UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Département MIDO(*)
MASTER MIDO
MENTION MMD(**)

SPÉCIALITÉ ACTUARIAT

Année Universitaire : 2008-2009

Mémoire d'Actuariat présenté en **novembre 2009** devant l'Université Paris Dauphine et l'Institut des Actuaires

Par : **Anh Tuan NGUYEN**

Tuteur : **M. Jean-Luc LABONDE**

Sujet : **Conception des méthodes d'évaluation en assurance expatriée**

Entreprise d'accueil : **WelCare**

NON CONFIDENTIEL

JURY

Membres du Jury	**Fonctions/Entreprise**
Christian HESS	Président du jury, Professeur à l'Université Paris-Dauphine
Jean-Marie NESSI	Membre du jury de l'IA, Consultant, Enseignant à l'EMICAP

(*)MIDO : Mathématiques, Informatique, Décision, Organisation

(**)MMD : Mathématiques, Modélisation, Décision

Conception des méthodes d'évaluation en assurance expatriée

Résumé

Mots clés : Expatrié, prévoyance, frais de soins santé, modèle logistique, l'estimation de lois de probabilité, chaine de Markov, Solvabilité II, provision technique, simulation Monte Carlo, bootstrap.

L'assurance des expatriés, souvent assimilée à la prévoyance, constitue une branche dynamique du secteur de l'assurance. Alors qu'elle apparaît très concrète quand on l'analyse dans la perspective des besoins auxquels elle répond, elle reste pourtant un domaine dans lequel les recherches actuarielles consacrées sont relativement pauvres.

Ce présente mémoire s'intéresse à la recherche des méthodes de modélisation et d'évaluation des risques qu'engagent les assureurs se trouvant dans ce domaine. L'objet est donc de proposer des bases méthodologiques à partir desquelles, l'assureur pourrait se référer pour ses procédures de tarification et de provisionnement. Il se compose de quatre parties.

Dans la première partie, nous décrivons les généralités en rappelant la terminologie à l'usage courant en prévoyance et en assurance de l'expatriation. Une brève présentation du groupe APRIONIS et de la société Welcare dans laquelle mon stage s'est déroulé s'y ajoute.

La deuxième partie est consacrée à la modélisation et aux techniques statistiques de l'estimation de la consommation médicale appliquées aux données du portefeuille des expatriés de Welcare L'étude préalable des données disponibles ainsi que la description de notre échantillon des expatriés sont traités dans un premier temps. L'approche fréquence-coût « modérée » est ensuite retenue pour modéliser le coût total annuel d'une garantie donnée d'un assuré. Dans cette approche la probabilité de consommer au moins une fois par an est estimée à l'aide du modèle logistique. La loi du frais réel pour chaque type de garantie, sachant que l'assuré a consommé, est estimée en utilisant les méthodes d'estimation paramétriques ou non paramétriques usuelles.

L'étude des garanties de décès et de l'invalidité constitue les travaux de la troisième partie. L'élaboration des tarifs repose sur l'approche markovienne modélisant le processus de la vie humaine à travers des différents états (actif, invalide, décédé…). L'aspect théorique de l'approche est introduit .Le volume restreint des données concernant ces types de garanties pour notre population d'expatriés ne nous permet pas d'établir les procédures pratiques pour l'estimation des paramètres du modèle.

Enfin, la quatrième partie aborde les méthodes stochastiques pour les provisions techniques liées à l'activité de l'assurance expatriée. Nous étudions les modèles adaptés à deux types de provision : la provision mathématique et la provision pour sinistres tardifs qui sont basées respectivement sur l'approche markovienne et l'approche bootstrap. Nous montrerons comment les techniques de simulation Monte Carlo s'appliquent à la construction des fonctions de distributions de ces deux provisions en vue des calculs des S.C.R. associés (Solvency Capital Requirement).

Abstract

Key words: Expatriate, life and health insurance, logistic model, probability laws estimation, Markov chain, Solvency II, technical reserve, Monte Carlo and bootstrap methods.

Expatriation insurance forms a dynamic branch of the insurance industry. It appears very practical when being analysed from the perspective of the needs it meets. However, it remains an area in which little actuarial researches can be found.

This report aims to construct actuarial methods in modelling and evaluating risks engaged by insurers in this domain of social expatriation protection. The purpose is to provide methodological foundations that insurers may refer to in order to develop rating and reserving. It consists of four parts.

In the first part, we describe the generality of expatriation insurance by recalling some terminologies in common use in life and health insurance. In this part, we can find a brief presentation of Aprionis group and the company Welcare where I was trained.

Based on Welcare's expatriation data, modelling and statistical techniques for estimation of health care consumption are detailed in the second part. The preliminary study of available data and the description of our expatriates sample are treated at first. The moderated frequency-cost approach was then used to model the annual cost of each guarantee for a given individual. In this approach, the probability of consuming at least once a year was estimated by the logistic model. The probability law of medical expenses for each type of guarantee, knowing that the insured previously consumed, was estimated by using appropriated parametric or non parametric estimation methods.

The study of death and disability guarantees forms the work of the third part. The theoretical aspect of Markov chain was introduced to model the human life process through various conditions (active, disabled and deceased). Theoretical aspect of the approach is then introduced. Limits on the current volume of data on this type of guarantee for our expatriates' population do not allow us to elaborate practical procedures for models' parameters estimation.

Finally, the fourth section of the paper deals with stochastic methods for technical reserves related to insurance expatriate activities. We study models suited for two types of reserve: the mathematical and the IBNR ones which are based respectively on the Markovian approach and the bootstrap methods. We will demonstrate how to apply the Monte Carlo simulation techniques to the construction of distribution functions of these two reserves. We will then deduct the associated SCR (Solvency Capital Requirement).

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur Thierry VAUTRIN, responsable de la direction opérationnelle Actuariat du Groupe Aprionis, et Directeur de Welcare, pour son accueil convivial et sympathique qui m'a permis la réalisation de cette étude dans les meilleures conditions.

Je remercie également mon tuteur de stage, Monsieur Jean Luc LABONDE, actuaire, responsable du pôle technique Assurance de Personnes, pour tous ses conseils ainsi que sa relecture qui m'ont énormément aidé dans mon travail.

Je remercie d'autre part Jean Charles MEUNIER, Cyrille AUGIRON et l'ensemble du personnel de la société WelCare pour ses aides quotidiennes à différents niveaux.

Je profite de ce mémoire pour exprimer ma gratitude envers le personnel enseignant de la Formation Master Actuariat de Dauphine.

Sommaire

Introduction 9

I. Généralités et terminologie de la prévoyance et de l'assurance des expatriés 10

I.1 Garanties de prévoyance 10

I.2 Contrat de prévoyance 11

I.3 Opération de la prévoyance 13

I.4 Règles pratiques concernant l'établissement des contrats comportant des garanties de prévoyance groupe 16

I.5. La présentation du groupe Aprionis 17

I.6 WELCARE et ses missions dans le domaine de protection sociale internationale 21

II. La Tarification des garanties de frais de soins santé 25

II.1 Préparation et traitement préalable de données 25

Les outils informatiques utilisés 25
La population étudiée 25

II .2 Le Calcul de prime par garantie. 28

II.3 Modélisation selon l'approche probabilité de consommer-charge de sinistre 32

II.4 Méthodes de l'estimation et du test 33

II.4 .1 L'estimation de p par le modèle logistique 33

a)Principe de la régression logistique 33
b) Les tests associés au modèle 35

II.4 .2 L'estimation paramétrique de la loi de C 37

a) Méthode des moments 37
b) Méthode du maximum de vraisemblance 37
c) Les tests d'ajustement 37
-Test d'ajustement graphique par la méthode QQplot 38
-Test de Kolmogorov – Smirnov 38
-Test χ^2 d'homogénéité entre les deux distributions. 39

II.4 .3 L'estimation non paramétrique de la loi de C 40

II.5 La mise en œuvre du modèle : l'application aux données des expatriés de Welcare. 41

II.5 .1Choix des variables explicatives en fonction des informations disponibles 41

II.5 .2 L'estimation de la probabilité de consommer 42

Illustration de la garantie optique 42
Récapitulation de l'estimation des probabilités de consommer pour chaque garantie 46
Garanties maternité et orthodontie 47

II.5 .3 L'estimation de la loi des frais réels 49

L'ajustement d'une loi théorique des frais réels pour la garantie optique 49
Exemple de calcul de la prime pure pour la garantie optique 52

II.5.4 Récapitulation et remarques sur l'estimation des lois des frais réels. 52

Présence des plafonds annuels 53
Exemple de l'estimation de la fonction de répartition empirique des frais réels pour la garantie optique 54

II.5 .5 Récapitulation de l'estimation de la loi des frais réels pour chaque garantie 55

Les espérances empiriques estimées 55
Les fonctions de répartition empirique estimées 56

II.5.6 Formule de la prime pure totale individuelle et passage de la prime individuelle à la prime collective 58

La prime pure totale individuelle 58
Le passage à la prime collective 59

II.5 .7 Coefficients correcteurs en fonction de la zone géographique 60

Principe des tests de Wilcoxon et Mann-Whitney 61
Exemple : Application au cas de la garantie consultation et visite. 62

II.8 Conclusion 63

III. La Tarification des garanties décès et invalidité selon l'approche Markovienne. 64

III.1 Présentation du produit Planet Prevoyance 64

III.2 Eléments de la modélisation markovienne 66

III.3 Exemples d'application à la tarification 71

III.3 .1 Rente d'invalidité 71

III.3.2 Capital décès 72

III.4 Conclusion 74

IV .L'évaluation des provisions pour sinistres en cours et sinistres tardifs 75

V.1 Généralité sur les notions et principes de Solvabilité II 75

V.1.1 Principe sur l'évaluation de l'actif et du passif 76

V.1.2 Le bilan simplifié de solvency II 76

V.2 Mesure du risque 79

V.3 Méthodes de simulation Monte Carlo 80

V.4 L'application à l'estimation de la loi de distribution des provisions 82

V.4.1 Provisions mathématiques de rentes (PM) suivant l'approche Markovienne 82

L'algorithme de simulation des processus Markoviens localement homogène. 83
Illustration numérique 85

V.4.2 Provisions pour sinistres tardifs selon l'approche bootstrap. 87

Rappels théoriques de la méthode de Chain Ladder 87
Bootstrap et la simulation des niveaux de provision 88

V.5 Conclusion 93

Conclusion 94

Bibliographie 95

Annexe 97
Annexe 1 .*La Vraisemblance dans le modèle logit* 97
Annexe 2 .*Démonstration de la l'équation de Kolmogorov* 98
Annexe 3.*Les fonctions écrites sous matlab implémentant les algorithmes de simulation* 99

Introduction

On estime que plus de 230 000 français quittent « définitivement » la France chaque année. Au total, près de 2,390 millions de français sont expatriés dans le monde. Un chiffre qui ne cesse de croître : depuis 1995, le taux de croissance moyen annuel des expatriés français s'élève à 3,9%. Cette population se caractérise par une très grande diversité de situations familiales, de salaires, de besoins de protections sociale…S'il n'existe pas de profil type de l'expatrié, en revanche, il est une caractéristique commune à tous les expatriés : la recherche du maintien de leur protection sociale française. Cette attente apparaît comme une des premières préoccupations des français préparant leur départ. Dans ce contexte, plusieurs assureurs interviennent sur ce marché et proposent une gamme diverse de produits en réponse à ce besoin.

Le premier objectif de ce mémoire est de concevoir une base tarifaire pour ce type de produit proposé par Welcare. Les garanties apportées par ces produits couvrent les risques classiques en prévoyance : les risques maladie, décès, incapacité et invalidité. Les régimes de protection sociale dont dépendent les expatriés ne sont pas ceux appliqués aux résidents français, l'étude de ces produits, tant en tarification, qu'en provisionnement, fait appelle aux méthodes statistiques particulières adaptées aux caractéristiques et aux données spécifiques des expatriés.

De plus, le passage de solvabilité I à solvabilité II impose aux assureurs européens quelles que soient leur taille et leur branche d'activité, la mise en place de techniques actuarielles permettant de mesurer le risque encouru de manière probabiliste et non plus seulement de manière déterministe (calcul de l'espérance sans prise en compte de l'incertitude liée au risque). En réponse à cette exigence, nous proposons des méthodes stochastiques et des algorithmes de l'implémentation adaptées à deux grandes catégories de provision en assurance de l'expatriation : la provision pour sinistre en cours et la provision pour sinistres tardifs.

I. Généralités et terminologie de la prévoyance et de l'assurance des expatriés

Les contrats de l'assurance pour les expatriés sont majoritairement des contrats collectifs couvrant les risques classiques en prévoyance.

Avant tout, la maîtrise de la terminologie utilisée dans le domaine étudié est sans doute indispensable. Nous commençons le mémoire par la présentation des termes couramment utilisés en prévoyance et donc pour assurance des expatriés.

I.1 Garanties de prévoyance

Les garanties de prévoyance couvrent essentiellement les quatre risques : l'incapacité, l'invalidité, le décès, et la maladie.

Risque maladie **:**

La garantie du risque maladie a pour objet d'aider les assurés à faire face aux dépenses occasionnées, par lui-même ou les personnes dont il a la charge financière, au titre de sa santé. Il peut s'agir de couvrir les frais médicaux hospitaliers, chirurgicaux, pharmaceutiques, optiques, dentaires, etc.

Les garanties d'assurance santé peuvent intervenir en complément du régime de base (la Sécurité sociale, la CFE), ou directement. Dans ce dernier cas nous parlons de garanties au premier euro. Les montants des indemnisations peuvent être définis en pourcentage des remboursements effectués par les régimes de base ou compléter ceux-ci dans la limite des frais réellement exposés, ou calculés forfaitairement pour les contrats sans référence à un régime de base, toujours dans la limite des frais réellement exposés et compte tenu d'un plafond fixé par acte médical.

Risque décès :

La garantie du risque décès a pour objet de compenser forfaitairement la disparition des revenus du fait du décès de l'assuré.

La prestation peut être servie sous forme d'un capital versé à un (ou plusieurs) bénéficiaire(s) désigné(s) par l'assuré ou à défaut identifié(s) par le contrat de prévoyance sous forme de rentes servies soit au conjoint survivant, soit aux enfants en vue du financement de leurs études (rente éducation).

Risque invalidité **:**

L'invalidité est la situation définitive dans laquelle se trouve l'assuré qui ne peut exercer son activité professionnelle normale pour des raisons médicales tenant à un état pathologique dû soit à une maladie soit à un accident (professionnel ou non). L'assuré, par suite de maladie ou d'accident, est contraint d'interrompre totalement son activité professionnelle et il en résulte une diminution de gain ou de salaire à laquelle l'assurance se propose de remédier.

L'état d'invalidité peut être défini par référence à la réglementation du régime général de sécurité social ou par une définition spécifique du contrat de prévoyance.

Pour le régime général de sécurité sociale, il existe trois niveaux d'invalidité :

-l'invalidité de première catégorie : l'assuré invalide n'est plus capable d'exercer une activité susceptible de lui procurer au moins 34% de sa dernière rémunération.

-L'invalidité de deuxième catégorie : l'assuré invalide n'est plus capable d'exercer une quelconque activité professionnelle.

-L'invalidité de troisième catégorie : l'assuré invalide est dans l'obligation de recourir à une tierce personne pour les actes de vie courante.

Les prestations sont versées par l'assureur sous forme de rentes .Elles sont versées jusqu'à une date particulière généralement celle à laquelle l'invalide pourra faire liquider ses pensions de retraite.

Risque incapacité :

L'incapacité est la situation temporaire dans laquelle se trouve l'assuré qui ne peut exercer son activité professionnelle normale, pour des raisons médicales tenant à un état pathologique dû soit à une maladie soit à un accident (professionnel ou non). N'exécutant pas son activité professionnelle l'assuré ne perçoit plus les gains ou les rémunérations qui lui sont dus.

Les prestations dans le cas des garanties incapacité sont versées généralement sous forme d'indemnités journalières calculées en fonction de la rémunération que perçoit l'assuré en période d'activité (exemple en pourcentage du dernier salaire). Les prestations peuvent retenir de certains délais appelés franchise, par exemple elles sont commencées à compter du troisième jour d'incapacité continu et pendant la durée d'arrêt de travail.

Remarque : Les définitions des états de l'incapacité et de l'invalidité cités ci-dessous sont dérivées de la notion de *l'incapacité et l'invalidité de travail*, elles sont à distinguer de la notion de *l'incapacité et de l'invalidité fonctionnelle* . Ces derniers états résultent d'une atteinte à l'intégrité physique ou mentale de l'assuré, appréciée en dehors de toute réduction de ressources professionnelles.

I.2 Contrat de prévoyance

La souscription d'un contrat d'assurance (*adhésion*) peut être un acte individuel ou collectif.

Dans le premier cas, le contrat d'assurance ne vise qu'à garantir le souscripteur ou l'assuré désigné. Dans le second cas, le contrat d'assurance a pour objet de garantir, dans les mêmes conditions, un ensemble de bénéficiaires (les bénéficiaires sont appelés «adhérents » par les sociétés d'assurance et « participants » par les institutions de prévoyance ou les mutuelles). Le contrat de prévoyance, sauf situation particulière, est en principe un contrat collectif. Il est souscrit par les employeurs aux bénéfices d'une catégorie de personnel.

Le contrat collectif établi entre l'entreprise et l'assureur peut répondre à deux logiques :

-Soit il est un *contrat d'adhésion de l'entreprise souscriptrice à un contrat-cadre ouvert à un ensemble d'entreprises* (dont les caractéristiques au regard du contrat sont de même nature).

Par ce terme on désigne généralement un contrat type, proposé de manière uniforme ou avec des variantes déterminées, aux entreprises de petite ou moyenne dimension, qui remplissent chacune le rôle de souscripteur. Il comporte des dispositions générales identiques pour toutes les entreprises qui y adhèrent et des dispositions spécifiques propres à chacune d'elles. Dans ce cas, l'assureur établit un compte de résultat global de façon à mutualiser l'ensemble des risques de toutes les entreprises adhérentes à ce contrat-cadre.

-Soit il est *spécifique à l'entreprise souscriptrice*. Il comporte un ensemble de dispositions générales et un ensemble de dispositions particulières, spécifiques à l'entreprise souscriptrice. Les contrats de ce type sont généralement conclus entre l'assureur et les grandes entreprises et établis en concertation avec les souscripteurs afin de s'adapter aux besoins propres de la population assurée. Dans ce cas, l'assureur établit un compte de résultat propre à l'entreprise considérée. Le risque de cette entreprise n'est pas (directement) mutualisé avec les autres risques acceptés par l'assureur.

Le contrat collectif peut être à titre facultatif ou obligatoire :

Le contrat à titre facultatif est souscrit par une personne morale (une entreprise) en vue de l'adhésion d'un ensemble de personne (les salariés de cette entreprise) à des garanties de prévoyance. Chaque personne (salarié) est, en principe, libre d'adhérer ou non. Si elle adhère, se crée un contrat direct entre elle et l'assureur. Ce type de contrat répond à la logique d'un contrat-cadre définissant des conditions que l'assureur est disposé à proposer à l'ensemble des salariés d'une entreprise. L'assureur peut toutefois s'être laissé la faculté d'écarter de l'assurance les conséquences de certaines pathologies qui se seraient déclarées avant l'adhésion du contrat.

Le contrat à titre obligatoire : est souscrit par une entreprise au profit de l'ensemble de ses salariés ou des salariés d'une catégorie objective. Le salarié n'a donc pas la liberté de décider d'adhérer ou non au contrat d'assurance, il devient le bénéficiaire du contrat sans pour autant être lié directement à l'assureur. L'adhésion s'impose à lui du fait de l'acte de l'entreprise (accord collectif ou décision unilatérale). L'assureur est tenu à l'ensemble d'obligations spécifiques : il ne peut écarter aucun salarié ni aucune pathologie des garanties souscrites. En particulier, l'assureur ne peut exclure du bénéfice du contrat un salarié du fait que celui-ci serait en état d'incapacité ou d'invalidité au moment de la prise d'effet du contrat.

La différence entre le contrat facultatif et contrat obligatoire est fondamentale dans la mesure où elle conditionne la tarification. Lorsqu'un contrat est à adhésion, l'assureur tient compte de ce que les salariés qui, facultativement décident d'adhérer sont ceux qui sont les plus exposés aux risques. En revanche, lorsque le contrat est à adhésion obligatoire, tous les salariés –plus ou moins exposés aux risques- sont participants ce qui permet une réduction du coût.

Il est intéressant de noter qu'il y ait, d'autre part, l'assurance de prévoyance non liés au statut professionnel :

-Les personnes appartenant à un même organisme au sein duquel elles exercent une activité commune mais non professionnelle (loisirs, enseignement, activité culturelle…) peuvent éprouver le besoin de garantie liée à cette activité. Etant donné la variété de situations possibles, on peut citer quelques exemples : membres d'associations sportives, élèves d'établissement ou par une association de parents d'élèves, associations d'étudiants…

I.3 Opération de la prévoyance

Organismes assureurs habilités :

Société d'assurance

Les sociétés d'assurance sont régies par le Code des assurances et soumises au double contrôle de tutelle par le ministère de l'Economie et des Finances et de régularité par la Commission de contrôle (commission de contrôle unique des sociétés d'assurance de mutuelles et des institutions de prévoyance).

Une société d'assurance ne peut fonctionner que si elle a préalablement reçu un agrément administratif. Cet agrément autorise la société d'assurance à pratiquer les opérations d'assurance qu'il vise expressément. L'agrément est donné en fonction des garanties financières dont justifie la société notamment au regard des engagements pris à l'égard des assurés. Une même société n'est en principe pas agréée pour gérer, simultanément, des opérations d'assurance-vie et des opérations d'assurance-dommage.

Il existe deux catégories de société d'assurance :

-Les sociétés d'assurance constituées sous la forme de sociétés anonymes sont régies par les articles L.224 – 1 et suivants du Code de commerce (loi n° 66 – 537 du 24 juillet 1966). Ces sociétés (compagnies d'assurance) sont commerciales. Les contrats établis entre ces sociétés et les entreprises souscriptrices relèvent en principe des juridictions commerciales. Sous réserve des particularités propre aux opérations d'assurance, elles fonctionnent comme toutes les sociétés commerciales et ont un objet lucratif.

-Les sociétés d'assurance à forme mutuelle ont une forme commerciale mais un objet non commercial. Elles sont constituées, entre des sociétaires sans capital social et n'ont en principe pas un but lucratif. Les sociétaires, à jour de leurs cotisations, participent à la constitution du conseil d'administration. Ces sociétés d'assurance à forme mutuelles doivent être distinguées des mutuelles soumises au Code de la mutualité. Des sociétés d'assurance à forme mutuelles peuvent être actionnaires de société d'assurance à forme commerciale.

<u>L'ensemble des « clients » d'une société d'assurance constitue son portefeuille</u>. Une société d'assurance peut, sous réserve de respecter une procédure réglementaire spécifique, décider de transférer tout ou partie de son portefeuille à un autre organisme d'assurance habilité. De tels transferts peuvent exister notamment à l'occasion de la restauration des sociétés d'assurance (fusion entre sociétés, etc.…). Ces transferts, s'ils sont réalisés dans le cadre des dispositions réglementaires, s'imposent aux entreprises assurées et à leurs salariés.

<u>Institutions de prévoyance</u>

Les institutions de prévoyance sont régies par le Code de la sécurité sociale (Livre IX, chap.3). Pour autant, elles ne constituent pas des organismes de sécurité sociale.

Les institutions de prévoyance sont gérées paritairement par une assemblée générale et un conseil d'administration composés pour moitié de représentants des entreprises adhérentes et pour moitié des salariés ou anciens salariés participants. Elles ont un objet civil et n'ont pas de but lucratif.

Elles fonctionnent sous le double contrôle de tutelle par le ministère de la Sécurité sociale et de régularité par la Commission de contrôle.

Le Commission de contrôle vérifie, en permanence, que l'institution de prévoyance respecte les engagements financiers qu'elle a pris et justifie des garanties techniques requises compte tenu des engagements pris. Les institutions de prévoyance ne pratiquent que les opérations pour les quelles elles sont agréées.

Par principe, les institutions gèrent des opérations collectives. Toutefois, elles peuvent (et parfois doivent) accepter les adhésions individuelles d'anciens salariés ou ayants droit (dans les conditions définies par la loi).

Les institutions de prévoyance appartiennent souvent à des groupes constitués à l'initiative d'institutions de retraite complémentaire gérant le régime Agirc ou le régime Arrco. Les institutions de prévoyances sont, alors juridiquement distinctes des institutions de retraite complémentaires qui sont régies par des dispositions particulières.

De la même façon que pour les sociétés d'assurance, les institutions de prévoyance peuvent décider de transférer tout ou partie de leur portefeuille. Si les conditions réglementaires sont respectées, les entreprises adhérentes (ou les salariés participants) ne peuvent contester le transfert.

<u>Mutuelles</u>

Les mutuelles sont régies par le Code de la mutualité mis en conformité avec les directives communautaires par une ordonnance n° 2001 – 350 du 19 avril 2001.

Certaines mutuelles s'affranchissaient d'un certain nombre d'obligations techniques visant à la sécurité des engagements pris à l'égard des assurés. En contrepartie, elles établissaient une solidarité nationale entre les différents mutualistes par la constitution d'unions et de fédérations de mutuelles qui réassurent les engagements de prévoyance. Depuis la transposition des directives communautaires, le paysage mutualiste a été modifié du fait de la disparition de nombreuses mutuelles qui ne respectaient pas les conditions requises par la nouvelle réglementation.

Elles sont gérées directement par les mutualistes qui doivent disposer des deux tiers au moins des sièges au conseil d'administration (les entreprises adhérentes ne peuvent disposer que d'un tiers des sièges).

Les mutuelles ont un objet civil et ne poursuivent aucun but lucratif. Elles ont pour mission notamment de favoriser la prévention des risques sociaux liés à la personne.

Les mutuelles fonctionnent sous le double contrôle de tutelle du ministère de la Sécurité sociale et de régularité de la Commission de contrôle.

Assurance et réassurance

L'opération d'assurance doit être distinguée de l'opération de réassurance. La réassurance consiste en l'assurance de l'organisme assureur. Il n'existe en principe aucun lien entre l'assuré et le réassureur. Seul l'assureur est engagé à l'égard de l'assuré. Il ne peut se prévaloir de la défaillance du réassureur pour se soustraire à ses engagements. Un assureur qui, de façon systématique, transfèrerait en réassurance l'intégralité des risques qu'il accepte en assurance pourrait être considéré comme perdant la qualité d'assureur (au profil de celle d'intermédiaire), mettant alors le réassureur en situation d'avoir à assumer les responsabilités de l'assureur.

Une société d'assurance ou une institution de prévoyance peuvent réassurer les opérations d'assurance réalisées par une autre société d'assurance, une autre institution ou une mutuelle. Les unions de mutuelle ainsi que les fédérations de mutuelles sont les réassureurs originels des mutuelles.

Partage du risque

Certaines opérations d'assurance sont assurées par plusieurs organismes assureurs qui se partagent le risque. L'opération est dite de coassurance. Chaque coassurance est tenue à l'égard de l'assuré selon les termes du traité de coassurance soit pour la seule partie qu'il assure, soit solidairement pour tous les risques sauf à se retourner contre les autres coassureurs.

Lorsqu'il y a coassureurs, l'un des coassureurs est désigné comme apériteur. A ce titre, il représente les autres coassureurs dans les relations avec l'assuré. Pour autant, chaque coassureur reste tenu des engagements qu'il a acceptés.

<u>Assurance en mode de capitalisation</u>

Depuis la loi n°89 -1009 du 31 décembre 1989, les assureurs sont tenus de gérer les opérations de prévoyance selon la technique de capitalisation. Celle-ci consiste à imposer l'assureur de faire correspondre aux engagements qu'il prend vis-à-vis de l'assuré, une garantie financière. La cotisation collectée au titre d'un exercice sert notamment à constituer une « provision » représentée par des actifs (de l'assureur), cette provision permet de la prestation même si le versement cesse. La technique de capitalisation est à distinguer avec celle de la répartition qui consiste à financer les prestations au cours d'un exercice par les cotisations perçues au cours du même exercice.

<u>Nature des prestations</u>

Les prestations garanties au titre de contrat prévoyance peuvent être exprimées soit par un montant forfaitaire absolu, soit par un montant forfaitaire relatif.

Constitue un montant *forfaitaire absolu,* la prestation identifiant un capital où d'une rente calculé soit arbitrairement soit par application d'un pourcentage de la rémunération (ex : le capital décès est fixé à 300% de la rémunération annuelle ; l'indemnité complémentaire incapacité est fixée à 30% de la rémunération journalière).

Constitue l'expression d'u montant *forfaitaire relatif,* la prestation calculée par différence entre un niveau global de la ressource à maintenir et les prestations versées par les régimes de base.

I.4. Règles pratiques concernant l'établissement des contrats comportant des garanties de prévoyance groupe

I.4.1 Souscription du contrat

Tout organisme qui désire souscrire un contrat en faveur de ses membres doit fournir à l'assureur les éléments nécessaires pour lui permettre d'apprécier le risque, par exemple et suivant le type de garanties, pour chacun des assurables : l'âge, le sexe, la situation de famille, le traitement de base, les garanties demandées si des options sont prévues.

I.4.2 Admission

L'admission à l'assurance peut être soumise à des conditions particulières selon le niveau des garanties, la nature des risques et le caractère de l'adhésion.

Le principe général est posé par l'article 2 de la loi 89-1009 du 31 décembre 1989 (loi Evin) pour les contrats groupe à adhésion obligatoire de salariés et l'article 3 de la même loi pour les autres contrats de prévoyance. Il est recommandé d'appliquer les dispositions de l'article 3 de la loi Evin relatif à la sélection médicale aux contrats d'emprunteurs, bien que ceux-ci ne relèvent pas de cette loi

De plus, en matière de sélection des risques, et notamment médicale, lorsque l'assureur a posé des questions, par exemple sous forme d'un formulaire de déclaration de risque.

En ce qui concerne les risques de prévoyance couverts par des contrats groupe de salariés à adhésion obligatoire, l'assureur reste libre d'accepter ou de refuser l'ensemble du groupe sans possibilité de procéder à aucune exclusion d'ordre individuel. Dans le cas particulier des groupes de faible effectif, l'assureur fait généralement procéder à une sélection médicale des personnes à inclure dans la garantie, ayant pour objet l'évaluation du risque et l'adaptation en conséquence de la prime globale. Si l'assureur accepte d'accorder sa garantie, il ne peut refuser de prendre en charge les suites d'états pathologiques antérieurs à la souscription du contrat ou l'adhésion à celui-ci, sous réserve des sanctions prévues en cas de fausse déclaration. En outre, il ne peut exclure des garanties « frais de soins » aucune pathologie ou affection couverte par le régime général de Sécurité sociale.

Dans les contrats groupe à adhésion facultative, il convient de procéder à une sélection médicale systématique, de manière, à éviter tout risque d'antisélection. Une fois le risque accepté sur la base de la déclaration de l'assuré ou du souscripteur, l'assureur est tenu de prendre en charge les suites d'états pathologiques antérieurs.

Tous les contrats comportent en générale une clause de limite d'âge, par exemple les garanties cessent généralement à 65 ans pour les contrats facultatifs des salariés. Pour les contrats d'emprunteurs, en principe, l'âge de l'assuré au terme du crédit ne doit pas être supérieur à 65 ans, dans le cas contraire, l'assureur peut n'accorder sa garantie que jusqu'à cet âge ou, s'il accepte de la prolonger jusqu'au terme du crédit, modifier le tarif en conséquence.

I.5. La présentation du groupe Aprionis

Naissance du groupe :

Les Conseils d'administration des organismes membres de deux groupes APRI et IONIS ont voté en assemblé et donné la naissance en janvier 2009 à APRIONIS, un des premiers groupes paritaires de protection sociale **:**

- 5 millions de personnes protégées dont 1,4 million de retraités

- 250 000 entreprises adhérentes

-2723 collaborateurs

Le groupe dispose ainsi l'ensemble des atouts et des compétences pour accompagner les personnes et les entreprises face aux enjeu d'avenir de la protection sociale : la retraite, l'assurance de personnes (prévoyance, couverture santé, épargne) , l'épargne salarial et socialement responsable, les services à la personnes à toutes les étapes de la vie.

Aprionis est un groupe paritaire avec une association sommitale composée de trente membres représentant les salariés et les employeurs. Le but non lucratif qui implique un comportement socialement responsable et une éthique irréprochables également sur le secteur concurrentiel de l'assurance de personnes.

Les Métiers : Au travers es organismes, le Groupe APRIONIS couvre tous les besoins de protection sociale et d'assurance de personnes :

<u>Retraite :</u>

-Retraite complémentaire ARRCO et AGIRC

-Action sociale

Aprionis contribue à la modernisation de la gestion de la retraite complémentaire. Au sein du GIE Alcire, composé de 4 groupes de protection sociale, il participe à la construction du futur logiciel informatique AGIRC-ARRCO qui sera commun à l'ensemble des institutions de retraite.

Assurance de personnes

-Santé- Prévoyance collective via l'entreprise ou la branche professionnelle (conventions collectives)

-Santé- Prévoyance individuelle

-Assurance vie

-Retraite supplémentaire

-Assurance internationale

Epargne salariale

-Participation

-Intéressement

-Plan d'Epargne d'Entreprise (PEE)

-Epargne Retraite(PERCO)

Aprionis est le premier intervenant paritaire sur le marché de l'épargne salariale. Il est spécialisé dans la gestion financière et administrative d'une offre répondant à tous les objectifs de placement.

Gestion pour compte de tiers

-Gestion de frais de soins de santé et de contrats prévoyance pour le compte d'organismes assureurs tiers.

-Gestion de régimes spéciaux de retraite

Le groupe de protection sociale a noué des partenariats historiques avec des organismes assureurs, tels que le Crédit Agricole, la CNP Assurances , etc. Il est reconnu par sa qualité de gestion.

Les organismes et les filiales :

-Institutions de retraite ARRCO et AGIRC : IPPRIS, Abelio, irrapris, altea

-institutions de prévoyance : ionis prévoyance , apris prévoyance , ipsec prévoyance , Cria prévoyance , Carcel prévoyance , irex , ipriscas

-mutuelles : radiance groupe apris , smaapri, radiance sud, radiance nord-pas-de Calais,

-Assurance vie : Inter vie

-Assurance internationale : Welcare

-Conseils et services aux particuliers : IONIS Partenaire

-Epargne salariale : Inter Expansion, Interfi

-Gestion pour compte de tiers : Apri Services , Sopresa, APC-GPA

-Formation en entreprise : Forminnov

-Holding de participation : Copernic

Le Groupe en chiffre :

Retrait complémentaire

7ème groupe de protection sociale avec 6,42% de l'ensemble Agirc- Arrco

-2,7 milliards d'euros de cotisations en 2007

-190 000 entreprises adhérentes

-1 581 667 cotisants

-1 367 639 allocataires

Santé/Prévoyance

12ème acteur de la santé avec 665 M euros de chiffre d'affaires

4ème groupe de protections sociales pour l'ensemble Santé- Prévoyance

-1,2 milliard d'euros de cotisations en 2007

-62 950 entreprises adhérentes

-2 017 700 personnes protégées

Epargne salariale

6ème groupe du marché et 1er groupe de protection sociale

-1 868 entreprises adhérentes

-522 782 épargnants gérés

-2,4 milliards d'euros d'actifs gérés

Populations gérées

-250 000 entreprises

-5 millions de particuliers dont 1,4 million de retraités.

2723 collaborateurs répartis dans 24 villes sur toute la France.

Les implantations Aprionis en France et région parisienne

Les orientations stratégiques du groupe

Les grandes lignes :

Construire des solutions d'accompagnement des entreprises et des personnes dans le domaine de protection sociale en France et à l'étranger.

Construire un groupe ouvert sur d'autres opportunités de rapprochement avec une organisation adaptée. Dans le contexte de concentration des groupes de protection sociale, la taille est un gage de pérennité pour assurer l'indépendance et la compétitivité.

Par métier

Retraite :

-Assurer un service global toujours plus performant aux entreprises, salariés et retraités.

-Contribuer au développement du système unique de gestion de la retraite AGIRC-ARRCO

Assurance de personnes

-Rester une référence de professionnalisme et de qualité sur le marché pour renforcer notre position commerciale et financière.

-Etre indépendant stratégiquement et financièrement.

Epargne salariale

-Maintenir la part de marché avec une force commerciale renforcée sur les grands comptes , PME.

-Veiller aux opportunités de croissance externe.

Epargne individuelle et retraite supplémentaire

-Etoffer les offres santé- prévoyance individuelles et collectives avec les produits d'épargne individuelle et de retraite supplémentaire.

-Distribuer ces produits dans les réseaux commerciaux existants (mutuelles et institutions de prévoyance.)

I.6 WELCARE et ses missions dans le domaine de protection sociale internationale

Welcare en quelques lignes de présentation :

La filiale Welcare du groupe APPRIONIS a été crée en 1993. Avec sa création le groupe s'est constitué un pôle solide en tant que distributeur, assureur et gestionnaire de ses propres produits destinés aux expatriés.

Welcare est une société anonyme à directoire et conseil de surveillance au capital de 7,5 M euros avec, comme actionnaires principaux, le Groupe APRI possédant 51% des parts et le Groupe Taibout à hauteur de 33 %.

Welcare poursuit deux objectifs :

-Accroître ses parts de marché en matière de couverture sociale des expatriés sur la cible des entreprises et des salariés individuels

-Devenir un référent pour les autres acteurs de l'assurance de personnes, que sont les groupes de protection sociale, mutuelles, courtiers, assureurs….

Ces stratégies de développement reposent sur une combinaison des moyens :

-Une collaboration étroite avec la Caisse des Français de L'Etranger qui conforte sa légitimité dans le domaine de la protection sociale à l'international.

-Une taille qui dorénavant permet de justifier de ressources techniques expertes et d'acquérir un certain degré d'autonomie vis-à-vis des réassureurs.

-L'opportunité d'intervenir sur certains segments de marché non accessibles aux institutions de prévoyance pour des raisons de statut ou d'agrément, tels que les travailleurs non salariés, étudiants, impatriés …

Les produits et le portefeuille de Welcare :

Welcare dispose d'une offre santé-prévoyance étendue en complément des prestations de la CFE (*) , de la Sécurité sociale et des contrats au 1er euro. Ces produits permettent de rembourser la quasi-totalité des frais de santé engagés par les internationaux. Sa gamme répond à la variété des besoins des particuliers et des entreprises :

-Mission ou expatriation dans le monde entier quelle que soit la durée

-Voyage à l'étranger de courte et de longue durée

-Impatriation en France de longue durée.

(*) La Caisse des Français à l'étranger est le plus souvent appelée la 'Sécu des expatriés » . C'est un dispositif original qui a été mis en place afin de préserver la protection sociale de salariés expatriés. Ce dispositif couvre les risques maladie, maternité, invalidité, accidents du travail, maladies professionnelles et vieillesse. La CFE est un organisme privé chargé d'un service public qui tient compte des contraintes liées aux séjours à l'étranger. Il y a 74 000 familles adhérentes, soit plus de 130 000 personnes protégées dans plus de 200 pays à travers le monde.

Le portefeuille de Welcare se compose majoritairement d'expatriés et de détachés.

<u>La population des expatriés et des détachés :</u>

La distinction entre les deux statuts détaché et expatrié :

Selon les conditions de la mobilité internationale et les choix effectué au niveau de l'entreprise, le salarié pourra être détaché ou expatrié:

-Il sera détaché au sens de la réglementation communautaire, d'une convention de sécurité sociale ou du droit français selon le cas. C'est-à-dire qu'il bénéficiera du régime général de sécurité sociale français comme s'il restait en France : paiement des cotisations et bénéfice des prestations.

Le salarié pourra bénéficier du statut de détaché et avoir droit à la protection sociale français pendant qu'il travaille à l'étranger s'il remplit les conditions suivantes:

-Condition 1 : *il doit être envoyé à l'étranger par un employeur français*. L'entreprise avec laquelle il est lié par contrat de travail doit avoir son siège en France. De plus pour être un détaché, il est obligatoire qu'il ait été recruté en France…même dans le seul but d'être envoyé à l'étranger. Une personne embauchée hors de la France ne pourra donc être qu'un expatrié.

-Condition 2 : *Il doit être rémunéré par cet employeur pendant la durée de la mission* mais il n'y a aucune condition particulière quant au lieu et au mode de paiement.

-Condition 3 : *La mission doit être temporaire*. Le détachement est conçu pour ne s'appliquer qu'aux situations dont la brièveté de la mission à effectuer ne justifie pas l'affiliation au système de protection sociale du pays d'accueil. Le salarié ne pourra bénéficier du régime du détachement que si la durée prévisible de son séjour à l'étranger n'excède pas une durée variable selon le pays d'affectation.

-Condition 4 : Les cotisations sociales doivent être versées par l'employeur français. C'est la formalité essentielle : si les cotisations ne sont pas payées directement par l'employeur français, le salarié ne pourra pas bénéficier du détachement, même si toutes les autres conditions soient bien remplis

Lorsque les conditions requises pour bénéficier du statut de détaché ne sont pas remplies ou, plus simplement, si l'employeur ne souhaite pas opter pour ce régime, le salarié transféré sera soumis à l'application du principe de territorialité de la législation sociale et dépendra du système social de l'Etat dans lequel il travail. Il sera expatrié et n'aura plus droit au régime général français de sécurité sociale.

-Il sera expatrié s'il ne rempli pas les conditions du détachement ou si il ne souhait pas bénéficier de ce régime. Il sera assujetti au régime de protection sociale du pays de séjour…avec la possibilité d'adhérer en France au régime volontaire de sécurité sociale des expatriés (CFE).

Dans cette situation, quelques méthodes sont possibles :

-La moins chère, mais pas toujours la plus recommandée : se limiter à la protection sociale du pays étranger dans lequel se rend le salairé.

-s'affilier auprès de compagnies d'assurance (ex Welcare) **à des régimes privés de protection sociale, couverture au premier euro**, adapté aux mobilités internationale

-Adhérer au **régime volontaire français de sécurité sociale des expatriés proposé par la CFE.** La réglementation a créé une exception supplémentaire au principe de territorialité : Tout français qui part travailler et vivre à l'étranger peut bénéficier d'une protection sociale en France en souscrivant une assurance volontaire auprès de l'organisme chargé de gérer ce régime ie la CFE. En adhérant au régime CFE, le salarié reste à la Sécurité sociale. Pas de rupture avec ses droits antérieurs : la continuité de la couverture sociale est assurée.

La gamme de produits PLANET proposée par WELCARE pour une protection sociale adaptées aux expatriés et détachés

En effet, au cours de la période d'activité professionnelle à l'étranger, même pour ceux qui bénéficient d'un régime de protection sociale de base (Sécurité sociale ou la CFE) les dépenses de santé ne seront remboursées que dans la limite des barèmes conventionnels français. Or, le coût de la santé peut varier considérablement d'un pays à l'autre, par rapport aux prix pratiqués en France. Dans un certain pays connus pour les tarifs médicaux particulièrement élevés (Canada, Etats-Unis, Japon notamment…), il peut en résulter un important différentiel de coût dont la charge pourra rester en grande partie à l'expatrié, faute d'une protection sociale adaptée.

Planet est un ensemble de garanties spécifiques destinées aux expatriés et détachés. Cette gamme répond aux besoins de leur protection sociale :

-Le remboursement des frais de santé (Planet Work)

-Une couverture pour le risque décès ou invalidité (Planet Prévoyance)

Pour les frais de santé Welcare prendra en charge dès le premier euro les dépenses de santé des assurés qui ne bénéficient pas de la protection sociale du régime de base (CFE ou Sécurité Sociale pour les détachés).

Pour les cas où il y a intervention du régime de base, Welcare complétera les remboursements de la CFE, de la Sécurité Sociales et de tout autre organisme pour que le montant perçu par le salarié représente de 80 à 100% des dépenses suivantes :

-Hospitalisation

-Médecine courante,

-Pharmacie

-Dentaire,

-Optique,

-Prothèses médicales et auditives,

-Cures thermales,

-Frais d'accouchement.

Les garanties de décès, d'invalidité et d'incapacité qu'offre le produit Planet Prévoyance permet à l'assuré d'ouvrir des droits à des prestations (rente d'invalidité ou indemnité journalière) ou aux proches de l'assuré de percevoir un capital en cas de décès de celui-ci.

II.La Tarification des garanties de frais de soins santé

II.1 Préparation et traitement préalable de données

Les outils informatiques utilisés

Pour mener à bien cette étude nous avons eu besoin de différents outils tant sur le plan informatique, qu'en terme de traitement des fichiers de données.

WelCare utilise comme système de gestion de base de données le logiciel Arthus. Les données quotidiennes gérées par les différents services de Welcare sont stockées dans les tables d'Arthus. L'extraction de ces données s'effectue à l'aide des requêtes écrites sous SQL.

Le logiciel ArthusOra nous aide à automatiser l'écriture de requêtes et à charger les données extraites sur des fichiers Excel.

La manipulation d'Excel, les diverses macros et les programmes conçues nous permet de traiter les fichiers et de mener à bien les calculs.

La population étudiée

L'échantillon étudié est constitué par des assurés (bénéficiaires) qui sont adhérents au cours de l'année 2007. Pour que l'étude ne soit pas biaisée nous ne gardons dans l'échantillon que ceux dont la durée de couverture est longue (supérieur ou égale à 1 an).

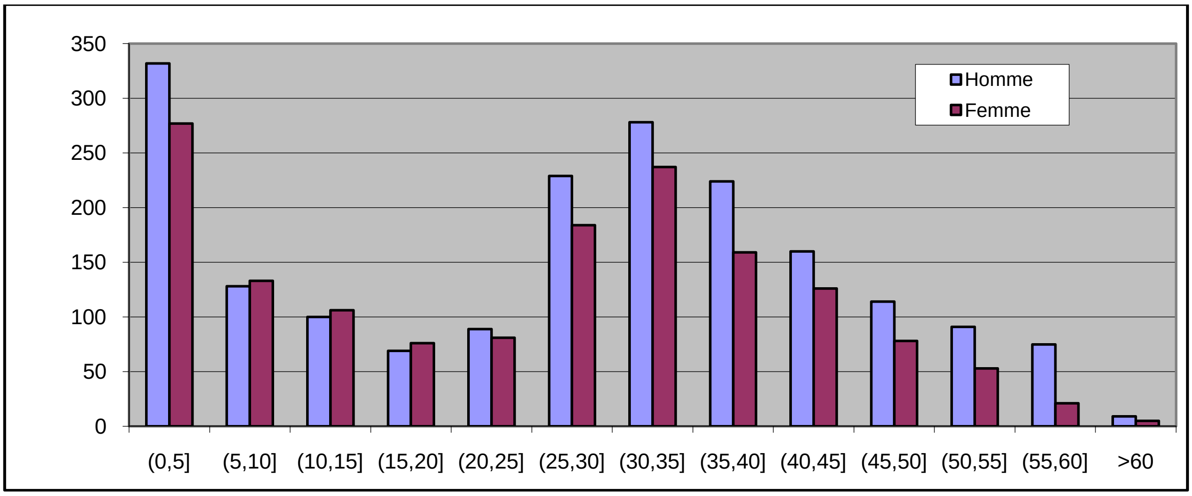
Pour chaque assuré, nous suivons son historique de dépense médicale (montant de dépense, la date, le lieu de sinistre…) pendant un an à compter de la date d'ouverte de la couverture.

Au cours de l'année 2007, l'effectif étudié est constitué de 3433 bénéficiaires dont 1456 assurés principaux (les cotisants) qui ont donné lieu à 43371 lignes de prestations enregistrées .Au total le montant de frais réel (tous actes confondus) de ces assurés s'élève à 3092322,66 euros. Donc en moyenne, pendant une année, chaque bénéficiaire dans notre portefeuille dépense 900,76 euros pour ses frais de soins santé, soit une moyenne de 2123,85 euros par cotisant.

Les grandeurs	
Nombre de bénéficiaires	**3433,00**
Nombre de cotisants	**1456,00**
Total des frais réels	**3092322,66**
Moyen par bénéficiaire	**900,76**
Moyen par cotisant	**2123,85**

Si nous admettons que les deux variables âge et sexe jouent un rôle important sur le comportement des dépenses médicales des bénéficiaires, il convient d'analyser la répartition de notre population selon l'âge et sexe.

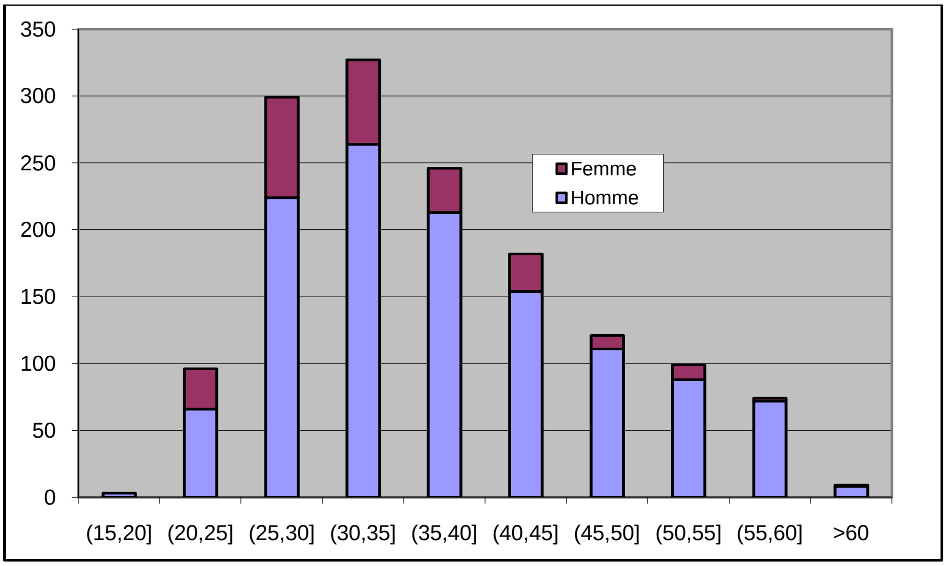
Cette répartition se présente graphiquement comme suivante :



Nous remarquons qu'il s'agit d'une population jeune d'un âge moyenne de 26,46. La proportion des gens d'âge inférieurs à 35 est de 67,5% et celle d'âge supérieur à 60 n'est que de 0,4%.

Les bénéficiaires du sexe masculin sont légèrement plus nombreux que ceux du sexe féminin (55,3% contre 44,5%).

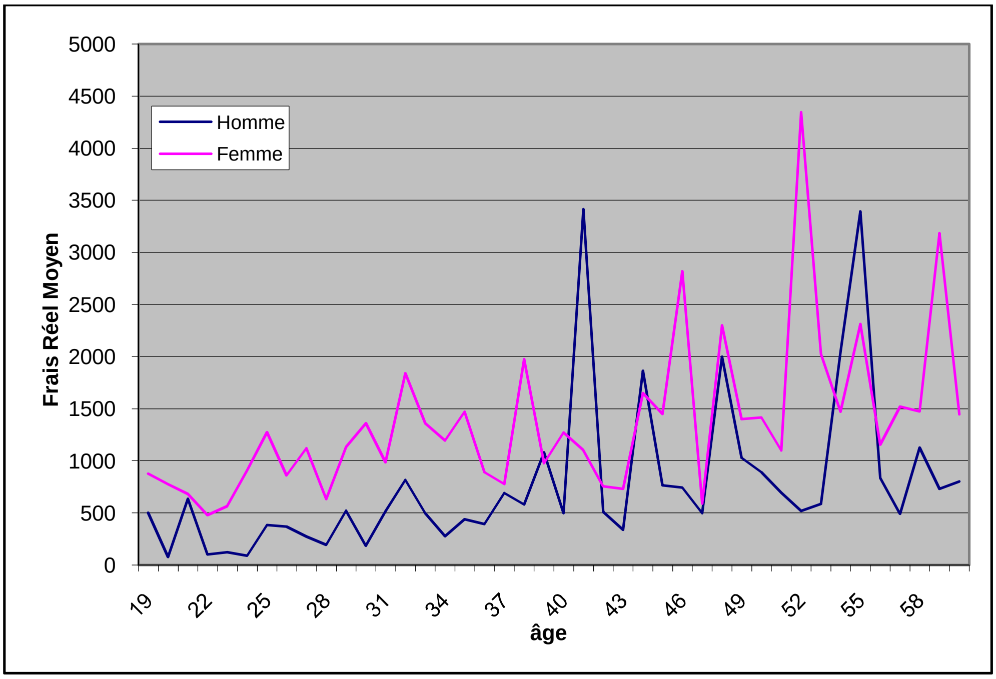
En outre, si on s'intéresse à la structure des cotisants appelés aussi les assurés principaux, on obtient :



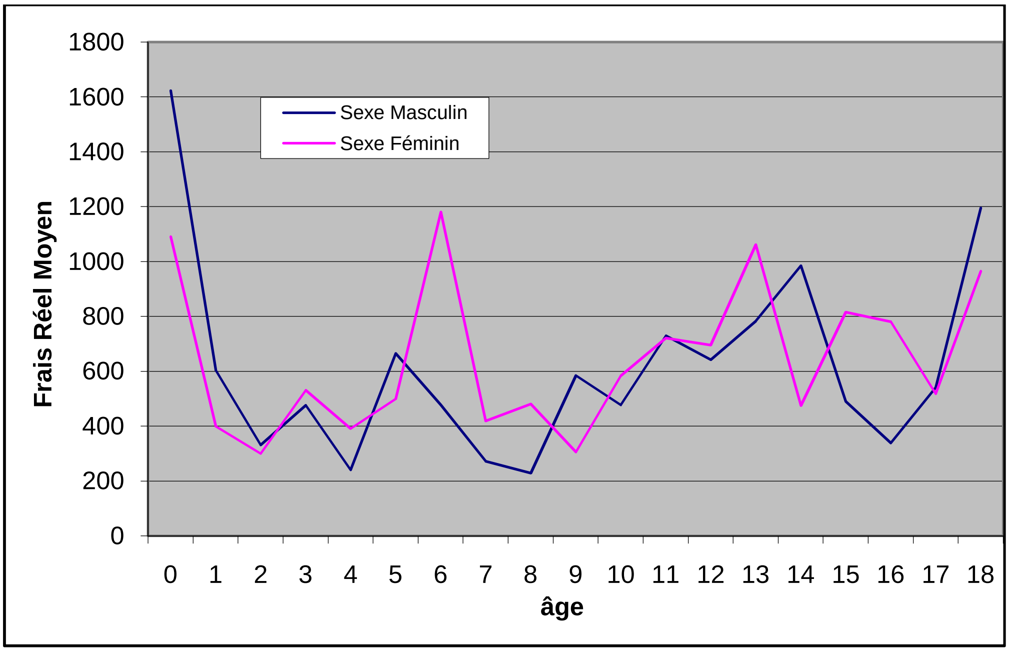
Nous pouvons noter que les missions à l'étranger sont majoritairement confiées aux hommes qui présentent 82,6% de salariés expatriés dans notre échantillon. L'âge moyen des cotisants est de 37,43 ans.

Nous terminons cette partie de traitement de données en donnant les deux graphiques présentant les frais réels moyens en fonction de l'âge et du sexe (tous actes confondus).

Frais réels moyen des adultes



Frais réels moyen des enfants (<18 ans)



Ces deux graphiques nous montrent bien que le niveau moyen de dépense médicale varie en fonction de l'âge. En plus, l'influence que joue le facteur sexe se voit nettement sur le premier graphique, les femmes consomment, en moyenne, plus que les hommes.

II .2 Le Calcul de prime par garantie.

L'exposition au risque de chaque individu varie suivant chacun des types d'acte ,par exemple : la garantie orthodontie n'est qu'applicable aux enfants, les frais de maternité ne sont consommés que par les femmes en âge de procréer.

Il est donc indispensable d'analyser le coût et donc la prime pure de chacun de ces types de garantie (voire chaque type d'actes qui la compose) séparément. Cette analyse répond aussi à un impératif de flexibilité de méthode qui nous permet d'estimer le coût d'un produit proposant différentes options de garanties selon les besoins des assurés.

Par exemple dans le produit Planet First proposé par Welcare, l'assuré peut choisir entre l'option urgence ou complète. Dans le premier cas, les frais soins santé courant, hospitalisation et transport sont pris en charge par l'assureur tandis que dans le deuxième cas les autres postes de confort (dentaire, optique, prothèse et maternité) sont aussi couverts

Exemple des garanties couvertes

Les contrats dérivés des produits Planet Work (collectif) et Planet First (individuelle) comportent généralement les garanties définies comme suivantes :

-Pratiques médicales courantes :

Le remboursement est égal à 90% des frais réels

Les dépenses couvertes comprennent les consultations et visites de praticiens, les médicaments, les actes dispensés par des auxiliaires médicaux ….

-Soins dentaires :

Les dépenses pour soins dentaires sont remboursées à hauteur de 90% des frais réels.

-Prothèse dentaires:

Les dépenses pour prothèses dentaires sont remboursées à hauteur de 90% des frais réels dans la limite annuelle de 2300 Euros par bénéficiaire.

-Orthodontie :

L'orthodontie est remboursée à hauteur de 90% des frais réels avec un maximum de 610 euros par semestre et par enfant (de moins de 16 ans).

-Optique :

Les dépenses pour l'optique médicale sont remboursées à hauteur de :

Verres- Lentilles : 100% des frais réels avec un maximum annuel de 310 euros par bénéficiaire.

Montures : 100% des frais réels avec un maximum annuel de 130 euros par bénéficiaire.

-Hospitalisation médicale et chirurgicale :

Lorsqu'un Assuré est hospitalisé pour le traitement d'une blessure et/ou d'une maladie, en dehors de toute consultation externe et/ou traitement ambulatoire, le contrat garantit un remboursement de 100% des frais réels.

-Frais de transport :

Les frais de transport d'urgence en ambulance ou en véhicule sanitaire jusqu'à l'hôpital ou jusqu'au centre de soins approprié sont remboursés à hauteur de 100% des frais réels.

-Frais d'obsèques :

En cas de décès d'un bénéficiaire, les frais d'obsèques sont remboursés à hauteur de 100% des frais réels, dans la limite de 25000 euros par bénéficiaire.

-Maternité :

L'ensemble des frais afférents à la maternité (visites pré/post natales, séjours en observation pour complication, grossesses pathologiques…) et à l'accouchement d'un enfant de l'assuré, né viable, légitime, naturel ou reconnu est remboursé à hauteur de 100% des frais réels, dans la limite de 5000 euros par grossesse.

Nous apercevons que les garanties sont définies en fonctions des frais réels.

Dans ce mémoire nous avons choisi d'effectuer l'étude en fonction du groupement de garanties suivant :

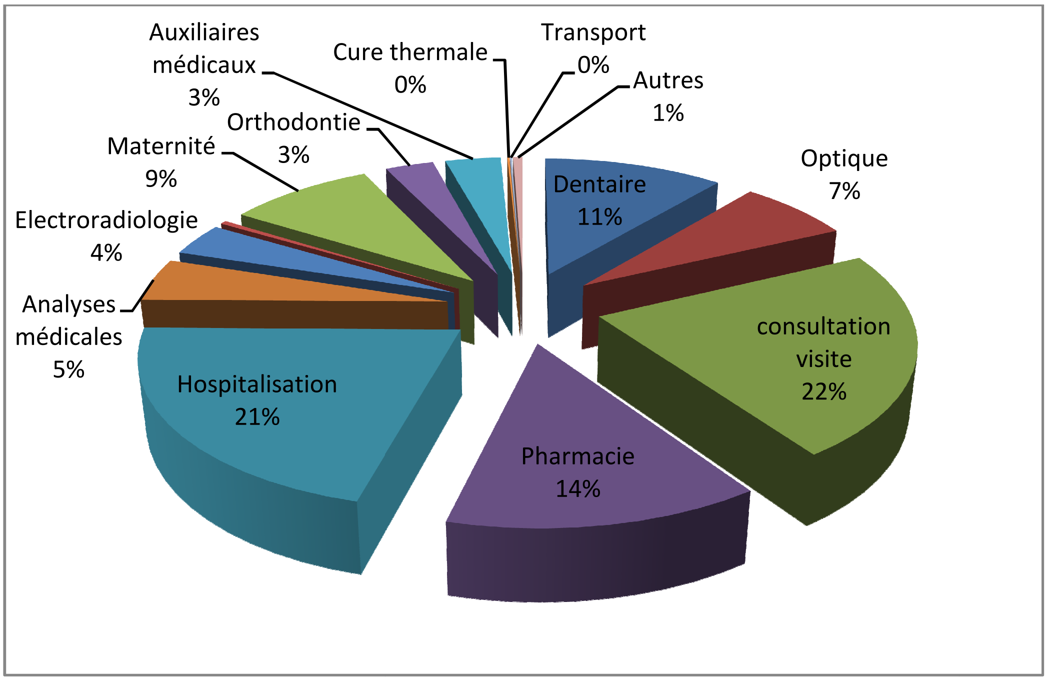
- Dentaire
- Optique
- Appareil
- Hospitalisation
- Médecine courante décomposée en 5 « éléments» :
    1. Consultation et visite
    2. Pharmacie
    3. Auxiliaires médicaux
    4. Examen Laboratoire
    5. Radiologie
- Orthodontie
- Maternité

Faute de donnée, nous n'incluons pas les garanties Cure thermale, transport et frais d'obsèques qui feront objet d'études spécifiques.

Ce choix correspond au classement d'actes opté par Welcare dans le cadre de sa gestion. Ci -
-après, nous trouverons sous forme de tableau la ventilation des prestations en fonction des regroupements retenus par Welcare :

Garantie	Rubrique	Type d'actes	Frais réel par Rubrique	Frais réel par Garantie
Dentaire	SDSC	Soins dentaire	**187629,43**	**341777,17**
	PRTH	Prothèse dentaire	**154147,74**	
Optique	OPTI	Optique	**213837,6**	**213837,6**
Médecine courante	CONS	Consultation et visite	**693605,88**	**1475794,43**
	PHAM	Pharmacie	**419779,43**	
	AUME	Auxiliaires médicaux	**105156,68**	
	BLAB	Analyses médicales	**145040,7**	
	ELEC	Electroradiologie	**112211,74**	
Prothèse médicale autres	APAP	Appareillage	**12128,77**	**12128,77**
Maternité	FPGM	Frais particulier grossesses/maternité	**27478,79**	**276142,29**
	FMGM	Frais médicaux grossesses/maternité	**85308,6**	
	HOMA	Hospitalisation maternité	**163354,9**	
Orthodontie	ORTH	Orthodontie	**91540,39**	**91540,39**
Hospitalisation	HOME	Hospitalisation Médicale	**187212,76**	**656461,24**
	HOHK	Hospitalisation Chirurgicale	**386655,2**	
	HOMC	Maisons de Convalescence	**9512,35**	
	HOPS	Hospitalisation en Psychiatrie	**73080,93**	
Cure thermale	CURE	Cures Thermales	**3731,91**	**3731,91**
Transport	TRAN	Transport	**3482,61**	**3482,61**
Divers	FDIV	Frais médicaux divers (obsèques)	**17426,25**	**17426,25**
		Total	**3092322,66**	

La répartition des frais réels par garantie :



Les frais réels pour la médecine courante prennent une part importante (48%) dont 22% pour les consultations et visites, 14% Pharmacie, 5% Analyses médicales, 4% électroradiologies, 3% auxiliaires médicaux. Les parts de l'hospitalisation et maternité sont de 21% et 9% respectivement. Les frais pour les garanties cure thermale (0,12%) et transport (0,11%) ne gardent que des parts marginales.

II.3 Modélisation selon l'approche probabilité de consommer-charge de sinistre

Pour chacune des garanties définies dans le contrat, la dépense annuelle d'un assuré a été modélisée par une variable aléatoire X dont la loi est de la forme

$$\boldsymbol{\mu_x = (1-p)\delta_0 + p\mu_C}$$

Avec p, la probabilité de consommer d'un assuré sur une année.

μ_C: La loi de la variable aléatoire C représentant les frais totaux de dépenses médicales sur une année sachant que l'assuré a consommé au moins une fois.

On suppose dans ce modèle l'hypothèse de l'indépendance entre la variable C et la variable Bernoulli qui a pour espérance p , présentant le fait qu'un assuré consomme ou non pendant l'année.

L'espérance de la variable X qui présente le coût à la charge de l'assureur [1] a donc pour expression :

$$E(X) = p * E(C).$$

L'estimation de la prime pure passe donc :

-D'une part, par la probabilité de consommer p, qui est en fait l'espérance d'une loi de Bernoulli

-Et de l'autre part, par l'estimation de l'espérance de la variable C, ou plus généralement de sa loi μ_C.

Cette modélisation se différencie de celle de la modélisation fréquence-coût classique. En effet dans ce modèle nous ne cherchons pas à estimer, pour une garantie donnée, la fréquence de sinistres en tant que nombre d'actes pratiqués dans l'année. Nous cherchons à modéliser la probabilité que l'assuré consomme au moins une fois pendant l'année.

Cette modélisation est la conséquence de la constatation suivante : en règle générale un acte de soins ne se pratique pas seul. Par exemple une acte de type consultation dentaire implique d'autres traitements donnant lieu à des prestations liées à la garantie couvrant le risque dentaire. Ceci signifie que l'hypothèse supposée dans un modèle fréquence coût classique de l'indépendance entre les variables aléatoires C_i représentant les charges de sinistres est remise en cause.

Dans notre modèle nous analysons, pour chaque garantie, pour chaque assuré, la probabilité qu'un sinistre survienne au moins une fois dans l'année, et une fois qu'il survient nous cumulons les montants des frais réels de tous les actes couverts par cette garantie engagés par cet assuré durant l'année.

[1] Par souci de simplification, on suppose pour l'instant que l'assureur prend à sa charge la totalité des frais réels qu'engage l'assuré. La présence d'un taux d'abattement (ex 90% des frais réels) et/ou d'un plafond annuel sera traitée plus loin.

II.4 Méthodes de l'estimation et du test

II.4 .1 L'estimation de p par le modèle logistique

a) Principe de la régression logistique

(Extraite du cours d'analyse des données approfondies de Monsieur P.Cazes)

On désire expliquer une variable qualitative prenant deux modalités Y=1, Y=0 (l'assuré consomme ou non la dépense pour un type d'actes donné) en fonction d'un certain nombre de variables explicatives (âge, sexe, le revenu, la CSP …) . Dans le cas d'une variable explicative qualitative à k modalités, après avoir choisi une modalité de référence, on remplacera cette variable par les k-1 variables indicatrices associées aux k-1 modalités restantes. Au total, on suppose on qu'on a p variables dont certaines peuvent être binaires $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$

On cherche à modéliser $\pi(x) = E(Y|x)$

$$\pi(x) = E(Y|x) = Pr(Y = 1|x)$$

$$Y = \pi(x) + \varepsilon$$

Par rapport à un modèle de régression linéaire (non linéaire classique), on a plusieurs différences importantes.

- Y suit une loi de Bernoulli et non plus gaussienne (conditionnellement à x)
- $\pi(x)$ étant une probabilité doit être comprise entre 0 et 1
- Le modèle est hétéroscedastique, puisque :$Var(Y|x) = \pi(x)\big(1 - \pi(x)\big)$ est en fonction de x .

On notera en plus que l'erreur $\varepsilon = Y - \pi(x)$ ne peut prendre que deux valeurs, à savoir :

$$\varepsilon = 1 - \pi(x) \;\; si\, Y = 1 \text{ , avec la probabilité } \pi(x).$$

$$\varepsilon = 1 - \pi(x) \;\; si\, Y = 0 \text{ , avec la probabilité } 1 - \pi(x).$$

ε étant bien sûr d'espérance mathématique nulle, comme il est immédiat de le vérifier.

La régression logistique est un cas particulier du modèle plus général suivant, où l'on modélise $\pi(x)$ sous la forme : $\pi(x) = G(\beta_0 + \beta' x)$

Où G est une fonction connue, croissante, prenant ses valeurs dans (0,1) , β_0 est un paramètre inconnu , et β est un vecteur de dimension px1 de paramètres qui est comme β_0 à estimer.

Justification de la modélisation logistique :

Désignons par π_1 (resp. π_0) la probabilité de Y= 1(resp. Y=0) et par $g_i(x)$= $g(x|Y = 1)$la loi de x quand Y=i (i =0 ou 1) et $f(x)$ la loi de x . On a alors :

$$\pi(x) = Pr(Y = 1|x) = \frac{\Pr(Y = 1)\, g(x|Y = 1)}{f(x)} = \frac{\pi_1 g_1(x)}{f(x)} \qquad (formule\ de\ Bayes)$$

En plus come

$$f(x) = \pi_1\, g_1(x) + \pi_0\, g_0(x)$$

Si on pose :

$$h(x) = \pi(x)/(1 - \pi(x)) = \frac{\pi_1 g_1(x)}{\pi_0 g_0(x)}$$

On a :

$$\pi(x) = h(x)/(1 + h(x)$$

Supposons que sachant Y=i, x suive une loi à structure exponentielle de la forme:

$$g_i(x) = \exp\left(\frac{c_i' + m(x)}{a}\right)$$

m(x) étant une fonction connue de R^p dans R, a une constante et c_i (i=1 ou 0) un vecteur de paramètres.

On a alors $h(x) = (\pi_1/\pi_0)\exp\left(\left(c_i' - c_0\right)x + m(c_1) - m(c_0)\right)/a) = exp(\beta_0 + \beta' x)$

Avec $\beta_0 = \frac{m(c_1) - m(c_0)}{a} + Ln(\frac{\pi_1}{\pi_0})$ et $\beta = (c_1 - c_0)/a$

On en déduit la forme logistique de $\pi(x)$:

$$Ln\left(\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}\right) = Ln\big(h(x)\big) = \beta_0 + \beta' x$$

Estimation de β par la méthode du maximum de vraisemblance

Supposons qu'on dispose d'un échantillon de taille n $\{x^j, y^j\}\ pour\ 1 \le j \le n$ de (x,Y).

x_i^j :la valeur de la variable x_i pour l'individu j.

La vraisemblance s'écrit:

$$L(\beta_0, \beta) = \prod_{j=1}^{n} \pi\left(x^j\right)^{y^j} (1 - \pi\left(x^j\right))^{1-y^j}$$

D'où :

$$LnL(\beta_0, \beta) = \sum_{j=1}^{n} y^j \, Ln(\pi(x^j)) + (1 - y^j) Ln(1 - \pi(x^j))$$

On en déduit[2], en posant $\pi(x^j) = \pi^j$, $\gamma = (\beta_0, \beta)$, $z^j = (1, x_1^j, x_2^j, .. x_p^j)$ pour alléger l'écriture :

$$\frac{\partial LnL(\gamma)}{\partial \gamma} = \sum_{j=1}^{n} (y^j - \pi^j) z^j$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de γ vérifiant :

$$\frac{\partial LnL(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 \qquad (1)$$

On remarque le système (1) n'est pas un système linéaire car $\pi(x)$ n'est pas de forme linéaire, la solution analytique en générale est très difficile à trouver. On recourt à des algorithmes numériques pour trouver une solution approchée.

En plus si on désigne par $I(\gamma) = Var\left(\frac{\partial LnL(\gamma)}{\partial \gamma}\right)$ la matrice de l'information, par g l'estimateur du maximum de vraisemblance de γ et par p^j l'estimateur associé de π^j, on a alors les résultats asymptotiques suivants qui seront utiles si on veut faire des tests :

$$(g - \gamma) \rightsquigarrow N(0, I^{-1}(\gamma))$$

$$(g - \gamma)' I(\gamma)(g - \gamma) \rightsquigarrow \boldsymbol{\chi}_{p+1}^2$$

$$(g - \gamma)' I(g)(g - \gamma) \rightsquigarrow \boldsymbol{\chi}_{p+1}^2$$

Les tests associés au modèle

Les deux tests les plus usuels correspondent :

-Au test du modèle : (β = 0 signifie que les variables explicatives ne sont pas liées à Y, ou - n'ont pas d'influence ; seul le terme constant β_0 est non nul.

-Au test de la nullité d'un coefficient de régression : (β_i = 0 signifie que la variable i, dans le modèle, n'influence pas sur Y).

Tests de Wald :

Supposons que l'on désire tester l'hypothèse nulle H_0 suivante :

H_0 : $D\,\gamma \;=\; d$ où D est une matrice de taille (s,p+1).

[2] Le détail de la démonstration se trouve en annexe

d est un vecteur de R^{p+1}

On a montré que, sous H_0 , asymptotiquement, la statistique T définie par :

$$T = (Dg - d)' \left(D\big(I(g)\big)^{-1} D'\right)^{-1} (Dg - d)$$

suit une loi du khi-deux à s degrés de liberté (ddl) .

On rejettera donc H_0 avec un risque de première espèce égal à α si T > $\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{1-\alpha}(s)$.

$\boldsymbol{\mathcal{X}}^2_{1-\alpha}(s)$ étant le quantile d'ordre 1-α d'une loi khi-deux à s ddl.

L'application de test de Wald :

-Test de modèle :

Dans ce cas H_0 se réduit à :

$H_0 : D\,\gamma = (0, Id_p)(\beta_0, \beta) = \beta = 0$

Id_p étant la matrice identité d'ordre p, on pose en plus : $g = (b_0, b)$, et on décompose

$I^{-1}(\gamma)$ en 4 blocs comme suit :

$$I^{-1}(\gamma) = \begin{bmatrix} I^{00}(\gamma) & I^{01}(\gamma) \\ I^{10}(\gamma) & I^{11}(\gamma) \end{bmatrix}$$

avec $I^{11}(\gamma)$ est une matrice de l'ordre pxp .

Alors la statistique T se réduit à $T = b'(I^{11}(g))^{-1} b$

-Test de la nullité du coefficient β_i :

Dans ce cas, la région critique ou région de rejet de l'hypothèse $\beta_i = 0$ est donné par :

$$|b_{ii}|[[I^{-1}(g)]_{ii}]^{\frac{1}{2}} > u_{1-\alpha/2}$$

Test du rapport de vraisemblance:

Soi g_0 l'estimateur du maximum de vraisemblance de γ sous l'hypothèse H_0 et p_0^j l'estimateur de π^j. Pour tester H_0 , on peut utiliser la statistique :

$$G = -2Ln(\frac{L(g_0)}{L(g)})$$

qui sous H_0 suit asymptotiquement une loi du chi-2 à s degré de liberté (s = p+1-(p+1-s) = nombre de dll du modèle – nombre de dll du sous-modèle ie modèle sous H_0 .

On refusera donc H_0 si : $G > \boldsymbol{\chi}^2_{1-\alpha}(s)$.

II.4 .2 L'estimation paramétrique de la loi de C

L'ajustement d'une distribution empirique de C vers une loi théorique peut se recouvrir à une des méthodes d'estimations classiques suivantes :

Méthode des moments

L'estimateur de moment est obtenu en égalisant les moments théoriques et les moments empiriques.

En effet on cherche à résoudre le système à p (le nombre de paramètre à estimer) équation

$M_k = \mu_k(\theta)$ pour k = 1,2…,p .

Avec M_k les moments empiriques et μ_k les moments théoriques.

L'estimateur cherché est $\hat{\theta} = (\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}, \ldots, \widehat{\theta_p})$ la solution de ce système de p équations à p inconnus

Méthode du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) de θ est obtenu comme :

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \ argmax\,\{l(\theta, x_1, x_2, \ldots, x_p), \theta \in R^p\ )$.

où l est la fonction de vraisemblance définie par : $l(\theta, x_1, x_2, \ldots, x_p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)$

f étant la densité de la loi théorique ajoutée.

Les tests d'ajustements

L'ajustement d'une distribution empirique à une loi théorique subit en générale des tests de conformité entre ces deux distributions.

La conformité de deux distributions peut être visualisée a priori par la méthode de QQ plot où elle peut être testée en utilisant des procédures de tests spécifiques. Parmi ces procédures de tests nous avons retenu deux tests qui semblent être les plus populaires : le test de Kolmogorov – Smirnov et le test de chi-deux.

-Test d'ajustement graphique par la méthode QQplot

Si cette méthode de test n'a pas valeur de critère absolu pour le choix de la loi, elle nous permet néanmoins de vérifier que les données sont compatibles avec l'hypothèse d'une loi théorique.

L'objectif est de tester l'appartenance de la distribution observée à une loi théorique usuelle.

Soit $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\right)$ l'ensemble des observations de la variable à expliquer C, classées dans l'ordre croissant.

Par une des méthodes d'estimation paramétrique (méthode de moments ou maximum de vraisemblance) on estime que C suit une loi théorique connue de fonction de répartition F

Alors sous cette hypothèse on a :

$$F\left(x_{(i)}\right) \approx \frac{i}{n+1}$$

En effet on verra un peu plus loin (dans le paragraphe traitant de l'estimation non paramétrique) que $\frac{i}{n} \approx \frac{i}{n+1}$ est une bonne estimation de $F\left(x_{(i)}\right)$ pour n grand.

Graphiquement cela se traduit par le fait que les points $(x_{(i)}, F^{-1}(\frac{i}{n+1}))$ sont sensiblement alignés sur une droite.

On remarque que les logiciels statistiques actuels fournissent numériquement la fonction de répartition inverse pour les lois usuelles (normale, exponentielle, gamma, lognormale, Weilbull…), ce qui permet d'obtenir aisément les valeurs des $F^{-1}(\frac{i}{n+1})$.

Test de Kolmogorov – Smirnov

Ce test consiste à tester l'hypothèse H_0 : un échantillon suit bien une loi théorique continue connue de fonction de répartition F.

Il repose sur les propriétés de la fonction de répartition empirique : si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un échantillon de réalisation de n variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ indépendantes à valeurs réelles, alors la fonction de répartition empirique de cet échantillon est définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i \leq x\}}$$

Sous l'hypothèse H_0 : $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont issus d'une même loi théorique de fonction de répartition F. On sait que la suite des variables aléatoires

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}} \xrightarrow{n \to \infty} F(x) \text{ presque sûrement.}$$

En effet, c'est un résultat immédiat du théorème de grands nombres appliqué à la suite des variables aléatoires iid $Y_i = 1_{(X_i < x)}$ presque sûrement on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{n\to\infty} E(Y_i) = \mathbb{P}(X < x) = F(x)$$

En plus, Kolmogorov a montré qu'on dispose de la propriété intéressante suivante pour la fonction de répartition empirique sous l'hypothèse H_0 :

$$\Pr\left[\sup_x |F_n(x) - F(x)| > \frac{c}{\sqrt{n}}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \alpha(c) = 2\sum_{r=1}^{+\infty}(-1)^{r-1}\text{exp}\ (-2r^2c^2)$$

pour tout constant c positif. Le terme $\alpha(c)$ vaut 0.05 pour c = 1.36

D'où , pour tester l'hypothèse nulle, on peut utiliser la statistique suivante :

$$D_n = \sqrt{n}\,\max_x(F_n(x) - F(x))\ .$$

Pour un niveau de confiance α = 0.05 la région critique de test est donné par :

$RC = \{D_n > \ 1.36)$, c'est-à-dire l'hypothèse H_0 sera rejetée au risque de 0.05 si on observe une réalisation $D_n^{obs} > 1.36$

-Test $\mathcal{X}^2$ d'homogénéité entre les deux distributions.

Le principe de ce test est de répartir n réalisations de l'échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de X en p classes.

classe	1	2	…	p
Nombre observé	n_1	n_2	…	n_p

La fréquence empirique de la classe i est donc n_i/n

Si l'hypothèse H_0 est vrai, c'est-à-dire si X suit une loi théorique connue telle que

$\Pr(X \in classe\ i) = \ p_i$ alors la « distance » noté D entre les fréquences empirique et théorique définie par :

$$D = \sum_{i=1}^{p}(n_i - p_i n)^2/np_i$$

suit une loi du khi deux de p-1-s de dégrée de liberté (s est le nombre de paramètre de la loi théorique ajustée à estimer).

L'hypothèse H_0 sera refusée au seuil de risque α = 0.05 si la distance observée D^{obs} est « relativement grande » c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$\Pr\ [\mathcal{X}_{p-1}^2 > D^{obs}] \leq 0.05$.

Ce qui est équivalent à dire que la p_value est inférieure au seuil critique.

II.4 .3 L'estimation non paramétrique de la loi de C

Il se peut que l'ajustement de la distribution empirique d'un échantillon donné des frais réels à la distribution d'une loi théorique présupposée ne résiste pas tous aux tests de conformité. Cela nous amène à l'utilisation de méthodes d'estimation non paramétriques pour déterminer la loi de distribution de C.

Parmi les méthodes d'estimation non paramétrique, nous décrivons ici la méthode d'estimation en recourant à la fonction de répartition empirique.

Soit $C \rightsquigarrow F$, avec $F(x) = \Pr\,(C \leq x)$ la fonction de répartition de C

Nous avons défini (dans la partie du test de Kolmogorov-Smirnov) la fonction de répartition empirique d'un échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de réalisation de n variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ indépendantes à valeurs réelles comme :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i \leq x\}} \quad pour\ x \in R$$

En plus si on considère $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\right)$ les n observations classées en ordre croissant, on a, pour k=1,2,…,n-1 :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i \leq x\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_{(i)} \leq x\}} = \begin{cases} 0 & si\ \ x < \ x_{(1)} \\ \dfrac{k}{n} & si\ \ x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)} \\ 1 & si\ \ x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

$F_n(x)$ prend donc la forme d'une fonction étagée, elle possède de propriétés intéressantes pour être un bon estimateur de $F(x)$

<u>Propriétés élémentaires de la fonction de répartition empirique .</u>

- Pour tout point $x, F_n(x)$ est un estimateur sans biais de $F(x)$, ce qui se montre par :
$$E[F_n(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[1_{\{x_{(i)} \leq x\}}\right] = \Pr(C \leq x) = F(x)$$

- Variance de l'estimateur de $F_n(x)$.
Il est facile de vérifier que pour tout x, la variance de l'estimateur $F_n(x)$ est donnée par :

$$Var[F_n(x)] = F(x)(1 - F(x))$$

- La loi des grands nombres nous donne

$$F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x) \text{ presque sûrement.}$$

- Le théorème central-limite donne

$$\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{L} N(0; F(x)(1 - F(x))$$

C'est cette propriété qui nous permet de construire les intervalles de confiance de l'estimateur $F_n(x)$ pour tout x réel.

II.5 La mise en œuvre du modèle : l'application à la base de données des expatriés de Welcare.

Comme indiqué plus haut, l'évaluation du risque de santé auxquels sont exposés les expatriés devrait prendre en compte l'influence de certains facteurs susceptibles d'avoir d'effets. Compte tenu de la disponibilité de données, nous essayons d'étudier l'influence des variables explicatives selon leur pertinence informative dont Welcare dispose actuellement sur son portefeuille d'expatriés.

Nous détaillerons les études sur la garantie optique dans le but d'illustrer la mise en œuvre du modèle fréquence coût modéré présenté ci-dessus.

Pour les types de garanties (frais transport, cure thermale…) où le volume de données n'est pas suffisamment grand, la quantification des coûts fera l'objet d'autres études non comprises dans ce mémoire.

II.5 .1 Choix des variables explicatives en fonction des informations disponibles

Vue la pertinence actuelle des informations enregistrées dans notre base (la CSP, les lieux de résidence des bénéficiaires en raison de leur mobilité ne sont pas toujours renseignés précieusement), nous ne traitons que dans le cadre de ce mémoire les deux variables sexe (qualitatif) et âge (quantitatif) comme les variables explicatives sur la variable réponse binaire Y (consommé ou non). Ces deux variables ont en effet des influences déterminantes sur la consommation médicale.

Nous remarquons que par rapport des contrats collectifs qui couvrant le risque de frais soins santé pour les salariées résidant en France, il y a une différence pour les contras des expatriées. C'est qu'au moment de la tarification, les informations concernant l'âge et le sexe des cotisants expatriés et de leurs membres de famille couverts par le contrat sont fournies de façon précisées, que ce soit un contrat individuelle ou collectif. Alors que ces informations sont souvent synthétisées par certains indicateurs (nombre ou pourcentage des hommes, femmes, l'âge moyenne du groupe…) dans le cas des contrats collectifs pour les salariées en France. Cette disponibilité de l'information nous demande d'analyser les coûts des garanties individus par individus. Ensuite l'application de la formule du passage de l'individuel au collectif, nous permet de tarifer un contrat collectif couvrant le risque santé d'un ensemble d'expatriés.

Nous verrons à travers la mise en œuvre du modèle sur la garantie optique que l'influence de ces deux facteurs sur la probabilité de consommation pour chaque garantie sera expliquée par leurs coefficients et les tests (test de Wald par exemple…).associés au modèle.

Pour estimer la probabilité de consommer ou non, nous divisons l'échantillon des assurés initial en deux sous échantillons que nous appelons respectivement base enfant et base adulte. La première base comporte les bénéficiaires d'âge de moins 18 ans, et les autres bénéficiaires appartiennent donc à la deuxième.

II.5 .2 L'estimation de la probabilité de consommer

Illustration de la garantie optique

Le comportement de la consommation pour la garantie optique est analysé d'après le modèle logistique en divisant notre base en deux groupes : adulte d'une part et l'enfant de l'autre.

Les variables explicatives (âge et sexe) sont désignés par $x = (x_1, x_2)$ =(âge, sexe)

où sexe est binaire codé par : sexe=0 pour homme et sexe =1 pour femme.

La variable réponse binaire Y(Y=1 ou Y=0) représentant le fait que l'assuré consomme ou non les frais de la garantie optique : $\pi(x) = Pr(Y = 1|x)$ est modélisé par :

$logit(\pi(x)) = Ln\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right) = \beta_0 + \beta' x$ où $\beta_0, \beta = (\beta_1, \beta_2)$ sont des paramètres à estimer.

La procédure d'estimation réalisée à l'aide du logiciel Xlstat nous fournit les résultats suivants.

-Pour les adultes :

Les informations lues à partir de la sortie :

Résumé pour les variables quantitatives

Variable	Moyenne	Variance	Ecart-type
AGE	**36,618**	**97,474**	**9,873**

Résumé pour les variables qualitatives

Variable	Nombre de modalités	Modalités	Fréquences
SEXE	**2**	**1 ~ 2**	**1308 ~ 988**

Evaluation globale

Individus	Log Vrais.	L.R. Khi-2	ddl (L.R. Khi²)	Pr. > L.R. Khi²
2296	**-1060,283**	**21,837**	**2**	**< 0,0001**

Valeurs estimées des paramètres du modèle (maximum de vraisemblance) :

Paramètre	Valeur estimée	Ecart-type	Khi²	Pr. > Khi²
Constante	**-2,536**	**0,226**	**125,461**	**< 0,0001**
AGE	**0,024**	**0,005**	**19,144**	**< 0,0001**
SEXE - 1	**0**	**-**	**-**	**-**
SEXE - 2	**0,233**	**0,111**	**4,428**	**0,035**

La statistique du rapport de vraisemblance est égale à 21,837, la probabilité critique associée est inférieure à 0,0001, le modèle est donc globalement très significatif, il existe bien une relation entre les variables explicatives et la variable expliquée.

Les deux variables (âge et sexe) ont chacune une influence significative sur $\pi(x)$ la probabilité de consommer. Ce qui se traduit par les p_value respectives sont petites (inférieur à 0,05)

La probabilité de consommer sachant l'âge et le sexe est estimée par :

$$logit(\pi(x)) = Ln\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right) = \beta_0 + \beta' x = -2{,}536 + 0{,}024 * \text{âge} + 0{,}233 * \text{sexe}$$

Où encore :

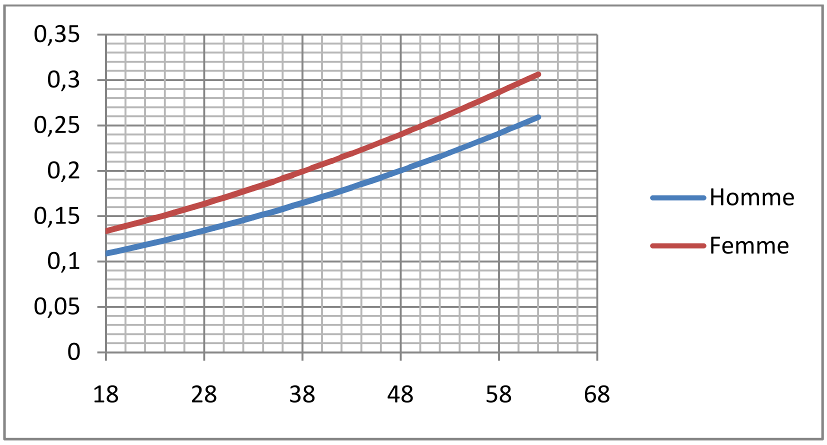
$$\pi(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta' x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta' x)} = \frac{\exp(-2{,}536 + 0{,}024 * \text{âge} + 0{,}233 * \text{sexe})}{1 + \exp(-2{,}536 + 0{,}024 * \text{âge} + 0{,}233 * \text{sexe})}$$

Le coefficient β_1 = 0,024 >0 signifie que l'âge a un effet positif sur la probabilité de consommation optique.

Alors que β_2 = 0,233 signifie que la probabilité de consommer ce type de garantie pour les hommes est moindre que pour les femmes. On se rappelle que le sexe est codé dans la procédure d'estimation par : sexe=0 pour homme et sexe =1 pour femme.

La présentation graphique de $\pi(x)$:

Probabilité de consommer des frais couvert par la garantie optique selon âge et sexe



Age

-Pour la base de données des enfants :

Pour une première tentative, les variables explicatives sont toujours le sexe et l'âge.

-<u>La sortie du logiciel :</u>

Résumé pour les variables quantitatives :

Variable	Moyenne	Variance	Ecart-type
AGE	**5,96**	**26,965**	**5,193**

Résumé pour les variables qualitatives :

Variable	Nombre de modalités	Modalités	Fréquences
SEXE	**2**	**1 ~ 2**	**590 ~ 547**

Valeurs estimées des paramètres du modèle (maximum de vraisemblance) :

Paramètre	Valeur estimée	Ecart-type	Khi²	Pr. > Khi²
Constante	**-3,778**	**0,265**	**203,5**	**< 0,0001**
AGE	**0,164**	**0,022**	**56,274**	**< 0,0001**
SEXE - 1	**0**	**-**	**-**	**-**
SEXE - 2	**0,082**	**0,226**	**0,133**	**0,715**

Nous reconnaissons que la p_value associée à la variable sexe est relativement grande (=0,715) ce qui ne nous permet pas à rejeter l'hypothèse H_0 sur la nullité du coefficient associé à cette variable. La significativité de la variable sexe est donc non retenue pour notre échantillon.

-*<u>La sortie du logiciel sans retenir la variable sexe</u>* :

Valeurs estimées des paramètres du modèle (maximum de vraisemblance) :

Paramètre	Valeur estimée	Ecart-type	Khi²	Pr. > Khi²
Constante	**-3,739**	**0,241**	**240,857**	**< 0,0001**
AGE	**0,165**	**0,022**	**56,549**	**< 0,0001**

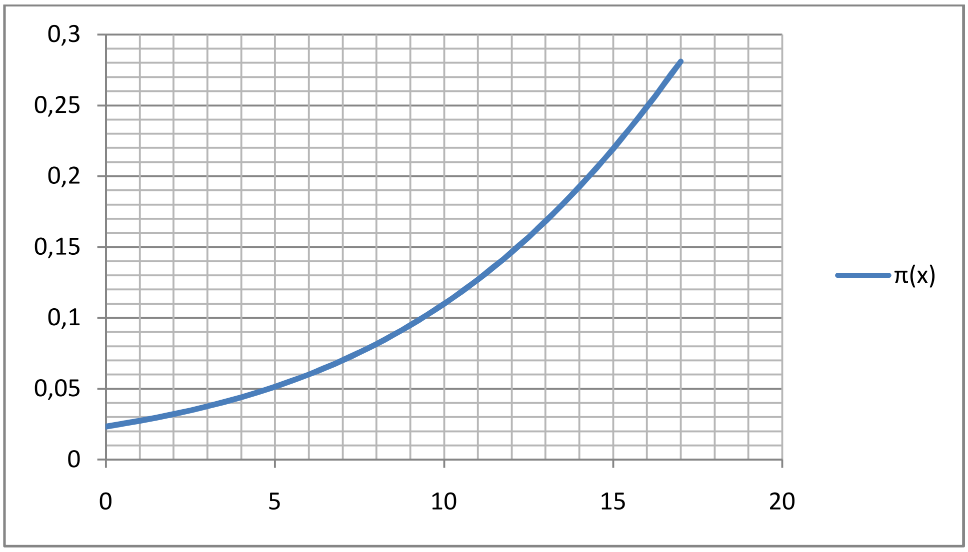
Evaluation globale du modèle :

Individus	Log Vrais.	L.R. Khi-2	ddl (L.R. Khi²)	Pr. > L.R. Khi²
1137	**-285,805**	**62,506**	**1**	**< 0,0001**

La fonction π estimée :

$$\pi(\hat{a}ge) = \frac{\exp(-3{,}739 + 0{,}165 * \text{âge})}{1 + \exp(-3{,}739 + 0{,}165 * \text{âge})}$$

Probabilité de consommer les frais réels de la garantie optique pour la base des enfants



Age

Récapitulation de l'estimation des probabilités de consommer pour chaque garantie

En appliquant la régression logistique à notre échantillon, les résultats de l'estimation de la fonction $\pi(x)$ modélisant la probabilité de consommation de frais médicaux pour un assuré sachant ses caractéristiques (âge, sexe) sont représentées par les tableaux suivants :

$\pi(x) = Pr(Y = 1|x)$ = Pr[Consommer au moins un fois par an |âge ,sexe]

Adulte	Coefficient		
	Constant	Age	Sexe
Optique	**-2,536**	**0,024**	**0,233**
Dentaire	**-1,669**	**0,015**	**0,497**
Consultation et visite	**-0,526**	**0,015**	**0,940**
Pharmacie	**-0,978**	**0,021**	**0,765**
Auxiliaires	**-2,836**	**0,018**	**0,689**
Analyses médicales	**-2,180**	**0,027**	**1,188**
Electroradiologie	**-2,715**	**0,037**	**0,641**
Hospitalisation	**-4,270**	**0,029**	**0,534**
Appareillage	**-4,720**	**0,020**	**0,582**

Enfant	Coefficient		
	Constant	Age	Sexe
Optique	**-3,739**	**0,165**	**0**
Dentaire	**-2,323**	**0,143**	**0**
Consultation et visite	**1,884**	**-0,095**	**0**
Pharmacie	**1,460**	**-0,091**	**0**
Auxiliaires	**-1,146**	**-0,077**	**0**
Analyses médicales	**-1,068**	**-0,026**	**0**
Electroradiologie	**-1,960**	**0,089**	**0**
Hospitalisation	**-2,492**	**-0,111**	**0**
Appareillage	**-4,364**	**0,076**	**0**

Nous remarquons que pour chacune des garanties étudiées ci dessus, pour les bénéficiaires adultes, le facteur âge joue un rôle positif sur la probabilité de consommation, ce qui se traduit par la positivité du coefficient de ce facteur. Les femmes, d'après notre modèle, ont une plus forte tendance à consommer des frais médicaux car le coefficient associé au facteur sexe est aussi positif.

Alors que pour les enfants, la variable qualitative sexe n'a pas d'effet significatif sur leur probabilité de consommation. En plus, sauf pour les garanties optique et dentaire, le coefficient négatif associé au facteur âge nous indique que pour les enfants (dans l'échantillon étudié) la probabilité de consommation de frais médicaux décroit quand l'âge augmente.

Garanties maternité et orthodontie

Les garanties orthodontie et maternité sont traitées d'une manière légèrement différente des autres car elles sont destinées à une catégorie d'assurés spécifiques.

-garantie maternité

Pour la garantie maternité, l'échantillon considéré est constitué de 894 femmes d'âge allant de 21 à 49 ans. La probabilité qu'une femme de cet échantillon consomme un acte couvert par la garantie maternité est toujours estimée par le modèle logistique. Le calcul effectué par xlstat nous donne les résultats suivants :

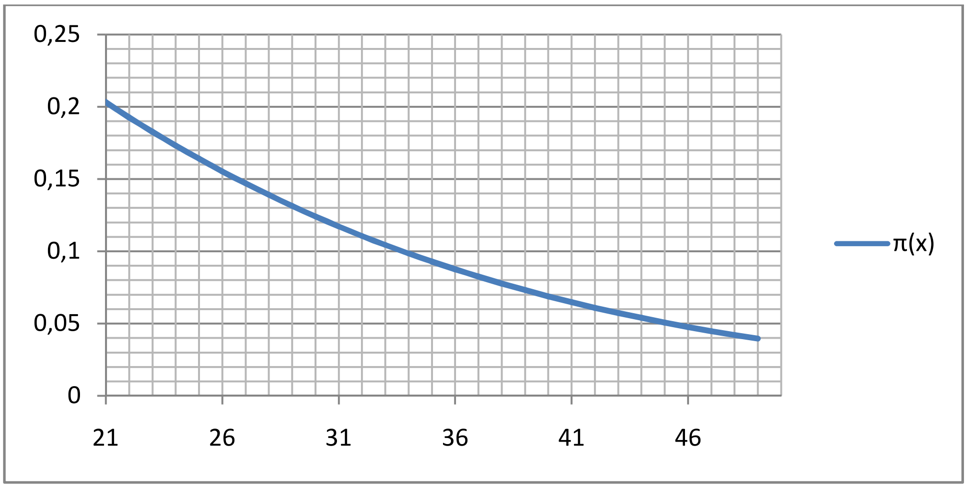
Valeurs estimées des paramètres du modèle (maximum de vraisemblance) :

Paramètre	Valeur estimée	Ecart-type	Khi²	Pr. > Khi²
Constante	**0**	**-**	**-**	**-**
AGE	**-0,065**	**0,003**	**362,44**	**< 0,0001**

Evaluation globale

Individus	Log Vrais.	L.R. Khi-2	ddl (L.R. Khi²)	Pr. > L.R. Khi²
894	**-298,636**	**8,203**	**1**	**< 0,0001**

Probabilité de consommer des frais médicaux couvert par la garantie maternité selon âge



Age

La statistique du rapport de vraisemblance est égale à 8,203, la probabilité critique associée est inférieure à 0,0001, le modèle est donc globalement très significatif.

Comme la p_value associée au facteur âge est inférieure à 0,05, l'influence de ce facteur sur la probabilité de consommer la garantie maternité est donc confirmée. C'est une influence négative ce qui se traduit la négativité du coefficient associé (égal à -0,065). La probabilité de consommer cette garantie pour les femmes est en fonction décroissante avec l'âge.

-garantie orthodontie

Cette garantie proposée aux enfants âgés de 16 ans maximums, a pour le but de couvrir les coûts de l'orthodontie qu'engage ce type de bénéficiaires. Nous n'appliquons le modèle logistique qu'à notre base des enfants pour estimer la probabilité que cette garantie est consommée au moins une fois par an.

Résultats de l'estimation :

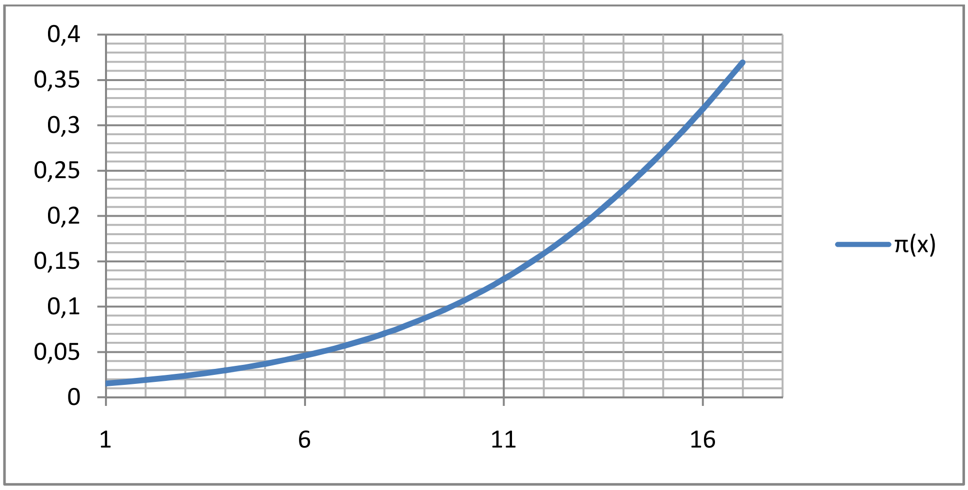
Valeurs estimées des paramètres du modèle (maximum de vraisemblance) :

Paramètre	Valeur estimée	Ecart-type	Khi²	Pr. > Khi²
Constante	**-4,394**	**0,292**	**225,97**	**< 0,0001**
AGE	**0,227**	**0,025**	**84,638**	**< 0,0001**

Evaluation globale :

Individus	Log Vrais.	L.R. Khi-2	ddl (L.R. Khi²)	Pr. > L.R. Khi²
1137	**-261,14**	**106,94**	**1**	**< 0,0001**

Probabilité de consommer des frais médicaux couverts par la garantie orthodontie selon âge



Age

La p value associée au test du modèle logistique nous montre que ce modèle appliqué à la garantie orthodontie est significatif. L'âge a un effet positif sur la probabilité de consommation des frais orthodontiste des enfants.

II.5 .3 L'estimation de la loi des frais réels

L'ajustement à une loi théorique de la distribution des frais réels de la garantie optique

Une fois consommé, on suppose que les frais réels optique engagés par un assuré suivent une loi de probabilité théorique connue.

Plusieurs lois théoriques sont testées pour la garantie optique, la loi gamma est finalement retenue pour modéliser la distribution des frais réels de la garantie optique.

En effet, dans un premier temps, nous présélectionnons des lois à l'aide des graphiques.

Nous comparons d'abord la densité empirique des données réelles avec les densités théoriques des différentes lois estimés par la méthode des moments ou méthode du maximum de vraisemblance.

A titre d'exemple nous examinons la comparaison pour la garantie optique des donnés réelles avec une loi gamma et une loi normale. On se rappelle que les densités respectives de ces deux familles de lois sont :

-Loi gamma, pour $x > 0$

$$f(x) = x^{a-1} \frac{b^a e^{-bx}}{\Gamma(a)}$$

où $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$

-Loi normale, pour $x \in R$

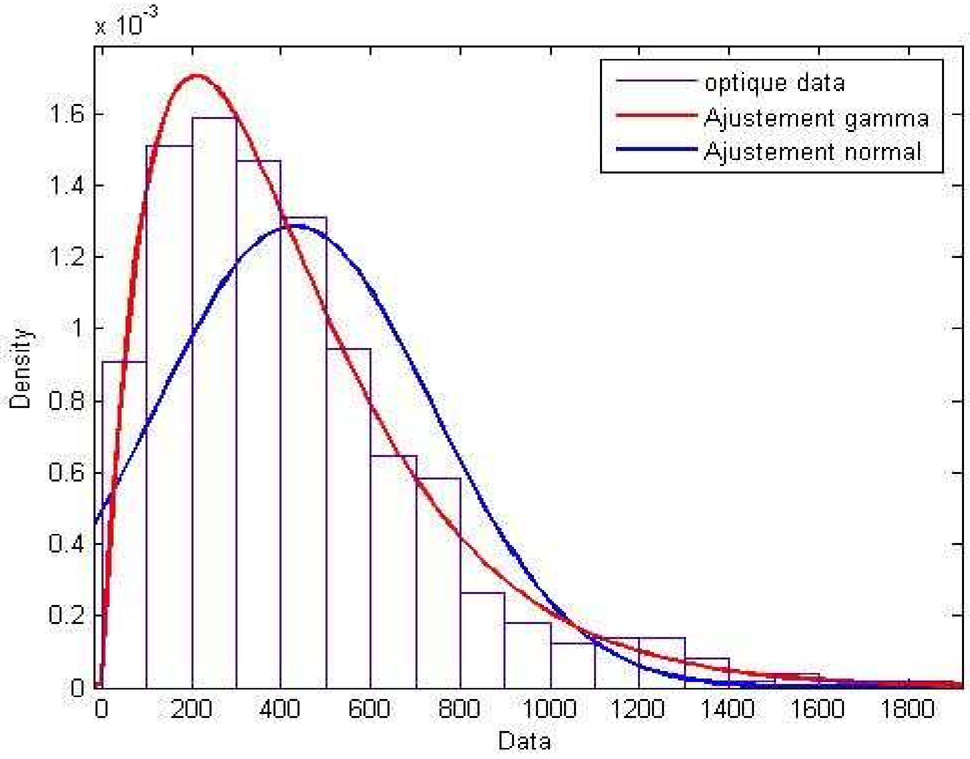
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La méthode des moments nous donne les estimateurs des paramètres :

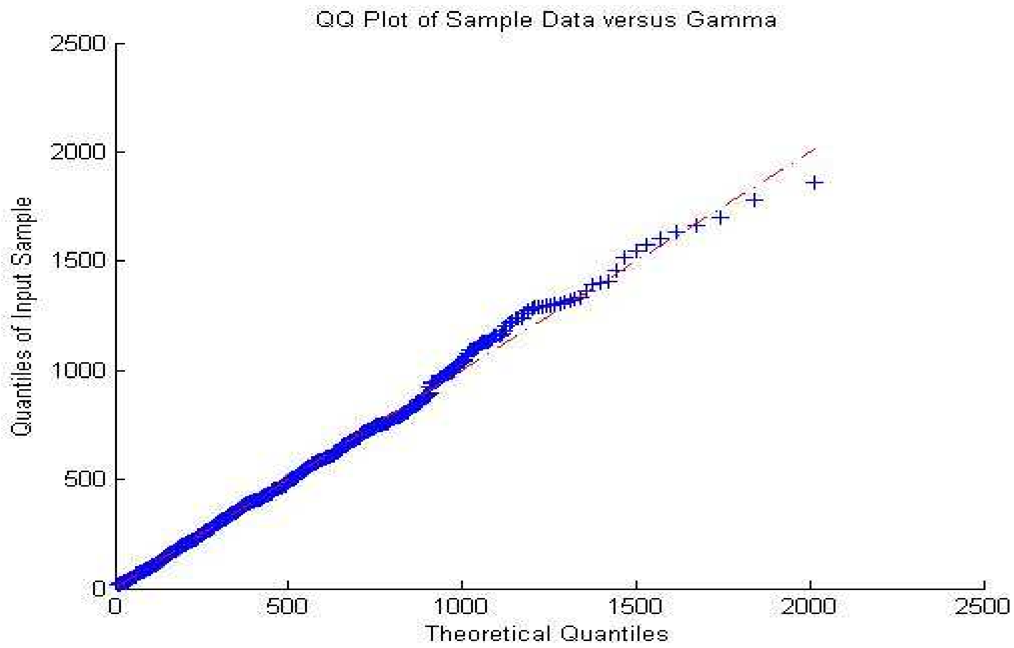
-Loi gamma : $a = 0{,}5115$ et $b = 220{,}091$

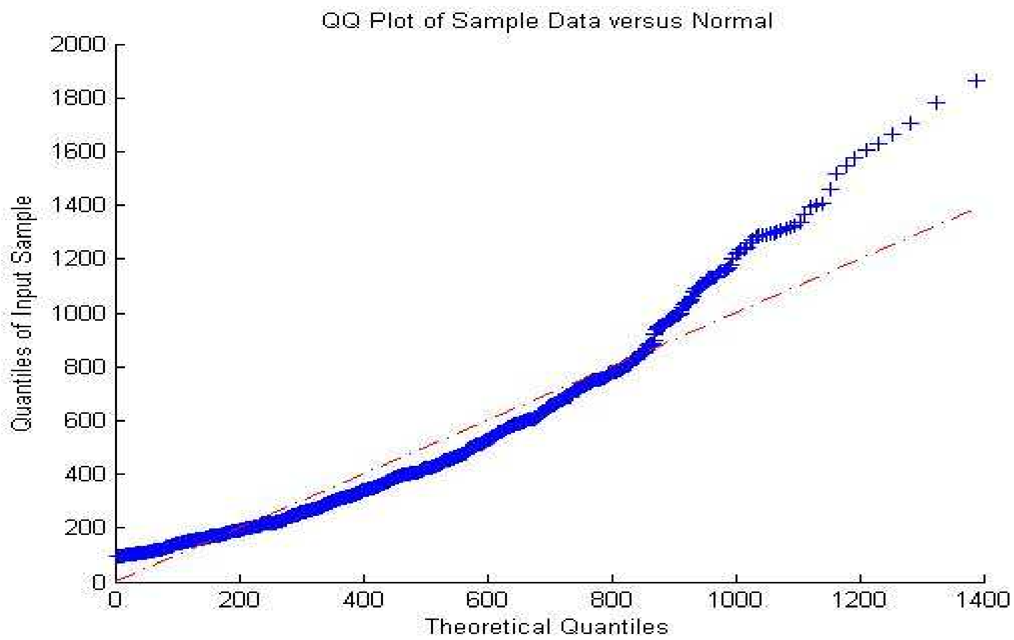
-Loi normale $m = 430{,}257$ et $\sigma = 310{,}4$

Le graphique ci-dessous représente les densités de ces deux lois comparées aux données réelles



La méthode QQPlots nous donne les graphiques suivants :





Les différents graphiques étudiés nous amènent à présélectionner la famille de loi Gamma comme étant la plus adéquate pour refléter les donnés des frais réels de la garantie optique.

Afin d'affiner notre étude, nous effectuons les tests d'ajustement pour vérifier l'adéquation entre les hypothèses et la réalité.

Test de Kolmogorov-Smirnov

D	**0,081**
p-value	**0,465**
Alpha	**0,05**

Vue la valeur de p_value associée à ce test, au seuil α= 0.05 on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle d'absence de différence entre les distributions cumulées empirique et théorique. La différence entre ces deux distributions n'est pas significative.

Test du khi-deux entre les effectifs observés et les effectifs théoriques :

Khi² (valeur observée)	**18,356**
Khi² (valeur critique)	**27,587**
DLL	**17**
p-value	**0,367**
Alpha	**0,05**

La p-value calculée par cette procédure de test (0,367) nous conduit à la même conclusion que le test de Kolmogorov. On peut donc accepter l'hypothèse de conformité entre la loi théorique et la loi empirique.

Exemple de calcul de la prime pure pour la garantie optique

Après avoir estimé, pour un bénéficiaire, la probabilité de consommation au moins une fois par an des frais médicaux couverts par la garantie optique et la loi des frais réels optiques, nous pourrions donc évaluer la prime pure associée à cette garantie.

Pour un individu j de sexe féminin, âgé 35 ans :($x^j = (age, sexe) = (40; femme)$

La prime pure demandée par l'assureur contre la garantie pour les dépenses optiques pendant un an s'élève à :

$$Prime\ pure = p^j E(C) = \pi\left(x^j\right)E(C)\ .$$

Les résultats des estimations impliquent :

$$E(C) \approx 430{,}2567$$

$$\begin{aligned}\pi\left(x^j\right) &= \frac{\exp(-2{,}536 + 0{,}024 * \text{âge} + 0{,}233 * \text{sexe})}{1 + \exp(-2{,}536 + 0{,}024 * \text{âge} + 0{,}233 * \text{sexe})} \\ &= \frac{\exp(-2{,}536 + 0{,}024 * 35 + 0{,}233 * 1)}{1 + \exp(-2{,}536 + 0{,}024 * 35 + 0{,}233 * 1)} = 0{,}1878\end{aligned}$$

$$Prime\ pure\ pour\ la\ garantie\ optique = 0{,}1878 * 430{,}2567 = 80{,}78\ euros$$

II.5 .4 Récapitulation et remarques sur l'estimation des lois des frais réels.

Comme nous avons indiqué plus haut, même si nous disposons de plusieurs familles de loi théorique (gamma, bêta, normal, Weibull,…), il se peut qu'aucune de ces lois ne soit statistiquement significative pour modéliser la distribution des données réelles associées à certaines garanties. Pourtant, la détermination de la loi des frais réels peut toujours recourir à des fonctions de répartition empiriques dont la définition et les caractéristiques sont rappelés plus haut.

Si la tarification ne tient pas compte de la variance de la sinistralité puisqu'elle est basée sur l'estimation de l'espérance de sinistres uniquement (tarification « à la moyenne »), par construction de la prime pure, l'étude des variabilités et des fonctions de répartition de sinistres sont toujours nécessaire dans la mesure où elle permette à l'assureur de bien contrôler les sinistres engagés.

L'assureur peut chercher à se prémunir contre un excès de sinistres en intégrant dans le calcul de la prime commerciale un chargement de sécurité proportionnel à la variabilité du sinistre, ou en recourant à la réassurance. La connaissance de la loi des sinistres rend plus aisément le contrôle des cas extrême de sinistres, et donc la détermination du coût de la réassurance.

De plus, en mettant des plafonds (relatif et/ou absolu) aux garanties dans l'assurance des frais soins santé, l'assureur peut réduire les effets des cas extrêmes.

Avant de communiquer le tableau récapitulatif de notre estimation des lois et des espérances des frais réels pour chacune des garanties, nous montrons ci-dessous comment l'assureur peut affiner ses tarifs en présence des plafonds annuels en disposant de la fonction de répartition de frais réels.

Présence des plafonds annuels

La présence des plafonds relatifs (en pourcentage du frais réel) et/ou absolu (montant maximal remboursé annuellement) pour chaque type de garanties ont pour l'effet de limiter les pertes survenant des sinistralités des cas extrême. Bien que l'assureur puisse toujours se baser sur les frais réels pour en déduire des primes, la concurrence le pousse à être capable d'affiner ses tarifs suite à la mise en place des plafonds.

Une possibilité de procéder est de traiter comme s'il s'agissait d'une opération de réassurance, c'est-à-dire la partie des frais réels dépasse le plafond est prise en charge par l'assuré lui-même.

Par exemple, si on considère la garantie prothèse dentaire qui rembourse les frais réel à hauteur de θ (=90%) dans la limite annuelle de w (par exemple 2300) euros par bénéficiaire, le coût de sinistre aléatoire $C'(\theta, w)$ à la charge de l'assureur est :

- $C'(\theta,w) = \theta C \mathbb{1}_{\{\theta C < w\}} + w\mathbb{1}_{\{\theta C \geq w\}} = \begin{cases} \theta C & si\ \ \theta C < w \\ w & si\ \ \theta C \geq w \end{cases}$

On désigne par F_C la fonction de répartition de C, la variable aléatoire représentant les frais réels pour la garantie dentaire, on a :

$$E[C'(\theta,w)] = E[C'(\theta,w)|\theta C < w]\Pr(\theta C < w) + E[C'(\theta,w)|\theta C \geq w]\Pr(w \geq \theta C)$$

$$= \theta E(C)\Pr(\theta C < w) + w\Pr(w \geq \theta C)$$

$$= \theta E(C) F_C\left(\frac{w}{\theta}\right) + w\left(1 - F_C\left(\frac{w}{\theta}\right)\right)$$

Si on appelle X' la variable aléatoire qui représente la charge de sinistre de l'assureur, la prime pure demandée pour la garantie dentaire est l'espérance du coût annuel E (X') :

$$\boxed{E(X') = p * E[C'(\theta,w)] = p * \left[\theta E(C) F_C\left(\frac{w}{\theta}\right) + w\left(1 - F_C\left(\frac{w}{\theta}\right)\right)\right]}$$

Exemple de l'estimation de la fonction de répartition empirique de frais réel pour la garantie optique

Désignons C la lois des frais réels de la garantie optique, $C \rightsquigarrow F$, avec $F(x) = \Pr\,(C \leq x)$ la fonction de répartition de C inconnue.

La fonction de répartition empirique d'un échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i \leq x\}} \quad pour\ x \in R^+$$

En vertu des ses propriétés rappelées plus haut, nous savons que pour chaque point x, dès que n est suffisamment grand, $F_n(x)$ est un bon estimateur de $F(x)$. De plus grâce au théorème central limite, nous pouvons préciser l'intervalle de confiance pour notre estimation à chaque point x.

En effet, le résultat du théorème central limite nous indique

$$\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \overset{L}{\rightarrow} N(0; F(x)(1 - F(x))$$

soit encore

$$\frac{\sqrt{n}\big(F_n(x) - F(x)\big)}{\sqrt{F(x)(1 - F(x)}} \overset{L}{\rightarrow} N(0; 1)$$

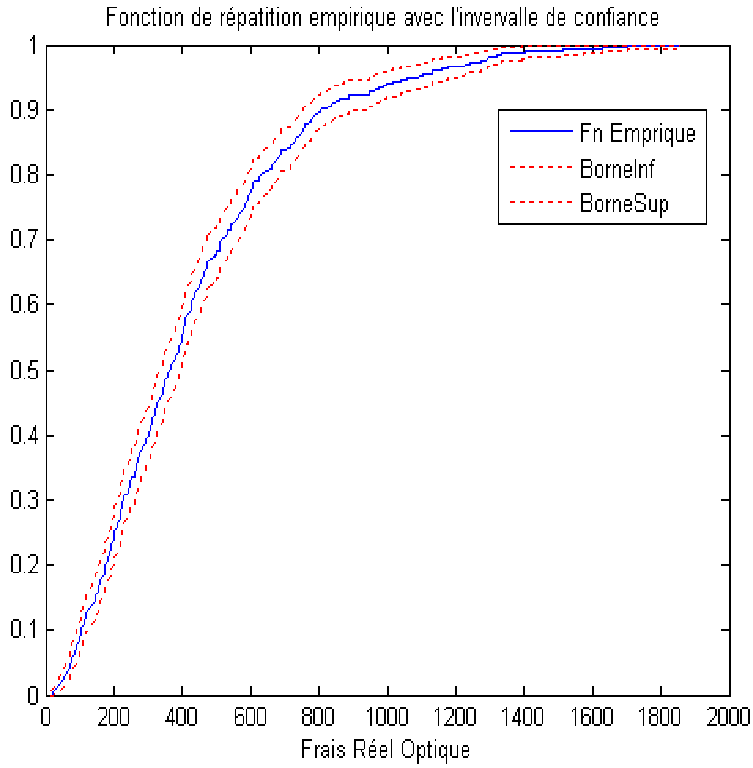
Posons $\widehat{\sigma_C} = \sqrt{F_n(x)(1 - F_n(x))}$ l'estimateur de l'écart- type de $F_n(x)$ l'intervalle de confiance à niveau λ, pour chaque $F(x)$ peut s'écrire

$$IC(\lambda) = [F_n(x) \ - \frac{\widehat{\sigma_C}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right),\ F_n(x) \ + \frac{\widehat{\sigma_C}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)]$$

où Φ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Nous pouvons noter en plus que la taille de cet intervalle diminue lorsque n augmente, et la vitesse de cette diminution est de l'ordre $\sqrt{n}$.

Pour λ= 0,05 , nous obtenons les résultats suivants pour la fonction de répartition empirique du frais réel optique :

x	Fn(x)	Borne inf	Borne sup
463,12	0,6478873	0,6058959	0,6898787
464,2	0,6498994	0,6079632	0,6918356
466	0,6519115	0,6100312	0,6937917
468	0,6539235	0,6121001	0,6957469
471	0,6559356	0,6141699	0,6977014
471,98	0,6579477	0,6162404	0,699655
….	….	….	….
1319	0,9839034	0,9728394	0,9949674
1332	0,9859155	0,9755555	0,9962755
1394,24	0,9879276	0,9783263	0,9975289
1403,82	0,9899396	0,981166	0,9987133
1513,87	0,9919517	0,9840963	0,9998071
1319	0,9839034	0,9728394	0,9949674

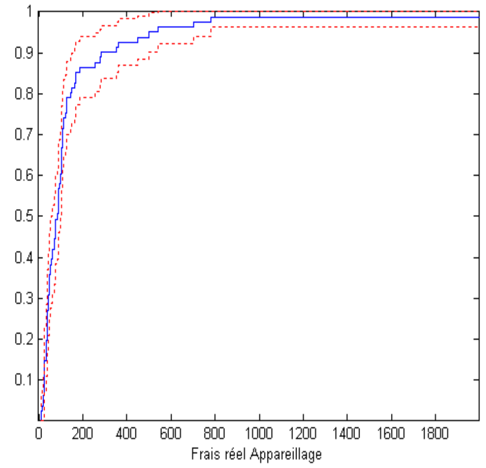
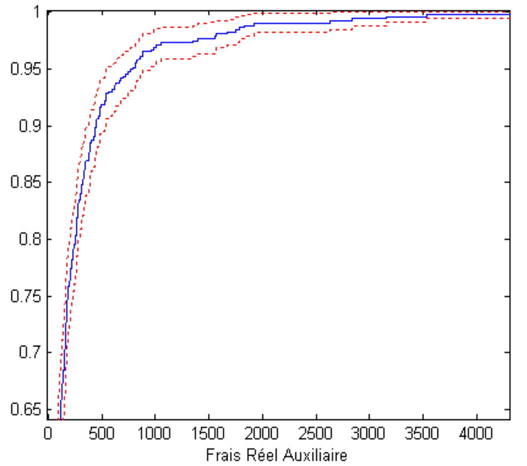


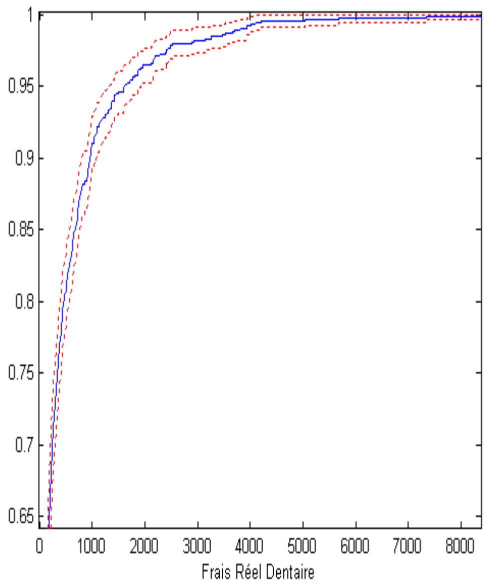
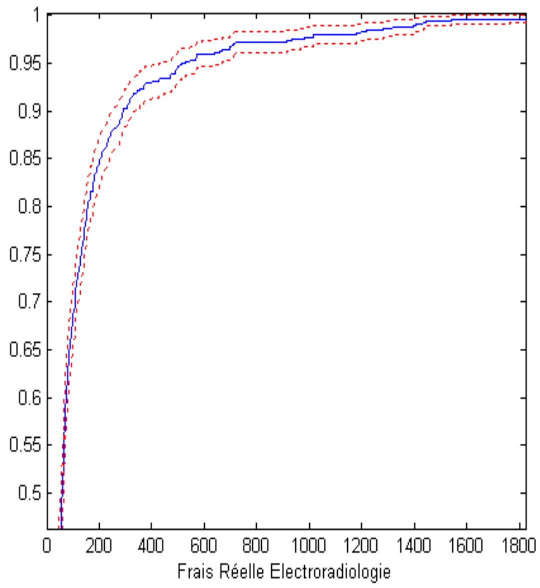
II.5 .5 Récapitulation de l'estimation de la loi des frais réels pour chaque garantie

Les espérances empiriques estimées

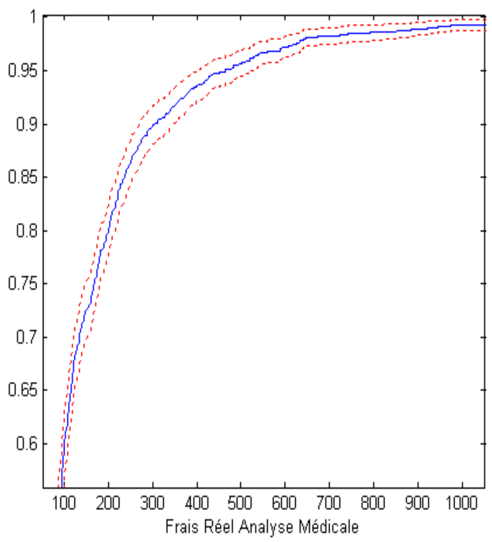
	$E(C)$ estimée
Optique	**430,2567**
Dentaire	**376,4066**
Consultation et visite	**306,4984**
Pharmacie	**208,4307**
Auxiliaires	**204,585**
Analyses médicales	**137,0895**
Electroradiologie	**135,6853**
Hospitalisation	**3772,766**
Appareillage	**149,7379**
Maternité	**2789,316**
Orthodontie	**934,0856**

Les fonctions de répartition empirique estimées

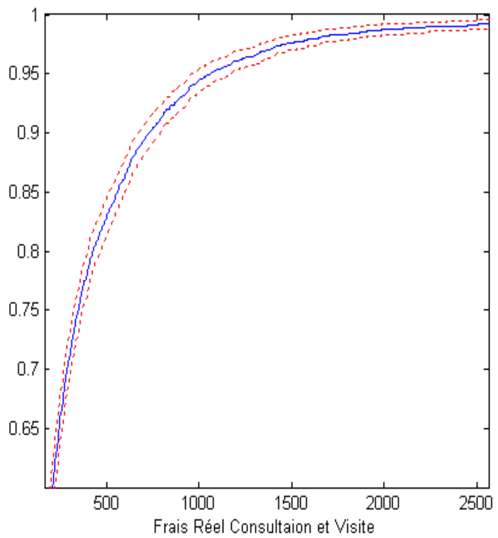
Appareillage	Auxiliaire
	

Dentaire	Electroradiologie
	

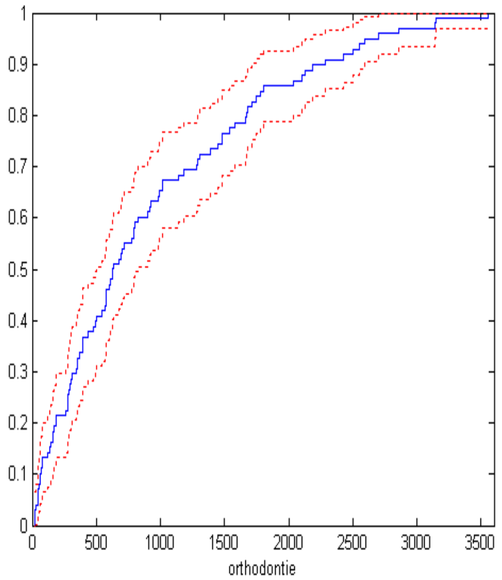
Analyse médicale



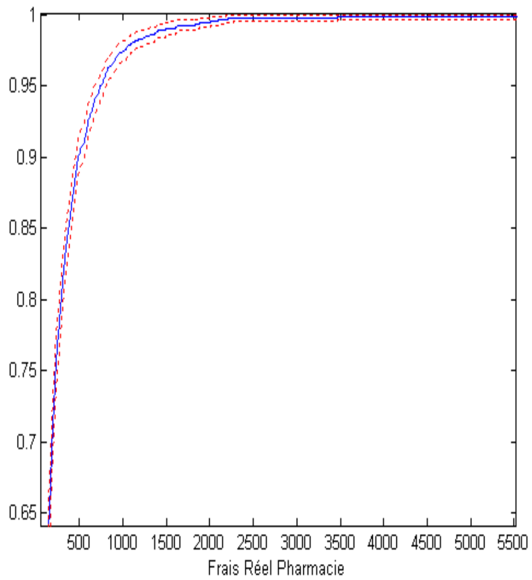
Consultation et Visite

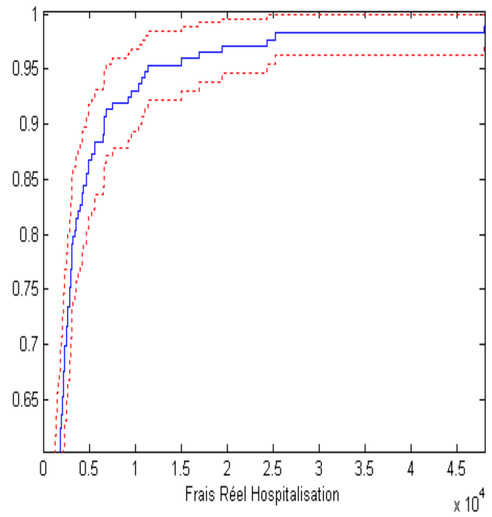
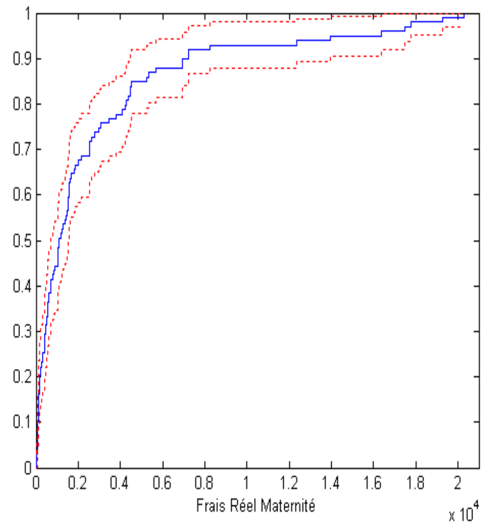


Orthodontie



Pharmacie



Hospitalisation	Maternité
	

II.5.5 Formule de la prime pure totale individuelle et passage de la prime individuelle à la prime collective

a)La prime pure totale individuelle

L'approche fréquence –coût présentée ci-dessous nous permet de déterminer la prime pure pour chaque type de garantie i, et pour un bénéficiaire j en fonction de ses caractéristiques propres (âge, sexe), à savoir :

$$P_i^j = E(X_i^j) = p_i^j * E(C_i)$$

Avec :

p_i^j : La probabilité de consommer ou non de l'individu j pour les actes compris dans la garantie i. Ce paramètre synthétise le comportement médical de l'assuré en fonction de ses propres caractéristiques.

C_i : La variable aléatoire, représentant le coût de la dépense médicale assuré par la garantie i sachant que l'assuré a consommé au moins une fois pendant l'année.

On suppose que le nombre de garanties défini dans un contrat de frais soins santé est K. Alors la prime pure totale (individuelle) du contrat s'élève tout simplement comme la somme des primes des toutes les garanties proposées au contrat :

$$Prime\ contrat\ individuelle = P_0^j = \sum_{i=1}^{K} P_i^j$$

Par exemple, nous cherchons à calculer la prime pure d'un contrat couvrant à 100% des frais réels de soins santé pour une femme de 35 ans. Le contrat comporte les garanties suivantes :

- Dentaire
- Optique
- Appareil
- Hospitalisation
- La garantie médecine courante comportant:
  -Consultation et visite

  -Pharmacie
  -Auxiliaires médicaux
  -Examen Laboratoire
  -Radiologie
- Maternité

Nous établissons la prime de chacune des garanties du contrat :

femme 35 ans	p^j	$E(C)$	$p^j E(C)$
Optique	**0,187794**	**430,2567**	**80,79959**
Dentaire	**0,343552**	**376,4066**	**129,3152**
Consultation et visite	**0,719825**	**306,4984**	**220,6254**
Pharmacie	**0,626978**	**208,4307**	**130,6815**
Auxiliaires	**0,179331**	**204,585**	**36,68846**
Analyses médicales	**0,487087**	**137,0895**	**66,7745**
Electroradiologie	**0,312023**	**135,6853**	**42,33695**
Hospitalisation	**0,0627**	**3772,766**	**236,5506**
Appareillage	**0,031482**	**149,7379**	**4,714076**
Maternité	**0,093215**	**2789,316**	**260,0053**

La prime pure de ce contrat est donc la somme des toutes les primes pures des garanties qui le composent :$P_0 = 80{,}79959 + \cdots + 260{,}0053$ =**1208,492**

b) Le passage à la prime collective

Les parties précédentes décrivent la détermination de la prime pure d'un assuré (ou bénéficiaire) pris individuellement. La prime du groupe est donc alors la somme de la somme de l'ensemble de celles de l'ensemble des individus qui le composent.

En prévoyance collective, la cotisation demandée (et donc la prime pure) à chaque salarié est la même pour tous, quels que soient le sexe, l'âge ou le nombre d'ayant- droits du salarié.

Disposant de la démographie de l'entreprise adhérent à un contrat de frais soins santé, nous pourrions donc en déduire le montant que doivent cotiser chacun de ses salariés (les cotisants).

En effet si on désigne par N le nombre de salariés de l'entreprise, par n le nombre de bénéficiaires du contrat, par P^j la prime pure individuelle que doivent payer l'individu j en fonction ses propres caractéristiques.(j varie entre 1 et n).

La prime pure, notée P, attribuée à chacun des cotisants sera donc déterminée par la formule suivante :

$$P = \frac{\sum_{j=1}^{n} P^j}{N}$$

Cette prime, quoi qu'elle apparaisse relativement chère pour les jeunes salariés, permet donc une solidarité inter génération de l'entreprise adhérent.

II.5 .6 Coefficients correcteurs en fonction de la zone géographique

Les frais médicaux varient d'un pays à l'autre. Pour certain type d'actes la différence est très remarquée, c'est le cas des honoraires de médecin généraliste en Angleterre qui sont beaucoup plus onéreux que ceux pratiqués dans les autre pays. Ce qui indique la prise en compte de ce facteur dans l'élaboration des tarifs pour ces types d'actes.

Le volume de donnés à notre disposition ne nous permet pas une analyse détaillée de la loi de coût pour chacune de garantie et pour chaque pays. On peut, par ailleurs, regrouper les pays pour en constituer les différentes zones graphiques de niveaux de coût médical différent. C'est ce que fait Welcare pour distinguer ses tarifs en fonctions de zone géographique. Deux zones principales sont envisagées :

-La zone B constituée par les pays dont les coûts médicaux sont beaucoup plus élevés par rapport aux autres : Les Etas Unis(154), Le Canada (153), Le Japon(57), Le Royaume Unis(30).

-La zone A regroupe les autres pays.

Le coefficient correctif de la prime pure appliquée à une zone géographique pourrait être considéré comme le rapport du frais moyen de cette zone et la moyenne générale.

Pour chaque garantie la significativité de l'influence du facteur zone géographique peut être traitée par la méthode d'analyse de la variance à un facteur dans le cas où la variable réponse suive une loi normale. Dans les autres cas où cette loi n'est pas connue à priori, les autres tests non paramétriques pourraient être envisagés afin de comparer les différentes distributions.

Nous citons dans le cadre de ce mémoire les deux tests dont le principe s'approche l'un de l'autre : le test de Wilcoxon e le test de Mann-Whiney.

Principe des tests de Wilcoxon et Mann-Whitney

Nous souhaitons tester s'il y a un effet du facteur zone géographique (A,B) sur le niveau du frais réel d'une garantie. Nous considérons deux échantillons $(x_1, x_2, \dots . x_{n_x})$ et $(y_1, y_2, \dots . y_{n_y})$ des données des frais réels enregistrées respectivement pour les deux zone A et B.

Le premier échantillon issu de la loi P_x , le deuxième issu de la loi P_y. Les deux lois P_x et P_y sont inconnues. Si le facteur zone n'a pas d'effet (hypothèse nulle) , les deux lois sont identiques

$$H_0\colon\ P_x = P_y$$

L'idée du test de Wilcoxon est la suivante : si on rassemble les deux échantillons, et que l'on range les valeurs dans l'ordre, l'alternance des x_i et y_i devrait être assez régulière. On aura des doutes sur H_0 si les y_i sont plutôt grands que lesx_i, ou plus petites, ou plus fréquents dans une certaine plage de valeurs. On commence donc par écrire les statistiques d'ordre de l'échantillon global. On obtient ainsi une suite mélangée des x_i et des y_i .On calcul ensuite la somme des rangs des x_i notée W_x (c'est la statistique de Wilcoxon)

$$W_x = r_1 + r_2 + \cdots + r_{n_x} = \sum_{i=1}^{n_x} r_i$$

Où les r_i sont respectivement les rangs des x_i et vérifient :

$$1 < r_1 < r_2 < \cdots r_{n_x} < n_x + n_y$$

Sous l'hypothèse H_0 la loi de W_x se calcule facilement : sur un échantillon de taille $n_x + n_y$, il y a $(n_x + n_y)$ rangs possibles. Le nombre de rangements possibles des x_i est $\binom{n_x+n_y}{n_x}$, et ils sont équiprobables. Les valeurs minimal et maximal que peut prendre W_x sont respectivement $\binom{n_x}{2}$ et $\binom{n_x+n_y}{2} - \binom{n_y}{2}$ .On a donc pour tout m entier comprise entre ces deux valeurs :

$$\Pr(W_x = k_m | H_0) = \frac{k_m}{\binom{n_x+n_y}{n_x}}$$

où k_m désigne le nombre de n_x -uplets d'entiers $r_1, r_2, \dots r_{n_x}$ dont la somme vaut m.

Donc il est possible de tabuler numériquement la loi de W_x , pour des valeurs raisonnables de n_x et n_y. Pour les grandes valeurs, on dispose du résultat de l'approximation normale suivant :

$$\frac{W_x - n_x(n_x + n_y + 1)/2}{\sqrt{n_y n_x (n_x + n_y + 1)/12}}$$

converge vers la loi normale standard $N(0,1)$.

Le test de Mann-Whiney provient d'une autre approche mais il est équivalent au précédent. On aurait pu pour cela compter le nombre de couples (x_i, y_i) pour les quelles $x_i > y_i$ (avec choix aléatoire en cas d'ex-équo) :

$$U = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} 1_{x_i > y_i}$$

On vérifie que les deux statistiques U et W_x sont liées par la relation suivante :

$$U = W_x - \frac{n_x(n_x + 1)}{2} \ .$$

Exemple : Application au cas de la garantie consultation et visite.

Le test Mann-Whiney sur les frais réels des actes de type consultation nous fournit les résultats suivants :

Statistiques descriptives :

Echantillon	Fréquence	Moyenne	Variance	Ecart-type	Ecart-type de la moyenne
ConsB	**462**	**531,71**	**378527,23**	**615,24**	**28,624**
ConsA	**1998**	**232,43**	**262239,01**	**512,03**	**11,456**

Test de Mann-Whitney / test bilatéral :

U	**661395**
U (espérance)	**461538**
U (variance)	**189304689**
Z (valeur observée)	**14,526**
Z (valeur critique)	**1,96**
p-value bilatérale	**< 0,0001**
Alpha	**0,05**

On voit que la probabilité qui indique que l'hypothèse nulle soit vraie (p_value) est très basse, on peut rejeter l'hypothèse nulle avec très peu de risque. La différence entre les échantillons est significative. Autrement dit le frais réel pour les actes du type consultation et visite varie statistiquement de façon significative selon les deux zones géographiques étudiées.

Comme indiqué plus haut on pourrait utiliser les coefficients correctifs de tarif (pour les actes de type consultation courante) comme suit :

Le coefficient de la zone A : $C_A = 232{,}437/\ 288{,}644$ =0,8053

Le coefficient de la zone B : $C_B = 531{,}718/\ 288{,}644$ = 1,842

II.6 Conclusion

Dans cette partie du mémoire nous avons donc développé l'approche probabilité de consommer-montant du coût afin de construire une base de tarification en frais de soins santé pour l'assurance des expatriés. Nous avons traités le cas où les remboursements de l'assureur sont définis en fonctions des frais médicaux réels.

Cette modélisation est aussi adaptée si nous souhaitons estimer la prime pure pour chaque garantie en présence des remboursements des régimes de base (CFE). La procédure étant la même que précédemment, mais nous analysons cette fois-ci la probabilité de survenance de sinistre et la loi du montant de sinistres une fois qu'ils surviennent. Le sinistre se définit alors comme le montant qui reste à la charge de l'assureur et non plus comme les frais réels engagés par l'assuré.

Le modèle logistique nous montre le rôle des deux variables explicatives âge et sexe dans le comportement de consommation des frais médicaux des bénéficiaires.

La souplesse du modèle se trouve dans le fait qu'il pourrait être extensif pour rendre en compte l'effet d'autres variables explicatives (lieu de résidence de l'assuré par exemple) au fur à mesure que notre base de donné se complète.

III. La Tarification des garanties de décès et de l'invalidité selon l'approche markovienne.

L'élaboration d'un tarif s'appuie sur la prévision de flux futurs aléatoires, pour lesquels sont généralement étudiés les probabilités de survenance d'une part (renseignant la fréquence des sinistres) et les montants engagés d'autre part (renseignant les montants des sinistres). Contrairement à l'assurance de frais soins santé dans lequel les montants de sinistres relèvent un caractère aléatoire, les montants de prestation (capital décès, rente d'invalidité, l'indemnité de l'incapacité…) définis dans les produits couvrant les risques de décès, de l'invalidité et de l'incapacité sont en général déterministes. Ils sont définis selon la rémunération de l'assuré. Dans un contrat standard dérivé de produit Planet Prévoyance proposé par Welcare, les prestations sont déterminés en fonction d'un montant appelé le traitement de base dont la définition sera rappelée plus loin (dans la description du produit). L'engagement de l'assureur vis-à-vis de l'assuré (payer les prestations), mais aussi de l'assuré à son égard (payer les primes) sont conditionnés par les différents états (actif, invalide, décès…) de l'assuré au cours de la vie du contrat d'assurance. L'aléa réside donc notamment dans le passage par ces différents états.

L'objet de cette partie est de présenter l'approche markovienne modélisant les trajectoires des assurés en fonction de leur âge. Nous verrons qu'elle apparaît comme une méthode appropriée pour la procédure d'évaluation des engagements pris par l'assureur tant sur le plan de la tarification que sur le plan du provisionnement. En l'absence de données exploitables, les procédures de l'estimation des paramètres du modèle associés à la population des expatriés ne sont pas effectuées dans le cadre de ce mémoire. A titre d'illustration numérique nous utilisons la table de mortalité TF02 pour donner en exemple le calcul d'une prime de la garantie d'un capital décès.

Nous commençons cette partie par une petite présentation du produit Planet Prévoyance

III.1 Présentation du produit Planet Prévoyance

Le produit est destiné aux salariés expatriés des entreprises. Les contrats dérivés de ce produit sont des contrats collectifs couvrant les risques de décès, de l'incapacité et de l'invalidité. L'entreprise souscriptrice choisit pour chaque assuré, au moyen de la déclaration d'affiliation le traitement de base qui sera appliqué. Les prestations sont définies en pourcentage de cette somme. Celle-ci doit être comprise entre 10000 et 150000 euros, par palier de 5000 euros, et est en général fonction du niveau de salaire.

- ***La garantie décès***

Cette garantie constitue la base minimum du contrat et doit obligatoirement être souscrite. Elle a pour objet de garantir le paiement d'un capital aux bénéficiaires désignés, généralement le conjoint ou les enfants de l'assuré. Le montant du capital versé est égal à 300% du traitement de base. Cette garantie est appliquée en cas de décès de l'assuré, sous réserve des risques exclus prévus dans le contrat (suicide de l'assuré, risques aériens, pratique de sport risqué…).

En plus du capital décès certains contrats prévoient des prestations sous forme de rente conjoint ou rente éducation. Par exemple dans le cas de rente éducation, le versement à chaque enfant restant à charge d'une rente éducation annuelle égale à 15% du traitement de base jusqu'à 18 ans, 20% entre 19 à 25 ans. L'objet des rentes éducations est de fournir un niveau de ressources qui permet l'entretien de l'enfant et notamment la poursuite de ses études.

- ***La garantie incapacité temporaire du travail***

Cette garantie a pour objet de permettre le versement de prestations sous forme d'indemnités journalières à l'assuré qui se trouve en situation d'incapacité Temporaire de travail. Le montant de ces indemnités égales à 90% du traitement de base divisé par 360.

Le versement des prestations intervient après application d'un délai de franchise (30 jours, 60 jours, 90 jours) choisi par le souscripteur, au moyen du bulletin d'adhésion. L'assureur ne verse donc l'indemnité journalière que si la durée totale de l'incapacité de travail, sans interruption, dépasse la période de franchise, cette dernière n'étant pas indemnisée.

- ***La garantie d'invalidité permanente***

Cette garantie a pour objet de permettre le versement d'une rente d'invalidité à l'Assuré qui se trouve en situation d'invalidité permanente reconnue par le Médecin Conseil de l'Assureur. Cette rente d'invalidité se substitue aux éventuelles indemnités journalières perçues jusqu'alors. Le montant annuel de la rente varie selon le classement en $1^{ère}$, $2^{ème}$ ou $3^{ème}$ catégorie d'invalidité, tells que définies dans le code de la Sécurité sociale . Ce montant est égal à 90% du traitement de base si l'assuré est classé en $2^{ème}$ ou $3^{ème}$ catégorie, à 60% du traitement de base si l'assuré est classé en $1^{ère}$ catégorie.

- ***Condition d'admission et d'adhésion***

Sont admissibles à l'assurance, les salariés résidant dans le cadre de leur activité professionnelle, hors du pays de domiciliation du Souscripteur, présents au travail et âgés de moins de 65 ans. Ces salariés doivent remplir une déclaration d'affiliation accompagnée d'un questionnaire de santé, ainsi que la déclaration de bénéficiaire du capital décès, dans laquelle il précise les bénéficiaires de ce capital.

Début des garanties

La période d'assurance est propre à chaque assuré, elle débute à la date demandée sur la déclaration d'affiliation.

Fin des garanties

Sauf en cas de réticence, omission ou fausse déclaration faite de mauvais foi, l'assuré une fois admis, ne peut être exclu de l'assurance contre son gré tant qu'il fait partie des effectifs assurables du souscripteur et à condition que la cotisation ait été encaissée :

-en cas de non paiement de la cotisation

- si l'Assuré ne fait plus partie de l'effectif assurable ou en cas de départ de l'Entreprise pour quelque cause que ce soit (démission, licenciement, retraite…).

-au 65ème anniversaire de l'assuré

Cotisations

Les cotisations dépendent de l'âge de l'assuré lors de l'adhésion et du montant de capital choisi. Elles peuvent être revues périodiquement, notamment en fonction des résultats du contrat et du changement de réglementation. Le changement de cotisations doit être signifié au Souscripteur par lettre recommandée avec accusé de réception.

III.2 Eléments de la modélisation markovienne

(Cette partie s'inspire du livre Actuariat des assurances de personnes. M Denuit et C. Robert 2007)

Processus stochastiques décrivant l'histoire des assurés.

Au cours de la vie, un assuré modélisé s'occupe des différents états (actif, invalide, décédé…). L'histoire d'un assuré **d'âge x** est décrite par le processus stochastique $\chi = \{X_t, t \geq 0\}$ à valeur dans un espace d'états de cardinal fini $= \{e_0, e_1, \dots, e_m\}$. Par exemple dans l'assurance de décès: $E = \{en\ vie\ , décédé\ \} = \{e_0, e_1\}$, et dans l'assurance d'invalidité $E = \{actif, invalide, décédé\} = \{e_0, e_1, e_2\}$.

Probabilité de transition : $\mathrm{p_{ij}(s,t) = Pr\big[X_t = e_j \big| X_s = e_i\big] \equiv {}_tp^{ij}_{x+s}} \in [0,1]$

La probabilité du passage de l'état e_i vers l'état e_j du processus X_t pendant l'intervalle du temps [s,t] . Il s'agit de la probabilité d'un assuré d'âge x se trouve dans l'état e_j à l'âge x+t sachant qu'il soit dans l'état e_i à l'âge x+s.

Il est clair qu'on a : $\mathrm{p_{ij}(s,s) = 0}$ pour i≠j et $\mathrm{p_{ij}(s,s) = 1}$ sinon. Ce qui revient au fait qu'il n'y aurait pas de changement d'état si le temps n'évoluait pas.

Propriété importance du processus Markov

Les processus Markoviens vérifient la propriété suivante :

Quelque soit l'entier positif n , quels que soient les instants $0 \leq t_0 < t_1 \dots < t_n$ et les états $e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$, l'égalité

$$\Pr\left[X_{t_n} = e_{i_n} \middle| X_{t_{n-1}} = e_{i_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_0} = e_{i_0}\right] = \Pr\left[X_{t_n} = e_{i_n} \middle| X_{t_{n-1}} = e_{i_{n-1}}\right]$$

est satisfaite. Il s'agit d'une propriété d'oubli qui peut s'interpréter intuitivement comme suit : « le futur (t_n) ne dépend pas du passé (t_1 , t_2 ,.., t_{n-2}) si l'on connait le présent (t_{n-1}) ».

Disposons de cette propriété, le calcul des probabilités des événements est très aisé pour un processus Markov. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\Pr&\left[X_{t_n} = e_{i_n}, X_{t_{n-1}} = e_{i_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_0} = e_{i_0}\right] \\ &= \Pr\left[X_{t_n} = e_{i_n} | X_{t_{n-1}} = e_{i_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_0} = e_{i_0}\right] \times \dots. \\ &\times \Pr\left[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_0} = e_{i_0}\right] \times \Pr\left[X_{t_1} = e_{i_1} | X_{t_0} = e_{i_0}\right] \times \Pr\,[X_{t_0} \\ &= e_{i_0}]\end{aligned}$$

en appliquant la propriété de Markov on obtient :

$$\begin{aligned}\Pr = &\left[X_{t_n} = e_{i_n}, X_{t_{n-1}} = e_{i_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = e_{i_1}, X_{t_0} = e_{i_0}\right] \\ &= \Pr\left[X_{t_n} = e_{i_n} \middle| X_{t_{n-1}} = e_{i_{n-1}}\right] \times \dots.\times \Pr\left[X_{t_2} = e_{i_2} | X_{t_1} = e_{i_1}\right] \\ &\times \Pr\left[X_{t_1} = e_{i_1} | X_{t_0} = e_{i_0}\right] \times \Pr\,[X_{t_0} = e_{i_0}]\end{aligned}$$

Cette dernière relation spécifie la loi des marges d'un processus de Markov.

Matrice de transition

On définit la matrice de transition entre les instants s et t, notée $P(s,t)$, comme la matrice de dimension (m+1)×(m+1) dont l'élément ij est $p_{ij}(s,t)$, ie :

$$P(s,t) = \begin{pmatrix} p_{00}(s,t) & p_{01}(s,t) & \dots & p_{0m}(s,t) \\ p_{10}(s,t) & p_{11}(s,t) & \dots & p_{1m}(s,t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0}(s,t) & p_{m1}(s,t) & \dots & p_{mm}(s,t) \end{pmatrix}$$

Il s'agit bien d'une matrice stochastique, i.e d'une matrice dont tous les éléments sont positifs et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

En effet quelque soit l'état e_i et les instants $0 \leq s \leq t$, on a :

$$\sum_{j=0}^{m} p_{ij}(s,t) = 1$$

ce qui se traduit littéralement de manière suivante « quel que soi l'état e_i occupé à l'instant s , le processus se trouve nécessairement dans un des états à l'instant t » .

Equation de Chapman-Kolmogorov

L'équation de Chapman-Kolmogorov exprime les probabilités de transition entre les instants s et t en fonction des probabilités de transition entre s et u et entre u et t . C'est-à-dire pour $0 \leq s \leq u \leq t$, on a

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k=0}^{m} p_{ik}(s,u)\, p_{kj}(u,t)$$

Ceci provient de

$$p_{ij}(s,t) = \Pr\left[X_t = e_j \middle| X_s = e_i\right] = \sum_{k=0}^{m} \Pr\left[X_t = e_j, X_u = e_k \middle| X_s = e_i\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \Pr\left[X_t = e_j \middle| X_u = e_k, X_s = e_j\right] \Pr[X_u = e_k | X_s = e_i]$$

qui donne en vertu de la propriété de Markov

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k=0}^{m} \Pr\left[X_t = e_j \middle| X_u = e_k\right] p_{ik}(s,u) = \sum_{k=0}^{m} p_{ik}(s,u)\, p_{kj}(u,t)$$

comme annoncé.

Sous forme matricielle, les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent simplement

$$P(s,t) = P(s,u)P(u,t), \quad 0 \leq s \leq u \leq t$$

En effet, on voit facilement que les éléments $p_{ij}(s,t)$ de $P(s,t)$ donnés par la formule ci-dessus n'est autre que la formule donnant l'élément ij du résultat du produit des matrices $P(s,u)$ et $P(u,t)$.

Probabilité de maintien : $p_i^{(0)}(s,t) = \Pr[X_\theta = e_i, \text{pour tout } s \leq \theta \leq t\ ] \equiv {}_{t-s}p_x^{\overline{ii}}$

C'est la probabilité que le processus X_t reste dans l'état e_i (sans le quitter) pendant l'intervalle [s,t]

Taux instantané de transition

Le taux instantané de e_i vers e_j à l'instant t :

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}[X_{t+\Delta t} = e_j | X_t = e_i]}{\Delta t} = \frac{\partial P_{ij}(t, t+h)}{\partial h}\Big|_{h=0}$$

A l'aide d'un développement de Taylor : $P_{ij}(t, t+\Delta t) = \mu_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t) \approx \mu_{ij}(t)\Delta t$ pour les par du temps Δt suffisamment petit.

Taux instantané de sortie d'un état e_i à l'instant t noté $\mu_{i.}(t)$ est défini comme suit :

$$\mu_{i.}(t) = \sum_{j=0,j\neq i}^{m} \mu_{ij}(t) = -\frac{\partial P_{ii}(t,t+h)}{\partial h}|_{h=0}$$

Equations de Kolmogorov :

La théorie de processus markovien nous fournit l'équation suivante connue sous le nom de l'équation de Kolmogorov

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t)M(t)$$

où $P(s,t)$ est la matrice de transition entre les deux instants s et t, décrite plus haute $P(s,t) = (p_{ij}(s,t))_{i,j\in[0,m]}$ et $M(t)$ est la matrice de taille (m+1)×(m+1) dont les éléments hors diagonales sont des taux de transition $\mu_{ij}(t)$, et les éléments diagonales sont les $-\mu_{i.}(t)$ (donc la somme des éléments de chaque ligne de $M(t)$ fait 1) Cette matrice est appelée le générateur infinitésimal du processus de Markov.

$$M(t) = \begin{pmatrix} \mu_{0.}(t) & \mu_{01}(t) & \dots & \mu_{0m}(t) \\ \mu_{10}(t) & \mu_{1.}(t) & \dots & \mu_{1m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m0}(t) & \mu_{m1}(t) & \dots & \mu_{m.}(t) \end{pmatrix}$$

Cette relation nous permet d'exprimer des probabilités de transition en fonction de taux instantané de transition.

On dispose en plus du lien entre les taux instantanés de sortie et les probabilités de maintiens dans les états e_i : $\mathbb{P}[X_\theta = e_i, \text{pour tout } s \leq \theta \leq t\ ] = P_i^{(0)}(s,t) = \exp(-\int_s^t \mu_{i.}(t)dt)$

Hypothèse de taux de transition constant sur une période (année) et l'homogénéité locale du processus markovien

Un processus markovien est dit homogène lorsque, quel que soient les états e_i, e_j , et quels que soient les instants s et t telle que $t \geq s$ ... ≥ 0, l'égalité

$$p_{ij}(s,t) = \Pr[X_t = e_j | X_s = e_i] = \Pr[X_{t-s} = e_j | X_0 = e_i]$$

est satisfaite. Les probabilités de transition de e_i vers e_j dépendent donc de e_i, e_j et de la longueur de l'intervalle du temps [s, t] ,ie t-s , mais pas de s ou t. De ce fait on pourrait poser

$p_{ij}(s,t) = \widetilde{p_{ij}}(t-s)$ afin de tenir compte que les probabilités de transition de e_i vers e_j entre les deux instants s et t ne dépendent que de la durée t-s séparant les deux instants.

Nous montrons que, pour un processus homogène, les taux instantanés de transition entre les états sont constants. Ceci s'obtient facilement puisque

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{p_{ij}}(h)}{h}$$

ne dépende pas de l'instant t.

De nombreux résultats intéressants et relativement aisés à établir existent pour de tels processus markoviens. Cependant, l'hypothèse de l'homogénéité est le plus souvent déraisonnable en science actuarielle (elle conduirait par exemple en assurance vie à des taux de mortalité indépendante de l'âge). Néanmoins, l'homogénéité locale (annuelle) fournit le plus souvent une bonne approximation de la réalité et permet des développements techniques intéressants. C'est cette hypothèse de l'homogénéité locale que l'utilise largement les actuaires dans les calculs actuariels classiques de l'assurance vie. (Ce qui se montre par l'interpolation linéaire des probabilités de décès dans les tables de mortalité.)

Nous supposons que l'hypothèse sur l'homogénéité locale (annuelle) du processus markovien décrivant le parcours de vie des assurés est vérifiée. Cette hypothèse se traduit par le fait que les taux de transition entre les états du processus varient en fonction de l'âge, mais le même taux s'applique aux individus de même âge en années révolues. Formellement, les taux instantanés de transition sont supposés constants par morceaux, ie : quels que soient les états e_i, e_j on a , pour tout $0 \leq t \leq 1)$

$$\mu_{ij}(k+t) = \mu_{ij}(k)$$

et k en entier appartenant à l'ensemble {1, 2,…w-x} (w étant l'âge ultime qu'un individu peut atteindre)

Dans ces cas la solution de l'équation différentielle de Kolmogorov, et donc les expressions des probabilités de transitions s'obtient aisément. En effet nous savons que pour $0 = s \leq t \leq 1$ la matrice $M(t) = M$ ne dépend pas de t , $P(0,0) = Id$ (car $p_{ij}(s,s) = 0$

Pour i≠j et $p_{ij}(s,s) = 1$) l'équation de Kolmogorov devient $\frac{\partial}{\partial t}P(0,t) = P(0,t)$
 avec la condition initiale : $P(0,0) = Id$

La solution de l'équation est donc

$$P(0,t) = \exp(Mt) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(Mt)^k$$

sous réserve que la série soit convergente.

On voit que si on dispose des courbes de taux de transition, les probabilités de transition seront déduites à travers les relations entre eux, ou de façon réciproque, les taux de transition peuvent s'obtenir à partir des probabilités de transition.

Ce sont des facteurs qui jouent le rôle crucial dans la détermination de la loi des processus markovien et donc la tarification (et aussi provisionnement) des contrats dans lesquels les assurées couverts sont supposés suivre un processus markovien.

Des travaux actuariels ont contribué au sujet de l'estimation des ces facteurs. Nous pouvons citer l'article de D. RULLIER et D.SERANT qui aborde le problème de l'estimation de probabilités de transition. Pour les taux de transition instantanés, des méthodes de l'estimation sont présentés dans le l'ouvrage « Actuariat des assurances de personnes « de M.DENUIT et C.ROBERT

Jusqu'à aujourd'hui, le volume d'observations sur les expatriés de Welcare concernant les garanties décès, incapacité et invalidité n'est pas de taille suffisant pour une mise en œuvre pratique des procédures d'estimation des probabilités de transition des processus markoviens associés.

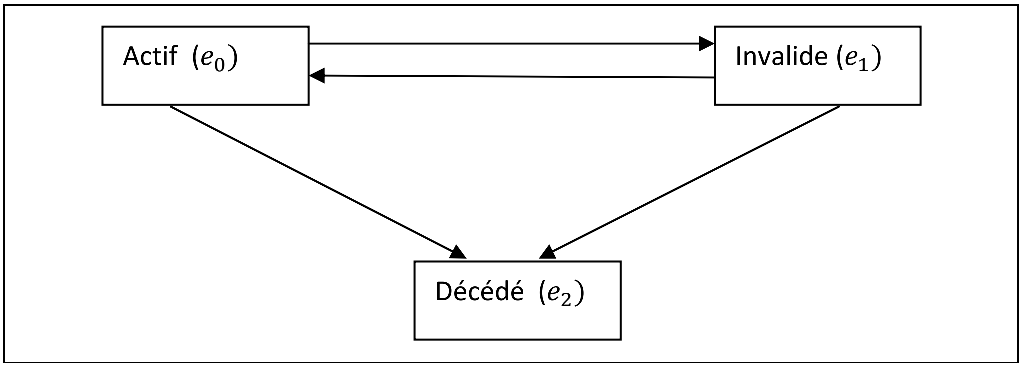
Nous nous restreignions donc, aujourd'hui, à montrer comment les calculs des primes pures s'établissent, une fois que les probabilités de transition, sont estimées.

III.3 Exemples d'application à la tarification

La prime pure est évaluée comme étant la contrepartie non risquée que l'assureur est prêt à recevoir en échange de la prise en charge du risque. Elle est donc déterminée par le principe d'équivalence qui égalise les engagements de l'assureur et l'assuré.

III.3 .1 Rente d'invalidité

En assurance d'invalidité, On suppose que le parcours d'un assuré d'âge x , au cours de la vie du contrat, est modélisé par un processus de Markov représenté par le schéma suivant :



On souhaite trouver une prime pure d'une garantie permettant un versement de 1 euros tous les ans dans le cas où l'assuré d'âge x se trouve dans l'état invalide et avant l'âge de la retraite (w) sachant qu'il est en état actif au moment de la souscription du contrat.

Pour l'assuré, il s'engage à payer une prime pure annuelle constante notée PP tant qu'il se trouve dans l' état actif.

Posons $v = 1/(1+r)$ le facteur d'actualisation. Le paiement aléatoire actualisé engagé par l'assureur a pour expression :

$$W^x = \sum_{m=0}^{w-x} \mathbb{1}_{\{X_m=e_1|X_0=e_0\}} v^n \sum_{m=n}^{w-x} \mathbb{1}_{\{X_n=e_1|X_m=e_1\}}$$

Ce qui implique :

$$\text{VAP(Assureur)} = E(W^x) = \sum_{m=0}^{w-x} {}_{\mathrm{m}}\mathrm{p}_{\mathrm{x}}^{01} v^n \sum_{m=n}^{w-x} {}_{\mathrm{n}}\mathrm{p}_{\mathrm{x+m}}^{11}$$

Alors que la valeur actuelle aléatoire des cotisations de l'assuré :

$$C^x = PP \sum_{m=0}^{w-x} \mathbb{1}_{\{X_m=e_0|X_0=e_0\}} v^m$$

Donc : VAP(Assuré) = $E(C^x) = PP \sum_{m=0}^{w-x} {}_{\mathrm{m}}\mathrm{p}_{\mathrm{x}}^{00} v^m$

On en déduit alors la prime pure associée par la formule suivante :

$$PP = \frac{\sum_{m=0}^{w-x} {}_{\mathrm{m}}\mathrm{p}_{\mathrm{x}}^{01} v^n \sum_{m=n}^{w-x} {}_{\mathrm{n}}\mathrm{p}_{\mathrm{x+m}}^{11}}{\sum_{m=0}^{w-x} {}_{\mathrm{m}}\mathrm{p}_{\mathrm{x}}^{00} v^m}$$

III.3.2 Capital décès

La garantie de décès du produit Planet Prévoyance de Welcare propose, en cas de décès de l'assuré, un versement d'un capital d'un montant qui est égale à 300% du traitement de base.

Considérons le cas d'un assuré d'âge x ans, qui choisi K euros, le traitement de base au moment de la souscription. L'assuré verse les cotisations annuelles.

L'assuré est supposé suivre le processus markovien à deux états $\{en\ vie\ , décédé\ \} = \{e_0, e_1\}$.

On suppose en plus que les probabilités de transition et de maintien (ie les probabilités de décès et de survie) à chaque âge sont estimées selon la table TF00-02. Pour chaque âge $k \in \{0, w\}$ on dispose donc les matrices de transitions annuelles :

$$P(k,k+1) = \begin{pmatrix} {}_1\mathrm{p}_\mathrm{k}^{00} & {}_1\mathrm{p}_\mathrm{k}^{01} \\ {}_1\mathrm{p}_\mathrm{k}^{10} & {}_1\mathrm{p}_\mathrm{k}^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & q_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec les notations classiques de l'assurance vie :

p_k : la probabilité d'un individus d'âge k survie un an après

$q_k = 1 - p_k$: la probabilité de décédé pendant l'année.

Ainsi pour un individu d'âge x les matrices de transitions annuelles $P_x(k,k+1)$ pour $0 \leq k \leq w - x$ sont :

$$P_x(k,k+1) = P(x+k, x+k+1)$$

L'équation de Chapman-Kolmogorov indique la relation pluriannuelle suivante :

$$P_x(0,k) = P_x(0,1)P_x(1,2) \dots P_x(k-1,k)$$

On note toujours PP la prime pure individuelle que doit cotiser l'assuré annuellement en contre partie de la garantie proposée par l'assureur .

Le montant aléatoire actualisé que l'assureur s'engage à verser s'écrit :

$$W^x = 3K \sum_{m=0}^{w-x} \mathbb{1}_{\{X_m = e_1 | X_0 = e_0\}} \frac{1}{(1+r)^m}$$

où r est le taux d'actualisation

Comme

$$E(\mathbb{1}_{\{X_m = e_1 | X_0 = e_0\}}) = \Pr(\{X_m = e_1 | X_0 = e_0\}) = P_{01}(0,m) = {}_m q_x$$

Ce qui implique sa valeur actuelle probable :

$$VAP(Assueur) = E(W^x) = 3K \sum_{m=0}^{w-x} {}_m q_x v^m \text{ avec } v = \frac{1}{(1+r)}$$

Alors que la somme aléatoire actualisée des cotisations payées par l'assuré a pour l'expression :

$$C^x = PP \sum_{m=0}^{w-x} \mathbb{1}_{\{X_m = e_0 | X_0 = e_0\}} \frac{1}{(1+r)^m}$$

Donc : $VAP(Assuré) = E(C^x) = PP \sum_{m=0}^{w-x} {}_m p_x v^m$

La prime pure s'évalue selon le principe d'équivalence : $VAP(Assuré) = VAP(Assueur)$

Finalement on trouve :

$$PP = \frac{3K\sum_{m=0}^{w-x} {}_m q_x v^m}{\sum_{m=0}^{w-x} {}_m p_x v^m}$$

Pour x = 35, et r = 3% et w =65 K = 10000 la PP s'élève à : 74,2901 euros.

III.4 Conclusion

Faute de donnés exploitables, cette partie du mémoire se restreint à une conception d'une modélisation appropriée permettant de l'exprimer des primes pures correspondantes à des garanties proposées dans les contrats dérivés des produits Plannet Prévoyance.

Nous avons vu que l'approche markovienne se présente comme un cadre théorique souple et efficace à développer et à compléter une fois que le volume de données le permette. Elle répond à l'objectif d'une conception des méthodes d'évaluation des garanties de décès et d'invalidité destinées à protéger les expatriés. Les processus markoviens pourront aboutir au développement des études actuarielles non seulement en assurance des expatriés mais aussi en autres types d'assurance des personnes. Ceci est bien montré dans l'ouvrage intéressant de M.Denuit et C.ROBERT.

En plus, dans la partie suivante du mémoire, nous montrons l'utilité de cette modélisation sur le plan de provisionnement.

Enfin nous remarquons que malgré tout l'intérêt qu'apporte cette modélisation, l'hypothèse de Markov ne permet pas de prendre en compte l'influence du temps passé dans un état (incapable, invalide) sur le futur du processus, ce qui s'avère pourtant parfois nécessaire pour des plus fines évaluations des risques. Ceci impliquerait aux études des modèles plus approfondis (Le modèle des processus semi-markovien).

IV .L'évaluation des provisions pour sinistres en cours et sinistres tardifs

Les provisions techniques constituent le poste important dans le bilan d'une compagnie exerçant les activités de prévoyance, et en particulier de l'assurance des expatriés.

Ainsi, leur juste estimation constitue un enjeu majeur. A cette fin, plusieurs méthodes déterministes et stochastiques ont été élaborées. Bien que les provisions déterministes donnent une réponse sur l'espérance de l'engagement futur de l'assureur, elle n'offre aucune information sur la volatilité de cette prévision et sa distribution. De plus, les normes de solvabilité II imposent le calcul de ce type d'indicateur pour bien évaluer le risque lié aux provisions calculées.

Dans cette partie du mémoire, notre intérêt est porté sur l'évaluation des provisions techniques en assurance des expatriés : plus précisément sur les provisions pour sinistres en cours, une sous-catégorie des provisions mathématiques et la provision pour les tardifs. Il s'agit une proposition de méthodes de base à partir desquelles WelCare peut développer sa procédure de provisionnement.

Nous visons à une construction de la fonction de distribution empirique des variables aléatoires liés à ces deux provisions à partir des simulations stochastiques. Nous avons vu, dans la deuxième partie du mémoire que la fonction de distribution empirique est « assez proche » de la vraie distribution dès que le nombre d'observations (simulations) est suffisamment grand. Nous nous servons de ces distributions pour en déduire la VaR (Value at Risk). Cette dernière est considérée comme un indicateur de risque approprié pour quantifier les niveaux de capital de solvabilité requis (SCR) associés à ces deux types de provisions.

L'implémentation des algorithmes de simulation et les graphiques représentatifs s'effectuent à l'aide du logiciel MatLab. Les données utilisées sont fictives et à titre illustratif.

Avant d'aborder les méthodes techniques, nous voudrions présenter quelques notions de solvabilité II.

V.1 Généralité sur les notions et principes de Solvabilité II

La réforme de la réglementation européenne sur les nouvelles normes de solvabilité est très nettement engagée, dans le cadre global de Solvency II .Les travaux d'analyses relatifs à cette réforme sont assurés au sein du Ceiops, comité européen réunissant les autorités de contrôles des pays membre.

Les objectifs de la mise en place de Solvency II sont les suivants :

- Protéger les assurés,
- Uniformiser au niveau européen le système de solvabilité,

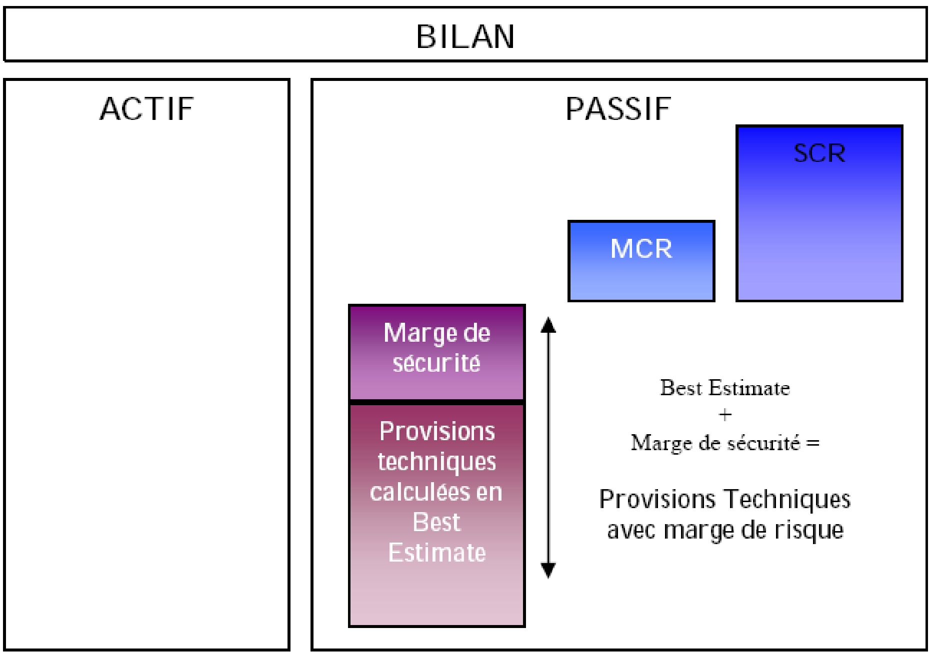
- Renforcer le contrôle interne des organismes assureurs,
- Encourager le contrôle de tous les risques auxquels sont soumis les organismes assureurs,
- Promouvoir l'utilisation des modèles internes pour l'évaluation des besoins en fonds propres,
- Donner aux autorités les moyens d'identifier les entreprises en risque financier ou organisationnel important.

V.1.1 Principe sur l'évaluation de l'actif et passif

Ils doivent être évalués en valeur proche du marché. Pour les actifs négociables (espèces, emprunts d'états, actions cotées,…), on se réfère aux prix effectifs pratiqués sur le marché. Si aucun prix de marché n'est disponible, l'évaluation proche du marché exige une référence à des valeurs de marché comparables, ou à défaut, l'utilisation d'un modèle mathématique.

L'harmonisation du calcul des provisions est au cœur de Solvency II. Leur mode d'évaluation doit permettre la comparaison entre les organismes assureurs. Le montant de provisions doit permettre à l'organisme assureur de faire face à l'ensemble de ses obligations y compris ses frais. Les provisions relatives aux risques non ouvrables doivent être évaluées selon des critères de prudence, de fiabilité, d'objectivité et de transparence et correspondre à la somme d'un montant évalué en Best Estimate et d'une marge de risque.

V.1.2 Le bilan simplifié de solvency II



Best estimate

Le Best estimate (BE) est la valeur actualisée selon la courbe des taux sans risque des cash flows futurs. Il doit être calculé par des méthodes les plus appropriées (basées sur les pratiques marché et qui retranscrit de la manière la plus objective, fiable et prudente le risque). Il doit être évalué au net et au brut de réassurance.

Marge de sécurité (MVM)

Comme un passif n'arrive pas à trouver preneur au prix « best estimate » une quantité complémentaire doit être ajoutée au « best estimate » pour pouvoir qualifier l'ensemble de valeur de marché des provisions.

La marge de sécurité correspond à l'immobilisation nécessaire actualisée en SCR que doit subir un assureur tiers lorsqu'il rachète le portefeuille. Elle est égale au coût de l'immobilisation du capital réglementaire requis pour liquider les sinistres du portefeuille (run-off).

Minimum du capital requis(MCR)

Niveau de fonds propres en deçà duquel l'entreprise présente un risque inacceptable de ne pas pouvoir faire face à ses engagements.

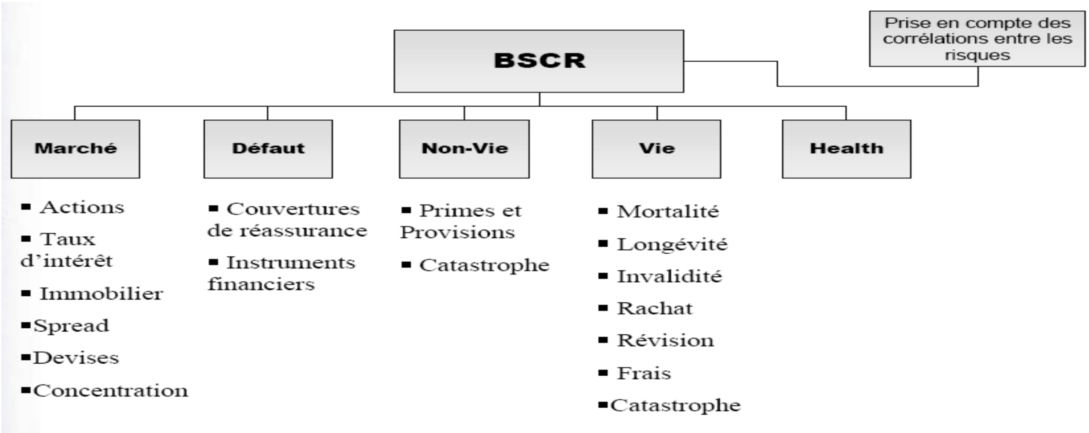
Le niveau de capital requis (SCR)

Le SCR est le Niveau de capital permettant à un organisme assureur d'absorber les sinistres imprévus significatifs et de continuer à assurer le paiement des prestations à leur échéance pendant un horizon de temps et selon un niveau de confiance donnés.

Il doit permettre d'obtenir un niveau minimum de sécurité consistant entre les différents organismes assureurs.

Le SCR peut se décomposer en plusieurs « Sous »- SCR : le basic SCR (BSCR), d'une part, qui correspond au capital requis de solvabilité de base, le SCR opérationnel, qui est le capital requis pour le risque opérationnel. Le basic SCR est lui-même composé de SCR (non vie, vie, marché, défaut …).

Le basic SCR se décompose en plusieurs SCR, comme suit :



Le BSCR n'est pas la somme de tous ces SCR ; En effet, une matrice de corrélation qui intègre cette diversification existe entre tous ces SCR. Cette diversification a effet de baisse sur le BSCR.

Une matrice standard de corrélation est fournie par les autorités. Cependant, on peut se demander si les coefficients qui la composent sont pertinents et s'il ne serait pas intéressant de mener une étude qui nous permettrait de réaliser notre propre matrice de corrélation. A titre d'exemple, la matrice indique que le SCR non vie et vie ne sont pas du tout corrélés.

Parmi les différentes SCR composantes, nous citons quelques détails sur le SCR non vie qui sert à couvrir, entre autre, le risque de provisions qui est l'objet de la modélisation des PM et PSAP attaché à ce mémoire.

Composante du Basic SCR : Le SCR non Vie

La composante souscription non vie a pour but de couvrir l'excédent de pertes pouvant survenir sur un horizon de 12 mois.

→ Risque de prime : Il est relatif aux sinistres à survenir jusqu'à 12 mois et après cet horizon ; Le risque provient du fait que les frais plus les volumes de pertes (survenues ou à survenir) soient supérieurs aux primes reçues. Par perte, sont entendus les règlements de sinistres et les provisions constituées.

→ Risque de provisions : Il est relatif à la mauvaise estimation des provisions pour sinistres et à la volatilité des règlements.

→ Risque catastrophe : Il est relatif aux évènements extrêmes ou exceptionnels non suffisamment pris en compte par les risques de primes et de provisions. Un jeu de scenarii sera défini pour chaque pays par l'autorité de contrôle.

La détermination des SCR constitue, pour l'assureur, des procédures de calculs et de travaux importants.

Deux modes de calcul de capital sont à l'étude : la formule standard et le modèle interne.

Dans le premier cas, un ensemble de calculs reposant sur des données comptables et des indicateurs connus, permettent d'établir un besoin minimum de capital, admis comme relativement arbitraire. Cependant, cette approche s'avère très coûteuse pour les assureurs, car les formules sont calibrées pour tous les assureurs et du coup, le capital requis est généralement supérieur à celui dont l'assureur doit réellement disposer.

Dans le deuxième cas, le CEIOPS incite les sociétés à modéliser leurs risques en les autorisant à construire des modèles internes. Cette voie est bien plus complexe à mettre en œuvre. L'idée de départ est néanmoins simple et pragmatique : la réalisation de modélisations personnalisées et globales des portefeuilles d'assurance à travers la prise en compte des passif, des actifs et de leurs interactions respectives. Le besoin en capital pour la solvabilité peut alors s'apprécier directement à la lecture des résultats générés par le modèle. Ces modèles peuvent être envisagés de façon libre ou structurée par branche de risques.

SCR dans les modèles internes

se définit comme le niveau de capital permettant à un organisme assureur d'absorber les sinistres imprévus significatifs et de continuer à assurer le paiement des prestations à leur échéance pendant un horizon de temps et selon un niveau de confiance donné .

Cette définition fait correspondre donc le SCR à la notion des mesures de risque come la VaR (la value at Risk) ou TVaR à un certain niveau de confiance α (99,5% , 99% , 95%...) .

Dans le cadre d'un modèle interne, ces mesures de risque peuvent être envisagées par une approche de simulation stochastique de l'évaluation du passif.

Avant d'aborder les simulations des provisions, nous présentons brièvement les notions des mesures de risques (la VaR, TVaR) ainsi que les principes de la méthode de Monté-Carlo.

V.2 Mesure du risque

Le but d'une mesure de risque est généralement de pouvoir représenter par un chiffre réel une incertitude ou une grandeur dont la valeur exacte est inconnue à l'aide d'un étalon de mesure adéquat , de manière à pouvoir exprimer l'expression au risque de cette grandeur. Dans le cadre de l'élaboration des normes Solvabilité 2, deux mesures de risque sont privilégiées : la Value at Risk (la VaR) et la Tail Value at Risk.

Dans ce mémoire nous utilisons la mesure VaR qui est celle préconisée par le CEIOPS notamment pour l'estimation du niveau de provisions techniques.

Définition de la VaR

La Value at Risk d'une variable aléatoire X au niveau de sécurité α est définit par

$$VaR(X;\alpha) = \inf\{x|\Pr(X \geq x) \leq 1-\alpha\}$$

Si X suit une loi continue la $VaR(X;\alpha)$ est simplement le quantile d'ordre α :

$$VaR(X;\alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$$

La VaR fournit une bonne information sur la charge de sinistres au-delà de laquelle il y a perte avec la probabilité α.

Par ailleurs, la VaR ne vérifie pas toutes les propriétés de cohérence d'une mesure de risque. En effet, elle n'est pas sous-additive.

Définition de la TVaR

La Tail Value at Risk au seuil α d'une variable aléatoire X , noté $TVaR(X;\alpha)$ se défini comme :

$$TVaR(X;\alpha) = E[X|X > VaR(X;\alpha)]$$

C'est-à-dire la valeur moyenne des pertes au-delà de la VAR

On remarque qu'au même niveau de sécurité α , la TVAR est un étalon de mesure de risque plus prudent que la VaR. Contrairement à la VaR , la TVaR possède toutes les propriétés de cohérence y compris la sous-additivité , qui permet d'affirmer que :

$$TVaR(X+Y;\alpha) \leq TVaR(X;\alpha) + TVaR(Y;\alpha)$$

Ce qui signifie qu'une diversification de risque a pour effet d'atténuer le niveau de risques pris isolément.

En plus, la TVaR permet de prendre en compte le comportement de la queue de la distribution. Dans la réalité, une distribution des dommages présentera quelques pertes extrêmement élevées mais dont la probabilité est très faible. De ce fait, la TVaR apparaît plus appropriée que la VaR car elle intègre aussi l'ampleur de ces pertes extrêmes.

Malgré tous les avantages de la TVaR par rapport à la VaR , son calcul s'avère plus difficile et il nécessite un nombre de simulations important.

V.3 Méthodes de simulation Monte Carlo

Le projet Solvency II implique le passage des méthodes déterministes aux méthodes stochastiques. L'approche stochastique des provisionnements basés sur la méthode Monte Carlo a pour but d'estimer un grand nombre de scénarios ou trajectoires possibles, afin de déduire une loi de distribution du montant de provision.

Reposant sur le théorème des grands nombres et le théorème central limite, l'idée sous-jacente est d'approcher le résultat théorique (qui peut être une statistique associée à une distribution, comme son espérance, sa fonction de répartition, ou plus généralement, toute fonctionnelle associée à la distribution étudiée) en effectuant des tirages dans la loi du phénomène observé.

Pour pouvoir utiliser les modèles de simulations que ce soit en Assurance Vie, Non vie ou en finance avec les processus stochastiques il est donc nécessaire de savoir simuler les différentes lois de probabilité.

L'ensemble de ces techniques est généralement regroupé sous le vocable de « méthodes de Monte Carlo ». Il existe de différents types, adaptés à la loi que l'on souhaite simuler au contexte. Mais dans la plus part des cas, la génération de nombre aléatoire uniforme est essentielle à toute technique de simulation. Nous présentons ci-dessous les méthodes de type « inversion de la fonction de répartition » qui nous servent dans l'implémentation des algorithmes de simulations des provisions techniques citées dans ce mémoire.

Classiquement, c'est l'une des méthodes les plus utilisées en simulation, au moins lorsque la puissance de l'outil informatique permet les calculs, et que l'inversion de la fonction des répartitions est possible, ce qui nécessite le plus souvent une expression analytique simple de cette fonction.

Simulation de distributions discrètes

Lemme : soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des nombres réels tous différents et soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des nombres réels positifs tels que :$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. On pose $s_0 = 0$ et pour tout $1 \leq k \leq n$,$\mathrm{s_k} = \sum_{i=1}^{k} p_i$.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme U([0,1]) et

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k \, 1_{(\mathrm{s_{k-1}} \leq \mathrm{U} < \mathrm{s_k})}$$

Alors X est une variable aléatoire de loi discrète $P = p_1\delta_{x1} + p_2\delta_{x2} + \cdots p_n\delta_{xn}$.

La démonstration du lemme s'obtient aisément par le fait que l'on ait :

$$\Pr\left(1_{(\mathrm{s_{k-1}} \leq \mathrm{U} < \mathrm{s_k})} = 1\right) = \Pr\left(\mathrm{X} = \mathrm{x_k}\right) = p_k \,.$$

Le principe ici est de découper l'intervalle [0 ;1] en sous intervalles dont les bornes sont les $\sum_{i=1}^{k} p_i$ croissantes. Ce découpage est dû au fait qu'il n'existe pas obligatoirement de bijection entre les différentes modalités de la distribution entière de l'intervalle [0 ;1], puis que la distribution de répartition d'une distribution discrète est en escalier. L'indice de la borne supérieure de l'intervalle ainsi créé dans lequel se trouve le nombre aléatoire de la loi uniforme simulée donnera la valeur simulée de la distribution en question.

Simulation de distributions continues

Proposition : Soit Y une variable aléatoire réelle à valeur dans R de fonction de répartition F_Y . On pose

$$F_Y^{-1}(u) = \inf\{y \in R | F_Y(y) \geq u\} \ , \quad u \in [0,1]$$

Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0,1] .
Alor s la variable aléatoire $F_Y^{-1}(U)$ et Y ont la même loi

Cette proposition dans le cas où on dispose de la forme explicite de F_Y^{-1} est relativement aisé à démontrer à travers les égalités suivantes :

$\Pr(F_Y^{-1}(U) \leq y) = \Pr\big(F\big(F_Y^{-1}(U)\big) \leq F_Y(y)\big) = \Pr\big(U \leq F_Y(y)\big) = F_Y(y) \qquad pour\ y \in R$.

Ainsi, pour simuler un n-échantillon iid d'une loi ayant pour fonction de répartition F_Y , il suffit de simuler n réalisations indépendantes d'une variable uniforme sur l'intervalle [0 ;1] , puis d'appliquer l'inverse de la fonction de répartition à chacune de ces valeurs.

Lorsqu'on ne dispose pas de formule explicite pour F_Y^{-1} , on utilisera des algorithmes d'approximation de cette fonction ou des algorithmes spécifiques à la loi que l'on souhaite obtenir : l'algorithme d'acceptation-rejet , méthode de la compositions…).

V.4 L'application à l'estimation de la loi de distribution des provisions

On se rappelle que le risque de provision est relatif à la mauvaise estimation des provisions pour sinistres et à la volatilité des règlements.

V.4.1 Provisions mathématiques de rentes (PM) suivant l'approche markovienne

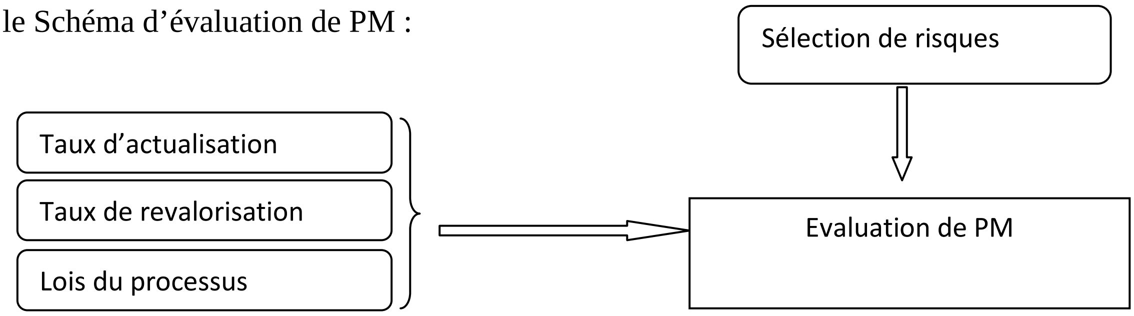
Nous retenons les processus markoviens décrits dans la troisième partie du mémoire pour modéliser les parcours aléatoires passant par différents états des assurés.

Pour chaque âge, nous supposons toujours l'hypothèse de la stabilité des probabilités de transition annuelle entre les états, ce qui amène au cas localement homogène des processus markoviens modélisant le parcours de vie des individus.

La provision en best estimate de PM : se définie comme étant la valeur actuelle probable de tous les cash flows potentiel basés sur des informations actualisées et fiables et sur des hypothèses spécifiques.

Les flux financiers aléatoires que doit verser l'assureur à l'assuré dépendent du parcours (aléatoire) de vie de ce dernier. L'évaluation de PM repose en générale sur les hypothèses des 3 facteurs :
-La courbe de taux technique d'actualisation : i_k
-Le taux de revalorisation
-La loi du processus X

Voici le Schéma d'évaluation de PM :



Par exemple :
Le risque choisi pour l'évaluation est une rente conjoint payable à terme à échoir. On suppose que l'individu suit le processus Markov à deux états {vivant, mort} = $\{e_0, e_1\}$. L'âge du conjoint au moment de l'évaluation est x, le nombre de terme de la rente est n le montant annuel de la rente est R et payable d'avance.
Le montant des flux financiers aléatoires associés à ce versement tant que ce dernier reste vivant s'écrit :

$$W^x = R\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X(k)=e_0\}}$$

Ce qui implique le montant de provisions en best estimate :

$$PM^x = R\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X(k)=e_1\}})\frac{(1+r)^k}{(1+i_k)^k} = R\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x\frac{(1+r)^k}{(1+i_k)^k}$$

Où r est le taux de revalorisation et i_k sont des taux techniques d'actualisation.

L'algorithme de simulation des processus markoviens localement homogène.

On dispose des matrices de transitions pour chaque âge de 0 à w (âge maximal)

$P(0,1)$, $P(1,2)$, ….$P(w-1,w)$ ou $P(k,k+1)$: représente la matrice de transition entre l'âge k et k+1.

Exemple dans le cas de processus à deux états , vivant et décèdé , on trouve à partir des tables de mortalité :

$$P(k,k+1) = \begin{pmatrix} p_k & q_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec les notations classiques de l'assurance vie

p_k : la probabilité d'un individu d'âge k survive un 1 après

$q_k = 1 - p_k$: la probabilité de décédé pendant l'année.

Ce qui permet d'obtenir par la relation de Chapman-Kolmogorov, les matrices de transition annuelles associées à un individu d'âge x :

$$P_x(k, k+1) = P(x+k, x+k+1) = \begin{pmatrix} p_{x+k} & q_{x+k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que si à l'année n l'état du processus X est connu, ie $X_n = e_i$, la loi de ce processus à l'année n+1 , c'est à dire la loi de la variable aléatoire $X_{n+1}|X_n = e_i$ est entièrement déterminée car les probabilités $\mathbb{P}(X_{n+1} = e_j \middle| X_n = e_i)$ ne sont autres que les éléments de la ième ligne de la matrice $P_x(n, n+1)$.

L'algorithme de la simulation d'un processus markovienne localement homogène dont l'état initiale est $X_0 = e_0$ se décrit comme suit :

- On numérote l'espace de l'état $E = \{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ par $\{0,1,2,3, \dots, m\}$
- On simule X_1 la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0,1,2,3, \dots, m\}$ et dont la loi de distribution est donnée par la première ligne de la matrice $P_x(0,1)$.

-Si $X_1 = e_i$ On simule la variable $X_2|X_1 = e_i$ dont la distribution est décrite par la ième ligne de la matrice $P_x(1,2)$. Ce qui permet d'obtenir donc une réalisation de l'état du processus à la deuxième année.

-Ensuite pour i allant de 3 à n nous procédons de la même façon, ce qui nous fourni donc une trajectoire du processus.

En itérant cette procédure N fois, nous obtiendrons ainsi N trajectoires du processus X qui amènent à N réalisations de flux financiers futurs associés. Les N valeurs actuelles de ces flux futurs s'obtiennent ensuite en actualisant les N trajectoires des flux futurs avec une courbe de taux.

A partir de ces N montants des paiements actualisés probables, la fonction de répartition empirique du montant de la provision s'en déduira systématiquement.

Exemple :

Versement d'une rente conjoint viagère d'un montant R à un individu de 50 ans, et un taux d'actualisation constant égale à r. Si $\{X_k, k = 0,1, \dots, w-50\}$ représente le processus de vie de cet individu alors :

Le montant de paiements actualisés aléatoires : $PM^x = R \sum_{k=0}^{w} \mathbb{1}_{\{X_k = e_0\}} \frac{1}{(1+r)^k}$

Une simulation nous donne :

Année k	0	1	2	3	…	20	21	22	…	w-50
Etat de X(k)	e_0	e_0	e_0	e_0		e_0	e_1	e_1	…	e_1
$\mathbb{1}_{\{X_k=e_0\}}$	1	1	1	1		1	0	0	…	0
Taux d'actualisation	r	r	R	r	…	r	r	r	…	r
Montant versée actualisé	R	$\frac{R}{(1+r)^1}$	$\frac{R}{(1+r)^2}$	$\frac{R}{(1+r)^3}$		$\frac{R}{(1+r)^{20}}$	0	0	…	0

Pour cette simulation la conjointe décède à l'âge de 70 ans. La PM^x est égale à la somme des montants versés à chaque année de projection.

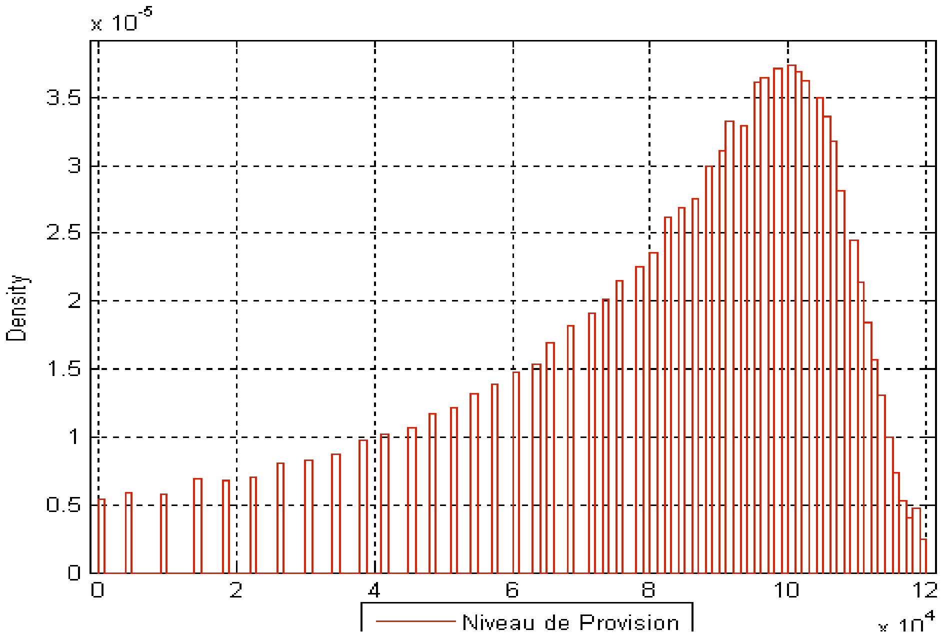
Illustration numérique

L'implémentation de cet algorithme sous matlab et l'application au cas d'une rente de conjoint viagère d'un montant de 5000 euros à un individu de 50 ans (x= 50) aboutissent aux résultats suivants :

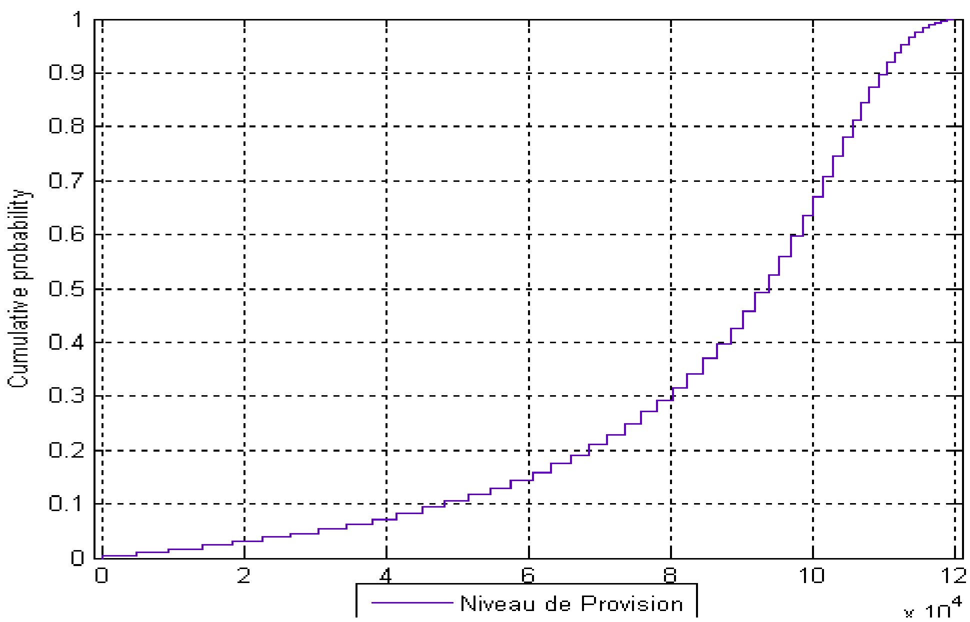
(Les matrices de transitions $P_x(n, n+1)$ sont créées à partir de la table TF02 et le taux d'actualisation utilisé est 3,5%)

Simulation de 100000 réalisation de PM :

Densité empirique



Fonction de répartition empirique



	Moyenne	Ecart-type	Médian
Niveau de Provision	**85709,196**	**25048,422**	**93681,379**

niveau de confiance	99,5%	95%	90%	80%	75%
VaR	**117278,0894**	**112477,2513**	**110313,4435**	**105512,4993**	**104205,4368**

La VaR(99,5%) correspondant au niveau du capital requis cherché pour cette provision s'élève à: SCR = VaR(99,5%) = **117278,0894.**

V.4.2 Provisions pour sinistres tardifs selon l'approche bootstrap.

Cette partie de mémoire s'inspire de l'article « Evaluation stochastique de la provision pour sinistre » de Christian PARTRAT (2004).

La méthode de bootstrap appelée aussi méthode de rééchantillonnages qui, à partir d'un échantillon initial de taille T , consiste à simuler N nouveaux échantillons de même taille T. Cette méthode a pour but d'estimer la variabilité d'un paramètre et éventuellement sa distribution.

Rappels théoriques de la méthode de Chain Ladder

L'estimation de la provision pour risque en best estimate s'effectue par la méthode de Chain-Ladder dont les principes peuvent être expliqués comme suit :

Supposons qu'on dispose d'un triangle de règlements, comportant (n)*(n+1)/2 éléments comme suit :

		Développement j				
exercice i		1	2			n
	1	X_{11}	X_{12}	…	…	X_{1n}
	2	X_{21}	X_{22}	…		
		…	…			
	n	X_{n1}				

Les éléments de la partie bleue sont observés.

Les notations utilisées dans la procédure présentée ci-dessous sont les suivantes :

Pour $i, j = 1,2 \dots, n$:

- X_{ij} : variable aléatoire réel décrivant le montant non cumulé (pour exercice de survenance i, développement j)
- $C_{ij} = \sum_{h=1}^{j} X_{ih}$: variable aléatoire décrivant le montant cumulé pour l'exercice de survenance i et jusqu'au délai j.
- Triangle supérieur des montants observés :
  $(x_{ij})_{i+j \leq n+1}$ réalisations de $(X_{ij})_{i+j \leq n+1}$
- f_j :facteurs de développement
- Provision pour l'exercice de survenance i $R_i = C_{in} - C_{i,n-i}$
- La provision globale R $=\sum_{i=1}^{n} R_i$

La méthode de Chain Ladder est un modèle de développement par cadence, basé sur le triangle des montants cumulés. Elle permet d'estimer la partie inférieur du triangle de liquidation, c'est-à-dire l'ensemble des $(C_{ij})_{i+j>n+1}$.

Cette méthode statistique est fondée sur les cadences de règlement et s'appuie sur deux hypothèses principales :

- les règlements sont stables .
-les facteurs de développement sont indépendants de l'année d'origine des sinistres.

Les facteurs de développement sont alors estimés grâce à la moyenne pondérée de la charge des sinistres, comme le présente la formule suivante :

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{ij}} \quad pour\ j = 1, \dots , n-1$$

Les estimateurs ainsi obtenus sont sans biais et non corrélés.

Les valeurs de la partie inférieure du triangle de liquidation peuvent être estimées de la façon suivante :

$$C_{ij} = f_{j+1} * f_{j+2} \dots f_{n+1-i} * C_{i,n+1-i} \quad pour\ \ i = 2, \dots n\ et\ j = n+2-i, \dots n$$

Bootstrap et la simulation des niveaux de provision

On cherche à connaître la distribution de la Provision Technique espérée, calculée avec la méthode de Chain Ladder sur la base du triangle de règlements observé.

On retient l'hypothèse du modèle de Poisson pour la distribution des paiements qui amène aux résultats sur l'estimation de la partie inférieure du triangle identiques à ceux obtenu par la méthode de Chain Ladder

La technique de simulation bootstrap est décrite ci –dessous étape par étape à travers un exemple sur des données fictives :

Les données du triangle de paiements non cumulés observés $(x_{ij})_{i+j\leq n+1}$:

20531	78561	65886	57537	59293	11338	10815	7811	1117	11792
13847	39035	39375	29884	32754	10298	6276	6924	3835	
15785	49135	42672	27920	36399	27828	9596	5781		
20784	62266	47120	59331	41672	20726	16790			
108531	115103	187886	90515	149616	86613				
26097	59195	1786	19780	22835					
64819	142577	100694	34304						
44065	53039	8975							
20022	39276								
37163									

Etape 1 : Construction du triangle de paiements cumulés (observés) : $c_{ij} = \sum_{h=1}^{j} x_{ih}$

L'application de Chain Ladder pour trouver les facteurs de développement et la partie inférieure de triangle cumulés ainsi que les provisions correspondantes :

- *Paiements cumulés :* C_{ij}

20531	99092	164978	222515	281808	293146	303961	311772	312889	324681
13847	52882	92257	122141	154895	165193	171469	178393	182228	**189096**
15785	64920	107592	135512	171911	199739	209335	215116	**217289**	**225478**
20784	83050	130170	189501	231173	251899	268689	**276739**	**279535**	**290070**
108531	223634	411520	502035	651651	738264	**773537**	**796713**	**804762**	**835091**
26097	85292	87078	106858	129693	**143328**	**150176**	**154676**	**156238**	**162127**
64819	207396	308090	342394	**434133**	**479775**	**502698**	**517759**	**522990**	**542700**
44065	97104	106079	**132098**	**167491**	**185100**	**193944**	**199755**	**201773**	**209377**
20022	59298	**91395,2**	**113812**	**144306**	**159478**	**167097**	**172104**	**173842**	**180394**
37163	**108070**	**166566**	**207421**	**262996**	**290646**	**304532**	**313656**	**316825**	**328766**

- *Facteurs de développement* f_j :

2,90799	**1,54129**	**1,24528**	**1,26793**	**1,10514**	**1,04778**	**1,02996**	**1,0101**	**1,03769**

- En déduire les Provisions pour chaque exercice de survenance $R_i = C_{in} - C_{i,n-i+1}$ et la provision totale R $=\sum_{i=1}^{n} R_i$

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R
0	**6867,715**	**10362,34**	**21380,88**	**96826,94**	**32433,54**	**200306,3**	**103297,8**	**121096,1**	**291602,5**	**884174,2**

Etape 2 : Etablissement du triangle des paiements prédits à partir des facteurs développement et de la diagonale de la matrice des paiements cumulés:

$$M_{ij} = \frac{X_{i,n-i+1}}{\prod_{k=j}^{n-1} f_k} \quad pour \;\; i+j \leq n$$

3671,292	16727,57	164496,9	24843,87	259728,4	28734,96	3748,953	39759,59	312889	324681
21375,22	62158,34	9583,738	11932,16	151267	16717,49	175157,6	1845,415	182228	
25487,62	74117,79	114236,7	142256,2	18371,22	199334,6	28858,47	215116		
32788,92	95349,91	146961,4	1837,434	23241,17	256436,9	268689			
94397,13	27455,74	42391,73	526865,6	6683,333	738264				
18326,47	53293,2	8214,366	12286,95	129693					
61345,76	178393	274954,5	342394						
23667,55	68825,13	1679							
2391,392	59298								
37163									

2,907992 1,541286 1,245275 1,267933 1,105135 1,047778 1,029961 1,010103 1,037687

Etape 3 : Calcul du tringle supérieur des résidus de Pearson définis par :

$$r_{ij} = \frac{X_{ij} - M_{ij}}{\sqrt{M_{ij}}}$$

-84,4675	**32,25423**	**33,7677**	**85,57962**	**18,81794**	**-96,6349**	**-24,7551**	**-12,6378**	**-35,9738**	**0**
-51,4945	**-8,65729**	**31,23639**	**41,65739**	**4,413333**	**-44,4497**	**-19,1466**	**23,13865**	**47,13825**	
-6,77493	**2,289231**	**12,74668**	**-0,59395**	**-8,79163**	**64,37252**	**0,73946**	**-6,24119**		
-66,2973	**-1,17939**	**-19,7765**	**122,6445**	**-33,2455**	**-23,4952**	**4,997195**			
46,29379	**-153,174**	**11,95386**	**-41,1588**	**22,49366**	**61,84989**				
57,39999	**129,568**	**-159,328**	**-2,58497**	**-27,6117**					
14,23623	**74,622**	**13,29864**	**-127,596**						
132,5866	**37,89375**	**-146,513**							
-2,58686	**1,872732**								
0									

Etape 4 : Effectuer le rééchantillonnage (avec remise) sur les résidus obtenus à l'étape 3 jusqu'à obtenir N nouveaux triangles de résidus (N étant le nombre de simulations souhaité)

Exemple pour une $k^{ième}$ simulation : $r_{ij}^{(k)}$

-2,58681	**31,23639**	**40,99702**	**-6,0241**	**132,5866**	**129,5671**	**0,73946**	**32,25423**	**14,02306**	**64,37252**
40,99702	**-2,58497**	**37,08904**	**57,39999**	**0**	**-0,59395**	**-146,513**	**37,08904**	**-0,59395**	
132,5866	**85,57962**	**-60,7749**	**-27,6117**	**-84,4068**	**-12,6378**	**-8,65729**	**-51,4904**		
40,99702	**4,413333**	**-51,4904**	**-84,4068**	**129,5671**	**64,37252**	**-146,513**			
0,73946	**-8,79016**	**74,622**	**-1,17939**	**-8,65729**	**101,9539**				
74,622	**32,25423**	**-41,1588**	**2,289231**	**14,02306**					
-66,2973	**61,80499**	**-8,79016**	**-19,1461**						
-51,4904	**-51,4904**	**-41,1588**							
-19,1461	**-19,7707**								
-35,9738									

Etape 5 : Reconstitution, pour chaque simulation, du triangle des paiements non cumulés

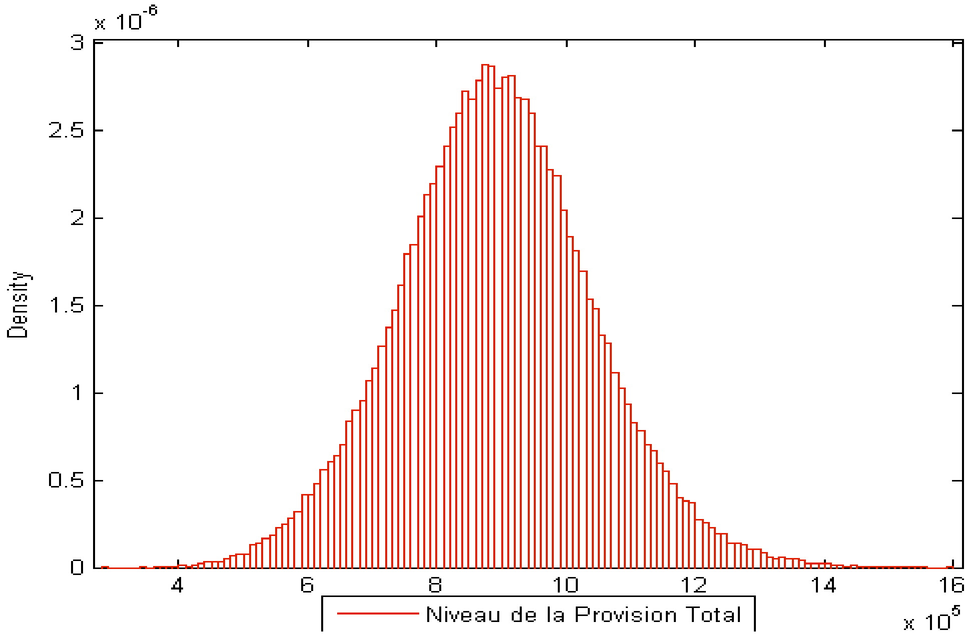
$$X_{ij}^{(k)} = M_{ij} + r_{ij}^{(k)}.\sqrt{M_{ij}} \qquad pour\ k = 1,2 \dots, N$$

3625,723	**78291,65673**	**67623,59325**	**39136,96**	**85946,62**	**48717,26**	**138,5896**	**1272,343**	**3913,881**	**18782,27**
27368,85	**4261,29598**	**4448,532532**	**32297,27**	**31964,95**	**15828,62**	**516,8918**	**7934,635**	**1797,229**	
46654,86	**6752,445337**	**27945,85647**	**23397,58**	**21636,34**	**17223,96**	**8678,973**	**2184,45**		
4212,542	**63664,86221**	**39913,84312**	**22,79688**	**77724,59**	**3445,186**	**3965,364**			
94624,25	**176378,2487**	**17735,42734**	**13393,97**	**137912,1**	**97253,18**				
28428,43	**4998,817559**	**21856,27293**	**2471,844**	**29727,54**					
44925,2	**138192,2371**	**9383,478659**	**62467,45**						
15746,12	**34215,64968**	**2939,796978**							
17657,37	**356,8946225**								
3228,828									

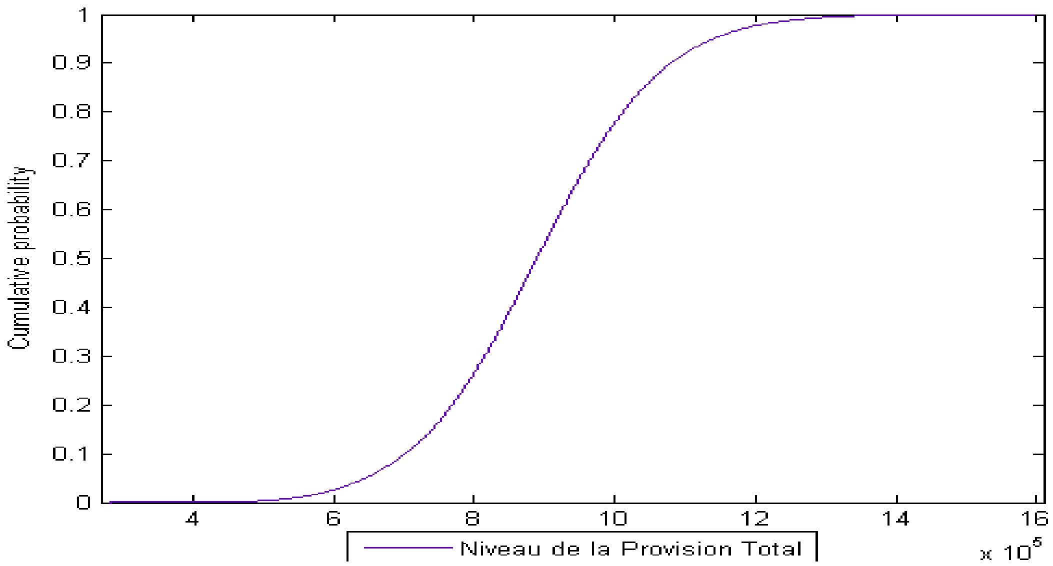
Etape 6 : A chaque triangle des paiements non cumulés ainsi obtenu, nous en déduisons le triangle des paiements cumulés ainsi que les montants de provisions par l'application de la chaine Ladder classique.

Pour un nombre de simulation N = 100000, nous obtenons les résultats suivants :

La densité empirique



La fonction de répartition empirique :



	Moyenne	Ecart-type	Médian
Provison	**891303,5396**	**148986,581**	**889260,6**

niveau de confiance	99,5%	95%	90%	80%	75%
VaR	**1263047**	**1141326**	**1080149**	**1011250**	**986466,4**

Nous nous apercevons que la provision totale moyenne obtenue par la méthode de simulation Monte -Carlo **891303,5396** est relativement proche de celle calculée à partir de la Chain Ladder classique : **884174,2.**

Ce qui montre le bon fonctionnement de la procédure de simulation.

Le SCR associé à cette provision s'élève donc à **1263047.**

Enfin, nous nous remarquons qu'à la différente d'autre branches (décès, invalidité…) elle se relève d'un caractère de déroulement courte, les délais de paiements dépassent rarement une année. La méthode présentée ci-dessus s'applique à pas mensuel.

V.5 Conclusion :

Le besoin de mesurer l'incertitude et la variabilité des résultats obtenus par les méthodes déterministes a engendré une réflexion vers des méthodes stochastiques qui sont développées, notamment à partir de l'apparition du projet solvabilité 2. Si la distribution de telle ou telle variable aléatoire est généralement difficile à obtenir analytiquement, les simulations numériques nous permettent néanmoins de bien approcher cette distribution.

Les techniques de simulation varient d'une variable à l'autre. Chaque risque représenté par une variable aléatoire demande une technique spécifique de simulation. En reposant sur la modélisation markovienne, nous déduisons un algorithme de simulation adéquat pour le calcul de provisions mathématiques. Alors que l'utilisation de la méthode bootstrap nous aide à construire une technique bien adaptée aux provisions pour les sinistres tardifs.

Conclusion

En créant des produits spécifiques aux expatriés, Welcare et les autres sociétés d'assurance de prévoyance tendent à proposer des solutions de protection sociale adaptées à cette population.

Par ce mémoire, nous avons apporté une réponse à l'objectif de la construction d'une base méthodologique pour les procédures de tarification et de provisionnement de ces produits.

Pour les garanties de frais soins santé, le modèle du type probabilité de consommer – charge de sinistre nous aide à quantifier les coûts de chacune des garanties proposée dans les contrats.

L'élaboration des tarifs des garanties de décès, d'invalidité est conditionnée notamment par le processus que parcours un assuré durant la vie du contrat. Les processus markoviens sont présentés comme une modélisation appropriée. L'intérêt de cette modélisation a bien été montré tant sur le plan de quantification des primes que sur le plan de provisionnement.

Quant à l'évaluation des provisions techniques liées à ces produits, nous avons abordé les méthodes stochastiques permettant de répondre aux exigences actuelles.

Ces études sont donc l'étape préliminaire devant la mise en place des outils de gestion pour ces produits. Les premiers pas du développement d'un logiciel tarifaire pour la gamme de produit Planet ont été effectués.

Bibliographie

Cours

[1] Pierre CAZES : Analyse des donnés approfondie, Dauphine

[2] Christian HESS : Théorie de risque et réassurance, Dauphine

[3] Witold LITWIN: Cours de base de donnés, Dauphine

[4] Sylvestre FREZAL : Comptabilité et Réglementation, Dauphine

Ouvrages

[5] M.DENUIT et C.ROBBERT (2007) :Actuariat des assurances de personnes

[6] Philippe TASSI (2004) Méthodes Statistiques

[7] Yannick AUBRY (2004) : Guide pratique et juridique de l'expatrié

[8] Le code des Assurances

Publications

[9] BCAC (2002) : Guide de L'assurance de Groupe

[10] Liaisons Sociales(2003) La prévoyance en entreprise

[11] DASFA (2003) Prestations liées à la mobilité internationale en entreprise, Analyse du marché et enquête auprès d'entreprise.

Articles

[12] Christian PARTRAT (2004) Evaluation stochastique de la provision pour sinistres.

[13] Frédéric BERTRANT et Maryam MAUMY (2008) La régression logistique.

[14] E.Pardoux (2006) Processus de Markov et Application

[15] Didier RULLIERE et Daniel SERANT (?) Estimation de probabilités de changement d'état en présence de données incomplètes et applications actuarielles.

Mémoires d'actuariat

[16] Véronique MONTOMORY et Rodolphe MORGENSTERN (1995) Tarification familiale en Assurance Santé Individuelle, CEA

[17] Pierre-Jean MOULIN (2003): Construction de bases de tarification en frais de santé , ISFA

[18] Cyril BARRITAUD (2003) : Etude du portefeuille santé de la Mutuelle Nationale des Personnels Air France, ISFA

[19] Tuan DO (2007) : Solvency II , Calcul du capital de solvabilité requis par un modèle interne pour une compagnie d'assurance non vie, Dauphine

Site internet

www.resources-actuarielles.net

www.mathworks.com

www.welcare.fr

Documents internes du groupe Aprionis et de la Société Welcare

La formation du Solvency II (2007) par ACTUARIS Watson Wyatt

Les documents concernant les produits étudiés : contrat standard, cahier des charges….

Annexe

Annexe 1

La Vraisemblance dans le modèle logit

La vraisemblance s'écrit:

$$L(\beta_0,\beta) = \prod_{j=1}^{n} \pi\left(x^j\right)^{y^j} (1-\pi\left(x^j\right))^{1-y^j}$$

D'où :

$$LnL(\beta_0,\beta) = \sum_{j=1}^{n} y^j\, Ln(\pi\left(x^j\right)) + \left(1-y^j\right) Ln(1-\pi\left(x^j\right))$$

en posant $\pi\left(x^j\right) = \pi^j$, $= (\beta_0,\beta)$, $z^j = (1, x_1^j, x_2^j, \ldots x_p^j)$ on a :

$$\frac{\partial LnL}{\partial \gamma} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{y^j}{\pi^j} - \frac{1-y^j}{1-\pi^j}\right]\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{y^j-\pi^j}{\pi^j(1-\pi^j)}\right]\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma}$$

$\frac{\partial LnL}{\partial \gamma}$ (resp $\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma}$) désignant le vecteur des dérivées de Log(L) (resp π^j) par rapport à $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_i, \ldots \beta_p$ où β_i est la ième composante de β

La matrice d'information s'écrit :

$$I(\gamma) = Var\left(\frac{\partial LnL(\gamma)}{\partial \gamma}\right) = Var\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{y^j-\pi^j}{\pi^j(1-\pi^j)}\right]\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma}\right\} = \sum_{j=1}^{n} Var\left\{\left[\frac{y^j-\pi^j}{\pi^j(1-\pi^j)}\right]\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma}\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma}\right)' / \pi^j\left(1-\pi^j\right)$$

puisque y^j a pour variance $\pi^j\left(1-\pi^j\right)$.

Comme

$$\pi^j = \frac{\exp\,(\gamma' z^j)}{1+\exp\,(\gamma' z^j)}$$

ce qui implique

$$Ln(\frac{\pi^j}{1-\pi^j}) = \gamma' z^j$$

$$\left[\frac{1}{\pi^j} + \frac{1}{1-\pi^j}\right]\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma} = z^j$$

$$\frac{\partial \pi^j}{\partial \gamma} = \pi^j\left(1-\pi^j\right) z^j$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial LnL(\gamma)}{\partial \gamma} = \sum_{j=1}^{n} (y^j - \pi^j) z^j$$

et

$$I(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \pi^j \left(1 - \pi^j\right) z^j \, (z^j)'$$

Annexe 2

Démonstration de la l'équation de Kolmogorov

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,t) = P(s,t) M(t)$$

Considérons deux états, $e_i \neq e_j$, deux instants $t \geq s \dots \geq 0$, et un accroissement de temps $\Delta t > 0$. L'équation de Chapman Kolmogorov nous permet d'écrire

$$\mathrm{p_{ij}}(\mathrm{s}, \mathrm{t} + \Delta t) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{p_{ik}}(\mathrm{s}, \mathrm{t})\, \mathrm{p_{kj}}(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \Delta \mathrm{t})$$

$$= \mathrm{p_{ij}}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) \mathrm{p_{jj}}(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \Delta \mathrm{t}) + \sum_{\mathrm{k}=0|\mathrm{k}\neq \mathrm{j}}^{\mathrm{m}} \mathrm{p_{ik}}(\mathrm{s}, \mathrm{t})\, \mathrm{p_{kj}}(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \Delta \mathrm{t})$$

En divisant les deux membres de l'égalité par Δt On en déduit que :

$$\frac{\mathrm{p_{ij}}(\mathrm{s}, \mathrm{t} + \Delta t) - \mathrm{p_{ij}}(\mathrm{s}, \mathrm{t})}{\Delta t} = \frac{\mathrm{p_{jj}}(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \Delta t) - 1}{\Delta t} \mathrm{p_{ij}}(\mathrm{s}, \mathrm{t})$$

$$+ \sum_{\mathrm{k}=0|\mathrm{k}\neq \mathrm{j}}^{\mathrm{m}} \mathrm{p_{ik}}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) \frac{\mathrm{p_{kj}}(\mathrm{t}, \mathrm{t} + \Delta t)}{\Delta \mathrm{t}}$$

En prenant la limite pour $\Delta t \to 0$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{p_{ij}}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) = -\mu_{\mathrm{i.}}(\mathrm{t}) \mathrm{p_{ij}}(\mathrm{s}, \mathrm{t}) + \sum_{\mathrm{k}=0|\mathrm{k}\neq \mathrm{j}}^{\mathrm{m}} \mathrm{p_{ik}}(\mathrm{s}, \mathrm{t})\, \mu_{\mathrm{kj}}(\mathrm{t})$$

Ces équations portent le nom d'équations prospectives de Kolmogorov à distinguer avec les équations rétrospectives suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{ij}(s,t) = -\mu_{i.}(s)p_{ij}(s,t) + \sum_{k=0|k\neq j}^{m} p_{ik}(s,t)\,\mu_{kj}(s)$$

La démonstration des équations rétrospectives est analogue à celle des équations prospectives.

Technique de simulation des processus markoviens continus

On note que le processus continu $\chi = \{X_t, t \geq 0\}$ peut être représenté à l'aide de processus bivariés en temps discret.

Soit le processus d'instant de changement d'état $\{T_j , j = 0,1 \dots\}$ défini par: $T_j = \inf\{t > T_{j-1} | X_t \neq X_{T_{j-1}}\}$

L'information fournie par le processus χ est équivalente à celle fournie par : $\{\left(T_j , X_{T_j}\right) , j = 0,1 \dots\}$

Dans le cas du processus Markovien la simulation du processus $\{T_j , j = 0,1 \dots\}$ selon la méthode Monté-Carlo s'obtiendrai à l'aide de la connaissance des probabilités des séjours, à savoir :

$$\mathbb{P}[T_j > t | X_{T_{j-1}} = e_k] = P_i^{(0)}(0,t) \, .$$

Annexe 3

Les fonctions écrites sous matlab implémentant les algorithmes de simulation

Partie PM :

```
%stocker les probabilités de transitions
% dans une séquences de matrice
%pour chaque âge donné associé une
% matrice de transition
% étant donné les probabilités
de transitions(décédé, reste vivant,...) de chaque age
% Mats_Trans(:,:,x) contenant les proba
% de trasition de x-1 à x
function Result = Mats_Trans(P,Q)
 %P et Q contenant des probabilités de décès et vivant
 % pour chaque âge x
   Res =  repmat(0,[2,2,102]);
   for x = 1 : 102
      Res(1,1,x)=P(x);
```

```
%Simuler N RenteConjoint
function Result = N_RenteConjoint(N,x,w,M,r)
   Res = zeros(1,N);
   %On simule d'abord N trajectoire de X(t)
   N_X = NTrajec(x,w,M,N);
   %On Calcule pour chaque trajectoire le montant total des rentes à payer
   for i = 1 :N
      Res(i) = RenteConjoint(N_X(i,:),r);
   end
   Result = Res;
End

%Simuler N trajectoire
function Result = NTrajec(x,w,M,N)  % N
```

```
      Res(1,2,x)= Q(x);
      Res(2,1,x)=0;
      Res(2,2,x)=1;
   end
   Result=Res;
End
```

```
est le nbr de trajectoire à simulé
   Res =zeros(N,w-x);
   for i =1:N
      Res(i,:) = Trajec(x,w,M);
   end
   Result = Res;
End
```

```
% fonction générant une va dans {1,2,3,...,n}
%étant donné le vecteur de distribution
function Result = Rando(p)
   u = rand;
   i = 1;
   s=p(i);
   while( (u>s)&(i<length(p)))
      i=i+1;
      s=s+p(i);
   end
   Result = i;
end
```

```
%Calcul la rente conjoint pour 1 trajectoire
%de X ,X(i) est l'état dans i anné du tête
%d'age x :X(i)=1 %vivant , X(i)=2 décédé,
function Result = RenteConjoint(X,r)
   n = length(X);
   v = ones(1.,n);  % facteur d'actualisation
   Res=0;
   for i = 1:n
      v(i) = (1/(1+r(i)))^i;
      if (X(i)==1)
         Res = Res+5000*v(i);
      end
   end
   Result = Res;
End
```

```
%générateur du processus
function Result = Trajec(x,w,M)
 %x : l'âge de la tête , w l'age maxi
 % M matrice 3d , = l'ensemble des matrices
de transition
    Res = zeros(1,w-x-1);   % nbre de pas
d'une   trajectoire
    Res(1) = Rando(M(1,:,x)) ;
M(:,:,x)
    [m,n,t]= size(M);   % n est le nbre de l'état
    for t=2:w-x
     i=1;
     while (i<=n)
```

```
            if Res(t-1)==i
                Res(t)=Rando(M(i,:,x+t-1));
                break
            end
       i=i+1;
      end
    end
 Result = Res;
end
```

Partie PASP:

```
%calculer la provision totale à partir
%de montant paiements annuels
% théorique et le triangle de résidus
function Result = CalculProvi(X_Theo,R)
        NonCulmul = ReconNonCul(X_Theo,R);
        Culmul = NonCumulACulmul(NonCulmul);
        MCulmul = ChainLadder(Culmul);
        Result = ProvisionTotal(MCulmul);
end
```

```
%Chainladder
function Result = ChainLadder(C)
        [m,n] = size(C);
        fact = FactorDev(C);
        Res = C;
        for i =2:m
                for j=(n-i+2) :n
                        Res(i,j) = Res(i,j-1)*fact(j-1);
                end
        end
        Result = Res;
End
```

```
%) Calculer les valeurs prédites par le
%modèle pour la partie supérieure du triangle cumulé
function Result = CumulTheo(C)
        [m,n] = size(C);
        fact  = FactorDev(C);
        Res = C;
        for i = 1:m-1
                for j=n-i:-1:1
                        Res(i,j) = Res(i,j+1)/fact(j);
```

```
% fonction permet de créer N valeur de Provision
function Result = EchanProvi(N, C)
        Res = zeros(N,1);
        C_Theo = CumulTheo(C);
        X_Theo=TriCumulANonCumul(C_Theo);
        Residu_Ini = Residu(C);
        EchanResi = Reechan(Residu_Ini,N) ;
        for i =1:N
                Res(i) = CalculProvi(X_Theo,EchanResi(:,:,i));
```

```
            end
        end
        Result = Res;
End
```

```
        end;
        Result = Res;
End
```

```
%  Calculer les facteurs de développement
% à partir du triangle donné
function Result = FactorDev(C)
        [m,n] = size(C);
        Res = zeros(1,n-1);
        %calculer le somme de chaque colonne
        s1 = zeros(1,n-1);
        for j = 2 : n
            i=1;
         while(i+j <= n+1)
            s1(j-1) = s1(j-1) + C(i,j);
        i=i+1;
            end
   end
   %calculer les somme de chaque
% colonne jusqu'a l'avant dernier terme
   s2 = zeros(1,n);
   for j = 1 : n-1
      i=1;
     while (i+j<=n)
        s2(j) = s2(j) + C(i,j);
            i=i+1;
      end
   end
        %calculer les facteur à partir de s1 et s2
   for j = 1:n-1
     Res(j)=s1(j)/s2(j);
   end
   Result = Res;
end
```

```
%  Charger les éléments d'une liste sur
%le triangle supérieur d'une matrice de
%taille cohérent
function Result = ListeATrian(L)
        l = length(L);
        n = (-1+sqrt(1+8*l))/2;     % le nombre de colonne de la matrice car l= n*(n+1)/2
        Res = zeros(n,n);
        k=1;
        while(k<=l)
            for i = 1:n
                for j =1:n-i+1
                    Res(i,j)=L(k);
                    k=k+1;
                end
            end
        end
        Result = Res;
End

%La function id servant dans la procedure bootstrap
function result = id(L)
   result= L;
end
```

```
%  Fonction permetant de passer de triangle
% non cumulé ver le triangle cumulé
function Result = NonCumulACulmul ( X )
    [m,n] = size(X);
    Res = X;
    for i = 1 :m
        for j = 2:(n-i+1)
            Res(i,j) =Res(i,j-1)+X(i,j);
        end
    end
    Result = Res;
End
%les paiments cumulé ver les paiments non cumulé
function Result = TriCumulANonCumul(C)
    [m,n] = size(C);
    Res = C;
    for i = 1:m
        for j =2:(n-i+1)
            Res(i,j) = C(i,j) - C(i,j-1);
        end
    end
    Result = Res;
End
```

```
%Calculer les montants de Provision à partir de la matrice complet
function [ProvAnu ProvToTal] = Provision(MCulmul)
    [m,n] = size(MCulmul);
    Res = zeros(n,1);
    for i = 1:m
        Res(i) = MCulmul(i,n) - MCulmul(i,n-i+1);
    end
    ProvAnu = Res;
    ProvToTal = sum(Res);
End
%  Reconstruire la matrice de paiements annuels pour chaque triangle de résidus
function Result = ReconNonCul(Mu,R)
    [m,n] = size(R);
    Res = zeros(m,n);
    for i = 1 :m
        for j =1:n
            Res(i,j) = Mu(i,j) + R(i,j)*sqrt(Mu(i,j));
        end
    end
    Result = Res;
End
```

```
% Calculer le triangle de Résidus initials
function Result = Residu(C)
    [m,n] = size(C);
    Res = zeros(m,n);
    C_Theo = CumulTheo(C);
    X = TriCumulANonCumul(C);
    X_Theo = TriCumulANonCumul(C_Theo);

    for i = 1:m
```

```
% Charger les éléments du triangle supérieur d'une matrice sur une liste
function Result = TrianAListe(R)
    [m,n] = size(R);
    l= (n+1)*n/2;     %longeur de la liste
    Res = zeros(1,l);
    k=1;
    while (k<l+1)
        for i =1:m
            for j = 1:(n-i+1)
```

<table>
<tr>
<td>

```
                for j =1:(n-i+1)
                        Res(i,j) = (X(i,j) -
X_Theo(i,j))/ sqrt(X_Theo(i,j));
                end
        end
        Result = Res;
End
```

</td>
<td>

```
                                Res(k) = R(i,j);
                                k=k+1;
                        end
                end
        end
        Result = Res;
end
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>

```
%) les paiments cumulé ver les paiments
non cumulé
function Result =
TriCumulANonCumul(C)
        [m,n] = size(C);
        Res = C;
        for i = 1:m
                for j =2:(n-i+1)
                        Res(i,j) = C(i,j) -
C(i,j-1);
                end
        end
        Result = Res;
End
```

</td>
<td>

```
% Créer N échantillon sous forme triangle à
%partir de l'échantillon initial
function Result = ReEchan(R,N)   %R est le
résidu initial , N est le nbr de simulation
        [m,n] = size(R);
        L = TrianAListe(R);
        NSampleResi = bootstrp(N,'id',L);
        Q = repmat(0,[m,n,N]);
        for i = 1:N
        Q(:,:,i)=ListeATrian(NSampleResi(i,:));
        End
        Result = Q;
End
```

</td>
</tr>
</table>