



Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaire

Par : Jean-Charles CROIX

Titre : Méta-modélisation par krigeage pour la mesure du risque
de taux en ALM.

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA

Signature

Entreprise

Nom :

Signature :

Membres présents du jury de l'ISFA

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : Amine CHERQUAOUI

Signature :

Invité

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Mme Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Signature du candidat

Résumé

Le risque de taux est un sujet majeur en assurance vie et particulièrement pour les services de gestion actif-passif, dont la principale mission est de garantir la valeur de l'entreprise. L'utilisation de modèles de projections stochastiques, de plus en plus complexes et coûteux en temps de calcul, permet de prendre en compte de nombreux phénomènes d'interactions au bilan. Ce faisant, il n'est plus possible de prédire facilement l'impact d'une variation de la courbe des taux et il est nécessaire d'avoir recours à une méta-modélisation : la construction d'approximation sur la base de sensibilités. Dans ce mémoire, une approche innovante de construction d'approximation de la valeur intrinsèque de l'entreprise est présentée. L'objectif de ce travail est de pouvoir modéliser l'impact d'une variation de la courbe des taux, sans utiliser le modèle de projection. La méthode envisagée consiste à choquer la courbe des taux en univers historique dans un premier temps, puis de les utiliser pour la construction de méta-modèles par polynômes ou krigeage. Deux applications numériques sont réalisées, grâce à un outil spécialement créé pour l'étude.

Remerciements

Cette année d’alternance entre l’ISFA et l’équipe ALM d’AXA France a été véritablement enrichissante sur de nombreux aspects, tant professionnels que personnels. J’ai eu la chance d’être à temps plein sur un sujet de recherche passionnant et d’actualité : la gestion du risque de taux en assurance. De plus, j’ai pu participer activement à la vie de l’équipe en prenant part à divers travaux, notamment au sujet de l’estimation du gap de duration. Outre ces aspects professionnels, j’aimerais insister sur les aspects personnels et la qualité de l’accueil qui m’a été réservé.

- Je commence par adresser un grand merci à **Vincent Jarlaud**, directeur des équipes ALM, pour la possibilité qu’il m’a offerte de réaliser une alternance au sein de ses équipes. J’ai beaucoup apprécié nos échanges, qu’ils soient dans le cadre de réunions de travail ou autour d’un café.
- Ensuite, je tiens à remercier **Sofiane Ournidi**, Manager de l’équipe ALM collective, pour sa grande disponibilité tout au long de l’année et ses nombreux conseils avisés. De plus, je tiens à saluer le joueur de football, adversaire talentueux et bon esprit !
- Il m’est impossible d’aller plus avant dans ces quelques remerciements sans parler d’**Amine Cherquaoui**, membre de l’équipe ALM collective, et mon tuteur en entreprise. En effet, en plus de lui témoigner toute mon amitié, je le remercie d’avoir accepté de m’encadrer cette année. Par son invariable bonne humeur, sa grande disponibilité et ses recommandations dans ce travail de mémoire, il m’a permis de progresser tout au long de mon année d’alternance.
- Comme toute alternance, le lien avec l’université est primordial. Bien plus qu’un point d’ancrage et un guide dans l’environnement académique et de la recherche, **Anne Eyraud-Loisel**, directrice adjointe de l’ISFA, a été un véritable soutien, particulièrement dans les moments de doutes. Pour ses conseils et sa bonne humeur, je tiens à la remercier.
- Merci à **Pascal Christory**, Directeur des Investissements d’Axa France, pour sa proximité et sa bienveillance. Les nombreux déjeuners DI ont été des moments de vie d’équipe très agréables, alliant intérêts professionnels et échanges informels.
- Je tiens également à remercier toutes les personnes de l’ALM qui m’ont cotoyé au quotidien : **Micaela Marcq**, **Malick Sy**, **Ghislain Essome Boma**, **Medhi Babouche**, **Anne-Laure Benneteau**, **Amine Bouassida**, **Wael Hmidi**, **Akram**

Rekik et **Alexandre Leandri** pour tous les moments passés avec eux.

Plus largement, je remercie toutes les personnes qui ont participé, d'une façon ou d'une autre dans l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	7
I Contexte, réglementation et définitions	9
1 Gestion en assurance-vie	10
1.1 Bilan selon le plan comptable général (GAAP)	10
1.2 Bilan économique selon Solvabilité 2	11
1.3 <i>Embedded value</i> ou valeur intrinsèque	12
1.4 Risque de taux en assurance	13
2 Couverture du risque de taux	16
2.1 La couverture flux à flux (<i>Cash-flow matching</i>)	16
2.2 Stratégies basées sur les sensibilités	17
2.2.1 Variation, sensibilité, duration et autres mesures	17
2.2.2 Application au bilan d'une entreprise	19
2.2.3 Extensions du cadre classique	19
2.2.4 Limites et difficultés	20
2.3 Conclusion sur les stratégies en gestion actif-passif	21
3 Estimation du gap de duration par <i>Roll-Forward</i>	22
3.1 Calculs réels et sensibilités	22
3.2 Estimation par <i>Roll-Forward</i>	23
3.2.1 Prise en compte de la variation de courbe des taux	23
3.2.2 Prise en compte du passage du temps	23
3.2.3 Prise en compte des investissements	24
3.2.4 Prise en compte de la dépendance actifs-passifs : l'absorption	24
3.3 Conclusion et objectifs du mémoire	25

II	Analyse du risque de taux	26
4	Définition et étude du risque de taux	27
4.1	La courbe des taux zéro-coupons	27
4.2	Les courbes des taux à terme implicites	27
4.3	Reconstruction des courbes	28
4.4	Choix des maturités au-delà du dernier point liquide	29
4.5	Statistiques descriptives	29
5	Réduction de dimension de la courbe des taux	33
5.1	Analyse en composantes principales (ACP)	33
5.1.1	Description du modèle	34
5.1.2	Résultats de l'analyse	34
5.1.3	Étude de la dynamique des composantes principales	36
5.1.4	Retraitement par analyse en composantes indépendantes (ACI)	38
5.2	Méthodes paramétriques du type Nelson-Siegel	40
5.2.1	Présentation du modèle	42
5.2.2	Analyse de la dynamique des paramètres	42
5.3	Conclusion du chapitre	46
III	Modèle de projection actif-passif	47
6	Générateur de scénarios économiques	48
6.1	Modèle de taux d'intérêts : Vasicek Hull & White	48
6.2	Modèle d'actions : Black et Scholes à dividendes discrets	49
6.3	Méthodes de simulation et qualité des scénarios	50
7	Modèle de projection actif-passif	52
7.1	Composition du portefeuille d'actifs	52
7.2	Etape 0 : Allocation initiale du portefeuille	52
7.3	Etape 1 : Vieillissement des actifs	53
7.3.1	Vieillissement des actions	53
7.3.2	Vieillissement des obligations zéro-coupons	53
7.3.3	Vieillissement de la trésorerie	54
7.4	Etape 2 : Paiement des prestations (Rachats)	54
7.5	Etape 3 : Réallocation du portefeuille d'actifs	55
7.6	Etape 4 : Réalisation des plus-ou-moins values latentes excessives en actions	55
7.7	Etape 5 : Bilan de fin d'année et abondements	56
7.7.1	Calcul des produits financiers	56
7.7.2	Revalorisation de l'épargne des assurés	56
7.7.3	Calcul du flux pour l'assureur	57
7.8	Etape 6 : Répartition de la richesse finale	57
7.9	Qualité du modèle de projection	58

7.10 Amélioration envisageables du modèle de projection	58
IV Méta-modélisation de la MCEV et applications	60
8 Génération de courbes des taux choquées	61
8.1 Les différentes approches	61
8.2 Construction des courbes des taux choquées	64
8.3 Chocs : hypercubes latins et polyèdre convexe	64
9 Méta-modélisation	66
9.1 Objectif de la méta-modélisation	66
9.2 Modèle de régression linéaire	67
9.3 Krigeage Gaussien	67
9.3.1 Définition du Krigeage universel	67
9.3.2 Estimations par vraisemblances	69
9.3.3 Prédictions, conditionnement et méta-modèle	70
9.4 Validation croisée	70
10 Applications	72
10.1 Estimation de produits de taux	72
10.1.1 Estimation d'une somme de flux unitaires	72
10.1.2 Estimation de la <i>MCEV</i>	73
10.2 Estimation de mesures de risque	74
10.2.1 Mesures de risque de l'actif obligataire	75
10.2.2 Mesures de risque de la MCEV	75
10.3 Applications potentielles	75
Conclusion	76
Table des figures	79
Liste des tableaux	81
Bibliographie	81
Annexes techniques	84
A Résultats numériques : Estimation simple	85
A.1 Estimation de l'actif obligataire	85
A.2 Estimation de la MCEV	89
B Résultats numériques : Estimation de mesures de risque	92
C Implémentation du modèle de taux : Hull & White	94

D Processus stochastiques gaussiens	96
D.1 Loi normale multivariée et conditionnement	96
D.2 Processus	97
E Estimation d'une fonction à deux dimensions	99

Introduction

L'assurance vie est une activité étroitement liée aux marchés financiers car l'un de ses leitmotivs est d'accompagner sa clientèle dans la constitution d'une épargne. A ce titre, les investissements suivent un double objectif : offrir une performance supérieure aux produits classiques (Livret A, Plan d'épargne divers) tout en proposant un niveau de risque variable selon le profil choisi. En plus de ces services classiques, les assureurs offrent de nombreuses garanties à leurs clients comme une revalorisation minimale de l'épargne, une possibilité de retrait des fonds à tout moment (même si la réglementation fiscale encourage les assurés à maintenir leur épargne sur une période supérieure à 8 ans), la conversion de capitaux en rentes, augmentant encore l'impact des fluctuations financières.

Afin de pouvoir respecter leurs engagements (envers les assurés et le législateur), les compagnies d'assurance sont conduites à investir la majeure partie de l'épargne des assurés sur des produits de taux fixes, offrant un rendement prédéterminé sur des périodes variables (produits à faibles rendements ces derniers temps). Cependant, ces produits ne sont pas sans risques, puisque leur valeur de marché fluctue avec la courbe des taux zéro-coupons. Par exemple, dans le cas d'une insuffisance en trésorerie, l'assureur est contraint à céder une part de son portefeuille et potentiellement de réaliser des plus-ou-moins values.

Aussi le risque de taux constitue est majeur pour un assureur vie et il est opportun de l'évaluer et de le gérer. A ce titre, un des indicateurs clés est la sensibilité de la valeur (au sens d'*Embedded Value*, cf. [4] et [5], ci-après noté *EV*) de l'entreprise à une variation parallèle de la courbe des taux : le gap de duration. Ce dernier est calculé sur la base des résultats d'un modèle de projection de flux de trésorerie et permet de prendre en compte de nombreuses interactions entre les actifs d'une part, et les passifs d'autre part. Outre la possibilité d'estimer l'impact d'un changement de courbe des taux, il est aussi utilisé dans l'élaboration de stratégies d'allocation, car il renseigne sur le type d'actifs à acheter.

Cependant, le gap de duration a été développé pour la couverture de flux déterministes [37] dans un environnement de taux simplifié (courbe plate et déplacements parallèles de cette dernière). De plus, cet indicateur repose sur l'utilisation d'un modèle de projection, très coûteux en temps de calcul. Les dernières avancées en modélisation des taux

d'intérêts et en méta-modélisation des codes de calcul laissent penser que de nouvelles pratiques sont possibles, et c'est tout l'enjeu de ce mémoire que de les investiguer.

La première partie de ce mémoire est dédiée à la présentation de l'environnement réglementaire, en insistant particulièrement sur le concept de valeur intrinsèque (*Embedded Value*). Ensuite, une analyse quantitative des taux d'intérêt est réalisée dans le but de mieux comprendre le risque de taux d'une part, et de tirer une information quant à son évolution historique d'autre part. Parallèlement à ces développements, la partie 3 présente un modèle de projection simplifié, capable de reproduire les principaux éléments pour le calcul de l'*EV* et peut-être lue séparément. Finalement, différentes méthodologies d'interpolation et de calcul de sensibilités sont présentées pour l'approximation du modèle de l'*EV* en quatrième partie.

Première partie

Contexte, réglementation et définitions

Chapitre 1

Gestion en assurance-vie

Ce premier chapitre introductif a pour objectif de présenter succinctement l'environnement réglementaire et comptable en assurance. Loin d'être exhaustif, il présente les différentes notions de bilan comptable, de bilan prudentiel et de valeur intrinsèque. Cette dernière sera l'objet des méthodes d'estimation présentées par la suite.

1.1 Bilan selon le plan comptable général (GAAP)

Le bilan comptable d'une entreprise est une cartographie de ses ressources et emplois à une date donnée. Il répertorie d'une part les actifs selon leurs typologies (terrains, immeubles, titres financiers, etc.) et d'autre part le passif, composé de toutes les dettes de l'entreprise (capital, provisions, crédits, etc.). En France, plusieurs principes de base s'appliquent à un bilan comptable (Evaluation en coûts historiques, intangibilité du bilan d'ouverture, prudence, continuité d'exploitation, permanence des méthodes, non compensation, etc.). De manière synthétique, il peut être représenté schématiquement comme dans la figure 1.1.

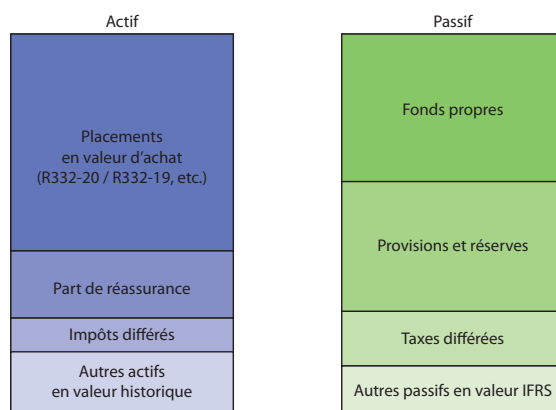


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié d'un bilan comptable d'assurance.

Les principaux éléments de l'actif sont les placements, les parts de réassurance et les impôts différés. Les placements sont l'enregistrement en valeur historique des actifs financiers de l'entreprise (Actions, Obligations, Immobilier, Actifs dérivés, etc.). La part des réassureurs dans les provisions techniques est définie selon les différents traités, mais représentent une proportion des réserve associée au risque cédé (Les provisions techniques au passif étant brutes de réassurance du fait du principe de non compensation). La dernière ligne représente tous les autres actifs, provisions ou autres qui appartiennent à l'assureur.

Du côté du passif, les ressources de l'entreprise sont distinguées selon leurs propriétaires : les fonds propres appartiennent aux actionnaires, les provisions techniques aux assurés. Parmi les provisions techniques vie sont comptabilisées : les provisions mathématiques, la réserve de capitalisation, la provision pour risque d'exigibilité, etc.

1.2 Bilan économique selon Solvabilité 2

Le bilan économique est une vision alternative du patrimoine de l'entreprise, insufflé par la réglementation européenne de l'assurance (Solvabilité 2, en application dès le 1er janvier 2016). L'objectif de ce second bilan est de prendre en compte les risques portés par une compagnie plus précisément, de sorte que les fonds propres exigés (le capital de solvabilité ou SCR¹) reflètent mieux le portefeuille de l'entreprise. De manière très synthétique (de nombreux mémoires sont à disposition sur le sujet), les actifs sont évalués en valeur de marché (*Marked-to-Market*) et les passifs selon une approche modèle (*Marked-to-Model*). La figure 1.2 représente une vision schématique du bilan économique.

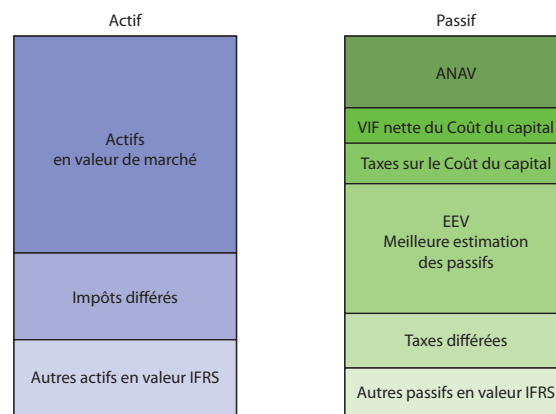


FIGURE 1.2 – Schéma simplifié d'un bilan prudentiel d'assurance

Sous cette réglementation, les actifs sont évalués à leur valeur de marché, selon les règles IFRS en vigueur. Pour ce qui est du passif, il est décomposé comme suit :

1. *Solvency Capital Requirement*

- L'*Adjusted Net Asset Value (ANAV)* représente la valeur des capitaux propres de l'entreprise, majorés des éventuelles plus values du portefeuille.
- La *Value of In Force* représente une estimation des bénéfices que les polices déjà en portefeuille vont générer pour l'entreprise. En effet, les contrats d'assurance vie représentent des engagements pour l'assureur et les assurés, qui sont pris en compte par le biais de cette valeur.
- La meilleure estimation des passifs (ou *Best-Estimate Liabilities*) représente la valeur des engagements pris par l'assureur envers ses assurés.

1.3 *Embedded value* ou valeur intrinsèque

Le concept de valeur intrinsèque (*Embedded Value*) est une méthodologie d'évaluation de la valeur détenue par les actionnaires ayant investi dans une compagnie d'assurance (développée par le CFO Forum²). Cette initiative crée une base de comparaison des différents acteurs de l'assurance et ce au travers de plusieurs pays. Actuellement, deux variantes de cette approche coexistent :

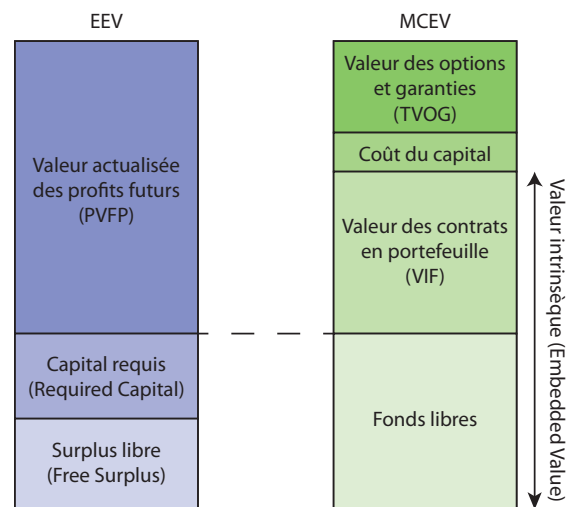
- l'*European Embedded Value (EEV)*, présentée en 2004 dans le document [1],
- la *Market Consistent Embedded Value (MCEV)*, présentée en 2009 [2].

Bien que différentes dans leur définition, ces deux mesures considèrent que la valeur intrinsèque d'une entreprise d'assurance vie est la somme de leur surplus et de la valeur des contrats en portefeuille. La figure 1.3 présente une synthèse des différences entre les deux approches, alors que les deux sections suivantes présentent le détail de chacune.

Les différents éléments de la figure 1.3 sont définis ci-dessous :

- Le surplus libre (*Free surplus*) représente la valeur de marché des actifs détenus par l'assureur mais non utilisée dans la couverture de ses engagements envers les assurés,
- Le capital requis (*Required Capital*) est la valeur de marché des actifs ne couvrant pas les passifs mais non distribuables aux actionnaires, car engagés dans le calcul de capitaux réglementaires par exemple,
- La valeur présente des profits futurs (*Present Value of Future Profits*) est la somme des flux de trésorerie que l'assureur recevra de ses actifs et des contrats en portefeuille net d'impôts. Dans le cas de la *MCEV*, elle est constituée de la valeur temps des options et garanties, du coût du capital et de la valeur des contrats en

2. Le CFO Forum est une institution consultative composée des directeurs financiers des principales compagnies d'assurance européennes.

FIGURE 1.3 – Synthèse des différences entre *EEV* et *MCEV*. Source : [16]

portefeuille.

A titre d'exemple, le tableau 1.1 est un extrait du rapport annuel 2013 du groupe AXA (disponible sur le site institutionnel).

Comme précisé précédemment, la valeur intrinsèque est utilisée pour comparer les compagnies d'assurance entre elles. La figure 1.4 illustre l'évolution de cette dernière pour différentes compagnies entre 2010 et 2013.

1.4 Risque de taux en assurance

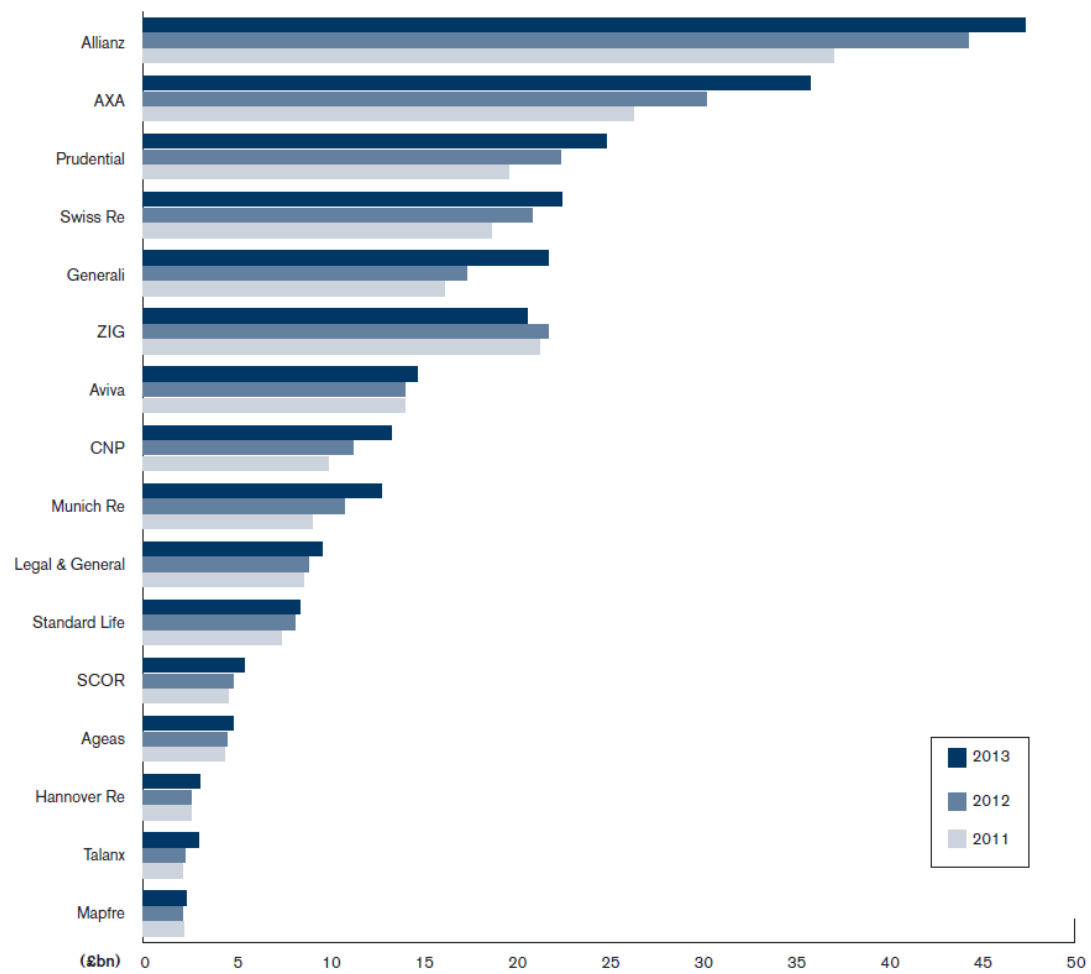
Au travers de mesures comme la valeur intrinsèque, des postes d'un bilan économique ou prudentiel, une entreprise d'assurance est sensible aux conditions de marché avec lesquelles elle est évaluée. En particulier, l'évolution des hypothèses de taux d'intérêt peut mettre en difficulté une compagnie, l'obligeant à réaliser des pertes importantes : c'est le risque de taux. De manière synthétique, une hausse des taux entraîne une baisse de la valeur des actifs et par conséquent des fonds propres, alors qu'une baisse des taux dilue le rendement des actifs obligataires en portefeuille et donc les résultats financiers du groupe.

LIFE AND SAVINGS EEV

EEV ANALYSIS OF CHANGE						EEV	EEV
Euro million, Group share						2013	2012
	Free surplus	+ Required capital	= ANAV	+ VIF	=		
OPENING EEV	989	3,781	4,770	5,912		10,682	9,176
Modeling changes and opening adjustments	175	(78)	97	(278)		(181)	283
ADJUSTED OPENING EEV	1,164	3,703	4,867	5,634		10,501	9,459
New business value	(543)	242	(301)	591		290	269
Expected existing business contribution	1,179	(158)	1,020	(489)		531	674
o/w Expected return on surplus	29	-	29	-		29	26
o/w Expected return on VIF	-	-	-	502		502	648
Current year operating variance	233	(200)	33	160		193	585
Change in operating assumptions	-	-	-	92		92	92
OPERATING RETURN ON EEV	868	(116)	752	354		1,106	1,620
Economic variance	(160)	1	(160)	389		230	452
Other non-operating variance	(37)	(1)	(37)	(7)		(44)	-
TOTAL RETURN ON EEV	671	(116)	555	736		1,291	2,072
Exchange rate movements impact	-	-	-	-		-	-
EEV of acquired business/others	-	-	-	-		-	(63)
Capital injections	(63)	-	(63)	-		(63)	79
Dividends paid/received	(825)	-	(825)	-		(825)	(865)
CLOSING EEV	947	3,587	4,534	6,370		10,904	10,682
Closing VIF						6,370	5,912
o/w Certainty equivalent PVFP						7,841	7,104
o/w Time value of O&G						(1,005)	(818)
o/w CoC/NFR						(466)	(373)
OPERATING RETURN ON EEV						11%	17%
TOTAL RETURN ON EEV						12%	22%
IMPLIED DISCOUNT RATE						2013	2012
Reference rate						2.7%	2.4%
Total IDR based on distributable earnings						6.1%	5.4%

The table above is based on the new format of EEV rollforward as described in Appendix 3 and 4.

TABLE 1.1 – Tableau récapitulatif de l'*Embedded Value* d'AXA France. Source : [6]

FIGURE 1.4 – Benchmark de l'*Embedded Value* pour différentes compagnies. Source : [16]

Chapitre 2

Couverture du risque de taux

Ce chapitre est dédié à la présentation de différents concepts de gestion actif-passif abordés dans ce mémoire et à leur déclinaison pratique. Tout d'abord, l'objectif d'une telle gestion est de protéger la valeur de l'entreprise, en s'assurant que les actifs détenus par la société permettent d'honorer les engagements à tout moment et de rester solvable. Comme discuté précédemment, un des indicateurs clés dans la gestion d'une compagnie d'assurance est sa valeur économique intrinsèque (ou *Embedded Value*, définie au chapitre 1). Il paraît donc légitime de s'intéresser à cet indicateur dans l'élaboration de stratégies de couverture.

Dans cette partie du mémoire, un bref tour d'horizon des stratégies ALM¹ est réalisé, en se basant sur les travaux de synthèse [28] et [31]. Afin d'illustrer les différentes définitions, les notations suivantes sont utilisées : l'entreprise est représentée par son bilan économique simplifié constitué d'actifs en valeur de marché, de ses fonds propres et de ses dettes. Les flux sont supposés arriver à des dates discrètes $t_i \in [1, T]$ et sur un horizon fini T . Les flux d'actifs et de passifs sont respectivement représentés par les suites réelles, positives $(A_t)_{t \in [1, T]}$ et $(P_t)_{t \in [1, T]}$, les flux nets par $(F_t = A_t - P_t)_{t \in [1, T]}$.

2.1 La couverture flux à flux (*Cash-flow matching*)

La stratégie de couverture flux à flux consiste à répliquer tous les flux de passifs par des flux d'actifs en date initiale. Cette approche statique (car elle est établie à une date donnée et ne nécessite pas de réallocation au cours du temps) permet de maintenir solvable l'entreprise, quels que soient les mouvements de la courbe des taux zéro coupons. Dans le cas de flux de passifs déterministes, cette allocation peut-être obtenue à l'aide de techniques comme la programmation linéaire par exemple. En d'autres termes, cette stratégie consiste à s'assurer de l'inégalité suivante :

$$\forall t \in [1, T], A_t \geq P_t. \quad (2.1)$$

1. *Asset-Liability Management* ou gestion actif-passif

En d'autres termes, les revenus du portefeuille d'actif (tombées de coupons, dividendes, etc.) sont supérieurs ou égales aux prestations versées aux assurés à chaque date. D'un point de vue mathématique, et sous l'hypothèse d'un nombre fini de dates pour les flux, l'ensemble des produits financiers à taux fixes peut être interprété comme une base dans un espace vectoriel. En utilisant des résultats d'algèbre linéaire, il est alors possible de décomposer toutes chroniques de flux de passif en une combinaison linéaire d'actifs de base (par exemple, une obligation à coupons se décompose facilement en une somme de zéro-coupons dont les nominaux correspondent aux coupons, mais d'autres bases sont envisageables bien que plus complexes).

En pratique, de nombreuses limites surviennent dans la mise en place d'une telle stratégie. Tout d'abord, le marché n'est pas suffisamment liquide sur toutes les maturités associées aux dettes, en particulier pour les engagements à longs termes (typiquement sur les contrats d'épargne retraite). De plus, la décomposition en actifs simples peut imposer des ventes à découvert (dans le cas où la base n'est pas celle des zéro-coupons), qui ne sont pas dans les pratiques des assureurs. Enfin, cette stratégie suppose que la totalité des flux, ainsi que leurs dates de survenance sont prévisibles, deux hypothèses peu réalistes en pratique. En assurance-vie notamment, les flux de passif sont aléatoires (dépendant des performances passées et futures des portefeuilles d'actifs, de l'évolution de la mortalité, du contexte économique, etc.) et il n'est pas possible d'être parfaitement couvert sur l'ensemble des états du monde possibles (selon une vision probabiliste). La section suivante présente une approche alternative, palliant à ces dernières remarques.

2.2 Stratégies basées sur les sensibilités

Comme énoncé précédemment, la couverture flux à flux est limitée dans le cadre de flux de passifs aléatoires. Le point commun des stratégies présentées dans cette section est leur objectif commun : limiter l'impact des mouvements de la courbe des taux sur la valeur de l'entreprise. Dans la littérature ([28] et [31]), une distinction est faite entre les stratégies passives d'une part, qui visent à réduire la ou les sensibilités (qui seront définies ci-après) et actives d'autre part, qui tolèrent un certain risque en échange d'une possibilité d'obtenir un meilleur rendement. Les stratégies présentées consistent à immuniser la valeur (le surplus, la valeur intrinsèque ou autre) aux mouvements de la courbe des taux, par des rebalancements fréquents de la structure d'actif du portefeuille. L'objectif étant d'assurer que l'impact d'une variation des taux sur l'actif soit plus favorable que celle du passif (voir [37]). La section suivante présente quelques déclinaisons pratiques d'une telle stratégie.

2.2.1 Variation, sensibilité, duration et autres mesures

Les travaux les plus anciens dans ce domaine reposent sur une vision où la courbe des taux considérée est plate (ou en considérant le taux de rendement actuariel) et évolue uniquement parallèlement (c'est à dire que les taux varient de la même amplitude et dans

la même direction, quelle que soit la maturité). Dans ce cadre, un actif financier générant une séquence de flux $(F_t)_{t \in [1, T]}$ déterministes a pour valeur (en convention actuarielle) :

$$P(r) = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r)^t}. \quad (2.2)$$

où r représente le taux en vigueur à la date d'évaluation et $P(r)$ le prix en date 0. La variation de valeur de ce titre suite à un mouvement parallèle infinitésimal Δr de la courbe des taux est la suivante :

$$V = \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{-1}{1+r} \sum_{t=1}^T \frac{tF_t}{(1+r)^t}. \quad (2.3)$$

La sensibilité de ce titre (aussi appelée duration modifiée) est définie comme l'opposé de la variation en pourcentage du prix de l'actif, soit :

$$S = -\frac{V}{P(r)} = -\frac{1}{P(r)} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial \ln P(r)}{\partial r} = \frac{-1}{1+r} \sum_{t=1}^T \frac{tF_t}{P(r)(1+r)^t} = -\frac{D}{1+r}, \quad (2.4)$$

où D représente la duration de Macaulay. Il s'agit d'une durée moyenne, où la pondération de chaque date est la valeur actualisée du flux associé². Pour aller plus loin et se couvrir contre des mouvements de taux d'amplitudes supérieures, il est possible d'aller plus avant dans le développement de Taylor :

$$\frac{dP(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)} \frac{\partial P}{\partial r}(r)dr + \frac{1}{2P(r)} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(r)dr^2 + o(dr^2) \quad (2.5)$$

Le terme d'ordre 2 est défini comme étant la convexité du titre, il mesure la dispersion des dates de versement des flux autour de la duration. Par exemple, un actif zéro-coupon aura une convexité plus faible qu'un actif couponné de même duration. En reprenant l'actif précédent, la convexité s'exprime comme suit :

$$C(r) = \frac{1}{P(r)(1+r)^2} \sum_{t=1}^T \frac{t(t+1)F_t}{(1+r)^t} \quad (2.6)$$

D'autres mesures ont été introduites dans ce cadre, mais elles ne sont pas abordées ici (M , M^2 , etc.). En résumé, le changement de valeur d'un actif de taux peut s'approximer comme suit en utilisant la duration et la convexité :

$$\Delta P(r) \approx -DP(r)\Delta r + \frac{C}{2}P(r)\Delta r^2. \quad (2.7)$$

Cette formule est parfois connue sous le nom de méthode *Roll-Forward* auprès des gestionnaires.

2. Dans ce cadre, la duration est aussi connue pour sa propriété d'immunisation au risque de taux

2.2.2 Application au bilan d'une entreprise

Dans le cas de la gestion d'un bilan (ce qui nous intéresse en ALM), la mécanique précédente s'adapte à la prise en compte de flux de passifs et d'actifs. A cette fin, une nouvelle mesure permet de comparer la sensibilité des fonds propres (ou de la valeur nette) à un changement de taux d'intérêt : le gap de duration. Cet indicateur est construit comme la différence entre la sensibilité du passif et celle de l'actif (ramené sur une assiette commune) :

$$G = \frac{P}{A} D_{Passif} - D_{Actif} \quad (2.8)$$

où G représente le gap de duration, P et A le montant de passif et d'actif et D la duration effective. Dans le cadre d'une compagnie d'assurance vie, et en utilisant les définitions du premier chapitre, le gap de duration s'exprime comme la variation de la valeur intrinsèque à un mouvement de taux (EEV , $MCEV$, etc.). Le calcul devient alors :

$$G = \frac{BEL}{AMV} \frac{1}{BEL} \frac{\partial BEL}{\partial r} - \frac{1}{AMV} \frac{\partial AMV}{\partial r} \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{AMV} \frac{\partial EEV}{\partial r} \quad (2.10)$$

car $EEV = AMV - BEL$ et où AMV signifie *Assets Market Value*, c'est-à-dire la valeur de marché du portefeuille d'actifs, BEL signifie *Best-Estimate Liabilities* qui est l'évaluation de la valeur des passifs (cf. chapitre 1).

2.2.3 Extensions du cadre classique

Le cadre de travail précédent est très contraignant car il est bati sur des hypothèses de taux peu réalistes. En effet, la courbe des taux n'est ni plate, ni sujette à des variations parallèles (cf. chapitre sur l'analyse du risque de taux). En relachant cette contrainte, les durations partielles et directionnelles proposent des extensions et reposent sur des résultats d'analyse multivariée, en supposant que la valeur est une fonction de la courbe des taux (dans son ensemble ou sous formes de composantes, comme les *Key-Rates* ou les composantes principales [25], [38], [40], [41], [39] et [34]). En reprenant l'exemple de la section précédente, la valeur de l'actif financier devient :

$$P(r_1, \dots, r_T) = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1 + r_t)^t}, \quad (2.11)$$

où $(r_i)_{i \in [1, T]}$ sont les taux zéro-coupons de différentes maturités. De même, sa duration modifiée (ou sensibilité, cf. section précédente) est définie comme l'opposé du gradient du logarithme de sa valeur :

$$D = -\nabla \ln P(r_1, \dots, r_n), \quad (2.12)$$

et les raisonnements précédents peuvent alors s'adapter. Si toutes les maturités sont considérées indépendamment, annuler chaque sensibilité revient à considérer une stratégie de couverture flux à flux (voir [23] et ses références pour une preuve mathématique de ce résultat). D'un autre côté, les durations stochastiques reposent sur des modèles de taux dynamiques (modèle d'équilibre ou d'absence d'opportunité d'arbitrage, voir [29] chapitre 12, [22] ou encore [35]) et considèrent les sensibilités aux paramètres de diffusions plutôt qu'aux taux eux-mêmes (taux courts, volatilité, etc.). Le lemme d'Itô vient alors remplacer la relation de Taylor classique.

En particulier, la duration effective (sous l'hypothèse de déplacements parallèles de la courbe des taux) peut être interprétée comme la sensibilité au paramètre d'une diffusion de Merton ([29], chapitre 13). Dans le cadre des modèles de diffusion, le passage du temps est un nouveau paramètre qu'il convient de prendre en compte. Ce mécanisme est très connu des courtiers d'options, qui sont habitués à gérer l'échange entre gamma³ et théta⁴. Dans le cas d'une compagnie d'assurance vie, et plus particulièrement en épargne, le passif est plus convexe que l'actif et la convexité est de signe opposé à la sensibilité au taux : la valeur a donc tendance à croître avec le temps, toutes choses égales par ailleurs (en considérant que le taux court est le sous-jacent de l'option). En effet, les possibilités offertes aux assurés, comme les rachats ou la participation aux bénéfices pour les fonds euros sont autant d'options qui rendent convexe⁵ le passif d'assurance.

A titre d'illustration, un contrat classique peut se décomposer comme la somme d'une obligation et de plusieurs options (voir [21] pour un travail sur le sujet). Sur la base de ce modèle, il est donc conseillé d'investir sur des options à convexité positive comme les *swaptions*⁶, les options sur obligations, les caps ou autre (voir [22] pour une définition précise de ces actifs). Le problème majeur étant la capacité de financement de tels actifs, qui peuvent être très chers et donc l'impact n'est pas facile à mesurer.

2.2.4 Limites et difficultés

La couverture du risque de taux par la réduction des sensibilités à différents mouvements de la courbe des taux comporte certaines limites théoriques. Premièrement, une erreur de modèle sur les déplacements de la courbe des taux peut mener à une surexposition, du fait de mouvements ignorés. En effet, un portefeuille à gap de duration nul peut-être très exposé à des mouvements de rotation ou autre, lorsqu'il n'est pas en couverture flux à flux. Par exemple, la figure 2.1 illustre un mouvement qui, avec la méthode classique de Taylor n'impacte pas l'*EV*. En effet, la variation observée est nulle, car la somme des termes de variations maturité par maturité se compense.

D'un autre côté, la méthodologie de calcul de l'*Embedded Value* (*EEV* ou *MCEV*, par projection) prend en compte des interactions complexes entre l'actif et le passif.

3. Le gamma est la sensibilité d'ordre 2 à un mouvement de sous-jacent.

4. Le théta est la sensibilité au passage du temps.

5. Au sens défini précédemment.

6. Une option sur swap de taux.

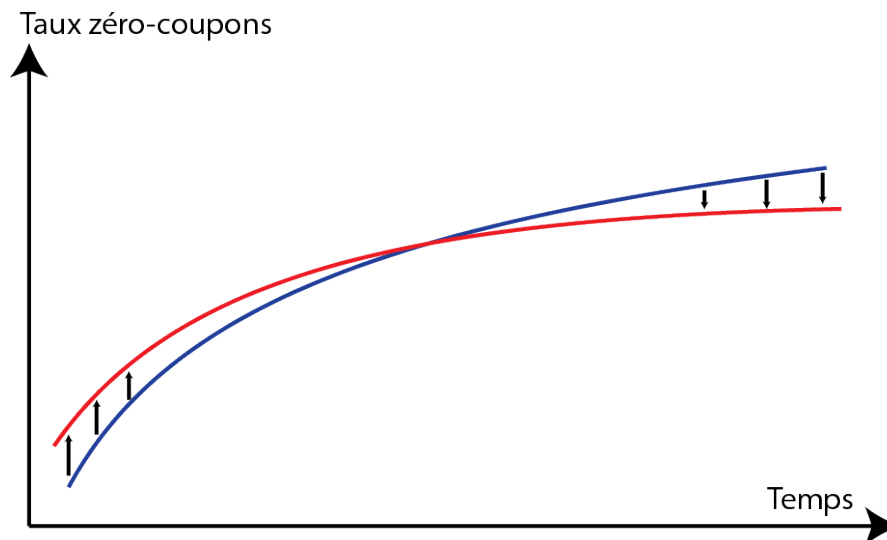


FIGURE 2.1 – Rotation pure de la courbe des taux.

Par exemple, les mécanismes de participation aux bénéfices, de réserves ou encore de rachats, sont autant d'éléments qui lient le passif à l'actif. Ainsi, toute réallocation du portefeuille d'actif viendra mécaniquement modifier l'évaluation du passif, ce qui rend très difficile l'analyse du gap de duration, ou d'autres sensibilités.

2.3 Conclusion sur les stratégies en gestion actif-passif

En conclusion de cette partie, il est clair que la couverture du risque de taux pour une compagnie d'assurance est un sujet complexe et en pleine évolution. Depuis les travaux de Redington en 1952 [37], de nombreuses avancées théoriques significatives ont permis de mieux comprendre le problème, bien qu'il reste difficile d'appliquer ces raisonnements sur un portefeuille d'assurance. D'autres considérations rentrent dans l'étude du risque de taux, comme l'utilisation de mesures de risque de type *Value-at-Risk* en plus des sensibilités.

Chapitre 3

Estimation du gap de duration par *Roll-Forward*

Dans ce dernier chapitre introductif, la méthodologie d'estimation du gap de duration actuelle est présentée. Ce dernier est calculé de manière réelle (en utilisant le modèle de projection) 3 fois par an, puis estimé mensuellement grâce à un ensemble de sensibilités réalisées lors du dernier calcul réel. Cette méthodologie permet de prendre en compte un changement de courbe des taux (effet de marché), le passage du temps et un effet de réallocation du portefeuille d'actifs.

3.1 Calculs réels et sensibilités

Le gap de duration (cf. chapitre 2) est calculé par la méthode des différences finies symétriques, en utilisant deux courbes des taux choquées parallèlement d'une même amplitude X%, l'une à la hausse et l'autre à la baisse :

$$G = \frac{\partial EEV}{\partial r} \approx \frac{EEV(+X\%) - EEV(-X\%)}{2 * X * VB_{actifs}} \quad (3.1)$$

De même, le gap de convexité est calculé par la formule suivante (correspondant à une dérivée au second ordre) :

$$G_{Convexité} = - \frac{EEV(+X\%) + EEV(-X\%) - 2EEV(BaseCase)}{X^2 * VB_{actifs}} \quad (3.2)$$

Dans le cas d'un environnement de taux bas, le choc à la baisse peut conduire à des taux négatifs et la formule du gap de duration doit être adaptée pour prendre en compte des amplitudes différentes à la hausse et à la baisse. En spécifiant un choc de X% à la hausse et de Y% à la baisse, la méthode des différences finies devient la suivante :

$$Gap \approx \frac{EEV(+X\%)Y^2 - EEV(-Y\%)X^2}{XY^2 + YX^2} \quad (3.3)$$

A partir du gap et de la duration d'actif, la duration de passif est retrouvée par différence :

$$D_P = D_A + G. \quad (3.4)$$

Tous les calculs présentés précédemment reposent sur l'évaluation de l'EEV avec des courbes choquées et seront utilisés pour l'estimation.

3.2 Estimation par *Roll-Forward*

Le paramétrage et l'utilisation d'un modèle de projection est un processus long et complexe. Il n'est pas possible de réaliser chaque mois, en actualisant toutes les données, le calcul du gap de duration en utilisant le modèle interne. A partir de ce constat, il est tout de même possible d'estimer celui-ci à l'aide de sensibilités établies lors du dernier calcul. Cette section présente l'approche actuellement utilisée, permettant une estimation mensuelle. En particulier, de multiples effets sont pris en compte : l'évolution des taux, le passage du temps et la modification du portefeuille d'actifs.

3.2.1 Prise en compte de la variation de courbe des taux

A l'aide des sensibilités réalisées lors du dernier calcul réel, il est possible d'estimer l'impact d'une variation de courbe des taux sur la valeur de l'entreprise par un développement de Taylor (en considérant une variation parallèle). Ce procédé est appliqué séparément à la duration d'actif, de passif et à la valeur de marché du portefeuille :

$$VM_{Actifs}^{M+Tx} \approx VM_{Actifs}^M - \Delta r D_{Actifs}^M VM_{Actifs}^M + \frac{1}{2} \Delta r^2 C_{Actifs}^M VM_{Actifs}^M \quad (3.5)$$

$$D_{Actifs}^{M+Tx} \approx D_{Actifs}^M + \left((D_{Actifs}^M)^2 - C_{Actifs}^M \right) \Delta r \quad (3.6)$$

$$D_{Passifs}^{M+Tx} \approx D_{Passifs}^M + \left(D_{Actifs}^M D_{Passifs}^M - C_{Passifs}^M \right) \Delta r \quad (3.7)$$

où VM représente la valeur de marché, D la duration, C la convexité et les indices M et $M+Tx$ représentent respectivement la date M et la date M avec prise en compte de l'effet taux.

3.2.2 Prise en compte du passage du temps

Avec le passage du temps, l'actualisation des flux est modifiée et la duration diminue (sauf lors de la tombée d'un coupon, voir [35] par exemple). Afin de reproduire cet effet sur le portefeuille d'actifs, la duration est réduite proportionnellement avec le passage du temps :

$$D_{Actifs}^{M+Tps} = D_{Actifs}^M - \frac{R}{12} \quad (3.8)$$

où R est la perte annuelle estimée du portefeuille d'actifs (estimée préalablement).

3.2.3 Prise en compte des investissements

Chaque mois, le portefeuille est modifié par des achats/ventes d'actifs financiers. Ces opérations impactent la duration, mise-à-jour en fonction des proportions d'actifs investis et désinvestis :

$$D_{Actifs}^{M+1} = \frac{(VM_{Actifs}^{M+Tx} - V_I^{M+1}) D_{Actifs}^{M+Tx} + V_I^{M+1} D_I^{M+1} - VM_D^{M+1} D_D^{M+1}}{VM_{Actifs}^{M+1}} \quad (3.9)$$

où l'indice I indique les éléments concernant les investissements du mois et D les dés-investissements. La formule précédente montre simplement que la duration modifiée du portefeuille après investissements est simplement une moyenne pondérée du portefeuille initial et des actifs achetés. Dans le cas d'une estimation sur plusieurs mois, cette formule doit-être itérée comme suit (en prenant un deuxième mois) pour inclure l'effet temps à la volée :

$$D_{Actifs}^{M+2} = \frac{(VM_{Actifs}^{M+1} - VM_I^{M+2}) (D_{Actifs}^{M+1} - R) + VM_I^{M+2} D_I^{M+2} - VM_D^{M+2} D_D^{M+2}}{VM_{Actifs}^{M+2}} \quad (3.10)$$

3.2.4 Prise en compte de la dépendance actifs-passifs : l'absorption

La modification du portefeuille vient modifier la valeur du passif mécaniquement, du fait des options et garanties offertes aux clients. Afin de prendre en compte une modification de la sensibilité du passif par rapport à l'actif, une relation linéaire est appliquée : l'absorption. L'hypothèse appliquée consiste à impacter la duration du passif en proportion de la variation de duration d'actif :

$$D_P^{M+1} = D_P^M + \alpha * \Delta D_A \quad (3.11)$$

où α est le coefficient d'absorption, ΔD_A la variation de duration due aux effets temps et investissements et D_P^{M+1} la duration de passif au mois $M + 1$.

3.3 Conclusion et objectifs du mémoire

La méthode présentée est basée sur une hypothèse forte, selon laquelle la courbe des taux évolue parallèlement et ne se déforme jamais. Aux vues de la complexité du passif en assurance vie, une vision plus fine du risque de taux peut permettre de mieux comprendre l'évolution de la MCEV, mais aussi d'élaborer des couvertures plus adaptées. L'objectif de ce mémoire est d'investiguer des méthodes d'estimation alternatives, en prenant en compte d'autres mouvements de taux.

Deuxième partie

Analyse du risque de taux

Chapitre 4

Définition et étude du risque de taux

Ce chapitre est dédié à la définition du risque de taux et à son étude statistique. Les différentes courbes des taux zéro-coupons et à termes sont présentées sur la base d'ouvrages financiers classiques [35], [22] et [42].

4.1 La courbe des taux zéro-coupons

La courbe des taux zéro-coupon représente l'évolution du rendement exigé pour un emprunt à remboursement unique en fonction de sa maturité (sans prise en compte d'autres éléments comme les risques de liquidité et de signature). En notant $P_t(\tau)$ le prix d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut à la date t versant un euro en date $T = t + \tau$, la courbe des taux zéro-coupon est définie comme suit (en convention continue) :

$$R_t = \left\{ R_t(\tau) = -\frac{\ln P_t(\tau)}{\tau} \mid \tau > 0 \right\}, \quad (4.1)$$

où $R_t(\tau)$ est le taux zéro-coupon sans risque de défaut de maturité τ observé en date t . Par la suite, la fonction R_t qui à une maturité $\tau \in R^+$ associe le taux zéro-coupon associé $R_t(\tau) \in R^+$ sera supposée continue et dérivable (l'existence de la dérivée étant nécessaire à la définition des taux à termes instantanés). Le taux court est quant à lui défini pour un emprunt d'une durée infinitésimale :

$$r_t = \lim_{\tau \rightarrow 0} R_t(\tau). \quad (4.2)$$

4.2 Les courbes des taux à terme implicites

Les courbes des taux à termes représentent les anticipations du marché pour des prêts et emprunts démarrant à une date future pour toutes maturités déterminées. Ainsi, pour

chaque date d'emprunt future considérée, il existe une courbe des taux à terme associant à chaque maturité un rendement exigé. Ces différentes courbes sont déduites à partir du principe d'absence d'opportunités d'arbitrage. Par exemple, le taux à terme 1 an dans 1 an est le taux qui permet d'obtenir les mêmes intérêts en investissant, soit sur un 1 an puis encore un 1 an dans un 1 an, soit 2 ans directement vu d'aujourd'hui. En convention continue, l'expression du taux à terme de maturité τ démarrant en date T est la suivante :

$$F_t(T, \tau) = \frac{R_t(T + \tau)(T + \tau) - R_t(T)T}{\tau}, \quad (4.3)$$

en utilisant les définitions précédentes. De même que le taux court, le taux à terme instantané est défini comme suit (encore en convention continue) :

$$f_t(T) = \lim_{\tau \rightarrow 0} F_t(T, \tau) = -\frac{\partial \ln P_t(\tau)}{\partial \tau}. \quad (4.4)$$

De manière équivalente, le taux zéro-coupon présenté à la section précédente peut s'exprimer en fonction du taux à terme (*forward*) instantané :

$$R_t(T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f_t(s) ds. \quad (4.5)$$

Cette dernière relation étant très utile dans le cadre de la modélisation des taux d'intérêts.

4.3 Reconstruction des courbes

En pratique, les courbes des taux ne sont pas observables et nécessitent d'être reconstruites à partir de prix d'actifs échangés sur le marché. Cependant, les obligations zéro-coupons ne sont pas échangées de façon liquide pour toutes les maturités, les courbes ne peuvent être reconstruites que pour certaines maturités. Ainsi, le choix des actifs de base (en général, les swaps de taux ou les obligations d'état) et la méthodologie d'extrapolation au-delà des dernières maturités liquides (cf. section dédiée) sont des difficultés d'ordre pratique.

Deux bases d'actifs de taux suffisamment liquides sont généralement utilisées : les obligations gouvernementales de la zone euro (OAT, Bund, etc.) et les swaps de taux (taux fixe contre EURIBOR 6 mois par exemple). La courbe obtenue est différente selon la base choisie car les actifs ne portent pas le même risque de crédit et de liquidité (en pratique, difficile à segmenter). Les swaps sont souvent préférés car ils sont très liquides et il n'y a pas d'échange de nominal, ce qui réduit fortement le risque en cas de défaut et permet donc une bonne approximation des taux zéro-coupons sous-jacents.

Dans ce chapitre, une étude statistique des taux zéro-coupons en euros est réalisée afin de mieux comprendre ce risque. Les données utilisées sont constituées d'une base mensuelle de taux Swaps (Tickers Bloomberg EUSA 1 à 20) entre le 31/12/2002 et le 31/12/2013¹. L'historique à disposition couvre une période de plus de 10 ans avec la donnée de 20 maturités (des cotations existent au-delà mais elles ne sont plus suffisamment liquides). Comme souvent dans une base de donnée, certaines informations sont manquantes ou erronées et il est nécessaire de les retraiter (les données manquantes avant le dernier point liquide doivent être interpolées). Le lissage de Smith-Wilson est utilisé à cette fin (conseillée par le CEIOPS, il permet à la fois d'interpoler et d'extrapoler au-delà du dernier point liquide [3]).

4.4 Choix des maturités au-delà du dernier point liquide

Comme énoncé précédemment, les maturités supérieures au dernier point liquide ne sont pas observables sur les marchés (20 ans d'après le CEIOPS [3]). Cependant, dans le cadre de la modélisation en assurance-vie, certains engagements peuvent concerner des flux à très long terme (60 ans au maximum dans le cadre de ce mémoire). Plusieurs hypothèses sont envisageables pour le traitement de cette partie de la courbe :

- Extrapoler les données (sur la base des taux spots ou des taux forwards) avant de modéliser. Cette solution biaise les méthodes de réduction de dimension car ces dernières vont chercher à expliquer des effets issus des taux extrapolés.
- Modéliser les données disponibles puis extrapoler les différentes composantes retenues (la modélisation des composantes peut s'avérer être une tâche difficile).
- Modéliser les données avant le dernier point liquide puis extrapoler les courbes obtenues en aval de la modélisation. Cette approche sera appliquée dans cette étude pour sa simplicité de mise en oeuvre et sa simplicité d'interprétation.

Plusieurs méthodes d'extrapolation de la courbe des taux existent dans la littérature : les modèles de Vasicek-Fong (utilisé par l'institut des actuaires) et Smith-Wilson (conseillé par le CEIOPS²) en sont des exemples.

4.5 Statistiques descriptives

La première étape de cette étude est l'analyse des données obtenues après lissage. A ce titre, le tableau 4.1 présente quelques indicateurs statistiques univariées pour les 20 maturités des taux zéro-coupons, qui révèlent un comportement différent selon la maturité. En particulier, la moyenne des taux zéro-coupons est croissante avec la maturité,

1. La période considérée est représentative tout en évitant les fluctuations liées au changement de monnaie.

2. Le CEIOPS est le *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*

ce qui indique une majorité de courbes ascendantes. De plus, les statistiques d'extrêmes mettent en évidence que les courbes sont toujours positives (le minimum étant positif) et susceptibles de s'inverser (le maximum étant obtenu pour la maturité la plus courte). Les moments d'ordres supérieurs comme l'aplatissement et la dissymétrie (*Kurtosis* et *Skewness*) renseignent sur la distribution de l'échantillon. Cette dernière est plus centrée que la loi normale pour l'ensemble des maturités et elle n'est pas symétrique (les 3 premières maturités ont des distributions portées à droite, contrairement au reste de la courbe).

Maturités	Moyenne	Médiane	Ecart-type	Min	Max	Kurtosis	Skewness
1	2,28%	2,20%	1,36%	0,29%	5,45%	2,35	0,53
2	2,43%	2,65%	1,28%	0,32%	5,48%	2,23	0,27
3	2,61%	2,65%	1,22%	0,41%	5,40%	2,20	0,21
4	2,79%	2,86%	1,16%	0,56%	5,28%	2,21	-0,17
5	2,95%	3,07%	1,10%	0,72%	5,19%	2,24	-0,32
6	3,11%	3,23%	1,05%	0,88%	5,13%	2,27	-0,43
7	3,24%	3,36%	1,01%	1,04%	5,10%	2,29	-0,51
8	3,36%	3,48%	0,98%	1,19%	5,08%	2,29	-0,57
9	3,47%	3,59%	0,95%	1,34%	5,07%	2,29	-0,60
10	3,57%	3,69%	0,93%	1,48%	5,09%	2,29	-0,62
11	3,65%	3,78%	0,91%	1,60%	5,10%	2,28	-0,63
12	3,73%	3,87%	0,89%	1,71%	5,13%	2,29	-0,64
13	3,80%	3,85%	0,88%	1,81%	5,13%	2,28	-0,65
14	3,85%	4,00%	0,87%	1,86%	5,15%	2,28	-0,65
15	3,90%	4,05%	0,87%	1,90%	5,16%	2,27	-0,65
16	3,94%	4,09%	0,87%	1,90%	5,15%	2,26	-0,64
17	3,97%	4,11%	0,87%	1,91%	5,17%	2,25	-0,63
18	3,99%	4,13%	0,88%	1,90%	5,22%	2,24	-0,63
19	4,01%	4,15%	0,88%	1,89%	5,26%	2,22	-0,61
20	4,02%	4,15%	0,89%	1,87%	5,29%	2,21	-0,60

TABLE 4.1 – Statistiques descriptives des taux zéro-coupons euros swaps sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.

Ces indicateurs univariés ne renseignent pas sur la relation de dépendance existante entre les taux de différentes maturités. Comme définie précédemment, la courbe des taux est une fonction continue de la maturité et il est difficile de considérer l'évolution d'une maturité particulière sans les autres. Le tableau 4.2 présente la matrice de corrélation entre les différentes maturités. Cette dernière confirme que la corrélation est importante et croissante avec la proximité des taux. Afin d'illustrer cette corrélation au travers du temps, le figure 4.2 présente l'évolution des taux 1 an, 10 ans et 20 ans sur l'ensemble de la période étudiée. Là encore, non seulement les taux sont fortement corrélés, mais leurs comportements évoluent au fil du temps (tendance et volatilité variables). D'un autre côté, si la corrélation linéaire existe entre différentes maturités, une dépendance

temporelle est aussi présente comme en témoigne l'autocorrélogramme de la figure 4.1, qui valide la non-stationnarité du processus.

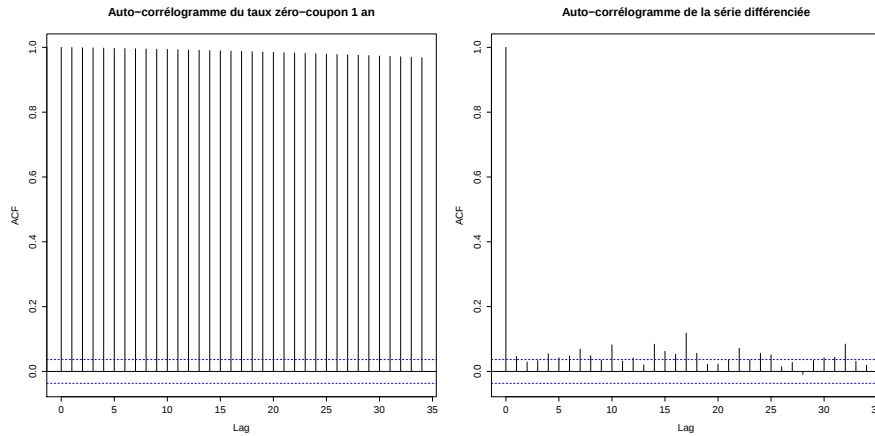


FIGURE 4.1 – Autocorrélogrammes du taux zéro-coupon 1 an (à gauche) et de sa première différenciation (à droite) sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.

La courbe des taux zéro-coupons est un risque multidimensionnel par nature, mais sa structure de dépendance au fil du temps permet d'en tirer des informations synthétiques. Ce point sera abordé dans le chapitre suivant, dédié aux méthodes de réduction de dimension. Ces approches permettent de mettre en évidence l'existence de facteurs, utiles pour résumer la courbe des taux. La modélisation de ces derniers permet la proposition d'un modèle de projection, comme par exemple dans [14] et [10].

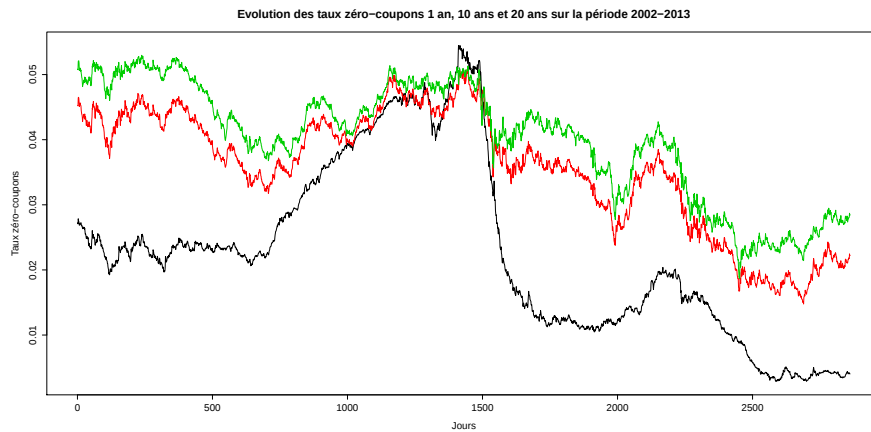


FIGURE 4.2 – Evolution des taux zéro-coupons de maturité 1 an (en noir), 10 ans (en rouge) et 20 ans (en vert) sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.

100	99	97	95	93	91	88	86	85	83	82	80	79	78	77	76	75	74	73	72
	100	99	98	97	95	93	92	90	89	88	87	85	84	83	82	82	81	80	80
		100	99	99	98	97	95	94	93	92	91	90	89	88	87	87	86	86	85
			100	99	99	98	97	97	96	95	94	93	92	92	91	90	90	89	89
				100	99	99	99	98	97	97	96	95	95	94	94	93	92	92	92
					100	99	99	99	99	98	98	97	96	96	95	95	94	94	94
						100	99	99	99	99	99	98	98	97	97	97	96	96	95
							100	99	99	99	99	99	99	98	98	98	97	97	96
								100	99	99	99	99	99	99	99	99	98	98	97
									100	99	99	99	99	99	99	99	99	99	98
										100	99	99	99	99	99	99	99	99	99
											100	99	99	100	99	99	99	99	99
												100	99	99	99	99	99	99	99
													100	99	100	99	99	99	99
															100	99	99	99	99
																100	99	99	99
																	100	99	99
																		100	99
																			100

TABLE 4.2 – Matrice de corrélations des taux zéro-coupons sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.

Chapitre 5

Réduction de dimension de la courbe des taux

Comme observé précédemment, les taux zéro-coupons présentent une très forte corrélation entre toutes les maturités. Tout indique qu'il est utile de chercher des facteurs synthétiques, capables de bien représenter l'évolution de toutes les maturités simultanément : c'est l'objectif des techniques de réduction de la dimension. Ces méthodes consistent à définir des sous-espaces de plus faibles dimensions pour représenter la courbe des taux (en pratique, on se limitera au plus à 3 dimensions) de manière à perdre le moins d'information possible (dans un sens à définir).

Les méthodes diffèrent par les espaces et les bases proposées, certaines étant déterminées empiriquement grâce à un historique (Analyse en composantes principales ou en composantes indépendantes) ou fixées a priori par des hypothèses de modélisation (Modèle parallèle, *Key-Rates* ou encore modèle de Nelson-Siegel). De plus, afin de simplifier l'analyse, la courbe des taux sera étudiée sous forme discrétisée, en ne considérant que les maturités reconstruites (les maturités annuelles entre 1 et 20 ans), ce qui ramène le problème à des projections de $\mathbb{R}^{20}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Ces bases pourront ensuite être utilisées pour générer des courbes choquées, estimer des fonctions de la courbe des taux à l'aide de méta-modèles, générer des scénarios en univers historique (cf [14]) ou proposer des mesures de sensibilité dans le cadre de stratégies de couverture.

5.1 Analyse en composantes principales (ACP)

La première méthode présentée dans ce chapitre est l'analyse en composantes principales (ou ACP), une approche statistique très utilisée dans l'étude du risque de taux (cf. [42] et sa bibliographie). L'approche sera décrite succinctement dans un premier temps, puis la dynamique des composantes obtenues sera analysée et retraitée.

5.1.1 Description du modèle

L'analyse en composantes principales est une méthode statistique dont l'objectif est d'extraire d'un ensemble de données, de nouvelles variables selon lesquelles l'information en projection est la mieux conservée, au sens de la variance et de l'inertie statistique (cf [43] pour une description théorique).

Dans le cas de l'analyse de la courbe des taux, la distance choisie est celle de Mahalanobis, qui consiste à réduire chaque variable. En effet, comme observé précédemment, la variance des taux évolue avec la maturité et il est plus cohérent de prendre en compte cet effet dans l'analyse (afin que chaque maturité ait la même importance dans l'analyse). En pratique, une ACP se déroule en deux étapes : la construction d'une base de l'espace (grâce aux vecteurs propres de la matrice de variance ou de corrélation) puis la sélection d'un nombre réduit d'axes pour la projection. Ici, seules les 3 composantes de plus fortes inerties sont retenues, menant au modèle suivant pour la courbe des taux :

$$R_t(\tau) = \mu(\tau) + A_t\psi(\tau) \quad (5.1)$$

où A_t représente un vecteur de niveaux et $\mu(\tau)$ la courbe moyenne (centre d'inertie du nuage). Par construction, ce modèle assure que les courbes projetées minimisent l'erreur quadratique moyenne et les facteurs sont non corrélés. L'analyse peut-être étendue à des méthodes non-linéaires en appliquant une transformation des données en aval de la projection. Le choix de la transformation est complexe dans le cas de données en grandes dimensions et une autre méthode consiste à définir un noyau directement (le *kernel-trick*) ce qui permet de faire l'analyse sans spécifier la transformation. Ces méthodes sont très utiles en classification mais ne permettent pas d'interprétation des composantes, ce pourquoi elles ne sont pas plus détaillées dans ce mémoire. Le lecteur intéressé pourra consulter [43] et les références mentionnées.

5.1.2 Résultats de l'analyse

Dans cette partie, sont présentés les résultats de l'analyse sur l'ensemble des données, qui représente une courbe par mois entre janvier 2003 et décembre 2012 (l'année 2013 étant conservée comme échantillon de test). Les résultats classiques (cf. [42] et figure 5.1) sont retrouvés avec une décomposition selon :

1. le niveau, qui représente une composante affectant chaque maturité de la même façon, de sorte que la courbe entière se translate lorsqu'elle évolue,
2. la pente, qui applique un effet opposé sur les taux courts et longs termes progressivement,
3. la courbure, qui permet d'infléchir la courbe en différenciant les maturités intermédiaires des extrêmes de la courbe.

L'utilisation de 3 composantes permet de capturer 99.91% de l'inertie, ce qui est très satisfaisant pour un nombre si restreint de composantes (cf. tableau 5.1).

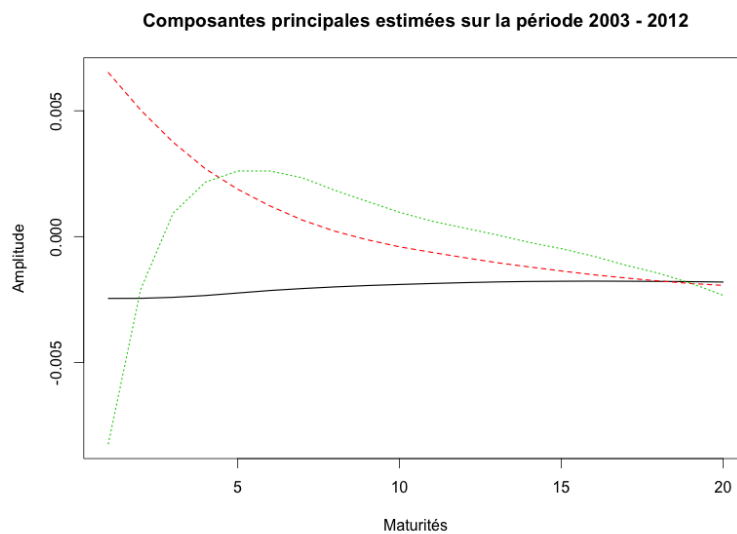


FIGURE 5.1 – Illustration des 3 premières composantes principales obtenues.

Nombre de composantes	1 composante	2 composantes	3 composantes
Part d'inertie expliquée	93.85%	99.76%	99.91%

TABLE 5.1 – Proportion d'inertie expliquée selon le nombre de facteurs principaux retenus.

Le niveau général des taux baisse régulièrement depuis fin 2008, ce qui est confirmé par l'évolution de la première composante (cf figure 5.2). Les deux autres composantes ne semblent pas adopter de tendance particulière.

En complément de l'inertie statistique, l'analyse de l'erreur quadratique met en évidence deux phénomènes : une moyenne stable entre les échantillons d'apprentissage et de test (cf. tableau 5.2) et une évolution qui révèle une qualité moindre en période de crise (entre fin 2008 et début 2009, cf. figure 5.3) tandis que l'erreur est stable dans le temps.

Données	Totalité	Apprentissage	Echantillon
Erreur quadratique moyenne	1.79%	1.77%	1.93%

TABLE 5.2 – Erreur quadratique moyenne en fonction de l'échantillon retenu.

La corrélation est aussi un élément intéressant d'analyse. En effet, par construction, la corrélation des composantes est nulle sur la période d'apprentissage (cf. tableau 5.3). Cependant, cette propriété n'est plus assurée sur l'échantillon de test, où la corrélation entre les deux premières composantes atteint 87% ! Ce dernier point sera problématique lorsqu'il faudra projeter le risque de taux (cf. Génération de courbes choquées).

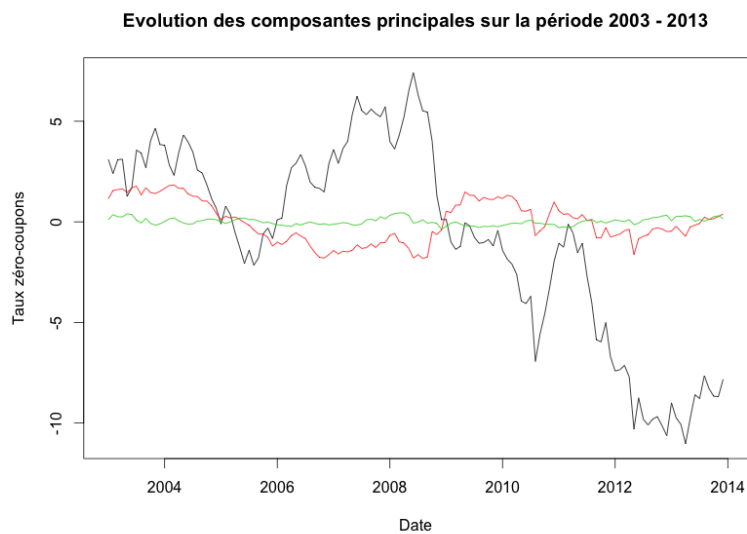


FIGURE 5.2 – Evolution des 3 premières composantes principales sur la période 2003 à 2013.

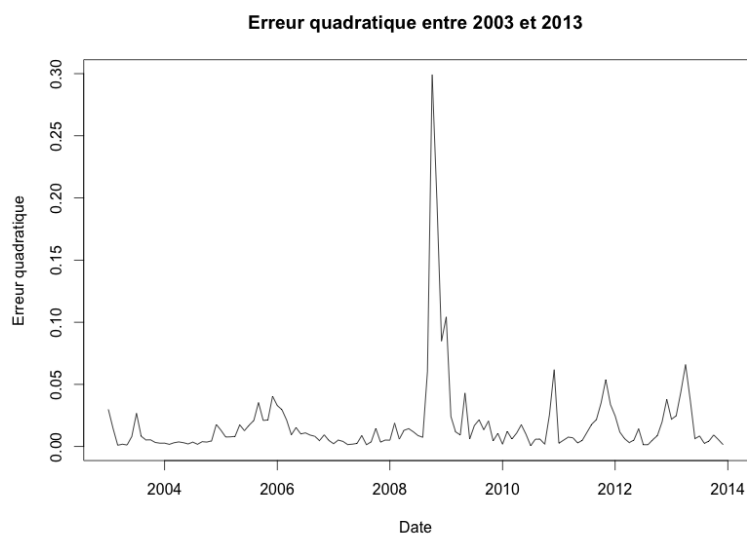


FIGURE 5.3 – Erreur quadratique sur la totalité des données.

5.1.3 Étude de la dynamique des composantes principales

L'étude des fonctions d'auto-corrélation met en évidence un comportement non stationnaire des composantes (faible décroissance des auto-corrélations pour les séries 1 et 2, cf. figure 5.4) tandis que les corrélations croisées sont faibles. En différenciant

Corrélation linéaire	$\rho_{1,2}$	$\rho_{1,3}$	$\rho_{2,3}$
Apprentissage	≈ 0	≈ 0	≈ 0
Échantillon	87%	-64%	-21%
Totalité	2%	-16%	-1%

TABLE 5.3 – Corrélation des composantes en fonction de l'échantillon.

chaque série et en négligeant les inter-dépendances, les composantes sont très proches d'un comportement de type bruit blanc (Auto-corrélation nulle au delà d'un lag, pas d'auto-corrélations partielles, cf. figure 5.5,5.6). C'est cette modélisation qui sera utilisée dans l'élaboration de chocs de taux (cf. chapitre dédié). Le tableau 5.4 résume différents quantiles pour les 3 composantes principales.

Composantes	Niveau	Pente	Courbure
Quantile 5%	-1.35	-0.51	-0.16
Quantile 10%	-1.15	-0.28	-0.13
Quantile 90%	1.13	0.33	0.11
Quantile 95%	1.71	0.44	0.17
Ecart-type	0.94	0.34	0.11

TABLE 5.4 – Statistiques des variations des composantes principales entre le 31/01/2003 et le 31/12/12.

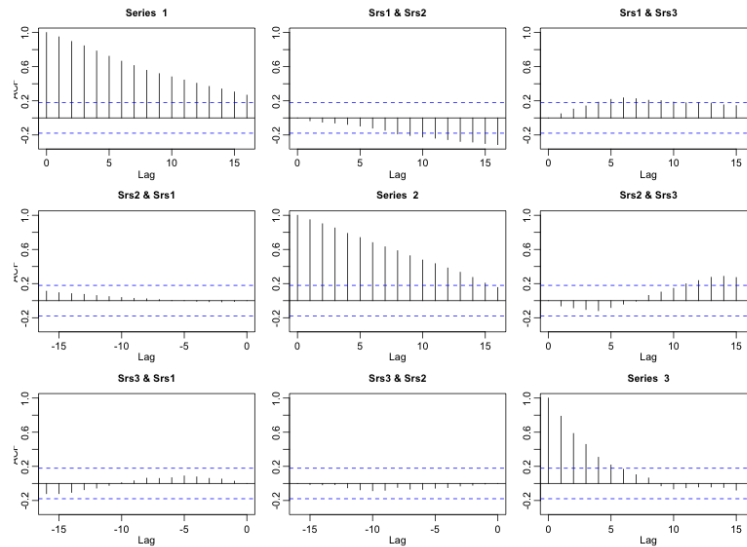


FIGURE 5.4 – Auto-corrélations simple et croisées des composantes principales.

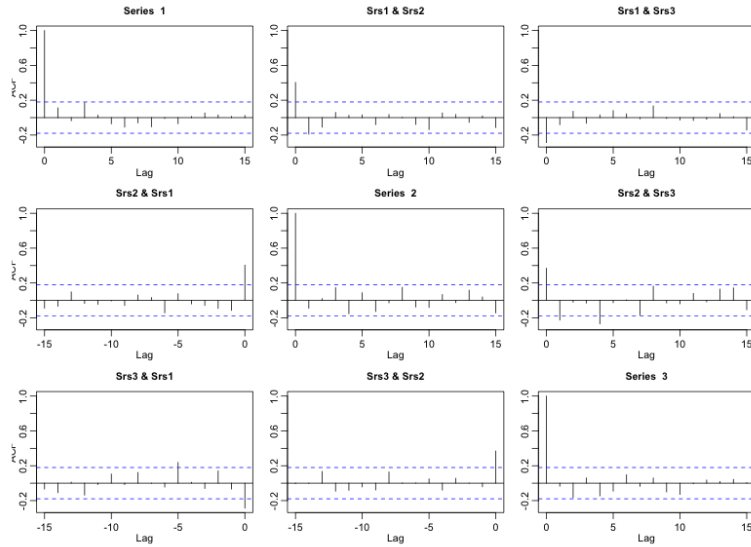


FIGURE 5.5 – Auto-corrélations simple et croisées des composantes principales différenciées.

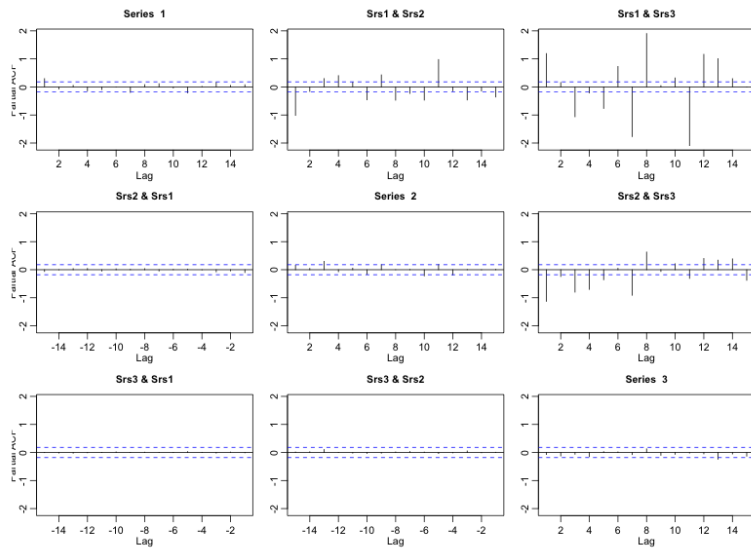


FIGURE 5.6 – Auto-corrélations partielles simple et croisées des composantes principales différenciées.

5.1.4 Retraitement par analyse en composantes indépendantes (ACI)

L'analyse en composantes indépendantes est une méthode très similaire à l'ACP dans le sens où son objectif est d'extraire un nombre réduit de facteurs depuis un jeu

de données. Ces facteurs sont toujours linéaires et sont construits sous contrainte d'être statistiquement indépendants (par maximisation de la neg-entropie, pour plus de détails, consulter [24]). Cette condition est plus forte que la non-corrélation (équivalent uniquement pour des variables gaussiennes, ce qui n'est pas le cas ici) et permet de faire apparaître des facteurs plus fondamentaux selon [12].

Contrairement à l'ACP, les algorithmes sont complexes et diffèrent selon la mesure d'indépendance utilisée (Kurtosis ou entropie négative par exemple) ce qui ne mène pas toujours aux mêmes composantes. L'inconvénient majeur de l'analyse en composantes indépendantes est son ambiguïté, ce qui ne permet pas de l'appliquer directement sur les données (les composantes étant alors impossibles à ordonner) mais bien sur le résultat d'une ACP préalable. Dans ce dernier cas, les composantes indépendantes sont toutes restituées, ce qui évite le problème. En résumé, l'application d'une ACI après une ACP ne change pas les courbes reconstruites mais uniquement la forme des composantes et leur évolution.

D'après les résultats, les composantes obtenues après retraitement sont plus complexes à interpréter. Les composantes C1 et C2 sont homogènes à une pente faible et forte, tandis que la composante C3 permet de capter la bosse observée sur certaines courbes des taux (cf. figure 5.7). Tout comme pour les composantes principales, les composantes indépendantes ne semblent pas être issues de processus stationnaires (cf. figure 5.10 et 5.8). La différenciation au premier ordre élimine les auto-corrélations, mais les auto-corrélations partielles ne peuvent être négligées, ce qui ne permet pas d'interprétation simple de leur évolution en termes de processus linéaires.

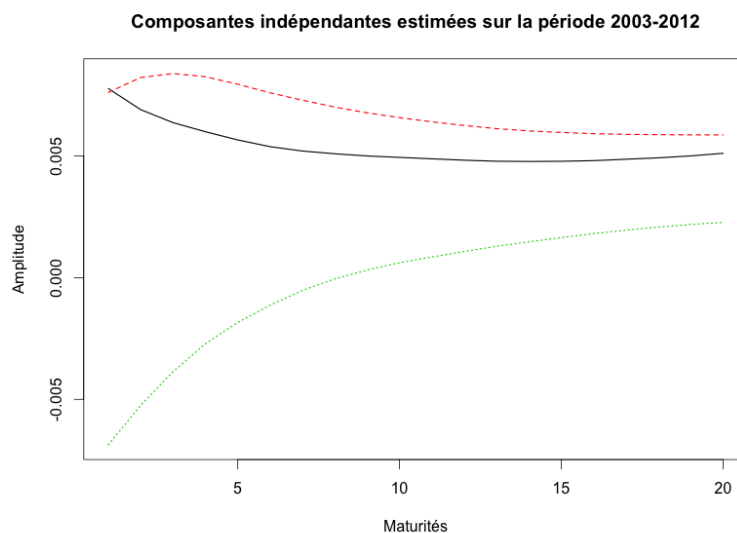


FIGURE 5.7 – Forme des 3 composantes indépendantes obtenues.

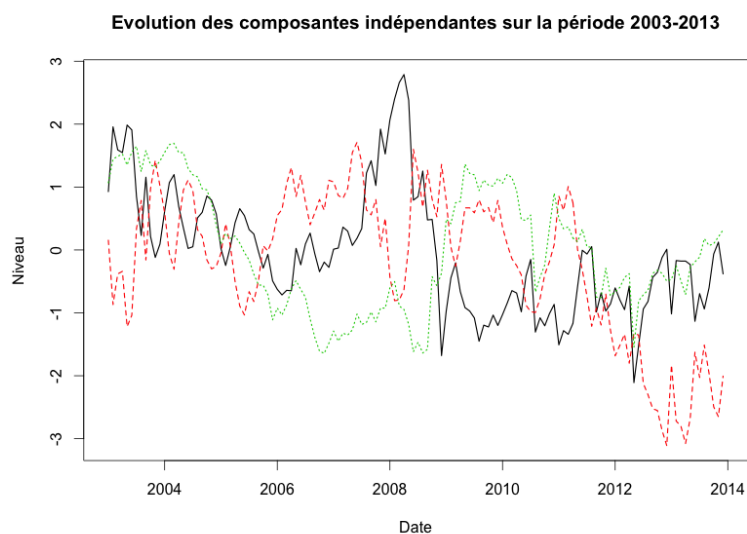


FIGURE 5.8 – Evolution des 3 premières composantes principales sur la période 2003 à 2013.

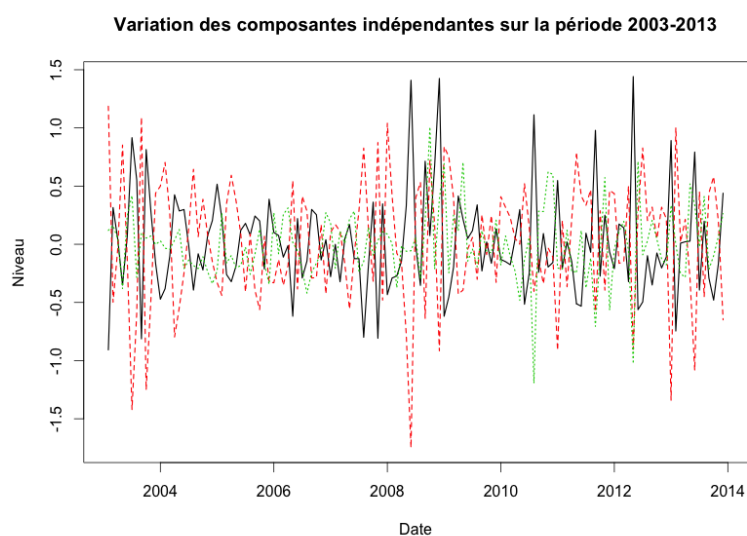


FIGURE 5.9 – Variation des composantes indépendantes.

5.2 Méthodes paramétriques du type Nelson-Siegel

Les méthodes du type Nelson-Siegel sont des modèles imposant une forme paramétrique particulière à la courbe des taux sur la base d'hypothèses a priori. Il en existe plusieurs déclinaisons (en augmentant le nombre de paramètres) mais seule la version

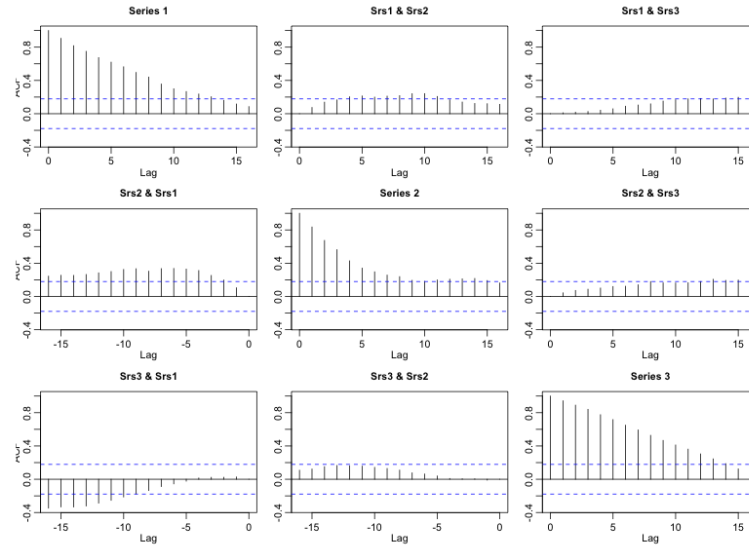


FIGURE 5.10 – Auto-corrélations simples et croisées des composantes indépendantes.

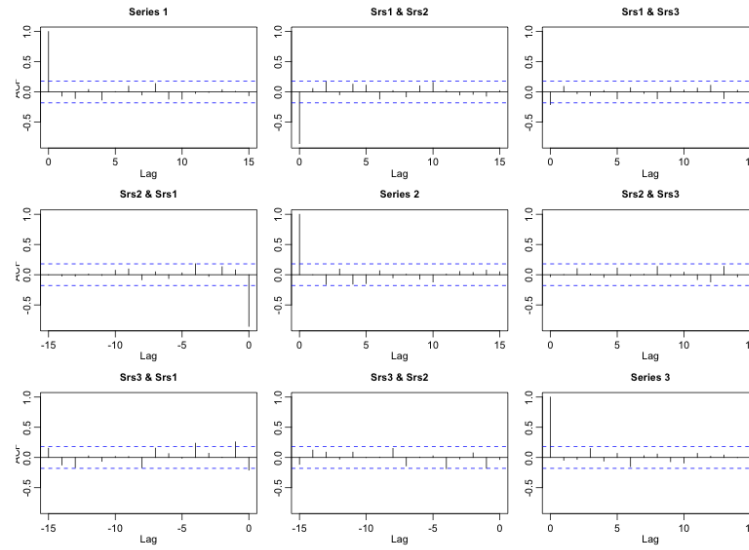


FIGURE 5.11 – Auto-corrélations simples et croisées des composantes indépendantes différenciées.

originale sera utilisée dans ce mémoire, afin de maintenir le plus faible nombre de paramètres possible.

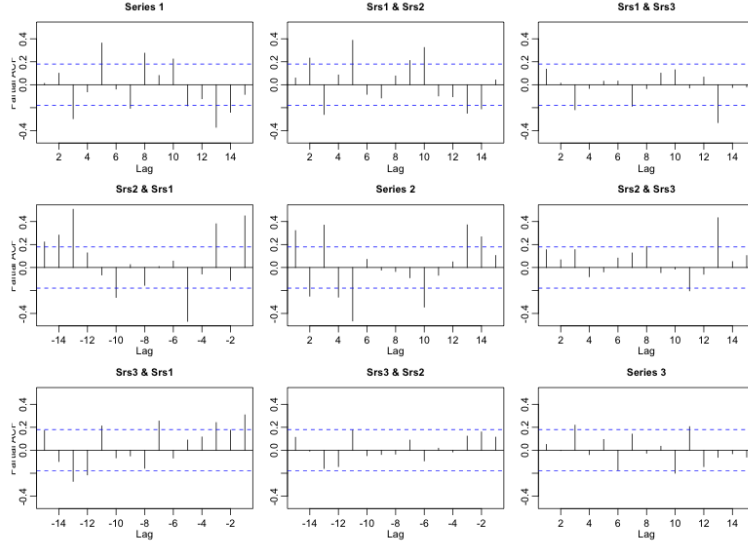


FIGURE 5.12 – Auto-corrélations partielles simples et croisées des composantes indépendantes différenciées.

5.2.1 Présentation du modèle

Le modèle de Nelson-Siegel suppose que le taux à terme instantané suit une équation différentielle ordinaire du second ordre à racines doubles (cf. [42] et [10]) :

$$f_t(\tau) = \mu_{1,t} + \mu_{2,t} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_{3,t} \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right), \quad (5.2)$$

et retrouve la forme du taux zéro-coupons par intégration, avec la formule suivante :

$$R_t(\tau) = \mu_{1,t} + \mu_{2,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} \right) + \mu_{3,t} \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right) \quad (5.3)$$

représentées dans la figure 5.13. Cette forme théorique dépend de 4 facteurs et exige l'utilisation de régressions non-linéaires afin d'en estimer les paramètres. Pour simplifier le problème, l'approche de [15] sera utilisée, en fixant le paramètre τ_1 pour rendre possible une estimation par moindres carrés linéaires. Sur la base de travaux préalables [14], la valeur de τ_1 est fixée à 1.368363. Ce modèle impose une forme lisse à chaque composante et permet de retrouver les composantes de niveau, de pente et de courbure tout en garantissant la positivité des taux à termes (cf. figure 5.13).

5.2.2 Analyse de la dynamique des paramètres

La figure 5.14 présente les paramètres estimés à chaque date, en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires (selon la distance de Mahalanobis). Contrairement à

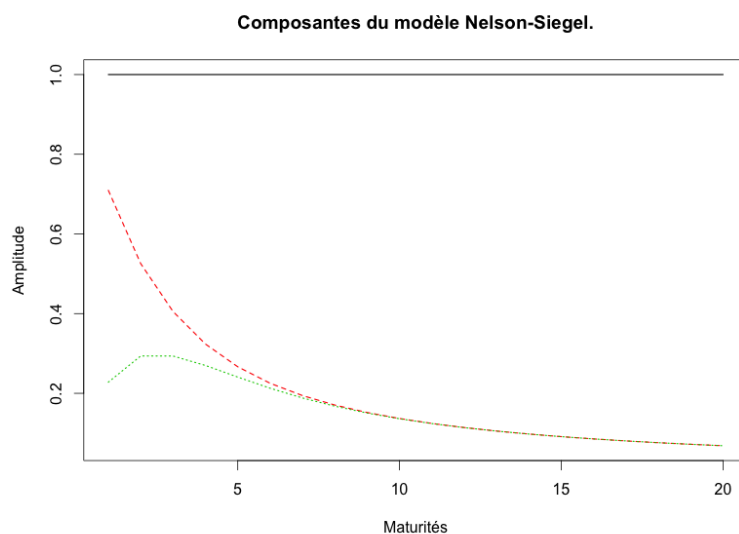


FIGURE 5.13 – Forme des composantes du modèle Nelson-Siegel.

l'analyse en composantes principales, aucune contrainte de non corrélation est appliquée et le tableau 5.5 présente les corrélations observées sur les données d'apprentissage. De même que précédemment, l'erreur quadratique est calculée à chaque date (cf. figure 5.15) puis moyennée sur chaque échantillon (cf. tableau 5.6).

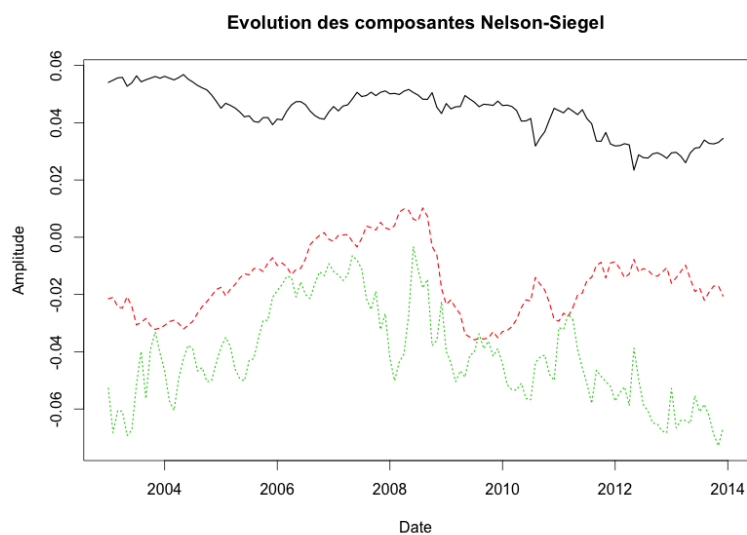


FIGURE 5.14 – Evolution des composantes du modèle Nelson-Siegel sur la période 2003 - 2013.

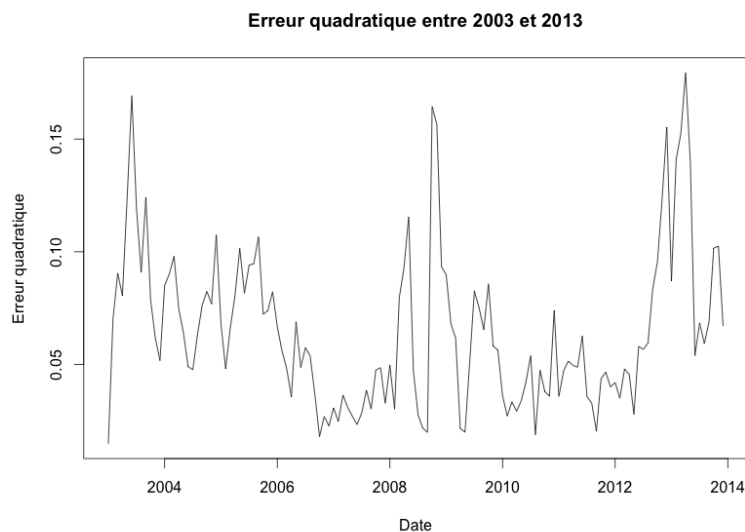


FIGURE 5.15 – Evolution des composantes du modèle Nelson-Siegel sur la période 2003 - 2013.

Corrélation linéaire	$\rho_{1,2}$	$\rho_{1,3}$	$\rho_{2,3}$
Apprentissage	-21%	15%	49%
Échantillon	-91%	-5%	-36%
Totalité	-18%	32%	44%

TABLE 5.5 – Corrélation des composantes en fonction de l'échantillon.

Données	Totalité	Apprentissage	Echantillon
Erreur quadratique moyenne	6.81%	6.42%	10.80%

TABLE 5.6 – Erreur quadratique moyenne en fonction de l'échantillon retenu.

Tout comme dans le modèle d'analyse en composantes principales, une tendance baissière du niveau de la courbe des taux est observée depuis 2008 (la première composante du modèle), baisse également observée sur les deux autres paramètres. L'erreur quadratique est par contre très volatile, avec des pics observés en début, milieu et fin de période. Tout comme précédemment, les processus ne sont pas stationnaires (cf. figure 5.16) et leur première différenciation sera approximée par un bruit blanc (cf. figure 5.17 et 5.18) dont les quantiles sont résumés dans le tableau 5.7. Tout comme pour les résultats de l'ACP, il est possible d'appliquer une analyse en composantes indépendantes sur les séries des paramètres du modèle. Cependant, la modélisation actuelle (permettant une approximation par bruit blanc) est suffisante pour les applications envisagées.

Composantes	Niveau	Pente	Courbure
Quantile 5%	0.03	-0.03	-0.06
Quantile 10%	0.03	-0.03	-0.06
Quantile 90%	0.05	0.03	-0.01
Quantile 95%	0.06	0.06	-0.01
Ecart-type	7.61 e(-3)	0.01	0.02

TABLE 5.7 – Statistiques des variations des composantes du modèle Nelson-Siegel entre le 31/01/2003 et le 31/12/12.

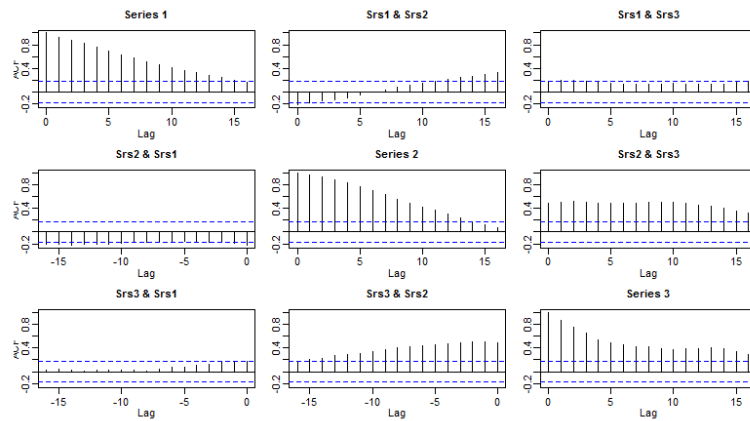


FIGURE 5.16 – Auto-corrélation des composantes du modèle Nelson-Siegel sur la période 2003 - 2013.

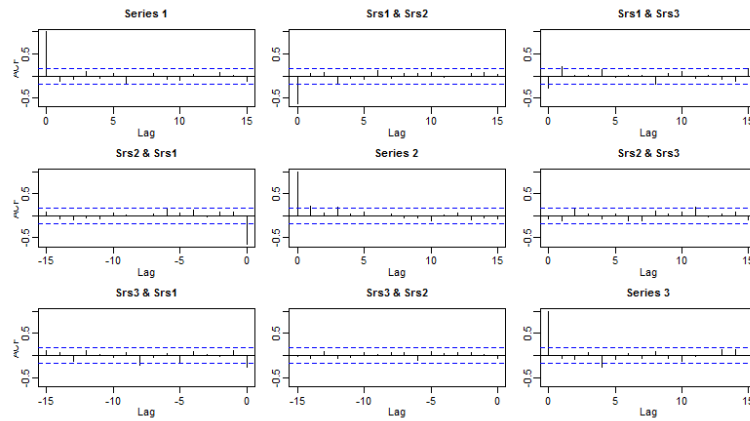


FIGURE 5.17 – Auto-corrélation des composantes du modèle Nelson-Siegel différenciées sur la période 2003 - 2013.

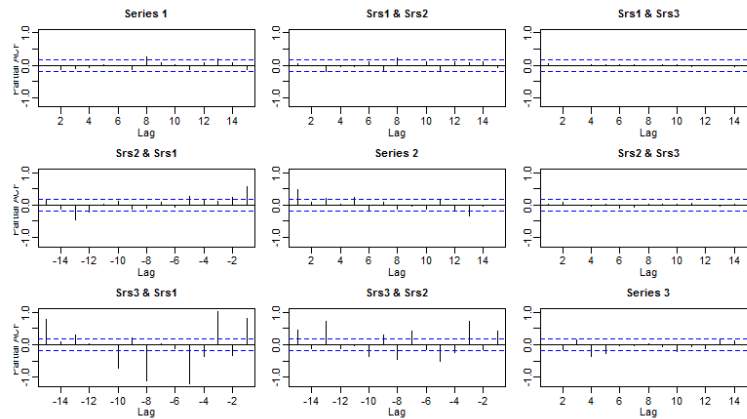


FIGURE 5.18 – Auto-corrélation partielles des composantes du modèle Nelson-Siegel différenciées sur la période 2003 - 2013.

5.3 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de réduction de dimension ont été appliquées à l'étude de la courbe des taux. Ces méthodes sont distinctes de par leur construction, s'ajustant le mieux possible aux données ou à partir de composantes lisses et données a priori. Chacun de ces modèles permet d'exprimer la courbe des taux discrétisée comme une combinaison linéaire de composantes simples et plus ou moins faciles à interpréter. Il est difficile de les départager, car bien que l'ACP minimise l'erreur quadratique moyenne sur l'historique, rien n'indique que cette propriété sera vérifiée à l'avenir. Ainsi, ils seront tous testés dans les applications à venir.

Troisième partie

Modèle de projection actif-passif

Chapitre 6

Générateur de scénarios économiques

La première strate d'un modèle de projection actif-passif probabiliste est son générateur de scénarios économiques. Il s'agit d'un ensemble d'hypothèses d'évolution concernant les différents facteurs de risque, généralement basées sur des modèles stochastiques. Dans ce mémoire centré sur l'étude du risque de taux, le générateur se limite à un modèle de taux couplé à un modèle d'actions présentés ci-après dans cet ordre.

6.1 Modèle de taux d'intérêts : Vasicek Hull & White

Le modèle de taux considéré ici est celui de Hull & White à un facteur, connu aussi sous le nom de Vasicek étendu. Il a été choisi pour sa simplicité d'utilisation, sa prise en compte d'un retour à la moyenne pour le taux court et sa capacité à reproduire la courbe des taux du marché (il appartient aux modèles d'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire que la courbe des taux initiale est un paramètre du modèle). Le formalisme utilisé est issu de [11] (ce modèle peut aussi être vu comme un cas particulier du modèle de Heath-Jarrow-Morton avec une structure de volatilité décroissante exponentiellement vite). Le seul facteur de risque du modèle est le taux court, modélisé par le processus d'Itô suivant sous la probabilité risque neutre :

$$dr_t = (v(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t, \quad (6.1)$$

où $v(t)$ est une fonction déterministe du temps et a, σ deux constantes réelles. Le choix de $v(t)$ est réalisé de telle sorte que la courbe des taux initiale soit parfaitement reproduite par le modèle :

$$v(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, t) + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at}). \quad (6.2)$$

Les taux à termes instantanés sont obtenus numériquement. En appliquant le lemme d'Itô puis en intégrant, la solution de l'équation 6.1 est la suivante :

$$r_t = (r_s - \alpha(s))e^{-a(t-s)} + \alpha(t) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u, \quad (6.3)$$

avec $\alpha(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$. Cette solution est gaussienne, car le dernier terme de l'équation 6.3 est une intégrale d'Itô. Le caractère gaussien du modèle permet une évaluation par formule fermée des obligations zéro-coupons (et de certains actifs dérivés de ces dernières). Le prix d'une obligation en date t et versant 1 euro en date T est exprimé par la formule suivante :

$$P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathfrak{F}_t \right) = A(t, T) e^{-B(t, T)r_t}, \quad (6.4)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at} B(t, T)^2) \right), \\ B(t, T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \end{aligned}$$

Ce modèle permet d'évaluer différentes options sur taux simples par formules fermées. C'est notamment le cas des options d'achat et de vente européennes sur zéro-coupon et de celles qui en découlent (options sur swaps payeuses et receveuses par exemple, utiles pour la calibration du modèle en univers risque neutre). Bien que très utilisé, ce modèle présente certaines limitations théoriques. Premièrement, le taux court est gaussien à chaque pas de temps et peut donc devenir négatif, ce qui n'est pas particulièrement réaliste (Même si en pratique c'est un événement peu fréquent cf. [11] p.74). Ensuite, en tant que modèle à 1 facteur, l'évolution des taux zéro-coupons est parfaitement corrélée quelle que soit la maturité (ce qui n'est pas observé en pratique, cf. chapitre sur l'analyse du risque de taux). Malgré ces deux aspects, son utilisation se restreint ici à la valorisation d'une compagnie d'assurance simplifiée et fictive sur la base de mouvements de la courbe des taux initiale : ce qu'il permet grâce à sa propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans la suite, le déflateur sera noté D_t lorsqu'il s'applique pour une actualisation en date 0, sinon il sera noté $D_{t,T}$ pour la période $[t, T]$.

6.2 Modèle d'actions : Black et Scholes à dividendes discrets

La modélisation des actions repose sur le modèle de Black et Scholes avec dividendes discrets. Dans ce modèle, le dividende se détache à chaque fin de période, entraînant une baisse du cours de l'action égale à la valeur de ce dernier. En d'autres termes, l'évolution du cours de l'action est la suivante :

$$S_{t+1} = (1 - c)S_t \exp \left(\int_t^{t+1} r_u du - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \left(\rho(W_{t+1}^1 - W_t^1) + \sqrt{1 - \rho^2}(W_{t+1}^2 - W_t^2) \right) \right), \quad (6.5)$$

où ρ représente la corrélation linéaire entre les taux et les actions, c le taux de dividende, W_t^1 le mouvement brownien associé au taux court et W_t^2 l'aléa des actions. Le dividende versé est calculé comme suit :

$$Div_{t+1} = \frac{c}{1 - c} S_{t+1}. \quad (6.6)$$

Ainsi, tout en restant très simple, le cours de l'action généré produit des dividendes, qui seront gérés dans le modèle de gestion. Bien que les cours d'actions ne soient pas représentés de façon réaliste par ce modèle (accroissements gaussiens, absence de saut, etc.), il a été retenu pour sa simplicité d'utilisation.

6.3 Méthodes de simulation et qualité des scénarios

Les modèles présentés dépendent de deux sources d'aléas distinctes, représentées par les deux mouvements browniens $(W_t^1)_{t \in \mathbb{N}}$ et $(W_t^2)_{t \in \mathbb{N}}$ sous la probabilité risque neutre. Les trajectoires générées sont destinées à réaliser une estimation de la MCEV par Monte-Carlo, ce pourquoi la méthode des variables antithétiques est utilisée. D'autres méthodes de réduction de variance existent, telles que la méthode des variables de contrôle ou encore l'échantillonnage préférentiel mais ne seront pas utilisées ici. De plus, le générateur de nombres aléatoires est celui d'Excel, le modèle étant développé sous VBA (d'autres algorithmes existent, tel que le Tore mélangé ou autre cf. [33]). Afin de contrôler la qualité des scénarios générés par le modèle, plusieurs critères sont analysés. Premièrement, le modèle de Vasicek Hull & White permet d'évaluer les obligations par formules fermées, ce qui permet de comparer prix théorique et prix simulé. En effet, la comparaison vient du résultat suivant :

$$P(t, T) = E[D_{t,T} | \mathcal{F}_t] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{t,T}^i, \quad (6.7)$$

où $D_{t,T}^i$ représente le déflateur entre les dates t et T pour le scénario i . Pour le modèle de Black & Scholes avec dividendes discrets, c'est la propriété de martingalité qui est vérifiée ici :

$$\forall t \in \mathbb{N}, E \left[S_t D_{0,t} + \sum_{i=1}^t Div_i D_{0,i} | \mathcal{F}_0 \right] = S_0. \quad (6.8)$$

La figure 6.3 présente les résultats obtenus pour différentes maturités et différents nombres de scénarios N .

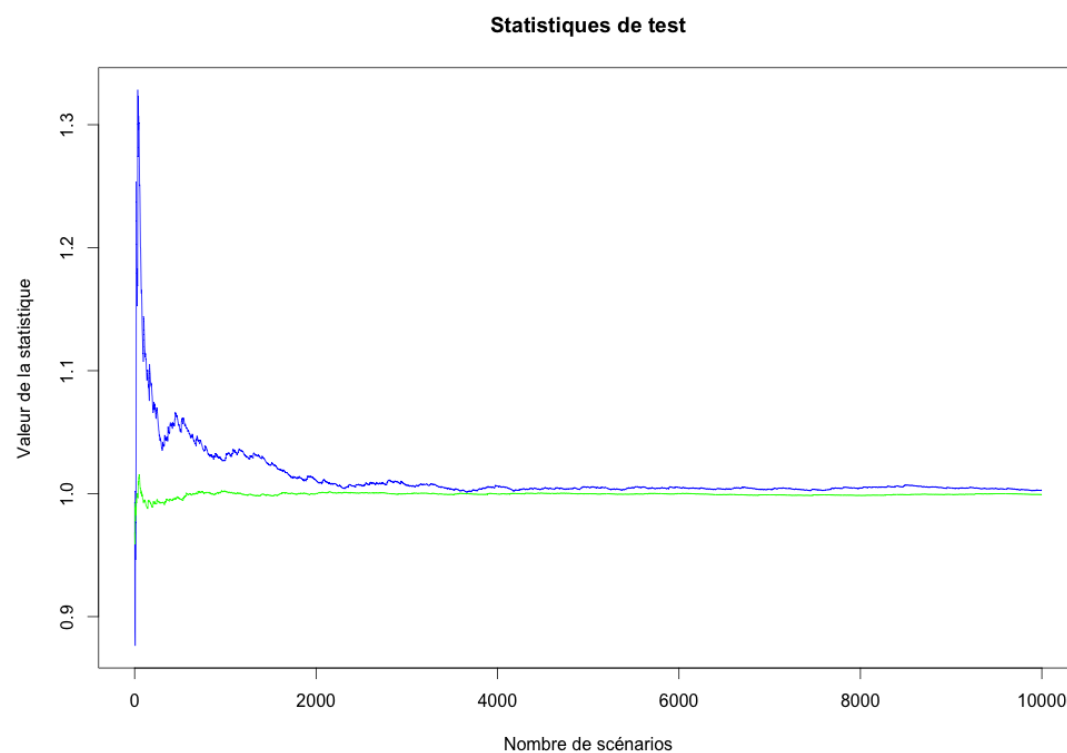


FIGURE 6.1 – Représentation des différentes statistiques de test en fonction du nombre de scénarios. En bleu et en vert, respectivement la statistique de martingalité du déflateur et des actions et dividendes actualisés à 30 ans.

Chapitre 7

Modèle de projection actif-passif

Maintenant que le générateur de scénarios a été présenté (cf. chapitre précédent), la seconde partie du modèle de projection peut être détaillée. Le mécanisme de gestion actif-passif permet de calculer en chaque fin d'année quels sont les flux revenant à chaque acteur : assurés, assureur et état. Classiquement, les actes de gestion sont segmentés en plusieurs étapes afin de simplifier la modélisation et seront traités ici sur une fréquence annuelle. C'est ce procédé qui a été choisi ici, au travers du déroulé suivant : vieillissement des actifs (étape 1), paiement des prestations (étape 2), réallocation stratégique du portefeuille (étape 3) et bilan de fin d'année (étape 4). De plus, un traitement particulier est réalisé en dernière année, afin de partager le bilan entre assuré et assureur (pour un partage équitable de la valeur résiduelle). Les mécanismes de report à nouveau ou de réserve de capitalisation sont ignorés.

7.1 Composition du portefeuille d'actifs

Avant toute description du processus, le portefeuille de la compagnie modélisée est supposé investi sur trois types d'actifs différents : l'OPCVM action, les obligations zéro-coupons sans risque de défaut de différentes maturités et la trésorerie. Le nombre d'actifs obligataires en portefeuille varie avec la date de projection. En effet, ne sont modélisées que les obligations dont la maturité n'excède pas la fin de projection car elles sont destinées à couvrir les flux de passif. Par exemple, pour une projection de 30 ans, le portefeuille est investi sur 30 maturités différentes en date initiale et est investi sur les 10 premières maturités 20 ans plus tard (il ne reste qu'une dizaine de flux de passif à couvrir). L'action sera modélisée comme un OPCVM avec cours boursier unique et le cash supposé rémunérer au taux sans risque du marché.

7.2 Etape 0 : Allocation initiale du portefeuille

Cette étape consiste à définir le portefeuille d'actif en début de projection. Par la suite, l'allocation initiale sera toujours imposée à 80% en obligations, 19% en actions et

1% en trésorerie (cette allocation cible étant fixe tout au long de la projection, l'allocation réelle pouvant être légèrement différente lors du déroulé). La valeur de marché et la valeur nette comptable sont toutes deux égales au montant de provision mathématique, l'entreprise ne dispose donc d'aucune richesse ou plus-ou-moins value latente à la date initiale.

7.3 Etape 1 : Vieillessement des actifs

La première étape consiste à vieillir les actifs afin de prendre en compte les fluctuations de valeurs de marché et l'évolution des valeurs nettes comptables en fonction des scénarios économiques. Le mécanisme est détaillé ci-dessous par classes d'actifs.

7.3.1 Vieillessement des actions

En ce qui concerne l'OPCVM actions, seule la valeur de marché est mise-à-jour en fonction du cours de l'action sous-jacente :

$$V_{t+1}^S = V_t^S \frac{S_{t+1}}{S_t}. \quad (7.1)$$

où V^S représente la valeur de marché des actions en portefeuille et S le cours de l'action. De fait, le rendement annuel de l'OPCVM actions est le suivant :

$$R_{t+1}^S = \frac{S_{t+1}}{S_t} - 1. \quad (7.2)$$

La valeur nette comptable (VNC) des actions n'est pas modifiée par une fluctuation de marché, les dépréciations durables n'étant pas prises en compte dans ce modèle simplifié :

$$VNC_{t+1}^S = VNC_t^S \quad (7.3)$$

7.3.2 Vieillessement des obligations zéro-coupons

La valeur de marché des obligations est mise-à-jour en prenant en compte la réduction de maturité et la fluctuation du taux court.

$$\forall \tau \in \mathbb{N}, V_{t+1}^P(\tau) = V_t^P(T) \frac{P_{t+1}(\tau)}{P_t(\tau)}, \quad (7.4)$$

où V^P représente la valeur de marché de la part du portefeuille investi en obligations de maturité τ et $P_t(\tau)$ la valeur de marché unitaire de ces dernières (cf. partie 1). La valeur nette comptable est quant à elle calculée en utilisant le taux de rendement actuariel (TRA) de l'obligation :

$$TRA_t = \left(\frac{Nominal_t^P(\tau)}{VNC_t^P(\tau)} \right)^{\frac{1}{\tau}} - 1, \quad (7.5)$$

de la façon suivante :

$$VNC_{t+1}^P(\tau) = VNC_t^P(\tau)(1 + TRA_t(\tau)). \quad (7.6)$$

A l'issue de cette étape, le portefeuille obligataire est investi sur une maturité de moins, l'obligation de maturité un an détenue précédemment étant arrivée à maturité.

7.3.3 Vieillessement de la trésorerie

La valeur de marché de la trésorerie est capitalisée au taux sans risque sur une période d'un an et est augmentée des dividendes versés par les actions et du nominal de l'obligation arrivée à maturité.

$$V_{t+1}^T = V_t^T e^{r_t} + coupon. \quad (7.7)$$

La valeur nette comptable de la trésorerie est systématiquement égale à sa valeur de marché :

$$\forall t \in \mathbb{N}, V_t^T = VNC_t^T, \quad (7.8)$$

7.4 Etape 2 : Paiement des prestations (Rachats)

Les prestations sont supposées être réglées en fin d'année juste après le vieillissement des actifs. Ici, les différentes prestations payées par l'assureur prennent la forme d'un versement unique : le rachat. Ce dernier est modélisé comme étant la somme des rachats statiques et dynamiques. Les premiers sont calculés comme étant une proportion fixe de la provision mathématique en fin d'année et représente le comportement standard de l'activité. Les seconds représentent une évolution contextuelle, augmentant proportionnellement le taux de rachat en fonction de l'écart entre le taux de revalorisation de la provision mathématique et le taux zéro-coupons 10 ans (mécanisme de concurrence avec d'autres supports d'épargne) :

$$Rachat_t^{Dyn} = \alpha * \max \left(\min \left(10\%, Tx_t^{10ans} - Tx_{t-1}^{Servi} \right), 0 \right) * PM_t, \quad (7.9)$$

$$Rachat_t^{Sta} = Tx^{Rachat} * PM_t, \quad (7.10)$$

$$Rachat_t = Rachat_t^{Sta} + Rachat_t^{Dyn}, \quad (7.11)$$

où α est une sensibilité aux scénarios économiques (en pratique, fixé à 2 de sorte que les taux pratiqués dans le modèle ne soient pas explosifs), Tx^{10ans} le rendement de l'obligation zéro coupon de maturité 10 ans, PM le montant de provision mathématique et Tx^{Servi} le taux de revalorisation de cette dernière. Les rachats sont directement prélevés sur la trésorerie :

$$V_{t+1}^T = V_t^T - Rachat_{t+1}. \quad (7.12)$$

Cette opération modifie les proportions relatives d'actif en portefeuille, qui ne respectent plus l'allocation stratégique définie. Ce phénomène est corrigé par la réallocation, présentée en section suivante. Dans ce modèle, la trésorerie peut devenir négative temporairement, lorsque le montant du rachat est supérieur aux liquidités.

7.5 Etape 3 : Réallocation du portefeuille d'actifs

A l'issue du paiement des prestations, l'allocation du portefeuille ne respecte plus la cible fixée en début de projection. En effet, les proportions d'actif en valeur de marché ont été modifiées par le vieillissement et le versement d'un rachat. L'objectif de la réallocation est de ramener la proportion de chaque actif aux quantités cibles. Les achats sont pris en compte de sorte que les actifs soient achetés avec une valeur comptable égale à la valeur de marché (au moment de l'achat), tandis que les ventes réduisent la valeur comptable proportionnellement au montant cédés. En d'autres termes, un achat entraîne une modification sur la ligne d'actif considérée comme suit :

$$V_t = V_t + V_t^A, \quad (7.13)$$

$$VNC_t = VNC_t + V_t^A, \quad (7.14)$$

où V^A représente la valeur de marché des actifs achetés, V la valeur de marché du portefeuille et VNC sa valeur comptable. Pour la vente, le schéma est le suivant :

$$V_t = V_t - V_t^V \quad (7.15)$$

$$VNC_t = VNC_t \frac{V_t - V_t^V}{V_t}. \quad (7.16)$$

Afin de déterminer quels montants acheter sur chaque ligne d'actif, la valeur de marché détenue est comparée avec la valeur de marché cible :

$$V_t^{A,X} = V_t^X - V_t * Tx^X \quad (7.17)$$

où X représente une classe d'actif (P pour obligation ou S pour action), $V_t^{A,X}$ le volume de cet actif X à acheter (en valeur de marché), V_t la valeur de marché du portefeuille et Tx^X le taux cible (80% pour les obligations, 19% pour les actions). La réallocation peut aussi passer par une cession d'actifs et le calcul de la valeur de marché à vendre est symétrique.

7.6 Etape 4 : Réalisation des plus-ou-moins values latentes excessives en actions

Contrairement aux obligations, la valeur nette comptable des actions n'est jamais modifiée dans le modèle. Dans le cas de scénarios où le cours de ces dernières fluctue

fortement, les plus-ou-moins values latentes ne sont réalisées qu'en fin de projection, lorsque le portefeuille d'actifs est soldé (voir étape 6). Afin d'éviter des situations invraisemblables en termes de gestion, toutes les plus-ou-moins values latentes supérieures à 10% de la valeur de marché sont réalisées. Les actions sont alors toutes vendues et rachetées au même prix, ce qui a pour effet d'égaliser la valeur nette comptable et la valeur de marché. Cette dernière n'ayant pas changée au cours de l'opération, les proportions du portefeuille respectent toujours l'allocation cible définie.

7.7 Etape 5 : Bilan de fin d'année et abondements

Chaque fin d'année, la compagnie d'assurance se doit de dresser un bilan des opérations réalisées et d'adresser les flux réglementaires : la revalorisation de la provision mathématique au taux minimum garanti, le paiement des impôts sur le résultat, le versement du résultat aux actionnaires, etc. Ce temps fort de la vie de l'entreprise est aussi un moment riche dans le modèle où de nombreux mécanismes sont représentés.

7.7.1 Calcul des produits financiers

Tout d'abord, les produits financiers sont calculés comme la somme des plus-ou-moins values réalisées pendant l'année (réallocation des obligations, réalisation des PMVL actions) et des revenus des actifs. Ces derniers sont constitués des dividendes versés par les actions, les revenus de la trésorerie, les plus values réalisées sur obligations et du nominal de l'obligation arrivée à échéance :

$$\text{Produits financiers}_t = \text{PMVR}_t + \text{Revenus}_t. \quad (7.18)$$

Ces produits financiers peuvent être négatifs lorsque les revenus du portefeuille sont inférieurs à la moins value globale réalisée.

7.7.2 Revalorisation de l'épargne des assurés

Les contrats sont supposés comporter un taux minimum garanti de 3%, ce qui représente une obligation de revalorisation d'autant pour la provision mathématique. Ce montant est versé par l'assureur, quelque soit l'évolution du marché. Étant donné que les rachats sont supposés avoir lieu en fin d'année, la revalorisation est calculée sur la provision mathématique de fin d'année précédente :

$$\text{Produits cibles}_t = \text{PM}_{t-1} * 3\%. \quad (7.19)$$

Le produit cible est le minimum contractuel que l'assureur s'est engagé à verser à ses clients. Cependant, il ne s'agit pas de la seule source de revalorisation, les assurés étant intéressés au titre des revenus financiers de la compagnie. Le produit brut est calculé comme étant la somme des éléments suivants :

$$Produitsbruts_t = Produitsfinanciers_t + Abondements_t - Marge_t, \quad (7.20)$$

où la marge et l'abondement sont détaillés dans la section suivante. Les assurés payent une taxe sur ce produit brut (contribution sociale généralisée), et reçoivent ainsi les produits nets :

$$Produitsnets_t = Produitsbruts_t * (1 - Tx_{csg}). \quad (7.21)$$

En définitive, l'évolution de la provision mathématique une année sur l'autre est régie par la relation suivante :

$$PM_t = PM_{t-1} + Produitsnets_t - Rachats_t. \quad (7.22)$$

7.7.3 Calcul du flux pour l'assureur

Du point de vue de l'assureur, le résultat se calcule comme étant la somme suivante :

$$Fluxassureur_t = Marge_t - abondement_t. \quad (7.23)$$

L'abondement est calculé comme étant la somme à verser par les actionnaires pour honorer leurs engagements en fin d'année. En effet, en fonction des aléas financiers, il est possible que les produits financiers soient très faibles, voir négatifs (le portefeuille a perdu globalement de la valeur). Dans ce cas, les engagements envers les assurés doivent être honorés et les actionnaires versent le complément entre les produits financiers et le produit cible (cf. section précédente) :

$$Abondement_t = \max(Produitcible_t - Produitsfinanciers_t + Marge_t, 0). \quad (7.24)$$

La marge de l'assureur est calculée comme une part des produits financiers, limitée proportionnellement à une quantité des provisions mathématiques :

$$Marge_t = \min(Txmarge * PM_{t-1}, \max(0, (1 - Tx_{B26} * Produitsfinanciers_t))). \quad (7.25)$$

Le taux $B26$ correspond à l'obligation réglementaire de l'assureur de reverser au minimum 85% des bénéfices.

7.8 Etape 6 : Répartition de la richesse finale

En fin de projection, le portefeuille d'actif doit être soldé de manière équitable entre les différents acteurs. Les assurés reçoivent un montant égal à la valeur nette comptable du portefeuille de la part de la compagnie d'assurance, qui réalise alors une plus-ou-moins value égale à la différence entre la valeur de marché du portefeuille et sa valeur

nette comptable. Lorsqu'il s'agit d'une plus value, ce montant est soumis à l'obligation de participation aux bénéfices et l'assureur en reverse la part réglementaire aux assurés. Lorsqu'il s'agit d'une moins value, c'est l'assureur qui abonde.

7.9 Qualité du modèle de projection

Tout comme les scénarios ont été analysés, il est nécessaire de contrôler la qualité d'implémentation du modèle de gestion actif-passif. En pratique, deux tests sont utilisés : le test de l'écart bilan et celui de la martingalité des flux produits.

Le premier test consiste à vérifier qu'en chaque fin d'année, la valeur comptable des actifs est égale à la provision mathématique. En effet, dans la modélisation utilisée, l'entreprise ne dispose pas de capitaux propres (les actionnaires touchent immédiatement le résultat chaque année et sont supposés être à capitaux illimités pour abonder lorsque les résultats financiers ne permettent pas de payer les prestations). En particulier, l'entreprise ne peut être en situation de défaut.

Le second test consiste à vérifier que la somme de tous les flux actualisés sont égaux à la valeur initiale de l'entreprise (à aucun moment le modèle ne génère ou ne perd de la valeur). Le modèle de projection peut être considéré comme une stratégie financière viable dans un marché complet, et donc la somme des prix actualisés de chaque flux généré doit être égale à la valeur initiale de la stratégie. Ce second test est global, et est sensible à la qualité des scénarios et du modèle de gestion. La figure 7.1 représente l'évolution de la somme des flux actualisés en fonction des scénarios et de différentes allocations initiales. On remarque que l'ensemble des allocations testées a un écart en deçà de 1% ce qui valide l'implémentation (les écarts résiduels peuvent être investigués dans un second temps, vraisemblablement lié aux obligations).

7.10 Amélioration envisageables du modèle de projection

Le modèle présenté est très loin des modèles que l'on peut rencontrer dans les compagnies d'assurance. A l'actif, les générateurs de scénarios économiques permettent de prendre en compte un nombre plus important de facteurs de risque (inflation, crédit, liquidité, etc.) et d'actifs (options, obligations indexées sur l'inflation, obligation d'entreprise, etc.) tout en permettant un pas de temps plus fin et des structures de dépendance complexes (utilisation de copules dans la génération de variables aléatoires par exemple). Au passif, une plus grande diversité de contrat est modélisée, souvent regroupée par similarités (épargne, retraite, contrats individuels ou collectifs, etc.). De plus, la gestion actif-passif prend en compte des mécanismes plus fins comme les dépréciations, les différentes réserves, les impôts différés, etc. En conclusion, il existe une multitude de méthodes afin de rendre ce modèle plus réaliste au prix d'un temps de calcul plus important, ce qui n'est pas l'objectif premier du modèle présenté dans ce mémoire.

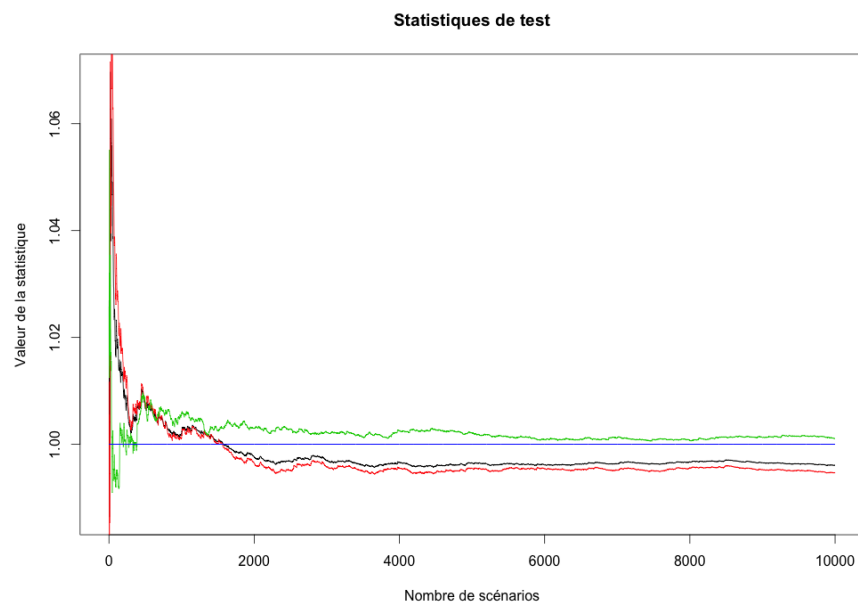


FIGURE 7.1 – Test de convergence du modèle pour différentes allocations. En noir, l'allocation mixte, en rouge l'allocation 100% obligation, en vert, l'allocation 100% actions et en bleu l'allocation 100% trésorerie.

Quatrième partie

Méta-modélisation de la MCEV et applications

Chapitre 8

Génération de courbes des taux choquées

Cette partie du mémoire est dédiée à la mise en œuvre des méthodes d'estimation pour des fonctions de la courbe des taux, dans l'objectif d'évaluer l'impact des modifications de conditions de marché. Ces estimations, comme présentées dans le chapitre suivant, nécessitent un échantillon d'apprentissage (pour être calibrées), qui sera ici un ensemble de courbes des taux. L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthodologie de construction de ces courbes, sur la base des modèles présentés au chapitre 6. Différentes méthodologies ont été envisagées dans la littérature, comme notamment [9], [12] et [13] sur lesquelles ce chapitre repose principalement. L'ensemble des courbes ainsi constitué comportera toujours la dernière courbe des taux observée, car elle est utilisée dans le calcul réglementaire.

8.1 Les différentes approches

L'objectif est de produire un ensemble de courbe des taux plausibles vis-à-vis de l'historique disponible. La première méthode consiste à sélectionner des courbes des taux parmi l'historique lui-même, ces dernières étant réalistes par définition. L'inconvénient réside dans le fait que d'une part, le nombre de courbes est limité et que d'autre part, les courbes anciennes témoignent de situations de marché différentes. La seconde catégorie de méthodes consistent à utiliser les décompositions linéaires du chapitre 6, et de proposer des courbes choquées grâce aux différentes composantes. Ainsi, toute nouvelle courbe des taux sera caractérisée par la courbe actuelle et par une combinaison linéaire de composantes. L'analyse de l'évolution de ces dernières n'étant pas concluante vis-à-vis de la modélisation de l'évolution de ces dernières, elles sont supposées être issues de bruits blancs indépendants. La figure 8.1 et 8.2 présentent quelques échantillons de courbes des taux simulées par cette méthodologie.

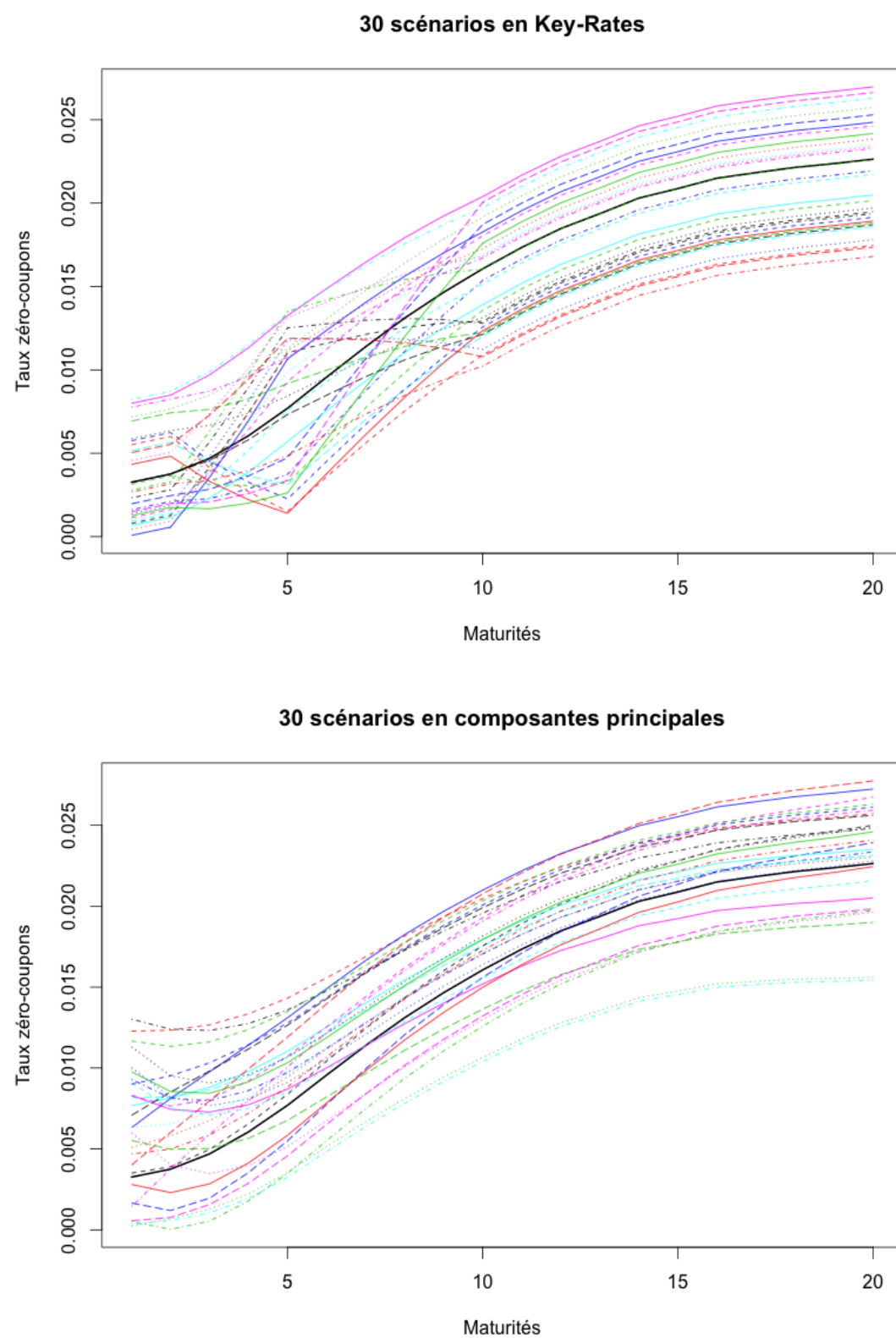


FIGURE 8.1 – Exemple d'échantillons de courbes des taux choquées par différentes méthodes.

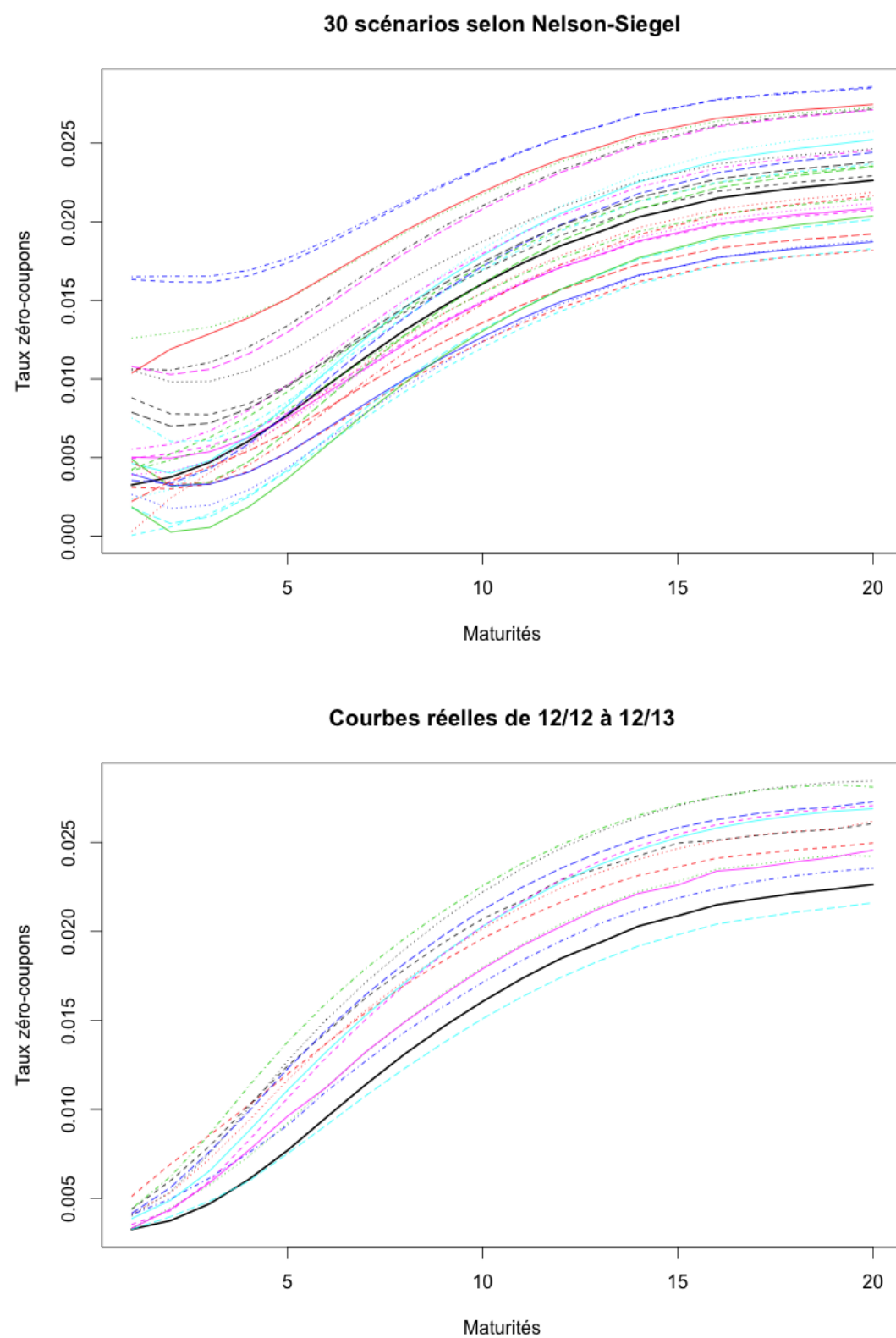


FIGURE 8.2 – Exemple d'échantillons de courbes des taux choquées par différentes méthodes.

8.2 Construction des courbes des taux choquées

Comme expliqué en amont, toute courbe choquée est la donnée de la dernière courbe des taux et d'un vecteur de dimension 3, associé aux différentes composantes du modèle choisi :

$$\forall \tau \in [1, T], R^{choc}(\tau) = R^{obs}(\tau) + \Delta \Psi(\tau) \quad (8.1)$$

où $R^{obs}(\tau)$ et $R^{choc}(\tau)$ sont respectivement les taux observés et choqués, $\Psi(\tau)$ un vecteur représentant les composantes du modèle associé à la maturité τ et Δ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Garantir des courbes des taux positives, revient à réduire l'espace des valeurs de composantes au polyèdre convexe défini par $\forall \tau \in [1, T], R^{choc}(\tau) \geq 0$. D'autres méthodes existent, comme la mise-à-zéro systématique des maturités négatives (cette solution change la forme des courbes des taux générées et perturbe l'estimation).

8.3 Chocs : hypercubes latins et polyèdre convexe

Pour rappel, voici quelques statistiques descriptives de l'évolution de ces dernières (les séries étudiées sont celles de variations trimestrielles) :

Composante	Quantile à 5%	Quantile à 95%
Niveau	-2,66	2,97
Pente	-1,09	0,87
Courbure	-0,29	0,23
ACP/I 1	-0,94	0,87
ACP/I 2	-1,45	1,35
ACP/I 3	-0,85	0,92
NS 1	-0,01	0,01
NS 2	-0,01	0,01
NS 3	-0,02	0,02

L'utilisation des quantiles permet de prendre une mesure qui soit homogène pour chaque composante, même si elles ne sont pas de même loi. L'espace retenu est alors un cube inclus dans $\mathbb{R}^3$ et spécifier une nouvelle courbe consiste à choisir un point de cet espace. De même, assurer la positivité des taux revient à faire l'intersection de ce cube avec le polyèdre défini par cette contrainte. La dépendance des composantes n'étant pas prise en compte, il convient de fouiller cet espace du mieux possible pour faire apparaître des courbes aussi variées que possible. Une des méthodes répondant à cet objectif est issue de la littérature sur les plans d'expérience, l'échantillonnage par hypercubes latins (*Latin Hypercube Sampling* ou LHS). En pratique, l'échantillon de courbe sera généré sans prendre en compte la contrainte de positivité, puis les courbes finales seront extraites de ces dernières, en sélectionnant celles qui vérifient la contrainte. La figure 8.3 présente la visualisation d'un plan d'expérience en 3 dimensions obtenu par cette méthode (selon différents points de vue, avant la prise en compte de la contrainte de positivité).

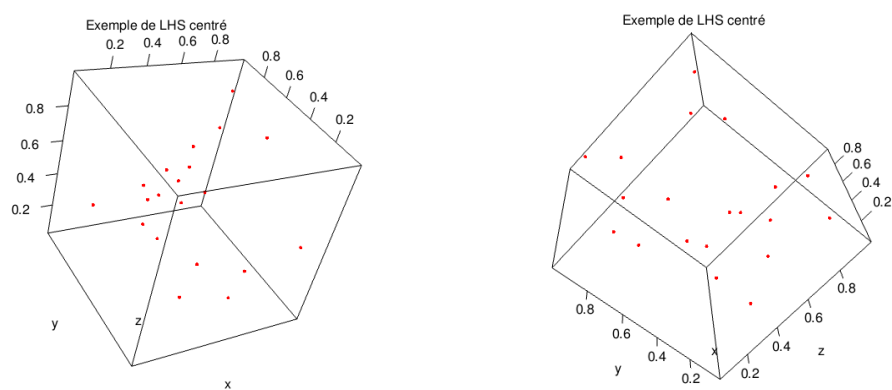


FIGURE 8.3 – Exemple de LHS centré en 3 dimensions généré à l'aide de DiceDesign.

Chapitre 9

Méta-modélisation

Ce chapitre présente le cœur du mémoire, à savoir les méthodes de régression de fonctions multivariées. La présentation n'est pas exhaustive mais ces outils représentent une base utile dans l'estimation de fonctions et un bon point d'ancrage dans cette littérature.

9.1 Objectif de la méta-modélisation

La *Market Consistent Embedded Value* est le résultat d'un calcul complexe et coûteux en temps car elle est estimée par des modèles avancés sur des portefeuilles d'actifs et de passifs très importants. S'il n'est pas possible de la calculer mensuellement, il est possible de l'estimer afin de contrôler son évolution dans le temps au travers de l'évolution du risque de taux.

Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de méta-modélisation (régressions de fonction) sont présentées afin de pouvoir estimer la MCEV pour toutes nouvelles courbe des taux, sur la base d'un nombre limité d'évaluations. Par la suite, la MCEV sera considérée comme une fonction continue f de la courbe des taux discrétisée $x \in E \in \mathbb{R}^d$:

$$f : x \in E \rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \quad (9.1)$$

où E est un espace compact et N le nombre d'évaluations réalisées à une date donnée pour plusieurs courbes des taux. Cet ensemble d'évaluations est un plan d'expérience, noté :

$$D = (x_i, f(x_i))_{i \in [1, N]} \quad (9.2)$$

Par la suite, le vecteur des observations sera noté f_D . L'objectif est alors de proposer une fonction $\hat{f}(x)$ qui soit proche de la fonction inconnue f et qui permette à une courbe donnée x_0 de proposer une estimation $\hat{f}(x_0)$ rapidement. Cette approche est appelée interpolation de fonction type boîte noire dans la littérature.

9.2 Modèle de régression linéaire

Les modèles de régression linéaires cherchent à reproduire le lien entre les variables explicatives x et la valeur prise par la fonction $f(x)$ par une relation linéaire. En spécifiant un ensemble de fonctions de base, le modèle s'écrit comme suit :

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=1}^J \beta_j B_j(x) = \beta B \quad (9.3)$$

Les bases de fonctions possibles sont très variées et seront restreintes ici aux polynômes d'ordre inférieur ou égal à 2. L'estimation des coefficients du modèle est réalisée par moindres carrés linéaires, ce qui mène à la formule d'estimation suivante :

$$\hat{\beta} = (B' B)^{-1} B' f_D \quad (9.4)$$

Lorsque le nombre d'évaluations correspond au nombre de paramètres du modèle, il est saturé et interpole exactement les données (sous réserve d'inversibilité de la matrice d'information). Dans le cas où le nombre d'observations est supérieur au nombre de paramètres, le modèle se comporte comme une régression.

9.3 Krigeage Gaussien

Le Krigeage est une modélisation probabiliste basée sur le concept de champs gaussiens, développée initialement en géostatistique [27]. La fonction inconnue à interpoler (déterministe) est supposée être une réalisation d'un processus stochastique gaussien défini sur un espace $E \in \mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, caractérisé par sa moyenne et son auto-covariance. De nombreuses variantes existent dans la littérature (voir [20], [36], [44] ou encore [8]) et seul le krigeage universel est abordé dans ce mémoire. Le lecteur intéressé par les détails théoriques pourra consulter l'annexe D ainsi que les références mentionnées.

9.3.1 Définition du Krigeage universel

Le Krigeage universel consiste à faire l'hypothèse que le processus sous-jacent est de la forme suivante :

$$Y(x) = \sum_{j=1}^J \beta_j B_j(x) + Z(x) = \beta B + Z, \quad (9.5)$$

où $\beta = (\beta_j)_{j \in [1, J]}$ est un vecteur de paramètres à estimer, $B = (B_j)_{j \in [1, J]}$ un ensemble de fonctions de base déterministe (qui constitue la moyenne du processus) et Z un processus gaussien centré. Lorsque les fonctions de base sont réduites à une constante, le modèle est dit krigeage ordinaire :

$$Y(x) = \mu + Z(x) \quad (9.6)$$

Comme énoncé précédemment, un processus gaussien est totalement caractérisé par ses fonctions moyenne m et d'auto-covariance R (confondue avec la notion de noyau par la suite, cf. annexe D), définies comme suit :

$$m(x) = \mathbb{E}[Y(x)] \quad (9.7)$$

$$R_\theta(x_1, x_2) = \text{Cov}_\theta(Y(x_1), Y(x_2)) = \mathbb{E}[(Y(x_1) - m(x_1))(Y(x_2) - m(x_2))] \quad (9.8)$$

où θ est un vecteur de paramètres (les fonctions d'auto-covariances utilisées sont de formes paramétriques). Les propriétés des trajectoires du processus et du méta-modèle sont directement héritées de la fonction d'auto-covariance choisie, notamment ce qui concerne les critères usuels de régularité (continuité, dérivabilité, etc.). Dans la suite, seul les noyaux de processus stationnaires seront présentés et utilisés pour des raisons de simplicité. D'autres noyaux existent, lorsque la fonction étudiée est supposée avoir des comportements différents dans l'espace par exemple. Les noyaux considérés s'expriment comme suit :

$$R_\theta(x, y) = \text{Cov}_\theta(Z(x), Z(y)) = \sigma^2 C(\|x - y\|) = \sigma^2 \prod_{i=1}^d c_i(\|x_i - y_i\|) = \sigma^2 \prod_{i=1}^d c_i(\|h_i\|) \quad (9.9)$$

A ce titre, de nombreuses fonctions existent et les plus utilisées sont les noyaux stationnaires paramétriques et isotropes suivants :

Noyau	$c_i(h_i)$	Propriétés des trajectoires
Gaussien	$\exp\left(-\frac{h_i^2}{2\theta^2}\right)$	Infiniment dérivables
Exponentiel	$\exp\left(-\frac{ h_i }{\theta}\right)$	Continues
Exponentiel Puissance	$\exp\left(-\left(\frac{ h_i }{\theta}\right)^p\right)$	Varié selon le paramètre p
Matérn $\frac{3}{2}$	$\left(1 + \frac{\sqrt{3} h_i }{\theta}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3} h_i }{\theta}\right)$	Continues et dérivables
Matérn $\frac{5}{2}$	$\left(1 + \frac{\sqrt{5} h_i }{\theta} + \frac{5h_i^2}{3\theta^2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5} h_i }{\theta}\right)$	Continues et deux fois dérivables

TABLE 9.1 – Principaux noyaux de covariance stationnaires.

D'autres familles de noyaux peuvent-être utilisées (cf. Chapitre 4 de [36]) et même combinées. La figure 9.1 présente la forme des covariances en fonction de la distance et les trajectoires des différents processus associés (Gaussien, Exponentiel et Matérn).

Une extension simple du modèle consiste à rajouter un bruit sur les observations du modèle (cf [7]), aussi appelé effet *nugget*. Ce terme de bruit est supposé indépendant et

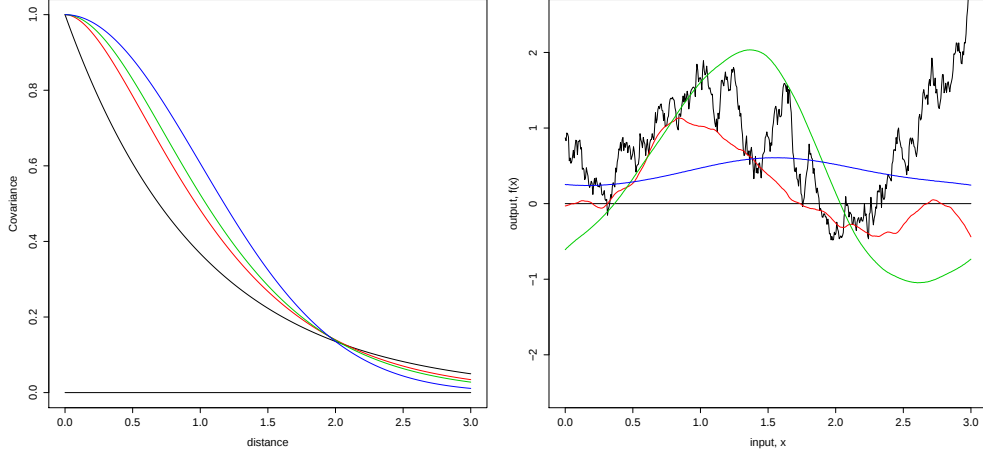


FIGURE 9.1 – Exemple de trajectoires unidimensionnelles selon les différents noyaux de covariance. En bleu, le noyau gaussien, en noir, le noyau exponentiel, en vert le noyau de Matern 5-2 et en rouge le noyau de Matern 3-2.

identiquement distribué et permet de prendre en compte une incertitude sur les données, comme par exemple l'incertitude issue des estimations de Monte-Carlo dans le cadre de simulations. D'autres extensions permettent de prendre en compte les valeurs des dérivées dans l'estimation du méta-modèle [17].

9.3.2 Estimations par vraisemblances

Afin d'ajuster correctement le modèle précédent, il est indispensable d'estimer les paramètres de tendance β (ou de moyenne μ pour le krigeage ordinaire), de variance σ^2 et de covariance θ à partir des données. L'utilisation de processus gaussiens facilite l'estimation, notamment à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Dans cette section, plusieurs estimateurs dérivés de l'approche par vraisemblance sont présentés et la notation suivante sera utilisée pour la matrice de Gram (matrice de variances-covariances des données observées) : $R(\theta) = (C(x_i, x_j))_{i,j \in [1,N]}$. Par définition, Y est un processus gaussien dont la fonction de vraisemblance est la suivante :

$$L(y, \mu, \sigma^2, \theta) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} |R(\theta)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y - \mu)^T R(\theta)^{-1} (y - \mu)\right) \quad (9.10)$$

En pratique, c'est la log-vraisemblance qui est maximisée numériquement (à l'aide d'un algorithme numérique génétique comme dans le package *DiceKriging* développé dans [30]) :

$$l(\mu, \sigma^2, \theta) = -\frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2} \log |R(\theta)| - \frac{1}{2\sigma^2} (y - \mu)' R^{-1}(\theta) (y - \mu) \quad (9.11)$$

D'après [17], la maximisation simultanée de (μ, σ^2, θ) est instable numériquement car $R(\theta)$ est presque singulière et la variance σ^2 peut être très faible. L'estimation de la moyenne et des autres paramètres séparément est conseillée car leurs estimateurs sont asymptotiquement indépendants et que les estimations de la variance et des paramètres de tendance conduisent à des formules analytiques. La convergence des estimateurs est assurée et le cas où peu d'observations sont disponibles est traité dans [20]. D'autres méthodes comme la maximisation de la pseudo-vraisemblance permettent aussi dans ce cadre de réduire la variance en ajoutant un biais.

9.3.3 Prédictions, conditionnement et méta-modèle

Une fois les paramètres du modèle estimés, il est possible de faire des prédictions en tout point de l'espace E en estimant le processus. L'estimateur linéaire sans biais et de variance minimale (BLUP, *Best Linear Unbiased Predictor*) n'est autre que l'espérance du processus conditionnée par les observations (cf. Proposition 1 de l'annexe D) :

$$\hat{f}(x) = E[f(x)|f_D] = \hat{\mu} + R(x)R(\theta)^{-1}(f(x) - \hat{\mu}) \quad (9.12)$$

où $R(x) = Cov(Z(x), Z(x_i))$ est le vecteur de corrélation entre le point d'estimation et les observations. De même, l'erreur de prévision est calculée sur la base de la variance du processus :

$$V(f(x)) = \sigma^2(1 - R(x)'R(\theta)R(x)) \quad (9.13)$$

La figure 9.2 illustre dans un cas unidimensionnel les notions de trajectoires conditionnées, de moyenne du processus et d'intervalle de prévision.

9.4 Validation croisée

Afin de valider et de comparer les méta-modèles, il est nécessaire de proposer un critère d'évaluation. Dans la littérature [8], on utilise souvent une distance, l'erreur en moyenne quadratique pondérée (*Integrated Weighted Mean Square Error* ou IWMSE) définie comme suit :

$$IWMSE = \int_E (f(x) - \hat{f}(x))^2 g(x) dx \quad (9.14)$$

où f représente la fonction inconnue, $\hat{f}$ le métamodèle et g une densité de probabilité sur E . L'utilisation d'une densité permet de mettre un a priori et donc d'insister sur certaines régions de l'espace. Lorsqu'aucune information n'est disponible ou souhaitable, la densité uniforme est utilisée. L'inconvénient (majeur) de cet indicateur dans cette étude, est qu'il requiert un grand nombre d'évaluation de f pour être approché. La solution la plus souvent utilisée est la validation croisée, qui consiste à évaluer le modèle en partitionnant

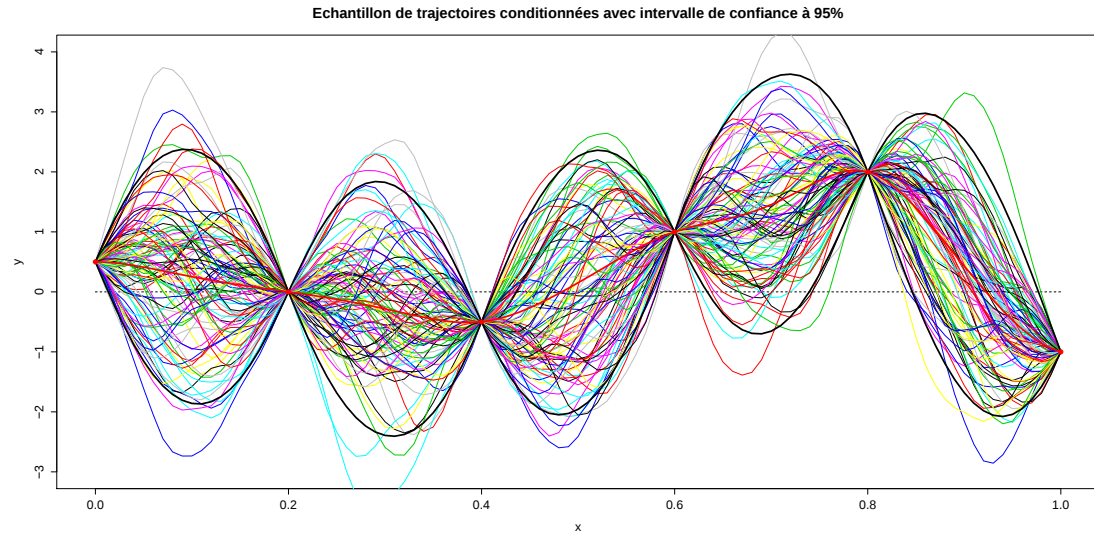


FIGURE 9.2 – Exemple de trajectoires conditionnées simulées à l’aide du package R *Dicekriging*. Les bornes de l’intervalle de prédiction sont représentées par les courbes noires (larges) et l’espérance du processus par la courbe rouge.

l’échantillon de points disponibles pour l’ajustement d’une part et le test d’autre part. Lorsque le nombre de point est relativement faible, un seul point est exclu à la fois (*Leave-one out*) :

$$IWMSE_{loo} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - \hat{f}_{-i}(x_i) \right)^2 g(x_i) \quad (9.15)$$

Chapitre 10

Applications

10.1 Estimation de produits de taux

Ce chapitre présente l'application des méthodes d'estimation précédentes à diverses fonctions des taux. L'objectif ici est de quantifier l'erreur d'estimation et de proposer une méthodologie satisfaisante pour l'estimation de la *MCEV*. Ainsi, différents modèles, plans d'expériences et fonctions seront utilisés. En particulier, un portefeuille obligataire et une modélisation de la *MCEV* simplifiée seront estimés (cette dernière étant issue du modèle présenté en partie 3 de ce mémoire).

10.1.1 Estimation d'une somme de flux unitaires

Dans ce premier cas, l'actif étudié est un portefeuille versant un flux unitaire certain chaque année pendant 20 ans. Son évaluation est obtenue directement par formule fermée et ne dépend que de la courbe des taux :

$$V = \sum_{\tau=1}^{20} \frac{1}{(1 + R(\tau))^{\tau}} \quad (10.1)$$

Aux vues de cette expression, différents comportements peuvent être déduits. Tout d'abord, cette fonction est toujours positive et très régulière (infiniment dérivable sur $R^{+,20}$). De plus, on peut s'attendre à une baisse du prix lorsque le niveau de la courbe augmente et inversement (phénomène très connu des opérateurs de marché). D'un autre côté, on voit que le prix est plus sensible au mouvement des maturités longues et donc à la pente de la courbe. A titre indicatif, la figure 10.1 illustre différents plans de coupe de l'obligation en fonction des composantes principales. On remarque que la valeur de l'actif semble linéaire, sur toutes les vues de coupe. Le niveau est clairement la composante qui ressort comme étant la plus influente.

Les résultats des différents cas d'étude (Modèle utilisé pour les chocs, nombre de scénarios, cf. section A.1 de l'annexe A pour les résultats) montrent différents éléments.

Tout d'abord, le choix d'un modèle de chocs particulier influe sur les performances d'estimation (par exemple, les modèles ajustés sur chocs parallèles sont moins précis que sur le modèle ACP). De plus, le méta-modèle a lui aussi un impact sur la qualité des prévisions, ici largement dominées par le polynôme d'ordre 2. En effet, que ce soit par validation croisée ou par test sur courbes réelles c'est toujours ce dernier qui est le plus efficace. De plus, son association avec les courbes choquées par analyse en composantes principales permet de réduire l'erreur d'estimation par un facteur 100 par rapport à l'approche classique parallèle. Les modèles de krigeage à noyaux lisses (Gaussien, Matérn ou encore Exponentiel Puissance) produisent des résultats intermédiaires, et nécessitent souvent plus d'observations.

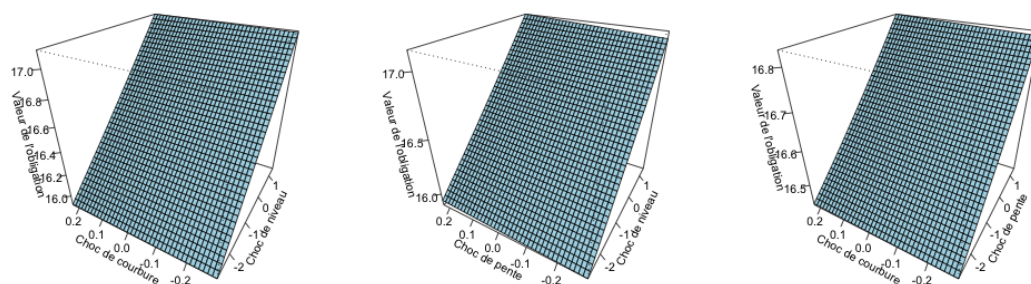


FIGURE 10.1 – Vue en coupe de l'actif obligataire selon les composantes de l'ACP.

10.1.2 Estimation de la *MCEV*

Le deuxième cas d'application des méthodes de méta-modélisation, et le sujet principal de ce mémoire, est l'estimation de la *MCEV*. Pour ce faire, le modèle présenté en troisième partie est utilisé, en supposant tous les paramètres constants (à part la courbe des taux). Les simulations seront réalisées avec 5000 scénarios pour chaque cas de test. Pour ce qui est de l'actif utilisé, il s'agit d'un mélange à 80% d'obligations (réparties en

valeur de marché uniformément sur les 30 maturités, soit une duration initiale de 15,5 ans), 19% d'actif de type action et de 1% de trésorerie.

Encore une fois, les résultats sont très différents en fonction du méta-modèle sélectionné et des chocs de taux utilisés (les résultats sont dans la section A.2 de l'annexe A). La méthode ACP semble fournir les résultats les plus précis (au sens de l'erreur quadratique moyenne) et le méta-modèle le plus stable est le polynôme d'ordre 2. En effet, le tableau A.2 montre bien que le polynôme d'ordre 2 est stable (légère variation de la RMSE avec le nombre de chocs considérés) et qu'il atteint une erreur faible dès le plus petit échantillon, là où le krigeage exponentiel puissance nécessite plus.

En conclusion de cette première application (dont les résultats sont disponibles dans les deux sections de l'annexe A), il est difficile de dégager une méthodologie privilégiée. En effet, bien que les chocs utilisant les composantes principales semblent les plus aboutis, la réduction de l'erreur quadratique moyenne est faible. De plus, les modèles de Krigeage, plus flexibles par construction sont plus difficiles à calibrer et paraissent moins robustes qu'une approche polynomiale simple. En définitive, l'approximation d'un modèle de MCEV est une tâche complexe, qui demande une investigation plus poussée. A ce stade, l'approche par chocs ACP associés à un polynôme d'ordre 2 semble être la plus « raisonnable ».

10.2 Estimation de mesures de risque

Ce chapitre présente une application du méta-modèle dans l'estimation de mesures de risque de taux. En effet, le méta-modèle ajusté précédemment peut être utilisé dans le cas d'une mesure de risque en le combinant à une approche de type Monte-Carlo. Soit f la fonction à estimer et $\hat{f}$ le méta-modèle associé. Il est alors tout à fait envisageable de remplacer l'une par l'autre dans le calcul de mesures de risques, en spécifiant un modèle pour l'évolution de la courbe des taux. La mesure de risque est estimée grâce à l'approximation suivante :

$$\rho(f(X)) \approx \rho(\hat{f}(X)) \quad (10.2)$$

où ρ est une mesure de risque (espérance, variance, quantile, etc.). Ainsi, un nombre restreint de courbes est utilisé avec le véritable modèle pour calibrer le méta-modèle (10, 30 ou 50 dans la suite), puis ce dernier est utilisé pour estimer la mesure de risque (cette fois le nombre de courbes est de 5000). Sur la base des chapitres précédents, le risque de taux sera modélisé par une loi uniforme pour les variations de composantes principales, sur le polyèdre convexe défini par l'intersection du cube des quantiles (défini par les quantiles à 5 et 95% des variations de chaque composante) et du demi espace défini par les contraintes de positivité de la courbe.

10.2.1 Mesures de risque de l'actif obligataire

La méthodologie est ici appliquée à l'actif obligataire et les mesures de risque choisies sont l'espérance, la variance et la valeur en risque à 1 et 99%. De par leur nature, les différentes mesures de risques testées sont plus ou moins difficiles à estimer. En effet, les quantiles sont par essence des mesures de risques plus sensibles aux comportements sur les bords. Les résultats numériques illustrent ce phénomène. Le méta-modèle polynomial montre une précision supérieure pour chaque mesure, et ce dès 10 points.

10.2.2 Mesures de risque de la MCEV

Dans cette section, la même méthodologie est appliquée au modèle de MCEV. Il est difficile de déterminer quel modèle est le plus précis car aucune formule fermée n'est disponible (ce qui est bien le problème ici). Cependant, observer la variation entre les différents modèles, pour différents nombres de scénarios renseigne sur la stabilité des estimations et donc potentiellement sur la robustesse d'un méta-modèle. A ce stade des travaux, les résultats obtenus ne sont pas concluants. Les modèles polynomiaux d'ordre 1 et de krigeage sont très proches tandis que le polynôme d'ordre 2 est très éloigné.

10.3 Applications potentielles

D'autres applications sont envisageables pour les techniques de méta-modélisation en gestion actif-passif. Par exemple, la question de l'allocation initiale optimale peut être envisagée. En effet, en considérant que la proportion de chaque actif fait partie des paramètres initiaux, un modèle de krigeage peut prendre en compte ces nouvelles dimensions. Ainsi, en utilisant chaque courbe des taux et allocation testées, le modèle permettra l'estimation du comportement pour d'autre paramétrage et donc de donner le paramétrage optimal, au prix d'une optimisation numérique. Plus particulièrement, la duration optimale peut être obtenue en choisissant une distribution des flux paramétrée (sur base d'une suite géométrique par exemple) ce qui a pour effet de réduire le nombre de dimension du problème. Ces applications n'ont pas été traitées dans le cadre de ce mémoire par manque de temps mais peuvent être très intéressantes d'un point de vue opérationnel.

Conclusion

En conclusion de ce mémoire, une méthodologie innovante d'estimation du risque de taux a été proposée. Cette approche, basée sur l'utilisation de méta-modèles, permet en théorie de remplacer l'utilisation d'un modèle ALM complexe et couteux en temps de calcul, par une approximation de ce dernier. L'avantage du méta-modèle va alors résider dans sa formule fermée, qui permet d'envisager des applications beaucoup plus gourmandes en utilisation du modèle. En effet, les méthodes numériques d'estimation par Monte-Carlo (dans le cas de l'estimation d'une mesure de risque) ou d'optimisation (dans le cas de la recherche d'un paramétrage optimal, exemple : la duration) pourront se baser sur un appel intensif au méta-modèle ou même des résultats analytiques (en particulier, les polynômes sont très pratiques). Dans l'état d'avancée actuel des travaux, beaucoup de questions restent sans réponses. L'approche envisagée, consistant à déterminer une méthodologie statistique pour générer des courbes choquées, puis à construire un méta-modèle pour l'estimation de la MCEV et de ses sensibilités est largement perfectible.

Premièrement, la méthodologie de génération de courbes choquées mérite d'être précisée, notamment en ce qui concerne la détermination d'un espace compact pour l'interpolation. Une modélisation de la dynamique des composantes, à l'aide de processus stochastiques multivariés dans un cadre dynamique ou par des copules dans le cas statique permettrait d'affiner la génération de composantes choquées. De même, les plans d'expériences utilisés sont des hypercubes latins maximin auxquels est rajouté le point d'évaluation correspondant aux conditions de marché. La répartition des points n'est alors plus optimale et cette question ne semble pas évidente à traiter. Une autre possibilité serait d'utiliser des modèles de diffusion pour la génération de courbes choquées et n'a pas encore été explorée.

D'un autre côté, le Krigeage semble être une approche prometteuse pour la modélisation de code de calculs. L'une des propriétés intéressantes dans le contexte de l'estimation de la MCEV est la possibilité de réaliser des intervalles de confiance quel que soit le nombre de points du plan d'expérience. De même, il est possible de donner un intervalle de confiance pour la dérivée du méta-modèle, ce qui mène par exemple à donner un intervalle de confiance pour le gap de duration. Cependant, l'estimation des paramètres du krigeage sur peu de données s'avère problématique et l'utilisation d'informations sur

les taux dans le choix du noyau peut être salulaire.

Une autre direction de recherche réside dans l'utilisation des résultats du calcul de Malliavin pour le calcul de sensibilités par Monte-Carlo (en utilisant les résultats de [18] et [19]). Premièrement, le gap de duration (et les autres sensibilités) pourront être estimées directement et cette information peut être utilisée dans la construction du méta-modèle. La difficulté majeure de ce type d'approche est la prise en compte de multiples diffusions, notamment les modèles de taux.

Finalement, le choix de l'indicateur du risque de taux n'a pas encore été étudié. La première piste consiste à définir des directions alternatives et multiples à l'aide des composantes principales par exemple. Une autre alternative suppose que les taux sont régis par un modèle de diffusion et de calculer les sensibilités par rapport aux conditions initiales (approche homogène à un calcul de grecques, [29]). D'un autre côté, un travail récent [26] étend la duration classique à un cadre fonctionnel en définissant la duration comme une dérivée de Malliavin dans le cadre de modèles de taux régis par l'équation aux dérivées partielles de Musiela. Aux vues des résultats obtenus, l'approche de méta-modélisation semble pertinente et pourrait faire l'objet d'un second mémoire sur le sujet.

Table des figures

1.1	Schéma simplifié d'un bilan comptable d'assurance.	10
1.2	Schéma simplifié d'un bilan prudentiel d'assurance	11
1.3	Synthèse des différences entre <i>EEV</i> et <i>MCEV</i> . Source : [16]	13
1.4	Benchmark de l' <i>Embedded Value</i> pour différentes compagnies. Source : [16]	15
2.1	Rotation pure de la courbe des taux.	21
4.1	Autocorrélogrammes du taux zéro-coupon 1 an (à gauche) et de sa première différenciation (à droite) sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.	31
4.2	Evolution des taux zéro-coupons de maturité 1 an (en noir), 10 ans (en rouge) et 20 ans (en vert) sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.	31
5.1	Illustration des 3 premières composantes principales obtenues.	35
5.2	Evolution des 3 premières composantes principales sur la période 2003 à 2013.	36
5.3	Erreur quadratique sur la totalité des données.	36
5.4	Auto-corrélations simple et croisées des composantes principales.	37
5.5	Auto-corrélations simple et croisées des composantes principales différenciées.	38
5.6	Auto-corrélations partielles simple et croisées des composantes principales différenciées.	38
5.7	Forme des 3 composantes indépendantes obtenues.	39
5.8	Evolution des 3 premières composantes principales sur la période 2003 à 2013.	40
5.9	Variation des composantes indépendantes.	40
5.10	Auto-corrélations simples et croisées des composantes indépendantes.	41
5.11	Auto-corrélations simples et croisées des composantes indépendantes différenciées.	41
5.12	Auto-corrélations partielles simples et croisées des composantes indépendantes différenciées.	42
5.13	Forme des composantes du modèle Nelson-Siegel.	43

5.14	Evolution des composantes du modèle Nelson-Siegel sur la période 2003 - 2013.	43
5.15	Evolution des composantes du modèle Nelson-Siegel sur la période 2003 - 2013.	44
5.16	Auto-corrélation des composantes du modèle Nelson-Siegel sur la période 2003 - 2013.	45
5.17	Auto-corrélation des composantes du modèle Nelson-Siegel différenciées sur la période 2003 - 2013.	45
5.18	Auto-corrélation partielles des composantes du modèle Nelson-Siegel différenciées sur la période 2003 - 2013.	46
6.1	Représentation des différentes statistiques de test en fonction du nombre de scénarios. En bleu et en vert, respectivement la statistique de martingale du déflateur et des actions et dividendes actualisés à 30 ans.	51
7.1	Test de convergence du modèle pour différentes allocations. En noir, l'allocation mixte, en rouge l'allocation 100% obligation, en vert, l'allocation 100% actions et en bleu l'allocation 100% trésorerie.	59
8.1	Exemple d'échantillons de courbes des taux choquées par différentes méthodes.	62
8.2	Exemple d'échantillons de courbes des taux choquées par différentes méthodes.	63
8.3	Exemple de LHS centré en 3 dimensions généré à l'aide de DiceDesign.	65
9.1	Exemple de trajectoires unidimensionnelles selon les différents noyaux de covariance. En bleu, le noyau gaussien, en noir, le noyau exponentiel, en vert le noyau de Matern 5-2 et en rouge le noyau de Matern 3-2.	69
9.2	Exemple de trajectoires conditionnées simulées à l'aide du package R <i>Dicekriging</i> . Les bornes de l'intervalle de prédiction sont représentées par les courbes noires (larges) et l'espérance du processus par la courbe rouge.	71
10.1	Vue en coupe de l'actif obligataire selon les composantes de l'ACP.	73
E.1	Représentation de la fonction <i>Branin</i> : à gauche un graphique en 3d et à droite les lignes de niveaux.	100
E.2	Représentation des différents modèles ajustés avec 20 points.	101
E.3	Représentation des différents modèles ajustés avec 20 points.	102

Liste des tableaux

1.1	Tableau récapitulatif de l' <i>Embedded Value</i> d'AXA France. Source : [6]	14
4.1	Statistiques descriptives des taux zéro-coupons euros swaps sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.	30
4.2	Matrice de corrélations des taux zéro-coupons sur la période 2002-2013 avec une fréquence quotidienne.	32
5.1	Proportion d'inertie expliquée selon le nombre de facteurs principaux retenus.	35
5.2	Erreur quadratique moyenne en fonction de l'échantillon retenu.	35
5.3	Corrélation des composantes en fonction de l'échantillon.	37
5.4	Statistiques des variations des composantes principales entre le 31/01/2003 et le 31/12/12.	37
5.5	Corrélation des composantes en fonction de l'échantillon.	44
5.6	Erreur quadratique moyenne en fonction de l'échantillon retenu.	44
5.7	Statistiques des variations des composantes du modèle Nelson-Siegel entre le 31/01/2003 et le 31/12/12.	45
9.1	Principaux noyaux de covariance stationnaires.	68
A.1	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs parallèles.	85
A.2	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs par <i>Key-Rates</i> .	85
A.3	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par <i>Key-Rates</i> .	86
A.4	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 2 composantes principales.	86
A.5	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 2 composantes principales.	86
A.6	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes principales.	87
A.7	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 3 composantes principales.	87
A.8	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur les composantes indépendantes.	87

A.9	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par composantes indépendantes.	88
A.10	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs par <i>Key-Rates</i>	88
A.11	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par <i>Key-Rates</i>	88
A.12	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs parallèles. (MCEV).	89
A.13	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs par <i>Key-Rates</i> . (MCEV)	89
A.14	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par <i>Key-Rates</i> . (MCEV)	89
A.15	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes principales. (MCEV)	90
A.16	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 2 composantes principales. (MCEV)	90
A.17	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes indépendantes. (MCEV)	90
A.18	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 3 composantes indépendantes. (MCEV)	91
A.19	RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes Nelson-Siegel. (MCEV)	91
A.20	RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 3 composantes Nelson-Siegel. (MCEV)	91
B.1	Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour l'actif obligataire. Estimation du méta-modèle sur 10 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.	92
B.2	Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour l'actif obligataire. Estimation du méta-modèle sur 30 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.	93
B.3	Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour l'actif obligataire. Estimation du méta-modèle sur 50 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.	93
B.4	Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour le modèle MCEV. Estimation du méta-modèle sur 10 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.	93
E.1	Q2 pour les différents modèles et les différents nombre de points.	100
E.2	RMSE pour les différents modèles et les différents nombre de points.	100
E.3	R2 et RMSE pour l'échantillon de test de 10 points (modèles ajustés avec 20 points).	101

Bibliographie

- [1] European embedded value principles.
- [2] Market consistent embedded value principles.
- [3] Risk-free interest rates - extrapolation method. Technical report, CEIOPS.
- [4] European embedded value principles. Technical report, CFO Forum, 2004.
- [5] Market consistent embedded value principles. Technical report, CFO Forum, 2009.
- [6] Rapport eev 2013. Technical report, AXA France, 2014.
- [7] Bruce Ankenman, Barry L. Nelson, and Jeremy Staum. Stochastic kriging for simulation metamodeling. *Operations Research*, 58(2) :371–382, March-April 2010.
- [8] Pierre Barbillon. *Méthode d'interpolation à noyaux pour l'approximation de fonctions de type boîte noire coûteuse*. PhD thesis, Université Paris-Sud XI, 2010.
- [9] Alexander N. Bogin and William M. Doerner. Generating historically-based stress scenarios using parsimonious factorization. *FHFA Working Paper*, 13(2), 2014.
- [10] François Bonnin, Frédéric Planchet, and Marc Juillard. Application de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux. 2011.
- [11] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*. Springer, 2006.
- [12] Arthur Charpentier and Christophe Villa. Generating yield curve stress-scenarios. 2010.
- [13] Jens H. E. Christensen, Jose A. Lopez, and Glenn D. Rudebusch. A probability-based stress test of federal reserve assets and income. *Federal Reserve Bank of San Francisco*, 2013(38), 2013.
- [14] Sylvie Cognet. Modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt et prévision des taux futurs par le modèle de nelson-siegel. Master's thesis, Institut de Sciences Financière et d'Assurance, Université Lyon 1, 2011.

- [15] Francis X. Diebold and Canlin Li. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 130 :337–364, 2005.
- [16] Tatyana Egoshina, Stuart Reynolds, Richard See Toh, Matt Cocke, and Philip Simpson. 2013 embedded value results generating value. Technical report, Milliman, 2014.
- [17] Kai-Tai Fang, Runze Li, and Agus Sudjianto. *Design and Modelling for Computer Experiments*. 2006.
- [18] Eric Fournié, Jean-Michel Lasry, Jerome Lebuchoux, and Pierre-Louis Lions. Applications of malliavin calculus to monte-carlo methods in finance. *Finance and Stochastics*, 3 :391–412, 1999.
- [19] Eric Fournié, Jean-Michel Lasry, Jerome Lebuchoux, and Pierre-Louis Lions. Applications of malliavin calculus to monte-carlo methods in finance ii. *Finance and Stochastics*, 5 :201–236, 2001.
- [20] David Ginsbourger. *Multiple métamodèles pour l’approximation et l’optimisation de fonctions numérique multivariées*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2009.
- [21] Anders Grosen and Peter Lochte Jorgensen. Fair valuation of life insurance liabilities : The impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies. *Insurance : Mathematics and Economics*, 26 :37–57, 2000.
- [22] John Hull. *Options, futures et autres actifs dérivés*. Pearson Education, 6e edition, 2007.
- [23] Werner Hürlimann. On directional immunization and exact matching. *Communications in Mathematical Finance*, 1(1) :1–12, 2012.
- [24] Aapo Hyvärinen and Erkki Oja. Independent component analysis : Algorithms and applications. *Neural Networks*, 13(4-5) :411–430, 2000.
- [25] Aapo Hyvärinen and Erkki Oja. Key-rates durations measures of interest rate risks. *The Journal of Fixed Income*, 2(2) :29–44, 2000.
- [26] Paul C. Kettler, Frank Proske, and Mark Rubstov. Sensitivity with respect to the yield curve : Duration in a stochastic setting. May 2010.
- [27] Danie Krige. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa*, 1951.
- [28] Robert Van Der Meer and Meye Smink. Strategies and techniques for asset-liability management : an overview. *The Geneva Papers on Risk and Insurance*, 18(67) :144–157, 1993.

- [29] Claus Munk. *Fixed Income Modelling*. Oxford, 2011.
- [30] Yves Deville Olivier Roustant, David Ginsbourger. Dicekriging, diceoptim : Two r packages for the analysis of computer experiments by kriging-based metamodeling and optimization. *Journal of Statistical Software*, 51, 2012.
- [31] Krzysztof M. Ostaszewski. *Asset-Liability Integration*. Society of Actuaries, 2002.
- [32] Vladimir Ostrovski. Efficient and exact simulation of the hull-white model. *SSRN Electronic Journal*, 2013.
- [33] Frédéric Planchet and Pierre E. Thérond. *Modèles financiers en assurance*.
- [34] Geoffrey Poitras. Partial immunization bounds and non-parallel term structure shifts. 2013.
- [35] Patrice Poncet and Roland Portrait. *Finance de Marché*. Dalloz, 2e edition, 2009.
- [36] Carl Edward Rasmussen. *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press, 2006.
- [37] F. M. Redington. Review of the principles of life-office valuations. Technical report, Institute of Actuaries, 1952.
- [38] Robert R. Reitano. Multivariate duration analysis. *Transactions of Society of Actuaries*, 43, 1991.
- [39] Robert R. Reitano. Multivariate immunization theory. *Transactions of Society of Actuaries*, 43, 1991.
- [40] Robert R. Reitano. Nonparallel yield curve shifts and convexity. *Transactions of Society of Actuaries*, 44, 1992.
- [41] Robert R. Reitano. Multivariate stochastic immunization theory. *Transactions of Society of Actuaries*, 45, 1993.
- [42] Thierry Roncalli. *La structure par terme des taux zéro : Modélisation et implémentation numérique*. PhD thesis, Université Montesquieu Bordeaux IV, 1998.
- [43] Gilvert Saporta. *Probabilités, analyse des données et Statistiques*. Technip, 2006.
- [44] Michael L. Stein. *Interpolation of Spatial Data : Some Theory for Kriging*. Springer, 1999.

Annexe A

Résultats numériques : Estimation simple

A.1 Estimation de l'actif obligataire

Mesure	RMSE				R2			
Observations	3	10	30	50	3	10	30	50
Pol. 1	3,74E-02	4,59E-02	4,33E-02	4,47E-02	98,40	97,59	97,86	97,73
Pol. 2	4,89E-02	4,87E-02	4,87E-02	4,87E-02	97,27	97,30	97,29	97,30
K. Gaussien	8,15E-02	4,91E-02	4,90E-02	4,87E-02	92,43	97,26	97,27	97,29
K. Matèrn 3-2	6,06E-01	8,78E-02	8,78E-02	6,68E-02	-318,37	91,21	91,21	94,91
K. Matèrn 5-2	1,13E-01	4,89E-02	4,89E-02	4,87E-02	85,50	97,27	97,28	97,29
K. Exp	3,28E-01	5,26E-02	5,20E-02	4,99E-02	-22,36	96,84	96,91	97,16
K. PowExp	1,88E-01	4,98E-02	4,97E-02	4,91E-02	59,66	97,18	97,19	97,25

TABLE A.1 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs parallèles.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	1,91E-2	2,05E-2	2,08E-2	99,58	99,52	99,51
Pol. 2	2,43E-3	2,46E-3	2,52E-3	99,99	99,99	99,99
K. Gaussien	1,21E-2	4,03E-3	3,01E-3	99,83	99,98	99,99
K. Matèrn 3-2	1,66E-2	7,94E-3	7,91E-3	96,68	99,93	99,93
K. Matèrn 5-2	5,52E-2	2,92E-2	2,97E-2	96,53	99,03	99,00
K. Exp	2,23E-1	1,90E-1	1,55E-1	43,49	58,90	72,66
K. PowExp	2,07E-2	4,39E-3	3,63E-3	99,51	99,98	99,98

TABLE A.2 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs par *Key-Rates*.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	8,78E-3	6,88E-3	7,38E-3	99,96	99,96	99,95
Pol. 2	1,43E-3	1,51E-4	1,41E-4	98,87	99,99	99,99
K. Gaussien	4,08E-2	1,40E-3	6,66E-4	98,15	99,99	99,99
K. Matèrn 3-2	5,21E-2	2,42E-3	9,92E-4	96,56	99,96	99,99
K. Matèrn 5-2	6,82E-2	6,04E-3	2,25E-3	77,44	99,96	99,99
K. Exp	1,23E-1	3,40E-2	2,01E-2	83,95	98,24	99,32
K. PowExp	5,66E-2	1,73E-3	7,91E-4	97,99	99,99	99,99

TABLE A.3 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par *Key-Rates*.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	1,94E-2	1,37E-2	1,18E-2	99,57	99,79	99,84
Pol. 2	1,31E-3	8,95E-4	8,90E-4	99,99	99,99	99,99
K. Gaussien	2,31E-2	5,51E-3	2,08E-3	99,39	99,96	99,99
K. Matèrn 3-2	5,81E-2	1,55E-2	6,76E-3	96,16	99,73	99,95
K. Matèrn 5-2	1,25E-1	3,81E-2	2,07E-2	82,15	98,35	99,51
K. Exp	3,49E-1	1,57E-1	1,18E-1	-39,23	71,73	84,25
K. PowExp	4,41E-2	8,53E-3	3,66E-3	97,78	99,92	99,98

TABLE A.4 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 2 composantes principales.

Mesure	RMSE			Q2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	1,33E-2	9,00E-3	8,47E-3	99,83	99,94	99,95
Pol. 2	2,03E-3	1,28E-4	1,77E-4	99,99	99,99	99,99
K. Gaussien	5,06E-2	1,73E-3	8,66E-4	96,68	99,99	99,99
K. Matèrn 3-2	7,51E-2	3,22E-3	1,36E-3	88,70	99,99	99,99
K. Matèrn 5-2	1,08E-1	6,62E-3	2,91E-3	77,44	99,96	99,99
K. Exp	2,06E-1	2,85E-2	1,90E-2	29,01	99,20	99,64
K. PowExp	7,62E-2	3,23E-3	1,14E-3	99,99	99,64	99,99

TABLE A.5 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 2 composantes principales.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	1,94E-2	1,37E-2	1,18E-2	99,57	99,79	99,84
Pol. 2	1,31E-3	8,95E-4	8,90E-4	99,99	99,99	99,99
K. Gaussien	2,31E-2	5,51E-3	2,08E-3	99,39	99,96	99,99
K. Matèrn 3-2	5,81E-2	1,55E-2	6,76E-3	96,16	99,73	99,95
K. Matèrn 5-2	1,25E-1	3,81E-2	2,07E-2	82,15	98,35	99,51
K. Exp	3,49E-1	1,57E-1	1,18E-1	-39,23	71,73	84,25
K. PowExp	4,41E-2	8,53E-3	3,66E-3	97,78	99,92	99,98

TABLE A.6 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes principales.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	1,33E-2	9,00E-3	8,47E-3	99,83	99,94	99,95
Pol. 2	2,03E-3	1,28E-4	1,77E-4	99,99	99,99	99,99
K. Gaussien	5,06E-2	1,73E-3	8,66E-4	96,68	99,99	99,99
K. Matèrn 3-2	7,51E-2	3,22E-3	1,36E-3	88,70	99,99	99,99
K. Matèrn 5-2	1,08E-1	6,62E-3	2,91E-3	77,44	99,96	99,99
K. Exp	2,06E-1	2,85E-2	1,90E-2	29,01	99,20	99,64
K. PowExp	7,62E-2	3,23E-3	1,14E-3	99,99	99,64	99,99

TABLE A.7 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 3 composantes principales.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	5,97E-3	6,18E-3	5,97E-3	99,96	99,96	99,96
Pol. 2	1,85E-3	1,21E-3	1,19E-3	99,99	99,99	99,99
K. Gaussien	2,63E-2	3,70E-3	2,07E-3	99,21	99,98	99,99
K. Matèrn 3-2	3,33E-2	7,49E-3	5,76E-3	98,73	99,94	99,96
K. Matèrn 5-2	5,84E-2	1,57E-2	1,61E-2	96,10	99,72	99,70
K. Exp	1,55E-1	7,47E-2	5,49E-2	72,55	93,64	96,56
K. PowExp	4,52E-2	6,07E-3	2,00E-3	97,67	99,96	99,99

TABLE A.8 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur les composantes indépendantes.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	7,13E-3	1,07E-2	1,21E-2	99,92	99,92	99,91
Pol. 2	1,18E-1	2,27E-4	2,58E-4	30,68	99,99	99,99
K. Gaussien	3,26E-2	3,31E-3	1,57E-3	98,45	99,97	99,99
K. Matèrn 3-2	5,81E-2	4,97E-3	2,40E-3	93,77	99,98	99,99
K. Matèrn 5-2	1,14E-1	1,10E-2	6,91E-3	79,99	99,90	99,96
K. Exp	2,52E-1	8,28E-2	4,78E-2	31,60	94,25	98,21
K. PowExp	5,27E-2	5,45E-3	1,41E-3	95,85	99,96	99,99

TABLE A.9 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par composantes indépendantes.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	1,96E-2	1,75E-2	1,53E-2	99,56	99,65	99,73
Pol. 2	2,75E-3	1,93E-3	2,02E-3	99,99	99,99	99,99
K. Gaussien	9,99E-2	1,94E-2	2,22E-3	88,63	99,57	99,99
K. Matèrn 3-2	1,69E-1	4,53E-2	1,39E-3	67,32	97,66	99,78
K. Matèrn 5-2	1,99E-1	9,49E-2	4,38E-2	54,96	89,72	97,81
K. Exp	2,70E-1	2,34E-1	2,03E-1	16,59	37,48	52,87
K. PowExp	1,68E-1	1,88E-2	3,19E-3	67,49	99,60	99,99

TABLE A.10 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs par *Key-Rates*.

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	1,20E-2	8,86E-3	7,39E-3	99,91	99,96	99,96
Pol. 2	4,67E-2	1,04E-4	9,62E-5	96,69	99,99	99,99
K. Gaussien	3,60E-2	3,00E-3	1,03E-3	99,30	99,99	99,99
K. Matèrn 3-2	5,91E-2	4,12E-3	1,22E-3	97,65	99,97	99,99
K. Matèrn 5-2	8,89E-2	8,43E-3	3,19E-3	93,98	99,93	99,98
K. Exp	2,00E-1	3,81E-2	2,32E-2	68,96	98,81	99,41
K. PowExp	5,68E-2	3,15E-3	8,06E-4	98,29	99,98	99,99

TABLE A.11 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par *Key-Rates*.

A.2 Estimation de la MCEV

Mesure	RMSE				R2			
Observations	3	10	30	50	3	10	30	50
Pol. 1	81,80	86,72	89,43	88,84	94,01	93,26	92,84	92,93
Pol. 2	80,96	81,00	81,14	80,93	94,13	94,12	94,10	94,13
K. Gaussien	99,63	110,71	696,74	583,67	91,11	89,02	-335,80	-205,12
K. Matèrn 3-2	213,98	106,34	105,90	93,19	58,99	89,87	89,95	92,22
K. Matèrn 5-2	101,56	81,40	81,12	80,88	90,76	94,07	94,11	94,14
K. Exp	134,01	82,79	81,84	81,16	83,92	93,86	94,00	94,10
K. PowExp	108,37	82,44	84,26	81,88	89,48	93,91	93,64	94,00

TABLE A.12 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs parallèles. (MCEV).

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	137,83	148,70	145,04	82,98	80,19	81,16
Pol. 2	62,43	63,90	60,68	96,51	96,34	96,70
K. Gaussien	43,51	57,88	63,50	98,30	97,00	96,39
K. Matèrn 3-2	46,17	63,66	56,27	98,09	96,37	97,16
K. Matèrn 5-2	58,46	73,40	62,55	96,94	95,17	96,50
K. Exp	207,38	181,17	134,43	61,48	70,60	83,81
K. PowExp	49,50	63,39	58,77	97,81	96,40	96,91

TABLE A.13 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs par *Key-Rates*. (MCEV)

Mesure	RMSE			Q2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	92,71	84,67	81,76	97,52	96,63	96,73
Pol. 2	5,39	1,84	1,49	99,98	99,99	99,99
K. Gaussien	71,37	3,74	3,85	96,87	99,99	99,98
K. Matèrn 3-2	91,39	3,92	2,07	96,72	99,99	99,99
K. Matèrn 5-2	107,05	10,95	4,05	95,98	99,93	99,99
K. Exp	183,17	54,23	32,40	86,35	98,30	99,21
K. PowExp	95,48	5,71	2,43	96,28	99,98	99,99

TABLE A.14 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs par *Key-Rates*. (MCEV)

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	152,37	114,35	95,00	79,21	88,29	91,92
Pol. 2	48,99	51,31	52,27	97,85	97,64	97,55
K. Gaussien	30,81	47,97	48,72	99,15	97,94	97,87
K. Matèrn 3-2	52,10	53,32	47,49	97,57	97,45	97,98
K. Matèrn 5-2	122,42	77,15	58,71	86,58	94,69	96,91
K. Exp	387,13	203,35	145,80	-34,24	62,96	80,96
K. PowExp	56,24	47,95	46,28	97,17	97,94	98,08

TABLE A.15 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes principales. (MCEV)

Mesure	RMSE			Q2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	166,94	98,35	97,42	91,47	96,78	96,24
Pol. 2	106,98	2,74	3,89	96,81	99,99	99,99
K. Gaussien	115,78	2,85	3,88	92,80	99,99	99,99
K. Matèrn 3-2	122,43	5,04	1,67	89,38	99,99	99,99
K. Matèrn 5-2	163,67	9,28	3,91	81,90	99,96	99,99
K. Exp	346,15	56,46	39,47	30,92	98,85	99,35
K. PowExp	346,15	56,46	39,47	83,48	99,99	99,99

TABLE A.16 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 2 composantes principales. (MCEV)

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	2602,73	2333,31	2421,06	-59,67	-47,76	-51,50
Pol. 2	3139,73	3244,27	3271,13	-87,29	-93,27	-94,84
K. Gaussien	657,75	2453,08	2730,99	-2,87	-52,89	-65,80
K. Matèrn 3-2	744,84	2321,14	2851,24	-3,97	-47,25	-71,81
K. Matèrn 5-2	400,81	2097,01	2609,66	-0,44	-38,39	-59,99
K. Exp	379,05	1213,89	1540,61	-0,29	-12,20	-20,26
K. PowExp	682,78	2224,74	3031,05	-3,18	-43,33	-81,29

TABLE A.17 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes indépendantes. (MCEV)

Mesure	RMSE			Q2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	80,40	82,71	94,97	94,30	96,55	96,65
Pol. 2	968,08	3,43	3,75	-27,25	99,99	99,99
K. Gaussien	181,86	19,32	6,40	68,56	99,77	99,98
K. Matèrn 3-2	240,63	13,05	4,53	48,48	99,92	99,99
K. Matèrn 5-2	223,71	23,74	13,40	22,02	91,16	96,90
K. Exp	356,60	121,56	74,67	22,02	91,16	96,90
K. PowExp	177,65	13,31	2,29	68,03	99,88 99,99	

TABLE A.18 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 3 composantes indépendantes. (MCEV)

Mesure	RMSE			R2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	145,50	101,26	85,81	81,03	90,82	93,41
Pol. 2	77,21	80,26	79,71	94,66	94,23	94,31
K. Gaussien	163,08	53,61	66,05	76,18	97,43	96,09
K. Matèrn 3-2	243,96	103,98	77,00	46,69	90,32	94,69
K. Matèrn 5-2	232,68	161,64	107,19	51,51	76,60	89,71
K. Exp	242,22	249,86	252,26	47,45	44,08	43,00
K. PowExp	312,21	93,55	77,67	12,69	92,16	94,60

TABLE A.19 – RMSE et R2 pour les modèles ajustés à partir des chocs sur 3 composantes Nelson-Siegel. (MCEV)

Mesure	RMSE			Q2		
Observations	10	30	50	10	30	50
Pol. 1	91,08	67,98	60,76	97,86	98,91	98,84
Pol. 2	166,84	1,01	1,08	81,01	99,99	99,99
K. Gaussien	88,49	2,20	4,00	97,59	99,99	99,99
K. Matèrn 3-2	98,85	5,01	1,87	96,75	99,99	99,99
K. Matèrn 5-2	145,57	11,56	92,20	99,95	99,98	
K. Exp	342,16	65,59	38,18	65,70	98,47 99,26	
K. PowExp	132,66	4,38	1,58	95,64	99,99	99,99

TABLE A.20 – RMSE et Q2 estimés par validation croisée sur la base des chocs de 3 composantes Nelson-Siegel. (MCEV)

Annexe B

Résultats numériques : Estimation de mesures de risque

Modèle	Espérance	Variance	Quantile 1%	Quantile 99%
Formule fermée	16,549	0,200	15,882	17,585
Pol. 1	16,544	0,191	15,873	17,525
Pol. 2	16,550	0,202	15,881	17,593
K. Gaussien	16,506	0,141	15,889	17,129
K. Matèrn 3-2	16,472	0,109	15,890	16,934
K. Matèrn 5-2	16,445	0,090	15,891	16,853
K. Exp	16,377	0,051	15,929	16,752
K. PowExp	16,477	0,112	15,888	16,969

TABLE B.1 – Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour l'actif obligataire. Estimation du méta-modèle sur 10 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.

Modèle	Espérance	Variance	Quantile 1%	Quantile 99%
Formule fermée	16,549	0,200	15,882	17,585
Pol. 1	16,548	0,197	15,868	17,545
Pol. 2	16,549	0,200	15,882	17,584
K. Gaussien	16,548	0,198	15,884	17,565
K. Matèrn 3-2	16,547	0,196	15,886	17,533
K. Matèrn 5-2	16,544	0,189	15,891	17,450
K. Exp	16,524	0,147	15,921	17,211
K. PowExp	16,548	0,197	15,883	17,556

TABLE B.2 – Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour l'actif obligataire. Estimation du méta-modèle sur 30 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.

Modèle	Espérance	Variance	Quantile 1%	Quantile 99%
Formule fermée	16,549	0,200	15,882	17,585
Pol. 1	16,548	0,197	15,868	17,545
Pol. 2	16,549	0,200	15,882	17,584
K. Gaussien	16,548	0,198	15,884	17,565
K. Matèrn 3-2	16,547	0,196	15,886	17,533
K. Matèrn 5-2	16,545	0,189	15,891	17,450
K. Exp	16,524	0,147	15,921	17,211
K. PowExp	16,548	0,197	15,883	17,556

TABLE B.3 – Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour l'actif obligataire. Estimation du méta-modèle sur 50 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.

Modèle	Espérance	Variance	Quantile 1%	Quantile 99%
Pol. 1	-17729	1,74e5	-18522	-16915
Pol. 2	-15489	2,50e7	-20368	2120
K. Gaussien	-17632	1,77e5	-18985	-16509
K. Matèrn 3-2	-17687	1,87e5	-18863	-16555
K. Matèrn 5-2	-17649	1,89e5	-18901	-16532
K. Exp	-17639	6,84e4	-18460	-16914
K. PowExp	-17700	1,99e5	-18913	-16548

TABLE B.4 – Comparaison des méta-modèles pour l'estimation de mesure de risque pour le modèle MCEV. Estimation du méta-modèle sur 10 courbes, estimation Monte-Carlo sur 5000 courbes choquées par ACP.

Annexe C

Implémentation du modèle de taux : Hull & White

Cette annexe est dédiée à la méthodologie utilisée pour simuler les trajectoires du taux court dans le modèle. Cette dernière est issue de [32], qui propose une implémentation exacte du modèle. Soit r_t le processus de taux court défini par l'équation stochastique suivante :

$$dr_t = (v(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t, \quad (\text{C.1})$$

avec les notations précédentes. Alors le taux court peut s'écrire comme la somme d'un processus stochastique et d'un terme déterministe :

$$r_t = x_t + \beta(t) \quad (\text{C.2})$$

où $\beta(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - \exp(-at))^2$ et x_t un processus stochastique d'équation différentielle suivante :

$$dx_t = -ax_t + \sigma dW_t, x(0) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Soit un instant $s \in \mathbb{R}^+$ observé, alors les processus $x_t|x_s$ et $\int_s^t x_u du$ sont tous deux gaussiens et ont pour premiers moments les quantités suivantes (théorème 1 p.2 de [32]) :

$$\mathcal{E}(x_t|x_s) = x_s \exp(-a(t-s)), \quad (\text{C.4})$$

$$\mathcal{E}\left(\int_s^t x_u du | x_s\right) = \frac{1}{x_s} (1 - \exp(-a(t-s))), \quad (\text{C.5})$$

$$\text{Var}(x_t|x_s) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - \exp(-2a(t-s))), \quad (\text{C.6})$$

$$\text{Var}\left(\int_s^t x_u du | x_s\right) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left(t - s + \frac{2}{a} \exp(-a(t-s)) - \frac{1}{2a} \exp(-2a(t-s)) - \frac{3}{2a}\right), \quad (\text{C.7})$$

$$\text{Cov}\left(x_t, \int_s^t x_u du | x_s\right) = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - \exp(-a(t-s)))^2. \quad (\text{C.8})$$

La preuve de ces résultats est donnée dans l'article cité. Il suffit alors de générer un vecteur de loi normale, en utilisant la décomposition de Cholesky pour obtenir la matrice de variance covariance décrite.

Annexe D

Processus stochastiques gaussiens

Le Krigeage repose sur la notion de processus gaussien dont la définition est rappelée dans cette section. Afin de faciliter la compréhension, d'autres définitions utiles sont rappelées sur la base des travaux [8], [20], [36] et [44].

D.1 Loi normale multivariée et conditionnement

Les définitions qui suivent concernent plus particulièrement les processus gaussiens.

Définition 1 (Loi Normale multivariée). *Un vecteur aléatoire X suit une loi normale multivariée $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ si et seulement si sa fonction densité associée s'écrit de la façon suivante :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_{\mu, \Sigma}(x) = \frac{1}{(2\Pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) \quad (\text{D.1})$$

où μ représente le vecteur moyenne et Σ la matrice de variances-covariances.

Proposition 1 (Loi normale multivariée conditionnée). *Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{L}(\mu_X, \Sigma_X)$ avec :*

$$\mu_X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

Alors la loi de X_1 sachant X_2 est une loi normale dont les paramètres sont les suivants :

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (X_2 - \mu_2) \quad (\text{D.4})$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{22} - \Sigma_{12}^T \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \quad (\text{D.5})$$

D.2 Processus

Définition 2 (Processus Stochastique et trajectoires). *Soit (Ω, F, P) un espace probabiliste, (E, Ξ) un mesurable et I un ensemble d'indices. Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires à valeurs dans (E, Ξ)*

Définition 3 (Processus stationnaire fort (au premier ordre), source : Ginsbourger). *Un processus aléatoire $(Z(x))_{x \in E}$ est dit fortement stationnaire si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall h \in E$ et $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ l'égalité en loi suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{L}(Z(x_1 + h), \dots, Z(x_n + h)) = \mathcal{L}(Z(x_1), \dots, Z(x_n)) \quad (\text{D.6})$$

Définition 4 (Processus stationnaire faible (au second ordre)). *Un processus aléatoire $(Z(x))_{x \in E}$ est dit stationnaire à l'ordre p si $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, les moments jusqu'à l'ordre p de la loi de $(Z(x_1), \dots, Z(x_n))$ ne dépendent que des différences $(x_i - x_j)_{i,j \in [1,n]}$.*

Définition 5 (Processus continu en moyenne quadratique, source : Barbillon). *Soit Z un processus stochastique stationnaire sur E dont les deux premiers moments sont définis, il est continu en moyenne quadratique si et seulement si :*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{E}[(Z(x) - Z(0))^2] = 0 \quad (\text{D.7})$$

Comme indiqué dans Barbillon, écrire la continuité en 0 implique la continuité en tout point du processus par hypothèse de stationnarité. De plus, l'égalité précédente peut s'exprimer directement en fonction de la fonction d'auto-covariance R :

$$\mathbb{E}[(Z(x) - Z(0))^2] = \mathbb{E}[Z(x)^2 + Z(0)^2 - 2Z(x)Z(0)] \quad (\text{D.8})$$

$$= R(x, x) + R(0, 0) - 2R(x, 0) \quad (\text{D.9})$$

En résumé, un processus stationnaire est continu en moyenne quadratique si et seulement si sa fonction d'auto-covariance est continue en 0.

Définition 6 (Dérivée en moyenne quadratique). *Soit Z un processus stationnaire tel que les dérivées $\frac{\partial^2 R}{\partial x_k \partial x_j}(x, y)$ existent et soient finies à l'origine. La dérivée en moyenne quadratique est la limite suivante :*

$$\partial_i Z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Z(x + h) - Z(x)}{h}. \quad (\text{D.10})$$

De plus, la fonction d'auto-covariance du processus $\partial_i Z$ est donnée par $\frac{\partial^2 R}{\partial x_k \partial x_j}(x, y)$.

Définition 7 (Processus Gaussien). *Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé. Un processus stochastique Z est gaussien si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ la loi de $(Z(x_1), \dots, Z(x_n))$ est une loi normale multivariée.*

Définition 8 (Fonction Noyau). *Un noyau est une fonction symétrique $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. De plus, il est défini positif si $\forall m \in \mathbb{N}, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \forall (x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^d)^m$,*

$$\sum_{1 \leq l, m \leq N} \lambda_l \lambda_m K(x_l, x_m) \geq 0 \quad (\text{D.11})$$

L'intérêt pratique de ces définitions réside dans la possibilité de déterminer certaines propriétés des trajectoires du processus à partir de la fonction d'auto-covariance pour les processus gaussiens. Le théorème 2.3 (p.26 de Barbillon) donne une condition suffisante sur la régularité de la fonction d'auto-covariance pour que les trajectoires du processus soient continues (presque sûrement).

Annexe E

Estimation d'une fonction à deux dimensions

Cette annexe a pour but d'illustrer les différentes méthodes présentées dans ce mémoire. Il s'appuie sur l'exemple présenté dans la documentation du package du logiciel R *DiceEval* et *DiceKriging* développé par le consortium DICE (dice.emse.fr). La fonction *Branin* sous-jacente est la suivante :

$$f(x, y) = \left(y - \frac{5x^2}{4\pi^2} + \frac{5x}{\pi} - 6 \right)^2 + 10 \cos(x) \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) + 10. \quad (\text{E.1})$$

Les différents modèles présentés précédemment sont ajustés (avec un effet *nugget* pour les modèles de Krigeage) et la méthode de validation croisée utilisée pour différents cas de test (20, 40 et 80 points). Les tableaux E et E présentent les mesures de Q2 et de RMSE et les figures E.2 et E.3 les lignes de niveaux de chacun des modèles. Aux vues de ces résultats, les modèles de krigeage semblent plus performants (en particulier avec les noyaux matérn 5,2 et exponentiel puissance). Afin de vérifier que les critères d'ajustement correspondent bien avec la qualité de projection, un échantillon de test est utilisé pour calculer l'erreur en prédiction (cf. tableau E).

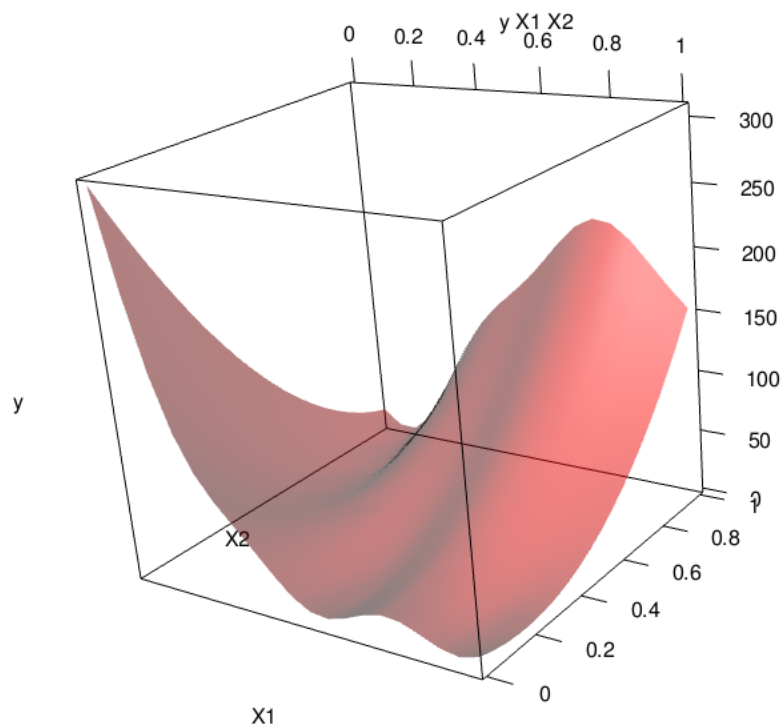


FIGURE E.1 – Représentation de la fonction *Branin* : à gauche un graphique en 3d et à droite les lignes de niveaux.

Q2	P.1	P.2	K. Gauss.	K. mat. 5-2	K. mat. 3-2	K. exp.	K. powexp
20	-3.3%	48.5%	54.6%	97.7%	89.9%	46.1%	98.6%
40	-12,8%	56,8%	-5,2%	99,7%	98,5%	80,8%	99,8%
80	65,5%	76,8%	99,9%	99,9%	99,9%	96,8%	99,9%

TABLE E.1 – Q2 pour les différents modèles et les différents nombre de points.

RMSE	P.1	P.2	K. Gauss.	K. mat. 5-2	K. mat. 3-2	K. exp.	K. powexp
20	69.6%	54.6%	41.6%	9.7%	19.9%	49.6%	6.9%
40	78,3%	47,0%	79,4%	2,0%	4,7%	19,3%	2,0%
80	66,0%	37,6%	0,2%	0,4%	1,3%	8,4%	0,3%

TABLE E.2 – RMSE pour les différents modèles et les différents nombre de points.

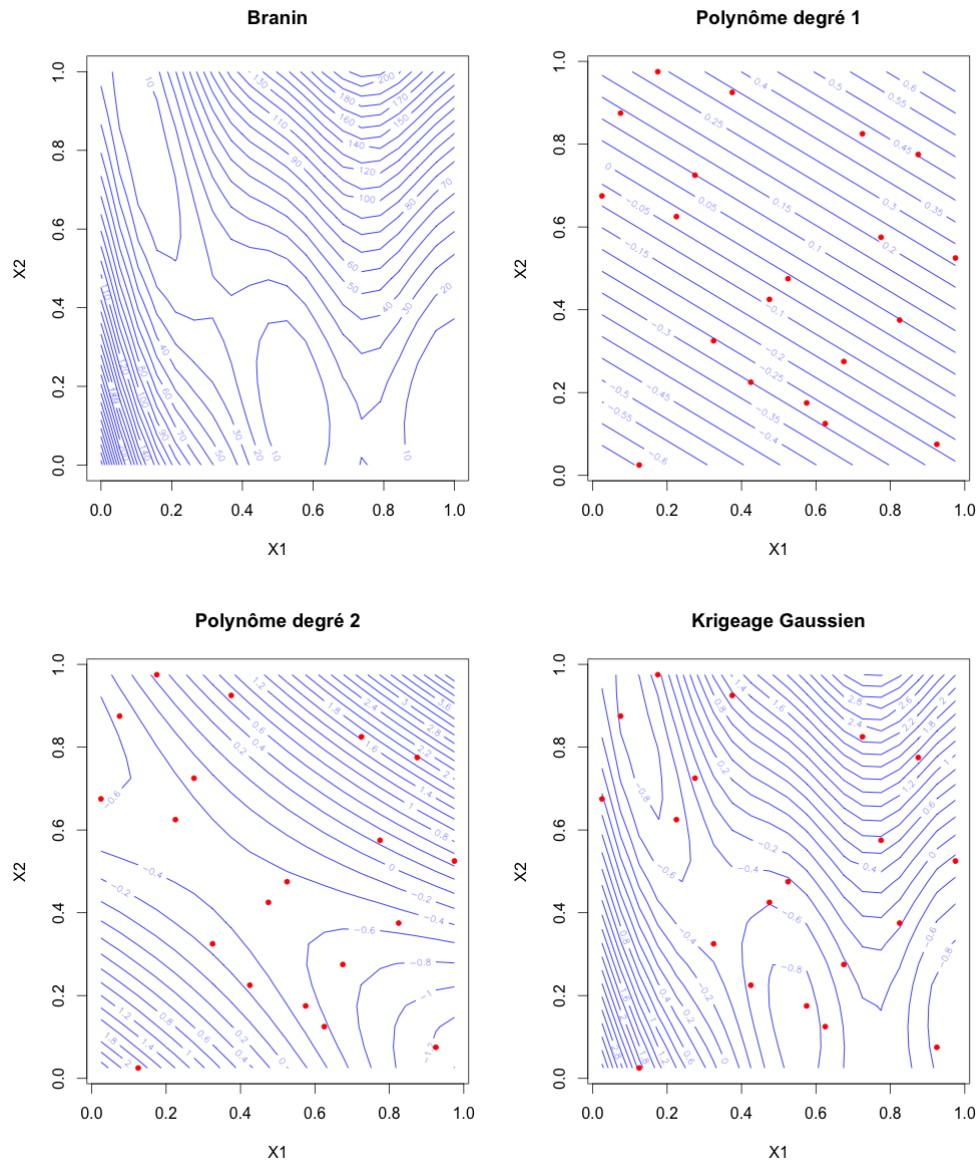


FIGURE E.2 – Représentation des différents modèles ajustés avec 20 points.

Mesure	P.1	P.2	K. Gauss.	K. mat. 5-2	K. mat. 3-2	K. exp.	K. powexp
R2	-7,3%	4,4%	96,4%	94,4%	90,2%	55,4%	96,4%
RMSE	98,3%	92,8%	17,9%	22,5%	29,7%	63,3%	17,9%

TABLE E.3 – R2 et RMSE pour l'échantillon de test de 10 points (modèles ajustés avec 20 points).

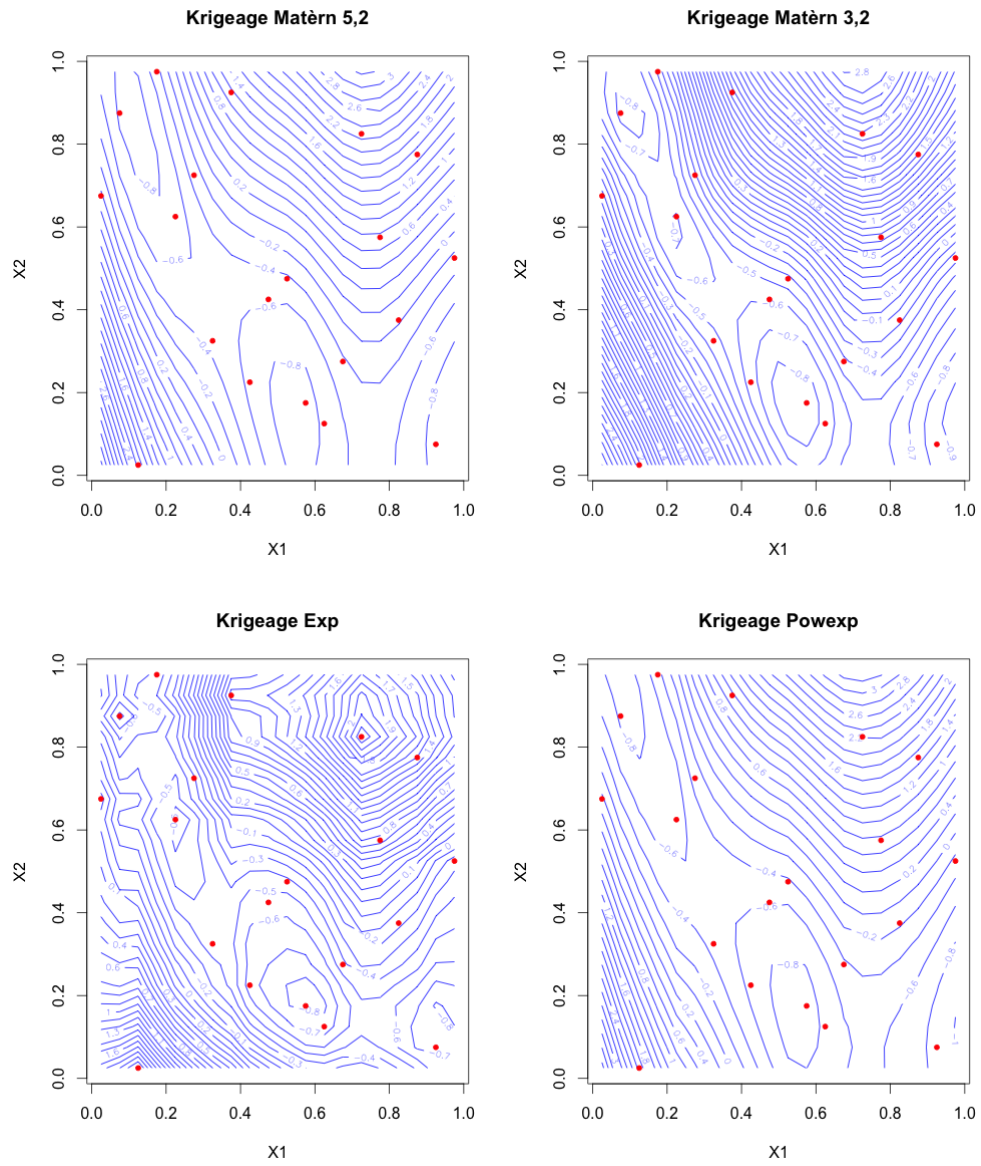


FIGURE E.3 – Représentation des différents modèles ajustés avec 20 points.