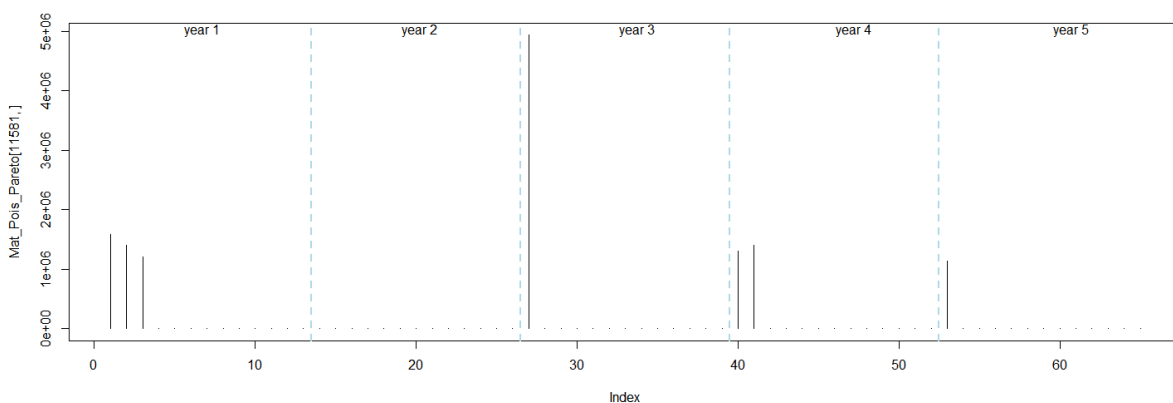


FIGURE 2.1 – Exemple de simulations Poisson-Pareto

— Application de la méthode

Nous voulons maintenant tester la méthode du 5^{ème} sinistre expliquée au chapitre 1. Cependant, nous n'allons pas l'utiliser que en la valeur 5, mais en plusieurs valeur k , afin de mesurer si le choix du nombre de sinistres dépassant

la tranche travaillante a un impact sur la présence ou non du biais. Nous appliquons ainsi la méthode du $k^{\text{ème}}$ sinistre, pour différentes valeurs de k , puis comparons la fréquence observée avec la valeur théorique attendue. Pour rappel, nous utilisons, chez QBE Re, le 5^{ème} plus grand sinistre.

2.1.2 Conclusions préliminaires

Maintenant que nous avons désormais toutes les données nécessaires, nous évaluons le rapport $\frac{\text{Fréquence Observée}}{\text{Fréquence Estimée}}$. On constate alors un biais conséquent, dépendant de la valeur de k , et plus exactement de taille $\frac{1}{k-1} \%$.

En effet, lorsque l'on se place au niveau du 5^{ème} sinistre, on observe 5 sinistres au delà du seuil. Cependant, en se déplaçant d'1 euro plus haut, nous n'avons plus que 4 sinistres : on «saute» ainsi une marche dans la fonction de distribution empirique.

Supposons que l'on observe les 5 sinistres suivants :

Numéro	Montant EUR
1	100 000
2	150 000
3	250 000
4	350 000
5	500 000

On obtient la fonction de répartition suivante :

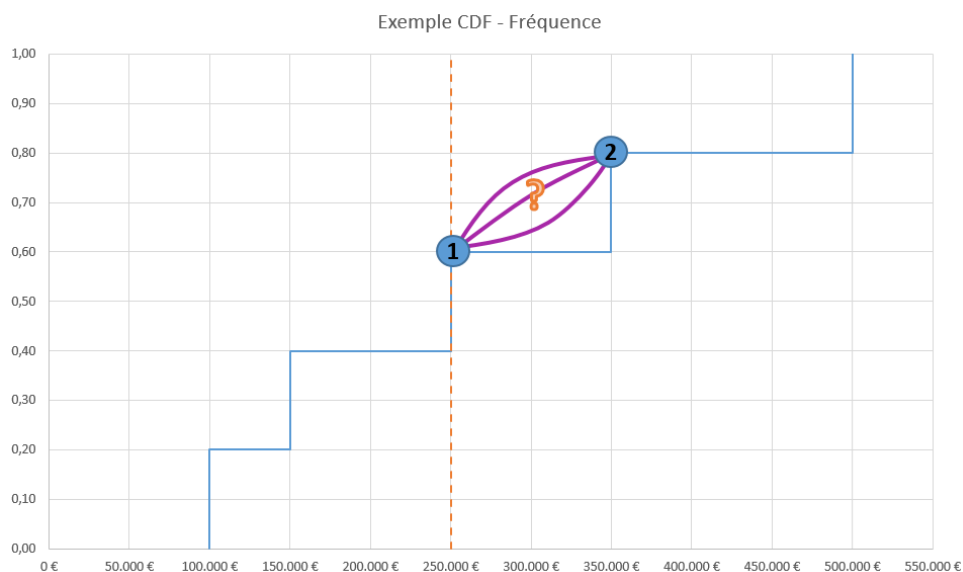


FIGURE 2.2 – Impact choix 3ème sinistre

En se plaçant au point 1, à 250 000 €, nous sommes au 3^{ème} sinistre. Si nous nous déplaçons alors vers la droite jusqu'au point 2, nous n'avons plus que 2 sinistres plus grands. Comme nous sommes sur la sinistralité empirique, nous n'aurons pas de saut avant le sinistre suivant, à 350 000 €. Or, la distribution "réelle" de fréquence sera continue, et pourra être n'importe laquelle des courbes pourpres : à mesure que nous nous déplaçons, nous nous éloignons potentiellement de la vraie distribution. Arrivé à 349 000 €, nous obtiendrons un biais de la taille de la différence de hauteur entre les deux plateaux. C'est-à-dire de taille $\frac{3\text{sinistres}}{2\text{sinistres}} - 1$ soit 50 %.

Un deuxième élément vient, tout aussi intuitivement, s'opposer à cette méthode : en choisissant le seuil sur un sinistre, on est très sensible à la variation de son coût. Ainsi, en allant chercher un sinistre très loin dans la distribution (comme le 5^{ème} plus grand), où il y a donc peu de sinistres, celui-ci peut beaucoup varier tout en conservant le même ordre. Cette volatilité explique le manque de précision de la méthode.

L'objectif est désormais d'implémenter et de reproduire la méthode de tarification utilisée chez QBE Re, afin de confronter la méthodologie aux données réelles et de valider ou rejeter la méthode de sélection de la tranche travaillante basée sur le 5^{ème} plus grand sinistre.

2.2 Contexte de l'Exposure Rating

2.2.1 Portefeuilles utilisés

Nous avons utilisé majoritairement deux portefeuilles dans les analyses présentées ici. Dans un souci de confidentialité, nous n'en donnerons ici qu'une description qualitative.

Nous les appellerons Cédante A et Cédante B.

— Cédante A

C'est un profil majoritairement par polices (contenant donc plusieurs risques dont on ne connaît pas la somme assurée risque par risque). Ainsi, pour des polices qui regroupent des risques en plusieurs lieux, un sinistre total est peu probable voire impossible. Il est composé d'environ 45 % de risques résidentiels simples, 15 % de risques commerciaux et agricoles, et 40 % de grands risques, tels des risques industriels.

Les sommes assurées pour les polices vont jusqu'à plus d'1 milliard d'euros.

— Cédante B

Au contraire du précédent, nous avons ici un profil donné par risque, se composant de 85 % de risques résidentiels simples. Les sommes assurées se limitent à 60 millions d'euros.

Les graphiques suivants détaillent de manière relative la structure des deux portefeuilles. En bleu nous avons la Cédante A, en rouge la Cédante B, et en vert la différence entre les deux (Cédante A par rapport à Cédante B, soit $\frac{A}{B} - 1$).

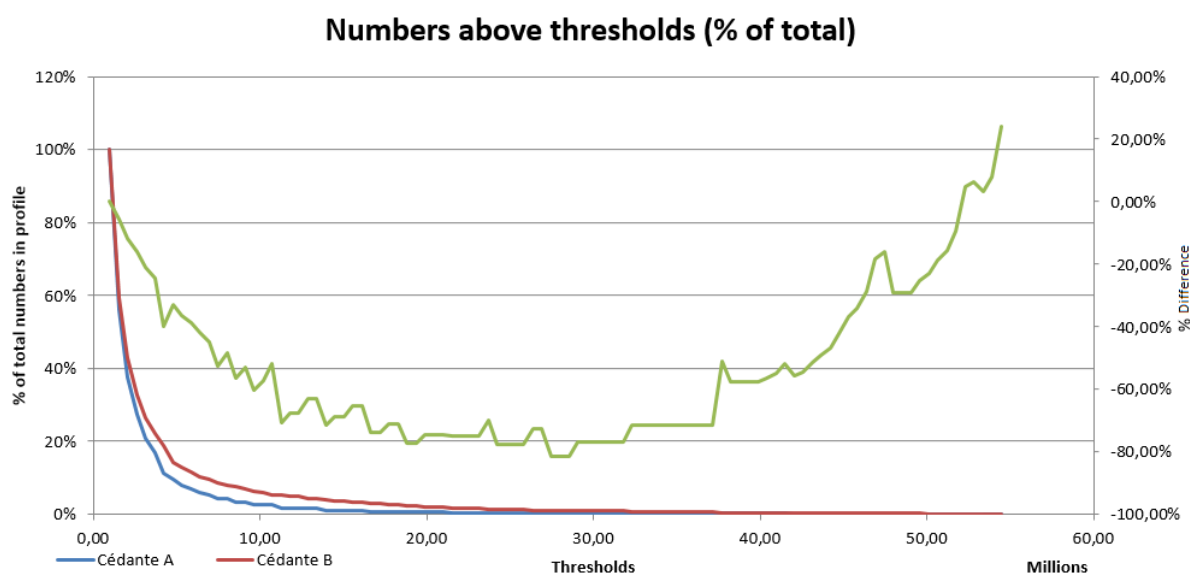


FIGURE 2.3 – Répartition du nombre de risques/polices en fonction de la somme assurée en EUR

Sur ce premier graphique, on constate qu'en nombre de risques, les profils évoluent différemment en matière de composition relative en somme assurée. La cédante A décroît très rapidement, c'est la chute de la courbe verte que l'on observe entre 0 et 30 Mio d'euros, mais la présence de très grands risques et/ou polices entraîne la remontée que l'on observe après.

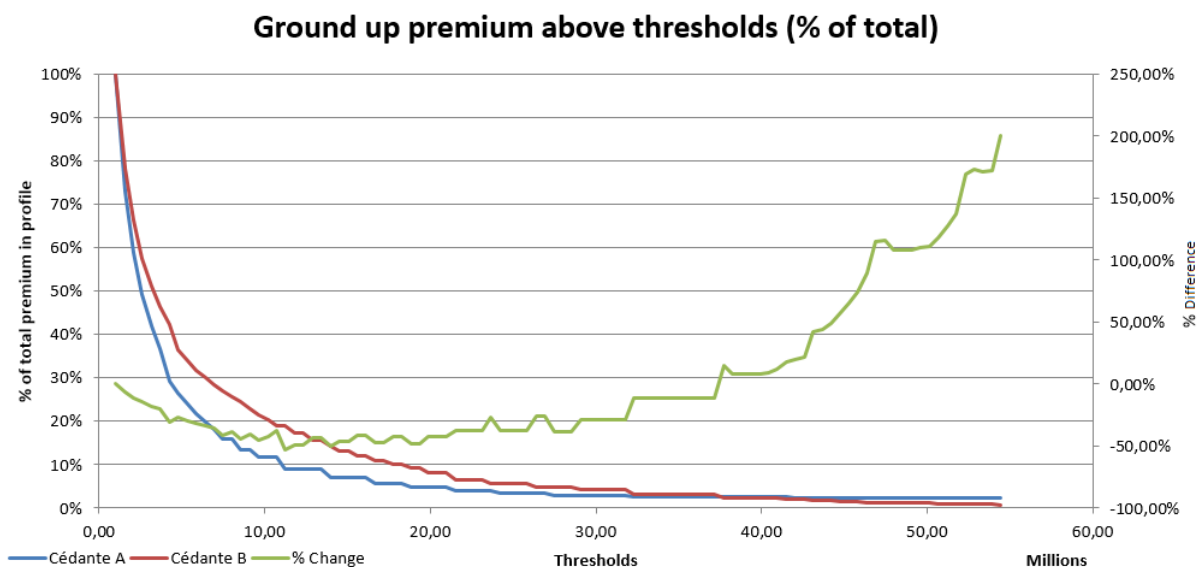


FIGURE 2.4 – Répartition de la prime en fonction de la somme assurée en EUR

Nous visualisons maintenant la prime d'assurance dans le profil. On peut faire la même observation que précédemment. D'abord une baisse puis une remontée, pour les mêmes raisons.

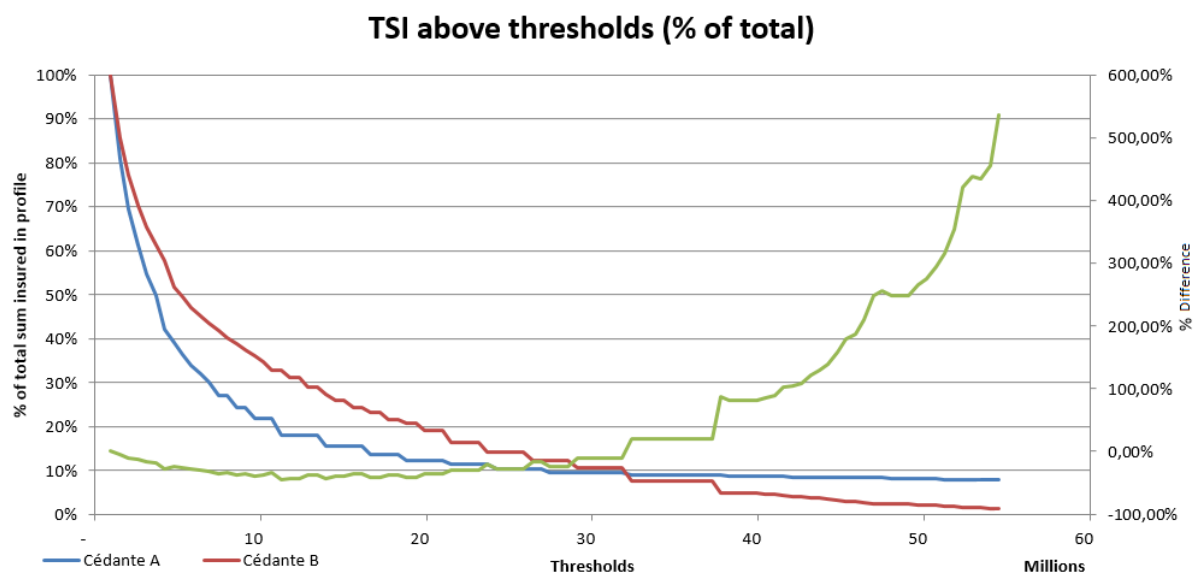


FIGURE 2.5 – Répartition de la somme assurée totale en fonction du montant en EUR

Sur ce dernier graphique, représentant la Somme assurée totale dans le profil au delà de différents seuils, on a, de manière logique, la même observation. On

remarque d'ailleurs aisément le croisement entre les deux courbes. Ainsi, on constate effectivement que les profils décrivent des expositions au risque très différentes, qui représentent deux natures de risque que l'on est amené à rencontrer régulièrement.

2.2.2 Structure de la simulation

Nous allons, comme précédemment, utiliser la méthode de Monte Carlo. Cependant, nous allons cette fois-ci partir du profil d'une cédante et appliquer toute la méthode décrite au chapitre 1.

L'avantage d'utiliser notre méthode pour créer notre historique est que nous «connaissions» la réalité que l'on cherche à modéliser. On va ainsi pouvoir comparer notre calibration en étant sûrs de la distribution de sinistralité que l'on souhaite retrouver, soit la distribution basée sur la courbe d'exposition dans laquelle nous créons nos sinistres.

Nous utiliserons les notations introduites au premier chapitre. De plus, nous ne travaillons que dans un seul profil, et nous abstiendrons de mentionner l'indice de l'année t dans les notations.

— Importation et choix des paramètres

La première étape consiste à importer le profil dans le logiciel R, et à choisir les paramètres de l'étude. Il faut donner les paramètres suivants :

- Le profil de la cédante,
- Le paramètre c permettant de définir la courbe d'exposition (afin de simplifier les simulations, on va supposer que toutes les bandes ont le même paramètre c),
- La marge de la cédante (afin de déterminer la prime pure à partir de la prime commerciale) notée LR ,
- Le seuil au delà du quel nous allons faire l'étude noté D ,
- Les paramètres de simulations (nombre d'années par simulation et nombre de simulations),
- La tranche à tarifier.

— Calcul des paramètres de l'*Exposure Rating*

Avec les paramètres introduits à l'étape précédente, nous pouvons calculer les principales quantités nécessaires présentées au chapitre 1, que nous allons désormais exprimer telles qu'elles sont calculées en pratique :

- Les valeurs $b(c)$ et $g(c)$ qui permettent de caractériser la courbe d'exposition :

$$\begin{aligned} b(c) &= e^{3.1-0.15(1+c)c} = b', \\ g(c) &= e^{(0.78+0.12c)c} = g, \end{aligned}$$

- L'espérance du degré de dommage de la courbe d'exposition :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\ln(gb')(1 - b')}{\ln(b')(1 - gb')}$$

- Le paramètre q , à l'aide du *Expected Value Premium Principle* comme expliqué dans la section 1.2.4, que l'on va calculer pour chaque bande b du profil :

$$q_b = \frac{P_b * LR}{TSI_b * \mathbb{E}[X]}$$

- L'espérance du nombre de sinistres au delà du seuil D , pour chaque bande b , E_b^D :

$$\begin{aligned} E_b^D &= N_b * q_b * \mathbb{P}\left[X_{t,b_t} > \frac{D}{ASI_b}\right] \\ &= N_b * q_b * \left[1 - \frac{1 - b'}{(g - 1)b'^{1-d} + (1 - gb')}\right] \end{aligned}$$

- La distribution de sévérité issue de la courbe d'exposition, au delà du seuil D , $F_{Z|Z>D}$. Il est nécessaire ici de développer la formule afin de se ramener à des valeurs connues afin de l'implémenter.

$$F_{Z|Z>D}(z) = \mathbb{P}[Z \leq z | Z > D] = \frac{\mathbb{P}[Z \leq z \cap Z > D]}{\mathbb{P}[Z > D]}, \text{ pour } z \geq D.$$

Puis,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z \leq z \cap Z > D] &= \frac{1}{\sum_{b=1}^B \mathbb{E}[M_b]} \sum_{b=1}^B \mathbb{E}[M_b] * \mathbb{P}[Z_b \leq z \cap Z_b > D] \\ &= \frac{1}{\sum_{b_t=1}^{B_t} N_b * q_b} \sum_{b=1}^B N_b * q_b * \mathbb{P}[X_b ASI_b \leq z \cap X_b ASI_b > D] \\ &= \frac{1}{\sum_{b=1}^B N_b * q_b} \sum_{b=1}^B N_b * q_b \left[F_{X_b} \left(\frac{z}{ASI_b} \right) - F_{X_b} \left(\frac{D}{ASI_b} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Où } F_{X_b}(d) = \left[1 - \frac{1 - b'}{(g - 1)b'^{1-d} + (1 - gb')} \right].$$

Enfin,

$$\mathbb{P}[Z > D] = \frac{\sum_{b=1}^B E_b^D}{\sum_{b=1}^B \mathbb{E}[M_b]} = \frac{E^D}{\sum_{b=1}^B N_b * q_b}.$$

Désormais, on a implémenté toutes les formules de base et on va pouvoir regarder nos premières courbes. Commençons par la fonction de distribution du degré de dommage de la cédante A.

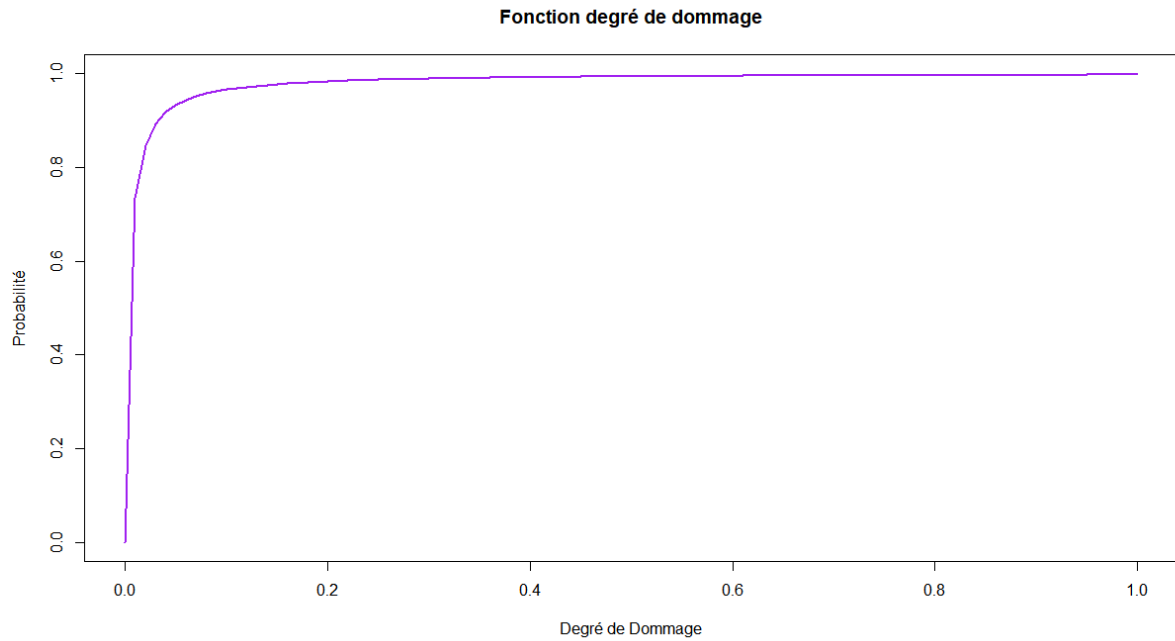


FIGURE 2.6 – Fonction de répartition du degré de dommage de la cédante A

On constate que, dans ce profil, il y a beaucoup de «petits» sinistres, en terme de degré de dommage par rapport à la somme assurée. Ce sont donc les petits sinistres qui consomment la grande majorité de la prime.

A contrario, dans le cas d'une cédante exposée à beaucoup de risques, totaux on obtient une courbe d'exposition telle que la courbe 2.7 :

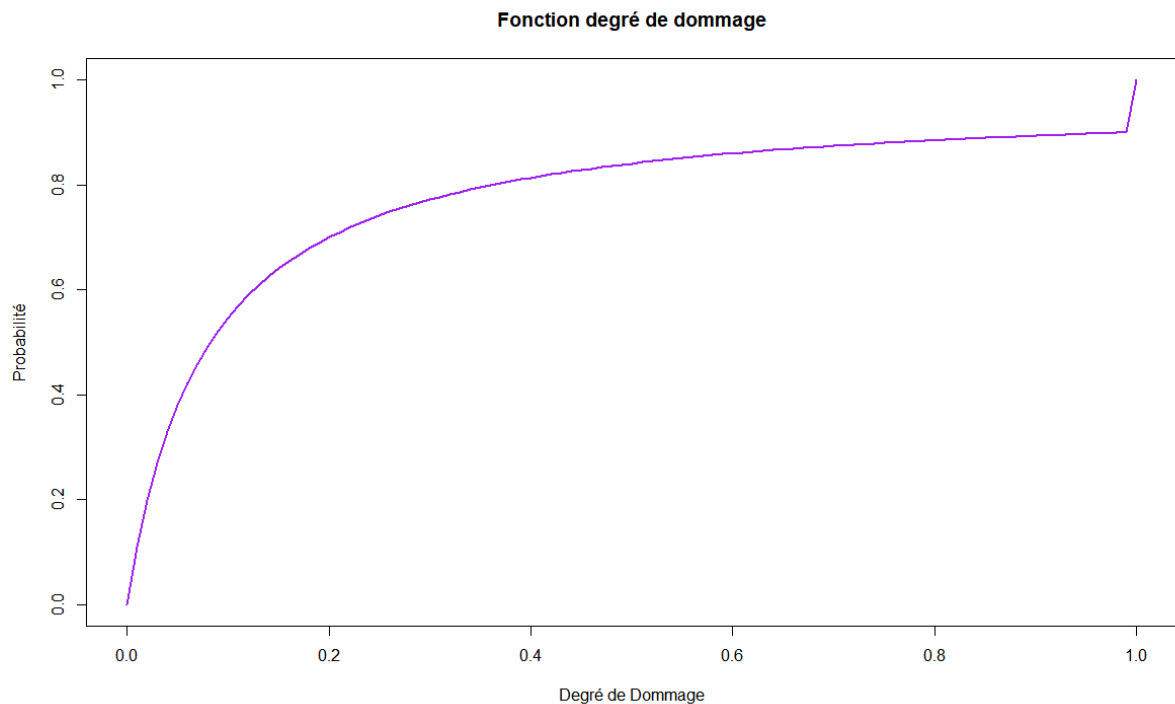


FIGURE 2.7 – Exemple de fonction de répartition du degré de dommage

Le *saut* que l'on observe à la fin s'explique aisément : à partir d'un grand degré de dommage, on peut considérer que le sinistre est total (si une maison vient à brûler à 95 %, il est très probable qu'elle soit à rebâtir en totalité).

— Création de la matrice de survenance et ajout des montants

Nous créons une matrice où chaque ligne représente une simulation, et chaque colonne un montant de sinistre (l'absence de sinistre étant représentée par un 0). Pour chaque case de la matrice, on tire les sinistres selon une loi de poisson, dont le paramètre correspond à la somme des E_b^D par bande calculés précédemment (pour rappel, E_b^D représente le nombre de sinistres attendu dans la bande b au delà de D , donc la somme sur toutes les bandes représente le nombre de sinistres attendu total au delà de D). On s'assure de la convergence de la fréquence dans la zone d'étude (c'est-à-dire au delà de D) :

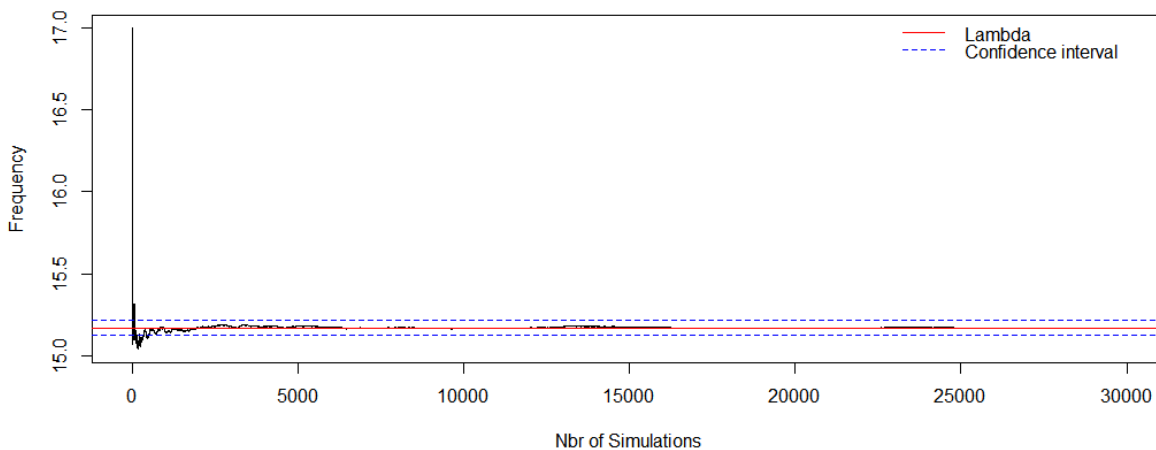


FIGURE 2.8 – Simulation d'une période de 8 ans

On voit ici qu'il n'y a aucun problème de convergence du nombre de sinistres, qui converge très rapidement. Pour chaque sinistre, on va alors associer un montant, en lien avec le profil. Pour cela, on va tirer aléatoirement des sinistres dans la fonction $F_{Z|Z>D}$ que l'on a défini précédemment. Ainsi, comme la fonction a été créée à partir de la courbe d'exposition du profil, nos sinistres correspondent exactement à la courbe d'exposition. C'est pour cette raison que l'on va pouvoir, par la suite, comparer nos résultats à la valeur théorique attendue, car nos sinistres ont été créés directement dans la fonction théorique.

On peut visualiser un tirage et observer la sinistralité simulée :

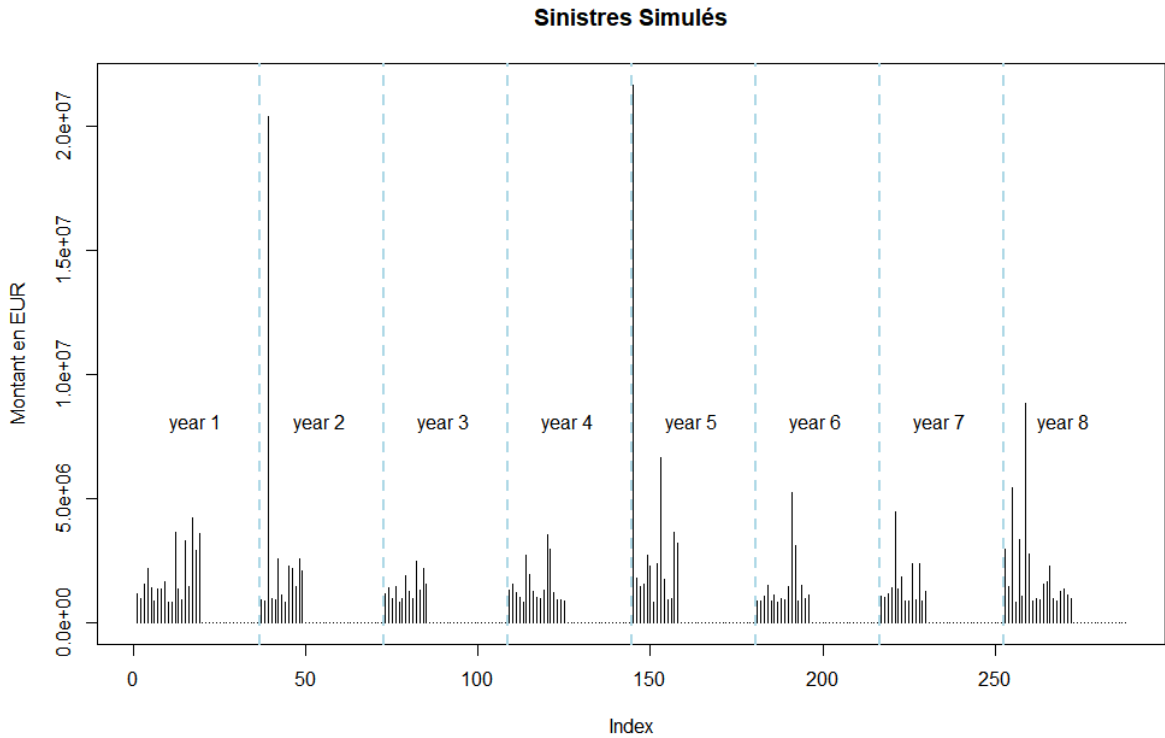


FIGURE 2.9 – Simulation d'une période de 8 ans

On remarque une forte sinistralité aux alentours de 1 million d'euros, et 2 grands sinistres de 20 millions d'euros.

— Détermination de la tranche travaillante

Pour chaque simulation (donc chaque ligne de notre matrice regroupant nos simulations), on va trier les sinistres pour déterminer le 5^{ème} plus grand sinistre. Une fois déterminé et stocké, on obtient la tranche travaillante propre à chaque simulation (le 5^{ème} plus grand sinistre est différent pour chaque simulation). Dans le cas où l'on n'aurait pas suffisamment de sinistres (cas très rare car nous avons choisi les paramètres de simulation de manière à s'assurer d'avoir assez de sinistres), on prend la moyenne du 5^{ème} plus grand sinistre des autres simulations.

— Calcul du BC à l'exposition dans la tranche travaillante et la tranche à tarifier

Pour calculer le BC à l'exposition, nous nous servons de la formule de la courbe d'exposition donnée au chapitre 1, à savoir :

$$G_{b',g}(d) = \frac{\ln(((g-1)b' + (1-gb')b'^d)/(1-b'))}{\ln(gb')}$$

que l'on calcule en la priorité et la limite, et ce pour chaque bande, puis on

applique la formule :

$$\text{BC à l'exposition} = \sum_{b=1}^B (G_b(\text{Limite}) - G_b(\text{Priorité})) * P_b$$

où la limite correspond au 5^{ème} plus grand sinistre de la simulation, et la priorité vaut D (le seuil d'étude).

On fait la même chose pour la tranche à tarifier.

— Calcul du BC à l'expérience

Pour calculer le BC à l'expérience, il suffit de compter le montant total des sinistres qui touchent la tranche (que ce soit la tranche travaillante ou la tranche à tarifier). En pratique, on va, pour chaque sinistre calculer :

$$R = \min(\max(0, X - D), C)$$

où D représente la priorité, C la couverture, et X le montant du sinistre.

Puis on somme pour tous les sinistres de la simulation. On effectue cela pour chaque simulation et on stocke ces valeurs dans une nouvelle matrice, où chaque ligne correspond toujours à une simulation.

— Calcul du ratio de calibration et application

Nous en sommes arrivés à l'implémentation de l'étape 7 de la méthode détaillée au chapitre 1, qui est l'étape que nous souhaitons remettre en cause. Désormais, nous avons une matrice qui contient, pour chaque simulation :

- BC à l'exposition de la tranche travaillante,
- BC à l'expérience de la tranche travaillante,
- BC à l'exposition de la tranche à tarifier,
- BC à l'expérience de la tranche à tarifier.

Il suffit alors de calculer, pour chaque simulation, le rapport :

$$\text{Ratio} = \frac{\text{BC à l'expérience de la tranche travaillante}}{\text{BC à l'exposition de la tranche travaillante}}$$

Reste ensuite à appliquer le ratio de chaque simulation au BC à l'exposition de la tranche à tarifier pour obtenir le BC calibré :

$$\text{BC Calibré} = \text{BC à l'exposition} * \text{Ratio}$$

On obtient, pour chaque simulation, le couple **BC à l'expérience** et **BC calibré** que l'on va comparer dans la partie suivante.

2.2.3 Impact de la méthode actuelle

Après simulations, nous avons étudié le rapport $\frac{\text{BC Observé}}{\text{BC Calibré}}$. L'objectif étant que ce rapport soit en moyenne égal à 1, c'est-à-dire que notre modèle calibré corresponde

presque sûrement à la réalité que l'on a créée. Pour rappel, nous avons mis en place nos simulations en utilisant notre modèle : on s'attend naturellement à retrouver la sinistralité moyenne attendue et on veut vérifier si la méthode actuelle (avec un calibration sur le 5^{ème} plus grand sinistre) permet d'obtenir cela. Ce n'est pas le cas, comme on peut le constater ci-dessous :

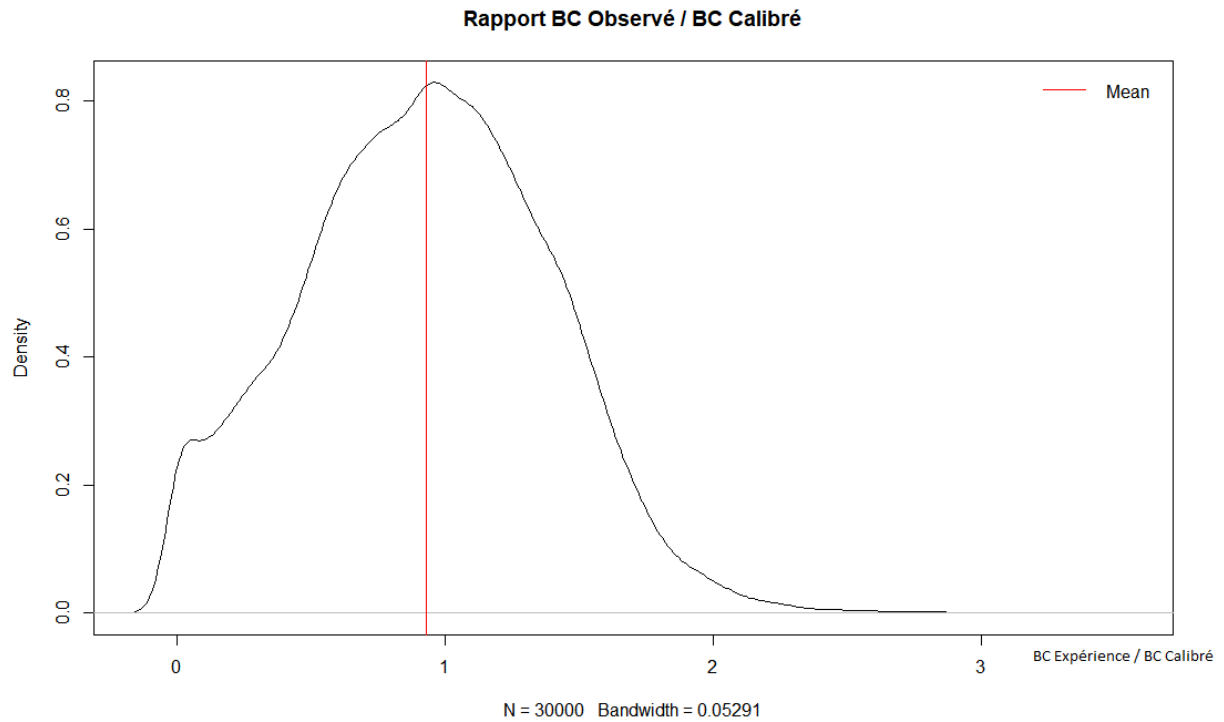


FIGURE 2.10 – Impact de la méthode de calibration classique - Densité des ratios de Calibration

On voit sur ce graphique que le rapport entre le BC à l'expérience et le BC à l'exposition calibré se situe entre 0 et 3. La masse en 0 représente les cas où le BC à l'expérience de la tranche à tarifier vaut 0 (c'est-à-dire qu'elle n'est pas touchée). On voit aussi un mode aux alentours de 1. Le trait rouge représente la calibration moyenne de nos simulations. On remarque qu'elle est nettement inférieure à 1, or elle devrait être égale à 1 puisque nous avons simulé dans le modèle théorique. Selon les échantillons et les profils testés, le biais moyen observé varie de 6 % à 10 %. Nous nous sommes également assuré de la convergence du biais, et que l'intervalle de confiance soit suffisamment petit pour affirmer l'existence du biais.

2.2.4 Conclusions

Après avoir reproduit en simulations l'environnement de modélisation et de tarification de la compagnie, nous avons constaté la présence d'un biais dans la

méthode de calibration. Il est donc impératif de revoir notre méthode de calibration. Deux pistes s'offrent à nous et que nous allons développer dans le chapitre suivant :

- Méthode des Trapèzes pour l'approximation,
- Calibration sur les fréquences, pour ne plus utiliser de tranches travaillantes.

Nous profiterons de la remise en cause de la méthode de calibration pour développer des outils d'analyse de la calibration et de son impact sur la modélisation du risque.

Résumé du Chapitre 2

Nous avons présenté ici les différentes modélisations effectuées. Tout d'abord à l'aide d'un modèle Poisson-Pareto qui nous a permis de mettre en évidence la différence entre la sévérité empirique et la sévérité théorique.

Puis, nous avons implémenté la méthode de tarification réelle de la Compagnie. Pour cela, nous avons, à partir des données des cédantes, simulé une sinistralité en respectant notre modèle d'exposition et en connaissant les paramètres.

Ainsi, nous avons voulu tester dans quelle mesure la méthode de calibration basée sur les tranches travaillantes permettait de retrouver, en moyenne, un résultat calibré correspondant à la sinistralité à l'expérience. Or, l'analyse des résultats a fait apparaître un biais provenant certainement de la différence entre la fonction de répartition empirique, qui est en escalier, et la fonction théorique, qui est continue.

Chapitre 3

Nouvelle Méthode & Résultat

Nous allons désormais présenter la nouvelle méthode de calibration du modèle à l'exposition, les analyses effectuées afin d'en vérifier le fonctionnement, le nouvel outil créé et les analyses de sensibilité ajoutées à l'outil de calibration.

3.1 Utilisation de la Méthode des Trapèzes

3.1.1 Explication de la méthode

Comme calculer un BC à l'expérience revient à calculer l'aire sous la fonction de répartition des sinistres, nous souhaitons élaborer une approximation plus fine que celle faite à l'aide de la fonction en escaliers, nous allons adapter la méthode des trapèzes.

Soit f une fonction suffisamment régulière définie sur un intervalle $[a,b]$, l'on peut approximer son intégrale par l'aire du trapèze défini comme :

$$Aire = (b - a) * \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Cependant, dans le contexte de cette étude, nous n'avons pas la fonction continue décrivant notre échantillon, mais simplement des points de la courbe (ce sont nos données de sinistres empiriques). Il nous est donc impossible de calculer l'aire à l'aide de cette formule. Il faut l'adapter à notre cas.

Nous pourrions utiliser des méthodes « krigeage », qui permettent de faire l'interpolation d'une fonction dont on ne connaît que certains points, ce qui est le problème que nous avons ici. Le krigeage permet de créer un intervalle de confiance dans lequel se situe la fonction, puis de la reconstruire. Cependant, l'utilisation du krigeage impose de faire des hypothèses sur la loi à priori que l'on souhaite interpoler.

Or nous n'avons pas d'informations suffisantes pour faire cette hypothèse, et nous ne voulons pas en ajouter.

Nous allons donc le faire de manière heuristique. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur la fonction de répartition empirique de la sinistralité, qui est en escaliers, et représentée en bleu dans la figure 3.1.

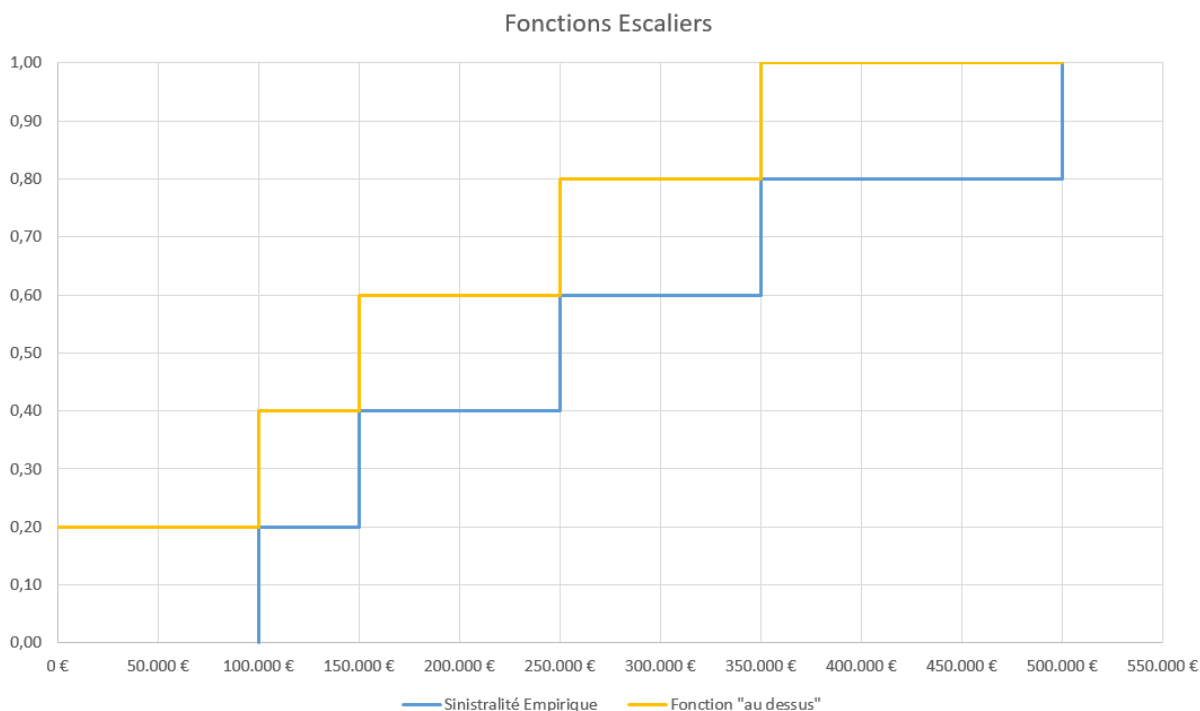


FIGURE 3.1 – Fonctions en escalier utilisées pour affiner nos estimations

Ensuite, nous construisons l'escalier supérieur, passant par les mêmes points que la fonction de répartition empirique, c'est l'escalier jaune. Ces deux fonctions nous permettent d'encadrer le champ de développement possible de la fonction de répartition continue. En effet, comme elle est croissante, et passe par chaque intersection des fonctions bleue et jaune, elle est forcément contenu dans les rectangles que nous avons dessinés. Les fonctions bleue et jaune sont, en quelques sortes, les trajectoires extrêmes que peut suivre la distribution. Nous avons ainsi construit un intervalle de confiance de la fonction que nous voulons approcher.

Enfin, nous calculons les *BC* dans ces deux fonctions (alors que dans la méthode décrite au chapitre 1, on ne calcule le *BC* que dans la fonction bleue). Puis, nous prenons la moyenne des deux, ce qui nous donne une sorte de *BC* médian, que nous allons utiliser pour appliquer la méthode du 5^{ème} plus grand sinistre, en espérant avoir réduit le biais détecté au chapitre 2.

3.1.2 Résultats

Les résultats étaient partiellement concluants, mais nous avons vite éliminé cette méthode. Elle donnait, en effet, un biais beaucoup plus faible, mais qui se retrouvait parfois à l'opposé du biais actuel, et donc créait une sous-estimation du risque, ce qui est dangereux. Regardons, dans le graphique suivant, le rapport entre le BC à l'expérience et le BC calibré à l'aide de la méthode des trapèzes.

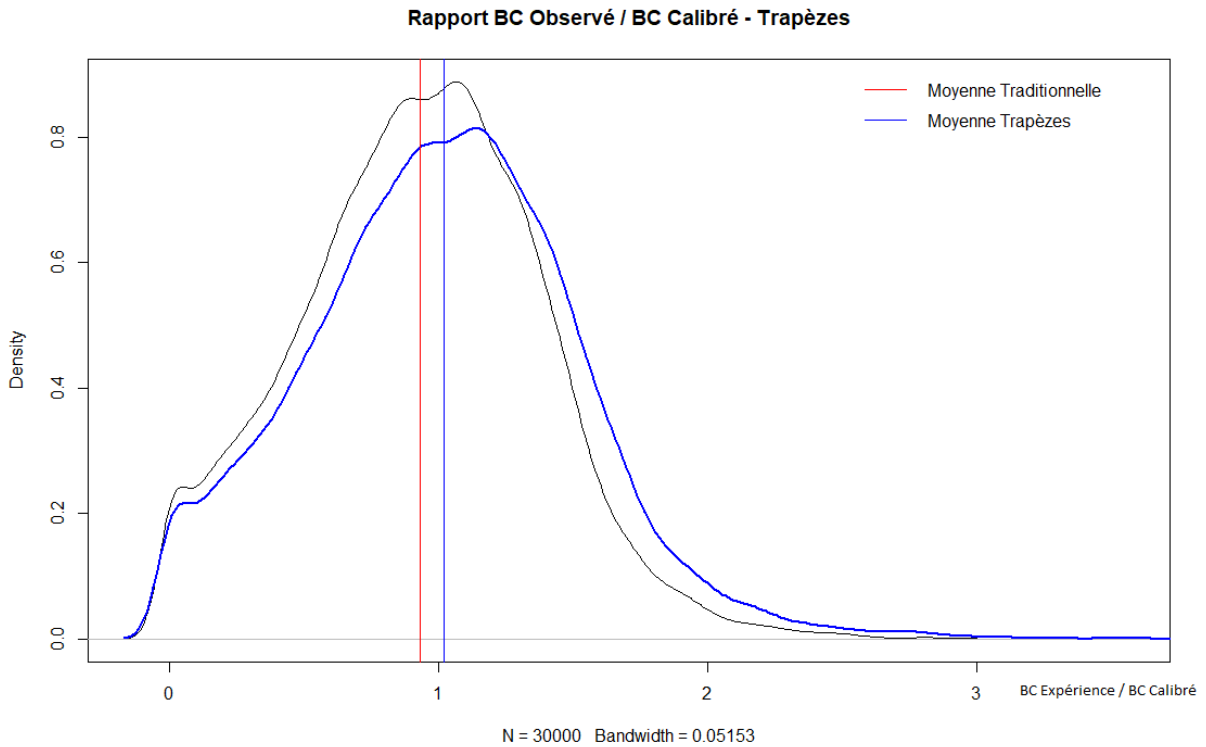


FIGURE 3.2 – Méthode des trapèzes - Biais de sous-estimation du risque

On constate, sur ce graphique, que le ratio moyen en utilisant la méthode des trapèzes (représenté par la ligne verticale bleue), est strictement supérieur à 1. Cela signifie que dans ce cas, le BC calibré est strictement inférieur à celui à l'expérience, et donc cela génère une sous-estimation du risque.

L'autre élément qui nous a incité à abandonner rapidement cette méthode est l'absence d'apport en matière de transparence. Il ne faut pas oublier que l'un des objectifs de base de cette étude est d'apporter une meilleure compréhension de nos calibrations, et de les rendre plus intuitives. Ici, on n'apporte rien, et on complexifie même la manière de calibrer.

3.2 Calibration en Fréquence

Nous allons maintenant développer la méthode de calibration en fréquence, qui vise à remplacer l'étape 7 de la méthode de tarification développée au chapitre 1.

3.2.1 Motivations & Explications

Dans certaines branches, nous utilisons déjà la Fréquence pour comparer nos modèles, et les calibrer. Il est donc logique d'essayer une méthode faisant également appel aux fréquences dans le cadre de la réassurance incendie par risque.

De plus, cette méthode, faisant appel à des concepts plus tangibles, pourrait apporter la transparence et la compréhension tant recherchée dans la calibration des modèles. C'est désormais dans cet esprit que nous décidons de nous engager dans cette démarche.

Ce que nous entendons par calibration en Fréquence est relativement intuitif. Plutôt que de comparer les *Burning Cost* à l'expérience et à l'exposition sur une tranche travaillante, nous allons, **pour chaque sinistre observé**, calculer sa fréquence empirique et sa fréquence théorique dans le modèle **à l'exposition**. Nous allons ensuite regarder le rapport entre les deux et en déterminer un ratio de calibration.

3.2.2 Modélisation & Simulations

Dans cette section, nous allons d'abord expliquer comment la méthode de calibration basée sur les fréquences fonctionne dans le cas général. Ensuite, nous expliquerons comment la méthode a été implémentée dans nos simulations, dans lesquelles nous nous intéresserons à l'analyse du biais (ou de son absence) induit par cette procédure de calibration. Dans la section 3.3 nous détaillerons l'utilisation de cette méthode à travers un cas pratique.

Nous reprenons la même démarche qu'au chapitre 2, et allons y ajouter le calcul de ces nouveaux paramètres liés à la fréquence. Nous avons donc déjà calculé les paramètres nécessaires et avons nos simulations résumées dans une matrice dont les lignes représentent les simulations, et les colonnes les sinistres.

Notons $j \in \{1, J\}$ le numéro de simulation et $i_j \in \{1, I_j\}$ le numéro du sinistre. Notons $C_{j,i}$ le i -ème sinistre de la j -ème simulation.

— Fréquence Empirique au delà des seuils C :

De manière intuitive, on va calculer la fréquence empirique en divisant le nombre de sinistres par la durée d'observation (appelée communément

période) : si on observe 20 sinistres en 10 ans, on peut en déduire une fréquence de 2 sinistres par an. Cependant, nous souhaitons ici prendre en compte l'évolution du profil, il ne faut alors pas diviser par la période, mais par la mesure d'exposition basée sur le profil E_T^D , introduite au chapitre 1, elle aussi basée sur la fréquence globale. Ainsi, la fréquence observée au delà de C sur la période (déterminée par la personne en charge de la cotation, en se basant sur l'étude des données de la cédante effectuée au début de l'analyse, mais aussi sur sa connaissance du dossier) se calcule telle que :

$$\lambda_{Obs}^{>C} = \sum(\#Sinistres > C) * \frac{E_T^D}{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{E}_t^D}$$

Cette quantité sera calculé autant de fois que nous avons de sinistres, C prenant tour à tour la valeur de chaque sinistre de l'historique.

Dans nos simulations, nous supposons une exposition constante du portefeuille et pouvons donc nous abstenir de calculer le deuxième facteur de l'équation.

Nous calculons, pour chaque simulation j , et pour chaque sinistre i_j , $\lambda_{Obs}^{>C_{j,i_j}}$. Cela revient à compter les sinistres supérieurs à C_{j,i_j} , et à diviser par le nombre d'années. Ainsi, pour chaque simulation, nous avons une liste de fréquences empiriques au delà de chaque sinistre survenu :

$$\lambda_{Obs}^{>C_{j,1}}, \lambda_{Obs}^{>C_{j,2}}, \dots, \lambda_{Obs}^{>C_{j,I_j}}$$

et ce, pour tout $j \in [1, J]$.

— Fréquence du modèle :

On a désormais besoin de connaître notre fréquence théorique, celle issue du modèle d'exposition. Pour cela, on va implémenter des formules issues de la méthode détaillée au chapitre 1 :

$$\lambda_{Th}^{>C} = \bar{E}_t^D = \sum_{b_t=1}^{B_t} N_{t,b_t} q_{t,b_t} \mathbb{P} \left[X_{t,b_t} > \frac{D}{AST_{t,b_t}^I} \right]$$

N_{t,b_t} est lu directement dans le profil. Le calcul de q_{t,b_t} et de la probabilité liée au degré de dommage ont été développés au chapitre 2.

Dans nos simulations, nous reprenons donc la même implémentation qu'au chapitre 2 pour obtenir, pour chaque simulation $j \in \{1, J\}$:

$$\lambda_{Th}^{>C_{j,1}}, \lambda_{Th}^{>C_{j,2}}, \dots, \lambda_{Th}^{>C_{j,I_j}}$$

— **Calcul des ratios de calibration :**

On calcule maintenant le ratio de calibration pour chaque C_{j,i_j} , en utilisant les quantités que nous venons de calculer :

Pour tout $j \in \{1, J\}$ et pour tout $i_j \in \{1, I_j\}$,

$$\text{Ratio}_{j,i} = \frac{\text{Fréquence Observée}}{\text{Fréquence Théorique}} = \frac{\lambda_{Obs}^{>C_{j,i_j}}}{\lambda_{Th}^{>C_{j,i_j}}}$$

Nous obtenons ainsi, pour chaque simulation, une liste de ratios de calibration potentiels dont il va falloir choisir le ratio à retenir.

— **Choix du Ratio :**

On se retrouve ainsi avec autant de ratios que de sinistres observés par simulation. Il convient de les analyser afin de retenir un ratio global à appliquer au modèle. Cette étape est primordiale puisque le choix de ce ratio va déterminer le BC dans le modèle calibré, et donc le prix de la couverture de réassurance. Afin de prendre en compte la totalité de l'information disponible, nous voudrions prendre en compte l'intégralité des ratios précédemment calculés. Cependant, il ne faut pas oublier que dans un cadre de réassurance, nous sommes soumis à la présence de sinistres extrêmes que nous devons éliminer. C'est pourquoi, nous avons testé en simulations plusieurs méthodes pour déterminer le ratio à retenir, en enlevant les ratios liés aux sinistres extrêmes, puis en retenant la moyennes des ratios restants, et en calculant l'impact sur le biais.

Prenons un exemple : supposons que l'on a observé 10 sinistres ordonnés :

$$C_1, C_2, \dots, C_{10}$$

Nous avons obtenu, en appliquant la méthode expliquée ici, 10 ratios notés :

$$\text{Ratio}_1, \text{Ratio}_2, \dots, \text{Ratio}_{10}$$

Si nous enlevons le premier et le dernier décile, nous enlevons donc Ratio_1 et Ratio_{10} de l'échantillon. Nous calculons ensuite la moyenne des ratios restants (il en reste 8 dans notre exemple), à savoir :

$$\frac{\sum_{i=2}^9 \text{Ratio}_i}{8}$$

Nous avons reproduit cette méthode en enlevant les deux premiers et deux derniers déciles, ou alors en enlevant uniquement le dernier, et plusieurs autres combinaisons envisageable, pour tester celle qui donnait les meilleurs résultats (c'est-à-dire ceux dont le biais était le plus faible)

Finalement, nous avons recommandé de prendre la moyenne des ratios après avoir enlevé le premier et le dernier décile. C'est un bon compromis entre représentativité et fiabilité, et c'est là que le biais était le plus faible, comme on le verra dans la partie suivante.

Cependant, dans certains cas précis, il peut arriver que l'on soit obligé de déroger à cette règle. En effet, lorsque les profils sont de mauvaise qualité, ou que le portefeuille est très spécifique et n'est pas en accord avec nos courbes d'exposition, le ratio basé sur la moyenne après avoir enlevé le premier et le dernier décile peut ne pas être en ligne avec la sinistralité observée et le risque couvert. Dans ce cas, on ne pourrait pas justifier à la cédante de payer un prix qui ne soit pas en ligne avec sa sinistralité. On peut donc déroger à cette règle et choisir un ratio différent. L'exemple donné en fin de ce mémoire illustrera ce cas.

Dans le cadre des simulations, nous utilisons la méthode s'appuyant sur la moyenne après avoir enlevé les premier et dernier déciles, et allons à nouveau étudier la densité des ratios de calibration et la moyenne, pour étudier le biais potentiel induit par la méthode de calibration basée sur les fréquences.

3.2.3 Résultats des simulations de la nouvelle méthode

Nous avons travaillé en particulier sur les deux cédantes présentées en 2.2.1. Tous les résultats étant concordants, nous allons présenter ici les conclusions d'une seule cédante, conclusions qui peuvent se généraliser.

La cédante sur laquelle se basent les résultats décrits ici possède une fréquence de sinistres annuelle moyenne de 8.2 au delà de 750 000 euros. Le programme débute à 2,5 millions d'euros.

Dans les graphiques suivants, nous allons regarder la densité du rapport $\frac{BC \text{ Expérience}}{BC \text{ Calibré}}$.

Tranche 2,5m xs 2,5m

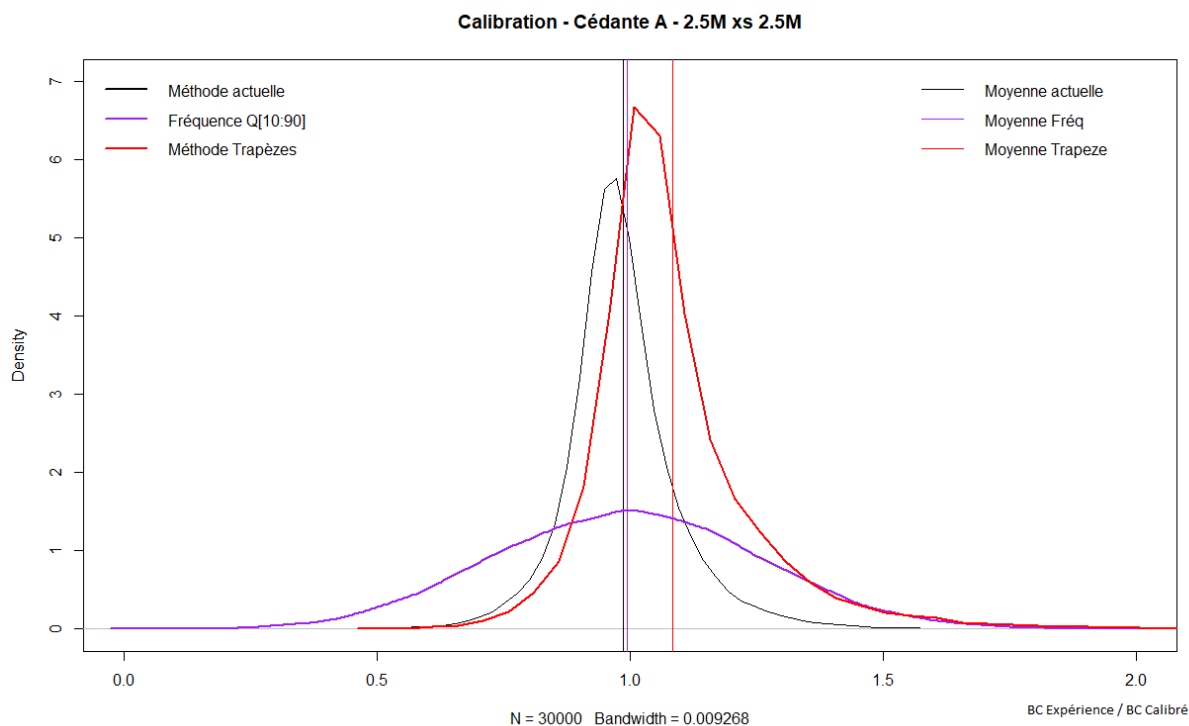


FIGURE 3.3 – Résultats Cédante A - Tranche 2,5M xs 2,5M

On constate, sur cette première tranche, que la méthode classique (appelée méthode actuelle dans le graphique) est effectivement biaisée : sa moyenne vaut 0,96, soit 4 % de moins que la valeur cible. Au contraire, la méthode des trapèzes, censée réduire cet écart, le plonge dans l'autre sens, avec une valeur de 1,08 en moyenne.

Enfin, la méthode fréquentielle (en excluant les premier et dernier déciles) nous donne une moyenne de 0,994, soit une valeur "quasi parfaite" compte tenu de nos attentes. En revanche, on observe que la volatilité de la méthode fréquentielle est plus grande : la courbe violette est en effet nettement plus aplatie et plus large que la courbe noire, représentant la méthode basée sur les tranches travaillantes.

Nous remarquons également que la méthode des trapèzes donne à nouveau une moyenne nettement supérieure à 1, et donc une sous-estimation du risque.

Tranche 5m xs 5m

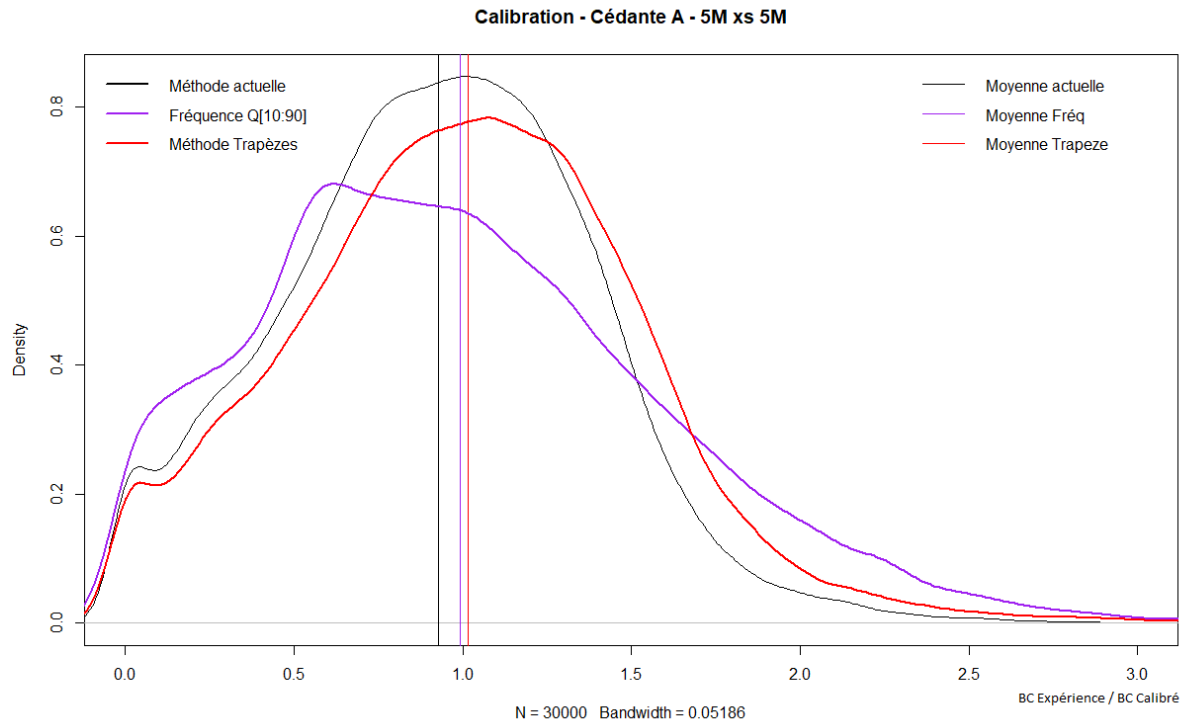


FIGURE 3.4 – Résultats Cédante A - Tranche 5M xs 5M

Nous sommes désormais sur une tranche que l'on peut considérer intermédiaire : elle est encore assez souvent touchée pour pouvoir calibrer, mais on observe une augmentation des rapports à 0, qui représentent les simulations où aucun sinistre n'a touché la tranche.

On peut faire les mêmes observations que précédemment. La méthode des trapèzes sous-estime le risque, car le ratio moyen est supérieur à 1. On remarque encore que la volatilité de la méthode fréquentielle est nettement supérieure, mais surtout l'absence de biais sur la moyenne, la valeur qui nous intéresse.

Tranche 5m xs 6m

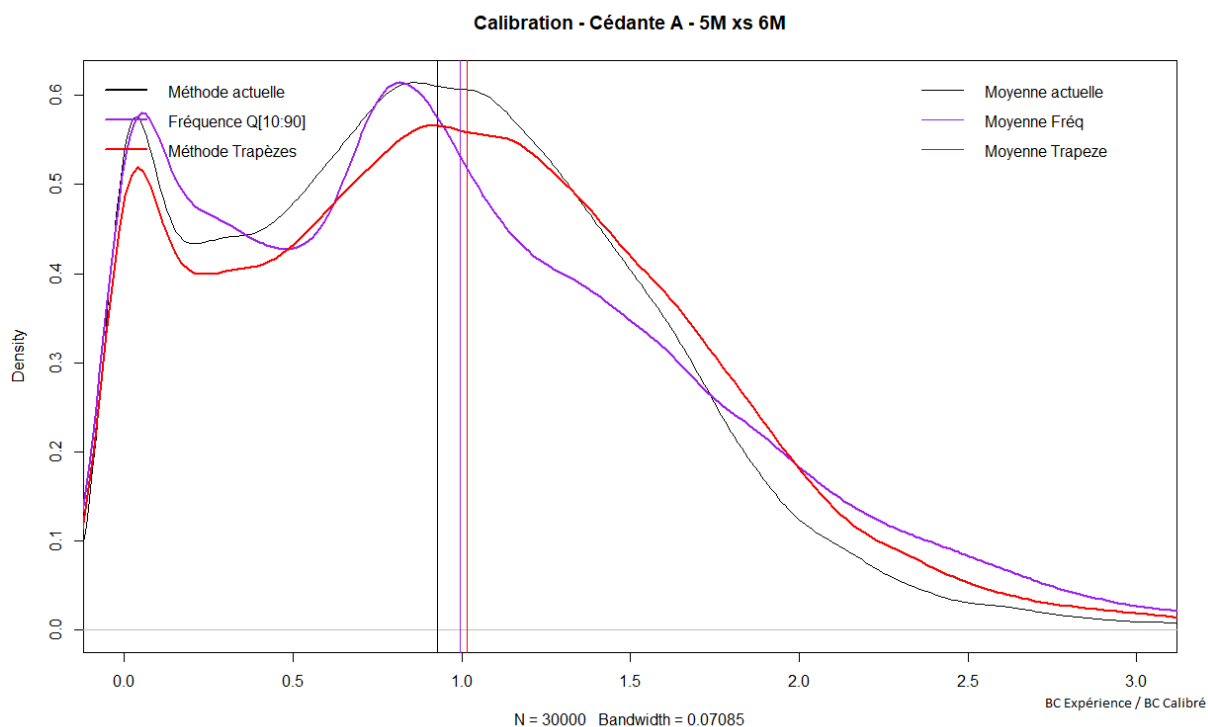


FIGURE 3.5 – Résultats Cédante A - Tranche 5M xs 5M

Cette fois-ci nous sommes sur une tranche nettement moins touchée : le pic en 0 est beaucoup plus haut, ce qui pourrait avoir tendance à «tirer» la calibration vers le bas. Cependant, on constate que la calibration en fréquence est encore non biaisée, et c'est le résultat que nous espérions.

Conclusion

Après différentes simulations sur plusieurs cédantes représentatives des marchés sur lesquels nous travaillons, nous avons consolidé les résultats présentés ici pour une seule cédante. Les observations ont toujours été les mêmes, et le seul inconvénient que nous avons relevé est l'augmentation de la volatilité du ratio de calibration. Cependant, il est classique de devoir faire un choix entre volatilité et représentativité, et nous avons décidé de retenir la méthode fréquentielle, en choisissant le ratio de calibration sur la moyennes des ratios de fréquences, après en avoir enlevé le premier et le dernier décile, pour son absence de biais, ce qui est essentiel pour nous, et l'objectif de cette étude. Nous allons alors développer un outil pour mettre en place cette méthode, et ajouter des analyses complémentaires dans un souci de transparence.

3.3 Développement du nouvel outil de calibration

Philosophie

Désormais, nous avons sélectionné la méthode que l'on souhaite utiliser dans notre modèle incendie par risque. Nous allons donc nous intéresser au deuxième objectif de cette étude : apporter de la transparence et améliorer la compréhension de notre modèle. Pour cela, nous souhaitons rendre intelligible les conséquences du choix de calibration fait par l'utilisateur. Alors que dans la méthode utilisée jusqu'alors, nous ne pouvons voir que le prix du traité issu du choix de calibration, il nous apparaît opportun d'ajouter les informations suivantes (qui seront détaillées et illustrées plus tard) :

- Un graphique retraçant l'évolution des fréquences selon le seuil de sévérité,
- Une table permettant de comparer, au delà de différents seuils, la fréquence théorique, observée et calibrée, ainsi que la différence entre la fréquence calibrée et observée,
- Un graphique montrant la densité du nombre de sinistres espérés dans le modèle calibré et la table associée,
- La probabilité d'observer un nombre donné de sinistres au delà d'un seuil choisi par l'utilisateur,
- La probabilité de n'observer aucun sinistre,
- Un tableau comparant les *Burning Cost* à l'expérience, à l'expérience indexée, à l'exposition pure, à l'exposition calibrée, et à l'exposition calibrée au delà d'un seuil d'expérience, pour la validation.

Réalisation

Ce nouvel outil sera entièrement réalisé en Excel/VBA. Il a d'abord été réalisé en Excel sans VBA dans un souci de simplification de la vérification des calculs, puis a été automatisé en VBA.

- **Importation des données :**

La première étape est le choix des données nécessaires aux calculs, et utiles pour rappeler les hypothèses effectuées dans les étapes précédentes. Ces informations sont rassemblées sur une feuille Excel comme suit :

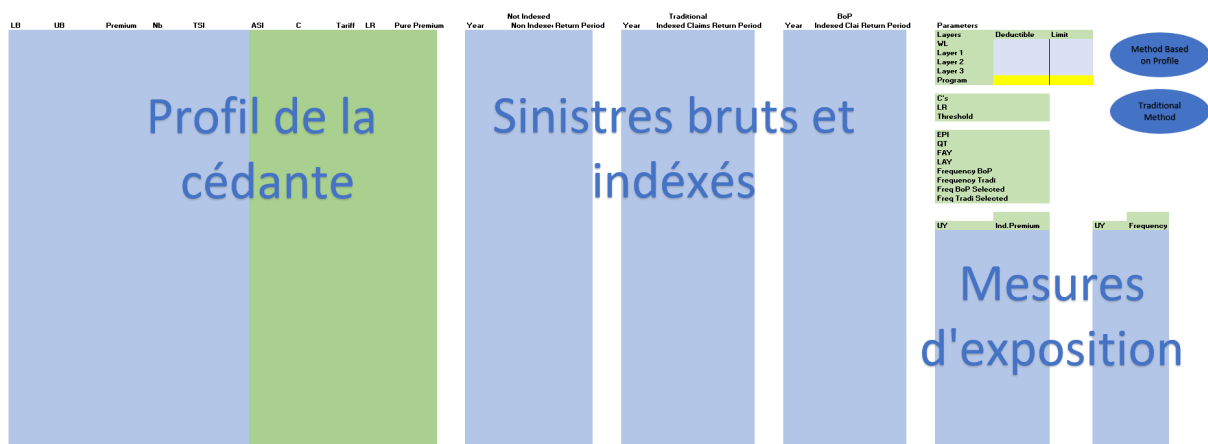


FIGURE 3.6 – Panneau d’import des données

Il suffit ensuite d’exécuter la macro (via les boutons bleus) correspondant à la méthode désirée : tous les calculs se font automatiquement et l’utilisateur est ainsi redirigé sur la feuille Excel associée.

— Calcul des fréquences :

La première chose à effectuer est de récupérer les informations transmises et de calculer les fréquences théoriques dans le modèle et les fréquences observées :

Input from SAS or macro				62,7%					
Years	Nb	Thresholds	Lambda Th	Lambda Expe	Ratio Freq	Q10-90	Ratio 10-90 Freq	WL	Labels
2010	36	4.142.686	0,350	0	0%	0	0%	0	
2010	35	4.024.100	0,363	0,087811225	24%	0	0%	0	
2017	34	3.421.048	0,484	0,175622449	36%	0	0%	0	
2017	33	3.323.100	0,695	0,263433674	38%	0	0%	0	
2015	32	3.118.300	0,798	0,351244899	44%	1	44%	0	
2017	31	3.024.100	0,829	0,439056123	53%	1	53%	0	
2009	30	2.933.000	0,862	0,526867348	61%	1	61%	0	
2013	29	2.560.300	1,106	0,614678572	56%	1	56%	0	
2017	28	2.543.100	1,115	0,702489797	63%	1	63%	0	
2015	27	2.531.000	1,122	0,790301022	70%	1	70%	0	
2016	26	2.373.800	1,213	0,878112246	72%	1	72%	0	
2014	25	2.304.400	1,257	0,965923471	77%	1	77%	0	
2009	24	2.256.400	1,289	1,053734696	82%	1	82%	0	
2009	23	2.256.100	1,289	1,14154592	89%	1	89%	0	
2017	22	1.982.171	1,637	1,229357145	75%	1	75%	0	
2017	21	1.925.300	1,694	1,31716837	78%	1	78%	0	
2017	20	1.804.376	1,828	1,404979594	77%	1	77%	0	
2017	19	1.752.600	1,891	1,492790819	79%	1	79%	0	
2012	18	1.488.155	2,501	1,580602043	63%	1	63%	0	
2012	17	1.445.400	2,586	1,668413268	65%	1	65%	0	
2016	16	1.364.533	2,958	1,756224493	59%	1	59%	0	
2016	15	1.325.300	3,059	1,844035717	60%	1	60%	0	
2017	14	1.270.545	3,209	1,931846942	60%	1	60%	0	
2010	13	1.268.516	3,215	2,019658167	63%	1	63%	0	

FIGURE 3.7 – Panneau caché des résultats bruts

— Calcul des *Burning Cost* :

On calcule ensuite le *Burning Cost* dans différentes tranches en faisant

augmenter la limite, afin d’observer l’évolution du BC à travers la couverture. Ceci est effectué en VBA.

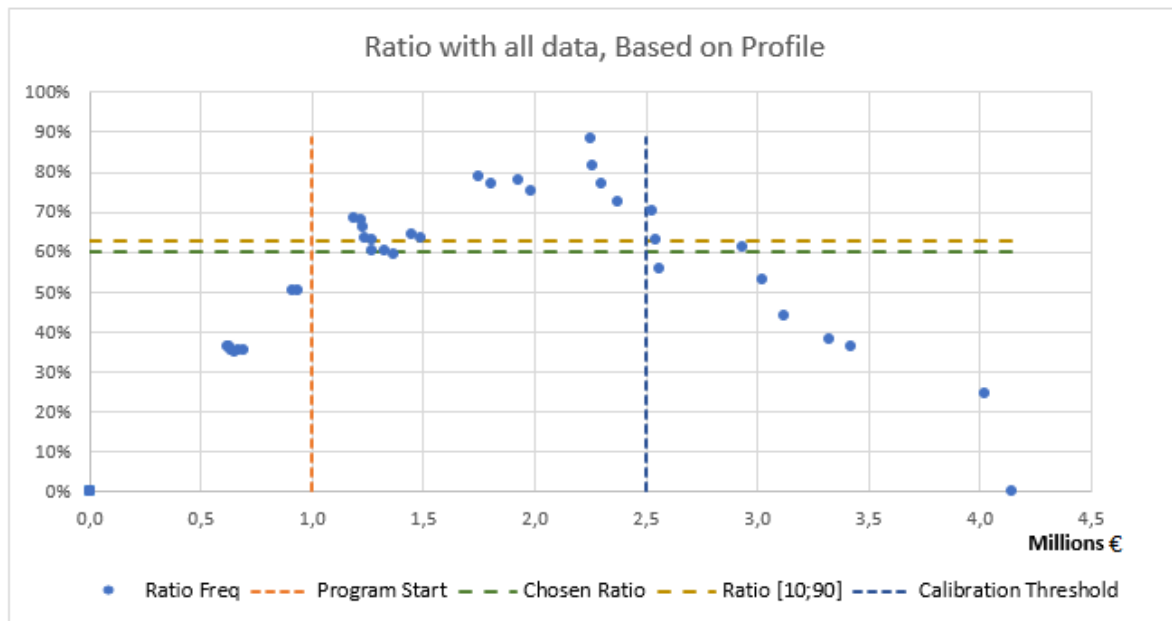
On effectue ensuite un «recollement» entre le modèle et la partie empirique au seuil choisi par l’utilisateur (appelé seuil de calibration). C’est-à-dire qu’en deçà du seuil choisi, on utilise le BC à l’expérience, et au delà le BC à l’exposition calibrée.

Threshold Expo	2.500.000		0	0,98%				Experience		Tradi	BoP
Step	112.500	71428,5714								0,757%	0,781%
	Deductible	Limit	Exposure	Not Indexed Experience	Experience indexee tradi	Experience indexee BoP	Cal Tradi Pure	Cal BoP Pure		Cal Tradi + expe	Cal BoP + expe
1	1.000.000	1.071.429	0,17%	0,03%	0,06%	0,06%	0,13%	0,10%			
2	1.000.000	1.142.857	0,32%	0,06%	0,12%	0,12%	0,26%	0,19%			
3	1.000.000	1.214.286	0,45%	0,09%	0,17%	0,17%	0,36%	0,27%			
4	1.000.000	1.285.714	0,58%	0,12%	0,22%	0,23%	0,46%	0,35%			
5	1.000.000	1.357.143	0,70%	0,15%	0,26%	0,27%	0,56%	0,42%			
6	1.000.000	1.428.571	0,80%	0,17%	0,30%	0,31%	0,64%	0,48%			
7	1.000.000	1.500.000	0,90%	0,19%	0,34%	0,35%	0,72%	0,54%			
8	1.000.000	1.571.429	0,99%	0,22%	0,38%	0,39%	0,79%	0,59%			
9	1.000.000	1.642.857	1,08%	0,24%	0,42%	0,43%	0,86%	0,65%			
10	1.000.000	1.714.286	1,16%	0,26%	0,45%	0,47%	0,93%	0,70%			
11	1.000.000	1.785.714	1,24%	0,28%	0,49%	0,50%	0,99%	0,74%			
12	1.000.000	1.857.143	1,31%	0,30%	0,52%	0,54%	1,04%	0,78%			
13	1.000.000	1.928.571	1,37%	0,33%	0,55%	0,57%	1,10%	0,82%			
14	1.000.000	2.000.000	1,44%	0,35%	0,58%	0,60%	1,15%	0,86%			
15	1.000.000	2.071.429	1,50%	0,37%	0,61%	0,63%	1,20%	0,90%			
16	1.000.000	2.142.857	1,55%	0,39%	0,64%	0,66%	1,24%	0,93%			
17	1.000.000	2.214.286	1,61%	0,41%	0,67%	0,69%	1,29%	0,97%			
18	1.000.000	2.285.714	1,66%	0,43%	0,69%	0,72%	1,33%	1,00%			
19	1.000.000	2.357.143	1,71%	0,44%	0,72%	0,74%	1,37%	1,03%			
20	1.000.000	2.428.571	1,76%	0,46%	0,74%	0,76%	1,40%	1,05%			
	1.000.000	2.500.000	1,80%	0,47%	0,76%	0,78%	1,44%	1,08%	0,00%	0,76%	0,78%
	1.000.000	2.612.500	1,87%	0,48%	0,78%	0,81%	1,49%	1,12%	0,07%	0,81%	0,82%
	1.000.000	2.725.000	1,93%	0,50%	0,80%	0,83%	1,54%	1,16%	0,13%	0,86%	0,86%
	1.000.000	2.837.500	1,99%	0,51%	0,83%	0,85%	1,59%	1,19%	0,19%	0,91%	0,89%
	1.000.000	2.950.000	2,04%	0,53%	0,85%	0,88%	1,63%	1,22%	0,24%	0,95%	0,92%
	1.000.000	3.062.500	2,09%	0,54%	0,86%	0,90%	1,67%	1,25%	0,29%	0,99%	0,95%
	1.000.000	3.175.000	2,14%	0,54%	0,88%	0,91%	1,71%	1,28%	0,34%	1,03%	0,98%
	1.000.000	3.287.500	2,18%	0,55%	0,89%	0,92%	1,75%	1,31%	0,38%	1,06%	1,01%
	1.000.000	3.400.000	2,22%	0,56%	0,90%	0,93%	1,78%	1,33%	0,42%	1,10%	1,04%
	1.000.000	3.512.500	2,25%	0,56%	0,90%	0,94%	1,80%	1,35%	0,45%	1,12%	1,05%
	1.000.000	3.625.000	2,28%	0,57%	0,91%	0,95%	1,82%	1,37%	0,48%	1,14%	1,07%
	1.000.000	3.737.500	2,31%	0,57%	0,92%	0,95%	1,85%	1,38%	0,51%	1,16%	1,09%
	1.000.000	3.850.000	2,33%	0,58%	0,92%	0,96%	1,86%	1,40%	0,53%	1,18%	1,10%
	1.000.000	3.962.500	2,35%	0,58%	0,93%	0,97%	1,88%	1,41%	0,55%	1,20%	1,11%
	1.000.000	4.075.000	2,38%	0,58%	0,93%	0,97%	1,90%	1,43%	0,58%	1,22%	1,13%
	1.000.000	4.187.500	2,40%	0,58%	0,93%	0,98%	1,92%	1,44%	0,60%	1,23%	1,14%

FIGURE 3.8 – Panneau caché des calculs de *Buring Cost*

— Présentation des résultats à l’utilisateur :

Il est désormais temps de regarder nos nouveaux graphiques. Le premier graphique qui présente le ratio calculé pour chaque sinistre observé, permet de choisir le ratio de calibration désiré et le seuil en deçà duquel on souhaite utiliser uniquement l’expérience pour tarifier.



Chosen Ratio	60,0%
Ratio [10;90]	62,7%
Calibration Th.	2.500.000

FIGURE 3.9 – Graphique principal & choix de calibration

Ces choix auront un impact sur le graphique du *Burning Cost*.

On affiche également la table associée au graphique, afin de pouvoir étudier les valeurs exactes.

Table of Expected number of claims above ...

Deductible	Th. Lambda wo Calib.	Historical Lambda	Calibrated Lambda	Diff. Cal/Historic	Calibration Ratio
4.142.686	0,35	-	0,21		0%
4.024.100	0,36	0,09	0,22	148%	24%
3.421.048	0,48	0,18	0,29	65%	36%
3.323.100	0,70	0,26	0,42	58%	38%
3.118.300	0,80	0,35	0,48	36%	44%
3.024.100	0,83	0,44	0,50	13%	53%
2.933.000	0,86	0,53	0,52	-2%	61%
2.560.300	1,11	0,61	0,66	8%	56%
2.543.100	1,12	0,70	0,67	-5%	63%
2.531.000	1,12	0,79	0,67	-15%	70%
2.373.800	1,21	0,88	0,73	-17%	72%
2.304.400	1,26	0,97	0,75	-22%	77%
2.256.400	1,29	1,05	0,77	-27%	82%
2.256.100	1,29	1,14	0,77	-32%	89%
1.982.171	1,64	1,23	0,98	-20%	75%
1.925.300	1,69	1,32	1,02	-23%	78%
1.804.376	1,83	1,40	1,10	-22%	77%
1.752.600	1,89	1,49	1,13	-24%	79%
1.488.155	2,50	1,58	1,50	-5%	63%

FIGURE 3.10 – Table associée au graphique principal présentant les ratios de calibration

Statistics based on the Calibrated Exposure Model on the Chosen Period

Probability of X claims above Level in the calibrated model

Level
2.500.000
claims greater than Level:
10
claims greater than Level (including RP):
10,00

P[# Poisson = x | Claims > Level]

Number	Proba	RP to observe more than X claims over the Period	RP to observe 0 claims over the Period
0	0%	1,0	6.979,2
1	0%	1,0	
2	1%	1,0	
3	2%	1,0	
4	4%	1,0	
5	6%	1,1	
6	10%	1,1	
7	12%	1,3	
8	13%	1,5	
9	13%	1,9	
10	12%	2,5	
11	9%	3,6	
12	7%	5,5	
13	5%	8,8	
14	3%	15,0	
15	2%	27,2	
16	1%	51,9	
17	1%	104,5	
18	0%	221,7	
19	0%	493,7	
20	0%	> 1000	

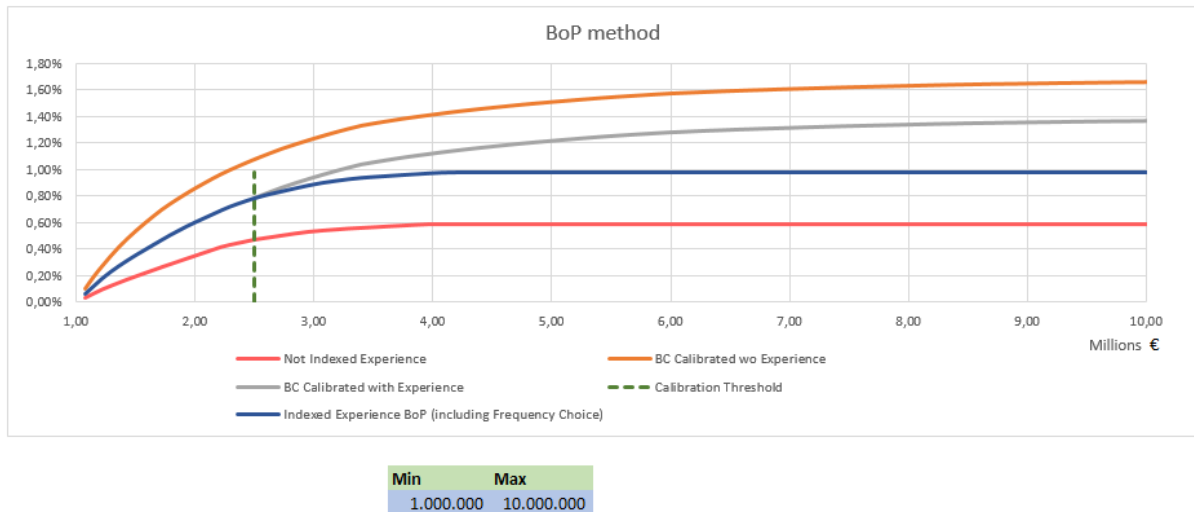


FIGURE 3.12 – Graphique des *Burning Cost*

Incorporation dans le processus actuel

L'objectif de cet outil est la calibration du modèle : c'est pourquoi il doit intervenir après les choix d'hypothèses et les analyses des données brutes effectués dans un outil SAS. Pour cela, il a fallu adapter l'outil SAS en y incorporant un lien vers l'outil de calibration en Excel et un remplissage automatique. Cette partie a été effectuée par le Responsable de l'outil SAS.

3.4 Exemple d'utilisation de l'outil

Maintenant que nous avons étudié l'ancien modèle, trouvé une nouvelle méthode et implémenté un outil ad-hoc, il convient donc d'utiliser ce nouvel outil.

Présentation du dossier

Nous travaillons sur un dossier incendie présentant des risques simples (pour 80 %) et des risques *Engineering*, donc lourds (pour 20 %). C'est une importante cédante, dont le portefeuille est stable depuis de nombreuses années.

Nous possédons un historique de la sinistralité et des primes sur une dizaine d'année. Nous allons travailler sur un programme EXCESS OF LOSS démarrant à 6 000 000 €.

Le programme est touché une fois par an environ et les résultats comptables sont bons. Nous utilisons une période d'historique de 8 ans.

Voici un extrait du profil sur lequel nous allons travailler (le profil complet étant trop grand pour être affiché), tel qu'il est transmis par la cédante :

LB	UB	Premium	Nb	TSI
-	2.500.000	113.646.047	383.665	68.801.815.856
2.500.001	5.000.000	8.613.311	2.199	7.484.861.634
5.000.001	7.500.000	3.247.414	617	3.697.075.585
7.500.001	10.000.000	1.274.808	174	1.479.797.916
10.000.001	12.500.000	781.186	105	1.157.271.823
12.500.001	15.000.000	762.128	79	1.080.329.390
15.000.001	17.500.000	402.832	36	586.428.604
17.500.001	20.000.000	453.168	40	740.548.583
20.000.001	22.500.000	337.848	29	608.891.846
22.500.001	25.000.000	402.340	20	468.896.813
25.000.001	30.000.000	299.794	16	435.920.174
30.000.001	35.000.000	224.102	16	517.435.113
35.000.001	40.000.000	59.636	4	146.964.745
40.000.001	45.000.000	199.141	12	487.410.364
45.000.001	50.000.000	50.160	2	101.102.385
50.000.001	100.000.000	744.956	21	1.557.901.185

FIGURE 3.13 – Exemple de profil transmis

On y observe les éléments classiques : Prime, Nombre de risques, et Somme totale assurée (TSI) par bande. Ils sont souvent transmis de la même manière par toutes les cédantes, mais elles peuvent parfois créer les profils de manières différentes, et donner la PML (*Probable Maximum Loss*) à la place de la somme assurée, par exemple. Cela

peut créer un problème, car la courbe d'exposition est choisie en fonction de la somme assurée. Heureusement, la calibration permet de palier ce problème. On remarque bien la présence de nombreux risques au delà de 50 millions d'euros, qui sont nos risques *Engineering* évoqués plus haut. Enfin, voici les sinistres affectant ce portefeuille, au delà du seuil d'étude de 4 millions d'euros :

Not Indexed		Traditional		As-If Claims	
Year	Non Indexed Claims	Year	Indexed Claims	Year	Indexed Claims
2009	9.454.332	2009	10.788.572	2009	10.893.000
2009	5.624.145	2009	6.417.246	2009	5.862.000
2009	5.238.284	2009	6.346.682	2009	6.225.000
2009	4.301.905	2009	4.961.584	2009	5.162.000
2009	4.293.094	2009	5.197.921	2009	5.198.000
2010	12.059.705	2010	12.383.696	2010	13.158.000
2011	6.756.664	2010	4.529.724	2010	4.574.000
2011	4.116.000	2010	4.518.668	2010	4.519.000
2012	6.623.312	2011	7.369.191	2011	7.200.000
2013	4.145.853	2011	4.717.730	2011	4.486.000
2014	3.860.973	2012	6.961.416	2012	6.613.000
2015	7.725.422	2013	4.389.633	2013	4.523.000
2015	6.429.925	2014	4.263.302	2014	4.134.000
2016	5.520.000	2015	8.610.108	2015	8.282.000
2016	4.143.751	2015	6.957.450	2015	6.757.000
2017	8.655.601	2016	5.627.604	2016	5.746.000
2017	6.175.024	2016	4.143.437	2016	4.269.000
2017	5.248.373	2017	9.510.007	2017	9.510.000
2017	5.160.300	2017	6.267.649	2017	6.083.000
2017	4.725.000	2017	5.327.099	2017	5.547.000
		2017	4.881.744	2017	5.238.000
		2017	4.430.475	2017	4.659.000
		2017	3.908.664	2017	4.021.000

FIGURE 3.14 – Sinistres affectant le profil

Il n'est pas anormal d'avoir plus de sinistres indexés que non-indexés : certains sinistres vont passer au delà du seuil d'étude grâce à l'indexation.

Calibration du modèle

Nous utilisons l'outil avec les données indexées de la cédante. En premier lieu, nous analysons le graphique principal pour y faire les premières constatations et choisir un ratio et un seuil à partir duquel utiliser le modèle (et en deçà duquel nous utiliserons l'expérience pure).

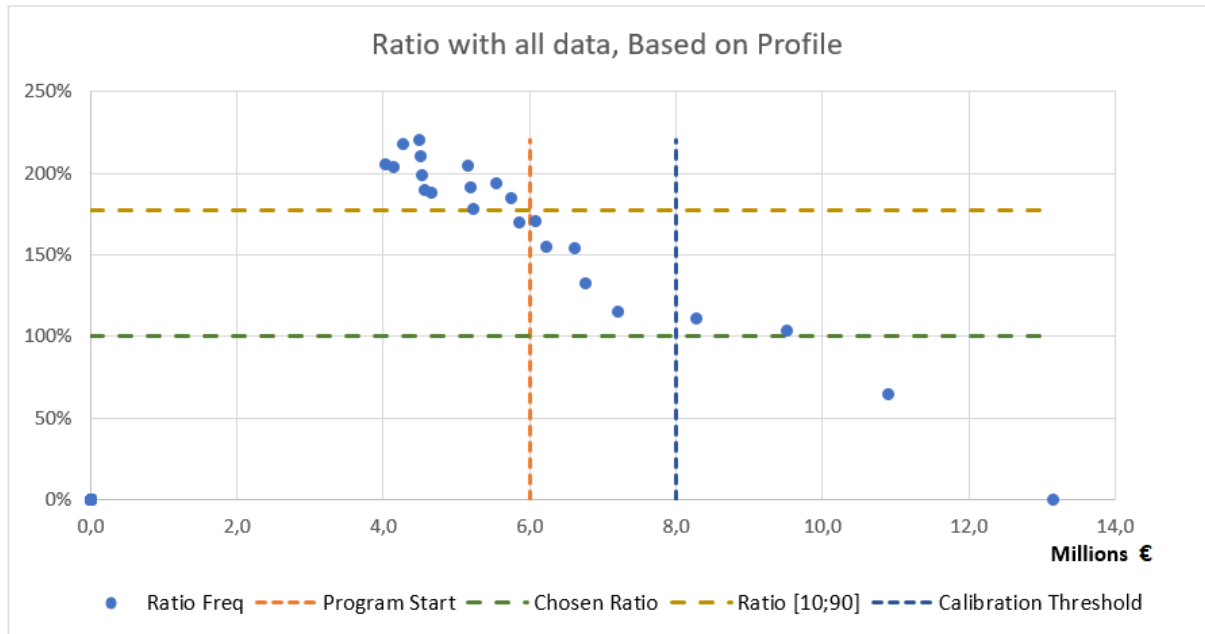


FIGURE 3.15 – Graphique Principal avant choix de calibration

L'outil affiche ici la calibration s'appuyant sur la moyenne des ratios de fréquences (après avoir enlevé le premier et le dernier décile), comme expliqué dans la partie précédente. C'est la ligne pointillée orange, appelée "Ratio [10;90]". Elle se situe à 175%. Cependant, bien que nous devions, à priori, suivre cette valeur, nous sommes ici dans un cas pathologique, où l'allure des ratios est clairement à la baisse. Comme expliqué précédemment, nous pouvons, dans ce type de cas, justifier de déroger à la règle et choisir un ratio différent.

On décide alors de choisir un ratio de **100 % au delà de 8 000 000 €**. En effet il nous semble important de tenir compte de l'apparente décroissance de la fréquence de sinistres, et de calibrer dans le haut du programme. On peut expliquer cette tendance par plusieurs facteurs : présence de coassurance dans les grands risques ou inadaptation de la courbe d'exposition. A contrario, l'utilisation d'une tranche travaillante aurait calibré dans le bas du programme, et aurait donné une calibration plus élevée.

Table of Expected number of claims above ...

Deductible	Th. Lambda wo Calib.	Historical Lambda	Calibrated Lambda	Diff. Cal/Historic	Calibration Ratio
13.158.000	0,11	-	0,11		0%
10.893.000	0,17	0,11	0,17	54%	65%
9.510.000	0,21	0,22	0,21	-3%	103%
8.282.000	0,30	0,33	0,30	-10%	111%
7.200.000	0,38	0,44	0,38	-13%	116%
6.757.000	0,41	0,55	0,41	-25%	132%
6.613.000	0,43	0,66	0,43	-35%	154%
6.225.000	0,50	0,77	0,50	-35%	155%
6.083.000	0,51	0,88	0,51	-42%	171%
5.862.000	0,58	0,99	0,58	-41%	170%
5.746.000	0,60	1,10	0,60	-46%	184%
5.547.000	0,62	1,21	0,62	-48%	194%
5.238.000	0,74	1,32	0,74	-44%	178%
5.198.000	0,75	1,43	0,75	-48%	191%

FIGURE 3.16 – Table associée au graphique de Calibration, avec un ratio de 100 %

En observant la table correspondant au graphique précédent, nous constatons que notre ratio semble généreux et n'est pas incohérent avec nos observations précédentes : la fréquence décroît vite dans le dossier, et comme le portefeuille est stable, nous n'avons aucune raison d'envisager une déviation de la sinistralité.

Puis, nous nous intéressons à la fonction de masse de la loi de Poisson du modèle à l'EXPOSITION CALIBRÉE où nous allons observer différents seuils. On essaye de se placer proche des sinistres observés, toujours pour éviter les zones d'incertitude de la sinistralité empirique.

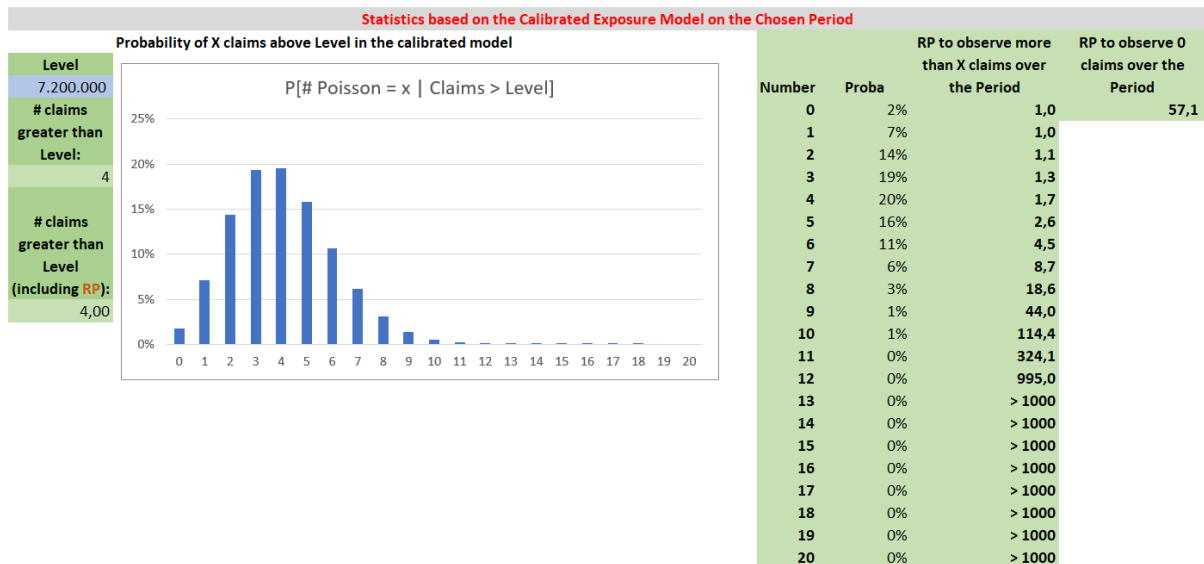


FIGURE 3.17 – Loi de Poisson au delà de 7 200 000 euros

Pour ce premier seuil, à 7 200 000 €, on se place un peu en amont du seuil que l'on a choisi pour l'utilisation de l'exposition (8 000 000 €). On note que l'on a empiriquement 4 sinistres au-delà de ce seuil. Cependant, notre modèle calibré nous donne une probabilité de 20 % d'observer une telle situation, et une période de retour d'une fois toutes les 1.7 périodes (pour rappel, la période choisie est de 8 ans). Cela peut sembler un peu «généreux», mais il est nécessaire d'observer le comportement à des seuils plus élevés pour pouvoir conclure. En effet, le comportement des sinistres peut varier selon le niveau où nous nous situons, et nous ne devons pas ignorer cette possibilité. Sinon, nous devrions remettre en cause le ratio sélectionné. Essayons un seuil de 13 000 000 €, situé plus haut dans le programme :

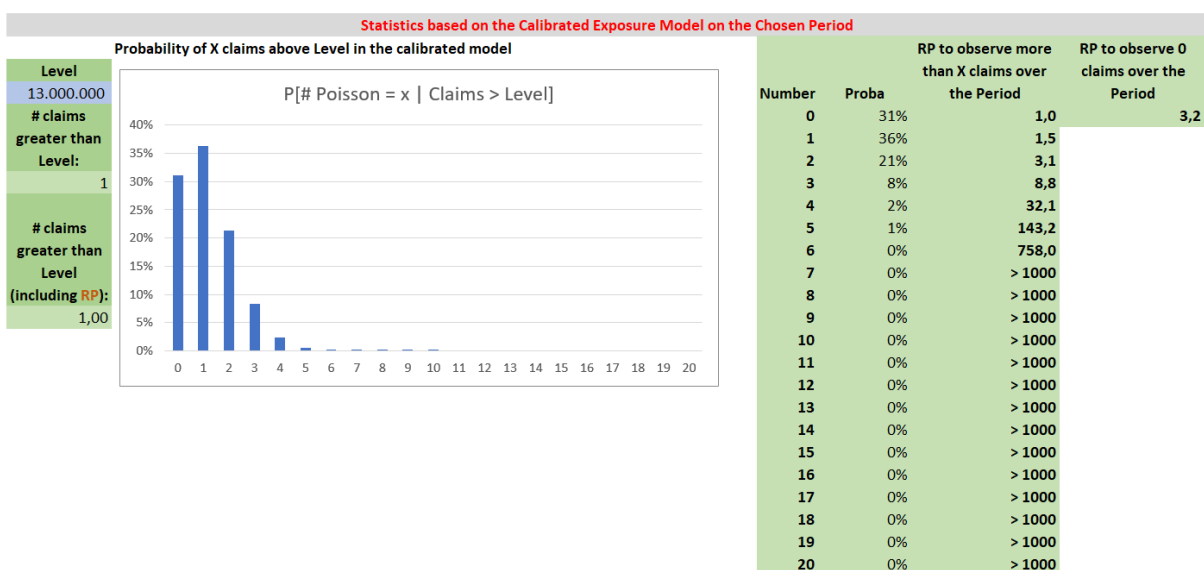


FIGURE 3.18 – Loi de Poisson au delà de 13 000 000 euros

Ainsi, nous nous situons dans la couverture demandée par la cédante, et nous nous

rendons compte que notre calibration correspond très bien à la réalité : on a observé un sinistre, et la probabilité d'avoir 1 sinistre ou plus est de 69 %, soit 1 fois toutes les 1.45 périodes. Ces valeurs nous permettent de valider le ratio de calibration choisi.

N'oublions pas que dans cet exemple, nous avons dérogré à la méthode de choix du ratio. Il est alors d'autant plus important d'être très vigilant sur ces graphiques de validations, qui permettent de justifier de manière concrète le choix.

Il nous reste ensuite à inspecter les BC dans les différentes méthodes, ce qui permet encore de s'assurer qu'il n'y a aucune incohérence dans le modèle retenu.

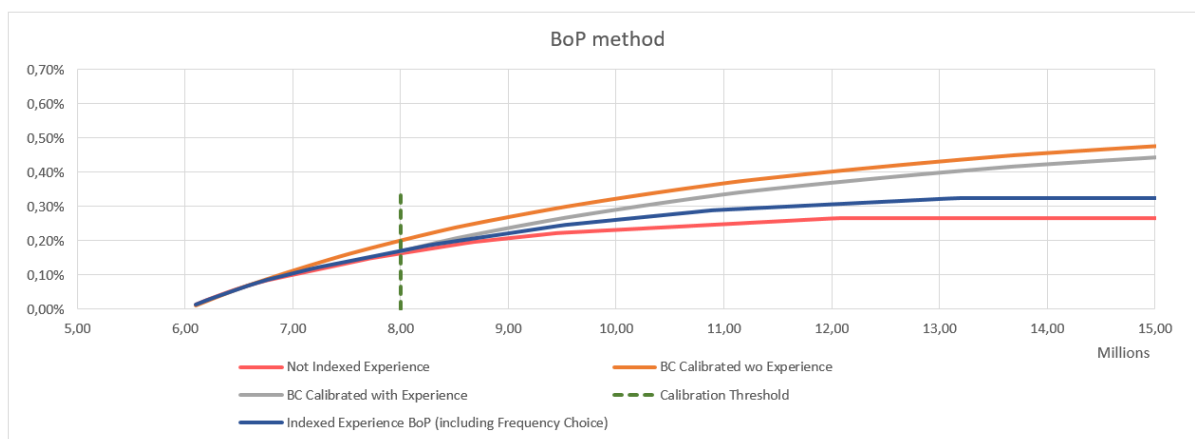


FIGURE 3.19 – *Burning Cost* du modèle calibré

Nous observons en bleu le BC à l'expérience indexée (c'est-à-dire en monnaie constante, et en tenant compte de l'évolution du profil). Nous constatons l'effet de l'indexation en le comparant à la courbe rouge, qui est le BC à l'expérience non indexée. La courbe primordiale est la courbe orange. Elle représente le BC dans le modèle retenu. On constate qu'elle est au départ très proche de l'expérience, puisse s'en éloigner. C'est logique : le modèle prédit la survenance de grands sinistres rares, qui n'ont encore jamais été observés, mais qui consommerait une grande partie de la couverture. En particulier au delà de 11 millions d'euros : on n'a jamais eu de sinistre plus grand, donc le BC à l'expérience ne grandit plus au delà, mais le BC du modèle lui continue à croître car on pourrait en observer un dans l'avenir. Par conséquent, nous avons pu retenir une calibration tenant compte de la totalité de l'historique, et de la tendance observée à travers le programme.

Résumé Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode de calibration du modèle de tarification à l'exposition du risque *Property*. Nous avons expliqué le fonctionnement de la calibration à l'aide des fréquences de sinistralité et détaillé les étapes de mise en place. Nous avons ensuite détaillé la création du nouvel outil de calibration, et nous avons mis en pratique cette méthode avec un exemple concret de cotation.

Enfin, nous avons introduit de nouveaux instruments augmentant la transparence de la calibration et permettant de valider nos choix et hypothèses faites, et éventuellement de remettre en cause la calibration choisie.

Conclusion

Ce mémoire a permis de retracer les principales méthodes de cotations des traités EXCESS OF LOSS, que sont les tarifications à l'expérience et à l'exposition, le fonctionnement des courbes d'exposition, leur lecture, et de détailler une méthode non traditionnelle développée au sein de QBE Re.

L'avantage de cette méthode non traditionnelle est d'adapter l'historique des sinistres à l'exposition actuelle en tenant compte de l'évolution des profils de la cédante, et ainsi de rendre la sinistralité empirique représentative du risque actuel. Elle permet également de créer une mesure d'exposition adaptée à la priorité du programme de réassurance.

Après avoir reproduit notre modèle de tarification dans un univers de simulations, nous avons pu constater l'existence d'un biais de tarification, imputable à l'utilisation de la fonction de sinistralité empirique. De plus, ce biais est renforcé par le manque de visibilité induit par la méthode de calibration via l'utilisation des tranches travaillantes et du 5^{ème} plus grand sinistre. En effet, il est impossible de comprendre l'évolution de la sinistralité au-delà de la tranche travaillante, et nous devons donc nous contenter de cette vision «étroite». En outre, il n'existait aucun outil de validation et d'analyse de l'impact concret du choix de calibration en terme de sinistralité attendue.

Nous avons alors décidé de nous appuyer sur l'étude des fréquences à travers tout le programme de réassurance, afin de ne plus s'attacher à une simple tranche. C'est-à-dire de calculer le ratio entre la fréquence empirique et théorique au niveau de chaque sinistre observée, afin de déterminer la calibration à appliquer à notre modèle en fonction de la fréquence observée. Après en avoir démontré la précision au travers de simulations, nous avons mis en place la méthode fréquentielle en créant un outil ad-hoc, développé en Excel et VBA.

Cet outil nous a permis de tester l'impact de cette méthode et son utilité sur un grand nombre de cédantes, représentatives du marché européen de la réassurance.

Nous avons alors incorporé l'outil dans la procédure de cotation, ce qui nous permet désormais de rendre nos calibrations plus précises et facilement intelligibles. De plus, cet outil, présentant des graphiques clairs et explicites, facilitera la compréhension de

nos cotations par les clients. Les outils de validation qui y ont été ajoutés permettent également aux techniciens de mieux analyser l'impact de leur choix et de prendre des décisions éclairées.

Il serait intéressant, après le prochain renouvellement, de recueillir l'avis des techniciens afin d'adapter l'outil à leurs besoins, et, éventuellement, d'ajouter d'autres fonctionnalités.

Nous réfléchissons à apporter d'autres outils d'analyses de sensibilité, notamment en permettant d'analyser le poids que chaque sinistre représente dans le ratio de calibration obtenu. En effet, un grand sinistre dans un faible échantillon pourrait avoir un effet non négligeable. Il pourrait être intéressant d'analyser cet effet (en particulier la variation induite sur le ratio de calibration en l'éliminant de l'échantillon). Nous pourrions alors détecter facilement un sinistre "extrême" par rapport à l'exposition de la cédante.

Il reste cependant un degré de liberté à surveiller, au niveau du choix de la période d'analyse fait par le technicien. En effet, ce choix est encore basé sur une analyse plutôt qualitative de la cédante, et de la connaissance que l'on en possède. Or, le choix de la période va déterminer les sinistres que l'on garde pour l'analyse, et donc la calibration que l'on retiendra. On pourrait alors ajouter une analyse de la sensibilité du ratio au choix de cette période. Ce risque opérationnel, bien que n'étant pas l'objet de ce mémoire, sera à surveiller, et pourrait donner matière à une autre étude afin de donner des critères objectifs de choix, et encore perfectionner nos modélisations.

Bibliographie

- [1] BERNEGGER, S. The swiss re exposure curves and the mbbefd distribution class. *ASTIN Bulletin : The Journal of the International Actuarial Association* 27, 01 (1997), 99–111.
- [2] DESMEDT, S., SNOUSSI, M., CHENUT, X., AND WALHIN, J. F. Experience and Exposure Rating for Property Per Risk Excess of Loss Reinsurance Revisited. *ASTIN Bulletin* 42, 1 (2012), 233–270.
- [3] KAAS, R., GOOVAERTS, M., DHAENE, J., AND DENUIT, M. *Modern Actuarial Risk Theory*. Springer, 2002.
- [4] LOLJEEH, R. *Estimation de courbes d'exposition dans le cas de données incomplètes*. 2012.
- [5] MEILLER, D. *Méthodes de tarification à l'expérience et à l'exposition des excédents de sinistre incendie*. 2016.
- [6] SWISS RE. *Exposure Rating*. 2004.
- [7] WALHIN, J. F. *La réassurance*. Cahiers financiers. Larcier, 2007.