

**Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles  
pour l'obtention du diplôme  
du Centre d'Etudes Actuarielles  
et l'admission à l'Institut des Actuaire**  
le : \_\_\_\_\_

Par : Eric MÉGEL

Titre : Revalorisation au taux d'inflation du funéraire d'un portefeuille de contrats obsèques  
Générateurs de scénarii économiques

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1an  2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

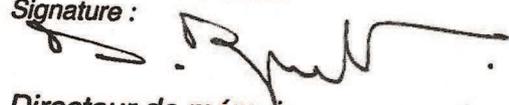
Membre présent du jury de  
l'Institut des Actuaire :

signature

Entreprise : AUXIA

Nom : Bruno BACQUART  
Directeur Général

Signature :



Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Guy CALI  
Responsable Département Technique

Signature :



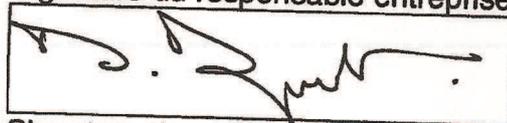
Invité :

Nom : \_\_\_\_\_

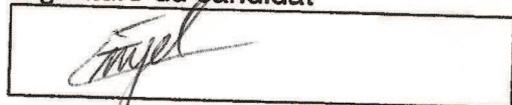
Signature : \_\_\_\_\_

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels  
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Thomas BEHAR

Vincent DAMAS

Gérard CROSET

Arnaud COHEN

Jean-Pierre DIAZ

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Michel FROMENTEAU

Stéphane MENART

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Florence PICARD

Olivier LOPEZ

Secrétariat :

Bibliothèque :

## RESUME

L'objectif de ce mémoire est de s'intéresser à la revalorisation d'un portefeuille de contrats obsèques lorsque le rendement suit le taux d'inflation du funéraire. Une étude actif-passif permettra de vérifier si l'assureur peut suivre cet engagement.

Ce mémoire est subdivisé en quatre parties. La première partie débute par la définition des contrats obsèques, sans oublier de rappeler l'évolution des obsèques en France. Elle se termine par la présentation de la société AUXIA dans laquelle s'est déroulée l'étude. La seconde partie modélise l'actif en utilisant des générateurs de scénarii économiques. Deux modèles sont proposés dont la clé est l'inflation. La troisième partie présente les différentes étapes à la construction d'une table d'expérience décès. Une étude sur le rachat viendra compléter cette partie. La finalité de ces travaux est la modélisation des prestations futures. La quatrième partie sera consacrée à une étude actif-passif et une présentation du premier pilier de solvabilité 2 où une mise à jour du QIS 5 sera faite en intégrant ce nouveau portefeuille afin de constater les variations sur les exigences quantitatives.

### Mots clés :

*Assurance vie; Contrat obsèques; Population observée; Loi de survie; Risque décès; Taux de décès; Table d'expérience; Taux bruts; Table lissée; Table réglementaire; Générateur de scénario économique; Ahlgrim; Wilkie; Gestion actif-passif; Solvabilité 2; QIS 5.*

## ABSTRACT

The objective of this paper is to focus on the revaluation of a portfolio funeral contracts when performance following the inflation funeral rate. An asset and liability management will test if the insurer can follow this commitment.

This essay is divided into four parts. The first part begins with the definition of funeral contracts, as well to recall the evolution of the funeral in France. It ends with the presentation of the company AUXIA in which the study was conducted. The second part models the asset using of economic scenarios economic. Two models are proposed whose key is inflation. The third part presents the steps to build a experiment table of death. A study of surrender will complete this part. The purpose of this work is the modeling of future benefits. The fourth part is devoted to an asset and liability management and presentation of the first pillar of Solvency 2, where an update of the QIS 5 will be done by integrating this new portfolio to see the changes on the quantitative requirements.

### Keywords :

*Life insurance; Funeral contract; Group under observation; Survival model; Death risk; Mortality rates; Experiment table; Revision of estimates; Graduation method; Reference table; Economic scenario generator; Ahlgrim; Wilkie; Asset and liability; Solvability II; QIS 5.*

## **REMERCIEMENTS**

Je tiens à remercier Monsieur Giner-Navarro et Monsieur Duminil de m'avoir permis, par leur recommandation, d'intégrer le Centre d'Etudes Actuarielles.

Je tiens à remercier Monsieur Guy Cali, mon responsable, qui m'a permis de réaliser ce mémoire dans de bonnes conditions pour le terminer dans les délais.

Je remercie l'équipe de la Direction Technique pour leur participation à la relecture.

Je remercie Monsieur Izraelewicz pour sa formation sur Solvabilité 2.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Anani Ayodélé Olympio pour son soutien dès le début. Il a contribué à la réussite de ce mémoire et je lui en suis reconnaissant.

Je remercie mes parents pour leur aide sur la relecture de ce document, ma femme pour son soutien et sa patience et je présente mes excuses à mes deux filles qui n'ont pas eu de ma part une grande disponibilité cette année.

## SOMMAIRE

<b>RESUME</b> .....	<b>2</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>3</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	<b>4</b>
<b>SOMMAIRE</b> .....	<b>5</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	<b>7</b>
<b>PARTIE I – ETUDE DU PORTEFEUILLE</b> .....	<b>10</b>
<b>Chapitre 1 – Les contrats obsèques</b> .....	<b>11</b>
Section 1.1 – Obsèques, un bref retour dans le passé.....	11
Section 1.2 – Présentation du contrat obsèques .....	12
<b>Chapitre 2 – Présentation de la société</b> .....	<b>16</b>
<b>Chapitre 3 – Statistiques du portefeuille</b> .....	<b>18</b>
<b>Conclusion de la première partie</b> .....	<b>26</b>
<b>PARTIE II – MODELISATION DE L'ACTIF</b> .....	<b>28</b>
<b>Chapitre 1 – Présentation des deux modèles</b> .....	<b>29</b>
Section 1.1 – Modèle de Wilkie .....	29
Section 1.2 – Modèle d'Ahlgrim.....	32
Section 1.3 – Description des données.....	34
<b>Chapitre 2 – Calibrage du modèle de Wilkie</b> .....	<b>35</b>
Section 2.1 – L'indice des prix et taux d'inflation.....	35
Section 2.2 – Le taux de dividende (rendement des actions) .....	40
Section 2.3 – Le montant des dividendes.....	45
Section 2.4 – Le taux d'intérêt à long terme .....	46
Section 2.5 – Le taux d'intérêt à court terme .....	49
<b>Chapitre 3 – Calibrage du modèle d'Ahlgrim</b> .....	<b>53</b>
Section 3.1 – L'inflation .....	53
Section 3.2 – Les taux d'intérêts réels.....	56
Section 3.3 – Le rendement des actions .....	61
<b>Chapitre 4 – Prédiction des modèles</b> .....	<b>65</b>
Section 4.1 – Générateurs de nombres aléatoires.....	65
Section 4.2 – Projections futures.....	66
<b>Chapitre 5 – Inflation du funéraire</b> .....	<b>70</b>
Section 5.1 – Définition du modèle.....	70
Section 5.2 – Projections futures de l'inflation funéraire.....	72
<b>Conclusion de la deuxième partie</b> .....	<b>73</b>

<b>PARTIE III – MODELISATION DU PASSIF.....</b>	<b>75</b>
<b>Chapitre 1 – Table d'expérience .....</b>	<b>76</b>
Section 1.1 – Méthodologie .....	76
Section 1.2 – Construction de la base de données.....	77
Section 1.3 – Outils probabilistes.....	78
<b>Chapitre 2 – Kaplan Meier.....</b>	<b>82</b>
Section 2.1 – Définition .....	82
Section 2.2 – Résultats .....	85
<b>Chapitre 3 – Whittaker–Henderson .....</b>	<b>87</b>
Section 3.1 – Définition .....	87
Section 3.2 – Résultats .....	90
<b>Chapitre 4 – Etude des taux de rachat .....</b>	<b>93</b>
<b>Conclusion de la troisième partie.....</b>	<b>94</b>
<b>PARTIE IV – ACTIF–PASSIF &amp; SOLVABILITE 2 .....</b>	<b>96</b>
<b>Chapitre 1 – Caractéristiques du produit.....</b>	<b>97</b>
<b>Chapitre 2 – Solvabilité 2.....</b>	<b>103</b>
<b>Chapitre 3 – Méthodologie .....</b>	<b>106</b>
Section 3.1 – Best estimate .....	106
Section 3.2 – Marge de risque.....	108
Section 3.3 – SCR .....	110
Section 3.4 – MCR.....	115
<b>Chapitre 4 – Résultats.....</b>	<b>116</b>
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>123</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>124</b>
ANNEXE 1 : Régression .....	124
ANNEXE 2 : Processus Ornstein-Uhlenbeck .....	125
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>127</b>

## INTRODUCTION GENERALE

Le marché du funéraire est passé par plusieurs transformations. Dans sa forme actuelle, les funérailles sont devenues un service à la personne. L'opérateur funéraire est considéré comme un maître d'œuvre dans l'organisation des obsèques et dans la coordination des différents intervenants.

Traditionnellement, le déroulement des obsèques était du ressort des descendants. Par opposition, il est recommandé désormais de s'occuper de sa succession pour épargner aux survivants la question de l'héritage. De nos jours, de plus en plus de personnes souhaitent laisser des instructions sur l'organisation de leurs obsèques. Les principales raisons sont la volonté de ne pas être une charge financière pour ses enfants et rendre plus facile l'organisation des funérailles lorsque les familles sont dispersées au niveau géographique.

Le contrat obsèques répond à ces besoins. Si l'opérateur funéraire tient le rôle central, l'assureur en est le vecteur financier. Le contrat obsèques présente donc une garantie financière régit par le Code des Assurances et la garantie de respecter les dernières volontés du défunt.

AUXIA est une compagnie d'assurances dont l'activité principale est la commercialisation de contrats obsèques. Le coût des obsèques est important, en moyenne 4 000 euros en 2011, et le capital garanti peut être insuffisant le moment venu en fonction de l'évolution des prix. Le sujet de ce mémoire est d'étudier, dans l'hypothèse d'un lancement d'un produit de contrats obsèques, la possibilité d'obtenir un taux de rendement global au moins égal au taux d'inflation du funéraire et d'en mesurer l'impact sur la solvabilité de la société. Ce n'est pas un engagement contractuel d'AUXIA vis-à-vis de ses clients, mais un engagement moral qu'elle souhaite respecter dans la mesure du possible.

Pour mener à bien cette étude, une projection conjointe sur le long terme du passif et de l'actif sera lancée. Le taux de rendement, énoncé précédemment, sera financé par la participation aux résultats. Cette participation est déterminée par le solde technique et les produits financiers. Ce mémoire est subdivisé en quatre parties :

- La première partie, après un rappel historique de l'évolution des obsèques en France, définit plus en détail, dans un cadre technique et réglementaire, le contrat obsèques. Le chapitre suivant présente la société AUXIA au niveau historique et de son développement actuel permettant ainsi de comprendre l'intérêt qu'elle porte sur ce sujet. Cette partie se termine par une étude descriptive de son portefeuille vie entière. Les résultats donneront des éléments de réponses pour la troisième partie et serviront à poser des hypothèses sur le projet de commercialisation d'un produit obsèques dans la quatrième partie.

- La seconde partie présente sur le long terme les projections des valeurs de marché des actifs et des variables macro-économiques que l'on dénomme « générateur de scénarii économiques (GSE) ». Les actifs retenus sont les actions, le monétaire et les obligations, concernant les variables, ce sont les taux d'intérêts et l'inflation. J'utilise dans ce mémoire deux modèles « intégrés » où la variable clé, ici l'inflation, détermine la dynamique des autres variables. La mise en œuvre pour chaque modèle nécessite d'avoir un historique des données dont la profondeur est cohérente avec l'horizon de projection. Ce problème survient pour l'inflation du funéraire où l'historique est faible. La solution proposée est de définir une relation entre l'inflation et l'inflation du funéraire.
- Dans la troisième partie, afin de déterminer les flux des prestations futures relatifs au risque de décès, je construis une table d'expérience à partir de la population issue du portefeuille vie entière de la société. La première étape consiste à estimer des taux bruts de mortalité en utilisant une méthode non paramétrique. Dans la seconde étape, j'emploie une technique de lissage afin d'obtenir une forme régulière sur les taux de décès. Après la construction de cette table, différents tests seront lancés afin de valider l'étude. Pour terminer, sachant que dans un contrat d'assurance vie le souscripteur peut mettre fin à son contrat à tout moment, une étude sur le taux de rachat du portefeuille sera menée.
- La dernière partie sera consacrée à une gestion actif-passif sur le nouveau produit. Les résultats de la seconde partie regroupant les taux de rendements des actifs permettront de déterminer les produits financiers, et ceux de la troisième partie, le solde technique dont la principale composante est la marge de mortalité qui s'obtient par la différence entre les taux de décès de la table réglementaire (utilisée dans le tarif et le provisionnement) et les taux de décès de la table d'expérience. Après la construction de l'outil, une vérification sera faite si l'objectif sur le taux de rendement est réalisable sur chaque scénario. Dans le cadre de solvabilité 2 où la société s'est impliquée dans le QIS5, le nouveau produit sera inclus dans le périmètre de la société afin de constater les variations sur les paramètres quantitatifs tels que le Best Estimate, le SCR et le MCR.

**PARTIE I :**  
**ETUDE DU PORTEFEUILLE**

## **Partie I – Etude du portefeuille**

Le premier chapitre retrace, sur plusieurs siècles, l'évolution des obsèques dans le domaine du social et dans le cadre législatif. Ceci permet de faire le lien sur la présentation du contrat obsèques commercialisé à ce jour sans oublier de mentionner la partie réglementaire de ce produit.

Le second chapitre présente la société AUXIA au niveau de son histoire et de son développement actuel en se positionnant sur plusieurs produits. Le sujet de ce mémoire portant sur les contrats obsèques, il sera intéressant de signaler la part de marché d'AUXIA par rapport aux autres banques et assureurs de la place, ainsi que ses produits « sur mesure ».

Le dernier chapitre montre une étude descriptive du portefeuille vie entière de la société. Ces résultats seront exploités dans la troisième partie, la construction d'une table d'expérience, et dans la dernière partie sur les hypothèses de la souscription d'un nouveau produit de contrat obsèques.

## Chapitre 1 – Les contrats obsèques

### Section 1.1 – Obsèques, un bref retour dans le passé

Pendant deux siècles, l'organisation des funérailles était confiée strictement aux communes. Ce monopole prend fin en 1993 avec la loi Sueur qui officialise l'ouverture du marché à la concurrence.

Avant qu'une profession spécialisée dans les services funéraires débute au XIX<sup>ème</sup> siècle, l'organisation des funérailles était locale. Elle était circonscrite dans la localité du mort où un lien social était présent entre les parents proche du défunt et les habitants du village ou d'un quartier pour les plus grandes villes.

Le rituel comportait principalement l'annonce publique du décès, l'aménagement de la demeure, l'ancêtre de la thanatopraxie, le cortège, la cérémonie, l'inhumation et le repas. Pour chacune de ces étapes, on désignait au sein de la communauté un ou plusieurs habitants exerçant un métier où leur savoir faire pouvait mener à bien la tâche demandée.

Des institutions prennent le relais dans certaines régions en prenant le monopole sur l'organisation des funérailles. Les confréries de charité se trouvant en Bretagne et en Normandie, puis les pénitents en Provence. Ces sociétés laïques sont composées principalement de notables locaux. Ces frères de charité, chrétiens, sont reconnus par l'Eglise. Elles sont une alternative face à l'Eglise ou les marchands en incarnant un modèle d'organisation mutualiste et solidaire.

Cette relation avec l'Eglise oscillant entre concurrence et coopération s'arrête lors du Concile de Trente (1545–1563). L'Eglise contrôle le cérémonial et devient le pivot des funérailles. Une rétribution imposée par l'Evêque est obligatoire pour être inhumé en dépit du pouvoir royal. Cette domination grandira jusqu'à la révolution.

Pendant la révolution, ces institutions perdent leur privilège. Le principe de liberté des inhumations va laisser place à un commerce parfois anarchique où l'indécence apparaît lors des funérailles. Face à cette situation, les législateurs vont rétablir un protocole minimal. L'Eglise est réhabilitée comme acteur central.

A Paris, les municipalités se chargent du service des inhumations jusqu'à l'attribution du marché par le préfet Frochot à un unique entrepreneur. L'inhumation étant gratuite, le préfet autorise l'entreprise à vendre des accessoires afin d'arriver à un équilibre financier. C'est un "service libre" distinct des services obligatoires lors des obsèques.

La législation Napoléonienne définit un premier régime juridique des pompes funèbres. Afin de compenser les pertes subies par l'Eglise, elle reprend le monopole des fournitures et services par le Décret Prairial de 1804. Toutefois, le gouvernement maintient son autorité dans le domaine des tarifs. Une distinction est faite entre le "service intérieur" et le "service extérieur". Ceci aboutit à une première forme de régulation entre acteurs public et religieux.

Sous la III<sup>ème</sup> République, on assiste à la laïcisation des services funéraires. Dès 1870, le cadre clérical devient plus controversé. Entre 1879 et 1889, la Chambre et le Sénat sont saisis de propositions de lois pour le rétablissement du régime des cimetières neutres et des enterrements civils.

La loi du 15 novembre 1887 du Code Civil portant sur la liberté des funérailles stipule que « *Tout majeur [...] peut régler les conditions de ses funérailles, notamment en ce qui concerne le caractère civil ou religieux à leur donner et le mode de sa sépulture. Il peut charger une ou plusieurs personnes de veiller à l'exécution de ses dispositions. Sa volonté, exprimée dans un testament ou dans une déclaration faite en forme testamentaire, soit par devant notaire, soit sous signature privée, a la même force qu'une disposition testamentaire relative aux biens, elle est soumise aux mêmes règles quant aux conditions de la révocation.* »

La loi de 1904, période de la séparation de l'Église et l'État, acte de la fin du monopole des fabriques. L'Église se restreint à son territoire religieux et l'autorité de la Commune est renforcée.

Dès la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, l'industrie privée part à la conquête des villes par l'attribution de concessions de services funéraires. C'est la naissance de grandes maisons funéraires telles que les PFG, Roblot et de Borniol. L'entreprise générale des pompes funèbres naît en 1848 de l'alliance d'entrepreneurs concurrents de la ceinture parisienne (Vafflard et Langlé) et s'étendra dans les grandes villes.

Après la seconde guerre mondiale, on assiste au déclin du régime ostentatoire. La motorisation des convois (1955) et le concile de Vatican II (1962-1965) sont des éléments participant à cette évolution. Une partie de l'activité des pompes funèbres disparaît et engage sa mutation en devenant un professionnel des services au défunt.

Autre rupture dans le XX<sup>ème</sup> Siècle, c'est la migration des morts du domicile à l'établissement de santé suite à la médicalisation croissante de la fin de vie. En vingt années (1964-1984), deux tiers des décès sont en milieu hospitalier contre un tiers à l'origine.

La loi du 8 janvier 1993 établit le principe de la liberté d'exercer le service extérieur des pompes funèbres. Cette loi défait le monopole et pose les bases de nouvelles modalités d'encadrement du marché.

## **Section 1.2 – Présentation du contrat obsèques**

Dans une étude réalisée par le CREDOC (Centre de recherche pour l'étude et l'observation des conditions de vie) portant sur les français et les obsèques sur une population représentative des 40 ans et plus, 71 % des personnes interrogées pensent savoir ce qu'est un contrat obsèques. Par contre, seulement 23 % en ont souscrit ou veulent en souscrire.

On dénombre dans le secteur des Assurances deux grands domaines d'activité : les assurances de personnes et les assurances dommages. Les assurances de personnes couvrent les risques afférents à la personne humaine. Elle regroupe l'assurance vie, les assurances relatives aux accidents corporels, à la maladie et à la perte de l'emploi.

Le contrat d'assurance vie est un contrat à géométrie variable. Il se définit comme celui « *par lequel l'assureur s'engage envers le souscripteur, moyennant une prime, à verser au bénéficiaire désigné une somme déterminée, l'exécution de son obligation dépendant de la durée de vie de l'assuré<sup>1</sup>* »

Les produits d'assurance vie sont regroupés en trois familles. Les assurances en cas de décès incluant les contrats obsèques, les assurances en cas de vie et les assurances mixtes.

Le contrat obsèques est encadré par la loi 2004-1343 du 9 décembre 2004 de simplification de droit, appelée « loi Sueur ». En voici les deux principaux articles :

#### Article 11

Après l'article L2223-34 du Code général des collectivités territoriales, il est inséré un article L2223-34-1 ainsi rédigé : « *Toute clause d'un contrat prévoyant des prestations d'obsèques à l'avance sans que le contenu détaillé de ces prestations soit défini est réputée non écrite.* »

#### Article 12

Après l'article L2223-35 du Code général des collectivités territoriales, il est inséré un article L2223-35-1 ainsi rédigé : « *Afin de garantir au contractant ou au souscripteur d'une formule de prestations d'obsèques à l'avance sa pleine et entière liberté de choix sa vie durant, qu'il s'agisse d'un contrat de forme individuelle ou d'adhésion à un contrat de groupe au sens de l'article L. 140-1 du code des assurances, le contrat doit prévoir explicitement la faculté pour le contractant ou le souscripteur de modifier la nature des obsèques, le mode de sépulture, le contenu des prestations et fournitures funéraires, l'opérateur habilité désigné pour exécuter les obsèques et, le cas échéant, le mandataire désigné pour veiller à la bonne exécution des volontés [...], le ou les changements effectués à fournitures et prestations équivalentes ne donnant droit à la perception que des seuls frais de gestion prévus par les conditions générales souscrites [...].* »

Après un décès, un proche peut interroger l'AGIRA (Association pour la Gestion des Informations sur le Risque en Assurance). Cet organisme indique si la personne qui a fait cette demande est ou non bénéficiaire d'un contrat établi au nom de la personne défunte.

La loi du 17 décembre 2007 impose aux assureurs de rechercher les bénéficiaires d'assurance vie et donc les contrats en prévision d'obsèques.

Les sociétés d'assurances adhérentes de la Fédération Française des Sociétés d'Assurance (FFSA) se sont engagées :

- A vérifier que les souscripteurs de plus de 90 ans soient toujours en vie,
- A prévenir le bénéficiaire d'un contrat dans les 30 jours après son identification,
- A revaloriser le capital du de 1,5 fois le taux légal durant les deux premiers mois puis ensuite de 2 fois ce même taux.

---

<sup>1</sup> Y.Lambert-Faivre, Droit des assurances, Précis Dalloz.

Depuis l'entrée en vigueur de la loi Sueur, deux types de contrats sont proposés :

- Le premier, appelé contrat de prestations d'obsèques, prend en charge le financement et l'organisation des obsèques. Ceci implique obligatoirement l'action conjointe d'un assureur et d'un opérateur funéraire. Depuis cette loi, l'opérateur est passé de bénéficiaire acceptant à bénéficiaire de premier rang.
- Le second, dénommé contrat de capital, prend en charge le financement des obsèques mais ne comporte aucune stipulation de prestations funéraires. Au décès de l'assuré, le capital est versé au bénéficiaire désigné qui peut être une personne physique. Donc, le souscripteur n'a aucune garantie que le bénéficiaire utilise ce capital pour le financement de ses obsèques.

Les contrats du second type sont souvent épinglés par les associations de défense des consommateurs qui demandent d'avantage de précision. Dans la même étude du CREDOC citée précédemment, où la question portait sur quel type de contrat obsèques ils allaient s'orienter, un quart d'entre eux font la confusion avec une assurance décès.

L'Autorité de Contrôle Prudentielle (ACP), dans une recommandation datée du 17 juin 2011, demande plus de transparence et une meilleure information lors de la commercialisation de des contrats portant la dénomination « obsèques ».

Le contrat obsèques repose sur la technique de la capitalisation viagère qui nécessite l'utilisation de deux paramètres. L'un viager avec la table de mortalité et l'autre financier avec le taux d'intérêt technique.

### Le paramètre viager

Suite à la définition d'un contrat vie entière où le paiement des prestations est conditionné par la survenance du décès de l'assuré, la probabilité de cet événement est connue par des tables de mortalité indiquant le nombre de vivants à chaque âge à partir d'un nombre donné de personnes à la naissance. L'Article A335-1 du Code des Assurances précise que ce sont soit des tables homologuées par arrêté du ministre de l'économie et des finances, établies par sexe, sur la base de données publiées par l'Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques (INSEE), soit des tables établies ou non par sexe par l'entreprise d'assurance et certifiées par un actuaire indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaire reconnues par l'ACP.

Par arrêté du 20 décembre 2005 ont été homologuées les tables TH00-02 et TF00-02. La première étant une observation de la population masculine et la seconde sur la population féminine. Les dernières générations des produits vie entière d'AUXIA utilisent la TH00-02 sans distinction du sexe. L'espérance de vie des femmes étant supérieure à celle des hommes, il en résulte généralement un bénéfice de mortalité lorsque les personnes assurées sont majoritairement des femmes.

### Le paramètre financier

L'aspect financier repose sur l'actualisation des flux probables, caractérisée par l'utilisation d'un taux d'intérêt technique dont les conditions sont fixées à l'article A132-1 du Code des Assurances. Cet article donne certaines règles prudentielles en fixant des taux plafonnés. Concernant le contrat vie entière en euros, le taux d'intérêt technique maximal autorisé est de 75 % du TME durant les 8 premières années puis 60 % du TME au-delà pour les contrats à prime unique. Pour les contrats à primes périodiques, le taux maximal est de 60 % du TME. Dans les deux cas, le taux calculé ne doit pas dépassé 3,5 %.

L'article A132-1-1 précise la manière dont on doit calculer ces taux. Le taux moyen des emprunts d'Etat (TME) est sur une base semestrielle.

Afin de ne pas léser les assurés, une des caractéristiques d'un contrat d'assurance vie est la clause de participation aux bénéfices. L'article L331-3 du Code des Assurances précise que les entreprises d'assurance sur la vie ou de capitalisation doivent faire participer les assurés aux bénéfices techniques et financiers qu'elles réalisent, dans les conditions fixées par arrêté du ministre de l'économie et des finances. Les dispositions réglementaires relatives à cette obligation figurent dans les articles A331-3 à A331-9.

L'assureur attribue à ses assurés une participation aux bénéfices au moins égale à 85 % des produits financiers et 90 % des bénéfices techniques après déduction des intérêts crédités aux provisions mathématiques. Le montant des participations aux bénéfices peut être affecté directement aux provisions mathématiques ou porté, partiellement ou totalement, à la provision pour participation aux bénéfices. Les sommes portées à cette dernière provision sont affectées à la provision mathématique au cours des huit exercices suivant celui au titre duquel elles ont été portées à la provision pour participation aux bénéfices.

## Chapitre 2 – Présentation de la société

AUXIA est une société d'assurance spécialisée dans les produits de prévoyance décès.

En 1976, la société AUXIA est créée par les Pompes Funèbres Générales, filiale de la Lyonnaise des Eaux. Au départ c'est une société de capitalisation. En 1989, elle devient une société d'assurance vie et de capitalisation.

En 1995, la société est rachetée par le groupe nord américain Service Corporation International. Le groupe SCI s'en sépare en 2000 et l'institution de prévoyance Médéric devient le nouveau propriétaire et en fait l'entité assurance vie individuelle dédiée à la prévoyance. L'agrément des branches 1 et 2 accident et maladie est obtenu donnant le statut de société mixte.

En 2007, elle fusionne avec la compagnie Médéric Vie dont les activités sont l'assurance décès, incapacité, invalidité et temporaire décès.

En 2008 se crée le Groupe Malakoff Médéric.

AUXIA intègre à la fois la dimension d'assureur, d'assistant et de gestionnaire :

- AUXIA Assurances, compagnie d'assurance agréée pour les activités d'assurance vie, décès, maladie et accident, branches 1, 2 et 20.
- AUXIA Assistance, société d'assistance agréée pour la branche 18, accompagne le développement d'AUXIA et contribue à l'élaboration et la mise en place de produits d'assistance et de services dédiés aux seniors et aux entreprises.
- Laffitte Courtage, société de courtage dédiée à l'intermédiation et à la gestion pour compte de contrats d'assurance.

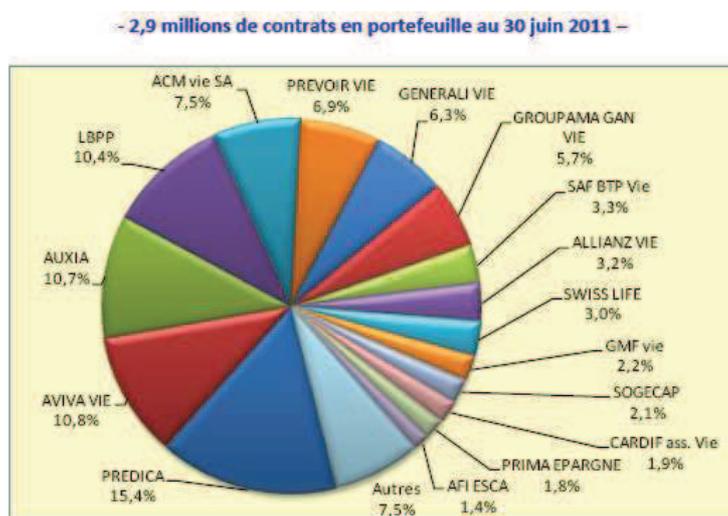
Les moyens de ces trois sociétés sont regroupés dans le GIE AUXIA Gestion.

La société a su développer son expertise à l'ensemble des garanties et services permettant aux familles de financer les obsèques, prévoir leur organisation et assister les conjoints, les enfants et les proches dans un contexte de désarroi et d'urgence.

AUXIA n'a pas de réseau de distribution en propre, ce qui lui permet d'accompagner les grands réseaux bancaires et d'assurance et de vendre ses produits et services en « marque blanche ».

A l'opposé de la tendance générale du marché, 94 % de ses contrats sont en prestations. De plus, le contrat peut comporter une assistance complète proposée par sa société d'assistance. Une garantie supplémentaire est associée au contrat obsèques permettant l'assistance rapatriement et l'accès à plusieurs services. Dans le cas d'un contrat en capital, AUXIA propose une option *gestion des volontés* garantissant aux souscripteurs un capital obsèques réservé exclusivement à ses volontés.

Leader historique dans la commercialisation des contrats obsèques, AUXIA a perdu sa première place face aux bancassureurs. Le graphique ci-dessous indique, par société, le nombre de contrats assuré.



Source : FFSA

Le marché de l'assurance obsèques est plutôt concentré puisque quatre sociétés totalisent près de la moitié du nombre global de contrats en portefeuille. AUXIA est en troisième position avec 10,7 %.

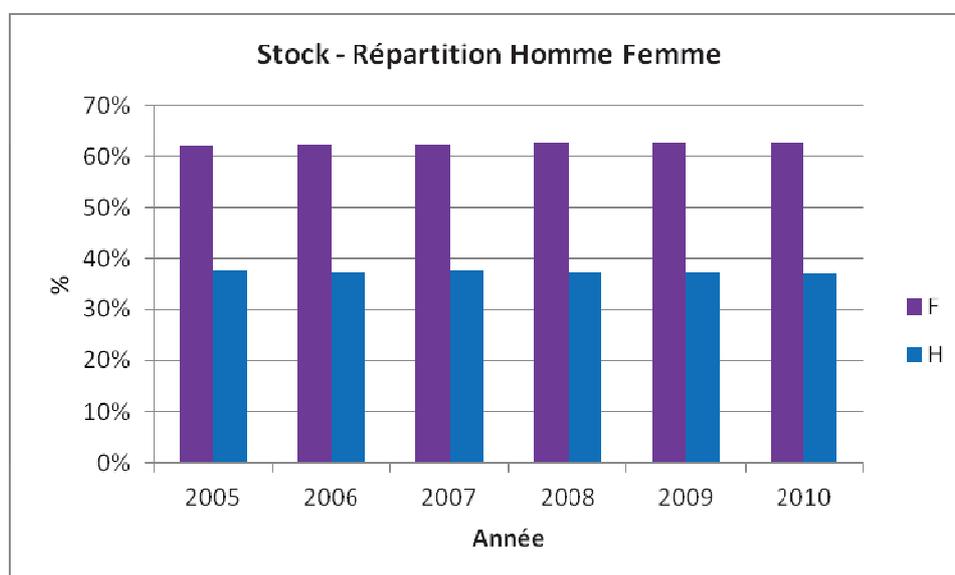
Selon les sources de la FFSA, la part de marché des bancassureurs est de 39 % en juin 2011 contre 21 % il y a six ans. Ils ont un avantage, c'est leur réseau d'agences et ils sont donc amenés à voir leurs clients régulièrement.

## Chapitre 3 – Statistiques du portefeuille

Ce chapitre aborde l'étude du portefeuille vie entière existant provenant des bases de données de la société. Cette étude descriptive permettra de déterminer les différentes caractéristiques du portefeuille fictif destiné au produit test pour le financement des obsèques.

### Répartition du portefeuille par sexe

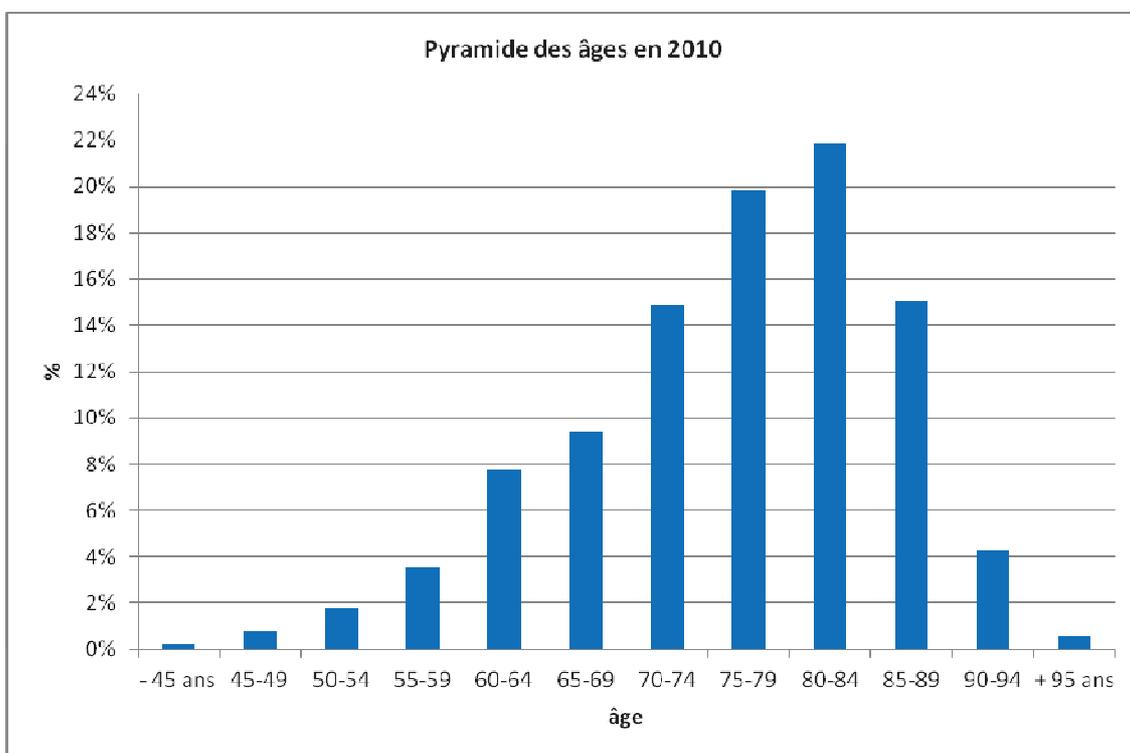
L'espérance de vie des femmes étant différente de celle des hommes, le diagramme suivant présente la répartition homme et femme du portefeuille vie entière sur les années 2005 à 2010.



La proportion est stable sur cette période avec 63 % de femmes et 32 % d'hommes. La population féminine représentant près du 2/3 du portefeuille est avantageuse pour la société car la table de mortalité utilisée pour la tarification et le provisionnement est celle en cas de décès. Pour rappel, cette table est construite sur la base d'observations de la mortalité masculine plus élevée que la mortalité féminine.

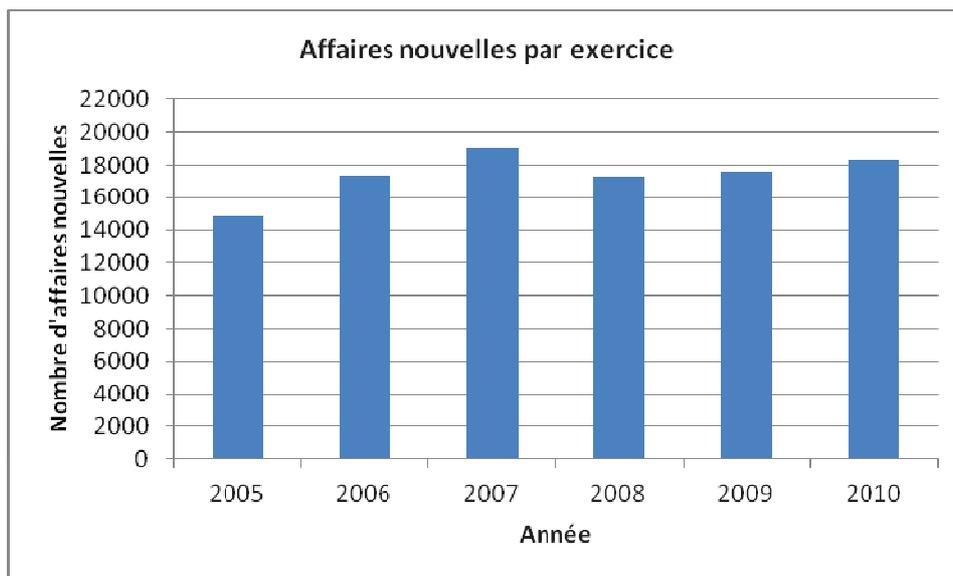
### Répartition du portefeuille en 2010 par âge

Le graphique suivant présente la répartition des assurés par âge en 2010 afin de déterminer les âges les plus représentés dans le portefeuille. Pour une meilleure lisibilité, les assurés sont regroupés par tranche d'âges de cinq ans.



Les assurés âgés entre 70 et 89 ans (nés entre 1921 et 1940) représentent majoritairement la population sous observation. Dans cette période, la répartition varie entre 15 % et 22 %.

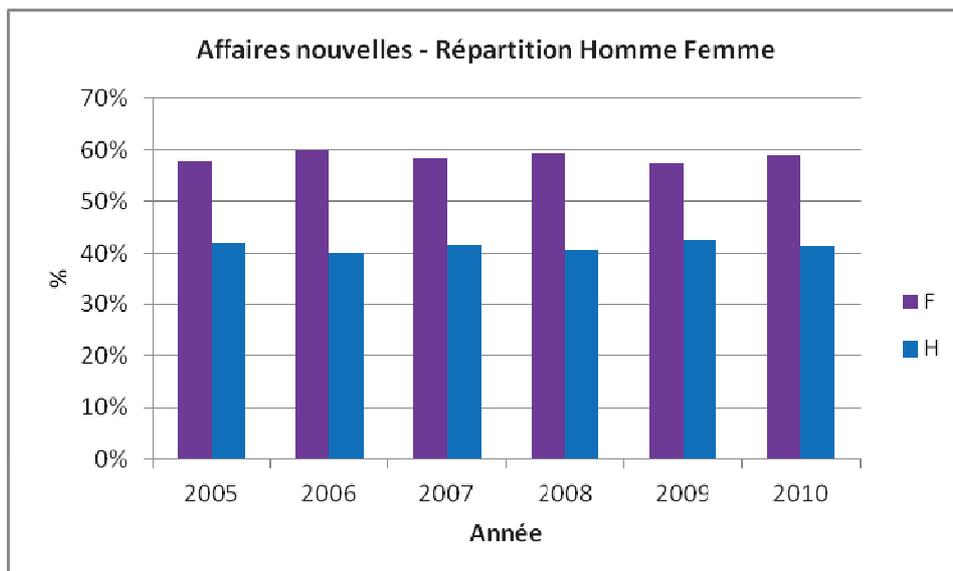
**Affaires nouvelles**



Sur les six dernières années le nombre d'affaires nouvelles oscille entre 14 000 et 19 000 contrats. En faisant exception de l'année 2007, suite à une reprise de portefeuille, l'évolution du marché est à la hausse.

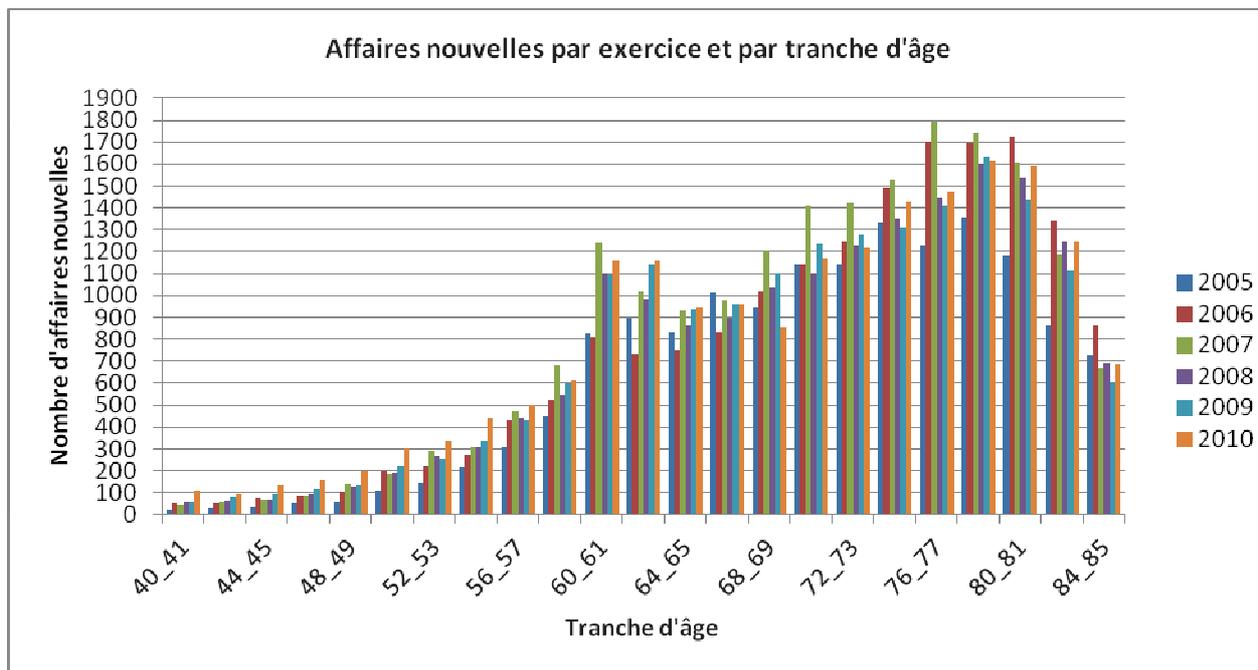
Pour le portefeuille d'étude, je prends l'hypothèse d'une commercialisation de 12 000 contrats. Ce stock représente la génération d'un produit distribué par notre principal partenaire.

En utilisant les mêmes résultats, le prochain graphique donne une ventilation par sexe.



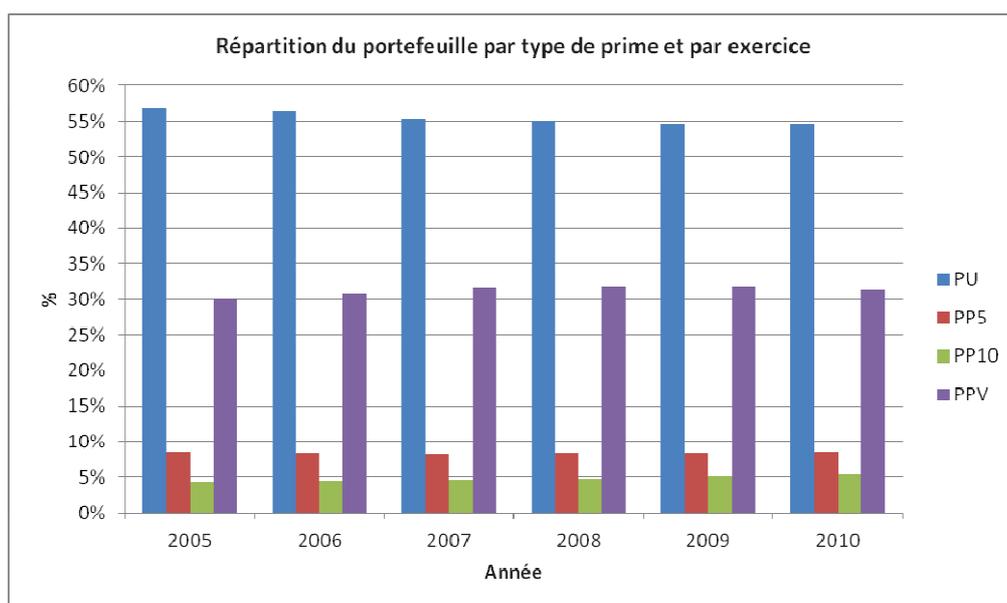
Il y a un plus grand nombre d'affaires nouvelles concernant les femmes. Ceci donne une première explication sur le premier graphique (Stock – Répartition Homme Femme).

Afin de définir un *model point*, il est important d'ajouter comme information l'âge à la souscription. Les assurés sont regroupés par tranche d'âges de deux ans.



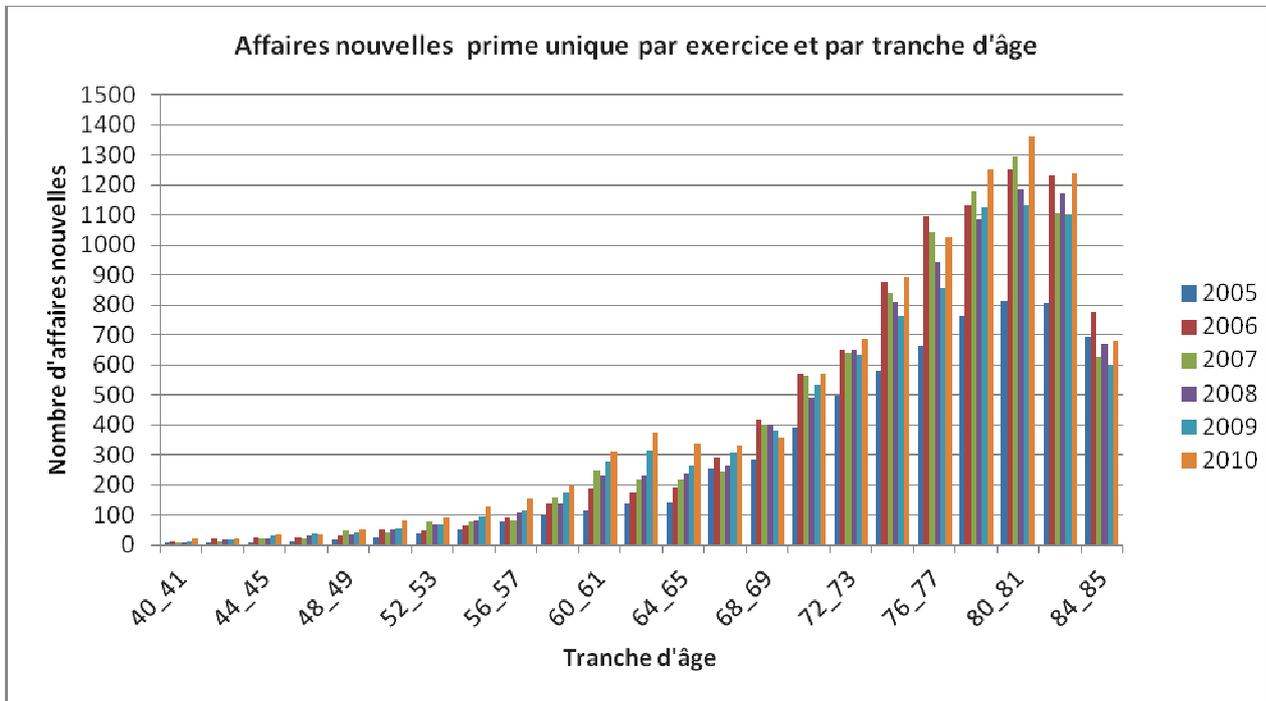
Deux pics apparaissent, l'un entre 60 et 63 ans, l'autre entre 76 et 79 ans. L'explication sera faite sur un prochain graphique en distinguant les primes uniques et périodiques. Autre constatation, la tranche d'âge la plus représentée varie suivant l'année. Chaque âge compris entre 58 et 85 réalise une commercialisation annuelle de 500 contrats. Les assurés de moins de 58 ans représentent moins de 10 % de la production.

**Répartition Prime Unique et Périodique**

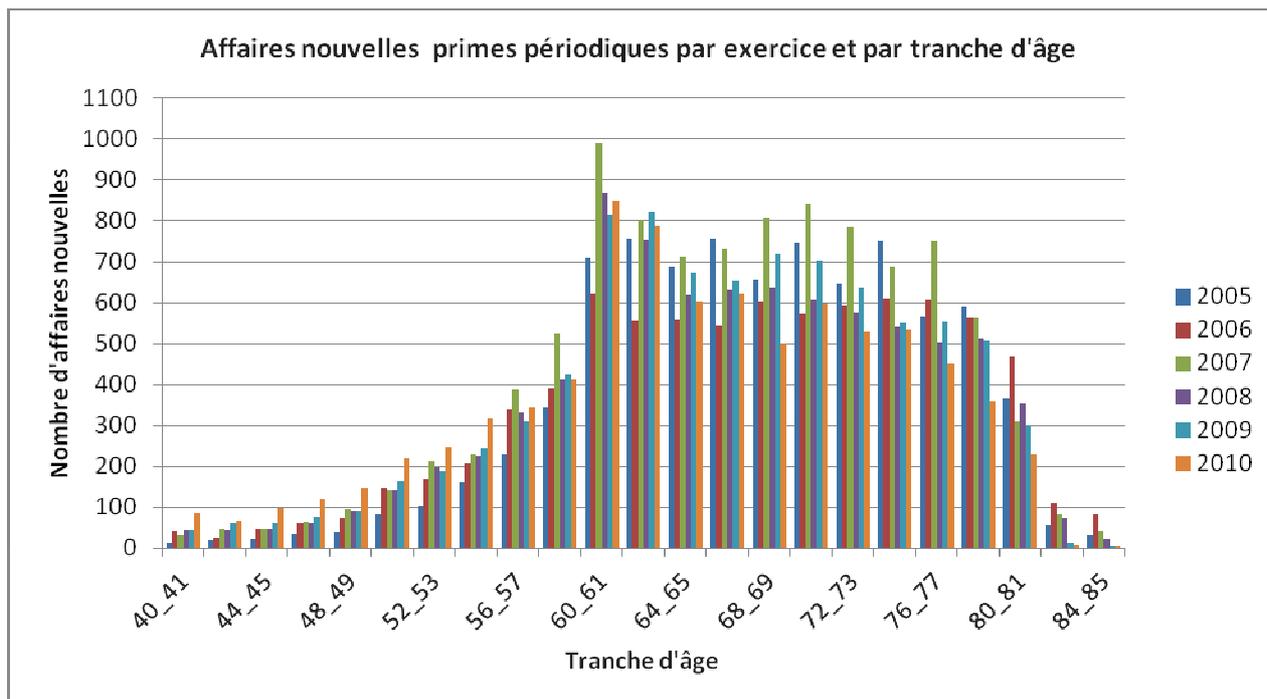


Le portefeuille vie entière de la société est composé majoritairement de contrats à prime unique soit 55 %. En seconde position, les contrats à cotisations viagères représentent 30 %. Le reliquat étant les primes de durée 5 ans et 10 ans.

Revenons sur les affaires nouvelles en distinguant la durée de cotisation afin d'expliquer les deux pics obtenus dans un précédent graphique.

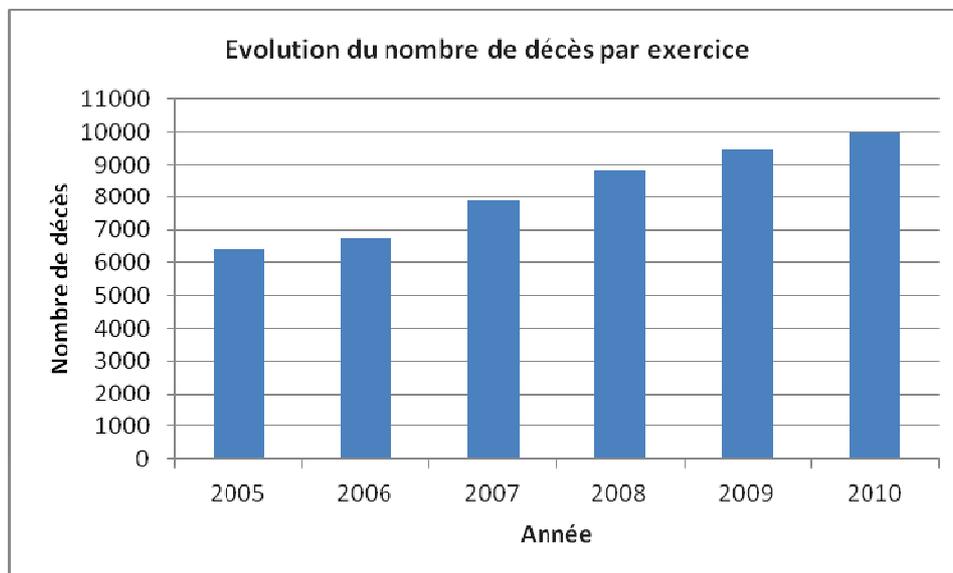


Le seuil des 500 contrats est dépassé à partir de 70 ans. Les assurés de moins 70 ans représentent 22 % de la production en prime unique. L'âge moyen à la souscription est de 74 ans.

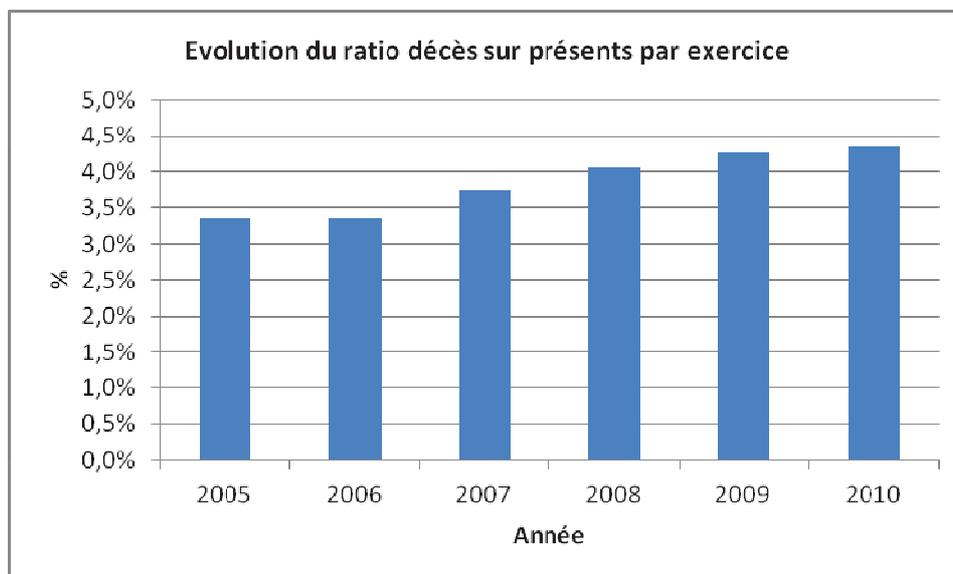


Le seuil des 500 contrats est dépassé à partir de 60 ans. Les assurés de moins 60 ans représentent moins de 20 % de la production en prime unique. L'âge moyen à la souscription est de 66 ans.

### Sinistralité

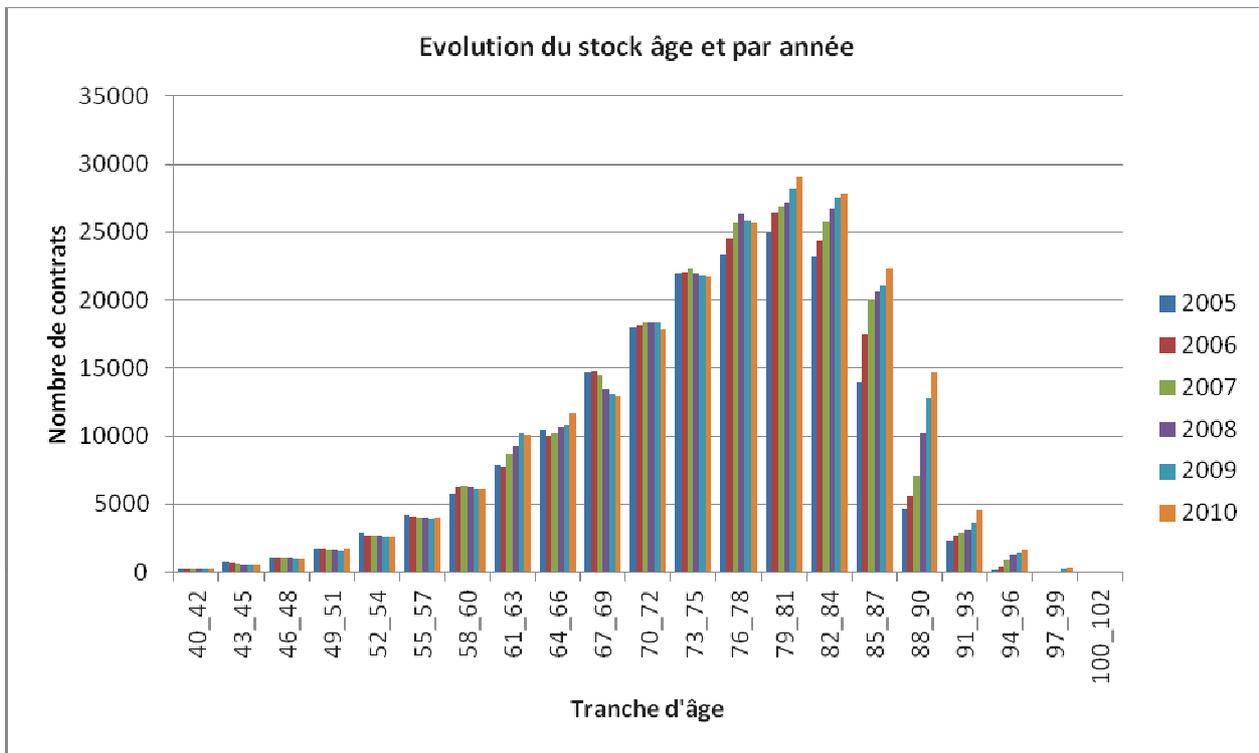


L'augmentation du nombre de décès peut avoir deux causes principales : une population sous risque elle-même en augmentation ou un portefeuille vieillissant. Une autre cause étant une dérive de la sinistralité suite à une épidémie ou un épisode de canicule.

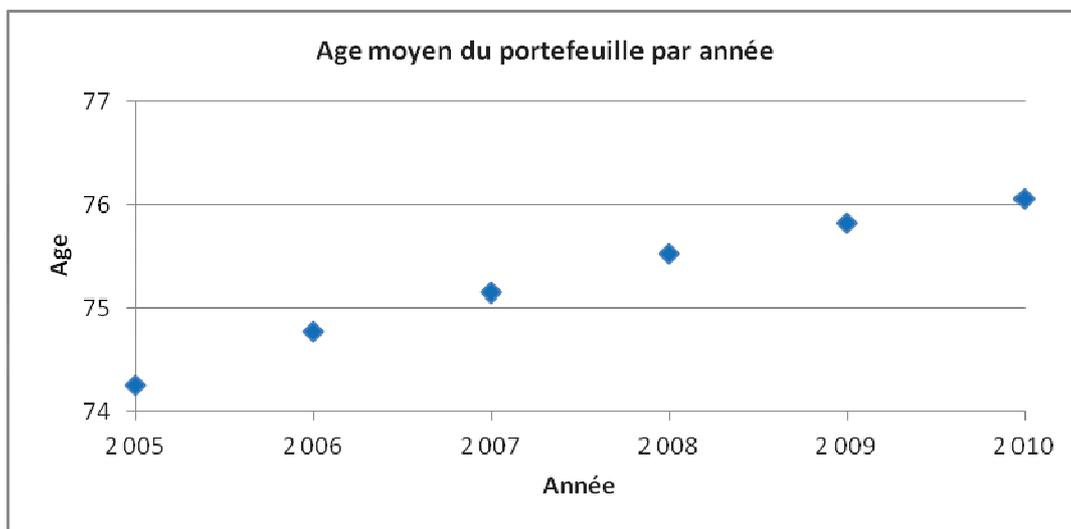


En tenant compte du nombre de présents augmentant chaque année, la proportion des décès varie entre 3,4 % et 4,3 %.

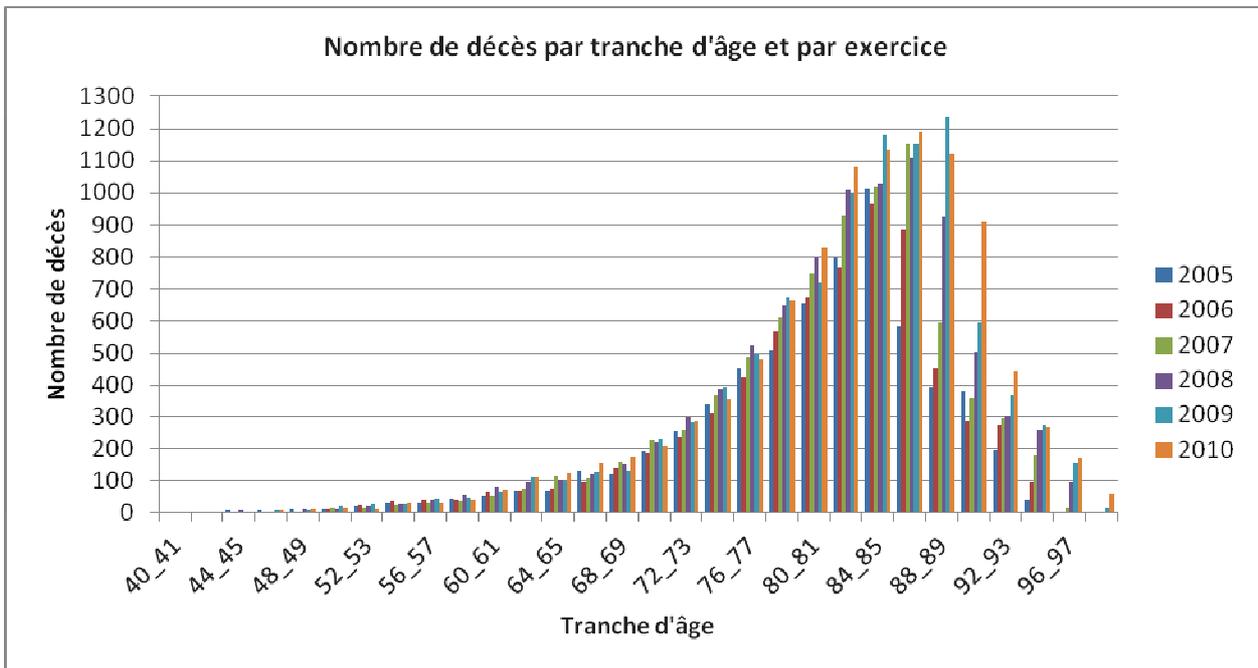
L'évolution du stock de contrat par tranche d'âge de trois ans et par année permettra de vérifier le vieillissement du portefeuille.



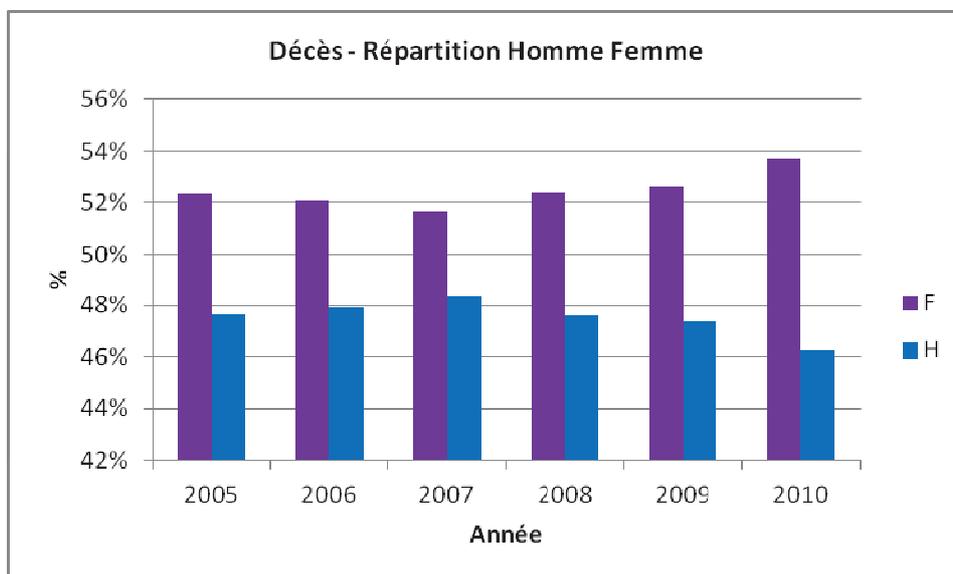
A partir de 76 ans le nombre d'assurés augmente entre 2005 et 2010. Le graphique suivant confirme à nouveau le vieillissement du portefeuille en indiquant l'âge moyen du portefeuille.



En intégrant la notion d'âge à la date du décès, le prochain graphique donne une information sur les tranches d'âges les plus exposées.



En utilisant les mêmes résultats, le prochain graphique donne une ventilation par sexe.



Les femmes représentant les 2/3 du portefeuille, la sinistralité féminine est inférieure à 54 %. Ceci donne la seconde explication sur le premier graphique de ce chapitre (Stock – Répartition Homme Femme).

## **Conclusion de la première partie**

Le premier point à retenir est la proportion des hommes et des femmes dans le portefeuille qui reste stable sur plusieurs exercices. J'ai observé que les femmes représentent deux tiers du portefeuille. Dans la troisième partie où une table d'expérience est construite, cette information nous renseigne sur les taux bruts comparés à ceux de la table réglementaire.

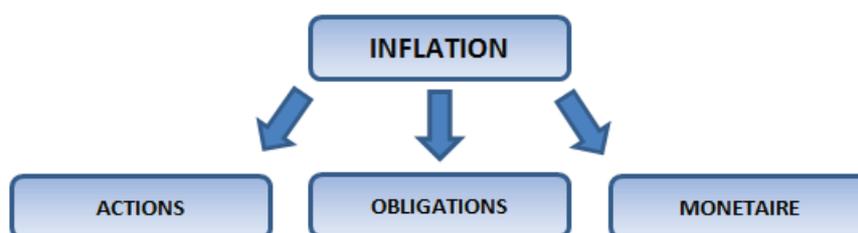
Les résultats sur l'étude du portefeuille vie entière ont permis de mieux connaître le comportement des assurés au moment de la souscription et la sinistralité du portefeuille. Les informations sur le nombre d'affaires nouvelles, la ventilation entre le choix d'une prime unique ou prime périodique et les âges à la souscription associés à la périodicité sont retenus dans les hypothèses du produit test présenté dans la dernière partie.

**PARTIE II :**  
**MODELISATION DE L'ACTIF**

## Partie II – Modélisation de l'actif

Afin de lancer l'étude actif-passif présentée dans la dernière partie et en tenant compte du caractère viager d'un contrat obsèques, il faut modéliser les actifs, en utilisant un générateur de scénarii économiques, dont la durée de projection est sur le long terme.

J'utilise dans ce mémoire deux modèles « intégrés » dont la particularité est l'existence d'une variable principale, ici l'inflation, qui détermine la dynamique des autres variables tels que les actions, les obligations et le monétaire. AUXIA n'ayant pas de l'immobilier, cet actif n'est pas retenu.



Les modèles sont présentés dans le premier chapitre. Je commence par le modèle de Wilkie, le plus ancien, pour terminer avec le modèle d'Ahlgrim en décrivant pour chaque variable financière sa modélisation ainsi que les paramètres à estimer.

Dans les deux prochains chapitres, respectivement pour chaque modèle, l'étape suivante est le calibrage en estimant les paramètres sur la base de données historiques. Pour la validation, des tests ainsi qu'une analyse sur les résidus sont lancés. Les outils statistiques mis en œuvre sont définis au moment du calibrage de l'inflation du modèle de Wilkie. J'ajoute un autre test, appelé *backtesting*, dont la particularité est de vérifier que les projections sont en adéquation avec les données réelles.

Pour terminer, une étude est menée afin de chercher une relation entre l'inflation et l'inflation du funéraire. En effet, avec une base de donnée où l'historique est faible, on ne peut intégrer directement l'inflation du funéraire dans les deux modèles. Le résultat sur la projection future du taux d'inflation ainsi que la relation entre les deux indices permettent d'obtenir, pour chaque scénario, le taux d'inflation du funéraire.

## Chapitre 1 – Présentation des deux modèles

### Section 1.1 – Modèle de Wilkie

Le modèle stochastique de Wilkie, développé par A.D. Wilkie, est présenté dans une première version en 1986. Ce modèle est composé de quatre variables d'investissement en postulant que l'une d'elles, l'inflation, est la force d'entraînement sur les autres. Wilkie préfère cette relation unidirectionnelle au lieu d'intégrer des relations bidirectionnelles en envisageant par exemple que les taux d'intérêt, ou le cours des actions ont une influence sur l'inflation. Il explique que des investigations ont prouvé que c'était une complication inutile. Ce modèle a été développé à partir des données britanniques au cours de la période 1919-1982.

En 1995, Wilkie met à jour le modèle original en intégrant un modèle ARCH pour l'inflation et en incluant d'autres variables d'investissement comme les salaires, le rendement des propriétés. De plus, il adapte son modèle aux données de plusieurs pays.

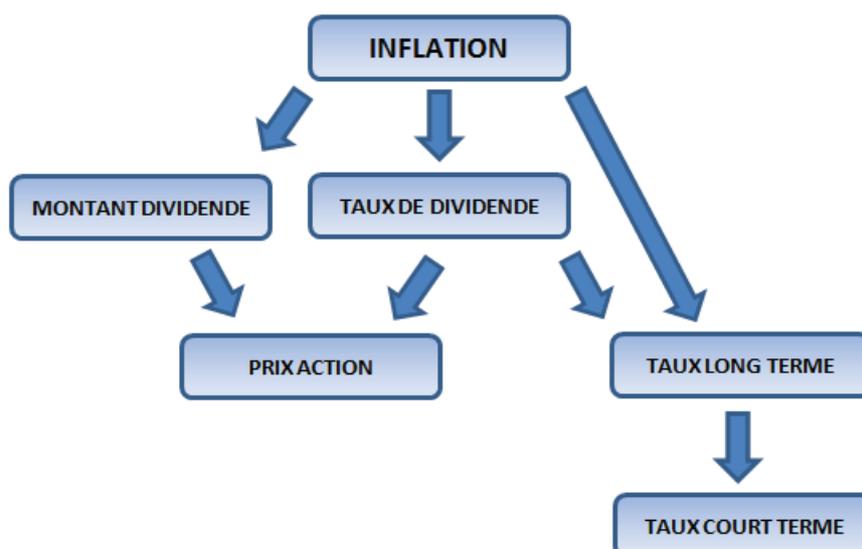
En 2008, une amélioration est apportée par Sahin avec la participation de Wilkie en proposant une dynamique sur l'inflation, les taux d'intérêts, les actions et l'immobilier.

Les variables utilisées dans ce chapitre sont les suivantes :

- $Q(t)$  représente l'indice des prix
- $D(t)$  représente l'indice des dividendes
- $Y(t)$  représente le rendement des actions
- $C(t)$  représente le taux d'intérêt à long terme
- $B(t)$  représente le taux d'intérêt à court terme

Le schéma suivant présente la structure du modèle de Wilkie où l'inflation joue un rôle majeur.

Structure du modèle de Wilkie



Inflation

La série de l'indice des prix à la consommation  $Q_t$  ne dépend que du passé et d'un bruit blanc.

Soit le modèle autorégressif d'ordre 1 suivant :

$$\nabla \ln Q_t = QMU + QA \cdot (\nabla \ln Q_{t-1} - QMU) + QSD \cdot QZ_t$$

avec  $\nabla \ln Q_t = \ln Q_t - \ln Q_{t-1}$  et  $\nabla$  appelé opérateur retard.

Wilkie préfère modéliser l'inflation plutôt que l'indice des prix directement en remarquant que seules les variations relatives de l'indice des prix sont importantes et non les variations absolues. Les paramètres à estimer sont :

- QMU est le taux d'inflation long terme
- QA est le coefficient de retour à la moyenne
- QSD est l'écart type du bruit blanc

$QZ_t$  est la variable aléatoire normale centrée réduite.

Le taux de dividende (rendement des actions)

Le rendement des actions est déterminé par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \ln(Y_t) &= YW I_t + YN_t \\ \text{avec } YN_t &= \ln(YMU) + YA (YN_{t-1} - \ln(YMU)) + YE_t \\ \text{et } YE_t &= YSD YZ_t \end{aligned}$$

$Y(t)$  se décompose en deux parties, la première est une dépendance directe avec l'indice des prix et la seconde un modèle autorégressif d'ordre 1. Les paramètres à estimer sont :

- YW est la sensibilité du rendement nominal des actions à l'inflation
- YMU est le taux de rendement de long terme
- YA est le coefficient de retour à la moyenne
- YSD est l'écart type du bruit blanc

$YZ_t$  est la variable aléatoire normale centrée réduite.

Le montant des dividendes

Le montant des dividendes est modélisé par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \ln D_t &= DW \cdot DM_t + DX \cdot I_t + DMU + DY \cdot YE_{t-1} + DB \cdot DE_{t-1} + DE_t \\ \text{avec } DM_t &= DD \cdot I_t + (1 - DD) \cdot DM_{t-1} \\ \text{et } DE_t &= DSD \cdot DZ_t \end{aligned}$$

DSD est l'écart type de la variable aléatoire normale centrée réduite  $DZ_t$ .

Le taux d'intérêt à long terme

Le modèle pour le taux d'intérêt à long terme est le suivant :

$$C_t = CW CM_t + CMU \exp(CN_t)$$

avec

$$CM_t = CD I_t + (1 - CD) CM_{t-1}$$

$$CN_t = CA_1 CN_{t-1} + CA_2 CN_{t-2} + CA_3 CN_{t-3} + CY YE_t + CE_t$$

$$\text{et } CE_t = CSD CZ_t$$

La modélisation du taux d'intérêt long est décomposée en deux termes. Le premier représente la partie inflation et le second, la partie réelle.

En rappelant que  $YE_t$  représente les résidus de l'équation du taux de rendement des actions.

$CW$ ,  $CD$ ,  $CA$ ,  $CMU$ ,  $CY$  et  $CSD$  sont les paramètres à estimer.

$CZ_t$  est la variable aléatoire normale centrée réduite.

Le taux d'intérêt à court terme

Soit  $B_t$ , la série sur le taux d'intérêt à court terme à modéliser.

Dans le choix du modèle expliqué par Wilkie, la première considération retenue est que le taux à court terme est lié au taux à long terme. Il propose donc comme modélisation le spread  $C_t - B_t$ . L'autre approche qu'il présente est la différence entre les logarithmes

$$\ln(C_t) - \ln(B_t) = -\ln\left(\frac{B_t}{C_t}\right).$$

Une troisième voie serait d'utiliser la partie « réelle »  $CR_t$

dans l'une des précédentes propositions. Au final, Wilkie choisit un modèle intermédiaire :

$$B_t = C_t \exp(-BD_t)$$

$$\text{avec } BD_t = BMU + BA (BD_{t-1} - BMU) + BE_t$$

$$\text{et } BE_t = BSD BZ_t \quad \text{où } BZ_t \sim \text{iid } N(0,1)$$

$BA$ ,  $BMU$  et  $BSD$  sont les paramètres à estimer.

$BZ_t$  est la variable aléatoire normale centrée réduite.

## Section 1.2 – Modèle d'Ahlgrim

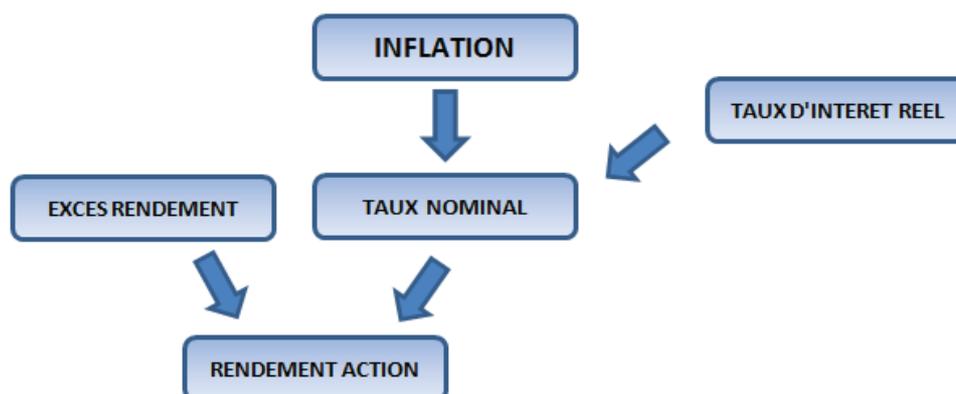
Ce modèle, plus récent que celui de Wilkie, est présenté en 2005. Il récapitule le projet initié par la demande conjointe de deux sociétés d'actuaire, la *Casualty Actuarial Society* et la *Society of Actuaries* où le thème de recherche portait sur la modélisation de séries économiques coordonnées avec des scénarii de taux d'intérêt.

Ce projet intégrait la construction d'un modèle de scénario financier en simulant une variété de variables économiques sur une période de 50 ans. Les variables projetées par ce modèle comprennent principalement les taux d'intérêt, l'inflation, le rendement des actions.

Ce document passe en revue la littérature sur la modélisation financière. Une partie amène à la discussion d'anciens modèles actuariels. Une lecture plus en avant porte sur la description des variables du modèle et des paramètres propres à chaque processus. La section d'après explique l'utilisation de ce modèle dans des applications actuarielles.

Le schéma suivant présente la structure du modèle d'Ahlgrim.

Structure du modèle d'Ahlgrim



L'inflation

L'inflation noté  $q$  est supposé suivre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de la forme (en temps continu) :

$$dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \sigma_q dB_{q,t}$$

En passant en temps discret avec un pas de discrétisation  $\delta=1$  on obtient :

$$q_{t+1} = q_t e^{-\kappa_q} + \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \varepsilon_q$$

Pour plus de précision sur ce sujet, il faut se reporter à l'annexe 2.

Sous cette forme, on remarque que le niveau prévu de l'inflation future est une moyenne pondérée de la valeur la plus récente de l'inflation  $q_t$  et d'un coefficient étant le retour à la moyenne de l'inflation  $\mu_q$ . La vitesse de retour est déterminée par le paramètre  $\kappa_q$ .

Dans le modèle continu, le mouvement Brownien  $dB_{q,t}$  peut être comparé à un tirage au sort d'une variable aléatoire normale centrée (représentée sous la forme discrète par  $\varepsilon_q$ ). L'incertitude est mesurée par le paramètre  $\sigma_q$  (volatilité associée au processus de l'inflation).

Les taux d'intérêts réels

Pour calculer les taux d'intérêts réels, Ahlgrim et al. choisissent un modèle de Hull-White à deux facteurs. Dans ce modèle, le taux à court terme (notée  $r$ ) revient à un taux à long terme (noté  $l$ ) qui est lui-même stochastique. Le taux à long terme revient à un niveau moyen du retour à la moyenne  $\mu_l$  :

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r (l_t - r_t) \cdot dt + \sigma_r \cdot dB_{r,t} \\ dl_t &= \kappa_l (\mu_l - l_t) \cdot dt + \sigma_l \cdot dB_{l,t} \end{aligned}$$

Afin d'estimer les paramètres du modèle, on examine son équivalent dans le cas discret avec un pas de discrétisation  $\delta=1$  :

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= r_t e^{-\kappa_r} + l_t (1 - e^{-\kappa_r}) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_r}}{2\kappa_r}} \varepsilon_r \\ l_{t+1} &= l_t e^{-\kappa_l} + \mu_l (1 - e^{-\kappa_l}) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_l}}{2\kappa_l}} \varepsilon_l \end{aligned}$$

A partir de ces équations, on peut voir que le taux d'intérêt à court terme est une moyenne pondérée des valeurs les plus récentes  $r_t$  et  $l_t$ . Le taux d'intérêt à long terme est aussi une moyenne pondérée de la valeur la plus récente  $l_t$  et du coefficient de retour à la moyenne  $\mu_1$ .

Ahlgrim et al. précisent que l'estimation des paramètres est difficile car les taux d'intérêts réels ne sont pas directement observables sur le marché. Il calcule donc les taux réels à posteriori basés sur la différence entre les taux nominaux observés dans le marché et le taux d'inflation.

### Le rendement des actions

Le rendement des actions est égal au taux d'intérêt nominal sans risque ( $q + r$ ) et d'une prime de risque ou excès de rendement ( $x$ ) :

$$s_t = q_t + r_t + x_t$$

Ahlgrim et al. font référence au modèle à changement de régime proposé par Hardy qui suppose que les prix des actions sont une distribution lognormale. Dans son modèle, le rendement des actions tient compte des dividendes et de la rémunération sous jacente au taux sans risque. Mais Ahlgrim et al. préfèrent appliquer un modèle à changement de régime à l'excès de rendement des actions  $x_t$ . Pour les mêmes raisons décrites par Planchet et al., je privilégie le modèle Black et Scholes.

### **Section 1.3 – Description des données**

Pour estimer les paramètres des modèles de Wilkie et d'Ahlgrim, je retiens les données de Friggit<sup>2</sup>. Cette base de données regroupe des séries macroéconomiques, démographiques, financières et immobilières sur une période couvrant les années 1800 à 2010 dont la fréquence est annuelle.

Les séries retenues dans notre étude sont décrites ci-dessous :

- Indice des prix à la consommation (€, base 2000) ;
- Taux d'intérêt nominal à long terme ;
- Taux d'intérêt nominal à court terme ;
- Valeur d'un investissement en actions, dividendes réinvestis (€, base 2000) ;

Concernant le modèle de Wilkie et en particulier sur le taux de rendement des actions dont l'approche est différente de celle d'Ahlgrim, je reprends les résultats de l'étude établie par Gallais-Harmonno et Arbulu pour la période 1950 à 1990. Pour aller jusqu'en 2010, je prolonge les séries avec l'indice SBF 250 (250 premières capitalisations cotées à Paris).

En tenant compte du caractère viager d'un contrat obsèques, l'horizon de projection envisagé est sur le long terme. L'estimation des paramètres se basera sur les séries présentées dans cette section pour la période 1955 – 2010.

<sup>2</sup> Source : CGEDD, série téléchargeable sur <http://www.cgedd.developpement-durable.gouv.fr>  
Contrat obsèques revalorisé au taux d'inflation du funéraire

## Chapitre 2 – Calibrage du modèle de Wilkie

### Section 2.1 – L'indice des prix et taux d'inflation

Soit le modèle retenu pour l'indice des prix :

$$\nabla \ln Q_t = QMU + QA \cdot (\nabla \ln Q_{t-1} - QMU) + QSD \cdot QZ_t$$

En posant  $I_t$  le taux d'inflation instantané qui se déduit de l'indice des prix par la formule suivante :

$$I_t = \ln \left( \frac{Q_t}{Q_{t-1}} \right)$$

On obtient une autre écriture :

$$I_t = (1 - QA) QMU + QA I_{t-1} + QSD QZ_t$$

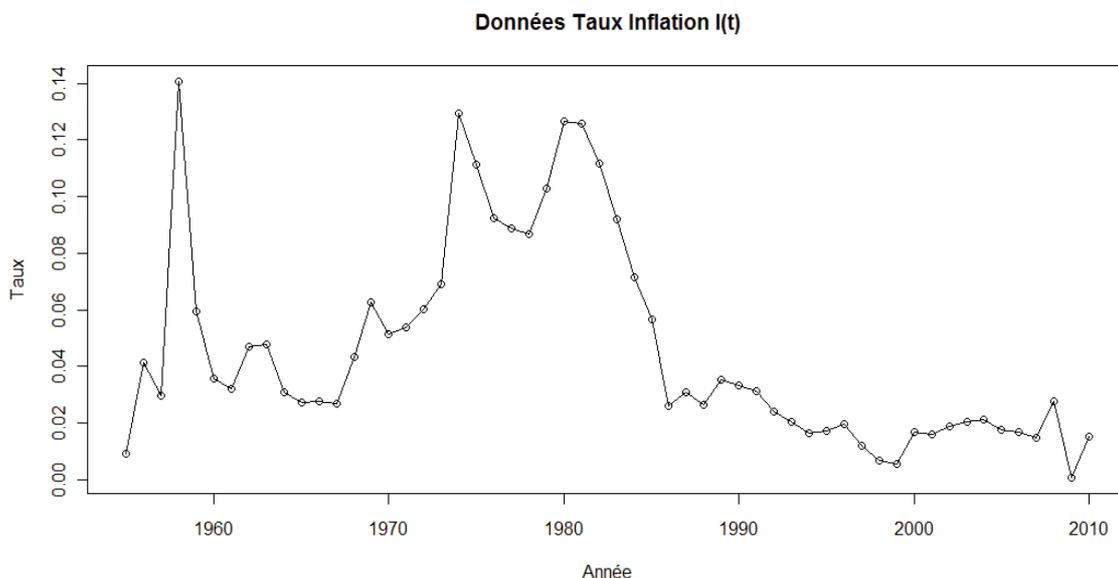
Dans cette forme, le niveau prévu de l'inflation future est une moyenne pondérée de la valeur la plus récente de l'inflation et le taux d'inflation à long terme QMU. La vitesse de retour à la moyenne est déterminée par le paramètre QA. L'incertitude est mesurée par le paramètre QSD l'écart type du bruit blanc.

#### Estimation des paramètres

On détermine les paramètres du modèle de l'inflation par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires (MCO) :

$$I_{t+1} = \alpha + \beta \cdot I_t + \varepsilon'_{I,t}$$

Le graphique suivant représente la variable  $I_t$  pour la période 1955 à 2010.



Après avoir obtenu les coefficients estimés  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ , on détermine les paramètres :

$$QA = \beta$$

$$\alpha = QMU (1 - QA) = QMU (1 - \beta), \quad QMU = \frac{\alpha}{1 - \beta}$$

L'écart type de l'erreur du modèle initial QSD est égal à l'écart type du modèle.

Suite à la régression, le tableau suivant présente les résultats obtenus des différents paramètres du modèle de l'inflation.

#### Wilkie : Résultat du calibrage sur l'inflation

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
QA	0,782
QMU	0,047
QSD	0,023

Wilkie donnait comme valeurs pour la France sur la période 1951-1989 :

QA=0.55, QMU=0.06 et QSD=0.04.

#### Tests du modèle et analyse des résidus

Les tests suivants portent sur le modèle et les coefficients de régression.

Coefficient de détermination :

Après l'analyse de la variance, on détermine le coefficient de détermination noté  $R^2$ . Ce coefficient compris entre 0 et 1 permet de juger de la qualité de l'ajustement d'un modèle. Plus  $R^2$  est proche de 1, meilleure est l'adéquation et un  $R^2$  faible signifie un faible pouvoir explicatif. Dans ce mémoire, j'utilise le  $R^2$  ajusté qui tient compte du nombre de paramètres du modèle.

Test sur la signification globale de la régression :

Ce test permet de connaître l'apport global des variables explicatives à la détermination de la variable expliquée. Il s'agit de tester l'hypothèse nulle  $H_0$  où tous les coefficients du modèle sont nuls avec la loi de Fischer.

Test sur chaque paramètre :

Le test précédent, qui peut fournir un moyen d'apprécier la régression dans l'ensemble, ne permet pas de conclure que chaque coefficient du modèle soit différent de la valeur nulle. Donc, pour s'assurer de la significativité de chaque paramètre, il faut tester l'hypothèse nulle  $H_0$  où le coefficient du paramètre est nul en utilisant la loi de Student.

Dans l'étape suivante, l'analyse des résidus, on vérifie les hypothèses sur les erreurs à partir de leurs observations.

Espérance nulle :

La première vérification est que les résidus sont de moyenne nulle.

Indépendance :

Les erreurs ne doivent pas être corrélées. Après un examen visuel des résidus, j'utilise le test de Breusch-Godfrey (plus robuste que le test de Durbin-Watson). L'hypothèse nulle  $H_0$  est l'absence d'autocorrélation des erreurs.

Homoscédasticité :

La variance de l'erreur est constante. Dans le cas contraire, il y a hétéroscédasticité. Un des tests de détection que j'emploie est le test ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity*).

Normalité :

Pour calculer les intervalles de confiance et pour effectuer les tests de Student sur les paramètres, il faut vérifier la normalité des erreurs en utilisant le test de Jarque et Bera fondé sur la notion d'asymétrie (*Skewness*) et d'aplatissement (*Kurtosis*).

Des informations complémentaires sur ces sujets sont présentées dans l'Annexe 1.

Ces tests seront appliqués de la même manière sur les autres modèles et ils seront réalisés sous R. Les programmes utilisés sont disponibles sur le site internet de Frédéric Planchet<sup>3</sup>.

Le tableau suivant présente les résultats des différents tests pour la validation du modèle de l'inflation.

Wilkie : Résultat des tests sur l'inflation

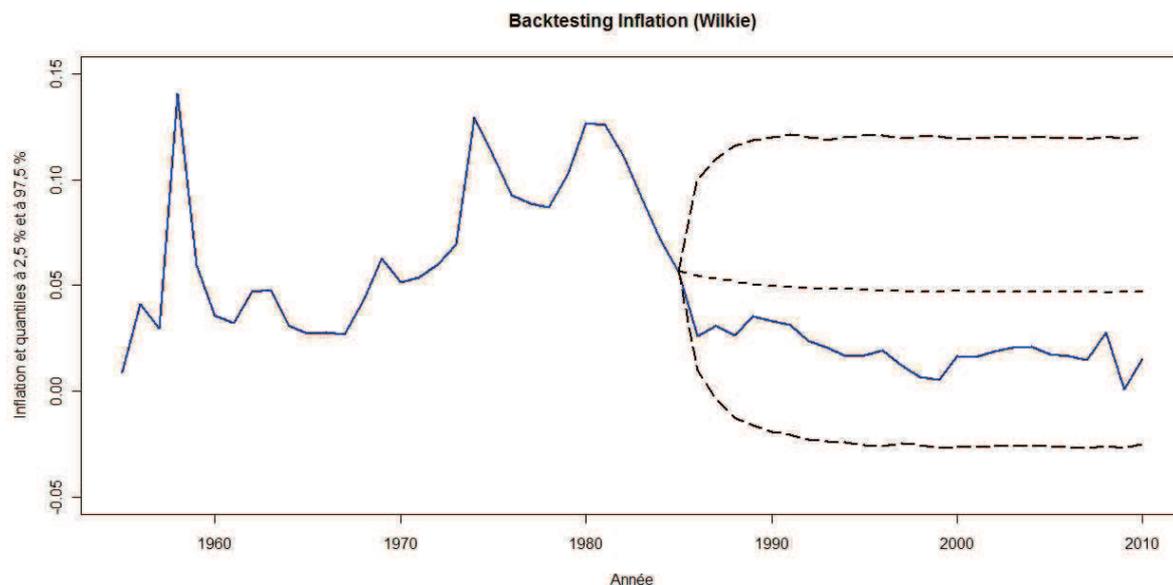
<u>Test</u>	<u>Résultat</u>	<u>Interprétation</u>
R <sup>2</sup> ajusté	0,61	Le pouvoir explicatif du modèle est de 61 %
Fisher	$1,4 \cdot 10^{-12}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	0,04	La constante est significative
Student (variable)	$1,4 \cdot 10^{-12}$	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$3,5 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,27	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,10	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité non vérifiée

<sup>3</sup> <http://www.ressources-actuarielles.net/>

L'ensemble des tests (excepté celui de la normalité) valide les hypothèses posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage. L'hypothèse des résidus non vérifiée implique qu'il faudra considérer avec prudence les intervalles de confiance des projections.

### Backtesting du modèle inflation

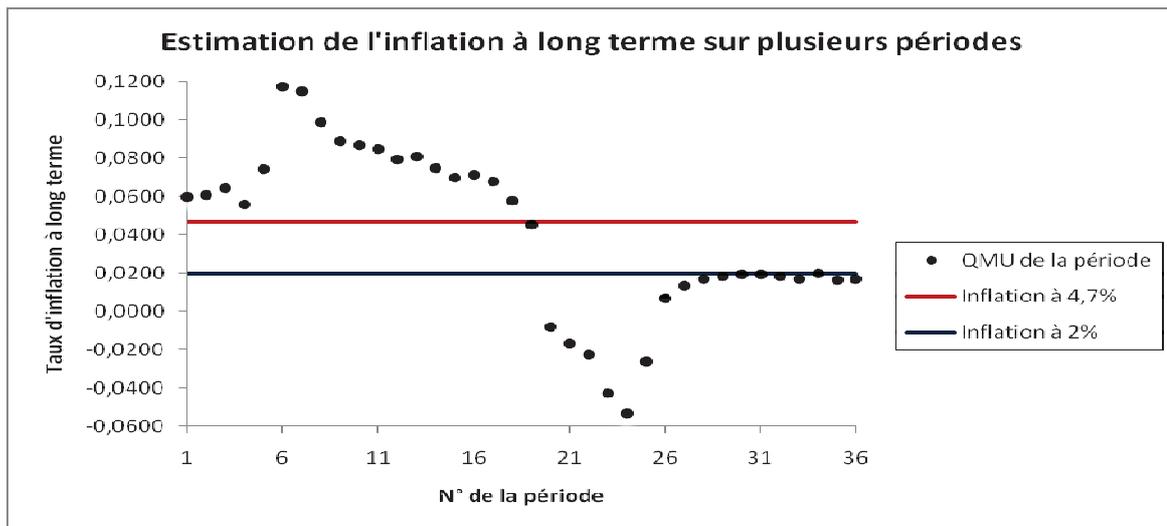
L'idée consiste, en partant de l'année 1985, de simuler plusieurs trajectoires et de comparer avec l'inflation réalisée sur la période 1986 à 2010. On obtient le graphique suivant :



Le modèle surestime l'inflation observée se situant dans la partie inférieure de l'intervalle de confiance.

Pour mémoire, l'étude porte sur la période 1955 à 2010 où on observe des pics d'inflation supérieurs à 10 %. En estimant un taux d'inflation à long terme de 4,7 %, on s'éloigne de l'objectif par la BCE d'une stabilité des prix correspondant à un « *taux d'inflation à un niveau inférieur à, mais proche de, 2 % à moyen terme* ». Je rajoute donc, dans le modèle sur l'inflation, cette contrainte en prenant exemple l'étude menée par Caja et al. sur le modèle de Brennan et Xia.

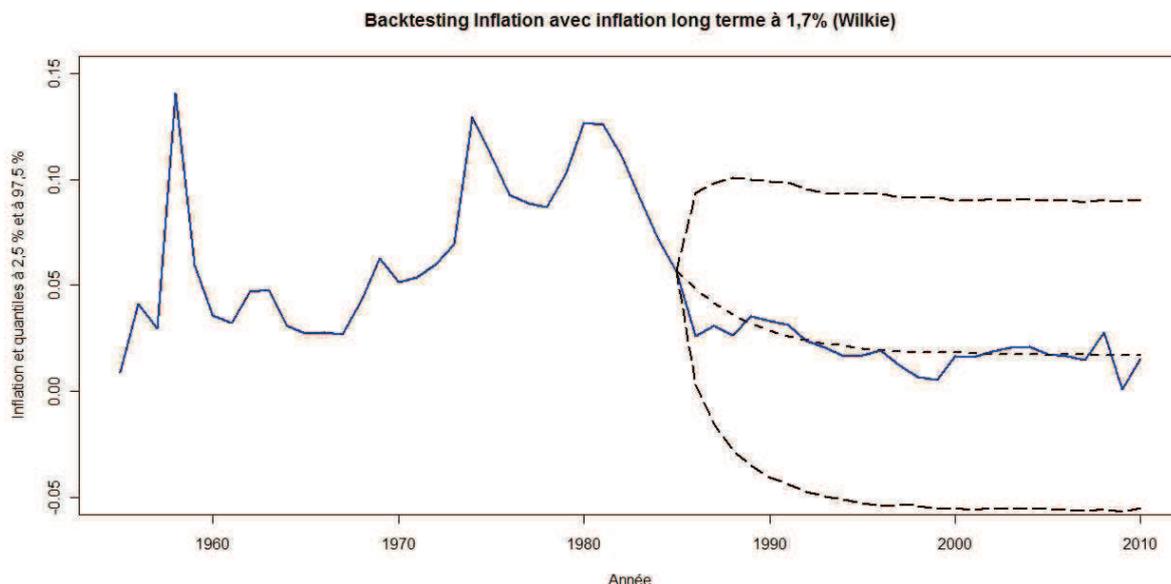
Dans cet article, en constatant que l'inflation comprend plusieurs cycles économiques, une estimation des paramètres est réalisée en utilisant des données sur plusieurs périodes glissantes de 20 années entre 1955 et 2005. Je reprends cette méthode en prolongeant jusqu'en 2010 et on obtient le graphique suivant :



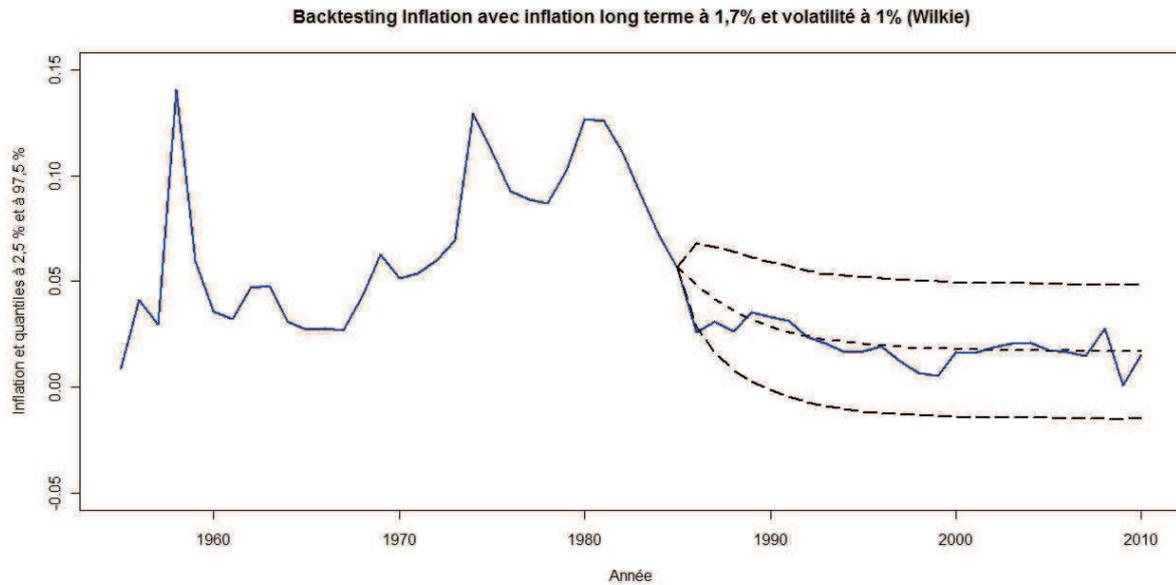
L'inflation à long terme converge vers une valeur proche de 2 % (droite en bleue). Pour l'estimation du paramètre QMU, je prends la moyenne sur les dix dernières périodes. Le résultat obtenu pour l'inflation à long terme est de 1,7 %.

Backtesting avec contrainte sur l'inflation

Je reprends la même démarche en passant le taux d'inflation à long terme de 4,7 % à 1,7 % :



Après la correction apportée sur l'inflation à long terme, ce graphique nous donne une autre information sur sa volatilité. A partir du milieu des années 80, la volatilité est faible. Je reprends la même méthode en regardant l'évolution de la volatilité sur chaque période. La valeur obtenue est QSD=0,10.



Le résultat obtenu est satisfaisant et je retiens pour les paramètres les valeurs suivantes :

Wilkie : Paramètres retenus pour l'inflation

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
QA	0,782
QMU	0,017
QSD	0,010

**Section 2.2 – Le taux de dividende (rendement des actions)**

Le modèle retenu pour le rendement des actions est le suivant :

$$\ln(Y_t) = YW I_t + YN_t$$

avec  $YN_t = \ln(YMU) + YA (YN_{t-1} - \ln(YMU)) + YE_t$

et  $YE_t = YSD YZ_t$

Posons  $y_t = \ln(Y_t)$

Par définition,  $YN_{t-1} = \ln(Y_{t-1}) - YW I_{t-1}$

En remplaçant  $YN_t$  et  $YN_{t-1}$  dans la seconde équation on obtient :

$$y_t = (1 - YA) \ln(YMU) + YA y_{t-1} + YW I_t - YA YW I_{t-1} + YSD YZ_t$$

Estimation des paramètres

En reprenant la dernière équation afin de définir les coefficients de régression :

$$y_t = \alpha_1 + \alpha_2 y_{t-1} + \alpha_3 I_t + \alpha_4 I_{t-1} + \varepsilon'_{Y,t}$$

On ne peut utiliser directement une résolution par les moindres carrés ordinaires car  $\alpha_4 = -\alpha_2 \alpha_3$ . Elle se fera en deux étapes :

Premièrement, on emploie la méthode des moindres carrés à l'équation  $y_t$  en retenant uniquement l'estimation  $\hat{\alpha}_2$ .

Deuxièmement, avec  $\hat{\alpha}_2$  fixé, on effectue une régression sur l'équation :

$$[y_t - \hat{\alpha}_2 y_{t-1}] = \alpha_1 + \alpha_3 [I_t - \hat{\alpha}_2 I_{t-1}] + \varepsilon'_{Y,t}$$

On recommence le processus en faisant varier  $\hat{\alpha}_2$  dont la régression minimise l'écart type du modèle.

Après avoir obtenu les coefficients estimés  $\hat{\alpha}_1$  à  $\hat{\alpha}_4$ , on détermine les paramètres du modèle :

$$YA = \hat{\alpha}_2$$

$$YW = \hat{\alpha}_3$$

$$\hat{\alpha}_1 = (1 - YA) \ln(YMU) = (1 - \hat{\alpha}_2) \ln(YMU), \quad YMU = \exp\left(\frac{\hat{\alpha}_1}{1 - \hat{\alpha}_2}\right)$$

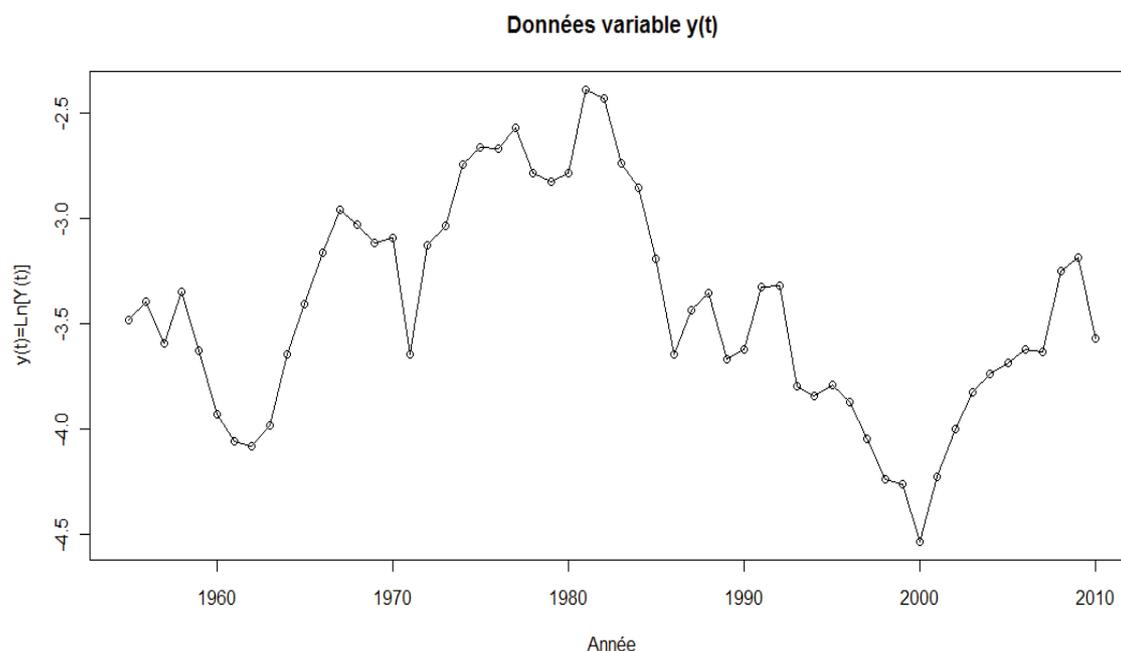
L'écart type de l'erreur du modèle initial YSD est égal à l'écart type du modèle

Les données de Georges Gallais-Hamonno ainsi que celles provenant du SBF 250 présentent deux indices. Le premier est l'indice de rentabilité (noté R) et le second l'indice de rentabilité en réinvestissant les dividendes (noté RI).

Soient  $R_t$  et  $RI_t$  les indices au temps  $t$ . Le taux de dividende  $Y_t$  est déterminé par la formule suivante :

$$Y_t = \frac{1 + RI_t}{1 + R_t} - 1$$

Le graphique suivant représente la variable  $y_t$  pour la période 1955 à 2010.



Suite à la régression présentée dans la première étape, l'estimation obtenue pour le paramètre YA du modèle sur le rendement des actions est égale à 0,754. Dans la seconde étape en faisant varier YA pour minimiser l'écart type du modèle, on obtient la valeur 0,862.

Le tableau suivant présente les résultats obtenus lors de la seconde étape des différents paramètres du modèle.

Wilkie : Résultat du calibrage sur le rendement des actions

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
YA	0,862
YW	3,496
YMU	0,027
YSD	0,219

Wilkie donnait comme valeurs pour la France sur la période 1951-1989 :

YA=0.88, YW=1.64, YMU=2.4 % et YSD=0.165.

Tests du modèle et analyse des résidus

Le tableau suivant présente les résultats des différents tests pour la validation du modèle sur le rendement des actions.

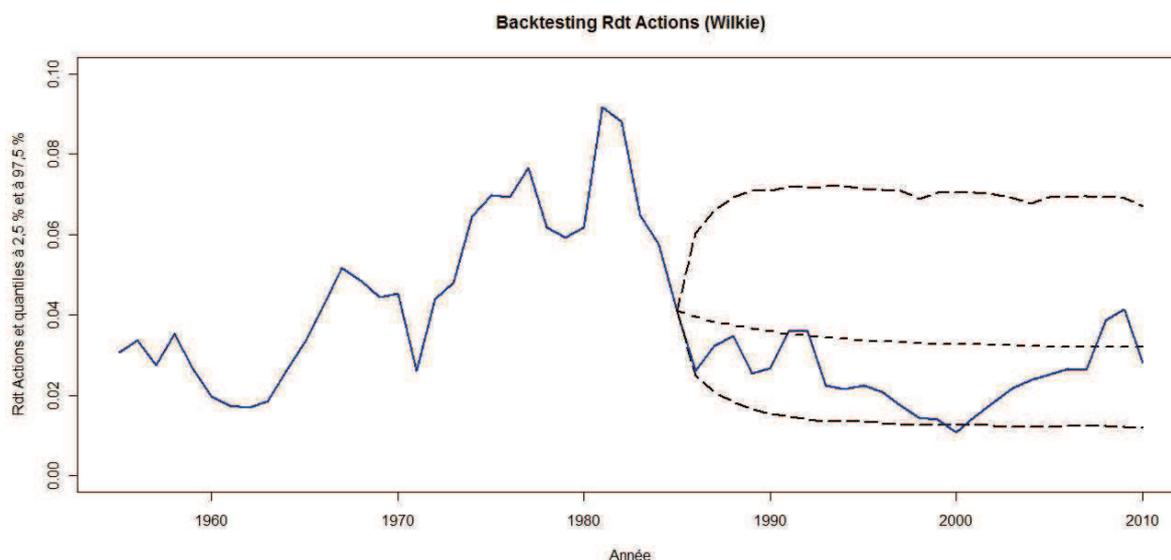
Wilkie : Résultat des tests sur le rendement des actions

<u>Test</u>	<u>Résultat</u>	<u>Interprétation</u>
Etape 1		
R <sup>2</sup> ajusté	0,82	Le pouvoir explicatif du modèle est de 82 %
Fisher	$2,2 \cdot 10^{-16}$	Le modèle global est significatif
Student (variable $\alpha_2$ )	$1,4 \cdot 10^{-11}$	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$-1,2 \cdot 10^{-18}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,09	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,43	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	0,69	Hypothèse de normalité vérifiée

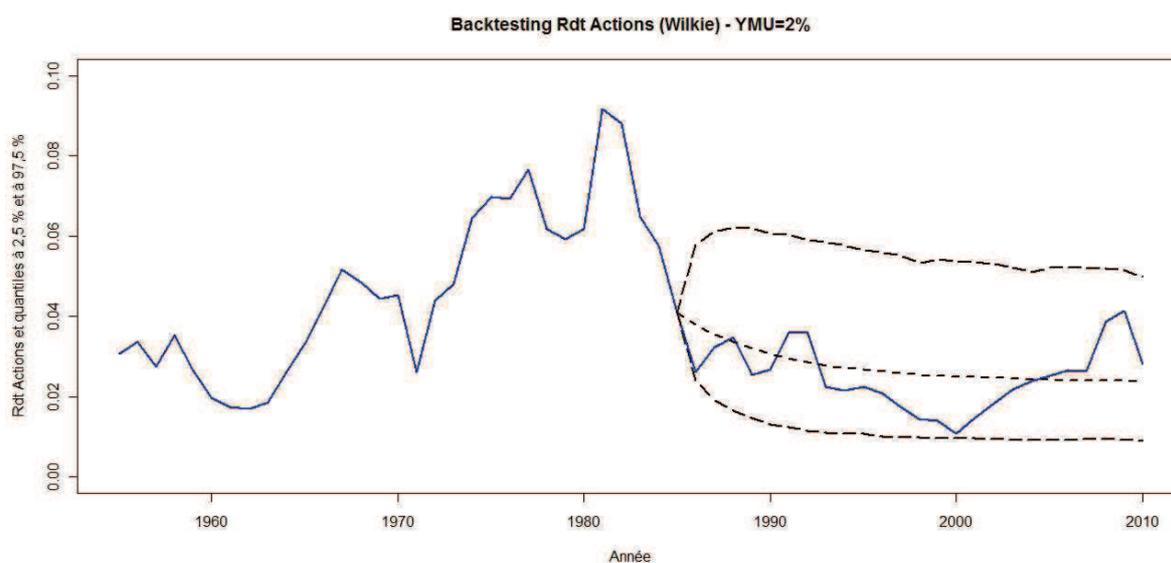
Etape 2		
R <sup>2</sup> ajusté	0,10	Le pouvoir explicatif du modèle est de 10 %
Fisher	0,01	Le modèle global est significatif
Student (constante $\alpha_1$ )	$< 2 \cdot 10^{-16}$	La constante est significative
Student (variable $\alpha_3$ )	0,01	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$-2,2 \cdot 10^{-18}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,42	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,90	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	0,80	Hypothèse de normalité vérifiée

L'ensemble des tests valide les hypothèses posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage. Le pouvoir explicatif est faible et il convient de considérer avec prudence les intervalles de confiance des projections.

Backtesting du modèle action



Le modèle surestime le rendement des actions observé se situant en grande partie dans la partie inférieure de l'intervalle de confiance. En reprenant le même procédé que sur l'inflation, j'obtiens le taux de rendement à long terme à 2 %.



Le résultat obtenu est concluant et je retiens pour les paramètres les valeurs suivantes :

Wilkie : Valeurs retenues pour le rendement des actions

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
YA	0,862
YW	3,496
YMU	0,020
YSD	0,219

### Section 2.3 – Le montant des dividendes

Le montant des dividendes est modélisé par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \nabla \ln D_t &= DW \cdot DM_t + DX \cdot I_t + DMU + DY \cdot YE_{t-1} + DB \cdot DE_{t-1} + DE_t \\ \text{avec } DM_t &= DD \cdot I_t + (1 - DD) \cdot DM_{t-1} \\ \text{et } DE_t &= DSD \cdot DZ_t \end{aligned}$$

En notant  $K_t$  la variation du logarithme et en identifiant les effets de l'inflation notés  $DI_t$ , on obtient :

$$K_t = DI_t + DMU + DY \cdot YE_{t-1} + DB \cdot DE_{t-1} + DE_t$$

Les paramètres de ce modèle ne seront pas estimés car la difficulté est l'obtention des données. En effet, il n'y a pas de longues séries de dividendes qui soient disponibles publiquement. J'utilise donc par la suite les données de Wilkie.

Wilkie pose comme contrainte la relation  $DX = 1 - DW$  de sorte qu'un changement dans  $\ln Q$  produit le même changement dans  $\ln D$ .

Wilkie donnait comme valeurs pour la France sur la période 1951-1989 :

$DW=1$  (impliquant que  $DX=0$ ),  $DD=0.2$ ,  $DMU=0$ ,  $DY=0$ ,  $DB=0.7$  et  $DSD=0.085$ .

On obtient finalement le modèle suivant :

$$\begin{aligned} K_t &= DM_t + 0,7 \cdot DE_{t-1} + DE_t \\ \text{avec } DM_t &= 0,2 \cdot I_t + 0,8 \cdot DM_{t-1} \\ \text{et } DE_t &= 0,085 \cdot DZ_t \end{aligned}$$

### Prix de l'action

En partant des modèles sur le taux de rendement et du montant des dividendes, on détermine la série  $S_t$  correspondant au prix des actions :

$$S_t = \frac{D_t}{Y_t}$$

On déduit un modèle pour le prix de l'action en fonction des deux précédents modèles :

$$\ln S_t = \ln D_t - \ln Y_t$$

## Section 2.4 – Le taux d'intérêt à long terme

Le modèle pour le taux d'intérêt à long terme est le suivant :

$$C_t = CW CM_t + CMU \exp(CN_t)$$

avec

$$CM_t = CD I_t + (1 - CD) CM_{t-1}$$

$$CN_t = CA_1 CN_{t-1} + CA_2 CN_{t-2} + CA_3 CN_{t-3} + CY YE_t + CE_t$$

$$\text{et } CE_t = CSD CZ_t$$

Je retiens dans mon étude la suggestion de Wilkie sur le paramètre CW en lui attribuant une valeur égale à 1. Il ajoute en prenant cette hypothèse que ce modèle prend en compte de l'effet Fisher dont le taux d'intérêt à long terme reflète à la fois l'inflation attendue sur la durée et un taux « réel » d'intérêt.

Il est aisé de désigner la partie « réelle » du taux d'intérêt à long terme comme :

$$CR_t = C_t - CM_t$$

De sorte que :

$$\ln(CR_t) = \ln(CMU) + CN_t$$

Le modèle du logarithme de  $CR_t$  est essentiellement un modèle autorégressif d'ordre 3. Wilkie suggère qu'une simplification vers un modèle autorégressif d'ordre 1 est possible en omettant les paramètres  $CA_2$  et  $CA_3$ . J'opte pour cette seconde approche et l'équation devient :

$$\ln(CR_t) = \ln(CMU) + CA CN_{t-1} + CY YE_t + CSD CZ_t$$

En remplaçant  $CN_{t-1}$  :

$$\ln(CR_t) = \ln(CMU) + CA [\ln(CR_{t-1}) - \ln(CMU)] + CY YE_t + CSD CZ_t$$

Au final on obtient :

$$\ln(CR_t) = (1 - CA) \ln(CMU) + CA \ln(CR_{t-1}) + CY YE_t + CSD CZ_t$$

### Estimation des paramètres

En reprenant la dernière équation afin de définir les coefficients de régression :

$$\ln(\text{CR}_t) = \alpha_1 + \alpha_2 \ln(\text{CR}_{t-1}) + \alpha_3 \text{YE}_t + \varepsilon'_{C,t}$$

L'estimation de l'ensemble des paramètres du modèle est réalisée au bout de 2 étapes :

La première étape est de générer la série  $\text{CM}_t$  en fixant le premier terme, le paramètre CD et en s'imposant la contrainte  $\text{CM}_t > 0$ . Concernant le paramètre CD, je prends le résultat obtenu par Wilkie soit 0,2.

Dans la seconde étape, on calcule  $\text{CR}_t$  et on détermine les paramètres par une régression en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires.

Après avoir obtenu les coefficients estimés, on détermine les paramètres du modèle initial :

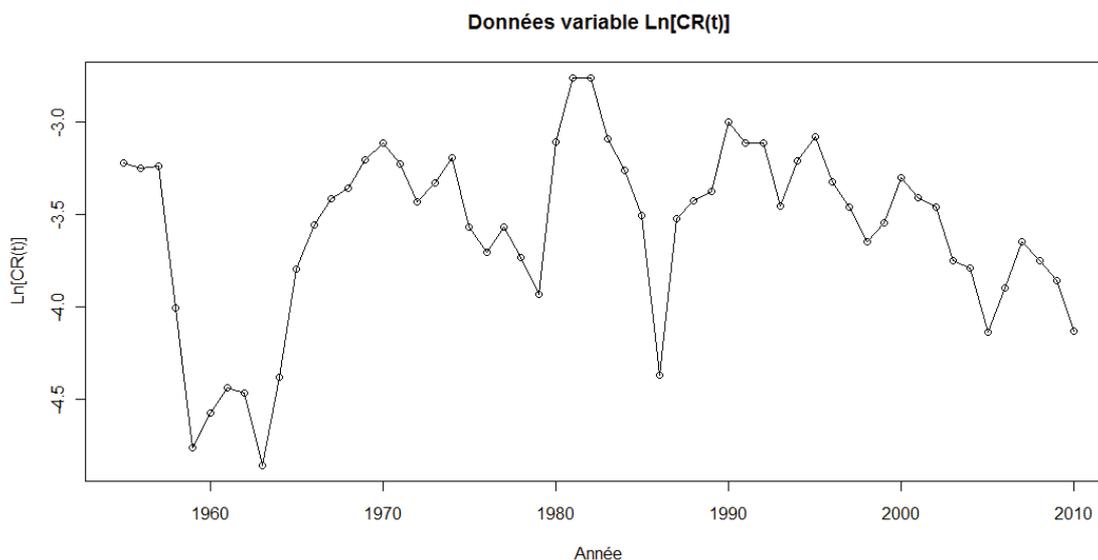
$$\text{CA} = \alpha_2$$

$$\alpha_1 = (1 - \text{CA}) \ln(\text{CMU}) = (1 - \alpha_2) \ln(\text{CMU}), \quad \text{CMU} = \exp\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}\right)$$

$$\text{CY} = \alpha_3$$

L'écart type de l'erreur du modèle initial CSD est égal à l'écart type du modèle.

Le graphique suivant représente la variable  $\ln(\text{CR}_t)$  pour la période 1955 à 2010.



Le tableau suivant présente les résultats obtenus des différents paramètres du modèle du taux d'intérêt à long terme.

Wilkie : Résultat du calibrage sur le taux intérêt à long terme

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
CW	1
CD	0,2
CA	0,78
CMU	0,026
CY	0,437
CSD	0,296

Wilkie donnait comme valeurs pour la France sur la période 1951-1989 :

CW=1, CD=0.2, CA=0.9, CMU=0.025, CY=1 et CSD=0.3

Tests du modèle et analyse des résidus

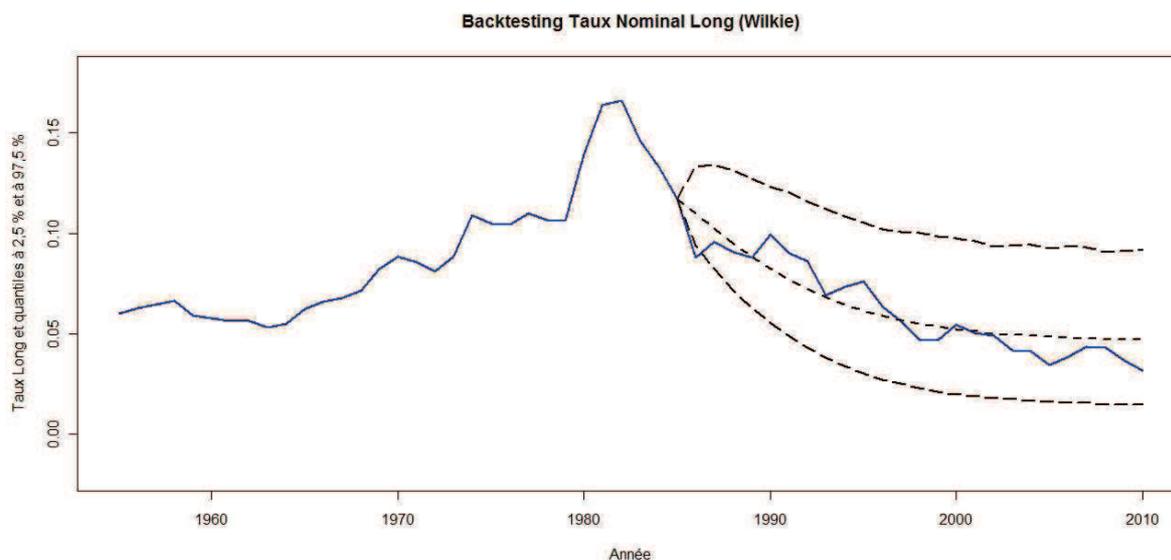
Le tableau suivant présente les résultats des différents tests pour la validation du modèle du taux d'intérêt à long terme.

Wilkie : Résultat des tests sur le taux d'intérêt à long terme

<u>Test</u>	<u>Résultat</u>	<u>Interprétation</u>
R <sup>2</sup> ajusté	0,61	Le pouvoir explicatif du modèle est de 61 %
Fisher	$8,2 \cdot 10^{-12}$	Le modèle global est significatif
Student (constante $\alpha_1$ )	$1,2 \cdot 10^{-2}$	La constante est significative
Student (variable $\alpha_2$ )	$2,3 \cdot 10^{-12}$	Le coefficient de la variable est significatif
Student (variable $\alpha_3$ )	$2,4 \cdot 10^{-2}$	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$1,1 \cdot 10^{-18}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,32	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,28	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	0,17	Hypothèse de normalité vérifiée

L'ensemble des tests valide les hypothèses posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage.

## Backtesting du modèle taux d'intérêt à long terme



Hormis la première valeur, correspondant à l'année 1986, qui ne se trouve pas dans l'intervalle de confiance, le résultat obtenu est satisfaisant pour les années suivantes. Je retiens pour les paramètres les valeurs indiquées précédemment.

### **Section 2.5 – Le taux d'intérêt à court terme**

Soit le modèle retenu pour le taux d'intérêt à court terme :

$$B_t = C_t \exp(-BD_t)$$

$$\text{avec } BD_t = BMU + BA (BD_{t-1} - BMU) + BE_t$$

$$\text{et } BE_t = BSD BZ_t$$

#### Estimation des paramètres

En présentant le modèle autorégressif d'ordre 1 sous une autre forme :

$$BD_t = BMU (1 - BA) + BA BD_{t-1} + BSD BZ_t$$

En définissant les coefficients de régression par la méthode des moindres carrés ordinaires :

$$BD_t = \alpha_1 + \alpha_2 BD_{t-1} + \varepsilon'_{B,t}$$

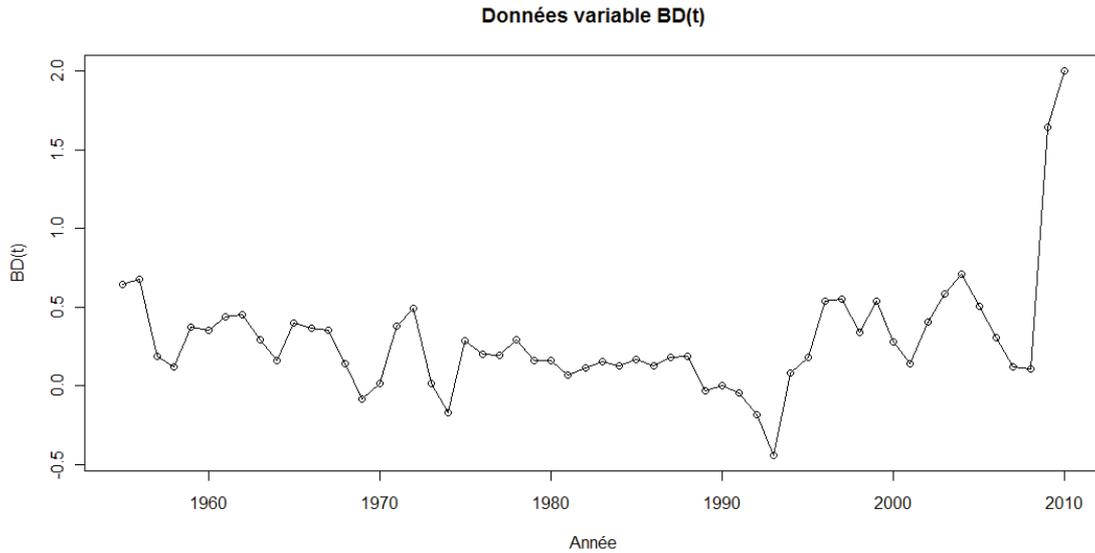
Après avoir obtenu les coefficients estimés  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\alpha}_2$ , on détermine les paramètres :

$$BA = \alpha_2$$

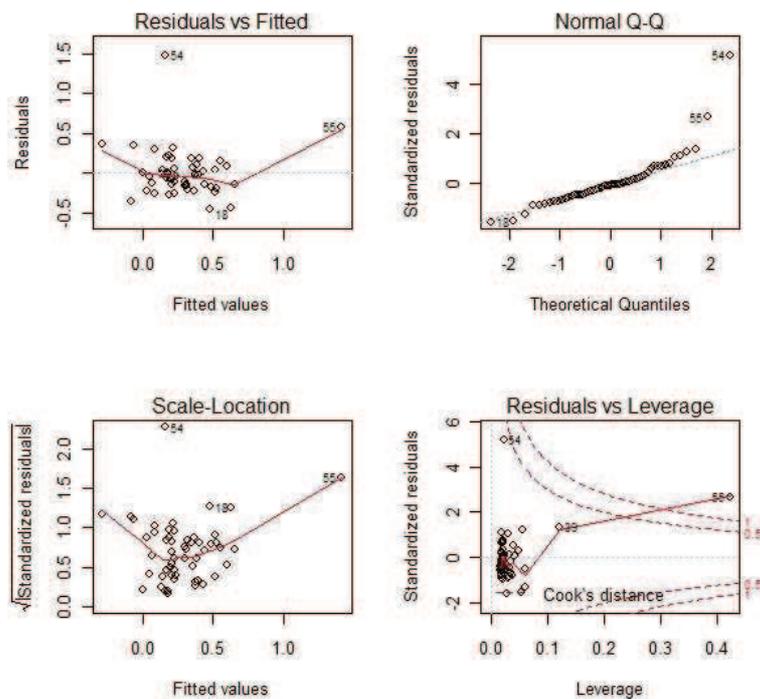
$$\alpha_1 = BMU (1 - BA) = BMU (1 - \alpha_2), \quad BMU = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}$$

L'écart type de l'erreur du modèle initial BSD est égal à l'écart type du modèle.

Le graphique suivant représente la variable  $BD_t$  pour la période 1955 à 2010.



Les deux derniers points relatifs aux années 2009 et 2010 (n° 54 et 55) vont poser problème dans l'estimation des paramètres. Ci-dessous une explication graphique :



Ces quatre graphiques permettent d'avoir des informations sur la qualité de la régression. Le premier est un graphe des résidus en fonction des prédictions, le deuxième un graphe quantile-quantile des résidus, et les deux derniers sont des graphes visant à détecter des individus aberrants (scale-location plot et distance de Cook).

Les résidus ne suivent pas de façon significative une distribution gaussienne sur la fin de la distribution. Les deux derniers points ont une distance de Cook aberrante.

Pour l'étude sur l'estimation des paramètres, je ne retiendrais pas ces deux points.

Suite à la régression, le tableau suivant présente les résultats obtenus des différents paramètres du modèle du taux d'intérêt à court terme.

Wilkie : Résultat du calibrage sur le taux d'intérêt à court terme

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
BA	0,588
BMU	0,213
BSD	0,180

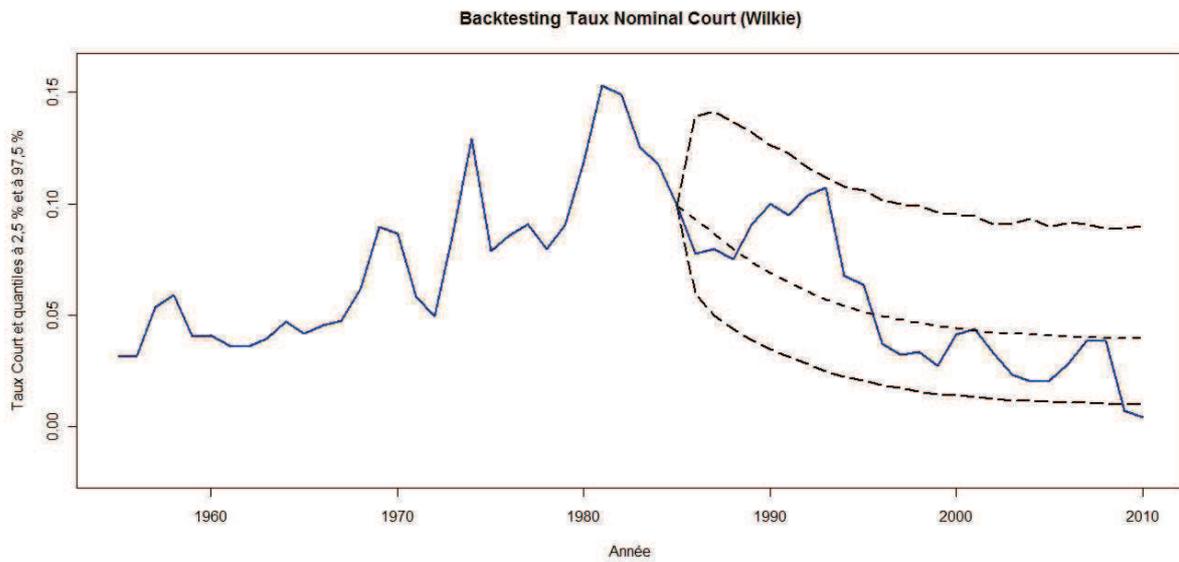
Tests du modèle et analyse des résidus

Le tableau suivant présente les résultats des différents tests pour la validation du modèle du taux d'intérêt à court terme.

Wilkie : Résultat des tests sur le taux d'intérêt à court terme

<u>Test</u>	<u>Résultat</u>	<u>Interprétation</u>
R <sup>2</sup> ajusté	0,35	Le pouvoir explicatif du modèle est de 35 %
Fisher	$1 \cdot 10^{-6}$	Le modèle global est significatif
Student (constante $\alpha_1$ )	$1,7 \cdot 10^{-2}$	La constante est significative
Student (variable $\alpha_2$ )	$1 \cdot 10^{-6}$	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$3,8 \cdot 10^{-18}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,18	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,14	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	0,79	Hypothèse de normalité vérifiée

L'ensemble des tests valide les hypothèses posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage. Le pouvoir explicatif est faible et il convient de considérer avec prudence les intervalles de confiance des projections.

Backtesting du modèle taux d'intérêt à court terme

Suite aux précédentes remarques concernant les deux derniers points relatifs aux années 2009 et 2010, on constate qu'ils ne sont pas dans l'intervalle de confiance. Pour les autres années, le résultat obtenu est concluant et je retiens pour les paramètres les valeurs indiquées précédemment.

## Chapitre 3 – Calibrage du modèle d'Ahlgrim

### Section 3.1 – L'inflation

Le modèle retenu pour l'inflation est le suivant :

$$dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \sigma_q dB_{q,t}$$

En passant en temps discret avec un pas de discrétisation  $\delta=1$  on obtient :

$$q_{t+1} = q_t e^{-\kappa_q} + \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \varepsilon_q$$

En modifiant la précédente équation, on montre que le processus d'Orstein-Uhlenbeck est une version en temps continu d'un processus autorégressif de premier ordre :

$$q_{t+1} - \mu_q = e^{-\kappa_q} (q_t - \mu_q) + \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \varepsilon_q$$

#### Estimation des paramètres

On peut estimer les paramètres du modèle de l'inflation par une régression simple de la série chronologique :

$$q_{t+1} = \alpha + \beta \cdot q_t + \varepsilon'_{q,t}$$

Après avoir obtenu les coefficients estimés  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$ , on revient au modèle initial pour déterminer ses paramètres :

$$\begin{aligned} \beta &= e^{-\kappa_q}, \quad \kappa_q = -\ln(\beta) \\ \alpha &= \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) = \mu_q (1 - e^{\ln(\beta)}), \quad \mu_q = \frac{\alpha}{1 - \beta} \end{aligned}$$

L'écart type de l'erreur du modèle initial  $\hat{\sigma}_q$  est égal à l'écart type du modèle estimé en

divisant par  $\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}}$ .

Suite à la régression, le tableau suivant présente les résultats obtenus des différents paramètres du modèle de l'inflation.

Ahlgrim : Résultat du calibrage sur l'inflation

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
$\kappa_q$	0,246
$\mu_q$	0,047
$\sigma_q$	0,026

Tests du modèle et analyse des résidus

Le tableau suivant présente les résultats des différents tests pour la validation du modèle de l'inflation.

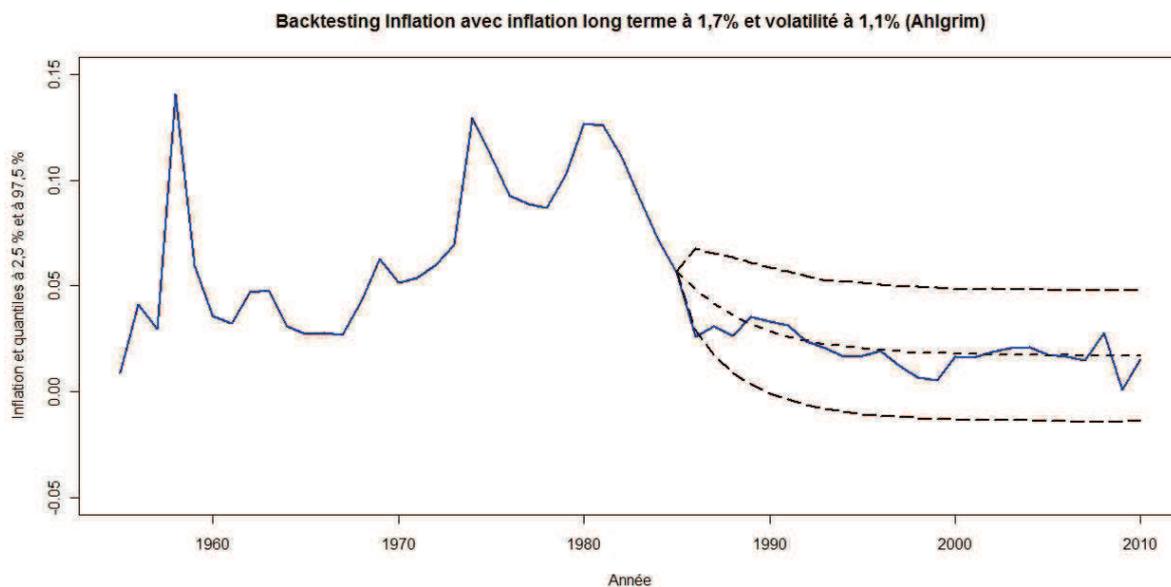
Ahlgrim : Résultat des tests sur l'inflation

<u>Test</u>	<u>Résultat</u>	<u>Interprétation</u>
R <sup>2</sup> ajusté	0,61	Le pouvoir explicatif du modèle est de 61 %
Fisher	$1,4 \cdot 10^{-12}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	0,04	La constante est significative
Student (variable)	$1,4 \cdot 10^{-12}$	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$3,5 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,27	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,10	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité non vérifiée

L'ensemble des tests (excepté celui de la normalité) valide les hypothèses posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage. L'hypothèse des résidus non vérifiée implique qu'il faudra considérer avec prudence les intervalles de confiance des projections.

Backtesting du modèle inflation

Comme pour le modèle de Wilkie, je retiens une inflation à long terme de 1,7 %. La volatilité corrigée pour le modèle d'Ahlgrim est de 1,1 %.



Le résultat obtenu est satisfaisant et je retiens pour les paramètres les valeurs suivantes :

Ahlgrim : Paramètres retenus pour l'inflation

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
$\kappa_q$	0,246
$\mu_q$	0,017
$\sigma_q$	0,011

### Section 3.2 – Les taux d'intérêts réels

Le modèle retenu pour les taux d'intérêts réel est le suivant :

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_r (l_t - r_t) \cdot dt + \sigma_r \cdot dB_{r,t} \\ dl_t &= \kappa_l (\mu_l - l_t) \cdot dt + \sigma_l \cdot dB_{l,t} \end{aligned}$$

Afin d'estimer les paramètres du modèle, on examine son équivalent dans le cas discret avec un pas de discrétisation  $\delta=1$  :

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= r_t e^{-\kappa_r} + l_t (1 - e^{-\kappa_r}) + \sigma_r \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_r}}{2\kappa_r}} \varepsilon_r \\ l_{t+1} &= l_t e^{-\kappa_l} + \mu_l (1 - e^{-\kappa_l}) + \sigma_l \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_l}}{2\kappa_l}} \varepsilon_l \end{aligned}$$

#### Estimation des paramètres

En reprenant les dernières équations afin de définir les coefficients de régression :

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= \alpha_1 \cdot l_t + \alpha_2 \cdot r_t + \varepsilon'_{r,t} \\ l_{t+1} &= \beta_1 + \beta_2 \cdot l_t + \varepsilon'_{l,t} \end{aligned}$$

On ne peut appliquer directement la méthode des moindres carrés étant donné la dépendance du processus à court terme sur le processus à long terme. Pour estimer ces équations simultanées, Ahlgrim et al. emploient la méthode des moindres carrés en deux étapes (appelée aussi méthode des doubles moindres carrés DMC).

Afin d'estimer l'équation du taux court à l'étape 2, il faut d'abord obtenir des estimations adaptées pour le taux long sur la base des estimations des paramètres de l'étape 1 :

$$\begin{aligned} \text{Etape 1 : } l_{t+1} &= \beta_1 + \beta_2 \cdot l_t + \varepsilon'_{l,t} \\ \text{Etape 2 : } r_{t+1} &= \alpha_1 \cdot \hat{l}_t + \alpha_2 \cdot r_t + \varepsilon'_{r,t} \end{aligned}$$

Après avoir obtenu les coefficients estimés  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  de la première étape, on revient au modèle initial du taux à long terme pour déterminer ses paramètres :

$$\begin{aligned} \beta_2 &= e^{-\kappa_l}, \quad \kappa_l = -\ln(\beta_2) \\ \beta_1 &= \mu_l (1 - e^{-\kappa_l}) = \mu_l (1 - e^{\ln(\beta_2)}) \quad \mu_l = \frac{\beta_1}{1 - \beta_2} \end{aligned}$$

L'écart type de l'erreur du modèle initial du taux à long terme  $\hat{\sigma}_1$  est égal à l'écart type du modèle estimé en divisant par  $\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_1}}{2\kappa_1}}$ .

Dans l'étape 2, le modèle à taux court à deux variables explicatives incluant le taux à long terme estimé dans l'étape 1.

Par définition :  $\alpha_2 = e^{-\kappa_r}$  et  $\alpha_1 = 1 - e^{-\kappa_r}$ . Donc  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ .

En remplaçant dans l'équation du taux à court terme on obtient :  $(r_{t+1} - r_t) = \alpha_1 (\hat{l}_t - r_t) + \varepsilon'_{r,t}$ .

On aboutit à une seule variable explicative  $(\hat{l}_t - r_t)$ .

Suite à l'estimation du coefficient  $\hat{\alpha}_1$ , on retourne au modèle initial du taux à court terme pour déterminer ses paramètres :

$$\alpha_1 = 1 - e^{-\kappa_r}, \quad \kappa_r = -\ln(1 - \alpha_1)$$

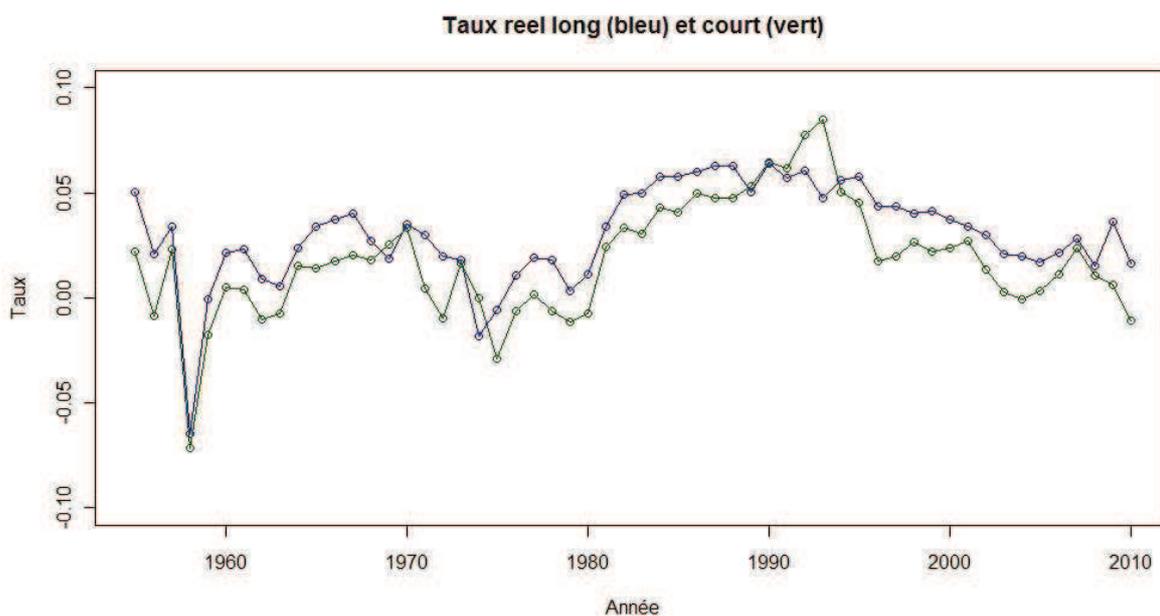
L'écart type de l'erreur du modèle initial du taux à court terme  $\hat{\sigma}_r$  est égal à l'écart type du modèle estimé en divisant par  $\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_r}}{2\kappa_r}}$ .

Soient, à l'instant  $t$ , le taux d'intérêt nominal à court terme noté  $r_{n,t}$  et le taux d'intérêt nominal à long terme noté  $l_{n,t}$  disponibles dans les données de Friggit. Le taux d'intérêt réel correspond au taux d'intérêt nominal déflaté (on élimine les effets de l'inflation). La détermination des ces taux, au même instant, s'obtient par les formules suivantes :

$$r_t = \frac{1 + r_{n,t}}{1 + q_t} - 1 \quad \text{et} \quad l_t = \frac{1 + l_{n,t}}{1 + q_t} - 1$$

$q_t$  est le taux d'inflation présenté dans la précédente section.

Le graphique suivant représente les variables  $r_t$  et  $l_t$  pour la période 1955 à 2010.



Suite à la régression par la méthode des moindres carrés en deux étapes, le tableau suivant présente les résultats obtenus des différents paramètres du modèle des taux.

Ahlgrim : Résultat du calibrage sur les taux réels

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
Taux d'intérêt réel à court terme	
$\kappa_r$	0,383
$\sigma_r$	0,023
Taux d'intérêt réel à long terme	
$\kappa_l$	0,470
$\mu_l$	0,029
$\sigma_l$	0,023

Tests du modèle et analyse des résidus

Le tableau suivant présente les résultats des différents tests de la première étape pour la validation du modèle du taux d'intérêt réel à long terme.

Ahlgrim : Résultat des tests sur le taux réel long terme

<u>Test</u>	<u>Résultat</u>	<u>Interprétation</u>
R <sup>2</sup> ajusté	0,38	Le pouvoir explicatif du modèle est de 38 %
Fisher	$3 \cdot 10^{-7}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	0,01	La constante est significative
Student (variable)	$3 \cdot 10^{-7}$	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$-5,7 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,21	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,72	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité non vérifiée

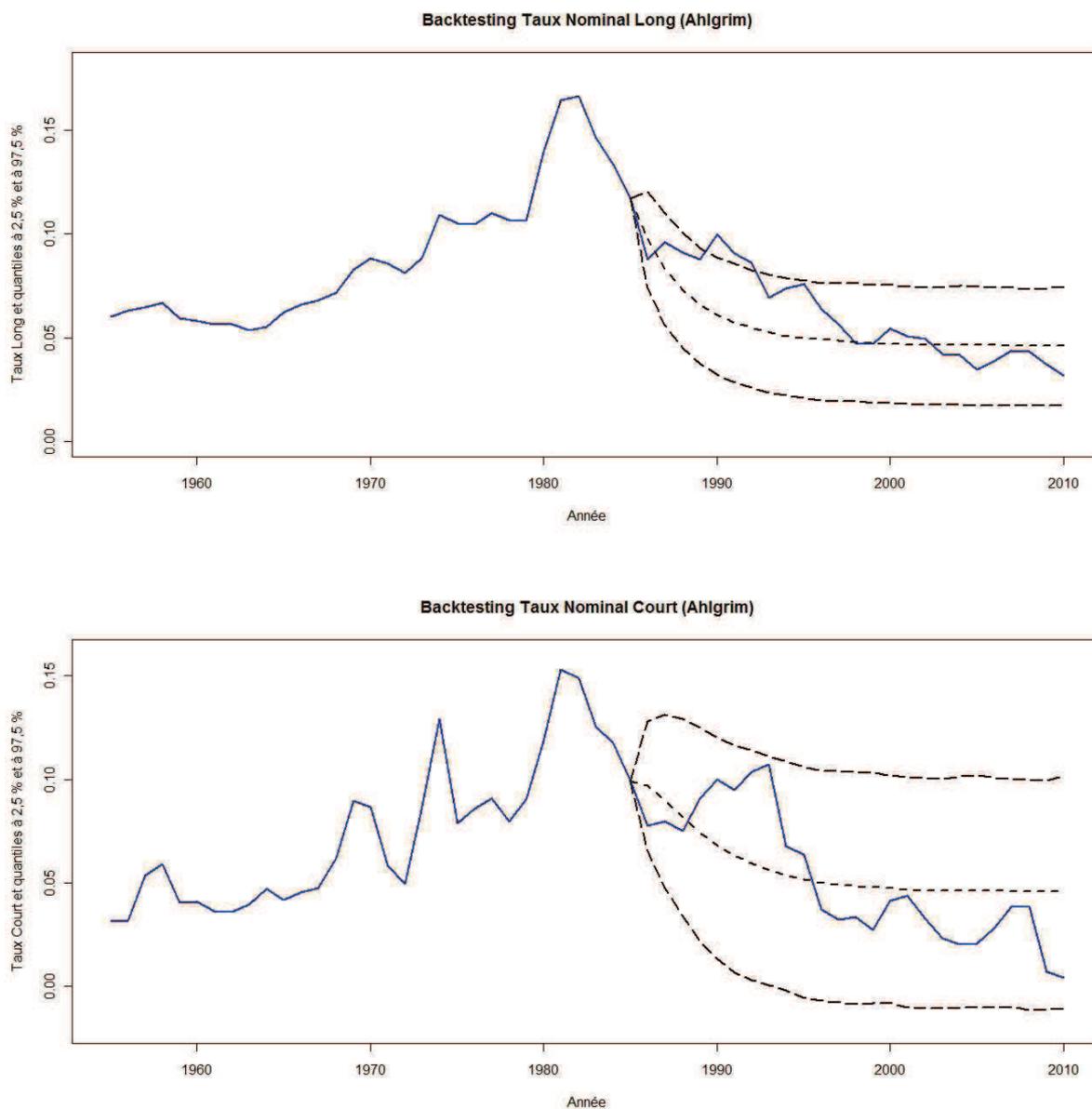
L'ensemble des tests (excepté celui de la normalité) valide les hypothèses posées a priori pour la validation du modèle et du calibrage. De plus, le pouvoir explicatif étant faible, il faudra considérer avec prudence les intervalles de confiance des projections.

Pour terminer, les résultats des différents tests de la seconde étape pour la validation du modèle du taux d'intérêt réel à court terme se trouvent dans le tableau ci-dessous.

Ahlgrim : Résultat des tests sur le taux réel court terme

<u>Test</u>	<u>Résultat</u>	<u>Interprétation</u>
R <sup>2</sup> ajusté	0,12	Le pouvoir explicatif du modèle est de 12 %
Fisher	$5,3 \cdot 10^{-3}$	Le modèle global est significatif
Student (variable)	$5,3 \cdot 10^{-3}$	Le coefficient de la variable est significatif
Moyenne des résidus	$-3,8 \cdot 10^{-3}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	0,41	Absence d'autocorrélation d'ordre 1
ARCH(1)	0,90	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre 1
Jarque et Bera	$< 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité non vérifiée

Mêmes remarques que sur le taux réel à long terme.

Backtesting du modèle des taux d'intérêts nominaux

Pour le modèle du taux nominal long, les points relatifs aux années 1990 à 1992 sont en dehors de l'intervalle de confiance. Les autres années donnent un meilleur résultat. Sur le modèle du taux nominal court, les résultats obtenus sont satisfaisants. Je retiens pour les paramètres les valeurs indiquées précédemment.

### Section 3.3 – Le rendement des actions

Le modèle retenu pour le rendement des actions est le suivant :

$$s_t = q_t + r_t + x_t$$

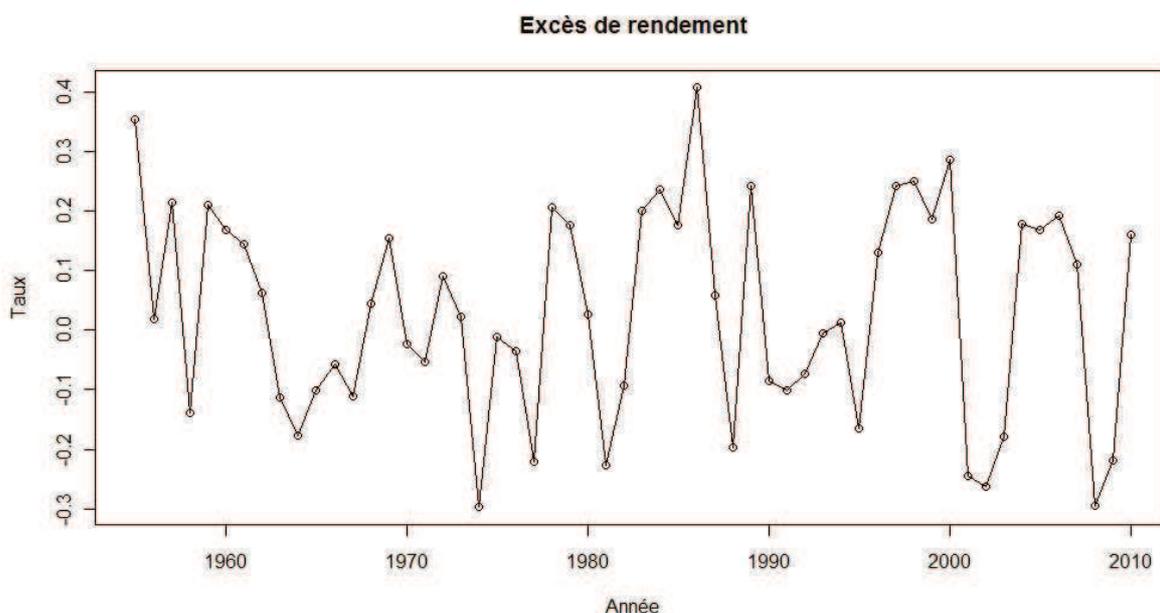
#### Estimation des paramètres

L'excès de rendement à l'instant t est déterminé par la formule suivante :

$$x_t = \ln \frac{VIA_t}{VIA_{t-1}} - r_{n,t}$$

où  $VIA_t$  est la valeur d'un investissement en action avec dividendes réinvestis et  $r_{n,t}$  le taux d'intérêt nominal à court terme dont les séries sont disponibles dans les données de Friggit.

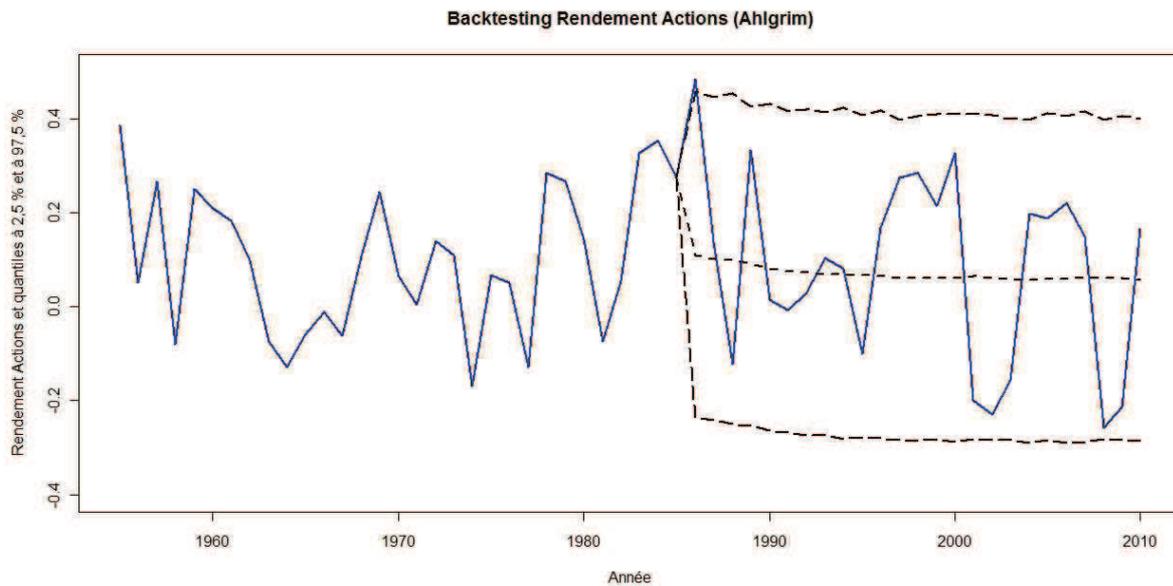
Le graphique suivant représente la variable  $x_t$  pour la période 1955 à 2010.



Le tableau suivant présente les résultats obtenus des différents paramètres du modèle des actions.

#### Ahlgrim : Résultat du calibrage sur les actions

<u>Paramètre</u>	<u>Valeur</u>
$\mu_s$	0,029
$\sigma_s$	0,178

Backtesting du modèle du rendement des actions

Excepté la première année, le résultat obtenu est satisfaisant et je retiens pour les paramètres les valeurs indiquées précédemment.

### Les taux zéro-coupons

Ahlgrim et al. reprennent la relation de Fisher pour déterminer le prix d'une obligation zéro-coupon à l'instant  $t$  payant 1 euro en nominal à l'échéance  $T$ . L'idée est que les obligations sont tarifées en fonction du taux d'inflation du taux d'intérêt réel.

Soit la relation suivante en supposant que l'hypothèse d'indépendance entre le taux d'intérêt réel et l'inflation est vérifiée :

$$P_{\text{nominal}}(t, T) = P_{\text{reel}}(t, T) \cdot P_{\text{inflation}}(t, T)$$

### Modélisation des zéro-coupon en réel

En partant du modèle de taux de Hull et White, on obtient le prix d'un zéro-coupon pour toute date  $t$  de maturité  $T$ . Hilbert et al. démontrent la relation suivante :

$$P_{\text{reel}}(t, T) = \exp(A(s) - B_2(s) r_t - B_1(s) l_t)$$

Avec :

$$s = T - t$$

$r_t$  et  $l_t$  les taux court et long modélisé à la date  $t$

$$B_2(s) = \frac{1 - \exp(-\kappa_r s)}{\kappa_r}$$

$$B_1(s) = \frac{\kappa_r}{\kappa_r - \kappa_l} \left( \frac{1 - \exp(-\kappa_l s)}{\kappa_l} - \frac{1 - \exp(-\kappa_r s)}{\kappa_r} \right)$$

$$A(s) = (B_2(s) - s) \left( \mu_l - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa_r^2} \right) + B_1(s) \left( \mu_l - \frac{\sigma_r^2 B_2(s)^2}{4\kappa_r^2} \right) + \frac{\sigma_l^2}{2} \left( \frac{s}{\kappa_l^2} - 2 \frac{B_1(s) + B_2(s)}{\kappa_l^2} + \frac{1}{(\kappa_l - \kappa_r)^2} \frac{1 - \exp(-\kappa_r s)}{\kappa_r} - \frac{2\kappa_r}{\kappa_l(\kappa_l - \kappa_r)^2} \frac{1 - \exp(-(\kappa_l + \kappa_r)s)}{\kappa_l + \kappa_r} + \frac{\kappa_r^2}{\kappa_l(\kappa_l - \kappa_r)^2} \frac{1 - \exp(-2\kappa_l s)}{2\kappa_l} \right)$$

$\kappa_r$ ,  $\kappa_l$ ,  $\mu_l$ ,  $\sigma_r$  et  $\sigma_l$  sont définis dans la section 3.2.

Modélisation de l'inflation

Le modèle de l'inflation peut être vu comme un modèle mono factoriel de Vasicek. On obtient la relation suivante :

$$P_{\text{inflation}}(t, T) = A(s) \exp(-B(s)q_t)$$

Avec :

$$s = T - t$$

$q_t$  l'inflation modélisée à la date  $t$

$$B(s) = \frac{1 - \exp(-\kappa_q s)}{\kappa_q}$$

$$A(s) = \exp \left( \frac{(B(s) - s) \left( \kappa_q^2 \mu_q - \frac{\sigma_q^2}{2} \right) - \frac{\sigma_q^2 B(s)^2}{4\kappa_q}}{\kappa_q^2} \right)$$

$\kappa_q$ ,  $\mu_q$  et  $\sigma_q$  sont définis dans la section 3.1.

Modélisation des zéro-coupon en nominal

Il suffit de calculer le produit entre  $P_{\text{reel}}(t, T)$  et  $P_{\text{inflation}}(t, T)$  pour obtenir le prix zéro-coupon en nominal.

## Chapitre 4 – Prédications des modèles

Ce chapitre présente la démarche pour simuler les trajectoires des équations composant les modèles de Wilkie et d'Ahlgrim. Chaque équation ayant un bruit blanc gaussien, il faut donc générer des réalisations de variables aléatoires de loi uniforme qui permettent ensuite de générer des variables aléatoires de loi normale. Le nombre de simulation est fixé à 10 000.

### Section 4.1 – Générateurs de nombres aléatoires

#### Loi uniforme : algorithme du Tore mélangé

Soit  $(u_n)$  une suite réalisant une loi uniforme. On définit la  $n^{\text{ème}}$  réalisation de la  $d^{\text{ème}}$  variable aléatoire uniforme  $u_n$  :

$$u_n = n\sqrt{p_d} - \lfloor n\sqrt{p_d} \rfloor \quad \text{avec } \lfloor \cdot \rfloor \text{ l'opérateur partie entière.}$$

Ces valeurs générées n'étant pas indépendantes terme à terme, on « mélange » ces valeurs avant de les utiliser pour la simulation des trajectoires. Pour plus d'informations sur ce sujet, il faut se reporter au document intitulé « Simulation de trajectoires de processus continus » de Planchet et Thérond.

Ayant à notre disposition la suite  $(u_n)$ , le « mélange » consiste lors du  $n^{\text{ème}}$  tirage à ne pas opter pour  $u_n$  mais  $u_m$  où  $m$  est choisi aléatoirement dans  $\mathbf{N}$  :

$$u_m = u_{\varphi(n)}$$

$$\text{où } \varphi(n) = \lfloor \alpha \times N \times \tilde{u} + 1 \rfloor$$

avec :

$\alpha \geq 1$ , on choisit le nombre 10

$N$  le nombre de réalisation

$\tilde{u}$  la réalisation d'une loi uniforme

Sous R, j'utilise la fonction torus du *package randtoolbox*.

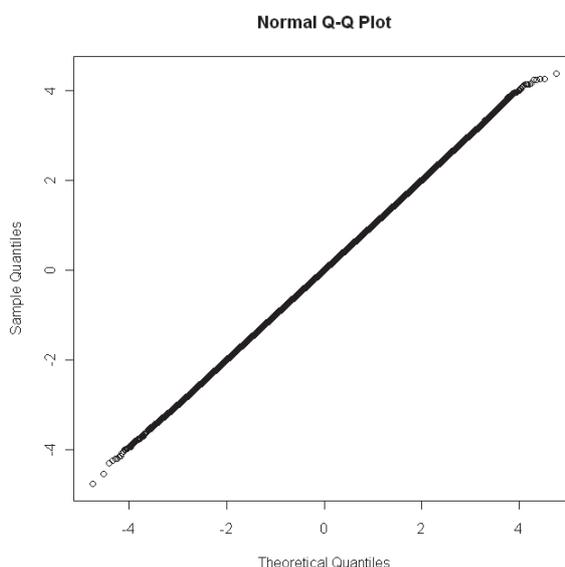
#### Loi normale centrée réduite : algorithme de Box-Muller

Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux variables aléatoires uniformes indépendantes alors :

$X_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \times \cos(2\pi U_2)$  et  $X_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \times \sin(2\pi U_2)$  sont des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Le graphique suivant, appelé qqnorm, est un graphique quantile-quantile permettant de voir l'adéquation d'un échantillon à une distribution normale.

### Graphique qqnorm



## Section 4.2 – Projections futures

Après l'estimation de l'ensemble des paramètres décrit dans les précédents chapitres, j'ai obtenu une matrice des résidus pour les modèles de Wilkie et d'Ahlgrim. L'étape suivante est de déterminer une matrice de corrélation historique de ces résidus. Les résultats sont présentés dans les tableaux suivants.

**Modèle de Wilkie : Matrice de corrélation historique**

Corrélation	Inflation : variable I	Taux long : variable Ln(CR)	Taux court : variable BD	Actions : variable Ln(Y)
I	1	0.103	-0.212	0.059
Ln(CR)	0.103	1	-0.169	-0.005
BD	-0.212	-0.169	1	0.068
Ln(Y)	0.059	-0.005	0.068	1

**Modèle d'Ahlgrim : Matrice de corrélation historique**

Corrélation	Inflation : variable q	Taux long : variable I	Taux court : variable r	Actions : variable x
q	1	-0.854	-0.636	-0.275
I	-0.854	1	0.792	0.153
r	-0.636	0.792	1	0.129
x	-0.275	0.153	0.129	1

Pour les valeurs futures, il faut déterminer une matrice contenant les erreurs des modèles projetés. Je projette donc les résidus en simulant des variables gaussiennes corrélées entre elles par la matrice de corrélation historique et en passant par la factorisation de Cholesky. Ceci permet aussi de vérifier la stabilité des corrélations au moment des projections futures. Les tableaux ci-dessous montrent le résultat final.

**Modèle de Wilkie : Matrice de corrélation projetée**

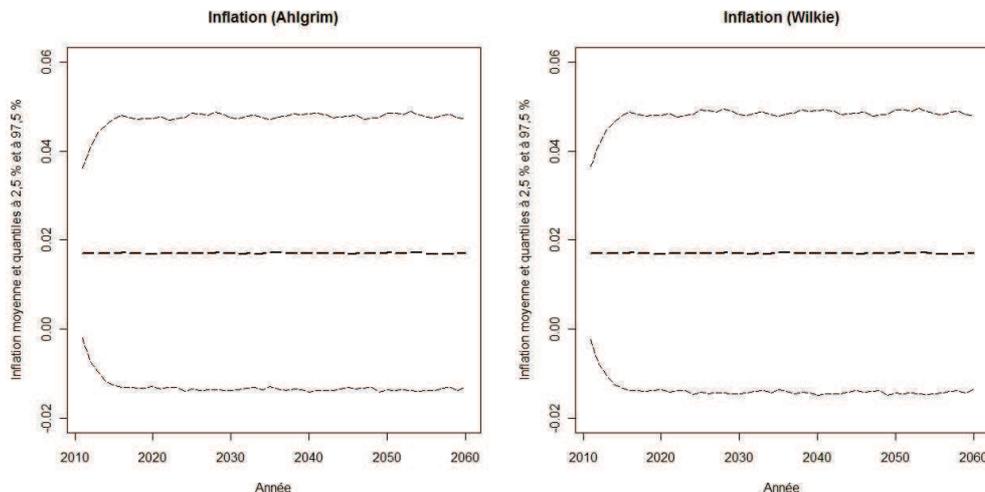
Corrélation	Inflation : variable I	Taux long : variable Ln(CR)	Taux court : variable BD	Actions : variable Ln(Y)
I	1	0.096	-0.208	0.055
Ln(CR)	0.096	1	-0.167	-0.006
BD	-0.208	-0.167	1	0.071
Ln(Y)	0.055	-0.006	0.071	1

**Modèle d'Ahlgrim : Matrice de corrélation projetée**

Corrélation	Inflation : variable q	Taux long : variable l	Taux court : variable r	Actions : variable x
q	1	-0.849	-0.629	-0.270
l	-0.849	1	0.785	0.150
r	-0.629	0.785	1	0.128
x	-0.270	0.150	0.128	1

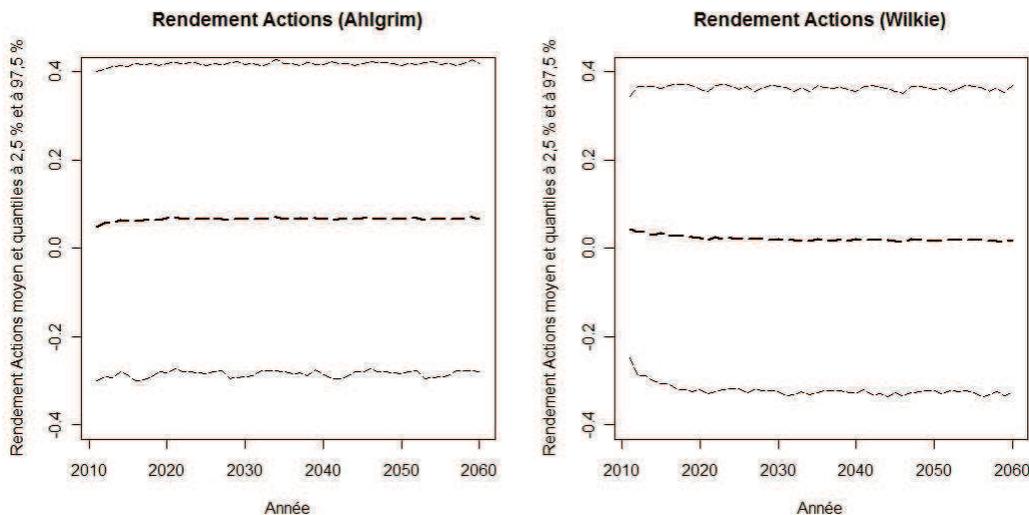
Les valeurs projetées sont proches par rapport à leurs historiques.

### Projection de l'inflation



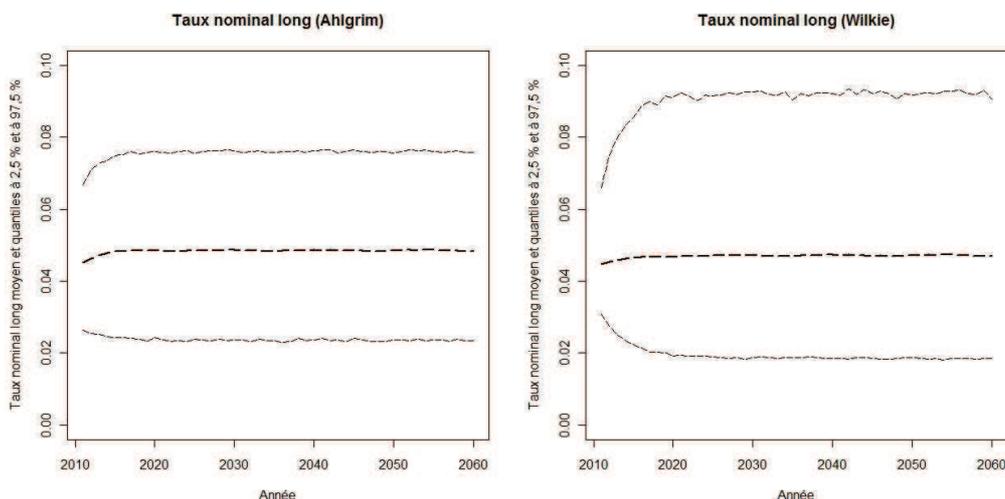
Les projections sur l'inflation des modèles de Wilkie et d'Ahlgrim ont la même allure. L'inflation oscille entre -1,5 % et 4,9 % autour de sa moyenne égale à 1,7 %. A remarquer, que les trajectoires ne sont pas strictement identiques car les bruits blancs se déduisent des matrices de corrélation des résidus propres à chaque modèle.

Projection des actions



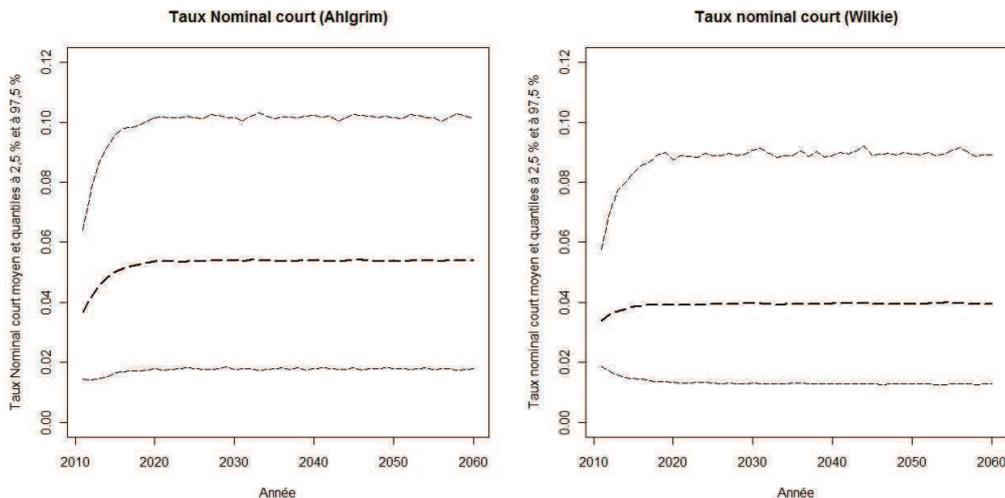
Le rendement moyen des actions est supérieur dans le modèle d'Ahlgrim par rapport au modèle de Wilkie. De plus, ce rendement est croissant sur la période de projection dans le premier cas, on observe l'effet inverse dans le second cas. Concernant la volatilité, on constate des amplitudes proches, mais pas sur la même tranche. Le graphique de gauche, dans l'intervalle de confiance, montre une variation [-30 % ; 42 %] contre [-34 % ; 37 %] pour le graphique de droite.

Projection du taux d'intérêt nominal à long terme



Pour les deux modèles, le taux nominal long moyen est de 4.7 %. L'amplitude est plus forte pour le modèle de Wilkie avec une variation [2 % ; 9 %] contre [2,3 % ; 7,7 %] pour le modèle d'Ahlgrim.

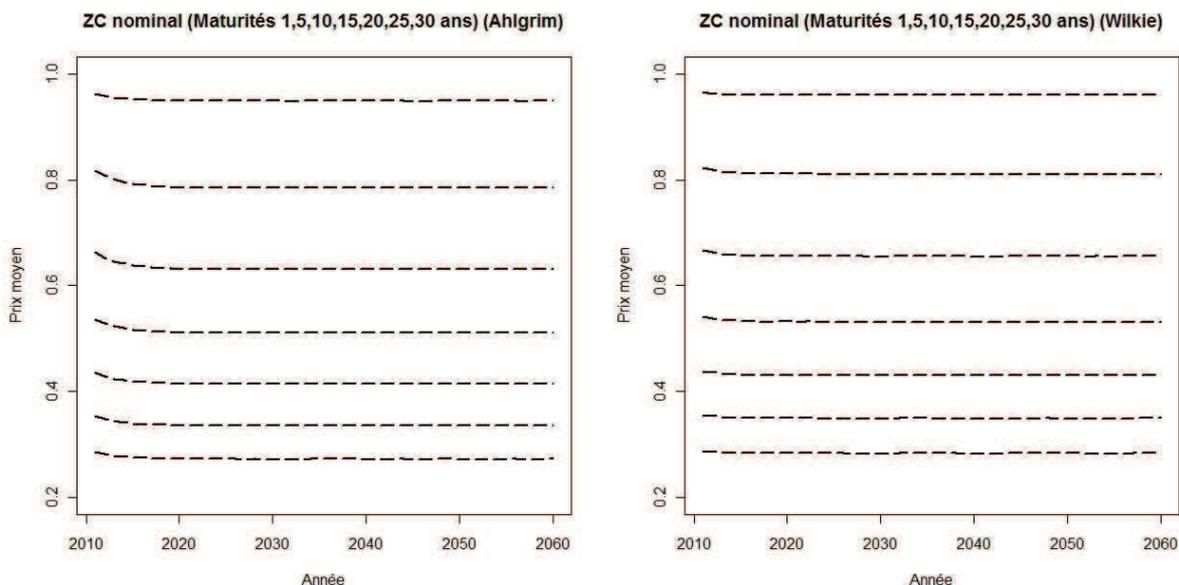
Projection du taux d'intérêt nominal à court terme



Le taux nominal court moyen du premier modèle est supérieur au second. De plus, sur les premières années, il augmente plus vite en allant de 3,7 % à 5,4 % contre 3,2 % à 3,9 % pour le modèle de Wilkie. De plus, à l'opposé du taux long, les variations sont plus grandes pour le modèle d'Ahlgrim.

Projections du prix moyen du zéro-coupon nominal suivant sa maturité

Afin de ne pas alourdir le graphique, seuls les prix moyens du zéro-coupon en fonction de sa maturité est affiché.



Quelque soit la maturité, le prix moyen d'un zéro-coupon est légèrement supérieur dans le modèle de Wilkie (3 % en moyenne).

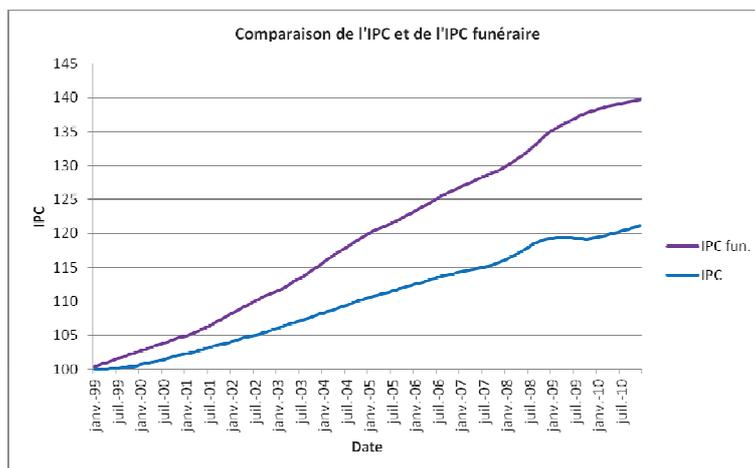
## Chapitre 5 – Inflation du funéraire

On ne peut utiliser directement l'inflation du funéraire dans les modèles de Wilkie et Ahlgrim car la fenêtre des données est moins importante que celle de l'inflation où les informations sont connues dès 1901.

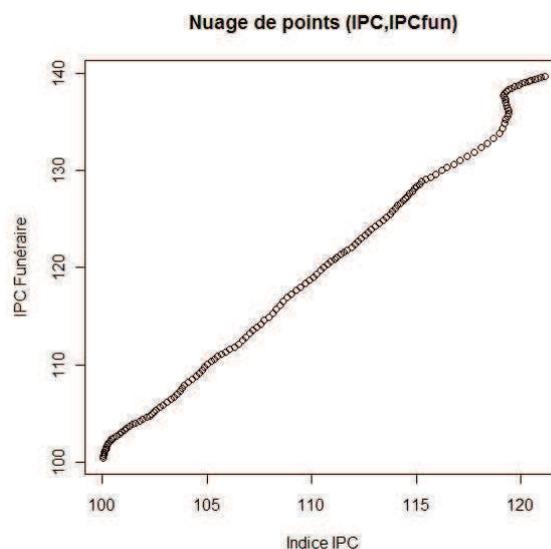
Les taux d'inflation et inflation du funéraire se déduisent de leur Indice des Prix à la Consommation (IPC) que l'INSEE met à disposition. L'indice du funéraire est déterminé par ses différentes composantes. Ces composantes sont incluses dans un groupe plus large permettant le calcul de l'indice de l'inflation. L'idée d'appliquer une régression linéaire de l'IPC funéraire sur l'IPC est donc cohérente.

### Section 5.1 – Définition du modèle

Le graphique suivant présente l'évolution (en glissement annuel) de l'IPC et de l'IPC funéraire entre le 1<sup>er</sup> janvier 1999 et le 31 décembre 2010.



Je représente ensuite le nuage de points, d'abscisse IPC et d'ordonnée IPC funéraire afin de vérifier s'il existe une relation linéaire entre ces deux variables.



Les points du nuage sont approximativement alignés sur une droite à une erreur près de la forme :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \times X + \text{erreur}$$

Où Y est la variable expliquée (IPC funéraire).

X est la variable explicative (IPC)

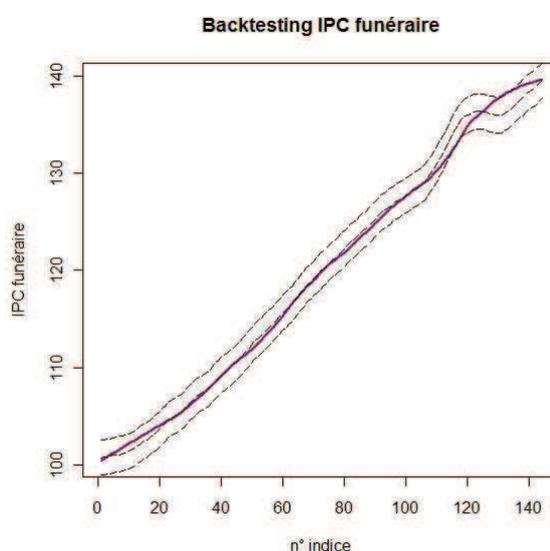
$\beta_0$  est l'ordonnée à l'origine.

$\beta_1$  est la pente de la droite d'ajustement.

Suite à une régression linéaire on obtient avec un  $R^2$  ajusté de 99,7 % :

$$Y = 1,835 X - 82,754 + 0,705 \varepsilon, \text{ où } \varepsilon \text{ est une loi normale centrée réduite.}$$

### Backtesting de l'IPC funéraire

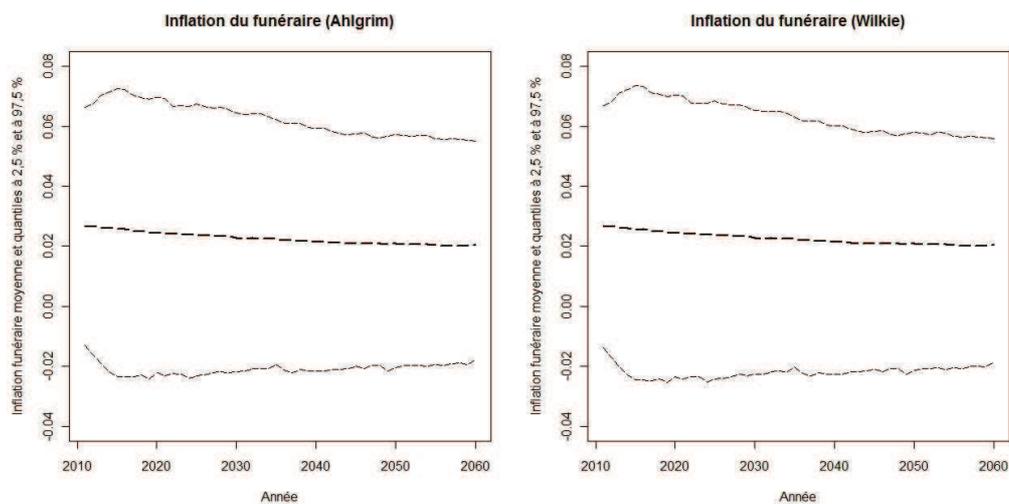


Le résultat obtenu est satisfaisant et je retiens donc ces valeurs pour les paramètres du modèle de l'indice du funéraire.

Pour terminer, comme pour l'inflation, je détermine l'inflation du funéraire par la relation suivante :

$$I_{\text{fun}_t} = \ln \left( \frac{\text{IPCfun}_t}{\text{IPCfun}_{t-1}} \right)$$

## Section 5.2 – Projections futures de l'inflation funéraire



Mêmes remarques que pour les graphiques sur l'inflation. Ces graphes ont la même allure mais il faut retenir que les trajectoires ne sont pas strictement identiques.

## Conclusion de la deuxième partie

Une méthode de calibrage a été employée sur l'ensemble des variables. Une variable étant modélisée par des paramètres, l'idée consistait à les estimer statistiquement en se basant sur des données historiques. Des tests sur le modèle et les paramètres, ainsi qu'une analyse des résidus, complétaient l'étude. Par la définition d'un modèle intégré et le sujet du mémoire, une attention particulière devait être consacrée à l'inflation. J'ai pris deux contraintes, la première a été de tenir compte de l'objectif de stabilité des prix fixé par la BCE, la seconde sur sa volatilité qui était basse sur les dernières années.

Afin de valider ces choix, un test de backtesting sur la période 1986-2010 a été lancé sur chaque variable afin de vérifier que les projections sont en adéquation avec les données réelles. Chaque équation ayant un bruit blanc gaussien, il fallait générer des réalisations de variables aléatoires de loi normale en utilisant les algorithmes du tore mélangé et de Box-Muller. En utilisant ce même procédé sur une plus longue durée, le résultat a permis de faire des projections futures qui sont utilisées dans la dernière partie.

J'avais évoqué dans l'introduction de cette partie la problématique sur le taux d'inflation du funéraire où on avait un historique faible sur l'indice. J'ai montré qu'il existait bien une relation entre l'indice de l'inflation et celle du funéraire, dont la forme est une droite avec un bruit blanc gaussien. En utilisant à nouveau la méthode pour générer des variables aléatoires de loi normale, j'ai déterminé les taux d'inflation funéraire futurs.

**PARTIE III :**  
**MODELISATION DU PASSIF**

### **Partie III – Modélisation du passif**

Cette partie présente la construction d'une table d'expérience propre au portefeuille vie entière de la société. Cette table doit respecter les principes de prudence requis par la commission d'agrément. Ce travail préliminaire est exposé dans le premier chapitre.

L'étape suivante est l'estimation des taux bruts par l'estimateur non paramétrique Kaplan-Meier dont les résultats sont dans le second chapitre. Ces observations forment une courbe irrégulière en comparaison d'une table de mortalité où les taux de décès évoluent avec l'âge. Pour corriger ce phénomène, j'emploie le lissage non paramétrique Whittaker-Henderson dans le troisième chapitre.

Une des caractéristiques d'un contrat d'assurance vie est que le souscripteur a la faculté de l'interrompre en demandant le rachat total. Dans l'étude d'impact (QIS) de Solvabilité 2, cette information est prise en compte. Le quatrième chapitre contient donc l'étude sur le taux de rachat du portefeuille vie entière.

## Chapitre 1 – Table d'expérience

### Section 1.1 – Méthodologie

Elaborer une table d'expérience à partir d'un portefeuille nécessite de disposer d'un certain nombre d'informations sur les assurés constituant la population observée. Ces informations doivent comporter la date de naissance, la date d'entrée dans le portefeuille, la date éventuelle du décès ou la date de sortie. La précision de la table dépend de celle des données, c'est la raison pour laquelle des contrôles seront faits pour s'assurer de la justesse des informations.

L'estimation de la probabilité de décès d'un individu, vivant en  $x$ , entre l'âge  $x$  et  $x + 1$  à partir de données statistiques devrait être simple. Pour obtenir ce taux, il suffit en effet de diviser le nombre de décès observé pour un âge  $x$  donné par la population du même âge exposée au risque décès. Toutefois, en pratique, la réalité est toujours plus complexe à appréhender.

Pour se faire une idée des problèmes auxquels nous pouvons être confrontés au cours de l'estimation des probabilités de décès, nous allons nous servir du diagramme de Lexis. Dans ce diagramme, nous représentons chaque individu sous observation par une diagonale et les axes représentent l'évolution du temps et de l'âge.

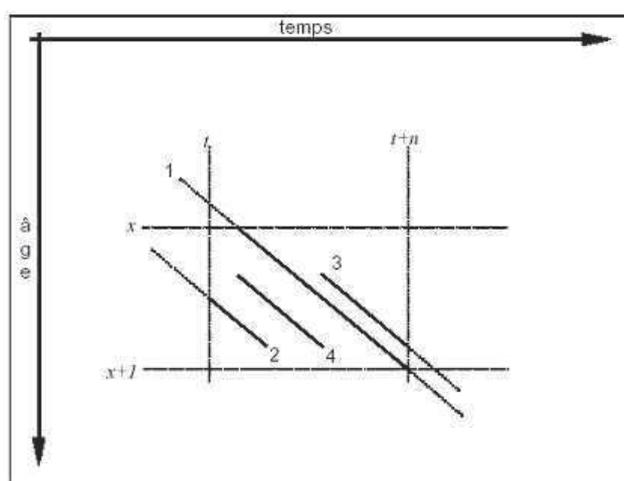
Ce diagramme regroupe des cas qui peuvent se présenter comme suit :

L'individu 1 est observé de manière complète entre les âges  $x$  et  $x + 1$ ,

L'individu 2 est observé alors qu'il est déjà plus âgé que  $x$ , il décède ou il quitte l'effectif avant d'avoir atteint l'âge  $x + 1$ ,

L'individu 3 entre dans l'effectif pendant la période d'observation alors que son âge est déjà compris entre  $x$  et  $x + 1$ ,

L'individu 4 entre dans l'effectif pendant la période d'observation et décède ou quitte l'effectif avant d'avoir atteint l'âge  $x + 1$ .



Les modèles des données de survie couramment utilisés pour construire les tables de mortalité tiennent compte de ces différents phénomènes. La méthode non paramétrique de Kaplan-Meier a été retenue pour estimer la fonction de survie associée au portefeuille et ainsi calculer les probabilités de décès par âge. De plus, cela permet de ne faire aucune hypothèse quant à la loi de probabilité que suit la variable aléatoire : la durée de survie.

## Section 1.2 – Construction de la base de données

La base de données est installée dans le progiciel OPUS dont l'extraction nous fournit plusieurs tables mensuelles. Celles qui nous intéressent sont Situ, Mouvprev et Videnp.

La table Situ représente la situation du contrat. Elle contient la majorité des informations nécessaires pour la construction d'une base qui servira à l'étude. Les champs retenus sont :

- Code produit
- Numéro de police
- Numéro de l'assuré
- Age à la souscription
- Date d'effet du contrat
- Code de la dernière situation du contrat (EncPP : En cours de paiement, LibPP : Libéré de prime, Reduit, RachT : Rachat Total, Deces, Sseffé : Sans Effet...)
- La date de la dernière situation du contrat

La table Mouvprev regroupe les mouvements de chaque contrat (primes et prestations). Un seul champ est retenu, il s'agit de la date de naissance de l'assuré qui ne se trouvait pas dans la table Situ. Dans la table des assurés Videnp, on retient le sexe de l'assuré.

Les bases Situ et Mouvprev sont des photographies du portefeuille sur un exercice donné. Donc dans la base de l'année N, la majorité des sorties antérieures à cet exercice n'y figure plus, de même, que les futures affaires nouvelles ne sont pas présentes.

Au final, pour créer une base d'étude, j'ai fusionné les années 2005 à 2011 en ne retenant que les contrats vie entière et en gardant la dernière information de chaque contrat pour éviter d'avoir plusieurs lignes sur chaque police. La base ainsi obtenue contient 303 261 contrats.

La raison pour laquelle on sélectionne le numéro de l'assuré est qu'il peut posséder plusieurs contrats. Pour l'étude de mortalité, il faut comptabiliser une seule fois chaque assuré. Un traitement de suppression de ces doublons permet de constituer une base de 288 613 assurés.

En tenant compte des déclarations tardives de sinistres, il faut un décalage entre la date de fin d'observation et la date de la dernière base d'extraction afin de ne pas sous-estimer le risque de mortalité. En référence aux lignes directrices de la commission d'Agrément, la durée d'observation doit être un multiple de douze mois et comprise entre trois et cinq ans. Je retiens donc pour la période d'extraction 01/01/05 – 31/12/10.

Cette sélection entraîne une base de 280 153 assurés.

Après la définition du périmètre, un nettoyage des données est nécessaire en lançant des tests de cohérence afin de corriger les anomalies.

Les tests de cohérence sont les suivants :

- La date de naissance n'est pas mentionnée
- La date d'effet n'est pas mentionnée
- La date de naissance est supérieure à la date d'effet du contrat
- La date de sortie est inférieure à la date d'effet

A ce niveau, aucune anomalie n'est détectée.

Les prestations au titre des contrats vie entière de la société consistent à payer un capital au décès après réception de l'acte de décès de l'assuré, dans le but d'honorer les dernières volontés du défunt. Ces prestations funéraires sont perçues par l'entreprise funéraire. Il y a donc très peu d'erreurs sur les dates de décès des assurés dans les bases du système d'information de la société.

### Section 1.3 – Outils probabilistes

Dans cette section, je présente les fonctions permettant de décrire une distribution de survie.

Supposons que la durée de survie  $Y$  soit une variable positive ou nulle, et absolument continue. Nous pouvons définir la loi de  $Y$  par ce qui suit :

- La probabilité de survivre au delà de  $t$  est la fonction de survie  $S(t)$  :

$$S(t) = P(Y \geq t), \text{ où } t \text{ est un réel positif.}$$

$S(t)$  est une fonction décroissante et continue, telle que  $S(0)=1$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$

- La fonction de répartition  $F(t)$  de la variable  $Y$  est la probabilité de décéder avant l'instant  $t$  :

$$F(t) = P(Y < t) = 1 - S(t)$$

Dans certains ouvrages, la fonction de survie est définie par  $S(t) = P(Y > t)$  au lieu de  $P(Y \geq t)$  entraînant du même coup la formulation de la fonction de répartition égale à  $P(Y \leq t)$  au lieu de  $P(Y < t)$ . Lorsque la variable  $Y$  est continue, ces deux quantités sont égales.

- Soit  $f(t)$  la densité de  $Y$ . On a  $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ .

Si la fonction de répartition admet une dérivée au point  $t$  :

$$f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t \leq Y < t+h)}{h} = F'(t) = -S'(t)$$

Cette fonction caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après l'instant  $t$ .

Ces trois fonctions caractérisent la loi de  $Y$ .

- Le taux instantané de décès est la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps juste après l'instant  $t$ , conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'à l'instant  $t$  :

$$h(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t \leq Y < t+h | Y > t)}{h}$$

Cette fonction vérifie les relations suivantes :  $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(S(t))$

On obtient :  $S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(x) dx\right)$ . La fonction  $h$  caractérise la loi de  $Y$ .

- Le taux instantané cumulé  $H(t)$  est l'intégrale du taux instantané :

$$H(t) = \int_0^t h(x) dx$$

On a aussi :  $H(t) = -\ln(S(t))$  et  $f(t) = h(t) \cdot \exp(-H(t))$ .

La fonction  $h$  n'est pas une densité de probabilité car  $H(+\infty) = +\infty$ .

Une autre interprétation de la fonction  $h$  :

$$h(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t \leq Y < t+h | Y > t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t | Y > t)}{h}$$

La fonction  $h$  au point  $t$  s'interprète en tant que densité conditionnelle de la loi  $Y$  sachant que  $Y > t$ . Ceci nous amène à définir la fonction de survie conditionnelle.

➤ La fonction de survie conditionnelle est définie par :

$$S(t|t_0) = P(Y \geq t + t_0 | Y \geq t_0) = \frac{P(Y \geq t + t_0)}{P(Y \geq t_0)} = \frac{S(t + t_0)}{S(t_0)}$$

Elle s'exprime aussi à l'aide du taux instantané de décès :

$$S(t|t_0) = \frac{S(t + t_0)}{S(t_0)} = \exp\left(-\int_{t_0}^{t+t_0} h(x) dx\right)$$

Les fonctions de survie conditionnelle caractérisent la loi de Y.

### Notation actuarielle

Dans l'assurance vie, afin d'évaluer un risque, on est amené à considérer un individu ayant déjà atteint un âge x. Sa durée de vie future est notée  $T_x$ .

La fonction de survie présentée précédemment est notée en actuariat  ${}_t p_x$  :

$${}_t p_x = P(T_x \geq t)$$

On définit le taux *annuel de vitalité*  ${}_1 p_x$  noté par la suite  $p_x$ . C'est la probabilité de survie au bout d'un an.

On désigne  ${}_{t|t'} q_x$  la probabilité de décès entre deux dates t et t' pour cette personne :

$${}_{t|t'} q_x = P(t \leq T_x < t + t') = P(T_x \geq t) - P(T_x \geq t + t') = {}_t p_x - {}_{t+t'} p_x$$

Comme pour le taux annuel de vitalité, on détermine un taux annuel de mortalité  ${}_1 q_x$  simplifié en  $q_x$ . On obtient la relation suivante :

$$p_x + q_x = 1$$

### Table de survie

Supposons maintenant un groupe homogène de personne d'âge x au nombre de  $L_x$ . Ces individus décèdent indépendamment les uns des autres. Cette hypothèse exclut tous phénomènes de contagion et catastrophes.

Soit  $X_i(t)$ , l'indicateur de survie de l'individu i au temps t :

$$X_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si vivant en } t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le nombre de survivants à l'instant  $t$  de ce groupe est :

$$L_{x+t} = \sum_{i=1}^{L_x} X_i(t)$$

$X_i(t)$  suit une loi de bernoulli de paramètre  ${}_t p_x$ . Pour tout  $i$ , les variables  $X_i$  sont indépendantes. On déduit que la variable aléatoire  $L_{x+t}$  suit une loi binomiale de paramètres  $L_x$  et  ${}_t p_x$ .

Par définition, son espérance mathématique est :  $E(L_{x+t}) = L_x \cdot {}_t p_x$

Pour tout  $t$ , on note  $E(L_{x+t}) = l_{x+t}$  appelé nombre probable de vivants à l'âge  $x+t$ .

Une table de survie ou de mortalité est déterminée par une suite, en général d'entiers,  $\{l_x, x \text{ un entier et } 0 \leq x \leq \omega\}$ .  $\omega$  représente l'âge limite et on pose  $l_0 = 100\,000$  comme base de départ.

Le tableau ci-dessous renseigne, pour la table de mortalité TH00-02, le nombre probable de vivants pour chaque âge.

TH00-02	
x	$l_x$
0	100 000
1	99 511
2	99 473
3	99 446
4	99 424
5	99 406
:	:
105	39
106	19
107	9
108	4
109	2
110	1
111	

## Chapitre 2 – Kaplan Meier

### Section 2.1 – Définition

E. Kaplan et P. Meier en juin 1958 publient dans le journal de l'American statistical Association un article intitulé « *Non Parametric estimation from incomplete observations* » dans lequel ils définissent l'estimateur PL (Product-Limit) de la fonction de survie  $S(t) = P\{Y \geq t\}$ , pour tout  $t \geq 0$ .

La méthode de Kaplan Meier consiste à dire que : *Etre en vie après l'instant t, c'est être en vie juste avant t et ne pas mourir à l'instant t.*

Intuitivement, être en vie après t jours implique d'avoir survécu au jour 1, au jour 2, ..., au jour t-1 puis au jour t. En terme probabiliste, cette assertion se traduit par :

$$\begin{aligned} S(t) &= P(Y \geq t) \\ &= P(Y \geq t | Y \geq t-1) \times S(t-1) \\ &= P(Y \geq t | Y \geq t-1) \times P(Y \geq t-1 | Y \geq t-2) \times S(t-2) \\ &= P(Y \geq t | Y \geq t-1) \times P(Y \geq t-1 | Y \geq t-2) \times P(Y \geq t-2 | Y \geq t-3) \times \dots \times P(Y \geq 1 | Y \geq 0) \times P(Y \geq 0) \end{aligned}$$

ou de manière plus générique :  $S(t) = P(Y \geq t | Y \geq t') \times S(t')$

Soit  $P_j$  la probabilité d'avoir survécu au jour j conditionnellement au fait d'être en vie juste avant ce jour, c'est-à-dire  $P_j = P(Y \geq j | Y \geq j-1)$  alors :

$$S(t) = P_t \times P_{t-1} \times P_{t-2} \times \dots \times P_1 \times 1$$

$S(t)$  peut donc être estimé par le produit des estimations  $\hat{p}_j$  de  $P_j$ , où  $\hat{p}_j$  est égal à la proportion observée de sujets ayant survécu au jour j parmi ceux des sujets qui étaient vivants juste avant j.

Soit un n-échantillon  $(Y_1, \dots, Y_n)$  d'une variable aléatoire positive Y avec une censure aléatoire  $(C_1, \dots, C_n)$  correspondant à la date de sortie de l'assuré. Les dates de décès et de censures sont des variables aléatoires indépendantes et sont la représentation de variables aléatoires Y et C.

Au lieu d'observer  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , on s'intéresse à :

$$\begin{cases} T_i = Y_i \wedge C_i \\ D_i = 1_{(T_i = Y_i)} \end{cases} \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, n$$

On associe donc à chaque individu un couple de durées  $(Y_i, C_i)$ , variables aléatoires positives, dont seulement la plus petite est observée.  $D_i = 1$  représentant un décès et  $D_i = 0$  une censure.  $T_i$  indique le minimum entre  $Y_i$  et  $C_i$ , soit l'âge de décès ou l'âge de dernière observation d'une personne non décédée.

On ordonne les  $T_i$  par ordre croissant pour obtenir la statistique d'ordre  $T'_1 \leq \dots \leq T'_n$  et les  $D'_i$  correspondant.

On découpe la période d'observation en intervalles disjoints, à chaque décès observé pour obtenir une suite d'intervalles de la forme  $I_i = [T'_{i-1}, T'_i[$ .

Définissons les variables utilisées dans la formulation de l'estimateur de Kaplan Meier.

### Les sujets sous risque

Soit pour tout  $t$  de la période d'observation, la variable  $R(t)$  représentant les personnes présentes à cette date. Les personnes ne sont ni décédées, ni censurées.

$$R(t) = \sum_{i=1}^n 1_{(Y_i \wedge C_i \geq t)}$$

### Le nombre de décès

Soit  $M(T'_i)$  le nombre de décès observé à la date  $T'_i$ . Nous pourrions donner en définition ce nombre pour tout  $t$  mais cela est inutile, en effet nous verrons ultérieurement que l'estimateur de Kaplan Meier n'est variable qu'aux dates du découpage, donc aux dates de décès.

$$M(T'_i) = \sum_{j=1}^n D_j 1_{(T_j = T'_i)}$$

L'estimateur naturel de  $q_i = 1 - p_i = 1 - P(Y \geq T'_i | Y \geq T'_{i-1})$  est le rapport entre le nombre de morts dans le  $i^{\text{ème}}$  intervalle  $I_i$  et le nombre des sous risque au début de l'intervalle.

Définition de l'estimateur de Kaplan Meier

Nous avons donc en tout point de la période d'observation, l'estimateur de la fonction de survie  $\hat{S}_{KM}$  :

$$\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{T_i' < t} \left( 1 - \frac{M(T_i')}{R(T_i')} \right)$$

Variance

L'estimateur de Greenwood donne une estimation de la variance :

$$V[\hat{S}_{KM}(t)] = \hat{S}_{KM}^2(t) \cdot \sum_{T_i' < t} \frac{M_i}{R_i(R_i - M_i)}$$

Maximum de vraisemblance

L'estimateur de Kaplan Meier est un estimateur de maximum de vraisemblance généralisé (cf. la démonstration dans le livre de J.J. Dreesbeke).

Remarques

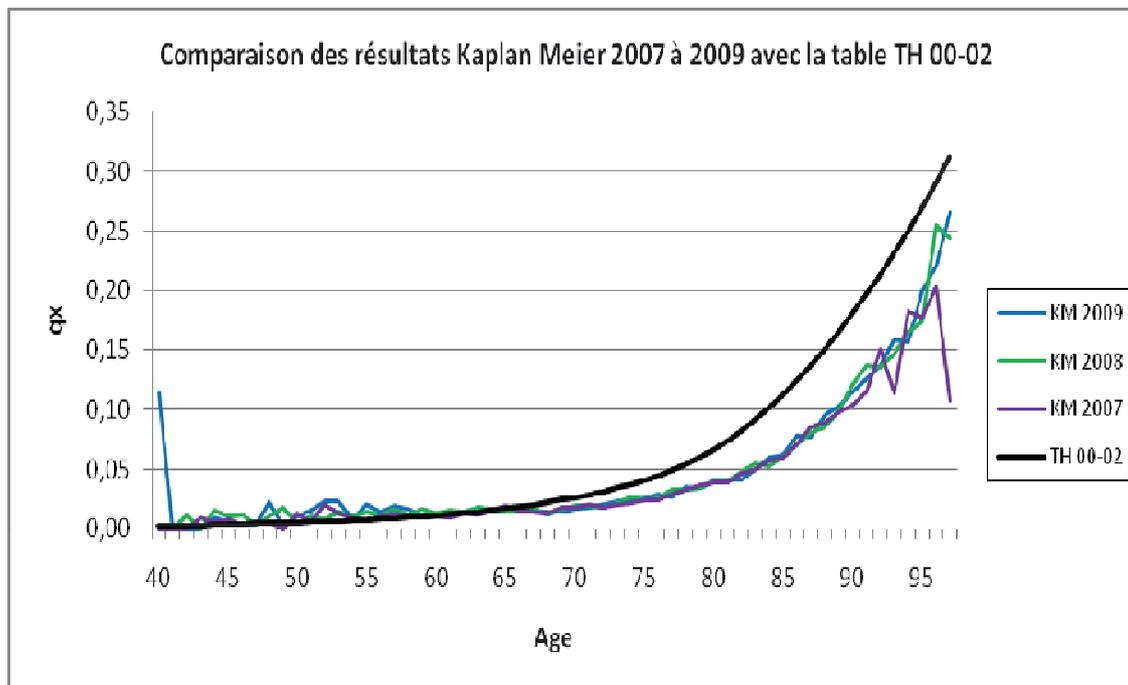
L'estimateur de Kaplan Meier est l'unique estimateur cohérent de la fonction de survie.

Nous constatons que l'estimateur de Kaplan Meier ne varie pas entre les subdivisions de la période d'observation. Ainsi, il ne varie qu'au moment du décès observé, aux dates où il n'y a que des censures, le facteur correspondant dans l'estimateur est égal à 1, et ne fait donc pas varier l'estimateur.

Nous supposons qu'il n'y a pas d'ex-æquo dans l'échantillon observé, mais en général cela n'est pas vrai du fait de la discrétisation de la période d'observation. Ainsi, pour l'assureur, les données sont au minimum journalières et ne peuvent être plus précises. Nous considérerons dans ces cas pour notre étude qu'un décès précède une sortie et suit une entrée.

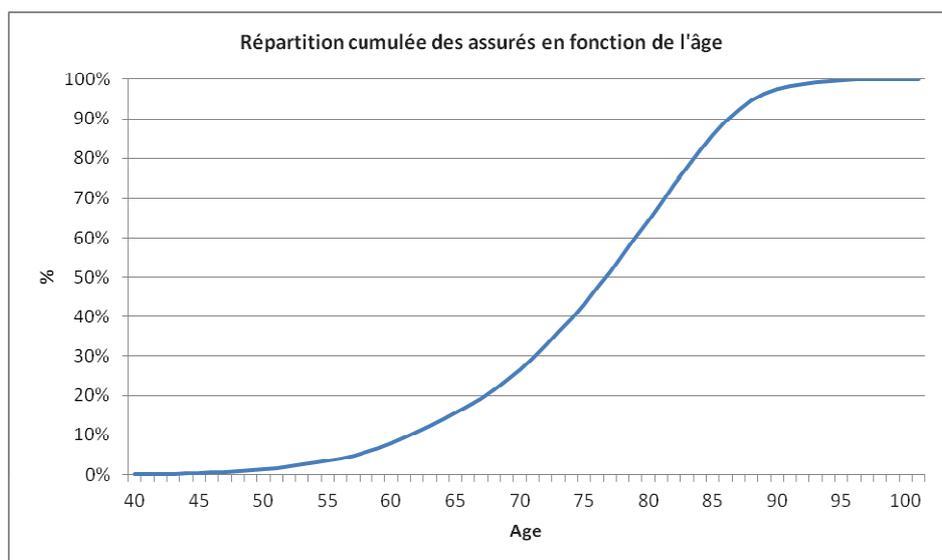
## Section 2.2 – Résultats

Dans un premier temps, j'utilise l'estimateur sur trois périodes d'observations afin de constater l'évolution de la mortalité du portefeuille. Les années sélectionnées sont 2007, 2008 et 2009. Le graphique ci-dessous présente les résultats en y incluant la table de mortalité TH00-02 pour comparer.



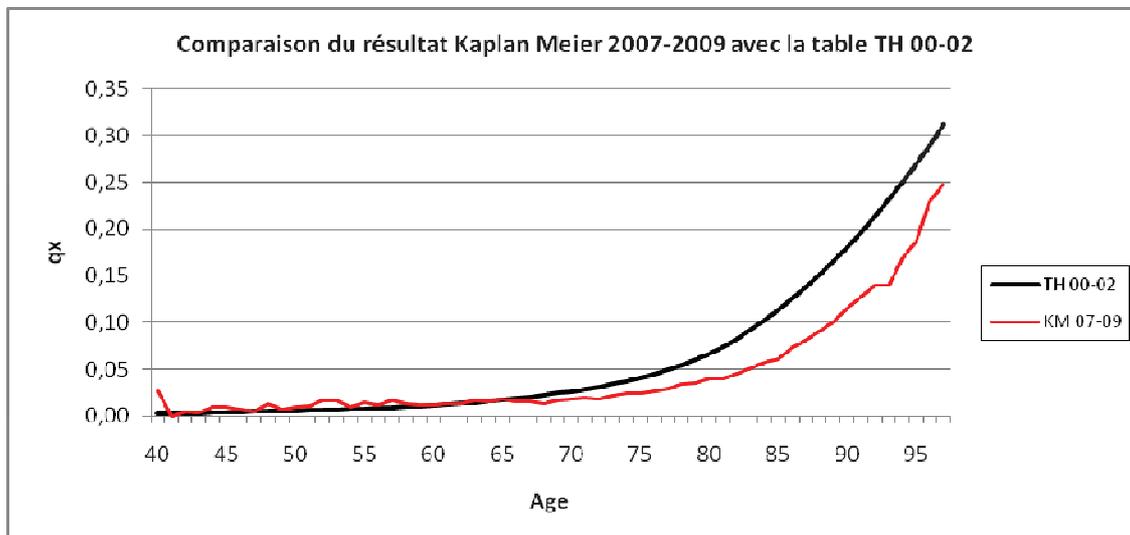
On constate que la table réglementaire TH00-02 est inférieure avant l'âge de 65 ans. Entre 40 et 67 ans, puis à partir de 93 ans, on obtient de grandes variations des taux de décès. La tranche d'âge restante, soit de 68 ans à 92 ans, les taux de décès sont assez stables.

Le graphique suivant présente la proportion cumulée des assurés par âge.



Les assurés âgés de moins de 62 ans ne représentent que 10 % du portefeuille. Ceci peut rendre fluctuante l'estimation du taux de mortalité. Même remarque pour les grands âges.

Après cette première analyse, j'utilise à nouveau l'estimateur sur une longueur d'observation plus grande soit de trois années. Le résultat obtenu est dans le graphique ci-dessous.



Le passage sur une période de trois années entraîne une nette amélioration entre 40 et 67, puis sur les grands âges. Dans l'étape suivante, le lissage des taux bruts, je retiens la tranche 68-92 ans.

## Chapitre 3 – Whittaker–Henderson

### Section 3.1 – Définition

Cette méthode de lissage doit son nom à Whittaker qui l'a introduite et à Henderson qui a montré comment passer de la théorie à la pratique.

L'objectif de cette méthode consiste à réaliser un compromis entre la fidélité  $F$  aux données brutes et la régularité  $S$  des données lissées, grâce à deux paramètres  $h$  et  $z$  entiers positifs. Plus  $h$  et  $z$  sont grands, et plus le lissage est important, au détriment de la fidélité aux données brutes. Cette méthode non-paramétrique est utilisée, entre autres par le Bureau Commun des Assurances Collectives (BCAC) pour le lissage des barèmes de provisions mathématiques en incapacité / invalidité.

Pour un âge  $x$ , notons  $u_x$  le taux brut,  $w_x$  le poids associé à l'observation et  $v_x$  le taux lissé.

Le principe général utilisé par cette méthode de lissage de courbe est le suivant :

$$\text{Le critère de fidélité "Fit"} : F = \sum_{x=1}^n w_x \times (v_x - u_x)^2$$

$$\text{Le critère de régularité "Smoothness"} : S = \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2$$

où  $z$  fixe le degré du polynôme utilisé pour le critère de régularité,  $z$  est généralement compris entre 2 et 4.

Pour rappel :  $\Delta^z v_x = \Delta^{z-1} v_{x+1} - \Delta^{z-1} v_x$  pour  $z > 0$ .  $\Delta^0 v_x = v_x$

Nous prenons une combinaison linéaire de la fidélité et de la régularité en mettant plus ou moins l'accent sur la régularité au moyen du paramètre  $h$ .

$$M = F + h \times S = \sum_{x=1}^n w_x \times (v_x - u_x)^2 + h \times \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2$$

Les valeurs ajustées  $v_x$  pour  $x = 1, 2, \dots, n$ , seront celles qui minimisent la mesure composite  $M$  qui est fonction des  $n$  valeurs inconnues de  $v_x$ . Pour trouver les  $v_x$ , il nous faut résoudre les  $n$  équations provenant des dérivées partielles de  $M$  par rapport à chacun des  $v_x$ , tel que le résultat soit nul. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\partial M}{\partial v_x} = 0, x = 1, 2, \dots, n$$

Pour trouver la solution, nous allons utiliser la notation matricielle. Soient  $U$  une matrice colonne de dimension  $n$  contenant les valeurs à lisser,  $W$  la matrice des poids et  $V$  une matrice colonne de dimension  $n$  contenant les valeurs lissées :

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} w_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & w_n \end{bmatrix}$$

Nous pouvons réécrire  $F$  en notation matricielle :

$$F = (V - U)^T \times W \times (V - U)$$

Nous devons également obtenir le vecteur suivant, qui représente les différences avant d'ordre  $z$  de  $V$ , nous avons donc un vecteur colonne de  $n - z$  lignes :

$$\Delta^z V = \begin{bmatrix} \Delta^z v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta^z v_{n-z} \end{bmatrix}$$

Ce qui nous permet d'écrire  $S$  en notation matricielle :

$$S = (\Delta^z V)^T \times (\Delta^z V)$$

Pour trouver  $\Delta^z V$ , réécrivons ce vecteur en utilisant une matrice spéciale  $K_z$  qui contient les coefficients binomiaux d'ordre  $z$ . Le signe des coefficients alternera et commencera positivement pour  $z$  pair. La dimension de cette matrice est de  $(n - z) \times z$ .

$$\Delta^z V = K_z \times V$$

La mesure  $M$  devient :

$$\begin{aligned} M &= F + h \times S \\ &= (V - U)^T \times W \times (V - U) + h \times (\Delta^z V)^T \times (\Delta^z V) \\ &= (V - U)^T \times W \times (V - U) + h \times V^T \times K_z^T \times K_z \times V \end{aligned}$$

En développant et en regroupant, nous trouvons :

$$M = V^T \times W \times V - 2 \times V^T \times W \times U + U^T \times W \times U + h \times V^T \times K_z^T \times K_z \times V$$

La dérivée vectorielle de M par rapport à V conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\partial M}{\partial V} = 2 \times W \times V - 2 \times W \times U + 2 \times h \times K_z^T \times K_z \times V = 0$$

Après résolution, nous trouvons :

$$W \times V + h \times K_z^T \times K_z \times V = W \times U$$

En posant  $C = W + h \times K_z^T \times K_z$ , nous pouvons écrire :

$$C \times V = W \times U$$

Si C est régulière, nous pouvons obtenir la solution suivante :

$$V = C^{-1} \times W \times U$$

Dans la pratique et conformément aux essais réalisés par les auteurs de la méthode, nous choisisons  $z = 3$  indépendamment de la courbe à lisser.

Nous donnons ici la forme générale de  $\Delta^z V$  avec  $z = 3$  et  $n = 10$  :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{pmatrix}$$

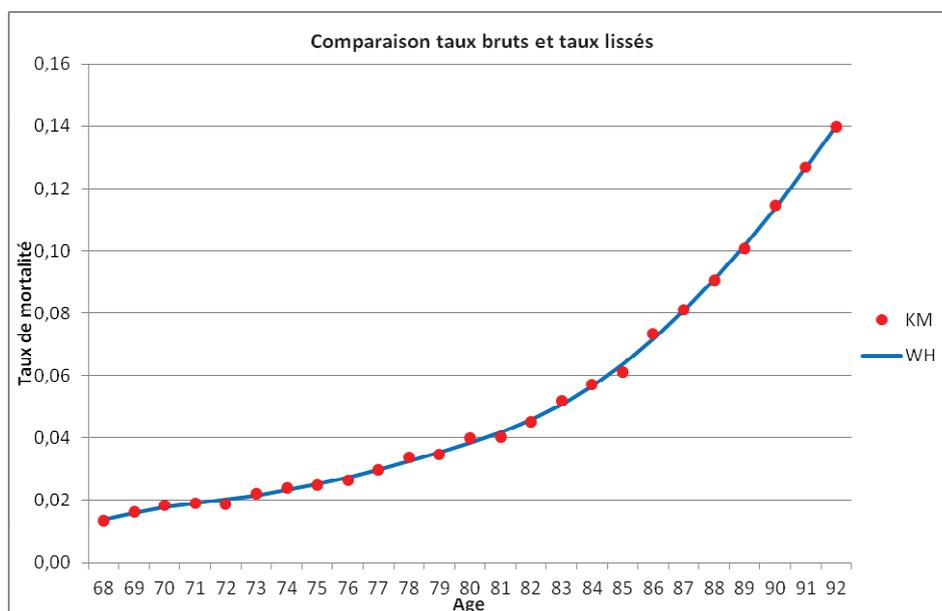
### Section 3.2 – Résultats

Le résultat final prend en compte la méthode de type A où on attribue le même poids à tous les âges.

$$\omega_x = 1 \text{ quelque soit } x=68,\dots,92$$

En prenant  $z=3$ , je fais varier le paramètre  $h$  pour observer les écarts de lissage. Pour obtenir une courbe satisfaisante en tenant compte des objectifs fixés sur la forme de la courbe, à savoir un taux de décès croissant en fonction de l'âge, les différentes simulations conduisent au choix de  $h=4$ .

Le graphique suivant présente les résultats en incluant les données brutes.



Une première validation vient d'être faite en vérifiant que les taux de mortalité sont croissants avec l'âge. Les autres contrôles vont porter sur la régularité de la courbe et sur la fidélité aux données observées.

#### Critère de régularité

Il y a régularité des taux lissés si :  $\sum_{x=68}^{92-z} (\Delta^z v_x)^2 \rightarrow 0$

Dans notre étude  $z=3$ , il faut donc vérifier que  $\sum_{x=68}^{89} (v_{x+3} - 3v_{x+2} + 3v_{x+1} - v_x)^2 \rightarrow 0$

Critères de fidélité

Le premier critère est que plus la somme des distances entre les taux bruts et les taux lissés est proche de 0, plus la fidélité est grande :

$$\sum_{x=68}^{92} |u_x - v_x| \rightarrow 0$$

La seconde vérification porte sur le ratio du nombre de décès observés sur ceux attendus. On applique la table de mortalité au portefeuille étudié afin de déterminer le nombre de décès attendus (noté A). On compare au nombre de décès observés (noté O) en calculant le ratio O/A. Plus ce ratio est proche de 1, meilleure est la prédiction.

Test des changements de signes

Une mesure assez simple de la qualité de l'ajustement peut être définie en termes de nombre de changement des signes de la suite des écarts entre les taux lissés et les taux bruts.

Soit  $d_x$  la suite des écarts entre le taux lissé d'âge  $x$  et le taux estimé initial d'âge  $x$  :

$$d_x = v_x - u_x$$

Un bon ajustement serait indiqué si la suite des écarts montrait les changements assez fréquents du signe, impliquant que la suite des taux lissés s'entrelace avec la suite des taux estimés initiaux, plutôt que de se trouver principalement au-dessus ou en dessous d'elle.

Le signe de la différence  $a$ , dans les conditions d'application de l'approximation normale, a une probabilité de 50 % d'être positif. Si les âges sont indépendants, la probabilité que  $d_x$  et  $d_{x+1}$  n'aient pas le même signe est égale à 50 %. La plage d'âge contient  $p$  valeurs, le nombre de changements de signe dans la suite des  $d_x$  est distribué suivant une loi binomiale de paramètres  $(p-1 ; 0,5)$ .

Lorsque  $p-1$  est plus grand que 20, l'approximation normale de la distribution peut être utilisée. On rejette si  $S = \frac{2n - (p-1)}{\sqrt{p-1}}$ , avec  $n$  le nombre de changement de signe, ne tombe pas dans la région  $[-1,96 ; 1,96]$  de la distribution normale.

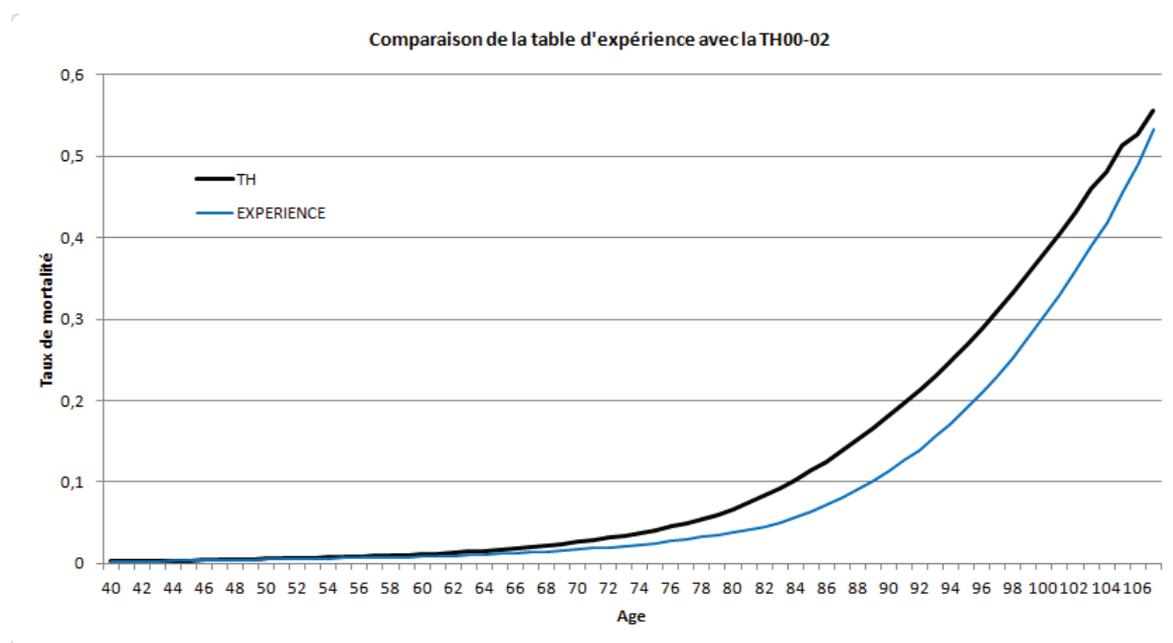
### Prolongement de la table

Pour déterminer les flux du passif dans la quatrième partie, la table obtenue par le lissage doit être prolongée dans les deux sens. La méthode utilisée est dans un premier temps de calculer pour chaque âge le ratio  $\frac{\text{taux mortalité}_{WH}}{\text{taux mortalité}_{TH00-02}}$ .

Ensuite, je retiens les premiers âges jusqu'à 84 ans et je détermine une courbe de tendance me permettant de prolonger jusqu'à 40 ans. La courbe la plus adéquate est de forme exponentielle avec un  $R^2$  de 97 %. Avec ces ratios supplémentaires et en utilisant à nouveau la TH00-02, je détermine les taux de mortalité.

Enfin, même méthode pour le prolongement à droite. Je retiens les ratios des âges allant de 84 à 92 ans. La courbe de tendance est aussi de forme exponentielle avec un  $R^2$  de 99 %. J'emploie le même processus pour obtenir les taux de mortalité pour les grands âges.

Le graphique suivant est le résultat de cette méthode en comparant avec la table TH00-02.



## Chapitre 4 – Etude des taux de rachat

Le souscripteur peut, à tout instant, faire valoir le droit de créance qu'il possède sur la provision mathématique de son contrat. Il perçoit alors une somme appelée « valeur de rachat ». Ce versement libère définitivement l'assureur de toutes ses obligations.

L'article L331-2 du Code des Assurances mentionne que « *pour tout contrat d'assurance sur la vie comportant une valeur de rachat ou de transfert et pour tout contrat de capitalisation, la valeur de rachat ou le cas échéant, de transfert est égale à la provision mathématique dans la limite, pour la valeur de rachat des contrats d'assurance sur la vie, du montant assuré en cas de décès* »

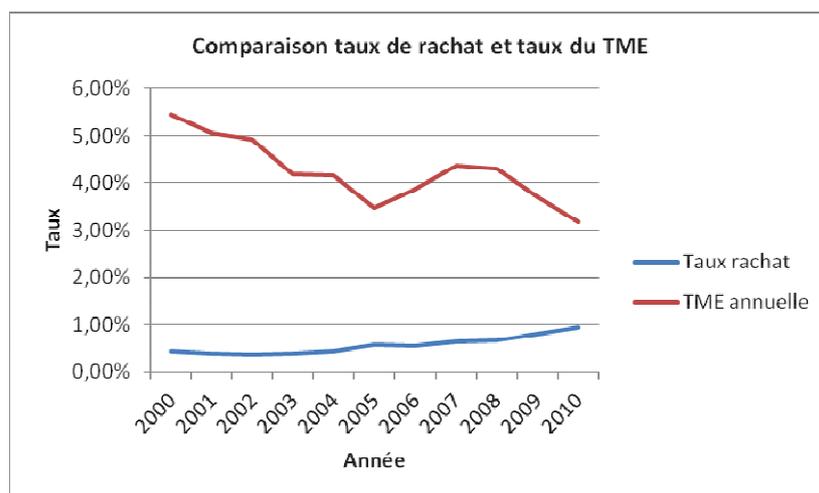
L'article R331-5 ajoute que « *L'indemnité mentionnée à l'article L. 331-2 ne peut dépasser 5 % de la provision mathématique du contrat, et doit être nulle à l'issue d'une période de dix ans à compter de la date d'effet du contrat* »

Le graphique suivant compare les taux de rachat annuel constaté dans le portefeuille vie entière de la société avec le taux moyen des emprunts d'états (TME). La raison du choix du TME pour cette comparaison est qu'il peut être un estimateur (cf. QIS 5) du taux attendu par les assurés dans la modélisation du rachat.

Pour le calcul du taux de rachat j'utilise la méthode actuarielle :

$$\text{taux rachat} = \frac{\text{nb rachats}}{\text{stock ouverture} + \frac{\text{nb entrees}}{2} - \frac{\text{nb sorties}}{2}}$$

Le graphique suivant présente les résultats sur les années 2000 à 2010.



Le comportement des souscripteurs en terme de rachat sont insensibles aux conditions financières de marché car leur détention se fait dans une optique purement de prévoyance.

## Conclusion de la troisième partie

J'ai appliqué une méthode d'estimation et d'ajustement des taux bruts de décès sur le portefeuille vie entière de la société. En utilisant la méthode non paramétrique de Kaplan Meier et la technique de lissage de Whittaker Henderson, j'ai construit une table d'expérience afin de projeter les flux de prestations futures pour l'étude actif-passif.

Les tables de mortalité autorisées par le Code des Assurances, en particulier celle qui nous intéresse ici : la TH00-02, sont prudentielles et souvent apparaissent des écarts entre la mortalité théorique provenant de cette table et la mortalité constatée sur le portefeuille propre à la société. L'étude a permis de montrer que la mortalité est en dessous de la TH00-02 à partir de 65 ans.

Dans la prochaine partie, où on définit le produit test, l'une des hypothèses est qu'AUXIA conserve la table réglementaire pour la tarification et l'évaluation des provisions mathématiques. Donc, elle se donne une marge technique alimentant en partie la participation aux résultats qui, conformément au mécanisme réglementaire, est redistribuée aux assurés par la participation aux bénéficiaires.

La seconde étude porte sur le taux de rachat constatée sur ce même portefeuille. Cette information est employée à la fois dans l'actif-passif et dans le QIS 5 dans la quatrième partie. On a constaté que sur plusieurs exercices, peu de souscripteurs exercent le droit de racheter quelle que soit l'évolution du marché. Le taux de rachat est global, il représente à la fois les rachats structurels et conjoncturels. Ces contrats ne présentent donc pas d'options cachées et j'en tiens compte dans l'étude du QIS 5.

**PARTIE IV :**  
**ACTIF-PASSIF & SOLVABILITE 2**

## **Partie IV – Actif–Passif & Solvabilité 2**

Le premier chapitre, présente les caractéristiques techniques du produit test. Les résultats sur la description du portefeuille décrite dans la première partie permettent de poser des hypothèses sur la souscription. Les formules sur la tarification et le provisionnement sont présentées, ainsi que le mécanisme d'attribution de la participation aux bénéficiaires. Pour clore ce chapitre, les hypothèses sur l'allocation des actifs sont exposées.

Le deuxième chapitre définit le pilier 1 de solvabilité 2 en rappelant ses objectifs et les principes généraux. Le chapitre suivant présente la méthodologie sur les calculs du best estimate et des deux niveaux de fonds propres, le capital de solvabilité requis et le minimum du capital requis.

Les projections des différentes variables financières présentées dans la seconde partie et celles correspondant aux sinistres et rachats modélisées dans la troisième partie permettent de lancer une étude actif-passif et de vérifier si l'objectif sur le taux de rendement est atteint en faisant varier la composition du portefeuille d'actifs le cas échéant. Ensuite, ce portefeuille fictif est intégré dans le périmètre AUXIA afin de mettre à jour l'étude du QIS 5 et de constater les variations des différents paramètres tels que le best estimate, le SCR et le MCR. L'ensemble des résultats sont dans le dernier chapitre.

## Chapitre 1 – Caractéristiques du produit

Le contrat a pour objet le versement du capital inscrit au certificat d'adhésion au décès de l'assuré augmenté des participations aux bénéfices acquises, pour le financement et l'organisation des obsèques.

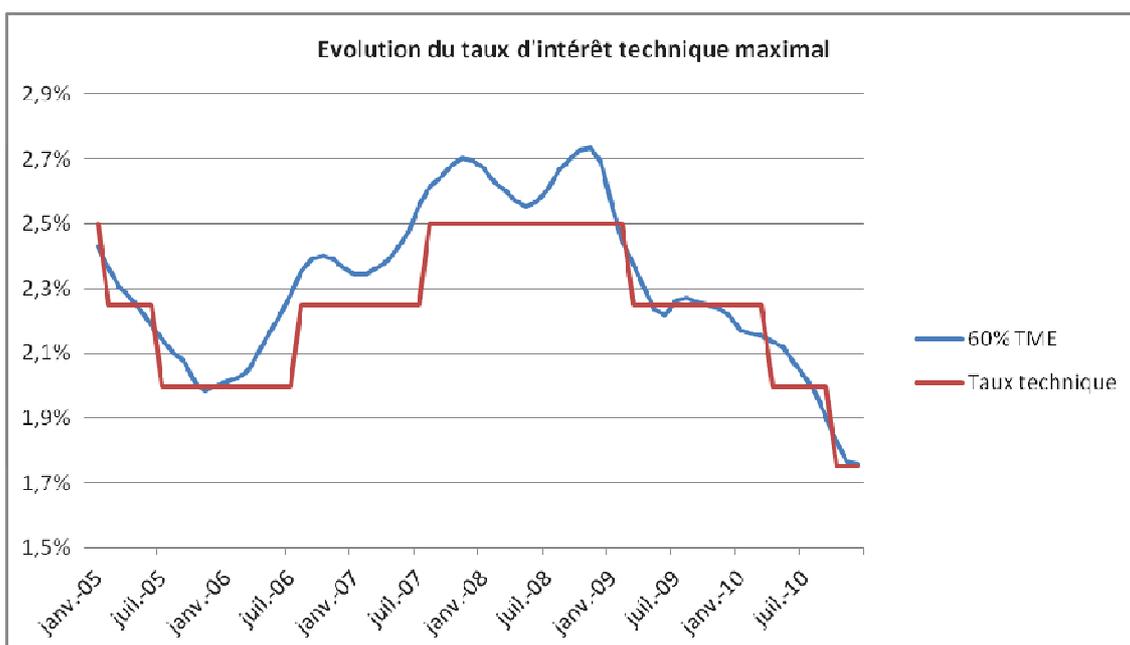
La date d'effet est le 30 juin 2010 et le capital à la souscription est de 4 000€.

La table de mortalité utilisée pour la tarification et le provisionnement est la table réglementaire TH00-02.

### Taux d'intérêt technique

J'ai énoncé précédemment l'article A132-1 du Code des Assurances indiquant un taux d'intérêt technique maximal en fonction du TME semestriel. Pour notre produit, ce taux ne doit pas dépasser 60 % du TME ou 3,5 %.

Le graphique ci-dessous présente les évolutions du taux de référence (60 % du TME) et le taux technique. La production se situant dans l'année 2010, je fixe le taux technique à 1,5 %.



Profils des souscripteurs et des assurés

La production en 2010 est de 12 000 contrats ventilés de la manière suivante :

PU	52%	6 240 contrats
PP5	8%	960 contrats
PP10	7%	840 contrats
PPV	33%	3 960 contrats

Prime	Age	%	contrats
PU	60	18%	1 123
PU	70	17%	1 061
PU	75	20%	1 248
PU	79	25%	1 560
PU	83	20%	1 248
PP5	51	18%	173
PP5	61	22%	211
PP5	68	20%	192
PP5	74	23%	221
PP5	80	17%	163
PP10	48	18%	151
PP10	56	18%	151
PP10	62	24%	202
PP10	68	20%	168
PP10	76	20%	168
VIAGER	55	13%	515
VIAGER	61	20%	792
VIAGER	66	25%	990
VIAGER	72	24%	950
VIAGER	78	18%	713

Les cotisations sont payables d'avance et dans le cas d'un contrat à prime périodique, la périodicité est annuelle dont l'appel de prime est en milieu d'année.

Formule de tarification

Notations :

x	: L'âge à la souscription
C	: Capital garanti
$g_c$	: Chargement sur capital
$g_p$	: Chargement sur prime
p	: Durée de paiement

Le tableau suivant présente les différents taux de prime pour un capital décès de 1€.

PAIEMENT TYPE DE PRIME	UNIQUE	p = 5 ou 10 ANS	VIAGER
PURE	$\Pi_x = \frac{M_x}{D_x}$	${}_p\omega_x = \frac{\Pi_x}{{}_p\ddot{a}_x}$	$\omega_x = \frac{\Pi_x}{\ddot{a}_x}$
INVENTAIRE	$\Pi'_x = \Pi_x + g_c \times \ddot{a}_x$	${}_p\omega'_x = \frac{\Pi'_x}{{}_p\ddot{a}_x}$	$\omega'_x = \frac{\Pi'_x}{\ddot{a}_x}$
COMMERCIALE	$\Pi''_x = \frac{\Pi'_x}{(1-g_p)}$	${}_p\omega''_x = \frac{{}_p\omega'_x}{(1-g_p)}$	$\omega''_x = \frac{\omega'_x}{(1-g_p)}$

### Provision mathématique

L'article R331-3 du Code des Assurances définit la provision mathématique comme étant égale à « la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés »

L'article A331-1-1 du même Code stipule que « les provisions mathématiques des contrats de capitalisation et d'assurance sur la vie, doivent être calculées d'après des taux d'intérêt au plus égaux à ceux retenus pour l'établissement du tarif »

Soit  $V_k$  la provision mathématique à date anniversaire k du contrat :

- Si le contrat est à prime unique ou libéré de prime :  $V_k = C \times \Pi'_{x+k}$
- Si le contrat n'est pas à cotisation viagère :  $V_k = C \times (\Pi'_{x+k} - {}_p\omega'_x \times {}_{p-k}\ddot{a}_{x+k})$
- Sinon :  $V_k = C \times (\Pi'_{x+k} - \omega'_x \times \ddot{a}_{x+k})$

La provision mathématique en fin d'année se calculera par interpolation linéaire entre les provisions mathématiques à date anniversaire k et k+1.

### Participation aux bénéfices

Attribution d'un capital PB supplémentaire libéré de prime en fin d'année. La prime n'est donc pas revalorisée.

Soient pour l'année n :

y : L'âge atteint  
 txPB<sub>n</sub> : Le taux de PB  
 CapPB<sub>n</sub> : Le capital PB  
 PS<sub>n</sub> : Les prélèvements sociaux

L'assureur essaye d'obtenir chaque année un taux de rendement global égal au taux d'inflation du funéraire. Dans le cas d'une inflation basse, l'assureur affecte au mieux un taux cible de 2,3 % correspondant au taux d'inflation du funéraire moyen.

Pour rappel, la participation aux bénéfices est égale à la participation aux résultats allouée aux assurés après déduction des intérêts crédités aux provisions mathématiques.

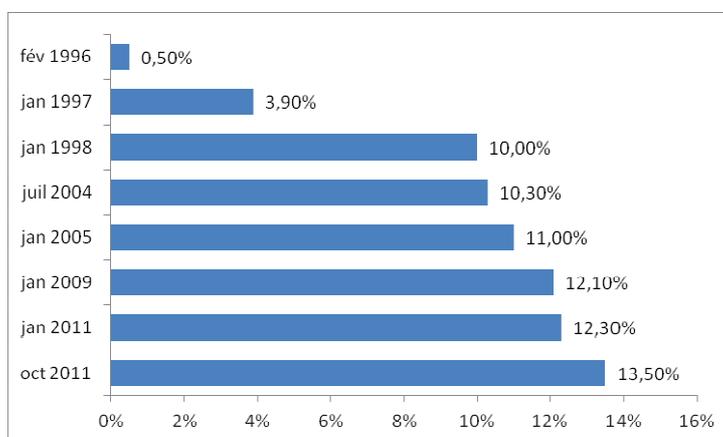
Soit la provision mathématique nette de fiscalité afférente à la PB :

$$\text{PMPB}_{\text{nette}} = \max\{0; (\text{txPB}_n \times V_{31/12/n}) - \text{PS}_n\}$$

On détermine ensuite le capital PB :  $\text{CapPB}_n = \frac{\text{PMPB}_{\text{nette}}}{\Pi'_y}$

L'article 10 de la loi de Finance rectificative du 19 septembre 2011 publiée au journal officiel du 20 septembre augmente les contributions sociales à un niveau total de 13,50 % dont la date d'effet de l'évolution est le 1<sup>er</sup> octobre 2011.

Pour mémoire, le graphique ci-dessous rappelle l'évolution des contributions sociales applicables aux produits d'assurance sur la vie.



### Valeur de rachat

Le souscripteur peut à tout moment demander le rachat total de son contrat. Le versement de la valeur de rachat met fin au contrat. Une pénalité de 5 % est appliquée sur les dix premières années du contrat.

Soit  $t$  la date du rachat, le montant du rachat total est égal à  $95\% \times V_t$  sur les 10 premières années et à  $V_t$  les années suivantes.

### Réduction

L'article L132-20 du Code des Assurances mentionne que le paiement des primes d'un contrat d'assurances vie n'est pas obligatoire. Le défaut de paiement après une non régularisation dans un certain délai entraîne une modification du contrat, c'est la réduction du contrat. Les engagements sont réduits en fonction du montant de la provision mathématique.

Soit la réduction à date  $t$  pour un assuré ayant atteint l'âge  $y$ . Le capital réduit est égal à  $\frac{V_t}{\Pi'_y}$ .

### Placements

Les engagements envers les assurés doivent être représentés par des actifs équivalents sous certaines règles :

Règle de congruence :

Les articles R332-1 et R332-1-1 du Code des Assurances informent que « *les engagements pris dans une monnaie doivent être couverts par des actifs congruents, c'est-à-dire libellés ou réalisables dans cette monnaie.* ». Le second article en définit une limite : « *les entreprises d'assurance peuvent, à concurrence de 20 p. 100 de leurs engagements, ne pas couvrir ceux-ci par des actifs congruents.* »

Règle de limitation :

L'article R332-3 du même Code donne des limites sur l'allocation des actifs :

- 65 % pour les actions
- 40 % pour l'immobilier
- 10 % pour les prêts

Le portefeuille de placements d'AUXIA est géré par la société de gestion de portefeuille, filiale du Groupe Malakoff Médéric, agréée par l'AMF dans le cadre d'un mandat de gestion mis en place entre cette société et AUXIA.

L'allocation stratégique d'AUXIA est décidée par son Conseil d'Administration. Fondée sur une analyse de scénarii de stress, en relation avec le niveau des fonds propres, l'allocation stratégique privilégie l'investissement obligataire, la part actions est cependant fixée à un niveau significatif, en relation avec les contraintes de passif spécifiques à l'entité.

A fin 2010, les actifs se décomposent comme suit :

- 81 % d'obligations
- 16 % d'actions
- 3 % en monétaire

Lors de l'étude actif passif, je pars de cette décomposition afin de vérifier le nombre de cas où l'objectif sur le taux de rendement global n'est pas atteint. Dans le cas où le taux technique n'est pas atteint, il faudra tester une nouvelle allocation en diminuant la proportion des actions afin d'arriver au résultat souhaité.

Autre hypothèse dans mon étude, le portefeuille est recomposé afin de conserver la répartition initiale.

## Chapitre 2 – Solvabilité 2

### Objectifs

En 2001, la Commission Européenne a ainsi lancé le projet Solvabilité 2 afin d'améliorer sensiblement le dispositif européen de surveillance prudentiel des compagnies d'assurance.

Les principaux objectifs poursuivis sont :

- Accroître la protection vis-à-vis des preneurs d'assurance,
- Etablir une exigence de capital de solvabilité prenant en compte l'ensemble des risques auxquels sont exposés les assureurs, en tenant compte de l'évolution des techniques financières et de gestion des risques,
- Harmoniser les normes prudentielles du secteur de l'assurance à la fois avec les normes comptables internationales (IFRS) et avec celles s'appliquant au système prudentiel bancaire (Bâle 3) pour accroître l'intégration des marchés en Europe et renforcer la compétitivité internationale des assureurs européens,
- Donner un rôle accru de contrôle aux superviseurs.

### Limites des références actuelles

Les comptes sociaux d'une compagnie d'assurance ne donnent pas une vision de sa richesse, puisque le bilan est établi sur le principe du coût historique et le Code des Assurances introduit des règles prudentielles pour le calcul des provisions techniques d'assurance. Ces deux principes ne conduisent pas à une vision économique du bilan de la compagnie d'assurance.

La marge de solvabilité est déterminée proportionnellement aux provisions mathématiques et aux capitaux sous risques en vie. Même si le dispositif actuel présente l'avantage d'être simple, il est l'objet de certaines critiques :

- Le risque de souscription est mal appréhendé pour l'exigence de solvabilité, il ne tient pas compte de la nature des risques souscrits (pas de pénalisation en cas de sous-tarifification ou de sous-provisionnement et calcul indépendant de la volatilité des risques).
- La réassurance n'est pas traitée convenablement en terme de transfert de risques et de qualité de crédit des réassureurs.
- La diversification des risques, ainsi que les corrélations entre actif et passif, ne sont pas pris en compte dans le calcul des fonds propres,
- Le risque de placement n'est pris en compte que par le biais de contraintes réglementaires de composition et de diversification des actifs. Un assureur prudent dans la gestion de son actif ne sera pas avantagé par une moindre immobilisation de capital pour couvrir son exigence de solvabilité.

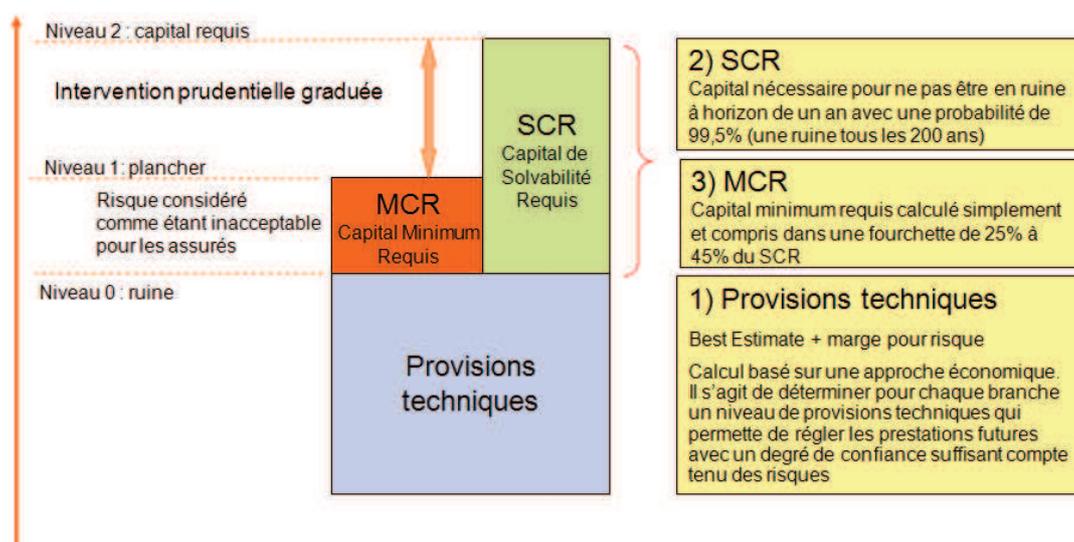
## Principes généraux

La directive Solvabilité 2 adoptée par le Parlement et la Commission européenne en 2009 repose sur une structure identique à celle de Bâle 3. Elle s'articule autour de 3 piliers, complétés par le quatrième aspect que constitue le régime envisagé pour le contrôle des groupes.

Dans ce mémoire, seul le pilier 1 (exigences quantitatives) sera défini. Son contenu est le suivant :

- Dispositions permettant d'apprécier la solvabilité d'une compagnie d'assurance, à savoir les méthodologies et les calibrations destinées à évaluer les exigences de solvabilité et les fonds propres éligibles à leur couverture.
- Une attention particulière est portée sur la qualité des données

Le pilier 1 vise à harmoniser les méthodes de calcul des provisions techniques et à ajuster le capital nécessaire aux risques réellement pris (risques de passif et d'actif). Les sociétés d'assurance seront soumises à des exigences particulières qui porteront sur 3 types de calculs :

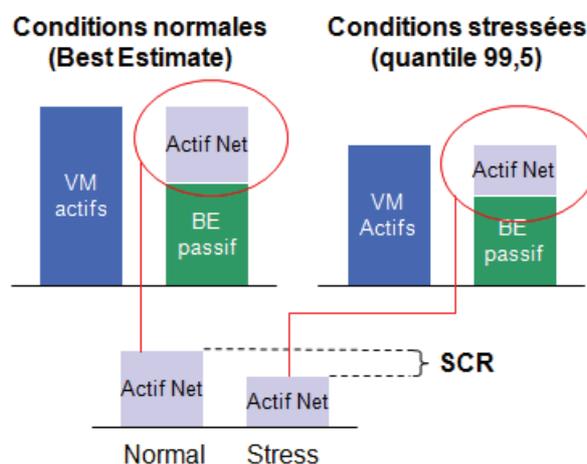


Dans la formule standard, l'évaluation du capital de solvabilité requis (*Solvency Capital Requirement* ou SCR) de chaque risque est établie par un stress test sur les éléments impactés du bilan économique. Le besoin en capital est évalué en mesurant l'impact d'un choc sur la NAV (Net Asset Value)

$NAV = \text{valeur de marché des actifs} - \text{valeur économique des provisions techniques (BE seul)}$

Le SCR de chaque risque est donc  $NAV_{\text{central}} - NAV_{\text{choc}}$

Le choc est calibré pour correspondre à un besoin en capital requis pour assurer la solvabilité sur 1 an avec une probabilité de 99,5 %. Le capital de solvabilité global est obtenu en agrégeant les risques individuels selon une matrice de corrélation.



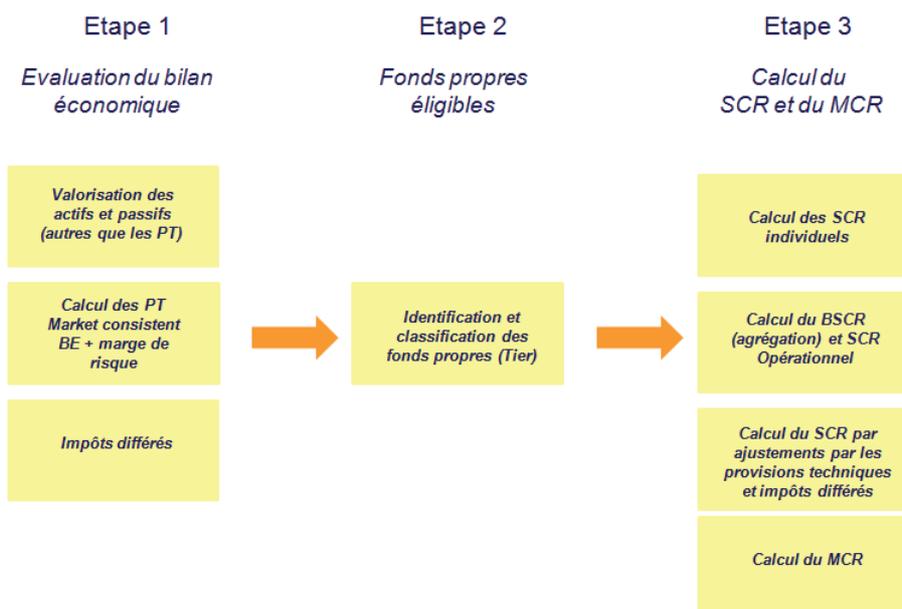
Lorsqu'une société d'assurances ne peut développer un modèle interne, elle a la possibilité de calculer le SCR par une formule standard plus simple à mettre en œuvre. Le calcul du SCR repose sur deux hypothèses :

- Les risques évoluent dans un univers gaussien
- Les corrélations entre les risques sont linéaires

## Chapitre 3 – Méthodologie

Selon la segmentation d'assurance vie sous Solvabilité 2 où les engagements sont segmentés par ligne d'activité (*Line of business* ou LoB), c'est un portefeuille vie entière en assurance vie avec participations aux bénéficiés dont le principal facteur est le décès.

La méthodologie du QIS 5 se fait en trois étapes :



### Section 3.1 – Best estimate

L'évaluation des provisions techniques et du capital de solvabilité est ici plus complexe dans la mesure où il y a attribution de participations aux bénéficiés pour les assurés sur l'ensemble des contrats.

Elle nécessite donc préalablement la projection conjointe d'un compte de résultat sous Solvabilité 1 et d'un scénario financier de l'actif pour déterminer la part de résultat technique et financier venant en revalorisation des engagements de l'assureur.

La méthodologie retenue pour le calcul du best estimate est conforme à celle présentée dans les ONC (Orientations Nationales Complémentaires) sur la cinquième étude quantitative d'impact (*Quantitative Impact Study* ou QIS 5) pour l'assurance vie. Les contrats ne présentent pas d'options de rachat car dans la troisième partie du mémoire on a démontré que les comportements des clients en termes de rachat sont insensibles aux conditions financières de marché ou de politique de participations aux bénéficiés d'AUXIA.

Le best estimate est calculé en 2 phases. Le best estimate garanti correspondant à l'engagement contractuel du taux minimum garanti, puis le best estimate global incluant les participations aux bénéficiés futures des assurés (*Future Discretionary Benefits* ou FDB).

L'article 77 de la Directive précise que le best estimate « *correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents.* »

Pour le  $i^{\text{ème}}$  scénario, le best estimate se calcule ainsi :

$$BE_i = \sum_t \frac{F_{i,t}}{(1 + \tilde{r}_t)^t} \quad \text{où } F_{i,t} = \text{Prestations}_{i,t} + \text{Frais généraux}_t - \text{Primes futures}_t$$

Au final, on obtient le best estimate global :

$$BE = \frac{1}{NS} \sum_{i=1}^{NS} BE_i, \quad \text{où } NS \text{ est le nombre de simulation.}$$

Les primes futures sont intégrées conformément aux spécifications techniques du QIS 5, car l'assureur n'a pas le droit unilatéral de mettre fin à la garantie ou de modifier la prime ou la garantie.

Les prestations réglées dépendent de la mortalité annuelle du portefeuille et de la loi de rachat d'expérience décrites dans la partie III de ce mémoire.

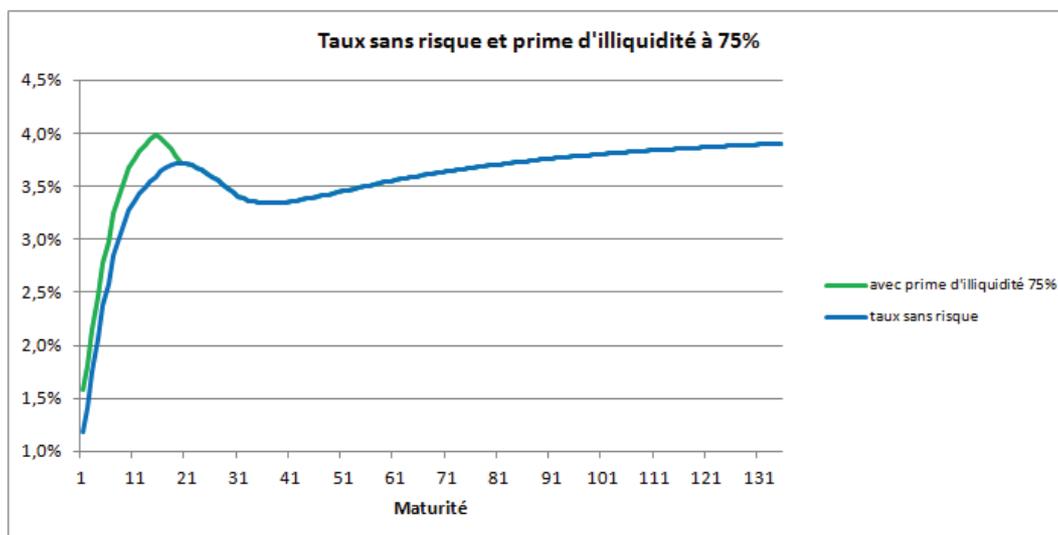
Les frais généraux, comprennent les frais internes : frais d'administration et frais de gestion de sinistres.

Enfin  $\tilde{r}_t$  est la courbe des taux sans risques fournis par l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*), autorités de contrôle des états membres (ACP pour la France), en retenant une prime d'illiquidité de 75 % car les contrats du portefeuille répondent aux critères définie par le QIS 5.

Ce qui a changé par rapport à QIS 4 est l'inclusion de cette prime d'illiquidité dans la courbe des taux. L'Autorité de Contrôle Prudentielle en donne une définition :

*« Ce mécanisme de prime d'illiquidité a été introduit pour traduire à un instant donné l'illiquidité des marchés financiers. Cette illiquidité permettrait à un assureur d'investir volontairement dans des actifs illiquides bénéficiant d'un rendement supérieur à celui des actifs liquides dès lors que ses engagements envers ses assurés lui permettent une assez bonne prévisibilité des flux futurs et ne le forcent pas à devoir vendre les actifs illiquides de façon imprévue et dans des conditions de marché défavorables. »*

Le graphique suivant présente sur une période de 135 années les deux courbes.



Conformément aux spécifications techniques du QIS 5, la projection étant réalisée jusqu'à extinction complète du portefeuille.

Les spécifications techniques du QIS 5 demandent le calcul du best estimate en faisant l'hypothèse que tous les assurés cessent de verser des primes sur leurs contrats afin de mesurer le poids des profits futurs dans les primes futures. Sur les contrats vie entière, la cessation du paiement des primes entraîne la réduction du contrat, c'est à dire le calcul du capital assuré compte tenu des primes déjà versées. On recalcule ainsi les cash flow sur la base des engagements réduits et en ne tenant plus compte des primes.

### Section 3.2 – Marge de risque

Dans le même article de la Directive, « *la marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.* »

Cette marge de risque est additionnée au best estimate représentant ainsi les provisions techniques sous solvabilité 2. Elle se calcule grâce à la méthode appelée « coût du capital » ou CoC. Compte tenu de la complexité de mise en œuvre du calcul complet, une hiérarchie des simplifications, au nombre de cinq, est proposée. La marge de risque a été calculée en utilisant la méthode simplifiée de niveau 3 proposée dans le QIS 5.

Il s'agit du calcul d'une approximation du SCR global pour chaque année future, en appliquant une technique proportionnelle. Les SCR futurs sont proportionnels au best estimate de l'année concernée et le facteur de proportionnalité est le ratio de la valeur actuelle du SCR sur la valeur actuelle du best estimate.

Le SCR de référence en année  $k$  est fixé comme suit :

$$SCR_{Ref}(k) = \frac{SCR_{Ref}(0)}{BE(0)} \cdot BE(k)$$

Le facteur de proportionnalité étant défini par le ratio  $\frac{SCR_{Ref}(0)}{BE(0)}$ .

$SCR_{Ref}(0)$  est le SCR calculé uniquement sur le périmètre des risques de souscription vie et du risque opérationnel en tenant compte de la capacité d'absorption des pertes par les participations aux bénéfices des provisions techniques.

Le calcul des best estimate pour les années futures se présente ainsi :

$$\text{Soit } BE(0) = \frac{1}{NS} \sum_{i=1}^{NS} \sum_{t=1}^{NS} \frac{F_{i,t}}{(1 + \tilde{r}_t)^t}, \text{ alors } BE(k) = \frac{1}{NS} \sum_{i=1}^{NS} \sum_{t=1}^{NS} \frac{F_{i,t+k}}{(1 + \tilde{r}_t)^t}$$

On calcule alors la marge de risque :

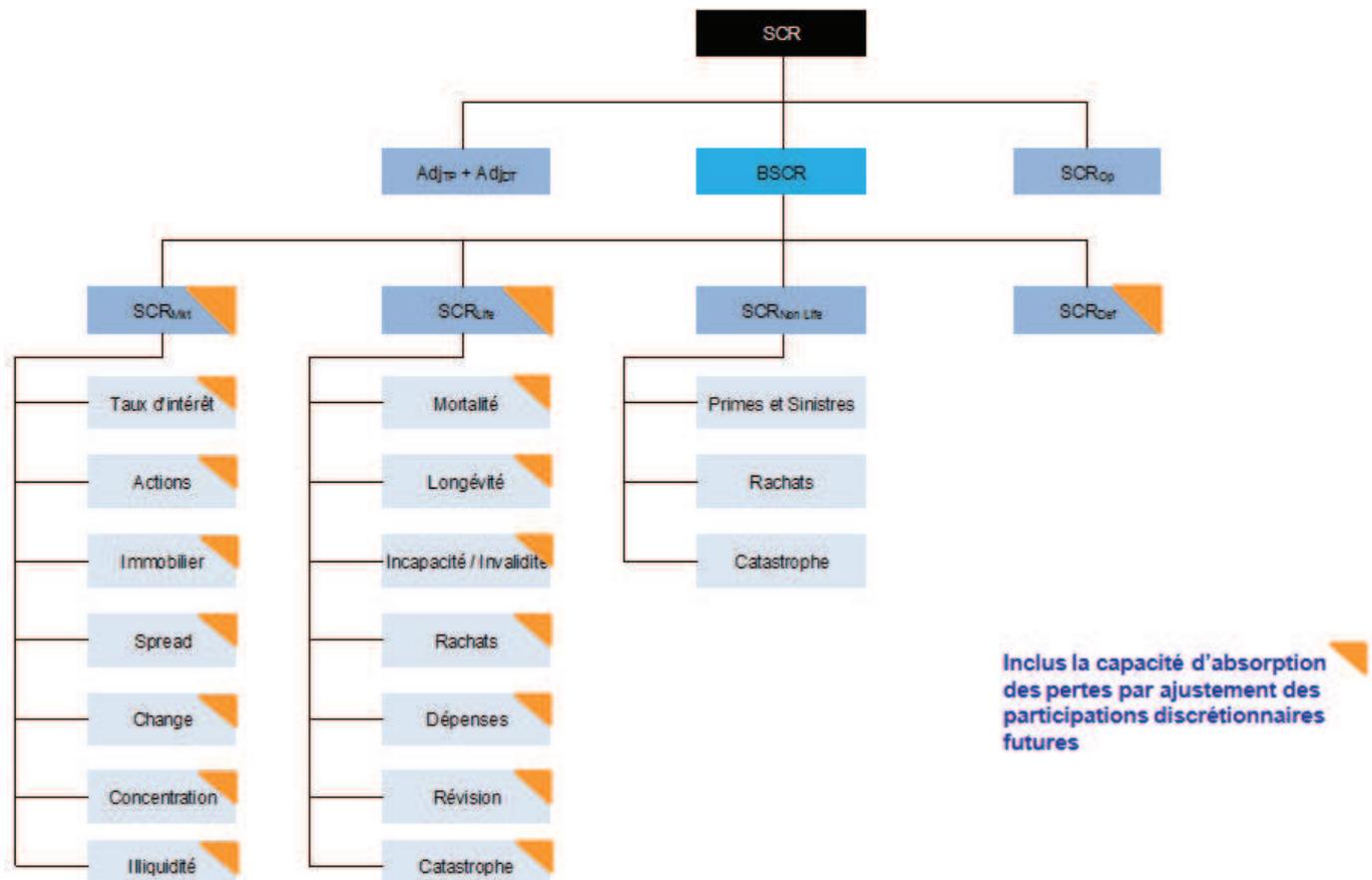
$$CoCM = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_{Ref}(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Avec :

- $r_t$  la courbe de taux sans risque sans tenir compte de la prime d'illiquidité car l'entreprise de référence ne pourra peut-être pas acquérir la prime d'illiquidité dans les conditions du scénario de transfert
- CoC est le taux du coût du capital. Il est de 6 % dans le QIS 5.

### Section 3.3 – SCR

Le SCR a été calculé conformément aux spécifications techniques du QIS 5. Il suit une approche structurée pas à pas.



Dans le QIS 5, deux approches sont proposées pour le calcul du SCR : le scénario équivalent et l'approche modulaire. Dans l'étude, la seconde méthode est retenue. Dans cette approche, un effet de diversification est pris en compte, en supposant que tous les chocs ne surviennent pas simultanément.

Le calcul du SCR nécessite de calculer la capacité d'absorption des pertes par les participations aux bénéfices des provisions techniques. Cela se fait en 2 étapes :

- On calcule le capital de solvabilité requis de base (*Basic Solvency Capital Requirement* ou BSCR) en faisant l'hypothèse que seul le best estimate garanti est sensible aux stress test appliqués dans les modules de risque, la valeur de la participation aux bénéfices demeurant inchangée.
- On calcule le nBSCR selon l'approche modulaire dans laquelle on peut ajuster la future participation aux bénéfices selon l'ampleur des stress tests.

Définissons maintenant les SCR individuels qui sont retenus dans ce mémoire :

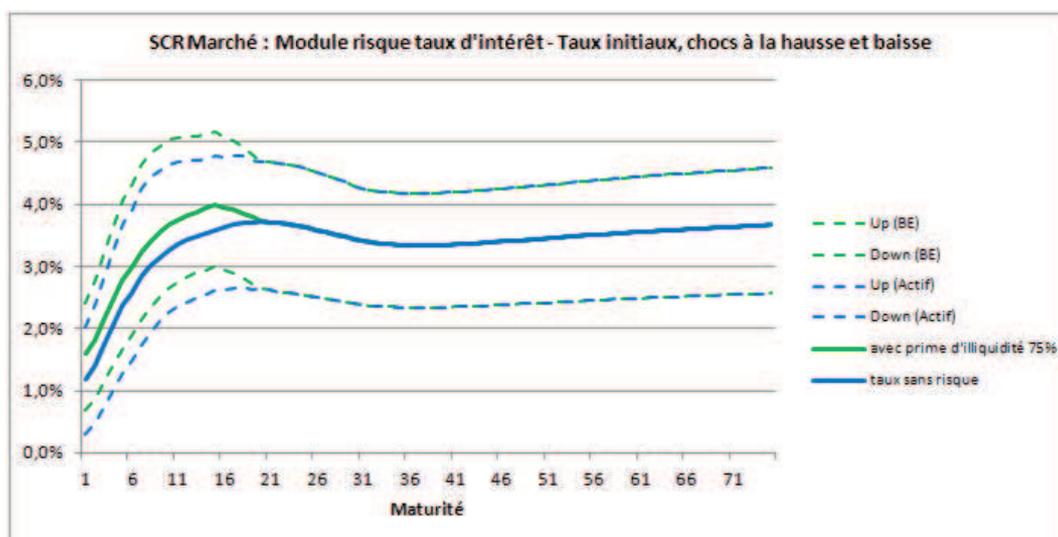
### SCR Marché

C'est le capital requis au titre du risque de marché. Les sous-modules ci-dessous permettent de calculer ce capital.

#### ➤ Taux d'intérêt :

Ce sous-module calcule l'effet d'un choc relatif à une hausse ou à une baisse de taux. L'actif correspondant aux produits à taux fixe et le passif, le best estimate, sont affectés.

Le graphique ci-dessous présente les différentes courbes utilisées pour ces chocs avec une comparaison sur les taux initiaux.



Les scénarii de hausse et de baisse sont définis par un facteur multiplicatif, en fonction de la maturité, sur les courbes de taux initiales.

On retient au final le choc le plus pénalisant sur la NAV entre une hausse ou une baisse de taux.

#### ➤ Actions :

Ce sous-module calcule l'effet d'une baisse de la valeur des actions. Une distinction est faite sur les actions cotées et non cotées. Dans ce mémoire, le portefeuille action est composé seulement du premier groupe.

La prise en compte d'un effet Dampener est retenue dans le QIS 5. Ceci prévoit que le choc est d'autant plus fort lorsque le marché des actions est en haut de cycle et plus faible dans le cas contraire. On applique donc un ajustement et, au final, la valeur des actions cotées chute de 49 %.

➤ Spread :

Ce sous-module évalue le risque d'écartement des spreads, de dégradation du rating ou de crédit des émetteurs. Dans le QIS 5 d'AUXIA, ce sous-module est renseigné. J'ai pris comme hypothèse que l'actif associé au portefeuille fictif ne comportait pas d'obligations d'émetteurs privés.

➤ Illiquidité :

Les taux d'actualisation dans le best estimate intègrent une prime d'illiquidité, un risque lié à la baisse de cette prime est considérée. Le scénario consiste en une chute de 65 % de cette prime.

➤ Immobilier, change et concentration

Ces sous-modules n'ont pas été renseignés lors du QIS 5 d'AUXIA.

Pour l'immobilier, le scénario correspondant est une chute de 25 % des prix de l'immobilier. Dans le cas où une partie du passif est libellé dans des devises étrangères, le sous-module de change retient le scénario le plus pénalisant pour chaque devise entre une hausse ou baisse de 25 % de la valeur de celle-ci. Le dernier sous-module prend en compte d'un risque de concentration sur un émetteur. Tous les placements sont concernés à l'exception des obligations d'états.

Le SCR Marché est déterminée par la formule suivante :

$$SCR_{\text{Marché}} = \sqrt{\text{Corr}_{\text{Marché}} \cdot \text{SCRs}_{\text{Marché,L}} \cdot \text{SCRs}_{\text{Marché,C}}}$$

Où

$\text{SCRs}_{\text{Marché,L}}$  et  $\text{SCRs}_{\text{Marché,C}}$  sont les vecteurs contenant l'ensemble des SCR des sous-modules présentées respectivement en ligne et en colonne.

$\text{Corr}_{\text{Marché}}$  est la matrice de corrélation suivant le scénario retenu dans le sous-module du taux d'intérêt.

Le  ${}_n \text{SCR}_{\text{Marché}}$  se calcule de la même manière.

## SCR Vie

C'est le capital requis au titre du risque de souscription vie. Les sous-modules ci-dessous permettent de calculer ce capital.

### ➤ Mortalité :

Ce sous-module évalue le risque que les assurés meurent plus vite que ne le prévoient les hypothèses du best estimate. Dans le QIS 5, on suppose une hausse de 15 % des taux de mortalité à chaque âge et chaque année. Ceci entraîne une augmentation des provisions techniques.

### ➤ Rachats :

Ce sous-module retient le choc le plus pénalisant sur la NAV entre une hausse, une baisse de taux de rachat chaque année ou un choc de rachat massif la 1<sup>ère</sup> année (risque de réputation).

Dans le QIS 5, les hypothèses sont une hausse et une baisse de 50 % du taux de rachat. Le troisième scénario simule une augmentation de 30 % la première année.

### ➤ Dépenses :

Ce sous-module évalue le risque d'une augmentation de 10 % des coûts de gestion chaque année combiné à une augmentation de 1 % du taux d'inflation annuel des frais de gestion.

### ➤ Catastrophe :

Ce scénario simule un risque de pandémie. L'hypothèse est un choc additif de 0,15 % sur les taux de mortalité à chaque âge la 1<sup>ère</sup> année.

### ➤ Longévité, Incapacité/Invalidité et révision

Ces sous-modules n'ont pas été renseignés lors du QIS 5 d'AUXIA.

La longévité s'applique aux contrats pour lesquels une baisse de la mortalité engendrerait une hausse des provisions techniques. C'est le cas inverse d'un risque décès. Le sous-module de révision ne s'applique qu'aux rentes.

Le SCR Vie est déterminée par la formule suivante :

$$SCR_{Vie} = \sqrt{Corr_{Vie} \cdot SCRs_{Vie,L} \cdot SCRs_{Vie,C}}$$

Où

$SCRs_{Vie,L}$  et  $SCRs_{Vie,C}$  sont les vecteurs contenant l'ensemble des SCR des sous-modules présentées respectivement en ligne et en colonne.

$Corr_{Vie}$  est la matrice de corrélation associée aux différents risques vie.

Le  ${}_n SCR_{Marché}$  se calcule de la même manière.

Au final le BSCR est déterminé par la relation suivante :

$$BSCR = \sqrt{Corr \cdot SCR_L \cdot SCR_C} + SCR_{incorporels}$$

Où

$SCR_L$  et  $SCR_C$  sont les vecteurs contenant les SCR (risques de marché, vie, non-vie, santé et de contrepartie) présentées respectivement en ligne et en colonne.

$Corr$  est la matrice de corrélation associée aux différents risques précédemment cités.

$SCR_{incorporels}$  n'est pas renseignée dans le QIS 5 d'AUXIA.

Le  ${}_n BSCR$  se calcule de la même manière.

### SCR Opérationnel

Le calcul du SCR opérationnel, noté  $SCR_{Op}$ , est basé sur le volume d'activité. La première étape est le calcul d'un pourcentage sur les primes et les provisions techniques. Le résultat le plus élevé est retenu. La seconde étape est d'appliquer à cette valeur un plafond de 30 % du BSCR.

Ajustement par les provisions techniques : approche modulaire

L'ajustement du SCR au titre de la capacité d'absorption des pertes des provisions techniques doit être déterminé en comparant le BSCR au nBSCR. Aux fins du calcul des provisions techniques, le montant absolu de l'ajustement ne doit pas excéder la valeur totale des prestations discrétionnaires futures :

$$\text{Adj}_{\text{TP}} = -\text{Min}(\text{FDB}; \text{BSCR} - \text{nBSCR})$$

Ajustement par les impôts différés

On calcule la capacité d'absorption d'un choc sur le bilan équivalent à :

$$\text{BSCR} + \text{SCR}_{\text{Op}} - \text{Adj}_{\text{TP}}$$

Les impôts différés se limitent au passif au bilan.

L'ajustement par les impôts différés est déterminé par :

$$\text{Adj}_{\text{DT}} = -\text{Min}(\text{Tx}_{\text{IS}} \times (\text{BSCR} + \text{SCR}_{\text{Op}} - \text{Adj}_{\text{TP}}); \text{IDP})$$

Avec :

$\text{Tx}_{\text{IS}} = 34,33\%$  pour une société vie.

IDP : Montant des impôts différés au passif du bilan économique.

Au final le SCR est déterminé par :

$$\text{SCR} = \text{BSCR} + \text{SCR}_{\text{Op}} - (\text{Adj}_{\text{TP}} + \text{Adj}_{\text{DT}})$$

**Section 3.4 – MCR**

Le minimum du capital requis (*Minimum Capital Requirement* ou MCR) est la deuxième exigence de capital définie dans Solvabilité 2. C'est le niveau des fonds propres que l'assureur doit détenir. Dans le cas contraire, la conséquence est le transfert du portefeuille sous décision de l'ACP.

Le MCR est calculé en appliquant une formule linéaire associée à un plafond de 45 % et un plancher de 25 % du SCR.

## Chapitre 4 – Résultats

### Placements

En partant de l'allocation d'actif du portefeuille d'AUXIA soit 81 % d'obligations, 16 % d'actions et 3 % en monétaire, j'ai calculé le nombre de trajectoire où on n'obtenait pas au moins sur une année un taux de rendement global égal au taux d'inflation du funéraire.

Pour le modèle d'Ahlgrim, j'obtiens 21 % de cas pour le taux d'inflation du funéraire et 4 % pour le taux technique. Concernant le modèle de Wilkie, les taux sont respectivement de 17 % et 1 %.

Je diminue donc la part des actions par pas de 1 % afin de garantir au moins le taux technique sans trop m'éloigner de l'allocation initiale. L'objectif est atteint avec les proportions suivantes :

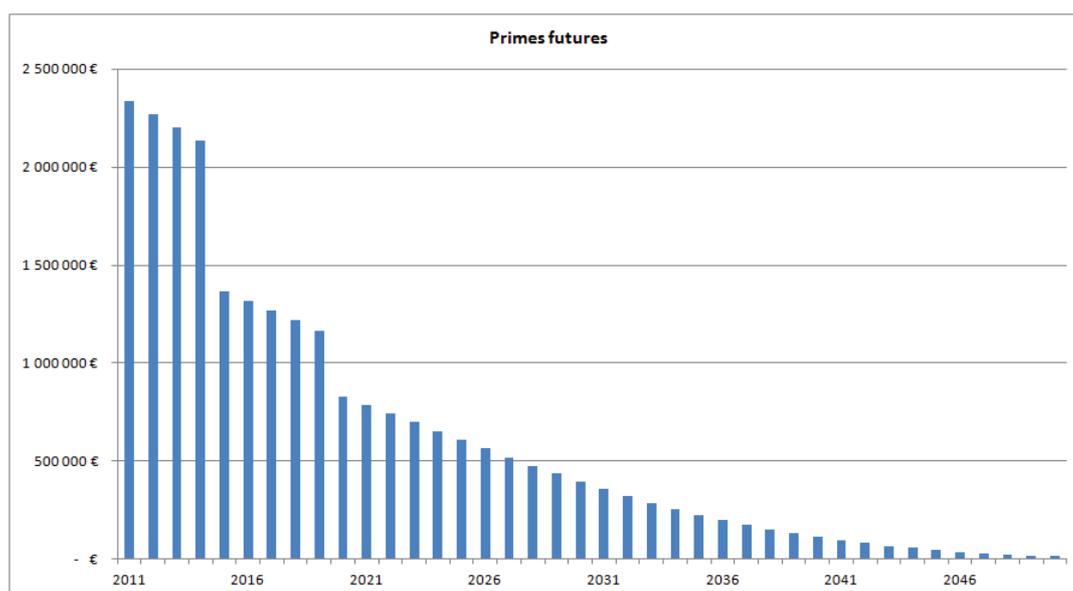
- 84 % d'obligations
- 11 % d'actions
- 5 % en monétaire

La proportion des cas où le taux cible n'est pas atteint descend à 16 % avec le modèle d'Ahlgrim et à 12 % pour celui de Wilkie.

### Primes

Pour le premier exercice, le montant des primes commerciales s'élève à 26,48 M€. Pour rappel, la décomposition était de 52 % de contrat en prime unique, 8 % dont le paiement se déroule sur 5 années, 7 % sur 10 années et 33 % pour les contrats à primes viagères.

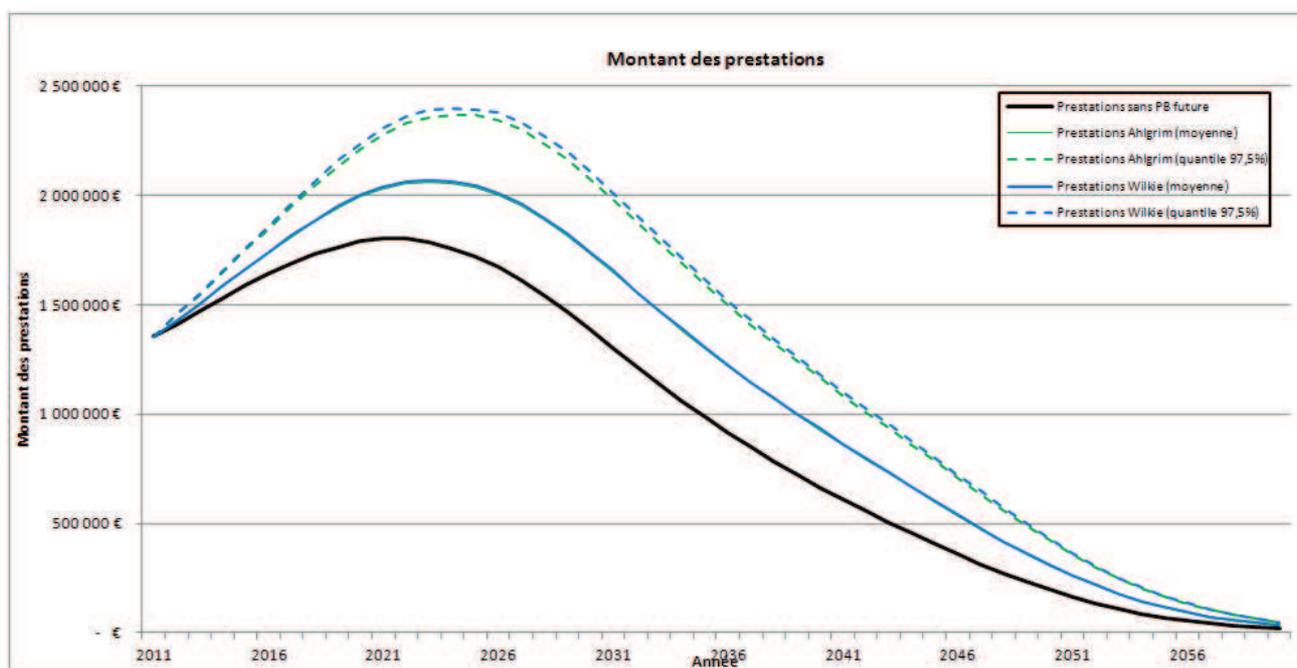
Le graphique suivant présente les primes futures en tenant compte de la table d'expérience définie dans la troisième partie de ce mémoire.



La première chute correspond aux contrats, avec une durée cotisation de 5 ans, qui sont libérés de primes. La deuxième chute concerne les contrats dont la durée initiale est de 10 ans. A partir de l'année 2020, le chiffre d'affaire est représenté par le portefeuille de contrats à cotisations viagères.

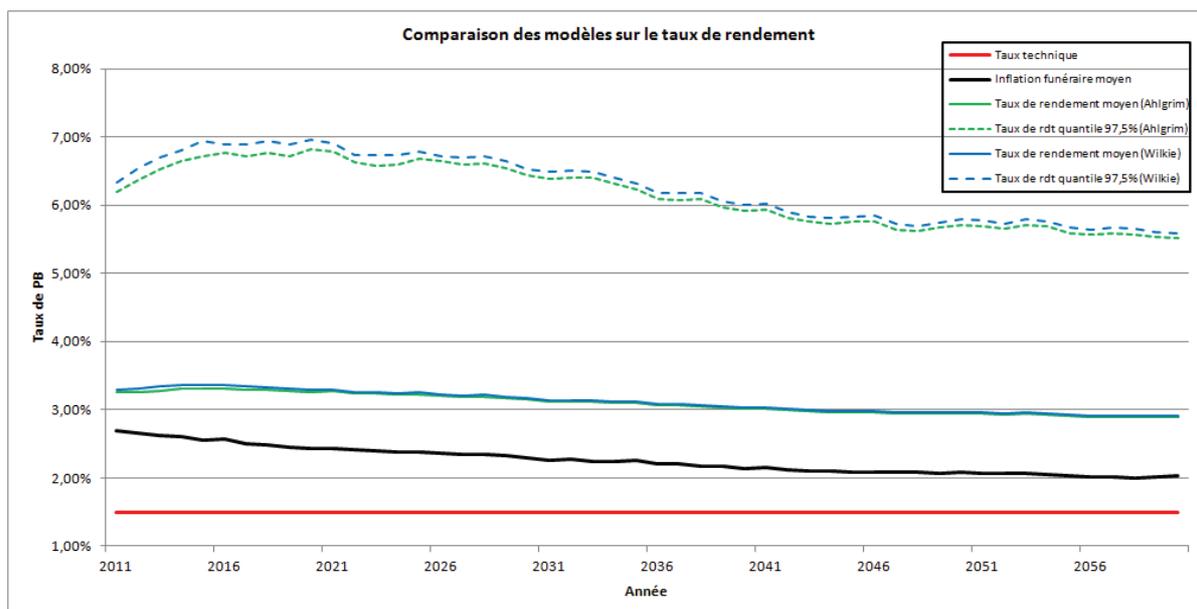
### Prestations

Le prochain graphique présente, pour chaque modèle, le montant des prestations moyennes futures. Suivant les scénarii, les prestations oscillent entre la courbe des prestations sans participation aux bénéfices future et leurs courbes respectives avec un quantile à 97,5 %.



La durée du passif, sans prendre en compte les participations aux bénéfices futures, est égale à 12,9 années. En incluant celles-ci et suivant le scénario, la durée oscille entre 13,3 et 15,6 années.

## Taux de rendement global

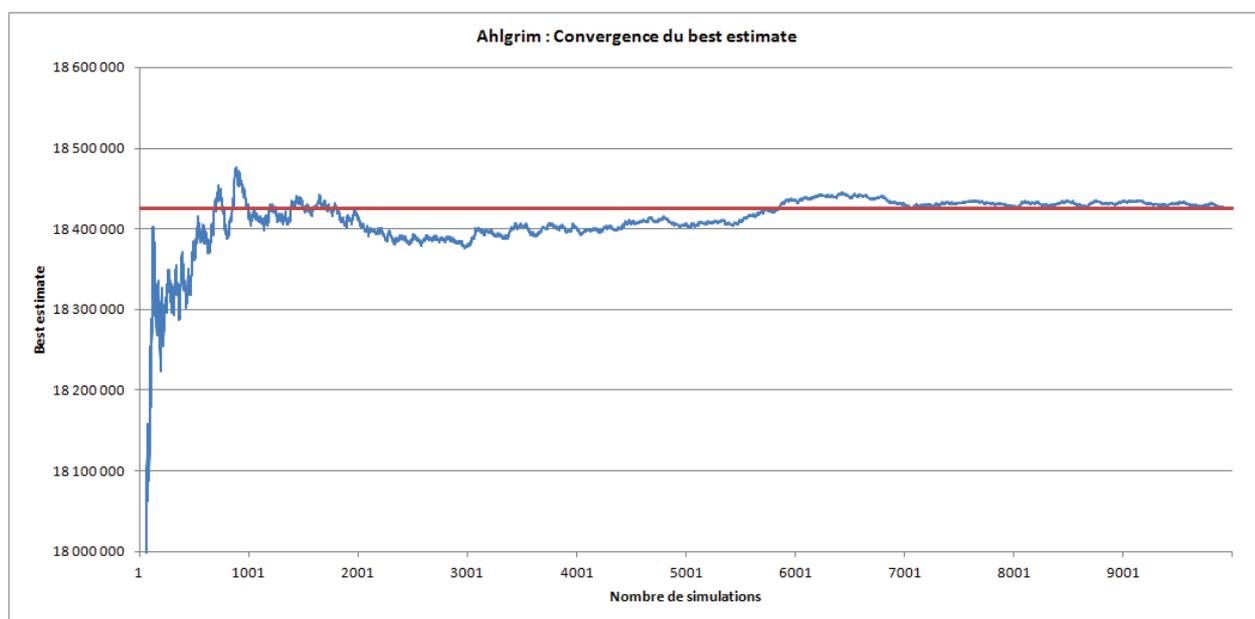


En moyenne, les deux modèles permettent de donner le même taux de rendement. Sur certains scénarii, on constate que la méthode de Wikie propose des taux un peu supérieurs par rapport à la méthode d'Ahlgrim.

### Provision technique

Le best estimate obtenu avec le modèle d'ahlgrim est de 18,43 M€. Celui provenant du modèle de wilkie est égal à 18,72 M€.

Le graphique suivant montre la convergence de l'estimateur du best estimate en prenant les résultats du modèle d'Ahlgrim. Ceci permet de vérifier si le choix de 10 000 simulations est adéquat.



La convergence est lente et le choix sur le nombre de simulations porté à 10 000 est acceptable.

Le best estimate garanti est égal à 12,91 M€. A titre indicatif, j'ai calculé le best estimate garanti en supposant que la mortalité des assurés suit la table réglementaire TH00-02. Le résultat obtenu est égal à 17,73 M€. Donc l'utilisation de la table d'expérience fait baisser le best estimate garanti de 27 %.

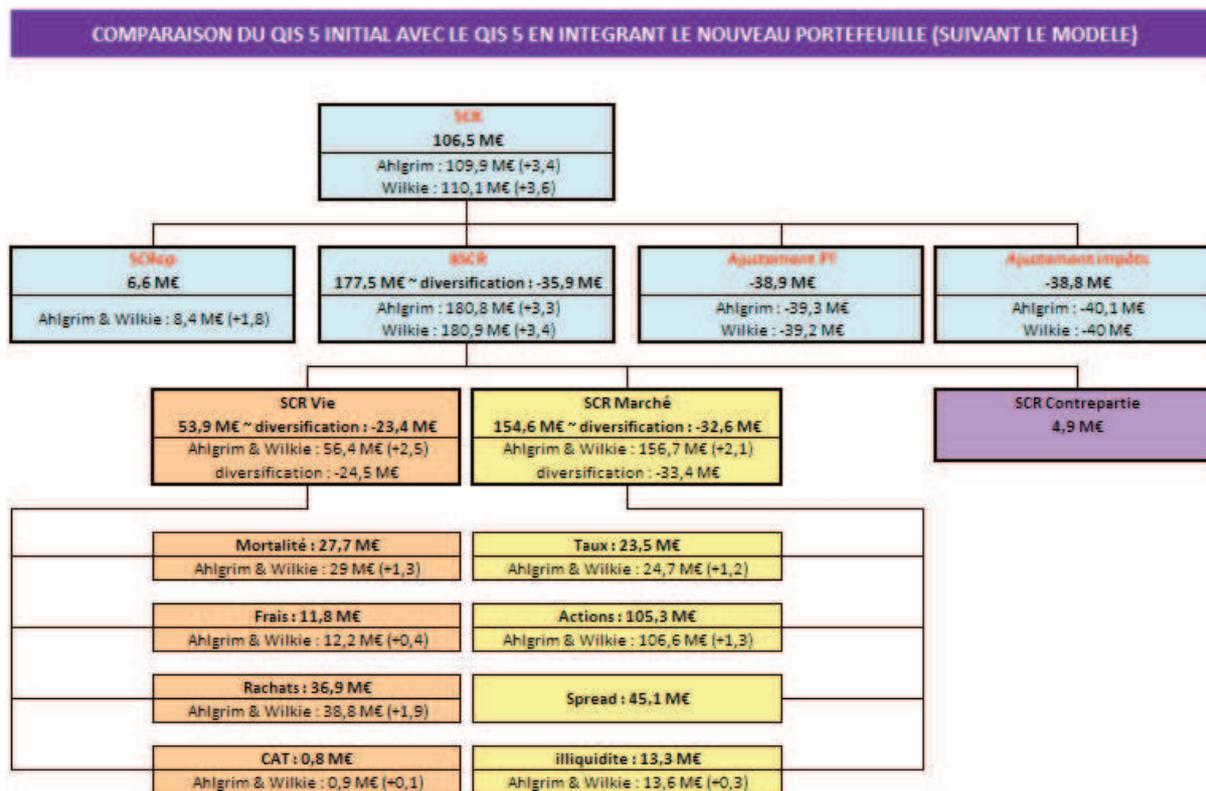
En fonction du modèle, le poids des participations aux bénéfices futures représente 30 % ou 31 % du best estimate global. Pour comparaison, le portefeuille vie entière de la société où les règles de management en termes de politique de participations aux bénéfices retenues sont moins contraignantes, ce poids est égal à 16 %.

Il est demandé dans le QIS 5 le calcul du best estimate en faisant l'hypothèse que tous les assurés cessent de verser des primes sur leurs contrats. J'obtiens un best estimate de 22,98 M€ pour le modèle d'Ahlgrim et de 23,33 M€ pour celui de Wilkie. Donc les profits futurs dans les primes futures représentent respectivement 4,55 M€ et 4,61 M€.

Les provisions mathématiques s'élèvent à 23,88 M€. Les provisions techniques sous solvabilité 2 représentent donc 87 % des provisions sous solvabilité 1 avec le modèle d'Ahlgrim et 88 % avec celui de Wilkie.

## SCR

Le QIS5 est actualisé en intégrant l'ensemble des résultats du nouveau portefeuille. Le graphique suivant détaille, pour les deux modèles, l'évolution de chaque module.



### SCR Vie :

Le risque de souscription vie représente 26 % du BSCR avant diversification.

Le SCR Mortalité du nouveau portefeuille est égal à 1,3 M€. Après intégration dans le périmètre de la société, il reste à 36 % du SCR Vie avant diversification. Le portefeuille AUXIA et celui de l'étude n'utilisent pas la même table de mortalité.

Sur le risque des rachats, le choc le plus important parmi les trois scénarii est le rachat massif qui représente 48 % du SCR Vie avant diversification. Pour rappel, il est appliqué à l'ensemble du portefeuille et on a un best estimate inférieur à la provision mathématique avec des taux de rachats observés qui sont faibles.

Le choc de catastrophe vie a un poids négligeable par rapport au risque de mortalité. La calibration du choc pandémique consiste en un choc additif de 0,15 % à tout âge la première année. Compte tenu du profil âgé de la population assurée, ce taux apparaît négligeable par rapport aux taux de mortalité observés sur cette population.

Les frais représentent principalement le coût de gestion des sinistres. Le SCR Frais du portefeuille fictif est de 0,4 M€. L'utilisation de la table d'expérience, donnant une sous-mortalité, décale donc les principaux montants de sinistralités. Avec l'actualisation de ces flux futurs par la courbe des taux, le SCR Frais reste à 15 % du SCR Vie avant diversification.

#### SCR Marché :

Le risque de marché représente 72 % du BSCR avant diversification.

Concernant le risque de taux, le bilan est soumis à un risque de baisse de taux. La valeur des obligations soumises au risque de taux est proche de la valeur du best estimate et la durée de l'actif est plus courte que celle du passif. Au final, ce risque représente 13 % du SCR Marché avant diversification.

Même si les actions ne représentent que 16 % du portefeuille AUXIA et 11 % du portefeuille d'étude, c'est le risque le plus gourmand avec 56 % du SCR Marché. Ce SCR pour le portefeuille fictif est égal à 1,3 M€.

Dans ce mémoire, le risque de spread est inchangé car j'avais pris comme hypothèse que l'actif associé au portefeuille fictif ne comportait pas d'obligations d'émetteurs privés. Il représente 24 % du SCR Marché.

Le risque d'illiquidité varie faiblement et reste à 7 % du SCR Marché avant diversification. Il est égal à 0,3 M€ pour le portefeuille d'étude.

Au final, le SCR global est de 109,9 M€ en retenant le modèle d'Ahlgrim sur le portefeuille fictif et de 110,1 M€ en retenant celui de Wilkie. Initialement, lors du chantier du QIS 5, le SCR valait 106,5 M€. L'intégration d'un portefeuille de 12 000 contrats, avec les caractéristiques de souscription décrites dans le premier chapitre et d'une hypothèse différente sur le taux de participation aux bénéficiaires, augmente le SCR respectivement de 3,4 M€ et 3,6 M€.

#### MCR

Le MCR d'AUXIA est égal à 35,6 M€, soit 32,4 % du SCR avec le modèle d'Ahlgrim et 32,3 % avec celui de Wilkie, compris dans la fourchette de 25 % à 45 % du SCR proposé dans le QIS 5.

Taux de couverture

Le SCR doit être couvert par 50 % au moins de Tier 1 et le MCR par 80 % au minimum. Tous les fonds propres éligibles d'AUXIA sont classés en Tier 1.

Le tableau ci-dessous donne les taux de couverture de l'exigence de solvabilité sous les deux référentiels :

<b>Solvabilité 1</b>		<b>Solvabilité 2 (Ahlgrim - Wilkie)</b>	
<i>en M€</i>		<i>en M€</i>	
Marge de solvabilité (2)	44,8	SCR (2)	109,9 - 110,1
Fonds propres (1)	109,3	Fonds propres (1)	173,4 - 173,2
Taux de couverture (1)/(2)	244,0%	Taux de couverture (1)/(2)	157,8% - 157,3%

Pour rappel, la marge de solvabilité dans solvabilité 1 est calculée en sommant 4 % des provisions mathématiques et 0,3 % des capitaux sous risque.

L'exigence de capital de solvabilité augmente de plus de 145 % entre les deux référentiels.

Le taux de couverture passe de 244 % sous solvabilité 1 à 157 % sous solvabilité 2. Ce dernier, en excluant le portefeuille du périmètre, est égal à 160 %.

## CONCLUSION

La problématique de ce mémoire a été d'étudier le suivi d'un nouveau portefeuille de contrats obsèques en gardant comme objectif d'attribuer à ses assurés une participation aux bénéfices quand le taux de rendement global est égal au taux d'inflation du funéraire. Pour mener à bien cette étude, des projections sur l'actif et le passif ont été réalisées.

Les modèles d'Ahlgrim et de Wilkie ont été retenus pour la modélisation de l'actif. Après l'étape sur le calibrage de chaque paramètre et de la validation par des outils statistiques, une vérification des projections avec les données réelles a été lancée sur la période 1985-2010. Le résultat étant concluant, 10 000 simulations sur une projection de 50 années ont été réalisées. Le modèle d'Ahlgrim est moins contraignant. En effet, une seule source est nécessaire, celle des données de Friggit, contrairement au modèle de Wilkie. De plus, par manque d'information sur le montant des dividendes, les valeurs proposées par Wilkie ont été maintenues. Pour clore la partie de l'actif, une relation entre le taux d'inflation et celui du funéraire a été définie afin de déterminer plusieurs trajectoires.

Pour la modélisation du passif, ce mémoire a exposé une méthode d'estimation des taux bruts de décès en se basant sur les données du portefeuille vie entière de la société. L'étape suivante a été l'utilisation d'une technique de lissage et le prolongement des taux estimés. Cette étude donne comme conclusion que la mortalité constatée était inférieure, dès l'âge de 65 ans, à la mortalité théorique de la table réglementaire TH00-02. La TH00-02 a été utilisée pour la tarification et le provisionnement du nouveau produit, ceci a permis d'obtenir un meilleur bénéfice technique afin qu'il soit redistribué en partie aux assurés.

Avec une allocation d'actif proche de celle utilisée pour le portefeuille AUXIA, l'assureur ne pouvait suivre, sur certains scénarii, le taux d'inflation du funéraire au moment de l'attribution aux participations aux bénéfices. Il faudrait vérifier à nouveau ces résultats dans l'hypothèse où on intégrerait d'autres actifs, par exemple, l'immobilier.

L'étude s'est terminée en intégrant ce nouveau portefeuille dans le périmètre AUXIA. Dans le cadre de solvabilité 2, j'ai vérifié l'impact sur le best estimate et j'ai constaté une variation du SCR ainsi qu'une baisse du taux de couverture. La difficulté apparue dans cette partie est le temps de calcul nécessaire pour obtenir les résultats. Le travail a été réalisé sous Excel et il conviendrait d'avoir un outil plus puissant pour lancer des études de sensibilités en faisant varier certains paramètres. AUXIA prévoit d'installer Prophet l'année prochaine, ceci permettra d'avancer sur ce sujet.

## ANNEXES

### ANNEXE 1 : Régression

#### Test de Breusch-Godfrey

Soit une régression linéaire suivante :  $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1,t} + \alpha_2 X_{2,t} + u_t$

Où les résidus suivent un modèle AR(p) :  $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$

Breusch et Godfrey ont prouvé que si le modèle régression suivant est modélisé :

$$\hat{u}_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1,t} + \alpha_2 X_{2,t} + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \dots + \rho_p \hat{u}_{t-p} + \varepsilon_t$$

Alors le  $R^2$  ajusté peut être utilisé pour le test statistique où l'hypothèse  $H_0$  est  $\{\rho_i = 0 / 1 < i < p\}$  grâce à la relation suivante :  $nR_{\text{ajusté}}^2 \sim \chi_2$

#### Test de Jarque et Bera

L'hypothèse  $H_0$  de ce test est la normalité des résidus sous la statistique suivante :

$$JB = \frac{n-k}{6} \left( S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

Avec :

n le nombre d'observations

k le nombre de variables explicatives

S le coefficient d'asymétrie  $\left( \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{\sigma^3} \right)$

K le coefficient d'aplatissement  $\left( \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{\sigma^4} \right)$

**ANNEXE 2 : Processus Ornstein-Uhlenbeck**

On appelle processus d'Ornstein-Uhlenbeck le processus  $r$  caractérisé par la différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dB_t$$

Avec  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  des constantes strictement positives. Ce processus est souvent utilisé pour décrire la dynamique des taux courts.

La forme explicite de la solution est :

$$r_t = (r_0 - b)e^{-at} + b + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s$$

Avant de le démontrer, rappelons le lemme d'ITÔ qui sera utilisé par la suite.

Lemme d'ITÔ

L'idée est de passer d'une dynamique à l'autre. Le lemme d'ITÔ est une formule de Taylor dans un environnement stochastique.

Soit  $X$  un processus d'ITÔ caractérisé par :  $dX_t = \mu(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dB_t$

Le processus  $Y$  défini par  $Y_t = f(X_t, t)$  est un processus d'ITÔ dont la différentielle s'écrit :

$$dY_t = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \mu(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(X_t, t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma(X_t, t) dB_t$$

Soit le processus  $X_t = f(r_t, t) = r_t - b$ , la différentielle est :  $dX_t = dr_t = -a X_t dt + \sigma dB_t$

Soit le processus  $Y_t = g(X_t, t) = X_t \cdot e^{at}$ , la différentielle est :  $dY_t = \sigma e^{at} dB_t$

Exprimons  $r_t$  en fonction des constantes  $r_0$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  en partant du processus  $Y$  :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$$

$$X_t = Y_t e^{-at} = Y_0 e^{-at} + e^{-at} \int_0^t \sigma e^{as} dB_s = X_0 e^{-at} + e^{-at} \int_0^t \sigma e^{as} dB_s \quad \text{car } Y_0 = X_0$$

$$r_t = b + (r_0 - b) e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s$$

Calculons l'espérance et la variance de  $r_t$  :

$$E(r_t) = b + (r_0 - b) e^{-at} + \sigma e^{-at} E\left(\int_0^t e^{as} dB_s\right)$$

$$E\left(\int_0^t (e^{as})^2 ds\right) < +\infty, \text{ donc } E\left(\int_0^t e^{as} dB_s\right) \text{ est une martingale de moyenne nulle.}$$

$$\text{D'où } E(r_t) = b + (r_0 - b) e^{-at}.$$

$$V(r_t) = E[(r_t - E(r_t))^2] = \sigma^2 e^{-2at} E\left[\left(\int_0^t e^{as} dB_s\right)^2\right]$$

Par la propriété de l'isométrie de l'intégrale de Wiener, on obtient :

$$V(r_t) = \sigma^2 e^{-2at} E\left(\int_0^t e^{2as} ds\right) = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2at}}{2a}$$

$r_t$  est une variable aléatoire gaussienne de paramètre  $b + (r_0 - b) e^{-at}$  et  $\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2at}}{2a}}$ .

Sur un court intervalle de temps  $\delta$  le processus s'écrit :

$$r_{t+\delta} = b + (r_t - b) e^{-a\delta} + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}} \varepsilon = r_t e^{-a\delta} + b (1 - e^{-a\delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}} \varepsilon,$$

avec  $\varepsilon$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite

## BIBLIOGRAPHIE

ACP – <http://www.acp.banque-france.fr/>

Ahlgrim, D'Arcy, Gorvett [2005] *Modeling financial scenarios: A framework for the actuarial profession. Proceedings for the Casualty Actuarial Profession.*

Asselin [2007] Elaboration de tables de mortalité d'expérience permettant un suivi du risque décès sur un portefeuille vie entière suivant une approche non paramétrique – IRIAF

Association française d'information funéraire – [www.afif.asso.fr](http://www.afif.asso.fr)

Banque de France :

Indices obligataires – <http://www.banque-france.fr/fr/statistiques/taux/taux.htm>

Bokobza [2002] Comparaison de modèles stochastiques d'allocations d'actifs pour un portefeuille de prévoyance collective, Université Paris Dauphine.

Bourbonnais [2009] Econométrie – 7<sup>ème</sup> édition, Dunod.

Caja, Carvas, Rousseau [2009] Intégrer des informations exogènes dans un modèle d'actifs – ISFA.

Centre de recherche pour l'étude et l'observation des conditions de vie – [www.credoc.fr](http://www.credoc.fr)

Le Code des Assurances – [www.legifrance.gouv.fr](http://www.legifrance.gouv.fr)

Dodge, Rousson [2004] Analyse de régression appliquée, Dunod.

Droesbeke, Fichet, Tassi [1989] Analyse statistique des durées de vie – Modélisation des données censurées, Economica.

EIOPA – <https://eiopa.europa.eu/>

Euronext – <http://www.euronext.com>

Guide des indices du marché français d'Euronext & Données sur le SBF 250.

Friggit [2010] Prix des logements et des autres actifs sur longue période - Séries longues 1800-2010, <http://www.cgedd.developpement-durable.gouv.fr/>

Gallais-Harmonno, Arbulu [1995] La rentabilité réelle des actifs boursiers de 1950 à 1992, Economie et statistique n°281 – INSEE.

Gauthier [2011] Développement d'un générateur de scénarii économiques au sein d'une compagnie d'assurance vie – ISFA.

Gerber [2010] Allocation d'actifs sous Solvabilité 2 : cas de l'assurance vie épargne – Dauphine.

Hill, Com-Nougoué [1996] Analyse statistique des données de survie, Flammarion.

Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques (INSEE) :

Indice des prix – <http://indicespro.insee.fr/>

Thème sur la population – <http://www.insee.fr/fr/themes/>

Hull [2004] Options, futures et autres actifs dérivés, Pearson.

Kaplan, Meier [1958] *Non-parametric estimation from incomplete observations* – *Journal of the American Statistical Association*, vol 53 n°282 pp 457-481.

Lamberton, Lapeyre [1997] Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Ellipse.

Logiciel R – <http://www.r-project.org/>

Natixis : Taux officiels - [http://cib.natixis.com/presentation/official\\_rate.aspx](http://cib.natixis.com/presentation/official_rate.aspx)

Olympio [2004] Elaboration de tables d'expériences décès sur un portefeuille d'assurance vie entière – ISFA.

Petauton [2004] Théorie et pratique de l'assurance vie, Dunod.

Planchet, Thérond [2005] Simulation de trajectoires de processus continus

Planchet, Thérond [2011] Modélisations statistique des phénomènes de durées, Economica.

Planchet [2011] Modèles financiers en assurance, Economica.

Planchet [2009] Scénarios économiques en assurance, Economica.

Ressources actuarielles – <http://www.ressources-actuarielles.net/>

Roger [2004] Probabilités, statistiques et processus stochastiques, Pearson.

Sahin, Cairns, Kleinow, Wilkie [2008] *Revisiting the Wilkie investment model*, *Proceeding of the 18th AFIR Colloquium*.

Saporta [2006] Probabilités, analyse des données et statistique, Technip.

Seghir [2009] Construction d'une boîte à outils pour la création et l'analyse de tables d'expérience avec le logiciel R – ISFA

Sevellec [2010] Gestion Actif Passif par une projection stochastique bayésienne – EURIA.

Tosetti, Béhar, Fromenteau, Ménart [2011] Assurance : Comptabilité – Réglementation – Actuariat – 3ème édition, Economica.

Wilkie [1986] *A stochastic investment model for actuarial use*, *T.F.A.* 39.

Wilkie [1995] *More on a stochastic asset model for actuarial use*, *British Actuarial Journal* 1.