

Mémoire présenté le : 2 septembre 2015

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Jacques Printems

Titre : Méthodes numériques d'EDP dans le cadre d'évaluation
d'engagements de contrats d'épargne

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA

Mme Brigitte DUBUS

M. Lionel LAURENT

Membres présents du jury de l'ISFA

Signature

Entreprise

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : Frédéric PLANCHET

Signature :

Invité

Nom : François BONNIN

Signature :

***Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat :

Mme Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme Patricia BAROLO

Mémoire d'Actuaire
Institut de Science Financière et d'Assurances
Université Claude Bernard – Lyon I
Mars 2015

Méthodes numériques d'EDP
dans le cadre
d'évaluation d'engagements
de contrats d'épargne



JACQUES PRINTEMS
Université Paris-Est Créteil
e-mail : printems@u-pec.fr

Sommaire

Remerciements	6
Introduction	7
1 Engagements et réglementation	9
1 Le cadre réglementaire	9
2 L'Assurance-Vie et les contrats Euros	12
2 Valorisation de la clause de rachat d'un contrat d'épargne en €	15
1 Introduction	15
2 <i>Best Estimate</i> dans le cas général	16
3 Cas particulier de solutions explicites	20
4 Modèle différentiel général	24
3 Stratégie rationnelle de rachat	47
1 Une stratégie de rachat optimale	48
2 Une inéquation variationnelle	48
3 Résolution numérique	49
4 Rachat dans le cas $f(x, r) = x + r$	50
5 Rachat dans le cas $f(x, r) = \max(TMG, x + r)$	54
4 Simulation des dynamiques dans le cadre ORSA	61
1 Identification et modélisation des facteurs de risques	61
2 Exemple de mise en œuvre d'un processus ORSA pour un assureur.	65
Conclusion	75
Bibliographie	76
Annexes	79
1 Table d'expérience et de rachat	81
Index	86
Glossaire & Acronymes	86
Table des matières	87

Résumé

Nous allons exposer dans ce mémoire un modèle différentiel basé sur une équation aux dérivées partielles (EDP) afin d'évaluer numériquement l'engagement d'un assureur dans un contexte de contrat d'épargne avec option de rachat. Une des idées principales est de modéliser de façon parcimonieuse la politique de participation aux bénéfices de l'assureur à l'aide d'un seul facteur de risque x intervenant avec le taux court r dans la formule du taux de revalorisation $r_s = f(t, x, r)$ et du taux de rachat $\mu = g(t, x, r)$. L'outil numérique se veut suffisamment flexible afin que les dynamiques des facteurs x et r ainsi que le choix des fonctions f et g puissent être laissées à la discrétion de l'assureur.

Nous aborderons également sous le même angle le cas du rachat anticipé rationnel, c.-à-d. le cas où l'assuré tente d'optimiser son gain par une stratégie de rachat rationnelle (rachat endogène). Dans ce cas, l'EDP doit être remplacée par une inégalité variationnelle.

Nous verrons que ces classes de méthodes permettent un gain de temps considérable lorsque l'on est confronté à une interaction Actif/Passif (typique en Assurance-Vie) lors de la mise en place d'un modèle de projection du bilan sur l'horizon d'un plan stratégique (ex : modèle ORSA).

Mots-clés : contrat d'épargne euros, participation aux bénéfices, option de rachat, équations aux dérivées partielles, modèle ORSA.

Anstract

In this work, we introduce a differential model based on a partial differential equation (PDE) in order to numerically evaluate the Best Estimate of an insurance company in the case of saving contracts with surrender option. The main idea is to model the profit-sharing policy of the company by the mean of a single risk factor x embedded with the interest rate r in the revalorization formula $r_s = f(t, x, r)$ and in the surrender model $\mu = g(t, x, r)$. The numerical tool has to be sufficiently flexible in order to keep the choice of the risk factors' dynamics and the functions f and g left to the insurer.

We will introduce also the early surrender case on the similar model of early exercices options. In this case, the PDE has to be replaced by a variational inequality.

Eventually, we will see that these classes of numerical methods yield a considerable numerical cost reduction, especially when the insurer is face to an Asset/Liability interaction (which is typical in life insurance).

Keywords : saving contracts, profit-sharing policy, surrender option, partial differential equation, ORSA.

Je tiens à remercier chaleureusement MM. Frédéric Planchet et François Bonnin pour m'avoir proposé ce sujet de mémoire original, riche en concepts théoriques, numériques et pour leur GRANDE patience.

Ce mémoire clôt ma formation d'actuaire et je profite de ces quelques lignes pour remercier toutes les personnes que j'ai pu croiser à l'ISFA. En particulier, Delphine Clemens pour sa disponibilité et sa gentillesse, Stéphane Loisel pour ces conseils et son soutien. Je me souviens également de mes camarades, Juliano Merolle, Amilcar Manga et les séances de révision épiques à l'Ibis-Mérieux.

La décision de me lancer dans cette formation m'a permis de (re)découvrir l'état d'étudiant et partant de renouveler mon regard sur les miens . . . d'étudiants et un peu sur moi-même finalement.

Enfin, mes derniers mots vont vers ma famille pour laquelle cette aventure ne fut pas de tout repos.

Introduction

Dans son numéro du 27 mai dernier, le journal « Les Échos », relayant des statistiques de l'Association française de l'assurance, titrait sur la collecte record d'assurance-vie en France. La collecte nette – cotisations moins retraits – de ce que l'on ne présente plus comme le placement préféré des Français avait en effet atteint 2,3 milliards d'Euros¹ pour le mois d'avril 2015, le montant total des encours dépassant 1 500 milliards d'Euros fin avril : le marché de l'assurance-vie en France est assurément dynamique. Plusieurs supports y sont en général proposés : principalement, les contrats Euros, en grande partie investis sur le marché obligataire, et où la revalorisation du capital est garanti et les contrats en Unités de Compte (UC), investis plutôt sur le marché action, ces derniers ayant un rendement plus important mais où le capital n'est plus garanti.

Pour ne parler que des contrats Euros, l'aspect populaire de ces placements² est encore renforcé par leurs multiples options : clause de rachat partiel ou total, sans pénalité, taux minimum garanti, participation aux bénéfices de la compagnie d'assurance, *et caetera*. Mais cet aspect populaire va de pair avec une réglementation de plus en plus stricte de la part des instances européennes comme l'*European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA)* ou l'autorité européenne des assurances et des retraites professionnelles, et leur relais national, l'autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR) dont un des objets est de mettre en musique la directive européenne Solvabilité 2 (ou Solva 2 ou S2). Ces réglementations portent essentiellement sur des exigences de capital minimum (fonds propres en particulier) (Pilier 1 de S2) mais aussi sur le pilotage dans le temps du risque supporté par l'assureur (son engagement sur le capital en particulier), c.-à-d. l'évaluation *en interne* de sa propre solvabilité d'une manière prospective (Pilier 2 de S2). En particulier, l'*Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)* ou évaluation interne des risques et de la solvabilité, dispositif au cœur du Pilier 2 de Solva 2, précise le cadre de l'évaluation dans le temps de la distribution du passif de l'assureur.

Rappelons quelques aspects techniques de ces réglementations. Solvabilité 2 fournit le cadre de l'évaluation de l'engagement de l'assureur (le *Best Estimate* dans les provisions techniques) comme l'espérance actualisée de ses flux futurs (prestations – cotisations). Dit autrement, il s'agit d'évaluer le prix de ses contrats dont la multiplicité des options en ont fourni tous les atours d'un produit financier complexe. C'est pourquoi on a besoin d'outils de finance de marché. Une autre difficulté arrive lorsque l'on souhaite projeter le bilan sur plusieurs années dans l'esprit du Pilier 2. En effet, on est amené à estimer le provisionnement (*Best Estimate*) le long des trajectoires simulées de l'actif de la compagnie, c.-à-d. calculer une espérance conditionnelle tout le long de trajectoires simulées. Cette interaction actif/passif est typique en assurance-vie et pose surtout des problèmes de complexité numérique et a en général un coût important en temps.

1. Avec une nette progression des contrats en Unités de Compte qui représente maintenant 21% de la collecte.

2. Outre leur attrait pour leur fiscalité de transmission avantageuse.

Le contexte actuel de taux d'intérêt bas³ tire vers le bas les revalorisations des contrats Euros⁴ et partant a tendance à majorer les provisionnements (du fait de l'actualisation à un taux faible dans l'esprit de Solva 2) et donc à diminuer les fonds propres et dégrader les taux de couverture. Le même contexte de taux bas augmente également le risque de rachat par les assurés de leur contrat. Un pilotage du risque fondamental, c.-à-d. finalement celui de la solvabilité, est ainsi actuellement au cœur des préoccupations des assureurs.

L'objectif de ce mémoire est double. D'une part, on souhaite mesurer l'impact du phénomène de rachat sous l'angle d'une représentation parcimonieuse des facteurs de risques liés à une politique de participation aux bénéficiaires (chapitre 2). Nous y développerons donc un outil numérique basé sur des équations aux dérivées partielles en faible dimension et ses discrétisations par la méthode des Différences Finies. Nous aborderons également le cas où l'assuré adopte une stratégie rationnelle de rachat étant donné son environnement démographique et financier et en déduisons une nouvelle valeur économique du contrat (chapitre 3) dans la continuité de [Pru96, Bac03, BBM09]. D'autre part, on souhaite obtenir un outil numérique efficace pour la projection du *Best Estimate* dans le cadre de l'ORSA. Nous mettrons en œuvre ce dispositif sur un exemple concret de portefeuille (chapitre 4).

3. Pour les obligations d'État.

4. Le rendement moyen des contrats Euros avoisinaient en avril 2015 le taux de 2,5% avec une tendance à la baisse.

— Pour qui Σ^2 ont Σ^2 es Σ^2 erpents
qui Σ^2 iffent Σ^2 ur nos têtes ?
Actuaire anonyme, V^e siècle av. J.C.

1

Engagements et réglementation

1 Le cadre réglementaire

Le dispositif prudentiel Solvabilité 2 a jeté les bases d'un renouvellement des méthodes de *provisionnement* et de détermination de *fonds propres* pour les compagnies d'assurances. On représente dans le tableau 1.1 un bilan très simplifié d'une telle compagnie (mettons une société anonyme). On rappelle que réglementairement si le montant des fonds propres de la société passe en dessous de 50% de son capital social, l'assemblée générale des actionnaires peut décider de la liquidation de la compagnie.

TABLE 1.1 – Bilan schématique d'une compagnie d'assurance.

Actif	Passif
Actif de la compagnie (obligations, actions, immobilier)	Fonds Propres → dette vis-à-vis des actionnaires Provisions Techniques → dette vis-à-vis des assurés

1.1 Rappel Solvabilité 1

Dans Solvabilité 1, les provisions techniques (PT, figurant au passif car dette vis-à-vis des assurés) sont calculés de manière « prudente » (c.-à-d. taux d'actualisation minorés). Les fonds propres sont calculés en Vie sur la base de 4% des provisions mathématiques (PM) (1% des PT si contrat en unités de compte car risque opérationnel), en Non-Vie sur la base d'un pourcentage du ratio Prime/Sinistre. Les actifs sont comptabilisés en valeurs d'acquisition (valeurs historiques). À aucun moment, on a besoin d'outil de finance de marché.

1.2 Cadre Solvabilité 2

1.2.1 Pilier I

Dans son premier pilier, la directive Solvabilité 2 prévoit de définir des normes quantitatives de calcul des provisions techniques et des fonds propres. En particulier, les provisions techniques sont calculées sous la forme $PT = BE + RM$ où BE désigne le *Best Estimate*, c.-à-d. l'espérance actualisée des flux futurs (engagement de l'assureur) et où RM désigne la marge pour risque (voir plus bas). De façon informelle, on écrit par exemple

$$(1.1) \quad BE = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f \otimes \mathbb{P}^a} \left(\sum_{t \geq 1} X_t \delta_t \right),$$

où X_t désigne l'engagement de l'assureur pour la date t qui peut se décomposer comme

$$X_t = F_t - C_t + \text{Frais} - \text{Chargement},$$

où F_t désigne les prestations et C_t les cotisations. Ici δ_t est un facteur d'actualisation (ex : $\delta_t = e^{-rt}$). Ici, la probabilité \mathbb{Q}^f désigne la probabilité associée au risque financier et \mathbb{P}^a celle associée au risque d'assurance (mortalité, etc). Contrairement à Solva 1 (où le taux était minoré), on n'impose pas ici d'hypothèses de prudence mais plutôt une vision réaliste avec une quantification explicite des marges de risques. Ceci passe par une analyse précise des différents types de risques supporté par l'assureur (voir tableau 1.2).

L'autorité européenne des assurances et des retraites professionnelles (EIOPA) classe en deux grandes catégories les risques auxquels est confrontée une compagnie d'assurance : les risques dits *couvrables* et ceux dits *mutualisables*. Par définition, les premiers sont dits couvrables (ou répliquables) en ce que l'on peut trouver une stratégie (de couverture, de réplication) qui élimine totalement le risque. Alors que les derniers sont ceux pour lesquels la loi des grands nombres s'appliquent, et qui sont d'autant plus neutralisés que la taille du portefeuille est grande, autant dire les risques traditionnels de l'assureur. Ainsi, les deux types de risques se distinguent en premier lieu en ce que les premiers s'éliminent *trajectoriellement* alors que les seconds s'éliminent *en moyenne*. De plus, la probabilité sous laquelle sont *vues* les trajectoires couvrables diffère de celle qui calcule les moyennes mutualisées. On parlera de probabilité *risque-neutre* (notée \mathbb{Q} en général sauf indication contraire) pour la première et probabilité *historique* pour la seconde (notée \mathbb{P}).

TABLE 1.2 – Exemples de type de risques.

	<i>couvrables</i>	<i>non couvrables</i>
<i>mutualisables</i>	Titrisation	Risque d'assurance <i>classiques</i>
<i>non mutualisables</i>	Risque financier	Catastrophe naturelle, Prise en compte de fluctuation dans la mortalité → mortalité <i>stochastique</i>

Notons que dans le cadre Solvabilité 2, les risques couvrables sont provisionnés à leur valeur de marché (c.-à-d. leur prix). Dans ce cas, $RM = 0$.

Le premier pilier définit également des niveaux de capitaux minimum pour les fonds propres : le *Minimum Capital Requirement (MCR)* et le *Solvency Capital Requirement*

(SCR). Le premier représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle (l'ACPR) sera automatique. Le second désigne le capital cible nécessaire pour absorber un choc provoqué par un risque majeur.¹

Le calcul du SCR passe par l'évaluation de la distribution du passif, en particulier des fonds propres. Le modèle de *Value at Risk (VaR)* à 99,5% sur les fonds propres a été retenu. Toujours dans l'esprit du Pilier 1, le SCR a tendance à devenir l'outil principal des autorités de contrôle. En effet, il incorpore tous les risques liés à l'activité de la compagnie, c.-à-d. principalement : le risque de souscription, le risque de crédit, le risque opérationnel, le risque de liquidité et le risque financier (de marché). Pour son calcul, les autorités de contrôle laissent les compagnies choisir entre une formule standard (aggrégeant tous les risques repertoriés avec une matrice de corrélation donnée) et le développement d'un modèle interne. Dans ce mémoire, nous nous placerons dans le cadre d'un modèle interne en nous restreignant au risque de marché et au risque de souscription (pour le risque de rachat).

1.2.2 Pilier II – L'ORSA

Au delà de la stricte exigence de fonds propres, le deuxième pilier de Solva 2 impose un suivi dans le temps des risques supportés par l'assureur. Il encourage donc les compagnies d'être en mesure par *elles-mêmes* d'apprécier et de mesurer leurs risques en particulier via l'application du dispositif *Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)* ou évaluation interne des risques et de la solvabilité.

Le dispositif ORSA est avant tout un outil stratégique. Il s'agit d'une évaluation par la compagnie de sa propre solvabilité via une vision réaliste en y incluant ses réflexions stratégiques. En particulier, l'établissement d'un plan stratégique au préalable est nécessaire. Ensuite, la compagnie doit identifier *son profil de risque* et son *appétence aux risques*. Nous verrons au chapitre 4 un exemple de formulation d'une appétence aux risques sur le taux de couverture : « *La probabilité que le taux de couverture du capital réglementaire (e.g. SCR) d'être au dessus de $x\%$ doit être supérieure à $y\%$ à l'horizon du plan stratégique* ». Par ailleurs, de par sa nature prospective, les calculs doivent se faire en intégrant les affaires nouvelles (*New Business*) alors que dans le Pilier 1, les calculs étaient conduits en *run-off* et jusqu'à épuisement du portefeuille. Enfin le rapport ORSA doit être le plus compréhensible possible afin de pouvoir être communiqué au top management de l'entreprise. Notons également que par sa nature prospective, les calculs doivent se faire en intégrant les affaires nouvelles.

Concrètement, la mise en place d'un modèle ORSA passe par la projection du SCR et du taux de couverture (rapport des fonds propres sur le SCR) sur l'horizon du plan stratégique. La principale difficulté ici est numérique. La simulation des fonds propres passe par le calcul du *Best Estimate* et la simulation des actifs. Techniquement, le *Best Estimate* est une espérance conditionnelle en les facteurs de risques. Dans un premier temps, on peut aborder le problème du calcul du SCR dans le temps (projection), en ajoutant une couche de simulations en probabilité historique à un modèle de calcul de *Best Estimate*, qui lui-même est basé lorsque l'on utilise une méthode de Monte Carlo sur des simulations en probabilité risque-neutre (voir (1.1)). Ce type d'approche est résumé sous le vocable « simulations dans les simulations (SdS) » et sont en général assez coûteuse en temps. Ce qui est problématique pour un suivi régulier des indicateurs de risque et restreint la possibilité de pouvoir contrôler en permanence et de refaire les calculs à chaque instant.

Plusieurs auteurs ont déjà réfléchi à ce problème et différentes classes de méthodes ont

1. La crise « bicentenaire ».

vu le jour. Parmi lesquelles, on peut distinguer les :

- approches par formules fermées : ici le *Best Estimate* est estimé à l'aide de formules explicites, voir [BM06, Bif05, BPJ14];
- approches *Least-Squares Monte Carlo (LSMC)* : le *Best Estimate* vu comme une espérance conditionnelle, donc une fonction des d facteurs de risques, est approché par régression sur une base de polynôme à d indéterminés. Très populaires dans le contexte des options américaines (voir [LS01]), cette approche a été initiée dans le cadre de Solva 2 dans [BBR09].

Un des objectifs de ce mémoire est de proposer un modèle de calcul de *Best Estimate* qui ne passe pas par des simulations Mont-Carlo en risque-neutre mais par la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles. Ainsi le nombre de simulations nécessaires à la mise en place d'un ORSA diminue drastiquement puisqu'il ne reste plus que la simulation des actifs en probabilité historique. De plus, le *Best Estimate* est calculé pour toutes valeurs des facteurs de risques et ceci peut être vu comme des calculs *off-line*.

2 L'Assurance-Vie et les contrats Euros

Nous allons nous intéresser dans ce mémoire aux engagements de l'assureur dans le cas de contrats d'épargne en Euros (qui représentent encore 80% des encours). Il existe en France deux grands type de contrats d'épargne :

- les contrats en euros ou monosupports, ils sont uniquement investis en fonds euros ;
- les contrats multi-support comportant à la fois un fonds euro et des Unités de Compte (UC) (qui peuvent être des valeurs mobilières comme des ETFs par exemple, eux-même répartis en actions, obligations).

Dans le cas des contrats en euros mono-support, les sommes versées sont garanties par l'assureur. Elles sont acquises à l'assuré et revalorisées annuellement en fonction de la politique de participation aux bénéfices de l'assureur. Plusieurs options sont généralement prévues dans ce cadre :

- (i) *le Taux Minimum Garanti (TMG)*² : l'assureur s'engage à une rémunération minimale durant toute la vie du contrat. Il est soumis à réglementation :
 - le TMG ne peut excéder 85% du rendement des actifs de l'assureur au cours des deux dernières années.
 - Il doit être exprimé de façon annualisé.
 - le financement des TMG dépend de l'environnement financier de l'assureur, en particulier celui des marchés obligataires. Ainsi son plafond en 2012 est de 3,375%.
- (ii) *la Participation aux Bénéfices (PB)*³ : les assureurs ont l'obligation de reverser dans un délai de 8 ans une partie des bénéfices réalisés pendant l'exercice comptable.
- (iii) L'option de rachat : l'assuré peut exercer à tout moment son option de rachat, c.-à-d. percevoir la valeur de rachat de son contrat. En particulier, l'assureur doit garantir à tout moment la valeur acquise du capital.

2. défini dans l'article A132-2 du code des assurances.

3. Voir les articles A331-3 et A331-4 du code des assurances.

Nous allons au chapitre suivant proposer un modèle pour l'évaluation de la valeur économique de ces clauses (rachat, TMG, PB) pour un contrat en euros mono-support.

— *Le décès, c'est de la vie!*

Assureur anonyme, origine XXI^e siècle apr. J.C.

2

Valorisation de la clause de rachat d'un contrat d'épargne en €

1 Introduction

On considère un contrat d'épargne en € avec versement de prime unique et un taux garanti (ou taux servi) r_s sur un horizon $T > 0$ fini, dont on se propose d'évaluer la clause de rachat sous l'angle d'une représentation parcimonieuse des facteurs de risques liés à une politique de participations aux bénéfiques. Ceci afin de quantifier et surtout interpréter plus simplement l'impact d'une telle politique de revalorisation sur les engagements de l'assureur dans le cadre Solvabilité II.

Pour le calcul du *Best Estimate*, on choisit de distinguer les aléas *couvrables* des aléas *non couvrables*. Les aléas couvrables concernent les risques financiers auxquels sont exposés les actifs de la compagnie. Les aléas non couvrables concernent d'une part les risques mutualisables classiques de l'assureur (mortalité, rachat structurel) mais on a choisi également d'y inclure les risques lié à la gestion de la compagnie d'assurance dans une politique de participation aux bénéfiques.

On note \mathbb{Q}^h la mesure de probabilité associée aux événements couvrables (probabilité risque-neutre). On notera \mathbb{P}^{nh} la mesure de probabilité associée aux aléas non couvrables et on écrira $\mathbb{P}^{nh} = \mathbb{P}^a \otimes \mathbb{P}^x$, avec \mathbb{P}^a la probabilité liée au risque classique d'assurance (mutualisable) et \mathbb{P}^x tout ce qui est non couvrable et non mutualisable. On suppose que ces trois probabilités sont indépendantes.

On se place dans ce chapitre dans le cas où le taux de rachat est modélisé de façon exogène en tenant compte de l'environnement financier (taux structurel, cyclique fonction de l'écart entre le taux servi et le taux sans risque par exemple). Nous aborderons au chapitre suivant, le cas endogène, c.-à-d. où le rachat est le résultat d'une stratégie rationnelle de l'assuré en fonction de l'environnement financier en voyant le calcul de la valeur de rachat comme un problème d'arrêt optimal (caractère américain de la clause de rachat).

Enfin, on tiendra compte du risque démographique dans le cas où celui-ci est complètement mutualisé, par le biais de fonction de hasard déterministe qui s'agrègera avec la partie

structurelle du taux de rachat. On se placera dans le cas où les prestations en cas de décès et de rachat sont les mêmes. Si bien que lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on parlera d'instant de sortie aussi bien pour désigner un rachat ou un décès.

2 *Best Estimate* dans le cas général

2.1 Modèles de rachat déjà traités dans la littérature

Les deux principales motivations de rachat sont en général les besoins de liquidité et la variation des taux d'intérêt. La première, souvent lié entre autre à l'âge du souscripteur, explique le taux de rachat *structurel* tandis que la seconde, fonction de la conjoncture, explique le taux de rachat *conjoncturel*.

Il existe de nombreux travaux sur la modélisation du rachat. Ils se distinguent par le choix des cadres utilisés pour décrire le phénomène de rachat : économétrique [Kim05, TKC02], micro-économique [FLP07], statistique [Kag05], financier [Pru96, Bac03, Siu05, BBM09, GLJ00, TL03, MY05], ...

Dans [FLP07], par exemple, l'étude porte sur le rachat structurel où la sortie anticipée est vue comme un complément de revenus. Ce travail utilise une théorie micro-économique de maximisation de fonction d'utilité de ce complément de revenu dans le cas de comportement rationnel des agents (les souscripteurs). Dans [Kim05, Kag05], le taux de rachat conjoncturel est calibré dans une approche de modèle individuel. Dans [TKC02], les auteurs trouvent une relation de co-intégration entre le taux de rachat et le taux d'intérêt (c.-à-d. une relation long-terme). De plus, il mettent en évidence numériquement la croissance des provisions en fonction du spread $r_s - r$ où r_s désigne le taux de revalorisation et r le taux d'intérêt.

Lorsque le rachat est vu sous un angle strictement financier, c.-à-d. quand il est vu comme une option à exercice anticipée de type option américaine, cela suppose une hypothèse de comportement optimal et rationnel des souscripteurs. Il est difficile de parler de taux structurel ou conjoncturel dans ce dernier cas. À côté de la distinction structurel/conjoncturel, la plupart des auteurs distingue des taux de rachats *exogènes* (où le taux est une fonction déterministe de variables économiques, démographiques, etc) et des taux de rachat *endogènes* où l'instant de rachat est le résultat d'une stratégie rationnelle du souscripteur. La plupart du temps, ils s'accordent pour parler d'endogénéisation du rachat lorsque celui-ci détermine une stratégie optimale.

Enfin, même si cela est largement en dehors des préoccupations de ce mémoire, citons des travaux portant sur le cas extrême du problème de contagion de rachat massif. On peut citer [LM11, MLMD11] et les papiers qui s'y rapportent [HO74, DZ11].

2.2 Participation aux bénéfices et rachat

Rappelons que l'objectif de ce mémoire est, dans le prolongement de [BPJ14], de mesurer l'impact du phénomène de rachat sur une politique de PB. Ceci dans une optique d'évaluation du *Best Estimate* explicite ou numérique via un modèle d'Équations aux dérivées partielles (EDP) en faible dimension (1,2,3) et surtout dans une optique de projection rapide du *Best Estimate* dans le cadre de l'ORSA. Dans [BPJ14], les auteurs proposent une explicitation du taux de revalorisation (ou taux servi) r_s et du taux de rachat μ (c.-à-d. la fonction de hasard liée à l'instant de rachat, voir le §2.3 pour une définition plus précise) à

l'aide de deux fonctions déterministes et de deux facteurs de risques :

$$(2.1) \quad r_s(t) = f(t, x(t), r(t)), \quad \mu(t) = g(t, x(t), r(t)),$$

où $(r(t))_{t \geq 0}$ désigne un taux court et où $(x(t))_{t \geq 0}$ désigne un facteur de risque lié à la politique de PB. Avant de préciser le cadre stochastique dans lequel s'inscrivent les dynamiques de ces deux facteurs, nous donnons quelques exemples de fonctions f et g .

Par exemple, on peut citer le cas du modèle de rachat préconisé par l'ACPR dans les orientations nationales complémentaires (ONC) du Quantitative Impact Studies (QIS) 5. Dans ce cas, taux servi et taux de rachat total sont obtenus comme

$$(2.2) \quad f(x, r) = x + r, \quad g(x) = \min(1, \max(0, \mu_c(x) + \mu_i)) \in [0, 1],$$

où μ_i désigne la partie structurelle et où

$$\mu_c(x) = \begin{cases} \mu_{max} & \text{si } x \leq \alpha, \\ \mu_{max} \left(\frac{x-\beta}{\alpha-\beta} \right) & \text{si } x \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{si } x \in [\beta, \gamma], \\ \mu_{min} \left(\frac{x-\gamma}{\delta-\gamma} \right) & \text{si } x \in [\gamma, \delta], \\ \mu_{min} & \text{si } x \geq \delta, \end{cases}$$

avec les plafonds suivants

$$\begin{aligned} -6\% &\leq \alpha \leq -4\%, \\ -2\% &\leq \beta \leq 0, \\ 1\% &\leq \gamma \leq 1\%, \\ 2\% &\leq \delta \leq 4\%, \\ -6\% &\leq \mu_{min} \leq -4\%, \\ 20\% &\leq \mu_{max} \leq 40\%. \end{aligned}$$

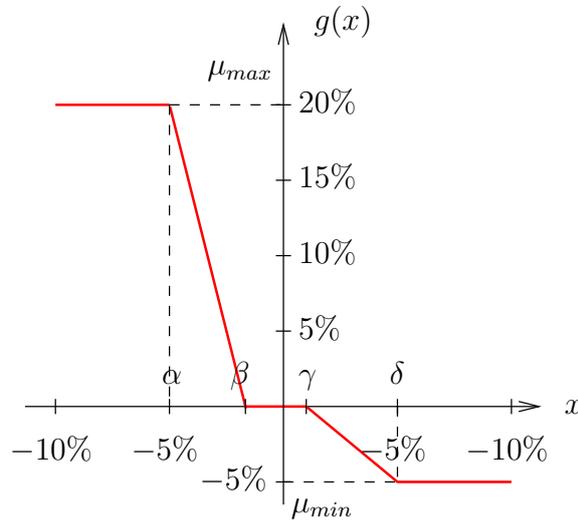


FIGURE 2.1 – Exemple de modélisation de taux de rachat conjoncturel $x \mapsto g(x)$ où $x = r_s - r$.

Voici d'autres exemples que l'on peut traiter dans ce cadre :

$$(2.3) \quad f(x, r) = x + r, \quad g(x, r) = \mu_i - \eta x, \quad \mu_i, \eta > 0,$$

$$(2.4) \quad f(x, r) = x + r, \quad g(x, r) = \mu_i + \eta x_-, \quad \mu_i, \eta > 0,$$

$$(2.5) \quad f(x, r) = \max(x + r, TMG), \quad g(x, r) = \min(1, \max(0, \mu_c(x) + \mu_i)), \quad \mu_i > 0,$$

où on a inclus un taux minimum garanti (TMG) dans (2.5).

Nous verrons plus bas que le modèle $r_s - r = x$ et $g(x) = \mu_i - \eta x$ donne lieu à des formules explicites pour le *Best Estimate* (voir [BPJ14]).

2.3 Cadre stochastique du marché d'assurance de l'étude

La fonction de hasard μ est stochastique en tant que fonction déterministe de facteurs stochastiques¹, on sort donc du cadre strict des fonctions de hasard déterministes où le facteur de risque associé est par définition parfaitement mutualisé. Afin de donner une représentation probabiliste au *Best Estimate* et de préciser (1.1), nous présentons maintenant le cadre stochastique de notre marché d'assurance. La présentation suit [BM06, BBM10].

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ supportant un processus $(r(t))_{t \geq 0}$ représentant le taux sans risque et un processus $(x(t))_{t \geq 0}$ représentant l'évolution des risques liés à la gestion du portefeuille de l'assureur dans une logique de PB (voir (2.2)–(2.5) pour son interprétation). Ici $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x \otimes \mathbb{P}^a$ (voir plus haut p. 15). Compte tenu de la remarque faite sur le facteur de risque démographique dans l'introduction, on ne prendra pas en compte la probabilité \mathbb{P}^a (quitte à étendre \mathbb{P}^x). Ainsi, $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x$.

Pour un individu générique d'âge x à l'instant 0, on modélise l'instant de sortie (décès, rachat) par un \mathbb{F} -temps d'arrêt τ_x . Plus précisément, on peut voir τ_x comme le premier instant de saut d'un processus de comptage N adapté à la filtration \mathbb{F} d'intensité aléatoire μ_x . On dira que τ_x a pour intensité μ_x . Ainsi, à chaque instant $t \geq 0$, $N_t \neq 0$ si l'individu est mort et 0 sinon. La notion d'intensité (aléatoire) permet de quantifier à tout instant $t \geq 0$ et pour un état du monde $\omega \in \Omega$ tel que $\tau_x(\omega) > t$, la probabilité instantanée de décès :

$$\mathbb{P}(\tau_x \leq t + \Delta \mid \mathcal{F}_t) \approx \mu_x(t, \omega) \Delta,$$

pour Δ suffisamment petit. Il s'agit de l'analogie stochastique du taux instantané de décès :

$$\Delta q_{x+t} \approx m(x+t) \Delta,$$

où m désigne la fonction de hasard (ou intensité) déterministe (voir [BGH⁺97] pour le cadre et les notations actuarielles général).

Les deux écritures coïncident lorsque \mathbb{F} est la plus petite filtration adaptée à τ_x . Mais en général, cela n'est pas le cas. La filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ représente le flux d'information disponible au fur et à mesure du temps. Cela implique de connaître l'évolution de toutes les variables jusqu'à tous les instants t et de savoir à toute date si le souscripteur est décédé ou non. Formellement, on écrit

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t,$$

où $\mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$ est la tribu engendrée par $\mathcal{G}_t \cup \mathcal{H}_t$ où \mathcal{G}_t est la tribu engendré par le processus $(r_s, x_s)_{s \leq t}$ et où \mathcal{H}_t est la tribu engendré par $(\mathbf{1}_{\tau_x \leq s})_{s \leq t}$. Ainsi, nous avons $\mathbb{F} = \mathbb{G} \vee \mathbb{H}$ où \mathbb{H} est la plus petite filtration par rapport à laquelle τ_x est un temps d'arrêt.

En général, afin de pouvoir faire des calculs, on construit N comme un processus doublement stochastique (processus de Cox) défini sur la sous-filtration \mathbb{G} de \mathbb{F} et d'intensité μ_x \mathbb{G} -prévisible. Plus précisément, *conditionnellement à une trajectoire de $\mu_x(\cdot, \omega)$ de μ_x (avec*

1. À proprement parler, c'est une fonction de hasard *locale* plutôt que *stochastique* en cela qu'elle ne génère pas son propre bruit, il n'y a pas de source d'excitation interne, ni à la mortalité, ni au rachat conjoncturel. Il ne s'agit donc pas ici d'un modèle à intensité stochastique au sens où on l'entend habituellement en modèles de durée.

ω fixé), le processus de comptage N associé à τ_x est un processus de Poisson inhomogène de paramètre $\int_0^\cdot \mu_x(s, \omega) ds$. Soit pour tout $T \geq t \geq 0$ et pour tout entier k , on a²

$$(2.6) \quad \mathbb{P}(N_T - N_t = k \mid \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T) = \frac{\left(\int_t^T \mu_x(s) ds\right)^k}{k!} e^{-\int_t^T \mu_x(s) ds}.$$

Dans ce formalisme τ_x est un \mathbb{F} -temps d'arrêt mais pas nécessairement un \mathbb{G} -temps d'arrêt. Les raisons pour cela sont que \mathbb{G} transporte toute l'information (à travers l'intensité μ) à propos de la vraisemblance d'avènement de la sortie (décès, rachat) mais pas de l'occurrence de celle-ci dont l'information est portée par la filtration plus grande \mathbb{F} . Intuitivement, cela signifie que la sortie de l'individu est une surprise lorsque celle-ci arrive.

Dans ce cadre, en utilisant la loi des espérances itérés et (2.6), on peut exprimer la probabilité de survie sur l'intervalle de temps $]t, T]$, sur l'événement $\{\tau_x > t\}$ comme suit

$$(2.7) \quad \mathbb{P}(\tau_x > T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T \mu_x(s) ds} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Dans le but de calculer la valeur économique du contrat d'assurance, nous aurons besoin de savoir calculer des espérances de fonctionnelles du temps de sortie τ_x . Pour cela, il peut être nécessaire de connaître sa densité. Dans le cadre doublement stochastique, et sous certaines conditions techniques, sa densité $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T$ -conditionnelle, notée f_t s'écrit (toujours sur l'événement $\{\tau_x > t\}$) comme

$$(2.8) \quad f_t(s) = \frac{\partial}{\partial s} \mathbb{P}(\tau_x \leq s \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\mu_x(s) e^{-\int_t^s \mu_x(u) du} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

2.4 Expression générale du *Best Estimate* (ou représentation probabiliste)

Reprenons l'expression générale (1.1) du *Best Estimate* dans le cadre de notre contrat euros. Ce contrat prévoit en cas de sortie (décès, rachat) avant maturité T ou bien en cas de survie en T , le versement³ de la valeur de rachat capitalisée depuis la signature du contrat ($t = 0$) au taux $r_s(t) = f(t, x_t, r_t)$, soit un flux de trésorerie aléatoire à l'instant $t \leq T$:

$$F_t = VR(\tau) \mathbf{1}_{t < \tau \leq T} + VR(T) \mathbf{1}_{\tau > T},$$

où $VR(t)$ est donné par

$$(2.9) \quad VR(t) = VR(0) \exp\left(\int_0^t r_s(u) du\right).$$

Ainsi la valeur du *Best Estimate* à la date $t \leq T$ s'écrit

$$\begin{aligned} BE(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left(e^{-\int_t^\tau r(s) ds} VR(\tau) \mathbf{1}_{t < \tau \leq T} \mid \mathcal{F}_t \right) + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} VR(T) \mathbf{1}_{\tau > T} \mid \mathcal{F}_t \right), \\ &= BE_d(t, T) + BE_s(t, T). \end{aligned}$$

2. Par exemple, τ_x peut-être défini comme

$$\tau_x = \inf \left\{ t \mid \int_0^t \mu_x(s) ds > \xi \right\},$$

où ξ suit une loi $\mathcal{E}(1)$ indépendante de \mathcal{G}_∞ .

3. On ne prend en compte pour l'instant que les prestations.

On calcule d'abord BE_d :

$$\begin{aligned} BE_d(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[e^{-\int_t^\tau r(s) ds} VR(\tau) \mathbf{1}_{t < \tau \leq T} \mid \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbf{1}_{\tau > t} \int_t^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[e^{-\int_t^s (r(u) + \mu(u)) ds} \mu(s) VR(s) \mid \mathcal{F}_t \right] ds, \end{aligned}$$

où on a utilisé la loi des espérance itérées et le fait que la densité conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_T$ est donnée par (2.8).⁴ De même, en utilisant (2.7) et les mêmes techniques, on montre que

$$BE_s(t, T) = \mathbf{1}_{\tau > t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left(e^{-\int_t^T (r(s) + \mu(s)) ds} VR(T) \mid \mathcal{F}_t \right).$$

En rassemblant les deux dernières relations, on obtient la représentation probabiliste suivante pour le *Best Estimate* sur l'événement $\{\tau > t\}$:

$$(2.10) \quad BE(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (r(u) + \mu(u)) ds} \mu(s) VR(s) ds + e^{-\int_t^T (r(s) + \mu(s)) ds} VR(T) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

L'expression pour $BE(t, T)$ sur $\{\tau > t\}$ peut être vu comme une formule d'évaluation risque-neutre pour un actif artificiel payant continûment à chaque instant s des dividendes au taux $VR(s)\mu(s)$ sous un taux d'actualisation abstrait $r + \mu$.

Nous en venons à la spécificité de ce travail prolongeant les travaux de [BPJ14] à savoir extraire la provision mathématique $PM(t)$, c.-à-d. la Valeur Actuelle à l'instant t de la valeur de rachat sachant qu'il n'y a pas encore eu de sortie, du calcul précédent afin de former le rapport $\phi(t, x_t, r_t) = BE(t, T)/PM(t)$. Ceci est aisé compte tenu des expressions précédentes et de la forme particulière de (2.9) :

$$(2.11) \quad \boxed{\begin{aligned} \phi(t, x(t), r(t)) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[\int_t^T \exp \left(\int_t^s (r_s(u) - r(u) - \mu(u)) ds \right) \mu(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \exp \left(\int_t^T (r_s(s) - r(s) - \mu(s)) ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}}$$

3 Cas particulier de solutions explicites

De nombreux auteurs ont proposé des formules explicites pour des expressions de type (2.11). Dans [Bif05, BM06], les auteurs donnent des formules explicites dans le cadre de modèles de diffusion affines et de fonctions f et g linéaires. Dans [BPJ14], les auteurs spécifie le cas où f et g sont données par (2.3) et donne une formule exacte pour le cas où x est modélisé par un processus d'Ornstein-Ühlenbeck. Signalons les travaux de Lindset [Lin03] pour des contrats similaires avec taux minimum garanti.

On reproduit ici les résultats de [BPJ14]. Dans ce travail, les auteurs élaborent une formule semi-explicite⁵ pour l'évaluation du *Best Estimate* pour une modélisation simple du taux de rachat. Dans [BPJ14], on fait les hypothèses suivantes sur les taux de rachat et le taux servi :

4. Voir également [DSS96, Proposition1, p. 1079] où le même type de résultat est donné dans un cadre plus général où on ne fait pas l'hypothèse de double stochasticité.

5. modulo la discrétisation d'une intégrale en temps.

Hypothèse 1 On suppose certaines propriétés sur le spread entre le taux servi et le taux concurrent (Voir (2.3)) :

- $r_s(t) = r(t) + x(t)$ où $x(t)$ est un processus de type Ornstein-Ühlenbeck (c.-à-d. gaussien, asymptotiquement stationnaire) :

$$(2.12) \quad dx(t) = k(x_\infty - x(t)) dt + \sigma dB(t).$$

où B est un Brownien scalaire standard, et

- $\mu(t) = \mu_i - \eta x(t)$, $\mu_i, \eta > 0$.

Dans (2.12), k décrit la plus ou moins grande rapidité de l'assureur pour ajuster le taux servi face aux aléas financiers représentés par r par exemple, tandis que σ modélise la stabilité de la stratégie de taux servi.

La particularité du choix de (2.3) fait que le problème ne dépend plus que d'un seul facteur, à savoir $x(t)$. Ainsi, en reprenant (2.11), on obtient successivement

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \phi(t, x, r) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left(\int_t^T \exp \left(\int_t^s (r_s - r - \mu)(u) du \right) \mu(s) ds \mid x(t) = x \right) \\ &+ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left(\exp \left(\int_t^T (r_s - r - \mu)(s) ds \right) \mid x(t) = x \right). \\ &= \int_t^T S_i(s-t) (\mu_i \theta_{1,t}(s) - \eta \theta_{2,t}(s)) ds + S_i(T-t) \theta_{1,t}(T) \end{aligned}$$

où on a posé

$$\theta_{1,t}(s) = \mathbb{E}(e^{(1+\eta) \int_t^s x(u) du} \mid x(t) = x), \quad \theta_{2,t}(s) = \mathbb{E}(x(s) e^{(1+\eta) \int_t^s x(u) du} \mid x(t) = x).$$

Compte tenu de l'aspect gaussien de (2.12), on peut expliciter θ_1 et θ_2 . Ainsi, si $x(t) = x$, on a

$$\begin{aligned} \int_t^s x(r) dr &= x_\infty(s-t) + (x - x_\infty) \left(\frac{1 - e^{-k(s-t)}}{k} \right) + \frac{\sigma}{k} \int_t^s (1 - e^{-k(s-r)}) dB_r, \\ &= \mathcal{N}(m(t, s), v(t, s)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} m(t, s) &= x_\infty(s-t) + (x - x_\infty) \left(\frac{1 - e^{-k(s-t)}}{k} \right), \\ v(t, s) &= \frac{\sigma^2}{k^2} \int_t^s (1 - e^{-k(s-r)})^2 dr. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(2.14) \quad \theta_{1,t}(s) = e^{(1+\eta)m(t,s) + (1+\eta)^2 \frac{v(t,s)}{2}}.$$

On remarque pour finir

$$\frac{d\theta_{1,t}}{ds}(s) = (1 + \eta) \mathbb{E}(x(s) e^{(1+\eta) \int_t^s x(u) du} \mid \mathcal{F}_t) = (1 + \eta) \theta_{2,t}(s).$$

D'où l'expression suivante pour $\theta_{2,t}$:

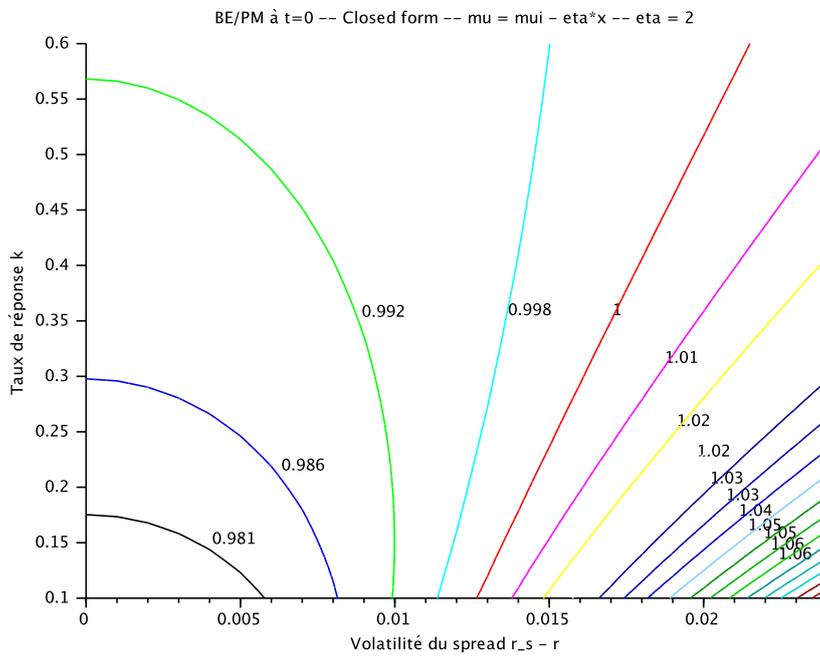
$$(2.15) \quad \theta_{2,t}(s) = \theta_{1,t}(s) \left(m_2(t, s) + \frac{1}{2} v_2(t, s) \right),$$

où m_2 et v_2 sont donnés par

$$\begin{aligned} m_2(t, s) &= \frac{dm}{ds}(t, s), \\ v_2(t, s) &= (1 + \eta) \frac{dv}{ds}(t, s) \end{aligned}$$

On représente dans la figure 2.2 la fonction $\phi(0, x(0))$ pour un contrat de maturité $T = 10$ ans pour différentes valeurs du couple (k, σ) . Les paramètres du processus x sont $(x_0, x_\infty) = (-0.5\%, 0)$.

(a)



(b)

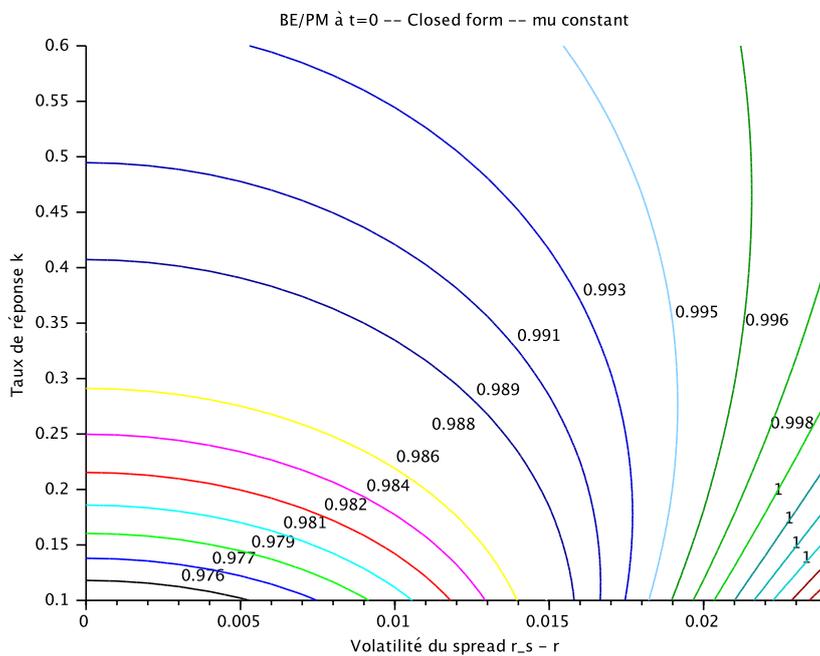


FIGURE 2.2 – Valeur de contrat pour un € de PM calculée par formules fermées pour un taux de rachat $\mu(x) = \mu_i - \eta x$, $x_0 = -5.10^{-3}$, $x_\infty = 0$, $T = 10$ ans. (a) $\eta = 2$, (b) $\eta = 0$.

4 Modèle différentiel général

Pour des fonctions de rachat plus compliquées, c.-à-d. plus nécessairement affine (par exemple celle préconisée par l'ACPR, voir (2.2)), on ne dispose pas de formules explicites. De même, lorsque l'on inclut un TMG dans la revalorisation comme dans (2.5), la réduction du nombre de degré de liberté de 2 à 1 en posant $r_s - r = x$ ne peut plus se faire. Il est donc important de disposer d'un outil numérique précis et rapide d'utilisation pour pouvoir approcher (2.11) dans l'optique de projeter la *Best Estimate*. Nous allons voir qu'un tel outil existe dans le cas où les facteurs de risques sont modélisés par des processus markoviens.

4.1 Dérivation d'une Équation aux Dérivées Partielles

Dans le cas général, le taux court r et le facteur de risque x sont modélisés par des processus de diffusion $r = r(t)$, $x = x(t)$ solutions fortes des équations différentielles stochastiques (EDS) suivantes :

$$(2.16) \quad \begin{cases} dx(t) = m_x(t, x(t)) dt + \sigma_x(t, x(t)) dB_x(t), \\ dr(t) = m_r(t, x(t)) dt + \sigma_r(t, x(t)) dB_r(t), \end{cases}$$

où B_r et B_x sont des browniens scalaires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q}^f \otimes \mathbb{P}^x)$ (voir §2.3) tels que $d\langle B_x, B_r \rangle = \rho dt$ pour $\rho \in [-1, 1]$.

On suppose de plus que les taux servis et de sortie sont donnés par (2.1). On montre facilement grâce au théorème de Feynman–Kac que $\phi = \phi(t, x, r)$ donnée par (2.11) satisfait l'EDP et la condition terminale suivante :

$$(2.17) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}\phi + (1 - \phi)g + (f - r)\phi = 0, \\ \phi(T, x, r) = 1, \end{cases}}$$

où le générateur infinitésimal \mathcal{L} de la diffusion (x, r) s'écrit compte tenu de (2.16) :

$$\mathcal{L} = m_r \frac{\partial}{\partial r} + m_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \sigma_x \sigma_r \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}.$$

Il s'agit d'une EDP de type parabolique. On pourra consulter [Fri64] pour une étude détaillée de ce type d'équation.

Preuve On vérifie juste formellement que la solution de l'EDP (2.17) a bien l'interprétation probabiliste (2.11). On écrit pour cela la formule d'Itô pour la fonctionnelle $t \mapsto e^{\int_0^t d(s) ds} \phi(t, x(t), r(t))$ entre t et T où on a posé $d(s) = (f - g - r)(s, x(s), r(s))$. On différencie d'abord au sens d'Itô :

$$d\left(e^{\int_0^t d(s) ds} \phi(t, x(t), r(t))\right) = e^{\int_0^t d(s) ds} \left(\phi d(t) dt + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \mathcal{L}\phi dt + \sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dB_x + \sigma_r \frac{\partial \phi}{\partial r} dB_r\right),$$

puis on intègre entre t et T en utilisant le fait que $\phi(T, \cdot) = 1$ par (2.11), on obtient après avoir pris l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(e^{\int_0^T d(t) dt} | \mathcal{F}_t) - e^{\int_0^t d(t) dt} \phi(t) = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{\int_t^s d(u) du} (d(s)\phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}\phi) dt | \mathcal{F}_t\right).$$

On conclut en remplaçant $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{L}\phi$ par $-g - d$. ■

4.2 Test numérique dans le cas de solutions explicites

On reprend les paramètres de [BPJ14], §3. Dans ce cas, les auteurs ont modélisé le *spread* $r_s - r$ par un processus gaussien de retour à la moyenne. De plus le taux de rachat est modélisé par un terme structurel constant augmenté d'une composante cyclique dépendant de x , $\mu_c(x)$. Ainsi $f(t, x, r) = x + r$ et $g(t, x, r) = \mu_i - \eta x$, où μ_i désigne un taux de rachat structurel (idiosyncratique) et où le terme linéaire en x désigne une partie cyclique du taux de rachat (inversement proportionnel au *spread* $r_s - r = f - r = x$).

Nous allons supposer dans ce paragraphe que le taux de rachat est bien de la forme $f(x, r) = x + r$ afin de donner un modèle d'EDP en dimension 1, afin dans un premier temps de pouvoir tester le code numérique avec les formules fermées du paragraphe 3. On gardera toutefois la notation $g(t, x)$ dans la description du code numérique à fin de généralité. En effet, la dépendance en t reste importante car elle peut provenir d'un taux de rachat structurel dépendant de l'âge du souscripteur par exemple ou plus généralement du taux de mortalité instantané issu d'une loi d'expérience (voir §4.3).

4.2.1 Processus de retour à la moyenne

La dynamique (2.16) retenue pour la diffusion $x(t)$ est celle d'un processus d'Ornstein-Ühlenbeck, c.-à-d.

$$(2.18) \quad dx(t) = k(x_\infty - x(t)) dt + \sigma dB(t),$$

où k est le taux de retour à la moyenne, x_∞ est le *spread* asymptotique, et σ_x la volatilité du *spread*. Comme mentionné dans [BPJ14], k décrit la plus ou moins grande rapidité de réaction de l'assureur pour ajuster le taux garanti par rapport aux aléas financiers tandis que σ fournit une information sur la stabilité de la stratégie de taux servi. Le processus $x(t)$ est gaussien et ses marginales sont données par

$$\mathcal{L}(x(t)) \sim \mathcal{N}\left(x_0 \exp(-kt) + x_\infty(1 - \exp(-kt)), \frac{\sigma^2}{2k}(1 - \exp(-2kt))\right), \quad t > 0.$$

Ainsi, $\mathcal{L}(x(t)) \rightarrow \mathcal{N}(x_\infty, \sigma^2/(2k))$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. On choisira un domaine de calcul par la suite basé sur 3 écart-type autour de sa moyenne, soit

$$\min(x_\infty, x_0) - \frac{3\sigma}{\sqrt{2k}} \leq x \leq \max(x_\infty, x_0) + \frac{3\sigma}{\sqrt{2k}}.$$

4.2.2 Simulation par EDP

On peut montrer facilement que la fonction $\phi = \phi(t, x, r)$ ne dépend plus de la variable r .⁶ L'EDP vérifiée par $\varphi(t, x) = \phi(T - t, x)$ s'écrit dans ce contexte :

$$(2.19) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k(x - x_\infty) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (g(t, x) - x)\varphi = g(t, x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

avec la donnée initiale $\varphi(0, x) = 1$.

C'est une équation de type parabolique avec terme de dérive. On choisit une méthode de différence finies pour discrétiser (2.19). Le domaine de résolution $\mathbb{R} \times [0, T]$ est ramené à

6. En effet, on vérifie par linéarité de (2.17) que $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ satisfait la même EDP que ϕ avec un second membre nul et donnée terminale nulle. On conclut par unicité.

trois écart-type autour de x_∞ , soit $[x_\infty - a, x_\infty + a] \times [0, T]$ où $a = 3\sigma/\sqrt{2k}$. Pour $h = 2a/M$ et $\Delta t = T/N$, on pose $x_j = x_\infty - a + jh$ et $t_n = n\Delta t$ pour $j = 0, \dots, M$ et $n = 0, \dots, N$. La méthode des différences finies consiste à approcher les dérivées partielles de $(t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ aux points (t_n, x_j) par des combinaisons linéaires des valeurs prises par φ en des points voisins. Par exemple, on opte pour les formules centrées suivantes concernant les dérivées spatiales⁷ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_n, x_j) = \frac{\varphi(t_n, x_{j-1}) - 2\varphi(t_n, x_j) + \varphi(t_n, x_{j+1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_n, x_j) = \frac{\varphi(t_n, x_{j+1}) - \varphi(t_n, x_{j-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Pour discrétiser la dérivée en temps, on choisit un schéma de Crank-Nicolson (ou point-milieu dans le cas linéaire)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_j) = \frac{\varphi(t_{n+1}, x_j) - \varphi(t_n, x_j)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Ainsi, on remplace (2.19) par son approximation DF au point $(t_{n+1/2}, x_j)$ en remplaçant $\varphi(t_{n+1/2}, x_j)$ par $\varphi_j^{n+1/2} = (\varphi_j^n + \varphi_j^{n+1})/2$:

$$(2.20) \quad \frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n}{\Delta t} + k(x_j - x_\infty) \left(\frac{\varphi_{j+1}^{n+1/2} - \varphi_{j-1}^{n+1/2}}{2h} \right) - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{\varphi_{j-1}^{n+1/2} - 2\varphi_j^{n+1/2} + \varphi_{j+1}^{n+1/2}}{h^2} \right) + (g(t_{n+1/2}, x_j) - x_j)\varphi_j^{n+1/2} = g(t_{n+1/2}, x_j), \quad j = 0, \dots, M, \quad n = 0, \dots, N,$$

avec la donnée initiale

$$\varphi_j^0 = 1, \quad j = 0, \dots, M.$$

Les équations aux différences (2.20) peuvent être mises sous forme matricielle. En notant $U^n = {}^t[\varphi_0^n, \dots, \varphi_M^n]$, on résoud d'abord (2.20) en $U^{n+1/2}$ puis on pose $U^{n+1} = 2U^{n+1/2} - U^n$. Soit le système linéaire suivant à inverser à chaque pas de temps pour $n \geq 0$:

$$(2.21) \quad \boxed{AU^{n+1/2} = U^n + \frac{\Delta t}{2}G^{n+1/2}\mathbf{1}, \quad U^{n+1} = 2U^{n+1/2} - U^n, \quad U^0 = \mathbf{1},}$$

où on a posé

$$A = I + \frac{\Delta t}{2} \left(G^{n+1/2} - X + k(X - x_\infty I)G - \frac{\sigma^2}{2}L \right),$$

et

$$G^{n+1/2} = \text{Diag}(g(t_{n+1/2}, x_0), \dots, g(t_{n+1/2}, x_M)), \quad X = \text{Diag}(x_0, \dots, x_M),$$

$$L = \frac{1}{h^2}[\delta_{i-1,j} - 2\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}], \quad G = \frac{1}{2h}[\delta_{i+1,j} - \delta_{i-1,j}], \quad \mathbf{1} = {}^t[1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^{M+1},$$

Remarque 2.1 *Sauf quand le taux de rachat g est indépendant du temps, les coefficients de A dépendent du temps, il faut donc à chaque pas de temps effectuer une factorisation LU (par exemple).*

◇

On commence par valider le code numérique en effectuant les simulations dans le cas où une solution explicite est connue, c.-à-d. lorsque les fonctions f et g sont données par (2.3).

7. Où les restes sont d'ordre 2 sous des hypothèses de régularité de φ

On choisit un taux structurel $\mu_i = 4\%$, $\eta = 2$. On représente dans la figure 2.3 (a)⁸ les valeurs en $t = 0$ du ratio BE/PM , soit la fonction $\phi(0, x_0) = \varphi(T, x_0)$ pour un contrat en euros de maturité $T = 10$ ans, un spread initial de $x_0 = -0.5\%$, asymptotique $x_\infty = 0$ pour différentes valeurs des paramètres $k \in [0.1, 0.6]$, $\sigma \in [0, 0.024]$. On peut comparer avec les résultats de la section 3 (Fig. 2.2 (a)) et constater que l'approximation est correcte.

Dans la Fig. 2.3 (b), on représente pour un couple fixe $(k, \sigma) = (0.34, 0.011)$ (au milieu de l'intervalle des paramètres), le ratio BE/PM pour différentes dates entre 0 et la maturité ainsi que pour différentes valeurs du spread x . On constate la croissance (ainsi que la convexité) du *Best Estimate* pour un euro de PM en fonction du *spread*.⁹ On note également une convergence pour les temps longs vers la solution stationnaire de (2.17), c.-à-d. la solution de

$$\mathcal{L}\phi + (1 - \phi)g + (f - r)\phi = 0.$$

Remarque 2.2 *Il est intéressant de noter dans la figure 2.3 (a) que, pour des valeurs de volatilité $\sigma \leq 1\%$, le provisionnement croît avec le taux de réponse k et décroît pour des valeurs de volatilité supérieures. On observera le même phénomène dans les figures 2.4 (a) et 2.5 (a). Ce qui contrastera avec la suite.*

4.3 Autre exemple de taux de rachat en dimension 1

Nous testons le modèle EDP sur d'autres formes du taux de rachat conjoncturel mais pour la même fonction $f = x + r$. Cela permet de rester en dimension 1.

4.3.1 $f = x + r$, $g = \mu_i + \eta x_-$

On teste maintenant le code sur le cas où f et g sont données par (2.4). On choisit toujours $\mu_i = 4\%$, $\eta = 2$. On représente Figure 2.4 les résultats dans la même disposition que dans la figure 2.3. On remarque dans la figure 2.4 (a) que le ratio BE/PM est toujours croissant par rapport à σ . Alors qu'il est croissant par rapport à k jusqu'à un certain niveau de volatilité (1%) puis décroissant au-delà.

Ici, le taux de rachat est saturé à droite, c.-à-d. que le rachat ne joue plus de rôle au-delà d'un certain niveau de spread ($x > 0$). Comme on pouvait s'y attendre, le comportement du *Best Estimate* reste à peu près le même que dans la figure (2.3) (b) pour des valeurs du *spread* négatives, mais tend à s'infléchir significativement lorsque $x > 0$.

On s'aperçoit dans cette région d'un comportement quasi linéaire du *Best Estimate* en fonction du *spread* x à toute date.

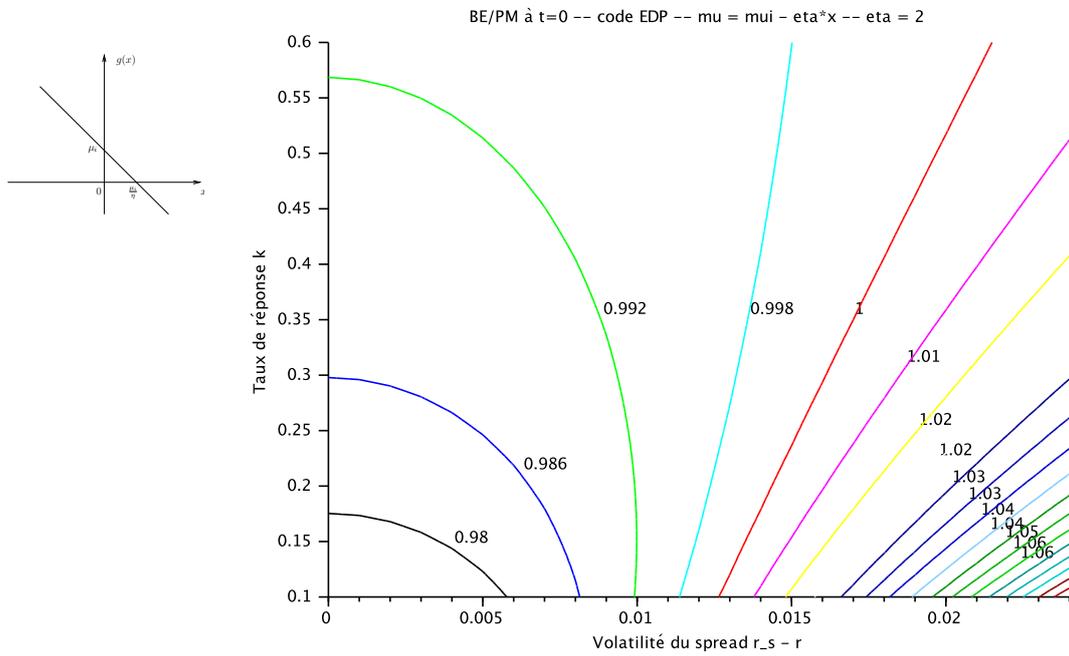
4.3.2 $f = x + r$, $g = \min(1, \max(0, \mu_c(x) + \mu_i))$

Plaçons nous dans le cas où le taux de rachat est celui donné par (2.2). On présente dans la figure 2.5 de la même façon que dans les deux figures précédentes des valeurs du ratio BE/PM à maturité $T = 10$ et un spread initial $x_0 = -0,5\%$ pour différentes valeurs des paramètres modélisant le facteur x , à savoir le temps de réaction k et la stabilité de la gestion σ (Fig. 2.5 (a)) ainsi que pour plusieurs dates et plusieurs valeurs du spread pour une même valeur moyenne du couple (k, σ) (les mêmes que précédemment) (Fig. 2.5 (b)).

8. On rappelle en haut et à gauche la courbe de rachat conjoncturel pour mémoire.

9. Dans [TKC02], les auteurs constatent empiriquement le même phénomène.

(a)



(b)

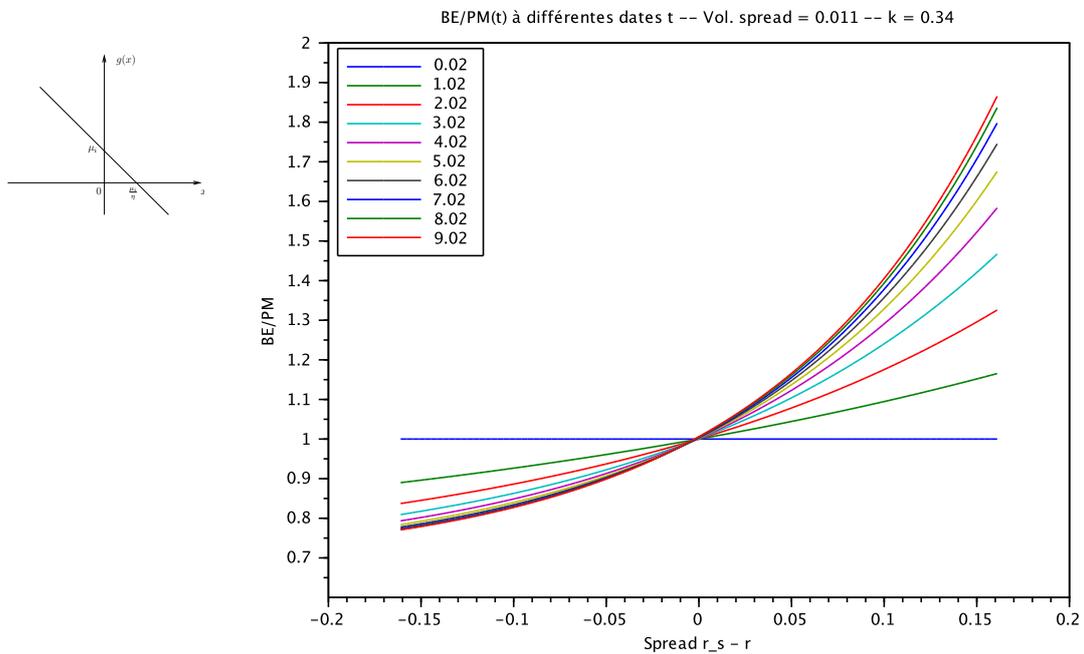
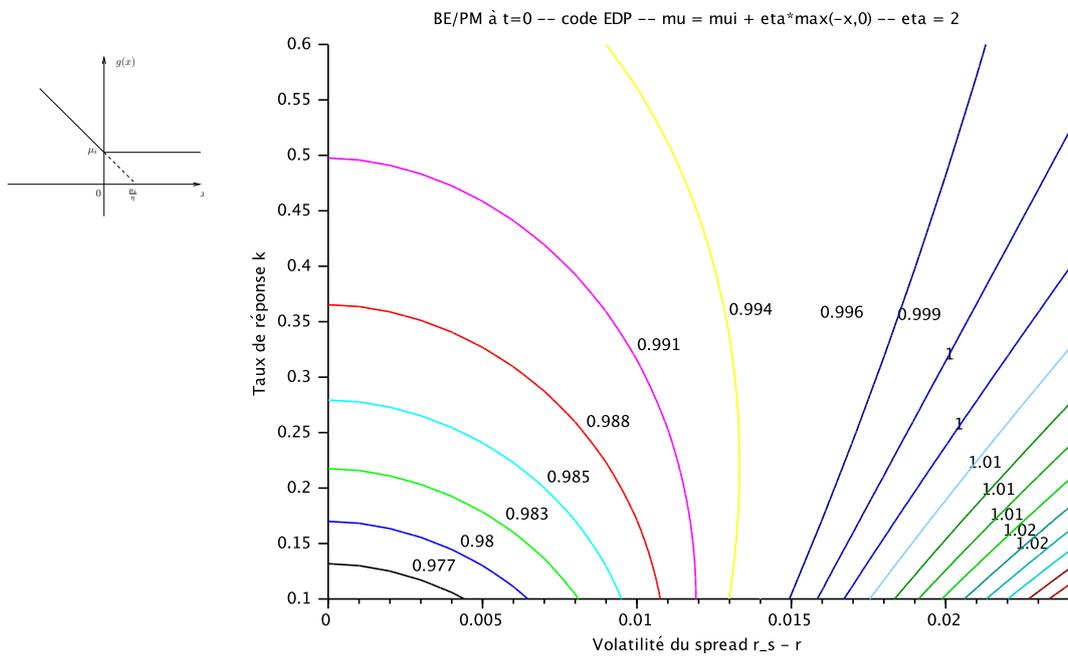


FIGURE 2.3 – Fonction de rachat conjoncturel $g(x) = \mu_i - \eta x$, $\mu_i = 4\%$, $\eta = 2$. (a) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $x_0 = -5.10^{-3}$, $x_\infty = 0$ et pour plusieurs valeurs de (k, σ) . (b) Best estimate pour un € de PM pour $t \in [0, T]$ et $x_0 \in [-15\%, 15\%]$.

(a)



(b)

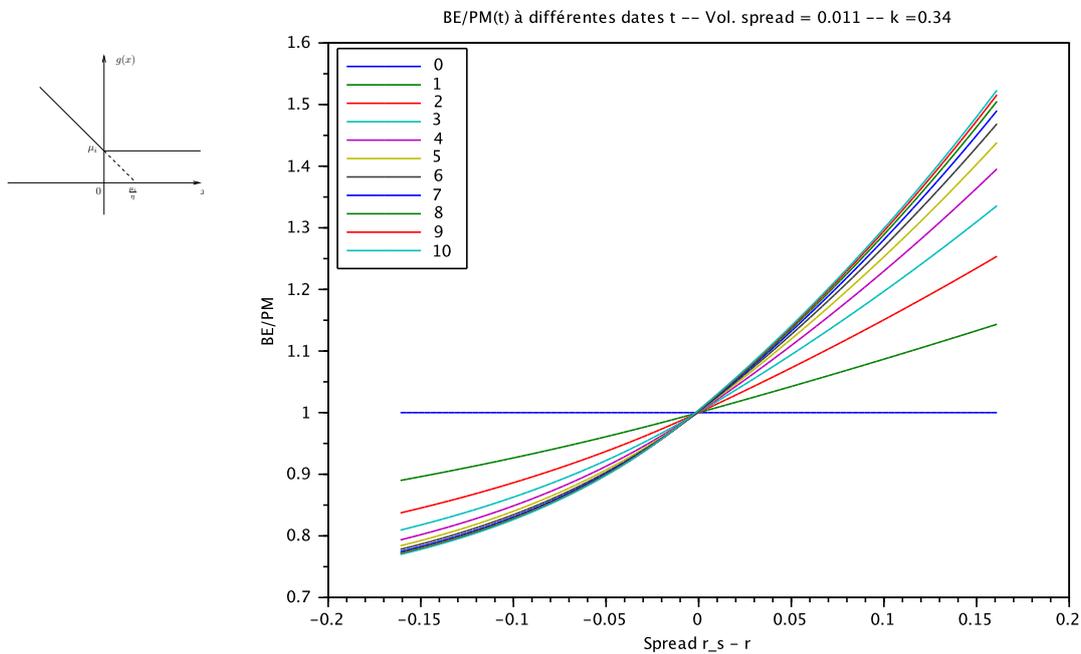


FIGURE 2.4 – Fonction de rachat conjoncturel $g(x) = \mu_i + \eta x_-$, $\mu_i = 4\%$, $\eta = 2$. (a) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $x_0 = -5.10^{-3}$, $x_\infty = 0$ et pour plusieurs valeurs de (k, σ) . (b) Best estimate pour un € de PM pour $t \in [0, T]$ et $x_0 \in [-15\%, 15\%]$.

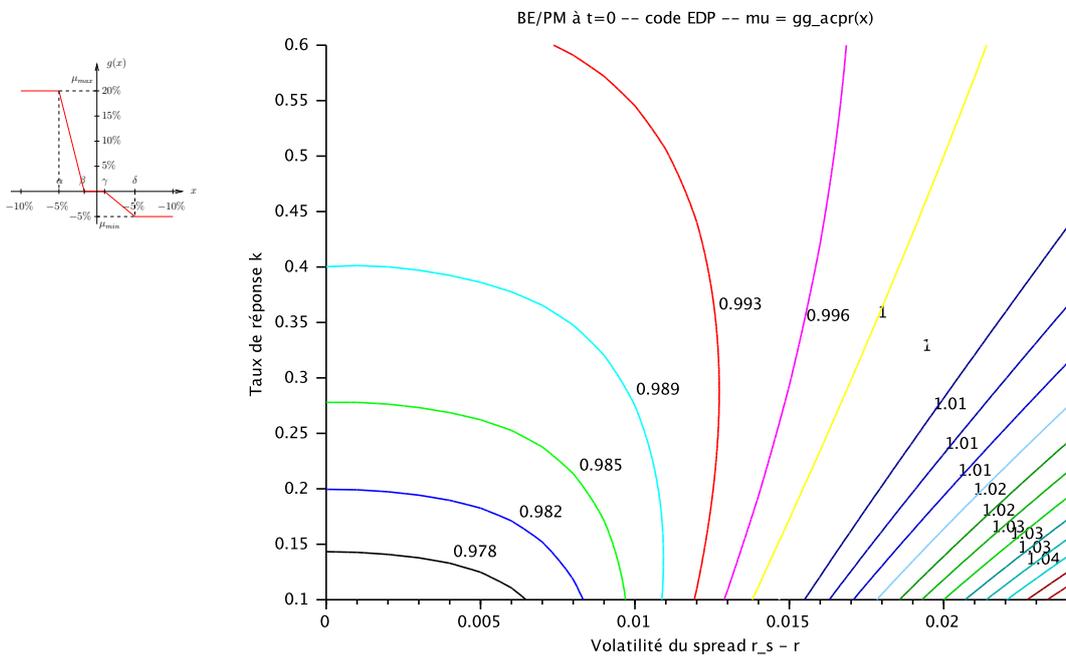
Dans ce cas le taux de rachat est saturé à droite et à gauche et il ne joue plus pour des valeurs de x en dehors de l'intervalle $[-5\%, 5\%]$. On observe le même genre de comportement que Fig. 2.4.

$$4.3.3 \quad f = x + r, \quad g = \min(1, \max(0, \mu_c(x) + \mu_i)), \quad \mu_i = \mu_i(t)$$

Dans cet exemple, on introduit un taux de rachat structurel et un taux de mortalité tout deux dépendant du temps (voir §1 en annexes). Ici la maturité est $T = 110$ ans et on calcule le *Best Estimate* pour des individus d'âge 30 ans (Homme Fig. 2.6 (a) et femme Fig. 2.6 (b)).

Le taux de sortie (mortalité + rachat structurel) demeurant stationnaire à grande distance de la maturité, on constate une convergence vers une solution stationnaire. Ainsi, la valeur temps du *Best Estimate* a tendance à s'annuler lorsque $T - t \gg 0$.

(a)



(b)

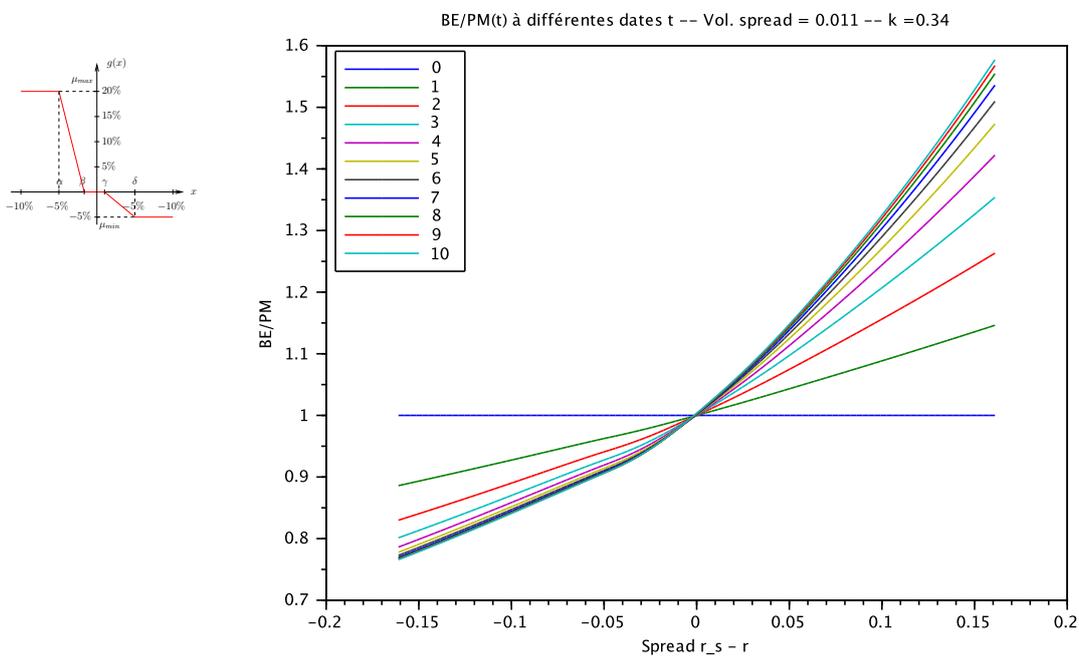
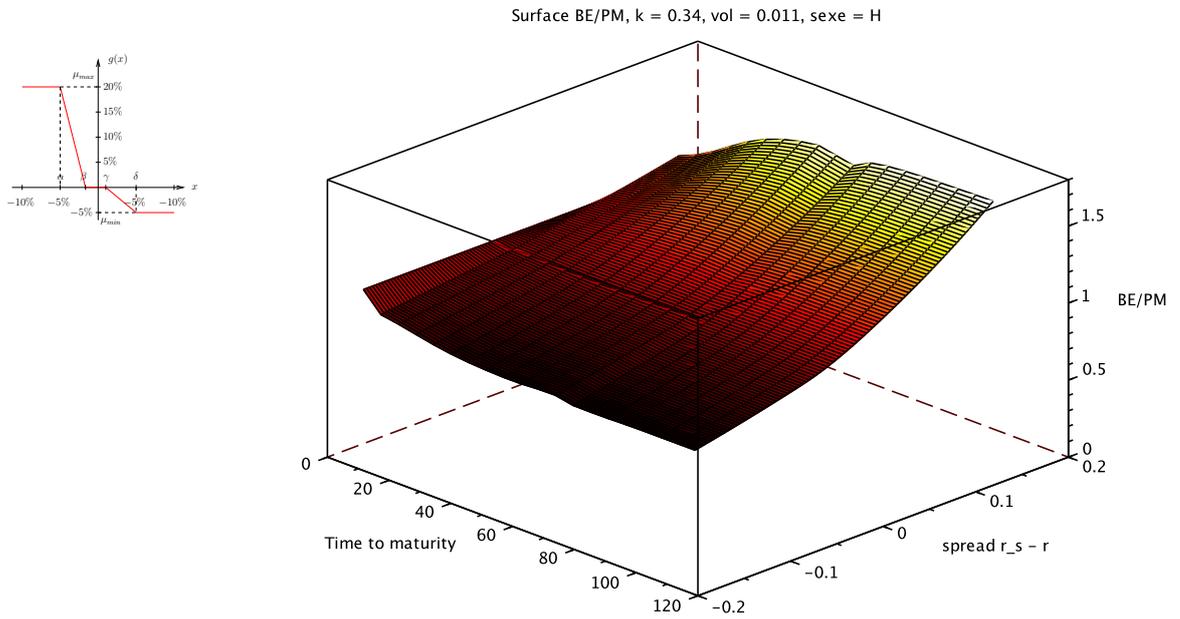


FIGURE 2.5 – Best estimate pour un € de PM selon un modèle de taux de rachat de type ACPR, $\alpha = -5\%$, $\beta = -2\%$, $\gamma = 1\%$, $\delta = 5\%$, $\mu_{max} = 20\%$, $\mu_{min} = -5\%$, $\mu_i = 5\%$ (Cf. (2.2)). Ici $x_\infty = 0$. (a) Valeurs à $T = 10$ ans pour $k \in [0, 0.6]$, $\sigma \in [0, 2.4\%]$ et $x_0 = -0.5\%$. (b) Différentes valeurs pour $t \in [0, T]$, $T = 10$ ans pour $k = 0.34$ et $\sigma = 1.1\%$.

(a)



(b)

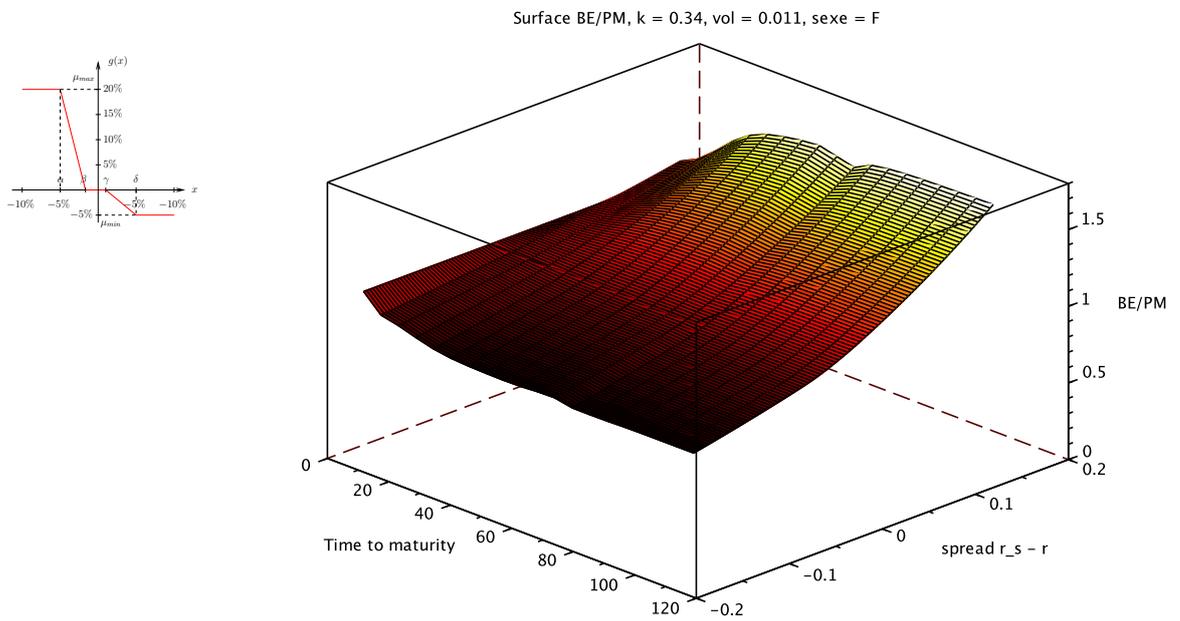


FIGURE 2.6 – Valeur de contrat pour un € de PM calculée par EDP pour un taux de rachat incluant un rachat structurel dépendant de l'âge, un rachat conjoncturel de type ACPR et une table de mortalité d'expérience (Cf. tableau 4.10). Ici $x_\infty = 0$, $T = 113$ ans. (a) Homme. (b) Femme.

4.4 Rachat avec Taux Minimum Garanti

4.4.1 Une EDP en dimension 2

Dans le cas où l'on incorpore un TMG dans le taux de revalorisation (ou taux servi), la fonctionnelle $f(x, r)$ s'écrit

$$f(x, r) = \max(x + r, TMG).$$

Contrairement au cas générique $f(x, r) = x + r$, on ne peut pas éliminer r de l'EDP. La solution de (2.17) dépend donc bien de deux variables (x, r) .

Avec les mêmes notations que précédemment, la fonction $\varphi(t, x, r) = \phi(T - t, x, r)$ vérifie l'EDP

$$(2.22) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(m_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + m_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho \sigma_x \sigma_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} \right) - (f - r - g)\varphi = g,$$

où $(x, r) \in \mathbb{R}^2$ et $0 < t \leq T$ avec la donnée initiale

$$(2.23) \quad \varphi(0, x, r) = 1, \quad (x, r) \in \mathbb{R}^2.$$

Récrivons (2.22)–(2.23) dans le cas où suit x et r suivent des dynamiques de type (2.12) :

$$(2.24) \quad dx(t) = k_x(x_\infty - x(t)) dt + \sigma_x dB_x(t),$$

$$(2.25) \quad dr(t) = k_r(r_\infty - r(t)) dt + \sigma_r dB_r(t),$$

où on supposera les browniens B_x et B_r décorréllé par simplicité.

L'EDP (2.22)–(2.23) s'écrit alors

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_r(r - r_\infty) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + k_x(x - x_\infty) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{\sigma_x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \rho \sigma_x \sigma_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r} - (f - r - g)\varphi = g, \\ \varphi(0, x, r) = 1. \end{array} \right.$$

4.4.2 Résolution numérique par différences finies 2d

De même qu'au §4.2.2, on va ramener le domaine de calcul à trois écart-types autour de la moyenne asymptotique (x_∞, r_∞) , soit une grille de calcul dans le produit d'intervalle $[x_\infty - 3\frac{\sigma_x}{\sqrt{2k_x}}, x_\infty + 3\frac{\sigma_x}{\sqrt{2k_x}}] \times [r_\infty - 3\frac{\sigma_r}{\sqrt{2k_r}}, r_\infty + 3\frac{\sigma_r}{\sqrt{2k_r}}]$ et on choisira des conditions aux bord de ce domaine adéquates. On choisit une discrétisation uniforme en posant

$$L_1 = 6 \frac{\sigma_x}{\sqrt{2k_x}}, \quad L_2 = 6 \frac{\sigma_r}{\sqrt{2k_r}},$$

$$\Delta x = \frac{L_1}{M_1 + 1}, \quad \Delta r = \frac{L_2}{M_2 + 1}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}.$$

Ici, $M_1 \times M_2$ représente exactement le nombre de nœuds à l'intérieur du domaine de calcul (Voir Fig. 2.7). L'objet de cette section est de chercher une approximation de $\varphi_{i,j}^n$ de $\varphi(t_n, x_i, r_j)$ au point $x_i = x_\infty - L_1/2 + i\Delta x$, $r_j = r_\infty - L_2/2 + j\Delta r$, $t_n = n\Delta t$ pour

$i = 1, \dots, M_1$, $j = 1, \dots, M_2$ et $n = 1, \dots, N$. On remplace les opérateurs aux dérivées partielles par les opérateurs aux différences suivantes (voir le tableau 2.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_i, r_j, t_n) &\longrightarrow \frac{1}{\Delta x^2}(\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(x_i, r_j, t_n) &\longrightarrow \frac{1}{\Delta r^2}(\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r}(x_i, r_j, t_n) &\longrightarrow \frac{1}{2\Delta x \Delta r} (-2\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n + \varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n), \\ &\text{si } \rho < 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial r}(x_i, r_j, t_n) &\longrightarrow \frac{1}{2\Delta x \Delta r} (2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i+1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j}^n - \varphi_{i,j-1}^n - \varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n), \\ &\text{si } \rho > 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_i, r_j, t_n) &\longrightarrow \frac{1}{2\Delta x}(\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x_i, r_j, t_n) &\longrightarrow \frac{1}{2\Delta r}(\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n) \end{aligned}$$

où (i, j) sont les nœuds *intérieurs* du domaine de calcul, là où est écrite l'équation, c.-à-d. tels que $2 \leq i \leq M_1 + 1$ et $2 \leq j \leq M_2 + 1$. Toutes ces approximations sont d'ordre 2 en Δx et Δr .

On a choisi d'intégrer les nœuds *extérieurs* (ceux situés sur le bord du domaine, en pointillés sur la figure 2.7) dans la numération globale des inconnues. Plus précisément, les inconnues $\{\varphi_{i,j}^n\}_{\substack{1 \leq j \leq M_2+2 \\ 1 \leq i \leq M_1+2}}$ sont représentées par le vecteur $U^n = t[U_1^n, \dots, U_{(M_1+2)(M_2+2)}^n]$ où les numérotations globales (i, j) et k se correspondent ici par la relation (voir également la figure 2.8) :

$$(2.27) \quad U_k^n = \varphi_{i,j}^n \iff k = (M_1 + 2)(j - 1) + i.$$

C'est le choix de la numérotation retenue Fig. 2.7. Il reste à définir le schéma en temps choisi pour intégrer numériquement (2.26). On choisit un θ -schéma, $\theta \in [0, 1]$, soit

$$(2.28) \quad \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = (1 - \theta)(B(t_n)U^n + g^n) + \theta(B(t_{n+1})U^{n+1} + g^{n+1}).$$

Assemblage du vecteur g^n

Le vecteur g^n de taille $(M_1 + 2)(M_2 + 2)$ est tel que $g_k^n = g(t_n, x_i)$ où $i = i(k)$ donné par (2.27). Par abus de notation, on le note g_i^n ou $g_{i(k)}^n$. Sa dépendance en temps provient du rachat structurel lorsqu'il est fonction de l'âge du souscripteur mais aussi du taux de mortalité instantané provenant d'une loi d'expérience par exemple.

Assemblage de la matrice $B(t_n)$

La matrice $B(t_n)$ provient de la discrétisation des opérateurs différentiels mais également du terme en φ dans l'équation (2.26). En particulier, elle dépend du temps à travers le coefficient diagonal $g(t_n)$.

Du fait de la numérotation choisie, la matrice $B(t_n)$ possède une structure « bloc » creuse (ce qui est typique de la discrétisation d'opérateur locaux). Son implémentation sera faite en deux étapes : d'abord, une matrice B_{int}^n pour les nœuds intérieurs (elle représente donc l'EDP) et une matrice B_{ext} pour les nœuds extérieurs (qui prennent en compte les conditions aux bords).¹⁰ Commençons par B_{int}^n . Son stockage est fait selon la description locale des différences finies utilisées (voir tableau 2.1) :

Ainsi, on note $L_x, L_r, M_{x,r}, G_x$ et G_r les matrices de taille $(M_1 + 2)(M_2 + 2) \times (M_1 + 2)(M_2 + 2)$ associées respectivement aux opérateurs $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial r}, \frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial r}$ obtenues en utilisant le tableau 2.1 avec la numérotation de la figure 2.8 pour passer de la description locale des différences finies à la numérotation sur $1, \dots, (M_1 + 2)(M_2 + 2)$ en ne considérant de plus que les lignes correspondant aux points intérieurs.

Pour le reste, on note

$$X = \text{Diag}(x'_1, \dots, x'_{M_1+2}), \quad \text{puis } \bar{X} = \text{Diag}(X, \dots, X) \quad (\text{répété } M_2 + 2 \text{ fois}),$$

avec de même

$$R_j = \text{Diag}(r'_j, \dots, r'_j), \quad (\text{répété } M_1 + 2 \text{ fois}), \quad \text{puis } \bar{R} = \text{Diag}(R_1, \dots, R_{M_2+2}).$$

On pose

$$G^n = \text{Diag}(g(t_n, x_{i(k)}), k \in I_{int}), \quad F = \text{Diag}(f(x_{i(k)}, r_{j(k)}), k \in I_{int}),$$

avec $i(k)$ et $j(k)$ donné par (2.27) et où I_{int} désigne les nœuds intérieurs au domaine. Finalement, on obtient

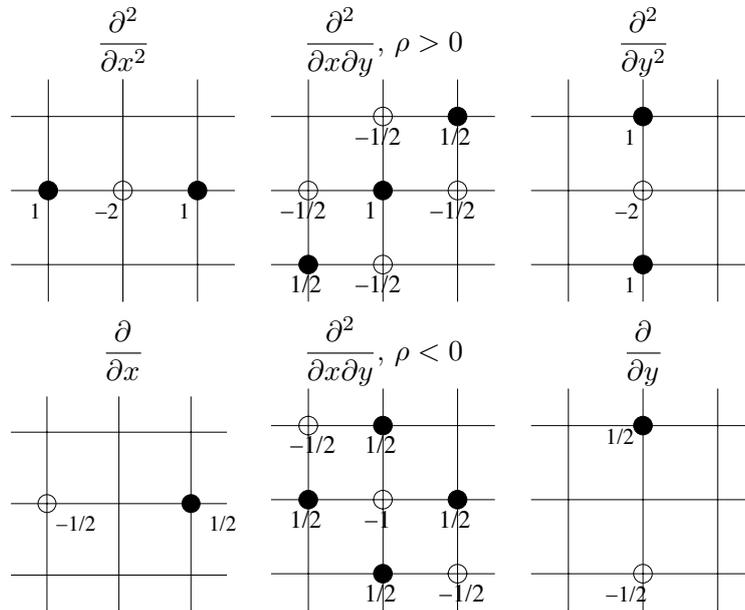
$$(2.29) \quad B_{int}^n = \frac{\sigma_x^2}{2} L_x + \frac{\sigma_r^2}{2} L_r + \rho \sigma_x \sigma_r M_{x,r} - k_r \bar{R} G_r - k_x \bar{X} G_x + (F - \bar{R} - G^n).$$

Maintenant, stockons la matrice B_{ext} . Nous allons rajouter des lignes au système linéaire (2.28) d'inconnue U^{n+1} de façon à prendre en compte des conditions aux bord. Ce sont les lignes d'indices k où k numérote un des points du bord (ex : 1, 16, 31, 46, ... de la figure 2.7). Ces conditions que l'on choisit ici sont artificielles puisque le problème initial (2.26) est posé sur \mathbb{R}^2 tout entier. Signalons néanmoins quelques conditions usuelles, les bonnes pratiques consistant à avoir une idée du comportement asymptotique de la solution :

- *Conditions aux bords de Dirichlet* : on suppose connue la valeur de φ au nœud k , la ligne k du système contiendra 1 sur la diagonale et 0 partout ailleurs ;
- *Conditions aux bords de Neumann* : on suppose connue $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Par exemple, $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$. Alors la ligne k contiendra 1 et -1 aux nœuds adéquats ;
- *Autres conditions aux bords* : on peut choisir, compte tenu de la particularité de l'EDP, d'imposer $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$ ou $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0$ sur les bords du domaine (comme en §4.2.2

10. On ne tiendra pas compte de l'éventualité de la dépendance en temps des conditions aux bords. En effet, l'EDP continue est posée sur \mathbb{R}^2 et donc les conditions aux bords que l'on choisit sont nécessairement artificielles pour le cas qui nous occupe. On peut citer le cas de conditions aux bords absorbantes ou transparentes qui sont plus précises et qui permettent de ramener sur un domaine fini les conditions à l'infini, et dans ce cas elles dépendent du temps, mais cela dépasse le cadre de ce mémoire. Voir [ZE06]

TABLE 2.1 – Exemples de discrétisations stables des opérateurs différentielles présents dans (2.22).



en dimension 1). Dans ce cas, on choisit une formule aux différences finies décentrées pour la dérivée seconde, comme par exemple :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_n, x_i, r_j) \longrightarrow \frac{1}{\Delta x^2}(\varphi_{i+2,j}^n - 2\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n),$$

aux points d'abscisse $x = -L_1/2$ par exemple. On perd alors un ordre, l'approximation n'est plus que du premier ordre.

On donne quelques exemples de telles matrices B_{ext} et B_{int}^n dans les tableaux 2.2–2.3. On remarque dans le tableau 2.2 seules les lignes 6, 7, 10 et 11, correspondant aux quatre nœuds intérieurs sont remplies. Dans le tableau 2.3, on peut remarquer que les lignes non nulles de B_{ext} sont *disjointes* de celles de B_{int}^n par construction, mais que les colonnes non nulles de ces deux matrices ne sont pas nécessairement disjointes.

Enfin, le système linéaire (2.28) peut être réécrit, dans un premier temps, comme (avec notations évidentes)

$$(Id_{int} - \theta \Delta t B_{int}^{n+1})U^{n+1} = F_{int}$$

où

$$(2.30) \quad F_{int}^n = (Id_{int} + (1 - \theta)\Delta t B_{int}^n)U^n + \Delta t((1 - \theta)g^n + \theta g^{n+1}).$$

On remarque que cette écriture comporte plus de colonnes que de lignes (une colonne = une inconnue, une ligne = une équation). On complète le système par

$$(2.31) \quad (Id_{int} - \theta \Delta t B_{int}^n + B_{ext})U^{n+1} = F_{int}^n + F_{ext},$$

où B_{int}^n est donné par (2.29) et où F_{ext} contient les valeurs de φ ou de ses dérivées aux points situés sur le bord du domaine.

TABLE 2.2 – Un exemple de matrice B_{int}^n pour l'opérateur $2\frac{\partial^2}{\partial x \partial r}$ avec $M_1 = M_2 = 2$

!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	-1.	1.	0.	-1.	2.	-1.	0.	1.	-1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	-1.	1.	0.	-1.	2.	-1.	0.	1.	-1.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	1.	0.	-1.	2.	-1.	0.	1.	-1.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	1.	0.	-1.	2.	-1.	0.	1.	-1.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!

TABLE 2.3 – Exemple de matrice B_{ext} représentant des conditions de Dirichlet sur $x = -L_1/2$ et de Neuman sur les trois autres côtés pour $M_1 = M_2 = 2$.

!	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	-1.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	-1.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	-1.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	1.	0.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	0.	0.	0.	1.	0.	!
!	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	1.	!

4.5 Tests numériques

On teste dans ce paragraphe la méthode numérique détaillée à la section précédente. Nous nous plaçons donc dans le cas d'un contrat euro avec clause de rachat où les taux de revalorisation et de rachat sont modélisés par (2.5). Pour l'instant, nous n'incluons pas les fonctions de hasard déterministes de mortalité.¹¹ On cherche simplement à décrire l'influence du TMG sur le *Best Estimate*. On réécrit, les deux modèles de taux :

$$g(x) = \min(1, \max(0, \mu_c(x) + \mu_i)) \in [0, 1], \quad f(x, r) = \max(x + r, TMG).$$

Voir Fig. 2.1 pour la description du taux conjoncturel $\mu_c(x)$. Notons que les paramètres choisis pour le rachat structurel implique que le taux de rachat est nul pour $x = r_s - r \geq 0$. On va tester le cas où le TMG est tel que $TMG \leq \min(r_s(0), r_s(\infty))$ (cas (a)) puis le cas où $TMG \geq \max(r_s(0), r_s(\infty))$ (cas (b)). On choisit des valeurs de x_0 , x_∞ , r_0 et r_∞ reflétant la situation actuelle ($r_s(0) \sim 2.5\%$, $r_0 \sim 0.5\%$ et $r_\infty \sim 3\%$). Ainsi, on choisira $x_0 = 2\%$ et $x_\infty = -1\%$. Ce dernier choix donne $r_s(\infty) = 2\%$. On rappelle ces valeurs dans le tableau 2.4. Finalement, les deux cas testés seront pour $TMG = 1.5\%$ (§4.5.1) et $TMG = 2.5\%$ (§4.5.2).

TABLE 2.4 – Valeurs des paramètres utilisés lors des simulations pour la partie de test numériques du modèle 2d.

Taux d'intérêt risque neutre	
k_r	0.18
r_∞	3%
r_0	0.5%
σ_r	2%
Processus $x(t)$ (paramètres PB)	
k_x	0.3
σ_x	0.8%
x_∞	-1%
x_0	2%%
Corrélation	
ρ	0
Paramètres taux de rachat	
α	-5%
β	-1%
γ	1%
δ	3%
μ_{min}	-5%
μ_{max}	30%
Rachat structurel	
μ_i	5%
Taux minimum garanti	
TMG	1.5%, 2.5%
Maturité	
T	10 ans

11. Nous l'intégrerons au chapitre 4 lors de la mise en œuvre de l'ORSA.

4.5.1 Cas où $TMG = 1.5\%$, $TMG < \min(r_s(0), r_s(\infty))$.

On observe dans la figure 2.9 (a) les valeurs de BE/PM en $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$ et à $T = 10$ ans pour plusieurs valeurs des paramètres (k_x, σ_x) de la politique de PB. Le provisionnement est toujours croissant par rapport à volatilité σ_x mais, contrairement à la figure 2.5 (a) (dimension 1)(voir remarque 2.2), il est décroissant par rapport à k_x et ceci quelque soit le niveau de volatilité σ_x .

Dans Fig. 2.9 (b) on représente le ratio BE/PM à $T = 10$ ans pour plusieurs valeurs de (x_0, r_0) et pour une valeur moyenne des paramètres (k_x, σ_x) . On s'aperçoit sur cette dernière que l'influence du TMG est manifeste pour les faibles revalorisations ($x < 0$). Dans ce dernier cas, on constate une indépendance du provisionnement par rapport au *spread* x et les valeurs décroissantes du BE par rapport aux taux rendent tout simplement compte de l'effet d'actualisation (plus on actualise fort, moins on provisionne). On retrouve le caractère *1d* (indépendance par rapport à r) lorsque x est grand.

Dans Fig. 2.10, on représente les dérivées par rapport à x et r du *Best Estimate* au point (x_0, r_0, T) pour plusieurs valeurs du couple (k_x, σ_x) . On note une grande sensibilité par rapport à x pour les faibles valeurs de k_x . Cela signifie qu'en cas de taux de réponse faible de l'assureur face à la concurrence ou l'environnement financier, une approximation du *Best Estimate* peut être entachée d'erreurs importantes et ceci quelque soit la volatilité de la stratégie de participations aux bénéfices.

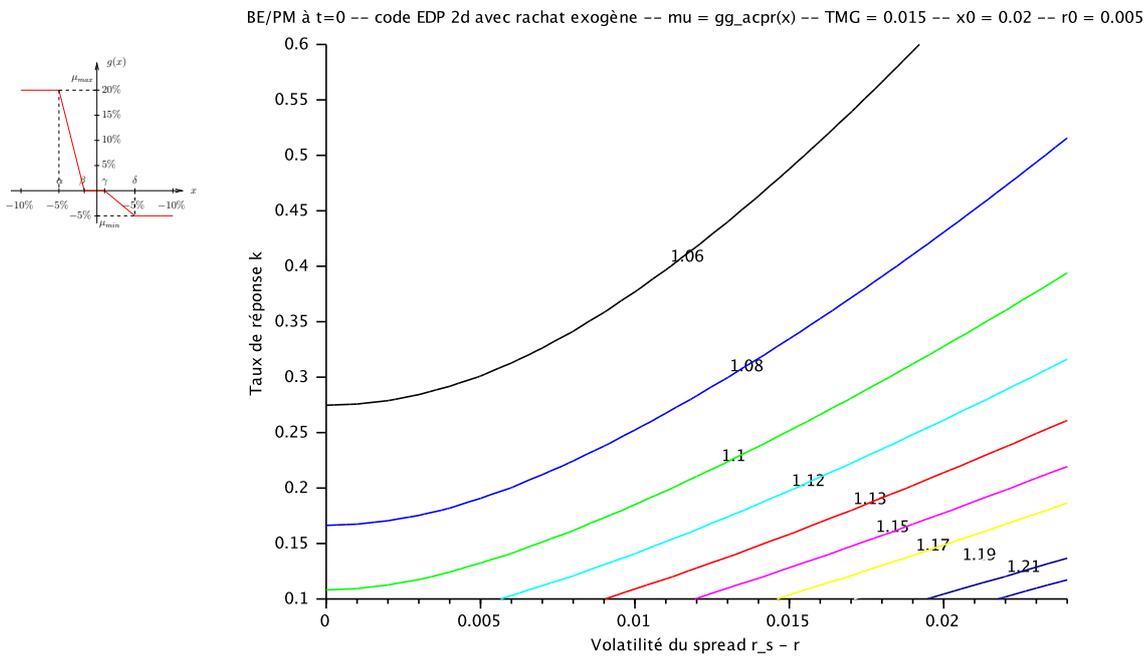
Finalement, on a représenté Fig. 2.11, les dérivées partielles par rapport à x et r de la solution de l'EDP au point (x_0, r_0) à la date T . Notons que la solution est toujours strictement décroissante par rapport au taux d'intérêt r et semble convexe par rapport au *spread* x (dérivée première positive et croissante, comme en dimension 1).

4.5.2 Cas où $TMG = 2.5\%$, $TMG > \max(r_s(0), r_s(\infty))$.

Comme on pouvait s'y attendre l'influence du TMG se manifeste pour des valeurs de x plus grandes que dans le cas précédent (comparer les figures 2.12 (b) et 2.9 b). Tandis que dans la figure 2.13, on note une sensibilité du ratio BE/PM moins importante par rapport à x mais plus importante par rapport à r que dans le cas $TMG = 1.5\% < \min(r_s(0), r_s(\infty))$.

De même que plus haut, on a représenté Fig. 2.14, les dérivées partielles par rapport à x et r de la solution de l'EDP au point (x_0, r_0) et à la date T pour une même valeur des paramètres (k_x, σ_x) . On remarque les mêmes propriétés qualitatives que précédemment dans le cas $TMG = 1.5\%$ avec toutefois une sensibilité accrue au taux.

(a)



(b)

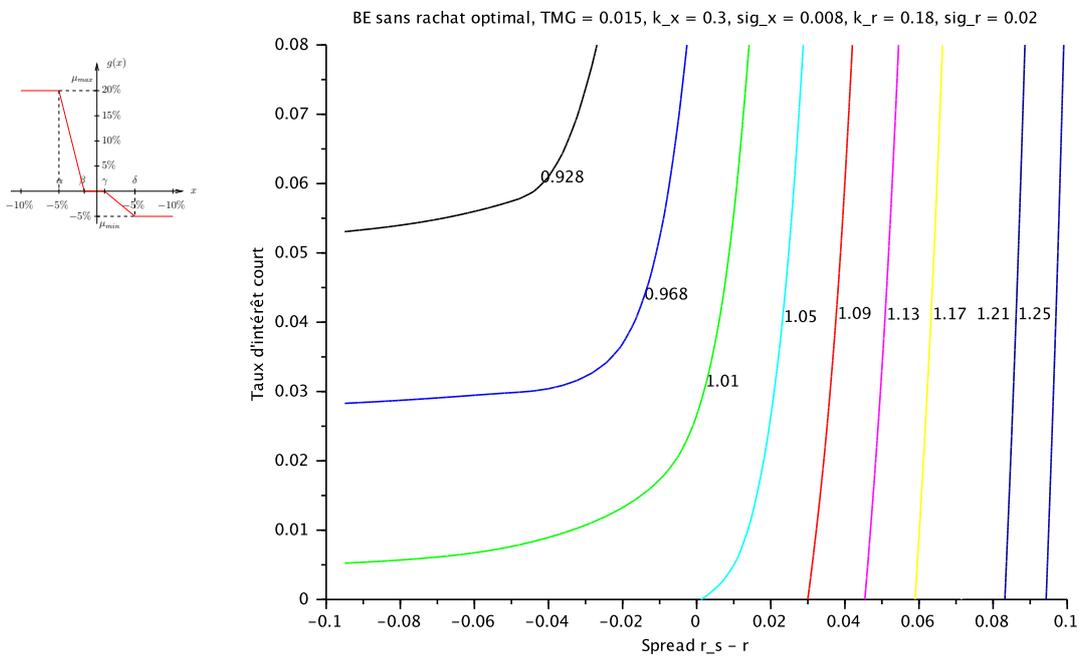
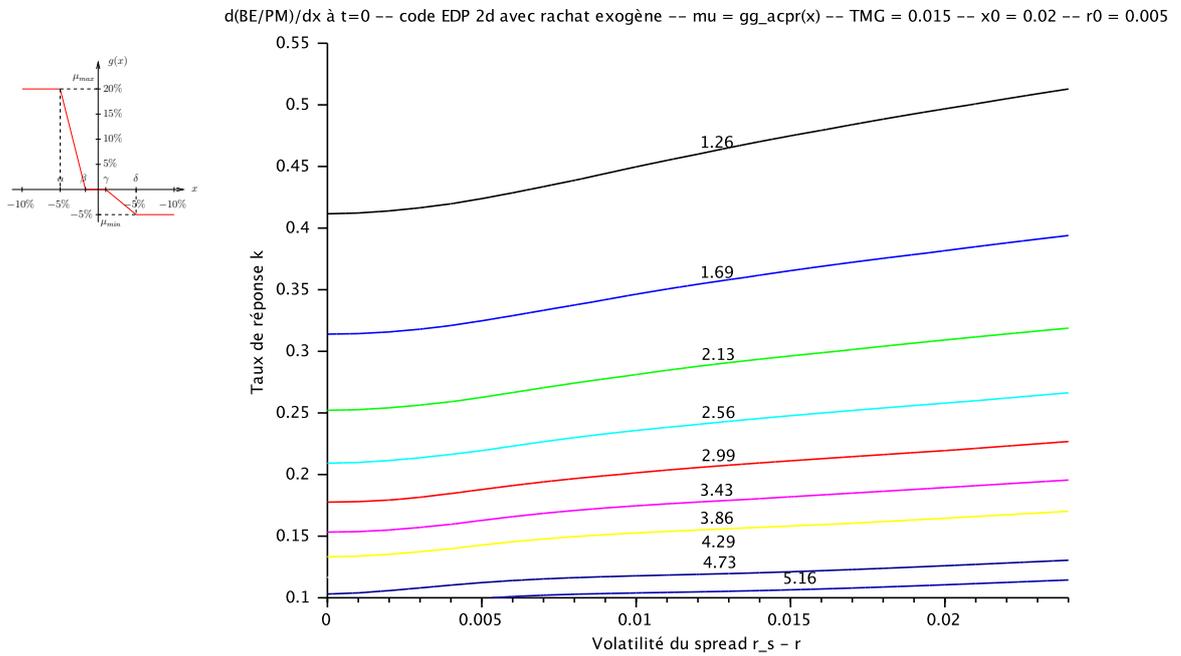


FIGURE 2.9 – (a) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $TMG = 1.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$ et $x_0 \in [-10\%, 10\%]$ et $r_0 \in [0, 8\%]$.

(a)



(b)

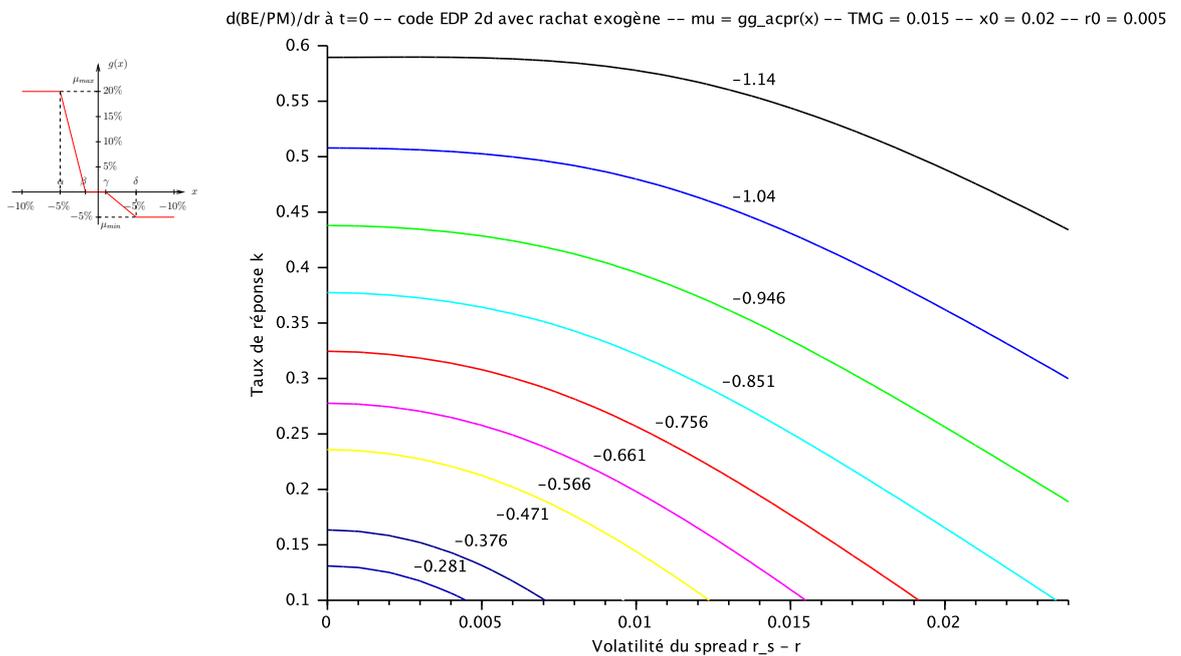
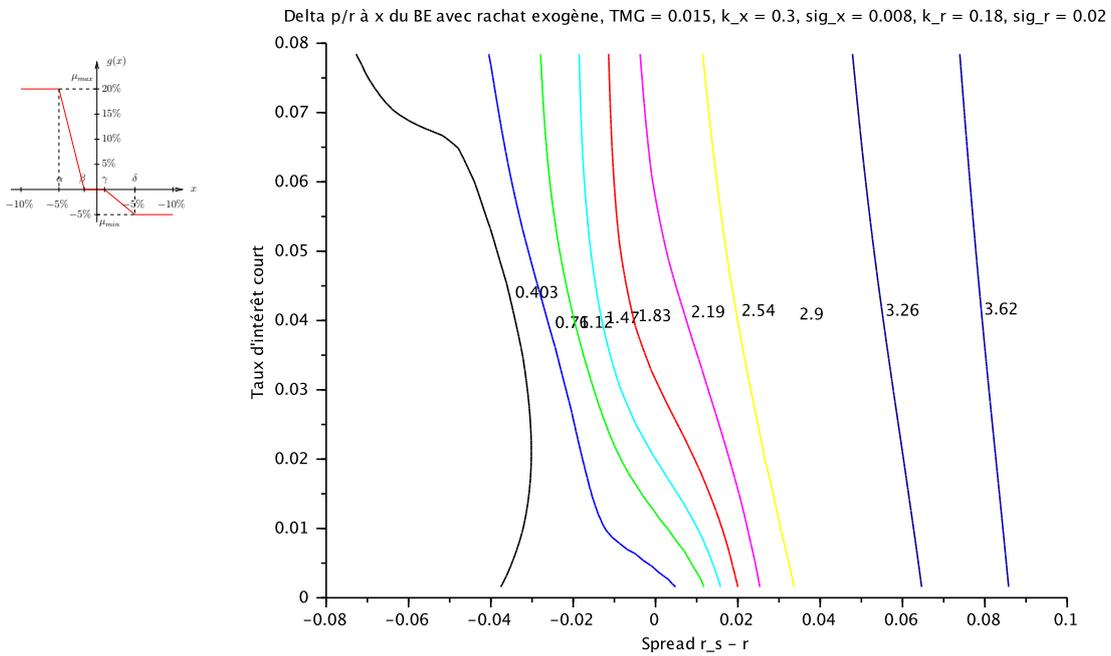


FIGURE 2.10 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $TMG = 1.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Idem par rapport à r .

(a)



(b)

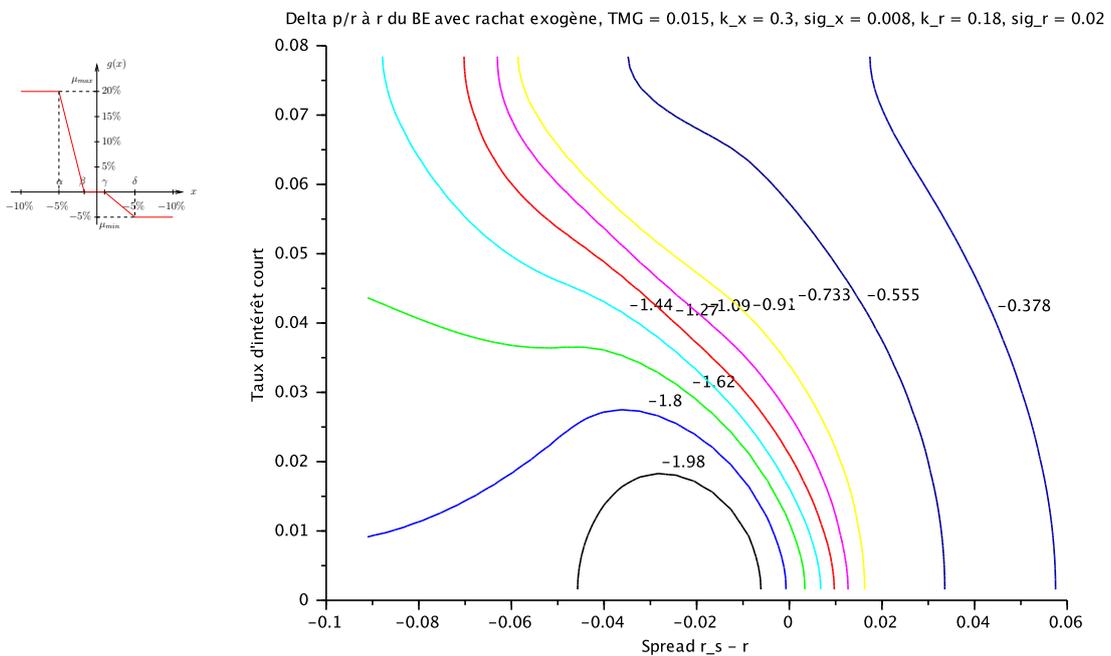
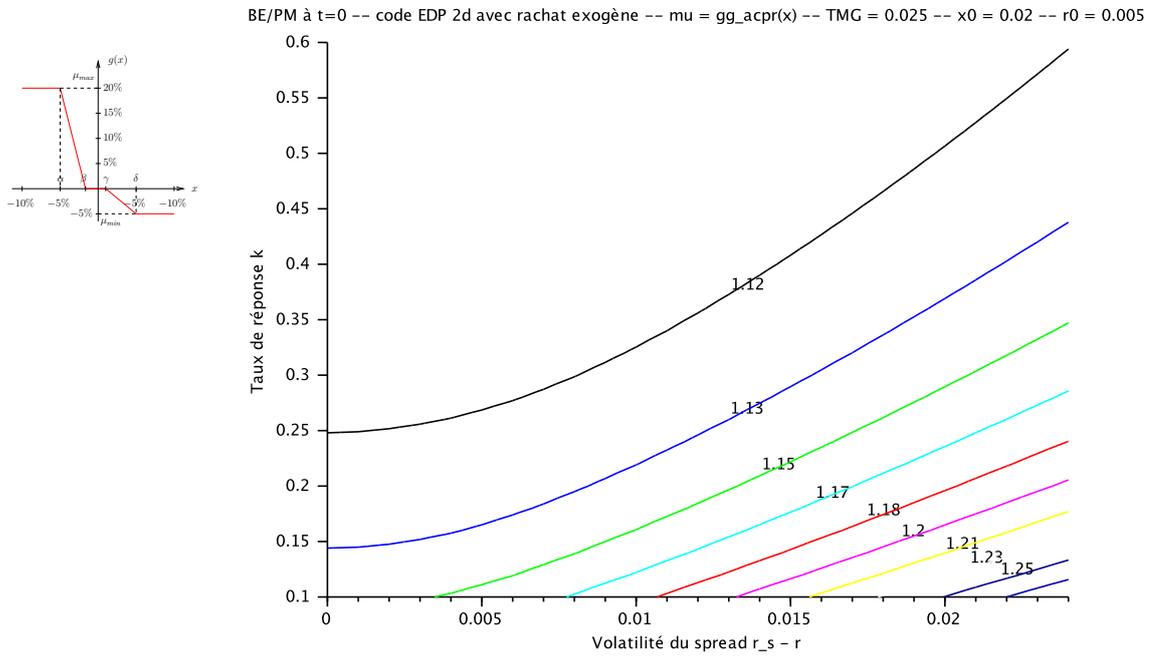


FIGURE 2.11 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$, $TMG = 1.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (x_0, r_0) . (b) Idem par rapport à r .

(a)



(b)

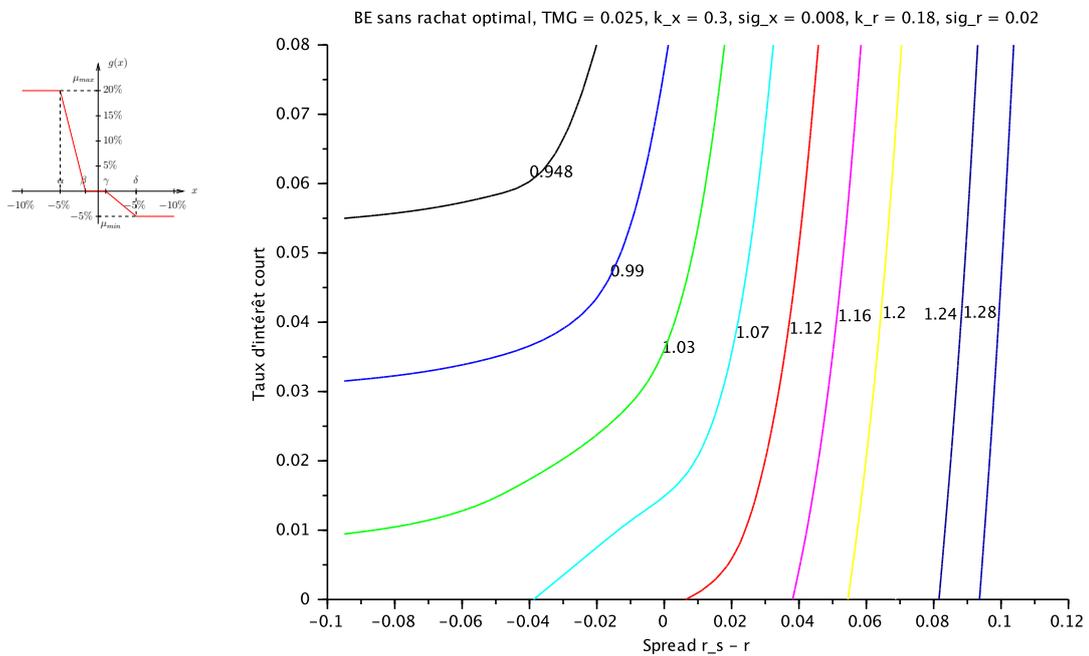
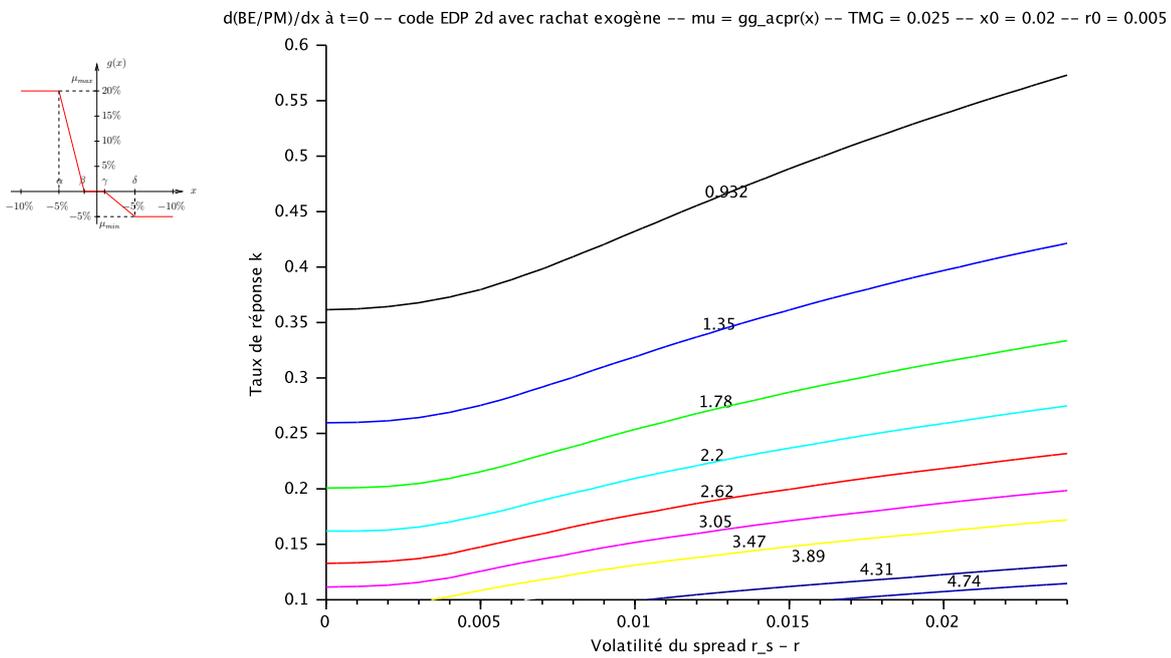


FIGURE 2.12 – (a) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $TMG = 2.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$ et $x_0 \in [-10\%, 10\%]$ et $r_0 \in [0, 8\%]$.

(a)



(b)

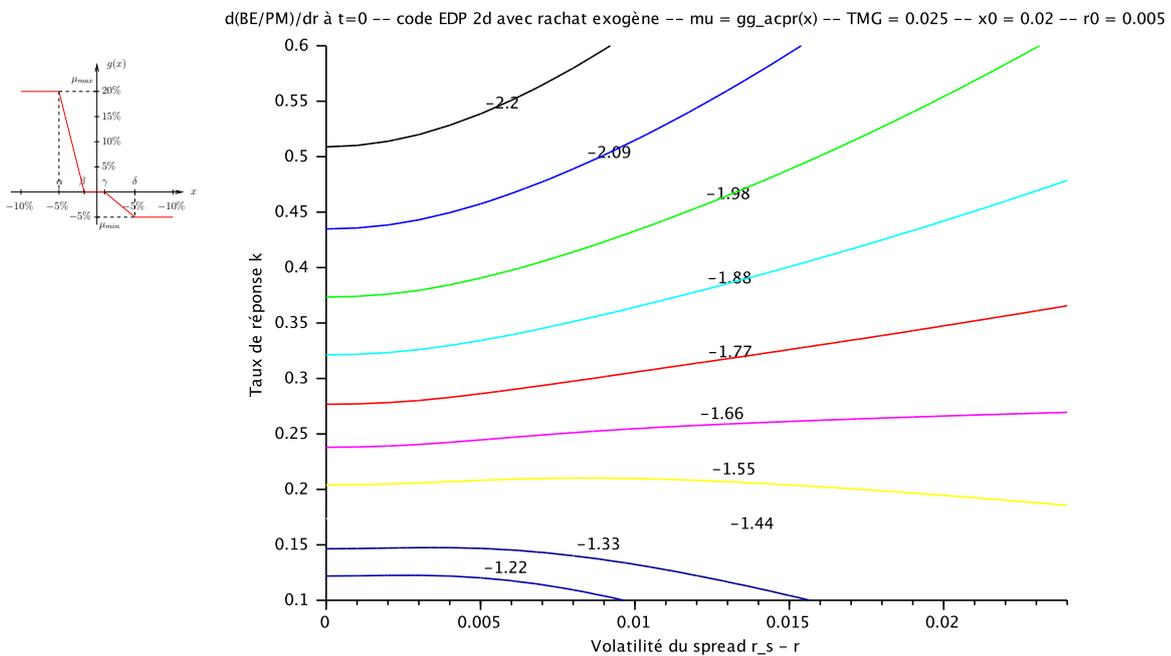
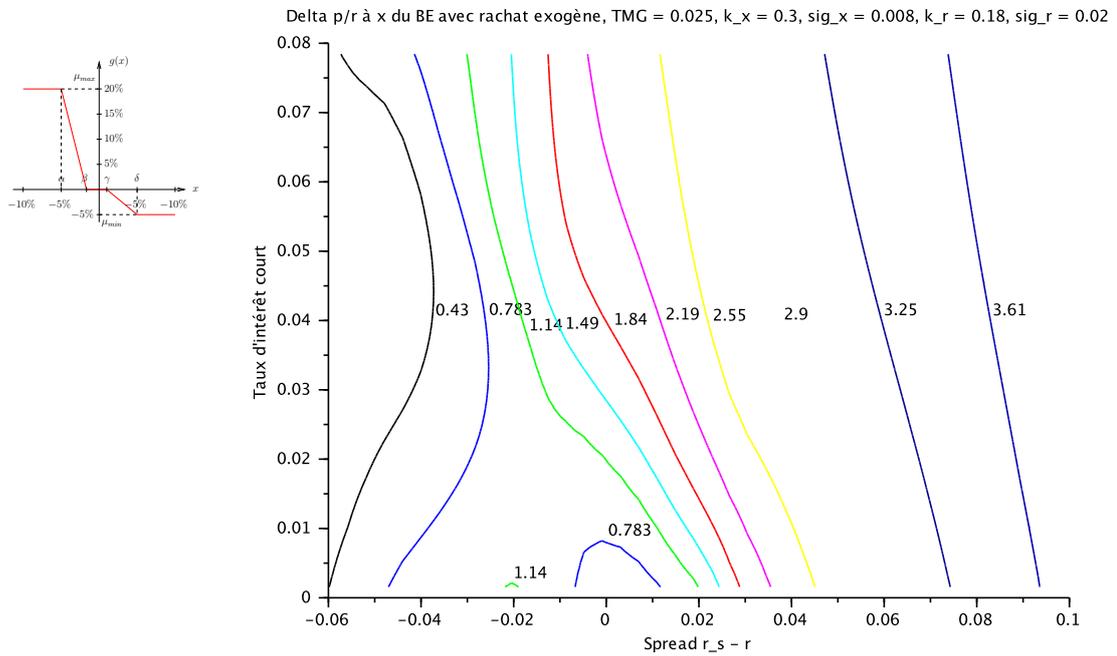


FIGURE 2.13 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $TMG = 2.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Idem par rapport à r .

(a)



(b)

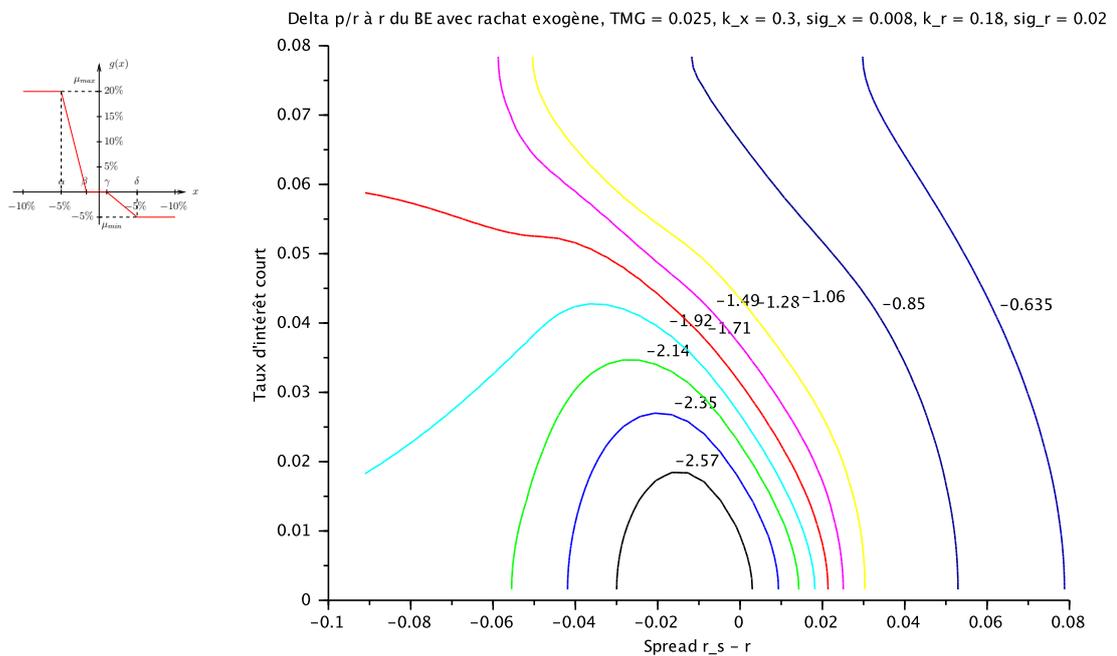


FIGURE 2.14 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$, $TMG = 2.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (x_0, r_0) . (b) Idem par rapport à r .

3

Stratégie rationnelle de rachat

Nous allons aborder dans ce chapitre, l'événement de rachat comme le résultat d'une stratégie rationnelle de l'assuré en fonction de l'environnement financier et démographique en voyant le calcul de la valeur de rachat comme un problème d'arrêt optimal (caractère américain de la clause de rachat). Reprenons le cas du contrat en euros du chapitre précédent, nous verrons qu'une¹ stratégie optimale consiste à racheter le contrat dès que la valeur de rachat est au moins supérieure à la valeur économique du contrat. Cette valeur économique doit changer alors. En particulier, il semble naturelle que celle-ci soit au moins supérieure à celle dans le cas d'absence de stratégie rationnelle.

Ce thème de rachat rationnel anticipé dans le cadre de l'assurance-vie a déjà été abordé par de nombreux auteurs (voir [Bac03, BBM09, BBM10, Pru96, SX05]). Tous décrivent une représentation probabiliste du *fair price* sous la forme de problème d'arrêt optimal. Dans [Bac03], l'auteur propose une méthode numérique d'évaluation du contrat par un arbre binomial. Notons une approche de résolution numérique par EDP dans [SX05].

Nous proposons ici un modèle d'EDP à toute fin d'obtenir un outil numérique d'évaluation. Dans ce cas, un argument d'absence d'opportunité d'arbitrage conduit à remplacer (2.17) par l'inéquation aux dérivées partielles suivante, où la fonction ψ désigne toujours le ratio BE/PM :

$$\begin{cases} \max \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{L}\psi + (1 - \psi)g + (f - r)\psi, 1 - \psi \right) = 0, \\ \psi(T, x, r) = 1, \end{cases}$$

C'est un problème équivalent à un problème de frontière libre. C'est un problème qui peut se mettre également sous la forme d'un problème linéaire complémentaire. C'est sous cet angle qu'est abordé en général la résolution numérique dans la formulation. On peut consulter [WDH93, Chap. 6 et 7] pour une bonne introduction à ces problématiques dans un cadre financier (options américaines). Pour les aspects théoriques sur les inéquations variationnelles (aspect EDP), on renvoie le lecteur au classique [KS80], pour les problèmes d'arrêt optimal (aspect probabiliste) à l'ouvrage [SP06] et pour leurs liens avec les inéquations variationnelles à l'article [RØ98]. Pour les aspects numériques, on peut consulter le classique [KD00] ou bien pour un exemple d'implémentation 2d l'article [VZ02].

1. Ce n'est pas *a priori* la seule

1 Une stratégie de rachat optimale

Reprenons l'expression du *Best Estimate* donnée par (2.10) :

$$BE(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s (r(u) + \mu(u)) ds} \mu(s) VR(s) ds + e^{-\int_t^T (r(s) + \mu(s)) ds} VR(T) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

où la valeur de rachat est donnée par (2.9). À tout instant t le souscripteur, sensible à l'environnement financier et démographique via le taux de rachat μ peut décider de racheter son contrat avec comme ambition de maximiser son gain. Dans cette optique rationnelle d'optimisation, le juste prix (valeur économique sous probabilité risque-neutre) de ce contrat change donc et vaut :

$$\mathcal{V}_t = \sup_{\tau \leq T} \mathbf{1}_{\tau > t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[\int_t^\tau e^{-\int_t^s (r(u) + \mu(u)) ds} \mu(s) VR(s) ds + e^{-\int_t^\tau (r(s) + \mu(s)) ds} VR(\tau) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

où le sup est pris parmi les \mathbb{F} -temps d'arrêt $\tau \leq T$. La même technique que dans le chapitre précédent permet de factoriser par $VR(t)$ et on abouti à la représentation probabiliste suivante pour le ratio, noté ψ , du *Best Estimate* sur la provision mathématique à l'instant t :²

(3.1)

$$\begin{aligned} \psi(t, x(t), r(t)) &= \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^h \otimes \mathbb{P}^x} \left[\int_t^\tau \exp \left(\int_t^s (r_s(u) - r(u) - \mu(u)) ds \right) \mu(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \exp \left(\int_t^\tau (r_s(s) - r(s) - \mu(s)) ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

2 Une inéquation variationnelle

On peut montrer que, sous des hypothèses de régularité minimale³ sur ψ , le problème (3.1) est équivalent à l'inéquation variationnelle suivante

$$(3.2) \quad \max \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{L}\psi + (1 - \psi)g + (f - r)\psi, 1 - \psi \right) = 0,$$

$$(3.3) \quad \psi(T, \cdot) = 1.$$

Pour donner une idée de la démonstration, considérons une solution ψ de (3.2)–(3.3) suffisamment régulière (afin d'appliquer la formule d'Itô). Notons

$$H_t \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{L}\psi - \lambda \psi,$$

où $\lambda(t) := \lambda(t, x(t), r(t)) = r(t) - f(t, x(t), r(t)) + g(t, x(t), r(t))$. La formule d'Itô permet d'affirmer que la quantité

$$M_t = e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \psi(t, x(t), r(t)) - \int_0^t e^{-\int_0^s \lambda(u) du} H_s \psi(s) ds$$

2. À rapprocher de (2.11)

3. ψ solution de viscosité, voir [RØ98].

est une \mathcal{F}_t -martingale. Ainsi quelque soit $t \leq \tau \leq T$, temps d'arrêt, on a

$$\mathbb{E}(M_\tau - M_t \mid \mathcal{F}_t) = 0 = \mathbb{E} \left(e^{-\int_0^\tau \lambda(u) du} \psi(\tau) \mid \mathcal{F}_t \right) - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \psi(t) - \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-\int_0^s \lambda(u) du} H_s \psi(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right).$$

Grâce à (3.2), on a une première inégalité

$$\mathbb{E} \left(e^{-\int_0^\tau \lambda(s) ds} \psi(\tau) \mid \mathcal{F}_t \right) - e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} \psi(t) + \mathbb{E} \left(\int_t^\tau e^{-\int_0^s \lambda(u) du} g(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right) \leq 0.$$

Soit en prenant le supremum sur les temps d'arrêt, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} (3.4) \quad \psi(t, x(t), r(t)) &\geq \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^\tau \lambda(s) ds} \psi(\tau) + \int_t^\tau e^{-\int_t^s \lambda(u) du} g(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right), \\ &\geq \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^\tau \lambda(s) ds} + \int_t^\tau e^{-\int_t^s \lambda(u) du} g(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right), \\ &\geq \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E} \left(e^{-\int_t^\tau \lambda(s) ds} + \int_t^\tau e^{-\int_t^s \lambda(u) du} g(s) ds \mid \mathcal{F}_t \right), \end{aligned}$$

où on a utilisé une deuxième fois (3.2) dans la dernière inégalité.

Pour avoir l'égalité, il suffit de considérer le temps d'arrêt τ^* défini comme $\tau^* = \inf\{\theta \geq t, \psi(\theta, x(\theta), r(\theta)) = 1\}$. Encore une fois (3.2) implique que pour tout $\theta < \tau^*$, $\psi(\theta) > 1$ et donc que $H_\theta \psi(\theta) = 0$. La propriété de martingale de M permet de conclure à l'égalité dans (3.4) avec τ^* comme un temps d'arrêt optimal. ■

Remarque 3.1 *Les inégalités précédentes permettent d'encadrer la zone de rachat. En effet,*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{L}\psi + (1 - \psi)g + (f - r)\psi < 0 \implies \psi = 1 \implies f = r_s < r.$$

Ainsi, une condition nécessaire de rachat est un taux de revalorisation inférieur au taux d'intérêt. Pour le souscripteur rationnel en dimension 1, qui ne voit que le spread $x = r_s - r$, la zone de rachat est donc incluse dans $\{x < 0\}$.

En présence de TMG, en dimension 2, la zone de rachat de rachat est incluse dans la région $\{(x, r) \mid \max(x + r, TMG) < r\}$, soit la région du plan

$$(\{x < 0\} \cap \{x + r \geq TMG\}) \cup (\{r > TMG\} \cap \{x + r \leq TMG\}) = \{x < 0\} \cap \{r > TMG\}.$$

3 Résolution numérique

Nou exposons succinctement une méthode de résolution numérique de (3.2)–(3.3) à l'aide de l'algorithme d'Howard. Pour cela commençons par discrétiser l'EDP de la même façon qu'au chapitre 2. Pour des raisons de simplicité, nous exposerons la méthode pour un schéma semi-discret totalement implicite en temps (Euler implicite, $\theta = 1$, voir (2.28)) et dans une formulation rétrograde en temps (sans changement de variable $t \leftarrow T - t$). Avec les mêmes notations qu'au chapitre 2, une semi-discrétisation en temps conduit à résoudre à chaque pas de temps, ψ^{n+1} étant connu, le problème suivant

$$\max(\psi^{n+1} - \psi^n + \Delta t \mathcal{L}\psi^n + \Delta t(f - r - g^{n+1}) + \Delta t g^{n+1}, 1 - \psi^n) = 0,$$

avec la condition *terminale* $\psi^N = 1$. Soit à résoudre le problème en X suivant :

$$(3.5) \quad \max(G - BX, 1 - X) = 0,$$

où $G = \psi^{n+1} + \Delta t g^{n+1}$, $B = I - \Delta t \mathcal{L} - \Delta t (f - r - g^{n+1})I$, et $X = \psi^n$. Ceci est à rapprocher de (2.31).

La résolution numérique de (3.5) est difficile surtout quand la dimension $d \geq 1$. Nous allons exposer ici l'algorithme d'Howard. On note Ω_Δ la grille de calcul en espace (grille en x dans le cas de la dimension 1 ou grille en (x, r) dans le cas de la dimension 2). L'algorithme d'Howard consiste à construire une suite (X^k) approchant la solution de (3.5) de la façon suivante :

- (i) *Initialisation* : On considère une partition initiale de Ω_Δ comme $\Omega_\Delta = \Omega_{\Delta,1}^1 \cup \Omega_{\Delta,2}^1$ avec $\Omega_{\Delta,1}^1 = \Omega_\Delta$ et $\Omega_{\Delta,2}^1 = \emptyset$.
- (ii) *Étape $2k - 1$* : Étant donnée une partition $\Omega_\Delta = \Omega_{\Delta,1}^k \cup \Omega_{\Delta,2}^k$, on définit X^k par

$$\begin{cases} G - BX^k = 0 & \text{dans } \Omega_{\Delta,1}^k, \\ X^k = 1 & \text{dans } \Omega_{\Delta,2}^k. \end{cases}$$

- (iii) *Étape $2k$* : Étant donné X^k , on définit une nouvelle partition de Ω_Δ en comparant les valeurs de $G - BX^k$ avec $1 - X^k$:

$$\begin{cases} \Omega_{\Delta,1}^{k+1} = \{i \mid (G - BX^k)_i \geq 1 - X_i^k\} \\ \Omega_{\Delta,2}^{k+1} = \{i \mid (G - BX^k)_i < 1 - X_i^k\} \end{cases}$$

Il s'agit en fait d'un algorithme populaire en contrôle stochastique qui itère directement sur le paramètre de contrôle (plutôt que sur la fonction valeur). Ici, le contrôle, c'est de décider si l'on exerce son rachat ou pas en fonction de l'environnement financier. Cela correspond en effet à une partition de l'espace des variables (facteurs de risque).

4 Rachat dans le cas $f(x, r) = x + r$

La figure 3.1 (a) montre la valeur du ratio BE/PM évaluée en présence d'une stratégie rationnelle. Les paramètres y sont les mêmes que dans la partie 1d du chapitre précédent. En particulier, cette figure est à comparer avec la figure 2.5 (a). Qualitativement, la volatilité σ_x de la stratégie de PB semble avoir une influence significatif à partir de 1% mais surtout on observe une décroissance du provisionnement par rapport au taux de réponse k_x quelque soit la valeur de la volatilité de la stratégie de l'assureur.⁴ Dans la figure 3.1 (b) est représenté l'évolution dans le temps de BE/PM pour une valeur particulière de (k_x, σ_x) . On remarque bien sûr que $BE/PM \geq 1$ et qu'il a tendance à converger en temps long vers une solution stationnaire.

On a représenté sur la figure 3.2 un agrandissement de la figure 3.1 (b) au voisinage de la zone de rachat $BE/PM = 1$. On peut déjà en tirer quelques enseignements quant à une politique de PB face à un souscripteur rationnel. Le premier enseignement est la constatation d'une part que la zone de rachat est incluse dans $\{x < 0\}$ et d'autre part la décroissance de la zone de rachat en fonction de la distance à la maturité du contrat, c.-à-d.

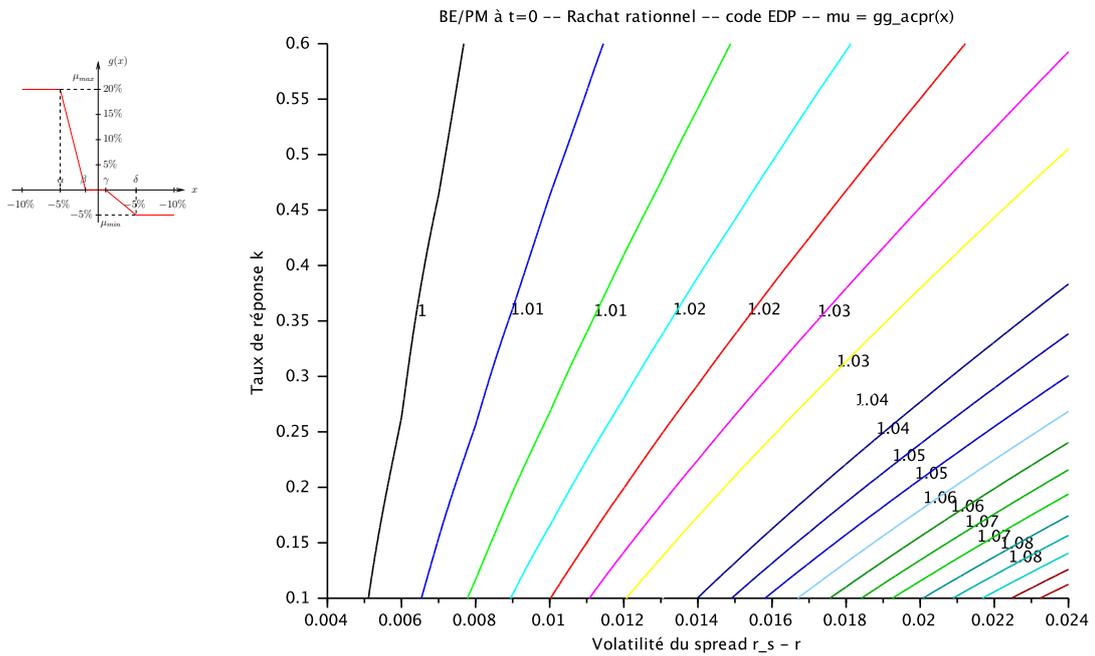
4. Voir par contraste la remarque 2.2.

la décroissance de la fonction $\tau \mapsto x_f(\tau)$, $\tau = T - t$ (la frontière libre). Ceci est à mettre en contraste avec les figures 2.3 (b), 2.4 (b) et 2.5 (b) où la valeur du spread x en deçà duquel le ratio $BE/PM \leq 1$ reste peu ou prou le même quelque soit la date. Ici, le seuil x_f en-dessous duquel $\{x < x_f < 0\}$ le souscripteur rationnel rachète son contrat augmente lorsque se rapproche la maturité. Cela signifie que le souscripteur rationnel est *de plus en plus sensible au rachat* lorsque se rapproche la maturité. Ainsi par exemple, toujours sur la figure 3.2, si le souscripteur observe un *spread* $x = -1\%$, jusqu'à 3 ans avant la maturité il conservera son contrat, mais le rachètera dès l'année suivante.

On peut retenir en second lieu l'aspect stationnaire (en espace) du provisionnement (pour un € de PM toujours) au voisinage du rachat. En effet, on peut constater un raccord \mathcal{C}^1 à la zone de rachat. C'est un phénomène connu dit de *smooth-fit* classique pour certains problèmes de frontières libres (voir [GS66, SP06]). Il signifie l'insensibilité du *Best Estimate* $\sim 1\text{€}$ par rapport au spread x au voisinage du rachat.

Enfin, on observe Fig. 3.3 que le ratio BE/PM tend à être le même que dans le cas sans stratégie rationnelle lorsque le taux de revalorisation est élevé.

(a)



(b)

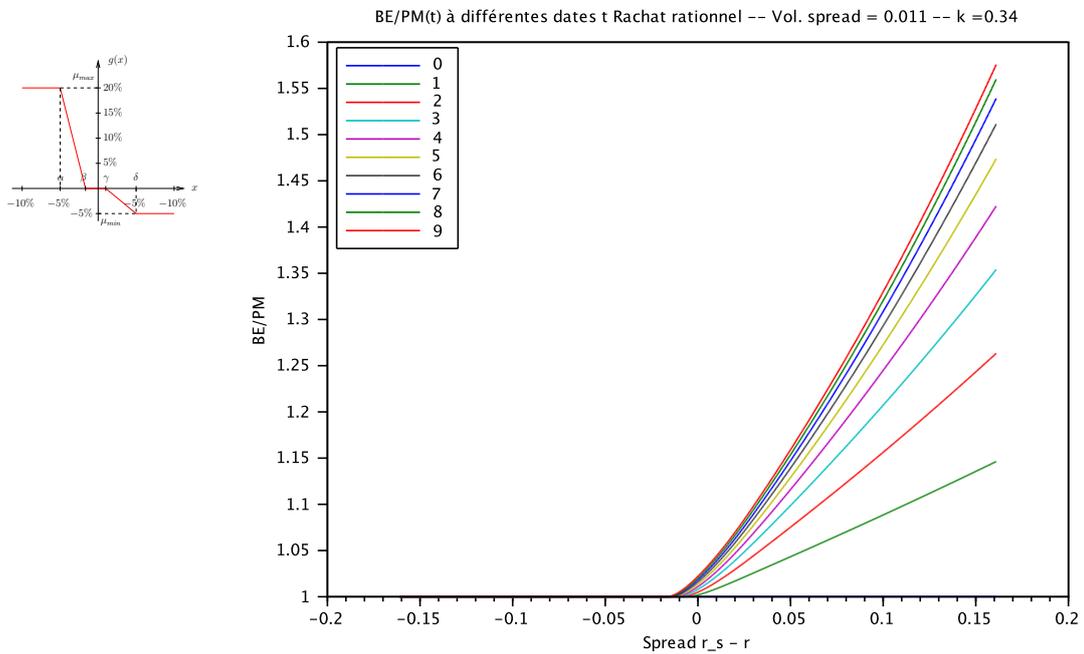


FIGURE 3.1 – Best estimate pour un € de PM selon un modèle de taux de rachat de type ACPR avec stratégie de rachat rationnelle. Ici $\alpha = -5\%$, $\beta = -1\%$, $\gamma = 1\%$, $\delta = 3\%$, $\mu_{max} = 20\%$, $\mu_{min} = -5\%$, $\mu_i = 5\%$ (Cf. (2.2)). Ici $x_\infty = 0$. (a) Valeurs à $T = 10$ ans pour $k_x \in [0, 0.6]$, $\sigma_x \in [0, 2.4\%]$ et $x_0 = -0.5\%$. (b) Différentes valeurs pour $t \in [0, T]$, $T = 10$ ans pour $k_x = 0.34$ et $\sigma_x = 1.1\%$.

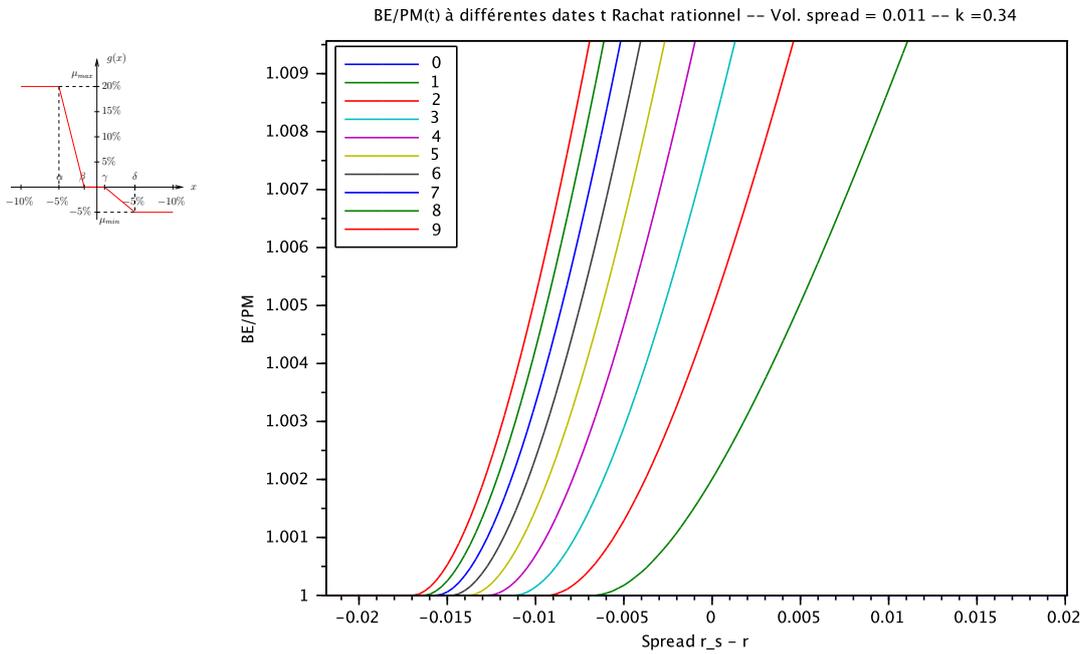


FIGURE 3.2 – Zoom au voisinage de $BE/PM = 1$ de la figure 3.1 (b).

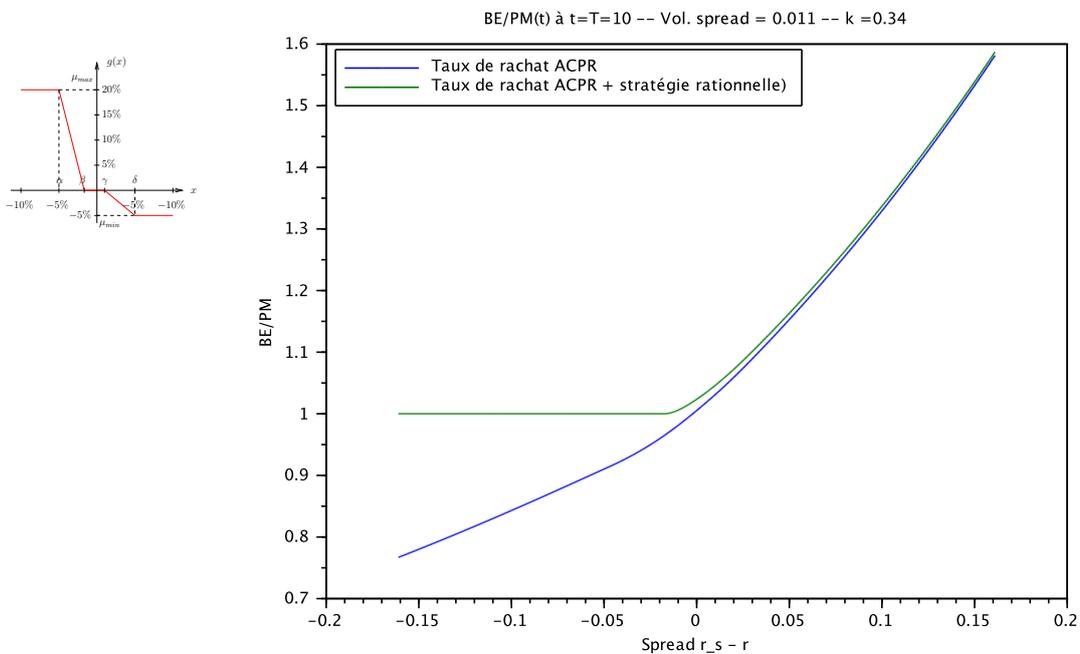


FIGURE 3.3 – Best estimate pour un € de PM à la maturité $T = 10$ avec taux de rachat de type ACPR (voir données Fig. 2.5) avec ou sans stratégie de rachat rationnelle.

5 Rachat dans le cas $f(x, r) = \max(TMG, x + r)$

Nous allons maintenant aborder le cas où l'assureur inclut un TMG dans sa politique de revalorisation. L'inéquation variationnelle est alors écrite en dimension 2. On distinguera comme au chapitre précédent deux cas selon que $TMG < \min(r_s(0), r_s(\infty))$ ou $TMG > \max(r_s(0), r_s(\infty))$. Les paramètres de simulations sont les mêmes qu'au chapitre 2 (§4.5.1–4.5.2) et on présente les figures dans un ordre similaire.

Les propriétés qualitatives de la solution semblent être les mêmes en présence de stratégie rationnelle de rachat qu'en son absence : influence du TMG dans les régions de faible revalorisation, influence croissante, forte sensibilité de BE/PM lorsque k_x est faible, convexité de BE/PM par rapport à x . . . Il est difficile de représenter dans le temps l'évolution de la frontière de rachat. Mais on peut observer en comparant les figures 3.4 (b) et 3.7 (b) que la zone de rachat a reculé vers des taux plus élevés pour une même valeur de x lorsque le TMG a augmenté.

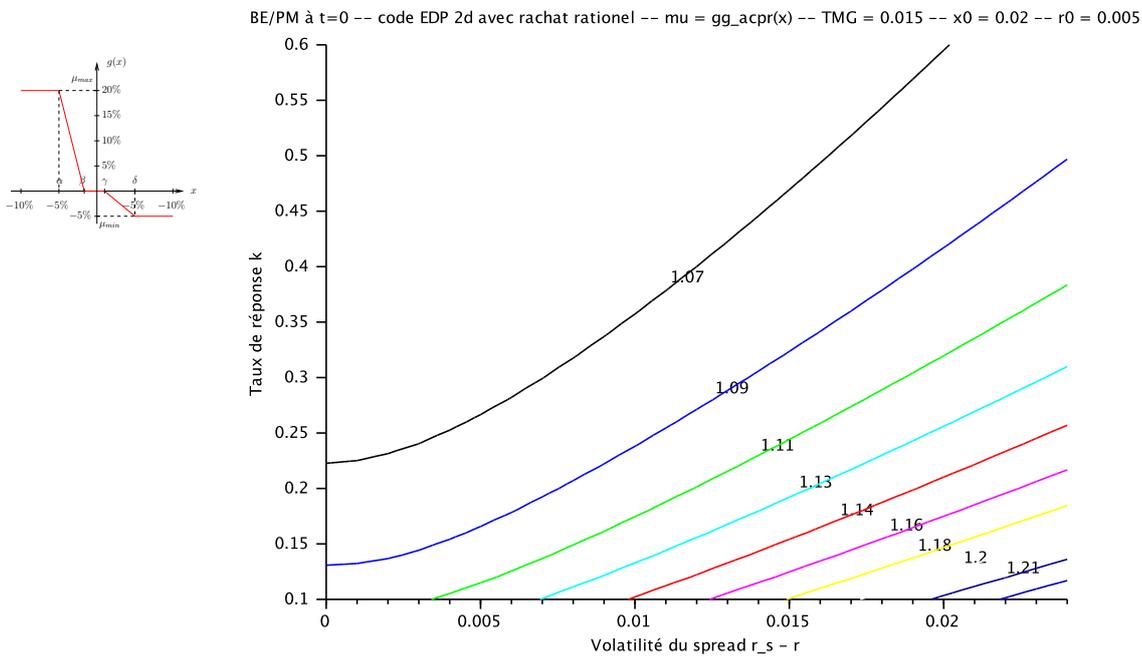
5.1 Cas où $TMG = 1.5\%$, $TMG < \min(r_s(0), r_s(\infty))$.

Voir Fig. 3.4, 3.5 et 3.6.

5.2 Cas où $TMG = 2.5\%$, $TMG > \max(r_s(0), r_s(\infty))$.

Voir Fig. 3.7, 3.8 et 3.9.

(a)



(b)

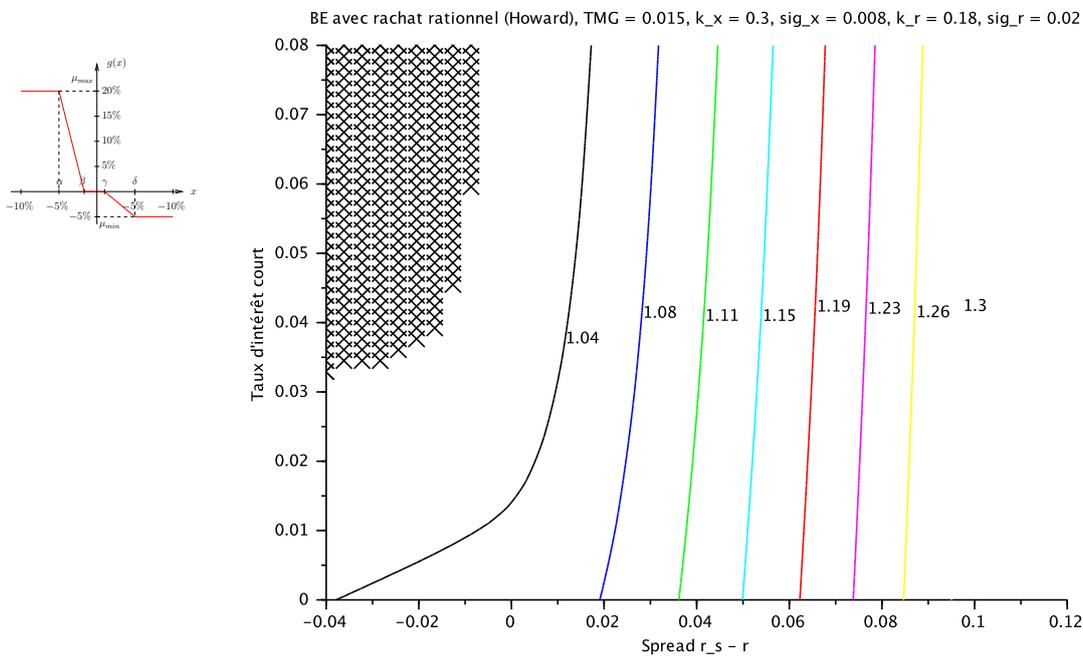
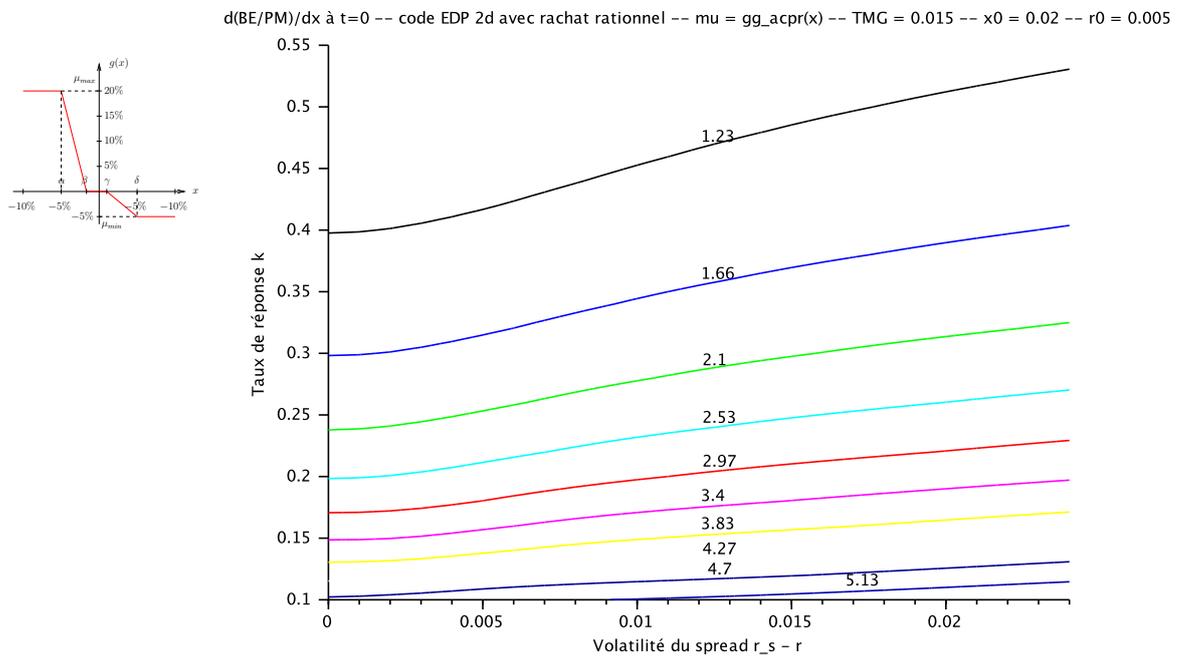


FIGURE 3.4 – (a) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $TMG = 1.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$ et $x_0 \in [-10\%, 10\%]$ et $r_0 \in [0, 8\%]$. On a indiqué par des croix \times la zone de rachat.

(a)



(b)

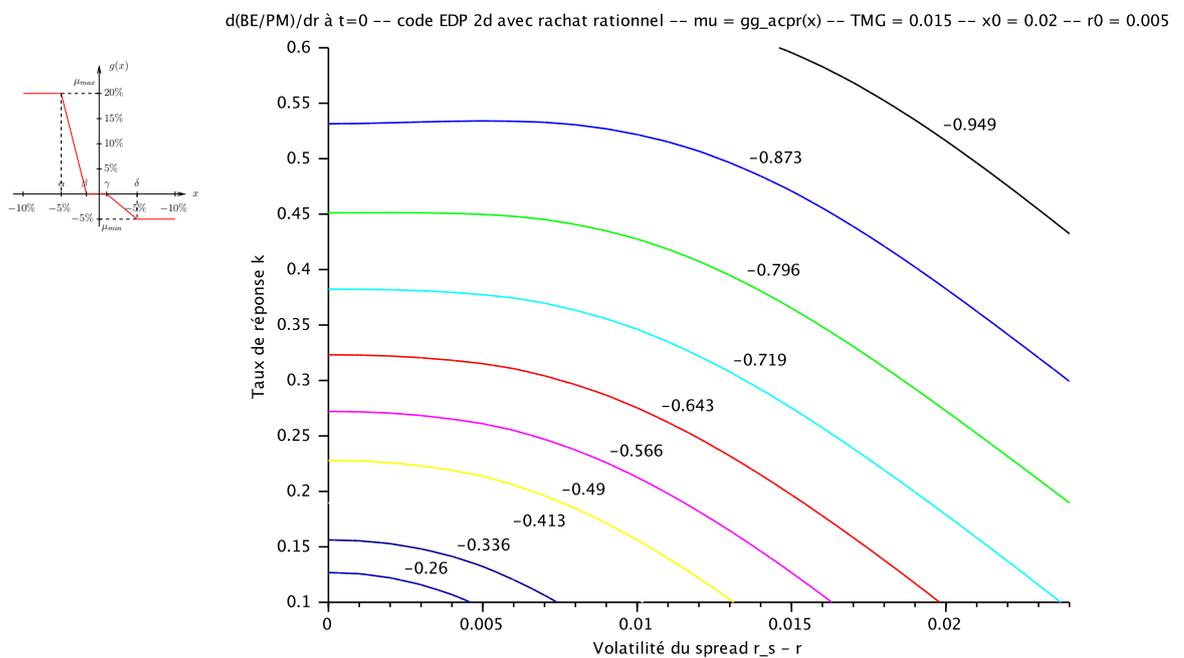
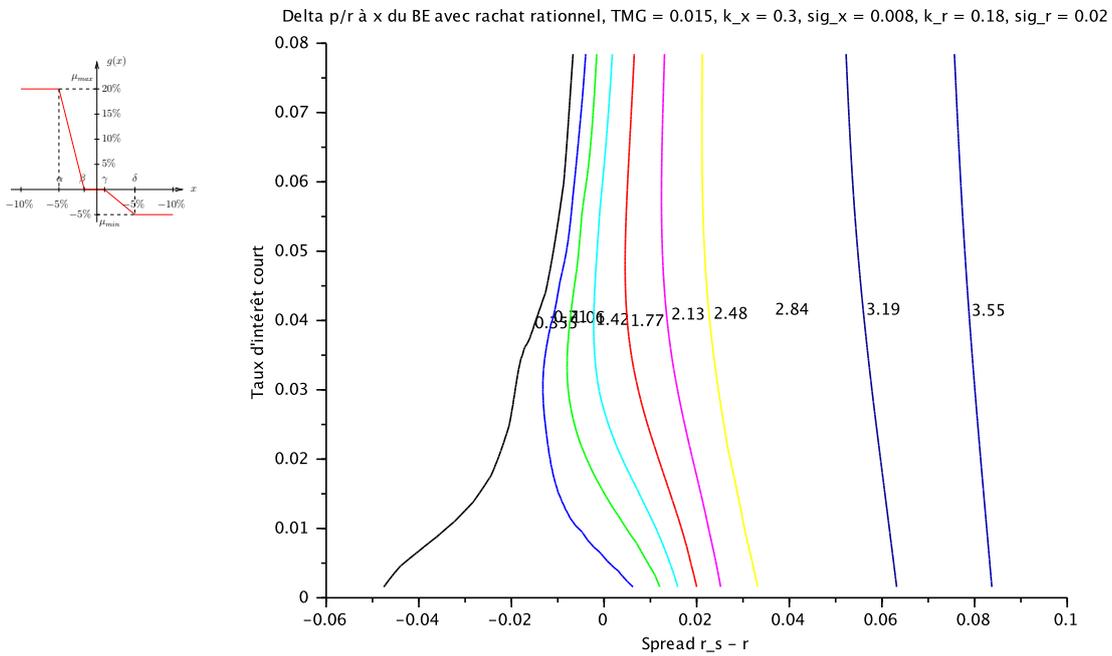


FIGURE 3.5 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $\text{TMG} = 1.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Idem par rapport à r .

(a)



(b)

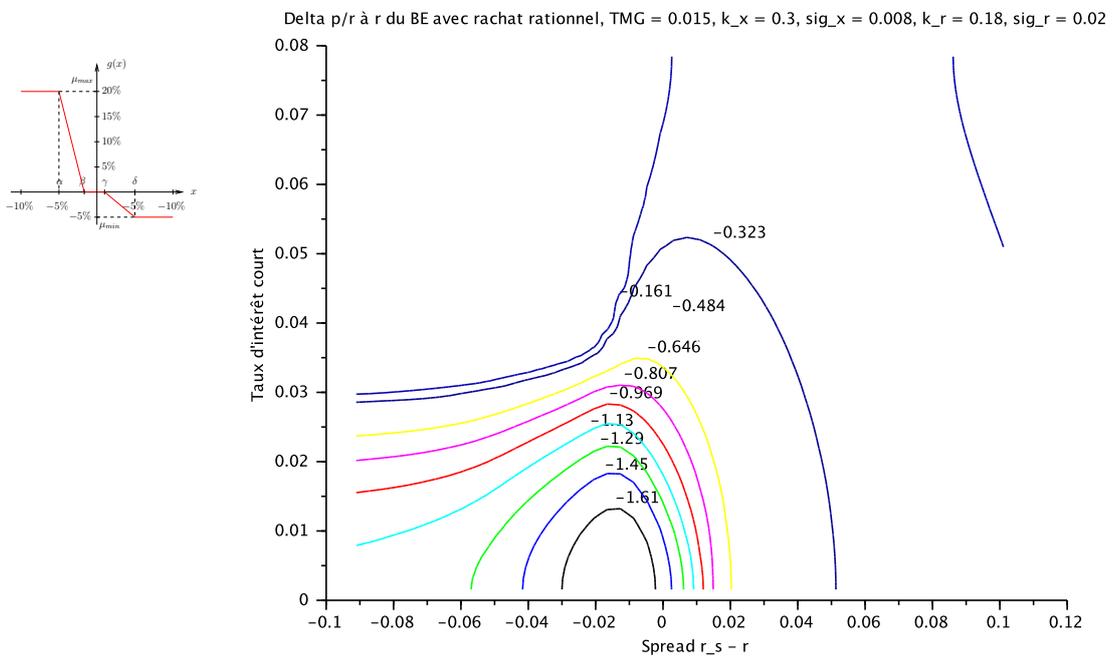
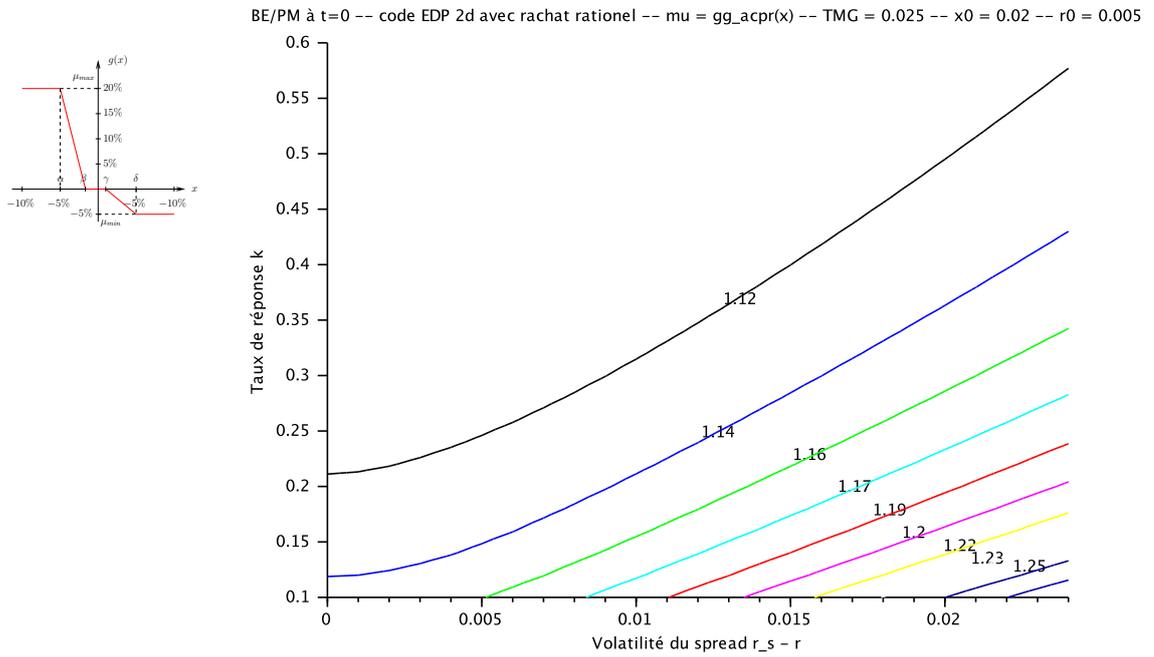


FIGURE 3.6 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$, $TMG = 1.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (x_0, r_0) . (b) Idem par rapport à r .

(a)



(b)

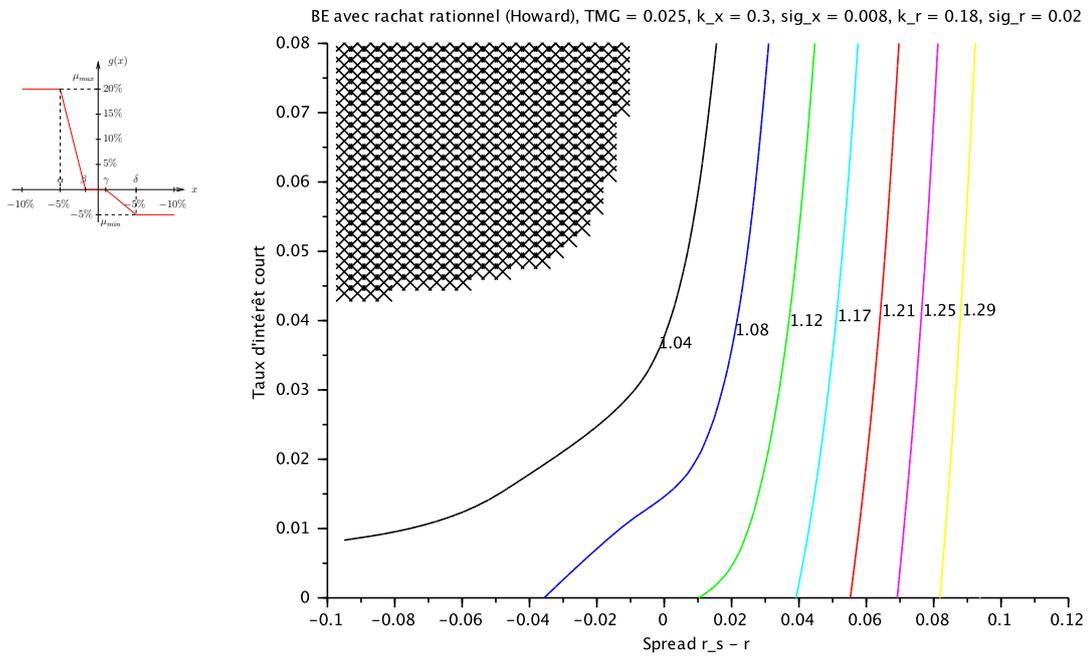
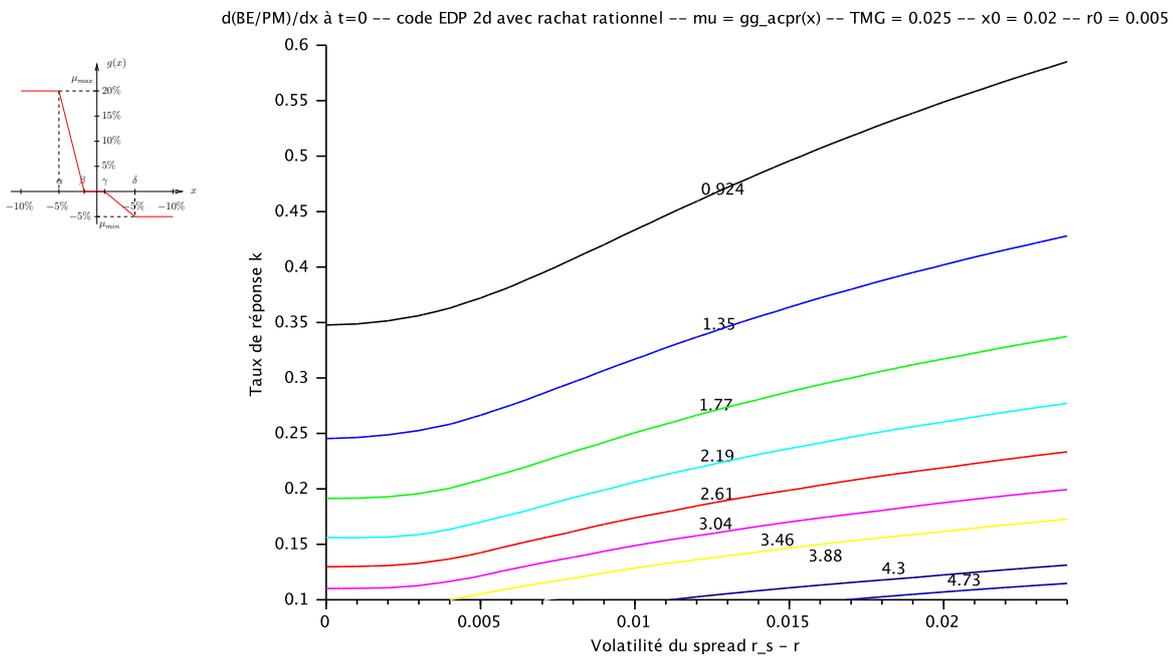


FIGURE 3.7 – (a) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $TMG = 2.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$ et $x_0 \in [-10\%, 10\%]$ et $r_0 \in [0, 8\%]$. On a indiqué par des croix \times la zone de rachat.

(a)



(b)

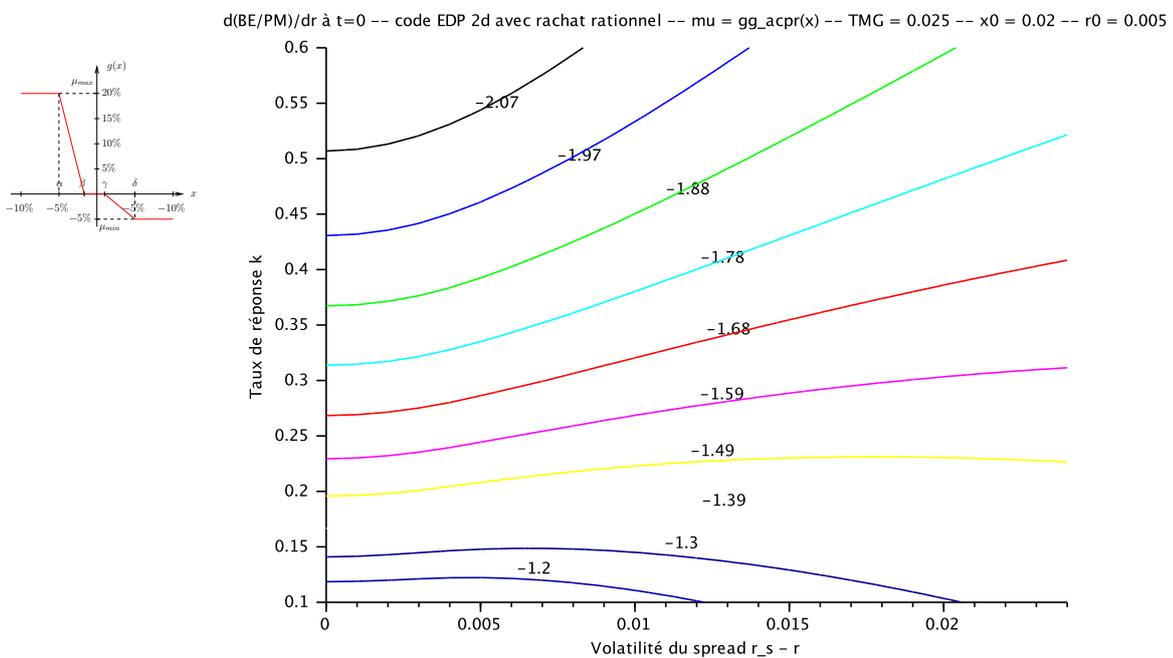
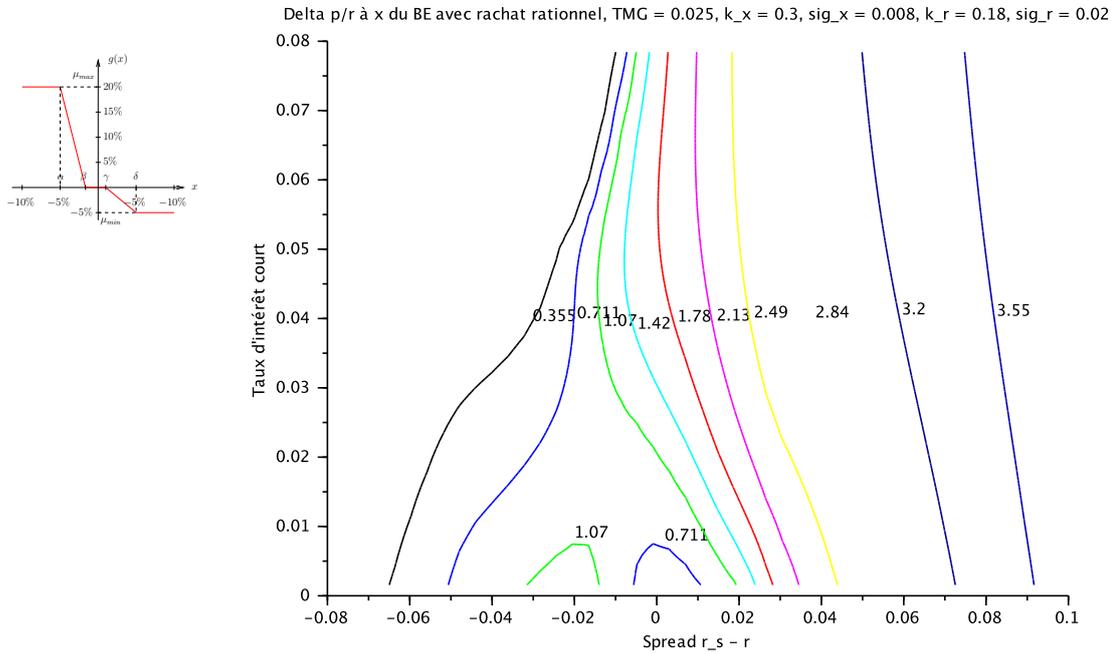


FIGURE 3.8 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(x_0, r_0) = (2\%, 0.5\%)$, $\text{TMG} = 2.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (k_x, σ_x) . (b) Idem par rapport à r .

(a)



(b)

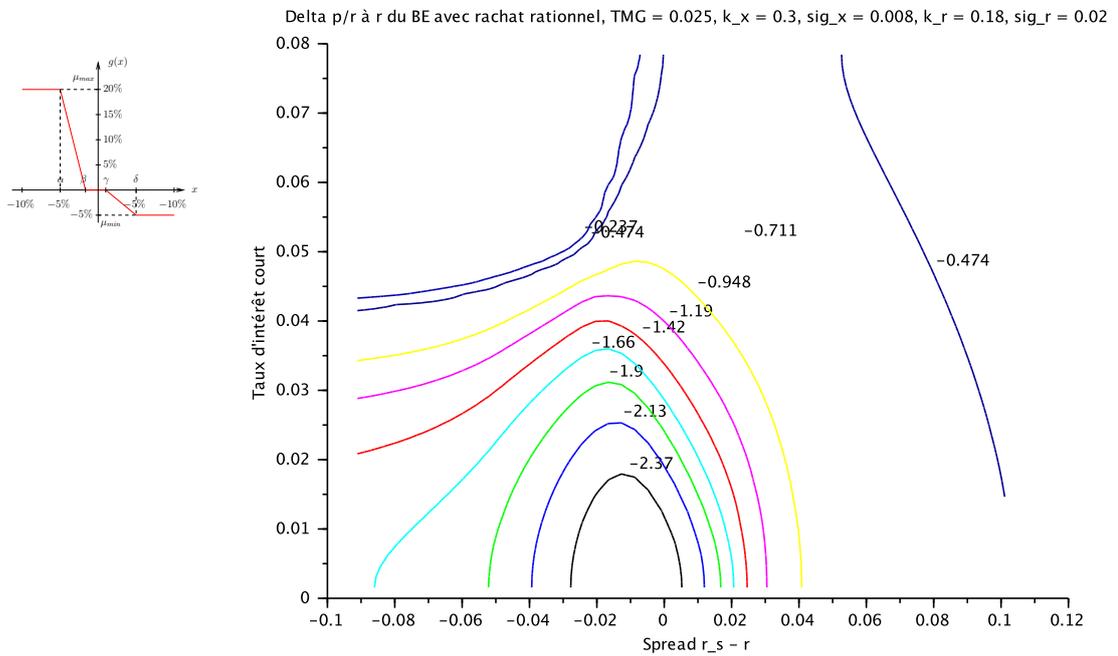


FIGURE 3.9 – (a) Sensibilité par rapport au *spread* x du Best estimate pour un € de PM à $T = 10$ ans, $(k_x, \sigma_x) = (0.3, 0.008)$, $TMG = 2.5\%$ et pour plusieurs valeurs de (x_0, r_0) . (b) Idem par rapport à r .

4

Simulation des dynamiques dans le cadre ORSA

Nous allons aborder maintenant le cadre d'un assureur X disposant d'un portefeuille de $N \sim 15\,000$ têtes qui souhaite mettre en œuvre un processus ORSA sur l'horizon d'un plan stratégique de 5 ans. Pour cela, nous disposons pour chaque assuré des données (âge, sexe, provision mathématique) à la date initiale ($t = 0$, 31/12/2013). Nous avons également une table d'expérience (voir 4.10 en annexes), une table de rachat structurel (voir 4.11, également en annexes) ainsi que la courbe de structure par terme des taux d'intérêt (courbes des *taux 0-coupons*) fournie par l'EIOPA.

La valeur du Best Estimate à $t = 0$ calculé selon une méthodologie standard Pilier 1¹ est fourni dans le tableau 4.1. Nous allons dans un premier temps calibrer le modèle EDP en se basant sur les données du pilier 1 pour ensuite mettre en œuvre l'ORSA.

1 Identification et modélisation des facteurs de risques

Dans ce §, nous tentons de calibrer le modèle d'EDP du chapitre 2 pour retrouver la valeur du BE *initial* issue du modèle standard Pilier 1. Nous rapellons que dans le cadre du Pilier 1 les simulations sont menées dans une logique de *run-off*, c.-à-d. sans prendre en compte les cotisations futures et jusqu'à épuisement du portefeuille. Nous avons estimé la marge pour risque RM à 15% en se basant sur la formule $RM = \alpha SCR_0 D_0$ où $\alpha = 6\%$ et où D_0 désigne la durée du passif (le *Best Estimate*).

Les paramètres nécessaires à la simulation sont d'une part ceux relatif au taux d'intérêt court r , soit $(k_r, \sigma_r, r_\infty)$ et ceux relatifs au spread x , soit $(k_x, \sigma_x, x_\infty)$.

1.1 Risque de taux

1.1.1 Ajustement du modèle de Nelson–Siegel

On retient le modèle de représentation parcimonieuse de la courbe des taux (plus exactement la structure par terme des taux d'intérêt (STTI)) proposé par Nelson et Siegel [NS87].

1. avec TMG et option de rachat conjoncturel.

TABLE 4.1 – Quelques éléments du bilan à $t = 0$ (au 31/12/2013)

Actifs	Passif
101 479 200 k €	57 238 200 €(NAV)
	44 241 000 €(BE) (dont 36 000 000 €(PM))

Dans cet article, les auteurs s'appuient sur les propriétés asymptotiques élémentaires des solutions d'une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre 2 afin de mettre en évidence les composantes court-terme, long-terme et moyen-terme (trois paramètres d'échelle) du taux *forward* ou taux à terme instantané, noté $f(t, T)$ (voir [NS87, pp. 475–477]). Pour cela il se place dans le cas où l'équation caractéristique possède une solution réelle double (le paramètre de forme). On pose donc :

$$f(t, T) = f_t(m) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) + \mu_3 \left(\frac{m}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right),$$

où $m = T - t$ désigne la distance à la maturité d'un 0-coupon de maturité T^2 .

Ainsi mettent-ils en évidence facilement les composantes court-terme (terme en μ_2), moyen-terme (terme en μ_3) et long-terme (terme en μ_1) du taux *forward*. Ici τ désigne le paramètre de forme.

Dans cette hypothèse le taux 0-coupon $R(t, T) = R_t(m)$, obtenu en intégrant la dernière expression, se décompose comme

$$(4.1) \quad R_t(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t(u) du = \mu_1 + \mu_2 \phi\left(\frac{m}{\tau}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{m}{\tau}\right),$$

où on a posé $\phi(x) = (1 - \exp(-x))/x$ et $\psi(x) = \phi(x) - \exp(-x)$.

On interprète souvent cette décomposition à l'instant t comme suit :

$$R(t, T) = r(t)\phi\left(\frac{T-t}{\tau}\right) + \ell(t) \left(1 - \phi\left(\frac{T-t}{\tau}\right)\right) + c(t)\psi\left(\frac{T-t}{\tau}\right),$$

où $r(t)$ désigne le taux court, $\ell(t)$, le taux long et $c(t)$ la convexité. On renvoie le lecteur à la thèse [Ron98] pour une revue des méthodes de détermination des facteurs déterminant la forme de la courbe des taux.

On représente dans la figure 4.1 la courbe des taux fournie par l'EIOPA au 31/12/2013 avec la courbe définie par (4.1) où les paramètres $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \tau)$ ont été obtenues par moindres carrés. On en déduit en particulier $r(0) = \mu_1 + \mu_2$ (voir tableau 4.2).

1.1.2 Ajustement d'un modèle de Vasiček à partir du modèle de Nelson–Siegel

Nous allons ajuster un modèle de Vasiček pour le taux court, soit le modèle

$$dr(t) = k_r(r_\infty - r(t)) dt + \sigma_r dW(t), \quad r(0) \text{ donné,}$$

en se basant sur la courbe des taux 0-coupons fournie par le modèle Nelson–Siegel obtenu plus haut à $t = 0$. On estime les paramètres $(k_r, \sigma_r, r_\infty)$ par une méthode de moindres

2. c.-à-d. que son prix $P(t, T) = \exp(-(T-t)R(t, T))$.

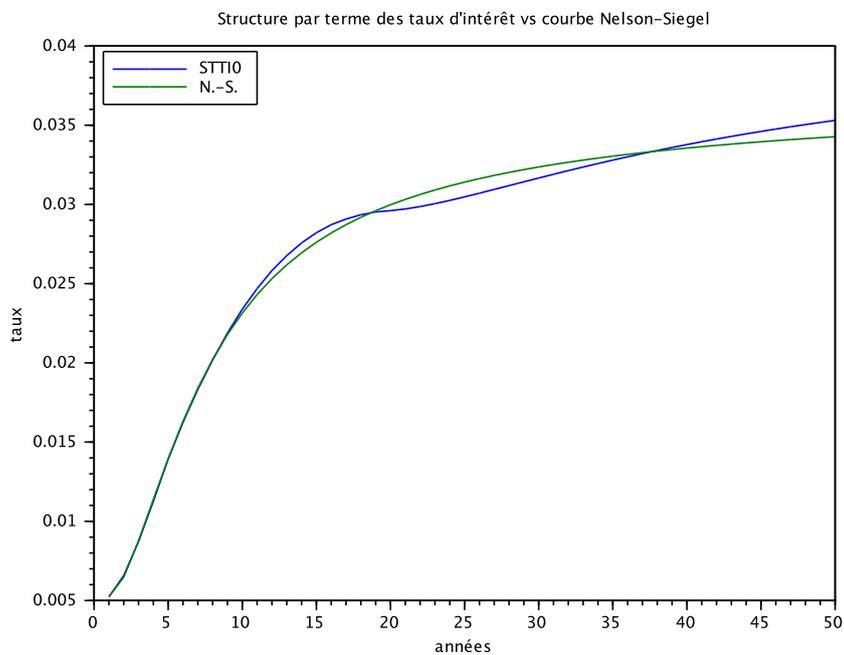


FIGURE 4.1 – Courbe de la structure par terme des taux d'intérêt à $t = 0$ *versus* courbe Nelson-Siegel pour $\tau = 1.94$.

TABLE 4.2 – Valeurs des paramètres issus du modèle de Nelson-Siegel.

Paramètres	Valeur
μ_1	3.71(-2)
μ_2	-3.05(-2)
μ_3	-4.36(-2)
τ	1.94
$r(0)$	6.6263(-3)

carrées suivante (pour $t = 0$) :

$$(k_r, r_\infty, \sigma_r) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{m=1}^M \left(R_t^{\text{vasicek}}(m) - R_t^{NS}(m) \right)^2 \right\},$$

où $M = 50$ est la plus grande maturité fournie, $R_t^{NS}(m)$ est fourni par (4.1) et $R_t^{\text{vasicek}}(m)$ est le taux nominal 0-coupon à l'instant t de maturité T dans le modèle de Vasiček, soit

$$R_t^{\text{vasicek}}(m) = r_\infty - \frac{1}{k_r m} \left((r_\infty - r(t))(1 - \exp(-k_r m)) - \frac{\sigma_r^2}{4k_r^2} (1 - \exp(-k_r m))^2 \right).$$

Le critère semble très peu sensible à la volatilité σ_r . On représente dans le tableau 4.3 les valeurs obtenues à $t = 0$.

TABLE 4.3 – Valeurs des paramètres issus du modèle de Nelson–Siegel.

Paramètres Vasiček	Valeur
k_r	0.1512831
r_∞	0.0339336
σ_r	0.001

1.2 Risque de mortalité

On s'appuie sur la table d'expérience 4.10 donnée en annexe.

1.3 Risque des actions et obligations

On supposera stable la composition de l'actif durant la durée de la projection (5 ans), soit 83% d'obligations et 17% d'actions. En se basant sur les rendements et volatilités de ces deux classes d'actifs sur l'année 2013, on obtient un actif synthétique modélisé sous probabilité historique par le brownien géométrique suivant

$$A(t) = A(0) \exp(\mu_a t + \sigma_a W_A(t)),$$

où $\mu_a = 6\%$ et $\sigma_a = 8\%$.

1.4 Risque lié à la politique de participation aux bénéfices

Nous abordons enfin le calage des paramètres du facteur de risque $x(t)$ introduit au §2.2 (chapitre 2). On rappelle sa dynamique sous probabilité historique :

$$dx(t) = k_x(x_\infty - x(t)) dt + \sigma_x dB_x(t), \quad x(0) \text{ donné.}$$

Nous allons tenter de déterminer les paramètres $(k_x, \sigma_x, x_\infty)$ en utilisant les paramètres du tableau 4.3 en ciblant la valeur de *Best Estimate* du tableau 4.1, soit un ratio *BE/PM* de l'ordre de 1.22. Compte tenu de la présence d'un TMG dans le calcul du *Best Estimate*, le modèle différentiel dont découle l'EDP possède deux variables (x, r) , soit un calcul en dimension 2. Le calcul du *Best Estimate* se fera assuré par assuré. Notons PM_0^z la provision

mathématique à $t = 0$ sur la tête z , le calcul du *Best Estimate* global à $t = 0$ est obtenu en agrégeant toutes les têtes, soit

$$BE_0^{global} = \sum_z \varphi(T - z, x_0, r_0) PM_0^z - \sum_{t \geq 1}^5 C_t \delta_t,$$

où φ désigne la solution de (2.26) et où, par abus de notation, z désigne à la fois la tête ainsi que son âge.

On reproduit Fig. 4.2 (a) ($x_\infty = 0.5\%$) et (b) ($x_\infty = -1\%$), les courbes de niveaux de BE_0^{global} pour plusieurs valeurs de $(k_x, \sigma_x, x_\infty)$. Dans le premier cas, cela signifie un taux de revalorisation asymptotique de 3.89% et dans le second cas de 2.89% voisin du taux de revalorisation initial. On opte pour cette dernière solution. Dans ce cas les paramètres (k_x, σ_x) sont indiqués dans le tableau 4.4.

TABLE 4.4 – Paramètres facteur de risque x (PB)

Paramètres	Valeur
k_x	0.1
x_∞	-0.01
σ_x	0.0125

2 Exemple de mise en œuvre d'un processus ORSA pour un assureur.

Pour cela, il réalise des simulations Monte Carlo ($MC \sim 100\,000$) sous la probabilité historique de ces actifs (A_t) en parallèle avec les facteurs de risques (x_t, r_t) . À chaque pas de temps, il évalue son *Best Estimate* sur une trajectoire donnée en projetant au plus proche voisin sur la grille de calcul EDP le point (x_t, r_t) et en utilisant la valeur correspondante du BE calculée par EDP au chapitre 2 (§4). On reproduit dans le tableau 4.5 les paramètres nécessaires à la projection.

On introduit les notations suivantes :

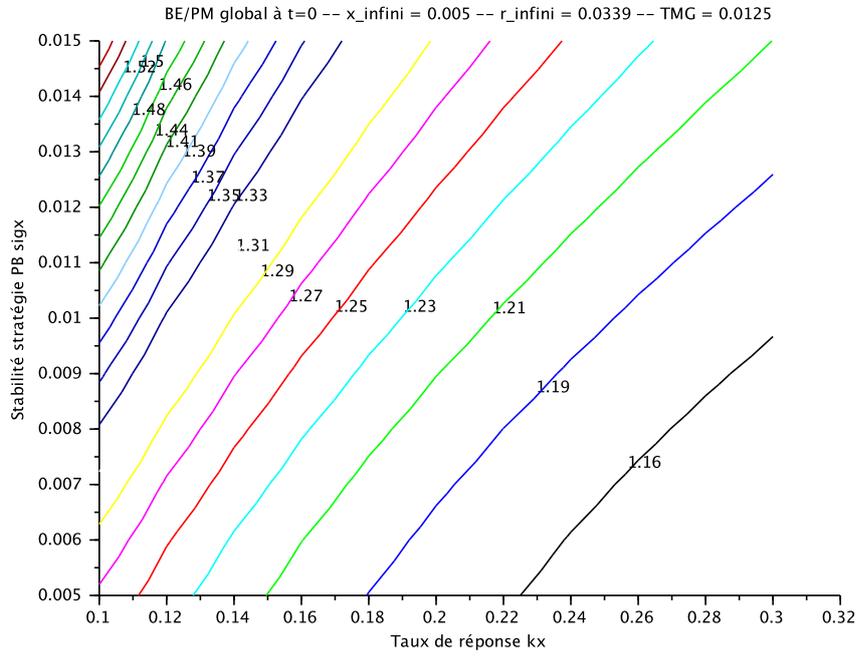
- $PM_t^{x,i}$: Provision mathématique pour la tête x selon la trajectoire i à la date t .
- F_{t+1}^i : Prestation globale selon la trajectoire i (calculé au début de l'année t et payable en fin d'année.)
- BE_{t+1}^i : *Best Estimate* pour la trajectoire i à la date t .
- A_t^i, x_t^i, r_t^i : valeurs des actifs et des facteurs de risques à la date t pour la trajectoire i .
- E_t^i : valeur nette des actifs à la date t pour la trajectoire i .

Détaillons les itérations de t à $t + 1 \leq 5$ ans : on suppose connu les valeurs (x_t^i, r_t^i, A_t^i) ainsi que les provisions mathématiques $PM_t^{x,i}$ pour toutes les têtes x et pour toutes les trajectoires $i = 1, \dots, MC$.

(i) *Itérations des facteurs de risques*

$$x_{t+1}^i \leftarrow x_t^i, \quad r_{t+1}^i \leftarrow r_t^i, \quad i = 1, \dots, MC$$

(a)



(b)

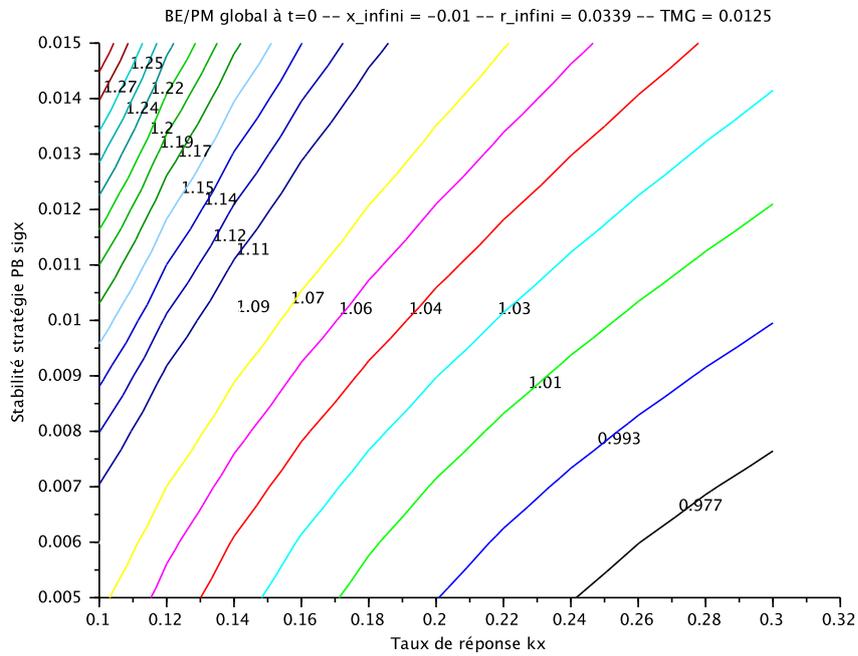


FIGURE 4.2 – (a) Lignes de niveau pour le BE_0^{global} avec $x_{\infty} = 0.5\%$, (b) Lignes de niveau pour le BE_0^{global} avec $x_{\infty} = -1\%$. Voir le reste des paramètres dans le tableau 4.5.

TABLE 4.5 – Récapitulatif des valeurs des paramètres calibrés sur les données du Pilier 1 au 31/12/2013.

Taux d'intérêt risque neutre	
k_r	0.15
r_∞	3.39%
r_0	0.66%
σ_r	0.1%
Rendement Actifs	
μ_a	6%
σ_a	8%
Processus $x(t)$	
k_x	0.1
σ_x	1.25%
x_∞	-1%
x_0	2.15%
Corrélations	
ρ_{ar}	0.25
ρ_{ax}	0.95
ρ_{xr}	0
Paramètres taux de rachat	
μ_{max}	20%
μ_{min}	-5%
α	-5%
β	-1%
γ	1%
δ	3%
Taux minimum garanti	
TMG	1.25%
Nombre de simulation	
MC	100 000
Frais, marge pour risque	
Frais prestation τ_P	1.38%
Frais gestion actifs τ_G	0.86%
Marge pour risque τ_{RM}	15%
Données <i>New Business</i>	
Nombre nouveaux adhérents (/an)	260
Cotisation moyenne (âge = 40 ans)	73 €
Nombre d'années	5 ans

(ii) *Aggrégation des têtes pour la prestation*

$$F_{t+1}^i = \sum_x PM_t^{x,i} g(x+t, x_t^i) \Delta t,$$

(iii) *Itérations par tête x*

$$PM_{t+1}^{x,i} = PM_t^{x,i} \exp\left(\Delta t(f(x_t^i, r_t^i) - g(x+t, x_t^i))\right), \quad PM_0^{x,i} = PM_0^x, \forall i.$$

(iv) *Aggrégation des têtes pour le BE*

$$BE_{t+1}^i = \sum_x \rho^x(t+1, T, x_{t+1}^i, r_{t+1}^i) PM_{t+1}^{x,i} - \sum_{s=t+1}^5 C_s \exp\left(-\int_{t+1}^s r_u^i du\right),$$

où on a posé $\rho^x(t, T, x, r) = \varphi(T - x - t, x, r)$ solution de (2.26). Ici T désigne la maturité longue $T = 110$ ans. Puis, la provision technique compte tenu de la marge pour risque :

$$P_{t+1}^i = BE_{t+1}^i (1 + \tau_{RM})$$

(v) *Itérations globales*

$$A_{t+1}^i = A_t^i \exp(\mu_A - \tilde{\tau}_G + \sigma_A \sqrt{\Delta t} Z^i) - F_{t+1}^i (1 + \tau_P) + C_{t+1},$$

$$E_{t+1}^i = A_{t+1}^i - PT_{t+1}^i,$$

où $\tilde{\tau}_G = \ln(1 + \tau_G)$.

Remarque 4.1 *Notons une problématique de stockage éventuelle du fait du stockage nécessaire d'un pas de temps sur l'autre des provisions mathématiques $PM_t^{x,i}$ pour toutes les têtes et pour toutes les trajectoires.*

2.1 Distribution de l'actif

On reproduit Fig. 4.3–4.4 l'évolution de la loi de l'actif au cours de la projection sur 5 ans. D'après le tableau 4.6, sa moyenne augmente sensiblement chaque année.

TABLE 4.6 – Moyenne et écart-type de la distribution de l'actif.

Année	Moyenne (en k €)	écart-type (en k €)
1	106 908.79	8 635.3539
2	112 741.44	12 970.38
3	119 001.96	16 880.898
4	125 719.22	20 705.809
5	132 948.71	24 610.678

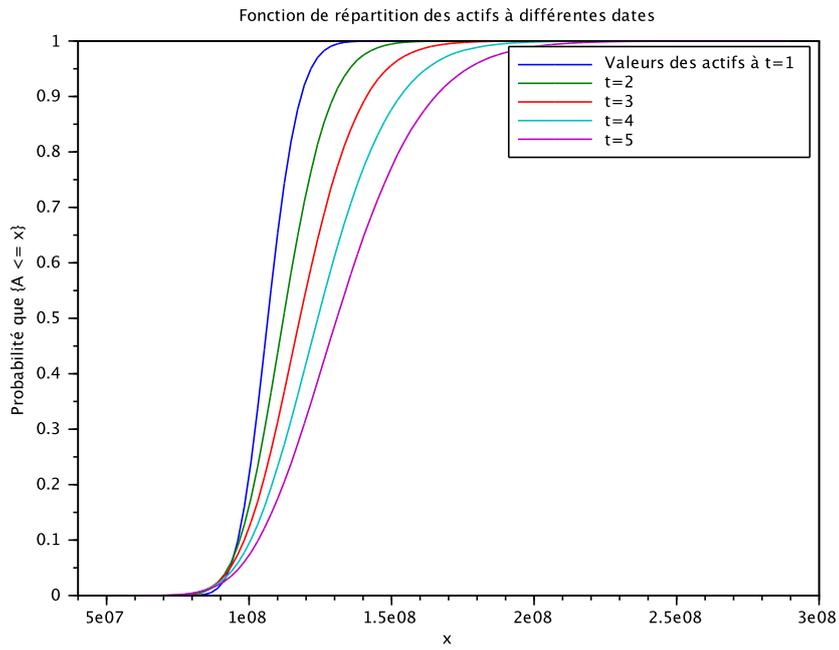


FIGURE 4.3 – Fonction de répartition des actifs à différentes dates $t = 1, \dots, 5$. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

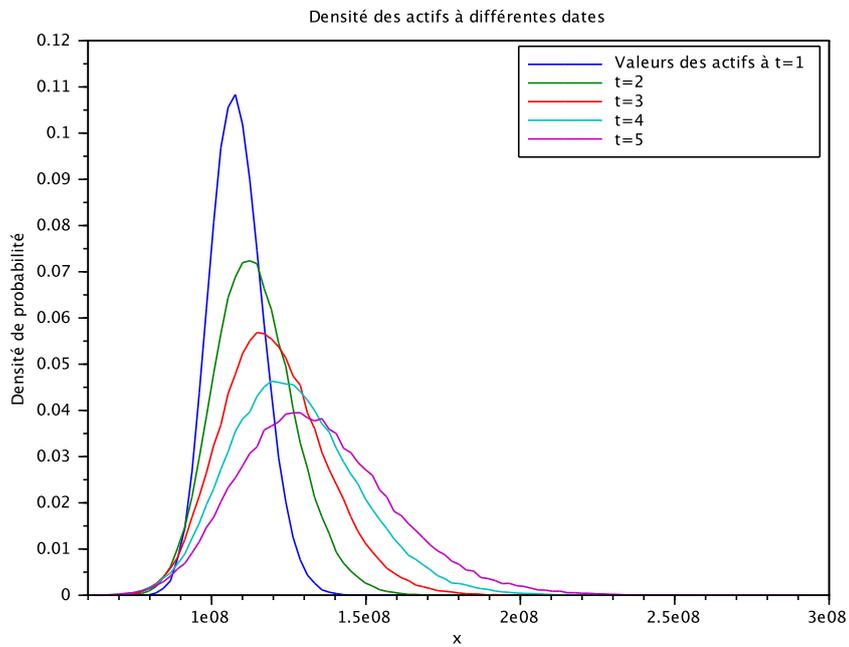


FIGURE 4.4 – Densités des distributions précédentes. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

2.2 Distribution du passif

2.2.1 Distribution du *Best Estimate*

Ici, la valeur moyenne du *Best Estimate* décroît très légèrement et semble pratiquement constante. On peut se rappeler de l'aspect stationnaire du ratio BE/PM pour les grandes valeurs de temps évoqué aux chapitre 2 (§4.3.3 par exemple). Par ailleurs le montant et le nombre de cotisants ne sont pas suffisants à faire baisser significativement le *Best Estimate*.

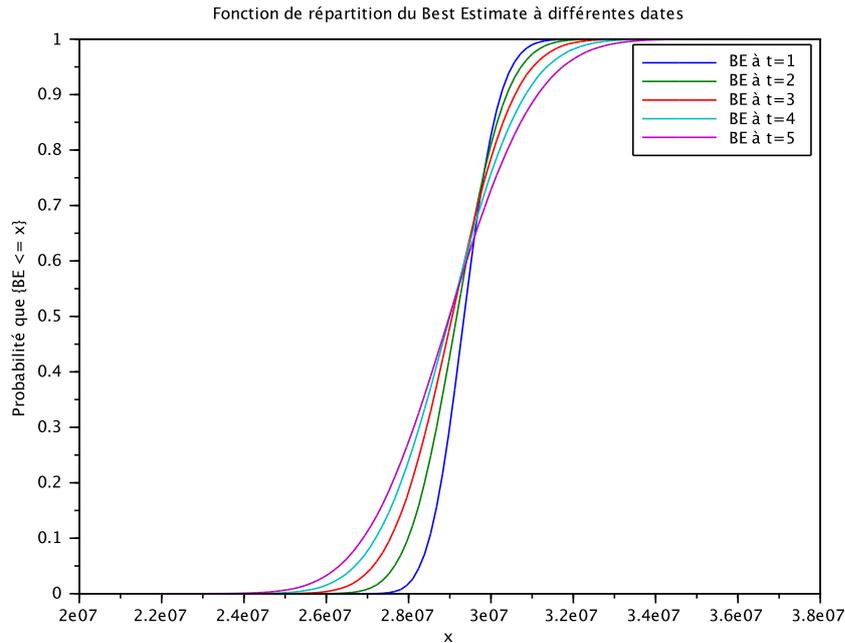


FIGURE 4.5 – Fonction de répartition du *Best Estimate* à différentes dates $t = 1, \dots, 5$. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

TABLE 4.7 – Moyenne et écart-type de la distribution du Best Estimate.

Année	Moyenne (en k €)	écart-type (en k €)
1	29 362.859	677.03968
2	29 177.737	932.04293
3	29 065.413	1 177.5011
4	29 011.226	1 415.1752
5	29 003.566	1 647.8752

2.2.2 Distribution des fond-propres

Les fonds propres augmentent en moyenne (voir tableau 4.8 et Fig. 4.7–4.8). Ceci est principalement dû à la croissance des actifs et à la stagnation du *Best Estimate*. On note également toujours l'augmentation de la dispersion due à la diffusion. On remarque une diminution du SCR (calculé comme le quantile à 0.5% de la distribution des fonds propres).

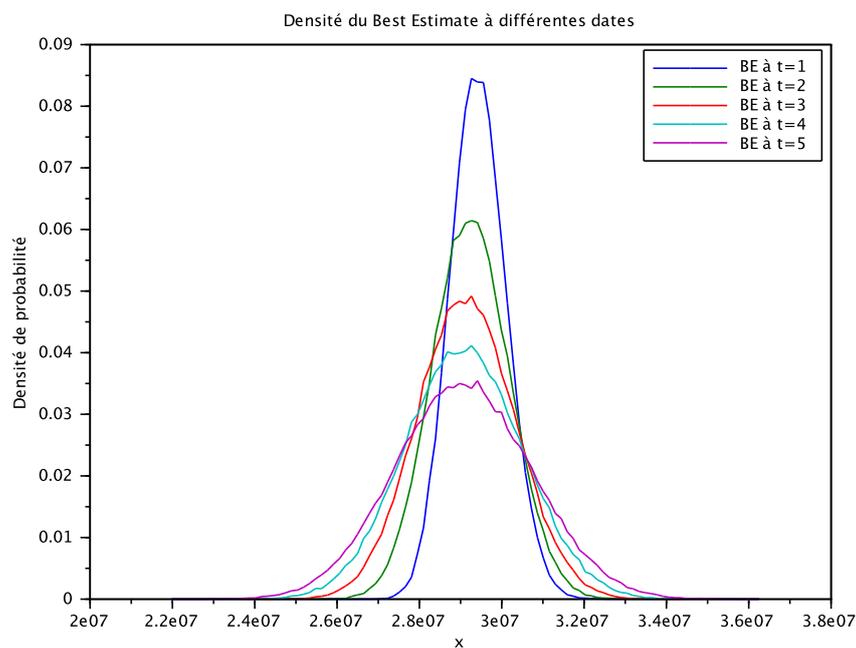


FIGURE 4.6 – Densités des distributions précédentes. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

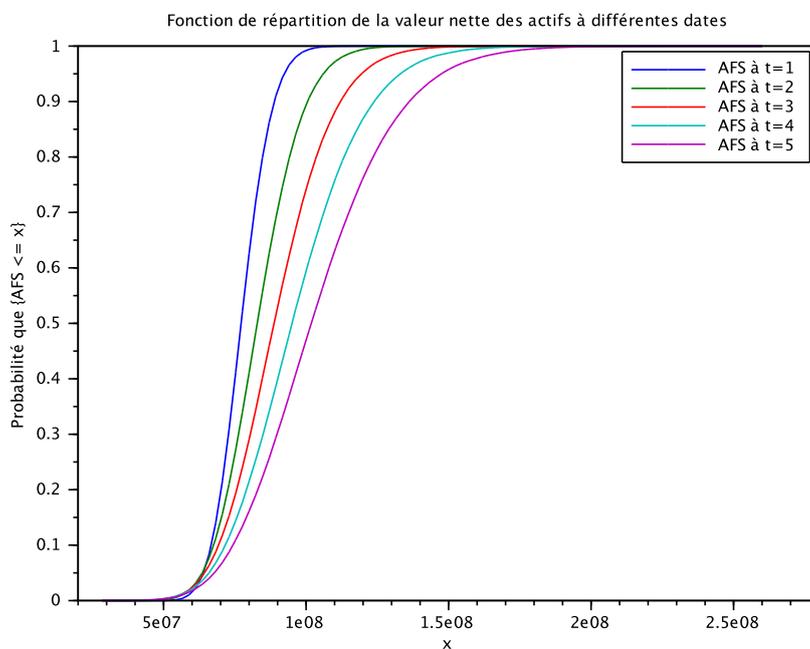


FIGURE 4.7 – Fonction de répartition des fonds propres à différentes dates $t = 1, \dots, 5$. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

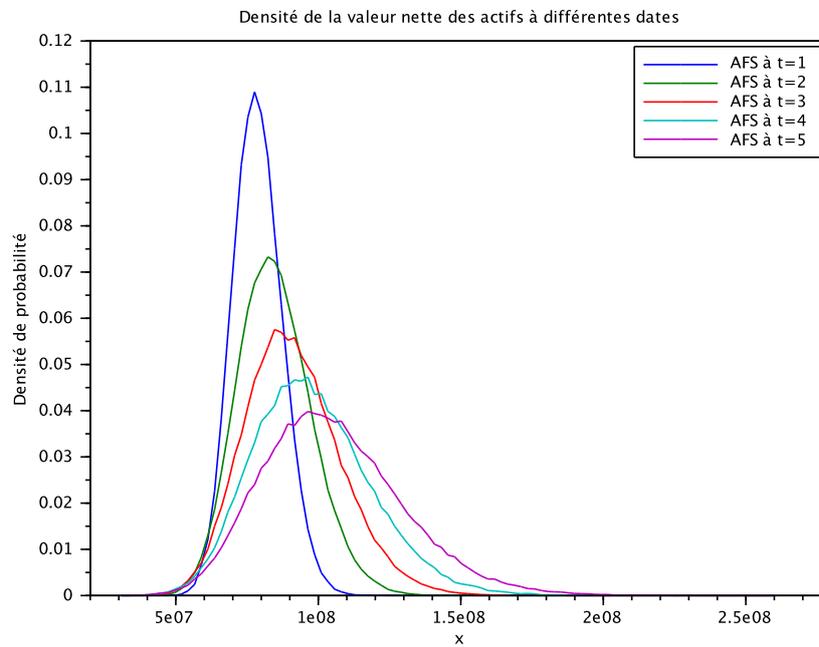


FIGURE 4.8 – Densités des distributions précédentes. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

TABLE 4.8 – Moyenne et écart-type de la distribution des fonds propres.

Année	Moyenne (en k €)	écart-type (en k €)	SCR (en k €)
1	77 545.932	8 627.1448	57 209.164
2	83 563.707	12 938.595	54 012.192
3	89 936.548	16 825.66	52 862.368
4	96 707.995	20 627.701	51 976.074
5	103 945.14	24 507.805	52 475.768

2.2.3 Distribution du taux de couverture

On calcule le taux couverture π_t à la date t comme

$$\pi_t = \frac{E_t}{SCR_t}.$$

Les fonds propres augmentant et le SCR diminuant, on obtient en moyenne une progression du taux de couverture ainsi que sa dispersion autour de sa moyenne (voir Fig. 4.10). Dans la dernière colonne du tableau 4.9, on a calculé le quantile à 10% de la distribution du taux de couverture. Ainsi, on peut affirmer avec une probabilité supérieure à 90% que le taux couverture est supérieur au taux de couverture réglementaire de 120% à partir de la deuxième année.

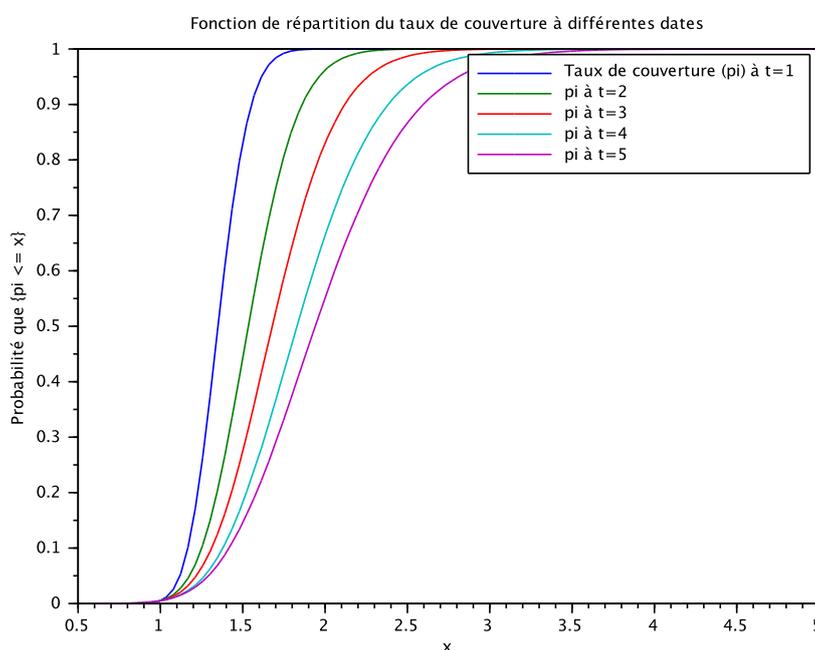


FIGURE 4.9 – Fonction de répartition du taux de couverture à différentes dates $t = 1, \dots, 5$. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

TABLE 4.9 – Moyenne et écart-type de la distribution des fonds propres.

Année	Moyenne	écart-type	quantile à 10%
1	1.355481	0.1508001	1.1664223
2	1.5471267	0.2395495	1.2510903
3	1.7013341	0.3182918	1.3116564
4	1.8606252	0.3968692	1.3792392
5	1.9808217	0.4670309	1.4172212

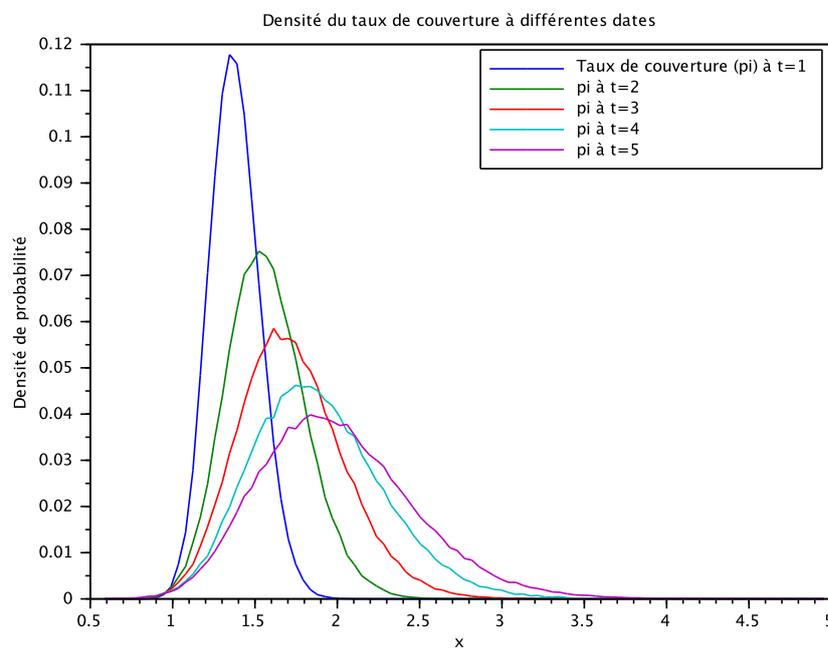


FIGURE 4.10 – Densités des distributions précédentes. Voir paramètres dans le tableau 4.5.

Conclusion

Nous avons exposé dans ce mémoire un modèle différentiel basé sur une équation aux dérivées partielles (EDP) en faible dimension (1 ou 2) afin d'évaluer numériquement et de façon *off-line*, c.-à-d. avant toute simulation, le *Best Estimate* d'un assureur pour toutes valeurs des facteurs de risque et ceci dans le cadre de contrat Euros. Une des idées principales est de modéliser de façon parcimonieuse la politique de PB de l'assureur à l'aide d'un seul facteur de risque $x(t)$ intervenant avec le taux court $r(t)$ dans la formule du taux de revalorisation $r_s = f(t, x(t), r(t))$ et du taux de rachat $\mu = g(t, x(t), r(t))$. En effet, seules les dynamiques de x, r ainsi que la spécification des fonctions f et g sont nécessaires à l'intégration de l'EDP et peuvent ainsi être laissées à la discrétion de l'assureur. On a pu constater en effet une certaine flexibilité du modèle lorsqu'il s'est agit de rajouter un TMG dans la revalorisation. Cela a changé la fonction de revalorisation f mais pas fondamentalement le modèle EDP¹ qui reste l'équation (2.17) et donc le modèle d'intégration numérique utilisé.

Cette approche va dans le sens d'études antérieures (voir [BPJ14]) où le *Best Estimate* est évalué à l'aide de formules explicites dans le cas où les fonctions de revalorisation et de rachat étaient simples (essentiellement linéaires en ses arguments). Cela correspond au cas ici où l'EDP peut s'intégrer explicitement.

Cette modélisation permet également de traiter le cas où l'assuré tente d'optimiser son rachat par une stratégie rationnelle (voir chapitre 3). Dans ce cas, l'EDP est remplacé par une inéquation variationnelle. Cette approche permet en particulier de caractériser des régions de l'espace (x, r) où le rachat a effectivement lieu (zones de rachat (sortie) *versus* zones de continuation). Naturellement, la valeur économique d'un tel contrat ainsi évalué est supérieure à ce que l'on obtient lorsque l'on ne prend pas en compte de stratégie rationnelle. Ainsi, le ratio BE/PM dans cette optique est toujours supérieur à celui obtenu au chapitre 2, en particulier il est toujours par nature supérieur à 1. Néanmoins, il reste à peu près le même qu'en absence de stratégie rationnelle lorsque le taux de revalorisation est important. La différence a lieu lorsque le taux de revalorisation est trop faible (et donc quand le rachat devient de plus en plus probable).

Plus généralement, ces classes de méthodes (formules explicites, intégration numérique par EDP, ...) permettent un gain de temps considérable lorsque l'on veut mettre en place un modèle ORSA. En effet, par rapport à la mise en œuvre classique d'un modèle ALM, lors de la projection du bilan sur l'horizon du plan stratégique, de par la nature même des contrats d'assurance-vie, l'interaction Actif/Passif nécessite en général de calculer en tout point des trajectoires simulées de l'actif, une espérance conditionnelle (le *Best Estimate*) reflétant le passif. C'est une problématique que l'on rencontre dans d'autres domaines des probabilités appliquées, comme l'évaluation par Monte-Carlo des options américaines ou plus généralement des problèmes de contrôle stochastique où l'on doit calculer une espérance conditionnelle le long d'une programmation dynamique. Ce sont des problématiques

1. Même si dans ce cas on est passé d'un modèle $1d$ à un modèle $2d$, le modèle de référence reste un modèle $2d$ de toute façon.

nonlinéaires. L'intégration numérique effectuée au préalable permet de se passer d'une simulation Monte-Carlo supplémentaire pour évaluer cette espérance conditionnelle, et ceci pour tous les nœuds de la projection.

Il reste néanmoins quelques sujets à approfondir :

- les paramètres du modèle, en particulier celui concernant le facteur de risque x , restent délicats à calibrer. En effet, on ne dispose pas de beaucoup d'informations pour cela dans les données du Pilier 1 (la valeur du *Best Estimate* et c'est à peu-près tout). Ces paramètres, caractérisant la politique de PB de l'assureur, la calibration peut passer également par une étude approfondie de son profil.
- la description de l'ensemble des risques à l'aide de seulement deux facteurs peut paraître par trop parcimonieux. Il reste à trouver un équilibre entre une description exhaustive des risques, et le risque associé de surparamétrisation, et l'interprétation simple de leurs paramètres. On peut concevoir un modèle EDP en dimension plus grande, mais il est vrai que leur implémentation devient très délicate. Une piste néanmoins serait de se rapprocher des techniques *sparse grids* ou grilles creuses, qui sont des modèles numériques d'intégration d'EDP en grandes dimensions (plusieurs dizaines). On peut consulter la thèse de David Pommier [Pom08] pour une revue détaillée.
- Dans la même direction, on peut penser à des méthodes d'arbre de quantification, où l'on quantifie les lois, ainsi que leurs dynamiques, des facteurs de risques à l'aide de variables aléatoires ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (voir [PP08] où ces méthodes ont été appliquées en mathématiques financières).

Bibliographie

- [Bac03] Anna Rita Bacinello. Fair Valuation of a Guaranteed Life Insurance Participating Contract Embedding a Surrender Option. *Journal of Risk and Insurance*, 70(3) :461–487, 2003.
- [BBM09] Anna Rita Bacinello, Enrico Biffis, and Pietro Millosovich. Pricing life insurance contracts with early exercise features. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(1) :27–35, November 2009.
- [BBM10] Anna Rita Bacinello, Enrico Biffis, and Pietro Millosovich. Regression-based algorithms for life insurance contracts with surrender guarantees. *Quantitative Finance*, 10(9) :1077–1090, November 2010.
- [BBR09] Daniel Bauer, Daniela Bergmann, and Andreas Reuss. Solvency II and Nested Simulations - a Least-Squares Monte Carlo Approach. Technical Report 2009-05, Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Universität Ulm, May 2009.
- [BGH⁺97] Newton L. Bowers, JR., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, and Cecil J. Nesbitt. *Actuarial mathematics*. The Society of Actuaries, 2nd edition edition, 1997.
- [Bif05] Enrico Biffis. Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations. *Insurance : Mathematics and Economics*, 37(3) :443–468, 2005.
- [BM06] Enrico Biffis and Pietro Millosovich. The fair value of guaranteed annuity options. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006(1) :23–41, January 2006.
- [BPJ14] François Bonnin, Frédéric Planchet, and Marc Juillard. Best estimate calculations of savings contracts by closed formulas : application to the ORSA. *Eur. Actuar. J.*, 4(1) :181–196, March 2014.
- [DSS96] Darrell Duffie, Mark Schroder, and Costis Skiadas. Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty. *Ann. Appl. Probab.*, 6(4) :1075–1090, November 1996.
- [DZ11] Angelos Dassios and Hongbiao Zhao. A dynamic contagion process. *Adv. in Appl. Probab.*, 43(3) :814–846, September 2011.
- [FLP07] Stéphanie Fauvel and Maryse Le Pévédic. Analyse des rachats d’un portefeuille vie individuelle : approche théorique et applications pratique. Mémoire d’actuariat, ENSAE, 2007.
- [Fri64] Avner Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
- [GLJ00] Anders Grosen and Peter Løchte Jørgensen. Fair valuation of life insurance liabilities : The impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies. *Insurance : Mathematics and Economics*, 26(1) :37–57, February 2000.
- [GS66] B. Grigelionis and A. Shiryaev. On Stefan’s Problem and Optimal Stopping Rules for Markov Processes. *Theory Probab. Appl.*, 11(4) :541–558, January 1966.

- [HO74] Alan G. Hawkes and David Oakes. A Cluster Process Representation of a Self-Exciting Process. *Journal of Applied Probability*, 11(3) :493–503, September 1974.
- [Kag05] Yusho Kagraoka. Modeling insurance surrenders by the negative binomial model. Working paper, 2005.
- [KD00] Harold Kushner and Paul G. Dupuis. *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*. Springer, New York, 2nd edition edition, December 2000.
- [Kim05] Changki Kim. Modeling Surrender and Lapse Rates With Economic Variables. *North American Actuarial Journal*, 9(4) :56–70, October 2005.
- [KS80] David Kinderlehrer and Guido Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Number 31 in Pure and Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Academic Press, Philadelphia, 1980.
- [Lin03] Snorre Lindset. Pricing of multi-period rate of return guarantees. *Insurance : Mathematics and Economics*, 33(3) :629–644, December 2003.
- [LM11] Stéphane Loisel and Xavier Milhaud. From deterministic to stochastic surrender risk models : Impact of correlation crises on economic capital. *European Journal of Operational Research*, 214(2) :348–357, October 2011.
- [LS01] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz. Valuing American options by simulation : A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14(1) :113–147, 2001.
- [MLMD11] Xavier Milhaud, Stéphane Loisel, and Véronique Maume-Deschamps. Surrenders triggers in life insurance : what main features affect the surrender behavior in a classical economic context ? *Bulletin Français d'Actuariat*, 11(22) :5–48, 2011.
- [MY05] Kristen S. Moore and Virginia R. Young. Optimal Design of a Perpetual Equity-Indexed Annuity. *North American Actuarial Journal*, 9(1) :57–72, January 2005.
- [NS87] Charles R. Nelson and Andrew F. Siegel. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, 60(4) :473–489, October 1987.
- [Pom08] David Pommier. *Méthodes numériques sur des grilles sparse appliquées à l'évaluation d'options en finance*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [PP08] Gilles Pagès and Jacques Printems. Optimal quantization for Finance : from random vectors to stochastic processes. In *Handbok of Numerical Analysis*, volume XV of *Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance*, pages 595–648. North-Holland, Elsevier, 2008.
- [Pru96] Christian Prudent. La clause de rachat anticipé évaluée comme une option. Technical Report 9, Fédération Française des Sociétés d'Assurances, Paris, June 1996.
- [Ron98] Thierry Roncalli. *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique*. Thèse, Université Montesquieu - Bordeaux IV, 1998.
- [RØ98] Kristin Reikvam and Bernt Øksendal. Viscosity solutions of optimal stopping problems. *Stochastics and Stochastic Reports*, 62(3-4) :285–301, January 1998.
- [Siu05] Tak Kuen Siu. Fair valuation of participating policies with surrender options and regime switching. *Insurance : Mathematics and Economics*, 37(3) :533–552, December 2005.

- [SP06] A. Shiryaev and G. Peskir. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 2006.
- [SX05] Weixi Shen and Huiping Xu. The valuation of unit-linked policies with or without surrender options. *Insurance : Mathematics and Economics*, 36 :79–92, 2005.
- [TKC02] Chenghsien Tsai, Weiyu Kuo, and Wei-Kuang Chen. Early surrender and the distribution of policy reserves. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(3) :429–445, December 2002.
- [TL03] Antti Juho Tanskanen and Jani Lukkarinen. Fair valuation of path-dependent participating life insurance contracts. *Insurance : Mathematics and Economics*, 33(3) :595–609, December 2003.
- [VZ02] Stephane Villeneuve and Antonino Zanette. Parabolic ADI Methods for Pricing American Options on Two Stocks. *Mathematics of OR*, 27(1) :121–149, February 2002.
- [WDH93] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, and Sam Howison. *Option Pricing : Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press, Oxford, September 1993.
- [ZE06] Andrea Zisowsky and Matthias Ehrhardt. Discrete transparent boundary conditions for parabolic systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(3-4) :294–309, February 2006.

Annexes

1 Table d'expérience et de rachat

(a)

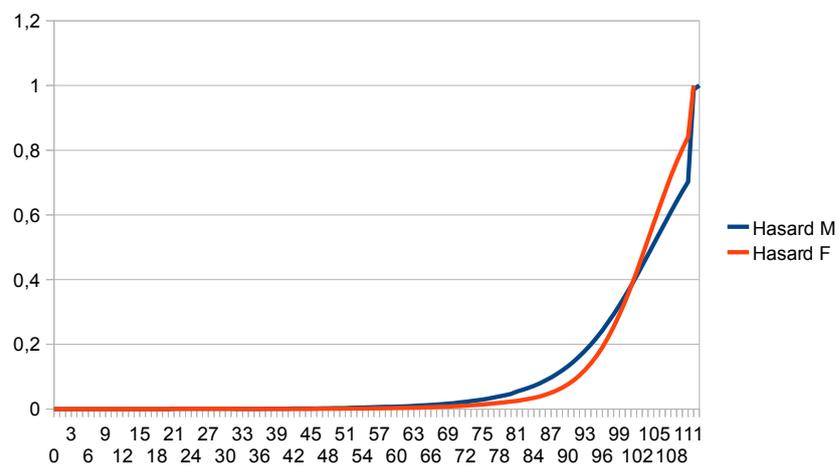
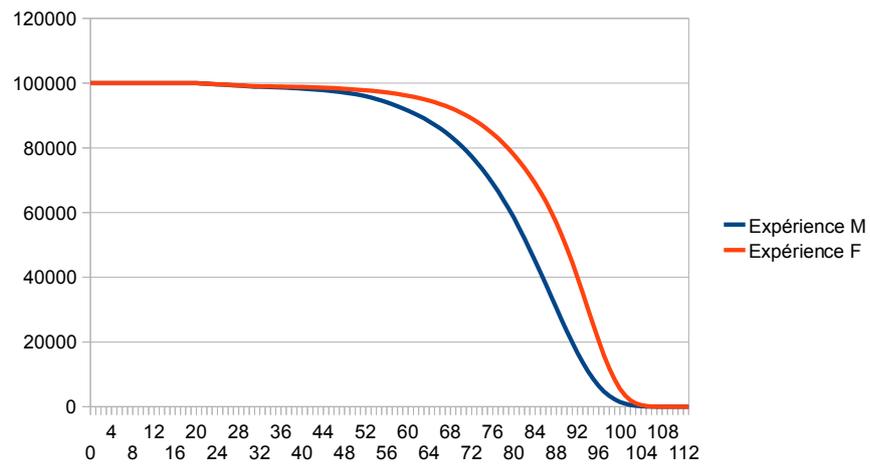


FIGURE 4.11 – (a) Fonction de survie de la table d'expérience 4.10. (b) Fonction de hasard associée.

TABLE 4.10 – Table de mortalité d’expérience utilisée au chapitre 4. On indique en italique les fonctions de hasards approchées pour chacun des deux sexes calculées comme $h(x) \sim (S(x) - S(x + 1))/S(x)$ pour un individu d’âge x .

Âge	Exp. M	Exp. F	Hasard M	Hasard F	Âge	Exp.M	Exp. F	Hasard M	Hasard F
0	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	56	94083	97123	<i>0,57</i>	<i>0,20</i>
1	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	57	93495	96906	<i>0,62</i>	<i>0,22</i>
2	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	58	92851	96665	<i>0,69</i>	<i>0,25</i>
3	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	59	92205	96400	<i>0,70</i>	<i>0,27</i>
4	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	60	91498	96106	<i>0,77</i>	<i>0,30</i>
5	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	61	90761	95782	<i>0,81</i>	<i>0,34</i>
6	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	62	89993	95424	<i>0,85</i>	<i>0,37</i>
7	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	63	89113	95029	<i>0,98</i>	<i>0,41</i>
8	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	64	88154	94593	<i>1,08</i>	<i>0,46</i>
9	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	65	87158	94112	<i>1,13</i>	<i>0,51</i>
10	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	66	86074	93583	<i>1,24</i>	<i>0,56</i>
11	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	67	84895	93000	<i>1,37</i>	<i>0,62</i>
12	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	68	83615	92358	<i>1,51</i>	<i>0,69</i>
13	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	69	82228	91653	<i>1,66</i>	<i>0,76</i>
14	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	70	80727	90878	<i>1,83</i>	<i>0,85</i>
15	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	71	79106	90028	<i>2,01</i>	<i>0,94</i>
16	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	72	77358	89095	<i>2,21</i>	<i>1,04</i>
17	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	73	75478	88073	<i>2,43</i>	<i>1,15</i>
18	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	74	73461	86956	<i>2,67</i>	<i>1,27</i>
19	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	75	71304	85735	<i>2,94</i>	<i>1,40</i>
20	100000	100000	<i>0,00</i>	<i>0,00</i>	76	69002	84403	<i>3,23</i>	<i>1,55</i>
21	99907	99918	<i>0,09</i>	<i>0,08</i>	77	66556	82953	<i>3,55</i>	<i>1,72</i>
22	99812	99834	<i>0,10</i>	<i>0,08</i>	78	63964	81377	<i>3,89</i>	<i>1,90</i>
23	99716	99751	<i>0,10</i>	<i>0,08</i>	79	61229	79667	<i>4,28</i>	<i>2,10</i>
24	99622	99668	<i>0,09</i>	<i>0,08</i>	80	58356	77816	<i>4,69</i>	<i>2,32</i>
25	99527	99585	<i>0,09</i>	<i>0,08</i>	81	55209	75855	<i>5,39</i>	<i>2,52</i>
26	99433	99502	<i>0,09</i>	<i>0,08</i>	82	51941	73754	<i>5,92</i>	<i>2,77</i>
27	99336	99417	<i>0,10</i>	<i>0,09</i>	83	48558	71490	<i>6,51</i>	<i>3,07</i>
28	99238	99331	<i>0,10</i>	<i>0,09</i>	84	45072	69037	<i>7,18</i>	<i>3,43</i>
29	99138	99243	<i>0,10</i>	<i>0,09</i>	85	41498	66368	<i>7,93</i>	<i>3,87</i>
30	99035	99152	<i>0,10</i>	<i>0,09</i>	86	37856	63457	<i>8,77</i>	<i>4,39</i>
31	98931	99060	<i>0,11</i>	<i>0,09</i>	87	34177	60278	<i>9,72</i>	<i>5,01</i>
32	98887	99044	<i>0,04</i>	<i>0,02</i>	88	30494	56809	<i>10,78</i>	<i>5,75</i>
33	98839	99026	<i>0,05</i>	<i>0,02</i>	89	26849	53036	<i>11,95</i>	<i>6,64</i>
34	98786	99006	<i>0,05</i>	<i>0,02</i>	90	23288	48955	<i>13,26</i>	<i>7,69</i>
35	98727	98984	<i>0,06</i>	<i>0,02</i>	91	19863	44578	<i>14,71</i>	<i>8,94</i>
36	98662	98959	<i>0,07</i>	<i>0,03</i>	92	16624	39939	<i>16,31</i>	<i>10,41</i>
37	98591	98931	<i>0,07</i>	<i>0,03</i>	93	13621	35096	<i>18,06</i>	<i>12,13</i>
38	98511	98900	<i>0,08</i>	<i>0,03</i>	94	10900	30138	<i>19,98</i>	<i>14,13</i>
39	98424	98866	<i>0,09</i>	<i>0,03</i>	95	8495	25183	<i>22,06</i>	<i>16,44</i>
40	98327	98828	<i>0,10</i>	<i>0,04</i>	96	6429	20376	<i>24,32</i>	<i>19,09</i>
41	98220	98786	<i>0,11</i>	<i>0,04</i>	97	4709	15873	<i>26,75</i>	<i>22,10</i>
42	98103	98739	<i>0,12</i>	<i>0,05</i>	98	3328	11829	<i>29,34</i>	<i>25,48</i>
43	97973	98687	<i>0,13</i>	<i>0,05</i>	99	2260	8372	<i>32,09</i>	<i>29,23</i>
44	97830	98629	<i>0,15</i>	<i>0,06</i>	100	1469	5581	<i>34,99</i>	<i>33,33</i>
45	97673	98565	<i>0,16</i>	<i>0,06</i>	101	910	3474	<i>38,02</i>	<i>37,76</i>
46	97499	98473	<i>0,18</i>	<i>0,09</i>	102	535	1999	<i>41,16</i>	<i>42,46</i>
47	97308	98371	<i>0,20</i>	<i>0,10</i>	103	298	1052	<i>44,39</i>	<i>47,36</i>
48	97097	98266	<i>0,22</i>	<i>0,11</i>	104	155	500	<i>47,69</i>	<i>52,39</i>
49	96866	98160	<i>0,24</i>	<i>0,11</i>	105	76	213	<i>51,03</i>	<i>57,46</i>
50	96611	98053	<i>0,26</i>	<i>0,11</i>	106	34	79	<i>54,37</i>	<i>62,47</i>
51	96330	97935	<i>0,29</i>	<i>0,12</i>	107	14	26	<i>57,69</i>	<i>67,34</i>
52	95960	97803	<i>0,38</i>	<i>0,13</i>	108	5	7	<i>60,96</i>	<i>71,99</i>
53	95554	97658	<i>0,42</i>	<i>0,15</i>	109	2	1	<i>64,16</i>	<i>76,36</i>
54	95108	97498	<i>0,47</i>	<i>0,16</i>	110	0	0	<i>67,25</i>	<i>80,39</i>
55	94619	97320	<i>0,51</i>	<i>0,18</i>	111	0	0	<i>70,22</i>	<i>84,07</i>
					112	0	0	<i>98,80</i>	<i>100,00</i>
					113	0	0	<i>100,00</i>	

TABLE 4.11 – Tableau des taux de rachat structurel utilisée au chapitre 4.

Âge	Taux rachat total (%)	Âge	Taux rachat total (%)
1	2,92	57	8,52
2	2,92	58	7,49
3	2,92	59	7,16
4	2,92	60	7,24
5	2,92	61	7,23
6	2,92	62	6,73
7	2,92	63	5,86
8	2,92	64	4,97
9	2,92	65	4,35
10	2,92	66	4,18
11	2,92	67	4,31
12	2,92	68	4,36
13	2,92	69	4,09
14	2,92	70	4,09
15	2,92	71	4,09
16	2,92	72	4,09
17	2,92	73	4,09
18	2,92	74	4,09
19	2,92	75	4,09
20	2,92	76	4,09
21	2,92	77	4,09
22	2,92	78	4,09
23	2,92	79	4,09
24	2,92	80	4,09
25	2,92	81	4,09
26	2,92	82	4,09
27	2,92	83	4,09
28	2,92	84	4,09
29	3,02	85	4,09
30	2,91	86	4,09
31	2,65	87	4,09
32	2,38	88	4,09
33	2,19	89	4,09
34	2,09	90	4,09
35	2,05	91	4,09
36	2,03	92	4,09
37	1,99	93	4,09
38	1,92	94	4,09
39	1,86	95	4,09
40	1,83	96	4,09
41	1,83	97	4,09
42	1,82	98	4,09
43	1,80	99	4,09
44	1,76	100	4,09
45	1,70	101	4,09
46	1,62	102	4,09
47	1,56	103	4,09
48	1,61	104	4,09
49	1,94	105	4,09
50	2,74	106	4,09
51	4,19	107	4,09
52	6,30	108	4,09
53	8,65	109	4,09
54	10,44	110	4,09
55	10,83	111	4,09
56	9,91	112	4,09
		113	4,09

Index

- Algorithme d'Howard, 51
- Conditions aux bords
 - de Dirichlet, 37
 - de Neuman, 37
 - transparentes, 37
- Différences finies, 27, 35
- Fonction de hasard, 20
- Frontière libre, 52
- Formule d'Itô, 26
- Frontière libre, 49
- Inéquation aux dérivées partielles, 49
- Intensité, 20
- Participation aux bénéfices, 17
- Problème linéaire complémentaire, 49
- Processus
 - d'Ornstein-Ühlenbeck, 22, 23, 27
 - de comptage, 20
 - de Cox, 20
 - de Poisson, 21
- Processus de retour à la moyenne, *voir* Processus d'Ornstein-Ühlenbeck
- Processus doublement stochastique, *voir* Processus de Cox
- Provision mathématique, 22
- Schéma
 - de Crank-Nicolson, 28
- Taux
 - de rachat, 17
 - de rachat conjoncturel, 18
 - de rachat structurel, 18, 36
 - forward*, 64
 - garanti, 17
- Temps d'arrêt, 20
- Théorème
 - de Feynman-Kac, 26
- θ -schéma, 36
- Valeur de rachat, 21

Glossary

- ACPR** autorité de contrôle prudentiel et de résolution. 9, 13, 19, 26
- EDO** équation différentielle ordinaire. 64
- EDP** Équations aux dérivées partielles. 18, 26, 27, 29, 35, 37, 49
- EDS** équations différentielles stochastiques. 26
- EIOPA** autorité européenne des assurances et des retraites professionnelles. 12
- EIOPA** European Insurance and Occupational Pensions Authority. 9, 63, 64
- LSMC** Least-Squares Monte Carlo. 14
- MCR** Minimum Capital Requirement. 12
- ONC** orientations nationales complémentaires. 19
- ORSA** Own Risk and Solvency Assessment. 9, 18, 63, 77
- PB** Participation aux Bénéfices. 14, 15, 18–20, 42, 52, 77, 78
- QIS** Quantitative Impact Studies. 19
- SCR** Solvency Capital Requirement. 12, 13
- SdS** simulations dans les simulations. 13
- STTI** structure par terme des taux d'intérêt. 63
- TMG** Taux Minimum Garanti. 14, 15, 26, 35, 55, 66, 77
- UC** Unités de Compte. 14
- VaR** Value at Risk. 13

Table des matières

Remerciements	6
Introduction	7
1 Engagements et réglementation	9
1 Le cadre réglementaire	9
1.1 Rappel Solvabilité 1	9
1.2 Cadre Solvabilité 2	10
1.2.1 Pilier I	10
1.2.2 Pilier II – L’ORSA	11
2 L’Assurance-Vie et les contrats Euros	12
2 Valorisation de la clause de rachat d’un contrat d’épargne en €	15
1 Introduction	15
2 <i>Best Estimate</i> dans le cas général	16
2.1 Modèles de rachat déjà traités dans la littérature	16
2.2 Participation aux bénéfices et rachat	16
2.3 Cadre stochastique du marché d’assurance de l’étude	18
2.4 Expression générale du <i>Best Estimate</i> (ou représentation probabiliste)	19
3 Cas particulier de solutions explicites	20
4 Modèle différentiel général	24
4.1 Dérivation d’une Équation aux Dérivées Partielles	24
4.2 Test numérique dans le cas de solutions explicites	25
4.2.1 Processus de retour à la moyenne	25
4.2.2 Simulation par EDP	25
4.3 Autre exemple de taux de rachat en dimension 1	27
4.3.1 $f = x + r, g = \mu_i + \eta x_-$	27
4.3.2 $f = x + r, g = \min(1, \max(0, \mu_c(x) + \mu_i))$	27
4.3.3 $f = x + r, g = \min(1, \max(0, \mu_c(x) + \mu_i)), \mu_i = \mu_i(t)$	30
4.4 Rachat avec Taux Minimum Garanti	33
4.4.1 Une EDP en dimension 2	33
4.4.2 Résolution numérique par différences finies 2d	33
4.5 Tests numériques	39
4.5.1 Cas où $TMG = 1.5\%$, $TMG < \min(r_s(0), r_s(\infty))$	40
4.5.2 Cas où $TMG = 2.5\%$, $TMG > \max(r_s(0), r_s(\infty))$	40

3	Stratégie rationnelle de rachat	47
1	Une stratégie de rachat optimale	48
2	Une inéquation variationnelle	48
3	Résolution numérique	49
4	Rachat dans le cas $f(x, r) = x + r$	50
5	Rachat dans le cas $f(x, r) = \max(TMG, x + r)$	54
5.1	Cas où $TMG = 1.5\%$, $TMG < \min(r_s(0), r_s(\infty))$	54
5.2	Cas où $TMG = 2.5\%$, $TMG > \max(r_s(0), r_s(\infty))$	54
4	Simulation des dynamiques dans le cadre ORSA	61
1	Identification et modélisation des facteurs de risques	61
1.1	Risque de taux	61
1.1.1	Ajustement du modèle de Nelson–Siegel	61
1.1.2	Ajustement d’un modèle de Vasicek à partir du modèle de Nelson–Siegel	62
1.2	Risque de mortalité	64
1.3	Risque des actions et obligations	64
1.4	Risque lié à la politique de participation aux bénéfices	64
2	Exemple de mise en œuvre d’un processus ORSA pour un assureur.	65
2.1	Distribution de l’actif	68
2.2	Distribution du passif	70
2.2.1	Distribution du <i>Best Estimate</i>	70
2.2.2	Distribution des fond-propres	70
2.2.3	Distribution du taux de couverture	73
	Conclusion	75
	Bibliographie	76
	Annexes	79
1	Table d’expérience et de rachat	81
	Index	86
	Glossaire & Acronymes	86
	Table des matières	87