



**Calcul de la *Probability Distribution Forecast* du *Best Estimate* via
l'approche *LSMC* à partir d'un modèle dit de « *flexing* »**



Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Georges ABBEY pour ces précieux conseils et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également à ma femme, à Maria PERINI, mon directeur de mémoire ainsi qu'à Carine MIEDI et Maxime MOTCHEHO, membres de la Direction des Risques de Generali France, pour le temps qu'ils ont consacré à la relecture de ce mémoire.

Enfin, the last but not least, je remercie ma famille pour son soutien indéfectible.

*« On ne va jamais aussi loin que lorsqu'on ne sait pas où l'on va. »
Christophe Colomb*

Résumé

L'objectif de la nouvelle Directive Solvabilité II entrée en vigueur le 1er Janvier 2016 est de mieux adapter les fonds propres exigés des compagnies d'assurance et de réassurance aux risques que celles-ci encourent dans leur activité. Contrairement à Solvabilité I qui prévoyait une marge de solvabilité pour les assureurs vie fonction du volume d'affaires souscrites (fonction du niveau de provisions et des capitaux sous risques), la nouvelle réglementation impose un calcul plus complexe de l'exigence de capital réglementaire. Dans ce nouveau référentiel, l'exigence de capital réglementaire est définie comme le niveau de fonds propres nécessaires pour limiter la probabilité de ruine à un an des assureurs et réassureurs à 0,5%. Son évaluation se fait soit par l'application d'une formule standard calibrée uniformément sur le marché européen, soit à l'aide d'un modèle interne développé par l'entreprise qui reflète mieux son profil de risque ou à l'aide d'une combinaison de ces deux méthodes, on parle alors de modèle interne partiel.

Pour les assureurs optant pour le développement d'un modèle interne reflétant mieux leur profil de risque, l'utilisation de la méthode dite des « Simulations dans les Simulations » (SdS) reste l'approche la plus conforme aux critères de la Directive Solvabilité II pour l'évaluation de leur exigence de capital. Toutefois, cette méthode requiert des temps de calcul très importants car elle nécessite la réalisation de deux séries de simulations imbriquées conduisant à des budgets de calcul pouvant atteindre 1 000 000 de simulations.

Des méthodes alternatives moins consommatrices à la fois en temps de calcul et en ressources informatiques ont ainsi vu le jour afin de reproduire des résultats similaires à ceux que fournirait l'approche SdS. C'est le cas de la méthode *Least Square Monte Carlo* (LSMC) qui fournit une approximation de la distribution des fonds propres économiques, calculée comme différence entre les actifs en valeur de marché et les provisions techniques, à l'aide d'une forme paramétrique.

Dans ce contexte, le but des travaux dans ce mémoire est de répondre à une problématique opérationnelle soulevée par l'utilisation de la méthode LSMC pour le calcul des engagements envers les assurés en vision économique (BEL), quand l'assureur utilise un modèle interne de *flexing*.

La première partie de ce mémoire traitera des avantages de l'utilisation de suites à faible discrétance, type Sobols, pour la sélection des scénarios liés aux facteurs de risques.

Dans la deuxième partie, nous montrons que l'optimisation du choix de scénarios liés aux facteurs de risques techniques permet une convergence plus rapide du BEL au taux garanti dans le cadre du modèle de *flexing*.

Dans le cadre du LSMC, les trajectoires des simulations primaires étant des combinaisons de scénarios liés aux facteurs de risques techniques et financiers, nous étudierons dans la troisième partie plusieurs méthodes d'association des scénarios liés à ces deux types de facteurs de risques.

Mots-clés : Modèle Interne, Least Square Monte Carlo, Solvabilité 2, SdS, ALM, Flexing, Best Estimate, Model Point, Probability distribution forecast, Suite à faible discrétance.

Abstract

The aim of the new Solvency II Directive, which entered into force on January 2016, is to better adapt the capital requirements of insurance and reinsurance companies to the risks they face in their business. In contrast to the Solvency I framework, which provided for a solvency margin for life insurers based on the volume of written business (depending on the amount of provisions and capital at risk), the new regulation imposes a more complex calculation of the regulatory capital requirement. In this new framework, the regulatory capital requirement is defined as the level of capital needed to limit the probability of one-year default of insurers and reinsurers to 0.5%. Its evaluation is carried out either by applying a standard formula calibrated uniformly on the European market or by using an internal model developed by the company that better reflects its risk profile, or a combination of these two methods, then we speak of a partial internal model.

For insurers opting for the development of an internal model better reflecting their risk profile, the use of the so-called Nested Simulation method remains the most consistent approach to the Solvency II For the assessment of their capital requirement. However, this method requires very high computational times because it requires the realization of two series of nested simulations leading to computational budgets of up to 1,000,000 simulations.

Alternative methods that consume less computing time and resources have been developed to reproduce results similar to those provided by the SdS approach. This is the case of the Least Square Monte Carlo (LSMC) method, which provides an approximation of the distribution of economic capital, calculated as the difference between assets at market value and technical provisions, using a parametric form.

In this context, the aim of this paper is to answer to an operational problem raised by the use of the LSMC method for calculating the insurer's commitments in economic vision (BEL) by insurers with an Internal model known as the "flexing model".

The first part of this thesis will discuss the advantages of using low-discrepancy suites, such as Sobols, for the selection of scenarios.

In the second part, we show that the optimization of the choice of scenarios linked to the technical risk factors allows for a more rapid convergence of the BEL at the guaranteed rate within the framework of the flexing model.

As part of the LSMC, the trajectories of the primary simulations are combinations of scenarios linked to the technical and financial risk factors. In the third part, we will study several methods for associating the scenarios linked to both the risk factors.

Keywords: internal model, Least Square Monte Carlo, Solvency 2, Nested simulations, ALM, flexing, Best estimate, model point, probability distribution forecast, low discrepancy sequences.

SOMMAIRE

1. CADRE RÉGLEMENTAIRE.....	9
1.1 DÉFINITION DE LA SOLVABILITÉ	9
1.2 DE SOLVABILITE I À SOLVABILITE II	9
1.3 RAPPELS DU DISPOSITIF SOLVABILITE II	9
1.4 LES PILIERS DE LA DIRECTIVE SOLVABILITE II	11
1.5 BILAN ÉCONOMIQUE.....	11
1.5.1 Valorisation de l'actif.....	12
1.5.2 Provisions techniques	13
1.5.2.1 Best Estimate of Liabilities (BEL).....	13
1.5.2.2 Marge pour risque (Market Value Margin - MVM).....	13
1.5.3 Capital de solvabilité requis (ou Solvency Capital Requirement - SCR).....	14
1.5.4 Fonds propres économiques.....	18
2. FORMULE STANDARD ET MODÈLES INTERNES	20
2.1 FORMULE STANDARD	20
2.2 MODÈLES INTERNES	20
2.2.1 Modèles internes complets.....	21
2.2.2 Modèle interne partiel	21
3. MÉTHODES DE SIMULATIONS	23
3.1 SIMULATIONS DANS LES SIMULATIONS (SDS).....	23
3.1.1 Principe	23
3.1.2 Limites de l'approche	25
3.2 ALGORITHME D'ACCÉLÉRATION DES SDS DE DEVINEAU-LOISEL	26
3.2.1 Principe	26
3.2.2 Mode opératoire	26
3.2.3 Avantages et limites de l'approche.....	28
3.3 REPLICATING PORTFOLIOS.....	28
3.3.1 Définition et principe.....	28
3.3.2 Limites de l'approche	31
3.4 CURVE FITTING.....	31
3.4.1 Définition et principe.....	31
3.4.2 Mode opératoire	31
3.4.3 Limites de l'approche	33
3.5 LEAST SQUARE MONE-CARLO (LSMC).....	33
3.5.1 Mode opératoire	34
3.6 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES APPROCHES	36
4. GÉNÉRATEURS DE SCENARIOS ÉCONOMIQUES	39
4.1 PRINCIPE GENERALE	39
4.2 UNIVERS MONDE RÉEL ET RISQUE NEUTRE	39
4.3 MODÉLISATION DES ACTIONS	40
4.3.1 Dynamique.....	40
4.4 MODÉLISATION DES TAUX D'INTÉRÊTS.....	41
4.4.1 Définition.....	41
4.4.2 Dynamique.....	42
5. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE LSMC	43
5.1 RAPPELS MÉTHODE DE MONTE-CARLO	43
5.2 MÉTHODES DE RÉDUCTION DE VARIANCE	43
5.2.1 Méthode de quasi Monte-Carlo	43
5.2.1.1 Suites à discrédance faible	44
5.2.1.2 Suites de Sobol	45
5.2.2 Méthode des variables antithétiques.....	46

5.3	FORMALISATION THÉORIQUE DU LSMC	47
5.4	MODÈLES DE RÉGRESSION	49
5.4.1	<i>Critères de sélection de modèles</i>	49
5.4.2	<i>Algorithmes de sélection de variables</i>	49
5.4.3	<i>Test de Fisher</i>	50
5.5	VALIDATION DES MODÈLES	51
5.5.1	<i>Tests statistiques</i>	51
5.5.1.1	Test de Kolmogorov- Smirnov	51
5.5.2	<i>Diagnostic graphique</i>	52
5.5.2.1	Graphique Q-Q plot	52
6.	APPLICATION À UN PORTEFEUILLE DE CONTRATS D'ÉPARGNE	53
6.1	CARACTÉRISTIQUES DU PORTEFEUILLE ÉTUDIÉ	54
6.1.1	<i>Modélisation du passif</i>	54
6.1.2	<i>Modélisation de l'actif</i>	56
6.2	FACTEURS DE RISQUE	57
6.2.1	<i>Les risques de souscription</i>	58
6.2.2	<i>Les risques financiers et de crédit</i>	59
6.3	CONVERGENCE DU BEST ESTIMATE AU TAUX GARANTI	62
6.3.1	<i>Validation de la qualité de l'ajustement</i>	62
6.3.1.1	Statistique R ²	62
6.3.1.2	Erreur moyenne pondérée	64
6.4	CHOIX D'UNE MÉTHODE D'ASSOCIATION DES SCENARIOS TECHNIQUES ET FINANCIERS	65
6.4.1	<i>La méthode dite proportionnelle</i>	66
6.4.2	<i>Les k-plus proches voisins</i>	67
6.4.2.1	L'algorithme K-NN	67
7.	ANALYSE DES RÉSULTATS	72
7.1	QUALITÉ DE LA RÉGRESSION	72
7.1.1	<i>Méthode dite proportionnelle</i>	73
7.1.2	<i>Méthode du plus proche voisin</i>	76
7.2	IMPACT DES FACTEURS DE RISQUES SUR LE BEST ESTIMATE	79
7.2.1	<i>Régression selon les facteurs de risques financiers</i>	79
7.2.2	<i>Régression selon les facteurs de risques techniques</i>	81
7.2.3	<i>Régression selon les rachats et la composante PCI</i>	83
7.2.1	<i>Régression selon les rachats et la volatilité des taux</i>	84
8.	GLOSSAIRE ET ACRONYMES	89
9.	LISTE DES TABLEAUX	90
10.	TABLE DES FIGURES	91
11.	BIBLIOGRAPHIE	92

Introduction

Le nouveau régime prudentiel Solvabilité II entré en vigueur au 1^{er} Janvier 2016 modifie profondément l'approche des assureurs et réassureurs quant à leur gestion des risques et à l'évaluation de leur exigence de capital.

Cette nouvelle Directive impose aux assureurs et réassureurs de disposer d'un montant de fonds propres minimum appelé SCR (*Solvency Capital Requirement*) adapté à tous les risques auxquels la compagnie d'assurance ou de réassurance pourrait être exposée. Le SCR est tel que la probabilité de ruine économique à un an est inférieure à 0,5%.

La méthode la plus conforme à cette nouvelle Directive pour le calcul du SCR repose sur la notion de distribution de fonds propres économiques à un an. Mais l'obtention de cette distribution peut s'avérer difficile dans le cadre de l'assurance vie compte tenu :

- de la complexité des interactions entre l'actif et le passif qui découle des mécanismes de participation aux bénéfices (PB),
- des comportements de rachats dynamiques des assurés.

La méthode des « Simulation dans les Simulations » (SdS) qui consiste à effectuer deux phases de simulations : une première phase de simulations sous probabilité historique et une autre sous probabilité risque neutre est celle qui est la plus appropriée pour prendre en compte ces spécificités énoncées précédemment. Toutefois, elle s'avère très compliquée à mettre en œuvre en raison de la puissance de calcul requise.

Des méthodes alternatives telle que le « *Least Square Monte Carlo* » et le « *Curve Fitting* » ont été développées pour pallier ces difficultés liées au temps de calcul. Ces méthodes reprennent les mêmes principes que la méthode SdS en intégrant des simplifications qui permettent d'accroître la vitesse de convergence.

Aux difficultés énoncées ci-dessus s'ajoute la granularité des *model points* qui permettent d'agréger les données en entrée du modèle. En effet, réaliser un nombre important de simulations (plus de 10 000) sur des jeux de *model points* élevés paraît inenvisageable car également trop coûteux en temps de calcul. Les possibilités qui s'offrent aux organismes pour y pallier sont les suivantes :

- soit accroître le niveau d'agrégation des *model points*. Cependant, l'Article 35 des Actes délégués portant sur la constitution des *model points* indiquent que des regroupements de polices sont possibles dès lors que les polices considérées et les risques sous-jacents sont similaires, et que l'utilisation de ces regroupements de polices (*model points*) ne fausse pas les résultats des projections ;
- soit conserver un niveau de finesse élevé ou suffisant, ce qui revient à garder un nombre important de *model points*, tout en optimisant le nombre des simulations requises par les méthodes pour assurer une bonne convergence des résultats.

Cette problématique est rencontrée par les assureurs ou réassureurs qui utilisent des modèles internes

dit de «*flexing*¹» pour la projection des cash-flows sur l'horizon de projection.

Dans ce contexte, le but des travaux dans ce mémoire est de répondre à une problématique opérationnelle soulevée par l'utilisation de la méthode LSMC pour le calcul des engagements envers les assurés en vision économique (BEL), quand l'assureur utilise un modèle interne de *flexing*.

La première partie de ce mémoire traitera des avantages de l'utilisation de suites à faible discrétance, type Sobols, pour la sélection des scénarios liés aux facteurs de risques.

Dans la deuxième partie, nous montrons que l'optimisation du choix de scénarios liés aux facteurs de risques techniques permet une convergence plus rapide du BEL au taux garanti dans le cadre du modèle de *flexing*.

Dans le cadre du LSMC, les trajectoires des simulations primaires étant des combinaisons de scénarios liés aux facteurs de risques techniques et financiers, nous étudierons dans la troisième partie plusieurs méthodes d'association des scénarios liés à ces deux types de facteurs de risques.

¹ Le « flexing » est une approche de modélisation actif-passif par laquelle les flux d'un modèle de projection déterministe du passif sont ensuite retraités par un modèle actif-passif stochastique qui ajuste ces flux pour prendre en compte les scénarios économiques et les actions des assurés (rachats dynamiques) et les *management rules*.

Lorsque des méthodes de type « flexing » sont utilisées, deux jeux de *model points* interviennent :

- une projection dans un modèle de passif déterministe fondée sur des *model points* avec une granularité fine ;
- une projection dans un modèle actif-passif (ALM) à partir de flux pré-projetés et agrégés à une maille moins fine que dans le modèle déterministe.

1. Cadre réglementaire

1.1 DEFINITION DE LA SOLVABILITE

La solvabilité d'une entreprise d'assurance est sa capacité à respecter les engagements contractés auprès de ses assurés, et plus généralement, de tout créancier. Elle représente le « matelas de sécurité », au-delà des provisions techniques suffisantes, nécessaires pour faire face à la survenance de scénarios défavorables susceptibles d'affecter l'actif ou le passif du bilan dudit assureur.

La solvabilité d'un assureur dépend d'une part des garanties et protections offertes aux assurés et d'autre part des ressources, c'est-à-dire les fonds propres et investissements, dont il dispose pour faire face à l'incertitude inhérente à son activité.

Bien sûr, l'assureur constitue dans son bilan des provisions techniques en représentation des engagements pris envers les assurés. Cependant, leur évaluation repose sur des hypothèses, des méthodes statistiques et actuarielles qui ne peuvent garantir qu'elles suffiront à couvrir l'ensemble des prestations en cas d'évènements imprévus. Les entreprises d'assurance doivent donc détenir nécessairement un certain montant de ressources supplémentaires, appelé marge de solvabilité.

1.2 DE SOLVABILITE I A SOLVABILITE II

Les premières réglementations européennes en matière de solvabilité datent de 1973 pour l'assurance non-vie et de 1979 pour l'assurance vie. Les directives « solvabilité I » adoptées en février 2002 reposent sur les grands principes suivants :

- Des provisions techniques calculées de manière prudente ;
- Des actifs sûrs, diversifiés, liquides et rentables ;
- Un niveau de fonds propres minimum calculé de manière « forfaitaire », comme une fraction des éléments considérés comme risqués du bilan (provisions techniques) ou du compte de résultats (primes).

Cependant, les provisions techniques et les primes ne sont pas à elles seules de bons indicateurs du risque car :

- Le système pénalise l'assureur prudent qui provisionne davantage et immobilise ainsi plus de fonds propres ;
- Les risques de l'actif et la structure des placements de l'entreprise ne sont pas pris en compte ;
- Les méthodes d'atténuation des risques (diversification, transfert ou couverture des risques) ne sont pas prises en compte ;
- Les actifs et les passifs sont évalués à leur coût historique, ce qui ne reflète pas les risques et la valeur des avoirs et engagements.

La Directive Solvabilité II a vocation à corriger les insuffisances de Solvabilité I.

1.3 RAPPELS DU DISPOSITIF SOLVABILITE II

Le projet Solvabilité 2, vise à harmoniser et à renforcer la réglementation prudentielle du secteur de l'assurance de l'espace économique européen. Suite au vote du Parlement européen, le nouveau régime prudentiel Solvabilité II est entré en vigueur au 1^{er} Janvier 2016.

La réforme repose sur deux directives et des mesures transitoires :

- La directive Solvabilité 2 (directive 2009/138/CE) fournit un nouveau cadre prudentiel aux organismes d'assurance et de réassurance (relevant du code des assurances, Institutions de Prévoyance du livre 9 du code de la Sécurité Sociale, et Mutuelles du livre 2 du code de la Mutualité).
- La directive Omnibus 2 adoptée par le Parlement européen le 11 mars, a pour objectif premier d'adapter Solvabilité II aux pouvoirs d'EIOPA en matière de régulation et, au sein des collèges, en matière de médiation contraignante. Par surcroît, la directive prévoit des transitoires importantes (fonds propres, SCR action, etc.) pour faciliter le passage de Solvabilité I à Solvabilité II. Toutefois, le cœur des modifications apportées par la directive concerne les mesures regroupées dans le paquet « branches longues ». En revoyant la valorisation économique du bilan (« *full fair value* »), ce paquet a pour principal effet de diminuer le montant des provisions techniques des organismes.

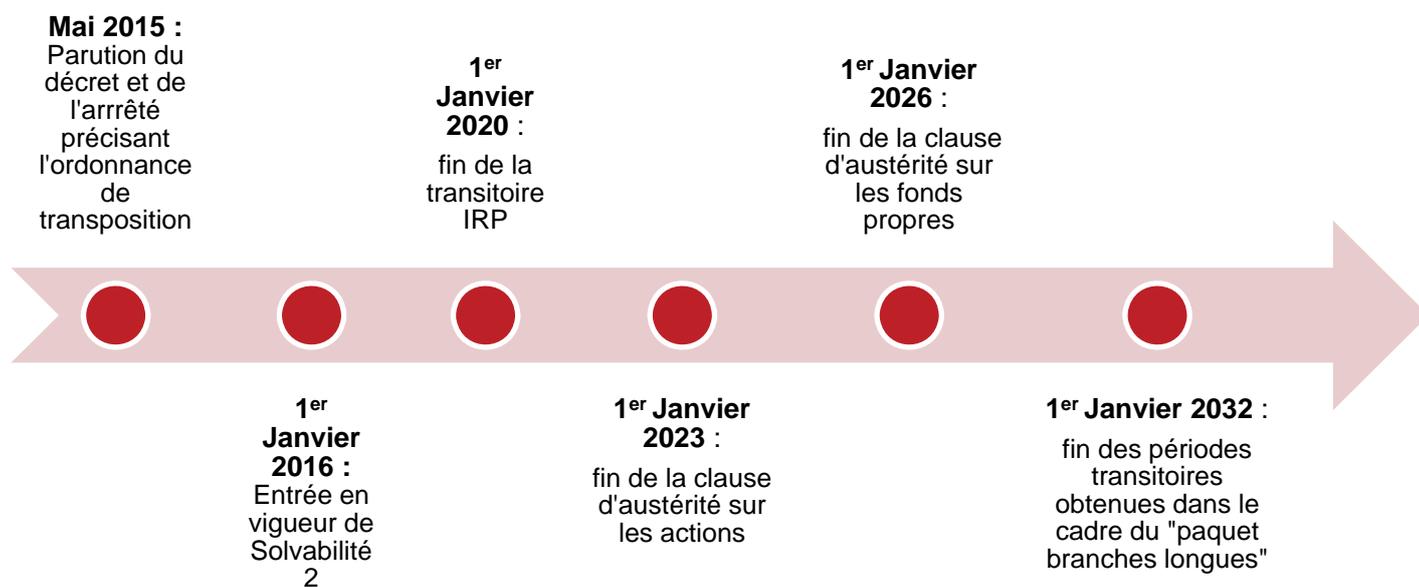


Figure 1 : Calendrier d'application de Solvabilité II

Ce projet suit la structure en niveaux de l'architecture Lamfalussy caractérisé par 4 niveaux de textes. Les textes de niveau 1 sont des directives adoptées par le Conseil Européen et le Parlement fixant des principes que viendront détailler des mesures de niveau 2, dites mesures d'application, adoptées par la Commission Européenne sous le contrôle du Conseil et du Parlement. Les textes de niveau 3 sont des recommandations du CEIOPS (*Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*), devant permettre de pouvoir comparer les pratiques de contrôle pour en améliorer la

convergence au sein de l'Europe. Assurant une cohérence à l'ensemble, le niveau 4 porte sur le contrôle renforcé des infractions potentielles par la Commission Européenne. Elle peut ouvrir une procédure à l'encontre d'un Etat membre soupçonné d'infraction à la loi communautaire.

1.4 LES PILIERS DE LA DIRECTIVE SOLVABILITE II

Le dispositif Solvabilité II vise à améliorer la connaissance, l'évaluation et la gestion des risques auxquels les assureurs et réassureurs sont exposés. Elle repose sur les trois piliers suivants :

- **Le pilier 1** est relatif aux exigences quantitatives à travers l'évaluation économique du bilan, la détermination du besoin en capital et des capitaux propres disponibles.
- **Le pilier 2** s'intéresse aux exigences qualitatives en mettant en place un système de gouvernance des risques et un contrôle prudentiel.
- **Le pilier 3** concerne la discipline de marché à travers le reporting prudentiel et la communication au marché.

Le schéma ci-dessous reprend ces trois piliers ainsi que leur objectif :



Figure 2 : Les 3 piliers de la Directive Solvabilité II

1.5 BILAN ECONOMIQUE

La comparaison des bilans sous Solvabilité I (partie de gauche du graphe ci-dessous) et sous

Solvabilité II (partie de droite du graphe ci-dessous) permet de mettre en évidence trois différences majeures :

- La valorisation de l'actif,
- L'évaluation des provisions techniques,
- La détermination des fonds propres

Les entreprises d'assurance et de réassurance valorisent leurs actifs et leurs passifs en se fondant sur l'hypothèse d'une continuité d'exploitation de l'entreprise.

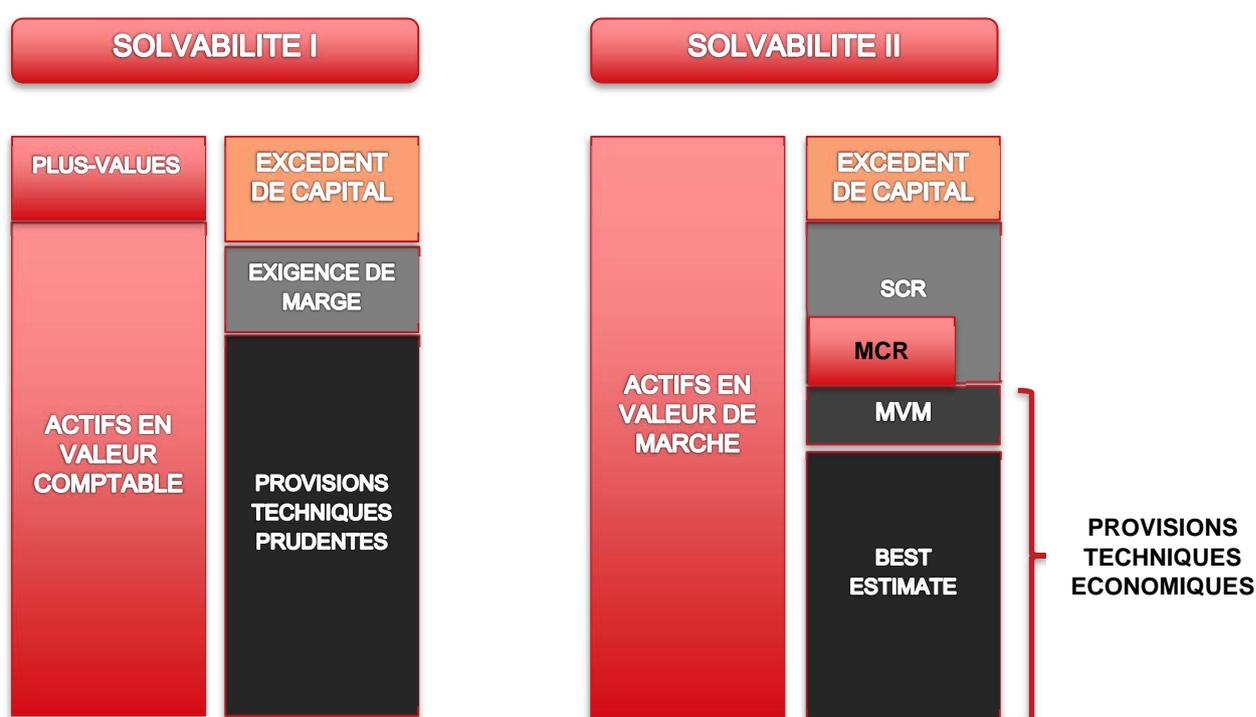


Figure 3 : Du bilan comptable « Solvabilité I » au bilan économique « Solvabilité II »

1.5.1 Valorisation de l'actif

Contrairement à la norme Solvabilité I qui imposait une comptabilisation des actifs au coût historique, la nouvelle directive Solvabilité II impose une comptabilisation en valeur de marché.

Dans l'approche Solvabilité II, l'actif du bilan est valorisé à la valeur à laquelle il serait possible de le vendre dans l'immédiat, étant donné les conditions des marchés de capitaux.

Lorsque l'évaluation au prix de marché est impossible, il y a lieu d'utiliser des techniques d'évaluation par référence à un modèle qui doit utiliser, tant que faire se peut, des paramètres observables.

Dans ce cadre-là, la latitude est d'autant plus importante que l'actif est complexe. Il est possible de

tenir compte des instructions de l'IASB².

1.5.2 Provisions techniques

Selon l'article 77 de la Directive, les provisions techniques doivent être évaluées de façon cohérente avec le marché et correspondent au montant qu'une entreprise dite de référence serait amenée à demander pour reprendre et honorer les engagements d'assurance, dans une hypothèse de transfert.

Les provisions sont donc calculées comme la somme de la meilleure estimation des flux futurs (le BEL) et d'une marge pour risque, sauf si l'engagement est totalement répliquable par des instruments financiers. Dans ce cas, les provisions sont calculées comme un tout sans marge pour risque.

1.5.2.1 Best Estimate of Liabilities (BEL)

L'article 77 de la Directive définit la *best estimate* comme « la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (*valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs*), estimée sur la base de la courbe des taux sans risques pertinents ».

L'expression mathématique du *best estimate* est la suivante :

$$BE = E^{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{P}} \left(\sum_{t \geq 1} (\text{flux passif})_t * \delta_t \right)$$

Où :

- \mathbb{P} : probabilité historique
- \mathbb{Q} : probabilité risque neutre
- δ_t : facteur d'actualisation pour la t-ième période
- $(\text{flux passif})_t$: flux de passif pour la t-ième période (frais, sinistres, primes, ...)

1.5.2.2 Marge pour risque (Market Value Margin - MVM)

La marge pour risque s'interprète comme le montant de provisions complémentaires au *best estimate* calculé de façon à ce que le montant total de provisions inscrit au bilan corresponde à celui qu'exigerait une entité de référence pour honorer les engagements à la charge de l'assureur.

Il s'agit donc d'une marge de prudence dans le calcul des provisions techniques, liée au fait que les risques techniques ne sont pas échangeables sur un marché liquide et complet.

L'évaluation de la marge pour risque s'effectue via la méthode dite du « coût du capital ». Elle est égale au produit du capital requis et du coût du capital. Le capital requis utilisé contient uniquement les SCRs inhérents au portefeuille d'assurance auxquels s'ajoutent le risque opérationnel et le risque de défaut de contrepartie concernant les provisions techniques cédées.

² IASB est l'acronyme de International Accounting Standards Board, c'est le comité exécutif de l'IASCF (International Accounting Standards Committee Foundation), organisme qui supervise le normalisateur comptable international.

$$MVM = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r_t)^t}$$

Où :

- CoC représente le taux de coût du capital ;
- SCR(t) représente le capital de solvabilité requis après t années ;
- r_{t+1} représente le taux sans risque pour l'échéance t+1 années.

1.5.3 Capital de solvabilité requis (ou *Solvency Capital Requirement - SCR*)

La définition du capital dans l'environnement Solvabilité II repose sur une vision économique du bilan de la compagnie.

Deux niveaux de seuils pour les fonds propres sont définis par la directive Solvabilité II :

- Le **MCR** (*Minimum Capital Requirement*) correspond au niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique.
- Le **SCR** (*Solvency Capital Requirement*) représente l'exigence de capital. Il correspond au montant de fonds propres à détenir pour limiter la probabilité de ruine à un an à 0,5%. Mathématiquement, le SCR se traduit ainsi :

$$\mathbb{P}(FP_1 < 0) \leq 0,5\%$$

Où :

- FP_1 représente le montant des fonds propres issus du bilan économique
- \mathbb{P} : probabilité historique

Notons que le MCR est compris dans le corridor suivant :

$$25\% SCR \leq MCR \leq 45\% SCR$$

Le calcul du SCR tient compte du profil de risque de l'assureur ou du réassureur et s'effectue : soit *via* une formule standard dont le calibrage est identique pour tous les acteurs européens, soit par un modèle interne développé par l'assureur ou le réassureur et validé par le superviseur, soit par une combinaison de ces deux méthodes.

Dans le cas de la formule standard, c'est une approche modulaire qui est retenue. L'organisme évalue la perte subie en cas d'évènement défavorable lié à différents facteurs de risques.

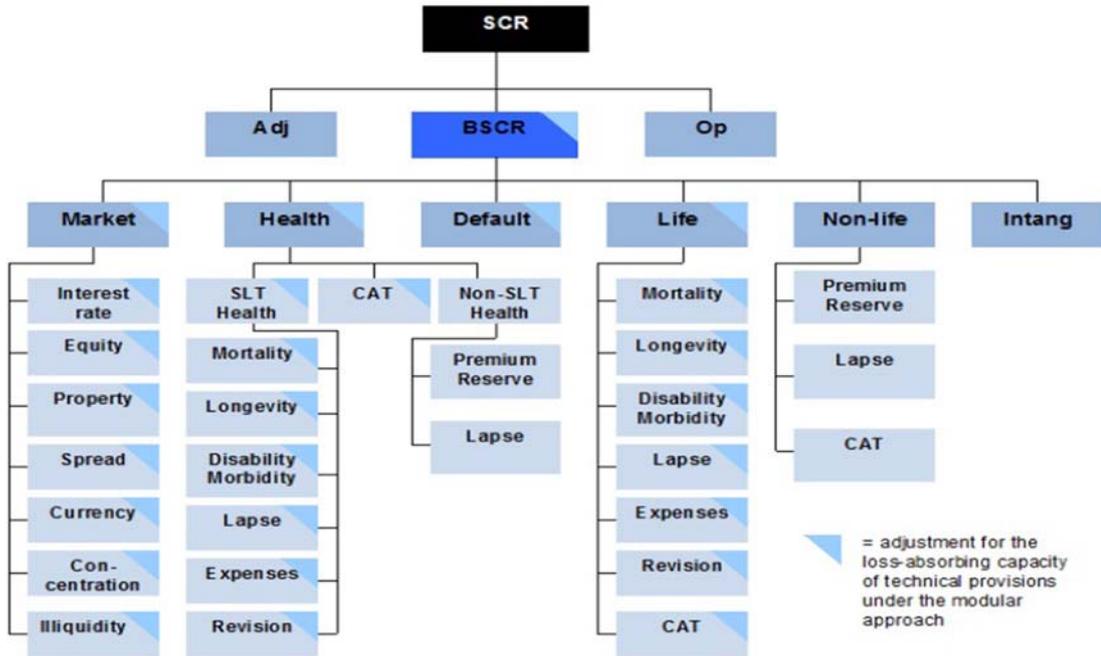


Figure 4 : Approche modulaire formule standard

Le besoin en capital pour chacun des sous-module de risque est obtenu en mesurant l’impact d’un choc (de souscription, financier, ...) sur l’Actif Net³. Le SCR correspond à la différence d’Actif Net entre la vision centrale et la vision choquée. La figure 5 supra illustre ce mécanisme.

³ Actif Net ou NAV (Net Asset Value) : différence entre la valeur de marché des actifs et le *best estimate*

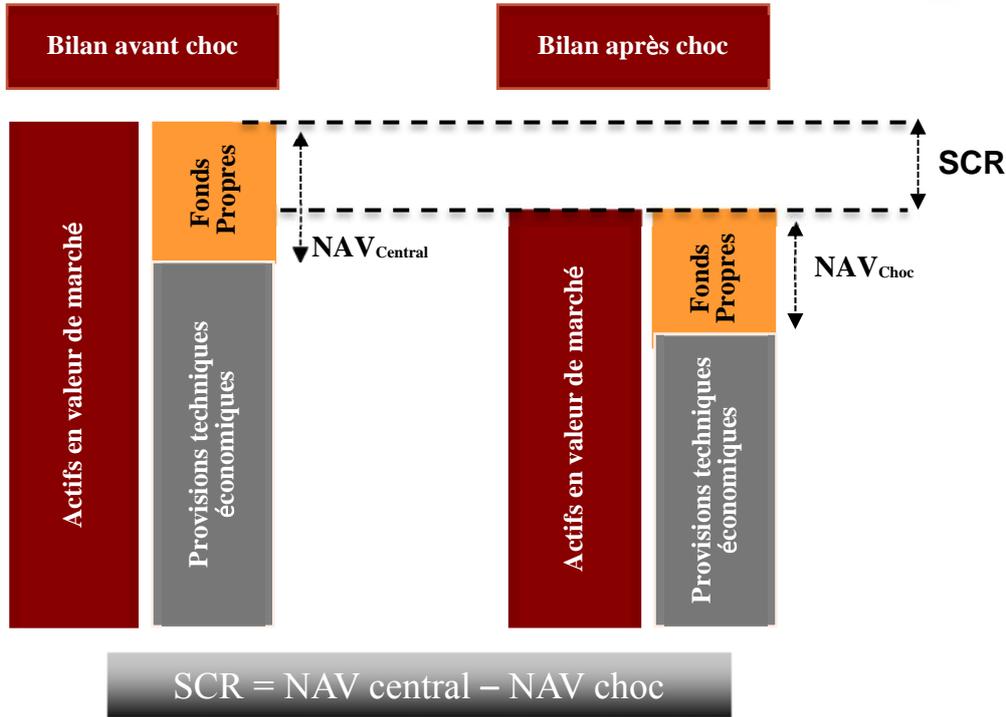


Figure 5 : Approche Delta NAV

Pour tenir compte de la probabilité faible de réalisation simultanée de tous ces événements, la formule standard introduit des corrélations entre ces facteurs de risque et permet ainsi à l'organisme de constater des bénéfices de diversification.

Les besoins en capital de chacun des sous-modules de risques sont agrégés pour déterminer le SCR du module de risque considéré (agrégation intra-modulaire). A leur tour, les résultats de ces modules sont agrégés (agrégation inter-modulaire) pour obtenir le BSCR. C'est donc une approche « *bottom-up* » qui est proposée en Formule Standard pour l'agrégation des risques.

Les tableaux ci-dessous présentent les liens de corrélations entre les sous-modules des risques Vie et de marché.

	Mortalité	Longévité	Incapacité	Rachat	Frais	Révision	Catastrophe
Mortalité	1						
Longévité	-0,25	1					
Incapacité	0,25	0	1				
Rachat	0	0,25	0	1			
Frais	0,25	0,25	0,5	0,5	1		
Révision	0	0,25	0	0	0,5	1	
Catastrophe	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	1

Table 1 : Matrice de corrélation - SCR Vie

	Taux	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Prime d'illiquidité
Taux	1						
Action	0	1					
Immobilier	0	0,75	1				
Spread	0	0,75	0,5	1			
Change	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Prime d'illiquidité	0	0	0	-0,5	0	0	1

Table 2 : Matrice de corrélation - SCR marché (hausse des taux)

	Taux	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Prime d'illiquidité
Mortalité	1						
Longévité	0,5	1					
Incapacité	0,5	0,75	1				
Rachat	0,5	0,75	0,5	1			
Frais	0,25	0,25	0,25	0,25	1		
Révision	0	0	0	0	0	1	
Catastrophe	0	0	0	-0,5	0	0	1

Table 3 : Matrice de corrélation - SCR marché (baisse des taux)

Enfin, pour refléter au mieux la réalité économique, la perte brute observée par l'organisme (BSCR ou SCR de base) peut encore être atténuée par deux effets avant l'obtention du SCR final :

- L'absorption par les impôts différés : l'imputation de la perte au résultat fiscal conduira in fine à payer moins d'impôts dans le futur que ceux qui avaient été comptabilisés au bilan initial ;
- L'absorption par la participation aux bénéfices : il s'agit de la capacité de l'organisme à transférer une partie de sa perte aux assurés via une moindre participation aux bénéfices que celle qu'il avait escomptée avant le choc ;

Le SCR est obtenu par la formule suivante :

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{op}$$

Où :

- **Adj** : l'ajustement fait pour prendre en compte la capacité d'absorption des pertes par réduction des bénéfices discrétionnaires et par les impôts différés
- **SCR_{op}** : le capital économique lié au risque opérationnel
- **BSCR** : le SCR de base calculé à l'aide d'une matrice de corrélation entre les différents modules de risque de la cartographie ci-dessous.

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \mu_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

Où :

- **SCR_i** est le capital requis pour le risque i,
- **μ_{i,j}** est le coefficient de corrélation entre les capitaux des risques i et j

1.5.4 Fonds propres économiques

Les fonds propres des entreprises d'assurances seront classés en trois niveaux (« tiers »), selon :

- leur qualité évaluée au regard de leur disponibilité,
- de leur degré de subordination,
- de leur durée ou permanence.

Une première distinction, assez classique, est faite entre les « **fonds propres de base** » et les « **fonds propres auxiliaires** ». Les **fonds propres de base** sont composés :

- de l'excès de l'actif sur le passif,
- et des passifs subordonnés.

Les fonds propres auxiliaires comprennent divers éléments autres que les fonds propres de base, qui peuvent être appelés pour absorber les pertes.

Le classement en trois niveaux des fonds propres s'opère en fonction des caractéristiques suivantes, outre le fait qu'ils doivent avoir une durée suffisante :

- **Tier 1** : il s'agit de la partie des fonds propres de base dont la caractéristique est qu'ils sont disponibles de façon permanente pour absorber des pertes tant en cas de liquidation qu'en continuité d'exploitation.
- **Tier 2** : il s'agit des fonds propres de base ou auxiliaires dont la caractéristique est qu'ils sont capables d'absorber des pertes en cas de liquidation de l'entreprise mais pas en continuité d'exploitation.
- **Tier 3** : il s'agit de fonds propres qui ne répondent pas aux caractéristiques des deux premiers niveaux.

Par ailleurs, dans les orientations (textes de niveau 2), des limites quantitatives sont imposées pour déterminer le montant des fonds propres éligibles en couverture respectivement du SCR :

- Le montant éligible des éléments de niveau 1 doit être égal à la moitié au moins du SCR ;
- Le montant éligible des éléments de niveau 3 doit être inférieur à 15% du SCR;
- La somme des montants éligibles des éléments de niveaux 2 et 3 ne peut dépasser 50% du SCR.

En outre, des limites sont également imposées sur le Minimum de Capital Requis (MCR) :

- Le montant éligible des éléments de niveau 1 est égale à 80% au moins du MCR;
- Le montant éligible des éléments de niveau 2 ne peut dépasser 20% du MCR.

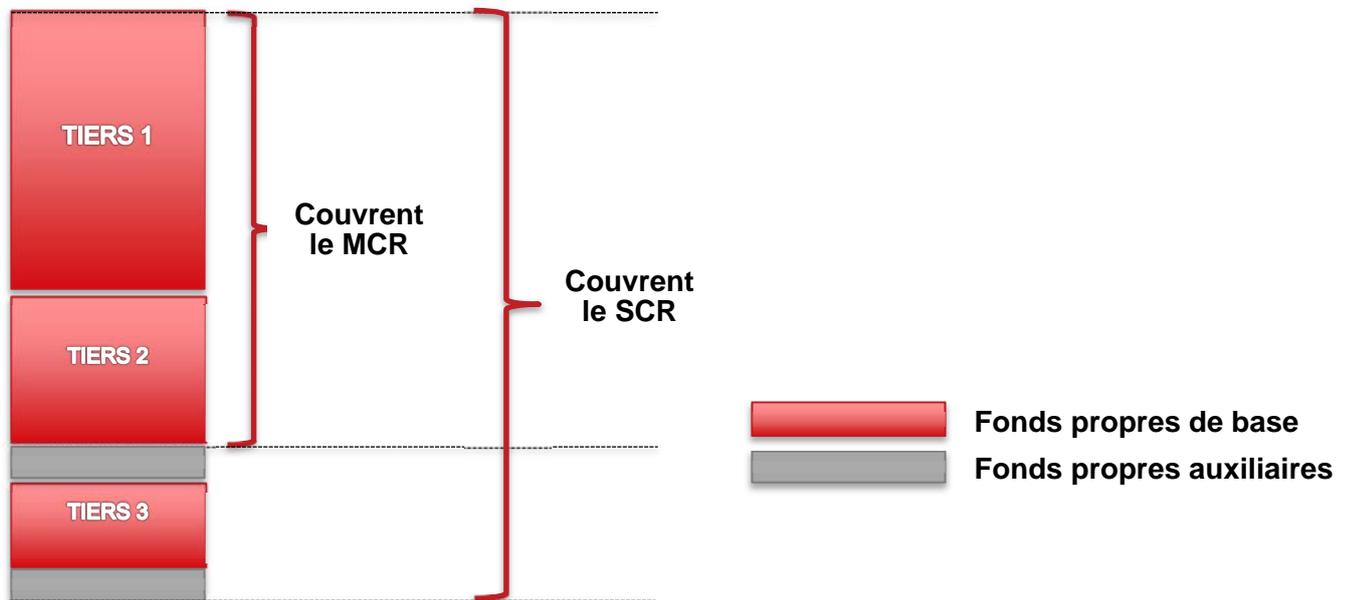


Figure 6 : Eligibilité des fonds propres

2. Formule Standard et Modèles Internes

L'un des objectifs poursuivis par la réforme Solvabilité 2 est d'encourager les organismes à mieux connaître et à évaluer leurs risques, notamment en adaptant les exigences réglementaires aux risques que les entreprises encourent dans leur activité. La nouvelle réforme ne vise plus uniquement les risques traditionnels assurantiels mais intègre les risques tels que les risques de marché, risques de crédit ou les risques opérationnels. Les corrélations entre risques deviennent également de nouveaux critères à prendre en compte.

Le capital de solvabilité requis ou SCR est défini comme la *Value-at-Risk* à 99,5% sur un horizon de un an. C'est donc le montant de fonds propres que doit détenir l'assureur pour limiter sa probabilité de ruine à un an à 0,5%.

Pour le calcul des exigences de capital, les organismes d'assurance ont le choix entre plusieurs options :

- Soit ils utilisent une formule standard calibrée uniformément sur le marché européen ;
- soit ils sollicitent auprès de l'autorité de contrôle l'utilisation d'un modèle interne complet ;
- soit par une combinaison de ces deux méthodes, où l'application de méthodologies et de paramètres du modèle interne s'appliqueraient seulement à une partie des modules de risques. On parle alors de modèle interne partiel.

2.1 FORMULE STANDARD

La formule standard est un modèle d'évaluation de l'exigence en capital reposant sur des hypothèses et des méthodes fixées par la Directive et la Commission Européenne ; et communes à l'ensemble des acteurs du marché. C'est la méthode par défaut pour le calcul du SCR. Son application repose sur le principe d'agrégation de besoin en capital à partir d'une matrice de corrélation (Cf. section 1.5.3).

Elle présente pour avantage une relative simplicité et un traitement harmonisé pour tous les acteurs. Elle permet également la comparaison de la situation de chaque acteur.

Paradoxalement cet avantage peut aussi être vu comme la principale critique de la formule standard. En effet, son caractère « standard », implique qu'il ne reflète pas les risques propres à l'organisme puisque certaines calibrations, fondées sur une moyenne européenne de l'état du marché, peuvent se révéler pénalisantes et inappropriées.

Elle peut ainsi apparaître inadapté pour le suivi et le pilotage des risques et conduire à des décisions inadéquates.

2.2 MODELES INTERNES

2.2.1 Modèles internes complets

Contrairement à la formule standard, le modèle interne permet aux organismes, en tenant compte des risques inhérents à leur activité, de retracer une image réaliste de leur profil de risque et de fournir des indicateurs cohérents sur sa santé financière. C'est un modèle actuariel construit à partir de l'expérience de l'entreprise, des opinions des experts et de données historiques propres à cette entreprise.

Le modèle interne permet de calculer le SCR de la compagnie au plus juste des risques qu'elle encourt. Cette précision offre par exemple la possibilité d'optimiser les processus d'allocation de capital. De manière générale, il contribue à une analyse quantitative et qualitative plus exhaustive des risques auxquels est exposée la compagnie, permettant notamment de prendre des décisions de gestion plus appropriées (couverture, stratégie de souscription ...). Il conduit souvent à un SCR inférieur à celui obtenu par la formule standard ; cette dernière se révélant trop rigide.

Le modèle interne apporte donc des avantages compétitifs à l'organisme en termes de :

- pilotage prospectif du besoin en capital,
- allocation des fonds propres,
- connaissance et maîtrise des risques et de leurs impacts,
- amélioration de la rentabilité des activités et de la compétitivité des produits,
- réactivité face à des changements non anticipés,
- communication à destination de la communauté financière et des agences de notation, ...

C'est donc l'outil le mieux adapté pour la réalisation du processus ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*).

Toutefois, avant toute utilisation par l'entreprise de son modèle interne pour évaluer son SCR, celui-ci devra être validé par l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution. Les principaux critères de validation sont les suivants :

- la qualité statistique,
- le calibrage,
- la validation,
- et la documentation.

2.2.2 Modèle interne partiel

Développer un modèle interne complet peut s'avérer coûteux et complexe pour l'entreprise, soit à cause d'un manque de ressources techniques soit par manque de données fiables pour modéliser des risques, etc...

Le modèle interne partiel est une solution intermédiaire entre la formule standard et le modèle interne complet. Il permet, en partant de la cartographie de la formule standard, de remplacer la modélisation en formule standard d'un ou de plusieurs modules de risques par une modélisation en modèle interne.



Il est cependant soumis aux mêmes contraintes que le modèle interne en termes de validation par le superviseur.

3. Méthodes de simulations

La directive solvabilité II recommande l'utilisation de la *Value at Risk* VaR 99,5% à horizon 1 an comme mesure de risque pour le calcul du SCR. Elle définit donc le capital économique comme étant le quantile à 99,5% de la distribution des fonds propres économiques de l'entreprise dans un an.

Dans le cadre de l'assurance vie, la distribution de fonds propres est complexe à obtenir à cause du nombre important de facteurs de risques et de la sophistication des interactions Actif/Passif qui découlent principalement des mécanismes de participation aux bénéficiaires et des possibilités de rachats offertes aux assurés. Ces mécanismes peuvent se comprendre comme des options et des garanties financières proposées aux assurés dont la valeur temps doit être évaluée pour déterminer le Passif de l'entreprise et cette évaluation ne peut se faire que par le biais de simulations stochastiques en univers risque-neutre.

Dans cette partie nous présenterons différentes méthodes d'évaluation de l'exigence de capital en rappelant leur principe puis en exposant les forces et les faiblesses de chacune d'entre elles.

3.1 SIMULATIONS DANS LES SIMULATIONS (SDS)

La méthode dite des "Simulations dans les Simulations" (SdS) est à ce jour, pour les portefeuilles d'assurance vie, la méthode la plus conforme aux critères de la directive Solvabilité II pour l'évaluation du capital économique.

3.1.1 Principe

La méthode SdS consiste à effectuer deux séries de simulations, d'où le nom de « simulation dans les simulations ».

- Le premier type de simulations, appelées simulations primaires permet de traduire l'évolution entre les dates $t=0$ et $t=1$ des différentes variables économiques. Ces simulations sont réalisées en univers monde-réel (basé sur les observations historiques).
- Le second type de simulations, appelées simulations secondaires est généré conditionnellement aux réalisations de la première période. Ces simulations secondaires permettent de valoriser le bilan économique de l'assureur à un an pour chaque réalisation primaire et ainsi obtenir une distribution des valeurs de fonds propres de l'assureur. Elles sont effectuées en univers Risque Neutre, c'est-à-dire de manière cohérente avec les prix observés sur le marché à une date donnée afin de calculer les prix de manière « *Market Consistent* ».

Le schéma suivant résume cette approche :

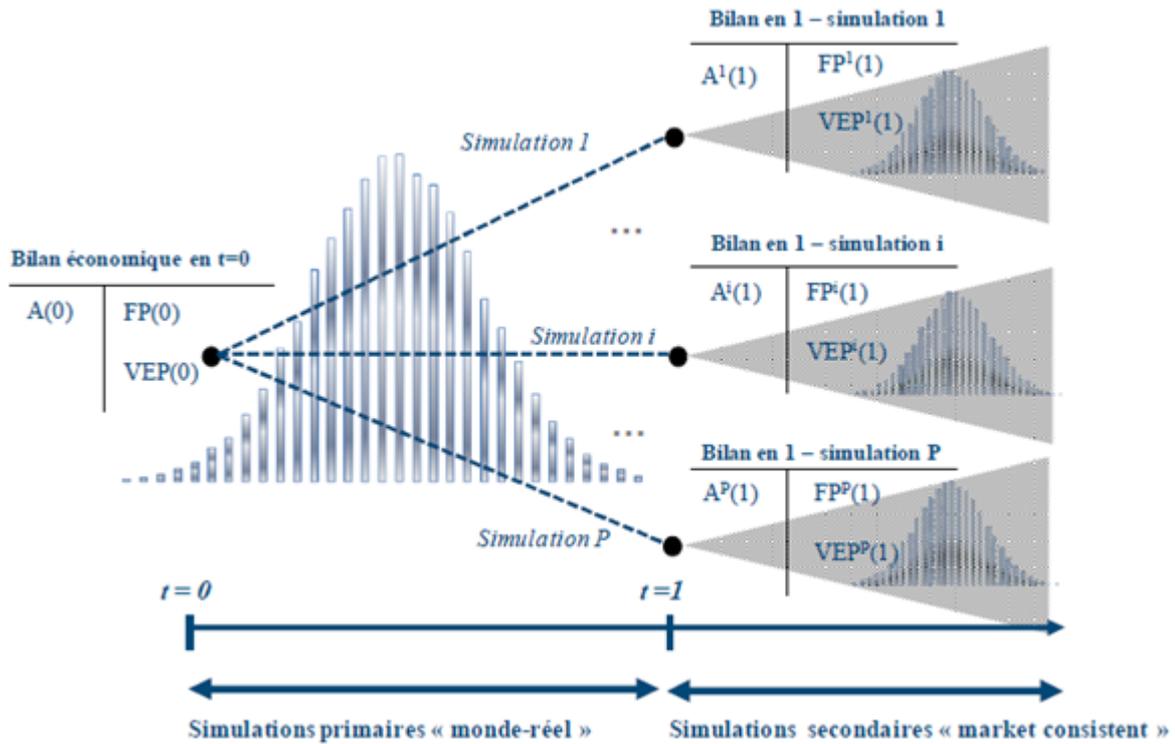


Figure 7 : Approche SdS

Introduisons les notations suivantes afin de formaliser les calculs effectués dans l'approche SdS :

- $R_u^{p,s}$ le résultat à la date $u > 1$ pour la simulation primaire $p \in \{1, \dots, P\}$ et secondaire $s \in \{1, \dots, S\}$
- R_1^p le résultat de la première période pour la simulation primaire p ;
- $P_u^{p,s}$ le cash-flow de passif de la date $u > 1$ pour la simulation primaire p et secondaire s ;
- $\delta_u^{p,s}$ le facteur d'actualisation de la date $u > 1$ la simulation primaire p et secondaire s ;
- δ_1^p le facteur d'actualisation de la première période pour la simulation primaire p ,
- \mathcal{F}_1^p l'information de première année contenue dans la simulation primaire p ,
- FP_1^p les fonds propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire p ,

On définit les fonds propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire p par la formule suivante :

$$FP_1^p = R_1^p + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} R_u | \mathcal{F}_1^p \right]$$

La détermination des fonds propres économiques pour toutes les simulations primaires permet d'obtenir la distribution complète (cf. figure 8 ci-dessous).

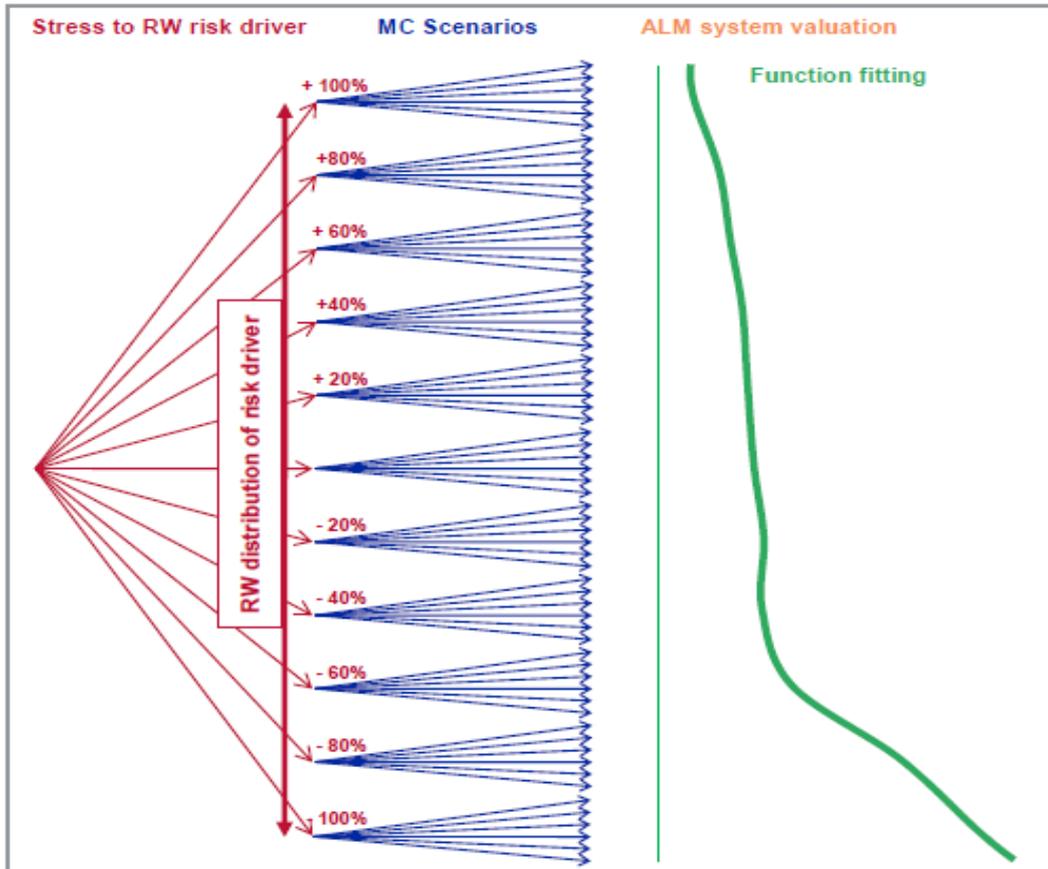


Figure 8 : Illustration de l'approche SdS

Le capital économique est le niveau de fonds propres en $t=0$ permettant de satisfaire à la contrainte $\mathbb{P}(FP_1 \leq 0) = 0,5\%$

On en déduit alors la formule du SCR défini par la formule suivante :

$$SCR = FP_0 - P(0,1) \times VAR_{99,5\%}(FP_1)$$

Où $P(0,1)$ est le prix en 0 d'une obligation zéro-coupon de maturité 1 an.

3.1.2 Limites de l'approche

L'approche des Simulations dans les Simulations conduit à des temps de calculs conséquents qui peuvent compromettre son applicabilité au sein de certaines compagnies. Il apparaît ainsi nécessaire pour un assureur de développer des méthodes qui permettraient de diminuer significativement le nombre de simulations requises tout en arrivant à un résultat proche de celui obtenu par une méthode SdS.

Les alternatives à la méthode SdS dont disposent les assureurs aujourd'hui sont les suivantes :

- Les méthodes de réduction du nombre de simulation (Devineau – Loisel),
- Les « replicating portfolios »

- Les approches « Curve Fitting »,
- Les approches « Least Square Monte Carlo »

3.2 ALGORITHME D'ACCELERATION DES SDS DE DEVINEAU-LOISEL

Laurent Devineau et Stéphane Loisel sont à l'origine de cette technique développée en 2009, qui consiste à réduire de manière significative le nombre de simulations effectuées dans le cadre du SdS.

En effet, dans le cadre de Solvabilité II, la probabilité de ruine à 1 an est fixée à 0,5%, ce qui implique que seule la queue de distribution des fonds propres économiques est utile pour la détermination du capital économique.

3.2.1 Principe

Le principe de l'accélérateur SdS est simple car il repose sur la sélection des scénarii primaires les plus adverses (les « pires » trajectoires) en fonction des facteurs de risques choisis et de n'appliquer le principe des simulations dans les simulations uniquement à ces trajectoires adverses afin de réduire les temps de calcul.

L'enjeu de cette méthodologie est donc double :

- Prédéterminer les pires scénarios,
- S'assurer que ces scénarios prédéterminés conduisent aux pires niveaux de fonds propres.

Laurent Devineau et Stéphane Loisel ont mis en place un automate de calcul décidant de l'exécution de simulations primaires en fonction de leur niveau de risque. En outre, cet automate associe à chaque scénario de première période une norme traduisant son niveau d'adversité puis effectue les simulations par ordre de norme décroissant jusqu'à ce qu'il y ait stabilité des N « pires valeurs » des fonds propres économiques (cf. figure 10).

3.2.2 Mode opératoire

Les étapes clés résumant la présente méthodologie sont présentées infra :



L'algorithme prend fin lorsque les N « pires valeurs » des fonds propres économiques sont stabilisées. Ensuite sont réalisées les simulations sur ces trajectoires sélectionnées. Les schémas suivants illustrent les étapes décrites précédemment :

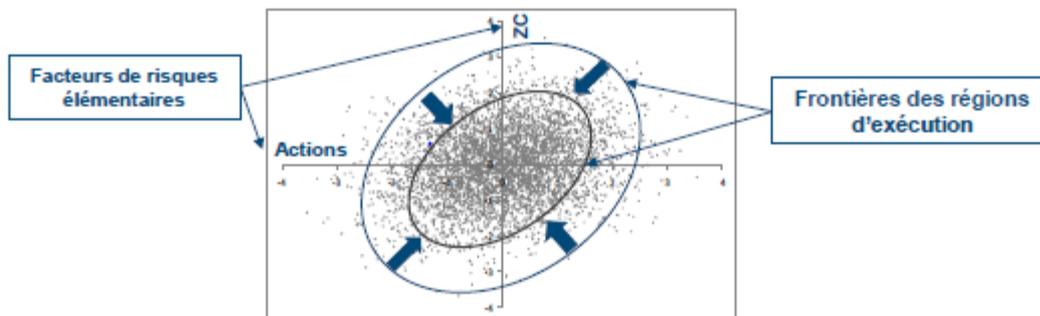


Figure 9 : Mise en œuvre de l'automate - itérations successives sur les frontières d'exécution

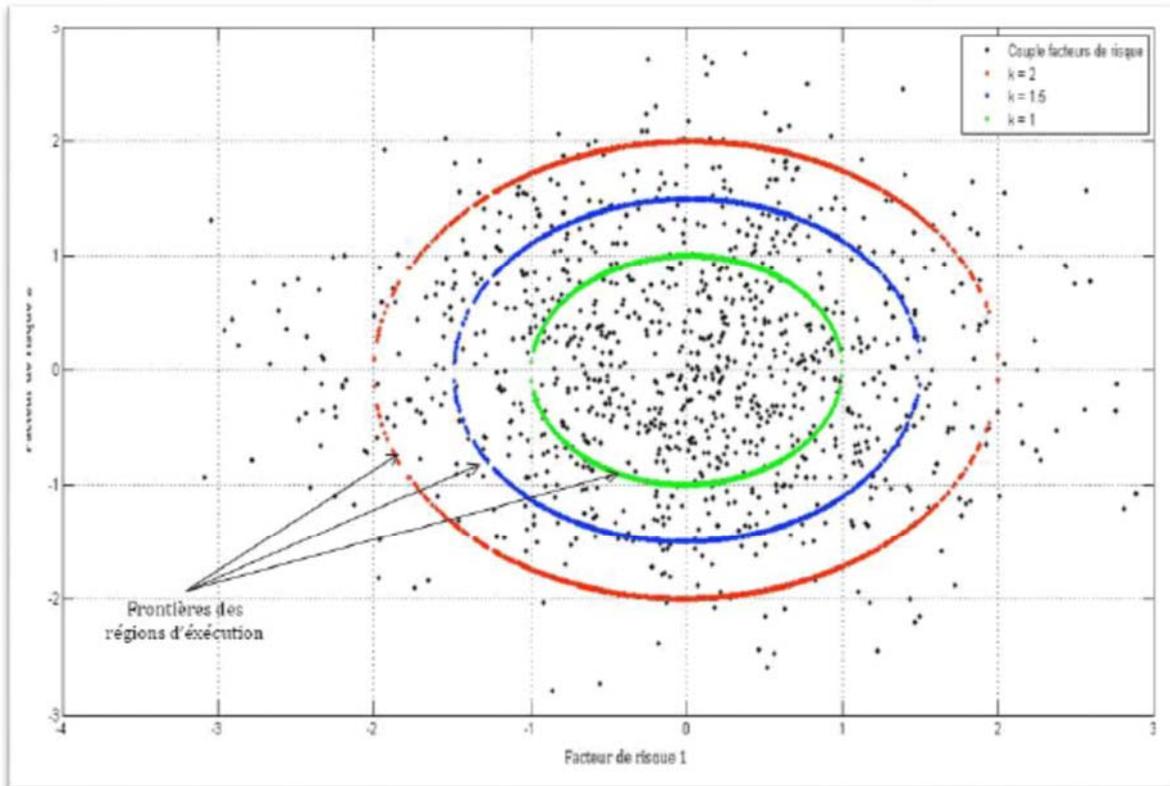


Figure 10 : Couple de facteurs de risque et frontière d'exécution

3.2.3 Avantages et limites de l'approche

Son principal avantage réside dans le fait qu'elle réduit considérablement les temps de calcul et les ressources nécessaires. De plus elle permet de prendre en compte un grand nombre de risques. Puisqu'elle ne régionalise pas l'analyse du risque, elle permet d'intégrer les effets de diversifications résultant de la consolidation des portefeuilles exposés à divers risques.

Cependant, la vitesse de l'algorithme diminue en ajoutant des facteurs de risques supplémentaires, ce qui réduit les gains de temps de traitement, d'où la nécessité de sélectionner soigneusement les facteurs qui véhiculent le plus gros risque pour le portefeuille.

3.3 REPLICATING PORTFOLIOS

3.3.1 Définition et principe

La technique dite des *Replicating Portfolios* est une approche d'obtention de la situation nette à un an, permettant de réduire fortement les temps de projections en estimant les fonds propres à l'aide d'un portefeuille d'actifs reproduisant la valeur économique des passifs de la compagnie.

Une définition des portefeuilles répliquants est proposée par Joachim Oechslin :

« We can define a replicating portfolio as a portfolio of standard financial instruments which matches the cash-flows generated by the liabilities as good as possible. »

Qu'entend-t-on par « *standard financial instrument* » ?

Il s'agit d'instruments financiers simples tels que les obligations, les actions ou instrument dérivés (*swaption*, options vanilles, ...).

Que signifie « *matches* » ?

Deux approches sont envisageables pour reproduire les flux de trésoreries à partir des instruments financiers :

- **Present Value Matching** : les valeurs actualisées en $t=0$ des cash-flows du portefeuille répliquant et du passif sont proches pour chaque scénario,
- **Cash-Flow Matching** : les cash-flows du portefeuille répliquant et du passif sont proches pour chaque scénario et à chaque date.

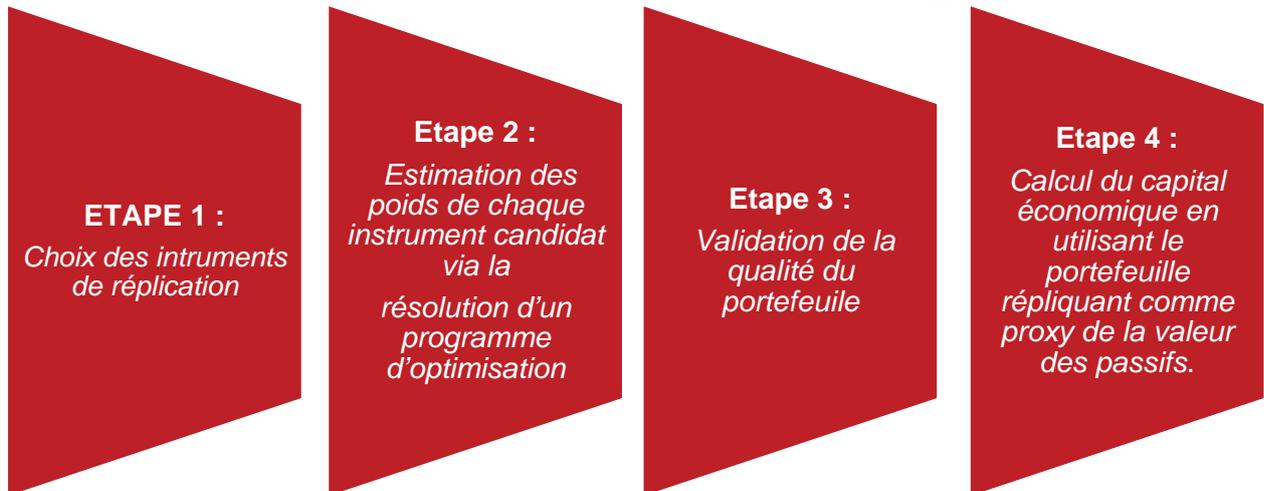
Que signifie « *as good as possible* » ?

Des indicateurs statistiques sont calculer afin d'évaluer la qualité de la réplification (indicateur R^2 , analyse des résidus, ...).

Le principe de la méthode Replicating Portfolio est le suivant :

- Répliquer le passif à l'aide d'un portefeuille d'actifs financiers que l'on peut valoriser à l'aide de formules fermées en $t=0$ et en $t=1$.
- Utilisation de la réplification pour calculer une approximation du *best estimate* et non pas dans un objectif de couverture.
- A l'issue des simulations « monde-réel » on détermine la valeur du portefeuille de réplification et la valeur des fonds propres (NAV).
- Détermination d'un portefeuille qui minimise l'écart quadratique entre la valeur actualisée du passif et celle du portefeuille de réplification. Deux approches possibles : *Present Value Matching* et *Cash-Flow Matching* pour le calibrage du portefeuille.

Le processus de détermination de la distribution de NAV (ou fonds propres) peut être résumée ainsi :



Introduisons les notations suivantes afin de formaliser les calculs à effectuer :

- A_1^p : la valeur de marché de l'actif en fin de première période pour la simulation primaire p,
- VEP_1^p La valeur économique des passifs en fin de première période pour la simulation primaire p,
- FP_1^p Les fonds propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire p,
- RP_1^p La valeur du *Replicating Portfolio* (RP) en fin de première période pour la simulation primaire p,

Les postes du bilan économique en $t=1$, pour la simulation primaire p sont calculés comme suit :

$$VEP_1^p \approx RP_1^p$$
$$FP_1^p = A_1^p - VEP_1^p \approx A_1^p - RP_1^p$$

Cette mise en œuvre peut s'illustrer à l'aide du schéma suivant :

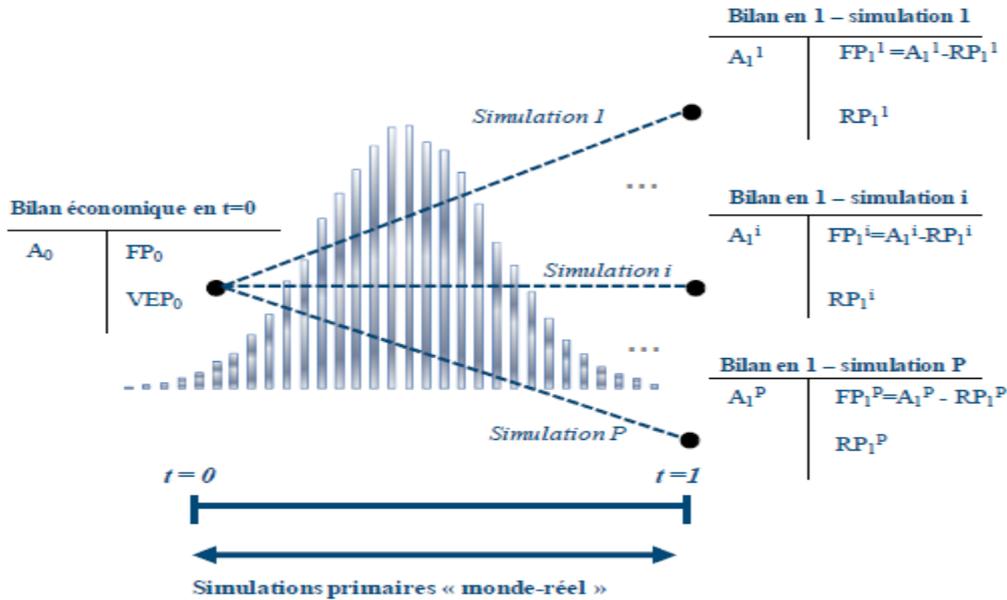


Figure 11: Illustration de l'approche Replicating Portfolio

3.3.2 Limites de l'approche

La présence de risques non couvrables (type risques biométriques, actions du management, risque non vie) invalide l'utilisation de portefeuille de réplication pour certains types de passifs.

Les instruments financiers répliquant doivent être suffisamment simples pour être valorisés en $t=1$ par des formules fermées ou des méthodes numériques peu coûteuses en temps de calcul.

Dans le cas contraire, le bénéfice opérationnel de la méthode sera perdu.

De plus, la réplication des passifs dans le temps n'est de qualité que si les caractéristiques du portefeuille et l'allocation d'actifs sont stables.

3.4 CURVE FITTING

3.4.1 Définition et principe

Le *curve-fitting* est une méthode dite de proxy. Elle consiste à calculer la valeurs des éléments du bilan correspondant à plusieurs scénarios de choc sur les facteurs de risques du portefeuille et à ensuite ajuster une courbe aux résultats obtenus via une fonction d'interpolation (polynomiale, spline, surface multidimensionnelle).

La courbe obtenue sert alors à représenter la distribution complète des fonds propres ou du *best estimate*.

3.4.2 Mode opératoire

Les principales étapes de l'implémentation de la méthode *curve fitting* sont présentées ci-dessous :

Etape 1 : Sélection d'un nombre réduit de simulations primaires

Etape 2 : Application de l'approche SdS aux simulations primaires sélectionnées

Etape 3 : Réalisation d'une interpolation entre les différents points

- Dans un premier temps on détermine le *best estimate* ou la NAV sous un certain nombre de chocs instantanés (simulations primaires) ; le choix des chocs doit être réalisé afin qu'ils couvrent largement les risques pour lesquels on souhaite évaluer la charge en capital.
- On réalise ensuite une interpolation à travers ce nombre limité de points.
- Après interpolation (polynomiale, etc...) on dispose d'une fonction qui nous donne une estimation rapide du *best estimate* ou de la NAV en fonction d'un nombre de *risks drivers* limité.

Ci-dessous l'illustration du processus défini supra :

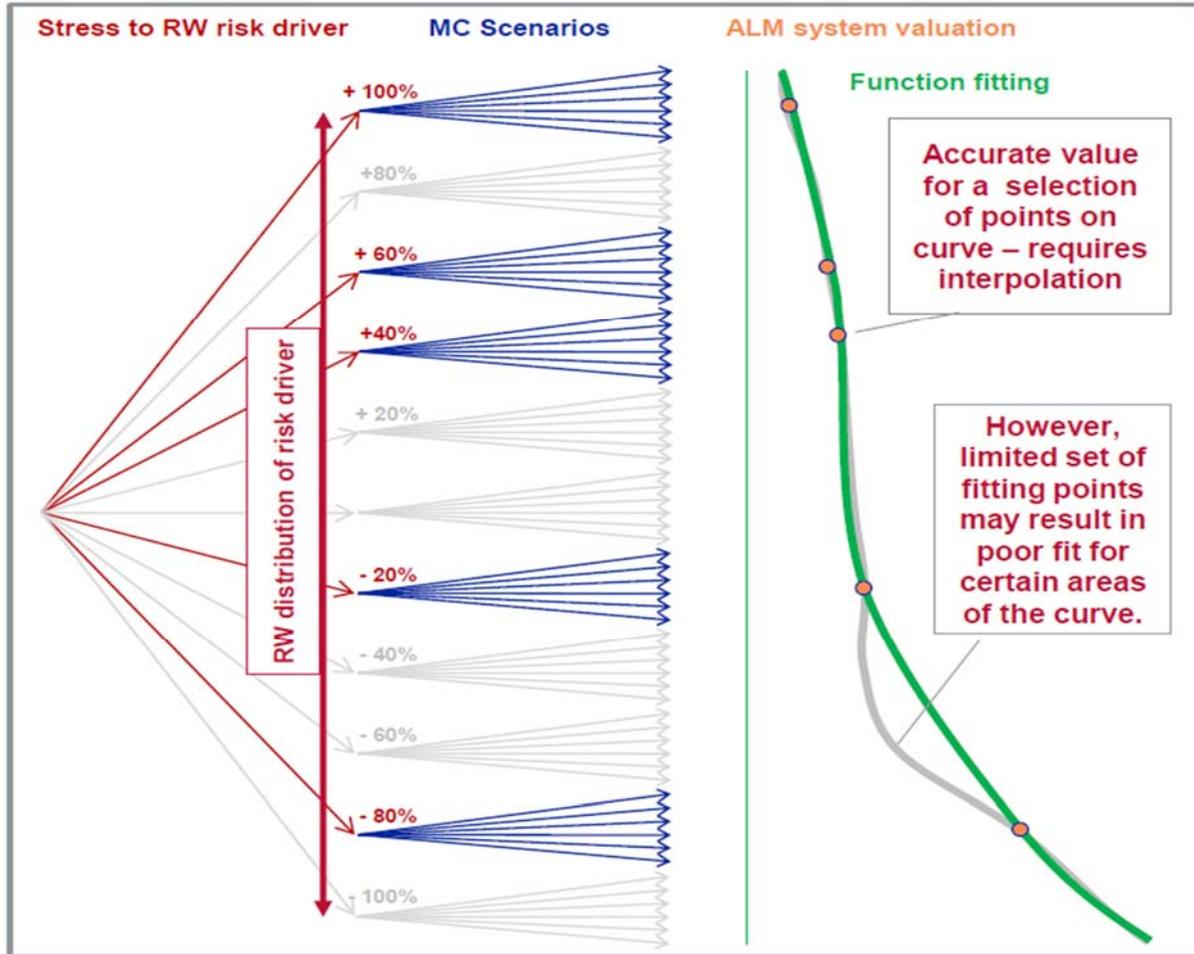


Figure 12 : Illustration de l'approche Curve fitting

3.4.3 Limites de l'approche

Les principales limites de cette méthode sont les suivantes :

- Dans le cas où il y aurait un grand nombre de variables explicatives (facteurs de risque), le nombre de simulation à effectuer reste élevé.
- L'estimation d'une fonction paramétrique des fonds propres peut conduire à un écart significatif par rapport à la distribution de référence en cas de fonctions d'interpolations « complexes » (cf. figure 12).

3.5 LEAST SQUARE MONE-CARLO (LSMC)

C'est également une méthode dite de *proxy* similaire au « *curve fitting* ». Elle repose, comme son nom l'indique, sur un principe de régression via la méthode des moindres carrés.

Les techniques Least Square Monte Carlo ont d'abord été utilisées pour l'évaluation des options américaines par Longstaff et Schwartz en 2001. Les premiers auteurs à présenter cette application du LSMC pour le calcul de capital économique en assurance furent Bauer, Bermann et Reuss en 2010.

L'idée de la méthode est de reproduire le comportement de la NAV ou du BE par une fonction prenant en entrée tous les facteurs de risques ciblés (variables économiques et/ou non économiques).

Contrairement à l'approche « *curve fitting* », l'assureur effectue un nombre important de simulations primaires mais un nombre restreint de simulations secondaires.

L'évaluation des fonds propres économiques via cette méthode conduit à des résultats approximatifs pour chacun des scénarios monde réel. Cette approximation est corrigée par une régression qui produit une courbe de régression utilisée pour calculer la NAV ou le BE.

3.5.1 Mode opératoire

Le processus de détermination de la distribution de NAV (ou fonds propres), du *Best Estimate* via la méthode LSMC peut être résumée ainsi :



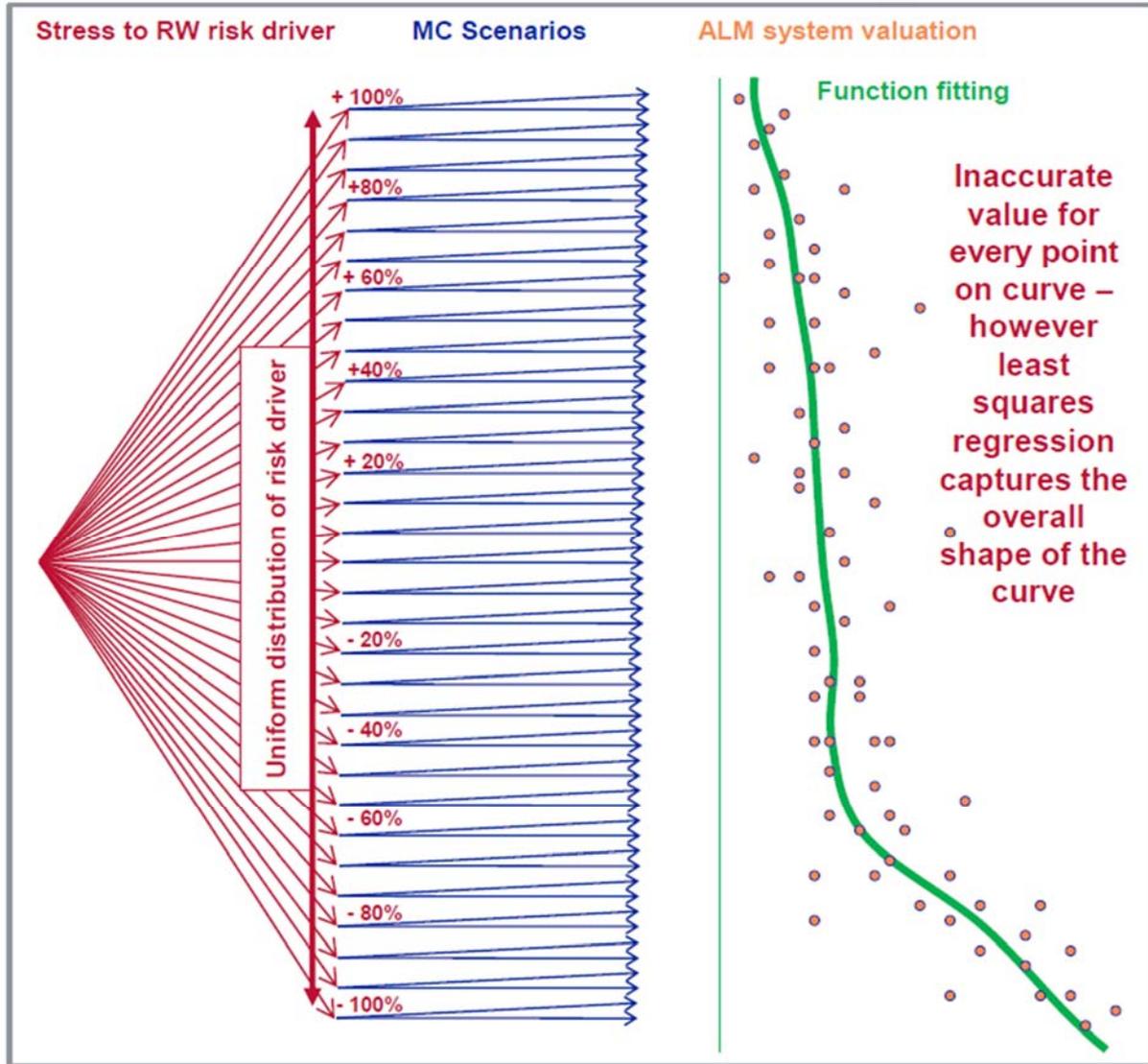


Figure 13 : Illustration de l'approche LSMC

Dans la pratique, on applique la méthodologie LSMC selon l'approche suivante :

- Etape 1 : Identification des principaux facteurs de risques qui influent sur le portefeuille,
- Etape 2 : Sélection des scénarios primaires pour ces facteurs de risque,
- Etape 3 : Réalisation de simulations Monte-Carlo pour un nombre restreint de scénarios secondaires risque neutre (dans nos travaux elles seront au nombre de 2) et détermination de la valeur des fonds propres ou du *best estimate* pour chacune des trajectoires primaires précédentes,
- Etape 4 : Expression des fonds propres ou du *best estimate* en fonction des facteurs de risques en réalisant une régression par les moindres carrés.
- Etape 5 : Validation de la fonction polynomiale ainsi obtenue à partir de réalisations SDS pour un set de scénarios de validation.

3.6 COMPARAISON DES DIFFERENTES APPROCHES

A partir des éléments cités précédemment et des travaux réalisés par (JUILLARD, et al., 2012) sur les avantages et limites des différentes approches, nous construisons le tableau récapitulatif suivant :

Méthode	Principaux avantages	Principales limites
Simulation dans les simulations	Méthodologie la plus précise pour l'évaluation du capital économique.	Temps de calculs conséquents qui peuvent compromettre son applicabilité au sein de certaines compagnies.
Replicating Portfolio	Gain sur le temps de calcul par rapport aux SdS.	Nécessite un jugement d'expert pour choisir les actifs utilisés dans le portefeuille de réplication. Mal adapté au contexte français du fait de la complexité des clauses de participation aux bénéfices. Une réplication satisfaisante de la valeur économique des passifs peut conduire à des estimations peu robustes du capital économique.
Curve Fitting	Une fois calibrée, permet de tester plusieurs scénarios. 50 fois plus rapides que la méthode SdS classique. Réduction considérable des simulations primaires.	Le choix des régresseurs nécessite un avis d'expert. Méthodologie lourde à mettre en place pour ajuster la fonction d'interpolation. Instabilité dans le temps, en cas d'évolution de la valeur des passifs et des facteurs de risque.
Accélérateur SDS de DEVINEAU-LOISEL	Réduction de simulations primaires réalisées entraînant un gain de temps de calcul. De 10 à 16 fois plus rapides que la méthode SdS classique.	Lors de l'ajout de facteurs de risque, le nombre de points à tester augmente fortement, ce qui limite les gains de temps de traitement.

Table 4: Avantages et limites des différentes méthodes

Le tableau ci-dessous fournit un comparatif entre les différentes alternatives au SdS, c'est-à-dire, LSMC, *Curve fitting* et *Replicating Portfolios*.

Dimension		Fonction polynomiale		
		LSMC	Curve fitting	Replicating portfolios
Méthode d'évaluation	Couvre tous les risques	✓✓✓	✓✓✓	✓
	Précision	✓✓	✓✓	✓
	Objectivité	✓✓	✓	✓
Inclusion dans le business	Est-ce que la méthodologie est simple à expliquer ?	✓✓	✓✓✓	✓✓

Table 5 : Comparaison des différentes approches

(HÖRIG, et al., Janvier 2012) fourni également une comparaison entre l'approche LSMC et les méthodes de *Curve Fitting et Replicating Portfolios*. Ci-dessous une synthèse des principaux avantages du LSMC par rapport aux deux autres méthodes :

- Rapidité : l'approche LSMC fournit des résultats de meilleure qualité pour un budget de 50 000 scénarios. L'étape de *fitting* peut être réalisée en moins d'une heure, l'évaluation de la fonction BE ne prendrait que quelques minutes et l'étape de validation pourrait être réalisée en moins d'une heure.
- Simplicité dans le choix des scénarios primaires : Les approches *Replicating Portfolio* ou *Curve Fitting* ne peuvent être calibrées que pour un faible nombre de scénarios de *fitting*. Par conséquent, le choix de ce nombre limité de scénarios implique des jugements d'expert et peut être un peu fastidieux.
- Précision : l'utilisation de technique de régression par moindres carrés pour la suppression de l'erreur d'échantillonnage dans les points d'estimation permet de prendre en compte un grand nombre de scénarios primaires, alors que les approches *Replicating Portfolio* et *Curve Fitting* sont toutes les deux calibrées sur peu de scénarios primaires de *fitting*. Cela conduit à une interpolation plus fine entre ces scénarios primaires qui est vraiment basé sur les données d'échantillonnage et ne suppose pas de faire des hypothèses sur la façon d'interpoler entre le nombre limité de scénarios primaires.
- Fondement mathématique : il existe un cadre mathématique fondamental pour le LSMC qui assure une bonne convergence théorique, contrairement aux approches *Replicating Portfolio* et *Curve Fitting* pour lesquels la qualité de l'ajustement dépend en grande partie du choix du nombre de scénarios primaires retenus.
- Flexibilité : Les risques techniques et les *management rules* peuvent être inclus dans l'approche LSMC. L'approche *Replicating Portfolio*, quant à elle, ne permet pas de gérer les risques d'assurance tels le risque de rachat ou de mortalité, voire certains paramètres des *management rules* en raison de l'absence d'instruments financiers sur le marché pouvant



reproduire leur fonctionnement. L'approche *Curve Fitting* peut traiter ce type de facteur de risque. Cependant, en raison du faible nombre de scénarios primaires retenu, elle est plus sensible au nombre de facteurs de risques. En comparaison, le LSMC produit des résultats stables et robustes même pour un grand nombre de facteurs de risques.

4. Générateurs de scénarios économiques

4.1 PRINCIPE GENERALE

La nouvelle Directive Solvabilité II impose aux assureurs d'évaluer leurs engagements envers les assurés à travers une approche dite « *market consistent* » dans le but d'évaluer les éventuelles options et garanties financières proposées. Pour ce faire, ces derniers ont recours à la génération de scénarios économiques afin de mesurer les risques inhérents à leur activité.

Les Générateurs de Scénario Economique (GSE) ou *Economic Scenario Generators* (ESG) permettent de projeter des facteurs de risques économiques et financiers sur un horizon T à partir de paramètres reflétant la situation du marché à une date t donnée.

Les facteurs de risques couramment intégrés sont les suivants :

- Prix des actions,
- Prix des actifs immobiliers,
- Taux d'intérêts,
- Processus de défaut des contreparties obligataires,
- Etc ...

Notons également que les scénarios économiques sont regroupés en deux grandes classes conduisant à deux types de modélisation :

- La modélisation en univers Monde Réel : les scénarios sont calibrés en tenant compte des primes de risque long terme des différentes classes d'actifs (une prime de risque pour chaque classe d'actif) ;
- La modélisation en univers Risque Neutre : l'ensemble des actifs modélisés ont pour rendement le taux sans risque afin d'obtenir une valorisation « *market consistent* », c'est-à-dire, cohérente avec l'environnement actuel et les prix observés sur le marché.

4.2 UNIVERS MONDE REEL ET RISQUE NEUTRE

L'univers monde réel correspond à une probabilité utilisée pour choquer ou prédire le niveau de richesse à un an. Il s'agit d'une probabilité subjective reposant sur la vue de l'évolution future des conditions de marché, souvent estimée à partir de données historiques.

Sous la probabilité monde réel (ou historique) les rendements des actifs incluent une prime de risque.

Si on considère un marché qui comporte un actif risqué et un actif non risqué.

On suppose que l'actif risqué vérifie l'équation suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (1)$$

Et l'actif sans risque évolue selon l'équation suivante :

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt$$

Par définition, r_t est le taux sans risque. Tous ces processus sont définis sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec \mathbb{P} la probabilité historique.

Les trajectoires observées dans les historiques de cours apparaissent en particulier sous cette probabilité, et dans le modèle W est un mouvement brownien adapté à la filtration sous la probabilité \mathbb{P} .

Si on introduit $\lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$, on peut dire que λ représente l'excès de rendement par rapport au taux sans risque ($\mu - r$), par unité de risque (σ). Ce paramètre est appelé prime de risque.

L'équation différentielle stochastique (1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (r_t + \lambda_t \sigma_t) dt + \sigma_t dW_t \\ \frac{dS_t}{S_t} &= r_t dt + \sigma_t (dW_t + \lambda_t dt)\end{aligned}$$

On introduit alors un nouveau processus \widetilde{W} , qui est défini par

$$d\widetilde{W}_t = dW_t + \lambda_t dt$$

Entrainant ainsi

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t d\widetilde{W}_t$$

Sous la probabilité \mathbb{P} , par définition W est un mouvement brownien, contrairement à \widetilde{W} .

Grâce au théorème de Girsanov, qui affirme qu'il existe une probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} sous laquelle \widetilde{W} est une martingale.

Cette probabilité est appelée probabilité risque-neutre puisqu'elle ne comporte plus de prime de risque.

L'univers risque neutre est basé sur la neutralité des instruments financiers vis-à-vis du risque, en moyenne ils se comportent tous comme un actif sans risque. Une conséquence pratique directe est qu'en univers risque neutre les taux de rendements et les taux d'actualisation sont les mêmes et il n'y a pas de prime de risque. C'est dans cet univers financier qu'on évalue les postes du bilan en considérant l'espérance des cash-flows futurs actualisés.

4.3 MODELISATION DES ACTIONS

Pour modéliser le cours des actions, le modèle de Black & Scholes est le plus fréquemment utilisé. Il suppose que le cours d'une action suit un mouvement Brownien géométrique, c'est un processus de Wiener généralisé.

Nous utilisons le modèle de Black & Scholes à volatilité déterministe dépendante du temps qui est très simple à mettre en œuvre et à calibrer.

4.3.1 Dynamique

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ le processus qui définit l'évolution de l'indice action en univers monde réel et qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Où :

- S_t est le prix de l'indice en t ,
- μ = moyenne des rendements,

- σ : la volatilité déterministe,
- Et W : un mouvement brownien

La solution de cette équation est :

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s ds - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t\right), \forall t \in [0, T]$$

4.4 MODELISATION DES TAUX D'INTERETS

4.4.1 Définition

La courbe des taux d'intérêts (ou structure par terme des taux d'intérêts) est la fonction qui a une date donnée et pour chaque maturité en abscisse, indique le niveau du taux d'intérêt associé en ordonnée.

Les courbes de taux peuvent être :

- soit des courbes de marché,
- soit des courbes implicites.

Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché d'instruments tels les obligations et les swaps (ex : courbe des taux swaps , etc...).

Les courbes implicites sont dérivées indirectement à partir des cotations de marché d'instruments tels les obligations et les swaps (ex : courbe des taux zéro-coupon, courbe de taux *forwards*, etc...).

Les modèles de taux d'intérêts nominaux sont classés ainsi :

- Les modèles d'équilibre général sont des modèles où l'équilibre des variables sous-jacentes est plus important que la cohérence avec les prix observés. Ainsi, le plus souvent, les prix de zéro-coupon sont des sorties de ces modèles. Ces modèles sont adaptés à des projections de long terme et incluent des phénomènes de retour à la moyenne. Ils peuvent posséder un ou plusieurs facteurs. ex : modèle de Vasicek, modèle de CIR (Cox-Ingersoll-Ross)
- Les modèles d'AOA sont des modèles où la juste valorisation d'un actif est plus importante que l'équilibre entre les variables sous-jacentes. Ils ont connu un grand essor depuis les années 80, ainsi il existe une grande diversité de modèles d'AOA qui sont souvent des extensions de modèles d'équilibre. Généralement, ces modèles incluent un ou plusieurs paramètres dépendant du temps et permettant de répliquer les prix d'instruments cotés sur le marché. Il existe plusieurs modèle d'AOA de taux, tels que le modèle de Hull & White, le modèle de Black Karasinski.
- Parmi les différents modèles de taux, les modèles de marchés sont ceux qui rencontrent actuellement le plus de succès. Ces modèles, basés sur la simulation de taux LIBOR ou swaps *forwards*, offrent une flexibilité supérieure aux modèles de taux courts. Les modèles de marchés ont en commun de supposer un comportement log-normal des taux et de prendre les prix zéro-coupons comme numéraire. Leur avantage est d'être à plusieurs facteurs et de

permettre une calibration rapide et efficace sur les produits vanilles (utilisation de la formule de Black pour le *pricing* des *caps/floors* et des *swaptions*). Les modèles de marché les plus connus sont LIBOR Market mModel (LMM) ou encore BGM pour Brace-Garatek et Musiela (1997)) et le SWAP Market Model (SMM).

Les modèles LMM appartiennent aux classes Heath, Jarrow & Morton (HJM) de modèles de taux d'intérêt qui décrivent le comportement des taux *forwards* instantanés. Le modèle LMM diffère de l'approche HJM par le fait que les taux LIBOR *forwards* sont discrétisés et non continus.

Le modèle LMM+ (ou *Stochastic Volatility with Displaced Diffusion* LMM) est obtenu à partir d'un modèle LMM en appliquant les modifications suivantes :

- L'intégration d'une volatilité stochastique : celle-ci permet d'une part de prendre en compte les phénomènes de *smile/skew*, mais également de modéliser de manière réaliste les mouvements des surfaces de volatilité implicite au cours du temps,
- L'intégration d'un coefficient de déplacement δ : celui-ci permet de prendre en compte les phénomènes de *smile/skew* de volatilité et de remédier au problème des taux explosifs en autorisant le modèle à générer des taux négatifs,

4.4.2 Dynamique

La dynamique des taux Libor *forward* sous la probabilité risque neutre est définie comme suit :

$$\frac{dF_k(t)}{\delta + F_k(t)} = \left(\sum_{j=m(t)}^k \frac{\Delta(F_j(t) + \delta) \sum_{q=1}^2 \xi_j^q(t) \xi_k^q(t)}{1 + \Delta F_j(t)} \right) dt + \sum_{q=1}^2 \xi_k^q(t) dZ^q(t)$$

Où :

- $F_k(t)$ est la valeur en t du taux *forward* associée à l'intervalle $[T_k; T_{k+1}]$;
- δ : le coefficient de déplacement ;

Le processus $V(t)$ est un processus de volatilité stochastique dont la dynamique est la suivante :

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW(t)$$

Où :

- κ est la vitesse de retour à la moyenne ;
- θ : la moyenne de long terme de la variance ;
- ε : la volatilité CIR de la variance
- W : mouvement brownien

5. Description de la méthode LSMC

Dans cette section, nous exposons le principe de l'approche Least Square Monte Carlo (LSMC) pour l'évaluation de l'exigence de capital (SCR). L'idée de la méthode est de réduire le nombre de simulations secondaires pour l'estimation du *best estimate* en recourant à une méthode de régression.

5.1 RAPPELS METHODE DE MONTE-CARLO

Les méthodes de Monte Carlo, basées sur les résultats de la Loi Forte des Grands Nombres, permettent de calculer numériquement des espérances.

Théorème (Loi Forte des Grands Nombres)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X . Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(X) \text{ p.s.}$$

Soit X une variable aléatoire et f une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}(|f(X)|^2) < \infty$. On cherche à calculer $\mathbb{E}(f(X))$ par une méthode Monte Carlo.

On simule un n-échantillon (X_1, \dots, X_n) selon la loi de X , puis on calcule

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i), \quad V_n^2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \right)^2 \right)$$

Grâce à la Loi Forte des Grands Nombres, S_n converge p.s vers $\mathbb{E}(f(X))$ et

$$\sqrt{n} \frac{S_n - \mathbb{E}(f(X))}{V_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0,1). (\mathcal{L})$$

5.2 METHODES DE REDUCTION DE VARIANCE

5.2.1 Méthode de quasi Monte-Carlo

Les méthodes de Monte Carlo ont comme avantage par rapport aux méthodes d'analyses numériques classiques, d'avoir une vitesse de convergence en $O(1/\sqrt{n})$.

Il est possible d'améliorer ces méthodes type Monte-Carlo en privilégiant des tirages de points « plus ordonnés » plutôt qu'un tirage aléatoire. Il s'agit de méthode de quasi Monte-Carlo.

Définition

La discrédance mesure l'écart entre une distribution de points uniforme et une distribution de points donnée ; en d'autres termes elle permet de mesurer l'irrégularité de la distribution.

En dimension 1, si on considère la fonction de répartition empirique \hat{F}_n des points x^0, \dots, x^{n-1} , on peut définir la discrédance par :

$$D_n(X) = \sup_{x \in [0,1]} |\hat{F}_n(x) - F_U(x)|$$

Avec F_U la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$.

Remarque

$D_n(X)$ correspond à la statistique de Kolmogorov-Smirnov et permet de tester l'adéquation à la loi uniforme.

5.2.1.1 Suites à discrédance faible

On cherche des suites (x_i) à valeur dans $[0; 1]$ telles que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \mathbb{E}(f(U))$$

Où $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ et tels que la convergence soit plus rapide que celle donnée par le Théorème Central Limite (TCL).

Dans ce qui suit, on définit une relation d'ordre sur \mathbb{R}^d . Si x et y sont deux points de \mathbb{R}^d , on dit que $x \leq y$ si et seulement si $x_i \leq y_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$. Cette relation d'ordre n'est pas totale.

Définition

Une suite $(x_i)_i$ à valeur dans $[0; 1]^d$ est équirépartie sur $[0; 1]^d$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall f$ intégrable, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int_{[0;1]^d} f(x) dx$
- $\forall y \in [0; 1]^d$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \in [0;y]\}} \rightarrow Vol([0;y])$, où $[0;y] = \{z \in [0; 1]^d; 0 \leq z \leq y\}$
- $D_n^*(x) = \sup_{y \in [0;1]^d} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{x_i \in [0;y]\}} - Vol([0;y]) \right| \rightarrow 0$.

$D_n^*(x)$ est appelé discrédance à l'origine de la suite.

Remarque

Les suites de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0; 1]^d$ sont équiréparties. Elles vérifient le premier critère grâce à la loi Forte des Grands Nombres.

Il existe des suites équiréparties $(x_n)_n$ telles que pour une certaine classe de fonctions f , on ait le résultat suivant :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \int_{[0;1]^d} f(x) dx \right| \leq c(f) \frac{\log(n)^d}{n}$$

La vitesse de convergence est donc de l'ordre de $\frac{\log(n)^d}{n}$, ce qui est bien meilleure que pour les méthodes de Monte-Carlo classiques qui ne peuvent faire mieux que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (vitesse donnée par le TCL). Les suites permettant d'obtenir de telles vitesses sont appelées suites à discrédance faible.

Propriétés

Les suites à faible discrédance ont la particularité de remplir le cube unité uniformément et de manière extrêmement régulière.

5.2.1.2 Suites de Sobol

Plusieurs exemples de suites à faible discrédance sont données par Halton (1960), Hammersley (1960), Sobol' (1967), Faure (1982) et Niederreiter (1987).

Figure 14 : Exemples de suites de Sobol en dimension 2

Figure 15 : Exemple d'échantillons de variables aléatoires uniformes

Comme nous pouvons le voir sur les figures 14 et 15 qui présentent des simulations de suites de Sobol et de nombres aléatoires uniformes, la qualité de la répartition spatiale est meilleure lorsque l'on utilise des Sobol plutôt que des variables uniformes.

Dans la suite nous utiliserons les suites de Sobols comme suites à faible discrédance.

5.2.2 Méthode des variables antithétiques

Une autre solution pour accroître la convergence de la méthode Monte Carlo énoncée dans (LELONG, Avril 2007) consiste à utiliser des variables antithétiques.

La méthode de Monte Carlo suppose l'indépendance des variables afin de pouvoir utiliser la Loi des Grands Nombres. Toutefois, il est possible d'utiliser une certaine corrélation entre les variables afin de réduire la variance.

Si on dispose d'un n -échantillon (U_1, \dots, U_n) de variables aléatoires i.i.d selon la loi de U , la méthode classique pour calculer $\mathbb{E}(g(U))$ est de considérer :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$$

Néanmoins, on peut remarquer que si $U \sim \mathcal{U}_{[0;1]}$ alors $1 - U$ suit également une loi $\mathcal{U}_{[0;1]}$.

On peut donc considérer

$$S'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(1 - U_i)$$

Ou même

$$\tilde{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[n/2]} g(U_i) + g(1 - U_i)$$

La variance de \tilde{S}_n équivaut à :

$$\text{Var}(\tilde{S}_n) = \text{Var}(S_n) + \frac{1}{n} \text{Cov}(g(U), g(1 - U))$$

D'après le lemme de l'inégalité de corrélation, $\text{Cov}(g(U), g(1 - U)) < 0$, ce qui implique que la convergence de \tilde{S}_n est meilleure que celle de S_n .

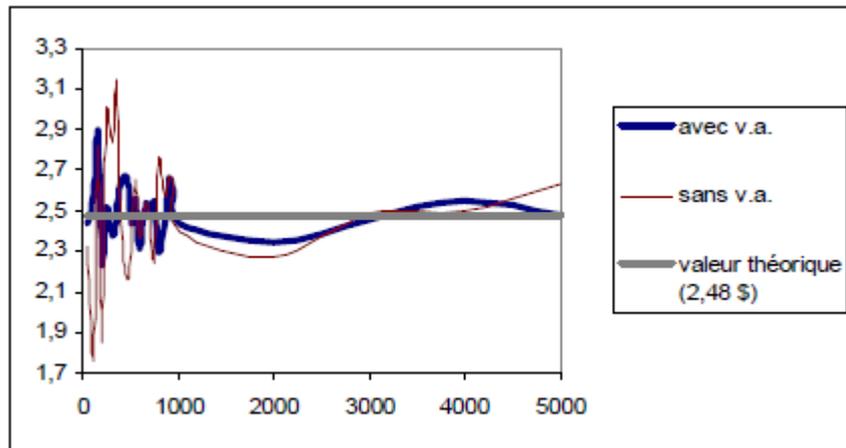


Figure 16 : Convergence du prix de l'option avec et sans variables antithétiques (RACICOT, et al., Avril 2006)

5.3 FORMALISATION THEORIQUE DU LSMC

Nous allons présenter ici le cadre théorique de l'algorithme de Least Square Monte Carlo (LSMC). L'idée de la méthode est de réduire significativement le nombre de simulations secondaires pour estimer les fonds propres ou le BE en recourant à une méthode de régression.

(LONGSTAFF, et al., 2001) décomposent l'algorithme en deux types d'approximations.

La première étape fournit un estimateur \widehat{FP}_t de FP_t en remplaçant l'espérance conditionnelle par une combinaison linéaire finie de fonctions de base $(e_k(Y_t))_{k=1, \dots, M}$:

$$FP_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{u \geq 2} \delta_u R_u | \mathcal{F}_t \right] \approx \sum_{k=1}^M \alpha_k e_k(Y_t) = \widehat{FP}_t$$

en supposant que la suite $(e_k(Y_t))_{k \geq 1}$ est indépendante et complète dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \sigma(Y_t), \mathbb{P})$.

Ci-dessous quelques exemples de fonctions de bases :

- Polynômes de Lagrange,
- Polynômes de Laguerre,
- Polynôme d'Hermite,
- Fonctions trigonométriques.

\widehat{FP}_t est une variable aléatoire dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \sigma(Y_t), \mathbb{P})$. Elle peut donc être décomposée sur une base de cet espace :

$$\widehat{FP}_t = \sum_{k=1}^M \alpha_k e_k(Y_t)$$

Il suffit donc de déterminer les coefficients α_k pour obtenir une expression de la valeur de \widehat{FP}_t .

En évaluant pour N trajectoires la valeur des fonds propres on obtient une suite $(\widehat{FP}_t^{(i)})_{i=1 \dots N}$ et on en déduit un estimateur des coefficients $(\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ en résolvant l'équation suivante :

$$\hat{\alpha}^N = \underset{\alpha \in \mathbb{R}^M}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \left(\widehat{FP}_t^{(i)} - \sum_{k=1}^M \alpha_k e_k(Y_t^i) \right)^2$$

La seconde étape d'approximation plus classique correspond à l'utilisation de scénarios de Monte-Carlo pour évaluer la distribution empirique des fonds propres à un an.

Nous pouvons ensuite, en déterminant le quantile à 99,5%, en déduire une estimation du SCR.

5.4 MODELES DE REGRESSION

Le principe du LSMC est de reproduire le comportement du passif (*best estimate*) ou des fonds propres en réaction aux différentes valeurs prises par les facteurs de risques identifiées, à l'aide d'une fonction polynomiale qui peut comporter un nombre élevé de termes.

Dans cette section nous allons décrire les méthodes utilisées afin de rechercher un modèle parcimonieux assurant un bon équilibre entre la qualité de l'ajustement et la variance des paramètres afin de minimiser le risque empirique. Nous allons donc nous appesantir sur les algorithmes (*backward, forward, stepwise*) de sélection de modèle par sélection de variables et la minimisation de critères pénalisés (AIC, BIC).

5.4.1 Critères de sélection de modèles

Deux critères sont principalement utilisés pour sélectionner le meilleur modèle : le critère AIC (*Akaike Information Criterion*) et le critère BIC (*Bayesian Information Criterion*).

Le principe des critères AIC et BIC consiste à pénaliser la vraisemblance des paramètres estimés associée aux données, traduisant la qualité de l'ajustement, soit par le nombre de paramètres indépendants du modèle, soit par le nombre de paramètres indépendants du modèle et de la taille de l'échantillon.

Ces critères peuvent être vus comme des critères sélectionnant le modèle réalisant le meilleur compromis entre ajustement aux données et parcimonie du modèle.

Ces critères se définissent de la façon suivante :

- AIC (*Akaike Information Criterion*)

$$AIC = -2 \times \log(\theta) + 2 \times K$$

- BIC (*Bayesian Information Criterion*)

$$BIC = -2 \times \log(\theta) + K \times \log(n)$$

Où :

- $\log(\theta)$ représente la log-vraisemblance des paramètres associée aux données,
- K désigne le nombre de paramètres indépendants dans le modèle,
- n est le nombre d'individus composant l'échantillon.

Le meilleur modèle au sens du critère AIC ou BIC est celui pour lequel la valeur du critère est la plus faible.

5.4.2 Algorithmes de sélection de variables

Lorsque le nombre de variables explicatives p est grand, il n'est pas raisonnable de penser explorer les

2^p modèles possibles afin de sélectionner le « meilleur » au sens de l'un des critères ci-dessus.

Trois types d'algorithmes sont résumés ci-dessous par ordre croissant de temps de calcul nécessaire, c'est-à-dire par nombre croissant de modèles considérés parmi les 2^p, et donc par capacité croissante d'optimalité. Ces algorithmes sont appelés algorithmes pas à pas.

- Procédure automatique ascendante (*forward*) – algorithme de sélection :
A chaque pas, une variable est ajoutée au modèle. C'est celle dont le degré de significativité (ou prob-value) ($\Pr(>|t|)$) associée à la statistique partielle du test de Fisher qui compare les deux modèles est minimum. La procédure s'arrête lorsque toutes les variables sont introduites ou lorsque le degré de significativité reste plus grande qu'une valeur seuil fixée par défaut à 0,50.
- Procédure automatique descendante (*backward*) – algorithme d'élimination :
L'algorithme démarre cette fois du modèle complet. A chaque étape, la variable associée au plus grand degré de significativité est éliminée du modèle. La procédure s'arrête lorsque les variables restant dans le modèle ont des degrés de significativité plus petits qu'un seuil fixé par défaut à 0,10.
- Procédure automatique mixte (*stepwise*) :
Cet algorithme introduit une étape d'élimination de variable après chaque étape de sélection afin de retirer du modèle d'éventuelles variables qui seraient devenues moins indispensables du fait de la présence de celles nouvellement introduites.

5.4.3 Test de Fisher

Afin de déterminer la significativité d'un modèle et donc de la qualité de la régression, nous utilisons un test de Fisher.

Principe

On considère un modèle linéaire gaussien

$$Y = X\theta + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$$

Le test de Fisher est la règle de décision qui permet de décider si on rejette ou non l'hypothèse nulle H_0 , à savoir la nullité de certaines composantes de θ :

- Rejeter H_0 , c'est décider que certaines composantes de θ ne sont pas nulles.
- Ne pas rejeter H_0 , c'est ne pas exclure que toutes les composantes de θ sont nulles.

Pour ce, on se base sur la statistique F suivante dont on connaît la distribution théorique si l'hypothèse H_0 est vraie :

$$F = \frac{RSS_1 - RSS_{p+1}}{RSS_{p+1}} \times \frac{n-1-p}{p} \sim F(p, n-1-p)$$

Avec :

- $F(a,b)$ une loi de Fisher à a et b degrés de liberté
- $RSS_1 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ où \bar{Y} est la moyenne du vecteur Y , il s'agit de la variance expliquée
- $RSS_{p+1} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ où \hat{Y}_i est la prédiction faite pour la $i^{\text{ème}}$ observation

Ainsi, à partir de la valeur calculée de la statistique F , on peut calculer la prob-value ou degré de significativité, c'est-à-dire la probabilité que la loi de Fisher, dont on connaît les paramètres, soit au-dessus de cette statistique. Plus la probabilité est faible, plus la probabilité de rejeter H_0 est forte.

5.5 VALIDATION DES MODELES

5.5.1 Tests statistiques

5.5.1.1 Test de Kolmogorov- Smirnov

Le test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov est un test non paramétrique qui permet de tester l'hypothèse H_0 selon laquelle les données observées sont engendrées par une loi de probabilité théorique considérée comme étant un modèle convenable.

Principe :

Il s'agit de mesurer l'écart soit entre une fonction de répartition empirique et une fonction de répartition théorique, soit entre deux fonctions de répartition empiriques.

Dans le cadre de nos travaux, nous n'analyserons que le premier cas cité.

On considère ainsi une variable aléatoire X de fonction de répartition F , que l'on veut comparer à une fonction de répartition théorique F_0 continue.

On souhaite tester :

- l'hypothèse $H_0 : F = F_0$,

contre :

- l'hypothèse $H_1 : F \neq F_0$.

Si (X_1, \dots, X_n) est un n -échantillon de X , la fonction de répartition empirique associée à cet échantillon est :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{]-\infty, x]}(X_k)$$

$F_n(x)$ est la proportion des valeurs dont l'observation est inférieure ou égale à x .

L'écart entre les valeurs observées et les valeurs théoriques du modèle déduites de la fonction de répartition F_0 peut donc être mesuré par la variable aléatoire suivante qui sera la variable de décision du test :

$$d = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)|$$

Cette variable est ensuite comparée à des valeurs critiques tabulées.

5.5.2 Diagnostique graphique

5.5.2.1 Graphique Q-Q plot

Il ne s'agit pas d'un test au sens statistique du terme. Le graphique Q-Q plot (quantile-quantile plot) est un graphique "nuage de points" qui vise à confronter les quantiles de la distribution empirique et les quantiles d'une distribution théorique normale, de moyenne et d'écart type estimés sur les valeurs observées. Si la distribution est compatible avec la loi normale, les points forment une droite.

6. Application à un portefeuille de contrats d'épargne

En assurance vie il existe deux grandes catégories de contrats : les contrats en euros, qui s'adressent à une population souhaitant investir sans prendre de risque car ils offrent une garantie en capital en plus d'une revalorisation complémentaire (participation aux bénéficiaires) et les contrats en unités de compte qui eux, permettent un investissement diversifié sur les marchés financiers. A cela s'ajoute les contrats d'assurance vie multi supports qui comportent à la fois des supports en euros et en unités de compte.

Ces contrats proposent différentes options et garanties aux assurés, telles que l'option de rachat qui permet de récupérer partiellement ou en intégralité l'ensemble de l'épargne investi. En général cette option s'accompagne d'une pénalité si le rachat intervient au cours des dix premières années sans pouvoir dépasser 5% de la provision mathématique.

Au terme des contrats, plusieurs possibilités s'offrent aux assurés :

- Soit obtenir le versement de la prestation sous forme de capital,
- Soit obtenir le versement de la prestation sous forme de rente, qui peut être viagère immédiate ou à annuités certaines (la prestation est alors versée pendant une période prédéterminée).

Le choix de la durée du contrat est souvent lié à l'objectif de départ. Toutefois, pour tirer le meilleur bénéfice d'un contrat d'assurance vie et de la fiscalité qui y est attachée, les assurés optent pour une durée minimale de 8 ans.

Depuis peu, de nouveaux contrats ont vu le jour :

- les **contrats Euro-croissance** qui promettent aux assurés l'espérance d'un rendement supérieur à celui des contrats en euros avec une garantie du capital investi uniquement au terme du contrat (au moins 8 ans) ;
- les **contrats d'assurance Vie Génération** intégralement investis dans des supports en unités de compte, qui doivent remplir certaines conditions : au moins 33% investis dans des PME-ETI, dans le logement social ou intermédiaire ou encore dans l'économie sociale et solidaire. En contrepartie de ces engagements, les assurés ayant optés pour ces contrats bénéficient d'un avantage fiscal en cas de décès, à savoir, un abattement de 20% si les sommes ont été investies avant 70 ans en plus des abattements classiques de l'assurance vie.

Les contrats d'assurance vie peuvent couvrir :

- Le risque de décès, auquel cas, le contrat garantit en cas de décès de l'assuré et au cours d'une période donnée, le versement d'un capital aux bénéficiaires désignés,
- Le risque de survie, auquel cas le contrat garantit des prestations en faveur de l'assuré si celui-ci est toujours vivant à l'échéance du contrat.

6.1 CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE ETUDIE

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à un portefeuille de contrats d'épargne en Euros constitué d'individus âgés en moyenne de 48 ans avec une ancienneté moyenne de 10 ans.

La section qui suit décrit les hypothèses retenues pour la modélisation de ce portefeuille.

6.1.1 Modélisation du passif

- Primes

Le portefeuille modélisé est en run-off, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nouveaux contrats souscrits, ni de nouvelles primes reçues sur les contrats déjà en portefeuille car il s'agit de contrats essentiellement à primes uniques.

- Rachats

Le rachat est une option offerte par l'assureur aux assurés et qui leur permet soit de résilier définitivement leur contrat (rachat total), soit d'en récupérer une partie (rachat partiel). Néanmoins, les assureurs introduisent parfois dans leur contrat des pénalités pour dissuader les assurés d'exercer ce droit.

Pour cette étude, **seuls les rachats totaux sont modélisés.**

En plus de ces rachats dits « structurels », nous modélisons le comportement dynamique des assurés en fonction de la conjoncture économique. Il s'agit des rachats dits « conjoncturels ».

Contrairement à l'approche proposée par l'EIOPA, ces derniers ne sont pas modélisés dans notre outil ALM en fonction de la différence entre le taux servi et le taux concurrence, mais en fonction d'autres paramètres définis suite à l'étude du comportement de nos assurés qui est dé-corrélés de ce *spread* de taux.

- Mortalité

Nous faisons l'hypothèse que les décès surviennent en milieu d'année. La loi de décès des assurés est donné par une table d'expérience que la compagnie a fait certifier par un actuaire indépendant. Le montant de la prestation de décès correspond à la provision mathématique.

- Frais

Les frais de fonctionnement pour l'assureur sont payés en fin d'année et viennent en diminution des chargements prélevés sur l'encours des assurés.

Nous modélisons des frais unitaires, c'est-à-dire, des frais fixes par contrat plutôt que des frais proportionnels à l'encours. Ce montant couvre les frais de gestion des sinistres, les frais d'administration. Il n'y a pas de prise en compte des frais d'acquisition dans la projection.

- Valorisation des contrats

Le taux minimum garanti est nul pour l'ensemble des contrats ;

- Réserve de capitalisation (RC)

La **Réserve de capitalisation**, comptabilisée au bilan de la société d'assurance au niveau des fonds propres, est destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu.

Cette réserve est mouvementée lors des sorties (ventes ou conversions), réalisées avant leur échéance, des valeurs amortissables réglementées, à l'exception des obligations à taux variable : si le prix de vente de ces valeurs est supérieur à leur valeur actuelle, diminuée d'une éventuelle dépréciation, l'excédent est versé à la réserve de capitalisation ; dans le cas inverse, un prélèvement est exercé sur cette réserve.

Dans le cadre de ce mémoire, nous supposons la RC de départ nulle.

- Provision pour Participation aux Excédents (PPE, PPB)

La **Provision pour Participation aux Bénéfices** correspond au montant des participations aux bénéfices à attribuer aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits.

Elle est utilisée par l'assureur pour lisser la participation aux bénéfices versée aux assurés. La dotation et la reprise de cette provision est fonction du taux de revalorisation des contrats.

Les taux de participation attribués à chaque contrat sont déterminés en fonction :

- Des taux de rendements des actifs ;
- Des conditions contractuelles des contrats ;
- Des taux de marché et de la stratégie commerciale.

Dans le cadre de notre modélisation, nous considérons que 100% des produits financiers doivent être redistribués aux assurés. Par conséquent, il n'y a pas de dotation à la PPB.

- La Provision Globale de Gestion (PGG)

Elle est destinée à couvrir les charges de gestion future des contrats non couvertes par ailleurs.

Pour chaque ensemble homogène de contrats la provision de gestion est dotée, à concurrence du montant des charges de gestion futures des contrats non couverts par des chargements sur primes, sur l'épargne gérée ou par des prélèvements sur produits financiers.

- La Provision pour Aléas Financiers (PAF)

La provision pour aléas financiers vise à compenser une baisse du rendement des actifs par rapport aux engagements de taux garantis sur les contrats autres que ceux en unités de compte. Les sociétés d'assurance qui ont en stock des contrats à taux garantis élevés peuvent en effet dégager un rendement sur le portefeuille tout juste équivalent voire inférieur à la rémunération sur laquelle elles se sont engagées vis-à-vis des assurés. La différence serait alors insuffisante, ne permettant pas, par exemple,

de couvrir les frais de fonctionnement futurs de la société d'assurance. Les assureurs sont donc amenés à provisionner la différence entre les engagements actualisés à un taux d'intérêt prudent par rapport aux revenus de leurs actifs et les engagements précédemment calculés.

La compagnie que nous modélisons n'a pas à constituer de PAF.

- La Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE)

Elle est destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article R.332-20 du Code des assurances.

La compagnie que nous modélisons n'a pas à constituer de PRE.

Le tableau ci-dessous synthétise les hypothèses retenues dans le cadre de la modélisation.

Age moyen	48 ans
Ancienneté moyenne	10 ans
Table de mortalité	Table d'expérience
Loi de rachat	Loi d'expérience
Pénalités de rachats	0,00€
Chargements sur encours moyen	0,60%
Frais de gestion (coût unitaire)	70,00€
PM	1 077,81 M€
Clause de PB	100%
Taux Minimum Garanti	2%
PPE	0,00€
RC	0,00€
PGG	0,00€
PRE	0,00€
PAF	0,00€

Table 6 : Caractéristiques du portefeuille modélisé

6.1.2 Modélisation de l'actif

Dans notre étude, nous ne modélisons pas de produits dérivés. Nous supposons que l'allocation d'actif de départ de la compagnie est la suivante au 31 Décembre de l'année N :

Classes d'actifs	Valeur comptable (en M€)	Valeur de marché (en M€)	Allocation en Valeur de Marché
Actions	104,71	115,13	6%
Obligations	852,68	996,39	82%
Immobilier	96,95	114,40	9%
Cash	23,48	23,71	2%
TOTAL	1 077,81	1 249,64	100%

Table 7 : Actifs modélisés

Les tableaux ci-dessous fournissent une ventilation des actifs de type actions et obligations par nature :

Obligations	en %
Obligation d'Etats taux fixe	48%
Obligation <i>Corporate</i> taux fixe	43%
Obligation à taux variable	4%
Obligation indexée sur l'inflation	5%

Table 8 : Ventilation des obligations modélisées

Actions	en %
Actions cotées	69%
Actions non cotées	31%
Participations	0%

Table 9 : Ventilation des actions modélisées

Les achats ou ventes de titres au cours de la projection se font de sorte que la proportion chaque classe d'actifs (en valeur de marché) se trouve dans un intervalle centré sur l'allocation connue à la clôture de l'année N.

Notons que ces achats/ventes sont effectués dans un ordre prédéfini selon les catégories d'actifs, en agissant d'abord sur les classes d'actifs les plus liquides et/ou les moins susceptibles d'être porteuses de plus ou moins-values latentes.

6.2 FACTEURS DE RISQUE

La première étape du processus LMSC consiste à sélectionner les différents paramètres qui influent sur le *best estimate* ou sur la NAV du portefeuille de contrats étudié. Cette étape s'avère très utile car elle permettra un gain de temps lors de la détermination du polynôme traduisant l'évolution du *best estimate* ou de la NAV en fonction des facteurs de risques.

S'agissant d'un contrat d'épargne en euros, les principaux risques auxquels la compagnie est exposée sont les suivants :

- Risques de souscription
 - Risque de mortalité (tendance, niveau et catastrophe),
 - Risque de rachat,
 - Risque de frais,
- Risques financiers et crédit
 - Risque de taux d'intérêt
 - Mouvements à la hausse ou à la baisse des taux d'intérêts (niveau, pente et courbure)
 - Hausse de la volatilité des taux d'intérêts

- Risque action (baisse du prix des actions, hausse de la volatilité des actions),
- Risque de baisse du prix des actifs immobiliers,
- Risque de change,
- Risque de crédit,
- Risque de concentration.

Certaines différences par rapport à la formule standard sont à noter dans notre modélisation car nous introduisons des risques liés à la volatilité (action, taux), analysons les variations de la forme de la courbe des taux, et plusieurs composantes du risque de mortalité.

Dans la suite, nous allons décrire de façon exhaustive l'ensemble des risques pouvant impacter la distribution des fonds propres de la compagnie ainsi que la meilleure évaluation de ses engagements (le *best estimate*).

6.2.1 Les risques de souscription

Les risques de souscription dérivent de l'incertitude sur les flux futurs liée aux hypothèses de tarification (mortalité, rachats, frais, etc..).

- Risque de rachat

Le risque de rachat reflète l'incertitude dans les hypothèses de rachats utilisées pour évaluer le *best estimate*. Cela se traduit par des rachats plus ou moins importants que ceux anticipés, créant de la volatilité dans la chronique de flux futurs attendue. Dans le cadre de cette étude, nous supposons un comportement similaire à une loi de Student.

Notons que pour des soucis de simplification, seuls les rachats totaux ont été modélisés.

- Risque de mortalité

Le risque de mortalité est défini comme le risque d'une augmentation de la valeur des engagements de l'assureur résultant du changement du niveau, de la volatilité ou de la tendance des taux de mortalité.

Pour traduire l'effet sur les passifs de ces trois composantes de la mortalité, nous introduisons un unique facteur de risque.

Ce facteur de risque suit une loi de Student et est appliqué à des tables de mortalité Lee-Carter qui tiennent compte de l'âge et du sexe de l'assuré ainsi que de l'année de projection.

- Risque de mortalité catastrophe

Le risque de mortalité catastrophe (noté ensuite mortalité Cat) reflète une possible augmentation soudaine de la mortalité au cours de la première année de projection en raison d'une pandémie, d'un acte de terrorisme, d'une catastrophe naturelle entraînant une augmentation des flux de prestations à reverser par l'assureur, et donc le *best estimate*. Nous modélisons un seul facteur de risque pour tenir compte de la fréquence et de la sévérité de ce risque.

- Risque de frais

Le risque de frais reflète l'incertitude sur les flux futurs due à l'impact de l'augmentation des taux d'inflation sur les frais supportés par l'assureur et les prestations versées aux assurés.

Ce risque n'étant pas significatif pour le portefeuille étudié, nous décidons de ne pas le modéliser dans cette étude.

6.2.2 Les risques financiers et de crédit

Les risques financiers sont liés à des mouvements inattendus de la courbe des taux, des marchés actions et immobiliers.

Ces variations de valeur de marché des actifs affectent directement les provisions techniques des compagnies d'assurance (cas des contrats en unités de compte par exemple), ou indirectement à travers la participation discrétionnaire reversée par l'assureur à ses assurés grâce aux rendements générés par les actifs détenus.

Notons que du fait du caractère discrétionnaire de la participation aux bénéfices reversée aux assurés, il est possible pour l'assureur de faire supporter aux assurés une partie des pertes générées par la baisse de la valeur de marché des actifs, à travers le mécanisme d'absorption des provisions techniques.

- Risque action

Le risque action correspond à une baisse des marchés actions sur la valeur du bilan de la compagnie. L'exposition au risque action s'applique à tous les actifs et les passifs dont la valeur est sensible aux variations de prix des actions.

Dans le cadre de notre modèle interne, nous introduisons deux facteurs de risque pour capter les deux sous-risques suivants :

- La baisse du prix des actions ;
- La hausse de la volatilité du rendement des actions

Cette approche est simplifiée pour la baisse du prix des actions car nous pourrions prendre plusieurs facteurs de risques pour refléter les évolutions du prix des actions en fonction des secteurs économiques.

- Risque immobilier

Le risque immobilier est dû à la sensibilité des actifs au niveau des prix des actifs immobiliers. Nous retenons un facteur de risque pour traduire les chocs de la valeur de marché des actifs immobiliers.

- Risque de change

Nous utilisons un facteur de risque pour traduire l'impact sur le *best estimate* ou la NAV généré par l'effet de change sur la valeur des actifs.

Ce risque concerne toutes les titres libellés en devises étrangères ainsi que les options de change.

- Risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt est plus complexe à évaluer car la courbe des taux est composée de plusieurs points et un seul facteur de risque ne suffit pas à traduire toutes les déformations possibles de cette courbe. Pour cette raison, nous introduisons trois facteurs de risque déterminés à l'aide d'une analyse en composantes principales, sensés traduire la quasi-totalité des variations de la courbe des taux :

- Le niveau (facteur PC1) à l'origine des déformations parallèles ;
- la pente (facteur PC2) à l'origine de l'aplatissement ou de la pentification ;
- la courbure (facteur PC3) à l'origine des changements de concavité.

Les graphes ci-dessous, issus des travaux de L. Martellini, P. Priaulet et S. Priaulet, présentent les différentes déformations de la courbe des taux.

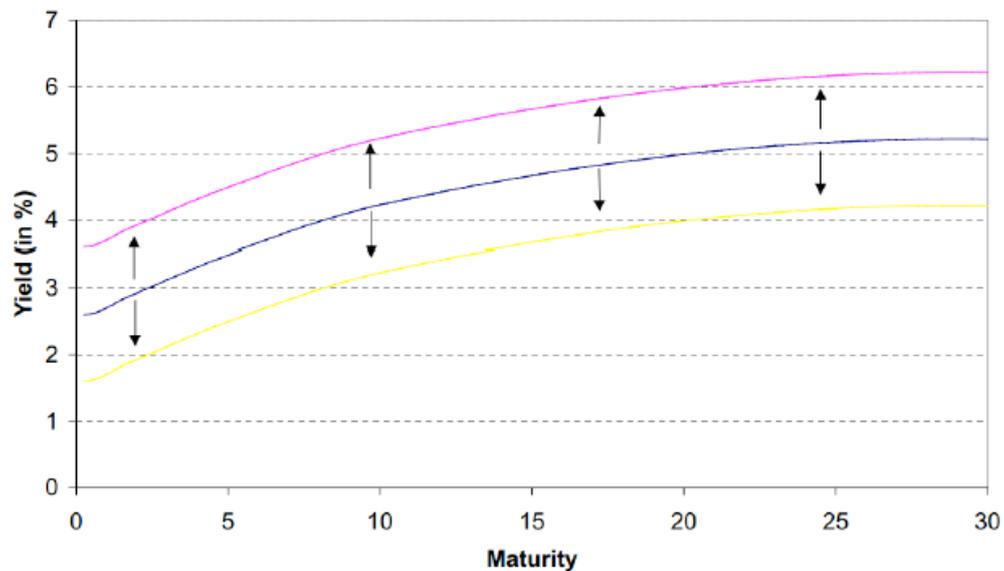


Figure 17 : Facteur de niveau

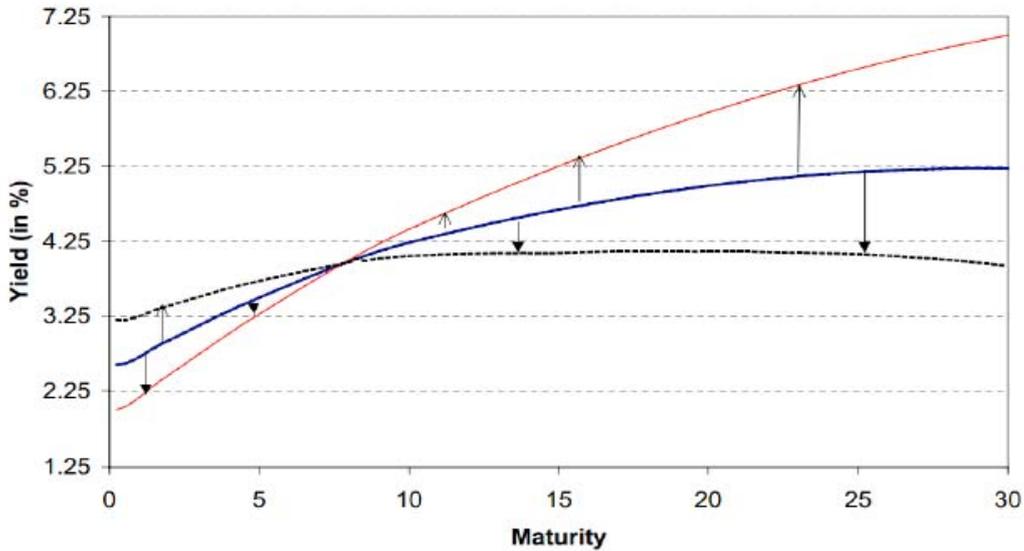


Figure 18 : Facteur de pente

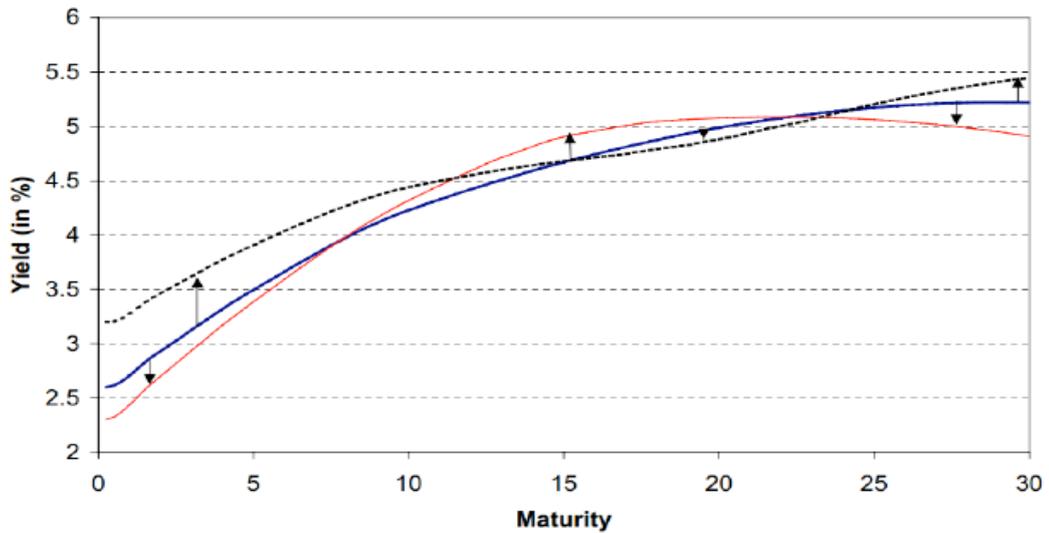


Figure 19 : Facteur de courbure

- Risque de crédit

Le risque de crédit est généralement induit par une dégradation de la notation d’une contrepartie, du défaut de la contrepartie ou de l’écartement des *spreads*. Tous ces événements ont un impact direct sur la valeur de marché des actifs et par conséquent, affecte la valeur des provisions techniques ou tout autre passif dont la valeur dépend de la performance des actifs

Notons que par soucis de simplicité, nous ne retiendrons que les risques de taux et de volatilité des taux dans notre étude.

6.3 CONVERGENCE DU BEST ESTIMATE AU TAUX GARANTI

L'un des points forts de l'approche LSMC réside dans le fait qu'il est possible d'obtenir des résultats d'une bonne qualité en limitant le nombre de scénarios secondaires, via des scénarios antithétiques par exemple, mais en réalisant un nombre suffisant de simulations primaires.

Pour les assureurs dont le modèle interne utilise la méthode dite de « *flexing* », se pose la question du nombre de scénarios primaires à réaliser. En effet, il est nécessaire d'opérer un arbitrage entre le temps de calcul, qui peut s'avérer important s'il faut conserver des model points avec un niveau de granularité élevé, et la finesse dans la projection des flux de passifs.

L'objectif de cette première section est de définir le nombre minimum de scénarios primaires qui permet une bonne convergence des résultats.

Nous nous concentrons sur le *Best Estimate* Garanti (BEG), qui suppose une valorisation au taux minimum garanti uniquement. Par conséquent, les interactions actifs-passifs ne sont pas prises en compte ici et une simple évaluation déterministe est suffisante.

Nous procédons de la façon suivante :

1. Calcul du BEG pour plusieurs nombre de scénarios de *fitting*⁴ (100, 200, 500, 1 000, 1 250, 1 500, 1 750, 2 000, 2 500, 5 000, 10 000);
2. Calcul du BEG pour 100 scénarios de validation⁵;
3. Détermination d'une fonction polynomiale reproduisant le BEG ;
4. Validation du polynôme obtenu.

Nous évaluons ensuite la qualité de l'ajustement à l'aide de deux critères : le R^2 ajusté et l'erreur moyenne pondérée.

6.3.1 Validation de la qualité de l'ajustement

6.3.1.1 Statistique R^2

Afin de déterminer le nombre de scénario nécessaire pour s'assurer d'une bonne convergence du *best estimate* au taux garanti, nous analysons les statistiques suivantes : le R^2 et le R^2 ajusté.

Le coefficient de détermination R^2 est une statistique qui permet de juger de la qualité d'une régression linéaire (simple ou multiple).

D'une valeur comprise entre 0 et 1, il mesure l'adéquation entre le modèle proposé et les données observées. Un $R^2=1$ traduit le fait que le modèle colle parfaitement avec les données.

⁴ *Scenarios de fitting* : ensemble des simulations utilisées pour calibrer le modèle de régression linéaire.

⁵ *Scenario de validation* : ensemble des simulations utilisées pour s'assurer a posteriori de la bonne répliation des passifs par modèle de régression linéaire. Elles sont choisies afin de mesurer les effets individuels et croisés des facteurs de risques sélectionnés sur le *best estimate*.

Le R^2 se définit comme la part de variance expliquée par rapport à la variance totale et est calculé de la façon suivante :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i \in I} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i \in I} (y_i - \bar{y}_i)^2}$$

R² ajusté

Le coefficient de détermination ajusté (R^2 ajusté) tient compte du nombre de variables. En effet, le principal défaut du R^2 est de croître avec le nombre de variables explicatives. Or, on sait qu'un excès de variables produit des modèles peu robustes. C'est pourquoi on s'intéresse davantage à cet indicateur qu'au R^2 .

Il est défini de la façon suivante :

$$\bar{R}^2 = R^2 - (1 - R^2) \frac{p}{n-p-1};$$

Avec : n = nombre d'observations et p = nombre de variables explicatives du modèle de régression.

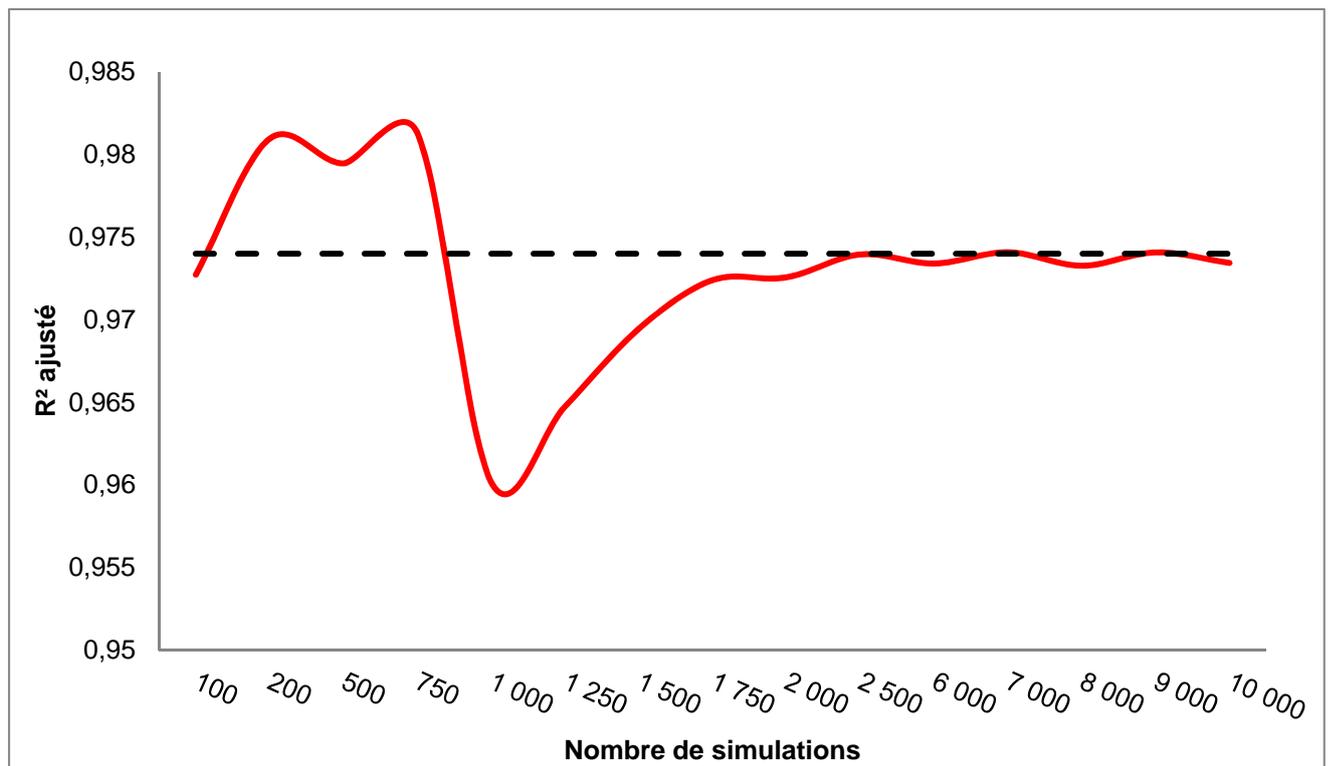


Figure 20 : Convergence du BEG - Critère R^2 ajusté

Il apparait que la convergence existe dès lors que le nombre de scenarios est supérieur à 2 500. Nous vérifions cette intuition en utilisant un autre critère : l'erreur moyenne pondérée.

6.3.1.2 Erreur moyenne pondérée

Cet estimateur pondère les erreurs relatives constatées entre l’approximation polynômiale et la réalisation issue de l’outil de projection pour les scenarios de validation.

Il est défini ainsi :

$$WeightedRel = \sum_i^n w_i * \left(\left| \frac{proxy_i}{observé_i} - 1 \right| \right)$$

$$w_i = \frac{|observé_i|}{\sum_k^n |observé_k|}$$

Le graphe ci-dessous présente l’erreur moyenne pondérée en fonction du nombre de simulations primaires réalisées.

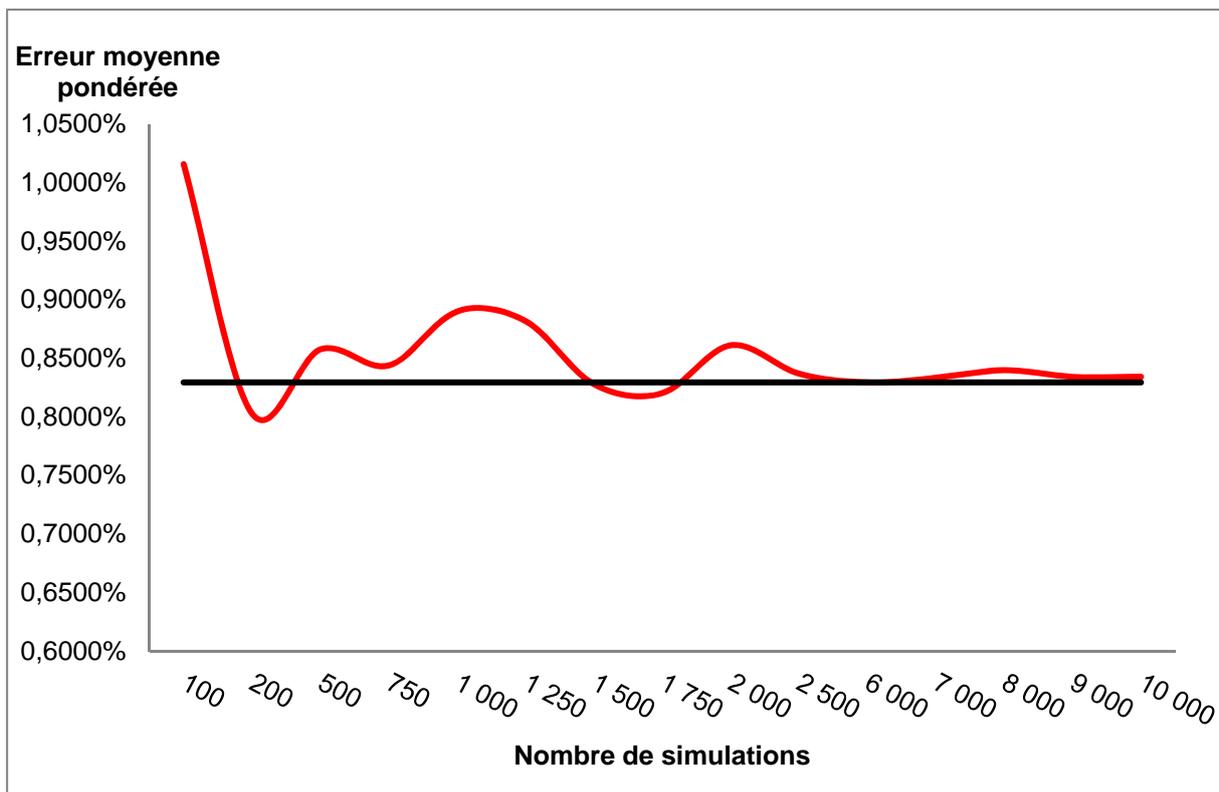


Figure 21 : Convergence du BEG - Critère erreur moyenne pondérée

Conclusion

Les deux méthodes permettent de conclure qu’à partir de 2 500 simulations primaires il y a convergence du *Best Estimate* Garanti (BEG).

L’estimation est de bonne précision car l’erreur moyenne pondérée est inférieure à 0,85%.

6.4 CHOIX D'UNE METHODE D'ASSOCIATION DES SCENARIOS TECHNIQUES ET FINANCIERS

Dans la section 6.2.1 nous avons identifié l'ensemble des risques auxquels la compagnie pouvait être exposée. Ces risques sont de type financier (taux : PC1, PC2 et PC3, volatilité des taux dans notre modélisation) et non financier (mortalité, mortalité catastrophe, rachat).

Dans notre approche dite de quasi Monte Carlo, pour nous assurer d'une « bonne » couverture de l'ensemble des réalisations possibles dans le cadre des simulations primaires, nous simulons simultanément des nombres de Sobols dont la dimension d est égale à l'ensemble des facteurs de risques retenus, à savoir les risques techniques au nombre de 3 (mortalité, mortalité catastrophe, rachat) et financiers au nombre de 4 (taux : PC1, PC2 et PC3, volatilité des taux), soit $d=7$.

Nous obtenons ainsi une table composée de 25 000 stimulations des 7 facteurs de risques, **25 000** étant le nombre de **simulations monde réel ou primaires**, pour lesquels s'appliqueront un second type de simulations appelées simulations secondaires effectuées en risque neutre. Ces simulations secondaires sont des scénarios antithétiques, nous ne retiendrons que **2 scénarios risque neutre** pour chacune des simulations primaires effectuées.

Il paraît alors évident que pour les assureurs comme nous qui ont recours à la méthode de *flexing*, c'est-à-dire qui consiste à simuler dans un premier temps le passif au taux garanti sur des jeux de *model points* élevés, puis à utiliser le modèle ALM pour prendre en compte la participation aux bénéficiaires et les rachats dynamiques, la réalisation d'un nombre important de chocs non financiers paraît inenvisageable car trop coûteuse en temps de calcul.

En effet, le problème de la granularité des *model points* pour l'agrégation des données posé par l'Article 35 des Actes délégués qui stipule que des regroupements de polices sont possibles dès lors que les polices considérées et les risques sous-jacents sont similaires, et que l'utilisation de ces regroupements de polices (*model points*) ne fausse pas les résultats des projections, rend impossible la réalisation d'un nombre aussi important de simulation (25 000) pour des risques de type mortalité et longévité où l'utilisation de tables de mortalité classiques ou de tables générationnelles est requise.

Dans la section précédente, nous avons conclu qu'un nombre limité de scénarios techniques primaires suffisait à obtenir une bonne convergence du *best estimate* au taux garanti. L'exploitation de ces résultats nous permet d'affirmer qu'il n'est pas nécessaire de réaliser les 25 000 simulations pour les scénarios techniques. Notre objectif sera de remplacer ces 25 000 simulations primaires obtenus pour les risques techniques par un nombre plus restreints de scénarios.

Dans le cadre de cette section, nous allons étudier deux méthodes d'association des Sobols techniques et financiers :

- Une méthode simple et directe qui consiste à répartir de façon **proportionnelle** les scénarios techniques.

- Une méthode plus sophistiquée, la **méthode des plus proches voisins**, qui consiste à remplacer pour chacune des simulations, les coordonnées des composantes techniques de chacune des simulations par les coordonnées des composantes techniques de l'échantillon retenu qui semblent être les plus proches.

6.4.1 La méthode dite proportionnelle

Cette méthode est simple à mettre en œuvre et paraît intuitive. Elle consiste à lier de façon proportionnelle les facteurs de risques techniques et les facteurs de risques financiers.

Nous disposons de 25 000 scénarios financiers. Les scénarios techniques alloués à chacune de ces trajectoires seront répartis de façon proportionnelle, de sorte que, à un scénario technique donné correspondent un « paquet » de scénarios financiers.

Si nous supposons que seuls 100 scénarios techniques suffisent, nous aurons la répartition suivante :

Scenarios de Fitting	Risques Financiers	Risques techniques
1 - 250	↑ SOBOL sequence ↓	Scen 1 : Rachat = 0,1 / Mortalité = 0,58 / Mortalité Cat = 0
251 - 500		Scen 2 : Rachat = 0,28335 / Mortalité = 0,68064 / Mortalité Cat = 0,15
501 - 750		Scen 3 : Rachat = 0,70336 / Mortalité = 0,27353 / Mortalité Cat = 0,77628
...		...
24 001 - 24 250		Scen 97 : Rachat = 0,79338 / Mortalité = 0,18058 / Mortalité Cat = 0,16692
24 251 - 24 500		Scen 98 : Rachat = 0,41590 / Mortalité = 0,514521 / Mortalité Cat = 0,54303
24 501 - 24 750		Scen 99 : Rachat = 0,73130 / Mortalité = 0,72506 / Mortalité Cat = 0,37704
24 751 - 25 000		Scen 100 : Rachat = 0,98513 / Mortalité = 0,86286 / Mortalité Cat = 0,33884

Pour cette approche proportionnelle, nous avons le choix entre deux méthodes de sélection des scénarios techniques :

- L'utilisation des suites de Sobol,
- La génération de variables uniformes.

Dans la section §5.2.1.2, nous avons démontré que les suites à faible discrédance fournissaient des points « mieux ordonnés ». Compte tenu du nombre limité de scénarios techniques que nous souhaitons retenir, nous privilégierons des suites de Sobols plutôt que les variables aléatoires uniformes pour le choix de ces scénarios.

Les graphiques ci-dessous illustrent le point précédent.

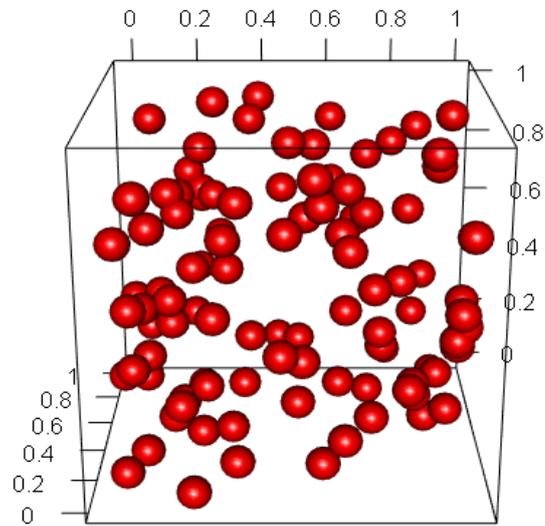


Figure 22 : Suites de Sobol en dimension 3

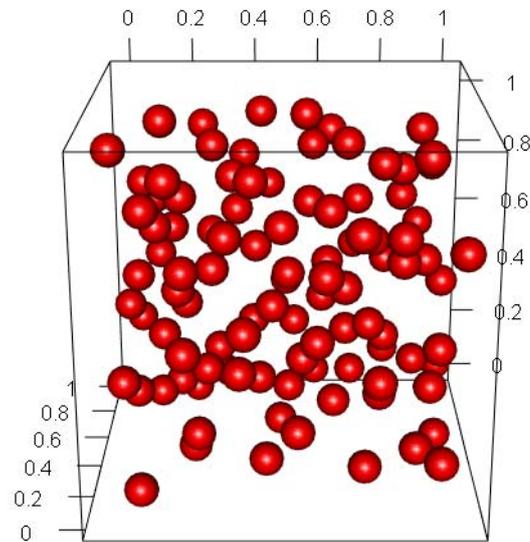


Figure 23 : : Variables aléatoires uniformes en dimension 3

6.4.2 Les k-plus proches voisins

6.4.2.1 L'algorithme K-NN

L'algorithme des k-voisins les plus proches («*k-nearest neighbors*» ou kNN) est une méthode

d'apprentissage à base de voisinages, non-paramétrique.

Approche intuitive

Le principe de cet algorithme de classification est très simple :

- On lui fournit un ensemble de données d'apprentissage \mathcal{D} , une fonction de distance d , et un entier k .
- Pour tout nouveau point de test $x \in \mathbb{R}^d$ pour lequel il doit prendre une décision, l'algorithme recherche dans \mathcal{D} les k points les plus proches de x au sens de la distance d , et attribue à x la classe qui est la plus fréquente parmi ces k voisins.

Approche formelle

Pour définir aisément la méthode, nous devons d'abord choisir une distance $d: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour un nouveau point x , on définit alors l'ensemble des k -plus proches voisins $V_k(x)$ au sens de cette distance.

On peut procéder de la façon suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et pour chaque $i = 1, \dots, n$, on note $d_i(x)$ la distance entre x et x_i : $d_i(x) = d(x_i, x)$.

Parmi les fonctions distance, la plus souvent utilisée est la distance euclidienne, elle est définie comme suit :

$$d(x_i, x) = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k - x_{ik})^2}$$

On définit la première statistique de rang $r_1(x)$ comme l'indice du plus proche voisin de x parmi x_1, \dots, x_n , c'est-à-dire :

$$r_1(x) = i^* \text{ si et seulement si } d_{i^*}(x) = \min_{1 \leq i \leq n} d_i(x)$$

Application

Nous disposons d'un jeu de 25 000 scenarios **Sobols de référence** de dimension 7 égale au nombre de facteurs de risques techniques et financiers utilisés pour la modélisation. Ces Sobols ont été générés simultanément pour les 7 facteurs de risques.

Nous constituons une base d'apprentissage de dimension 3 égale au nombre de facteurs de risques techniques impactant le passif (rachat, mortalité et mortalité catastrophe). Le nombre de ligne de cette matrice correspondant au nombre de scenarios techniques que nous jugeons suffisant pour assurer une bonne convergence.

A partir de cette base de référence et de la base d'apprentissage constituée, nous allons mettre en place

l'algorithme défini précédemment en calculant pour chacun des 25 000 scénarios la distance euclidienne entre les coordonnées des Sobols techniques de la base de référence et ceux de la base d'apprentissage.

Nous remplaçons ensuite dans les 25 000 scénarios de la base de référence, les 3 Sobols techniques par ceux de la base d'apprentissage qui leur sont le plus proche au sens de la plus courte distance euclidienne.

Nous illustrons cet algorithme à travers la figure 24 ci-dessous où les points en rouge représentent le plus proches voisins issus de la base d'apprentissage pour les Sobols de la base de référence en bleu.

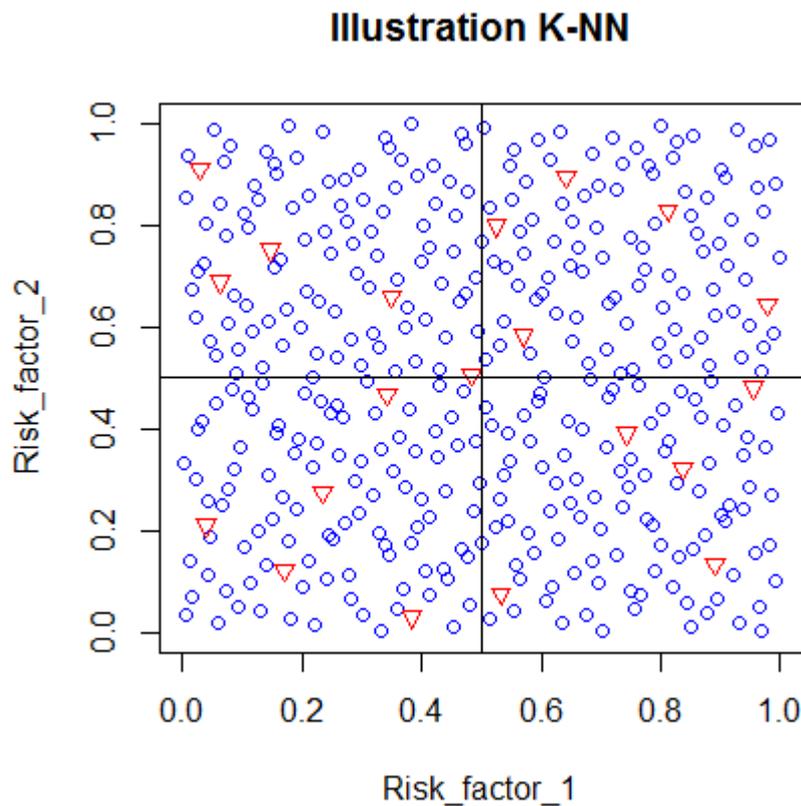


Figure 24 : illustration de l'algorithme K-NN

Dans le schéma ci-dessous nous présentons des boîtes à moustaches pour analyser les fréquences d'apparition des scénarios retenus dans notre échantillon d'apprentissage afin de les comparer avec la précédente approche, l'approche proportionnelle.

Nombre de scénarios	Min	1er Quartile	Médiane	Moyenne	3ème Quartile	Max
100	114	214,8	251	250	286,5	420
200	64	104	120,5	125	142	220
500	22	43	50	50	57	90
1 000	7	20	25	25	30	45
2 500	1	8	10	10	12	21

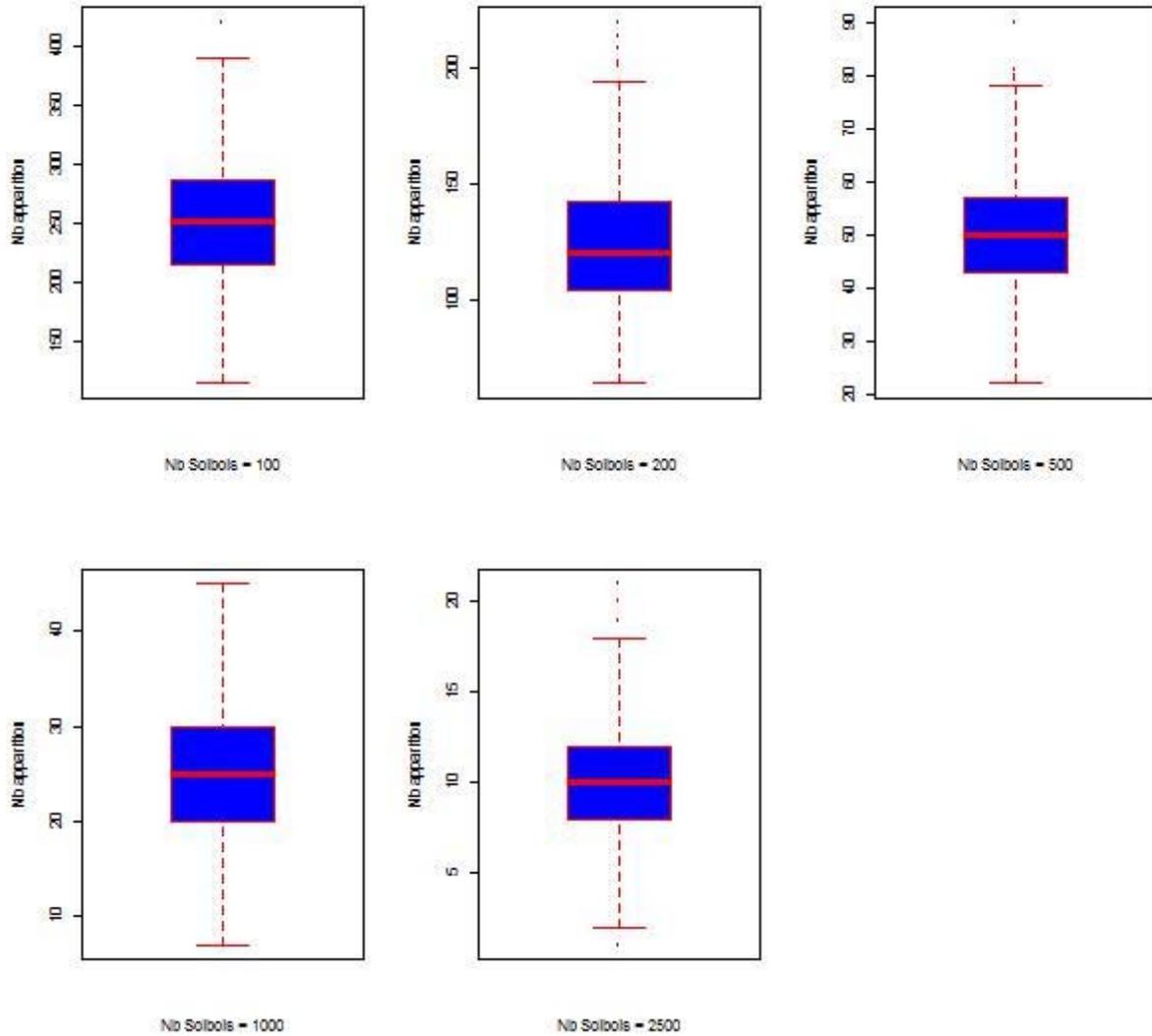


Figure 25 : Statistiques approche plus proche voisins (distribution du nb de sobols)

Comme nous pouvons le constater, tous les scenarios techniques que nous sélectionnons sont au moins représentés une fois. De plus, plus le nombre de scenarios techniques augmente, plus le rapport entre les scenarios les plus représentés et la moyenne augmente. Ceci traduit le fait que dans les 25 000 scénarios obtenus via les Sobols, beaucoup sont relativement proches. On peut penser qu'ils apportent peu d'information pour la définition de la fonction polynomiale.

7. Analyse des résultats

Dans cette partie nous présentons les résultats des calculs de *Best Estimate* pour les méthodes proportionnelle et du plus proche voisin. Pour chacune de ces méthodes, une comparaison des résultats obtenus à l'aide des critères AIC et BIC sera présentée pour identifier le meilleur modèle.

Nous nous attacherons ensuite à analyser la validité des fonctions polynomiales (robustesse, fiabilité des résultats...) à l'aide des calculs des coefficients R^2 ajustés, des erreurs moyennes pondérées, d'analyse de la normalité des résidus, de Q-Q plot.

7.1 QUALITE DE LA REGRESSION

Le tableau suivant présente les résultats obtenus selon les méthodes d'association des scénarios techniques et financiers (proportionnelle ou plus proches voisins) ainsi que les critères de sélection de modèles (AIC ou BIC).

Méthode d'association	Critère	Nombre de Simulation	R^2 ajusté	AIC/BIC	Nombre de termes	Erreur moyenne pondérée
Proportionnelle	AIC	100	0,72166	917 226	25	1,16570379
	AIC	200	0,72219	917 202	26	0,35715005
	AIC	500	0,7221	917 233	25	0,31200295
	AIC	1 000	0,72254	917 160	25	0,33560873
	AIC	2 500	0,72271	917 097	32	0,28437585
Proportionnelle	BIC	100	0,72113	917 386	15	0,28558556
	BIC	200	0,72177	917 369	17	0,33248139
	BIC	500	0,72167	917 412	18	0,27346961
	BIC	1 000	0,72215	917 325	17	0,33051457
	BIC	2 500	0,72188	917 277	15	0,30868244
Plus-proche voisin	AIC	100	0,71606	917 670	23	0,10825652
	AIC	200	0,71631	917 661	23	0,10717044
	AIC	500	0,71596	917 680	23	0,10775503
	AIC	1 000	0,72265	917 129	24	0,10509281
	AIC	2 500	0,72259	917 138	24	0,10454341
Plus-proche voisin	BIC	100	0,71556	917 810	13	0,13404349
	BIC	200	0,71594	917 798	14	0,13009580
	BIC	500	0,7156	917 817	14	0,13100778
	BIC	1 000	0,72221	917 291	16	0,13109546
	BIC	2 500	0,72215	917 299	16	0,13043068

Table 10 : Résultats des régressions

Les résultats ci-dessous nous montrent que l'utilisation du critère AIC fournit une meilleure estimation, et ce, quel que soit la méthode d'association utilisée ou le nombre de simulations testé.

De plus, nous voyons qu'à partir de 2 500 simulations, le coefficient R^2 ajusté ne s'améliore plus. Il en est de même pour l'erreur moyenne pondérée et le nombre de termes des polynômes qui évoluent peu à partir de 1 000 simulations. Ceci est cohérent avec notre choix du nombre de scenario minimum pour nous assurer d'une bonne convergence des résultats du LSMC.

Nous nous focaliserons dans la suite sur les résultats obtenus à partir du critère AIC pour 2 500 simulations.

7.1.1 Méthode dite proportionnelle

Le tableau suivant présente le polynôme obtenu avec la méthode dite « proportionnelle » pour 2 500 simulations en utilisant comme base de régression la fonction de Laguerre. La composante du bilan modélisée est le *best estimate*.

Coefficient	Taux PC1	Taux PC2	Taux PC3	Vol Taux	Rachat	MCat	Mort
1,22E+09	0	0	0	0	0	0	0
-9,35E+06	1	0	0	0	0	0	0
4,23E+06	0	1	0	0	0	0	0
3,03E+06	0	0	1	0	0	0	0
2,98E+07	0	0	0	1	0	0	0
-6,77E+06	0	0	0	0	1	0	0
-2,13E+06	0	0	0	0	0	1	0
-5,05E+05	2	0	0	0	0	0	0
-1,19E+05	0	2	0	0	0	0	0
1,19E+07	0	0	0	2	0	0	0
3,49E+06	0	0	0	0	0	2	0
7,15E+05	1	0	1	0	0	0	0
1,87E+06	1	0	0	0	1	0	0
1,99E+06	1	0	0	1	0	0	0
-1,14E+07	0	0	0	1	1	0	0
-8,60E+05	0	1	0	0	1	0	0
1,74E+06	0	0	1	1	0	0	0
-7,71E+06	0	0	0	1	0	1	0
-2,59E+06	0	0	0	0	1	1	0
-1,09E+06	0	0	1	0	0	1	0
-2,66E+04	3	0	0	0	0	0	0
6,09E+04	2	0	1	0	0	0	0
-1,08E+05	2	0	0	1	0	0	0
-1,29E+07	0	0	0	2	1	0	0
3,06E+06	1	0	0	2	0	0	0
8,94E+06	0	0	0	2	0	1	0
1,01E+07	0	0	0	1	0	2	0
-8,77E+05	1	0	0	1	1	0	0

3,23E+05	1	0	1	1	0	0	0
-2,48E+04	3	0	0	1	0	0	0
1,71E+05	2	0	0	2	0	0	0
-4,16E+06	1	0	0	2	1	0	0

Table 11 : Polynôme - approche proportionnelle, critère AIC, 2 500 simulation

Nous pouvons écrire la forme paramétrique du polynôme obtenu :

$$\begin{aligned}
 BE = & \alpha_0 + \alpha_1 \times \text{Taux}_{PC1} + \alpha_2 \times \text{Taux}_{PC2} + \alpha_3 \times \text{Taux}_{PC3} + \alpha_4 \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \alpha_5 \times \text{Rachat} + \alpha_6 \times \text{MCat} + \\
 & \alpha_7 \times \text{Taux}_{PC1}^2 + \alpha_8 \times \text{Taux}_{PC2}^2 + \alpha_9 \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 + \alpha_{10} \times \text{MCat}^2 + \alpha_{11} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Taux}_{PC3} + \\
 & \alpha_{12} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Rachat} + \alpha_{13} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \alpha_{14} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} \times \text{Rachat} + \alpha_{15} \times \text{Taux}_{PC2} \times \\
 & \text{Rachat} + \alpha_{16} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} \times \text{Taux}_{PC3} + \alpha_{17} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} \times \text{MCat} + \alpha_{18} \times \text{Rachat} \times \text{MCat} + \alpha_{19} \times \text{MCat} \times \\
 & \text{Taux}_{PC3} + \alpha_{20} \times \text{Taux}_{PC1}^3 + \alpha_{21} \times \text{Taux}_{PC1}^2 \times \text{Taux}_{PC3} + \alpha_{22} \times \text{Taux}_{PC1}^2 \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \alpha_{23} \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 \times \\
 & \text{Rachat} + \alpha_{24} \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 \times \text{Taux}_{PC1} + \alpha_{25} \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 \times \text{MCat} + \alpha_{26} \times \text{MCat}^2 \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \alpha_{27} \times \\
 & \text{Taux}_{PC1} \times \text{Rachat} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \alpha_{28} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Taux}_{PC3} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \alpha_{29} \times \text{Taux}_{PC1}^3 \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \\
 & \alpha_{30} \times \text{Taux}_{PC1}^2 \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 + \alpha_{31} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 \times \text{Rachat}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons faire un premier constat qui est que le facteur de risque mortalité n'influe pas sur le polynôme. Ceci s'explique par la nature des contrats d'épargne en euro et du fait que les taux de mortalité annuels sont en général très faibles. L'application de choc à des taux faible n'est pas de nature à faire évoluer significativement les chroniques de prestations futures et donc le BE dont la distribution est présentée dans le graphe ci-dessous.

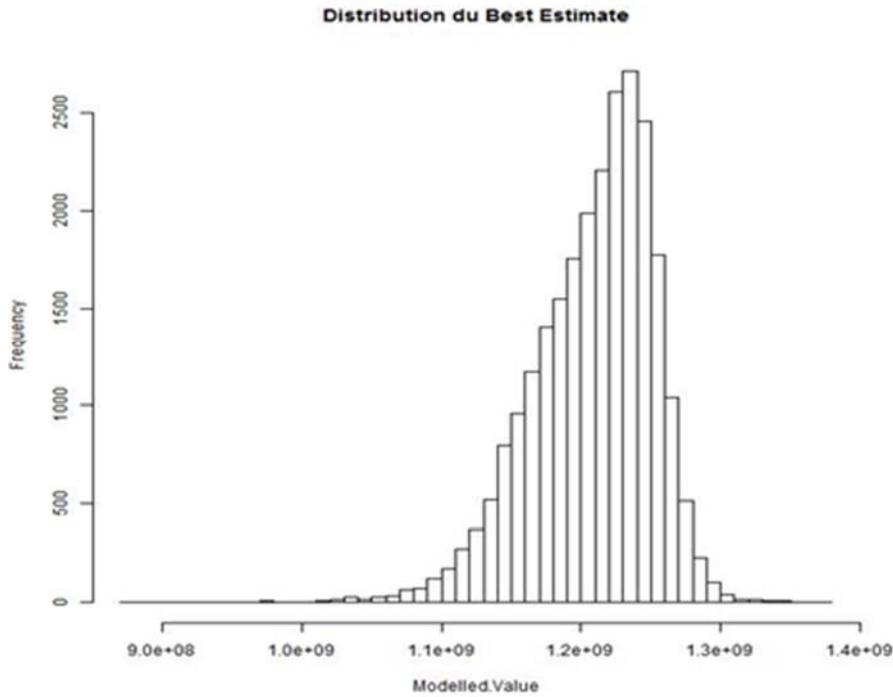


Figure 26 : Distribution du Best Estimate

Nous évaluons dans la suite la qualité des résultats de fitting du *best estimate* en comparant l’approximation polynômiale aux résultats des scénarios de validation.

Validation de la fonction proxy

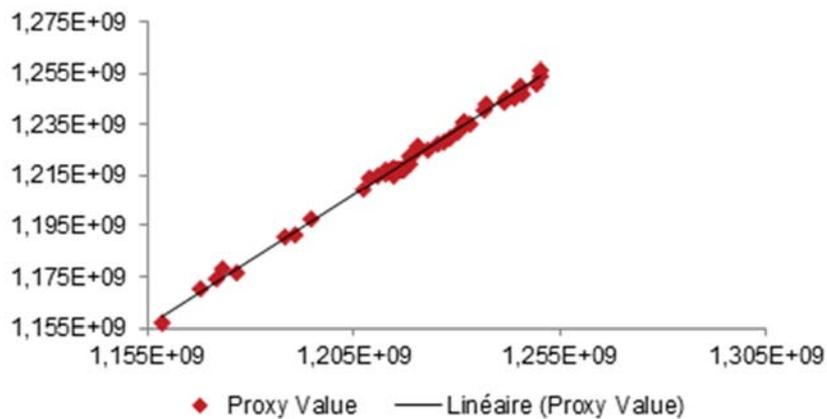


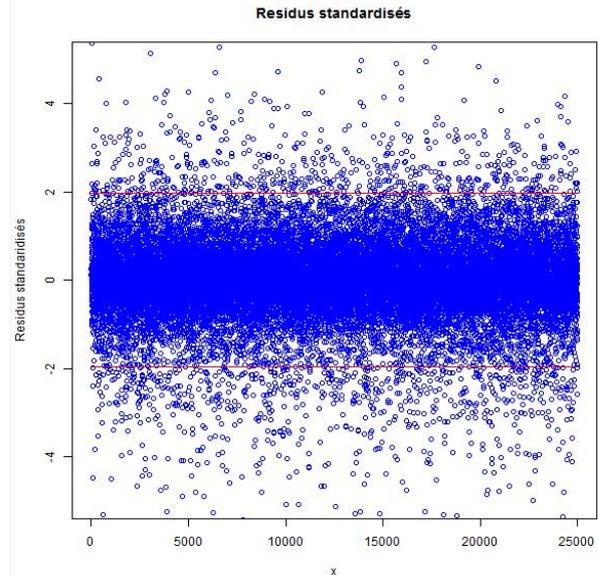
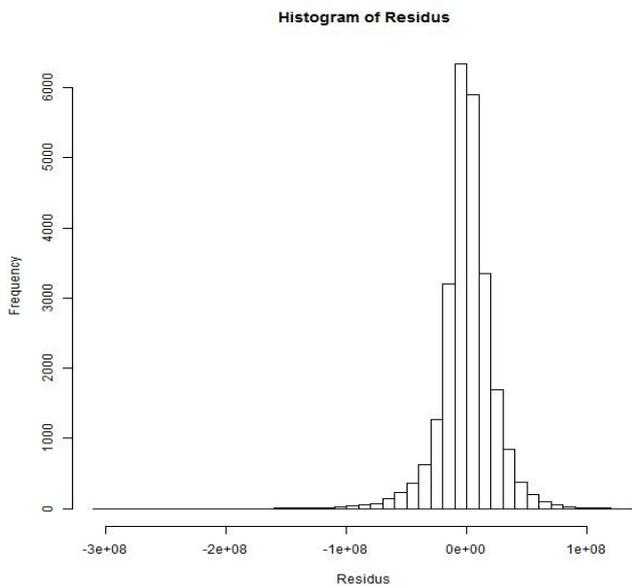
Figure 27 : QQ-Plot – Méthode proportionnelle

Nous remarquons dans le graphique QQ-plot ci-dessus une bonne adéquation entre la distribution empirique et les valeurs estimées via les polynômes, ce qui nous permet de valider la forme

paramétrique estimée.

En effet, les points sont relativement alignés sur la diagonale principale. De plus, aucun point ne semble se démarquer des autres.

Les graphiques ci-dessous représentent la dispersion des résidus ainsi qu'un histogramme afin de vérifier s'ils suivent une loi normale.



Visuellement on peut considérer que les résidus sont gaussiens. Dans le graphique de droite, les résidus standardisés semblent suivre une loi normale centrée réduite. En effet, plus de 95% des observations sont comprises dans l'intervalle $[-1,96 ; 1,96]$.

7.1.2 Méthode du plus proche voisin

Le tableau suivant présente le polynôme obtenu avec la méthode des plus proches voisins pour 2 500 simulations en utilisant comme base de régression la fonction de Laguerre. La composante du bilan modélisée est le *best estimate*.

Coefficient	Taux PC1	Taux PC2	Taux PC3	Vol Taux	Rachat	MCat	Mort
1,21E+09	0	0	0	0	0	0	0
-8,41E+06	1	0	0	0	0	0	0
3,81E+06	0	1	0	0	0	0	0
2,54E+06	0	0	1	0	0	0	0
2,35E+07	0	0	0	1	0	0	0
-4,43E+06	0	0	0	0	1	0	0
-5,10E+05	2	0	0	0	0	0	0
-1,35E+05	0	2	0	0	0	0	0

9,69E+06	0	0	0	2	0	0	0
7,04E+05	1	0	1	0	0	0	0
6,26E+05	1	0	0	0	1	0	0
1,53E+06	1	0	0	1	0	0	0
-5,93E+06	0	0	0	1	1	0	0
-9,51E+05	0	1	0	0	1	0	0
1,84E+06	0	0	1	1	0	0	0
-2,68E+04	3	0	0	0	0	0	0
-1,10E+05	2	0	0	1	0	0	0
5,83E+04	2	0	1	0	0	0	0
9,46E+05	1	0	0	2	0	0	0
-4,10E+06	0	0	0	2	1	0	0
-5,50E+05	1	0	0	1	1	0	0
3,14E+05	1	0	1	1	0	0	0
-2,48E+04	3	0	0	1	0	0	0
1,95E+05	2	0	0	2	0	0	0

Table 12 : Polynôme - approche des plus proches voisins

Nous pouvons écrire la forme paramétrique du polynôme obtenu :

$$\begin{aligned}
 BE = & \beta_0 + \beta_1 \times \text{Taux}_{PC1} + \beta_2 \times \text{Taux}_{PC2} + \beta_3 \times \text{Taux}_{PC3} + \beta_4 \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \beta_5 \times \text{Rachat} + \\
 & \beta_6 \times \text{Taux}_{PC1}^2 + \beta_7 \times \text{Taux}_{PC2}^2 + \beta_8 \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 + \beta_9 \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Taux}_{PC3} + \beta_{10} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Rachat} + \\
 & \beta_{11} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \beta_{12} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} \times \text{Rachat} + \beta_{13} \times \text{Taux}_{PC2} \times \text{Rachat} + \beta_{14} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} \times \\
 & \text{Taux}_{PC3} + \beta_{15} \times \text{Taux}_{PC1}^3 + \beta_{16} \times \text{Taux}_{PC1}^2 \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \beta_{17} \times \text{Taux}_{PC1}^2 \times \text{Taux}_{PC3} + \beta_{18} \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 \times \\
 & \text{Taux}_{PC1} + \beta_{19} \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2 \times \text{Rachat} + \beta_{20} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} \times \text{Rachat} + \beta_{21} \times \text{Taux}_{PC1} \times \text{Vol}_{\text{Taux}} \times \\
 & \text{Taux}_{PC3} + \beta_{22} \times \text{Taux}_{PC1}^3 \times \text{Vol}_{\text{Taux}} + \beta_{23} \times \text{Taux}_{PC1}^2 \times \text{Vol}_{\text{Taux}}^2
 \end{aligned}$$

Contrairement à la première approche où seul le facteur de risque de mortalité n'influencait pas le polynôme, dans celle-ci, en plus du facteur mortalité, le facteur de risque mortalité cat est également non significatif.

Nous évaluons dans la suite la qualité des résultats de fitting du *best estimate* en comparant l'approximation polynômiale aux résultats des scénarios de validation.

Validation de la fonction proxy

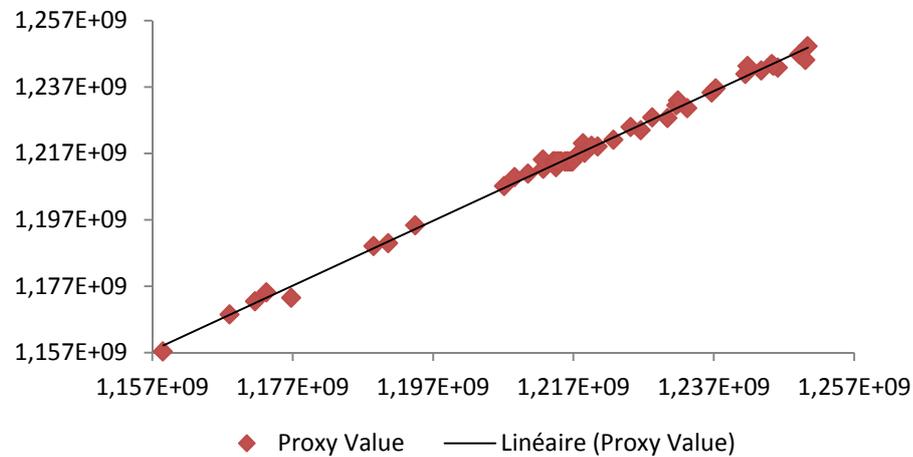
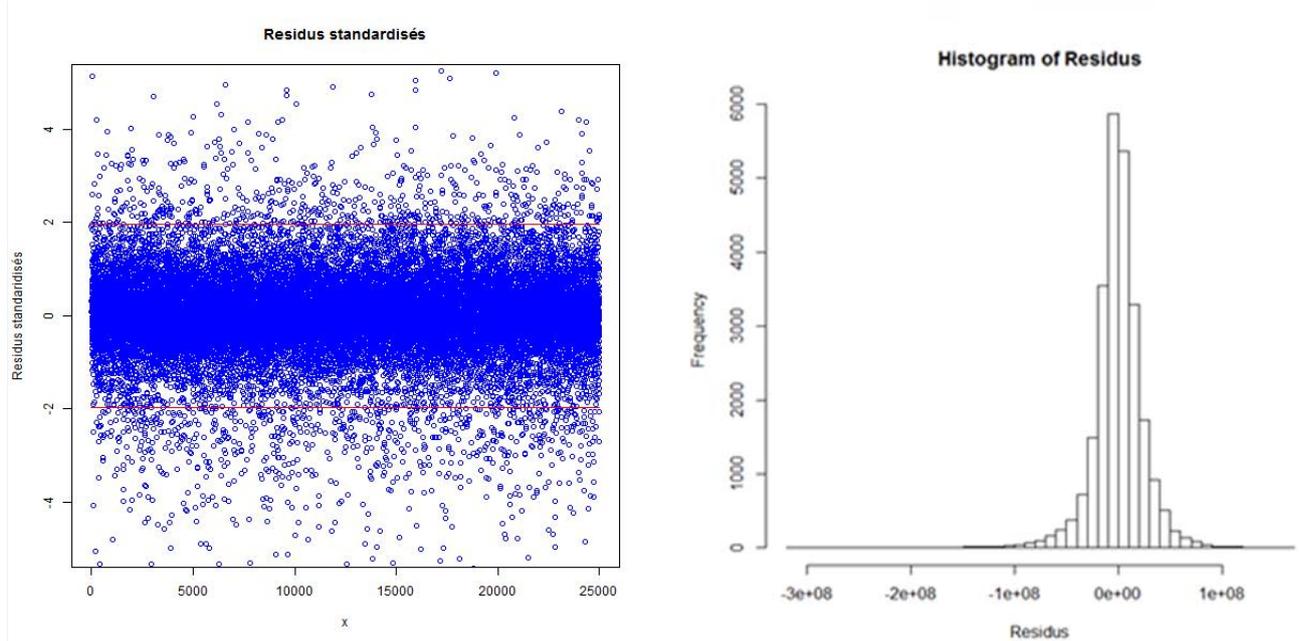


Figure 28 : QQ-Plot - Approche du Plus proche voisin

Nous remarquons dans le graphique QQ-plot ci-dessus une bonne adéquation entre la distribution empirique et les valeurs estimées via les polynômes, ce qui nous permet de valider la forme paramétrique estimée.

En effet, les points sont relativement alignés sur la diagonale principale. De plus, aucun point ne semble se démarquer des autres.

Dans les graphiques ci-dessous nous représentons la dispersion des résidus ainsi qu'un histogramme afin de vérifier s'ils suivent une loi normale.



Visuellement on peut considérer que les résidus sont gaussiens. Dans le graphique de gauche, les résidus standardisés semblent suivre une loi normale centrée réduite. En effet, plus de 95% des observations sont comprises dans l'intervalle $[-1,96 ; 1,96]$.

7.2 IMPACT DES FACTEURS DE RISQUES SUR LE *BEST ESTIMATE*

Dans cette section, nous analysons les caractéristiques de la fonction de LSMC. La fonction LSMC analysée ici est la fonction obtenue pour 2 500 scénarios techniques grâce au critère AIC. La méthode d'association des scénarios techniques et financiers retenue est la méthode du plus proche voisin. Contrairement à l'approche proportionnelle, cette méthode fournit à la fois un bon ajustement et une faible erreur moyenne.

L'intérêt de cette section est de vérifier que les comportements de la fonction LSMC sont cohérents à la connaissance que nous avons du portefeuille.

Les graphiques ci-dessous présentent le comportement du *Best Estimate* selon les valeurs prises par les principaux facteurs de risques.

7.2.1 Régression selon les facteurs de risques financiers

Selon le niveau de la courbe des taux d'intérêts, les engagements de l'assureurs sont plus ou moins importants. L'effet d'actualisation entraîne une baisse du *best estimate* quand les taux sont élevés et inversement quand ils sont à la baisse.

La tendance observée sur le graphique ci-dessous est donc conforme à nos attentes.

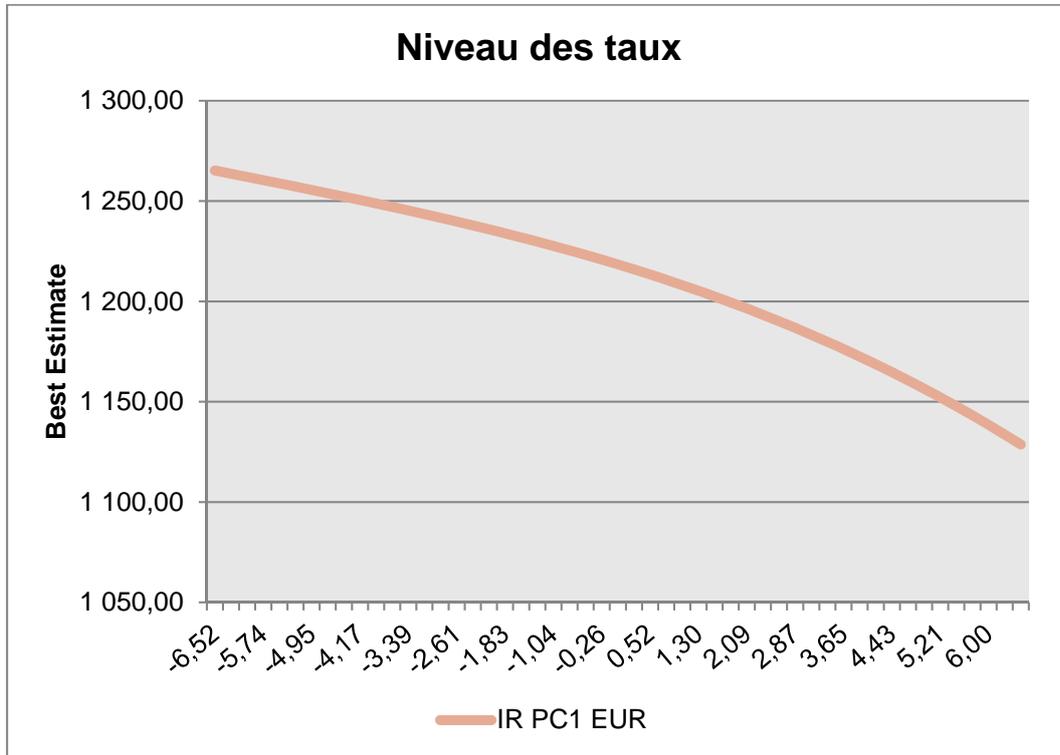


Figure 29 : BE en fonction de la composante de taux PC1

L'augmentation de la volatilité des taux d'intérêts entraîne une augmentation de la valeur de l'option de rachat et donc des engagements de l'assureur.

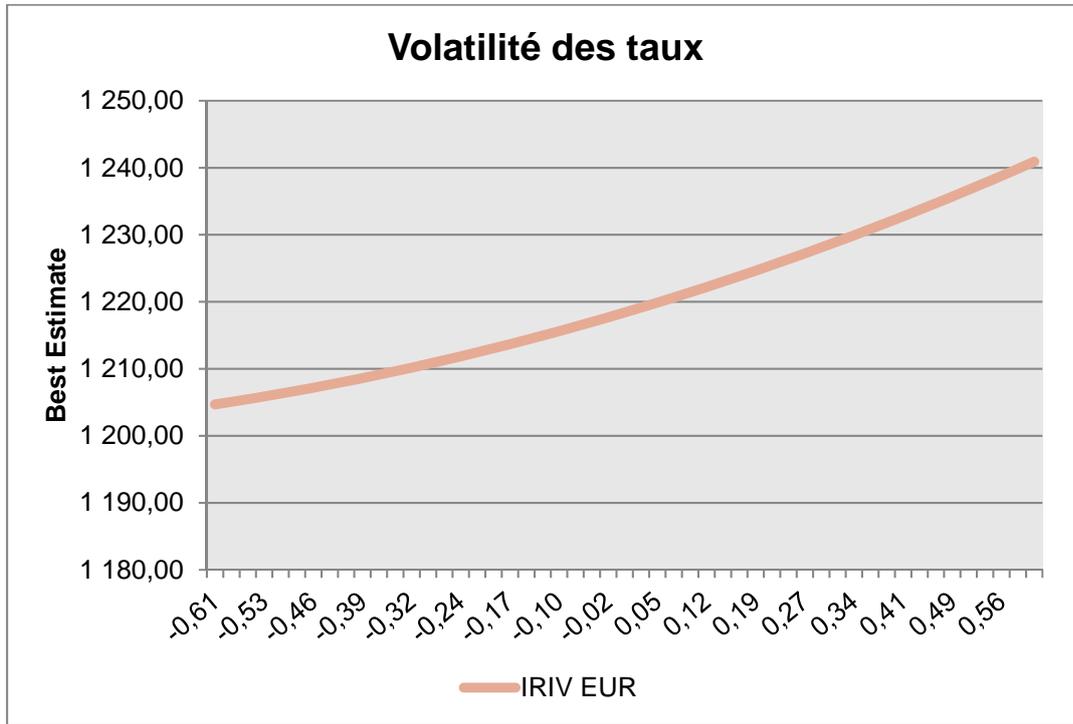


Figure 30 : Be en fonction de la volatilité des taux

Tous les effets individuels analysés ci-dessus sont cohérents à notre connaissance des risques du portefeuille.

7.2.2 Régression selon les facteurs de risques techniques

Nous avons vu dans la section 7.1 que la fonction polynômiale traduisant le comportement du *best estimate* en fonction des valeurs prises par les différents facteurs de risques était peu sensible aux variations des taux de mortalité (tendance et niveau).

En effet, les assurés de notre portefeuille qui ont en moyenne 48 ans ont des taux de mortalité annuels très faibles. L'application de chocs n'a donc pas d'impact significatif sur le BE, d'où la droite horizontale.

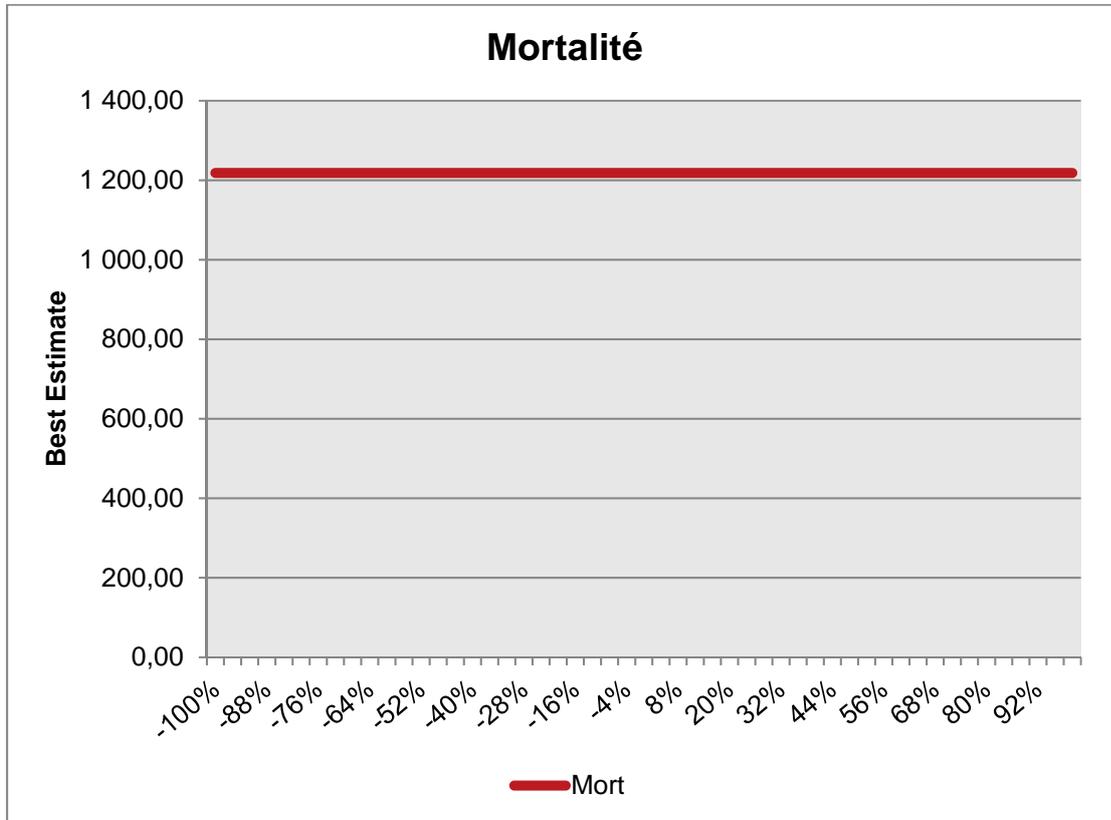


Figure 31 : BE en fonction des taux de mortalité

Concernant les taux de rachats, le BE est une fonction décroissante des taux de rachats. Compte tenu des taux garantis proposés, et du niveau de la courbe des taux, l'augmentation des taux de rachats est favorable à l'assureur et entraîne donc une baisse du *best estimate*.

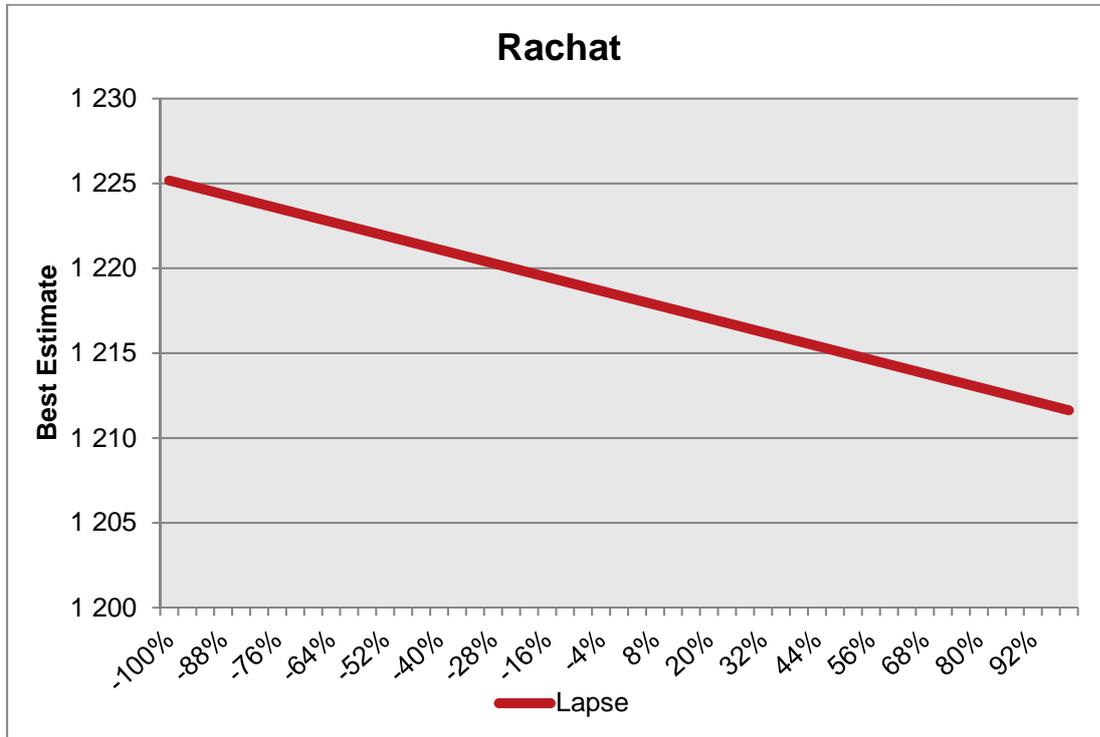


Figure 32 : BE en fonction des taux de rachats

Tous les effets individuels analysés ci-dessus sont cohérents à notre connaissance des risques du portefeuille.

7.2.3 Régression selon les rachats et la composante PC1

Le graphique ci-dessous montre l'effet combiné du niveau des taux d'intérêts et des taux de rachats. Comme indiqué précédemment, le niveau de la courbe des taux d'intérêts l'emporte sur l'option de rachat offerte aux assurés. En effet, compte tenu de la garantie de taux proposée, l'engagement de l'assureur est plus important quand le niveau des taux n'est pas suffisant pour respecter cet engagement.

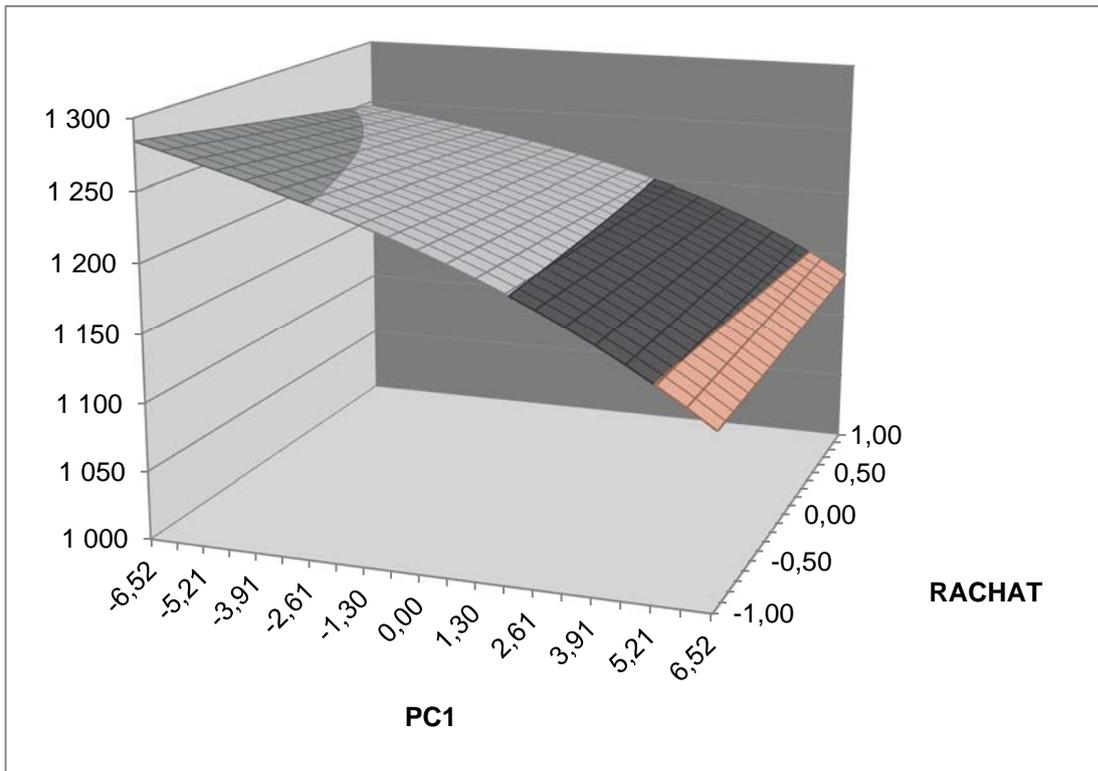


Figure 33 : BE en fonction des taux de rachats et du niveau des taux

7.2.1 Régression selon les rachats et la volatilité des taux

Le graphique ci-dessous montre l'effet combiné de la volatilité des taux d'intérêts et des taux de rachats.

L'augmentation de la volatilité des taux d'intérêts engendre une augmentation du coût de l'option de garantie de taux pour l'assureur et donc du *best estimate*. L'augmentation du *best estimate* est d'autant plus forte que les assurés restent plus longtemps en portefeuille, c'est-à-dire en cas de baisse des taux de rachats.

Notons toutefois que l'impact de la volatilité des taux prend le pas sur l'impact des taux de rachats.

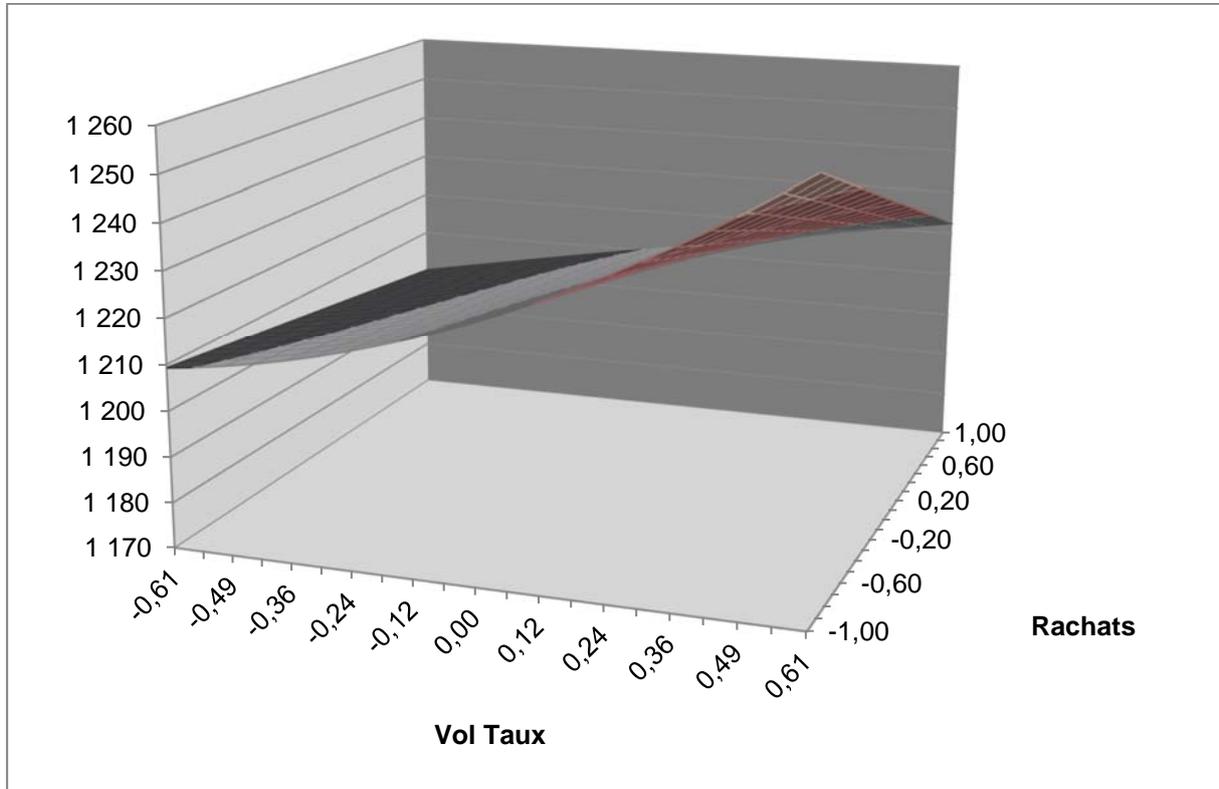


Figure 34 : BE en fonction des taux de rachat et de la volatilité des taux

Limites de l'étude

Avant de conclure à partir des résultats obtenus dans cette étude, il paraît important de préciser les limites de celle-ci :

- Tout d'abord, le calibrage des chocs utilisé ne reflète pas les risques portés par la compagnie. Pour les risques de souscription, nous avons pris arbitrairement des niveaux de choc à 99,5% et construits les distributions de chacun des facteurs de risque.
- De plus, le nombre de facteur de risque retenu est limité à 7. Seuls les risques de rachats, mortalité et mortalité catastrophe ont été considérés pour les risques de souscription. Concernant les risques financiers et de crédit, seuls les risques de taux (trois composantes principales et la volatilité des taux) ont été modélisés.
- Seul un type de contrat, les contrats d'épargne, a été simulé, or les compagnies d'assurance ont en général plusieurs types de contrats pour assurer la diversification de leur risque en évitant une trop forte concentration sur un type de produits. Si nous avions un portefeuille composé de contrats de retraite et d'épargne et seulement un fonds en euro, il aurait fallu prendre en compte les interactions entre ces deux lignes de business.
- Les résultats sont très sensibles aux *management rules* implémentées et pourraient être significativement différents pour un assureur ayant des règles différentes.
- Pas de prise en compte de richesse initiale dans le fonds général : pas de provisions pour participations aux excédents ou autre type de provision qui permettrait de compenser une insuffisance de rendements financier pour déterminer le niveau de revalorisation des contrats.

Conclusion

Pour répondre aux exigences de la nouvelle réglementation Solvabilité II, de nombreux assureurs ont privilégié l'implémentation d'un modèle interne plutôt que la formule standard afin de mieux refléter leur profil de risque. Néanmoins, ces assureurs doivent faire face à des problématiques opérationnelles liés au temps de calculs souvent très longs et à des modèles très consommateurs en ressources informatiques.

Pour preuve, la méthode dite des Simulation dans les Simulations, bien que la plus conforme aux critères de la directive Solvabilité II pour l'évaluation du capital économique, s'avère quasiment impossible à mettre en œuvre en raison des temps de calculs importants.

En plus des difficultés liées au temps de calcul, les assureurs doivent également tenir compte du niveau d'agrégation des données en entrée du modèle. Pour se conformer à l'article 35 des Actes délégués, certains assureurs ont fait le choix de modèle de *flexing* offrant un niveau de finesse élevé des données de passif en entrée du modèle.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'utilisation de la méthode *Least Square Monte Carlo* (LSMC) quand le modèle interne développé par les assureurs est un modèle *flexing*, c'est-à-dire intégrant deux jeux de projections (une projection déterministe au taux garanti et une projection stochastique dans un modèle ALM).

Tout d'abord, nous avons comparé les approches de Monte Carlo et quasi Monte Carlo qui utilisent respectivement des suites de nombres pseudo-aléatoires et des suites à discrétance faible. Nous avons vu que cette dernière offre une convergence beaucoup plus rapide et nous avons fait le choix de suites à discrétance faible (suites de Sobol dans nos travaux) pour le choix des scénarios primaires associés aux différents facteurs de risque.

Pour nous assurer d'une bonne couverture de l'espace, nous avons alors simulé des suites de Sobol de dimension 7, égale au nombre de facteurs de risques identifiés.

Ensuite, nous avons démontré que dans le cadre de la modélisation de portefeuille d'Épargne, le choix du nombre de simulations pour les facteurs de risques techniques au titre des simulations primaires pouvait être optimisé car la convergence des résultats et notamment du *best estimate* au taux garanti était observé pour seulement 2 500 scénarios lorsqu'on utilise les suites à faible discrétance.

Enfin, nous avons exploité les résultats précédents pour répondre à la problématique concernant le nombre de simulations primaires à effectuer lors de la projection déterministe des flux de passif dans le modèle de *flexing*. En effet, nous nous sommes limité à 2 500 scénarios techniques pour projeter le passif et avons étudié l'importance des méthodes d'associations entre les scénarios techniques (2 500) et scénarios financiers (25 000). Dans nos travaux nous avons étudié une méthode naturelle qui consiste à lier de façon proportionnelle les facteurs de risques techniques et financiers et une méthode plus sophistiquée : l'algorithme du plus proche voisin.



Nous avons pu voir qu'avec cette dernière, la qualité des régressions réalisées sur les polynômes traduisant l'évolution du *best estimate* était de meilleure qualité.



8. Glossaire et acronymes

BE : Best Estimate

BEG : Best Estimate Garanti

NAV : Net Asset Value

PVFP : Present Value of Future profit

RP : Replicating Portfolio

LSMC : Least Square Monte Carlo

SdS : Simulation dans les Simulations

TVOG : Time Value of Option and Guarantee

ORSA : Own Risk and Solvency Assessment

VM : valeur de marché

GSE : générateur de scénarios économiques

ALM : Asset and Liability Management (Gestion actif-passif)

9. Liste des tableaux

TABLE 1 : MATRICE DE CORRELATION - SCR VIE	17
TABLE 2 : MATRICE DE CORRELATION - SCR MARCHE (HAUSSE DES TAUX)	17
TABLE 3 : MATRICE DE CORRELATION - SCR MARCHE (BAISSE DES TAUX).....	17
TABLE 4: AVANTAGES ET LIMITES DES DIFFERENTES METHODES.....	36
TABLE 5 : COMPARAISON DES DIFFERENTES APPROCHES	37
TABLE 6 : CARACTERISTIQUES DU PORTEFEUILLE MODELISE.....	56
TABLE 7 : ACTIFS MODELISES	56
TABLE 8 : VENTILATION DES OBLIGATIONS MODELISEES	57
TABLE 9 : VENTILATION DES ACTIONS MODELISEES	57
TABLE 10 : RESULTATS DES REGRESSIONS.....	72
TABLE 11 : POLYNOME - APPROCHE PROPORTIONNELLE, CRITERE AIC, 2 500 SIMULATION	74
TABLE 12 : POLYNOME - APPROCHE DES PLUS PROCHES VOISINS	77

10. Table des figures

FIGURE 1 : CALENDRIER D'APPLICATION DE SOLVABILITÉ II.....	10
FIGURE 2 : LES 3 PILIERS DE LA DIRECTIVE SOLVABILITÉ II	11
FIGURE 3 : DU BILAN COMPTABLE « SOLVABILITE I » AU BILAN ECONOMIQUE « SOLVABILITE II ».....	12
FIGURE 4 : APPROCHE MODULAIRE FORMULE STANDARD	15
FIGURE 5 : APPROCHE DELTA NAV.....	16
FIGURE 6 : ELIGIBILITE DES FONDS PROPRES.....	19
FIGURE 7 : APPROCHE SDS	24
FIGURE 8 : ILLUSTRATION DE L'APPROCHE SDS	25
FIGURE 9 : MISE EN ŒUVRE DE L' AUTOMATE - ITERATIONS SUCCESSIVES SUR LES FRONTIERES D'EXECUTION	27
FIGURE 10 : COUPLE DE FACTEURS DE RISQUE ET FRONTIERE D'EXECUTION	28
FIGURE 11: ILLUSTRATION DE L'APPROCHE REPLICATING PORTFOLIO.....	31
FIGURE 12 : ILLUSTRATION DE L'APPROCHE CURVE FITTING.....	33
FIGURE 13 : ILUSTRATION DE L'APPROCHE LSMC	35
FIGURE 14 : EXEMPLES DE SUITES DE SOBOL EN DIMENSION 2.....	45
FIGURE 15 : EXEMPLE D'ECHANTILLONS DE VARIABLES ALEATOIRES UNIFORMES.....	46
FIGURE 16 : CONVERGENCE DU PRIX DE L'OPTION AVEC ET SANS VARIABLES ANTITHETIQUES (RACICOT, ET AL., AVRIL 2006).....	47
FIGURE 17 : FACTEUR DE NIVEAU	60
FIGURE 18 : FACTEUR DE PENTE	61
FIGURE 19 : FACTEUR DE COURBURE	61
FIGURE 20 : CONVERGENCE DU BEG - CRITERE R ² AJUSTE	63
FIGURE 21 : CONVERGENCE DU BEG - CRITERE ERREUR MOYENNE PONDEREE.....	64
FIGURE 22 : SUITES DE SOBOL EN DIMENSION 3.....	67
FIGURE 23 : : VARIABLES ALEATOIRES UNIFORMES EN DIMENSION 3	67
FIGURE 24 : ILLUSTRATION DE L'ALGORITHME K-NN.....	69
FIGURE 25 : STATISTIQUES APPROCHE PLUS PROCHE VOISINS (DISTRIBUTION DU NB DE SOBOLS).....	71
FIGURE 26 : DISTRIBUTION DU BEST ESTIMATE.....	75
FIGURE 27 : QQ-PLOT – METHODE PROPORTIONNELLE	75
FIGURE 28 : QQ-PLOT - APPROCHE DU PLUS PROCHE VOISIN	78
FIGURE 29 : BE EN FONCTION DE LA COMPOSANTE DE TAUX PC1	80
FIGURE 30 : BE EN FONCTION DE LA VOLATILITÉ DES TAUX.....	81
FIGURE 31 : BE EN FONCTION DES TAUX DE MORTALITÉ.....	82
FIGURE 32 : BE EN FONCTION DES TAUX DE RACHATS	83
FIGURE 33 : BE EN FONCTION DES TAUX DE RACHATS ET DU NIVEAU DES TAUX.....	84
FIGURE 34 : BE EN FONCTION DES TAUX DE RACHAT ET DE LA VOLATILITÉ DES TAUX	85

11. Bibliographie

DEVINEAU Laurent et LOISEL Stéphane Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des «simulations dans la simulation» pour le calcul du capital économique Solvabilité II » [Article]. - 2009.

HÖRIG Mario et LEITSCHKIS Michael Solvency II Proxy Modelling via Least Square Monte Carlo [Rapport]. - Janvier 2012.

JUILLARD Marc et PALERM Tristan Quelles alternatives à l'approche SdS dans un contexte d'ORSA ? [Revue]. - 2012.

KOURSARIS Adam A comparison between curve fitting and least squares Monte Carlo techniques [Revue]. - [s.l.] : Barrie & Hibbert, 2011.

LARPIN Anne et CAMON Stéphane Capital économique en assurance vie : utilisation des « replicating portfolios » [Power point]. - 2009.

LELONG Jérôme Méthode numériques pour la finance [Ouvrage]. - Avril 2007.

LONGSTAFF Francis A. et SCHWARTZ Eduardo S. Valuing american options by simulation : A simple least-square approach. [Rapport]. - 2001.

NTEUKAM Oberlain, REN Jiaen et PLANCHET Frédéric Modele interne en Assurance Vie : Application des Least Squares Monte Carlo dans l'évaluation des risques [Article]. - 2014.

PLANCHET Frederique, THEROND Pierre et AKAMEGA Pierre Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation [Ouvrage]. - [s.l.] : Economica, 2009.

RACICOT François-Éric et THEORE Raymond La simulation de Monte Carlo: forces et faiblesses (avec applications Visual Basic et Matlab et présentation d'une nouvelle méthode QMC) [Revue]. - Avril 2006. - p. 33.

TRAORE Aïssata et KEILANI Haïssam Approche par Least-Square Monte Carlo pour l'évaluation des fonds propres économiques. - 2014.