

**Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles
pour l'obtention du diplôme
du Centre d'Etudes Actuarielles
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le : _____**

Par : Andres Krapf et Benoit Dévé

Titre : Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présent du jury de
l'Institut des Actuaire :*

signature

Entreprise :

Nom : _____

Signature : _____

*Membres présents du jury du
Centre d'Etudes Actuarielles :*

Directeur de mémoire en entreprise :

Thomas BEHAR

Nom : _____

Vincent DAMAS

Signature : _____

Gérard CROSET

Invité :

Arnaud COHEN

Nom : _____

Jean-Pierre DIAZ

Signature : _____

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Michel FROMENTEAU

Stéphane MENART

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Florence PICARD

Olivier LOPEZ

Secrétariat :

Bibliothèque :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature des candidats

MEMOIRE D'ACTUARIAT

CENTRE D'ETUDES ACTUARIELLES

Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie

Andres Krapf - Benoit Dévé

Résumé

La nouvelle réglementation Solvabilité 2 sur les marchés européens de l'assurance oblige les acteurs du secteur à développer de nouvelles techniques de gestion et de mesure des risques. Le calcul de marge de solvabilité forfaitaire telle que le préconisait la réglementation française Solvabilité 1 va être remplacé par une approche plus complexe reposant sur le concept de risque de ruine propre à chaque compagnie. Solvabilité 2 impose aux acteurs de l'assurance de mesurer leurs besoins en capital suivant une approche économique, correspondant au niveau nécessaire pour pouvoir faire face à un évènement défavorable extrême. En outre, la nouvelle réglementation autorise les acteurs de l'assurance à se doter d'un modèle interne spécifique pour réaliser cette mesure. A l'inverse, les acteurs qui le souhaitent pourront calculer leur exigence en capital suivant une formule standard.

Techniquement, la marge de solvabilité sous le référentiel Solvabilité 2 est définie comme le capital nécessaire pour couvrir le risque de « faillite économique » de la compagnie sur un horizon d'un an avec une probabilité fixée à 99,5%. Cette définition repose sur la notion de distribution des fonds propres économiques. L'approche naturelle de mise en œuvre consiste à estimer cette distribution à l'aide de techniques de type Monte-Carlo. En réalité, ce calcul est confronté à des problèmes techniques et opérationnels. En effet, il est d'usage d'utiliser des modèles de projection stochastiques (appelés modèle DFA – Dynamic Financial Analysis) pour valoriser les passifs d'assurance vie. Le nombre de simulations nécessaires pour projeter ces valorisations sur un an est très élevé, ce qui peut s'avérer incompatible avec les contraintes opérationnelles – au niveau de la puissance de calcul et des délais de production requis.

Cependant, des méthodes d'approximation permettent d'obtenir des solutions intéressantes aux problèmes techniques posés par les exigences Solvabilité 2. On trouve parmi ces alternatives l'approche par portefeuille répliquant. Cette approche consiste à construire un portefeuille d'instruments financiers, valorisés par formules fermées, permettant de fournir une estimation de la valeur économique des fonds propres ou des passifs. L'adoption de cette approche pose dans un premier temps des questions de construction et calibration des portefeuilles, et dans un deuxième temps des questions sur leur pouvoir prédictif.

Nous présenterons dans la première partie de ce mémoire le nouveau cadre de réglementation que constitue la directive européenne Solvabilité 2 ainsi que ses implications en termes de mesure de marge de solvabilité. Puis nous introduirons le concept de portefeuille répliquant ainsi que les différentes méthodes et principes de construction. Nous analyserons les résultats de chaque approche à partir d'un exemple concret, sur lequel nous appliquerons différentes approches : modélisation complète à l'aide d'un modèle de projection, utilisation des portefeuilles répliquants, approche par formes paramétriques. Enfin nous envisagerons les applications possibles des portefeuilles répliquants dans les autres domaines de la gestion actif / passif d'une compagnie d'assurance vie.

Executive summary

A new regulatory framework, Solvency 2, is currently being implemented within the European insurance markets. French regulation Solvency 1 has so far favoured an approach based on a minimum solvency margin requirement. The new approach is more sophisticated and complex, as it is based on company specific risk assessment. Consequently, stakeholders need to develop new risk management and risk monitoring techniques. Solvency 2 requires insurance companies to assess their capital requirement based on an economic approach, measuring their ability to face an extreme loss event. Moreover, the new regulatory framework allows insurance companies to develop their own internal model to perform this assessment. Those not willing to develop such a model can assess their capital requirement based on a standard formula.

Technically, under Solvency 2, the solvency margin is defined as the amount of capital required to avoid the risk of an “economic bankruptcy” of the insurance company over one year with a pre-defined 99.5% probability. This definition relies on the concept of a distribution of shareholder equity. The intuitive approach of implementing this methodology would consist in using stochastic models (called DFA models – Dynamic Financial Analysis) based on Monte-Carlo simulations, in order to assess the market value of liabilities. In reality, this approach faces technical and operational issues: the number of simulations necessary to project these valuations over one year is very significant; this can be incompatible with operational constraints such as the required computing power or the time delay of production.

However, one can find interesting solutions to the technical problems set by the new Solvency 2 requirements thanks to approximation methods. Among these alternatives, there is the replicating portfolio approach. This technique consists in building a portfolio of financial instruments, valued by closed forms. One can then obtain an assessment of the shareholder equity or the market value of liabilities. Two issues are raised: first, the way the replicating portfolio is set and calibrated; second, the predictive power of the replicating portfolio.

First, we introduce the new regulatory framework Solvency 2 and its consequences in terms of solvency margin assessment. Second, we introduce the replicating portfolio technique and the different methods and principles to build them. Third, we analyse and compare the results based on a concrete example of an insurance contract for which we perform the calculation 1- by using the full modelling with the DFA model, 2- by using the replicating portfolio and 3- by using standard interpolation techniques. Fourth, we consider the possible use of the replicating portfolio technique in other fields of the asset/liability management of life insurance companies.

Remerciements

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont aidées à réaliser ce mémoire en particulier Guillaume Valois et Vincent Jarlaud du Groupe AXA pour leurs conseils avisés, leur écoute et pour nous avoir fait partager leur expertise sur les sujets de gestion de risques. Egalement nous remercions chaleureusement Christian Yann Robert pour sa disponibilité et son écoute attentive à nos différentes problématiques.

Enfin nous tenons à remercier nos proches pour leur soutien et leur compréhension pendant la réalisation de ce travail.

1 Table des matières

1	Table des matières	7
2	Contexte et cadre général	9
2.1	La gestion actif/passif.....	9
2.2	La réforme règlementaire Solvabilité 2.....	11
2.3	Le bilan économique Solvabilité 2.....	12
2.4	Méthodes de calcul du capital économique.....	15
3	Etat de l'art des portefeuilles répliquants en assurance vie.....	18
3.1	Différents types de portefeuilles répliquants.....	18
3.2	Instruments financiers utilisés	20
3.3	Algorithmes de réplication	24
3.3.1	Algorithmes génétiques.....	24
3.3.2	Optimisation des moindres carrés ordinaires	26
3.4	Critères d'appréciation de la qualité de réplication.....	31
4	Application à un bon de capitalisation simplifié.....	35
5	Application à un contrat retraite	38
5.1	Description du passif	38
5.2	Modèle actif/passif de référence (modèle DFA)	39
5.3	Scenarios économiques	45
5.3.1	Modèle de diffusion monde réel.....	45
5.3.2	Modèle de diffusion risque neutre.....	55
5.4	Construction du portefeuille répliquant.....	60
5.4.1	Choix des instruments financiers	60
5.4.2	Détermination des poids.....	64
5.4.3	Analyse de la qualité de la réplication	66
6	Etude de l'applicabilité des portefeuilles répliquants	73
6.1	Application pour Solvabilité 2 / ERM.....	73
6.1.1	Résultats modèle DFA vs. Portefeuille répliquant	73
6.1.2	Résultats de l'approche modèle DFA vs. Forme paramétrique	79
6.1.3	Synthèse des résultats numériques	85
6.2	Etude de la stabilité des portefeuilles	85
6.2.1	Mouvement de marché	85
6.2.2	Vieillessement d'une année	86
6.2.3	Changement d'allocation stratégique ou tactique	90
6.3	Application pour le hedging	92
6.3.1	Application au bon de capitalisation simplifié.....	93
6.3.2	Application au contrat retraite.....	97
6.3.3	Conclusion.....	103
7	Risque comportemental et biométrique.....	104
7.1	Risque comportemental	104
7.2	Risque biométrique	111
8	Conclusion et critique de l'approche.....	114
9	Annexes.....	116
9.1	Effectifs du contrat collectif retraite étudié.....	116
9.2	Back-test série historique : Taux 2Y	117
9.3	Détails des instruments financiers disponibles.....	118

9.4	Détail de la composition du portefeuille répliquant utilisé	127
9.5	Multiplicateurs de Lagrange.....	128
9.6	Interpolation spline cubique	129
9.7	Réplication des passifs et des marges : considérations théoriques et pratiques	130
9.8	Réplifications des passifs vs. marges.....	133
9.9	Sensibilités non parallèles de la courbe des taux	135
10	Bibliographie	136

2 Contexte et cadre général

2.1 La gestion actif/passif

La gestion actif-passif (ALM – Asset/Liability Management en anglais) rassemble les techniques de pilotage dans le temps de l'équilibre financier d'un investisseur institutionnel. La maîtrise de ces techniques conditionne la capacité d'une compagnie d'assurance ou d'un fonds de pension à honorer ses engagements en dépit des fluctuations des marchés financiers [1][2], ainsi que sa capacité à dégager le cas échéants une rentabilité suffisante pour ses actionnaires.

La gestion actif-passif permet de mesurer et de gérer les risques pesant sur le bilan des compagnies d'assurance :

- par la définition de l'allocation d'actif optimale, permettant d'allier risque maîtrisé et rendement suffisant
- par le transfert aux marchés financiers des risques non-désirés à l'aide de produits dérivés
 - swaps, futures, caps/floors/swaptions sur obligations
 - futures, puts sur actions
- par la limitation des engagements pris au passif, lors de la conception des produits
- par le suivi de la valeur de la société (embedded value) et la limitation de sa volatilité

Ces techniques se sont développées avec un degré de sophistication croissant au fur et à mesure que s'est accrue la puissance de calcul disponible.

Les deux outils les plus simples visent à réaliser des analyses statiques. Le premier concerne le suivi de la trésorerie générée dans le temps par les stocks d'actifs et de passifs au bilan, sans tenir compte des réinvestissements. Le second vise à comparer les durées de taux garantis du passif avec les durées des obligations à taux fixes à l'actif. Ces outils se retrouvent également au cœur de la gestion actif / passif bancaire, et sont connus respectivement sous le nom d'impasse de liquidité et d'impasse de taux.

Ces techniques permettent de se forger une première opinion sur la capacité de l'organisme à faire face à ses engagements. En revanche, elles se révèlent insuffisantes pour fournir une vision complète des risques actif-passif. En effet, elles ne prennent pas en compte les diverses garanties et options conférées aux assurés par les produits classiques d'assurance vie, ni les contraintes commerciales, comptables et réglementaires qui pèsent sur le bilan et le compte de résultat de la compagnie.

Aussi, les gestionnaires actifs-passifs se sont progressivement dotés d'outils de simulations permettant de capturer la dynamique du bilan, des fonds propres et des comptes de résultats sous divers scénarios financiers. Ceci implique l'intégration de divers éléments :

- **la stratégie financière** : la gestion financière long terme du portefeuille et le dégagement de plus ou moins values
- **les aspects commerciaux** : la politique de PB, de revalorisation des rentes, de retarification, de production future

- **les contraintes comptables / réglementaires** : provisions pour dépréciations durables, provisions pour risque d'exigibilité, réserve de capitalisation, participation aux bénéfices minimum ...
- **les engagements contractuels** : taux garantis et participation aux bénéfices contractuelle
- **le comportement dynamique des assurés** : options de rachats, de reversements, de prorogation, de conversion en rentes ...

Ces modèles permettent de réaliser des simulations à partir de scénarios de marché, où sont définies les évolutions temporelles des principales données de marché qui impactent le bilan et le compte de résultat. On y trouve notamment les performances des grandes classes d'actifs risquées, ainsi que l'évolution des taux nominaux et de l'inflation.

A l'aide de ces modèles, le gestionnaire actif-passif peut simuler une projection de bilans et de comptes de résultats et mener des analyses dynamiques et complètes de l'évolution des grandeurs principales d'intérêt pour lui.

Ces modèles ont tout d'abord été utilisés pour réaliser des simulations suivant des scénarios centraux de performance des actifs financiers, ainsi que des scénarios de stress. Par la suite, ces modèles ont été enrichis des modélisations stochastiques de diffusion d'actif, à l'aide de techniques issues des mathématiques financières classiquement utilisées pour le pricing et la couverture des actifs dérivés.

Ces techniques sont aujourd'hui largement adoptées par la profession, notamment depuis la standardisation par le CFO Forum sur la MCEV[3] :

« Principle 7: Allowance must be made in the MCEV for the potential impact on future shareholder cash flows of all financial options and guarantees within the in-force covered business. The allowance for the time value of financial options and guarantees must be based on stochastic techniques using methods and assumptions consistent with the underlying embedded value. All projected cash flows should be valued using economic assumptions such that they are valued in line with the price of similar cash flows that are traded in the capital markets. »

« G13.2 where cash flows contain financial options and guarantees such that they do not move linearly with market movements, asset cash flows can be projected and all cash flows discounted using risk-neutral stochastic models. Alternative approaches, for example using deflators, may also be used. In either method, the reference rates should be used as risk free rates. »

« Principle 14: The reference rate is a proxy for a risk free rate appropriate to the currency, term and liquidity of the liability cash flows. »

« Principle 15: Stochastic models and the associated parameters should be appropriate for the covered business being valued, internally consistent and, where appropriate, based on the most recent market data. Volatility assumptions should, wherever possible, be based on those implied from derivative prices rather than the historical observed volatilities of the underlying instruments »

Enfin, il est attendu que ces mêmes techniques soient à la base de la construction du bilan économique sous le référentiel Solvabilité 2.

2.2 La réforme réglementaire Solvabilité 2

Solvabilité II (Solvency II en anglais) est une réforme réglementaire européenne du monde de l'assurance. Dans la lignée de Bâle II, son objectif est de mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurances et de réassurance avec les risques que celles-ci encourent du fait de leur activité [4].

La réglementation française en vigueur prévoit une marge de solvabilité assise sur les provisions en vie et sur les primes et les sinistres en non-vie. Ceci a plusieurs conséquences. Tout d'abord, le fait que cette réglementation ne s'applique qu'aux compagnies françaises peut créer une distorsion des règles de la concurrence. En effet, dans le cadre d'une concurrence internationale accrue en Europe au fur et à mesure que les barrières à l'entrée sont abaissées, un concurrent peut bénéficier d'un traitement prudentiel favorable dans son pays d'origine pour attaquer un marché européen étranger – par exemple via la libre prestation de services ou en ouvrant une succursale.

Par ailleurs, le niveau de fonds propres requis par la réglementation en vigueur ne fait pas de cas du niveau de risque global qui pèse sur le bilan de la compagnie d'assurances. A titre d'exemple, on peut citer que le niveau de fonds propres requis est le même quel que soit le niveau de diversification géographique et quel que soit le niveau de risque pris à l'actif de la compagnie.

La directive Solvabilité 2 est conçue de manière à répondre aux quatre objectifs suivants:

- Renforcer l'intégration du marché européen de l'assurance
- Améliorer la protection des preneurs d'assurance et des ayants droit
- Renforcer la compétitivité des assureurs et réassureurs européens au niveau international
- Promouvoir une meilleure réglementation

A l'instar de la directive CRD liée à l'accord de Bâle II, Solvabilité II est architecturée autour de trois piliers.

Le **premier pilier** définit le cadre méthodologique dans lequel s'inscrit le calcul prudentiel. Il précise en effet les diverses dispositions à respecter pour construire le bilan économique, ce qui inclut notamment le calcul des provisions techniques en juste valeur (« Fair Value » en anglais). Il précise également les seuils réglementaires de fonds propres économiques requis pour opérer.

Deux niveaux de fonds propres seront définis: MCR (Minimum Capital Requirement ou Capital Minimum Requis) et SCR (Solvency Capital Requirement ou Capital Cible).

- Le MCR correspond au niveau de fonds propres en-dessous duquel les intérêts des assurés se verraient sérieusement menacés si l'entreprise était autorisée à poursuivre son activité. Il est calibré selon la VaR (Value-At-Risk) avec un niveau de confiance de 80% à 90% à horizon d'un an.

- Le SCR représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un choc bicentenaire, correspondant à une VaR avec un niveau de confiance de 99,5% à horizon d'un an.

La directive prévoit la possibilité pour les compagnies de se doter d'un modèle interne spécifique, adapté à son profil de risques. Celles qui ne le souhaitent pas se verront imposer une formule standard pour leurs calculs de capital réglementaire.

Le **deuxième pilier** a pour objectif de fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne aux compagnies et comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance dans ce contexte.

Ce pilier s'attache notamment à garantir une bonne gestion des risques par les compagnies au travers d'une organisation, une gouvernance et de processus adaptés. Il encourage les compagnies à mettre en œuvre une démarche d'ERM (Enterprise Risk Management), c'est-à-dire une gestion intégrée du risque à tous les niveaux de la compagnie.

Le **troisième pilier** a pour objectif de définir l'ensemble des informations détaillées que les autorités de contrôle jugeront nécessaires pour exercer leur pouvoir de surveillance, ainsi que les exigences de transparence en matière de communication financière.

L'adoption de Solvabilité 2 va avoir des impacts majeurs sur la gestion du capital par les compagnies d'assurances. En réponse aux exigences du pilier 1, il deviendra primordial de pouvoir produire dans un délai restreint un bilan économique, et sa distribution sur un horizon d'un an afin d'en extraire notamment la VaR 99,5%. Ce bilan devra être fidèle aux principes de juste valeur des actifs et des passifs.

Dans le cadre de l'ORSA (Own Risk Self Assessment) du pilier 2, les compagnies seront également tenues de pouvoir projeter leur ratio de solvabilité prévisionnel sur un horizon de temps pouvant aller jusqu'à 5 ans. Autrement dit, d'être capable de produire des projections de Value-At-Risk.

Par ailleurs, la gestion actif / passif devra se doter de nouveaux outils pour tenir compte de cette révolution réglementaire. En effet, la prise de risques dans l'allocation d'actifs aura désormais un coût en capital, modifiant profondément le niveau de prime de risque nécessaire pour rentabiliser un investissement en actifs risqués.

2.3 Le bilan économique Solvabilité 2

Comment est-il calculé ? Les grands principes sont les suivants

- Les **actifs** sont valorisés en juste valeur, suivant des règles proches de la comptabilité IFRS.
- Les **passifs** sont valorisés via la formule actuarielle classique en assurance vie : valeur actuelle probable des engagements de l'assureur moins valeur actuelle probable des engagements de l'assuré. Néanmoins, les hypothèses retenues pour cette valorisation ne comportent plus de marge de prudence mais sont le reflet direct des meilleures estimations de la compagnie.

Les actifs comme les passifs sont reconnus à leur valeur de marché quand un marché liquide existe. Sinon, ils sont généralement valorisés à l'aide d'un modèle.

Les textes reconnaissent deux types d'approche pour l'évaluation des passifs.

- **L'approche financière - évaluation à l'aide d'un portefeuille de couverture** : S'il est possible d'obtenir une réplique parfaite des passifs à l'aide d'un portefeuille d'actifs, la valorisation retenue sera celle du portefeuille d'actifs ainsi constitué.
- **L'approche actuarielle - estimation probabiliste** : S'il existe des risques qui ne peuvent pas faire l'objet d'une couverture sur les marchés financiers, le passif sera évalué sur base de la meilleure estimation faite par la compagnie (Best Estimate of Liabilities ou BEL en anglais) à laquelle sera ajoutée une marge de prudence dénommée marge pour risque non couvrable (Risk Margin ou RM en anglais).

La très grande majorité des passifs d'assurance vie en France tomberait dans la seconde catégorie puisque présentant un aléa viager, non-couvrable sur les marchés financiers. Il convient néanmoins, avant de sélectionner l'une ou l'autre de ces méthodes, d'étudier la matérialité des risques non-couvrables du passif considéré.

En matière d'options et garanties financières embarquées dans les engagements vie, les spécifications techniques utilisées pour le QIS5 précisent ce qui suit :

«

Contingent Liabilities / IAS 37

A contingent liability is either:(a) a possible obligation that arises from past events and whose existence will be confirmed only by the occurrence or non occurrence of one or more uncertain future events not wholly within the control of the entity; or (b) a present obligation that arises from past events but is not recognised because: (i) it is not probable that an outflow of resources embodying economic benefits will be required to settle the obligation; or (ii) the amount of the obligation cannot be measured with sufficient reliability.

Recommended Treatment and solvability adjustments for QIS5.

Insurance and reinsurance undertakings should recognize as a liability contingent liabilities, as defined in international accounting standards, as endorsed by the Commission in Accordance with Regulation (EC) No 1606/2002, that are material. Valuation should be based on the probability-weighted average of future cash flows required to settle the contingent liability over their lifetime of that contingent liability, discounted at the relevant risk-free interest rate

»

«

TP.2.80. For the purposes of valuing the best estimate of contractual options and financial guarantees, a stochastic simulation approach would consist of an appropriate market consistent asset model for projections of asset prices and returns (such as equity prices, fixed interest rate and property returns), together with a dynamic model incorporating the

corresponding value of liabilities (incorporating the stochastic nature of any relevant non-financial risk drivers) and the impact of any foreseeable actions to be taken by management.

»

Ainsi, afin de valoriser ces engagements de nature optionnelle, il est nécessaire de calculer une espérance sous une mesure de probabilité compatible avec les prix de marché (« market consistent » en anglais), la plus usuelle étant la probabilité risque neutre. Il est relativement complexe de réaliser ce calcul via des formules fermées, et les compagnies font traditionnellement appel à des techniques de simulation Monte-Carlo.

On obtient alors le BEL :

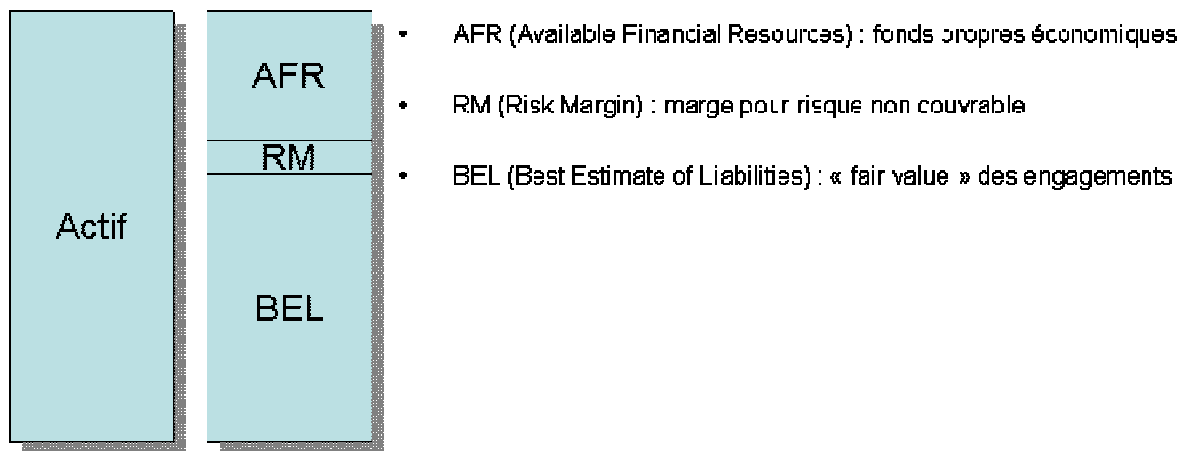
$$BEL = E_Q \left(\sum_{t=1}^T CF_{Passif}(t) * D(t) \right)$$

Q est la probabilité risque neutre.

En pratique, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo :

$$BEL \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T CF_{Passif}(i, t) * D(i, t)$$

Le bilan économique se présente alors comme suit



L'AFR représente le niveau de fonds propres économiques du bilan Solvabilité 2. Par la suite, nous allons nous intéresser à l'actif et au BEL, et nous allons considérer à des fins simplificatrices que la RM est nulle.

Ainsi, nous avons

$$AFR = Actif - BEL$$

$$SCR = VaR_{99,5\%}(AFR)$$

2.4 Méthodes de calcul du capital économique

Le SCR représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un choc bicentenaire, correspondant à une VaR avec un niveau de confiance de 99,5% à horizon d'un an, parfois également appelé « capital économique ».

La réévaluation du bilan économique dans d'autres scénarios que le « Best Estimate » nécessite d'appliquer à nouveau les méthodes d'évaluation présentées au paragraphe 2.3. En règle générale, pour des passifs d'assurance vie, il va s'agir de simulations Monte-Carlo en univers risque neutre. Ces opérations sont souvent coûteuses à deux égards :

- La calibration des scénarios économiques peut s'avérer complexe et chronophage
- La puissance informatique nécessaire et les temps de calcul peuvent s'avérer rédhibitoire.

Pour répondre aux besoins du calcul du capital économique, et notamment du SCR pour les risques de marché, les différentes approches possibles sont :

- **La formule standard** : cette méthode consiste à déterminer directement le SCR à l'aide d'une approche modulaire, où le besoin en capital est déterminé pour chaque facteur de risque pris indépendamment pour ensuite agréger ces besoins en capitaux à l'aide d'une matrice de corrélation. Le calcul du SCR basé sur la formule standard est la solution la plus simple, mais repose sur la connaissance à priori du scénario correspondant au quantile à extraire. Ces scénarios étant arrêtés de manière réglementaire, cette méthode ne permet pas de prendre en compte le profil de risque spécifique à la compagnie qui évalue son besoin en capital.
- **La méthode stochastique de stochastique** : cette méthode consiste à calculer complètement les distributions des fonds propres à un an à l'aide du modèle de DFA. Cela nécessite d'avoir un premier jeu de projections stochastiques à horizon un an suivant différentes conditions de marché. A partir de chaque point de cette projection dite projection primaire, est ensuite projeté le bilan de la compagnie suivant des scénarios risque neutre recalibrés. Cette solution est lourde à mettre en place compte tenu de la complexité des modèles DFA utilisés et du nombre de facteurs de risques pris en compte. Les modèles actuellement disponibles au sein des compagnies d'assurance ne permettent pas de mettre en place cette approche de manière opérationnelle.
- **La méthode d'accélérateur de stochastique de stochastique** : cette méthode est une variante de l'approche citée précédemment et consiste à sélectionner en amont les scénarios économiques d'intérêt en fonction de leur adversité. La sélection des scénarios se fait sur les simulations primaires ainsi que sur les simulations secondaires. Cela permet de réduire considérablement le nombre de scénarios à envisager et ainsi d'économiser du temps de calcul par rapport à la méthode stochastique de stochastique complète. Cependant cette méthode repose sur des hypothèses supplémentaires concernant la distribution des facteurs de risques.

- **L'approche paramétrique (curve fitting)** : cette méthode est basée sur des techniques d'interpolations / d'extrapolations. Il est possible de construire une fonction qui à des conditions économiques données en entrée, permet d'estimer des grandeurs du bilan (passifs, fonds propres économiques,..) suivant des conditions économiques données en entrée. Cette méthode est plus simple de mise en œuvre que les précédentes.

- **La méthode des portefeuilles répliquants** : cette méthode consiste à construire une représentation du bilan économique d'une compagnie d'assurance à partir d'instruments financiers simples pouvant être valorisés à partir de formules fermées. Cette solution permet d'obtenir rapidement une distribution de certaines grandeurs du bilan (ex : les passifs économiques) et repose sur la capacité à reproduire les options complexes des passifs d'assurance par des instruments financiers vanilles valorisables par formules fermées.

Les choix méthodologiques des différents acteurs de l'industrie reposent sur un arbitrage entre le temps de calcul nécessaire et disponible pour produire les mesures souhaitées d'une part et la précision des résultats obtenus d'autre part.

Résumé des différentes approches

Approche	Avantages	Inconvénients
Formule Standard	<ul style="list-style-type: none"> • Simplicité de mise en place • Calcul souple • Simulations et projections de SCR aisées 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne prend pas en compte les risques spécifiques de la compagnie
Stochastique de stochastique	<ul style="list-style-type: none"> • Calcul aussi robuste que l'est le modèle DFA • Répond parfaitement au besoin de Solvabilité 2 	<ul style="list-style-type: none"> • Mise en place complexe et coûteuse • Temps de calcul très important
Accélérateur de SdS	<ul style="list-style-type: none"> • Se rapproche le plus du stochastique de stochastique • Temps de calcul restreint 	<ul style="list-style-type: none"> • Justification du choix des scénarios à considérer pour les queues de distribution • L'hypothèse prise « à priori » est d'autant plus forte que le nombre de facteurs de risque augmente
Curve Fitting / Forme paramétrique	<ul style="list-style-type: none"> • Facilité de compréhension de la méthode • Méthodologie homogène pour les risques d'actifs et 	<ul style="list-style-type: none"> • Complexité de la calibration des fonctions paramétriques • Difficulté à prendre en

Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif
d'une compagnie d'assurance vie

	les risques de passifs.	compte les interactions entre les risques (chocs croisés).
Portefeuille répliquant	<ul style="list-style-type: none">• Lien avec les actifs du bilan• Permet de traduire les garanties d'assurance en termes financiers• Permet de calculer de nombreuses sensibilités	<ul style="list-style-type: none">• Complexité de mise en place et de la calibration• Difficulté dans la mesure de l'erreur de modèle

L'approche des portefeuilles répliquants peut s'appliquer à toutes les lignes de produits d'assurance vie, aussi bien les produits traditionnels sur fonds Euro que les produits retraites ou les unités de compte. Cependant l'intérêt de la méthode étant de mesurer le risque financier porté par l'assureur, il est plus pertinent d'utiliser cette approche pour les produits présentant des garanties significatives à la charge de la compagnie contenant des options et garanties embarquées.

Pour répondre aux besoins de mise en place du calcul de capital économique selon la directive Solvabilité 2, de nombreux grands acteurs européens ont choisis l'approche du portefeuille répliquant. De ce fait, pour que l'utilisation des portefeuilles répliquants dans une problématique Solvabilité 2 soit acceptable, il est essentiel que les valeurs de marché calculées par les portefeuilles répliquants soient suffisamment proches de celle qui aurait été calculées par une approche stochastique de stochastique.

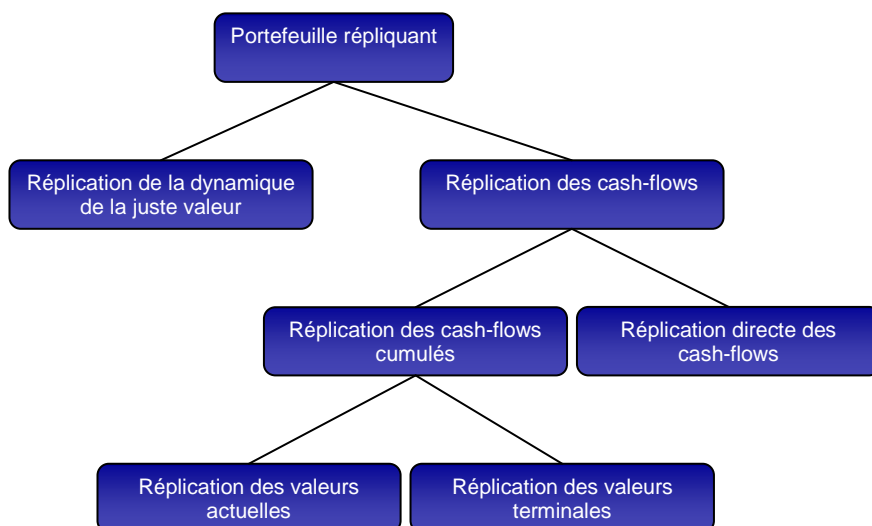
3 Etat de l'art des portefeuilles répliquants en assurance vie

Le processus de construction peut être décomposé en étapes génériques, que nous détaillerons par la suite :

1. Sélection du type de portefeuille répliquant,
2. Sélection des instruments financiers utilisés pour la réplification,
3. Définition des données à répliquer et des contraintes,
4. Détermination du poids de chaque instrument financier,
5. Validation de la qualité de la réplification

3.1 Différents types de portefeuilles répliquants

Il existe plusieurs types de portefeuilles répliquants que l'on peut hiérarchiser comme suit.



Réplication de la dynamique de la juste valeur

Cette famille de méthodes, très proche des méthodes de « Curve Fitting », désigne les algorithmes qui visent à répliquer la juste valeur des passifs, ainsi que la sensibilité de cette valeur aux diverses conditions de marché. En termes financiers, cette méthode consiste à répliquer les grecques sans s'attacher à répliquer les pay-offs.

Il s'agit de trouver un portefeuille de p actifs financiers qui présente les caractéristiques suivantes.

- Valeur de marché = valeur des passifs
- Valeur de marché dans $K-1$ scénarios de stress sur un an = valeur des passifs stressés

En introduisant un peu de formalisme, si on note $MV_j^{(k)}$ la valeur économique de l'instrument j dans un scénario de stress k, on cherche un ensemble de poids ω_i tels que les K égalités suivantes soient vérifiées :

$$\left\{ V^{(k)} = \sum_{j=1}^p \omega_j * MV_j^{(k)} \right.$$

Par convention le scénario de stress 0 correspondra au scénario best estimate.

Dans la mesure où on utilise des simulations Monte-Carlo en univers risque neutre pour l'évaluation des valeurs économiques de passif, on peut traduire cette égalité en adoptant les notations complémentaires suivantes :

- soit $CF_j^{(k)}(i, t)$ le cash flow au temps t de l'actif financier j, pour un scénario de stress k, et dans le scénario secondaire risque neutre i
- Soit $D^{(k)}(i, t)$ le coefficient d'actualisation stochastique au temps t, pour le scénario de stress k, dans un scénario secondaire risque neutre i.

On cherche alors un ensemble de poids ω_i tels que les K égalités suivantes soient vérifiées :

$$\left\{ V^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{t=1}^T \omega_j * CF_j^{(k)}(i, t) * D^{(k)}(i, t) \right.$$

Réplication des cash flows

Dans cette approche, le principe consiste à minimiser l'écart entre les cash flows générés par le portefeuille répliquant et les cash flows générés par le modèle DFA (Dynamic Financial Analysis) pour des scénarios financiers identiques.

Ainsi, on définit un jeu de n scénarios financiers, à partir duquel on extrait à l'aide du modèle DFA n chroniques de cash flows ainsi que n chroniques de coefficients d'actualisation, également appelés déflateurs. Ces éléments constituent les données de calibration du portefeuille répliquant.

En termes de formules, on cherche un ensemble de poids ω_i qui minimise l'une des trois fonctions quadratiques suivantes :

- Réplication des valeurs actuelles

$$F_1 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{t=1}^T \left(CF_{passif}(i, t) - \sum_{j=1}^p \omega_j * CF_j(i, t) \right) * D(i, t) \right]^2$$

- Réplication des valeurs terminales

$$F_2 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{t=1}^T \left(CF_{passif}(i, t) - \sum_{j=1}^p \omega_j * CF_j(i, t) \right) * \frac{D(i, t)}{D(i, T)} \right]^2$$

- Réplication directe des cash flows

$$F_3 = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \left[CF_{passif}(i,t) - \sum_{j=1}^p \omega_j * CF_j(i,t) \right]^2$$

Il est à noter que pour les deux premières fonctions, il y a autant de termes quadratiques que de scénarios de calibration. Pour la troisième, il y en a autant que de scénarios multiplié par le nombre d'années de projection.

Ainsi, les deux premières méthodes se calibrent uniquement sur une grandeur de type « valeur par scénario » alors que la troisième conserve la structure temporelle des cash flows.

Intérêt respectif des différents types de portefeuille

	Avantages	Inconvénients
Réplication de la dynamique de la juste valeur des passifs	<ul style="list-style-type: none"> • Construction immédiate et systématique • Cohérence garantie avec le modèle DFA sur les scénarios de stress retenus pour la construction 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne conserve pas la structure sous-jacente des cash flows • Nécessite un nombre important de calculs stochastiques avec le modèle DFA
Réplication des valeurs actuelles / valeurs terminales	<ul style="list-style-type: none"> • Intérêt opérationnel : peu de calculs stochastiques à l'aide du modèle DFA 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne réplique pas la structure temporelle des cash flows • Portefeuille répliquant plus difficile à construire
Réplication directe des cash flows	<ul style="list-style-type: none"> • Conserve l'ensemble de l'information des cash flows pour la calibration • Permet de réaliser des projections de capital économique sur plusieurs années 	<ul style="list-style-type: none"> • Construction plus complexe • Portefeuilles résultants plus complexes

Nous avons choisi d'étudier plus en profondeur la méthode « réplication des valeurs actuelles ».

3.2 Instruments financiers utilisés

Le choix des instruments financiers à intégrer dans le portefeuille répliquant doit être fonction des caractéristiques des passifs à répliquer tel que le niveau des garanties, les règles de participation aux bénéfices, les lois de rachats des assurés, etc.

Les actifs disponibles pour la construction d'un portefeuille répliquant pouvant être colinéaires (parité call-put, parité cap-floor swap ou autre), des combinaisons très différentes d'actifs peuvent aboutir à des résultats de réplication satisfaisants et équivalents. Il n'y a donc pas unicité de la composition d'un portefeuille répliquant pour un passif donné.

Selon les utilisations qui seront faites du portefeuille répliquant, les caractéristiques précises des actifs doivent être choisies dans un certain univers, qui peut être très restrictif si l'utilisation souhaitée est une aide au trading ou plus large si le portefeuille répliquant est destiné à accélérer certains calculs, comme c'est le cas dans le cadre de son utilisation dans Solvabilité 2.

Les instruments utilisés et testés dans notre étude sont les suivants :

Instrument	Description	Utilisation
Obligation Zéro Coupon		Permet de répliquer la composante certaine des flux (frais, rente certaine, capital garanti,...)
Indice	Exposition directe au sous-jacent (action / immobilier) entre 2 dates d'exposition	Modélisation de l'exposition au sous-jacent de l'indice et de la dépendance entre les passifs et l'indice sous-jacent à une date donnée.
Call / Put	Option donnant le droit d'acheter / vendre le sous-jacent à un prix et à une date donnée.	Modélisation de la participation aux bénéfices, de la sensibilité à la volatilité des passifs à l'indice sous-jacent.
Straddle	Option combinant un put et un call de même Strike et même maturité.	Modélisation de la participation aux bénéfices, de la sensibilité à la volatilité des passifs à l'indice sous-jacent.
Forward Swap	Contrat permettant d'échanger un taux fixe contre un taux variable.	Modélisation de certaines garanties de taux, notamment pour des primes périodiques
Cap	Option de taux qui paie la différence entre le taux spot de maturité donnée et le Strike K fixé lorsque le taux spot est au-dessus du Strike.	Modélisation de certaines garanties de taux et des sensibilités des passifs à la volatilité de taux.
Floor	Option de taux qui paie la différence entre un Strike donné et le taux spot de maturité donnée lorsque ce dernier est au-dessous du Strike.	Modélisation de certaines garanties de taux et des sensibilités des passifs à la volatilité de taux.
Constant Maturity Swap	Swap permettant d'échanger 2 taux variables entre eux.	Modélisation des garanties de taux et sensibilités des passifs à certaine maturité de la courbe de taux.
Swaption receveuse	Option d'entrer dans un swap receveur à une date donnée si le taux fixé d'avance est supérieur au taux variable de maturité donnée.	Modélisation de la participation aux bénéfices et de certains risques comportementaux comme le risque de rachat.
Swaption payeuse	Option d'entrer dans un swap receveur à une date donnée si le taux variable de maturité donné est	Modélisation de la participation aux bénéfices et de certains risques comportementaux comme le risque de

	supérieur au taux fixé d'avance.	rachat.
--	----------------------------------	---------

En annexe sont présentés en détail les différents instruments financiers avec leurs caractéristiques respectives, leurs formules de pay-offs associées et leurs formules de valorisation.

Les instruments optionnels sont de type options européennes. Or les garanties proposées par certains contrats d'assurances sont en réalité « path dependent » i.e. dépendantes de la trajectoire des sous-jacents, ou sont exerçables à tout moment et sont assimilables à des options Américaines. Mais ce type d'instruments présente l'inconvénient de ne pas pouvoir être valorisé en formule fermée. Par ailleurs, les instruments « path dependent » peuvent en général être approximés à l'aide d'une combinaison d'options européennes, ce qui est une pratique courante en finance de marché.

Une fois le choix des instruments et la calibration effectuée, les valorisations du portefeuille répliquant seront réalisées en formules fermées aussi bien sur le scénario central que pour les calculs de sensibilités.

Les paramètres nécessaires à la valorisation par formules fermée, à savoir la courbe des taux et la structure par terme de volatilités implicites, doivent être cohérents avec ceux utilisées pour les valorisations du BEL. Aussi, ces paramètres sont déduits du jeu de scénarios économiques risque neutre utilisés pour calculer le BEL. Les formules sont détaillées ci-après.

Taux spot

Les taux spot annuels sont calculés dans l'outil portefeuille répliquant à partir des scénarios économiques.

La structure par terme des taux d'intérêt donne pour le taux r_t de maturité t :

$$r_t = \frac{1}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D_{i,t}] \right)^{1/n}} - 1$$

$D_{i,t}$ désigne le coefficient d'actualisation stochastique t dans le scénario i au temps t .

Cette formule se déduit naturellement du pricing d'un zéro-coupon sans risque de maturité t par simulation de Monte-Carlo dans un environnement de taux stochastiques.

Taux forward

Le taux d'intérêt forward pour la période courant entre t_1 et t_1+t_2 est calculé à partir des données inclus dans les scénarios économiques :

$$F_{t1,t2} = \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D_{i,t1-1}]}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D_{i,t1+t2-1}]} \right)^{1/2} - 1$$

Taux continus

Les taux continus spot sont basés sur la structure par terme des taux d'intérêt :

$$y_t = \ln(1 + r_t)$$

Volatilités

Volatilités des indices Action / Immobilier

Les volatilités des indices Action et Immobilier sont utilisés pour la valorisation des options (Call ou Put) sur indices. La modélisation retenue ne comprenant pas de smile de volatilité, la volatilité implicite varie en fonction de la maturité de l'option mais ne varie pas en fonction du Strike de l'option.

Les volatilités implicites σ_t sont calculées à partir des scénarios économiques selon la formule :

$$\sigma_t = \frac{1}{\sqrt{t}} StDev \left(\sum_{k=1}^t \ln(1 + S(i, k)) \right)$$

Volatilité des taux d'intérêt

Les volatilités de taux d'intérêt sont utilisées pour les valorisations des instruments de taux et options sur taux (CMS, swaptions, caps, floors). La modélisation retenue ne comprenant pas de smile de volatilité, la volatilité implicite des taux d'intérêt varie en fonction de la maturité des options mais ne varie pas en fonction du niveau de Strike des options.

La volatilité implicite utilisée dans la valorisation des instruments de taux est calculée directement dans l'outil à partir des scénarios économiques. La volatilité σ_t du taux de maturité T est définie par :

$$\sigma_t = \frac{1}{\sqrt{t}} StDev \left(\ln \left(\frac{B(i, t)}{B(0, t)} \right) \right)$$

$B(i, t, T)$ est le prix en t d'une obligation zéro-coupon qui mature en date T dans le scénario i.

3.3 Algorithmes de réplication

Une fois le choix des variables à répliquer effectué (valeurs présentes des cash flows, valeurs terminales des cash flows ou encore réplication directe des cash flows), et le choix des instruments financiers à utiliser pour la réplication, il convient de définir la méthode de réplication, c'est-à-dire l'algorithme qui permettra de déterminer les poids de chaque instrument financier dans la composition du portefeuille

Le portefeuille répliquant pourra alors être valorisé à partir des formules fermées disponibles pour chaque instrument financier utilisé dans la réplication en combinaison avec les poids respectifs de chaque instrument.

Parmi les grandes familles d'algorithme, deux types semblent répondre aux problématiques soulevées par la construction des portefeuilles répliquants :

1. Algorithme génétique,
2. Optimisation des moindres carrés ordinaires

Nous aborderons ces 2 approches en détaillant plus précisément l'optimisation basée sur la méthode des moindres carrés ordinaires qui est celle que nous avons appliquée.

Il est à noter que le choix des instruments financiers sera conditionné par le choix de l'algorithme d'optimisation qui sera mis en place.

3.3.1 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques font partie de la famille des algorithmes évolutionnistes qui permettent d'obtenir une solution approchée à un problème d'optimisation pour lequel on ne connaît pas de méthode de résolution exacte dans un temps raisonnable.

Leur domaine d'application est très varié, et ils sont utilisés par exemple dans le cadre de la recherche d'allocations d'actifs optimales dont la problématique se rapproche de celle posée par la construction d'un portefeuille répliquant.

Dans le contexte de la construction des portefeuilles répliquants, l'utilisation des algorithmes génétiques conduirait à la démarche suivante :

La **1^{ère} étape** consiste à créer une population de combinaisons d'instruments financiers possibles respectant ou non les contraintes du problème posé. Chaque individu de la population (combinaison d'instruments) est alors représenté par d gènes (variables), une variable étant le poids d'un instrument donné. Il est possible de créer cette population initiale de manière aléatoire en créant N ($N=1000$ par exemple) individus où chacune des variables suit une loi uniforme bornée par les contraintes de la forme $W_i^- < W_i < W_i^+$ qui l'affectent. Afin d'éviter tout biais et pour obtenir une plus grande diversité dans la population initiale, l'ordre de simulation des différentes variables est également réalisé de manière aléatoire.

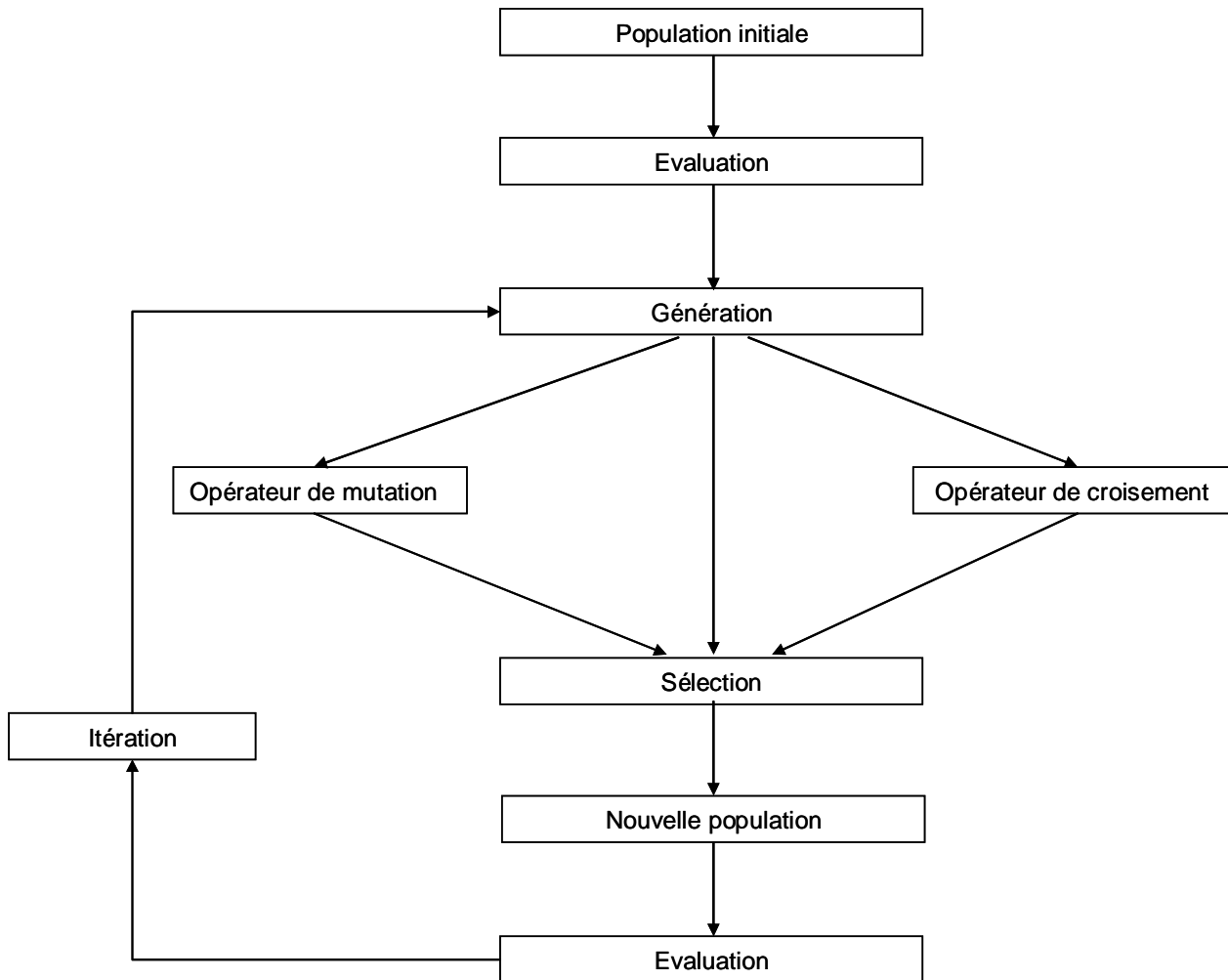
La **2^{ème} étape** consiste à évaluer chaque portefeuille répliquant ainsi constitué et à ajuster la population de manière à ne conserver que les individus respectant les contraintes.

La 3^{ème} étape consiste à créer de nouveaux individus à partir d'un opérateur de croisement et d'un opérateur de mutation. L'opérateur de croisement consiste à sélectionner au hasard deux portefeuilles répliquants et à en créer un troisième en moyennant les valeurs des variables des portefeuilles « parents ». Ensuite on évalue la qualité du nouveau portefeuille ainsi créé ; si la valeur de la fonction objectif est meilleure que l'une de celui de ses deux parents, alors il le remplace, la population restant ainsi constante.

Cependant cette méthode de croisement faisant perdre en diversité, la moyenne conduisant à s'éloigner des portefeuilles situés sur la frontière définie par les contraintes, on peut introduire un opérateur de « mutation ». On crée un nouvel individu selon la méthode utilisée pour créer la population initiale. Si les contraintes sont vérifiées, on sélectionne alors aléatoirement deux individus dans la population et le nouvel individu créé remplace celui dont la fonction objectif est la plus faible.

On itère ensuite ce processus en effectuant un nombre de croisements/mutations de l'ordre de la moitié de la taille de la population initiale en projetant ensuite sur un nombre fini M de génération (10 itérations de génération de nouveaux individus).

La mise en place d'un algorithme génétique pour la résolution du problème d'optimisation posé par les portefeuilles répliquants nécessite de considérer un large choix d'instruments financiers ayant des caractéristiques différentes afin de créer une population initiale exhaustive.



3.3.2 Optimisation des moindres carrés ordinaires

Les paragraphes suivants détaillent la méthode d'optimisation des moindres carrés ordinaires.

Nous détaillerons la métrique retenue comme critère d'évaluation au cours de l'optimisation, puis la traduction algébrique du problème d'optimisation avant d'étudier comment l'introduction de contraintes supplémentaires en modifie la résolution.

3.3.2.1 Métrique utilisée

La métrique retenue est la distance euclidienne, définie par :

$$d(X, Y) = \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2, \text{ où}$$

X_i représente la valeur présente ou la valeur terminale des cash flows à répliquer dans le scénario i .

Y_i représente la valeur présente ou la valeur terminale des cash flows répliquants dans le scénario i .

Note : Le cash flow terminal ou valeur terminale d'un instrument financier (ou d'un passif) désigne la somme de la projection des cash flows valorisés en dernière année de l'horizon de projection. Si T désigne l'horizon de projection, la valeur terminale du cash flow dans le scénario i est définie ainsi :

$$TCF_i = \sum_{t=1}^T CF_{i,t} \frac{D_{i,t}}{D_{i,T}}$$

L'algorithme d'optimisation des moindres carrés ordinaires cherche à minimiser la métrique précédente et détermine les poids correspondants des instruments du portefeuille répliquant.

3.3.2.2 Etape 1: Optimisation des moindres carrés ordinaires

Soit n le nombre de scénarios économiques utilisés pour la réplication.

X désigne une matrice de dimension (n, p) contenant les n valeurs terminales des cash flows des p instruments financiers standards sélectionnés pour la réplication.

Y désigne le vecteur de dimension (n) contenant les valeurs terminales des cash flows à répliquer,

β désigne un vecteur de dimension (p) représentant les poids de chaque instrument financier utilisé dans le portefeuille répliquant.

β est défini par

$$\beta = ({}^tXX)^{-1} {}^tXY \Leftrightarrow ({}^tXX)\beta = {}^tXY \Leftrightarrow D\beta = M$$

D est une matrice de dimension (p, p)

M est une matrice de dimension (p, 1)

Chaque élément $d_{l,k}$ de la matrice D est défini tel que::

$$d_{k,l} = d_{l,k} = \sum_{i=1}^n TCF_i^l \cdot TCF_i^k ,$$

Chaque élément m_k du vecteur M est défini tel que :

$$m_k = \sum_{i=1}^n L TCF_i \cdot TCF_i^k .$$

Avec:

*) TCF^l la valeur terminale du cash flow associé au l-ième instrument financier utilisé dans la réplication.

*) $LTCF_i$ la valeur terminale du cash flow de passifs à répliquer dans le scénario i.

3.3.2.3 Contraintes additionnelles

Une répliation est nécessairement une approximation et le portefeuille répliquant résultant de l'optimisation ne permet pas de reproduire systématiquement les valeurs des cash flows dans toutes les situations. Par conséquent, il convient d'ajouter des contraintes supplémentaires, afin de capturer dans le portefeuille répliquant certaines caractéristiques des cash flows à répliquer, notamment certaines sensibilités à des conditions de marché initiales particulières.

Ainsi il est possible d'ajouter des contraintes afin de forcer le portefeuille répliquant à s'ajuster sur des valeurs selon certaines conditions de marché.

Les contraintes additionnelles peuvent être :

- la CEV, i.e. sur le scénario central déterministe (hypothèses de best estimate si on ne tient pas compte de la valeur temps des options et garanties embarquées dans les passifs),
- la MCV, i.e. sur la valeur stochastique des passifs calculée comme la moyenne des valeurs stochastiques obtenues à partir de l'ensemble des scénarios économiques risque neutre,
- les sensibilités, c'est-à-dire selon certaines conditions de marché initiales spécifiques.

L'ajout de chaque contrainte supplémentaire revient à ajouter une dimension en ligne et en colonne à la matrice D (n,n).

La traduction mathématique de l'ajout de ces contraintes supplémentaires s'exprime par l'équation suivante :

$$W^t * p = P$$

Où p est le vecteur des prix des instruments financiers utilisés dans la composition du portefeuille, P la valeur des cash flow initiaux à ajuster et W le poids de chaque instrument.

La minimisation de q sous les contraintes évoquées plus haut est entièrement déterminée par les poids pour lesquels la dérivée de Q par rapport à w et λ est nulle :

$$\partial_{w\lambda} Q = \begin{bmatrix} \Delta & p \\ p^T & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit } \hat{\Delta} \bullet \hat{w} = 0$$

En annexe est présenté le détail de l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange dans un problème d'optimisation sous contrainte.

Contrainte sur la Certainty Equivalent Value (CEV)

Lors de l'ajout d'une contrainte sur la valeur centrale (CEV), la matrice D est modifiée, une dimension est ajoutée et la matrice D devient, une matrice de dimension (n+1, n+1) telle que :

$$d_{n+1,l} = d_{l,n+1} = \frac{TCF_0^l}{(1+r_T)^T}, \text{ avec } r_T \text{ le taux d'actualisation en T}$$

$$d_{n+1,n+1} = 0$$

Le vecteur M est alors modifié, une dimension est ajoutée et M devient un vecteur de dimension (n+1) :

$$m_{n+1} = \frac{LTCF_0^l}{(1+r_T)^T}$$

Contrainte sur la Market Consistent Value (MCV)

Lors de l'ajout de la contrainte sur la valeur stochastique (MCV), la matrice D est modifiée, une dimension est ajoutée à la matrice D qui devient alors une matrice de dimension (n+a, n+a) avec :

a = 1 si la MCV est contrainte mais pas la CEV

a = 2 si la MCV et la CEV sont toutes deux contraintes

$$d_{n+a,l} = d_{l,n+a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n LTCF_{i,T}^l D_{i,T}, \text{ avec } D_{i,T} \text{ le facteur d'actualisation du scénario } i \text{ en } T$$

$$d_{n+a,n+a} = 0$$

Le vecteur M est ainsi modifié et devient un vecteur de dimension (n+a) :

$$m_{n+a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n LTCF_{i,T}^l D_{i,T}$$

Contraintes sur les sensibilités

Pour chaque sensibilité sur laquelle l'utilisateur souhaite que le portefeuille répliquant s'ajuste, la matrice D est modifiée et une dimension est ajoutée. Pour k contraintes supplémentaires correspondant à k sensibilités, la matrice D devient alors une matrice de dimension (n+a+k, n+a+k), avec:

$$d_{n+a+k,l} = d_{l,n+a+k} = P_l^k - P_l^{BC}$$

Avec P_l^k le prix de l'instrument l suivant les hypothèses financières correspondantes à la sensibilité k et P_l^{BC} le prix de l'instrument l basé sur les conditions financières initiales du base case.

Le vecteur M est alors modifié et une dimension est ajoutée pour chaque sensibilité prise en compte comme contrainte. M devient alors un vecteur de dimension (n+a+k) avec:

$$m_{n+a+k} = \text{impact} _ \text{sensibilité} _ k$$

Contraindre le portefeuille répliquant à reproduire des sensibilités prédéfinies revient à forcer la réplication sur des conditions économiques initiales spécifiques.

Seuil de décomposition des valeurs propres

L'optimisation construite avec la méthode des moindres carrés ordinaires revient à projeter une certaine chronique de flux sur un ensemble d'actifs financiers ayant chacun leur propre chronique. Or les instruments financiers utilisés ne forment pas nécessairement une base

orthogonale pour notre métrique de distance euclidienne : $d(X, Y) = \sum_{i=14}^N (X_i - Y_i)^2$

Certains instruments financiers utilisés n'étant pas nécessairement orthogonaux (parité call-put ou des swaps cap-floor par exemple), cela peut introduire une dépendance linéaire parmi les instruments utilisés, avec pour conséquence que l'optimisation des moindres carrés accorde des poids significatifs et parfois de signe opposés à des instruments assez colinéaires. Si cela ne pose pas nécessairement de problème pour la valorisation du portefeuille répliquant, cela peut être la source d'erreurs significatives dans son utilisation ultérieure.

Or la résolution de l'optimisation nécessite l'inversion de la matrice D ce qui passe par la diagonalisation de cette matrice. Afin de limiter le problème évoqué plus haut, une solution peut-être de limiter le nombre de valeurs propres utilisées dans la matrice D une fois celle-ci diagonalisée.

Ainsi pour résoudre l'équation $D \cdot \beta = M$ avec D une matrice $(n+a+k, n+a+k)$, il est nécessaire de diagonaliser la matrice D tel que :

$D = ULV$ avec L matrice diagonale $(n+a+k, n+a+k)$, U et V des matrices de dimension $(n+a+k, n+a+k)$

En fixant S le seuil de décomposition des valeurs propres et Max, le maximum des coefficients de la matrice L, on modifie la diagonale de la matrice L tel que :

$$\text{Si } L_{i,i} < \frac{\text{Max}}{S} \Rightarrow L_{i,i} = 0$$

Plus le seuil S de décomposition en valeurs propres est bas, plus on enlève de dimension et de colinéarité.

Une autre solution au problème de colinéarité des instruments proposée par Burmeister & Mausser[5] repose sur l'ajout d'une contrainte supplémentaire à intégrer dans l'optimisation qui a pour objectif de diminuer le montant des notionnels des instruments utilisés afin de limiter les situations de positions long/short significatives qui peuvent perturber la stabilité des portefeuilles répliquants sur des calculs de sensibilités.

La méthode repose sur le calcul d'un budget de trading (fonction d'un pourcentage du notionnel des instruments utilisés), la contrainte entraînant la limitation de ce budget. La mise en place de cette méthode n'a pas été testée dans le cadre de ce mémoire.

3.3.2.4 Détermination des poids

Une fois les différentes étapes de l'optimisation réalisées, les poids pour chaque instrument noté l seront déterminés par la formule:

$$\beta(l) = \sum_{i=1}^{n'+a+k} \sum_{j=1}^{n'+a+k} \frac{v_{l,j} u_{i,j} m_i}{L_{j,j}} \quad \text{si } L_{j,j} \neq 0$$

Avec $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ et $L_{j,j}$ les coefficients respectifs des matrices U, V et L dans la décomposition de la matrice D telle que :

$D = U * L * V$ avec L, une matrice diagonale de dimension $(n+a+k, n+a+k)$, U et V deux matrices de dimension $(n+a+k, n+a+k)$.

3.4 Critères d'appréciation de la qualité de répliation

La qualité de la répliation d'un portefeuille répliquant peut être appréciée à l'aide des critères suivants :

- La composition du portefeuille répliquant,
- Les indicateurs statistiques ou coefficients de régression R^2
- La répliation des valeurs MCV, CEV,
- La répliation des sensibilités,
- Les topologies des valeurs de marché

Composition du portefeuille

La composition d'un portefeuille répliquant repose largement sur l'expertise de l'utilisateur, mais celle-ci doit être justifiée dans le choix d'instruments financiers en lien avec les caractéristiques des passifs d'assurance à répliquer et les options embarquées.

La méthode naturelle pour la construction d'un portefeuille répliquant consiste à commencer avec un ensemble d'instruments financiers simples en ligne avec le comportement attendu des passifs puis à ajouter progressivement des instruments plus complexes afin d'améliorer l'adéquation du portefeuille.

Le choix des instruments doit être lié aux facteurs de risque intrinsèques à l'allocation d'actifs associée aux passifs à répliquer. Par exemple il serait incohérent de ne pas avoir d'instruments sensibles au risque action pour la composition d'un portefeuille répliquant qui chercherait à reproduire les passifs d'un contrat épargne adossé à un fonds euros dont une part de l'allocation d'actif serait en action.

Une fois la composition du portefeuille déterminée, il est important de considérer la robustesse du portefeuille répliquant en considérant les éléments suivants :

- limiter la trop forte colinéarité entre les instruments utilisés (parité call-put par exemple)
- limiter les positions long/short trop significatives pour des instruments similaires,
- limiter la prise en compte d'instruments de notionnels trop significatifs au regard de leur contribution dans l'amélioration de la qualité du portefeuille.

Si le premier point peut être réglé à l'aide de la décomposition en valeur propre, les suivants précédents laissés à la main de l'utilisateur qui construit le portefeuille répliquant.

Indicateur de R²

L'indicateur utilisé pour mesurer la qualité de la régression entre les valeurs présentes ou terminales des cash flows provenant du modèle DFA et du portefeuille répliquant est le R². Il s'agit du carré du coefficient d'échantillonnage de Pearson, appelé coefficient de corrélation. Plus le R² est proche de 1, meilleure est la réplification.

Le R² est donc le carré du coefficient R de régression défini par la formule suivante :

$$R_{PV} = \frac{\sum_{i=1}^n (CF_i^{PVrep} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n CF_j^{PVrep}) \times (CF_i^{PVinit} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n CF_j^{PVinit})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (CF_i^{PVrep} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n CF_j^{PVrep})^2 \times \sum_{i=1}^n (CF_i^{PVinit} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n CF_j^{PVinit})^2}}$$

Avec R²_{PV} désignant le R² calculé sur la base des valeurs présentes, CF^{PVinit}_i les cash flows du scénario i à répliquer, CF^{PVrep}_i désignant les cash flows du scénario i répliqué à l'aide de l'outil portefeuille répliquant. La formule est inchangée si l'on mesure le R² associée à la réplification des valeurs terminales.

Bien que les indicateurs de R² sur les valeurs présentes et sur les valeurs terminales soient suivis pour apprécier la qualité d'un portefeuille répliquant, il est à noter que le R² sur les valeurs présentes est la plupart du temps inférieur au R² calculé sur les valeurs terminales.

Ces deux valeurs ne diffèrent que des facteurs multiplicatifs, ce qui impacte les statistiques de R² des instruments utilisés dans la réplification.

L'exemple ci-dessous illustre la corrélation entre les flux de passifs de notre contrat retraite qui nous servira de référence dans la suite de notre étude et ceux de 3 instruments financiers type (une obligation zéro coupon, une exposition action et une exposition immobilier).

Instruments	Valeur Présente	Valeur Terminale
Action 1Y	4,0%	93,6%
Action 10Y	15,4%	75,2%
Action 30Y	17,6%	60,3%
Immo 1Y	2,7%	94,6%
Immo 10Y	5,3%	92,6%
Immo 30Y	8,0%	82,7%
ZC 1Y	19,5%	95,7%
ZC 10Y	72,1%	97,8%
ZC 30Y	95,3%	93,6%

Nous observons que :

- la corrélation entre les passifs et les instruments est bien plus forte sur la valeur terminale que sur la valeur présente,
- les instruments de maturité courte ont une corrélation avec les passifs plus forte que les instruments de maturité plus longue,
- la corrélation calculée sur les valeurs présentes est faible.

Cela découle de la manière dont sont calculées les valeurs présentes ainsi que les valeurs terminales pour chaque instrument. En effet, dans le calcul des valeurs terminales, les flux des instruments de maturité courte sont ensuite capitalisés sur le reste de l'horizon de projection au taux sans risque. Tous les instruments suivent donc cette même évolution, avec une forte corrélation entre les instruments, conséquence de la période de capitalisation jusqu'au terme de la projection. De même les cash flows de passifs pour lesquels les flux des premières années sont les plus significatifs suivent cette évolution avec capitalisation au taux sans risque jusqu'au terme de la projection dans le calcul des valeurs terminales.

Pour les instruments de maturité longue, cet effet est moins prononcé mais il subsiste une forte corrélation venant des scénarios.

Les deux effets mentionnés ci-dessus sont conjugués et ont un effet multiplicateur, de par la capitalisation, pour le calcul des valeurs terminales et un effet plus réduit, de par l'effet d'actualisation, pour les valeurs présentes.

Par conséquent, les coefficients de corrélation entre valeurs présentes et valeurs terminales peuvent être significativement différents.

Résultats des valorisations et sensibilités

Les valorisations obtenues avec le portefeuille répliquant sur la MCV, CEV ainsi que sur les sensibilités, doivent être comparées avec les valeurs initiales calculées à partir des cash flows à répliquer.

En forçant l'ajustement des valeurs MCV, CEV ainsi que celui des sensibilités, il peut subsister des écarts résiduels entre les valeurs initiales sur lesquelles le portefeuille répliquant doit se caler et les valeurs obtenues.

Le calcul des valeurs des sensibilités obtenues à partir des portefeuilles répliquants en comparaison de celles obtenues par le modèle de projection permet d'estimer la qualité de la réplication.

Topologie

Outre la validation des sensibilités testées et utilisées pour la réplication, il est également important de vérifier le comportement du portefeuille répliquant aux variations continues de certaines variables économiques jusqu'à des niveaux extrêmes. C'est ce que permettent de visualiser les graphiques de topologie.

La valorisation par formules fermées des instruments financiers utilisés dans le portefeuille répliquant permet de tracer leurs sensibilités à des mouvements quelconques de taux d'intérêt ou des niveaux de marché action par exemple en comparaison des sensibilités obtenues par le modèle de projection. Il est ainsi possible de remarquer visuellement tout comportement inattendu du portefeuille répliquant.

4 Application à un bon de capitalisation simplifié

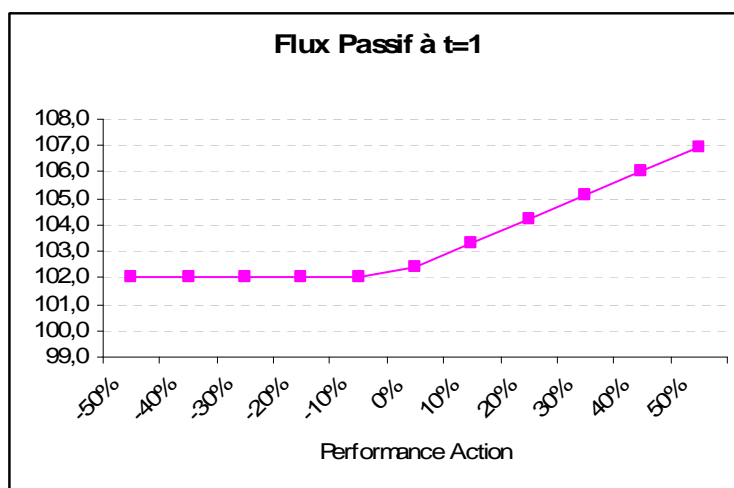
A titre illustratif, considérons un bon de capitalisation fictif très simple, et essayons de construire un portefeuille répliquant.

- Prime unique, $PM = 100\text{€}$
- D'échéance 1 an
- Non-rachetable
- $TMG = 2\%$ (Taux Minimum Garanti)
- $Tx_{PB} = 90\%$ du rendement du fonds (Taux de participation aux bénéfices)
- On néglige les chargements et frais de gestion

L'allocation d'actif retenue par l'assureur est la suivante

- $\alpha = 10\%$ d'actions, de performance aléatoire $Perf$
- $(1 - \alpha) = 90\%$ d'obligations d'état sans risque, de rendement $Rdt_{Oblig} = 3\%$

L'aléa financier est ici lié aux 10% d'actions.



Le portefeuille répliquant « naturel » est celui d'une obligation zero-coupons de nominal 102€, auquel on ajoute un call. Quelles doivent être les caractéristiques de ce call ?

Le pay-off du portefeuille est le suivant :

$$ZC + N * \text{Max}(0, Perf - K)$$

Avec

- ZC : nominal de l'obligation zéro-coupons
- N : nominal du call
- K : strike du call, exprimé en performance sur un an (0% = à la monnaie spot)

Les cash flows générés par le contrat sont les suivants :

$$PM * \text{Max}(TMG, Tx_PB * Rdt_Fond)$$

Que l'on peut réécrire après quelques lignes de manipulation de formules :

$$PM * TMG + PM * Tx_PB * \alpha * \text{Max}\left(0, Perf - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{TMG}{Tx_PB} - (1 - \alpha) * Rdt_Oblig \right)\right)$$

En identifiant les deux expressions, on constate que l'on peut trouver un portefeuille répliquant parfait, avec les caractéristiques suivantes

$$ZC = PM * TMG$$

$$N = PM * Tx_PB * \alpha$$

$$K = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{TMG}{Tx_PB} - (1 - \alpha) * Rdt_Oblig \right)$$

Numériquement :

$$ZC = 102$$

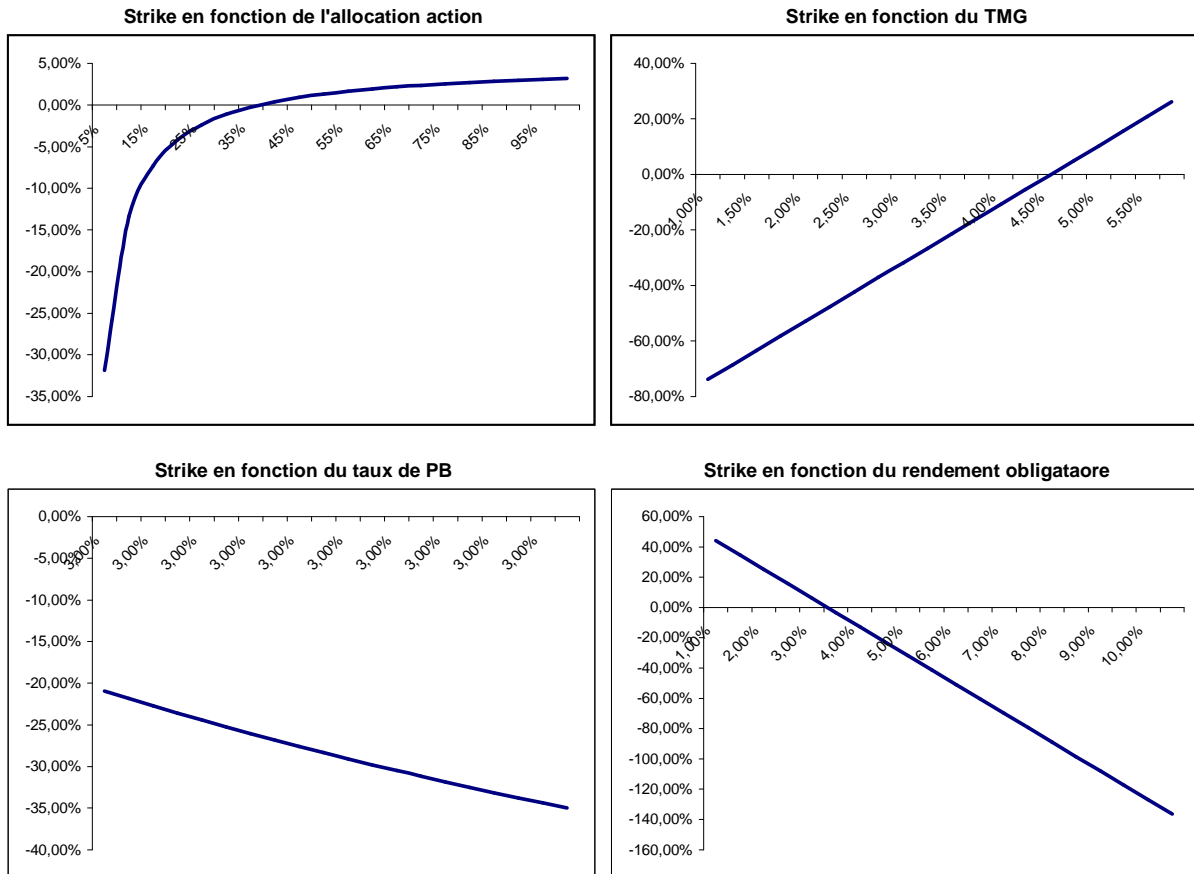
$$N = 9$$

$$K = 95,2\%$$

Les enseignements que l'on peut tirer de cette illustration sont les suivants

- Le zéro-coupon correspond au TMG, et le nominal est « naturel »
- Le call correspond à la garantie supplémentaire de PB
- Le nominal du call est également intuitif, à savoir qu'il correspond à la part d'actif risquée ajustée du taux de participation bénéficiaire reversée au client
- Le strike obtenu est complexe, et dépend à la fois des caractéristiques du passif, de la richesse obligataire, et de l'allocation en actions. Il est difficile de trouver un strike « naturel », même dans cet exemple simplifié, comme en attestent les formules ci-dessus et les graphes suivants.

Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie



Cette première application permet de s'apercevoir que l'actuaire, en charge de la sélection des instruments financiers et de leurs caractéristiques, sera contraint à des procédures itératives pour définir les caractéristiques précises de ces instruments.

5 Application à un contrat retraite

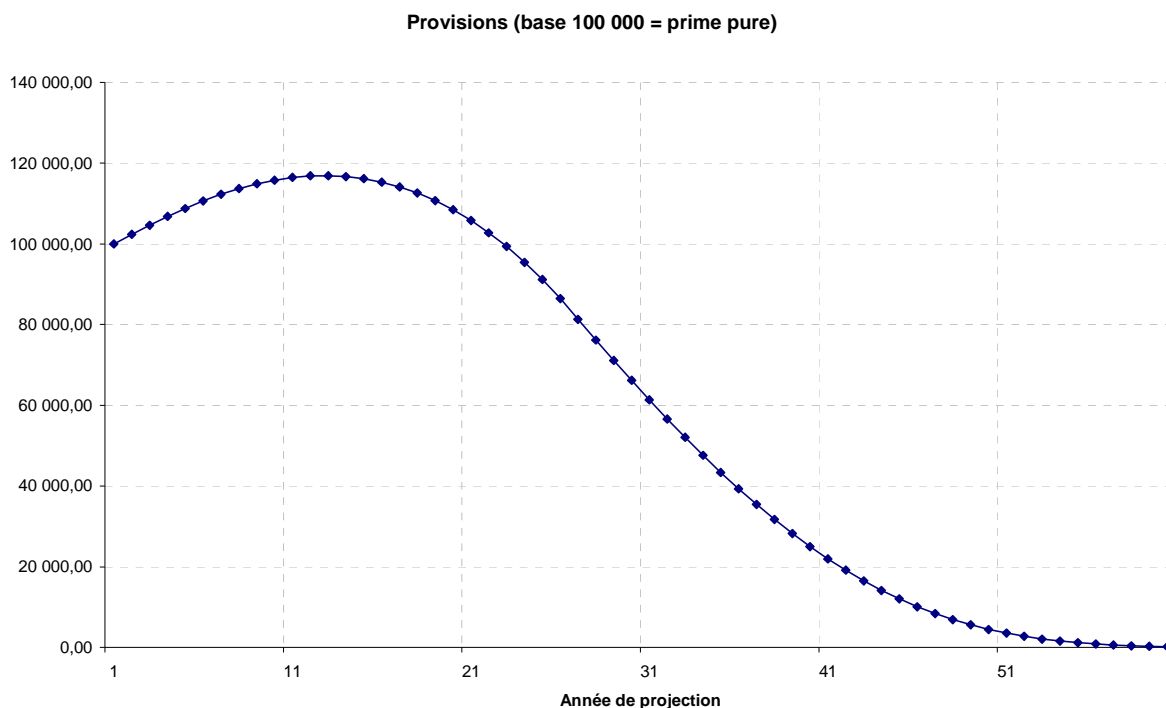
5.1 Description du passif

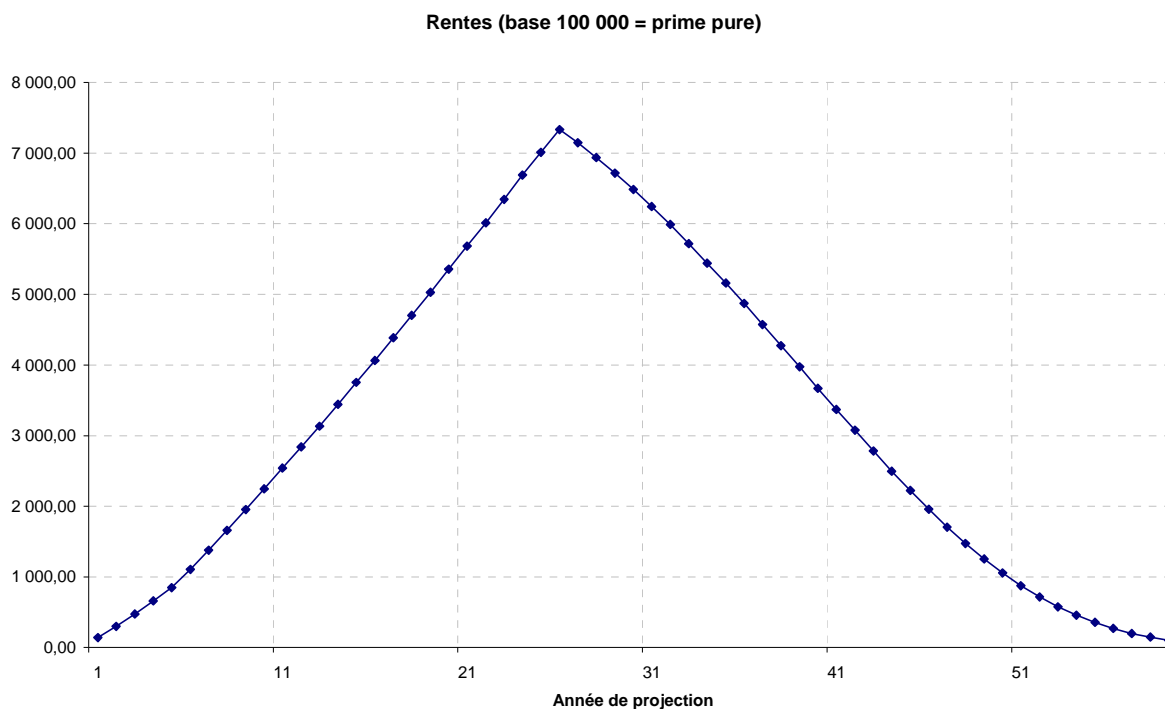
On considère un contrat collectif de retraite à prime unique obligatoire qui garantit une rente viagère différée à tous les salariés d'une entreprise donnée.

- Paiement d'une rente annuelle à terme échu
- Table du tarif : TF 00-02
- Taux technique : 2,5%
- Age de départ en retraite : 65 ans
- Démographie à la souscription : Pyramide des âges INSEE, entre 40 et 65 ans (cf. annexes)
- Groupe fermé, pas de départs de l'entreprise
- Chargements sur encours : 0,5%
- Chargements sur prime : 0% (on raisonne en prime pure et net de commissions d'apport)
- Participations Bénéficiaire : 90%, affectée à la revalorisation des rentes
- Pas de garantie de revalorisation (inflation, point ARGIRC / ARRCO ou autre)

On considère que la population survit suivant la table du tarif, afin d'étudier les caractéristiques du risque exclusivement financier de ce contrat. Le chapitre 6.3.3 « Risque comportemental et biométrique » traitera des considérations supplémentaires nécessaires au cas plus général de risques croisés financiers et techniques.

La projection de provisions hors revalorisation des rentes, ainsi que les rentes elles-mêmes, sont représentées ci-après :





Note : dans tout ce qui suit, l'ensemble des grandeurs sera normalisé sur base d'une prime pure de 100 000 euros.

5.2 Modèle actif/passif de référence (modèle DFA)

Le modèle de projection DFA de référence pour la suite de l'étude est détaillé ci-dessous, tout d'abord le fonctionnement de la projection du passif puis celle de l'actif.

Modélisation du passif

Sous l'hypothèse que la population vit suivant la table du tarif, les prestations sont connues d'avance, à l'exception des revalorisations éventuelles provenant de la participation aux bénéfices. Le seul aléa modélisé est l'aléa financier.

Cela signifie qu'il n'y a pas de gains ou pertes de mortalité, mais il peut y avoir des pertes financières.

La PM pour l'année i pour une génération d'âge x à la souscription correspond à la valeur actuelle probable des prestations, pour les individus encore en vie. Il s'agit de rentes viagères différées avant le départ à la retraite et de rentes viagères immédiates pour les retraités.

$$PM_x(i) = N_x * i P_x * r^{*\max(0;65-x-i)} a_{x+i}$$

La PM totale pour une année donnée est la suivante

$$PM(i) = \sum_x PM_x(i) = r * \sum_x N_x * i P_x * \max(0;65-x-i) a_{x+i}$$

Les prestations pour l'année i pour une génération d'âge x à la souscription sont les suivantes
 si $x + i \geq 65$, $Pr estations_x(i) = {}_i p_x * r$
 si $x + i < 65$, $Pr estations_x(i) = 0$

Les prestations totales d'une année sont

$$Pr estations(i) = \sum_{x \geq 65-i} N_x * {}_i p_x * r$$

On peut calculer le ratio

$$Tx_Pr estations(i) = \frac{Pr estations(i)}{PM(i)} = \frac{\sum_{x \geq 65-i} N_x * {}_i p_x}{\sum_x N_x * {}_i p_x * \max(0; 65-x-i) a_{x+i}}$$

On constate que ce ratio dépend uniquement de la démographie, la table et le taux techniques retenus. En revanche, il ne dépend pas du niveau de la rente et en particulier il ne dépend pas de sa revalorisation éventuelle. Dans la mesure où seule la revalorisation est aléatoire dans notre modélisation du passif, ce ratio pourra être calculé une fois et réutilisé dans l'ensemble des simulations stochastiques.

Ceci simplifiera grandement les calculs, puisqu'il suffit de maintenir dans notre modèle une variable globale correspondant à la PM et d'apporter en hypothèse des taux pré calculés de prestations annuelles.

Une revalorisation des rentes en cas de distribution de participation aux bénéficiaires sera directement matérialisée par une augmentation de la PM. Avec un taux de prestations inchangé, le niveau des rentes sera mécaniquement augmenté dans les mêmes proportions.

$$PM_ouv_i = PM_clot_{i-1}$$

$$IT_i = Tx_Technique * PM_ouv_i$$

$$PB_i = PM_ouv_i * \max(0, Tx_Pf_i * Tx_PB - Tx_Chargements - Tx_Technique)$$

$$PM_apres_revalo_i = PM_ouv_i + IT_i + PB_i$$

$$Pr estations_i = Tx_Pr estations_i * PM_apres_IC_i$$

$$PM_clot_i = PM_apres_revalo_i - Pr estations_i$$

Le contrat s'écoule ainsi jusqu'à extinction ou jusqu'à ce que la PM passe sous un seuil de matérialité prédéfini.

Modélisation de l'actif

On considère que l'on investit la totalité de la prime pure immédiatement dans divers types de placements :

- R332-19 : Obligations d'état sans risque à taux fixe
- R332-20 : Actions et Immobilier

Afin de faciliter le traitement et le calcul, les simplifications suivantes ont été opérées :

- Les obligations d'état sont modélisées comme des zéro-coupons. En revanche, elles conservent l'ensemble des caractéristiques économiques et comptables : valeur de marché, TRA à l'achat, surcote/décote, versement de cash à maturité.
- Les actions et l'immobilier ne versent pas de dividendes / de loyer, en cohérence avec les modèles de diffusion retenus

5.2.1.1 Réallocation

Le modèle commence chaque pas de temps par une réallocation vers l'allocation stratégique de l'assureur, exprimée en % de la valeur de marché totale de l'actif. Pour chaque classe d'actif, on définit ainsi la cible en valeur de marché, qui définit la quantité d'achats / ventes à réaliser pour atteindre l'allocation cible.

Cash

$$VB_i^{cash} = VB_cible_i^{cash}$$

Actifs risqués (pour chaque actif risqué S)

- En cas d'achat

$$VB_achat_i^S = VB_cible_i^S - VB_i^S$$

$$VB_i^S = VB_i^S + VB_achat_i^S$$

$$VNC_i^S = VNC_i^S + VB_achat_i^S$$

- En cas de vente

En cas de vente, on réalise également des plus ou moins-values latentes de la classe d'actifs considérée, avec un impact sur les produits financiers de l'année.

Note : Le taux de produits financiers annuels et l'allocation stratégique sont deux objectifs que les compagnies d'assurance cherchent à optimiser simultanément. Dans notre modèle, ces deux objectifs sont scindés en deux étapes indépendantes, et le pilotage du taux de produits financiers sera réalisé lors d'une étape ultérieure. Ainsi, on considère que l'étape de réallocation se fait en minimisant l'impact sur les produits financiers et donc le niveau de plus ou moins-values réalisées.

$$PMVL_i^S = VB_i^S - VNC_i^S$$

$$PMVR_i^S = PMVL_i^S * \frac{VB_i^S - VB_cible_i^S}{VB_i^S} * Tx_PMVL_Realloc$$

$$VB_i^S = VB_cible_i^S$$

$$VNC_i^S = VB_i^S - PMVL_i^S + PMVR_i^S$$

Note : si le Tx_PMVL_Realloc est trop faible et les plus-values trop importantes, il arrive que la VNC devienne négative. Pour éviter ces cas, on force le modèle à conserver un niveau minimum de VNC et par conséquent à réaliser des plus-values complémentaires.

$$VNC_min_i^S = VB_i^S * Tx_VNC_min$$

$$PMVR_extra_i^S = \max(0, VNC_min_i^S - VNC_i^S)$$

$$VNC_i^S = VNC_i^S + PMVR_extra_i^S$$

Obligations

- En cas d'achat

On investit sur un profil de maturités prédéfinies, exprimées en % par maturité. Par ailleurs, pour chaque maturité, on agrège les obligations que l'on a en portefeuille avec celles que l'on achète afin d'obtenir un zéro-coupon aux caractéristiques moyennes. Notamment, on recalcule un TRA moyen par maturité après achat.

$$VB_achat_i^T = VB_cible_i^T - VB_i^T$$

$$VB_i^T = VB_i^T + VB_achat_i^T$$

$$VNC_i^T = VNC_i^T + VB_achat_i^T$$

$$TRA_i^T = \left(\frac{Nominal_i^T}{VNC_i^T} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

- En cas de vente

On revend des obligations sur l'ensemble des maturités, de manière proportionnelle :

$$Ratio_vente = \frac{\sum_i VB_i^T - VB_oblig_cible}{\sum_i VB_i^T}$$

Ainsi, pour chaque maturité, on a :

$$\begin{aligned}
 VB_vente_i^T &= VB_i^T * Ratio_vente \\
 VNC_vente_i^T &= VNC_i^T * Ratio_vente \\
 VB_i^T &= VB_i^T - VB_vente_i^T \\
 VNC_i^T &= VNC_i^T - VNC_vente_i^T \\
 PMVR_i^T &= VB_vente_i^T - VNC_vente_i^T
 \end{aligned}$$

5.2.1.2 Vieillessement

Après le passage d'un pas de temps, le modèle calcule les éléments suivants.

Cash

$$\begin{aligned}
 VB_i^{cash} &= VB_{i-1}^{cash} * Perf_i^{cash} \\
 Revenus_i &= VB_i^{cash} - VB_{i-1}^{cash}
 \end{aligned}$$

Note : la VB et la VNC du compte courant sont systématiquement égales, aussi on ne modélise pas spécifiquement de VNC.

Actifs risqués (pour chaque actif risqué S)

$$\begin{aligned}
 VB_i^S &= VB_{i-1}^S * Perf_i^S \\
 VNC_i^S &= VNC_{i-1}^S
 \end{aligned}$$

Le cas échéant, on calcule des provisions pour dépréciation durable. Dans la mesure où l'on ne projette pas l'actif en ligne à ligne, nous adoptons une modélisation très simplifiée des PDD : Nous cherchons simplement à capturer l'effet de seuil. Quand les moins-values latentes sur une classe d'actifs dépassent un seuil prédéfini, alors on provisionne une partie de ces moins-values suivant un taux prédéfini.

$$PDD_i^S = 1_{\frac{VNC_i^S - VB_i^S}{VNC_i^S} > Tx_PDD_Seuil} \frac{VNC_i^S - VB_i^S}{VNC_i^S} * Tx_PDD$$

Obligations (pour chaque maturité T)

$$\begin{aligned}
 VNC_i^T &= VNC_{i-1}^T * TRA_{i-1}^T \\
 Revenus_i &= Revenus_i + VNC_i^T - VNC_{i-1}^T
 \end{aligned}$$

Note : ces revenus correspondent exclusivement à la surcote/décote dans notre modélisation puisque les obligations sont zéro-coupons.

Si $i = T$ alors l'obligation est arrivée à maturité, et l'obligation disparaît au profit du cash

$$VB_i^{cash} = VB_i^{cash} + VNC_i^T$$

5.2.1.3 Pilotage des produits financiers

Dans une certaine mesure, les produits financiers dégagés chaque année sont à la main de l'assureur puisque celui-ci à le choix de réaliser des plus ou moins-values sur ses actifs R332-20. Le pilotage des produits financiers comporte deux étapes : la détermination du taux cible et le taux effectivement atteint. La première étape détermine, suivant la politique commerciale et les objectifs financiers de l'assureur, le niveau optimal de taux de produits financiers à atteindre. La seconde étape vise à réaliser les plus ou moins-values latentes nécessaires pour atteindre ou approcher le taux cible. Bien entendu, cette seconde étape est contrainte par le niveau de richesse latente des actifs R332-20.

Dans notre modèle, la cible sera définie comme le niveau de taux technique plus la marge fixe de l'assureur. Ensuite, le modèle va chercher à atteindre ce taux en réalisant des plus ou moins-values sur les classes d'actifs pilotables.

$$PMV_cible_i = VNC_i * Tx_PFI_cible - PFI_avant_pilotage_i$$

- En cas de plus-values à dégager

$$PV_max_i = \sum_s \max(0, VB_i^S - VNC_i^S)$$

$$Ratio_PV_i = \min\left(1, \frac{PMV_cible_i}{PV_max_i}\right)$$

Puis pour chaque actif S, on réalise les plus-values

$$PMVR_i^S = Ratio_PV_i * \max(0, VB_i^S - VNC_i^S)$$

- En cas de moins-values à dégager

$$MV_max_i = \sum_s \max(0, VNC_i^S - VB_i^S)$$

$$Ratio_MV_i = \min\left(1, \frac{-PMV_cible_i}{MV_max_i}\right)$$

Puis pour chaque actif S, on réalise les moins-values

$$PMVR_i^S = Ratio_MV_i * \max(0, VNC_i^S - VB_i^S)$$

5.3 Scenarios économiques

De manière générale, nous avons utilisé des modèles de diffusion simples.

- Le modèle de diffusion monde réel, permet de simuler la densité de probabilité des facteurs de risque à horizon 1 an afin de calculer une Value-at-Risk. Il inclut les facteurs corrélés suivants : Taux d'intérêt, Action, Immobilier, Volatilité des taux, Volatilité des actions, ainsi que leurs corrélations.
- Le modèle de diffusion risque neutre permet de calculer le prix « market consistent » de l'engagement de l'assureur

5.3.1 Modèle de diffusion monde réel

Les séries historiques suivantes ont été utilisées pour sélectionner le type de modèle le plus adapté à chaque facteur de risque, ainsi que pour l'estimation des paramètres et les back-tests des lois marginales.

- Courbe des taux : Taux swap euro complété des taux swap allemands avant l'euro
- Actions européennes : DJ Euro STOXX 50
- Actions américaines : S&P 500
- Immobilier : IPD France
- Vol implicite actions : VIX, Prix d'options EuroSTOXX 5Y et 10Y
- Vol implicite taux : Prix des swaptions EUR 10Y/10Y (10 ans dans 10 ans)

La profondeur d'historique est de 20 ans, à l'exception des prix d'options et de l'IPD pour laquelle elle est de 11 ans. Les données sont quotidiennes, à l'exception des indices immobiliers pour lesquels elles sont trimestrielles.

Certains paramètres du modèle monde réel ont été calibrés à l'aide de sources complémentaires, comme les Consultation Papers du CEIOPS ou les paramètres technique du QIS5.

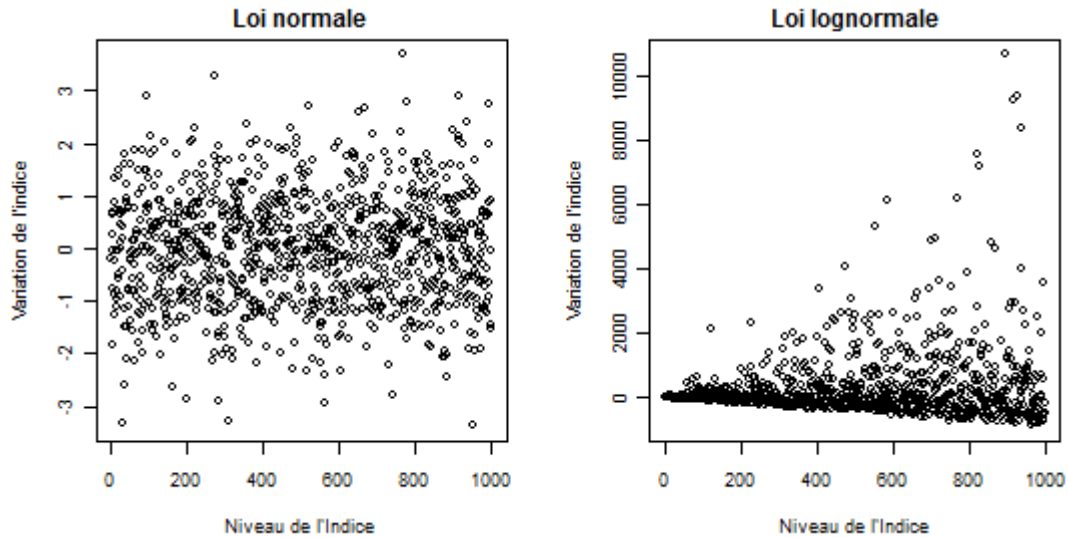
5.3.1.1 Sélection du modèle

Séries temporelles

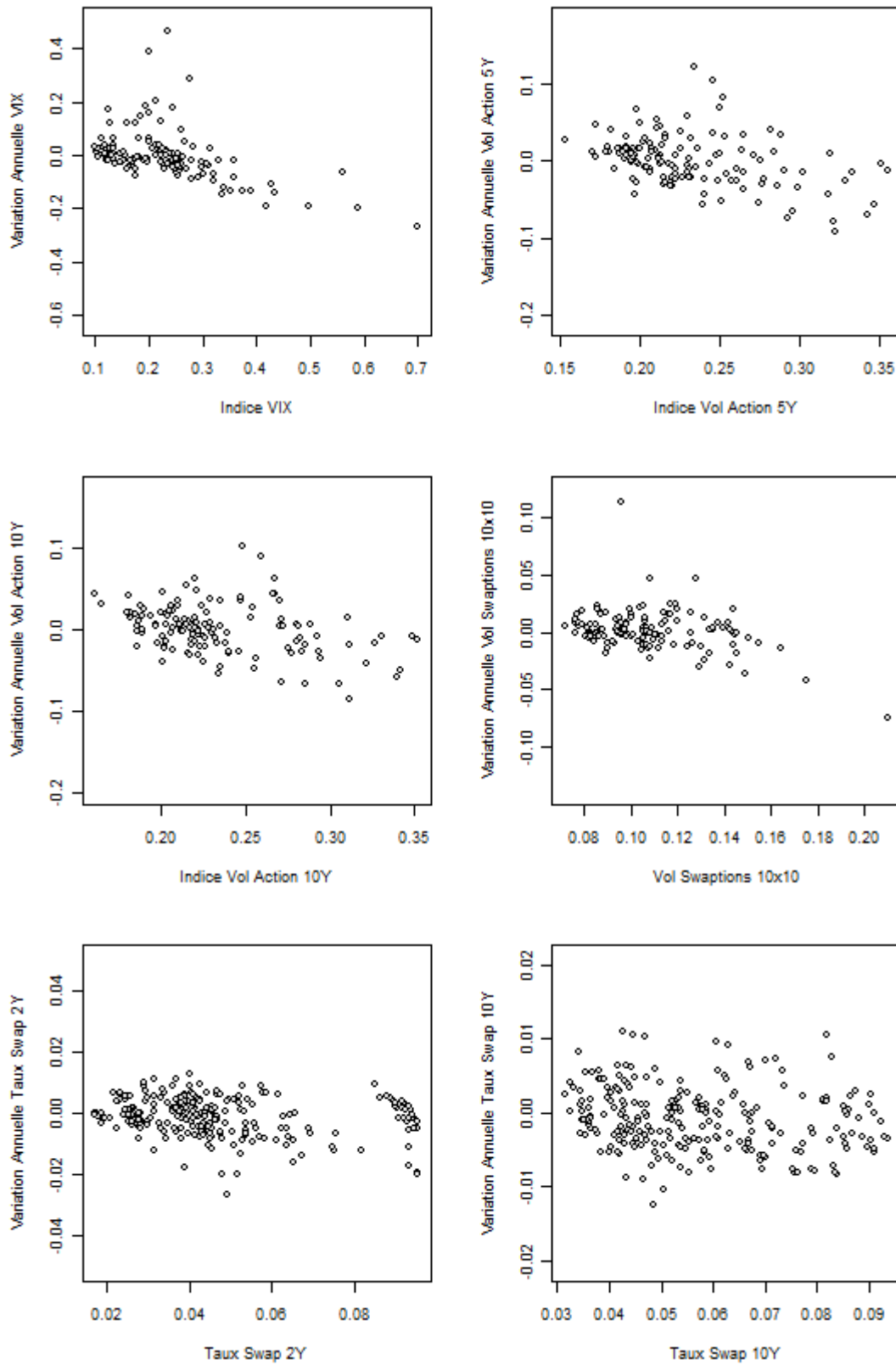
Avant de réaliser l'analyse des séries historiques, un retraitement a été appliqué aux données. En ce qui concerne les séries actions et immobilier, il est naturel de passer au logarithme puisque les rendements sont multiplicatifs. Pour des grandeurs comme la volatilité ou les taux d'intérêt, il est possible d'utiliser aussi bien les variations que les log-rendements.

Un test graphique a été réalisé pour sélectionner les séries retraitées via le logarithme : si la série présente un lien fort de proportionnalité entre ses variations et son niveau absolu, les log-rendements seront utilisés. Dans le cas contraire, la série des variations sera retenue.

A titre d'exemple, les graphiques ci-dessous représentent les variations d'un indice fictif en fonction de son niveau, régi par une loi normale dans le premier cas et une loi log-normale dans le second.



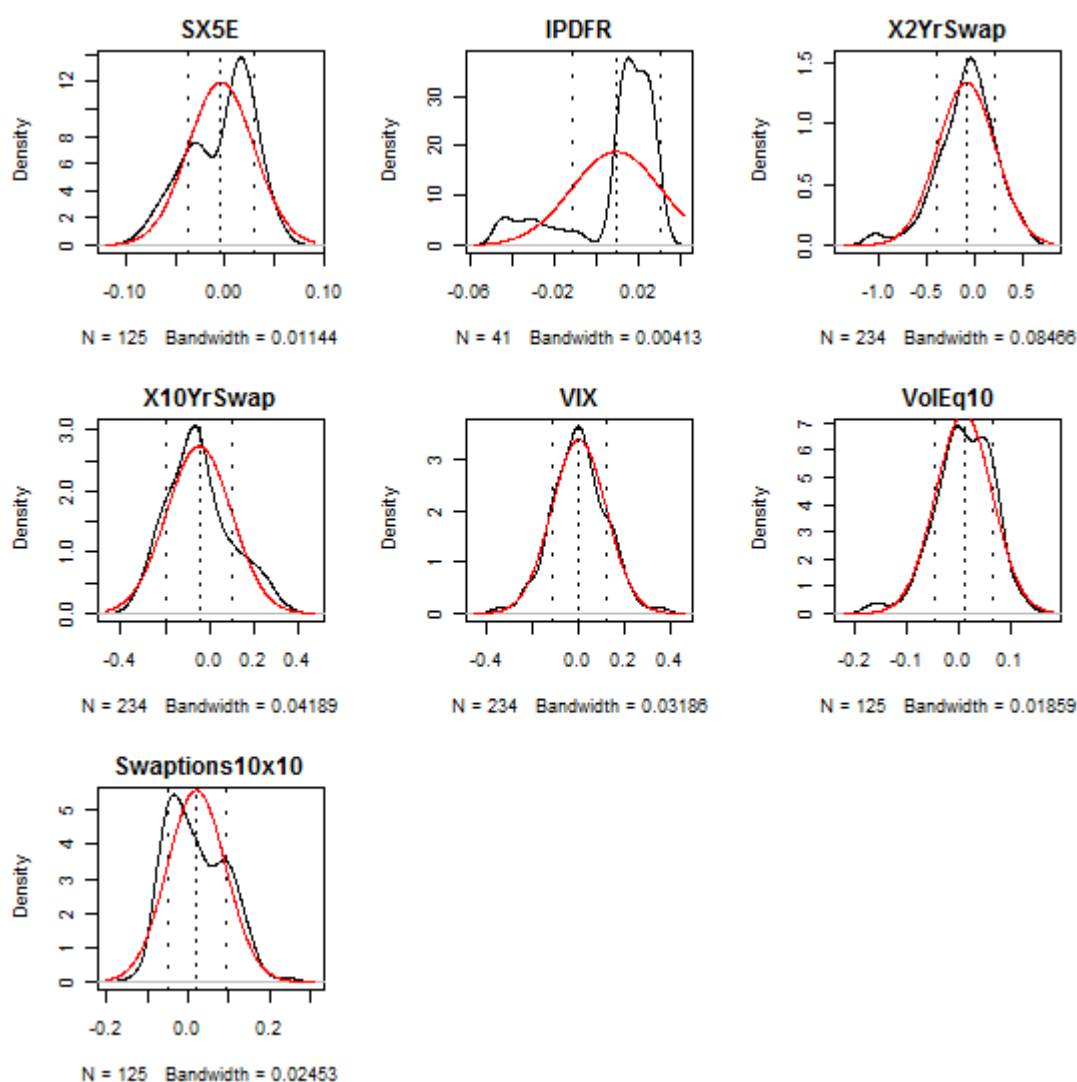
Au vu des graphiques ci-dessous, la volatilité implicite actions sera étudiée sous forme de log-rendements, et les séries de taux seront étudiées sous forme de variations.



Distributions empiriques / statistiques descriptives

Les données sont les variations ou log-rendements annuels glissants sur une fréquence mensuelle. Les distributions empiriques ont été comparées à une distribution normale de mêmes moments.

	Log-Rendement SX5E	Log-Rendement IPDFR	Variation 2Yr Swap	Variation 10Y Swap	Log-Rendement VIX	Log-Rendement Vol Equity 10Y	Log-Rendement Vol Swaption 10Y
Moyenne	5%	3%	-0,38%	-0,28%	1%	3%	5%
Ecart-Type	24%	9%	1,21%	0,77%	37%	17%	18%
Asymétrie	-0,90	-0,36	-0,50	0,60	-0,04	-0,56	0,53
Aplatissement	3,37	1,68	2,92	2,96	4,41	3,57	2,95
Min.	-70%	-30%	-3,69%	-1,84%	-130%	-52%	-37%
1ier Quartile	-8%	7%	-1,03%	-0,80%	-21%	-6%	-9%
Médiane	10%	10%	-0,22%	-0,38%	0%	4%	2%
3ieme Quartile	21%	14%	0,47%	0,16%	22%	17%	19%
Max.	51%	20%	2,19%	1,89%	132%	41%	65%



Les rendements des actifs financiers présentent des distributions à queues épaisses, comme en atteste le coefficient d'aplatissement des séries historiques. Cette caractéristique est

statistiquement confirmée sur des variations hebdomadaires, mais ne l'est pas sur des variations annuelles et ce pour deux raisons :

- Un nombre réduit d'observations indépendantes, ce qui réduit la puissance des tests statistiques
- Une possible convergence vers une loi normale sur des horizons plus lointains, conséquence possible du théorème central limite (sous ses formes généralisées)

Le tableau ci-dessous indique l'espérance et les intervalles de confiance de l'estimateur « aplatissement empirique » correspondant à un historique respectivement de 20 ans et de 11 ans, sous l'hypothèse de normalité des variations. Une loi normale a un coefficient d'aplatissement de 3. L'estimateur est biaisé mais asymptotiquement sans biais, c'est pourquoi son espérance converge vers 3 à mesure que le nombre d'observations augmente. Les cellules grisées sont celles pour lesquelles l'estimateur permet de rejeter l'hypothèse de normalité des queues de distribution à 95%.

Aplatissement - Historique de 20 ans				
	Observations Annuelles	Observations Trimestrielles	Observations Mensuelles	Observations Hebdomadaires
Espérance	2,71	2,93	2,98	2,99
5,00%	1,83	2,30	2,55	2,77
50,00%	2,55	2,85	2,94	2,98
95,00%	4,15	3,83	3,52	3,26
VIX	2,82	4,97	4,75	4,55
SX5E	3,09	4,26	5,63	8,11
X2YrSwap	2,76	4,55	5,64	7,90
X10YrSwap	2,90	3,21	4,93	6,02
Aplatissement - Historique de 11 ans				
	Observations Annuelles	Observations Trimestrielles	Observations Mensuelles	Observations Hebdomadaires
Espérance	2,50	2,86	2,95	2,99
5,00%	1,60	2,08	2,40	2,68
50,00%	2,34	2,73	2,89	2,97
95,00%	4,01	4,03	3,70	3,36
IPDFR	3,88	7,76		
VolEq10	2,14	3,35	3,55	5,31
Swaptions10x10	2,10	4,61	7,60	17,96

Les queues épaisses observées sont statistiquement significatives pour toutes les séries hebdomadaires et mensuelles. Inversement, l'aplatissement estimé est plus faible pour des variations / log-rendements trimestriels ou annuels, ce qui tend à confirmer que les distributions sont plus proches d'une loi normale au fur et à mesure que la périodicité s'allonge. Sur des observations annuelles, il n'est pas possible de rejeter l'hypothèse de normalité des queues de distribution.

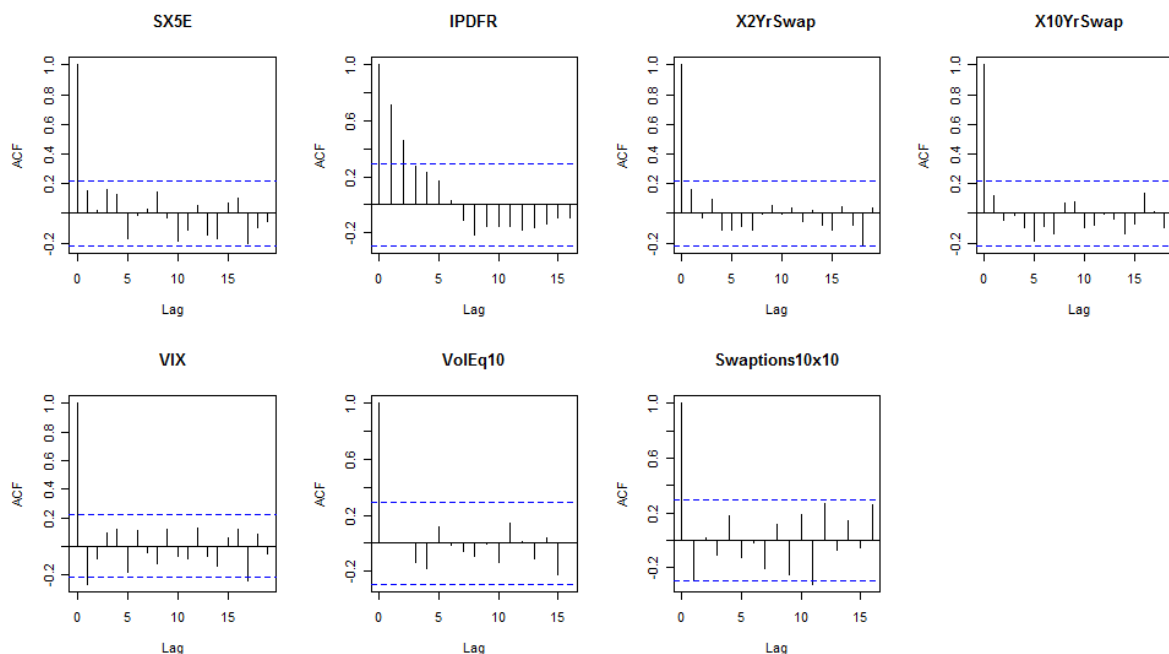
Ainsi, pour des variations ou des log-rendements annuels, il est raisonnable d'adopter une modélisation normale.

En ce qui concerne l'asymétrie présente dans les distributions, elle sera prise en compte au travers des paramètres et non du modèle lui-même. De ce fait, l'écart-type retenu pourra être supérieur à l'écart-type estimé.

Autocorrélations

Les autocorrélations doivent être étudiées sur base de données indépendantes et non sur des historiques annuels glissants. De ce fait, plus l'horizon de variation est court, plus il y a de données disponibles. Néanmoins, une autocorrélation des variations courtes n'implique pas nécessairement une autocorrélation significative des variations sur un horizon plus long. Aussi, il faut se garder de travailler sur des données à fréquence trop élevée au regard de l'horizon de temps considéré.

Les corrélogrammes ci-dessous représentent des variations trimestrielles des séries étudiées, ce qui représente un compromis acceptable.



Les séries de volatilité (VIX et Volatilité Swaptions 10x10 notamment) présentent une autocorrélation qui peut s'interpréter comme un phénomène de retour à la moyenne. Sur le long terme, il est raisonnable de penser que la volatilité implicite des options évolue dans un corridor. Aussi, ce phénomène de retour à la moyenne sera intégré au modèle.

La série des log-rendements immobiliers présente une forte autocorrélation positive. Autrement dit, une période de hausse est suivie d'une autre période de hausse, et une période de baisse d'une autre période de baisse. Néanmoins, cet élément ne sera pas intégré au modèle, pour plusieurs raisons :

- L'indice considéré est construit à partir d'estimations, ce qui peut biaiser les analyses. Il existe des méthodes statistiques palliatives dans la littérature[6], mais elles n'ont été jugées satisfaisantes par le CEIOPS dans l'analyse faite dans les Consultation Papers[7].

- L'intégration d'une auto-corrélation positive au sein d'un modèle de capital réglementaire inciterait la compagnie d'assurance à libérer du capital quand les marchés immobiliers se portent bien, et augmenterait le besoin en capital en cas de baisse des marchés, au moment où le capital disponible se réduit. Ce comportement est de nature procyclique, même si de par leur nature peu liquide les marchés immobiliers sont moins sujets à ces effets.

Modèles retenus

Taux d'intérêt	Normal
Action	Lognormal
Immobilier	Lognormal
Volatilité implicite action	Black-Karasinski
Volatilité implicite taux	Black-Karasinski

Modèle normal

Pour le facteur de risque X, la formule s'écrit

$$dX(t) = \sigma dW(t)$$

Modèle lognormal « Black-Scholes »

Il s'agit du modèle le plus classique en finance de marché, mais nous l'utilisons ici sans drift.

Pour le facteur de risque X, la formule s'écrit

$$d \ln X(t) = \sigma dW(t)$$

Modèle « Black-Karasinski »

Il s'agit d'un modèle de type lognormal qui inclut un retour à la moyenne long-terme. Pour le facteur de risque X, la formule s'écrit

$$d \ln X(t) = \lambda (\ln \bar{X} - \ln X(t)) dt + \sigma dW(t)$$

5.3.1.2 Détermination des paramètres

Actions et immobilier

Le paramètre de volatilité actions a été estimé par la méthode des moments sur les séries historiques.

Compte-tenu des difficultés statistiques évoquées plus haut, le paramètre de volatilité immobilier a été choisi de manière à coïncider avec les paramètres techniques du QIS5, basés sur le Consultation Paper 69 du CEIOPS.

Volatilité Actions : 23%

Volatilité Immobilier : 11%

Ceci correspond à des centiles 99,5% respectivement à -45% pour les actions et -25% pour l'immobilier.

Taux d'intérêt

Le paramètre de volatilité des taux d'intérêt a été estimé par la méthode des moments sur les séries historiques.

Volatilité des taux 2Y : 1,2%.

Volatilité des taux 10Y : 0,75%

Volatilité des taux 30Y : 0,70% (série historiques supplémentaire, plus courte)

Volatilité des taux 50Y : 0,70% (identique aux 30Y en l'absence de données historiques)

Sur les taux 2Y, le paramètre a été ajusté à 1,8% à l'issue du back-test détaillé plus bas.

Note : Sur les taux courts, étant donné la modélisation normale et le niveau de volatilité retenu, des taux négatifs peuvent apparaître en pratique. Dans ces cas-là, les taux courts sont ajustés à 0%.

Volatilités implicites actions et taux

Les paramètres du modèle « Black-Karasinski » ont été estimés par la méthode des moindres carrés ordinaires, sur les log-variations trimestrielles. Ils ont ensuite été annualisés :

	Vol Action	Vol Taux
Vitesse de retour à la moyenne	63%	59%
Moyenne long terme	23%	11%
Volatilité	18%	21%

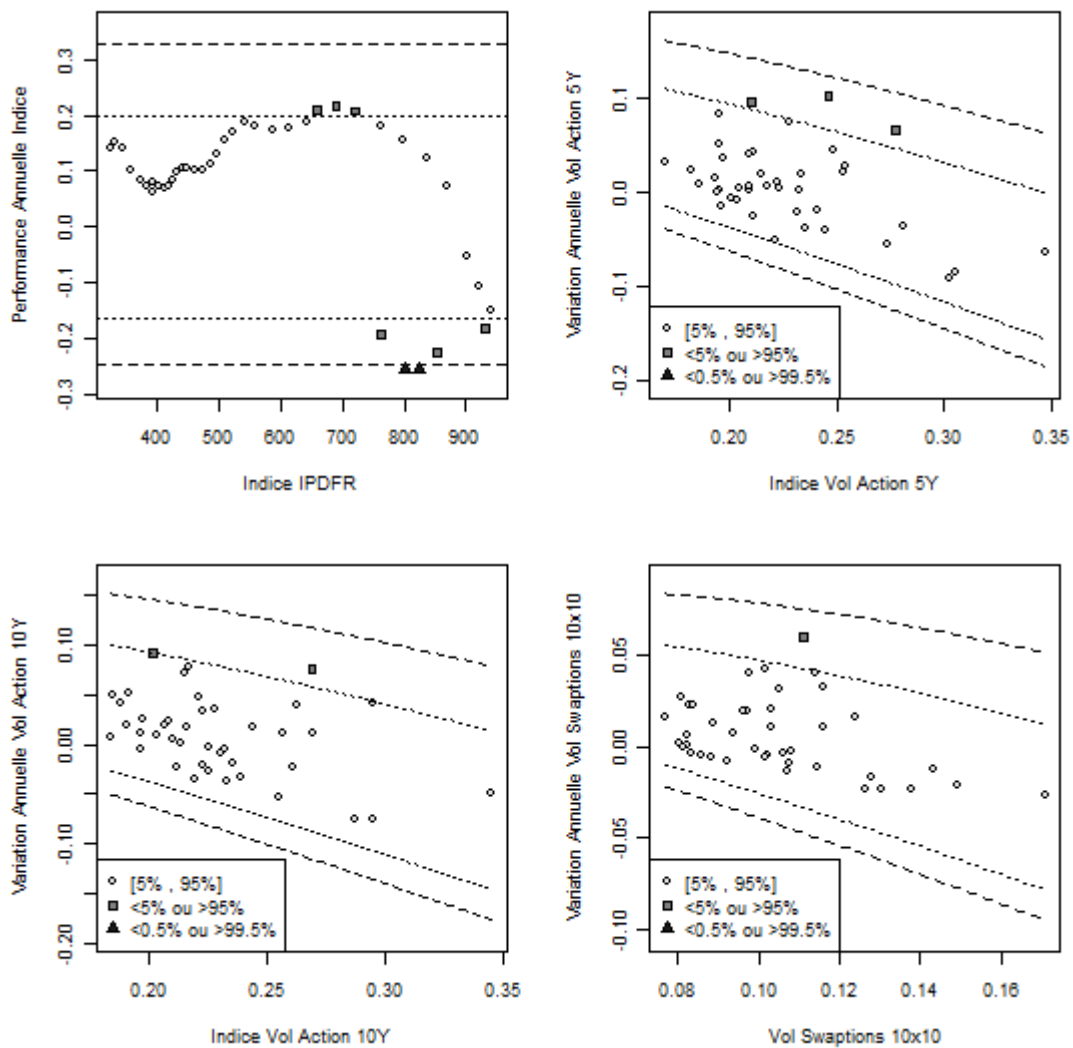
Corrélations

Les corrélations ont été estimées à partir des corrélations empiriques des séries historiques.

	Action	Immobilier	CT2	CT10	CT30	CT50	Vol Action	Vol Taux
Action	100%							
Immobilier	40%	100%						
CT2	25%	45%	100%					
CT10	25%	25%	80%	100%				
CT30	25%	25%	70%	90%	100%			
CT50	25%	25%	70%	90%	98%	100%		
Vol Action	-60%	-25%	-45%	-35%	-35%	-35%	100%	
Vol Taux	-25%	-20%	-40%	-50%	-45%	-45%	30%	100%

5.3.1.3 Validation (back-test)

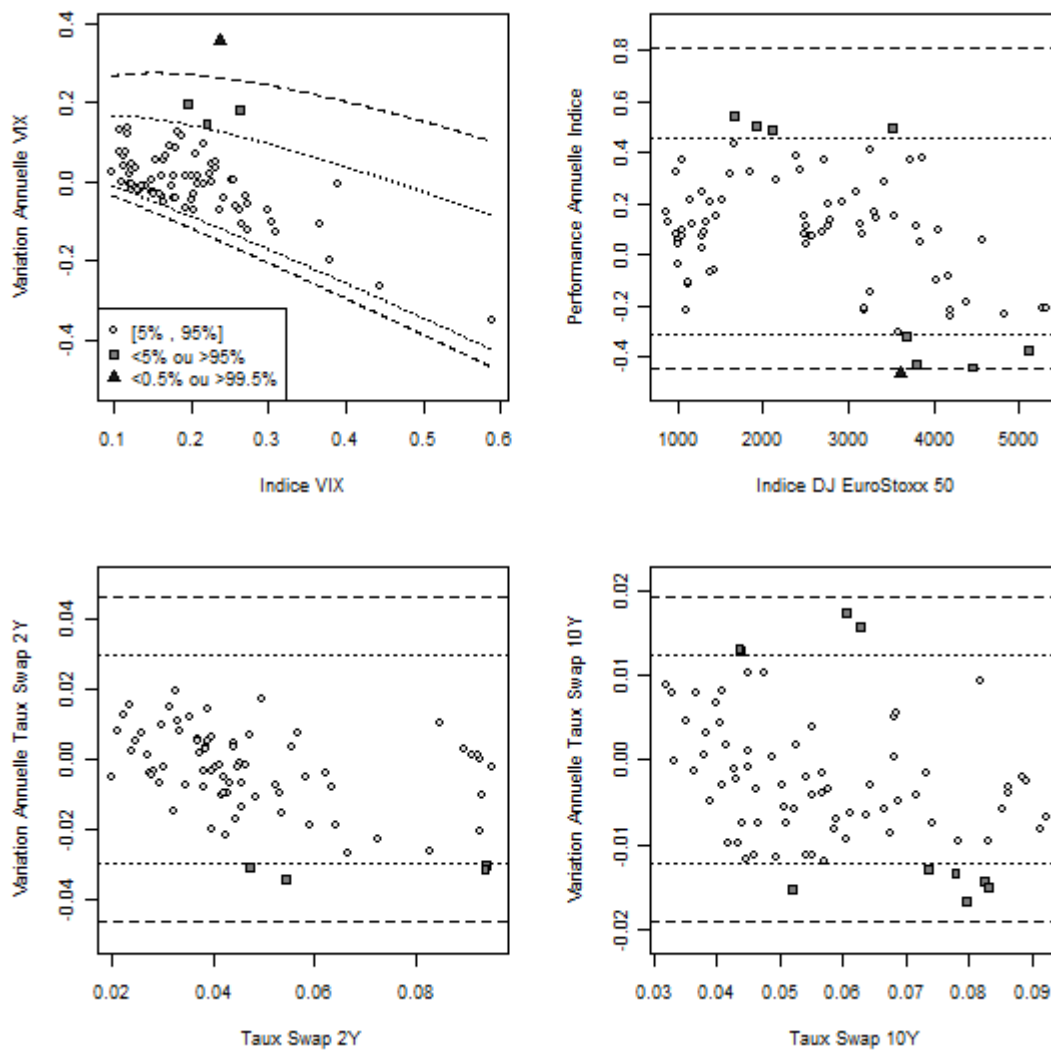
Le back-test permet de vérifier que les distributions modélisées sont cohérentes avec les observations historiques. Les graphiques ci-dessous représentent les variations ou les performances sur un an glissant, avec une fréquence trimestrielle. Les courbes en pointillé représentent les centiles théoriques prédits par le modèle : 0,5%, 5%, 95% et 99,5%.



Le nombre total d'observations est de 41. Le tableau ci-dessous indique l'espérance et les intervalles de confiance du « nombre de points entre deux quantiles sur 41 tirages », ainsi que le nombre de points effectivement observés. Les cellules grisées sont celles pour lesquelles le test permet de rejeter l'hypothèse que la série historique suit la distribution théorique, à 95%.

	<0,5%	0,5% à 5%	5% à 95%	95% à 99,5%	>99,5%	Total
Espérance	0	2	37	2	0	41
Quantile 5%	0	0	32	0	0	
Quantile 95%	1	5	41	5	1	
Indice IPD France	2	3	33	3	0	41
Vol Actions 10Y	0	0	39	2	0	41
Vol Swaption 10x10	0	0	40	1	0	41

Sur l'immobilier, le test rejete le modèle. Néanmoins, compte-tenu des problématiques de mesure évoquées plus haut, nous conservons cette calibration.



Le nombre total d'observations est de 78. Le tableau ci-dessous indique l'espérance et les intervalles de confiance du « nombre de points entre deux quantiles sur 78 tirages », ainsi que le nombre de points effectivement observés.

	<0,5%	0,5% à 5%	5% à 95%	95% à 99,5%	>99,5%	Total
Espérance	0	4	70	4	0	78
Quantile 5%	0	0	63	0	0	
Quantile 95%	2	8	76	8	2	
Indice VIX	0	0	74	3	1	78
Indice DJ EuroStoxx 50	1	4	69	4	0	78
Taux Swap 2Y	0	4	74	0	0	78
Taux Swap 10Y	0	6	68	4	0	78

Les modèles retenus sont compatibles avec les séries historiques, au regard de ce test.

Note : Le premier back-test réalisé sur ces 4 séries ne permettait pas de valider la calibration du paramètre Taux Swap 2Y (cf annexes). Aussi, le paramètre de volatilité a été ajusté à la hausse jusqu'à obtenir un back-test satisfaisant. Dans ce cas précis, l'augmentation du

paramètre de volatilité permet de compenser une asymétrie à gauche de la distribution empirique, qui n'est pas modélisée.

5.3.1.4 Limites

La modélisation retenue présente certaines limites, et notamment les suivantes :

- La dépendance modélisée entre les différents risques est gaussienne, or les actifs financiers présentent une corrélation plus forte en situation de stress extrême (notion de « tail-correlation »). Il est possible d'envisager l'utilisation de copules pour prendre en compte cet effet. Néanmoins, les « tail-correlations » sont difficiles à calibrer du fait du nombre très limité de données historiques en situation de stress. L'approche la plus pragmatique consiste à réaliser des sensibilités à ces paramètres, et considérer le cas échéant une marge de prudence.
- L'asymétrie des rendements observée n'est pas prise en compte, de même que l'hétéroscédasticité des séries. Néanmoins, le comparatif permet de vérifier que le modèle et sa calibration sont compatibles avec les données historiques.
- Certains risques, comme le risque de crédit ou le risque inflation, ne sont pas modélisés, mais il est possible d'étendre les modèles retenus pour intégrer ces facteurs de risque. Le passif étudié ne comporte pas de garanties liées à l'inflation, ce qui rend la modélisation de ce facteur moins nécessaire. De même, l'actif étudié ne comporte ni obligations risquées ni obligations indexées.

5.3.2 Modèle de diffusion risque neutre

Notre modèle de marché permet de diffuser 4 type d'actifs : monétaire, obligations, actions et immobilier.

5.3.2.1 Taux monétaire et obligataires

Le modèle retenu est le Hull-White 1 facteur

Il est basé sur une diffusion du taux court :

$$dr = \lambda(\theta(t) - r(t))dt + \sigma dW$$

λ est le paramètre de vitesse de retour à la moyenne

σ est le paramètre de volatilité

$\theta(t)$ est la cible long terme du taux court, fonction déterministe du temps

Quelques lignes de calcul et l'application classique du lemme d'Itô conduisent aux formules suivantes

$$r(t) = r_0 e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t \theta(u) e^{\lambda u} du + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda u} dW(u)$$

Le paramètre $\theta(t)$ est automatiquement déterminé à partir de la courbe des taux à $t=0$.

Soit $B(s, t)$ le prix en s d'une obligation zéro-coupon de maturité t .

$$\theta(t) = -\frac{\partial \ln B(0, t)}{\partial t}(t) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \ln B(0, t)}{\partial t^2}(t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda t})$$

Pour diffuser les taux de manière discrète, nous avons besoin de plusieurs éléments :

- Le niveau du taux court $r(t)$ à chaque pas de temps.
- Le prix des obligations zéro-coupons pour les maturités considérées.
- La performance du compte courant sans risque (cash), qui correspond au taux court capitalisé de manière continue sur une période. Cette performance fera également office de taux d'actualisation annuel.

- Mathématiquement, la performance du compte courant entre s et t s'écrit $e^{\int_s^t r(u) du}$.

On utilise la distribution conditionnelle de $\left(r(t), \int_s^t r(u) du \right)$ sachant $r(s)$, $s < t$.

Il s'agit d'une loi normale bivariable. Aussi, il suffit de calculer les espérances, variances et covariances conditionnelles pour caractériser l'ensemble de la distribution.

$$E(r(t)|r(s)) = r(s)e^{-\lambda(t-s)} + e^{-\lambda t} (\alpha(t) - \alpha(s))$$

$$\text{avec } \alpha(u) = -\frac{\partial \ln B(0, t)}{\partial t}(u) e^{\lambda u} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (e^{\lambda u} + e^{-\lambda u})$$

$$V(r(t)|r(s)) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda(t-s)})$$

$$E\left(\int_s^t r(u) du \middle| r(s)\right) = \left(\frac{1 - e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda}\right) \left(r(s) + \frac{\partial \ln B(0, t)}{\partial t}(s)\right) + \frac{\ln B(0, t)}{\ln B(0, s)} + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (t-s) \\ + \frac{\sigma^2}{4\lambda^3} (e^{-\lambda s} + e^{-\lambda t}) (e^{-\lambda s} - e^{-\lambda t}) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^3} (e^{\lambda s} + e^{-\lambda s}) (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda s})$$

$$V\left(\int_s^t r(u) du \middle| r(s)\right) = \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \left((t-s) + \frac{1}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda(t-s)}) - \frac{2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-s)}) \right)$$

$$\text{Cov}\left(\int_s^t r(u) du, r(t) \middle| r(s)\right) = \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (1 - e^{-\lambda(t-s)})^2$$

Pour générer des browniens corrélés, nous utilisons la décomposition de Cholesky [8].

Pour générer la structure par terme des taux d'intérêt, nous utilisons la formule suivante :

$$B(s,t) = \frac{B(0,t)}{B(0,s)} \exp \left[\frac{1 - e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda} \left(-\frac{\partial \ln B(0,t)}{\partial t}(s) - r(s) \right) - \frac{\sigma^2}{4\lambda^3} (1 - e^{-2\lambda s})(1 - e^{-\lambda(t-s)})^2 \right]$$

Ce modèle présente un certain nombre d'avantages pratiques :

- Il admet une discrétisation exacte, ce qui permet de réaliser des simulations Monte-Carlo avec un pas de discrétisation important sans introduire de biais de discrétisation.
- La calibration est facilitée par l'existence de formules fermées de pricing d'options sur Obligations Zéro-Coupons.
- Il existe des formules fermées de pricing d'Obligations Zéro-Coupons, ce qui permet à chaque pas de temps de reconstituer aisément l'ensemble de la courbe des taux à partir du niveau du facteur.

Les deux inconvénients majeurs de ce modèle sont les suivants :

- La probabilité d'obtenir des taux nominaux négatifs est non-nulle et on en constate en pratique quand la courbe des taux est basse et la volatilité des taux élevée
- Toutes les maturités sont parfaitement corrélées puisqu'il existe un seul facteur de risque. Ainsi, certaines déformations de la courbe des taux ne sont pas atteignables via ce modèle.

Malgré ces inconvénients, le modèle Hull-White est largement utilisé dans le domaine financier. De plus, notre étude exige un modèle qui permette une calibration / génération automatique. C'est le cas du modèle Hull-White, c'est pourquoi nous avons choisi de le retenir.

5.3.2.2 Actions et Immobilier

En ce qui concerne la diffusion d'actifs risqués, nous avons choisi de coupler au modèle de taux un modèle lognormal. Nous utiliserons deux indices qui correspondent chacun au prix d'un portefeuille d'actifs, respectivement action et immobilier, dans lequel l'assureur peut investir. A des fins de simplifications, nous considérons que ces portefeuilles ne payent pas de revenu (dividendes, loyers ...) et par conséquent leur « total return » et leur « price return » sont identiques. Ainsi, dans un environnement risque neutre, on utilisera le modèle de diffusion suivant :

$$dS = r(t)Sdt + \sigma_s SdW$$

Il est clair que les simplifications retenues dans cette modélisation ont un impact sur la valorisation des options et garanties embarquées dans les passifs. En revanche, elles n'ont pas d'incidence sur l'analyse concernant la qualité de réplcation des portefeuilles.

En pratique, nous allons ici aussi utiliser une discrétisation exacte. Pour ce faire, appliquons le lemme d'Itô à $\ln(S)$:

$$d \ln S = \left(r(t) - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) dt + \sigma_s dW$$

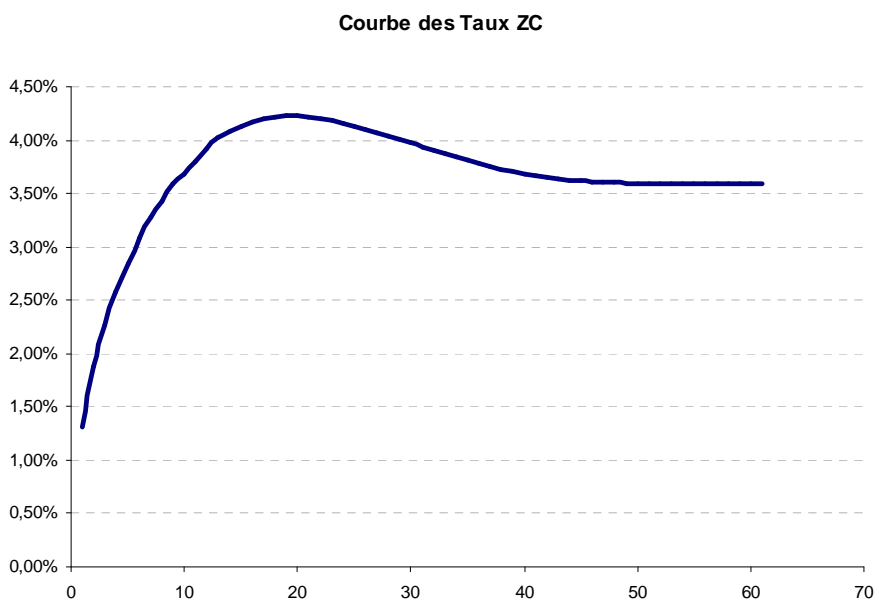
Puis

$$S(t) = S(s) e^{\int_s^t r(u) du} e^{-\frac{\sigma_s^2}{2}(t-s) + \sigma_s (W(t) - W(s))}$$

Ainsi, nous pouvons exprimer $S(t)$ en fonction de $S(s)$, de la performance du compte courant sans risque déjà calculé plus haut et d'un aléa propre à l'actif considéré, sous forme de loi normale qui est aisée à simuler.

5.3.2.3 Calibration

La courbe des taux retenue pour les simulations est la courbe swap EUR du 31/12/2009.



Les autres paramètres de calibration risque neutre correspondent aux prix de marché 31/12/2009 des swaptions de tenor 20Y et des options sur action de maturités 5Y, 10Y et 20Y.

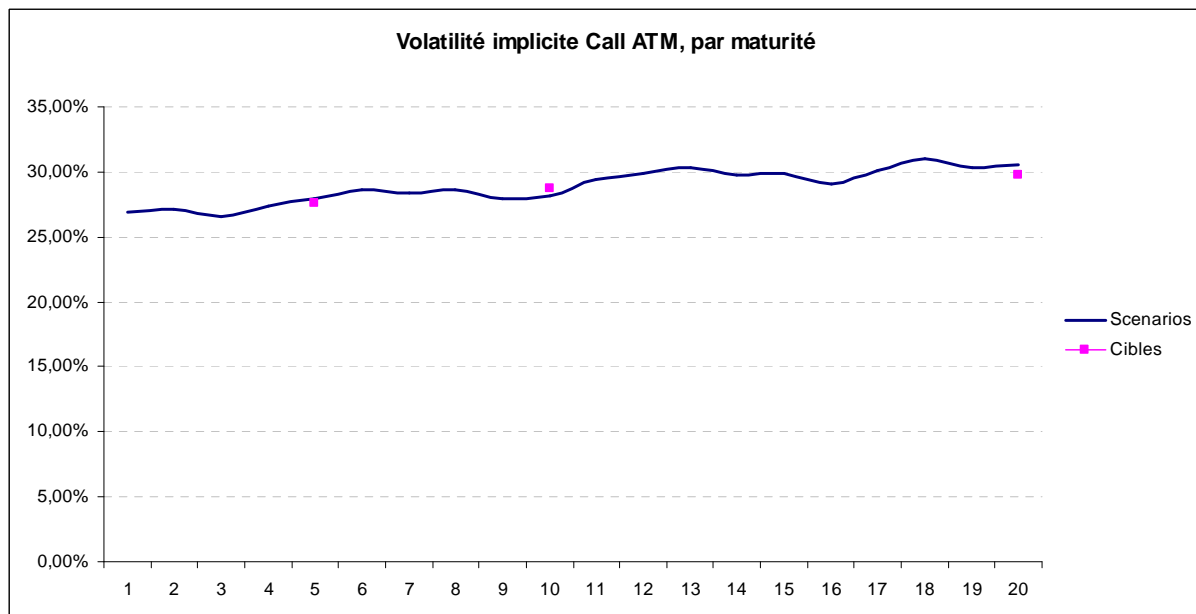
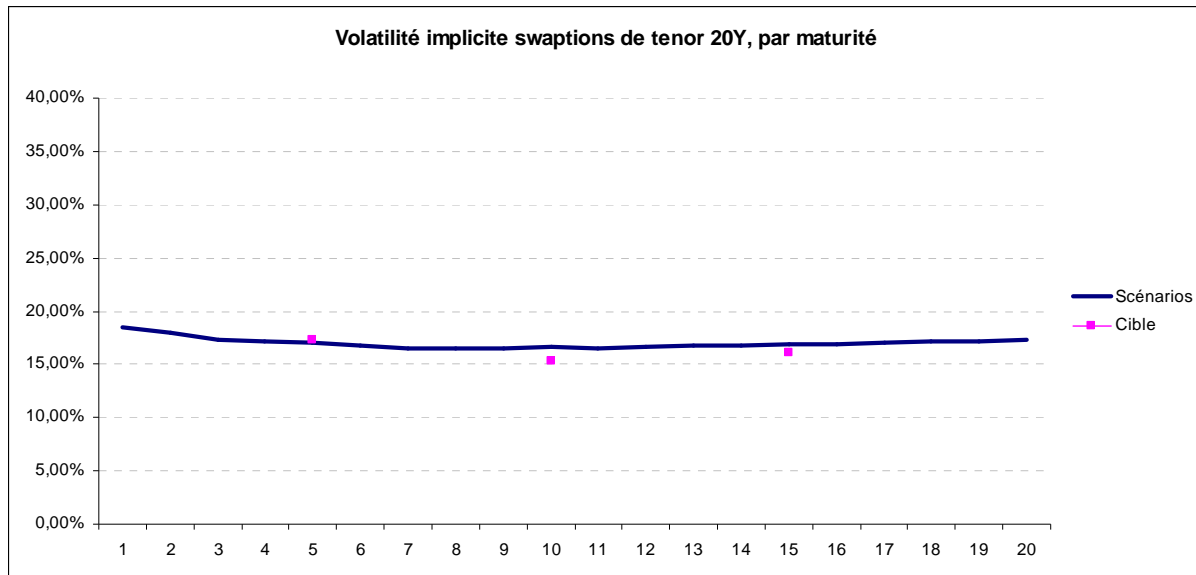
Volatilité Implicite Actions EUR		Volatilité Implicite Swaptions EUR	
5Y	27,6%	5Y	17,4%
10Y	28,7%	10Y	15,3%
20Y	29,8%	15Y	16,1%

A l'issue de la calibration, les paramètres des modèles sont les suivants.

Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif
d'une compagnie d'assurance vie

	Vol	r0	Mean-Rev.
Hull White	1,20%	1,31%	5,00%
Immobilier	11,00%		
Action	27,00%		

Afin de valider les paramètres, nous avons comparés les prix calculés à l'aide des scénarios aux prix de marché du 31/12/2009.



Pour l'immobilier, il n'existe pas de marché liquide d'options sur lequel calibrer une volatilité implicite et par conséquent il est difficile d'avoir une volatilité « market consistent ». Aussi, nous avons conservé la volatilité du modèle monde réel de 11%.

Le même raisonnement a été appliqué aux corrélations ; les corrélations du modèle monde réel ont été retenues pour la modèle risque neutre.

	Taux Court	Immobilier	Actions
Taux Court	100%		
Immobilier	25%	100%	
Actions	25%	40%	100%

5.4 Construction du portefeuille répliquant

Les étapes de construction du portefeuille répliquant sont conditionnées aux choix méthodologiques. Ainsi une approche basée sur un outil utilisant des algorithmes génétiques conduirait à des étapes différentes dans la construction et la calibration du portefeuille répliquant. La partie suivante décrit la construction d'un portefeuille répliquant à partir de l'outil que nous avons utilisé opérationnellement.

Les étapes de construction d'un portefeuille répliquant peuvent se séquencer ainsi :

1. Choix des instruments financiers utilisés pour la réplification,
2. Détermination des poids de chaque instrument
3. Validation de la qualité de la réplification
4. Réitération des étapes précédentes jusqu'à l'obtention d'une qualité satisfaisante

Une considération préliminaire : la méthode de réplification peut s'appliquer aussi bien au passif qu'aux fonds propres économiques. Le choix retenu ici est de répliquer le passif car c'est le standard de l'industrie. Néanmoins, nous pensons que le choix de répliquer les fonds propres peut s'avérer judicieux (cf discussion en annexe).

5.4.1 Choix des instruments financiers

Le choix des instruments financiers nécessite une connaissance approfondie des passifs à répliquer, des risques d'actifs considérés ainsi que des sensibilités associées. Cela nécessite également une maîtrise des caractéristiques des instruments financiers disponibles pour la réplification.

Le passif modélisé dans notre étude est un contrat retraite comportant une garantie de taux faible (taux technique à 2,5%) ainsi qu'une règle de participation aux bénéfices de 90%.

Des prestations, sont versées au fur et à mesure de la vie du contrat. Le contrat étant non rachetable, l'assureur n'est pas exposé au risque de rachat. Cependant, nous verrons dans une partie ultérieure comment le portefeuille répliquant peut capturer les éventuels risques de rachat si celui-ci existe dans les passifs modélisés.

La stratégie actif/passif de la compagnie a été de parfaitement matcher en durée l'actif et le passif.

Les facteurs de risque de marché que nous avons considéré sont :

1. le risque de taux (relativement faible au regard de la stratégie de taux actif/passif),
2. le risque action,
3. le risque immobilier,

4. le risque de volatilité action,
5. le risque de volatilité taux,

L'exercice de réplication consiste à répliquer d'une part les valeurs stochastiques des passifs et d'autre part les sensibilités de ces valeurs aux différents facteurs de risque, ce qui nécessite une analyse précise de ces sensibilités.

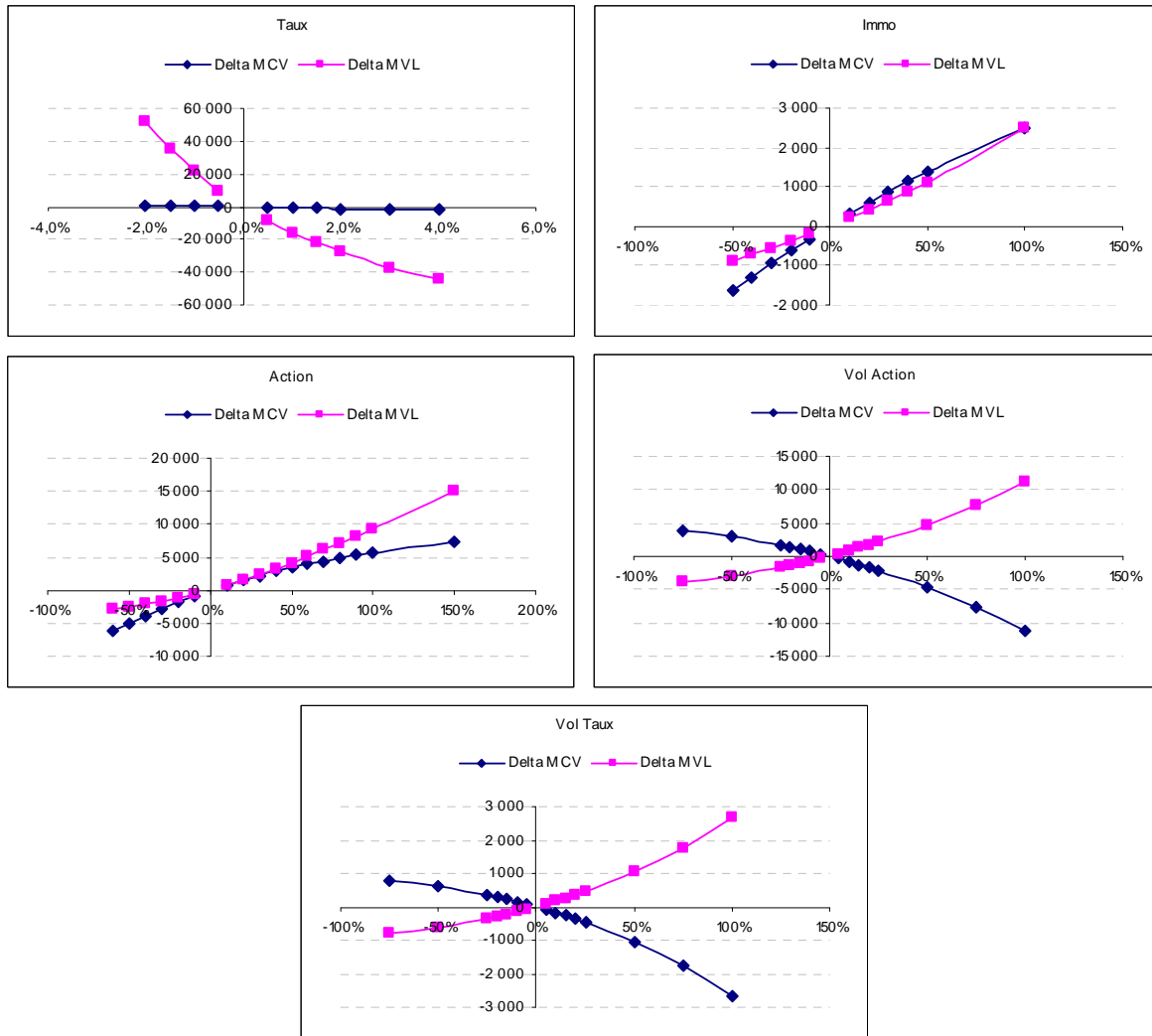
Celles que nous avons utilisées pour la calibration du portefeuille répliquant de référence sont :

- Les mouvements parallèles de la courbe des taux (niveaux de hausse et de baisse)
- Les chocs sur le niveau du marché action,
- Les chocs sur le niveau du marché immobilier,
- Les chocs sur les niveaux de volatilité des marchés actions,
- Les chocs sur les niveaux de volatilité des taux.

Le choix de ces sensibilités sur les facteurs de risque est cohérent avec l'allocation d'actifs en représentation des passifs de notre contrat retraite. De plus nous avons considéré des chocs croisés sur plusieurs facteurs de risque comprenant un mouvement de taux, un choc action et un choc immobilier.

L'analyse des sensibilités des valeurs de passifs (MVL – Market Value of Liabilities) et de fonds propres économiques (MCV – Market-Consistent Value) donne les résultats suivants :

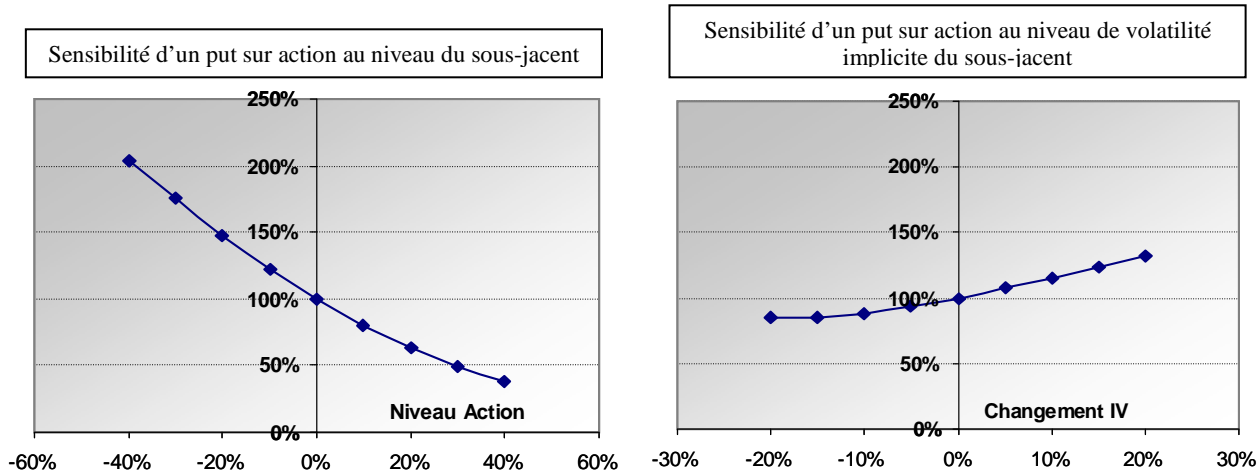
Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie



Les graphiques ci-dessus font apparaître le profil d'évolution de chaque facteur de risque sur lequel nous avons calibré le portefeuille répliquant. La confrontation des profils de passifs à répliquer à celles des différents instruments financiers permet d'orienter le choix des instruments nécessaires à la répliation. Le tableau ci-dessous décrit la sensibilité des différents instruments disponibles en fonction des différentes variables intervenant dans la valorisation :

Tendance	Taux d'intérêt		Sous-jacent		Volatilité implicite		Temps
	↗	↘	↗	↘	↗	↘	
Instruments							
Zéro coupon bond	↘	↗	n/a	n/a	n/a	n/a	↗↗
Swap receveur	↘	↗	↘	↗	n/a	n/a	↗
Swaption receveuse	↘	↗	↘	↗↗	↗↗	↘↘	↘
Swaption payeuse	↗	↘	↗↗	↘	↗↗	↘↘	↘
Cap	↗	↘	↗	↘	↗↗	↘↘	↘
Floor	↘	↗	↗	↘	↗↗	↘↘	↘
Constant maturity swap	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗
Indice equity	n/a	n/a	↗	↘	n/a	n/a	n/a
Call equity	↗	↘	↗	↘	↗↗	↘↘	↘
Put equity	↘	↗	↘	↗	↗↗	↘↘	↘
Straddle equity	-	-	↗	↘	↗↗	↘↘	↘

Les graphiques ci-dessous illustrent pour des sous-jacents actions ou immobilier d'une part la convexité introduite par le choix de puts dans le portefeuille répliquant et d'autre part la sensibilité introduite à la volatilité implicite:



Compte tenu des caractéristiques des passifs et de ses sensibilités, le choix des instruments financiers dans notre portefeuille répliquant de référence repose sur :

- Des **obligations zéros coupons** qui permettent de reproduire la composante garantie des flux de prestations
- Des **futures sur indices action et immobilier** (Action Index, Immobilier Index) détenues sur différentes périodes permettant de refléter la sensibilité des passifs à l'exposition action et immobilier via la participation aux bénéfices différée.
- Des **options Puts sur actions et sur immobilier** qui permettent de prendre en compte l'optionalité introduite par l'asymétrie de la clause de participation aux bénéfices. Les options sur actions ou immobilier permettent d'introduire de la convexité pour reproduire l'optionalité du contrat mais également de capturer la sensibilité des passifs au risque de volatilité (action).
- Des **options de taux Floors et Caps** de maturité 1 an sur des sous-jacents de taux de différentes maturité ont été utilisés afin de capturer la sensibilité des passifs à la volatilité de taux.

De manière générale, le choix d'un instrument financier est soit basé sur sa capacité à reproduire le comportement d'un passif d'assurance, soit sur sa contribution marginale à améliorer significativement la qualité de la réplification.

Paramétrage des instruments financiers

Le paramétrage des instruments financiers réside principalement sur les caractéristiques propres de chaque instrument à partir de l'analyse du passif et des sensibilités à répliquer (niveaux des garanties, optionalité ou convexité qui se dégagerait de l'analyse des sensibilités,...). Une analyse de la sensibilité de chaque instrument utilisé à leurs caractéristiques respectives (strike, maturité,...) est nécessaire pour réaliser le paramétrage.

Cependant, comme illustré dans la partie 4, le choix des actifs candidats ainsi que le paramétrage de ces actifs repose sur le jugement d'expert et ne découle pas d'une méthodologie systématique. Ce point constitue l'un des inconvénients majeurs de l'approche. Des solutions sont envisageables pour palier cet inconvénient, mais nous ne les avons pas testées dans le cadre de notre étude. Par exemple, on pourrait définir un jeu d'actifs « type » pour un profil d'actifs et de passifs donné, et passer directement à la phase d'optimisation.

5.4.2 Détermination des poids

Méthode de calibration

La méthode utilisée pour la calibration de notre portefeuille répliquant repose d'une part sur l'utilisation de l'algorithme d'optimisation détaillé précédemment et d'autre part sur l'intervention de l'utilisateur afin d'améliorer et d'optimiser la calibration des actifs candidats pour une meilleure adéquation avec les valeurs et sensibilités cibles.

1. Utilisation de l'algorithme d'optimisation :
Dans un premier temps la détermination du poids des instruments est le résultat de l'algorithme d'optimisation sous contraintes. Cependant certains ajustements s'avèrent nécessaires postérieurement à une première analyse des critères de qualité du portefeuille.
2. Ajustements manuels :
Dans un second temps chaque facteur de risque est considéré indépendamment afin d'analyser le niveau de qualité de la réplification.

Cette approche revient à découper un portefeuille répliquant comme une somme de sous-portefeuille répliquant en considérant chaque facteur de risque l'un après l'autre.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme paramétrique suivante :

$$\text{Portfolio} = A_0 + \underbrace{A_1 * \varepsilon_{\text{Taux}}}_{\text{RP - 1}} + \underbrace{A_2 * \varepsilon_{\text{Taux}}^2}_{\text{RP - 2}} + \underbrace{A_3 * \varepsilon_{\text{Action}}}_{\text{RP - 3}} + \underbrace{A_4 * \varepsilon_{\text{Action}}^2}_{\text{RP - 4}} + \underbrace{A_5 * \varepsilon_{\text{Im}}}_{\text{RP - 5}} + \dots$$

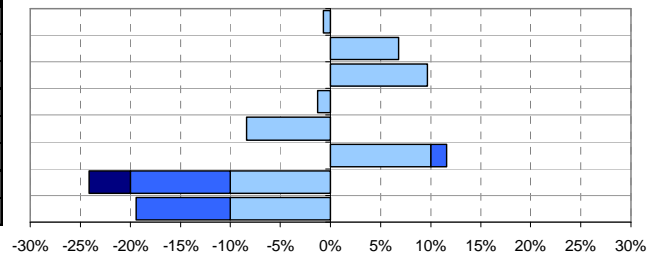
Les ajustements portent sur les poids des instruments composant les sous-portefeuilles.

La calibration proposée consiste à optimiser chaque terme de la fonction forme paramétrique, ce qui repose sur l'hypothèse que l'on puisse répliquer chaque terme de la forme paramétrique par un sous-portefeuille répliquant. Cette approche permet d'améliorer les résultats d'une approche systématique ne reposant que sur l'algorithme d'optimisation.

Dans notre portefeuille, des ajustements ont été apportés sur le risque immobilier. Ci-dessous les résultats avant ajustement.

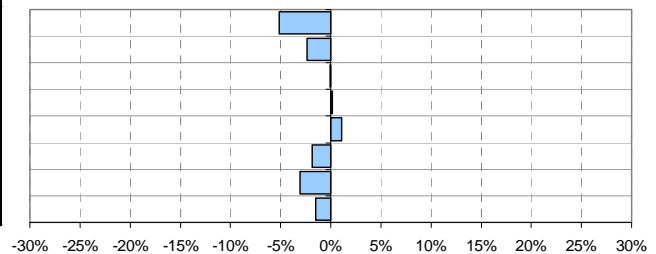
Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie

Sensibilités	Cash flows DFA Model	Cash Flows Replcat Portf	Difference
1 Immo +40%	856	848	-0,7%
2 Immo +30%	622	668	6,8%
3 Immo +20%	404	443	9,7%
4 Immo +10%	200	197	-1,3%
5 Immo -10%	-189	-174	-8,4%
6 Immo -20%	-375	-417	11,6%
7 Immo -30%	-553	-419	-24,1%
8 Immo -40%	-717	-578	-19,4%

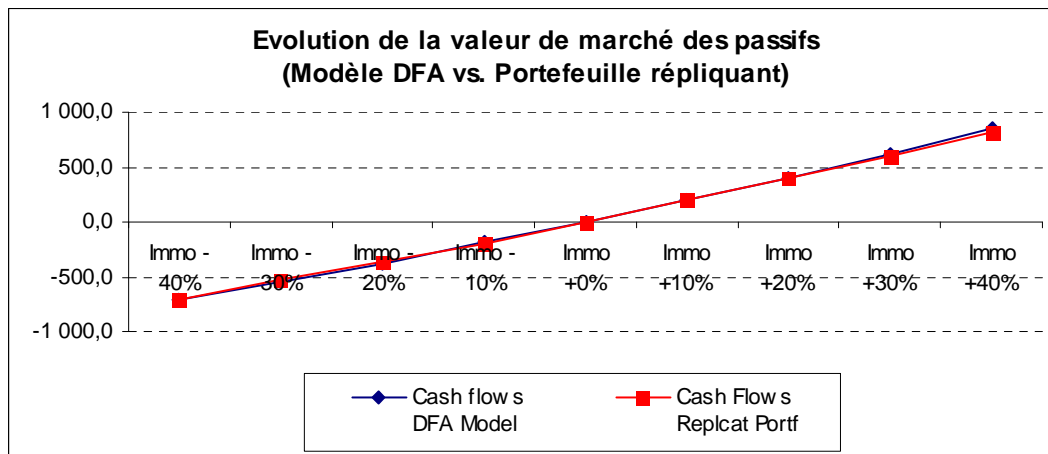


Les ajustements effectués sur les poids des instruments financiers dont le sous-jacent est l'indice immobilier (futures et puts) ont permis de réduire les écarts. La qualité de réplcation des sensibilités immobilier s'en trouve ainsi significativement améliorée :

Sensibilités	Cash flows DFA Model	Cash Flows Replcat Portf	Difference
1 Immo +40%	856	811	-5,2%
2 Immo +30%	622	608	-2,3%
3 Immo +20%	404	404	-0,1%
4 Immo +10%	200	201	0,1%
5 Immo -10%	-189	-192	1,1%
6 Immo -20%	-375	-368	-1,9%
7 Immo -30%	-553	-536	-3,1%
8 Immo -40%	-717	-706	-1,5%



Ci-dessous l'impact des ajustements sur les sensibilités en comparant graphiquement les résultats du modèle DFA et ceux du portefeuille répliquant :



Cette représentation des valeurs de marché des passifs permet d'effectuer les ajustements nécessaires sur le nominal des instruments financiers afin que la réplcation des sensibilités devienne satisfaisante.

A l'issue de ces ajustements, le portefeuille répliquant de référence pour notre contrat retraite est composé des instruments suivants :

Instruments	Contribution Valeur Port Rep	Total Nominal
ZeroCoupon	67 755	212 213
EquityIndex	14 980	15 008
EquityIndex Put	3 645	27 030
Cap	1 548	163 320
Floor	-203	-28 568
Total	87 725	

La première colonne représente la valeur de marché globale des instruments par catégorie indiquant ainsi la contribution des différents instruments à la valeur totale du portefeuille répliquant.

Le total des nominaux par classe d'instruments permet d'appréhender la taille de chaque catégorie d'instruments.

Comme nous l'avons vu, le processus de construction du portefeuille répliquant est itératif entre les étapes de choix des instruments financiers et celles d'analyse de la qualité de réplification. Les résultats de ces analyses sur le portefeuille définitif sont détaillées ci-après.

5.4.3 Analyse de la qualité de la réplification

Réplification des valeurs de marché

Le premier critère de validation du portefeuille répliquant est la juste réplification de la valeur de marché des passifs du modèle DFA.

Il est important de noter que deux calculs de valeurs de marché des passifs sont effectués dans le portefeuille répliquant. Le premier calcul repose sur une valorisation des instruments par méthode simulation de Monte-Carlo ; le second repose sur l'utilisation des formules fermées de valorisation des instruments rentrant dans la composition du portefeuille répliquant.

La valeur obtenue par simulation de Monte-Carlo est celle utilisée dans l'algorithme des moindres carrés ordinaires. En revanche la valeur estimée à partir des formules fermées est celle qui servira de référence pour l'ensemble des sensibilités et des simulations monde réel permettant d'obtenir la distribution à un an pour extraire la VaR à 99,5%.

C'est la valeur obtenue à partir des formules fermées qu'il est important d'ajuster au mieux avec le modèle DFA.

Les résultats obtenus pour notre étude donnent des résultats très satisfaisants avec des écarts faibles, inférieurs à 0,5% pour la valeur calculée par simulation et inférieur à 0,1% pour la valeur estimée par formule fermée:

Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie

	Market Consistent Value	Certainty Equivalent Value
Replicated Cash Flows	87 400	82 746
RP (simulation)	87 725	82 952
difference	0,37%	0,25%

	Market Consistent Value	Certainty Equivalent Value
Replicated Cash Flows	87 400	82 746
RP (formules fermées)	87 338	82 952
difference	-0,07%	0,25%

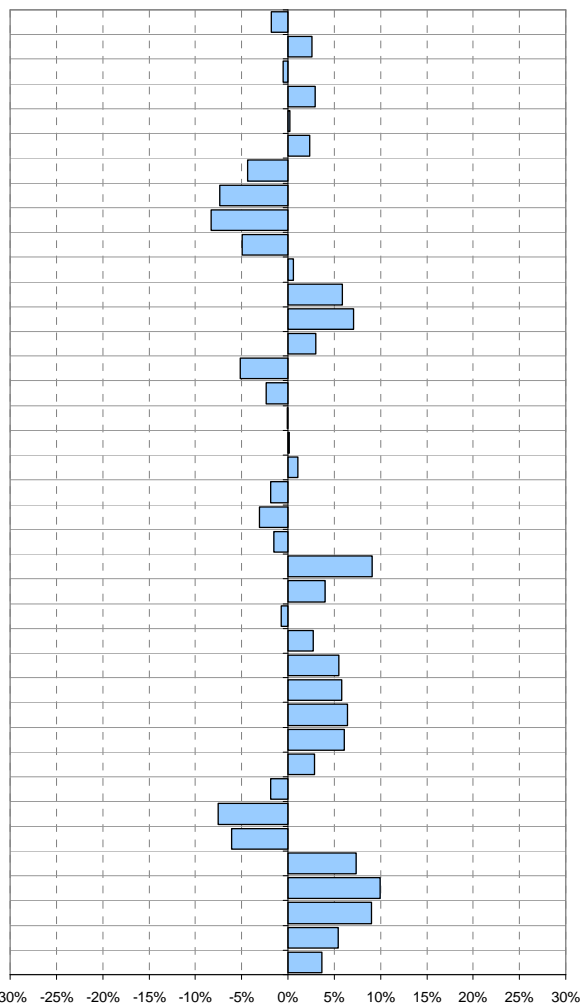
Réplication des sensibilités

La réplication des sensibilités est l'autre critère essentiel afin d'assurer le pouvoir prédictif du portefeuille répliquant dans les scénarios de stress et les scénarios extrêmes.

Les sensibilités utilisées dans la calibration de notre portefeuille de référence sont satisfaisante puisque les écarts avec les valeurs choquées provenant du modèle DFA sont inférieurs à 10% pour l'ensemble des sensibilités et inférieurs à 5% pour les sensibilités de plus forte magnitude.

Ci-dessous, le résultat des comparaisons des différentes sensibilités entre le portefeuille répliquant et le modèle DFA :

	Sensibilités	Cash flows DFA Model	Cash Flows Replcat Portf	Difference
1	Tx +200bps	-27 973	-27 479	-1.8%
2	Tx -200bps	51 835	53 158	2.6%
3	Tx +100bps	-15 978	-15 897	-0.5%
4	Tx -100bps	21 492	22 129	3.0%
5	Tx +50bps	-8 573	-8 589	0.2%
6	Tx -50bps	9 898	10 135	2.4%
7	Eq +20%	1 475	1 411	-4.3%
8	Eq +10%	713	660	-7.4%
9	Eq -10%	-642	-589	-8.3%
10	Eq -20%	-1 203	-1 143	-5.0%
11	Eq -30%	-1 690	-1 699	0.6%
12	Eq -40%	-2 118	-2 243	5.9%
13	Eq -50%	-2 500	-2 678	7.1%
14	Eq -60%	-2 825	-2 909	3.0%
15	Immo +40%	856	811	-5.2%
16	Immo +30%	622	608	-2.3%
17	Immo +20%	404	404	-0.1%
18	Immo +10%	200	201	0.1%
19	Immo -10%	-189	-192	1.1%
20	Immo -20%	-375	-368	-1.9%
21	Immo -30%	-553	-536	-3.1%
22	Immo -40%	-717	-706	-1.5%
23	Tx-, Eq-, Immo- (*)	31 778	34 676	9.1%
24	Tx+, Eq-, Immo- (**)	-24 580	-25 561	4.0%
25	Vol Eq -25%	-1 735	-1 723	-0.7%
26	Vol Eq -15%	-1 096	-1 126	2.7%
27	Vol Eq -5%	-381	-402	5.5%
28	Vol Eq +5%	402	425	5.8%
29	Vol Eq +15%	1 253	1 334	6.5%
30	Vol Eq +25%	2 172	2 305	6.1%
31	Vol Eq +50%	4 761	4 897	2.9%
32	Vol Eq +75%	7 719	7 577	-1.8%
33	Vol Eq +100%	11 050	10 218	-7.5%
34	Vol Taux -50%	-602	-565	-6.1%
35	Vol Taux -25%	-347	-373	7.4%
36	Vol Taux -10%	-150	-165	10.0%
37	Vol Taux +25%	455	496	9.0%
38	Vol Taux +50%	1 046	1 103	5.4%
39	Vol Taux +75%	1 759	1 823	3.7%



Les écarts relatifs les plus significatifs, constatés pour les sensibilités à la volatilité de taux, correspondent à des sensibilités faibles en valeurs absolues (ex : vol taux -10% = 150) en comparaison des valeurs de passifs totaux.

A noter que nous avons considérés des chocs croisés sur différents facteurs de risque :

(*) Sensi 22 : Taux (-150 bps), Action (-40%), Immobilier (-20%)

(**) Sensi 23 : Taux (+150bps), Action (-40%), Immobilier (-20%)

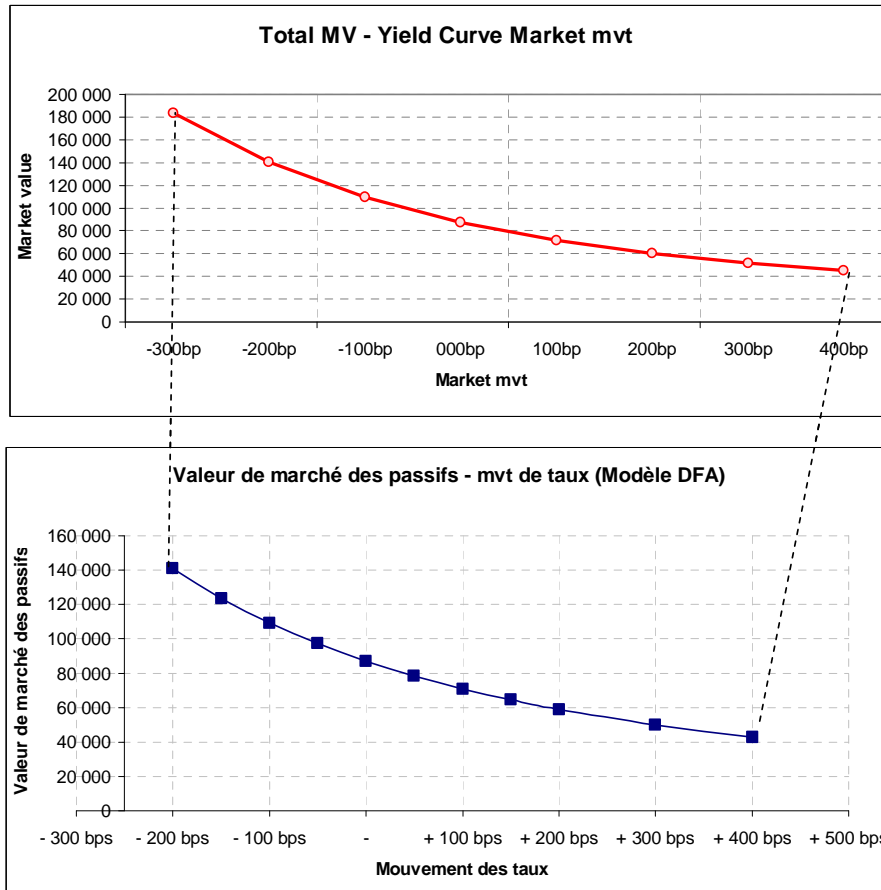
Il est possible d'ajouter autant de sensibilités que souhaité, et augmenter leur nombre permet d'accroître la robustesse du portefeuille.

Analyse de la topologie

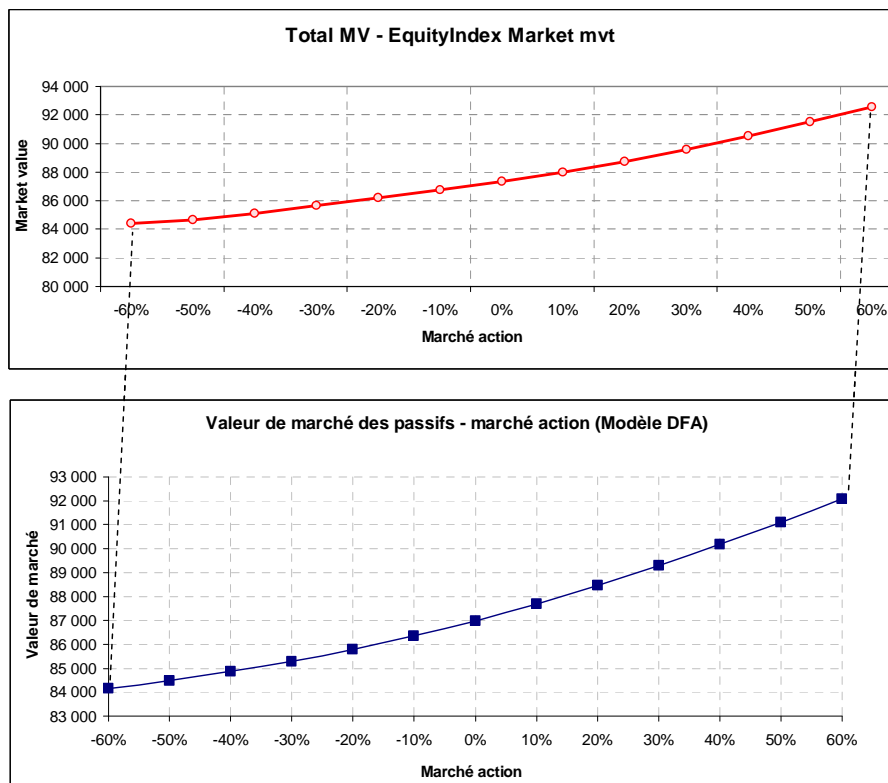
Les graphiques de topologie présentent l'évolution des valeurs de marché des passifs en fonction des évolutions des sous-jacents tracés à partir des valorisations du portefeuille répliquant obtenues avec les formules fermées de valorisation sur différentes sensibilités.

Ces graphiques permettent d'appréhender le comportement du portefeuille sur un large spectre de sensibilités jusqu'à des niveaux extrêmes de chocs. Les exemples ci-dessous présentent les topologies obtenues sur le risque de taux et le risque action avec le portefeuille en comparaison des sensibilités du modèle DFA.

*) Sensibilité aux mouvements parallèles de la courbe des taux :



*) Sensibilité à des chocs instantanés du marché action :



Ces analyses graphiques permettent de valider les tendances et servent d'éléments de comparaison pour montrer que le comportement des passifs répliqués est bien identique au comportement des passifs initiaux provenant du modèle de projection.

Qualité de la régression

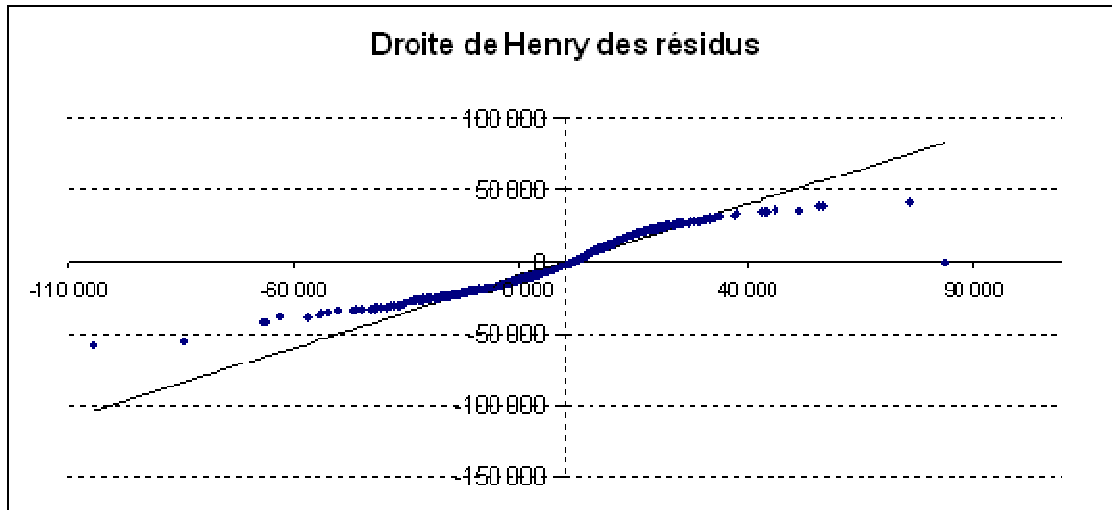
Un des critères de qualité de la répliation est également la valeur des coefficients de régression sur les valeurs présentes ou valeurs terminales des cash flows. Cependant comme cela a été mentionné le R^2 n'est pas une mesure suffisante de la qualité de la régression. Un R^2 proche de 1 n'entraîne pas nécessairement un portefeuille répliquant de qualité dans le sens du pouvoir prédictif de ce dernier.

Les coefficients de régression calculés sur les valeurs présentes ainsi que sur les valeurs terminales sont très proches de 1

	VP des CF	VT des CF
Coefficient de regression	92,37%	97,25%

Analyse des résidus

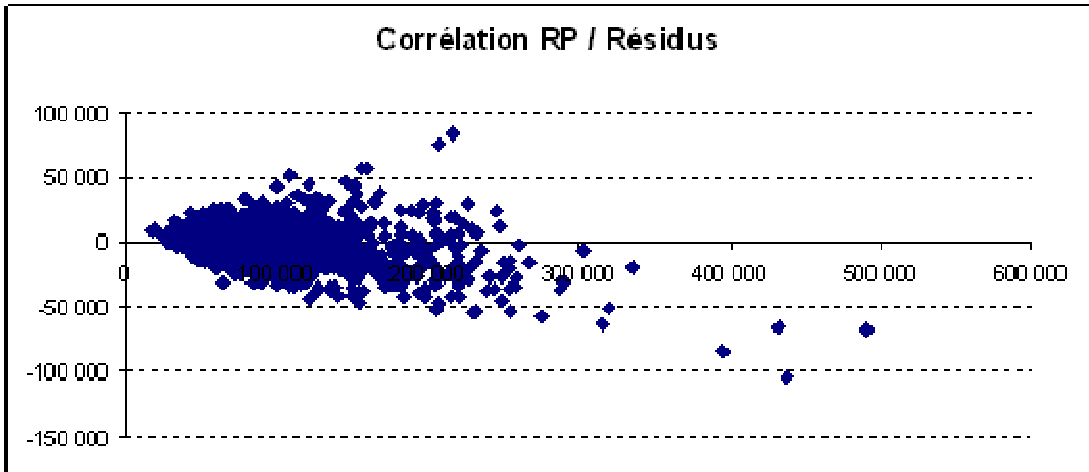
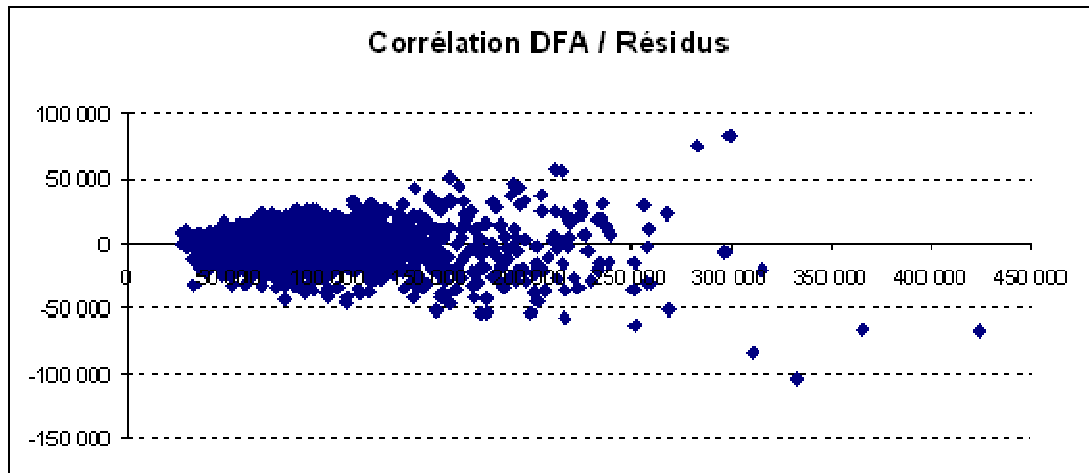
En traçant la « droite de Henry », on observe que la distribution des résidus ne suit pas une loi normale, notamment au niveau des queues de distribution.



Les tracés des graphiques des corrélations entre les résidus et les valeurs des cash-flows répliqués d'une part et les cash-flows des portefeuilles répliquants permettent de montrer l'absence de biais systématiques et l'absence de corrélations entre les résidus et les instruments financiers.

De plus sur l'ensemble des 2 000 scénarios stochastiques risque neutre utilisés pour la réplification, les résidus ont une moyenne de -326, soit 0,4% de la valeur des passifs répliqués.

Graphiques des corrélations entre (1) la VAN des cash-flows du modèle DFA et les résidus et
(2) VAN des cash-flows du portefeuille répliquant et les résidus :



6 Etude de l'applicabilité des portefeuilles répliquants

6.1 Application pour Solvabilité 2 / ERM

Cette partie a pour objectif de comparer plusieurs approches de calcul du capital économique sur les passifs définis dans la partie précédente afin de mettre en lumière les différences de chacune. Le capital économique considéré est le niveau de fonds propres nécessaire pour faire face à une ruine économique à horizon un an pour un niveau de confiance de 99,5%.

Les méthodes que nous avons testées sont :

- L'approche de référence basée sur le modèle DFA,
- L'approche basée sur les portefeuilles répliquants,
- L'approche par forme paramétrique reposant sur l'utilisation de fonctions polynomiales.

Le portefeuille répliquant utilisé par la suite sera celui qui a été défini dans le paragraphe précédent.

Pour mettre en œuvre le calcul de référence, nous avons utilisé le modèle DFA à partir duquel nous avons calculé 11 000 sensibilités, correspondant à 11 000 scénarios monde réel pouvant survenir durant la première année (cf annexes pour le choix du nombre de scénarios). Pour chacun de ces 11 000 scénarios, nous avons calculé la valeur économique des actifs et des passifs, ce qui nous a permis d'obtenir une distribution des fonds propres sur tous les facteurs de risque considérés (niveau des actions, niveau de l'immobilier, niveau de la courbe de taux initiale, volatilité action, volatilité taux).

Une fois la distribution obtenue, nous pouvons en extraire le quantile 0,5%.

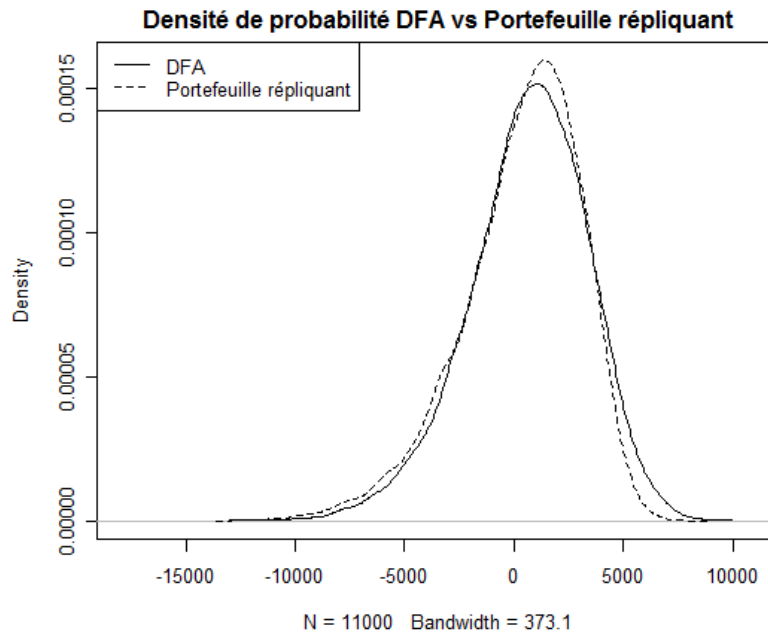
Les mêmes scénarios économiques ont été appliqués successivement au portefeuille répliquant présenté précédemment et à une forme paramétrique. Ceci permet d'obtenir des distributions alternatives de fonds propres économiques, pouvant être comparées à la distribution de référence.

Nous avons également évalué, pour chacune des approches :

- Les facteurs de risque discriminants dans la sélection des scénarios extrêmes
- La stabilité de l'ordonnement des scénarios

6.1.1 Résultats modèle DFA vs. Portefeuille répliquant

Comparaison des distributions de gains / pertes économiques.



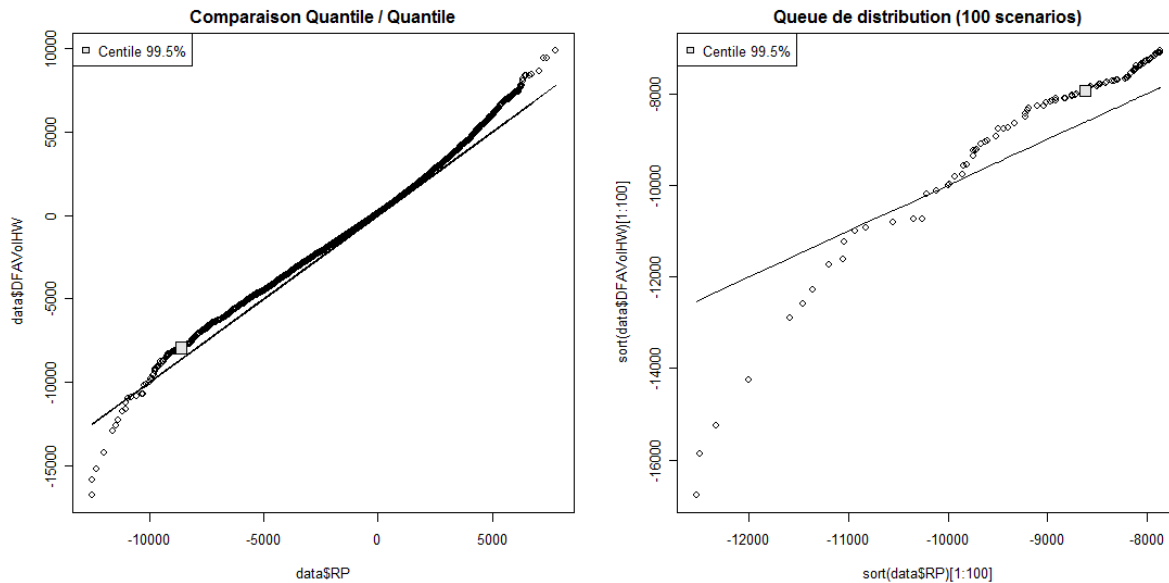
Les statistiques descriptives des distributions sont les suivantes.

	DFA	RP
Moyenne	626	336
Ecart-type	2 772	2 739
Asymétrie	-0,54	-0,77
Aplatissement	3,92	3,78

Les deux distributions sont de forme similaire, avec des écarts-types très proches. Chaque distribution possède une asymétrie négative traduisant des distributions concentrées vers la droite, c'est-à-dire vers les valeurs positives, avec par conséquent une queue de distribution étalée vers la gauche, c'est à dire vers les niveaux de pertes économiques extrêmes. Enfin les coefficients d'aplatissements reflètent des distributions dont l'occurrence d'événements extrêmes est un peu plus fréquente que celles d'une loi normale.

Ces formes de distribution résultent de l'asymétrie des garanties accordées aux assurés. En effet, en cas de pertes l'assureur est tenu à son engagement minimum de table et de taux, alors qu'en cas de gains les bénéfices sont partagés avec les assurés.

Comparaison quantile à quantile et focus sur les scénarios de queue distribution



Les résultats obtenus à l'aide du portefeuille répliquant s'ajustent très bien à ceux obtenus à l'aide du modèle DFA sauf pour les queues de distribution. Pour les scénarios les plus défavorables, le portefeuille répliquant sous-estime le besoin en capital en comparaison de ce qu'on obtient à partir du modèle DFA. En revanche, entre le 15^{ème} scénario et le 100^{ème}, le portefeuille répliquant a tendance à surestimer le besoin en capital par rapport au modèle DFA.

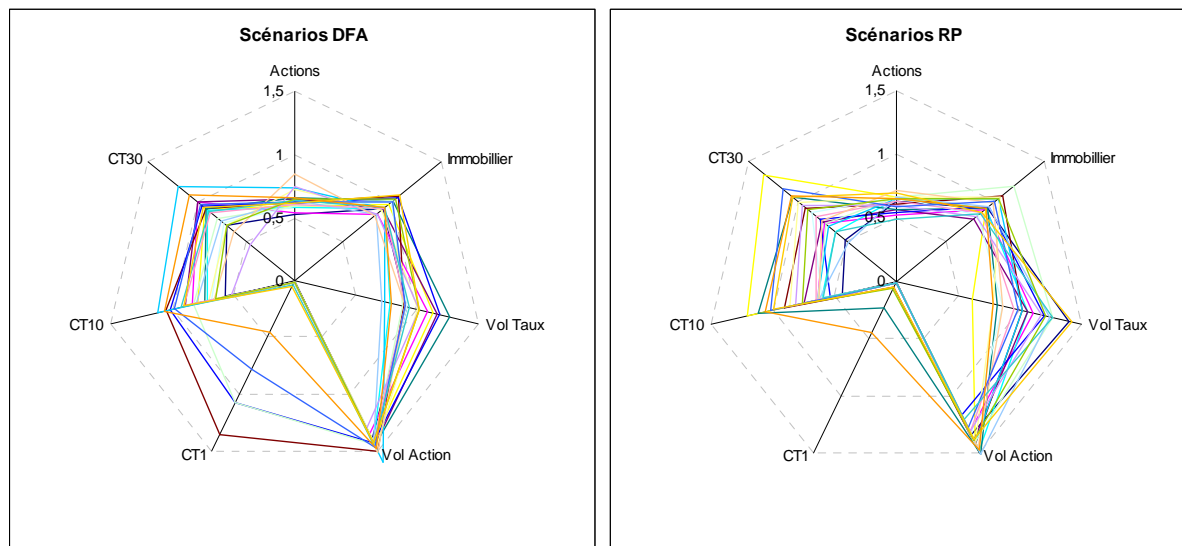
L'extraction du 55^{ème} scénario adverse correspondant au quantile 99,5% de la distribution monde réel montre que le besoin en capital obtenu à partir de l'approche portefeuille répliquant est de 8 617 soit 8,5% de plus que le besoin ressortant du calcul effectué à partir du modèle DFA.

Rang	Résultat éco. DFA	Résultat éco. RP	Différence
50	-8 048	-8 751	8,7%
51	-8 029	-8 747	8,9%
52	-8 023	-8 721	8,7%
53	-8 021	-8 706	8,5%
54	-7 969	-8 627	8,3%
55	-7 938	-8 617	8,5%
56	-7 932	-8 604	8,5%
57	-7 900	-8 591	8,7%
58	-7 861	-8 571	9,0%
59	-7 845	-8 568	9,2%
60	-7 834	-8 497	8,5%

Au voisinage du scénario quantile à 99,5%, le portefeuille répliquant est plus adverse que le modèle DFA et l'écart entre les deux est relativement stable.

Analyse des facteurs de risque

Les extractions du scénario quantile 99.5% ainsi que son voisinage permettent d'analyser les facteurs de risque discriminants pour les approches DFA et portefeuille répliquant.



1. Lecture des graphiques

Chaque axe correspond à un facteur de risque et chacune des 21 courbes de niveau est un scénario au voisinage du scénario 99,5% (du 45^{ème} au 65^{ème} scénario). La position sur l'axe correspond à un niveau de choc (facteur multiplicatif). Plus on est éloigné du centre, plus le choc associé est important.

Plus les différentes courbes sont concentrées sur un même axe et plus le facteur est discriminant. A contrario si sur un même axe, les courbes de niveau sont dispersées, ce facteur de risque n'est pas discriminant et influence moins sur le classement du scénario dans l'extrémité de la distribution.

2. Analyse des facteurs discriminants

Le niveau des taux courts et la volatilité implicite des taux sont des facteurs peu discriminants. Les taux longs et l'immobilier sont des facteurs moyennement discriminants. Enfin, Le niveau des actions et leur volatilité implicite sont des facteurs très discriminants. Dans l'ensemble, et notamment en ce qui concerne les facteurs très discriminants, le portefeuille répliquant capture correctement la dynamique.

En revanche, il peut introduire des distorsions sur certains facteurs de risque, visibles sur le niveau des taux courts. L'explication tient au fait que le portefeuille répliquant tel qu'appliqué ne respecte pas la structure temporelle des cash flows. Aussi, il n'est pas garanti que le portefeuille réagisse correctement à des rotations ou aplatissements de la courbe des taux.

Néanmoins, afin de déterminer les déformations les plus représentatives de la courbe des taux, des méthodes de type analyse en composantes principales peuvent être appliquées aux séries historiques. Elles conduisent invariablement à montrer que la variance des mouvements des taux s'explique avant tout par des variations parallèles de la courbe des taux. Par exemple, sur les courbes gouvernementales et swap EUR, le niveau de variance expliqué par le premier facteur (facteur de niveau) est de l'ordre de 90% [9].

De plus, dans le cas du contrat retraite étudié, l'exposition du bilan à une déformation non parallèle de la courbe des taux est plus faible que son exposition à des mouvements parallèles d'amplitude équivalente (cf annexes).

Compte-tenu de ces deux éléments, pour le contrat retraite étudié, le risque induit par des déformations non-parallèles de la courbe des taux est très inférieur au risque induit par des déformations parallèles.

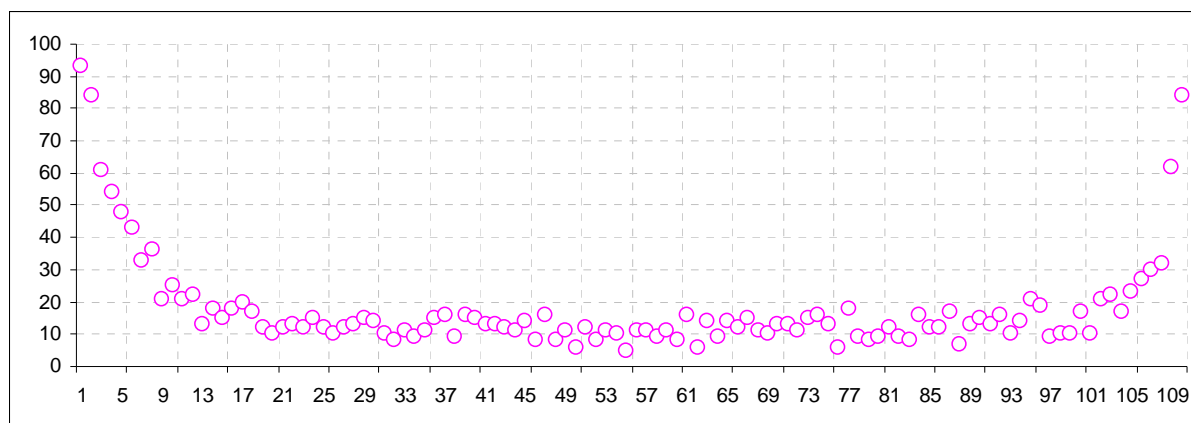
S'il s'avérait nécessaire de capturer des sensibilités aux déformations non-parallèles de la courbe des taux, il est possible d'ajouter des contraintes supplémentaires lors de la construction du portefeuille. Cette approche n'a pas été appliquée dans le cadre de notre étude, mais constituerait à nos yeux un développement intéressant, notamment pour des contrats présentant une position de courbe.

Stabilité de l'ordonnancement des scénarios

Sur l'ensemble des 11 000 scénarios monde réel, nous avons étudié la capacité du portefeuille répliquant à conserver l'ordonnancement des scénarios. L'analyse qui suit permet de vérifier si l'approche portefeuille répliquant conserve la relation d'ordre entre les scénarios par rapport à ce qui ressort du modèle DFA.

Pour construire le graphique ci-dessous nous avons :

- Réalisé un classement des scénarios par valeur croissante des fonds propres économiques selon les deux approches considérées,
- Regroupé les scénarios par paquet de 100 scénarios,
- Compté pour chaque paquet le nombre de scénarios tels que
 $|\text{Rang scenario DFA model} - \text{Rang scenario portefeuille répliquant}| < 100$



Les tableaux suivants présentent les résultats effectués sur les scénarios de la queue de distribution entre le 50^{ème} et le 60^{ème}.

Comparaison des modélisations portefeuille répliquant et DFA avec:

- 1^{ère} colonne: rang du scénario i extrait de la distribution portefeuille répliquant,
- 2^{ème} colonne: perte économique du scénario i calculée avec le portefeuille répliquant,
- 3^{ème} colonne: perte économique du scénario i calculée avec le modèle DFA,
- 4^{ème} colonne: rang du scénario i dans la distribution du modèle DFA.

Rang RP	Résultat éco. RP	Résultat éco. DFA	Rang DFA	Erreur sur le besoin en capital
50	-8 751	-7 772	64	-2%
51	-8 747	-9 101	28	15%
52	-8 721	-5 767	227	-27%
53	-8 706	-7 798	63	-2%
54	-8 627	-6 389	155	-20%
55	-8 617	-7 274	89	-8%
56	-8 604	-7 051	102	-11%
57	-8 591	-11 726	8	48%
58	-8 571	-6 691	122	-16%
59	-8 568	-7 235	92	-9%
60	-8 497	-7 118	96	-10%

L'ordonnancement est respecté dans les grandes lignes : à des pertes extrêmes correspondent bien des pertes extrêmes. En revanche, l'approche n'est pas stable si on se cantonne à la lecture directe du scénario quantile : l'erreur de modèle peut aller jusqu'à 48% du besoin en capital estimé à partir du modèle DFA.

Synthèse des conclusions

L'ensemble de ces analyses conduisent aux conclusions suivantes.

- Le portefeuille répliquant peut être un bon outil de calcul du capital économique. Il permet également d'apprécier les facteurs de risque les plus importants.
- Le niveau de gains / pertes économiques est bien répliqué au centre de la distribution, mais l'erreur de modèle s'accroît dans les queues de distribution.
- Inversement, le classement des scénarios est mieux respecté dans les queues de distribution du fait de la plus faible densité de scénarios.
- La méthode qui consiste à sélectionner les scénarios extrêmes avec le portefeuille répliquant et à calculer le niveau de pertes avec le modèle DFA peut s'avérer très instable. De ce fait, elle est inapplicable en pratique.

6.1.2 Résultats de l'approche modèle DFA vs. Forme paramétrique

Présentation de l'approche par forme paramétrique.

Le calcul de la distribution des fonds propres par formes paramétrique (« Curve Fitting ») repose sur la détermination de fonctions mathématiques visant à reproduire la dynamique des passifs - ou des fonds propres - en fonction des conditions de marché. Chaque scénario Monte-Carlo est ensuite évalué à l'aide de cette fonction, ce qui rend le calcul du capital économique quasi-immédiat.

On peut noter que la construction d'un certain type de portefeuilles répliquants revient à faire du « Curve Fitting » à la différence qu'il s'exprime comme un ensemble d'instruments financiers au lieu d'un ensemble de fonctions mathématiques. Le passage de l'un à l'autre est basé sur l'analyse du développement de Taylor des fonctions ainsi obtenues[10].

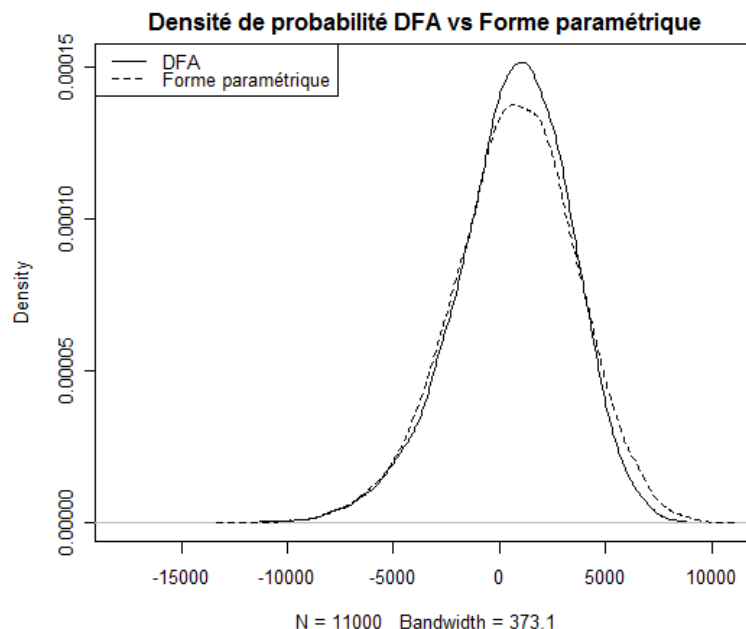
Nous avons appliqué l'approche alternative via des fonctions polynomiales à notre contrat retraite, sur la base des facteurs de risque actions, immobilier, volatilité action, volatilité taux, ainsi que le niveau des taux 30 ans.

Pour chaque facteur de risque, une fonction mathématique a été déterminée à partir des sensibilités du modèle DFA par :

- interpolation par spline cubique (cf annexes) entre deux sensibilités calculées
- extrapolation linéaire au-delà des sensibilités calculées

La sensibilité des fonds propres économiques sur un scénario est obtenue comme la simple somme des sensibilités sur chaque facteur de risque. Cela conduit à négliger les effets croisés.

A partir des fonctions polynomiales obtenues, il est aisé d'obtenir la distribution des fonds propres économiques. Les résultats sont détaillés ci-dessous.

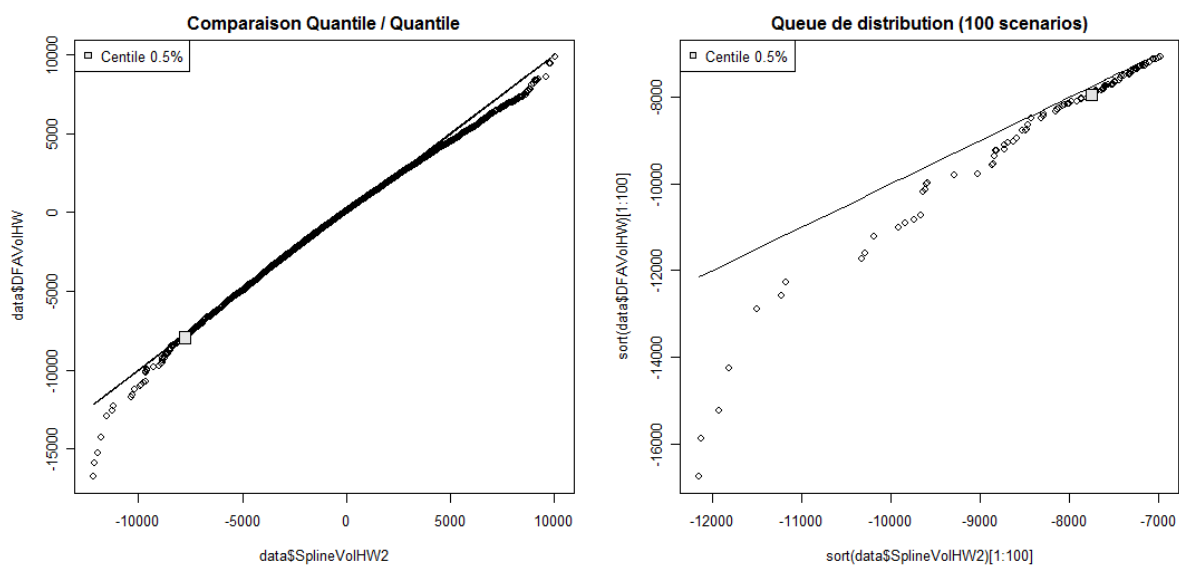


Les statistiques descriptives des distributions sont les suivantes.

	DFA	Spline
Moyenne	626	692
Ecart-type	2 772	2 941
Asymétrie	-0,54	-0,27
Aplatissement	3,92	3,27

Cette distribution présente une forme plus gaussienne que la distribution que celle obtenue à partir du modèle DFA ou portefeuille répliquant, avec des événements extrêmes moins fréquents mais un écart-type plus important.

Comparaison quantile à quantile et focus sur les scénarios de queue distribution



La comparaison quantile par quantile montre que la forme paramétrique sous-estime le besoin en capital. Dans l'extrémité de la distribution, les résultats sont similaires à ceux observés pour le portefeuille répliquant, mais la perte économique est sous-estimée dans l'ensemble des 100 scénarios extrêmes.

L'extraction du 55^{ème} scénario adverse correspondant au quantile 99,5% de la distribution monde réel montre que le besoin en capital est de 7 755 soit 2,3% de moins que le besoin ressortant du calcul effectué à partir du modèle DFA.

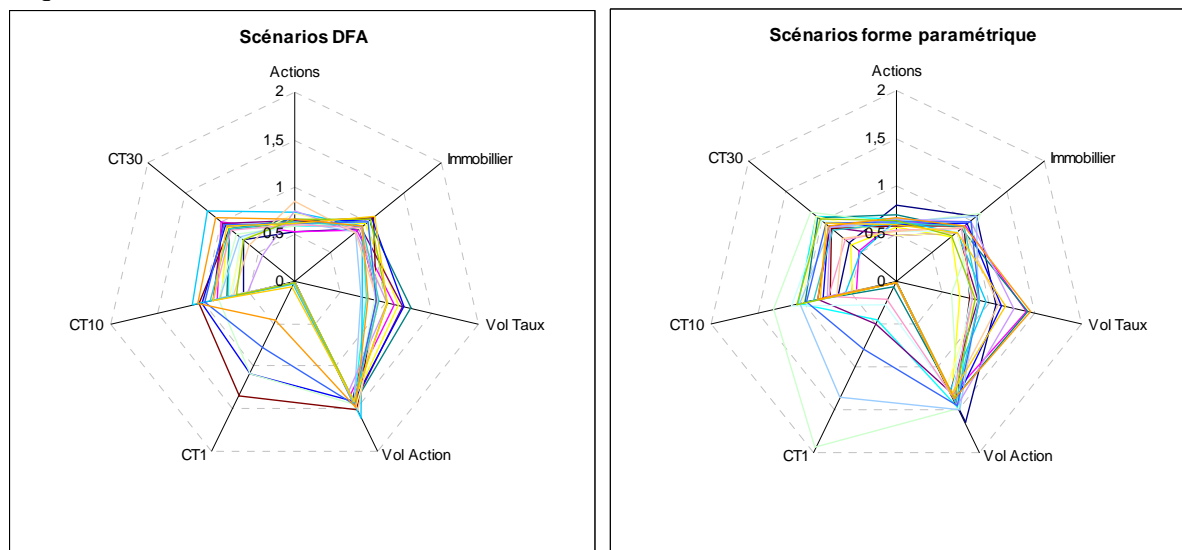
Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif
d'une compagnie d'assurance vie

Rang	Résultat éco. DFA	Résultat éco. Spline	Différence
50	-8 048	-7 870	-2,2%
51	-8 029	-7 864	-2,1%
52	-8 023	-7 863	-2,0%
53	-8 021	-7 804	-2,7%
54	-7 969	-7 765	-2,6%
55	-7 938	-7 755	-2,3%
56	-7 932	-7 717	-2,7%
57	-7 900	-7 708	-2,4%
58	-7 861	-7 707	-2,0%
59	-7 845	-7 707	-1,8%
60	-7 834	-7 638	-2,5%

De même que pour les portefeuilles répliquants, l'erreur de modèle est relativement stable au voisinage du scénario correspondant au centile 99,5%.

Cohérence des facteurs de risque discriminants

L'analyse des facteurs discriminants montre que d'une modélisation à l'autre, les facteurs de risque discriminants sont similaires.

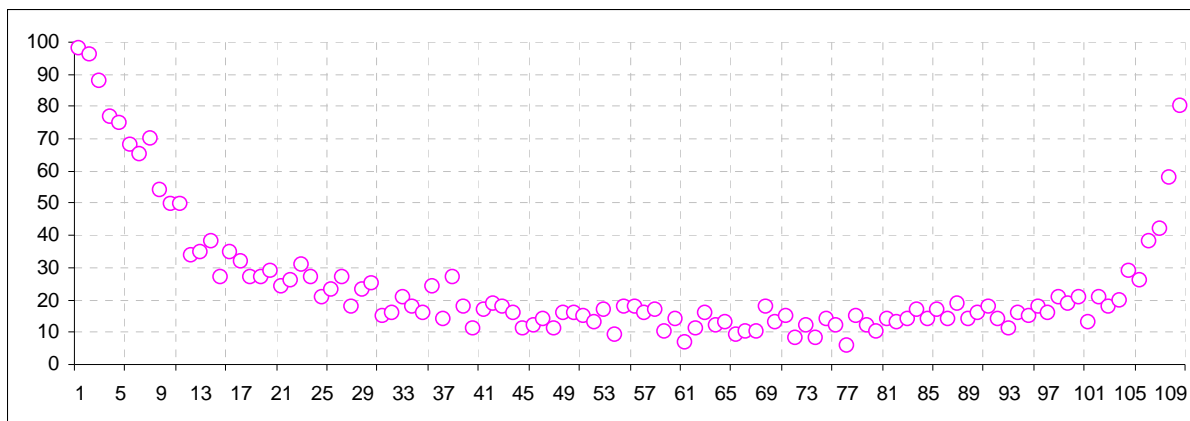


Dans l'ensemble, et notamment en ce qui concerne les facteurs très discriminants, la forme paramétrique capture correctement la dynamique.

Stabilité de l'ordonnement des scénarios

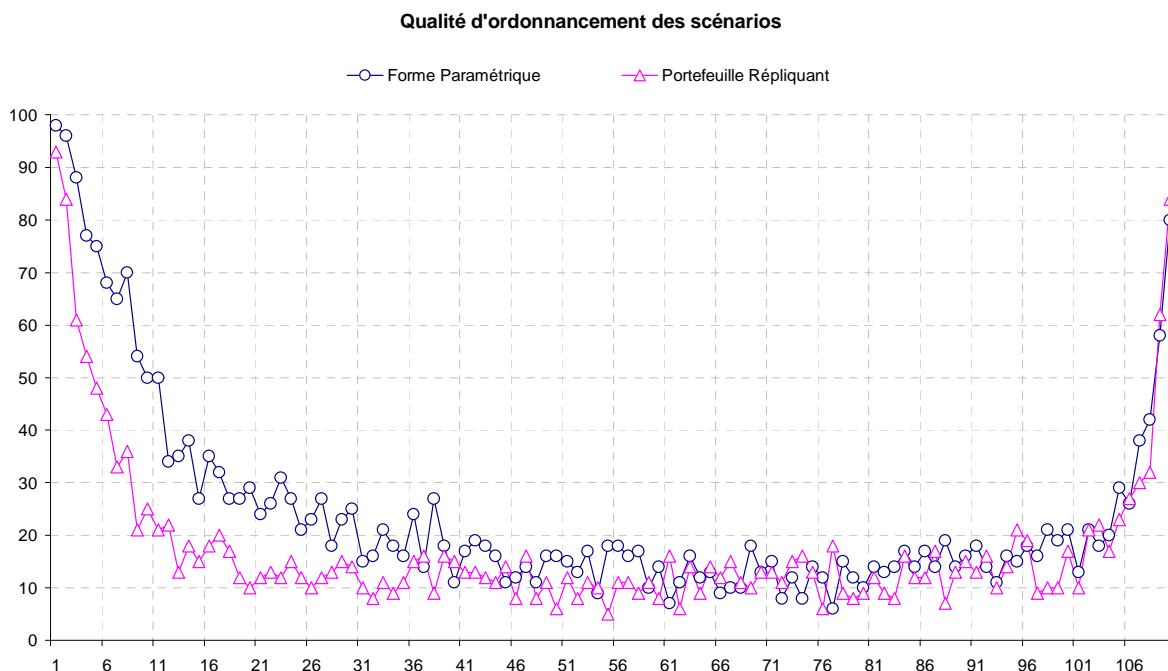
Le graphique ci-dessous reprend la même méthodologie que celle vue précédemment pour les portefeuilles répliquants, avec un comptage des scénarios par paquet de 100 :

$$\text{Nb Scenarios, } | \text{Rang scénario modèle DFA} - \text{Rang scénario forme paramétrique} | < 100$$



Ce graphique exhibe les mêmes caractéristiques que celui obtenu à l'aide du portefeuille répliquant : les scénarios extrêmes en queue de distribution sont relativement bien classés. Parmi les 100 pires scénarios (contenant d'ailleurs le quantile à 99,5%), 98 sont correctement classés en queue de distribution. En revanche sur l'ensemble de la distribution des 11 000 scénarios, l'ordonnement est moins bien respecté pour les scénarios situés plus au centre de la distribution.

Si on compare les deux méthodes entre elles, la forme paramétrique exhibe une meilleure capacité à classer les scénarios que le portefeuille répliquant.



Combinaison des approches modèle DFA et forme paramétrique

En appliquant la même méthode que pour le portefeuille répliquant, on obtient les résultats suivants.

Rang Spline	Résultat éco. Spline	Résultat éco. DFA	Rang DFA	Erreur sur le besoin en capital
50	-7 870	-8 104	48	2%
51	-7 864	-7 384	82	-7%
52	-7 863	-8 104	47	2%
53	-7 804	-6 724	120	-15%
54	-7 765	-7 735	66	-3%
55	-7 755	-7 493	78	-6%
56	-7 717	-7 684	71	-3%
57	-7 708	-8 048	50	1%
58	-7 707	-7 705	69	-3%
59	-7 707	-8 029	51	1%
60	-7 638	-7 508	76	-5%

Ces résultats sont similaires à ceux obtenus avec l'approche combinée portefeuille répliquant / DFA, mais les résultats sont plus stables. Ceci confirme la supériorité de la forme paramétrique sur le portefeuille répliquant pour classer les scénarios. Néanmoins, l'erreur de modèle peut s'élever à 15% du capital théorique, ce qui reste trop important pour une mise en œuvre pratique de l'approche.

Synthèse des conclusions

L'ensemble de ces analyses conduisent aux conclusions suivantes.

- L'approche par forme paramétrique constitue une méthode alternative aux portefeuilles répliquants dans le calcul du capital économique.
- L'ensemble des conclusions obtenues sur le portefeuille répliquant restent valables s'appliquent également aux formes paramétriques
- L'approche par forme paramétrique telle qu'appliquée ici présente des avantages sur le portefeuille répliquant :
 - Le classement des scénarios est meilleur avec la forme paramétrique.
 - La forme paramétrique garantit l'égalité avec le modèle DFA sur l'ensemble des points de calibration.
 - L'approche est complètement automatique et ne requière pas de jugement d'expert, contrairement à la calibration du portefeuille répliquant. Cette différence n'est cependant pas immuable, puisqu'il est envisageable d'automatiser la construction des portefeuilles répliquants.
- Inversement, l'approche par forme paramétrique telle qu'appliquée ici rend plus complexe l'intégration de sensibilités croisées. La aussi, il ne s'agit pas d'une limite intrinsèque des formes paramétriques. A l'aide d'outils mathématiques complémentaires permettant de réaliser des interpolations multidimensionnelles, il est possible d'intégrer des sensibilités croisées.

6.1.3 Synthèse des résultats numériques

Les différentes méthodes testées pour établir la mesure du capital économique nous ont conduits aux résultats suivants.

	<i>Erreur vs</i>		<i>Erreur vs</i>		<i>Erreur vs</i>	
	VaR 99,5%	Référence	VaR 99%	Référence	VaR 95%	Référence
Modèle DFA	-7 938		-6 873		-4 278	
Portefeuille Répliquant	-8 617	8,5%	-7 656	11,4%	-4 741	10,8%
Forme Paramétrique	-7 755	-2,3%	-6 875	0,0%	-4 301	0,5%

6.2 Etude de la stabilité des portefeuilles

La construction d'un portefeuille répliquant est basée sur des projections de cash flows ainsi que des scénarios économiques valables à un instant donné. Les critères de satisfaction ainsi que l'étude du comportement du portefeuille selon certaines sensibilités permettent de juger de la qualité du portefeuille.

Cependant est-il pertinent d'utiliser le portefeuille obtenu dans d'autres conditions que celui dans lesquelles il a été construit ? Cette question est centrale pour déterminer le domaine de validité du portefeuille, et définir ainsi le cadre opérationnel de mise en œuvre de la méthodologie.

Pour ce faire, nous avons soumis le portefeuille à divers tests :

- Test de stabilité à des mouvements de marché
- Test de stabilité dans le temps (vieillessement d'un an)
- Test de stabilité à un changement d'allocation tactique ou stratégique

6.2.1 Mouvement de marché

Les portefeuilles répliquants tels que nous les appliquons sont construits explicitement pour reproduire les sensibilités du bilan économique aux paramètres de marché, et ce face à un éventail important et extrêmes de mouvements de marché. Aussi, le portefeuille répliquant est robuste à un mouvement de marché, dès lors que sa calibration intègre des sensibilités suffisamment extrêmes pour couvrir les mouvements de marché considérés.

Par exemple, supposons que les marchés actions perdent 20%. Pour un portefeuille répliquant de bonne qualité, le BEL répliqué sera une bonne approximation du BEL recalculé. En revanche, pour calculer le capital économique, il faut également que le portefeuille se comporte de manière satisfaisante après un choc supplémentaire de l'ordre de 45%. Cela signifie que lors de la construction du portefeuille, les métriques de qualité doivent avoir été validées pour des sensibilités allant jusqu'à des chocs de -65% action.

Dans la mise en œuvre pratique, il est nécessaire de procéder à un arbitrage opérationnel. En effet, la construction du portefeuille demandera plus d'efforts pour intégrer de tels niveaux de

chocs. Néanmoins, le domaine de validité du portefeuille sera étendu, ce qui diminue la fréquence des mises à jour nécessaires. Cet arbitrage dépend essentiellement des anticipations de la volatilité des marchés des compagnies.

6.2.2 Vieillesse d'une année

L'objectif de ce test est d'observer le comportement du portefeuille répliquant un an après sa date de construction. La stabilité de ce portefeuille est cruciale pour l'ensemble des applications considérées, en dehors du calcul immédiat de la VaR.

Ceci est vrai que ce soit pour une application au hedging, au pilotage des directions d'investissements et asset managers, ou dans une optique de projection du capital économique à divers horizons de temps, point exigé par Solvabilité 2 dans le cadre de l'ORSA.

En effet, un portefeuille de hedging ou un benchmark construit à l'aide des portefeuilles répliquants doit rester relativement invariant dans le temps, sous peine de subir des coûts de transactions élevés ou d'être opérationnellement impraticable. De même, la projection du capital économique dans le temps nécessite de pouvoir disposer d'un portefeuille répliquant valide projeté dans le temps.

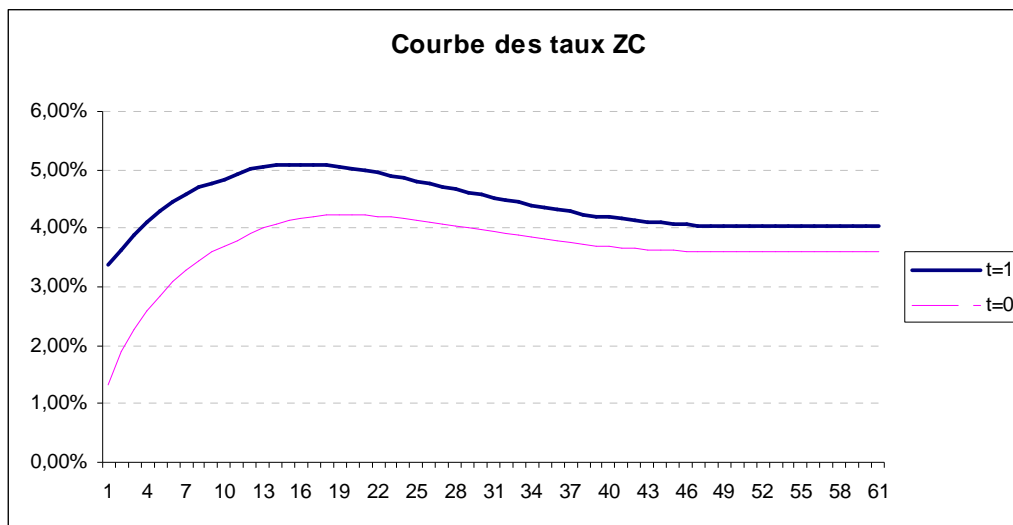
Afin de réaliser ce test, nous avons vieilli le portefeuille d'un an, actif comme passif, en suivant la stratégie de gestion d'actifs et de pilotage prévue par le modèle DFA.

Le scénario que nous avons utilisé est le suivant.

- Performance Cash : 1,74%
- Performance Immobilier : 4,28%
- Performance Actions : 3,07%

Les paramètres de volatilité sont restés inchangés.

Enfin, la courbe des taux a subi une hausse marquée.



A l'issue de cette année, nous obtenons les bilans suivants (hors fonds propres) :

Actif t=0	VNC	VB
Taux	80000	80000
Actions	15000	15000
Immobilier	5000	5000
Cash	0	0
Total	100000	100000

Actif t=1	VNC	VB
Taux	82987	71028
Actions	15000	15460
Immobilier	5000	5214
Cash	-628	-628
Total	102359	91074

Passif t=0	
	100000

Passif t=1	
	102359

Ainsi que le compte de résultat simplifié suivant, de première année :

(1)	PM Ouverture	100000
	Interets Techniques	2500
	PB Contractuelle	0
	PM Après Interets Crédités	102500
(2)	Prestations	141
(3)	Primes	0
(4)	PM Fin	102359
(5)	Expense	0
(6)	Produits financiers	3124

(3)-(2)+(1)-(4)-(5)+(6)	Résultat Assureur	624
-------------------------	--------------------------	-----

Ce résultat vient s'ajouter aux capitaux propres de la compagnie.

En partant de ce nouveau bilan et cette nouvelle situation de marché, nous avons régénéré des scénarios risque neutre et avons recalculé un BEL, ainsi qu'un jeu de sensibilités de ce BEL aux mouvements de marché.

Parallèlement, nous avons vieilli le portefeuille répliquant d'un an :

- Tombée des cash flows pour les instruments arrivés à maturité
- Réduction d'un an de la maturité de tous les instruments encore en vie
- Restriking des instruments optionnels pour tenir compte des décalages du cours spot
- Ajustement des nominaux des instruments optionnels pour tenir compte des décalages du cours spot

Concernant les deux derniers points, ils sont liés au fait d'exprimer le strike en pourcentage du cours spot d'origine. En effet, pour un call par exemple, on a :

$$C(T, T) = N \cdot \max\left(\frac{S_T}{S_0} - K; 0\right) = N \cdot \frac{S_T}{S_0} \cdot \max\left(\frac{S_T}{S_T} - K \cdot \frac{S_0}{S_T}; 0\right)$$

Ainsi, au temps t , le call s'exprime sous la même forme qu'en 0 mais avec une maturité de $T-t$ et les caractéristiques modifiées suivantes :

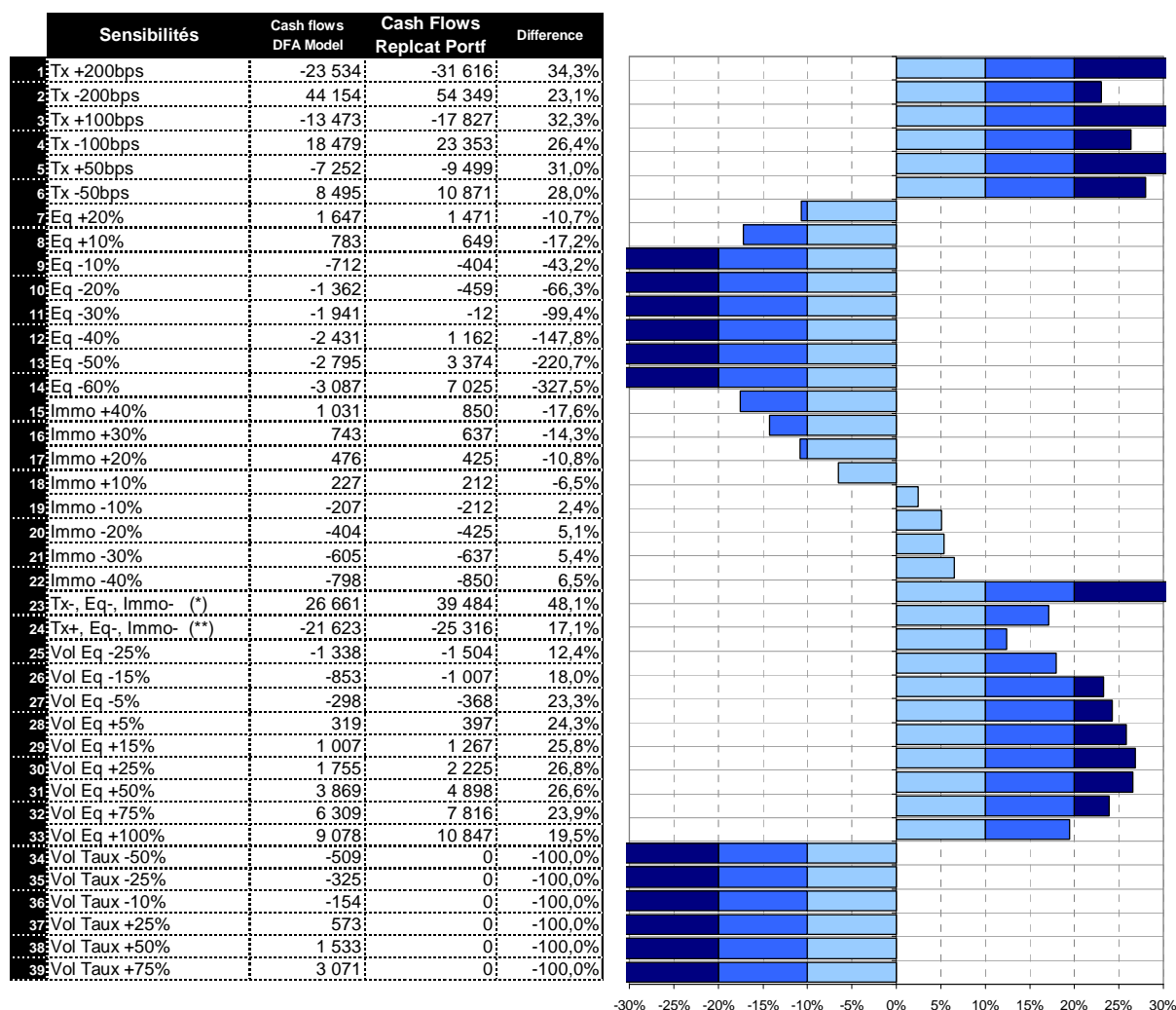
$$N' = N \cdot \frac{S_t}{S_0} \text{ et } K' = K \cdot \frac{S_0}{S_t}$$

Après avoir appliqué cette méthode à l'ensemble des instruments, nous obtenons le portefeuille suivant :

	Total Nominal t=0	Total Nominal t=1
Zero Coupon	212 213	247 647
Future Action	12 972	13 370
Put Action	26 700	105 130
Straddle Action	0	0
Future Immobilier	2 037	2 124
Put Immobilier	330	0
Cap	163 320	0
Floor	-28 568	0

Les nominaux des instruments sont fortement modifiés par l'arrivée à échéance de certains des actifs. Le tableau ci-dessous représente un comparatif des sensibilités de BEL issus du portefeuille répliquant et de celles obtenues par calcul direct.

Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie



Il apparaît très clairement que le portefeuille répliquant ne présente aucune garantie quant à sa qualité de réplication après vieillissement d'un an. L'explication tient au fait que l'on a construit le portefeuille répliquant sur base de la méthode « Réplication des cash flows cumulés », qui ne conserve pas la structure temporelle des cash flows.

De plus, cet exemple ne tient pas comptes d'éventuelles déformations des passifs. Le bilan vieilli à l'aide du modèle est le résultat de l'écoulement des engagements pris en $t=0$. Dans une compagnie d'assurance, et pour un même actif général en euros, la structure du passif évolue du fait de :

- L'aléa réalisé sur le passif, contre l'écoulement espéré
- Les primes ultérieures, qui accroissent le poids des encours des produits commercialisés au détriment des produits en run-off

Ces éléments sont autant d'éléments complémentaires qui conduisent à amoindrir la qualité du portefeuille répliquant dès que l'on se place à une date différente de celle à laquelle il a été construit.

6.2.3 Changement d'allocation stratégique ou tactique

Un portefeuille répliquant n'est pas robuste en cas de changement d'allocation stratégique ou tactique. Dès que l'exposition des actifs est modifiée, celle des passifs s'en trouve modifiée par la même occasion au travers de la participation aux bénéfices différée.

Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple du bon de capitalisation fictif non rachetable avant terme. L'allocation initiale est de 10% d'actions. Nous avons vu que dans ce cas, il existe une réplification parfaite de l'engagement de l'assureur, avec un portefeuille constitué par un zero-coupon et un call.

Supposons maintenant que l'assureur souhaite réduire son risque financier et réduit son exposition actions à 8%. Quelle erreur commet-on si on calcule la value-at-risk des fonds propres économiques en utilisant le portefeuille répliquant calibré avant la réduction du risque financier ?

Dans ce modèle simplifié, nous avons considéré que seules les actions étaient aléatoires. Ainsi, nous allons utiliser la distribution marginale des rendements actions parmi les scénarios monde réel présenté plus haut. Nous faisons l'hypothèse raisonnable que la valeur actionnaire est une fonction monotone du rendement actions. A ce moment là, la value-at-risk 99.5% peut être estimée à l'aide d'un des deux chocs suivants :

Centile 99,5% des rendements actions : $Choc^{up} = +83\%$

Centile 0.05% des rendements actions : $Choc^{down} = -45\%$

On note

$\alpha_{réel}$ la part actions après réduction du risque financier

α_{orig} la part actions avant réduction du risque financier

La sensibilité de l'actif est très aisée à calculer :

$$\Delta Actif = Choc * \alpha_{réel} * Actif_{avant_choc} = Choc * \alpha_{réel} * PM$$

Le portefeuille répliquant parfait est composé d'un call et d'un zero-coupon avec les caractéristiques suivantes

$$ZC = PM * TMG$$

$$N = PM * Tx_PB * \alpha$$

$$K = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{TMG}{Tx_PB} - (1 - \alpha) * Rdt_Oblig \right)$$

On note

$$N_{orig} = PM * Tx_PB * \alpha_{orig}$$

$$K_{orig} = \frac{1}{\alpha_{orig}} \left(\frac{TMG}{Tx_PB} - (1 - \alpha_{orig}) * Rdt_Oblig \right)$$

Et

$$N_{réel} = PM * Tx_PB * \alpha_{réel}$$

$$K_{réel} = \frac{1}{\alpha_{réel}} \left(\frac{TMG}{Tx_PB} - (1 - \alpha_{réel}) * Rdt_Oblig \right)$$

Alors la sensibilité exacte du passif est

$$\Delta BEL = N_{réel} \cdot Call(100\% * Choc, K_{réel}) - N_{réel} \cdot Call(100\%, K_{réel})$$

Ainsi

$$\Delta NAV = \Delta Actif - \Delta BEL = Choc * \alpha_{réel} * PM - [N_{réel} \cdot Call(100\% * (1 + Choc), K_{réel}) - N_{réel} \cdot Call(100\%, K_{réel})]$$

Mais avec le portefeuille répliquant originel, le calcul devient

$$\Delta NAV_{orig} = Choc * \alpha_{réel} * PM - [N_{orig} \cdot Call(100\% * (1 + Choc), K_{orig}) - N_{orig} \cdot Call(100\%, K_{orig})]$$

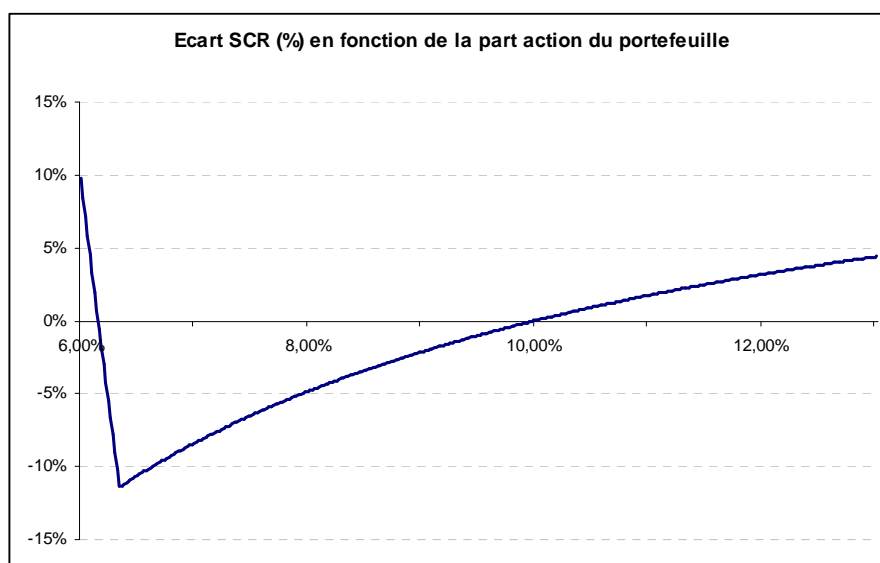
Puis

$$SCR = \max(\Delta NAV^{up}, \Delta NAV^{down})$$

$$SCR_{orig} = \max(\Delta NAV_{orig}^{up}, \Delta NAV_{orig}^{down})$$

L'erreur relative commise est alors

$$Erreur = \frac{SCR_{orig} - SCR}{SCR}$$



En conclusion :

- L'erreur sur le capital économique s'accroît rapidement quand l'allocation d'actifs s'écarte de celle sur lequel le portefeuille répliquant a été calibré. Dans cet exemple, une allocation action de 8% (vs 10% à l'origine) génère un écart de SCR de l'ordre de 5%.
- Quand on s'éloigne plus fortement de l'allocation d'origine, il peut arriver que le scénario centile soit inversé. Dans l'exemple, pour une allocation actions inférieure à 6,35%, le modèle prédit qu'un scénario de hausse des actions fait perdre de la valeur à l'assureur. Ceci n'a évidemment rien à voir avec l'exposition réelle de la compagnie d'assurance.

6.3 Application pour le hedging

Le domaine de la finance de marché fait jouer un rôle central aux stratégies de couvertures, aussi bien dans le pricing des risques que dans leur gestion opérationnelle. En effet, l'immunisation aux mouvements de marché et la capacité à construire des portefeuilles sans risques est à la base de la théorie des mathématiques financières modernes, dont les fondements ont été posés par Black et Scholes [11].

L'une des hypothèses centrales de cette théorie est l'absence d'opportunité d'arbitrage. Elle stipule qu'il est impossible de construire une stratégie autofinancée de prix négatif ou nul et qui permette d'obtenir un profit strictement positif avec une probabilité non nulle. Dans la pratique, il existe des possibilités d'arbitrages qui apparaissent sur les marchés financiers et qui se résorbent plus ou moins vite du fait de la présence d'arbitragistes opérant sur ces marchés.

Cette hypothèse implique que lorsque deux actifs ou stratégies génèrent les mêmes flux dans tous les états du monde, leur prix doit nécessairement être identique. En effet, dans le cas inverse, il suffirait de vendre la stratégie la plus chère, d'acheter la stratégie la moins chère et de gagner la différence pour réaliser un profit certain sans prendre de risques. De ce fait, une stratégie sans risque (sans aléa) doit impérativement avoir un rendement égal au taux sans risque.

Ainsi, pour obtenir le prix d'un actif, il suffit de construire une stratégie qui réplique ses cash flows dans tous les états du monde et dont le prix est connu. Le prix de l'actif sera alors égal au prix de cette stratégie.

De part cette mécanique, le prix d'un actif contingent est directement lié à la capacité des acteurs du marché à construire et mettre en œuvre une stratégie de réplification de cet actif.

On peut classer ces stratégies suivant deux catégories – statiques et dynamiques. La première catégorie vise à construire un portefeuille d'actifs qui garantisse dès l'achat une parfaite réplification des cash flows futurs. C'est ce type de stratégies qui est mise en œuvre pour pricer les contrats à terme fermes – forwards, futures ... La seconde catégorie vise à construire une stratégie qui sera activement gérée tout au long de la durée de vie de l'actif contingent. Ce sont des stratégies de type dynamiques qui ont permis à Black et Scholes d'aboutir à la

formule du prix d'un call vanille. Entre les deux, on trouve un panel de stratégies dites « semi-statiques », qui nécessitent d'être rebalancées en un nombre fini de points le long du déroulé de la stratégie.

Lorsqu'il s'agit de couvrir des pay-offs complexes, chaque type de stratégie présente des avantages distincts[12][13].

Intérêt des stratégies dynamiques

- Liquidité des sous-jacents
- Nombre limité d'instruments traités

Intérêt des stratégies statiques

- Nombre limité de transactions
- Pas d'exposition en gamma

En termes de couts de transaction, il n'y a pas de stratégie présentant un avantage intrinsèque. En effet, le nombre de transactions est naturellement plus faible pour les stratégies statiques mais le cout unitaire est plus faible pour les stratégies dynamiques.

Les portefeuilles répliquants appliqués à des passifs d'assurance vie s'apparentent à des stratégies de type statique, puisqu'ils n'incluent pas la possibilité d'un rebalancement ultérieur.

On trouve dans la littérature [14] des exemples théoriques d'utilisation des portefeuilles répliquants d'assurance à des fins de couverture. L'idée mise en avant est d'acheter à l'actif le portefeuille répliquant de manière à minimiser le risque. Bien entendu, cela n'est possible que si la construction du portefeuille répliquant est opérée à l'aide d'actifs réels échangés sur les marchés. Voyons comment peut s'opérer une mise en pratique de cette technique sur un exemple.

6.3.1 Application au bon de capitalisation simplifié

Nous avons déterminé que pour ce contrat, il existait un portefeuille répliquant parfait, qui réplique les cash flows du passif dans tous les états du monde. Il est composé d'un zero-coupon et d'un call, dont on rappelle les caractéristiques :

$$ZC = PM * TMG$$

$$N = PM * Tx_PB * \alpha \quad \text{Pour rappel, } \alpha \text{ correspond à la part action.}$$

$$K = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{TMG}{Tx_PB} - (1 - \alpha) * Rdt_Oblig \right)$$

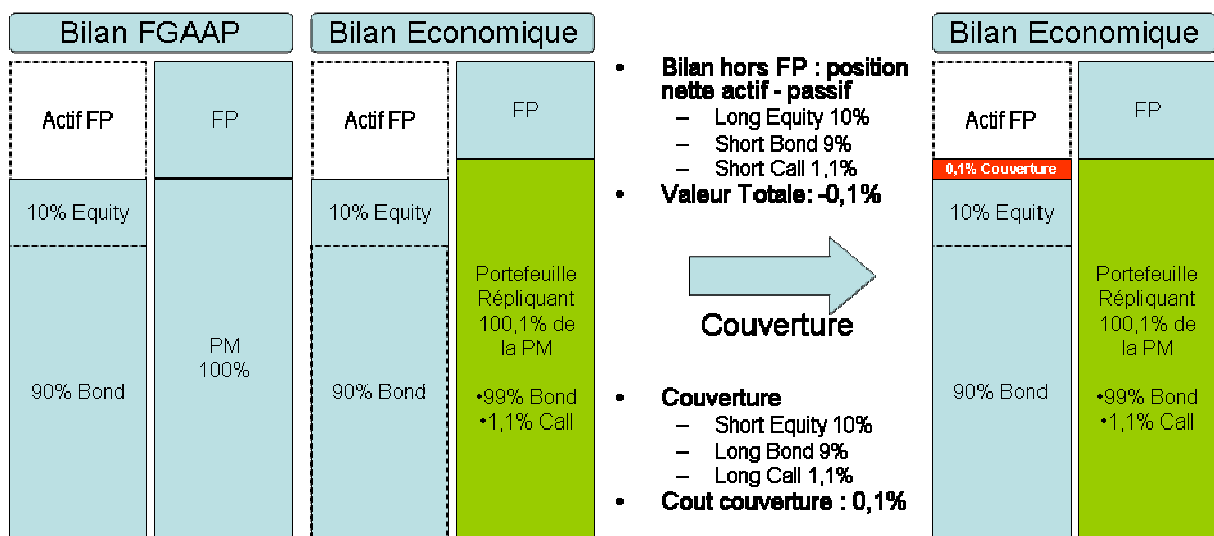
Supposons que le prix du call est fixé par le marché, et qu'il correspond à une volatilité implicite de 20%.

Comment ce portefeuille peut-il être utilisé à des fins de couverture contre les aléas financiers ?

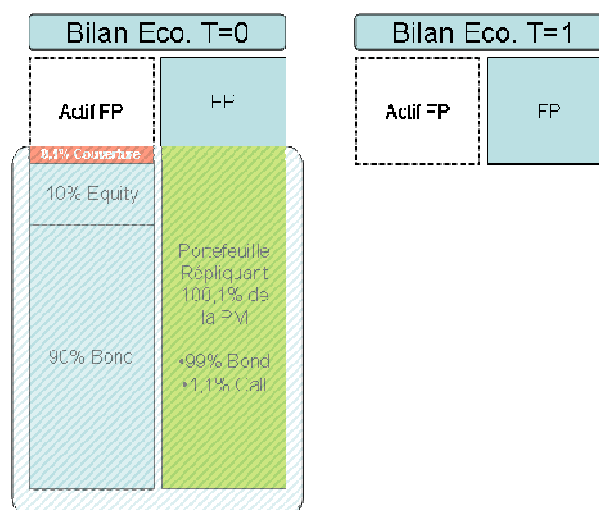
En premier lieu, l'assureur doit faire un choix entre constituer un segment complémentaire pour loger la couverture, ou bien loger ce portefeuille directement dans l'actif général. Si le portefeuille est logé dans un segment complémentaire, l'assureur peut continuer à gérer de manière classique son actif général, et doit payer la couverture sur ses fonds propres. Dans le cas contraire, il est possible de se couvrir contre les pertes mais il est difficile d'immuniser complètement le bilan aux mouvements de marché, comme nous allons le voir.

6.3.1.1 Financement par les fonds propres via un segment complémentaire

Le bilan de l'assureur est représenté ci-dessous, et le portefeuille de couverture est constitué de la vente à découvert du portefeuille (Actif hors fonds propres – Portefeuille Répliquant).



On obtient ainsi la dynamique suivante.

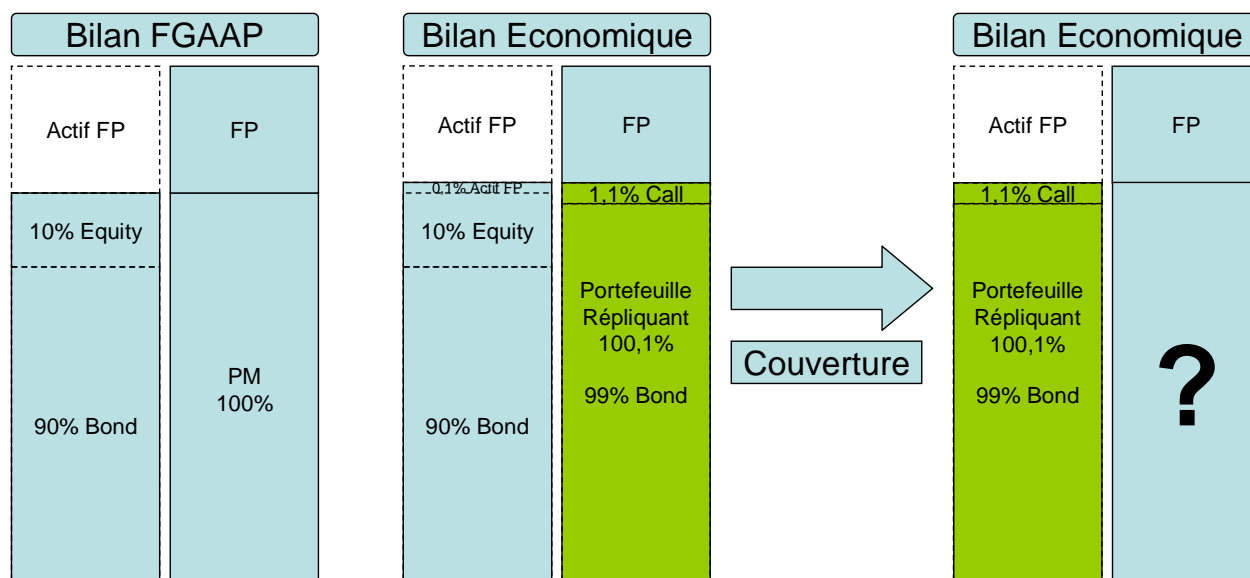


Le portefeuille répliquant a ainsi permis de déterminer aisément un portefeuille de couverture pour le bilan de l'assureur. Quel que soit l'état du monde en $t=1$, le niveau de fonds propres de l'assureur est inchangé. Remarque : indépendamment de la mise en œuvre effective d'une couverture sur le contrat, le fait d'obtenir un portefeuille répliquant parfait nous permet de pricer le produit : il vaut 100,1% de la PM, ce qui signifie qu'il est vendu à perte avec cette allocation d'actifs. Dans ce cas, la rentabilité des fonds propres de l'assureur est inférieure au taux sans risque.

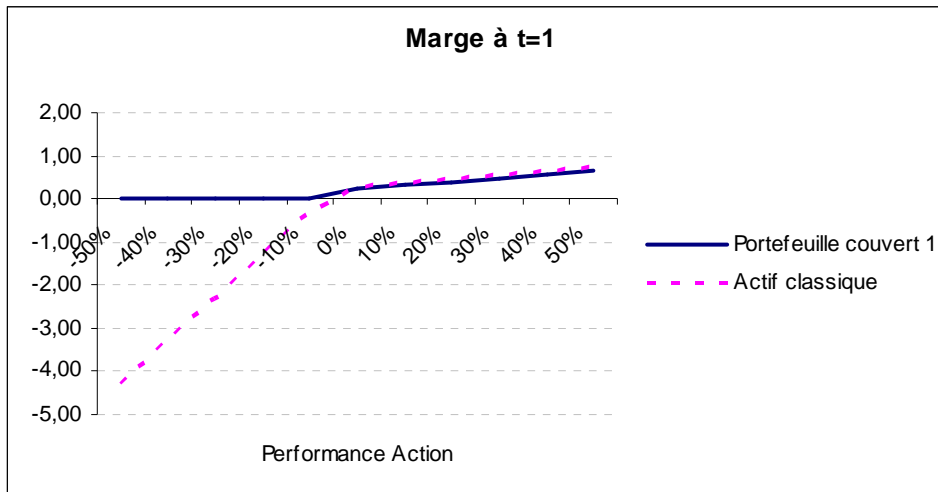
6.3.1.2 Financement via le fonds général

Puisque l'on est vendeur d'un portefeuille du côté passif, l'idée est d'acheter ce même portefeuille côté actif. On peut alors penser que le bilan est immunisé contre l'aléa financier. En réalité, nous allons voir que ce n'est pas le cas.

En effet, il convient de rappeler que le portefeuille obtenu ne réplique le bon de capitalisation que pour une allocation d'actifs donnée, comme en atteste le terme α dans la définition du nominal et du strike du call. Ainsi, dès que la couverture opérationnelle est en place, le portefeuille répliquant n'est plus valide et ne reflète plus la dynamique des passifs.

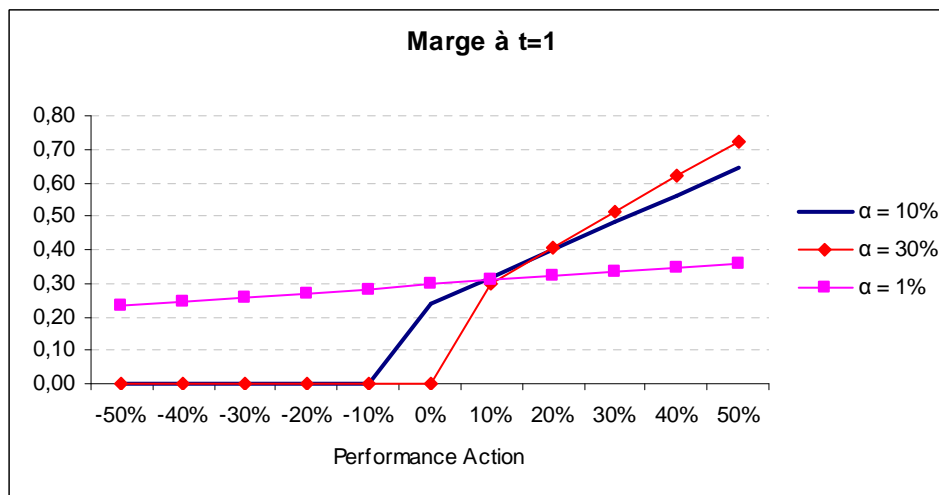


Par ailleurs, dans notre exemple, il n'y a pas suffisamment d'actifs pour acheter le portefeuille répliquant. On peut faire le choix d'abonder via les fonds propres pour acheter le portefeuille ou bien d'acheter une couverture partielle. On fait le choix d'acheter une couverture partielle, ce qui revient à n'acheter que 90% du call. Dans ce cas, notre profil de gains / pertes se déforme comme suit :



Ainsi, on peut constater que la couverture est efficace même si notre marge n'est pas parfaitement immunisée contre l'aléa financier. Dans cet exemple, on obtient un fonctionnement identique à celui d'un fond à formule classique, où l'on structure le fond de manière à fournir une garantie à terme. On achète sans risque de quoi couvrir la garantie, et on s'expose sur des marchés dynamiques pour la quote-part restant à investir.

Remarque : le choix de l'exposition initiale α avant couverture est arbitraire puisqu'elle n'a plus d'existence une fois le bilan couvert. Aussi, en faisant varier ce paramètre, on définit une infinité de portefeuilles répliquants pouvant tous prétendre à être des portefeuilles de couverture.



Dans tous les cas, la couverture permet d'éviter d'encourir des pertes. Ensuite, le choix du portefeuille de couverture dépend de l'appétit au risque de l'assureur et de ses anticipations sur les marchés actions. En revanche, le bilan n'est pas intégralement immunisé aux variations des marchés, comme c'était le cas pour la couverture au travers des fonds propres. En effet, les fonds propres en $t=1$ sont sensibles à la marge de l'année, elle-même restant assujettie aux performances des actions.

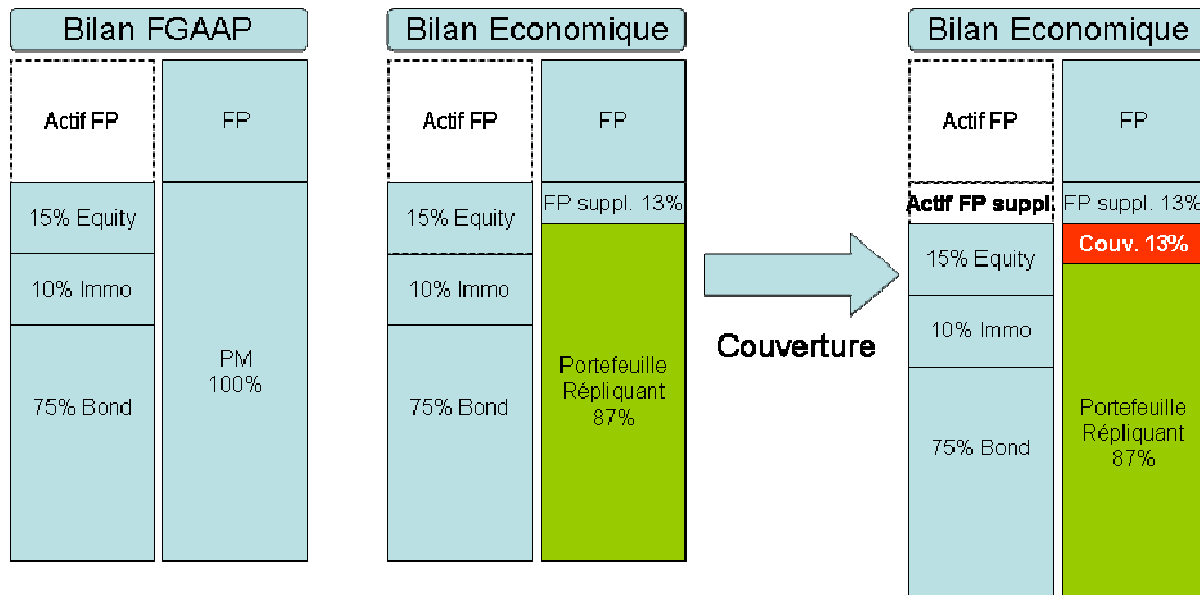
6.3.2 Application au contrat retraite

L'assureur a là aussi deux manières d'utiliser le portefeuille répliquant pour se couvrir contre les risques financiers.

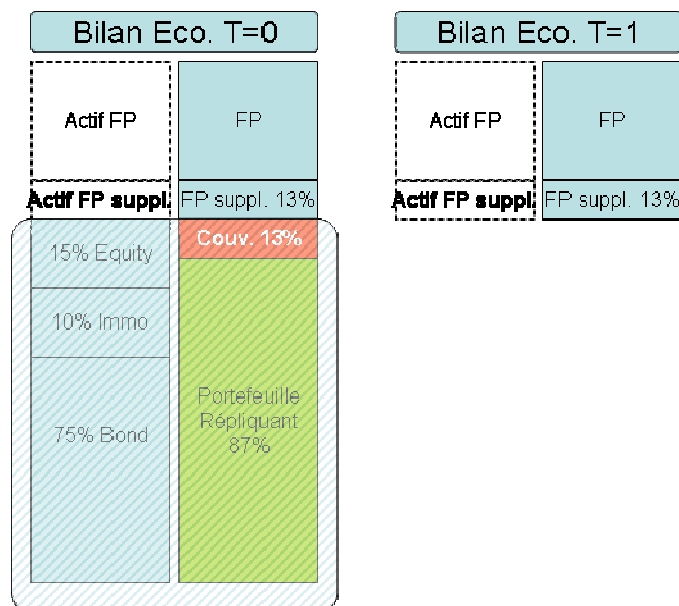
6.3.2.1 Financement par les fonds propres via un segment complémentaire

Contrairement à l'exemple simplifié, la position nette actif – passif hors fonds propres est positive. De ce fait, la vente du portefeuille (actif – passif) rapporte 13% de la PM à l'assureur. Le contrat de retraite semble vendu à profit. Néanmoins, il est important de rappeler que les frais de gestion du contrat n'ont pas été intégrés au modèle, et qu'une partie du cash ainsi obtenu permettra de les régler. La rentabilité réelle du contrat découlera de la comparaison entre 13% de la PM et la valeur actuelle des frais de gestion du contrat.

Ce cash matérialise immédiatement dans le bilan de l'assureur la différence entre la valeur économique des actifs en représentation des engagements et le BEL.



Economiquement, le portefeuille de couverture permet par construction d'immuniser le portefeuille (Actif hors FP – portefeuille répliquant) aux variations de marché :



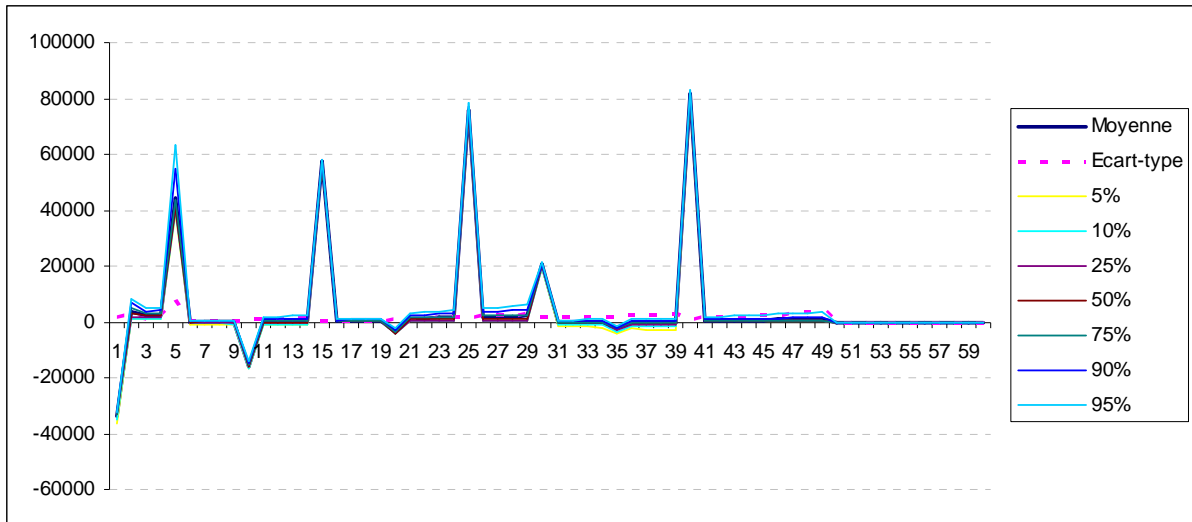
En revanche, contrairement à l'exemple simplifié, il subsiste ici trois sources d'incertitude sur le niveau de fonds propres économiques à $t=1$.

- La réplification n'est pas parfaite. De ce fait, il subsiste une part de risque financier non couvert.
- La réplification n'est fidèle qu'à $t=0$, et ne fonctionne pas dans la durée sans ajustement complémentaire (cf paragraphe stabilité des portefeuilles répliquants – les grecques du portefeuille répliquant sont très différentes en $t=1$ de celles du passif).
- Le risque de passif n'est pas couvert.

6.3.2.2 Financement via le fonds général

Contrairement à l'exemple simplifié présenté plus haut, le bilan économique hors fonds propres fait apparaître un excédent. Aussi, on peut investir 87% de l'actif dans le portefeuille répliquant et choisir un investissement résiduel sur le 13% restants. Dans la mesure où l'objectif est de minimiser le risque, les 13% restants seront investis en obligations.

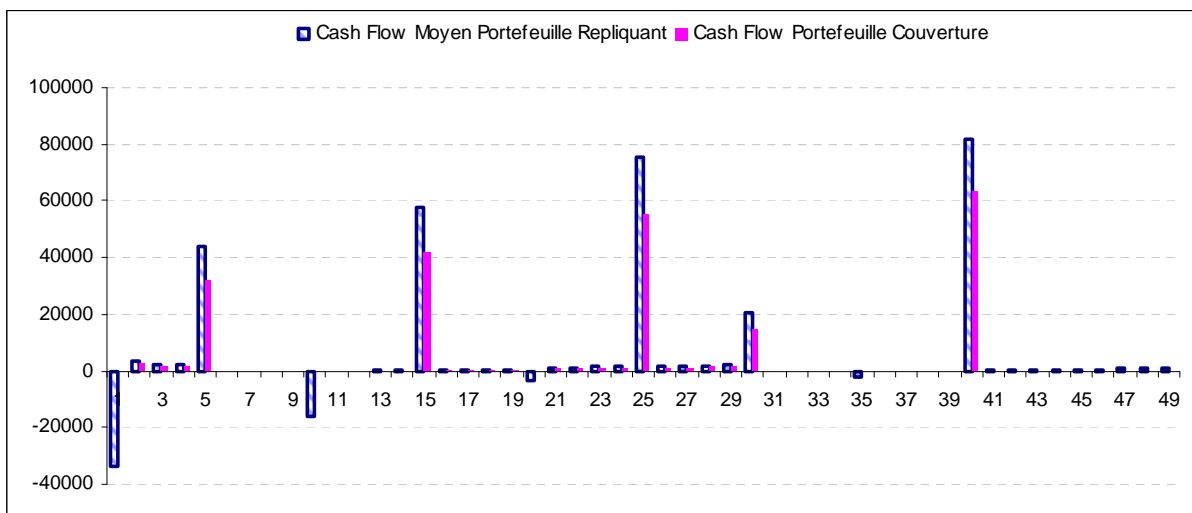
Reprenons notre portefeuille répliquant construit plus haut et analysons les cash flows qu'il génère.



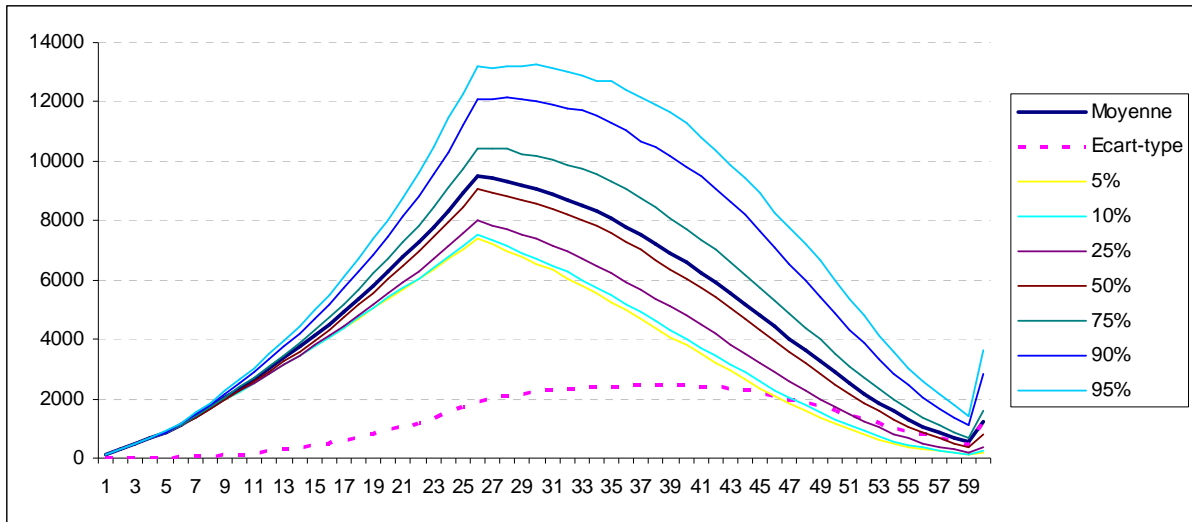
Les expositions actions / immobilier et dérivés du portefeuille n'ont que peu d'incidence sur le déroulé et la variabilité des cash flows du portefeuille. Aussi, nous avons choisi d'approcher ce portefeuille par un portefeuille équivalent constitué exclusivement d'obligations.

Pour rappel, lorsque la couverture est réalisée au travers de l'actif général, il existe une infinité de portefeuilles pouvant prétendre à être des portefeuilles répliquants de couverture. Aussi, il est raisonnable de diverger du strict portefeuille répliquant obtenu pour une allocation d'actifs donnée.

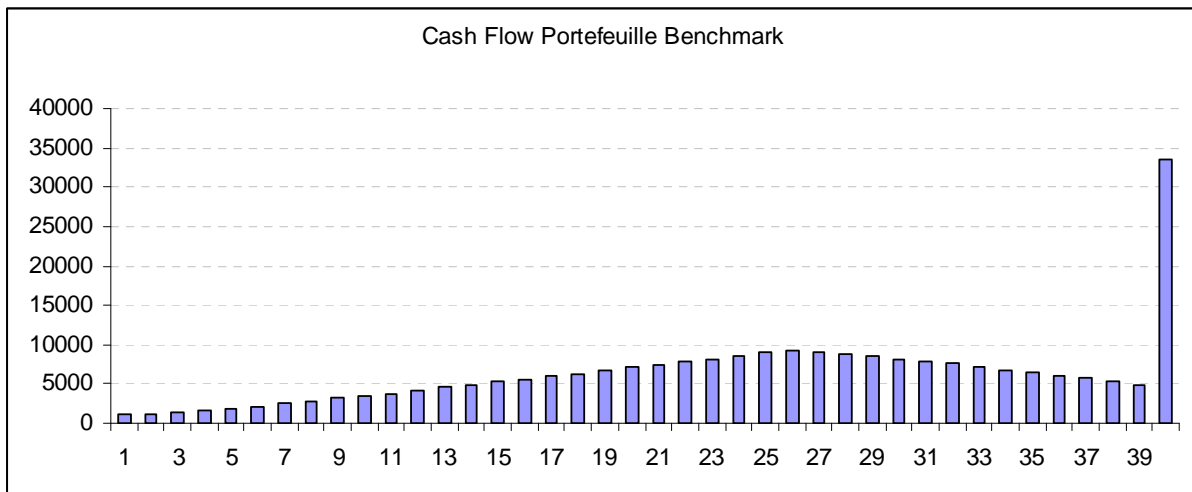
Le portefeuille d'investissement obligataire retenu pour la couverture est représenté ci-dessous, et comparé au cash flows moyens du portefeuille répliquant d'origine.



Les cash flows générés par le passif, issus du modèle DFA, sont assez différents :



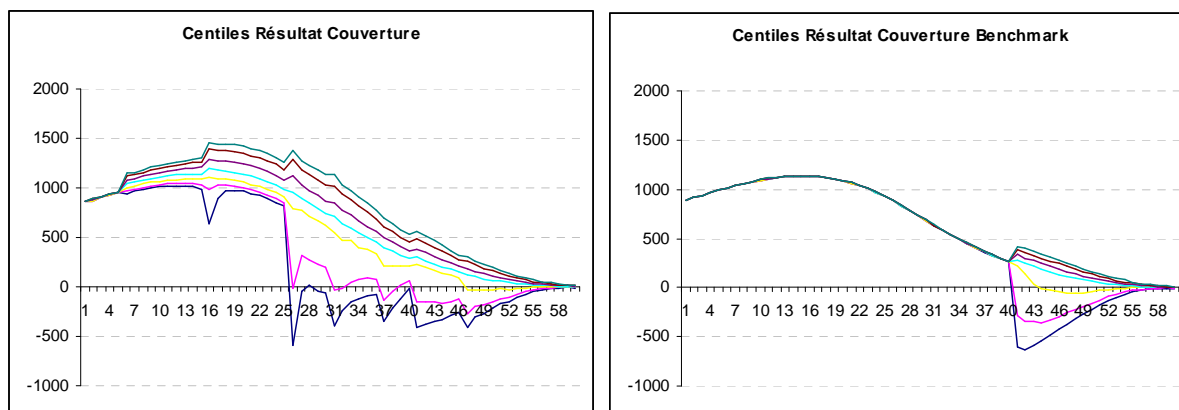
Il est clair que le portefeuille de couverture constitué plus haut conserve des gaps de trésorerie assez importants. Aussi, à titre de benchmark, nous avons construit un portefeuille alternatif de couverture, basé sur la technique de l'adossement actif / passif, dans la limite des contraintes de marchés fixées ici à 40 ans.



Les deux bilans économiques, issus des deux portefeuilles de couverture, sont ensuite examinés du point de vue de la variabilité du résultat de l'assureur et des sensibilités du bilan aux conditions de marché.

Ci-dessous sont représentés les centiles de résultat issus des projections risque neutre. Il est à noter que ces centiles n'ont pas de réalité dans l'univers monde réel, et ne peuvent en aucun cas être considérés comme des centiles crédibles ou réalistes des marges futures de l'assureur. En revanche, ils permettent de se faire une idée de la variabilité des marges dans un ensemble de scénarios économiques prédéfinis.

Introduction des portefeuilles répliquants dans la gestion actif/passif d'une compagnie d'assurance vie

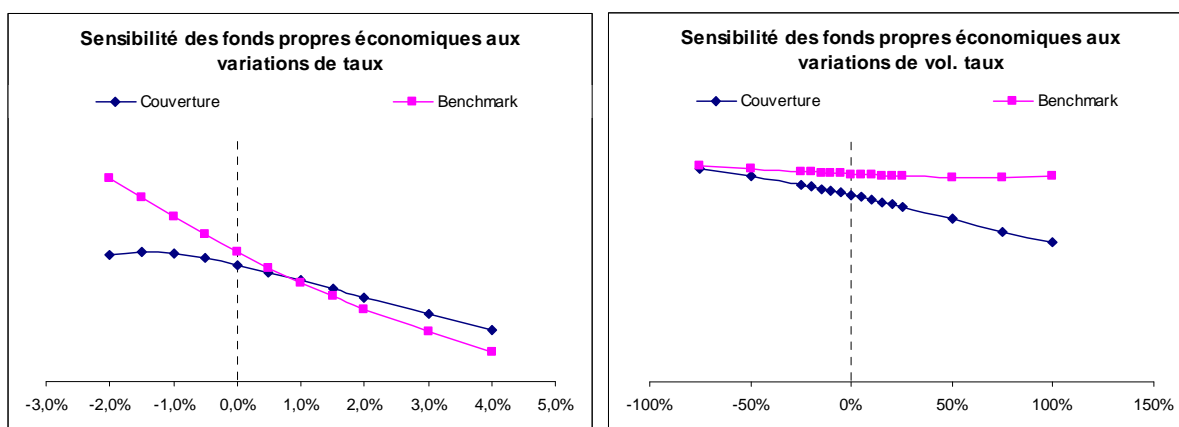


La couverture benchmark est largement plus performante pour diminuer la volatilité des résultats de l'assureur que le portefeuille de couverture obtenu à partir du portefeuille répliquant. Notamment, les 40 premières années de résultat sont quasiment certaines.

Qu'en est-il du bilan économique ?

Le niveau de fonds propres économiques est plus important pour le benchmark que pour le portefeuille de couverture, respectivement de 18 664 vs 17 797. Les seuls risques financiers auxquels s'expose l'assureur sont les risques de taux et de volatilité des taux, pour les deux portefeuilles testés.

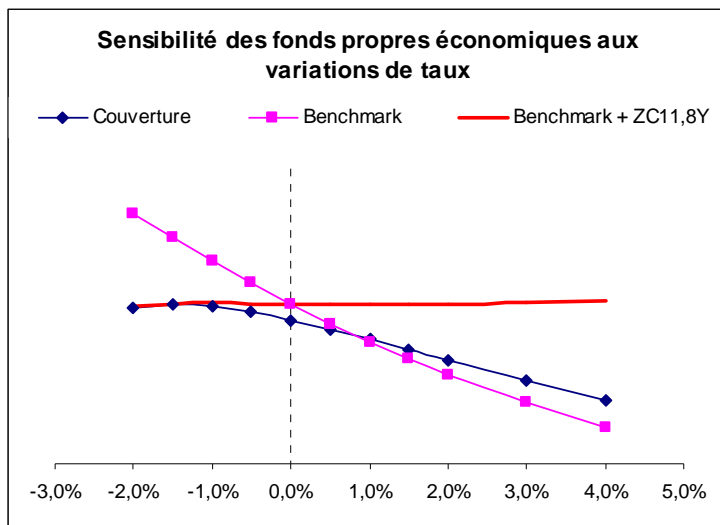
L'analyse des sensibilités montre que le bilan économique avec le portefeuille de couverture est plus sensible au risque de volatilité mais moins sensible au risque de taux que le benchmark.



Il apparaît que la sensibilité résiduelle des fonds propres économiques au risque de taux pour le portefeuille adossé est due à la durée du résultat de l'assureur. En effet, si le résultat de l'assureur est presque certain sur les 40 premières années de la projection, il n'en est pas de même de sa valeur actuelle, qui elle dépend du niveau des taux.

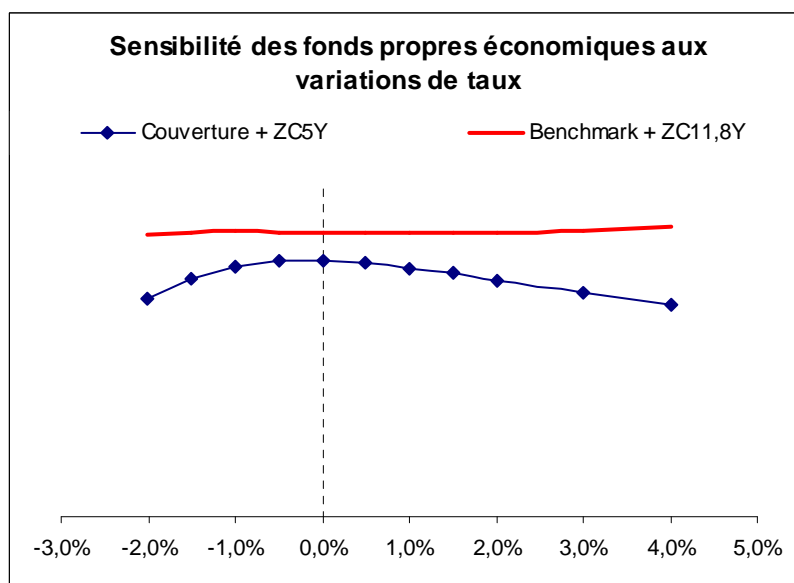
Il est possible d'ajouter une couverture complémentaire sur les fonds propres afin de s'immuniser contre cette durée, et ce sans coût supplémentaire. Il suffit pour cela de construire un programme de swaps taux fixe / taux court, dont le nominal suit la taille des

cash flows de résultat assureur. A titre d'exemple, avec une simple obligation zéro-coupon 11,8 ans, on peut obtenir les résultats suivants.



Ici, le portefeuille adossé que l'on a immunisé en durée permet d'obtenir un bilan économique quasiment insensible à toutes les variations de marché.

On peut appliquer la même méthode au bilan économique couvert par le portefeuille de couverture. On obtient alors les résultats suivants.



Après couverture de la durée, le portefeuille investi dans le proxy de portefeuille répliquant reste exposé à un risque de second ordre. Il reste également exposé à un risque de volatilité implicite. La couverture de ces deux risques peut être faite, mais au prix d'un coût supplémentaire.

En conclusion : le portefeuille d'actifs adossé complété de la couverture sur les fonds propres est plus efficace que la couverture déterminée à l'aide du portefeuille répliquant. En effet, elle permet de figer un niveau de fonds propres plus élevés et d'obtenir une immunisation plus complète aux risques financiers.

6.3.3 Conclusion

De ces expériences et analyses, on tire les enseignements suivants : Il existe deux manières d'utiliser les portefeuilles répliquants pour construire des couvertures.

Pour une allocation d'actifs donnée du fond général que l'on laisse inchangée

- Le portefeuille répliquant permet de définir un portefeuille de couverture à acheter / vendre sur les fonds propres de l'assureur, qui permet d'immuniser le bilan économiques aux variations de marché.
- Néanmoins, cette mécanique souffre de l'instabilité des portefeuilles répliquants au passage du temps, ainsi que des approximations faites lors de la construction du portefeuille répliquant.
- Cette méthode nécessite d'avoir un marché liquide et profond sur l'ensemble des instruments du portefeuille. Cette restriction peut amplifier les approximations intrinsèques à la construction du portefeuille.

En tant que portefeuille d'investissement du fond général

- Le portefeuille répliquant permet de construire un portefeuille d'investissements qui diminue les risques.
- Néanmoins, cette stratégie semble moins efficace que les techniques traditionnelles de gestion actif / passif.
 - Pour diminuer un risque action ou immobilier, il suffit de réduire la part allouée à ces classes d'actifs.
 - Pour diminuer le risque de taux, le plus efficace est d'adosser les flux d'actif aux flux de passif.
- Ainsi, en ce qui concerne l'allocation / l'investissement de l'actif général, l'apport des portefeuilles répliquants est relativement faible.

Globalement, les techniques de portefeuille répliquants en assurance ne nous paraissent pas assez mures pour être appliquées à la couverture effective d'un bilan d'assurance.

7 Risque comportemental et biométrique

L'exemple que nous avons étudié n'intégrait pas, par hypothèse, de risque biométrique ou de risque comportemental tel que le risque de rachat. Nous allons illustrer les possibilités et limites de l'approche portefeuille répliquant lorsque ces risques sont matériels.

De manière générale dans cette problématique, il faut distinguer deux natures de risques :

- **Les risques liés à l'environnement financier** : cette catégorie regroupe l'ensemble des risques auxquels s'expose l'assureur pour lesquels l'aléa, conditionnellement à l'environnement financier, est connu. Par exemple, un assuré entièrement rationnel bénéficiant d'une clause de remboursement anticipé exercera son droit au remboursement dès que les conditions financières lui permettent de trouver un placement plus rémunérateur.
- **Les risques comportant un aléa propre** : cette catégorie regroupe l'ensemble des risques auxquels s'expose l'assureur pour lesquels il existe un aléa supplémentaire indépendant de l'environnement financier. Le risque de longévité entre naturellement dans cette catégorie.

La prise en compte de ces risques dans une approche portefeuilles répliquants est très différente suivant leur catégorie. En ce qui concerne la première, les portefeuilles répliquants sont capables de les intégrer correctement dès lors que le modèle DFA les capture. La seconde catégorie est plus complexe à traiter, et nécessite des ajustements à la méthodologie des portefeuilles répliquants.

Nous allons détailler ci-après une illustration de chacun des deux cas, au travers d'un exemple simplifié pour le risque comportemental et à l'aide du contrat retraite décrit au paragraphe 5.1 pour le risque biométrique.

7.1 Risque comportemental

Cette partie a pour objectif d'illustrer à l'aide d'un exemple simple comment la technique des portefeuilles répliquants permet de répliquer des passifs intégrant ce type de risque. Nous nous appuyerons sur l'exemple d'un contrat d'épargne rachetable à tout moment.

Parmi les nombreuses options cachées vendues aux assurés dans certains contrats et qui peuvent comporter des risques pour l'assureur qu'il est nécessaire d'évaluer, figure l'option de rachat. Cette option qui permet aux clients de disposer de tout ou partie de leur épargne à tout moment génère un risque pour l'assureur. Les portefeuilles répliquants permettent de capturer les risques comportementaux, à condition que ceux-ci soient correctement implémentés dans le modèle DFA générant les flux de passifs à répliquer.

L'implémentation du risque comportemental dans un modèle de projection est complexe de part la nature du sous-jacent qui n'est autre que le fonds en euros, et de par l'absence de rationalité des assurés qui rend difficile la modélisation des comportements (rachat suivant certains niveaux de marché ou décalage par rapport à la concurrence, etc...). De plus, le

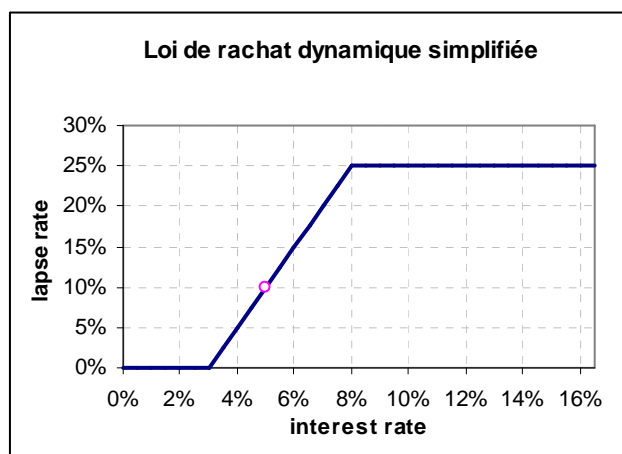
manque de données historiques ne permet pas de calibrer rigoureusement les paramètres d'une telle loi.

Dans l'exemple suivant, nous allons adopter pour notre exemple une loi de rachats simplifiée. Puis nous allons étudier comment un portefeuille répliquant intégrant certains instruments optionnels peut répliquer les passifs d'un contrat d'épargne avec participation aux bénéfices comportant cette loi de rachats dynamiques.

Considérons un contrat d'épargne ayant les caractéristiques suivantes :

- Taux minimum garanti = 4%,
- Durée du contrat = 8 ans,
- Prime initiale = 10 000€,
- Participation aux bénéfices = 90%,
- Allocation d'actifs (taux / action) = 90% / 10%,
- Evolution annuelle du marché action = 2%,

Les rachats des assurés durant la vie de leurs contrats sont modélisés par la loi de rachat dynamique simplifiée décrite ci-dessous. Cette loi simplifiée donne une estimation de la proportion de rachats au taux d'intérêt obligataire long terme (sur lequel est basée la rémunération du contrat simplifié). Les rachats se déclenchent à partir d'un niveau de taux supérieurs à 3%, augmentent linéairement entre 3% et 8% pour atteindre le palier de 25% au-delà :



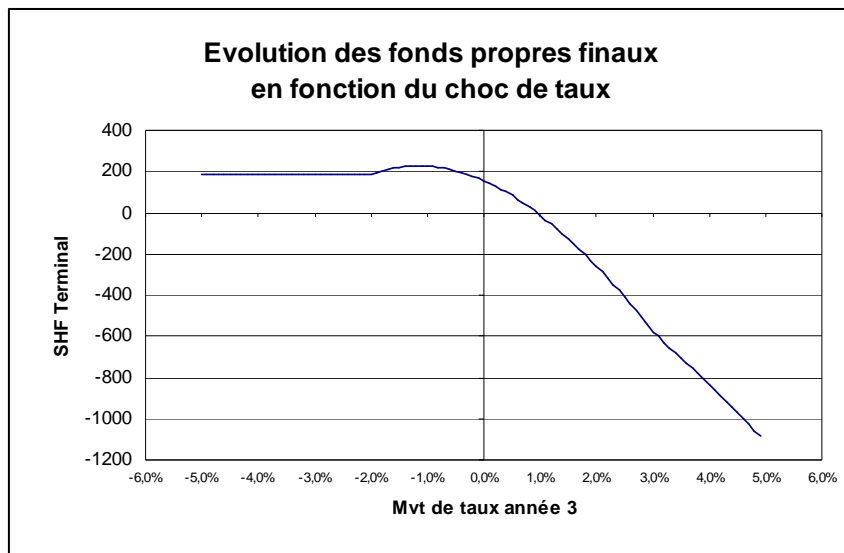
Comme le montre le graphique, pour un niveau des taux d'intérêt de l'ordre 5%, les rachats moyens sont autour de 10%.

Nous avons modélisé l'impact sur les passifs d'un choc de taux provoquant des rachats importants suivant notre loi puis construit un portefeuille répliquant reproduisant parfaitement la sensibilité des passifs à ces évolutions.

On introduit un ensemble de chocs de taux la troisième année de projection d'une magnitude variant de -5% à +7%. On mesure la valeur des passifs en fonction d'un mouvement de taux intervenant en 3^{ème} année, le niveau des taux restant ensuite inchangé sur le reste de la projection.

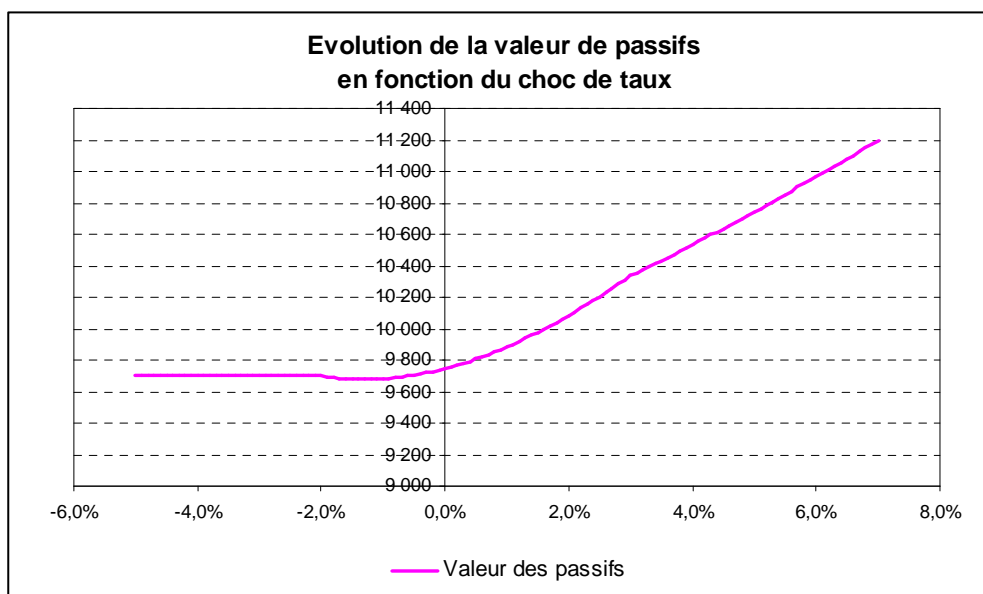
L'ensemble des scénarios ainsi constitué qui couvre des niveaux de taux entre 0% et 12% permet de mesurer l'évolution de la valeur des passifs correspondants.

Ci-dessous, le niveau terminal de fonds propres économiques pour chaque scénario de mouvement de taux :



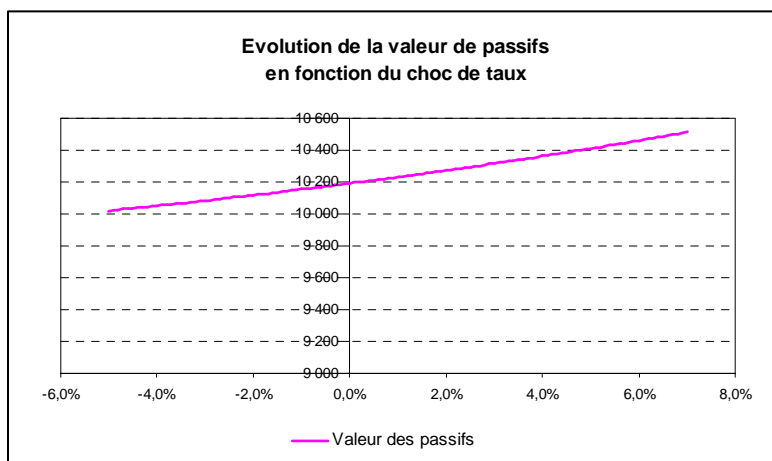
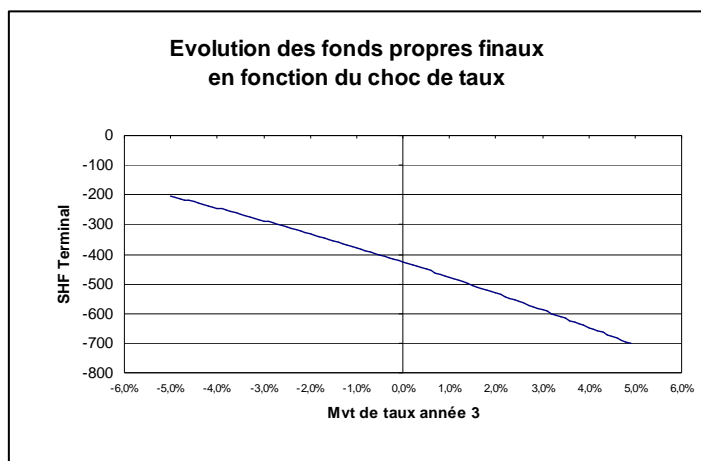
Compte tenu de la loi de rachat utilisée qui présente un palier avec des rachats nuls pour des niveaux de taux compris entre 0% et 3%, une baisse des taux entre -5% et -2% n'entraîne pas de changement de la valeur des fonds propres économiques.

Ci-dessous, la représentation de valeur des passifs (calculés comme la somme des prestations annuelles actualisées) en fonction des mouvements de taux intervenants la 3^{ème} année :



Ce graphique fait clairement apparaître l'option de rachat vendue aux assurés, qui constitue un risque comportemental porté par l'assureur et qui s'apparente à une swaption pour l'assuré.

Pour illustration, les graphiques ci-dessous représentent également l'évolution des fonds propres et celui de la valeur des passifs en fonction du choc de taux pour un contrat identique mais qui ne comporterait pas de clause de rachat :

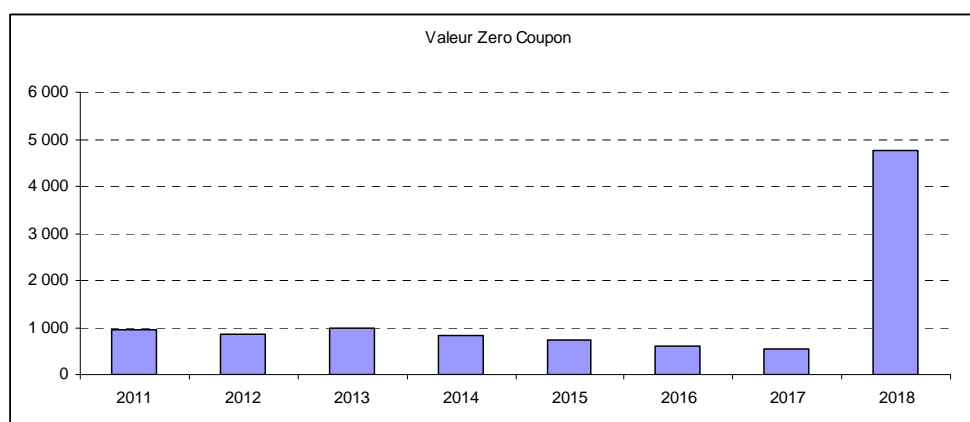


L'absence d'optionnalité et de risque de rachat retire toute convexité dans les profils des valeurs des passifs et des fonds propres ce qui simplifiant de fait la composition du portefeuille répliquant.

Pour construire le portefeuille répliquant reproduisant les passifs de notre contrat avec rachat, nous avons utilisés des instruments de taux :

- des obligations zéro coupon en représentation des garanties,
- des options sur taux (swaptions receveuses et swaptions payeuses), afin de capturer les options embarquées dans les contrats.

L'ensemble des zéro coupons représente les flux de passifs certains prévus chaque année suivant le scénario central (scénario Best Estimate) d'un niveau de taux à 5% sur la durée de la projection.



A partir de la chronique des zéro coupons, il reste à intégrer les instruments d'options sur taux dans le portefeuille répliquant afin de reproduire la sensibilité des passifs vue précédemment.

Pour capturer la convexité introduite par les options embarquées, nous allons utiliser des swaptions 3x5, i.e. des options de maturité 3 ans sur un swap de durée 5 ans, correspondant à une couverture jusqu'au terme du contrat de 8 années.

Profil des flux d'une swaption payeuse : Si Taux de référence > Strike à la maturité de l'option, le détenteur de l'option paie le taux fixe et reçoit le taux de référence (tel qu'à maturité de l'option) pendant la durée du contrat à chaque date anniversaire du contrat pendant toute la durée du contrat swap.

La combinaison de swaptions utilisées est la suivante :

- option de maturité 3 ans de Strike 11% sur swap payeur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 10% sur swap payeur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 9% sur swap payeur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 7% sur swap payeur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 6% sur swap payeur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 4% sur swap receveur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 3% sur swap receveur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 2% sur swap receveur de durée 5 ans,
- option de maturité 3 ans de Strike 1,5% sur swap receveur de durée 5 ans,

Exemple de pay-off (somme des flux actualisés en 3ème année) du portefeuille de swaptions dans le cas d'un scénario de hausse de taux à 10% en troisième année :

Instruments	Maturité X		Strike	12/10	12/11	12/12	12/13	12/14	12/15	12/16	12/17	12/18	Nominal
	Tenor												
Swaption payeuse	3x5		11,0%				0						0
Swaption payeuse	3x5		10,0%				0						0
Swaption payeuse	3x5		9,0%				-47						-1 000
Swaption payeuse	3x5		7,0%				-222						-1 500
Swaption payeuse	3x5		6,0%				712						3 500
Swaption receveuse	3x5		4,0%				0						3 500
Swaption receveuse	3x5		3,0%				0						-400
Swaption receveuse	3x5		2,0%				0						-300
Swaption receveuse	3x5		1,5%				0						1 000
CF Portefeuille répliquant					0	0	443	0	0	0	0	0	

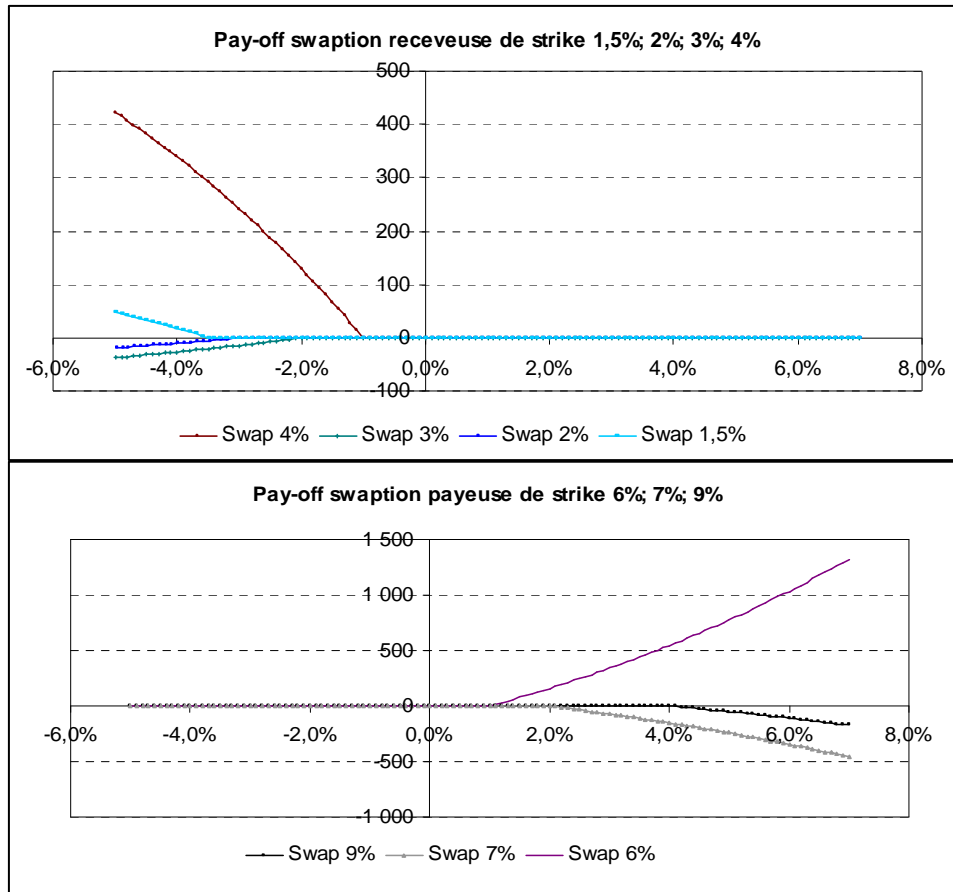
Le poids des instruments est déterminé en suivant l'approche manuelle décrite dans le paragraphe précédent présentant la construction d'un portefeuille répliquant.

En traçant le profil des pay-offs de chaque swaption en fonction des différents mouvements de taux (graphiques ci-dessous), on détermine le poids des options de taux nécessaires pour s'ajuster au profil d'évolution de la valeur de marché des passifs à répliquer.

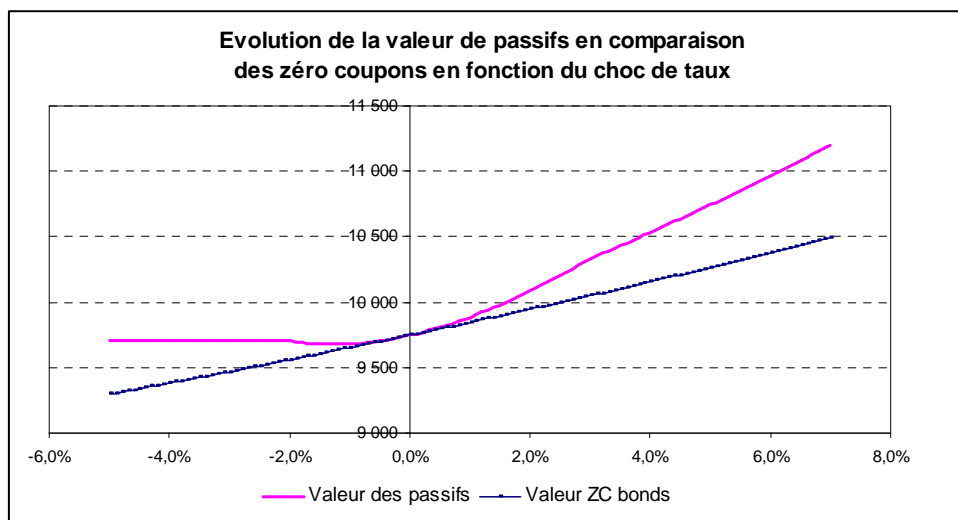
Cette approche nous permet d'obtenir un portefeuille répliquant dont la valeur ainsi que les sensibilités sont en ligne avec les critères de qualité fixés.

Le critère de régression obtenu sur les valeurs présentes d'élève à : $R(PV) = 99,95\%$.

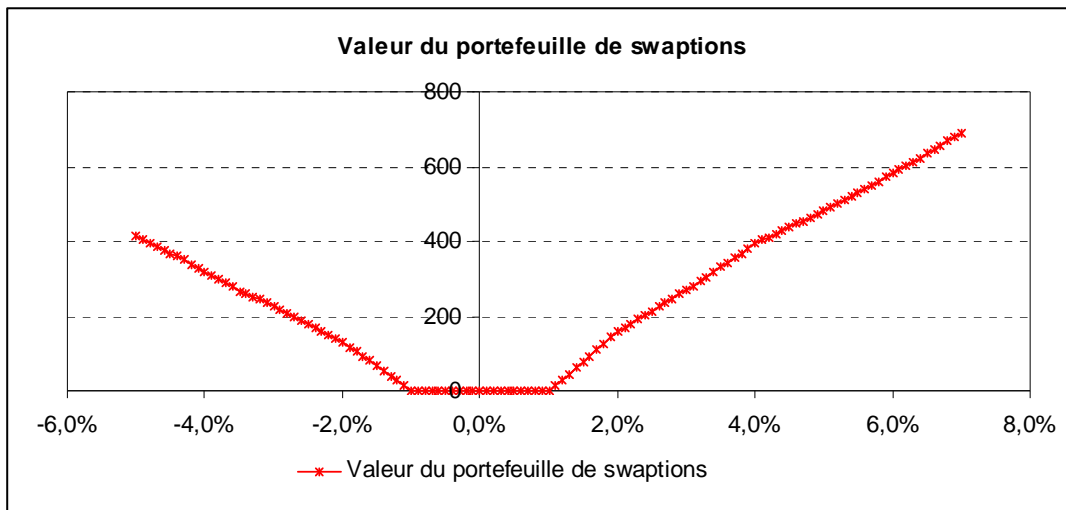
Les graphiques ci-dessous présentent les profils des pay-offs des swaptions receveuses de Strike allant de 1,5% à 4% ainsi que des swaptions payeuses de Strike allant de 6% à 9% en fonction des différents mouvements de taux :



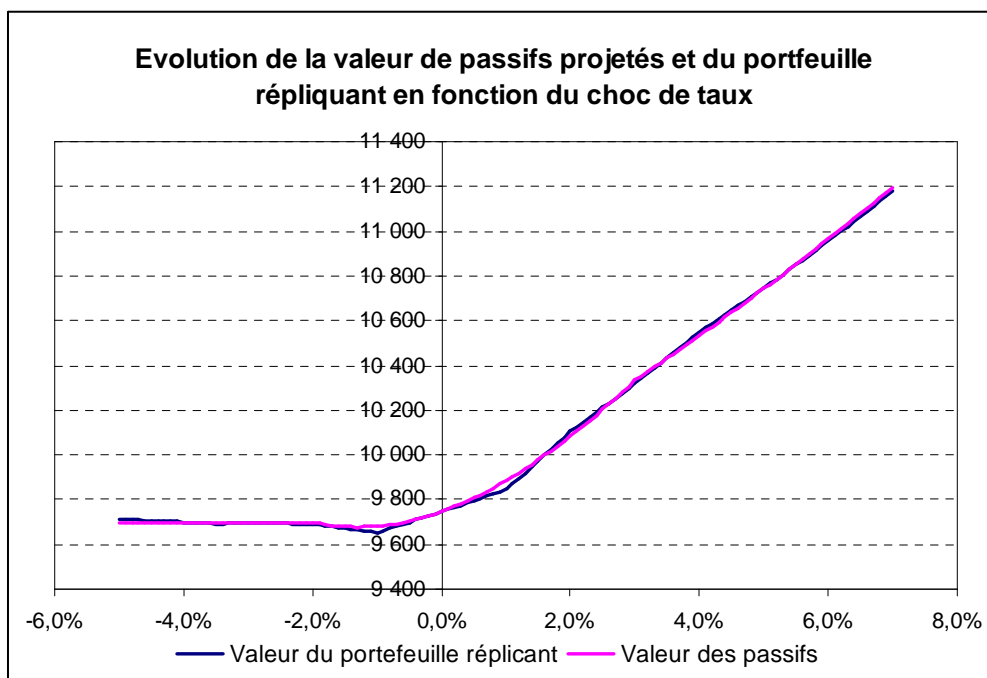
Le graphique ci-dessous représente le profil de la valeur de marché des passifs en fonction des mouvements de taux ainsi que le profil de la valeur du portefeuille répliquant :



Profil de la valeur du portefeuille de swaptions utilisés dans le portefeuille répliquant en fonction du choc de taux :



Le portefeuille ainsi constitué d'obligations zéro coupon et de swaptions permet d'obtenir le profil de valeurs de passifs qui reproduit parfaitement celui de du modèle de projection comme l'illustre le graphique suivant :



Cet exemple permet de conclure que l'approche de modélisation des passifs par le portefeuille répliquant permet de capturer les risques comportementaux comme le risque de rachat modélisé dans l'exemple précédent, à condition que ce risque soit correctement intégré dans le modèle de projection initial qui alimente la réplification.

7.2 Risque biométrique

Le contrat considéré est soumis à des risques dits techniques – par opposition aux risques financiers - comme le risque de longévité et le risque de frais de gestion. Le premier correspond au risque que la durée de vie des assurés s'avère plus grande que celle prévue par les tables utilisées pour le provisionnement. Si le niveau des produits financiers ne permet pas de compenser l'écart constaté, l'assureur encoure alors des pertes. Le second correspond à une augmentation des frais de gestion au-delà de ce qui est provisionné, ce qui induit également une perte pour l'assureur. Ces risques doivent être pris en compte dans le cadre de la gestion des risques d'une compagnie d'assurance, et notamment dans la construction d'un modèle interne Solvabilité 2.

La mesure de ces risques est une question à part entière, qui ne sera pas traitée dans le cadre de cette étude. En revanche, dans la mesure où le risque de longévité et le risque financier se compensent, des considérations complémentaires sont nécessaires pour appréhender l'application des portefeuilles répliquants en cas de risque biométrique important. Il est beaucoup plus aisé d'intégrer le risque de frais de gestion, celui-ci étant en général intégralement supporté par l'assureur, indépendamment du résultat financier.

La problématique sera abordée à l'aide d'un formalisme simple. Considérons un contrat d'assurance soumis à un ensemble de 3 risques, $R = (M, L, F)$, respectivement risque de marché, de longévité et de frais de gestion. R représente le vecteur aléatoire de l'ensemble des risques.

Soit $AFR(R)$ la fonction qui associe les fonds propres économiques pour une réalisation donnée de l'aléa R , et soit R_0 l'espérance de R , utilisé pour le calcul du « best estimate ». On pose également $PnL(R) = AFR(R) - AFR(R_0)$, c'est-à-dire le niveau de gains / pertes économiques pour une réalisation donnée de l'aléa.

De manière immédiate il vient :

$$AFR(R_0) = \text{Actif}(R_0) - \text{BEL}(R_0)$$

$$SCR = -\text{VaR}_{0,5\%}(PnL) = AFR(R_0) - \text{VaR}_{0,5\%}(AFR)$$

Un portefeuille répliquant peut être assimilé à la fonction $\text{BEL}(M, L, F)$, puisqu'il réplique le passif économique pour un mouvement de marché donné, sans tenir compte d'éventuels chocs de longévité ou de frais généraux.

Le BEL peut se décomposer en deux parties : les prestations et commissions diverses diminués des primes (X), et les frais de gestion (Y).

- La valeur des prestations et autres cash flows assis sur les volumes dépend des marchés financiers et de la longévité.
- La valeur des frais de gestion dépend des trois aléas. En effet, en cas d'allongement de la durée de vie, les contrats devront être gérés plus longtemps, et en cas de baisse des taux la valeur actuelle des frais de gestion augmente.

On peut noter : $\text{BEL}(R) = X(M, L) + Y(M, L, F)$

Il est aisé, pour un scénario donné de longévité, de calculer le niveau de frais de gestion compte-tenu de l'aléa de frais de gestion. Les cash flows ainsi obtenus peuvent être actualisés à la courbe des taux correspondante à l'aléa de marché. De ce fait, la fonction Y est simple à construire et mettre en œuvre. Notamment, elle ne nécessite pas de recours à des méthodes de type « stochastique dans le stochastique » ou à des méthodes alternatives de valorisation comme les portefeuilles répliquants.

La difficulté réside dans la construction de la fonction X, qui dépend :

- du niveau des marchés financiers pour les besoins de réinvestissement / ventes d'actifs, ce qui modifie la participation bénéficiaire future
- du niveau des taux d'intérêt pour le taux d'actualisation
- du scénario de longévité, qui peut également modifier la participation bénéficiaire attendue

Le BEL marginal peut se décomposer comme une somme d'écart marginaux :

$$\Delta X = X(M, L) - X(M0, L0) = X(M, L) - X(M, L0) + X(M, L0) - X(M0, L0)$$

Les méthodes de calcul de SCR par module de risque font en général l'approximation implicite suivante :

$$\Delta X = X(M0, L) - X(M0, L0) + X(M, L0) - X(M0, L0)$$

Autrement dit, l'hypothèse sous-jacente est que l'impact d'un choc de longévité est le même quelles que soient les conditions de marché. Cette hypothèse n'est pas justifiée en cas de mouvement de la courbe des taux d'intérêt. Elle peut également être injustifiée lors de mouvements de marché en général, dans le cas de contrats avec participation bénéficiaire.

A titre d'exemple, considérons le contrat de retraite du paragraphe « 5 Application à un contrat retraite », auquel on applique un choc croisé de marché et de longévité. Le choc de longévité retenu est celui de QIS5, à savoir une diminution de 20% de la mortalité annuelle. Les résultats sont résumés ci-dessous.

(en % de la PM)	Passif économique "Best Estimate"	Passif économique "Longévité Accrue"	Perte économique due au choc de longévité	Erreur commise sur perte économique (%)
Central (M0)	86,99	89,38	2,40	
Taux -2,0%	138,82	145,34	6,52	172%
Taux 2,0%	59,01	59,98	0,97	-60%
Immo -30%	86,43	88,86	2,42	1%
Action -50%	84,49	86,97	2,48	3%
Vol Action 50%	91,75	94,84	3,09	29%
Vol Taux 50%	88,03	90,66	2,63	10%

La perte économique consécutive à un choc de longévité est très dépendante du niveau des taux. Dans un environnement de marché M0, la perte s'élève à 2,4% de la provision mathématique, alors que dans un environnement de taux baissier (-200bps), elle s'élève à 6,52% de la provision mathématique. En revanche elle est peu dépendante du niveau des marchés action et immobilier.

Afin de capturer cette interaction, les approches suivantes peuvent être envisagées :

- Intégrer au portefeuille répliquant des sensibilités à la longévité ; cela nécessite d'ajouter des instruments ayant la longévité pour sous-jacent (longevity bonds, longevity swaps ...).
- Construire un portefeuille répliquant basé sur un niveau de longévité accru. Ceci revient à appliquer la décomposition inverse à celle présentée ci-dessus :
$$\Delta X = X(M, L) - X(M0, L) + X(M0, L) - X(M0, L0)$$
- Ajouter un facteur correctif Z basé sur des calculs de sensibilités croisées interpolées :
$$\Delta X = X(M0, L) - X(M0, L0) + X(M, L0) - X(M0, L0) + Z(M, L)$$

Une note conclusive : les difficultés complémentaires inhérentes aux interactions entre risques ne sont pas spécifiques aux approches par portefeuilles répliquants. Elles apparaissent également dans tout modèle partiel où les scénarios de longévité sont définis à priori.

8 Conclusion et critique de l'approche

La méthode du portefeuille répliquant constitue pour les compagnies d'assurance Vie une réponse intéressante aux problématiques posées par la nouvelle directive Solvabilité 2 afin de développer une connaissance de leurs risques financiers et leur mesure de marge de solvabilité économique.

Les résultats de nos analyses montrent que le portefeuille répliquant peut constituer un outil efficace pour le calcul de la solvabilité économique et permet d'apprécier les facteurs de risque les plus significatifs. Cependant, si les niveaux de gains / pertes économiques sont correctement répliqués pour des scénarios médians, l'erreur de réplication s'accroît dans les scénarios extrêmes. Il convient de veiller dans la mise en œuvre à intégrer un nombre suffisant de scénarios extrêmes, pour garantir une qualité suffisante de réplication.

Inversement, le classement des scénarios est mieux respecté dans les queues de distribution que dans le centre de celle-ci. Aussi, nous avons testé une méthode hybride, consistant à sélectionner les scénarios extrêmes à partir du portefeuille répliquant afin de calculer le niveau de pertes avec le modèle de projection. Cette méthode s'est révélée particulièrement instable et inapplicable en pratique.

La mise en place des portefeuilles répliquants telle que nous l'avons appliquée repose sur un jugement d'expert dans la construction des portefeuilles. Pour palier cette problématique, des critères précis de qualité doivent être mise en place afin de valider de la pertinence d'un portefeuille répliquant dans le cadre du calcul de solvabilité économique. Alternativement, il est possible de systématiser l'approche de construction, ce qui présente le double avantage de rendre les processus plus robustes et le résultat reproductible.

La technique des portefeuilles répliquants a également été comparée à l'approche par formes paramétriques. Cette approche permet d'obtenir de bons résultats, analogues et mêmes meilleurs à ceux obtenus avec les portefeuilles répliquants, notamment en matière de classement des scénarios extrêmes. De plus, cette technique présente l'avantage de garantir l'égalité avec le modèle répliqué sur les points de calibration et ne requiert pas de jugements d'expert, ce qui en fait une alternative intéressante pour les calculs de capital économique.

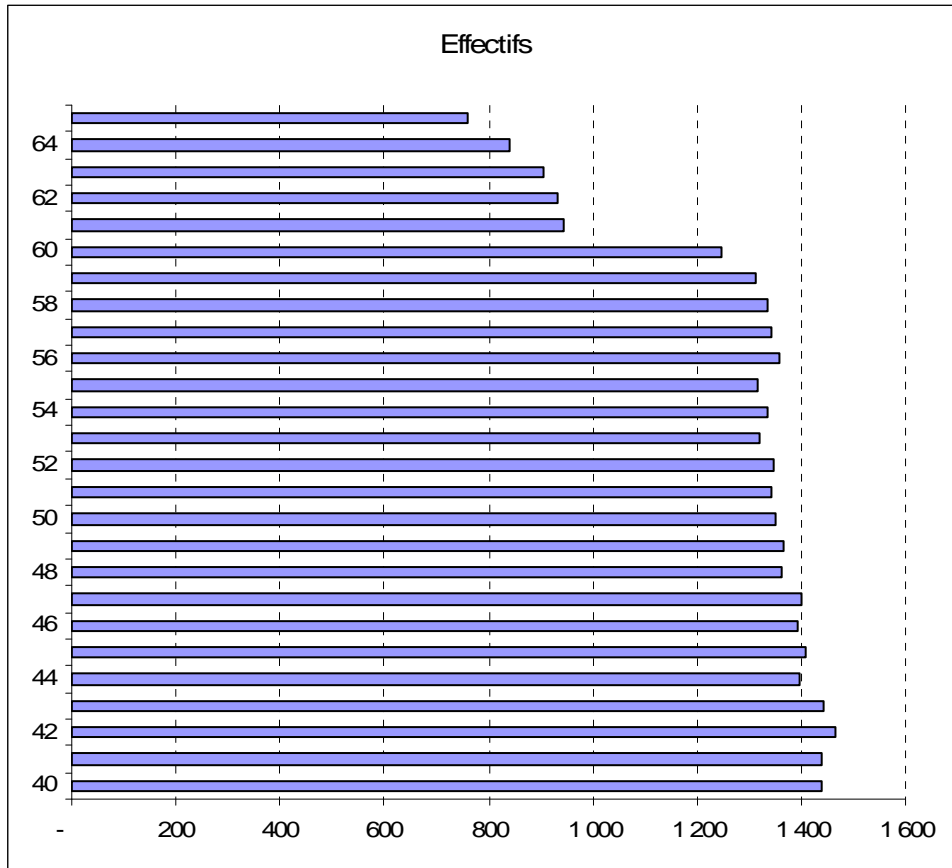
Par ailleurs, et quelle que soit la technique de réplication retenue, il est important de tenir compte d'ajustements complémentaires lorsque l'aléa technique et l'aléa financier ont des interactions importantes.

Enfin, les applications plus larges des portefeuilles répliquants à la gestion actif / passif sont confrontées au manque de stabilité de cette technique. En effet, les analyses menées font ressortir l'instabilité des portefeuilles lors d'un changement d'allocation d'actifs, même tactique, ainsi que lors du passage du temps. L'erreur sur le capital économique s'accroît rapidement lorsqu'on s'éloigne de la date de calibration ou de l'allocation d'origine. Cette limite rend inapplicable la technique à des fins de couverture où comme outil d'optimisation des allocations stratégiques d'actifs.

Dans l'ensemble, la technique des portefeuilles répliquants constitue un développement intéressant permettant d'utiliser les instruments de finances de marché pour la valorisation des passifs d'assurance et la gestion des risques. Cette approche bien que récente est prometteuse mais elle nécessite encore des développements et améliorations pour prendre une place plus centrale dans la gestion actif / passif des compagnies d'assurance.

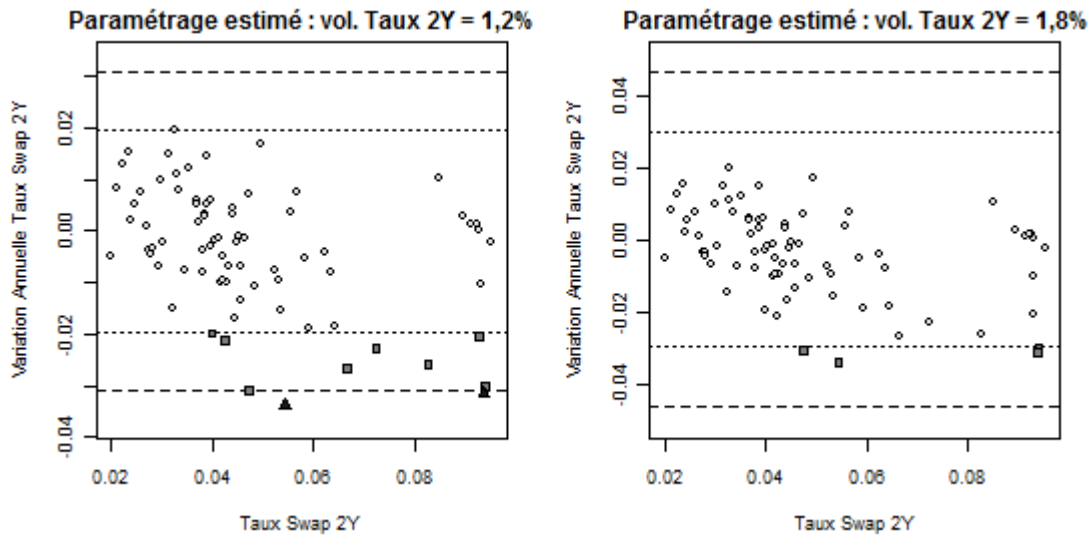
9 Annexes

9.1 Effectifs du contrat collectif retraite étudié



9.2 Back-test série historique : Taux 2Y

On observe sur le premier back-test que l'estimation du paramètre de volatilité du taux swap 2Y est incompatible avec la série historique. De ce fait, le paramètre de volatilité retenu est plus élevé.



9.3 Détails des instruments financiers disponibles

Obligation zéro coupon

Le détenteur d'une obligation zéro coupon de nominal 1 et de maturité t_1 reçoit un euro en T.

Paramètre :

N : nominal de l'obligation

T: maturité de l'obligation zéro coupon

Pay-off:

$$CF_T = N$$

Formule fermée de valorisation:

$$P = ZC(T, P) = \left(\frac{1}{1 + r_T} \right)^T$$

Forward Swap

Un Swap forward est un contrat qui permet d'échanger un taux fixe contre un taux variable pendant une certaine durée à partir d'un moment futur. A partir du début du swap en $t_1 + 1$ jusqu'à la fin du contrat en $t_1 + t_2$, le détenteur du forward swap :

- reçoit la jambe fixe de Strike K
- paie la jambe flottante du taux de maturité t_2 observé en t_1

Les cash flows échangés entre l'année $t_1 + 1$ et l'année $t_1 + t_2$ sont identiques.

Paramètre :

N : nominal du contrat swap

t_1 : date de début du contrat swap

t_2 : durée du contrat swap.

K : Strike (niveau) de la jambe fixe du swap

Pay-off :

$$\forall t \in]t_1, t_1 + t_2], CF_{i,t} = N.(k - B(i, t_1))$$

Formule fermée de valorisation pour un nominal de 1:

$$P = k \cdot \sum_{i=t_1+1}^{t_1+t_2} ZC(i, R) - ZC(t_1, R) + ZC(t_1 + t_2, R)$$

Swaption receveuse

Une swaption receveuse donne le droit à son détenteur de rentrer dans un contrat de swap en payant un taux flottant et recevant un taux fixe à un instant futur pour une période prédéterminée.

A partir de la date de début du swap $t_1 + 1$ jusqu'à la fin du contrat en $t_1 + t_2$, et si le taux variable de maturité t_2 observé en t_1 est inférieur au niveau de Strike K , le détenteur de la swaption receveuse :

- reçoit la jambe fixe K ,
- paie l'obligation zéro coupon de maturité t_2 observée en t_1

Les cash flows échangés entre l'année $t_1 + 1$ et $t_1 + t_2$ sont égaux au maximum entre zéro et la différence entre le niveau de Strike et le taux flottant de maturité t_2 observé en t_1 . Ces cash flows sont tous identiques.

Paramètres :

N : nominal du contrat

t_1 : maturité de l'option de rentrer dans le contrat swap, début du contrat swap.

t_2 : durée du contrat swap une fois la maturité de l'option passée, i.e. le ténor du swap.

K : Strike (niveau) de la jambe fixe du swap

Pay-off :

$$\forall t \in]t_1, t_1 + t_2], CF_{i,t} = N \cdot \text{Max}(k - B(i, t_1); 0)$$

Valeur du contrat pour un nominal de 1:

$$P = \left[-s \cdot N(-d1) + k \cdot N(-d2) \right] \sum_{i=t_1+1}^{t_1+t_2} ZC(i, P)$$

Avec

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2} t_1}{\sigma \sqrt{t_1}} \qquad d2 = d1 - \sigma \sqrt{t_1}$$

Swaption payeuse

Une swaption payeuse donne le droit à son détenteur de rentrer dans un contrat de swap en recevant un taux flottant et payant un taux fixe à un instant futur pour une période prédéterminée.

A chaque date anniversaire à partir de la date de début du swap $t_1 + 1$ jusqu'à la fin du contrat en $t_1 + t_2$, et si le taux variable de maturité t_2 observé en t_1 est supérieur au niveau de Strike K , le détenteur de la swaption receveuse :

- paie la jambe fixe de Strike K ,
- reçoit l'obligation zéro coupon de maturité t_2 observée en t_1

Les cash flows échangés entre l'année $t_1 + 1$ et $t_1 + t_2$ sont égaux au maximum entre zéro et la différence entre le niveau de Strike et le taux flottant de maturité t_2 observé en t_1 . Ces cash flows sont tous identiques.

Paramètres:

N : nominal du contrat

t1 : maturité de l'option de rentrer dans le contrat swap, début du contrat swap.

t2 : durée du contrat swap une fois la maturité de l'option passée, i.e. le ténor du swap.

K : Strike (niveau) de la jambe fixe du swap

Pay-off :

$$\forall t \in]t_1, t_1 + t_2], CF_{i,t} = N \cdot \text{Max}(B(i, t_1) - k; 0)$$

Valeur du contrat pour un nominal de 1:

$$P = [s \cdot N(d1) - k \cdot N(d2)] \sum_{i=t_1+1}^{t_1+t_2} ZC(i, P)$$

Avec

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2} t_1}{\sigma \sqrt{t_1}} \quad d2 = d1 - \sigma \sqrt{t_1}$$

Cap

Un Cap est une option de taux donnant à son détenteur le droit d'échanger un taux fixe contre un taux variable. A partir de la date de début du swap t1 +1 jusqu'à la fin du contrat en t1+t2, et si le taux zéro coupon de maturité T observé à la date de paiement est supérieur au niveau de Strike K, le détenteur du Cap :

- paie la jambe fixe K,
- reçoit le taux flottant de maturité T observé à la date de paiement.

Les cash flows échangés entre l'année t1+1 et t1+t2 sont égaux au maximum entre zéro et la différence entre taux zéro coupon de maturité T observé à chaque date de paiement et le niveau du Strike K.

Paramètres:

N : nominal du contrat

t1 : maturité de l'option de rentrer dans le contrat swap, début du contrat swap.

t2 : durée du contrat swap une fois la maturité de l'option passée, i.e. le ténor du swap.

K : Strike (niveau) de la jambe fixe

Pay-off :

$$\forall t \in]t_1, t_1 + t_2], CF_{i,t} = N \cdot \text{Max}[B(i,t) - k; 0]$$

Valeur du contrat pour un nominal de 1:

$$P = \sum_{i=t_1+1}^{t_1+t_2} \left[e^{-r \cdot i} (FWDADJ_i \cdot N(d1_i) - K \cdot N(d2_i)) \right]$$

Avec :

$$d1_i = \frac{\ln\left(\frac{FWDADJ_i}{K}\right) + \frac{1}{2}i\sigma^2}{\sigma\sqrt{i}}$$

$$d2_i = d1 - \sigma\sqrt{i}$$

$$FWDADJ_i = FWD_i + CONVADJ_i$$

$$FWD_i = \frac{ZC(i, P) - ZC(i+T, P)}{\sum_{j=i+1}^{i+T} ZC(j, P)}$$

$$CONVADJ_i = -\frac{1}{2}i \cdot \frac{\sigma^2 \cdot FWD_i^2 \cdot CONV_i}{DUR_i}$$

$$CONV_i = \frac{T(T+1)}{(1+FWD_i)^{T+2}} + \sum_{k=1}^T \frac{k(k+1)FWD_i}{(1+FWD_i)^{k+2}}$$

$$DUR_i = \frac{-T}{(1+FWD_i)^{T+1}} - \sum_{k=1}^T \frac{k \cdot FWD_i}{(1+FWD_i)^{k+1}}$$

Floor

Un Floor est une option de taux donnant à son détenteur le droit d'échanger un taux fixe contre un taux variable. A partir de la date de début du swap $t_1 + 1$ jusqu'à la fin du contrat en t_1+t_2 , et si le taux zéro coupon de maturité T observé à la date de paiement est inférieur au niveau de Strike K , le détenteur du Floor :

- reçoit la jambe fixe K ,
- paie le taux flottant de maturité T observé à la date de paiement.

Les cash flows échangés entre l'année t_1+1 et t_1+t_2 sont égaux au maximum entre zéro et la différence entre le niveau du Strike K et le taux zéro coupon de maturité T observé à chaque date de paiement.

Paramètres :

N : nominal du contrat

t_1 : maturité de l'option de rentrer dans le contrat swap, début du contrat swap.

t_2 : durée du contrat swap une fois la maturité de l'option passée, i.e. le ténor du swap.

K : Strike de la jambe fixe

Pay-off :

$$\forall t \in]t_1, t_1 + t_2], CF_{i,t} = N \cdot \text{Max}[k - B(i, t); 0]$$

Valeur du contrat pour un nominal de 1:

$$P = \sum_{i=t_1+1}^{t_1+t_2} \left[e^{-r \cdot i} (-FWDADJ_i \cdot N(-d1_i) + K \cdot N(-d2_i)) \right]$$

Les variables intermédiaires sont identiques à celles utilisées dans la formule détaillée du Cap.

Constant Maturity Swap

Un swap à maturité constante est un contrat qui permet d'échanger deux taux variables. Entre le début du contrat du swap en $t_1 + 1$ et la fin du contrat en $t_1 + t_2$, à chaque date anniversaire du contrat, le détenteur d'un CMS :

- reçoit le taux zéro coupon de maturité T observé au moment du paiement,
- paie le taux court observé au moment du paiement.

Dans l'outil portefeuille répliquant, le taux court correspond au taux de maturité un an.

Ainsi les cash flows échangés aux dates anniversaires du contrat entre t_1 et $t_1 + t_2$ ne sont pas identiques. Les cash flows peuvent être positifs ou négatifs suivant le niveau des taux de maturité T par rapport à celui des taux court sur la période.

Paramètres :

N : nominal du swap de maturité constante

Taux de référence : taux long terme de maturité T contre lequel va s'échanger le taux court.

t_1 : date de début du contrat swap de maturité constante.

t_2 : durée du contrat swap de maturité constante.

Pay-off :

$$\forall t \in]t_1, t_1 + t_2], CF_{i,t} = N \cdot [B(i, t) + M - SR(i, t)]$$

Valeur du contrat pour un nominal de 1:

$$P = \sum_{i=t_1+1}^{t_1+t_2} [ZC(i, P) \cdot (FWDADJ_i - LIBOR_i)]$$

Avec

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2} t_1}{\sigma \sqrt{t_1}} \qquad d2 = d1 - \sigma \sqrt{t_1}$$

Les variables intermédiaires sont identiques à celles utilisées dans la formule détaillée du Cap et du Floor.

Indice Action/Immobilier

Dans la modélisation du portefeuille répliquant le détenteur d'une exposition à un indice action/immobilier a la possibilité de réaliser des gains (ou des pertes) dans le temps.

Une position longue en action donnera droit à un paiement à chaque date anniversaire entre t1 et t1 + t2 équivalent à 1/t2 de l'investissement.

Paramètres :

N : nominal de la position indice

t1: date de début d'exposition au contrat

t2 : date de fin d'exposition au contrat

Pay-off :

$$\forall t \in [t_1, t_1 + t_2], CF_{i,t} = N \cdot \frac{\prod_{s=1}^t [1 + S(i, s)]}{t_2}$$

Avec S(i, s) le taux zéro coupon de maturité s du scénario i en t.

Valorisation du contrat pour un nominal de 1

$$P = 1$$

Option Call sur indice

Une option sur action donne le droit à son détenteur d'acheter le sous-jacent de l'option (action, immobilier,...) à une certaine date (maturité de l'option) à un certain prix (Strike de l'option).

Si à maturité, le prix de l'actif sous-jacent est supérieur au niveau du Strike de l'option, le détenteur de l'option :

- reçoit le prix de l'actif sous-jacent,
- paie le prix correspondant au Strike K

Paramètres :

N : nominal de l'option

t1 : maturité de l'option

K : Strike de l'option

Pay-off :

$$\forall t \in [t_1, t_1 + t_2[, CF_{i,t} = N \cdot \text{Max} \left[\left(\prod_{s=1}^t [1 + S(i, s)] \right) - k; 0 \right]$$

Avec S(i,s) le taux zéro coupon de maturité s du scénario i en t.

Valorisation du contrat pour un nominal de 1 :

$$P = sN(d1) - ke^{-y_T \cdot T} N(d2)$$

Avec

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{k}\right) + T\left(y_T + \frac{\sigma_T^2}{2}\right)}{\sigma_T \sqrt{T}} \qquad d2 = d1 - \sigma_T \sqrt{T} \qquad s = 1$$

T : la maturité de l'option

K : le Strike de l'option

σ_T : la volatilité implicite d'une option de maturité T,

y_T est le taux d'intérêt continu de maturité T.

N(.) la distribution de la loi normale standard.

Option Put sur indice

Une option put sur action donne le droit à son détenteur de vendre le sous-jacent de l'option (action, immobilier,...) à une certaine date (maturité de l'option) à un certain prix (Strike de l'option).

Si à maturité, le prix de l'actif sous-jacent est inférieur au niveau du Strike de l'option, le détenteur de l'option :

- reçoit le prix de l'actif sous-jacent au prix correspondant au Strike K,
- paie l'actif à son cours au moment d'exercer l'option

Paramètres :

N : nominal de l'option

t1: maturité de l'option

K : Strike de l'option

Pay-off:

$$\forall t \in [t_1, t_1 + t_2[, CF_{i,t} = N \cdot \text{Max} \left[k - \left(\prod_{s=1}^t [1 + S(i, s)] \right); 0 \right]$$

Avec S(i, s) le taux zéro coupon de maturité s du scénario i en t.

Valorisation du contrat pour un nominal de 1 :

$$P = -sN(-d1) + ke^{-y_T T} N(-d2)$$

Avec

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{k}\right) + T\left(y_T + \frac{\sigma_T^2}{2}\right)}{\sigma_T \sqrt{T}} \qquad d2 = d1 - \sigma_T \sqrt{T} \qquad s = 1$$

N(.) la distribution de la loi normale standard.

T : la maturité de l'option

K : le Strike de l'option

σ_T : la volatilité implicite d'une option de maturité T,

y_T est le taux d'intérêt continu de maturité T.

Straddle action

Un straddle sur action donne le droit d'acheter et de vendre un sous-jacent à un certain prix à une certaine date. Un straddle est une combinaison d'une option d'achat (call option) et d'une option de vente (put option) ayant la même maturité et le même Strike.

Si à la date de maturité, le prix de l'actif sous-jacent à maturité est inférieur au Strike, le détenteur de l'option :

- paie l'actif sous-jacent à son prix spot à la date d'exercice de l'option (maturité)
- vend l'actif sous-jacent au prix K (Strike)

Si à la date de maturité, le prix de l'actif sous-jacent à maturité est supérieur au Strike, le détenteur de l'option :

- vend l'actif sous-jacent à son prix spot à la date d'exercice de l'option (maturité)
- paie l'actif sous-jacent au prix K (Strike)

Paramètres :

N : nominal de l'option

t1 : maturité de l'option

K: Strike de l'option

Pay-off :

$$\forall t \in [t_1, t_1 + t_2[, CF_{i,t} = N \cdot \text{Max} \left[k - \left(\prod_{s=1}^t [1 + S(i, s)] \right); \left(\prod_{s=1}^t [1 + S(i, s)] \right) - k \right]$$

Avec S(i,s) le taux zéro coupon de maturité s du scénario i en t.

Valorisation du contrat pour un nominal de 1 :

$$P = -s \cdot N(-d1) + k \cdot e^{-y_T \cdot T} N(-d2) + s \cdot N(d1) - k \cdot e^{-y_T \cdot T} N(d2)$$

Avec

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{k}\right) + T \left(y_T + \frac{\sigma_T^2}{2} \right)}{\sigma_T \sqrt{T}} \quad d2 = d1 - \sigma_T \sqrt{T} \quad s = 1$$

T : la maturité de l'option

K : le Strike de l'option

σ_T : la volatilité implicite d'une option de maturité T,
 y_T est le taux d'intérêt continu de maturité T.

9.4 Détail de la composition du portefeuille répliquant utilisé

Portefeuille répliquant							
idx	Instrument	Base Index	Term 1	Term 2	Strike	Nominal	% MCV
1	Obligation zéro coupon		1			-35 435	98,7%
2	Obligation zéro coupon		5			37 364	86,9%
3	Obligation zéro coupon		10			-15 822	69,6%
4	Obligation zéro coupon		15			57 217	54,5%
5	Obligation zéro coupon		20			-4 802	43,7%
6	Obligation zéro coupon		25			73 942	36,5%
7	Obligation zéro coupon		30			20 603	31,3%
8	Obligation zéro coupon		35			-2 123	27,2%
9	Obligation zéro coupon		40			81 269	23,7%
10	Indice Action	EUR_Action	1	5		11 050	99,9%
11	Indice Action	EUR_Action	5	5		-2 431	99,9%
12	Indice Action	EUR_Action	10	5		2 930	99,9%
13	Indice Action	EUR_Action	15	5		308	99,4%
14	Indice Action	EUR_Action	20	10		186	100,8%
15	Indice Action	EUR_Action	30	10		698	96,4%
16	Indice Action	EUR_Action	40	10		230	101,5%
17	Indice Immobilier	EUR_Immo	1	5		-300	99,9%
21	Indice Immobilier	EUR_Immo	5	5		2 320	99,9%
22	Indice Immobilier	EUR_Immo	10	5		-2 919	99,9%
23	Indice Immobilier	EUR_Immo	15	5		449	99,8%
24	Indice Immobilier	EUR_Immo	20	10		3 517	100,1%
25	Indice Immobilier	EUR_Immo	30	10		-1 140	99,8%
26	Indice Immobilier	EUR_Immo	40	10		109	99,2%
27	Put sur Indice	EUR_Action	1		100,0%	4 200	10,0%
29	Put sur Indice	EUR_Action	1		80,0%	-23 500	2,5%
30	Put sur Indice	EUR_Action	1		60,0%	-10 000	0,2%
31	Put sur Indice	EUR_Action	5		100,0%	28 500	16,8%
32	Put sur Indice	EUR_Action	5		80,0%	-61 500	8,7%
33	Put sur Indice	EUR_Action	5		60,0%	135 000	3,3%
34	Put sur Indice	EUR_Immo	1		90,0%	500	0,7%
35	Put sur Indice	EUR_Immo	1		80,0%	-170	0,1%
36	Floor	EUR_1Y	1	1	2,50%	-16 344	0,4%
38	Floor	EUR_5Y	1	5	3,00%	-43 917	1,2%
39	Floor	EUR_10Y	1	5	3,50%	36 655	1,0%
41	Floor	EUR_20Y	1	5	4,00%	-25 237	1,3%
42	Floor	EUR_30Y	1	5	4,00%	20 277	1,6%
43	Cap	EUR_1Y	1	1	2,50%	143 932	0,9%
44	Cap	EUR_5Y	1	5	3,00%	-106 852	7,6%
45	Cap	EUR_10Y	1	5	3,50%	96 964	6,8%
46	Cap	EUR_20Y	1	5	4,00%	54 443	4,2%
47	Cap	EUR_30Y	1	5	4,00%	-25 167	2,5%
48	Put sur Indice	EUR_Action	1		40,00%	-26 000	0,0%
50	Put sur Indice	EUR_Action	1		30,00%	-20 000	0,0%

9.5 Multiplicateurs de Lagrange

Le multiplicateur de Lagrange est utilisé pour résoudre des problèmes d'optimisation avec des contraintes d'égalité. Nous considérerons le cas d'une contrainte à deux variables $X = (x, y)$

Soit le problème : $\max f(X)$ sous la contrainte $h(X) = 0$.

On appelle le Lagrangien associé à ce problème la fonction :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda * h(x, y)$$

Le Lagrangien permet d'introduire la contrainte dans la fonction objectif avec une certaine pénalité λ . Ainsi le problème d'optimisation initiale revient à maximiser une fonction à trois variables.

Chercher les points stationnaires (x^*, y^*, λ^*) du Lagrangien $L(x, y, \lambda)$, signifie que nous cherchons (x^*, y^*, λ^*) tel que $\bar{V} L(x^*, y^*, \lambda^*) = (0, 0, 0)$.

De l'équation précédente on déduit le système suivant comportant les trois équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x} L(x^*, y^*, \lambda^*) = f'_x(x^*, y^*) - \lambda^* h'_x(x^*, y^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} L(x^*, y^*, \lambda^*) = f'_y(x^*, y^*) - \lambda^* h'_y(x^*, y^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(x^*, y^*, \lambda^*) = -h(x^*, y^*) = 0$$

Dans les deux premières équations, on reconnaît les conditions d'optimum du premier ordre: $\bar{V} f(x^*, y^*) - \lambda^* \bar{V} h(x^*, y^*) = (0, 0)$, alors que la troisième équation est équivalente à la contrainte initiale imposée par le modèle $h(x, y) = 0$, au point (x^*, y^*) (point admissible).

La méthode du Lagrangien consiste donc à transformer un problème d'optimisation d'un modèle avec contraintes d'égalité à celui de recherche des points stationnaires d'une fonction sans contrainte. De plus, puisque $h(x^*, y^*) = 0$ pour tout point optimal (x^*, y^*) , la valeur du Lagrangien est la même que celle de l'objectif en ce point :

$$L(x^*, y^*, \lambda^*) = f(x^*, y^*) - \lambda^* h(x^*, y^*) = f(x^*, y^*)$$

9.6 Interpolation spline cubique

Les splines sont des fonctions mathématiques utilisées notamment dans le domaine de l'imagerie numérique. Ils permettent de réaliser des interpolations ou des approximations de fonctions à partir d'un ensemble discret de points connus.

On dit que S est un spline de degré n , définie sur un intervalle $[a, b]$ composé de k sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ tels que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, si

- $S \in C^{n-1}([a, b])$
- Pour i entier compris entre 0 et k , la restriction de S à $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n

Autrement dit, un spline est une fonction polynomiale par morceaux dotée de propriétés fortes de régularité.

A partir d'un ensemble de points connus $f(t_0), \dots, f(t_k)$, il est possible de construire un spline de degré n qui passe par tous les points, et qui peut être utilisé pour des besoins d'interpolation. Appelons P_1, \dots, P_k les polynômes de degré n ou inférieur tels que $\forall x \in [t_{i-1}, t_i], S(x) = P_i(x)$. Chaque polynôme a $n+1$ coefficients, ce qui au total fait $k(n+1)$ inconnues à déterminer.

Nous souhaitons que le spline passe par tous les points connus, ce qui se traduit par les $2k$ équations suivantes : $P_i(t_{i-1}) = f(t_{i-1})$ et $P_i(t_i) = f(t_i)$

Ensuite, la contrainte de régularité impose la continuité des dérivées d'ordre 1 à $n-1$ sur l'ensemble des points connus. On obtient ainsi $(k-1)(n-1)$ équations supplémentaires :

$$P_i^{(j)}(t_i) = P_{i+1}^{(j)}(t_i), \text{ pour } i \text{ et } j \text{ entiers tels que } 1 \leq i \leq k-1 \text{ et } 1 \leq j \leq n-1.$$

Au total, on a $k(n+1)$ inconnues et on dispose de $k(n+1) - (n-1)$ équations, ce qui laisse $n-1$ degrés de liberté, à fixer en fonction des conditions aux limites souhaitées.

Ceci permet d'obtenir un système d'équations linéaire, qui se résout à l'aide de méthodes classiques. Ensuite, une fois les polynômes P_i déterminés, ils sont utilisés pour interpoler des points intermédiaires dans l'intervalle $[a, b]$.

Les splines les plus fréquemment utilisés dans la littérature financière sont ceux de degré 3, d'où l'appellation « Cubic Spline ». Ce sont ces splines qui ont été utilisés dans l'étude, avec pour condition aux limites supplémentaires que les dérivées secondes soient nulles aux extrémités.

9.7 Réplication des passifs et des marges : considérations théoriques et pratiques

Egalité théorique du calcul direct et indirect du BEL

Considérons l'actif économique $X(t)$ d'une compagnie et un actif fictif $Y(t)$ de trésorerie qui sera la contrepartie unique de tous les flux entrants ou sortants (primes, prestations, commissions, frais généraux, marges versées aux actionnaires, dividendes sur fonds propres, impôts...). L'actif $Y(t)$ sera investi au taux sans risque, et par convention $Y(0) = 0$. L'actif $X(t)+Y(t)$ est une stratégie autofinancée, qui est par conséquent martingale dans l'univers de probabilité risqué neutre.

$$E_Q((X(t)+Y(t))D(t)) = (X(0)+Y(0))D(0) = X(0), \text{ car } D(0) = 1$$

Si T est l'horizon d'écoulement du bilan, $X(T) = 0$. Aussi

$$E_Q(Y(T)D(T)) = X(0)$$

Or $Y(T)$ est la somme des flux entrants / sortants du bilan de la compagnie, capitalisés au taux

continu sans risque : $\sum_i CF(t_i) e^{\int_0^{t_i} r(u) du}$. Par ailleurs, $D(T) = e^{-\int_0^T r(u) du}$, et on peut écrire :

$$E_Q(Y(T)D(T)) = E_Q\left(\sum_i CF(t_i) e^{\int_0^{t_i} r(u) du} \cdot e^{-\int_0^T r(u) du}\right) = E_Q\left(\sum_i CF(t_i) \cdot e^{-\int_0^{t_i} r(u) du}\right) = E_Q\left(\sum_i CF(t_i) \cdot D(t_i)\right)$$

$$\text{Ainsi : } E_Q\left(\sum_i CF(t_i) \cdot D(t_i)\right) = X(0)$$

En séparant les flux revenant aux actionnaires brut d'impôt et ceux revenant aux autres contreparties (bénéficiaires, prestataires, salariés, distributeurs, gestionnaires, ...), on obtient

$$E_Q\left(\sum_i CF_{marge}(t_i) \cdot D(t_i)\right) + E_Q\left(\sum_i CF_{passif}(t_i) \cdot D(t_i)\right) = X(0)$$

Autrement dit, l'actif économique de la compagnie est égal à la valeur économique du passif plus la valeur économique des marges versées à l'actionnaire brutes d'impôt et dividendes sur fonds propres

$$Actif_i = MCV_i + BEL_i$$

Convergence des méthodes Monte-Carlo

La valorisation des passifs par simulation avec un modèle DFA subit les mêmes contraintes que n'importe quel pricer d'options Monte-Carlo. D'un côté, il est nécessaire d'utiliser le plus grand nombre possible de scénarios, de manière à obtenir une bonne convergence de

l'estimateur. D'un autre côté, un nombre important de scénarios induit un temps de calcul important. Aussi, il est d'usage de procéder à un arbitrage entre précision et temps de calcul.

De ce fait, l'égalité théorique présentée ci-dessus n'est pas parfaitement vérifiée en pratique. On observe ce que l'on peut appeler des fuites de modèle ou « leakage » :

$$Actif_i = MCV_i + BEL_i + Leakage_i$$

Dans l'approche de portefeuilles répliquants retenue pour notre étude, les fonds propres économiques sont déduits pour chaque scénario monde réel à partir de la valeur des actifs et la valeur des passifs calculés à l'aide du portefeuille répliquant :

$$MCV_i = Actif_i - BEL_i$$

Le traitement des fuites est essentiel pour assurer la cohérence entre la construction du portefeuille répliquant et les valeurs de marché des passifs de référence. Pour chaque scénario monde réel de valorisation, nous avons réparti les fuites du modèle de projection DFA entre la valeur des passifs et la valeur des fonds propres, au prorata de leur contribution respective à la valeur totale hors fuites de modèle.

	(1)	(2)	(3)	(4) = (1) - (2) - (3)	(5) = (2)*[1 + (4)/((2)+(3))]	(5) = (3)*[1 + (4)/((2)+(3))]
Scen #	Valeur Actifs (Asset NAV)	Valeur Surplus (SH NAV)	Valeur Passifs (PH NAV)	Fuites de modèle (Leakage)	Surplus ajusté (SH NAV + leakage_asset)	Passifs ajustés (PH NAV + leakage_liab)
1	102 375	17 235	85 463	-323	17 181	85 194
2	104 695	16 479	88 547	-331	16 427	88 268
3	88 352	14 546	74 004	-198	14 513	73 838
4	84 009	13 008	71 443	-442	12 940	71 069
5	102 566	13 102	89 844	-380	13 054	89 513

Passifs répliqués

Les fuites de modèle sont habituellement exprimées en pourcentage des actifs en début de projection. On observe une forte corrélation entre les fuites de modèle et les niveaux de volatilité élevé pour les taux et action, ce qui est conforme aux attentes. En effet, plus la volatilité est élevée, plus la convergence est lente.

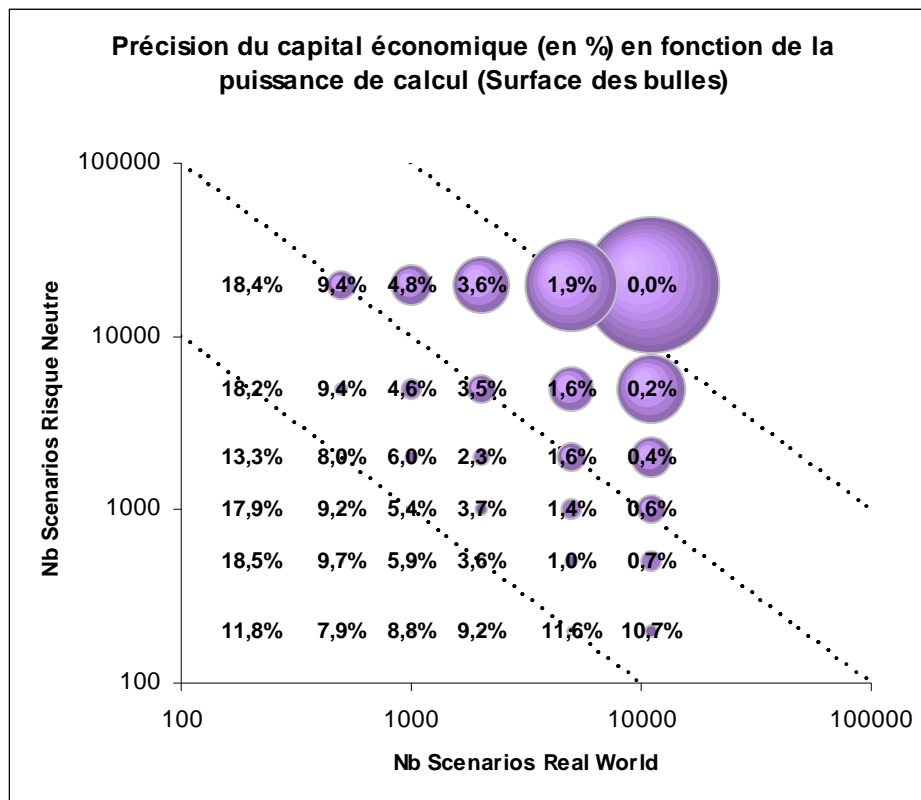
L'augmentation du nombre de scénario permettrait de diminuer les fuites de modèle. Cependant le gain obtenu pour un passage de 2 000 à 20 000 scénarios est faible au regard de l'allongement du temps de calcul des différentes étapes de l'étude (calibration du portefeuille répliquant, production des sensibilités monde réel,...).

A titre exploratoire, nous avons procédé à une estimation empirique de la précision du capital économique en fonction de la puissance de calcul nécessaire. Pour ce faire, nous avons considéré que :

- Le capital économique théorique exact est calculé à l'aide de 11 000 scénarios monde réel pour lequel chaque scénario est évalué à l'aide de 20 000 scénarios risque neutre.
- La précision de calcul est estimé, à partir des données disponibles, par écart avec ce capital économique théorique, avec une méthode simple : les scénarios monde réel sont découpés en tranches. Par exemple, 11 000 scénarios correspondent à 5 jeux de 2 000 scénarios indépendants. Le capital économique est ensuite estimé sur chacune

des tranches, ce qui permet de déterminer l'erreur par rapport au capital économique théorique. L'erreur est ensuite moyennée (en valeur absolue) pour obtenir une estimation de l'erreur moyenne.

Le graphique ci-dessous représente l'erreur moyenne sur le capital économique en fonction de la puissance de calcul allouée. Les pointillés en diagonale représentent des courbes d'iso-puissance de calcul.



A puissance de calcul donnée, la précision est plus forte lorsque les scénarios sont alloués majoritairement à l'augmentation du nombre de scénarios monde réel. Par exemple, 500RW*20000RN conduit à une précision de 9,4%, contre 1,6% pour 5000RW*2000RN, à puissance de calcul équivalente.

L'étude a été menée 11 000 scénarios RW pour 2 000 scénarios RN, ce qui constitue un bon choix d'allocation des scénarios et aboutit à une précision acceptable.

Note : les estimations de précision présentées ci-dessus peuvent être affinées à l'aide de méthodes plus rigoureuses de type bootstrap, par tirage aléatoire dans les 11 000 scénarios RW. Néanmoins, les écarts de précision sont suffisamment significatifs pour donner une tendance claire dans le choix pratique de l'allocation d'un budget de scénarios.

9.8 Réplifications des passifs vs. marges

Dans leur mise en œuvre opérationnelle, les portefeuilles répliquants sont le plus souvent utilisés pour la réplification des passifs. La distribution des fonds propres économiques est alors déterminée par méthode indirecte. Cependant une erreur de réplification faible sur les passifs peut conduire à une erreur relative importante sur les fonds propres et par conséquent sur les estimations de capital économique.

Par définition le capital économique est défini par :

$$Cap_Eco = FP_0 - P(0,1) * q_{99,5\%}(FP_1)$$

Avec FP_0 le besoin en fonds propre en $t=0$ (situation centrale), $P(0, 1)$ le prix du zéro-coupon de maturité 1 an.

Nous allons estimer l'erreur commise par l'approche de réplification des passifs, sous l'hypothèse que l'approche portefeuilles répliquants conserve l'ordre des scénarios. Soit p un scénario de simulation monde réel correspondant au quantile à 99,5%. Il vient:

$$Cap_Eco = FP_0 - P(0,1) * (A_p(1) - L_p(1))$$

$$Cap_Eco_{RP} = FP_0 - P(0,1) * (A_p(1) - RP_p(1))$$

Avec $A_p(1)$ l'actif correspondant à ce scénario à $t=1$, $L_p(1)$ le passif économique $t=1$, $RP_p(1)$ le passif économique estimé par le portefeuille répliquant à $t=1$.

L'écart entre le montant théorique et l'estimation est :

$$\frac{|Cap_Eco_{RP} - Cap_Eco|}{Cap_Eco} = P(0,1) * \frac{|RP_p(1) - L_p(1)|}{Cap_Eco}$$

Que l'on peut réécrire :

$$\frac{|Cap_Eco_{RP} - Cap_Eco|}{Cap_Eco} = \frac{|RP_p(1) - L_p(1)|}{L_p(1)} * \frac{P(0,1).L_p(1)}{Cap_Eco} = \varepsilon_{RP} * M$$

Il apparaît 2 termes qui sont d'une part l'erreur de réplification des passifs (ε_{RP}) et un coefficient multiplicatif amplifiant cette erreur noté M . Il est clair que ce coefficient est très supérieur à 1. Sous l'hypothèse réaliste que la valeur des passifs économiques est entre 15 et 25 fois supérieures au montant du capital économique, une erreur de 1% de réplification des passifs peut mener à une erreur d'estimation entre 15% et 25% du capital économique. Cette conclusion est d'ailleurs valable pour toute autre méthode d'approximation basée sur les passifs.

La pratique de marché des acteurs utilisant actuellement les portefeuilles répliquant dans leur modèle interne est de répliquer les passifs plutôt que les marges. Ce choix découle du calcul indirect des fonds propres économiques effectués par différence entre les actifs en valeur de marché contenus dans les systèmes d'information de la compagnie et les actifs correspondant aux portefeuilles répliquant reproduisant les passifs.

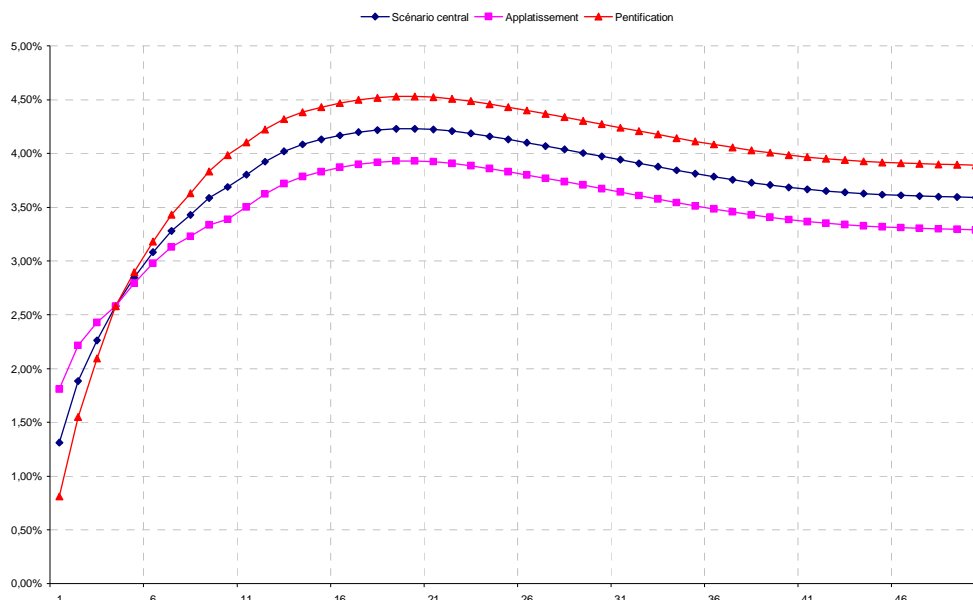
Dans notre étude, nous avons également suivi cette approche par réplification des passifs.

9.9 Sensibilités non parallèles de la courbe des taux

L'analyse en composantes principales des courbes des taux historiques permet de déterminer qu'au-delà du facteur de niveau, il existe un facteur de pente. En incluant ce second facteur, il est possible d'expliquer 98% [7] de la variance totale de la courbe des taux. Des sensibilités à la pente de la courbe des taux ont été calculées à l'aide du modèle DFA, et les résultats sont présentés ci-dessous.

		Delta MVA	Delta MCV	Delta MVL
Parallèle	-2,0%	52228	394	51835
Parallèle	-1,5%	36074	796	35278
Parallèle	-1,0%	22212	720	21492
Parallèle	-0,5%	10286	388	9898
Scénario Central		0	0	0
Parallèle	0,5%	-8896	-323	-8573
Parallèle	1,0%	-16609	-631	-15978
Parallèle	1,5%	-23315	-923	-22392
Parallèle	2,0%	-29159	-1187	-27973
Parallèle	3,0%	-38742	-1630	-37112
Parallèle	4,0%	-46137	-1948	-44189
Applatissement	0,5% / -0,3%	5926	225	5701
Pentification	-0,5% / 0,3%	-5428	-212	-5216

Les scénarios de rotation de la courbe des taux (taux pivot 4 ans – cf graphes ci-dessous) ont un impact plus faible sur le niveau de fonds propres économiques que des mouvements parallèles de même amplitude. Aussi, il est clair que les mouvements non parallèles de la courbe des taux ne sont pas un risque majeur sur le contrat de retraite considéré.



10 Bibliographie

1. P. Mathoulin, M. Piermay, A. Cohen, (2002), *La Gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel*, Economica
2. F. Le Vallois, P. Palsky, B. Paris, A. Tosetti, (2003), *Gestion actif passif en assurance vie*, Economica
3. CFO Forum, (2009), *MCEV Principles and Guidance*,
http://www.cfoforum.nl/downloads/MCEV_Principles_and_Guidance_October_2009.pdf
4. Wikipedia, *Solvency 2*,
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Solvabilit%C3%A9_II&oldid=59741522
3. F. Planchet, P. Théron, A. Kamega, (2009) *Scénarios économiques en assurance*, Economica
4. L. Devineau, S. Loiseul, (2009), *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité 2*, Bulletin français d'actuariat.
5. C. Burmeister, H. Mausser (2009), *Using trading restrictions in replicating portfolios*
6. P.M Booth, G. Marcato, (2003), *The measurement and modelling of commercial real estate performance*, Institute of Actuaries
7. EIOPA, (2009) *Consultation paper 69*
8. Wikipedia, *Factorisation de Cholesky*,
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Factorisation_de_Cholesky&oldid=64054967
9. EIOPA, (2009) *Consultation paper 70*
10. Milliman, (2010), *Distribution des fonds propres à un an : analyse des différentes approches*
11. F. Black, M. Scholes, (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3.
12. E. Derman, D. Ergener, I. Kani, (1994), *Static options replication*, Goldman Sachs Quantitative strategies research notes
13. A. Chou (1997), *Static Replication of Exotic Options*, Massachusetts Institute of Technology
14. P. Boeckel, L. van Delft, T. Hoshino, R. Ino, C. Reynolds, H. Verheugen, (2009) *Replicating portfolios*, Milliman
15. J. Revelen, (2009), *Replicating portfolio et capital économique en assurance vie*, Swiss Life, Rapport final de travail de fin d'études
16. J. Oechslin, O. Aubry, M. Aellig, A. Kaeppli, D. Broennimann, A. Tandonnet, G. Valois, (2007), *Replicating embedded options*, Life and pensions.
17. M. Lasfarges, (2004), *La gestion actif-passif à la CNP*, Association française de gestion actif-passif,
http://www.afgap.org/documents/PetitsDejeuners/2004/20040506_GAPdeCNP.pdf
18. L. Devineau, M. Chauvigny, (2010), *Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité 2*, HAL