

**Mémoire présenté  
pour l'obtention  
du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg « DUAS »  
et du Diplôme du Master mention Finance  
spécialité « Actuariat et Gestion du Risque »  
le 5 OCTOBRE 2010**

par : Samuel WEILL

Titre : **Impacts de modèles de longévité, standards  
et innovants, pour un portefeuille de rentes  
espagnoles**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

Membres du jury de l'institut des Actuares :

Entreprise : AXA GLOBAL LIFE

M. Edouard DEBONNEUIL

Directeur de mémoire en entreprise :

Membres du jury de l'université de Strasbourg :

Invité :

Mme Armelle GUILLOU  
M. Jean-Luc NETZER  
M. Hansjoerg ALBRECHER  
M. Philippe ARTZNER  
M. Frédéric BERTRAND  
Mme Marie-Hélène BROIHANNE  
M. Karl-Théodor EISELE  
M. Jacques FRANCHI  
M. Christophe GODLEWSKI  
M. Bernard HEINKEL  
M. Nicolas KLUTCHNIKOFF  
M. Bertrand KOEBEL  
M. Maxime MERLI  
M. Patrick ROGER

**Autorisation de mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Secrétariat : Mme Pierrette XIMENEZ

61 avenue de la Forêt Noire

67085 STRASBOURG

Tél : 03 68 85 20 54

Bibliothèque du PEGE : Tél : 03 68 85 22 23

## **REMERCIEMENTS**

En préambule de ce mémoire de Master d'actuariat, je souhaiterais adresser mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes m'ayant accompagné dans l'accomplissement de ce travail.

Je pense tout d'abord à Edouard Debonneuil, Directeur de l'équipe de recherche et développement, qui m'a encadré pour l'élaboration de ce mémoire et fait confiance pendant toute ma période de stage.

Je remercie également Madame Marie-Hélène Broihanne d'avoir accepté de superviser ce mémoire.

Je pense également à l'ensemble de l'équipe d'AXA Global Life pour son accueil chaleureux qui m'a permis de m'intégrer rapidement et agréablement dans le groupe. Plus particulièrement, je souhaiterais remercier Paul Unfried pour m'avoir fait part de ses conseils pour la réalisation de ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à l'ensemble du corps professoral de l'université de Strasbourg pour la qualité de l'enseignement dont j'ai bénéficié et les moyens qu'il m'a donnés pour pouvoir réaliser ce mémoire.

Enfin je ne peux terminer mes remerciements sans mentionner mon épouse pour son soutien de chaque instant et pour ses conseils quant à la réalisation de ce travail.

## Table des matières

RESUME.....	4
ABSTRACT.....	5
INTRODUCTION.....	6
I. Généralités.....	8
1) Définitions et notations actuarielles.....	8
2) Risque de longévité.....	9
2.1 Définition.....	9
2.2 Enjeu pour l'assureur.....	10
3) Mesure de la mortalité.....	11
3.1 Mortalité de la population espagnole : aperçu statique.....	11
3.2 Une meilleure mesure de la mortalité : les Tables générationnelles.....	14
3.3 Représentation de la mortalité.....	15
4) Limite des tables prospectives.....	16
II. Modèles de projection de mortalité.....	18
A. Modèles existants.....	18
i. Modélisation des taux de mortalités historiques.....	21
1) Le modèle de Lee Carter.....	21
2) Le modèle Log Poisson.....	22
3) Le modèle de Renshaw et Haberman (M2).....	27
4) Le modèle APC (Age-Period-Cohort) (M3).....	30
5) Cairns, Blake and Dowd model (CBD) (M5).....	31
ii. Extrapolation aux grands âges et fermeture des tables.....	32
1) Coale & Kisker.....	33
2) Le modèle de Kannistö.....	34
iii. Projection de mortalité.....	36
iv. Critères de sélection d'un modèle.....	38
1) Le BIC (Bayesian information criterion).....	38
2) Analyse de résidus.....	38
3) Backtesting.....	39
B. Vers de nouveaux Modèles.....	40
1) Un besoin de nouveaux modèles.....	40
2) Une extension des modèles relationnels : le modèle M9.....	40
3) Modélisation par causes spécifiques de décès.....	42
4) Le modèle de VAUPEL.....	44
5) Modèle proposé par Léonid GAVRILOV.....	47
III. Résultats et applications des modèles à un portefeuille de rentes espagnoles.....	51
A. Modèles pertinents pour modéliser au mieux la longévité en Espagne.....	51
1) Comparaison des modèles standards.....	51
2) Les modèles standards confrontés aux modèles issus de la recherche.....	58
3) Les tables réglementaires.....	59
4) Comparaison des modèles aux tables réglementaires.....	62
B. Application à un portefeuille de rentes espagnoles.....	64
1) Caractéristiques du portefeuille.....	64
2) Impact des modèles sur les engagements d'AXA Espagne.....	65
3) L'application d'un scénario catastrophe sur les engagements.....	67
4) Vers un swap de longévité.....	69
CONCLUSION.....	72
ANNEXES.....	73
Bibliographie.....	76

# RESUME

---

La longévité, terme qualifié pour désigner l'allongement de la durée de vie, représente un risque important pour les assureurs, instituts de prévoyance et fonds de pensions proposant des garanties en rentes viagères. En effet une augmentation de la durée de vie aurait pour conséquence directe de prolonger la durée de versement d'une rente.

Ce risque est particulièrement présent lorsque la population assurée est une population de retraités ayant cotisé pendant toute leur période d'activité. L'assureur serait, dans le cas d'une baisse de mortalité, tenu à son engagement de versement de rente pour une période plus longue que prévue. Cette somme ne pourrait pas être récupérée par un ajustement des versements de primes de la part de l'assuré. On retrouve donc ce risque principalement sur les produits à prestations définies.

Afin de pouvoir mesurer un risque de longévité, il est nécessaire de disposer de tables prenant en compte l'évolution future de la mortalité, de telles tables sont dites prospectives.

Dans ce mémoire nous cherchons à évaluer le risque de longévité d'un portefeuille de rentes espagnoles détenu par AXA Espagne. Nous établirons des tables prospectives via les modèles standards en nous basant sur la population nationale espagnole.

Afin de mieux comprendre comment pourrait évoluer la mortalité, nous chercherons également à utiliser de nouveaux modèles d'élaboration de tables prospectives, issus de la recherche d'experts, et qui pourraient permettre de pallier à certaines limites des modèles standards.

Les résultats de l'application de l'ensemble de ces modèles seront appliqués sur les engagements d'un portefeuille de rentes espagnoles afin d'en comparer l'impact financier.

# ABSTRACT

---

Longevity, term qualified to describe the lengthening of life, represents a significant risk to insurers, welfare institutions and pension funds providing guarantees in annuities. Indeed an increase in life expectancy would direct consequence of extending the duration of payment of annuity.

This risk is particularly present when the insured population is a population of retirees, who paid their premiums throughout their period of professional activity. The insurer would, in the case of a decrease in mortality, given its promise to pay annuities for a period longer than expected. This amount could not be recovered by adjusting premium payments from the insured. Therefore, there is this risk primarily on defined benefit products.

To measure the risk of longevity, it is necessary to have tables taking into account the future evolution of mortality, such tables are called "Prospective tables".

In this memory we seek to evaluate the longevity risk of a portfolio of annuity held by AXA Spain. We will establish prospective tables looking over the standard models by basing on the Spanish national population.

To better understand how mortality might evolve, we will also seek to use new development models tables, based on research of experts, which could enable to bear the some limitations of standard models.

The results of all these models will be applied on the commitments of a Spanish annuities portfolio in order to compare their financial impact.

# INTRODUCTION

---

Le monde de l'assurance et sa réglementation vivent actuellement des évolutions considérables (normes IFRS, directive Solvabilité II), où la préoccupation du risque inhérent à l'activité tient une place primordiale.

Les tables de mortalité constituent le référentiel central de toutes les activités d'une compagnie d'assurance exerçant dans la branche vie, des instituts de prévoyance et fonds de pension puisqu'elles permettent d'estimer la probabilité de survie ou de décès des personnes assurées.

Des tables sous-estimant la mortalité de la population assurée exposent l'assureur à un risque de longévité.

Face à la constante évolution de l'espérance de vie et dans un contexte où l'on cherche à évaluer le risque à sa juste valeur (*best estimate*) pour le calcul des engagements au passif d'une compagnie d'assurance, les tables de type instantané peuvent paraître dépassées pour l'évaluation des engagements en rentes viagères. Il semble préférable d'avoir recours à des tables générationnelles. Le passé a montré que l'amélioration de l'espérance de vie a été trop souvent sous estimée. Si même les améliorations anticipées n'étaient pas suffisantes qu'en serait-il de l'utilisation d'une table instantanée sans amélioration ?

Les tables prospectives sont aujourd'hui celles recommandées aux actuaires. Ainsi l'emploi de telles tables devrait diminuer l'exposition au risque de longévité.

La plupart des méthodes permettant l'élaboration de tables prospectives reposent sur l'hypothèse que la mortalité future évoluera comme son évolution passée.

Ce mémoire s'attache à utiliser les méthodes actuelles et à chercher de nouvelles méthodes d'élaboration de tables prospectives, issues de la recherche d'experts en longévité et démographie pour pouvoir apprécier le risque de longévité tout en essayant de pallier à certaines limites des méthodes actuelles.

L'ensemble des données permettant cette étude sera issu des données HMD (human mortality database) de la population espagnole.

Nous aborderons dans une première partie les définitions et généralités concernant les mesures de mortalité et de longévité. Nous illustrerons cela à travers une étude succincte de l'évolution de la mortalité de la population espagnole.

Dans une seconde partie, nous développerons tout d'abord différents modèles permettant d'obtenir des tables de mortalité prospectives. Cette partie sera également consacrée au développement de nouveaux modèles, élaborés par des chercheurs et experts en démographie

Dans la dernière partie, les résultats des différents modèles seront dans un premiers temps confrontés, et évalués.

Enfin, à la lumière de ces travaux nous tenterons d'apprécier l'exposition au risque de longévité d'un portefeuille de rentes viagères garanties par AXA en Espagne.

# I. Généralités

Avant de détailler les modèles de longévité, il convient de présenter avant tout les notations actuarielles utilisées pour les constructions de tables de mortalité qui sont au cœur de nos études. Nous définirons ce que représente un risque de longévité, et son enjeu pour l'assureur. Une étude sur la population espagnole sera également abordée pour avoir un aperçu des évolutions de mortalité dans cette population et des deux grandes approches pour représenter ce phénomène à savoir la représentation par tables instantanées et par tables prospectives.

## 1) Définitions et notations actuarielles

Définition 1.1: On appelle  $T_x$  la variable aléatoire représentant la durée de vie d'un individu âgé de  $x$  années. Lorsque  $x = 0$ ,  $T$  représente l'espérance de vie d'un nouveau né.  $T_x$  est donc la durée de vie résiduelle pour un individu âgé de  $x$  années

Une personne vivant à l'âge  $x$  décèdera à l'âge  $x + T_x$ . Pour pouvoir mesurer cette variable, un bon indicateur statistique permettant de mesurer un niveau de mortalité consiste à calculer son espérance mathématique.

Définition 1.2 : on notera  $e_x^0$  l'espérance mathématique de la variable  $T_x$

$$e_x^0 = E[T_x] = \int_{t \geq 0} P[T_x > t] dt$$

Il correspond au temps moyen restant à vivre pour un individu d'âge  $x$ .

Définition 1.3: La variable aléatoire  $L_x$  représente le nombre de personnes vivant à l'âge  $x$ . Cette définition est la base sur laquelle toutes les autres notations seront effectuées.

Définition 1.4:  ${}_n D_x$  représente le nombre de décès survenus entre l'âge  $x$  et  $x + n$ .

$${}_n D_x = l_x - l_{x+n}$$

Définition 1.5 : on note  ${}_n p_x$ , la probabilité qu'un individu d'âge  $x$  vive jusqu'à l'âge  $x + n$  :

$${}_n p_x = P[T_x > n] = P[T > x + n / T > x] = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

De même la probabilité pour un individu d'âge  $x$  de décéder avant l'âge  $x + n$  est notée  ${}_n q_x$ .

$${}_n q_x = P[T_x \leq n] = P[T \leq x + n / T > x] = \frac{{}_n d_x}{l_x} = 1 - {}_n p_x$$

Dans les tables actuarielles, la mortalité par âge est donnée par la probabilité de décéder dans l'année pour un âge donné, notée  $q_x$  (l'indice 1 est omis lorsque t vaut 1).

Définition 1.6 : On note  $\mu_{x+t}$  le taux instantané de mortalité à l'âge  $x + t$  (parfois appelé force de mortalité). Cette valeur représente la probabilité de décéder subitement et instantanément au moment  $x + t$ . On a par définition :

$$\mu_{x+t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{P[t < T_x \leq t + \Delta t / T_x > t]}{\Delta t}$$

Après avoir énoncé les principales définitions utilisées dans les tables de mortalité actuarielles nous pouvons définir le risque de longévité.

## 2) Risque de longévité

### 2.1 Définition

Afin d'avoir une idée claire de ce qu'est le risque de longévité, nous pouvons nous référer à la définition qu'en donne Solvency 2 : « une forme de risque biométrique. Un changement en valeur causé par une baisse inattendue de la mortalité actuelle. »

Le risque de longévité correspond au risque que la population assurée vive plus longtemps que la prévision faite à partir de la table de mortalité utilisée. Il apparaît en assurance de personnes sur les produits à prestation en cas de vie, principalement les rentes viagères où une longévité accrue impactera négativement les résultats; en effet, le montant des prestations dues par l'assureur peut devenir supérieur aux provisions mises en place par celui-ci pour faire face à ses engagements.

Le risque de longévité est la résultante de deux phénomènes liés entre eux: L'augmentation de l'espérance de vie d'une part, et d'autre part la multiplication des souscriptions en rentes viagères. La rente viagère doit son succès dans le fait qu'elle est une alternative à l'allongement de la durée de vie, permettant aux assurés de se garantir un certain niveau de vie une fois parti en retraite).

Une fois en retraite, la plupart des individus bénéficient d'une pension en vertu d'un régime obligatoire d'assurance vieillesse. Etant donné le niveau souvent modeste des pensions versées dans le cadre du premier pilier, bon nombre d'entre eux désirent se constituer un complément de retraite.

Ainsi l'allongement de la durée de vie, auquel s'ajoute le recul de la solidarité familiale, tend à accroître le risque de dépenses des retraités et par conséquent à accroître le nombre de souscriptions à des rentes viagères.

De plus, l'Espagne est un pays où les rentes à la retraite sont d'une générosité exceptionnelle et parmi les plus généreuses dans le contexte européen. Si bien que des discussions actuelles parlent de repousser l'âge de la retraite actuellement de 65 ans à 67 ans pour pouvoir faire face aux engagements.

Les bases techniques d'un contrat d'assurance vie sont principalement de deux types. D'une part, le taux d'intérêt technique qui permet d'actualiser les flux financiers générés par le contrat, mais aussi une loi de survenance des décès qui se présente sous forme de table de mortalité. C'est cette table de mortalité qui est au cœur de la problématique qu'est la longévité. Longtemps le risque de longévité a été ignoré car la haute performance des marchés financiers, permettait d'équilibrer les pertes liées au décalage (baisse) de la mortalité. La baisse des rendements du marché financier de ces dernières années a relancé la question de la nécessité de prendre en compte ce risque de longévité.

## **2.2 Enjeu pour l'assureur**

La longévité est un risque difficile à appréhender par les compagnies d'assurance car il repose sur des bases en constante évolution. Il doit donc être évalué en tenant compte de son évolution future dans le calcul des primes. En effet, l'assureur s'engage sur un tarif dès le départ. Il en est de même concernant le calcul des provisions qui doivent être calculé le plus justement possible.

Ainsi le choix de la table de mortalité est le cœur de la problématique de la longévité.

Il existe deux catégories de tables utilisées par les actuaires permettant d'avoir des estimations de mortalité.

Les tables de mortalité instantanées, périodiques : elles caractérisent la mortalité de la population actuelle dans sa globalité: une même probabilité de décès est appliquée quelle que soit la génération de la personne assurée, qui peut être identique pour toute la population ou segmentée suivant des variables influençant de manière significative le risque de décès (Homme/Femme, Fumeur/Non Fumeur...).

Les tables dynamiques, prospectives ou encore générationnelles : ce sont des tables bidimensionnelles, deux variables expliquent le décès, à la fois l'âge de l'assuré mais aussi le temps. Les probabilités de survenance du risque de mortalité intègrent les évolutions potentielles de la mortalité avec le temps (recul de la mortalité, phénomène de longévité).

Ainsi lorsque le risque est viager, notamment sous forme de rente, la table de mortalité utilisée se doit d'être prospective pour prendre en compte l'évolution future de la mortalité.

Idéalement, les tables prospectives devraient être élaborées à partir des données d'expérience plutôt que de se baser sur des références externes (tables nationales, tables réglementaires) qui ne reflètent pas fidèlement la réalité du risque. Cependant, une telle construction se heurte à un manque de données. Un portefeuille étant en général insuffisamment riche en données et en historique pour observer les tendances nécessaires à la construction d'une table générationnelle. Si bien qu'il est en général impossible d'établir une table prospective sur de telles bases sans s'appuyer sur des observations de mortalité au niveau national pour pouvoir dégager des tendances sur le long terme.

### 3) **Mesure de la mortalité**

Concernant la mortalité, en toute rigueur, Solvency 2 recommande d'utiliser des tables de mortalité prospectives quelque soit le risque, de mortalité ou de survie. Ces tables doivent être *best estimate*. La construction de telles tables n'est pas évidente en pratique sur un portefeuille, notamment pour ce qui concerne l'identification de la tendance d'évolution des taux de décès. Toutefois en pratique,

- lorsque l'horizon est court, nous pouvons négliger cette dérive (typiquement sur 5 ans)
- lorsque l'horizon de projection est plus long, il convient de distinguer les garanties en cas de décès et les garanties en cas de vie: dans le premier cas, utiliser des tables du moment est prudent et évite un risque de modèle important. Cette solution doit donc être privilégiée. Dans le second cas, la prudence impose de recourir à des tables prospectives dont la construction peut alors être envisagée par positionnement et en rapport à des références externes.

S'il est clair que les tables prospectives sont les seules valables pour l'étude de la longévité on peut montrer le décalage que présente une approche statique par rapport à une approche prospective, en montrant l'évolution de la mortalité de la population espagnole

#### **3.1 Mortalité de la population espagnole : aperçu statique**

Les tables de mortalité instantanées ou périodiques proposent une mortalité telle qu'elle est aperçue sur la population actuelle pour tout âge, à un moment donné.

Pour construire de telles tables, il est d'usage d'observer un groupe d'individus sur une période de temps donné (1 à 3 ans) et de relever le nombre de décès recensé par tranche d'âge ou par âge. Ainsi on peut reconstituer les taux de mortalité pour ces âges ou certaines tranches d'âges sur la période observée.

La probabilité de décès attribuée est la même quelque soit la génération de la personne assurée. Pour un sexe donné, ces tables ne font pas d'autres distinctions que l'âge de l'assuré, et dans cette mesure ne permettent pas de prendre en compte une évolution de la mortalité d'où un autre nom, également utilisé pour les désignées : les Tables statiques.

Cette approche se heurte à un obstacle majeur: supposons que l'actuaire utilise les  $q_x$  obtenus à partir d'une année d'observation. La population observée d'âge  $x$  servira à estimer les probabilités  $q_x$  de décéder dans l'année pour un individu ayant atteint cet âge. Or des calculs de primes utilisant ces probabilités ne refléteront le risque réel d'aucun assuré du portefeuille (sauf dans l'hypothèse peu probable que la mortalité d'évoluerait plus).

Cette approche transversale semble donc dangereuse si elle est utilisée dans des opérations en cas de vie.

Pour nous rendre compte des limites d'une telle approche, il est intéressant d'observer l'évolution des taux de mortalité de la population espagnole sur différentes années.

La figure 1 représente l'évolution des taux de mortalité de la population espagnole sur la période 1908-2006 pour les hommes.

Comme le montre l'allure générale de ces courbes, et de manière similaire quelque soit l'année d'observation, nous constatons une mortalité qui est croissante en fonction de l'âge (à partir des âges avoisinants les 50 ans) et qui décroît en fonction de la période. Pour notre part, l'étude la mortalité aux jeunes âges, présentant quelques spécificités, ne nous intéresse guère puisque notre population d'assurés est une population de retraités.

Cette allure générale est caractéristique de toutes les courbes de mortalité que l'on peut trouver dans la plupart des pays. Certes des phénomènes de mortalité peuvent apparaître de manière plus ou moins marquée selon les pays mais, l'allure générale reste une constante.

L'analyse de l'évolution de la mortalité dans le temps nous montre qu'il peut sembler inadéquat de se suffire de tables statiques dans l'activité assurancielle.

En effet, les figures suivantes (figure 1) mettent en relief une baisse flagrante de mortalité, une baisse qui s'avère d'autant plus prononcée que la période se rapproche de la période actuelle.

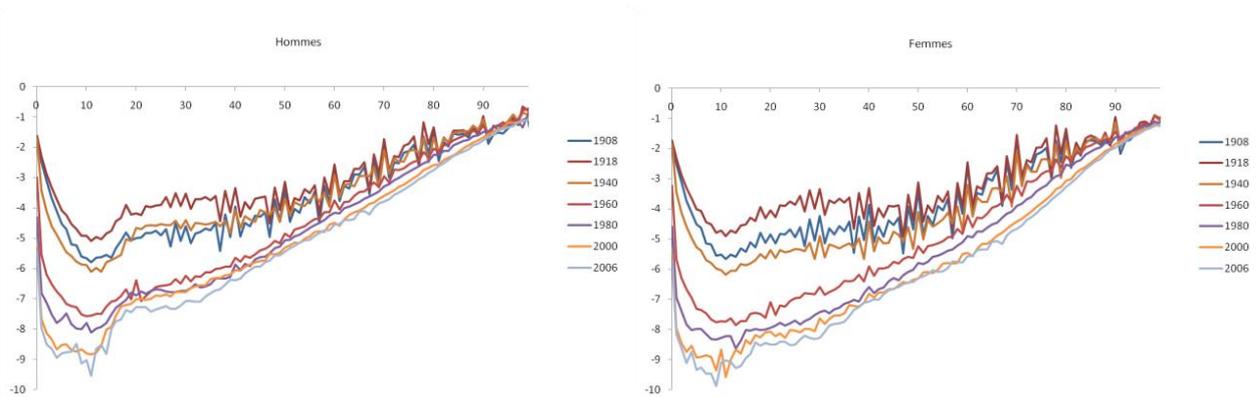


Figure 1. Evolution de la mortalité en Espagne (en  $\ln(qx)$ )

Nous constatons que plus la période est avancée, plus la mortalité est basse (à l'exception des années 1918, où la population a été touchée par la grippe espagnole et les années 1940 où la guerre civile provoqua de nombreux morts particulièrement chez les hommes).

Outre ces décalages s'expliquant par leur contexte historique, le constat d'une baisse de la mortalité au fil des années ne peut être remis en question.

Une autre possibilité pour s'en rendre compte est de regarder l'évolution des espérances de vie à la naissance. Bien entendu, le calcul de cette espérance de vie est basé sur une approche « table statique » ne tenant pas compte des progrès médicaux et de leurs améliorations engendrées sur les individus. (Ainsi la définition de l'espérance de vie à partir d'une table instantanée est bien entendu de nature à donner une espérance inférieure à celle que l'on peut avoir à l'issue de l'utilisation d'une table prospective.

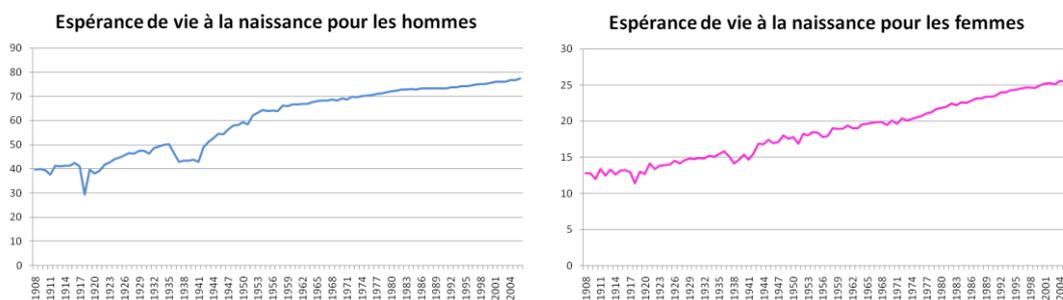


Figure 2. Evolution de l'espérance de vie espagnole

Comme le montrent les graphiques ci-dessus (figure 2), pour les hommes l'espérance de vie a augmenté de 95,12% (39,7 à 77,4 ans) sur la période 1908-2006 et de 30,16% sur la période 1950-2006)

Pour les femmes, l'espérance de vie, plus élevée a connu une évolution encore plus spectaculaire 102,8% (41,4 à 83,9) sur la période 1908-2006 et 30,5 % sur la période 1950-2006)

Cependant notre population assurée étant une population de plus de 60 ans, il est plus intéressant d'avoir une idée de l'évolution de l'espérance de vie pour de tels âges qui sont représentatifs de notre portefeuille. De plus, la baisse de la mortalité sur un siècle n'a plus de secret pour personne, il est en général moins admis que cette espérance de vie a continué d'augmenter ces dernières années. Pour certains, l'augmentation de l'espérance de vie a atteint son point limite. C'est pourquoi nous montrerons l'évolution des espérances de vie pour des individus âgés de 60,70, et 80 ans sur les 30 dernières années.

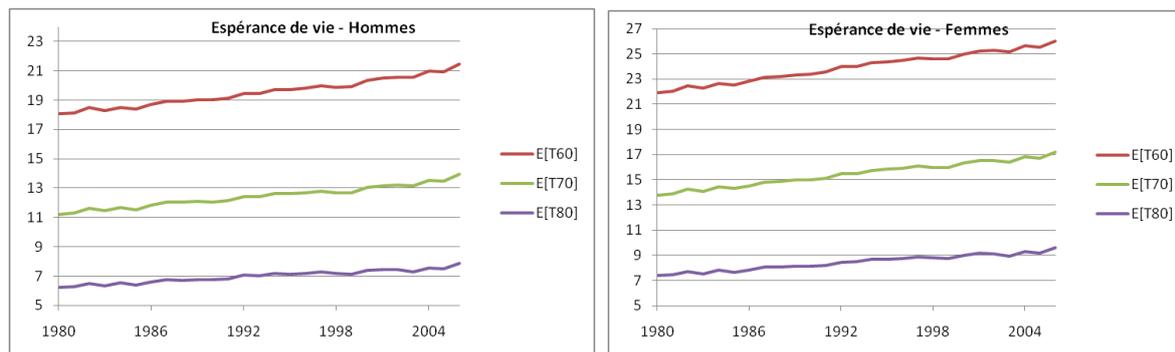


Figure 3. Evolution de l'espérance de vie à 60, 70 et 80 ans

### 3.2 Une meilleure mesure de la mortalité : les tables générationnelles

Au regard de tels écarts de mesures de mortalité sur des périodes différentes, il semble évident qu'il est plus réaliste d'avoir recours à des tables prospectives qui ont le mérite d'essayer de prendre en compte l'évolution future de la mortalité.

Les tables prospectives ont donc été construites par des actuaires pour essayer d'apporter une réponse au risque de longévité. Afin de servir de base pour la tarification et le calcul des réserves.

Le graphique illustre de manière très simple le biais qui résulte de l'utilisation d'une table instantanée, ce graphique confronte la mortalité prévue pour un nouveau né en 1908, sur la base des connaissances fixées en 1908 et la mortalité qui est réellement survenue, et qu'une table prospective permet de mieux prévoir.

Ainsi en comparant graphiquement les deux courbes, nous observons qu'au fil du temps la probabilité de décéder est plus faible que si on l'avait figée à un même niveau. La mortalité réellement observée est en dessous du niveau instantané.

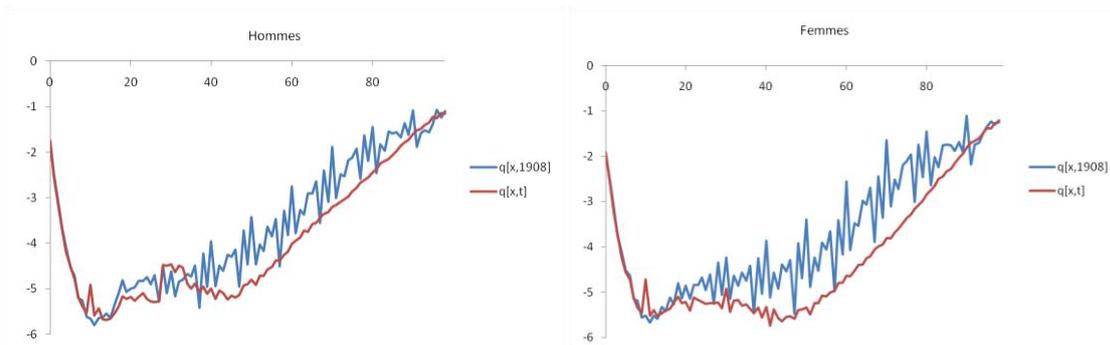


Figure 4. Confrontation d'une courbe de mortalité statique et évolutive.

Si on mesure l'espérance de vie à la naissance d'un nouveau né en 1908, celle-ci était de 44,73 pour les hommes et 50,44 pour les femmes

Rappelons qu'un regard statique pour cette même période nous donnait une espérance de vie de 39,7 et 41,4 respectivement pour les hommes et les femmes.

Soit une espérance de vie 12,7% supérieure à celle prévue par une table instantanée pour les hommes et 21,8 % pour les femmes.

### 3.3 Représentation de la mortalité

Nous chercherons donc à construire des tables prospectives à partir de différents modèles paramétriques. Ces tables bidimensionnelles peuvent être représentées graphiquement de deux manières afin d'illustrer leurs visions de l'évolution future de la mortalité.

Nous pouvons avoir une approche longitudinale (figure 5), qui consiste à regarder l'évolution de la mortalité pour une cohorte donnée. Nous suivons cette évolution au fil des années sans pour autant fixer l'âge.

L'allure graphique de cette représentation sera donc la même que celle d'une courbe de survie : une exponentielle croissante.

L'autre approche que nous qualifierons de verticale (figure 5), consiste à observer l'évolution des  $q_x$  dans le temps pour un âge fixé. Bien que cette représentation ne corresponde pas à la mortalité réelle que pourrait avoir un individu, elle montre cependant comment le modèle générant cette table, prévoit les améliorations de mortalité pour un âge donné. La représentation graphique aura donc des allures décroissantes.

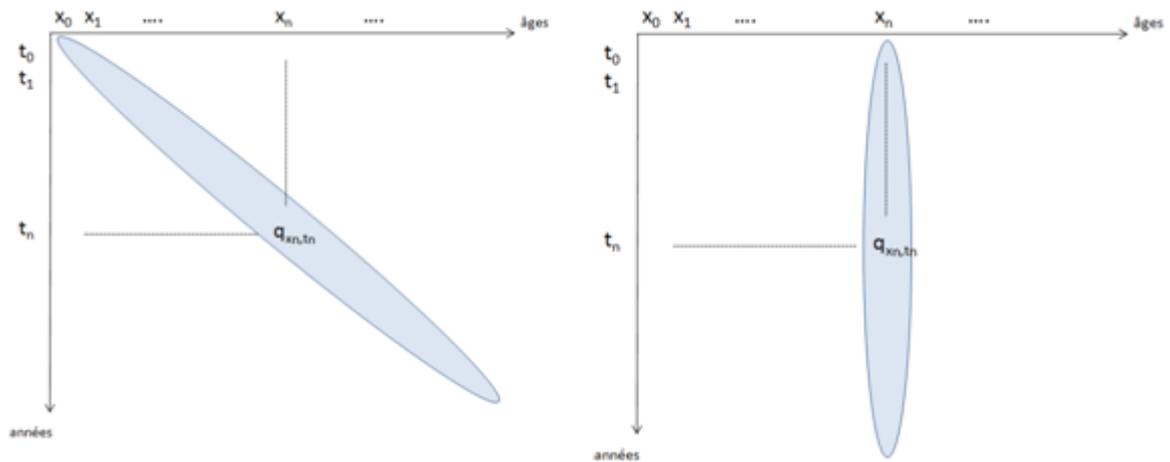


Figure 5. Représentation longitudinale (gauche) et verticale (droite) d'une table prospective.

#### 4) Limite des tables prospectives

S'il est unanime que les produits viagers doivent être gérés par des tables générationnelles, il est légitime de se poser la question de la suffisance de ces tables. En effet, comme nous le verrons les tables prospectives telles qu'elles sont élaborées actuellement ne sont pas adaptées pour absorber un véritable choc de longévité qui se produirait en cas de découverte biomédicale majeure.

La vision des tables prospectives se limite à anticiper une évolution de la mortalité dans les mêmes proportions que celles observées dans le passé. Elles ne mettent donc pas à l'abri les assureurs d'une augmentation significative de la durée de vie qui résulterait d'une importante découverte médicale, tel qu'un traitement contre les grandes maladies du siècle, ou une augmentation de la durée de vie apportée grâce à la génétique.

En effet des scientifiques ont pu augmenter la durée de vie de certains animaux grâce à la génétique.

Le résultat le plus remarquable est sans doute l'augmentation de près de dix fois l'espérance de vie des adultes de la « *Caenorhabditis elegans* », petit ver, suite à la suppression de l'activité génétique d'un gène (appelé "l'âge-1"). Dans le graphique ci-dessous, la courbe de survie normale est représentée en bleu et la courbe de survie orange représente celle des vers ayant la mutation génétique.

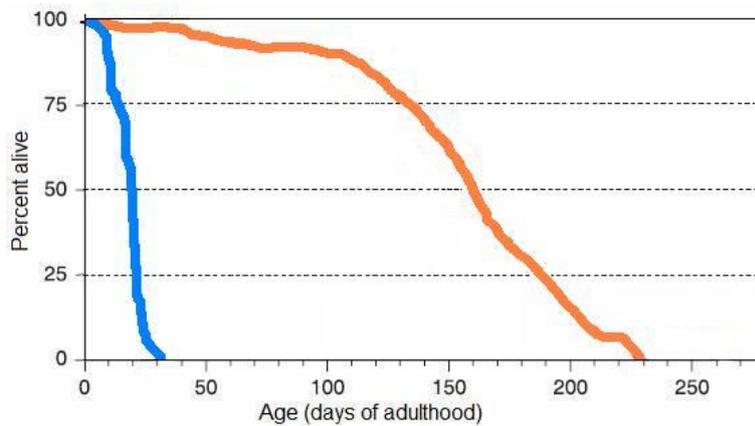


Figure 6. Courbes de survie du *Caenorhabditis elegans*

Ces résultats prometteurs chez les animaux indiquent que ces progrès pourraient également être utilisés pour améliorer la longévité humaine.

L'éventualité de telles découvertes chez l'Homme n'est pas prise en compte dans la construction des tables prospectives.

Nous avons tout d'abord testé les modèles standards, chers aux actuaires, permettant d'obtenir des tables prospectives. Comme tous les modèles ces derniers présentent des avantages, et souvent beaucoup d'inconvénients, dont celui soulevé précédemment : les projections ne tiennent pas compte des réelles avancées médicales. Elles se contentent de projeter des données selon leurs évolutions passées, sans pour autant connaître les facteurs déterminant cette évolution.

Ceci nous a amené à tenter de dépasser ces limites en contactant des chercheurs, démographes et médecins, pour essayer d'avoir une vision des nouveaux travaux et des nouveaux modèles que l'on pourrait qualifier de potentiellement plus réalistes et moins mathématiques. Comme nous le verrons des approches très différentes ont été élaborées afin de modéliser la mortalité.

## II. Modèles de projection de mortalité

Le choix de la table de mortalité impacte directement le passif d'une compagnie d'assurance. L'une des problématiques majeures réside dans le fait que l'assureur s'engage sur le long terme, il doit donc être prudent quant au choix de mortalité et prendre en considération que cette mortalité évolue aussi dans le temps.

C'est pourquoi il est judicieux de travailler sur des tables de mortalité prospectives, prenant en compte l'âge de l'individu, mais aussi le temps.

Pour ce type d'étude, il est donc nécessaire d'avoir des données détaillées : il faut disposer des taux de mortalité (nombre de décès sur le nombre d'exposition à ce décès) observés dans la population donnée et cela pour différents âges et différentes années. Ensuite, il faut projeter dans l'avenir cette modélisation de la mortalité, afin de prendre en compte son évolution future.

Il existe bon nombre de techniques pour établir une table de mortalité prospective. Il est assez fréquent d'appliquer une approche paramétrique. Parmi les méthodes existantes, les actuaires utilisent surtout la méthode de Lee-Carter qui est devenue un standard dans l'élaboration des tables prospectives.

Une telle approche consiste à ajuster les observations et à condenser l'information annuelle dans un nombre restreint de paramètres. Il s'agit ensuite de modéliser l'évolution de ces paramètres au cours du temps, de sorte à pouvoir projeter la mortalité dans le futur.

Afin d'essayer d'anticiper la mortalité future de la population espagnole, nous appliquerons plusieurs de ces modèles paramétriques, et chercherons également à appliquer des modèles ou résultats de modèles plus innovants.

### A. Modèles existants

La méthode utilisée afin d'établir des tables prospectives la plus employée dans le monde actuariel est le modèle proposé par Lee Carter dans les années 1992. Ont alors suivi des dérivés de ce modèle, comme celui présenté par Renshaw et Haberman en 2006, le modèle APC de Currie et plus récemment les modèles de Cairns, Blake et Dowd.

Nous nous attacherons dans cette partie à la description de ces différents modèles que nous appliquerons sur la population espagnole afin d'obtenir une table prospective utilisable pour estimer les engagements d'AXA Espagne envers ses rentiers.

La méthodologie pour construire une table prospective peut se présenter en trois grandes étapes.

La première, consiste à modéliser les taux de mortalité historiques d'une population donnée par estimation des paramètres constitutifs du modèle. Il convient, dans un deuxième temps, de dégager une tendance temporelle de ces paramètres afin de pouvoir en proposer une extrapolation dans l'avenir.

Ensuite, concernant les taux de mortalité aux grands âges, les données historiques que l'on peut recueillir sont la plupart du temps empiriquement insuffisamment fiables. Plusieurs modèles théoriques ont donc été proposés afin d'étendre la courbe de mortalité aux grands âges.

Ainsi, l'application de Lee Carter et de modèles dérivés nécessitent de connaître les taux instantanés de mortalité historiques, exprimés par année calendaire et par âge. Ces taux ne sont pas directement disponibles mais sont estimés à partir des données concernant les décès et les personnes exposées à ce risque, ceci par âge et par année.

Le taux instantané de décès s'exprime comme le rapport du nombre de décès et du nombre de personnes exposées au décès, on le note ici  $m(t, x)$ .

$$m(t,x) = \frac{\text{nombre de décès à l'âge } x \text{ au cours de l'année calendaire } t}{\text{population moyennée d'âge } x \text{ au cours de l'année civile } t}$$

Pour appliquer la méthode de Lee Carter et des autres modèles qui se basent sur le même principe, il est indispensable de pouvoir se doter d'une grande quantité d'informations. Un historique de mortalité important et cela pour plusieurs âges est nécessaire. Souvent l'historique d'un portefeuille d'assurance est insuffisant, il est alors possible de se servir des données HMD<sup>1</sup> (Human mortality database), qui donnent des informations nationales (par pays) sur le nombre de décès et sur le nombre d'individus qui y sont exposés. C'est sur de telles données que nous avons appliqué le modèle de Lee Carter pour la population espagnole, afin d'estimer des taux bruts de mortalité.

Le taux de mortalité  $m(t, x)$ , et le taux de mortalité,  $q(t, x)$ , sont généralement très proches en valeur les uns les autres.

Avec certaines hypothèses, nous pouvons formaliser cette relation :

Hypothèse 1: Pour  $t$  et  $x$  entiers, et pour tout  $0 \leq s ; u < 1$ ,  $\mu(t + s ; x + u) = \mu(t ; x)$  cela signifie que la force de mortalité reste constante sur chaque année d'âge entier et sur chaque année civile.

---

<sup>1</sup> Données disponibles sur [www.mortality.org](http://www.mortality.org)

Hypothèse 2: Nous supposons que nous avons une population stationnaire (c'est-à-dire que la taille de la population à tous les âges reste constante au fil du temps).

Ces hypothèses impliquent que :

$$(a) m(t; x) = \mu(t; x)$$

$$(b) q(t; x) = 1 - \exp[-\mu(t; x)] = 1 - \exp[-m(t; x)].$$

Les taux bruts seront donc la base d'application de nos modèles.

Si l'on regarde les taux bruts de mortalités espagnoles sur les années 1950-2006, pour les âges allant de 0 à 95 ans (figure 7) nous pouvons voir l'évolution décroissante de la mortalité et déceler certaines tendances dans le temps. C'est cette tendance que les modèles, étudiés dans cette partie, cherchent à capter, grâce à une décomposition des taux de mortalité via des paramètres explicatifs. De plus, ces modèles permettent également de lisser les observations afin d'harmoniser les tendances et d'atténuer les bruits, étape indispensable pour une bonne projection.

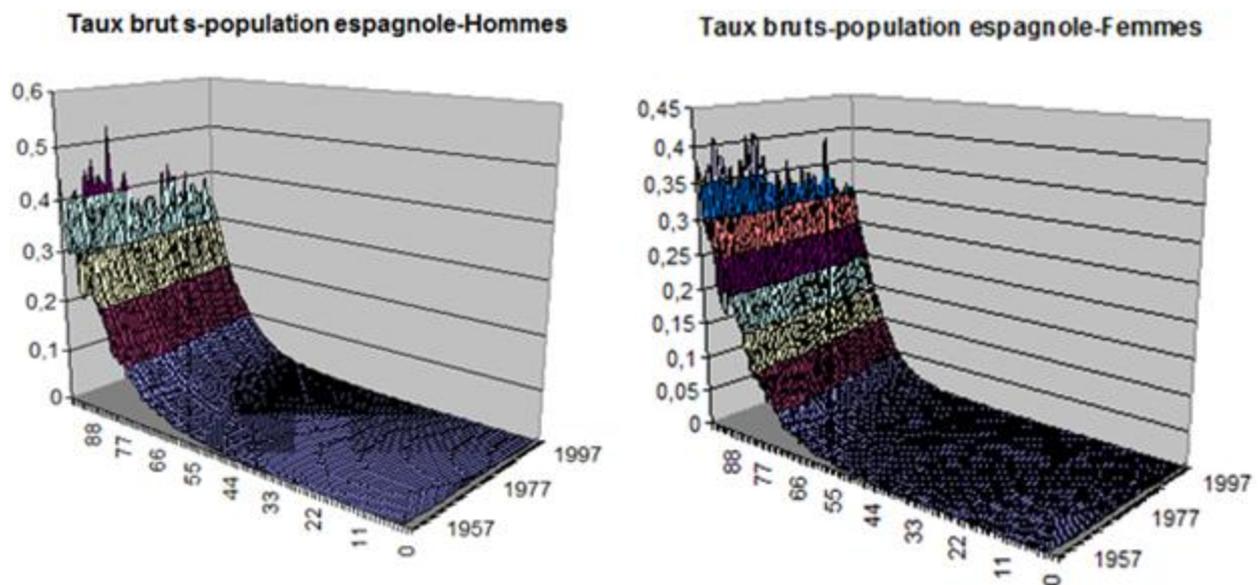


Figure 7. Taux bruts de mortalité ( $q_x$ ), pour les années 1950-2006 et âges 0-95 ans

Comme nous pouvons nous y attendre, nous remarquons que les taux de mortalité croissent fortement avec l'âge, décroissent avec l'année calendaire, et semblent moins précis pour les grands âges (fluctuations).

Bien que les données HMD nous donnent des taux jusqu'à des âges très élevés, il n'est pas recommandé de les prendre en compte, car ils sont moins fiables pour les âges élevés du fait de l'effectif réduit à ces âges.

## i. Modélisation des taux de mortalités historiques

Afin de pouvoir procéder à la réalisation de tables prospectives, nous devons modéliser ces taux bruts de façon simple, ou en tout cas de façon à permettre une projection.

Parmi les nombreuses méthodes paramétriques dont nous énumérerons les principes, la plus connue par les actuaires est celle proposée par Lee Carter.

Voici quelques modèles aujourd'hui classiques dans le monde de l'actuariat, que nous nous proposons d'étudier :

(M1)	Lee Carter 1992	$\ln m(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$
(M2)	Renshaw Haberman 2006	$\ln m(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$
(M3)	Age Period Cohort 2006	$\ln m(t, x) = \beta_x^{(1)} + \frac{1}{n_a} \kappa_t^{(2)} + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^{(3)}$ <small><math>n_a</math>, le nombre d'âge observé</small>
(M5)	Cairns Blake Dowd 2007	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)} (x - \bar{x})$
(M6)	CBD with cohort effect 2007	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)} (x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}$
(M7)	CBD extension 2007	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)} (x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)} ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)}$
(M8)	CBD other extension 2007	$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)} (x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)} (x_c - x)$

### 1) Le modèle de Lee Carter

Bien que la méthode souffre d'insuffisances bien connues, expliquées plus loin, la méthode de « Lee Carter » reste une référence et mérite donc d'être énumérée, d'autant plus que bon nombre de modèles que nous verrons par la suite lui ressemblent fortement et en sont des améliorations.

Lee Carter propose un modèle où la mortalité est décomposée en deux éléments, l'un propre à l'âge et l'autre tendanciel, relatif à l'année calendaire (le « temps »). L'objectif est de projeter la composante relative au temps, en extrapolant dans le futur les tendances passées, sans tenir compte de l'évolution présumée de la mortalité au regard d'experts (comme les progrès de la médecine, l'apparition de nouvelles maladies, l'évolution du style de vie,...).

Le taux instantané de mortalité est décrit par un modèle log-bilinéaire :

$$\log \mu(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{xt}$$

Sous les contraintes d'identifiabilité suivante:

$$\sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x^{(2)} = 1$$

$$\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t^{(2)} = 0$$

Où :

- $\varepsilon_{xt}$  représentent les erreurs d'ajustement et sont des variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi normale  $N(0; \sigma^2)$  ce qui implique l'hypothèse d'homoscédasticité ;
- $\beta_x^{(1)}$  décrit le comportement moyen des taux instantanés de mortalité au cours du temps (sur une échelle logarithmique), il représente « l'effet âge »
- $\beta_x^{(2)}$  décrit l'écart entre des taux instantanés de mortalité et le comportement moyen ;
- $\kappa_t^{(2)}$  décrit l'évolution de la mortalité au cours du temps.

Les paramètres sont estimés par un critère de moindre carré :

$$(\hat{\beta}_x^{(1)}, \hat{\beta}_x^{(2)}, \hat{\kappa}_t^{(2)}) = \arg \min \sum_{x,t} (\ln(\hat{\mu}_{xt}) - \beta_x^{(1)} - \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)})^2$$

Une des limites du modèle de Lee carter est qu'il prend pour hypothèse l'homoscédasticité des taux de mortalité. Cette hypothèse est forte puisque la variance des taux de décès est d'autant plus importante lorsque les âges sont élevés (à mettre en relation avec la baisse de l'effectif pour ces âges).

Le modèle log poisson, proposé par BROUHNS et al. en 2002, est une adaptation du modèle de Lee carter permettant de remédier à cette limite.

## 2) Le modèle Log Poisson

L'estimation des paramètres s'effectue par la méthode du maximum de vraisemblance.

Dans ce modèle, on cherche à modéliser le nombre de décès l'année  $t$ , à l'âge  $x$  : soit  $D_{tx}$ , la variable aléatoire représentant le nombre de décès à l'âge  $x$  et au temps  $t$ . Soit  $d_{tx}$ , le nombre correspondant au nombre de décès actuellement observé.

$D_{tx}$  peut être approximé par une loi de poisson de paramètre de moyenne  $\lambda_{xt}$

$$\text{où } \lambda_{xt} = m_{xt} E_{xt}$$

( $E_{xt}$  correspond au nombre d'individus exposés au risque de décès à l'âge  $x$  et au temps  $t$ )

La probabilité d'avoir un nombre  $d$  de décès, est, par définition de la loi de poisson, donné par :

$$P(D_{xt} = d) = \frac{\lambda^d e^{-\lambda}}{d!} = \frac{(E_x m_{xt})^d e^{-E_x m_{xt}}}{d!}$$

$$\text{Où } m_{xt} = \exp(\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)})$$

De manière similaire, la log-vraisemblance dans ce cas est de

$$l(d; \lambda) = d * \ln(\lambda) - \lambda - \ln(d!)$$

Supposons que chaque observation est indépendante, nous pouvons sommer tous les composants pour avoir la log vraisemblance complète

$$\ln L = \sum_{xt} (d_{xt} * \ln(\lambda_{xt}) - \lambda_{xt} - \ln(d_{xt}!)) \quad (1)$$

Le maximum de vraisemblance est estimé pour une valeur de  $\lambda_{xt}$  qui maximise l'équation (1) ci-dessus.

S'il n'y avait pas de restriction sur la forme de  $\lambda_{xt}$  il est facile de vérifier que l'équation atteint sa valeur maximale lorsque  $\lambda_{xt} = d_{xt}$  dans le cas de Lee Carter cependant, nous avons besoin que  $\lambda_{xt}$  satisfasse l'équation

$$\lambda_{xt} = m_{xt} E_{xt} = e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} * \kappa_t^{(2)}} E_{xt}$$

C'est pourquoi l'estimation des paramètres de Lee carter par la méthode du maximum de vraisemblance est donnée en substituant  $\lambda_{xt}$  par  $e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} * \kappa_t^{(2)}} E_{xt}$  dans l'équation (1).

(1) devient donc

$$\ln L(\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}, \kappa_t^{(2)}) = \sum_{x,t} (d_{xt} * \ln(e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} * \kappa_t^{(2)}} E_{xt}) - e^{\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} * \kappa_t^{(2)}} E_{xt} - \ln(d_{xt}!))$$

Qui est une expression de la log-vraisemblance.

Du fait de la présence d'un terme non linéaire  $\beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}$ , cette équation de vraisemblance n'a pas de solution analytique et doit être résolue numériquement. Le programme dont nous nous servons utilise l'algorithme de Newton-Raphson pour annuler le vecteur des dérivées premières de la fonction de log-vraisemblance c'est-à-dire le vecteur  $\left( \frac{d(L)}{d(\beta_x^{(1)})}, \frac{d(L)}{d(\beta_x^{(2)})}, \frac{d(L)}{d(\kappa_t^{(2)})} \right)$ . Ce qui nous

permettra de trouver les valeurs des estimateurs de  $\beta_x^{(1)}, \beta_x^{(2)}$  et  $\kappa_t^{(2)}$ .

L'estimation des paramètres par l'algorithme de Newton-Raphson nous mène aux relations itératives suivantes:

$$\hat{\beta}_x^{(1)i+1} = \hat{\beta}_x^{(1)i} - \frac{\sum_t (D_{xt} - E_{xt} \exp(\beta_x^{(1)i} + \beta_x^{(2)i} \kappa_t^{(2)i}))}{-\sum_t (E_{xt} \exp(\beta_x^{(1)i} + \beta_x^{(2)i} \kappa_t^{(2)i}))}$$

$$\hat{\kappa}_t^{(1)i+1} = \hat{\kappa}_t^{(1)i} - \frac{\sum_x (D_{xt} - E_{xt} \exp(\beta_x^{(1)i+1} + \beta_x^{(2)i} \kappa_t^{(2)i})) \beta_x^{(2)i}}{-\sum_x (E_{xt} \exp(\beta_x^{(1)i+1} + \beta_x^{(2)i} \kappa_t^{(2)i})) (\beta_x^{(2)i})^2}$$

$$\hat{\beta}_x^{(2)i+1} = \hat{\beta}_x^{(2)i} - \frac{\sum_t (D_{xt} - E_{xt} \exp(\beta_x^{(1)i+1} + \beta_x^{(2)i} \kappa_t^{(2)i+1})) \hat{\kappa}_t^{(2)i}}{-\sum_x (E_{xt} \exp(\beta_x^{(1)i+1} + \beta_x^{(2)i} \kappa_t^{(2)i+1})) (\hat{\kappa}_t^{(2)i+1})^2}$$

Il est ensuite nécessaire d'ajuster les paramètres ainsi estimés afin qu'ils répondent aux contraintes d'identifiabilité

$$\kappa_t^{(2)\bullet} = (\kappa_t^{(2)} - \bar{\kappa}_t^{(2)}) \sum_x \beta_x^{(2)}$$

$$\beta_x^{(2)\bullet} = \frac{\beta_x^{(2)}}{\sum_x \beta_x^{(2)}}$$

Il en résulte

$$\beta_x^{(1)\bullet} = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \bar{\kappa}_t^{(2)}$$

Nous avons appliqué ce modèle à la population espagnole sur la période 1961-2006, et pour les âges 40-95 ans car il n'est pas pertinent de prendre en compte les jeunes âges dans nos modèles. Une population jeune possède une mortalité plus difficile à modéliser. Elle comporte une structure particulière de mortalité avec de la mortalité infantile et juvénile, ainsi que la présence d'une bosse

accident (terme communément employé pour qualifier la mortalité des 15-25 ans liée au suicide et autres pratiques dangereuses). C'est pourquoi nous avons restreint notre fenêtre d'observation sur les âges 40-95 ans, des âges plus jeunes pourraient perturber nos modèles.

De plus le risque de longévité concerne essentiellement une population âgée de plus de 50 ans qui est enclin à souscrire des rentes viagères pour assurer leur retraite.

Une fois appliquée à la population espagnole sur la période 1961-2006, et pour les âges 40-95 ans, ce modèle donne les résultats synthétisés dans les graphiques de la figure 8.

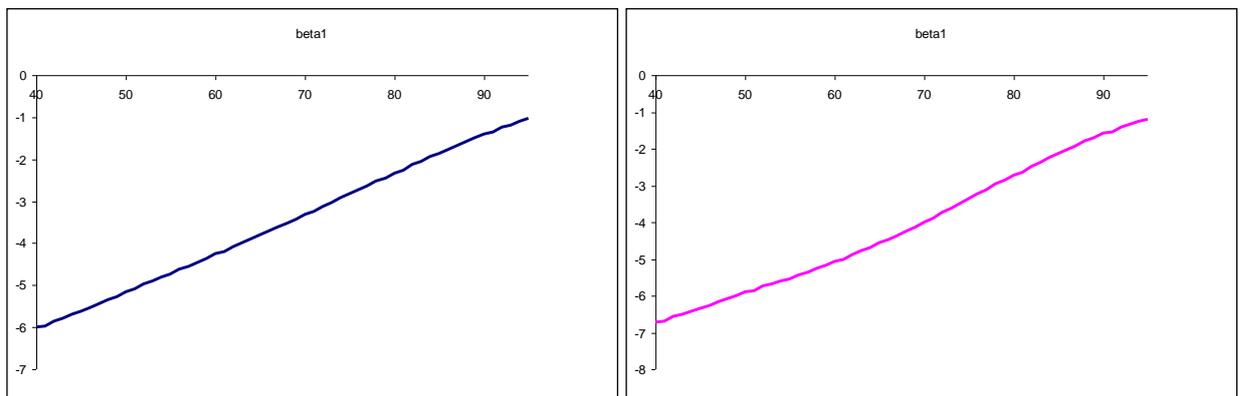


Figure 8.a Graphique des  $\beta_1$  pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

La forme du graphique des  $\beta_1$  n'est pas surprenante, c'est dans le modèle de Lee Carter (ou plutôt log poisson; dans la suite nous confonderons les deux par abus de langage), le paramètre qui capte principalement l'effet de l'âge sur la mortalité. L'allure croissante de la courbe observée est donc normale, elle reflète le fait que la mortalité augmente avec l'âge de façon quasi-exponentielle sur le segment d'âges considérés.

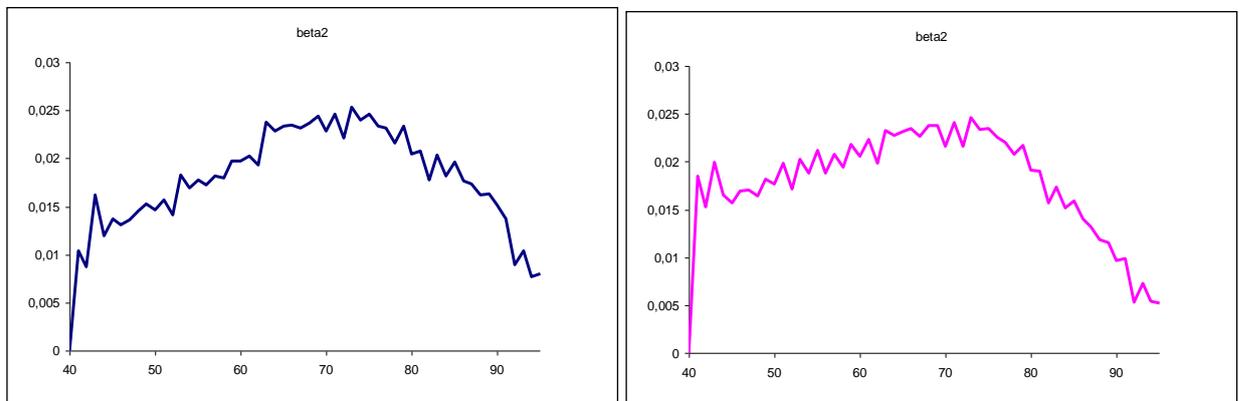


Figure 8.b courbe des  $\beta_2$  pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

Pour la courbe du Beta2 (figure 8.b), ce terme marque l'amélioration de la mortalité par âge en moyenne sur les années passées (1940-2006), on constate que les améliorations sont croissantes jusqu'aux âges 70-75 ans pour décroître par la suite.

Enfin le graphique des kappa2 (figure 8.c) nous permet de modéliser ces améliorations (réductions de mortalité) dans le temps. C'est pour cela que ce dernier a une allure décroissante.

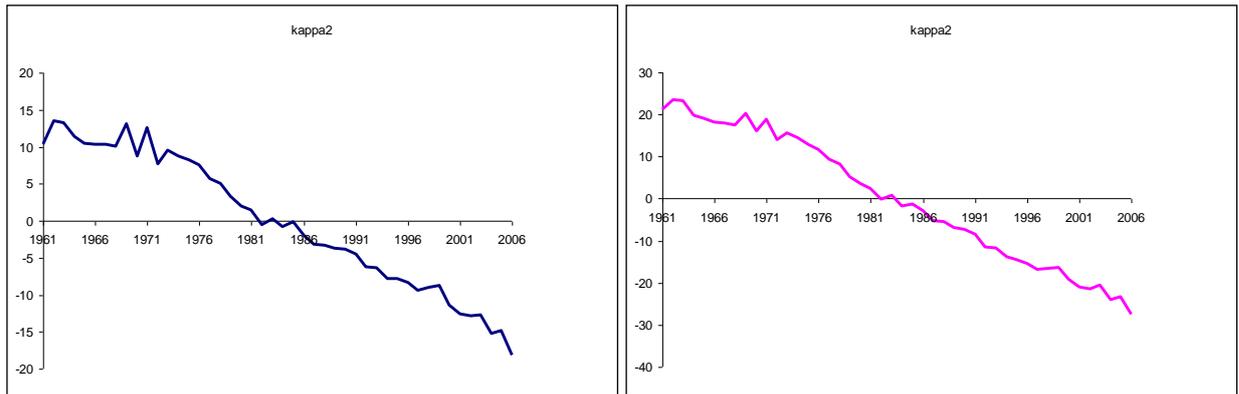


Figure 8.c courbe des kappa2 pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

La description des courbes représentant les paramètres est moins significative que de regarder l'impact direct de ces courbes sur une courbe de mortalité. Mais montrer une courbe de survie fige l'observation à un âge donné alors que les paramètres représentent le cœur du modèle et permettent de décrire l'évolution de la mortalité pour tout âge et toute période. Il est donc intéressant d'avoir cette vision.

Néanmoins, afin de comparer les différents modèles, on peut choisir de représenter l'évolution de la mortalité à 70 ans (figure 9), âge qui est significativement représentatif de l'âge moyen de notre portefeuille d'assurés.

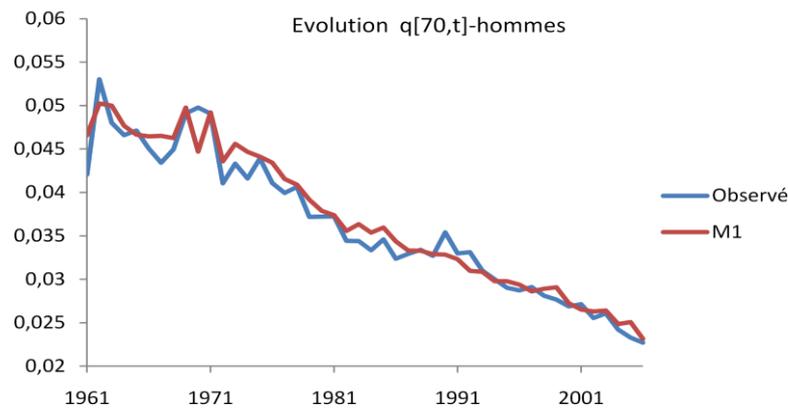


Figure 9. Évolution de la mortalité à 70 ans

Bien que le modèle Log poisson permette de pallier à certaines limites du modèle de Lee Carter, on reprochera toujours à cette méthode de ne pas prendre en compte l'effet cohorte.

L'effet de cohorte, est le terme utilisé pour désigner une génération née dans une certaine période et qui présente des taux d'amélioration qui sont différents de la génération précédente ou suivante. Cet effet a particulièrement été observé au Royaume-Uni où la génération née entre 1925 et 1945 a connu une amélioration impressionnante de longévité, avec des taux d'amélioration bien au-dessus de ceux observés pour les générations précédentes mais aussi de la génération suivante. Cet effet cohorte n'est pas homogène pour tous les pays et pour une période donnée chercheurs. Cet effet de cohorte pourrait résulter de l'exposition dès le jeune âge à certaines variables socio-environnementales. Ainsi pour la population britannique, d'après Willets (2004), l'effet cohorte pourrait être expliqué par le fait que la génération née entre 1925 et 1945 n'avait pas connu le premier conflit mondial et était trop jeune pour combattre durant la seconde guerre mondiale. Il semble donc important de chercher à prendre en compte cet effet cohorte C'est ce à quoi Renshaw et Haberman ont voulu remédier (par rapport au modèle de Lee carter) en proposant en 2006 un nouveau modèle.

### 3) Le modèle de Renshaw et Haberman (M2)

Ce modèle, proposé en 2006, est une extension du modèle de Lee Carter permettant de prendre en compte l'effet cohorte en ajoutant un terme qui capte l'année de naissance. Le taux de mortalité s'exprime de manière identique au modèle proposé par Lee carter, à une composante près:

$$\log \mu(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Où  $\gamma_{t-x}^{(3)}$  est un facteur reflétant l'effet cohorte.

Avec en plus des contraintes d'identifiabilité du modèle précédent, les contraintes suivantes :

$$\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \beta_x^{(3)} = 1$$

$$\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$$

Pour ce qui est de l'estimation des paramètres, nous ne détaillerons pas les étapes qui sont assez similaires à l'estimation par le maximum de vraisemblance que nous avons détaillé dans le modèle précédent.

En prenant la même période que précédemment (1961-2006) et le même intervalle d'âges, on obtient la même forme générale pour la courbe représentative des paramètres  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\kappa_2$  (figure 10.a, 10.b et 10.c).

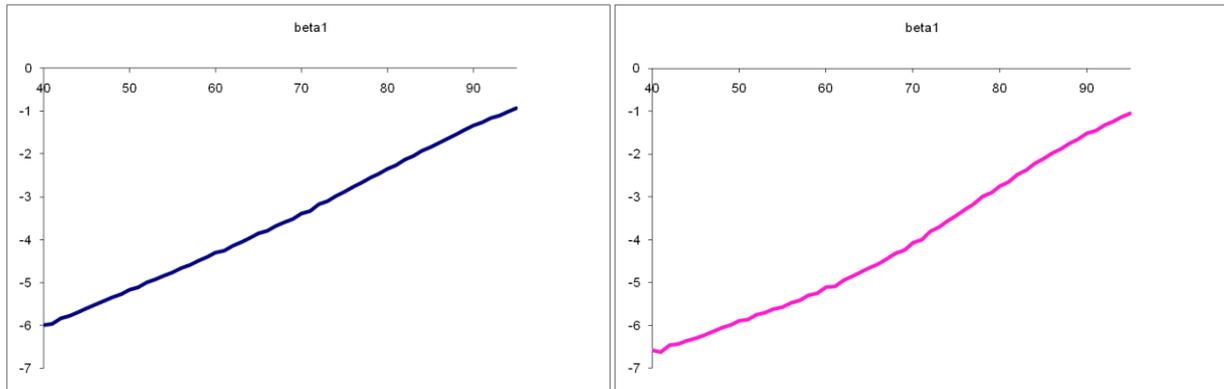


Figure 10.a Graphique des  $\beta_1$  pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

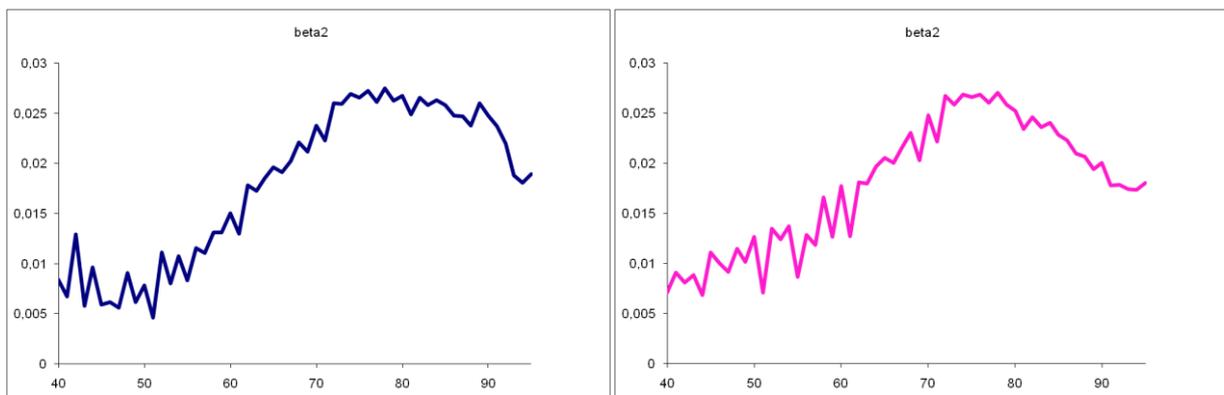


Figure 10.b Graphique des  $\beta_2$  pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

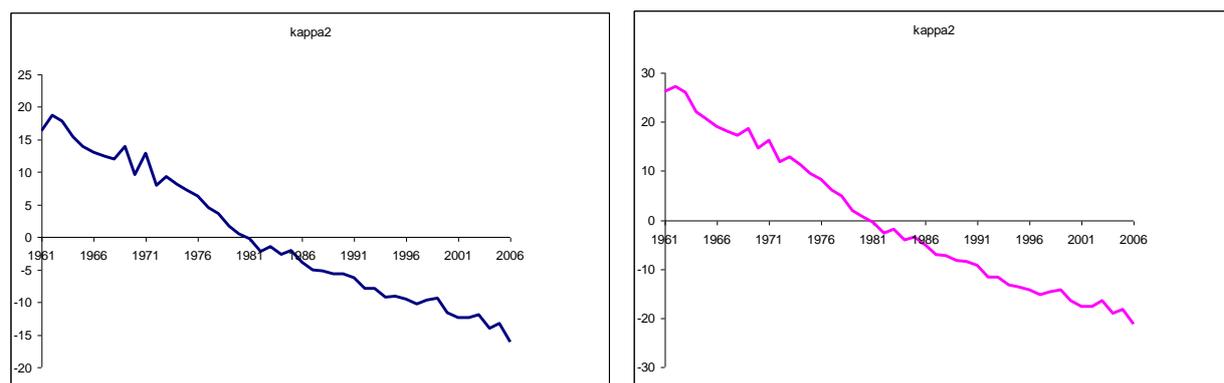


Figure 10.c Graphique des  $\kappa_2$  pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

En plus de ces représentations graphiques que l'on a déjà pu voir dans le modèle log poisson nous pouvons voir graphiquement l'évolution des paramètres  $\beta_3$  et  $\gamma_3$  qui constituent la nouveauté de ce modèle (figure 10.d et 10.e).

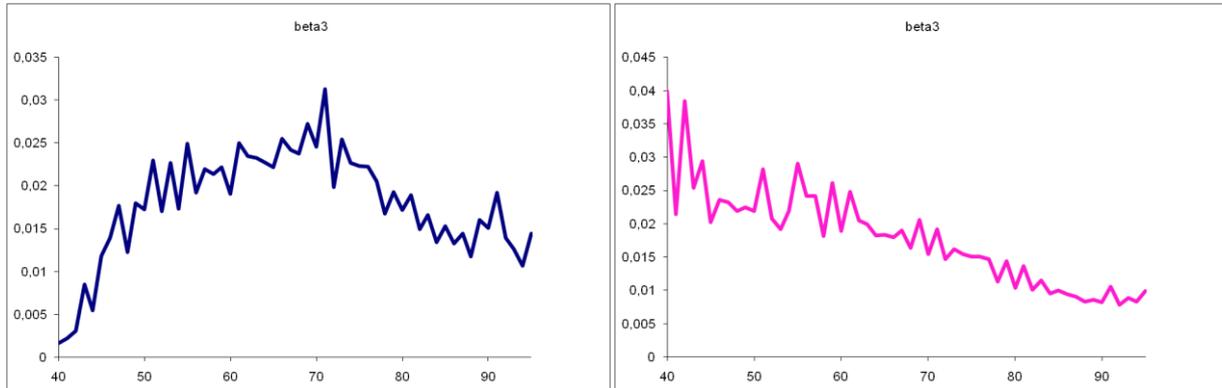


Figure 10.d Graphique des  $\beta_3$  pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

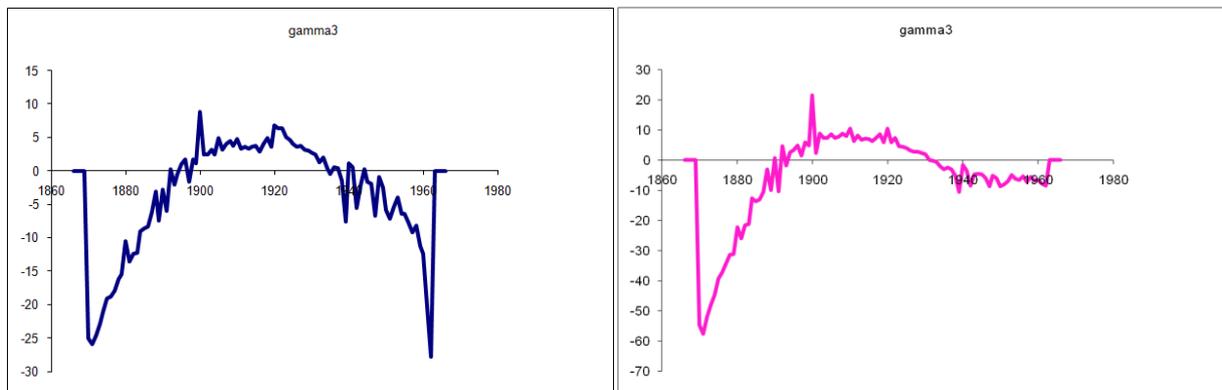


Figure 10.e Graphique des  $\gamma_3$  pour les hommes (gauche) et les femmes (droites)

En revanche, il est particulièrement difficile d'interpréter l'évolution de ces paramètres.

On peut à nouveau comparer l'évolution réelle des taux de mortalité à 70 ans à l'ajustement qu'en fait le modèle de Renshaw et Haberman.

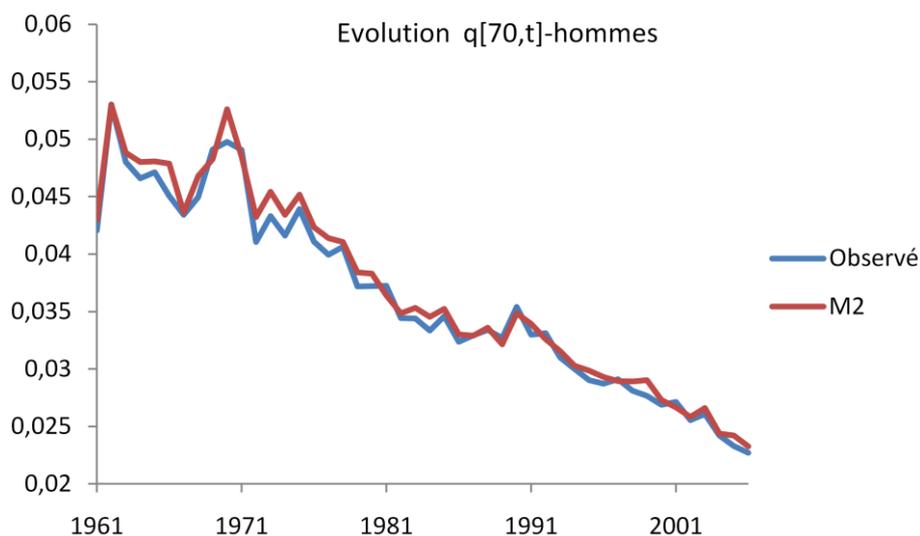


Figure 11. Évolution de la mortalité à 70 ans

On peut noter que ce modèle M2 comporte un important défaut dans la mesure où il présente une instabilité dans l'ajustement aux données brutes. Les paramètres Beta 2 et Beta 3 entrent en compétition pour capter l'effet âge. On pourra se référer à la publication<sup>2</sup> de M. Debonneuil où il montre le manque de robustesse que peut présenter ce modèle. En effet, ce modèle est trop paramétré, et par conséquent, cherche à s'ajuster au mieux aux données sans pour autant capter de réels effets.

#### 4) Le modèle APC (Age-Period-Cohort) (M3)

Currie propose en 2006 le modèle APC qui est un cas particulier du modèle précédent où

$$\beta_x^{(2)} = \beta_x^{(3)} = 1/(\text{nombre d'âges})$$

$$\log \mu(t, x) = \beta_x^{(1)} + \frac{1}{n_a} \kappa_t^{(2)} + \frac{1}{n_a} \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Ce modèle M3 est une simplification du modèle M2 qui vise à supprimer cette instabilité d'ajustement que présentait le modèle M2.

Cependant cette simplification peut paraître excessive. Elle sous entend par exemple que les améliorations (baisse de mortalité) sont les mêmes quel que soient les âges de la personne. Or, en ce moment les améliorations sont plus fortes pour les âges avancés que pour les jeunes adultes.

<sup>2</sup> <http://arxiv.org/pdf/1003.1802v1>

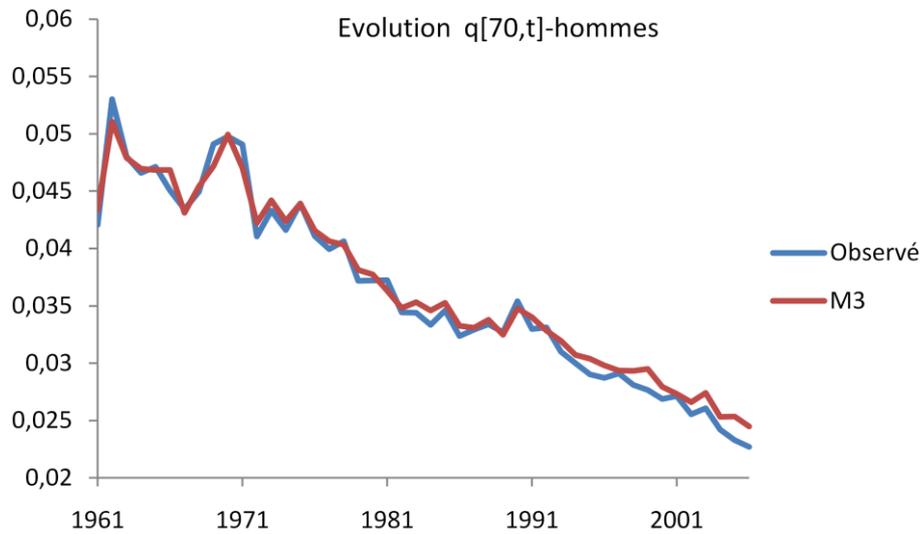


Figure 12. Évolution de la mortalité à 70 ans

### 5) Cairns, Blake and Dowd model (CBD) (M5)

Ce modèle a été introduit en 2006. Cette expression de la mortalité ne prend pas en compte l'effet cohorte.

$$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x})$$

Avec la fonction logit :  $\text{logit } q(t, x) = \log \frac{q(t, x)}{1 - q(t, x)}$

Pour ce modèle et les suivants, qui sont tous des extensions du modèle de Cairns, nous représenterons uniquement un résultat graphique (figure 13) pour avoir un aperçu de l'adéquation du modèle aux observations.

Rappelons l'écriture de ces modèles :

$$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)} \quad (\text{M6})$$

$$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \kappa_t^{(3)}((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)} \quad (\text{M7})$$

$$\text{logit } q(t, x) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(x_c - x) \quad (\text{M8})$$

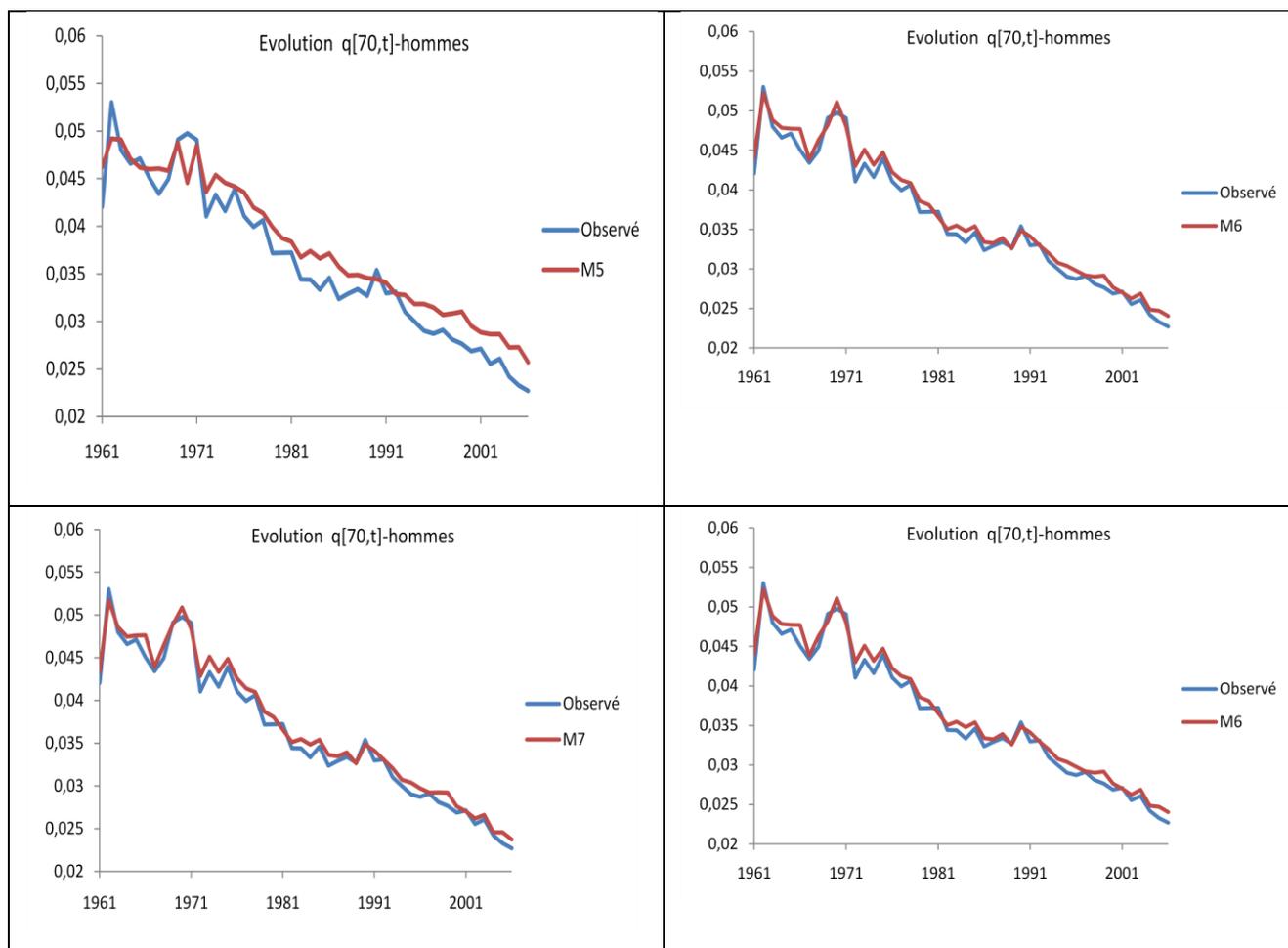


Figure 13 Évolution de la mortalité à 70 ans d'après les modèles CBD (de gauche à droite puis de haut en bas : M5, M6, M7 et M8)

## ii. Extrapolation aux grands âges et fermeture des tables

Pour les âges très élevés, les données sont souvent insuffisantes en effectif et en fiabilité pour servir à ajuster la courbe de mortalité. Des techniques d'extrapolation des taux de mortalité aux grands âges ont été développées. Parmi elles, on peut faire référence aux méthodes de Denuit et Godemiaux (2005) de Coale et Kisker (1990) de Lindbergson (2001) et de Kannisto.

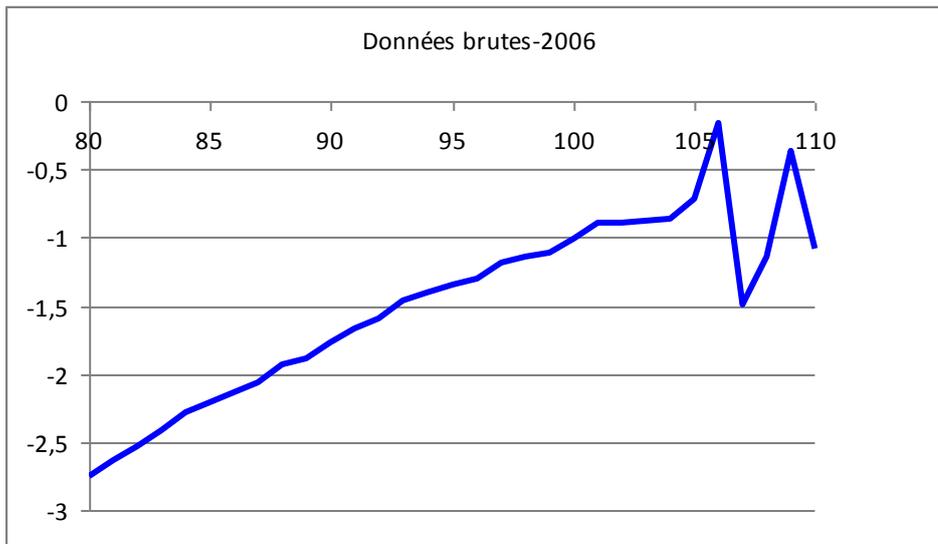


Figure 14 Evolution de la log-mortalité pour les grands âges

### 1) Coale & Kisker

Le modèle de Coale et Kisker proposé en 1990, donne une expression de la force de mortalité qui permet d'extrapoler les taux instantanés aux âges élevés.

$$\mu_x = \mu_{65} \exp(g_x(x - 65)) \quad \text{pour } x \geq 65$$

Où  $g_x$  représente le taux moyen de croissance de la mortalité entre les âges 65 et  $x$ .

Les  $g_x$  sont calculés jusqu'à un certain âge, puis on les extrapole afin de pouvoir recomposer les taux de mortalité aux grands âges. Coale et Kisker, ont examiné les courbes de  $g_x$  de 7 pays, considérés comme ayant des données de mortalité fiables (Autriche, Allemagne, France, Japon, Pays-Bas, Norvège, Suède), et ont remarqué que ces courbes atteignaient en général un pic pour  $x=80$  avant de décroître linéairement.

Ils ont donc proposé l'équation suivante :

$$g_x = g_{80} + s(x - 80), x \geq 80$$

Pour déterminer le coefficient  $s$  donnant la pente de la fonction, les auteurs ont choisi des taux de mortalité pour un âge qu'ils ont considéré comme ultime (110 ans) en l'occurrence  $\mu_{110} = 1$  pour les hommes et 0.8 pour les femmes

$$\text{On a alors } \mu_{110} = \mu_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{110} g_x\right) = \mu_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{110} (g_{80} + s(x - 80))\right)$$

D'où,

$$s = -\frac{\ln\left(\frac{\mu_{79}}{\mu_{110}}\right) + 31g_{80}}{465}$$

On peut donc donner une expression du taux de mortalité au delà de 80 ans

$$\mu_x = \mu_{x-1} \exp(g_{80} + s(x - 80)) \quad \text{pour } x \geq 80$$

$$\text{Avec } g_{80} = \frac{\ln\left(\frac{\mu_{80}}{\mu_{65}}\right)}{15}$$

Ce modèle nous semble inadéquat car il a tendance à surestimer les taux de mortalité aux grands âges. Il semble plus réaliste de choisir un modèle qui fasse tendre les taux instantanés de mortalité vers 1 pour l'âge de 130 ans (tout comme le fait le modèle de Kannistö que nous aborderons plus loin)

Cependant le principe de la méthodologie proposée par Coale et Kisker reste adapté, nous nous proposons d'utiliser le même principe en modifiant l'hypothèse de fermeture de table de  $\mu_{110}=1$  ou 0.8 (qui est le seul élément qui nous paraît être biaisé) à  $\mu_{130}=1$ .

Face à cette nouvelle hypothèse le modèle de Coale et Kisker modifié devient

$$\mu_{130} = \mu_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{130} g_x\right) = \mu_{79} \exp\left(\sum_{x=80}^{130} (g_{80} + s(x - 80))\right)$$

D'où,

$$s = -\frac{\ln\left(\frac{\mu_{79}}{\mu_{130}}\right) + 51g_{80}}{1275}$$

## 2) Le modèle de Kannistö

Kannistö (1992) fait l'hypothèse suivante au sujet de la force de mortalité pour les grands âges

$$\mu_x = \frac{a \exp(bx)}{1 + a(\exp(bx) - 1)}$$

Ce modèle n'a que deux paramètres à estimer (a et b) ce qui le rend facile à ajuster. Les taux de mortalité sont limités à 1 pour les femmes et les hommes.

Pour l'estimation de ces paramètres a et b, on se sert de la méthode de Newton-Raphson.

Ce modèle de Kannistö a tendance à fermer les tables en donnant une courbe dont l'allure finale se finit par un plateau pour les très grands âges, ce modèle se dissocie donc de ceux qui mènent à une fermeture de tables à 110 ans, il est en ce sens très adapté et proche de la réalité. En effet si une opinion générale (fausse) est qu'une personne de 110 ans, ou dans des âges aussi élevés, a une probabilité proche avoisinant les 100% de décéder dans l'année, en réalité bien qu'il soit rare d'atteindre les âges élevés comme 110 ans, la probabilité conditionnelle de décéder dans l'année est souvent plus faible que l'opinion commune le laisse entendre, et le qx des grands âges avoisinerait les 50 ou 60%<sup>3</sup>.

Nous illustrons l'application de ces méthodes sur les figures 15 et 16 représentées ci-dessous. Dans la figure 15, nous pouvons constater que les paramètres a et b estimés permettent un bon ajustement aux données brutes. Nous pouvons donc extrapoler les taux aux grands âges.

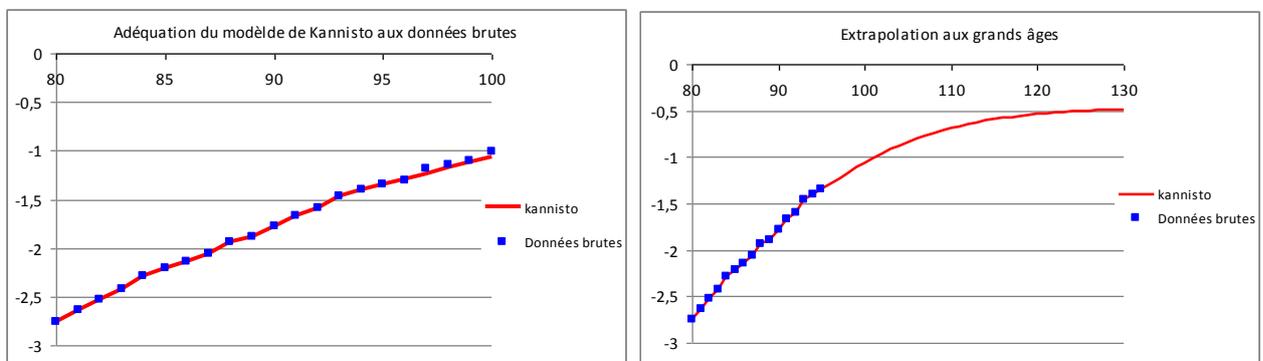


Figure 15. Application de la méthode de Kannistö

<sup>3</sup> Stephen Coles, directeur du centre de recherche sur les super centenaires (personnes âgées de 110 ans et plus) fait remarquer que cette catégorie de personnes a une chance sur deux de décéder dans l'année. Information disponible sur le lien suivant : [http://www.mdrt.org/UserFiles/File/2008\\_Top\\_of\\_the\\_Table\\_Proceedings/2008\\_TOTFinal\\_Coles\\_PPT.pdf](http://www.mdrt.org/UserFiles/File/2008_Top_of_the_Table_Proceedings/2008_TOTFinal_Coles_PPT.pdf)

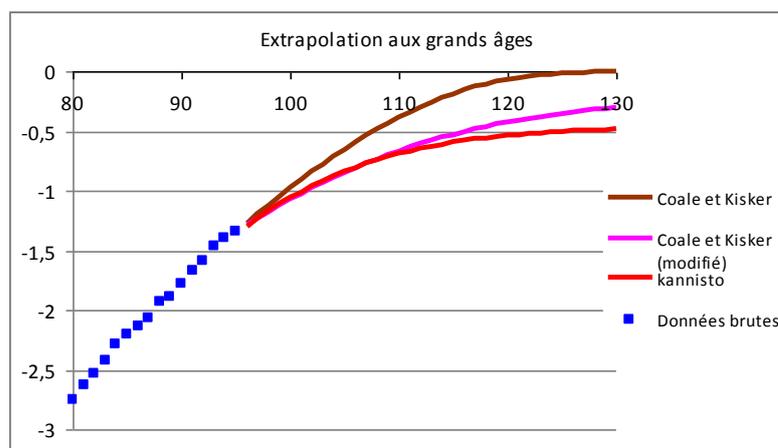


Figure 16 représentation des différentes méthodes d'extrapolation aux grands âges

En ce qui nous concerne, nous avons considéré que les taux augmentaient linéairement pour atteindre un qx de 63% à 130 ans (Nous monterons que bien qu'une méthode nous semblant plus adaptée soit celle de Kannistö, notre choix que peu d'impacts pour un portefeuille de rentiers, L'impact est d'autant plus négligeable que les assurés sont encore loin de ces âges très avancés, puisque ces derniers doivent déjà survivre jusqu'à ces âges élevés, mais aussi car cet éventuel écart est amoindri par une actualisation sur du long terme. Nous montrerons que même dans notre portefeuille où la population assurée est de moyenne assez âgée, cela n'a pas forcément d'impact. Comme le soulève Frédéric Planchet dans son ouvrage « modèle de survie », l'écart entre deux méthodes de fermeture de tables en terme de provisionnement n'est véritablement significatif qu'à des âges très élevés. Pour illustrer cette affirmation, Planchet a comparé le capital constitutif d'une rente viagère sur une tête de 75 ans au taux de 2.5% selon que l'on prenne la table complète ou que l'on prenne la même table fermée prudemment en figeant le taux de décès à 95 ans. Lorsqu'il évalue le capital constitutif en considérant que le taux de décès est stable à partir de 95 ans et que les survivants meurent brutalement à 95 ans, on ne majore la provision que de 0,7% par rapport à la table réelle (et 2.5% pour une tête de 85 ans)

Autrement dit, même si la question de fermeture de table est importante dans l'élaboration d'une table pour des provisionnements de rente viagère, cette importance doit être relativisée, et cela, d'autant plus que les rentiers d'âges très élevés sont en proportion faible dans notre portefeuille.

### iii. Projection de mortalité

Une fois ces modèles paramétriques établis et les paramètres estimés, il convient de chercher une tendance temporelle de ces paramètres afin de pouvoir les étendre dans le temps et obtenir ainsi les futurs taux de mortalité.

Plusieurs méthodes existent pour prolonger l'évolution des kappa, nous avons choisi de prendre tout simplement la décroissance moyenne des kappa et de l'appliquer aux années futures).

Illustrons cela dans le modèle M1.

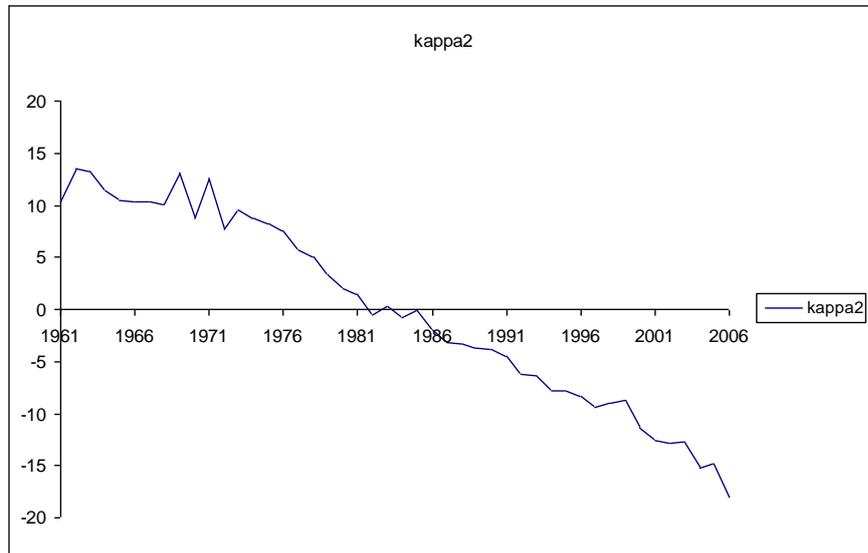


Figure 17 évolution de kappa2 sur les années passées (d'après le modèle M1)

Nous pouvons donc obtenir une extrapolation des taux futurs en prolongeant la tendance linéaire des Kappa. Bien que la poursuite d'une tendance linéaire puisse paraître irréaliste sur le long terme, nous nous permettons d'émettre cette hypothèse puisqu'elle n'a pas été forcément ni prudente ni optimiste par le passé (on pourra également se référer à la publication de Debonneuil .E)

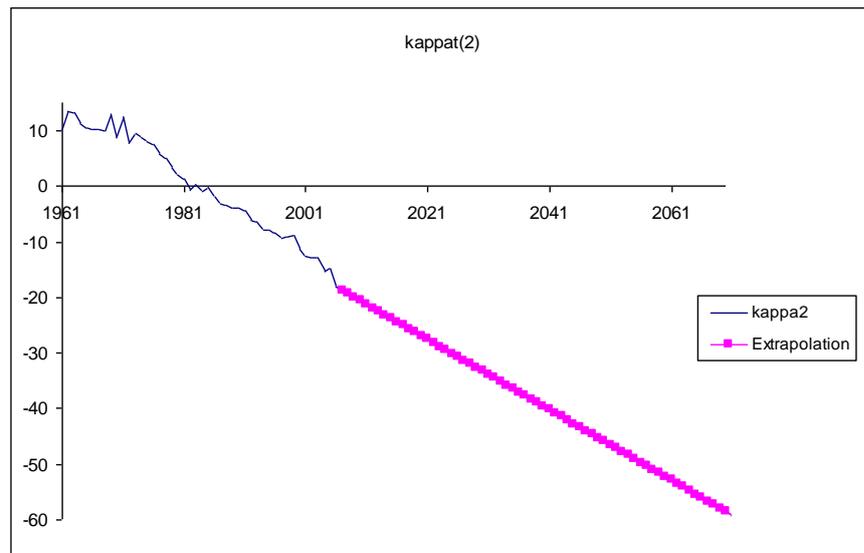


Figure 18 Extrapolation de kappa2

La même méthodologie est appliquée à tous les modèles contenant un paramètre dépendant du temps. Bien entendu si la forme de la courbe de ces paramètres n'a aucune tendance apparente, l'extrapolation ne pourra qu'être de très mauvaise qualité.

#### **iv. Critères de sélection d'un modèle**

Avant de pouvoir procéder à une projection des paramètres temporelles du modèle il est important de regarder si les taux de mortalité modélisés sont en adéquation avec les taux de mortalité bruts. Plusieurs indicateurs sont disponibles à cet effet, permettant de voir si le modèle est robuste.

##### **1) Le BIC (Bayesian information criterion)**

Confronter les valeurs de maximum de vraisemblance atteintes par les différents modèles est une possibilité, mais il est normal qu'un modèle avec beaucoup de paramètres ait plus de chance d'avoir un maximum de vraisemblance élevé, c'est pourquoi nous utiliserons plutôt le BIC qui est un indicateur prenant en compte le maximum de vraisemblance mais qui pénalise le fait d'avoir un grand nombre de paramètres. Le BIC peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\text{BIC} = -2 \ln(L) + k \ln(n)$$

ou encore, celle que nous utiliserons

$$\text{BIC} = \ln(L) - 1/2 k \ln(n).$$

Avec  $L$ , le maximum de vraisemblance,  $k$  : le nombre de paramètres dans le modèle et  $n$  la taille de l'échantillon. Selon notre expression du BIC, plus la valeur du BIC sera élevée, plus le modèle sera bon.

Il est peu intéressant de réaliser des projections de mortalité sur des modèles qui s'ajustent mal aux données historiques, car la projection serait déjà faussée à la base.

Afin que cette projection ait un sens, nous nous baserons uniquement sur les modèles dont la valeur du BIC est la plus élevée, car en pratique la plupart des modèles ont des BIC élevés plus ou moins similaires, et parfois un ou quelques modèles ont un BIC beaucoup plus bas, ce qui dénote un problème de modélisation de la mortalité empirique. Nous nous servirons également d'autres indicateurs pour rejeter certains modèles.

##### **2) Analyse de résidus**

Nous nous proposons de calculer les résidus de déviance afin de voir l'écart entre l'ajustement des modèles et les données brutes.

Les résidus de déviance  $r_{xt}^{\text{deviance}}$  sont définis par la racine carrée signée de la contribution de chaque couple  $(x,t)$  à la déviance du modèle

$$r_{xt}^{\text{deviance}} = \sqrt{2} \cdot \text{sign}(D_{xt} - \hat{D}_{xt}) \sqrt{D_{xt} \cdot \ln\left(\frac{D_{xt}}{\hat{D}_{xt}}\right) - (D_{xt} - \hat{D}_{xt})}$$

### 3) **Backtesting**

Un modèle qui s'ajuste bien aux données passées peut en revanche être médiocre du point de vue de ses aptitudes à prévoir les taux futurs. Par contre si un modèle s'ajuste mal, il est en général évident que le modèle sera inexploitable à des fins de projection.

Il est généralement difficile d'affirmer qu'un modèle est bon, puisque le modèle repose sur l'hypothèse que ce qui s'est passé dans le passé continuera dans le futur, en revanche on pourra dire qu'un modèle est mauvais ou qu'un modèle est meilleur qu'un autre.

Si nous avons observé le BIC, ce critère est nécessaire puisqu'il nous indique la qualité de l'ajustement du modèle, mais cet indicateur est non suffisant. Afin de pouvoir se faire une idée du pouvoir prédictif du modèle nous procédons un backtesting. Le backtesting est une méthode qui consiste à prendre une période passée pour le calibrage du modèle, et à faire des projections pour des années suivantes mais antérieures à la date actuelle. Ainsi on peut comparer les qx projetés aux qx réels et observer si le modèle employé a permis de faire une bonne projection.

Il faut bien différencier le but de ces trois indicateurs : si les deux premiers (Bic et analyse des résidus) permettent d'attester de la qualité d'ajustement du modèle aux données historiques, le backtesting, lui, a pour vocation de chercher à évaluer la qualité prédictive d'un modèle.

## B. Vers de nouveaux Modèles

### 1) Un besoin de nouveaux modèles

Si les modèles abordés jusqu'à présent nous ont permis de faire des projections pour les taux futurs en Espagne, il semble difficile et insuffisant de se baser sur celles-ci. En effet chacun de ces modèles possède des limites importantes, comme par exemple, une limite commune à tous les modèles : le résultat de la projection est assez sensible à la période sur laquelle nous nous basons pour ajuster les taux de mortalité observés dans le passé. On pourra se référer au travail de Cairns qui confronte ces différents modèles pour en conclure qu'il n'y a pas vraiment de modèle stable parmi ceux employés.

De plus, bien que la plupart des actuaires se servent de telles méthodes pour élaborer des tables prospectives, cette construction se base sur un axiome qui prétend que le futur ressemblera au passé et évoluera dans de même proportion.

### 2) Une extension des modèles relationnels : le modèle M9

Un des problèmes des modèles paramétriques que nous avons pu voir réside dans le nombre de paramètres explicatif du modèle. Lorsque celui-ci est trop important, le modèle perd en robustesse, en effet il est d'autant plus aisé de trouver un modèle qui passe par toutes les données observées, que le nombre de paramètres du modèle est important. En revanche le modèle serait très faible en termes de capacité à projeter les taux futurs. Nous avons donc apporté une modification au modèle de Renshaw et Haberman qui semble être un assez bon modèle pour notre population espagnole, autant d'un point de vue théorique mais aussi de par les résultats obtenus.

Rappelons l'écriture de ce modèle

$$\log \mu(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Nous avons simplement fixé le paramètre  $\beta_3$  à 1 de sorte à avoir

$$\log \mu(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}$$

Nous voyons que ce modèle donne un meilleur résultat en terme de BIC, si l'on regarde les résidus et les back testing on peut voir à nouveau que ce modèle est celui qui donne les meilleurs résultats.

Lorsque l'on observe le Bic, celui-ci est plus élevé, cette modification, même si elle n'est pas révolutionnaire a pour avantage de permettre une robustesse supérieure à celui de Renshaw et Haberman, nous noterons ce modèle simplifié (M9).

Ce modèle a été testé sur les populations hommes et femmes de plusieurs pays. L'ajustement a été effectuée sur la tranche d'âges 40-95 ans et sur les années 1955-1980 (figure 19).

Country, gender	M1	M2	M3	M5	M6	M7	M8	M9
UK Male	-10714	-9182	-9215	-24645	-9808	-9202	-9266	<b> -9014</b>
UK Female	-9574	-9198	-9450	-19336	-11182	-9788	-9846	<b> -9069</b>
US Male	-13844	<b>-11491</b>	-12951	-27286	-19093	-14818	-15964	<b> -11602</b>
US Female	-14115	<b>-11163</b>	-12648	-65996	-16634	-16547	-16032	<b> -11415</b>
France Male	-10811	-9080	-8992	-14256	-10148	-9166	-9538	<b> -8943</b>
France Female	-9147	-8992	-9010	-42131	-13648	-11080	-10761	<b> -8846</b>
Switz. Male	-6773	-7092	-6806	-6541	<b>-6715</b>	-6775	-6700	<b> -6935</b>
Switz. Female	<b>-6743</b>	-7060	-6772	-8230	-6977	-6877	-6774	<b> -6923</b>
Spain Male	-9058	-8538	-9145	-11237	-10595	-10183	-10041	<b> -8509</b>
Spain Female	-9103	-8561	-9809	-22162	-15948	-12517	-13131	<b> -8533</b>
Japan Male	-11465	-9249	-9274	-17559	-9656	<b>-8851</b>	-9242	<b> -9096</b>
Japan Female	-11374	-9194	-9536	-38082	-14092	-10754	-10750	<b> -9140</b>

Figure 19 Bic de l'ajustement des modèles sur la mortalité historique de quelques pays.

Le modèle M9 a donné de bons résultats, et cela particulièrement en Espagne, France et Angleterre où Le modèle M9 donne un meilleur BIC que les différents modèles que nous avons passé en revue.

On peut à nouveau en donner une représentation graphique lorsqu'on applique ce modèle à notre population espagnole

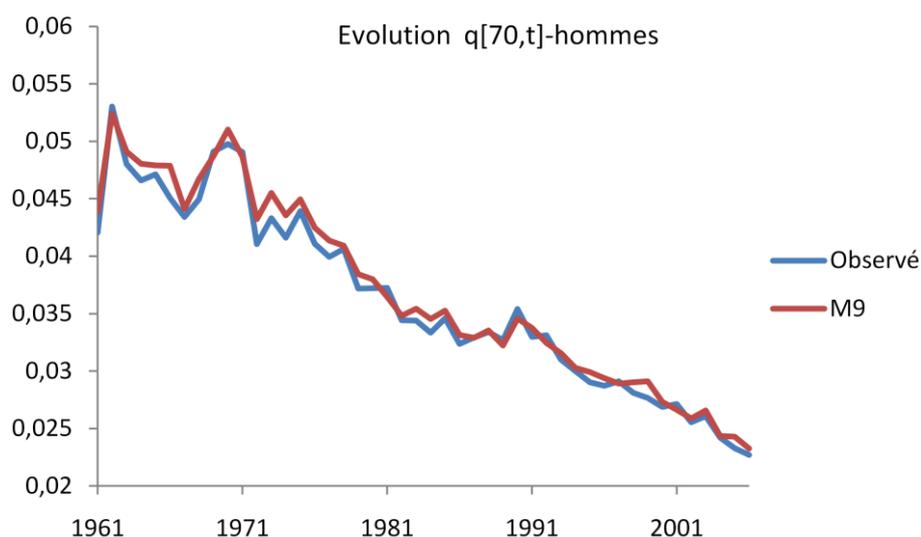


Figure 20. Évolution de la mortalité à 70 ans- modèle M9

### 3) **Modélisation par causes spécifiques de décès**

Jusqu'à présent tous nos modèles de projection de la mortalité étaient construits sous l'hypothèse que les améliorations futures seront les mêmes que dans le passé, c'est cette hypothèse assez forte qui nous permettait de faire des projections.

Aussi bon que le modèle relationnel soit, il comporte donc une limite. Il ne prend pas en compte les aspects réels qui sont les vecteurs de l'évolution de la mortalité comme l'évolution des maladies, l'évolution du système de santé, de l'hygiène de la population, des mesures gouvernementales, etc... En effet ce sont ces causes qui sont à l'origine des impacts sur la mortalité.

Les tendances de la mortalité, peuvent être ventilées par cause de décès, et les taux de mortalité futurs peuvent être obtenus par la prévision des taux de mortalité pour chaque cause de décès séparément. L'agrégation subséquente des tendances qui en résultent génère une prévision de la mortalité totale. Cette méthode a un incontestable avantage: celui de l'examen de la mortalité par cause fournit un éclairage supplémentaire sur les déterminants des tendances de mortalité. Cela peut être important quand il s'agit de produire des prévisions à court terme. Un exemple fourni par Pollard en 1987 montre que la méthode a réussi à prévoir le plafonnement de la mortalité masculine australienne dans les années 1960. Toutes les autres méthodes n'ont pas réussi à prévoir cette atténuation de la tendance de la mortalité. Les taux de mortalité dans les années 1960 en Australie ont diminué rapidement en raison de la réduction de la mortalité infectieuse alors que la mortalité due aux maladies cardiovasculaires et à une moindre mesure, d'accidents a augmenté.

Ainsi, le fait de ne pas tenir compte de ces changements structurels dans l'ensemble de la mortalité par d'autres méthodes conduit les modèles cités précédemment à un échec en ce qui concerne la prévision du plafonnement du taux de mortalité dans les Années 1960.

Une observation similaire a été faite par Preston en 1974 sur les projections de la mortalité au Canada pour les années 1950.

D'autres auteurs soutiennent que l'utilisation des causes de décès n'améliore pas significativement l'exactitude des prévisions de mortalité (Alho 1991) et que le plus grand soin doit être pris dans les prévisions par causes de décès qui sont en pleine mutation (McNown et Rogers, 1992).

Ainsi, la simple extrapolation des taux de mortalité par cause spécifique tend apparemment à produire des prévisions de mortalité les plus pessimistes, car lorsque la prévalence de la cause dominante passera en dessous de la prévalence actuellement stable d'autres causes de mortalité, voire en augmentation sur la période d'observation, ces dernières détermineront dans le modèle la tendance dominante de la mortalité future (Wilmoth 1995), alors qu'en réalité la prévalence de

ces dernières aura probablement chuté d'ici là car les efforts de traitements et prévention se concentrent généralement plutôt sur les causes dominantes du moment.

Les méthodes démographiques couramment pratiquées reposent sur l'hypothèse que les différentes causes de la mort sont indépendantes les unes des autres: Les tendances observées dans l'une des causes de décès sont prévues sans tenir compte des tendances dans les autres causes de décès. Or il est évident que les tendances des différentes causes de décès sont en corrélation. La réduction ou l'élimination d'une cause du décès est liée à des changements dans les facteurs de risque spécifiques qui prévalent dans la population, l'émergence de nouvelles formes de traitement médical, et les mesures de santé publique. Ces facteurs, à leur tour, peuvent affecter plusieurs causes de mortalité simultanément, ce qui génère une dépendance entre les tendances de la mortalité par cause de décès.

La réduction des décès dus aux maladies infectieuses au cours du 20<sup>e</sup> siècle et l'éradication quasi totale de plusieurs maladies mortelles provoquées par les découvertes de Louis Pasteur et Robert Koch est un exemple frappant.

En règle générale, nous ne pouvons pas prédire l'effet de la baisse d'une cause de la mort sur une autre sans faire d'hypothèses supplémentaires (Yashin, Manton et Stallard, 1986). Le problème de risques concurrents est souvent discuté dans ce contexte. Il n'est toujours pas résolu et aucune solution adéquate n'a été trouvée, et ce malgré sa grande contribution au développement de projections de la mortalité.

Une autre difficulté de cette approche est liée à l'estimation des taux de mortalité par cause de décès. Les statistiques pertinentes sont généralement de qualité inférieure par rapport à celles concernant la mortalité totale.

La reconstruction de l'évolution cohérente de la cause du décès est une tâche difficile en raison de plusieurs révisions de la classification CIM (classification internationale des maladies). En résumé, un examen des tendances récentes de la mortalité par cause semble être utile là où l'objectif est la production de prévisions à court terme. Les projections par cause de mortalité ne peuvent fournir une description adéquate des taux futurs de mortalité que sur une courte période de temps.

Toutefois, en raison du manque actuel de connaissances sur l'étiologie des maladies et sur les facteurs sous-jacents, estimer par causes de décès les tendances de la mortalité dans un avenir lointain semble inadéquat.

Nous nous sommes tournés vers plusieurs experts, afin d'essayer d'aller plus loin dans la modélisation et d'essayer d'être plus réaliste.

Jaques Vallin, Kirill Andreev et James Vaupel, sont des grands experts en la matière qui nous ont confirmé que la modélisation par cause de décès est en général inadaptée pour la longévité.

Une cause principale, d'après ces derniers, en est qu'historiquement, même lorsqu'une maladie est guérie ou mieux soignée, des nouvelles maladies apparaissent. Si bien que ce type de modélisation n'est typiquement efficace que sur 5 à 10 ans au maximum.

De plus comme le fait remarquer Vaupel, les projections d'espérance de vie prenant en compte les causes de décès ont en général produits des résultats plus décevants que celles ignorant ces causes de décès. La raison en est assez simple, lorsque les médecins avancent sur la guérison d'une cause de décès, ils vont reporter leurs efforts et leurs recherches sur les autres principales causes de décès. C'est pourquoi les progrès dans la lutte contre ces causes de décès s'accroissent en général. Ainsi les projections par causes de décès donnent souvent des prévisions d'espérance de vie trop basses.

C'est pourquoi nous n'avons pas continué sur ces modélisations par causes de décès qui demandent beaucoup d'investissements pour un résultat qui pour les uns, sous-estime l'évolution de la mortalité est qui pour les autres s'avère très vite obsolète.

En revanche, nous avons été interpellé par des récents travaux du professeur Vaupel et du professeur Gavrilov, qui cherchent à modéliser l'évolution de la mortalité.

#### 4) **Le modèle de VAUPEL**

Une nouvelle approche a été apportée par le Professeur James W. VAUPEL concernant la projection de l'évolution de la mortalité.

Le professeur Vaupel, directeur de l'institut Max Planck a développé avec le docteur Kirill Andreev, professeur assistant à l'université Queen's de Kingston, une théorie se basant sur l'évolution moyenne de l'espérance de vie maximale en considérant l'ensemble des pays.

Vaupel part du constat suivant, les femmes suédoises avaient en 1840 l'espérance de vie la plus forte au monde: 45 ans. En 2002 l'espérance de vie la plus longue se trouvait dans la population japonaise (85.23 ans). Une évolution de 40 ans en l'espace de 160 années. Cette évolution a été remarquablement linéaire, d'une progression de 2.5 années par décennies. On a donc un indicateur qui semble très fiable pour l'évolution « mondiale » de l'espérance de vie.

Cela est aux yeux de Vaupel, un moyen de pouvoir savoir quelle sera l'évolution de l'espérance de vie dans les prochaines années et les différents pays.

En effet dans la plupart des pays, l'espérance de vie est au dessous de ce record, et avec le temps, un pays donné peut détenir ce niveau record, redescendre en dessous de ce niveau, remonter sur le niveau et ainsi de suite. Cela s'explique par des mesures socio politiques que peut mettre en place un gouvernement lorsqu'il s'aperçoit qu'il est loin de ce taux record. On peut en illustrer un exemple simple en France avec la fameuse phrase consistant à conseiller au Français de manger 5 fruits et légumes par jours pour améliorer sa santé. En effet lorsqu'un pays commence à s'éloigner du niveau record, que ce soit pour la mortalité générale ou pour quelque cause spécifique, la population et le gouvernement s'en inquiètent et des reformes sont mises en œuvre pour stabiliser ou inverser l'évolution de la courbe d'espérance de vie.

Ce raisonnement expliquerait donc la raison pour laquelle l'évolution de l'espérance de vie est assez linéaire, puisqu'elle est elle-même mise en place par la « concurrence » des gouvernements.

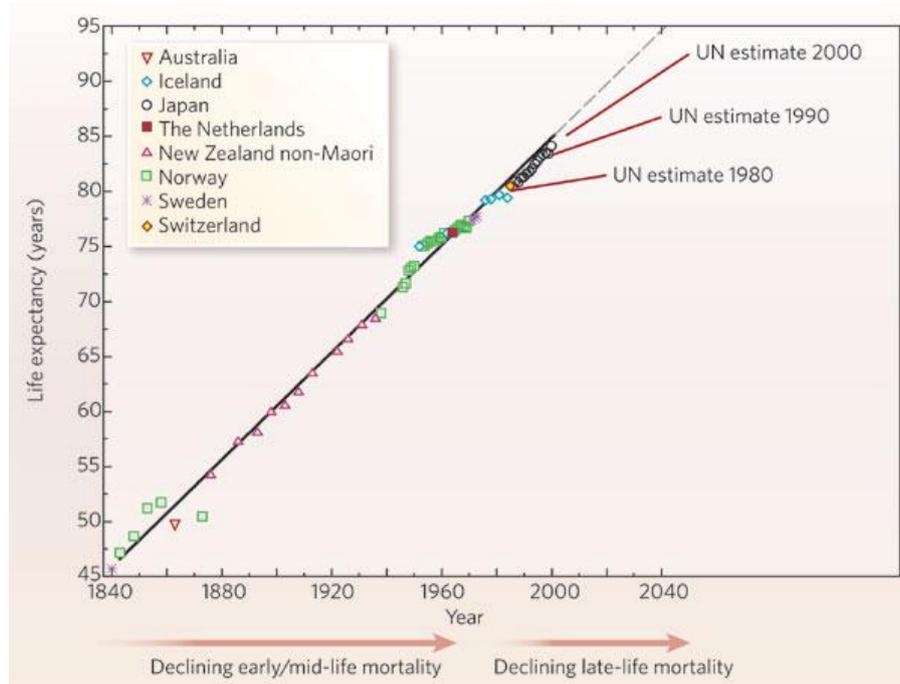


Figure 21. évolution de l'espérance de vie maximale

Sur la figure 21, on peut constater cette évolution linéaire de l'espérance de vie maximale à l'échelle mondiale.

Comme illustré plus haut un pays peut avoir une courbe d'espérance de vie qui fluctue dans le temps, il est donc difficile de prédire l'évolution de l'espérance de vie future à l'échelle d'un pays. En revanche l'évolution mondiale de l'espérance de vie maximale étant très linéaire, elle peut

servir de guide en étant projetée linéairement. On peut ensuite estimer l'espérance de vie d'un pays en prévoyant l'écart entre le niveau du pays à celui du niveau record.

Toujours selon cette description, on comprend pourquoi il peut être inadapté de regarder séparément chaque pays à des fins prévisionnistes et les projections pour les pays qui seraient dans une phase de rattrapage seraient trop optimistes, inversement les prévisions pour les pays qui seraient loin de ce niveau record seraient trop pessimistes.

C'est l'idée directrice de la modélisation proposée par Vaupel. En terme de modélisation mathématique, nous ne sommes pas parvenus à avoir le détail complet. Nous avons pu rencontrer personnellement le docteur Kirill, avec qui nous avons pu discuter de ce modèle. Afin de mieux comprendre la construction des tables prospectives de Vaupel, Il nous a proposé de nous transmettre le programme qui permettait leurs élaborations. Nous ne l'avons pas encore reçu, mais compte tenu du bon sens de la théorie de Vaupel qui semble être très réaliste, et à son expérience conséquente dans le domaine, nous nous sommes servis des résultats qu'il a publiés, même s'il est vrai que nous n'avons pas pu obtenir le détail complet permettant l'obtention des résultats. De plus Vaupel a développé ce modèle en partenariat avec la société Scor ce qui nous a encouragé à analyser ces résultats.

Si l'on compare l'évolution de la mortalité en pourcentage, en partant d'un niveau commun, à nos résultats obtenus sur la base de nos précédents modèles nous remarquons que ce modèle est assez en accord avec les prédictions envisagées par le modèle M9. (figure 22, PERMC et PERMP étant deux tables réglementaires en Espagne, elles ont également été représentées pour une comparaison plus complète)

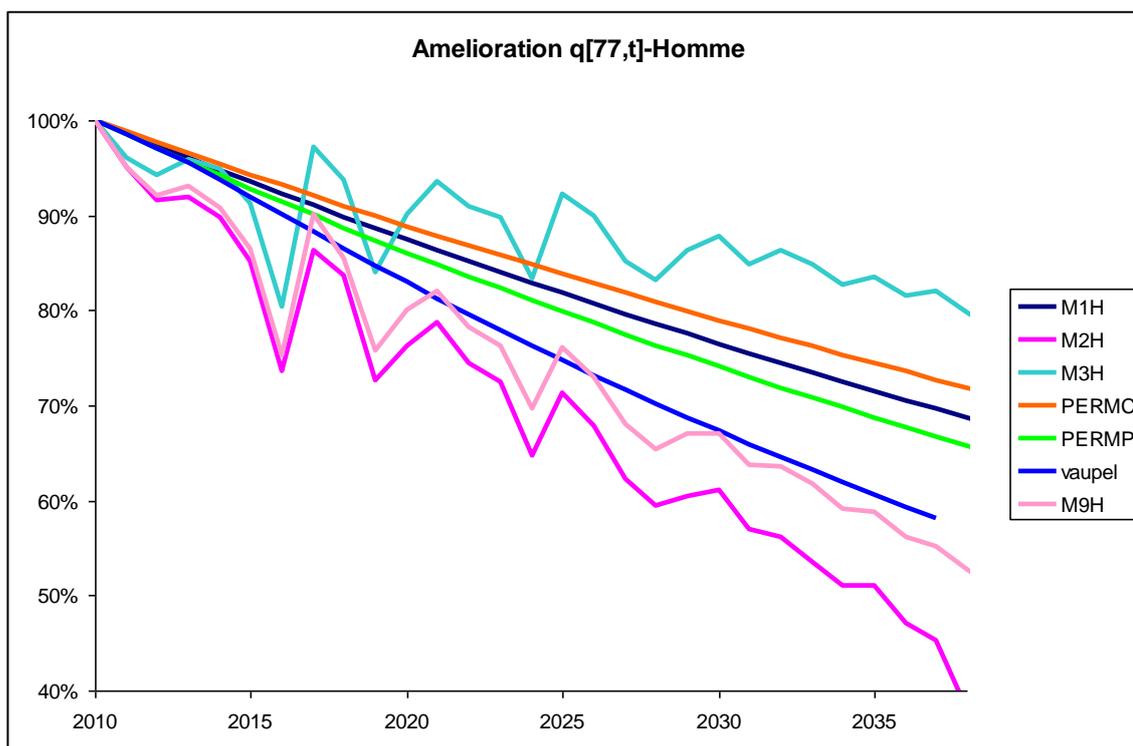


Figure 22. Evolution de la mortalité à 77 ans, comparaison du modèle de Vaupel à d'autres modèles

Ainsi on peut constater que les projections de Vaupel sont assez proches de notre modèle M9 en termes d'améliorations.

Nous avons à présent deux visions de l'évolution de la mortalité qui vont dans le même sens, l'une basée sur la mortalité historique de la population espagnole, l'autre basée sur une approche plus globale et qui s'explique de manière plus concrète.

### 5) **Modèle proposé par Léonid GAVRILOV**

Gavrilov, lui, a une approche plus biologique voire mécanique de la mortalité.

Plutôt que de faire un constat sur l'évolution de la mortalité par un modèle où le taux instantané se décompose en paramètres expliquant les effets de l'âge, de la période, et de cohorte comme nous avons pu le voir, il élabore un modèle où le corps humain est représenté comme une machine. L'organisme humain peut être représenté comme un enchaînement d'organes, où chaque organe est lui-même composé d'un bloc de plusieurs cellules.

Certains organes sont vitaux (cœur, foies...) d'autres ne le sont pas. La mort d'un organe vitale entraîne la mort de l'individu, alors que la mort d'un organe non vital ou d'une partie des cellules composant cet organe vital n'entraîne pas la mort de l'individu.

Cette approche peut être facilement représentée par un parallèle avec les circuits électriques en physique. Certains circuits sont branchés en série et d'autres en dérivation. Dans un circuit où les composants (qui représentent les organes vitaux) sont branchés en série, la mort d'un des composants du circuit entraîne directement la mort du circuit, même si les autres composants étaient en parfait état de fonctionnement. En revanche si le circuit est branché en dérivation, la mort d'un composant n'a pas d'impact fondamental sur le fonctionnement global du circuit (mis à part que la probabilité que tous les composants en dérivation se détériorent augmente).

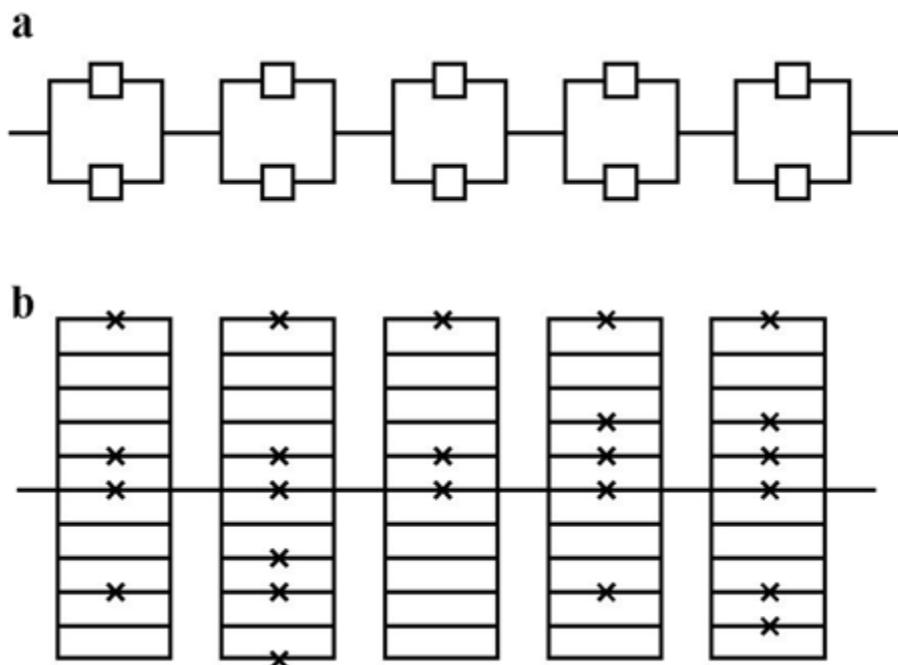


Figure 23 schématisations de la représentation de l'organisme humain par Gavrilov

Le corps humain est représenté comme un modèle composé (figure 23.b) où les organes sont un mélange de composants connectés en série et en dérivation. Les organes vitaux sont ceux en séries. Dans ces organes vitaux, il ya des composants connectés en dérivation (cellules), pas tous ces éléments sont fonctionnels initialement. Les éléments fonctionnels ont une probabilité  $q$  d'être en vie initialement  $q$ . Ainsi le nombre d'éléments fonctionnant initialement dans un bloc composé de  $n$  éléments, suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda = nq$ . Ainsi le paramètre  $\lambda$  correspond au nombre moyen d'éléments fonctionnel dans un bloc. (plus loin nous changerons cette hypothèse en prenant une loi binomiale qui est plus appropriée pour l'organisme humain comme le fait remarquer le professeur Gavrilov)

Si on considère un système de  $n$  composants indépendants, connectés en série, la probabilité de survie du système est conditionnée par la survie de l'ensemble des composants

$$P_s = P_1 P_2 \dots P_n$$

Le taux de mortalité instantané d'un système connecté en série est égal à la somme des taux instantanés de ses composants.

$$\mu_s = \mu_1 + \mu_2 + \mu_i + \dots + \mu_n$$

Si les taux instantanés de tous les composants sont identiques, le taux instantané d'un système de n composants est de  $n\mu$ .

Considérons à présent un système où les n composants sont connectés en parallèle,

La probabilité que le système meurt est alors le produit des probabilités de défaillance de chaque composant.

On a alors

$$Q_s = q_1 q_2 \dots q_n \quad \text{et} \quad P_s = 1 - Q_s = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n)$$

Si les probabilités de survie de tous les composants sont identiques, on a

$$P_s = 1 - (1 - p)^n$$

$$S(x) = 1 - (1 - e^{-\mu x})^n$$

La force de mortalité d'un tel système est donné par

$$\mu_s(x) = \frac{-dS(x)}{S(x)dx} = \frac{n\mu e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{n-1}}{1 - (1 - e^{-\mu x})^n} \approx n\mu^n x^{n-1}$$

$$\text{avec: pour } x \ll 1/\mu, 1 - e^{-\mu x} \approx \mu x$$

Après avoir donné les équations déterminant les taux instantanés de mortalité de nos circuits en séries et en dérivations, il convient d'analyser le taux de mortalité d'un circuit composé des deux éléments.

Nous cherchons le taux de mortalités d'un organisme humain représenté par m organes connectés en série, et, où chaque organe est formé de n composants connectés en parallèle

On a donc m blocs composés chacun de n composants.

Notons  $\mu_b$  la force de mortalité d'un de ces blocs.

Comme nous l'avons soulevé précédemment, le taux de mortalité instantané de m blocs connectés en série est égal à la somme des taux instantanés de ces blocs :

$$\mu_s = \sum \mu_b = \sum_{i=1}^n m P_i \mu_b(i)$$

Où  $P_i$  est la probabilité pour un bloc d'avoir initialement i éléments fonctionnels.

Nous considérons que le nombre d'éléments fonctionnant initialement dans les organes de l'organisme humain suit une loi binomiale (si  $i = 0$  cela signifie que l'organe n'a pas d'éléments fonctionnels initialement et ne peut donc pas être viable).

(On pourra se référer à l'annexe 1 pour plus de détails sur les calculs)

Finalement nous obtenons le modèle suivant décrivant la force de mortalité d'un organisme

$$\mu_s(x) = Cmn(q\mu)^n \left[ \frac{1-q}{q\mu} + x \right]^{n-1}$$

Où  $C$  est un facteur de normalisation, permettant de s'assurer que la somme des probabilités (d'avoir  $i$  éléments fonctionnel) est égal à 1.

$$C = \frac{1}{1-(1-q)^n}$$

Une fois cette expression de la mortalité formalisée par le professeur Gavrilov. Nous avons pour objectif de l'utiliser à des fins de projections.

Pour cela, l'idée était d'essayer d'ajuster les taux de mortalités historiques de la population espagnole via cette expression de mortalité. Ainsi pour une année donnée, nous pouvons estimer les paramètres de ce modèle, qui sont au nombre de 4 ( $m, n, \mu$  et  $q$ )

Nous avons cherché à estimer ces paramètres pour chaque année allant de 1908 à 2006. Le but de cette opération était d'essayer de trouver une tendance temporelle de ces 4 paramètres, auquel cas nous aurions pu extrapoler l'évolution de ces paramètres dans les années à venir pour obtenir des taux futurs.

Après avoir essayé d'ajuster ce modèle aux données brutes, nous avons constaté que les paramètres n'étaient pas stables, en effet, ce modèle probablement trop paramétré cherche à s'ajuster au mieux aux données. Les différents paramètres opèrent une sorte de concurrence entre eux, de sorte qu'un paramètre donné n'arrive pas à capter une évolution quelconque.

Bien que cette recherche n'a pas donné de résultats utilisables, elle était justifiée par le fait que ce modèle pouvait s'expliquer de manière biologique et aurait permis, dans ce sens, d'avoir une idée réelle des facteurs influençant l'évolution de la mortalité.

### III. Résultats et applications des modèles à un portefeuille de rentes espagnoles

#### A. Modèles pertinents pour modéliser au mieux la longévité en Espagne

##### 1) Comparaison des modèles standards

Une fois les simulations réalisées, il reste à savoir dans quelles mesures celles-ci peuvent être fiables. Plusieurs indicateurs plus ou moins efficaces peuvent mettre en doute la performance d'un modèle (BIC, back testing, l'analyse de résidus...). En revanche, aucun indicateur ne permet d'affirmer qu'un modèle est bon. La bonne approche est donc de passer en revue les résultats des différents modèles et, à partir des indicateurs que nous possédons, procéder par élimination pour ne garder que les modèles restants.

##### le BIC de l'ajustement:

Une bonne simulation est à priori obtenue à partir d'un bon ajustement aux données brutes. Ainsi, nous pouvons déjà nous baser sur le BIC de la modélisation pour estimer à première vue de la qualité d'une simulation. Attention cependant, l'inverse n'est pas vrai: un bon ajustement aux données brutes n'assure pas toujours de bonnes simulations. Il ne faudra pas se contenter du BIC. Dans le tableau 1, sont représentés les BIC obtenus en appliquant les différents modèles à la population nationale espagnole HMD. Les modèles ont été ajustés pour les âges 40-95 et les périodes 1961-2006. Sur la base de cet indicateur, les modèles les moins pertinents, semblent être les modèles M5 pour les hommes comme pour les femmes. On peut déjà noter, sans pour autant tirer de conclusion, que les modèles M2 et M9 semblent les meilleurs, leurs valeurs de BIC étant conséquemment plus élevées que celui des autres modèles. Ce décalage est plus marqué pour les femmes où l'ordre de grandeur du BIC se détache plus clairement de ceux des autres modèles.

	Hommes		Femmes
(M9)	-15509,89702	(M2)	-15224,5153
(M2)	-15515,7888	(M9)	-15470,144
(M7)	-16088,2588	(M7)	-19276,0532
(M8)	-16323,6924	(M3)	-19421,9909
(M8)	-16377,5667	(M1)	-21533,2407
(M3)	-17688,9409	(M8)	-21754,0451
(M1)	-18890,81	(M8)	-23007,1935
(M5)	-27050,4175	(M5)	-60679,7775

Tableau 1. BIC des modèles sur la période 1961-2006 de 40 à 95 ans

Afin de se persuader de la stabilité de ces résultats et de ne pas les imputer aux aléas de la période observée, nous avons effectué les mêmes calculs en prenant comme fenêtre d'observation les années 1961 à 1982 (tableau 2).

	Hommes		Femmes
(M9)	-7375,221074	(M2)	-7410,567115
(M2)	-7411,246542	(M9)	-7655,377654
(M3)	-7479,042418	(M3)	-8030,026677
(M8)	-7775,554631	(M8)	-9049,126154
(M7)	-7843,772278	(M7)	-9440,985341
(M6)	-7938,911375	(M6)	-11279,51467
(M1)	-9081,008823	(M1)	-11310,00925
(M5)	-10214,18322	(M5)	-21168,56447

Tableau 2. BIC des modèles sur la période 1961-1982 de 40 à 95 ans

Ces résultats vont dans le même sens que ceux constatés pour la période 1961-2006. Au vu de ces résultats, nous ne nous permettons pas de choisir un modèle mais seulement d'en rejeter. A ce stade nous rejetons le modèle M5 pour les hommes comme pour les femmes, et nous regarderons les prochains indicateurs pour nous prononcer sur la rétention ou non des autres modèles.

#### **Le backtesting :**

Si le BIC peut s'avérer être un indicateur pertinent, il se limite à mesurer la qualité d'ajustement des modèles aux données brutes, qui sont des données du passé. Une étude complémentaire a été menée afin d'évaluer la capacité prédictive du modèle : le backtesting.

Un bon moyen de jauger la qualité d'une simulation est de la réaliser pour des taux de mortalité déjà connus. Ainsi, au lieu de réaliser les ajustements des modèles jusqu'à la dernière année pour laquelle les taux de mortalité empiriques sont disponibles, nous pouvons nous arrêter quelques années voire décennies auparavant, simuler les  $qx,t$  à partir de cette année là, et les comparer aux  $qx,t$  réels de la période projetée.

Si les  $qx,t$  projetés sont proches des  $qx,t$  empiriques, nous pouvons espérer que les simulations futures ne seront pas mauvaises. Cependant, un modèle qui donne de mauvais backtests, est un modèle a priori peu adapté à l'échantillon de population étudié.

Nous faisons ce back testing en ajustant nos modèles sur les années 1961-1982, et nous projetons sur les années postérieures (1983-2006). Le résultat de cette projection est ensuite confronté aux taux réels de ces années 1983-2006.

Afin de pouvoir comparer les modèles, relativement les uns aux autres, nous avons calculé la statistique suivante pour la projection de chaque modèle, et cela, pour plusieurs âges.

$$\sum_{i=0}^{\min(23;95-x)} \left( \frac{q_{x+i,t+i}^{modele} - q_{x+i,t+i}^{obs}}{q_{x+i,t+i}^{obs}} \right)^2$$

Cet indicateur de backtesting proche du test du chi-deux nous permet de comparer les écarts relatifs des données projetées aux données réellement observées.

A titre d'illustration, nous avons retenu seulement certains âges : les âges 50, 60, 70 et 80 ans.

Hommes	50	60	70	80
M1H	0,0777718	0,11394684	0,07473388	0,02995269
M2H	0,13194156	0,16001652	0,12700975	0,10413559
M3H	0,13031904	0,02400298	0,17492805	0,11484904
M5H	0,1550899	0,02178371	0,05114362	0,04095572
M6H	0,27158876	0,06591678	0,04827485	0,02414321
M7H	0,67874855	0,10568778	0,25527371	0,13867181
M8H	1,33626831	1,23834422	0,94086328	0,15451371
M9H	0,10194155	0,1007639	0,08878876	0,04781991

Tableau 3 écarts entre qx réels et projetés (Hommes)

Pour les hommes le modèle (M8) a donné des projections très éloignées de la réalité. Il en est de même pour le modèle M7 qui n'est pas très fiable pour la projection de mortalité d'un individu âgé de 50 ans.

Femmes	50	60	70	80
M1F	0,12246843	0,23300237	0,26164314	0,05276376
M2F	0,62458311	0,3599026	0,31547448	0,12404238
M3F	0,13083488	0,21806087	0,76611502	0,34523197
M5F	0,63014076	0,24823189	0,12182608	0,02744784
M6F	4,22658524	0,97920339	0,04230501	0,07028915
M7F	7,60729996	0,61081585	1,90793275	1,06741919
M8F	20,6679906	24,3327208	21,6019217	4,74725683
M9F	0,78282443	0,607329	0,38702618	0,07487558

Tableau 4. écarts entre qx réels et projetés (Femmes)

Le même constat peut être fait pour les femmes avec en plus le modèle M6 qui s'est également avéré être un mauvais modèle prévisionniste dans le passé.

Nous pouvons également montrer graphiquement ces écarts de prévisions, cette vision est complémentaire à la précédente, la simple vision de l'indicateur calculé auparavant peut nous masquer certains éléments. En effet, on peut avoir une valeur élevée de celui-ci, due à un écart sur une seule observation, et cependant être en présence d'un modèle qui a parfaitement été bon sur les autres années. De même un aperçu graphique pourra nous permettre de voir certaines caractéristiques du modèle : un modèle pourrait être bon pour les prévisions de court terme et moins pour le long terme et vice versa.

Une vue graphique (figure24.a) nous permettra de déterminer la nature de l'écart.

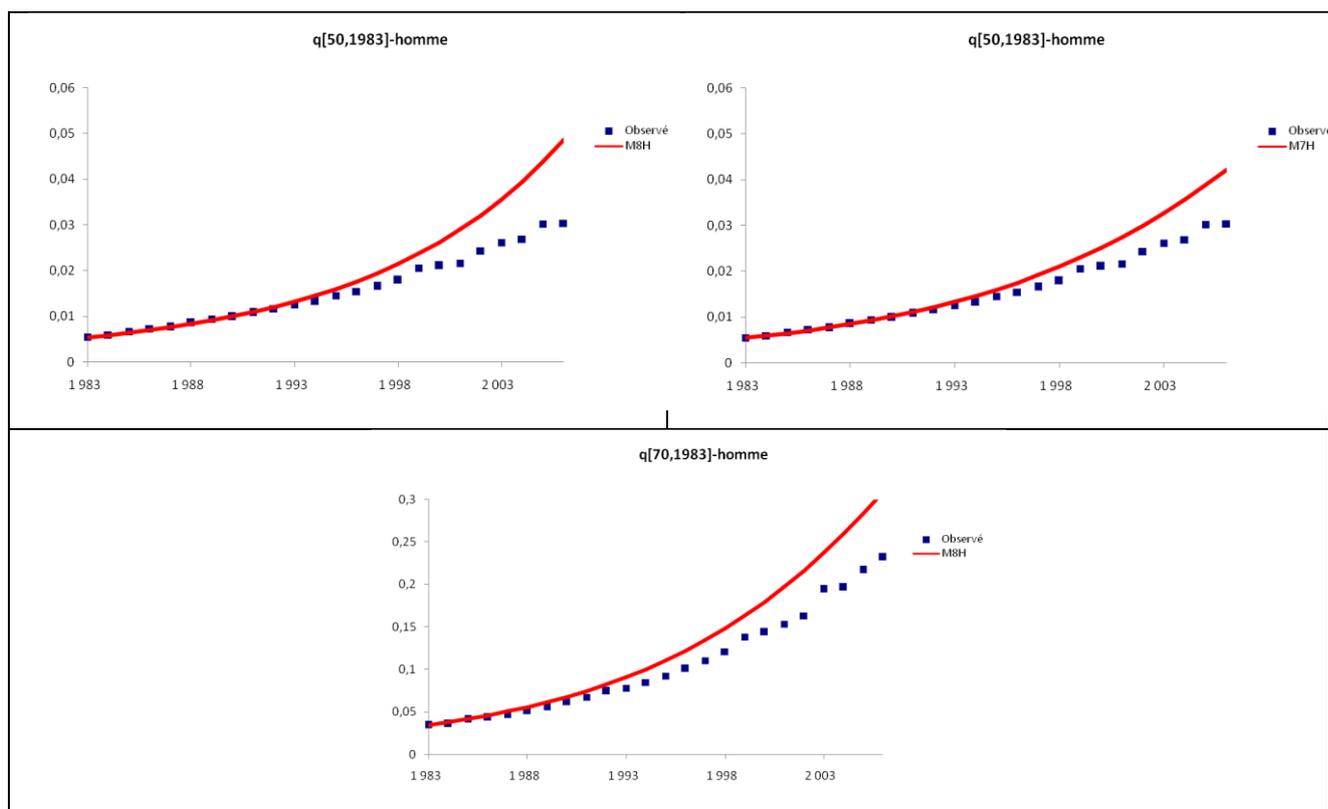


Figure 24.a Confrontation de qxt projetés et observés sur les années 1983-2006 (hommes, modèles M7 et M8)

Sur la base de ces représentations graphiques, il semble que les modèles M7 et M8 ont eu un mauvais pouvoir prédictif après une période de projection de 12 ans concernant les projections de mortalité d'une cohorte âgée de 50 ans en 1983. Pour la projection de mortalité d'une cohorte âgée de 70 ans, la projection via le modèle M8 s'est avérée être dépassée à un peu moins de 10 ans de projection. Ces modèles ont tous sous estimé la longévité puisqu'ils ont donné des prévisions de qx, supérieures à ceux réellement observés

Afin de voir le contraste entre un bon modèle et un mauvais modèle sur la base du back testing, nous pouvons montrer la bonne prévision du modèle M1 par exemple pour ces mêmes âges (figure 24.b):

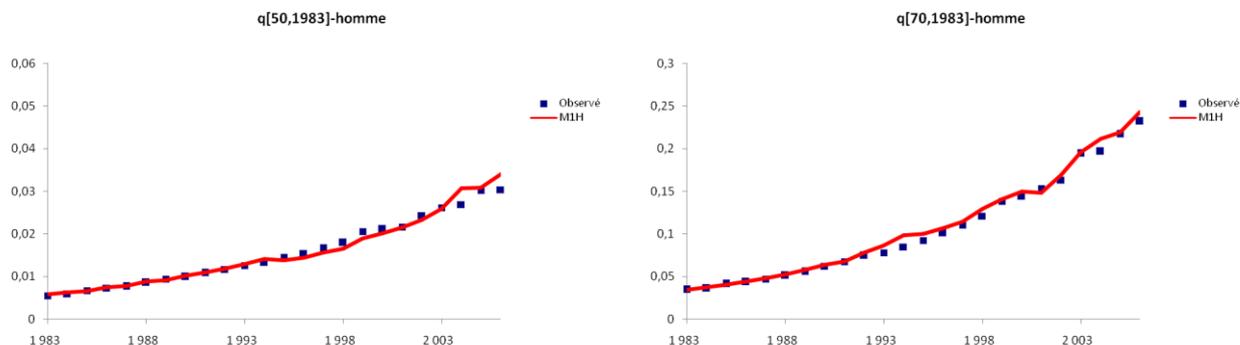


Figure 24.b. Exemple d'un bon backtest (M1, hommes)

Pour les femmes :

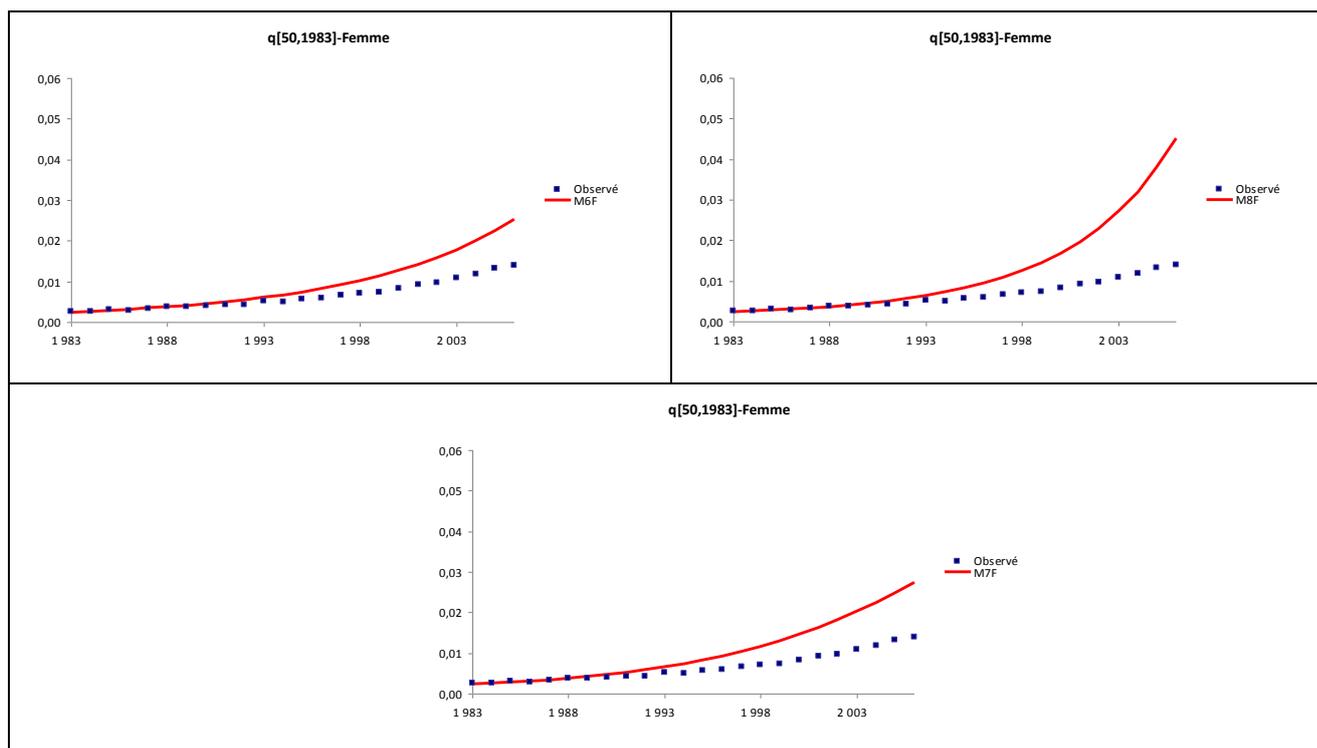


Figure 24.c. Confrontation de qxt projetés et observés sur les années 1983-2006 (femmes, modèles M6, M7 et M8)

Nous remarquons que pour la population féminine, les projections de mortalité pour les cohortes âgées de 50 ans via les modèles M6, M7 et M8 ont été dans cet ordre respectif, de moins en

moins justes. Les 3 modèles donnent des prévisions totalement différentes de la réalité après une dizaine d'année de projection. Là aussi, ces modèles ont tous sous estimé la longévité.

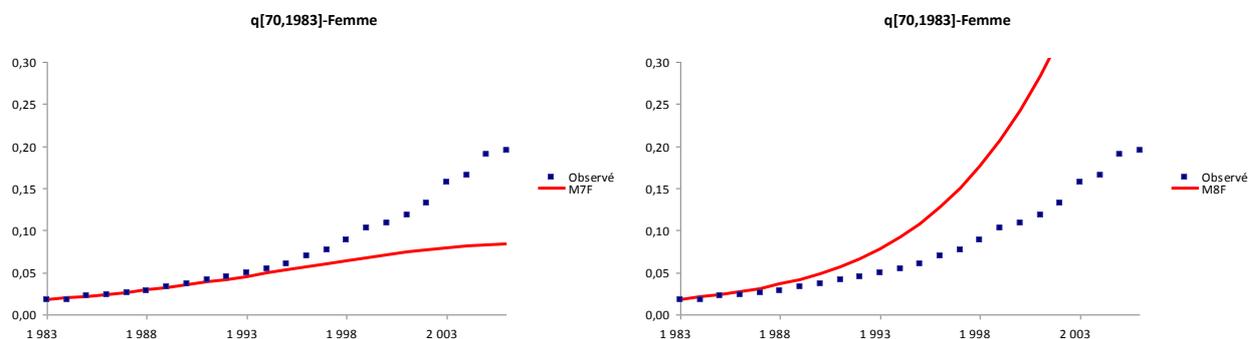


Figure 24.d. Confrontation des qxt projetés et observés sur les années 1983-2006 (femmes, modèles M7 et M8)

Enfin, toujours pour une cohorte féminine, cette fois ci âgée de 70 ans (figure 24.d), nous constatons que le modèle M7 a surestimé la longévité en prévoyant des qx plus bas que ceux réellement observés.

### L'Analyse des résidus :

Un autre critère de filtration de modèle consiste à analyser les résidus de Déviance. Plutôt que de montrer les résidus pour un âge fixé, nous en donnons une image en 2 dimensions où un jeu de couleur permet d'avoir un regard plus global sur la qualité du modèle.

Pour les hommes les résidus montrent clairement que les modèles M5 et M3 ne sont pas adaptés, le modèle M1 est intermédiaire, il montre clairement des effets générationnels, les résidus importants sont souvent situés sur des diagonales.

Les modèles M2 et M9 ont des résidus faibles sur l'ensemble des âges et années modélisées. Concernant les femmes, tous les modèles peuvent être éliminés mis à part les modèles M2 et M9 (mais de manière moins évidente pour les modèles M1).

L'ensemble des graphiques des résidus se trouve en annexe, on montrera juste un contraste entre un bon et mauvais modèle du point de vue des résidus.

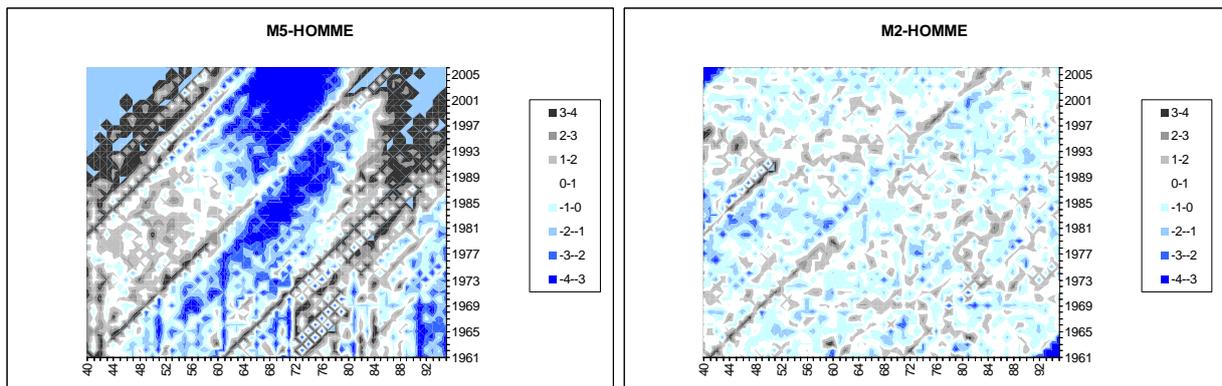


Figure 25 Résidus de déviance de l'ajustement des modèles sur la période d'observation

Enfin, il est bien d'avoir un regard global sur les modélisations de l'évolution de la mortalité pour certains âges. L'allure des courbes représentant l'évolution des  $q_x$  (en pourcentage d'un niveau initial), nous permet d'observer si des modèles donnent des résultats irréalistes.

Dans ces représentations graphiques (figure 26), l'âge reste le même, il y a uniquement le temps que nous faisons évoluer.

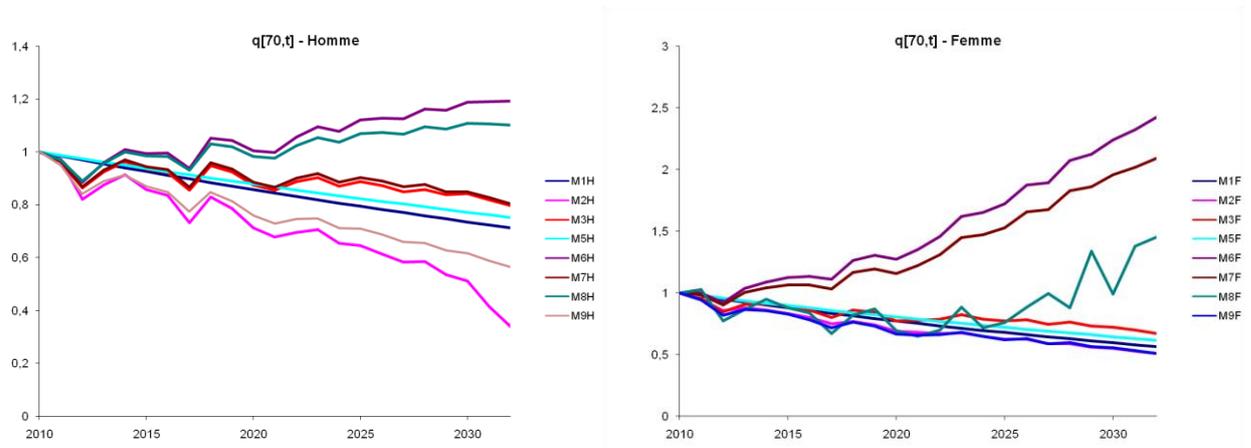


Figure 26 évolution des  $q_x$  dans le temps, (pour un âge fixe de 70 ans, et en pourcentage d'évolution)

Ainsi nous pouvons observer que pour l'âge 77, les modèles M6 et M8 donnent une vision « absurde » (par rapport à l'idée qu'un bon modèle est un prolongement du passé) de la mortalité en la faisant augmenter dans le temps. L'âge 77 a été pris à titre d'exemple car il représente l'âge

moyen de notre portefeuille d'assurés, mais des résultats identiques ont été également constatés pour d'autres âges.

Pour les femmes, le même phénomène peut être observé pour les modèles M6 et M7. Le modèle M8 montre, dans des moindres mesures, la même « absurdité ».

Au vu de ces différentes observations, nous pouvons résumer dans un tableau les résultats de ces différents indicateurs pour en extraire la résultante et connaître les modèles jugés acceptables et à conserver.

	Hommes	Femmes
BIC	(M5)	(M5)
ANALYSE DES RESIDUS	(M1), (M3), (M5)	(M1), (M3), (M5), (M6), (M7)
BACK TESTING	(M7), (M8)	(M6), (M7), (M8)
ALLURE GRAPHIQUE	(M6), (M8)	(M6), (M7), (M8)
Bilan (Modèles non rejetés)	(M2), (M9)	(M2), (M9)

Tableau 5 synthèse des modèles à rejeter selon les différents critères de sélection

Les modèles qui ne sont pas rejetés sont donc les modèles M2 et M9.

## 2) Les modèles standards confrontés aux modèles issus de la recherche.

Bien que le modèle M9 soit aussi un modèle issu de la recherche, développé en interne par Edouard Debonneuil, nous l'avons traité avec les autres modèles standards dans la mesure où il présente les mêmes fondements de base.

Il est intéressant de comparer entre eux les 2 modèles retenus M2 et M9 ainsi que celui proposé par le professeur Vaupel.

Pour les confronter, nous pouvons observer l'évolution de la mortalité dans le temps pour des âges donnés, en faisant également évoluer l'âge de l'assuré (cela correspond à l'étude longitudinale, c'est-à-dire l'étude de la mortalité d'une cohorte donnée). Prenons à titre illustratif les âges 50 et 77 ans.

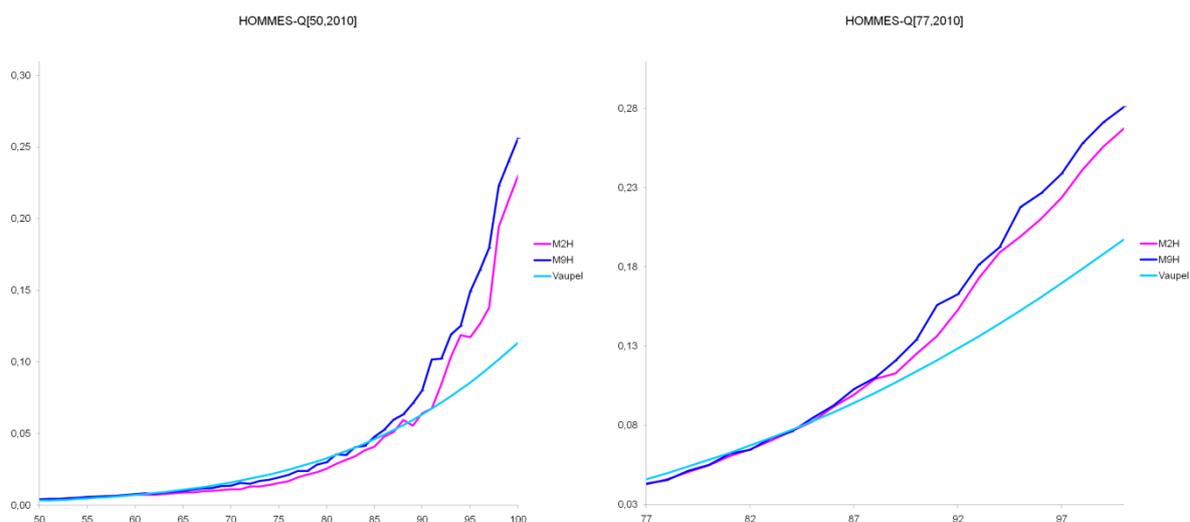


Figure 27 Courbes de mortalité pour une cohorte âgée de 50 (à gauche) et 77 ans (à droite) en 2010.

Graphiquement déjà, nous nous apercevons que nos modèles M2 et M9 suivent globalement la même tendance. Vaupel, lui, prévoit des baisses de mortalité plus forte et cela pour les grands âges.

Pour confirmer ce constat graphique, nous pouvons observer l'espérance de vie à différents âges.

	$e^{\circ}_{50}$	$e^{\circ}_{77}$	$e^{\circ}_{83}$
M2	36,8	10,8	6,27
M9	35,1	10,6	6,12
VAUPEL	35,7	11,1	6,80

Notre portefeuille espagnole concerne une population dont la moyenne d'âge est de 77 ans, cette différence de résultats sur les grands âges n'est donc probablement pas sans conséquence.

### 3) Les tables réglementaires

Pour pouvoir se prononcer sur la présence ou non d'un risque de longévité en Espagne, il est naturel de procéder à une comparaison des tables officielles utilisées par AXA Espagne pour le calcul de ses réserves aux tables que nous avons élaborées sur la base de la population nationale. Ainsi nous pourrions voir si les tables réglementaires espagnoles semblent suffisamment prudentes.

Actuellement, il y a essentiellement deux types de tables réglementaires espagnoles que l'on rencontre dans les portefeuilles : les tables Perm/f2000C et perm/f2000P. La table Perm/f2000C

est la table qu'il convenait d'utiliser pour les affaires réalisées avant le 3 octobre 2000. Est ensuite apparue la deuxième table (perm/f2000P) qui a pour vocation d'augmenter la prudence par rapport à l'ancienne table.

Lorsque l'on compare deux tables pour en apprécier leurs différences en termes de prudence, on peut focaliser l'observation sur deux éléments. Certaines tables (appelons les tables A) pourront nous sembler prudentes dans la mesure où pour un  $qx$  donné, le niveau de mortalité est inférieur à celui d'une autre table B ( $q_{x,t}^A < q_{x,t}^B$ ). Cependant, cette même table A peut avoir un taux d'amélioration plus faible que la table B de sorte qu'à partir de  $n$  années plus tard on ait  $q_{x+n,t+n}^A > q_{x+n,t+n}^B$ ). Ainsi la table A n'était pas forcément la plus prudente.

Pour dire cela plus simplement, on peut choisir de porter un regard sur le niveau de mortalité ou sur le taux d'amélioration de la mortalité.

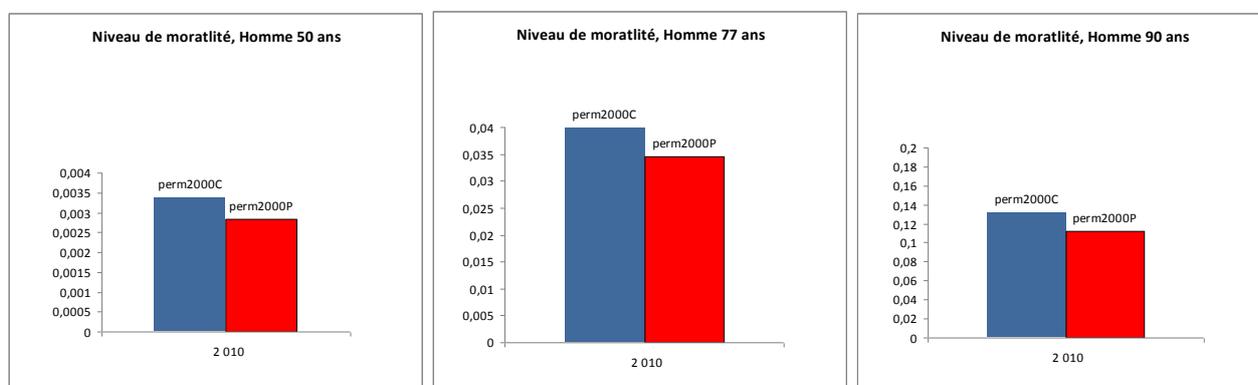


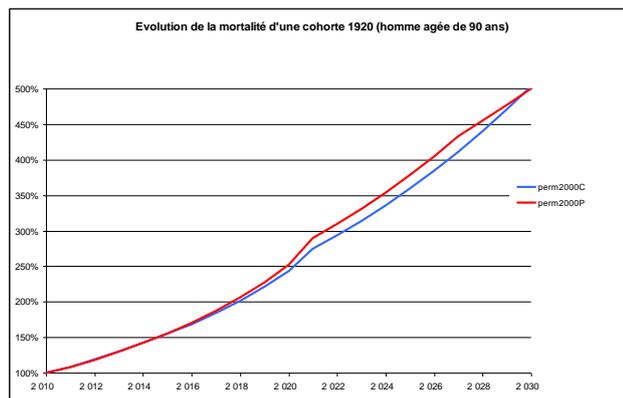
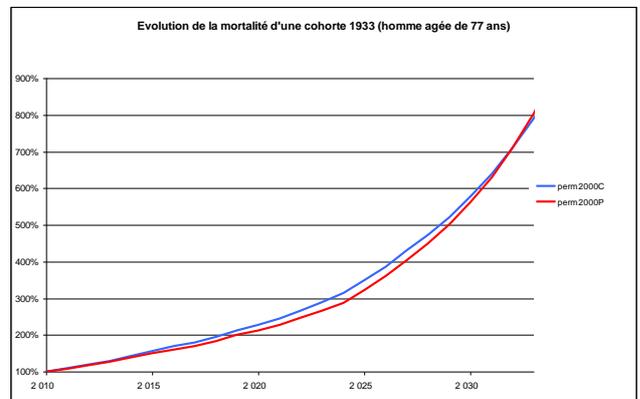
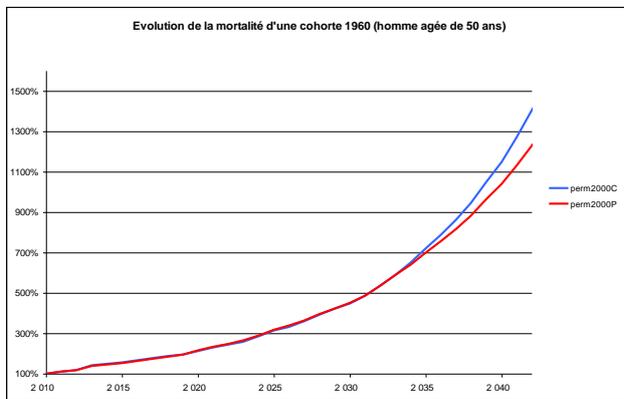
Figure 28 comparaison des niveaux de  $qx$  des tables réglementaires en 2010 pour les âges 50,77 et 90.

Cette vision de la mortalité ( $qx$  pour les âges 50, 77 et 90 ans), nous montre surtout que la prudence de la nouvelle table réglementaire est liée à une réévaluation à la baisse du taux de mortalité. Pour l'année 2010, on a un abattement variant entre 76% et 83% pour l'ensemble des âges. Plus précisément, pour les trois âges pris pour illustration ci-dessus, on a les écarts suivants:

	Tables perm2000C	Tables Perm2000P	Abattement
q [50,2010]	0,003355137	0,002823983	84,16 %
q [77,2010]	0,039864239	0,03463661	86,88 %
q [90,2010]	0,131721707	0,11240588	85,83 %

En revanche, cela ne nous donne aucune indication sur la différence entre les deux tables en terme d'amélioration dans le temps, élément le plus important pour l'appréhension d'un risque de longévité. En effet une table est en général reprise par les assureurs afin de l'adapter à la mortalité historique du portefeuille. L'assureur applique un abattement sur la table pour l'adapter à son portefeuille. Il n'est donc pas très pertinent de comparer deux tables qui ne partent pas du même niveau.

Pour en avoir une idée, il convient de confronter les courbes de mortalité d'une personne à un âge donné et des améliorations de leur mortalité dans le temps. Cette comparaison peut se faire en confrontant un graphique reflétant les pourcentages d'amélioration à travers l'âge et le temps. (pour une cohorte fixée, si  $x_0$  désigne l'âge de cette cohorte et  $t_0$  la période correspondante, on représente graphiquement les ratios  $\frac{q_{x_0+n,t_0+n}}{q_{x_0,t_0}}$  pour  $n=0,1,2,\dots$ )



Par observation des différentes courbes, en prenant une panoplie de cohortes, nous faisons le même constat que celui que laissent entendre les graphiques précédents :

En terme d'amélioration la table Perm 2000P est sensiblement la même que la table Perm2000C à ces âges, avec une sensible différence pour les âges élevés. Pour les cohortes les plus jeunes, on

observe aussi de faibles différences, que nous ne montrons pas car la majeure partie des âges de notre portefeuille espagnol se situe autour des 77 ans.

Une autre manière d'illustrer les améliorations des tables est de montrer l'évolution dans le temps de la mortalité ( $q_{x,t}$ ) en gardant l'âge fixe. Cependant, il est plus juste de montrer le graphique d'évolution de la mortalité d'une personne donnée, ce qui montre le réel impact financier de la table sur la longévité d'une personne.

Au vu des faibles différences de ces deux tables en terme d'amélioration, nous doutons que ce changement de table réglementaire puisse répondre à la problématique posée par une augmentation de la durée de vie.

Dans la suite nous verrons l'impact de l'utilisation de ces différentes tables sur notre portefeuille.

#### 4) **Comparaison des modèles aux tables réglementaires.**

Dans la continuité de l'étude, après avoir constaté les faibles améliorations des tables perm/f2000P par rapport aux tables perm/f2000C, nous souhaitons mettre en relief les améliorations et évolutions de la mortalité de ces deux tables réglementaires espagnoles par rapport à la projection effectuée grâce à nos modèles basés sur la population nationale.

Une hypothèse forte doit tout d'abord être émise afin de pouvoir faire une telle comparaison entre les tables générationnelles établies à partir de la population nationale et la population assurée.

En effet les assurés ne constituent qu'une classe de la population espagnole et ne présentent donc pas forcément les mêmes caractéristiques. La catégorie socioprofessionnelle peut avoir une influence dans la possibilité d'accéder au soin, pour des raisons de coûts sanitaires, mais aussi pour des raisons de manque d'informations concernant la santé. C'est pourquoi, les tables générationnelles basées sur la population nationale donnent des taux de mortalité supérieurs aux tables règlementaires d'assurés qui concernent une population plus aisée, plus riche, ayant les moyens de souscrire une assurance.

Pour éviter un tel biais, l'idéal est de construire sa propre table d'expérience, basée sur une population d'assurés, mais comme nous l'avons souligné dans la partie 1, cela demande de disposer d'importantes données d'expériences que nous ne disposons pas.

C'est pourquoi plutôt que de confronter les courbes de mortalité de manière directe, nous préférons comparer les améliorations des différentes tables. Ainsi nous évitons d'être confrontés au biais explicité auparavant à savoir que nous comparons des tables qui ne partent pas d'un même niveau de mortalité pour des raisons de biais de sélection de la population.

L'hypothèse forte consiste donc à supposer que les améliorations de mortalité de la population générale et de la population d'assurés sont les mêmes. Cela est en effet discutable et peut être une limite. Cependant, il semblerait que le biais de sélection entre une population assurée et une population nationale soit plus fort pour un niveau de mortalité que pour les améliorations de la mortalité. Ce constat a été fait sur les Etats Unis, où les améliorations nationales ont été les mêmes que les améliorations des assurés. Ce point est discuté par bon nombre de démographes et actuaires et il n'y a pas de réponse claire.

Nous nous limiterons à une comparaison verticale sur les améliorations des différentes tables sur une tête âgée de 77 et 82 ans.

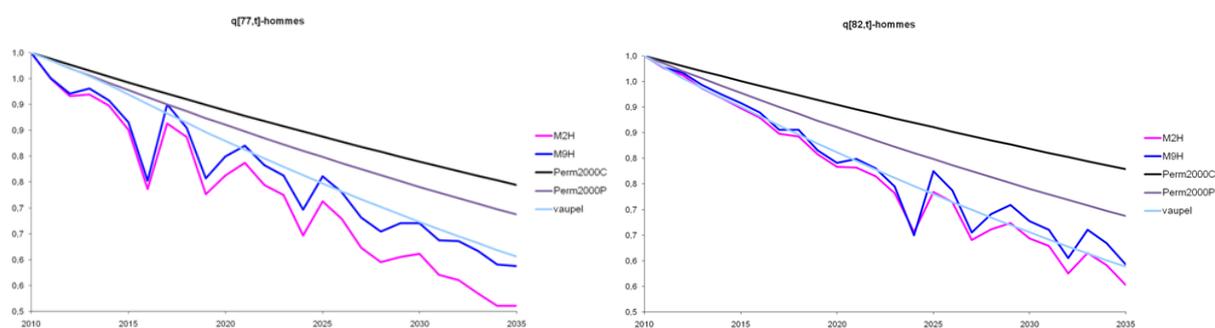


Figure 30 évolution des qx (pour des âges fixés à 77 et 82 ans, et en pourcentage d'évolution)

Plus nous avançons dans les âges, plus nous constatons que les améliorations de Vaupel se rapprochent de celles des modèles M2 et M9 pour devenir plus fortes à partir des âges avoisinant les 90 ans. Mais le constat principal est qu'il apparaît clairement que les améliorations prévues par les tables générationnelles sont moins fortes que celles de nos modèles. Cependant il faut garder à l'esprit qu'il s'agit ici d'une représentation verticale qui ne reflète pas l'évolution réelle de nos assurés.

On peut en revanche observer une représentation longitudinale des améliorations (améliorations d'une courbe de mortalité) pour une personne âgée de 77 ans.

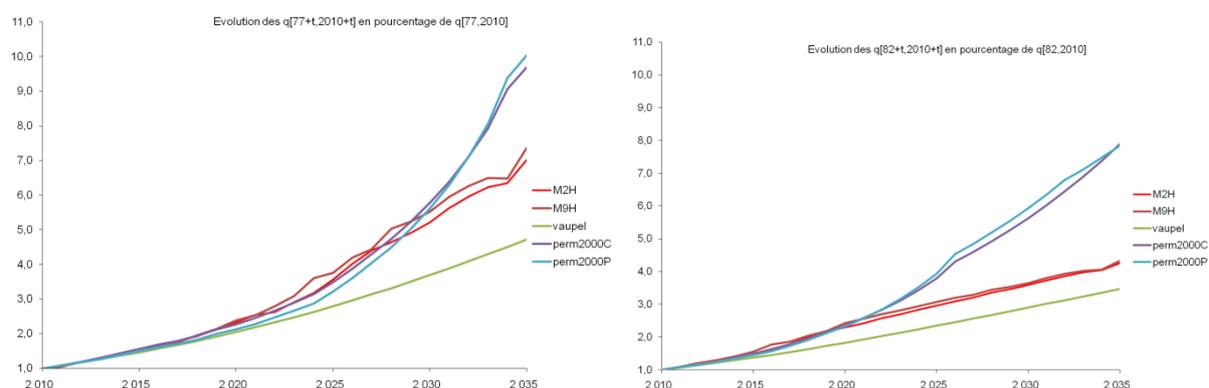


Figure 31 évolution des qxt (pour les âges 77 et 82 ans, et en pourcentage d'évolution)

Ces graphiques ont tendance à montrer un décalage du modèle de Vaupel par rapport aux autres, quelque soit l'âge de la cohorte. En revanche lorsque l'on compare nos modèles M2 et M9 aux tables réglementaires, on observe que, pour 77 ans, les modèles M2 et M9 ne présentent pas d'améliorations plus fortes que celles des tables réglementaires. C'est en revanche le cas pour des âges supérieurs comme 82 ans. Ainsi, mis à part le modèle de Vaupel, qui semble présenter des meilleures améliorations quelque soit l'âge de la cohorte, on ne peut pas conclure sur la base de ce graphique, que les modèles M2 et M9 sont plus ou moins prudents que les tables réglementaires. Ces représentations graphiques sont limitées puisqu'elles nous permettent uniquement de comparer des modèles à un âge fixé. Or, un portefeuille d'assurance est composé de plusieurs cohortes. Et chaque personne perçoit une rente dont le montant diffère.

Nous verrons par la suite le réel impact financier de ces modèles sur un portefeuille de rentes viagères.

## B. Application à un portefeuille de rentes espagnoles

Face à l'allongement de la durée de vie, la question de sous-estimation de la longévité par les tables de mortalité espagnoles se pose. AXA Espagne souhaite se réassurer contre son risque de longévité et a fait appel à AXA Global Life pour que nous analysions son portefeuille, son risque de longévité, et pour avoir nos recommandations pour le couvrir.

### 1) Caractéristiques du portefeuille

Il s'agit de produits d'assurance vie dont la prestation est une rente viagère avec ou sans réversion, c'est à dire assurant une rente tant que l'assuré ou son conjoint sont en vie. Le portefeuille est composé de 22 000 polices. Pour certains détenteurs de polices, la rente peut être

croissante de manière géométrique ou arithmétique. Prendre en compte chaque détail du portefeuille, pour calculer les engagements en fonction de différentes projections de mortalité, peut se révéler difficile en raison du grand nombre d'erreurs potentielles. Ainsi, durant le stage, j'ai développé un programme pour cela qui utilise R et R-Excel et qui a été validé sur un exemple déjà calculé auparavant par AXA Global Life.

Ce portefeuille de rente est composé pour 90% de rentes qui ont déjà commencé à être versées et qui seront versées à vie, les 10% restants sont composés soit de rentes temporaires, soit de rentes différées (soit des deux). Nous ne prenons pas en compte ces 10% dans notre étude. En effet les rentes temporaires ne présentent pas vraiment de risque de longévité puisqu'elles sont limitées dans le temps. Concernant les rentes différées, celles ci sont difficilement modélisables, puisque le détenteur peut, avant la prise d'effet de la rente, demander à ce que la somme lui soit versée sous forme de capital, et par conséquent sont exclues de l'étude.

## 2) Impact des modèles sur les engagements d'AXA Espagne

Afin d'avoir un impact chiffré des différentes tables sur les engagements d'AXA SPAIN, nous avons calculé les engagements d'AXA selon nos différentes projections de mortalité (M2, M9 Vaupel) et selon les tables réglementaires.

Rappelons les formules actuarielles utilisées qui permettent de calculer les réserves engendrées par les différentes annuités présentes dans notre portefeuille.

Valeur présente d'une :

- Rente viagère :  $a_x = \sum_{k=1}^{\infty} p_x v^k$
- Rente de réversion :  $a_{x/y} = a_y - a_{xy}$  où  $a_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} p_x p_y v^k$

Notations :

$x$  : Âge de la tête principale

$y$  : Âge de la seconde tête

[ $a_{xy}$  Représente la valeur actuelle d'une rente payant 1 tant que les deux personnes (x ET y) sont en vie.]

[ $a_{x/y}$  Représente la valeur actuelle d'une rente qui commence à payer à y au décès de x si y est encore en vie]

$v = \left( \frac{1}{1+i} \right)$   $i$  : taux d'actualisation (3%)

Pour toutes ces rentes, si elles sont croissantes, nous devons ajouter dans la somme :

-  $(1 + t)^k$ : Si la progression est géométrique.

-  $(1 + kt)$ : Si la progression est arithmétique.

Exemple: la valeur d'une rente qui paye 1 à la tête principale, et 60% de ce montant au conjoint s'il survit au décès de la tête principale est :

$$a_x + 0.60a_{x/y} = a_x + 0.60(a_y - a_{xy})$$

L'historique de mortalité que nous disposons nous permet de situer notre mortalité autour des tables perm2000C (100% de la table) ou 112% de la table perm2000P.

En effet, nous connaissons les tables qui ont été utilisées pour 50% de notre portefeuille. Ces 50% se composent de 2 entreprises, l'une représentant 37 % du portefeuille sur lequel les provisions mathématiques ont été établies sur les années précédentes avec la table Perm2000C, l'autre entreprise, représentant 13%, a calculé ses provisions à partir de la table perm2000P. Si l'on regarde le ratio  $\frac{\text{nombre de decés estimé par la table}}{\text{nombre de decés réalisé}}$  sur les années passées et pour les 2 entreprises, on obtient une moyenne très proche de 100% pour la table perm2000C, et de 112% pour la table perm2000P.

Ci dessous, la projection des engagements d'AXA année par année selon la tables utilisée. Ainsi, l'utilisation de nos tables réglementaire génère des projections plus faibles que nos modèles.

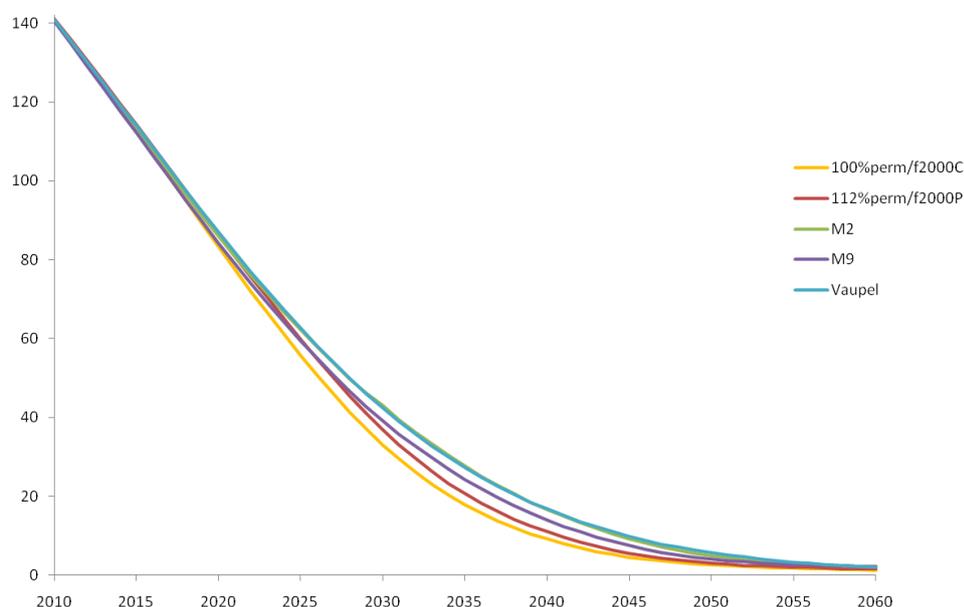


Figure 32 projection de la valeur des engagements (non actualisé) d'AXA Espagne (en million)

En termes de montant des engagements, si l'on actualise ces flux au taux techniques de 3%, on obtient les montants représentés dans le tableau suivant.

	100% perm/f2000C	112% perm/f2000P	M2	M9	Vaupel
engagements( milliards)	1, 548	1, 604	1, 658	1, 611	1, 670

Ainsi, si l'on prend comme point de référence la table réglementaire 100% Perm/f2000C, on constate que, prendre comme table générationnelle celle obtenue par le modèle M2, implique une augmentation des engagements de 7,09 %. De manière similaire, les modèles M9 et le modèle de Vaupel nous donnent une augmentation des réserves respectivement de 4,06% et 7,88%.

Ainsi le modèle de Vaupel, qui s'avérerait être pertinent, montre qu'il a tendance à prévoir un montant des engagements supérieur à celui prévu par les tables réglementaires.

Notre recherche de Best estimate, nous conduit donc à remarquer une exposition de notre portefeuille à un risque de longévité.

### 3) L'application d'un scénario catastrophe sur les engagements

Solvency 2 impose de prendre en compte le risque de longévité dans le SCR. Ainsi il permettrait d'absorber (totalement ou partiellement) la réalisation de ce risque.

Actuellement, Solvency 2 propose un modèle standard qui consiste à diminuer l'ensemble des qx de 20%. L'impact financier de cette diminution de mortalité sur les provisions doit être reporté et immobilisé dans le SCR (solvency Capital Requirement). Ce montant immobilisé représente un coût puisqu'il ne peut être placé financièrement.

Si cette réduction de mortalité de 20% est le modèle standard de solvency 2, Il est par ailleurs possible d'avoir recours à un modèle interne qui devra être validé. C'est un modèle interne que nous avons appliqué ici.

Pour des raisons de confidentialité nous ne rentrerons pas de manière approfondie dans les détails de la méthodologie utilisée pour obtenir notre modèle interne, mais nous en donnerons une indication succincte.

Comme nous l'avions montré dans la partie 2 de ce mémoire, la projection de mortalité se base sur la projection des kappat, le modèle Interne utilisé par AXA consiste à prendre une mesure de sécurité dans cette projection, (intervalle de confiance) et de prendre le scénario extrême (provoquant les baisses de mortalité les plus fortes).

Ainsi auparavant, nous projetions nos kappat de manière linéaire à partir des kappat observés de sorte que l'on avait

$$Kappa2_{50\%}(t) = Kappa2(t_0) + \mu(t-t_0)$$

Où  $\mu$  représente la pente (négative) des Kappa2 passés quand on les ajuste de manière linéaire  
 $t_0$  représente la dernière année d'observation.

Notre scénario catastrophe est obtenu en répercutant dans les projections futures le bruit constaté si l'on compare les kappat passés à notre ajustement linéaire selon la formule suivante

$$\text{Kappa2}_{95\%}(t) = \text{Kappa2}(t_0) + \mu(t-t_0) + 1,96 \sigma \sqrt{t-t_0}$$

Où  $\sigma$  représente l'écart type des écarts entre les kappat passés et leur modélisation par une droite.

Ainsi on obtient un cône de projection dans lequel on estime être les kappat avec une probabilité de 95%.

Cette méthodologie est illustrée dans la figure 33 ci-dessous.

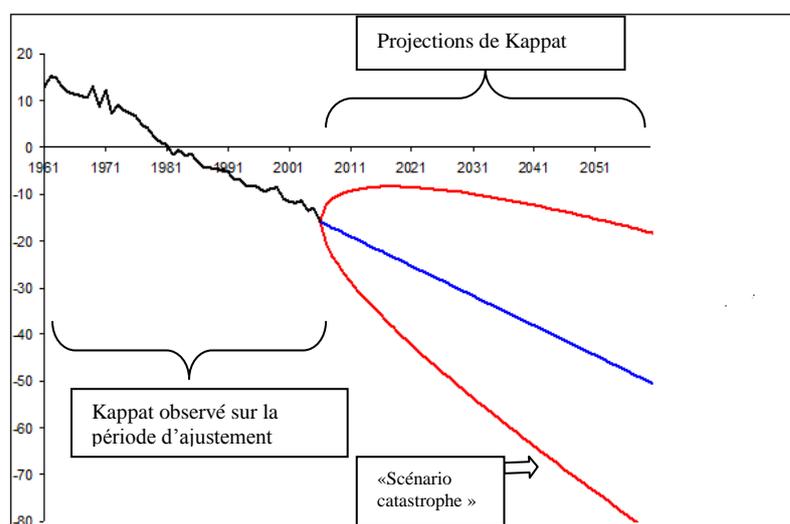


Figure 33. Cône de projections du paramètre kappa(t)

En prenant la projection des kappat engendrant les améliorations les plus fortes (scénario catastrophe), nous obtenons une nouvelle table de mortalité prospective qui donne des améliorations plutôt importantes de la mortalité. De cette table bidimensionnelle, nous retenons pour chaque âge donné le pourcentage d'améliorations dans le temps par rapport à la période actuelle. Ces pourcentages sont ensuite appliqués à un niveau de mortalité constaté en 2010 pour chaque âge.

Ci-dessous (figure 34), la projection des engagements d'AXA, année par année, selon la table utilisée avec en plus la table du scénario catastrophe.

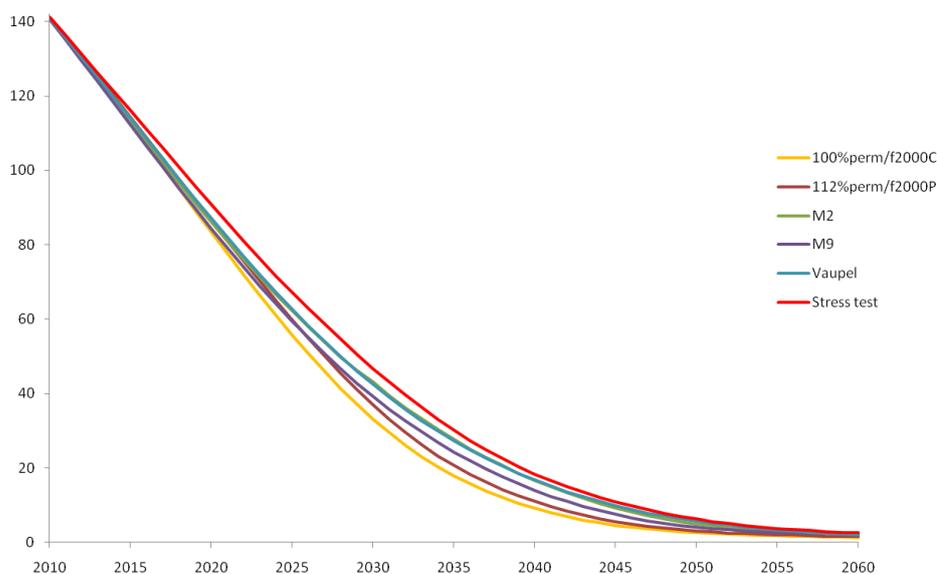


Figure 34 application du scénario catastrophe sur la valeur des engagements (non actualisée) d'AXA Espagne (en million)

La valeur actualisée des engagements d'AXA Espagne serait de 1,734 milliard, sur la base de ce scénario stress test.

Ainsi, si l'on prend à nouveau comme référence le niveau des engagements obtenus avec la table Perm/f2000C, le stress test impliquerait une augmentation des engagements de 12,1%.

#### 4) Vers un swap de longévité

Les différents scénarios que nous avons élaborés, grâce à nos tables prospectives, conduisent à montrer une augmentation des engagements d'axa par rapport aux table réglementaires utilisées jusqu'à présent. De plus, le scénario catastrophe effectué dans le cadre de solvency 2 conduit à immobiliser un capital important pour faire face à ce risque de longévité.

Il paraît donc judicieux de mettre en place un transfert de ce risque à la réassurance via un « swap de longévité » et cela pour deux raisons.

D'abord, les différents scénarios possible d'évolution de la mortalité (et donc d'évaluation des engagements à leur juste valeur) montre que la mortalité baisse de manière plus importante que le prévoient les tables réglementaires. Nous envisageons donc de nous trouver face à un problème de sous-provisionnement, et que les provisions ne suffisent pas au paiement des rentes des assurés, ainsi le transfert de ce risque à la réassurance nous permettrait de nous débarrasser de ce risque.

Ensuite, une raison qui est plus financière qu'une gestion du risque proprement dit, est que ce transfert de risque à la réassurance permettrait de diminuer le SCR à mettre de côté (ce montant est basé sur la différence entre notre best estimate et le scénario catastrophe).

Ce sont les 2 éléments clefs qui nous ont conduits à effectuer un transfert de longévité.

Mettre en place un transfert de longévité par un swap est une longue étape. L'engagement du réassureur étant sur du long terme, les négociations avec la réassurance sont longues et approfondies. Nous détaillerons très rapidement en quoi consiste ce transfert de longévité via un swap.

Lors d'un transfert de longévité, le réassureur s'engage avec la cédante afin de financer une portion de l'écart entre les paiements estimés par la cédante envers ses assurés et les paiements réels. Il permet donc de se protéger contre un écart de mortalité.

Ainsi l'assureur et le réassureur doivent se mettre en accord sur un best estimate qui est la base sur laquelle l'écart sera évalué.

En contrepartie, la cédante paye un prix au réassureur qui est un pourcentage des engagements évalués à leur juste valeur.

Dans ce swap de longévité, il n'y a pas de transfert des primes de la part de la cédante, seuls les engagements de la cédante sont au cœur du transfert.

Dans notre cas le quote-part du risque de longévité a été fixé à 65% (la détermination de ce taux a fait l'objet d'une étude à part entière au sein d'AXA Global Life qui a permis d'arriver à la conclusion que céder 65% du risque de longévité devrait permettre d'équilibrer le risque de longévité avec le risque de mortalité présent sur les produits à prestations en cas de décès. Ainsi un quote-part de 65% permettrait d'avoir une couverture naturelle, entre le risque de longévité et le risque de mortalité. Cette couverture naturelle n'existait pas auparavant, AXA Espagne ayant plus de produit à prestation sous formes de rentes que de produits versés en cas de décès)

On peut schématiser, le fonctionnement d'un swap (figure 35).

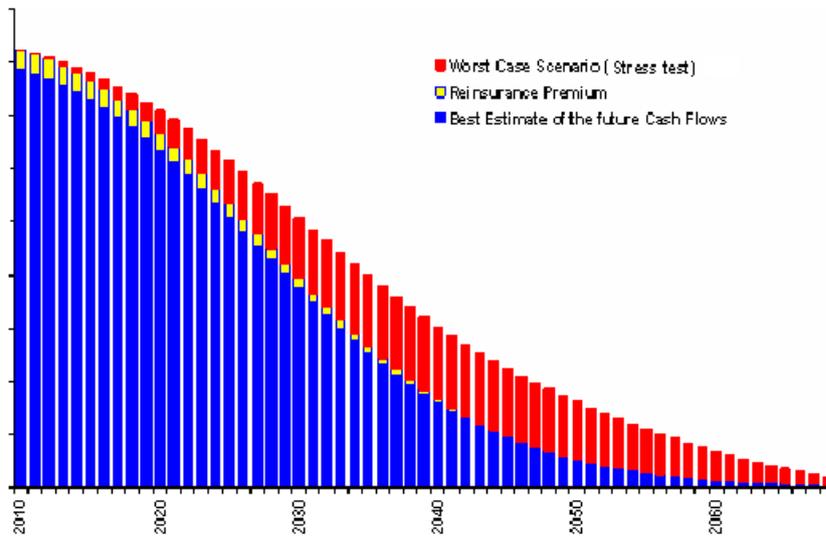


Figure 35. Principe d'un swap de longévité

# CONCLUSION

---

La longévité se révèle être un danger de taille pour les fonds de pensions et assureurs proposant des garanties sous forme de rentes viagères. Comme nous avons pu le voir, estimer l'évolution de la mortalité future n'est pas un exercice trivial. Les hypothèses émises dans la modélisation de la mortalité sont fortes, puisqu'elles laissent entendre, pour la plupart d'entre elles, que l'évolution future peut être modélisée à partir du constat de son évolution passée.

Les avis des experts à ce sujet sont parfois diamétralement opposés. Concernant la durée de vie limite de l'être humain, par exemple, certains d'entre eux affirment qu'elle présente une limite biologique qui n'est pas loin d'être atteinte, d'autres affirment qu'il n'en est rien.

Les modèles prospectifs classiquement utilisés pour se prévenir d'un risque de longévité restent adéquats si les évolutions futures sont du même ordre que celles passées. En revanche, une révolution médicale, ou génétique pourrait drastiquement améliorer la durée de vie, et impacter dramatiquement les compagnies d'assurance. Nombreux chercheurs ont montré, sur des animaux, qu'il était possible de prolonger considérablement la durée de vie en ayant recours à des moyens génétiques.

Si de tels changements radicaux se produisaient chez l'Homme, il est fort probable que les évolutions prévues par les tables prospectives ainsi élaborées ne suffisent pas à absorber le choc de longévité.

C'est pourquoi, beaucoup d'assureurs commencent à avoir recours à des moyens qui leur permettraient de faire face à une forte augmentation de la longévité. Pour cela, certains cherchent à équilibrer leurs portefeuilles de manière à avoir autant de produits à prestations en cas de décès et en cas de vie. Une perte sur les produits à prestations en cas de vie survenant avec une éventuelle augmentation de la longévité, pourra ainsi être compensée par des gains effectués sur les produits en cas de décès. En effet, la longévité a un impact positif sur les garanties décès, puisqu'elle permet à l'assureur de payer ses prestations de manière plus tardive, et de continuer à percevoir des primes. Ainsi, l'assureur peut se créer sa propre couverture naturelle. A défaut d'effectuer une telle opération, l'assureur peut se tourner vers un réassureur.

# ANNEXES

---

## Annexe 1 –détails complémentaires sur le modèle de Gavrilov

Considérons le cas où la répartition des blocs dans l'organisme en fonction du nombre d'éléments initialement fonctionnelle est décrite par la loi binomiale. Pour un organisme vivant initialement, cette répartition doit être tronquée sur la gauche, puisque, selon le modèle, un organisme qui contient un bloc sans éléments fonctionnels ( $i = 0$ ) ne peut pas être vivant.

Par conséquent, la distribution des blocs en fonction du nombre  $i$  d'éléments fonctionnant initialement dans un organisme vivant est donnée par les probabilités suivantes:

$$P_i = 0 \text{ pour } i = 0$$

$$P_i = c \binom{n}{i} q^i (1 - q)^{n-i} \text{ pour } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Où

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n}{i} \binom{n-1}{i-1} \text{ pour } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$c = \frac{1}{1 - (1 - q)^n} \geq 1$$

Le paramètre  $c$  est un facteur de normalisation permettant à la somme des probabilités d'être égale à 1.

Le taux de défaillance (taux instantanés de mortalité) d'un système construit de  $m$  blocs connectés en série est égal à la somme des taux de défaillance des blocs :

$$\mu_s = \sum \mu_b = \sum_{i=1}^n m P_i \mu_b(i) = cm \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} q^i (1 - q)^{n-i} \mu_b(i)$$

Au temps initial, quand  $x \ll 1/k$ , le taux de défaillance d'un bloc avec initialement  $i$  éléments fonctionnels est donné par

$$\mu_b(i) \approx i \mu (\mu x)^{i-1}$$

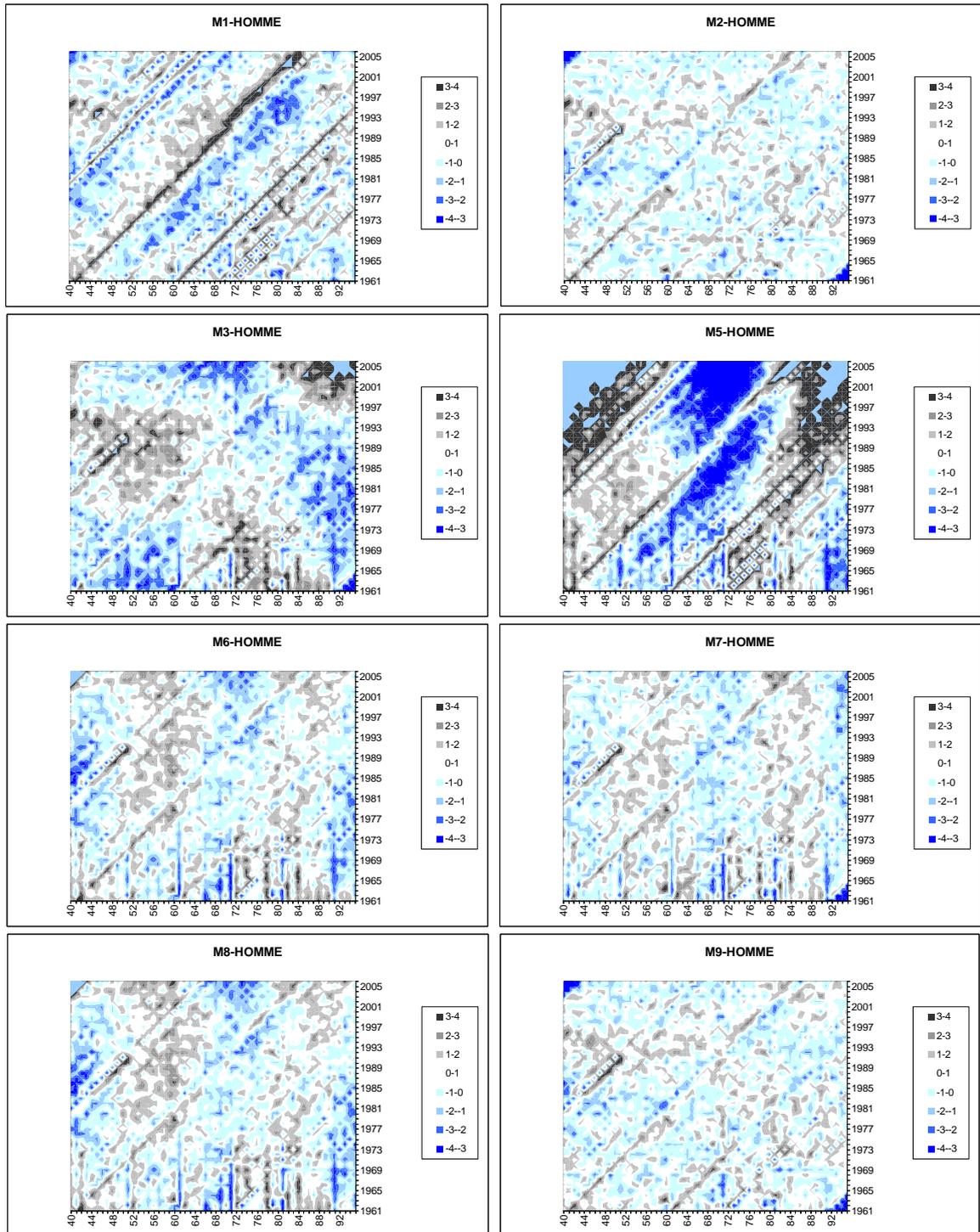
réunissant ces deux formules, nous obtenons

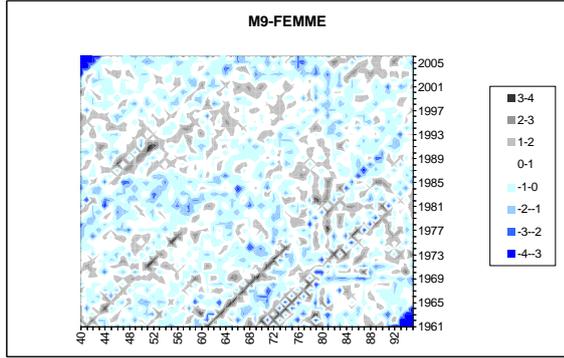
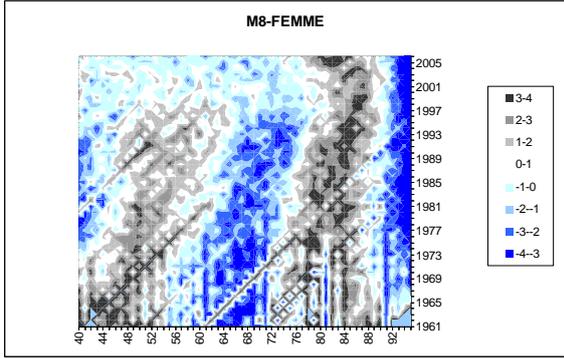
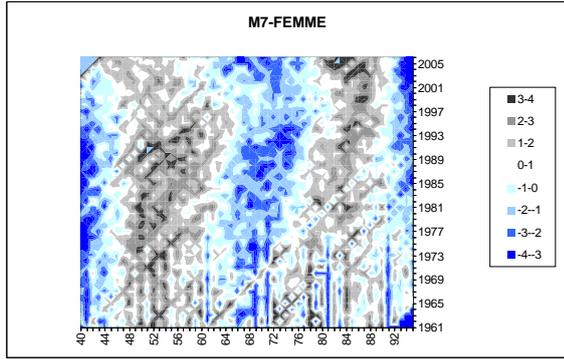
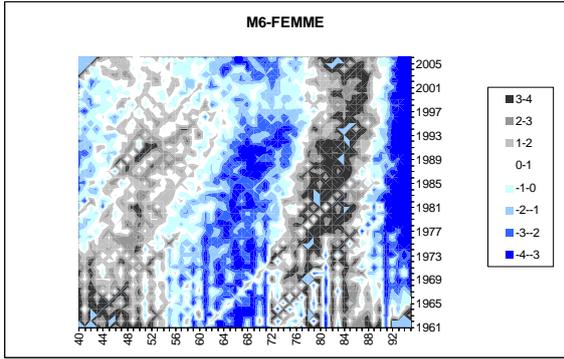
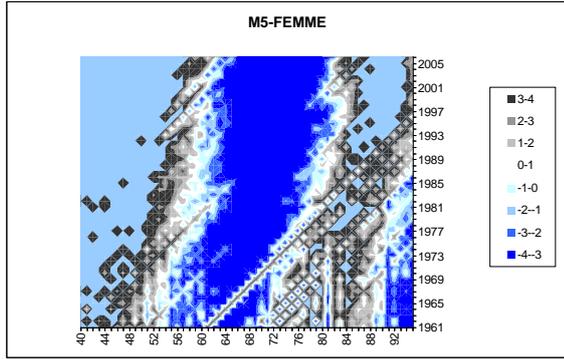
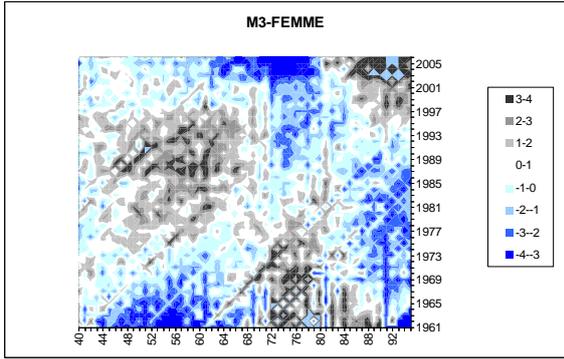
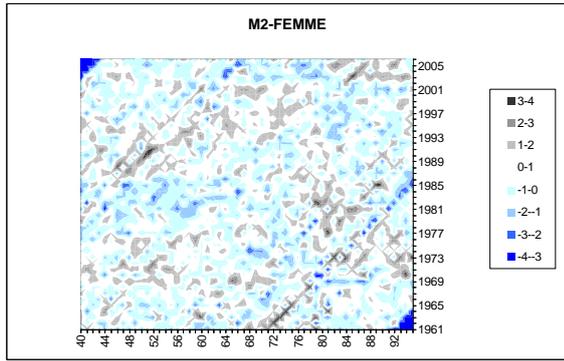
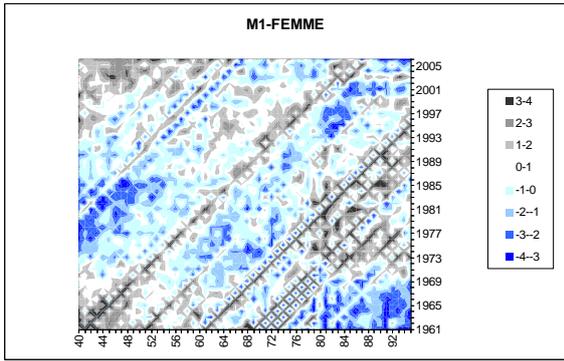
$$\mu_s = cm \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} q^i (1 - q)^{n-i} i \mu (\mu x)^{i-1}$$

Or,  $i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$  pour  $i=1, 2, 3, \dots, n$  nous obtenons donc

$$\mu_s = Cm \mu n q \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} q \mu x^{i-1} (1 - q)^{(n-1)-(i-1)}$$

## Annexe 2-graphiques des résidus





# Bibliographie

---

GAVRILOV, L., GAVRILOVA, N. *Handbook of the Biology of Aging. Reliability theory of aging and longevity*. Academic Press, 6<sup>ème</sup> édition (publié récemment).

DELWARDE, Antoine & DENUIT, Michel. *Construction de tables de mortalité périodiques et prospective*. Economica, 2006.

BENJAMIN, B & POLLARD, J.H. (1993). *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics* (3d edition). Heinemann, London.

BENJAMIN, B & SOLIMAN, A.S. (1993). *Mortality on the move*. Institute of Actuaries, Oxford.  
BROUHNS, N & DENUIT, M (2001a). *Risque de longévité et rentes viagères. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours*. Belgian Actuarial Bulletin 2, 26-48.

BROUHNS, N., DELWARDE, A. et Denuit, M, (2002), *Elaboration de tables de mortalité prospectives ou comment tarifier des rentes viagères lorsque la mortalité évolue*, Association Royale des Actuaires Belges, Consulting Report N°02-03, Institut de statistique, Université Catholique de Louvain.

WILMOTH, J.R. (1989), *Fitting three-way models to two-way arrays of demographic rates.*, Research report no. 89-140, Population Studies Center, University of Michigan.

WILMOTH, J.R. (1993), *Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change*, Department of Demography, University of California, Berkeley CA.

WILMOTH, J.R. (1996), *Mortality projections for Japan : A comparison of four models*, dans *Health and Mortality among Elderly Populations*, New York : Oxford University Press, Caselli, G. et Lopez, A. éditeurs, 266-287.

MAKEHAM, W.M. (1860), *On the law of mortality and the construction of annuity tables*, *Journal of the Institute of Actuaries*, 8, 301-310.

RENSHAW, A.E. et Haberman, S. (2003), *Lee-Carter mortality forecasting with age specific enhancement*, *Insurance : Mathematics & Economics*, 33, 255-272.

OEPPEL, Jim and VAUPEL, J.W. *Broken Limits to Life Expectancy*. *Science*. 2002 May 10;296.

DOWD, K. & CAIRNS, A. & Blake, D. & COUGHLAN, G. & EPSTEIN, D. (2008) *Backtesting Stochastic Mortality Models: An Ex-Post Evaluation of Multi-Period-Ahead Lifemetrics*  
<http://www.pensions-institute.org/>

Human Mortality Database. University of California, Berkeley, United States and Max Planck Institute for Demographic Research, Germany; 2004.  
<http://www.mortality.org>

ALHO, JUHA M. Discussion (on Lee, R.: *The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications*). North American Actuarial Journal. 2000; 4:91-93.